MATEMATIKA PÉLDATÁR

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ
a második kiadáshoz

Példatárunk a Gábor Dénes Műszaki Informatikai Főiskola hallgatói számára készült. Ez a körülmény meghatározta könyvünk tematikáját és a módszert is.

Mivel a főiskolán a távoktatás módszerével folyik a képzés, ezért fontos követelmény, hogy a hallgató egyéni tanulásra is alkalmas könyvre támaszkodhasson. Példatárunkat ilyennek tekintjük. Ezt azzal kívántuk elérni - reméljük ez sikerült is - , hogy minden témában három csoportba szedtük a példákat. Az első csoportban ("Példák" cím alatt) szereplő példák megoldását részletesen tárgyaljuk (néhol talán az indokoltnál is részletesebben). A "Feladatok útmutatással" címet viselő példáknál útmutatást adunk (lehet, hogy néhány olvasónk szerint a szükségesnél kevesebbet). Végül a harmadik csoporthoz (ennek a címe: "Feladatok") tartozó feladatoknál csak a megoldást közöljük.

Mint más példatárakban is teszik, az egyes témaköröknél mi is rövid összefoglalást adunk a feladatok megoldásához szükséges ismeretekről (fogalmakról, "képletekről").

A második kiadásban kijavítottuk az első kiadásban megtalált hibákat. Ebben Pogány Eörs segített; lelkiismeretes munkáját köszönöm.

Abból a célból, hogy megkönnyítsük a könyv használatát, az elméleti részeket "besatíroztuk" és a fontosabb képleteket még be is kereteztük.

Budapest, 1995. május

A szerkesztő.

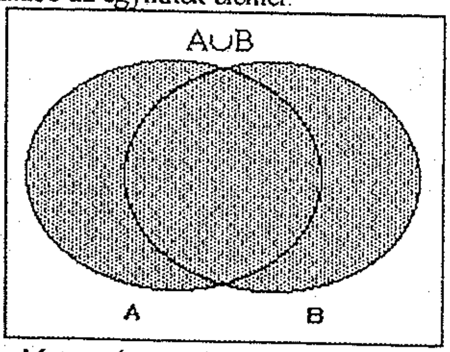
1. HALMAZELMÉLET

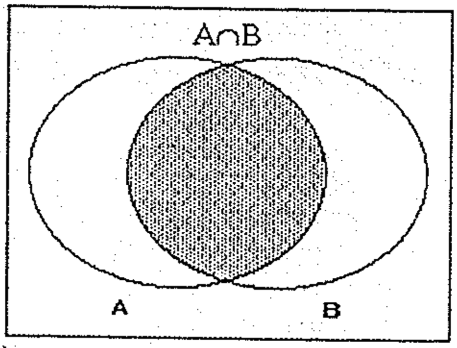
1. A halmaz fogalma

(1) Tetszőleges dolgok összességét *halmaznak* tekintjük. Az összességbe tartozó dolgok *a halmaz elemei.*
A halmaz jelölésére a nagybetűket használjuk, elemeiket { } között tüntetjük fel, ill. megfogalmazzuk az őket összefogó utasításokat. Ábrázolásuk Venn-diagrammal történik (kör, téglalap stb.). A halmazba tartozás jele : $\in$ (*eleme*).
(2) *Üres halmaz* , amelynek nincs eleme : $\varnothing$.
(3) Két halmaz *egyenlő*, ha ugyanazok az elemeik.
(4) Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme: $A \subset B$.
Ha $A = \varnothing$ vagy $A = B$, akkor A triviális (nem valódi) részhalmaza B-nek.
P(A) : a A *hatványhalmaza*; a A halmaz összes részhalmazainak halmaza (ha A *n*-elemű, akkor P(A) 2^n -elemű).
(5) Ha egy halmazról és részhalmazairól beszélünk, a halmazt magát *alaphalmaznak* (X) nevezzük.

2. Műveletek

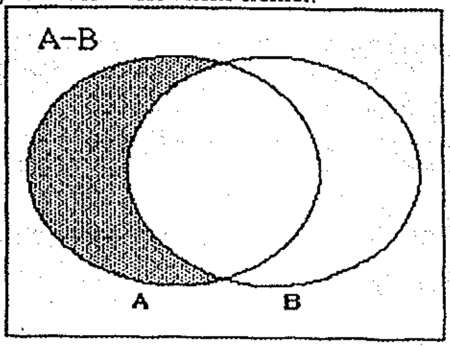
(6) *Egyesítés* (összeg, unió) (jele: $\cup$)
Az A és B halmaz uniója azon elemek halmaza, amelyek az A, B közül legalább az egyiknek elemei.

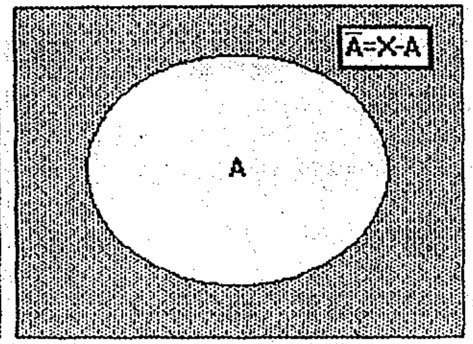




(7) *Metszet* (szorzat, közös rész) (jele: $\cap$)
Az A és B halmazok metszete azon elemek halmaza, melyek az A-nak is és ugyanakkor a B-nek is elemei.
(8) *Különbség* (jele: $-$)

Az A és B halmaz különbsége azon elemek halmaza, amelyek A-nak elemei, de ugyanakkor B-nek nem elemei.





(9) *Komplementer* (jele: $\bar{\ }$ (föléhúzás))

Az A halmaz komplementere az a halmaz, melynek elemei az A-nak nem elemei, de az X teljes halmaznak igen. Tehát : ha $A \subset X$, akkor $X - A$ az A komplementere X-re vonatkozóan.

(10) Két halmaz *diszjunkt*, ha metszetük üres : $A \cap B = \emptyset$.

3. Tulajdonságok

3.1 Az egyesítésre

(11) $A \cup A = A$

(12) $A \cup \emptyset = A$

(13) $A \cup B = B \cup A$

(14) $A \cup \overline{A} = X$

(15) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3.2 A metszetre

(16) $A \cap A = A$

(17) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(18) $A \cap B = B \cap A$

(19) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

(20) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3.3 Az egyesítésre és a metszetre együtt:

(21) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

(22) $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.4 A különbségre

(23) $A - B = A \cap \overline{B}$

(24) $A - (A - B) = A \cap B$

(25) $A - \emptyset = A$

(26) $A - A = \emptyset$

3.5 A különbségre és az egyesítésre ill. metszetre együtt:

(27) $(A - B) \cup B = A \cup B$

(28) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

(29) $A \cap B - C = (A - C) \cap (B - C)$

3.6 A komplementerre

(30) $\overline{\overline{A}} = A$

(31) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(32) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Az utóbbi két azonosságot ((31),(32)) *De Morgan szabályok*nak nevezzük.

4. Rendezett halmazok

(33) *Rendezett n-es*: n db elem rögzített sorrendben történő felsorolása.
(34) *Direkt szorzat* $A \times B$: A és B halmazok direkt szorzata mindazon rendezett párok halmaza, amelyek első komponense A-ból, második komponense B-ből való.
Azaz : $(x,y) \in A \times B$ akkor és csak akkor, ha $x \in A$ és $y \in B$.
(35) $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$.
(36) *Reláció* : a direkt szorzat részhalmaza. (A_i a reláció i. tartománya.)
(37) R *binér reláció* : $R \subseteq A \times B$ $(a,b) \in R$ jele : aRb (pl. aritmetikai relációk.)
A : értelmezési tartomány B : képtartomány $A \cup B$: reláció tere.

PÉLDÁK

1. Soroljuk fel az A halmaz elemeit :
$A = \{ n : n \in \mathbf{N}, n = k - 1, k \in \mathbf{N}, k < 5 \}$.

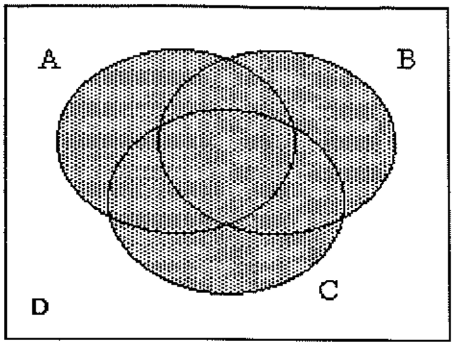
M: Az A elemei olyan egész számok, amikre a (kettőspont után) felsorolt tulajdonságok igazak.
A k értéke csak 1, 2, 3, 4 lehet, ugyanis 5-nél kisebb természetes szám. Az utasítással megadott n szám ezekután 0, 1, 2, 3 lehetne, de ugyanakkor természetes szám is, tehát a A halmaz 3 elemű; $A = \{ 1, 2, 3 \}$.

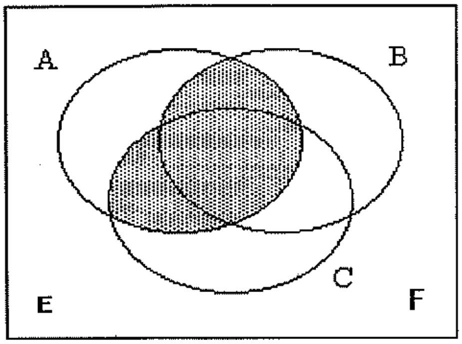
2. Határozzuk meg az A és B halmazok metszetét :
$A = \{ a : a \in \mathbf{N}, a \text{ páros}, a \leq 15 \}$
$B = \{ b : b \in \mathbf{N}, 0 < b < 30, b \text{ osztható 7-tel} \}$.

M: Az A elemei a legfeljebb 15 , páros természetes számok.
$A = \{ 2,4,6,8,10,12,14 \}$. A B elemei a 7-tel osztható, 30-nál kisebb természetes számok : $B = \{ 7,14,21,28 \}$.
A metszet elemei azok a számok, amelyek mindkét halmaznak elemei, azaz a 7-tel osztható páros, 15-nél kisebb természetes számok : $A \cap B = \{ 14 \}$.
Jelen esetben csak egyetlen közös elemet találtunk.

3. Az alábbi D , E , F halmazok között vannak-e megegyezők :
$D = A \cup B \cup C$ $E = A \cap (B \cup C)$ $F = A \cap B \cup A \cap C$

M: A kérdés az, hogy igaz-e minden esetben valamelyik egyenlőség a következők közül:
$D = E$, $D = F$, $E = F$.
Venn-diagrammal ábrázoljuk mindhárom halmazt és vessük össze azokat az egyenlőség eldöntéséhez.





Látjuk, hogy csak az E = F igaz minden esetben.

Megjegyzés : Tudnunk kellett ábra nélkül is, hogy E = F mindig igaz, hiszen ez a **(21)** szabály. Azt is sejthettük, hogy a D halmaz általában bővebb a többinél.

4. Határozzuk meg az A, B, C halmazok elemeit, ha eleget tesznek a következő feltételeknek :

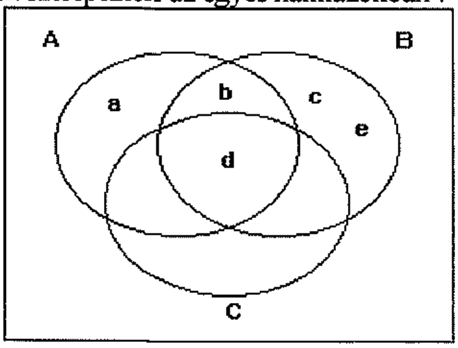
$A \cup B \cup C = \{ a, b, c, d, e \}$

$A \cap B \cap C = \{ d \}$

$A - C = \{ a, b \}$

$B - C = \{ b, c, e \}$

M: A diagramban egyértelműen 7 területre pakolhatunk általános esetben Az $A \cap B \cap C$ egyetlen területet jelent, azaz a d elemnek egyértelmű helye van a diagramban. Az $(A - C) \cap (B - C)$ is egyetlen terület, ahová a közös elem : b kerülhet. Ebből viszont az következik, hogy az $A - C$ többi eleme (a) csak az $A - (B \cup C)$-ben, a $B - C$ többi eleme (c,e) pedig csak a $B - (A \cup C)$-ben lehet. Mivel az elhelyezett elemeken kívül az unió nem tartalmaz más elemet már, így olvassuk le, mely elemek szerepelnek az egyes halmazokban :



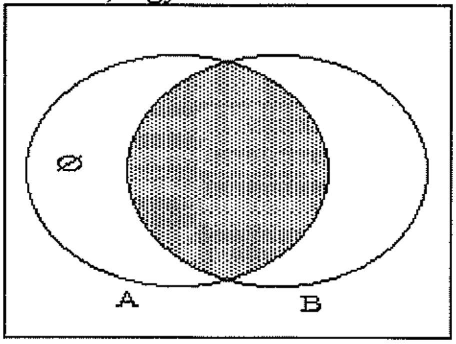
$A = \{ a, b, d \}$ $B = \{ b, c, d, e \}$ $C = \{ d \}$

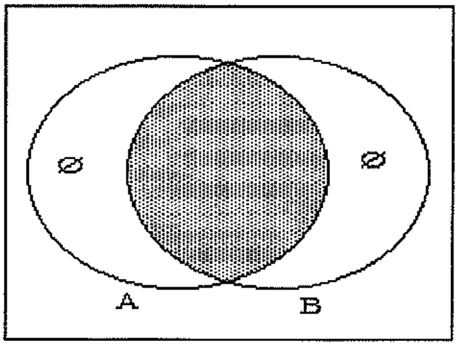
5. Mikor igaz az alábbi egyenlőség ? (Adjunk szükséges és elégséges feltételt!)

a) $A \cap B = A$ **b)** $A \cap B = A \cup B$

M: Általános esetben természetesen nem igaz sem **a)**, sem **b)** mint ezt a Venn-diagramról láthatjuk. Ugyanis az egyenlőség bal és jobb oldala ugyanazt a területet kell, hogy takarja. Ilyen esetekben igyekszünk "a kilógó részeket levágni", a közös részeken túliakat kinullázni.

Az **a)** egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha A azon része, ami a metszeten túli, üres; azaz az $A - B = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy A minden eleme egyúttal B-nek is eleme, vagyis $A \subset B$.





A **b)** egyenlőség akkor és csak akkor teljesülne, ha a metszeten túli részek, amik az egyesítést alkotják, üresek lennének, azaz $A - B = \emptyset$ és $B - A = \emptyset$ lenne. Ez azt jelenti, hogy sem az A-nak, sem a B-nek nincs saját eleme, csak közös. Tehát A=B.

6. Legyenek I_1 és I_2 intervallumok.

Határozzuk meg az $I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2$, $I_1 - I_2$, $I_2 - I_1$ intervallumokat, ha

a) $I_1 = (0,8]$ és $I_2 = [-5,5]$ **b)** $I_1 = (-2,\infty)$ és $I_2 = [5,9]$.

M: Definiáljuk az intervallum-jelöléseket :

$[a,b) = \{ x : x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}$ "balról zárt, jobbról nyílt"

$[a,b] = \{ x : x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$ "balról zárt, jobbról zárt", "zárt"

$(a,b) = \{ x : x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$ "balról nyílt, jobbról nyílt", "nyílt"

$(a,b] = \{ x : x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\}$ "balról nyílt, jobbról zárt",

a) Rajzoljuk a valós számtengely fölé a két intervallumot:

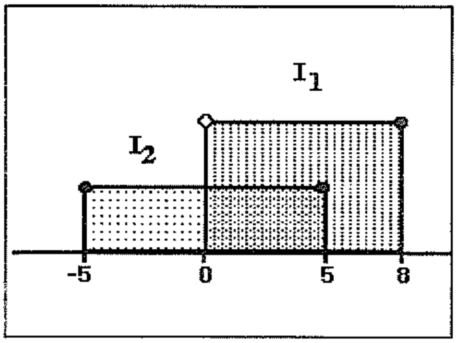
Olvassuk le a két intervallum

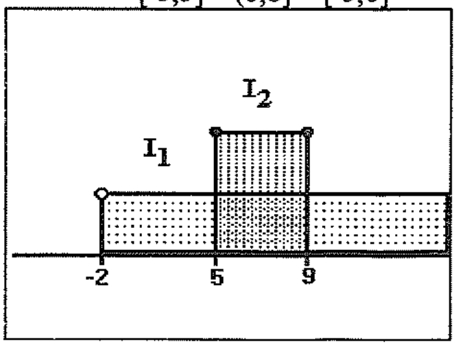
unióját : $(0,8] \cup [-5,5] = [-5,8]$

metszetét : $(0,8] \cap [-5,5] = (0,5]$

különbségeit : $(0,8] - [-5,5] = (5,8]$

$[-5,5] - (0,8] = [-5,0]$





b) Vegyük észre, hogy az I_2 valódi részhalmaza az I_1-nek : $I_2 \subset I_1$.

$(-2,\infty) \cup [5,9] = (-2,\infty)$ $\qquad$ $(-2,\infty) \cap [5,9] = [5,9]$

$(-2,\infty) - [5,9] = (-2,5) \cup (9,\infty)$ $\qquad$ $[5,9] - (-2,\infty) = \varnothing$.

