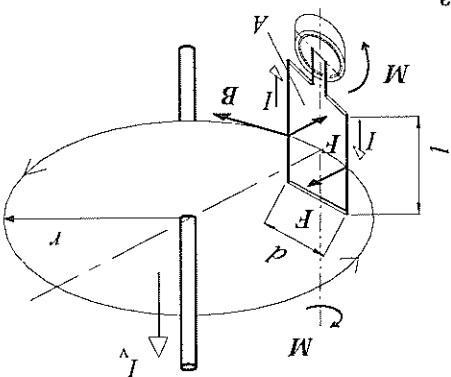


- 6.1.6.** Mekkora áram folyik a vezetékben, ha egy vele párhuzamos, 0,8 m-re elhelyezett, 1 cm^2 keresztmetszeti felületen áthaladó erővonalak száma $8,8 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$?
- 6.1.7.** Mekkora a mágneses térerősség két vezeték közötti felezőpontban, ha a vezetékben folyó áramok azonos irányban, és mekkora, ha ellenlétes irányban folynak? Az áramerősség az egyik vezetékben 25 A, a másikban 18 A. A vezetékkek közötti távolság 50 cm.

6.2. Erőhatások mágneses térben

1. példa

A 6.5. ábrán egy áramjárta vezető mágneses térben lévő vezetőkeretet láthatunk.



- a) Határozzuk meg a vezetőkeretre ható nyomatékot, ha a vezetékben 10 A áram folyik és a keret távolsága a vezeték középpontjától $l = 10 \text{ cm}$, a vezeték mérete $l = 10 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$. Számítsuk ki a keret ágaira ható erőket!

6.5. ábra

Megoldás

- a) A vezető körül kialakult mágneses tér és az indukció nagysága:

$$H = \frac{I_v}{10} = \frac{2\pi \cdot l}{10} = 1,59 \frac{\text{m}}{\text{A}};$$

$$B = \mu_0 \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,59 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T.}$$

A mérőkeret felülete: $A = d \cdot l = 0,1 \cdot 0,1 = 10^{-2} \text{ m}^2$.

A mérőkeretre ható nyomaték: $M = B \cdot I \cdot A = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$.

- b) Az erővonalra érintőleges irányú, azaz a tér irányával párhuzamos vízszintes d vezetőszakaszokra nem hat erő. Ha az l vezetőszakaszt az áram irányába mutató vektornak tekintjük, akkor az F erő irányát az l és a B indukcióvektor vektori szorzata adja, ahogyan ez a 6.5. ábrán is megfigyelhető. Az erő iránya és nagysága az alábbi képlettel fejezhető ki: $F = I \cdot l \times B$.

Az F erő nagysága: $F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha$.

Mivel az l és B vektorok merőlegességek egymásra, $\sin 90^\circ = 1$, így a képlet egyszerűbb alakjával számolhatunk. Az l szakaszokra ható erő:

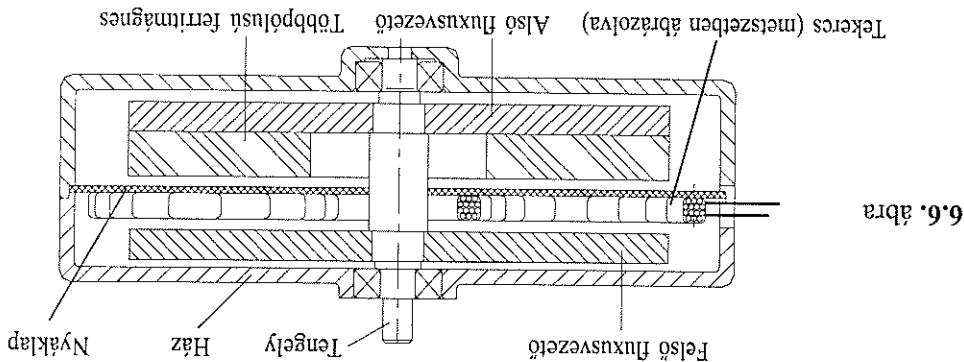
$$F = I \cdot B \cdot l = 1 \text{ A} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 0,1 \text{ m} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

Az erő a már kiszámított nyomatékból is meghatározható: $F = \frac{M}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{0,1} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

A vezetőkeretre ható nyomaték $2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$, az erő $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

2. példa

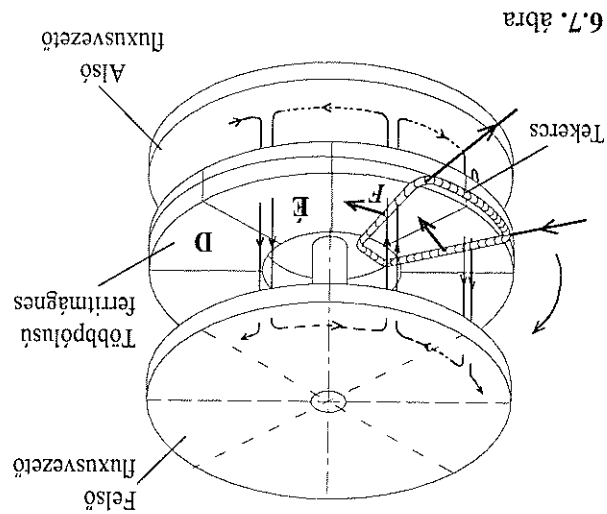
A 6.6. ábrán egy tárcsamotor egyszerűsített rajzát láthatjuk. A nyomatatott áramkörű lap a rajta elhelyezkedő tekercsekkel az egyenáramú motor házához van rögzítve. A házhoz csapágyazott tengely forog a hozzá erősített felső és alsó fluxusvezetővel. A többpólusú ferritmágnese az alsó fluxusvezetőhöz van rögzítve.



6.6. ábra

A mágneses fluxus záródását a északi pólusból kiinduló mágneses fluxus a légrensen át a lágymágneses anyagból készült felső fluxusvezetőbe kerül. Itt kétfele ágazva a légrensen át a szomszédos déli, majd északi pólusokon át az alsó fluxusvezetőben haladva visszajut az eredeti mágneses pólus déli pólusába, ezután az északi pólusban záródik.

A 6.7. ábrán a tekercsendszerből egy tekercset ábrázoltunk a tekercset tartó nyáklap nélkül.



6.7. ábra

A balkező-szabály alkalmazásával berajzoljuk a tekercságyakra ható erőket. Mivel a tekercs rögzített, ezért a többpólusú ferritmágnes a motor forgórészével együtt az F erővel ellentétes irányba fog elfordulni. Ezt a forgásirányt ellenőrzésre kell változtatni, hogy a forgató-sok váltásakor a tekercsben az áramirányt ellentétesre kell változtatni, hogy a forgató-nyomaték iránya ne változzon. Erről egy vezérlő elektronika gondoskodik.

a) Határozzuk meg az egyenáramú motor forgatónyomatékát, ha egy adott terheléshez tartozó fordulatszám percenként 500, és egy tekercs áramfelvétele 0,5 A. A tekercsrendszer nyolc tekercsből áll, egy tekercs menetszáma 64. A légrésben az indukció 0,3 T.

b) Mekkora a motor teljesítménye?

Adatok: $I_1 = 0,5$ A; $N = 64$; $m = 8$; $B_1 = 0,3$ T; $D = 102$ mm; $d = 52$ mm; $n = 500$.

Megoldás

a) Egy vezetékszakasza ható erő: $F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha$.

Mivel a vezetek merőleges a B mágneses indukcióra, ezért $\sin \alpha = 1$.

$$F_1 = B \cdot I \cdot l = B \cdot I \cdot \frac{D-d}{2} = 0,3 \text{ T} \cdot 0,5 \text{ A} \cdot \frac{0,102 - 0,052}{2} = 3,75 \text{ mN}.$$

A 6.7. ábrán jól látható, hogy az ellentétes pólusok alatt lévő tekercságyak ellentétes árama miatt az erők azonos irányba hatnak. Ha felítételezzük, hogy valamennyi tekercságy a mágneses pólus alatt van és nem a pólusváltás semleges vonalában, akkor a teljes tekercsrendszer által kifejtett erő: $F = m \cdot 2 \cdot N \cdot B \cdot I \cdot l = m \cdot 2 \cdot N \cdot F_1 = 8 \cdot 2 \cdot 64 \cdot 3,75 = 3,84$ N.

Figyeljünk meg, hogy egy menet két vezetékből áll!

Ha a motor nyomatékát akarjuk kiszámítani, akkor figyelembe kell vennünk, hogy egy-egy tekercságy kis szakaszaira ható erő a változó sugár miatt más-más nyomatékot fejt ki. Mivel a nyomaték a sugárral arányos, ezért számolhatunk egy közepes átmérővel:

$$D_k = \frac{D+d}{2} = \frac{102+52}{2} = 77 \text{ mm}.$$

$$M = F \cdot D_k = 3,84 \text{ N} \cdot 0,077 \text{ m} = 0,296 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

b) A motor teljesítménye:

$$P = \omega \cdot M = \frac{2\pi \cdot n}{60} \cdot M = \frac{2\pi \cdot 500}{60} \cdot 0,296 = 15,5 \text{ W}.$$

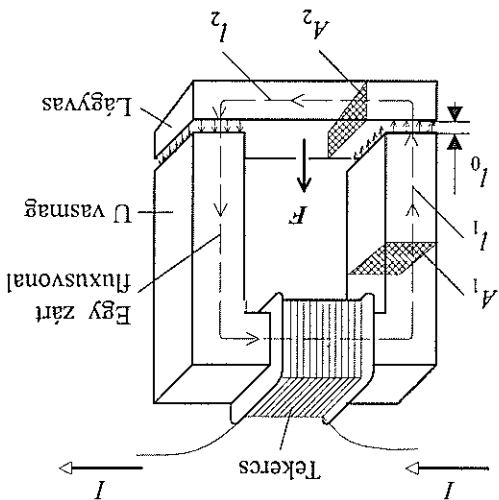
3. példa

A 6.8. ábrán egy elektromágneses látható. Az U vasmag és a légrés keresztmetszete 2 cm^2 , a lágyvas keresztmetszete $1,6 \text{ cm}^2$, a légrés 1 mm . Az erővonalhossz az U vasmagban 14 cm , a lágyvasban $5,6 \text{ cm}$. Az U vasmag és a lágyvas anyaga öntött acél.

- a) Számítsuk ki a tekercs menetszámát, ha 0,6 A árammal gerjesztve az elektromágneset, annak 57 N erőt kell kifejtenie a lágvasra!
- b) Mekkora áram szükséges az 57 N erő kifejtéséhez, ha a légrés 0,1 mm-re csökken?
- c) Mekkora az adott gerjesztés környezetében az öntött acél relatív permeabilitása?

Adatok: $I = 0,6 \text{ A}$; $A_0 = A_1 = 2 \text{ cm}^2$;
 $A_2 = 1,6 \text{ cm}^2$; $l_0 = 1 \text{ mm}$;
 $l_1 = 0,14 \text{ m}$; $l_2 = 0,056 \text{ m}$.

6.8. ábra



Megoldás

- a) Mivel az elektromágnesben két légrés van, az erő: $F = 2 \cdot \frac{2\mu_0}{B_0^2} \cdot A_0 = \frac{\mu_0}{B_0^2} \cdot A_0$.
 Ebből a szükséges légrésindukció:

$$B_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot F}{A_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 57 \text{ N}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}} = 0,6 \text{ T}.$$

A mágneskör fluxusa:

$$\Phi = B_0 \cdot A = 0,6 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{s} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

Mivel a légrés mérete kicsi a légrés keresztmetszetéhez viszonyítva, ezért a fluxus szórásától eltekinthetünk. A légrés és az U vasmag azonos keresztmetszetéből, valamint az azonos fluxusból következik az indukció azonossága:

$$B_0 = \frac{\Phi}{A_0} = \frac{\Phi}{A_1} = B_1 = 0,6 \text{ T}.$$

A lágyvasban az indukció a keresztmetszet változása miatt más: $\Phi = B_0 \cdot A_0 = B_2 \cdot A_2$;

$$B_2 = \frac{\Phi}{A_2} = \frac{1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}}{1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,75 \text{ T.}$$

A gerjesztéssűrűség a gerjesztési törvényből határozható meg:

$$\Theta = H_0 \cdot l_0 + H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 = \frac{B_0}{\mu_0} \cdot l_0 + H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2.$$

H_1 és H_2 értékeit B_1 és B_2 ismeretében az öntött acél mágneseszési görbéjéből tudjuk leolvasni. A 6.9. ábra alapján $H_1 = 625 \text{ A/m}$, $H_2 = 740 \text{ A/m}$.

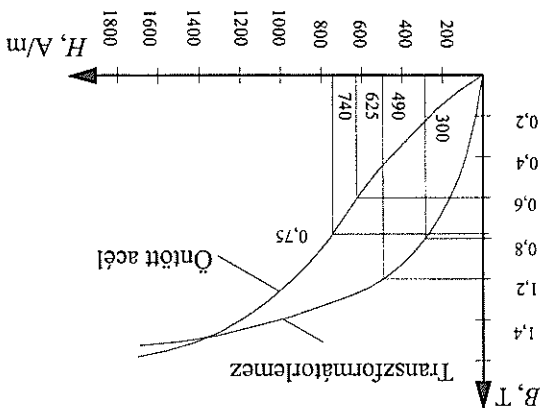
$$\Theta = \frac{B_0}{\mu_0} \cdot l_0 + H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3} + 625 \cdot 0,14 + 740 \cdot 0,056}{0,6} = 477,46 + 87,5 + 41,44 = 606,4 \text{ A.}$$

Figyeljük meg, hogy a legnagyobb gerjesztés a légrészindukció előállításához szükséges!

A gerjesztő tekercs menetszáma:

$$N = \frac{\Theta}{606,4} = \frac{I}{0,6} = 1011.$$

b) A lecsökkenő légrésszel számolva: B, T ▲



6.9. ábra

$$\Theta = \frac{B_0}{\mu_0} \cdot l_0 + H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 = \frac{0,6 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} + 625 \cdot 0,14 + 740 \cdot 0,056 = 47,7 + 87,5 + 41,44 = 176,64 \text{ A.}$$

A szükséges gerjesztőáram:

$$I = \frac{\Theta}{N} = \frac{176,64}{1011} = 0,175 \text{ A} = 175 \text{ mA.}$$

6.9. ábra adatait megfigyelve ki tudjuk számolni:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H;$$

$$\mu_{rB1} = \frac{B_1}{\mu_0 \cdot H_1} = \frac{0,6}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 625} = 764;$$

$$\mu_{rB2} = \frac{B_2}{\mu_0 \cdot H_2} = \frac{0,75}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 740} = 807.$$

c) Az öntött acél relatív permeabilitását az adott gerjesztésértékek környezetében a

Ha azt akarjuk, hogy az elektromágnes $0,6 \text{ A}$ tekercsáram és 1 mm légrés esetén 57 N erővel vonzza a lágyvasat, akkor a tekercset 1011 menetre kell készítenünk. Ha a lágyvas behúzása után a légrés $0,1 \text{ mm}$ -re csökken, akkor az 57 N erőhöz szükséges gerjesztőáram már csak 175 mA . Az öntött acél relatív permeabilitása 764 és 807 között változik.

Feladatok

6.2.1. Egy homogén mágneses térben az indukció $1,2 \text{ T}$. Mekkora mágneses fluxus halad át egy 5 cm^2 felületet határoló, 10 menetből álló mérőtekercsen? Mekkora a mérőtekercsre ható nyomaték, ha a mérőtekercsen átfolyó áram 100 mA ?

6.2.2. Mekkora mágneses fluxus halad át egy mérőtekercs által határolt felületen és mekkora a mérőtekercsre ható nyomaték, ha a mérőtekercs síkja 35° -os szöget zár be az indukcióvonalakkal? A mérőtekercsnek az egymás mellé tekercselt menetekből adódó mérete elhanyagolható. Az adatok megegyeznek a 6.2.1. feladat adataival, azaz a tér adott pontjában az indukció $1,2 \text{ T}$, a mérőtekercs felülete 5 cm^2 , menetszáma 10 és a mérőtekercsen átfolyó áram 100 mA .

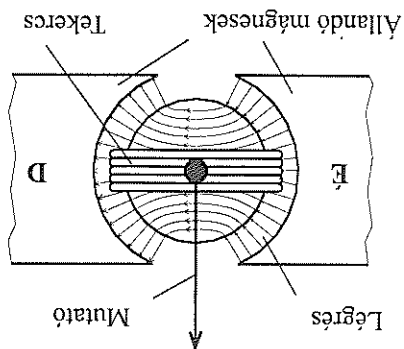
6.2.3. Mekkora a mágneses térerősség és a mágneses indukció a térnek egy adott pontjában, ha a mérőtekercsrel mért nyomaték $5 \cdot 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}$? A mérőkeret 1 cm^2 felületű, a mérőáram 10 mA .

6.2.4. A 6.11. ábrán egy forgótekercses műszer részli zse látható. A tekercs menetszáma 100 . A légrés mérete 2 mm , a légresi indukció $0,25 \text{ T}$. Mekkora nyomaték hat a tekercsre, ha a tekercsen átfolyó áram 1 mA ? A tekercs mérete $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$.

6.2.5. Mekkora áramot vesz fel a tárcsamotor, ha az állórész 24 , egyenként 14 menetű tekercsből áll. A mágneses térben fúto vezetékcszárak hossza 25 mm . A többpólusú mágneslárcsa közepes átmérője 75 mm . A forgórész perccenként 1500 -as fordulatszámmal forog, a légrésben az indukció $0,35 \text{ T}$. A motor teljesítménye 250 W .

6.2.6. Mekkora erőt tud kifejteni a 6.8. ábrán látható elektromágnes, ha 300 menetes tekercset 2 A -es árammal tápláljuk? Az U vasmág és a lágyvas keresztmetszete mindenként 5 cm^2 , anyaga öntött acél. A légrés $0,1 \text{ mm}$. Számoljunk 800 -as relatív permeabilitással, majd az indukció kiszámítása után a 6.9. ábra alapján ellenőrizzük a 800 -as érték helyességét! Az U vasmágban az erővonalhossz 15 cm , a lágyvasban 7 cm .

6.10. ábra

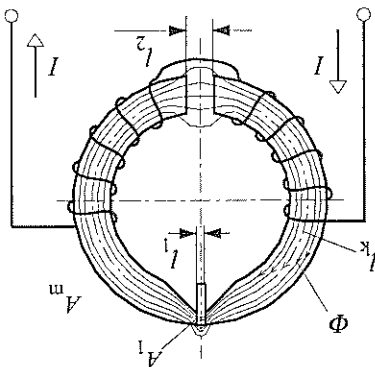


6.3. Mágneses körök számítása

1. példa. A mágneses Ohm-törvény alkalmazása

Határozzuk meg a 6.11. ábrán látható magnetofon-feltevőfej munkalégérésében kialakult mágneses térerősség nagyságát, ha a gerjesztőáram $I = 4$ mA, a gerjesztőlékeres menetszáma 400. A munkalégérés futó erővonalak közepes hossza 27 mm. A munkalégérés keresztmetszete 7 mm^2 , a vasanyag és a hátsó légérés keresztmetszete 25 mm^2 . A vasanyag Permalloy C, számolójunk $2 \cdot 10^4$ relatív permeabilitással! A hátsó légérés kis mérete miatt a fluxusszórásról eltekinthetünk.

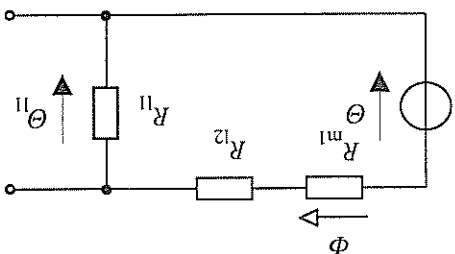
Adatok: $I = 4 \text{ mA}$; $N = 400$; $l_1 = 20 \text{ mm}$; $l_2 = 0,6 \text{ mm}$; $l_k = 27 \text{ mm}$; $A_1 = 7 \text{ mm}^2$; $A_m = 25 \text{ mm}^2$; $\mu_r = 2 \cdot 10^4$.



6.11. ábra

Megoldás

Rajzoljuk meg a mágneses kör villamos helyettesítő kapcsolási rajzát (6.12. ábra) és számítsuk ki a mágneses ellenállások értékeit!



6.12. ábra

$$R_{m1} = \frac{l_k}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_m} = \frac{2,7 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 42,97 \cdot 10^3 \frac{\text{Wb}}{\text{A}};$$

$$R_{l1} = \frac{l_1}{\mu_0 \cdot A_1} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 7 \cdot 10^{-6}} = 2,2736 \cdot 10^6 \frac{\text{Wb}}{\text{A}};$$

$$R_{l2} = \frac{l_2}{\mu_0 \cdot A_2} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 19,099 \cdot 10^6 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}.$$

$$R_c = R_{m1} + R_{l1} + R_{l2} = 10^3 \cdot (42,97 + 2273,6 + 19099) = 21,42 \cdot 10^6 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}.$$

A mágneses kör eredő ellenállása:

Figyelem! meg, hogy a vas mágneses ellenállása gyakorlatilag elhanyagolható a lég-

részek mágneses ellenállásához képest!

A munkalégzés gerjesztésigénye a 6.12. ábra alapján felírt feszültségössztással:

$$\Theta_{II} = \Theta \cdot \frac{R_{mI} + R_{II}}{R_{II}} = N \cdot I \cdot \frac{R_c}{R_{II}}.$$

A munkalégzésre jutó gerjesztés hosszegységre eső része a légzés mágneses térerőssége:

$$\Theta_{II} = \frac{\Phi_{II}}{l_{II}};$$

$$H_{II} = \frac{N \cdot I}{R_{II}} \cdot \frac{R_c}{l_{II}} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2,27 \cdot 10^6} \cdot \frac{21,42 \cdot 10^6}{8,5} = 8,5 \frac{\text{m}}{\text{kA}}.$$

A magnetofon-felvevőfej munkalégzésében 4 mA pillanatnyi áram 8,5 kA/m mágneses térerősséget hoz létre.

2. példa

Határozzuk meg a 6.8. ábra mágneskörében a légzésindukció értékét a mágneses Ohm-törvény alkalmazásával, ha a gerjesztőtökercs menetszáma 1011, a tekercsen átfolyó áram 0,6 A. Az elektromágnes geometriai méretei és adatai megegyeznek a 6.2. alfejezet 3. példájában (1. a 81. oldal) megadott értékekkel. Eredményeinket hasonlítsuk össze az ott kapott eredményekkel!

Adatok: $A_0 = A_1 = A_2 = 2 \text{ cm}^2$; $l_0 = 1,6 \text{ cm}^2$; $l_1 = 1 \text{ mm}$; $l_2 = 0,14 \text{ m}$; $l_2 = 0,056 \text{ m}$. Az U vas és a lágyvas öntött acél, relatív permeabilitása 800.

Megoldás

Számítsuk ki először a mágneses kör mágneses ellenállásait:

$$R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A_0} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 3,98 \cdot 10^6 \frac{\text{Wb}}{\text{A}};$$

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_0 \cdot A_1} = \frac{0,14}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 6,96 \cdot 10^5 \frac{\text{Wb}}{\text{A}};$$

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 \cdot A_2} = \frac{0,056}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 1,6 \cdot 10^{-4}} = 3,48 \cdot 10^5 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}.$$

A mágneses Ohm-törvényt alkalmazva számítsuk ki a fluxust:

$$\Phi = \frac{\Theta}{N \cdot I} = \frac{R_{m0} + R_{m1} + R_{m2}}{39,8 \cdot 10^5 + 6,96 \cdot 10^5 + 3,48 \cdot 10^5} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

A légzésre jutó gerjesztés:

$$\Theta_0 = \Phi \cdot R_{m0} = 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 3,98 \cdot 10^6 = 478 \text{ A}.$$

A mágneses térerősség és a mágneses indukció a légrésben:

$$H_0 = \frac{\Theta}{l_0} = \frac{10^{-3}}{478} = 4,78 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

$$B_0 = \mu_0 \cdot H_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,78 \cdot 10^5 = 0,6 \text{ T.}$$

A légrésben a mágneses indukció 0,6 T.

A számított Φ fluxus és B_0 légrésindukció megegyezik a 6.2. alfejezet 3. példájában számolt értékekkel. **Figyeljük meg**, hogy a mágneses Ohm-törvény alkalmazásához szükségünk volt a fluxusvezető anyag mágneses permeabilitásának ismeretére, hiszen csak így tudtuk a mágneses ellenállást kiszámítani. A 6.2. alfejezet 3. példájában láthattuk, hogy az U vasmag és a lágyvas mágneses permeabilitása különbözik egymástól. Az eltérés azonban nem jelentős (764 és 807), így ez számításaink eredményét számottevően nem befolyásolta.

3. példa. Kemény mágneses anyagot tartalmazó mágneses körök

A 6.13. ábrán egy dinamikus hangszó-

ró metszete látható. Az állandó mágnes-

északi pólusából kiinduló indukcióvo-

nalak a lágyvas gyűrűkön, a középső

lágyvas hengeren és a gyűrű alaki lég-

résen keresztül zárodnak. Egy indukció-

vonalat az ábrán felütnettünk. A légrés

homogén mágneses térében a lengőcsé-

ve a rajta áthaladó áram nagyságától füg-

gően a rugalmas felhúggesztés ellené-

ben a membránnal együtt elmozdul.

Számítsuk ki a lengőcsévre ható erőt,

ha a lengőcséven áthaladó pillanatnyi

áram 0,5 A, a cséve menetszáma 40,

középátmérője 20 mm! Az állandó mág-

nes anyaga ALNIKO, remanens indukciója 0,22 T, koercitív térerőssége 220 kA/m.

A lágyvas gyűrűk vastagsága 6 mm.

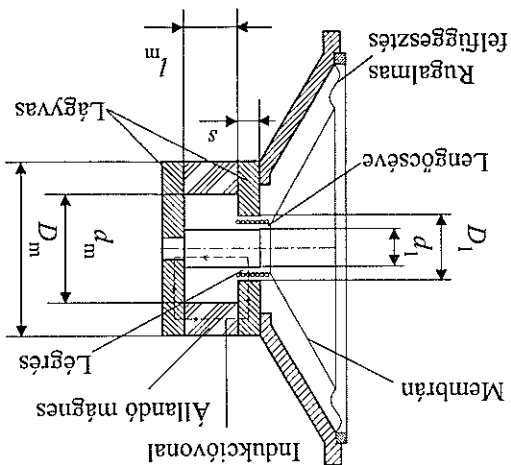
Adatok: $N = 40$; $i = 0,5 \text{ A}$; $D_1 = 27 \text{ mm}$; $d_1 = 24 \text{ mm}$; $d = 25,5 \text{ mm}$; $D_m = 70 \text{ mm}$;
 $d_m = 35 \text{ mm}$; $l_m = 15 \text{ mm}$; $s = 6 \text{ mm}$; $B_r = 0,22 \text{ T}$; $H_C = 220 \text{ kA/m}$.

Megoldás

A lengőcsévre ható erő: $F = N \cdot B_0 \cdot l \cdot i = N \cdot B_0 \cdot d \cdot \pi \cdot i$,

ahol l a lengőcséve egy menetének hossza, d pedig a cséve középátmérője. A légrés B_0 indukciójának meghatározásához ismernünk kell az állandó mágnes B_m indukcióját,

6.13. ábra



azaz ebben a mágneses körben az állandó mágnes munkapontját. Ennek meghatározásához írjuk fel a 6.13. ábrán is jelölt indukcióvonalra a gerjesztési törvényt! A lágyvasgyűrűkben a sugár csökkenésével csökken a keresztmetszet, ezért az indukció nő. Ez az indukció növekedés a munkalégtesben kialakuló magasabb légtes-indukció miatt kedvező. Az indukcióval a mágneses térerősség is nő. A sugárral változó mágneses térerősség a gerjesztési törvénybe csak az $\int H dl = \int \frac{\mu}{B} dl$ alakban kerülhetne be. Mivel azonban a lágyvas mágneses permeabilitása jóval nagyobb az állandó mágnesénél, s mivel az integrál kifejezésében a mágneses permeabilitás a nevezőben van, ezért a lágyvaszszakaszokra eső gerjesztésigényt elhanyagolhatjuk.

Igy a 6.13. ábra mágneses körére felírt gerjesztési törvény egyszerűsített alakja:

$$H_m \cdot l_m + H_0 \cdot l_0 = 0;$$

$$H_m = -\frac{l_0}{l_m} \cdot H_0 = -\frac{l_m}{l_0} \cdot \frac{\mu_0}{B_0}.$$

Ha a fluxus szórásától eltekintünk, akkor az állandó mágnes és a légtes indukciója között a felületek aránya teremti kapcsolatot: $\Phi = B_m \cdot A_m = B_0 \cdot A_0$, amiből:

$$B_0 = \frac{A_m}{A_0} B_m.$$

Ezt H_m képletébe behelyettesítve:

$$H_m = -\frac{l_0}{A_m} \cdot \frac{\mu_0 A_0}{l_m} B_m,$$

$$l_0 = \frac{D_1 - d_1}{27 - 24} = \frac{2}{2} = 1,5 \text{ mm};$$

$$A_0 = d \cdot \pi \cdot s = 25,5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 0,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Az állandó mágnes keresztmetszete, amelyből a mágneses fluxus kilép:

$$A_m = \frac{(D_2^2 - d_2^2) \cdot \pi}{(70^2 - 35^2) \cdot 10^{-6} \cdot \pi} = \frac{4}{4} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2;$$

$$H_m = -\frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{2,9 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,48 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-3}} \cdot B_m = -48 \cdot 10^4 B_m;$$

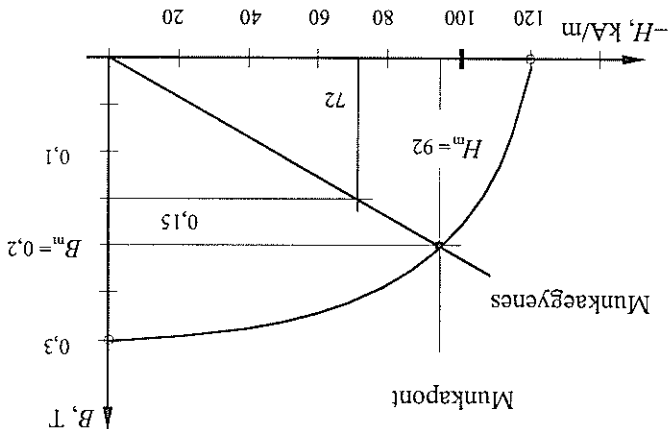
$$H_m = -48 \cdot 10^4 \cdot B_m.$$

Ez az összefüggés egy egyenes egyenlete. Az állandó mágnes összetartozó $H_m - B_m$ értékpárait az ALNIKO (KÖBOX 220) mágnesezési görbéjéből olvashatjuk ki. Ahol az egyenes metszi a mágnesezési görbét, az a $H_m - B_m$ értékpár lesz a mágneskörben az állandó mágnes munkapontja. Ezt ábrázoltuk a 6.14. ábrán. A munkaeegyenes szerkesztéséhez legyen $B_m = 0,15 \text{ T}$! A hozzátartozó mágneses térerősség:

$$H'_m = -48 \cdot 10^4 \cdot B_m = -48 \cdot 10^4 \cdot 0,15 = -72 \frac{\text{m}}{\text{kA}}.$$

Az origóból a $B'_m - H'_m$ ponton át húzott egyenessel kimenetett indukcióérték és mágneses térerősség a mágneskör munkapontja:

$$B_m = 0,2 \text{ T}; H_m = 92 \frac{\text{m}}{\text{kA}}.$$



6.14. ábra

Most már számolható a légreáindukció:

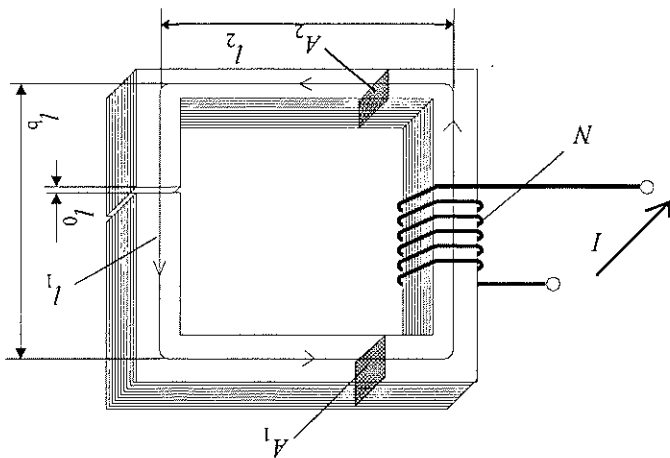
$$B_0 = \frac{A_m}{A_0} B_m = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{0,48 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,2 = 1,2 \text{ T}.$$

A lengőcsévére ható erő: $F = N \cdot B_0 \cdot I \cdot l = N \cdot B_0 \cdot d \cdot \pi \cdot l = 40 \cdot 1,2 \cdot 25,5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 0,5 = 1,9 \text{ N}$.
A lengőcsévére ható pillanatnyi erő 1,9 N.

