i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}+1)(x-3)}{(5x^2+2)(3x+2)}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x^2-\sin x^2}{x^3+6}$.

33. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3+x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$ f) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^2-4}{x}$.

34. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

35. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^2+2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-8}{2x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2+3x+2\right)$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x+2}{2e^x+3}$.

36. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 2} e^{x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{e^{x-1}+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 13x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{2x}\right)^3$.

37. Folytonosak-e az alábbi függvények?

a) $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{6x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x + 3}{x + 2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 7}$

e) $f(x) = \begin{cases} (x+2)\dfrac{\sin 3x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 6 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x\dfrac{\sin 7x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 5 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

MEGOLDÁSOK

22. $\delta = \varepsilon/7$ **24.** $K = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{5}{7\varepsilon} - 3\right)$ **25.** $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[3]{K}}$

26. a) 24; b) 25; c) 2/9; d) 15/38

27. a) 4; b) 15/11; c) 76/10; d) 1; e) 1/5; f) −1/2

28. a) 3/2; b) 0; c) $\sqrt{2}/4$; d) ∞

29. a) e; b) 1; c) 1/7; d) 8; e) e^7

30. a) igen; b) igen; c) igen; d) igen; e) nem

32. a) 4; b) 0; c) −3; d) − 6; e) 3;
f) 9; g) 4; h) $e^2 - 1$; i) − 3/2; j) 0.

33. a) 1/2; b) 1; c) 1/6; d) 2/3; e) 1;
f) −1/6; g) 4

34. a) 6; b) 2/3; c) $2\sqrt{2}/3$; d) 2/3; e) 1/2;

35. a) 5; b) 0; c) 3; d) 1/2; e) 2
f) 3; g) 4; h) ∞; i) ∞; j) 1/2

36. a) 1; b) 1; c) 13; d) 1/8

37. a) igen; b) igen; c) nem; d) nem; e) igen; f) nem

9. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS ÉS ALKALMAZÁSAI

1. A függvény differenciálhányadosa, deriváltfüggvénye

(1) Az f függvényt a $c \in D_f$ helyen *differenciálhatónak* nevezzük, ha a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ határérték létezik és véges, amelyet az f függvény c-beli *differenciálhányados*ának hívunk.

Jelölése: $f'(c)$ vagy $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x=c}$.

Az f függvény *deriváltfüggvénye* (vagy röviden deriváltja) az $x \to f'(x)$ függvény minden x-re, ahol f differenciálható.

1.1 Differenciálási szabályok

(2) $(c)' = 0$ $\quad c \in \mathbf{R}$

(3) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ $\quad c \in \mathbf{R}$

(4) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(5) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)$

(6) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

(7) $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad n \in \mathbf{R}$

(8) $(a^x)' = a^x \ln a \cdot$ $\quad a > 0, a \neq 1$

(9) $(e^x)' = e^x$

(10) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $\quad a > 0, a \neq 1$

(11) $(\ln x)' = 1/x$

(12) $(\sin x)' = \cos x$

(13) $(\cos x)' = -\sin x$

(14) $(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x$

(15) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$

(16) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(17) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(18) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(19) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(20) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

(21) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

(22) $(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x$

(23) $(\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x$

(24) Láncszabály : $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$

Speciális esetek

(24a) $\left(f^n(x)\right)' = n f^{n-1}(x) f'(x)$

(24b) $\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(25) Az $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$ egyenlőség felhasználásával kapjuk :

$$\left((f(x))^{g(x)}\right)' = (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \quad f(x) > 0.$$

PÉLDÁK

1. A definíció alkalmazásával határozzuk meg az alábbi függvények adott c pont-beli differenciálhányadosát!

a) $f(x) = 3x^2 + 4, \qquad c = 2$

M: Írjuk fel a differenciálhányados határértékét **(1)** felhasználásával:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(2+\Delta x)^2 + 4 - (3\cdot 2^2 + 4)}{\Delta x} \underset{\substack{\text{végezzük el a}\\ \text{műveleteket}}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2) + 4 - 16}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \underset{\substack{\text{egyszerűsítsünk}\\ \Delta x\text{-el}}}{=} \lim_{\Delta x \to 0}(12 + 3\Delta x) = 12. \qquad \text{Tehát } f'(2) = 12.$$

b) $f(x) = \dfrac{2}{4x-3}, \qquad c = 1$

M: Használjuk az **(1)** definíciót:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{4(1+\Delta x)-3}-\frac{2}{4\cdot 1-3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{4\Delta x+1}-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2-8\Delta x-2}{4\Delta x+1}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-8\Delta x}{\Delta x\cdot(4\Delta x+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-8}{4\Delta x+1}=-8. \qquad \text{Így } f'(1)=-8.$$

2. A differenciálási szabályok alkalmazásával írjuk fel az alábbi függvények deriváltfüggvényét!

a) $f(x) = x^3 + 2^x - 3$

M: A **(4)** differenciálási szabály alkalmazásához határozzuk meg a tagok deriváltját **(7)**, **(8)** és **(1)** alapján : $(x^3)'=3x^2$, $(2^x)'=2^x\cdot\ln 2$, $(-3)'=0$.
A derivált tehát a fenti függvények összege lesz: $f'(x) = 3x^2 + 2^x\cdot\ln 2$

b) $h(x)=x^2\cdot e^x$

M: Alkalmazzuk a szorzat differenciálási szabályát (**(5)**): $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$ jelölést alkalmazva $f'(x)=2x$, $g'(x)=e^x$ **(7)**, **(9)** alapján. Így $h'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$ ·Tehát $h'(x)=e^x(x^2+2x)$·

c) $h(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

M: Alkalmazzuk a hányados differenciálási szabályát (**(6)**): $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ jelölést használva $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=(1/2)\cdot(x^{-1/2})$ **(7)**, **(12)** alkalmazásával. Így

$$h'(x)=\frac{\cos x\cdot\sqrt{x}-\sin x\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\cos x\cdot\sqrt{x}-\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

d) $h(x)=\ln(x^2+5x)$

M: A függvény összetett függvény, amelynél a belső függvény $g(x)=x^2+5x$, a külső függvény pedig logaritmus függvény : $f(g(x))=\ln(x^2+5x)$. Alkalmazzuk a láncszabályt **(24)** szerint:

$$f'(g(x))=\frac{1}{x^2+5x},\qquad g'(x)=2x+5\qquad ((\mathbf{11}),(\mathbf{7})),$$

a deriváltfüggvény ezek szorzata : $h'(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+5x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3(1-2x)}$

M: A függvény negatív kitevőjű összetett hatványfüggvény, amely a következő alakban írható : $f(x)=(\cos(1-2x))^{-3}$. Alkalmazzuk a láncszabályt a fenti többszörösen összetett függvényre az alábbiak szerint:

$$f(g(h(x)))'=f'(g(h(x))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x).$$

Először tehát a külső függvény szerint hatványfüggvényként deriválunk ((**7**) szerint, a kitevő $=-3$, alap $=\cos(1-2x)$), ezt szorozzuk a belső függvény, a koszinusz függvény deriváltjával ((**13**) felhasználásával, az argumentum marad $(1-2x)$); végül a legbelső függvény deriváltjával szorzunk, amelyet tagonkénti deriválással állítunk elő a (**4**), (**2**), (**3**), (**7**) szabályok alkalmazásával. Így

$$f'(x)=-3(\cos(1-2x))^{-4}\cdot(-\sin(1-2x))\cdot(-2)$$

Más alakban írva: $f'(x)=-\dfrac{6\sin(1-2x)}{\cos^4(1-2x)}$.

Megjegyzés:
Vegyük észre, hogy a láncszabály alkalmazásakor a differenciálási sorrend éppen fordítottja a műveletek végrehajtási sorrendjének. (Azaz, ha a függvény értékét kell kiszámítani, akkor a külső függvény az, amelyiket legutoljára "hajtunk végre".)

f) $h(x)=(\sin x)^x$

M: Alakítsuk át a függvényt a logaritmus azonosságai felhasználásával $(e^{\ln b}=b,\quad \ln b^k=k\cdot\ln b,\quad b>0)$ (**25**)-nek megfelelően:

$$h(x)=(\sin x)^x=e^{\ln(\sin x)^x}=e^{x\cdot\ln(\sin x)}$$

Deriváljuk mint összetett függvényt ((**25**)), a belső függvényt szorzatként ((**5**)) kell deriválni ($f(x)=x$, $g(x)=\ln(\sin x)$)

$$h'(x)=e^{x\cdot\ln(\sin x)}(\ln(\sin x)+x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x)$$

Írjuk vissza az összetett exponenciális függvény helyett az eredeti függvényt, így a derivált:

$$h'(x)=(\sin x)^x(\ln(\sin x)+x\cdot\mathrm{ctg}x)$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények harmadik deriváltját!

a) $f(x)=x^5+4x^3+3$

M: Tagonként differenciálunk (**4**), (**7**), (**2**) alkalmazásával:

$$f'(x)=5x^4+12x^2,\quad f''(x)=20x^3+24x,\quad f'''(x)=60x^2+24.$$

b) $f(x)=e^x\cos x$

M: Szorzatként ((**5**)) differenciálunk (**9**), (**13**). (**4**), (**12**) ill. (**3**) alkalmazásával:

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$

$$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$$

$$f'''(x)=-2e^x\sin x-2e^x\cos x=-2e^x(\sin x+\cos x).$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

4. A differenciálási szabályok alkalmazásával differenciáljuk az alábbi függvényeket a bennük előforduló változók szerint:

a) $f(x) = x^5 - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$

Írjuk fel a tagokat hatványkitevős alakban : $f(x) = x^5 - x^{\frac{1}{2}} + x^{-3}$

Deriváljuk tagonként, majd a negatív és törtkitevős tagok átalakítása után kapjuk:

$$f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}$$

b) $f(u) = \sqrt{u}(5u - u^3)$

Végezzük el a szorzást, és írjuk fel a tagokat hatványkitevős alakban:

$$f(u) = 5u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{7}{2}}$$

Differenciáljuk tagonként és szüntessük meg a törtkitevőket:

$$f'(u) = \frac{15}{2}\sqrt{u} - \frac{7}{2}\sqrt{u^5}$$

Megjegyzés : Szorzatként is differenciálhatunk, de a fenti megoldás egyszerűbb.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x} - 2x}{\sqrt{x}}$

Osszuk el a számlálót tagonként és írjuk fel a tagokat hatványkitevős alakban:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1 - 2x^{\frac{1}{2}}$$

Differenciáljunk tagonként : $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Megjegyzés : Hányadosként is differenciálhatunk, de a fenti megoldás egyszerűbb.

d) $f(t) = \dfrac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$

Alkalmazzuk a hányados differenciálási szabályát:

$$f'(t) = \frac{(\cos t - \sin t)(\sin t - \cos t) - (\sin t + \cos t)(\cos t + \sin t)}{(\sin t - \cos t)^2}$$

A kijelölt műveletek elvégzése és az egyszerűsítés után:

$$f'(t) = -\frac{2}{(\sin t - \cos t)^2}$$

e) $f(x) = 6^{6x+\sqrt{x}}$

A láncszabály alkalmazásával: $f'(x) = 6^{6x+\sqrt{x}} \cdot \ln 6 \cdot (6 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$

f) $f(x) = \ln(\ln 5x))$

Alkalmazva a láncszabályt: $f'(x) = \frac{1}{\ln 5x} \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 \underset{(egyszerűsítve)}{=} \frac{1}{x \cdot \ln 5x}$

g) $f(t) = \cos^2 t + \sin 2t$

Tagonként differenciálva:

$$f'(t) = 2\cos t \cdot (-\sin t) + \cos 2t \cdot 2 = 2\cos 2t - \sin 2t$$

h) $f(u) = \frac{1}{(5u^3 + 4u^2 + 1)^3}$

A függvény összetett hatványfüggvény: $f(u) = (5u^3 + 4u^2 + 1)^{-3}$.

A láncszabályt alkalmazva: $f'(u) = -\frac{45u^2 + 24u}{(5u^3 + 4u^2 + 1)^4}$

i) $f(x) = 2\arcsin\sqrt{2x}$

A láncszabályt alkalmazva a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \underset{(egyszerűsítve)}{=} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x - 2x^2}}$$

j) $f(x) = \ln\sqrt{1+e^{2x}}$

A láncszabályt alkalmazva ($\ln\sqrt{1+e^{2x}} = \ln(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}$), egyszerűsítés után:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Megjegyzés: A függvényt célszerű a deriválás előtt átalakítani($\ln b^k = k \cdot \ln b$, $b > 0$ alapján). Minthogy $1 + e^{2x} > 0$ minden valós x-re, így $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$ alakú lesz a függvény, amelynek a deriválása egyszerűbb.

k) $f(x) = (\ln x)^x$

Alkalmazzuk a **(25)**-beli átalakítást és differenciálási szabályt: $f(x) = e^{x \cdot \ln(\ln x)}$

és így $f'(x) = e^{x \cdot \ln(\ln x)}\left(\ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\right)$

Egyszerűsítés ill. az eredeti függvény visszaírása után:

$$f'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$$

l) $f(t) = t^{t^2+2t-3}$

A (25) differenciálási szabályt alkalmazva:

$$f'(t) = e^{(t^2+2t-3)\ln t}\left((2t+2)\ln t + (t^2+2t-3)\frac{1}{t}\right) \underset{(\text{egyszerűsítve})}{=}$$

$$= t^{t^2+2t-3}\left((2t+2)\ln t + t + 2 - \frac{3}{t}\right).$$

FELADATOK

A differenciálási szabályok alkalmazásával határozza meg az alábbi függvények deriváltját a bennük előforduló változók szerint!

5.	$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$	6.	$f(x) = a^4 - 2a^2x^2 + x^4$
7.	$f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$	8.	$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
9.	$f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^5$	10.	$f(t) = t \cdot \ln t - t$
11.	$f(x) = (x^2+1) \cdot e^x$	12.	$f(t) = t \cdot \sqrt{1+t^2}$
13.	$f(u) = \sin^2 u - \cos 2u$	14.	$f(x) = \frac{1}{\cos x}$
15.	$f(x) = 3e^{-\frac{x^2}{2}}$	16.	$f(x) = 2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}$
17.	$f(u) = e^{10} \cdot \sin 5u$	18.	$f(x) = \lg^3 x^2$
19.	$f(x) = \ln(\mathrm{tg}\frac{x}{2})$	20.	$f(x) = \ln(\lg x)$
21.	$f(x) = \ln(\cos x)$	22.	$f(t) = \arcsin\frac{t}{2}$
23.	$f(x) = 3x^2 \cdot \ln x - x^3$	24.	$f(x) = (\mathrm{arctg}\, x)^2$
25.	$f(x) = \cos^3\frac{x}{3}$	26.	$f(u) = \ln\left(\mathrm{tg}\frac{2u+1}{4}\right)$
27.	$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$	28.	$f(u) = \mathrm{tg}\frac{u}{2} - \mathrm{ctg}\frac{u}{2}$

29. $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x+\ln(\sin x)$ **30.** $f(u)=\frac{1}{4}\ln\frac{u^2-1}{u^2+1}$

31. $f(x)=\frac{1}{\mathrm{sh}^3\frac{1}{x}}$ **32.** $f(x)=\sqrt{2-\mathrm{ch}^2 6x}$

33. $f(x)=x^{2x}$ **34.** $f(x)=\ln(10^x)$

35. $f(x)=x^{\sin x}$ **36.** $f(x)=x^{\ln x}$

MEGOLDÁSOK

5. $f'(x)=x^2+x-2$ **6.** $f'(x)=4x^3-4a^2x$

7. $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **8.** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

9. $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ **10.** $f'(t)=\ln t$

11. $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$ **12.** $f'(t)=\frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

13. $f'(u)=3\sin 2u$ **14.** $f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

15. $f'(x)=-3x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ **16.** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}\cdot(1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{x})\cdot\ln 2$

17. $f'(u)=5e^{10}\cos 5u$ **18.** $f'(x)=\frac{6\lg^2 x^2}{x\ln 10}$

19. $f'(x)=\frac{1}{\sin x}$ **20.** $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $\left(\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}\right)$

21. $f'(x)=-\mathrm{tg}x$ **22.** $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$

23. $f'(x)=3x(2\ln x+1-x)$ **24.** $f'(x)=\frac{2\mathrm{arctg}x}{1+x^2}$

25. $f'(x)=-\cos^2\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}$ **26.** $f'(u)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{2u+1}{4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{2u+1}{4}}$

27. $f'(x)=x^2\cdot e^x$ **28.** $f'(u)=\frac{2}{\sin^2 u}$

29. $f'(x)=-\mathrm{ctg}^3 x$ **30.** $f'(u)=\frac{u}{u^4-1}$

31. $f'(x)=\dfrac{3\,\mathrm{ch}\frac{1}{x}}{x^2\cdot \mathrm{sh}^4\frac{1}{x}}$ **32.** $f'(x)=-\dfrac{3\,\mathrm{sh}12x}{\sqrt{2-\mathrm{ch}^2 6x}}$

33. $f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$ $(f(x)=e^{2x\ln x})$

34. $f'(x)=\ln 10$ $(f(x)=x\cdot\ln 10)$

35. $f'(x)=x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$ **36.** $f'(x)=2x^{\ln x-1}\cdot\ln x$

2. A differenciálhányados geometriai jelentése

Ha f differenciálható a c helyen, akkor az $y=f(x)$ egyenletű görbének van *érintője* az $x=c$ abszcisszájú pontban, amelynek *iránytangense* $f'(c)$.

PÉLDÁK

37. Határozzuk meg az $y=x^2+2x+2$ parabola $x=1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét !

M: Az érintő a P(1;5) pontban érinti a parabolát és iránytangense $m=y'(1)$. Mivel $y'=2x+2$, így $m=4$. Az érintő egyenlete az $y=m(x-x_0)+y_0$ képlet felhasználásával $y=4(x-1)+5$, azaz $y=4x+1$.

38. Határozzuk meg az $y=x^3+1$ görbe azon érintőinek az egyenletét, amelyek az $y=3x+1$ egyenessel párhuzamosak !

M: Az $y=3x+1$ egyenessel párhuzamos érintők iránytangense $m=3$. Az érintési pont legyen P$(a;b)$. A derivált geometriai jelentéséből tudjuk, hogy $y'(a)=m$. Minthogy $y'=3x^2$, így az érintési pontok abszcisszáit a $3a^2=m$ egyenletből kapjuk, azaz $a=\pm 1$. Az érintési pontok tehát $P_1(1;2)$ és $P_2(-1;0)$. A két érintő egyenlete az $y=m(x-x_0)+y_0$ képlet alkalmazásával: $y=3(x-1)+2$ ill. $y=3(x+1)$. Tehát $y=3x-1$ ill. $y=3x+3$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

39. Határozzuk meg az $y=x\cdot\ln x+1$ görbe egységnyi ordinátájú pontjában húzott érintő egyenletét!

Az egységnyi ordinátájú helyen $x=1$, tehát az érintési pont P(1;1).

Mivel $y' = \ln x + 1$, ezért az érintő iránytangense $m = 1$. Az érintő egyenlete tehát $y = x$.

40. Mely pontban lesz az $y = 2 + x - x^2$ görbe érintője párhuzamos az első síknegyed szögfelezőjével?

Az érintő iránytangense $m = 1$ (mert a szögfelező az $y = x$ egyenes). Mivel $y' = 1 - 2x$, ezért az $1 - 2x = 1$ egyenletből az érintési pont abszcisszájára $x = 0$ adódik. A keresett pont tehát P(0;2).

3. A differenciál és alkalmazása

(25) Ha f differenciálható a c helyen, akkor $df(c) = f'(c) \cdot \Delta x$ az f függvény c helyhez tartozó differenciálja, $df(x) = f'(x)dx$ *a függvény differenciálja* ($\Delta x = dx$). A differenciál a c-beli érintő $c + \Delta x$ abszcisszájánál az ordináta növekedést adja meg. ($df(x)$ helyett szokásos röviden a df jelölés)

(26) Ha $f'(x) \neq 0$ és Δx kicsi, akkor $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \approx df(c)$, azaz $\Delta y \approx f'(c)\Delta x$. Azaz az $f(x)$ függvénynek a megváltozása a c pont környezetében "kicsiben" a független változó megváltozásának konstansszorosa és a konstans éppen a c pont-ban vett differenciálhányados. (Véges növekmények tétele)

A tétel *hibaszámításra* is jól használható. Ha x értékét $|\Delta x|$ abszolút hibával határozzuk meg, akkor a megfelelő $f(x)$ függvényérték abszolút, relatív és százalékos hibája közelítőleg kiszámítható a következő képletekkel:

(27) abszolút hiba: $h \approx |df(c)|$

relatív hiba: $h_r \approx h \,/\, |f(c)|$

százalékos hiba: $h_{\%} \approx 100h_r$.

PÉLDÁK

41. Számítsuk ki az $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$ függvény $c = 1$ helyhez tartozó differenciálját, ha $\Delta x = 0.2$!

M: Írjuk fel a függvény deriváltját: $f'(x) = 6x^2 - 2$. Alkalmazzuk a **(25)** képletet: $df(1) = f'(1)\,\Delta x = 4 \cdot 0.2 = 0.8$. Tehát $df(1) = 0.8$; azaz ha az x tengelyen az $x = 1$ ponttól 0.2 -ednyivel "arrébb megyünk" (balra vagy jobbra), akkor a függvény megváltozása mintegy 0.8 lesz.

42. Határozzuk meg az $f(x) = 1 / x$ függvény differenciálját!

M: Írjuk fel a függvény deriváltját: $f'(x) = -1/x^2$, így $f(x)$ differenciálja: $df(x) = -(1/x^2)dx$.

43. Számítsuk ki a véges növekmények tételének alkalmazásával $\sin 31°$ közelítő értékét ! Határozzuk meg az abszolút és relatív hibát!

M: Mivel a szinusz függvény szigorúan monoton nő a $[0;\pi/2]$ intervallumon, így $\sin 31° \approx \sin \pi/6 + \Delta y$, ahol Δy a függvényérték növekedése $\Delta x = 0.01745$ rad növekedés esetén. A véges növekmények tétele (**(26)**) alapján $\Delta y \approx df(\pi/6) = f'(\pi/6)\,\Delta x$. Minthogy $f(x) = \sin x$ és $f'(x) = \cos x$, ezért $\Delta y \approx \cos \pi/6 \cdot 0.01746 \approx 0.0151$. Így $\sin 31° \approx \sin\pi/6 + 0.0151 = 0.5151$ (pontos érték hat tizedessel 0.515038). Adjuk meg **(27)** alapján az abszolút és relatív hibát!

$h = |df(\pi/6)| = 0.0151$

$h_r = |df(\pi/6) / f(\pi/6)| = 0.0151 / 0.5 = 0.03$

FELADATOK

44. Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$ $(a \in R)$ függvény differenciálját!

45. Egy négyzet oldalának hossza $a = 2.4 \pm 0.05$ m. Mekkora abszolút, relatív és százalékos hibával számítható ki a négyzet területe ?

46. Határozzuk meg közelítőleg arctg 1.05 értékét, a függvény megváltozását a differenciállal helyettesítve !

47. Hány cm-rel kell növelni egy 1000 l térfogatú gömb sugarát, hogy a térfogat közelítőleg 5 literrel növekedjék ?

MEGOLDÁSOK

44. $df = \dfrac{1}{a^2 + x^2}dx$

45. $f(a) = a^2$ $\quad |\Delta a| = 0.05$ m

$h = 4.8 \cdot 0.05\ \mathrm{m}^2 = 0.24\ \mathrm{m}^2$ $\quad h_r = 0.24 / 5.76 = 0.042$ $h_{\%} = 4.2\ \%$

46. $f(x) = \mathrm{arctg}x$ (szigorúan monoton növekvő) $\quad \Delta x = 0.05$

$\mathrm{arctg}\ 1.05 \approx \mathrm{arctg}\ 1 + df(1)$ $\quad \mathrm{arctg}\ 1.05 \approx 0.8104$

47. $V = (4/3)R^3\pi\ \mathrm{dm}^3 = 1000\ \mathrm{dm}^3$. Ebből $R = \sqrt[3]{\dfrac{3\cdot 1000}{4\pi}}$ dm

$dV / dR = 4R^2\pi$ $\Delta V \approx dV \approx 4R^2\pi \cdot \Delta R$ $5 \approx 4(3000/4\pi)^{2/3}\pi\Delta R$
innen a sugár növekedés $\Delta R \approx 0.01033$ dm ≈ 0.1 cm.

4. Függvényvizsgálat

(28) Ha $f'(x) > 0$ $[a,b]$ intervallumban, akkor itt f *szigorúan monoton növekvő.*
(29) Ha $f'(x) < 0$ $[a,b]$ intervallumban, akkor itt f *szigorúan monoton csökkenő.*
(30) Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) \neq 0$, akkor c *helyi (lokális) szélsőértékhelye* a függvénynek, mégpedig, ha $f''(c) > 0$, akkor *helyi minimuma,* ha $f''(c) < 0$, akkor *helyi maximuma.*
(31) Ha $f''(c) > 0$ az $[a,b]$ intervallumban, akkor itt f szigorúan *konvex.*
(32) Ha $f''(c) < 0$ az $[a,b]$ intervallumban, akkor itt f szigorúan *konkáv.*
(33) Ha $f''(c) = 0$ és $f'''(c) \neq 0$, akkor c *inflexiós pont.*

PÉLDÁK

48. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket, van-e szélsőértékhelyük, és ha van, milyen! Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyekben a függvény monoton!

a) $f(x) = x^2 - x^3$

M: Írjuk fel a függvény első deriváltját, és alkalmazzuk **(30)**-at: $f'(x) = 2x - 3x^2$. A függvénynek ott lehet szélsőértékhelye, ahol $f'(x) = 0$. Oldjuk meg ezt az egyenletet : $x(2 - 3x) = 0$. Így $x = 0$ vagy $x = 2/3$ helyeken lehet szélsőérték.
Írjuk fel a második deriváltat: $f''(x) = 2 - 6x$. Vizsgáljuk meg a második derivált előjelét az $x = 0$ i'. az $x = 2/3$ helyeken: $f''(0) = 2>0$, ezért $x = 0$ helyi minimumhely; $f''(2/3) = -2 < 0$, ezért $x = 2/3$ helyi maximumhely.
A helyi maximum- ill. minimumhely fogalmából következik a függvény monotonitása, amelyet az alábbi táblázatban foglalunk össze:

	0		2/3	
csökken	minimum	nő	maximum	csökken
↘		↗		↘

Tehát a $(-\infty,0)$ intervallumban szigorúan monoton csökken, a $(0,2/3)$ intervallumban szigorúan monoton nő és a $(2/3,\infty)$ intervallumban ismét szigorúan monoton csökken a függvény.

b) $f(x) = x \cdot \ln x$

M: Írjuk fel a függvény első deriváltját: $f'(x) = \ln x + 1$

Alkalmazzuk **(30)**-at : $\ln x + 1 = 0$, $\ln x = -1$, $x = 1/e$. Tehát a függvénynek az $x = 1/e$ helyen lehet szélsőértéke. Vizsgáljuk meg itt a második deriváltat: $f''(x) = 1/x$, $f''(1/e) = e > 0$. Tehát az $x = 1/e$ minimumhely.

A függvény a $(0,\infty)$ intervallumban értelmezett, itt egyetlen helyi szélsőértékhelye van, és ez minimum, ezért a $(0,1/e)$ intervallumban szigorúan monoton csökken, az $(1/e,\infty)$ intervallumban szigorúan monoton nő.

49. Határozzuk meg a következő függvény inflexiós pontját:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$$

M: Írjuk fel a függvény első és második deriváltját: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$, $f''(x) = 6x - 6$. Alkalmazzuk **(33)**-at: $f''(x) = 0$, és így $6x - 6 = 0$, $x = 1$. Tehát $x = 1$ lehet inflexiós pont. Vizsgáljuk meg itt a harmadik deriváltat: $f'''(x) = 6$. Mivel $f'''(1) = 6 \neq 0$, ezért $x = 1$ inflexiós pont.

$f(x)$ minden valós x-re értelmezett és $x = 1$ az egyetlen inflexiós pontja, ezért elegendő $x = 1$ előtt vagy után egyetlen helyen megvizsgálni $f''(x)$ előjelét (pl. $x = 0$-nál): $f''(0) = -6 < 0$, ezért **(32)** alapján megállapíthatjuk, hogy a görbe a $(-\infty,1)$ intervallumban konkáv, és az inflexiós pont után, az $(1,\infty)$ intervallumban pedig konvex.

50. Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvény mely intervallumban konvex ill. konkáv: $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

M: Határozzuk meg **(33)** alapján az inflexiós pontot, hiszen itt vált a görbe alakot.

$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$, $f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$. Keressük meg $f''(x)$ zérushelyét: $f''(x) = 0$, vagyis $e^{-x}(x - 2) = 0$.

Mivel $e^{-x} \neq 0$, ezért az $x - 2 = 0$ egyenletből kapjuk az egyenlet megoldását: $x = 2$. Vizsgáljuk meg a harmadik deriváltat: $f'''(x) = -e^{-x}(x - 2) + e^{-x} = e^{-x}(3 - x)$. Mivel $f'''(2) = e^{-2} \neq 0$, ezért $x = 2$ inflexiós pont.

A függvény minden x-re értelmezett, így elegendő egyetlen helyen megvizsgálni $f''(x)$ előjelét, hogy a görbe konvex ill. konkáv szakaszait **(31)** ill. **(32)** alapján megadhassuk. Pl. $f''(0) = -2 < 0$, ezért a görbe a $(-\infty,2)$ intervallumban konkáv, a $(2,\infty)$ intervallumban pedig konvex.

51. Ábrázoljuk teljes függvényvizsgálat alapján a következő függvényt:

$$f(x) = 2x^2 - x^3$$

A teljes függvényvizsgálat lépései:

a) értelmezési tartomány (D_f)

b) zérushely(ek)

c) párosság

d) periodicitás

e) határértékek (szakadási hely(ek)en ill. végtelenben)

f) szélsőértékhely(ek), monotonitási szakaszok,

g) inflexiós pont(ok), konvexitás, konkavitás
h) értékkészlet (R_f)
i) grafikon

M: a) D_f=**R**

b) $2x^2 - x^3 = 0$, $x^2(2-x) = 0$, $x = 0$ vagy $x = 2$ zérushelyek

c) $f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^3 = 2x^2 + x^3$. Mivel $f(-x) \neq f(x)$ és $f(-x) \neq -f(x)$, ezért a függvény se nem páros, se nem páratlan.

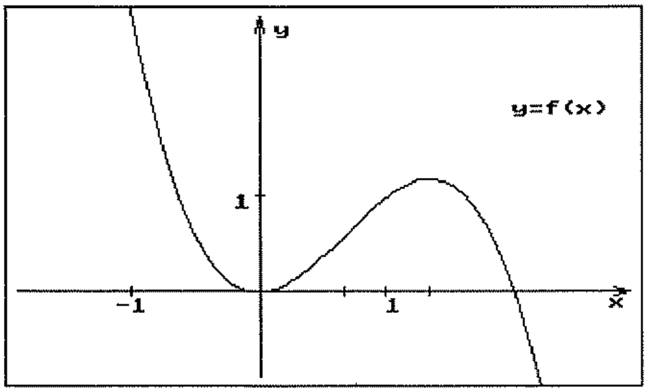
d) A függvény nem periódikus.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2 - x^3) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(2-x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2 - x^3) = +\infty$

f) $f'(x) = 4x - 3x^2 = x(4-3x) = 0$; $x = 0$ vagy $x = 4/3$ lehet szélsőértékhely **(30).** Vizsgáljuk meg a második derivált előjelét: $f''(x) = 4 - 6x$, $f''(0) = 4 > 0$ $f''(4/3) = -4 < 0$, ezért $x = 0$ helyi minimumhely, $x = 4/3$ helyi maximumhely.
Számítsuk ki a függvényértékeket: $f(0) = 0$, $f(4/3) = 32/27 \approx 1.2$. Így $P_{max}(4/3, 32/27)$ és $P_{min}(0,0)$

g) Keressük meg $f''(x)$ zérushelyeit: $f''(x) = 4 - 6x = 0$, $x = 2/3$. Tehát $x = 2/3$ lehet inflexiós pont **(33).**
Vizsgáljuk meg a harmadik deriváltat: $f'''(x) = -6, f'''(2/3) = -6 \neq 0$, ezért $x = 2/3$-nál inflexiós pont van.
Számítsuk ki a függvényértéket: $f(2/3) = 16/27 \approx 0.6$. Így az inflexiós pont $P_{infl}(2/3, 16/27)$.

h) grafikon:



i) R_f= **R**

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

52. Állapítsuk meg, hogy a következő függvényeknek van-e szélsőértékük, és ha van, milyen?

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Alkalmazzuk **(30)**-at: $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, tehát $x = 1$ lehet szélsőértékhely. $f''(x) = e^{-x}(x-2)$, amiből $f''(1) = -1/e < 0$, így $x = 1$ maximumhely.

b) $f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = \sin 2x$, $\sin 2x = 0$, $x = k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

A második derivált $f''(x) = 2\cos 2x$, amiből

$$f''(k\frac{\pi}{2}) = 2\cos k\pi = \begin{cases} < 0, \text{ha } k \text{ páratlan} \\ > 0, \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

Így $x = k\dfrac{\pi}{2}\begin{cases} \text{helyi maximumhely, ha } k \text{ páratlan} \\ \text{helyi minimumhely, ha } k \text{ páros} \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{10x}{1+x^2}$

$f'(x) = \dfrac{10-10x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ amiből $x = \pm 1$. A második derivált:

$f''(x) = \dfrac{20x^3 - 60x}{(1+x^2)^3}$. Mivel $f''(1) < 0$ és $f''(-1) > 0$, ezért $x = 1$ maximumhely és $x = -1$ minimumhely.

53. Határozzuk meg a következő függvények inflexiós pontjait! Vizsgáljuk meg, hogy a függvény görbéje mely intervallumokban konvex ill. konkáv!

a) $f(x) = x + 1/x$

Alkalmazzuk **(33)**-at: $f''(x) = 2/x^3$. $2/x^3 = 0$ egyetlen x-re sem teljesül, ezért nincs inflexiós pont. $f''(x)$ előjele alapján a görbe a $(-\infty, 0)$ intervallumban konkáv, a $(0, \infty)$ intervallumban konvex.

Megjegyzés: Bár nincs inflexiós pont, a függvény azonban nincs értelmezve $x = 0$-ban, ezért $f''(x)$ előjelét $x = 0$-nál kisebb és nagyobb értéknél is meg kellett vizsgálni.

b) $f(x) = \ln^2 x$

$$f''(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{, amiből} \quad x = e$$

$f'''(x) = \dfrac{-6 + 4\ln x}{x^3}$ és mivel $f'''(e) \neq 0$, ezért $x = e$ inflexiós pont.

$f''(x)$ előjele alapján megállapítható, hogy a görbe a $(0, e)$ intervallumban konvex, az (e, ∞) intervallumban konkáv.

c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$

$$f''(x) = \frac{6x-24}{x^5} = 0 \quad \text{, ahonnan} \quad x = 4.$$

$$f'''(x) = \frac{-24x+120}{x^6} \qquad f'''(4) \neq 0 \quad \text{ezért } x = 4 \text{ inflexiós pont.}$$

$f''(x)$ előjele alapján megállapítható, hogy a görbe a $(-\infty,0)$ intervallumban konvex, a $(0,4)$ intervallumban konkáv és a $(4,\infty)$ intervallumban konvex.