7. Igazak-e a következő állítások tetszőleges A, B, C halmazokra?

a) $C - (B \cup A) = (C - B) \cap (C - A)$ $\qquad$ **b)** $(A \cup B) \cap C = C$

M: **a)** Induljunk ki a bal oldali kifejezésből, alkalmazzuk a halmazok különbségének definícióját :

$$C-(B\cup A)=C\cap\overline{B\cup A}=C\cap\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=\left(C\cap\overline{B}\right)\cap\left(C\cap\overline{A}\right)=$$

$$=(C-B)\cap(C-A)$$

A deMorgan szabály és **(16)** alkalmazása után a jobb oldal különbségeinek definícióját kaptuk. Tehát az állítás igaz.

b) A bal oldalra alkalmazzuk a **(21)** szabályt :

$$(A\cup B)\cap C=A\cap C\cup B\cap C\subset C$$

A feltételből következik, hogy $C \subset A \cup B$, tehát az egyenlőség általában nem igaz.
A kapott halmaz csak valódi részhalmaza a C halmaznak, tehát nem egyenlő vele.

Példa rendezett halmazokra. Adottak az alábbi halmazok:

NÉV={Béla,Katalin,Márton,László}
TANTÁRGY={MAT,FIZ,PAS}
JEGY={1,2,3,4,5}.

a) Képezzük a nevek, tantárgyak, jegyek direkt szorzatát!

b) Írjunk fel egy relációt a három halmazból!

c) Adjunk meg egy binér relációt a nevek és jegyek között!

M: A NÉVxTANTÁRGYxJEGY direkt szorzat 4x3x5=60 elemű halmaz, amelynek minden eleme egy rögzített sorrendű [név,tantárgy,jegy] hármas.

{[Béla,MAT,1],[Béla,MAT,2],...,[Béla,MAT,5],[Béla,FIZ,1],...,[Béla,PAS,5], [Katalin,MAT,1],...[Katalin,PAS,5],[Márton,MAT,1],...,[László,PAS,5]}

Ennek a direkt szorzatnak bármelyik részhalmaza egy reláció. Pl. egy EREDMÉNYEK halmaz, melynek elemei azt írják le, hogy ki miből hányasra vizsgázott:

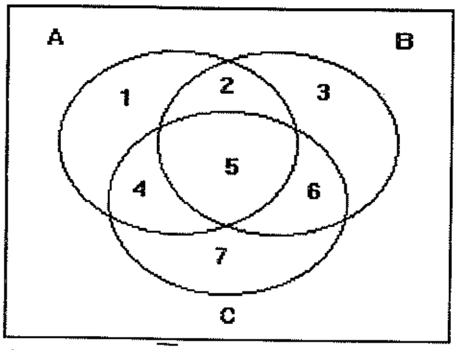
{[Béla,MAT,4],[Katalin,MAT,4],[Béla,FIZ,5],[Márton,PAS,5],...}

A nevek és jegyek közötti reláció lehetne az a halmaz, amelynek elemei (kettesek) azt írják le, hogy ki milyen minősítéssel végzett:

{[Béla,4],[László,5],...}

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

8. Fogalmazzuk meg a halmazok nyelvén az alábbi általános elrendezésű A, B, C halmazok 1-essel, 2-essel, ... , 7-essel jelzett területeit !



9. Igazoljuk az $A \cap B - C = \overline{C} \cap A \cap B$ egyenlőséget !

10. Igaz-e, hogy $A-(B\cup C)=A-B-C$ tetszőleges A, B, C halmazokra?

11. Igaz-e, hogy $(A\cap B)\cup(A\cap C) = A\cap(B\cup C)$?

12. Ha $A\cup B = A$, akkor igaz-e, hogy $B\subset A$?

13. Igaz-e, hogy $A\cup(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup B = A\cup B$ minden esetben?

14. Az alábbi D, E, F halmazok közül melyek egyenlők egymással?

$D = \overline{A \cup B \cup C}$ $\quad E = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ $\quad F = \overline{A} \cup (\overline{B} \cup \overline{C})$

15. Határozzuk meg az $A\cap B$ halmazt, ha

$A = \{ n : n = 2k+1,\ k\in N,\ 0 \le k \le 5\}$

$B = \{ m : m = 3l+2,\ l\in N,\ 2 \le l \le 4\}$.

16. Határozzuk meg az A, B és C halmazokat, ha eleget tesznek a következő négy feltételnek :

$A\cup B\cup C = \{3,12,13,21,23\}$

$A\cap B\cap C = \{21\}$

$A-B = \{3,12\}$

$C-B = \{12,13,23\}$

ÚTMUTATÁSOK

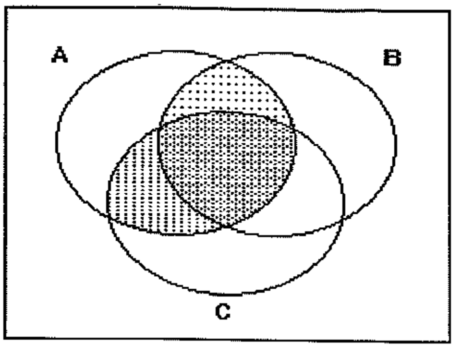
8. Fogalmazzuk meg, mit látunk A-ból, B-ből, C-ből.

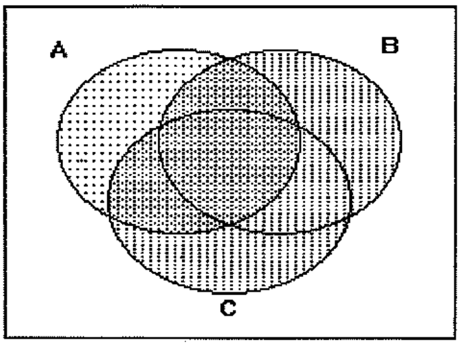
1.	$A-(B\cup C)$	$A-B-C$	$(A-B) \cap (A-C)$
2.	$A\cap B-C$	$(A-C) \cap (B-C)$	
3.	$B-(A\cup C)$	$B-A-C$	$(B-A) \cap (B-C)$
4.	$A\cap C-B$	$(A-B) \cap (C-B)$	
5.	$A\cap B\cap C$		
6.	$C\cap B-A$	$(C-A) \cap (B-A)$	
7.	$C-(B\cup A)$	$C-B-A$	$(C-B) \cap (C-A)$.

9. A különbség definíciója és a metszet kommutativitása szerint igaz.

10. $A - (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A - B - C$

11. Ábrázoljuk Venn-diagrammal mindkét oldalt, ugyanazt a területet kapjuk-e.





$(A \cap B) \cup (A \cap C) \quad = \quad A \cap (B \cup C)$

12. A feltétel szerint $B - A = \emptyset$, tehát B részhalmaza A-nak.

13. $A \cup (A \cap B) = A$ ill. $(B \cap C) \cup B = B$. Tehát az állítás igaz.

14. A deMorgan szabályt alkalmazva, azt kapjuk, hogy $D = E$.

15. $A = \{1,3,5,7,9,11\}$ ui. $k = 0,1,2,3,4,5$

$B = \{8,11,14\}$ ui. $l = 2,3,4$

$A \cap B = \{11\}$.

16. Vegyük észre, hogy $A - B \cap C - B = \{12\}$ egy konkrét terület a Venn-diagramban. Ugyancsak a 3 halmaz metszete is egyetlen terület. A 3 csak az A eleme, a 13 és a 23 csak a C eleme:

$A = \{3,12,21\}$ $\quad B = \{21\}$ $\quad C = \{12,13,21,23\}$

FELADATOK

17. Igazoljuk a $C - (A \cup B) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ egyenlőséget !

18. Igazak-e a következő állítások tetszőleges A, B, C halmazokra ?

a) $A \cap B = A \cup B$ **b)** $A - (B \cap C) = A - B - C$

c) $C - (B \cap A) = (C - B) \cup (C - A)$ **d)** $A \cap B \subset A \cup B$

19. Igazak-e a következő állítások ?

a) $A - B = B - A$ **b)** $A - \emptyset = \emptyset$

c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

d) $A \cup B = B \cup A$ **e)** $A - \emptyset = A$

20. Ha $A \cup B = A$, akkor igaz-e, hogy $A \cap B = B$?

21. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $A \cap (A \cup B) \cup B \cap (B \cup C) = A \cup B$

b) $A \cup (B - (A \cap B)) = A \cup B$

22. Az alábbi D, E, F halmazok közül melyek egyenlők egymással minden esetben?

$D = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $E = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$, $F = \overline{A} \cap \overline{B \cup C}$.

23. Határozzuk meg a közös elemeket, ha

a) $K = \{ n : n \in \mathbf{N}, n \text{ páros}, 100 < n < 150 \}$
$L = \{ x : x \in \mathbf{N}, x \leq 150 , x \text{ osztható 5-tel} \}$

b) $K = \{ n : n \in \mathbf{N}, n \text{ páros}, 10 \leq n \leq 30 \}$
$L = \{ x : x \in \mathbf{N}, x \leq 30 , x \text{ osztható 5-tel} \}$

24. Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt, ha

a) $A = \{ n : n = 5k+1, k \in \mathbf{N},\ 5 < k < 15\}$
$B = \{ m : m = 7l+2, k \in \mathbf{N},\ 0 < l < 8\}$

b) $A = \{ n : n = 5k-1, k \in \mathbf{N},\ 5 < k < 15\}$
$B = \{ m : m = 7l+2, k \in \mathbf{N},\ 0 < l < 8\}$

c) $A = \{ n : n = 2k+1, k \in \mathbf{N},\ 0 \leq k \leq 5\}$
$B = \{ m : m = 3l+1, l \in \mathbf{N},\ 2 \leq l \leq 4\}$.

25. Legyen $I_1 = [-4,3]$ és $I_2 = [0,5]$ intervallum a valós számokból. Határozzuk meg az $I_1 - I_2$, az $I_2 - I_1$, az $I_1 \cup I_2$, és az $I_1 \cap I_2$ intervallumokat!

26. $A = \{0,1,2,3,5\}$, $B = \{0,1,4,5,6,7\}$. Határozzuk meg az $A-B$, $B-A$, $A \cup B$, $A \cap B$ halmazokat!

27. Írjuk fel az adott két halmaz egyesítésének és metszetének elemeit!

a) X = {az 5-tel osztható Lottószámok}
Y = {a 30-cal osztható Lottószámok}

b) X = {az 5-re végződő Lottószámok}
Y = {a páratlan Lottószámok}.

28. Határozzuk meg az X és az Y halmazokat, ha eleget tesznek a következő feltételeknek: $X \cup Y = \{a,b,c,d,e\}$, $X \cap Y = \{c,d\}$, $X - Y = \{e\}$.

29. Ha A = {egész számok}, $B = [0,200]$, $C = [-1,0)$,akkor igazak-e az alábbi állítások?

a)	$0 \in B \cup C$	**b)**	$A \subset B \cup C$	**c)**	$B \cap C = \{0\}$
d)	$0 \in A - C$	**e)**	$A \cap B = B$	**f)**	$A \cap C = \{-1\}$.

MEGOLDÁSOK

17. Venn-diagrammal belátható.

18. **a)** nem **b)** nem **c)** igen **d)** igen

19. **a)** nem **b)** nem **c)** igen **d)** igen **e)** igen

20. igen **21.** **a)** igen **b)** igen **22.** D = F

23. **a)** $K \cap L = \{110,120,130,140\}$ **b)** $K \cap L = \{10,20,30\}$

24. **a)** $A \cap B = \{51\}$ **b)** $A \cap B = \{44\}$ **c)** $A \cap B = \{7\}$

25. $I_1 - I_2 = [-4,0)$ $I_2 - I_1 = (3,5]$
$I_1 \cup I_2 = [-4,5]$ $I_1 \cap I_2 = [0,3]$

26. $A-B = \{2,3\}$, $B-A = \{4,6,7\}$, $A \cap B = \{0,1,5\}$,

$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

27. **a)** $X \cup Y = X = \{$az 5-tel osztható Lottószámok$\}$
$X \cap Y = Y = \{$a 30-cal osztható Lottószámok$\}$

b) $X \cup Y = Y = \{$a páratlan Lottószámok$\}$
$X \cap Y = X = \{$az 5-re végződő Lottószámok$\}$

28. $X = \{c,d,e\}$ $Y = \{a,b,c,d\}$

29. **a)** igen **b)** nem **c)** nem **d)** igen **e)** nem **f)** igen

2. MATEMATIKAI LOGIKA

Azok a kijelentő mondatok, amelyekről egyértelműen megállapítható, hogy igazak, vagy hamisak, *ítéletek* (predikátumok). Az ítélet logikai értéke tehát kétféle lehet: *igaz*, *hamis*, amelyeket igazságértékeknek nevezünk.
Az ítélet (logikai változó) jele latin kisbetű, az értékek: i ,h (true,false).Egyszerű ítéletekből (elemi állításokból) logikai műveletekkel összetett ítéleteket (logikai kifejezéseket) képezhetünk, melyek értéke az összetevők értékétől függ.

1. Műveletek (ítéletkalkulus): igazságtáblázatokkal definiáljuk.

(1) *Negáció* (jele: ¬ (nem))

p	¬p
i	h
h	i

A negáció az ítélet tagadása.

(2) *Konjunkció* (jele : ∧ (és))

p	q	p∧q
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A konjunkció értéke csak akkor igaz, ha mindkét ítélet igaz.

(3) *Diszjunkció* (jele : ∨ (vagy))

p	q	p∨q
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A diszjunkció értéke már igaz, ha legalább az egyik ítélet igaz.

(4) *Implikáció* (jele : $\Rightarrow$ (ha,akkor))

p	q	$p \Rightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az implikáció értéke csak akkor hamis, ha a *feltétel* (p) igaz és a *következmény* (q) hamis.

(5) *Ekvivalencia* (jele : $\Leftrightarrow$ (akkor és csak akkor))

p	q	$p \Leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Az ekvivalencia értéke csak akkor igaz, ha a két ítélet értéke megegyezik.
A fenti műveletek a felsorolásuk szerint kötnek.

2. Azonosságok

(6) $\neg(\neg p) = p$, $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$, $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
(7) $p \wedge (q \vee r) = p \wedge q \vee p \wedge r$
(8) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(9) $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$
(10) $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
(11) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
(12) $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Megjegyzés: **(11)** és **(12)** az ún. *De Morgan-féle azonosságok*.

PÉLDÁK

1. Írjuk fel az alábbi ítéletet egyszerű ítéletek és logikai műveletek segítségével: egy szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 5 vagy 0.

M: A fenti logikai kifejezés három egyszerű ítéletet tartalmaz:
p : a szám osztható 5-tel
q : a szám utolsó számjegye 5

r : a szám utolsó számjegye 0

Az összetett ítélet : $p \Leftrightarrow q \vee r$

2. Az alábbi egyszerű ítéletek ismeretében határozzuk meg az összetett ítéletek logikai értékét:

p : *n* osztható 6-tal

q : az *n* páros

r : *n* osztható 3-mal

a) $p \Rightarrow q \wedge r$ **b)** $q \Rightarrow \neg r$ **c)** $q \vee r \Rightarrow p$

M: **a)** Igaz-e,hogy ha az *n* osztható 6-tal, akkor az n páros és osztható 3-mal? Mivel egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha 2-vel is és 3-mal is osztható ill. a 2 páros szám, igaz az állítás.

b) Igaz-e,hogy ha az *n* páros, akkor nem osztható 3-mal? Nem igaz, hiszen van olyan páros szám, ami osztható 3-mal is.

c) Igaz-e, hogy ha az *n* páros, vagy 3-mal osztható, akkor 6-tal is osztható? Nem igaz, ugyanis a 6-tal való osztáshoz a számnak 2-vel és 3-mal is oszthatónak kell lenni. Például a 4 páros, vagy a 9 3-mal osztható, mégsem oszthatók hattal.

3. Mi lesz az alábbi logikai kifejezés értéke az ítéletek megadott értékeire

a)	$(\neg p \vee q) \wedge r \Rightarrow p$	p : igaz	q : hamis	r : igaz
b)	$(\neg a \vee b) \wedge c \Rightarrow a$	a : igaz	b : hamis	c : hamis
c)	$(a \vee b) \Leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$	a : igaz	b : hamis	
d)	$\neg(p \Rightarrow q)$	p : hamis	q : igaz	

M: Írjuk be az ítéletek helyére az értéküket, és alkalmazzuk a műveleti szabályokat.

a) $(\neg p \vee q) \wedge r \Rightarrow p$

$(\neg i \vee h) \wedge i \Rightarrow i$	tagadás
$(h \vee h) \wedge i \Rightarrow i$	diszjunkció
$h \wedge i \Rightarrow i$	konjunkció
$h \Rightarrow i$	implikáció
i	

b) $(\neg a \vee b) \wedge c \Rightarrow a$

$(\neg i \vee h) \wedge h \Rightarrow i$	tagadás
$(h \vee h) \wedge h \Rightarrow i$	diszjunkció
$h \wedge h \Rightarrow i$	konjunkció
$h \Rightarrow i$	implikáció
i	

c)

$(a \vee b) \Leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$	diszjunkció, tagadások
$(i \vee h) \Leftrightarrow ((\neg i \wedge h) \vee (\neg i \wedge \neg h))$	zárójeleken belüli első műveletek
$i \Leftrightarrow ((h \wedge h) \vee (h \wedge i))$	zárójelek feloldása, konjunkciók
$i \Leftrightarrow (h \vee h)$	utolsó zárójel, diszjunkció
$i \Leftrightarrow h$	ekvivalencia
h	

d)	$\neg(p \Rightarrow q)$	
	$\neg(h \Rightarrow i)$	implikáció
	$\neg i$	tagadás
	h	

4. p, q, r mely értékei mellett lesz a kívánt értéke a következő logikai kifejezéseknek?

a)	$\neg q \wedge \neg(p \wedge q) \vee r$	hamis
b)	$q \wedge (\neg p \vee \neg q)$	igaz
c)	$p \wedge (q \vee \neg r) \Rightarrow r \wedge q$	hamis
d)	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow q \wedge \neg r$	igaz

M: A **3.** feladattal ellentétben most nem az egyszerű állítások ismeretében kell elvégezni a kifejezést alkotó műveleteket belülről kifelé haladva, hanem az egész kifejezés értékét ismerve kell befelé haladva a külsőbb műveleteket lefejtve eljutni az alkotó egyszerű állításokig.