Feladatok

6.3.1. Egy toroid tekercs kör keresztmetszetű porvasmaggjának külső átmérője 60 mm, belső átmérője 40 mm. Üzemi gerjesztés mellett a relatív permeabilitás 140. Határozzuk meg a mágneses ellenállás értékét!

6.3.2. Számítsuk ki a mágneses Ohm-törvény alkalmazásával 6.3.1. feladatban szereplő porvasmág fluxusát, a vasmágban ébredő indukció és mágneses térerősség értékét! A toroid tekercs menetszáma 850, a tekercsben folyó áram 25 mA. A vasmág adatai megegyeznek a 6.3.1. feladatban közölt adatokkal.



6.15. ábra

6.3.3. A mágneses Ohm-törvény alkalmazásával számítsuk ki a 6.15. ábrán látható mágneses kör gerjesztését, ha a légrésben kialakult mágneses indukció $0,8 \text{ T}$! A gerjesztőkercs menetszáma 1000. A felső vízszintes és az alsó függőleges fluxusvezető ágak keresztmetszete $A_1 = 9 \text{ cm}^2$, az alsó vízszintes ág keresztmetszete $A_2 = 6 \text{ cm}^2$. A légrés mérete $l_0 = 0,5 \text{ mm}$. A lágymágneses anyag transzformátorlemez, amelynek mágnesesési görbéjét a 6.9. ábrán láthatjuk. A közepes erővonalhossz a függőleges ágakban $l_p = 8 \text{ cm}$, a vízszintes ágakban $l_2 = 10 \text{ cm}$. A fluxusszórástól a kis légrés miatt eltekinthetünk.

A feladatok megoldásának menete és a végeredmény

$$\begin{aligned} 6.1.1. \quad H &= 145 \frac{\text{m}}{\text{A}}; B = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ T}; \Phi = 9,1 \cdot 10^{-9} \text{ Wb, mivel } \Theta = N \cdot I = 580 \cdot 0,012 = \\ &= 6,96 \text{ A}; H = \frac{\Theta}{6,96} = 145 \frac{\text{m}}{\text{A}}; B = \mu_0 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 145 = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ T}; \\ A &= \frac{\Phi}{d^2 \cdot \pi} = \frac{4}{\pi \cdot (0,8 \cdot 10^{-2})^2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2; \Phi = B \cdot A = 1,82 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 9,1 \cdot 10^{-9} \text{ Wb.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.1.2. \quad \Theta' &= 8 \text{ A}; I' = 13,8 \text{ mA, mivel } \Phi = B \cdot A = \mu_0 \cdot H \cdot A. \text{ Ahhoz, hogy } \Phi \text{ ne változzon, } H- \\ \text{nak sem szabad változnia. } H &= \frac{\Theta'}{l + \Delta l}; \Theta' = H \cdot (l + \Delta l) = 145 \cdot (0,048 + 0,007) = 8 \text{ A}; \end{aligned}$$

$$I' = \frac{\Theta'}{7,98} = \frac{8}{7,98} = 13,8 \text{ mA.}$$

$$\begin{aligned} 6.1.3. \quad \Delta H &= 0; \Delta B = 0,5 \text{ T}; \Delta \Phi = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ Wb, mivel } \Theta = N \cdot I = 1200 \cdot 0,005 = 6 \text{ A}; \\ H &= \frac{l}{\Theta} = \frac{0,075}{6} = 80 \frac{\text{m}}{\text{A}}; A = \frac{\Phi}{d^2 \cdot \pi} = \frac{4}{\pi \cdot (1,2 \cdot 10^{-2})^2} = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2; B = \mu_0 \cdot H = \end{aligned}$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80 = 10^{-4} \text{ T}; B' = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu_0 \cdot B = 5000 \cdot 10^{-4} = 0,5 \text{ T}; \Phi = B \cdot A =$$

$$= 10^{-4} \cdot 1,13 \cdot 10^{-4} = 1,13 \cdot 10^{-8} \text{ Wb}; \Phi' = B' \cdot A = 0,5 \cdot 1,13 \cdot 10^{-4} = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.$$

$$\Delta B = B' - B = 5 - 0,001 \approx 0,5 \text{ T}; \Delta \Phi = \Phi' - \Phi = 5,7 \cdot 10^{-5} - 1,13 \cdot 10^{-7} \approx 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.$$

$$D - d = \frac{2}{0,12 - 0,09} \cdot m = \frac{2}{0,02} \cdot m = 100 \text{ mm}; \Phi = 5,48 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}; \text{mivel } A = \frac{2}{0,12 - 0,09} \cdot m = 100 \text{ mm};$$

$$l_k = \frac{D + d}{2} \cdot \pi = \frac{0,12 + 0,09}{2} \cdot \pi = 0,33 \text{ m}; \Theta = N \cdot I = 1200 \cdot 0,2 = 240 \text{ A}; H = \frac{l_k}{\Theta} = \frac{0,33}{240} =$$

$$= 727,3 \frac{\text{m}}{\text{A}}; B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2000 \cdot 727,3 = 1,83 \text{ T}; \Phi = B \cdot A = 1,83 \cdot 3 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

$$6.1.5. H_1 = 1,06 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{A}}; H_2 = 31,8 \frac{\text{m}}{\text{A}}; B_1 = 1,33 \cdot 10^3 \text{ T}; B_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ T}; \text{mivel}$$

$$\frac{I}{10} = \frac{2\pi \cdot r}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 1,06 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{A}}; H_2 = \frac{2\pi \cdot r}{I} = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{10} = 31,8 \frac{\text{m}}{\text{A}};$$

$$B_1 = \mu_0 \cdot H_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,06 \cdot 10^3 = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ T}; B_2 = \mu_0 \cdot H_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 31,8 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

$$6.1.6. I = 3,5 \text{ mA}; \text{mivel } B = \frac{A}{\Phi} = \frac{10^{-4}}{8,8 \cdot 10^{-14}} = 8,8 \cdot 10^{-10} \text{ T}; H = \frac{\mu_0}{B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,8 \cdot 10^{-10}} =$$

$$= 7 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{A}}; I = 2\pi \cdot r \cdot H = 2\pi \cdot 0,8 \cdot 7 \cdot 10^4 = 3,5 \text{ mA}.$$

$$6.1.7. H_a = 4,44 \frac{\text{m}}{\text{A}}; H_e = 27,36 \frac{\text{m}}{\text{A}}; \text{mivel } H_1 = \frac{I_1}{25} = \frac{2\pi \cdot r}{25} = 15,9 \frac{\text{m}}{\text{A}};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{18} = \frac{2\pi \cdot r}{0,25} = 11,46 \frac{\text{m}}{\text{A}}; H_{\text{azonos}} = H_1 - H_2 = 15,9 - 11,46 = 4,44 \frac{\text{m}}{\text{A}};$$

$$H_{\text{ellentetes}} = H_1 + H_2 = 15,9 + 11,46 = 27,36 \frac{\text{m}}{\text{A}}.$$

$$6.2.1. \Phi = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}; M = 6 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}; \text{mivel } \Phi = B \cdot A = 1,2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb};$$

$$M = N \cdot B \cdot I \cdot A = 10 \cdot 1,2 \cdot 0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$6.2.2. \Phi_{35} = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}; M = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}. \text{Maximális a mérőtekercs által körülhatá-}$$

$$\text{rolt felületen áthaladó fluxus, ha a mérőtekercs } 90^\circ\text{-os szögben zár be az indukció irá-}$$

$$\text{nyával. A mérőtekercs } 35^\circ\text{-os elforgatásával a } 90^\circ\text{-ra csökken. } \alpha = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ;$$

$$\Phi_{35} = B \cdot A \cdot \sin \alpha = 1,2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 55^\circ = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}. \text{Ebből } M = N \cdot B \cdot I \cdot A \cdot \sin \alpha =$$

$$= 10 \cdot 1,2 \cdot 0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 55^\circ = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$6.2.3. B = 5 \text{ mT}; H = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{A}}; \text{mivel } M = B \cdot I \cdot A; B = \frac{I \cdot A}{M} = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-9}} = 5 \text{ mT};$$

$$H = \frac{\mu_0}{B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{A}}.$$

$$6.2.4. M = 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}, \text{ mivel } F = N \cdot B \cdot l \cdot l = 100 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ N}; M = d \cdot F = 0,02 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$6.2.5. I = 3,62 \text{ A, mivel } \omega = \frac{2\pi \cdot n}{2\pi \cdot 1500} = \frac{60}{157,1} \frac{\text{s}}{\text{s}}; M = \frac{\omega}{P} = \frac{157,1}{250} = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m}; F = \frac{M}{1,6} = \frac{21,3 \text{ N}}{0,075} = 21,3 \text{ N}; F = m \cdot 2 \cdot N \cdot B \cdot l \cdot l; I = \frac{F}{m \cdot 2 \cdot N \cdot B \cdot l} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 0,35 \cdot 0,025}{21,3} = 3,62 \text{ A}.$$

$$6.2.6. F = 138,5 \text{ N, mivel } B_0 = B_1 = B_2 \text{ és } \Theta = \frac{B_0}{\mu_0} \cdot l_0 + H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 =$$

$$= \frac{B_0}{B_0} l_0 + \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{B_0} l_1 + \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{B_0} l_2 = \frac{B_0}{\mu_0} (l_0 + \frac{\mu_r}{l_1 + l_2}); B_0 = \frac{l_0 + \frac{\mu_r}{l_1 + l_2}}{\mu_0 \cdot \Theta}$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 2}{0,001 + \frac{0,15 + 0,07}{800}} = 0,59 \text{ T. A 6.9 ábra szerint } 0,6 \text{ T indukcióhoz } 625 \text{ A/m mág-}$$

$$\text{neses térerősség és } \mu_{\text{rBI}} = 764 \text{ relatív permeabilitás tartozik. Helyettesítsük be ezt az értéket } B_0 \text{ képletébe: } B_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 2}{0,001 + \frac{0,15 + 0,07}{764}} = 0,585 \text{ T. Az elérés nem jelentős!}$$

$$F = \frac{B_0^2}{\mu_0} A = \frac{0,59^2}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 138,5 \text{ N}.$$

$$6.3.1. R_m = 11,37 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}, \text{ mivel } D_k = \frac{D_1 + D_2}{60 + 40} = \frac{2}{2} = 50 \text{ mm}; A = \frac{4}{d^2 \cdot \pi} = \frac{10^2 \cdot \pi}{4} = 78,54 \text{ mm}^2; R_m = \frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} = \frac{D_k \cdot \pi}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 140 \cdot 78,54 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-3} \cdot \pi} = 11,37 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}.$$

$$6.3.2. \Phi = 1,86 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}; B = 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ T}; H = 134,7 \frac{\text{A}}{\text{m}}, \text{ mivel } \Phi = \frac{R_m}{\Theta} = \frac{R_m}{N \cdot I} = \frac{850 \cdot 0,025}{11,37 \cdot 10^6} = 1,86 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}; \Phi = B \cdot A \cdot B = \frac{A}{\Phi} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{10^2 \cdot 10^{-6} \cdot \pi}{4} = 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ T}; H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{2,37 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 134,7 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

$$\begin{aligned}
 6.3.3. I = 0,45 \text{ A} \text{ mivel } A_0 = A_1; R_{m0} &= \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A_0} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 4,42 \cdot 10^5 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}; \\
 \text{A 6.9. ábra szerint a } B_1 = B_0 = 0,8 \text{ T indukcióhoz transzformátorlemeznel } 300 \text{ A/m} \\
 \text{mágneses térerősség tartozik, ezért: } \mu_1 &= \frac{B_1}{H_1} = \frac{300}{0,8} = 2,67 \cdot 10^{-3}; l_1 = 2 \cdot l_0 + l_2 - l_0 = \\
 &= 2 \cdot 8 + 10 - 0,05 \approx 26 \text{ cm}; R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_1 \cdot A_1} = \frac{0,26}{2,67 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 1,1 \cdot 10^5 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}; \\
 \Phi &= B \cdot A_0 = 0,8 \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}; \Phi = B \cdot A_0 = A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2; \\
 B_2 &= B_0 \cdot \frac{A_0}{A_2} = 0,8 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ T. A 6.9. ábra szerint: } H_2 = 490 \frac{\text{A}}{\text{m}}. \text{ Így } \mu_2 = \frac{B_2}{H_2} = \\
 &= \frac{1,2}{490} = 2,45 \cdot 10^{-3}; R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_2 \cdot A_2} = \frac{0,1}{2,45 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 6,8 \cdot 10^4 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}; \\
 R_{me} &= R_{m0} + R_{m1} + R_{m2} = 4,42 \cdot 10^5 + 1,1 \cdot 10^5 + 6,8 \cdot 10^4 = 6,2 \cdot 10^5 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}; \Phi = \frac{R_{me}}{\Theta}; \\
 \Theta &= \Phi \cdot R_{me} = 7,2 \cdot 10^{-4} \cdot 6,2 \cdot 10^5 = 446,4 \text{ A}; I = \frac{N}{\Theta} = \frac{1000}{446,4} = 0,45 \text{ A}.
 \end{aligned}$$

7. AZ ELEKTROMÁGNES INDUKCIÓ

7.1. Az indukciótörvény

Nyugalmi és mozgási indukció

1. példa

A 7.1. ábrán egy többmenetű tekercset láthatunk. A tekercs által határolt térben a Φ mágneses fluxus változik. A fluxusváltozás feszültséget indukál a tekercs meneteiben, az indukált feszültség áramot hoz létre az R ellenálláson.

a) Mekkora feszültség indukálódik egy 100 menetű tekercsben, ha a fluxus 0,1 s alatt $4,8 \cdot 10^{-4}$ Wb-ről $6,4 \cdot 10^{-4}$ Wb-re változik?

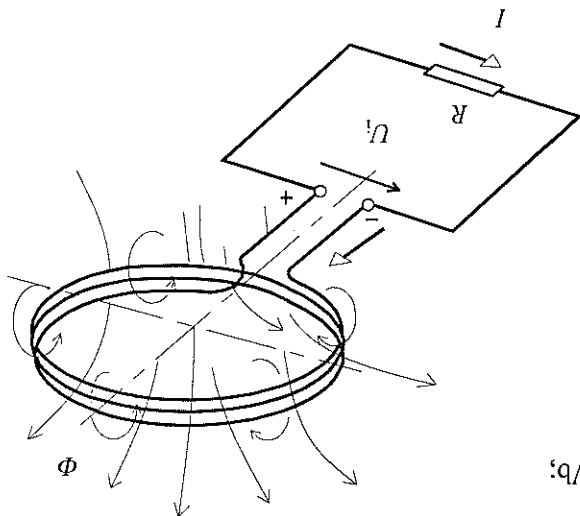
b) Határozzuk meg az I áram értékét, ha az ellenállás 5 Ω -os.

c) Alkalmazzuk Lenz törvényét az áramirány meghatározásához!

d) A feladatban tárgyalt mágneses jelenség a nyugalmi vagy a mozgási indukció jelenségkörébe tartozik?

Adatok: $N = 100$; $\Phi_1 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ Wb;
 $\Phi_2 = 6,4 \cdot 10^{-4}$ Wb;
 $\Delta t = 0,1$ s; $R = 5 \Omega$.

7.1. ábra



Megoldás

a) A tekercsben indukált feszültség:

$$U_i = N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = N \cdot \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = 100 \cdot \frac{(6,4 - 4,8) \cdot 10^{-4}}{0,1} = 160 \text{ mV.}$$

b) Az ellenálláson folyó áram erőssége:

$$I = \frac{U_1}{R} = \frac{0,16}{5} = 32 \text{ mA}$$

c) Mivel a tekercs belsőjében a fluxus növekszik, ezért a tekercs körül olyan mágneses tér alakul ki, amely hatásával csökkenti az egyenáramú fluxus növekedését. A tekercs körül mágneses tér irányja a 7.1. ábrán látható. A mágneses tér irányából a jobbkezes szabály alapján az indukált feszültség irányát, mivel tudjuk, hogy (megegyezés szerint) az áram a generátor pozitív pólusától (az áramkörön át) a generátor negatív pólusa felé folyik.

d) Mivel az álló tekercsben a mágneses fluxus változása indukálja a feszültséget, ezért a jelenség a nyugalmi indukció jelenségkörébe tartozik.

A tekercsben indukált feszültség 160 mV, az áramkörben folyó áram 2 mA.

2. példa

A 7.2. ábrán egy tárcsamotor jeladójának működése figyelhető meg. A nyáklapon az ábrán látható ún. **meandervonalat** alakították ki rézfóliából. A meandervonal középső átmérője $D_k = 77 \text{ mm}$. A 6.7. ábrán láthatunk, hogy a többpólusú ferritmágnes tengely-irányban felvalva E-D és D-E pólusokra van átmágnesezve. Ezek a pólusok hozzák létre azt a mágneses teret, amely az áramjárta tekercssel kölcsönhatásba kerülve forgat

tönymotékat fejt ki, a forgórést forgásra kényszeríti. Ezt a nyomotékot számlító-
tuk ki a 6.2. példában. A

7.2. ábra felülnevezeti képen azt láthatjuk, hogy a többpólusú ferritmágnes nyáklaphoz kö-

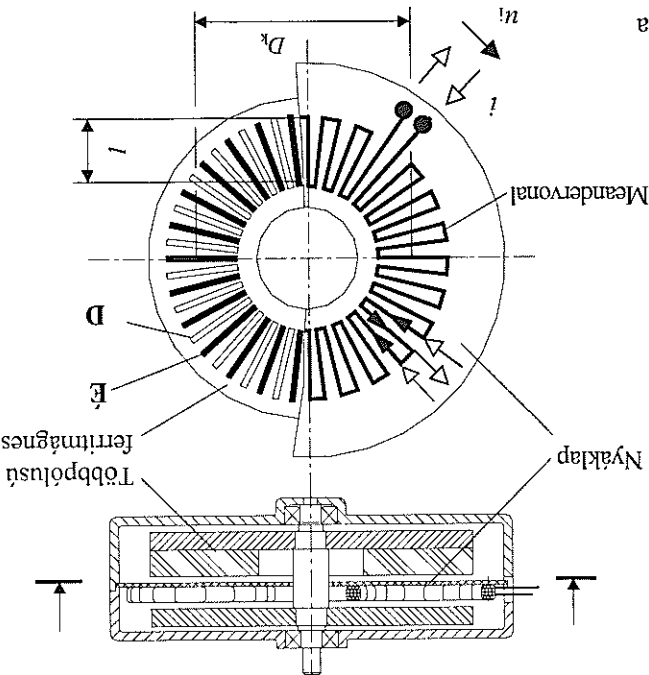
zelebb eső oldalát egy újabb mágnesezéssel, sok egymást követő sugárirányú E-D-E-D

pólusokkal mágnesezték fel. Ezeknek a kis mágneseseknek az osztása megegyezik a me-

andervonal sugárirányú szakaszainak az osztásával. A

szakaszok hossza $l = 18 \text{ mm}$, száma $m = 120$.

7.2. ábra



a) Mekkora a kis mágnesek által keltett indukció nagysága, ha a motor 300 l/perc fordulatszáma mellett az oszcillószkop 35 mV indukált feszültségértéket mutat csúcsról-csúcsig?

b) Mekkora a jeladó kimeneti jelének frekvenciája?

c) A kis mágneseknek jól erősebb fópólusok mágneses térének miatt nincs hatása a jeladó kimeneti jelére?

d) A feladatban tárgyalt mágneses jelenség a nyugalmi vagy a mozgási indukció jelenségekörébe tartozik?

Adatok: $n = 300$; $u_{\text{ics}} = 35 \text{ mV}$; $D_k = 77 \text{ mm}$; $l = 18 \text{ mm}$; $m = 120$.

Megoldás

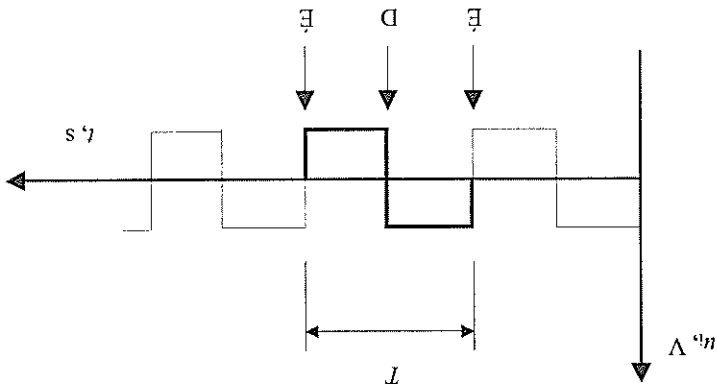
a) Figyeljük meg az ábrán, hogy az egyenest követő sugárirányú meander szakaszokban indukált feszültségek és áramok iránya az E-i és D-i pólusok hasonló váltakozása miatt egyszerűen a középpont felé, majd a középponttól kifelé, majd ismét a középpont felé mutat. Ez a váltakozó irány azonban a meander vonalon a következő áramnyílal. Ezért az egyes szakaszokban indukált feszültségek a meander vonalon mentén haladva folyamatosan összeadódnak. Az álló vezetékhez képest a mágneses tér mozog. A forgómozgást végző kis mágnesek kerületi sebessége a sugár növekedésével arányosan nő, ezért a mágnesek mozgási sebességének meghatározásakor a meanderszakaszok közepes átmérőjével számolunk.

$$v = \frac{D_k \cdot \pi \cdot n}{0,077 \cdot \pi \cdot 300} = \frac{60}{60} = 1,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad u_i = N \cdot u_{\text{ics}} = N \cdot B \cdot l \cdot v$$

$$B = \frac{u_{\text{ics}}}{N \cdot l \cdot v} = \frac{120 \cdot 0,018 \cdot 1,21}{2} = 6,7 \text{ mT.}$$

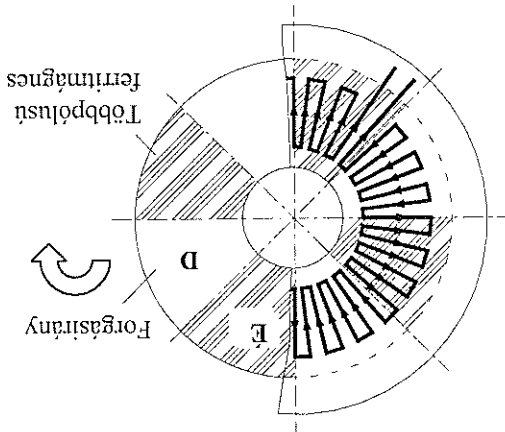
b) A motor forgórészének egy fordulata alatt az északi és déli pólusok 120-szor váltják egymást. Ideális mágnesezést feltételezve a jeladó kimenetén váltakozó áramú négy-szögfeszültség jelenik meg. A négy-szögfeszültség egy periódusa akkor fejeződik be, és akkor kezdődik egy újabb periódus, amikor a meander vonal egy szakasza fölött ugyanaz a típusú mágneses pólus ismétlen megérkezik. Pl. az északi pólust követő déli pólus után az újabb északi pólus megérkezésével egy új periódus kezdődik. Ezt figyelembe véve a 7.3. ábrán. Tehát a kimeneti jel teljes periódusainak a száma a forgórész egy fordulata alatt fele akkora, mint a kis északi és déli pólusok száma a ferritárcsa felületén. A frekvencia a másodpercenkénti periódusok száma, ezért:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{n}{m} \cdot \frac{60}{2} = \frac{60}{300} \cdot \frac{2}{120} = 300 \text{ Hz.}$$



7.3. ábra

c) A főpólusok jóval erősebb mágneses tere ellenére a jeladó kimeneten megjelenik az f frekvenciájú jelsovoz, amelyet a motor fordulatszámának szabályozására használhatunk. Miért nem nyomja el az erős mágneses a kis mágnesek hatását? A főpólusok alatti meandervonal szakaszaiban indukált áramok vagy a középpont felé, vagy ellentétes pólus esetén a középpontból kifelé mutatnak. A meandervonalat követve ezek az áramok sorra kioltják egymást, az indukált feszültségek kivonódnak egymásból, a kimeneten nem jelenik meg feszültség (l. a 7.4. ábrát!).



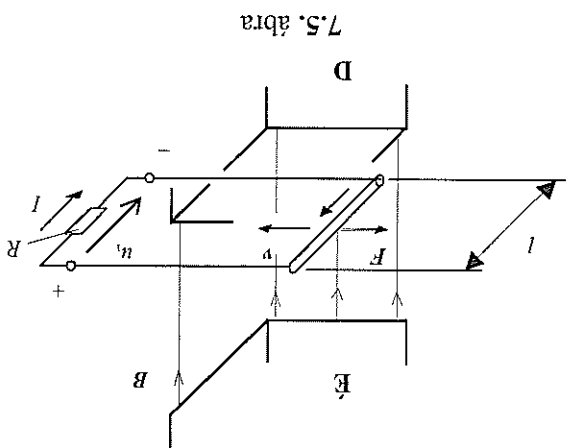
7.4. ábra

d) Mivel az álló tekercshez képest az indukált feszültséget létrehozó mágneses tér mozog (a többpólusú ferritmágnes forgómozgást végez), ezért a jelenség a mozgási indukció (a jelenségkörébe tartozik).

A nyáklapon lévő meandervonalak síkjában a kis mágnesek által létrehozott mágneses indukció 6,7 mT. A jeladó kimeneti jelének frekvenciája a motor 300-as percenkénti fordulatszáma mellett 300 Hz. A főpólusok által indukált áramok kiegyenlítik egymást, ezért a főpólusmágnesek a jeladó kimeneti jelt nem nyomják el. A feladat a mozgási indukció jelenségkörébe tartozik.

Feladatok

- 7.1.1.** Mekkora feszültség indukálódik egy tekercsben, ha a menetszám 1500, és a tekercs fluxusa 4 s alatt egyenletesen $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ -ról $5,2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ -re csökken?
- 7.1.2.** Mennyi idő alatt csökken le a 600 menetű tekercs $\Phi = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ fluxusa nullára, ha az egyenletes fluxusváltozás alatt a tekercsben 10 V feszültség indukálódott?
- 7.1.3.** Mennyivel változott a tekercs fluxusa, ha az 1200 menetű tekercsben a 15 ms ideig tartó egyenletes fluxusváltozás 25 V feszültséget indukált.
- 7.1.4.** Mekkora és milyen irányú áram folyik a 7.1. ábrán látható $R = 22 \, \Omega$ -os ellenálláson, ha a tekercs menetszáma 2100 és a fluxus 1 ms idő alatt egyenletesen $15 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$ -rel csökken?
- 7.1.5.** A 7.5. ábrán egy $l = 10 \text{ cm}$ hosszúságú vezetőt láthatunk, amely $v = 0,5 \text{ m/s}$ sebességgel halad egy $B = 0,15 \text{ T}$ indukciójú térben. A vezető két végéhez egy ellenállás csatlakozik. A vezető sebessége a vezetőkre és az indukcióra is merőleges. Mekkora az u , indukált feszültség? Mekkora áram folyik az áramkörben, ha az R ellenállás értéke $10 \, \Omega$?

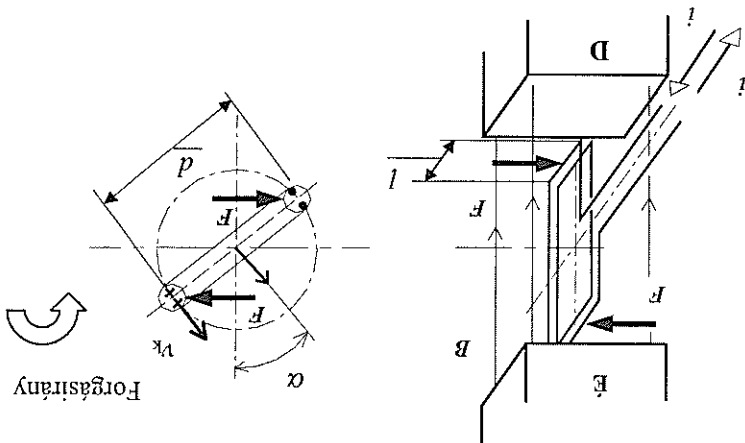


7.5. ábra

- 7.1.6.** Egy mágneses lebegtetésű vonat 300 km/h sebességgel száguld. Mekkora a Föld mágneses indukciójának függőleges komponense, ha a fémből készült vasúti kocsik két oldala között 12,5 mV indukált feszültséget mérünk? Az oldalak távolsága 3 m.

- 7.1.7.** Mekkora fordulatszámmal forog a tárcsamotor forgórésze, ha a jeladó frekvenciája 500 Hz, és mekkora az indukált feszültség csúcsértéke, ha az indukció csúcsértéke a meandervonal síkjában $4,5 \text{ mT}$? A meandervonal sugárirányú kasztainak hossza 8 mm, száma 250, a 7.2. ábra szerinti közepes átmérő 43 mm.
- 7.1.8.** A 7.6. ábrán egy mágneses térben forgatott többmenetű tekercs látható. Számítsuk ki az indukált feszültség és a forgatáshoz szükséges forgatónyomatok max. értékét, ha a tekercs menetszáma 300, hossza 20 cm, magassága 10 cm és szélessége elhanyagolható! A tekercset 1000 percenkénti fordulatszámmal forgatjuk, a tekercsen átfolyó áram 0,4 A. A mágneses tér indukciója $0,2 \text{ T}$. Írjuk fel az indukált feszültség időfüggvényét!