FELADATOK

54. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékhelyeit és inflexiós pontjait!

a) $f(x) = x^2 \ln x$ **b)** $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \frac{4-4x}{(1+x)^2}$.

55. Vizsgáljuk meg hogy a függvény görbéje mely intervallum(ok)ban konvex ill. konkáv!

a) $f(x) = x^5 + 5x - 6$ **b)** $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

56. Teljes függvényvizsgálat alapján ábrázoljuk a következő függvényeket! (Használjuk fel a korábban megoldott feladatok eredményeit, ahol lehet.)

a) $f(x) = \frac{x^3-9x}{10}$ **b)** $f(x) = \ln^2 x$ **c)** $f(x) = \frac{10x}{1+x^2}$.

MEGOLDÁSOK

54. a) $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ minimum; $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ inflexiós pont

b) $x = \sqrt[3]{2}$ minimum; nincs inflexiós pont

c) $x = 3$ minimum; $x = 5$ inflexiós pont.

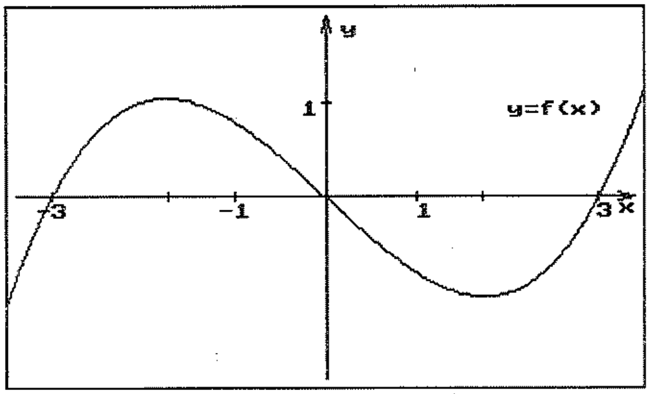
55. a) $(-\infty,0)$ intervallumban konkáv, $(0,\infty)$ intervallumban konvex

b) nincs inflexiós pont; $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ intervallumban konvex

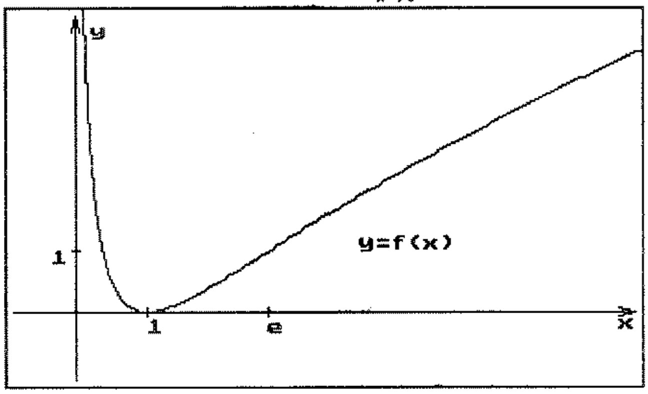
c) $(0,1/e^2)$ intervallumban konvex, $(1/e^2,1)$ intervallumban konkáv, $(1, \infty)$ intervallumban konvex.

56. a) zérushelyei: $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$; páratlan függvény; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

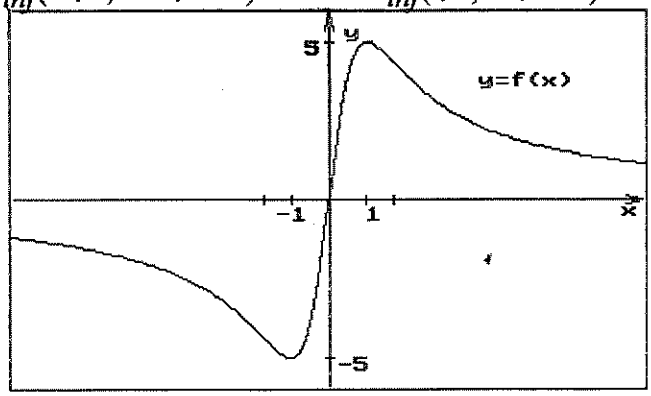
$P_{min}(\sqrt{3},-3\sqrt{3}/5)$ $\quad P_{max}(-\sqrt{3},3\sqrt{3}/5)$ $\quad P_{inf}(0,0)$



b) zérushelye: $x = 1$; $P_{min}(1,0)$ $P_{inf}(e,1)$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln^2 x = +\infty$ $(x > 0)$



c) zérushelye: $x = 0$; páratlan függvény; $P_{min}(-1,-5)$ $P_{max}(1,5)$
$P_{inf}(0,0)$ $P_{inf}(-\sqrt{3},-10\sqrt{3}/4)$ $P_{inf}(\sqrt{3},10\sqrt{3}/4)$



(34) Ha az f függvény az $x = a$ helyen akárhányszor differenciálható, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

"végtelen" összeget az f függvény $x = a$ körüli *Taylor-sorának nevezzük.*

(35) Ennek n-edik részletösszege:

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

az f függvény *n-edfokú Taylor-polinomja.*

(36) Az $x = 0$ körüli

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Taylor-sort *Maclaurin-sornak hívjuk.*

(37) Ennek n-edik részletösszege:

$$\boxed{M_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}$$

az f függvény *n-edfokú Maclaurin-polinomja.*

(38) Az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ különbséget *Taylor-féle maradéktagnak* nevezzük; ennek *Lagrange-féle alakja:*

$$\mathrm{R_n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(\mathrm{n}+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ahol c az x és a közötti hely.

(39) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ valamely a-t tartalmazó intervallumban, akkor itt

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

így az intervallum valamely x_0 pontjára: $f(x_0) \approx T_n(x_0)$.

(40) Becslés a hibára:

$$|hiba| < \frac{\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}|x_0 - a|^{n+1}$$

ahol az x az x_0 és a közötti értékeket vehet fel.

Váltakozó előjelű sornál a hiba becsülhető az első elhagyott tag abszolút értékével.

A közelítés legalább n jegyre pontos, ha a $|hiba| < 5 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Néhány nevezetes Maclaurin-sor:

(41) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in \mathbf{R}$

(42) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad x \in \mathbf{R}$

(43) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad x \in \mathbf{R}$

(44) $\mathrm{sh}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in \mathbf{R}$

(45) $\mathrm{ch}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in \mathbf{R}$

(46) Binomiális sor: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad |x|<1 \quad \alpha \in \mathbf{R}$,

ahol $\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$.

PÉLDÁK

57. Írjuk fel az alábbi függvények ötödfokú Maclaurin-polinomját!

a) $f(x) = \mathrm{sh}\, 2x$

M: Alkalmazzuk **(37)**-et, számítsuk ki a deriváltakat :

$f'(x) = 2\,\mathrm{ch}\,2x$, $f''(x) = 2(\mathrm{sh}\,2x)2 = 4\,\mathrm{sh}\,2x$, $f'''(x) = 4(\mathrm{ch}\,2x)2 = 8\mathrm{ch}2x$

$f^{(4)}(x) = 8(\mathrm{sh}\,2x)2 = 16\,\mathrm{sh}\,2x$, $f^{(5)}(x) = 16(\mathrm{ch}2x)2 = 32\mathrm{ch}2x$

Vegyük észre, hogy a derivált függvényekre a következőket kaptuk:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^k \mathrm{sh}2x & , \text{ ha } k \text{ páros} \\ 2^k \mathrm{ch}2x & , \text{ ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

Számítsuk ki a deriváltak értékét az $x=0$ helyen a fenti képlet alapján:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } k \text{ páros} \\ 2^k & , \text{ ha } k \text{ páratlan} \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

A Maclaurin-polinomban csak páratlan kitevős tagok szerepelnek, tehát:

$$M_5(x) = 2x + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5$$

b) $f(x)=\sin^2 x$

M: Alakítsuk át a függvényt a $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ azonosság felhasználásával, így ugyanis a deriválás egyszerűbb lesz. Tehát : $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

Képezzük a deriváltakat:

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}(-\sin 2x)2=\sin 2x$, $f''(x)=(\cos 2x)2=2\cos 2x$

$f'''(x)=2(-\sin 2x)2=-4\sin 2x$, $f^{(4)}(x)=-4(\cos 2x)2=-8\cos 2x$

$f^{(5)}(x)=-8(-\sin 2x)2=16\sin 2x$.

Számítsuk ki a függvény és deriváltjainak helyettesítési értékét az $x=0$ helyen:

$f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=2$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=-8$, $f^{(5)}(0)=0$.

(37) alapján a polinom ($M_4(x)=M_5(x)$): $M_5(x)=\dfrac{2}{2!}x^2-\dfrac{8}{4!}x^4=x^2-\dfrac{1}{3}x^4$

58. Írjuk fel a következő függvények adott $x=a$ körüli Taylor-sorának első öt tagját!

a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=1$

M: Írjuk fel a függvény deriváltjait, és számítsuk ki a helyettesítési értékeket az $x=1$ helyen:

$f(x)=x^{1/3}$, $f(1)=1$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(1)=\dfrac{1}{3}$

$f''(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-5/3}=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$, $f''(1)=-\dfrac{2}{9}$

$f'''(x)=\dfrac{10}{27}x^{-8/3}=\dfrac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}$, $f'''(1)=\dfrac{10}{27}$

$f^{(4)}(x)=-\dfrac{80}{81}x^{-11/3}=\dfrac{-80}{81\sqrt[3]{x^{11}}}$, $f^{(4)}(1)=-\dfrac{80}{81}$

$f^{(5)}(x)=\dfrac{880}{243}x^{-14/3}=\dfrac{880}{243\sqrt[3]{x^{14}}}$, $f^{(5)}(1)=\dfrac{880}{243}$

Alkalmazva **(34)**-et , a Taylor-sort első öt tagjával felírva kapjuk

$$1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5+R_5(x)$$

b) $f(x)=2^x$, $a=0$

M: Írjuk fel a deriváltakat és számítsuk ki a helyettesítési értékeket:

$f(x)=2^x$ $\quad f(0)=1$ $\quad f'(x)=2^x\cdot\ln 2$ $\quad f'(0)=\ln 2$

$f''(x)=\ln 2\cdot 2^x\cdot\ln 2$ $\quad f''(0)=\ln^2 2$ $\quad f'''(x)=\ln^2 2\cdot 2^x\cdot\ln 2$ $\quad f'''(0)=\ln^3 2$

$f^{(4)}(x) = \ln^3 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \qquad f^{(4)}(0) = \ln^4 2$

$f^{(5)}(x) = \ln^4 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \qquad f^{(5)}(0) = \ln^5 2$

Az $a = 0$ körüli Taylor-sora (azaz Maclaurin-sora) első öt tagjával felírva:

$$1 + x \cdot \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 2}{3!}x^3 + \frac{\ln^4 2}{4!}x^4 + \frac{\ln^5 2}{5!}x^5 + R_5(x).$$

59. Írjuk fel az $f(x) = x \cdot e^{-x}$ függvény Maclaurin-sorát már ismert Maclaurin-sor felhasználásával!

M: Először írjuk fel e^x Maclaurin-sorát **(41)** alapján:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad , x \in \mathbf{R}$$

Tegyünk x helyébe $(-x)$ -et, így $\quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \qquad x \in \mathbf{R}$

Tagonként x-szel való szorzással kapjuk, hogy : $x \cdot e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+1} \qquad x \in \mathbf{R}$

Megjegyzés: Természetesen a deriváltak kiszámításával is megoldhatjuk ezt a feladatot, de a fenti módszer gyorsabban vezet eredményhez.

60. Számítsuk ki cos (π/8) közelítő értékét a $\cos x$ függvény negyedfokú Maclaurin-polinomja segítségével! Becsüljük meg a közelítés hibáját!

M: A függvény negyedfokú Maclaurin-polinomja **(43)** alapján:

$M_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$. A közelítő érték **(39)** alapján:

$$\cos\frac{\pi}{8} \approx M_4\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{8}\right)^4 = 0.923884611$$

Vegyük észre, hogy $M_4(x)=M_5(x)$, hiszen $\cos x$ Maclaurin-sora csak páros kitevőjű tagokat tartalmaz (**(43)**). A közelítés hibáját a maradéktag becslésével (**(40)**) adhatjuk meg:

$$\left|R_5\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| < \frac{\max\left|(\cos x)^{(6)}\right|}{6!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^6 \qquad \text{ahol} \quad 0 < x < \frac{\pi}{8}$$

Minthogy $\left|(\cos x)^{(6)}\right| \le 1$ ezért $\left|R_5\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| < \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^6 \approx 5 \cdot 10^{-6}$ ami azt jelenti, hogy a közelítés 5 tizedes pontosságú.

Megjegyzés: A hiba becslésénél figyelembe vehettük volna, hogy $\cos x$ sora váltakozó előjelű, így az első elhagyott tag abszolút értékével becsülhettük volna a hibát:

$$|hiba| < \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^6$$

61. Határozzuk meg a következő függvények ötödfokú Maclaurin-polinomját!

a) $f(x) = \mathrm{tg}x$

Képezzük a függvény deriváltjait az $x = 0$ helyen:

$$f(x) = \mathrm{tg}x \qquad f(0) = 0 \qquad f'(x) = 1 + \mathrm{tg}^2 x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2\mathrm{tg}x \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\mathrm{tg}^2 x\right)\frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = 8\left(2\mathrm{tg}x + 3\mathrm{tg}^3 x\right)\frac{1}{\cos^2 x} \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 8\left(15\mathrm{tg}^4 x \frac{1}{\cos^2 x} + 15\mathrm{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} + 2\frac{1}{\cos^2 x}\right) \qquad f^{(5)}(0) = 16$$

Tehát

$$M_5(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

b) $f(x) = \sin 3x$

Célszerű felhasználni, hogy $\sin x$ Maclaurin-sorát (**(42)**) ismerjük, azaz

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad x \in \mathbf{R}$$

Ebből megkaphatjuk $\sin 3x$ Maclaurin-sorát:

$$\sin 3x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^{2k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}, \quad x \in \mathbf{R},$$

amelyből $\quad M_5(x) = 3x - \frac{3^3}{3!}x^3 + \frac{3^5}{5!}x^5$

62. Határozzuk meg az alábbi függvények adot $x = a$ körüli Taylor-sorát!

a) $f(x) = \ln x \quad , \quad a = 1$

Képezzük a függvény deriváltjait az $x = 1$ helyen:

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1 \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -6$$

Könnyű észrevenni, hogy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad \text{így} \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

A Taylor-sorban tehát az n-edfokú tag együtthatója: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$

A Taylor-sor tehát: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(x-1)^k$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$

Mivel $f(x) = (1+x)^{-1}$ alakban írható fel, Maclaurin-sora binomiális sor (**(46)**).
Képezzük az együtthatókat:

$$\binom{-1}{0} = 1 \qquad \binom{-1}{1} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1$$

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1 \qquad \binom{-1}{4} = \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{4!} = 1$$

A képzési szabályt könnyen megállapíthatjuk: $\binom{-1}{n} = (-1)^n$

Így a Maclaurin-sor: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$

Megjegyzés: A binomiális sorról tudjuk, hogy

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \quad , \quad \text{ha} \quad |x| < 1$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x} \qquad x \neq \dfrac{1}{2}$

A függvény $f(x)=(1+(-2x))^{-1}$ alakban írható; alkalmazzuk az előző **b)** pontbeli eredményt!

Kiindulva tehát az $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ ha $|x| < 1$ Maclaurin-sorból

írjunk x helyébe $(-2x)$-et: $\dfrac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(-2x)^k$ ha $|-2x| < 1$

azaz: $\dfrac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^{\infty}2^k x^k$ ha $|x| < \dfrac{1}{2}$

63. Számítsuk ki $1/e$ közelítő értékét 4 tizedesjegy pontossággal!

A kívánt értéket az e^x Maclaurin-sorának a segítségével $x=-1$ helyettesítéssel számítjuk ki.

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}(-1)^2+\frac{1}{3!}(-1)^3+\frac{1}{4!}(-1)^4+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\ldots$$

Mivel 4 tizedesjegy pontosságot írtunk elő és a sor váltakozó előjelű, ezért meg kell vizsgálni, hogy melyik az első olyan tag, amelynek az abszolút értéke már kisebb mint $5\cdot10^{-5}$, ez a tag már figyelmen kívül hagyható.

$$\frac{1}{e}\approx 0.5-0.16666+0.04166-0.00833+0.00138-0.00019=0.36785$$

Tehát $1/e\approx 0.3678$.

Megjegyzés: A tagok értékét 5 tizedesjegy pontossággal számítottuk, 1 tartalékjeggyel.

FELADATOK

64. Írjuk fel a következő függvények Maclaurin-sorát és állapítsuk meg, hogy a hatványsor mely valós x-ekre állítja elő a függvényt!

a) $f(x)=e^{-x^2}-1$ **b)** $f(x)=\sin x\cdot\cos x$

c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ **d)** $f(x)=\sqrt{4+x}$.

65. Számítsuk ki $\ln 1.1$ közelítő értékét úgy, hogy a harmadfokú Taylor-polinom-mal közelítsünk, és becsüljük meg a közelítés hibáját!

66. Számítsuk ki a következő értékeket 4 tizedesjegy pontossággal!

a) $\sin 18$ **b)** $\cos 0.4$ **c)** $e^{0.1}$.

MEGOLDÁSOK

64. a) $$e^{-x^2}-1=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!}\qquad x\in\mathbf{R}$$

b) $$\sin x\cdot\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}\qquad x\in\mathbf{R}$$; (felhasználtuk, hogy a függvény $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ alakban is felírható).

c) $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \qquad |x|<1$

d) $\sqrt{4+x}=2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2\cdot 4^2\cdot 2!}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 4^3\cdot 3!}-\dots \qquad |x|<4$,

(felhasználtuk, hogy $\sqrt{4+x}=2(1+x/4)^{1/2}$).

65. **62.a)** alapján: $T_3(x)=(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3$

$\ln 1.1\approx T_3(1.1)=0.095333$, $|hiba|\approx 2.5\cdot 10^{-5}$, tehát legalább 4 tizedesjegyre pontos.

66. **a)** $18°\approx 0.31416$

A kívánt értéket a $\sin x$ Maclaurin-sorának segítségével kapjuk meg

$$\sin 0.314\approx 0.31416-\frac{0.31416^2}{3!}+\frac{0.31416^5}{5!}-\dots$$

Mivel a sor váltakozó előjelű, meg kell vizsgálni, hogy melyik az első olyan tag, amelynek abszolút értéke kisebb, mint $5\cdot 10^{-5}$. Próbálgatással kapjuk, hogy a sor ötödfokú tagja ilyen. Így

$\sin 0.31416\approx T_3(0.31416)=0.30899\approx 0.3090$

b) $\cos 0.4\approx T_4(0.4)\approx 0.92107\approx 0.9211$

c) $e^{0.1}\approx T_n(0.1)$. n értékét úgy kell meghatározni, hogy $|R_n(x)|<5\cdot 10^{-5}$ teljesüljön. $R_n(x)$ **(38)** alakjának becslésével n=3 adódik : $e^{0.1}\approx 1.10517\approx 1.1052$

6. A L'Hospital-szabály

(47) Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $x=a$ hely környezetében differenciálható függvények, és itt $g(x)\neq 0$ és $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ vagy $\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ha a jobb oldalon szereplő határérték létezik.

A tétel akkor is érvényes, ha $a=+\infty$ vagy $a=-\infty$.

PÉLDÁK

67. Számítsuk ki a következő határértékeket a L'Hospital-szabály alkalmazásával!

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}$

M: A számláló és a nevező határértéke is nulla, így alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt (**(47)**). Képezzük tehát a számláló és a nevező deriváltját és vizsgáljuk meg az így nyert tört határértékét:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{2x-5}=-2$. Tehát a határérték : -2 .

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

M: Mivel a számláló és a nevező is nullához tart, alkalmazhatjuk **(47)**-et:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

M: Alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, hiszen a számláló és a nevező is nullához tart. A számláló összeg, az első tag szorzatfüggvény, a deriválást ennek megfelelően végezzük:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}$$

Az így nyert tört számlálója és nevezője is zérushoz tart, így ismételten alkalmazhatjuk **(47)**-et: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{3}=-\dfrac{1}{3}$ Tehát a határérték : $-1/3$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

M: A számláló és a nevező határértéke is plusz végtelen, ezért **(47)** szerint

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$. Tehát a határérték: 0 .

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{1+x-x^2}$

M: A számláló plusz végtelenhez, a nevező minusz végtelenhez tart, ezért **(47)** alkalmazásával : $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{1+x-x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-3}{1-2x}$

Az így nyert tört számlálója minusz végtelenhez, nevezője plusz végtelenhez tart, tehát ismét alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-3}{1-2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{-2}=-1$. Tehát a határérték : -1 .

68. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

M: Mindkét tag plusz végtelenhez tart, így különbségük határértékét nem tudjuk ebben az alakban meghatározni. Hozzunk közös nevezőre :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)$$

Az így kapott tört számlálójának és nevezőjének is nulla a határértéke, most már tehát alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\right)$$

Még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}\right)=0$$

Tehát a határérték: 0 .

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-0.01x}$

M: Az első tényező végtelenhez, a második tényező nullához tart. A határértéket ebből nem tudjuk meghatározni. Írjuk fel a függvényt az alábbi alakban:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-0.01x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^{0.01x}}$$

Most már alkalmazhatjuk (**47**)-et, hiszen a számláló és a nevező határértéke is plusz végtelen, így $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^{0.01x}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{0.01e^{0.01x}}$

Még egyszer alkalmazva a L'Hospital-szabályt:

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{0.01e^{0.01x}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{0.0001e^{0.01x}} = 0$. Tehát a határérték: 0 .

FELADATOK

Számítsuk ki a következő határértékeket a L'Hospital-szabály közvetlen, vagy a függvény átalakítása utáni alkalmazásával!

69. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x - \cos x}{x^2}$ **70.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x - x}{x - \sin x}$

71. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2-1}$ **72.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

73. $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 \ln x$.

MEGOLDÁSOK

69. 1 **70.** 2 ($(\text{tg } x)' = 1 + \text{tg}^2 x$ alakját célszerűbb használni)

71. $-1/2$ **72.** $1/2$ (közös nevezőre hozás után alkalmazható a L'Hospital-szabály)

73. 0 ($x^3 \ln x = \dfrac{\ln x}{x^{-3}}$ átalakítás után alkalmazható a L'Hospital-szabály)

ÖSSZEFOGLALÓ FELADATOK

74. Tekintsük az $f(x) = \left(1 + n \cdot e^{\frac{1}{x}}\right) x^2$ függvényt.

Mutassuk meg, hogy fennáll az $f(x)(2x-1) = \left(f'(x) - 1\right)x^2$ egyenlőség!

75. Határozzuk meg az $y = x^3 + 1$ egyenletű görbe azon pontjait, amelyekben az érintő merőleges az $x + 12y - 5 = 0$ egyenletű egyenesre!

76. Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 27$ függvény görbéjének inflexiós pontja rajta fekszik a szélsőértékpontokat összekötő egyenesen!

77. Hogyan kell h értékét megválasztani, hogy az

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \qquad (h > 0)$$

függvénynek az $x = \sigma$ és $x = -\sigma$ inflexiós pontjai legyenek?

78. Határozzuk meg az $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$ számok között a legnagyobbat!

79. Mekkorák a 10 és 15 cm befogójú derékszögű háromszögbe írható legnagyobb területű téglalap oldalai, ha a téglalap egyik szöge egybeesik a háromszög derékszögével?

80. Rendezzük az $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ polinomot

a) $(x-4)$ b) $(x+1)$ hatványai szerint!

81. Határozzuk meg a 2 m^2 felszínű, felül nyitott négyzetalapú egyenes hasábok közül a maximális térfogatú hasáb méreteit és térfogatát!

82. Egy szabadon eső test 5 sec alatt megtett útja kiszámításánál hány százalékos hibát követünk el, ha az időmérés 0.15 sec hibával történik?

83. Valamely henger átmérője 12 mm , a mérési adat hibája 0.2 mm . Mekkora hibát (abszolút, relatív, százalékos) okoz ez a keresztmetszet terület kiszámításánál?

74. $f'(x) = ne^{\frac{1}{x}}(2x-1)+2x$. Ezt az adott egyenlőségbe behelyettesítve már könnyen belátható, hogy az állítás igaz.

75. Felhasználjuk, hogy merőleges egyenesek iránytangenseire az $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ összefüggés teljesül. A $3x^2 = 12$ egyenlet megoldása után kapjuk a két pontot: $P_1(2,9)$ és $P_2(-2,-7)$.

76. A szélsőértékpontok: $P_{max}(-2,55)$, $P_{min}(4,-53)$. Az inflexiós pont: $P_{infl}(1,1)$.
A szélsőértékpontokat összekötő egyenes egyenlete: $y-55=-18(x+2)$. Ezt az egyenletet az inflexiós pont koordinátái kielégítik.

77. $f(x)$ páros függvény, így elég σ-ra elvégezni a vizsgálatot.

$$f''(x) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(1-2h^2x^2)$$

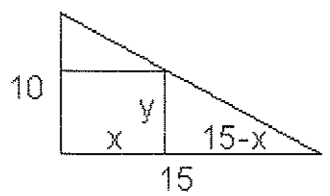
Mivel $x=\sigma$ inflexiós pont, ezért $f''(\sigma)=0$, tehát $1-2h^2x^2=0$.
Innen $h = 1/\sqrt{2}\sigma$.

78. A feladatban szereplő számok az $f(x) = x^{1/x}$ $(x>0)$ függvény egész helyeken felvett értékei.

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right)$$

A függvény az $x = e$ helyen veszi fel maximumát. A keresett szám tehát $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{3}$. Mivel $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ (hiszen $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$ és $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 9$), ezért az adott számok között $\sqrt[3]{3}$ a legnagyobb.

79.



Háromszögek hasonlóságából kapjuk: $y = \dfrac{10(15-x)}{15}$. Így a négyszög területe $t = xy = 10x-(2/3)x^2$. A függvénynek maximuma van az $x=7.5$ helyen, ekkor $y=5$. Tehát a keresett téglalap oldalai: 7.5 cm és 5 cm.

80. Azaz $f(x)$ Taylor-polinomját kell felírni az $a=4$ ill. $a=-1$ körül.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

a) $f(x)=(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$

b) $f(x)=(x+1)^4-9(x+1)^3+22(x+1)^2-24(x+1)+14$.

81. A hasáb alapéle: a, oldaléle: b. A felszín ismeretében $b=\frac{2-a^2}{4a}$. Így a térfogat: $V=a^2b=\frac{1}{4}\left(2a-a^3\right)$. Ennek a függvénynek a maximumát meghatározva kapjuk a hasáb méreteit: $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$ $b=\frac{\sqrt{6}}{6}$ ill. a hasáb térfogatát: $V=\frac{\sqrt{6}}{9}\approx 0.272$.

82. $s=\frac{9}{2}t^2$ $|\Delta t|=0.15$ A véges növekmények tételének felhasználásával az abszolút hiba : $h=\Delta s\approx 7.5\,m$

a relatív hiba : $h_r=\frac{7.5}{125}=0.06$ a százalékos hiba : $h_{\%}=6\,\%$

83. $T=\frac{d^2\pi}{4}$ $|\Delta d|=0.2\,mm$

abszolút hiba: $h=\Delta T\approx 1.2\pi\,mm^2$, relatív hiba: $h_r=\frac{\Delta T}{T}=0.033$,

százalékos hiba: $h_{\%}=3.3\,\%$.

10. A HATÁROZATLAN ÉS HATÁROZOTT INTEGRÁL

1. A határozatlan integrál (primitív függvény) fogalma

Az $f(x)$ függvény határozatlan integrálján (primitív függvényén) olyan $F(x)$ függvényt értünk, amelyre

$$F'(x) = f(x).$$

(Tehát az $f(x)$ függvény primitív függvényének a deriváltja maga az $f(x)$.) Egy függvény primitív függvénye nincs egyértelműen meghatározva; ha $F(x)$ primitív függvény, akkor $F(x) + C$ is az, hiszen

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

A határozatlan integrált $\int f(x)\,dx$-szel jelöljük, azaz

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

2. Alapintegrálok és egyszerű integrálási szabályok

Az alapintegrálok az egyszerűbb elemi függvények deriválási szabályaiból származtathatók:

(1) $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1;\ \alpha \in \mathbf{R}$

(2) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

(3) $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \qquad a > 0;\ a \neq 1$

(4) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

(6) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \qquad |x| < 1$

(7) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

(8) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

(9) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh} x + C$

(11) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(12) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$

(13) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$

(14) $\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arcctg} x + C$

(15) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

(16) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C$

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch} x + C.$ $\quad x > 1$

Az $f \pm g$, a kf és néhány speciális összetett függvény deriválási szabályából nyerhetők az egyszerű integrálási szabályok:

(18) $\int kf = k\int f$

(19) $\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$

(20) $\int f^{\alpha} \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\quad \alpha \neq -1; \quad \alpha \in \mathbf{R}$

(21) $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$

(22) Ha $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, akkor $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

PÉLDÁK

1. $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

M: Az (**1**) szabályt alkalmaztuk $\alpha = 5$ mellett.

2. $\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4x^4} + C$

M: Az (**1**) szabályt alkalmaztuk $\alpha = -5$ mellett.

3. $\int \frac{\pi}{\sqrt[3]{17}}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[3]{17}} \cdot x + C$

M: A (**18**) szabály és (**1**) $\alpha = 0$ mellett $(1 = x^0)$.

4. $\int \left(3x^6 - 2x^4 + x + \sqrt{3}\right) dx = \int 3x^6\,dx - \int 2x^4\,dx + \int x\,dx + \int \sqrt{3}\,dx =$

$= 3\int x^6\,dx - 2\int x^4\,dx + \int x\,dx + \sqrt{3}\int dx = 3\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + \sqrt{3}\,x + C$

M: A (**18**), (**19**) szabály és (**1**).

5. $\int \left(1 - x^2\right)^3 dx = \int \left(1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6\right) dx =$

$= x - x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C$

M: Elvégezve a köbre emelést és (**18**), (**19**), (**1**).

6. $\int \frac{3x^5 - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x}}\,dx = 3\int \frac{x^5}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$

$= 3\int x^{9/2}\,dx - \int x^{-1/6}\,dx + \int x^{-1/2}\,dx = 3\,x^{11/2} - \frac{x^{5/6}}{\frac{5}{6}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C =$

$= \frac{6}{11}\sqrt{x^{11}} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} + C$

M: Tagonként osztva $\sqrt{x}$-szel és (**18**), (**19**), (**1**).

7. $\cos\dfrac{3x-1}{5}\,dx = \int \cos\left(\dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{5}\right)dx = \sin\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{5}\right)}{\dfrac{3}{5}} + C =$

$= \dfrac{5}{3}\sin\dfrac{3x-1}{5} + C$

M: A (**22**) szabály felhasználásával.

8. $\int \dfrac{e^x}{2+3e^x}\,dx = ?$

M: A tört bővítésével az integrandus $\dfrac{f'}{f}$ alakra hozható, ezért:

$\int \dfrac{e^x}{2+3e^x}\,dx = \dfrac{1}{3}\int 3\dfrac{e^x}{2+3e^x}\,dx = \dfrac{1}{3}\ln\left|2+e^{3x}\right| + C =$

$= \dfrac{1}{3}\ln\left(2+e^{3x}\right) + C$

Felhasználtuk, hogy $2+e^3>0$ bármely x valós számra teljesül.

9. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \dfrac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

M: A (**21**) szabály.

10. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \dfrac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$

M: A (**21**) szabály.

11. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx - 1\right)dx =$

$= -x + \operatorname{tg} x + C$

M: Átalakítással és (**5**).

12. $\int \dfrac{2x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int \dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = 2\int\left(1 - \dfrac{1}{1+x^2}\right)dx =$

$= 2\,(x - \operatorname{arctg} x) + C$

M: A gyakran célravezető átalakítás után – a számlálóhoz 1-et hozzáadtunk és le is vontunk – majd $(1+x^2)$-tel tagonként osztottunk és utána (**19**).

13. $\int \dfrac{3}{2x+1}\,dx = ?$

M: A számlálóban ki tudjuk alakítani a nevező deriváltját, ha a törtet $\frac{2}{3}$-al bővítjük. Ezt követően a (**21**) alkalmazható.

$$\int \frac{3}{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}\,\frac{3}{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C.$$

14. $\displaystyle\int \frac{1+2x}{x^2+x+1}\,dx = ?$

M: A számlálóban éppen a nevező deriváltja van, ezért

$$\int \frac{1+2x}{x^2+x+1}\,dx = \ln\left|x^2+x+1\right| + C$$ a (**21**) szabály alkalmazásával.

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,dx = ?$

M: Konstanssal való bővítés eredményeképpen (–5)-tel be is szorozzuk és le is osztjuk a függvényt) a feladat $\int f g'$ alakra hozható, amely (**20**) alapján kiszámítható.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,dx = \int (2-5x)^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{5}\int -5\,(2-5x)^{-1/2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\,\frac{(2-5x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C.$$

16. $\displaystyle\int 3x^3\sqrt[5]{1+x^4}\,dx = ?$

M: Az előzővel analóg módon járhatunk el:

$$\int 3x^3\sqrt[5]{1+x^4}\,dx = \frac{3}{4}\int 4x^3\left(1+x^4\right)^{1/5}dx = \frac{3}{4}\,\frac{\left(1+x^4\right)^{6/5}}{\frac{6}{5}} + C =$$

$$= \frac{5}{8}\sqrt[5]{\left(1+x^4\right)^6} + C.$$

17. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{3x+2} = ?$

M: Alakítsuk át az integrálandó függvényt, válasszuk le a törtkifejezés egész részét!

$$\frac{2x+3}{3x+2} = \frac{1}{3}\,\frac{6x+9}{3x=2} = \frac{1}{3}\,\frac{2(3x+2)+5}{3x+2} = \frac{1}{3}\left(2+\frac{5}{3x+2}\right)$$

Ezek után az integrál könnyen kiszámítható:

$$\int \frac{2x+3}{3x+2}\,dx = \int \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{9}\,\frac{3}{3x+2}\right)dx = \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\ln|3x+2| + C.$$

18. $\int \sin^3 x\,dx = ?$

M: A most alkalmazandó módszerrel mind a sin, mind a cos függvény páratlan egész kitevős hatványa integrálható (a $\sin^2 x\,dx = 1-\cos^2 x$ ill. $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ felhasználásával.)

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)\sin x\,dx = \int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx =$$

$$\int \sin x\,dx + \int\left(\cos^2 x\right)(-\sin x)\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

A második tag kiszámításánál (**20**)-at alkalmaztuk, $(\cos x)' = -\sin x$ figyelembevételével.

