Fóris Tibor

A műszaki rajz alapjai
Térmértan

8. kiadás

Tankönyvmester Kiadó,
Budapest

A Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Intézet javaslatára a tankönyvet a szociális és munkaügyi miniszter a 17852-5/2007-SZMM számon 2012. augusztus 31-ig tankönyvvé nyilvánította.

Lektor: Vetró Zoltán
Sorozatszerkesztő: Futterer László

Felelős szerkesztő: Putankó Anna
Borítóterv: Szlovencsák Ádám
Az ábrák a szerző saját munkái
Rajzfeldolgozás: Gáspár Angéla

8. kiadás

Felelős kiadó: a Tankönyvmester Kiadó ügyvezetője

ISBN 978 963 9668 93 5

A tankönyv megrendelhető:
Tankönyvmester Kiadó
1141 Budapest,
Fogarasi út 111.
Tel.: 220-22-37
Fax: 221-05-73
www.tankonyvmester.hu
e-mail: info@tankonyvmester.hu

A könyv formátuma: A/4
Terjedelme: 21,5 (A/5) ív
Azonossági szám: TM–11012/2
Készült az MSZ 5601:1983 és 5602:1983 szerint
Szedés, nyomdai előkészítés: EMU Bt.
Nyomta és kötötte: Regiszter Kiadó és Nyomda Kft., Budapest

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

A műszaki rajz alapjai. *Térmértan* c. könyv, amit kezében tart a kedves Olvasó, a Tankönyvmester Kiadó tankönyvcsaládjának egyik alapozó tankönyve.

A műszaki élet bármely területén nagy fontosságú a rajztudás, úgyis mint gondolati kifejezőeszköz, és úgyis mint a dokumentálás eszköze. A rajztudás fejlesztéséhez nyújtanak segítséget **A műszaki rajz alapjai** c. sorozat kötetei, amelyek a következők: ***Síkmértan, Térmértan, Géprajzi ismeretek, Villamos rajzi alapismeretek.*** Az első kettő ezek közül összefoglalja a mértani szerkesztésekkel, az ábrázoló geometriával kapcsolatos alapismereteket, amit a középiskolai oktatásban résztvevő valamennyi tanulónak ismernie kell. A második két kötet a szakrajzi alapismereteket tárgyalja, és általánosságban megismertet a gépészeti, ill. a villamos ipari műszaki rajzzal, a rajzolvasással, valamint a manuális rajzkészítés technikájával és szabályaival.

Napjainkban egyre növekszik a számítógépes rajzkészítés jelentősége. Az AutoCAD programok alapjaival foglalkozik a kiadó A **Számítógéppel segített rajzolás.** ***Síkbeli ábrázolás*** és ***Térbeli ábrázolás*** c. kötete.

A műszaki rajz alapjai. *Térmértan* c. kötet tartalmazza a térelemek, a síklapú testek és a forgástestek vetületi ábrázolását, az axonometrikus ábrázolást és az összetett testek ábrázolásán belül a síkmetszést, a csonkolással keletkező testeket és az áthatást. A javított és átdolgozott kiadású könyv mindezt szisztematikusan felépített tartalommal és magas színvonalon kivitelezett ábrákon mutatja be, az előzőekhez képest kisebb oldalszámon, rövidített formában, de úgy, hogy a lényegi összefüggések érintetlenek maradtak.

A könyv végén feladatgyűjtemény található, ami a szerkesztések otthoni gyakorlásához nyújt segítséget. A tanórai munkához nélkülözhetetlen a **Műszaki rajz feladatok. *Térmértan*** c. kiadvány, amely 50 munkalapot tartalmaz a tananyag teljes feldolgozásához és begyakorlásához.

A Tankönyvmester Kiadó rajztankönyvei a következők:

TM-11012/1 Fóris Tibor: **A műszaki rajz alapjai. *Síkmértan,***
TM-11012/2 Fóris Tibor: **A műszaki rajz alapjai. *Térmértan,***
TM-11012/3 Fenyvessy Tibor: **A műszaki rajz alapjai. *Géprajzi ismeretek,***
TM-11012/4 Lándor Béláné–Molnár Ervin: **A műszaki rajz alapjai. *Villamos rajzi alapismeretek,***
TM-11012/5 Pintér Miklós: **Számítógéppel segített rajzolás. *Síkbeli ábrázolás,***
TM-11012/6 Pintér Miklós: **Számítógéppel segített rajzolás. *Térbeli ábrázolás,***
TM-11212/1 Fóris Tibor: **Műszaki rajz feladatok. *Síkmértan,***
TM-11212/2 Fóris Tibor: **Műszaki rajz feladatok. *Térmértan,***
TM-11212/3 Fenyvessy Tibor: **Műszaki rajz feladatok. *Géprajzi ismeretek,***
TM-11212/4 Molnár Ervin: **Műszaki rajz feladatok. *Villamos rajzi alapismeretek,***
TM-11212/5 Szentgyörgyiné Gyöngyösi Éva–Fodor Gábor: **AutoCAD feladatgyűjtemény.**

Eredményes tanulást és szakmai sikereket kíván minden kedves Olvasójának a

Tankönyvmester Kiadó

1. TÉRELEMEK VETÜLETI ÁBRÁZOLÁSA

A korábbiakban már foglalkoztunk a térbeli alakzatok síkbeli ábrázolásának problémakörével (l. a Tankönyvmester Kiadó: A műszaki rajz alapjai. *Síkmértan* c. könyvének 2.1 alfejezetét). Most részletesen ismerkedjünk meg lehetőségeinkkel!
Azokat a szerkesztési elveket, módszereket, műveleteket, amelyekkel egyértelműen tudunk síkban ábrázolni, az *ábrázoló geometria* tudománya dolgozta ki. Tanulmányaink során felhasználjuk fogalmait és alapvető műveleteit.

1.1. Alapfogalmak

1.1.1. Térbeli alakzatok

A tér lapokkal, felületekkel határolt részét térbeli alakzatoknak nevezzük.

Közös jellemzőjük, hogy három kiterjedésük van: hosszúság, szélesség és magasság (l, b, h). *Térfogatuk* a tér azon része, amelyet attól elhatároltunk, *felszínük* pedig a határoló felületek összessége.

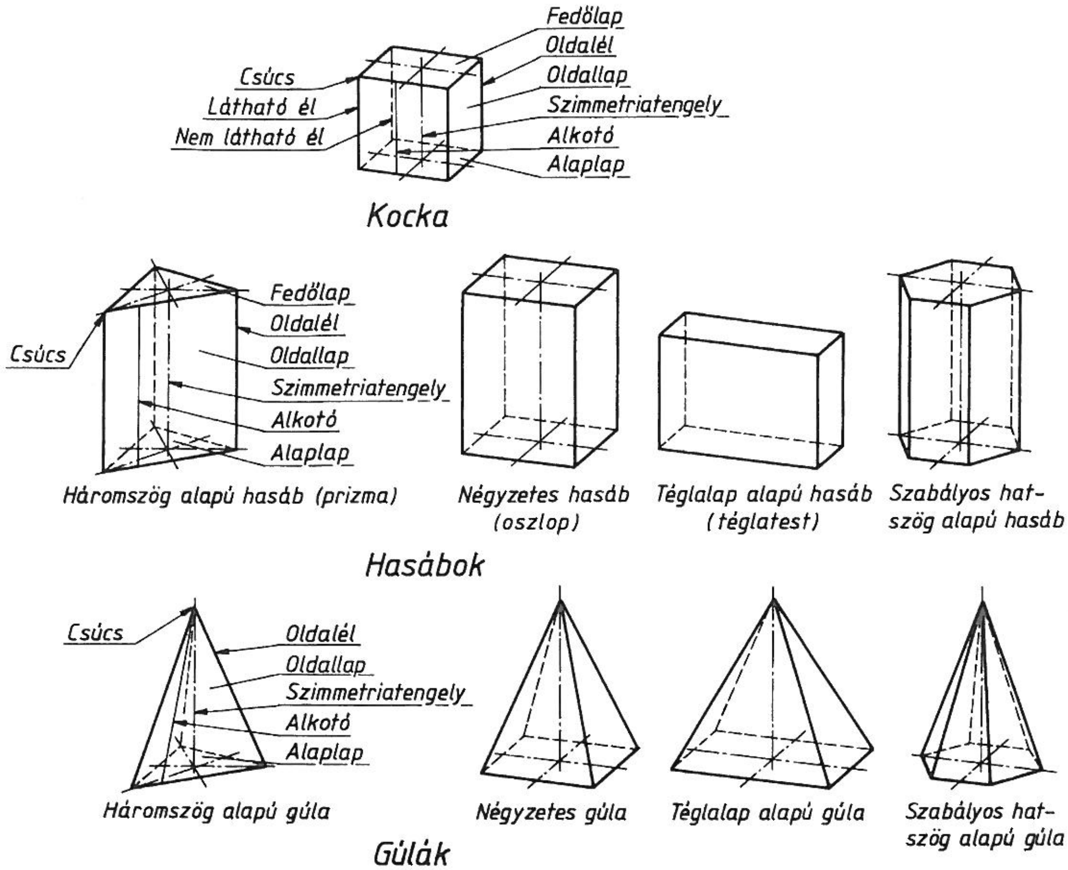
A *térbeli alakzatok* többsége lebontható olyan *egyszerű mértani testekre,* amelyek szabályosságuk miatt jól megfogalmazhatók és jellemezhetők. Több módon is csoportosíthatók. Ezek közül csak a leglényegesebbeket emeljük ki, amelyekkel később gyakran találkozunk.

A mértani testek csoportosítása határoló felületük jellege szerint

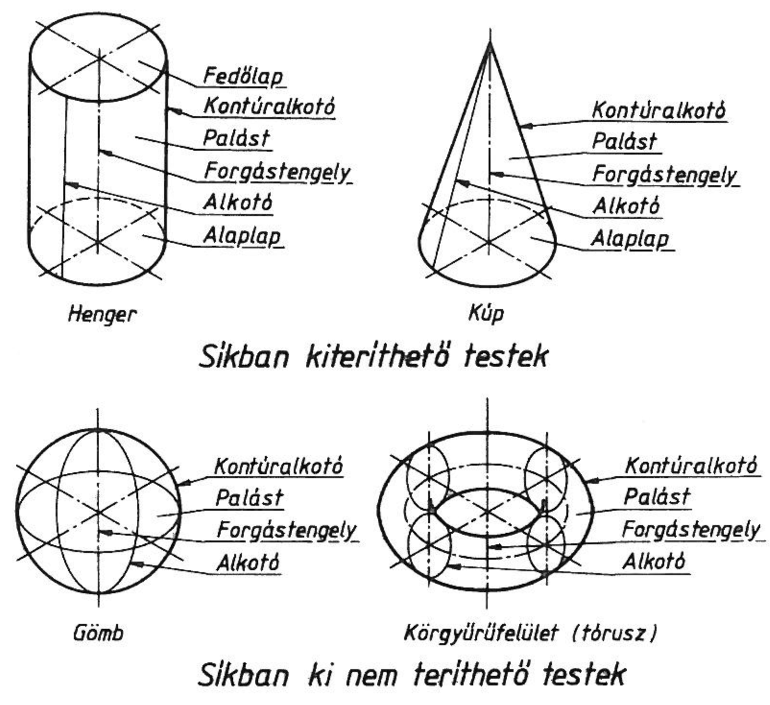
- **Síklapú testek** (**1.1.** ábra), amelyeket sík felületek (sokszögek) határolnak. Ide sorolhatók a kocka, a hasábok és a gúlák.
- **Forgástestek** (**1.2.** ábra), amelyek tovább csoportosíthatók
  - *síkban kiteríthető testekre,* mint pl. a henger és a kúp,
  - *síkban ki nem teríthető testekre,* mint pl. a gömb és a körgyűrűfelület.

Az ábrák alapján ismételjük át a testekkel kapcsolatos elnevezéseket!

- *Csúcsok.* Azok a térbeli pontok, amelyek lehatárolják a síklapú testek éleit, meghatározzák az oldallapokat. A kúp esetén az alkotók metszéspontja (egyetlen forgástest, amelynek csúcsa van).
- *Élek.* Azok az egyenes szakaszok és körélek, amelyek az oldallapokat határolják. Hosszúságuk (átmérőjük) a mértani test jellemző mérete. Az alakzatok elemzésénél megkülönböztethetjük mint *alapél* (fedőél), ill. *oldalél.*
- *Oldallapok.* Azok a síkidomok, amelyek a mértani alakzatok határoló felületei. Térbeli helyzetük alapján lehetnek *alaplapok, fedőlapok,* amelyeket együttesen *zárólapoknak* nevezünk, ill. *oldallapok.*
- *Palást.* A forgástestek határoló felülete.
- *Alkotók.* Azok az egyenesek és körélek, amelyek szabály szerinti mozgatásával származtathatjuk a testek határoló felületeit. Nevezetes alkotó a forgástestek szélső alkotója, amelyet *kontúralkotónak* nevezünk.



1.1. ábra. A síklapú testek csoportosítása



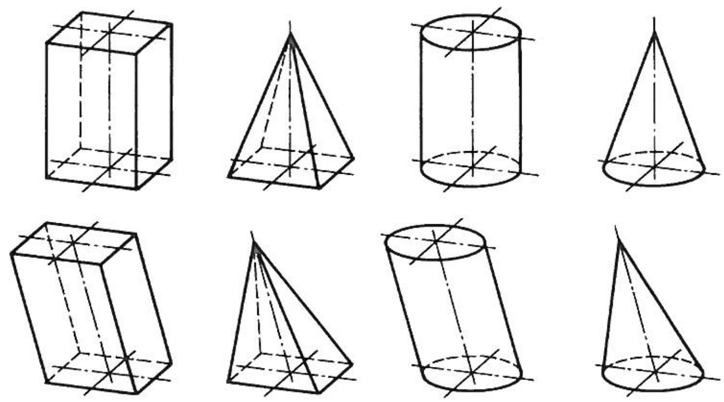
1.2. ábra. A forgástestek csoportosítása

- *Szimmetriatengelyek.* A mértani alakzat *térbeli szimmetriájára* hívja fel a figyelmet. Megkülönböztetjük a zárólapok (mint síkidomok) szimmetriatengelyeit és a mértani test szimmetriatengelyét.
- *Forgástengely.* Az az egyenes, amely körül forgatva a test alkotóját, eredményül a forgástestet kapjuk. *Ábrázolása mindig kötelező.*

A mértani testek csoportosítása tengelyük helyzete szerint

Attól függően, hogy a testek tengelye (szimmetria- vagy forgástengely) milyen szögben hajlik az alaplap síkjára, lehetnek (**1.3.** ábra):

- egyenes vagy álló testek, amelyek tengelye mindig merőleges az alaplap síkjára,
- ferde testek, amelyek tengelye hegyesszögben hajlik az alaplap síkjára.

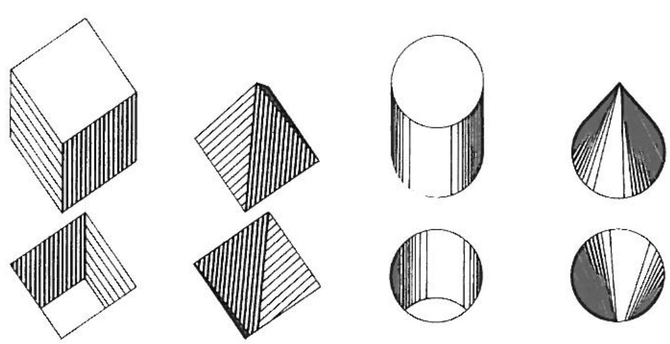


1.3. ábra. Egyenes és ferde testek

A mértani testek csoportosítása formájuk szerint

A műszaki gyakorlatban találkozunk olyan alakzatokkal is, amelyekből egyszerű mértani testek hiányoznak, azaz azokban mértani test alakú üregek találhatók (**1.4.** ábra). Ennek megfelelően folytatva a csoportosítást, vannak

- *pozitív formák,* amelyek megfoghatók, körüljárhatók,
- *negatív formák,* amelyeknek tömege valamilyen munkadarabból hiányzik.



1.4. ábra. Pozitív és negatív formák

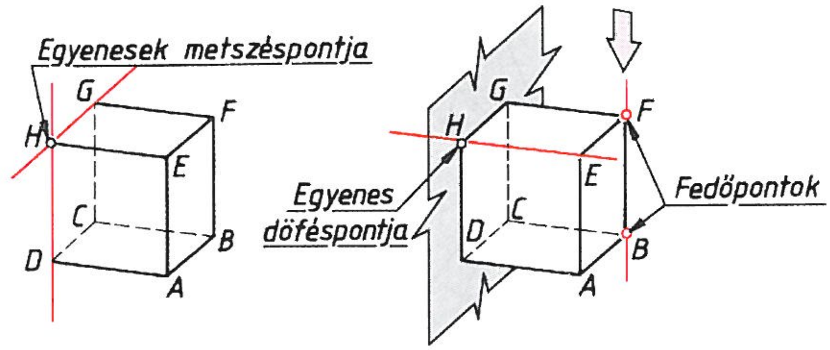
Megértésükre lássunk néhány olyan példát, ahol párosan találhatók mind pozitív, mind negatív formák. A vízelzáró szelep szárának vége négyzetes hasáb mint pozitív test. A szabályozófogantyú annak megfelelő alakú és méretű üreggel mint negatív testtel csatlakozik hozzá. A cső külseje pozitív henger (megfogható), belseje viszont negatív henger (üreg). A gömbcsukló pozitív gömb, az ágy, amiben elhelyezkedik, negatív gömb. A tömítő gumigyűrű pozitív körgyűrűfelület, csatlakozási helye valamely szerelvényen viszont negatív körgyűrűfelület.

1.1.2. Térelemek

Pont

Mint tudjuk, kiterjedése nincs, helyzetet határoz meg (**1.5.** ábra). Jellegzetes megjelenése: a testek csúcsa. Meghatározható két egymást metsző egyenessel (pl. a testek élének metszéspontja), vagy sík és egyenes metszésével. Az egyenes pontban döfi a síkot, elnevezése ennek megfelelően **döféspont** (pl. a testek oldallapját döfi egy rajta kívül lévő oldalél). Görbe felület is összefuthat egy pontban, ebben az esetben az alkotók metszéspontjaként határozható meg (pl. a kúp csúcsa).

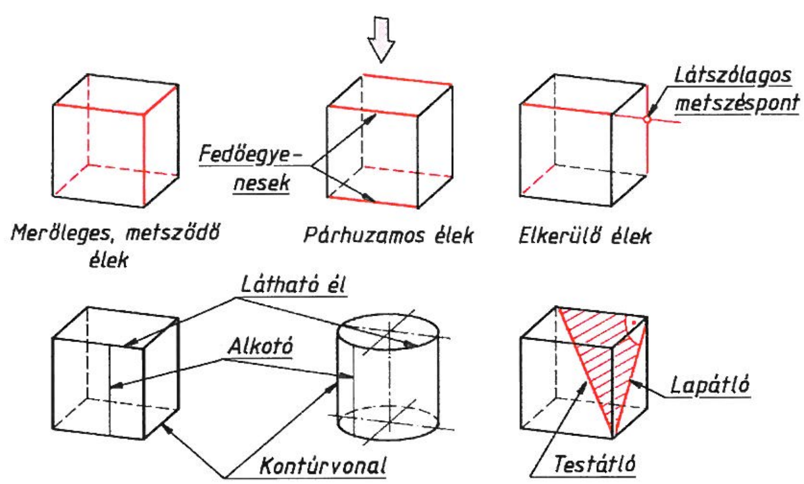
Több pont esetén a síkban könnyebben tájékozódhatunk, mert azok egymás mellett helyezkednek el. A térben levő pontok helyzete sokkal változatosabb, hiszen mélységben is elhelyezkedhetnek (elől, hátul), sőt gyakran takarják, fedik egymás. Megnevezésük is ezt fejezi ki, ezek a **fedőpontok.** Ezeknek a pontoknak az egybeesése azonban csak látszólagos.



1.5. ábra. Pontok a térben (test csúcsai)

Egyenes

Túlmenően a síkmértanban tanultakon – egy kiterjedése van és két pont határozza meg (a gyakorlatban részeit alkalmazzuk) – a következőket jegyezzük meg róla (**1.6.** ábra)!



1.6. ábra. Egyenesek a térben (a test egyenesei)

Síklapú testek éle az éllel egybeeső egyenes adott része. Lényeges megkülönböztetni az élek *elhelyezkedését* (egymáshoz való viszonyukat).

- *Merőleges egyenesek,* amelyek lehetnek síkra merőleges és egyenesre (élre) merőleges egyenesek. A síkra merőleges egyenes a sík minden irányában merőleges (a döféspont körül 360°-ban értelmezve).
- *Párhuzamos egyenesek,* amelyek az előzőhöz hasonlóan mind egyenessel, mind síkkal párhuzamosak lehetnek.
- *Metsződő egyenesek,* amelyek egy pontban metszik egymást (egybevetve a pontról leírtakkal, pl. a testek csúcsa).
- *Kitérő egyenesek,* amelyek egyik előbb leírt feltételeknek sem felelnek meg. Látszólag metszik egymást, de figyelmes értelmezéssel biztonsággal felismerhetők.

Lapátló. A testet meghatározó bármely oldallap mint síkidom átlója.

Testátló. A test két olyan csúcsát köti össze, amelyek nem egy oldallapon találhatók. A testátló meghatározható a vele közös síkban található éllel és lapátlóval.

Kontúrvonal. Valamilyen alakzat körvonalai. Síklapú testek esetében valóságos egyenes, a síkban kiteríthető testek esetében (henger és kúp) látszólagos egyenes – a forgástest szélső alkotói.

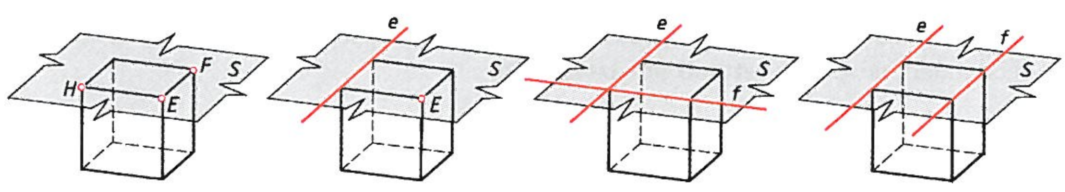
Alkotó. A legtöbb esetben látszólagos, a test oldalfelületébe simuló egyenes.

Sík

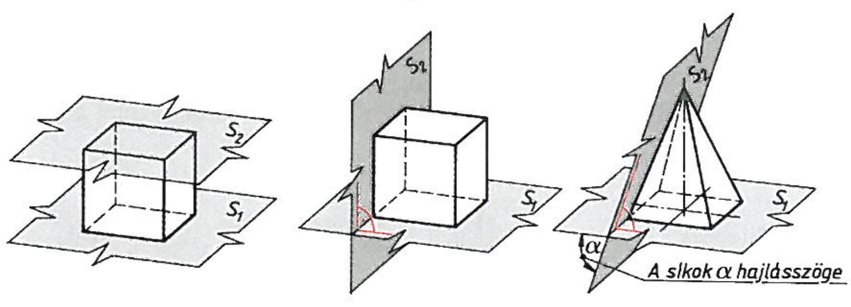
Mint tudjuk, a síknak két kiterjedése van, az l hosszúság és a b szélesség. Meghatározásához a következő lehetőségek nyílnak (**1.7.***a)* ábra):

- *három pont*, amelyek nem eshetnek egy egyenesbe,
- *egy egyenes* és rajta kívül lévő *pont*,
- *két, egymást metsző egyenes,*
- *két párhuzamos egyenes.*

Egy adott síkot meghatározó térelemeket (pontot, egyenest) a **sík tartóelemeinek** nevezzük.



a)



b)

1.7. ábra. Síkok a térben
a) a sík meghatározása (tartóelemei); *b)* síkok helyzete

Több sík esetén ismerni kell egymáshoz való viszonyukat (**1.7.***b)* ábra).

- *Párhuzamos síkok* (pl. a kocka szemközti oldallapjai). Meghatározásuk analóg a párhuzamos egyenesekkel, azaz a végtelenben metsződnek. A közöttük lévő merőleges távolság mindenütt azonos.

- *Merőleges síkok* (pl. a kocka szomszédos oldallapjai). Egyenesben metszik egymást (a test éle), és az oldallapokon az adott pontba állított merőlegesek egymásra is merőlegesek. A metszőél egy pontjába rajzolt egyenesek akkor is merőlegesek egymásra, ha csak egyikük merőleges a metszőélre.
- *Általános helyzetű síkok* (pl. a gúla alap- és oldallapjának metsződése). Egyenesben metszik egymást (a gúla alapéle). A két sík hajlásszöge megegyezik a metszőélre merőlegesen rajzolt egyenesek α hajlásszögével.

A gyakorlatban a sík vonalakkal körülhatárolt részével találkozunk, amelynek megnevezése: **lap** (lehet alap-, fedő- és oldallap). Tanulmányaink során további megjelenési formáival is találkozunk, ezek a

- *rajz síkja:* a füzet vagy rajzlap síkja, amit már jól ismerünk,
- *képsík:* a vetületképzés síkja, későbbiekben ismerkedünk meg vele.

A térbeli alakzatok elemzésekor mindegyikük kapcsolatait vizsgáljuk, azaz a térelemek csak együttesen értelmezhetők. Ne feledjük azt sem, hogy a térbeli alakzatok – a mértani testek – nem csupán a tér lehatárolt részei, hanem maguk is a térben helyezkednek el. Tanulmányaink során három egymásra merőleges sík környezetében figyeljük meg az alakzatok jellemzőit.

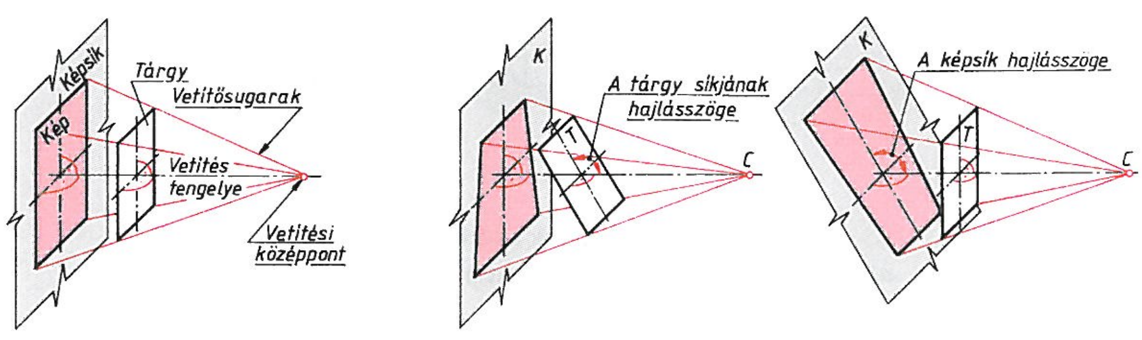
1.1.3. Látás és ábrázolás

A mesterséges képalkotás – ábrázolás – csak az emberre jellemző tudatos cselekvés. A mozgóképet (filmet, videót) és látszati ábrázolást (festményt, grafikát, fotót) kizárva, figyelmen kívül hagyhatjuk az ábrázolandó test színét és esetleges mozgását is.

A látás lényeges jellemzője, hogy a gyakorlatban egy pontba futnak össze a szembe jutó fénysugarak. Látásunk *centrális,* egy kúpon belüli látványt tud agyunk feldolgozni. A művészi ábrázolásnál csupán a látókúpon belüli látvány visszaadása a cél. (Azt, hogy miért alkalmatlan a műszaki ábrázolásra, már korábban tisztáztuk.) A műszaki ábrázolás a látás folyamatának a konkrét megvalósulását veszi figyelembe – a fénysugarak analógiájára, vetítősugarakkal rögzíti a képet. Tehát amikor test ábrázolásáról beszélünk, mindig tudni kell, hogy a tárgyak vetítősugarakkal képzett képét, a **vetületét** ábrázoljuk. Ezt az ábrázolási módot nevezzük **vetületi ábrázolásnak.**

1.1.4. Vetítési módok

A vetületképzés elemei: a *tárgy*, amelyet ábrázolni akarunk; a *képsík,* amelyen ábrázolni akarunk és a *vetítősugár,* amellyel a tárgy vonalait a képsíkra vetítjük. Elhelyezésükre, alkalmazásukra sok lehetőség kínálkozik. Először vizsgáljuk meg a centrális vagy középpontos vetítést! Hogyan keletkezik a kép, az a tárggyal összehasonlítva milyen eredményt hoz? Az elemzéshez a négyzetet ábrázoljuk (**1.8.** ábra).



a) *b)* *c)*

1.8. ábra. Középpontos vetítés

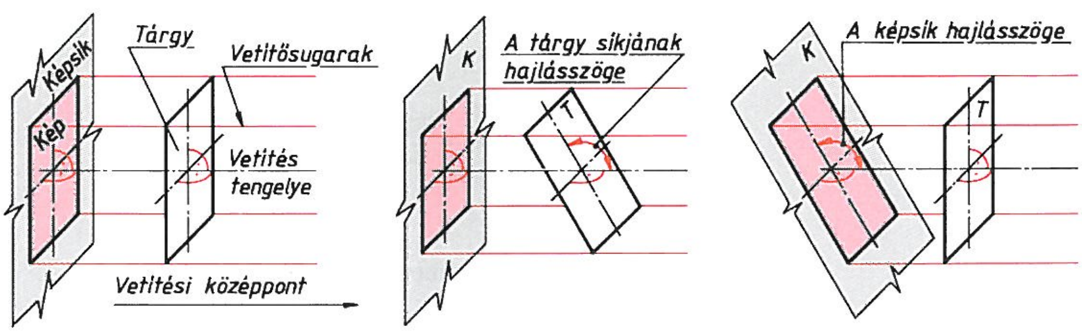
Merőleges, középpontos vetítés (1.8.*a)* ábra). A vetítősugarak egy közös pontból indulnak ki. A tárgy síkja és a képsík merőleges a vetítés tengelyére. Az eredmény, azaz a keletkezett kép a tárgyhoz viszonyítva nagyított, arányos kép.

Ferde, középpontos vetítés. A tárgy helyzete ferde (**1.8.***b)* ábra). A tárgy síkja a vetítés tengelyével hegyesszöget zár be, a képsík merőleges a tengelyre. Az eredmény torzított kép (a négyzet képe trapéz).

Ferde, középpontos vetítés. A képsík helyzete ferde (**1.8.***c)* ábra). A képsík a vetítés tengelyével hegyesszöget zár be, a tárgy síkja merőleges a tengelyre. Az eredmény torzított kép.

Ha arra gondolunk, hogy a műszaki ábrázolásban követelmény az alak- és mérethűség, beláthatjuk, hogy ezek a vetítési módok nem alkalmasak erre.

Ha a vetítősugarak középpontját a végtelenbe toljuk, akkor eredményül párhuzamos vetítősugarakat kapunk és így párhuzamos lesz a vetítés is. Elemezzük a párhuzamos vetítés lehetőségeit (**1.9.** ábra)!



a) *b)* *c)*

1.9. ábra. Párhuzamos vetítés

Merőleges, párhuzamos vetítés (1.9.*a)* ábra). A tárgy síkja és a képsík merőleges a vetítés tengelyére (egyben a vetítősugarakra is). Az eredmény, azaz *a kép azonos a tárgy alakjával és méretével.*

Ferde, párhuzamos vetítés. A tárgy helyzete ferde (**1.9.***b)* ábra). A tárgy síkja a vetítés tengelyével (a vetítősugarakkal) hegyesszöget zár be, a képsík merőleges a tengelyre. Az eredmény torzított kép.

Ferde, párhuzamos vetítés. A képsík helyzete ferde (**1.9.***c)* ábra). A képsík a vetítés tengelyével hegyesszöget zár be, a tárgy síkja merőleges a tengelyre. Az eredmény torzított kép.

Figyelembe véve ezeket a jellemzőket, megállapíthatjuk, hogy a műszaki ábrázolás számára alkalmas vetítési mód a merőleges, párhuzamos vetítés. Mivel a középpontos vetítési módokat mellőzzük, a továbbiakban nem emeljük ki a párhuzamos vetítés tényét. *A vetületi ábrázolásban* (a műszaki ábrázolásban) *mindig párhuzamos, merőleges vetítést alkalmazunk.*

1.1.5. Merőleges vetítés

Emeljük ki a vetítési módok közül a párhuzamos, merőleges vetítést és rögzítsük azokat a törvényszerűségeket, amelyeket munkánk során alkalmazunk!

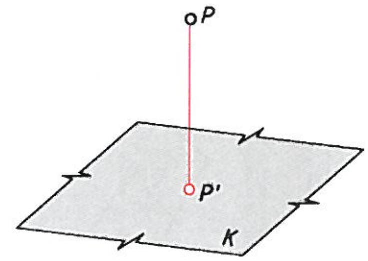
- A vetítősugarak mindig párhuzamosak egymással.
- A vetítősugarak mindig merőlegesek a képsíkra.
- A tárgy helyzetét úgy határozzuk meg, hogy legjellemzőbb oldala merőleges legyen a vetítősugarakra, azaz párhuzamos legyen a képsíkkal.

Mielőtt azonban a testek ábrázolásának részleteit tisztáznánk, vegyük sorra a térelemek ábrázolását!

1.2. Térelemek ábrázolása a képsíkon

Eddigi ismereteink alapján már tudjuk, hogy a mértani szerkesztés során tájékozódásunkat segítik a jelölések. Hasonlóképpen van ez a térmértanban is. A következő jelöléseket jegyezzük meg és alkalmazzuk munkánk során!

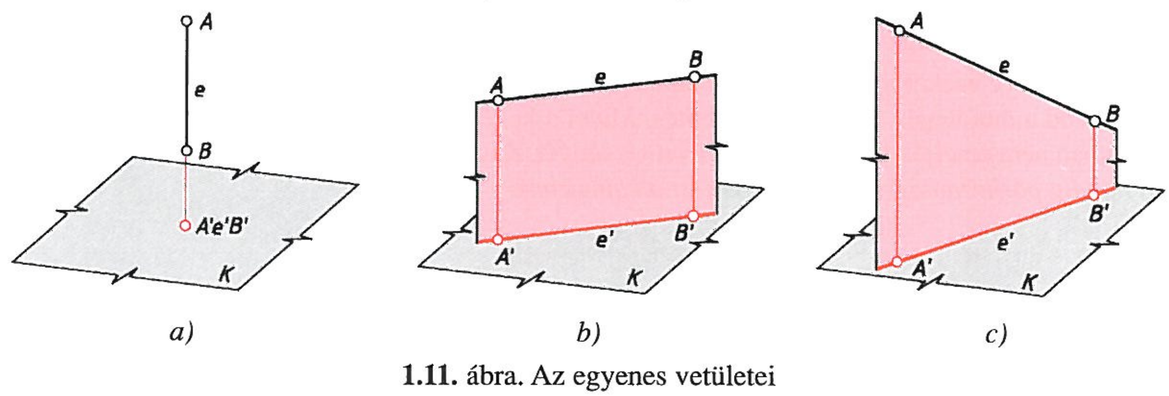
- A pont jelölése (azonos a síkmértannal) általában P,
- a pont vetületének jelölése P' (pé vesszős),
- az egyenes jelölése általában e,
- az egyenes vetületének jelölése e',
- a sík jelölése általában S,
- a képsík jelölése, mivel mindig konkrét, meglévő síkról van szó K, és több képsík alkalmazásakor K_1, K_2, K_3.



1.10. ábra. A pont vetülete

A pont vetülete (1.10. ábra). A P pont képét a K képsíkon vetítősugárral mint képsíkra merőleges egyenessel képezzük. A P pont P' képe a K képsíkon a *vetítőegyenes döféspontja.*

A képsíkra merőleges egyenes vetülete (1.11. *a)* **ábra).** Az egyenest a rajta lévő két pont, A és B határozza meg. A vetítősugár egybeesik a merőleges e egyenessel. Ennek eredménye a K képsíkon a vetítősugár döféspontja, amely azonos az A és B pontokkal (fedőpontok), valamint az e egyenessel. Mindez arra figyelmeztet, hogy a képsíkon látható pont lehet egy vagy több pont (fedőpontok) és lehet a képsíkra merőleges egyenes is. Ezért fontos a jelölésük. Jegyezzük meg, hogy *a térelemek azonosító jelének sorrendje megmutatja a térelemek láthatóság szerinti sorrendjét!* Az **1.11.** *a)* ábra szerint az A pont fedi az e szakaszt és a szakasz B végpontját. A vetületük a képsíkon ennek megfelelően $A'e'B'$ sorrendben azonosítható.



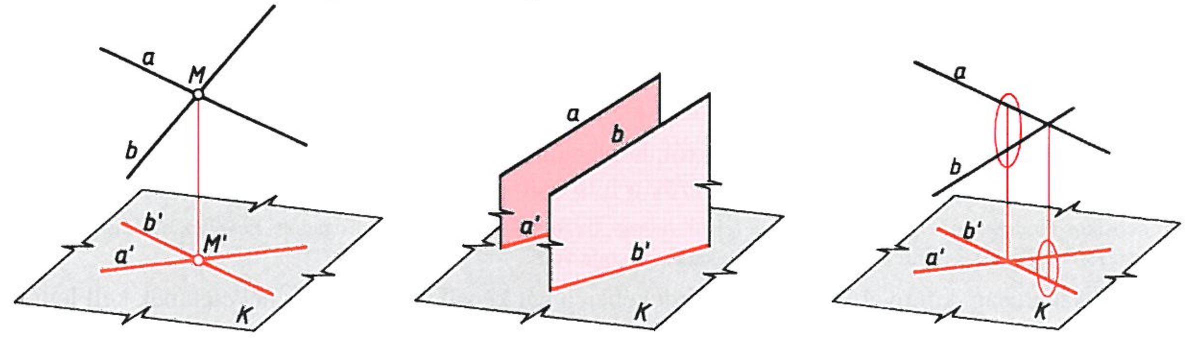
a) *b)* *c)*

1.11. ábra. Az egyenes vetületei

A képsíkkal párhuzamos egyenes vetülete (1.11. *b)* **ábra).** Az e egyenesen lévő A és B pontok vetítésével a K képsíkon kapjuk az A' és B' vetületeket, amelyeken keresztül megrajzolható az e' egyenes. Az e párhuzamos az e' egyenessel és az AB szakasz egybevágó az $A'B'$ szakasszal.

Általános helyzetű egyenes vetülete (1.11. *c)* **ábra).** Az e egyenesen lévő A és B pont vetülete A' és B', a rajtuk átrajzolt e' egyenes e egyenes vetülete. Az egyenes ferde helyzetéből következően az e' vetületen rövidülés tapasztalható, az $A'B'$ szakasz kisebb, mint az AB szakasz.

Metsződő egyenesek vetülete (1.12. *a)* **ábra).** A két egyenes (*a* és *b*) az *M* pontban metszi egymást. Az általános helyzetű egyenesek ábrázolásánál tanultakon túlmenően jellemzik, hogy az *M* metszési pont *M'* vetülete követi a merőleges vetítés szabályait.



a) *b)* *c)*

1.12. ábra. Egyenesek vetületei

Párhuzamos egyenesek vetülete (1.12. *b)* **ábra).** A két *a* és *b*, egymással párhuzamos egyenes vetületképzése az előzőekhez hasonló, eredményük az *a'* és *b'* képe a képsíkon. A párhuzamos egyenesek képe (vetülete) is párhuzamos. A meghatározásukra alkalmazott pontok által képzett szakaszok rövidülnek.

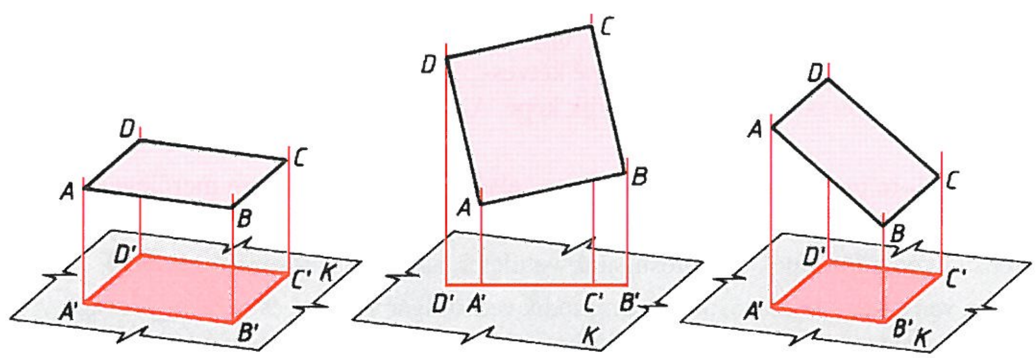
Belátható, hogy ha az egyenesek a képsíkra merőleges síkban helyezkednek el, vetületük egybeesik, azaz **fedőegyeneseket** kapunk.

Kitérő egyenesek vetülete (1.12. *c)* **ábra).** A vetületképzésben az eddig tanultakat alkalmazzuk. A látszólagos metszéspontot nem jelöljük (hiszen az a valóságban nem értelmezhető). Felismerésüket mégis ennek megfigyelése teszi könnyebbé. Amint tapasztaljuk, az egyenesek látszólagos metszéspontja és a vetület látszólagos metszéspontja vetítősugárral nem azonosítható. Pontosan ez a tény hívja fel a figyelmünket arra, hogy látszólagos a metsződés.

Vetítősík. Az egyenesek vetületképzéséről szerzett eddigi ismereteinket áttekintve, az egyenesek pontok általi meghatározására és a vetületképzés szabályaira koncentráltunk. Megfigyelhetjük azonban azt is, hogy az egyenes, annak vetülete és a vetítősugarak egy síkba esnek. Ezeknek a síkoknak közös jellemzője, hogy a képsíkra merőlegesek és metszésvonalukban találhatók az egyenesek vetületei. Ezeket a különleges helyzetű síkokat **vetítősíkoknak** nevezzük és *V*-vel jelöljük.

Síkidomok vetülete (1.13. ábra). Az eddig megismert módszerrel képezhetjük síkidomok vetületét. A legcélszerűbb mód a síkidom (ábránkon négyzet) csúcsainak vetületképzése, majd azok értelemszerű összekötése. Az eredmény a térben való elhelyezkedésétől függően a következő lehet:

- a képsíkkal párhuzamos síkidom vetülete a síkidommal egybevágó (**1.13.** *a)* ábra),
- a képsíkra merőleges síkidom vetülete egy egyenesbe esik (**1.13.** *b)* ábra),
- az általános helyzetű síkidom vetülete torzult kép, oldalai rövidülnek (**1.13.** *c)* ábra).



a) *b)* *c)*

1.13. ábra. Síkidomok vetülete

1.3. Ábrázolás a két képsíkos rendszerben

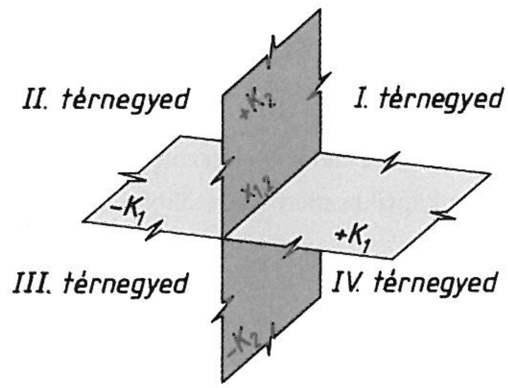
Az eddig megismert vetületképzésből a következő tapasztalatokat szűrhetjük le:

- egy vetület alapján nem dönthető el a térelem helye a térben, nem ismerjük pontjainak, egyeneseinek távolságát a képsíktól,
- ha az egyenes nem párhuzamos a képsíkkal, akkor annak torzult képe keletkezik a képsíkon.

Egyértelműbb képet kaphatunk a térelemekről, helyzetükről és egymáshoz való viszonyukról, ha újabb képsíkot vezetünk be, **két képsíkon** elemezzük a felsorolt jellemzőket.

A két képsíkos rendszer kidolgozása G. Monge (ejtsd: monzs, de fonetikus kiejtése is elfogadott) nevéhez fűződik. A tudós a 18-19. sz. fordulóján élt és a francia tudományos akadémia tagja volt.

Az alkalmazhatóság, könnyebb eligazodás érdekében a két képsíknak speciális helyzetűnek kell lennie. Ez azt jelenti, hogy a két képsík (K_1 és K_2) merőleges egymásra (**1.14.** ábra).



1.14. ábra. A két képsíkos rendszer

Bevezetésükkel a következő új információkat jegyezzük meg!

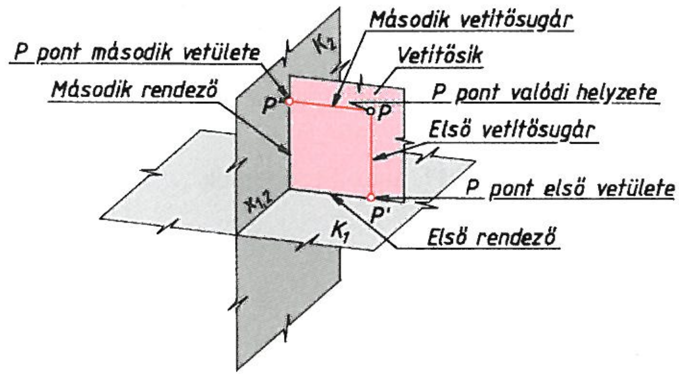
- Az egymásra merőleges K_1 és K_2 képsíkok a teret négy egyenlő részre: *I.*, *II.*, *III.* és *IV.* térnegyedre osztják,
- a képsíkok egy egyenesben metszik egymást, amelyet $x_{1,2}$ jelöléssel látunk el és képsíktengelynek nevezünk,
- az $x_{1,2}$ tengely a képsíkokat pozitív és negatív félsíkokra osztja. Jóllehet műveleteket az I. térnegyedben végzünk, azonban a tér értelmezésétől nem vonatkoztathatunk el.

1.3.1. A pont ábrázolása

A P pont vetületeit vetítősugarakkal képezzük a K_1 és K_2 képsíkokon (**1.15.** ábra). A vetületek megkülönböztetésére a vesszős jelölést alkalmazzuk, ügyelve az azonosságra is. A P pont képe a K_1 képsíkon P' (pé egyvesszős), a K_2 képsíkon pedig P'' (pé kétvesszős), megnevezésük pedig: a K_1 képsíkon P pont első képe, a K_2 képsíkon pedig P pont második képe. A további jellemzőket vessük össze az **1.15.** ábra jelöléseivel!