7.6. ábra



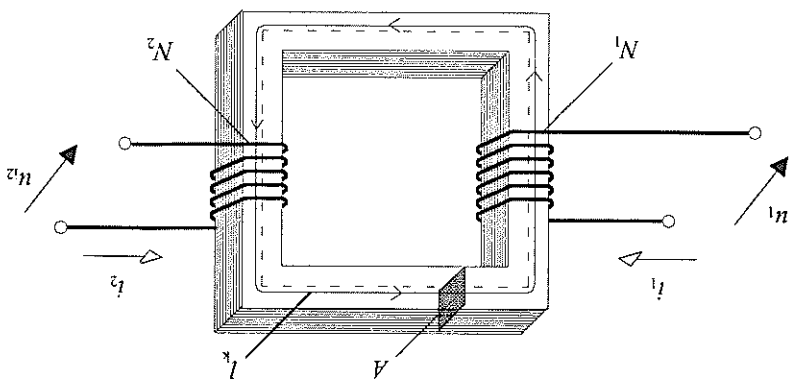
7.1.9. A 7.6. ábrán egy mágneses térben forgatott többmenetű tekercs látható. Számítsuk ki az indukált feszültség és a tekercs forgatásához szükséges forgatónyomaték nagyságát abban az időpillanatban, amikor a tekercs az ábrán α -val jelölt szög-helyzetbe került! Ezt a helyzetet a tekercs a vízszintes helyzet időpontjához képest 5 ms múlva éri el. Az adatok megegyeznek a 7.1.8. feladat adataival.

7.2. Kölcsonós indukció, önindukció, induktivitás

1. példa

A 7.7. ábrán transzformátorlemezektől összeállított zárt vasmagot látnunk, a vasmagon elhelyezett két tekercessel. A vas közepes hossza 16 cm, keresztmetszete $0,8 \text{ cm}^2$. A szórt fluxust elhanyagoljuk.

7.7. ábra



- a) Mekkora feszültség mérhető a jobb oldali szekunder tekercsen, ha a bal oldali primer tekercsen az áramot 15 ms alatt egyenletesen 0,3 A-ról 0,5 A-re növeljük?

- b) Számítsuk ki a kölcsönös induktivitás értékét!

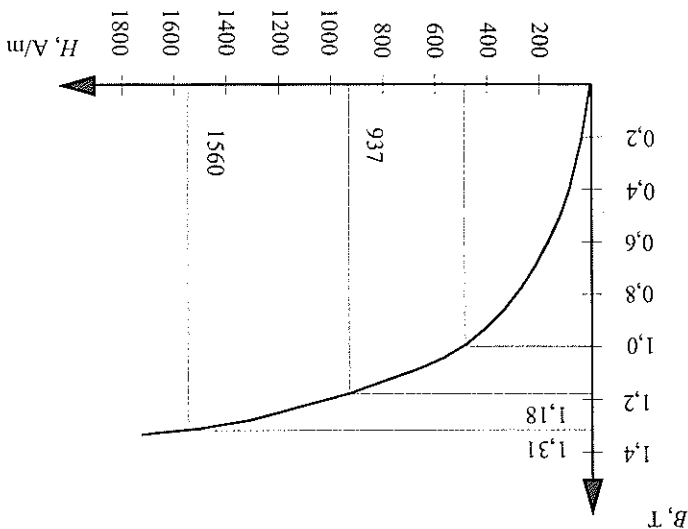
- c) Határozzuk meg a szekunder tekercsben indukált feszültséget a már kiszámított kölcsönös induktivitás alapján, ha az áram erőssége 10 ms alatt 0,3 A-ról 0,5 A-re változik!

Adatok: $N_1 = 500$; $N_2 = 2000$; $l_k = 16$ cm; $A = 0,8$ cm²; $\Delta t = 15$ ms; $\Delta t' = 10$ ms.

Megoldás

- a) A szekunder tekercsben indukált feszültség: $u_{12} = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{l_k}{\mu \cdot A} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

Há a μ mágneses permeabilitást ismerjük, akkor az indukált feszültséget az adatok behelyettesítésével ki tudjuk számítani. Ha a permeabilitást nem ismerjük, akkor a fluxusvezető anyag mágneseszi görbéjére van szükségünk. Ezt láthatjuk a 7.8. ábrán.



7.8. ábra

A mágneses térerősség a gerjesztés és a közepes erővonalhossz hányadosa. Mivel a gerjesztés változik, számítsuk ki a legkisebb és a legnagyobb gerjesztéshez tartozó mágneses térerősség értékét!

$$H_{0,3} = \frac{\Theta}{N_1 \cdot l} = \frac{l_k}{500 \cdot 0,3} = \frac{16 \cdot 10^{-2}}{500 \cdot 0,3} = 1,07 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H_{0,5} = \frac{\Theta}{N_1 \cdot l} = \frac{l_k}{500 \cdot 0,5} = \frac{16 \cdot 10^{-2}}{500 \cdot 0,5} = 1,56 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

A mágnesesési görbén bejelöltük a 937 A/m, és az 1,56 kA/m térerősséghez tartozó indukcióértékeket: $B_{0,3} = 1,18$ T, $B_{0,5} = 1,31$ T.

A mágnesesési görbe ezen két pontjához tartozó mágneses permeabilitások:

$$\mu_{0,3} = \frac{B_{0,3}}{H_{0,3}} = \frac{1,18}{937} = 1,26 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}}; \mu_{0,5} = \frac{B_{0,5}}{H_{0,5}} = \frac{1,31}{1560} = 0,84 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}\cdot\text{m}};$$

$$u_{10,3} = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{l_k}{\Delta l} \cdot \mu_{0,3} \cdot \mathcal{A} = 500 \cdot 2000 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-2}}{1,26 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4} \cdot (0,5 - 0,3)} = 8,4 \text{ V},$$

$$u_{10,5} = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{l_k}{\Delta l} \cdot \mu_{0,5} \cdot \mathcal{A} = 500 \cdot 2000 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-2}}{0,84 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4} \cdot (0,5 - 0,3)} = 5,6 \text{ V}.$$

Láthatjuk, hogy az áramváltozás egyenletessége ellenére a két feszültségérték nem azonos, mert a mágneses permeabilitás a mágneses indukciótól függő mennyiség.

b) A kölcsönös indukтивitás az eddigiek alapján szintén változik.

$$\Delta u_{21} = L_{12} \cdot \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad \text{képlet alapján az indukтивitások:}$$

$$L_{0,3} = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{l_k}{\mu_{0,3} \cdot \mathcal{A}} = 500 \cdot 2000 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-2}}{1,26 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4}} = 630 \text{ mH},$$

$$L_{0,5} = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{l_k}{\mu_{0,5} \cdot \mathcal{A}} = 500 \cdot 2000 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-2}}{0,84 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4}} = 420 \text{ mH}.$$

c) Az indukált feszültségek értéke, ha az áramváltozás 10 ms alatt zajlik le:

$$u_{10,3} = L_{0,3} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 630 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 12,6 \text{ V},$$

$$u_{10,5} = L_{0,5} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 420 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 8,4 \text{ V}.$$

Első esetben a szekunder tekercsben indukált feszültség 8,4 V-ról 5,6 V-ra csökkent, gyorsabb áramváltozásnál a kezdő feszültség 12,6 V, amely a váltózás végére 8,4 V-ra csökkent. A 7.7. ábra elrendezésben a kölcsönös indukтивitás kezdeti értéke 630 mH, amely 420 mH-re csökkent.

2. példa

A 7.9. ábrán egy transzformátorlemezről készített, kis légrésszel ellátott vasmag látható, amelyre tekercset helyeztünk.

a) Számítsuk ki az indukтивitást a vasmag mágneses adatainak figyelembevételével!

b) Számítsuk ki a tekercs indukтивitását a vasmag mágneses permeabilitásának elhanyagolásával!

c) Hány százalékos a hiba, ha közelítő képlettel számolunk?

Adatok: $N = 300$; $A = 0,8 \text{ cm}^2$;
 $l = 0,9 \text{ mm}$; $l_k = 16 \text{ cm}$;
 $\mu_{\text{vas}} = 2000$.

Megoldás

a) A gerjesztési törvényt alkalmazva a 7.9. ábra mágneses körére:

$$\Theta = H_v \cdot l_v + H_l \cdot l = \frac{B}{\mu_0} \cdot \left(\frac{l_v}{\mu_v} + l \right) = N \cdot i$$

$$\text{A mágneses fluxus: } \Phi = B \cdot A = N \cdot i \cdot \frac{l_v}{\mu_v + l}.$$

A tekercs mágneses indukтивitása:

$$L = N \frac{d\Phi}{di} = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot A}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4}} = 300^2 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-4}}{2000 + 0,9 \cdot 10^{-3}} = 10,044 \text{ mH}.$$

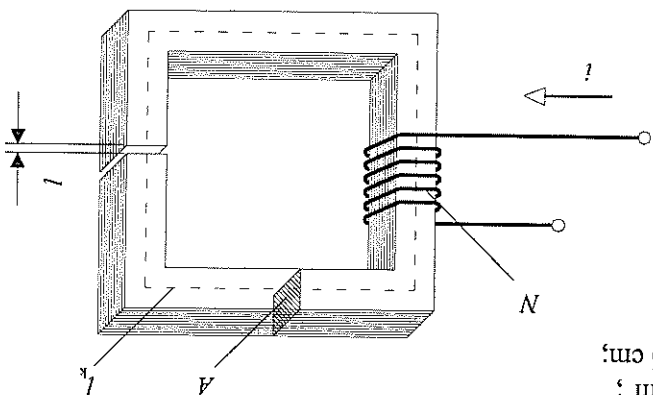
b) Mivel a vas mágneses permeabilitása jóval nagyobb a levegő permeabilitásánál, ezért jó közelítés, ha csak a légres mértevel és a levegő permeabilitásával számolunk.

$$L \approx N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot A}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4}} = 300^2 \cdot \frac{0,9 \cdot 10^{-3}}{4} = 10,053 \text{ mH}.$$

$$\text{c) A százalékos eltérés: } e = \frac{10,044 - 10,053}{10,044} = 0,09 \text{ \%}.$$

A légreszel ellátott vasmagos tekercs indukтивitása 10 mH . A vasmag mágneses adatainak figyelembevételével számított indukтивitás gyakorlatilag megegyezett a közelítő képlettel számított indukтивitással, az eltérés kevesebb mint $0,1 \text{ \%}$. A közelítés annál pontosabb, minél nagyobb a vasmag relatív permeabilitása.

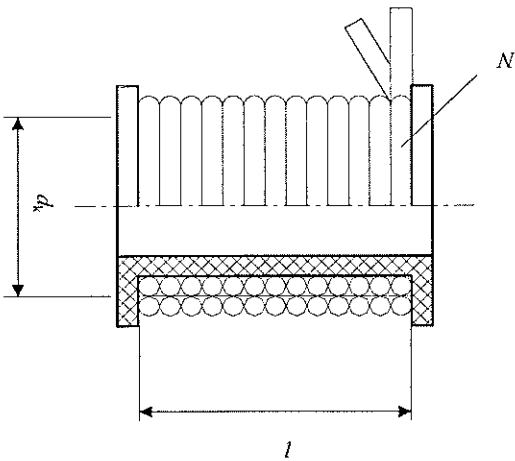
7.9. ábra



Feladatok

- 7.2.1. A 7.10. ábrán egy légmagos tekercset láthatunk. Számítsuk ki a tekercs öninduktivitását, ha a tekercs menetszáma 150, a közepes átmérő 12 mm és a tekercs hossza 65 mm.

7.10. ábra



- 7.2.2. Számítsuk ki egy légmagos toroidtekercs induktivitását! A toroid közepes átmérője 30 mm, keresztmetszete $0,5 \text{ cm}^2$, a tekercs menetszáma 1500.
- 7.2.3. Mekkora a menetszáma annak a légmagos tekercsnek, amelyet egy $l = 3 \text{ cm}$ hosszú tekercstestre készítünk el a 7.10. ábra szerint? A tekercs közepes átmérője 8 mm, a műszerrel mért induktivitás 25 mH.
- 7.2.4. Számítsuk ki a 7.7. ábrán látható vasmag két tekercse közötti kölcsönös induktivitás nagyságát, ha a primer tekercs menetszáma 800, a szekunder tekercs menetszáma 1900, a vasmag keresztmetszete $1,2 \text{ cm}^2$, a közepes erővonalhossz 20 cm, a vasmag relatív permeabilitása 1000!

- 7.2.5. Mekkora indukált feszültség ébred a 7.7. ábra szekunder tekercsében, ha a primer tekercs áramma 1 ms alatt $0,4 \text{ A}$ -ról $0,45 \text{ A}$ -re változik? Számoljunk a 7.2.4. feladat adataival, a mágneses permeabilitás átlagértékét a 7.8. ábrán látható mágneseséssí görbe alapján határozzuk meg!

- 7.2.6. Mekkora az induktivitása annak a tekercsnek, amelyben 22 ms alatt bekövetkezett a menetszám 550?
- 7.2.7. Egy, a 7.9. ábra szerinti ferromágneses kör $0,5 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű és $0,5 \text{ mm}$ hosszúságú légrést tartalmaz. Mekkora a vasmagon lévő tekercs induktivitása, ha a menetszám 550?

- 7.2.8. Két tekercs között 0,48 csatolási tényezővel jellemzett csatolást tudunk létrehozni. Az egyik tekercs induktivitása 985 mH, a másik tekercse 348 mH. Mekkora a kölcsönös induktivitás?
- 7.2.9. Mekkora mágneses energia tárolható a 7.10. ábrán látható tekercsben, ha a tekercs menetszáma 150, a közepes átmérő 12 mm és a tekercs hossza 65 mm? A tekercsen átfolyó áram $I = 100 \text{ mA}$.

7.2.10. Mekkora mágneses energia tárolódik a 7.9. ábrán látható mágneses kör légrésében, ha a mágneses indukció $1,3 \text{ T}$, a légrés keresztmetszete $A = 0,8 \text{ cm}^2$, hossza $l = 0,9 \text{ mm}$?

7.3. Induktivitások összekapcsolása

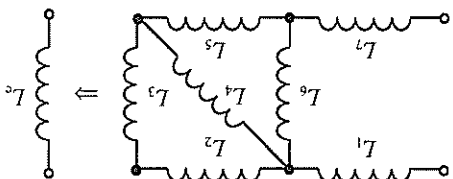
A sorbakapcsolt induktivitások eredőjét az $L_{\text{es}} = \sum L$ képlet alapján az induktivitások összeadásával, a párhuzamosan kapcsolt induktivitások eredőjét a reciprokus művelettel vagy az $\frac{1}{L_{\text{ep}}} = \sum \frac{1}{L}$ képlettel határozhatjuk meg.

Példa

Határozzuk meg a 7.11. ábrán látható $L_1 - L_7$ induktivitások L_e eredőjét!

Adatok: $L_1 = 10 \text{ mH}$; $L_2 = 15 \text{ mH}$;
 $L_3 = 5 \text{ mH}$; $L_4 = 8 \text{ mH}$;
 $L_5 = 18 \text{ mH}$; $L_6 = 12 \text{ mH}$;
 $L_7 = 20 \text{ mH}$.

7.11. ábra



Megoldás

$$L_e = L_1 + [(L_2 + L_3) \times L_4 + L_5] \times L_6 + L_7 = 10 + [(15 + 5) \times 8 + 18] \times 12 + 20 \text{ mH} =$$

$$= 10 + 7,97 + 20 = 38 \text{ mH}.$$

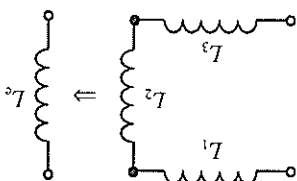
Az eredő induktivitás 38 mH .

Feladatok

7.3.1. Határozzuk meg a 7.12. ábrán látható induktivitások eredőjét!

Adatok: $L_1 = 5 \text{ mH}$; $L_2 = 850 \text{ mH}$; $L_3 = 1,25 \text{ mH}$.

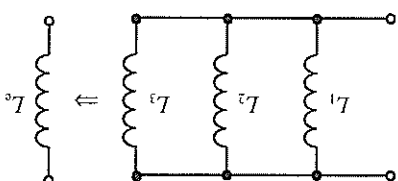
7.12. ábra



7.3.2. Határozzuk meg a 7.13. ábrán látható induktivitások eredőjét!

Adatok: $L_1 = 384 \text{ mH}$; $L_2 = 32 \text{ mH}$; $L_3 = 59 \text{ mH}$.

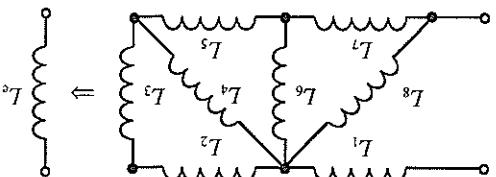
7.13. ábra



7.3.3. Határozzuk meg a 7.14. ábrán látható induktivitások eredőjét!

Adatok: $L_1 = 18 \text{ mH}$; $L_2 = 12 \text{ mH}$; $L_3 = 900 \text{ mH}$; $L_4 = 18 \text{ mH}$; $L_5 = 28 \text{ mH}$; $L_6 = 32 \text{ mH}$; $L_7 = 25 \text{ mH}$; $L_8 = 56 \text{ mH}$.

7.14. ábra



1. példa. A bekapcsolás folyamata

A 7.15. ábrán látható áramkörben egy induktivitást kapcsolunk az U_g generátorra.

a) Számítsuk ki a változás időállandóját!

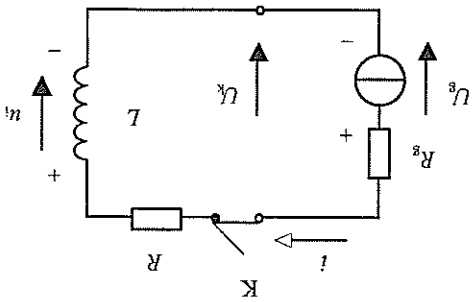
b) Mennyi idő múlva állandósul az áramkörben folyó áram, és mekkora a max. áramerősség?

c) Számítsuk ki, hogy a bekapcsoláshoz képest 15 ms múlva mekkora lesz az áramkörben folyó áram erőssége?

d) Mekkora feszültség mérhető az induktivitáson 15 ms elteltevel?

Adatok: $U_g = 20 \text{ V}$; $R_g = 1 \Omega$; $R = 100 \Omega$; $L = 1 \text{ H}$.

7.15. ábra



Megoldás

a) A változás időállandója: $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1 \text{ H}}{(100+1)\Omega} \equiv 10 \text{ ms}$.

b) Az áramkörben folyó áram gyakorlatilag $5\tau = 5 \cdot 10 = 50 \text{ ms}$ elteltevel állandósul.

Az áramkörben folyó max. áram meghatározásához alkalmazzuk Kirchhoff hurok-

törvényét:

$$U_g - u_L - i \cdot (R + R_g) = 0.$$

Akkor max. az áram, amikor az indukált feszültség nullára csökken.

$$U_g - I_0 \cdot (R + R_g) = 0,$$

$$I_0 = \frac{R + R_g}{20} = \frac{100 + 1}{20} \approx 0,2 \text{ A} = 200 \text{ mA}.$$

c) A bekapcsolás pillanatában indukált u_i feszültség az áram ugrásszerű növekedését megakadályozza. Emiatt az áram csak fokozatosan éri el az állandósult max. értéket, amikor az indukálás már nem fejt ki ellenállást az árammal szemben. Az időbeli változást a következő egyenlőség írja le:

$$i = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Helyettesítük be az ismert adatokat ($e \approx 2,718282$):

$$i_{15} = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0,2 \cdot (1 - e^{-\frac{15 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}}}) = 155,3 \text{ mA}.$$

d) Az indukтивitás mérhető feszültség folyamatos csökkenésének időfüggvényét a következő egyenlőség írja le:

$$u_i = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

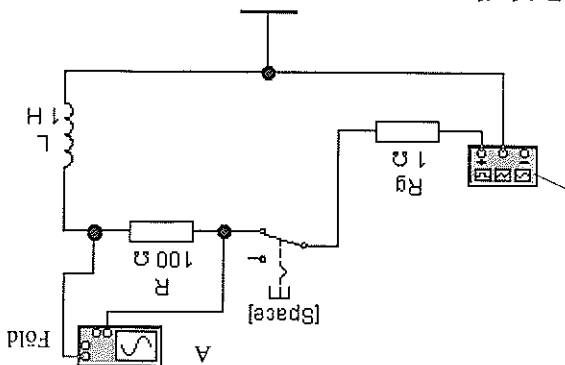
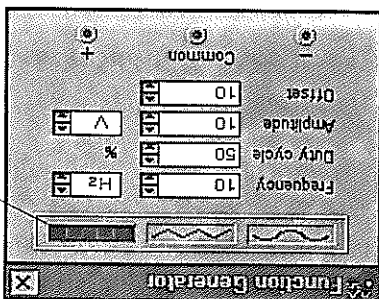
Helyettesítük be az adatokat:

$$u_{i15} = 20 \cdot e^{-\frac{15 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}}} = 4,46 \text{ V}.$$

A 7.15. ábra szerinti áramkör időállandója 10 ms, az áram 50 ms idő elteltével gyakorlatilag eléri a 200 mA-es max. értékét. A K kapcsoló bekapcsolása után 15 ms-mal az áramkörben folyó áram erőssége 155,3 mA-re nőtt, az indukтивitáson mérhető feszültség 4,46 V-ra csökkent.

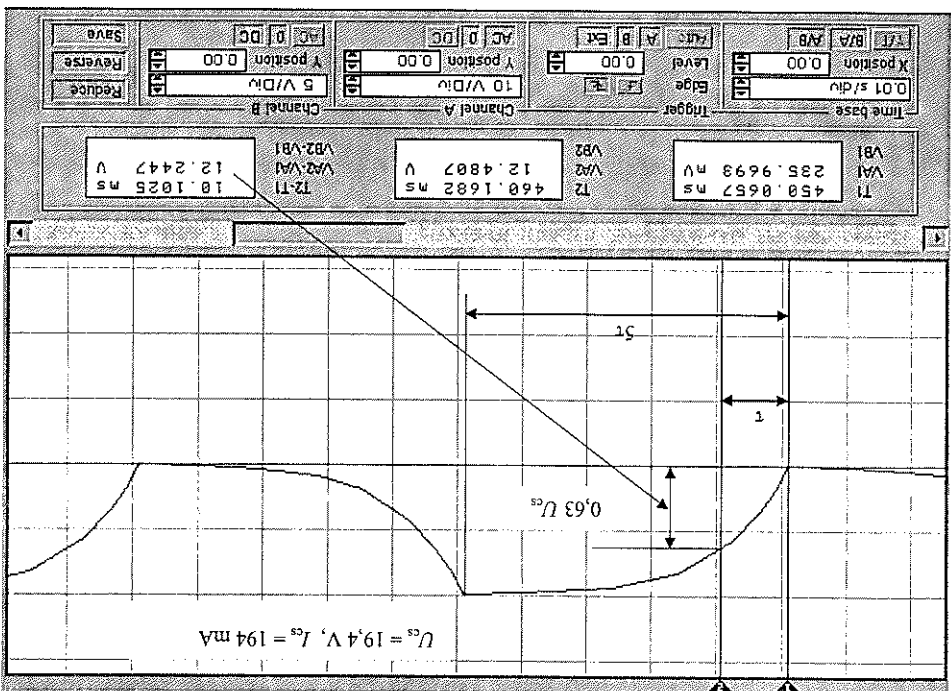
Ellenőrzés

Ellenőrzzzük számításainkat áramköri szimulációval! A 7.16. ábrán a mérés összeállítása látható.



7.16. ábra

Folyó / arammal és azonos háziban van vele (7.17. ábra).



7.17. abra

a) Hatarozzuk meg az ideállandót! A csúcstesztiesség mérése az ábrán nem látható. A 2 mérővonalat a max. feszültség szintre állítva a VA2-VA1 különbség, azaz a 2-es időpillanathoz és az 1-es időpillanathoz tartozó feszültségek különbsége 19,4 V. Ez megfelelő $I_0 = (19,4 \text{ V}) / (100 \Omega) = 194 \text{ mA}$ -nek. A számlított érték 200 mA volt. τ idő alatt az áram eléri a csúcseték 63%-át. A 19,4 V 63%-a 12,2 V. A 2-es jelzővonalat arra az időpillanatra állítjuk, ahol a VA2-VA1 feszültségkülönbség 12,2 V. Az ábrán nyíllal jelöltük az összetartozó mérővonalat és feszültségekértéket. Az ideállandó a két jelzővonalhoz tartozó időérték különbsége, amely az oszcilloszkópról leolvasható: $T_2 - T_1 = 10,1025 \text{ ms}$, ami elég jó egyezést mutat a számlított 10 ms értékkel.

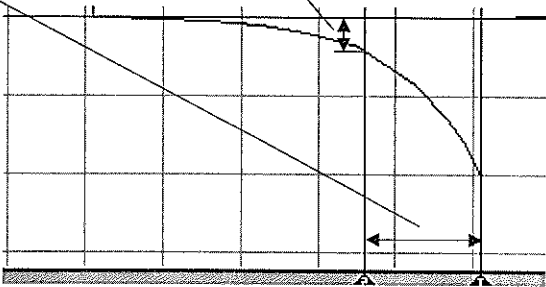
- b) A 7.17. ábrán jól látható, hogy az áram 5 t, azaz 50 ms múlva gyakorlatilag valóban eléri a max. értéket.
- c) A bekapcsolástól számított időtartamot 15 ms-ra állítva leolvashatjuk az R ellenálláson eső feszültséget. Ez látható a 7.18. ábrán, amely a képernyő egy részletét mutatja.



7.18. ábra

- Az áram pillanatnyi értéke a feszültségből számítható: $I_{15} = \frac{U_{15}}{R} = \frac{15,27}{100} = 153 \text{ mA}$.
- A számított érték 155,3 mA volt, az eltérés nem számottevő.

- d) Az induktivitáson mérhető feszültség bekapcsolás utáni változása a 7.19. ábrán figyelhető meg. A bekapcsolás után 15 ms-mal a mért feszültségtértek 4,35 V, a számított 4,46 V.



7.19. ábra

Az R ellenálláson és az induktivitáson eső feszültségek összege az U_k kapacitív feszültséggel egyenlő:

$$U_k = U_R + U_L = 4,35 + 15,27 = 19,6 \text{ V.}$$

A 7.17. ábrán a kikapcsolás jelensége is jól megfigyelhető.

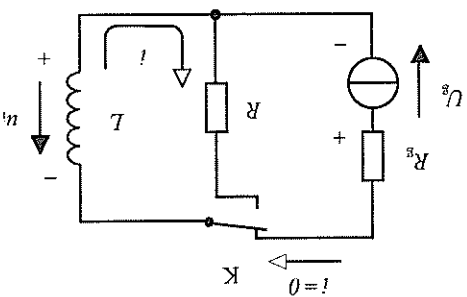
2. példa. A kikapcsolás folyamata

A 7.20. ábrán egy áramkör kapcsolási rajza látható, amelyben az induktívitas egy K kapcsoló érintkezőjén át egy feszültséggenerátorra csatlakozik. A K kapcsoló átkapcsolásával az induktivitást leválasztjuk a feszültséggenerátorról, és ezzel egyidejűleg egy R ellenállást csatlakoztatunk az L induktivitási tekercsre.

- a) Mekkora R ellenállást kell alkalmaznunk, hogy az indukált feszültség az első pillanatban ne haladjon meg a 20 V-t?
- b) Mekkora az áramkör időállandója, és mennyi idő múlva szűnik meg az áram a tekercsben?
- c) Mekkora az indukált feszültség a kikapcsolás után 14 ms múlva?
- d) Mekkora a mágneses energia nagysága a tekercsben a kikapcsolás pillanatában?

Adatok: $U_g = 12 \text{ V}$; $R_g = 100 \Omega$;
 $L = 10 \text{ mH}$.

7.20. ábra



Megoldás

a) A kikapcsolás pillanatában az áram: $I_0 = \frac{U_g}{R_g} = \frac{100}{12} = 120 \text{ mA}$.

Kirchhoff hurokegyenletét felírva a K kapcsoló átkapcsolásának pillanatában:

$$I_0 \cdot R - u_L = 0.$$

$$Ebből az R ellenállást kifejezve: $R = \frac{I_0}{u_{L\max}} = \frac{120 \cdot 10^{-3}}{20} = 167 \Omega.$$$

b) Az időállandó: $\tau = \frac{L}{R} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{167} = 60 \mu\text{s}.$

A kikapcsolás folyamata 5 τ ideig tart: $5\tau = 5 \cdot 60 = 300 \mu\text{s}.$

c) A kikapcsolás után 14 μs -mal az indukált feszültség:

$$u_{L14} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 20 \cdot e^{-\frac{14 \cdot 10^{-6}}{60 \cdot 10^{-6}}} = 15,84 \text{ V}.$$

d) A tekercsben tárolt mágneses energia a kikapcsolás pillanatában:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 120^2 \cdot 10^{-6} = 72 \mu\text{Ws}.$$

Max. 167 Ω -os ellenállást alkalmazhatunk. Az áramkör időállandója ezzel az ellenállás-értékekkel 60 μs . A folyamat 300 μs alatt gyakorlatilag lezajlik, ennyi idő után áram már nem folyik a tekercsben. A kikapcsolás után 14 μs -mal a tekercsben 15,84 V indukált feszültség mérhető. A kikapcsolás pillanatában, a tekercsben tárolt energia 72 μWs .

Feladatok

- 7.4.1. A 7.15. ábrán látható áramkörben a K kapcsolót bekapcsoljuk. Mekkora az áramkör időállandója, mennyi idő után állandósul az áram? Számítsuk ki az áramerősség max. értékét! Mekkora áram folyik az áramkörben, ha a bekapcsolás után eltelt idő $20 \mu\text{s}$? Adatok: $U_g = 12 \text{ V}$; $R_g = 100 \Omega$; $R = 1 \text{ k}\Omega$; $L = 10 \text{ mH}$.
- 7.4.2. Számítsuk ki a 7.4.1. feladat adataival a kapacitív feszültség értékét, ha a 7.15. ábra K kapcsolójának zárása után eltelt idő 20 ms ! Határozzuk meg ebben az időpillanatban az R ellenálláson eső feszültség és az induktivitáson mérhető feszültség értékeit!
- 7.4.3. A 7.20. ábra kapcsolóját alsó helyzetbe átkapcsolva mekkora indukált feszültség ébred a tekercsben, és mekkora áram folyik az áramkörben az átkapcsolás pillanatában? Mekkora az áramkör időállandója és mekkora csökken az indukált feszültség 1 ms alatt? Mekkora ebben a pillanatban a tekercsben tárolt mágneses energia? Adatok: $U_g = 24 \text{ V}$; $R_g = 500 \Omega$; $R = 1 \text{ k}\Omega$; $L = 1,5 \text{ H}$.