19. $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$

M: Egyszerű átalakítások után (**6**) és (**20**) alkalmazásával adódik a megoldás:

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-1/2}\left(1-x^2\right)'dx =$$

$$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

20. $\int\left(\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch} x}\right)^2 dx = \int \operatorname{th}^2 x\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int \operatorname{th}^2 x\,(\operatorname{th} x)'\,dx = \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + C$

M: Átalakítások és $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ felhasználásával (**20**) alkalmazásával.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

21. $\int x^3\,dx = ?$ **22.** $\int (2+3x)^5\,dx = ?$ **23.** $\int\left(2+3x^2\right)^5 dx = ?$

24. $\int \frac{1+x+2x^2}{\sqrt{x}}\,dx = ?$ **25.** $\int x\left(2+x^2\right)^3 dx = ?$

26. $\int x^2\left(2+x^2\right)^3 dx = ?$ **27.** $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = ?$ **28.** $\int \frac{x-2}{x^2-4x+1} = ?$

29. $\int \sqrt{3x-4}\, dx = ?$ **30.** $\int \sqrt[7]{x+5}\, dx = ?$ **31.** $\int \frac{\lg x}{x} dx = ?$

32. $\int \frac{1}{x \lg x} dx = ?$ **33.** $\int \frac{\ln^3 x}{3x} dx = ?$ **34.** $\int \frac{e^x}{2-e^x} dx = ?$

35. $\int x^2 \sqrt{1+x^3}\, dx = ?$ **36.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = ?$

37. $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{2-e^x}} dx = ?$ **38.** $\int \cos^3 x\, dx = ?$ **39.** $\int \cos^2 x\, dx = ?$

40. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx = ?$ **41.** $\int \cos x \sqrt{1+\sin x}\, dx = ?$

42. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+\sin x}} dx = ?$ **43.** $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = ?$ **44.** $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = ?$

45. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$ **46.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1+\cos x)^2}} dx = ?$

47. $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = ?$ **48.** $\int \frac{-1}{\sqrt{1-9x^2}} dx = ?$

49. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx = ?$ **50.** $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = ?$

51. $\int \frac{2^{-x}+x^3}{x^3\, 2^{-x}} dx = ?$ **52.** $\int \frac{2x^2-x^3 e^{-x}}{3x^3} dx = ?$

53. $\int \frac{\operatorname{arsh} x}{\sqrt{x^2+1}} dx = ?$ **54.** $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{cth} x}}{\operatorname{sh}^2 x} dx = ?$

ÚTMUTATÁSOK

21. Alapintegrál
22. Bővítse a kifejezést 3-mal és alkalmazza (**20**)-at!
23. Végezze el a hatványozást és integráljon tagonként (**19**) szerint!
24. Osszon tagról-tagra és alkalmazza (**19**)-t!
25. Bővítsen 2-vel és (**20**) szerint járjon el!
26. Végezze el a műveleteket!
27. Bővítsen 4-gyel, a (**21**) típusú feladathoz jut!
28. Az előző feladat mintájára oldható meg!
29. Bővítsen 3-mal, alkalmazza (**20**)-at!
30. Közvetlenül alkalmazható rá (**20**).
31. ln 10-zel bővítve (**20**) típusú.
32. ln 10-zel bővítve (**21**) típusú.
33. $k = \frac{1}{3}$ -ot az integrál elé kihozva (**20**) típusú.
34. (– 1)-gyel bővítve (**21**) típusú feladathoz jutunk.
35. (**20**) felhasználásával megoldható.
36. Bővítés után alkalmazza (**20**)-at!
37. Lásd az előző feladat útmutatását!
38. $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = \left(1 - \sin^2 x\right)(\sin x)'$.
39. Alkalmazza a $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ linearizáló formulát!

40. A nevező deriváltja csak egy előjelben különbözik a számlálótól, (**21**) segítségével egyszerűen adódik a megoldás.

41. és **42.** A gyökjel alatti kifejezés deriváltja éppen cos x, ezért (**20**) közvetlenül alkalmazható.

43. A számlálóban a nevező deriváltja van, (**21**) szerint járjon el!

44. Az integrandus $(\operatorname{tg} x)^2\ (\operatorname{tg} x)'$ -vel egyenlő.

45. Használja fel, hogy $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$!

46. $\sin x\ (1 + \cos x)^{-2/3}$, könnyen kiszámolható (**20**) szerint.

47. Alkalmazza a $4x^2 = (2x)^2$ azonosságot és (**22**)-t az $F = \operatorname{arctg}$ függvényre!

48. Az előző feladatnál alkalmazott ötlet most is célravezet (értelemszerű módosításokkal).

49. Bővítsen a nevező „konjugáltjával". Osszon tagról-tagra az $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$-tel. Az első tag alapintegrál a második (**20**)-szal könnyen kiszámolható, az utolsóra alkalmazza a $\operatorname{ctg}^2 x = -1 + \frac{1}{\sin^2 x}$ azonosságot!

50. Bővítsen a nevező „konjugáltjával" és osszon $\sin^2 x$ -tel tagonként. Alapintegrált és (**20**) típusú integrált kap.

51. és **52.** Osszon tagonként!

53. Alkalmazza az $(\operatorname{arsh} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$-et és (**20**)-at!

54. Alkalmazza (**20**)-at!

FELADATOK

Számítsa ki az alábbi integrálokat:

55. $\int \left(x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x}\right) dx = ?$

56. $\int (1 + 2x)^3 \, dx = ?$

57. $\int \left(1 + 2x^2\right)^3 dx = ?$

58. $\int x^2\left(1 + x^3\right)^{14} dx = ?$

59. $\int x^4\left(1 + x^3\right)^2 dx = ?$

60. $\int \dfrac{x^2}{1 + x} \, dx = ?$

61. $\int \sqrt[5]{4 + 3x} \, dx = ?$

62. $\int \dfrac{x^2 + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = ?$

63. $\int \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \, dx = ?$

64. $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1} + \sqrt{2x + 1}} \, dx = ?$

65. $\int \dfrac{e^{2x}}{2 + e^{2x}} \, dx = ?$

66. $\int \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x} \, dx = ?$

67. $\int \sin^2 x \, dx = ?$

68. $\int (\sin 2x) \sqrt[3]{1 + \sin^2 x} \, dx = ?$

69. $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx = ?$

70. $\int \dfrac{1}{(\arccos x)\sqrt{1 - x^2}} \, dx = ?$

71. $\int \dfrac{\lg^5 x}{5x} \, dx = ?$

72. $\int \dfrac{\lg 3x}{3x} \, dx = ?$

73. $\int \dfrac{\cos x}{1 + \cos x} \, dx = ?$

74. $\int \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2 + 5} - \sqrt{2x^2 + 3}} \, dx = ?$

75. $\int \frac{1}{(\mathrm{th}\ x)\ \mathrm{ch}^2 x}\, dx = ?$ **76.** $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{cth}\ x}}{\mathrm{sh}^2 x}\, dx = ?$

MEGOLDÁSOK

21. $\frac{x^4}{4} + C$

22. $\frac{1}{3}\ \frac{(2+3x)^6}{6} + C$

23. $32x + 80x^3 + 144x^5 + \frac{1080}{7}x^7 + 90x^9 + \frac{243}{11}x^{11} + C$

24. $2\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$

25. $\frac{1}{2}\ \frac{\left(2+x^2\right)^4}{4} + C$

26. $\frac{8}{3}x^3 + \frac{12}{5}x^5 + \frac{6}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + C$

27. $\frac{1}{4}\ln\left(1 + x^4\right) + C$

28. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 4x + 1\right| + C$

29. $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3} + C$

30. $\frac{7}{8}(x+5)^{\frac{8}{7}} + C$

31. $(\ln 10)\ \frac{\lg^2 x}{2} + C$

32. $(\ln 10)\ \ln|\lg x| + C$

33. $\frac{\ln^4 x}{12} + c$

34. $-\ln\left|2 - e^x\right| + C$

35. $\frac{2}{9}\sqrt{\left(1+x^3\right)^3} + C$

36. $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C$

37. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(2-e^x\right)^2} + C$

38. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

39. $\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C$

40. $-\ln\left(1 + \cos^2 x\right) + C$

41. $\frac{2}{3}(1 + \sin x)^{3/2} + C$

42. $\frac{3}{2}\,(1+\sin\,x)^{2/3}+C$ **43.** $\ln(\,1+\sin x\,)+C$

44. $\frac{\mathrm{tg}^3\,x}{3}+C$ **45.** $-\frac{(\arccos x)^2}{2}+C$

46. $-3\cdot\sqrt[3]{1+\cos\,x}+C$ **47.** $\frac{\mathrm{arctg}\,(2\,x)}{2}+C$ **48.** $\frac{\arccos\,(3\,x)}{3}+C$

49. $-2\cdot\mathrm{ctg}\,x+\frac{2}{\sin\,x}-x+C$ **50.** $-\mathrm{ctg}\,x+\frac{1}{\sin\,x}+C$

51. $\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{2^x}{\ln 2}+C$ **52.** $\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{e^{-x}}{3}+C$

53. $\frac{(\mathrm{arsh}\,x)^2}{2}+C$ **54.** $-\frac{3}{4}\,(\mathrm{cth}\,x)^{4/3}+C$

55. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|+C$ **56.** $\frac{(1+2\,x)^4}{4}\cdot\frac{1}{2}+C$

57. $x+2\,x^3+\frac{12}{5}\,x^5+\frac{8}{7}\,x^7+C$ **58.** $\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+x^3)^{15}}{15}+C$

59. $\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^8}{8}+\frac{x^{11}}{11}+C$ **60.** $\frac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|+C$

61. $\frac{5}{18}\,\sqrt[5]{(4+3\,x)^6}+C$ **62.** $\frac{2}{5}\,x^{5/2}+2\,x^{1/2}+\ln|x|+C$

63. $x+\mathrm{arctg}\,x+C$ **64.** $-\frac{1}{6}\left[(2\,x-1)^{3/2}-(2\,x+1)^{3/2}\right]+C$

65. $\frac{1}{2}\,\ln\left(2+e^{2\,x}\right)+C$ **66.** $e^x-e^{-x}+C$ **67.** $\frac{1}{2}-\frac{\sin\,2\,x}{4}+C$

68. $\frac{3}{4}\,(1+\sin^2 x)^{4/3}+C$ **69.** $\frac{\mathrm{tg}^3\,x}{3}+C$ **70.** $-\ln|\arccos x|+C$

71. $\ln 10 \cdot \frac{\lg^6 x}{30} + C$ **72.** $\ln 10 \frac{\lg^2 (3x)}{6} + C$ **73.** $x - \frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + C$

74. $\frac{1}{4}\sqrt{\left(2x^2+5\right)^3} + \frac{1}{4}\sqrt{\left(2x^2+3\right)^3} + C$

75. $\ln|\operatorname{th} x| + C$ **76.** $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{cth}^4 x} + C$

3. Parciális integrálás

A szorzat differenciálási szabályából nyerhető integrálási szabály, *a parciális integrálás* képlete:

$$\textbf{(23)} \quad \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx.$$

PÉLDÁK

77. $\int x e^x \, dx = ?$

M: Legyen $u(x) = x$ akkor $u'(x) = 1$ $v'(x) = e^x$ akkor $v(x) = e^x$
és így (**23**)-at alkalmazva:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

eredményre jutunk. A „C" konstans értékét elég csak akkor kiírni, amikor már az utolsó integrálást is elvégeztük.

78. $\int \left(x^2 + 3x - 1\right) \sin x \, dx = ?$

M: Legyen $u(x) = x^2 + 3x - 1$ akkor $u'(x) = 2x + 3$
$v'(x) = \sin x$ akkor $v(x) = -\cos x$
és így a (**23**)-at alkalmazva:

$$\int \left(x^2 + 3x - 1\right) \sin x \, dx = -\left(x^2 + 3x - 1\right) \cos x + \int (2x + 3) \cos x \, dx.$$

Itt a jobb oldalon szereplő integrál az előző példától eltérően nem alapintegrál, viszont az eredetinél egyszerűbb problémához jutottunk, mert a polinom nem másodfokú, hanem elsőfokú lett. (Az, hogy a sin helyett cos szerepel nem lényeges változás.) Számítsuk ki ezt az integrált is (**23**) alkalmazásával.
Legyen $u(x) = 2x + 3$ akkor $u'(x) = 2$ $v'(x) = \cos x$ akkor $v(x) = \sin x$

Ezek felhasználásával

$$\int (2x+3)\cos x \; dx = (2x+3)\sin x - \int 2\sin x \; dx =$$
$$= (2x+3)\sin x + 2\cos x + C$$

adódik, aminek az előzőbe való visszahelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\int \left(x^2+3x-1\right)\sin x \; dx =$$
$$= -\left(x^2+3x-1\right)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x + C$$

79. $\int x\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) dx = ?$

M: Legyen $u(x) = x$ akkor $u'(x) = 1$

$$v'(x) = \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{akkor} \quad v(x) = \frac{\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)}{3}$$

és így (**23**) és (**22**) alkalmazásával

$$\int x\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) dx = \frac{x}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3}\int \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) dx =$$
$$= \frac{x}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{-\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)}{3} + C.$$

80. $\int \ln x \; dx = ?$

M: Az $\ln x$ felírható $1\cdot\ln x$ alakban. Legyen $v'(x) = 1$ akkor $v(x) = x$ és $u(x) = \ln x$ akkor $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Helyettesítsünk be a (**23**) képletbe:

$$\int \ln x \; dx = \int 1\cdot\ln x \; dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\; dx =$$
$$= x\ln x - \int dx = x\cdot\ln x - x + C.$$

81. $\int \left(x^5+x^3-1\right)\ln 2x \; dx = ?$

M: Legyen $v'(x) = x^5+x^3-1$ akkor $v(x) = \frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}-x;$

$$u(x) = \ln 2x, \qquad \text{akkor} \quad u'(x) = \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{1}{x}.$$

Ezek felhasználásával (23) alapján:

$$\int \left(x^5+x^3-1\right)\ln 2x\; dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}-x\right)\ln 2x-\int\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}-x\right)\cdot\frac{1}{x}\; dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}-x\right)\ln 2x-\int\left(\frac{x^5}{6}+\frac{x^3}{4}-1\right)\; dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}+x^4ove4-x\right)\ln 2x-\frac{x^6}{36}-\frac{x^4}{16}+x+C$$

adódik.

82. $\int \arcsin x\; dx=\;?$

M: Legyen $v\,'(x)=1,$ akkor $v\,(x)=x;$

$u\,(x)=\arcsin x,$ akkor $u\,'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Alkalmazzuk a parciális integrálás (23) képletét, azt követően használjuk fel az $\left(1-x^2\right)'=-2x$ összefüggést!

$$\int \arcsin x\; dx=\int 1\cdot\arcsin x\; dx=x\arcsin x-\int x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\; dx=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x)\; dx=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\,\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}+C=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

83. $\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\; dx=\;?$

M: A parciális integráláshoz legyen pl. $u\,(x)=e^{-x}$ akkor $u\,'(x)=-e^{-x}$

$v\,'(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ akkor $v\,(x)=-2\cos\dfrac{x}{2},$

így (23) szerint a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\mathrm{I}=\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\; dx=-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}-2\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\; dx$$

Látszólag nem kerültünk közelebb a feladat megoldásához, mert a még kiszámítandó integrálban – miként az eredeti feladatban – egy exponenciális és egy trigonometrikus függvény szorzata szerepel. Látni fogjuk azonban, hogy újabb parciális integrálás után egy olyan egyenletet kapunk, amelyből a keresett integrál egyszerűen kifejezhető.

Legyen ismét a „vesszőtlen tényező" az exponenciális függvény, mint az első integrálásnál volt (fordított szereposztás esetén a $0 = 0$ azonossághoz jutnánk), azaz

$u(x) = e^{-x}$, ezért $u'(x) = -e^{-x}$; $v'(x) = \cos\frac{x}{2}$, ezért $v(x) = 2\sin\frac{x}{2}$.

Ekkor (23) szerint a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} + 2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx$$

Ezt az előző egyenletünkbe helyettesítve:

$$\mathrm{I} = \int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx = -2e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 2\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= -2e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 2\left(2e^{-x}\sin\frac{x}{2} + 2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}\,dx\right) =$$

$$= -2e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4\,\mathrm{I}$$

Az egyenletet I-re megoldva

$$5\,\mathrm{I} = -2e^{-x}\cos\frac{x}{2} - 4e^{-x}\sin\frac{x}{2} + C_1 \quad \text{ahonnan:}$$

$$\mathrm{I} = -\frac{2}{5}e^{-x}\cos\frac{x}{2} - \frac{4}{5}e^{-x}\sin\frac{x}{2} + C$$

adódik, ahol a C_1 tetszőleges konstans $\frac{1}{5}$-szerese, C szintén egy tetszőleges konstans. Szabad mindkettőt egyszerűen C-vel jelölni. Megjegyezzük továbbá, hogy átrendezés előtt tekinthettük úgy, hogy az egyenlet jobb oldalán álló $-4\,\mathrm{I}$ magába foglalja az előző parciális integráloknál ki nem írt konstanst is.
Amikor az egyenlet mindkét oldalához hozzáadtuk a $4\,\mathrm{I}$ értéket, az egyenlet jobb oldalán a C_1 konstanst ki kell írnunk.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

85. $\int 3x\sin 4x\,dx = ?$

86. $\int \left(x^2-1\right)e^{-x}\,dx = ?$

87. $\int x\,e^{2x+1}\,dx = ?$

88. $\int e^{2x}\cos\frac{x}{2}\,dx = ?$

89. $\int \left(2x^2+x-1\right)e^{x}\,dx = ?$

90. $\int 2^{x}\sin x\,dx = ?$

91. $\int \ln x^2 \, dx = ?$ **92.** $\int \lg x \, dx = ?$ **93.** $\int x^2 \ln x^2 \, dx = ?$

94. $\int x^2 \ln^2 x \, dx = ?$ **95.** $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

96. $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = ?$ **97.** $\int \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1+x}} \, dx = ?$

98. $\int x \sin^2 x \, dx = ?$ **99.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = ?$ **100.** $\int e^{2x} \cos x \, dx = ?$

101. $\int e^x \sin 2x \, dx = ?$ **102.** $\int 3^x \sin x \, dx = ?$

ÚTMUTATÁSOK

85. Legyen $u(x) = 3x$ és $v'(x) = \sin 4x$ és alkalmazza (**23**)-at.

86. Integráljon kétszer parciálisan. Mindkétszer legyen $u(x)$ a polinom, $v'(x)$ az exponenciális függvény.

87. $u(x) = x, \quad v'(x) = e^{2x+1}$.

88. Integráljon kétszer parciálisan. Legyen mindkétszer pl. $u(x)$ az exponenciális függvény. Így visszakapja az eredeti integrál konstansszorosát. Ezt követően egyenletrendezéssel oldható meg a feladat.

89. A 86. feladatnál mondottak szerint járjon el!

90. Lásd a 88. feladat útmutatását!

91. Legyen $v'(x) = 1, \quad u(x) = \ln x^2$.

92. $v'(x) = 1$ és $u(x) = \lg(x)$ „szereposztással" dolgozzon!

93. $v'(x) = x^2, \quad u(x) = \ln x^2$.

94. Kétszer kell parciálisan integrálni, a logaritmus mindkétszer a „vesszőtlen" függvény legyen!

95., **96.** és **97.** Az arcus függvény legyen a „vesszőtlen", így parciális integrálás után az integráljel mögött algebrai függvény lesz.

98. Alkalmazza a $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ linearizáló formulát, ezt követően integráljon parciálisan!

99. Legyen $u(x) = x^2$ és $v'(x) = x\left(1 + x^2\right)^{-1/2}$.

100., **101.** és **102.** feladatokhoz lásd a **88.** feladat útmutatásait!

FELADATOK

103. $\int 2x \cos x \, dx = ?$

104. $\int 2x \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx = ?$

105. $\int \left(x^3 - x\right) \sin 2x \, dx = ?$

106. $\int \left(x^3 - x\right) e^{-x} dx = ?$

107. $\int (x-1) \sin(1-3x) \, dx = ?$

108. $\int x \cdot 5^x dx = ?$

109. $\int x e^{\frac{1-x}{2}} dx = ?$

110. $\int \ln^2 x \, dx = ?$

111. $\int x \lg x \, dx = ?$

112. $\int x^7 \ln x \, dx = ?$

113. $\int \arcsin x \, dx = ?$

114. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

115. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx = ?$

116. $\int e^{2x} \cos x \, dx = ?$

117. $\int 3^x \cos x \, dx = ?$

118. $\int (\sin 2x) e^x dx = ?$

MEGOLDÁSOK

85. $-\frac{3}{4} x \cos 4x + \frac{3}{16} \sin 4x + C$

86. $-(x+1)^2 e^{-x} + C$

87. $\frac{x}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1} + C$

88. $\frac{2}{17} e^{2x} \sin \frac{x}{2} + \frac{8}{17} e^{2x} \cos \frac{x}{2} + C$

89. $e^x (2x^2 - 3x + 2) + C$

90. $\frac{1}{1+\ln^2 2} 2^x (-\cos x + (\sin x) \ln 2) + C$

91. $x \cdot (\ln x^2) - 2x + C$

92. $x \lg x - \frac{x}{\ln 10} + C$

93. $\frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9} x^3 + C$

94. $\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2x^3}{27} + C$

95. $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

96. $\frac{2}{3}\, x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} \ln|\,1 + x\,| + C$

97. $\sqrt{1+x}\, \arcsin x + 2\sqrt{1-x} + C$

98. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos\, 2x + C$

99. $x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} + C$

100. $\frac{1}{5}\, e^{2x} \sin x + \frac{2}{5}\, e^{2x} \cos x + C$

101. $\frac{1}{5}\, e^x (\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

102. $\frac{1}{1+\ln^2 3} \cdot 3^x (-\cos x + (\sin x) \ln 3) + C$

103. $2x\, \sin x + 2\cos x + C$

104. $\frac{2}{3}\, x\, \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{9} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + C$

105. $-\frac{x^3 - x}{2} \cos 2x + \frac{3x^2 - 1}{4} \sin 2x + \frac{6\,x}{8} \cos 2x - \frac{6}{16} \sin 2x + C$

106. $e^x\left(x^3 - 3x^2 + 5x - 5\right) + C$

107. $\frac{x-1}{3} \cos(1 - 3x) + \frac{1}{9} \sin\,(1 - 3x) + C$

108. $\frac{x\,5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5} + C$

109. $e^{1 - x/2}(-2x - 4) + C$

110. $x\left(\ln^2 x\right) - 2x(\ln x) + 2x + C$

111. $\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4 \ln 10} + C$

112. $\frac{x^8}{8} \ln x - \frac{x^8}{64} + C$

113. $x\, \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

114. $\frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$

115. $2\sqrt{1+x}\, \arccos x - 4\sqrt{1-x} + C$

116. $\frac{1}{5}\, e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$

117. $\frac{1}{1+\ln^2 3}\left(3^x \sin x + (\ln 3)\, 3^x \cos x\right) + C$

118. $\frac{1}{5}\, e^{x}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

4. Integrálás helyettesítéssel

Az összetett függvény differenciálási szabályából nyerhető a helyettesítéses integrálás képlete:

(24) $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$	$u = g(x)$
(25) $\int f(x)\, dx = \int f(g(u))\, g'(u)\, du$	$u = g^{-1}(x)$

ahol $g^{-1}(x)$ a $g(x)$ függvény inverze.

PÉLDÁK

119. $\int x^2 e^{x^3}\, dx = ?$

M: 3-mal való bővítés után az $f : f(x) = e^x$ és $g : g(x) = x^3$ jelöléssel a (**24**) bal oldalán álló kifejezést ismerhetjük fel az integrálunkban:

$$\int x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} 3x^2\, dx = \frac{1}{3}\int e^{u}\, du \,\Big|_{u = x^3} =$$

$$= \frac{1}{3} e^{u} \,\Big|_{u = x^3} + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Mivel a helyettesítéses integrállal megoldható feladattípusok nagy részében nem lehet triviálisan felfedezni a (**24**) bal oldalát, ezért oldjuk meg a fenti egyszerű feladatot a gyakrabban alkalmazott (**25**) segítségével is.

Az $f(x) = x^2 e^{x^3}$ és $x = g(u) = \sqrt[3]{u}$ választás után

$g'(u) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{u^2}}$ és $x = g(u) = \sqrt[3]{u}$ adódik, és így (**25**) szerint

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int (\sqrt[3]{u})^2 e^{(\sqrt[3]{u})^3} \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\, du \Bigg|_{u = x^3} = \int \frac{1}{3} e^u\, du \Bigg|_{u = x^3} =$$

$$= \frac{1}{3} e^u \Bigg|_{u = x^3} + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

A gyakorlatban a $\Big|_{u = g^{-1}(x)}$ kifejezést nem szokás kiírni, csak miután az integrálást elvégeztük, térünk vissza az eredeti változóra. Továbbá az $f(g(u))$ kiszámítása után, a helyettesítést definiáló $x = g(u)$ egyenlőség mindkét oldalának u szerinti deriválásával keletkező $\dfrac{dx}{du} = g'(u)$ egyenlőségből dx formális kifejezésével származó $dx = g'(u)\, du$ helyettesítést alkalmazzuk.

Lássuk ezt példánkon!

Alkalmazzuk az $x = \sqrt[3]{u}$ helyettesítést. Ekkor $\dfrac{dx}{du} = (\sqrt[3]{u})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$, amiből formálisan $dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\, du$ és így ha x helyére végig $\sqrt[3]{u}$-t, dx helyére $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$-t írunk, akkor

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int (\sqrt[3]{u})^2 e^u \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\, du = \int \frac{1}{3} e^u\, du =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u + C = \frac{1}{3}\int e^{x^3} + C.$$

120. $\displaystyle\int \frac{3x}{1 + 2\sqrt{x}}\, dx = ?$

M: Legyen $1 + 2\sqrt{x} = u$, vagyis $x = \left(\dfrac{u-1}{2}\right)^2$. Ekkor $\dfrac{dx}{du} = 2 \cdot \left(\dfrac{u-1}{2}\right)^1 \cdot \dfrac{1}{2}$, tehát $dx = \dfrac{u-1}{2}\, du$.

Az x és dx fenti értékeit behelyettesítve

$$\int \frac{3x}{1 + 2\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{3 \cdot \left(\frac{u-1}{2}\right)^2}{u} \cdot \frac{u-1}{2}\, du = \frac{3}{8}\int \frac{(u-1)^3}{u}\, du =$$

$$=\frac{3}{8}\int\left(u^2-3u+3-\frac{1}{u}\right)du=\frac{3}{8}\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2}{2}+3u-\ln|u|\right)_{u=1+2\sqrt{x}}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{(1+2\sqrt{x})^3}{3}-3\,\frac{(1+2\sqrt{x})^2}{2}+3\,(1+2\sqrt{x})-\ln(1+2\sqrt{x})\right)+C.$$

(Felhasználtuk, hogy $1+2\sqrt{x}\geq 0$, ezért abszolútértékére $|1+2\sqrt{x}|=(1+2\sqrt{x})$ teljesül.)

Ha az integrálandó függvény sin x-ben, cos x-ben és tg x-ben racionális, akkor az integrandus $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$ helyettesítés után u-ban racionális lesz. Ismert trigonometriai összefüggések szerint ugyanis azt kapjuk, hogy

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

továbbá $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{2u}{1+u^2}\cdot\dfrac{1+u^2}{1-u^2}=\dfrac{2u}{1-u^2}.$

Az $x=2\operatorname{arctg}u$ összefüggésből pedig $dx=\dfrac{2}{1+u^2}\,du$ következik.

121. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x+\cos x-1}\,dx=\ ?$

M: Alkalmazzuk a fenti összefüggéseket, valamint vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$:

$$\int\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x+\cos x-1}\,dx=\int\frac{\frac{1-u^2}{2u}}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}-1}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du=$$

$$=\int\frac{1+u}{2u^2}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2}\,du+\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{-1}{2u}+\frac{1}{2}\ln|u|+C=$$

$$=\frac{-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

122. $\int \sqrt{1+3^x}\, 3^x \, dx = ?$ **123.** $\int x e^{x^2} dx = ?$

124. $\int x^2 \cos\left(x^3+1\right) dx = ?$ **125.** $\int \left(\frac{3}{x}\right)^2 e^{3/x} dx = ?$

126. $\int (1+3x) \sqrt[5]{2x+3x^2}\, dx = ?$ **127.** $\int 2x \sqrt[7]{2-x}\, dx = ?$

128. $\int \frac{2x}{2-x} dx = ?$ **129.** $\int \frac{1}{1-\sqrt[3]{1-x}} dx = ?$

130. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = ?$ **131.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx = ?$

132. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x+3}} dx = ?$ **133.** $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = ?$

134. $\int \frac{2}{1+e^x} dx = ?$ **135.** $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx = ?$

136. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = ?$ **137.** $\int \sqrt{9-x^2}\, dx = ?$

138. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^2} dx = ?$ **139.** $\int \frac{1}{\sin x} dx = ?$

ÚTMUTATÁSOK

122. Bővítsen ln 3-mal és alkalmazza (**24**)-et $g(x) = 3^x$-nel!

123–126. Bővítés után (**24**) felhasználásával megoldható feladatok.

127., **128.** $u = 2 - x$ helyettesítés célra vezet.

129. $u = 1 - \sqrt[3]{1-x}$, amiből $x = (u-1)^3 + 1$; $dx = 3(u-1)^2 du$

130. $x = \frac{1}{u}$

131. $x = u^6$

132. $u^2 = 2x + 3$, amiből $x = \frac{u^2 - 3}{2}$; $dx = u\, du$

133. $u = \cos x$, $x = \arccos u$; $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$

134. $u = e^x$, $x = \ln u$ $dx = \frac{1}{u}\, du$. Ezen kívül alkalmazzuk az $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$ azonosságot, melynek helyességéről közös nevezőre hozással meggyőződhetünk.

135. $u = e^x$ helyettesítéssel megoldható (Vö. 134.)

136. $x = \sin u$, $dx = \cos u\, du$. Alkalmazzuk továbbá a $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ linearizáló formulát!

137. Lásd az előző feladat útmutatásait, de $x = 3 \sin u$!

138. $u = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} u$, $dx = \frac{1}{\cos^2 u}\, du = \left(1 + \operatorname{tg}^2 u\right) du$

helyettesítés után alkalmazzuk a $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ trigonometrikus azonosságot, majd integráljon parciálisan!

139. Az $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítés célra vezet.

FELADATOK

140. $\int \sqrt[3]{1 + 2^x}\, 2^x\, dx = ?$

141. $\int x \sin x^2\, dx = ?$

142. $\int x^2 \cdot 3^{x^3}\, dx = ?$

143. $\int \frac{1}{x^2} e^{2/x}\, dx = ?$

144. $\int 3x\sqrt[5]{1-x}\,dx = ?$

145. $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx = ?$

146. $\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = ?$

147. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = ?$

148. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x+2}}\,dx = ?$

149. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = ?$

150. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

151. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

152. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^x-1}\,dx = ?$

153. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}-e^x-2}\,dx = ?$

154. $\int \frac{e^{3x}+3e^{2x}+3e^x}{e^x+2}\,dx = ?$

155. $\int \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos x}\,dx = ?$

MEGOLDÁSOK

122. $\frac{2}{3\ln 3}\left(\sqrt{1+3^x}\right)^3 + C$

123. $\frac{1}{2}\,e^{x^2} + C$

124. $\frac{1}{3}\,\sin\left(x^3+1\right) + C$

125. $-3\,e^{3/x} + C$

126. $\frac{5}{12}\,\sqrt[5]{\left(2x+3x^2\right)^6} + C$

127. $-\frac{7}{2}(2-x)^{8/7} + \frac{14}{15}(2-x)^{15/7} + C$

128. $-4\ln|2-x| + 2(2-x) + C$

129. $\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1-x}\right)^2 - 6\left(1-\sqrt[3]{1-x}\right) + 3\ln\left|1-\sqrt[3]{1-x}\right| + C$

130. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

131. $6\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)+C$

132. $\frac{1}{2}\sqrt{(2x+3)^3}-\frac{5}{2}\sqrt{2x+3}+C$

133. $-\operatorname{arctg}\cos x+C$ **134.** $2\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$ **135.** $-\frac{1}{1+e^x}+C$

136. $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$

137. $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}+C$

138. $\frac{1}{10}e^{\operatorname{arctg}x}(5+\cos(2\operatorname{arctg}x)+2\sin(2\operatorname{arctg}x))+C$

139. $\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C$ **140.** $\frac{1}{\ln 2}\frac{3}{4}(\sqrt[3]{1+2^x})^4+C$

141. $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$ **142.** $\frac{3^{x^3}-1}{\ln 3}+C$ **143.** $-\frac{1}{2}e^{2/x}+C$

144. $-\frac{15}{6}\sqrt[5]{(1-x)^6}+\frac{15}{11}\sqrt[5]{(1-x)^{11}}+C$

145. $-18\sqrt[3]{(3-x)^2}+\frac{12}{5}\sqrt[3]{(3-x)^5}+C$

146. $-\frac{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}{2x^2}+C$ **147.** $2\ln(1+\sqrt{x})+C$

148. $\frac{4}{27}\sqrt{(3x+2)^3}+\frac{10}{9}\sqrt{3x+2}+C$

149. $\operatorname{arctg}\sin x+C$ **150.** $e^{2\sqrt{x}}+C$ **151.** $2\sin\sqrt{x}+C$

152. $e^x - \ln|e^x - 1| + C$ **153.** $\ln\left(e^x + 1\right) + C$

154. $\dfrac{e^{2x}}{2} + e^x + \ln\left(e^x + 2\right) + C$ **155.** $-\ln\left|1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}\right| + C$

5. Racionális törtfüggvények integrálja

A racionális törtfüggvények integrálására algoritmus adható. Az ezen típushoz tartozó feladatok megoldása viszont általában hosszadalmas, ezért csak a legegyszerűbb eseteket érintjük és ezeket is példákon mutatjuk meg.

A racionális törtfüggvény integrálását minden esetben az egész rész leválasztásával célszerű kezdeni. Ez a polinomok osztásával mindig elérhető; így a feladat egy polinom integrálására és egy olyan racionális törtfüggvény integrálására vezet, melyben a számláló alacsonyabb fokú mint a nevező. (Polinomok osztására a Matematika I. könyv 152. oldalán látunk példát.)

a) A nevező elsőfokú

PÉLDÁK

156. $\displaystyle\int \frac{3}{2x-7}\,dx = ?$

M: Konstanssal való bővítés után alkalmazhatjuk (**21**)-et:

$$\int \frac{3}{2x-7}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-7}\,dx = \frac{3}{2}\ln|2x-7| + C.$$

157. $\displaystyle\int \frac{4x^3}{1-3x}\,dx = ?$

M: Az integrálást az egész rész leválasztása után könnyen elvégezhetjük

$$\int \frac{4x^3}{1-3x}\,dx = 4\int\left(-\frac{x^2}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27(1-3x)}\right)dx =$$

$$= 4\left(-\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{18} - \frac{x}{27} - \frac{1}{81}\ln|1-3x|\right) + C.$$

b) A nevező másodfokú

A nevező valós zérus helyeinek száma szerint három esetet különböztetünk meg.

α) A nevezőnek két különböző valós zérus helye van.