Megjegyzés : Az értéktáblázat elkészítése is egy mód annal eldöntésére, hogy az összes eset közül ($2^{\text{változók száma}}$), melyekben lesz az adott kifejezés kívánt értékű.

a) A $\neg q \wedge \neg(p \wedge q) \vee r$ kifejezés csak akkor hamis, ha az utolsó művelet ($\vee$) két oldala is hamis, azaz $\neg q \wedge \neg(p \wedge q)$ is hamis, meg az r is hamis.

A $\neg q \wedge \neg(p \wedge q)$ kifejezés utolsó műveleténél ($\wedge$) 3 esetben is hamisat kapunk: ha $\neg q$ és $\neg(p \wedge q)$ közül legalább az egyik hamis. Ez azt jelenti, hogy a q és a $p \wedge q$ közül legalább az egyik igaz. Itt q nem lehet hamis, mert akkor mindkét kifejezés hamis lenne. Ha pedig q igaz, akkor $\neg q \wedge \neg(p \wedge q)$ hamis p-től függetlenül. Tehát 2 eset van : p : i , q : i , r : h vagy p : h , q : i , r : h .

Megjegyzés : A **(11)** De Morgan-szabály szerint a kifejezés első része ($\neg q \wedge \neg(p \wedge q)$) ekvivalens a következővel : $\neg(q \vee (p \wedge q))$. Ez akkor lesz hamis, ha $q \vee (p \wedge q)$ igaz, azaz q és $p \wedge q$ közül legalább az egyik igaz. Innen a fentiek szerint folytathatjuk.

b) A $q \wedge (\neg p \vee \neg q)$ kifejezés csak akkor igaz, ha az utolsó művelet ($\wedge$) mindkét oldala igaz : q-nak is meg $\neg p \vee \neg q$ -nak is igaznak kell lenni.

De $\neg p \vee \neg q$ a De Morgan-szabály értelmében egyenlő $\neg(p \wedge q)$-val. Ennek kell most igaznak lennie, vagyis a tagadás mögötti kifejezésnek, $p \wedge q$-nak hamisnak. Egy konjunkció hamis, ha legalább egy ítélet értéke hamis. Azaz p, q közül legalább az egyik hamis : p : i , q : h ; p : h , q : i ; p : h , q : h . Viszont q-nak az elején kikötöttük, hogy igaznak kell lennie; ezért 1 eset van : p : h , q : i

c) A $p \wedge q \vee \neg r \Rightarrow r \wedge q$ kifejezés utolsó művelete az implikáció, ami csak egy esetben lesz hamis, ha az előtag ($p \wedge q \vee \neg r$) igaz,. az utótag ($r \wedge q$) hamis. Az előtag, mint konjunkció csak a két igaz tag esetén lesz igaz., tehát p : igaz, és $q \vee \neg r$: igaz. Ez utóbbi, mint diszjunkció három esetben igaz : q ill. $\neg r$ közül legalább egy igaz. A tagadást (ellentett érték) figyelembe véve:

p : i , q : i , r : h ; p : i , q : i , r : i ; p : i , q : h , r : h . Az utótag, mint konjunkció három esetben hamis : q : i , r : h ; q : h , r : i ; q : h , r : h (p : bármi). Összevetve az eseteket, amikor az implikáció előtagja igaz és utótagja hamis, azt látjuk, hogy csak két esetben lesz a kifejezés hamis, tehát: p : i , q : i , r : h ; p : i , q : h , r : h.

d) A $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow q \wedge \neg r$ kifejezés mint ekvivalencia két esetben lesz igaz, ha a művelet két oldalán ugyanaz az érték áll: $\neg(p \vee q)$ igaz és $q \wedge \neg r$ igaz, vagy mindkettő hamis.

1. eset (két igaz) : $p \vee q$: hamis (tagadás feloldása) és q : igaz, $\neg r$: igaz (a konjunkció miatt). Tehát : p : h , q : h és q : i , r : h ; ami ellentmondás (q miatt).

2. eset (két hamis) : $p \vee q$: igaz (3 eset) és q , $\neg r$ között van hamis (3 esetben). Tehát: p : i , q : i ; p : i , q : h ; p : h , q : i és q : h , r : h ; q : i , r : i ; q : h , r : i.

Ebből: p : i , q : i , r : i
p : i , q : h , r : h
p : i , q : h , r : i
p : h , q : i , r : i

Az 8 esetből tehát 4-szer lesz igaz a kifejezés értéke.

5. Írjuk fel az alábbi összetett kifejezések értéktáblázatát:

a) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg p \vee r$ **b)** $p \wedge \neg(\neg p \vee q)$

c) $(\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c) \vee (\neg c \wedge a)$ **d)** $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

M: A feladat az, hogy az ítéletek minden lehetséges értékére ki kell értékelni a kifejezést.

a) A kifejezés 3 változós, így összesen 8 esetet különböztetünk meg:

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg p \vee r$	$p \wedge q \Leftrightarrow \neg p \vee r$
i	i	i	i	h	i	i
i	i	h	i	h	h	h
i	h	i	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i	h
i	h	h	h	h	h	i
h	i	h	h	i	i	h
h	h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i	h

Tehát két esetben kapunk igazat, hat esetben pedig hamisat.

b) A kifejezés 2 változós, így összesen 4 esetet különböztetünk meg:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$p \wedge \neg(\neg p \vee q)$
i	i	h	i	h	h
i	h	h	h	i	i
h	i	i	i	h	h
h	h	i	i	h	h

Tehát egy esetben igaz a kifejezés értéke.

c) A kifejezés 3 változós, így összesen 8 esetet különböztetünk meg:

a	b	c	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$\neg b$	$\neg b \wedge c$	$\neg c$	$\neg c \wedge a$	$(\neg a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c) \vee (\neg c \wedge a)$
i	i	i	h	h	h	h	h	h	h
h	i	i	i	i	h	h	h	h	i
i	h	i	h	h	i	i	h	h	i
i	i	h	h	h	h	h	i	i	i
i	h	h	h	h	i	h	i	i	i
h	i	h	i	i	h	h	i	h	i
h	h	i	i	h	i	i	h	h	i
h	h	h	i	h	i	h	i	h	h

A kifejezés 2-szer, a csupa egyforma értékek esetében hamis.

d) A kifejezés 2 változós, így összesen 4 esetet különböztetünk meg:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
i	i	i	h	h	h	h	i
i	h	i	h	h	i	h	i
h	i	i	h	i	h	h	i
h	h	h	i	i	i	i	i

A kifejezés mindig igaz. (Tudtuk, mert ez a **(12)** De Morgan-szabály.)

6. Igaz-e a $\neg l \wedge \neg(k \wedge l) = \neg(k \vee \neg l) \wedge k$ azonosság?

M: Itt kérdés az, hogy tetszőleges k ill. l állításra fennáll-e, hogy bármilyen igazságértékek esetén a két oldal értéke ugyanaz lesz?

A bal oldali kifejezés átalakítható a **(11)** De Morgan-szabály alkalmazásával: $\neg(l \vee (k \wedge l))$ amiből a disztributív szabály szerint: $\neg((l \vee k) \wedge (l \vee l))$. De $l \vee l$ egyenlő l -lel (az l bármilyen értékű is legyen, az $l \vee l$ értéke ugyanaz), ezért a bal oldal: $\neg((l \vee k) \wedge l)$.

A jobb oldali zárójel felodása után : $(\neg k \wedge \neg\neg l) \wedge k$; de $\neg\neg l$ egyenlő l-lel (a tagadás tagadása), így: $(\neg k \wedge l) \wedge k$. A zárójel felesleges asszociatív művelet esetén, tehát: $\neg k \wedge l \wedge k$.

Tudnunk kell, hogy a $\neg k \wedge k$ sohasem lehet igaz, azaz bármilyen legyen is k értéke, a $\neg k \wedge k$ értéke mindig hamis lesz. Ez azt jelenti, hogy a jobb oldal k,l minden értéke mellett hamis.

De a bal oldalra ez nem áll fenn, ugyanis a $\neg((l \vee k) \wedge l)$ csak akkor lesz hamis, ha a tagadott kifejezés, $(l \vee k) \wedge l$ igaz. Egy konjunkció csak a két alkotó igaz volta esetén lesz igaz. Ehhez l-nek igaznak, és $l \vee k$-nak is igaznak kell lennie. Ha már az l igaz, akkor az $l \vee k$ már igaz akármilyen is legyen a k értéke. Ez azt jelenti, hogy a bal oldal két esetben is igaz, és csak két esetben lesz hamis az összes négy eset közül (k : i és l : i ; k : h és l : i).

A jobb oldal pedig abban a két esetben is hamis, amikor a bal oldal igaz (k : i és l : h; k : h és l : h). Tehát az azonosság nem áll fenn.

Másik megoldás: egyetlen értéktáblázatban kiszámítva a két oldal értékét megvizsgáljuk, hogy minden esetben egyezőt kapunk-e.

k	l	$\neg l$	$k\wedge l$	$\neg(k\wedge l)$	bal oldal	$k\vee\neg l$	$\neg(k\vee\neg l)$	jobb oldal	= ?
i	i	h	i	h	h	i	h	h	igen
i	h	i	h	i	i	i	h	h	nem
h	i	h	h	i	h	h	i	h	igen
h	h	i	h	i	i	i	h	h	nem

A táblázat nem minden sorában egyezett meg a jobb és a bal oldali kifejezés.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

7. Készítsük el az alábbi logikai kifejezések értéktáblázatát:

a) $(\neg p\vee q)\wedge q$ **b)** $p\wedge\neg q\vee p$.

8. Mi lesz a $(p\vee q)\wedge(p\vee r)\vee\neg r\Rightarrow\neg r\wedge\neg q\vee p$ logikai kifejezés értéke, ha p: hamis, q: igaz, r: igaz?

9. A p és q mely értékei mellett lesz igaz a $\neg p\wedge(q\vee p)$ logikai kifejezés?

10. A p,q,r minden értéke mellett igaz-e a $p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ összefüggés?

11. Mely esetekben lesz hamis a $\neg k\wedge l\Rightarrow\neg m$ kifejezés?

ÚTMUTATÁSOK

7.a) Készítsük el a következő részállítások oszlopait :$\neg p$, $\neg p\vee q$, majd a kívánt kifejezését.

b) Készítsük el a következő részállítások oszlopait :$\neg q$, $p\wedge\neg q$, majd a kívánt kifejezését. A megoldás:

p	q	a.)	b.)
i	i	i	i
i	h	h	i
h	i	i	h
h	h	h	h

8. Helyettesítsünk be az ítéletek helyébe, majd a műveleti sorrend szerint értékeljük ki a kifejezést:

$(p\vee q)\wedge(p\vee r)\vee\neg r\Rightarrow(\neg r\wedge\neg q\vee p)$

$(h\vee i)\wedge(h\vee i)\vee\neg i\Rightarrow(\neg i\wedge\neg i\vee h)$

$i \wedge i \vee h\Rightarrow(h\wedge h\vee h)$

$i \vee h\Rightarrow h\vee h$

$i \Rightarrow h$

h

9. Az összetett ítélet (konjunkció) egy esetben igaz, ha $\neg p$ igaz és $q\vee p$ igaz. Ez azt jelenti, hogy p -nek hamisnak, ugyanakkor q és p közül legalább az egyiknek igaznak kell lenni. Tehát: $p : h$ és $q : i$.

10. Mivel az összefüggés maga a disztributív szabály, az egyenlőség igaz.

Megjegyzés : Az értéktáblázat kiszámításával is arra jutnánk, hogy mind a négy esetben egyenlő a bal és a jobb oldal értéke.

11. Az implikáció egy esetben hamis, ha az előtag igaz és az utótag hamis. Az előtag mint konjunkció igaz, ha mindkét tagja igaz. Azaz: $\neg k$: igaz, l : igaz, $\neg m$: hamis. Végezzük el még a tagadásokat : k : hamis, l : igaz, m : igaz.

FELADATOK

12. Az alábbi ítéleteket írjuk fel egyszerű ítéletek és logikai műveletek segítségével:

a) Nem igaz, hogy ez a négyszög téglalap, vagy átlói egyenlőek.
b) Ha ez a négyszög négyzet, akkor szögei egyenlők.
c) Egy szám akkor és csak akkor osztható hattal, ha osztható 2-vel és 3-mal.
d) Ha egy szám páros és osztható 9-cel, akkor osztható 3-mal és 6-tal is.

13. Készítsük el az alábbi logikai kifejezések értéktáblázatát:

a) $\neg a\vee b$ **b)** $\neg a\wedge b$ **c)** $a\wedge b\vee b$
d) $(a\vee b)\wedge b$ **e)** $a\wedge\neg(a\vee b)$ **f)** $\neg a\vee(a\vee b)$.

14. Mi lesz az alábbi logikai kifejezés értéke az ítéletek megadott értéke mellett?

$(p\vee q)\wedge(p\vee r)\Rightarrow\neg r$ p : hamis, q : igaz, r : igaz.

15. Határozzuk meg a következő logikai kifejezések értékét!

a) $c\Rightarrow(a\wedge\neg b)\vee c$ a : igaz, b : hamis, c : igaz
b) $\neg(a\vee b)\wedge(a\wedge\neg c)$ a : igaz, b : igaz, c : hamis

16. Legyen a p állítás : n osztható 4-gyel
q állítás : n prím
r állítás : n páros.

Mi lesz a következő összetett állítások logikai értéke?

a) $p\Rightarrow\neg q\wedge r$ **b)** $\neg q\wedge r\Rightarrow p$ **c)** $q\wedge r\Rightarrow\neg p$

17. p és q mely értékei mellett lesz igaz a $p\wedge\neg(\neg p\vee q)$ logikai kifejezés?

18. p , q , r minden értéke mellett igazak-e az alábbi összefüggések?

a) $(p\wedge q)\wedge r = (p\wedge r)\wedge(q\wedge r)$

b) $(p\vee q)\wedge(q\vee r) = q\vee(p\wedge r)$

c) $p\vee(q\vee r) = (p\vee q)\vee r$

19. Igazak-e a következő azonosságok, ha a , b , p és q logikai változók?

a) $\neg(a\wedge b) = \neg a\wedge\neg b$ **b)** $\neg(a\vee\neg b) = \neg a\wedge b$

c) $\neg a\vee\neg b = \neg(a\vee b)$ **d)** $(p\wedge q) = \neg p\vee\neg q$

e) $\neg(p\vee q) = \neg p\wedge q$

20. Mely esetekben lesz igaz a $\neg(k\vee m)\Leftrightarrow l\wedge\neg m$ kifejezés?

21. Egy 4-változós logikai kifejezést hány különböző esetre kell megvizsgálni ?

MEGOLDÁSOK

12. a) p : ez a négyszög téglalap

q : ennek a négyszögnek az átlói egyenlőek

$\neg p\vee q$ $p\Rightarrow q$

b) p : ez a négyszög négyzet

q : ennek a négyszögnek a szögei egyenlőek

$p\Rightarrow q$

c) p : a szám osztható hattal

q : a szám osztható hárommal

r : a szám osztható kettővel

$p\Leftrightarrow q\wedge r$

d) p : a szám páros

q : a szám osztható kilenccel

r : a szám osztható hárommal

s : a szám osztható hattal

$p\wedge q\Rightarrow r\wedge s$

13.

a	b	a)	b)	c)	d)	e)	f)
i	i	i	h	i	i	h	i
i	h	h	h	h	h	h	i
h	i	i	i	i	i	h	i
h	h	i	h	h	h	h	i

14. hamis **15.a)** igaz **b)** hamis

16. a) igaz **b)** hamis **c)** igaz **17.** p : igaz q : hamis

18. a) igen **b)** igen **c)** igen

19. a) nem **b)** igen **c)** nem **d)** nem **e)** nem

20.

k	l	m
i	i	i
i	h	i
h	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

21. $2^4 = 16$

3. KOMBINATORIKA

A kombinatorikai problémák általában valamely n elemű halmaz elemeinek egy bizonyos szempontból való elrendezése, csoportosítása kapcsán merülnek fel.

1. Permutációk

n elem meghatározott sorrendben való elhelyezését az n elem egy permutációjának nevezzük.