A feladatok megoldásának menete és a végeredmény

$$7.1.1. u_1 = 480 \text{ mV, mivel } u_1 = N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = N \cdot \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = 1500 \cdot \frac{1,8 \cdot 10^{-3} - 0,52 \cdot 10^{-3}}{4} = 480 \text{ mV.}$$

$$7.1.2. \Delta t = 30 \text{ ms, mivel } u_1 = N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}; \Delta t = N \cdot \frac{\Delta \Phi}{u_1} = 600 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-4}}{10} = 30 \text{ ms.}$$

$$7.1.3. \Delta \Phi = 312,5 \mu\text{Wb, mivel } u_1 = N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}; \Delta \Phi = u_1 \cdot \frac{N}{\Delta t} = 25 \cdot \frac{1200}{0,015} = 312,5 \mu\text{Wb.}$$

$$7.1.4. i = 143 \text{ mA, mivel } i = \frac{R}{u_1} = \frac{R}{N \cdot \Delta \Phi} = \frac{R \cdot \Delta t}{2100 \cdot 15 \cdot 10^{-7}} = 143 \text{ mA. Az áram iránya a 7.1. ábrán jelölt irányval ellentétes.}$$

$$7.1.5. u_1 = 7,5 \text{ mV}; i = 750 \mu\text{A, mivel } u_1 = B \cdot l \cdot v = 0,15 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ mV}; i = \frac{u_1}{R} = \frac{7,5 \cdot 10^{-3}}{10} = 750 \mu\text{A.}$$

$$7.1.6. B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T, mivel } u_1 = B \cdot l \cdot v; \text{ így } B = \frac{u_1}{l \cdot v} = \frac{0,0125}{3 \cdot \frac{3,6}{300}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

$$7.1.7. n = 240 \text{ l/min; } u_{1cs} = 4,9 \text{ mV, mivel } f = \frac{1}{n} = \frac{60}{2} \cdot \frac{m}{2 \cdot 60 \cdot f} = \frac{m}{2 \cdot 60 \cdot 500} = \frac{1}{250} = 240 \text{ l/min; } v = \frac{D_k \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{43 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 240}{60} = 0,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}; u_{1cs} = B \cdot l \cdot v \cdot m = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,54 \cdot 240 = 4,9 \text{ mV.}$$

$$\begin{aligned}
 7.1.8. \quad u_{\text{max}}^i = U_0^i &= 125,6 \text{ V}; \quad M^{\text{max}} = 0,48 \text{ N}\cdot\text{m}; \quad \text{és } u_i^i(t) = 125,6 \sin(104,7t) \text{ V, mivel} \\
 \omega &= \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 1000}{60} = 104,7 \frac{\text{s}}{\text{s}}; \quad A = l \cdot d = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 \text{ m}^2; \quad u_i^i = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \alpha = \\
 &= 300 \cdot 0,2 \cdot 0,02 \cdot 104,7 \cdot \sin \alpha = 125,6 \text{ V}; \quad u_{\text{max}}^i = U_0^i = 125,6 \text{ V}; \quad M = N \cdot B \cdot l \cdot A \cdot \sin \alpha = \\
 &= 300 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,02 \cdot \sin \alpha = 0,48 \cdot \sin \alpha \text{ N}\cdot\text{m}; \quad M^{\text{max}} = 0,48 \text{ N}\cdot\text{m}; \\
 u_i^i(t) &= N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = U_0^i \cdot \sin(\omega t) = 125,6 \cdot \sin(104,7t) \text{ V.} \\
 7.1.9. \quad u_{\text{is}}^i &= 62,8 \text{ V}; \quad M^{\text{is}} = 0,24 \text{ N}\cdot\text{m, mivel } \alpha = \omega \cdot t = 104,7 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 0,5235 \text{ rad} = 30^\circ; \\
 u_{\text{is}}^i &= 125,6 \cdot \sin 30^\circ = 62,8 \text{ V}; \quad M^{\text{is}} = 0,48 \cdot \sin \alpha = 0,48 \cdot \sin 30^\circ = 0,24 \text{ N}\cdot\text{m. A feladat} \\
 &\text{megoldásánál felhasználjuk a 7.1.8. feladat eredményeit.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.2.1. \quad L &= 266 \mu\text{H, mivel } A = \frac{d^2 \cdot \pi}{0,012^2} = \frac{4}{1,13 \cdot 10^{-4}} \text{ m}^2; \quad L = N^2 \cdot \frac{l}{\mu_0 \cdot A} = \\
 &= 150^2 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,13 \cdot 10^{-4}}{0,012} = 266 \mu\text{H.} \\
 7.2.2. \quad L &= 1,5 \text{ mH, mivel } l_k^k = D^k \cdot \pi = 30 \cdot 10^{-3} \cdot \pi = 94,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad L = N^2 \cdot \frac{l_k}{\mu_0 \cdot A} = \\
 &= 1500^2 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}}{94,25 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \text{ mH.} \\
 7.2.3. \quad N &= 109, \text{ mivel } A = \frac{d^2 \cdot \pi}{0,008^2} = \frac{4}{5,03 \cdot 10^{-5}} \text{ m}^2; \quad L = N^2 \cdot \frac{l}{\mu_0 \cdot A}; \\
 N &= \sqrt{\frac{l \cdot L}{\mu_0 \cdot A}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,03 \cdot 10^{-5}}} = 109 \text{ menet.} \\
 7.2.4. \quad L &= 1,15 \text{ H, mivel } L = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{l_k}{\mu \cdot A} = 800 \cdot 1900 \cdot \frac{l_k}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,000 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}} = \\
 &= 1,15 \text{ H.} \\
 7.2.5. \quad u_{\text{is}}^i &= 35,9 \text{ V, mivel } H_{0,45} = \frac{\Theta}{\rho} = \frac{l_k}{N_1 \cdot l} = \frac{l_k}{800 \cdot 0,45} = 1800 \frac{\text{m}}{\text{A}}; \quad \mu_{\text{ad}} = \frac{1}{\frac{1,34}{1700}} = 7,88 \cdot 10^{-4} \frac{\text{A}\cdot\text{m}}{\text{V}\cdot\text{s}}; \\
 u_{\text{is}}^i &= N_1 \cdot i = \frac{l_k}{20 \cdot 10^{-2}} = 1800 \frac{\text{m}}{\text{A}} \cdot N_2 \cdot \frac{l_k}{\Delta l} = 800 \cdot 1900 \cdot \frac{l_k}{7,88 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot (0,45 - 0,4)} = 35,9 \text{ V.} \\
 7.2.6. \quad L &= 132 \mu\text{H, mivel } u_i^i = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}; \quad L = n_1 \cdot \frac{\Delta l}{\Delta i} = 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{22 \cdot 10^{-3}} = 132 \mu\text{H.} \\
 7.2.7. \quad L &= 38 \text{ mH, mivel } L = N^2 \cdot \frac{l}{\mu_0 \cdot A} = 550^2 \cdot \frac{l}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}} = 38 \text{ mH.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.2.8. L_{12} &= 281 \text{ mH, mivel } L_{12} = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,48 \cdot \sqrt{(985 \cdot 348) \cdot 10^{-6}} = 281 \text{ mH.} \\
 7.2.9. W &= 1,33 \text{ mW} \cdot \text{s, mivel } A = \frac{d^2 \cdot \pi}{0,012^2 \pi} = \frac{4}{1,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}; L = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot A}{l} = \\
 &= 1502 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,13 \cdot 10^{-4}}{0,012} = 266 \text{ mH; } W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 266 \cdot 10^{-6} \cdot 1002 \cdot 10^{-6} = 1,33 \text{ mW} \cdot \text{s.} \\
 7.2.10. W &= 48,4 \text{ mW} \cdot \text{s, mivel } W = \frac{1}{2} A \cdot I \cdot B \cdot H = \frac{1}{2} A \cdot I \cdot B \cdot \frac{\mu_0}{B} = \frac{2 \mu_0}{1} \cdot A \cdot I \cdot B^2 = \\
 &= \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{1} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 10^{-3} \cdot 1,3^2 = 48,4 \text{ mW} \cdot \text{s.} \\
 7.3.1. L_e &= 7,1 \text{ mH, mivel } L_e = L_1 + L_2 + L_3 = 5 + 0,85 + 1,25 = 7,1 \text{ mH.} \\
 7.3.2. L_e &= 19,7 \text{ mH, mivel } L_e = L_1 \times L_2 \times L_3 = 384 \times 32 \times 59 = 19,7 \text{ mH.} \\
 7.3.3. L_e &= 41,9 \text{ mH, mivel } L_e = L_1 + \{[(L_2 + L_3) \times L_4 + L_5] \times L_6 + L_7\} \times L_8; \\
 L_e &= 18 + \{[(12 + 0,9) \times 18 + 28] \times 32 + 25\} \times 56 = 41,9 \text{ mH.} \\
 7.4.1. \tau &= 9,1 \text{ } \mu\text{s; } 5\tau = 45,5 \text{ } \mu\text{s; } I_0 = 10,9 \text{ mA; } I_{20} = 9,7 \text{ mA, mivel } \tau = \frac{L}{R + R_g} = \\
 &= \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1000 + 100} = 9,1 \text{ } \mu\text{s; } 5\tau = 5 \cdot 9,1 = 45,5 \text{ } \mu\text{s; } I_0 = \frac{U_g}{R + R_g} = \frac{1000 + 100}{12} = 10,9 \text{ mA;} \\
 I_{20} &= I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 10,9 \cdot (1 - e^{-\frac{9,1 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}}}) = 9,7 \text{ mA.} \\
 7.4.2. u_k &= 11,03 \text{ V; } U_R = 9,7 \text{ V; } U_L = 1,33 \text{ V, mivel } u_k = U_g - I_{20} \cdot R_g = 12 - 9,7 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = \\
 &= 11,03 \text{ V; } U_R = I_{20} \cdot R = 9,7 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 9,7 \text{ V; } U_L = U_k - U_R = 11,03 - 9,7 = 1,33 \text{ V.} \\
 7.4.3. I_0 &= 48 \text{ mA; } \tau = 1,5 \text{ ms; } u_{11} = 1,5 \text{ ms; } u_{11} = U_{10} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \\
 &= 48 \text{ mA; } U_{10} = I_0 \cdot R = 48 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 48 \text{ V; } \tau = \frac{L}{R} = \frac{1,5}{10^3} = 1,5 \text{ ms; } u_{11} = U_{10} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \\
 &= 24,64 \text{ V; } W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 48^2 \cdot 10^{-6} = 1,73 \text{ mW} \cdot \text{s.}
 \end{aligned}$$

8. VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ HÁLÓZATOK

8.1. Változó mennyiségek ábrázolása, jellemzői

1. példa

A 8.1. ábrán két feszültségfüggvényt figyelhetünk meg. A két függvény frekvenciája megegyezik, ezért azonos ω szögsebességgel forgó U_0 és U_1 vektorok y irányú vetületeként ábrázolhatjuk. Az $u_1(t)$ feszültség ϕ szöggel siet az $u_0(t)$ feszültséghez képest.

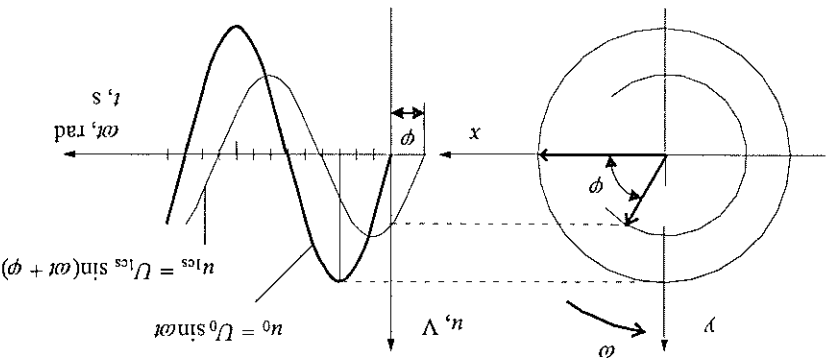
a) Számítsuk ki az ω körfrekvenciát és írjuk fel az időfüggvényeket!

b) Számítsuk ki a feszültségek pillanatértékét a $t = 3$ s időpillanatban!

c) Hány teljes periódus játszódott le 3 s idő alatt?

d) Számítsuk ki a két szinuszos feszültség effektív értékét, és határozzuk meg az egyenáramú középértékeket!

Adatok: $f = 1$ kHz; $U_0 = 12$ V; $U_{1cs} = 9$ V; $\phi = 60^\circ$.



8.1. ábra

Megoldás

a) A körfrekvencia: $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 10^3 = 6283 \frac{\text{s}}{\text{s}}$.

A szinuszosan változó feszültségek időfüggvényei:

$$u_0 = U_0 \cdot \sin \omega t = (12 \text{ V}) \cdot \sin \left[\left(6283 \frac{\text{s}}{\text{s}} \right) \cdot (t \text{ s}) \right] = 12 \cdot \sin(6283t) \text{ V},$$

$$u_1 = U_{1cs} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) = (9 \text{ V}) \cdot \sin \left[\left(6283 \frac{\text{s}}{\text{s}} \right) \cdot (t \text{ s}) + 60^\circ \cdot \frac{180}{\pi} \right] = 9 \cdot \sin(6283t + \frac{3}{\pi}) \text{ V}.$$

b) Feszültségértékek a $t = 3$ s időpillanatban:

$$u_0(t) = u_0(3) = 12 \cdot \sin(6283t) \text{ V} = 12 \cdot \sin(6283 \cdot 3) \text{ V} = -6,33 \text{ V},$$

$$u_1(3) = 9 \cdot \sin(6283t + \frac{3}{\pi}) \text{ V} = 9 \cdot \sin(6283 \cdot 3 + \frac{3}{\pi}) \text{ V} = 4,25 \text{ V}.$$

c) A 3 s idő alatt lefutott teljes periódusok számának meghatározásához először számítsuk ki a periódusidőt:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1000}{1} = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}.$$

$$\text{Így a 3 s alatt lejátszódó periódusok száma: } m = \frac{t}{T} = \frac{10^{-3}}{3} = 3000.$$

d) A feszültségek effektív értékei:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} = 8,49 \text{ V}, \quad \text{III.} \quad U_1 = \frac{\sqrt{2}}{U_{1cs}} = \frac{\sqrt{2}}{9} = 6,36 \text{ V}.$$

Az egyenáramú középértékek:

$$U_k = \frac{1}{I} \cdot U_0 = \frac{\pi}{1} \cdot 12 = 3,82 \text{ V}, \quad \text{III.} \quad U_{1k} = \frac{\pi}{1} \cdot U_1 = \frac{\pi}{1} \cdot 9 = 2,86 \text{ V}.$$

Mindkét feszültség körfrekvenciája $6283 \frac{1}{s}$, az időfüggvények: $u_0 = 12 \cdot \sin(6283t)$ V és $u_1 = 9 \cdot \sin(6283t + \frac{3}{\pi})$ V. A harmadik szekundumban a feszültségértékek: $u_0 = -6,33$ V és $u_1 = 4,25$ V. A 3 s idő alatt lefutott teljes periódusok száma 3000. A feszültségek effektív értékei: $U = 8,49$ V és $U_1 = 6,36$ V. Az egyenáramú középértékek: $U_k = 3,82$ V és $U_{1k} = 2,86$ V.

2. példa

A 8.2. ábrán két szinuszos feszültség, az u_0 és u_1 feszültségek idődiagramját láthatjuk. A koordináta-rendszer úgy választottuk meg, hogy az $\alpha = \omega \cdot t = 0$, ill. a $t = 0$ értékekhez az u_0 feszültség nulla értéke tartozzon.

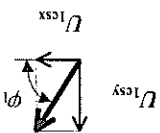
a) Rajzoljuk fel a csúcsheszültségek vektorábráját!

b) Határozzuk meg az eredő csúcsheszültség nagyságát, valamint az u_0 feszültség fázishelyzetét az u_0 feszültséghez képest!

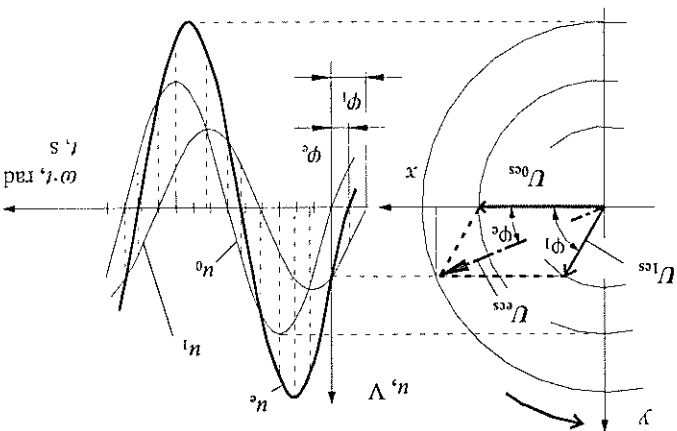
c) Határozzuk meg az eredő feszültség időfüggvényét!

d) Mekkora az eredő feszültség nagysága a nulladik időpillanatban, és mennyi idő múlva éri el a maximumot?

Adatok: $U_{0cs} = 200$ mV; $U_{1cs} = 125$ mV; $\varphi_1 = 55^\circ$; $f = 400$ Hz.



8.2. ábra



Megoldás

a) A vektorábra szerkesztését a 8.2. ábra középső részletén láthatjuk. A $t = 0$ időpillanatban az u_0 feszültség fázisszöge nulla, ezért az U_{0cs} vektort az x koordinátára rajzoljuk. Hozzá képest az U_{lcs} vektor ϕ_1 fázisszöggel siet, mivel az idődiagramon balról jobbra haladva először az u_1 feszültséggel találkozunk. Az x tengelyre a ϕ_1 szöveget felmértve az U_{lcs} vektor megrajzolható. Az U_{ecs} vektort a paralelogramma módszerrel szerkesztettük meg. Az ábrán az eredő csúcsteszültség ϕ_e fázisszöge is látható.

b) Az eredő feszültség időfüggvényének felírásához ismernünk kell U_{ecs} és ϕ_e pontos értékét (8.3. ábra). Az U_{ecs} vektor nagyságát Pitagorasz tételének alkalmazásával egyszerűen meghatározhatjuk, ha U_{lcs} helyett az U_{lcsx} és U_{lcsy} vektorösszetevőikkel számolunk, amilyeneket ϕ_1 ismeretében meg tudunk határozni. Az így kialakított derékszögű háromszögből ϕ_e értéke is könnyen kiszámítható.

8.3. ábra

$$U_{lcsx} = U_{lcs} \cdot \cos \phi_1 = 125 \cdot \cos 55^\circ = 71,7 \text{ mV},$$

$$U_{lcsy} = U_{lcs} \cdot \sin \phi_1 = 125 \cdot \sin 55^\circ = 102,4 \text{ mV},$$

$$U_{ecs} = \sqrt{(U_{0cs} + U_{lcsx})^2 + U_{lcsy}^2} = \sqrt{(200 + 71,7)^2 + 102,4^2} = 290,4 \text{ mV},$$

$$\tan \phi_e = \frac{U_{lcsy}}{U_{0cs} + U_{lcsx}} = \frac{102,4}{200 + 71,7} = 0,3769; \quad \phi_e = 20,65^\circ.$$

c) Számítsuk ki a körfrekvenenciát:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 400 = 2513,3 \frac{1}{s}.$$

A fázisszög radianban: $\varphi_c = 20,65^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot 0,36$.
 Az eredő feszültség időfüggvénye: $u_c(t) = U_{cs} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_c) = 290,4 \cdot \sin(2513,3t + 0,36)$ mV.

d) Az eredő feszültség nagysága a nulla időpillanatban:

$$u_c(t=0) = 290,4 \cdot \sin(2513,3 \cdot 0 + 0,36) \text{ V} = 102,3 \text{ mV.}$$

Ügyeljünk arra, hogy φ értéke radianban van megadva! Az u_c eredő feszültség értéke akkor lesz maximális, ha a szinusz értéke 1, ez pedig $\alpha = (\frac{2}{\pi} \pm n \cdot \pi)$ szögértékeknel következik be. A 8.2. ábrán láthatjuk, hogy az első max. pozitív, a hozzá tartozó szög $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Az eredő feszültség időfüggvényéből: $2513,3t + 0,36 = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{A max. feszültséghez tartozó idő: } t = \frac{\frac{\pi}{2} - 0,36}{2513,3} = 0,48 \text{ ms.}$$

Az eredő csúcsfeszültség nagysága $U_{cs} = 290,4$ mV, az eredő feszültség fázisszöge az u_0 feszültséghez képest $+0,36$ radian, azaz $20,65^\circ$ -kal siet az u_0 feszültséghez képest. Az eredő feszültség időfüggvénye: $u_c(t) = 290,4 \cdot \sin(2513,3t + 0,36)$ mV. Az eredő feszültség a nulla időpillanatban $102,3$ mV, első maximumát $0,48$ ms múlva éri el.

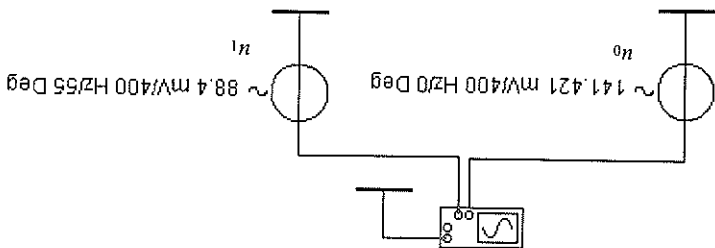
Ellenőrzés

A 8.4. ábra mérési összeállítását az oszcilloszkóppal két feszültséggenerátor jelalakját vizsgáljuk. Mivel a feszültséggenerátorok beállított feszültségei effektív feszültségek, ezért először számítsuk ki a példában megadott csúcsfeszültségek effektív értékeit!

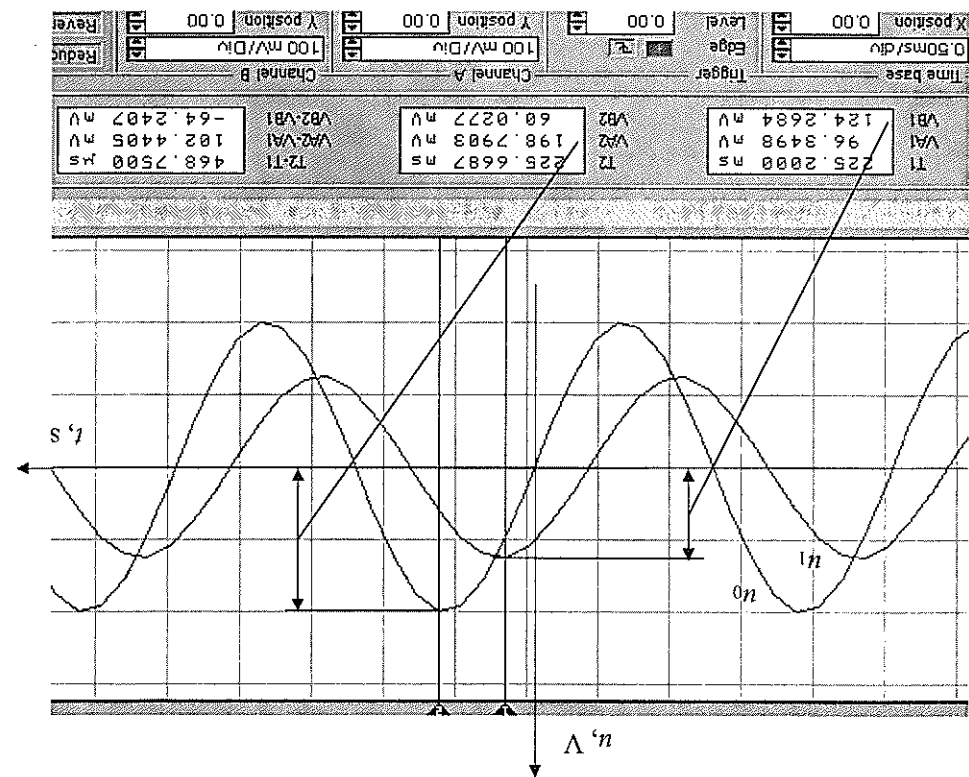
$$U_{\text{eff}} = U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{\text{ocs}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 141,42 \text{ mV, ill. } U_{\text{ieff}} = U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{\text{ics}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 88,388 \text{ mV.}$$

Ezt a beállítást láthatjuk a 8.4. ábrán. Figyeljük meg, hogy az u_1 feszültséggenerátor fázisszöge 55° !

8.4. ábra



Most nézzük meg a feszültségek csúcsértékét az oszcilloszkóp képernyőjén! Ezt láthatjuk a 8.5. ábrán. A csúcsértékek alig térnek el a megadott 200 mV és 125 mV értékektől.



8.5. ábra

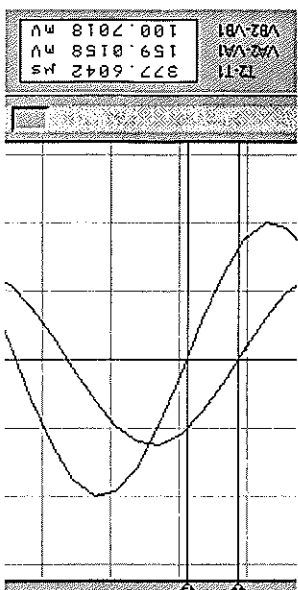
A szinuszgörbék fáziseltérésének mérésekor pontosabb adathoz jutunk, ha az 1 és 2 mérővonalakat a maximum helyett a görbék nullátmeneteihez állítjuk. A 8.6. ábrán a negatívba ártató görbeszakaszok nullátmeneteit megfigyelve a két görbe között $T_2 - T_1 = 377,6042 \mu s$ időkülönbséget látunk. Számítsuk ki a fáziseltérést:

$$\varphi_1 = \omega \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot t = 2\pi \cdot 400 \cdot 377,6042 \cdot 10^{-6} =$$

$$= 0,949 \text{ rad} = 0,949 \cdot \frac{180}{\pi} = 54,37^\circ.$$

A példában megadott 55° -tól való eltérés nem jelentős.

8.6. ábra

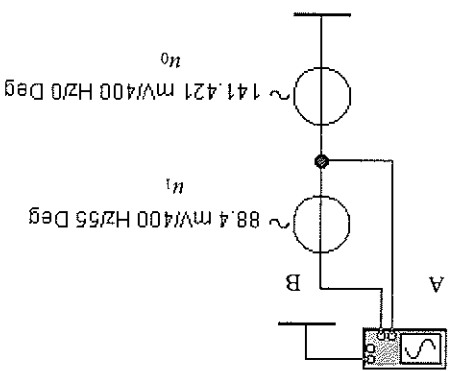


Nézünk meg a két szinuszos feszültség összeget! A 8.7. ábrán a mérési összeállítást láthatjuk.

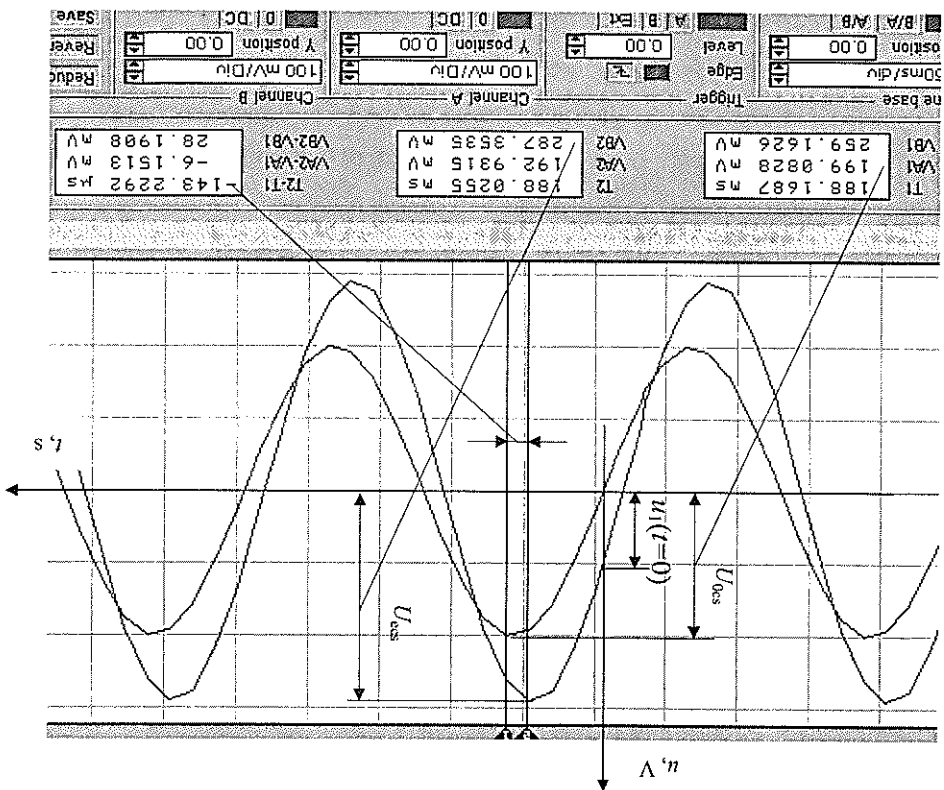
Az A csatornán az u_0 bemeneti feszültség, a B csatornán az u_e eredő kimeneti feszültség jelalakját figyelhetjük meg.

Az oszcilloszkóp képernyőjén megjelenő idődiagramok a 8.8. ábrán láthatók.

Mivel az oszcilloszkóp kétsugaras, ezért a képernyőn az u_1 feszültség nem látható.



8.7. ábra



8.8. ábra

A 2 jelölővonalat a B csatorna max. feszültségértékére állítottuk. A B csatornához és a 2 jelölővonalhoz tartozó feszültség az U_{cs} eredő csúcsfeszültség, amelyet az oszcilloszkóp képernyőjéről leolvashatunk: $VB2 = 287,35$ V. A b) pontban számolt érték 290,4 V.

Láthatjuk, hogy az eredő feszültség időfüggvénye szintén szinuszos függvény, és siet az u_0 feszültséghez képest. Határozzuk meg a fáziseltérést! Az azonos fázisban lévő pontok időeltérése a 8.8. ábra alapján $143,2292 \mu\text{s}$. Az eredő feszültség mérésével megállapított fázisszöge tehát:

$$\varphi_{\text{em}} = \omega \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot t = 2\pi \cdot 400 \cdot 143,2292 \cdot 10^{-6} = 0,36 \text{ rad} = 0,36 \cdot \frac{\pi}{180} = 20,63^\circ.$$

A c) pontban számított fázisszög $20,65^\circ$ volt, a két érték gyakorlatilag megegyezik. Figyeljük meg a 8.8. ábrán az eredő feszültség nulla időpillanatban felvett értékét! Az $u_1(t=0)$ a szimulációs mérés szerint valamivel több, mint 100 mV , tehát jól egyezik a d) pontban számolt $102,3 \text{ mV}$ értékkel.

Feladatok

8.1.1. Egy szinuszosan váltakozó feszültség frekvenciája 500 Hz . A feszültség max. amplitúdója 20 mV . Mekkora a körfrekvencia és a periódusidő? Írjuk fel a feszültség időfüggvényét! Mekkora a feszültség pillanatértéke $0,1 \text{ ms}$ -mal a nullátmenet után?