158. $\int \frac{2x+13}{x^2+x-2}\,dx = ?$

M: Az $\frac{ax+b}{x^2+qx+r}$ alakú tört $\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$ alakban írható fel, ahol α, β a nevező gyökei, azaz

$$\frac{ax+b}{x^2+qx+r} = \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}.$$

Az A és B számokat az

$$\frac{ax+b}{x^2+qx+r} = \frac{A(x-\beta)+B(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

egyenlőségből határozzuk meg (a jobb oldalon közös nevezőre hoztunk).

$$\frac{2x+13}{x^2+x-2}\,dx = \frac{2x+13}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} =$$
$$= \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-B}{x^2+x-2}$$

A nevezők azonossága miatt a bal és a jobb oldalon álló törtek csak úgy lehetnek az x minden lehetséges értékénél egyenlők, ha

$$A+B = 2 \quad \text{és} \quad 2A-B = 13.$$

Az egyenletrendszerünknek az $A=5$ és $B=-3$ az egyetlen megoldása, tehát

$$\int \frac{2x+13}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(\frac{5}{x-1}+\frac{-3}{x+2}\right)dx = 5\int\frac{1}{x-1}\,dx -$$
$$-3\int\frac{1}{x+2}\,dx = 5\ln|x-1|-3\ln|x-2|+C.$$

β) A nevezőnek egyetlen (két egybeeső) valós zérushelye van.

159. $\int \frac{4x+1}{4x^2-4x+1}\,dx = ?$

M: $\frac{4x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{4x+1}{(2x-1)^2} = \frac{A}{(2x-1)^2}+\frac{B}{2x-1} =$

$$= \frac{A+2Bx-B}{(2x-1)^2} = \frac{2Bx+A-B}{4x^2-4x+1}$$

A két oldal pontosan akkor azonosan egyenlő, ha

$$2B = 4 \qquad \text{és} \qquad A - B = 1$$

Ebből $B = 2$ és $A = 3$ adódik és így

$$\int \frac{4x+1}{4x^2-4x+2}\,dx = \int \left(\frac{3}{(2x-1)^2} + \frac{2}{2x-1} \right) dx =$$

$$= 3\int (2x-1)^{-2}\,dx + \int \frac{2}{2x-1}\,dx =$$

$$= 3\,\frac{(2x-1)^{-1}}{-2} + \ln|2x-1| + C = \frac{-3}{2(2x-1)} + \ln|2x-1| + C.$$

γ) *A nevezőnek nincs valós zérushelye.*

160. $\int \frac{x+6}{x^2+4x+8}\,dx = ?$

M: A tört bővítését követően a számlálót egy olyan kéttagú összegre bontjuk, melynek első tagja a nevező deriváltja:

$$\int \frac{x+6}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+12}{2x+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)+8}{x^2+4x+8}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8}{x^2+4x+8}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| + 4\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$$

A $4\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$ kiszámításához a nevezőben válasszunk le egy teljes négyzetet

$$4\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = 4\int \frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

Tehát az eredeti integrál:

$$\int \frac{x+4}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+8\right) + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}+1\right) + C.$$

Magasabb fokú nevező esetén a racionális törtfüggvény integrálját szintén parciális törtekre bontással lehet meghatározni.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

161. $\int \frac{2}{3x-1}\,dx = ?$

162. $\int \frac{x^2}{1-3x}\,dx = ?$

163. $\int \frac{5}{x^2-1}\,dx = ?$

164. $\int \frac{5x+1}{x^2-1}\,dx = ?$

165. $\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,dx = ?$

166. $\int \frac{8x+7}{(x-1)(2x+3)}\,dx = ?$

167. $\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,dx = ?$

168. $\int \frac{3x+1}{9x^2-6x+1}\,dx = ?$

169. $\int \frac{3x}{x^2+4}\,dx = ?$

170. $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}\,dx = ?$

ÚTMUTATÁSOK

161. Emeljen ki $\frac{2}{3}$-ot az integráljel elé!

162. Válassza le a tört egész részét!

$$\frac{x^2}{1-3x} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-3x}$$

163. és **164.** $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ alakban keresse a tört felbontását!

165. $\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{x-2}{x^2+2x-3}.$

166. Most is két zérushelye van a nevezőnek az előző feladat mintájára kezelendő.

167. $\frac{2x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1}$ adja a felbontást.

168. $\dfrac{A}{(3x-1)^2}+\dfrac{B}{(3x-1)}$ alakú felbontásból induljon ki!

169., 170. A nevezőnek nincs valós zérushelye, az erre vonatkozó mintafeladat szerint járjon el.

FELADATOK

171. $\int \dfrac{4}{2-3x}\,dx = ?$

172. $\int \dfrac{4x^2}{2x-1}\,dx = ?$

173. $\int \dfrac{x-1}{(x-4)^2}\,dx = ?$

174. $\int \dfrac{x-1}{x^2-4}\,dx = ?$

175. $\int \dfrac{5}{x^2+4x-5}\,dx = ?$

176. $\int \dfrac{x+1}{x^2+4x-5}\,dx = ?$

177. $\int \dfrac{x+13}{x^2+x-6}\,dx = ?$

178. $\int \dfrac{2x-1}{9x^2+12x+4}\,dx = ?$

179. $\int \dfrac{10x-8}{4x^2-4x+1}\,dx = ?$

180. $\int \dfrac{2x-3}{x^2+4x+13}\,dx = ?$

181. $\int \dfrac{2x-3}{x^2+4x+6}\,dx = ?$

182. $\int \dfrac{3x-1}{x^2+6x+13}\,dx = ?$

183. $\int \dfrac{1}{x^2-5x+6}\,dx = ?$

MEGOLDÁSOK

161. $\dfrac{2}{3}\ln|3x-1|+C$

162. $-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{27}\ln|1-3x|+C$

163. $\dfrac{5}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

164. $3\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C$

165. $\frac{5}{4}\ln|x+3|-\frac{1}{4}\ln|x-1|+C$

166. $3\ln|x-1|+\ln|2x+3|+C$

167. $-\frac{5}{x-1}+2\ln|x-1|+C$

168. $-\frac{2}{3(3x-1)}+\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C$

169. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)+4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$

170. $\ln\left(x^2+4x+13\right)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$

171. $-\frac{4}{3}\ln|2-3x|+C$

172. $x^2+x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$

173. $\frac{-3}{x-4}+\ln|x-4|+C$

174. $\frac{1}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\ln|x+2|+C$

175. $\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$

176. $\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x+5|+C$

177. $-2\ln|x+3|+3\ln|x-2|+C$

178. $\frac{7}{9(3x+2)}+\frac{2}{9}\ln|3x+2|+C$

179. $\frac{3}{2(2x-1)}+\frac{5}{2}\ln|2x-1|+C$

180. $\ln\left(x^2+4x+13\right)-\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C$

181. $\ln\left(x^2+4x+6\right)-\frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+C$

182. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right|-5\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right)+C$

183. $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$

6. A határozott integrál kiszámítása

Ha az f függvény Riemann integrálható az [a, b] intervallumon és ezen az intervallumon az F egy primitív függvénye az f-nek, akkor

(26) $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ (*Newton–Leibniz formula.*)

PÉLDÁK

184. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$

M: A (26) formula alkalmazásához az alapintegráloknál látott módszerrel megkeressük az $f : f(x) = x\sqrt{1+x^2}$-nek egy primitív függvényét. Minthogy $F(b) - F(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C)$, ezért célszerűen azt a primitív függvényt használjuk, amelyben $C = 0$.

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left((\sqrt{2})^3 - (\sqrt{1})^3\right) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

185. $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}\cdot \sin x\,dx = -\int_0^{\pi/2} e^{\cos x}(\cos x)'\,dx =$

$$= -\left[e^{\cos x}\right]_0^{\pi/2} = -(1-e) = e - 1.$$

186. $\int_0^1 \frac{3x}{1+2\sqrt{x}}\,dx = ?$

M: A primitív függvényt a helyettesítéses integrálás módszerével tudjuk meghatározni. Gyorsabban jutunk célhoz, ha a határokat transzformáljuk. Ebben az esetben a Newton–Leibniz formula alkalmazása előtt szükségtelen az eredeti változóra visszatérni.

Legyen $u = 1 + 2\sqrt{x}$, vagyis $x = \left(\frac{u-1}{2}\right)^2$.

A $\overline{g} : \overline{g}(x) = 1 + 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ függvény szigorúan növekszik az értelmezési tartományában, ezért inverze g is szigorúan monoton növekvő függvény. Tehát a helyettesítés végrehajtható. Ha a régi változó $x = 0$, akkor az új változó $u = 1$ és ha $x = 1$, akkor $u = 3$. Ezért az új integrálási határok 1 és 3.

$$\frac{dx}{du} = 2\left(\frac{u-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{u-1}{2}, \text{ amiből } dx = \frac{u-1}{2}\,du$$

adódik, tehát

$$\int_0^1 \frac{3x}{1+2\sqrt{x}}\,dx = 3\int_1^3 \left(\frac{u-1}{2}\right)^2 \frac{1}{u}\,\frac{u-1}{2}\,du =$$

$$= \frac{3}{8}\int_1^3 \left(u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{3}{8}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 3u - \ln u\right]_1^3 =$$

$$= 1 - \frac{3}{8}\ln 3$$

Megjegyezzük, hogy a kérdéses integrált az

$$\int_0^1 \frac{3x}{1+2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \left[\frac{3}{8}\left(\frac{(1+2\sqrt{x})^3}{3} - \frac{3(1+2\sqrt{x})^2}{2} + 3(1+2\sqrt{x}) - \ln(1+2\sqrt{x})\right)\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{3}{8}\ln 3$$

módon is kiszámíthatjuk (Vö. a 120. sz. feladattal).

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

187. $\displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{3}} x^2\,dx = ?$ **188.** $\displaystyle\int_0^1 (2 + 3x^2 - 2\sqrt{x})\,dx = ?$

189. $\displaystyle\int_0^4 \frac{3}{2x+1}\,dx = ?$ **190.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin 2x)\cos x\,dx = ?$

191. $\int_0^1 (x^2 - 1)\, e^{-x}\, dx = ?$ **192.** $\int_1^e \ln x^3\, dx = ?$

193. $\int_0^{\pi} e^x \sin 2x\, dx = ?$ **194.** $\int_1^2 \frac{-1}{x^2\sqrt{1+4x^2}}\, dx = ?$

195. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = ?$ **196.** $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\, dx = ?$

ÚTMUTATÁSOK

187 – 190. A primitív függvényt határozzuk meg az „Alapintegrálok és egyszerű integrálási szabályok" c. részben tanultak szerint, majd alkalmazzuk a Newton–Leibniz formulát!

191., **192.** és **193.** Integráljunk parciálisan! **191.** Vö. **86.**, **192**-ben $f'(x) = 1$, $g(x) = \ln x^3$, **193.** Vö. **101.**

194. $u = \frac{1}{x}$ helyettesítés célra vezet.

195. Alkalmazzuk az $u = \sin x$ helyettesítést! Vö. **136.**

196. Legyen $u^2 = 1 + x$. Ekkor az integrálás új határai 1 illetve 2 lesznek.

FELADATOK

Oldjuk meg az alábbi feladatokat a Newton–Leibniz formula felhasználásával!

197. $\int_0^1 \left(e^{3x} + \sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right) x = ?$ **198.** $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+4x^2}\, dx = ?$

199. $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x}{4\cos x + 5}\, dx = ?$ **200.** $\int_0^1 2^x \left(\frac{1-2^x}{\ln 2}\right)^4 dx = ?$

201. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^{\sin x} \cos x\, dx = ?$ **202.** $\int_1^{10} \frac{\lg^3 x}{3x}\, dx = ?$

203. $\int_0^{\pi/3} 4x \cos 3x \, dx = ?$ **204.** $\int_1^3 \log_3 x \, dx = ?$

205. $\int_0^4 x\sqrt{3x+4} \, dx = ?$ **206.** $\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx = ?$

MEGOLDÁSOK

187. $\frac{2}{3}$ **188.** $\frac{5}{3}$ **189.** $\ln 27$ **190.** $\frac{2}{3}$

191. $1 - \frac{4}{e}$ **192.** 3 **193.** $\frac{2}{5}\left(1 - e^{\pi}\right)$

194. $\frac{\sqrt{17}}{2} - \sqrt{5}$ **195.** $\frac{\pi}{4}$ **196.** $\frac{116}{15}$ **197.** $\frac{e^3+1}{3}$

198. $\frac{\pi}{8}$ **199.** $\frac{3}{4} \ln \frac{9}{5}$ **200.** $\frac{1}{5 \ln^5 2}$

201. $\frac{-1}{\ln 2}$ **202.** $\frac{\ln 10}{12}$ **203.** $-\frac{8}{9}$

204. $3 - \frac{2}{\ln 3}$ **205.** $\frac{3712}{135}$ **206.** $\frac{\pi}{2}$

7. A határozott integrál alkalmazásai

1. Síkidomok területe

Ha az f és g függvények *folytonosak* az $[a,b]$ intervallumon és $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$, akkor az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ egyenletű görbék, továbbá az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt *terület:*

$$(27)\quad T = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx.$$

Ha a görbe *paraméteres egyenletrendszere*

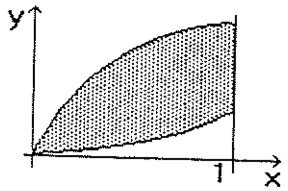
$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad \alpha \le t \le \beta$$

és $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, akkor az [a, b] intervallumba tartozó görbevonalú trapéz területe

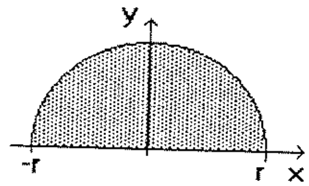
$$\boxed{(28)\ T = \left| \int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt \right|.}$$

PÉLDÁK

207. Határozzuk meg az $f : f(x) = 3\sqrt{x}$; $g : g(x) = x^2$ és az $x = 1$ által határolt területet! (1. ábra)



1. ábra



2. ábra

M: A (27) alapján

$$T = \int_0^1 \left(3\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left[3\,\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[2\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

208. Számítsuk ki az r sugarú kör területét.
M: Legyen a kör középpontja az origó, akkor egyenlete:

$x^2 + y^2 = r^2$ és így a felső félkör egyenlete:
$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Nyilvánvalóan elég a felső félkör területét kiszámítani (2. ábra) és azt szorozni 2-vel.
Ehhez az $f : f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvényt kell integrálnunk $-r$-től r-ig. A (27) formula szerint (most $g : g(x) \equiv 0$)

$$T = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2r\int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\, dx$$

Az integrál értékét az $x = r \sin u$ helyettesítéssel fogjuk kiszámítani. Ekkor $dx = r \cos u$ és az $u = \arcsin \frac{x}{r}$ következtében az új határok

$$a = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad b = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

ezért az integrál a következő alakot ölti:

$$T = 2r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u}\; r \cos u\, du = 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\, du.$$

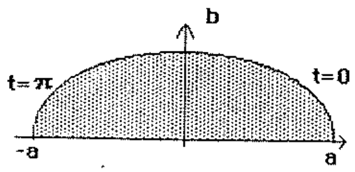
Az integrálás végrehajtásához a $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$ linearizáló formulát használva:

$$T = 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2u}{2}\, du = 2r^2\left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = r^2\pi.$$

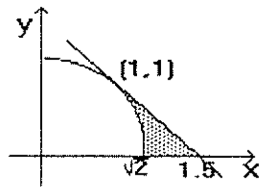
209. Számítsuk ki az

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t \le 2\pi) \text{ ellipszis területét!}$$

M: Az ellipszis felének területét számoljuk ki (3. ábra) és szorozzuk 2-vel.



3. ábra



4. ábra

Alkalmazzuk a **(28)** képletet:

$$T = 2\int_{\pi}^{0} (b \sin t)\,(a \cos t)'\, dt = 2\int_{\pi}^{0} (-ab \sin^2 t)\, dt =$$

$$= -2ab\int_{\pi}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = -2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{\pi}^{0} = \pi a b.$$

Ha $a = b = r$ értékeket választunk, akkor az ellipszis r sugarú körré fajul el és eredményünk a $T = \pi\, a b = \pi\, r \cdot r = r^2\pi$ ismert összefüggést adja.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

Számítsa ki az alábbi görbék és intervallumok által meghatározott görbevonalú trapéz területét.

211. $f: f(x) = \sqrt[3]{2x} \qquad \frac{1}{2} \leq x \leq 4$ **212.** $f: f(x) = e^{2x} \qquad 0 \leq x \leq \ln 2$

213. $f: f(x) = \sin^2 x \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$ **214.** $f: f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

Számítsa ki az alábbi görbepárok által meghatározott területet:

215. $f: f(x) = x^2 \qquad g: g(x) = x$ **216.** $f: f(x) = x^3 \qquad g: g(x) = x$

217. $f: f(x) = x^3 \qquad g: g(x) = \sqrt[3]{x}$

218. $f: f(x) = x^2 + 5x + 6 \qquad g: g(x) = -x^2 - 5x + 6$

219. Mekkora területet zár be az $f: f(x) = -x^2 + 2$ görbe, az $(1, 1)$ pontjába húzott érintő és az x tengely?

220. Számítsa ki az $a = 2$ és $b = 3$ féltengelyekkel rendelkező ellipszis területét úgy, hogy a görbének nem a paraméteres alakját használja!

221. Számítsa ki az $x = \sqrt{t}$, $y = 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$ görbéhez tartozó görbevonalú trapéz területét!

222. Számítsa ki az $x = \sqrt{t}$, $y = 1 - t$ $(0 \leq t \leq 1)$ görbe alatti területet!

223. Számítsa ki az $\left.\begin{array}{l} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{array}\right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

cikloisív alatt lévő területet!

ÚTMUTATÁSOK

211 – 212. A megadott intervallumokon kell az integrálást elvégezni. Ha (27)-et alkalmazzuk, $g(x) \equiv 0$.

213. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ figyelembevételével egyszerűen adódik az eredmény.

214. Alapintegrál!

216 – 218. Az integrálási határokat a görbepárok metszéspontjainak abszcisszái adják, **(27)** segítségével megoldhatók a feladatok. Célszerű vázolni a függvények grafikonjait, ahol szükséges részintervallumonként számoljunk!

219. Az ábrán vonalkázott területet kell kiszámítani. Az egyenes meredeksége a differenciálhányados geometriai jelentéséből meghatározható.

220. Az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$-ből az ellipszis x tengely fölötti íve azonos az $f : f(x) = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, $-2 \le x \le 2$ függvény grafikonjával.

$T = 3\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 6\pi$, ami legegyszerűbben az $x = 2 \sin u$ helyettesítéssel és a $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ azonosság felhasználásával számítható ki.

221., 222. és **223.** Alkalmazzuk a **(28)** összefüggést.
Ezen kívül használjuk a $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ linearizáló formulát!

FELADATOK

Számítsuk ki az alábbi görbék és intervallumok által meghatározott görbevonalú trapéz területét!

224. $f : f(x) = \sqrt[5]{x}$ $\quad 1 \le x \le 32$ $\qquad$ **225.** $f : f(x) = e^{3x} + x^2$ $\quad 0 \le x \le 1$

226. $f : f(x) = \cos^2 x$ $\quad 0 \le x \le \pi$ $\qquad$ **227.** $f : f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Számítsuk ki az alábbi görbepárok által meghatározott területet!

228. $f : f(x) = x^2$ $\quad g : g(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ **229.** $f : f(x) = x^3$ $\quad g : g(x) = x^5$

230. $f : f(x) = x^2 + x - 6$ $\quad g : g(x) = 0$

231. $f : f(x) = \sin x$, $\quad (0 \le x \le \pi)$ $\quad g : g(x) = \frac{1}{2}$.

232. Mekkora területet zár be az $f: f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ görbe, a (2; 1) pontjába húzott érintő és az x tengely.

233. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipszis területét!

234. Számítsuk ki $x = \sqrt[3]{t}$, $y = 8 - t$, $-2 \le t \le 2$ görbe alatti területet!

235. Számítsuk ki az $\left.\begin{aligned} x &= 4 \cos 2t \\ y &= 5 \sin 2t \end{aligned}\right\}$ $(0 \le t \le \pi)$

zárt görbe területét.

MEGOLDÁSOK

211. $\frac{45}{8}$ **212.** $\frac{3}{2}$ **213.** π

214. 1 **215.** $\frac{1}{6}$ **216.** $\frac{1}{2}$ **217.** 1

218. $\frac{250}{6}$ **219.** $2{,}25 - \frac{1}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$ **220.** 6π

221. $\frac{2}{3}$ **222.** $\frac{2}{3}$ **223.** $3r^2\pi$ **224.** $\frac{105}{2}$

225. $\frac{e^3}{3}$ **226.** $\frac{\pi}{2}$ **227.** 1 **228.** $\frac{1}{3}$

229. $\frac{1}{6}$ **230.** $\frac{125}{6}$ **231.** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

232. $\frac{59}{12} - 2\sqrt{6}$ **233.** 12π **234.** $16 \cdot \sqrt[3]{2}$ **235.** 20π

2. Görbe ívhossza

Ha az f függvény az [a, b] intervallumon folytonosan differenciálható (f' folytonos), akkor grafikonja [a, b]-hez tartozó darabjának ívhossza:

$$(29)\quad s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Ha a görbe az $\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\}$ $\alpha \le t \le \beta$

paraméteres alakban van megadva és az x valamint az y függvények folytonosan differenciálhatók, továbbá $x'(t) \neq 0$, akkor a görbe ívhossza:

$$(30)\quad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

PÉLDÁK

236. Számítsuk ki az $f: f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ függvény $0 \le x \le \ln 2$-höz tartozó darabjának ívhosszát!

M: $$s = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

237. Számítsuk ki a $\left.\begin{matrix} x = r\,(t - \sin t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{matrix}\right\}$ $0 \le t \le 2\pi$

cikloisív hosszát!

M: $$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(1 - \cos t))^2 + (r \sin t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 r^2 (1 - \cos t)}\, dt.$$

Alkalmazzuk a $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ összefüggést az $\alpha = \frac{t}{2}$ esetre, így $1 - \cos t$ helyére $2 \sin^2 \frac{t}{2}$ írható.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 r^2 (1 - \cos t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 r^2 \, 2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 r \sin \frac{t}{2}\, dt = 2 r \left[\frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} = 8 r.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát!

238. $f : f(x) = 2\sqrt{\frac{x^3}{3}}$ $\quad 0 \le x \le 5$

239. $f : f(x) = 1 + \ln \cos x$ $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

240. $f : f(x) = 2 \ln \frac{4}{4 - x^2}$ $\quad 0 \le x \le 1$

241. $f : f(x) = x^2$ $\quad 0 \le x \le 1.$

Számítsuk ki az alábbi paraméteresen adott görbék ívhosszát!

242. $\left.\begin{array}{l} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{array}\right\}$ $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

243. $\left.\begin{array}{l} x = r (\cos t + t \sin t) \\ y = r (\sin t - t \cos t). \end{array}\right\}$ $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, $r > 0$ const.

ÚTMUTATÁSOK

238. A (**29**)-be helyettesítve egyszerűen adódik a végeredmény.

239. A (**29**)-be való helyettesítés után vegyük figyelembe, hogy $1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Az $\int \dfrac{1}{\cos x}\, dx$ meghatározható például az $u = \mathrm{tg}\, \dfrac{x}{2}$ helyettesítéssel.

240. Az ívhossz képletébe való helyettesítés után a gyökjel alatt hozzunk közös nevezőre. A számláló és nevező teljes négyzetnek adódik, így racionális törtet kell integrálni:

$$s = \ldots\ldots = \int_0^1 \frac{4 + x^2}{4 - x^2}\, dx.$$

Bontson parciális törtekre!

241. Az $\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ kiszámítható pl. a $\sqrt{1 + 4x^2} = u + 2x$ helyettesítéssel. Ekkor $x = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{4}u$ és így

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \int_1^{\sqrt{5}-2} \left(u + \frac{1}{2}\frac{1}{u} - \frac{1}{2}u\right)\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{u^2} - \frac{1}{4}\right) du =$$

$$= -\frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{5}-2} \left(\frac{1}{u^3} + \frac{2}{u} + u\right) du,$$ ami könnyen kiszámítható.

Megjegyzés: $2x = sh\, t$ helyettesítés kevesebb számolással vezet célhoz.

242. A (**30**) alkalmazása során vegyük figyelembe, hogy az adott intervallumon $\sin t \geq 0$, és $\cos t \geq 0$ teljesül, ezért $\sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} = 3\cos t \sin t$, ha $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

243. A (**30**)-ból könnyen adódik a végeredmény a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság segítségével.

FELADATOK

Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát!

244. $f: f(x) = \sqrt{2\, x^3} \quad 0 \leq x \leq 14$

245. $f: f(x) = \ln\, \sin x \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

246. $f: f(x) = 2\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2} \quad 0 \leq x \leq \ln 4$

247. $f: f(x) = 2 \ln \cos \frac{x}{2} \quad 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

248. $\left.\begin{aligned} x &= 2t + 2 \sin t \\ y &= 2 - 2 \cos t \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

MEGOLDÁSOK

238. 14

239. $\ln \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$

240. $-1 + 2 \ln 3$

241. $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} - 2)$

242. $\frac{3}{2}$

243. $\frac{r\, \pi^2}{32}$

244. $\frac{2044}{27}$

245. $-\ln \mathrm{tg}\, \frac{\pi}{8}$

246. $\frac{3}{2}$

247. $2 \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

248. $4\sqrt{2}$

3. Forgástestek térfogata

Ha az f függvény folytonos az [a, b] intervallumon, akkor az [a, b]-hez tartozó darabjának az x tengely körül megforgatásakor keletkező forgástest térfogata

$$(31)\quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

PÉLDÁK

249. Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát!

M: Az origó középpontú R sugarú gömb az $f: f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$; $-R \leq x \leq R$ függvény görbéjének az x tengely körüli megforgatásával származtatható. tehát

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right) = \pi \, \frac{4}{3} \, R^3 = \frac{4 \, R^3 \pi}{3}$$

250. Határozzuk meg az $x^2 + (y - v)^2 = r^2$ $(v > r > 0)$, körnek az x tengely körüli megforgatásakor keletkező tórusz térfogatát!

M: A felső félkör megforgatásakor keletkező test térfogatából levonjuk az alsó félkör megforgatásakor keletkező test térfogatát.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2} + v \right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(-\sqrt{r^2 - x^2} + v \right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 + 2 v \sqrt{r^2 - x^2} + v^2 \right) dx -$$

$$- \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 - 2 v \sqrt{r^2 - x^2} + v^2 \right) dx =$$

$$= 4 \pi \, v \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

Mivel $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$ éppen az origó középpontú r sugarú kör „felső felének" a területe:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{r^2 \pi}{2} \text{ ezért } V = 4 \pi v \, \frac{r^2 \pi}{2} = 2 \pi^2 v \, r^2.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

251. Határozza meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis x tengely körüli megforgatásakor keletkező test (forgás- ellipszoid) térfogatát!

Határozza meg az alábbi függvények adott intervallumhoz tartozó ívének az x tengely körüli megforgatásakor keletkező test térfogatát!

252. $f : f(x) = \sqrt{x}$ $\quad 1 \leq x \leq 4$ $\qquad$ **253.** $f : f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad 1 \leq x \leq 8$

254. $f : f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{1}{4} \leq x \leq 1$ $\qquad$ **255.** $f : f(x) = \sin x$ $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

256. $f : f(x) = \operatorname{ctg} x$ $\quad \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ **257.** $f : f(x) = \log_2 x$ $\quad 1 \leq x \leq 8.$

ÚTMUTATÁSOK

251–254. A (31) képletbe helyettesítve egyszerű integrálhoz jutunk.

255. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

256. $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \left(\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x \right) - 1 \right) dx = -\operatorname{ctg} x - x$

257. Integráljunk parciálisan: $u'(x) = 1, \quad v(x) = (\log_2 x)^2.$

FELADATOK

Határozza meg az alábbi függvénygörbék x tengely körüli megforgatásakor keletkező test térfogatát!

258. $f : f(x) = 3\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}},$ $\quad -2 \leq x \leq 2$ $\quad$ (forgás-ellipszoid)

259. $f : f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \dfrac{1}{27} \leq x \leq \dfrac{1}{8}$

260. $f : f(x) = \sqrt{x^3}$ $\quad 2 \leq x \leq 5$ $\qquad$ **261.** $f : f(x) = \cos x$ $\quad 0 \leq x \leq 4\pi$

262. $f : f(x) = \operatorname{tg} x$ $\quad -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad$ **263.** $f : f(x) = \lg x$ $\quad 1 \leq x \leq 10$

251. $\frac{4}{3} a b^2 \pi$ **252.** $7.5\,\pi$ **253.** $\frac{93}{5}\pi$

254. $\pi \ln 4$ **255.** $\frac{\pi^2}{4}$ **256.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

257. $72\,\pi - \frac{48\,\pi}{\ln 2} + \frac{14\,\pi}{\ln^2 2}$ **258.** $24\,\pi$

259. $\frac{\pi}{2}$ **260.** $\frac{609}{4}\pi$ **161.** $2\,\pi^2$

262. $\pi\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$ **263.** $\pi\left(10-\frac{20}{\ln 10}+\frac{18}{\ln^2 10}\right)$

4. Forgástest palástjának felszíne

Ha az f függvény differenciálhányadosa folytonos az [a, b] intervallumon, akkor az [a, b]-hez tartozó ívének az x tengely körül való megforgatásakor keletkező forgástest palástjának felszíne (a forgásfelület felszíne):

$$(32)\quad A = 2\pi\int_a^b |f(x)|\,\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Ha a görbe *paraméteres egyenletrendszere*

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

akkor az x tengely körüli megforgatásakor keletkező forgásfelület felszíne

$$(33)\quad A = 2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\,\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

ha ez az integrál létezik.

PÉLDÁK

264. Számítsuk ki az $f:f(x) = \sqrt{x}$, $2 \le x \le 6$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásakor keletkező forgástest palástjának felszínét!

M: Mivel a $\sqrt{x}$ folytonosan deriválható, alkalmazhatjuk (32)-t.

$$A = 2\pi \int_2^6 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_2^6 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_2^6 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx = 2\pi \left[\frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^6 = 4\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^3} - \left(\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} \right) \right) =$$

$$= 4\frac{\pi}{3}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 \right) = \frac{49\pi}{3}.$$

265. Számítsuk ki az $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 5 + 3\sin t \end{aligned}\right\}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

görbe x tengely körüli megforgatásakor keletkező forgásfelület felszínét.

M: A (17) szerint

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} | 5 + 3\sin t | \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} | 5 + 3\sin t | \cdot 3\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 6\pi \int_0^{2\pi} (5 + 3\sin t)\, dt = 6\pi\, [5t - 3\cos t]_0^{2\pi} = 60\pi^2$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

Számítsuk ki az alábbi függvénygörbék x tengely körüli megforgatásakor keletkező forgásfelületek felszínét!

266. $f:f(x) = x^3 \qquad 0 \le x \le 1$

267. $f:f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad r > 0 \qquad -r \le x \le r$
(gömbfelület)

268. $f : f(x) = \cos x \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

269. $\left.\begin{array}{l} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \le t \le 2\pi \\ r > 0 \end{array}$

270. Számítsa ki az $x^2 + (y - v)^2 = r^2$, $v > r > 0$ körnek az x tengely körüli megforgatásakor keletkező taurus (gyűrű) felületét!

ÚTMUTATÁSOK

266. A (32) alkalmazása során egyszerű integrálhoz jutunk

267. A (32)-ba helyettesítés után szorozzuk össze a két gyökös kifejezést. A gyökjel alatt konstans: r^2 adódik.

268. Miután a palást képletébe helyettesített alkalmazza a $t = \sin x$, majd pedig a $t = \operatorname{sh} u$ helyettesítést.Az új határok előbb [0, 1] majd $[0, \ln(1 + \sqrt{2})]$ lesznek.

A $\operatorname{ch}^2 u = \frac{1 + \operatorname{ch} 2u}{2}$ alkalmazásával adódik a végeredmény.

269. Helyettesítsünk be (33)-ba. $\frac{1 - \cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2}$ segítségével megszabadulhatunk a négyzetgyöktől. Alkalmazzuk a $t = 2u$ helyettesítést, így:

$$A = \ldots = 16\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u \, du = 16\pi r^2 \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 u\right) \sin u \, du$$

és az utolsó integrált könnyű kiszámítani.

270. Az $f_1 : f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + v$, $-r \le x \le r$ és az

$f_2 : f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} + v$, $-r \le x \le r$ görbék megforgatásakor keletkező felületek felszíneit kell összeadni. Ha az összeget egy integrál jel mögé írjuk, összevonás után az integrandus az $r \arcsin \frac{x}{r}$-nek a deriváltja lesz.

FELADATOK

Számítsuk ki az alábbi függvénygörbéknek az x tengely körüli megforgatásakor keletkező forgásfelületek felszínét!

271. $f: f(x) = \sqrt{9 - (x - 2)^2}$ $\quad -1 \le x \le 5$

272. $f: f(x) = \sqrt{9 - x^2} + 2$ $\quad -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$

273. $f: f(x) = \sin x$ $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

274. $\left.\begin{aligned} x &= e^t \sin t \\ y &= e^t \cos t \end{aligned}\right\}$ $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

MEGOLDÁSOK

266. $\frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)$

267. $4 r^2 \pi$

268. $\pi \left(\ln (1 + \sqrt{2}) + \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{4} - \frac{1}{4 (1 + \sqrt{2})^2} \right)$

269. $\frac{64}{3} \pi r^2$

270. $4 \pi^2 v r$

271. 36π

272. $18 \pi + 4 \pi^2$

273. $\pi \left[\ln (1 + \sqrt{2}) + \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{4} - \frac{1}{4 (1 + \sqrt{2})^2} \right]$ V.ö. 268.

274. $\pi \left(\frac{6}{5} e^{\pi/2} - \frac{4\sqrt{2}}{5} \right)$

8. Improprius integrálok

Legyen az f függvény korlátos. Akkor:

$$(34)\quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^{R} f(x)\,dx$$

feltéve, hogy f bármely véges $[a, R]$ intervallumon integrálható és a határérték létezik.

Hasonlóan értelmezhetők a

$$(35)\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{Q \to -\infty} \int_Q^{b} f(x)\,dx$$

$$(36)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{Q \to -\infty \\ R \to +\infty}} \int_Q^{R} f(x)\,dx$$

improprius integrálok, ha a határértékek léteznek.

Ha a véges $[a, b]$ intervallumon értelmezett f függvény nem korlátos a környezetében, de minden $[a + \varepsilon, b]$ intervallumon integrálható ($\varepsilon > 0$), akkor

$$(37)\quad \int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

ha a határérték létezik és analóg módon

$$(38)\quad \int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

ha az f a b baloldali környezetében nem korlátos, de a jobboldalon álló határérték létezik.

Megjegyzés: Geometriailag ezek az integrálok is területet jelentenek. Például a (**18**)-nak megfelelő terület az 1) ábrán, a (**21**)-nek megfelelő a 2) ábrán látható.

275. $$\int_{1/2}^{\infty} e^{1-2x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{1/2}^{R} e^{1-2x}\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{1-2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{R} = -\frac{1}{2}\left(0 - \left(e^{0}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

276. $$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{Q\to-\infty} \int_{Q}^{-1} x^{-3}\,dx = \lim_{Q\to-\infty} \left[-\frac{1}{2\,x^2}\right]_{Q}^{-1} =$$

$$= \lim_{Q\to-\infty} \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2\,Q^2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

277. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ Q\to-\infty}} \int_{Q}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ Q\to-\infty}} [\operatorname{arctg} x]_{Q}^{R} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

A továbbiakban arra az esetre látunk példákat, amikor a függvény nem korlátos.

