MATEMATIKA PÉLDATÁR

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ
a második kiadáshoz

Példatárunk a Gábor Dénes Műszaki Informatikai Főiskola hallgatói számára készült. Ez a körülmény meghatározta könyvünk tematikáját és a módszert is.

Mivel a főiskolán a távoktatás módszerével folyik a képzés, ezért fontos követelmény, hogy a hallgató egyéni tanulásra is alkalmas könyvre támaszkodhasson. Példatárunkat ilyennek tekintjük. Ezt azzal kívántuk elérni - reméljük ez sikerült is - , hogy minden témában három csoportba szedtük a példákat. Az első csoportban ("Példák" cím alatt) szereplő példák megoldását részletesen tárgyaljuk (néhol talán az indokoltnál is részletesebben). A "Feladatok útmutatással" címet viselő példáknál útmutatást adunk (lehet, hogy néhány olvasónk szerint a szükségesnél kevesebbet). Végül a harmadik csoporthoz (ennek a címe: "Feladatok") tartozó feladatoknál csak a megoldást közöljük.

Mint más példatárakban is teszik, az egyes témaköröknél mi is rövid összefoglalást adunk a feladatok megoldásához szükséges ismeretekről (fogalmakról, "képletekről").

A második kiadásban kijavítottuk az első kiadásban megtalált hibákat. Ebben Pogány Eörs segített; lelkiismeretes munkáját köszönöm.

Abból a célból, hogy megkönnyítsük a könyv használatát, az elméleti részeket "besatíroztuk" és a fontosabb képleteket még be is kereteztük.

Budapest, 1995. május

A szerkesztő.

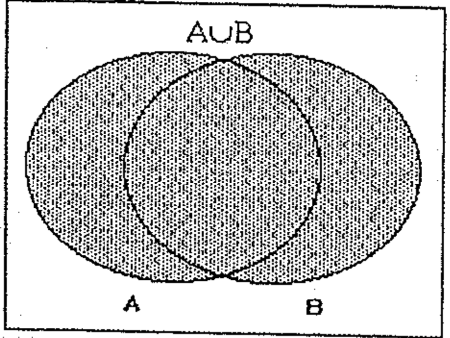
1. HALMAZELMÉLET

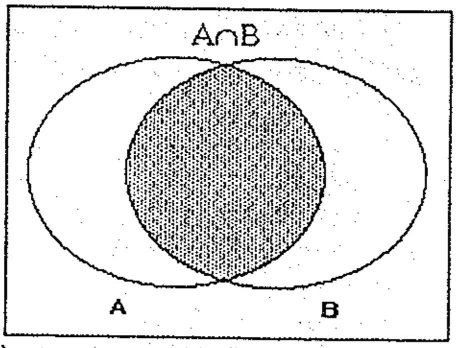
1. A halmaz fogalma

(1) Tetszőleges dolgok összességét *halmaznak* tekintjük. Az összességbe tartozó dolgok *a halmaz elemei*.
A halmaz jelölésére a nagybetűket használjuk, elemeiket { } között tüntetjük fel, ill. megfogalmazzuk az őket összefogó utasításokat. Ábrázolásuk Venn-diagrammal történik (kör, téglalap stb.). A halmazba tartozás jele : $\in$ (*eleme*).
(2) *Üres halmaz* , amelynek nincs eleme : $\emptyset$.
(3) Két halmaz *egyenlő*, ha ugyanazok az elemeik.
(4) Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme: $A \subset B$.
Ha $A = \emptyset$ vagy $A = B$, akkor A triviális (nem valódi) részhalmaza B-nek.
P(A) : a A *hatványhalmaza*; a A halmaz összes részhalmazainak halmaza (ha A *n*-elemű, akkor P(A) 2^n -elemű).
(5) Ha egy halmazról és részhalmazairól beszélünk, a halmazt magát *alaphalmaz-nak* (X) nevezzük.

2. Műveletek

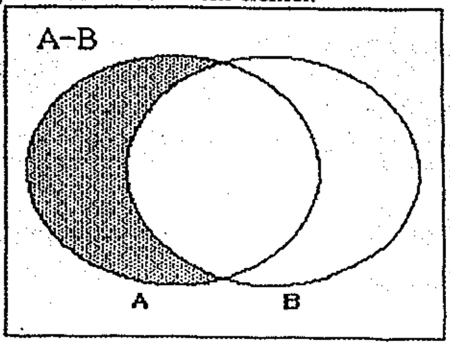
(6) *Egyesítés* (összeg, unió) (jele: $\cup$)
Az A és B halmaz uniója azon elemek halmaza, amelyek az A, B közül legalább az egyiknek elemei.

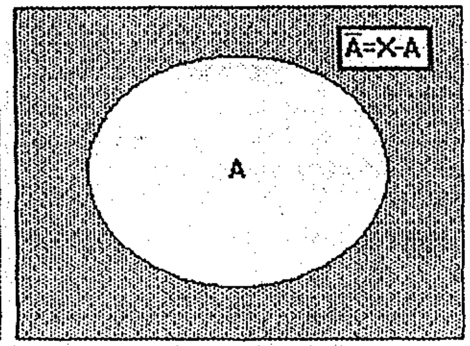




(7) *Metszet* (szorzat, közös rész) (jele: $\cap$)
Az A és B halmazok metszete azon elemek halmaza, melyek az A-nak is és ugyanakkor a B-nek is elemei.
(8) *Különbség* (jele: $-$)

Az A és B halmaz különbsége azon elemek halmaza, amelyek A-nak elemei, de ugyanakkor B-nek nem elemei.





(9) *Komplementer* (jele: ¯ (föléhúzás))

Az A halmaz komplementere az a halmaz, melynek elemei az A-nak nem elemei, de az X teljes halmaznak igen. Tehát : ha $A \subset X$, akkor $X-A$ az A komplementere X-re vonatkozóan.

(10) Két halmaz *diszjunkt*, ha metszetük üres : $A \cap B = \varnothing$.

3. Tulajdonságok

3.1 Az egyesítésre

(11) $A \cup A = A$

(12) $A \cup \varnothing = A$

(13) $A \cup B = B \cup A$

(14) $A \cup \overline{A} = X$

(15) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3.2 A metszetre

(16) $A \cap A = A$

(17) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(18) $A \cap B = B \cap A$

(19) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

(20) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3.3 Az egyesítésre és a metszetre együtt:

(21) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

(22) $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.4 A különbségre

(23) $A - B = A \cap \overline{B}$

(24) $A - (A - B) = A \cap B$

(25) $A - \varnothing = A$

(26) $A - A = \varnothing$

3.5 A különbségre és az egyesítésre ill. metszetre együtt:

(27) $(A - B) \cup B = A \cup B$

(28) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

(29) $A \cap B - C = (A - C) \cap (B - C)$

3.6 A komplementerre

(30) $\overline{\overline{A}} = A$

(31) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(32) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

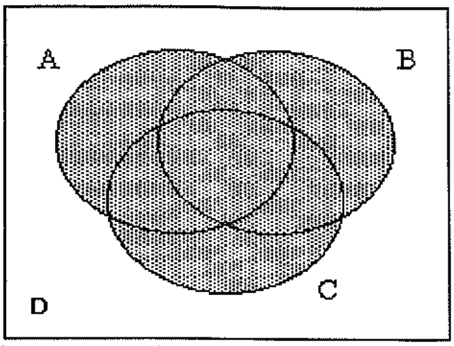
Az utóbbi két azonosságot ((31),(32)) *De Morgan szabályok*nak nevezzük.

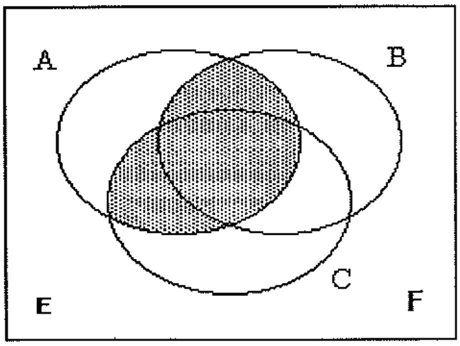
4. Rendezett halmazok

(33) *Rendezett n-es*: n db elem rögzített sorrendben történő felsorolása.
(34) *Direkt szorzat* $A \times B$: A és B halmazok direkt szorzata mindazon rendezett párok halmaza, amelyek első komponense A-ból, második komponense B-ből való.
Azaz : $(x,y) \in A \times B$ akkor és csak akkor, ha $x \in A$ és $y \in B$.
(35) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 , a_2 \in A_2 , \dots , a_n \in A_n \}$.
(36) *Reláció* : a direkt szorzat részhalmaza. (A_i a reláció i. tartománya.)
(37) R *binér reláció* : $R \subseteq A \times B$ $(a,b) \in R$ jele : aRb (pl. aritmetikai relációk.)
A : értelmezési tartomány B : képtartomány $A \cup B$: reláció tere.

PÉLDÁK

1. Soroljuk fel az A halmaz elemeit :
$A = \{ n : n \in \mathbf{N}, n = k - 1 , k \in \mathbf{N} , k < 5\}$.
M: Az A elemei olyan egész számok, amikre a (kettőspont után) felsorolt tulajdonságok igazak.
A k értéke csak 1, 2, 3, 4 lehet, ugyanis 5-nél kisebb természetes szám. Az utasítással megadott n szám ezekután 0, 1, 2, 3 lehetne, de ugyanakkor természetes szám is, tehát a A halmaz 3 elemű; $A = \{ 1, 2, 3 \}$.
2. Határozzuk meg az A és B halmazok metszetét :
$A = \{ a : a \in \mathbf{N} , a$ páros, $a \leq 15 \}$
$B = \{ b : b \in \mathbf{N} , 0 < b < 30 , b$ osztható 7-tel $\}$.
M: Az A elemei a legfeljebb 15 , páros természetes számok.
$A = \{ 2,4,6,8,10,12,14 \}$. A B elemei a 7-tel osztható, 30-nál kisebb természetes számok : $B = \{ 7,14,21,28 \}$.
A metszet elemei azok a számok, amelyek mindkét halmaznak elemei, azaz a 7-tel osztható páros, 15-nél kisebb természetes számok :$A \cap B = \{ 14 \}$.
Jelen esetben csak egyetlen közös elemet találtunk.
3. Az alábbi D , E , F halmazok között vannak-e megegyezők :
$D = A \cup B \cup C$ $E = A \cap (B \cup C)$ $F = A \cap B \cup A \cap C$
M: A kérdés az, hogy igaz-e minden esetben valamelyik egyenlőség a következők közül:
$D = E , D = F , E = F$.
Venn-diagrammal ábrázoljuk mindhárom halmazt és vessük össze azokat az egyenlőség eldöntéséhez.



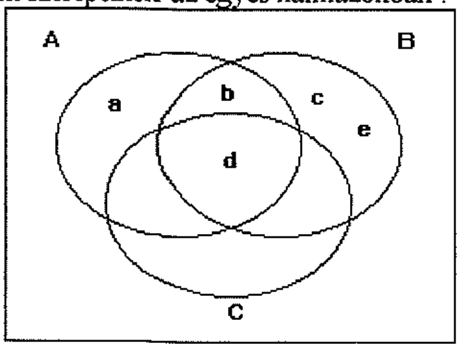


Látjuk, hogy csak az E = F igaz minden esetben.
Megjegyzés : Tudnunk kellett ábra nélkül is, hogy E = F mindig igaz, hiszen ez a **(21)** szabály. Azt is sejthettük, hogy a D halmaz általában bővebb a többinél.

4. Határozzuk meg az A, B, C halmazok elemeit, ha eleget tesznek a következő feltételeknek :

$A \cup B \cup C = \{ a, b, c, d, e \}$
$A \cap B \cap C = \{ d \}$
$A - C = \{ a, b \}$
$B - C = \{ b, c, e \}$

M: A diagramban egyértelműen 7 területre pakolhatunk általános esetben Az $A \cap B \cap C$ egyetlen területet jelent, azaz a d elemnek egyértelmű helye van a diagramban. Az $(A - C) \cap (B - C)$ is egyetlen terület, ahová a közös elem : b kerülhet. Ebből viszont az következik, hogy az $A - C$ többi eleme (a) csak az $A - (B \cup C)$-ben, a $B - C$ többi eleme (c,e) pedig csak a $B - (A \cup C)$-ben lehet. Mivel az elhelyezett elemeken kívül az unió nem tartalmaz más elemet már, így olvassuk le, mely elemek szerepelnek az egyes halmazokban :



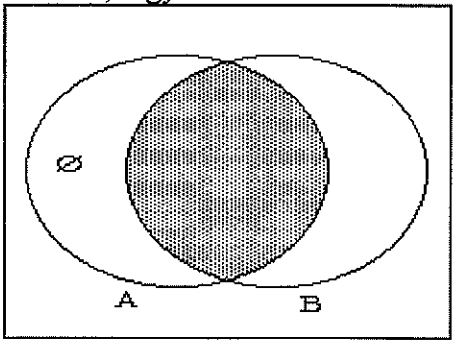
$A = \{ a, b, d \}$ $B = \{ b, c, d, e \}$ $C = \{ d \}$

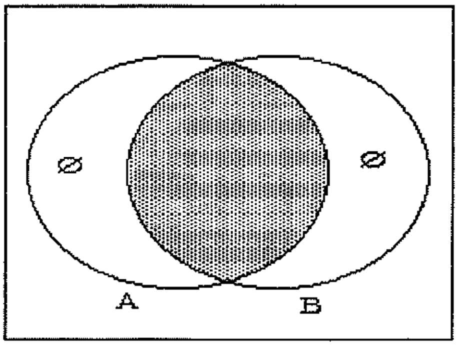
5. Mikor igaz az alábbi egyenlőség ? (Adjunk szükséges és elégséges feltételt!)

a) $A \cap B = A$ **b)** $A \cap B = A \cup B$

M: Általános esetben természetesen nem igaz sem **a**), sem **b**) mint ezt a Venn-diagramról láthatjuk. Ugyanis az egyenlőség bal és jobb oldala ugyanazt a területet kell, hogy takarja. Ilyen esetekben igyekszünk "a kilógó részeket levágni", a közös részeken túliakat kinullázni.

Az **a)** egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha A azon része, ami a metszeten túli, üres; azaz az $A - B = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy A minden eleme egyúttal B-nek is eleme, vagyis $A \subset B$.





A **b)** egyenlőség akkor és csak akkor teljesülne, ha a metszeten túli részek, amik az egyesítést alkotják, üresek lennének, azaz $A - B = \emptyset$ és $B - A = \emptyset$ lenne. Ez azt jelenti, hogy sem az A-nak, sem a B-nek nincs saját eleme, csak közös. Tehát A=B.

6. Legyenek I_1 és I_2 intervallumok.

Határozzuk meg az $I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2$, $I_1 - I_2$, $I_2 - I_1$ intervallumokat, ha

a) $I_1 = (0,8]$ és $I_2 = [-5,5]$ **b)** $I_1 = (-2,\infty)$ és $I_2 = [5,9]$.

M: Definiáljuk az intervallum-jelöléseket :

$[a,b) = \{ x : x \in \mathbf{R}, a \le x < b \}$ "balról zárt, jobbról nyílt"

$[a,b] = \{ x : x \in \mathbf{R}, a \le x \le b \}$ "balról zárt, jobbról zárt", "zárt"

$(a,b) = \{ x : x \in \mathbf{R}, a < x < b \}$ "balról nyílt, jobbról nyílt", "nyílt"

$(a,b] = \{ x : x \in \mathbf{R}, a < x \le b \}$ "balról nyílt, jobbról zárt",

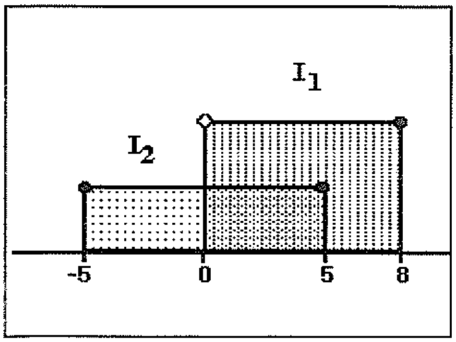
a) Rajzoljuk a valós számtengely fölé a két intervallumot:

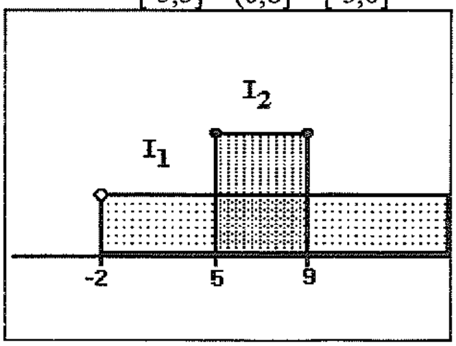
Olvassuk le a két intervallum unióját : $(0,8] \cup [-5,5] = [-5,8]$

metszetét : $(0,8] \cap [-5,5] = (0,5]$

különbségeit : $(0,8] - [-5,5] = (5,8]$

$[-5,5] - (0,8] = [-5,0]$





b) Vegyük észre, hogy az I_2 valódi részhalmaza az I_1-nek : $I_2 \subset I_1$.

$(-2,\infty) \cup [5,9] = (-2,\infty)$ $\qquad$ $(-2,\infty) \cap [5,9] = [5,9]$

$(-2,\infty) - [5,9] = (-2,5) \cup (9,\infty)$ $\qquad$ $[5,9] - (-2,\infty) = \varnothing$.

7. Igazak-e a következő állítások tetszőleges A, B, C halmazokra?

a) $C - (B \cup A) = (C - B) \cap (C - A)$ $\qquad$ **b)** $(A \cup B) \cap C = C$

M: a) Induljunk ki a bal oldali kifejezésből, alkalmazzuk a halmazok különbségének definícióját :

$$C-(B\cup A)=C\cap\overline{B\cup A}=C\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=\left(C\cap\overline{B}\right)\cap\left(C\cap\overline{A}\right)=$$

$$=(C-B)\cap(C-A)$$

A deMorgan szabály és **(16)** alkalmazása után a jobb oldal különbségeinek definícióját kaptuk. Tehát az állítás igaz.

b) A bal oldalra alkalmazzuk a **(21)** szabályt :

$$(A\cup B)\cap C=A\cap C\cup B\cap C\subset C$$

A feltételből következik, hogy $C \subset A \cup B$, tehát az egyenlőség általában nem igaz.
A kapott halmaz csak valódi részhalmaza a C halmaznak, tehát nem egyenlő vele.

Példa rendezett halmazokra. Adottak az alábbi halmazok:
NÉV={Béla,Katalin,Márton,László}
TANTÁRGY={MAT,FIZ,PAS}
JEGY={1,2,3,4,5}.

a) Képezzük a nevek, tantárgyak, jegyek direkt szorzatát!

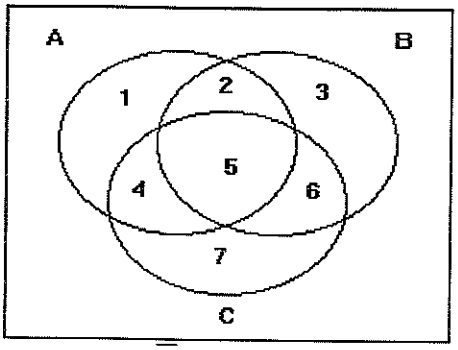
b) Írjunk fel egy relációt a három halmazból!

c) Adjunk meg egy binér relációt a nevek és jegyek között!

M: A NÉVxTANTÁRGYxJEGY direkt szorzat 4x3x5=60 elemű halmaz, amelynek minden eleme egy rögzített sorrendű [név,tantárgy,jegy] hármas.
{[Béla,MAT,1],[Béla,MAT,2],...,[Béla,MAT,5],[Béla,FIZ,1],...,[Béla,PAS,5], [Katalin,MAT,1],...[Katalin,PAS,5],[Márton,MAT,1],...,[László,PAS,5]}
Ennek a direkt szorzatnak bármelyik részhalmaza egy reláció. Pl. egy EREDMÉNYEK halmaz, melynek elemei azt írják le, hogy ki miből hányasra vizsgázott:
{[Béla,MAT,4],[Katalin,MAT,4],[Béla,FIZ,5],[Márton,PAS,5],...}
A nevek és jegyek közötti reláció lehetne az a halmaz, amelynek elemei (kettesek) azt írják le, hogy ki milyen minősítéssel végzett:
{[Béla,4],[László,5],...}

☞ ☞ ☞ FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL ☜ ☜ ☜

8. Fogalmazzuk meg a halmazok nyelvén az alábbi általános elrendezésű A, B, C halmazok 1-essel, 2-essel, ... , 7-essel jelzett területeit !



9. Igazoljuk az $A\cap B-C=\overline{C}\cap A\cap B$ egyenlőséget !

10. Igaz-e, hogy $A-(B\cup C)=A-B-C$ tetszőleges A, B, C halmazokra?

11. Igaz-e, hogy $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$?

12. Ha $A\cup B=A$, akkor igaz-e, hogy $B\subset A$?

13. Igaz-e, hogy $A\cup(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup B=A\cup B$ minden esetben?

14. Az alábbi D, E, F halmazok közül melyek egyenlők egymással?

$D=\overline{A\cup B\cup C}$ $\quad E=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ $\quad F=\overline{A}\cup(\overline{B}\cup\overline{C})$

15. Határozzuk meg az $A\cap B$ halmazt, ha

$A=\{\,n : n=2k+1,\ k\in N,\ 0\le k\le 5\}$

$B=\{\,m : m=3l+2,\ l\in N,\ 2\le l\le 4\}$.

16. Határozzuk meg az A, B és C halmazokat, ha eleget tesznek a következő négy feltételnek :

$A\cup B\cup C=\{3,12,13,21,23\}$

$A\cap B\cap C=\{21\}$

$A-B=\{3,12\}$

$C-B=\{12,13,23\}$

ÚTMUTATÁSOK

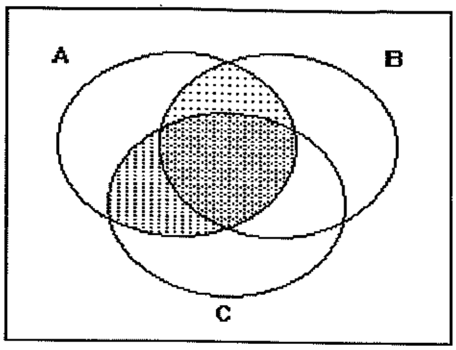
8. Fogalmazzuk meg, mit látunk A-ból, B-ből, C-ből.

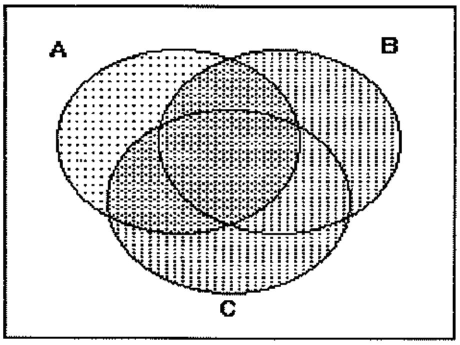
1.	$A-(B\cup C)$	$A-B-C$	$(A-B)\cap(A-C)$
2.	$A\cap B-C$	$(A-C)\cap(B-C)$	
3.	$B-(A\cup C)$	$B-A-C$	$(B-A)\cap(B-C)$
4.	$A\cap C-B$	$(A-B)\cap(C-B)$	
5.	$A\cap B\cap C$		
6.	$C\cap B-A$	$(C-A)\cap(B-A)$	
7.	$C-(B\cup A)$	$C-B-A$	$(C-B)\cap(C-A)$.

9. A különbség definíciója és a metszet kommutativitása szerint igaz.

10. $A-(B\cup C)=A\cap\overline{B\cup C}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A-B-C$

11. Ábrázoljuk Venn-diagrammal mindkét oldalt, ugyanazt a területet kapjuk-e.





$(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad = \quad A\cap(B\cup C)$

12. A feltétel szerint $B-A=\varnothing$, tehát B részhalmaza A-nak.

13. $A\cup(A\cap B)=A$ ill. $(B\cap C)\cup B=B$. Tehát az állítás igaz.

14. A deMorgan szabályt alkalmazva, azt kapjuk, hogy $D=E$.

15. $A=\{1,3,5,7,9,11\}$ ui. $k=0,1,2,3,4,5$
$B=\{8,11,14\}$ ui. $l=2,3,4$
$A\cap B=\{11\}$.

16. Vegyük észre, hogy $A-B\cap C-B=\{12\}$ egy konkrét terület a Venn-diagramban. Ugyancsak a 3 halmaz metszete is egyetlen terület. A 3 csak az A eleme, a 13 és a 23 csak a C eleme:
$A=\{3,12,21\}$ $B=\{21\}$ $C=\{12,13,21,23\}$

FELADATOK

17. Igazoljuk a $C-(A\cup B)=\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$ egyenlőséget !

18. Igazak-e a következő állítások tetszőleges A, B, C halmazokra ?

a) $A\cap B=A\cup B$ **b)** $A-(B\cap C)=A-B-C$

c) $C-(B\cap A)=(C-B)\cup(C-A)$ **d)** $A\cap B\subset A\cup B$

19. Igazak-e a következő állítások ?

a) $A-B=B-A$ **b)** $A-\varnothing=\varnothing$

c) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$

d) $A\cup B=B\cup A$ **e)** $A-\varnothing=A$

20. Ha $A\cup B=A$, akkor igaz-e, hogy $A\cap B=B$?

21. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $A\cap(A\cup B)\cup B\cap(B\cup C)=A\cup B$

b) $A\cup(B-(A\cap B))=A\cup B$

22. Az alábbi D, E, F halmazok közül melyek egyenlők egymással minden esetben?

$$D=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\,,\ E=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\,,\ F=\overline{A}\cap\overline{B\cup C}.$$

23. Határozzuk meg a közös elemeket, ha

a) $K = \{ n : n \in \mathbf{N}, n \text{ páros}, 100<n<150 \}$
$L = \{ x : x \in \mathbf{N}, x \leq 150 , x \text{ osztható 5-tel} \}$

b) $K = \{ n : n \in \mathbf{N}, n \text{ páros}, 10 \leq n \leq 30 \}$
$L = \{ x : x \in \mathbf{N}, x \leq 30 , x \text{ osztható 5-tel} \}$

24. Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt, ha

a) $A = \{ n : n = 5k+1, k \in \mathbf{N}, 5 < k < 15\}$
$B = \{ m : m = 7l+2, k \in \mathbf{N}, 0 < l < 8\}$

b) $A = \{ n : n = 5k-1, k \in \mathbf{N}, 5 < k < 15\}$
$B = \{ m : m = 7l+2, k \in \mathbf{N}, 0 < l < 8\}$

c) $A = \{ n : n = 2k+1, k \in \mathbf{N}, 0 \leq k \leq 5\}$
$B = \{ m : m = 3l+1, l \in \mathbf{N}, 2 \leq l \leq 4\}$.

25. Legyen $I_1 = [-4,3]$ és $I_2 = [0,5]$ intervallum a valós számokból. Határozzuk meg az $I_1 - I_2$, az $I_2 - I_1$, az $I_1 \cup I_2$, és az $I_1 \cap I_2$ intervallumokat!

26. $A = \{0,1,2,3,5\}$, $B = \{0,1,4,5,6,7\}$. Határozzuk meg az $A-B$, $B-A$, $A \cup B$, $A \cap B$ halmazokat!

27. Írjuk fel az adott két halmaz egyesítésének és metszetének elemeit!

a) X = {az 5-tel osztható Lottószámok}
Y = {a 30-cal osztható Lottószámok}

b) X = {az 5-re végződő Lottószámok}
Y = {a páratlan Lottószámok}.

28. Határozzuk meg az X és az Y halmazokat, ha eleget tesznek a következő feltételeknek : $X \cup Y = \{a,b,c,d,e\}$, $X \cap Y = \{c,d\}$, $X-Y = \{e\}$.

29. Ha A = {egész számok}, $B = [0,200]$, $C = [-1,0)$, akkor igazak-e az alábbi állítások?

a)	$0 \in B \cup C$	**b)**	$A \subset B \cup C$	**c)**	$B \cap C = \{0\}$
d)	$0 \in A-C$	**e)**	$A \cap B = B$	**f)**	$A \cap C = \{-1\}$.

MEGOLDÁSOK

17. Venn-diagrammal belátható.

18. **a)** nem **b)** nem **c)** igen **d)** igen

19. **a)** nem **b)** nem **c)** igen **d)** igen **e)** igen

20. igen **21.** **a)** igen **b)** igen **22.** D = F

23. **a)** $K \cap L = \{110,120,130,140\}$ **b)** $K \cap L = \{10,20,30\}$

24. **a)** $A \cap B = \{51\}$ **b)** $A \cap B = \{44\}$ **c)** $A \cap B = \{7\}$

25. $I_1 - I_2 = [-4,0)$ $I_2 - I_1 = (3,5]$
$I_1 \cup I_2 = [-4,5]$ $I_1 \cap I_2 = [0,3]$

26. $A-B = \{2,3\}$, $B-A = \{4,6,7\}$, $A \cap B = \{0,1,5\}$,

$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

27. **a)** $X \cup Y = X =$ {az 5-tel osztható Lottószámok}

$X \cap Y = Y =$ {a 30-cal osztható Lottószámok}

b) $X \cup Y = Y =$ {a páratlan Lottószámok}

$X \cap Y = X =$ {az 5-re végződő Lottószámok}

28. $X = \{c,d,e\}$ $Y = \{a,b,c,d\}$

29. **a)** igen **b)** nem **c)** nem **d)** igen **e)** nem **f)** igen

2. MATEMATIKAI LOGIKA

Azok a kijelentő mondatok, amelyekről egyértelműen megállapítható, hogy igazak, vagy hamisak, *ítéletek* (predikátumok). Az ítélet logikai értéke tehát kétféle lehet: *igaz*, *hamis*, amelyeket igazságértékeknek nevezünk.
Az ítélet (logikai változó) jele latin kisbetű, az értékek: i ,h (true,false).Egyszerű ítéletekből (elemi állításokból) logikai műveletekkel összetett ítéleteket (logikai kifejezéseket) képezhetünk, melyek értéke az összetevők értékétől függ.

1. Műveletek (ítéletkalkulus): igazságtáblázatokkal definiáljuk.

(1) *Negáció* (jele: $\neg$ (nem))

p	$\neg p$
i	h
h	i

A negáció az ítélet tagadása.

(2) *Konjunkció* (jele : $\wedge$ (és))

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A konjunkció értéke csak akkor igaz, ha mindkét ítélet igaz.

(3) *Diszjunkció* (jele : $\vee$ (vagy))

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A diszjunkció értéke már igaz, ha legalább az egyik ítélet igaz.

(4) *Implikáció* (jele : $\Rightarrow$ (ha,akkor))

p	q	$p \Rightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az implikáció értéke csak akkor hamis, ha a *feltétel* (p) igaz és a *következmény* (q) hamis.

(5) *Ekvivalencia* (jele : $\Leftrightarrow$ (akkor és csak akkor))

p	q	$p \Leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Az ekvivalencia értéke csak akkor igaz, ha a két ítélet értéke megegyezik.
A fenti műveletek a felsorolásuk szerint kötnek.

2. Azonosságok

(6) $\neg(\neg p) = p$, $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$, $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
(7) $p \wedge (q \vee r) = p \wedge q \vee p \wedge r$
(8) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(9) $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$
(10) $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
(11) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
(12) $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Megjegyzés: **(11)** és **(12)** az ún. *De Morgan-féle azonosságok*.

PÉLDÁK

1. Írjuk fel az alábbi ítéletet egyszerű ítéletek és logikai műveletek segítségével: egy szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 5 vagy 0.

M: A fenti logikai kifejezés három egyszerű ítéletet tartalmaz:
p : a szám osztható 5-tel
q : a szám utolsó számjegye 5

r : a szám utolsó számjegye 0

Az összetett ítélet : $p \Leftrightarrow q \vee r$

2. Az alábbi egyszerű ítéletek ismeretében határozzuk meg az összetett ítéletek logikai értékét:

p : *n* osztható 6-tal

q : az *n* páros

r : *n* osztható 3-mal

a) $p \Rightarrow q \wedge r$ **b)** $q \Rightarrow \neg r$ **c)** $q \vee r \Rightarrow p$

M: **a)** Igaz-e,hogy ha az *n* osztható 6-tal, akkor az n páros és osztható 3-mal? Mivel egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha 2-vel is és 3-mal is osztható ill. a 2 páros szám, igaz az állítás.

b) Igaz-e,hogy ha az *n* páros, akkor nem osztható 3-mal? Nem igaz, hiszen van olyan páros szám, ami osztható 3-mal is.

c) Igaz-e, hogy ha az *n* páros, vagy 3-mal osztható, akkor 6-tal is osztható? Nem igaz, ugyanis a 6-tal való osztáshoz a számnak 2-vel és 3-mal is oszthatónak kell lenni. Például a 4 páros, vagy a 9 3-mal osztható, mégsem oszthatók hattal.

3. Mi lesz az alábbi logikai kifejezés értéke az ítéletek megadott értékeire

a)	$(\neg p \vee q) \wedge r \Rightarrow p$	p : igaz	q : hamis	r : igaz
b)	$(\neg a \vee b) \wedge c \Rightarrow a$	a : igaz	b : hamis	c : hamis
c)	$(a \vee b) \Leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$	a : igaz	b : hamis	
d)	$\neg(p \Rightarrow q)$	p : hamis	q : igaz	

M: Írjuk be az ítéletek helyére az értéküket, és alkalmazzuk a műveleti szabályokat.

a) $(\neg p \vee q) \wedge r \Rightarrow p$

$(\neg i \vee h) \wedge i \Rightarrow i$	tagadás
$(h \vee h) \wedge i \Rightarrow i$	diszjunkció
$h \wedge i \Rightarrow i$	konjunkció
$h \Rightarrow i$	implikáció
i	

b) $(\neg a \vee b) \wedge c \Rightarrow a$

$(\neg i \vee h) \wedge h \Rightarrow i$	tagadás
$(h \vee h) \wedge h \Rightarrow i$	diszjunkció
$h \wedge h \Rightarrow i$	konjunkció
$h \Rightarrow i$	implikáció
i	

c)

$(a \vee b) \Leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$	diszjunkció, tagadások
$(i \vee h) \Leftrightarrow ((\neg i \wedge h) \vee (\neg i \wedge \neg h))$	zárójeleken belüli első műveletek
$i \Leftrightarrow ((h \wedge h) \vee (h \wedge i))$	zárójelek feloldása, konjunkciók
$i \Leftrightarrow (h \vee h)$	utolsó zárójel, diszjunkció
$i \Leftrightarrow h$	ekvivalencia
h	

d) $\neg(p \Rightarrow q)$

$\neg(h \Rightarrow i)$ implikáció

$\neg i$ tagadás

h

4. p, q, r mely értékei mellett lesz a kívánt értéke a következő logikai kifejezéseknek?

a) $\neg q \wedge \neg(p \wedge q) \vee r$ hamis

b) $q \wedge (\neg p \vee \neg q)$ igaz

c) $p \wedge (q \vee \neg r) \Rightarrow r \wedge q$ hamis

d) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow q \wedge \neg r$ igaz

M: A **3.** feladattal ellentétben most nem az egyszerű állítások ismeretében kell elvégezni a kifejezést alkotó műveleteket belülről kifelé haladva, hanem az egész kifejezés értékét ismerve kell befelé haladva a külsőbb műveleteket lefejtve eljutni az alkotó egyszerű állításokig.

Megjegyzés : Az értéktáblázat elkészítése is egy mód annal eldöntésére, hogy az összes eset közül ($2^{\text{változók száma}}$), melyekben lesz az adott kifejezés kívánt értékű.

a) A $\neg q \wedge \neg(p \wedge q) \vee r$ kifejezés csak akkor hamis, ha az utolsó művelet ($\vee$) két oldala is hamis, azaz $\neg q \wedge \neg(p \wedge q)$ is hamis, meg az r is hamis.

A $\neg q \wedge \neg(p \wedge q)$ kifejezés utolsó műveleténél ($\wedge$) 3 esetben is hamisat kapunk: ha $\neg q$ és $\neg(p \wedge q)$ közül legalább az egyik hamis. Ez azt jelenti, hogy a q és a $p \wedge q$ közül legalább az egyik igaz. Itt q nem lehet hamis, mert akkor mindkét kifejezés hamis lenne. Ha pedig q igaz, akkor $\neg q \wedge \neg(p \wedge q)$ hamis p-től függetlenül. Tehát 2 eset van : p : i , q : i , r : h vagy p : h , q : i , r : h .

Megjegyzés : A (11) De Morgan-szabály szerint a kifejezés első része $(\neg q \wedge \neg(p \wedge q))$ ekvivalens a következővel : $\neg(q \vee (p \wedge q))$. Ez akkor lesz hamis, ha $q \vee (p \wedge q)$ igaz, azaz q és $p \wedge q$ közül legalább az egyik igaz. Innen a fentiek szerint folytathatjuk.

b) A $q \wedge (\neg p \vee \neg q)$ kifejezés csak akkor igaz, ha az utolsó művelet ($\wedge$) mindkét oldala igaz : q-nak is meg $\neg p \vee \neg q$ -nak is igaznak kell lenni.

De $\neg p \vee \neg q$ a De Morgan-szabály értelmében egyenlő $\neg(p \wedge q)$-val. Ennek kell most igaznak lennie, vagyis a tagadás mögötti kifejezésnek, $p \wedge q$-nak hamisnak. Egy konjunkció hamis, ha legalább egy ítélet értéke hamis. Azaz p, q közül legalább az egyik hamis : p : i , q : h ; p : h , q : i ; p : h , q : h . Viszont q-nak az elején kikötöttük, hogy igaznak kell lennie; ezért 1 eset van : p : h , q : i

c) A $p \wedge q \vee \neg r \Rightarrow r \wedge q$ kifejezés utolsó művelete az implikáció, ami csak egy esetben lesz hamis, ha az előtag $(p \wedge q \vee \neg r)$ igaz,. az utótag $(r \wedge q)$ hamis. Az előtag, mint konjunkció csak a két igaz tag esetén lesz igaz., tehát p : igaz, és $q \vee \neg r$: igaz. Ez utóbbi, mint diszjunkció három esetben igaz : q ill. $\neg r$ közül legalább egy igaz. A tagadást (ellentett érték) figyelembe véve:

p : i , q : i , r : h ; p : i , q : i , r : i ; p : i , q : h , r : h . Az utótag, mint konjunkció három esetben hamis : q : i , r : h ; q : h , r : i ; q : h , r : h (p : bármi). Összevetve az eseteket, amikor az implikáció előtagja igaz és utótagja hamis, azt látjuk, hogy csak két esetben lesz a kifejezés hamis, tehát: p : i , q : i , r : h ; p : i , q : h , r : h.

d) A $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow q \wedge \neg r$ kifejezés mint ekvivalencia két esetben lesz igaz, ha a művelet két oldalán ugyanaz az érték áll: $\neg(p \vee q)$ igaz és $q \wedge \neg r$ igaz, vagy mindkettő hamis.