8.1.2. Egy szinuszos jel a nullátmenet után $0,38 \text{ ms}$ múlva éri el az első maximumát. Számítsuk ki a jel frekvenciáját és periódusidejét!

8.1.3. Egy szinuszosan váltakozó feszültség a nullátmenet után mennyi idővel éri el az effektív értéknek megfelelő pillanatértéket, ha a frekvencia $1,5 \text{ kHz}$?

8.1.4. Mekkora az amplitúdója annak a váltakozó áramnak, amely a nullátmenet után $0,011 \text{ s}$ múlva 37 mA pillanatértéket ér el? A frekvencia 800 Hz .

8.1.5. Mekkora a 230 V -os hálózati feszültség frekvenciája, periódusideje, csúcsértéke, és mekkora az egyenáramú középérték egyutas és kétutas egyenirányítás esetén?

8.2. Egyszerű váltakozó áramú hálózatok

1. példa

Kapcsoljunk egy tekercsre szinuszos feszültséget! A tekercsre kapcsolt feszültség és a tekercs áramának vonaldiagramját a 8.9. ábrán láthatjuk.

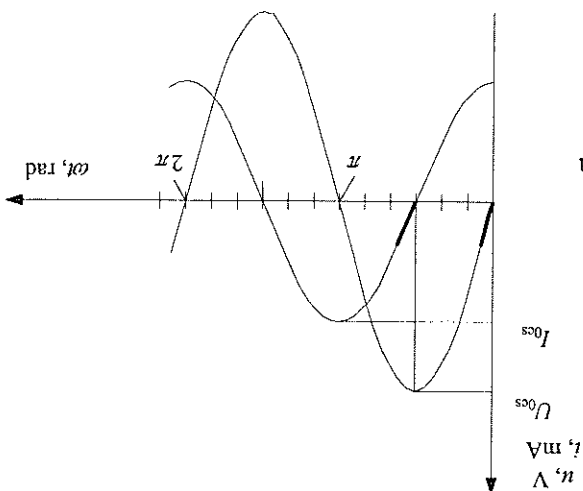
- Írjuk fel a feszültség és áram effektív értéket!
- Számítsuk ki az induktív reaktancia értékét!
- Határozzuk meg a tekercs induktivitását!
- Írjuk fel a feszültség és az áram időfüggvényét!
- Rajzoljuk meg a feszültség és az áram vektorábráját!

f) Hogyan módosul a vektorábra és hogyan módosulnak az időfüggvények, ha az áramot választjuk nulla fázishelyzettü mennyiségnek?

Adatok: $U_{0cs} = 14,14 \text{ V}$;

$I_{0cs} = 91,9 \text{ mA}$;

$\phi = \frac{\pi}{2}$; $f = 2 \text{ kHz}$.



8.9. ábra

Megoldás

a) A feszültség és áram effektív értéke:

$$U = \frac{\sqrt{2}}{14,14} U_{0cs} = \frac{\sqrt{2}}{91,9} I_{0cs} = 10 \text{ V, ill. } I = \frac{\sqrt{2}}{91,9} I_{0cs} = 65 \text{ mA.}$$

b) A tekercs induktív reaktanciája a feszültség és az áram csúcsértékeinek vagy effektív értékeiknek hányadosa: $X_L = \frac{U_{0cs}}{I_{0cs}} = \frac{U}{I} = \frac{65 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{10 \text{ V}} = 153,85 \Omega$.

A 8.9. ábrán látható, hogy az ohmos ellenállással ellentétben az U_{0cs} és I_{0cs} pillanatértékek nincsenek fázisban egymással. A reaktancia az egyáshoz képest fázisban eltoltt csúcs-értékek és effektív értékek arányossági tényezője.

c) A tekercs induktivitását a reaktancia képletéből számíthatjuk ki:

$$X_L = \frac{U}{I} = \omega \cdot L; \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi \cdot f} = \frac{153,85}{2\pi \cdot 2000} = 12,24 \text{ mH.}$$

d) A feszültség és áram időfüggvényéhez számítsuk ki az ω értékét:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 2000 = 12,57 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}},$$

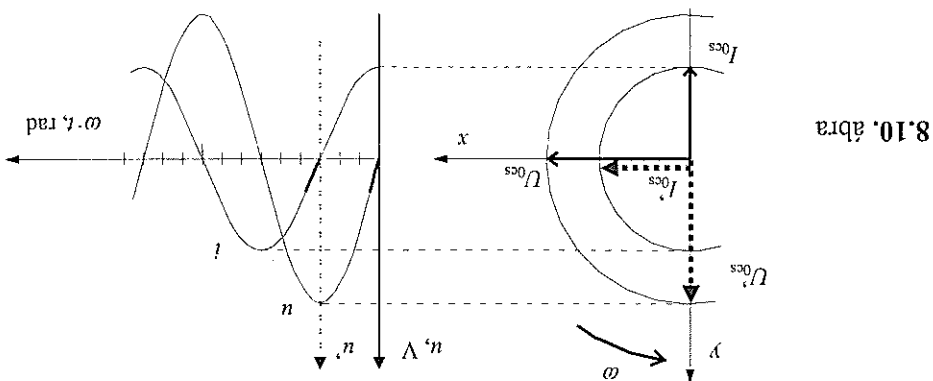
$$u = U_{0cs} \cdot \sin \omega \cdot t = 14,14 \cdot \sin(12557t) \text{ V.}$$

Az áram késik a feszültséghez képest, ezért:

$$i = I_{0cs} \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) = 0,065 \cdot \sin(12557t - \frac{\pi}{2}) \text{ A.}$$

e) A feszültség és áram vektordiagramját az idődiagram alapján könnyen megrajzolhatjuk. Az U_{ocs} és I_{ocs} vektorokat a 8.10. ábrán vastag nyílak jelzik.

f) Mivel legfőbbbször az áramvektort választjuk nulla fázishelyzetűnek és ehhez képest rajzoljuk meg a többi vektort, ezért nézzük meg, hogy ez a választás milyen változást okoz a 8.10. ábra vonal- és vektordiagramjában!



Az áram nulla fázishelyzete azt jelenti, hogy a $t = 0$ s időpontban nem a feszültség, hanem az áram periódusa kezdődik nulla pillanatértékekkel. A koordináta-rendszernek a $t = 0$ s időponthoz tartozó u tengeletét az áram nulla fázishelyzetét jelölő időpontba toljuk. Az u tengelet új helyzetét az ábrán szaggatott vonallal és u' -vel jelöljük. Figyeljük meg, hogy az u tengelyt 90° -kal eltolva a vektorok az ábrán 90° -kal elfordultak! Az elforgatott I_{ocs} és U'_{ocs} vektorokat az ábrán szaggatott nyílak jelölik.

Írjuk fel az időfüggvényeket az eltolt helyzetű $u' - \omega \cdot t$ koordinátarendszerben:

$$u' = U_{ocs} \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = 14,14 \cdot \sin(12557t + \frac{\pi}{2}) \text{ V},$$

$$i' = I_{ocs} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0,065 \cdot \sin(12557t) \text{ A}.$$

Az ábrán látható, hogy a $t = 0$ s időpontban a feszültségvektor + $\frac{\pi}{2}$ fázishelyzetű.

Az idődiagram nehézkes ábrázolásától legfőbbbször eltekintünk, és csak a vektorok nagyságával és fázisszögével számolunk. Ha csak vektorokat ábrázolunk, akkor is célszerű a vektorok irányát a 8.10. ábrának megfelelően megválasztanunk, azaz a nulla fázis-helyzetű vektort jobbra, a 90° -os fázishelyzetűt pedig felfelé (a vízszintes helyzetű rajz síkjában) távolodva) megrajzolnunk.

Feladatok

- 8.2.1.** Határozzuk meg az induktív reaktancia értékét, ha az induktivitásra kapcsolt feszültség effektív értéke 12 V , az induktivitáson átfolyó áram effektív értéke $I = 25\text{ mA}$! Mekkora a tekercs induktivitása, ha a frekvencia 1 kHz ?
- 8.2.2.** Határozzuk meg a tekercs induktív reaktanciáját és a rajta áthaladó áram effektív értékét, ha a tekercs induktivitása 58 mH , a rákapcsolt szinuszos feszültség amplitúdója 25 V , frekvenciája $4,5\text{ kHz}$! Számítsuk ki a tekercsben tárolt max. energiát!
- 8.2.3.** Egy kondenzátorra $u = 17 \cdot \sin 480t\text{ V}$ feszültséget kapcsoltunk. Határozzuk meg a kondenzátor reaktanciáját és írjuk fel a kondenzátoron átfolyó áram időfüggvényét! A kondenzátor kapacitása 47 nF .
- 8.2.4.** Egy kondenzátorra kapcsolt feszültség időfüggvénye $u = 35,36 \cdot \sin 2310t\text{ V}$. A kondenzátoron átfolyó áram: $i = 39,6 \cdot \sin(2310t + \frac{\pi}{2})\text{ mA}$. Mekkora a kondenzátor reaktanciája, kapacitása és mekkora a frekvencia?

8.3. Soros és párhuzamos RL -kapcsolás

1. példa

A 8.11. ábrán sorbakapcsolt ellenállást és tekercset tartalmazó áramkör kapcsolási rajza látható.

- a)** Rajzoljuk meg a feszültség- és impedancia-háromszöget, és határozzuk meg az eredő impedancia értékét!

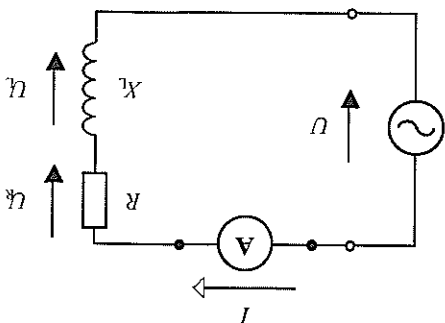
- b)** Számítsuk ki az áramkörben folyó I áramot!

- c)** Határozzuk meg az ellenálláson és a tekercsen eső feszültségeket!
- d)** Határozzuk meg az áram és a feszültség fázisszögét!

- e)** Számítsuk ki az áramkör jósági tényezőjét és határfrekvenciáját!

Adatok: $U = 43\text{ V}$, $R = 600\ \Omega$,
 $L = 65\text{ mH}$, $f = 1\text{ kHz}$.

8.11. ábra

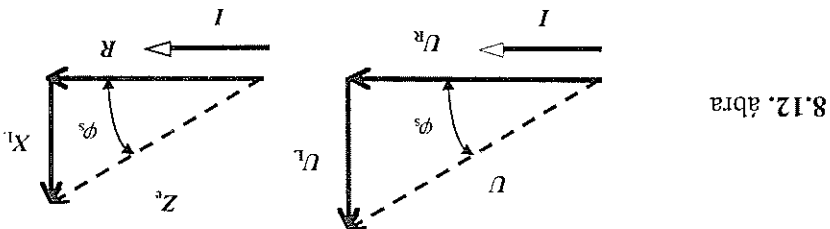


Megoldás

a) Mivel ugyanaz az áram folyik az ellenálláson és az induktivitáson is, ezért az áramvektort a nulla fázishelyzetnek megfelelő jobbra mutató nyíl ábrázolja. Az ohmos ellenállásnál a feszültség fázisban van az árammal, míg az induktívitas feszültsége 90° -kal siet az áramhoz képest. Ennek megfelelően a 8.12. ábrán az óramutató járásával ellentétesen, azaz ω forgásirányának megfelelően, 90° -kal elforgatva látható az induktív feszültségvektor iránya. Az ábrából kitűnik, hogy az áramkörben folyó áram φ_s fázisszöggel késik az U feszültséghez képest.

Számítsuk ki először az induktívitas reaktanciáját:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 65 \cdot 10^{-3} = 408,4 \, \Omega.$$



Az eredő impedancia nagysága a 8.12. ábra alapján már számítható:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{600^2 + 408,4^2} = 725,8 \, \Omega.$$

b) Az áramkörben folyó áram effektív értéke: $I = \frac{U}{Z} = \frac{43}{725,8} = 59,25 \text{ mA}$.

c) Az ellenálláson és az induktivitáson eső feszültség:

$$U_R = I \cdot R = 59,25 \cdot 10^{-3} \cdot 600 = 35,5 \text{ V},$$

$$U_L = I \cdot X_L = 59,25 \cdot 10^{-3} \cdot 754 = 44,7 \text{ V}.$$

A két feszültség algebrailag összege nem egyezik meg a bemeneti U feszültséggel, hiszen vektoriálisan kell összegeznünk, ahogyan ez a 8.12. ábra feszültségvektorhármaszöggel megfigyelve látható. A két feszültség nincs azonos fázisban!

$$U \neq U_R + U_L; \quad 43 \text{ V} \neq 35,5 + 44,7 = 80,2 \text{ V}$$

d) Az áram fázisszögét nullára választva a 8.12. ábrán látható, hogy a feszültség fázisszöge φ_s , aminek értékét az ábra alapján könnyen meghatározhatjuk:

$$\varphi_s = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{408,4}{600} = \arctg 0,68066 = 34,24^\circ.$$

e) Az áramkör jósági tényezője: $\tilde{Q} = \operatorname{tg} \varphi_s = \frac{X_L}{R} = \frac{408,4}{600} = 0,68$.

A jöswági tényező a nagy értékű R ellenállás miatt kicsi.

Az áramkör határfrekvenciáját az ohmos ellenállás és a reaktancia egyenlősége jellemzi.

$$f_h = \frac{R}{2\pi \cdot L} = \frac{600}{2\pi \cdot 65 \cdot 10^{-3}} = 1469 \text{ Hz.}$$

A feszültség- és impedancia-háromszög a 8.12. ábrán látható. Az eredő impedancia $72,8 \, \Omega$. Az áramkörben folyó áram $59,25 \text{ mA}$, az induktivitáson eső feszültség $44,7 \text{ V}$, az ellenálláson eső feszültség $35,5 \text{ V}$. A feszültség $34,24^\circ$ -kal siet az áramhoz képest. A jöswági tényező $0,68$, a határfrekvencia pedig 1469 Hz .

2. példa

A 8.13. ábrán látható áramkör egy tekercset és egy vele párhuzamosan kapcsolódó ellenállást tartalmaz, amelyre U feszültséget kapcsolunk.

a) Rajzoljuk meg az áram- és az admittancia-háromszöget!

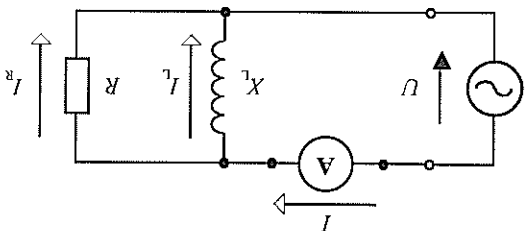
b) Határozzuk meg az admittancia értékét!

c) Határozzuk meg az áram és a feszültség fázisszögét!

d) Számítsuk ki az áramkörben folyó I áramot és határozzuk meg az ágáramokat!

Adatok: $U = 30 \text{ V}$; $R = 100 \, \Omega$;
 $L = 1,5 \text{ mH}$; $f = 10 \text{ kHz}$.

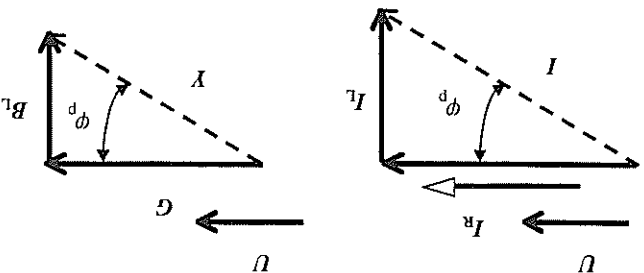
8.13. ábra



Megoldás

a) Az ideális tekercsre és a vele párhuzamosan csatlakozó ellenállásra közös U feszültség kapcsolódik, ezért az U feszültséget választjuk nulla fázishelyzetűnek. Összegezni a párhuzamos ágakban folyó áramokat kell. Az ohmos ellenálláson folyó áram fázisban van a feszültséggel, az induktivitás árama azonban 90° -kal késik a feszültséghez, tehát az ohmos ág áramához képest. Az áramvektorokat ennek alapján ábrázoltuk a 8.14. ábrán. Jól látható, hogy az áramokat nem lehet egyszerűen összeadni, az összegzés csak vektorosan lehetséges. Az eredő I áramvektor φ szöggel késik a feszültséghez képest. Az áram-háromszöggel az admittancia-háromszög arányos, ami a 8.14. ábra jobb oldalán látható. Határozzuk meg a szuszceptancia, az induktív vezetőképesség értékét:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot L} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{1} = 10,61 \text{ mS.}$$



8.14. ábra

A G konduktancia, másnéven az ohmos vezetés értéke: $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{100} = 10^{-2} \text{ S}$.

A 8.14. ábra alapján az admittancia, a váltakozóáramú vezetőképesség:

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} = \sqrt{10^{-4} + 10,61^2 \cdot 10^{-6}} = 14,58 \text{ mS}.$$

c) Az admittancia-háromszögből a φ_p fázisszög:

$$\varphi_p = \arctg \frac{B_L}{G} = \arctg \frac{10,6103 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 46,7^\circ.$$

d) Az áramkörben folyó I áram: $I = U \cdot Y = 30 \cdot 14,58 \cdot 10^{-3} = 437,4 \text{ mA}$.

Az ágáramok: $I_L = U \cdot B_L = 30 \cdot 10,61 \cdot 10^{-3} = 318,3 \text{ mA}$,

$$I_R = U \cdot G = 30 \cdot 10^{-2} = 300 \text{ mA}.$$

Az ágáramok a 8.14. ábra áramháromszögből is kiszámolhatók:

$$I_L = I \cdot \sin \varphi = 437,4 \cdot \sin 46,7^\circ = 318,3 \text{ mA},$$

$$I_R = I \cdot \cos \varphi = 437,4 \cdot \cos 46,7^\circ = 300 \text{ mA}.$$

Ellenőrzésképpen számítsuk ki az I áramot Pitagorasz tételének felhasználásával:

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{300^2 + 318,3^2} = 437,4 \text{ mA}.$$

Feladatok

8.3.1. Határozzuk meg egy soros RL -kapcsolás eredő impedanciáját és fázisszögét, ha a frekvencia 800 Hz. Az induktivitás 350 mH, az ohmos ellenállás 325 Ω . Mekkora a jósági tényező?

8.3.2. Egy soros kapcsolás 540 Ω -os ellenállásból és 95 mH induktivitású tekercsből áll. Mekkora az áramkörben folyó áram effektív értéke, és mekkora az ellenálláson, ill. az induktivitáson eső effektív feszültség, ha a soros RL -kapcsolásra 21,2 V amplitúdójú, 1 kHz frekvenciájú feszültséget kapcsolunk? Számítsuk ki a feszültség és áram közötti fáziseltérést!

- 8.3.3.** Egy tekercs veszteségi ellenállása $37,7 \, \Omega$, induktivitása $0,3 \, \text{H}$. Mekkora frekvencián mérünk 60 -as jósági tényezőt? Mekkora a tekercs eredő impedanciája, fázisszöge és veszteségi tényezője ezen a frekvencián?

- 8.3.4.** Egy tekercs induktivitása $72 \, \text{mH}$. A vele párhuzamosan kapcsolt fogyasztó ellenállása $570 \, \Omega$. Mekkora áram folyik az áramkör két ágában, ha a kétpólus kapacitása $24 \, \text{V}$ amplitúdójú, $600 \, \text{Hz}$ frekvenciájú szinuszos feszültség mérhető? Mekkora az eredő áram és mekkora a fázisszöge?

- 8.3.5.** Írjuk fel a párhuzamos RL -tagra kapcsolt szinuszos feszültség időfüggvényét, ha a tekercsen átfolyó áram időfüggvénye: $i = 85 \cdot \sin(3141,6t - 30^\circ) \, \text{mA}$, a tekercs induktivitása $42 \, \text{mH}$! Mekkora az RL -tagon átfolyó eredő áram csúcsértéke, ha az R ellenállás $70 \, \Omega$ -os? Ellenőrizzzük a számításainkat áramköri szimulációval!
- 8.3.6.** Egy $8 \, \text{k}\Omega$ -os ellenállással $500 \, \text{mH}$ induktivitású tekercs van párhuzamosan kötve. A tekercsen $5 \, \text{kHz}$ frekvenciájú, $5 \, \text{mA}$ effektív értékű áram folyik. Mekkora az ellenzálláson folyó áram? Mekkora a két áram közötti fáziskülönbség, mekkora az eredő impedancia? Ellenőrizzzük az áramkörben folyó eredő áramot a feszültség és impedancia, valamint az áramhármozóg felhasználásával!

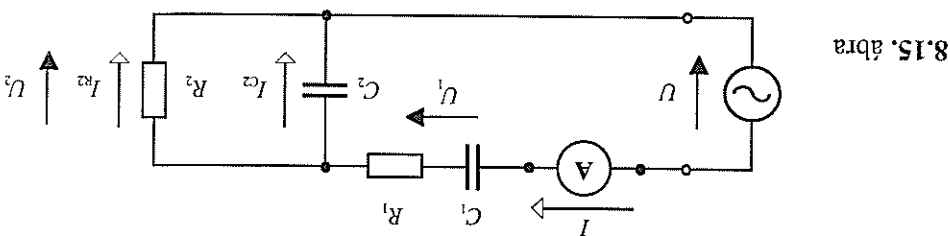
8.4. Soros és párhuzamos RC-kapcsolás

Pelda

A 8.15. ábrán sorbakapcsolt soros és párhuzamos RC -tagot tartalmazó áramkör (Wien-híd) kapcsolási rajza látható.

- a)** Rajzoljuk meg a soros tag feszültség- és impedancia-háromszögét, számítsuk ki a soros tag eredő impedanciáját és az eredő impedancia fázisszögét!
- b)** Rajzoljuk meg a párhuzamos tag áram- és admittancia-háromszögét, számítsuk ki a párhuzamos tag eredő impedanciáját és az eredő impedancia fázisszögét!
- c)** Hasonlítsuk össze a vektortábrákat!

Adatok: $U = 10 \, \text{V}$; $R_1 = R_2 = 1 \, \text{k}\Omega$; $C_1 = C_2 = 1 \, \mu\text{F}$; $f = 1 \, \text{kHz}$.



Megoldás

a) A soros R_1C_1 -tag feszültség- és impedancia-háromszöge a 8.16. ábrán látható. Hasonlítsuk össze a 8.12. ábrán látható soros RL -kapcsolás vektorábrájával! Figyeljük meg, hogy a két vektorábra abban különbözik, hogy az U_C feszültség és az X_C reaktancia „lefelé” mutató vektorok, mivel a kondenzátor feszültsége 90° -kal késik az áramhoz képest. Számítsuk kis a soros tag eredő impedanciáját és fázisszögét:

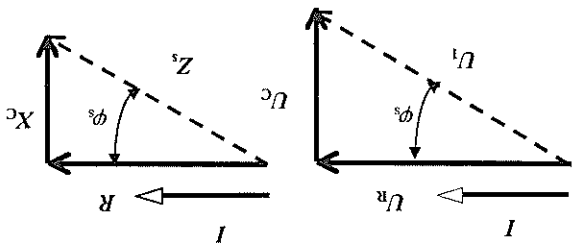
$$X_s = \frac{1}{\frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{1} = 159,2 \, \Omega,$$

$$Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_s^2} = \sqrt{10^6 + 159,2^2} = 1012,6 \, \Omega,$$

$$\varphi_s = \arctg \frac{R_s}{X_s} = \arctg \frac{10^3}{-159,2} = -9^\circ.$$

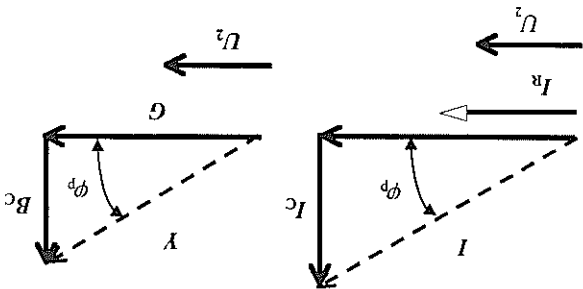
A fázisszög negatív előjele a 8.16. ábrából is következik.

8.16. ábra



b) A párhuzamos R_1C_1 -tag áram- és admittancia-háromszöge a 8.17. ábrán látható.

8.17. ábra



$$G = \frac{1}{R_p} = \frac{10^3}{1} = 1 \text{ mS}; \quad B_C = \omega \cdot C = 2\pi \cdot f \cdot C = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 6,28 \text{ mS},$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \sqrt{1^2 + 6,28^2} \cdot 10^{-6} = 6,36 \text{ mS},$$

$$Z_p = \frac{1}{Y} = \frac{1}{6,36 \cdot 10^{-3}} = 157,23 \, \Omega; \quad \varphi_p = \arctg \frac{B_C}{G} = \arctg \frac{6,28 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 81^\circ.$$

Vizsgáljuk meg a két impedanciavektor fázishelyzetét!

$$\varphi_{sp} = \varphi_p - \varphi_s = 81^\circ - (-9^\circ) = 90^\circ.$$

A soros tag impedanciavektora $\varphi = 90^\circ$ -os szöget zár be a párhuzamos tag impedanciavektorával!

c) Figyeljük meg a 8.16. és 8.17. ábrákat! A soros és párhuzamos tag vektorábrái nem összegezhetőek! A soros taghoz feszültségvektorok és eredő impedanciavektor tartozik, míg a párhuzamos tagnál áramvektorokat és eredő admittanciavektort láthatunk. A párhuzamos tag Y admittanciájából a Z impedancia abszolút értékét az $\frac{Y}{I}$ képlettel ki tudjuk számítani, a $Z = \frac{Y}{I}$ vektor irányát azonban még nem tudjuk vektorművelettel meghatározni. Ahhoz, hogy a vektorokkal reciprok műveleteket, szorzást, osztást is el tudjunk végezni, be kell vezetnünk a **komplex szám** fogalmát. Ezzel a módszerrel a 8.6. alfejezetben fogunk foglalkozni.

Feladatok

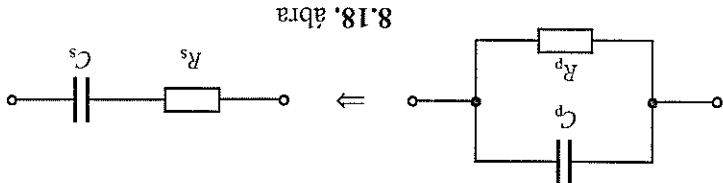
- 8.4.1. Határozzuk meg egy soros RC -kapcsolás eredő impedanciáját és fázisszögét, ha a frekvencia 800 Hz. A kapacitás 350 nF, az ohmos ellenállás 325 Ω . Mekkora a jósági tényező?
- 8.4.2. Egy soros kapcsolás 540 Ω -os ellenállásból és 95 nF kapacitású kondenzátorból áll. Mekkora az áramkörben folyó áram effektív értéke, mekkora az ellenálláson és a kapacitáson eső effektív feszültség, ha a soros RC -kapcsolásra 21,2 V amplitúdójú, 1 kHz frekvenciájú feszültséget kapcsolunk? Számítsuk ki a feszültség és áram közötti fáziseltérést!
- 8.4.3. Egy kondenzátor veszteségi ellenállása 3,7 Ω , kapacitása 3 μF . Mekkora frekvencian mérünk 60-as jósági tényezőt? Mekkora a kondenzátor eredő impedanciája, fázisszöge és veszteségi tényezője ezen a frekvencián?
- 8.4.4. Egy kondenzátor kapacitása 0,72 μF . A vele párhuzamosan kapcsolt fogyasztó ellenállása 57 Ω . Mekkora áram folyik az áramkör két ágában, ha a képfólus kapacitás 24 V amplitúdójú, 16 kHz frekvenciájú szinuszos feszültség mérhető?
- 8.4.5. Írjuk fel a párhuzamos RC -tagra kapcsolt szinuszos feszültség időfüggvényét, ha a kondenzátoron átfolyó áram időfüggvénye $i = 8 \cdot \sin(580t + 25^\circ)$ mA! A kondenzátor kapacitása 42 nF, az ellenállás 7 k Ω -os.
- 8.4.6. Egy 85 Ω -os ellenállással 500 nF kapacitású kondenzátor van párhuzamosan kötve. A kondenzátoron 5 kHz frekvenciájú, 540 mA effektív értékű áram folyik. Mekkora az ellenálláson folyó áram? Mekkora a két áram közötti fáziskülönbség és az eredő impedancia? Ellenőrizzük az áramkörben folyó eredő áramot a feszültség és impedancia, valamint az áramhőteljesítmény felhasználásával!

8.5. Egyenértékű soros és párhuzamos kapcsolások

1. példa

A 8.18. ábrán egy soros és egy párhuzamos RC-kapcsolás látható. Határozzuk meg annak helyettesítő $R_p C_p$ ellenállásból álló párhuzamos RC-kapcsolást!

Adatok: $R_p = 1 \text{ k}\Omega$;
 $C_p = 1 \text{ }\mu\text{F}$;
 $f = 1 \text{ kHz}$.



Megoldás

A 8.18. ábra soros kapcsolása akkor lesz egyenértékű a párhuzamos kapcsolással, ha a két kékpólusra kapcsolt azonos feszültség mindkét kékpóluson azonos áramot hoz létre. Ez akkor lehetséges, ha a két kékpólus impedanciája és az impedancia fázisszöge is azonos. Ebből a feltételből levezethetők az átszámítás képletei:

$$Z_c = Z_s = Z_p, \text{ ill. } \varphi_c = \varphi_s = \varphi_p.$$

Írjuk fel a párhuzamos kapcsolásra az eredő impedancia képletét:

$$\frac{Z_p}{1} = \frac{Y}{1} = \frac{\sqrt{G^2 + X_p^2}}{1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{X_p^2}\right) \cdot \frac{R_p^2 \cdot X_p^2}{1}}}{1} = \frac{\sqrt{\frac{R_p^2 + X_p^2}{R_p^2 \cdot X_p^2}}}{1} = \frac{\sqrt{R_p^2 + X_p^2}}{R_p \cdot X_p}.$$

$$Z_c^2 = \frac{R_p^2 \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} = \frac{R_p^2 \times X_p^2}{1}.$$

A soros ellenállás az eredő impedanciából a fázisszög ismeretében számítható. A 8.12. ábra alapján:

$$R_s = Z_c \cdot \cos \varphi_s.$$

A fázisszögek egyenlőségéből a 8.14. ábra alapján írható:

$$\frac{1}{\cos \varphi_s} = \cos \varphi_c = \cos \varphi_p = \frac{Y}{G} = \frac{R_p}{Z_p} = \frac{R_p}{Z_c} \cdot \frac{Z_p}{R_p} = \frac{Z_e}{R_p} \cdot \frac{R_p}{Z_e^2}.$$

A párhuzamos RC-kapcsolás képletéből levezetett eredő impedanciát behelyettesítve:

$$R_s = \frac{Z_e^2 \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \cdot \frac{R_p}{R_p^2 + X_p^2}, \quad R_s = \frac{R_p \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \quad \text{III.}$$

A párhuzamos kapcsolás adataiból az egyenértékű soros admittancia is kifejezhető:

$$X_s = Z_e \cdot \sin \varphi_e = Z_e \cdot \frac{X_p}{Z_e^2} = \frac{X_p}{X_p^2 + X_p^2} \cdot \frac{R_p^2 \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}, \quad X_s = \frac{R_p^2 \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \quad \text{III.}$$

Számítsuk ki R_s és X_s értéket a példa adataival:

$$R_p = 10^3 \Omega; X_p = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{1} = 159,2 \Omega, \quad R_s = \frac{R_p \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} = \frac{10^3 \cdot 159,2^2}{10^6 + 159,2^2} = 24,7 \Omega, \\ X_s = \frac{R_p^2 \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} = \frac{10^6 \cdot 159,2^2}{10^6 + 159,2^2} = 155,3 \Omega, \quad X_s = \frac{\omega \cdot C}{1}; C_s = \frac{\omega \cdot X_s}{1} = \frac{2\pi \cdot f \cdot X_s}{1} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 155,3}{1} = 1,025 \mu\text{F}.$$

A 8.18. ábrán látható $R_p = 1 \text{ k}\Omega$ -os ellenállásból és $C_p = 1 \mu\text{F}$ -os kondenzátorból álló párhuzamos RC-kapcsolás egy $R_s = 24,7 \Omega$ -os ellenállással és egy vele sorbakapcsolt $C_s = 1,025 \mu\text{F}$ -os kondenzátorral helyettesíthető a megadott $f = 1 \text{ kHz}$ frekvencián.