Ha az elemek mind különbözők, akkor *az ismétlés nélküli permutációk száma*:

(1) $$\boxed{P_n = n! \quad \text{ahol} \quad n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Definíció szerint : $0! = 1$

Ha az n elem közül k ($\le n$) megegyező van, de a többi elem ezektől is és egymástól is különbözik, akkor *az ismétléses permutációk száma* :

(2) $$\boxed{P_{n,k} = \frac{P_n}{k!} = \frac{n!}{k!}}$$

Ha az n elem r különböző csoportra bomlik úgy, hogy az egyes csoportba tartozó elemek egyenlőek (egymástól nem megkülönböztethetők), de a különböző csoportbeliek különböznek, és az első csoportban k_1 , a másodikban k_2 , ... , az r. csoportban k_r elem van ($k_1+k_2+\ldots+k_r = n$) , akkor az n elem összes ismétléses permutációjának száma:

(3) $$\boxed{P_{n;k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}}$$

2. Variációk

Ha n különböző elem közül k ($\le n$) elemet kell úgy kiválasztani, hogy minden elemet legfeljebb egyszer választunk ki és a sorrendre is tekintettel vagyunk, akkor *az n elem k-adosztályú variációit* kapjuk. Ezek száma:

(4) $$\boxed{V_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Megjegyzés : ha $n = k$, akkor $V_{n,k} = P_n$.

Ha egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor *az n elem k-adosztályú ismétléses variációit* képeztük. Ezek száma:

(5) $$\boxed{V^{(i)}_{n,k} = n^k}$$

3. Kombinációk

Ha n különböző elem közül k ($\leq n$) különböző darabot választunk ki oly módon, hogy a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor *az n elem egy k-adosztályú kombinációját* kaptuk. Ezek száma:

(6) $$\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Definíció szerint : $\binom{n}{0} = 1$.

Ha a kiválasztáskor visszatevéssel járunk el, azaz egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor az *n elem k-adosztályú ismétléses kombinációit* képeztük. Ezek száma:

(7) $$\boxed{C^{(i)}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

Az $\binom{n}{k}$ számok az ún. *binomiális együtthatók,* ui. ezek a binomiális tételben szereplő együtthatók:

(8) $$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Pascal-háromszög : a binomiális együtthatókból alkotott alábbi elrendezésű végtelen háromszög:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Kiszámított értékekkel felírva:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & . & . & . & . & . &
\end{array}
$$

A háromszögből leolvashatók, de definíció alapján is bizonyíthatók az alábbi tulajdonságok:

(10) Szimmetria : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(11) Összegtulajdonság : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

(12) A binomiális együtthatók összege : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

PÉLDÁK

1. Hányféle módon ülhet le 6 személy egy padra egymás mellé és hányféleképpen helyezkedhet el egy kerek asztal körül?

M: Egy padra egymás mellé a 6 személy 6! lehetőség szerint tud leülni, ugyanis 6 különböző elem ismétlés nélküli permutációjáról van szó. Egy kerek asztal köré leülve nem számít új elrendezésnek az, amikor a tagok ciklikusan permutálódnak, azaz amikor mindenki egy vagy több hellyel például balra ül. Tehát az az elrendezés nem új egy kerek asztal körül, amikor a változáskor az összes szomszéd ugyanaz marad. A ciklikus permutációk száma bármilyen elrendezésben 6, nevezetesen 123456, 234561, 345612, 456123, 561234, 612345 (a tagokat számokkal jelöltük), ezért az összes permutációk számának hatodrésze a megoldás: 6!/6=5!=120.

2. Van 5 különböző kockánk. Hányféleképpen tudunk kiválasztani belőle 3-at, ha
- a sorrendre is tekintettel vagyunk,
- a sorrendre nem vagyunk tekintettel?

M: Ha az 5 különböző kockából 3-at úgy választunk ki, hogy a sorrend is számít, azaz más-más elrendezést jelent az 1-es, 2-es, 3-as kocka kiválasztásakor a hat különböző sorrend (123,132,213,231,312,321), akkor lényegében olyan 5 elem permutációiról van szó, ahol a 2 nem kiválasztott elem egyforma. Az ilyen ismétléses

permutációk száma : $5!/2!$. Ekkor 5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli variációjáról van szó, ezek száma: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. (Az 1.helyre 5 elem közül, a 2. helyre már csak 4 elem közül, a 3. helyre pedig 3 elem közül választhatunk.)
Amennyiben a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor az 5 elem 2 egyforma csoportra oszlik, a 3 kiválasztott, meg a 2 nem kiválasztott elem csoportjára. Az összes ismétléses permutációja ilyen 5 elemnek : $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$. Ezt a számot jelöltük $\binom{5}{3}$-mal, (5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációja, 5 elem közül visszatevés nélkül húzunk ki 3-at). A felírt binomiális együttható:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 5 \cdot 2 = 10.$$

3. Hányféle sorrendbe helyezhető 3 piros és 4 fehér golyó? Hányféleképpen helyezhetők körbe?

M: ismétléses permutációról van szó ($k_1 = 3$, $k_2 = 4$):

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35\text{-féleképpen helyezhetők sorba.}$$

Mivel a 3 piros a 4 fehér golyót 3 kupacra osztja a körbehelyezésnél, a következő fehér kupacok alakíthatók ki a ciklikus permutációkat leszámítva:
0,0,4 ; 0,1,3 ; 0,3,1 ; 0,2,2 ; 1,1,2 . Vagyis 5-féle elrendezés lehetséges.

4. Hány értelmes vagy értelmetlen szó képezhető a MATEMATIKA szó betűiből?

M: A szó betűi : M, A, T, E, I, K , azaz 10 elem, amiből 2, 3, 2 egyforma.

Ezek összesen $\frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 151200$ -féleképpen rendezhetők sorba.

5. Hányféleképpen lehet 4 játékos között kiosztani az 52 lapos francia kártyát?

M: Minden játékos kap 13 kártyát, amelyeknek osztásbeli sorrendje nem számít. Tehát a 4 csoport 13 kártya csak abban különbözik, hogy ki kapta. Ebben az esetben az 52 elemnek ismétléses permutációját kell kiszámítani:

$$\frac{52!}{13!13!13!13!} = \frac{52!}{(13!)^4} \approx 5.36 \cdot 10^{28}.$$

6. Hány háromjegyű szám alkotható az 1,2,3,4,5 számjegyekből, ha ugyanaz a számjegy minden számban csak egyszer fordulhat elő?

M: 5 elem harmadosztályú ismétlés nélküli variációinak száma:
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, hiszen az 1.helyre még 5 elem közül, a 2.helyre eggyel kevesebb elemből, a 3.helyre pedig már 2-vel kevesebb elemből válogathatunk.

7. Hány olyan 5-jegyű szám van, amelyben minden számjegy 0-tól különböző páros szám?

M: A szóba jöhető elemek : 2, 4, 6, 8 . Ötjegyű szám képzésekor a 4 elemből természetesen többször is választunk, így mind az 5 helyre módunk van 4 elemből választani : $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 2^{10} = 1024$. Tehát 4 elem 5-ödosztályú ismétléses variációit képeztük.

8. Hány különböző 5-tel osztható 8-jegyű számot lehet készíteni a 0,1,2,2,3,3, 4,5 számjegyekből?

M: Ha 5-tel osztható a szám, akkor az utolsó jegye csak 0 , vagy 5 lehet. Ha 0-ra végződik a szám, akkor 7 elem ismétléses permutációit kell venni, ezek száma (két-két elem egyforma): $\frac{7!}{2!2!} = 1260$. Ha a szám 5-re végződik, akkor még vegyük figyelembe, hogy az első számjegy nem lehet 0, hiszen akkor a szám már csak 7-jegyű lenne, tehát: $\frac{6 \cdot 6!}{2!2!} = 1080$ (a 7 elem ismétléses permutációinak számából (2, 2 egyforma) kivontuk 6 elem ismétléses permutációinak számát).
A két eset együtt: $1260 + 1080 = 2340$.

9. Egy 30 fős csoportból hányféleképpen állíthatunk össze egy 4-tagú vezetőséget?

M: 4 helyre választunk 30, majd 29, 28, végül 27 különböző ember közül. A lehetőségek száma tehát 30 elem 4-edosztályú ismétlés nélküli variációinak száma: $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657720$.

10. Hány totószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 13 találatos?

M: A totószelvény egy oszlopának 13 helyére (sorrend fontos) mindig az 1, 2, x (3 elem) közül választunk. Nyilvánvaló, hogy 3 elem 13-adosztályú ismétléses variációiról van szó. Ezek száma : $3^{13} = 1594323$.

11. Budapesten mennyi az összes lehetséges telefonállomások száma?

M: A budapesti telefonszámok 7-jegyűek. A 10 számjegy (elem) összes ismétléses 7-edosztályú variációja : $10^7 = 10000000$.
Amennyiben az a kikötés, hogy az első számjegy csak 1 vagy 2 lehet, akkor a variációk száma : $2 \cdot 10^6 = 2000000$.

12. Hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 5-találatos ? Hány 4–, 3–, 2-találatos lesz ezek között?

M: A lottónál a kihúzott elemek sorrendje nem számít. A 90 különböző elem 5-ödosztályú ismétlés nélküli kombinációjáról van szó, ezek száma:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5!85!} = 43949268 .$$

Ezekből 4-találatos annyi lesz, ahányféleképpen sikerül 4-et az 5 kiválasztott szám közül, és ugyanakkor 1-et a 85 nem kiválasztott szám közül bejelölni:

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1} = 5\cdot 85 = 425\,.$$

Ugyanígy a 3-találatos szelvények száma (3 találat+2 nem):

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2} = 5\cdot 2\cdot 85\cdot 42 = 35700.$$ A 2-találatosak száma pedig :

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3} = 5\cdot 2\cdot 85\cdot 14\cdot 83 = 987700.$$

13. A reformlottónál 90 számból 85-t kell eltalálni. Így kisebb-e az esély egy telitalálatra?

M: Az összes eset $\binom{90}{85} = \binom{90}{90-85} = \binom{90}{5}$, tehát ugyanakkora az esély. (Azt a 85-öt kellene bejelölni, amit "nem kell" eltalálni.)

14. 7 diák 3 sportágban versenyez. Mindhárom sportágban az első helyezett ugyanolyan értékű díjat kap. Ugyanaz a versenyző több díjat is nyerhet. Hányféleképpen lehet elosztani a 3 díjat?

M: Aki már nyert, újra kiválasztható nyerésre. Ismétléses kombinációról van szó, ezek száma : $\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!6!} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$.

15. Mekkora az n, ha az n elemből alkotott összes permutációk száma: 6 227 020 800.

M:	$n! = 6\ 227\ 020\ 800$	osszunk 2-vel ($2 = 2!$)
	$n!\ /\ 2! = 3\ 113\ 510\ 400$	osszunk 3-mal
	$n!\ /\ 3! = 1\ 037\ 836\ 800$	
		osszunk mindig a következő természetes számmal, végül
	$n!\ /\ (n\text{-}1)! = n$	$n = 13$.

16. Igaz-e, hogy $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$

M: Igen, mert a bal oldalon éppen $(1-1)^n$ -nek a binomiális tétel szerinti kifejtése szerepel:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \underset{a\,binomiális\,tétel\,sz.}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

17. Számítsuk ki az n értékét az alábbi összefüggésből:

$$\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}-\binom{6}{3} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}$$

M: A bal oldalon **(11)**-et, a jobb oldalon pedig **(12)**-t felhasználva kapjuk, hogy: $\binom{n+1}{n-1}-\binom{6}{3}=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{4-k}$, amiből **(6)** alkalmazásával:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!(n+1-(n-1))!}-\frac{6!}{3!3!}=(1+1)^4, \qquad \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!2!}=\frac{6!}{3!3!}+2^4,$$

egyszerűsítés és 2-vel való szorzás után: $(n+1)n=2(20+2^4)$; azaz: $(n+1)n=72$; $9\cdot 8=72$; $n=8$.

18. Mi lesz a $(2x\text{-}3)^7$ polinomban az x^3 együtthatója?

M: A binomiális tétel szerint az összeg negyedik tagja (k=3) adja $2x$ harmadik hatványát. Itt a negyedik tag: $\binom{7}{3}(2x)^3(-3)^{7-4}$. Tehát x^3 együtthatója:

$$\binom{7}{3}2^3(-3)^4=35\cdot 8\cdot 81=22680.$$

19. Az $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ kifejezésben

a) végezzük el a hatványozást!

b) adjuk meg az x-től független tag értékét!

M:a)

$$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{2k}\left(\frac{-2}{x}\right)^{6-k}=\binom{6}{0}x^0\left(\frac{-2}{x}\right)^6+\binom{6}{1}x^2\left(\frac{-2}{x}\right)^5+$$

$$+\binom{6}{2}x^4\left(\frac{-2}{x}\right)^4+\binom{6}{3}x^6\left(\frac{-2}{x}\right)^3+\binom{6}{4}x^8\left(\frac{-2}{x}\right)^2+\binom{6}{5}x^{10}\left(\frac{-2}{x}\right)^1+\binom{6}{6}x^{12}\left(\frac{-2}{x}\right)^0$$

$$=\left(\frac{-2}{x}\right)^6+6x^2\left(\frac{-2}{x}\right)^5+15x^4\left(\frac{-2}{x}\right)^4+20x^6\left(\frac{-2}{x}\right)^3+15x^8\left(\frac{-2}{x}\right)^2+$$

$$+6x^{10}\left(\frac{-2}{x}\right)+x^{12}=\frac{64}{x^6}-\frac{192}{x^3}+240-160x^3+60x^6-12x^9+x^{12}$$

b) a 3. összeadandóban ($k=2$) kiestek az x-ek, tehát: $15\cdot 2^4=240$ a konstans értéke.

20. Számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}$$

M: Ismerjük fel a binomiális tétel tagjait, együtthatóit a kifejezésben, és vegyük figyelembe, hogy az összegzés nem 0-tól 6-ig tart.

$$\sum_{k=1}^{5}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{5}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}1^{6-k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\frac{1}{2^k}1^{6-k}-\binom{6}{0}\frac{1}{2^0}1^6--\binom{6}{6}\frac{1}{2^6}1^{6-6}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1\right)^6-1-\frac{1}{2^6}=\left(\frac{3}{2}\right)^6-\left(\frac{2}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{3^6-2^6-1}{2^6}\text{ vagy }\frac{3^6-1}{2^6}-1$$

Megjegyzés: természetesen tagonként is összegezhettük volna az 5 összeadandót.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

21. A 0,5,6,9 számjegyekből összesen hány négyjegyű öttel osztható szám készíthető?

22. Hány olyan négyjegyű számot lehet készíteni, amelyben pontosan 3 db ötös van?

23. A FELADAT szó betűiből összesen hány különböző szót lehet összeállítani, ha az értelemetlen szavakat is számoljuk?

24. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben minden számjegy páratlan szám? És hány ilyen ötjegyű van?

25. Egy 28-as létszámú osztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha

a) a jutalmak egyenlők és egy tanuló legfeljebb 1
b) a jutalmak egyenlők és egy tanuló több
c) a jutalmak különbözők és egy tanuló több
d) a jutalmak különbözők és egy tanuló legfeljebb 1 jutalmat kaphat?

26. Legkevesebb hány egyhasábos totószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen 12 találatos is köztük ? Hány 11- és hány 10-találatos lesz ezek között?

27. Igazoljuk, hogy $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

28. Határozzuk meg az alábbi sor összegét :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{2^{n+1}}$$

29. Állapítsuk meg a binomiális tétel segítségével $\left(x-\frac{3}{x}\right)^5$ - ben a konstanst!

30. Fejtsük ki a következő kifejezést: $(x^3 - \cos x)^4$!

31. $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^n$-t kifejtve, a binomiális együtthatók összege: 64. Mennyi a kifejtésben szereplő x-től független tag?

ÚTMUTATÁSOK

21. A négyjegyű szám első jegye nem lehet 0; az öttel osztható szám utolsó jegye 0 vagy 5; a számjegyek ismétlődhetnek. Ezért: $3\cdot4\cdot4\cdot2=96$

22. A négyjegyű számjegyekben az alábbiak szerint helyezkedhetnek el az 5-ösök: _555 (az első helyen nem lehet 0, sem 5); 5_55 ; 55_5 ; 555_ (a többi helyen csak az 5 nem állhat). Tehát : $8+3\cdot9=35$.

23. A 7 betűből 2 egyforma; ismétléses permutációról van szó.
Tehát: $\frac{7!}{2!}=2520$.

24. Minden pozicióra 5 számjegyből (1, 3, 5, 7, 9) választhatunk. Négyjegyű ilyen szám 5^4, ötjegyű: 5^5 van.

25. **a)** kombináció **b)** ismétléses kombináció
c) ismétléses variáció **d)** variáció ezek száma:

a) $\binom{28}{4}$ **b)** $\binom{31}{4}$ **c)** 28^4 **d)** $\frac{28!}{24!}$

26. 12-es: ismétléses variáció; 11-es : 12-ből 1 rossz (kombináció), de az kétféle lehet; 10-es : 12-ből 2 rossz (kombináció), de az 2x2-féleképpen lehet, tehát:

12-es: 3^{12} 11-es: $2\cdot\binom{12}{1}$ 10-es: $2\cdot2\cdot\binom{12}{2}$

27. $k\frac{n!}{k!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$ azaz

$$k\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\qquad k!=k(k\text{-}1)!\quad\text{miatt}$$

A bal oldalon k-val egyszerűsítünk, és vegyük figyelembe, hogy a jobb oldalon a számláló: $n!$

Megjegyzés : $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ felhasználásával is eljárhatunk.