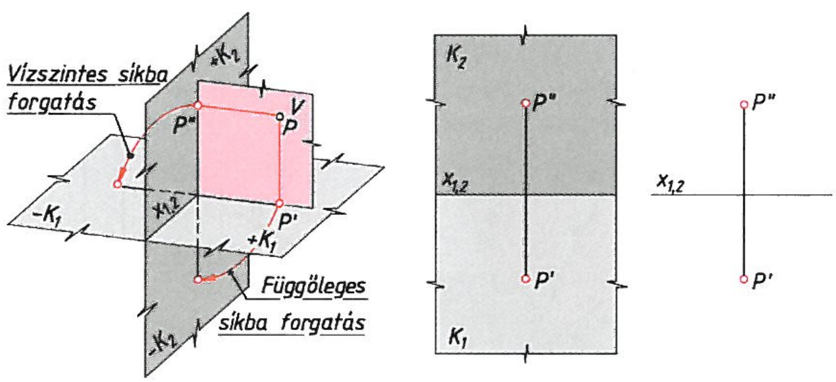
- A P pont K_1-re merőleges vetítőegyenese az első vetítősugár, a K_2 -re merőleges vetítőegyenese a második vetítősugár.
- A képsíkokon képződnek a vetítősugarak vetületei, amelyek elnevezése **rendező.**
- A K_1-en van az első rendező, amely a második vetítősugár vetülete és azzal egybevágó. A K_2 -n van a második rendező, amely az első vetítősugár vetülete és azzal egybevágó (ne tévesszük az elnevezéseket, azok mindig a képsíkkal kapcsolatos viszonyukat tükrözi, pl. az első vetítősugár a K_1 képsíkot döfi – ezért első a megnevezése –, vetülete a K_2 képsíkon képződik – ezért második rendező).

- A rendezők mindig merőlegesek az $x_{1,2}$ tengelyre, ezért alkalmasak a távolság meghatározására. Így az első rendező hosszúsága, az első távolság megegyezik a P pont K_2-től mért távolságával, a második rendezőé, a második távolság pedig a K_1-től mért távolságával.
- A vetítősugarak és a rendezők olyan négyszöget képeznek, amely merőleges mind a két képsíkra. Tulajdonságai alapján *vetítő négyszögnek* nevezzük, a síkot pedig amelyikbe belesimul, **vetítősíknak** (V).



1.15. ábra. Pont a két képsíkos rendszerben

A képsíkok egyesítése (1.16. ábra). A szabályok és jelölések ismeretében egyszerűbb ábrázolási lehetőség nyílik számunkra, mint amilyen az ábrán látható. A képsíkokat közös síkban helyezhetjük el oly módon, hogy a K_2 képsíkot beforgatjuk K_1 képsíkba (pl. a rajzlapon). Megtehetjük a másik megoldást is, amikor K_1 képsíkot forgatjuk be a K_2 képsíkba (pl. az iskolai táblán). Az ábrázolás eredménye változatlan, a képsík helyzete változik meg (vízszintes képsík: felülnézet, függőleges képsík: elölnézet).

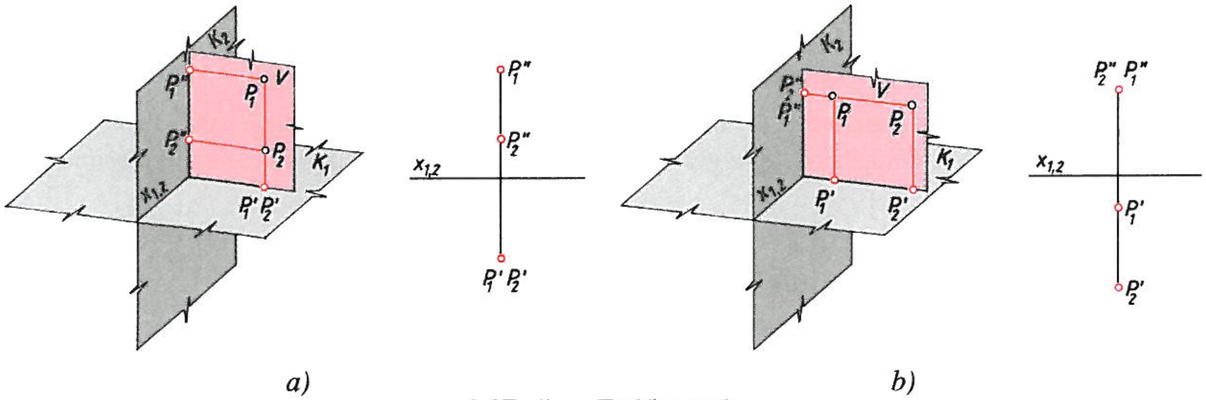


1.16. ábra. A képsíkok egyesítése

Az ábrázolásból kitűnik, hogy fölösleges megmutatni mind a síkot jelképező törésvonalakat (a síkról tudjuk, hogy két kiterjedésében végtelen), mind pedig elnevezésüket (egymáshoz való viszonyuk változatlan). Tanulmányaink során elegendő ábrázolni a képsíkok metszésvonalát ($x_{1,2}$), a pontok vetületeit (P', P'') és a rendezőket.

Első fedőpontok (1.17. *a)* **ábra).** Azokat a pontokat, amelyeknek első vetítősugara közös, *első fedőpontoknak* nevezzük. Ábrázolásuknál, a K_1-en vetületük közös pontba esik, a K_2-n pedig külön. A két vetület összehasonlításával állapíthatjuk meg, hogy a fedőpontok közül melyik látszik a képsíkon és melyik fedett. Az első vetítősugár ezt egyértelművé teszi. Megállapíthatjuk, hogy amelyik pont távolabb van az $x_{1,2}$ tengelytől, az a látható, a közelebbi pedig a fedett.

Második fedőpontok (1.17. *b)* **ábra).** Második vetítősugaruk közös, a K_2 képsíkon esik egy pontba vetületük.



a) b)

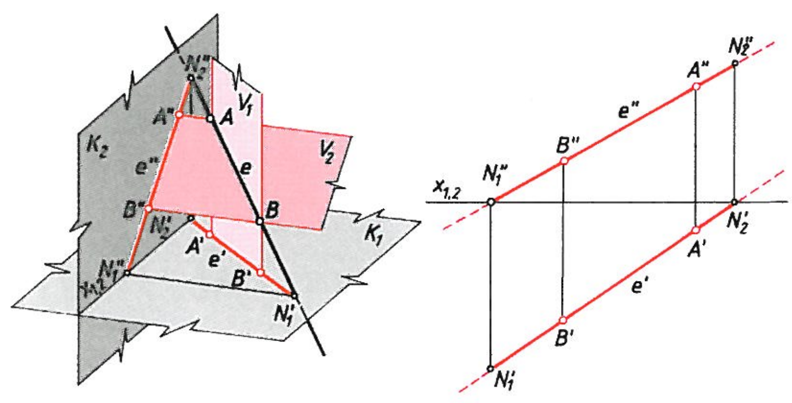
1.17. ábra. Fedőpontok

A tanultakat gyakoroljuk az **1. munkalapon**!

1.3.2. Az egyenes ábrázolása

Az egyenest általában a rajta lévő két ponttal ábrázoljuk (az egyenes definíciója alapján), és így viszszavezethető a pont ábrázolására. Most azonban ismerkedjünk meg egy általánosabb módszerrel, amely tágítja ismereteinket, egyben tovább segíti tájékozódásunkat a tér-sík kapcsolatában!

Az általános helyzetű egyenest vetítősíkjaival ábrázoljuk (**1.18.** ábra). Az első képsíkra merőleges vetítősík az első vetítősík (V_1), a második képsíkra merőleges pedig a második vetítősík (V_2). A vetítősíkok és képsíkok metszésvonala az egyenes vetülete. Így V_1 és K_1 metszésvonala e', V_2 és K_2 metszésvonala e''. Az ábrázolt egyenes döfi mindkét képsíkot. A döféspontokat *nyompontoknak* nevezzük, és N betűvel jelöljük. Így az egyenes a K_1 képsíkot az N_1 nyompontban, a K_2 képsíkot az N_2 nyompontban döfi. A nyompontok egyben a vetületi pontok is, így jelölésük N_1', ill. N_2''. Vetületi pontpárjuk az $x_{1,2}$ tengelyen képződik, így N_1'' és N_2'.



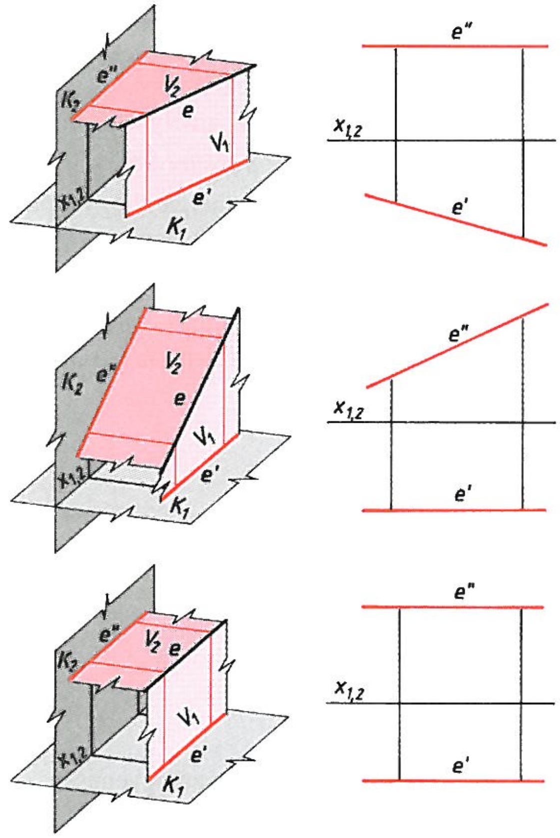
1.18. ábra. Általános helyzetű egyenes

Különleges helyzetű egyenesek

A speciális helyzetű egyeneseket különleges helyzetű egyeneseknek nevezzük. Ezek az egy vagy két képsíkkal párhuzamos, valamint valamelyik képsíkra merőleges egyenesek.

A képsíkkal párhuzamos egyenesek (1.19. ábra**).**

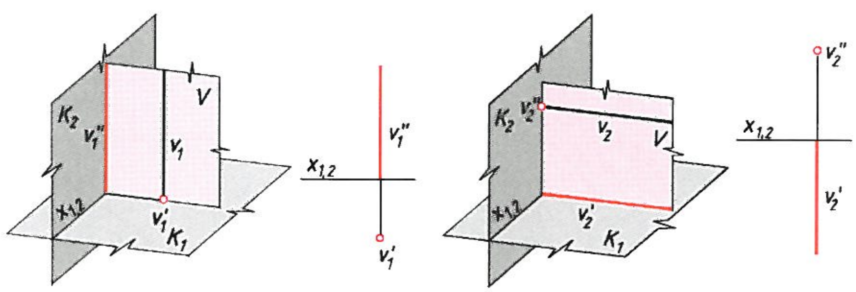
- Az első képsíkkal (K_1) párhuzamos e egyenesnek az e'' második vetülete párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel.
- A második képsíkkal (K_2) párhuzamos e egyenesnek az e' első vetülete párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel.
- A mindkét képsíkkal (K_1; K_2) párhuzamos e egyenesnek mindkét vetülete (e' és e'') párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel.



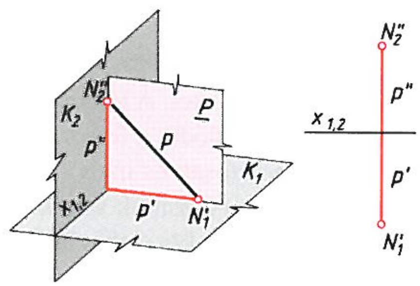
1.19. ábra. Képsíkkal párhuzamos egyenesek

A képsíkra merőleges egyenesek (1.20. ábra). Jellegzetességüket megfigyelve a következőket tapasztaljuk.

- Az első képsíkra (K_1) merőleges v egyenes v' első vetülete pont, v'' második vetülete az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges egyenes, tulajdonképpen első vetítősugár.
- A második képsíkra (K_2) merőleges v egyenes v' első vetülete az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges egyenes, v'' második vetülete pedig pont, azaz második vetítősugár.



1.20. ábra. Képsíkra merőleges egyenesek (vetítősugarak)



1.21. ábra. Profilegyenes

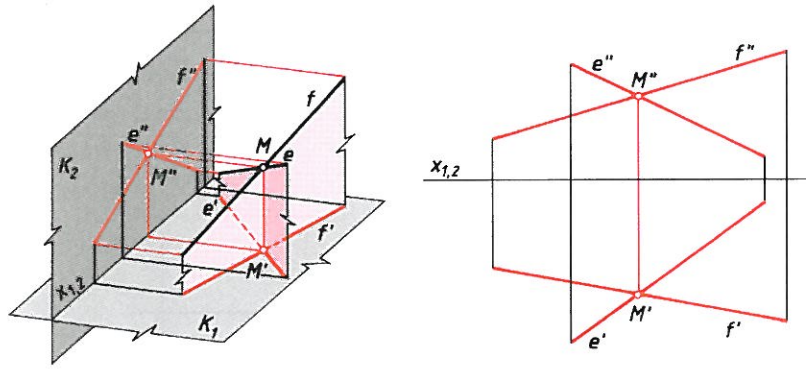
Profilegyenes (1.21. ábra). Azt a vetítősíkot, amely mindkét képsíkra (így tengelyre is) merőleges, *profilsíknak* nevezzük. A profilsíkban elhelyezkedő azon egyeneseket, amelyek nem vetítősugarak (azaz nem merőlegesek egyik képsíkra sem), profilegyenesnek nevezzük és *p*-vel jelöljük. Ábrázolásuk lényege, hogy a profilegyenes képe az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges szakasz, amelynek végpontjai az N_1' és N_2'' nyompontok.

A jellemző egyenesábrázolások után tekintsük át *két egyenes* ábrázolásának lehetőségeit!

Párhuzamos egyenesek. A merőleges vetítés következménye, hogy a párhuzamos egyenesek vetületei is párhuzamosak. További jellemzőit elemezzük az **1.1.** táblázatban!

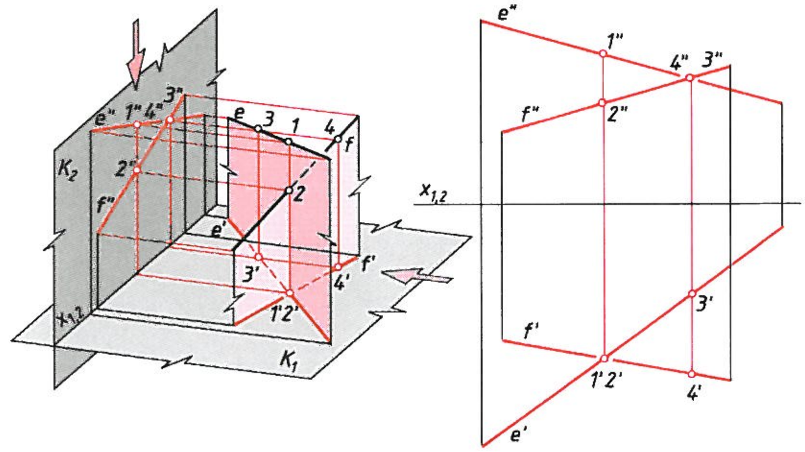
Merőleges egyenesek. Jellemzőiket figyeljük meg az **1.2.** táblázatban!

Egymást metsző egyenesek (1.22. ábra). Jellemzőjük, hogy valódi metszéspontjuk van. Ez bizonyíthatóan jelenik meg vetületeiben. Az *M* metszéspont vetületei *M'* és *M"* közös rendezőn találhatók.



1.22. ábra. Egymást metsző egyenesek

Kitérő egyenesek (1.23. ábra). A térelemek jellemzésénél már kitértünk rá, hogy a térben kitérő egyenesek az ábrázolásban látszólag metsződnek. A vetületi ábrázolás két képsíkjának összehasonlításával azonban könnyű felismerni a kitérő egyeneseket. Ugyanis a látszólagos metsződések nem egy rendezőre esnek. A K_1 első képsíkon *1'* és *2'* látszólag egybeeső pontok, a K_2 második képsíkon külön pontokként látszódnak (*1"* és *2"*). A K_2 második képsíkon, látható *3"* és *4"* közös vetületű pontok a K_1 első képsíkon külön vetületben képződnek (*3'* és *4'*).

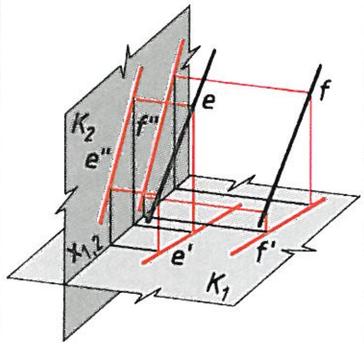
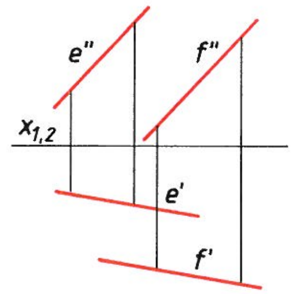
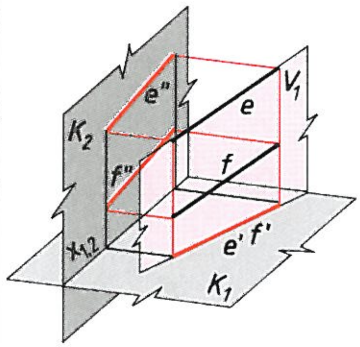
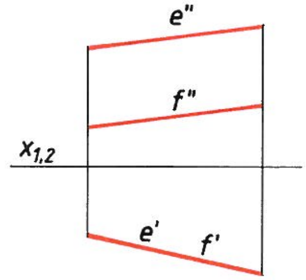
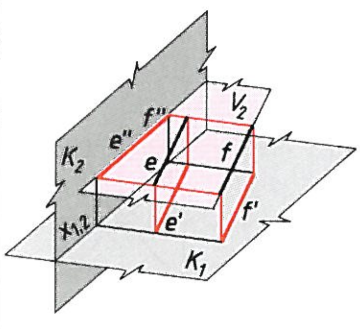
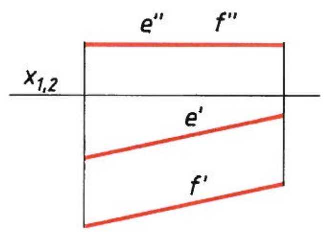
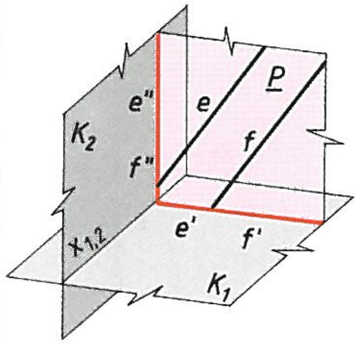
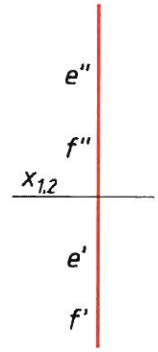


1.23. ábra. Kitérő egyenesek

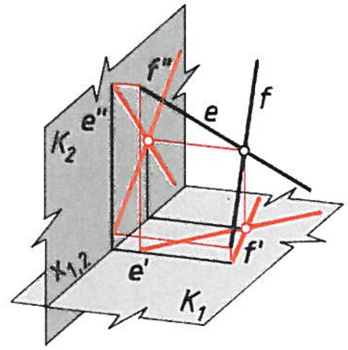
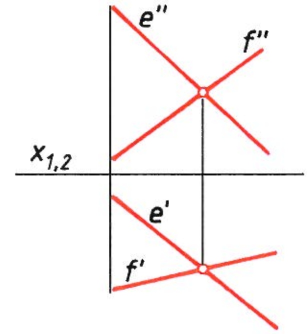
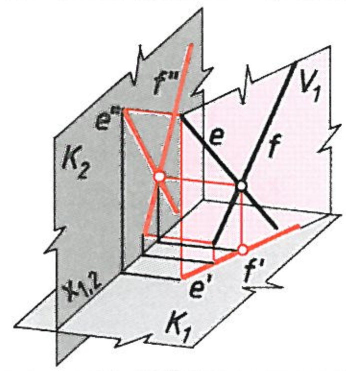
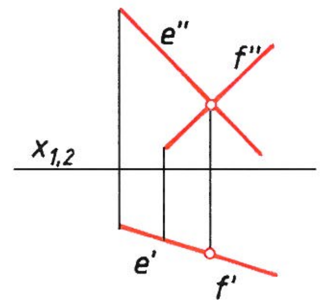
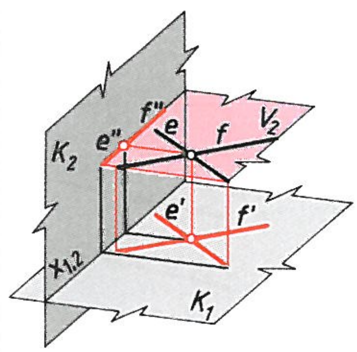
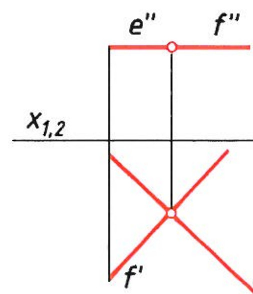
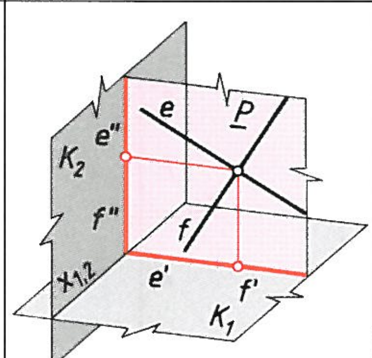
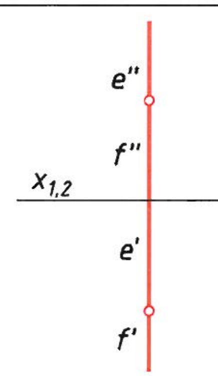
Az ábrázolásnál egyértelműsítjük a kitérő egyeneseket. A térben hátul helyezkedő egyenest megszakítjuk az előtte lévő egyenes környezetében. Ebből adódik a feladat, a látszólagos metszőpontokban meghatározni, hogy melyik egyenes látható folyamatosan és melyik a takart? A meghatározásukhoz használjuk fel előző tapasztalatainkat! Az *1–2*, ill. a *3–4* pontok vetületeihez rendelt rendezőket elemezzük. A külön ábrázolható pontok közül az $x_{1,2}$ tengelyhez közelebbi található hátul, tehát azt az egyenest szakítjuk meg, amelyen ez a pont található.

A tanultakat gyakoroljuk a **2. munkalapon**!

Párhuzamos egyenesek a két képsíkos rendszerben. **1.1.** táblázat

Helyzetük a képsíkrendszerben	Szemléltető kép	Vetületi kép	Jellemzőik
Általános helyzetű párhuzamosok			Távolságuk egyik képsíkon sem valódi.
Vetítősíkban (V_1) nyugvó párhuzamosok			K_1 képsíkon fedőegyenesek. K_2 képsíkon távolságuk nem valódi.
K_1 képsíkkal párhuzamos síkban (V_2) nyugvó párhuzamosok			K_1 képsíkon vetületük egybevágó a térbeli helyzettel. K_2 képsíkon fedőegyenesek. e'' és f'' párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel.
$\underline{P}$ profilsíkban nyugvó párhuzamosok			Mindkét képsíkon fedőegyenesek.

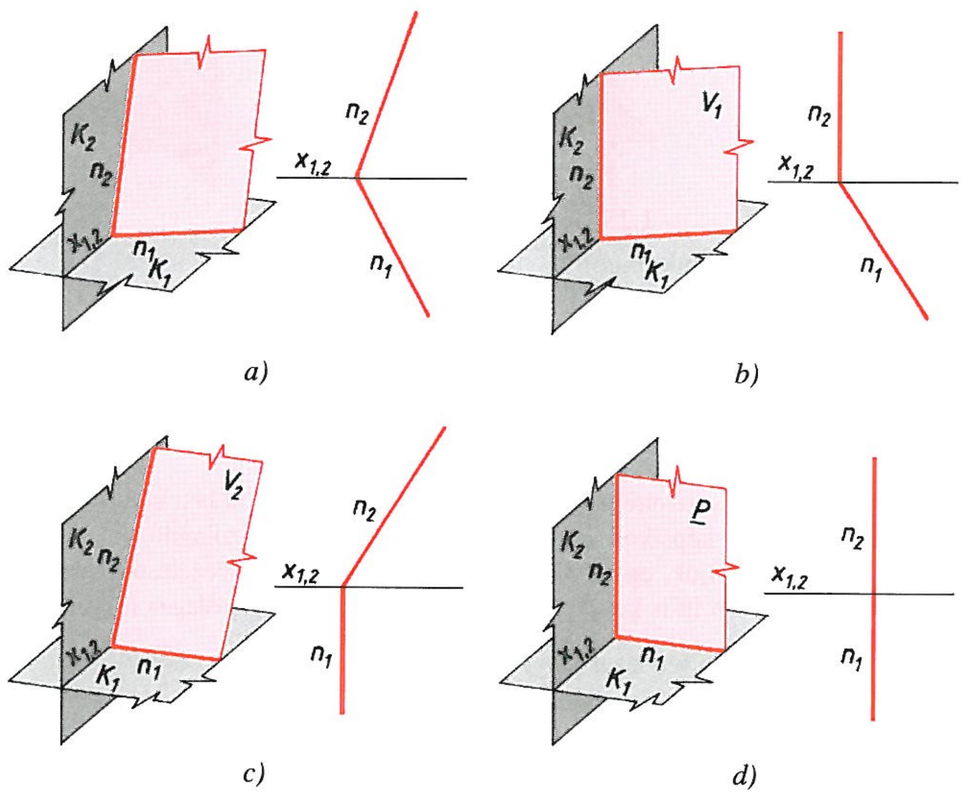
Merőleges egyenesek a két képsíkos rendszerben. **1.2.** táblázat

Helyzetük a képsíkrendszerben	Szemléltető kép	Vetületi kép	Jellemzőik
Általános helyzetű merőlegesek			Mindkét képsíkon a derékszög torzult.
Vetítősíkban (V_1) nyugvó merőlegesek			K_1 képsíkon fedőegyenesek. K_2 képsíkon a derékszög torzult.
K_1 képsíkkal párhuzamos síkban (V_2) nyugvó merőlegesek			K_1 képsíkon vetületük egybevágó a térbeli helyzettel. K_2 képsíkon fedőegyenesek, amelyek párhuzamosok az $x_{1,2}$ tengellyel.
$\underline{P}$ profilsíkban nyugvó merőlegesek			Mindkét képsíkon fedőegyenesek.

1.3.3. A sík ábrázolása

Eddigi ismereteinket alkalmazva nem tudjuk ábrázolni a síkot. Az ugyanis végtelen, így a benne lévő pontok, egyenesek vetületükben is végtelen síkot határoznak meg, azaz eredményül a képsíkokat kapjuk. Ábrázolásukhoz a síkok már ismert tartóelemeit alkalmazzuk. Ugyanis a képsík is sík és a képsíkok metszésvonalait (az $x_{1,2}$ tengelyt) már ábrázoltuk. A képsíkrendszerben elhelyezett sík a képsíkokat metszi egy-egy egyenesben. A metszésvonalat **nyomvonalnak** nevezzük, és n-nel jelöljük. A nyomvonalak, mint egyenesek már ábrázolhatók. A nyomvonalak *különleges helyzetű egyenesek,* mivel illeszkednek a képsíkra. Jelölésük lényeges, mert ez hívja fel a figyelmet arra, hogy két egyenest ábrázoltunk, azaz nem egy egyenes vetületeit látjuk. Számozással azonosíthatók, így az első képsíkban lévő nyomvonal jelölése n_1, a második képsíkban lévőé n_2.

A különböző helyzetű síkok jellemzőit és ábrázolását figyeljük meg az **1.24.** ábrán!



1.24. ábra. Síkok vetületei

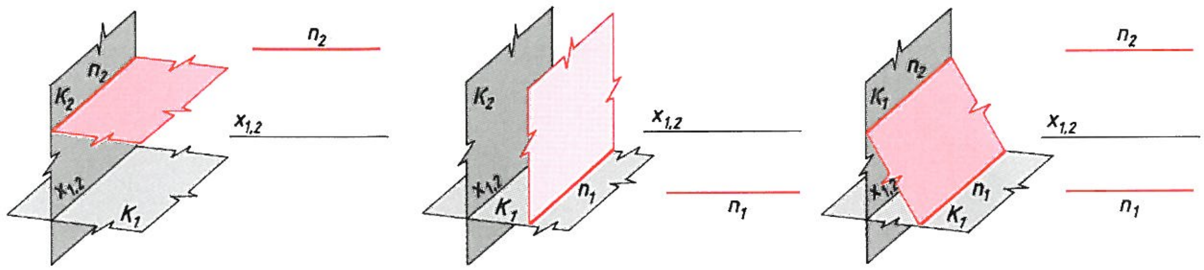
Általános helyzetű sík (1.24.*a)* ábra). Metszi mind a két képsíkot, így vetületei az $x_{1,2}$ tengelyt metsző n_1 és n_2 nyomvonalak. A nyomvonalak mindig ferdék, hiszen az általános helyzetből adódóan az ábrázolt sík sem párhuzamos, sem merőleges nem lehet.

Merőleges sík. Ebbe a csoportba azok a síkok sorolhatók, amelyek *merőlegesek valamelyik képsíkra.* Ezek a vetítősíkok, amelyekkel már végeztünk műveleteket. Amelyik képsíkra merőleges, nyomvonala ferde, míg a másik képsíkon a nyomvonala merőleges az $x_{1,2}$ tengelyre. Ennek megfelelően

- az első vetítősík (V_1) merőleges az első képsíkra (K_1), nyomvonala a második képsíkon (K_2) merőleges az $x_{1,2}$ tengelyre (n_2) **1.24.***b)* ábra),
- a második vetítősík (V_2) merőleges a második képsíkra (K_2), nyomvonala az első képsíkon (K_1) merőleges az $x_{1,2}$ tengelyre (n_1) (**1.24.***c)* ábra).

Profilsík (1.24.*d)* ábra). Ide sorolhatók azok a síkok, amelyek mindkét képsíkra merőlegesek (amint a profilegyenes meghatározásánál már tapasztaltuk). Jelölése: $\underline{P}$. (Lényeges a betűaláhúzás, ugyanis ezzel elkerülhető összetévesztése a P ponttal.) A merőlegesség következménye, hogy n_1 és n_2 nyomvonalak merőlegesek az $x_{1,2}$ tengelyre és egy egyenesbe esnek. (Kerüljük a tévedést: a nyomvonalak egy egyenesbe esnek, de továbbra is két egyenesként – n_1 és n_2 – szerepelnek!)

Párhuzamos sík (1.25. ábra). Ide sorolhatók azok a síkok, amelyek valamelyik képsíkkal vagy a tengellyel párhuzamosak. A képsíkrendszer sajátosságait figyelembe véve adódik, hogy a képsíkkal párhuzamos sík a másik síkra merőleges, azaz a merőleges síkok közé is besorolható. Továbbá, mint a későbbiekben majd tapasztalni fogjuk, más környezetben profilsíkká válik. A párhuzamos síkok jellegzetessége, hogy azon a képsíkon, amellyel párhuzamosak, nincs képük, pontosabban, vetületük maga a képsík. Mivel a másik képsíkra merőlegesek, nyomvonaluk ábrázolható – az párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel (távolságuk megegyezik a képsík és a vele párhuzamos sík távolságával).



1.25. ábra. Párhuzamos síkok

A tanultakat gyakoroljuk a **3. munkalapon**!

1.4. Három képsíkos ábrázolás

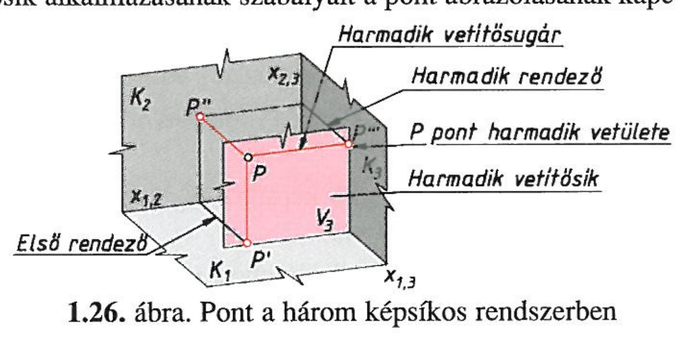
A műszaki élet bonyolultabb, összetettebb térbeli alakzatainak egyértelmű bemutatására legtöbbször kevés az elöl- és felülnézet (a két képsíkos rendszer). Ahhoz, hogy az ábrázolandó alakzatot újabb oldaláról (oldalnézet) is ábrázolni tudjuk, egy következő, harmadik képsík bevezetésére van szükség. A két képsíkos rendszerhez hasonlóan itt is követelmény, hogy az új képsík merőleges legyen az előzőekre.

A három képsíkos ábrázolási rendszer alapkövetelménye, hogy minden képsík merőleges a további két képsíkra.

A képsíkokat elemezve megállapíthatjuk, hogy a képsíkok tulajdonképpen profilsíkok. A harmadik képsík jele K_3 és a rajta lévő térelemvetületek jelölése háromvesszős (pl. P''').

1.4.1. Vetítés a harmadik képsíkra

Az eddig megtanult szabályokat tartjuk szem előtt, mivel az elv azonos. Kövessük nyomon az **1.26.** ábrán a K_3 harmadik képsík alkalmazásának szabályait a pont ábrázolásának kapcsán!



1.26. ábra. Pont a három képsíkos rendszerben

A harmadik vetítősugár merőleges a K_3 harmadik képsíkra és párhuzamos a K_1 és K_2 (első és második) képsíkokkal, azaz az $x_{1,2}$ tengellyel. A második vetítősugár vetülete a K_3 képsíkon a harmadik rendező, amely azonos hosszúságú az első rendezővel.

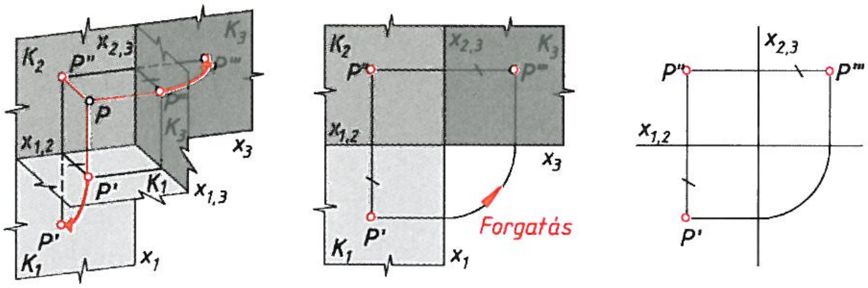
Összegezve a tanultakat: a két képsíkos rendszert kiegészítettük egy harmadik képsíkkal. Az első és második képsíkban végzett műveleteket a tanultak alapján végezzük. Az újabb képsík bevezetése csupán az előbbi műveletek folytatását jelenti, azaz a harmadik képsíkra vetítjük a K_1K_2 rendszerben ábrázolt elemeket.

Azt a műveletet, amellyel két képsík alapján egy harmadik képsíkra vetítjük a részműveltek eredményét, leképezésnek nevezzük.

Pl. az első és második képsíkon ábrázolt térelemeket képezzük a harmadik képsíkra. A későbbiek folyamán újabb képsíkokkal is megismerkedünk, és nagy fontosságú lesz ez a művelet.

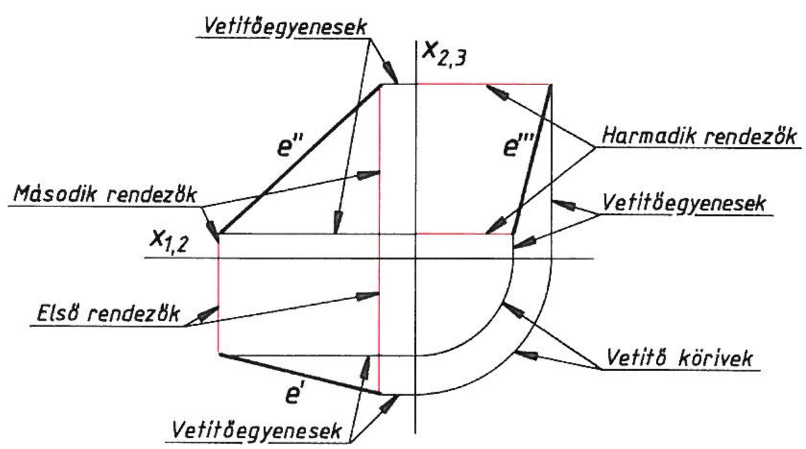
1.4.2. A képsíkok egyesítése

A két képsíkos rendszerhez hasonlóan feladatunk az, hogy a három képsíkot közös síkba forgassuk be. A síkba forgatást mindig az elölnézet síkjába végezzük. Eredménye az **1.27.** ábrán figyelhető meg.



1.27. ábra. A képsíkok egyesítése

A közös síkba terítés eredménye, hogy az ábrázolásban maradt egy síknegyed, amely ugyan a rajzlapon valóságos sík, ábrázolás szempontjából látszólagos sík, azaz nem értelmezhető. A szerkesztési gyakorlatban az első rendező K_3-ba forgatására alkalmazzuk.



1.28. ábra. A rendezők és vetítőegyenesek elhelyezése

A *vetítő körív* középpontja mindig $x_{1,2}$ és $x_{2,3}$ metszéspontja, sugara pedig az első rendező. Ezzel azt érjük el, hogy az első és harmadik rendező azonos hosszúságú legyen. Ügyeljünk a vetítés folyamatára! P' pontból vetítőegyenest rajzolunk az $x_{1,2}$-vel párhuzamosan x_1-ig (tehát erre merőlegesen), majd körzővel átforgatjuk x_3-ra, onnan $x_{2,3}$-mal párhuzamosan vetítjük tovább. A P'' pontból $x_{1,2}$-vel párhuzamos vetítőegyenessel meghatározható P'''. (A vetítőegyenes K_3-on lévő darabja a harmadik rendező.) A megfogalmazott elnevezések megértését könnyíti az **1.28.** ábra.

A megismert elv alapján bármely két képsíkról a hiányzó harmadik képsíkon megszerkeszthető a keresett vetület.

Gyakoroljuk a tanultakat a **4. munkalapon**!

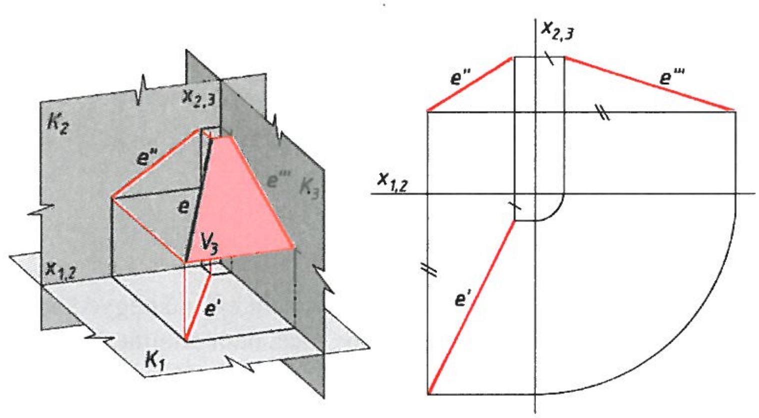
1.4.3. Térelemek a három képsíkos rendszerben

Az eddig tanultakat alkalmazva elemezzük a három képsíkos rendszerben végzett ábrázolás sajátosságait!

A pont ábrázolását már ismerjük. Vizsgáljuk meg a további térelemek ábrázolási módjait!

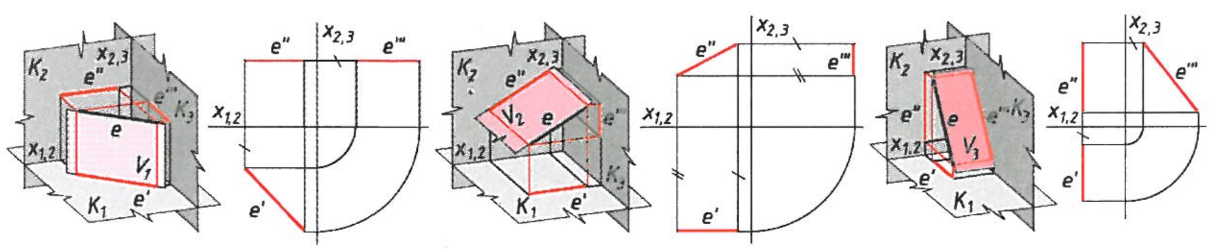
Általános helyzetű egyenes ábrázolása (1.29. ábra). A K_1 és K_2 képsíkokon a tanult módon ábrázoljuk az egyenest. A továbbiakban, amikor a K_3 képsíkra vetítünk, a következőkre ügyeljünk:

- az egyenes ugyanazon pontjait vetítsük, amelyeket a K_1 és K_2 között tettük,
- a K_2 képsíkról az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamosan vetítjük át a két pontot K_3-ra,
- a K_1 képsíkról a vetítést először az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamosan az x_1 tengelydarabra végezzük, ahonnan a tengelyek metszéspontjából a kapott pontokat az x_3 tengelydarabra forgatjuk, végül $x_{2,3}$ tengellyel párhuzamosan metsszük a K_2-ről vetített egyeneseket.



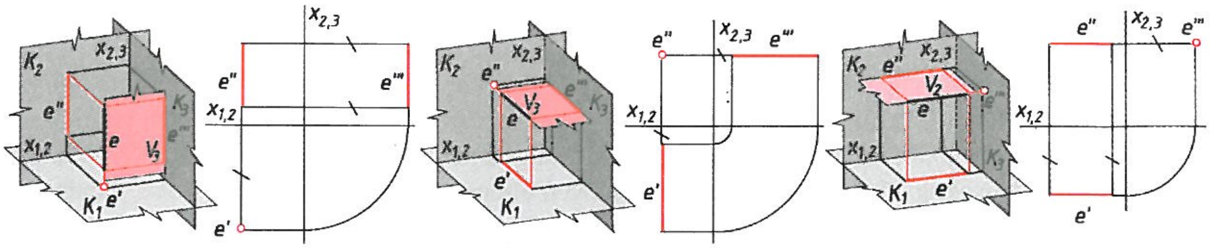
1.29. ábra. Általános helyzetű egyenes

Párhuzamos egyenes ábrázolása. Ide soroljuk a valamelyik képsíkkal párhuzamos egyeneseket. Ábrázolásukat a hozzájuk tartozó V_1,V_2,V_3 vetítősíkokkal végezzük. Az ábrázolási módok az **1.30.** ábrán láthatók.



1.30. ábra. Párhuzamos egyenes ábrázolása

Merőleges egyenes ábrázolása. A legspeciálisabb helyzetű egyenes, ugyanis ha egy egyenes merőlegesen döfi valamelyik képsíkot, a másik kettővel párhuzamos. Ilyen egyenesek a vetítősugarak. Az ábrázolási lehetőségeket az **1.31.** ábra tartalmazza.



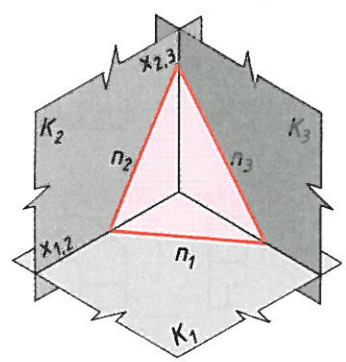
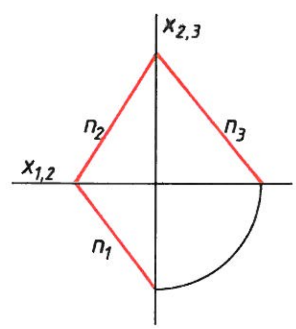
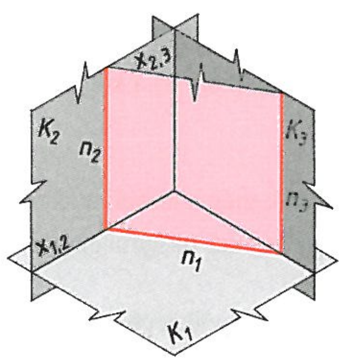
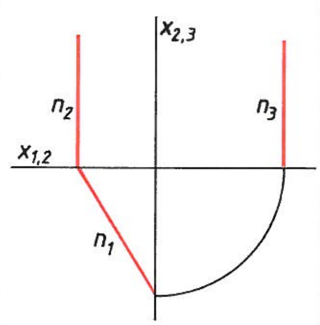
1.31. ábra. Merőleges egyenes ábrázolása

Több egyenes ábrázolása. A két képsíkos rendszernél megismertek szerint lehetnek párhuzamos, merőleges, metsződő, valamint elkerülő egyenesek. Tulajdonságaik és azok alkalmazása az ábrázolásban csupán a harmadik képsíkra való vetítés újdonságát jelenti.

Gyakoroljuk a tanultakat a **5.** és **6. munkalapon**!

Síkok ábrázolása (1.3. táblázat). Az eddig tanult térelemek elemzésekor már rendszeresen alkalmaztuk a különböző nevezetes síkokat. Ismerjük ábrázolásukat a két képsíkos rendszerben. Elemezzük a **1.3.** táblázat mezőit és figyeljük meg az új jellemzőket!