Ellenőrzés

Ellenőriztük áramkörti szimulációval, hogy valóban egyenértékű-e a két képlet!

A 8.19. és 8.20. ábrákon látható, hogy azonos feszültséget kapcsolva az egyenértékű képletusokra, rajtuk azonos nagyságú áram folyik, tehát eredő impedanciájuk nagysága és fázisszöge valóban megegyezik.

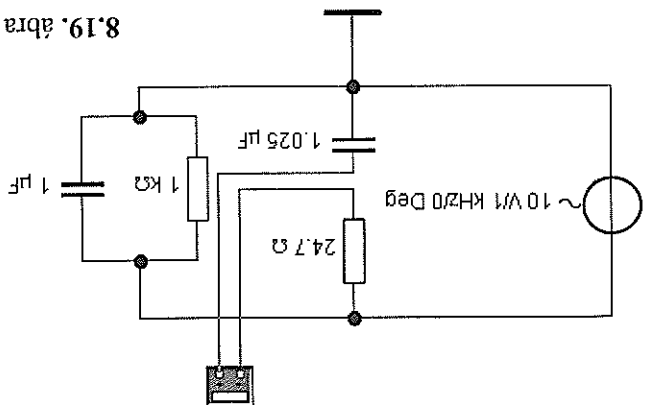
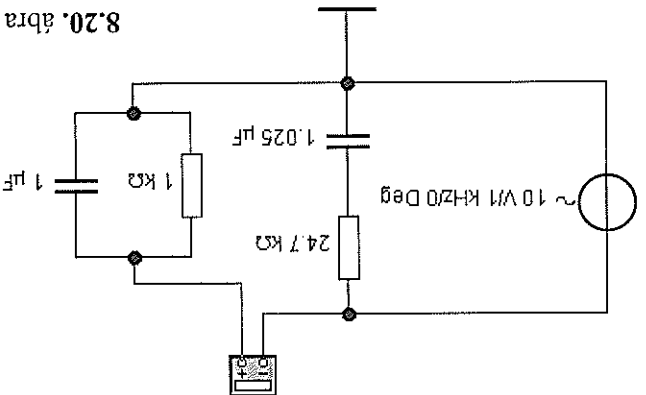
Megjegyzés

Soros RC- vagy RL-kapcsolás is átalakítható egyenértékű párhuzamos kapcsolásá. Az átalakítás képletei az előzőekhez hasonló megfontolással vezethetők le. Az így kapott képletek:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}, \quad \text{III.} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}.$$

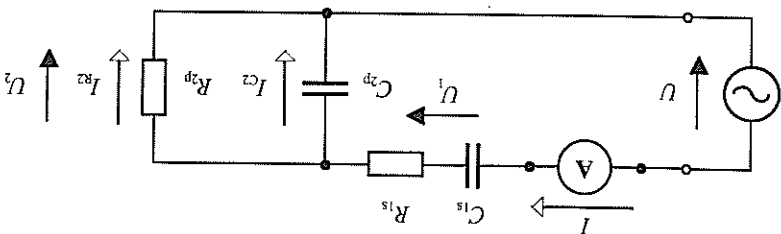
2. példa

- A 8.21. ábrán megismételtük a 8.15. ábra áramkörének kapcsolási rajzát. A 8.4. alfejezet példájában a soros és párhuzamos RC -tagokat tartalmazó áramkörök eredő impedancia-vektorát nem tudtuk meghatározni, mert admittanciavektor nem adható össze impedanciavektorral. A feladatot meg tudjuk oldani a komplex számok bevezetése nélkül, ha az áramkör párhuzamos tagját sorossá alakítjuk, mivel így az eredő impedanciavektor a soros tagok impedanciavektorainak összeadásával már könnyen meghatározható.
- a) Rajzoljuk meg az egyenértékű áramkör kapcsolási rajzát, és számítsuk ki a párhuzamos taggal egyenértékű soros tag kondenzátorának kapacitását és ellenállását! Számítsuk ki az eredő impedanciavektor nagyságát és fázisszögét! Ábrázoljuk az eredő impedanciavektort és összetevőit!
- c) Határozzuk meg az áramkörben folyó I áram nagyságát és fázisszögét!



- d) Számítsuk ki a soros tag ellenállásán és kondenzátorán eső feszültségeket, valamint a párhuzamos tagra jutó feszültségeket! Ábrázoljuk a feszültségekvektorokat! Hasonlítsuk össze az áram és feszültség fázishelyzetét!
- e) Határozzuk meg az eredeti áramkör I_{R_2} és I_{C_2} ágáramainak nagyságát és fázishelyzetét!

Adatok: $U = 10\text{ V}$; $R_{1s} = R_{2p} = 1\text{ k}\Omega$; $C_{1s} = C_{2p} = 1\text{ }\mu\text{F}$; $f = 1\text{ kHz}$.



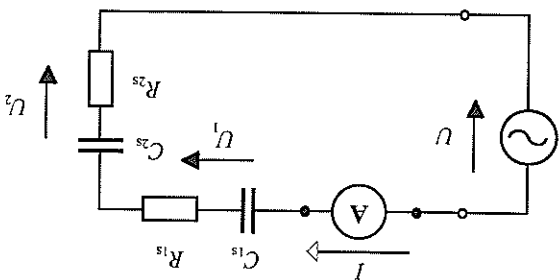
8.21. ábra

Megoldás

- a) A csak soros tagokból álló egyenértékű áramkör kapcsolási rajza a 8.22. ábrán látható.

Az egyenértékű áramkör csak azon a frekvencián helyettesíthető az eredeti áramkörrel, amely frekvencián az X_p reaktanciát kiszámoltuk!

8.22. ábra



Az 1. példában 1 kHz frekvenciára vonatkoztatva már meghatároztuk az 1 k Ω -os ellenállásból és a vele párhuzamosan kapcsolt 1 μF -os kondenzátorból álló párhuzamos RC -taggal egyenértékű soros tag ellenállását és kapacitását:

$$R_{2s} = 24,7\ \Omega; \quad X_{2s} = 155,3\ \Omega; \quad C_{2s} = 1,025\ \mu\text{F}.$$

- b) Az eredő impedanciavektor nagyságát és fázisszögét megkapjuk, ha ábrázoljuk az egyes soros tagok impedanciavektorait. Ezt látható a 8.23. ábrán.

$$X_{1s} = \frac{\omega \cdot C_{1s}}{1} = \frac{2\pi \cdot f \cdot C_{1s}}{1} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{1} = 159,2\ \Omega.$$

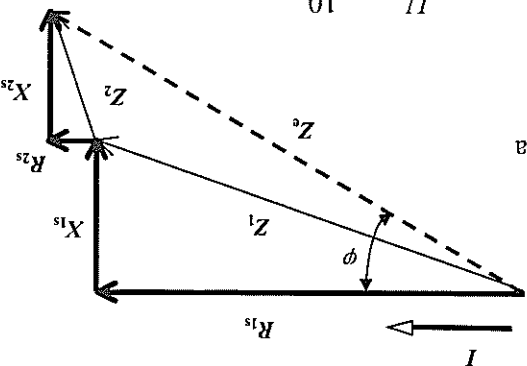
Az eredő impedanciavektor meghatározásához nem kell a Z_1 és Z_2 impedanciavektorokat kiszámítanunk. A 8.22. ábra alapján írhatjuk:

$$R_c = R_{1s} + R_{2s} = 10^3\ \Omega + 24,7\ \Omega = 1024,7\ \Omega,$$

$$X_c = X_{1s} + X_{2s} = 159,2\ \Omega + 155,3\ \Omega = 314,5\ \Omega,$$

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \sqrt{1024,7^2 + 314,5^2} = 1072 \, \Omega,$$

$$\varphi_e = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \frac{-314,5}{1024,7} = -17,1^\circ.$$



8.23. ábra

Mivel az áramkörben az I áram a közös, ezért az áramot választjuk nulla fázishelyzetűnek, vagyis $\varphi_1 = 0^\circ$.

(d) Az áram ismeretében a soros tag ellenállásán és kondenzátorán eső feszültségeket, valamint a párhuzamos tagra jutó feszültséget ki tudjuk számítani:

$$U_{R1} = I \cdot R_{1s} = 9,33 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 10^3 \, \Omega = 9,33 \text{ V},$$

$$U_{C1} = I \cdot X_{1s} = 9,33 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 159,2 \, \Omega = 1,49 \text{ V},$$

$$U_1 = \sqrt{U_{R1}^2 + U_{C1}^2} = \sqrt{9,33^2 + 1,49^2} = 9,45 \text{ V},$$

$$U_{R2s} = I \cdot R_{2s} = 9,33 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 24,7 \, \Omega = 230 \text{ mV},$$

$$U_{C2s} = I \cdot X_{2s} = 9,33 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 155,3 \, \Omega = 1,45 \text{ V},$$

$$U_2 = \sqrt{U_{R2s}^2 + U_{C2s}^2} = \sqrt{0,23^2 + 1,45^2} = 1,47 \text{ V}.$$

Mivel közös áram esetén a feszültségvektorok az impedancia-, ill. az admittancia-vektorok arányosak, a feszültségvektorokat a 8.23. ábra alapján könnyen megrajzolhatjuk. A 8.24. ábrán látható, hogy az eredő U feszültség φ_u szöggel késik az I áramhoz képest.

$$\varphi_u = \varphi_e = -17,1^\circ.$$

e) Az eredeti áramkör párhuzamos tagjára jutó U_2 feszültséget ismerve az ágháramok már meghatározhatók. A 8.21. ábra jelölésével:

$$I_{R2} = \frac{U_2}{R_{2p}} = \frac{10^3}{1} = 1 \text{ mS}; \quad B_{C2} = \frac{X_{C2}}{1} = 2\pi \cdot f \cdot C_{2p} = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 6,28 \text{ mS},$$

$$I_{R2} = Y_{R2} \cdot U_2 = 10^{-3} \cdot 1,47 = 1,47 \text{ mA}; \quad I_{C2} = B_{C2} \cdot U_2 = 6,28 \cdot 10^{-3} \cdot 1,47 = 9,23 \text{ mA}.$$

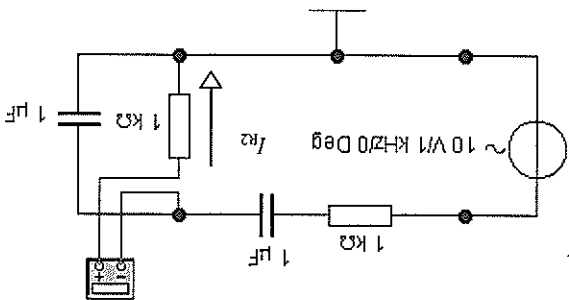
A párhuzamos ág áramvektorainak abszolút értékeit kiszámítottuk. Hogyan határozhatjuk meg a vektorok irányát, azaz fázishelyzetét? A 8.21. ábrán a párhuzamos tagra jutó feszültséget U_2 -vel jelöltük. Az R_2 ellenálláson folyó ágáram fázisban van az U_2 feszültséggel, tehát az áramvektor iránya párhuzamos az U_2 vektor irányával. A párhuzamos ág két kis párhuzamos vonal jelöli a 8.24. ábrán. Azt is tudjuk, hogy a kondenzátor I_{C2} árama 90° -kal siet a feszültségéhez képest, tehát az áramvektor irányát az I_{R2} irányához képest 90° -kal előreforgatva, rá merőlegesen kell berajzolnunk. Végül a két vektor eredője az I áramvektor. A teljes vektorábra a 8.24. ábrán látható. Az I_{R2} és I_{C2} vektorok fázisszöge a derékszögű háromszögből is meghatározható:

$$\phi_{I_{C2}} = \arctg \frac{I_{R2}}{I_{C2}} = \arctg \frac{1,47}{9,23} = 9^\circ,$$

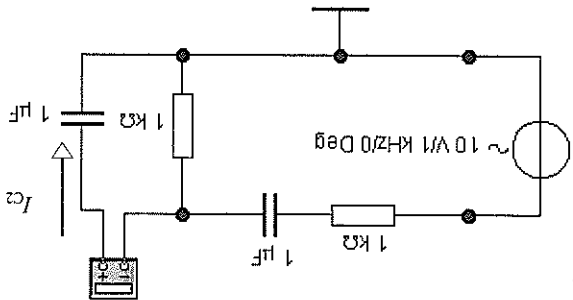
$$\phi_{I_{R2}} = -(90^\circ - \phi_{I_{C2}}) = -(90^\circ - 9^\circ) = -81^\circ.$$

Ellenőrzés

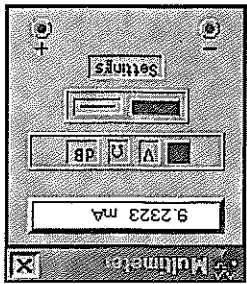
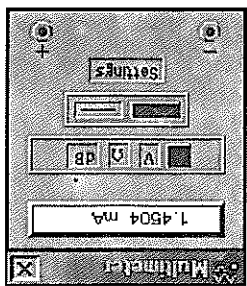
Az ágáramok eredője az I áram: $I = \sqrt{I_{R2}^2 + I_{C2}^2} = \sqrt{1,47^2 + 9,23^2} = 9,35 \text{ mA}$. Ellenőrizzük az ágáramokat áramköri szimulációval (8.25. és 8.26. ábra)!



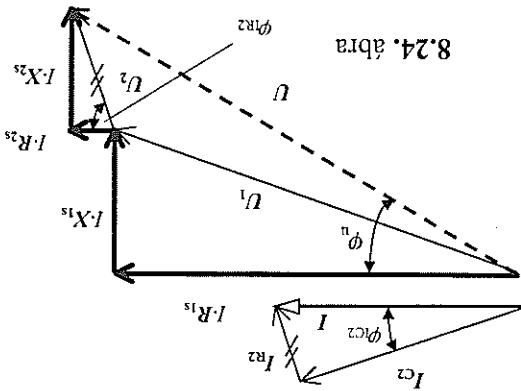
8.25. ábra



8.26. ábra

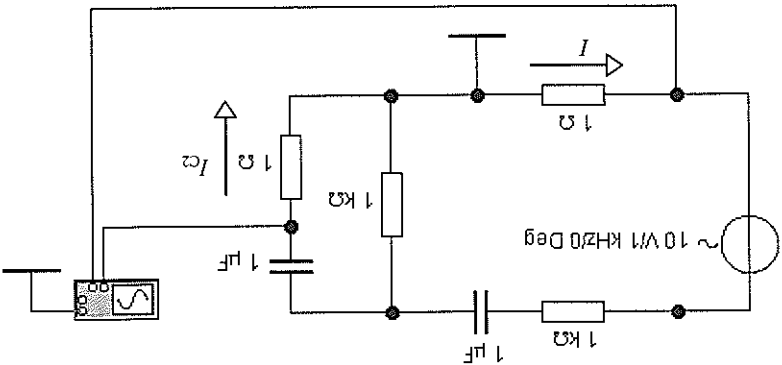


8.24. ábra



A mérési eredmények jól megközelítik a számított értékeket.

Ellenőrizzük az I_{C2} ágáram fázishelyzetét oszcilloszkóppal! Mivel az oszcilloszkópunk két csatornája a földponthoz képest mutatja a feszültségértékeket, az áramkör főágában az I áram méréséhez, a kondenzátor tartalmazó mellékágba az I_{C2} áram méréséhez $1\ \Omega$ -os mérőellenállásokat helyezünk el. Figyeljük meg a **8.27.** ábrát, hogy a mérőellenállásokon eső feszültségek a földponthoz képest mért, a kérdéses áramokkal arányos feszültségek!



8.27. ábra

Az is látható, hogy az I és I_{C2} áramok a mérési összehállításunkban a földponthoz képest ellentétes irányban folynak, ezért a fázisszög mérésének kiértékelésekor ezt a 180° -os elterést figyelembe kell venni.

A 8.28. ábrán az oszcilloszkóp képernyőjéről leolvasható a főág I árama és a kondenzátor I_{C2} árama közötti időeltérés: $T_2 - T_1 = 475\ \mu\text{s}$. Számítsuk ki a két áram közötti fáziseltérést: $\phi_{IC2} = \omega \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot (T_2 - T_1) = 2\pi \cdot 1000 \cdot 475 \cdot 10^{-6} = 2,9845\ \text{rad} = 2,9845 \cdot \frac{180}{\pi} = 171^\circ$.

Az ábrán látható, hogy I_{C2} késik az I áramhoz képest, ezért -171° -kal kell számolni. Vegyük figyelembe a mérési elrendezésből adódó 180° -os fáziseltolódást:

$$\phi_{IC2} = \phi_{IC2} + 180^\circ = -171^\circ + 180^\circ = +9^\circ.$$

Mérési eredményünk megegyezik a számított értékkel.

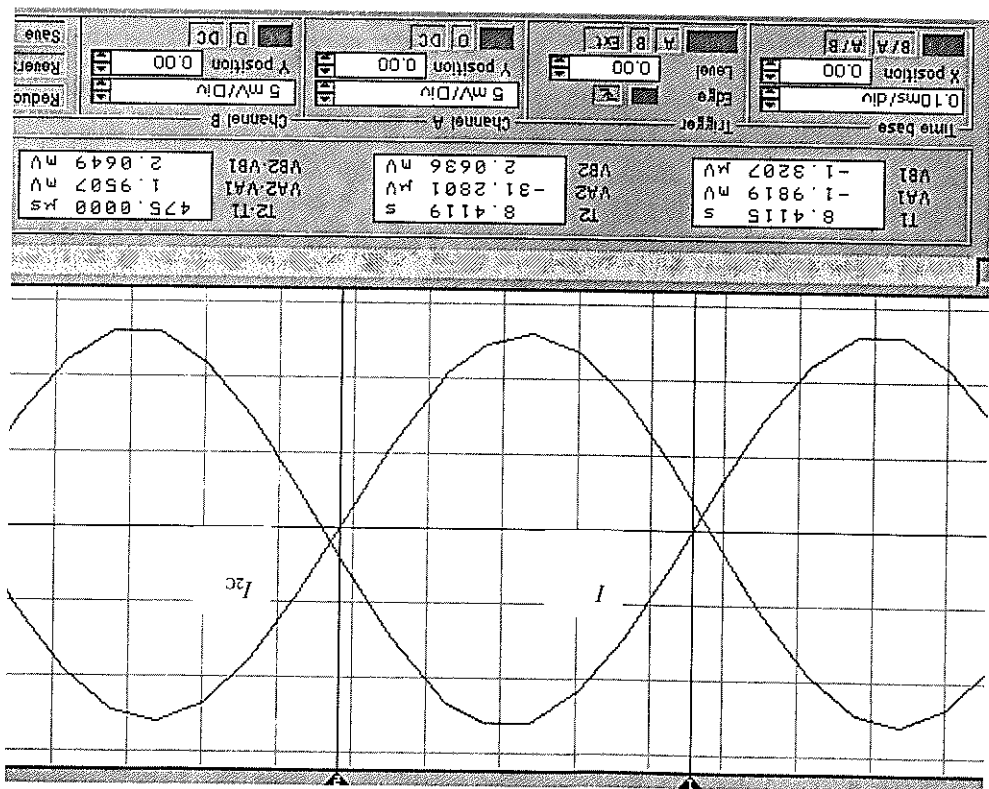
Összefoglalva: A párhuzamos RC-taggal egyenértékű soros RC-tag ohmos ellenállása $24,1\ \Omega$, kapacitása $1,025\ \mu\text{F}$. Az eredő impedanciavektor nagysága $1072\ \Omega$, fázisszöge $-17,1^\circ$. Az áramkörben folyó I áram nagysága $9,33\ \text{mA}$, fázisszöge 0° . Az eredeti áramkör soros ellenállásán $9,33\ \text{V}$, kondenzátorán $1,49\ \text{V}$ feszültség esik. A párhuzamos tagra eső feszültség $1,47\ \text{V}$. A feszültségek fázishelyzeit a **8.24.** ábra szemlélteti. Az áramkör U feszültsége $17,1^\circ$ -kal késik az I áramhoz képest. Az eredeti áramkör párhuzamos RC-tagjának ellenállásán $1,47\ \text{mA}$, a kondenzátoron $9,23\ \text{mA}$ áram folyik. A kondenzátor árama 9° -kal siet, az ellenállás árama 81° -kal késik a főág I áramához képest.

Feladatok

- 8.5.1.** Határozzuk meg annak a párhuzamos kétpólusnak a soros megféléjét, amely egy $220\ \Omega$ -os ellenállásból és egy $4,7\ \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátorból áll! A párhuzamos RC -kapcsolást $800\ \text{Hz}$ frekvencián kell helyettesítenünk.
- 8.5.2.** Egy áramkörben $37\ \text{mH}$ induktivitású tekercset, és egy vele párhuzamosan kapcsolt $27\ \Omega$ -os ellenállást sorbakapcsolt tekercssel és ellenállással akarunk helyettesíteni. Határozzuk meg a helyettesítő tekercs induktivitását és az ellenállás ohmos ellenállását, ha a villamos jel frekvenciája $1,2\ \text{kHz}$!
- 8.5.3.** Egy induktivitással sorbakapcsolunk egy párhuzamos RL -tagot. Határozzuk meg az eredő impedancia nagyságát és fázisszögét és számítsuk ki az áramkörben folyó áramot, ha a kapcsolásra $34\ \text{V}$ -os, $50\ \text{Hz}$ frekvenciájú feszültséget kapcsolunk! Számítsuk ki a soros és párhuzamos tagra jutó feszültségek abszolút értékét! Rajzoljuk meg a feszültségek és áramok vektordiagramját! Számítsuk ki a párhuzamos induktivitáson folyó áram fázisszögét! Válasszuk az ohmos ellenálláson átfolyó áram fázishelyzetét nullának!

Adatok: $L_1 = 1,5\ \text{H}$; $L_2 = 2,7\ \text{H}$; $R_2 = 600\ \Omega$.

8.28. ábra



8.6. Szinuszos mennyiségek komplex leírása

Összefoglalás a komplex számokról

Az előző alfejezetekben tapasztaltuk, hogy soros és párhuzamos tagokat tartalmazó kapcsolásoknál az áramkörben fellépő feszültségeket, áramokat és az eredő impedanciát csak az eredeti áramkör átalakításával tudtuk meghatározni. Nem tudtuk értelmezni az $\frac{Y}{I}$ vektorokat. A komplex számok bevezetésével, a komplex számokhoz rendelt vektoroknál nemcsak az összeadás és kivonás, hanem a reciprokképzés, szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás művelete is értelmezhetővé váltak.

A komplex impedancia fogalmának bevezetésével formailag a szinuszos hálózatokra is alkalmazhatjuk az egyenáramú hálózatoknál megismert valamennyi törvényt, pl. a feszültségosztás, az áramosztás törvényét, Kirchhoff törvényeit és az Ohm-törvényt.

Ezek az összefüggések a komplex számokra érvényesek. A komplex számokkal való számolás után a komplex szám abszolút értékének meghatározásával jutunk el a tényleges, mérhető effektív áram, effektív feszültség és impedancia értékekhez.

Számításainkban arra kell ügyelnünk, hogy a komplex számokban a képzetes irányt jelölő f egységvektor $f \cdot j = j^2$ szorzatának értéke: -1 . Miért?

Ha a valós tengely irányát az e egységvektorral, a képzetes tengely irányát a f egységvektorral jelöljük, akkor:

$$\begin{aligned} |e + j| &= |e - j| = \sqrt{2}, \\ |e + j| \cdot |e - j| &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk az e és f vektorokra az ismert $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ összefüggést:

$$|e + j| \cdot |e - j| = |e^2 - j^2| = |e^2 - j^2| = 2.$$

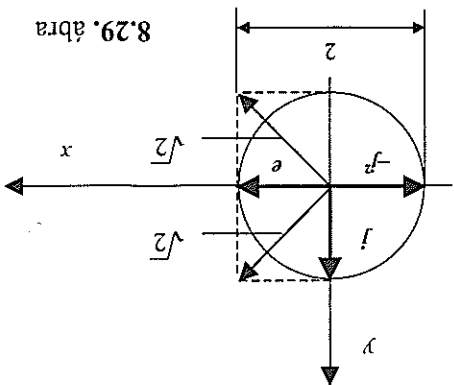
Az e egységvektor önmagával megszorozva $e \cdot e = e^2 = e$ egységvektort kell kapunkk.

Figyeljük meg a 8.29. ábrát! A j^2 vektor egyenlő $-e$ vektorral, mert csak ebben az eset-

ben teljesül az $|e - j^2| = 2$ feltétel:

$$|e - (-e)| = |e + e| = |2e| = 2.$$

A 8.29. ábrán láthatjuk, hogy a j^2 vektor valóban a -1 komplex számra mutat, tehát $j = \sqrt{-1}$.



8.29. ábra

Ahhoz tehát, hogy a vektorokkal végzett műveletekre is érvényesek legyenek az algebrára megszokott szabályai, egy szokatlan egységgel, a *képzetes (imagindrius)* egységgel kell számolnunk.

Egy komplex számot többféleképpen is leírhatunk. A jelölések a 8.30. ábrán láthatók.

A komplex szám algebrai alakja:

$$\underline{z} = e \cdot x + j \cdot y.$$

A továbbiakban a szokásos egyszerűsített jelölést alkalmazzuk, a valós tengely irányát jelölő e egyszerűen nem írjuk ki, és j helyett egyszerűen

$$j\text{-t írunk: } \underline{z} = x + jy.$$

A komplex szám trigonometrikus alakja:

$$\underline{z} = z \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

ahol z a komplex vektor nagysága, a komplex szám abszolút értéke, φ a fázisszög.

$$\text{Az ábrából látható, hogy } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

A komplex szám exponenciális alakját az $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ matematikai azonosság alapján írhatjuk fel:

$$\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}.$$

Egy ω körfrekvenciával forgó komplex feszültségvektor komplex pillanatértéke $\varphi = \omega \cdot t$ helyettesítéssel:

$$\underline{u} = U^{cs} \cdot e^{j\omega \cdot t} = U^{cs} \cdot (\cos \omega \cdot t + j \sin \omega \cdot t).$$

Egy szinuszfűgvényenyleírt feszültség pillanatértéke a komplex feszültség képzetes összetevőjével egyenlő: $u = U^{cs} \cdot \sin \omega \cdot t = \operatorname{Im} \underline{u}$.

Az Im rövidítés a komplex szám imaginárius, képzetes részére utal.

A koszinuszfügvényenyleírt feszültség pillanatértéke a komplex feszültség valós összetevőjével egyenlő: $u = U^{cs} \cdot \cos \omega \cdot t = \operatorname{Re} \underline{u}$.

Az Re rövidítés a komplex szám valós részére utal.

A szinuszos mennyiségek mindkét függvényel megadhatók, hiszen a koszinuszgörbe 90° -kal előtti szinuszgörbénél tekinthető. A koszinuszfügvényenyleírt ábrák gyakoriabb, mivel ekkor az időfüggvény a komplex függvény valós részével azonos. Figyeljünk arra, hogy egy feladaton belül csak az egyik leírási módot alkalmazzuk!

A $t = 0$ s időpillanatban felvett fázisszöget minden **kezdőfázisnak** nevezzük. Írjuk fel a komplex pillanatértékeket arra az esetre, ha a forgó feszültségvektor kezdőfázisa φ_0 , az áramvektor kezdőfázisa φ_1 ! Legyen $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$!

A feszültség és áram valós pillanatértéket: $u = U^{\text{cs}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$,
 $i = I^{\text{cs}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$.

A feszültség és áram komplex pillanatértékei:

$$\underline{u} = U^{\text{cs}} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi_u)} = U^{\text{cs}} \cdot [\cos(\omega \cdot t + \varphi_u) + j \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)],$$

$$\underline{i} = I^{\text{cs}} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi_i)} = I^{\text{cs}} \cdot [\cos(\omega \cdot t + \varphi_i) + j \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)].$$

Osszuk el a komplex feszültség pillanatértékét a komplex áram pillanatértékével:

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U^{\text{cs}} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi_u)}}{I^{\text{cs}} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi_i)}} = \frac{U^{\text{cs}} \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot e^{j\varphi_u}}{I^{\text{cs}} \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U^{\text{cs}} \cdot e^{j\varphi_u}}{I^{\text{cs}} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{U^{\text{cs}} \cdot e^{j\varphi_u}}{I^{\text{cs}} \cdot e^{j\varphi_i}} = \underline{Z} = Z \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

Az

$$\underline{U}^{\text{cs}} = U^{\text{cs}} \cdot e^{j\varphi_u} \text{ és } \underline{I}^{\text{cs}} = I^{\text{cs}} \cdot e^{j\varphi_i}$$

kifejezéseket a feszültség és áram komplex csúcsértékeinek, az

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \text{ és } \underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$

kifejezéseket a feszültség és az áram **komplex effektívértékeinek** nevezzük. Hányadosuk a **komplex impedancia**:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

Az időt tartalmazó $e^{j\omega \cdot t}$ taggal egyszerűsíteni lehetett, a komplex impedancia képletében az idő már nem szerepel. Ezért alkalmazhatjuk komplex mennyiségekre az Ohm-törvényt, és az egyenáramú hálózatoknál megismert valamennyi törvényt.