1. eset (két igaz) : $p \vee q$: hamis (tagadás feloldása) és q : igaz, $\neg r$: igaz (a konjunkció miatt). Tehát : p : h , q : h és q : i , r : h ; ami ellentmondás (q miatt).

2. eset (két hamis) : $p \vee q$: igaz (3 eset) és q , $\neg r$ között van hamis (3 esetben). Tehát:
p : i , q : i ; p : i , q : h ; p : h , q : i és q : h , r : h ; q : i , r : i ; q : h , r : i.

Ebből:
p : i , q : i , r : i
p : i , q : h , r : h
p : i , q : h , r : i
p : h , q : i , r : i

Az 8 esetből tehát 4-szer lesz igaz a kifejezés értéke.

5. Írjuk fel az alábbi összetett kifejezések értéktáblázatát:

a) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg p \vee r$ **b)** $p \wedge \neg(\neg p \vee q)$

c) $(\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c) \vee (\neg c \wedge a)$ **d)** $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

M: A feladat az, hogy az ítéletek minden lehetséges értékére ki kell értékelni a kifejezést.

a) A kifejezés 3 változós, így összesen 8 esetet különböztetünk meg:

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg p \vee r$	$p \wedge q \Leftrightarrow \neg p \vee r$
i	i	i	i	h	i	i
i	i	h	i	h	h	h
i	h	i	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i	h
i	h	h	h	h	h	i
h	i	h	h	i	i	h
h	h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i	h

Tehát két esetben kapunk igazat, hat esetben pedig hamisat.

b) A kifejezés 2 változós, így összesen 4 esetet különböztetünk meg:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$p \wedge \neg(\neg p \vee q)$
i	i	h	i	h	h
i	h	h	h	i	i
h	i	i	i	h	h
h	h	i	i	h	h

Tehát egy esetben igaz a kifejezés értéke.

c) A kifejezés 3 változós, így összesen 8 esetet különböztetünk meg:

a	b	c	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$\neg b$	$\neg b \wedge c$	$\neg c$	$\neg c \wedge a$	$(\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c) \vee (\neg c \wedge a)$
i	i	i	h	h	h	h	h	h	h
h	i	i	i	i	h	h	h	h	i
i	h	i	h	h	i	i	h	h	i
i	i	h	h	h	h	h	i	i	i
i	h	h	h	h	i	h	i	i	i
h	i	h	i	i	h	h	i	h	i
h	h	i	i	h	i	i	h	h	i
h	h	h	i	h	i	h	i	h	h

A kifejezés 2-szer, a csupa egyforma értékek esetében hamis.

d) A kifejezés 2 változós, így összesen 4 esetet különböztetünk meg:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
i	i	i	h	h	h	h	i
i	h	i	h	h	i	h	i
h	i	i	h	i	h	h	i
h	h	h	i	i	i	i	i

A kifejezés mindig igaz. (Tudtuk, mert ez a **(12)** De Morgan-szabály.)

6. Igaz-e a $\neg l \wedge \neg(k \wedge l) = \neg(k \vee \neg l) \wedge k$ azonosság?

M: Itt kérdés az, hogy tetszőleges k ill. l állításra fennáll-e, hogy bármilyen igazságértékek esetén a két oldal értéke ugyanaz lesz?

A bal oldali kifejezés átalakítható a **(11)** De Morgan-szabály alkalmazásával: $\neg(l \vee (k \wedge l))$ amiből a disztributív szabály szerint: $\neg((l \vee k) \wedge (l \vee l))$. De $l \vee l$ egyenlő l-lel (az l bármilyen értékű is legyen, az $l \vee l$ értéke ugyanaz), ezért a bal oldal: $\neg((l \vee k) \wedge l)$.

A jobb oldali zárójel felodása után : $(\neg k \wedge \neg\neg l) \wedge k$; de $\neg\neg l$ egyenlő l-lel (a tagadás tagadása), így: $(\neg k \wedge l) \wedge k$. A zárójel felesleges asszociatív művelet esetén, tehát: $\neg k \wedge l \wedge k$.

Tudnunk kell, hogy a $\neg k \wedge k$ sohasem lehet igaz, azaz bármilyen legyen is k értéke, a $\neg k \wedge k$ értéke mindig hamis lesz. Ez azt jelenti, hogy a jobb oldal k,l minden értéke mellett hamis.

De a bal oldalra ez nem áll fenn, ugyanis a $\neg((l \vee k) \wedge l)$ csak akkor lesz hamis, ha a tagadott kifejezés, $(l \vee k) \wedge l$ igaz. Egy konjunkció csak a két alkotó igaz volta esetén lesz igaz. Ehhez l-nek igaznak, és $l \vee k$-nak is igaznak kell lennie. Ha már az l igaz, akkor az $l \vee k$ már igaz akármilyen is legyen a k értéke. Ez azt jelenti, hogy a bal oldal két esetben is igaz, és csak két esetben lesz hamis az összes négy eset közül (k : i és l : i ; k : h és l : i).

A jobb oldal pedig abban a két esetben is hamis, amikor a bal oldal igaz (k : i és l : h; k : h és l : h). Tehát az azonosság nem áll fenn.

Másik megoldás: egyetlen értéktáblázatban kiszámítva a két oldal értékét megvizsgáljuk, hogy minden esetben egyezőt kapunk-e.

k	l	¬l	k∧l	¬(k∧l)	bal oldal	k∨¬l	¬(k∨¬l)	jobb oldal	= ?
i	i	h	i	h	h	i	h	h	igen
i	h	i	h	i	i	i	h	h	nem
h	i	h	h	i	h	h	i	h	igen
h	h	i	h	i	i	i	h	h	nem

A táblázat nem minden sorában egyezett meg a jobb és a bal oldali kifejezés.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

7. Készítsük el az alábbi logikai kifejezések értéktáblázatát:

a) $(\neg p \vee q) \wedge q$ **b)** $p \wedge \neg q \vee p$.

8. Mi lesz a $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vee \neg r \Rightarrow \neg r \wedge \neg q \vee p$ logikai kifejezés értéke, ha p: hamis, q: igaz, r: igaz?

9. A p és q mely értékei mellett lesz igaz a $\neg p \wedge (q \vee p)$ logikai kifejezés?

10. A p,q,r minden értéke mellett igaz-e a $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ összefüggés?

11. Mely esetekben lesz hamis a $\neg k \wedge l \Rightarrow \neg m$ kifejezés?

ÚTMUTATÁSOK

7.a) Készítsük el a következő részállítások oszlopait : $\neg p$, $\neg p \vee q$, majd a kívánt kifejezését.

b) Készítsük el a következő részállítások oszlopait : $\neg q$, $p \wedge \neg q$, majd a kívánt kifejezését. A megoldás:

p	q	a.)	b.)
i	i	i	i
i	h	h	i
h	i	i	h
h	h	h	h

8. Helyettesítsünk be az ítéletek helyébe, majd a műveleti sorrend szerint értékeljük ki a kifejezést:

$(p\vee q)\wedge(p\vee r)\vee\neg r\Rightarrow(\neg r\wedge\neg q\vee p)$

$(h\vee i)\wedge(h\vee i)\vee\neg i\Rightarrow(\neg i\wedge\neg i\vee h)$

$i\ \wedge\ i\ \vee h\Rightarrow(h\wedge h\vee h)$

$i\ \vee\ h\Rightarrow h\vee h$

$i\ \Rightarrow\ h$

h

9. Az összetett ítélet (konjunkció) egy esetben igaz, ha $\neg p$ igaz és $q\vee p$ igaz. Ez azt jelenti, hogy p -nek hamisnak, ugyanakkor q és p közül legalább az egyiknek igaznak kell lenni. Tehát: p : h és q : i.

10. Mivel az összefüggés maga a disztributív szabály, az egyenlőség igaz.

Megjegyzés : Az értéktáblázat kiszámításával is arra jutnánk, hogy mind a négy esetben egyenlő a bal és a jobb oldal értéke.

11. Az implikáció egy esetben hamis, ha az előtag igaz és az utótag hamis. Az előtag mint konjunkció igaz, ha mindkét tagja igaz. Azaz: $\neg k$: igaz, l : igaz, $\neg m$: hamis. Végezzük el még a tagadásokat : k : hamis, l : igaz, m : igaz.

FELADATOK

12. Az alábbi ítéleteket írjuk fel egyszerű ítéletek és logikai műveletek segítségével:

a) Nem igaz, hogy ez a négyszög téglalap, vagy átlói egyenlőek.
b) Ha ez a négyszög négyzet, akkor szögei egyenlők.
c) Egy szám akkor és csak akkor osztható hattal, ha osztható 2-vel és 3-mal.
d) Ha egy szám páros és osztható 9-cel, akkor osztható 3-mal és 6-tal is.

13. Készítsük el az alábbi logikai kifejezések értéktáblázatát:

a) $\neg a\vee b$ **b)** $\neg a\wedge b$ **c)** $a\wedge b\vee b$
d) $(a\vee b)\wedge b$ **e)** $a\wedge\neg(a\vee b)$ **f)** $\neg a\vee(a\vee b)$.

14. Mi lesz az alábbi logikai kifejezés értéke az ítéletek megadott értéke mellett?

$(p\vee q)\wedge(p\vee r)\Rightarrow\neg r$ p : hamis, q : igaz, r : igaz.

15. Határozzuk meg a következő logikai kifejezések értékét!

a) $c\Rightarrow(a\wedge\neg b)\vee c$ a : igaz, b : hamis, c : igaz
b) $\neg(a\vee b)\wedge(a\wedge\neg c)$ a : igaz, b : igaz, c : hamis

16. Legyen a p állítás : *n* osztható 4-gyel
q állítás : *n* prím
r állítás : *n* páros.

Mi lesz a következő összetett állítások logikai értéke?

a) $p\Rightarrow\neg q\wedge r$ **b)** $\neg q\wedge r\Rightarrow p$ **c)** $q\wedge r\Rightarrow\neg p$

17. p és q mely értékei mellett lesz igaz a $p\wedge\neg(\neg p\vee q)$ logikai kifejezés?

18. p , q , r minden értéke mellett igazak-e az alábbi összefüggések?

a) $(p\wedge q)\wedge r = (p\wedge r)\wedge(q\wedge r)$

b) $(p\vee q)\wedge(q\vee r) = q\vee(p\wedge r)$

c) $p\vee(q\vee r) = (p\vee q)\vee r$

19. Igazak-e a következő azonosságok, ha a , b , p és q logikai változók?

a) $\neg(a\wedge b) = \neg a\wedge\neg b$ **b)** $\neg(a\vee\neg b) = \neg a\wedge b$

c) $\neg a\vee\neg b = \neg(a\vee b)$ **d)** $(p\wedge q) = \neg p\vee\neg q$

e) $\neg(p\vee q) = \neg p\wedge q$

20. Mely esetekben lesz igaz a $\neg(k\vee m)\Leftrightarrow l\wedge\neg m$ kifejezés?

21. Egy 4-változós logikai kifejezést hány különböző esetre kell megvizsgálni ?

MEGOLDÁSOK

12. a) p : ez a négyszög téglalap
q : ennek a négyszögnek az átlói egyenlőek
$\neg p\vee q$ $p\Rightarrow q$

b) p : ez a négyszög négyzet
q : ennek a négyszögnek a szögei egyenlőek
$p\Rightarrow q$

c) p : a szám osztható hattal
q : a szám osztható hárommal
r : a szám osztható kettővel
$p\Leftrightarrow q\wedge r$

d) p : a szám páros
q : a szám osztható kilenccel
r : a szám osztható hárommal
s : a szám osztható hattal
$p\wedge q\Rightarrow r\wedge s$

13.

a	b	a)	b)	c)	d)	e)	f)
i	i	i	h	i	i	h	i
i	h	h	h	h	h	h	i
h	i	i	i	i	i	h	i
h	h	i	h	h	h	h	i

14. hamis **15.a)** igaz **b)** hamis

16. a) igaz **b)** hamis **c)** igaz **17.** p : igaz q : hamis

18. a) igen **b)** igen **c)** igen

19. a) nem **b)** igen **c)** nem **d)** nem **e)** nem

20.

k	l	m
i	i	i
i	h	i
h	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

21. $2^4 = 16$

3. KOMBINATORIKA

A kombinatorikai problémák általában valamely n elemű halmaz elemeinek egy bizonyos szempontból való elrendezése, csoportosítása kapcsán merülnek fel.

1. Permutációk

n elem meghatározott sorrendben való elhelyezését az n elem egy permutációjának nevezzük.
Ha az elemek mind különbözők, akkor *az ismétlés nélküli permutációk száma*:

(1) $$\boxed{P_n = n! \quad \text{ahol} \quad n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Definíció szerint : $0! = 1$

Ha az n elem közül $k\ (\leq n)$ megegyező van, de a többi elem ezektől is és egymástól is különbözik, akkor *az ismétléses permutációk száma* :

(2) $$\boxed{P_{n,k} = \frac{P_n}{k!} = \frac{n!}{k!}}$$

Ha az n elem r különböző csoportra bomlik úgy, hogy az egyes csoportba tartozó elemek egyenlőek (egymástól nem megkülönböztethetők), de a különböző csoportbeliek különböznek, és az első csoportban k_1, a másodikban k_2, ... , az r. csoportban k_r elem van ($k_1+k_2+\ldots+k_r = n$) , akkor az n elem összes ismétléses permutációjának száma:

(3) $$\boxed{P_{n;k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}}$$

2. Variációk

Ha n különböző elem közül $k\ (\leq n)$ elemet kell úgy kiválasztani, hogy minden elemet legfeljebb egyszer választunk ki és a sorrendre is tekintettel vagyunk, akkor *az n elem k-adosztályú variációit* kapjuk. Ezek száma:

(4) $$\boxed{V_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Megjegyzés : ha $n = k$, akkor $V_{n,k} = P_n$.
Ha egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor *az n elem k-adosztályú ismétléses variációit* képeztük. Ezek száma:

(5) $\boxed{V^{(i)}_{n,k} = n^k}$

3. Kombinációk

Ha n különböző elem közül k ($\leq n$) különböző darabot választunk ki oly módon, hogy a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor *az n elem egy k-adosztályú kombinációját* kaptuk. Ezek száma:

(6) $$\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Definíció szerint : $\binom{n}{0} = 1$.

Ha a kiválasztáskor visszatevéssel járunk el, azaz egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor az *n elem k-adosztályú ismétléses kombinációit* képeztük. Ezek száma:

(7) $$\boxed{C^{(i)}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

Az $\binom{n}{k}$ számok az ún. *binomiális együtthatók*, ui. ezek a binomiális tételben szereplő együtthatók:

(8) $$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Pascal-háromszög : a binomiális együtthatókból alkotott alábbi elrendezésű végtelen háromszög:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

Kiszámított értékekkel felírva:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & . & . & . & . & . &
\end{array}
$$

A háromszögből leolvashatók, de definíció alapján is bizonyíthatók az alábbi tulajdonságok:

(10) Szimmetria : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

(11) Összegtulajdonság : $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

(12) A binomiális együtthatók összege : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$.

PÉLDÁK

1. Hányféle módon ülhet le 6 személy egy padra egymás mellé és hányféleképpen helyezkedhet el egy kerek asztal körül?

M: Egy padra egymás mellé a 6 személy 6! lehetőség szerint tud leülni, ugyanis 6 különböző elem ismétlés nélküli permutációjáról van szó. Egy kerek asztal köré leülve nem számít új elrendezésnek az, amikor a tagok ciklikusan permutálódnak, azaz amikor mindenki egy vagy több hellyel például balra ül. Tehát az az elrendezés nem új egy kerek asztal körül, amikor a változáskor az összes szomszéd ugyanaz marad. A ciklikus permutációk száma bármilyen elrendezésben 6, nevezetesen 123456, 234561, 345612, 456123, 561234, 612345 (a tagokat számokkal jelöltük), ezért az összes permutációk számának hatodrésze a megoldás: 6!/6=5!=120.

2. Van 5 különböző kockánk. Hányféleképpen tudunk kiválasztani belőle 3-at, ha
- a sorrendre is tekintettel vagyunk,
- a sorrendre nem vagyunk tekintettel?

M: Ha az 5 különböző kockából 3-at úgy választunk ki, hogy a sorrend is számít, azaz más-más elrendezést jelent az 1-es, 2-es, 3-as kocka kiválasztásakor a hat különböző sorrend (123,132,213,231,312,321), akkor lényegében olyan 5 elem permutációiról van szó, ahol a 2 nem kiválasztott elem egyforma. Az ilyen ismétléses

permutációk száma : 5!/2!. Ekkor 5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli variációjáról van szó, ezek száma: 5·4·3=60. (Az 1.helyre 5 elem közül, a 2. helyre már csak 4 elem közül, a 3. helyre pedig 3 elem közül választhatunk.)
Amennyiben a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor az 5 elem 2 egyforma csoportra oszlik, a 3 kiválasztott, meg a 2 nem kiválasztott elem csoportjára. Az összes ismétléses permutációja ilyen 5 elemnek : $\frac{5!}{3!\cdot 2!}$. Ezt a számot jelöltük $\binom{5}{3}$-mal, (5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációja, 5 elem közül visszatevés nélkül húzunk ki 3-at). A felírt binomiális együttható:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4}{2}=5\cdot 2=10.$$

3. Hányféle sorrendbe helyezhető 3 piros és 4 fehér golyó? Hányféleképpen helyezhetők körbe?

M: ismétléses permutációról van szó ($k_1=3$, $k_2=4$):

$$\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=7\cdot 5=35\text{-féleképpen helyezhetők sorba.}$$

Mivel a 3 piros a 4 fehér golyót 3 kupacra osztja a körbehelyezésnél, a következő fehér kupacok alakíthatók ki a ciklikus permutációkat leszámítva:
0,0,4 ; 0,1,3 ; 0,3,1 ; 0,2,2 ; 1,1,2 . Vagyis 5-féle elrendezés lehetséges.

4. Hány értelmes vagy értelmetlen szó képezhető a MATEMATIKA szó betűiből?

M: A szó betűi : M, A, T, E, I, K , azaz 10 elem, amiből 2, 3, 2 egyforma. Ezek összesen $\frac{10!}{2!3!2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 2}=151200$ -féleképpen rendezhetők sorba.

5. Hányféleképpen lehet 4 játékos között kiosztani az 52 lapos francia kártyát?

M: Minden játékos kap 13 kártyát, amelyeknek osztásbeli sorrendje nem számít. Tehát a 4 csoport 13 kártya csak abban különbözik, hogy ki kapta. Ebben az esetben az 52 elemnek ismétléses permutációját kell kiszámítani:

$$\frac{52!}{13!13!13!13!}=\frac{52!}{(13!)^4}\approx 5.36\cdot 10^{28}.$$

6. Hány háromjegyű szám alkotható az 1,2,3,4,5 számjegyekből, ha ugyanaz a számjegy minden számban csak egyszer fordulhat elő?

M: 5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli variációinak száma:
5·4·3=60 , hiszen az 1.helyre még 5 elem közül, a 2.helyre eggyel kevesebb elemből, a 3.helyre pedig már 2-vel kevesebb elemből válogathatunk.

7. Hány olyan 5-jegyű szám van, amelyben minden számjegy 0-tól különböző páros szám?

M: A szóba jöhető elemek : 2, 4, 6, 8 . Ötjegyű szám képzésekor a 4 elemből természetesen többször is választunk, így mind az 5 helyre módunk van 4 elemből választani : $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 2^{10} = 1024$. Tehát 4 elem 5-ödosztályú ismétléses variációit képeztük.

8. Hány különböző 5-tel osztható 8-jegyű számot lehet készíteni a 0,1,2,2,3,3, 4,5 számjegyekből?

M: Ha 5-tel osztható a szám, akkor az utolsó jegye csak 0 , vagy 5 lehet.
Ha 0-ra végződik a szám, akkor 7 elem ismétléses permutációit kell venni, ezek száma (két-két elem egyforma): $\frac{7!}{2!2!} = 1260$. Ha a szám 5-re végződik, akkor még vegyük figyelembe, hogy az első számjegy nem lehet 0, hiszen akkor a szám már csak 7-jegyű lenne, tehát: $\frac{6 \cdot 6!}{2!2!} = 1080$ (a 7 elem ismétléses permutációinak számából (2, 2 egyforma) kivontuk 6 elem ismétléses permutációinak számát).
A két eset együtt: $1260 + 1080 = 2340$.

9. Egy 30 fős csoportból hányféleképpen állíthatunk össze egy 4-tagú vezetőséget?

M: 4 helyre választunk 30, majd 29, 28, végül 27 különböző ember közül. A lehetőségek száma tehát 30 elem 4-edosztályú ismétlés nélküli variációinak száma: $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657720$.

10. Hány totószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 13 találatos?

M: A totószelvény egy oszlopának 13 helyére (sorrend fontos) mindig az 1, 2, x (3 elem) közül választunk. Nyilvánvaló, hogy 3 elem 13-adosztályú ismétléses variációiról van szó. Ezek száma : $3^{13} = 1594323$.

11. Budapesten mennyi az összes lehetséges telefonállomások száma?

M: A budapesti telefonszámok 7-jegyűek. A 10 számjegy (elem) összes ismétléses 7-edosztályú variációja : $10^7 = 10000000$.
Amennyiben az a kikötés, hogy az első számjegy csak 1 vagy 2 lehet, akkor a variációk száma : $2 \cdot 10^6 = 2000000$.

12. Hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 5-találatos ? Hány 4–, 3–, 2-találatos lesz ezek között?

M: A lottónál a kihúzott elemek sorrendje nem számít. A 90 különböző elem 5-ödosztályú ismétlés nélküli kombinációjáról van szó, ezek száma:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5!85!} = 43949268 .$$

Ezekből 4-találatos annyi lesz, ahányféleképpen sikerül 4-et az 5 kiválasztott szám közül, és ugyanakkor 1-et a 85 nem kiválasztott szám közül bejelölni:

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}=5\cdot 85=425\,.$$

Ugyanígy a 3-találatos szelvények száma (3 találat+2 nem):

$\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}=5\cdot 2\cdot 85\cdot 42=35700$. A 2-találatosak száma pedig :

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}=5\cdot 2\cdot 85\cdot 14\cdot 83=987700.$$

13. A reformlottónál 90 számból 85-t kell eltalálni. Így kisebb-e az esély egy telitalálatra?

M: Az összes eset $\binom{90}{85}=\binom{90}{90-85}=\binom{90}{5}$, tehát ugyanakkora az esély. (Azt a 85-öt kellene bejelölni, amit "nem kell" eltalálni.)

14. 7 diák 3 sportágban versenyez. Mindhárom sportágban az első helyezett ugyanolyan értékű díjat kap.Ugyanaz a versenyző több díjat is nyerhet. Hányféleképpen lehet elosztani a 3 díjat?

M: Aki már nyert, újra kiválasztható nyerésre. Ismétléses kombinációról van szó, ezek száma : $\binom{9}{3}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!6!}=3\cdot 4\cdot 7=84$.

15. Mekkora az n, ha az n elemből alkotott összes permutációk száma: 6 227 020 800.

M:	$n!=6\ 227\ 020\ 800$	osszunk 2-vel ($2=2!$)
	$n!\,/\,2!=3\ 113\ 510\ 400$	osszunk 3-mal
	$n!\,/\,3!=1\ 037\ 836\ 800$	
		osszunk mindig a következő természetes számmal, végül
	$n!\,/\,(n\text{-}1)!=n$	$n=13$.

16. Igaz-e, hogy $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

M: Igen, mert a bal oldalon éppen $(1-1)^n$ -nek a binomiális tétel szerinti kifejtése szerepel:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \underset{a\,binomiális\,tétel\,sz.}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k}=(1-1)^n=0.$$

17. Számítsuk ki az n értékét az alábbi összefüggésből:

$$\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}-\binom{6}{3}=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}$$

M: A bal oldalon **(11)**-et, a jobb oldalon pedig **(12)**-t felhasználva kapjuk, hogy: $\binom{n+1}{n-1}-\binom{6}{3}=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{4-k}$, amiből **(6)** alkalmazásával:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!(n+1-(n-1))!}-\frac{6!}{3!3!}=(1+1)^4, \qquad \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!2!}=\frac{6!}{3!3!}+2^4,$$

egyszerűsítés és 2-vel való szorzás után: $(n+1)n=2(20+2^4)$; azaz: $(n+1)n=72$; $9\cdot 8=72$; $n=8$.

18. Mi lesz a $(2x\text{-}3)^7$ polinomban az x^3 együtthatója?

M: A binomiális tétel szerint az összeg negyedik tagja ($k=3$) adja $2x$ harmadik hatványát. Itt a negyedik tag: $\binom{7}{3}(2x)^3(-3)^{7-4}$. Tehát x^3 együtthatója:

$$\binom{7}{3}2^3(-3)^4=35\cdot 8\cdot 81=22680.$$

19. Az $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ kifejezésben

a) végezzük el a hatványozást!

b) adjuk meg az x-től független tag értékét!

M:a)

$$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{2k}\left(\frac{-2}{x}\right)^{6-k}=\binom{6}{0}x^0\left(\frac{-2}{x}\right)^6+\binom{6}{1}x^2\left(\frac{-2}{x}\right)^5+$$

$$+\binom{6}{2}x^4\left(\frac{-2}{x}\right)^4+\binom{6}{3}x^6\left(\frac{-2}{x}\right)^3+\binom{6}{4}x^8\left(\frac{-2}{x}\right)^2+\binom{6}{5}x^{10}\left(\frac{-2}{x}\right)^1+\binom{6}{6}x^{12}\left(\frac{-2}{x}\right)^0$$

$$=\left(\frac{-2}{x}\right)^6+6x^2\left(\frac{-2}{x}\right)^5+15x^4\left(\frac{-2}{x}\right)^4+20x^6\left(\frac{-2}{x}\right)^3+15x^8\left(\frac{-2}{x}\right)^2+$$

$$+6x^{10}\left(\frac{-2}{x}\right)+x^{12}=\frac{64}{x^6}-\frac{192}{x^3}+240-160x^3+60x^6-12x^9+x^{12}$$

b) a 3. összeadandóban ($k=2$) kiestek az x-ek, tehát: $15\cdot 2^4=240$ a konstans értéke.

20. Számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}$$

M: Ismerjük fel a binomiális tétel tagjait, együtthatóit a kifejezésben, és vegyük figyelembe, hogy az összegzés nem 0-tól 6-ig tart.

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{5}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}1^{6-k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}1^{6-k}-\binom{6}{0}\frac{1}{2^0}1^6--\binom{6}{6}\frac{1}{2^6}1^{6-6}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1\right)^6-1-\frac{1}{2^6}=\left(\frac{3}{2}\right)^6-\left(\frac{2}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{3^6-2^6-1}{2^6}\quad\text{vagy}\quad\frac{3^6-1}{2^6}-1$$

Megjegyzés: természetesen tagonként is összegezhettük volna az 5 összeadandót.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

21. A 0,5,6,9 számjegyekből összesen hány négyjegyű öttel osztható szám készíthető?

22. Hány olyan négyjegyű számot lehet készíteni, amelyben pontosan 3 db ötös van?

23. A FELADAT szó betűiből összesen hány különböző szót lehet összeállítani, ha az értelemetlen szavakat is számoljuk?

24. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben minden számjegy páratlan szám? És hány ilyen ötjegyű van?

25. Egy 28-as létszámú osztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha

a) a jutalmak egyenlők és egy tanuló legfeljebb 1

b) a jutalmak egyenlők és egy tanuló több

c) a jutalmak különbözők és egy tanuló több

d) a jutalmak különbözők és egy tanuló legfeljebb 1 jutalmat kaphat?

26. Legkevesebb hány egyhasábos totószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen 12 találatos is köztük ? Hány 11- és hány 10-találatos lesz ezek között?

27. Igazoljuk, hogy $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

28. Határozzuk meg az alábbi sor összegét :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{2^{n+1}}$$

29. Állapítsuk meg a binomiális tétel segítségével $\left(x-\frac{3}{x}\right)^5$ - ben a konstanst!

30. Fejtsük ki a következő kifejezést: $(x^3 - \cos x)^4$!

31. $\left(2x+\dfrac{1}{3x^2}\right)^n$-t kifejtve, a binomiális együtthatók összege: 64. Mennyi a kifejtésben szereplő x-től független tag?

ÚTMUTATÁSOK

21. A négyjegyű szám első jegye nem lehet 0; az öttel osztható szám utolsó jegye 0 vagy 5; a számjegyek ismétlődhetnek. Ezért: $3\cdot4\cdot4\cdot2 = 96$

22. A négyjegyű számjegyekben az alábbiak szerint helyezkedhetnek el az 5-ösök: _555 (az első helyen nem lehet 0, sem 5); 5_55 ; 55_5 ; 555_ (a többi helyen csak az 5 nem állhat). Tehát : $8 + 3\cdot9 = 35$.

23. A 7 betűből 2 egyforma; ismétléses permutációról van szó.
Tehát: $\dfrac{7!}{2!}=2520$.

24. Minden pozicióra 5 számjegyből (1, 3, 5, 7, 9) választhatunk. Négyjegyű ilyen szám 5^4, ötjegyű: 5^5 van.

25. **a)** kombináció **b)** ismétléses kombináció
c) ismétléses variáció **d)** variáció ezek száma:

a) $\binom{28}{4}$ **b)** $\binom{31}{4}$ **c)** 28^4 **d)** $\dfrac{28!}{24!}$

26. 12-es: ismétléses variáció; 11-es : 12-ből 1 rossz (kombináció), de az kétféle lehet; 10-es : 12-ből 2 rossz (kombináció), de az 2x2-féleképpen lehet, tehát:

12-es: 3^{12} 11-es: $2\cdot\binom{12}{1}$ 10-es: $2\cdot2\cdot\binom{12}{2}$

27. $k\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$ azaz

$k\dfrac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $k! = k(k-1)!$ miatt

A bal oldalon k-val egyszerűsítünk, és vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon a számláló: $n!$

Megjegyzés : $\binom{n}{k}=\dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ felhasználásával is eljárhatunk.

28. Vegyük észre, hogy a binomiális tagok szorzója végig ugyanaz, tehát k-tól független. Ezért kiemelhető : $\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\dfrac{1}{2^{n+1}}(1+1)^{n+1}=1$ a binomiális tétel szerint.

29. Az 5.hatványra emelésnél semmilyen k-ra nem fog kiesni az x. A tagok alakja: $\binom{5}{k}x^k\left(\frac{-3}{x}\right)^{5-k}$ k=0,1,2,3,4,5 és $x^k\frac{1}{x^{5-k}}=x^{2k-5}\neq$konstans. Tehát mind a hat tag függ x-től.

30. A binomiális tétel szerint:

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(x^3\right)^k\left(-\cos x\right)^{4-k}=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{3k}(-1)^{4-k}(\cos x)^{4-k}, \text{ amiből:}$$

$$\cos^4 x-4x^3\cos^3 x+6x^6\cos^2 x-4x^9\cos x+x^{12}.$$

31. $2^n=64$ szerint az $n=6$. A 6.hatványra emelésnél az 1.tag 4.hatványának és a 2.tag 2.hatványának szorzatából kiesik az x, tehát $k=4$ esetén kapunk konstans tagot az összegben, mégpedig a következőt:

$$\binom{6}{4}(2x)^4\left(\frac{1}{3x^2}\right)^2=15\cdot16x^4\frac{1}{9x^{2\cdot2}}=\frac{80}{3}$$

FELADATOK

32. A 0, 2, 5 számjegyekből összesen hány háromjegyű páros szám alkotható?

33. Hány olyan négyjegyű számot lehet készíteni, amelyben

a) pontosan 1 db ötös van ? **b)** nincs ötös ?

34. Az alábbi szavak betűiből összesen hány különböző szót lehet összeállítani, ha az értelemetlen szavakat is számoljuk?

a) DOLGOZAT **b)** SZIGORLAT

35. Hány nyolcjegyű szám képezhető az 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4 számjegyekből?

36. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben csak az 1, 2, 3 számjegyek fordulnak elő?

37. Nyolcan felszállnak a buszra, ahol csak 5 ülőhely van. Hányféleképpen ülhetnek le, ha minden ülőhelyet elfoglalnak és egy helyre csak egy személy ül?

38. Van 5 különböző könyvünk.

a) Hányféleképpen tudjuk sorba rakni?

b) Hányféleképpen tudunk belőle kettőt kiválasztani, ha

- a sorrendre nem vagyunk tekintettel
- a sorrendre is tekintettel vagyunk?

39. Ha a lottószelvényen csak 10 szám volna, hány szelvényt kellene kitölteni egy biztos ötösért?

40. Hány ötjegyű szám alkotható
- csupa egyenlő számjegyből?
- csupa különböző számjegyből?

41. A 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 számjegyekből hány 4-gyel osztható 8-jegyű szám alkotható?

42. Igazoljuk, hogy

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ **b)** $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

43. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét:

a) $3\binom{n}{1}+3^2\binom{n}{2}+\ldots+3^n\binom{n}{n}$ **b)** $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k$

44. Állapítsuk meg a binomiális tétel segítségével

a) $(x+2)^6$ - ban x^4 **b)** $(2x+\sin x)^3$ -ban $\sin^3 x$ együtthatóját

45. Fejtsük ki a következő kifejezéseket!

a) $(2x-3)^5$ **b)** $\left(1-\frac{2}{x}\right)^5$

MEGOLDÁSOK

32. $2 \cdot 3 \cdot 2=12$ **33.a)** $9^3+3 \cdot 8 \cdot 9^2=2673$ **b)** $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9=5832$

34.a) $\frac{8!}{2!}=20160$ **b)** $9!=362880$ **35.** $\frac{8!}{1!3!2!2!}=1680$ **36.** $3^4=81$

37. $\binom{8}{5}=56$, ami azt jelenti, hogy kiválasztásra került 5 ülő ember meg 3 álló.

Amennyiben az 5 ülő ember sorrendje is fontos : $8!\,/\,3!=6720$

38.a) $5!=120$ **b)** 10 ill. 20 **39.** 252 **40.** 9 ill. 27216

41. 340 **42.a)** a binomiális tétel szerint a bal oldal : $(1+1)^n$

b) hozzuk közös nevezőre **43.a)** 4^n-1 **b)** 0

44.a) 60 **b)** 1

45.a) $32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243$

b) $1-\frac{10}{x}+\frac{40}{x^2}-\frac{80}{x^3}+\frac{80}{x^4}-\frac{32}{x^5}$.

4. KOMPLEX SZÁMOK

1. A komplex szám definíciója, műveletek, geometriai ábrázolás

1.1 *A komplex szám fogalma*

(1) Az $a + bi$ alakú számokat, ahol a és b valós számok, i pedig olyan szám, amelyre $i^2 = -1$ (az ún. képzetes egység), *komplex számoknak* hívjuk. (Ez az alak a komplex számok *algebrai* alakja). A komplex számokat gyakran z -vel jelöljük ($z = a + bi$).

1.2. *Műveletek*

Legyen $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ két komplex szám.

(2) Két komplex szám *egyenlő*, azaz $z_1 = z_2$, *ha* $a_1 = a_2$ *és* $b_1 = b_2$.

(3) *Összeg*

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$$

(4) *Különbség*

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$$

(5) *Szorzat*

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i}$$

Megjegyzés : A "formulát" úgy kaptuk, hogy az $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ szorzást mint a valós számok körében elvégezzük, és az eredményben i^2 helyébe -1 -et írunk (mivel $i^2 = -1$). (Nem kell a formulát megjegyezni, konkrét feladatok megoldásánál is így járunk el.)

(6) *Hányados*

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i}$$

Megjegyzés :Ezt a formulát sem kell megjegyezni, ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ hányadosban mind a számlálót, mind a nevezőt megszorozzuk $(a_2 - b_2 i)$ -vel, azaz kiszámítjuk az $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i}$ kifejezést.

(7) *Konjugált*

A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltján az $a - bi$ komplex számot értjük, és ezt $\bar{z}$ -vel, (ill. $\overline{a+bi}$ -vel) jelöljük.

1.3 *A komplex szám abszolút értéke*

(8) A $z = a + bi$ komplex szám *abszolút értékén* a $\sqrt{a^2+b^2}$ valós számot értjük és ezt $|z|$-vel, ill. $|a + bi|$-vel jelöljük. (Ezt a számot a komplex szám nagyságának, hosszának is hívjuk).

Megjegyzés :Igaz, hogy

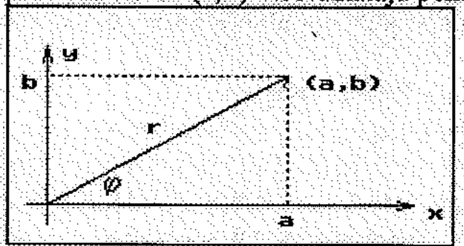
1) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (ha $|z_2| \neq 0$)

3) $|z^n| = |z|^n$

1.4 *A komplex szám geometriai ábrázolása*

(9) A $z = a + bi$ komplex számot az (a,b) koordinátájú ponttal ábrázolhatjuk.



Az x tengelyt éppen ezért *valós tengely*nek, az y tengelyt *képzetes tengely*nek nevezzük. (Együtt a komplex számok "síkját", a komplex számsíkot határozzák meg.) Az (a,b) pont a síkon egy helyvektort jelent. Ennek az r hossza (az (a,b) pontnak az origótól mért távolsága) $r = \sqrt{a^2+b^2}$, azaz $r = |z|$. A komplex számot ábrázoló vektornak az x tengellyel bezárt φ szögét a tg $\varphi = b / a$ egyenlőségből kapjuk meg, azaz $\varphi =$ arctg (b/a).

PÉLDÁK

1. Komplex szám-e a: 2?

M:Igen : $z = 2 + 0i$ alakú komplex szám (azaz $a = 2$, $b = 0$).

2. Komplex szám-e: $5i$?

M:Igen : $z = 0 + 5i$ alakú komplex szám (azaz $a = 0$, $b = 5$).

3. Legyen $z_1 = 3 + 5i$; $z_2 = 4 - 6i$

a) $z_1 + z_2 = ?$ **b)** $z_1 - z_2 = ?$

M: **a)** $z_1 + z_2 = (3+5i)+(4-6i) = 7-i$

b) $z_1 - z_2 = (3+5i)-(4-6i) = -1+11i$.

4. Mutassuk meg, hogy : $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$

M: Mivel $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$.

Ezért $i^{4k} = (i^4)^k = 1$, $i^{4k+1} = i^{4k}\, i = i$, $i^{4k+2} = i^{4k}\, i^2 = -1$, $i^{4k+3} = i^{4k}\, i^3 = -i$.

5. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) i^{16}, **b)** i^{25} , **c)** i^{15} , **d)** $(-i)^8$, **e)** $(-i)^7$

M: **a)** $i^{16} = i^{4\cdot 4} = 1$ **b)** $i^{25} = i^{4\cdot 6+1} = i$ **c)** $i^{15} = i^{4\cdot 3+3} = i^3 = -i$

d) $(-i)^8 = i^8 = i^{4\cdot 2} = 1$ **e)** $(-i)^7 = -i^7 = -i^{4+3} = -i^3 = -(-i) = i$.