Síkok a három képsíkos rendszerben. **1.3.** táblázat

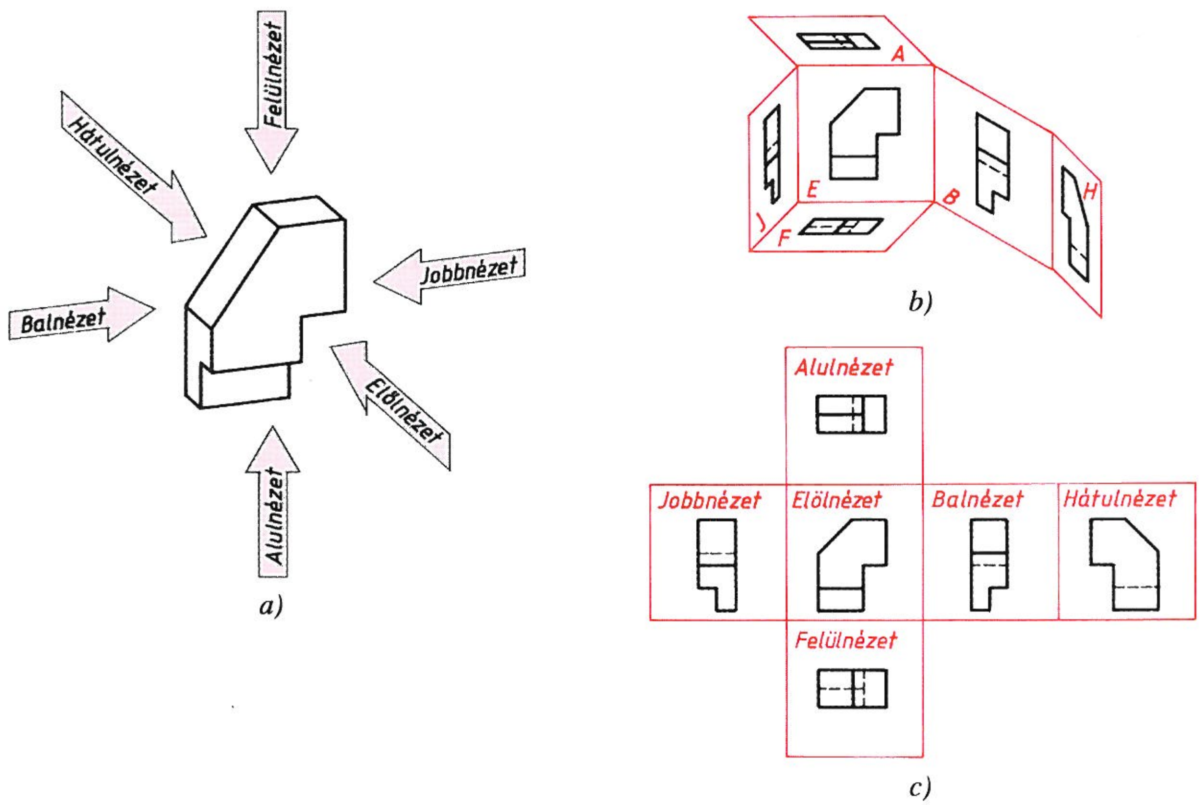
Helyzetük a képsíkrendszerben	Szemléltető kép	Vetületi kép	Jellemzőik
Általános helyzetű sík (S – csak szükség esetén jelöljük)			Nyomvonalai a tengelyeket közös pontban metszik (egyes síkok esetében a tengely negatív felén). Képe mindhárom képsíkon ferde.
Vetítősík (V_1)			K_1 képsíkra merőleges. K_1 képsíkon n_1 ferde (metszi $x_{1,2}$ és $x_{1,3}$ tengelyeket). K_2 képsíkon n_2 az $x_{2,3}$ tengellyel párhuzamos. K_3 képsíkon n_3 az $x_{2,3}$ tengellyel párhuzamos.

Gyakoroljuk a tanultakat a **7. munkalapon**!

1.4.4. Az európai és az amerikai nézetrend

A képsíkokat elnevezhetjük a nézetirány alapján is (ahogy ezt korábban is tettük). A K_1 képsík *a felülnézet síkja* (a képet felülről vetítjük rá), a K_2 képsík *az elölnézet síkja* (a képet nézőpontunkból vetítjük rá), a K_3 képsík pedig *a balnézet síkja* (a képet bal oldalról vetítjük rá). Általában ezt a nézetrendet alkalmazzuk, de további képsíkok alkalmazásával, ill. más helyen elrendezve őket, további nézeteket kapunk.

Így K_3 képsíkot a K_1 és K_2 képsíkhoz viszonyítva bal oldalon elhelyezve, majd a közös síkba forgatva kapjuk *a jobbnézet síkját* (a képet jobbról vetítjük rá). A K_1 képsíkot K_2 és K_3 képsíkhoz viszonyítva felül elhelyezve és síkba forgatva kapjuk *az alulnézet síkját* (a képet alulról vetítjük rá). A K_2 képsíkot K_1 és K_3 képsíkhoz viszonyítva elől elhelyezve és síkba forgatva (belátható, hogy csak K_1 vagy K_3 képsíkokat követheti, tehát kétszeres beforgatás eredménye) kapjuk *a hátulnézet síkját*. A nézetrend értelmezését és elrendezését szemlélteti az **1.32.** ábra.



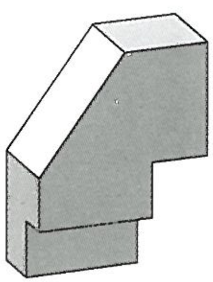
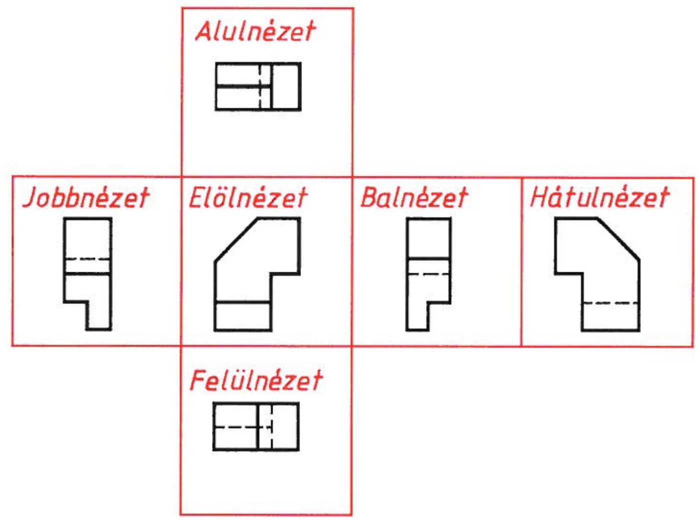
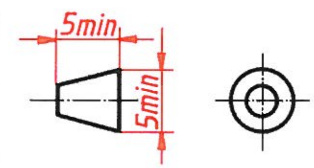
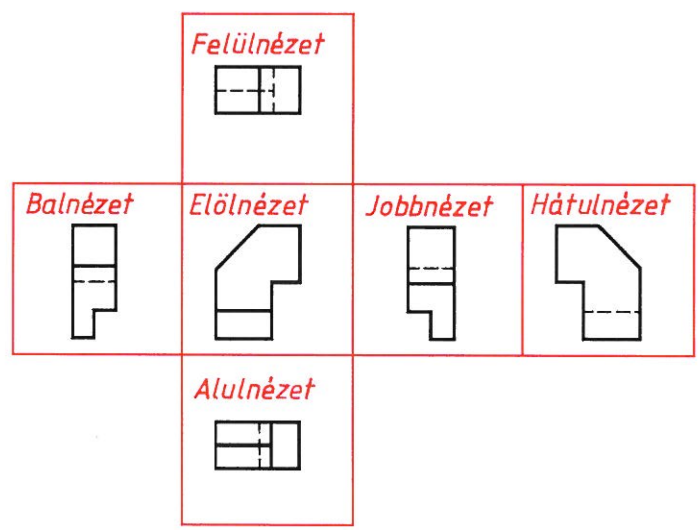
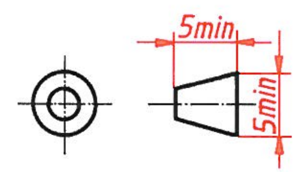
1.32. ábra. Az európai nézetrend
a) a nézetrend értelmezése; *b)* a nézetek a képsíkokon; *c)* a képsíkok síkba terítése

A nézetek a következőképpen csoportosíthatók:

- *főnézet:* az elölnézet (használati helyzet, itt mutatjuk meg a térbeli alakzat legjellemzőbb oldalát),
- *mellléknézetek:* a felülnézet és a balnézet (az egyértelmű tárgymeghatározáshoz legtöbb esetben szükségesek),
- *kiegészítő nézetek:* a jobb-, alul- és hátulnézetek (csak szükséges esetekben alkalmazzuk).

A későbbiek során, a ferde felületű tárgyak felszínének mérethű ábrázolására *segédképsíkokat* is alkalmazni fogunk. A rajtuk megjelenő kép a *segédnézet.*

Mindezzel tisztáztuk a **nézetrend** fogalmát is. A gyakorlatban, amikor adott tárgyat, alkatrészt ábrázolunk, a vetületképzés szabályait tartjuk be és azt a síkba terített képsíkokon tesszük. Azonban a figyelmünk általában a tárgyra, alkatrészre koncentrálódik, így annak nézeteit célszerű megnevezni.

Szemléltető kép	A nézetrend megnevezése	Vetületek elrendezése	Jelképe
	Európai nézetrend		
	Amerikai nézetrend		

Az európai és amerikai nézetrend. **1.4.** táblázat

Az eddig megismert ábrázolási módot **európai nézetrendnek** nevezzük. Lényege **a vetületképzési szabály** – az adott nézeteket, a vetületképzésnek megfelelően nevezzük meg.

Az **amerikai nézetrend** kialakításának a logikája más. Lényege **a nézetek elnevezésük szerinti elhelyezése.** Azaz a felülnézet az elölnézet fölött, a balnézet bal oldalon, a jobbnézet a jobb oldalon, az alulnézet alul helyezkedik el. Ne feledjük, hogy ez az ábrázolási mód is vetületi ábrázolás, de a vetületképzés a nézetrendet követi!

A két ábrázolási módot hasonlítja össze az **1.4.** táblázat. Az adott ábrázolási módra *egyezményes jelkép* hívja fel a figyelmet. Ez egy vízszintes tengelyű csonkakúp elöl- és oldalnézete. A csonkakúp alapkörének átmérője 5 *min* (azaz legalább 5 mm), a fedőkör átmérője ennek a fele, 2,5 *min* és magassága 5 *min*. A nézetek összehasonlításával állapítjuk meg, hogy európai vagy amerikai nézetrendet alkalmaztak-e az ábrázolásban. A jelképet a feliratmezőben, az *Ábrázolási mód* megnevezésű mezőben kell elhelyezni.

A műszaki ábrázolásban a maximum és a minimum értékeket a szám után írt *max* és *min* rövidítéssel jelöljük. Ez nem tévesztendő össze a perc mint időmértékegység szabványos min jelölésével.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan csoportosítjuk a testeket felszínük szerint?
2. Csoportosítsuk a testeket tengelyük szerint!
3. Csoportosítsuk a testeket tömegük alapján!
4. Hogyan határozhatók meg az egyes térelemek?
5. Mi a különbség a metsződő és elkerülő egyenesek között?
6. Példák segítségével határozzuk meg a valóságos és a látszólagos egyenes fogalmát!
7. Milyen esetekben látszódnak a szakaszok valódi hosszúságukban, rövidüléssel és pontokként?
8. Mit jelent a fedőpont és fedőegyenes?
9. Fogalmazzuk meg a döféspont fogalmát!
10. Soroljuk fel a vetületképzés elemeit!
11. Melyek a fő jellemzői a merőleges és a párhuzamos vetítésnek?
12. Hogyan jelöljük az egyes térelemek vetületeit?
13. Milyen egyenes a vetítősugár? Mi alapján nevezzük meg a vetítősugarakat?
14. Jellemezzük a nyomvonalat!
15. Hová soroljuk a síkok között a vetítősíkokat? Mi alapján nevezzük meg őket?
16. Mi a különbség a vetítősík és a profilsík között? A két sík közül melyik sorolható a másik csoportba?
17. Hogyan határozható meg az elkerülő egyenesek láthatósága?
18. Mit jelent a képsíkok egyesítése?
19. Ismertessük a nézetrend fogalmát!
20. Jellemezzük az európai és amerikai nézetrendet! Melyek a legfontosabb különbségek?

2. SÍKLAPÚ TESTEK VETÜLETI ÁBRÁZOLÁSA

Ebben a fejezetben az alkalmazott térbeli alakzatok, a *kocka*, a *szabályos sokszög alapú egyenes hasábok* és a *szabályos sokszög alapú egyenes gúlák* mint síklapú testek vetületi ábrázolásával ismerkedünk meg. Vetületi ábrázolásuk mellett elkészítjük *hálórajzukat* és megismerkedünk olyan egyszerű művelettekkel, amelyek részint segítik az alakzat elemzését, részint előkészítik az összetett testek ábrázolását. Így feladatunk a pont azonosítása a felszínen, a test döfése egyenessel, a test síkmetszése (segédképsík bevezetése), a síkkal metszett test palástkiterítése.

2.1. Kocka

A kocka a térnek hat darab egybevágó négyzettel lehatárolt része.

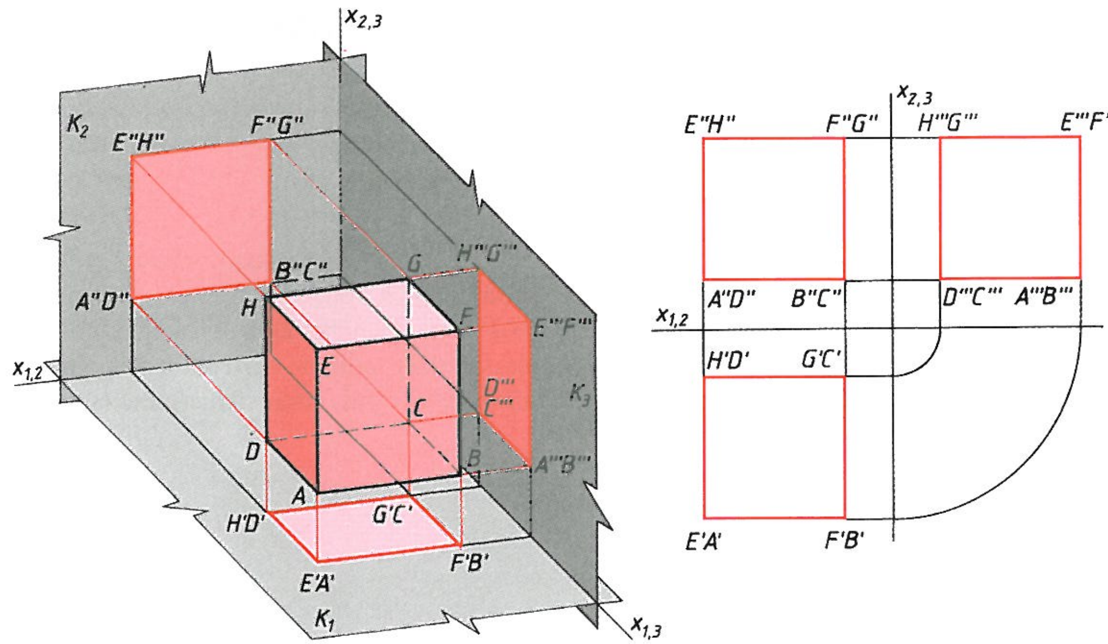
A négyzetek a kocka oldallapjai, *amelyek párosával párhuzamosak egymással és a többi oldallapra* merőlegesek. Mint az egyik legegyszerűbb szabályos síklapú test, a legalkalmasabb arra, hogy az ábrázolásán keresztül megismerkedjünk a mértani testek vetületi ábrázolásával. Előbb azonban tisztázzuk, hogy mit értünk egyszerű mértani testen és mit értünk szabályos mértani testen!

Egyszerű mértani testek azok a térbeli alakzatok, amelyek jellegzetességeik megváltoztatása nélkül tovább nem egyszerűsíthetők. Tanulmányaink során tovább szűkíthetjük körüket. Csak az egyenes (álló) testekkel foglalkozunk, azokkal a testekkel, amelyeknek tengelye az alaplap síkjára merőleges.

Szabályos mértani testek azok a térbeli alakzatok, amelyek oldallapjait egybevágó és szabályos (körbe rajzolható) síkidomok alkotják.

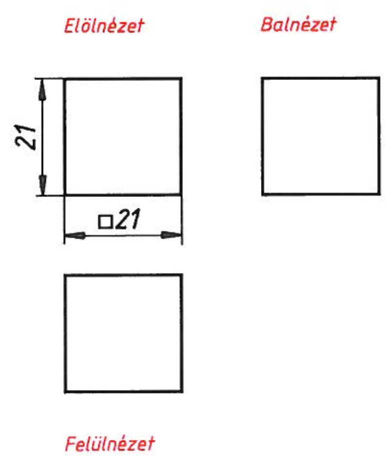
2.1.1. A kocka vetületi ábrázolása

Vetületi ábrázoláshoz az ábrázolandó testet mindig szabályosan helyezzük el: a kocka mögött lévő második képsík párhuzamos a kocka homloksíkjával, azaz az elölnézet síkjával. A képsíkra merőleges vetítősugarakkal képezzük a kocka elölnézetét a K_2 képsíkon. A szabályos elhelyezésből következik, hogy a kocka elölnézeti oldallapja és vetülete egybevágó négyzet. Megfigyelhetjük, hogy a kocka csúcsai a vetületen fedőpontok és a fedőpontok közötti élek pedig pontok. A vetületen, a csúcsok jelölésével mindig figyelembe vesszük a láthatóságot (elöl vagy felül szerepel a sorban a látható csúcs jele, amit követ vagy alulra írt a nem látható csúcs jele). Tapasztalható, hogy a vetítési irányba eső kiterjedést a vetület nem érzékelteti.
Az 1. fejezetben megtanult képalkotási szabállyal képezhetjük a kocka másik két vetületét is a K_1 és K_3 képsíkon. Ezt mutatja be a **2.1.** ábra. A vetítési mód alkalmazásával elértük, hogy a kocka minden oldala méret- és alakhűen látható. Az ábrán megfigyelhetjük azt is, hogy a csúcsok minden vetületen másmás csúccsal alkotnak fedőpontokat, továbbá a pontban látszó élek a további két képsíkon valóságos hosszúságukban látszanak.



2.1. ábra. A kocka a három képsíkos rendszerben

A műszaki ábrázolási gyakorlatban egyszerűsítjük a vetületi ábrázolást. Nem ábrázoljuk a képsíkok tengelyét, valamint a rendezőket és vetítőegyeneseket (köríveket). A vetületi szabályt betartjuk, a nézetek továbbra is rendezettek; a képsíkok tengelyei és a rendezők, vetítőegyenesek utólag berajzolhatók. A vetületeket nézetük szerint nevezzük meg, azaz *elölnézet* K_2, *felülnézet* K_1 és *oldalnézet* K_3, amin bal oldalnézetet értünk (ha ettől eltérünk, csak akkor emeljük ki az oldalnézeti irányt). Műszaki ábrázolásban minden esetben megadjuk az alakzat méreteit. Ezt szemlélteti a **2.2.** ábra.



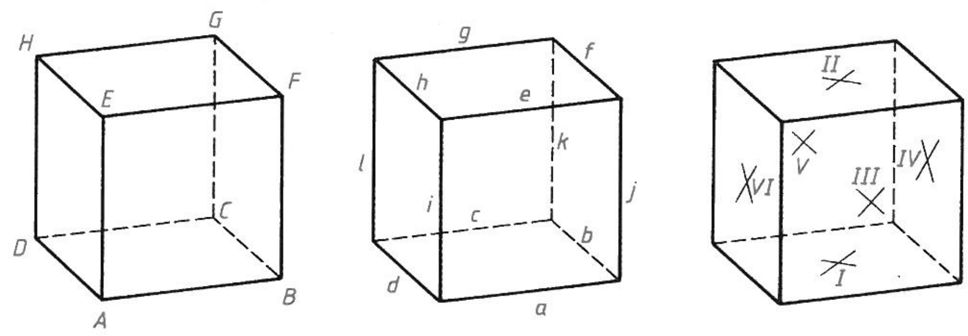
2.2. ábra. A kocka műszaki ábrázolása és nézetrendje

2.1.2. Felületelemzés

A műszaki rajz elemzését, tanulmányozását rajzolvasásnak nevezzük.

A rajzolvasás egyik lényeges és sorrendben első eleme a **felületelemzés.** E művelettel határozzuk meg a vetületeiben ábrázolt alakzat valóságos formáját. A térszemlélet és a rajzolvasási képesség kialakulását egyszerű művelettel segíthetjük. Nevezetesen az ábrázolt kocka csúcsainak, éleinek és oldallapjainak azonosításával. A csúcsok azonosítására az ábécé nagybetűit, az élek azonosítására a kisbetűket, az oldallapok azonosítására pedig a római számokat használjuk. (Az oldallapok jelölésére alkalmazott római számok használata egyszerűsítés. Az ábrázoló geometria hagyományosan erre a célra a görög ábécé betűit használja.)

A **2.3.** ábra a kockán mutatja be az alakzat jellemzőinek elemzését, azaz miként jelöljük egy test csúcsait, éleit és oldallapjait.



2.3. ábra. A kocka felületelemzése
a) a csúcsok azonosítása; *b)* az élek azonosítása; *c)* az oldallapok azonosítása

A **2.1.** táblázat a kocka felületelemzését tartalmazza. Figyeljük meg alaposan, tanulmányozzuk és a vetületi képeken ellenőrizzük is az azonosítás eredményeit!

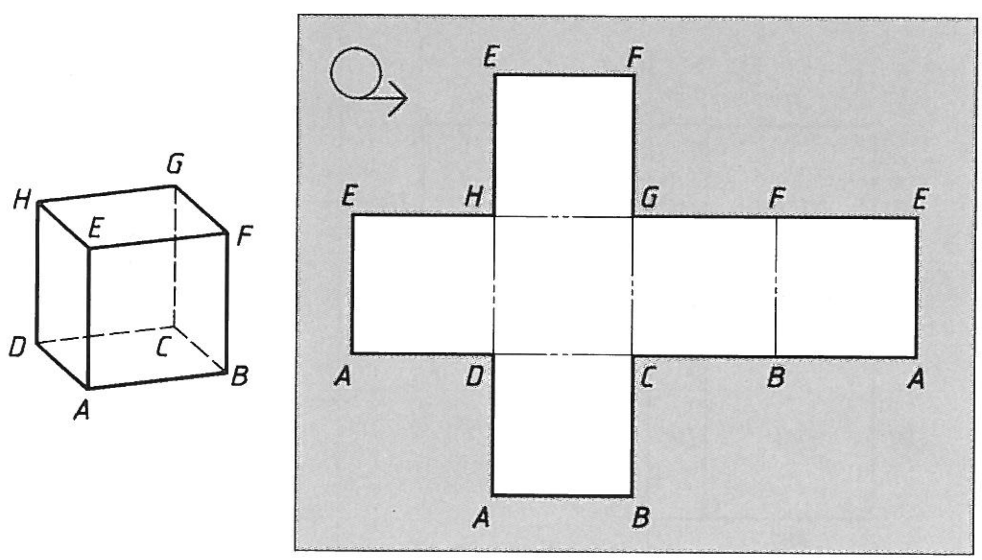
Figyeljük meg a vetületi ábrákon a kocka elhelyezését a képsíkrendszerben! Általában a mértani alakzatokat képsíkra helyezve ábrázoljuk. (A K_2 és K_3 képsíkon az alakzat rajta van a tengelyen.)

Gyakoroljuk a tanultakat a **8. munkalapon**!

2.1.3. A kocka hálórajza

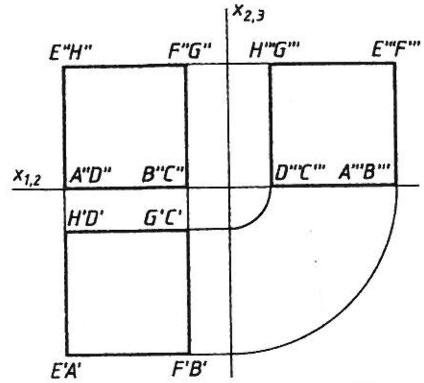
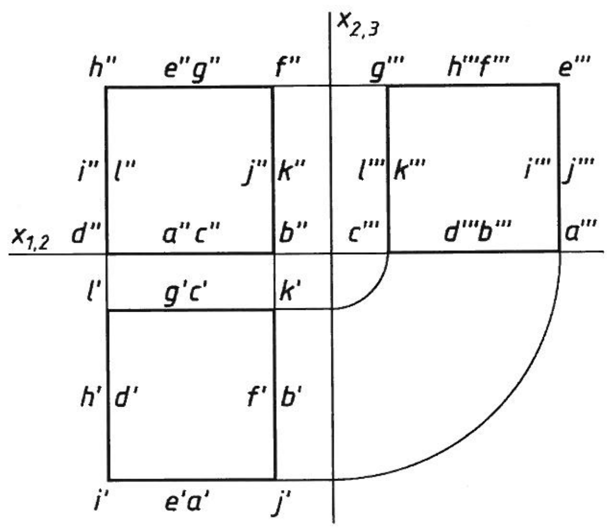
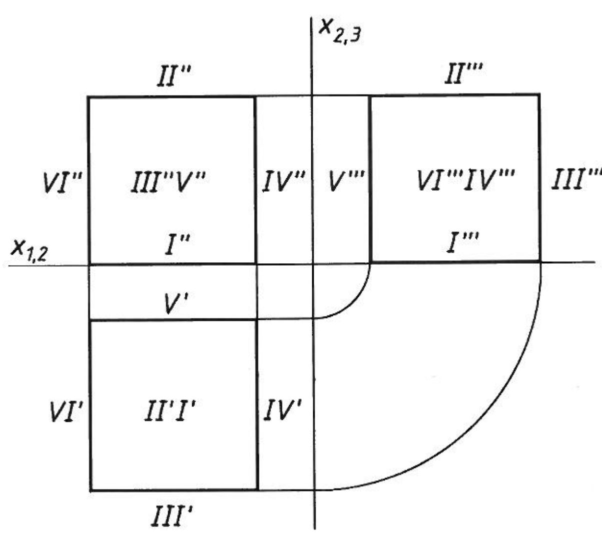
A térbeli alakzat határoló lapjainak síkba terített rajzát az alakzat hálórajzának nevezzük.

A kocka hálóját megrajzolhatjuk mind a szemléltető kép, mind a vetületi ábrák alapján. A sorrendet vessük össze a **2.4.** ábrával!



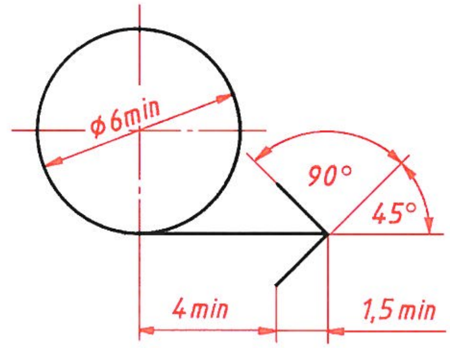
2.4 ábra. A kocka hálórajza

A kocka felületelemzése. **2.1.** táblázat

Az elemzés tárgya	Vetületi kép a jellemzők jelölésével	Az elemzés tapasztalatai: A megfigyelt jellemzők	Képsík	A jellemzők besorolása
Csúcsok azonosítása		Látható csúcsok	K_1	E' F' G' H'
			K_2	A" B" F" E"
			K_3	D''' A''' E''' H'''
		Nem látható csúcsok	K_1	A' B' C' D'
			K_2	D" C" G" H"
			K_3	C''' B''' F''' G'''
Élek azonosítása		Látható élek	K_1	e' f' g' h'
			K_2	a" j" e" i"
			K_3	d''' i''' h''' l'''
		Nem látható élek	K_1	a' b' c' d'
			K_2	c" k" g" l"
			K_3	b''' j''' f''' k'''
		Pontban látszódó élek	K_1	i' j' k' l'
			K_2	b" f" h" d"
			K_3	a''' e''' g''' c'''
Oldallapok azonosítása		Látható oldalak	K_1	II'
			K_2	III"
			K_3	VI'''
		Nem látható oldalak	K_1	I'
			K_2	V"
			K_3	IV'''
		Egyenesben látszódó oldalak	K_1	III' IV' V' VI'
			K_2	I" IV" II" VI"
			K_3	I''' III''' II''' V'''

- A kocka oldalélének ismeretében a ábrázoljuk a *III–VI*. oldallapokat (jelölés a **2.3.** ábra szerint).
- Az alap- és fedőlap (*I* és *II*) ábrázolása, amely csatlakozhat bármely oldallaphoz.
- Az ábra láthatóság szerinti megrajzolása: a körvonalak vastag, folytonos vonallal, a hajtogatási élek vékony, kétpont-vonallal.

A kiterítés jelképe. A műszaki ábrázolásban gyakran előforduló ábrázolási mód a *síkbaterítés*. Hajlított alkatrészeket a hajlítás előtti állapotban kell legyártani. Így járunk el a mértani alakzatok hálórajzánál is. A síkbaterítésre külön jelkép hívja fel a figyelmet, amit a kiterített rajz fölött, általában bal oldalon helyezünk el. A jelképet vékony vonallal rajzoljuk. Alakját és méreteit a **2.5.** ábra szemlélteti.

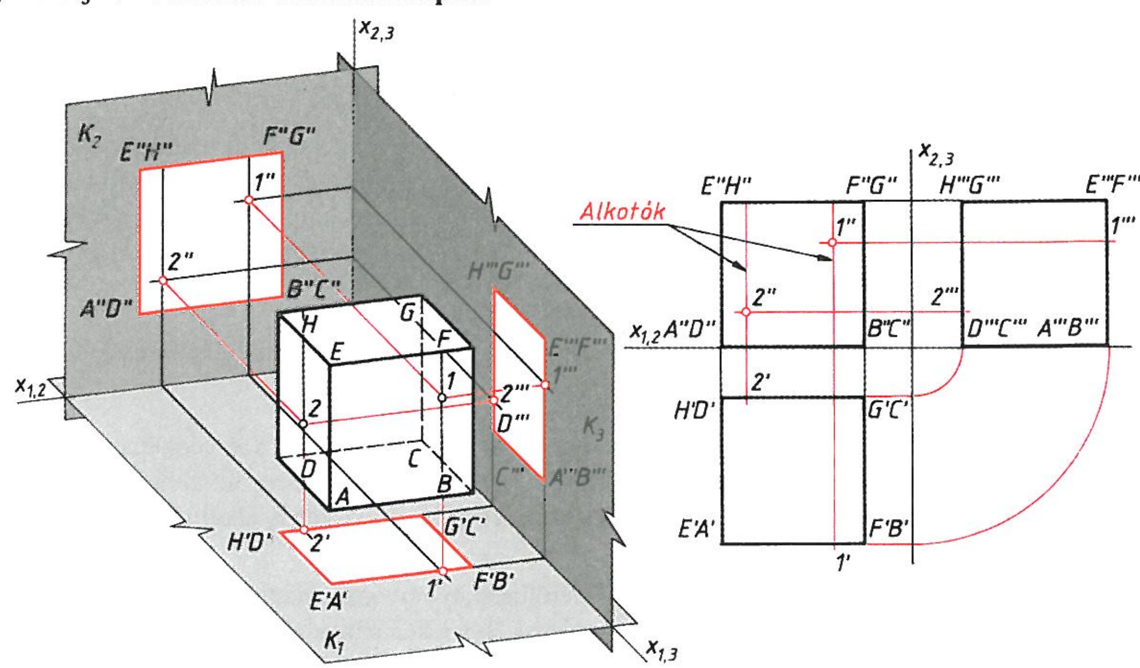


2.5. ábra. A kiterítés jelképe

2.1.4. Pont azonosítása a kocka felszínén

A kocka oldallapján adott pontot a többi vetületen a ponton áthaladó alkotóval tudjuk azonosítani. A **2.6.** ábrán látható módon végezzük el a szerkesztést! Az *ABFE* és *DCGH* oldallapokon adott *1* és *2* pont képe az első és a harmadik képsíkon a kontúrvonalakon adódik. A pontok azonosításakor ügyeljünk a láthatóságra! Ugyanezzel a módszerrel a kocka bármely oldallapján (alap- és fedőlapján) adott pontokat tudunk azonosítani.

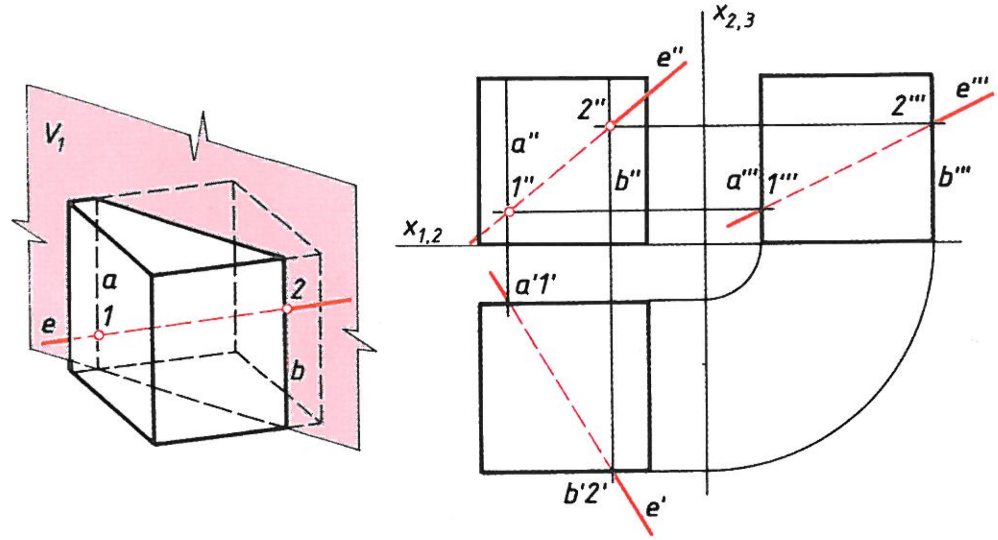
Gyakoroljuk a tanultakat a **9. munkalapon**!



2.6. ábra. Pont azonosítása a kocka felszínén

2.1.5. A kocka döfése egyenessel

A későbbi tanulmányaink során gyakran oldunk meg olyan feladatokat, amelyek visszavezethetők a testen áthaladó egyenes szerkesztésére. A testen áthaladó egyenest *döfőegyenesnek,* az általa meghatározott pontokat a test felszínén *döféspontoknak* és együttes megjelenésüket a *test döfésének* nevezzük.



2.7. ábra. A kocka döfése egyenessel

A **2.7.** ábrán megfigyelhetjük, hogy van egy olyan V_1 vetítősík, amely tartalmazza az *e* döfőegyenest. A vetítősík meghatározza a kocka *a* és *b* alkotóit. Az *e* egyenes és az *a*, *b* alkotók metszéspontja pedig meghatározza az *1* és *2* döféspontokat. A képsíkrendszerben – alkalmazva, amit a pont felszínen való azonosításáról tanultunk – ábrázolni tudjuk a döféspontokat és azok segítségével meghatározható a láthatóság is. Amint az ábra alapján tapasztaljuk, az egyenes testen belüli részletét nem látható élként ábrázoljuk.

Gyakoroljuk a tanultakat a **10. munkalapon**!

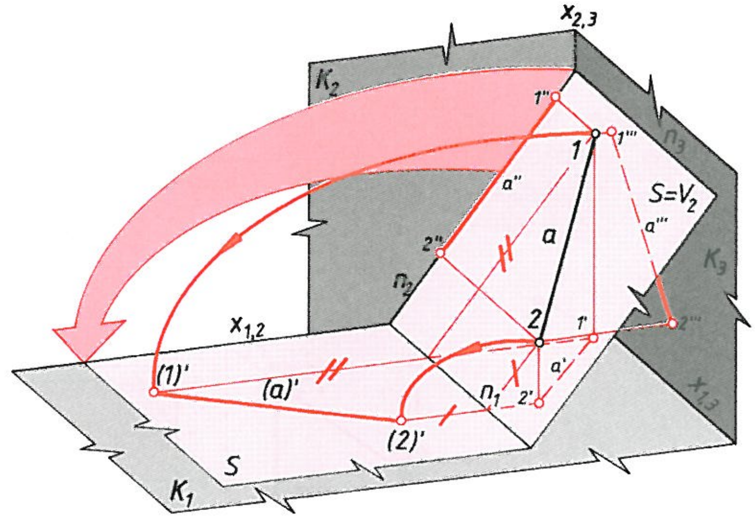
2.1.6. A kocka síkmetszése

Az 1. fejezetben a vetítési módoknál megtanultuk, hogy ha a tárgy tengelye nem párhuzamos a vetítés tengelyével (azaz ferde helyzetű), a kép torzult, rövidebb a valóságos méretnél. Az egyszerű testek esetében is találkozunk olyan részletekkel (élekkel, oldallapokkal), amelyek egyik képsíkon sem alkotnak valódi nagyságú képet. Az alakhű ábrázolásukra módot ad egy új, célszerűen megválasztott képsík, amelyet **segédképsíknak** nevezünk.

A segédképsík egy olyan vetítősík, amely tartalmazza a térbeli alakzat ferde részletét, így alkalmas arra, hogy rajta megmutassuk a ferde részlet valódi nagyságú képét.

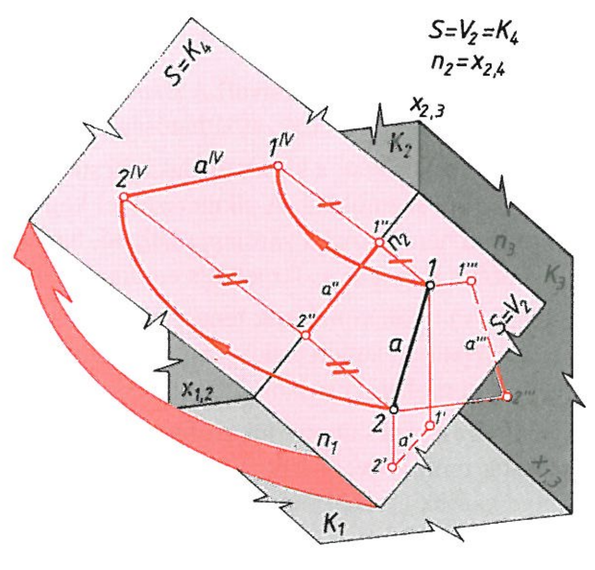
Jele: *S*. Az *S* segédképsík azonos valamelyik vetítősíkkal (V_1; V_2; V_3). Az *S* segédképsíkot n_1 és n_2 nyomvonalaival ábrázoljuk. Ahhoz, hogy alkalmazása eredményre vezessen, további műveletre van szükség: **a segédképsíkot a rajz síkjába kell forgatni.** Erre két módszer is alkalmas: a **rotáció** és a **transzformáció.**

Rotáció (**2.8.** ábra). A segédképsíkot a képsíkra merőleges nyomvonala mentén forgatjuk valamelyik képsíkba. A gyakorlatban a rotációt nevezzük forgatásnak. Így a későbbiekben, ha forgatásnak nevezzük a szerkesztési módszert, az alatt mindig rotációt értünk. A **2.8.** ábrán az S=V_2 segédképsíkot n_1 nyomvonala mentén a K_1 képsíkba forgattuk. A V_2 vetítősíkot úgy választjuk meg, hogy benne legyen az *1* és *2* végpontjával adott a szakasz. Ennek következménye, hogy a K_2 képsíkon a szakasz a'' vetülete és a V_2 vetítősík n_2 nyomvonala egybeesik. A közös képsíkba forgatás eredménye az $(1)'(2)'$ végpontú $(a)'$ szakasz, amely az a szakasz valódi nagyságú képe. Bár a kapott kép a K_1 képsíkban nyugszik, nem azonos az a szakasz első képével. Erre hívja fel a figyelmet az azonosító jelek zárójeles megjelenítése.



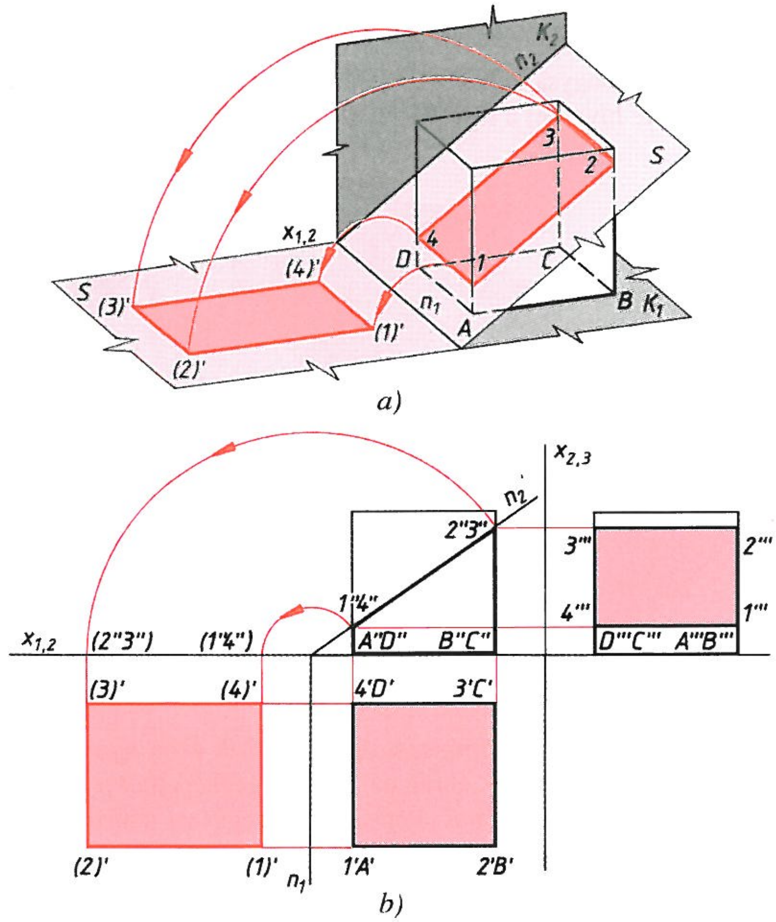
2.8. ábra. A segédképsík: rotáció (forgatás az első képsíkba)

Transzformálás. Szintén közös rajzsíkba forgatás, de a vetítősík azon nyomvonala mentén, amelyik egybeesik a ferde részlet vetületével. A **2.9.** ábrán az $S=V_2$ segédképsíkot n_2 nyomvonala mentén forgattuk a K_2 képsíkkal közös síkba (tehát nem K_2 képsíkba). Az egyszer áthúzott és kétszer áthúzott rendezők helyzetéből következtethetünk arra, hogy egy új képsíkot vezettünk be. Neve K_4 negyedik képsík, amelynek tengelye a vetítősík n_2 nyomvonala, így $n_2=x_{2,4}$. A kapott vetületi kép azonosítására felső index IV, római számot alkalmazunk. Így az ábrán a valódi hosszúságú szakasz (a negyedik képe) az 1^{IV} és 2^{IV} végpontú a^{IV} szakasz.



2.9. ábra. A segédképsík: transzformálás (forgatás a negyedik képsíkba)

A kocka síkmetszése forgatással. A **2.10.** ábra mutatja be a kocka síkmetszését $S=V_2$ vetítősíkkal és a segédképsík forgatását a K_1 képsíkba. A V_2 vetítősíkot **metszősíknak** is nevezzük. Ugyanannak a síknak különböző elnevezése nem okozhat zavart. A kocka síkmetszését metszősíkkal végezzük. Erre a célra itt V_2 vetítősíkot alkalmazunk. Ugyanezt a síkot segédképsíkként kezeljük. A szerkesztést menete a következő.



2.10. ábra. A kocka síkmetszése forgatással (a valódi felszín szerkesztése)
a) szemléltető kép; *b)* szerkesztés

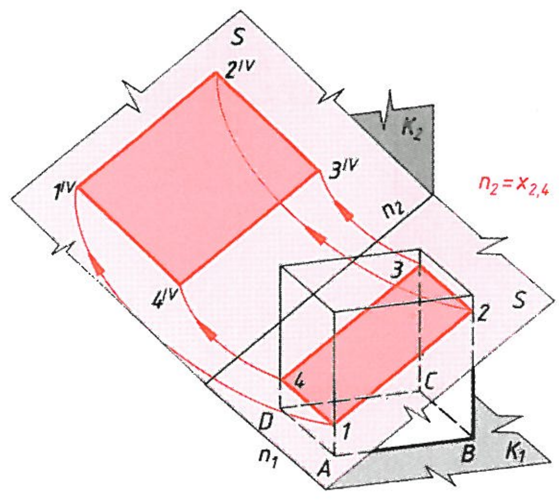
- Ábrázoljuk a kockát a képsíkrendszerben!
- Ábrázoljuk a metszősíkot n_1 és n_2 nyomvonalaival! *A síkmetszéssel kapott alakzatnak a metsző-sík mögötti és alatti részletet tekintjük.* Az alakzat láthatóságát ennek megfelelően ábrázoljuk.
- Azonosítjuk a síkmetszés utáni csúcsokat: a kiinduló alakzat csúcsait az *ABC* nagybetűivel, a síkmetszéssel kapott csúcsokat arab számokkal. A síkmetszéssel kapott felszín elemzésével azt tapasztaljuk, hogy a K_1 képsíkon nem a kocka zárólapja látható, hanem a ferde lap torzult képe. A K_3 képsíkon kapott lap is torzult kép, bár a síkmetszés eredménye könnyebben felismerhető.
- A metszősík (mint segédképsík) nyomvonalának tengelymetszetéből (n_1 és n_2 az $x_{1,2}$ tengelyen) körzővel a síkmetszéssel K_2 képsíkon kapott csúcsokat (n_2 nyomvonalon mérhető sugárral) az $x_{1,2}$ tengelyre forgatjuk. A kapott pontokat a csúcsok jelöléseivel azonosítjuk, de zárójelbe tesszük.
- A K_1 képsíkon a kocka felülnézeti csúcsait vetítjük párhuzamosan az $x_{1,2}$ tengellyel, majd arra merőlegesen a zárójeles csúcsok rendezőivel metsszük a vetítőegyeneseket. A kapott (*1*)'; (*2*)'; (*3*)' és (*4*)' pontokat összekötve kapjuk a valódi nagyságú képet.

Gyakoroljuk a tanultakat a **11. munkalapon**!

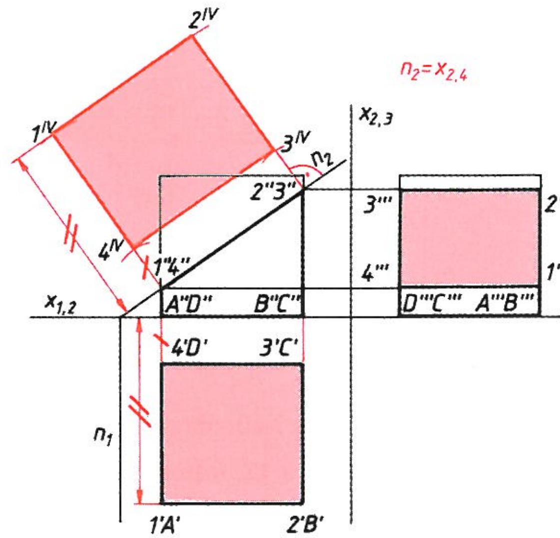
A kocka síkmetszése transzformálással (2.11. ábra**).** A szerkesztésben a következő sorrendet kövessük!