Írjuk fel a $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$ komplex impedancia értékét ellenállásra, induktivitásra és kondenzátorra! Legyen a feszültség kezdőfázisa $\varphi_u = 0$! Mivel az ohmos ellenálláson a feszültség és áram fázisban van, ezért $\varphi_u - \varphi_i = \varphi = 0$.

$$\underline{Z}_R = Z_R \cdot e^{j0} = Z_R.$$

A valós feszültség és a $-j$ irányba néző komplex áram hányadosa:

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j0}}{I \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{U \cdot L}{I \cdot \omega \cdot L} = \omega \cdot L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \cdot L,$$

$$\text{mivel } e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = 0 + j = j.$$

Mivel a kapacitív áram a feszültséghez képest 90° -kal siet, a kapacitív komplex impedancia:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I \cdot \frac{\omega \cdot C}{1}} = \frac{I \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{I \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{j\omega \cdot C}.$$

A komplex impedanciák:

$$\underline{Z}_R = R; \quad \underline{Z}_L = j\omega \cdot L; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega \cdot C}.$$

Az általánosított Ohm-törvény: $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$, ill.

$$\underline{U}_R = \underline{Z}_R \cdot \underline{I} = R \cdot \underline{I}; \quad \underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} = j\omega \cdot L \cdot \underline{I}; \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \underline{I}.$$

A komplex teljesítmény

A komplex teljesítmény a komplex feszültség és a komplex áram konjugáltjának szorzata.

Legyen $\varphi_u = \varphi_i + \varphi$:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi - \varphi_i)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + j\tilde{Q}.$$

A hatásos teljesítmény: $P = \operatorname{Re} \underline{S} = U \cdot I \cdot \cos \varphi$.

A meddő teljesítmény: $\tilde{Q} = \operatorname{Im} \underline{S} = U \cdot I \cdot \sin \varphi$.

A látszólagos teljesítmény: $S = |\underline{S}| = U \cdot I = \sqrt{P^2 + \tilde{Q}^2}$.

1. példa

A 8.1. alfejezet 2. példájában a 8.2. ábrán két szinuszos feszültség, az u_0 és u_1 feszültségek idődiagramja látható. Az u_0 feszültség kezdőfázisa, azaz fázishelyezete a $t = 0$ időpillanatban $\varphi_u = 0^\circ$ volt.

a) Határozzuk meg a komplex algebra alkalmazásával az eredő feszültség effektív és csúcserőértékét, valamint kezdőfázisát!

b) Határozzuk meg az eredő feszültség időfüggvényét!

Adatok: $U_{0cs} = 200$ mV; $U_{1cs} = 125$ mV; $\varphi_1 = 55^\circ$; $f = 400$ Hz.

Megoldás

a) Számítsuk ki a feszültségek komplex effektív értékeit:

$$\varphi_1 = 55^\circ = 55 \cdot \frac{180}{\pi} = 0,96 \text{ rad}, \quad \underline{U}_0 = \frac{\sqrt{2}}{200} \cdot e^{j0} = \frac{\sqrt{2}}{200} = 141,4 \text{ mV, ill. } \underline{U}_1 = \frac{\sqrt{2}}{125} \cdot e^{j\varphi_1} = \frac{\sqrt{2}}{125} \cdot e^{j0,96} = 88,39 \cdot e^{j0,96} \text{ mV.}$$

A feszültségek összeadásához írjuk fel a komplex feszültségek algebrai alakjait:

$$\underline{U}_0 = 141,4 \text{ mV}, \quad \underline{U}_1 = U_1 \cdot (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = 88,39 \cdot (\cos 55^\circ + j \sin 55^\circ) = (50,7 + j72,4) \text{ mV}, \quad \underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 = 141,4 + (50,7 + j72,4) = (192,1 + j72,4) \text{ mV.}$$

Az eredő effektív feszültség értékeit a komplex effektív feszültség abszolút értéke adja:

$$U = |\underline{U}| = \sqrt{(\operatorname{Re} U)^2 + (\operatorname{Im} U)^2} = \sqrt{192,1^2 + 72,4^2} = 205,3 \text{ mV.}$$

Az eredő csúcscsúsfeszültség: $U_{\text{cs}} = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 205,3 = 290,4 \text{ mV.}$

Az eredő feszültség kezdőfázisa:

$$\varphi_c = \arctg \frac{\operatorname{Im} U}{\operatorname{Re} U} = \arctg \frac{192,4}{72,4} = 20,6^\circ.$$

Az eredményeink megegyeznek a 8.1.2. példa eredményeivel.

b) Az eredő feszültség időfüggvényét fel tudjuk írni, mert ismerjük a feszültség csúcserőket és kezdőfázisát:

$$u = U_{\text{cs}} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_c) = 290,4 \cdot \sin(2\pi \cdot 400 \cdot t + 20,6^\circ) \text{ mV.}$$

Hasonlítsuk össze a komplex algebra módszerét a 8.1.2. példa megoldásának módszerével! Megfigyelhetjük a hasonlóságot. Pl. az eredő feszültségvektor x irányú összevetőjét ott is két vektor x irányú összevetőjének összeadásával számolunk ki, ehhez azonban meg kellett rajzolnunk a 8.3. vektorábrát. A komplex algebra alkalmazásának előnye bonyolult áramkörök vizsgálatánál még szembevetőbb.

2. példa

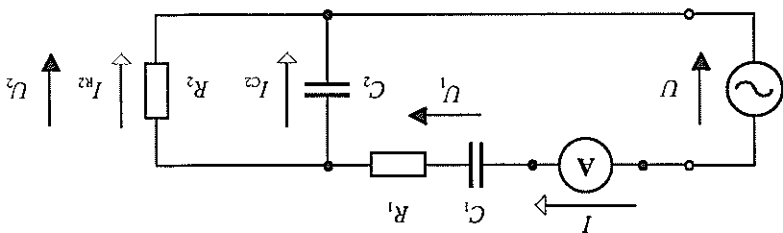
A 8.5. alfejezet 2. példájában párhuzamos-soros átalakítással számítottuk ki az eredő impedanciát, az áramkörben folyó áramot és ágáramokat. Oldjuk meg ezt a feladatot a komplex módszer alkalmazásával! Az eredeti áramkör a 8.31. ábrán látható.

- a)** Számítsuk ki az eredő impedanciavektor nagyságát és fázisszögét!
b) Határozzuk meg az áramkörben folyó I áram nagyságát és fázisszögét!
c) Határozzuk meg az áramkör I_{R_2} és I_{C_2} ágáramainak nagyságát és fázishelyzetét!
d) Számítsuk ki a soros tag ellenállásán és kondenzátorán eső feszültségeket, valamint a párhuzamos tagra jutó feszültséget! Hasonlítsuk össze az áram és feszültség fázishelyzetét!

e) Számítsuk ki a hatásos, a meddő és a látványos teljesítményt!

Adatok: $U = 10 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$; $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$; $f = 1 \text{ kHz}$.

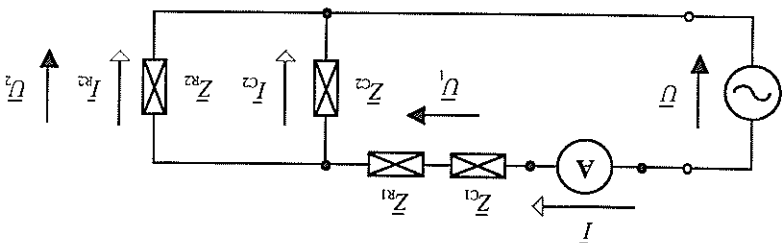
8.31. ábra



Megoldás

a) Rajzoljuk át a 8.31. ábra áramkört úgy, hogy alkalmazzuk az áramköri elemek és mennyiségek komplex jelölési módját! Ezt láthatjuk a 8.32. ábrán.

8.32. ábra



Válasszuk az U effektív feszültség indukáló fázishelyzetét nullának. Ez annyit jelent, hogy az U feszültségnek nincs képzetes, csak valós része, mivel $\sin 0^\circ = 0$.

$$\underline{U} = U \cdot (\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = U.$$

Irjuk fel a komplex impedanciákat:

$$\underline{Z}_{R1} = \underline{Z}_{R2} = R = 1 \text{ k}\Omega;$$

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \frac{1}{j\omega \cdot C} = \frac{j2\pi \cdot f \cdot C}{1} = \frac{j \cdot j \cdot 2\pi \cdot f \cdot C}{j} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = -j \cdot \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{1} = -j \cdot 159,2 \Omega.$$

Határozzuk meg a $\underline{Z}$ eredő impedanciát:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1}; \text{ ill. } \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{C2} \times \underline{Z}_{R2};$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.$$

Komplex számokat úgy adunk össze, hogy a valós részhez a valós rész, a képzetes részhez a képzetes rész adjuk hozzá előjelhelyesen:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1} = -j \cdot 159,2 + 1000 = (1000 - j \cdot 159,2) \Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{C2} \times \underline{Z}_{R2} = \frac{\underline{Z}_{C2} \cdot \underline{Z}_{R2}}{\underline{Z}_{C2} + \underline{Z}_{R2}}.$$

A $\underline{Z}_{C2} \cdot \underline{Z}_{R2}$ komplex szorzást az algebra szabályainak megfelelően úgy kell elvégezni,

hogy minden tagot minden taggal megszorozunk:

$$\underline{Z}_{C2} \cdot \underline{Z}_{R2} = (-j \cdot 159,2) \cdot 1000 = -j \cdot 159,2 \cdot 10^3;$$

$$\underline{Z}_{C2} + \underline{Z}_{R2} = -j \cdot 159,2 + 1000 = 1000 - j \cdot 159,2;$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{C2} \cdot \underline{Z}_{R2}}{\underline{Z}_{C2} + \underline{Z}_{R2}} = \frac{-j \cdot 159,2 \cdot 10^3}{1000 - j \cdot 159,2}.$$

Komplex számot úgy osztunk komplex számmal, hogy a számlálót is és a nevezőt is megszorozzuk a nevező konjugáltjával. A konjugált képzése úgy történik, hogy a képzetes rész előjelét megváltoztatjuk. Ezáltal a nevezőben az $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ azonososságnak megfelelően az $a^2 - (jb)^2 = a^2 + b^2$, azaz a valós és képzetes rész négyzetének összege kerül, mivel a $j^2 = -1$ egyenlőség miatt az előjel megváltozik.

$$\underline{\underline{Z}} = \frac{(-j \cdot 159,2 \cdot 10^3) \cdot (1000 + j \cdot 159,2)}{(-j^2 \cdot 159,2^2 - j \cdot 159,2 \cdot 10^6)} = \frac{(1000 - j \cdot 159,2) \cdot (1000 + j \cdot 159,2)}{1000^2 + 159,2^2} = (24,7 - j \cdot 155,3) \, \Omega.$$

Az eredő komplex impedancia:

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}_1 + \underline{\underline{Z}}_2 = (1000 - j \cdot 159,2) + (24,7 - j \cdot 155,3) = (1024,7 - j \cdot 314,5) \, \Omega.$$

Számítsuk ki az eredő komplex impedancia abszolút értékét!

$$Z = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{\underline{Z}})^2 + (\operatorname{Im} \underline{\underline{Z}})^2} = \sqrt{1024,7^2 + 314,5^2} = 1072 \, \Omega.$$

Számítsuk ki a fázisszögét!

$$\varphi_z = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \underline{\underline{Z}}}{\operatorname{Re} \underline{\underline{Z}}} = \operatorname{arctg} \frac{-314,5}{1024,7} = -17,1^\circ.$$

Eredményeink megegyeznek a 8.5. alfejezet 2. példájának eredményeivel.

Figyeljük meg, hogy a $\underline{\underline{Z}}_1$ és $\underline{\underline{Z}}_2$ komplex vektorok valós és képzetes részes megegyezik a 8.5.2. példa 8.23. ábráján látható impedanciavektorok R és X összevetőivel.

b) Az általánosított Ohm-törvény alapján számítsuk ki az áramkörben folyó $\underline{\underline{I}}$ komplex áramot! Mivel az U feszültség kezdeti fázisát nullának választottuk:

$$\underline{\underline{I}} = \frac{\underline{\underline{U}}}{\underline{\underline{Z}}} = \frac{10}{10 \cdot (1024,7 + j \cdot 314,5)} = \frac{1024,7 - j \cdot 314,5}{1024,7^2 + 314,5^2} = (8,92 + j \cdot 2,74) \, \text{mA}.$$

Számítsuk ki az áram effektív értékét és induló fázishelyzetét:

$$I = \sqrt{8,92^2 + 2,74^2} = 9,33 \, \text{mA, ill. } \varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{8,92}{2,74} = +17,1^\circ.$$

Az áramkör árama $\varphi_i = 17,1^\circ$ -kal siet a feszültséghez képest, vagy ahogyan a 8.24. ábrán ábrázoltuk, a feszültség $\varphi_u = 17,1^\circ$ -kal késik a generátor áramához képest.

c) Számítsuk ki az $\underline{\underline{I}}_{C2}$ komplex ágáramot az áramosztó képlettel:

$$\underline{\underline{I}}_{C2} = \underline{\underline{I}} \cdot \frac{\underline{\underline{Z}}_{R2}}{\underline{\underline{Z}}_{R2} + \underline{\underline{Z}}_{C2}} = (8,92 + j \cdot 2,74) \cdot \frac{1000 - j \cdot 159,2}{1000^2 + 159,2^2} = (8,92 + j \cdot 2,74) \cdot 10^3 \cdot \frac{1000 + j \cdot 159,2}{(8,92 + j \cdot 2,74) \cdot 10^3 \cdot (1000 + j \cdot 159,2)} = (8,27 + j \cdot 4,06) \, \text{mA}.$$

Az $\underline{I}_{C2}$ abszolút értéke és kezdőfázisa:

$$I_{C2} = \sqrt{4,06^2 + 9,21^2} = 9,21 \text{ mA, ill. } \varphi_{IC2} = \arctg \frac{8,27}{4,06} = 26,1^\circ.$$

Az $\underline{I}_{R2}$ abszolút értéke és kezdőfázisa:

$$\underline{I}_{R2} = \underline{I} - \underline{I}_{C2} = (8,92 + j \cdot 2,74) - (8,27 + j \cdot 4,06) = (0,65 - j \cdot 1,32) \text{ mA,}$$

$$I_{R2} = \sqrt{0,65^2 + 1,32^2} = 1,47 \text{ mA, ill. } \varphi_{IR2} = \arctg \frac{0,65}{-1,32} = -63,8^\circ.$$

A 8.5. alfejezet 2. példájában az I_{R2} áram fázisszöge $\varphi_{IR2} = -81^\circ$ volt. Miből adódik az előérés? Figyeljük meg, hogy ott az áramot választottuk nulla fázishelyzetűnek, itt pedig a feszültséget. A 8.24. ábrán láthatjuk, hogy a feszültség fázisszöge $\varphi_u = -17,1^\circ$, azaz a feszültségvektor +17,1°-kal kell pozitív irányba elforgatnunk, hogy nulla fázishelyzetre kerüljön. Ha az I_{R2} áramvektort is elforgatjuk +17,1°-kal, akkor jó közelítéssel az $\underline{I}_{R2}$ komplex vektor számított fázishelyzetét kapjuk:

$$\varphi_{IR2} = -81^\circ + 17,1^\circ = -63,9^\circ \approx -63,8^\circ.$$

Ha a 8.24. ábra vektorábráját elforgatjuk φ_u szöggel, a komplex vektorok vektorábráját kapjuk.

d) Számítsuk ki a soros tag ellenállásán eső feszültségeket, valamint a párhuzamos tagra jutó feszültségeit! Számítsuk ki a feszültségek induktív fázishelyzetét is!

$$\underline{U}_{R1} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{R1} = \underline{I} \cdot R = (8,92 + j \cdot 2,74) \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = (8,92 + j \cdot 2,74) \text{ V,}$$

$$U_{R1} = \sqrt{8,92^2 + 2,74^2} = 9,33 \text{ V; ill. } \varphi_{UR1} = \arctg \frac{2,74}{8,92} = 17,1^\circ,$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{C1} = (8,92 + j \cdot 2,74) \cdot 10^{-3} \cdot (-j \cdot 159,2) = (0,436 - j \cdot 1,42) \text{ V,}$$

$$U_{C1} = \sqrt{0,436^2 + 1,42^2} = 1,49 \text{ V; ill. } \varphi_{UC1} = \arctg \frac{0,436}{-1,42} = 73^\circ,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_2 = (8,92 + j \cdot 2,74) \cdot 10^{-3} \cdot (24,7 - j \cdot 155,3) = (0,646 - j \cdot 1,318) \text{ V,}$$

$$U_2 = \sqrt{0,646^2 + 1,318^2} = 1,47 \text{ V; ill. } \varphi_{U2} = \arctg \frac{0,646}{-1,318} = -63,9^\circ.$$

Figyeljük meg, hogy a párhuzamos ág ohmos ellenállásán átfolyó I_{R2} áram fázisa megegyezik az ellenálláson lévő U_2 feszültség fázishelyzetével, $\varphi_{IR2} = \varphi_{U2} = 63,8^\circ$! A 8.24. ábrán ennek alapján rajzoljuk meg az U_2 irányával párhuzamos I_{R2} áram irányát.

e) Számítsuk ki a hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítményt:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot \underline{I} = 10 \text{ V} \cdot (8,92 + j \cdot 2,74) \text{ mA} = (89,2 + j \cdot 27,4) \text{ mW,}$$

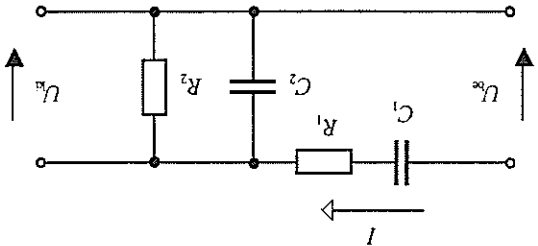
$$P = 89,2 \text{ mW; } \bar{Q} = 27,4 \cdot 10^{-3} \text{ var; } S = \sqrt{P^2 + \bar{Q}^2} = \sqrt{89,2^2 + 27,4^2} = 93,3 \text{ mV} \cdot \text{A.}$$

8.6.1. Írjuk fel a megadott két áramfüggvény komplex alakjait, majd számítsuk ki a két áramösszetevő és az eredő áram effektív értékét és kezdőfázisát! Ábrázoljuk a komplex vektorokat! Írjuk fel az eredő időfüggvényt, és számítsuk ki az áram értékét és fázisát a $t = 1,5$ s időpillanatban, ha a frekvencia 650 Hz! A két áramfüggvény: $i_1 = 4 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ)$; $i_2 = 6 \cdot \cos(\omega \cdot t + 65^\circ)$. A két függvény közül válasszuk a szinuszfüggvény szerinti ábrázolásmódot!

8.6.2. Határozzuk meg a 8.33. ábrán látható ún. Wien-osztó határfrekvenciáját! Határozzuk meg az oszto U_{ki}/U_{be} feszültségátvitelét és a kimeneti feszültség fázisát, ha a bemeneti feszültség kezdőfázisát nullának választjuk! Az oszto határfrekvencián működik.

Adatok: $U_{be} = 10$ V;
 $R_1 = R_2 = 1$ k Ω ;
 $C_1 = C_2 = 100$ nF.

8.33. ábra



8.7. Soros és párhuzamos RLC-kapcsolások, rezgőkörök

1. példa

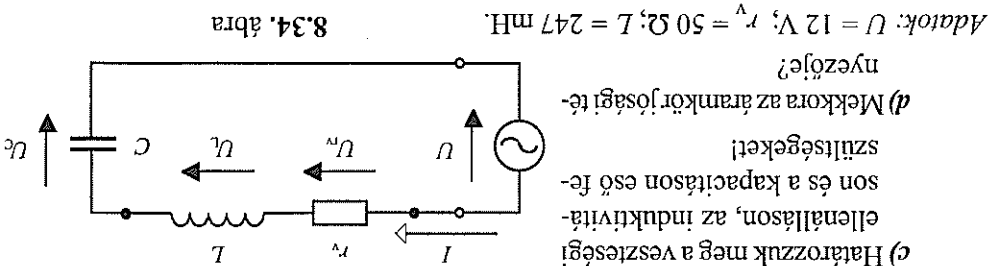
A 8.34. ábrán egy soros rezgőkör látható. Az r_v ellenállás a rezgőköri tekercs veszteségi ellenállása 50 Ω , a tekercs induktivitása 247 mH. A soros rezgőkörre 12 V effektív értékű szinuszos feszültséget kapcsolunk.

a) Írjuk fel a rezgőkör komplex impedanciáját és határozzuk meg a kapacitásának azt az értékét, amely mellett a rezgőkör rezonanciafrekvenciája 500 Hz!

b) Számítsuk ki az áramkörben folyó áramot!

c) Határozzuk meg a veszteségi ellenálláson, az induktivitáson és a kapacitásán eső feszültségeket!

d) Mekkora az áramkör jósági tényezője?



8.34. ábra

Adatok: $U = 12$ V; $r_v = 50$ Ω ; $L = 247$ mH.

Megoldás

a) Írjuk fel a komplex impedancia kifejezését:

$$\underline{Z} = r_v + j\omega \cdot L + \frac{j\omega \cdot C}{1} = r_v + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{\omega \cdot C}{1} \right).$$

Rezonancia esetén:

$$\omega \cdot L = \frac{\omega \cdot C}{1}.$$

Ebben az esetben a képzetes rész nulla, így a komplex impedancia tisztán ohmos ellenállás. Példánkban ez az ellenállás r_v az indukтивitás veszteségi ellenállása.

A képlet átrendezésével kapjuk az ω_0 rezonáns körfrekvenciát, ill. Thomson képletét, amelyekből az ismeretlen C kapacitás meghatározható:

$$C = \frac{\omega_0^2 \cdot L}{1} = \frac{(2\pi \cdot f_0)^2 \cdot L}{1} = \frac{(2\pi \cdot 500)^2 \cdot 0,247}{1} = 410 \cdot 10^{-9} = 410 \text{ nF}.$$

b) Az áramkörben folyó áram:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{r_v} = I = \frac{50}{12} = 240 \text{ mA}.$$

c) A veszteségi ellenálláson eső feszültség: $U_{r_v} = I \cdot r_v = 0,24 \cdot 50 = 12 \text{ V}.$

Az indukтивitáson eső feszültség és a feszültség fázisszöge:

$$\underline{U}_L = I \cdot \underline{Z}_L = I \cdot (j\omega \cdot L) = I \cdot (j2\pi \cdot f_h \cdot L) = 0,24 \cdot (j2\pi \cdot 500 \cdot 0,247) = j \cdot 186,2 \text{ V},$$

$$U_L = 186,2 \text{ V; ill. } \phi_L = +90^\circ.$$

A kapacitáson eső feszültség és a feszültség fázisszöge:

$$\underline{U}_C = I \cdot \left(\frac{1}{j\omega \cdot C} \right) = -j \cdot \frac{2\pi \cdot f \cdot C}{I} = -j \cdot \frac{2\pi \cdot 500 \cdot 410 \cdot 10^{-9}}{0,24} = -j \cdot 186,3 \text{ V},$$

$$U_C = 186,3 \text{ V; ill. } \phi_C = -90^\circ.$$

Ha a szinuszos feszültség frekvenciája megegyezik a rezonanciafrekvenciával, akkor az indukтивitáson ugyanakkora a feszültségesség mint a kapacitáson, de a két feszültség fázisa ellentétes.

Az indukтивitáson és a kapacitáson a generátor feszültségénél jóval nagyobb feszültség keletkezik, amely feszültségek egymást kioltják, a tekercs és a kondenzátor szigetelését azonban átűthetik, és életveszélyes áramütést is okozhatnak!

d) Az admittanciákon és az ohmos ellenálláson eső feszültségek aránya a rezgőkör jóságára jellemző:

$$\bar{Q} = \frac{X_L}{X_C} = \frac{r_v}{X_C} = \frac{I \cdot X_C}{I \cdot r_v} = \frac{12}{186,3} = 15,5.$$

A rezgőkör rezonanciafrekvenciája 500 Hz, ha 410 nF-os kondenzátort alkalmazunk. Az áramkörben folyó áram rezonanciafrekvencián 240 mA. A veszteségi ellenálláson eső feszültség 12 V, az induktivitáson és a kapacitáson eső feszültség 186,3 V, fázisuk ellentétes, ezért kioltják egymást. Az áramkör jósági tényezője 15,5.

Megjegyzés: Mivel a veszteségi ellenállás a valóságban nem különíthető el a tekercstől, ezért a tekercsen mérhető feszültség az ohmos feszültség és az induktív feszültség vektorális összegével egyenlő: $U_L = \sqrt{12^2 + 186,3^2} = 186,7 \text{ V}$.

2. példa

A 8.35. ábrán egy párhuzamos rezgőkör látható. A rezgőkör jósági tényezője 55. A kondenzátor kapacitása 8 nF, a tekercs induktivitása 4,5 mH. A rezgőkörre 15 V effektív értékű szinuszos feszültséget kapcsolunk.

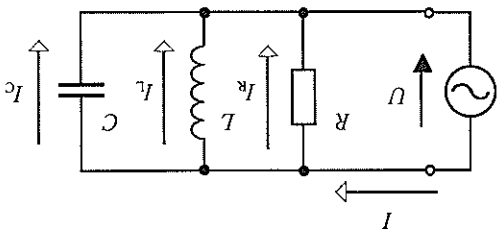
a) Írjuk fel a rezgőkör komplex admittanciáját, és határozzuk meg a rezgőkör rezonanciafrekvenciáját!

b) Számítsuk ki az áramkör főágában folyó I áramot!

c) Számítsuk ki a kondenzátor és tekercset tartalmazó mellékágak áramait!

d) Határozzuk meg a rezgőkör sávszélességét!

Adatok: $U = 15 \text{ V}$; $C = 8 \text{ nF}$;
 $L = 4,5 \text{ mH}$; $Q = 55$.



8.35. ábra

Megoldás

a) A rezgőkör komplex admittanciája:

$$\underline{Y} = \frac{1}{1} \frac{R}{1} + \frac{1}{1} \frac{j\omega \cdot L}{1} + j\omega \cdot C = \frac{1}{1} \frac{R}{1} + j \cdot \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L} \right).$$

Az admittancia képzetes része akkor lesz nulla, ha a soros rezgőkörhöz hasonlóan

$$\omega \cdot C = \frac{1}{\omega \cdot L}.$$

A rezonanciafrekvenciát Thomson képletével számolhatjuk:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-9}}} = 26,5 \text{ kHz}.$$

b) Mivel rezonanciafrekvencián a képzetes rész nulla, ezért az admittancia tisztán ohmos

$$\text{jellegű: } Y = \frac{1}{R}.$$

Az R ellenállás értékét a jósági tényező ismeretében meg tudjuk határozni.

$$A \bar{Q} = R \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ kifejezést rendezve:}$$

$$R = \frac{\bar{Q}}{Q} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{55} = \frac{\sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-9}}{4,5 \cdot 10^{-3}}}}{55} = 41,3 \text{ k}\Omega.$$

A rezgőkör áramfelvétele: $I = Y \cdot U = \frac{R}{1} \cdot U = \frac{413 \cdot 10^3}{1} \text{ S} \cdot 15 \text{ V} = 0,36 \text{ mA}.$

c) Az induktivitás komplex árama:

$$\bar{I}_C = U \cdot \underline{Y}_C = U \cdot (j\omega \cdot C) = U \cdot (j2\pi \cdot f_0 \cdot C) = 15 \cdot (j2\pi \cdot 26,5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-9}) = j \cdot 20 \text{ mA};$$

$$I_C = 31,1 \text{ mA}; \text{ ill. } \varphi_C = 90^\circ;$$

$$\bar{I}_L = U \cdot \underline{Y}_L = U \cdot \frac{j\omega \cdot L}{1} = U \cdot (-j) \cdot \frac{2\pi \cdot f \cdot L}{1} = 15 \cdot (-j) \cdot \frac{2\pi \cdot 26,5 \cdot 10^3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-3}}{1} =$$

$$= -j \cdot 20 \text{ mA}.$$

A kapacitás árama és az induktivitás árama rezonanciafrekvencián valóban kioltja egymást, mert nagyságuk azonos, de irányuk ellentétes.

d) A rezgőkör sávszélessége: $B = \frac{\bar{Q}}{f_0} = \frac{26,5 \cdot 10^3}{55} = 482 \text{ Hz}.$

Feladatok

8.7.1. Mekkora az a frekvencia, amelyen a soros rezgőkör impedanciája a legkisebb? A rezgőkör ellenállása 20Ω , induktivitása 25 mH , kapacitása 5 nF .

8.7.2. Egy soros rezgőkör veszteségi ellenállása 15Ω , jósági tényezője 45 . Mekkora a tekeres induktivitása és a kondenzátor kapacitása, ha a rezonanciafrekvencia 5 kHz ?

8.7.3. Egy párhuzamos rezgőkör rezonanciafrekvenciája 22 kHz . A kondenzátor kapacitása 18 nF , a jósági tényező 50 . A generátor feszültsége 9 V . Mekkora a tekeres induktivitása? Mekkora a kapacitáson és az induktivitáson átfolyó áram értéke? Mekkora az áramfelvétel és a rezgőkör sávszélessége?