278. $$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_{\varepsilon}^{1} =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

279. $$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} x^{-2/3}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} \right]_{-1}^{-\varepsilon} =$$

$$= 3 \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}\,] = 3\,(0 + 1) = 3$$

280. $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} \left(\int_{-1}^{0-\delta} x^{-2/3}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} x^{-2/3}\, dx \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} \left(\left[3\, x^{1/3}\right]_{-1}^{-\delta} + \left[3\, x^{1/3}\right]_{\varepsilon}^{1} \right) = 6$$

Vegyük észre, hogy szimmetriai okok miatt kaptuk az előző integrál kétszeresét.

Mivel az $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ függvénynek a $[-1,\ 1]$ intervallumon az $\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}}$ nem primitív függvénye ($x = 0$-ban nem differenciálható) ezért a Newton–Leibniz formulát a $[-1,\ 1]$ intervallumon erre alkalmazni elvileg hibás.

281. $$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{\varepsilon}^{1} =$$

határérték nem létezik, vagyis $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ nem létezik.

282. $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \delta \to 0^+}} [\arcsin x]_{-1+\varepsilon}^{1-\delta} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

283. $\int_{0}^{\infty} 2^{-x}\,dx = ?$

284. $\int_{-\infty}^{1} 2^{x+3}\,dx = ?$

285. $\int_{4}^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = ?$

286. $\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\,dx = ?$

287. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$

288. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$

289. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = ?$

290. $\int_{0}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = ?$

291. $\int_{0}^{1} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx = ?$

292. $\int_{-\infty}^{1} 2^{3x}\,dx = ?$

ÚTMUTATÁSOK

283. (**34**), a **284.** (**35**) szerint megoldható.

285. Alkalmazzuk (**34**)-et.

286. Integráljon 2-től 3-ig (**37**), 3-tól 4-ig (**38**) alapján.

287. (38) **288.** (34) segítségével számolható.

289. A nevezőben $1 + (x + 1)^2$ van, ezért (**36**) alapján arctg primitív függvénnyel számolhatunk.

290., **291.** Használjuk fel (**24**)-et valamint (**34**)-et, illetve (**37**)-et.

292. (**35**) szerint megoldható.

FELADATOK

293. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^6}\, dx = ?$

294. $\int_0^{1} \frac{1}{x^6}\, dx = ?$

295. $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{(3x-3)^5}}\, dx = ?$

296. $\int_0^{\infty} x^2 \cdot 2^{-x^3}\, dx = ?$

297. $\int_0^{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}}\, dx = ?$

298. $\int_3^{\infty} \frac{3}{x-2}\, dx = ?$

299. $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} x\, dx = ?$

300. $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx = ?$

301. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{4x^2 + 12x + 10}\, dx = ?$

302. $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^6}\, dx = ?$

MEGOLDÁSOK

283. $\frac{1}{\ln 2}$ **284.** $\frac{16}{\ln 2}$ **285.** 1 **286.** 6

287. $-\frac{3}{2}$ **288.** ∞ **289.** π **290.** $\frac{1}{2}$

291. $\frac{1}{e}$ **292.** $\frac{8}{3 \ln 2}$ **293.** $\frac{1}{5}$ **294.** ∞

295. ∞ **296.** $\frac{1}{3}\ln 2$ **297.** $3\sqrt[3]{6}$ **298.** ∞

299. $-\frac{1}{2}$ **300.** $\frac{10}{7}$ **301.** $\frac{3}{2}\pi$ **302.** ∞

VEGYES INTEGRÁLÁSI FELADATOK

Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

303. $\int \frac{\lg^4 x}{4x}\,dx$ **304.** $\int x^2\left(e^x\right)^3 dx$ **305.** $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

306. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx$ **307.** $\int \frac{x^2}{4+x^2}\,dx$

308. $\int x\sqrt[3]{x-3}\,dx$ **309.** $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}\,dx$

310. $\int x\arcsin x\,dx$ **311.** $\int \frac{e^{2x}}{(e^x-1)(e^x+2)}\,dx$

312. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ **313.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}\,dx$ **314.** $\int \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 dx$

315. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$ **316.** $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$ **317.** $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}\,dx$

318. $\int \frac{2x}{\sqrt{3x+5}}\,dx$ **319.** $\int e^{3x}\cos 5x\,dx$

320. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ **321.** $\int \frac{e^{-x}+e^x}{e^x-e^{-x}}\,dx$ **322.** $\int \frac{5x-13}{x^2-5x+6}\,dx$

323. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\,dx$ **324.** $\int x\cos x^2\,dx$ **325.** $\int x\cos\sqrt{x}\,dx$

326. $\int \frac{1}{2\sin x + 2\cos x + 3}\,dx$ **327.** $\int \frac{8x + 18}{4x^2 + 12x + 9}\,dx$

328. $\int \sqrt{\frac{3}{3 - x^2}}\,dx$ **329.** $\int \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^2 \cdot \sqrt{x}}\,dx$

330. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3 - x}}\,dx$ **331.** $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}}\,dx$ **332.** $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{5 + \cos^2 x}}\,dx$

333. $\int \frac{1}{x^2}\, e^{2/x}\,dx$ **334.** $\int x^2 e^{2x}\,dx$ **335.** $\int \sqrt{x}\,\ln^2 x\,dx$

336. $\int 3^x \sqrt[3]{3 + 3^x}\,dx$ **337.** $\int \frac{5e^{2x} + e^x}{2e^{2x} - e^x - 1}\,dx$

338. $\int \frac{3}{1 + \sin x}\,dx$ **339.** $\int \frac{\sqrt{x} + x^3 \operatorname{tg} x^2 + x^3 \sin x}{3x^2}\,dx$

340. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$ **341.** $\int 3x \sqrt[5]{4 - x}\,dx$

342. $\int \frac{1}{\left(\cos^2 x\right) \sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}\,dx$ **343.** $\int 7x \log_7 3x\,dx$

344. $\int \operatorname{th} x\,dx$ **345.** $\int \frac{2x + 7}{x^2 + 6x + 10}\,dx$

346. $\int \left(\cos^5 x\right)\sqrt{\sin x}\,dx$ **347.** $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}\,dx$

348. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$ **349.** $\int \log_3 \frac{5x - 1}{2}\,dx$ **350.** $\int \frac{2 + 3x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

351. $\int \left(x e^{x^2} - x^2 e^x\right) dx$ **352.** $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}\,dx$

303. $\frac{1}{20} \lg^5 x + C$ ((**20**) alapján)

304. Kétszer alkalmazva (**23**)-at $\frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2 x e^{3x}}{9} + \frac{2 e^{3x}}{27} + C$

305. $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$ ((**24**) szerint)

306. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 1\right) + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$

Az $\left(x^2 + 2\right) = \left(x^2 + 1\right) + 1$ felírás után osszon tagról tagra. Az első tagot parciálisan, a másodikat (**24**) szerint integrálja!

307. $x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$ (Megj.: $x^2 = \left(4 + x^2\right) - 4$)

308. $\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x-3)^7} + \frac{9}{4} \sqrt[3]{(x-3)^4} + C$ ($x - 3 = t$ helyettesítéssel könnyen adódik)

309. $-\ln |\sin x \cos x| + C$ ((**21**) képlet!)

310. $\frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{4} + C$

(parciális integrálás után az $x = \sin t$ helyettesítést, majd a $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ formulát alkalmazhatjuk)

311. $\frac{1}{3} \ln | e^x - 1 | + \frac{2}{3} \ln | e^x + 2 | + C$ (az $e^x = t$ helyettesítés eredményeképpen adódó racionális törtkifejezést bontsuk parciális törtekre!)

312. $\frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right) + C$ (az $x = \sin t$ helyettesítés és a $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ linearizáló formula eredményeképpen.)

313. $-\dfrac{2}{\sqrt{\sin x}}+C$ (**(20)** szerint)

314. $-\dfrac{1}{x}+2\ln|x|+x+C$ (a műveletek elvégzése után integráljon tagonként!)

315. $-x-\operatorname{ctg} x+C \qquad \left(\operatorname{ctg}^2 x=-1+\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)\right)$

316. $x-\operatorname{th} x+C$ (az előző feladathoz alkalmazott ötlet alapján)

317. $\dfrac{5}{3}(\operatorname{tg} x)^{3/5}+C$ (**(20)** képlet!)

318. $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{\sqrt{(3x+5)^3}}{3}-5\sqrt{3x+5}\right)+C \qquad \left(t^2=3x+5\right)$

319. $\dfrac{e^{3x}(5\sin 5x+3\cos 5x)}{34}+C$ (kétszer parciálisan integrálva, egyenletrendezéssel)

320. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C \qquad \left(\operatorname{tg}^3 x=\operatorname{tg} x\left(\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)-1\right)\right)$

321. $\ln|e^x-e^{-x}|+C$ (**(21)** alapján)

322. $2\ln|x-3|+3\ln|x-2|+C$ (parciális törtekre való bontás után)

323. $-\dfrac{1}{6\sin^6 x}+\dfrac{1}{4\sin^4 x}+C \qquad \cos^2 x=1-\sin^2 x$ és **(20)**

324. $\dfrac{\sin x^2}{2}+c$ (**(24)** szerint)

325. $2\sqrt{x^3}\sin\sqrt{x}+6x\cos\sqrt{x}-12\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-12\cos\sqrt{x}+C$
($x=t^2$ helyettesítés után parciálisan integráltunk)

326. $2\ \mathrm{arctg}\left(2+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)+C$ ($t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ helyettesítéssel)

327. $\frac{-3}{2x+3}+2\ln|2x+3|+C$ (ld. racionális törtfüggvények integrálása!)

328. $\sqrt{3}\ \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$ ((**6**) képlet)

329. $4\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)+\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$ ($t=\sqrt[4]{x}$)

330. $-18\sqrt{3-x}+4\sqrt{(3-x)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5}+C$

($3-x=t^2$ helyettesítéssel)

331. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$ ($\sqrt{1+e^x}=t$ helyettesítés!)

332. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(5+\cos^2 x\right)^2}+C$ ((**20**) felhasználásával)

333. $-\frac{1}{2}e^{2/x}+C$ ((**24**) képlet)

334. $e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+C$ (parciális integrál)

335. $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$ (kétszer parciálisan integrálva, a logaritmus a „vesszőtlen".)

336. $\frac{1}{\ln 3}\,\frac{3}{4}\left(3+3^x\right)^{4/3}+C$ ((**20**) segítségével)

337. $2\ln\left|e^x-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left(2e^x+1\right)+C$

(Az $e^x=u$ helyettesítés racionális törtfüggvényt eredményez)

338. $3\ \mathrm{tg}\, x - \dfrac{3}{\cos x} + C$ (Bővítse a törtet a nevező „konjugáltjával”!)

339. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right| - x\cos x + \sin x\right) + C$
($3x^2$-el osztottunk tagról tagra. Az utolsó tagot parciálisan integráltuk)

340. $\dfrac{\mathrm{ch}^3 x}{3} - \mathrm{ch}\, x + C$ ($\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1$ helyettesítés után (**20**) segítségével adódik)

341. $-10\sqrt[5]{(4-x)^6} + \dfrac{15}{11}\sqrt[5]{(4-x)^{11}} + C$
(A $t = \sqrt[5]{4-x}$ helyettesítés célravezető)

342. $\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{\mathrm{tg}^3 x} + C$ ((**20**) alapján megoldható feladat)

343. $\dfrac{7x^2}{2}\log_7 3x - \dfrac{7x^2}{4\ln 7} + C$
(Parciális integrál, $u' = 7x$, $v = \log_7 3x$)

344. $\ln \mathrm{ch}\, x + C$ ((**21**) képlet!)

345. $\ln\left(x^2 + 6x + 10\right) + \mathrm{arctg}\,(x+3) + C$ (Racionális törtfüggvény, a nevezőnek nincs valós zérushelye)

346. $\dfrac{2}{3}\sin^{3/2} x - \dfrac{4}{7}\sin^{7/2} x + \dfrac{2}{11}\sin^{11/2} x + C$

(A $\cos^5 x$ helyett írja a $\cos x \cdot \cos^4 x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right)^2$ kifejezést. A műveletek elvégzése után tagonként integrálva (**20**) alkalmazható.)

347. $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{1+\ln x}\right)^3 - 2\sqrt{1+\ln x} + C$
(Az $u = \sqrt{1+\ln x}$ helyettesítéssel egyszerű alakhoz jutunk.)

348. $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{th}^{3/2} x + C$ ((**20**) alapján közvetlenül adódik a végeredmény.)

349. $x \log_3 \frac{5x-1}{2} - \frac{1}{\ln 3} x - \frac{1}{5 \ln 3} \ln |5x-1| + C$

(Integráljon parciálisan: $u'(x) = 1$, $v(x) = \log_3 \frac{5x-1}{2}$.

350. $2 \arcsin x - 3 \sqrt{1-x^2} + C$

(Ha tagonként osztunk az első alapintegrál, a második (**20**)-szal számolható.)

351. $\frac{1}{2} e^{x^2} - x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x + C$

(Az első tag helyettesítéssel (**24**)-gyel, a második parciálisan (**23**)-mal integrálható.)

352. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

(A $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ azonosság felhasználása után $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítést alkalmazhatunk.)

11. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

1. A kétváltozós függvény definíciója, tulajdonságai

(1) Az olyan függvényt, amely számpárhoz valós számot rendel, kétváltozós függvénynek nevezzük.
Ha a függvény jele f, a számpár pedig (x,y), akkor $f(x,y)$ a függvény *helyettesítési értéke* az (x,y) helyen. De nagyon sokszor a függvény jelölésére is az $f(x,y)$ jelet használjuk. Az (x,y) számpárok halmaza a függvény *értelmezési tartománya*. A függvényértékek halmaza a függvény *értékkészlete*.
(2) Ha bevezetjük az $f(x,y) = z$ jelölést, akkor az $P(x,y,z)$ pontok összessége az $f(x,y)$ *függvény képe* (ábrája). A gyakorlati esetek többségében ezek a pontok egy felületet alkotnak, melynek egyenlete : $z = f(x,y)$. Így szokás azt is mondani, hogy a kétváltozós függvény *felülettel* ábrázolható.
(3) Jelentse x,y és z az $P(x,y,z)$ pont Descartes-féle koordinátáit. Messük el a $z = f(x,y)$ felületet a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal. A keletkező metszetgörbék (főmetszetek) összessége jó szemléletes képet adhat a felület alakjáról. E metszetgörbék közül kitüntetett szerepet szánunk azoknak, amelyek a $z = z_0$ (=állandó) síkokkal való metszéskor keletkeznek. Ezek az ún. szintvonalak, amelyeknek az egyenlete: $z_0 = f(x,y)$.

2. A derivált fogalma

A

(4) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

határértéket az $f(x,y)$ függvény x szerinti *parciális deriváltjának* nevezzük. Hasonlóan értelmezzük az y szerinti parciális deriváltat:

(5) $$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

E deriváltak jelölése: $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, f_x ill. $\frac{\partial f}{\partial y}$, f'_y, f_y.

Az értelmezésből látszik, hogy az egyik változó deriváltjának képzésekor a másik változót úgy tekintjük, mintha az állandó lenne. Ebből következik, hogy az egyváltozós függvényeknél megismert deriválási szabályok itt is érvényesek.
Messük el a $z = f(x,y)$ felületet az (x,z) koordinátasíkkal párhuzamos síkkal. Ekkor egy metszetgörbe keletkezik. Az f'_x parciális derivált geometriai jelentése e

metszet-görbe *érintőjének iránytangense*. Hasonló a jelentése az f'_y parciális deriváltnak, csak most a metszősík az (y,z) síkkal párhuzamos.
Értelmezhetők a függvény második, harmadik stb. parciális deriváltjai is. A második deriváltak : $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$.
Ha az ún. vegyes másodrendű deriváltak folytonosak, akkor azok egyenlők, azaz $f''_{xy} = f''_{yx}$. A gyakorlatban ez szinte mindig fennáll.

3. A teljes differenciál

Az $f(x,y)$ függvény *teljes differenciálja*

(6)	$df = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y = f'_x dx + f'_y dy.$

Ha $|\Delta x|$ és $|\Delta y|$ elég kicsi, akkor a függvény $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ megváltozása (hibája) jól közelíthető a df differenciállal, azaz ekkor $\Delta f \approx df$.
Ez a közelítés felhasználható a $|\Delta f|$ *abszolút hiba* becslésére is. Ugyanis, ha ismerjük $|\Delta x|$ és $|\Delta y|$ értékét, akkor

(7) $|\Delta f| \approx |df| \le |f'_x\Delta x| + |f'_y\Delta y|$.

A $\left|\frac{\Delta f}{f}\right|$ hányados a *relatív hiba*, a $\left|\frac{\Delta f}{f}\right|100\%$ pedig a *százalékos hiba*.

4. Iránymenti derivált

A függvény α irányban vett *iránymenti deriváltja*:

(8)	$\frac{df}{d\alpha} = f'_\alpha = f'_x\cos\alpha + f'_y\sin\alpha$

5. A derivált alkalmazásai

Tekintsük a $z = f(x,y)$ felület $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pontját. Itt természetesen $z_0 = f(x_0, y_0)$. Ebben a pontban a felület *normálvektora* az

(9)	$\boldsymbol{n} = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1\right)$

vektor. De normálvektor ennek -1-szerese is (vagy akárhányszorosa). Az **n** vektor tehát merőleges a felületre (az P_0 pontban) és így merőleges az P_0 pontbeli érintősíkra is. Ennek az *érintősík*nak az egyenlete:

(10)	$z - z_0 = f_x'(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y - y_0)$

A parciális deriváltak fontos szerepet játszanak a függvényvizsgálatban. Az f(x,y) függvénynek helyi szélsőértéke ott lehet, ahol

(11) $f_x'(x,y) = 0$ és $f_y'(x,y) = 0$.

Tételezzük fel, hogy ennek az egyenletrendszernek egyik megoldása (x_0,y_0). Ezt a helyet *stacionárius helynek* is mondjuk. Itt tehát lehet szélsőérték. Biztosan van itt szélsőérték, ha

(12) $f_{xx}''(x_0,y_0)f_{yy}''(x_0,y_0) - \left[f_{xy}''(x_0,y_0)\right]^2 > 0.$

Ha ezen túlmenően $f_{xx}''(x_0,y_0) > 0$, akkor az (x_0,y_0) helyen *helyi minimum* van, ha pedig $f_{xx}''(x_0,y_0) < 0$, akkor *helyi maximum*.

Ha **(12)** bal oldala negatív, akkor nincs szélsőérték, ha pedig nulla, akkor további vizsgálat szükséges.

Megjegyezzük, hogy sokszor célszerű bevezetni a másodrendű deriváltakból alkotott

(13) $$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}''(x,y) & f_{xy}''(x,y) \\ f_{yx}''(x,y) & f_{yy}''(x,y) \end{vmatrix}$$

determinánst. Mivel $D = f_{xx}''f_{yy}'' - f_{xy}''^2$, ezért ha $D(x_0,y_0) > 0$, akkor az (x_0,y_0) helyen van szélsőérték. Ha $D(x_0,y_0) < 0$, akkor az (x_0,y_0) helyen nincs szélsőérték. Ha $D(x_0,y_0) = 0$, akkor a szélsőérték eldöntéséhez további vizsgálat szükséges.

6. A kettős integrál

Az egyváltozós függvény határozott integráljához hasonlóan értelmezhető a kétváltozós függvény T tartományra vonatkozó határozott integrálja is. Ezt *kettős integrál*nak nevezzük. Jelölése:

(14)	$\iint_T f(x,y)dxdy$

Kiszámítása kétszeres integrállal, azaz két "egyes integrál" egymás utáni kiszámításával történhet. Ha a T tartomány az $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ téglalap, akkor

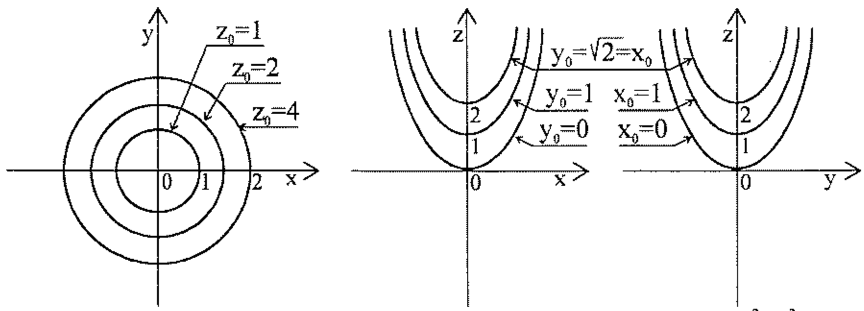
$$(15)\qquad \iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Ha $f(x,y)$ pozitív, akkor a kettős integrál geometriailag annak a térrésznek a térfogatát jelenti, amelyet alulról a T tartomány, felülről a $z = f(x,y)$ felület, oldalról pedig a T tartomány határára emelt, a z tengellyel párhuzamos alkotójú hengerfelület (esetleg több sík) határol.

PÉLDÁK

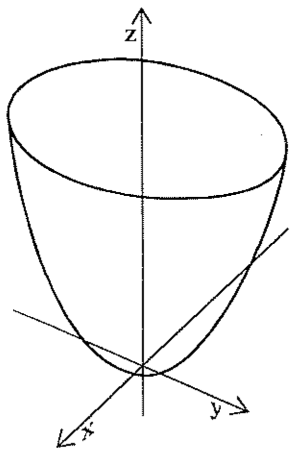
1. Ábrázoljuk az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvényt.

M: A $z = x^2 + y^2$ egyenletből látható, hogy z nem lehet negatív. A felület szintvonalai az $x^2 + y^2 = z_0$ görbék, melyek origó középpontú, $\sqrt{z_0}$ sugarú körök (valójában a körök középpontja nem az origóban, hanem a z tengelyen van). Ha z_0 növekszik, vagyis a $z = z_0$ metszősíkot "emeljük", akkor a körök sugara is nő. A felület tehát "fölfelé tágul". Az $y = y_0$ főmetszetek, vagyis a $z = x^2 + y_0^2$ metszetgörbék parabolák. Ugyancsak parabolák a $z = x_0^2 + y^2$ metszetgörbék is.
A három metszetgörbesereg az 1. ábrán látható. Ezekből a görbékből a felület térbeli képe esetleg előállítható. Ez nem más, mint egy forgási paraboloid. (lásd a 2. ábrát).



Az $x^2+y^2=\sqrt{z_0}$ görbék (szintvonalak) — A $z=x^2+y_0^2$ metszetgörbék — A $z=x_0^2+y^2$ metszetgörbék

1. ábra

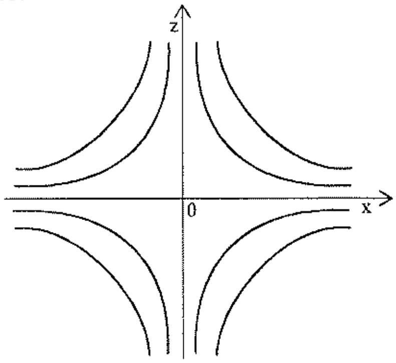


A $z=x^2+y^2$ felület

2. ábra

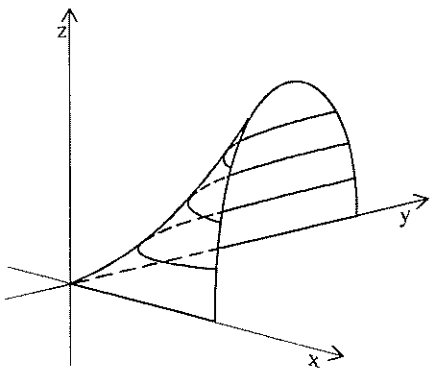
2. Ábrázoljuk a $z = xy$ felületet.

M: A szintvonalak egyenlete : $z_0 = xy$. Innen $y = \dfrac{z_0}{x}$. Ezek a görbék hiperbolák. Az $y = y_0$ metszetek egyenlete : $z = xy_0$. Ezek y_0 iránytangensű, origón átmenő egyenesek. Ugyancsak origón átmenő egyenesek az $x = x_0$ metszetek is $(z = x_0 y)$. A szintvonalak ill. a felületek első térnyolcadba eső része a 3. ill. 4. ábrán látható.



A $z_0=xy$ szintvonalak

3. ábra



A z=xy felület

4. ábra

A felület közismert nevén nyeregfelület (hiperbolikus paraboloid).

3. Írjuk fel az $f(x,y) = x^3y - 4xy^2 - x + y$ függvény első és második parciális deriváltjait.

M: Figyelembe véve, hogy az egyváltozós függvény deriválási szabályai itt is érvényesek, továbbá ha az egyik változó szerint deriválunk, akkor a másik változót állandónak kezeljük, a deriváltak az alábbiak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 3x^2y - 4y^2 - 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = x^3 - 8xy + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = 3x^2 - 8y = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = -8x$$

4. Írjuk fel az $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ függvény teljes differenciálját!

M: Alkalmazzuk a **(6)** formulát. Mivel

$$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

ezért $\quad df = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$

A dx helyett írhatunk Δx-et, dy helyett pedig Δy-t is.

5. Megmérve egy henger h magasságát és alapkörének r sugarát, a következő eredményeket kapjuk: $\quad r = 2.5m \pm 0.1m \qquad h = 4.0m \pm 0.2m$

Becsüljük meg a henger térfogatának számításakor keletkező abszolút és relatív hibát.

M: A térfogat r és h függvényében : $V = r^2\pi h$. Az abszolút hiba becslésére használjuk az **(7)** formulát. Ekkor $|\Delta V| \approx |dV| \le |2r\pi h\cdot\Delta r| + |r^2\pi\cdot\Delta h|$

Mivel $r = 2.5$ és $|\Delta r| = 0.1$ továbbá $h = 4$ és $|\Delta h| = 0.2$, ezért

$$|\Delta V| \approx |dV| \le 20\pi\cdot 0.1 + 6.25\pi\cdot 0.2 = 10.20m^3.$$

Az abszolút hiba tehát kisebb mint $10.20\ m^3$. A térfogat értéke $V = 78.5\,m^3$, így a relatív illetve százalékos hiba : $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right| \le 0.13$ illetve $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|100\% \le 13\%$.

Megjegyezzük, hogy a relatív hiba becslése történhet a következő módon is:

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \le \frac{2r\pi h}{r^2\pi h}|\Delta r| + \frac{r^2\pi}{r^2\pi h}|\Delta h| = 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = 0.13.$$

Innen az is leolvasható, hogy r relatív hibája kétszer akkora súllyal jelentkezik a térfogat hibájában mint h relatív hibája. Ugyanez érvényes a százalékos hibára. Valóban, r százalékos hibája 4% (0.1 a 2.5-nek 4 százaléka), h százalékos hibája pedig 5% (0.2 a 4-nek 5 százaléka), így a térfogat százalékos hibája (2 · 4+1 · 5)% = 13%.

6. Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y - 3y^2 - x$ függvény $P_0(2,-1)$ pontbeli, $\alpha = 30°$ irányban vett iránymenti deriváltját.

M: Használjuk a **(8)** formulát, figyelembe véve azt, hogy a deriváltakat az $x_0 = 2,\quad y_0 = -1$ helyen kell venni.

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (2xy-1)\cos 30° + (x^2-6y)\sin 30° = -5\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\frac{1}{2} = 0.67$$

7. Írjuk fel a $z = x^2 - y^2$ felület $P_0(2,-1)$ helyhez tartozó érintősíkjának egyenletét!

M: Először kiszámítjuk z_0 értékét. Mivel $x_0 = 2$, $y_o = -1$, ezért $z_0 = 2^2 - (-1)^2 = 3$. Az érintősík normálvektora a **(9)** alapján :

$\bar{n} = (2x_0, -2y_0, -1) = (4, 2, -1)$ Az érintősík egyenletét a **(10)** formula felhasználásával írjuk fel:

$z - 3 = 4(x-2) + 2(y+1)$. Rendezés után : $4x + 2y - z - 3 = 0$.

8. Vizsgáljuk meg az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ függvényt szélsőértékre.

M: A **(11)**-ből és **(12)**-ből látható, hogy szükségünk van az első és második deriváltakra. Képezzük ezeket :

$$f'_x = 3x^2 - 3y \quad , \quad f'_y = 3y^2 - 3x$$

$$f''_{xx} = 6x \quad , \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -3 \quad , \quad f''_{yy} = 6y$$

Állítsuk elő a **(13)** determinánst is: $D(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$

Szélsőérték ott lehet, ahol az első deriváltak nullával egyenlők, azaz ha

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $y = x^2$. Helyettesítsük ezt a második egyenletbe. Ekkor az $x^4 - x = 0$ egyenletet kapjuk. Innen $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Tehát az egyenletrendszer megoldása:

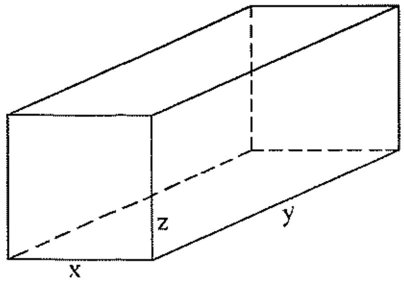
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ y_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Vagy másképpen írva : } (0,0) \text{ és } (1,1).$$

Szélsőérték ezen a két helyen lehet. Hogy van-e, azt a **(12)** vagy **(13)** alapján döntjük el. A $(0,0)$ helyen D értéke, azaz $D(0,0) = -9$. Mivel ez negatív. ezért a $(0,0)$ helyen nincs szélsőérték. Az $(1,1)$ helyen D értéke, azaz $D(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$, ezért az $(1,1)$ helyen a függvénynek helyi minimuma van. Ennek a minimumnak az értéke:

$$f_{\min} = f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 = -1.$$

9. Egy felül nyitott, téglatest alakú kád térfogata adott V érték. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kád felülete a lehető legkisebb legyen?

M: Legyenek az ábra szerinti méretek (az élek hossza) x,y,z. Ekkor $V = xyz$.



5. ábra

A felület $F = xy + 2xz + 2yx$ A $V = xyz$ egyenlőségből $z = \frac{V}{xy}$. Ezt felhasználva a felület x és y függvényében: $F = F(x,y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát (pontosabban mondva azt az x és y értéket, amely mellett F-nek minimuma van). A deriváltak:

$$F'_x = y - \frac{2V}{x^2} \quad , \quad F'_y = x - \frac{2V}{y^2} \quad , \quad F''_{xx} = \frac{4V}{x^3} \quad , \quad F''_{xy} = F''_{yx} = 1 \quad , \quad F''_{yy} = \frac{4V}{y^3}$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $y - \frac{2V}{x^2} = 0$, $x - \frac{2V}{y^2} = 0$.

Az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = y_1 = \sqrt[3]{2V}$. Itt valóban van szélsőérték, ugyanis $D = \frac{16V^2}{x^3y^3} - 1$, s így $D(x_1,y_1) = \frac{16V^2}{4V^2} - 1 = 3 > 0$

Mivel pedig $F''_{xx}(x_1,y_1) = \frac{4V}{2V} = 2 > 0$, ezért minimum van. A kád harmadik mérete : $z_1 = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. A minimális felület : $F_{\min} = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

10. Számítsuk ki az $f(x,y) = x - x^2y$ függvény kettős integrálját, ha a T tartomány a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$ téglalap.

M: Használjuk a **(15)** formulát és integráljunk először y szerint. Ekkor

$$\iint_T (x - x^2y)dxdy = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{2}(x - x^2y)dy\right)dx = \int_{x=0}^{1}\left[xy - \frac{x^2y^2}{2}\right]_0^2 dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1}(2x - 2x^2)dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

11. Legyen $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Igazoljuk, hogy $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

12. Mivel egyenlő az *f* függvény iránymenti deriváltja, ha $\alpha = 0°$ ill. $\alpha = 90°$?

13. Igazoljuk, hogy a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ felület mindegyik érintősíkja átmegy az origón!

14. Igazoljuk, hogy az $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$ függvénynek a $(-2,0)$ helyen minimuma van!

ÚTMUTATÁSOK

11. Célszerű az $u = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ alakot használni. Innen:

$$u'_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad u''_{xx} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Hasonlóan számítható u''_{yy}. Összeadva a két másodrendű deriváltat, azok összege nulla lesz.

12. Használjuk a **(8)** formulát. Ha $\alpha = 0°$, akkor $\cos\alpha = 1$ és $\sin\alpha = 0$. Így akkor $\frac{df}{d\alpha} = f'_x$, vagyis éppen az *x*-szerinti parciális derivált. Ha viszont $\alpha = 90°$, akkor $\frac{df}{d\alpha} = f'_y$.

13. Írjuk fel egy teszőleges (x_0, y_0) helyhez tartozó érintősík egyenletét!

$$z_0 = \sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}}, \quad f'_x(x_0,y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}}}, \quad f'_y(x_0,y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^{\,2}+y_0^{\,2}}}$$

A **(10)** egyenletet felírva, összevonások után $Ax + By + Cz = 0$ alakú egyenletet kapunk. Ez olyan sík egyenlete, amely átmegy a (0,0,0) ponton (az origón), hiszen *x,y* és *z* helyébe nullát helyettesítve, mindkét oldalon nullát kapunk. A felület origó csúcspontú körkúp.

14. Először azt kell igazolni, hogy az

$$\left.\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x+y^2}{2}+1\right) &= 0 \\ e^{\frac{x}{2}}y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek a $(-2,0)$ számpár megoldása.

Mivel ezen a helyen $D=\frac{1}{e^2}>0$ és $f''_{xx}=\frac{1}{2e}>0$, ezért itt valóban minimum van.

FELADATOK

15. Főmetszetek segítségével próbáljon képet alkotni az alábbi felületekről :

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **b)** $x^2+y^2-z^2=a^2$

c) $-x^2-y^2+z^2=a^2$ **d)** $z=x^2-y^2$ **e)** $z=x^2+2y^2$.

16. Állítsa elő a következő függvények első és második parciális deriváltjait :

a) $f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$ **b)** $g(x,y)=xy+\frac{x}{y}$

c) $h(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **d)** $u(s,t)=s^2-st+t^2$.

17. Az $u(x,y)$ függvényt harmonikusnak mondjuk, ha $u''_{xx}+u''_{yy}=0$. Igazolja, hogy az alábbi függvények harmonikusak:

a) $u(x,y)=x^2-y^2$ **b)** $u(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$ **c)** $u(x,y)=e^x\cos y$.

18. Írja fel az alábbi függvények differenciálját:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ **b)** $u(x,y)=e^{xy}$ **c)** $z(x,y)=\frac{x}{y}$.

19. Egy téglalap oldalai $x=6$ m és $y=8$ m. Körülbelül mennyit változik a téglalap átlója és területe, ha az x oldalt 2 mm-rel megnöveljük, az y oldalt pedig 5 mm-rel csökkentjük?

20. A függvény megváltozását a differenciállal helyettesítve, számítsa ki az alábbi kifejezések értékét:

a) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$ **b)** $\sin 29°\cdot \text{tg}46°$.