- Ábrázoljuk a kockát a képsíkrendszerben három vetületével!
- Ábrázoljuk a metszősíkot (V_2 vetítősík) a nyomvonalaival!
- A síkmetszés eredményét (láthatóságot) a vetületeken ábrázoljuk és azonosítjuk a csúcsokat (a kocka csúcsait betűkkel, a síkmetszéssel kapott csúcsokat számokkal)!

- Az n_2 nyomvonalra mint a negyedik képsík $x_{2,4}$ tengelyére, a síkmetszés csúcsaiba merőlegeseket szerkesztünk (rajzolunk).
- A merőlegesekre felmérjük a negyedik rendezőket az $n_2=x_{2,4}$ tengelytől. Az első (elmaradó) és negyedik (új) rendező azonos hosszúságú, így a méreteket a K_1 képsíkon az $x_{1,2}$ tengelytől tudjuk körzőnyílásba venni (az egyszer áthúzott rendezőkkel a *3* és *4* csúcsokat, a kétszer áthúzott rendezőkkel az *1* és *2* csúcsokat). A K_4 képsíkon kapott pontokat megfelelő sorrendben összekötjük, így megkapjuk a transzformálás eredményét (a síkmetszet alak- és mérethű képét), az 1^{IV}, 2^{IV}, 3^{IV} és 4^{IV} csúcsokat.



a)



b)

2.11. ábra. A kocka síkmetszése transzformálással (a valódi felszín szerkesztése)
a) szemléltető kép; *b)* szerkesztés

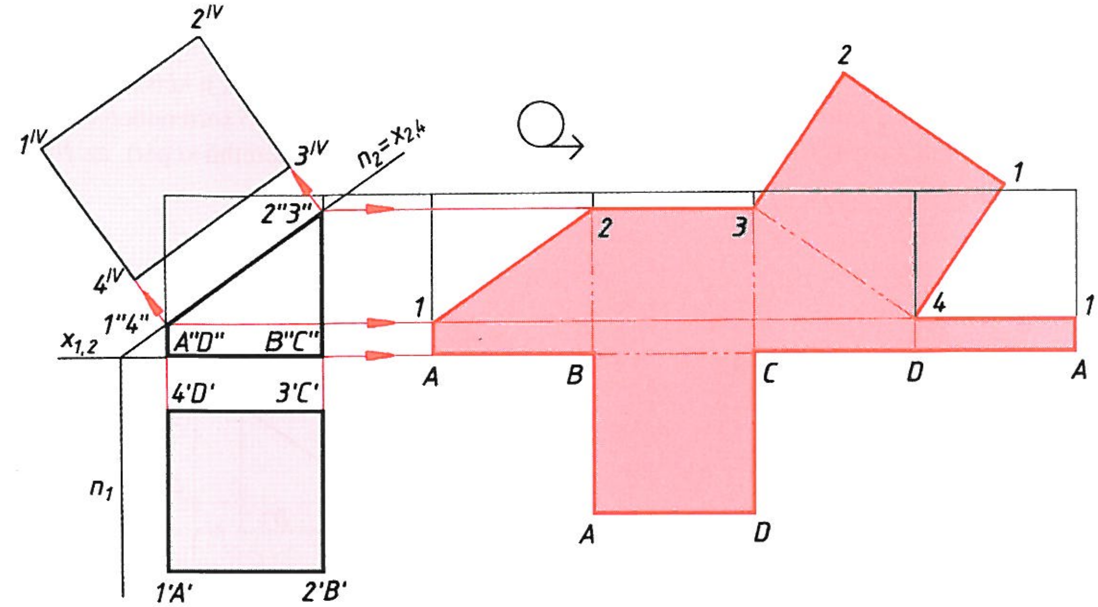
2.1.7. A síkkal metszett kocka hálórajza

Egyes szakmákban fontos feladat különböző alakzatok kiszabása lemezből, a szükséges formára hajtogatása (kapcsolódoboz, burkolat, karosszérialakatos-munkák stb.). A hálórajz ugyanakkor segíti a térbeli alakzatok pontos megértését, a felületelemzést is. A kiterített háló körvonalait, kontúrvonalait (vágási éleket) *vastag folytonos vonallal,* míg a részfelszínek határoló vonalait (hajtogatási éleket) *vékony kétpontvonallal* ábrázoljuk. A rajzhoz tartozik a kiterítés jelképe is.

Mivel a hálótervhez pontos felszínek szükségesek, első feladat a síkmetszésből adódó felszín megszerkesztése. Az egyértelmű szerkesztéshez elegendő két vetület (elöl- és felülnézet) alkalmazása. Mindezeket figyelembe véve a **2.12.** ábrán kísérjük nyomon a szerkesztést!

- A K_1 és K_2 képsíkon ábrázoljuk a kockát a metszősík nyomvonalával láthatóság szerint és jelöljük a csúcsokat!
- Megszerkesztjük a ferde részlet valódi felszínét (itt transzformálással), és azonosítjuk a csúcsokat.
- A K_2 képsíkon (felhasználva az elölnézeti képet) megrajzoljuk a kocka csonkolatlan négy oldalát.
- Az elölnézeten síkmetszéssel kapott pontokat az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamosan vetítjük a háló oldaléleire, ügyelve a csúcsok és élek azonosítására.
- Megszerkesztjük (rajzoljuk) a kocka alaplapját bármely oldallaphoz illesztve (itt a *B–C* csúcsok között).
- Felhasználva a transzformálás eredményét, a számmal jelzett csúcsok között megszerkesztjük (rajzoljuk) a síkkal metszett felszínt (itt a *3–4* csúcsok között).

- A kapott eredményt az ismert szabályok szerint megrajzoljuk (vágási élek, hajtogatási élek). Ábrázoljuk a kiterítés jelképét.



2.12. ábra. A kocka síkmetszése és palástkiterítése

Gyakoroljuk a tanultakat a **12. munkalapon**!

2.2. Hasábok

A hasáb a térnek azon része, amelyet két egybevágó sokszög (mint alap- és fedőlap), valamint a sokszög oldalszámának megfelelő számú paralelogramma (mint oldallapok) határolnak.

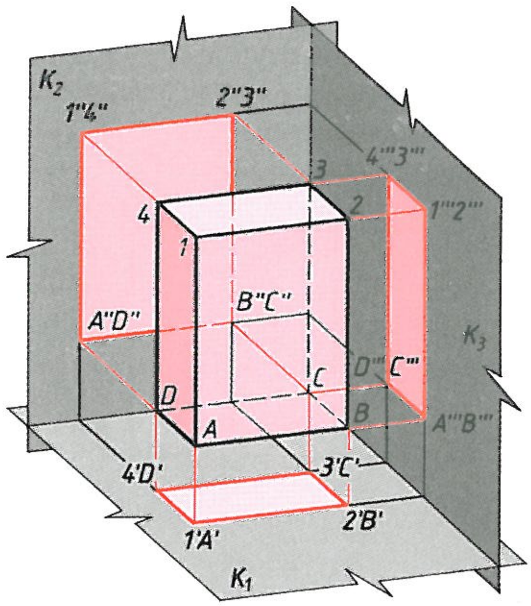
Mivel tanulmányaink folyamán csak a szabályos, egyenes testekkel foglalkozunk, ez számunkra azt jelenti, hogy a hasábok zárólapjai (alap- és fedőlap) szabályos sokszögek, ill. téglalapok, oldallapjai pedig téglalapok, négyzetek (szabályos sokszög alapú hasábok esetén egybevágóak is).

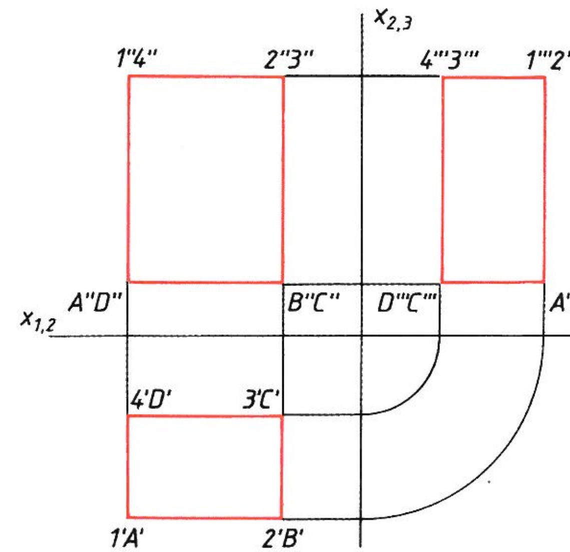
2.2.1. A hasáb vetületi ábrázolása

A téglalap alapú hasáb (téglatest) vetületi ábrázolását mutatja be a **2.13.** ábra. A vetületi szabályt követve vetítősugarakkal képezzük a hasáb elölnézetét a K_2 képsíkon, felülnézetét a K_1 képsíkon és oldalnézetét a K_3 képsíkon. A csúcsok azonosításánál eltérünk a kockánál megszokott jelöléstől. Az alapsokszög csúcsait betűkkel, a fedőlap csúcsait számokkal azonosítjuk. Ennek az azonosítási módnak előnyeit a nagyobb számú sokszögzárólapok esetén tapasztaljuk.

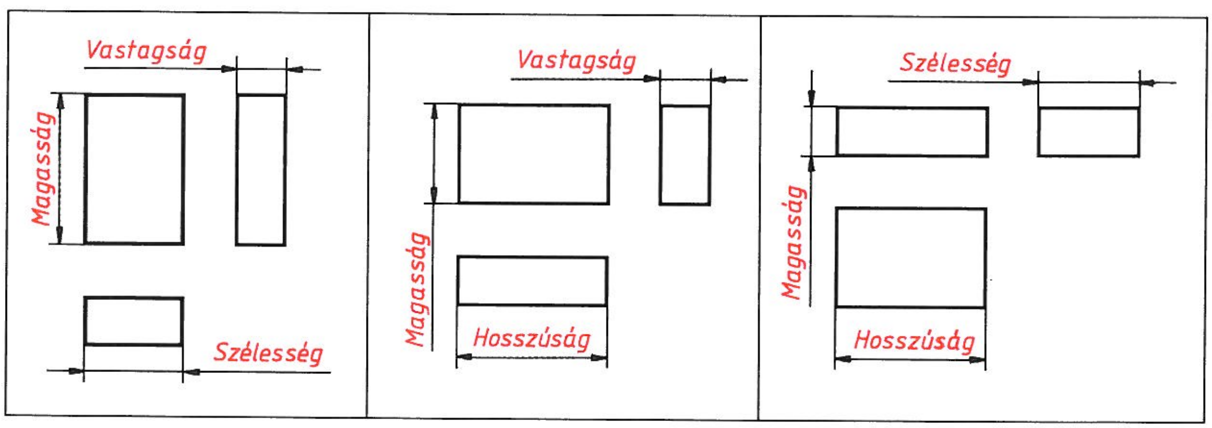
A téglatest elemezése alkalmas arra is, hogy megértsük a kiterjedések irányának megnevezését. A **2.14.** ábrán megfigyelhetjük, hogy a megnevezés nem a testhez kötött, hanem az ábrázolást követi. Mivel a test ábrázolására, elhelyezésére a képsíkrendszerben többféle lehetőség is adódik, ugyanannak a rajzi kiterjedésnek változhat a megnevezése is. A függőleges méretet mindig magasságnak, a vízszintes méreteket pedig értelemszerűen követve a test méreteit hosszúságnak, szélességnek vagy vastagságnak nevezzük.

A műszaki ábrázolásban betartjuk a vetületi szabályt, de nem ábrázoljuk a képsíkok tengelyeit és nem adjuk meg a csúcsok azonosító jeleit. Megadjuk viszont az ábrázolt alakzat méreteit.





2.13. ábra. A téglalap alapú hasáb a három képsíkos rendszerben



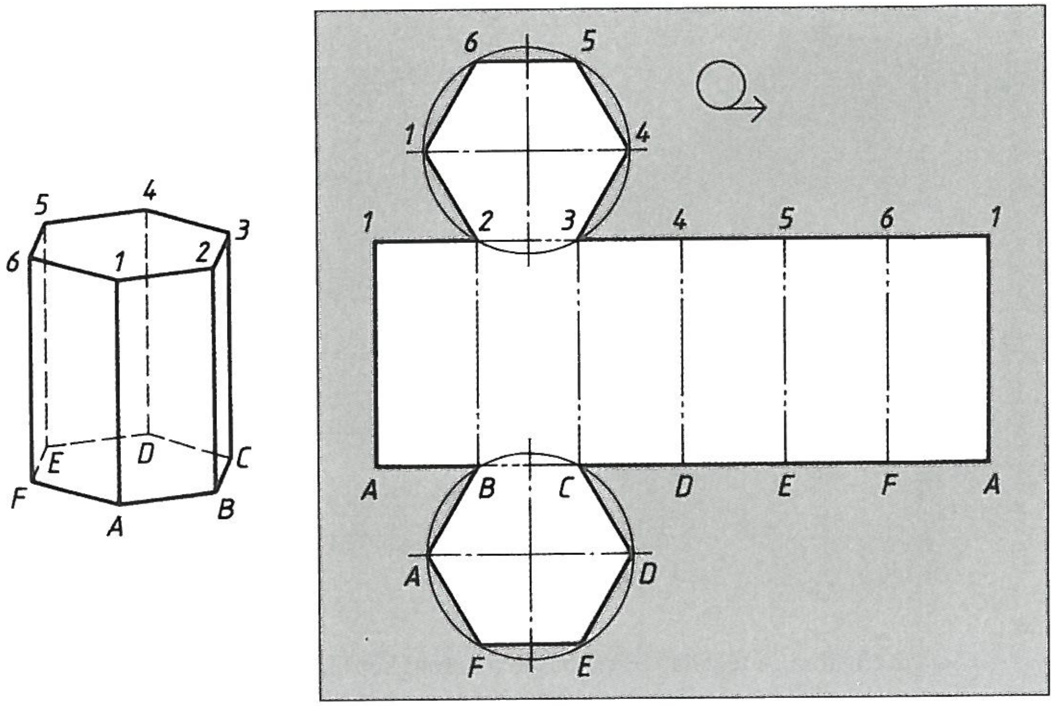
2.14. ábra. A téglatest elrendezési lehetőségei és kiterjedéseinek értelmezése

2.2.2. A hasáb hálórajza

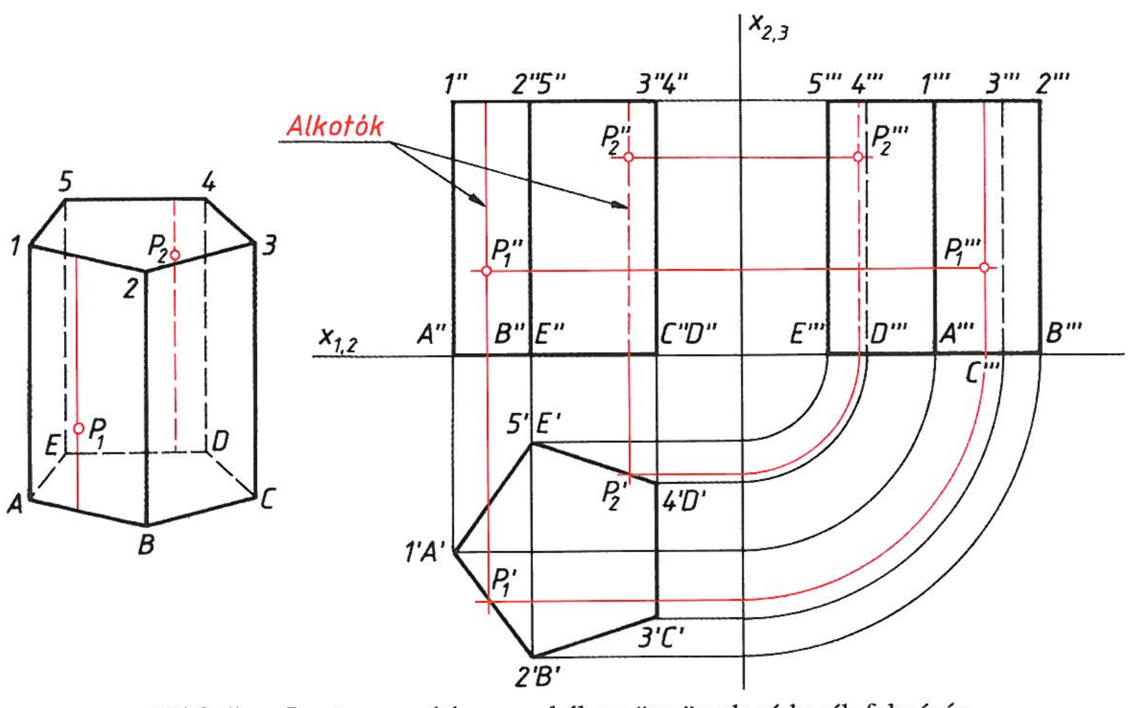
A **2.15.** ábra alapján egy szabályos hatszög alapú hasáb hálójának szerkesztésével ismerjük meg a hasábok hálójának szerkesztési módját! Először az alapél és a hasábmagasság méretének ismeretében megszerkesztjük az oldallapokat, jelöljük a csúcsokat, majd valamelyik alapélhez csatlakoztatva az alaplapot, ill. ellenkező oldalon a fedőlapot. A feladat befejezéseként megrajzoljuk a vágási és a hajtogatási éleket.

2.2.3. Pont azonosítása a hasáb felszínén

A szabályos ötszög alapú hasáb felszínén adott pontokat azonosítsuk a vetületeken! A művelet azonos a kockánál megismert módszerrel. A szerkesztést a **2.16.** ábra szemlélteti.



2.15. ábra. A szabályos hatszög alapú hasáb hálórajza

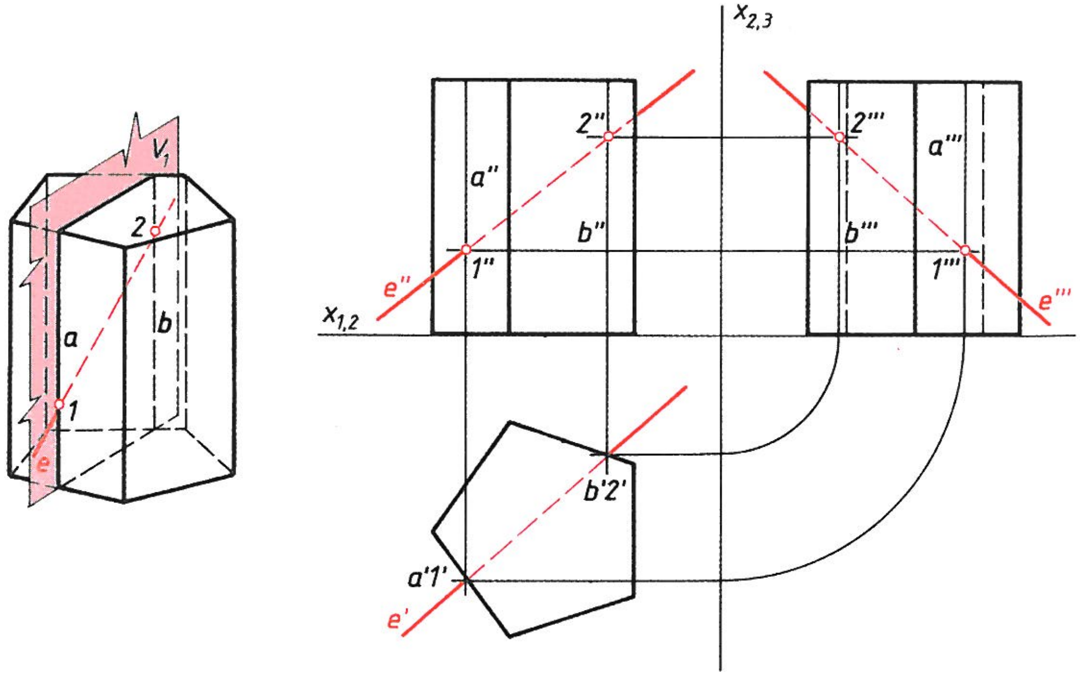


2.16. ábra. Pont azonosítása a szabályos ötszög alapú hasáb felszínén

2.2.4. A hasáb döfése egyenessel

A **2.17.** ábrán látható szabályos ötszög alapú hasábot döfi az *e* egyenes. A döféspontok a hasáb oldallapjain találhatók. A V_1 első vetítősíkban nyugszik az *e* egyenes az *1* és *2* döféspontjaival. A vetítősík meghatározza az *1* döfésponton áthaladó *a* alkotót és a *2* döfésponton áthaladó *b* alkotót. A vetületi ábrázolásban (hasonlóan a felületi pontok azonosításához) az alkotókat alkalmazzuk a döféspontok azonosításához.

A műveletet a K_1 és K_2 képsíkon végezzük (elöl- és felülnézeten). Az alkotók és döféspontok azonosítása után a láthatóság szerint rajzoljuk meg az *e* egyenest. A kapott megoldást végül a K_3 képsíkra vetítjük.

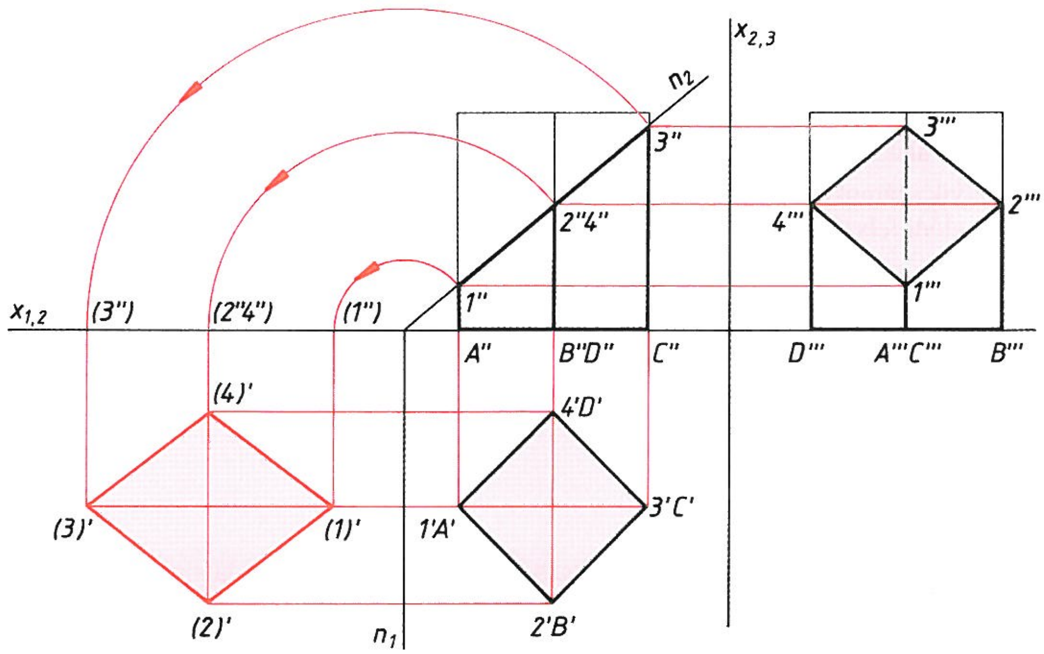


2.17. ábra. A szabályos ötszög alapú hasáb döfése egyenessel

2.2.5. A hasáb síkmetszése

Ugyanazt az elvet követjük, amelyet a kocka síkmetszésénél megtanultunk. A forgatás módszerével szerkesszük meg egy négyzetes hasáb síkmetszésének eredményét, a valódi nagyságú képet.

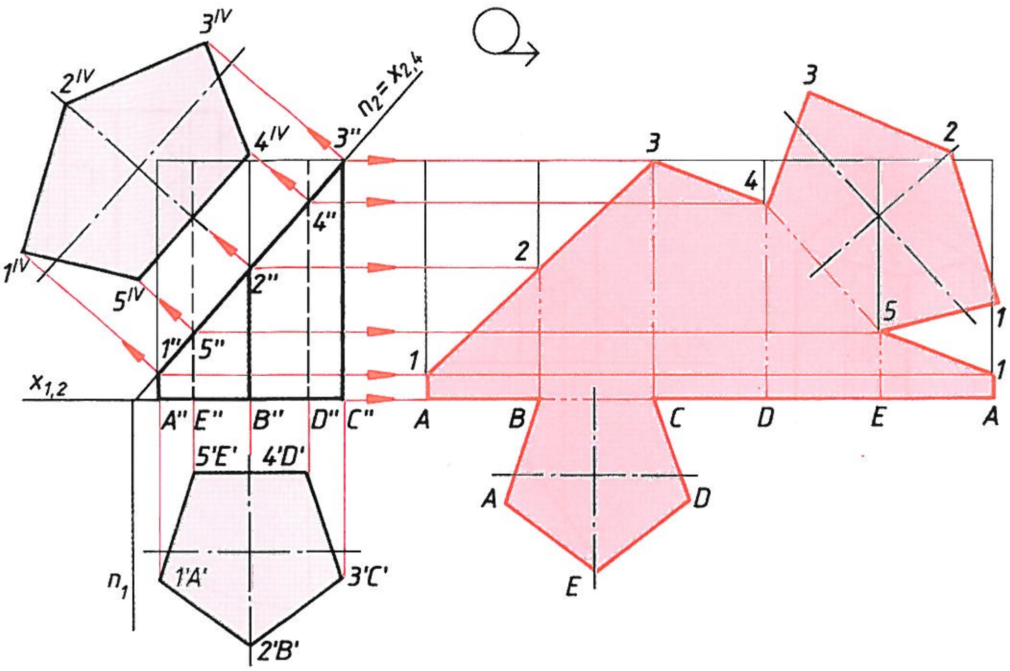
A szerkesztés menetét kövessük a **2.18.** ábrán!



2.18. ábra. A négyzetes hasáb síkmetszése beforgatással

Gyakoroljuk a tanultakat a **13. munkalapon**!

2.2.6. A síkkal metszett hasáb palástkiterítése



2.19. ábra. A szabályos ötszög alapú hasáb síkmetszése és palástkiterítése

A **2.19.** ábrán egy szabályos ötszög alapú hasáb síkmetszése és annak palástkiterítése látható. A szerkesztésnél alkalmazzuk a transzformálásról és a hálórajzról tanultakat és vessük össze a kocka palástkiterítésével!

- Ábrázoljuk a szabályos ötszög alapú hasábot elöl- és felülnézetében, a metszősíkot nyomvonalaival, majd azonosítsuk a kapott csúcsokat!
- A síkmetszéssel kapott felszínt transzformálással határozzuk meg a negyedik képsíkon.
- A K_2 képsíkon megszerkesztjük (rajzoljuk) az elöl- és felülnézeten mérhető távolságok segítségével az oldallapokat.
- Az elölnézeten a síkmetszéssel kapott pontokat, az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamosan vetítjük az oldallapok éleire, ügyelve a csúcsok és élek azonosítására.
- Egy kiválasztott alapélhez (itt a *BC* oldal) megszerkesztjük az alaplapot (másoljuk a felületnézeten látható alakzatot), majd azonosítjuk a csúcsokat.
- Valamelyik számokkal jelzett fedőélhez (itt a *4–5* élhez), másolással szerkesztjük a síkmetszéssel kapott valódi felszínt.
- A kapott csúcsokat megfelelő sorrendben összekötve kapjuk a vágási éleket, ill. a hajtogatási éleket.

Gyakoroljuk a tanultakat a **14. munkalapon**!

2.3. Gúla

A gúla a térnek azon része, amelyet egy sokszög alaplap és a sokszög oldalainak megfelelő számú, közös csúcsban végződő háromszög alakú oldallapok határolnak.

Tanulmányainkban a szabályos gúlákkal foglalkozunk, ezek jellemzői a következők.

- Az alaplap szabályos (körbe írható) sokszög, vagy téglalap.

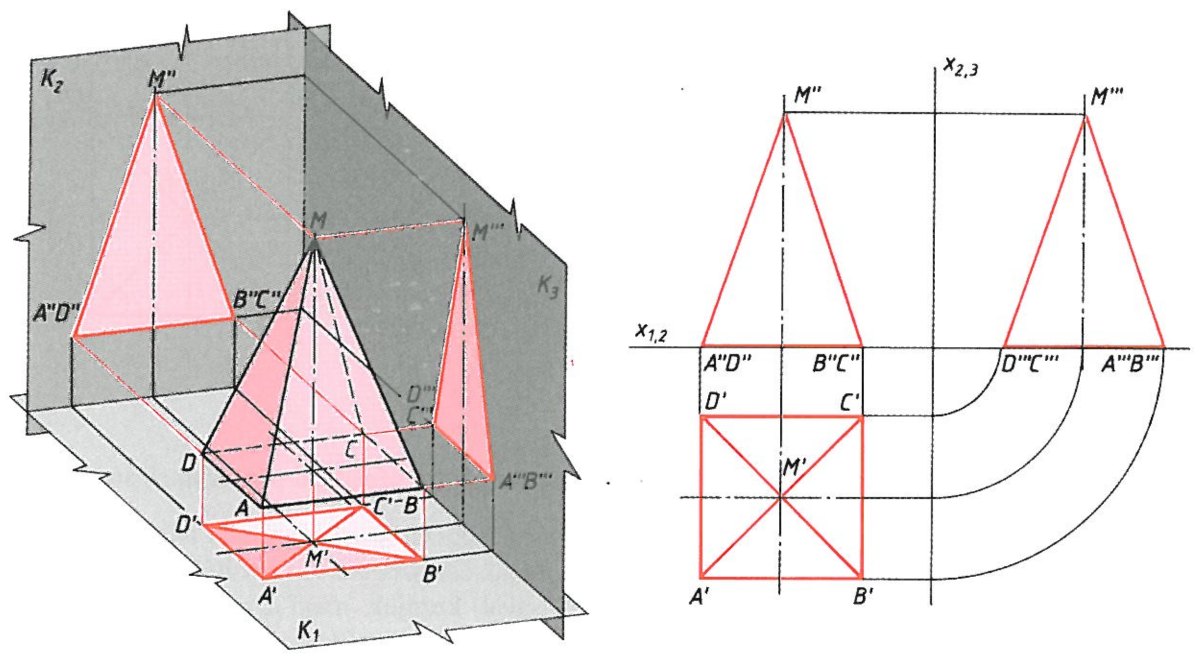
- Az oldallapok egybevágó, egyenlő szárú háromszögek (kivéve a téglalap alapú gúlát, amelynek az oldallapjai párosával egybevágóak).
- A gúla tengelye (ami egyben a testmagasság is) merőleges az alaplap síkjára.

2.3.1. A gúla vetületi ábrázolása

A gúlát az alaplap szerint helyezhetjük el a képsíkrendszerben (**2.20.** ábra), azaz az alaplap párhuzamos a K_1 képsíkkal, ill. a K_1 képsíkon áll. Az alaplap egy oldaléle párhuzamos a K_2 vagy K_3 képsíkkal. (Mivel csak szabályos gúlákkal foglalkozunk, a test tengelye mindig merőleges K_1-re és párhuzamos K_2-vel, K_3-mal.) A gúla alakjából következik, hogy az oldallapjainak síkja ferde a vetítés tengelyére. A gúla csúcsát M-mel jelöljük.

A műszaki ábrázolásban a vetületi szabály betartásával, de a képsíktengelyek megrajzolása nélkül ábrázoljuk a gúlákat.
Az alaplap mérete többféle módon adható meg:

- az alaplap hosszúsága és szélessége (téglalap alapú gúla),
- az alapél hosszúsága (szabályos háromszög alapú gúla, a négyzetre utaló jellel a négyzetes gúla),
- az alaplap köré rajzolható kör átmérője (szabályos ötszög alapú gúla),
- az alaplap laptávolsága vagy csúcstávolsága (szabályos hatszög alapú gúla).



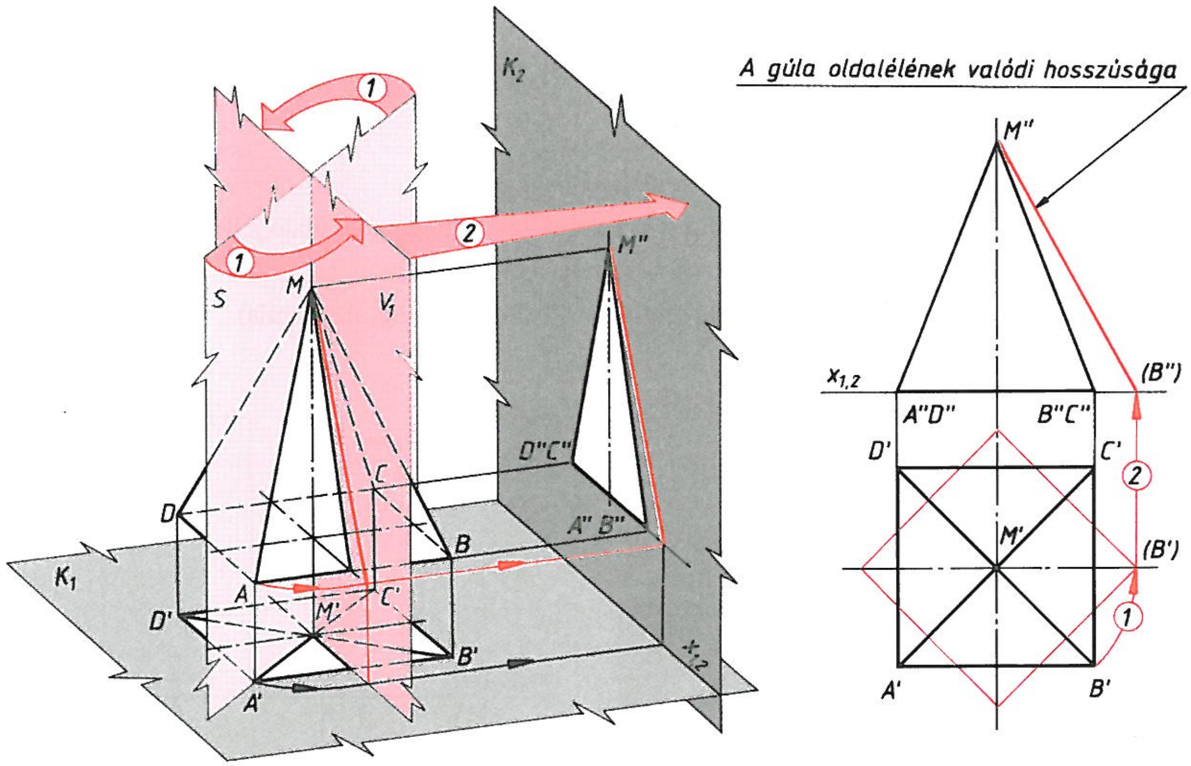
2.20. ábra. A négyzetes gúla a három képsíkos rendszerben

2.3.2. A gúla hálórajza

A hálórajz elkészítéséhez az oldalélek hosszúságának pontos ismerete szükséges. A kocka és hasáb esetében ez egyszerű volt, mert a test minden éle valamelyik képsíkon valódi hosszúságú volt. Az egyenes gúla oldalélei viszont nem párhuzamosak a képsíkokkal, így azokon torzult képe keletkezik. Az oldalél valódi hosszúságát forgatással vagy transzformálással tudjuk meghatározni. A valódi élhosszúságot most forgatással határozzuk meg.

Forgatás a képsíkkal párhuzamos síkba. Olyan vetítősíkot választunk mint S segédképsíkot, amely tartalmazza a gúla oldalélét és tengelyét (**2.21.** ábra). A tengely körül a segédképsíkot a K_2 képsíkkal párhuzamos V_1 vetítősíkba forgatjuk. A vetítősíkon keletkezett képet vetítjük a K_2 képsíkra, amelyen így a gúla valódi élhosszúsága képződik. A vetületi ábrán nyomon követve a szerkesztést, a gúla M' csúcsából körzőnyílásba véve az oldalél első vetületét, azt az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamos egyenesre (az alaplap szimmetriatengelyére) vetítjük ①. A kapott (B') pontot az $x_{1,2}$ tengelyre vetítjük merőlegesen, így kapjuk a (B'') pontot ②. Az M'' és (B'') pontok által meghatározott szakasz a *gúla valódi éle.*

Az ábrán megfigyelhetjük azt is, hogy a négyzetes gúlának van olyan elhelyezése is a képsíkrendszerben, ahol a vetületen a valódi élhosszúság keletkezik. Ezt az elhelyezési módot vékony piros vonallal jelöltük.

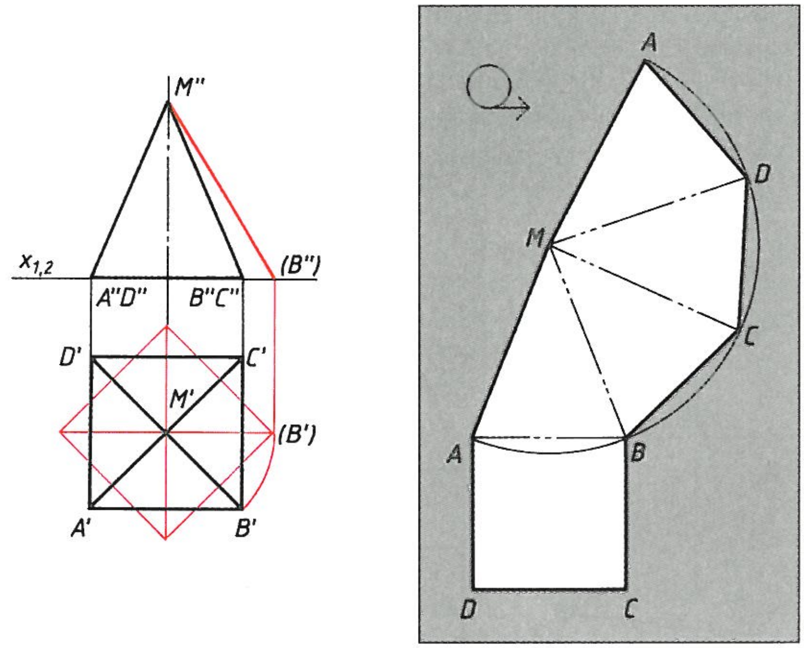


2.21. ábra. A gúla oldalélének valódi hosszúsága (forgatás a képsíkkal párhuzamos síkba)

A gúla hálórajza. A valódi oldalélhosszúság ismeretében megszerkeszthető a gúla hálórajza. A **2.22.** ábrán kísérjük figyelemmel egy négyzetes gúla hálórajzának elkészítését! A kockától és hasáboktól eltérően a hálórajzot az alaplap szerkesztésével (rajzolásával) kezdjük, majd azonosítjuk a csúcsokat. Körzőnyílásba véve a gúla oldalélhosszúságát, az alaplap két szomszédos csúcsából (A, B) egymást metsző íveket rajzolunk. Ezzel kijelöljük a gúla M csúcsát. Változatlan körzőnyílással az M csúcsból körívet rajzolunk, amelyre körzővel felmérjük az alaplap élhosszúságát (az oldallapok számának megfelelően), majd azonosítjuk a csúcsokat. Befejezésül vastag, folytonos vonallal megrajzoljuk a háló körvonalait és vékony, kétpont-vonallal a hajtogatási éleket.

2.3.3. Pont azonosítása a gúla felszínén

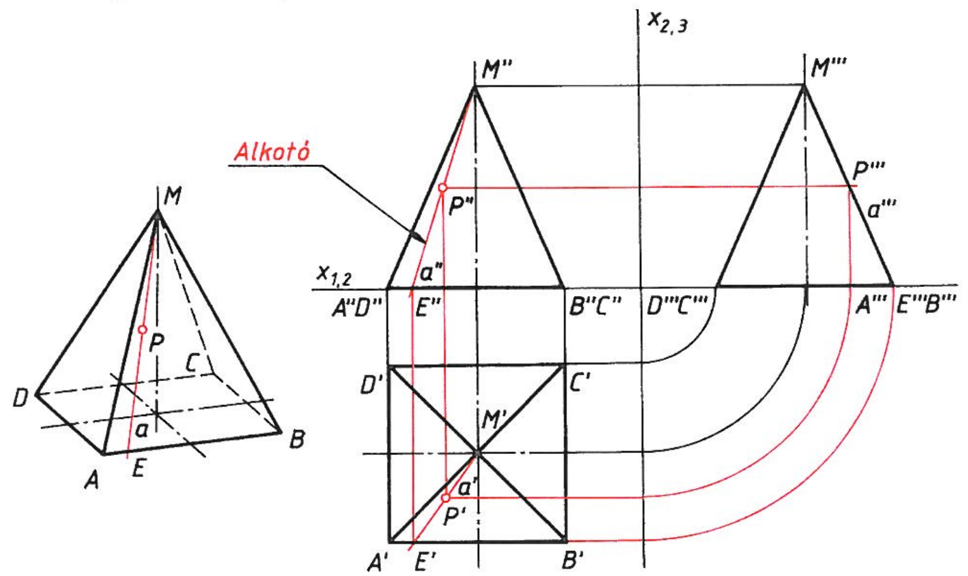
A feladatot két módszerrel is végrehajthatjuk, az egyik, a már ismert alkotó segítségével, a másik, az ún. szeletelősík segítségével. Tekintsük át mindkét módszert!



2.22. ábra. A négyzetes gúla hálórajza

Pont azonosítása alkotó segítségével

A szerkesztést a **2.23.** ábra mutatja be. Az adott P ponton át M csúcsból ábrázoljuk a gúla a alkotóját. Az alkotó E pontban metszi a gúla alapélét. E és M ismeretében az alkotó mindhárom vetületen ábrázolható. Az a alkotón található P pont rendezőivel azonosítható az elöl- és felülnézeten (K_1-en és K_2-n), ill. vetíthető a K_3 harmadik képsíkra.



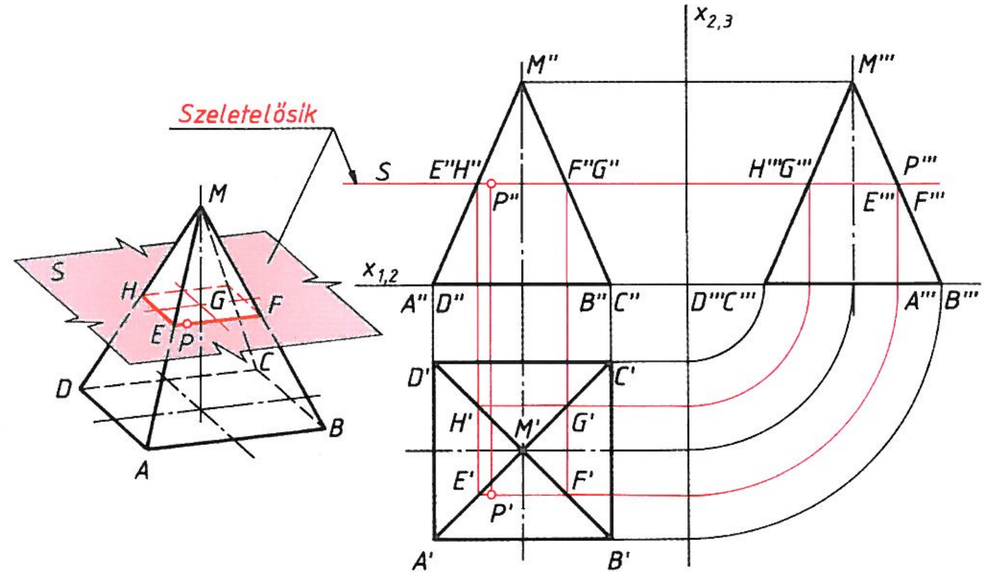
2.23. ábra. Pont azonosítása a gúla felszínén alkotó segítségével

Pont azonosítása szeletelősík segítségével

Szeletelősíknak nevezzük azokat a K_1 első képsíkkal párhuzamos síkokat, amelyekkel a térbeli alakzatot metszve műveleteket tudunk elvégezni.

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a szeletelősík a képsíkkal párhuzamos segédsíksor. A szerkesztéshez mindig olyan szeletelősíkot választunk, amely a jellemző térelemet (pontot, egyenest) tartalmazza.

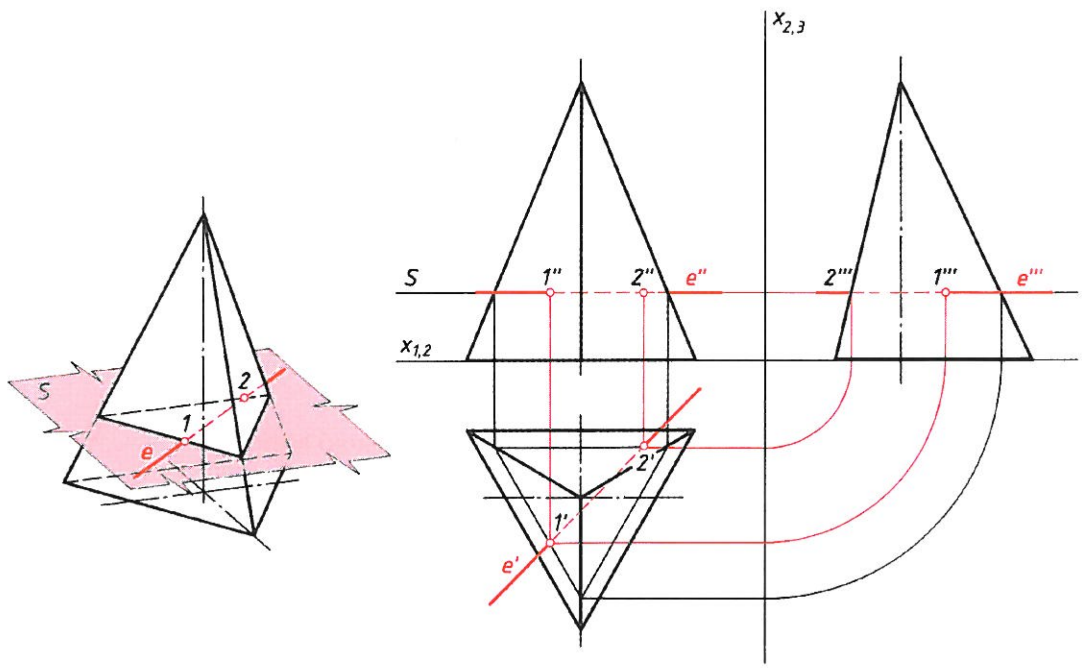
Ha a gúlát a szeletelősíkkal metsszük, az eredetihez hasonló, kisebb magasságú gúlát kapunk, amelynek csúcsai (összevetve a **2.24.** ábrával) E, F, G, H és M. Mivel olyan szeletelősíkot választottunk, amelyben benne van a P pont, az a kapott gúla alapélén található. A vetületi ábrázolásban ennek megfelelően ábrázoljuk a szeletelősíkot, jelöljük a gúla oldaléleinek döféspontjait, majd képezzük vetületeit. Rendezve P', P'', P''' pontokat, azonosítjuk őket a vetületeken.