6. Milyen x , y mellett teljesül : $(1+i)x + (1-i)y = 3-i$.

M: Szorozzunk be x ill. y-nal : $x + xi + y - iy = 3 - i$. Vonjuk össze a valós ill. a képzetes részt a bal oldalon: $(x+y) + (x-y)i = 3 - i$. Két komplex szám akkor egyenlő, ha mind a valós mind a képzetes rész megegyezik, tehát $x + y = 3$, $x - y = -1$. Ebből : $x = 1$, $y = 2$.

7. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(4+2i)+(1+5i)$ **b)** $(3+5i)-(6+3i)$

M: **a)** $(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i = 5+7i$ · **b)** $(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i= = -3+2i$.

8. Végezzük el az alábbi müveleteket!

a) $2i\cdot 3i$ **b)** $(2-3i)\cdot(2+3i)$ **c)** $(5-4i)(3+2i)$

M: **a)** $2i\cdot 3i = 6i^2 = -6$ **b)** $(2-3i)\cdot(2+3i) = 4-9i^2 = 4+9 = 13$

c) Az **(5)** szabály alapján: $(5-4i)(3+2i) = [5\cdot 3-(-4)\cdot 2]+i\cdot[5\cdot 2+3\cdot(-4)] = 23-2i$.

Végezzük el a szorzást a kéttagú összegek szorzásával is:

$(5-4i)(3+2i)=15+10i-12i+8=23-2i$.

9. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $2/3i$ **b)** $1/(1+i)$ **c)** $(1+i)/(1-i)$ **d)** $(2-3i)/(4+5i)$

M: **a)** A számlálót és a nevezőt i-vel szorozva kapjuk, hogy:

$$\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i\cdot i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$$

b) A nevező konjugáltjával szorozva a nevezőt és a számlálót kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

c) $$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

d) $$\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25} = \frac{-7-22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i.$$

10. Számítsuk ki $(1+i)^8$ értékét!

M: Felhasználva, hogy $(1+i)^2 = 2i$ (végezzük el a négyzetre emelést), $(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

11. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(3+i)+(-3-8i)$ **b)** $(5-4i)+(7+4i)$ **c)** $(-6+2i)+(-6-2i)$ **d)** $(0.2+0.1i)+(0.8-1.1i)$
e) $(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i)$ **f)** $(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i)$.

12. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$ **b)** $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ **c)** $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$ **d)** $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$
e) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$ **f)** $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.

13. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $-i\sqrt{5}\cdot 4i\sqrt{5}$ **b)** $(5-3i)\cdot 2i$ **c)** $(3+4i)(3-4i)$ **d)** $(5+3i)(2-5i)$
e) $(-2-i)(1+i)$ **f)** $4+2i+(-1+6i)(6-i)$ **g)** $(3-2i)(5+4i)-7i+1$
h) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$ **i)** $(0.2-0.3i)(0.5+0.4i)$.

14. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{1}{i}$ **b)** $\frac{1}{1-i}$ **c)** $\frac{1-i}{1+i}$ **d)** $\frac{3-2i}{1+3i}$ **e)** $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$ **f)** $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$
g) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$ **h)** $\frac{a+bi}{a-bi}$ **i)** $\frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai}$ **j)** $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$ **k)** $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$
l) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$.

15. Számítsuk ki a következő kifejezéseket!

a) $(1-i)^{12}$ **b)** $(1+i)^{17}$ **c)** $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$ **e)** $(1+i)^{-2}$
f) $(1-i)^{-3}$ **g)** $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$

16. Milyen x, y mellett teljesül : $(2-i)x+(1+i)y=5-i$?

17. Számítsuk ki az alábbi komplex számokat !

a) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$ **b)** $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ **c)** $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}$

18. Kielégíti-e az $x_0=1+i$ komplex szám az $x^3+x^2+x+1=0$ egyenletet?

ÚTMUTATÁSOK

11. Alkalmazzuk a **(3)**,**(4)** szabályokat.

12. Számítsuk ki először az i hatványokat és utána végezzük el a megfelelő műveleteket.

Pl. **e)**-ben: $\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i\cdot i^2}=\frac{1}{i(-1)}=-\frac{1}{i}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=-\frac{i}{i^2}=\frac{-i}{-1}=i$.

Használjuk fel a **4.**példa eredményeit.

13. Alkalmazzuk a szorzási, összeadási szabályokat (több tag szorzása több taggal stb.)

14. Alkalmazzuk az **(5)**,**(6)** szabályokat, illetve az ott szereplő megjegyzéseket: szorzásnál több tag szorzása több taggal, osztásnál a konjugálttal való bővítést.

a) Szorozzuk be a számlálót és a nevezőt is i-vel.

e) Először végezzük el a szorzást a számlálóban.

f) Először végezzük el a szorzást a nevezőben.

15. a) Használjuk fel, hogy $(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$ és $(1-i)^{12}=$ $=((1-i)^2)^6=(-2i)^6=2^6i^6$.

Az i^6 kiszámításánál használjuk fel a **4.**példa eredményeit. A többi példánál is hasonlóan járjunk el.

16. A szorzást x-szel és y-nal elvégezve, a valós, képzetes részeket összevonva: $(2x+y)+(y-x)i=5-i$. A valós ill. képzetes részek egyenlőségéből: $2x+y=5$; $y-x=-1$; ahonnan: $x=2$; $y=1$.

17. Használjuk fel a **4.**példa eredményeit.

18. Helyettesítsük be $(1+i)$-t, az $(1+i)^3+(1+i)^2+1+i+1$ kifejezéshez jutunk. Ha ez zérus, akkor kielégíti. (Elvégezve a hatványozásokat és az összeadásokat $5i$-hez jutunk, azonban $5i\neq 0$).

FELADATOK

19. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $2(-3+2i)+3(7-5i)$ **b)** $(2-3i)^2$ **c)** $(-1+i)^2$ **d)** $(3-2i)(1+4i)+(-6-i)$

e) $(4-5i)(-2+3i)+(1+2i)(-3+4i)$.

20. Végezzük el az alábbi összeadási műveleteket!

a) $(4-3i)+(-2+i)$ **b)** $(5+6i)+(7-6i)$ **c)** $(-0.7+0.3i)+(0.9-1.7i)$

d) $(-0.4-2.1i)+(0.6+3i)$ **e)** $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

21. Végezzük el az alábbi szorzásokat !

a) $(0.2-0.3i)(0.4+0.5i)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)$ **c)** $(2-3i)^2$ **d)** $(2+5i)(3+2i)$.

22. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $\frac{1}{1-i}$ **b)** $\frac{5}{1+2i}$ **c)** $\frac{2+i}{2-i}$ **d)** $\frac{3i}{1+i}$ **e)** $\frac{3-2i}{1+3i}$

23. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$ **b)** $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$ **c)** $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$ **d)** $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$

e) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$ **f)** $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$ **g)** $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$.

h) Oldjuk meg a $(2-5i)z = 2+5i$ egyenletet!

i) Mutassuk meg, hogy $\frac{1-i}{1+i}$ és $\frac{1+i}{1-i}$ konjugáltak!

j) Mutassuk meg, hogy $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$!

2. Komplex számok trigonometrikus alakja

A $z = a + bi$ komplex szám $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ alakban is felírható, azaz

(10) $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

ahol $\boxed{r=\sqrt{a^2+b^2}=|a+bi| \qquad \varphi = arctg\frac{b}{a} \qquad (tg\varphi=\frac{b}{a})}$

(Az 1.ábrán látjuk, hogy $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.)

Műveletek

Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

A két komplex szám *szorzata*:

(11) $\boxed{z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))}$

A két komplex szám *hányadosa*:

(12) $\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))}$

Komplex szám *hatványa*:

Ha $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, akkor

(13) $\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$

Komplex szám *gyöke*:

Ha $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, akkor

(14) $\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1}$

Egy komplex számnak tehát n db gyöke van.

PÉLDÁK

24. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban!

a) 2 **b)** $6i$ **c)** $-2+2\sqrt{3}i$ **d)** $2-2i$ **e)** $-\sqrt{3}-i$

M: a) Itt $a=2$, $b=0$, $r=2$. Mivel a z komplex szám vektora az x tengely pozitív felén van, ezért $\varphi=0$, tehát: $2=2(\cos 0+i\sin 0)$, vagy
$2=(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k)$, $k\in\mathbf{N}$

b) Itt $a=0$, $b=6$, $r=\sqrt{0^2+6^2}=6$. Mivel a $6i$ komplex szám vektora a pozitív y féltengelyen van, ezért $\varphi=\pi/2$, tehát: $6i=6(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)$, vagy
$6i=6(\cos(\pi/2+2\pi k)+i\sin(\pi/2+2\pi k))$, $k\in\mathbf{N}$.

c) Itt $a=-2$ $b=2\sqrt{3}$ $r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$. A komplex szám vektora a 2. síknegyedben fekszik; $tg\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$ $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$, tehát
$-2+2\sqrt{3}i=4(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3))$,
vagy $-2+2\sqrt{3}i=4(\cos(2\pi/3+2\pi k)+i\sin(2\pi/3+2\pi k))$ $k\in\mathbf{N}$.

d) Itt $a=2$ $b=-2$ $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$. A komplex számot ábrázoló vektor a 4. síknegyedben van; $tg\varphi=-1$ $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$, tehát
$2-2i=2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$, vagy
$2-2i=2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4+2\pi k)+i\sin(-\pi/4+2\pi k))$ $k\in\mathbf{N}$.

e) $a=-\sqrt{3}$ $b=-1$ $r=2$. $tg\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\varphi=-\dfrac{5}{6}\pi$ így
$-\sqrt{3}-i=2(\cos(-5\pi/6)+i\sin(-5\pi/6))$, vagy
$-\sqrt{3}-i=2(\cos(-5\pi/6+2\pi k)+i\sin(-5\pi/6+2\pi k))$ $k\in\mathbf{N}$.

25. Írjuk fel az alábbi , trigonometrikus alakban adott számokat algebrai alakban!

a) $z=2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$ **b)** $z=\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$

M: a) Mivel $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$, ezért beírva ezeket az értékeket
$z=2(1+0i)=2$

b) Itt is beírva a sin ill. cos függvények értékeit a $3\pi/4$ helyen, kapjuk, hogy
$z=\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=\sqrt{2}(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)=-1+i$.

26. Számítsuk ki a $2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))\cdot 3(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))$ szorzatot!

M: (11) formulát alkalmazva

$2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))\cdot 3(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))=2\cdot 3(\cos(\pi/6+\pi/12)+i\sin(\pi/6+\pi/12))=$
$=6(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))=6(\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i.$

27. Számítsuk ki a $\dfrac{10\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$ hányadost!

M:
$$\frac{10\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$
$$=5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=5(0+i)=5i.$$

28. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))^6$ **b)** $(3/2 - (\sqrt{3}/2)i)^{10}$

M: a) A **(13)** formula alapján

$(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))^6 = (\cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6)) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0i = -1$

b) Írjuk először fel a $(3/2 - (\sqrt{3}/2)i)$ komplex számot trigonometrikus alakban:

$a=3/2$, $b=-\sqrt{3}/2$, tehát $r=\sqrt{(3/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}=\sqrt{3}$. A komplex szám vektora a 4. negyedben fekszik, ezért $tg\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}/2}{3/2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

Így $(3/2 - (\sqrt{3}/2)i) = \sqrt{3}(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$, vagyis

$\{\sqrt{3}(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))\}^{10} = 3^5(\cos(-10\pi/6) + i\sin(-10\pi/6)) =$
$= 3^5 (\cos(5\pi/3) - i\sin(5\pi/3)) = 3^5 (\cos(5\pi/3 - 2\pi) - i\sin(5\pi/3 - 2\pi)) =$
$= 3^5(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 243(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 243(1/2 + i(\sqrt{3}/2)).$

29. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt{i}$ **b)** $\sqrt[3]{1}$

M: a) Írjuk fel $\sqrt{i}$ -t trigonometrikus alakban: $i=0 + 1i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$. A **(14)** formula alapján

$$z_k = \sqrt{i} = \sqrt{\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)} = \cos\frac{\pi/2+2\pi k}{2}+$$
$$+i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{2} = \cos(\pi/4+\pi k)+i\sin(\pi/4+\pi k) \quad k=0,1.$$

Ha $k=0$, $z_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2i$; $k=1$, $z_1 =$
$\cos(\pi/4 + \pi) + i\sin(\pi/4 + \pi) = -\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2-\sqrt{2}/2i.$

b) Írjuk fel az 1 komplex számot trigonometrikus alakban:

$1 = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0$. A **(14)** formula alapján

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3} =$$

$$= \cos(2\pi k/3) + i\sin(2\pi k/3) \qquad k = 0,1,2.$$

És így

$k=0$ esetén $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k=1$ esetén $z_1 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i$

$k=2$ esetén $z_1 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -1/2-(\sqrt{3}/2)i$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

30. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban!

a) $3i$ **b)** $-1+i$ **c)** $1-\sqrt{3}i$ **d)** $\sqrt{3}-i$ **e)** $\sqrt{3}/2-(1/2)i$.

31. Írjuk fel az alábbi komplex számokat algebrai alakban!

a) $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$ **b)** $4(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$ **c)** $\cos\pi + i\sin\pi$

d) $2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ **e)** $3(\cos 0 + i\sin 0)$.

32. Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $3(\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)) \cdot (\cos(5\pi/24) + i\sin(5\pi/24))$

b) $2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) \cdot 5(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$

c) $(\cos 5 + i\sin 5)\cdot(\cos 2 + i\sin 2)$ **d)** $(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))\cdot(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$

e) $4(\cos 10 + i\sin 10)\cdot 2(\cos 35 + i\sin 35)$

f) $(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6))\cdot(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$.

33. Végezzük el az alábbi szorzásokat a trigonometrikus alak felhasználásával!

a) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$ **b)** $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$ **c)** $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$

d) $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$ **e)** $(5+5i)(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$

f) $3(\cos(-\pi/8) + i\sin(-\pi/8))\cdot(3+\sqrt{3}i)$.

34. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $\dfrac{3(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))}{(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))}$ **b)** $\dfrac{\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ}{\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ}$

c) $\dfrac{\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))}{\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)}$ **d)** $\dfrac{\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ}{\cos(-120^\circ) + i\sin(-120^\circ)}$.

35. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$ **b)** $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$

36. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[3]{27(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))}$ **b)** $\sqrt[5]{7(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))}$
c) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.

ÚTMUTATÁSOK

30. Alkalmazzuk az $r=\sqrt{a^2+b^2}$ $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ képletet. Pl. a **b)** feladatnál: $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{-1}=\operatorname{arctg}(-1)$ Mivel $3\pi/4$ és $3\pi/4+2k\pi$ tangense -1, ezért $\varphi=3\pi/4+2k\pi$ Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál is.

31. A $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ értékek megadásával ("kiszámításával") egyből az algebrai alakhoz jutunk. Pl. az **a)** feladatnál: $\cos(\pi/2)=0$; $\sin(\pi/2)=1$, tehát
$5(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=5\,(0+i)=5i$
Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál is.

32. Ezeknél a példáknál a **(11)** szabályt kell alkalmazni. Pl. az **a)** feladatnál:

$$3\cdot1\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{24}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál is.

33. Először írjuk át a tényezőket trigonometrikus alakba. Pl. az **a)** feladatnál:

1) Az $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ komplex számra:

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1/4}{1/4}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

tehát $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **2)** A $-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6}$ komplex számra:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{36}}=\frac{2\sqrt{2}}{6}$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}/6}{-\sqrt{2}/6}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}}\right)=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$$

tehát $-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. A szorzat:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

A többi feladatnál is hasonlóan járjunk el.

34. Alkalmazzuk a **(12)** szabályt. Pl. az **a)** feladatnál

$$\frac{3}{1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

35. Alkalmazzuk a **(13)** szabályt (az **a)** feladatban az algebrai alakot írjuk át trigonometrikus alakba !). Pl. a **b)** feladatnál

$$\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8=2^8\left(\cos\frac{8\pi}{8}+i\sin\frac{8\pi}{8}\right)=2^8(\cos\pi+i\sin\pi)=-256$$

36. Alkalmazzuk a **(14)** szabályt. Pl. az **a)** feladatnál

$$\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi/3+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi/3+2\pi k}{3}\right)\quad k=0,1,2.$$

A **c)** feladatnál először írjuk át trigonometrikus alakra, vonjunk gyököt a **(14)** szabály alkalmazásával majd alakítsuk vissza algebrai alakra.

FELADATOK

37. Írjuk fel az alábbi komplex számokat algebrai alakban!

a) $z=\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ **b)** $z=6\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$

c) $z=\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ$ **d)** $z=5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

38. Írjuk fel az alábbi algebrai alakban adott komplex számokat trigonometrikus alakban!

a) 2 **b)** -3 **c)** $6i$ **d)** $\sqrt{3}-i$.

39. Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $2(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)\times 4(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)$

b) $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\times\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

c) $\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$

d) $5\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right)\times\left(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ\right)\times 4\left(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ\right)$.

40. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $\left(6\left(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ\right)\right)/\left(2\left(\cos\left(-50^\circ\right)+i\sin\left(-50^\circ\right)\right)\right)$

b) $\left(4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right)/\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

c) $\left(3\left(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)\right)/\left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

d) $\left(2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\right)/\left(3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\right)$.

41. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$ **b)** $\left(3\left(\cos\frac{2\pi}{12}+i\sin\frac{2\pi}{12}\right)\right)^3$

c) $\left(5\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\right)^6$ **d)** $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$.

42. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[3]{8\left(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\right)}$ **b)** $\sqrt[5]{10\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right)}$

c) $\sqrt[7]{3\left(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)\right)}$ **d)** $\sqrt{4\left(\cos 3+i\sin 3\right)}$.

3. Komplex számok exponenciális alakja

A $z=a+bi$ komplex szám $z=a+bi=re^{\varphi i}$ alakban is megadható, ahol $r=|z|$, $\varphi=\mathrm{arctg}(b/a)$

Műveletek

Legyen $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$.

A két komplex szám *szorzata*:

(15) $\boxed{z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$

A két komplex szám *hányadosa*:

(16) $\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}}$

A komplex szám *hatványa* : Legyen $z=re^{i\varphi}$

(17) $\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$

A komplex szám *gyöke*:

(18) $\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad \text{ahol } k = 0,1,2,\ldots,n-1}$

Megjegyzés: Nyilvánvaló a trigonometrikus és az exponenciális alak közötti alábbi összefüggés

(19) $\boxed{re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

PÉLDÁK

43. Adjuk meg a komplex számok algebrai alakját!

a) $e^{i\pi/4}$ **b)** $e^{\pi e^{-i\pi/2}}$ **c)** $e^{2+i\pi}$

M: A **(19)** formula alapján

a) $e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i(\sqrt{2}/2)$

b) $e^{\pi e^{-i\pi/2}} = e^{\pi(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2))} = e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

c) $e^{2+i\pi} = e^2 \cdot e^{i\pi} = e^2 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = -e^2$

44. Írjuk fel az algebrai alakban megadott komplex számokat exponenciális alakban!

a) $z = 2i$ **b)** $z = -1 + i$

M: **a)** Mivel $a = 0$ $b = 2$ $r = 2$ $\varphi = \pi/2$, ezért a definíció alapján $z = 2e^{i\pi/2}$.

b) Mivel $a = -1$ $b = 1$ $r = \sqrt{2}$ $\text{tg}\varphi = -1$ $\varphi = 3\pi/4$, ezért a definíció alapján $z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$.

45. Állítsuk elő a $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ komplex számokat exponenciális alakban és végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $z_1 z_2$ **b)** z_1/z_2 **c)** z_1^6 **d)** $\sqrt[4]{z_1}$

M: Ha $z_1 = 1 + i$, akkor $a = 1$, $b = 1$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$, tehát $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. Hasonlóan a $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ számra: $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $r = 2$, $\varphi = -\pi/3$, $z_2 = 2\, e^{i(-\pi/3)}$

a) A **(15)** képlet alapján $z_1 z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \cdot 2\, e^{i(-\pi/3)} = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/12}$

b) A **(16)** képlet alapján $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4-(-i\pi/3)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i7\pi/12}$.

c) A **(17)** képlet alapján $z_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^6 = 8e^{i3\pi/2}$.

d) A **(18)** képlet alapján azt kapjuk, hogy

$z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi k)i/4}$ $\quad k = 0,1,2,3$ amiből

$k = 0$ esetén $z_0 = \sqrt[8]{2}e^{i\pi/16}$

$k = 1$ esetén $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{9\pi i/16}$

$k = 2$ esetén $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+4\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{17\pi i/16} = \sqrt[8]{2}e^{-15\pi i/16}$

$k = 3$ esetén $z_3 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+6\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{25\pi i/16} = \sqrt[8]{2}e^{-7\pi i/16}$

komplex számokat (a négy gyököt) kapjuk.

46. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban!

a) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$ **b)** $z = \sqrt{2}(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$

c) $z = 2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ **d)** $z = 4(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$

M: a) Mivel $\varphi = 0$, $r = 3$, ezért $z = 3\ e^{0i}$. **b)** Mivel $\varphi = \pi/2$, $r = \sqrt{2}$, ezért $z = \sqrt{2}\ e^{(\pi/2)i}$ **c)** Mivel $\varphi = \pi/4$, $r = 2$, ezért $z = 2\ e^{(\pi/4)i}$. **d)** Mivel $\varphi = -\pi/3$, $r = 4$, ezért $z = 4\ e^{(-\pi 3)i}$.

47. Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus és algebrai alakban!

a) $3e^{\frac{2\pi}{3}i}$ **b)** $4e^{-\frac{\pi}{4}i}$ **c)** e^{i} **d)** e^{0i} **e)** $2e^{i\pi/2}$

M: a) $\varphi = 2\pi/3$, $r = 3$, ezért $z = 3(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$, és így $a = 3\cos(2\pi/3)$, $b = 3\sin(2\pi/3)$, tehát $z = -1.5 + 1.5\sqrt{3}i$

b) $\varphi = -\pi/4$, $r = 4$, ezért $z = 4(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$, és így $a = 4\sqrt{2}/2$, $b = -4\sqrt{2}/2$, tehát $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

c) $\varphi = 1$, $r = 1$, ezért $z = \cos 1 + i\sin 1$, és így $a = \cos 1 \approx 0.54$, $b = \sin 1 \approx 0.84$, tehát $z = 0.54 + 0.84i$

d) $\varphi = 0$, $r = 1$, ezért $z = \cos 0 + i\sin 0$, és így $a = \cos 0 = 1$, $b = \sin 0 = 0$, tehát $z = 1$

e) $\varphi = \pi/2$, $r = 2$, ezért $z = 2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$, és így $a = 2\cos(\pi/2) = 0$, $b = 2\sin(\pi/2) = 2$, tehát $z = 2\ i$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

48. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban !

a) 1 **b)** $\sqrt{3} + i$ **c)** $3 + \sqrt{3}\ i$ **d)** $-\sqrt{2} + \sqrt{6}\ i$.

49. Írjuk fel a $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$ komplex számokat exponenciális alakban és végezzük el a következő műveleteket!

a) $z_1 z_2$ **b)** z_2/z_1 **c)** z_2^4 **d)** $\sqrt[3]{z_1}$ **e)** $\sqrt[4]{z_2}$.

50. Írjuk fel az alábbi komplex számokat algebrai és exponenciális alakban !

a) $z = \cos\pi + i\sin\pi$ **b)** $z = \sqrt{3}(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$.

51. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus és algebrai alakban !

a) $5e^{-(\pi/2)i}$ **b)** $\sqrt{2}e^{\pi i}$ **c)** $3e^{2\pi i}$ **d)** $2e^{2+i\pi}$ **e)** e^{2-i}.

52. Végezzük el az alábbi szorzásokat !

a) $3e^{(\pi/3)i}\cdot 5e^{(\pi/4)i}$ **b)** $4e^{\pi i}\cdot 6e^{2\pi i}$

c) $2e^{(\pi/4)i}\cdot \sqrt{3}e^{(\pi/7)i}$ **d)** $(5+3i)(2-5i)$.

53. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $4e^{(\pi/4)i}/5e^{(\pi/3)i}$ **b)** $3e^{\pi i}/2e^{(\pi/3)i}$

c) $5e^{(\pi/5)i}/3e^{(-\pi/5)i}$ **d)** $(3-2i)/(1+3i)$.

54. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(3e^{(\pi/5)i}\right)^{12}$ **b)** $\left(5e^{(\pi/6)i}\right)^{6}$

c) $\left(4e^{(-\pi/3)i}\right)^{5}$ **d)** $\left(\sqrt{2}/2+1/2\,i\right)^{2}$.

55. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[5]{7e^{\pi/5\,i}}$ **b)** $\sqrt[3]{e^{\pi i}}$ **c)** $\sqrt[7]{3e^{3\pi i}}$ **d)** $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.

ÚTMUTATÁSOK

48. Határozzuk meg φ-t és r-t ! Pl. a **b)** feladatnál:

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2 \qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál!

49. Határozzuk meg φ_1-et, r_1-et, φ_2-t, r_2-t, majd végezzük el a műveleteket a **(15)**,**(16)**,**(17)**,**(18)** szabályok alkalmazásával!

50. Az algebrai alakba történő felírás tekintetében lásd a 37.példát! Az exponenciális alakhoz egyszerűen csak "le kell olvasni" a φ-t és az r-et.

Pl. az **a)** feladatban: $\varphi=\pi$, $r=1$, tehát $z=e^{\pi i}$.

51. A trigonometrikus alakban való felíráshoz leolvassuk a φ-t és az r-et. Az algebrai alakot az $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ összefüggésekből számítsuk ki!

Pl. az **a)** feladatnál: $a=5\cos(-\pi/2)=0$, $b=5\sin(-\pi/2)=-5$.

52. Alkalmazzuk a **(15)** szabályt ! Pl. az **a)** feladatban:

$$3\cdot 5e^{(\pi/3+\pi/4)i}=15e^{7/12\,\pi i}.$$

A **d)** feladatban az algebrai alakot alakítsuk át exponenciális alakra, majd a szorzás elvégzése után vissza.

53. Alkalmazzuk a **(16)** szabályt ! Pl. az **a)** feladatra:

$$4/5e^{i(\pi/4-\pi/3)}=4/5e^{-\pi/12\,i}.$$

A **d)** feladatban az algebrai alakot alakítsuk át exponenciális alakra, majd az osztás elvégzése után vissza.

54. Alkalmazzuk a **(17)** szabályt ! Pl az **a)** feladatra: $3^{12}e^{12(\pi/5)i}$.

A **d)** feladatban szereplő algebrai alakot alakítsuk át exponenciális alakra, végezzük el a hatványozást, majd alakítsuk vissza!

55. Alkalmazzuk a **(18)** szabályt ! Pl az **a)** feladatra: $\sqrt[5]{7}e^{\frac{\pi/5+2k\pi}{5}i}$.
A **d)** feladatnál először hozzuk a számot exponenciális alakra, úgy végezzük el a műveletet, majd alakítsuk vissza!

FELADATOK

56. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban!
a) 3 **b)** $3+5i$ **c)** $2+3i$.

57. Írjuk fel a $z_1 = 1+2i$; $z_2 = 5+2i$ komplex számokat exponenciális alakban és végezzük el a következő műveleteket!
a) z_1z_2 **b)** z_1/z_2 **c)** $\sqrt[3]{z_1}$ **d)** z_2^5.

58. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban!
a) $z = 3(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$ **b)** $z = 5(\cos 2 + i\sin 2)$.

59. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus és algebrai alakban!
a) $3e^{-\frac{\pi}{5}i}$ **b)** $12e^{7i}$ **c)** $-6e^{\frac{\pi}{2}i}$.

60. Végezzük el az alábbi szorzásokat!
a) $2e^{\frac{\pi}{5}i}\cdot 3e^{-\frac{\pi}{6}i}$ **b)** $\sqrt{2}e^{7i}\cdot 3e^{-6i}$ **c)** $3e^{\pi i}\cdot 5e^{\frac{\pi}{3}i}$.

61. Végezzük el az alábbi osztásokat!
a) $6e^{\frac{3}{2}\pi i}/2e^{\frac{1}{2}\pi i}$ **b)** $7e^{5i}/2e^{7i}$ **c)** $3e^{-5i}/\left(-2e^{2i}\right)$.

62. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!
a) $\left(5e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^7$ **b)** $\left(\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^3$ **c)** $\left(2e^{3\pi i}\right)^2$.

63. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!
a) $\sqrt[3]{e^{\frac{\pi}{2}i}}$ **b)** $\sqrt[5]{2e^{5i}}$ **c)** $\sqrt[7]{3e^{\frac{\pi}{6}i}}$.

MEGOLDÁSOK

11. a) $-7i$ **b)** 12 **c)** -12 **d)** $1-i$ **e)** $4-i$ **f)** $-2-i$
12. a) -1 **b)** i **c)** i **d)** -1 **e)** 0 **f)** $-i$
13. a) 20 **b)** $6+10i$ **c)** 25 **d)** $25-19i$ **e)** $-1-3i$ **f)** $4+39i$
g) $24-5i$ **h)** $2/3+(7/9)i$ **i)** $0.22-0.07i$
14. a) $-i$ **b)** $1/2+(1/2)i$ **c)** $-i$ **d)** $-0.3-1.1i$ **e)** $18/13-(1/13)i$
f) $1/68+(21/68)i$ **g)** $-3/26-(41/26)i$ **h)** $(a^2-b^2)/(a^2+b^2)+2ab/(a^2+b^2)i$

i) $-a+bi$ **j)** $1/3+(\sqrt{5}/3)i$ **k)** $0.1+0.3i$ **l)** $4ab/(a^2+b^2)$

15. a) -64 **b)** $256(1+i)$ **c)** 1 **d)** $1/4+(\sqrt{2}/2)i$ **e)** $-i/2$ **f)** $-1/4+(1/4)i$

g) 1 **16.** $x=2,\ y=1$ **17. a)** 0 **b)** i **c)** $-i$

18. nem **19. a)** $15-11i$ **b)** $-5-12i$ **c)** $-2i$ **d)** $5+9i$ **e)** $-4+20i$

20. a) $2-2i$ **b)** 12 **c)** $0.2-1.4i$ **d)** $0.2+0.9i$ **e)** $1/6-(1/4)i$

21. a) $0.23-0.02i$ **b)** $2/5-(1/30)i$ **c)** $-5-12i$ **d)** $-4+19i$

22. a) $1/2+(1/2)i$ **b)** $1-2i$ **c)** $3/5+(4/5)i$ **d)** $1.5+1.5i$ **e)** $-0.3-1.1i$

23. a) $18/13-(1/13)i$ **b)** $1/68+(21/68)i$ **c)** $-3/26-(41/26)i$

d) $0.1+0.3i$

e) $4abi/(a^2+b^2)$ **f)** $18/13-(1/13)i$ **g)** $2i$ **h)** $-21/29+(20/29)i$

30. a) $3[\cos(\pi/2+2k\pi)+i\sin(\pi/2+2k\pi)]$ **b)** $\sqrt{2}[\cos(3\pi/4+2k\pi)+i\sin(3\pi/4+2k\pi)]$

c) $2[\cos(-\pi/3+2k\pi)+i\sin(-\pi/3+2k\pi)]$ **d)** $2[\cos(-\pi/6+2k\pi)+i\sin(-\pi/6+2k\pi)]$

e) $\cos(-\pi/6+2k\pi)+i\sin(-\pi/6+2k\pi)$ **31. a)** $5i$ **b)** $2-2\sqrt{3}i$ **c)** -1

d) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ **e)** 3

32. a) $3[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]$ **b)** $10[\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)]$ **c)** $\cos 7+i\sin 7$

d) $\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)$ **e)** $8[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$ **f)** $\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$

33. a) $(1/6)[\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)]$ **b)** $8[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)]$

c) $6\sqrt{2}[\cos(7\pi/12)+i\sin(7\pi/12)]$ **d)** $12\sqrt{6}[\cos(-7\pi/12)+i\sin(-7\pi/12)]$

e) $5\sqrt{2}[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]$ **f)** $6\sqrt{3}[\cos(\pi/24)+i\sin(\pi/24)]$

34. a) $3[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$ **b)** $\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)$ **c)** $\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)$

d) $\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$ **35. a)** -1 **b)** -256 **c)** $(1/2)-(\sqrt{3}/2)i$

36. a) $\sqrt[3]{27}\left(\cos\dfrac{\pi/3+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi/3+2k\pi}{3}\right)\quad k=0,1,2$

b) $\sqrt[5]{7}\left(\cos\dfrac{\pi/5+2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi/5+2k\pi}{5}\right)\quad k=0,1,2,3,4$

c) $\sqrt{6}/2+\sqrt{2}/2\,i,\ -\sqrt{2}/2+\sqrt{6}/2\,i,\ -\sqrt{6}/2-\sqrt{2}/2\,i,\ \sqrt{2}/2-\sqrt{6}/2\,i$

37. a) $-\sqrt{3}\,i$ **b)** $4.59+3.85\,i$ **c)** $0.913+0.407\,i$ **d)** $2.5\sqrt{3}+2.5\,i$

38. a) $2(\cos 0+i\sin 0)$ **b)** $3(\cos\pi+i\sin\pi)$ **c)** $6(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$

d) $2(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6))$

39. a) $8(\cos 270+i\sin 270)$ **b)** $3\sqrt{3}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$

c) $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$ **d)** $20(\cos 270+i\sin 270)$

40. a) $(6/2)(\cos 90+i\sin 90)$ **b)** $4(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$

c) $(3/\sqrt{3})(\cos(-2\pi/3)+i\sin(-2\pi/3))$ **d)** $(2/3)(\cos 0+i\sin 0)$

41. a) $2^8(\cos\pi+i\sin\pi)$ **b)** $3^3(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$

c) $5^6(\cos 6\pi+i\sin 6\pi)$ **d)** $\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$

42. a) $2\left(\cos\frac{\pi/3+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/3+2k\pi}{3}\right)\qquad k=0,1,2$

b) $\sqrt[5]{10}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{5}\right)\qquad k=0,1,2,3,4$

c) $\sqrt[7]{3}\left(\cos\frac{2\pi/3+2k\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi/3+2k\pi}{7}\right)\qquad k=0,1,2,3,4,5,6$

d) $2\left(\cos\frac{3+2k\pi}{2}+i\sin\frac{3+2k\pi}{2}\right)\qquad k=0,1$

48. a) e^{0i} **b)** $2e^{\pi/6\, i}$ **c)** $2\sqrt{3}e^{\pi/6\, i}$ **d)** $2\sqrt{2}e^{2\pi/3\, i}$

49. a) $4e^{5\pi/12\, i}$ **b)** $e^{\pi/12\, i}$ **c)** $16e^{\pi i}$

d) $\sqrt[3]{2}e^{\pi/18\, i}$ $\sqrt[3]{2}e^{13\pi/8\, i}$ $\sqrt[3]{2}e^{-11\pi/8\, i}$

e) $\sqrt[4]{2}e^{\pi/16\, i}$ $\sqrt[4]{2}e^{9\pi/16\, i}$ $\sqrt[4]{2}e^{-15\pi/16\, i}$ $\sqrt[4]{2}e^{-7\pi/16\, i}$

50. a) $-1+0i=e^{i\pi}$ **b)** $0-\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{-\pi/2\, i}$

51. a) $5(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2))=-5i$ **b)** $\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt{2}$

c) $3(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=3$

d) $2e^{2+i\pi}=2e^2e^{i\pi}$ ezért $2e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2e^2$

e) $e^{2-i}=e^2e^{-i}$ ezért $e^2(\cos(-1)+i\sin(-1))\approx 3.99-6.22i$

52. a) $15e^{7\pi/12}$ **b)** $24e^{\pi i}$ **c)** $2\sqrt{3}e^{11\pi/28\, i}$ **d)** $25-19i$

53. a) $\frac{4}{5}e^{-\pi/12\, i}$ **b)** $\frac{3}{2}e^{2\pi/3\, i}$ **c)** $\frac{5}{3}e^{2\pi/5\, i}$ **d)** $-0.3-1.1i$

54. a) $3^{12}e^{2\pi/5\, i}$ **b)** $5^6e^{\pi i}$ **c)** $4^5e^{-5\pi/3\, i}$ **d)** $1/4+\sqrt{2}/2\, i$

55. a) $\sqrt[5]{7}e^{\frac{\pi/5+2k\pi}{5}i}$ **b)** $e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i}$ **c)** $\sqrt[7]{3}e^{\frac{3\pi+2k\pi}{7}i}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

56. a) $r=3,\ \varphi=0$ **b)** $r=\sqrt{34},\ \varphi=1.03$ **c)** $r=\sqrt{13},\ \varphi=0.98$

57.

$$z_1=\sqrt{5}e^{1.11i}\qquad z_2=\sqrt{29}e^{0.38i}\qquad z_1z_2=\sqrt{145}e^{1.49i}$$

$$z_1/z_2=\sqrt{5/49}e^{0.73i}\qquad \sqrt[3]{z_1}=\sqrt[6]{5}e^{\frac{1.11+2k\pi}{3}}\qquad z_2^5=\left(\sqrt{29}\right)^5e^{1.9i}$$

58. a) $z=3e^{\frac{\pi}{3}i}$ **b)** $z=5e^{2i}$

59. a) $z = 3\left(\cos\left(-\pi/5\right) + i\sin\left(-\pi/5\right)\right), \quad z = 2.43 - 1.77i$

b) $z = 12\left(\cos 7 + i\sin 7\right), \quad z = 9.05 + 7.88i$

c) $z = -6\left(\cos \pi/2 + i\sin \pi/2\right), \quad z = -6i$

60. a) $6e^{\frac{\pi}{30}i}$ **b)** $3\sqrt{2}e^{i}$ **c)** $15e^{\frac{4}{3}\pi i}$

61. a) $3e^{\pi i}$ **b)** $7/2\, e^{-2i}$ **c)** $-3/2\, e^{-7i}$

62. a) $5^7 e^{7/4\pi i}$ **b)** $\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{9/4\pi i}$ **c)** $4e^{6\pi i} = 4$

63. a) $e^{\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}i}$ **b)** $\sqrt[5]{2}e^{\frac{5+2k\pi}{5}i}$ **c)** $\sqrt[7]{3}e^{\frac{\pi/6 + 2k\pi}{7}i}$

5. VEKTORALGEBRA

1. A vektor értelmezése, műveletek vektorokkal

A háromdimenziós tér vektoraival foglalkozunk. Az ilyen vektorok halmazát *geometriai vektortérnek* is nevezik.

(1) A *vektort* geometriailag *irányított szakasz*ként, algebrailag pedig *számhármas*ként értelmezzük. Jelölése:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Az a_1, a_2, a_3 számok a vektor *koordinátái*.

A számokat, megkülönböztetendő a vektoroktól (vagy másképpen vektoriális mennyiségektől), *skalár*oknak (skaláris mennyiségeknek) nevezzük.

(2) Az irányított szakasz hossza a vektor *abszolút értéke*. Ennek jele: $|\mathbf{a}|$.

(3) Ha $|\mathbf{a}| = 1$, akkor **a** vektort *egységvektor*nak nevezzük és $\mathbf{a}^0$-val jelöljük. Ha a vektor abszolút értéke zérus, akkor azt *zérusvektor*nak (nullavektornak) nevezzük. Jele: **0**.