28. Vegyük észre, hogy a binomiális tagok szorzója végig ugyanaz, tehát k-tól független. Ezért kiemelhető : $\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\frac{1}{2^{n+1}}(1+1)^{n+1}=1$ a binomiális tétel szerint.

29. Az 5.hatványra emelésnél semmilyen k-ra nem fog kiesni az x. A tagok alakja: $\binom{5}{k}x^k\left(\frac{-3}{x}\right)^{5-k}$ $k=0,1,2,3,4,5$ és $x^k\frac{1}{x^{5-k}}=x^{2k-5}\neq$konstans. Tehát mind a hat tag függ x-től.

30. A binomiális tétel szerint:

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\left(x^3\right)^k(-\cos x)^{4-k}=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{3k}(-1)^{4-k}(\cos x)^{4-k}\text{, amiből:}$$

$$\cos^4 x-4x^3\cos^3 x+6x^6\cos^2 x-4x^9\cos x+x^{12}.$$

31. $2^n=64$ szerint az $n=6$. A 6.hatványra emelésnél az 1.tag 4.hatványának és a 2.tag 2.hatványának szorzatából kiesik az x, tehát $k=4$ esetén kapunk konstans tagot az összegben, mégpedig a következőt:

$$\binom{6}{4}(2x)^4\left(\frac{1}{3x^2}\right)^2=15\cdot16x^4\frac{1}{9x^{2\cdot2}}=\frac{80}{3}$$

FELADATOK

32. A 0, 2, 5 számjegyekből összesen hány háromjegyű páros szám alkotható?

33. Hány olyan négyjegyű számot lehet készíteni, amelyben

a) pontosan 1 db ötös van ? **b)** nincs ötös ?

34. Az alábbi szavak betűiből összesen hány különböző szót lehet összeállítani, ha az értelemetlen szavakat is számoljuk?

a) DOLGOZAT **b)** SZIGORLAT

35. Hány nyolcjegyű szám képezhető az 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4 számjegyekből?

36. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben csak az 1, 2, 3 számjegyek fordulnak elő?

37. Nyolcan felszállnak a buszra, ahol csak 5 ülőhely van. Hányféleképpen ülhetnek le, ha minden ülőhelyet elfoglalnak és egy helyre csak egy személy ül?

38. Van 5 különböző könyvünk.

a) Hányféleképpen tudjuk sorba rakni?

b) Hányféleképpen tudunk belőle kettőt kiválasztani, ha

- a sorrendre nem vagyunk tekintettel
- a sorrendre is tekintettel vagyunk?

39. Ha a lottószelvényen csak 10 szám volna, hány szelvényt kellene kitölteni egy biztos ötösért?

40. Hány ötjegyű szám alkotható
- csupa egyenlő számjegyből?
- csupa különböző számjegyből?

41. A 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 számjegyekből hány 4-gyel osztható 8-jegyű szám alkotható?

42. Igazoljuk, hogy

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ **b)** $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

43. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét:

a) $3\binom{n}{1}+3^2\binom{n}{2}+\ldots+3^n\binom{n}{n}$ **b)** $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k$

44. Állapítsuk meg a binomiális tétel segítségével

a) $(x+2)^6$ - ban x^4 **b)** $(2x+\sin x)^3$ -ban $\sin^3 x$ együtthatóját

45. Fejtsük ki a következő kifejezéseket!

a) $(2x-3)^5$ **b)** $\left(1-\frac{2}{x}\right)^5$

MEGOLDÁSOK

32. $2\cdot3\cdot2=12$ **33.a)** $9^3+3\cdot8\cdot9^2=2673$ **b)** $8\cdot9\cdot9\cdot9=5832$

34.a) $\frac{8!}{2!}=20160$ **b)** $9!=362880$ **35.** $\frac{8!}{1!3!2!2!}=1680$ **36.** $3^4=81$

37. $\binom{8}{5}=56$, ami azt jelenti, hogy kiválasztásra került 5 ülő ember meg 3 álló.

Amennyiben az 5 ülő ember sorrendje is fontos : $8!\,/\,3!=6720$

38.a) $5!=120$ **b)** 10 ill. 20 **39.** 252 **40.** 9 ill. 27216

41. 340 **42.a)** a binomiális tétel szerint a bal oldal : $(1+1)^n$

b) hozzuk közös nevezőre **43.a)** 4^n-1 **b)** 0

44.a) 60 **b)** 1

45.a) $32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243$

b) $1-\frac{10}{x}+\frac{40}{x^2}-\frac{80}{x^3}+\frac{80}{x^4}-\frac{32}{x^5}$.

4. KOMPLEX SZÁMOK

1. A komplex szám definíciója, műveletek, geometriai ábrázolás

1.1 *A komplex szám fogalma*

(1) Az $a + bi$ alakú számokat, ahol a és b valós számok, i pedig olyan szám, amelyre $i^2 = -1$ (az ún. képzetes egység), *komplex számoknak* hívjuk. (Ez az alak a komplex számok *algebrai* alakja). A komplex számokat gyakran z -vel jelöljük ($z = a + bi$).

1.2. *Műveletek*

Legyen $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ két komplex szám.

(2) Két komplex szám *egyenlő*, azaz $z_1 = z_2$, *ha* $a_1 = a_2$ *és* $b_1 = b_2$.

(3) *Összeg*

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$$

(4) *Különbség*

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$$

(5) *Szorzat*

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i}$$

Megjegyzés : A "formulát" úgy kaptuk, hogy az $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ szorzást mint a valós számok körében elvégezzük, és az eredményben i^2 helyébe -1 -et írunk (mivel $i^2 = -1$). (Nem kell a formulát megjegyezni, konkrét feladatok megoldásánál is így járunk el.)

(6) *Hányados*

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i}$$

Megjegyzés :Ezt a formulát sem kell megjegyezni, ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ hányadosban mind a számlálót, mind a nevezőt megszorozzuk $(a_2 - b_2 i)$ -vel, azaz kiszámítjuk az $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i}$ kifejezést.

(7) *Konjugált*

A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltján az $a - bi$ komplex számot értjük, és ezt $\bar{z}$ -vel, (ill. $\overline{a+bi}$ -vel) jelöljük.

1.3 *A komplex szám abszolút értéke*

(8) A $z = a + bi$ komplex szám *abszolút értékén* a $\sqrt{a^2+b^2}$ valós számot értjük és ezt $|z|$-vel, ill. $|a + bi|$-vel jelöljük. (Ezt a számot a komplex szám nagyságának, hosszának is hívjuk).

Megjegyzés :Igaz, hogy

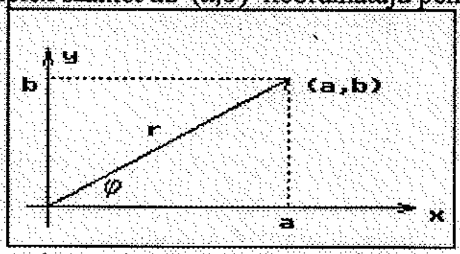
1) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (ha $|z_2| \neq 0$)

3) $|z^n| = |z|^n$

1.4 *A komplex szám geometriai ábrázolása*

(9) A $z = a + bi$ komplex számot az (a,b) koordinátájú ponttal ábrázolhatjuk.



Az x tengelyt éppen ezért *valós tengely*nek, az y tengelyt ***képzetes tengely***nek nevezzük. (Együtt a komplex számok "síkját", a komplex számsíkot határozzák meg.) Az (a,b) pont a síkon egy helyvektort jelent. Ennek az r hossza (az (a,b) pontnak az origótól mért távolsága) $r = \sqrt{a^2+b^2}$, azaz $r = |z|$. A komplex számot ábrázoló vektornak az x tengellyel bezárt φ szögét a $\text{tg}\ \varphi = b / a$ egyenlőségből kapjuk meg, azaz $\varphi = \text{arctg}\ (b/a)$.

☝ ☝ ☝ **PÉLDÁK** ☝ ☝ ☝

1. Komplex szám-e a: 2?

M:Igen : $z = 2 + 0i$ alakú komplex szám (azaz $a = 2$, $b = 0$).

2. Komplex szám-e: $5i$?

M:Igen : $z = 0 + 5i$ alakú komplex szám (azaz $a = 0$, $b = 5$).

3. Legyen $z_1 = 3 + 5i$; $z_2 = 4 - 6i$

a) $z_1 + z_2 = ?$ **b)** $z_1 - z_2 = ?$

M: **a)** $z_1 + z_2 = (3+5i)+(4-6i) = 7-i$

b) $z_1 - z_2 = (3+5i)-(4-6i) = -1+11i.$

4. Mutassuk meg, hogy : $i^{4k}=1$. $i^{4k+1}=i$; $i^{4k+2}=-1$; $i^{4k+3}=-i$

M: Mivel $i^2=-1$, $i^3=i^2i=-i$, $i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=1$.

Ezért $i^{4k}=(i^4)^k=1$, $i^{4k+1}=i^{4k}i=i$, $i^{4k+2}=i^{4k}i^2=-1$, $i^{4k+3}=i^{4k}i^3=-i$.

5. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) i^{16} , **b)** i^{25} , **c)** i^{15} , **d)** $(-i)^8$, **e)** $(-i)^7$

M: **a)** $i^{16}=i^{4\cdot 4}=1$ **b)** $i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i$ **c)** $i^{15}=i^{4\cdot 3+3}=i^3=-i$

d) $(-i)^8=i^8=i^{4\cdot 2}=1$ **e)** $(-i)^7=-i^7=-i^{4+3}=-i^3=-(-i)=i$.

6. Milyen x , y mellett teljesül : $(1+i)x+(1-i)y=3-i$.

M: Szorozzunk be x ill. y-nal : $x+xi+y-iy=3-i$. Vonjuk össze a valós ill. a képzetes részt a bal oldalon: $(x+y)+(x-y)i=3-i$. Két komplex szám akkor egyenlő, ha mind a valós mind a képzetes rész megegyezik, tehát $x+y=3$, $x-y=-1$. Ebből : $x=1$, $y=2$.

7. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(4+2i)+(1+5i)$ **b)** $(3+5i)-(6+3i)$

M: **a)** $(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5)i=5+7i$ · **b)** $(3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=$ $=-3+2i$.

8. Végezzük el az alábbi müveleteket!

a) $2i\cdot 3i$ **b)** $(2-3i)\cdot(2+3i)$ **c)** $(5-4i)(3+2i)$

M: **a)** $2i\cdot 3i=6i^2=-6$ **b)** $(2-3i)\cdot(2+3i)=4-9i^2=4+9=13$

c) Az **(5)** szabály alapján: $(5-4i)(3+2i)=[5\cdot 3-(-4)\cdot 2]+i\cdot[5\cdot 2+3\cdot(-4)]=23-2i$.
Végezzük el a szorzást a kéttagú összegek szorzásával is:
$(5-4i)(3+2i)=15+10i-12i+8=23-2i$.

9. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $2/3i$ **b)** $1/(1+i)$ **c)** $(1+i)/(1-i)$ **d)** $(2-3i)/(4+5i)$

M: **a)** A számlálót és a nevezőt i-vel szorozva kapjuk, hogy:

$$\frac{2}{3i}=\frac{2i}{3i\cdot i}=\frac{2i}{-3}=-\frac{2}{3}i$$

b) A nevező konjugáltjával szorozva a nevezőt és a számlálót kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

c) $$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

d) $$\frac{2-3i}{4+5i}=\frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25}=\frac{-7-22i}{41}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i.$$

10. Számítsuk ki $(1+i)^8$ értékét!

M: Felhasználva, hogy $(1+i)^2=2i$ (végezzük el a négyzetre emelést), $(1+i)^8=[(1+i)^2]^4=(2i)^4=16i^4=16$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

11. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(3+i)+(-3-8i)$ **b)** $(5-4i)+(7+4i)$ **c)** $(-6+2i)+(-6-2i)$ **d)** $(0.2+0.1i)+(0.8-1.1i)$
e) $(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i)$ **f)** $(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i)$.

12. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$ **b)** $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ **c)** $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$ **d)** $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$
e) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$ **f)** $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.

13. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $-i\sqrt{5}\cdot 4i\sqrt{5}$ **b)** $(5-3i)\cdot 2i$ **c)** $(3+4i)(3-4i)$ **d)** $(5+3i)(2-5i)$
e) $(-2-i)(1+i)$ **f)** $4+2i+(-1+6i)(6-i)$ **g)** $(3-2i)(5+4i)-7i+1$
h) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$ **i)** $(0.2-0.3i)(0.5+0.4i)$.

14. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{1}{i}$ **b)** $\frac{1}{1-i}$ **c)** $\frac{1-i}{1+i}$ **d)** $\frac{3-2i}{1+3i}$ **e)** $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$ **f)** $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$
g) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$ **h)** $\frac{a+bi}{a-bi}$ **i)** $\frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai}$ **j)** $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$ **k)** $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$
l) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$.

15. Számítsuk ki a következő kifejezéseket!

a) $(1-i)^{12}$ **b)** $(1+i)^{17}$ **c)** $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$ **e)** $(1+i)^{-2}$
f) $(1-i)^{-3}$ **g)** $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$

16. Milyen x, y mellett teljesül : $(2-i)x+(1+i)y=5-i$?

17. Számítsuk ki az alábbi komplex számokat !

a) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$ **b)** $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ **c)** $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}$

18. Kielégíti-e az $x_0=1+i$ komplex szám az $x^3+x^2+x+1=0$ egyenletet?

ÚTMUTATÁSOK

11. Alkalmazzuk a **(3),(4)** szabályokat.

12. Számítsuk ki először az i hatványokat és utána végezzük el a megfelelő műveleteket.

Pl. **e)**-ben: $\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i\cdot i^2}=\frac{1}{i(-1)}=-\frac{1}{i}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=-\frac{i}{i^2}=\frac{-i}{-1}=i$.

Használjuk fel a **4.**példa eredményeit.

13. Alkalmazzuk a szorzási, összeadási szabályokat (több tag szorzása több taggal stb.)

14. Alkalmazzuk az **(5),(6)** szabályokat, illetve az ott szereplő megjegyzéseket: szorzásnál több tag szorzása több taggal, osztásnál a konjugálttal való bővítést.

a) Szorozzuk be a számlálót és a nevezőt is i-vel.

e) Először végezzük el a szorzást a számlálóban.

f) Először végezzük el a szorzást a nevezőben.

15. a) Használjuk fel, hogy $(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$ és $(1-i)^{12}=$ $=((1-i)^2)^6=(-2i)^6=2^6i^6$.

Az i^6 kiszámításánál használjuk fel a **4.**példa eredményeit. A többi példánál is hasonlóan járjunk el.

16. A szorzást x-szel és y-nal elvégezve, a valós, képzetes részeket összevonva: $(2x+y)+(y-x)i=5-i$. A valós ill. képzetes részek egyenlőségéből: $2x+y=5$; $y-x=-1$; ahonnan: $x=2$; $y=1$.

17. Használjuk fel a **4.**példa eredményeit.

18. Helyettesítsük be $(1+i)$-t, az $(1+i)^3+(1+i)^2+1+i+1$ kifejezéshez jutunk. Ha ez zérus, akkor kielégíti. (Elvégezve a hatványozásokat és az összeadásokat $5i$-hez jutunk, azonban $5i\neq 0$).

FELADATOK

19. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $2(-3+2i)+3(7-5i)$ **b)** $(2-3i)^2$ **c)** $(-1+i)^2$ **d)** $(3-2i)(1+4i)+(-6-i)$

e) $(4-5i)(-2+3i)+(1+2i)(-3+4i)$.

20. Végezzük el az alábbi összeadási műveleteket!

a) $(4-3i)+(-2+i)$ **b)** $(5+6i)+(7-6i)$ **c)** $(-0.7+0.3i)+(0.9-1.7i)$

d) $(-0.4-2.1i)+(0.6+3i)$ **e)** $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

21. Végezzük el az alábbi szorzásokat !

a) $(0.2-0.3i)(0.4+0.5i)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)$ **c)** $(2-3i)^2$ **d)** $(2+5i)(3+2i)$.

22. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $\frac{1}{1-i}$ **b)** $\frac{5}{1+2i}$ **c)** $\frac{2+i}{2-i}$ **d)** $\frac{3i}{1+i}$ **e)** $\frac{3-2i}{1+3i}$

23. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$ **b)** $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$ **c)** $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$ **d)** $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$

e) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$ **f)** $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$ **g)** $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$.

h) Oldjuk meg a $(2-5i)z=2+5i$ egyenletet!

i) Mutassuk meg, hogy $\frac{1-i}{1+i}$ és $\frac{1+i}{1-i}$ konjugáltak!

j) Mutassuk meg, hogy $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$!

2. Komplex számok trigonometrikus alakja

A $z=a+bi$ komplex szám $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ alakban is felírható, azaz

(10) $z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

ahol $\boxed{r=\sqrt{a^2+b^2}=|a+bi| \qquad \varphi=arctg\frac{b}{a} \qquad (tg\varphi=\frac{b}{a})}$

(Az 1.ábrán látjuk, hogy $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$.)

Műveletek

Legyen $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

A két komplex szám *szorzata*:

(11) $\boxed{z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))}$

A két komplex szám *hányadosa*:

(12) $\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))}$

Komplex szám *hatványa*:

Ha $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, akkor

(13) $\boxed{z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$

Komplex szám *gyöke*:

Ha $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, akkor

(14) $\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1}$

Egy komplex számnak tehát n db gyöke van.