2.24. ábra. Pont azonosítása a gúla felszínén szeletelősík segítségével

2.3.4. A gúla döfése egyenessel

Tanulmányainkban csak azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor az egyenes párhuzamos a K_1 képsíkkal. A **2.25.** ábra alapján vizsgáljuk meg ábrázolásának módját egy egyenlő oldalú háromszög alapú gúlán!



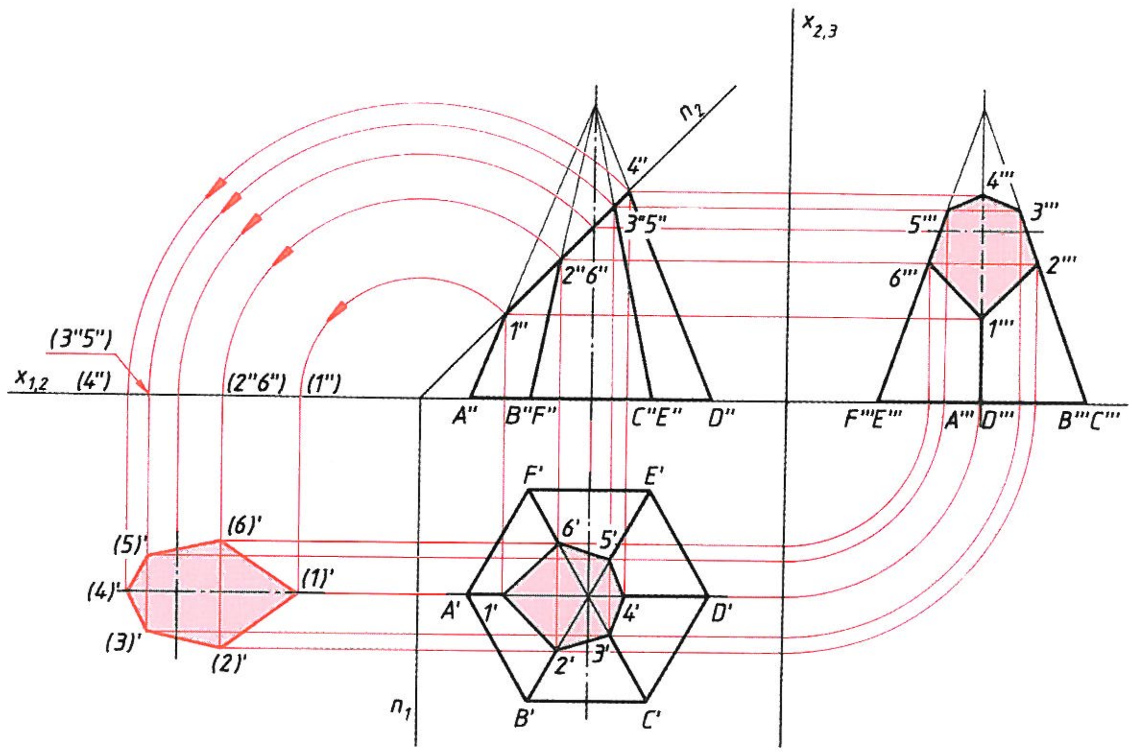
2.25. ábra. A szabályos háromszög alapú gúla döfése egyenessel

A szerkesztés menete.

- Egy olyan szeletelősíkot ábrázolunk, amely párhuzamos a K_1 képsíkkal és tartalmazza az e egyenest.
- A szeletelősík metszi a gúla palástját és ennek eredménye az alaplappal párhuzamos szabályos háromszög (szemléltető kép és felülnézeti kép).
- A szabályos háromszög (a síkmetszet) és az e egyenes metszete határozza meg az 1 és 2 pontokat, a felülnézeten az $1'$ és $2'$ pontokat.
- A felülnézeti pontokat vetítve az elöl- és oldalnézetre megkapjuk az $1''$ $2''$, ill. az $1'''$ és $2'''$ pontokat.
- Végül a láthatóságot figyelembe véve megrajzoljuk az e egyenes képeit (e', e'' és e''').

2.3.5. A gúla síkmetszése

A gúla síkmetszését az eddig megismertek szerint végezzük. A szabályos hatszög alapú gúlát metsszük V_2 vetítősíkkal, amelyet n_1 és n_2 nyomvonalaival ábrázolunk. A síkmetszet valódi nagyságának meghatározását elvégezhetjük forgatással és transzformálással.



2.26. ábra. A szabályos hatszög alapú gúla síkmetszése, és a valódi nagyságú kép meghatározása forgatással

A **2.26.** ábra a valódi felszín szerkesztését forgatással mutatja be.

Gyakoroljuk a tanultakat a **15. munkalapon**!

2.3.6. A síkkal metszett gúla palástkiterítése

A szerkesztés lépéseit a **2.27.** ábra szemlélteti, ahol egy szabályos ötszög alapú gúla síkmetszését és palástkiterítését figyelhetjük meg.

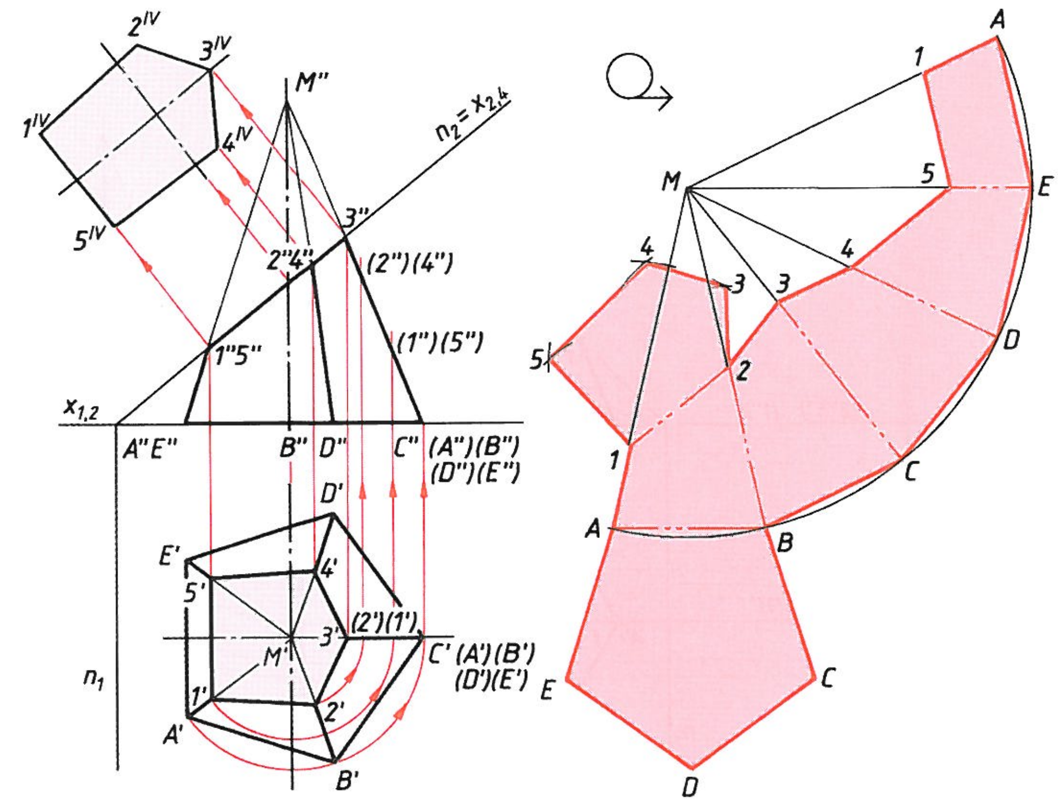
A síkmetszés szerkesztése a következő.

- Ábrázoljuk a gúlát a K_1 és K_2 képsíkon a metszősík nyomvonalaival (n_1 és $n_2=x_{2,4}$)!
- Azonosítjuk a síkmetszéssel kapott pontokat, majd láthatóság szerint megrajzoljuk a gúla éleit.
- A metszett felületet transzformáljuk a negyedik képsíkra (azonosítjuk a csúcsokat és megrajzoljuk az alakzat oldalait).

A palástkiterítés szerkesztése a következő.

- *M'C'* oldalél párhuzamos a K_2 képsíkkal, így az valódi hosszúságú az elölnézeten.
- A további oldalélek ferde helyzetűek, ezért az *1'* és *2'* pontokat beforgatjuk a K_2-vel párhuzamos síkba (az *M'C'* oldalélre).
- A kapott (*1'*) és (*2'*) pontokat vetítjük a K_2 képsíkon az *M"C"* oldalélre.

Az eddigi szerkesztés eredményét tekintsük át! A felülnézeten megfigyelhető, hogy az *1'A'* és *5'E'* oldalélek, ill. a *2'B'* és *4'D'* oldalélek egyenlő hosszúságúak. Így a gúla hálójának szerkesztéséhez szükséges valódi élhosszúságok a K_2-n az *M"C"* oldalélen mérhetőek (a kiinduló alakzat oldalélei egyenlő hosszúságúak, így a *C"* egyben beforgatott (*A"*), (*B"*), (*E"*) és (*D"*) csúcs is).



2.27. ábra. A szabályos ötszög alapú gúla síkmetszése és palástkiterítése

- Ezek után ábrázoljuk a felülnézet alapján a gúla alaplapját és jelöljük az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* csúcsokat!
- Körzőnyílásba véve az *M"C"* oldalélt az *A* és *B* csúcsból, egymást metsző ívekkel megszerkesztjük az *M* csúcsot.
- Változatlan körzőnyílással *M* csúcsból körívet rajzolunk, amelyre *B* csúcsból indulva felmérjük a gúla *AB* alapélét az oldallapok számának megfelelően. Jelöljük a kapott további csúcsokat (*C*, *D*, *E*, *A*)!
- Az ábrázolt oldalélekre felmérjük a síkmetszés utáni élhosszúságokat: az (*1"*)(*A"*), (*2"*)(*B"*), *3"C"*, (*4"*)(*D"*), (*5"*)(*E"*) és (*1"*)(*A"*) éleket. Azonosítjuk a kapott csúcsokat (*1-5-1*).

- A síkmetszet valódi nagyságú képét *másolással rajzoljuk* a palástfelületre (mindig a leghosszabb élt illesszük a palásthoz), itt az *1–2* csúcsok közé. Egyszerű másolási mód a háromszögekre való bontás. Azaz körzőnyílásba véve a csúcstávolságokat, követve a jelöléseket, egymást metsző ívekkel kijelöljük a csúcsokat (pl. az *1* csúcsból az $1^{IV}5^{IV}$ ívet metsszük a *2* csúcsból a $2^{IV}5^{IV}$ ívvel, majd az *1* csúcsból a $1^{IV}4^{IV}$ ívet a *2* csúcsból a $2^{IV}4^{IV}$ ívvel, végül az *1* csúcsból az $1^{IV}3^{IV}$ ívet a *2* csúcsból a $2^{IV}3^{IV}$ ívvel). A kapott csúcsokat azonosítjuk.
- Megrajzoljuk a szerkesztés eredményét. Vastag, folytonos vonallal a körvonalakat (vágási él), vékony, kétpont-vonallal a közbülső éleket (hajtogatási él).

Gyakoroljuk a tanultakat a **16. munkalapon**!

Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk kockán?
2. Milyen egyszerű mértani testeket ismertünk meg?
3. Melyek a szabályos mértani testek?
4. Miben tér el a műszaki ábrázolás a vetületi ábrázolástól?
5. Mit nevezünk rajzolvasásnak?
6. Milyen műveleteket végzünk a felületelemzés során?
7. Mit értünk egy térbeli alakzat hálórajzán?
8. Mit nevezünk segédképsíknak, hogyan ábrázoljuk és hogyan jelöljük?
9. Mit értünk a test lapjának valódi nagyságán?
10. Milyen művelet a képsíkba forgatás?
11. Milyen művelet a rotáció?
12. Milyen művelet a transzformálás?
13. Mit értünk a hasáb fogalmán?
14. Mit értünk a gúla fogalmán?
15. Milyen művelet a képsíkkal párhuzamos síkba forgatás?
16. Mit nevezünk szeletelősíknak és melyek a jellemzői?

3. FORGÁSTESTEK VETÜLETI ÁBRÁZOLÁSA

A forgástestek vetületi ábrázolásakor az előző fejezetben megismert ábrázolási szabályokat alkalmazzuk. Megismerkedünk a **henger-, kúp-, gömb-** és **körgyűrűfelület** jellegzetességeivel. Megvizsgáljuk, hogy miként tudjuk alkalmazni a már ismert műveleteket: a pont azonosítását a felszínen, a döfést egyenessel, a síkmetszést és a palástkiterítést. Mielőtt azonban ezekre sort kerítenénk, ismerkedjünk meg a forgástestek keletkezésével, azaz a forgástestek származtatásával!

3.1. A forgástestek származtatása

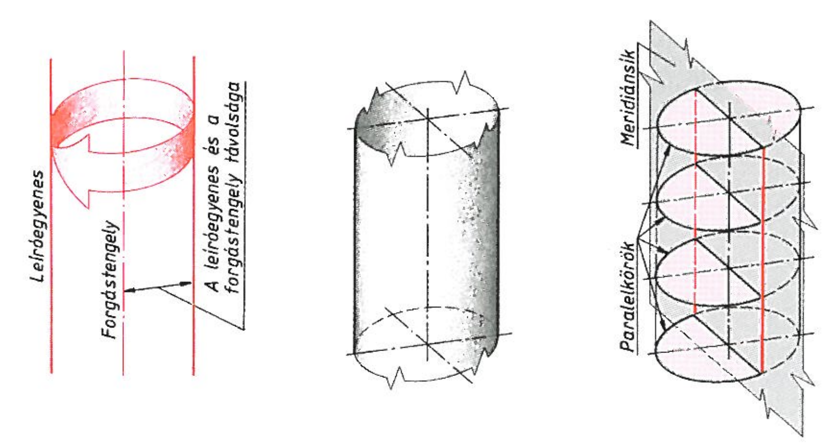
Ha egy egyenest vagy kört egy adott egyenes mint forgástengely körül megforgatunk, forgásfelületet kapunk.

Az egyenest leíróegyenesnek, a kört leírókörnek nevezzük. A forgástengely körül egy adott kör mentén forgatjuk a leíróegyenest, ill. leírókört. Ez azt is jelenteni, hogy a leíróegyenes vagy leírókör bármely adott pontja a forgatás következményeként körpályát ír le. Ennek a körpályának a síkja merőleges a forgástengelyre és középpontja a forgástengelyen van. A forgástest pontjainak körpályái egymással párhuzamosak, ezért az adott **forgásfelület párhuzamos köreinek,** más szóval **paralelköreinek** nevezzük.

A forgástestek jellegzetes síkja a **forgásfelület meridiánsíkja**, amely a forgástengelyre illeszkedik. Ennek ismeretében pontosíthatjuk megfogalmazásunkat.

Minden forgástest előállítható a test meridiánsíkjában nyugvó egyenes vagy kör forgatásával.

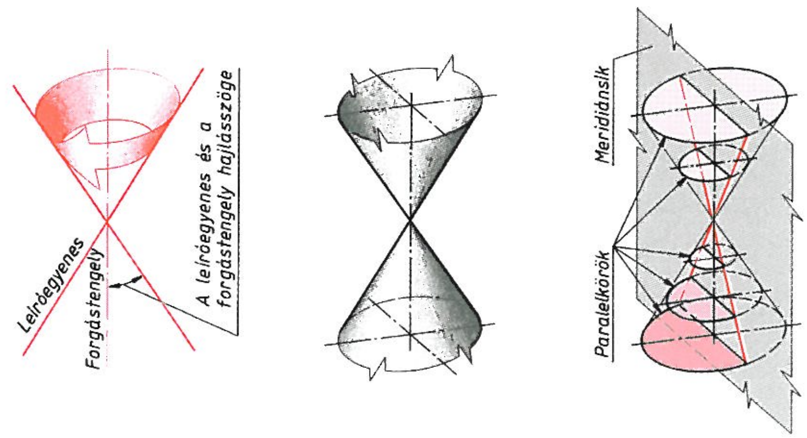
3.1.1. Leíróegyenessel származtatott forgásfelületek



a) *b)* *c)*

3.1. ábra. A hengerfelület
a) a felület származtatása; *b)* a létrejött felület; *c)* a felület jellegzetes síkjai

Hengerfelület (3.1. ábra**).** Ha egy egyenest a vele párhuzamos forgástengely körül megforgatunk, hengerfelületet kapunk. A kapott végtelen felület jellemző mérete a paralelkör *R* sugara.



a) *b)* *c)*

3.2. ábra. A kúpfelület

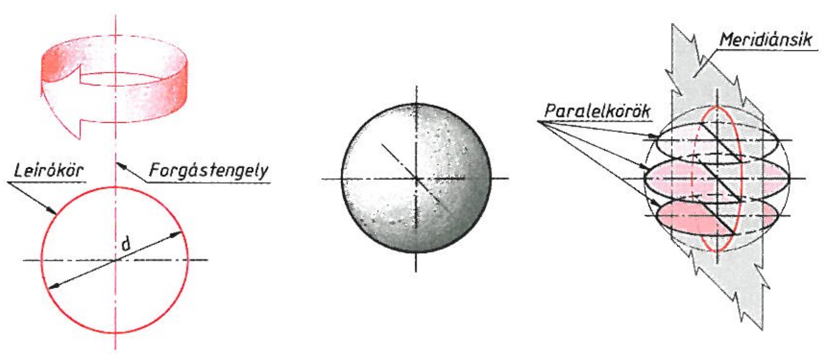
a) a felület származtatása; *b)* a létrejött felület; *c)* a felület jellegzetes síkjai

Kúpfelület (3.2. ábra**).** Ha egy egyenest az őt metsző forgástengely körül megforgatunk, kúpfelületet kapunk. A kapott végtelen felület jellemző mérete a forgástengely és a leíróegyenes által bezárt α szög, amely a kúp α csúcsszögének a fele. A kúpfelület származtatásának következménye az, hogy **a kúp kettős felszín.**

A leíróegyenessel származtatott felületek (henger- és kúpfelszín) a **síkban kiteríthetőek,** tehát palástjuk megszerkeszthető.

3.1.2. Leírókörrel származtatott forgásfelületek

Gömbfelület (3.3. ábra**).** Ha egy kört valamelyik szimmetriatengelye mentén mint forgástengely körül megforgatunk, gömbfelületet kapunk. A kapott zárt felület jellemző mérete a gömbátmérő (*Sø*), amely egyenlő a leírókör *d* átmérőjével, vagy a gömbsugár (*SR*), amely egyenlő a leírókör *R* sugarával.



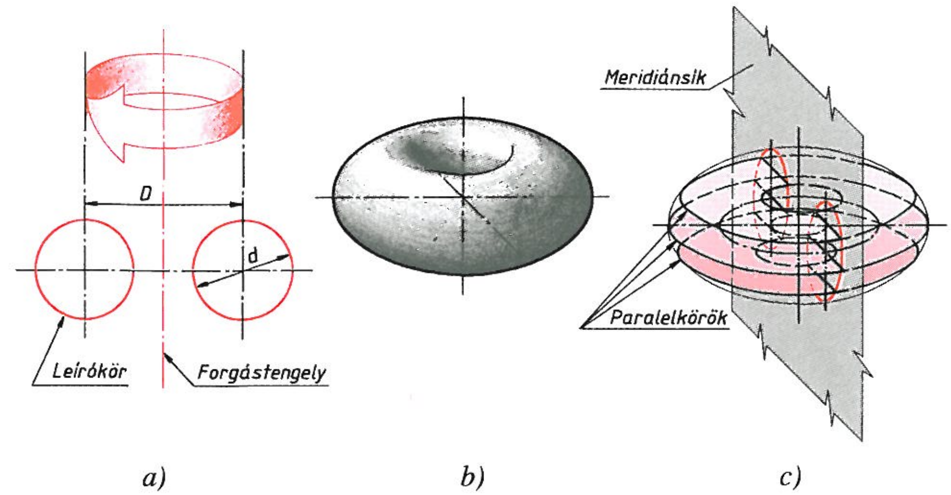
a) *b)* *c)*

3.3. ábra. A gömbfelület

a) a felület származtatása; *b)* a létrejött felület; *c)* a felület jellegzetes síkjai

Körgyűrűfelület (3.4. ábra**).** Ha egy kört olyan forgástengely körül forgatunk meg, amelyen nincs rajta a leírókör középpontja, körgyűrűfelületet kapunk. A kapott zárt felszín jellemző mérete a leírókör *d* átmérője és a leírókör középpontja által meghatározott paralelkör *D* átmérője.

A leírókörrel származtatott felületek (gömb és körgyűrűfelület) **síkban nem teríthetőek ki,** ezért palástjuk nem szerkeszthető meg.



3.4. ábra. A körgyűrűfelület (tórusz)
a) a felület származtatása; *b)* a létrejött felület; *c)* a felület jellegzetes síkjai

3.2. Henger

A gyakorlatban a végtelen hengerfelület két paralelkörrel határolt részét alkalmazzuk. Az így keletkezett mértani alakzat az **egyenes henger.** Jellemzői a következők.

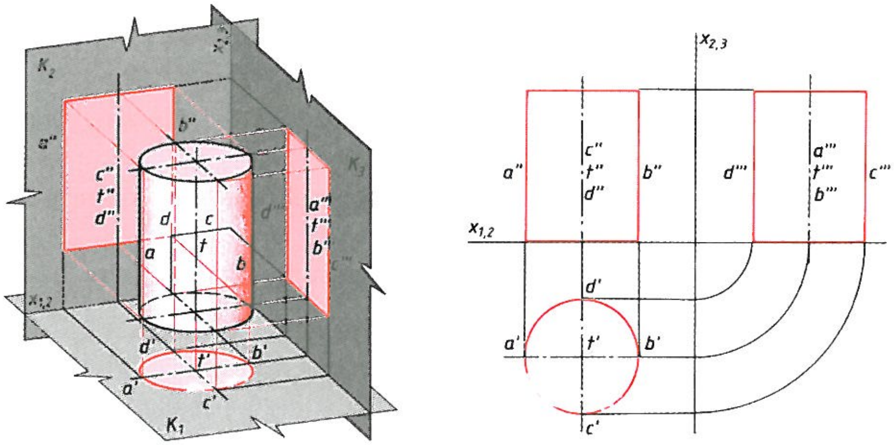
- **Alkotó:** a forgástengellyel párhuzamos egyenes (amellyel származtatjuk a hengert) adott hosszúságú szakasza. Hosszúsága egyenlő a henger magasságával. A henger vetületi képét lehatároló alkotók a **kontúralkotók.** Az alkotók egymással is párhuzamosak.
- **Zárólapok:** a hengerfelületet határoló körlapok. Az alap- és fedőlap egybevágó és egymással párhuzamos.
- **Hengerpalást:** az alkotók által leírt felület. Síkba terítve téglalapot vagy négyzetet eredményez.
- **Hengerátmérő:** a paralelkörök átmérője. A henger ábrázolásának egyik adata.
- **Hengermagasság:** a zárólapok középpontjainak a forgástengelyen mért távolsága. A henger ábrázolásához szükséges másik adat.

3.2.1. A henger vetületi ábrázolása

A hengert úgy helyeztük el a képsíkrendszerben, hogy *tengelye* (így alkotói is) merőleges legyen az első képsíkra. A henger felülnézete, azaz első képe kör, amelynek átmérője azonos a hengerátmérővel. Az alap- és fedőlap képe egybeesik. Tengelyeik metszéspontja a t' forgástengely, a tengelyek és a kör metszéspontjai pedig az a', b', c', d' alkotók vetületei. A vetületi szabályt betartva, rendezőkkel és vetítősugarakkal (körívekkel) képezzük a henger további vetületeit (**3.5.** ábra).

A henger második képét, azaz elölnézetét meghatározzák az a'' és b'' alkotók és a zárólapok vetületei. A henger elölnézete téglalap vagy négyzet, amit a kontúralkotók és a zárólapok vetületei (mint forgástengelyre merőleges síklapok egy élben látszódnak) határolnak. A kontúralkotók távolsága a henger átmérője, a zárólapok távolsága pedig a henger magassága.

A henger harmadik képét, azaz oldalnézetét meghatározzák a c''' és d''' alkotók, valamint a zárólapok vetületei. A henger oldalnézete az elölnézettel egybevágó téglalap (négyzet).



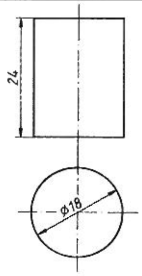
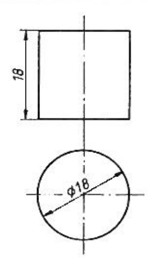
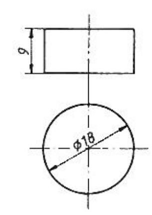
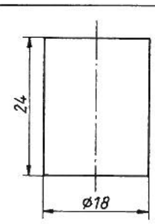
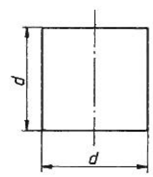
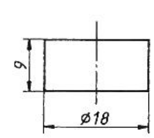
3.5. ábra. A henger

Azokat a hengereket, amelyeknek *h* magassága kisebb, mint az átmérője, **korongnak** vagy **tárcsának** nevezzük.

A hengereket az átmérő–magasság méretviszonyai (arányai) alapján csoportosíthatjuk (**3.1.** táblázat). A csoportosításban nevezetes hengernek tekinthetjük az azonos átmérőjű és magasságú hengereket ($h=d$), amelyeknek forgástengellyel párhuzamos vetülete négyzet. Ezeket a hengereket *szabályos hengereknek* is nevezzük. Továbbá azokat a hengereket, amelyeknek palástja négyzet, azaz matematikai ismereteinket felhasználva, magasságuk egyenlő a zárólapok kerületével ($h=d\pi$).

A műszaki gyakorlatban a hengert a vetületi szabály (nézetrend) figyelembevételével, a képsíktengelyek, rendezők és vetítősugarak (-körívek) ábrázolása nélkül, de jellemző méreteinek megadásával ábrázoljuk.

A henger műszaki ábrázolása és méretmegadása. **3.1.** táblázat

	Henger	Szabályos henger	Korong
Két vetületben			
Egy vetületben			

A **3.1.** táblázatban megfigyelhetjük, hogy az egyszerű henger egyértelmű ábrázolásához elegendő két vagy egy vetülete.

Felületelemzés. Tekintsük általános szabálynak, hogy a felületelemzést mindig az elölnézet alapján végezzük. Ugyanakkor folyamatosan egybevetjük a további vetületekkel, amelyek lényeges információt nyújtanak az alakzat felismerésére.

Eddigi tapasztalatainkat összegezve, a **teljes felületelemzés** lépései tehát

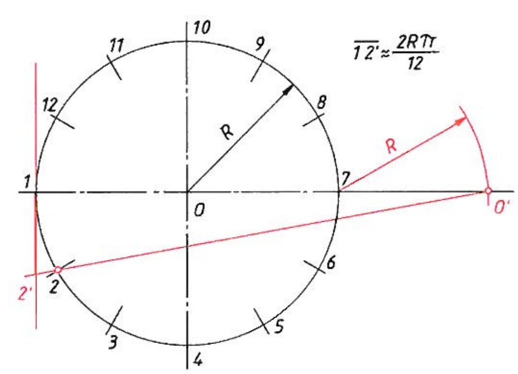
- **a csúcsok azonosítása,**
- **az élek azonosítása** (alak szerint is, azaz egyenes élek, ill. kör-, ellipszis-, parabola- hiperbola- stb. élek),
- **sík felületek azonosítása** (alak szerint is, azaz milyen síkidomot határoz meg a sík felület határolóvonala),
- **forgásfelületek azonosítása** (konkrét felszínük alapján, azaz henger-, kúp-, gömb- vagy körgyűrűfelület).

A henger felületelemzésének eredménye az előzőek alapján a következő.

- *Csúcs*: nincs.
- *Él*: 2 db körél.
- *Sík*: 2 db körlap.
- *Forgásfelület:* 1 db hengerfelszín.

3.2.2. A henger hálórajza

A hálórajz elkészítésének alapja a henger vetületi ábrázolása. A már megszerzett ismereteink alapján ehhez elegendő a henger két vetülete, az elöl- és felülnézet. Mint tudjuk, a hengerpalást olyan négyszög, amelynek hosszúsága egyenlő a henger zárólapjainak kerületével, ezért előbb ismerjük meg **a kör kerületének közelítő szerkesztését** (**3.6.** ábra).



3.6. ábra. A kör kerületének közelítő szerkesztése

Ez a módszer az egységnyi ívhosszúság szerkesztését mutatja be.

Osszuk fel a kör kerületét 12 egyenlő részre!

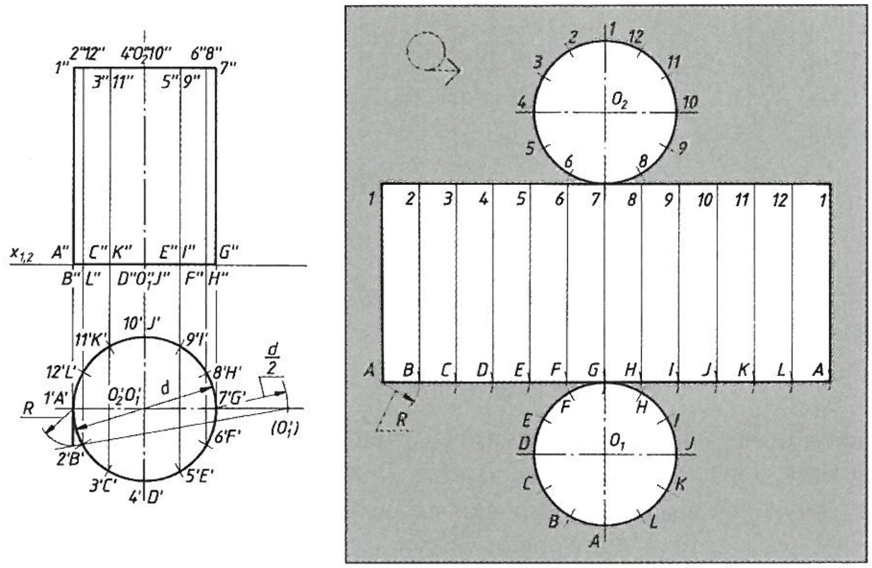
- A vízszintes szimmetriatengely meghosszabbításán, R sugárral a *7* pontból jelöljük a *0'* pontot!
- A kapott *0'* pontból a *2* ponton át elmetsszük az *1* ponton át rajzolt kőrérintőt, amellyel kapjuk *2'* pontot.
- Az *1* és *2'* pontok távolsága megközelítőleg egyenlő az R sugarú kör kerületének egy-tizenketted részével.

Az ábra alapján belátható, hogy a szerkesztés egyszerűsíthető félkörre. A későbbiekben erre a megoldásra is találunk példát.

Az eddigi ismereteinket alkalmazva a henger hálórajzát a következők szerint készítjük (**3.7.** ábra).

- Ábrázolunk egy (vízszintes) félegyenest, amelynek végpontja *A*.
- A félegyenesre körzővel felmérjük a henger kerületének 1/12 részét tizenkétszer.

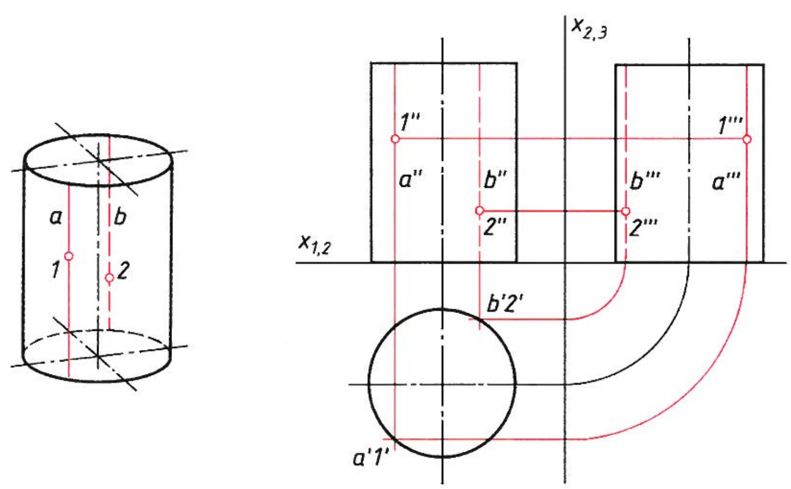
- Az A pontból, merőlegesen a félegyenesre, felmérjük a henger magasságát (l) és megrajzoljuk a hengerpalástot, majd az alkotókat (végpontjaik 1-12-1).
- Végül tetszés szerinti alkotóhoz (itt $G7$) megrajzoljuk a zárólapokat. (Ügyeljünk az ábrázolási szabályokra! A kontúrvonalak vastag, folytonos vonalak, az alkotók vékony, folytonos vonalak.)



3.7. ábra. A henger hálórajza

3.2.3. Pont azonosítása a henger palástfelületén

A henger palástfelületén lévő pontokat a rajtuk áthaladó alkotókkal tudjuk azonosítani (**3.8.** ábra). A későbbiekben erre a feladatra felhasználjuk a paralelköröket is, amelyek a hengerpalástból szeletelősíkok által kimetszett körök.

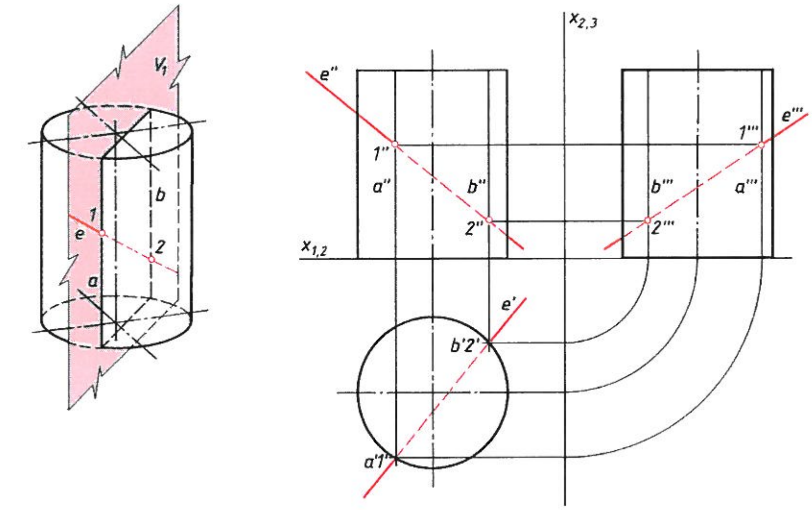


3.8. ábra. Pont azonosítása a henger palástfelületén

Gyakoroljuk a tanultakat a **17. munkalapon**!

3.2.4. A henger döfése egyenessel

A síklapú testekhez hasonlóan a forgástestek esetében is olyan vetítősíkot választunk, amelyre illeszkedik a testet döfő egyenes. Így henger esetében a következőket gondoljuk végig a **3.9.** ábrát figyelemmel kísérve!



3.9. ábra. A henger döfése egyenessel

- A K_1 képsíkon az *e* egyenes vetülete egyben a V_1 vetítősík nyomvonala is. A henger vetületét metszi az *e* egyenes, amely metszéspontok az *1'* és *2'* döféspontok. Az *1* és *2* döféspontokon át rajzolt *a* és *b* alkotók alkalmasak a döféspontok azonosítására a többi vetületen. A K_1 képsíkon *a'* és *1'*, ill. *b'* és *2'* fedik egymást (egy pontba esnek).
- A K_2 képsíkon, rendezőivel ábrázoljuk az *a"* és *b"* alkotókat, amelyek metszik az *e* egyenes *e"* második képét. Az egyenes és alkotók metszéspontjai meghatározzák az *1"* és *2"* döféspontokat.
- Az elöl- és felülnézet alapján képezzük a henger, az egyenes és a döféspontok harmadik képét a K_3 képsíkon.
- Végül láthatóság szerint megrajzoljuk az *e* egyenes képeit.

Gyakoroljuk a tanultakat a **18. munkalapon**!

3.2.5. A henger síkmetszése és palástkiterítése

A forgástestek síkmetszését általában a forgástengelyhez viszonyított síkkal végezzük. Mint tapasztalni fogjuk, a síkmetszés eredménye ez alapján csoportosítható a legjobban.

Így megvizsgáljuk a forgástengelyre illeszkedő, a forgástengellyel párhuzamos, a forgástengelyre merőleges és általános helyzetű síkkal való metszés eredményét.

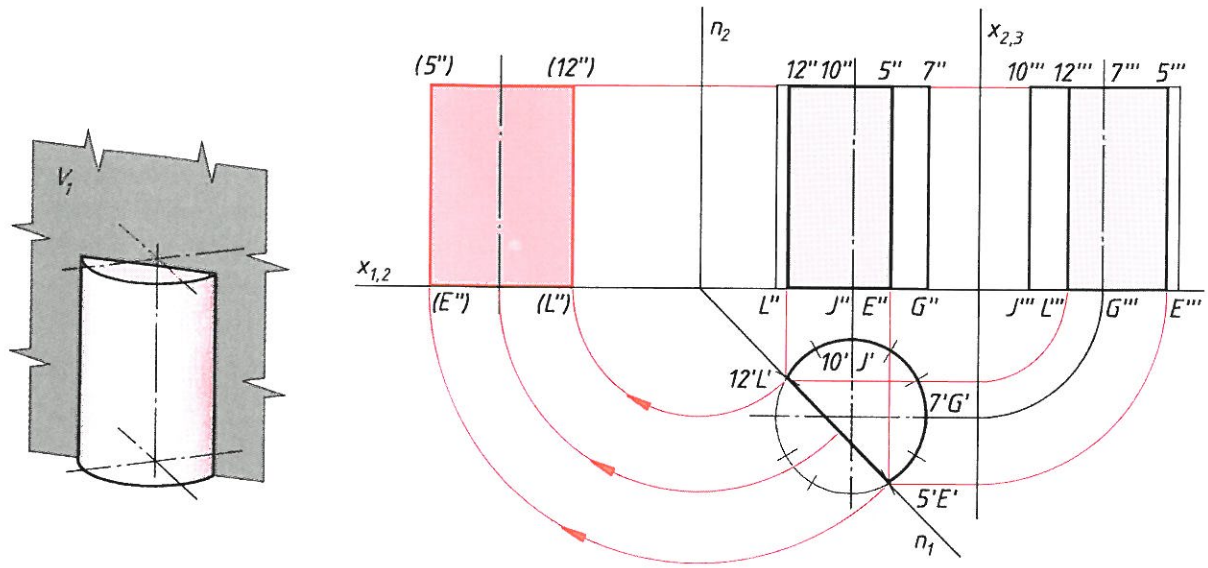
A henger síkmetszése a forgástengelyre illeszkedő (meridián-) síkkal

A síkmetszés eredménye egy félhenger.

A henger síkmetszése a forgástengellyel párhuzamos síkkal

- A V_1 vetítősík párhuzamos a forgástengellyel.
- A K_1 képsíkon a síkmetszés vetülete egyenes él.
- A K_2 képsíkon a síkmetszet torzult téglalap, amelynek szélességét az első és második rendezők, magasságát pedig a hengermagasság határozza meg.
- A K_3 képsíkon keletkező téglalapot a harmadik rendező és a K_1 képsíkról rajzolt vetítősugarak (-körívek) határozzák meg (**3.10.** ábra).

A valódi felszín szerkesztése. Ebben az elrendezésben a beforgatást a K_2 második képsíkba végezzük. A művelet azonos a síklapú testeknél tanultakkal.



3.10. ábra. A henger síkmetszése V_1 vetítősíkkal

A henger síkmetszése a forgástengelyre merőleges síkkal

A síkmetszés eredménye a zárólapokkal egybevágó körlap (paralelkör). A síkmetszéssel ezek alapján kisebb magasságú hengert kapunk.

A henger síkmetszése általános helyzetű síkkal

Ábrázolásnál a forgástestet mindig úgy helyezzük el a képsíkrendszerben, hogy a metszősík merőleges legyen valamelyik képsíkra. Itt az elölnézeten ábrázoltuk a hengert metszősíkjának n_2 nyomvonalával, így a metszősík V_2 vetítősík (**3.11.** ábra).

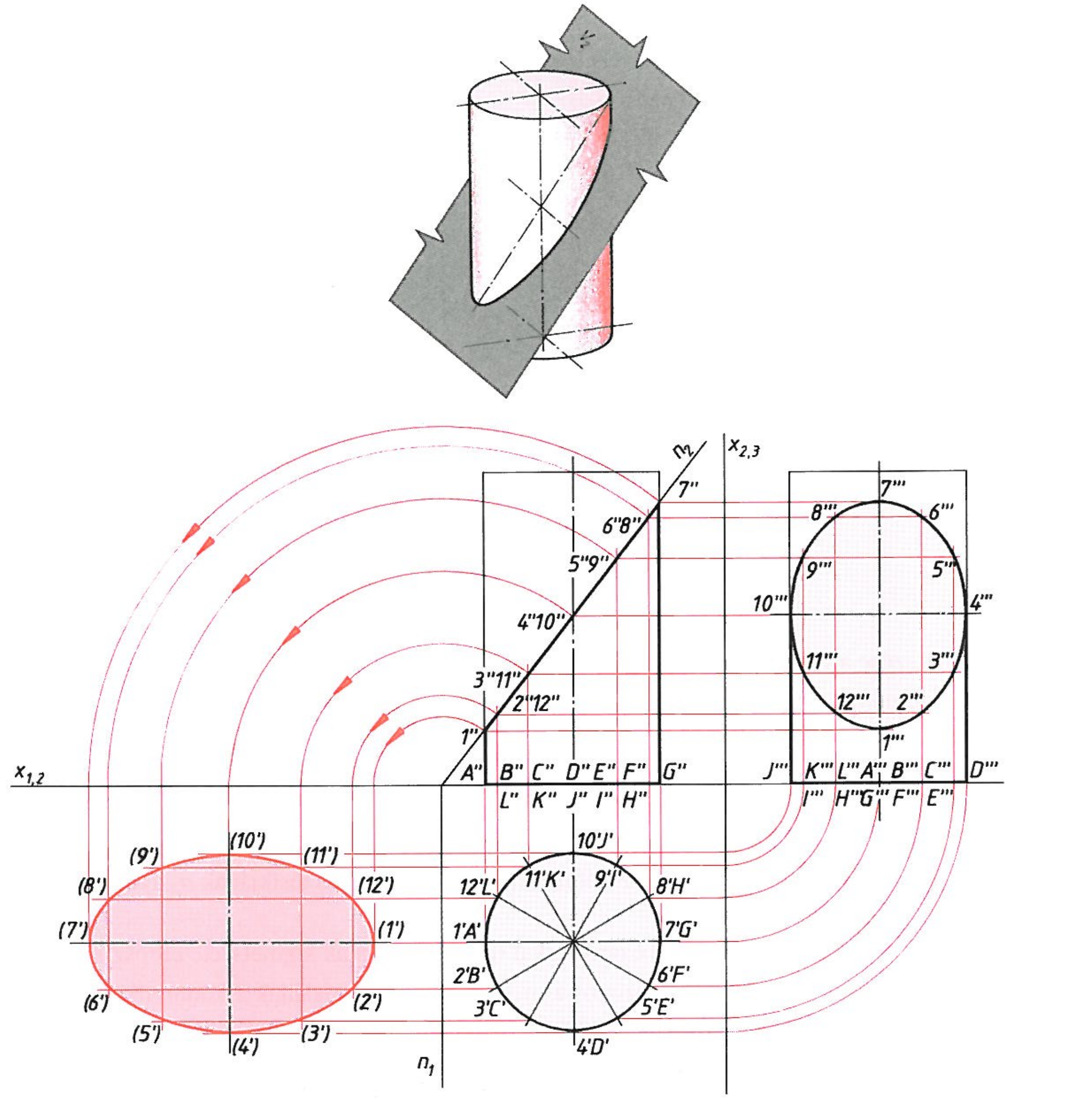
Ha egy hengert forgástengelyével szöget bezáró síkkal metszünk, annak síkmetszete ellipszis.

Az ellipszis nagytengelyének hosszúsága azonos a metszősík nyomvonalának a kontúralkotók közötti hosszúságával, a kistengely pedig azonos a henger átmérőjével.

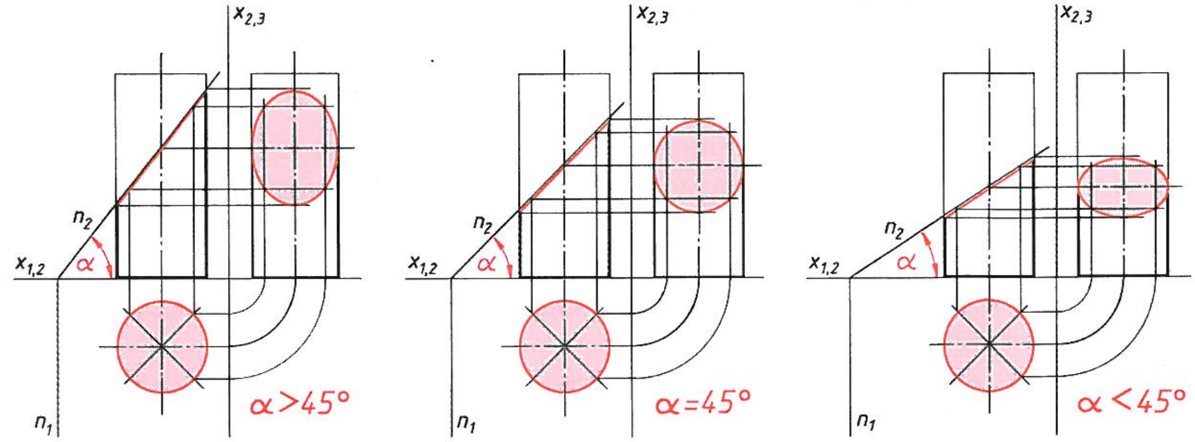
Az elöl- és felülnézeten a síkmetszés eredménye közvetlenül tanulmányozható. Az első képsíkon a síkmetszet vetülete kör (az ellipszis torzult képe), a második képsíkon pedig egyenes él (egybeesik a metszősík nyomvonalával). A harmadik képsíkon a síkmetszet vetületét szerkesztéssel határozzuk meg. A henger felületén alkotókat jelölünk ki, amelyek metszik a metszősíkot. Erre azért van szükség, mert a palástfelületnek nincs olyan éle, amelyeknek a metszősíkon lévő döféspontjai azonosíthatók lennének. Minél több pontot határozunk meg, annál pontosabb a szerkesztésünk, aminek menete a következő.