(4) Ha a vektor (az irányított szakasz) kezdőpontja rögzített, akkor azt *helyvektor*nak nevezzük.

1.1 *A vektor mint irányított szakasz*

Két vektor *egyenlő*, ha párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók úgy, hogy kezdőpontjuk egybeessék, úgyszintén végpontjuk is.

(5) Az **a** és **b** vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *összegét* ill. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *különbségét* a paralelogramma szabály segítségével értelmezzük.

(6) Az **a** vektornak a λ *számmal* (skalárral) *való* $\lambda\mathbf{a}$ *szorzata* olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda|\,|\mathbf{a}|$, iránya pedig megegyezik **a** irányával, ha $\lambda > 0$ és ellentétes irányú, ha $\lambda < 0$.

(7) Az $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ vektor egységvektor, mert abszolút értéke 1. Az $\mathbf{a}^0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ vektort az **a** *vektor egységvektorának* nevezzük, amit tehát úgy kapunk, hogy az **a** vektort "osztjuk" az abszolút értékével.

(8) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok *lineáris kombinációján* a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ vektort értjük, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tetszőleges számok.

(9) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ egyenlőség csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ esetén teljesül. Ellenkező esetben az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok *lineárisan függők* (összefüggők).

(10) A háromdimenziós térben legfeljebb három lineárisan független vektor adható meg. Három ilyen vektor a tér *bázis*át alkotja. Legyenek ezek az ún. *bázisvektorok* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. A tér bármely vektora előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Ha például

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3,$$

akkor a $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ számok a **v** vektor $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ *bázisra vonatkozó koordinátái.*
(11) Az **a** és **b** vektorok **ab** *skaláris szorzata*:

$$\boxed{\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi}$$

amelynek az értéke egy szám, ahol φ az **a** és **b** vektorok által közrezárt szög. A skaláris szorzás eredménye tehát skalár.

Az értelmezésből látszik, hogy ha két vektor merőleges egymásra ($\varphi = \pi/2$), akkor skaláris szorzatuk nulla. Ennek fordítottja is igaz.Ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor azok *merőlegesek* egymásra.
(12) Az **a** vektornak a **b** vektorra eső *vetületvektora* (1.ábra)

$$(\mathbf{ab}^0)\mathbf{b}^0.$$

(13) Az **a** és **b** vektorok **a** × **b** *vektoriális szorzata* az a vektor, amely merőleges mind az **a** mind a **b** vektorra, abszolút értéke $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi$, azaz

$$\boxed{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi}$$

továbbá az **a**,**b**,**a** × **b** vektorok (ebben a sorrendben) jobbsodrású rendszert alkotnak, vagyis ha **b** az **a**-t az óramutató járásával ellenkező irányba követi, akkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ "felfelé" mutat.
(14) Az értelmezésből látszik, hogy ha a két vektor párhuzamos, akkor vektoriális szorzatuk zérusvektor. Az is kiolvasható belőle, hogy az $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi$ szám a két vektor által kifeszített *paralelogramma területének* mérőszáma. A vektoriális szorzás nem kommutatív, ugyanis $\mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.
(15) Az **a**,**b**,**c** vektorok (ilyen sorrendben vett) *vegyes szorzata*: $\mathbf{abc} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$, amelynek az értéke egy szám (skalár).

A vegyes szorzat abszolút értéke a három vektor által kifeszített paralelepipedon (paralelogramma alapú hasáb) *térfogatával* egyenlő. Ha **abc** = 0, akkor a három vektor egy síkban van. Ekkor azok lineárisan függők. Ha **abc** ≠ 0, akkor **a**,**b**,**c** lineárisan függetlenek.

1.2 *A vektor mint számhármas*

A vektorokkal való számításoknál a vektort legtöbbször mint számhármast kezeljük.

Vegyünk olyan bázisvektorokat, amelyek mindegyike egységvektor és páronként merőlegesek egymásra.Legyenek ezek $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$. Szokás ezeket **i**,**j**,**k** módon is jelölni.Ekkor a tér tetszőleges **v** vektora felírható

(16) $$\boxed{\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}}$$

alakban. A v_1,v_2,v_3 számok a **v** vektornak az $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ (vagy **i**,**j**,**k**) bázisra vonatkozó koordinátái. A továbbiakban a vektor koordinátáin mindig ilyen koordinátákat értünk. Használhatjuk a

$$\boxed{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)}$$

jelölést és mondhatjuk azt, hogy ez a számhármas a vektor. A $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ alakot szokás a vektor *koordinátás alakjának* nevezni.

(17) Ha ezek a bázisvektorok egy térbeli Descartes-féle koordinátarendszer x,y,z tengelyeivel párhuzamosak, akkor a $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ vektort tekinthetjük olyan *helyvektornak*, amelynek kezdőpontja az origó, végpontja pedig a $P(v_1,v_2,v_3)$ pont.

A *zérusvektor* mindhárom koordinátája nulla, azaz $\mathbf{0} = (0,0,0)$.

Legyen a továbbiakban

$$\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3),\ \mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3),\ \mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3).$$

(18) Az **a** vektor *abszolút értéke*:

$$\boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}$$

(19) Az **a** és **b** vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3.$$

(20) Az **a** és **b** vektor *összege*:

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)}$$

(21) Az **a** és **b** vektor *különbsége*:

$$\boxed{\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)}$$

(22) Az **a** vektornak a λ *számmal való szorzata*:

$$\boxed{\lambda\,\mathbf{a} = (\lambda\, a_1, \lambda\, a_2, \lambda\, a_3)}$$

(23) Az **a** vektor *egységvektora*:

$$\boxed{\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right)}$$

(24) Az **a** és **b** vektorok *skaláris szorzata*:

$$\boxed{\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

(25) Az **a** és **b** vektorok által közrezárt szög koszinusza:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

(26) Az **a** vektornak az x,y ill. z tengellyel bezárt szögei legyenek α, β, ill. γ .Ekkor

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}}$$

Ezek az ún. *iránykoszinuszok* az $\mathbf{a}^0$ vektor koordinátái. Ezért

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

(27) Az **a** és **b** vektorok *vektoriális szorzata*:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

(28) Az **a**,**b**,**c** vektorok *vegyes szorzata*:

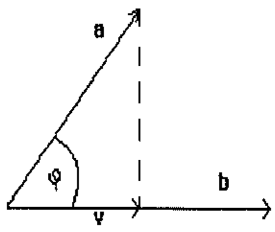
$$\boxed{\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}}$$

PÉLDÁK

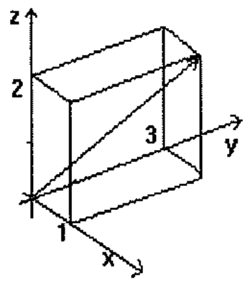
1. Ábrázoljuk a $\mathbf{v} = (1,3,2) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ vektort mint helyvektort. Számítsuk ki az abszolút értékét!

M: A vektor az origóból a $P(1,3,2)$ pontba mutató irányított szakasz (2.ábra). Abszolút értéke:

$$\mathbf{v} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$



1. ábra



2. ábra

2. Írjuk fel az $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektort, ha $\mathbf{a} = (-5,2,4)$ és $\mathbf{b} = (2,7,-1)$.

M: $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (-5,2,4) + (6,21,-3) = (1,23,1)$.

3. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (-5,2,4)$ és $\mathbf{b} = (2,7,-1)$ vektorok skaláris szorzatát.

M: $\mathbf{ab} = -10 + 14 - 4 = 0$. Mivel a skaláris szorzat értéke 0, ezért a két vektor merőleges egymásra.

4. Írjuk fel a $\mathbf{v} = (-1,\sqrt{2},1)$ vektor egységvektorát. Mekkora szögeket zár közre a **v** vektor a koordinátatengelyekkel?

M: Mivel $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+2+1} = 2$, ezért az egységvektor:

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{2}\left(-1,\sqrt{2},1\right) = \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{2}\left(-1, \sqrt{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Az egységvektor koordinátái az iránykoszinuszok, azaz

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

Így az x,y,z tengelyekkel közrezárt szögek rendre: $\alpha = 120°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

5. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (-2,1-3)$ vektornak a $\mathbf{b} = (-1,2-3)$ vektorra eső vetületvektorát.

M: A vetületvektor:$(\mathbf{ab}^0)\mathbf{b}^0$. Előbb kiszámítjuk a $\mathbf{b}^0$ egységvektort. Mivel $|\mathbf{b}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, ezért $\mathbf{b}^0 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,-3)$. Ennek ismeretében az $\mathbf{ab}^0$ skaláris szorzat értéke:

$$\mathbf{ab}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2,1,-3)(-1,2,-3) = \frac{1}{\sqrt{14}}(2+2+9) = \frac{13}{\sqrt{14}}.$$

Ez egyébként a vetületvektor hossza, ugyanis $\mathbf{ab}^0 = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}^0| \cos\varphi = |\mathbf{a}|\cos\varphi$, mivel $|\mathbf{b}^0| = 1$ (l.a 2.ábrán). Így a vetületvektor:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{ab}^0)\mathbf{b}^0 = \frac{13}{14}(-1,2,-3) = \left(-\frac{13}{14}, \frac{26}{14}, -\frac{39}{14}\right).$$

6. Mekkora szöget zárnak közre az $\mathbf{a} = (1,0,1)$ és $\mathbf{b} = (3,8,0)$ vektorok?

M: A közrezárt szög koszinusza: $\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{3+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{73}} = \frac{3}{\sqrt{146}}$

ahonnan $\varphi \approx 75°37'$.

7. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (2,-1,3)$ és $\mathbf{b} = (1,0,7)$ vektorok vektoriális szorzatát. Mekkora a két vektor által kifeszített paralelogramma területe?

$$\textbf{M:}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-7,-11,1).$$

A két vektor által kifeszített paralelogramma területe ennek a vektoriális szorzatnak az abszolút értéke, azaz $T = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{49+121+1} = \sqrt{171}$.

8. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (2,1,4)$, $\mathbf{b} = (5,3,2)$ és $\mathbf{c} = (3,6,7)$ vektorok vegyes szorzatát. Mekkora a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata?

$$\textbf{M:}\text{ A vegyes szorzat: } \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 29 + 4\cdot 21 = 73.$$

A paralelepipedon térfogata a vegyesszorzat abszolút értékével egyenlő. Jelen esetben tehát $V = 73$.

9. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1,3,2), \mathbf{b} = (4,-6,2), \mathbf{c} = (-3,12,11)$ vektorok?

M: Azt kell megvizsgálni, hogy a $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = \mathbf{0}$ egyenlőség milyen λ_i értékek mellett teljesül. Ha csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ esetén, akkor lineárisan függetlenek. Ha más értékek esetén is, akkor lineárisan függők. A vektorok koordinátás alakját az egyenletbe beírva, a $\lambda_1(-1,3,2) + \lambda_2(4,-6,2) + \lambda_3(-3,12,11) = \mathbf{0}$ egyenletet kapjuk. A bal oldalon szereplő vektor csak akkor nulla(vektor), ha mindhárom komponense nulla.Ekkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$-\lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0,$$
$$3\lambda_1 - 6\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0,$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0.$$

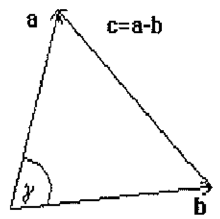
Ennek van a triviálistól (a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$-tól) különböző megoldása (l.a lineáris egyenletrendszereknél).Egy ilyen megoldás például: $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. Tehát az adott $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vektorok lineárisan nem függetlenek (azaz lineárisan függők, ugyanis $2\mathbf{c} = 10\mathbf{a} + \mathbf{b}$).
Egyszerűbben járhatunk el, ha azt vizsgáljuk meg, hogy a három vektor egy síkba esik-e. Ekkor a vegyes szorzatot kell kiszámítani.

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 11 \end{vmatrix} = 90 - 150 + 60 = 0.$$

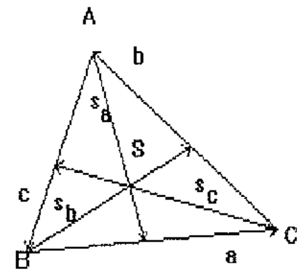
Mivel ez nulla, ezért a három vektor egy síkban van, ami azt jelenti, hogy azok nem függetlenek (lineárisan függők).

10. Igazoljuk a koszinusz-tételt.

M: Legyenek a háromszög oldalvektorai $\mathbf{a},\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ (3.ábra). Ekkor a háromszög oldalai $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{c}|$. Az ábráról látható, hogy $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.



3. ábra



4. ábra

Mindkét oldalt négyzetre emelve (azaz önmagával skalárisan szorozva):

$$\mathbf{cc} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{aa} + \mathbf{bb} - 2\mathbf{ab}.$$

Felhasználva a skaláris szorzás értelmezését,

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\gamma.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást (a súlypontban), és a súlypont a csúcstól mérve 2:1 arányban osztja ketté a súlyvonalat.

M: Legyenek a háromszög oldalvektorai $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ (4.ábra). Ezekre érvényes, hogy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Az A csúcsból kiinduló súlyvonal $\mathbf{s}_a$ vektorának végpontja a BC oldal felezőpontja, ezért $\mathbf{s}_a = \mathbf{c} + 1/2\mathbf{a}$. Hasonlóképpen $\mathbf{s}_b = \mathbf{a} + 1/2\mathbf{b}$ és $\mathbf{s}_c = \mathbf{b} + 1/2\mathbf{c}$. A három súlyvonal akkor és csakis akkor metszi egymást egyetlen (mindhárom súlyvonalat 2:1 arányban osztó) S pontban, ha

$$\mathbf{a} + 2/3\mathbf{s}_c = \mathbf{a} + \mathbf{b} + 2/3\mathbf{s}_a = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + 2/3\mathbf{s}_b.$$

A súlyvonalvektorok előbbi kifejezéseit behelyettesítve és figyelembevéve, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$:

$\mathbf{a} + 2/3\mathbf{s}_c = \mathbf{a} + 2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c}$;

$\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2/3\mathbf{s}_a = \mathbf{a} + \mathbf{b} + 2/3(\mathbf{c} + 1/2\mathbf{a}) = \mathbf{a} + 2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c} + 1/3(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} +$
$+2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c}$;

$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + 2/3\mathbf{s}_b = 2/3\mathbf{s}_b = 2/3(\mathbf{a} + 1/2\mathbf{b}) + 1/3(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + 2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c}$.

Mivel mindhárom kifejezés ugyanazzal a mennyiséggel egyenlő, ezért egymással is egyenlők. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a súlyvonalvektorok összege nulla(vektor). Ugyanis

$$\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_b + \mathbf{s}_c = \mathbf{c} + 1/2\mathbf{a} + \mathbf{a} + 1/2\mathbf{b} + \mathbf{b} + 1/2\mathbf{c} = 3/2(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

12. Legyen $\mathbf{a} = (2,-3,1)$, $\mathbf{b} = (7,4,z)$. Határozzuk meg z értékét abból a feltételből, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

13. Számítsa ki az $\mathbf{a} = (2,-2,5)$ vektor iránykoszinuszait.

14. Számítsuk ki az $A(2,3,6)$ és $B(-1,8,-6)$ pontok közötti távolságot.

15. Számítsuk ki az $A(3,1,1)$, $B(-1,4,7)$, $C(6,7,-2)$ csúcspontú háromszög területét és a háromszög koordinátasíkokra eső vetületeinek a területét.

16. Határozzuk meg u értékét úgy, hogy az $\mathbf{a} = (1,0,3)$, $\mathbf{b} = (-2,1,0)$, $\mathbf{c} = (u,-1,2)$ vektorok komplanárisak legyenek (egy síkba essenek, vagy ami ugyanazt jelenti, egy közös síkkal párhuzamosak legyenek).

17. Számítsuk ki az $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,5,2)$ csúcspontú gúla térfogatát.

18. Legyen $\mathbf{a} = (2,-1,4) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$. Az $\mathbf{e}_1$ bázisvektor helyett vezessük be a $\mathbf{b} = (1,3,-2) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ vektort (az $\mathbf{e}_1$ vektort cseréljük ki a $\mathbf{b}_1$ vektorral). Számítsuk ki az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b},\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ bázisra vonatkozó koordinátáit.

19. Írjuk fel a $\mathbf{v} = (-3,7,11) = -3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3$ vektor $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ bázisra vonatkozó koordinátáit, ha $\mathbf{b}_1 = (1,3,-2)$, $\mathbf{b}_2 = (0,2,5)$, $\mathbf{b}_3 = (4,0,-3)$.

20. Bontsuk fel az $\mathbf{a} = (2,-1,3)$ vektort egy $\mathbf{b}$ irányú $\mathbf{v}$ és arra merőleges $\mathbf{u}$ összetevőre, ha $\mathbf{b} = (-1,2,-3)$.

21. Számítsuk ki az $O(0,0)$, $A(3,-3)$, $B(5,-1/2)$, $C(7,3)$,$D(3,4)$ csúcspontú ötszög területét.

22. Legyen $\mathbf{a} = (2,y,z)$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Határozzuk meg y és z értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}$ vektor hossza $\sqrt{14}$ legyen, és az $\mathbf{a}$ vektor merőleges legyen a $\mathbf{b}$ vektorra. Ezután számítsuk ki a két vektor által kifeszített háromszög területét.

23. Legyen $\mathbf{e}$ egységvektor és $\mathbf{p}$ tetszőleges vektor.Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbf{ep})^2 + |\mathbf{e} \times \mathbf{p}|^2 = \mathbf{p}^2$.

24. Írjunk fel egy olyan vektort, amely felezi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által közrezárt szöget.

25. Igazoljuk, hogy bármely négyszög oldalainak felezőpontjai egy paralelogrammát alkotnak.

26. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogrammánál az átlók hosszának négyzetösszege egyenlő két szomszédos oldal hosszának kétszeres négyzetösszegével.

27. Legyen két pont helyvektora $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$. Írjuk fel a két pont által meghatározott szakasz felező ill. harmadoló pontjainak helyvektorát.

28. Egy háromoldalú gúla egy csúcsból kiinduló három élvektora: $\mathbf{a} = (1,2,0)$, $\mathbf{b} = (2,3,1)$, $\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3)$. Határozzuk meg a $\mathbf{c}$ vektort úgy, hogy az merőleges legyen $\mathbf{a}$-ra is és $\mathbf{b}$-re is, a gúla térfogata pedig 4 egység legyen!

29. Egy háromszög csúcspontjai $P_1(0,2,-1)$, $P_2(-3,4,1)$, $P_3(2,-4,0)$. Írjunk fel egy olyan vektort, amely merőleges a háromszög síkjára, abszolút értéke pedig a háromszög területének mérőszáma.

30. Számítsuk ki az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ szorzat értékét.

31. Számítsuk ki a $T = |(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|$ értéket. Mi az eredmény geometriai jelentése?

32. Oldjuk meg az alábbi egyenletrenszert:

$$5x - 3y + z = 0,$$
$$x + 2y - 3z = 11,$$
$$2x + y + 4z = 3.$$

33. Az előző feladat megfogalmazható úgy is, hogy felbontjuk a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ irányú összetevőkre. A megoldás:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{b}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{b}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_3.$$

Ezt felhasználva, bontsuk fel a $\mathbf{v} = (2,-1,1)$ vektort $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ irányú összetevőkre, ha $\mathbf{a} = (0,1,0)$, $\mathbf{b} = (1,-1,2)$, $\mathbf{c} = (0,3,2)$.

ÚTMUTATÁSOK

12. A két vektor skaláris szorzata nulla, így $z = -2$.

13. Az iránykoszinuszok az $\mathbf{a}^0$ egységvektor koordinátái. Mivel

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{33}}(2,-2,5), \text{ ezért } \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{33}}, \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{33}},$$

$$\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{33}}.$$

(Ellenőrzés: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.)

14. A keresett távolság a $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-3,5.-12)$ vektor abszolút értéke: $d = \sqrt{178}$.

15. A háromszög területe fele a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területének. A két oldalvektor vektoriális szorzata:

$\mathbf{v} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (-45,6,-33)$. A háromszög területe: $\frac{1}{2}|\mathbf{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{3150}$. A vetületek területe az $1/2\mathbf{v}$ vektor komponenseinek abszolút értéke. A z tengelyre merőleges (vagyis az xy) koordinátasíkon lévő vetület területe 33/2. Az y ill. x tengelyre merőleges síkon lévő vetületek területe 3 ill. 45/2.

16. A három vektor vegyes szorzatának nullával kell egyenlőnek lennie. Ez a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ u & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ egyenlet megoldására vezet. Innen $u = 8/3$.

17. Mivel az egyik csúcspont az origó, a gúla három oldalvektora az A,B,C pontokhoz tartozó három helyvektor. A gúla térfogata egyhatoda a paralelepipedon térfogatának. Mivel ennek térfogata éppen 1, ezért a gúla térfogata 1/6.

18. Legyenek az új koordináták λ,μ,ν, azaz legyen

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_3.$$

Kihasználva azt, hogy $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ és $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, a

$2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 = \lambda(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) + \mu\mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_3$ vektoregyenletet kapjuk. Ebből a

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda, \\ -1 &= 3\lambda + \mu, \\ 4 &= -2\lambda + \nu \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ennek megoldása: $\lambda = 2$, $\mu = -7$, $\nu = 8$. Ezek az új koordináták, azaz

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{b} - 7\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3.$$

19. Itt mind a három bázisvektort ki kell cserélni a $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ vektorokkal. A feladat úgy is megfogalmazható, hogy írjuk fel a $\mathbf{v}$ vektort a $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2 + \nu\mathbf{b}_3$ alakban. Az előző feladat megoldási menetét használhatjuk. Az eredmény: $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = -1$. Ezek az új koordináták.

Ellenőrzés: $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = (1,3,-2) + 2(0,2,5) - (4,0,-3) = (-3,7,11)$.

20. A $\mathbf{b}$ irányú összetevő (l. az 5. példát):

$\mathbf{v} = (\mathbf{a}\mathbf{b}^0)\mathbf{b}^0 = (13/14, -26/14, 39/14)$. Az arra merőleges összetevő:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{v} = \left(\frac{15}{14}, \frac{12}{14}, \frac{3}{14}\right).$$

21. Az ötszög az (xy) koordinátasíkban van. Az OB és OC átló három darab háromszögre bontja. Ezek területét egyenként számítjuk, az oldalvektorok vektoriális szorzatát felhasználva:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (27/2)\mathbf{k} = (0,0,27/2), \quad \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (0,0,37/2), \quad \mathbf{c} \times \mathbf{d} = (0,0,19).$$

A háromszögek területe rendre 27/4,37/4,19/2. Az ötszög területe ezek összege: 25.5.

22. $|\mathbf{a}|^2 = 14 = 4 + y^2 + z^2$, $\mathbf{ab} = 0 = 4y - 2z$. Két megoldás van: $y_1 = \sqrt{2}$, $z_1 = 2\sqrt{2}$; $y_2 = -\sqrt{2}$, $z_2 = -2\sqrt{2}$. Mivel a két vektor merőleges egymásra, ezért a háromszög területe: $T = 1/2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = 1/2\sqrt{14}\sqrt{20} = \sqrt{70}$.

23. Legyen $|\mathbf{p}| = p$. Használjuk ki, hogy $|\mathbf{e}| = 1$. Ekkor

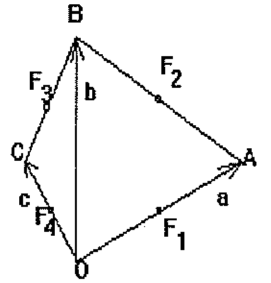
$$(1.p\cos\alpha)^2 + (1.p\sin\alpha)^2 = p^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = p^2.$$

24. Az $\mathbf{a}^0 + \mathbf{b}^0$ vektor felezi a szöget.

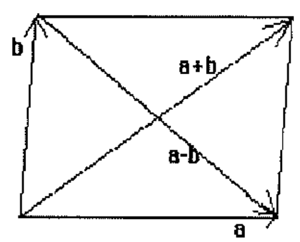
25. Használjuk az 5.ábra jelöléseit. Az F_1, F_2, F_3, F_4 felezőpontokhoz tartozó helyvektorok:

$$\mathbf{f}_1 = 1/2\mathbf{a}$$
$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{a} + 1/2(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 1/2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$
$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{b} + 1/2(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 1/2(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$
$$\mathbf{f}_4 = 1/2\mathbf{c}.$$

Az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög két szemközti oldalvektora: $\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2 = 1/2(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{f}_4 - \mathbf{f}_1$. Ez viszont azt jelenti,hogy ez a négyszög paralelogramma.



5. ábra



6. ábra

Megjegyzés. Nem használtuk fel azt, hogy az O,A,B,C pontok egy síkba esnek. Az állítás tehát térbeli négyszögre is igaz.

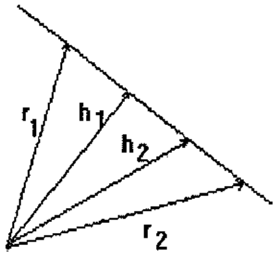
26. A 6.ábra szerint:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) =$$
$$= 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2).$$

27. A felezőpont helyvektora: $1/2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$. A két harmadoló pont helyvektora

(7.ábra):

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{r}_1 + \frac{1}{3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{3}, \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{2}{3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{\mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2}{3}.$$



7.ábra

28. A feltételeket kihasználva, az

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{ac} &= 0 \\ \mathbf{bc} &= 0 \\ 1/6|\mathbf{abc}| &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 - c_2 - c_3 &= \pm 24 \end{aligned}\right\} \text{egyenletrendszert kell}$$

megoldani. A megoldás: $\mathbf{c} = \pm(8,-4,-4)$.

29. A háromszög két oldalvektora: $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (-3,2,2)$ és $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (2,-6,1)$. A keresett vektor: $\mathbf{v} = 1/2[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 7/2(2,1,2)$. A $-\mathbf{v}$ vektor is megoldás.

30. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b} = 0$, ugyanis $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra is és $\mathbf{b}$-re is.

31. A műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy $T = 2|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Ebből az olvasható ki, hogy bármely paralelogramma átlóival szerkesztett paralelogramma területe az eredetinek kétszerese.

32. Legyen $\mathbf{a}_1 = (5,1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,2,1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,-3,4)$, $\mathbf{b} = (0,11,3)$. Ekkor az egyenletrendszer így írható: $x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.Mint látható, a feladat a $\mathbf{b}$ vektor felírása az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Szorozzuk meg a vektoregyenlet mindkét oldalát skalárisan az $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ vektorral.Kihasználva azt,hogy $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ merőleges az $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorra, a szorzás eredménye: $x[\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)] = \mathbf{b}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$.Innen $x = \dfrac{\mathbf{b}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} = \dfrac{\mathbf{b}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}$. Hasonló módon kapjuk az y ill. z ismeretlent $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3$-mal ill. $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$-vel való szorzás után: $y = \dfrac{\mathbf{b}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}$, $z = \dfrac{\mathbf{b}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}$. A vegyes szorzatokat kiszámítva, $x = 2$, $y = 3$,$z = -1$.

33. Most $\mathbf{b} = \mathbf{v}$, az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ szerepét pedig rendre az $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vektor veszi át. A vegyes szorzatokat kiszámítva, a megoldás: $\mathbf{v} = 11/2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3/2\mathbf{c}$. Ugyanez koordinátás alakban: $(2,-1,1)=(0,11/2,0)+(2,-2,4)+(0,-9/2,-3)$.

FELADATOK

34. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = (1, \sqrt{2},-1)$ vektor abszolút értékét és a koordinátatengelyekkel bezárt szögeit.

35. Számítsuk ki a **v** vektor koordinátáit, ha abszolút értéke 10, a koordinátatengelyekkel bezárt szögei pedig $\alpha = 135°$, $\beta = 60°$, $0 < \gamma < 90°$.

36. Számítsuk ki a **v** vektor koordinátáit, ha abszolút értéke $\sqrt{27}$, a koordinátatengelyekkel közrezárt szögei pedig egyenlők.

37. Legyen $\mathbf{a} = (3,2,-5)$, $\mathbf{b} = (-1,4,1)$, $\mathbf{c} = (6,0,2)$. Számítsuk ki az alábbiakat:

a) $\mathbf{a}^0, \mathbf{b}^0, \mathbf{c}^0$; b) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;
c) $2(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})$; d) $\mathbf{ab}$;
e) $(\mathbf{bc})\mathbf{a}$; f) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
g) $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$; h) $\mathbf{abc}$.

38. Egy háromszög csúcsai $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$, $C(4,0,-5)$. Számítsuk ki a háromszög kerületét.

39. Számítsuk ki az alábbi vektorpárok által közrezárt szöget:

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$; b) $(2,-5,7)$, $(5,2,0)$;
c) $(1,2,3)$, $(2,4,6)$, d) $(5,-3,1)$, $(-5,3,-1)$;
e) $(2,1,3)$, $(3,2,1)$.

40. Számítsuk ki az $A(4,1,1)$, $B(-2,-1,5)$, $C(0,2,6)$ háromszög C csúcsnál lévő szögét.

41. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (6,2,1)$ és $\mathbf{b} = (4,3,5)$ helyvektorok által kifeszített paralelogramma csúcsait.

42. Egy paralelogramma egymás után következő három csúcsa: $A(4,1,2)$, $B(0,0,0)$, $C(2,-1,3)$. Határozzuk meg a negyedik csúcsot. Számítsuk ki a paralelogramma átlóinak hosszát.

43. Egy szakasz végpontjai $A(2,-1,4)$ és $B(-3,5,7)$. Melyik pont osztja a szakaszt 6:7 arányban? Mennyi ennek az osztópontnak az A ill. B ponttól való távolsága?

44. Határozzuk meg azokat a vektorokat, amelyek merőlegesek az $\mathbf{a} = (2,-2,1)$ vektorra.

45. Egy négyzet két szomszédos csúcsa $A(1,2)$ és $B(4,7)$. Határozzuk meg a harmadik és negyedik csúcsot.

46. Számítsuk ki az **a** vektor **b** vektorra eső vetületének hosszát és vetületvektorát, majd ugyanezeket fordítva, ha $\mathbf{a} = (1,4,3)$, $\mathbf{b}=(2,5,-1)$.

47. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (2,-10,3)$ vektort az $\mathbf{a} = (0,4,-1)$ és $\mathbf{b} = (5,-3,2)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

48. Bontsuk fel az $\mathbf{a} = (-4,5,2)$ vektort a $\mathbf{b} = (2,-1,3)$ vektor irányába eső és arra merőleges összetevőkre.

49. Számítsuk ki az $A(1,2,3)$, $B(-1,4,5)$, $C(6,0,-2)$, $D(0,-2,8)$ csúcspontú gúla térfogatát.

50. Számítsuk ki az $A(0,1,2)$, $B(3,0,4)$, $C(2,3,0)$ háromszög területét.

51. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{a} = (2,-1,4)$, $\mathbf{b} = (-3,2,5)$, $\mathbf{c} = (12,-7,2)$ vektorok egy síkba esnek.

52. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{a} = (2,1,4)$, $\mathbf{b} = (5,3,2)$, $\mathbf{c} = (3,6,7)$ vektorok lineárisan függetlenek. Fejezzük ki a $\mathbf{d} = (1,1,1)$ vektort $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként.

53. Határozzuk meg y és z értékét úgy, hogy az $A(2,7,1)$, $B(4,9,3)$, $C(5,y,z)$ pontok egy egyenesbe essenek.

54. Melyik az a $\mathbf{c}$ vektor, amely merőleges az $\mathbf{a} = (3,4,-5)$ és $\mathbf{b} = (2,-3,6)$ vektorokra, és amelynek abszolút értéke $\sqrt{577}$.

55. Egy háromszög oldalfelező pontjai $F_1(-2,1)$, $F_2(2,3)$, $F_3(4,1)$. Írjuk fel a csúcsokhoz tartozó helyvektorokat.

56. Mekkora szöget zárnak be a $\mathbf{c}$ vektorral azok a vektorok, amelyek mind az $\mathbf{a}$ mind a $\mathbf{b}$ vektorra merőlegesek, ha $\mathbf{a} = (1,-1,3)$, $\mathbf{b} = (2,0,1)$, $\mathbf{c} = (2,2,-1)$. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vektorok?

57. Legyen $\mathbf{a} = (1,-4,2)$, $\mathbf{b} = (2,0,1)$, $\mathbf{c} = (-1,2,2)$.

a) Az adott vektorok közül melyik kettő merőleges egymásra?

b) Számítsuk ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét és kerületét.

c) Számítsuk ki a három vektor által kifeszített gúla térfogatát és a $\mathbf{b}$ vektor végpontjához mint csúcsponthoz tartozó magasságát.

58. Írjunk fel legalább egy olyan vektort, amely az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok síkjában van és merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra.

59. Egy síkban fekszik-e a következő négy pont: $A(0,0,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,-1)$, $D(1,4,2)$?

60. Mutassuk ki, hogy a $\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ vektor merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra.

61. Bizonyítsuk be a szinusz tételt.

62. Bizonyítsuk be a Pitagorasz-tételt.

63. Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (4,6,-7)$ vektort $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ irányú összetevőkre, ha $\mathbf{a} = (3,-8,2)$, $\mathbf{b} = (1,4,0)$, $\mathbf{c} = (5,2,-3)$.

64. Milyen α mellett lesznek merőlegesek egymásra az $\mathbf{a} = (\alpha,2,3)$, $\mathbf{b} = (1,3,\alpha)$ vektorok?

MEGOLDÁSOK

34. $|\mathbf{v}| = 2$, $\alpha = 60$, $\beta = 45$, $\gamma = 120$.

35. $v_1 = -5\sqrt{2}$, $v_2 = 5$, $v_3 = 5$, $\gamma = 60$.

36. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha=\beta=\gamma \approx 54°44'$. Egy másik megoldás: $v_1 = v_2 = v_3 = -3$, $\alpha = \beta = \gamma \approx 125°16'$.

37. a) $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{38}}(3,2,-5)$, $\mathbf{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-1,4,1)$, $\mathbf{c}^0 = \frac{1}{2\sqrt{10}}(6,0,2)$;
b) $(2,6,-4)$; c) $(20,-4,-8)$; d) 0; e) $(-12,-8,20)$;
f) $(22,2,14)$; g) $(-4,-40,12)$; h) 160.

38. $\sqrt{10} + \sqrt{77} + \sqrt{101}$. **39.** a) 60°; b) 90°; c) 0°; d) 180°; e) 38° 13'.

40. 90°. **41.** (0,0,0), (6,2,1), (10,5,6), (4,3,5).

42. (6,0,5), $\sqrt{61}$, 3. **43.** $\left(-\frac{4}{13}, \frac{23}{13}, \frac{70}{13}\right)$, $\frac{6\sqrt{70}}{13}$, $\frac{7\sqrt{70}}{13}$.

44. A megoldás minden olyan $x = (x_1,x_2,x_3)$ vektor, amelyre $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

45. (−1,10) és (−4,5) vagy (9,4) és (6,−1).

46. $\mathbf{ab}^0 = 19/\sqrt{30}$, $(\mathbf{ab}^0)\mathbf{b}^0 = 1/30(38,95,-19)$; $\mathbf{ba}^0 = 19/\sqrt{26}$, $(\mathbf{ba}^0)\mathbf{a}^0 = 1/26(19,76,57)$.

47. $\mathbf{v} = -11/5\mathbf{a} + 2/5\mathbf{b}$.

48. $(-4,5,2) = \left(-1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right) + \left(-3,\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$.

49. 4. **50.** $\sqrt{42}$. **51.** $\mathbf{abc} = 0$ vagy $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

52. $\mathbf{abc} = 73 \neq 0$, $\mathbf{d} = 1/73\mathbf{a} + 10/73\mathbf{b} + 7/73\mathbf{c}$. **53.** $y = 10$, $z = 4$.

54. $\mathbf{c} = \pm\sqrt{2}/2(9,-28,-17)$. **55.** (8,3), (0,−1), (−4,3).

56. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{15}$, $\alpha \approx 68{,}58°$. Mivel $\alpha \neq 90°$, a három vektor nincs egy síkban, ezért lineárisan függetlenek.

57. a) A **b** és **c** vektorok.
b) $T = \sqrt{164}$, $K = 2\sqrt{21} + 6$. c) $V = 13/3$, $m = 13/\sqrt{41}$.

58. A $\mathbf{b} - (\mathbf{ba}^0)\mathbf{a}^0$ vektor vagy ennek állandószorosa ilyen.

59. $\mathbf{bcd} = 0$, tehát egy síkban vannak.

60. Szorozzuk meg a $\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ vektort skalárisan az **a** vektorral.

61. A háromszög oldalvektorai legyenek **a**,**b**,**c** és legyen $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$. Mindkét oldalt szorozva balról vektoriálisan az **a** vektorral, az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ egyenlőséghez jutunk. Vegyük mindkét oldal abszolút értékét.

62. L. a 10. példát és legyen $\gamma = 90°$.

63. $\mathbf{v} = -\mathbf{a} - \frac{4}{3}\mathbf{b} + \frac{5}{3}\mathbf{c}$. **64.** $\alpha = -3/2$.

2. A vektoralgebra néhány geometriai alkalmazása

Egy alakzat, például egyenes vagy sík, egyenletén olyan egyenletet értünk, amelyet az alakzat minden pontjának helyvektora ill. koordinátái kielégítenek, de más pontok helyvektora ill. koordinátái nem.

2.1. *Az egyenes egyenletei*

Az egyenest két pontja meghatározza. Ugyancsak meghatározza egy pontja és egy vele párhuzamos vektor, az ún. *irányvektor*.

Legyen a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pont helyvektora $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$. A P_0 pontra illeszkedő, a $\mathbf{v} = (a,b,c)$ vektorral párhuzamos egyenes egyenlete:

(29) $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

ahol a t paraméter minden valós értéket felvehet. Ez az egyenlet az egyenes *paraméteres vektoregyenlete*. Az $\mathbf{r}$ vektor az egyenes ún. futó pontjának helyvektora.

Ha $\mathbf{r} = (x,y,z)$, akkor a **(29)** egyenlet

$$\boxed{(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t.(a,b,c)}$$

alakban írható fel. Innen

(30) $$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}}$$

Ez az egyenletrendszer az egyenes *(skaláris) paraméteres egyenletrendszere*.

Ha az a,b,c koordináták egyike sem nulla, akkor

(31) $$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

Az egyenesnek ez az egyenletrendszere nem tartalmaz paramétert. Mivel az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral, ezért

(32) $$\boxed{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = 0}$$

Ez egy újabb egyenlete ugyanannak az egyenesnek. Ha az egyenes két pontjával van megadva, legyenek ezek például P_1 és P_2, akkor irányvektornak választhatjuk a

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

vektort, ahol $\mathbf{r}_1$ ill. $\mathbf{r}_2$ a P_1 ill. P_2 pont helyvektora, míg $\mathbf{r}_0$ lehet akár az $\mathbf{r}_1$ akár az $\mathbf{r}_2$ vektor.

PÉLDÁK

65. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0(5,1-3)$ pontra és párhuzamos a $\mathbf{v} = (7,-4,1)$ vektorral.