21. Számítsa ki az $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ függvény iránymenti deriváltját a P(1,1) pontban, ha $\alpha=135°$.

22. Írja fel az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott helyen :

a) $z=x^2+y^2$ $P_0(1,2)$ **b)** $z=\text{arctg}\frac{y}{x}$ $P_0(1,1)$.

23. Vizsgálja meg a következő függvényeket szélsőérték szempontjából:

a) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$ **b)** $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$

c) $f(x,y)=x^2-(y-1)^2$ **d)** $f(x,y)=4\ln x+10\ln y-x^2-xy-y^2$.

24. Legyen adva a síkon n pont : $P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2),\dots,\ P_n(x_n,y_n)$. Keresse meg a síkon azt a $P(x,y)$ pontot, amelyre teljesül a következő feltétel: az adott pontoktól mért távolságainak négyzetösszege minimális.

25. Számítsa ki az $\iint\limits_T (x^2 - xy)\,dxdy$ kettős integrált, ahol T a $0 \le x \le 2$, $1 \le y \le 4$ téglalap.

26. Számítsa ki annak a térrésznek a térfogatát, amelyet alulról a $0 \le x \le$ a, $0 \le y \le$ b téglalap, felülről a $z = xy$ felület, oldalról pedig a téglalap határára emelt, a z tengellyel párhuzamos síkok határolnak.

MEGOLDÁSOK

15. a) Háromtengelyű ellipszoid, melynek középpontja az origó. A féltengelyek hossza rendre a, b, c.

b) Egyköpenyű forgási hiperboloid. Forgástengely a z tengely.

c) Kétköpenyű forgási hiperboloid. Forgástengely a z tengely.

d) Nyeregfelület (hiperbolikus paraboloid). Alakja hasonló a $z = xy$ felület alakjához. A két felület másképpen helyezkedik el a koordináta-rendszerben.

e) Elliptikus paraboloid.

16. a)
$$f'_x = 4x^3 - 8xy^2,\quad f'_y = 4y^3 - 8x^2y$$
$$f''_{xx} = 12x^2 - 8y^2,\quad f''_{yy} = 12y^2 - 8x^2,\quad f''_{xy} = f''_{yx} = -16xy$$

b)
$$g'_x = \frac{\partial g}{\partial x} = y + \frac{1}{y},\quad g'_y = \frac{\partial g}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$$
$$g''_{xx} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0,\qquad g''_{yy} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3},\quad g''_{xy} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

c) $h'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\quad h'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y}},\quad h''_{xx} = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}},\quad h''_{yy} = -\dfrac{1}{4\sqrt{y^3}},\quad h''_{xy} = 0,$

d) $u'_s = 2s - t,\quad u'_t = -s + 2t,\quad u''_{ss} = 2,\quad u''_{tt} = 2,\quad u''_{st} = u''_{ts} = -1$

17. a) $u''_{xx} = 2 \quad u''_{yy} = -2 \qquad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

b) $u''_{xx} = 12x^2 - 12y^2 \quad u''_{yy} = -12x^2 + 12y^2 \qquad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

c) $u''_{xx} = e^x \cos y \qquad u''_{yy} = -e^x \cos y \qquad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

18. a) $df = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xdx + ydy)$

b) $du = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = e^{xy}(ydx + xdy)$

c) $dz = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$

19. Az átló hossza: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ennek a függvénynek a megváltozását keressük, ha $x = 6$, $y = 8$, $\Delta x = 0.002$ és $\Delta y = -0.005$.

$$\Delta z \approx dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta y = \frac{1}{10}(6 \cdot 0.002 - 8 \cdot 0.005) = -0.0028$$

Az átló tehát körülbelül 2.8 mm-rel csökken. Hasonlóan kell eljárni a területnél, csak ott a $T = xy$ függvény differenciálját kell kiszámítani. A terület kb. 0.014 m^2-rel, azaz kb. 140 cm^2-rel csökken.

20. a) Használjuk a $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ függvényt és legyen $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$. A függvény értéke $x = 1$ és $y = 2$ esetén 3. Ez változik meg közelítően *dz*-vel. A kifejezés értéke: 2.95.

b) Itt $z = \sin x \operatorname{tg} y$, $x = 30°$, $y = 45°$, $\Delta x = -1° = -\pi/180$, $\Delta y = 1° = \pi/180$. A kifejezés értéke: 0.502.

21. 0 **22.** **a)** $2x + 4y - z - 5 = 0$ **b)** $z = (\pi/4) - (1/2)(x - y)$

23. a) Az $x = 0$, $y = 1$ helyen minimum van, és $f_{min} = 0$.

b) Az $x = 1$, $y = 0$ helyen minimum van, és $f_{min} = -1$ **c)** Nincs szélsőérték.

d) Az $x = 1$, $y = 2$ helyen maximum van, és $f_{max} = 10\ln 2 - 7$

24. A távolságok négyzetösszege: $T(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\left[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2\right]$.

Ennek a függvénynek az $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ $y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$ helyen, vagyis a pontrendszer súlypontjában van minimuma.

25. -7 **26.** A térfogat mérőszáma: $\frac{1}{4}a^2b^2$.

12. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. Fogalmak

(1) *Közönséges differenciálegyenlet*en olyan egyenletet értünk, amelyben az ismeretlen egy egyváltozós függvény, és az egyenlet tartalmazza az ismeretlen függvény deriváltjait, magát az ismeretlen függvényt, a független változó ismert függvényeit, valamint konstansokat.

1.PÉLDA: Az $x \cdot y'' - y' = 2x^3 + 3$ differenciálegyenlet, ahol $y = y(x)$, az ismeretlen függvény deriváltjait: y''-t és y'-t, a független változó ismert függvényeit:, x-et és $2x^3$-t, valamint egy konstanst: 3-at tartalmazza.

Megjegyzés: Az $y^2x - y = 3x$ egyenlet, melyben $y = y(x)$, nem tekinthető differenciálegyenletnek, hiszen nem tartalmazza az ismeretlen függvény deriváltját.

(2) A differenciálegyenlet *megoldás*án, vagy *megoldásfüggvény*én értünk minden olyan függvényt, mely deriváltjaival együtt az adott differenciálegyenletet azonosan kielégíti.

2.PÉLDA: A $2x^2y'' - 3xy' + 2y = x^3$ differenciálegyenletnek az

$y = x^2 + x^{1/2} + \frac{1}{5}x^3$ függvény megoldásfüggvénye, hiszen kiszámítva az

$$y' = 2x + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{3}{5}x^2 \quad \text{ill.} \quad y'' = 2 - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{6}{5}x$$

deriváltakat, majd behelyettesítve a

$$2x^2\left(2 - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{6}{5}x\right) - 3x\left(2x + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{3}{5}x^2\right) + 2\left(x^2 + x^{1/2} + \frac{1}{5}x^3\right) = x^3$$

ill. a beszorzásokat elvégezve a

$$4x^2 - \frac{1}{2}x^{1/2} + \frac{12}{5}x^3 - 6x^2 - \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{9}{5}x^3 + 2x^2 + 2x^{1/2} + \frac{2}{5}x^3 = x^3$$

egyenlőséget kapjuk, melyből az összevonások elvégzése után $x^3 = x^3$ adódik, ami azonosság.

Az $y = x^2$ függvény viszont nem megoldásfüggvénye a differenciálegyenletnek, mert behelyettesítve a $2x^2\left(x^2\right)'' - 3x\left(x^2\right)' + 2x^2 = x^3$ nem azonosság, ugyanis $4x^2 - 6x^2 + 2x^2 = x^3$ azaz $0 = x^3$ ami nem minden x-re áll fenn.

(3) A differenciálegyenlet *általános megoldás*án azt a megoldásfüggvényt értjük, amely pontosan annyi, egymástól független konstanst tartalmaz, amennyi az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendje (ezt a differenciálegyenlet rendjének nevezzük).

3.PÉLDA: Az $y''-2y'+y=3$ differenciálegyenlet általános megoldása az $y=c_1e^x+c_2xe^x+3$ megoldásfüggvény (arról, hogy valóban megoldása, az y' és y'' kiszámításával és a differenciálegyenletbe való behelyettesítésével meggyőződhetünk), hiszen pontosan két , egymástól független konstanst - c_1 és c_2 - tartalmaz.
Az $y=c_1e^x+2xe^x+3$ megoldásfüggvény már nem tekinthető a differenciálegyenlet általános megoldásának, hiszen csak egy integrációs konstanst tartalmaz (c_1).
(Bár az $y=c_1e^x+c_2e^x+3$ is megoldásfüggvénye a differenciálegyenletnek, a $c_1e^x+c_2e^x=e^x(c_1+c_2)$ miatt mégsem tekinthető általános megoldásnak, hisz a $c_1+c_2=k$ összefüggésből pl. $c_1=k-c_2$ adódik, vagyis c_1 és c_2 nem függetlenek.)
(4) A differenciálegyenlet *partikuláris megoldásán* (jele: y_p vagy y_0) azt a megoldásfüggvényt értjük, amely az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendjénél (a differenciálegyenlet rendjénél) legalább eggyel kevesebb egymástól független integrációs konstanst tartalmaz. A partikuláris megoldás az általános megoldásból választható ki az ún. *kezdeti feltétel*ek segítségével.
4.PÉLDA: Az $xy''+2y'=x^2$ differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása az $y_1=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}+c$ függvény, hiszen csak egy integrációs konstanst tartalmaz.

Természetesen az $y_2=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}-1$ függvény is partikuláris megoldás, hisz egyetlen integrációs konstanst sem tartalmaz. (Arról, hogy ezek megoldásfüggvények, a differenciálegyenletbe való helyettesítéssel győződhetünk meg.)

Ha most az $y=\frac{x^3}{12}-\frac{c_1}{x}+c_2$ általános megoldásra előírjuk az $y'(1)=5/4$ kezdeti feltételt (azaz a derivált függvény az $x=1$ helyen az $5/4$ értéket vegye fel), akkor deriválva az általános megoldásfüggvényt:
$y'=\frac{x^2}{4}+\frac{c_1}{x^2}$, majd figyelembe véve a kezdeti feltételt az $\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+c_1$ egyenlethez jutunk, melyből $c_1=1$. Ezt visszahelyettesítve az általános megoldásba $y=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}+c_2$ adódik, amely éppen az egyik megadott partikuláris megoldás.
Előírva még azt a követelményt is, hogy a megoldásgörbe menjen át a P(2; −5/6) ponton - vagyis a függvény értéke az $x=2$ helyen −5/6 legyen -, további partikuláris megoldáshoz jutunk: $-\frac{5}{6}=\frac{2^3}{12}-\frac{1}{2}+c_2$, melyből $c_2=-1$. Ezt visszahelyettesítve adódik a két kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás: $y_p=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}-1.$

FELADATOK

5. Döntse el, hogy a megadott függvény megoldása-e az adott differenciálegyenletnek!

a) $y' + y = 2 \quad ; \quad y(x) = e^{-x} + 2$

b) $2rr'\cos\varphi - \mathrm{tg}\varphi = 0 \quad ; \quad r(\varphi) = \sqrt{\dfrac{1}{\cos\varphi} + C}$

c) $y'' + 3y' - 4y = -5e^{-4x} \quad ; \quad y(x) = xe^{-4x}$ ill. $y(x) = 3e^{x}$

d) $y'' - \dfrac{2}{x}y' = x^2 + 1 \quad ; \quad y(x) = cx^2$ ill. $y(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

6. Mutassa meg, hogy a megadott függvény általános megoldása a megadott differenciálegyenletnek !

a) $x^2y'' - 3xy' = x^5 \quad , \quad y(x) = c_1x^4 + \dfrac{x^5}{5} + c_2$

b) $(x+1)^2y' + 3(x+1)y = 2 \quad , \quad y(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^3} \qquad x \neq -1$

c) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0 \quad , \quad y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}$

d) $(1+2y)xdx + (1+x^2)dy = 0 \quad , \quad y(x) = \dfrac{c^2}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}$.

7. Mutassa meg, hogy a megadott függvény általános megoldása a megadott differenciálegyenletnek és keresse meg azt a partikuláris megoldást, amely kielégíti a megadott kezdeti feltételt (feltételeket)!

a) $y' - y = 2(1-x) \qquad y(x) = 2x + ce^{x}$, a kezdeti feltétel $y(0) = 2$

b) $(x^2-1)y' = 2xy\ln y \quad y(x) = e^{c(x^2-1)} \quad |x| \neq 1$
a kezdeti feltétel: $y(2) = e$.

c) $y'' - \dfrac{2x}{x^2+1}y' + \dfrac{2}{x^2+1}y = 0 \quad y(x) = c_1x + c_2(x^2-1)$
a kezdeti feltételek $y(2) = -1 \quad y'(1) = -1$

d) $xy'' - (1+x)y' + y = 0 \quad y(x) = c_1(1+x) + c_2e^{x} \qquad x \neq 0$
a kezdeti feltételek $y(1) = 3 \quad y'(1) = 5$.

MEGOLDÁSOK

5. a) Igen, behelyettesítés után $2 = 2$ adódik.

b) Igen, behelyettesítés után $\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\varphi = 0$ adódik.

c) Az $y = xe^{-4x}$ megoldás, hiszen behelyettesítés után $-5e^{-4x} = -5e^{-4x}$ adódik, az $y = 3e^x$ viszont nem megoldás, ugyanis $0 \neq -5e^{-4x}$.

d) Az $y = cx^2$ nem megoldás $-2c \neq x^2 + 1$, az $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ megoldás, behelyettesítés után $x^2 + 1 = x^2 + 1$ adódik.

6. a) A megadott függvényt behelyettesítve $x^5 = x^5$ adódik, s két tetszőleges állandót tartalmaz, így valóban az.

b) Behelyettesítve fennáll az egyenlőség ($2 = 2$), s a megadott függvény egy tetszőleges állandót tartalmaz.

c) Behelyettesítve fennáll az egyenlőség ($0 = 0$), s a megadott függvény négy tetszőleges állandót tartalmaz.

d) Behelyettesítve $0 = 0$ adódik, s a megadott függvény egy tetszőleges állandót tartalmaz.

7. a) $y_p = 2x + 2e^x$ **b)** $y_p = e^{\frac{1}{3}(x^2-1)}$

c) $y_p = -x^2 + x + 1$ **d)** $y_p = -2 - 2x + 7e^{x-1}$

2. Differenciálegyenletek osztályozása

(5) *Rendűség*

Egy differenciálegyenletet *n-edrendűnek* nevezünk, ha az ismeretlen függvény az egyenletben szereplő legmagasabb rendű deriváltjának rendje n.

8.PÉLDA: a) Az $y''' - y'' - 4y' + 4y = x$ differenciálegyenlet harmadrendű, mivel y''' szerepel benne.

b) Az $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{5/2}$ differenciálegyenlet elsőrendű (a legmagasabb derivált y').

c) Az $y'' - y' = e^{2x}$ differenciálegyenlet másodrendű.

(6) *Homogenitás*

Egy differenciálegyenletet *homogénnak* nevezünk, ha az egyenlet minden tagja tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak deriváltjait. Ellenkező esetben a differenciálegyenlet *inhomogén*.

9.PÉLDA: a) Az $y' - 3y + e^x = 0$ differenciálegyenlet inhomogén, hiszen a "bal oldali" harmadik tag nem tartalmazza az ismeretlen függvényt.

b) Az $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ differenciálegyenlet homogén, hiszen minden tag tartalmazza az ismeretlen függvényt.

c) Az $y \cdot y'' - y' = 3$ differenciálegyenlet a "3" miatt inhomogén (nem tartalmazza y-t, ill. y'-t).

(7) *Linearitás*

Egy differenciálegyenlet *lineáris*, ha benne a keresendő függvény és deriváltjai első hatványon, a független változó ismert függvényeivel vagy konstanssal szorozva szerepelnek. Ellenkező esetben *nem lineáris* a differenciálegyenlet.

10.PÉLDA: a) A $\left(4x^3y^3 - 2xy\right) + \left(3x^4y^2 - x^2\right)y' = 0$ differenciálegyenlet nemlineáris, hiszen az ismeretlen függvénynek egynél magasabb hatványa szerepel benne (azaz nemlineáris akár az y^3, akár az y^2 miatt).

b) Az $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2\ln x$ differenciálegyenlet lineáris, hiszen benne az ismeretlen függvény és deriváltjai csak első hatványon, a független változó ismert függvényeivel szorozva szerepelnek.

FELADATOK

11. Rendűség szerint osztályozza az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y' \cdot \ln x - y = 2$ **b)** $yy'' = 1 + \left(y'\right)^2$

c) $y^{(4)} + 4y''' + 3y'' - 2y' - 6y = e^{-x}\sin x$

d) $y^{(7)} - 4y^{(5)} + 4y''' = 0$ **e)** $xydx = -\sqrt{1-x^2}dy$.

12. Homogenitás szempontjából osztályozza az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y' - xy = x$ **b)** $e^xy'' - e^{2x}y' = 0$

c) $xy'' - 2y' + x^3e^x = 0$ **d)** $\sin x + y'\cos x = y\sin x$

e) $xy' + y = y^2$ **f)** $2x + 3y + (3x+1)y' = 0$.

13. Linearitás szempontjából osztályozza az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x\ln x$ **b)** $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$

c) $y''(x+1) = 2xy'$ **d)** $y'' - 3y' - 18y = e^x$

e) $y' = \sqrt{3x - 4y}$ **f)** $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$

g) $y' - y\cos x = e^{-\sin x}$ **h)** $\sin y + y\sin x + (x\cos y - \cos x)y' = 0$.

14. Osztályozza az alábbi differenciálegyenleteket (rendűség, linearitás, homogenitás)!

a) $y' + 3xy^2 = e^x$ **b)** $y' = x^2 - 2xy$

c) $y'' - \dfrac{1}{x}y' + 2y = \ln x$ **d)** $y''' = y''\sin y + \sin x$

e) $y''\sqrt{x^2+1} - \cos y = \sin x$ **f)** $y' + y^2\cos x = 0$

g) $\dfrac{y''}{\sin x} + y\ln x + e^{2x} = 0$ h) $y'' \cdot y' + 2y^2 \cdot y' = 0$

i) $y = 2xy' - 3x^3y''$ j) $y''e^{-x} - y'e^{-x} = 1$

k) $y^{(4)} = y''\mathrm{tg}x - \dfrac{y}{x} + 2$ l) $3x^2e^y + (x^3e^y - 1)y' = 0$

m) $x^3y''' + 3x^2y'' - xy' + y = x^3$

n) $y' = y'' + 3\mathrm{tg}x$ o) $y''\sin^2 x - 2y = 0$.

MEGOLDÁSOK

11. a) Elsőrendű **b)** Másodrendű **c)** Negyedrendű
d) Hetedrendű **e)** Elsőrendű
12. a) Inhomogén **b)** Homogén **c)** Inhomogén
d) Inhomogén **e)** Homogén **f)** Inhomogén
13. a) Lineáris **b)** Nemlineáris **c)** Lineáris **d)** Lineáris
e) Nemlineáris **f)** Nemlineáris **g)** Lineáris **h)** Nemlineáris
14. a) Elsőrendű, nemlineáris, inhomogén **b)** Elsőrendű, lineáris, inhomogén
c) Másodrendű, lineáris, inhomogén **d)** Harmadrendű, nemlineáris, inhomogén
e) Másodrendű, nemlineáris, inhomogén **f)** Elsőrendű, nemlineáris, homogén
g) Másodrendű, lineáris, inhomogén **h)** Másodrendű, nemlineáris, homogén
i) Másodrendű, lineáris, homogén **j)** Másodrendű, lineáris, inhomogén
k) Negyedrendű, lineáris, inhomogén **l)** Elsőrendű, nemlineáris, homogén
m) Harmadrendű, lineáris, inhomogén **n)** Másodrendű, lineáris, inhomogén
o) Másodrendű, lineáris, homogén

3. Differenciálegyenletek megoldási módszerei

3.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Egy elsőrendű differenciálegyenlet *szétválasztható változójú*, ha azonosságok és egyenletrendezési szabályok formális alkalmazásával

(8) $f(x)\,dx = g(y)\,dy$

alakra hozható. Mindkét oldalt integrálva az

(9) $\int f(x)dx = \int g(y)dy$

egyenlőséghez jutunk. Az integrálásokat elvégezve megkapjuk a megoldást.

Ilyen például az $y' = \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x)\,\psi(y)$ differenciálegyenlet, amelyből a "dx"-szel való formális átszorzással az $\dfrac{1}{\psi(y)}dy = \varphi(x)dx$ egyenlethez jutunk. (A dx nem mennyiség, tehát ténylegesen nem lehet vele szorozni; meg lehet azonban mutatni, hogy ez a formális szorzás jogos.)

PÉLDÁK

15. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet!

$$(y-2)-(x+1)y' = 0$$

M: Írjunk y' helyett $dy\,/\,dx$ -et és szorozzuk végig (formálisan) a differenciálegyenletet dx-szel. Rendezzük az egyenletet úgy, hogy a dx-et ill. a dy-t tartalmazó tagok az egyenlet különböző oldalán legyenek:

$$(y-2)dx = (x+1)dy$$

A dx csak x-től, a dy pedig csak y-tól függő függvény szorzója lehet, tehát osztanunk kell $(y-2)(x+1)$-gyel ($y \neq 2$, $x \neq -1$):

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y-2}$$

Ezzel a változókat szétválasztottuk. Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dy}{y-2}$$

Kiszámítva az integrálokat : $\ln|x+1| + \ln|c_1| = \ln|y-2| + \ln|c_2|$

Az integrációs konstansok egy konstansban összefoglalhatók, ezt célszerű mindenkor a független változó oldalán szerepeltetni. Rendezéssel:

$$\ln|x+1| + \ln|c_1| - \ln|c_2| = \ln|y-2| \text{ , azaz } \ln|x+1| + \ln\left|\frac{c_1}{c_2}\right| = \ln|y-2| \ .$$

$(c_1\,/\,c_2) = c$ jelöléssel $\ln|x+1| + \ln|c| = \ln|y-2|$, azaz

$|y-2| = |c||x+1|$, vagyis $y-2 = c|x+1|$, s így $y = c|x+1| + 2$.

16. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet !

$$x + yy' = xy(y - xy')$$

M: Használjuk fel, hogy $y' = \dfrac{dy}{dx}$, így $x + y\dfrac{dy}{dx} = xy\left(y - x\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Szorozzuk az egyenletet dx-szel : $\quad xdx + ydy = xy(ydx - xdy)$.

A dx-et és a dy-t tartalmazó tagokat az egyenlet különböző oldalára kell gyűjtenünk, ezért először elvégezzük a beszorzást: $xdx + ydy = xy^2dx - x^2ydy$

Rendezve: $ydy + x^2ydy = xy^2dx - xdx$.

Hogy egyenletünket a kívánt $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ alakra hozzuk, előbb a dy és dx szorzóját $f(x)g(y)$ típusú szorzattá kell alakítanunk!

Kiemeléssel adódik : $\left(1+x^2\right)ydy = \left(y^2-1\right)xdx$.

Egyenletünket $(1+x^2)(y^2-1)$-gyel $(|y| \neq 1)$ osztva:

$$\frac{y}{y^2-1}dy = \frac{x}{1+x^2}dx$$

Ezzel a változókat szétválasztottuk. Integrálva mindkét oldalt:

$$\int \frac{y}{y^2-1}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx \quad \text{amiből} \quad \frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\ln c$$

azaz $\ln\left|y^2-1\right| = \ln\left(1+x^2\right)+\ln c^2$, ahonnan az $\left|y^2-1\right| = c^2\left(1+x^2\right)$ megoldásfüggvényt kapjuk (implicit alakban).

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

17. Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenleteket!

a) $\left(x^2y+6y\right)y' + \left(xy^2-x\right) = 0$

Lépések az önálló megoldáshoz:

-a dy-t és dx-et tartalmazó tagokat gyűjtse az egyenlet különböző oldalára.

-hozza az egyenletet $f_1(x)g_1(y)dy = f_2(x)g_2(y)dx$ alakra, a zárójeles tényezőket alakítsa szorzattá, emeljen ki mindkét oldalon (vegye észre hogy y ill. x kiemelhető),

-hozza az egyenletet $G(y)dy = F(x)dx$ alakra, osszon $\left(x^2+6\right)\left(y^2-1\right)$ - gyel $\left(|y| \neq 1\right)$

-Ezzel a vátozókat szétválasztotta, integrálja mindkét oldalt, a megoldás $\left|y^2-1\right| = \dfrac{c^2}{x^2+6}$

b). $x^2 + \cos y = x\sin yy' - x^2\cos y - 1$

Lépések az önálló megoldáshoz:

-vegye figyelembe, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$, végezze el a helyettesítést és szorozzon dx-szel

-az egyenletet $f_1(x)g_1(y)dy = f_2(x)g_2(y)dx$ alakra kell hoznia, alakítson szorzattá, alkalmasan csoportosítson a dx-et tartalmazó oldalon,

-végezze el a szorzattá alakítást

-hozza az egyenletet $G(y)dy = F(x)dx$ alakra, osszon $x(1+\cos y)$-nal $(x \neq 0; y \neq \pi + 2k\pi)$

-Ezzel a változókat szétválasztotta, integrálja mindkét oldalt; a megoldásfüggvény implicit alakja: $$\frac{x^2}{2} + \ln|x| + c = -\ln(1+\cos y)$$

FELADATOK

18. Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenleteket!

a) $(2x+1)y' - 3y = 0$ **b)** $(1-x^2)y' - \sqrt{1-y^2} = 0$

c) $xy' + y = y^2$ **d)** $y'\sin y\cos x + \cos y \sin x = 0$

e) $ydx + (x+xy)dy = 0$ **f)** $(x^2y+6y)dy + (xy^2 - x)dx = 0$

g) $2x^2ydy - y^2dx = dx - 2xydy$ **h)** $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$

i) $xdx - dy = x^2dy - 2yxdx$ **j)** $y' - e^{x-y} + e^x = 0.$

19. Határozza meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletek azon partikuláris megoldását, amely az adott kezdeti feltételt kielégíti.

a) $x\sqrt{1-y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0 \quad y(0) = 1/2$

b) $xy'\cos y + \sin y = 0 \quad y(1) = \pi/2$

c) $xydy - y^2dx = dx - x^3ydy \quad y(1) = 1$

d) $yy' = e^x - e^x yy' \quad y(0) = \sqrt{\ln 2}$.

MEGOLDÁSOK

18. a) $y = c\left(\sqrt{|2x+1|}\right)^3 \qquad y \neq 0, \quad x \neq -1/2$

b) $y = \sin\left(c \ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}\right) \qquad |y| \neq 1, \quad |x| \neq 1$

c) $y = \dfrac{1}{1-c|x|}$ $\quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad y \neq 1$

d) $y = \arccos\dfrac{1}{c|\cos x|}$ $\quad y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

e) $\ln|y| + y = \ln\left|\dfrac{c}{x}\right|$ $\quad y \neq 0, \quad x \neq 0$

f) $\sqrt{|y^2-1|} = \dfrac{c}{\sqrt{x^2+6}}$ $\quad |y| \neq 1$

g) $y^2 + 1 = c\left|\dfrac{x}{x+1}\right|, \quad c > 0$ $\quad x \neq 0, \quad x \neq -1$

h) $y = c|x^2 - 2x| - 1$ $\quad x \neq 0, \quad x \neq 2, \quad y \neq -1$

i) $|2y+1| = c(x^2+1), \quad c > 0$ $\quad y \neq -\frac{1}{2}$

j) $\ln\dfrac{1}{|1-e^y|} = e^x + c$ $\quad y \neq 0$

19. a) $\sqrt{1-y^2} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-x^2}$ **b)** $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$

c) $\sqrt{1+y^2} = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ **d)** $y = \sqrt{\ln\dfrac{(1+e^x)^2}{2}}$

3.2. Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

Az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános alakja:

(10) $a(x)y' + b(x)y = f(x)$

ahol $a(x) \neq 0$; vagy $a(x)$-szel osztva:

(11) $y' + q(x)y = p(x)$

ahol $q(x) = b(x) \,/\, a(x)$, $p(x) = f(x) \,/\, a(x)$.

(Ennek a differenciálegyenletnek mindig létezik megoldása azon a tartományon, ahol $q(x)$ folytonos.)

Az $y' + q(x)y = 0$ egyenletet az $y' + q(x)y = p(x)$ *inhomogén* differenciálegyenlet *homogén* egyenletének nevezzük.

A lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása összegeként áll elő. Tehát az $y' + q(x)y = p(x)$ differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása a következő lépésekből áll:

a) meghatározzuk az $y' + q(x)y = 0$ homogén (szétválasztható) egyenlet általános megoldását
b) meghatározzuk az $y' + q(x)y = p(x)$ inhomogén egyenlet partikuláris megoldását (jele: y_0)
c) a két megoldást összeadva kapjuk az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását (jele: y), tehát $y = y_h + y_0$.

(12) *A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása*

Az $y' + q(x)y = 0$ egyenlet szétválasztható típusú, hiszen könnyen elvégezhetőek a következő átalakítások $\frac{dy}{dx} = -q(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -q(x)dx$.

(13) *Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározása*
(Az állandók variálásának módszere)

Legyen $y_h(x)$ a homogén egyenlet általános megoldása. Keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_0(x) = c(x)y_h(x)$ alakban, ahol $c(x)$ egy ismeretlen függvény. Helyettesítsük be $c(x)y_h(x)$-et az $y' + q(x)y = p(x)$ inhomogén egyenletbe: $\left(c(x)y_h(x)\right)' + q(x)\left(c(x)y_h(x)\right) = p(x)$.
A differenciálást elvégezve: $c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) + c(x)q(x)y_h(x) = p(x)$,
$c(x)$-et kiemelve: $c'(x)y_h(x) + c(x)\left(y_h'(x) + q(x)y_h(x)\right) = p(x)$.
De $y_h'(x) + q(x)y_h(x) = 0$ (mert $y_h(x)$ kielégíti a homogén egyenletet), ezért az egyenlet $c'(x)y_h(x) = p(x)$, tehát $c'(x) = \frac{p(x)}{y_h(x)}$, amiből $c(x)$ meghatározható $c(x) = \int \frac{p(x)}{y_h(x)}dx + c_1$.

PÉLDÁK

20. Határozzuk meg az $y' - \frac{2}{x}y = x^2 + 1$ $(x \neq 0)$ elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megolását.

M: a) *A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása*

A homogén egyenlet : $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Válasszuk szét a változókat:

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0$, $dy - \frac{2}{x}ydx = 0$, $dy = \frac{2}{x}ydx$, és ha $y \neq 0$, $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$.

Mindkét oldalt integrálva $\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$, azaz $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|c|$, melyből $y_h = c \cdot x^2$.

b) *Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának meghatározása*
Az y_0 partikuláris megoldást most $y_0 = c(x)x^2$ alakban keressük. Mivel $y_0 = c(x)x^2$ feltételezésünk szerint megoldása az $y' - \frac{2}{x}y = x^2 + 1$ differenciálegyenletnek, ezért behelyettesítve fenn kell állnia a $\left(c(x)x^2\right)' - \frac{2}{x}c(x)x^2 = x^2 + 1$ egyenlőségnek. A deriválást elvégezve (a szorzatfüggvény deriválási szabályát alkalmazva)

$c'(x)x^2 + 2xc(x) - 2xc(x) = x^2 + 1$ azaz $c'(x)x^2 = x^2 + 1$, mely feltételből a $c(x)$ meghatározható.Ugyanis x^2-tel osztva $(x \neq 0)$ a $c'(x) = 1 + 1/x^2$ alakhoz jutunk, melyből integrálással kapjuk a $c(x)$ -et (ha $c(x)$ deriváltja $1 + 1/x^2$, akkor $c(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$, azaz

$$c(x) = x - \frac{1}{x} \text{ , így } y_0 = c(x)x^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)x^2 = x^3 - x .$$

Ezzel az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását meghatároztuk.(A $c(x)$ meghatározásakor az integrációs konstanst zérusnak választjuk.)
Az inhomogén egyenlet általános megoldása az y_p és y_h összegeként adódik:

$$y = cx^2 + x^3 - x .$$

21. Határozzuk meg az $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ differenciálegyenlet azon megoldását, amelynek görbéje áthalad a $P(0,1)$ ponton.

M: Vegyük észre, hogy lényegében az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározása a feladat, amely az általános megoldásból választandó ki (nem tévesztendő össze az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásával!).
Először kiszámítjuk a differenciálegyenlet általános megoldását :
a) *A differenciálegyenlet homogén egyenlete általános megoldásának meghatározása:*
A homogén egyenlet $y' + y\cos x = 0$. Szétválasztjuk a változókat :
$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$, melyből $\frac{dy}{y} = -\cos x dx$.

Integrálva: $\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x dx$ ahonnan $\ln|y| = -\sin x + \ln|C|$, azaz $|y| = e^{-\sin x + \ln|C|}$, vagyis $|y| = e^{-\sin x}e^{\ln|C|}$, mivel $e^{\ln|C|}$ |C|-vel egyenlő, ezért $|y| = e^{-\sin x} \cdot |C|$.

Az abszolút érték feloldásából adódó (−1)-szeres szorzót C-be foglalva: $y_h = Ce^{-\sin x}$.

b) *Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának meghatározása.*

Keressük y_0-t, $y_0 = c(x)e^{-\sin x}$ alakban, ahol $c(x)$-et kell meghatároznunk.

Behelyettesítve : $\left(c(x)e^{-\sin x}\right)' + c(x)e^{-\sin x}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. Alkalmazva a szorzat-függvény deriválási szabályát és figyelembe véve, hogy $\left(e^{-\sin x}\right)' = -\cos x \cdot e^{-\sin x}$ (összetett függvény deriválása!), adódik:

$c'(x)e^{-\sin x} - \cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot c(x) + c(x)e^{-\sin x}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, amiből

$c'(x)e^{-\sin x} = \frac{1}{2}\sin 2x$

Mindkét oldalt szorozva $e^{\sin x}$-szel, s felhasználva, hogy $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$c'(x) = \sin x \cos x e^{\sin x}$, melyből $c(x) = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx$.