- A K_1 képsíkon felosztjuk a kör kerületét 12 részre és jelöljük $1'A'$-tól $12'L'$-ig.
- A K_2 képsíkon rendezőkkel azonosítjuk az alkotókat és jelöljük az alapkör, valamint a metszett felület kerületi pontjait A''-től L''-ig, ill. $1''$-től $12''$-ig, azaz meghatározzuk a metszősík és az alkotók döféspontjait.
- A K_1 és K_2 képsíkon ábrázolt pontokat mint az ellipszis kerületi pontjait vetítjük a K_3 képsíkra és azonosítjuk őket (A'''–L''', ill. $1'''$–$12'''$).
- Az $1'''$–$12'''$ pontokon át megrajzoljuk az ellipszist, ami a síkmetszés eredményének harmadik képe. A szerkesztést a metszősík alatti részlet kontúrvonalainak megrajzolásával fejezzük be.

A valódi felszín szerkesztéséhez a már ismert beforgatás és transzformálás műveletét alkalmazzuk. A forgatást az első képsíkba a **3.11.** ábrán követhetjük nyomon.



3.11. ábra. A henger síkmetszése V_2 vetítősíkkal. A valódi felszín szerkesztése forgatással



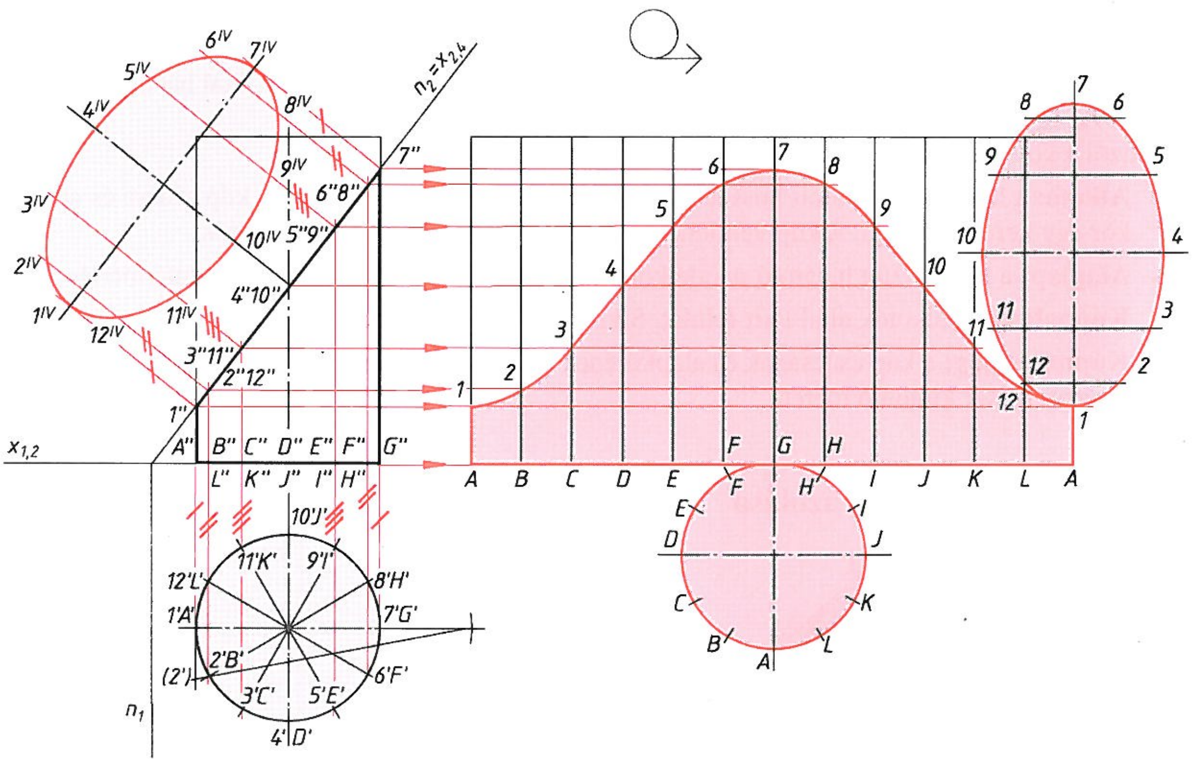
a) b) c)

3.12. ábra. A metszősík és a forgástengely által bezárt szög változtatásának hatása a harmadik képre

Attól függően, hogy a metszősík milyen szöget zár be a henger forgástengelyével, változik a harmadik vetületen keletkezett kép. A három jellegzetes ellipszisképet a **3.12.** ábrán tanulmányozhatjuk.

Transzformálás a negyedik képsíkra. A szerkesztéshez elegendő a henger két vetületének ábrázolása. A henger síkmetszetének valódi nagyságú képét a K_2 képsíkkal közös K_4 képsíkon szerkesztjük. A szerkesztés lépései a következők.

- A K_1 képsíkon a hengerkerületet tizenkét részre osztjuk és jelöljük az *1'-12'* pontokat mint a metszősíkon az alkotók döféspontjait.
- Rendezőkkel azonosítjuk az alkotókat és döféspontjaikat az n_2 nyomvonalon, így kapjuk az *1"–12"* pontokat.
- Az n_2=$x_{2,4}$ képsíktengelyre merőlegeseket rajzolunk az *1"–12"* pontokból, amelyekre körzővel másoljuk az első távolságokat (az egyes pontok első rendezőjének hosszúságát). Azonosítjuk a kapott pontokat 1^{IV}-től 12^{IV}-ig.
- Az 1^{IV}-12^{IV} pontokon át megrajzoljuk a síkmetszéssel kapott valódi felszínt, az ellipszist.



3.13. ábra. A síkmetszet valódi nagyságú képének meghatározása transzformálással. A kapott alakzat hálórajza

Palástkiterítés. A síkmetszéssel kapott felszín palástkiterítését a K_1, K_2, K_4 képsíkon lévő vetületek alapján szerkesztjük (**3.13.** ábra). A hengerpalást pontjainak azonosításához szükségünk van az alkotók és az alapkör metszőpontjaira is, így először azokat jelöljük *A'*-től *L'*-ig, ill. a K_2-n *A"*-től *L"*-ig. A szerkesztés további lépései a következők.

- Az $x_{1,2}$ tengelyen kijelöljük az *A* pontot (mint kezdőpontot), K_1 képsíkon elvégezzük a kör kerületének közelítő szerkesztését, majd az *A* ponttól felmérjük annak egytizenketted részét 12-szer és jelöljük a pontokat (*B-L* és *A*).
- Az *A* pontra merőlegest rajzolva, azzal párhuzamosan rajzoljuk az alkotókat.
- Az elölnézeten lévő alkotók és az n_2 nyomvonal metszéspontjait $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamosan vetítjük a palástfelszín alkotóira és azonosítjuk őket (*1-12-1*).

- A kapott pontokon át rajzoljuk meg a palástfelszín határolóvonalát, amely hullámvonalat eredményez. A hullámvonal alatti terület a síkmetszéssel kapott palástfelület (kontúrvonalait vastag folytonos vonallal rajzoljuk).
- A palástfelszínhez csatlakoztatjuk a zárólapokat: az alaplapot bármely alkotóhoz (itt a *G* ponthoz), a fedőlapot az optimális helykihasználást figyelembe véve az *1* ponthoz. Másolásának célszerű sorrendje: megrajzoljuk a tengelyvonalakat, majd a nagytengelyre felmérjük az n_2 nyomvonalon mérhető ponttávolságokat. A kapott pontokon át a nagytengelyre merőleges egyeneseket rajzolunk, amelyekre felmérjük a K_4, K_1 képsíkokon mérhető ponttávolságokat (ügyelve az azonosításra). A kapott pontokon át rajzoljuk meg a zárólap kontúrvonalát.
- A hálórajzot a síkbaterítés jelképének elhelyezésével fejezzük be.

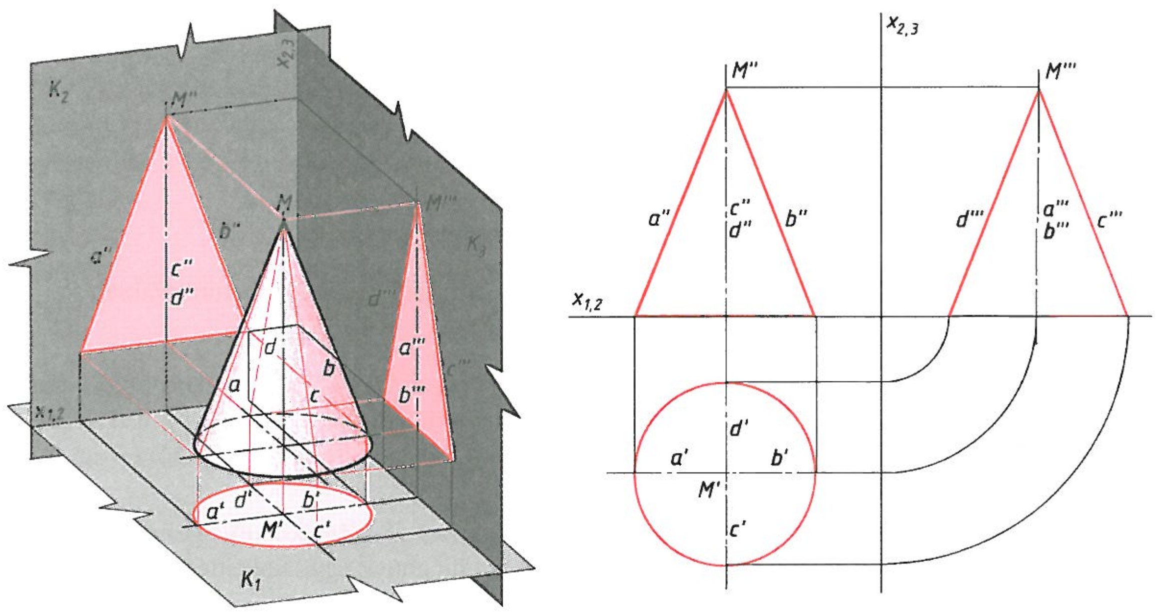
Gyakoroljuk a tanultakat a **19.** és **20. munkalapon**!

3.3. Kúp

A gyakorlatban kúpnak a végtelen kúpfelszín *M* csúcspontja és egy paralelköre által határolt részét tekintjük. Az így keletkezett mértani alakzat az **egyenes körkúp**.
Jellemzői a következők.

- **Alkotó:** a leíróegyenes adott hosszúságú szakasza, amelynek végpontjai a kúp csúcsa és az alapkör egy kerületi pontja. A kúp vetületi képét határoló alkotók a **kontúralkotók.**
- **Alaplap:** a kúpfelszínt határoló paralelkör. Átmérője a kúp ábrázolásának kiinduló mérete.
- **Kúppalást:** az alkotók által leírt felület. Síkba terítve körcikket eredményez.
- **Kúpmagasság:** a kúp csúcsának és alapkörének a forgástengelyen mért távolsága. A kúp ábrázolásának másik kiinduló mérete.

3.3.1. A kúp vetületi ábrázolása



3.14. ábra. A kúp

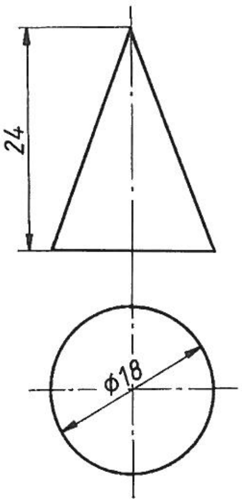
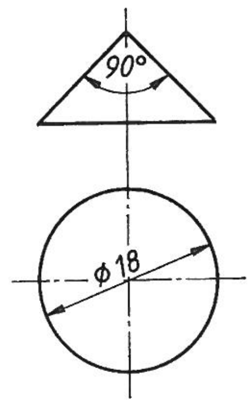
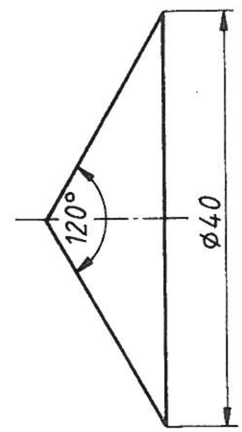
A kúpot úgy helyezzük el a képsíkrendszerben, hogy forgástengelye merőleges legyen az első képsíkra (**3.14.** ábra). A kúp felülnézete, azaz első képe kör. Tengelyeinek metszépontja a kúp csúcsának *M*' vetülete. Nevezetes alkotói (amelyek a további vetületeken kontúralkotók) a tengelyek fedőszakaszai.

A kúp elölnézete, azaz második képe egyenlő szárú háromszög. Határolóvonalai az a'' és b'' alkotók, valamint az alaplap vetülete (egy élben látszik).

A kúp oldalnézetét (harmadik képét) meghatározzák a c''' és d''' alkotók, valamint az alapkör vetülete. *A kúp oldalnézete az elölnézettel egybevágó, egyenlő szárú háromszög.*

A műszaki gyakorlatban a már ismert szabályok szerint, jellemző méreteinek megadásával ábrázoljuk a kúpot. A **3.2.** táblázat elemzésével tapasztalhatjuk, hogy a kúp egyértelműen ábrázolható kettő és egy vetületben is. A befoglaló méret megadása mellett más módon is megadhatjuk jellemző méreteit. Gyakori méretezési mód, amikor a kúpszöget adjuk meg: ez a kúp csúcsában a kontúralkotók által bezárt α szög (az alkotó és a forgástengely által bezárt szög kétszerese).

A kúp műszaki ábrázolása és méretmegadása. **3.2.** táblázat

Két vetületben		Egy vetületben
		

Felületelemzés. A kúp felületelemzését a már ismert szabályok alapján végezzük (l. henger felületelemzése).

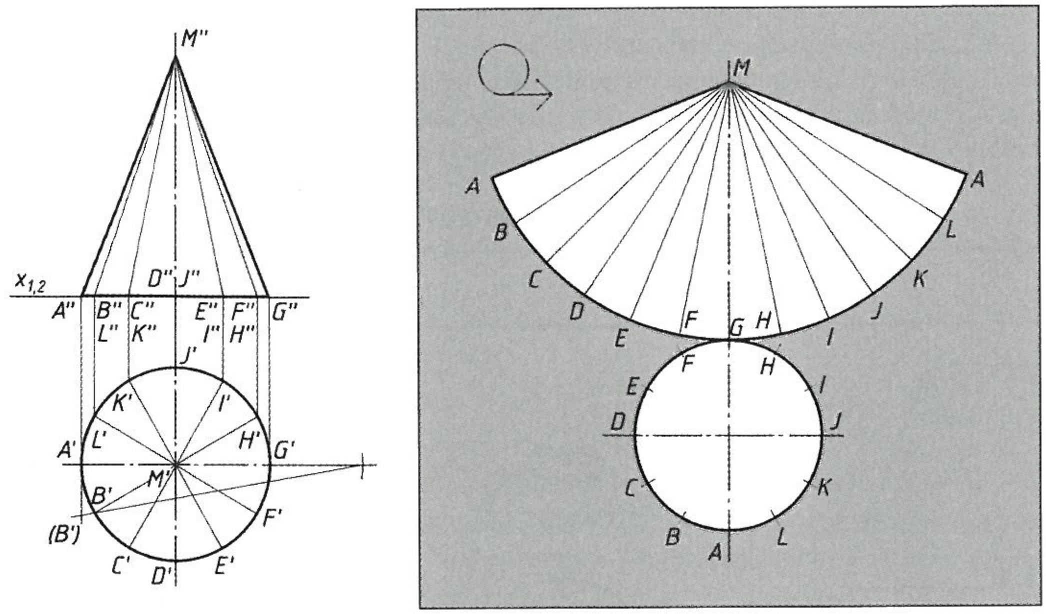
- *Csúcs:* 1 db.
- *Él:* 1 db körél.
- *Sík*: 1db körlap.
- *Forgásfelület:* 1 db kúpfelület.

3.3.2. A kúp hálórajza

A hálórajz elkészítésének alapja a kúp vetületi ábrázolása (két nézetben). A szerkesztés menetét a **3.15.** ábra szemlélteti.

- A vetületi kép felülnézetén közelítő szerkesztéssel meghatározzuk az alapkör kerületének egytizenketted részét.
- Ábrázoljuk a kúp alkotóját mint a hálórajz kiindulási adatát. Hosszúsága az elölnézet kontúralkotójának $M''A''$ méretével azonos.
- Az M csúcsból az alkotó hosszúságával megegyező sugárral körívet rajzolunk az A pontból, amelyre tizenkétszer felmérjük az alapkör kerületének egytizenketted részét.

- Jelöljük a kapott pontokat (*A-L* és *A*) és az *M* csúccsal összekötve ábrázoljuk az alkotókat. A szélső (*A* jelű) alkotók és a közöttük lévő körív által határolt terület a kúp palástfelülete, ezért vastag, folytonos vonallal rajzoljuk.
- A kúp hálóját az alaplap rajzával (vastag, folytonos vonal) fejezzük be.
- A hálórajz fölött elhelyezzük a kiterítés jelképét.

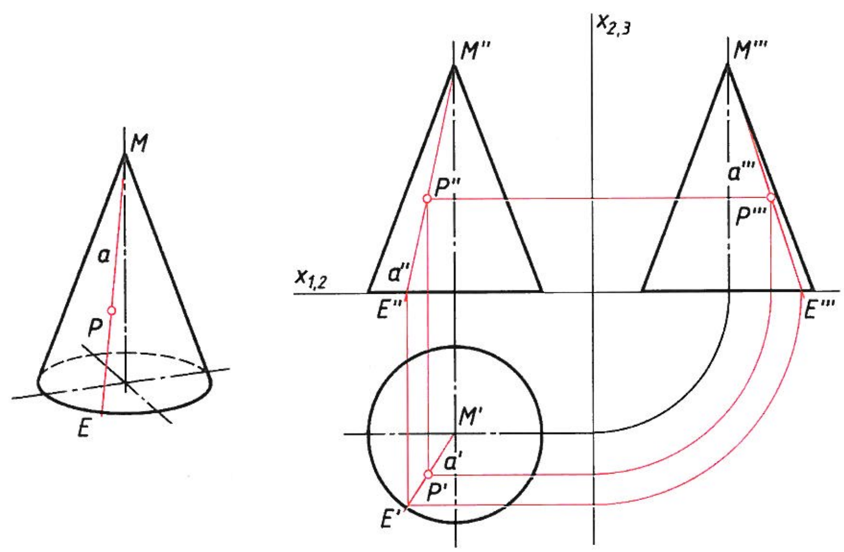


3.15. ábra. A kúp hálórajza

3.3.3. Pont azonosítása a kúp felületén

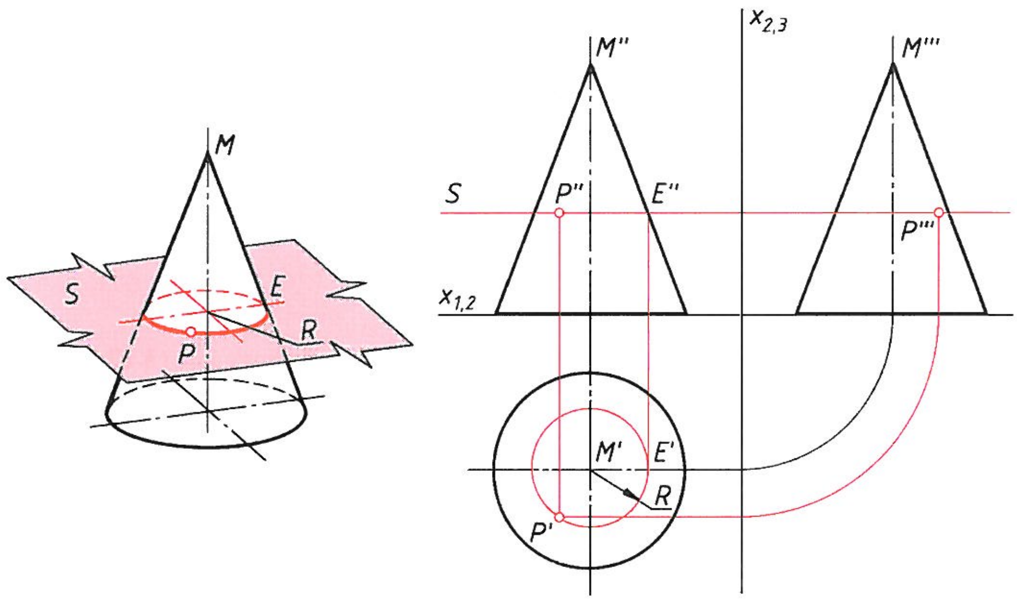
A kúp palástfelületén adott pontot két módszerrel is azonosíthatjuk.

Az egyik lehetséges megoldás, amikor az adott ponton át rajzolt alkotót alkalmazzuk az azonosításra (**3.16.** ábra). Az *M* csúcsból a *P* ponton át rajzolt *a* alkotó az alapkör kerületén meghatározza az *E* pontot.



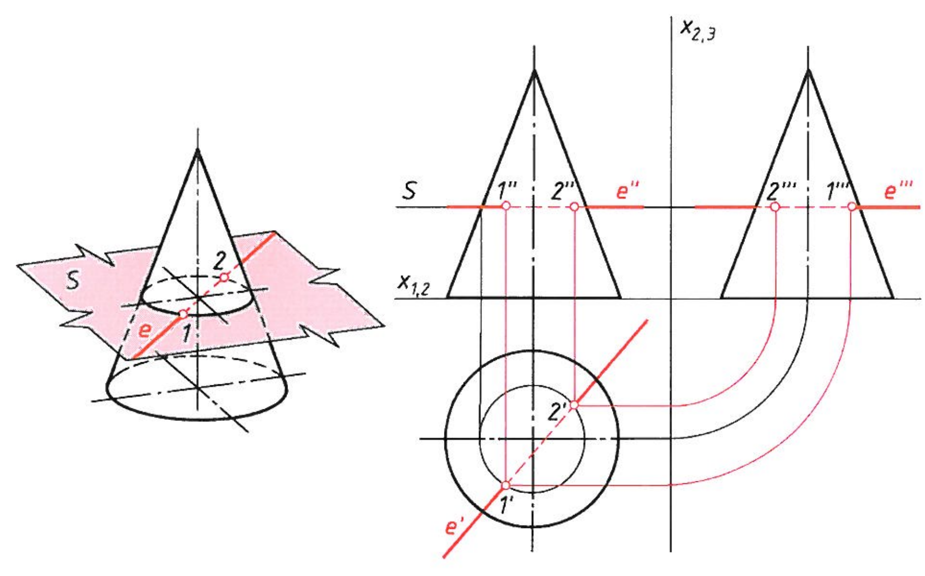
3.16. ábra. Pont azonosítása a kúp palástfelületén alkotó segítségével

A kúp palástfelületén adott pont azonosításának másik lehetséges módszere a szeletelősík alkalmazása (**3.17.** ábra). Amint a gúlánál tanultuk, a szeletelősík valamelyik képsíkkal párhuzamos sík, amelyben benne van az adott pont. A szeletelősíkkal olyan kisebb kúpot kapunk, amelynek alapkörén található a *P* pont. A szerkesztés ilymódon visszavezethető az élen adott pont azonosítására.



3.17. ábra. Pont azonosítása a kúp palástfelületén szeletelősík segítségével

3.3.4. A kúp döfése egyenessel



3.18. ábra. Kúp döfése egyenessel

Tanulmányainkban csak azokkal az esetekkel foglalkozunk, ahol az *e* egyenes párhuzamos a K_1 képsíkkal (**3.18.** ábra). Az *e* egyenes és a kúppalást döféspontjai az *1* és a *2*. Létezik olyan szeletelősík, amelyben benne van az *e* egyenes. A szeletelősíkkal azonosítani tudjuk a vetületi ábrázolásban a döféspontokat. Kísérjük figyelemmel a szerkesztés lépéseit a **3.18.** ábra alapján!

3.3.5. A kúp síkmetszése és palástkiterítése

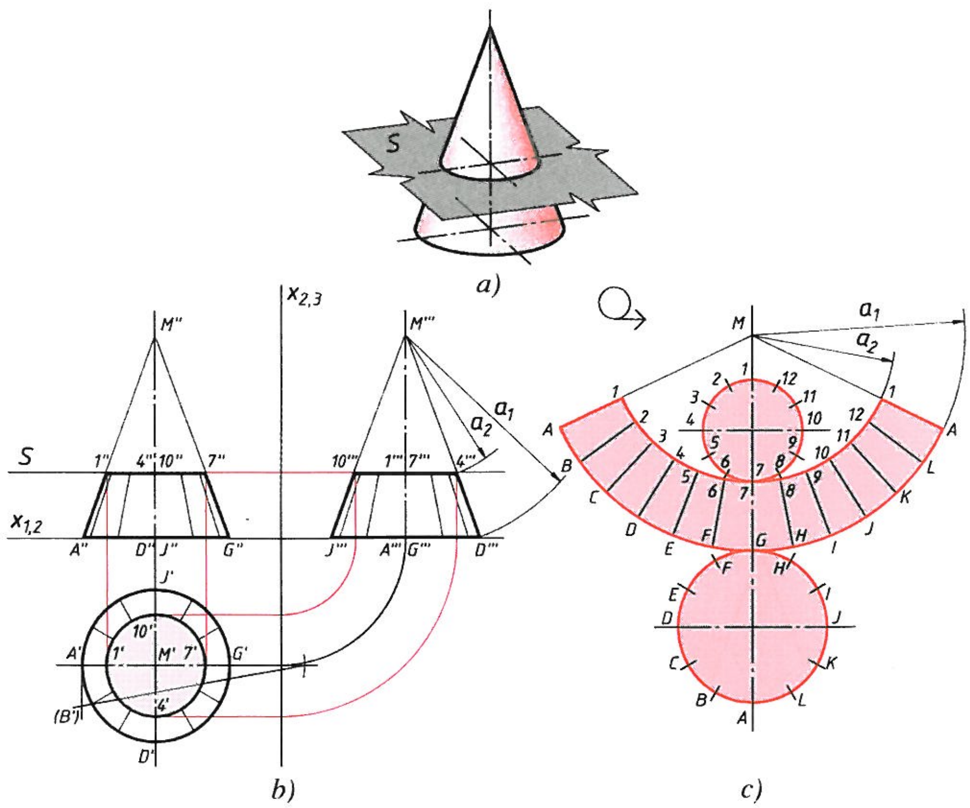
A kúp síkmetszése változatos alakzatokat eredményez. Síkmetszeteit a metszősík helyzete alapján tanulmányozhatjuk. Megnevezésükre viszont célszerűbb a síkmetszet alakját használni. Így a metszősík és a kúp forgástengelyének viszonya alapján a kúp síkmetszetei lehetnek:

- kör,
- egyenlő szárú háromszög,
- hiperbola,
- parabola,
- ellipszis.

A következőkben ismerjük meg a kúp síkmetszeteit!

A kúp körmetszete

Ha a metszősík merőleges a kúp forgástengelyére, a síkmetszés eredménye kör (**3.19.***a)* ábra). A vetületi ábrázolásban a következő jellemzőket figyeljük meg !



3.19. ábra. A kúp síkmetszése a forgástengelyre merőleges síkkal

A kúp a K_1 képsíkon nyugszik és a metszősík párhuzamos az első képsíkkal (tulajdonképpen szeletelősík). Az alapkör és a fedőkör a kúp egy-egy paralelköre.

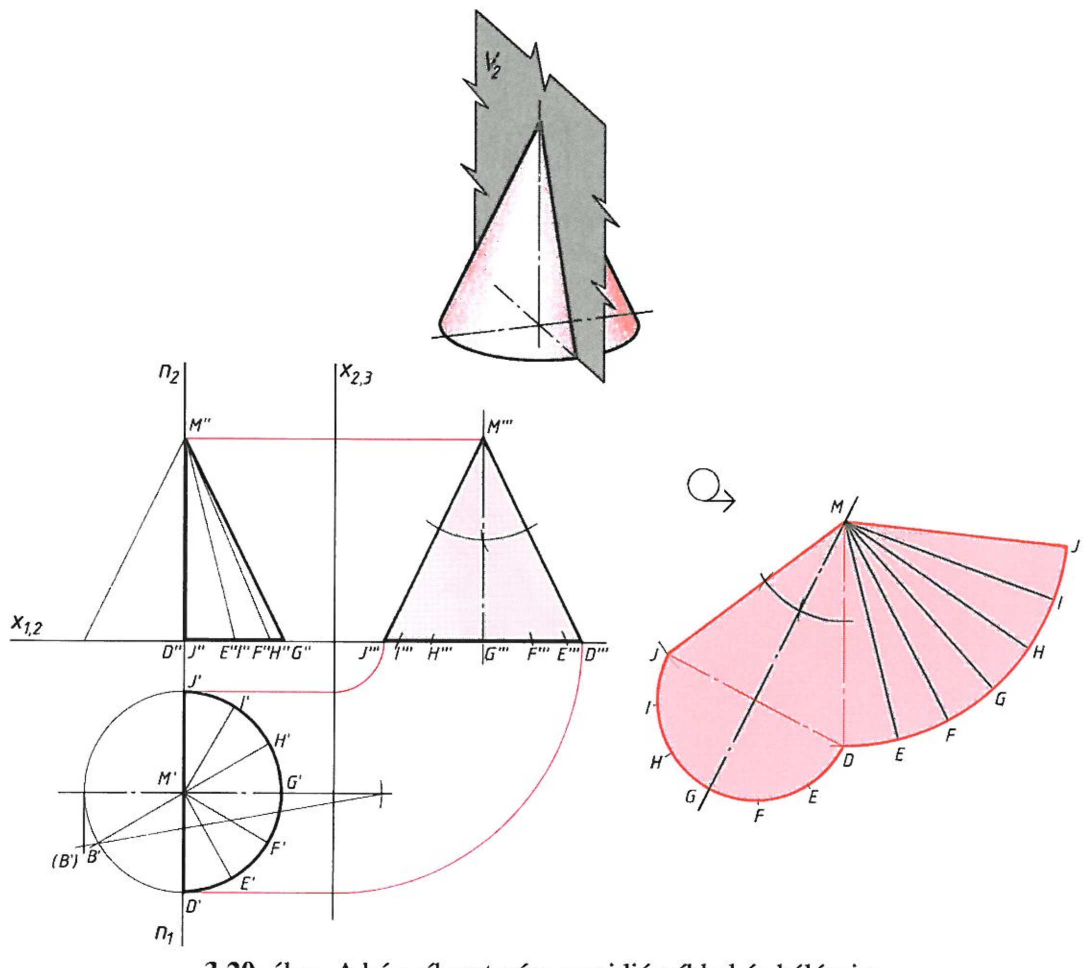
A síkmetszés eredménye az elöl- és oldalnézeten az alaplappal párhuzamos egyenes szakaszként látszódik (*1"7"*, ill. *10'''4'''*).

A felülnézeten kapott kör a síkmetszet valódi nagyságú képe (**3.19.***b)* ábra). A forgástengelyre merőleges síkmetszéssel kapott alakzatot **csonkakúpnak** nevezzük.

A csonkakúp hálórajza (**3.19.***c)* ábra). A szerkesztés alapja a vetületi ábrázolás (az elöl- és felülnézet is elegendő).

- A K_1 képsíkon megszerkesztjük az alapkör kerületének tizenketted részét $A'(B')$. Az ábrán csak a tengelymetszeteket jelöltük.
- Az alapkör kerületi pontjainak és az M' csúcs összekötésével kapjuk a síkmetszet számokkal jelölt kerületi pontjait (csak a tengelymetszeteket jelöltük).
- A hálórajz elkészítéséhez először az M csúcsot jelöljük ki (figyelembe véve a síkbaterítés helyigényét).
- A vetületi ábrán körzőnyílásba vesszük a kúp kontúralkotóját, a_1-et (itt az oldalnézeten mutattuk meg) és M csúcsból azzal körívet rajzoljunk ($R=a_1=M'''D'''$).
- Körzőnyílásba véve a síkmetszéssel kapott kisebb kúp kontúralkotóját a_2-t, M csúcsból az előbbivel koncentrikus körívet rajzolunk ($R=a_2=M'''4'''$). A két körív között kapjuk majd a csonkakúp palástját.
- Az M csúcsból kontúralkotót rajzolva jelöljük A és 1 kerületi pontokat. Az A pontból kiindulva, körzővel felmérjük az alapkör kerületének egytizenkettedét tizenkétszer és betűkkel azonosítjuk a kapott pontokat (A-L és A).
- A kapott kerületi pontok és az M csúcs összekötésével kapjuk a palást alkotóit, amelyek meghatározzák az $R=a_2$ sugarú köríven a fedőlap kerületi pontjait (1-12-1).
- Bármely alkotóhoz illesztve (a **3.19.** ábrán a $7G$ alkotónál) megrajzoljuk az alap- és a fedőlapot, majd betűkkel és számokkal azonosítjuk a kerületi pontokat.
- A hálórajzot a kontúrvonalak megrajzolásával (vastag, folytonos vonal) fejezzük be.
- Végül a hálórajz fölött elhelyezzük a síkbaterítés jelképét.

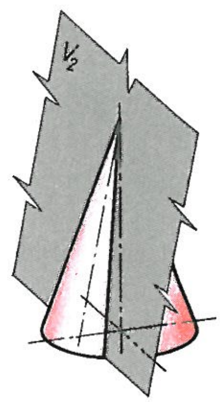
A kúp háromszögmetszete

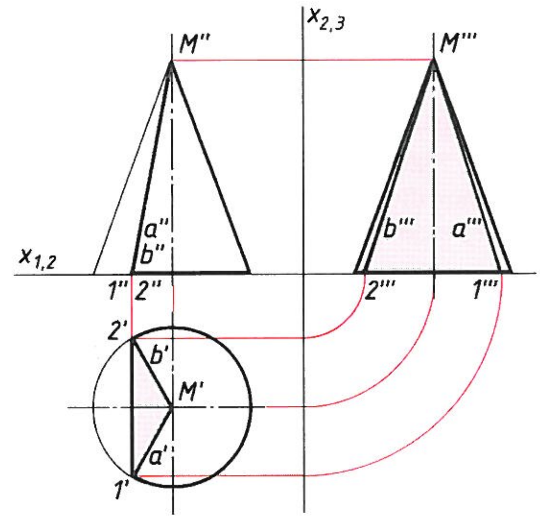


3.20. ábra. A kúp síkmetszése meridiánsíkkal és hálórajza

Ha a metszősík átmegy a kúp M csúcsán, a síkmetszés eredménye egyenlő szárú háromszög (**3.20.** és **3.21.** ábrák). A lehetséges kúpmetszetek közül nevezetes az a síkmetszés, ahol a metszősík a kúp forgástengelyére illeszkedik, azaz a síkmetszést meridiánsíkkal végezzük. Ezt szemlélteti a **3.20.** ábra.

A kúpot olyan V_2 vetítősíkkal metsszük, amely a kúpnak meridiánsíkja és egyben profilsík is. A vetületi ábrán a metszősíkot n_1 és n_2 nyomvonalával ábrázoljuk. Az oldalnézeten a kúp vetülete és a síkmetszés eredménye egybevágó, egyenlő szárú háromszög. A metszett felület valódi nagyságú. Az $M'''J'''$ és $M'''D'''$ oldalélek egyben a kúp kontúralkotói, $J'''D'''$ alapél pedig a kúp alaplapjának vetülete. Az elöl- és felülnézeten a nyomvonalak határozzák meg a síkmetszés eredményét: az elölnézeten $M''D''$ alkotó fedőszakasza az $M''J''$ alkotónak és a $D''J''$ átfogó pontban látszik, a felülnézeten pedig az $M'D'$ és $M'J'$ alkotók fedőszakaszai $D'J'$ átfogónak.

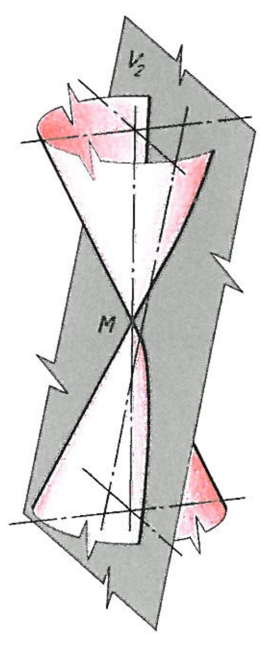




3.21. ábra. A kúp háromszögmetszete: síkmetszés második vetítősíkkal

Egyenlő szárú háromszöget eredményeznek azok az általános helyzetű metszősíkok is, amelyek átmennek a kúp csúcsán. Jellemzőiket a **3.21.** ábrán figyelhetjük meg.

Gyakoroljuk a tanultakat a **21. munkalapon**!



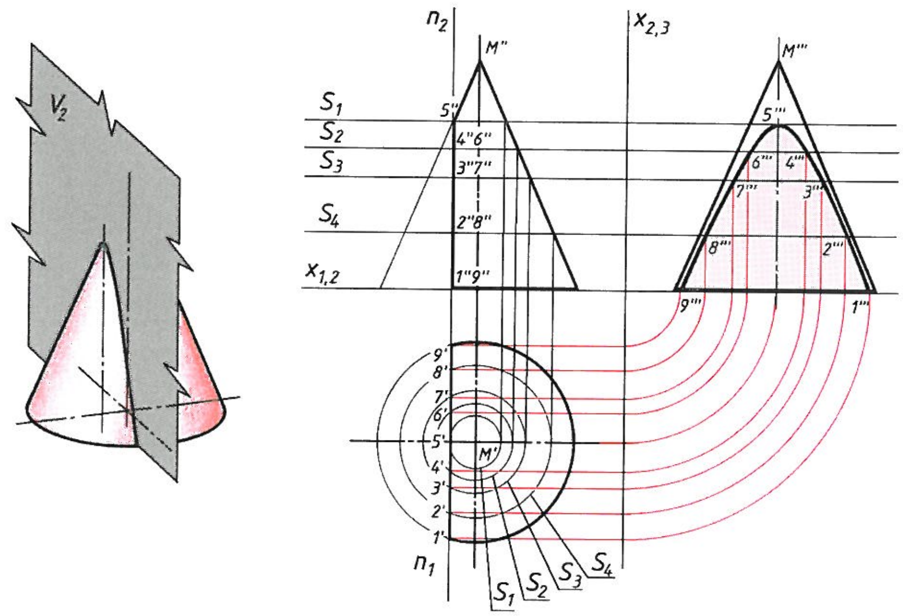
3.22. ábra. A kúp hiperbolametszete

A kúp hiperbolametszete

Ha az elméleti kúpot olyan síkkal metszük, amellyel mind a kúpon, mind az ellenkúpon síkmetszet keletkezik, az eredmény hiperbola (**3.22.** ábra). A korábbiak alapján tudjuk, hogy a metszősík nem mehet át a kúp csúcsán (abban az esetben háromszögmetszetet kapunk).

A **3.22.** ábrán megfigyelhetjük, hogy a hiperbola kettős görbe (vessük össze a matematikában a függvényábrázolásról tanultakkal). A gyakorlatban a kúpnak csak az M csúcs alatti részével találkozunk, így a hiperbolametszet is csupán egy görbét eredményez. A metszősík helyzete alapján a hiperbolametszet további két csoportra osztható. Nevezetes helyzetű a forgástengellyel párhuzamos metszősík. A műszaki gyakorlatban az ilyen hiperbolákkal találkozunk a leggyakrabban. Általánosabb helyzetű az a metszősík, amely kisebb szöget zár be a forgástengellyel, mint az alkotó szöge (a kúp csúcsszögének fele). Emlékezzünk a síkmértanból a műszaki görbékről tanultakra! Az adott görbe minél több pontját szerkesztjük meg, annál pontosabb a végeredmény.

A kúp síkmetszése forgástengelyével párhuzamos síkkal (**3.23.** ábra). A kúpot olyan V_2 síkkal metszszük, amely merőleges a K_1 képsíkra is (azaz profilsík), így nyomvonalai egy egyenesbe esnek és a síkmetszet élei az elöl- és felülnézeten egy-egy egyenes szakaszt eredményeznek.



3.23. ábra. A kúp síkmetszése a forgástengelyével párhuzamos síkkal

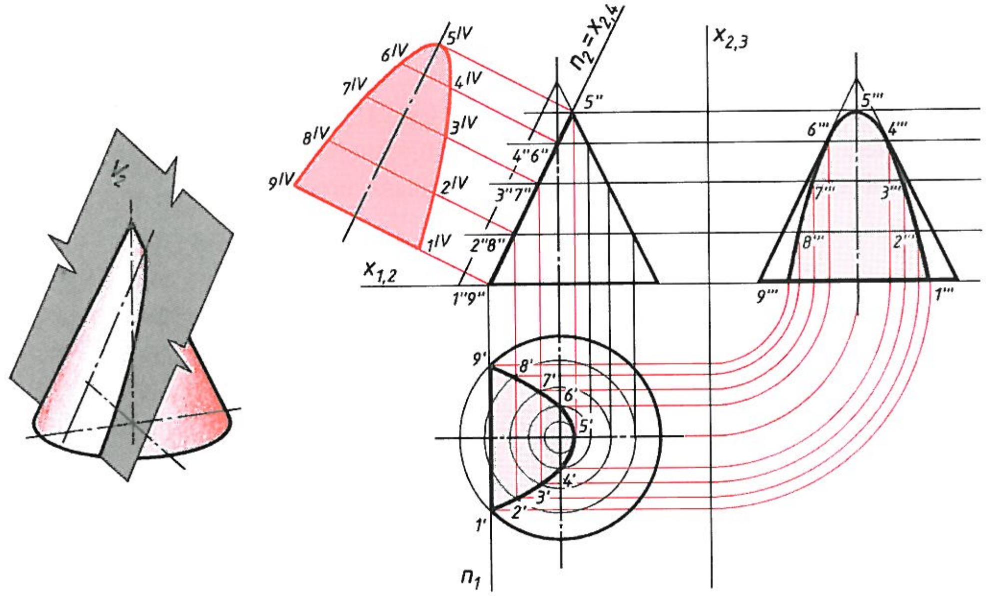
A hiperbola pontjait szeletelősíkokkal szerkesztjük. A szeletelősíkok száma tetszőleges. A **3.23.** ábrán kövessük nyomon a szerkesztés menetét!

- A szerkesztés alapja a kúp három vetülete és a metszősík nyomvonalai.
- A K_2 és K_3 képsíkon megrajzoljuk a szeletelősíkok nyomvonalait. Az S_1 szeletelősík képe a K_3 képsíkon metszi a kúp forgástengelyét, amely a hiperbola egyik pontja ($5'''$).
- A további szeletelősíkokat úgy válasszuk, hogy az S_1-hez közeliek sűrűbbek legyenek. (Itt változik a legnagyobb mértékben a hiperbola görbülete.)
- Ábrázoljuk a K_1 képsíkon a szeletelősíkok által meghatározott paralelköröket (az ábrán rendezőikkel együtt vékony, fekete vonallal láthatók).
- A felületnézeten számozással jelöljük a metszősík és a paralelkörök metszéspontjait ($1'$–$9'$).
- Az elölnézeten azonosítjuk a felülnézeten kapott pontokat ($1''$–$9''$).
- A jelölt pontokat vetítjük a harmadik képsíkra (vékony, piros vonallal ábrázoltuk) és azonosítjuk őket ($1'''$–$9'''$). Ezek a hiperbola pontjai a K_3 képsíkon.

- A harmadik képsíkon azonosított pontokon át megrajzoljuk a hiperbolát.
- A szerkesztés eredménye az oldalnézeten a képsíkkal párhuzamos sík, így az valódi méretű. A síkfelületet határolja egy hiperbolagörbe és egy egyenes szakasz (az alaplap húrja), amelyek két pontban (*1'''*, *9'''*) metszik egymást.

A kúp parabolametszete

Ha a kúpot alkotójával párhuzamos síkkal metszük, a síkmetszés eredménye parabola (**3.24.** ábra). Szerkesztése azonos az előzőekkel. Fontos, hogy szeletelősíkokkal a görbe minél több pontját szerkeszszük meg!



3.24. ábra. A kúp parabolametszete

A parabola egyik vetületen sem valódi nagyságú. A metszett felület valódi nagyságának szerkesztését a **3.24.** ábrán transzformálással figyelhetjük meg.

- A K_2 képsíkon a metszősík nyomvonala egyben a K_4 képsík tengelye ($n_2=x_{2,4}$).
- Az $x_{2,4}$ tengelyre merőlegesen az *1''–5''* pontokból megrajzoljuk az új rendezőket, majd a parabola tengelyét (a K_1 képsíkon a vízszintes tengely fedőegyenese).
- A K_1 képsíkon az egyes pontok rendezőiken mért távolságát a tengelytől körzőnyílásba vesszük és a K_4 képsíkon az új rendezőket a parabolatengelytől azokkal elmetsszük. Így kapjuk az 1^{IV}–9^{IV} pontokat.
- Az 1^{IV}–9^{IV} pontokon át vastag, folytonos vonallal megrajzoljuk a parabolát és az 1^{IV}–9^{IV} pontok között a metszőél szakaszát.