PÉLDÁK

24. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban!

a) 2 **b)** $6i$ **c)** $-2+2\sqrt{3}i$ **d)** $2-2i$ **e)** $-\sqrt{3}-i$

M: **a)** Itt $a=2$, $b=0$, $r=2$. Mivel a z komplex szám vektora az x tengely pozitív felén van, ezért $\varphi=0$, tehát: $2=2(\cos 0+i\sin 0)$, vagy $2=(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k)$, $k\in\mathbf{N}$

b) Itt $a=0$, $b=6$, $r=\sqrt{0^2+6^2}=6$. Mivel a $6i$ komplex szám vektora a pozitív y féltengelyen van, ezért $\varphi=\pi/2$, tehát: $6i=6(\cos\pi/2+i\sin\pi/2)$, vagy $6i=6(\cos(\pi/2+2\pi k)+i\sin(\pi/2+2\pi k))$, $k\in\mathbf{N}$.

c) Itt $a=-2$ $b=2\sqrt{3}$ $r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$. A komplex szám vektora a 2. síknegyedben fekszik; $tg\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$ $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$, tehát

$-2+2\sqrt{3}i=4(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3))$,

vagy $-2+2\sqrt{3}i=4(\cos(2\pi/3+2\pi k)+i\sin(2\pi/3+2\pi k))$ $k\in\mathbf{N}$.

d) Itt $a=2$ $b=-2$ $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$. A komplex számot ábrázoló vektor a 4. síknegyedben van; $tg\varphi=-1$ $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$, tehát

$2-2i=2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$, vagy

$2-2i=2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4+2\pi k)+i\sin(-\pi/4+2\pi k))$ $k\in\mathbf{N}$.

e) $a=-\sqrt{3}$ $b=-1$ $r=2$. $tg\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\varphi=-\dfrac{5}{6}\pi$ így

$-\sqrt{3}-i=2(\cos(-5\pi/6)+i\sin(-5\pi/6))$, vagy

$-\sqrt{3}-i=2(\cos(-5\pi/6+2\pi k)+i\sin(-5\pi/6+2\pi k))$ $k\in\mathbf{N}$.

25. Írjuk fel az alábbi, trigonometrikus alakban adott számokat algebrai alakban!

a) $z=2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$ **b)** $z=\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$

M: **a)** Mivel $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$, ezért beírva ezeket az értékeket $z=2(1+0i)=2$

b) Itt is beírva a sin ill. cos függvények értékeit a $3\pi/4$ helyen, kapjuk, hogy $z=\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=\sqrt{2}(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)=-1+i$.

26. Számítsuk ki a $2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))\cdot 3(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))$ szorzatot!

M: **(11)** formulát alkalmazva

$2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))\cdot 3(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))=2\cdot 3(\cos(\pi/6+\pi/12)+i\sin(\pi/6+\pi/12))=$
$=6(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))=6(\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i.$

27. Számítsuk ki a $\dfrac{10\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$ hányadost!

M: $$\frac{10\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$= 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5(0+i) = 5i.$$

28. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))^6$ **b)** $(3/2 - (\sqrt{3}/2)i)^{10}$

M: a) A **(13)** formula alapján

$(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))^6 = (\cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6)) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0i = -1$

b) Írjuk először fel a $(3/2 - (\sqrt{3}/2)i)$ komplex számot trigonometrikus alakban:

$a=3/2$, $b=-\sqrt{3}/2$, tehát $r = \sqrt{(3/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{3}$. A komplex szám vektora a 4. negyedben fekszik, ezért $tg\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}/2}{3/2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \varphi = -\dfrac{\pi}{6}$.

Így $(3/2 - (\sqrt{3}/2)i) = \sqrt{3}(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$, vagyis

$\{\sqrt{3}(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))\}^{10} = 3^5(\cos(-10\pi/6) + i\sin(-10\pi/6)) =$
$= 3^5 (\cos(5\pi/3) - i\sin(5\pi/3)) = 3^5 (\cos(5\pi/3 - 2\pi) - i\sin(5\pi/3 - 2\pi)) =$
$= 3^5(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 243(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 243(1/2 + i(\sqrt{3}/2)).$

29. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt{i}$ **b)** $\sqrt[3]{1}$

M: a) Írjuk fel $\sqrt{i}$ -t trigonometrikus alakban: $i=0 + 1i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$. A **(14)** formula alapján

$$z_k = \sqrt{i} = \sqrt{\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)} = \cos\frac{\pi/2+2\pi k}{2} +$$

$$+i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{2} = \cos(\pi/4+\pi k)+i\sin(\pi/4+\pi k) \quad k = 0,1.$$

Ha $k=0$, $z_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2i$; $k=1$, $z_1 = \cos(\pi/4 + \pi) + i\sin(\pi/4 + \pi) = -\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2-\sqrt{2}/2i.$

b) Írjuk fel az 1 komplex számot trigonometrikus alakban:

$1 = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0$. A **(14)** formula alapján

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3} =$$

$$= \cos(2\pi k/3) + i\sin(2\pi k/3) \qquad k = 0,1,2.$$

És így

$k=0$ esetén $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k=1$ esetén $z_1 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i$

$k=2$ esetén $z_1 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -1/2-(\sqrt{3}/2)i$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

30. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban!

a) $3i$ **b)** $-1+i$ **c)** $1-\sqrt{3}i$ **d)** $\sqrt{3}-i$ **e)** $\sqrt{3}/2-(1/2)i$.

31. Írjuk fel az alábbi komplex számokat algebrai alakban!

a) $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$ **b)** $4(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$ **c)** $\cos\pi + i\sin\pi$

d) $2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ **e)** $3(\cos 0 + i\sin 0)$.

32. Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $3(\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)) \cdot (\cos(5\pi/24) + i\sin(5\pi/24))$

b) $2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) \cdot 5(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$

c) $(\cos 5 + i\sin 5) \cdot (\cos 2 + i\sin 2)$ **d)** $(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)) \cdot (\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$

e) $4(\cos 10 + i\sin 10) \cdot 2(\cos 35 + i\sin 35)$

f) $(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)) \cdot (\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$.

33. Végezzük el az alábbi szorzásokat a trigonometrikus alak felhasználásával!

a) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$ **b)** $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$ **c)** $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$

d) $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$ **e)** $(5+5i)(\cos 15° + i\sin 15°)$

f) $3(\cos(-\pi/8) + i\sin(-\pi/8)) \cdot (3+\sqrt{3}i)$.

34. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $\dfrac{3(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))}{(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))}$ **b)** $\dfrac{\cos 210° + i\sin 210°}{\cos 150° + i\sin 150°}$

c) $\dfrac{\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))}{\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)}$ **d)** $\dfrac{\cos 150° + i\sin 150°}{\cos(-120°) + i\sin(-120°)}$.

35. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$ **b)** $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$

36. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[3]{27(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))}$ **b)** $\sqrt[5]{7(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))}$

c) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.

ÚTMUTATÁSOK

30. Alkalmazzuk az $r=\sqrt{a^2+b^2}$ $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ képletet. Pl. a **b)** feladatnál: $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{-1}=\operatorname{arctg}(-1)$ Mivel $3\pi/4$ és $3\pi/4+2k\pi$ tangense -1, ezért $\varphi=3\pi/4+2k\pi$ Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál is.

31. A $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ értékek megadásával ("kiszámításával") egyből az algebrai alakhoz jutunk. Pl. az **a)** feladatnál: $\cos(\pi/2)=0$; $\sin(\pi/2)=1$, tehát
$5(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=5\,(0+i)=5i$
Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál is.

32. Ezeknél a példáknál a **(11)** szabályt kell alkalmazni. Pl. az **a)** feladatnál:

$$3\cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{24}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál is.

33. Először írjuk át a tényezőket trigonometrikus alakba. Pl. az **a)** feladatnál:

1) Az $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ komplex számra:

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1/4}{1/4}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

tehát $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **2)** A $-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6}$ komplex számra:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{36}}=\frac{2\sqrt{2}}{6}$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}/6}{-\sqrt{2}/6}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}}\right)=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$$

tehát $-\frac{\sqrt{2}}{6}+i\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. A szorzat:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{6}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

A többi feladatnál is hasonlóan járjunk el.

34. Alkalmazzuk a **(12)** szabályt. Pl. az **a)** feladatnál

$$\frac{3}{1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

35. Alkalmazzuk a **(13)** szabályt (az **a)** feladatban az algebrai alakot írjuk át trigonometrikus alakba !). Pl. a **b)** feladatnál

$$\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8=2^8\left(\cos\frac{8\pi}{8}+i\sin\frac{8\pi}{8}\right)=2^8(\cos\pi+i\sin\pi)=-256$$

36. Alkalmazzuk a **(14)** szabályt. Pl. az **a)** feladatnál

$$\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi/3+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi/3+2\pi k}{3}\right)\quad k=0,1,2.$$

A **c)** feladatnál először írjuk át trigonometrikus alakra, vonjunk gyököt a **(14)** szabály alkalmazásával majd alakítsuk vissza algebrai alakra.

FELADATOK

37. Írjuk fel az alábbi komplex számokat algebrai alakban!

a) $z=\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ **b)** $z=6\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$

c) $z=\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ$ **d)** $z=5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

38. Írjuk fel az alábbi algebrai alakban adott komplex számokat trigonometrikus alakban!

a) 2 **b)** -3 **c)** $6i$ **d)** $\sqrt{3}-i$.

39. Végezzük el az alábbi szorzásokat!

a) $2(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)\times 4(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)$

b) $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\times\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

c) $\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12}+i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$

d) $5\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right)\times\left(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ\right)\times 4\left(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ\right)$.

40. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $\left(6\left(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ\right)\right)/\left(2\left(\cos\left(-50^\circ\right)+i\sin\left(-50^\circ\right)\right)\right)$

b) $\left(4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right)/\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

c) $\left(3\left(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)\right)/\left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

d) $\left(2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\right)/\left(3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\right)$.

41. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$ **b)** $\left(3\left(\cos\frac{2\pi}{12}+i\sin\frac{2\pi}{12}\right)\right)^3$

c) $\left(5\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\right)^6$ **d)** $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$.

42. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[3]{8\left(\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\right)}$ **b)** $\sqrt[5]{10\left(\cos\left(\pi/4\right)+i\sin\left(\pi/4\right)\right)}$

c) $\sqrt[7]{3\left(\cos\left(2\pi/3\right)+i\sin\left(2\pi/3\right)\right)}$ **d)** $\sqrt{4\left(\cos 3+i\sin 3\right)}$.

3. Komplex számok exponenciális alakja

A $z=a+bi$ komplex szám $z=a+bi=re^{\varphi i}$ alakban is megadható, ahol $r=|z|$, $\varphi=\mathrm{arctg}(b/a)$

Műveletek

Legyen $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$.

A két komplex szám *szorzata*:

(15) $\boxed{z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$

A két komplex szám *hányadosa*:

(16) $\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}}$

A komplex szám *hatványa*: Legyen $z=re^{i\varphi}$

(17) $\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$

A komplex szám *gyöke*:

(18) $\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad \text{ahol } k = 0,1,2,\ldots,n-1}$

Megjegyzés: Nyilvánvaló a trigonometrikus és az exponenciális alak közötti alábbi összefüggés

(19) $\boxed{re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$.

PÉLDÁK

43. Adjuk meg a komplex számok algebrai alakját!

a) $e^{i\pi/4}$ **b)** $e^{\pi e^{-i\pi/2}}$ **c)** $e^{2+i\pi}$

M: A **(19)** formula alapján

a) $e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i(\sqrt{2}/2)$

b) $e^{\pi e^{-i\pi/2}} = e^{\pi(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2))} = e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

c) $e^{2+i\pi} = e^2\cdot e^{i\pi} = e^2\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^2$

44. Írjuk fel az algebrai alakban megadott komplex számokat exponenciális alakban!

a) $z = 2i$ **b)** $z = -1 + i$

M: **a)** Mivel $a = 0$ $b = 2$ $r = 2$ $\varphi = \pi/2$, ezért a definíció alapján $z = 2e^{i\pi/2}$.

b) Mivel $a = -1$ $b = 1$ $r = \sqrt{2}$ $\mathrm{tg}\varphi = -1$ $\varphi = 3\pi/4$, ezért a definíció alapján $z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$.

45. Állítsuk elő a $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ komplex számokat exponenciális alakban és végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $z_1 z_2$ **b)** z_1/z_2 **c)** z_1^6 **d)** $\sqrt[4]{z_1}$

M: Ha $z_1 = 1 + i$, akkor $a = 1$, $b = 1$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$, tehát $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. Hasonlóan a $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ számra: $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $r = 2$, $\varphi = -\pi/3$, $z_2 = 2\, e^{i(-\pi/3)}$

a) A **(15)** képlet alapján $z_1 z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\cdot 2\, e^{i(-\pi/3)} = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/12}$

b) A **(16)** képlet alapján $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4-(-i\pi/3)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i7\pi/12}$.

c) A **(17)** képlet alapján $z_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^6 = 8e^{i3\pi/2}$.

d) A **(18)** képlet alapján azt kapjuk, hogy

$z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi k)i/4}$ $\quad k = 0,1,2,3$ amiből

$k = 0$ esetén $z_0 = \sqrt[8]{2}e^{i\pi/16}$

$k = 1$ esetén $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{9\pi i/16}$

$k = 2$ esetén $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+4\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{17\pi i/16} = \sqrt[8]{2}e^{-15\pi i/16}$

$k = 3$ esetén $z_3 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+6\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{25\pi i/16} = \sqrt[8]{2}e^{-7\pi i/16}$

komplex számokat (a négy gyököt) kapjuk.

46. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban!

a) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$ **b)** $z = \sqrt{2}(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$

c) $z = 2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$ **d)** $z = 4(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$

M: a) Mivel $\varphi = 0$, $r = 3$, ezért $z = 3\, e^{0i}$. **b)** Mivel $\varphi = \pi/2$, $r = \sqrt{2}$, ezért $z = \sqrt{2}\, e^{(\pi/2)i}$ **c)** Mivel $\varphi = \pi/4$, $r = 2$, ezért $z = 2\, e^{(\pi/4)i}$. **d)** Mivel $\varphi = -\pi/3$, $r = 4$, ezért $z = 4\, e^{(-\pi 3)i}$.

47. Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus és algebrai alakban!

a) $3e^{\frac{2\pi}{3}i}$ **b)** $4e^{-\frac{\pi}{4}i}$ **c)** e^i **d)** e^{0i} **e)** $2e^{i\pi/2}$

M: a) $\varphi = 2\pi/3$, $r = 3$, ezért $z = 3(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$, és így $a = 3\cos(2\pi/3)$, $b = 3\sin(2\pi/3)$, tehát $z = -1.5 + 1.5\sqrt{3}i$

b) $\varphi = -\pi/4$, $r = 4$, ezért $z = 4(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$, és így $a = 4\sqrt{2}/2$, $b = -4\sqrt{2}/2$, tehát $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

c) $\varphi = 1$, $r = 1$, ezért $z = \cos 1 + i\sin 1$, és így $a = \cos 1 \approx 0.54$, $b = \sin 1 \approx 0.84$, tehát $z = 0.54 + 0.84i$

d) $\varphi = 0$, $r = 1$, ezért $z = \cos 0 + i\sin 0$, és így $a = \cos 0 = 1$, $b = \sin 0 = 0$, tehát $z = 1$

e) $\varphi = \pi/2$, $r = 2$, ezért $z = 2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$, és így $a = 2\cos(\pi/2) = 0$, $b = 2\sin(\pi/2) = 2$, tehát $z = 2\,i$.

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

48. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban !

a) 1 **b)** $\sqrt{3} + i$ **c)** $3 + \sqrt{3}\,i$ **d)** $-\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i$.

49. Írjuk fel a $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot i$ komplex számokat exponenciális alakban és végezzük el a következő műveleteket!

a) $z_1 z_2$ **b)** z_2/z_1 **c)** z_2^4 **d)** $\sqrt[3]{z_1}$ **e)** $\sqrt[4]{z_2}$.

50. Írjuk fel az alábbi komplex számokat algebrai és exponenciális alakban !

a) $z = \cos\pi + i\sin\pi$ **b)** $z = \sqrt{3}(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$.

51. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus és algebrai alakban !

a) $5e^{-(\pi/2)i}$ **b)** $\sqrt{2}e^{\pi i}$ **c)** $3e^{2\pi i}$ **d)** $2e^{2+i\pi}$ **e)** e^{2-i}.

52. Végezzük el az alábbi szorzásokat !

a) $3e^{(\pi/3)i}\cdot 5e^{(\pi/4)i}$ **b)** $4e^{\pi i}\cdot 6e^{2\pi i}$

c) $2e^{(\pi/4)i}\cdot\sqrt{3}e^{(\pi/7)i}$ **d)** $(5+3i)(2-5i)$.

53. Végezzük el az alábbi osztásokat!

a) $4e^{(\pi/4)i}/5e^{(\pi/3)i}$ **b)** $3e^{\pi i}/2e^{(\pi/3)i}$

c) $5e^{(\pi/5)i}/3e^{(-\pi/5)i}$ **d)** $(3-2i)/(1+3i)$.

54. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(3e^{(\pi/5)i}\right)^{12}$ **b)** $\left(5e^{(\pi/6)i}\right)^{6}$

c) $\left(4e^{(-\pi/3)i}\right)^{5}$ **d)** $\left(\sqrt{2}/2+1/2\,i\right)^{2}$.

55. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!

a) $\sqrt[5]{7e^{\pi/5\,i}}$ **b)** $\sqrt[3]{e^{\pi i}}$ **c)** $\sqrt[7]{3e^{3\pi i}}$ **d)** $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.

ÚTMUTATÁSOK

48. Határozzuk meg φ-t és r-t ! Pl. a **b)** feladatnál:

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2 \qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Hasonlóan járjunk el a többi feladatnál!

49. Határozzuk meg φ_1-et, r_1-et, φ_2-t, r_2-t, majd végezzük el a műveleteket a **(15)**,**(16)**,**(17)**,**(18)** szabályok alkalmazásával!

50. Az algebrai alakba történő felírás tekintetében lásd a 37.példát! Az exponenciális alakhoz egyszerűen csak "le kell olvasni" a φ-t és az r-et.

Pl. az **a)** feladatban: $\varphi=\pi$, $r=1$, tehát $z=e^{\pi i}$.

51. A trigonometrikus alakban való feliráshoz leolvassuk a φ-t és az r-et. Az algebrai alakot az $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ összefüggésekből számítsuk ki!

Pl. az **a)** feladatnál: $a=5\cos(-\pi/2)=0$, $b=5\sin(-\pi/2)=-5$.

52. Alkalmazzuk a **(15)** szabályt ! Pl. az **a)** feladatban:

$$3\cdot 5e^{(\pi/3+\pi/4)i}=15e^{7/12\,\pi i}.$$

A **d)** feladatban az algebrai alakot alakítsuk át exponenciális alakra, majd a szorzás elvégzése után vissza.

53. Alkalmazzuk a **(16)** szabályt ! Pl. az **a)** feladatra:

$$4/5e^{i(\pi/4-\pi/3)}=4/5e^{-\pi/12\,i}.$$

A **d)** feladatban az algebrai alakot alakítsuk át exponenciális alakra, majd az osztás elvégzése után vissza.

54. Alkalmazzuk a **(17)** szabályt ! Pl az **a)** feladatra: $3^{12}e^{12(\pi/5)i}$.

A **d)** feladatban szereplő algebrai alakot alakítsuk át exponenciális alakra, végezzük el a hatványozást, majd alakítsuk vissza!

55. Alkalmazzuk a **(18)** szabályt ! Pl az **a)** feladatra: $\sqrt[5]{7}e^{\frac{\pi/5+2k\pi}{5}i}$.
A **d)** feladatnál először hozzuk a számot exponenciális alakra, úgy végezzük el a műveletet, majd alakítsuk vissza!

FELADATOK

56. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban!
a) 3 **b)** $3+5i$ **c)** $2+3i$.

57. Írjuk fel a $z_1 = 1+2i$; $z_2 = 5+2i$ komplex számokat exponenciális alakban és végezzük el a következő műveleteket!
a) $z_1 z_2$ **b)** z_1/z_2 **c)** $\sqrt[3]{z_1}$ **d)** z_2^5.

58. Írjuk fel az alábbi komplex számokat exponenciális alakban!
a) $z = 3(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$ **b)** $z = 5(\cos 2 + i\sin 2)$.

59. Írjuk fel az alábbi komplex számokat trigonometrikus és algebrai alakban!
a) $3e^{-\frac{\pi}{5}i}$ **b)** $12e^{7i}$ **c)** $-6e^{\frac{\pi}{2}i}$.

60. Végezzük el az alábbi szorzásokat!
a) $2e^{\frac{\pi}{5}i}\cdot 3e^{-\frac{\pi}{6}i}$ **b)** $\sqrt{2}e^{7i}\cdot 3e^{-6i}$ **c)** $3e^{\pi i}\cdot 5e^{\frac{\pi}{3}i}$.

61. Végezzük el az alábbi osztásokat!
a) $6e^{\frac{3}{2}\pi i}/2e^{\frac{1}{2}\pi i}$ **b)** $7e^{5i}/2e^{7i}$ **c)** $3e^{-5i}/\left(-2e^{2i}\right)$.

62. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!
a) $\left(5e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^7$ **b)** $\left(\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^3$ **c)** $\left(2e^{3\pi i}\right)^2$.

63. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat!
a) $\sqrt[3]{e^{\frac{\pi}{2}i}}$ **b)** $\sqrt[5]{2e^{5i}}$ **c)** $\sqrt[7]{3e^{\frac{\pi}{6}i}}$.

MEGOLDÁSOK

11. a) $-7i$ **b)** 12 **c)** -12 **d)** $1-i$ **e)** $4-i$ **f)** $-2-i$

12. a) -1 **b)** i **c)** i **d)** -1 **e)** 0 **f)** $-i$

13. a) 20 **b)** $6+10i$ **c)** 25 **d)** $25-19i$ **e)** $-1-3i$ **f)** $4+39i$
g) $24-5i$ **h)** $2/3+(7/9)i$ **i)** $0.22-0.07i$

14. a) $-i$ **b)** $1/2+(1/2)i$ **c)** $-i$ **d)** $-0.3-1.1i$ **e)** $18/13-(1/13)i$
f) $1/68+(21/68)i$ **g)** $-3/26-(41/26)i$ **h)** $(a^2-b^2)/(a^2+b^2)+2ab/(a^2+b^2)i$

i) $-a+bi$ **j)** $1/3+(\sqrt{5}/3)i$ **k)** $0.1+0.3i$ **l)** $4ab/(a^2+b^2)$

15. a) -64 **b)** $256(1+i)$ **c)** 1 **d)** $1/4+(\sqrt{2}/2)i$ **e)** $-i/2$ **f)** $-1/4+(1/4)i$

g) 1 **16.** $x=2,\ y=1$ **17. a)** 0 **b)** i **c)** $-i$

18. nem **19. a)** $15-11i$ **b)** $-5-12i$ **c)** $-2i$ **d)** $5+9i$ **e)** $-4+20i$

20. a) $2-2i$ **b)** 12 **c)** $0.2-1.4i$ **d)** $0.2+0.9i$ **e)** $1/6-(1/4)i$

21. a) $0.23-0.02i$ **b)** $2/5-(1/30)i$ **c)** $-5-12i$ **d)** $-4+19i$

22. a) $1/2+(1/2)i$ **b)** $1-2i$ **c)** $3/5+(4/5)i$ **d)** $1.5+1.5i$ **e)** $-0.3-1.1i$

23. a) $18/13-(1/13)i$ **b)** $1/68+(21/68)i$ **c)** $-3/26-(41/26)i$

d) $0.1+0.3i$

e) $4abi/(a^2+b^2)$ **f)** $18/13-(1/13)i$ **g)** $2i$ **h)** $-21/29+(20/29)i$

30. a) $3[\cos(\pi/2+2k\pi)+i\sin(\pi/2+2k\pi)]$ **b)** $\sqrt{2}[\cos(3\pi/4+2k\pi)+i\sin(3\pi/4+2k\pi)]$

c) $2[\cos(-\pi/3+2k\pi)+i\sin(-\pi/3+2k\pi)]$ **d)** $2[\cos(-\pi/6+2k\pi)+i\sin(-\pi/6+2k\pi)]$

e) $\cos(-\pi/6+2k\pi)+i\sin(-\pi/6+2k\pi)$ **31. a)** $5i$ **b)** $2-2\sqrt{3}i$ **c)** -1

d) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ **e)** 3

32. a) $3[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]$ **b)** $10[\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12)]$ **c)** $\cos 7+i\sin 7$

d) $\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)$ **e)** $8[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$ **f)** $\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$

33. a) $(1/6)[\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)]$ **b)** $8[\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)]$

c) $6\sqrt{2}[\cos(7\pi/12)+i\sin(7\pi/12)]$ **d)** $12\sqrt{6}[\cos(-7\pi/12)+i\sin(-7\pi/12)]$

e) $5\sqrt{2}[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]$ **f)** $6\sqrt{3}[\cos(\pi/24)+i\sin(\pi/24)]$

34. a) $3[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$ **b)** $\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)$ **c)** $\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)$

d) $\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$ **35. a)** -1 **b)** -256 **c)** $(1/2)-(\sqrt{3}/2)i$

36. a) $$\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi/3+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/3+2k\pi}{3}\right)\qquad k=0,1,2$$

b) $$\sqrt[5]{7}\left(\cos\frac{\pi/5+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi/5+2k\pi}{5}\right)\qquad k=0,1,2,3,4$$

c) $\sqrt{6}/2+\sqrt{2}/2\,i,\ -\sqrt{2}/2+\sqrt{6}/2\,i,\ -\sqrt{6}/2-\sqrt{2}/2\,i,\ \sqrt{2}/2-\sqrt{6}/2\,i$

37. a) $-\sqrt{3}\,i$ **b)** $4.59+3.85\,i$ **c)** $0.913+0.407\,i$ **d)** $2.5\sqrt{3}+2.5\,i$

38. a) $2(\cos 0+i\sin 0)$ **b)** $3(\cos\pi+i\sin\pi)$ **c)** $6(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$

d) $2(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6))$

39. a) $8(\cos 270+i\sin 270)$ **b)** $3\sqrt{3}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$

c) $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$ **d)** $20(\cos 270+i\sin 270)$

40. a) $(6/2)(\cos 90+i\sin 90)$ **b)** $4(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$

c) $(3/\sqrt{3})(\cos(-2\pi/3)+i\sin(-2\pi/3))$ **d)** $(2/3)(\cos 0+i\sin 0)$

41. a) $2^8(\cos\pi+i\sin\pi)$ **b)** $3^3(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$

c) $5^6(\cos 6\pi+i\sin 6\pi)$ **d)** $\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$

42. a) $2\left(\cos\frac{\pi/3+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/3+2k\pi}{3}\right) \qquad k=0,1,2$

b) $\sqrt[5]{10}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{5}\right) \qquad k=0,1,2,3,4$

c) $\sqrt[7]{3}\left(\cos\frac{2\pi/3+2k\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi/3+2k\pi}{7}\right) \qquad k=0,1,2,3,4,5,6$

d) $2\left(\cos\frac{3+2k\pi}{2}+i\sin\frac{3+2k\pi}{2}\right) \qquad k=0,1$

48. a) e^{0i} **b)** $2e^{\pi/6\, i}$ **c)** $2\sqrt{3}e^{\pi/6\, i}$ **d)** $2\sqrt{2}e^{2\pi/3\, i}$

49. a) $4e^{5\pi/12\, i}$ **b)** $e^{\pi/12\, i}$ **c)** $16e^{\pi i}$

d) $\sqrt[3]{2}e^{\pi/18\, i}$ $\sqrt[3]{2}e^{13\pi/8\, i}$ $\sqrt[3]{2}e^{-11\pi/8\, i}$

e) $\sqrt[4]{2}e^{\pi/16\, i}$ $\sqrt[4]{2}e^{9\pi/16\, i}$ $\sqrt[4]{2}e^{-15\pi/16\, i}$ $\sqrt[4]{2}e^{-7\pi/16\, i}$

50. a) $-1+0i=e^{i\pi}$ **b)** $0-\sqrt{3}i=\sqrt{3}e^{-\pi/2\, i}$

51. a) $5(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2))=-5i$ **b)** $\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt{2}$

c) $3(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=3$

d) $2e^{2+i\pi}=2e^2e^{i\pi}$ ezért $2e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2e^2$

e) $e^{2-i}=e^2e^{-i}$ ezért $e^2(\cos(-1)+i\sin(-1))\approx 3.99-6.22i$

52. a) $15e^{7\pi/12}$ **b)** $24e^{\pi i}$ **c)** $2\sqrt{3}e^{11\pi/28\, i}$ **d)** $25-19i$

53. a) $\frac{4}{5}e^{-\pi/12\, i}$ **b)** $\frac{3}{2}e^{2\pi/3\, i}$ **c)** $\frac{5}{3}e^{2\pi/5\, i}$ **d)** $-0.3-1.1i$

54. a) $3^{12}e^{2\pi/5\, i}$ **b)** $5^6e^{\pi i}$ **c)** $4^5e^{-5\pi/3\, i}$ **d)** $1/4+\sqrt{2}/2\, i$

55. a) $\sqrt[5]{7}e^{\frac{\pi/5+2k\pi}{5}i}$ **b)** $e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i}$ **c)** $\sqrt[7]{3}e^{\frac{3\pi+2k\pi}{7}i}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$

56. a) $r=3,\ \varphi=0$ **b)** $r=\sqrt{34},\ \varphi=1.03$ **c)** $r=\sqrt{13},\ \varphi=0.98$

57.

$$z_1=\sqrt{5}e^{1.11i} \qquad z_2=\sqrt{29}e^{0.38i} \qquad z_1z_2=\sqrt{145}e^{1.49i}$$

$$z_1/z_2=\sqrt{5/49}e^{0.73i} \qquad \sqrt[3]{z_1}=\sqrt[6]{5}e^{\frac{1.11+2k\pi}{3}} \qquad z_2^5=\left(\sqrt{29}\right)^5e^{1.9i}$$

58. a) $z=3e^{\frac{\pi}{3}i}$ **b)** $z=5e^{2i}$

59. a) $z = 3\left(\cos\left(-\pi/5\right) + i\sin\left(-\pi/5\right)\right), \quad z = 2.43 - 1.77i$

b) $z = 12\left(\cos 7 + i\sin 7\right), \quad z = 9.05 + 7.88i$

c) $z = -6\left(\cos \pi/2 + i\sin \pi/2\right), \quad z = -6i$

60. a) $6e^{\frac{\pi}{30}i}$ **b)** $3\sqrt{2}e^{i}$ **c)** $15e^{\frac{4}{3}\pi i}$

61. a) $3e^{\pi i}$ **b)** $7/2\, e^{-2i}$ **c)** $-3/2\, e^{-7i}$

62. a) $5^7 e^{7/4\,\pi i}$ **b)** $\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{9/4\,\pi i}$ **c)** $4e^{6\pi i} = 4$

63. a) $e^{\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}i}$ **b)** $\sqrt[5]{2}e^{\frac{5+2k\pi}{5}i}$ **c)** $\sqrt[7]{3}e^{\frac{\pi/6 + 2k\pi}{7}i}$

5. VEKTORALGEBRA

1. A vektor értelmezése, műveletek vektorokkal

A háromdimenziós tér vektoraival foglalkozunk. Az ilyen vektorok halmazát *geometriai vektortérnek* is nevezik.

(1) A *vektor*t geometriailag *irányított szakasz*ként, algebrailag pedig *számhármas*ként értelmezzük. Jelölése:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Az a_1, a_2, a_3 számok a vektor *koordinátái*.

A számokat, megkülönböztetendő a vektoroktól (vagy másképpen vektoriális mennyiségektől), *skalár*oknak (skaláris mennyiségeknek) nevezzük.

(2) Az irányított szakasz hossza a vektor *abszolút értéke*. Ennek jele: $|\mathbf{a}|$.

(3) Ha $|\mathbf{a}| = 1$, akkor **a** vektort *egységvektor*nak nevezzük és $\mathbf{a}^0$-val jelöljük. Ha a vektor abszolút értéke zérus, akkor azt *zérusvektor*nak (nullavektornak) nevezzük. Jele: $\mathbf{0}$.

(4) Ha a vektor (az irányított szakasz) kezdőpontja rögzített, akkor azt *helyvektor*nak nevezzük.

1.1 *A vektor mint irányított szakasz*

Két vektor *egyenlő*, ha párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók úgy, hogy kezdőpontjuk egybeessék, úgyszintén végpontjuk is.

(5) Az **a** és **b** vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *összegét* ill. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *különbségét* a paralelogramma szabály segítségével értelmezzük.

(6) Az **a** vektornak a λ *számmal* (skalárral) *való* $\lambda\mathbf{a}$ *szorzata* olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda|\,|\mathbf{a}|$, iránya pedig megegyezik **a** irányával, ha $\lambda > 0$ és ellentétes irányú, ha $\lambda < 0$.

(7) Az $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ vektor egységvektor, mert abszolút értéke 1. Az $\mathbf{a}^0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ vektort az **a** *vektor egységvektorának* nevezzük, amit tehát úgy kapunk, hogy az **a** vektort "osztjuk" az abszolút értékével.

(8) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok *lineáris kombinációján* a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ vektort értjük, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tetszőleges számok.

(9) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha a $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ egyenlőség csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ esetén teljesül. Ellenkező esetben az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok *lineárisan függők* (összefüggők).

(10) A háromdimenziós térben legfeljebb három lineárisan független vektor adható meg. Három ilyen vektor a tér *bázis*át alkotja. Legyenek ezek az ún. *bázisvektorok* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. A tér bármely vektora előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Ha például

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3,$$

akkor a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számok a **v** vektor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ *bázisra vonatkozó koordinátái.*

(11) Az **a** és **b** vektorok **ab** *skaláris szorzata*:

$$\boxed{\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi}$$

amelynek az értéke egy szám, ahol φ az **a** és **b** vektorok által közrezárt szög. A skaláris szorzás eredménye tehát skalár.

Az értelmezésből látszik, hogy ha két vektor merőleges egymásra $(\varphi = \pi/2)$, akkor skaláris szorzatuk nulla. Ennek fordítottja is igaz.Ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor azok *merőlegesek* egymásra.