M: Az egyenes **(29)** alakú egyenlete:

$$\mathbf{r} = (5,1,-3) + t(7,-4,1).$$

Innen a **(30)** alakú egyenletrendszer:

$$x = 5 + 7t,$$
$$y = 1 - 4t$$
$$z = -3 + t.$$

A **(31)** alakú egyenletredszer:

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}.$$

66. Legyen egy egyenes egyenlete: $x = -y = 1/3z + 4$. Határozzuk meg az egyenes irányvektorát.

M: Írjuk fel az adott egyenletrendszert **(31)** alakban:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+12}{3}.$$

Innen látható, hogy az irányvektor: $\mathbf{v} = (1,-1,3)$.

67. Írjuk fel a P_0 $(3,-2,1)$ pontra illeszkedő és a $\mathbf{v} = (-1,3,-4)$ vektorral párhuzamos egyenes egyenletét, a **(32)** egyenletet használva.

M: Mivel $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x-3,y+2,z-1)$, a **(32)** egyenlet:

$$(x-3,y+2,z-1) \times (-1,3,-4) = \mathbf{0}.$$

A vektoriális szorzást nem érdemes elvégezni. Ugyanis a szorzat csak úgy lehet 0, ha a két vektor egymással párhuzamos, vagyis ha egymásnak konstansszorosa. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t(-1,3,-4)$, azaz

$$x - 3 = -t, \quad y + 2 = 3t, \quad z - 1 = -4t.$$

Innen az egyenes **(30)** alakú egyenletrendszere:

$$x = 3 - t,\ y = -2 + 3t,\ z = 1-4t.$$

2.2. *A sík egyenletei*

A síkot három, nem egy egyenesre eső pontja meghatározza. Ugyancsak meghatározza egy pontja és egy reá merőleges vektor, az ún. *normálvektor*.
A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontra illeszkedő, az $\mathbf{n} = (A,B,C)$ vektorra merőleges sík egyenlete:

(33) $$\boxed{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0}$$

ahol $\mathbf{r}$ a sík tetszőleges, ún. futó pontjának, $\mathbf{r}_0$ pedig a P_0 pont helyvektora.
A **(33)** egyenlet

(34) $$\boxed{\mathbf{rn} - D = 0}$$

alakban is felírható, ahol $D = \mathbf{r}_0\mathbf{n} = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.
Ha $\mathbf{r} = (x,y,z)$, akkor a **(33)** ill. **(34)** egyenlet koordinátás alakja

(35) $$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

ill.

(36) $$\boxed{Ax + By + Cz - D = 0}$$

Ez utóbbi a sík *általános egyenlete*.
Osszuk el a **(34)** egyenlet mindkét oldalát a normálvektor abszolút értékével.Ekkor a sík

(37) $$\boxed{\frac{\mathbf{rn}}{|\mathbf{n}|} - \frac{D}{|\mathbf{n}|} = 0}$$

ún. *Hesse-féle normálegyenletét* kapjuk. Ennek koordinátás alakja:

(38) $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(Ax + By + Cz - D) = 0}$$

A síknak az origótól való távolsága:

(39) $$\boxed{\frac{|D|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

A síkot meghatározza egy pontja és két olyan vektor is, amelyek a síkkal párhuzamosak, de egymással nem. A P_0 pontra illeszkedő, $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenlete:

(40) $$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}}$$

ahol a t és τ paraméterek minden valós értéket felvehetnek.
A síknak ez a *kétparaméteres vektoregyenlete* skaláris alakban:

(41) $$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 + \tau v_1\,, \\ y &= y_0 + tu_2 + \tau v_2\,, \\ z &= z_0 + tu_3 + \tau v_3\,. \end{aligned}}$$

Ennek a síknak az egyenlete felírható **(33)** alakban is, hiszen $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.Ha a sík három pontjával van megadva, legyenek ezek P_1,P_2,P_3, akkor annak normálvektora:

$$\boxed{\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1),}$$

ahol $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$ rendre a P_1,P_2,P_3 pont helyvektora.

PÉLDÁK

68. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0(2,5,-8)$ pontra, normálvektora pedig az $\mathbf{n} = (3,-1,4)$ vektor.

M: A sík **(35)** alakú egyenlete:

$$3(x-2) - (y-5) + 4(z+8) = 0, \text{ azaz}$$
$$3x - y + 4z + 31 = 0.$$

69. Írjuk fel a $2x - 5y + z - 16 = 0$ sík Hesse-féle normálegyenletét.Mekkora a síknak az origótól való távolsága?

M: A **(38)** egyenletet használjuk.Mivel $\mathbf{n} = (2,-5,1)$, ennek abszolút értéke

$\sqrt{30}$. Tehát a sík Hesse-féle normálegyenlete: $\frac{2}{\sqrt{30}}x-\frac{5}{\sqrt{30}}y+\frac{1}{\sqrt{30}}z-\frac{16}{\sqrt{30}}=0$

A síknak az origótól való távolsága $16/\sqrt{30}$.

70. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a P_0 (2,−1,4) pontra és párhuzamos az $\mathbf{u}=(1,-1,2)$ és $\mathbf{v}=(3,0,2)$ vektorokkal.

M: A sík **(41)** alakú egyenletrendszere:

$$x=2+t+3\tau,$$
$$y=-1-t+0\tau,$$
$$z=4+2t+2\tau.$$

Iktassuk ki a t és τ paramétereket. A második egyenletből $t=-y-1$. Helyettesítsük ezt be mind az első, mind a harmadik egyenletbe. Ekkor

$$x=-y+1+3\tau,$$
$$z=-2y+2+2\tau.$$

Ebből a két egyenletből most iktassuk ki a τ paramétert. Például a második egyenletből $\tau=1/2z+y-1$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe, majd összevonások után a

$$2x-4y-3z+4=0$$

egyenletet kapjuk, ami nem más, mint a sík **(36)** alakú egyenlete.

A feladatot most oldjuk meg úgy, hogy a sík **(33)** alakú egyenletén keresztül jutunk eredményre. A normálvektor:

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}=(-2,4,3).$$

Mivel $\mathbf{r}_0=(2,-1,4)$, ezért felírható a **(35)** egyenlet, vagyis a **(33)** egyenlet koordinátás alakja:

$$-2(x-2)+4(y+1)+3(z-4)=0.$$

A szorzások és összevonások elvégzése, majd (−1)-gyel való szorzás után a $2x-4y-3z+4=0$ egyenletet kapjuk, ami megegyezik a másik módszerrel kapott egyelettel.

2.3. *Egyenes és sík döféspontja*

Egyenes és sík döféspontja abból a feltételből határozható meg, hogy a döféspont az egyenesnek és a síknak közös pontja.

Írjuk fel a sík egyenletét

$$Ax+By+Cz-D=0$$

alakban, az egyenes egyenletrendszere pedig legyen

$$x = x_0 + at,$$
$$y = y_0 + bt,$$
$$z = z_0 + ct.$$

Helyettesítsük be ezeket az x,y,z kifejezéseket a sík **(36)** egyenletébe. Az így kapott egyenletet oldjuk meg t-re. Ha végtelen sok megoldás van, akkor az egyenes benne fekszik a síkban. Ha nincs megoldás, akkor nincs döféspont, az egyenes párhuzamos a síkkal. Ha egyetlen megoldás van, akkor van döféspont. Ezt a t értéket helyettesítsük be a **(30)** egyenletrendszer mindegyik egyenletébe. Így megkapjuk a döféspont koordinátáit.

PÉLDÁK

71. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = (3,-2,1) + t.(-1,3,-4)$ egyenes és a $2x - 5y + 2z + 57 = 0$ sík döféspontját.

M: Az egyenes skaláris paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 3 - t,\ y = -2 + 3t,\ z = 1 - 4t.$$

Behelyettesítve ezeket a sík egyenletébe, a $2(3 - t) - 5(-2 + 3t) + 2(1 - 4t) + 57 = 0$ egyenletet kapjuk. Innen $t = 3$. Ezt visszahelyettesítve az egyenes egyenletrendszerébe: $x = 3 - 3 = 0$, $y = -2 + 9 = 7$, $z = 1 - 12 = -11$. Tehát a döféspont: $D(0,7,-11)$.

2.4. *Pont és sík távolsága*

A pontból a síkra bocsátott merőleges egyenes biztosan döfi a síkot egy pontban. Ennek a döféspontnak és az eredeti pontnak a távolsága lesz *a pont és a sík távolsága.*

Ezt a feladatot azonban egyszerűbben is megoldhatjuk, a sík Hesse-féle normálegyenletét felhasználva. Legyen ugyanis a P_1 pont helyvektora $\mathbf{r}_1$. Mivel $\mathbf{r}_1\mathbf{n}^0$ nem más mint az $\mathbf{r}_1$ vektornak az $\mathbf{n}$ vektorra eső (előjeles) vetületi hossza, $\frac{D}{|\mathbf{n}|}$ pedig a síknak az origótól való (előjeles) távolsága, ezért a $P_1(x_1,y_1,z_1)$ pont és a sík távolsága:

$$\boxed{d = \left|\mathbf{r}_1\mathbf{n}^0 - \frac{D}{|\mathbf{n}|}\right| = \left|\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} - \frac{D}{|\mathbf{n}|}\right|}$$

Ugyanez koordinátás alakban:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \qquad \textbf{(42)}$$

PÉLDÁK

72. Számítsuk ki a $P_1(3,1-2)$ pont és a $2x - 4y + 5z - 10 = 0$ sík távolságát.

M: Használjuk a **(42)** formulát, azaz írjuk fel a sík Hesse-féle normálegyenletét, majd abba x,y,z helyére helyettesítsük be a P_1 pont koordinátáit. A Hesse-féle normálegyenlet: $1/\sqrt{45}(2x - 4y + 5z - 10) = 0$. A távolság: $d = 1/\sqrt{45}\,|\,2\cdot 3 - 4\cdot 1 + 5\cdot(-2) - 10\,| = 6/\sqrt{5}$.

2.5. *Két sík által közrezárt szög*

Két sík egymással *közrezárt szöge* egyenlő a normálvektoruk által közrezárt szöggel, vagy annak kiegészítő szögével (e kettő közül a kisebbikkel).

PÉLDÁK

73. Számítsuk ki a $4x + 7y + 11z - 8 = 0$ és a $-11x + 4y - 7z + 5 = 0$ síkok által közrezárt szöget.

M: A két normálvektor: $\mathbf{n}_1 = (4,7,11)$, $\mathbf{n}_2 = (-11,4,-7)$. Az általuk közrezárt szög koszinusza

$$\cos\varphi = \frac{-44 + 28 - 77}{\sqrt{186}\cdot\sqrt{186}} = \frac{-93}{186} = -\frac{1}{2},$$

tehát $\varphi = 120°$. A két sík által közrezárt szög ennek a kiegészítő szöge, azaz 60°.

74. A $4x + 2y - 2z + 1 = 0$ és $x + 3y + 5z - 7 = 0$ síkok merőlegesek egymásra. Normálvektoruk ugyanis $\mathbf{n}_1 = (4,2,-2)$, $\mathbf{n}_2 = (1,3,5)$, és ezek skaláris szorzata $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 4 + 6 - 10 = 0$, aminek következtében a két normálvektor merőleges egymásra. Így a síkok is merőlegesek egymásra.

2.6. *Két egyenes szöge*

Két (kitérő) egyenes szögén az irányvektoruk által közrezárt szöget vagy annak kiegészítő szögét értjük (e kettő közül a kisebbiket).

PÉLDÁK

75. Számítsuk ki az $x = 2 - t$, $y = -4 + 2t$, $z = -t$ és $x = -y/2 = -z/2$ egyenesek szögét.

M: A két irányvektor: $\mathbf{v}_1 = (-1,2,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-2,-2)$. Az általuk közrezárt szög koszinusza

$\cos\varphi = \dfrac{-1-4+2}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}$. Innen $\varphi \approx 114°06'$. A keresett szög ennek a kiegészítő szöge, azaz $65°54'$.

2.7. *Egyenes és sík szöge*

Egyenes és sík szöge egyenlő a sík normálvektora és az egyenes által közrezárt hegyes szög pótszögével.

PÉLDÁK

76. Számítsuk ki az $\mathbf{r} = (3,1,-7) + t.(2,1-,2)$ egyenes és $x + 2y + z = 0$ sík szögét.

M: A sík normálvektora: $\mathbf{n} = (1,2,1)$. Az egyenes irányvektora: $\mathbf{v} = (2,1,-2)$. E két vektor által közrezárt szög koszinusza: $\cos\varphi = \dfrac{2+2-2}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3\sqrt{6}}$. Innen $\varphi \approx 74°12'$. Ennek pótszöge kb. $15°48'$ a keresett szögérték.

2.8 *Pont és egyenes távolsága*

A P_1 pontnak az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenestől való távolsága nem más, mint a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ vektorok által kifeszített paralelogramma $|\mathbf{v}|$ alaphoz tartozó magassága. Igy a keresett távolság:

(43) $$\boxed{d = \frac{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|}{|\mathbf{v}|}}$$

PÉLDÁK

77. Számítsuk ki a $P_1(1,2,-1)$ pont és $\mathbf{r} = (-1,3,-5) + t.(3,-7,11)$ egyenes távolságát.

M: Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (3,-7,11)$, továbbá $\mathbf{r}_0 = (-1,3,-5)$, $\mathbf{r}_1 = (1,2,-1)$,
$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = (2,-1,4)$. A **(43)** formulában szereplő vektoriális szorzat:

$$\mathbf{v}\times(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -7 & 11\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=(-17,10,11).$$ Ennek abszolút értéke $\sqrt{510}$, míg $|\mathbf{v}|=\sqrt{179}$. Így a keresett távolság: $d=\sqrt{510}/\sqrt{179}$.

2.9. *Két egyenes távolsága*

Két kitérő egyenes *normáltranszverzálisa* olyan egyenes, amely mindkét egyenest merőlegesen metszi. A két egyenes távolságán e két metszéspont közötti távolságot értjük.

Az $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+t\mathbf{v}_2$ egyenesek normáltranszverzálisának irányvektora: $\mathbf{e}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$. Ebből következően a két egyenes távolsága:

(44) $$\boxed{d=(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{e}^0}$$

PÉLDÁK

78. Számítsuk ki az $\mathbf{r}=(2,-1,0)+t.(1,3,-1)$ és $\mathbf{r}=(1,-3,2)+t.(-2,1,0)$ egyenesek távolságát.

M: A két irányvektor: $\mathbf{v}_1=(1,3,-1)$, $\mathbf{v}_2=(-2,1,0)$. Ezek vektoriális szorzata:

$$\mathbf{e}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,2,7).$$

Ennek egységvektora: $\mathbf{e}^0=1/\sqrt{54}\,(1,2,7)$. Mivel $\mathbf{r}_1=(2,-1,0)$, $\mathbf{r}_2=(1,-3,2)$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=(-1,-2,2)$ így a két egyenes távolsága:

$$d=1/\sqrt{54}\,|-1-4+14|=9/\sqrt{54}=3/\sqrt{6}.$$

2.10. *Két sík metszésvonala*

A *metszésvonal* merőleges mindkét sík normálvektorára, ezért annak irányvektora *a két normálvektor vektoriális szorzata*. Egy pontját abból a feltételből határozzuk meg, hogy az rajta van mindkét síkon. Egy pont és az irányvektor ismeretében a metszésvonal egyenlete felírható.

PÉLDÁK

79. Írjuk fel az $x + 2y - 3z + 4 = 0$ és $2x - y + z - 1 = 0$ síkok metszésvonalának egyenletét.

M: A két normálvektor: $\mathbf{n}_1 = (1,2,-3)$, $\mathbf{n}_2 = (2,-1,1)$. Így a metszésvonal irányvektora:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-7,-5).$$

A metszésvonal egy pontjának kordinátáját tetszőlegesen vehetjük fel. Legyen ez például $z = 0$. Ezt a síkok egyenletébe helyettesítve, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$x + 2y + 4 = 0,$$
$$2x - y - 1 = 0.$$

Ennek megoldása: $x = -2/5$, $y = -9/5$. A metszésvonal egyik pontja tehát a $P_0(-2/5,-9/5,0)$. Így a metszésvonal egyenlete: $\mathbf{r} = (-2/5,-9/5,0) + t.(-1-7,-5)$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

80. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az origón és merőleges a $28x - 13y + 4z - 5 = 0$ síkra.

81. Vegyünk fel a térben két olyan pontot, amelyek rajta vannak az $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+3}{4} = z - 8$ egyenesen.

82. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón (illeszkedik az origóra) és merőleges az $x = 2y = -6z$ egyenesre.

83. Vegyünk fel a $8x - 5y + 12z - 20 = 0$ síkon egy pontot.

84. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0\ (1,0,-5)$ pontra és párhuzamos az alábbi két síkkal:

$$3(x + 2) + 2(y - 5) + 10 = 0,$$
$$x + 2z + 8 = 0.$$

85. Írjuk fel a $P_1(2,3,1)$, $P_2(-4,2,-5)$, $P_3(0,1,0)$ pontokra illeszkedő sík egyenletét.

86. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0\ (5,-3/2,0)$ pontra és párhuzamos a $3x - y + 5/3z - 5 = 0$ síkkal.

87. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos az $5x - y + 2z - 7 = 0$ síkkal és kétszer akkora távolságra van az origótól mint ez a sík.

88. Milyen távolságra van a $Q(2,-1,4)$ pont a $2x - 3y + z + 8 = 0$ síktól?

89. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely a $P_0(2,7,-3)$ pontra és az

$$x = 2t - 1,\quad y = t + 4,\quad z = -3t + 2$$

egyenesre illeszkedik.

90. Vetítsük az $\mathbf{r} = (3,-2,1) + t.(-1,3-4)$ egyenest a $2x - 5y + 2z + 57 = 0$ síkra az $\mathbf{e} = (3,-1,2)$ vektorral párhuzamosan. Írjuk fel a vetületi egyenes (az árnyékegyenes) egyenletét.

91. Igazoljuk, hogy az

$$x - 3 = (y - 8)/3 = (z - 3)/4$$

és

$$4 - x = (9 - y)/2 = (9 - z)/5$$

egyenesek egy síkban vannak. Határozzuk meg a két egyenes metszéspontját.

92. Számítsuk ki az

$$x = -5 + 2t,\quad y = 1 - t,\quad z = -6 + 3t$$

egyenes és a $2x + y - 3z + 5 = 0$ sík szögének tangensét.

93. Mekkora a $P_1(2,4,-3)$ pont és $\mathbf{r} = (1,2,0) + t.(5,-3,-1)$ egyenes távolsága?

94. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az alábbi két sík metszésvonalára és felezi a két sík által közrezárt szöget(ez az ún. szögfelező sík):

$$2x + y - 2z + 4 = 0$$
$$2x - 3y + 6z - 5 = 0.$$

95. Írjuk fel az $\mathbf{r} = (3,0,-2) + t.(2,-2,-1)$ és $\mathbf{r} = (-1,2,4) + t.(-3,1,1)$ egyenesek normáltranszverzálisának egyenletét. Számítsuk ki a két egyenes távolságát.

96. Számítsuk ki az

$$x - y + 5z = 18,\quad 2x + y - z = 0,\quad x + 2y + 4z = 12$$

síkok közös metszéspontjának koordinátáit.

ÚTMUTATÁSOK

80. Az egyenes egy pontja az origó, ennek helyvektora $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$. Az irányvektor a sík normálvektora, azaz $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (28,-13,4)$.
Az egyenes **(29)** alakú egyenlete: $\mathbf{r} = t.(28,-13,4)$. A **(30)** ill. **(31)** alakú egyenletrendszere: $x = 28t,\ y = -13t,\ z = 4t$ ill. $x/28 = y/-13 = z/4$.

81. Válasszuk meg a pont egyik koordinátáját tetszőlegesen. Legyen például $z = 0$. Ekkor $y = -35$, $x = -38$. Az egyik pont tehát a $P_1(-38,-35,0)$ pont. Hasonlóan vehetünk fel újabb pontokat.

82. A sík normálvektora az egyenes irányvektora, amely most $(-6,-3,1)$. Mivel $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, ezért $D = \mathbf{r}_0\,\mathbf{n} = 0$. A sík általános egyenlete (l. a **(36)** egyenletet): $-6x - 3y + z = 0$.

83. A pont két koordinátáját tetszőlegesen választhatjuk meg. Legyen $y = 0$, $z = -1/3$. Ekkor $x = 3$. A pont tehát: $P(3,0,-1/3)$.

84. Az egyenes merőleges mindkét sík normálvektorára, vagyis párhuzamos az $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (4,-6,-2)$ vektorral. Irányvektornak vehetjük ennek 0,5-szeresét, azaz legyen $\mathbf{v} = (2,-3,-1)$. Az egyenes **(29)** alakú egyenlete: $\mathbf{r} = (1,0,-5) + t.(2,-3,-1)$.

85. A P_1,P_2,P_3 pontok helyvektorai rendre legyenek $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3$. Ekkor a sík normálvektora: $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = (-11,6,10)$. Válasszuk adott pontnak a P_3 pontot. Ekkor $D = \mathbf{r}_3\mathbf{n} = 6$, így a sík általános egyenlete: $-11x + 6y + 10z - 6 = 0$.

86. A keresett sík normálvektora ugyanaz, mint az adott sík normálvektora, azaz $\mathbf{n} = (3,-1,5/3)$. A sík egyenlete: $18x - 6y + 10z - 99 = 0$.

87. A keresett sík normálvektora megegyezik az adott sík normálvektorával, egyenletének szabad tagja pedig kétszerese az adott sík egyenletében szereplő szabad tagnak. A megoldás: $5x - y + 2z - 14 = 0$.

88. A **(42)** formula alapján: $d = \left|\dfrac{2 \cdot 2 - 3(-1) + 4 + 8}{\sqrt{14}}\right| = \dfrac{19}{\sqrt{14}}$.

89. Az egyenes egyik pontja a $P_1(-1,4,2)$ pont. Ez rajta van a síkon is. A sík párhuzamos az $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = (-3,-3,5)$ és $\mathbf{v} = (2,1,-3)$ vektorral, ezért normálvektora: $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = (4,1,3)$. A sík egyenlete: $4x + y + 3z - 6 = 0$.

90. Az árnyékegyenes egyik pontja az egyenes és sík döféspontja. Ez a $D_1(0,7,-11)$ pont. Vetítsük most az egyenes $P_0(3,-2,1)$ pontját az $\mathbf{e}$ vektorral párhuzamosan. Ehhez fel kell írni a P_0 ponton átmenő az $\mathbf{e}$ vektorral párhuzamos egyenes egyenletét. Ennek az egyenesnek a síkkal való döféspontja lesz az árnyékegyenesnek egy másik pontja. Ez a $D_2(-12,3,-9)$ pont. A D_1 és D_2 pontokra illeszkedő egyenes a keresett árnyékegyenes. Ennek egyenlete:

$$\mathbf{r} = (0,7,-11) + t.(-12,-4,2).$$

91. Ha a két egyenes egy síkban van, akkor egy-egy tetszőleges pontjukat összekötő szakasz is ugyanabban a síkban van. Legyen egyik ill. másik egyenes egy-egy pontjának helyvektora $\mathbf{r}_1$ ill. $\mathbf{r}_2$. Ekkor az $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vektorok komplanárisak (egy síkban vannak), tehát vegyes szorzatuk zérus ($\mathbf{v}_1$ az egyik, $\mathbf{v}_2$ a másik egyenes irányvektora).

Legyen $\mathbf{r}_1 = (3,8,3)$, $\mathbf{r}_2 = (4,9,9)$, tehát $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (1,1,6)$. Továbbá $\mathbf{v}_1 = (1,3,4)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-2,-5)$. A három vektor vegyes szorzata zérus, tehát a két egyenes egy síkban van. A metszéspont a két egyenes közös pontja. Ezt használjuk ki. Az első ill. második egyenes egyenletéből $x = 3 + (y - 8)/3$ ill. $x = 4 - (9 - y)/4$. Ezek egyenlők egymással. A metszéspont: $M(2,5,-1)$.

92. Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (2,-1,3)$, a sík normálvektora pedig

$\mathbf{n} = (2,1,-3)$. E két vektor által közrezárt szög koszinusza:

$$\cos\varphi = -6/14 = -3/7$$

Ha az egyenes és sík szögét α jelöli, akkor most $\alpha = \varphi - 90°$, tehát $\sin\alpha = 3/7$,

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{40}/7 \text{ ahonnan } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{\sqrt{40}}$$

93. Alkalmazzuk a **(43)** formulát, ha $\mathbf{v} = (5,-3,-1)$ és $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = (1,2,-3)$. A keresett távolság $\sqrt{486/35}$.

94. Két ilyen sík van. A szögfelező sík egy tetszőleges pontja ugyanakkora távolságra van az egyik síktól mint a másiktól. Legyen a két adott sík Hesse-féle normálegyenlete $N_1 = 0$ ill. $N_2 = 0$ ($N_i = (\mathbf{r}\mathbf{n}_i - D_i)/|\mathbf{n}_i|$, $i = 1,2$). Ha most $\mathbf{r}$ a szögfelező sík tetszőleges pontjának a helyvektora, akkor az egyik szögfelezőre $N_1 = N_2$, a másikra pedig $N_1 = -N_2$, azaz $N_1 - N_2 = 0$ ill. $N_1 + N_2 = 0$. A szögfelező síkok egyenletét tehát úgy kapjuk meg, hogy felírjuk az adott síkok Hesse-féle normálegyenletét, és azokat kivonjuk egymásból ill. összeadjuk azokat. A konkrét esetben a két szögfelező sík egyenlete:

$$1/3(2x+y-2z+4) - 1/7(2x-3y+6z-5) = 0$$
$$1/3(2x+y-2z+4) + 1/7(2x-3y+6z-5) = 0.$$

95. A normáltranszverzális irányvektora: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (2,-2,-1) \times (-3,1,1) = (-1,1,-4)$. Fektessünk át az egyik egyenesen olyan síkot, amely párhuzamos $\mathbf{v}$-vel. Ennek normálvektora $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}$. A másik egyenesnek és ennek a síknak a döféspontja lesz a normáltranszverzális egy pontja, amelynek egyenlete:

$$\mathbf{r} = (2,1,3) + t.(-1,1,-4).$$

A két egyenes távolságának számításához használjuk a **(44)** képletet. E szerint $d = \sqrt{18}$.

96. A három egyenletből álló egyenletrendszer megoldása adja a metszéspont koordinátáit: $x = 2, y = -1, z = 3$.

FELADATOK

97. Írjuk fel a $P_0(5,-21,18)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v} = (8,23,-6)$ vektorral párhuzamos egyenes egyenletét.

98. Írjuk fel a $P_0(3,17,-8)$ pontra illeszkedő és az $\mathbf{n} = (4,2,7)$ vektorra merőleges sík egyenletét. Mekkora a sík és az origó távolsága?

99. Írjuk fel az $\mathbf{r} = (2-t, 3+t, 1+2t)$ és $\mathbf{r} = (2,3,1) + t.(1,-4,3)$ egyenesekre illeszkedő sík egyenletét.

100. Írjuk fel az $\mathbf{r} = (2,3,1) + t.(-1,1,2)$ egyenes $2x - y + z + 1 = 0$ síkon lévő vetületének egyenletét, ha a vetítés a síkra merőlegesen történik.

101. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $x + 2y + 3z - 4 = 0$ síkban van és merőlegesen felezi a $P_1(4,0,0)$ és $P_2(0,2,0)$ pontok közötti szakaszt.

102. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0(1,2,3)$ ponton és merőleges a $-x + 2y + z + 3 = 0$ és $x - 3y + z = 0$ síkokra.

103. Írjuk fel a $P_1(5,3,1)$ és $P_2(2,4,6)$ pontokon átmenő és az $x + 2y + 3z - 1 = 0$ síkra merőleges sík egyenletét.

104. Írjuk fel a $P_1(1,2,3)$ és $P_2(5,6,11)$ pontok közötti szakaszt merőlegesen felező sík egyenletét.

105. Számítsuk ki a $P_1(5,3,1)$ pont és a $2x + 3y + 4z - 2 = 0$ sík távolságát. Határozza meg a P_1 pontnak a síkra vonatkozó tükörképét.

106. Határozzuk meg az $x = 2 - t$, $y = 3 - t$, $z = t$ egyenes és $\mathbf{r} = (2,3,4) + t.(1,-1,2) + \tau.(1,2,3)$ sík döféspontját.Számítsa ki az egyenes és sík szögének szinuszát.

107. Írjuk fel a $P_0(1,2,3)$ pontra és az $\mathbf{r} = (2,4,1) + t.(-1,2,3)$ egyenesre illeszkedő sík egyenletét.

108. Írjuk fel az $y + 2z = 4$ és $x - y + 3z = 0$ síkok metszésvonalán átmenő és a szögüket felező síkok egyenletét.

109. Számítsuk ki a $P_1(2,0,-1)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos egyenesnek és a $P_2(1,-3,5)$ pontnak a távolságát, ha $\mathbf{v} = (1,2,3)$.

110. Számítsuk ki a $P_1(3,-1,2)$ ponton átmenő és az $\mathbf{n} = (5,-1,3)$ vektorra merőleges síknak és a $P_2(1,0,7)$ pontnak a távolságát.

111. Számítsuk ki a $P_1(7,1,-2)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}_1 = (4,-1,3)$ vektorral párhuzamos egyenes, valamint a $P_2(5,0,-6)$ ponton átmenő és $\mathbf{v}_2 = (0,-3,5)$ vektorral párhuzamos egyenes távolságát.

112. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = (1,2,3)$ vektorral párhuzamos egyenes és az $\mathbf{n} = (-1,4,5)$ vektorra merőleges sík szögét.

113. Számítsuk ki a $P_1(2,0,-3)$ és $P_2(0,-3,2)$ pontokon átmenő egyenes és a $Q(2,-1,5)$ pont távolságát.

114. Számítsuk ki a $P_0(3,-3,5)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}_1 = (2,1,3)$, $\mathbf{v}_2(-4,5,7)$ vektorokkal párhuzamos síknak a $Q(-5,4-1)$ ponttól mért távolságát.

115. Két párhuzamos egyenes közös irányvektora $\mathbf{v} = (2,3,7)$. Az egyik egyenes átmegy az $A(4,1,5)$ ponton, a másik a $B(5,1,4)$ ponton. Számítsuk ki a két egyenes távolságát.

116. A $P_0(2,-7,4)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}_1 = (2,-1,4)$, $\mathbf{v}_2 = (-3,2,5)$ vektorokkal párhuzamos sík, valamint az $A(-5,5,3)$ ponton átmenő és a $\mathbf{v}_3 = (12,-7,2)$ irányvektorú egyenes párhuzamosak egymással. Számítsuk ki egymástól való távolságukat.

117. Számítsuk ki az $x + 2y - 5z - 30 = 0$ sík által a koordinátatengelyekből lemetszett (előjeles) távolságokat (a tengelymetszeteket).

118. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0(2,1,-1)$ ponton, és az x ill. y tengelyből 2 ill. 1 nagyságú metszeteket vág le.

119. Állapítsuk meg, hogy a $P_1(2,1,1)$ és $P_2(2,1,3)$ pontok az $x + 2y - z - 2 = 0$

sík ugyanazon oldalán vannak-e vagy sem.

120. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az $x + y - z + 1 = 0$ síktól kétszer olyan távol van mint az $x + y - z - 1 = 0$ síktól, de nem közöttük van.

121. Az egyik egyenes az $x + y = 0$ és $x - y = 2$ síkok metszésvonala, a másik az $y + z = 0$ és $y - z + 2 = 0$ síkok metszésvonala. Számítsuk ki a két egyenes szögét.

122. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(2,1,1)$ ponton és párhuzamos a $2x - y + 1 = 0$ és $y - 1 = 0$ síkokkal.

123. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $Q(1,1,2)$ ponton és párhuzamos az

$(x + 1)/2 = y - 1 = (z + 1)/2$, $x + 1 = (y - 1)/2 = z + 1$ egyenesekkel.

124. Határozzuk meg a $P(2,1,1)$ pont (merőleges) vetületét az $x + y + 3z + 5 = 0$ síkon.

125. Határozzuk meg a $2x - y + z + 1 = 0$ és $x + y - z + 1 = 0$ síkok metszésvonalának (merőleges) vetületét az $x + 2y - z = 0$ síkon.

126. Számítsuk ki az $x = y = z$ és $\mathbf{r} = (1,2,t)$ egyenesek egymástól való távolságát.

MEGOLDÁSOK

97. $\mathbf{r} = (5,-21,18) + t.(8,23,-6)$; $x = 5 + 8t$, $y = -21 + 23t$, $z = 18 - 6t$

98. $4x + 2y + 7z + 10 = 0$, $d = 10/\sqrt{69}$

99. $11(x - 2) + 5(y - 3) + 3(z - 1) = 0$ azaz $11x + 5y + 3z - 40 = 0$

100. $x = -1 - 4t$, $y = 6 + 5t$, $z = 7 + 13t$

101. $x = 2 + 3t$, $y = 1 + 6t$, $z = -5t$ **102.** $5x + 2y + z - 12 = 0$

103. $x - 2y + z = 0$ **104.** $x + y + 2z - 21 = 0$

105. $21/\sqrt{29}$. A tükörkép: $Q(61/29,-(39/29),-139/29)$.

106. $D\left(\frac{10}{11},\frac{21}{11},\frac{12}{11}\right)$, $\sin\alpha = \frac{11}{\sqrt{177}}$ **107.** $10x - y + 4z - 20 = 0$

108. $\frac{\pm 1}{\sqrt{11}}x + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \mp \frac{1}{\sqrt{11}}\right)y + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{3}{\sqrt{10}}\right)z - \frac{4}{\sqrt{5}} = 0.$

109. $\sqrt{\frac{523}{14}}$. **110.** $d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{35}}{35}$.

111. $d = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{3\sqrt{35}}{7}$. **112.** $\approx 65°08'$.

113. $3\sqrt{\frac{69}{38}}$. **114.** $101/(3\sqrt{26})$. **115.** $\sqrt{99/62}$.

116. $87\sqrt{2}/\sqrt{327}$. **117.** 30, 15, –6 **118.** $x + 2y + 2z - 2 = 0$

119. Különböző oldalain vannak. **120.** $x + y - z - 3 = 0$

121. 90°, vagyis a két egyenes merőleges egymásra.

122. $\mathbf{r} = (2,1,1) + t.(0,0,1)$ **123.** $x - z + 1 = 0$ **124.** $Q(1,0,-2)$

125. $\mathbf{r} = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) + t\,(1,-4,-7)$ **126.** $\sqrt{2}/2$.

6. LINEÁRIS ALGEBRA

1. Vektorok

(1) Véges sok rögzített sorrendű számot (tehát egy rendezett n-est) *vektornak* nevezünk.
Az i-edik helyen álló számot a vektor *i-edik koordinátájának* hívjuk.
(2) A vektorokat kövér kisbetűkkel jelöljük.
(3) Az n-elemű vektorokat *n-dimenziós vektoroknak*, a rendezett szám n-esek halmazát *n-dimenziós vektortérnek* fogjuk nevezni.
(4) *Nullvektor* : $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0)$ - minden koordinátája 0.
(5) *Egységvektorok* : $\mathbf{e}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots0)$ - az indexe által jelzett koordináta 1, a többi 0.
A *vektor abszolútértéke* (nagysága) :

(6)
$$\boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}}$$

a koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyök.
(7) Háromszög-egyenlőtlenség: $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

Műveletek

(8) *Skalárral való szorzás* : $\lambda\mathbf{v} = \lambda(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n)$,ahol λ valós szám.
(9) *Összeadás (kivonás)* :
$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \pm (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, \dots, u_n \pm v_n)$$
(10) *Skaláris szorzat* :
$$\mathbf{uv} = (u_1, u_2, \dots, u_n)(v_1, v_2, \dots, v_n) = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$
(11) Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *vektoroknak* az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tetszőleges valós számokkal vett *lineáris kombinációja* az $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n$ vektor.
(12) Azokat a vektorokat, amelyeknek csak a csupa nullával képzett lineáris kombinációja ad nullvektort, *lineárisan független vektoroknak* nevezzük. Ellenkező esetben *lineárisan összefüggők.*
(13) Az n-dimenziós vektortér n darab lineárisan független vektorát a vektortér egy *bázisának* nevezzük.

PÉLDÁK

1. Legyen: $\mathbf{u}=(1,2,3,4,5)$, $\mathbf{v}=(2,3,-1,0,3)$. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $3\cdot\mathbf{u}$ **b)** $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ **c)** $\mathbf{v}-2\mathbf{u}$

M: **a)** $3\cdot\mathbf{u}=3(1,2,3,4,5)=(3\cdot1,3\cdot2,3\cdot3,3\cdot4,3\cdot5)=(3,6,9,12,15)$ (**(8)**-as szabály)

b) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1,2,3,4,5)+(2,3,-1,0,3)=(1+2,2+3,3-1,4+0,5+3)=(3,5,2,4,8)$ (**(9)**-es szabály)

c) $\mathbf{v}-2\mathbf{u}=(2,3,-1,0,3)-2\cdot(1,2,3,4,5)=(2,3,-1,0,3)-(2\cdot1,2\cdot2,2\cdot3,2\cdot4,2\cdot5)=$ $=(2,3,-1,0,3)-(2,4,6,8,10)=(2-2,3-4,-1-6,0-8,3-10)=(0,-1,-7,-8,-7)$ (**(8)**-as és **(9)**-es szabály).

2. Végezzük el az alábbi műveleteket az $\mathbf{u}=(-3,2,1,0)$, $\mathbf{v}=(1,5,-2,0)$ 4-dimenziós vektorokkal

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ **b)** $3\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ **c)** $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

M: **a)** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=(-3,2,1,0)\cdot(1,5,-2,0)=-3\cdot1+2\cdot5+1\cdot(-2)+0\cdot0=-3+10-2+0=5$ (**(10)**-es szabály)

b) $3\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=3\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=3\cdot(-3,2,1,0)\cdot(1,5,-2,0)=3\cdot5=15$ (**(8)**-as és **(10)**-es szabály), ui. a szorzás kommutatív

c) $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=((-3,2,1,0)-(1,5,-2,0))\cdot((-3,2,1,0)+(1,5,-2,0))=(-4,-3,3,0)\cdot$ $\cdot(-2,7,-1,0)=(-4)\cdot(-2)+(-3)\cdot7+3\cdot(-1)+0\cdot0=8-21-3+0=-16$ (**(9)**-es és **(10)**-es szabály).

3. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét, a $\mathbf{t}=(2,3,0,-1,1)$, $\mathbf{u}=(5,2,0)$, $\mathbf{v}=(0,1,0)$ vektorokra

a) $|\mathbf{u}|$ **b)** $|5\mathbf{v}|$ **c)** $|\mathbf{u}|/3$ **d)** $|\mathbf{t}|$

M: **a)** $|\mathbf{u}|=|(5,2,0)|=\sqrt{5^2+2^2+0^2}=\sqrt{25+4+0}=\sqrt{29}$ (**(6)**-os szabály)

b) $|5\mathbf{v}|=|5\cdot(0,1,0)|=|(0,5,0)|=\sqrt{0^2+5^2+0^2}=\sqrt{0+25+0}=\sqrt{25}=5$ (**(6)**-os szabály); (a $\mathbf{v}$ vektor egységvektor, aminek a hossza 1, így az 5-szörösének a hossza 5)

c) $\dfrac{|\mathbf{u}|}{3}=\dfrac{1}{3}|(5,2,0)|=\dfrac{1}{3}\sqrt{25+4+0}=\dfrac{\sqrt{29}}{3}$ (**(6)**-os szabály)

d) $|\mathbf{t}|=|(2,3,0,-1,1)|=\sqrt{2^2+3^2+0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+9+0+1+1}=\sqrt{15}$ (**(6)**-os szabály)

4. Végezzük el az alábbi vektorműveleteket, ha $\mathbf{u}=(1,1,1,1,1,1)$ · $\mathbf{v}=(-1,1,0,-1,1,0)$

a) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|$ **b)** $|\mathbf{v}|+2$ **c)** $|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$

M:a)

$$|(1,1,1,1,1,1)+(-1,1,0,-1,1,0)| = |(0,2,1,0,2,1)| = \sqrt{0+4+1+0+4+1} = \sqrt{10}$$

b) $|(-1,1,0,-1,1,0)| + 2 = \sqrt{1+1+0+1+1+0} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 2+2 = 4$

c) $|(1,1,1,1,1,1)| \cdot |(-1,1,0,-1,1,0)| = \sqrt{6}\sqrt{4} = 2\sqrt{6}$

5. Írjuk fel az alábbi vektorokat a 4-dimenziós egységvektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\mathbf{a} = (2,3,6,-1)$ **b)** $\mathbf{a} = (0,-3,5,1)$

M: Mivel a 4-dimenziós egységvektorok

$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$

ezért azok a skalárok kellenek, amelyekkel az egységvektorokat rendre beszorozva az összegvektor az adott **a** vektor lesz.

a) $2\cdot\mathbf{e}_1+3\cdot\mathbf{e}_2+6\cdot\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4 = 2(1,0,0,0)+3(0,1,0,0)+6(0,0,1,0)-(0,0,0,1) = (2,0,0,0)+$ $+(0,3,0,0)+(0,0,6,0)+(0,0,0,-1) = (2,3,6,-1) = \mathbf{a}$

b) $0\cdot\mathbf{e}_1-3\cdot\mathbf{e}_2+5\cdot\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4 = 0(1,0,0,0)-3(0,1,0,0)+5(0,0,1,0)+(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$ $+(0,-3,0,0)+(0,0,5,0)+(0,0,0,1) = (0,-3,5,1) = \mathbf{a}$.

6. Lineárisan függetlenek-e a következő vektorok ?

a) $\mathbf{t} = (2,3,5,1)$, $\mathbf{u} = (-2,0,1,-2)$, $\mathbf{v} = (0,3,6,-1)$

b) $\mathbf{t} = (9,3,1,1)$, $\mathbf{u} = (2,0,1,-2)$, $\mathbf{v} = (5,3,-1,5)$

c) $\mathbf{t} = (2,3,5,1)$, $\mathbf{u} = (2,3,1,-2)$, $\mathbf{v} = (0,4,-2,-1)$

d) $\mathbf{t} = (1,4,2,0)$, $\mathbf{u} = (-1,0,3,2)$, $\mathbf{v} = (5,12,0,-4)$

M: Ha csak csupa nulla skalárokkal vett lineáris kombináció ad nullvektort, akkor a 3 vektor lineárisan független.

a) Vegyük észre, hogy $\mathbf{t}+\mathbf{u}=\mathbf{v}$. Ekkor: $\mathbf{t}+\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{0}$, azaz $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$ nem csupa nulla skalárokra igaz, hogy a velük vett $\alpha_1\mathbf{t}+\alpha_2\mathbf{u}+\alpha_3\mathbf{v}$ lineáris kombinációja a 3 vektornak azonos a nullvektorral. A vektorok lineárisan összefüggők.

b) Vizsgáljuk meg, milyen skalárokra teljesül az $\alpha_1\mathbf{t}+\alpha_2\mathbf{u}+\alpha_3\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenlőség, vagyis a:

$$\begin{aligned} 9\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 1\alpha_2 - 1\alpha_3 &= 0 \\ 1\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer.

Az $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -1$ ilyenek, és mivel nem csupa nullák, ezért a vektorok lineárisan függők.

c) Kérdés: milyen skalárokra teljesül az $\alpha_1\mathbf{t}+\alpha_2\mathbf{u}+\alpha_3\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenlőség, vagyis a

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ 5\alpha_1 + 1\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ 1\alpha_1 - 2\alpha_2 - 1\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer.

Ennek viszont a csupa nulla skalár a megoldása, ezért a 3 vektor független.

d) Vegyük észre, hogy fennáll a következő összefüggés : $3\mathbf{t} - 2\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Tehát : $3\mathbf{t} - 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$, Ezért a $3,-2,-1$ nem csupa nullákkal vett lineáris kombinációja a 3 vektornak előállítja a nullvektort, azaz a 3 vektor lineárisan összefüggő.

7. Bázist alkotnak-e a következő vektorok ?

a) $\mathbf{a} = (1,2,3)$ $\mathbf{b} = (2,4,5)$ $\mathbf{c} = (-1,2,1)$

b) $\mathbf{a} = (1,0,0)$ $\mathbf{b} = (2,4,5)$ $\mathbf{c} = (0,0,1)$

c) $\mathbf{a} = (1,2,3)$ $\mathbf{b} = (2,4,6)$ $\mathbf{c} = (-1,2,1)$

d) $\mathbf{a} = (3,0,0)$ $\mathbf{b} = (0,0,3)$ $\mathbf{c} = (0,3,0)$

M: Meg kell vizsgálni, hogy a 3-dimenziós vektortér 3 lineárisan független vektoráról van-e szó. Eldöntendő, hogy a vektoroknak csak a csupa nullával vett lineáris kombinációjuk állítja-e elő a nullvektort.

a) $\alpha_1\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{b} + \alpha_3\mathbf{c} = \mathbf{0}$ megoldásához a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot (-1) = 0$$
$$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 2 = 0$$
$$\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 5 + \alpha_3 \cdot 1 = 0$$

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ miatt a 3 vektor bázisa a 3-dimenziós vektortérnek.

b) Megoldandó a következő egyenletrendszer :

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 = 0$$
$$\alpha_2 \cdot 4 = 0$$
$$\alpha_2 \cdot 5 + \alpha_3 \cdot 1 = 0$$

Megint a triviális megoldás adódott , azaz a vektorok bázist alkotnak.

c) Megoldandó a következő egyenletrendszer :

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot (-1) = 0$$
$$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 2 = 0$$
$$\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 6 + \alpha_3 \cdot 1 = 0$$

Mivel $\alpha_1 = -2\alpha_2$, $\alpha_3 = 0$, ezért végtelen sok triviálistól különböző $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ skalárral előállítható a nullvektor. Tehát a 3 vektor nem bázisa a 3-dimenziós vektortérnek.

d) Vegyük észre, hogy a 3 vektor éppen a 3-dimenziós egységvektorok 3-szorosa. Mivel az egységvektorok bázist akotnak a térben, az $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ is az lesz.
Ugyanis a következő egyenletrendszert csak a csupa nulla elégíti ki:

$$\alpha_1 \cdot 3 = 0$$
$$\alpha_3 \cdot 3 = 0$$
$$\alpha_2 \cdot 3 = 0$$

☞ ☞ ☞ FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL ☜ ☜ ☜

8. Számítsuk ki a következő lineáris kombinációkat , ha
$\mathbf{a} = (3,2,1,5,5)$ $\mathbf{b} = (1,1,2,3,2)$ $\mathbf{c} = (4,1,1,1,2)$

a) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}-\mathbf{c}$ **b)** $3\mathbf{a}-3\mathbf{c}$ **c)** $\mathbf{a}-\mathbf{b}$

9. Végezzük el az alábbi műveleteket $\mathbf{t}=(2,1,1)$ vektor esetén

a) $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}$ **b)** $|\mathbf{t}|$ **c)** $|\mathbf{t}+\mathbf{t}|$ **d)** $|-\mathbf{t}|$

10. Számítsuk ki $\mathbf{u}=(5,3,1)$ és $\mathbf{v}=(-2,4,0)$ vektorok esetén az alábbi kifejezéseket: **a)** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ **b)** $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$ **c)** $\mathbf{u}^2-3$

11. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok ?

a) $\mathbf{a}=(1,0,0,0)$ $\mathbf{b}=(0,2,0,0)$ $\mathbf{c}=(0,0,3,0)$ $\mathbf{d}=(0,0,0,4)$

b) $\mathbf{a}=(2,3,4,5)$ $\mathbf{b}=(1,1,2,2)$ $\mathbf{c}=(0,5,1,0)$ $\mathbf{d}=(1,7,3,3)$

12. A megfelelő egységvektorokkal adjuk meg az alábbi vektorokat:

a) $\mathbf{t}=(1,2,5,2,1)$ **b)** $\mathbf{t}=(-1,1,2)$ **c)** $\mathbf{t}=(3;2,1,0)$

3. Keressük meg a hiányzó komponenseket, ha tudjuk, hogy a vektorok lineárisan nem függetlenek:

a) $\mathbf{a}=(2,3,5,6)$ $\mathbf{b}=(1,-4,0,1)$ $\mathbf{c}=(2,-1,0,4)$ $\mathbf{d}=(1,-3,x,9)$

b) $\mathbf{a}=(2,0,5)$ $\mathbf{b}=(x,-6,10)$ $\mathbf{c}=(1,2,0)$

ÚTMUTATÁSOK

8. Alkalmazzuk **(8)**-at és **(9)**-et vagyis az egyes vektorokat szorozzuk meg az előírt skalárral, majd vonjuk össze őket komponensenként. Az eredmény is egy 5-dimenziós vektor lesz.

9. Mindhárom esetben a művelet eredménye skalár:

a) **(10)** alkalmazásával számítsuk ki a vektor önmagával vett skaláris szorzatát.

b) **(6)** alkalmazásával számítsuk ki a vektor nagyságát.

c) **(9)** alkalmazásával adjuk össze a vektort önmagával (vagy szorozzuk meg 2-vel a vektort **(8)** szerint), majd **(6)** szerint számoljuk ki a nagyságát.
Látni fogjuk, hogy a vektor számszorosának a nagysága megegyezik a vektor nagyságának az abszolút értékű számszorosával.

d) egy vektornak és (−1)-szeresének a nagysága ugyanakkora.

10. Végezzük el az alábbi műveleteket:

a) az **u**,**v** vektorok skaláris szorzata

b) az **u**,**v** vektorok összegvektorának és a **v** vektornak skaláris szorzata

c) az **u** vektor önmagával vett skaláris szorzatából (az eredmény skalár), vonjunk ki 3-at.

11. Alkalmazzuk **(12)**-t. A 4-dimenziós vektorok esetén ez azt jelenti, hogy 4 ismeretlenes 4 egyenletből álló homogén egyenletrendszert kell megoldanunk, és ha az egyértelmű megoldás a csupa nulla, akkor igaz a vektorok lineáris függetlensége.

a) Vegyük észre, hogy az $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}=2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{c}=3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{d}=4\mathbf{e}_4$, ahol az $\mathbf{e}_i$ vektorok a megfelelő (4-dimenziós) egységvektorok.

b) Megoldandó :
$$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 1 = 0$$
$$\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 5 + \alpha_4 \cdot 7 = 0$$
$$\alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot 3 = 0$$
$$\alpha_1 \cdot 5 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 3 = 0.$$

12. A megfelelő egységvektorok

a) 5 **b)** 3 **c)** 4 -dimenziósak. A kívánt vektor úgy áll elő, hogy az egységvektoroknak az eredeti vektor komponenseivel alkotott lineáris kombinációját képezzük.

13. Tudjuk, hogy a vektorok nem függetlenek. Ez azt jelenti, hogy nem csupa nullával vett lineáris kombinációjuk előállítja a nullvektort, vagyis bármelyik vektor előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként.

a) Fejezzük ki **d**-t a többivel: $\mathbf{d} = \alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \alpha_2 \cdot \mathbf{b} + \alpha_3 \cdot \mathbf{c}$
Számítsuk ki a skalárokat az egyenletrendszer 1.,2.,4. egyenletéből, majd a 3. egyenletbe behelyettesítve azokat megkapjuk az x ismeretlen komponenst.

b) Válasszuk **b**-t, mivel benne van ismeretlen komponens: $\mathbf{b} = \alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \alpha_2 \cdot \mathbf{c}$
Számítsuk ki a skalárokat az egyenletrendszer 2.,3. egyenletéből, majd az 1. egyenletbe behelyettesítve azokat megkapjuk az x ismeretlen komponenst.

FELADATOK

14. Számítsuk ki $\mathbf{u} = (5,-3,2,1)$ és $\mathbf{v} = (2,1,4,0)$ vektorok esetén az alábbi kifejezéseket: **a)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ **b)** $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$ **c)** $\mathbf{v}^2 - 1$ **d)** $(\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} + \mathbf{u})$.

15. Számítsuk ki a következő lineáris kombinációkat , ha
$\mathbf{a} = (3,2,-1,5)$ $\mathbf{b} = (1,2,3,2)$ $\mathbf{c} = (4,1,1,2)$

a) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ **b)** $3\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$ **c)** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **d)** $-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ **e)** $4\mathbf{c}$.

16. Végezzük el az alábbi műveleteket $\mathbf{t} = (-2,-1,1,3)$ vektor esetén

a) $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}$ **b)** $|4\mathbf{t}|$ **c)** $|\mathbf{t} + 2\mathbf{t}|$ **d)** $|\mathbf{t} - \mathbf{t}|$ **e)** $2\mathbf{t}3\mathbf{t}$.

17. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok ?

a) $\mathbf{a} = (-1,0,0,0)$ $\mathbf{b} = (0,-1,0,0)$ $\mathbf{c} = (0,0,-1,0)$ $\mathbf{d} = (0,0,0,-1)$

b) $\mathbf{a} = (3,4,5)$ $\mathbf{b} = (1,1,2)$ $\mathbf{c} = (0,5,1)$

c) $\mathbf{a} = (1,2,0,0)$ $\mathbf{b} = (2,1,0,0)$ $\mathbf{c} = (3,0,2,0)$ $\mathbf{d} = (0,0,4,3)$

d) $\mathbf{a} = (1,4,2)$ $\mathbf{b} = (1,1,2)$ $\mathbf{c} = (0,3,0)$.

18. A megfelelő egységvektorokkal adjuk meg az alábbi vektorokat:

a) $\mathbf{t} = (-1,2,0,3,1)$ **b)** $\mathbf{t} = (1,3,2)$ **c)** $\mathbf{t} = (3,-2,1,4)$ **d)** $\mathbf{t} = (1,0,2)$.

19. Keressük meg a hiányzó komponenseket, ha tudjuk, hogy a vektorok lineárisan nem függetlenek:

a) $\mathbf{a} = (2,3,5,6)$ $\mathbf{b} = (1,-4,0,1)$ $\mathbf{c} = (2,-1,0,4)$ $\mathbf{d} = (5,-2,x,11)$

b) $\mathbf{a} = (2,0,5)$ $\mathbf{b} = (x,6,10)$ $\mathbf{c} = (-1,-2,0)$

c) $\mathbf{a} = (-2,3,5,6)$ $\mathbf{b} = (1,2,0,1)$ $\mathbf{c} = (2,1,2,x)$ $\mathbf{d} = (1,5,-2,4)$.

20. Bázist alkotnak-e az alábbi vektorok?

a) $\mathbf{u} = (2,2,2)$, $\mathbf{v} = (0,2,0)$, $\mathbf{w} = (0,-1,-1)$

b) $\mathbf{u} = (2,1,0)$, $\mathbf{v} = (0,2,0)$, $\mathbf{w} = (0,1,1)$

c) $\mathbf{u} = (2,2,0)$, $\mathbf{v} = (0,2,0)$, $\mathbf{w} = (0,-1,-1)$

d) $\mathbf{u} = (1,2,0)$, $\mathbf{v} = (0,2,0)$, $\mathbf{w} = (1,0,0)$.

MEGOLDÁSOK

8. a) $(5,6,7,18,14)$ b) $(-3,3,0,12,9)$ c) $(2,1,-1,2,3)$

9. a) 6 b) $\sqrt{6}$ c) $2\cdot\sqrt{6}$ d) $\sqrt{6}$

10. a) 2 b) 22 c) 32 **11.** a) igen b) nem

12. a) $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5$ (5-dimenziós egységvektorokkal)

b) $\mathbf{t} = -\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$ (3-dimenziós egységvektorokkal)

c) $\mathbf{t} = 3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ (4-dimenziós egységvektorokkal)

13. a) $x = 45$ b) $x = 1$ **14.** a) 15 b) 54 c) 20 d) -18

15. a) $(7,-1,-10,6)$ b) $(-6,0,12,-9)$ c) $(2,0,-4,3)$ d) $(2,1,5,-1)$ e) $(16,4,4,8)$

16. a) 15 b) $4\cdot\sqrt{15}$ c) $3\cdot\sqrt{15}$ d) 0 e) 90

17. a)b)c) igen d) nem

18. a) $\mathbf{t} = -\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5$ (5-dimenziós egységvektorokkal)

b) $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$ (3-dimenziós egységvektorokkal)

c) $\mathbf{t} = 3\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+1\mathbf{e}_3+4\mathbf{e}_4$ (4-dimenziós egységvektorokkal)

d) $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3$ (3-dimenziós egységvektorokkal)

19. a) $x = 5$ b) $x = 7$ c) $x = -1$ **20.** a)b)c) igen d) nem

2. Mátrixok

(1) Adott $m \times n$ darab számnak m sorban és n oszlopban való elrendezését *$m \times n$ típusú mátrixnak* nevezzük.

A mátrixokat kövér *nagybetűkkel* jelöljük, elemeiket kerek vagy szögletes zárójelek között soroljuk fel. Az elem indexeiből az első a sorra, a második az oszlopra mutat.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) Két mátrix akkor *egyenlő*, ha ugyanazok a megfelelő elemeik.
(3) Az $1xn$ tipusú mátrixot *sorvektornak*, az $mx1$ tipusút *oszlopvektornak* nevezzük.
(4) A *négyzetes mátrixnak* ugyanannyi sora van, mint oszlopa, azaz $m = n$.
(5) A *nullmátrixnak* (**O**) minden eleme nulla.
(6) *Egységmátrix* (**E**) az a négyzetes mátrix,amelyre minden $a_{ii} = 1$ és minden $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, azaz a főátlóban csupa 1, máshol csupa 0 elem áll.

2.1 Műveletek

(7) *Skalárral való szorzás.* Az **A** mátrixnak egy r valós számmal való szorzása azt jelenti, hogy a mátrix minden elemét rendre beszorozzuk az r számmal.
(8) *Összeadás.* Két ugyanolyan tipusú **A** és **B** mátrix összege egy olyan **C** mátrix, melynek az elemei a két mátrix megfelelő elemeinek összeadásával állnak elő.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

(9) *Transzponálás.* Egy **A** mátrix transzponáltját (A^T) úgy kapjuk meg, hogy az **A** mátrix sorait oszlopaival felcseréljük.
(10) *Szorzás.* Az mxn tipusú **A** és az nxp tipusú **B** mátrixok ebben a sorrendben vett **AB** szorzatán azt a **C** mxp tipusú mátrixot értjük, melynek elemei:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}} \qquad \text{ahol } i = 1,2,\dots,m \text{ és } j = 1,2,\dots,p$$

Tehát a szorzatmátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elemet úgy kapjuk meg, hogy az első mátrix i-edik sorvektorát skalárisan összeszorozzuk a második mátrix j-edik oszlopvektorával.
(11) *Hatványozás.* A mátrix önmagával vett szorzata:

$$A^0 = E\,,\quad A^1 = A\,,\quad A^k = A\,A^{k-1}$$

2.2 Fontosabb tulajdonságok

(12)	$(rA)^T = rA^T$
(13)	$O + A = A + O = A$
(14)	$EA = AE = A$
(15)	$AB \neq B\,A$
(16)	$(AB)^T = B^T A^T$
(17)	$(A + B)C = AC + BC$

(18) *Mátrix inverze.* Az **A** négyzetes mátrix inverze az az A^{-1} mátrix, amelyre:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Ha a mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az inverz létezik, ellenkező esetben nem.

2.3 A mátrix determinánsa

Minden $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixhoz hozzárendelhetünk egy valós számot, *a mátrix determinánsát*, amelynek jele:

$$\det \mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

amit a következőképpen értelmezünk:

(19) $$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix elemeiből képezzük az összes ($n!$) lehetséges olyan n-tényezős szorzatot, amely valamennyi sorból és oszlopból pontosan egy elemet tartalmaz és ellátjuk egy előjellel attól függően, hogy páros-e vagy páratlan az inverziók száma ($I(\pi)$). (Inverziónak nevezzük, ha az $1, 2, \dots, n$ számok egy permutációjában két szám sorrendje eltér a természetes sorrendtől.)

Tulajdonságok

(20) A mátrix egyik sorát egy számmal megszorozva, a determináns értéke a szóban forgó számmal szorzódik.

(21) A mátrix k-adik sorának számszorosát az i-edik sorhoz hozzáadva ($i \neq k$) a determináns értéke nem változik.

(22) A determináns akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha a mátrix sorvektorai lineárisan összefüggők.

(23) A mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával. Ezért az előző állítások oszlopvektorokra is igazak.

Az aldetermináns. Ha det$\mathbf{A}$ n-edrendű determináns, akkor az a_{ik} elem sorának és oszlopának elhagyásával keletkező $(n-1)$-edrendű determinánst az a_{ik} elemhez tartozó *aldeterminánsnak*, annak $(-1)^{i+k}$-szorosát, A_{ik}-t pedig *algebrai aldeterminánsnak* nevezzük, tehát

(24) $$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,k-1} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,k-1} & a_{2\,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,k-1} & a_{i-1\,k+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,k-1} & a_{i+1\,k+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,k-1} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel.
A determináns értékét megkapjuk, ha a mátrix egy tetszőlegesen kiválasztott sorának (oszlopának) elemeit a megfelelő algebrai aldeterminánsokkal megszorozzuk, majd e szorzatokat összeadjuk.

(25)
$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

(Ezt úgy mondjuk, hogy "kifejtjük" a k-adik sora (k-adik oszlopa) szerint.)

A másodrendű determinánsnál ez a következőt jelenti :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2.4 Az inverzmátrix kiszámítása

1) *Egyenletrendszerek megoldásával*
Az $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ mátrixegyenlet n db egyenletrendszert jelent az $\mathbf{X}$ oszlopvektoraira (ahol $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$):

(26)
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Eszerint az i-edik oszlopbéli ismeretlenekre az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel:

(27)
$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ii} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
(a jobb oldalon az i-edik egységvektor áll.)

Megjegyzés: Bővebben ld. **3.2**-t !

2) *Aldeterminánsok segítségével*

(28)
$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T}$$

ahol A_{ik} az a_{ik} elemhez tartozó algebrai aldetermináns.

Megjegyzés. (28)-ból látszik, hogy az A mátrixnak csak akkor van inverze, ha $\det A \neq 0$.

3. Lineáris egyenletrendszerek

Az

(29)
$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

alakzatot m egyenletből álló n ismeretlenes ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük, ahol a_{ij} ($i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$) és b_i ($i = 1,2,\ldots,m$) valós számok.

(30) Az *egyenletrendszer mátrixalakja* :

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ahol **A** az együtthatókból álló mátrix, $\boldsymbol{x}$ az ismeretlenek oszlopvektora, $\boldsymbol{b}$ pedig a jobboldali oszlopvektor.

Ha $\mathbf{b} = 0$, az egyenletrendszert *homogénnek* $\mathbf{b} \neq 0$ esetén pedig *inhomogénnek* nevezzük.

(31) Az egyenletrendszer *megoldásai* azok az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok, amelyek a rendszer minden egyenletét kielégítik.

n x n -es az egyenletrendszer, ha az A mátrix négyzetes, ebben az esetben

(32) $$\boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$$

amennyiben az inverzmátrix létezik.

Megjegyzés:

Azt, hogy az egyenletrendszernek létezik-e megoldása, az A mátrix tulajdonságai határozzák meg.

1) Ha az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek ($\det A \neq 0$), akkor létezik az inverzmátrix, azaz az inhomogén egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása (ellenkező esetben biztosan nincs; azaz vagy egy sincs, vagy végtelen sok van).

2) A homogén egyenletrendszernek lineárisan független oszlopvektorok ($\det A \neq 0$) esetén csak az $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ (triviális) megoldása lehet; nem triviális megoldása (legalább egy ismeretlen nem nulla) viszont akkor van, ha az oszlopvektorok lineárisan függők($\det A = 0$).

3.1 Az egyenletrendszer megoldása

a.) A Gauss-módszer

A lineáris egyenletrendszert a Gauss módszerrel úgy oldjuk meg, hogy az adott egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal egyszerűbben megoldható rendszerré alakítjuk át.

Ekvivalens átalakítások:

- két egyenlet felcserélése
- egy egyenletnek nullától különböző számmal való szorzása
- egyik egyenlet konstansszorosának hozzáadása egy másik egyenlethez.

Az átalakítások célja, hogy az alábbi háromszög alakú rendszer jöjjön létre (az i-edik egyenletben az első i-1 ismeretlen együtthatója nulla).

$$
\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1k}x_k &= b'_1 - a'_{1\,k+1}x_{k+1} - \ldots - a'_{1n}x_n \\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k &= b'_2 - a'_{2\,k+1}x_{k+1} - \ldots - a'_{2n}x_n \\
&\ldots \\
a'_{kk}x_k &= b'_k - a'_{k\,k+1}x_{k+1} - \ldots - a'_{kn}x_n
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Ha $m < n$, akkor $n - m$ ismeretlent paraméternek választunk és a másik oldalra viszünk. A többi m ismeretlen ezektől a szabadon választott paraméterektől függ.

Az nxn-es esetben (négyzetes mátrix) az együtthatómátrix determinánsa határozza meg, hány megoldása lesz az egyenletrendszernek. Ha ez a determináns

- nem nulla, akkor egyetlen megoldása van az egyenletrendszernek (ld.**(32)**-t);
- nulla, akkor
  - nincs megoldása az egyenletrendszernek('ellentmondó' sort kaptunk az ekvivalens átalakítások során)
  - végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek('semmitmondó' sort kaptunk az ekvivalens átalakítások során).

A fenti egyenletrendszert könnyen meg tudjuk oldani: az utolsó egyenletből kiszámítjuk x_k-t, majd ezt az előtte lévő egyenletbe helyettesítve megkapjuk x_{k-1}-et, és így folytatva végül az első egyenletből kiszámítjuk x_1-et.

Az előbbi eljárást kényelmesebben hajthatjuk végre, ha az egyenletrendszerből elkészítjük a

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$$

un. bővített mátrixot. (Az **A** mátrix mellé írjuk az **b** oszlopvektort és a szemléletesség kedvéért egy függőleges vonallal választjuk el).

Az egyenletrendszerre alkalmazott ekvivalens átalakításoknak a bővített mátrixban a következők felelnek meg:

- két sor cseréje
- egy sor konstanssal való szorzása,
- egy sor konstansszorosának egy másik sorhoz való hozzáadása.

A bővített mátrix segítségével a következőképpen oldjuk meg az egyenletrendszert.

1. Ekvivalens átalakításokat végzünk a **B** mátrixon úgy, hogy az **A** mátrix helyén a lehető legnagyobb rendü egységmátrixot kapjunk. Az ekvivalens átalakításokat az alábbi lépésekben hajtjuk végre:

a) Tegyük fel, hogy a **B** mátrix első sorának első eleme (a_{11}) nem nulla. (sorok cseréjével ez elérhető).
Az első sor konstansszorosát adjuk hozzá a második sorhoz. A konstanst úgy válasszuk meg, hogy az első oszlop második sorában 0-t kapjunk. Ugyanezt tegyük meg az első sorral és a harmadik, negyedik, s.i.t utolsó sorral. Így az első sor első eleme (a_{11}) segítségével (ezt az első oszlop főelemének nevezzük) nulláztuk az oszlop többi elemét. Így a bővített mátrix első oszlopában az első sorban nullától különböző, a többiben 0 érték lesz; a többi oszlopban (beleértve a **b** oszlopot is) pedig a fenti műveletek során kialakuló valós számokat kapunk. A bővített mátrix tehát

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

alakú lesz.
b) Végezzük el az a) pontban leírt lépéseket az első sor helyett a második, majd utána a harmadik s.i.t. az utolsó előtti sorral.
Az átalakult **B** mátrix

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & * & \cdots & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & * & \cdots & * & b'_2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & a'_{pq} & * & \cdots & * & b'_p \end{array}\right)$$

felső háromszög mátrix formájú lesz. (Feltettük, hogy sorcserével mindig el tudtuk érni, hogy a diagonálisban a megfelelő helyen 0-tól különböző elem álljon. (Azt az esetet, amikor ez nem teljesül később vizsgáljuk).
c) Tegyük meg most az előbbieket az utolsó sorból indítva felfelé.
Ekkor egy

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & 0 & * & \cdots & b'_2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{pq} & * & \cdots & b'_p \end{array}\right)$$

mátrixhoz jutunk el.
Mindegyik sort leosztva a diagonálisban lévő elemmel (a_{ii}-vel) az alábbi alakzathoz jutunk:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b_2' \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & b_m' \end{array}\right)$$

Ezt a műveletet az ekvivalens átalakítások során közben is elvégezhetjük (hogy a diagonálisban 1-es álljon).
Mint látjuk, az átalakításokkal a **B** mátrixból egy olyan mátrixhoz jutottunk, amelyben egy egységmátrix szerepel. Az egységmátrix rendje attól függ milyen tulajdonságú az **A** mátrix.
Esetek:
1) **A** négyzetes, azaz $n = m$ és det$\mathbf{A} \neq 0$, ekkor az egységmátrix rendje is n, azaz ekvivalens átalakításokkal az

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}^{n} & \begin{matrix} b_1' \\ b_2' \\ \\ b_n' \end{matrix} \end{array}\right)$$

mátrixhoz jutunk és az utolsó oszlop adja az ismeretleneket, azaz $x_1 = b_1', \cdots, x_n = b_n'$
2) **A** "téglalap-mátrix" mégpedig $n > m$, azaz $\boxed{}$ alakú. (Kevesebb egyenlet van mint ismeretlen). Ekkor az egységmátrix legfeljebb m-ed rendű lehet, azaz az ekvivalens átalakításokkal a **B** mátrixból

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1r} & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{21} & \cdots & p_{2r} & b_2' \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{m1} & \cdots & p_{mr} & b_m' \end{pmatrix}$$

alakzat jön létre. ($r = n - m$). Ebben az esetben r db ismeretlent (az $x_{m+1}, \ldots, x_n$ ismeretleneket) szabadon választhatunk meg és ezekkel adjuk meg a többit (ezeket kötött változóknak hívjuk).

$$x_1 = b_1' - p_{11}x_{m+1} - p_{12}x_{m+12} - \cdots - p_{1r}x_m$$
$$\vdots$$
$$x_m = b_m' - p_{m1}x_{m+1} - p_{m2}x_{m+2} - \cdots - p_{mr}x_m$$

Megjegyzés: 1) Az előbbiekben hallgatólagosan feltettük, hogy éppen az első m oszlopból alakul ki az m x m-es egységmátrix. Ha ez nem így volna, hanem például

$$\begin{pmatrix} 1 & *\cdots* & 0 & \cdots & 0 & *\cdots* & b_1' \\ 0 & *\cdots* & 1 & \cdots & 0 & *\cdots* & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & *\cdots* & 0 & \cdots & 1 & *\cdots* & b_m' \end{pmatrix}$$

alakzat jönne létre, akkor a szabadon választott ismeretlenek a * elemeket tartalmazó oszlopokhoz, az ezektől függő kötött ismeretlenek pedig az egységmátrixot alkotó oszlopvektorokhoz tartozók lesznek. Ilyenkor érdemes az oszlopok fölé írni az ismeretleneket, hogy jól lássuk melyek a kötött, és melyek a szabadon választható ismeretlenek.

2) Előfordulhat, hogy az átalakításokkal létrejövő egységmátrix rendje kisebb mint m (a sorok száma). Ekkor a bővített mátrixban lesznek olyan sorok, amelyekben csupa 0 elemek állnak. (Ez azt jelenti, hogy az ezen soroknak megfelelő egyenletek feleslegesek, tehát elhagyhatók) Ekkor ezeket a sorokat elhagyva oldjuk meg a feladatot.

3) A "téglalapmátrix", úgy hogy $m > n$ azaz $\boxed{}$ alakú (több egyenlet van mint ismeretlen).

Ebben az esetben a bővített mátrix ekvivalens átalakítása során vagy olyan sorok keletkeznek amelyek csupa 0 elemből állnak, vagy olyanok, amelyekben a **b** oszlopban nem nulla elem van a többiben pedig 0.

Az első esetben ezeket a sorokat elhagyjuk ("semmitmondó" sorok, mert "felesleges" egyenletekhez tartoznak) és a maradék (nem nulla) sorokkal oldjuk meg az egyenletrendszert.

A második esetben (ezek ellentmondásos egyenletekből származó sorok) nincs megoldása az egyenletrendszernek.

Homogén egyenletrendszer megoldása

A kvadratikus mátrixu homogén egyenletrendszernek triviálistól eltérő megoldása csak akkor van, ha a determinánsa 0, utóbbi viszont azt jelenti, hogy az egyenletek nem függetlenek egymástól; van egy vagy több olyan, amelyik a többi lineáris kombinációja.

Ezek az egyenletek feleslegesek, elhagyhatók. A maradék rendszer $\boxed{}$ alakú; erre alkalmazható a Gauss-módszer. (Az ekvivalens átalakításokkal csupa 0-kat tartalmazó sorhoz jutunk).

b) Cramer-szabály:

Ha az $\mathbf{A}x = b$ nxn-es lineáris egyenletrendszer olyan, hogy $\det\mathbf{A} \neq 0$, akkor az egy-értelmű megoldás $x = \mathbf{A}^{-1}b$ alakban írható fel. Felhasználva az inverzmátrix kiszámításának **(28)** módszerét, azt kapjuk, hogy

$$(34)\qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

ahol A_{ik} az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó algebrai aldetermináns.
A megoldás-vektor i-edik koordinátája (azaz az i-edik ismeretlen)

$$(35)\quad x_i=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1i-1}&b_1&a_{1i+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2i-1}&b_2&a_{2i+1}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\vdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{ni-1}&b_n&a_{ni+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\frac{D_i}{D}$$

ahol a D_i úgy származtatható a $D=\det\mathbf{A}$ determinánsból, hogy annak i-edik oszlopa helyébe a $\boldsymbol{b}$ oszlopvektort írjuk.

3.2 Az inverzmátrix kiszámítása egyenletrendszer megoldásával

Az inverzmátrix egyik kiszámítási módja az, hogy megoldjuk a **(26)** egyenletrendszert. Ez n db egyenletrendszer, de mindegyik egyenletrendszer $\mathbf{A}$ mátrixa ugyanaz, csak a jobb oldalban különböznek.
a) *Megoldás Gauss-módszerrel*
Ha a Gauss-módszert egyszerre alkalmazzuk az n db egyenletrendszerre, akkor a bővített mátrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E})$$

lesz (a jobb oldalak éppen az $\mathbf{E}$ mátrixot adják).
Ekvivalens átalakításokkal hozzuk létre az $\mathbf{A}$ helyén az egységmátrixot; akkor az $\mathbf{E}$ helyén éppen $\mathbf{A}^{-1}$ áll elő, tehát

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E})\approx\cdots\approx(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

b) *Megoldás a Cramer-szabállyal*
A Cramer-szabály segítségével az n db **(27)**-es alakú egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy az inverzmátrix összes x_{ik} elemének kiszámításakor az eredeti determináns i-edik oszlopának helyébe a k-adik egységvektort tesszük (ez a determináns lesz D_i), majd osztunk az eredeti determinánssal.
Megjegyzés : D_i meghatározásakor a determinánst legegyszerűbb az i-edik oszlop szerint kifejteni, ui. abban egyetlen 1-es és csupa 0 áll.

$$x_{ik} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{array}{c} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1\,1} & \cdots & a_{k-1i-1} & 0 & a_{k-1i+1} & \cdots & a_{k-1n} \\ a_{k1} & \cdots & a_{ki-1} & 1 & a_{ki+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1i-1} & 0 & a_{k+1i+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & 0 & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ i.oszlop \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k.sor \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

PÉLDÁK

21. Számítsuk ki a **Z** mátrix elemeit, ha : $\mathbf{Z} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

M: Mivel **A** és **B** tipusa megegyezik, az összeadás elvégezhető, és **Z** is 2x2-es mátrix lesz:

$$\mathbf{Z} = 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 14 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 2+0 \\ 14+6 & 8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}.$$

22. Szorozzuk össze az alábbi két mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

M: Az **AB** képezhető, ugyanis az **A** oszlopainak száma megegyezik a **B** sorainak számával; a szorzatmátrix tipusa 2x4 lesz , ugyanis **A** -nak 2 sora, **B**-nek 4 oszlopa van.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot0+5\cdot1 & 1\cdot4+0\cdot1+5\cdot9 & 1\cdot0+0\cdot5+5\cdot6 & 1\cdot3+0\cdot2+5\cdot0 \\ 2\cdot2+4\cdot0+3\cdot1 & 2\cdot4+4\cdot1+3\cdot9 & \mathbf{2\cdot0+4\cdot5+3\cdot6} & 2\cdot3+4\cdot2+3\cdot0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 49 & 30 & 3 \\ 7 & 39 & \mathbf{38} & 14 \end{pmatrix}.$$

23. Számítsuk ki a $2\cdot(\mathbf{A}^T)^2$ mátrixot, ha $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

M: $2\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T\right)^2 = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$

Megjegyzés: 2-vel szorozhatunk 1 lépéssel előbb is.

24. Számítsuk ki a $\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

M: A $\mathbf{Z}$ mátrix négyzetes (3x3 tipusú), így a determinánsa képezhető. Az 1. sora szerint kifejtve:

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = (+1)\cdot2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\cdot4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (+1)\cdot0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$=2\cdot(1\cdot6-6\cdot9)-4\cdot(0\cdot6-6\cdot1)+0\cdot(0\cdot9-1\cdot1)=2\cdot(-48)-4\cdot(-6)+0=-72.$$

25. Írjuk fel mátrixalakban az alábbi 3-ismeretlenes egyenletrendszert!

$$x+2y+3z=4$$
$$x-\ y-\ z\ =3$$
$$3x-\ y+2z=5$$

M: Az együtthatómátrixot szorozni kell az ismeretlenek oszlopvektorával, ami egyenlő kell legyen a jobboldali konstansokból alkotott oszlopvektorral.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

26. Alkalmazzuk a Gauss-módszert a következő 2x2-es egyenletrendszer megoldására:

$$4x-\ y=7$$
$$2x+3y=21$$

M: Ekvivalens átalakításokat kell végezni egy felsőháromszög, majd az egységmátrix elérése céljából a bővített mátrix sorain. Jelölje kövér kiemelés a főelemet és az általa kinullázandókat egy vesszős megkülönböztetés!