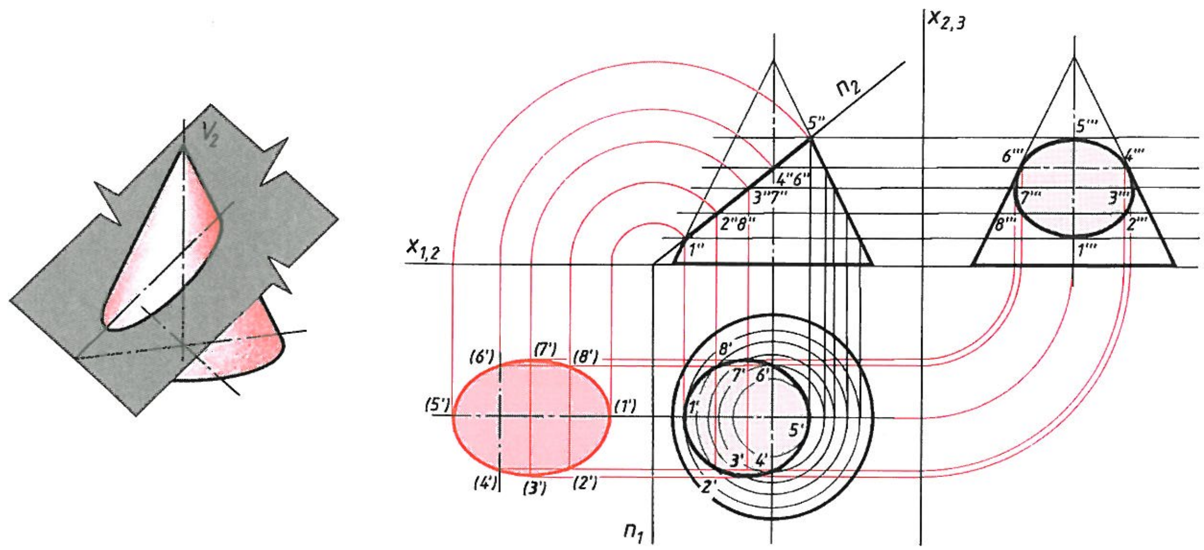
Gyakoroljuk a tanultakat a **22. munkalapon**!

A kúp ellipszismetszete

Ha a kúpot olyan általános helyzetű síkkal metszük, amelynek a forgástengellyel bezárt szöge nagyobb, mint a forgástengelynek az alkotóval bezárt szöge, a síkmetszés eredménye ellipszis. A **3.25.** ábra alapján kísérjük figyelemmel a síkmetszés jellemzőit és a szerkesztés menetét!

A kúp ellipszismetszete a felül- és oldalnézeten mindig torzított kép. Az ellipszis valódi nagyságú képét forgatással vagy transzformálással szerkeszthetjük meg. A **3.25.** ábrán a szerkesztést forgatással végeztük.

Az n_2 és $x_{1,2}$ metszéspontjából körzővel forgatjuk az $x_{1,2}$ tengelyre az ellipszis pontjait (*1''–5''*), majd a K_1 képsíkra vetítjük azokat.



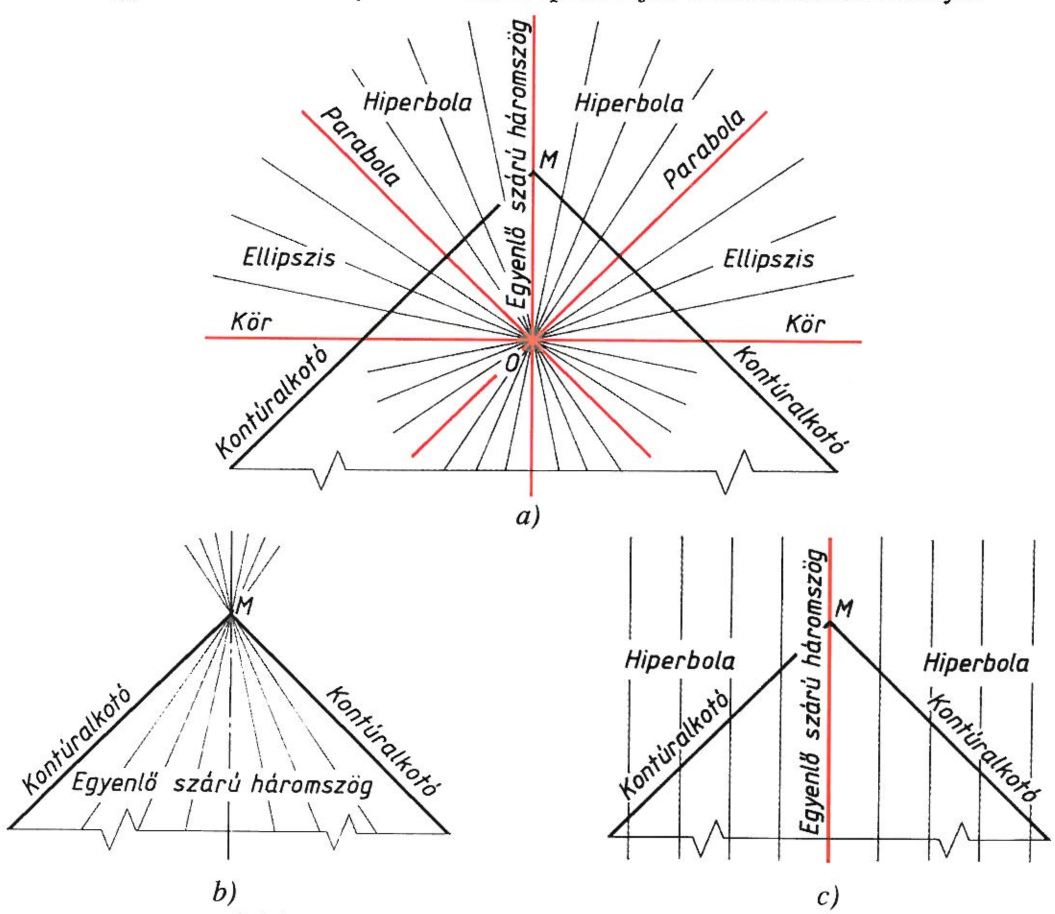
3.25. ábra. A kúp ellipszismetszete

A felülnézeten kapott ellipszispontokat (*1'–8'*) vetítjük a vetítősugarakig, amellyel a valódi nagyságú ellipszis (*1'*)–(*8'*) pontjait kapjuk.

Gyakoroljuk a tanultakat a **23. munkalapon**!

A kúp síkmetszéséről szerzett ismeretek rendszerezése

A **3.26.** ábra alapján a metszősík helyzete szerint csoportosítjuk a síkmetszés eredményét.



3.26. ábra. A kúp síkmetszésével kapott alakzatok

A metszősík adott pontban metszi a forgástengelyt (**3.26.***a)* ábra). A metszőpont nem eshet egybe az *M* csúccsal. A metszősík és a forgástengely által bezárt szögtől függően a síkmetszés a tanult összes síkmetszetet eredményezheti a következők szerint.

- A metszősík a kúp forgástengelyén nyugszik – a síkmetszet **egyenlő szárú háromszög.**
- A metszősík párhuzamos a kúp alkotójával – a síkmetszet **parabola.** (A metszősík és a forgástengely által bezárt szög egyenlő a kúp csúcsszögének felével.)
- A metszősík által bezárt szög nagyobb, mint 0 és kisebb, mint a parabolametszet szöge – a síkmetszet **hiperbola.**
- A metszősík a kúp forgástengelyére merőleges – a síkmetszet **kör.**
- A metszősík által bezárt szög nagyobb, mint a parabolametszet szöge és kisebb, mint 90° – a síkmetszet **ellipszis.**

A metszősík a kúp csúcsában metszi a forgástengelyt (**3.26.***b)* ábra) – a síkmetszet **egyenlő szárú háromszög.** A metszősík nem eshet egybe az alkotóval! Az alkotón kívüli síkok a síkmetszés szempontjából nem értelmezhetőek.

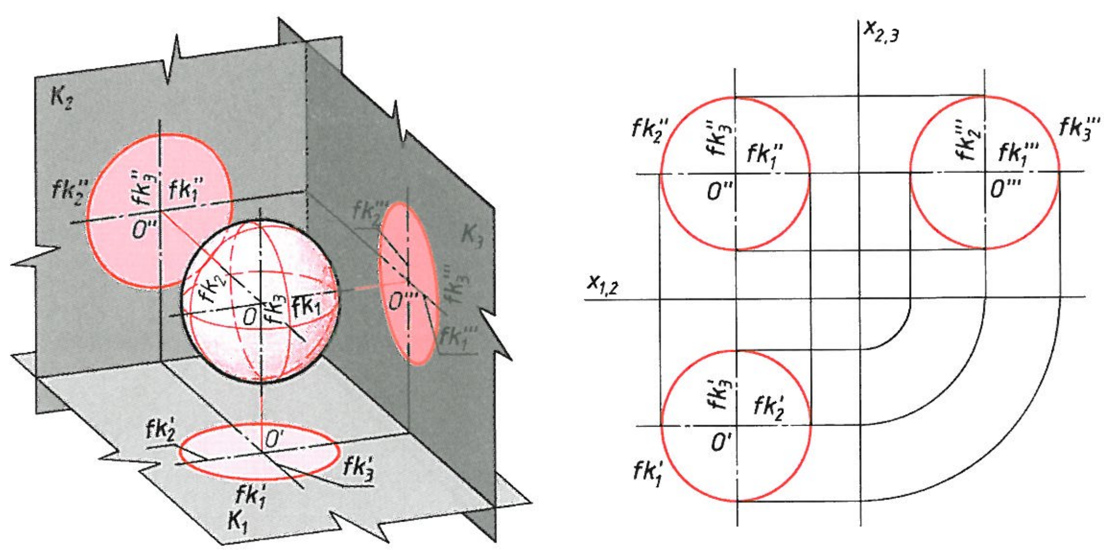
A metszősík párhuzamos a kúp forgástengelyével (**3.26.***c)* ábra) – a síkmetszet **hiperbola.** A metszősík nem eshet egybe a forgástengellyel (háromszögmetszet)!

3.4. Gömb

A gömb leírókörének kerületi pontjai sugár távolságra vannak a kör középpontjától. A forgatás következménye, hogy a leírt gömbfelület pontjai is sugár távolságra vannak a gömb középpontjától. A leírókör sugara és a gömb sugara egyenlő.

A leírókör kerületi pontjai a forgatás eredményeként kört írnak le, amelyeket *párhuzamos* (paralel-) *köröknek* nevezünk. Ezek a körök merőlegesek a forgástengelyre. A legnagyobb átmérőjű kör tengelyei a gömb középpontjában metszik a forgástengelyt. Ez a **gömbi főkör,** amely azonos átmérőjű a leírókörrel. Jelölése: *fk*.

3.4.1. A gömb vetületi ábrázolása



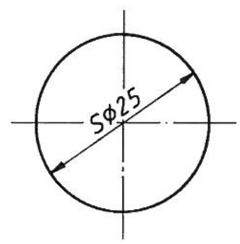
a) b)

3.27. ábra. A gömb

A gömböt főköreivel ábrázoljuk. A **3.27.** *a)* ábrán megfigyelhetjük, hogy a képsíkrendszerben elhelyezett gömb a képsíkokkal párhuzamos három legnagyobb átmérőjű körrel, a főkörökkel jellemezhető. Az azonosításuk vetületükkel történik, azaz melyik képsíkkal párhuzamosak. Így a K_1 képsíkkal párhuzamos főkör az **első főkör** (fk_1), a K_2-vel párhuzamos a **második főkör** (fk_2) és a K_3-mal párhuzamos a **harmadik főkör** (fk_3).

A **3.27.** *b)* ábra a gömb vetületi ábrázolását mutatja be. Tapasztalhatjuk, hogy a gömb mindegyik vetülete kör. Összehasonlítva a szemléltető ábrával azt is megfigyelhetjük, hogy a vetületek azonosak a főkörök vetületével. A főköröket rendezőikkel és vetítősugarakkal azonosítva a többi vetületen a következőket tapasztaljuk.

- Az *első főkör* (fk_1) a K_1 képsíkon kör (átmérője azonos a gömbátmérővel). A K_2 és K_3 képsíkokon egybeesik a vízszintes tengelyekkel (fk_1'' és fk_1''').
- A *második főkör* (fk_2) a K_2 képsíkon kör. A K_1 képsíkon egybeesik a vízszintes tengellyel (fk_2'), a K_3 képsíkon pedig a függőleges tengellyel (fk_2''').
- A *harmadik főkör* (fk_3) a K_3 képsíkon kör. A K_1 és K_2 képsíkon egybeesik a függőleges tengelyekkel (fk_3', fk_3'').

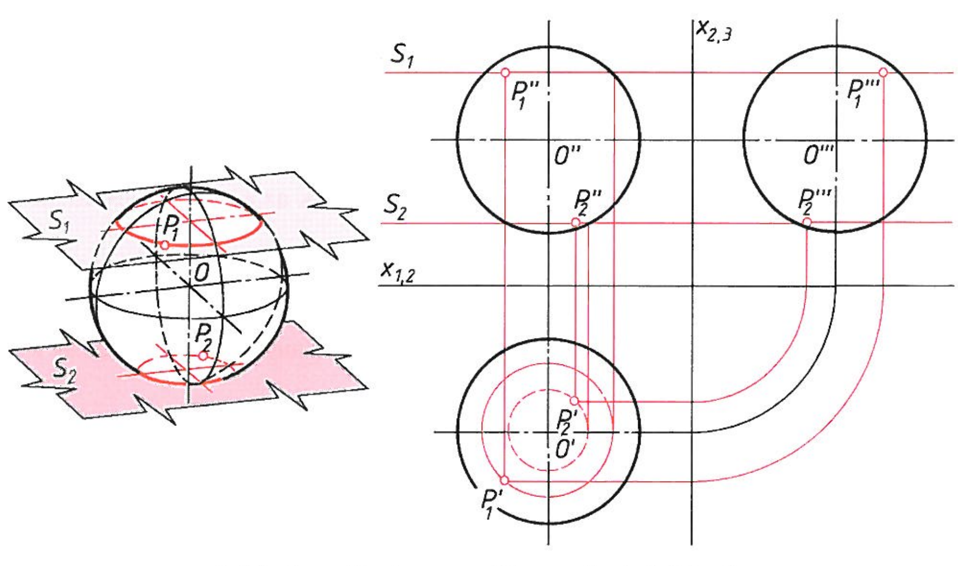


3.28. ábra. A gömb méretének megadása

A műszaki ábrázolásban a gömb méretét átmérőjével adjuk meg. A **3.28.** ábrán látható a méretmegadás módja. Emlékezzünk a méretmegadásról tanultakra (betű- és rajzjelek)! Az *S* felhívja a figyelmet a gömbfelületre, az ø az átmérőre.

Mindezeket alkalmazva, a gömböt egy vetületben is ábrázolhatjuk.

3.4.2. Pont azonosítása a gömb felületén



3.29. ábra. Pont azonosítása a gömb felületén

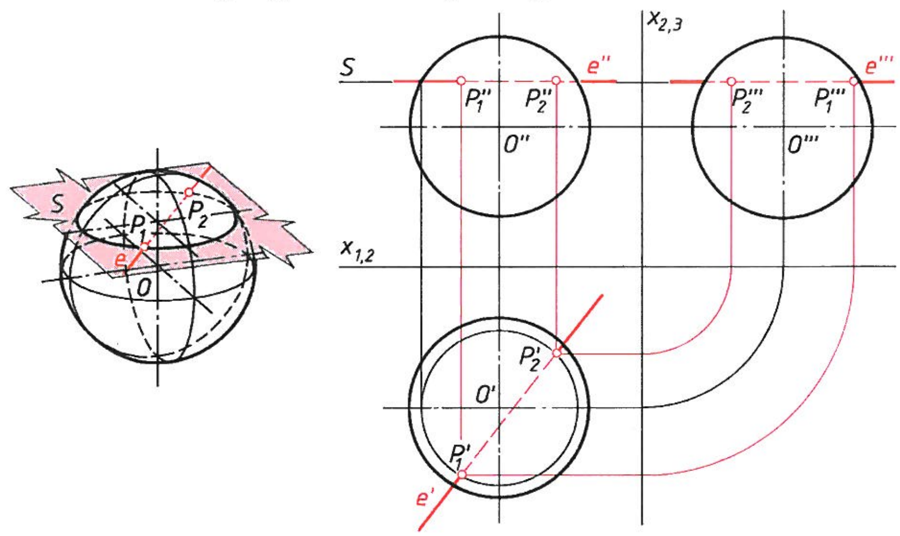
A gömb felületén lévő pontokat **szeletelősíkokkal** azonosíthatjuk. Olyan, a K_1 képsíkkal párhuzamos síkot választunk, amely átmegy az adott ponton. A **3.29.** ábra két pont azonosításával mutatja be a gyakorlati alkalmazást.

- Adott az elölnézeten a gömb felületén lévő P_1", mint látható és P_2", mint nem látható pont. Feladat: a pontok azonosítása a többi vetületen.
- Ábrázoljuk az S_1 és S_2 szeletelősíkok nyomvonalát, amelyek átmennek a P_1" és P_2" pontokon.
- A szeletelősíkok és a második főkör metszeteit felhasználva, a felületnézeten (K_1-en) ábrázoljuk a szeletelősík által meghatározott paralelköröket!
- A paralelkörökön P_1" és P_2" rendezői kijelölik a pontok első képét, P_1'-t és P_2'-t. Az azonosításnál ügyeljünk a láthatóságra!
- Az elöl- és felülnézeten azonosított pontokat vetítjük a K_3 harmadik képsíkra.

Gyakoroljuk a tanultakat a **24. munkalapon**!

3.4.3. A gömb döfése egyenessel

Tanulmányaink során csak azokkal az egyszerű esetekkel foglalkozunk, ahol az *e* egyenes párhuzamos valamelyik képsíkkal. A **3.30.** ábra a K_1 első képsíkkal párhuzamos *e* egyenes döfését mutatja be, ahol a döféspontokat szeletelősík segítségével szerkesztjük meg.



3.30. ábra. A gömb döfése egyenessel

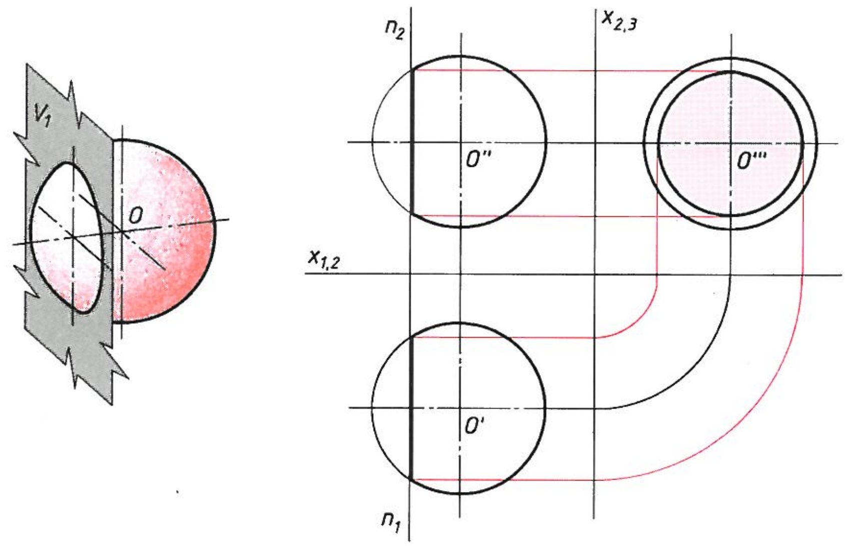
- Adott a gömb és a gömböt döfő egyenes három vetülete. Feladat a döféspontok szerkesztése és az *e* egyenes láthatóság szerinti megrajzolása.
- Az *S* szeletelősík nyomvonala a K_2 és K_3 képsíkon egybeesik az *e* egyenes második és harmadik képével.
- A szeletelősík és a második főkör metszéspontját rendezve az első vetületen, ábrázoljuk a szeletelősík által meghatározott paralelkört.
- A paralelkör metszi az *e* egyenes első vetületét a P_1' és P_2' pontokban, amelyek az *e* egyenes döféspontjai.
- A kapott pontokat vetítve az elölnézeten *e*" egyenesre, azok kijelölik P_1" és P_2" döféspontokat.
- Az eredményt vetítjük a harmadik képsíkra, így megkapjuk a P_1"' és P_2"' pontokat.
- A vetületek elemzésével meghatározzuk a láthatóságot, majd láthatóság szerint megrajzoljuk az *e* egyenes képeit.

Gyakoroljuk a tanultakat a **25. munkalapon**!

3.4.4. A gömb síkmetszése

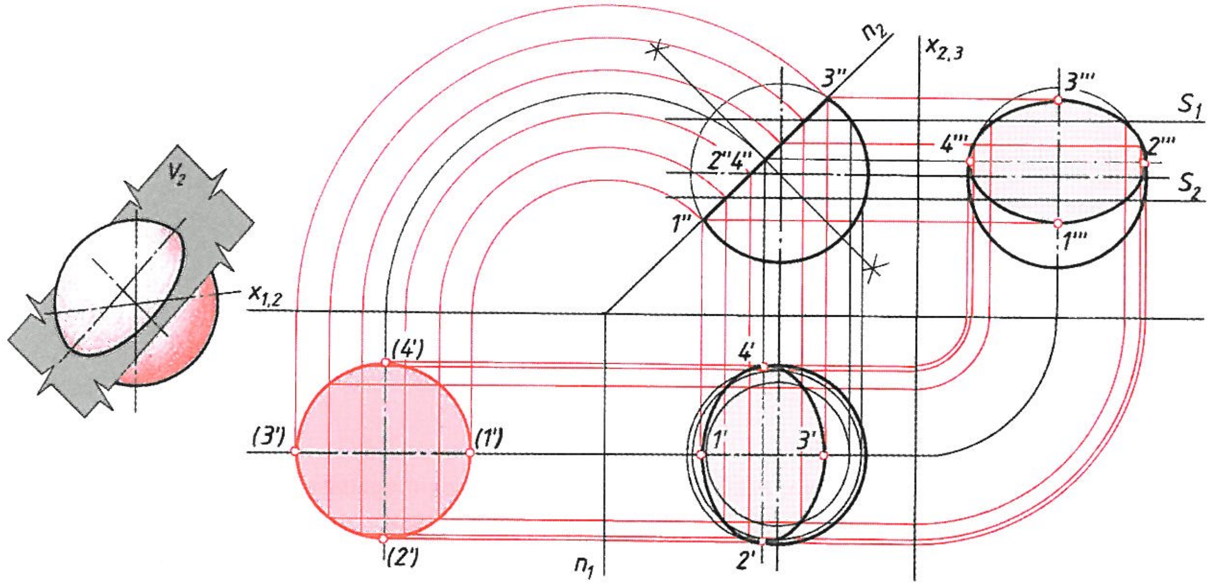
A gömb alaki jellemzőiből következik, hogy *minden síkmetszete kör*. Eddigi tapasztalataink alapján tudjuk, hogy a vetületi ábrázolásban csak a képsíkkal párhuzamos síkok metszetei eredményeznek valódi nagyságú képet. Ezek közül kiemelést érdemelnek a főköröket eredményező síkmetszetek (a metszősík valamelyik tengelyre illeszkedik és párhuzamos valamelyik képsíkkal). A síkmetszéssel kapott alakzatot **félgömbnek** nevezzük. Általánosítva a tapasztaltakat, félgömböt kapunk minden, a gömb középpontján átmenő sík metszetével.

A **3.31.** ábrán megfigyelhetjük a gömb síkmetszését V_1 vetítősíkkal (profilsík, amely párhuzamos a K_3 harmadik képsíkkal).



3.31. ábra. A gömb síkmetszése V_1 vetítősíkkal

- Adott a gömb három vetülete és a metszősík nyomvonalaival.
- Az elöl- és felülnézeten a főkörök és nyomvonalak metszete a síkmetszés eredményét adja.
- Az oldalnézetre vetítve a metszőpontokat, a síkmetszet harmadik képét kapjuk, amely kör és valódi nagyságú síkfelület.



3.32. ábra. A gömb síkmetszése V_2 vetítősíkkal. A valódi nagyságú kép szerkesztése forgatással

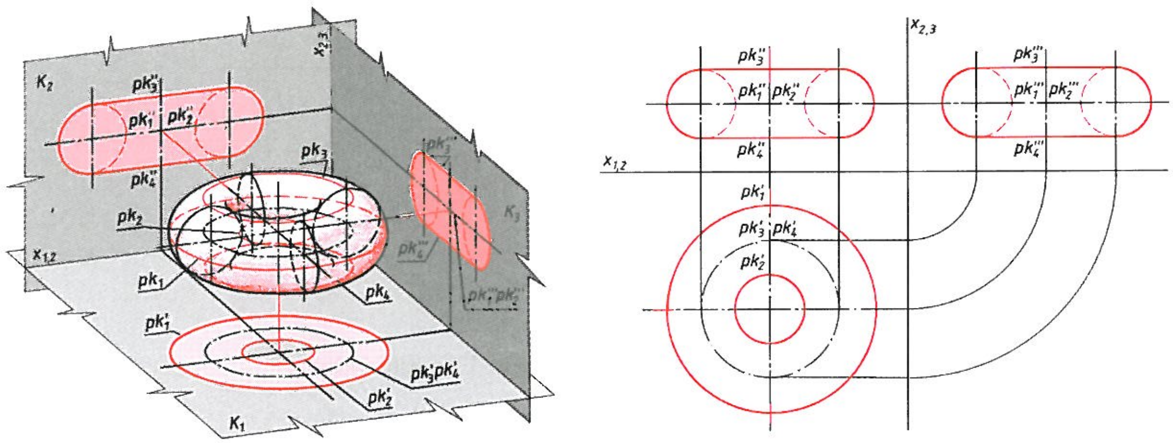
A **3.32.** ábrán a gömb V_2 vetítősíkkal való síkmetszését látjuk. A síkmetszet vetületeit szeletelősíkokkal szerkesztjük. Az ábra bemutatja a valódi nagyságú kép szerkesztését is – forgatással. Az ábrán csak a tengelypontokat jelöltük számozással.

Gyakoroljuk a tanultakat a **26.** és **27. munkalapon**!

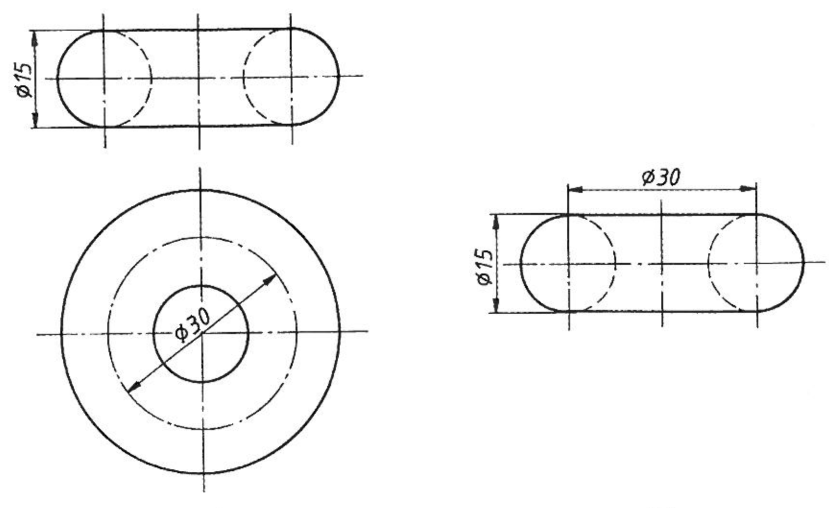
3.5. Körgyűrűfelület (tórusz)

A körgyűrűfelület leírókörének nevezetes pontjai (tengelymetszetei) által leírt párhuzamos (paralel-) körök segítségével jellemezzük a körgyűrűfelületet. A paralelkörökre a *pk* jelölést alkalmazzuk.

3.5.1. A körgyűrűfelület vetületi ábrázolása



3.33. ábra. A körgyűrűfelület (tórusz)



a) *b)*

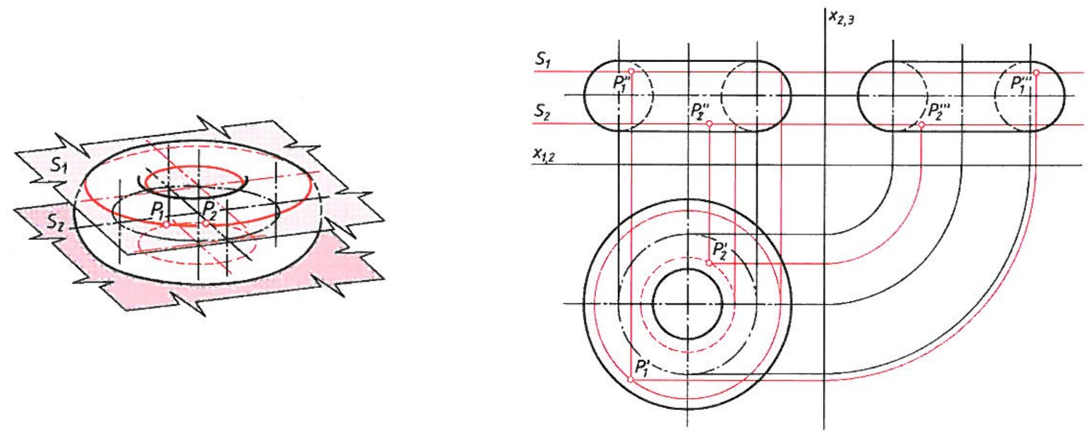
3.34. ábra. A körgyűrűfelület méreteinek megadása
a) két vetületben; *b)* egy vetületben

A leíróköröknek a forgástengelytől legtávolabbi pontja (tengelymetszete) írja le a *legnagyobb paralelkört*, amelyet pk_1-gyel jelölünk (**3.33.** ábra). A vetületi ábrázolásnál a K_1 képsíkon ez a külső kontúrvonal, a K_2 és K_3 képsíkon a vízszintes tengelyvonalon van. A leírókör forgástengelyhez legközelebbi pontja (tengelymetszete) írja le a legkisebb paralelkört, amelyet pk_2-vel jelölünk. A vetületi ábrán a K_1 képsíkon ez a belső kontúrvonal, a K_2 és K_3 képsíkon a vízszinten tengelyen van (pk_1'' és pk_2'', ill. pk_1''' és pk_2''' fedőkörök). A leírókör legmagasabb pontja (felső tengelymetszete) írja le a pk_3, míg a legalsó pontja (alsó tengelymetszete) a pk_4 paralelköröket. A vetületi ábrán a K_2 és K_3 képsíkon pk_3 a felső, pk_4 az alsó egyenes szakasz (a leírókör függőleges tengelyei közötti szakaszok). A K_1 képsíkon pk_3' és pk_4' fedőkörök és egyúttal fedőkörei a leírókör középpontja által leírt körnek is.

A körgyűrűfelület méreteit a jellemző átmérőkkel adjuk meg (**3.34.** ábra). Ezek a leírókör átmérője és a leírókör középpontja által meghatározott kör átmérője. A körgyűrűfelületet egyértelműen ábrázolhatjuk egy vetületben is.

3.5.2. Pont azonosítása a körgyűrűfelületen

A tórusz felületén lévő pontokat szeletelősíkokkal azonosíthatjuk. Olyan K_1 első képsíkkal párhuzamos síkot választunk, amely illeszkedik az adott pontra. A **3.35.** ábra a P_1 és P_2 pont azonosításával mutatja be a gyakorlati alkalmazást.



3.35. ábra. Pont azonosítása a körgyűrűfelületen

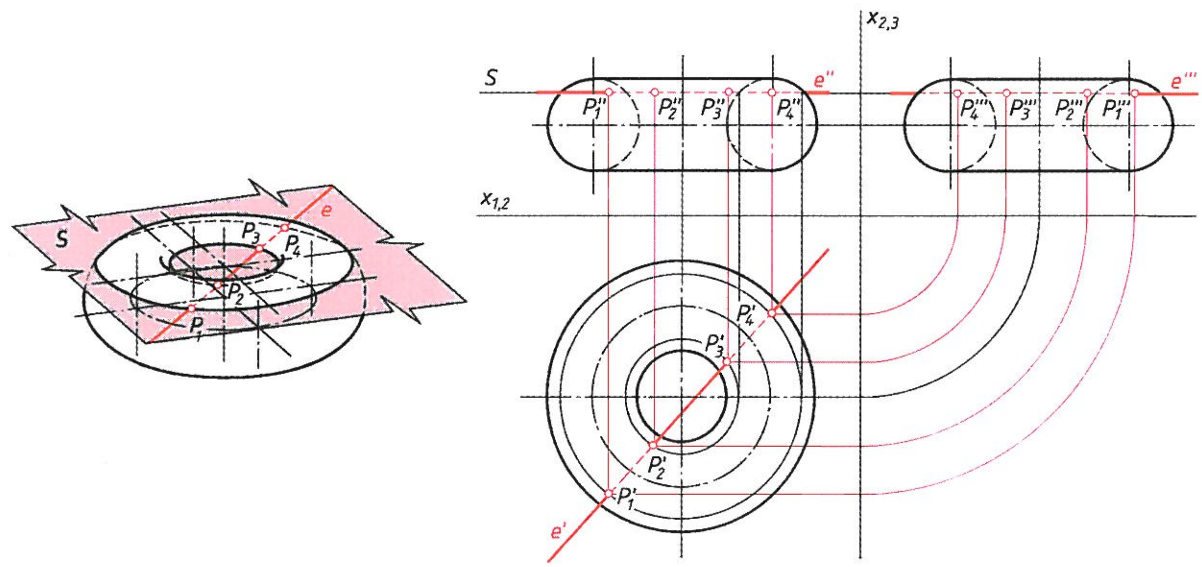
Adott a körgyűrűfelület három vetülete és az elölnézeten a tórusz felületén lévő P_1'', mint látható és P_2'', mint nem látható pont. A feladat a pontok azonosítása a többi vetületen. Ábrázoljunk olyan S_1 és S_2 szeletelősíkokat, amelyek nyomvonalai átmennek az adott pontokon! Amint látjuk, több problémával is találkozunk!

A szeletelősíkok két paralelkört határoznak meg. Egyet a tórusz külső felületén, egyet pedig a belső felületén. **Külső felületnek** nevezzük a tórusz pk_3 és pk_4 paralelkörökkel határolt, a forgástengelytől távolabb levő felületét (az elöl- és oldalnézeten, a kontúrvonalak közötti területét). **Belső felületnek** nevezzük a pk_3 és pk_4 paralelkörökkel határolt, a forgástengelyhez közelebbi felületét (az elöl- és oldalnézeten a vékony szaggatott vonalakkal ábrázolt, kontúralkotók közötti területet). A tórusz figyelmet igénylő jellemzője az adott pont helyének meghatározása. A látható pontok azonosítása egyértelmű, azok csak a külső felület nézetirányú felén lehetnek. A nem látható pontok azonban több helyen is elhelyezkedhetnek. A külső felület nem látható (képsík felöli) felén, a belső felület nézetirányú és képsík felöli felén. Ebből következik, hogy a nem látható pontok azonosításához több adat szükséges. Ez meghatározható szöveges leírásban. A **3.35.** ábra esetében: P_2 pont a tórusz belső felületén a képsík felöli oldalon található. Meghatározható két vetületével, valamint adott térelemekkel való viszonyával (amint később az egyenessel való döfésnél majd tapasztalni fogjuk).

3.5.3. A körgyűrűfelület döfése egyenessel

Tanulmányainkban csak azokkal az egyszerű esetekkel ismerkedünk meg, amikor az e egyenes párhuzamos az első képsíkkal és döfi a körgyűrűfelületet. A szerkesztést szeletelősíkkal végezzük. Olyan S szeletelősíkot választunk, amelyben benne van az e egyenes. A szerkesztést a **3.36.** ábra szemlélteti.

- Adott a körgyűrűfelület és az azt döfő egyenes három vetülete. Feladat a döféspontok szerkesztése és az e egyenes láthatóság szerinti megrajzolása.
- Az S szeletelősík nyomvonala a K_2 és K_3 képsíkon egybeesik e egyenes e'' és e''' képeivel.
- Az elölnézeten ábrázolt szeletelősík alapján a felülnézeten megrajzoljuk a szeletelősík által meghatározott párhuzamos köröket.
- A nagyobb átmérőjű paralelkör metszi e' egyenest a P_1' és P_4' pontokban, a kisebbik átmérőjű paralelkör pedig a P_2' és P_3' pontokban. Ezek az e egyenes döféspontjai az első képsíkon.
- A kapott döféspontokat vetítjük az elölnézetre, így kapjuk a P_1'', P_2'', P_3'' és P_4'' pontokat, ill. az oldalnézetre vetítve kapjuk a P_1''', P_2''', P_3''' és P_4''' pontokat.
- A vetületek elemzésével meghatározzuk a láthatóságot és annak figyelembevételével megrajzoljuk az e egyenes képeit.



3.36. ábra. A körgyűrűfelület döfése egyenessel

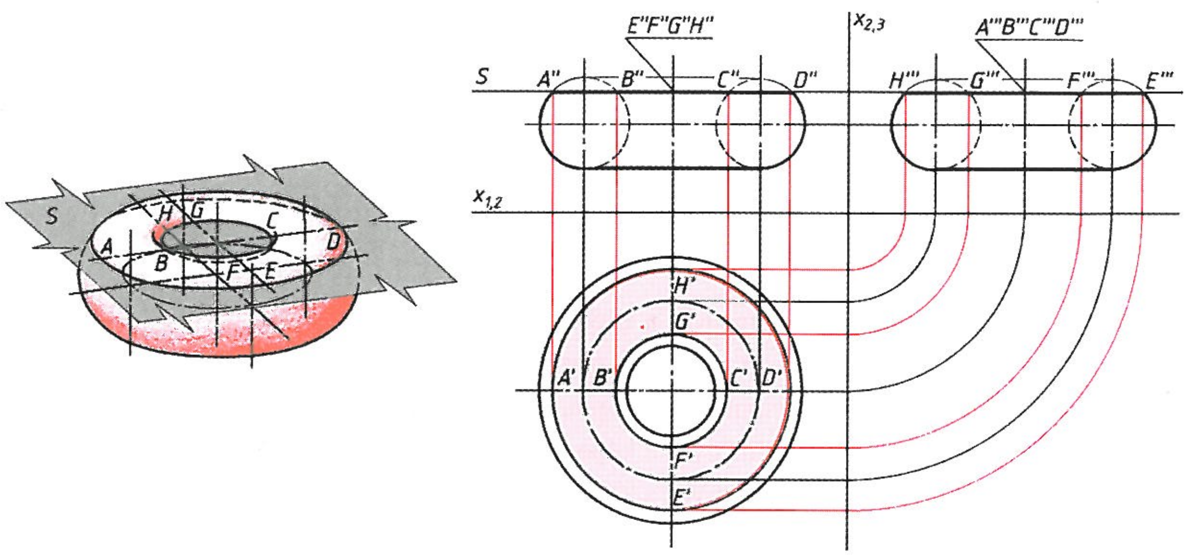
3.5.4. A körgyűrűfelület síkmetszése

A körgyűrűfelület jellegzetes alakjának (üreges alakzat) az a következménye, hogy síkmetszetei a metszősík helyzetétől függően változatosak. Tekintsük át a tórusz két jellemző síkmetszetét!

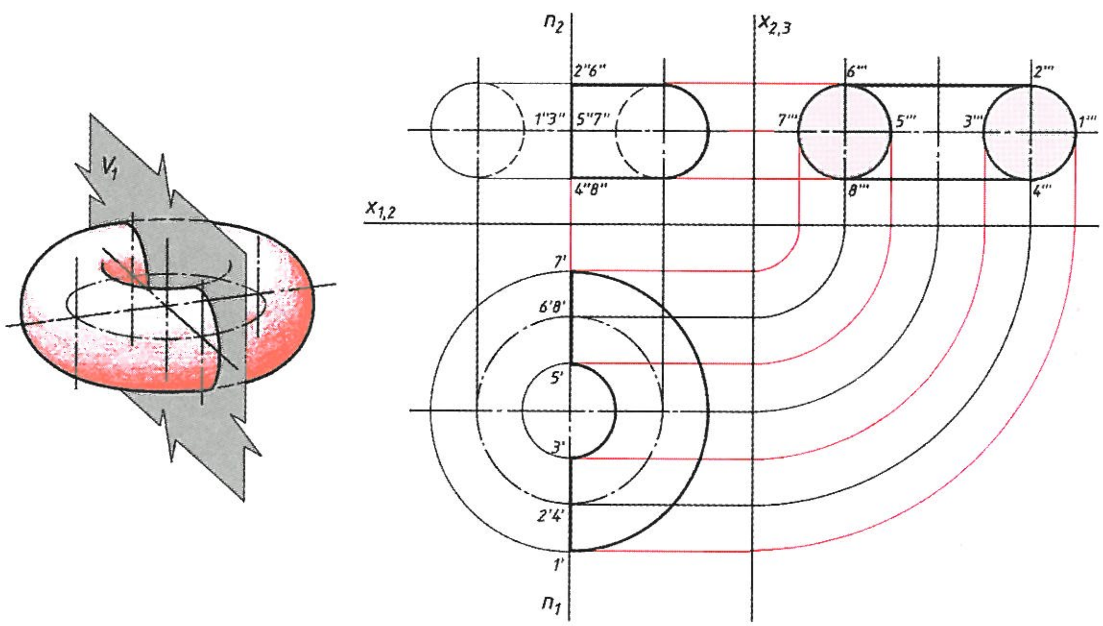
Ha a körgyűrűfelületet a K_1 képsíkkal párhuzamos síkkal (szeletelősíkkal) metsszük, a síkmetszés eredménye **körgyűrű** (**3.37.** ábra). Ne tévesszük össze a körgyűrűfelülettel! A síkmértanban a kör területeinél tanultunk a körgyűrűről. Azaz, *a körgyűrű sík felület, a körgyűrűfelület térbeli alakzat.*

Ha a körgyűrűfelületet olyan V_1 első vetítősíkkal metsszük, amely illeszkedik a tórusz forgástengelyére (profilsík), a síkmetszés eredménye két darab kör – a leírókör vetületei (**3.38.** ábra.) A síkmetszéssel kapott felületek az oldalnézeten valódi nagyságúak.

Gyakoroljuk a teljes felületelemzést a **28. munkalapon**!



3.37.ábra. A körgyűrűfelület síkmetszése szeletelősíkkal



3.38.ábra. A körgyűrűfelület síkmetszése a forgástengelyre illeszkedő V_1 síkkal

Ellenőrző kérdések

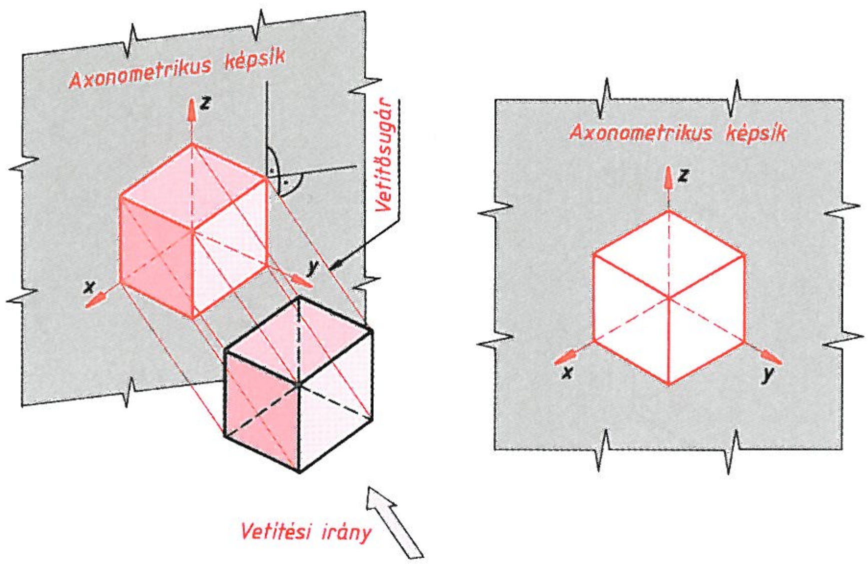
1. Hogyan keletkeznek a forgástestek?
2. Mit nevezünk párhuzamos vagy paralelkörnek?
3. Mit nevezünk meridiánsíknak?
4. Hogyan keletkezik hengerfelület?
5. Hogyan keletkezik kúpfelület?

6. Hogyan keletkezik gömbfelület?
7. Hogyan keletkezik körgyűrűfelület?
8. Melyek a henger alapvető méretei?
9. Mit eredményez a henger forgástengely irányú síkmetszése?
10. Mit eredményez a henger forgástengelyre merőleges irányú síkmetszése?
11. Mit eredményez a henger általános irányú síkmetszése?
12. Melyek a kúp alapvető méretei?
13. Milyen helyzetű metszősík eredményez a kúpon körmetszetet?
14. Milyen helyzetű metszősík eredményez a kúpon háromszögmetszetet?
15. Milyen helyzetű metszősík eredményez a kúpon hiperbolametszetet?
16. Milyen helyzetű metszősík eredményez a kúpon parabolametszetet?
17. Milyen helyzetű metszősík eredményez a kúpon ellipszismetszetet?
18. Hogyan adjuk meg a gömb méretét?
19. Mit nevezünk gömbi főkörnek és az hogyan jelenik meg az ábrázolásban?
20. Mit eredményez a gömb síkmetszése és az hogyan jelenhet meg a vetületeken?
21. Hogyan adjuk meg a körgyűrűfelület méreteit?
22. Milyen körökkel jellemezhetjük a körgyűrűfelületet?

4. AXONOMETRIKUS ÁBRÁZOLÁS

A Tankönyvmester Kiadó: **A műszaki rajz alapjai. *Síkmértan*** c. tankönyvének 2. fejezetében leírtak alapján már tanulhattunk az ábrázolási módokról. Az egyik ábrázolási mód az **axonometrikus ábrázolás.** Az axonometrikus ábrázolás célja a térbeli alakzatok szemléletes bemutatása.

Ennek a tankönyvnek az 1. fejezetében tanultunk a vetítési módokról. Ezek közül emeljük ki azt a vetítési módot, amelynél *a tárgy a képsíkhoz viszonyítva ferde helyzetű* (**1.9.** *b)* ábra). A vetítősugarak párhuzamosak és merőlegesek a képsíkra, de a tárgy jellemző felületei ezekkel szöget zárnak be. Ennek az a következménye, hogy torzult kép keletkezik. Ugyanakkor a térbeli alakzat több felülete mutatható meg. Az axonometrikus kép keletkezését egy kocka ábrázolásával a **4.1.** ábra szemlélteti.



4.1. ábra. Az axonometrikus kép keletkezése

A képsík megnevezése: *axonometrikus képsík.* Mivel az axonometrikus képsík egybeesik a rajz síkjával, csupán a megértés érdekében emeljük ki, a továbbiakban nem jelöljük. A térbeli alakzatot (itt a kockát) a tér három kiterjedésének megfelelően, tengelyrendszerben helyezzük el. Ez az *axonometrikus tengelyrendszer.* Három tengelyének jelölése: *x*, *y* és *z*. Az *x* és az *y* tengely *a vízszintes,* a *z* pedig *a függőleges kiterjedés*. Ne feledjük, hogy a három tengely *a valóságban derékszöget zár be egymással!* Később ez lesz a szerkesztések kiindulásának az alapja.