(12) Az **a** vektornak a **b** vektorra eső *vetületvektora* (1.ábra)

$$(\mathbf{ab}^0)\mathbf{b}^0.$$

(13) Az **a** és **b** vektorok $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *vektoriális szorzata* az a vektor, amely merőleges mind az **a** mind a **b** vektorra, abszolút értéke $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi$, azaz

$$\boxed{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi}$$

továbbá az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok (ebben a sorrendben) jobbsodrású rendszert alkotnak, vagyis ha **b** az **a**-t az óramutató járásával ellenkező irányba követi, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ "felfelé" mutat.

(14) Az értelmezésből látszik, hogy ha a két vektor párhuzamos, akkor vektoriális szorzatuk zérusvektor. Az is kiolvasható belőle, hogy az $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi$ szám a két vektor által kifeszített *paralelogramma területének* mérőszáma. A vektoriális szorzás nem kommutatív, ugyanis $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

(15) Az **a**,**b**,**c** vektorok (ilyen sorrendben vett) *vegyes szorzata*: $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$, amelynek az értéke egy szám (skalár).

A vegyes szorzat abszolút értéke a három vektor által kifeszített paralelepipedon (paralelogramma alapú hasáb) *térfogatával* egyenlő. Ha $\mathbf{abc} = 0$, akkor a három vektor egy síkban van. Ekkor azok lineárisan függők. Ha $\mathbf{abc} \neq 0$, akkor **a**,**b**,**c** lineárisan függetlenek.

1.2 *A vektor mint számhármas*

A vektorokkal való számításoknál a vektort legtöbbször mint számhármast kezeljük.

Vegyünk olyan bázisvektorokat, amelyek mindegyike egységvektor és páronként merőlegesek egymásra.Legyenek ezek $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Szokás ezeket **i**,**j**,**k** módon is jelölni.Ekkor a tér tetszőleges **v** vektora felírható

(16) $$\boxed{\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}}$$

alakban. A v_1, v_2, v_3 számok a **v** vektornak az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (vagy **i**,**j**,**k**) bázisra vonatkozó koordinátái. A továbbiakban a vektor koordinátáin mindig ilyen koordinátákat értünk. Használhatjuk a

$$\boxed{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)}$$

jelölést és mondhatjuk azt, hogy ez a számhármas a vektor. A $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ alakot szokás a vektor *koordinátás alakjának* nevezni.

(17) Ha ezek a bázisvektorok egy térbeli Descartes-féle koordinátarendszer x,y,z tengelyeivel párhuzamosak, akkor a $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ vektort tekinthetjük olyan *helyvektornak*, amelynek kezdőpontja az origó, végpontja pedig a $P(v_1,v_2,v_3)$ pont.

A *zérusvektor* mindhárom koordinátája nulla, azaz $\mathbf{0} = (0,0,0)$.

Legyen a továbbiakban

$$\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3),\ \mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3),\ \mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3).$$

(18) Az **a** vektor *abszolút értéke*:

$$\boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}$$

(19) Az **a** és **b** vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3.$$

(20) Az **a** és **b** vektor *összege*:

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)}$$

(21) Az **a** és **b** vektor *különbsége*:

$$\boxed{\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)}$$

(22) Az **a** vektornak a λ *számmal való szorzata*:

$$\boxed{\lambda\,\mathbf{a} = (\lambda\, a_1, \lambda\, a_2, \lambda\, a_3)}$$

(23) Az **a** vektor *egységvektora*:

$$\boxed{\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right)}$$

(24) Az **a** és **b** vektorok *skaláris szorzata*:

$$\boxed{\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

(25) Az **a** és **b** vektorok által közrezárt szög koszinusza:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

(26) Az **a** vektornak az x,y ill. z tengellyel bezárt szögei legyenek α, β, ill. γ .Ekkor

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}}$$

Ezek az ún. *iránykoszinuszok* az $\mathbf{a}^0$ vektor koordinátái. Ezért

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

(27) Az **a** és **b** vektorok *vektoriális szorzata*:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(28) Az **a**,**b**,**c** vektorok *vegyes szorzata*:

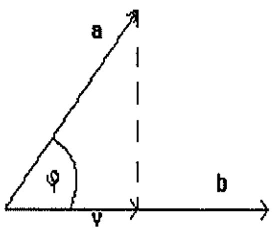
$$\boxed{\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

PÉLDÁK

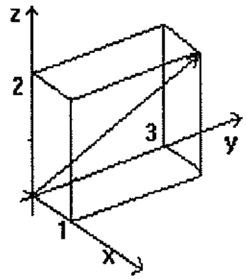
1. Ábrázoljuk a $\mathbf{v} = (1,3,2) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ vektort mint helyvektort. Számítsuk ki az abszolút értékét!

M: A vektor az origóból a $P(1,3,2)$ pontba mutató irányított szakasz (2.ábra). Abszolút értéke:

$$\mathbf{v} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$



1. ábra



2. ábra

2. Írjuk fel az $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ vektort, ha $\mathbf{a} = (-5,2,4)$ és $\mathbf{b} = (2,7,-1)$.

M: $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (-5,2,4) + (6,21,-3) = (1,23,1)$.

3. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (-5,2,4)$ és $\mathbf{b} = (2,7,-1)$ vektorok skaláris szorzatát.

M: $\mathbf{ab} = -10 + 14 - 4 = 0$. Mivel a skaláris szorzat értéke 0, ezért a két vektor merőleges egymásra.

4. Írjuk fel a $\mathbf{v} = (-1,\sqrt{2},1)$ vektor egységvektorát.Mekkora szögeket zár közre a **v** vektor a koordinátatengelyekkel?

M: Mivel $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+2+1} = 2$, ezért az egységvektor:

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{2}\left(-1,\sqrt{2},1\right) = \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{2}\left(-1,\sqrt{2},1\right) = \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Az egységvektor koordinátái az iránykoszinuszok, azaz

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

Így az x,y,z tengelyekkel közrezárt szögek rendre: $\alpha = 120°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

5. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (-2,1-3)$ vektornak a $\mathbf{b} = (-1,2-3)$ vektorra eső vetületvektorát.

M: A vetületvektor:$(\mathbf{ab}^0)\mathbf{b}^0$. Előbb kiszámítjuk a $\mathbf{b}^0$ egységvektort. Mivel $|\mathbf{b}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, ezért $\mathbf{b}^0 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,-3)$. Ennek ismeretében az $\mathbf{ab}^0$ skaláris szorzat értéke:

$$\mathbf{ab}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2,1,-3)(-1,2,-3) = \frac{1}{\sqrt{14}}(2+2+9) = \frac{13}{\sqrt{14}}.$$

Ez egyébként a vetületvektor hossza, ugyanis $\mathbf{ab}^0 = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}^0| \cos\varphi = |\mathbf{a}|\cos\varphi$, mivel $|\mathbf{b}^0| = 1$ (l.a 2.ábrán). Így a vetületvektor:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{ab}^0)\mathbf{b}^0 = \frac{13}{14}(-1,2,-3) = \left(-\frac{13}{14},\frac{26}{14},-\frac{39}{14}\right).$$

6. Mekkora szöget zárnak közre az $\mathbf{a} = (1,0,1)$ és $\mathbf{b} = (3,8,0)$ vektorok?

M: A közrezárt szög koszinusza: $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{3+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{73}} = \dfrac{3}{\sqrt{146}}$

ahonnan $\varphi \approx 75°37'$.

7. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (2,-1,3)$ és $\mathbf{b} = (1,0,7)$ vektorok vektoriális szorzatát. Mekkora a két vektor által kifeszített paralelogramma területe?

$$\mathbf{M:}\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-7,-11,1).$$

A két vektor által kifeszített paralelogramma területe ennek a vektoriális szorzatnak az abszolút értéke, azaz $T = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{49+121+1} = \sqrt{171}$.

8. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (2,1,4)$, $\mathbf{b} = (5,3,2)$ és $\mathbf{c} = (3,6,7)$ vektorok vegyes szorzatát. Mekkora a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata?

$$\mathbf{M:}\ \text{A vegyes szorzat: } \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 29 + 4\cdot 21 = 73.$$

A paralelepipedon térfogata a vegyesszorzat abszolút értékével egyenlő. Jelen esetben tehát $V = 73$.

9. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (-1,3,2), \mathbf{b} = (4,-6,2), \mathbf{c} = (-3,12,11)$ vektorok?

M: Azt kell megvizsgálni, hogy a $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = \mathbf{0}$ egyenlőség milyen λ_i értékek mellett teljesül. Ha csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ esetén, akkor lineárisan függetlenek. Ha más értékek esetén is, akkor lineárisan függők. A vektorok koordinátás alakját az egyenletbe beírva, a $\lambda_1(-1,3,2) + \lambda_2(4,-6,2) + \lambda_3(-3,12,11) = \mathbf{0}$ egyenletet kapjuk. A bal oldalon szereplő vektor csak akkor nulla(vektor), ha mindhárom komponense nulla. Ekkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$-\lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0,$$
$$3\lambda_1 - 6\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0,$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0.$$

Ennek van a triviálistól (a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$-tól) különböző megoldása (l.a lineáris egyenletrendszereknél). Egy ilyen megoldás például: $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. Tehát az adott $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vektorok lineárisan nem függetlenek (azaz lineárisan függők, ugyanis $2\mathbf{c} = 10\mathbf{a} + \mathbf{b}$).

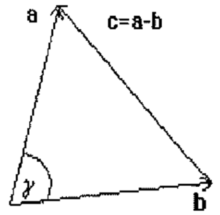
Egyszerűbben járhatunk el, ha azt vizsgáljuk meg, hogy a három vektor egy síkba esik-e. Ekkor a vegyes szorzatot kell kiszámítani.

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 11 \end{vmatrix} = 90 - 150 + 60 = 0.$$

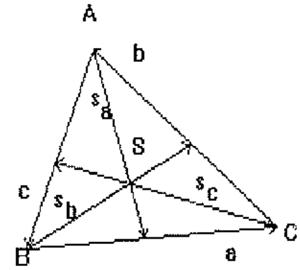
Mivel ez nulla, ezért a három vektor egy síkban van, ami azt jelenti, hogy azok nem függetlenek (lineárisan függők).

10. Igazoljuk a koszinusz-tételt.

M: Legyenek a háromszög oldalvektorai $\mathbf{a},\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ (3.ábra). Ekkor a háromszög oldalai $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{c}|$. Az ábráról látható, hogy $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.



3. ábra



4. ábra

Mindkét oldalt négyzetre emelve (azaz önmagával skalárisan szorozva):

$$\mathbf{cc} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{aa} + \mathbf{bb} - 2\mathbf{ab}.$$

Felhasználva a skaláris szorzás értelmezését,

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\gamma.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást (a súlypontban), és a súlypont a csúcstól mérve 2:1 arányban osztja ketté a súlyvonalat.

M: Legyenek a háromszög oldalvektorai $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ (4.ábra). Ezekre érvényes, hogy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Az A csúcsból kiinduló súlyvonal $\mathbf{s}_a$ vektorának végpontja a BC oldal felezőpontja, ezért $\mathbf{s}_a = \mathbf{c} + 1/2\mathbf{a}$. Hasonlóképpen $\mathbf{s}_b = \mathbf{a} + 1/2\mathbf{b}$ és $\mathbf{s}_c = \mathbf{b} + 1/2\mathbf{c}$. A három súlyvonal akkor és csakis akkor metszi egymást egyetlen (mindhárom súlyvonalat 2:1 arányban osztó) S pontban, ha

$$\mathbf{a} + 2/3\mathbf{s}_c = \mathbf{a} + \mathbf{b} + 2/3\mathbf{s}_a = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + 2/3\mathbf{s}_b.$$

A súlyvonalvektorok előbbi kifejezéseit behelyettesítve és figyelembevéve, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$:

$\mathbf{a} + 2/3\mathbf{s}_c = \mathbf{a} + 2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c}$;

$\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2/3\mathbf{s}_a = \mathbf{a} + \mathbf{b} + 2/3(\mathbf{c} + 1/2\mathbf{a}) = \mathbf{a} + 2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c} + 1/3(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} +$
$+2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c}$;

$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + 2/3\mathbf{s}_b = 2/3\mathbf{s}_b = 2/3(\mathbf{a} + 1/2\mathbf{b}) + 1/3(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + 2/3\mathbf{b} + 1/3\mathbf{c}$.

Mivel mindhárom kifejezés ugyanazzal a mennyiséggel egyenlő, ezért egymással is egyenlők. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a súlyvonalvektorok összege nulla(vektor). Ugyanis

$$\mathbf{s}_a + \mathbf{s}_b + \mathbf{s}_c = \mathbf{c} + 1/2\mathbf{a} + \mathbf{a} + 1/2\mathbf{b} + \mathbf{b} + 1/2\mathbf{c} = 3/2(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}.$$

FELADATOK ÚTMUTATÁSSAL

12. Legyen $\mathbf{a} = (2,-3,1)$, $\mathbf{b} = (7,4,z)$. Határozzuk meg z értékét abból a feltételből, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

13. Számítsa ki az $\mathbf{a} = (2,-2,5)$ vektor iránykoszinuszait.

14. Számítsuk ki az $A(2,3,6)$ és $B(-1,8,-6)$ pontok közötti távolságot.

15. Számítsuk ki az $A(3,1,1)$, $B(-1,4,7)$, $C(6,7,-2)$ csúcspontú háromszög területét és a háromszög koordinátasíkokra eső vetületeinek a területét.

16. Határozzuk meg u értékét úgy, hogy az $\mathbf{a} = (1,0,3)$, $\mathbf{b} = (-2,1,0)$, $\mathbf{c} =$ $= (u,-1,2)$ vektorok komplanárisak legyenek (egy síkba essenek, vagy ami ugyanazt jelenti, egy közös síkkal párhuzamosak legyenek).

17. Számítsuk ki az $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,5,2)$ csúcspontú gúla térfogatát.

18. Legyen $\mathbf{a} = (2,-1,4) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$. Az $\mathbf{e}_1$ bázisvektor helyett vezessük be a $\mathbf{b} = (1,3,-2) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ vektort (az $\mathbf{e}_1$ vektort cseréljük ki a $\mathbf{b}_1$ vektorral). Számítsuk ki az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b},\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ bázisra vonatkozó koordinátáit.

19. Írjuk fel a $\mathbf{v} = (-3,7,11) = -3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3$ vektor $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ bázisra vonatkozó koordinátáit, ha $\mathbf{b}_1 = (1,3,-2)$, $\mathbf{b}_2 = (0,2,5)$, $\mathbf{b}_3 = (4,0,-3)$.

20. Bontsuk fel az $\mathbf{a} = (2,-1,3)$ vektort egy $\mathbf{b}$ irányú $\mathbf{v}$ és arra merőleges $\mathbf{u}$ összetevőre, ha $\mathbf{b} = (-1,2,-3)$.

21. Számítsuk ki az $O(0,0)$, $A(3,-3)$, $B(5,-1/2)$, $C(7,3)$,$D(3,4)$ csúcspontú ötszög területét.

22. Legyen $\mathbf{a} = (2,y,z)$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Határozzuk meg y és z értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}$ vektor hossza $\sqrt{14}$ legyen, és az $\mathbf{a}$ vektor merőleges legyen a $\mathbf{b}$ vektorra. Ezután számítsuk ki a két vektor által kifeszített háromszög területét.

23. Legyen $\mathbf{e}$ egységvektor és $\mathbf{p}$ tetszőleges vektor.Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbf{ep})^2 + |\mathbf{e} \times \mathbf{p}|^2 = \mathbf{p}^2$.

24. Írjunk fel egy olyan vektort, amely felezi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által közrezárt szöget.

25. Igazoljuk, hogy bármely négyszög oldalainak felezőpontjai egy paralelogrammát alkotnak.

26. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogrammánál az átlók hosszának négyzetösszege egyenlő két szomszédos oldal hosszának kétszeres négyzetösszegével.

27. Legyen két pont helyvektora $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$. Írjuk fel a két pont által meghatározott szakasz felező ill. harmadoló pontjainak helyvektorát.

28. Egy háromoldalú gúla egy csúcsból kiinduló három élvektora: $\mathbf{a} = (1,2,0)$, $\mathbf{b} = (2,3,1)$, $\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3)$. Határozzuk meg a $\mathbf{c}$ vektort úgy, hogy az merőleges legyen $\mathbf{a}$-ra is és $\mathbf{b}$-re is, a gúla térfogata pedig 4 egység legyen!

29. Egy háromszög csúcspontjai $P_1(0,2,-1)$, $P_2(-3,4,1)$, $P_3(2,-4,0)$. Írjunk fel egy olyan vektort, amely merőleges a háromszög síkjára, abszolút értéke pedig a háromszög területének mérőszáma.

30. Számítsuk ki az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ szorzat értékét.

31. Számítsuk ki a $T = |(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|$ értéket. Mi az eredmény geometriai jelentése?

32. Oldjuk meg az alábbi egyenletrenszert:

$$5x - 3y + z = 0,$$
$$x + 2y - 3z = 11,$$
$$2x + y + 4z = 3.$$

33. Az előző feladat megfogalmazható úgy is, hogy felbontjuk a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ irányú összetevőkre. A megoldás:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{b}\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{b}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_3.$$

Ezt felhasználva, bontsuk fel a $\mathbf{v} = (2,-1,1)$ vektort $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ irányú összetevőkre, ha $\mathbf{a} = (0,1,0)$, $\mathbf{b} = (1,-1,2)$, $\mathbf{c} = (0,3,2)$.

ÚTMUTATÁSOK

12. A két vektor skaláris szorzata nulla, így $z = -2$.