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{4} & -1 & 7 \\ 2' & 3 & 21 \end{array}\right] \underset{\substack{1.sor-2x2.sor \\ az\ új\ 2.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & -35 \end{array}\right] \underset{\substack{2.sor/(-7) \\ az\ új\ 2.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -1' & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 5 \end{array}\right] \approx$$

$$\underset{\substack{1.sor+2.sor \\ az\ új\ 1.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{1.sor/4 \\ az\ új\ 1.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Ekvivalens átalakításokkal az **A** mátrixból **E** mátrixot hoztunk létre, közben a bővített mátrix utolsó oszlopában (ahova a *b* vektort írtuk) megkaptuk a megoldásvektort.

27. Alkalmazzuk a Gauss-módszert a következő 3x3-as egyenletrendszer megoldására:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ x - y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

M: Végezzük el a bővített mátrixon az ekvivalens átalakításokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ 1' & -1 & -1 & 3 \\ 3' & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{1.sor-2.sor= \\ új2.sor \\ -3x1.sor+3.sor= \\ új3.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{array}\right] \underset{\substack{3.sor/(-7)= \\ új3.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A kövér a_{11}-es elemmel kinulláztuk az alatta lévő vesszővel jelzett elemeket (a_{21}-es ill. a_{31}-es), majd a 3. egyenletben egyszerűsítettünk.
Ezután az a_{22}-es főelem következik a főátlóból:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{3} & 4 & 1 \\ 0 & 1' & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{2.sor-3x3.sor= \\ új3.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Elérkeztünk a felsőháromszög formához.
Most "nullázzuk" a diagonális feletti elemeket:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3' & 4 \\ 0 & 3 & 4' & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{2.sor-4x3.sor= \\ új2.sor \\ 1.sor-3x3.sor= \\ új1.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{2.sor/3= \\ új2.sor}}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2' & 0 & 10 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{1.sor-2x2.sor= \\ új1.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Már csak a főátlóban állnak nem nulla elemek, ráadásul csupa 1-es, ezért már elosztani sem kell velük saját egyenletüket. A vonaltól balra az egységmátrix áll, azaz a (4,3,-2) vektor a megoldás mivel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

28. Oldjuk meg az alábbi 4x4-es egyenletrendszert Gauss-módszerrel!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$$

M: Változatlanul "kövér" a főelem és "vesszősek" a kinullázandók:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1' & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2' & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1' & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right] \underset{\substack{1.sor-2x2.sor=új2.sor \\ 1.sor-3.sor=új3.sor \\ 1.sor-2x4.sor=új4.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2' & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 1' & 5 & -3 & 8 \end{array}\right] \underset{\substack{3.sor-2x2.sor=új3.sor \\ 4.sor-2.sor=új4.sor}}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 8 \end{array}\right] \underset{4.sor/4=új4.sor}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1' & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{3.sor-6x4.sor=új4.sor}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right] \underset{4.sor/7=új4.sor}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5' & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1' & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1' & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{1.sor-5x4.sor=új1.sor \\ 2.sor-4.sor=új2.sor \\ 3.sor-4.sor=új3.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{3.sor/6=új3.sor}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11' & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1' & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{1.sor-11x3.sor=új1.sor \\ 2.sor-3.sor=új2.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3' & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{1.sor-3x2.sor=új1.sor}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{1.sor/2=új1.sor}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Tehát $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

29. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z + 6t &= 0 \\ 3x + 4y + 6z + 7t &= 0 \\ 3x + y + z + 4t &= 0 \end{aligned}$$

M: Az egyenletrendszer 3x4-es, ezért a megoldás biztosan nem egyértelmű.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 3' & 4 & 6 & 7 & 0 \\ 3' & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 7' & 13 & 10 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 18 & 0 \end{array}\right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 5' & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3' & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 9 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\textit{alsóháromszög} \\ \textit{(4.ismeretlen} \\ \textit{a paraméter)}}}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 12' & 0 & -21 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right] \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\textit{diagonálforma} \\ \textit{(egységmátrixra)}}}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\textit{paraméter} \\ \textit{jobboldalra}}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{4} \end{array}\right]$$

azaz $x = 0 + {-\frac{3}{2}}t$, $y = 0 + \frac{11}{4}t$, $z = 0 + {-\frac{9}{4}}t$ és t tetszőleges valós szám.

Tehát t tetszőleges megválasztása mellett $x = (-3/2)\,t$; $y = (11/4)\,t$; $z = (-9/4)\,t$

30. Képezzük az alábbi mátrix inverzét mátrixegyenlet megoldása útján!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

M: Keressük azt az **X** mátrixot, amelyre igaz, hogy $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$. Ha van ilyen, az az **A** inverze, tehát az inverz az

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása.

Ha **A** -t **X** 1. oszlopával szorozzuk, az egységmátrix 1. oszlopát kapjuk; ami egy egyenletrendszer az 1. oszlopbeli ismeretlenekre. A 2. oszloppal ugyanígy egy egyenletrendszert kapunk a 2. oszlopbeli ismeretlenekre, de ugyanazokkal az együtthatókkal (a jobb oldali állandók természetesen különbözők), tehát az alábbi két egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oldjuk meg egyszerre a két egyenletrendszert, hiszen ugyanaz az együtthatók mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\ 3' & 2 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{3x1.sor-2.sor=új2.sor}{\approx} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2' & 1 & 0\\ 0 & -8 & 3 & -1\end{array}\right] \underset{(-4)x1.sor+2.sor=új1.sor}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}-4 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -8 & 3 & -1\end{array}\right] \underset{\substack{1.sor/(-4)=új1.sor\\ 2.sor/(-8)=új2.sor}}{\approx} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8}\end{array}\right]$$

Az **A** helyén egységmátrixot kaptunk, tehát **E** helyén $\mathbf{A}^{-1}$ áll, azaz:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

31. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét az aldeterminánsok segítségével:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

M: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ ahol A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó algebrai aldetermináns. Mivel $\det \mathbf{A} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2 \neq 0$, az inverz létezik.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5$ ui. az a_{11}-es elemhez (2-höz) tartozó aldetermináns 5. (Az 1.sor és 1.oszlop letakarása után megmaradó mátrix determinánsa). Az algebrai aldetermináns esetén ezt a számot attól függően szorozzuk meg (+1) vagy (-1)-gyel, hogy az elem indexösszege páros-e vagy páratlan.

Hasonlóan :

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 \ , \ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 \ , \ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2$$

Az inverzmátrix összeállításakor az algebrai aldeterminánsokat nem az indexükben jelzett helyre írjuk, hanem ahhoz képest transzponáljuk is. Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

32. Határozzuk meg az alábbi 3x3-as mátrix inverzét az aldeterminánsok segítségé-vel!

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

M: A determináns kiszámítását az 1. sor kifejtésével végezzük:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-3) - 2(-2-3) - 1(2+1) = -6 + 10 - 3 = 1.$$

Az inverz létezik, ugyanis a determináns nem nulla.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -11 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: Csak a végén transzponáltunk.
Ellenőrzésképpen szorozzuk össze **B**-t $\mathbf{B}^{-1}$-el (egységmátrixot kell kapnunk).

33. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását Cramer-szabállyal!

$$2x - 7y = 1$$

$$6x + 3y = 11$$

M: $\det \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - (-7) \cdot 6 = 48$ tehát van megoldás.

Az x -et úgy kapjuk meg, hogy az együtthatók mátrixában az 1. oszlopot a jobb oldali oszlopvektorral kicseréljük, ennek vesszük a determinánsát és osztjuk az eredeti determinánssal:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -7 \\ \mathbf{11} & 3 \end{vmatrix}}{48} = \frac{3+77}{48} = \frac{5}{3}$$

Hasonlóan az y -t (2. oszlopban a csere):

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 6 & \mathbf{11} \end{vmatrix}}{48} = \frac{22-6}{48} = \frac{1}{3}.$$

34. Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi 3x3-as egyenletrendszert !

$$\begin{aligned} 7x+2y-\ z &= \ \ 4 \\ x+\ y\ \ \ \ \ \ \ &= -1 \\ 3x+2y-2z &= \ \ 1 \end{aligned}$$

M:

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{2.\text{sorsz.kifejtve}}{=} -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= -(-4+2)+(-14+3)-0=-9$

A determinánsokat a kiemelt sor kifejtésével számítjuk ki (mindig a legtöbb nullát, egyest tartalmazó sort, vagy oszlopot választjuk):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-2-7+0}{-9}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{7+11-0}{-9}=-2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{6-5+8}{-9}=-1.$$

35. Határozzuk meg az alábbi 3x3-as mátrix inverzét Cramer-szabály segítségével!

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M: A **C·X** = **E** mátrixegyenlet 3 darab 3x3-as egyenletrendszert takar ugyanazzal a **C** mátrixszal és egyszerű jobb oldalakkal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Tehát megoldandók:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki a determinánst!

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{3.sor\, sz.\, kifejtve}{=} 3(18-20)-(12-15)+(8-9)=-4.$$

Az 1. egyenletrendszer 3 ismeretlenje (az inverz 1. oszlopbeli elemei) Cramer-szabály szerint a következő :

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 3 & 5 \\ \mathbf{0} & 4 & 6 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & 5 \\ 3 & \mathbf{0} & 6 \\ 3 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0}{-4} = \frac{15}{-4} = -\frac{15}{4}$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & \mathbf{1} \\ 3 & 4 & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0}{-4} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$$

Mindegyik determinánst a behozott oszlop szerint fejtjük ki, ugyanis abban egyetlen 1-es van, a többi elem nulla).

A 2. egyenletrendszer megoldásai:

$$x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 3 & 5 \\ \mathbf{1} & 4 & 6 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0 - 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_{22}=\frac{\begin{vmatrix}2&0&5\\3&1&6\\3&0&1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{-0+1\begin{vmatrix}2&5\\3&1\end{vmatrix}-0}{-4}=\frac{-13}{-4}=\frac{13}{4}$$

$$x_{32}=\frac{\begin{vmatrix}2&3&0\\3&4&1\\3&1&0\end{vmatrix}}{-4}=\frac{0-1\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}+0}{-4}=\frac{7}{-4}=-\frac{7}{4}$$

Az inverz 3. oszlopának elemei:

$$x_{13}=\frac{\begin{vmatrix}0&3&5\\0&4&6\\1&1&1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{0-0+1\begin{vmatrix}3&5\\4&6\end{vmatrix}}{-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

$$x_{23}=\frac{\begin{vmatrix}2&0&5\\3&0&6\\3&1&1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{-0+0-1\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}}{-4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$$

$$x_{33}=\frac{\begin{vmatrix}2&3&0\\3&4&0\\3&1&1\end{vmatrix}}{-4}=\frac{0-0+1\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}}{-4}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

Tehát az inverzmátrix:

$$\mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&1/2\\-15/4&13/4&-3/4\\9/4&-7/4&1/4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2&2\\-15&13&-3\\9&-7&1\end{pmatrix}.$$

Ha ezt a mátrixot balról vagy jobbról az eredeti mátrixszal összeszorozzuk, akkor egységmátrixot kapunk.

36. Ołdjuk meg az $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ egyenletrendszert, ha az **A** mátrixnak az inverzét ismerjük: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

M: Az $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer mindkét oldalát balról megszorozzuk **A** inverzével:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} \text{ ,azaz } \mathbf{E}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{b} \text{ ,vagyis } \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\text{, tehát:}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4+0 \\ -3-5+0 \\ +1-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anélkül, hogy az együtthatók mátrixát ismertük volna, meghatároztuk az ismeretleneket: $x = -6$; $y = -8$; $z = 0$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

37. Határozzuk meg a $\mathbf{Z} = 2\mathbf{A} + \mathbf{BA} - \mathbf{A}^{T}$ mátrix elemeit, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. Szorozzuk össze az alábbi két mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

39. Transzponáljuk az alábbi mátrixokat:

a) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

40. Hajtsuk végre a következő mátrixműveleteket:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

41. Igaz-e bármilyen négyzetes **A** mátrixra a következő egyenlőség?

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}$$

42. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\det\left(3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$

d) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$ **e)** $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ **f)** $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

43. Írjuk fel az alábbi egyenletrendszert mátrixalakban:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 1 \\ x + y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

44. Oldjuk meg Gauss-módszerrel az alábbi egyenletrendszereket:

a)
$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 4 \\ 6x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ -2x + y &= -4 \\ 3x - y &= 6 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0 \\ 3x + 5y - 7z &= 0 \\ 4x - 5y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

45. Képezzük a következő inverzmátrixokat:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

46. Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszereket:

a)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 3z - 1 &= 0 \\ 3x - y + 5z - 2 &= 0 \\ x - 2y + 4z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y &= 5 \\ 3x + 4y + 2z &= 12 \end{aligned}$$

ÚTMUTATÁSOK

37. Mivel a **B** mátrixnak annyi oszlopa van mint ahány sora az **A** mátrixnak, ezért a szorzás elvégezhető. A szorzatmátrix tipusa megegyezik az **A** mátrix skalárral szorzott, ill. az **A** mátrix transzponáltjának a tipusával (mert az **A** négyzetes mátrix), ezért az összevonás elvégezhető:

$$\mathbf{Z} = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 19 & 1 \\ -4 & -10 & -9 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 31 & 3 \\ -13 & -9 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

38. Az **AB** létezik, ugyanis az **A** 3 oszlopból és a **B** 3 sorból álló mátrix. A szorzatmátrix 2x4 tipusú lesz, mert az **A** 2 sorból és a **B** 4 oszlopból áll. (Kiemelve látjuk az 1.sor 3.oszlop kombinációjával előállt elemet.)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 1 & \mathbf{5} & 2 \\ 1 & 3 & \mathbf{6} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 19 & \mathbf{30} & 3 \\ 7 & 21 & 38 & 14 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A **BA** szorzat nem képezhető, ugyanis **B** oszlopainak száma nem egyezik meg **A** sorainak számával.

39. a) A mátrix 2x4 tipusú, tehát a transzponáltja 4x2 tipusú lesz . Minden elem az i-edik sor j-edik oszlopából a j-edik sor i-edik oszlopába kerül.

b) A szorzatmátrix 1x2 tipusú, aminek a transzponáltja 2x1-es lesz.

a) $\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{C}^T = \left(\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 14 & 20 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix}.$

40. Egy 1x3-as mátrixhoz kell hozzáadni egy szorzatmátrixot, ami ugyanolyan tipusú lesz, hiszen egy 1x2-es mátrixnak egy 2x3-as mátrixszal vett szorzata.

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

41. A bal oldalon szorozzuk össze a két tagot két taggal, majd használjuk ki, hogy egy mátrixnak az egységmátrixszal való szorzása nem változtatja meg a mátrixot. Az egyenlőség mindig igaz.

42. a) A kifejtési tételt alkalmazva egy 2x2-es mátrix determinánsa úgy számítható ki, hogy a főátlós elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlós elemek szorzatát: $3 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 = -6$.

b) Alkalmazzuk a kifejtési tételt pl. a 3. sorra

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 0 + 15 = 11$$

c) Számítsuk ki a mátrix 3-szorosát, majd vegyük a determinánsát ugyancsak a 3. sor szerint kifejtve.

$$\left| 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 15 \\ -3 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 3(9 \cdot 6 - 15 \cdot 6) - 0 + 9(3 \cdot 6 - 9 \cdot (-3)) = 297$$

Azt tapasztaltuk, hogy az eredeti mátrix determinánsának a 3^3-szorosát kaptuk $(27 \cdot 11 = 297)$

Megjegyzés: Ha egy négyzetes mátrix egyetlen sorát beszorozzuk egy c számmal, akkor a determináns értékének a c-szeresét kapjuk.

d) Transzponáljuk a mátrixot, majd fejtsük ki a 3. oszlopa szerint:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}^T = \det\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix} = +1(3\cdot 2-2\cdot 5)-0+3(1\cdot 2-(-1)\cdot 3)=11$$

Azt tapasztaltuk, hogy az eredeti mátrix determinánsával azonosat kaptunk.
Megjegyzés: Ha egy négyzetes mátrixot transzponálunk, akkor a determináns értéke nem változik.

e) Először összeadjuk a két 2x2-es mátrixot. Az eredmény is négyzetes mátrix, tehát a determináns képezhető:

$$\det\left(\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{pmatrix}=15-9=6$$

f) Szorozzuk össze a két mátrixot, majd alkalmazzuk a kifejtési tételt:

$$\det\left(\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}2 & 12\\ 1 & 7\end{pmatrix}=14-12=2$$

Ha a két összeszorzandó mátrix determinánsát kiszámítjuk, majd a két számot összeszorozzuk, azt látjuk, hogy az is 2 .
Megjegyzés: A szorzatmátrix determinánsa megegyezik a determinánsok szorzatával (amennyiben a két mátrix ugyanolyan tipusú).

43. Az együtthatók mátrixa (3x3-as tipusú) meg van szorozva az ismeretlenek oszlopvektorával (3x1-es tipusú); az eredmény a jobb oldali oszlopvektor (3x1-es tipusú):

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

44. a) Az egyenletrendszer mátrixalakja: $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

Ekvivalens átalakítások segítségével egységmátrixszá alakítjuk az együtthatómátrixot:

$$\left(\begin{array}{cc|c}5 & 2 & 4\\ 6 & 3 & 5\end{array}\right)\underset{\substack{6x1.sor-5x2.sor\\ =új2.sor}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|c}5 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -1\end{array}\right)\underset{\substack{3x1.sor+2x2.sor\\ =új1.sor}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|c}15 & 0 & 10\\ 0 & -3 & -1\end{array}\right)\underset{\substack{soronként\\ egyszerűsítve}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2/3\\ 0 & 1 & 1/3\end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x=2/3$ $\quad y=1/3$

b) Az egyenletrendszer 3 egyenletből áll, de 2 ismeretlenes. A bővített mátrixban vagy semmitmondó, vagy ellentmodásos sort találunk. Az első esetben elhagyjuk azt a sort, és megoldjuk a 2x2-es egyenletrendszert. A második esetben egyetlen megoldása sincs az egyenletrendszernek.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -7 & 15 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

A 3.sor ellentmondásos: $0x + 0y = 5$, tehát nincs megoldás.
$(0 \neq 5)$

c) A 3x3-as egyenletrendszer homogén (jobb oldala csupa nulla); mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a bővített mátrixot, és végezzük el az ekvivalens átalakításokat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ebben az esetben a 3.sor elhagyható (semmitmondó: $0 = 0$), tehát megoldandó egy 2 x 2-es egyenletrendszer, mert a 3. ismeretlent (z) paraméternek választjuk (átkerül a jobb oldalra):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{cc|c} -14 & 0 & -26 \\ 0 & 7 & 2 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 13/7 \\ 0 & 1 & 2/7 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer végtelen sok megoldása paraméteres alakban :

$$x = \frac{13}{7}z \qquad y = \frac{2}{7}z \qquad \text{ahol } z \text{ tetszőleges valós szám}$$

d) A egyenletrendszer 4x4-es. Ekvivalens átalakításokkal 4x4-es egységmátrixszá alakítjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & 3 & -1 & -1 \\ 5 & -9 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -17 \\ 0 & 7 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 18 & 34 & 108 \\ 0 & 0 & 9 & 19 & 66 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}2&-5&3&1&5\\0&1&-3&-5&-17\\0&0&18&34&108\\0&0&0&-4&-24\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}2&-5&3&1&5\\0&1&-3&-5&-17\\0&0&9&17&54\\0&0&0&1&6\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}2&-5&3&0&-1\\0&1&-3&0&13\\0&0&9&0&-48\\0&0&0&1&6\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}-6&15&0&0&-45\\0&3&0&0&-9\\0&0&9&0&-48\\0&0&0&1&6\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}-6&15&0&0&-45\\0&1&0&0&-3\\0&0&9&0&-48\\0&0&0&1&6\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}-6&0&0&0&0\\0&1&0&0&-3\\0&0&9&0&-48\\0&0&0&1&6\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&-16/3\\0&0&0&1&6\end{array}\right)$$

Az egyetlen megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = -16/3$, $x_4 = 6$

45. a) Invertáljunk az aldeterminánsok segítségével:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}}\operatorname{adj}\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}2&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&1/2\\3/4&-1/4\end{pmatrix}$$

Megjegyzés: Az **A** mátrix adjungáltjának (jele: adj**A**) a mátrix algebrai aldeterminánsaiból képezett mátrix transzponáltját nevezzük

b) Végezzük el az invertálást a 3 egyenletrendszer megoldása útján.

$$\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&2&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

A három egyenletrendszer együtthatómátrixa ugyanaz, az ismeretlenek rendre az inverzmátrix oszlopvektorai, a jobb oldalak pedig az egységmátrix oszlopai.

Alkalmazzuk ez esetben a *Cramer-szabályt.* Az együtthatómátrix determinánsa 11 (ld. **22.b)** feladat), ami azt jelenti, hogy az inverzmátrix létezik (hiszen a determináns nem nulla).

Az ismeretlen inverzmátrix *első* oszlopbeli 1.,2.,3. elemét úgy kapjuk meg, hogy az egységmátrix *első* oszlopvektorát helyettesítjük az együtthatómátrix 1.,2.,3. oszlopának helyébe, és az így kapott mátrixok determinánsait osztjuk az eredeti determinánssal.

$$x_{11}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&5\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}}{11}=\frac{1\begin{vmatrix}2&2\\0&3\end{vmatrix}-0+0}{11}=\frac{6}{11}\qquad\begin{pmatrix}\text{a determinánst az 1.oszlop}\\\text{szerint fejtettük ki}\end{pmatrix}$$

$$x_{21}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&5\\-1&0&2\\1&0&3\end{vmatrix}}{11}=\frac{-1\begin{vmatrix}-1&2\\1&3\end{vmatrix}}{11}=\frac{5}{11}\qquad\begin{pmatrix}\text{a determinánst a 2.oszlop}\\\text{szerint fejtettük ki}\end{pmatrix}$$

$$x_{31}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&2&0\\1&0&0\end{vmatrix}}{11}=\frac{1\begin{vmatrix}-1&2\\1&0\end{vmatrix}}{11}=\frac{-2}{11}\qquad\begin{pmatrix}\text{a determinánst a 3.oszlop}\\\text{szerint fejtettük ki}\end{pmatrix}$$

A 2. oszlopbeli ismeretlenek esetén ugyanígy járunk el, csak az egységmátrix 2. oszlopát visszük be a megfelelő oszlop helyére:

$$x_{12}=\frac{\begin{vmatrix}0&3&5\\1&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}}{11}=\frac{-9}{11}\qquad x_{22}=\frac{\begin{vmatrix}1&0&5\\-1&1&2\\1&0&3\end{vmatrix}}{11}=\frac{-2}{11}\qquad x_{32}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&0\\-1&2&1\\1&0&0\end{vmatrix}}{11}=\frac{3}{11}$$

Az x_{13}, x_{23}, x_{33} kiszámításánál az együtthatómátrix oszlopait rendre kicseréljük a $(0,0,1)^T$ oszlopvektorral :

$$x_{13}=\frac{-4}{11}\qquad x_{23}=\frac{-7}{11}\qquad x_{33}=\frac{5}{11}$$

Tehát az inverzmátrix a következő : $\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6&-9&-4\\5&-2&-7\\-2&3&5\end{pmatrix}$

c) Végezzük el az invertálást a 3 egyenletrendszer megoldása útján.

$$\begin{pmatrix}2&5&1\\-2&1&3\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

A három egyenletrendszer együtthatómátrixa ugyanaz, az ismeretlenek rendre az inverzmátrix oszlopvektorai, a jobb oldalak pedig az egységmátrix oszlopai.

Ez esetben alkalmazzuk a *Gauss-módszert*, és oldjuk meg egyszerre a 3 egyenletrendszert az alábbi átalakítások útján:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{1.sor+2.sor \\ =új2.sor}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{2.sor-3x3.sor \\ =új3.sor}}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{-7x1.sor+3.sor= \\ =új1.sor \\ -7x2.sor+4x3.sor= \\ =új2.sor}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -14 & -35 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & -42 & 0 & -3 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{2.sor/(-3) \\ =új2.sor}}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -14 & -35 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 14 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{2x1.sor+5x2.sor \\ =új1.sor}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -28 & 0 & 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & 14 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{soronként \\ egyszerűsítve}}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/28 & -7/28 & -14/28 \\ 0 & 1 & 0 & 1/14 & 1/14 & 4/14 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 1/7 & -3/7 \end{array}\right)$$

Tehát az inverzmátrix: $\dfrac{1}{28}\begin{pmatrix} 7 & -7 & -14 \\ 2 & 2 & 8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$

46. a) Az egyenletrendszer mátrixalakja: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Az együtthatómátrix determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$, vagyis nullától különböző, ezért az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Mivel az egyenletrendszer homogén (a jobb oldali oszlopvektor minden eleme nulla), ezért csak a triviális, csupa nulla megoldás jöhet szóba. Ugyanis lineárisan független vektoroknak csak a csupa nullával vett lineáris kombinációja adhat nullvektort.

Ellenőrzésképpen: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{0}{-4} = 0$ ill. $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{0}{-4} = 0$

b) Az egyenletrendszer 3x3-as, de a konstansokat át kell vinni a jobb oldalra:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 25$$

Az együtthatómátrix determinánsa nullától különböző, tehát van egyértelmű megoldás:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{25} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{25} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{25} = 1$$

c) Az egyenletrendszer mátrixalakja:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Az együtthatómátrix determinánsa: $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

A megoldás:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 12 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = -(-2) = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 12 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = -(-1) = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix}}{-1} = -(-1) = 1.$$

FELADATOK

47. Transzponáljuk a következő mátrixokat:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 15 & 29 \end{pmatrix}$

48. Képezzük az alábbi két mátrix összegét és különbségét:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&1\\1&0&6\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&4&1\\1&3&0\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\5&2&3\end{pmatrix}$

49. Számítsuk ki

a) az $r\cdot\mathbf{A}$ mátrixot: $r=5$ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&4\\4&1\\5&0\\1&3\end{pmatrix}$ esetén

b) a $\mathbf{Z}=2\mathbf{A}+3\mathbf{B}$ mátrix elemeit $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$ mellett

50. Adjuk össze, majd szorozzuk össze az alábbi két mátrixot:

$$\mathbf{M}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}\qquad \mathbf{M}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

51. Szorozzuk össze az alábbi mátrixokat:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&1\\0&4\\6&2\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&2\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&1\\3&0&4\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&4&1\\1&0&5\\6&1&2\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2&5&-5\\1&-2&2\\1&0&1\end{pmatrix}$

52. Végezzük el az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ mátrixszorzásokat:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&4&5\\1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&3\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\4&5\end{pmatrix}$

53. Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket:

a) $(-1\;\;2\;\;7)+(1\;\;0\;\;2)\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$

b) $(7\;\;8\;\;-4)+(0\;\;2\;\;-1)\cdot\begin{pmatrix}7&-6&0\\1&2&0\\3&4&-1\end{pmatrix}$

54. Számítsuk ki az alábbi mátrixokat:

a) $\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{A})\mathbf{A}$ ahol $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7&-6&0\\1&2&0\\3&4&-1\end{pmatrix}$

b) $(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E})$ ahol $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3&0\\5&6&-2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

c) $(\mathbf{A}^2-\mathbf{E})$ ahol $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3&0\\5&6&-2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

55. Legyen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&7\\-1&5&0\\3&4&-2\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&4\\5&0&1\end{pmatrix}$

Végezzük el az alábbi műveleteket:

a) $2\mathbf{E}+\mathbf{AB}$ **b)** $2\mathbf{E}-\mathbf{BA}$ **c)** $\mathbf{BA}+\mathbf{E}$ **d)** $\mathbf{AB}-\mathbf{E}$

56. Határozzuk meg az $\mathbf{X}$ mátrixot a $2\mathbf{A}+\mathbf{X}=\mathbf{E}$ egyenletből, ha

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

57. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$

58. Határozzuk meg z értékét, ha $z = \det(2\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^2)$ és

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

59. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát :

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

60. Írjuk fel az alábbi egyenletrendszereket mátrixalakban!

a) $\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 8x - 2y - 9z &= 3 \\ x + 13z &= 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$

61. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket Gauss-módszerrel!

a) $\begin{aligned} 4x - y &= 7 \\ 2x + 3y &= 21 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 15.5 \\ x - 14y &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 6x + 4y &= 14 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x - 14y &= 0 \\ x - 14y &= 7 \end{aligned}$

62. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

a) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 5x + 3y &= 22 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 4x - 5y &= 40 \end{aligned}$

e)
$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 4 \\ 7x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -4x + 6y &= 3 \\ 7x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 2x - 7y &= 1 \\ 6x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 8x - 7y &= 2 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ -2x + y &= -4 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} 5x + 3y + 4z &= 0 \\ 6x + 5y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} 4x - 6y + 5z &= 0 \\ 6x - 9y + 10z &= 0 \end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} 2x - 5y + 2z &= 0 \\ x + 4y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

m)
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

63. Keressük meg a következő 4x4-es egyenletrendszerek megoldásait!

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 &= 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 &= -4 \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 &= -7 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 &= -32 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= -8 \end{aligned}$$

64. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z - 2 &= 0 \\ 3x + 2y + 2z + 2 &= 0 \\ x - 2y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - 9 &= 0 \\ 3x - 5y + z + 4 &= 0 \\ 4x - 7y + z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 5y - 8z &= 8 \\ 4x + 3y - 9z &= 9 \\ 2x + 3y - 5z &= 7 \\ x + 8y - 7z &= 12 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 8x - 5y - 6z + 3t &= 0 \\ 4x - y - 3z + 2t &= 0 \\ 12x - 7y - 9z + 5t &= 0 \end{aligned}$$

65. Keressük meg a következő egyenletrendszerek megoldásait!

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 &= -9 \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 &= -146 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 &= -10 \\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 &= -26 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 &= 37 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2 \end{aligned}$$

66. Képezzük a következő mátrixok inverzét!

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

67. Mi lesz az $\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer megoldása, ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak az inverze ismert?

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

68. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek megoldásait Cramer-szabállyal!

a) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 3x + 2y + 2z &= -2 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y &= 5 \\ 3x + 4y + 2z &= 12 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x + 2y - 2z &= 11 \\ 2x + 4y - 3z &= -4 \\ x + 3y &= -9 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x + 6y + z &= -7 \\ 2y + 4z &= 20 \\ 4x + 5y + 3z &= -1 \end{aligned}$

69. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket tetszőleges módszerrel!

a) $\begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= 4 \\ 3x - y - 4z &= -2 \\ 4x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 3x + 2y + 2z &= -2 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 8x - 2y - 9z &= 3 \\ x + \quad + 13z &= 5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 7x + 2y - z &= 4 \\ x + y &= -1 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 5x + 2y - 2z &= 11 \\ 2x + 4y - 3z &= -4 \\ x + 3y &= -9 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 3x + 6y + z &= -7 \\ 2y + 4z &= 20 \\ 4x + 5y + 3z &= -1 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ 3x + y + 2z &= 7 \\ -3x - y + 3z &= 23 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -15 \\ x + 2y - 3z &= 17 \\ 2x + y + 2z &= 5 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 2z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= -2 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y + 3z &= 12 \\ 3x + 4y - 2z &= 5 \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y - z &= -3 \\ 3x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$

l) $\begin{aligned} x - y + z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 3x + y - 2z &= 4 \end{aligned}$

70. Létezik-e nemtriviális megoldása a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 0 \\ a + b + c + d \phantom{{}+e} &= 0 \\ a + b + c \phantom{{}+d+e} &= 0 \\ a + b \phantom{{}+c+d+e} &= 0 \\ a \phantom{{}+b+c+d+e} &= 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁSOK

47. a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 15 \\ 5 & 12 & 29 \end{pmatrix}$

48. a) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{M}+\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{M}-\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

49.a) $\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 5 \\ 25 & 0 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 17 & 22 \\ 27 & 32 \end{pmatrix}$ **50.** $\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$ nem létezik

51.a) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 17 & 16 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 8 \\ 12 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 30 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 9 \\ 24 & 16 & 11 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

52.a) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ **BA** nem létezik **b)** $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$

53.a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

54.a) $\begin{pmatrix} 25 & -30 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 12.5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ **b) és c)** $\begin{pmatrix} 18 & 24 & -6 \\ 42 & 46 & -12 \\ 8 & 9 & -5 \end{pmatrix}$

55.a) $\begin{pmatrix} 39 & -2 & 11 \\ -1 & 18 & 18 \\ -7 & 9 & 22 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -3 \\ -9 & -29 & 8 \\ -13 & -4 & -31 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 9 & 32 & -8 \\ 13 & 4 & 34 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 36 & -2 & 11 \\ -1 & 15 & 18 \\ -7 & 9 & 19 \end{pmatrix}$

$\mathbf{X} = \mathbf{E} - 2\mathbf{A}$

56. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -4 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **57.** **a)** -42 **b)** -39 **58.** $z = 16$

59.a) -14 **b)** 1

60.a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & -9 \\ 1 & 0 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

61. **a)** $x = 3\,, y = 5$ **b)** $x = 7\,, y = 1/2$ **c)** $y = (7-3x)/2$ **d)** nincs megoldás

62. **a)** $x = 1$ $y = 0$ **b)** $x = 4.4$ $y = 0.6$ **c)** $x = 2$ $y = 4$
d) $x = 5$ $y = -4$ **e)** $x = 0$ $y = 2$ **f)** $x = 1.5$ $y = 1.5$
g) $x = 5/3$ $y = 1/3$ **h)** $x = 3/5$ $y = 2/5$ **i)** $x = 1$ $y = -2$
j) $x = -(2/7)z$ $y = -(6/7)z$ **k)** $x = (3/2)y$ $z = 0$
l) $x = (7/13)z$ $y = (8/13)z$ **m)** $x = -(5/7)z$ $y = (11/7)z$

63. **a)** nincs megoldás **b)** nincs megoldás
c) $x_1 = 1/2$ $x_2 = -2/3$ $x_3 = 2$ $x_4 = -3$
d) $x_1 = 2$ $x_2 = -2$ $x_3 = 1$ $x_4 = -1$
e) $x_1 = -0.4$ $x_2 = -1.2$ $x_3 = 3.4$ $x_4 = 1$
f) $x_1 = -3$ $x_2 = 0$ $x_3 = -1/2$ $x_4 = 2/3$

64. **a)** $x = 2$ $y = -1$ $z = -3$ **b)** nincs megoldás
c) $x = 3$ $y = 2$ $z = 1$ **d)** $x = (3/4)z$ $y = 0$ $t = 0$ z : paraméter

65. **a)** $x_1 = 5$ $x_2 = 4$ $x_3 = -3$ $x_4 = 3$ $x_5 = -2$ **b)** nincs megoldás

66. **a)** $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **b) és c)** nem létezik **d)** $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ **f)** $\frac{1}{31}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -12 \\ -6 & 5 & -10 \\ 11 & -4 & 39 \end{pmatrix}$

67. **a)** $x=28$ $y=22$ $z=-6$ **b)** $x=0$ $y=23$ $z=29$
c) $x=13$ $y=19$ $z=20$

68. **a)** $x=2$ $y=-1$ $z=-3$ **b)** $x=2$ $y=1$ $z=1$
c) $x=3$ $y=-4$ $z=-2$ **d)** $x=-4$ $y=0$ $z=5$

69. **a)** $x=1$ $y=1$ $z=1$ **b)** $x=2$ $y=-1$ $z=-3$
c) $x=10/93$ $y=-257/93$ $z=35/93$
d) $x=1$ $y=-2$ $z=-1$ **e)** $x=3$ $y=-4$ $z=-2$
f) $x=-4$ $y=0$ $z=5$ **g)** $x=-3$ $y=4$ $z=6$
h) $x=7/5$ $y=27/5$ $z=-8/5$
i) $x=-1$ $y=0$ $z=1$ **j)** $x=1$ $y=2$ $z=3$
k) $x=1$ $y=-1$ $z=1$ **l)** $x=1/15$ $y=7/3$ $z=-11/15$

70. nem

7. SZÁMSOROZATOK

1. A sorozat fogalma

(1) Ha minden n természetes számhoz egy a_n valós számot rendelünk hozzá (azaz egy **N**-en értelmezett f függvényt adunk meg) akkor egy $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ *végtelen számsorozatot* (röviden sorozatot) kapunk.

A sorozat jele: $\{a_n\}$ vagy (a_n) vagy egyszerűen leírjuk az n-edik tagját: a_n-t. Mindhárom esetben a_n-t általános tagnak hívjuk. Gyakran jelöljük a sorozatot így is: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ vagy kapcsos zárójel nélkül: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számokat a *sorozat tagjainak* nevezzük. Konkrét sorozatot gyakran $a_n = f(n)$ alakban írunk fel.

Pl:

$$a_n = \frac{n+2}{n-3}$$

(2) Egy sorozat *monoton nő*, ha $a_{n+1} > a_n$, *csökken*, ha $a_{n+1} < a_n$.

(3) A sorozat *felülről korlátos* (*alulról korlátos*), ha létezik olyan M véges szám, hogy $a_n < M$ (m amellyel $a_n > m$), és *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

(4) Egy sorozatot konstansnak nevezünk, ha minden tagja ugyanaz azaz: $(c, c, c, \ldots c, \ldots)$ alakú.

Megjegyzés: a sorozat általános tagját az esetek többségében "képlettel" adjuk meg (azaz felírjuk az f függvény $f(n)$ helyettesítési értékeit, ahol $n \in \mathbf{N}$).

2. Műveletek sorozatokkal

(5) Az $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{a_n / b_n\}$ sorozat az $\{a_n\}, \{b_n\}$ sorozatok *összege*, *különbsége*, *szorzata*, *hányadosa* ($b_n \neq 0$ esetén).

3. A sorozat határértéke

(6) Az A szám az $\{a_n\}$ sorozat határértéke: ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N_0 \in \mathbf{N}$, hogy minden $n > N_0$-ra $|a_n - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ vagy $a_n \to A$. Ha ilyen szám létezik akkor azt mondjuk, hogy a sorozat *konvergens*. Ellenkező esetben *divergens*.

4. Műveletek konvergens sorozatokkal

Ha $a_n \to A$, $b_n \to B$, akkor

(7) $a_n + b_n \to A + B$

(8) $a_n - b_n \to A - B$

(9) $ca_n \to cA$

(10) $a_n b_n \to AB$

(11) $a_n / b_n \to A/B$ (feltéve, hogy $B \neq 0$)

(12) $a_n^k \to A^k$

(13) $\sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$ (feltéve, hogy $a_n \geq 0, A \geq 0$)

5. Sorozat határértékének kiszámítása

Azt, hogy egy a_n sorozatnak mi a határértéke, a definíció segítségével nem tudjuk megállapítani; ezzel csak azt tudjuk eldönteni, hogy ha megadunk egy A számot az határértéke-e?