Mivel $(\sin x)' = \cos x$, így az integrál kiszámításához célszerű a $\sin x = t$ helyettesítést végrehajtani - ekkor $\cos x\, dx = dt$ -, majd parciálisan integrálni.

$$\int \sin x \cos x e^{\sin x} dx = \int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x}$$

tehát $c(x) = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x}$, és így

$y_0 = c(x)e^{-\sin x} = \left(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x}\right)e^{-\sin x} = \sin x - 1$.

c) *Az inhomogén egyenlet általános megoldása:* $y = y_h + y_0$ vagyis

$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$. A kapott általános megoldásból ki kell még választanunk az $y(0) = 1$ kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldást (vagyis olyan megoldás-függvényt , amely az $x = 0$ pontban $y = 1$ értéket fesz fel). Elvégezve a behelyettesítést ($x = 0$, $y = 1$):

$1 = Ce^{-\sin 0} + \sin 0 - 1$, azaz $1 = C - 1$, vagyis $C = 2$. Így a kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldás: $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

☞ ☞ ☞ FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL ☜ ☜ ☜

22.. Oldja meg az alábbi elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenleteket!

a) $xy' + 2y = 3x$

Lépések az önálló megoldáshoz:

– Határozza meg a homogén egyenlet általános megoldását: írja fel a homogén egyenletet, válassza szét a változókat,használja fel, hogy $y' = \frac{dy}{dx}$, majd szorozzon dx-szel, hozza az egyenletet $G(y)dy = F(x)dx$ alakra, rendezés után xy-nal kell osztania ($xy \neq 0$), mindkét oldalt integrálja, a homogén egyenlet általános megoldása $y_h = \frac{c}{x^2}$

– A második lépésben az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását kell meghatároznia: alkalmazza a konstansvariálás módszerét, a keresett y_0 partikuláris megoldás az y_h segítségével írható fel, az y_h-ban szereplő konstans helyébe $c(x)$-et kell írni: $y_0 = \frac{c(x)}{x^2}$, $c(x)$ meghatározásához y_0-t az inhomogén differenciálegyenletbe kell helyettesítenie, végezze el a kijelölt műveleteket, $c(x)$ integrálással adódik, vissza kell helyettesítenie

– Az általános megoldás y_h és y_0 összegeként adódik: $y = x + \frac{c}{x^2}$

b) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

Lépések az önálló megoldáshoz:

Az általános megoldás $y = y_0 + y_h$, ahol y_h a homogén egyenlet általános, y_0 az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása.

– Az első lépésben határozza meg y_h-t, írja fel a homogén egyenletet (ez mindig szétválasztható vátozójú differenciálegyenlet), a változók szétválasztása után integráljon, $y_h = c(x+1)^2 \quad (x \neq -1)$

– Határozza meg az y_0-t: az y_0 szerkezete hasonló mint az y_h-é, csak c helyébe $c(x)$-et kell írnia, a felírt y_0-t vissza kell helyettesítenie, végezze el a kijelölt műveleteket majd integráljon, és helyettesítsen vissza y_0-ba.

– Írja fel az általános megoldást; a végeredmény: $y = c(x+1)^2 + (x+1)^2 \frac{x^2 + 2x}{2}$.

FELADATOK

23. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y' - \frac{2}{x}y = x^2 + 1$ b) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

c) $y'\cos x + y\sin x = 1$ d) $2(1-x)y' - y = 4x\sqrt{1-x}$

e) $y'\cos x + y\sin x = 1 + \operatorname{tg} x$ f) $y' + y\operatorname{tg} x = \sin 2x$

g) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$ h) $xy' + 2y = \sin x$

i) $(x+1)y' - xy = 1$ j) $(x+1)y' - y = (x+1)^2 \ln x$

k) $y'\sin x - y\cos x = e^x \sin^2 x$ l) $y' + \frac{2y}{\sin 2x} = 2\operatorname{ctg} x \cos 2x$

m) $y' - xy = x^3$

24. Határozzuk meg az alábbi elsőrendű, lineáris inhomogén differenciálegyenletek megadott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását!

a) $y' + 2y = e^{3x}$ $y(0) = 3$ b) $y'\sin x + y\cos x = \cos 2x$ $y(\pi/2) = 2$

c) $y' + x^2 y = x^2$ $P(1,2)$ d) $xy' + y(x\operatorname{ctg} x + 1) = \operatorname{ctg} x$ $y(\pi/2) = 4/\pi$

e) $(x+1)y' + \frac{1}{2}y - e^x\sqrt{x^3 + x^2} = 0$ $y(0) = 2$

f) $xy'\ln x + y - x\ln x = 0$ $P(e,2)$ g) $y' - y\operatorname{ctg} x = x\sin^2 x$ $P(\pi/2,2)$

MEGOLDÁSOK

23. a) $y = x^3 - x + cx^2$ $x \neq 0,\ y \neq 0$

b) $y = x^2 e^{-x^2} + ce^{-x^2}$ $y \neq 0$

c) $y = \sin x + c\cos x$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ y \neq 0$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} + \frac{c}{\sqrt{1-x}}$ $x \neq 1,\ x < 1,\ y \neq 0$

e) $y = c\cos x + \sin x + \frac{1}{2\cos x}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ y \neq 0$

f) $y = c\cos x - 2\cos^2 x$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ y \neq 0$

g) $y = cxe^x + x^2$ $x \neq 0,\ y \neq 0$

h) $y = \frac{c - x\cos x + \sin x}{x^2}$ $x \neq 0,\ y \neq 0$

i) $y = e^x \frac{c}{x+1} - \frac{1}{x+1}$ $x \neq -1,\ y \neq 0$

j) $y = (x^2 + x)\ln x - x^2 - x + c(x+1)$ $x > 0,\ y \neq 0$

k) $y = \sin x(c + e^x)$ $\quad x \neq k\pi, \quad y \neq 0$

l) $y = c\,\mathrm{ctg}\,x + 2\cos^2 x$ $\quad x \neq k\dfrac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$

m) $y = ce^{\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 2)$ $\quad y \neq 0$

24. a) $y_p = \frac{1}{5}(e^{3x} + 14e^{-2x})$ $\quad y \neq 0$

b) $y_p = \dfrac{2}{\sin x} + \cos x$ $\quad x \neq k\pi, \quad y \neq 0$

c) $y_p = e^{\frac{1-x^3}{3}} + 1$ $\quad y \neq 0$

d) $y_p = \dfrac{1 + \sin x}{x \sin x}$ $\quad x \neq k\pi, \quad y \neq 0$

e) $y_p = \dfrac{3 + e^x(x-1)}{\sqrt{x+1}}$ $\quad x \geq 0, \quad y \neq 0$

f) $y_p = x + \dfrac{2-x}{\ln x}$ $\quad x \neq 0, \quad y \neq 0$

g) $y_p = (1 - x\cos x + \sin x)\sin x$ $\quad x \neq k\pi, \quad y \neq 0$

3.3. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenlet *implicit* alakja $F(x,y,y',y'') = 0$, *explicit* alakja $y'' = f(x,y,y')$.
Amennyiben az $y'' = f(x,y,y')$ előállításban szereplő f függvény argumentumai közül egy vagy kettő hiányzik, akkor *hiányos másodrendű* differenciálegyenletről van szó.
Esetek:
- y és y' is hiányzik, azaz a differenciálegyenlet általános alakja $y'' = f(x)$.
- Csak az y hiányzik, azaz a differenciálegyenlet általános alakja $y'' = f(x,y')$
- Csak az x hiányzik, azaz a differenciálegyenlet általános alakja $y'' = f(y,y')$

(14) ***Az $y'' = f(x)$ differenciálegyenlet megoldása***

Az $y'' = f(x)$ differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározása kétszeri, egymás utáni integrálással történik. Ugyanis

$$\int y''dx = \int f(x)dx \text{ -ből: } y' = F(x) + C_1 \text{ (ahol } F(x) = \int f(x)dx)$$

melyből ismételt integrálással: $y = \int (F(x) + C_1)dx$.

25. Oldjuk meg az $y'' = \frac{x^2}{x^2+1}$ differenciálegyenletet.

M: Kétszer egymás után kell integrálnunk. A fenti egyenlet mindkét oldalát integrálva $y' = \int \frac{x^2}{x^2+1}dx$ (mivel $\int y''dx = y'$). De

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$= x - \operatorname{arctg} x$, tehát $y' = x - \operatorname{arctg} x + C_1$.

Ismét integrálva az egyenletet $y = \int (x - \operatorname{arctg} x + C_1)dx$.

Ezen integrál kiszámításához az arctg x integrálját külön parciális integrálással határozzuk meg:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K.$$

Így a megoldásfüggvény $y = \frac{x^2}{2} - x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1x + C_2$, ahol C_2-be belefoglaltuk K-t.

26. Határozzuk meg az $y'' = x + \sin^2 x$ differenciálegyenlet $y'(0) = 1$; $y(0) = 2$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását!

M: Kétszer egymás után kell integrálnunk.

$y' = \int (x + \sin^2 x)dx = \frac{x^2}{2} + \int \sin^2 x dx$. Az $\int \sin^2 x dx$ integrál kiszámításához használjuk fel, hogy $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Így

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x, \text{ tehát: } y' = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

Figyelembe véve, hogy $y'(0) = 1$ - azaz $y' = 1$, ha $x = 0$ - C_1 azonnal meghatározható; az egyenlet jobb oldalán x helyébe 0-t, a bal oldalon y' helyébe 1-et írva: 1 = C_1. Tehát $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + 1$. Ismét integrálva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x + x + C_2$.

Most felhasználva a másik - y(0) = 2 - kezdeti feltételt: 2 = 1/8 + C_2, azaz $C_2 = 15/16$.

Így a keresett partikuláris megoldás $y_p = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x + x + \frac{15}{16}$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

27. Oldja meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $y'' = xe^x$.

A megoldás kétszer egymás után történő integrálással adódik. Az integrál kiszámításához parciális integrálást kell alkalmaznia. A végeredmény $y = xe^x - 2e^x + c_1 x + c_2$

b) $y'' = -\frac{1+2x}{\left(x+x^2\right)^2}$.

Mivel az egyenlet x-en kívül csak y''-t tartalmaz így kétszer egymás után kell integrálnia. A "jobb oldal" integrálásánál alkalmazza az

$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx, = \int f^{-2}(x) f'(x) dx = -\frac{1}{f(x)}$ összefüggést

A megoldásfüggvény $y = \ln\left|\frac{c_2 x}{1+x}\right| + c_1 x$.

FELADATOK

28. Oldjuk meg az alábbi hiányos differenciálegyenleteket!

a) $y'' = \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^2}$ **b)** $y'' = x + \sin x$ **c)** $y'' = \frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2}$

d) $y'' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ **e)** $y'' = \frac{x^2}{x^2+1}$.

MEGOLDÁSOK

28. a) $y = 4x\ln|x| - 4x - \frac{9}{40}\sqrt[3]{x^8} + c_1x + c_2 \qquad x \neq 0$

b) $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + c_1x + c_2$

c) $y = -\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c_1x + c_2 \qquad x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

d) $y = \dfrac{1}{2}\ln^2|x| + c_1x + c_2 \qquad x \neq 0$

e) $y = \dfrac{x^2}{2} - x\operatorname{arctg} x + \ln\sqrt{1+x^2} + c_1x + c_2$

(15) ***Az $y'' = f(x;y')$ differenciálegyenlet megoldása***

Az $y'' = f(x;y')$ típusú differenciálegyenlet megoldását az $y' = p(x)$ helyettesítéssel elsőrendű differenciálegyenlet megoldására vezetjük vissza. Ugyanis, ha $y' = p(x)$, akkor $y'' = p'(x)$, s így elvégezve a helyettesítéseket a $p' = f(x;p)$ elsőrendű differenciálegyenletet kapjuk. Ha ennek általános megoldása $p = g(x,c)$, akkor $y = \int g(x,c)dx$ adja az eredeti egyenlet általános megoldását.

PÉLDÁK

29. Oldjuk meg az $xy'' + 2y' = 1/x^2$ differenciálegyenletet!

M: Differenciálegyenletünk olyan másodrendű, mely nem tartalmaz y-t, megoldása tehát $y' = p$ helyettesítéssel történik. Ezt alkalmazva az $xp' + 2p = 1/x^2$ egyenlethez jutunk, mely egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet, így a megoldása az állandó variálásának módszerével történik.

a) *Az $xp' + 2p = 0$ homogén egyenlet általános megoldása.*

Ez, mint már tudjuk, szétválasztható változójú. Válasszuk szét a változókat:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2}{x}dx \qquad p \neq 0, x \neq 0$$

Integrálva : $\ln|p| = -2\ln|x| + \ln|c|$ azaz $p_h = c/x^2$.

b) *Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása.*

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $p_0 = c(x)/x^2$ alakban. Behelyettesítve, majd rendezve

$$x\left(\frac{c(x)}{x^2}\right)' + 2\frac{c(x)}{x^2} = x\frac{c'(x)x^2 - 2xc(x)}{x^4} + 2\frac{c(x)}{x^2} =$$

$$\frac{c'(x)}{x} - 2\frac{c(x)}{x^2} + 2\frac{c(x)}{x^2} = \frac{c'(x)}{x} = \frac{1}{x^2},\ \text{s így } c'(x) = 1/x \text{ azaz } c(x) = \ln|x|$$

Visszahelyettesítve $p_0 = \ln|x|/x^2$

c) *Az inhomogén egyenlet általános megoldása*

$$p = p_h + p_0 \quad \text{vagyis } p = \frac{c}{x^2} + \frac{\ln|x|}{x^2}.$$

d) Mivel $p = y'$ ezért

$$y' = \frac{c}{x^2} + \frac{\ln|x|}{x^2} \quad \text{ebből } y = \int\left(\frac{c}{x^2} + \frac{\ln|x|}{x^2}\right)dx = \int \frac{c}{x^2}dx + \int \frac{\ln|x|}{x^2}dx.$$

A második integrál a parciális integrálási szabály alkalmazásával számítható ki:

$$\int \frac{\ln|x|}{x^2}dx = \int x^{-2}\ln|x|dx = -\frac{1}{x}\ln|x| + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln|x| + \int x^{-2}dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln|x| - \frac{1}{x} + K.$$

Tehát $y = -\frac{c}{x} - \frac{1}{x}\ln|x| - \frac{1}{x} + C_1$,ahol C_1 tartalmazza K-t.

30. Határozzuk meg az $xy'' + y' = (y')^2$ differenciálegyenlet $y'(1) = 2$ és $y(4) = 2$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását.

M: Minthogy y hiányzik, így a $p = y'$ helyettesítést kell alkalmaznunk. Ekkor $y'' = p'$. Elvégezve a helyettesítéseket, kapjuk:

$$xp' + p = p^2 \quad \text{vagyis} \quad x\frac{dp}{dx} + p = p^2 \quad \text{illetve} \quad xdp + pdx = p^2dx$$

Válasszuk szét a változókat $xdp = p^2dx - pdx;\quad xdp = (p^2 - p)dx$.

Osztva $x(p^2 - p)$ - vel $(x \neq 0, p \neq 0, p \neq 1)$ kapjuk, hogy $\dfrac{dp}{p^2 - p} = \dfrac{dx}{x}$

integrálva $\displaystyle\int \frac{dp}{p^2 - p} = \int \frac{dx}{x}$. A bal oldali integrál résztörtekre bontással könnyen meghatározható $\displaystyle\int \frac{dp}{p^2 - p} = \int \frac{dp}{p(p-1)} = \int\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)dp = \ln|p-1| - \ln|p| + K$,

így a differenciálegyenlet implicit alakú megoldása
$\ln|p-1|-\ln|p|=\ln|x|+\ln|c_1|$ ahol $\ln|c_1|$ tartalmazza K-t, s így a logaritmus azonosságai alapján

$$\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|=\ln|c_1x| \text{ , tehát } \frac{p-1}{p}=c_1x \text{ , azaz } 1-\frac{1}{p}=c_1x$$

$$\frac{1}{p}=1-c_1x \text{ , } p=\frac{1}{1-c_1x} \text{ s így } y'=\frac{1}{1-c_1x}$$

Felhasználva az $y'(1) = 2$ kezdeti feltételt c_1 meghatározható. Behelyettesítés után $2=\dfrac{1}{1-c_1}$ melyből $c_1=1/2$ így $y'=\dfrac{1}{1-x/2}$. Ismét integrálva $y=\int\dfrac{1}{1-x/2}dx$ azaz $y=-2\ln|1-x/2|+c_2$. Most az $y(4) = 2$ kezdeti feltételt felhasználva $2=-2\ln\left|1-\dfrac{1}{2}\cdot 4\right|+c_2$, $2=-2\ln|-1|+c_2$ innen $c_2=2$. A keresett partikuláris megoldás tehát $y_p=-2\ln|1-x/2|+2$.

☞ ☞ ☞ FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL ☜ ☜ ☜

31. Oldja meg az alábbi elsőrendűre visszavezethető differenciálegyenleteket! ($y'=p(x)$)

a) $y''=\dfrac{xy'}{1-x^2}$

Lépések az önálló megoldáshoz:

-Mivel az egyenlet y-t magát nem tartalmazza így az $y'=p(x)$ (s így $y''=p'(x)$) helyettesítést kell alkalmaznia, vizsgálja meg a behelyettesítés után kapott differenciálegyenlet típusát, válassza szét a változókat, az integrálásnál vizsgálja a számláló és a nevező kapcsolatát, $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$ típus, a visszahelyettesítés utáni integrál már alapintegrál.

A megoldásfüggvény $y'=c_1\arcsin x+c_2$

b) $x^2y''=2xy'-3$

Lépések az önálló megoldáshoz:

-Minthogy a differenciálegyenlet y-t nem tartalmaz, $y'=p(x)$ helyettesítést kell alkalmazni (ekkor $y''=p'$), vizsgálja meg a helyettesítés után adódó differenciál-

egyenlet típusát, az általános megoldás, a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összege (konstansvariálás módszere!).
Az egyenlet megoldása $y = \ln|x| + c_1x^3 + c_2$.

FELADATOK

32. Oldjuk meg az alábbi hiányos differenciálegyenleteket.

a) $y'' = \frac{1}{x}y' + x\sin x$ **b)** $x\ln x \cdot y'' = y' + x\ln^2 x$

c) $y''\sin x\cos x - y' = 0$ **d)** $xy''(y'+1) - (y')^2 + 1 = 0$

e) $xy'' + 2y' = x^3$

MEGOLDÁSOK

32. a) $y = c_1x^2 - x\sin x - \cos x + c_2$ $x \neq 0,\quad y' \neq 0$

b) $y = c_1(x\ln x - x) + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c_2$ $x \neq 0,\quad y' \neq 0$

c) $y = -c_1 \ln\cos x + c_2$ $x \neq k\frac{\pi}{2},\quad y' \neq 0$

d) $y = c_1x^2 + x + c_2$ illetve $y = -x + c$

e) $y = \frac{x^4}{20} - \frac{c_1}{x} + c_2$

(16) ***Az*** $y'' = f(y';y)$ ***típusú differenciálegyenlet megoldása***

Az $y'' = f(y';y)$ típusú differenciálegyenlet megoldása szintén $y' = p$ helyettesítéssel történik, azonban most a p nem x-nek, hanem y-nak a függvénye, tehát $p = p(y)$ s így p egy összetett függvény $p = p(y(x))$, ezért

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp(y(x))}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p.$$

PÉLDÁK

33. Oldjuk meg az $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$ differenciálegyenletet.

M: Alkalmazzuk az $y' = p(y)$ helyettesítést. Ekkor - mint láttuk - $y'' = \frac{dp}{dy} p$.

Elvégezve a behelyettesítéseket : $y\frac{dp}{dy}p = 2p^2 - 2p$. A $p = 0$ triviális megoldása a differenciálegyenletnek, ekkor $y = C$. Ha $p \neq 0$, akkor egyszerűsítés után $y\frac{dp}{dy} = 2p - 2$, amely szétválasztható változójú differenciálegyenlet: $ydp = 2(p-1)dy$. A szétválasztáshoz osztanunk kell $y(p-1)$-gyel $(y \neq 0, p \neq 1)$

$\frac{dp}{p-1} = 2\frac{dy}{y}$. Integrálva

$$\ln|p-1| = 2\ln|y| + \ln|c_1| \quad \text{azaz} \quad \ln|p-1| = \ln\left(|c_1|y^2\right) \quad \text{melyből}$$

$$p - 1 = c_1 y^2 \qquad p = c_1 y^2 + 1 \quad \text{s így az } y' = c_1 y^2 + 1$$

differenciálegyenlethez jutunk. Oldjuk ezt meg: $\frac{dy}{dx} = c_1 y^2 + 1$, melyből $\frac{dy}{c_1 y^2 + 1} = dx$. Integrálva: $\int \frac{dy}{c_1 y^2 + 1} = \int dx$. A bal oldali integrál értéke függ c_1 pozitív, negatív illetve zérus voltától, így ezeket az eseteket külön kell megvizsgálnunk

Ha $c_1 > 0$ akkor $c_1 = c^2$ $(c \neq 0)$ jelöléssel

$$\int \frac{dy}{c_1 y^2 + 1} = \int \frac{dy}{c^2 y^2 + 1} = \int \frac{dy}{(cy)^2 + 1} = \frac{1}{c}\operatorname{arctg}(cy)$$

s így a megoldás $\frac{1}{c}\operatorname{arctg}(cy) = x + c_2$, melyből $y = \frac{1}{c}\operatorname{tg}(cx + c \cdot c_2)$.

Ha $c_1 < 0$, akkor $c_1 = -c^2$ $(c \neq 0)$ jelöléssel $\int \frac{dy}{c_1 y^2 + 1} = \int \frac{dy}{1 - c^2 y^2}$

Résztörtekre bontva:

$$\int \frac{dy}{1 - c^2 y^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 - cy} + \frac{1}{1 + cy}\right)dy = -\frac{1}{2c}\ln|1 - cy| + \frac{1}{2c}\ln|1 + cy| = \frac{1}{c}\ln\sqrt{\left|\frac{1 + cy}{1 - cy}\right|}$$

s így a megoldás implicit alakja: $\frac{1}{c}\ln\sqrt{\left|\frac{1+cy}{1-cy}\right|} = x + c_2$.

Ha $c_1 = 0$, akkor $\int \frac{dy}{c_1 y + 1} = \int dy$, s így a megoldás $y = x + c_2$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

34. Oldjuk meg a $2yy' - y'' = 0$ elsőrendűre visszavezethető differenciálegyenletet!

Lépések az önálló megoldáshoz:

Mivel az x hiányzik, így $y' = p(y)$ helyettesítést kell alkalmaznia. Ekkor $y'' = \frac{dp}{dy}p$. Vizsgálja meg a behelyettesítés után kapott differenciálegyenlet típusát, válassza szét a változókat, integrálás után helyettesítse vissza p helyébe y'-t, ismét válassza szét a változókat, majd integráljon.

A megoldásfüggvény:

$$y = -\frac{1}{x+c_2} \quad \text{ha } c_1 = 0$$

$$y = k\,\mathrm{tg}(kx + kc_2) \quad \text{ahol } k = \sqrt{c_1} \quad \text{ha } c_1 > 0$$

$$y = \frac{1}{c}\ln\sqrt{\left|\frac{y-c}{y+c}\right|} = x + c_2 \quad \text{ahol } c = \sqrt{-c_1} \quad \text{ha } c_1 < 0\,.$$

FELADATOK

35. Oldjuk meg az alábbi hiányos differenciálegyenleteket!

a) $y''(1-y^2) = 2y(y')^2$ **b)** $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ **c)** $(y')^2 = yy''$

36. Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek megadott kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását!

a) $y''x^2 = 1 - \ln x \quad y(1) = 1,\, y'(1) = 2$

b) $y''(x^2+1) = 2xy' \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 3$

c) $x^2y'' - 2xy' = -3 \quad y(1) = 2,\, y'(1) = 4$

d) $y''(y-1) = 2(y')^2 \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1$

MEGOLDÁSOK

35. a) $y - \frac{y^3}{3} = c_1x + c_2 \quad |y| < 1 \quad$ és $y = c$

b) $\ln|y| + c_1 = c_2(x - y) \quad y \neq x \quad$ és $y = c$ illetve $y = x$

c) $y = c_2e^{c_1x} \quad$ és $y = c$

36. a) $y_p = \frac{1}{2}\ln x + x$ **b)** $y_p = 3x + x^3 + 1$

c) $y_p = x^3 + \ln x + 1$ **d)** $y_p = 1 - \frac{1}{x+1}$

3.4. Állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletek

(17) Az *állandó együtthatós lineáris homogén* differenciálegyenlet általános alakja: $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (a_n \neq 0)$

(18) A fenti differenciálegyenlet *alaprendszerének* nevezzük a differenciálegyenlet lineárisan független partikuláris megoldásait. Ezek száma pontosan annyi, mint a differenciálegyenlet rendje. Alkossák az alaprendszert az $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ függvények.

(19) Az $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$ állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldása az alaprendszert alkotó lineárisan független partikuláris megoldások konstansszorosainak összege, azaz

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x).$$

(20) A lineárisan független partikuláris megoldások meghatározása a differenciálegyenlet ún. *karakterisztikus egyenletének*, az

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda^1 + a_0 = 0$$

egyenlet gyökei segítségével történik, mégpedig a következő módon:

α) Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei valósak és egyszeresek, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, akkor a keresett partikuláris megoldások : $e^{\lambda_1x}, e^{\lambda_2x}, \ldots, e^{\lambda_nx}$ és így az általános megoldás $\quad y = c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x} + \ldots + c_ne^{\lambda_nx}$.

β) Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei mind valósak, de nem mind egyszeresek, hanem λ_1 k_1-szeres, λ_2 k_2-szeres, ..., λ_s k_s-szeres gyök $(k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n)$, akkor a keresett lineárisan független partikuláris megoldások

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$$

$$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, x^2e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$$

$$\dots$$

$$e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, x^2e^{\lambda_s x}, \dots, x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$$

és így az áltanános megoldás:

$$y = c_{11}e^{\lambda_1 x} + c_{12}xe^{\lambda_1 x} + \dots + c_{1k_1}x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} + c_{21}e^{\lambda_2 x} + c_{22}xe^{\lambda_2 x} + \dots + c_{2k_2}x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x} + \dots$$

$$\dots + c_{s1}e^{\lambda_s x} + c_{s2}xe^{\lambda_s x} + \dots + c_{sk_s}x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}.$$

γ) A karakterisztikus egyenletnek egyszeres komplex gyökei is vannak. Legyen ilyen pl. a $\lambda_k = a + bi$ és mint ismeretes, ennek konjugáltja $\overline{\lambda}_k = a - bi$ is megoldása az egyenletnek - , akkor az ezen gyökpárhoz tartozó alaprendszerbeli partikuláris megoldások $e^{ax}\cos bx$ ill. $e^{ax}\sin bx$.

δ) Ha többszörös komplex gyöke is van a karakterisztikus egyenletnek, pl. $\lambda_k = a + bi$ k-szoros (k < n) komplex gyök, ekkor mint tudjuk a $\overline{\lambda}_k = a - bi$ is k-szoros gyök, ebben az esetben az alaprendszerbe az alábbi valós partikuláris megoldások tartoznak:

$$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \dots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx$$

$$e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \dots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

PÉLDÁK

37. Határozzuk meg az $y'' + 2y' - 3y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: Ez egy állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenlet, tehát az általános megoldás meghatározása a karakterisztikus egyenlet gyökei segítségével történik. A karakterisztikus egyenlet: $y'' = \lambda^2; y' = \lambda; y = \lambda^0 = 1$ helyettesítésekkel adódik: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$. Ennek megoldásai $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$. A lineárisan független partikuláris megoldások: $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{x}$. Így a keresett általános megoldás, ezek konstansszorosának összege, azaz $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{x}$.

38. Határozzuk meg az $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 2$, $y'(0) = -6$, $y''(0) = 12$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását.

M: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletét: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Ennek megoldása alkalmas szorzattá alakítással történik:

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 6\lambda + 6 = 0, \quad \lambda(\lambda-1)^2 - 6(\lambda-1) = 0,$

$(\lambda-1)(\lambda(\lambda-1)-6) = 0, \quad (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6) = 0, \quad (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

Tehát a megoldások $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$. Így a keresett lineárisan független partikuláris megoldások e^x, e^{3x}, e^{-2x}. Az általános megoldás:

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x}$$

Most figyelembe véve a kezdeti feltételeket meghatározzuk a c_1, c_2, c_3 konstansokat. Az $y(0) = -2$ miatt $-2 = c_1e^0 + c_2e^0 + c_3e^0$ vagyis $c_1 + c_2 + c_3 = -2$.

Az $y'(0) = -6$ miatt, mivel $y' = c_1e^x + 3c_2e^{3x} - 2c_3e^{-2x}$ ezért $c_1 + 3c_2 - 2c_3 = -6$. Az $y''(0) = 12$ miatt, mivel $y'' = c_1e^x + 9c_2e^{3x} + 4c_3e^{-2x}$ ezért $c_1 + 9c_2 + 4c_3 = 12$. A

$$c_1 + c_2 + c_3 = -2$$
$$c_1 + 3c_2 - 2c_3 = -6$$
$$c_1 + 9c_2 + 4c_3 = 12$$

egyenletrendszer megoldásai: $c_1 = -5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$. Így a keresett partikuláris megoldás $y = -5e^x + e^{3x} + 2e^{-2x}$.

39. Határozzuk meg a $4y'' + 12y' + 9y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: A differenciálegyenlet állandó együtthatós lineáris homogén, így fel kell írnunk a karakterisztikus egyenletét: $4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0$. Ennek megoldása $\lambda = -3/2$, kétszeres gyök. Ekkor a lineárisan független partikuláris megoldások $e^{-\frac{3}{2}x}, xe^{-\frac{3}{2}x}$, az általános megoldás pedig $y = c_1e^{-\frac{3}{2}x} + c_2xe^{-\frac{3}{2}x}$.

40. Határozzuk meg az $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet : $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Ennek gyökeit alkalmas szorzattá alakítással határozzuk meg.

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + \lambda - 2 = \lambda(\lambda-2)^2 + (\lambda-2) =$$
$$= (\lambda-2)(\lambda(\lambda-2)+1) = (\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

Tehát a $(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$ egyenlet megoldásait keressük, ezek $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=1$ (kétszeres gyök). Így a lineárisan független partikuláris megoldások e^{2x}, e^x, xe^x, az általános megoldás pedig $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x}$

41. Határozzuk meg az $y'' - 6y' + 10y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 2$ és $y'(0) = 3$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását.

M: Először az általános megoldást kell meghatároznunk. Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ Gyökei komplex számok $\lambda_1 = 3+i, \lambda_2 = 3-i$. A lineárisan független partikuláris megoldások: $e^{3x}\cos x$, $e^{3x}\sin x$. Így az általános megoldás: $y = c_1 e^{3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x$. Minthogy partikuláris megoldást keresünk, figyelembe kell vennünk a kezdeti feltételeket. Az $y(0) = 2$ miatt $2 = c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \sin 0$ melyből $c_1 = 2$. Az $y'(0) = 3$ figyelembevételéhez meg kell határoznunk y'-t. A szorzat- és összegfüggvény deriválási szabálya alapján

$$y' = 3c_1 e^{3x} \cos x - c_1 e^{3x} \sin x + 3c_2 e^{3x} \sin x + c_2 e^{3x} \cos x \quad \text{s így}$$

$$3 = 3c_1 e^0 \cos 0 - c_1 e^0 \sin 0 + 3c_2 e^0 \sin 0 + c_2 e^0 \cos 0 \quad \text{melyből} \quad 3 = 3c_1 + c_2$$

Felhasználva, hogy $c_1 = 2$ kapjuk, hogy $c_2 = -3$. A keresett partikuláris megoldás tehát $y_p = 2e^{3x} \cos x - 3e^{3x} \sin x$.

42. Oldjuk meg az $y^{(4)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0$ differenciálegyenletet!

M: Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet: $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 24\lambda^2 + 40\lambda + 100 = 0$ adódik, mely ismét szorzattá alakítással oldható meg:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 24\lambda^2 + 40\lambda + 100 = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 100 + 4\lambda^3 + 20\lambda^2 + 40\lambda = (\lambda^2 + 2\lambda + 10)^2$$

Így a megoldandó egyenlet $(\lambda^2 + 2\lambda + 10)^2 = 0$, ami azt jelenti, hogy a $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ egyenlet mindkét gyöke kétszeres.

Ezek: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2}$ s így $\lambda_1 = -1 + 6i \quad \lambda_2 = -1 - 6i$.

A valós értékű partikuláris megoldások, figyelembe véve hogy λ_1 és λ_2 is kétszeres gyök: $e^{-x} \cos 6x$, $e^{-x} \sin 6x$, $xe^{-x} \cos 6x$, $xe^{-x} \sin 6x$, így az általános megoldás:

$$y = c_1 e^{-x} \cos 6x + c_2 e^{-x} \sin 6x + c_3 x e^{-x} \cos 6x + c_4 x e^{-x} \sin 6x .$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

43. Határozzuk meg az alábbi konstans együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y'' - 4y' - 12y = 0$

Lépések az önálló megoldáshoz:

Vizsgálja meg a differenciálegyenlet típusát, írja fel a karakterisztikus egyenletet, a karakterisztikus egyenlet gyökei segítségével adja meg a partikuláris megoldásokat, az általános megoldás $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-2x}$

b) $y'' - 8y' + 25y = 0$

Lépések az önálló megoldáshoz:

Állapítsa meg az egyenlet típusát, írja fel a karakterisztikus egyenletet, a gyökök komplex számok, írja fel a valós értékű partikuláris megoldásokat, az általános megoldás $y = c_1 e^{4x}\cos 3x + c_2 e^{4x}\sin 3x$.

FELADATOK

44. Oldjuk meg az alábbi másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $9y'' - 6y' + y = 0$ **b)** $6y'' + 5y' - 4y = 0$

c) $\frac{1}{2}y'' + 3y' + 9y = 0$ **d)** $3y'' + 5y' - 2y = 0$

e) $16y'' - 24y' + 9y = 0$ **f)** $2y'' + 7y' + \frac{25}{4}y = 0$

g) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ **h)** $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$

i) $8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0$ **j)** $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$

45. Határozza meg az alábbi konstans együtthatós, lineáris homogén differenciálegyenletek megadott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldásokat!

a) $y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$

b) $y'' - 4y = 0 \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$

c) $4y'' + 12y' + 9y = 0 \quad y(0) = 2, y'(0) = -2$

d) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0 \quad y(0) = 0, y'(0) = 4, y''(0) = 4$

e) $y'' + 4y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

f) $y'' - 2y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

MEGOLDÁSOK

44. a) $y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}}$ **b)** $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

c) $y = (c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x)e^{-3x}$ **d)** $y = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 e^{-2x}$

e) $y = c_1 e^{\frac{3}{4}x} + c_2 x e^{\frac{3}{4}x}$ **f)** $y = \left(c_1 \cos\frac{x}{4} + c_2 \sin\frac{x}{4}\right)e^{-\frac{7}{4}x}$

g) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ **h)** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$

i) $y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 x e^{-\frac{x}{2}} + c_3 x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ **j)** $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$

45. a) $y_p = 2e^{2x} - e^{-x}$ **b)** $y_p = e^{2x} - e^{-2x}$

c) $y_p = 2e^{-\frac{3}{2}x} + xe^{-\frac{3}{2}x}$ d) $y_p = \frac{1}{4}e^x + 3xe^x - \frac{1}{4}e^{-3x}$

e) $y_p = \cos 2x + \sin 2x$ f) $y_p = e^x(\cos x - \sin x)$

3.5. Állandó együtthatós lineáris inhomogén differenciálegyenletek

(21) Az n-edrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet általános alakja: $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ ahol $a_n \neq 0$ és az $f(x) \neq 0$.
Ha az $f(x)$ függvényt, az ún. *zavarótag*ot azonosan zérusnak választjuk, akkor az inhomogén egyenlet *homogén* egyenletét kapjuk.
(22) Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ differenciálegyenlet általános megoldását az adott differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet általános megoldásának (y_h) és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának (y_0) összege szolgáltatja, azaz $y = y_h + y_0$.
Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának meghatározása történhet *konstansvariálás* módszerével, vagy - az állandó együtthatók miatt - az ún. *próbafüggvény* módszerével.
(23) A *konstansvariálás* módszerének lényege a következő : feltételezzük, hogy az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának szerkezete megegyezik a homogén egyenlet általános megoldásának szerkezetével, azonban az integrációs konstansok helyébe egy ismeretlen függvényt kell írni.
Pl. Ha az n-edrendű inhomogén differenciálegyenlet homogén egyenletének általános megoldása $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_0 = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$ alakban keressük.
A $c_i(x)$ függvényeket úgy kívánjuk meghatározni, hogy y_0 kielégítse az inhomogén differenciálegyenletet. Minthogy n db ismeretlen meghatározásához n db egymástól független egyenletre van szükség, ezért n-1 db egyenletet önkényesen írunk elő, hiszen y_0 behelyettesítésével csak egy db egyenlet adódik. A következő módon járunk el: Deriváljuk y_0-t
$y_0' = c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) + c_n(x)y_n'(x)$.
Most a $c_i'(x)y_i(x)$ $(i = 1 \ldots n)$ típusú tagok összegére előírjuk a következőt

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Ekkor $y_0' = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + \ldots + c_n(x)y_n'(x)$. Ezt deriváljuk:
$y_0'' = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) + c_n(x)y_n''(x)$.
Most a $c_i'(x)y_i'(x)$ $(i = 1 \ldots n)$ típusú tagok összegére előírjuk a következőt

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Ekkor $y_0'' = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)+\ldots+c_n(x)y_n''(x)$.
Ezt ismét deriváljuk
$y_0''' = c_1'(x)y_1''(x) + c_1(x)y_1'''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_2(x)y_2'''(x)+\ldots+c_n'(x)y_n''(x) + c_n(x)y_n'''(x)$.
Most a $c_i'(x)y_i''(x)$ $(i = 1..n)$ típusú tagok összegére előírjuk a következőt

$$c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x)+\ldots+c_n'(x)y_n''(x) = 0.$$

Ekkor $y_0''' = c_1(x)y_1'''(x) + c_2(x)y_2'''(x)+\ldots+c_n(x)y_n'''(x)$.
Ezt deriváljuk, majd a $c_i'(x)$ - et $(i = 1..n)$ tartalmazó tagok összegére mindig 0-t előírva $y_0^{(n)}$ - ra a következő adódik

$$y_0^{(n)} = c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_1(x)y_1^{(n)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + c_2(x)y_2^{(n)}(x)+\ldots$$
$$\ldots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_n(x)y_n^{(n)}(x).$$

Az $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n)}$ visszahelyettesítésével és az előírt feltételek figyelembevételével pontosan n darab egyenlet adódik, melyekből a $c_i(x)$ -ek meghatározhatók.