8.7.4. Egy soros rezgőkör tekerésének induktivitása 2 H , a kondenzátor kapacitása $22 \mu\text{F}$, az ohmos ellenállás 500Ω . A rezgőkörre 36 V -os, 50 Hz frekvenciájú feszültséget kapcsolunk. Mekkora az eredő impedancia nagysága és fázisszöge? Mekkora az áram folyik az áramkörben, mekkora az egyes elemeken eső feszültség nagysága és fázisa? Ellenőrizzük az eredő feszültség nagyságát és nulla fázisszögét! Rajzoljuk meg a feszültségek vektordiagramját!

$$8.1.1. \omega = 3141,6 \frac{\text{s}}{\text{s}}; T = 2 \text{ ms}; u = 20 \cdot \sin(3141,6t) \text{ mV}; u_{0,1} = 6,18 \text{ mV, mivel}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 500 = 3141,6 \frac{\text{s}}{\text{s}}; T = \frac{f}{500} = 2 \text{ s}; u = 20 \cdot \sin(3141,6t) \text{ mV};$$

$$u_{0,1} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(3141,6 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}) = 6,18 \text{ mV.}$$

$$8.1.2. f = 657,9 \text{ Hz}; T = 1,52 \text{ ms, mivel } \omega \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot t = \pm \frac{\pi}{2};$$

$$f = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t}{\pi} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0,38 \cdot 10^{-3}}{1} = 657,9 \text{ Hz}; T = \frac{f}{657,9} = 1,52 \text{ ms.}$$

$$8.1.3. t = 83,3 \mu\text{s, mivel } U_{\text{eff}} = U = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; u = U_{\text{cs}} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};$$

$$\sin(2\pi \cdot f \cdot t) = \frac{\sqrt{2}}{1}; 2\pi \cdot f \cdot t = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}; t = \frac{8f}{1} = \frac{8 \cdot 1500}{1} = 83,3 \mu\text{s.}$$

$$8.1.4. I_{\text{cs}} = 45 \text{ mA, mivel } i = I_{\text{cs}} \cdot \sin \omega \cdot t = 37 \text{ mA}; I_{\text{cs}} = \left| \frac{\sin(\omega \cdot t)}{t} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sin(2\pi \cdot 800 \cdot 0,011)}{0,037} \right| = 38,9 \text{ mA.}$$

$$8.1.5. f = 50 \text{ Hz}; T = 20 \text{ ms}; U_{\text{cs}} = 325,27 \text{ V}; U_{\text{kix}} = 103,5 \text{ V}; U_{\text{k2x}} = 207 \text{ V, mivel}$$

$$f = 50 \text{ Hz}; T = \frac{f}{1} = \frac{50}{1} = 20 \text{ ms}; U_{\text{cs}} = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 230 = 325,27 \text{ V}; U_{\text{kix}} = \frac{U_{\text{cs}}}{\pi} =$$

$$= \frac{325,27}{\pi} = 103,5 \text{ V}; U_{\text{k2x}} = \frac{2U_{\text{cs}}}{\pi} = \frac{2 \cdot 325,27}{\pi} = 207 \text{ V.}$$

$$8.2.1. X_L = 480 \Omega; L = 76,4 \text{ mH, mivel } X_L = \frac{U}{I} = \frac{12}{0,025} = 480 \Omega; X_L = \omega \cdot L;$$

$$\frac{X_L}{X_L} = \frac{\omega}{2\pi \cdot f} = \frac{480}{2\pi \cdot 1000} = 76,4 \text{ mH.}$$

$$8.2.2. X_L = 1640 \Omega; I = 15,24 \text{ mA}, W = 3,38 \mu\text{W} \cdot \text{s, mivel } X_L = \frac{U}{I} = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L =$$

$$= 2\pi \cdot 4,5 \cdot 10^3 \cdot 58 \cdot 10^{-3} = 1640 \Omega; I_{\text{cs}} = \frac{K_L}{U} = \frac{1640}{25} = 15,24 \text{ mA}; I = \frac{\sqrt{2}}{I_{\text{cs}}} = \frac{\sqrt{2}}{15,24} =$$

$$= 10,8 \text{ mA}; W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 58 \cdot 10^{-3} \cdot 10,8^2 \cdot 10^{-6} = 3,38 \mu\text{W} \cdot \text{s.}$$

$$8.2.3. X_C = 44,33 \text{ k}\Omega; i = 0,38 \cdot \sin(480t + \frac{\pi}{2}) \text{ mA, mivel } \omega = 2\pi \cdot f = 480 \frac{1}{\text{s}}; f = \frac{2\pi}{480} =$$

$$= 76,4 \text{ Hz}; X_C = \frac{\omega \cdot C}{1} = \frac{480 \cdot 47 \cdot 10^{-9}}{1} = 44,33 \text{ k}\Omega; I_{\text{cs}} = \frac{X_C}{U_{\text{cs}}} = \frac{44,33 \cdot 10^3}{17} = 0,38 \text{ mA};$$

$$i = I_{\text{cs}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}); i = 0,38 \cdot \sin(480t + \frac{\pi}{2}) \text{ mA.}$$

$$8.2.4. X_C = 892,9 \, \Omega; C = 485 \, \text{nF}; f = 367,6 \, \text{Hz}; \text{mivel } X_C = \frac{U}{I_{\text{cs}}} = \frac{39,6 \cdot 10^{-3}}{I_{\text{cs}}} = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2310} = 485 \, \text{nF}; \omega = 2\pi \cdot f = 2310 \frac{\text{s}}{\text{s}}; f = \frac{1}{2310} = 367,6 \, \text{Hz}.$$

$$8.3.1. Z = 1789 \, \Omega; \varphi = 79,5^\circ; \bar{Q} = 5,4; \text{mivel } X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 800 \cdot 350 \cdot 10^{-3} = 1759,3 \, \Omega; Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{325^2 + 1759,3^2} = 1789 \, \Omega; \varphi = \arctg \frac{R}{X_L} = \frac{325}{1759,3} = 79,5^\circ; \bar{Q} = \frac{R}{X_L} = \frac{325}{1759,3} = 5,4.$$

$$8.3.2. I = 18,63 \, \text{mA}; U_R = 10,1 \, \text{V}; U_L = 11,12 \, \text{V}; \varphi = 47,87^\circ; \text{mivel } X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 95 \cdot 10^{-3} = 596,9 \, \Omega; Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{540^2 + 596,9^2} = 804,9 \, \Omega; I = \frac{\sqrt{2} \cdot Z}{U_{\text{cs}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 804,9}{21,2} = 18,63 \, \text{mA}; U_L = I \cdot X_L = 18,63 \cdot 10^{-3} \cdot 596,9 = 11,12 \, \text{V}; U_R = I \cdot R = 18,63 \cdot 10^{-3} \cdot 540 = 10,1 \, \text{V. Ellenőrzés: } U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{10,1^2 + 11,12^2} = 15 \, \text{V}; U = \frac{U_{\text{cs}}}{\sqrt{2}} = \frac{21,2}{\sqrt{2}} = 15 \, \text{V}; \varphi = \arctg \frac{R}{X_L} = \arctg \frac{540}{596,9} = 47,87^\circ.$$

$$8.3.3. f = 360 \, \text{Hz}; Z = 2262,3 \, \Omega; \varphi = 89^\circ; \text{tg} \delta = 0,0166; \text{mivel } \bar{Q} = \frac{X_L}{R}; X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 1200 \cdot 0,3 = 2262 \, \Omega; Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{37,7^2 + 2262^2} = 2262,3 \, \Omega; \varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{2262}{37,7} = 89^\circ; \text{tg} \delta = \frac{1}{\bar{Q}} = \frac{1}{2262} = 0,0166.$$

$$8.3.4. I_R = 29,8 \, \text{mA}; I_L = 62,45 \, \text{mA}; I = 69,2 \, \text{mA}; \varphi = +64,5^\circ; \text{mivel } G = \frac{1}{R} = \frac{1}{570} = 1,755 \, \text{mS}; B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{2\pi \cdot f \cdot L}{1} = \frac{2\pi \cdot 600 \cdot 72 \cdot 10^{-3}}{1} = 3,68 \, \text{mS}; Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} = 1,755 \, \text{mS}; I_R = U \cdot G = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot G = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot 1,755 \cdot 10^{-3} = 29,8 \, \text{mA}; I_L = U \cdot B_L = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot 3,68 \cdot 10^{-3} = 62,45 \, \text{mA}; I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{29,8^2 + 62,45^2} = 69,2 \, \text{mA}; \varphi = \arctg \frac{B_L}{G} = \arctg \frac{3,68 \cdot 10^{-3}}{1,75 \cdot 10^{-3}} = 64,5^\circ.$$

$$8.3.5. u = 11,2 \cdot \sin(3141,6t + 60^\circ) \, \text{V}; R = 74,1 \, \Omega; I_{\text{cs}} = 181,2 \, \text{mA}; \text{mivel } I = I_{\text{Lcs}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_L) = 85 \cdot \sin(3141,6t - 30^\circ); I_{\text{Lcs}} = 85 \, \text{mA}; \omega = 3141,6 \frac{\text{s}}{\text{s}};$$

$$U_{cs} = X_L \cdot I_{Lcs} = \omega \cdot L \cdot I_{Lcs} = 3141,6 \cdot 42 \cdot 10^{-3} \cdot 85 \cdot 10^{-3} = 11,2 \text{ V};$$

$$\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ = -30^\circ + 90^\circ = 60^\circ; u = U_{cs} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u) = 11,2 \cdot \sin(3141,6t + 60^\circ) \text{ V.}$$

$n = 11,2 \cdot \sin(3141,6t + 60^\circ) \text{ V.}$ A feszültség 90°-kal siet az indukтивitás áramához képest.

$$I_{Rcs} = \frac{R}{U_{cs}} = \frac{R}{11,2} = 160 \text{ mA}; I_{Lcs} = \sqrt{I_{Rcs}^2 + I_{Lcs}^2} = \sqrt{160^2 + 85^2} = 181,2 \text{ mA.}$$

$$8.3.6. I_R = 9,8 \text{ mA}; \varphi = 27^\circ; Z = 7,13 \text{ k}\Omega; I = 11 \text{ mA, mivel } X_L = 2\pi \cdot f \cdot L =$$

$$= 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-3} = 15,7 \text{ k}\Omega; U = I \cdot X_L = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 15,7 \cdot 10^3 = 78,5 \text{ V};$$

$$I_R = \frac{R}{U} = \frac{8 \cdot 10^3}{78,5} = 9,8 \text{ mA}; G = \frac{R}{1} = \frac{8 \cdot 10^3}{1} = 125 \text{ mS}; B_L = \frac{X_L}{1} = \frac{2\pi \cdot f \cdot L}{1} =$$

$$\frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-3}}{1} = 63,66 \text{ mS}; \varphi = \arctg \frac{G}{B_L} = \arctg \frac{125 \cdot 10^{-3}}{63,66 \cdot 10^{-3}} = 27^\circ;$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2} = \sqrt{125^2 + 63,66^2} = 140,3 \text{ mS}; Z = \frac{Y}{1} = \frac{140,3 \cdot 10^{-6}}{1} = 7,13 \text{ k}\Omega.$$

Ellenőrzés: $I = \frac{Z}{U} = \frac{7,13 \cdot 10^3}{78,5} = 11 \text{ mA}; I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{9,8^2 + 5^2} = 11 \text{ mA.}$

$$8.4.1. Z = 654,8 \Omega; \varphi = 60,2^\circ; \bar{Q} = 1,75, \text{ mivel } Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{2\pi \cdot f \cdot C}{1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{325^2 + \left(\frac{2\pi \cdot 800 \cdot 350 \cdot 10^{-9}}{1}\right)^2} = 654,8 \Omega; \varphi = \arctg \frac{R}{X_C} = \arctg \frac{R \cdot \omega \cdot C}{1} =$$

$$= \arctg \frac{325 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 800 \cdot 350 \cdot 10^{-9}}{1} = 60,2^\circ; \bar{Q} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 60,2^\circ = 1,75.$$

$$8.4.2. I = 8,52 \text{ mA}; U_R = 4,6 \text{ V}; U_C = 14,27 \text{ V}; \varphi = 72^\circ, \text{ mivel } X_C = \frac{\omega \cdot C}{1} = \frac{2\pi \cdot f \cdot C}{1} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 95 \cdot 10^{-9}}{1} = 1675 \Omega; Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{540^2 + 1675^2} = 1760 \Omega;$$

$$I = \frac{\sqrt{2} \cdot Z}{U_{cs}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1760}{21,2} = 8,52 \text{ mA}; U_C = I \cdot X_C = 8,52 \cdot 10^{-3} \cdot 1675 = 14,27 \text{ V};$$

$$U_R = I \cdot R = 8,52 \cdot 10^{-3} \cdot 540 = 4,6 \text{ V.}$$

$$\text{Ellenőrzés: } U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{4,6^2 + 14,27^2} = 15 \text{ V}; U = \frac{\sqrt{2}}{21,2} = 15 \text{ V};$$

$$\frac{X_C}{R} = \arctg \frac{R}{X_C} = \arctg \frac{540}{1675} = 72^\circ.$$

$$\begin{aligned}
8.4.3. f &= 239 \text{ Hz}; Z = 222 \Omega; \varphi = 89^\circ; \operatorname{tg} \delta = 0,0166, \text{ mivel } \bar{Q} = \frac{r_v}{X_C}; X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \\
&= \frac{\bar{Q} \cdot r_v; f = \frac{1}{2\pi \cdot C \cdot \bar{Q} \cdot r_v} = 239 \text{ Hz}; X_C = \frac{\omega \cdot C}{1} = \frac{2\pi \cdot f \cdot C}{1} = \\
&= \frac{2\pi \cdot 239 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{1} = 221,97 \approx 222 \Omega; Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{3,7^2 + 222^2} = 222,03 \approx \\
&= 222 \Omega; \varphi = \arctg \frac{r_v}{X_C} = \arctg \frac{3,7}{222} = 89^\circ; \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\bar{Q}} = \frac{\varphi}{60} = 0,0166. \\
8.4.4. I_R &= 297,8 \text{ mA}; I_C = 1,23 \text{ A}; I = 1,27 \text{ A}; \varphi = -76,37^\circ, \text{ mivel } G = \frac{1}{R} = \frac{1}{57} = \\
&= 17,55 \text{ mS}; B_C = \frac{1}{X_C} = 2\pi \cdot f \cdot C = 2\pi \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 0,72 \cdot 10^{-6} = 72,38 \text{ mS}; Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \\
&= \sqrt{17,55^2 \cdot 10^{-3} + 72,38^2 \cdot 10^{-6}} = 74,48 \text{ mS}; I_R = U \cdot G = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot G = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot 17,55 \cdot 10^{-3} = \\
&= 297,8 \text{ mA}; I_C = U \cdot B_C = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot 72,38 \cdot 10^{-3} = 1,23 \text{ A}; I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{0,2978^2 + 1,23^2} = \\
&= 1,27 \text{ A}; \varphi = \arctg \frac{B_C}{G} = \arctg \frac{-72,38 \cdot 10^{-3}}{17,55 \cdot 10^{-3}} = -76,37^\circ. \\
8.4.5. u &= 55,2 \cdot \sin 580t \text{ V, mivel } i_{cs} = 8 \text{ mA}; \omega = 580 \frac{\text{s}}{\text{s}}; B_C = \frac{1}{X_C} = \omega \cdot C = \\
&= 580 \cdot 42 \cdot 10^{-9} = 24,36 \text{ mS}; G = \frac{1}{R} = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{1} = 142,9 \text{ mS}; Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \\
&= \sqrt{142,9^2 \cdot 10^{-12} + 24,36^2 \cdot 10^{-12}} = 145 \text{ mS}; Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{145 \cdot 10^{-6}} = 6,9 \text{ k}\Omega; U_{cs} = Z \cdot I_{cs} = \\
&= 6,9 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 55,2 \text{ V}; u = 55,2 \cdot \sin 580t \text{ V.} \\
8.4.6. I_R &= 0,4 \text{ A}; \varphi = 53,2^\circ; Z = 51 \Omega; I = 674 \text{ mA, mivel } X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \\
&= \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-9}} = 63,66 \text{ S}; U = I_C \cdot X_C = 540 \cdot 10^{-3} \cdot 63,66 = 34,38 \text{ V}; I_R = \frac{R}{U} = \\
&= \frac{34,38}{85} = 0,4 \text{ A}; G = \frac{1}{R} = \frac{85}{1} = 11,76 \text{ mS}; B_C = \frac{X_C}{1} = 2\pi \cdot f \cdot C = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-9} = \\
&= 15,7 \text{ mS}; \varphi = \arctg \frac{B_C}{G} = \arctg \frac{11,76 \cdot 10^{-3}}{15,7 \cdot 10^{-3}} = 53,2^\circ; Y = \sqrt{G^2 + B_C^2} = \\
&= \sqrt{11,76^2 + 15,7^2} = 19,6 \text{ mS}; Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{19,6 \cdot 10^{-3}} = 51 \Omega; \\
\text{Ellenőrzés: } I &= \frac{Z}{U} = \frac{51}{34,38} = 674 \text{ mA}; I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{400^2 + 540^2} = 672 \text{ mA.}
\end{aligned}$$

$$8.5.1. R_s = 7,85 \, \Omega; X_s = 40,8 \, \Omega, \text{ mivel } X_p^p = \frac{\omega \cdot C}{1} = \frac{2\pi \cdot f \cdot C}{1} = \frac{2\pi \cdot 800 \cdot 4,7 \cdot 10^{-6}}{1} = 42,33 \, \Omega; R_s = R_s^p = \frac{R_p^p \cdot X_s^p}{R_p^2 + X_s^2} = \frac{220^2 \cdot 42,33^2}{220^2 + 42,33^2} = 7,85 \, \Omega; X_s = \frac{R_p^2 \cdot X_s^p}{R_p^p \cdot X_s^p + X_s^2} = \frac{220^2 \cdot 42,33^2}{220^2 + 42,33^2} = 40,8 \, \Omega.$$

$$8.5.2. L_s = 343,5 \, \text{mH}; R_s = 26,8 \, \Omega, \text{ mivel } X_p^p = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 37 \cdot 10^{-3} = 279 \, \Omega; X_s = \frac{R_p^2 \cdot X_s^p}{R_p^p \cdot X_s^p + X_s^2} = \frac{27^2 \cdot 279^2}{27^2 + 279^2} = 2,59 \, \Omega; X_s = 2\pi \cdot f \cdot L; L = \frac{X_s}{2\pi \cdot f} = \frac{2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^3}{2,59} = 343,5 \, \text{mH}; R_s = \frac{R_p^p \cdot X_s^p}{R_p^2 + X_s^2} = \frac{27 \cdot 279^2}{27^2 + 279^2} = 26,8 \, \Omega.$$

$$8.5.3. Z = 853,6 \, \Omega; \varphi_u = 62,1^\circ; I = 39,8 \, \text{mA}; U_1 = U_{1s} = 18,75 \, \text{V}; U_2 = 19,5 \, \text{V}; \varphi_{12} = 54,7^\circ, \text{ mivel } X_{1s}^p = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L_{1s} = 2\pi \cdot 50 \cdot 1,5 = 471,2 \, \Omega; X_{2p}^p = 2\pi \cdot f \cdot L_{2p} = 2\pi \cdot 50 \cdot 2,7 = 848,2 \, \Omega; R_{2s} = \frac{R_{2p}^2 \cdot X_{2s}^p}{R_{2p}^p \cdot X_{2s}^p + X_{2s}^2} = \frac{600^2 \cdot 848,2^2}{600 \cdot 848,2^2 + 400^2} = 400 \, \Omega; X_{2s} = \frac{R_{2p}^2 \cdot X_{2s}^p}{R_{2p}^p \cdot X_{2s}^p + X_{2s}^2} = \frac{600^2 \cdot 848,2^2}{600^2 + 848,2^2} = 282,9 \, \Omega; L_{2s} = \frac{X_{2s}}{2\pi \cdot f} = \frac{282,9}{2\pi \cdot 50} = 0,9 \, \text{H}; Z = \sqrt{X_{2s}^2 + (X_{1s} + X_{2s})^2} = 853,6 \, \Omega; I = \frac{U}{Z} = \frac{34}{853,6} = 39,8 \, \text{mA};$$

$$\varphi_u = \arctg \left(\frac{R_{1s} + X_{2s}}{X_{1s}} \right) = \arctg \left(\frac{471,2 + 282,9}{400} \right) = 62,1^\circ; U_1 = U_{1s} = I \cdot X_{1s} = 39,8 \cdot 10^{-3} \cdot 471,2 = 18,75 \, \text{V}; U_{2Ls} = I \cdot X_{2Ls} = 39,8 \cdot 10^{-3} \cdot 282,9 = 11,26 \, \text{V};$$

$$U_2 = \sqrt{(I \cdot R_{2s})^2 + (I \cdot X_{2s})^2} = \sqrt{(39,8 \cdot 10^{-3} \cdot 400)^2 + (39,8 \cdot 10^{-3} \cdot 282,9)^2} = 19,5 \, \text{V};$$

$$I_{R2p} = \frac{U_2}{R_{2p}} = \frac{19,5}{600} = 32,5 \, \text{mA};$$

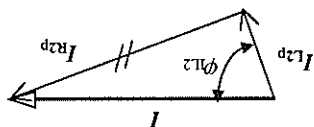
$$I_{L2p} = \frac{U_2}{X_{2p}} = \frac{19,5}{848,2} = 23 \, \text{mA};$$

$$U_{2Rs} = I \cdot R_{2s} = 39,8 \cdot 10^{-3} \cdot 400 = 15,9 \, \text{V};$$

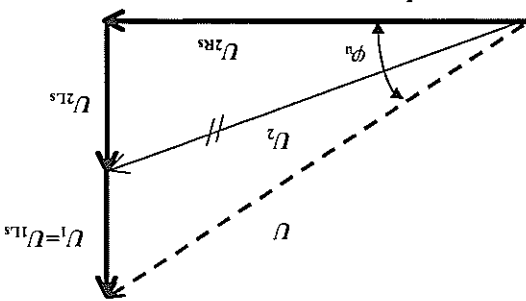
$$\varphi_{12} = \arctg \frac{I_{L2p}}{I_{R2p}} = \arctg \frac{23}{32,5} = 35,7^\circ.$$

A feszültségek és áramok vektor-

ábrája a 8.36. ábrán látható.



8.36. ábra



$$\underline{I}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\varphi_1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot e^{j30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = (2,45 + j \cdot 1,415) \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{j\varphi_2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot e^{j155^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (\cos 155^\circ + j \sin 155^\circ) = (-3,845 + j \cdot 1,793) \text{ A};$$

$$I_1 = 4 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ) \text{ A}; I_2 = \sqrt{2,45^2 + 1,415^2} = 2,83 \text{ A}; \varphi_1 = \arctg \frac{1,415}{2,45} = 30^\circ \text{ (a megadott érték)}, I_2 = 6 \cdot \cos(\omega \cdot t + 65^\circ) = 6 \cdot \sin[\omega \cdot t + (65^\circ + 90^\circ)] = 6 \cdot \sin(\omega \cdot t + 155^\circ);$$

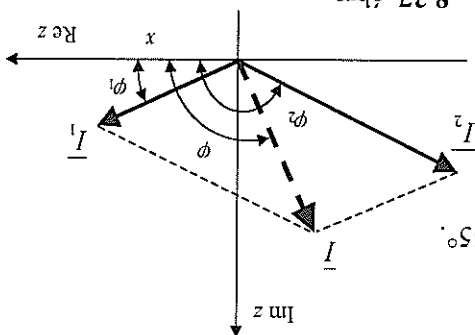
$$\underline{I}_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{j\varphi_2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot e^{j155^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (\cos 155^\circ + j \sin 155^\circ) = (-3,845 + j \cdot 1,793) \text{ A};$$

$$I_2 = \sqrt{3,845^2 + 1,793^2} = 4,24 \text{ A};$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{-3,845}{1,793} = -25^\circ = -25^\circ + 180^\circ = 155^\circ.$$

Mivel -25° és $+155^\circ$ tangense megegyezik, ezért az $\underline{I}_2$ valós és képzetes részének előjeléből állapítjuk meg, hogy melyik szögrel van szö. $\underline{I}_2$ valós része negatív, képzetes része pozitív, ezért $\varphi_2 = 155^\circ$, a megadott érték. Az áramvektorok a 8.37. ábrán láthatók.

8.37. ábra



$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (2,45 + j \cdot 1,415) + (-3,845 + j \cdot 1,793) = (-1,395 + j \cdot 3,21) \text{ A};$$

$$I = \sqrt{1,395^2 + 3,21^2} = 3,5 \text{ A}; \varphi = \arctg \frac{-1,395}{3,21} = -66,5^\circ + 180^\circ = 113,5^\circ.$$

$$\underline{I} = I_{cs} \cdot e^{j\varphi} = \sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\varphi} = \sqrt{2} \cdot 3,5 \cdot e^{j113^\circ} = 4,95 \cdot e^{j113^\circ} \text{ A}; i = 4,95 \cdot \sin(\omega \cdot t + 113^\circ) \text{ A};$$

$$\varphi = 113^\circ = 113 \cdot \frac{180}{\pi} = 1,97 \text{ rad}; i_{1,5} = 4,95 \cdot \sin(2\pi \cdot 650 \cdot 1,5 + 1,97) \text{ A} = 4,56 \text{ A}.$$

$$8.6.2. f_h = 1,59 \text{ kHz}; \underline{U}_{ki} = \frac{U_{be}}{1} = \frac{3}{1}; \varphi = 0^\circ, \text{ mivel } X_C = \frac{2\pi \cdot f_h \cdot C}{1} = R; f_h = \frac{2\pi \cdot R \cdot C}{1} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{1} = 1,59 \text{ kHz. Határfrekvencián: } R = X_C; \text{Re } \underline{Z} = \text{Im } \underline{Z};$$

$$\underline{Z}_{R1} = R = 1000 \Omega; \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \frac{j \cdot \omega \cdot C}{1} = -j \cdot \frac{2\pi \cdot f_h \cdot C}{1} = -j \cdot \frac{2\pi \cdot 1,59 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{1} =$$

$$(-j \cdot 1000) \Omega; \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{C1} = (1000 - j \cdot 1000) \Omega; \text{Re } \underline{Z} = \text{Im } \underline{Z};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{C2} \cdot \underline{Z}_{R2}}{10^3 \cdot (-j) \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot (1 + j)} = \frac{10^3 \cdot (-j) \cdot 10^3}{10^3 \cdot (1 + j)} = (500 - j \cdot 500) \Omega;$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (1000 - j \cdot 1000) + (500 - j \cdot 500) = (1500 - j \cdot 1500) \Omega; \underline{U}_{ki} = \underline{U}_{be} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}};$$

$$\underline{U}_{ki} = \frac{\underline{U}_{be}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{be}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1500 - j \cdot 1500}{10^3 \cdot (0,5 - j \cdot 0,5)} = \frac{10^3 \cdot (1,5 - j \cdot 1,5)}{10^3 \cdot (0,5 - j \cdot 0,5) \cdot (1,5 + j \cdot 1,5)} =$$

$$\underline{U}_{ki} = \frac{1}{1} \cdot \frac{U_{be}}{U_{ki}} = \frac{3}{1}; \underline{U}_{ki} = 4 \text{ V}; U_{ki} = 4 \text{ V}; \varphi = 0^\circ.$$

$$8.7.1. f_0 = 14,2 \text{ kHz, mivel } f_0 = \frac{2\pi\sqrt{L \cdot C}}{1} = \frac{2\pi\sqrt{25 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}}{1} = 14,2 \text{ kHz.}$$

$$8.7.2. L = 237,3 \text{ } \mu\text{H; } C = 2136 \text{ } \mu\text{F, mivel } f_0 = \frac{2\pi\sqrt{L \cdot C}}{1}; L \cdot C = \frac{4\pi^2 \cdot f_0^2}{1} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 5 \cdot 10^3}{1} = 5,066 \cdot 10^{-6}; \bar{C} = R \sqrt{\frac{L}{C}}; \frac{L}{C} = \left(\frac{R}{\bar{C}}\right)^2 = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = 9; \frac{L}{C} \cdot L \cdot C = C^2 = 9 \cdot 507 \cdot 10^{-9} = 4,563 \cdot 10^{-6}; C = \sqrt{4,563 \cdot 10^{-6}} = 2136 \text{ } \mu\text{F;}$$

$$L = \frac{C}{2136 \cdot 10^{-6}} = \frac{9}{9} = 237,3 \text{ } \mu\text{H.}$$

$$8.7.3. L = 2,9 \text{ mH; } L_C = L = 22,5 \text{ mA; } I = 0,45 \text{ mA; } B = 440 \text{ Hz, mivel } f_0 = \frac{2\pi\sqrt{L \cdot C}}{1};$$

$$L = \frac{\omega^2 \cdot C}{4\pi^2 \cdot f_0^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 22^2 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-9}}{1} = 2,9 \text{ mH;}$$

$$\bar{B}_C = j \cdot \omega \cdot C = j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot C = j \cdot 2\pi \cdot 22 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-9} = j \cdot 2,49 \text{ mS;}$$

$$\bar{B}_L = -j \cdot \frac{\omega \cdot L}{1} = -j \cdot \frac{2\pi \cdot L}{1} = -j \cdot \frac{2\pi \cdot 22 \cdot 10^3 \cdot 2,9 \cdot 10^{-3}}{1} = -j \cdot 2,5 \text{ mS; } \bar{B}_C = \bar{B}_L;$$

$$\bar{I}_C = U \cdot \bar{B}_C = 9 \cdot (j \cdot 2,5) \cdot 10^{-3} = j \cdot 22,5 \text{ mA; } \bar{I}_L = U \cdot \bar{B}_L = 9 \cdot (-j \cdot 2,5) \cdot 10^{-3} = -j \cdot 22,5 \text{ mA;}$$

$$I_C = I_L = 22,5 \text{ mA; } R = \frac{\bar{C}}{\bar{O}} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\bar{O}} = \frac{\sqrt{\frac{18 \cdot 10^{-9}}{2,9 \cdot 10^{-3}}}}{50} = 20 \text{ k}\Omega; I = \frac{R_p}{U} = \frac{20 \cdot 10^3}{9} = 0,45 \text{ mA;}$$

$$B = \frac{f_0}{22 \cdot 10^3} = \frac{50}{50} = 440 \text{ Hz.}$$

$$8.7.4. Z = 695,6 \Omega; \varphi_Z = 44^\circ; I = 51,8 \text{ mA; } \varphi_I = -44^\circ; U_R = 25,9 \text{ V; } \varphi_{UR} = -44^\circ; U_C = 7,5 \text{ V;}$$

$$\varphi_{UC} = 226^\circ; U_L = 32,5 \text{ V; } \varphi_{UL} = 46^\circ; U = 36 \text{ V; } \varphi_U = 0, \text{ mivel } \bar{Z}_R = 500 \Omega, \bar{Z}_L = j\omega \cdot L =$$

$$= -j \cdot \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 22 \cdot 10^{-6}}{1} = -j \cdot 144,7 \Omega; \bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = 500 + j \cdot (628,3 - 144,7) =$$

$$= (500 + j \cdot 483,6) \Omega; Z = \sqrt{500^2 + 483,6^2} = 695,6 \Omega; \varphi_Z = \arctg \frac{483,6}{500} = 44^\circ;$$

$$\frac{I}{U} = \frac{Z}{36} = \frac{500 + j \cdot 483,6}{36 \cdot (500 - j \cdot 483,6)} = (37,2 - j \cdot 36) \text{ mA;}$$

$$I = \sqrt{37,2^2 + 36^2} = 51,8 \text{ mA; } \varphi_I = \arctg \frac{37,2}{-36} = -44^\circ; U_R = I \cdot R =$$

$$= (37,2 - j \cdot 36) \cdot 10^{-3} \cdot 500 = (18,6 - j \cdot 18) \text{ V; } U_R = \sqrt{18,6^2 + 18^2} = 25,9 \text{ V;}$$

$$\varphi_{UR} = \arctg \frac{18,6}{-18} = -44^\circ; U_C = I \cdot \bar{Z}_C = (37,2 - j \cdot 36) \cdot 10^{-3} \cdot (-j \cdot 144,7) = (-5,2 - j \cdot 5,38) \text{ V;}$$

$$U_C = \sqrt{5,2^2 + 5,38^2} = 7,5 \text{ V; } \varphi_{UC} = \arctg \frac{5,38}{5,2} = 46^\circ + 180^\circ = 226^\circ;$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_L &= \underline{I} \cdot \underline{Z}_L = (37,2 - j \cdot 36) \cdot 10^{-3} \cdot j \cdot 628,3 = (22,6 + j \cdot 23,4) \text{ V}; \\ \underline{U}_L &= \sqrt{22,6^2 + 23,4^2} = 32,5 \text{ V}; \varphi_{UL} = \arctg \frac{23,4}{22,6} = 46^\circ; \\ \underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_L = (18,6 - j \cdot 18) + (-5,2 - j \cdot 5,38) + (22,6 + j \cdot 23,4) = (36 + j \cdot 0) \text{ V} = 36 \text{ V}; \\ U &= 36 \text{ V}; \varphi_U = 0. \text{ A feszültségvektor a 8.38. ábrán látható. Figyeljük meg, hogy} \\ |\varphi_{UL}| + |\varphi_{UR}| &= 46^\circ + 44^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

8.38. ábra