A határérték kiszámításánál jól fel tudjuk használni az alábbi speciális sorozatok határértékeit.

(14) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ (konstans sorozat határértéke: konstans)

(15) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (16) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ha $|q| < 1$

(17) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (18) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $a > 0$

(19) Gyakran segít a következő tétel is: ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim a_n = a$, $\lim c_n = a$, akkor $\lim b_n = a$ ("rendőrelv").

6. Divergens sorozatok

a) Nyilvánvaló, hogy ha egy sorozat nem korlátos akkor nem lehet konvergens. Pl. $a_n = 2n + 1$ sorozat nem konvergens mert $2n + 1$ nem korlátos. (Minél nagyobb az n, annál nagyobb $2n + 1$)

b) Divergensek az u.n. *oszcilláló sorozatok* is. Oszcilláló sorozat például a következő: 1,1/2,1/3,2/3,1/5,3/4,1/7,4/5,... általános tagja:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n = 2k - 1 \\ \frac{n}{n+2} & \text{ha } n = 2k \end{cases}$$

Ennél a sorozatnál páratlan n-re A = 0-ra, páros n-re pedig A = 1-re teljesül a (6) definíció. Ilyenkor azt mondjuk, hogy 0 és 1 *torlódási pontjai* a sorozatnak. Ha egyetlen torlódási pont van, akkor az a határérték.

PÉLDÁK

1. Írjuk fel az $1/1^2, 1/2^2, 1/3^2, 1/4^2, \ldots$ sorozat általános tagját.

M: Az 1-hez $1/1^2$-et, a 2-höz $1/2^2$-et, a 3-hoz $1/3^2$-et, 4-hez $1/4^2$-et rendeltük hozzá, amiből látszik, hogy $a_n = 1/n^2$.

2. Számítsuk ki az $a_n = (n - 1)/(n + 1)$ sorozat első 5 tagját.

M: n helyébe sorban az 1,2,3,4,5 számokat téve kapjuk, hogy $a_1 = 0$; $a_2 = 1/3$; $a_3 = 1/2$; $a_4 = 3/5$; $a_5 = 2/3$.

3. Írjuk fel azt a sorozatot, amelynek tagjai 3-mal osztva 1-et adnak maradékul.

M: Azok a számok, amelyek 3-mal osztva 1-et adnak maradékul $3n + 1$ alakúak, tehát $a_n = 3n + 1$.

4. Egy sorozat n-edik tagját az (n-1)-edik tag segítségével adjuk meg a következő módon: $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Írjuk fel az első 4 tagját, ha $a_1 = 2$.

M: $a_2 = 3a_{2-1} + 1 = 3a_1 + 1 = 3.2 + 1 = 7$
$a_3 = 3a_2+1 = 3.7 + 1 = 22$
$a_4 = 3a_3+1 = 3.22 + 1 = 67$

A sorozat első 4 tagja tehát: 2,7,22,67.

5. Mutassuk meg, hogy az $a_n = 1/(n^2 - 1)$ sorozat monoton csökken.

M: Megmutatjuk, hogy $a_{n+1} < a_n$ vagy ami ugyanaz $a_{n+1}/a_n < 1$.Mivel :

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n^2 + 2n + 1 - 1} = \frac{1}{n^2 + 2n} \text{ ezért}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 2n)} < 1$$ hiszen n^2-1 (a számláló) biztosan kisebb mint $n^2 + 2n$ (a nevező).

6.Mutassuk meg, hogy az $a_n = (n + 1)/n$ sorozat alulról is, felülről is korlátos.

M: Nyilvánvaló, hogy $(n + 1)/n > 1$ hiszen a számláló nagyobb mint a nevező. Másrészt $(n + 1)/n = 1 + 1/n$ és ebből látszik, hogy ez a kifejezés legfeljebb 2, hiszen $1/n$ biztosan nem lehet nagyobb mint 1.

7. Mutassuk meg, hogy az $a_n = 5n/(n + 1)$ sorozat konvergens és határértéke 5.

M: A definíció szerint 5 akkor határértéke a sorozatnak, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N szám, hogy $\left|\frac{5n}{n+1} - 5\right| < \varepsilon$ ha $n > N$. Mutassuk meg, hogy van ilyen N. Az abszolutértéken belüli kifejezést átalakítva az $\left|\frac{5n - 5n - 5}{n+1}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Az összevonásokat elvégezve az $\left|\frac{5}{n+1}\right| < \varepsilon$ ill. $\frac{5}{n+1} < \varepsilon$ egyenlőtlenséghez jutunk, amiből átrendezéssel: $n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$. Tehát, ha az n indexet nagyobbnak választjuk mint $[5/\varepsilon - 1]$ (a [ ]-lel az egészrészt jelöljük) akkor teljesül az $\left|\frac{5n}{n+1} - 5\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Legyen például $\varepsilon = 0.01$. Akkor $(5/\varepsilon) - 1 = (5/0.01) - 1 = 499$. Ha tehát $n > 499$ akkor $|5n/(n+1) - 5| < 0.01$ teljesül. Vegyük $n = 500$ -at. Akkor: $|a_{500} - 5| = |(2500/501) - 5| = |-5/501| = 5/501 < 0.01$ azaz: $|a_{500} - 5| < \varepsilon = 0.01$.

8. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

M: $|(1/n) - 0| < \varepsilon$ azaz $1/n < \varepsilon$ ha $n > 1/\varepsilon$. Tehát $N_0 = [1/\varepsilon]$ -et véve $|(1/n) - 0| < \varepsilon$, ha $n > N_0$. Az $1/n$ sorozatot *nullsorozatnak* nevezzük.

9. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0)$.

M: $|(1/n^k) - 0| < \varepsilon$, azaz $1/n^k < \varepsilon$ ha $n > \sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Tehát $N = \left[\sqrt[k]{1/\varepsilon}\right]$.

10. Mutassuk meg, hogy az $a_n = n$ sorozat divergens.

M: Tegyük fel, hogy konvergens és legyen határértéke: A. Vegyünk egy olyan N számot amelyre $N > A$. Ekkor bármely olyan n-re, amelyre $n > N$ kapjuk, hogy

$$|a_n - A| = |n - A| = n - A > n - N \geq 1,$$

ami ellentmond a határérték definíciójának, amely szerint bármilyen $\varepsilon < 1$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni, hacsak $n > N$.

11. Mutassuk meg, hogy az

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{ha} \quad n = 2k-1 \\ n/(n+2) & \text{ha} \quad n = 2k \end{cases}$$ sorozat divergens.

M: a) A sorozat **páratlan tagjai** (ha $n = 2k - 1$) a 0-hoz konvergálnak, hiszen mint láttuk bármilyen $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy $|(1/n) - 0| < \varepsilon$, ha $n > N$. Tehát a páratlan tagok bizonyos n indexekre 0-hoz lesznek tetszőlegesen közel.

b) Megmutatjuk, hogy a páros tagok ($n = 2k$) viszont 1-hez tartanak, mert $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{-2}{n+2}\right| < \varepsilon, \quad \frac{2}{n+2} < \varepsilon, \quad \frac{2}{\varepsilon} - 2 < n, \quad N = [2/\varepsilon - 2]$$

Tehát páros n-ekre a sorozat tagjai 1-hez lesznek tetszőlegesen közel, ha már $n > N$.

c) Azt kaptuk tehát, hogy a sorozat páratlan tagjai az 1-től pl. 2/3-nál messzebb vannak ha már $n > N$, a párosak viszont 0-tól vannak pl. 2/3-nál távolabb. Ez azt jelenti, hogy bizonyos N-től kezdve a sorozat tagjai váltakozva a 0-hoz ill. az 1-hez lesznek "tetszőlegesen" közel; a kettőhöz egyszerre nem tudnak közel lenni ha $n > N$, és nincsen olyan egyetlen szám amelyre ezt meg tudnák tenni. Ez azt jelenti, hogy a sorozat nem konvergens, tehát divergens.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1.$

M: Ugyanis tetszőleges ε > 0 esetén $\left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1} < \varepsilon$ ha $n > (1/\varepsilon) - (1/2)$. Azaz $N_0 = \left[(1/\varepsilon) - (1/2)\right]$-et véve bármilyen ε esetén $\left|((2n-1)/(2n+1)) - 1\right| < \varepsilon$, ha $n > N_0$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2-1} = \frac{3}{5}.$

M: Ugyanis tetszőleges ε > 0 esetén: $\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{8}{5(5n^2-1)} < \varepsilon$ ha

$$n > \left[\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right] = N_0$$

14. Mi a határértéke az $\frac{1}{n^2}$ sorozatnak?

M: Mivel $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{n} \to 0$ ezért **(10)**-et alkalmazva $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \to 0$, tehát $\frac{1}{n^2} \to 0$.

15. Legyen $a_n = (2,2,2,2,\ldots,2,\ldots)$, $b_n = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots)$. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ határértéket!

M: Mivel $a_n \to 2$ (a konstans sorozat "önmagához" tart) és $b_n \to 0$, ezért **(7)** alapján $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + 0 = 2.$

16. Legyen $a_n = 3 + (5/n)$, $b_n = -2 + (7/n)$. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ határértéket!

M: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + (5/n)\right) = 3 + 0 = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2 + (7/n)\right) = -2 + 0 = -2$ ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 3 - 2 = 1$. (A $\lim\limits_{n\to\infty} 5/n$, $\lim\limits_{n\to\infty} 7/n$ kiszámításánál a **(9)** szabályt használtuk: $5/n = 5\cdot(1/n)$, $7/n = 7\cdot(1/n)$).

17. Számítsuk ki az $\left(5 + \frac{1}{n}\right)\left(8 + \frac{1}{n^2}\right)$ sorozat határértékét!

M: Az $5 + (1/n)$ és $8 + (1/n^2)$ sorozatok szorzatáról van szó, tehát alkalmazhatjuk a **(10)** szabályt. Mivel $5 + (1/n) \to 5 + 0 = 5$,

$8 + \left(1/n^2\right) \to 8 + 0 = 8$ ezért $\left(5 + \frac{1}{n}\right)\left(8 + \frac{1}{n^2}\right) \to 5 \cdot 8 = 40.$

(Felhasználtuk, hogy $1/n \to 0$, $1/n^2 \to 0$ és hogy a $\{c\}$ konstans sorozat határértéke: c.)

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + \frac{3}{n^2}}{5 + \frac{3}{n^6}} = ?$

M: A $2 + \left(3/n^2\right)$ és $5 + \left(3/n^6\right)$ sorozatok hányadosáról van szó, tehát alkalmazhatjuk a **(11)** szabályt.Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \left(3/n^2\right)\right) = 2,$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(5 + \left(3/n^6\right)\right) = 2,$ ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + \left(3/n^2\right)}{5 + \left(3/n^6\right)} = \dfrac{2}{5}$. Felhasználtuk, hogy $1/n^2 \to 0$, $1/n^6 \to 0$ és $5 \to 5, 2 \to 2.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{7n-1} = ?$

M: Nem alkalmazhatjuk a törtekre vonatkozó **(11)** szabályt, mert $3n + 1$ és $7n - 1$ nem konvergens sorozatok.Ilyen esetekben mindig a következő eljárást alkalmazzuk.

a) Osszuk el a számlálót is és a nevezőt is n-nel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{7n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + (1/n)}{7 - (1/n)}$$

b) Most már mind a számlálónak mind a nevezőnek van határértéke tehát alkalmazható **(11)**.Mivel $3 + (1/n) \to 3 + 0 = 3;$ $\quad 7 - (1/n) \to 7 - 0 = 7$

ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{7n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + (1/n)}{7 - (1/n)} = 3/7$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 3n - 4}{3n^2 - 4n + 1} = ?$

M:Itt ugyanaz a helyzet, mint az előbb:a számláló sem korlátos, meg a nevező sem. Osszuk el a számlálót is meg a nevezőt is a legmagasabb kitevőjű taggal n^2-tel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n - 4}{3n^2 - 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + (3/n) - \left(4/n^2\right)}{3 - (4/n) + \left(1/n^2\right)} = \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$$

(Felhasználtuk, hogy $3(1/n) \to 0, -\left(4/n^2\right) \to 0, -(4/n) \to 0, 1/n^2 \to 0,$ $2 \to 2, 3 \to 3)$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{n^2+n+1} = ?$

M: Osszuk el a számlálót is meg a nevezőt is n^2-tel (a legmagasabb kitevőjű taggal): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1/n^2)-(1/n)}{1+(1/n)+(1/n^2)} = \dfrac{0+0}{1+0+0} = 0.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3} = ?$

M: Itt is osszuk el a számlálót is meg a nevezőt is a legmagasabb fokú taggal (ez itt: n). $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+(3/n)+(1/n^2)}+1}{2+(3/n)} =$

$= \dfrac{1+1}{2+0} = \dfrac{2}{2} = 1.$(Felhasználtuk, hogy $3/n \to 0$, $1/n^2 \to 0$, $1 \to 1$, $2 \to 2$ és azt, hogy $\sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$, ha $a_n \to A$)

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3 = ?$

M: A **(12)** szabályt alkalmazva (vagy azt a tényt, hogy a hatvány önmagával való szorzat) elég a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}$ határértéket kiszámítani (ami 3/4). Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n} = ?$

M: Mivel $\sqrt[n]{5n} = \sqrt[n]{5} \cdot \sqrt[n]{n}$, és mivel $\sqrt[n]{5} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$ (**(18),(17)** szabályok!) ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \times 1 = 1.$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6n+6} = ?$

M: A feladatot az **(19)** szabály segítségével oldjuk meg. Ugyanis, nyilvánvaló az alábbi egyenlőtlenség: $\sqrt[n]{6n} \le \sqrt[n]{6n+6} \le \sqrt[n]{7n}$ ha $n \ge 6$.

De $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6}\sqrt[n]{n} = 1 \times 1 = 1$ (**(18)**, **(17)** szabályok).

Ugyanígy: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7}\sqrt[n]{n} = 1 \times 1$. Az $\sqrt[n]{6n}$ és $\sqrt[n]{7n}$ közötti $\sqrt[n]{6n+6}$ sem tud máshova tartani mint az őt közrefogó sorozatok, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6n+6} = 1.$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

26. Adjuk meg az első öt tagját a következő sorozatoknak.

a) $a_n = \dfrac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$; b) $a_n = \dfrac{n^2+2}{2n^2-3}$; c) $a_n = \dfrac{-3n+2}{2n+6}$.

27. Irjuk fel az általános tagját a következő sorozatoknak:

a) $2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ 5/6,\ldots$; b) $2/3,\ 5/8,\ 10/13,\ 17/18,\ 26/23,\ldots$;

28. Mutassuk meg, hogy az $a_n = 3/(2n+3)$ sorozat monoton csökken!

29. Korlátos-e az $a_n = \left(n^2+2\right)/\left(n^2+3\right)$ sorozat ?

30. A határérték definiciója alapján vizsgáljuk meg igazak-e az alábbi állítások.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{4n+1} = \dfrac{3}{4}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} 5\dfrac{3^n}{3^n-2} = 5$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{2n^2-9} = 0$.

31. Legyen $a_n = \left(3n^2-6n\right)/\left(n^2+1\right)$; $b_n = (2n+1)/(6n-2)$.

a) $a_n + b_n \to ?$; b) $a_n - b_n \to ?$;

c) $a_n b_n \to ?$; d) $a_n/b_n \to ?$;

32. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n+12}{6n^2+2n-3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n^2-2}{n^4+3n^2+2n+6}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}+3n}{3n-6}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+2}{7n^2+6}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+5n+3}{3n^2-2}\right)^3$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2}$

ÚTMUTATÁSOK

26. a) Írjunk be n helyébe sorban 1-et, 2-től stb. Pl: $n = 1$-re

$$a_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} = 1$$

b) $n = 1$-re $\quad a_1 = \dfrac{1^2 + 2}{2 \cdot 1^2 - 3} = -3 \qquad$ s.i.t.

c) $n = 1$-re $\quad a_1 = \dfrac{-3 + 2}{2 + 6} = -\dfrac{1}{8} \qquad$ s.i.t.

27. a) $n = 1$-re $\quad a_1 = \dfrac{1+1}{1+2}$, $n = 2$-re $\quad a_2 = \dfrac{2+1}{2+2}$,

$n = 3$-ra $\quad a_3 = \dfrac{3+1}{3+2}$, s.i.t. $\quad a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

b) Vegyük észre, hogy a számlálóban $a_1 = 2 = 1^2 + 1$, $a_2 = 5 = 2^2 + 1$, $a_3 = 3^2 + 1$, azaz $a_n = n^2 + 1$. A nevező számtani sorozat $a_1 = 3$, $d = 5$ mellett, tehát alkalmazhatjuk az ismert "képletet": $a_n = a_1 + (n-1)\,d = 3 + 5(n-1) = 5n - 2$, tehát $a_n = \left(n^2 + 1\right)/(5n - 2)$.

28. Megnézzük, hogy $a_{n+1}/a_n < 1$ teljesül-e. Felírva a hányadost $(2n + 3)/(2n + 5)$-höz jutunk, amelyben a nevező nagyobb mint a számláló.

29. Nyilvánvaló, hogy egy alsó korlátja 0, hiszen $0 < \left(n^2 + 2\right)/\left(n^2 + 3\right)$. Mivel a számláló kisebb mint a nevező ezért a tört értéke 1-nél nem lehet nagyobb. Tehát egy felső korlátja: 1.

30. a) Vizsgáljuk meg, bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik-e N, hogy $\left|\dfrac{3n+1}{4n+1} - \dfrac{3}{4}\right| < \varepsilon$, ha $n > N$. Elvégezve a műveleteket az $1/(16n + 4) < \varepsilon$ egyenlőtlenséghez jutunk, amiből $N = \left[\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 4\right)\right]$.

b) Az $\left|5\dfrac{3^n}{3^n - 2} - 5\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesülését kell vizsgálni tetszőleges

$\varepsilon > 0$ mellett $n > N$-re: $\left|\dfrac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 5\right| = \dfrac{10}{3^n - 2} < \varepsilon$ ami teljesül, ha

$n > \log_3\left(10/\varepsilon + 2\right)$ tehát $N = [\log_3(10/\varepsilon + 2)]$.

c) Nem igaz az állítás, hiszen pl. $\varepsilon = 1/2$-re sincsen olyan N amelyre teljesüljön, hogy $\left|\dfrac{n^2 - 2}{2n^2 - 9} - 0\right| = \left|\dfrac{n^2 - 2}{2n^2 - 9}\right| < \dfrac{1}{2}$ legyen, mert ha $n > 3$, akkor $\left(n^2 - 2\right)/\left(2n^2 - 9\right) > 1/2$, tehát 3-tól kezdve a sorozat tagjai nem lesznek "közelebb" a 0-hoz mint 1/2, azaz a határérték definíciója $A = 0$-val pl. $\varepsilon = 1/2$-re nem teljesül.(bármely $\varepsilon > 0$ esetén kellene találni olyan N-t, hogy $\left|\left(n^2 - 2\right)/\left(2n^2 - 9\right) - 0\right| < \varepsilon$ teljesüljön).

31. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ határértékeket ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1/3$) és alkalmazzuk sorban a **(7)**, **(8)**, **(10)**, **(11)** szabályokat.

32. a) Osszuk el a számlálót is és a nevezőt is n^2-tel, és használjuk fel, hogy $1/n \to 0$.

b) Osszuk el mind a számlálót mind a nevezőt n^4-nel és használjuk fel, hogy $1/n \to 0$.

c) Osszuk el mind a számlálót mind a nevezőt n-nel (a gyök alatt nyilván n^2-tel) és használjuk fel, hogy $1/n \to 0$.

d) Osszuk el a gyök alatti kifejezésben mind a számlálót mind a nevezőt n^2-tel, és használjuk fel, hogy $1/n \to 0$ valamint a **(13)** szabályt.

e) Osszuk el mind a számlálót mind a nevezőt n^2-tel, és használjuk fel, hogy $1/n \to 0$ valamint a **(12)** szabályt.

f) Nyilvánvaló, hogy $\sqrt[n]{3n} \le \sqrt[n]{3n+2} \le \sqrt[n]{4n}$, ha $n \ge 2$.
De $\sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n} \to 1 \times 1 = 1$ ((**17**), **(18)** szabályok) és hasonlóan $\sqrt[n]{4}\sqrt[n]{n} \to 1 \times 1 = 1$,és alkalmazhatjuk a rendőrelvet **(19)**.

FELADATOK

33. Írjuk fel az alábbi sorozatok általános tagját:

a) $1,\ 1/5,\ 1/5^2,\ 1/5^3, \ldots$ b) $\sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5}, \ldots$ c) $1/2^2,\ 1/3^2,\ 1/4^2, \ldots$

34. Számítsuk ki az alábbi sorozatok első 3 tagját:

a) $(n+2)/(n+3)$; b) $6/(2+n)$; c) n^2;

35. Monoton csökkenőek, vagy növekvőek-e az alábbi sorozatok?

a) $1/(1+n^2)$; b) $(2n+1)/(3n+2)$; c) $3/(n+27)$;

36. Korlátosak-e az alábbi sorozatok?

a) $(7n+1)/(4n-2)$; b) $(n^2+2)/(n-3)$; c) $(n+7)/(n^2+1)$;

37. Mutassuk meg a definíció segítségével, hogy

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{5n+27} = \dfrac{3}{5}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+12}{n-6} = 2$;

c) $(n^2-3)/(n-3)$ divergens.

38. Legyen $a_n = (3n+2)/(7n-6)$; $b_n = (6n-6)/(3n-2)$. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^2$;

39. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 - 2n + 1}{14n^2 + 9n - 13}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{15n^7 - 6n + 7}{3n^7 + 2n^6 + 5}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - n + 6}{2n^5 + n^4 + n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6 + 2n + 2} + 2n^3}{5n^3 + 3n^2 + 6}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2n^2 + 3n + 2}{n^2 - n - 1}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n^3 + 1}{2n^3 + n}\right)^{10}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{72n}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7n + 13}$;

MEGOLDÁSOK

26. a) $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -1/3,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1/5$

b) $a_1 = -3,\ a_2 = 6/5,\ a_3 = 11/15,\ a_4 = 18/29,\ a_5 = 27/47$

c) $a_1 = -1/8,\ a_2 = -2/5,\ a_3 = -7/12,\ a_4 = -5/7,\ a_5 = -13/16$

27. a) $a_n = (n+1)/(n+2)$; b) $a_n = (n^2+1)/(5n-2)$

28. Igaz **29.** Igen **30.** a) Igaz b) Igaz c) Nem

31. a) 10/3, b) 8/3, c) 1, d) 9,

32. a) $\dfrac{1}{2}$, b) 0, c) 4/3, d) $\sqrt{3/7}$, e) 8/27, f) 1

33. a) $\dfrac{1}{5^{n-1}}$, b) $\sqrt{n+2}$, c) $\dfrac{1}{(n+1)^2}$

34. a) $3/4, 4/5, 5/6$; b) $2, 3/2, 6/5$; c) 1,4,9

35. a) Csökken, b) Nő, c) Csökken

36. a) Igen, b) Nem, c) Igen

38. a) 17/7, b) $-11/7$, c) $6/7$, d) $3/14$, e) $\sqrt{3/7}$, f) 4

39.. a) $\dfrac{1}{2}$, b) 5, c) 0, d) $3/5$, e) $\sqrt[3]{2}$, f) 3^{10}, g) 1, h) 1

8. FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

1. A függvény határértéke

(1) Azt mondjuk, hogy az A szám az $f(x)$ függvény határértéke az a pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$ hacsak $0 < |x-a| < \delta$.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

2. A határérték definíciója a számsorozat határértéke definíciójának felhasználásával (Heine-féle definíció)

(2) Azt mondjuk, hogy az A szám az $f(x)$ függvény határértéke az a pontban, ha bármilyen olyan x_n sorozatra amelyre $x_n \to a$, igaz hogy $f(x_n) \to A$.

3. Műveletek

Legyen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Akkor:

(3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = A + B$ **(4)** $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = A - B$

(5) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = AB$;

Speciális eset: $g(x) = k$ akkor **(6)** $\lim\limits_{x\to a} (kf(x)) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$

(7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ feltéve, hogy $B \neq 0$.

(8) Ha $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ és az $f(x)$ függvény értelmezve van B egy környezetében, és B-ben folytonos,akkor $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(B)$.

4. Néhány függvény határértéke

(9) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ **(10)** $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$

(11) $\lim\limits_{x\to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0$

(12) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$

$= \dfrac{a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0}{b_m a^m + b_{m-1} a^{m-1} + \ldots + b_1 a + b_0}$, ha a nevező nem nulla.

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ **(14)** $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e = 2,71828\ldots$

(15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a > 0)$ **(16)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (1+x)}{x} = 1$

5. Határérték az $a = \infty$ esetén

(17) Azt mondjuk,hogy az A szám az $f(x)$ függvény határértéke a ∞ -ben, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan $K > 0$ szám, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$ hacsak $x > K$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Megjegyzés: Feladatok megoldásában gyakran felhasználjuk, hogy $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, $n > 0$.

6. Végtelen határérték

(18) Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény a pontban vett határértéke ∞ , ha bármely $K > 0$-ra létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $|x - a| < \delta$, akkor $f(x) > K$.

Hasonlóan értelmezhető $a - \infty$ mint határérték.

7. Függvény folytonossága

(19) A függvény határértékének segítségével definiáljuk a függvény folytonosságát is. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az a pontban, ha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

PÉLDÁK

1. Mutassuk meg a definíció segítségével, hogy $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 8) = -5$.

M: Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $|3x - 8 + 5| = 3|x - 1| < \varepsilon$ hacsak $|x - 1| < \delta$. Bármilyen $\varepsilon > 0$ számra, ha $\delta = \varepsilon/3$ -at veszünk, akkor $|x - 1| < \varepsilon/3$ esetén $|3x - 8 + 5| = 3|x - 1| < 3\cdot(\varepsilon/3) = \varepsilon$.

2. Mutassuk meg a Heine-féle definíció segítségével, hogy $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

M: Vegyünk egy tetszőleges 2-höz tartó sorozatot, azaz olyan x_n sorozatot amelyre: $x_n \to 2$. Számítsuk ki $\lim x_n^2$ -et: $\lim x_n^2 = \lim x_n \cdot \lim x_n = 2.2 = 4$ (tehát bármilyen a 2-höz tartó x_n sorozatra: $x_n^2 \to 4$).

3. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3}$.

M: Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K > 0$ szám, hogy $|(5x + 1)/(3x + 9) - 5/3| < \varepsilon$ hacsak $x > K$.

$\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right| = \frac{14}{|3x+9|} = \frac{14}{3x+9}$ (mivel $x > 0$).De $\frac{14}{3x+9} < \varepsilon$ teljesül, ha $x > \frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon} = K$. Tehát bármely $\varepsilon > 0$ esetén $K = \frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$ mellett $\left|\frac{5x+1}{3x+9}-\frac{5}{3}\right| < \varepsilon$ hacsak $x > K$. Pl. ha $\varepsilon = 0.01$ akkor $K = \frac{14-0.09}{0.03} = 463\frac{2}{3}$.

4. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$.

M: Megmutatjuk, hogy tetszőleges $K > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ szám, hogy ha $0 < |x-1| < \delta$ akkor $\frac{1}{(1-x)^2} > K$. Válasszunk tehát egy tetszőleges $K > 0$ számot, és oldjuk meg az $\frac{1}{(1-x)^2} > K$ egyenlőtlenséget. Azt kapjuk, hogy $|1-x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$ $(K > 0)$.Tehát, ha $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, hacsak $|x-1| < \delta$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5) = ?$

M: **(11)** alapján: $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5.2^3 - 6.2^2 + 2 - 5 = 13$.

6. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2 - x + 2}{x+3} = ?$

M: Mivel a nevező határértéke nem 0, ezért alkalmazhatjuk a **(12)** szabályt, azaz: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2 - x + 2}{x+3} = \frac{3.2^2 - 2 + 2}{2+3} = \frac{12}{5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = ?$

M: Mind a számláló, mind a nevező határértéke 0-nál: 0 (tehát nem tudjuk alkalmazni a **(12)** szabályt).Ilyenkor a következő módszer szerint járunk el. A számlálót is meg a nevezőt is felbontjuk lineáris tényezőkből álló szorzatra:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(3x-2)}{x(2x-5)} =$$

Mind a számlálót, mind a nevezőt leosztjuk x-szel (lehet,mert nem nulla, csak tart 0-hoz)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x-2}{2x-5} = \frac{3\times 0 - 2}{2\times 0 - 5} = \frac{2}{5}.$$

8. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}=?$

M: Mind a számláló, mind a nevező határértéke 0. Bontsuk mindkettőt gyöktényezőkre: $x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$, $x^2-9x+20=(x-5)(x-4)$. Így

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-2}{x-4}=3.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=?$

M: Mind a számláló, mind a nevező 0-hoz tart, ha $x\to 0$. Alakítsuk át a függvényt úgy, hogy mind a nevezőt, mind a számlálót szorozzuk be $(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})$-szel. (Az ilyen tipusú feladatoknál ez egy "szabványos" eljárás).

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=?$

M: Ez is "0/0" tipusú eset. Szorozzuk most be mind a számlálót mind a nevezőt $\left(\sqrt{x+1}+1\right)$-gyel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5}{x^2+x-6}\right)=?$

M:. Mindkét nevező határértéke 0 az $x=2$ helyen. Bontsuk fel x^2+x-6-ot gyöktényezőkre. Az x^2+x-6 egyenlet gyökei: 2, -3; tehát $x^2+x-6=$ $=(x-2)(x+3)$. Hozzunk közös nevezőre és egyszerűsítsünk $(x-2)$-vel.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{5}{(x-2)(x+3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3-5}{(x-2)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{5}.$$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+1}=?$

M: Osszuk el a számlálót is nevezőt is x-szel:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3/x}{5+1/x}$. Nyilván: bármilyen olyan x_n sorozatra, ami végtelenhez tart, $1/x_n$ tart a 0-hoz, azaz $\lim\limits_{x_n\to\infty}1/x_n=0$, ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}3/x=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}1/x=0$. Tehát $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3/x}{5+1/x}=\dfrac{2+0}{5+0}=\dfrac{2}{5}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)=?$

M: Írjuk fel a függvényt x^3 kiemelésével a következő alakban:

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3(1-6/x+5/x^2-1/x^3)=$
$=(\lim\limits_{x\to\infty}x)^3\lim\limits_{x\to\infty}(1-6/x+5/x^2-1/x^3)$. A $-6/x$, $5/x^2$, $-1/x^3$ függvények nyilvánvalóan 0-hoz tartanak (hiszen bármilyen ∞ -hez tartó sorozatra ezt teszik) tehát a jobb oldali függvény határértéke 1, viszont $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, tehát a köbe is ∞ azaz

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)=\infty$.

14. $\lim\limits_{x\to0}e^{5x}=?$

M: Mivel $\lim\limits_{x\to0}5x=0$, ezért **(8)** alapján $\lim\limits_{x\to0}e^{5x}=e^0=1$.

15. $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x^2+6}=?$

M: (8) alapján: $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x^2+6}=\sqrt{\lim\limits_{x\to1}(x^2+6)}=\sqrt{7}$.

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}=?$

M: Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is 3-mal, és jelöljük $3x$-et z-vel, akkor $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}3\dfrac{\sin 3x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}3\dfrac{\sin z}{z}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin z}{z}=3$ mivel, ha $x\to0$ akkor $3x\to0$, azaz $z\to0$ és $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1$ (**(13)** alapján!).

17. $\lim\limits_{x\to\infty}5^{2x/(x+3)}=?$

M: Kiszámítjuk a kitevő határértékét: $\lim\limits_{x\to\infty}2x/(x+3)=2$, és **(8)** alapján $\lim\limits_{x\to\infty}5^{2x/(x+3)}=5^2=25$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{3\frac{\sin x}{x}+6} = ?$

M: Kiszámítjuk a gyök alatti kifejezés határértékét:

$\lim\limits_{x\to 0} \left(3\frac{\sin x}{x}+6\right) = 3 \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+2\right) = 9$. Így **(8)** alapján

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{3\frac{\sin x}{x}+6} = \sqrt{9} = 3.$

19. Folytonos-e az $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ függvény az $x = 2$ pontban?

M: A **(11)** szerint $\lim\limits_{x\to 2} (3x^2 + 5x + 2) = 3.2^2 + 5.2 + 2 = 24$, tehát a határérték éppen a helyettesítési érték, azaz a függvény folytonos.

20. Folytonos-e az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$ függvény az $x = 0$ pontban.

M: Mivel $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ és a függvény az $x = 0$ pontban 1-gyel egyenlő, ezért teljesül, hogy a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel, tehát a függvény folytonos az $x = 0$ pontban.

21. Folytonos-e az $x = 0$ pontban

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+2)\frac{\sin 2x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 3 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

M: Vizsgáljuk megegyezik-e a helyettesítési érték és a határérték. A határérték: $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+2)\frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x^2+2) \lim\limits_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 2 = 4$. A helyettesítési érték 3; és mivel $3 \neq 4$ ezért a függvény nem folytonos az $x = 0$ pontban.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

22. Mutassuk meg a definíció segítségével, hogy $\lim\limits_{x\to 3} (7x-18) = 3$.

23. Mutassuk meg a Heine-féle definícióval, hogy $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{5}{3}$.

24. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2}{7x+3} = \frac{3}{7}$.

25. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{(x-5)^3} = \infty \quad (x > 5)$

26. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^3+3x^2+4\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2+1\right)\left(x^3+2x^2-6x+1\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^4+6x^2+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}+3x+1}{x^2+5x+2}$

27. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(3x^2+1)(x-5)}{x^2-25}$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$ f) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

28. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+5x-6}{2x^2-7}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^3+2x^2-12}{6x^4+6x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^5+4x-6}{x^4+x^3+2x+1}$.

29. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 1} e^{3x^2+2x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{x^2-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\ x}{7x}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} 2^{(3x^2+1)/(x^2-6)}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} (1+1/x)^{7x}$.

30. Folytonosak-e az alábbi függvények?

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{4x^3+x^2-2}$ $x = 1$-ben b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ $x = 2$-ben

c) $f(x) = \begin{cases} (2-x)\dfrac{\sin\ x}{3x} & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 2/3 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ $x = 0$-ban

d) $f(x) = \begin{cases} e^x \dfrac{\sin\ 5x}{x} & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 5 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ $x = 0$-ban

e) $f(x) = \begin{cases} (x^2+1)\dfrac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 2 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ $x = 0$-ban.

ÚTMUTATÁSOK

22. Azt kell megmutatni, hogy $|7x - 18 - 3| < \varepsilon$ valamilyen $\delta > 0$-ra teljesül, ha már $|x - 3| < \delta$.

23. Vegyünk tetszőleges 2-höz tartó sorozatot. Nyilván minden $x_n \to 2$ számsorozatra $x_n^2 \to 4$. Alkalmazva a sorozatok határértékének kiszámítására vonatkozó szabályokat eredményül 5/3-at kapunk.

24. Olyan K szám létezését kell megmutatni, amelyre az $\left|\dfrac{3x+2}{7x+3} - \dfrac{3}{7}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül, ha $x > K$.

25. Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $K > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy $\dfrac{1}{(x-5)^3} > K$, ha $|x-5| < \delta$.

26. a) Alkalmazzuk a **(11)** szabályt.
b) Alkalmazzuk a **(5)** és a **(11)** szabályt.
c) Alkalmazzuk a **(12)** szabályt.
d) Alkalmazzuk a **(7)** szabályt (a nevező polinom, a számlálóban alkalmazzuk **(10)**-et).

27. a) "0/0 eset". Mivel $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ ezért $(x - 2)$-vel leoszthatunk, tehát $x + 2$ határértékét kell kiszámítanunk.
b) $x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = (x - 2)(x^2 + 5x + 1)$ és $x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$, így mind a számlálót mind a nevezőt leoszthatjuk $(x - 2)$-vel majd **(12)**-t alkalmazhatjuk.
c) "0/0 eset". Mivel $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$, ezért $(x - 5)$-tel mind a számláló, mind a nevező leosztható, majd **(12)**-t alkalmazhatjuk.
d) "0/0 eset". Szorozzuk meg a nevezőt is meg a számlálót is $(\sqrt{6x^2 + 3} - 3x)$-szel, majd osszuk el a számlálót is meg a nevezőt is $(1 + x)$-szel. Végül alkalmazzuk **(12)**-t.
e) "0/0 eset". Bontsuk fel a számlálót is, a nevezőt is gyöktényezőkre, és osszunk le $(x - 5)$-tel.
f) Mindkét nevező határértéke 0 az $x = -2$ helyen. Hozzunk közös nevezőre, úgy, hogy vegyük figyelembe: $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ és $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$.

28. a) Osszuk el a számlálót is és a nevezőt is x^2-tel, és használjuk fel, hogy

$1/x \to 0$, ha $x \to \infty$.
b) Osszuk el a számlálót is meg a nevezőt is x^4-nel. A nevező 6-hoz tart, a számlálóban minden tag 0-hoz tart.
c) Osszuk el a számlálót is meg a nevezőt is x-szel.(a számlálóban a gyök alá x^2-et vigyünk!) és használjuk fel, hogy $1/x \to 0$, $3/x^2 \to 0$, ha $x \to \infty$.
d) Osszuk el x^4-nel mind a számlálót mind a nevezőt. A nevező $1 + 1/x + 2/x^3 + 1/x^4$ alakú lesz, tehát 1-hez tart, ha $x \to \infty$. A számláló: $3x + 4/x^3 - 6/x^4$, és az első tag ∞-hez tart, ha $x \to \infty$.

29. a) Számítsuk ki a kitevő határértékét és alkalmazzuk a **(8)** szabályt
b) Számítsuk ki a gyök alatti függvény határértékét és alkalmazzuk a **(8)** szabályt
c) $(\sin x)/(7x) = 1/7.(\sin x)/x$, de $(\sin x)/x$ határértékét ismerjük az $x = 0$ pontban
d) Számítsuk ki a kitevő határértékét és alkalmazzuk a **(8)** szabályt
e) $(1 + 1/x)^{7x} = ((1 + 1/x)^x)^7$ de az $(1 + 1/x)^x$ határértéket $x = \infty$-ben ismerjük.

30. a) Számítsuk ki a határértékét **(12)** alapján!
b) Számítsuk ki a határértéket és a helyettesítési értéket!
c) Akkor folytonos a függvény ha határértéke $x = 0$-ban 2/3 (mert ennyi a helyettesítési értéke a "képlet" szerint). Számítsuk ki $(2 - x)$ határértékét és $\sin x/(3x)$ határértékét, majd alkalmazzuk a **(5)** szabályt.
d) Számítsuk ki a határértéket **(5)** alapján ($(\sin 5x)/x$-nél szorozzunk is és osszunk is 5-tel)
e) A határértéket a **(5)** szabály alapján számítsuk ki.

FELADATOK

31. Mutassuk meg, hogy

a) $\lim\limits_{x\to 3} (3x + 1) = 10$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + 1}{x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x - 3} = \infty \quad x > 3$.

32. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{2 + x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 3}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} [(x^2 - 1)(x - 3)(x - 5)]$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+2} - 1}{3x^2 + 1}$