PÉLDÁK

46. Oldjuk meg konstansvariálás módszerének alkalmazásával az $y'' - 3y' + 2y = x$ differenciálegyenletet.

M: Először meg kell határoznunk a homogén rész általános megoldását. Az adott egyenlet homogén egyenlete $y'' - 3y' + 2y = 0$ amiből a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Ennek megoldásai $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Így a partikuláris megoldások e^x illetve e^{2x}, és az általános megoldás $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$. Keressük most az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_0 = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}$ alakban. A $c_1(x)$ és a $c_2(x)$ meghatározásához y_0-t be kell helyettesítenünk az adott egyenletbe. Szükségünk van tehát az y_0'-re és az y_0''-ra:

$$y_0' = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} + 2c_2(x)e^{2x}$$

Előírjuk a következő feltételt: a $c_i'(x)$-et tartalmazó tagok összege legyen zérus, tehát: $c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0$. Ezt felhasználva: $y_0' = c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x}$ és ezt ismét deriválva $y_0'' = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{2x}$. Ezeket behelyettesítjük az inhomogén differenciálegyenletbe

$$\left[c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{2x}\right] -$$
$$3\left(c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x}\right) + 2\left(c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}\right) = x$$

A zárójelbontás és összevonás után $c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = x$ adódik. Most figyelembe véve az általunk előírt feltételt, a $c_1(x)$ és $c_2(x)$ meghatározására a következő egyenletrendszerhez jutunk : $\left.\begin{aligned} c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} &= x \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} &= 0 \end{aligned}\right\}.$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót, így $c_2'(x)e^{2x} = x$ azaz $c_2'(x) = xe^{-2x}$ adódik, melyből $c_2(x)$ parciális integrálással meghatározható

$$c_2(x) = \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Ezt például az alsó egyenletbe behelyettesítve:

$$c_1'(x)e^x + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)' e^{2x} = 0, \text{ azaz}$$

$$c_1'(x)e^x + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right) e^{2x} = 0, \text{ melyből } c_1'(x)e^x + x = 0$$

Így $c_1'(x) = -xe^{-x}$, melyből $c_1(x)$-et ismét parciális integrálással számítjuk ki: $c_1(x) = \int\left(-xe^{-x}\right)dx = xe^{-x} + e^{-x}$. A $c_i(x)$-ek meghatározásánál az integrációs konstanst zérusnak választjuk. Az y_0 partikuláris megoldás

$$y_0 = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x} = \left(xe^{-x} + e^{-x}\right)e^x + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)e^{2x}, \text{ azaz}$$

$$y_0 = x + 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}, \text{ vagyis } y_0 = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = y_h + y_0 = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$

47. Határozzuk meg a $6y'' - y' - y = 2e^{x/2}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: Miután a differenciálegyenlet lineáris inhomogén, ezért az általános megoldás a homogén rész általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összege $(y = y_h + y_0)$.

a) *A homogén rész általános megoldása*

A homogén egyenlet általános megoldásához fel kell írni a karakterisztikus egyenletet: $6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Ennek megoldása $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -1/3$. Így a partikuláris megol-dások $e^{x/2}$ illetve $e^{-x/3}$, és az általános megoldás

$$y_h = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/3}.$$

b) *Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának meghatározása konstans variálás módszerével*

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_0 = c_1(x)e^{x/2} + c_2(x)e^{-x/3}$. alakban. A behelyettesítéshez y_0-t deriválni kell:

$$y_0' = c_1'(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}c_1(x)e^{x/2} + c_2'(x)e^{-x/3} - \frac{1}{3}c_2(x)e^{-x/3}.$$

Most előírjuk, hogy $c_1'(x)e^{x/2} + c_2'(x)e^{-x/3} = 0$ legyen. Ennek felhasználásával

$$y_0' = \frac{1}{2}c_1(x)e^{x/2} - \frac{1}{3}c_2(x)e^{-x/3},\ \text{ s így}$$

$$y_0'' = \frac{1}{2}c_1'(x)e^{x/2} + \frac{1}{4}c_1(x)e^{x/2} - \frac{1}{3}c_2'(x)e^{-x/3} + \frac{1}{9}c_2(x)e^{-x/3}$$

Ezeket behelyettesítjük az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$6\left(\frac{1}{2}c_1'(x)e^{x/2} + \frac{1}{4}c_1(x)e^{x/2} - \frac{1}{3}c_2'(x)e^{-x/3} + \frac{1}{9}c_2(x)e^{-x/3}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}c_1(x)e^{x/2} - \frac{1}{3}c_2(x)e^{-x/3}\right) - \left(c_1(x)e^{x/2} + c_2(x)e^{-x/3}\right) = 2e^{x/2}$$

Elvégezve az összevonásokat: $3c_1'(x)e^{x/2} - 2c_2'(x)e^{-x/3} = 2e^{x/2}$. A megoldandó egyenletrendszer tehát :

$$\left.\begin{aligned} 3c_1'(x)e^{x/2} - 2c_2'(x)e^{-x/3} &= 2e^{x/2} \\ c_1'(x)e^{x/2} + c_2'(x)e^{-x/3} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Szorozzuk az alsó egyenletet 2-vel és adjuk hozzá a felsőhöz. Kapjuk, hogy

$5c_1'(x)e^{x/2} = 2e^{x/2}$, s így $c_1'(x) = \frac{2}{5}$, melyből $c_1(x) = \frac{2}{5}x$

A $c_2(x)$ kiszámításához az alsó egyenletet szorozzuk (-3)-mal, s adjuk a felsőhöz. Kapjuk, hogy

$-5c_2'(x)e^{-x/3} = 2e^{x/2}$, s így $c_2'(x) = -\frac{2}{5}e^{5x/6}$, melyből $c_2(x) = -\frac{2}{5}\int e^{5x/6}dx = -\frac{12}{25}e^{5x/6}$

Most felírva az y_0 partikuláris megoldást

$$y_0 = \frac{2}{5}xe^{x/2} - \frac{12}{25}e^{5x/6}e^{-x/3},\ \text{melyből}\ y_0 = \frac{2}{5}xe^{x/2} - \frac{12}{25}e^{x/2}$$

c) Így az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = y_h + y_0$, azaz

$$y_0 = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/3} + \frac{2}{5}xe^{x/2} - \frac{12}{25}e^{x/2}.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

48. Határozza meg az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását. Az y_p kiszámítására alkalmazza a konstansvariálás módszerét!

a) $y'' - 4y' - 12y = 4e^{3x}$

Lépések az önálló megoldáshoz:

Először a homogén egyenlet általános megoldását kell meghatároznia, írja fel a homogén egyenletet, a típusa alapján válassza ki a megoldási eljárást, írja fel a karakterisztikus egyenletet, a karakterisztikus egyenlet gyökei ismeretében írja fel a homogén egyenlet általános megoldását ($y_h = c_1e^{6x} + c_2e^{-2x}$)
Másodszor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását kell meghatározni, az y_h-ban szereplő konstansok helyébe függvényeket kell írnia, deriválás után $c_i'(x)$-ket tartalmazó tagok összegére egy feltételt kell előírnia, a feltétel figyelembevételével írja fel y_0''-t, írja fel a megoldandó egyenletrendszert, majd határozza meg $c_1(x)$-et és $c_2(x)$-et $\left(c_1(x) = -\frac{1}{6}e^{-3x},\ c_2(x) = -\frac{1}{10}e^{5x}\right)$, írja fel az y_0-t, $c_1(x)$ és $c_2(x)$ értékét vissza kell helyettesíteni
Harmadszor írja fel az általános megoldást: $y = c_1e^{6x} + c_2e^{-2x} - \frac{4}{15}e^{3x}$

b) $2y'' - 7y' + 6y = 2x^2 - 3x$

Lépések az önálló megoldáshoz: A differenciálegyenlet típusa alapján válassza ki a megoldási eljárást, $y = y_0 + y_h$, írja fel a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletét, a homogén egyenlet általános megoldása $y_h = c_1e^{\frac{3}{2}x} + c_2e^{2x}$, az y_0 meghatározásához használja fel a konstansvariálás módszerét, $y_0 = c_1(x)e^{\frac{3}{2}x} + c_2(x)e^{2x}$, helyettesítsen vissza és a $c_i'(x)$-eket tartalmazó tagok összegére szabjon feltételt, az egyenletrendszer megoldása után $c_i(x)$-ek meghatározására parciális integrálást kell alkalmaznia.

$$c_1(x) = \frac{2}{3}\left(2x^2 - 3x\right)e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{4}{9}(4x-3)e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{32}{27}e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}\left(2x^2 - 3x\right)e^{-2x} - \frac{1}{4}(4x-3)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

y_0 megadásához helyettesítse vissza $c_1(x)$ és $c_2(x)$ értékét. A differenciálegyenlet általános megoldása $y = c_1e^{\frac{3}{2}x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{11}{108}$.

FELADATOK

49. Oldjuk meg az alábbi másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $4y'' - 7y' + 3y = 4e^x$ **b)** $y'' - 10y' + 25y = 3e^{2x}$
c) $y'' + 3y' - 10y = 4x$ **d)** $y'' - 5y' + 6y = 12x$
e) $3y'' + 10y' + 3y = 5e^{-2x}$ **f)** $y'' - 14y' + 49y = 7x$

49. a) $y = c_1e^x + c_2e^{\frac{3}{4}x} + 4xe^x - 16e^x$ b) $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

c) $y = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x} - \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$

d) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + 2x + \frac{5}{3}$

e) $y = c_1e^{-\frac{1}{3}x} + c_2e^{-3x} - e^{-2x}$ f) $y = c_1e^{7x} + c_2xe^{7x} + \frac{1}{7}x + \frac{2}{49}$

(24) A *próbafüggvény módszer*

Ennek a módszernek a lényege az, hogy feltételezzük, hogy az

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának (y_0-nak) szerkezete megegyezik az $f(x)$ "zavarótag" szerkezetével, vagyis ha például $f(x)$ polinom, akkor y_0-t is ilyen alakban keressük. Ha $f(x)$ exponenciális függvény, akkor y_0-t is ilyennek feltételezzük, vagy ha $f(x)$ koszinuszos vagy szinuszos tagokból áll, akkor y_0 is ilyen. Természetesen ezekben az esetekben az $f(x)$ "zavarótag" az y_0 partikuláris megoldást csak konstans szorzó(k) erejéig határozza meg. A továbbiakban a konstansokat kell meghatározni oly módon, hogy az y_0 kielégítse a differenciálegyenletet.

A továbbiakban néhány példán keresztül - egyelőre - csak azt vizsgáljuk, hogy az $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$ típusú differenciálegyenletben az $f(x)$ "zavarótag" konkrétan miként határozza meg az y_0-t.

a) *Az $f(x)$ "zavarótag" polinom*

1) Legyen pl. $f(x) = 4x^2 - 5x$, vagyis másodfokú polinom, ekkor y_0 is az, vagyis keressük y_0-t a következő alakban $y_0 = ax^2 + bx + c$.

2) Legyen $f(x) = 3x^3 + x^2 - 4$, ekkor y_0 is harmadfokú:

$y_0 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Természetesen, ha $f(x)$ n-ed fokú polinom, akkor y_0 is az, méghozzá mindig a legáltalánosabb alakot kell feltételezni. Pl. ha $f(x) = 4x^4$, akkor y_0 is negyedfokú, mégpedig a legáltalánosabb formában, azaz $y_0 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

b) *Az $f(x)$ "zavarótag" exponenciális*

1) Legyen pl. $f(x) = 6e^{-3x}$, ekkor $y_0 = Ae^{-3x}$ alakban keresendő.

2./ Ha $f(x) = 2e^{2x} - 4e^{x/2}$, akkor az y_0 feltételezett alakja $y_0 = Ae^{2x} + Be^{x/2}$.

Előfordulhat, hogy az $f(x)$ "zavarótag" az előző **a)** és **b)** eseteket együtt tartalmazza.

Pl. $f(x) = -3e^{x/4} + 3x$, ekkor y_0 $Ae^{x/4} + ax + b$ alakban keresendő.

Az $f(x)$ "zavarótag" exponenciális szerkezeténél külön meg kell említeni a *rezonancia* esetét. Ez akkor áll elő, ha a homogén egyenlet alaprendszere tartalmazza az $f(x)$ "zavarótagot". Például: ha $f(x) = 4e^{3x}$ és a homogén egyenlet alaprendszerének eleme az e^{3x} (vagyis e^{3x} megoldása a homogén egyenletnek), akkor rezonancia van. Most y_0 nem kereshető Ae^{3x} alakban (ugyanis behelyettesítés után ellentmondásra jutnánk), hanem egy x-szel való szorzást kell alkalmazni, vagyis y_0-t Axe^{3x} alakban kell keresni. Ha xe^{3x} is eleme az alaprendszernek, akkor további x-szel való szorzást kell alkalmazni mindaddig, míg a rezonancia meg nem szűnik.

c) *Az $f(x)$ "zavarótag" szinuszos vagy koszinuszos tagot tartalmaz*

1) Legyen pl. $f(x) = 3\sin 2x$, ekkor y_0 az $A\sin 2x + B\cos 2x$ alakban keresendő.

2) Ha $f(x) = 4\cos 4x + (1/2)\sin 3x$, akkor a partikuláris megoldás $y_0 = A\cos 4x + B\sin 4x + C\cos 3x + D\sin 3x$ alakú lesz.

Rezonancia ilyen "zavarótag" esetén is felléphet. Tehát ha a homogén egyenletnek pl. $\cos 2x$ megoldása és mondjuk $f(x) = -3\cos 2x$, akkor rezonancia van, amely a **b)** esetben tárgyaltak alapján szüntethető meg. Így most $y_0 = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$ alakban keresendő a megoldás.

Természetesen, ha $f(x)$ az **a) b)** és **c)** eseteket együtt tartalmazza, akkor y_0-t is olyan alakban kell felvenni.

Pl.: Ha

$f(x) = 4e^x + 2x^2 + 3\sin x$, akkor $y_0 = Ae^x + ax^2 + bx + c + B\sin x + C\cos x$.

PÉLDÁK

50. Határozzuk meg az $y'' - 5y' - 24y = 12x^2 - 3$ differenciálegyenlet általános megoldását.

M: Először a homogén egyenlet általános megoldását határozzuk meg.

A homogén egyenlet : $y'' - 5y' - 24y = 0$. Ennek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda - 24 = 0$ aminek megoldása $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 8$, tehát az alaprendszert alkotó partikuláris megoldások e^{-3x}, e^{8x}, így az általános megoldás $y_h = c_1e^{-3x} + c_2e^{8x}$.

Most meghatározzuk az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével. Minthogy a "zavarótag" másodfokú polinom, így feltesszük, hogy y_0 is az, azaz keressük y_0-t az $y_0 = ax^2 + bx + c$ alakban.
Az "a", "b" és "c" meghatározásához y_0-t helyettesítsük vissza az inhomogén egyenletbe. Ehhez írjuk fel először y_0' - t és y_0'' - t.: $y_0' = 2ax + b$ és $y_0'' = 2a$
Elvégezve a visszahelyettesítést:

$$2a - 5(2ax + b) - 24(ax^2 + bx + c) = 12x^2 - 3$$

$$2a - 10ax - 5b - 24ax^2 - 24bx - 24c = 12x^2 - 3$$

$$-24ax^2 - (10a + 24b)x + 2a - 5b - 24c = 12x^2 - 3.$$

Minthogy két polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatója megegyezik, így

$$-24a = 12$$

$$-(10a + 24b) = 0$$

$$2a - 5b - 24c = -3$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{24}$, $c = \frac{23}{576}$. Így a keresett y_0 partikuláris megoldás: $y_0 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x + \frac{23}{576}$. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát: $y = y_h + y_0 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{8x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x + \frac{23}{576}$.

51. Határozzuk meg az $y'' - 8y' + 16y = 4x^3 - 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: **a)** A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, ennek $\lambda = 4$ kétszeres gyöke, így az alaprendszerbe tartozó partikuláris megoldások e^{4x} és xe^{4x}, tehát $y_h = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$.
b) Mivel a "zavarótag" most harmadfokú polinom, ezért az y-t is ilyen alakban keressük, azaz $y_0 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Így $y_0' = 3ax^2 + 2bx + c$ ill. $y_0'' = 6ax + 2b$.
Behelyettesítve ezeket az inhomogén egyenletbe

$$6ax + 2b - 8(3ax^2 + 2bx + c) + 16(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 4x^3 - 2x$$

$$6ax + 2b - 24ax^2 - 16bx - 8c + 16ax^3 + 16bx^2 + 16cx + 16d = 4x^3 - 2x$$

$$16ax^3 + (16b - 24a)x^2 + (6a - 16b + 16c)x + 2b - 8c + 16d = 4x^3 - 2x$$

Az együtthatók összehasonlításából a következő egyenletrendszer adódik:

$$16a = 4$$
$$16b - 24a = 0$$
$$6a - 16b + 16c = -2$$
$$2b - 8c + 16d = 0.$$

Ennek megoldásai : $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{8}$, $c = \frac{5}{32}$, $d = \frac{1}{32}$. Így az inhomogén differenciálegyenlet keresett partikuláris megoldása: $y_0 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{32}x + \frac{1}{32}$. Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{32}x + \frac{1}{32}.$$

52. Határozzuk meg az $y''' - 2y'' - 3y' = 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: Az ilyen egyenletben, amelyben az y hiányzik, először az $y' = p$ helyettesítést kell alkalmazni. Ekkor differenciálegyenletünk a $p'' - 2p' - 3p = 2x$ alakot ölti. Ezt oldjuk meg:

a) A homogén egyenlet $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Az alaprendszer e^{3x}, e^{-x}. Így $p_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$.

b) Mivel a "zavarótag" lineáris függvény, így az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását is ilyen alakban keressük: $p_0 = ax + b$. Így $p_0' = a, p_0'' = 0$. Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe: $0 - 2a - 3(ax + b) = 2x$; $-3ax - 2a - 3b = 2x$ amelyből a megoldandó egyenletrendszer: $-3a = 2$, $-2a - 3b = 0$. Ennek megoldásai: $a = -2/3$, $b = 4/9$.

Így az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása: $p_0 = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{9}$.

c) Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát:

$p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}$.

d) Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása az $y' = p$ helyettesítés miatt az $y' = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}$ egyenletből integrálással adódik:

$y = \int \left(c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} \right) dx$ és az integrálást elvégezve

$y = c_1 \frac{1}{3} e^{3x} - c_2 e^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x + c_3$.

53. Határozzuk meg a $6y'' + 7y' + 2y = 4e^{3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: a) A homogén egyenlet $6y'' + 7y' + 2y = 0$, ennek karakterisztikus egyenlete: $6\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$, melynek megoldásai: $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -2/3$. Így az alaprendszer: $e^{\frac{-1}{2}x}, e^{\frac{-2}{3}x}$ tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h = c_1 e^{\frac{-1}{2}x} + c_2 e^{\frac{-2}{3}x}.$$

b) Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerével határozzuk meg. Mivel a "zavarótag" exponenciális, így az y_0 is az, mégpedig $y_0 = Ae^{3x}$ alakú. Az A meghatározásához az y_0 - t be kell helyettesíteni az inhomogén egyenletbe. Felhasználva, hogy $y_0' = 3Ae^{3x}$ ill. $y_0'' = 9Ae^{3x}$, kapjuk, hogy: $54Ae^{3x} + 21Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 4e^{3x}$ melyből $77A = 4$ s így $A = 4/77$.

Tehát $y_0 = \frac{4}{77}e^{3x}$.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása : $y = c_1 e^{\frac{-1}{2}x} + c_2 e^{\frac{-2}{3}x} + \frac{4}{77}e^{3x}$.

54. Határozzuk meg az $y''' - 3y'' + 2y = -18e^{-2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: a) A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása.

A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Ennek megoldása szorzattá alakítással adódik:

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = \lambda^3 - \lambda - 2\lambda + 2 = \lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda(\lambda + 1) - 2) =$
$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$

s így $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$ amiből $\lambda = 1$ (kétszeres gyök) és $\lambda = -2$. Így az alaprendszer: e^x, xe^x, e^{-2x}. Tehát $y_h = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 e^{-2x}$.

b) Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása. Alkalmazzuk a próbafüggvény módszerét. Vegyük észre, hogy a "zavarótag" e^{-2x} rezonanciában van az alaprendszer egyik elemével, így az y_0-t a következő alakban kell keresnünk: $y_0 = Axe^{-2x}$.

Az A meghatározásához y-t vissza kell helyettesítenünk, ezért számítsuk ki a deriváltakat:

$y_0' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}$
$y_0'' = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} = -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}$
$y_0''' = 8Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} = 12Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x}$.

Az inhomogén egyenletbe helyettesítve:

$12Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} - 3\left(Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}\right) + 2Axe^{-2x} = -18e^{-2x}$, melyből

$9Ae^{-2x} = -18e^{-2x}$ s így $A = -2$. A keresett partikuláris megoldás tehát

$y_0 = -2xe^{-2x}$.

c) Az inhomogén egyenlet általános megoldása
$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x} - 2xe^{-2x}$.

55. Határozzuk meg az $y'' + 2y' + 10y = 2 \cdot \cos 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: a) A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$. Ennek megoldásai komplex számok: $\lambda_1 = -1 + 3i$, $\lambda_2 = -1 - 3i$. Ekkor az alaprendszer: $e^{-x}\cos 3x$, $e^{-x}\sin 3x$, tehát $y_h = c_1e^{-x}\cos 3x + c_2e^{-x}\sin 3x$.

b) Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a "zavarótag" szerkezete miatt $y_0 = A\cos 4x + B\sin 4x$ alakban keressük. Helyettesítsük vissza y_0-t az inhomogén egyenletbe. Felhasználva, hogy

$$y_0' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$$

$$y_0'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

kapjuk, hogy
$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x + 2(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) +$
$+10(A\cos 4x + B\sin 4x) = 2\cos 4x$, amelyből
$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x - 8A\sin 4x + 8B\cos 4x + 10A\cos 4x + 10B\sin 4x = 2\cos 4x$
Összevonva és kiemelve: $(-6A + 8B)\cos 4x + (-6B - 8A)\sin 4x = 2\cos 4x$.
A két oldal összehasonlításával a következő egyenletrendszerhez jutunk:
$-6A + 8B = 2$

$-6B - 8A = 0$
Ennek megoldásai: A = −3 / 25 B = 4 / 25.
Így a keresett partikuláris megoldás: $y_0 = \dfrac{-3}{25}\cos 4x + \dfrac{4}{25}\sin 4x$.

c) Az inhomogén egyenlet általános megoldása:
$y = c_1e^{-x}\cos 3x + c_2e^{-x}\sin 3x - \dfrac{3}{25}\cos 4x + \dfrac{4}{25}\sin 4x$.

56. Határozzuk meg az $y' - 4y = 5e^{2x} + x^2 - 2\sin x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

M: Miután a differenciálegyenlet lineáris és inhomogén, az általános megoldáshoz ismernünk kell a homogén egyenlet általános és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását.

a) A homogén egyenlet általános megoldásának meghatározása. A homogén egyenlet: $y' - 4y = 0$. A karakterisztikus egyenlet: $\lambda - 4 = 0$, melynek megoldása $\lambda = 4$. Így $y_h = ce^{4x}$.

b) Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának (y_0-nak) a meghatározása. Alkalmazzuk a próbafüggvény módszert. Keressük tehát y_0-t

$$y_0 = Ae^{2x} + ax^2 + bx + c + B\sin x + C\cos x \text{ alakban.}$$

A konstansok meghatározásához y_0-t vissza kell helyettesítenünk, ehhez szükségünk van y_0'-ra: $y_0' = 2Ae^{2x} + 2ax + b + B\cos x - C\sin x$. Behelyettesítve:

$$2Ae^{2x} + 2ax + b + B\cos x - C\sin x - 4\left(Ae^{2x} + ax^2 + bx + c + B\sin x + C\cos x\right) =$$

$$= 5e^{2x} + x^2 - 2\sin x,$$

melyből:

$$-2Ae^{2x} - 4ax^2 + (2a - 4b)x + (b - 4c) + (B - 4C)\cos x + (-4B - C)\sin x =$$

$$= 5e^{2x} + x^2 - 2\sin x$$

A két oldal megfelelő tagjainak összehasonlításából a következők adódnak:

$$-2A = 5 \qquad B - 4C = 0 \qquad -4B - C = -2$$

$$-4a = 1 \qquad 2a - 4b = 0 \qquad b - 4c = 0$$

Az egyenletet ill. az egyenletrendszereket megoldva a következőket kapjuk:

$$A = -\tfrac{5}{2}, \quad a = -\frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{8}, \quad c = -\frac{1}{32}, \quad B = \frac{8}{17}, \quad C = \frac{2}{17}.$$

Így $y_0 = -\dfrac{5}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{32} + \dfrac{8}{17}\sin x + \dfrac{2}{17}\cos x.$

c) Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = ce^{4x} - \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} + \frac{8}{17}\sin x + \frac{2}{17}\cos x.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

57. Adott az $y^{(4)} + 6y''' + 9y'' - 24y' - 52y = f(x)$ differenciálegyenlet homogén egyenletének általános megoldása:
$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}\cos 2x + c_4e^{-3x}\sin 2x$. Határozza meg az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását szolgáltató próbafüggvényt az alábbi $f(x)$-ektől függően.

a) $f(x) = 52x^3 + 20x^2 - 18$

Lépések az önálló megoldáshoz:

Az y_0 szerkezete megegyezik az $f(x)$ szerkezetével, ha $f(x)$ polinom, akkor y_0 is az; a fokszámok is megegyeznek, helyettesítsen vissza és határozza meg a négy konstanst

$$y = -x^3 + x^2 - \frac{51}{26}x + \frac{189}{338}$$

b) $f(x) = 6e^{-2x}$

Lépések az önálló megoldáshoz:

Az y_0 szerkezete megegyezik az $f(x)$ szerkezetével, y_0 is exponenciális; ellenőrizni kell, van-e rezonancia, helyettesítsen vissza és határozza meg a konstanst

$$y = -\frac{3}{10}xe^{-2x}$$

58. Határozza meg az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását. Az y_p meghatározására alkalmazza a próbafüggvény módszerét!

a) $4y'' - y = x^3 + 2x - 1$

Lépések az önálló megoldáshoz:

Állapítsa meg a differenciálegyenlet típusát, s válassza ki a hozzá csatlakozó megoldási módot, az általános megoldás $y = y_h + y_0$, írja fel a homogén egyenletet, írja fel a karakterisztikus egyenletet: $y_h = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának (y_0) meghatározásához ismét vegye figyelembe a differenciálegyenlet típusát, ügyeljen y_0 szerkezetére (harmadfokú polinom), helyettesítsen vissza és határozza meg a konstansokat, y_h és y_0 ismeretében írja fel az általános megoldást

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} - x^3 - 26x + 1$$

b) $y'' - 4y' + 3y = 8e^{2x}$

Lépések az önálló megoldáshoz:

A homogén egyenlet karakterisztikus egyenletét kell először felírnia; ennek gyökei alapján adódik y_h, az y_0 szerkezete most exponenciális függvény; ellenőrizze a rezonanciát.

Az általános megoldás: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} - 8e^{2x}$

FELADATOK

59. Oldjuk meg az 57-es feladatot az alábbi jobb oldalakra.

a) $f(x) = 2x + 3$ **b)** $f(x) = 10e^{3x}$ **c)** $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = -4\cos 2x$ **e)** $f(x) = -8e^{-2x}$

60. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$ **b)** $y'' + y' - 2y = x^3 - 2x^2 + x + 2$

c) $y'' - 3y = 2\cos 3x$ **d)** $y'' + 10y' + 16y = 27e^{x}$

e) $y'' - 4y' - 5y = 90e^{-x}$ **f)** $y'' - y = (2x+3)e^{x}$

g) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2\sin x$ **h)** $y'' - 2y' + y = 1 + x^2 + 2\sin 2x$

i) $y''' - 7y'' + 6y' = 6x^2 - 2x + 3$ **j)** $y''' + 3y'' - 4y = e^{x}$

61. Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek megadott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását!

a) $y'' + y' - 6y = x \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = -1/9$

b) $y'' - 2y' + 5y = 3x^2e^x \qquad y(0) = 5/8 \qquad y'(0) = -11/8$

c) $y'' - 3y' - 4y = -6e^{2x} + 17\sin x \qquad y(0) = 3 \qquad y'(0) = 4$

MEGOLDÁSOK

59. a) $y_0 = -\frac{1}{26}x - \frac{9}{182}$ **b)** $y_0 = \frac{1}{20}e^{3x}$

c) $y_0 = -\frac{1}{75}\sin x + \frac{1}{150}\cos x$ **d)** $y_0 = \frac{2}{75}\cos 2x + \frac{1}{50}\sin 2x$

e) $y_0 = \frac{2}{5}xe^{-2x}$

60. a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + 2e^{3x}$

b) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{13}{8}$

c) $y = c_1e^{\sqrt{3}x} + c_2e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{6}\cos 3x$ **d)** $y = c_1e^{-8x} + c_2e^{-2x} + e^x$

e) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{5x} - 15xe^{-x}$ **f)** $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^x + xe^x$

g) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 3xe^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

h) $y = c_1e^x + c_2xe^x + x^2 + 4x + 7 - \frac{6}{25}\sin 2x + \frac{8}{25}\cos 2x$

i) $y = c_1e^{6x} + c_2e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{5}{2}x + c_3$

j) $y = \frac{x}{9}e^x + c_1e^x + c_2xe^{-2x} + c_3e^{-2x}$

61. a) $y_0 = \frac{1}{36}e^{2x} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}$

b) $y_0 = e^x\cos 2x - e^x\sin 2x + \frac{3}{4}x^2e^x - \frac{3}{8}e^x$

c) $y_0 = e^{4x} - \frac{1}{2}e^{-x} + e^{3x} + \frac{3}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x$

VEGYES FELADATOK DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRE

62. $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$ **63.** $3y'\sin x \sin y + 5\cos x \cos^3 y = 0$

64. $y'\sin^2 x - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3 x$ **65.** $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

66. $10y'' - 17y' + 3y = 0$ **67.** $xdy + 2x^2\,\mathrm{ctg}\,ydx = \mathrm{ctg}\,ydx$

68. $y'' = \dfrac{y' + x^3}{x}$ **69.** $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 33$

70. $xy^3y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$ **71.** $(1+x^2)y' + 2xy = \mathrm{tg}\,x$

72. $(2xy' + y)\sqrt{1+x} = 1 + 2x$ **73.** $y'' = x\cos x$

74. $y'' - 14y' + 49y = 0$ **75.** $y'' - 3y' - 4y = e^{2x} + 2\sin x$

76. $y'' = y' - x^2 + 2x$ **77.** $6y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

78. $y'' + y = 0$ **79.** $y''' - 9y' = 0$ **80.** $y' - xy = x^3$

81. $y'' + y' - 20y = xe^{-5x}$ **82.** $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

83. $x(1-x^2)y' + (2x^2 - 1)y = x^3 - x^5$ **84.** $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}\cos x$

85. $y' - 2y = x^2 - 2x + 5$

MEGOLDÁSOK

62. $y = \mathrm{tg}\left(\ln\dfrac{c}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

63. $-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\cos^2 y} = 5\ln|c\sin x|$ $\quad y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \neq k\pi$

64. $y = c\cdot\mathrm{tg}\,x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

65. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c_1x + c_2$ **66.** $y = c_1e^{\frac{1}{5}x} + c_2e^{\frac{3}{2}x}$

67. $y = \arccos\left(\dfrac{1}{x}e^{x^2-c}\right)$ $\quad x \neq 0$ **68.** $y = \dfrac{x^4}{8} + c_1\dfrac{x^2}{2} + c_2$

69. $y = e^{-3x}(c_1\cos 5x + c_2\sin 5x) + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{22}{17}$

70. $y^2 - \ln\sqrt{1+y^2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c \qquad x \neq 0$

71. $y = \frac{c}{x^2+1} - \frac{\ln|\cos x|}{x^2+1} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

72. $y = \frac{c}{\sqrt{x}} + \sqrt{x+1} \qquad x>-1\ ,\ x\neq 0$

73. $y = -x\cos x + 2\sin x + c_1 x + c_2$ **74.** $y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x}$

75. $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\sin x$

76. $y = c_1 e^{x} + \frac{x^3}{3} + c_2$ **77.** $y = c_1 e^{-\frac{\sin x}{6}} + \sin x - 6$

78. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ **79.** $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}$

80. $y = ce^{\frac{x^2}{2}} - (x^2+2)$ **81.** $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{18}x^2 e^{-5x} - \frac{1}{81}xe^{-5x}$

82. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x$

83. $y = cx\sqrt{1-x^2} - x + x^3\ ,\ x\leq 1$

84. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} - e^{-x}\sin x$

85. $y = ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{4}$