Természetes környezetünkben a párhuzamos élek látszólag egy pontban futnak össze (l. a látszati ábrázolást). Az axonometrikus ábrázolásban ezt nem vesszük figyelembe. A párhuzamos éleket mindhárom kiterjedésük irányában párhuzamosan ábrázoljuk. A természetben a távolság növekedésével arányosan csökkenek a méretek. Az axonometrikus ábrázolásban ezt sem vesszük figyelembe, ill. a térhatás érzékeltetéséért, *megállapodás alapján rögzített méretarányt alkalmazunk.* Az axonometrikus ábrázolás csoportosítása (mint később látni fogjuk) ezek alapján történik. Mindezek figyelembevételével az axonometrikus ábrázolás definíciója a következő.

Az axonometrikus ábrázolás olyan szemléltető (térhatású) ábrázolási mód, amelynél megállapodás szerinti (szabványban rögzített) tengelyrendszerben és méretaránnyal, meghatározott méretrövidüléssel ábrázoljuk a térbeli alakzatokat.

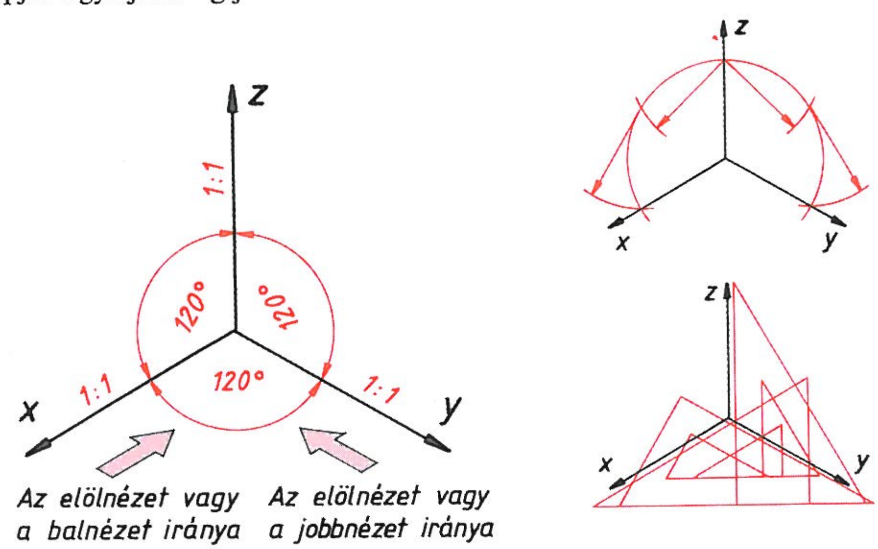
Ezek alapján az axonometrikus ábrázolás két legfontosabb jellemzője **a tengelyrendszer** (az x, y és z tengely egymáshoz való viszonya) **és az alkalmazott rövidülés** (milyen arányú és melyik tengelyre vonatkozik).

4.1. Az axonometrikus ábrázolási módok jellemzői

Az ábrázolás történelmében sok axonometrikus ábrázolási mód alakult ki. Napjainkban is több ilyen módszer használatos. A szakmai igények alapján állapították meg, hogy az adott szakterületen melyiket célszerű alkalmazni. Tanulmányaink folyamán a saját szakterületünknek megfelelő ábrázolási módokkal és azok sajátosságaival ismerkedünk meg.

4.1.1. Az egyméretű (izometrikus) axonometria

A **4.2.** ábra alapján figyeljük meg jellemzőit!



a) *b)*

4.2. ábra. Az egyméretű axonometria tengelyrendszere
a) jellemzői; *b)* szerkesztése

Tengelyrendszer. Az egyméretű axonometria x, y és z tengelyei egymással 120°-ot zárnak be. A z tengely függőleges, az x és y tengely pedig a vízszintes iránnyal 30°-ot zár be. Az axonometriatengelyeket vékony folytonos vonallal rajzoljuk meg.

Az egyméretű axonometria tengelyeit több módon is megrajzolhatjuk. Első lépésként mindig a függőleges (z) tengelyt ábrázoljuk és jelöljük a tengelyek metszéspontját. Az x és y tengelyeket a metszéspontból a z tengelyhez viszonyítva rajzoljuk meg. Ezt megtehetjük szögmérővel is, de kerüljük a mérési pontatlanságok elkerülése miatt! Megrajzolhatjuk körzővel, mint 120° szerkesztése, valamint a 30°-os derékszögű vonalzó alkalmazásával. Mindezt a **4.2.***b)* ábra mutatja be. Az ábrából az is kitűnik, hogy minden tengely tükörtengelye a másik két tengelynek.

Méretarány. Rövidülést nem veszünk figyelembe. Ez azt jelenti, hogy mindhárom tengelyen azonos méretarányban ábrázoljuk az alakzat minden méretét. *Különböztessük meg a rajz méretarányát az axonometriatengely méretarányától!* A rajz méretarányát az ábrázolni kívánt alakzat méretétől függően **megválasztjuk,** az axonometriatengelyen alkalmazott méretarány a tengelyrendszerhez kötött.

Mértani alakzatok elhelyezése az axonometrikus tengelyrendszerben

A vetületi ábrázolásnál tanultakat alkalmazzuk. Az elölnézetet úgy választjuk meg, hogy az a mértani *alakzat legjellemzőbb oldala* legyen. Az elölnézethez viszonyítva, általában az alakzat balnézetét ábrázoljuk. Mindezek alapján az egyméretű axonometrikus ábrázolásban legtöbbször az elölnézetet az *x-z* tengelyek síkjával párhuzamosan helyezzük el. Ennek megfelelően a balnézet az *y-z* tengelyek, a felülnézet pedig az *x-y* tengelyek síkjával lesz párhuzamos.

Abban az esetben, ha az alakzat jobbnézete jellemzőbb (tagoltabb), mint a balnézet, választhatjuk elölnézetnek az *y-z* tengelyek síkját. Így az *x-z* tengelyek síkja a jobbnézet síkja lesz (**4.2.***a)* ábra). A nézetirányokat színes nyilak szemléltetik.)

Az egyméretű axonometria előnyei a következők.

- Minden felület egyformán áttekinthető – különösen a felső lap részleteinek bemutatására alkalmas.
- Az azonos méretarány gyorsabb munkát tesz lehetővé.
- A tengelyek azonos hajlásszöge segíti az egyszerűbb vonalzóhasználatot.

Az egyméretű axonometria hátrányai a következők.

- A tengelyrendszerből adódóan sok fedőpont és fedőegyenes keletkezik, így figyelmes szerkesztést és rajzolvasást igényel.
- Az alaktorzulás a felületeken belüli görbék mérettorzulását eredményezi (mint később a kör ábrázolásánál tapasztalni fogjuk).

4.1.2. A kétméretű (dimetrikus) axonometria

Jellemzőit a **4.3.** ábra alapján tekintsük át!

Tengelyrendszer. A kétméretű axonometria *x* és *z* tengelye 97°-ot, az *y* és *z*, valamint az *x* és *y* tengelyei 131°30'-et zárnak be. Ebben az axonometriában is a *z* tengely a függőleges.

A kétméretű axonometria tengelyeit kijelölhetjük szögmérővel (**4.3.***a)* ábra). Pontosabb eredményt kapunk, ha a **4.3.***b)* ábra alapján rajzoljuk a tengelyeket.

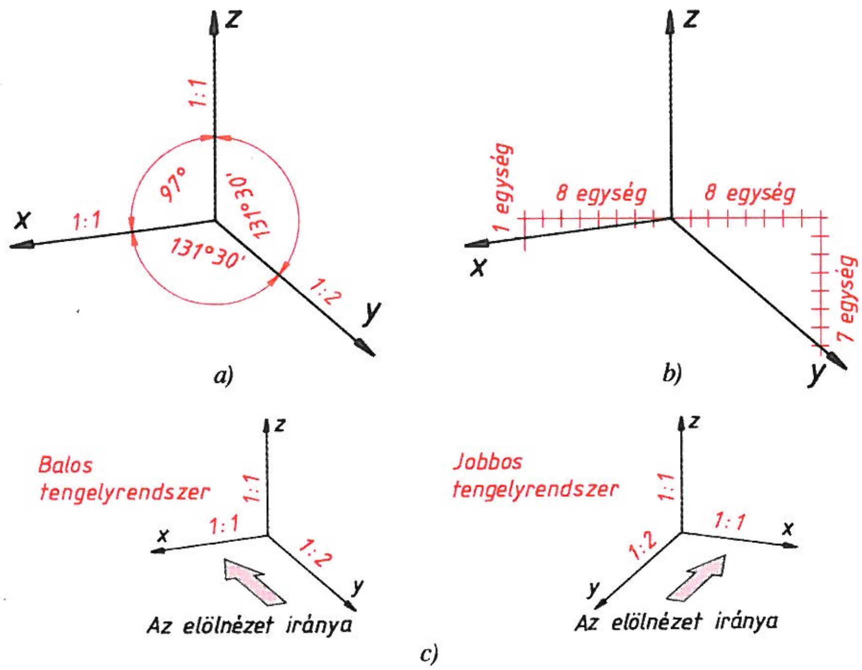
- Ábrázoljuk a *z* tengelyt és kijelöljük a tengelyek metszéspontját. A *z* tengely jelölt végpontjába merőleges segédegyenest rajzolunk. A segédegyenesre a *z* tengelytől *mindkét irányba felmérünk 8-8 egységnyi távolságot* (egységnek a rajzmérettől függő, célszerű méretet válasszunk, pl. 5 vagy 10 mm-t).
- A kapott végpontokba a *z* tengellyel párhuzamos, de vele ellentétes irányú félegyeneseket rajzolunk, amelyekre felmérünk az *x* tengely oldalán *1*, az *y* tengely oldalán *7* egységet.
- A kapott pontokon át a *z* tengely talppontjából megrajzoljuk az *x*, majd az *y* tengelyt.

Megfigyelhetjük, hogy az *y* tengely *tükörtengelye* az *x* és *z* tengelyeknek (**4.3.***a)* ábra).

Méretarány. A kétméretű axonometriában kétféle méretarányt alkalmazunk. Ez alapján kapta megnevezését is ez az ábrázolási mód. Az *x* és *z* tengelyekre változatlan méreteket viszünk fel (a méretarány 1:1). Az *y* tengelyre a méretek felét mérjük (a méretarány 1:2).

Mértani alakzatok elhelyezése az axonometrikus tengelyrendszerben

A kétméretű axonometria tengelyrendszerét két módon is megrajzolhatjuk (**4.3.***c)* ábra). Így a kétméretű axonometriának további két fajtája határozható meg. Az egyik a **balos tengelyrendszer,** amely megegyezik az eddig leírtakkal (**4.3.***a)* és *b)* ábrák). Ez a gyakrabban alkalmazott ábrázolási mód. Ennek a tankönyvnek a szemléltető ábrái is balos, kétméretű axonometriában készültek. A kétméretű axonometria másik fajtája a **jobbos tengelyrendszer.** A jobbos tengelyrendszerben az *x* tengely a tengelymetszetektől jobbra mutat. Fogadjuk el általános ábrázolási szabálynak, hogy az elölnézet nézetiránya mindig az *x-z* **tengelyek** síkjára merőleges. A rövidülést (1:2 méretarányt) ebben az esetben is az *y* tengelyen vesszük figyelembe. A jobbos tengelyrendszerben elhelyezett mértani alakzatnak az elölnézeten túl megmutatható a jobbnézete (y-z síkjával párhuzamosan) és a felülnézete.



4.3. ábra. A kétméretű axonometria tengelyrendszere
a) jellemzői; *b)* szerkesztése; *c)* fajtái

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy *a rövidülést mindig az y tengelyen vesszük figyelembe.*

A *kétméretű axonometria előnyei a következők.*

- A legtérhatásosabb ábrázolási mód.
- Fedőpontok és fedőegyenesek ritkán alakulnak ki, ezért könnyebben áttekinthető és értelmezhető.
- A körátmérők méretnövekedése kisebb, mint az egyméretű axonometriában.

A kétméretű axonometria hátránya, hogy a tengelyrendszer ábrázolása külön szerkesztést igényel.

4.1.3. A frontális (kavalier-) axonometria

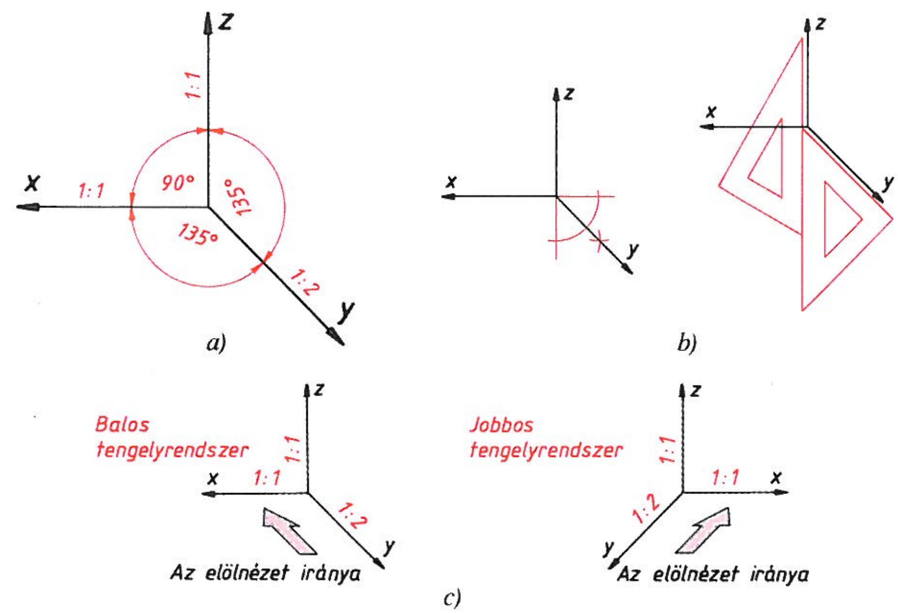
A **4.4.** ábra alapján figyeljük meg jellemzőit!

Tengelyrendszer. A frontális axonometria x és z tengelye 90°-ot, az y és a z, valamint az x és y tengelyei pedig 135°-ot zárnak be. Mindig a z tengely a függőleges. A frontális axonometria tengelyeit kijelölhetjük szögmérővel (**4.4.***a)* ábra), szerkeszthetjük körzővel (az x és a z tengelyek meghosszabbítása után szögfelezéssel) és megrajzolhatjuk derékszögű vonalzóinkkal (**4.4.***b)* ábra). A frontális axonometria tengelyrendszerére is igaz, hogy az y tengely tükörtengelye az x és z tengelyeknek (**4.4.***a)* ábra).

Méretarány. A frontális axonometria is kétméretű, azaz tengelyein kétféle méretarányt alkalmazunk. Az x és z tengelyeken változatlanok a méretek (1:1), míg az y tengelyen rövidülést veszünk figyelembe (1:2).

Mértani alakzatok elhelyezése az axonometrikus tengelyrendszerben

A frontális axonometriának is két fajtáját ismerjük. *A balos és a jobbos tengelyrendszert.* Alkalmazásuk azonos a kétméretű axonometriában tanultakkal.



4.4. ábra. A frontális axonometria tengelyrendszere
a) jellemzői; *b)* szerkesztése; *c)* fajtái

A frontális axonometria előnyei a következők.

- Tengelyrendszere egyszerű, könnyen megrajzolható.
- Az *x-z* tengelyek síkjában sem méret, sem alaktorzulás nincs, így alkalmas az elölnézeten a valódi alakzat megmutatására.

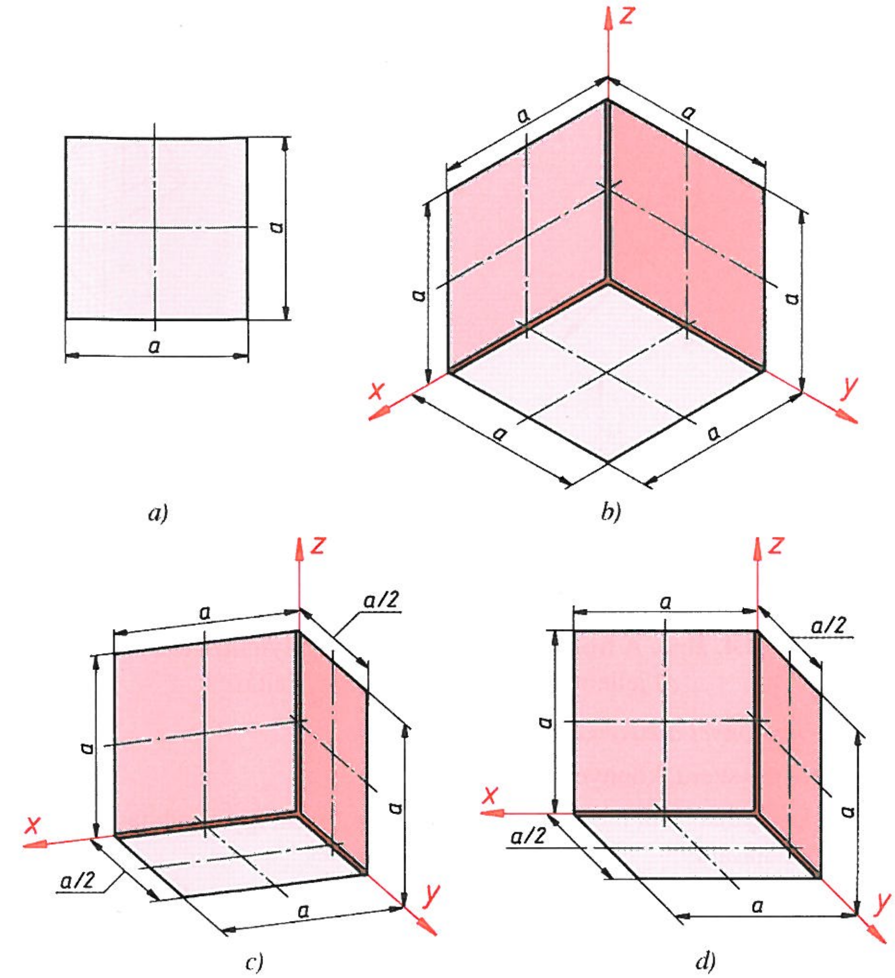
A frontális axonometria hátránya, hogy a mértani testek legnagyobb torzulását eredményezi.

4.2. Síkidomok axonometrikus ábrázolása

Az alakzatok mérettorzulását az egyes axonometrikus rendszerekben egyszerűen oldottuk meg a megállapodás szerinti méretarányokkal. Az alaktorzulás az axonometrikus ábrázolás másik problémája. A megoldáshoz a következőket gondoljuk végig! Az alaktorzulás visszavezethető az élek és egyenesek (tengelyek, alkotók) *hajlásszögének torzulására.* Ráadásul a szögek torzulása nem arányos, egyes helyzetekben csökken, más helyzetekben nő. Kiindulási pont a *derékszög módosulása,* ugyanis az axonometrikus tengelyek a valóságban egymásra merőlegesek, így *a tengelyek szögének rajzi torzulása azonos a derékszögtorzulással.* A megoldás tehát: *a nem derékszögű síkidomokat* **derékszögű befoglaló formában (négyzet, téglalap) helyezzük el** *és a befoglaló síkidom oldalélén keletkező pontokat másoljuk az axonometrikus tengelyekre.* Mindezeket figyeljük meg néhány, a leggyakrabban alkalmazott síkidom axonometrikus ábrázolásán!

A négyzet axonometrikus ábrázolás (4.5. ábra). A síkidomot az axonometrikus ábrázoláshoz méret- és alakhűen megszerkesztjük (**4.5.***a)* ábra). Ábrázoljuk a feladatban meghatározott **axonometrikus** tengelyrendszert! Két, bármely tengely által meghatározott síkban úgy ábrázoljuk a négyzetet, hogy az *a* oldalméreteit felmérjük a tengelyekre, majd a kapott pontokból a tengelyekkel párhuzamosan (párhuzamos csúsztatással) megrajzoljuk a hiányzó oldalakat. A méretfelvitelnél ügyeljünk a rövidülésre (*y* tengely)! A **4.5.** ábra az általunk ismert három axonometrikus rendszerben, mindhárom lehetséges megoldást bemutatja.

Gyakoroljuk a tanultakat a **29. munkalapon!**

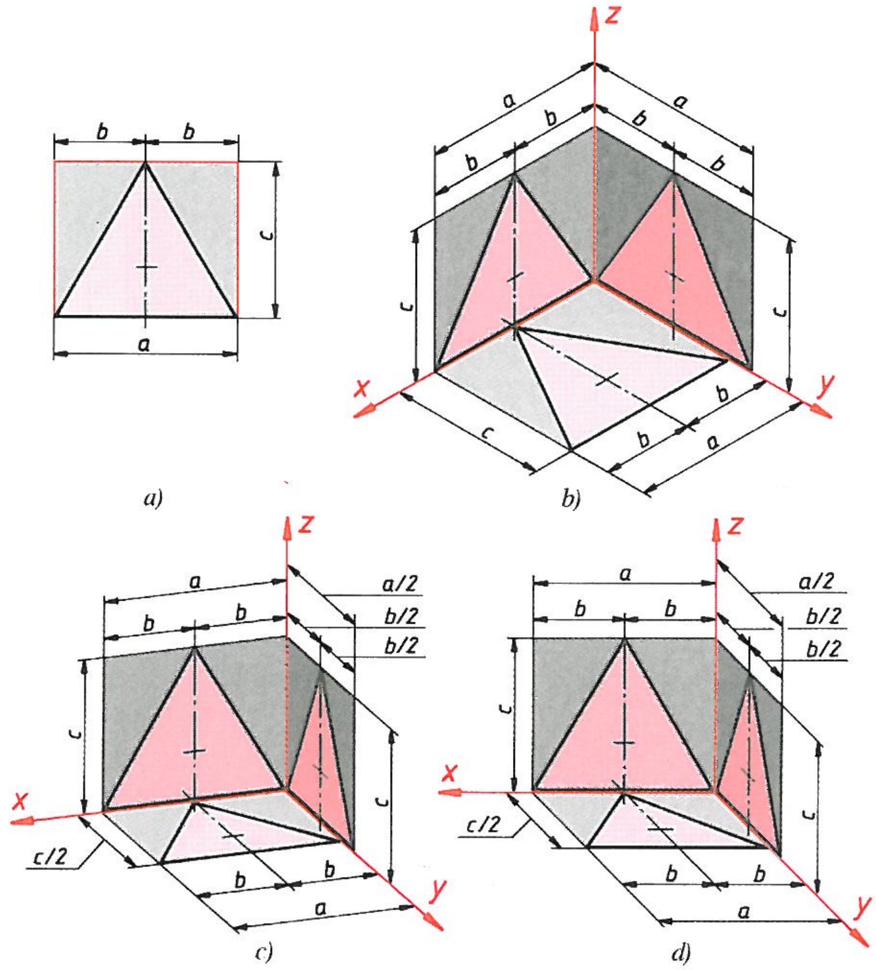


4.5. ábra. A négyzet axonometrikus ábrázolása
a) méret- és alakhű kép; *b)* egyméretű axonometrikus kép; *c)* kétméretű axonometrikus kép; *d)* frontális axonometrikus kép

A szabályos (egyenlő oldalú) **háromszög axonometrikus ábrázolása (4.6.** ábra). Megszerkesztjük az egyenlő oldalú háromszög méret- és alakhű képét. Köré rajzoljuk a befoglaló téglalapot, amelynek oldalai a (a szabályos háromszög oldalhosszúsága) és c (a háromszög magassága). A sokszögeket csúcsaik alapján ábrázoljuk, ezért szükség van a b méretre is, amely a háromszög csúcsának a téglalap csúcsától mért távolsága (**4.6.***a)* ábra).

Az axonometrikus tengelyrendszerben a befoglaló téglalappal ábrázolt síkidom képét rajzoljuk meg. A szabályos háromszög helyzetétől függően mérjük fel az egyik tengelyre az a, másikra a c méretet. Megrajzoljuk párhuzamos csúsztatással a befoglaló téglalapot, majd jelöljük a b mérettel a háromszög csúcsát. A szabályos háromszög axonometrikus képe három csúcsának helyzete alapján megrajzolható. A kétméretű és a frontális axonometriában az y tengelyre a méretek felét mérjük. A **4.6.***c)*, ill. a **4.6.***d)* ábrán megfigyelhetjük a szabályos háromszög axonometrikus torzulását az a oldalának, ill. c magasságának rövidülésével.

Gyakoroljuk a tanultakat a **30. munkalapon!**



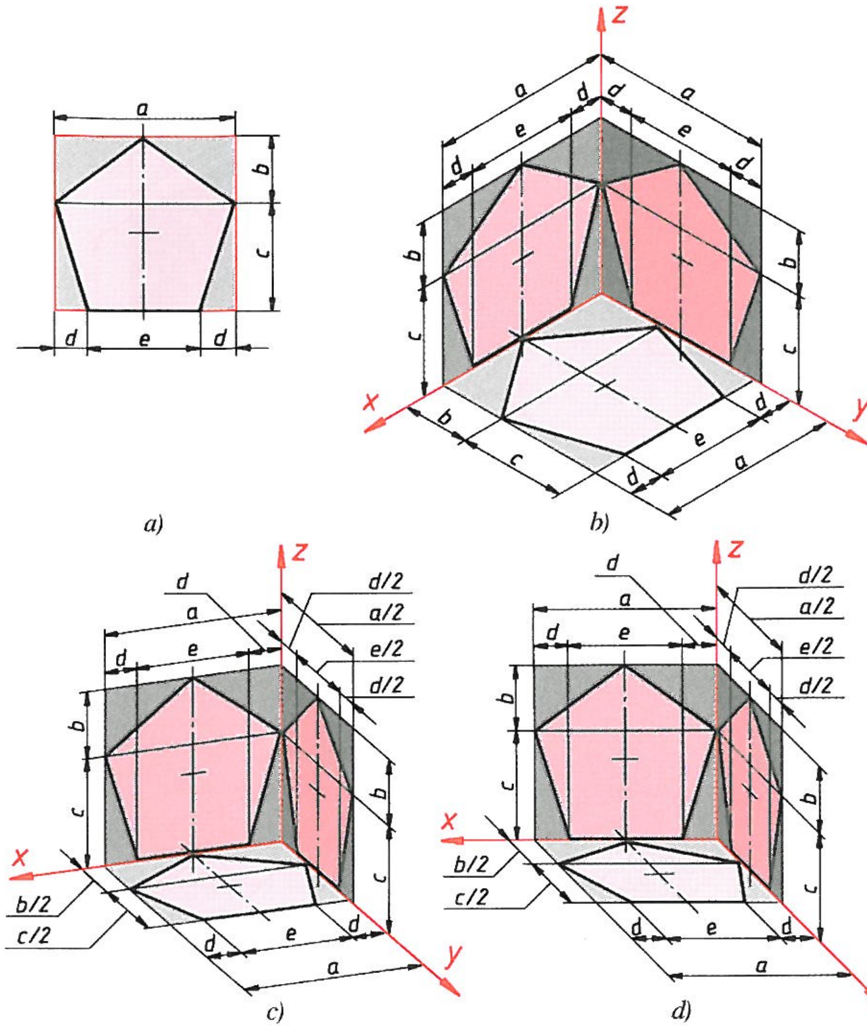
4.6. ábra. A szabályos háromszög axonometrikus ábrázolása
a) méret- és alakhű kép; *b)* egyméretű axonometrikus kép; *c)* kétméretű axonometrikus kép; *d)* frontális axonometrikus kép

A szabályos ötszög axonometrikus ábrázolása (4.7. ábra). Megszerkesztjük a szabályos ötszög méret- és alakhű képét. Köré rajzoljuk a befoglaló téglalapot, amelynek *a* oldala az ötszög legnagyobb szélessége. Az ötszög alapélének csúcsai az *a* oldalt *d-e-d* távolságokra osztja. A befoglaló téglalap másik oldala egyenlő az ötszög magasságával, amelyet az ötszög erre a szakaszra eső csúcsa *b* és *c* távolságokra oszt (**4.7.***a)* ábra). A szabályos ötszög (a szabályos háromszöghöz hasonlóan) négy helyzetben is ábrázolható (90°-os elfordításokkal).

Az axonometrikus tengelyrendszerben a befoglaló téglalapot ábrázoljuk. A feladatban meghatározott elhelyezés szerint az egyik tengelyre felmérjük a téglalap *a* oldalát és jelöljük *d*, *e* méretek segítségével az ötszög alapcsúcsait. Az *a* oldal felezőpontja meghatározza a szimmetriatengely és egyben a szemközti csúcs helyzetét. A másik tengelyre mérjük az ötszög magasságát: *b* és *c* méretek segítségével kijelöljük az ötszög csúcsainak helyét. A szabályos ötszög csúcsainak ismeretében a síkidom axonometrikus képe megrajzolható.

A szabályos ötszög axonometrikus ábrázolásával kapcsolatban az ábrán azt is megfigyelhetjük, hogy *a téglalapba foglalt síkidom csúcsai rácsot határoznak meg*. Így az axonometrikus képalkotást *méretrács másolásának* is tekinthetjük. Megfelelő rács tervezésével bármilyen síkforma axonometrikus képe megszerkeszthető.

Gyakoroljuk a tanultakat a **31. munkalapon!**



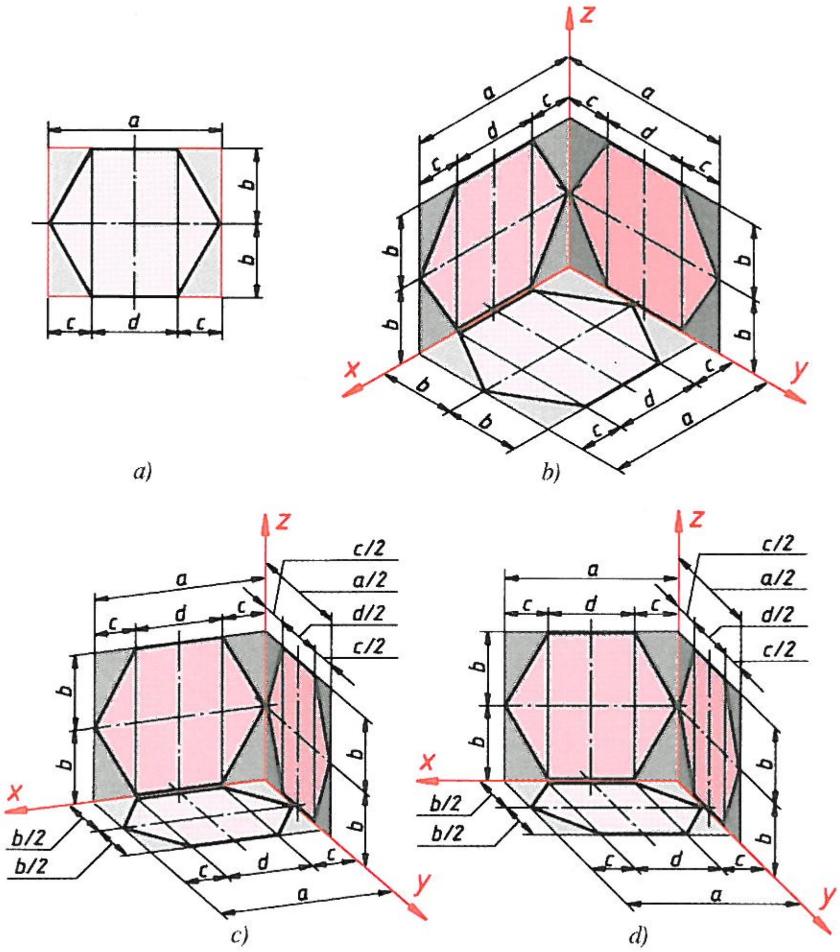
4.7. ábra. A szabályos ötszög axonometrikus ábrázolása
a) méret- és alakhű kép; *b)* egyméretű axonometrikus kép; *c)* kétméretű axonometrikus kép; *d)* frontális axonometrikus kép

A szabályos hatszög axonometrikus ábrázolása (4.8. ábra). Mivel az axonometrikus képek szerkesztésénél a már eddig megismert módszert alkalmazzuk, a szabályos hatszög axonometrikus ábrázolása alkalmas arra, hogy rendszerezzük eddig szerzett ismereteinket.

- Megszerkesztjük a szabályos hatszöget. Köré rajzoljuk a befoglaló téglalapot. Jelöljük a csúcsok által meghatározott méreteket *a–d* (**4.8.***a)* ábra).
- Ábrázoljuk a feladatban meghatározott axonometrikus tengelyrendszert.
- Azoknak a tengelyeknek a síkjába, amit a feladat ír elő, megrajzoljuk a befoglaló téglalapot.
- A tengelyekre másoljuk a méret- és alakhű ábráról a szabályos hatszög csúcsainak távolságát. A kétméretű és a frontális axonometria *y* tengelyén ügyeljünk a rövidülésre!
- A csúcsok helyzetének ismeretében megrajzoljuk a szabályos hatszöget.

Az ábrázolásban alkalmazzuk az eddigi gyakorlatot: a tengelyeket vékony pont-vonallal, a síkidom oldalait vastag folytonos vonallal rajzoljuk meg.

Gyakoroljuk a tanultakat a **32. munkalapon!**



4.8. ábra. A szabályos hatszög axonometrikus ábrázolása
a) méret- és alakhű kép; *b)* egyméretű axonometrikus kép; *c)* kétméretű axonometrikus kép;
d) frontális axonometrikus kép

A kör axonometrikus ábrázolása (4.9. és **4.10.** ábrák). A kör axonometrikus képét kétféle módszerrel is megrajzolhatjuk. Készíthetjük úgy, ahogyan a sokszögek rajzánál tettük, **méréssel,** és úgy is, ahogyan a síkmértanban, az ellipszis rajzolásánál tanultuk, **szerkesztéssel.**

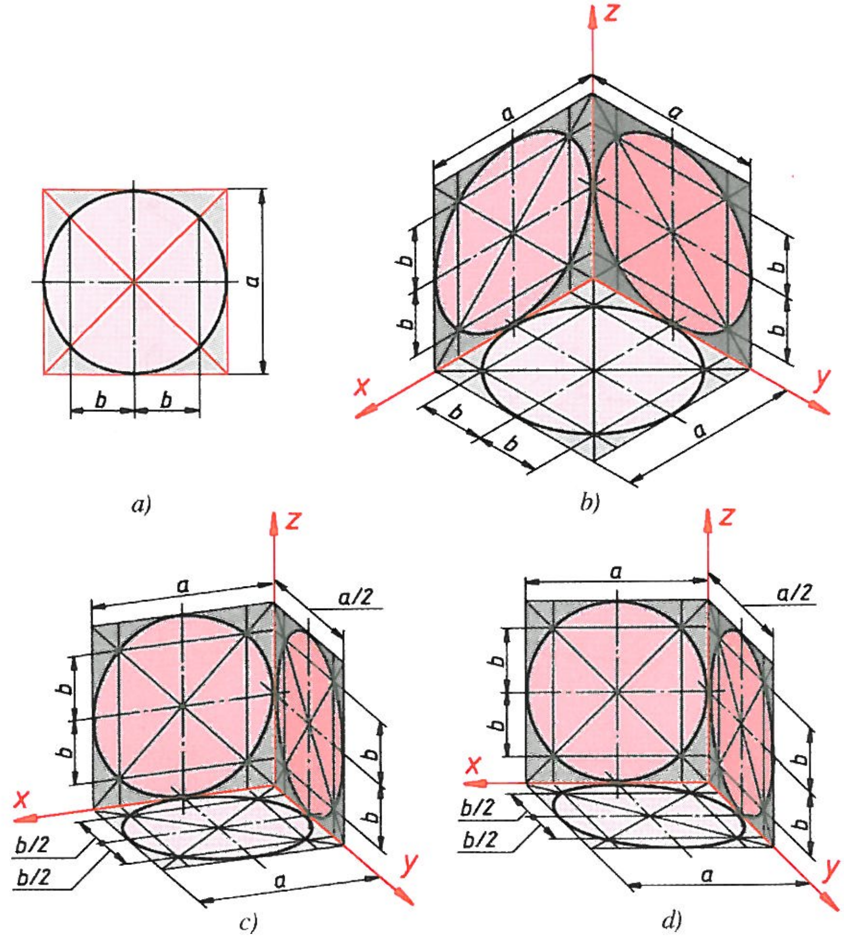
Ha a feladatot méréssel oldjuk meg, először a kör méret- és alakhű rajzát készítjük el (**4.9.***a)* ábra). Megrajzoljuk a befoglaló négyzetet és annak átlóit. A négyzet *a* oldalai és a kör tengelyei metszik egymást négy pontban (a kör érintési pontjai). További négy pontot határoznak meg a kör és a négyzet átlóinak metszetei, amelyek a tengelyektől *b* távolságra vannak. Az így keletkezett méretrácsot másoljuk az axonometriatengelyek síkjába. A kétméretű és frontális axonometria készítésénél figyelembe vesszük az *y* tengelyen a rövidülést. A kapott pontokon át megrajzoljuk a kör axonometrikus képét, az ellipszist.

A **4.10.** ábra a kör axonometrikus képeinek szerkesztését mutatja be. Itt az ellipszis rajzolásáról tanultakat alkalmazzuk.

- Az adott axonometria adott síkjában ábrázoljuk a befoglaló négyzetet átlóival együtt, ahol a négyzet *a* oldala egyenlő a kör átmérőjével (*a*=*d*). Az axonometrikus kép rombusz vagy romboid.
- A négyszög egyik oldalán elvégezzük a szerkesztést. Az ábra az *y-z* síkokban mutatja ezt be mindkét megoldásával (a gyakorlatban egy megoldás is elegendő, a rendelkezésre álló hely alapján döntjük el, hogy a négyszög melyik oldalán végezzük azt el).
- A befoglaló négyszög egyik oldalára oldalfelező merőlegest rajzolunk. A felezőpontból az *a* oldal felével körívet rajzolunk és metsszük a merőlegest. A kapott pontot a négyzet csúcsaival összekötjük. Ugyanebből a pontból, változatlan körzőnyílással metsszük a négyszög csúcsaiba rajzolt

szakaszokat és a metszéspontokból merőlegeseket rajzolunk a négyszög oldalára (párhuzamos az oldalfelező merőlegessel). A négyszög oldalán kapott pontokból, a szomszédos oldallal párhuzamosan rajzolt vonalakkal metsszük az átlókat.

- A kör tengelyeinek és a befoglaló négyszög metszetein, valamint az átlómetszeteken keresztül megrajzolható a kör axonometrikus képe, az ellipszis.

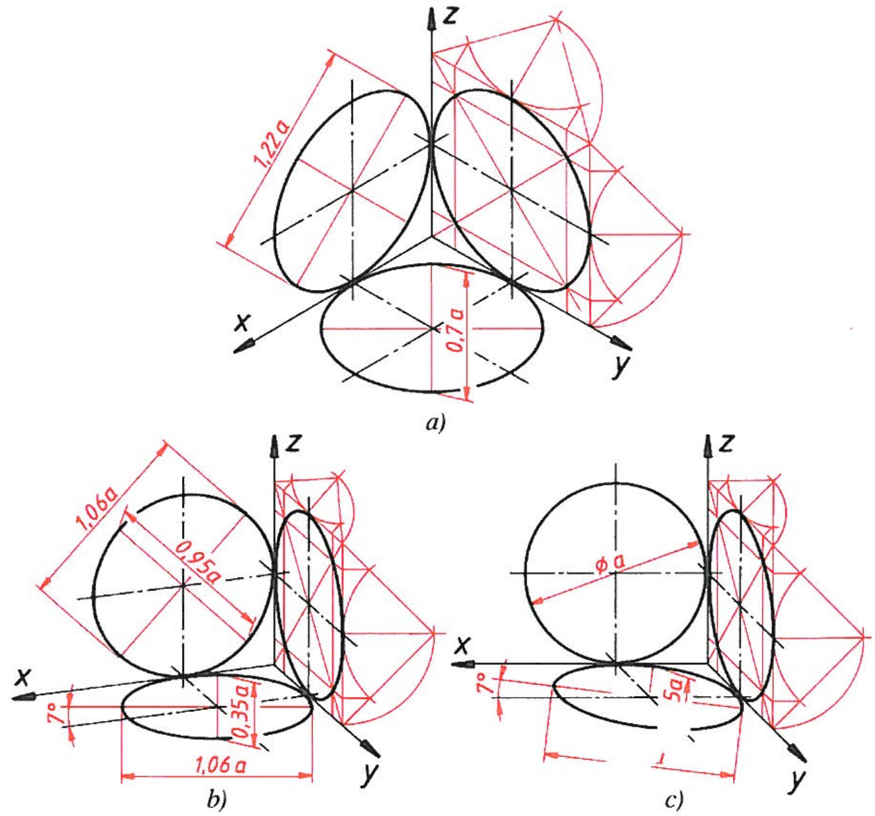


4.9. ábra. A kör axonometrikus ábrázolása
a) méret- és alakhű kép; *b)* egyméretű axonometrikus kép; *c)* kétméretű axonometrikus kép; *d)* frontális axonometrikus kép

A **4.10.** ábrán megfigyelhetjük a kör axonometrikus képének **mérettorzulásait** is. A keletkezett kép ellipszis, amelynek méretei (amint azt a síkmértanban tanultuk) a nagytengelyen és a kistengelyen adhatók meg.

Az egyméretű axonometriában keletkezett ellipszis (**4.10.***a)* ábra) tengelyei egybeesnek a befoglaló rombusz átlóival. A nagytengely az eredeti kör átmérőjének 1,22-szerese (*1,22a*), azaz méretnövekedés az eredmény. **A méretnövekedés a kör axonometriájának sajátossága.** A kistengely mérete 0,7*a*.

A kétméretű axonometriában (**4.10.***b)* ábra) kétféle ellipszis keletkezik. Az *x-z* síkban az ellipszistengelyek egybeesnek a befoglaló rombusz átlóival. A nagytengely 1,06*a*, amíg a kistengely 0,95*a* méretű. Az *x-y* és az *y-z* síkban az ellipszis nagytengelye a kör tengelyével 7°-os szöget zár be és 1,06*a* méretű. A kistengely merőleges a nagytengelyre és 0,35*a* méretű. Az *x-y* síkban a nagytengely szöge és az *x* tengely vízszintessel bezárt szöge azonos (l. a **4.3.***a)* ábrán), de ellentétes irányú. Ennek következménye, hogy az ellipszis nagytengelye merőleges a *z* tengelyre (azaz vízszintes helyzetű), így a legalkalmasabb álló hengerek természethű ábrázolására.



4.10. ábra. A kör axonometrikus képeinek mérete és szerkesztése
a) egyméretű axonometria; *b)* kétméretű axonometria; *c)* frontális axonometria

A frontális axonometriában (**4.10.***c)* ábra) az *x-z* síkjában az eredetivel egybevágó kört kapunk. Az *x-y* és *y-z* síkban a kétméretű axonometrikus képpel egybevágó ellipsziseket kapunk (mind a nagytengely szöge, mind a méretek azonosak), de azok nagytengelyei eltérnek a vízszintes és függőleges iránytól.

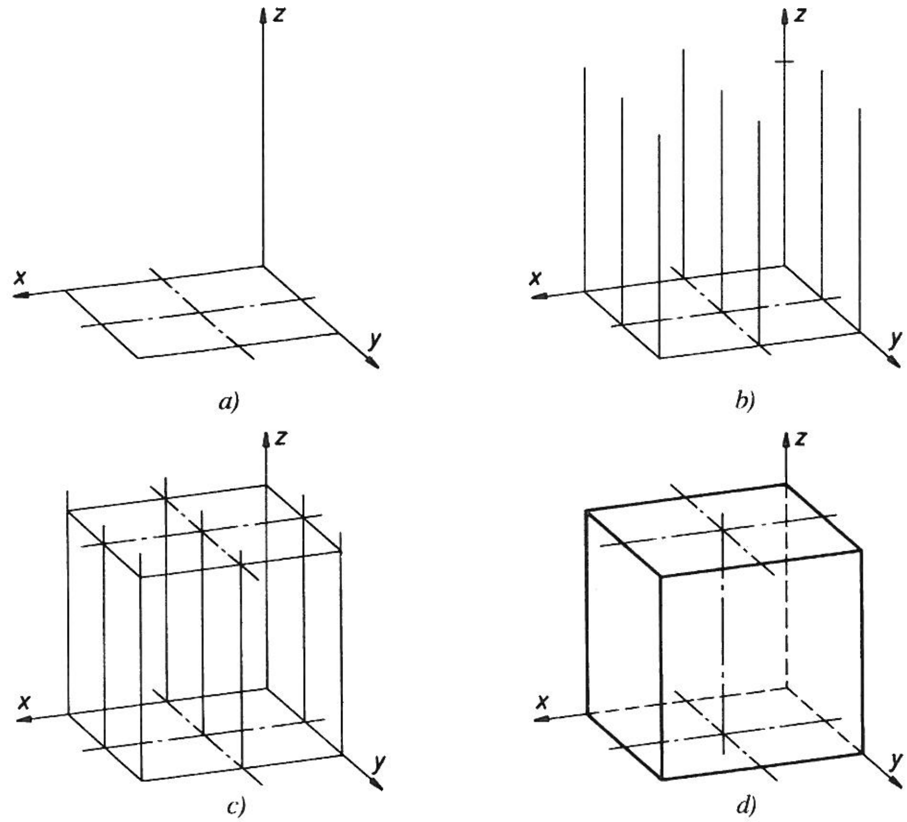
Gyakoroljuk a tanultakat a **33. munkalapon!**

4.3. Síklapú testek axonometrikus ábrázolása

Az ábrázolás sajátosságait a kocka axonometrikus ábrázolásával figyeljük meg!

A mértani testek axonometrikus rajzát **felépítéssel** készítjük (**4.11.** ábra).

- Első lépésben az axonometriatengelyeket és a test alaplapját rajzoljuk meg (**4.11.***a)* ábra).
- Második lépésben a *z* axonometriatengellyel párhuzamosan megrajzoljuk a függőleges éleket, tengelyt és tájékoztató vonalakat (**4.11.***b)* ábra), majd a *z* tengelyre felmérjük a testmagasságot.
- A harmadik lépés a fedőlap rajza. Párhuzamos csúsztatással az axonometriatengelyekkel párhuzamosan, a kijelölt testmagasság végpontjából sorra megrajzoljuk a fedőlap vonalait (**4.11.***c)* ábra).
- A negyedik lépésben töröljük a felesleges vonalakat, vonalvégeket és láthatóság szerint megrajzoljuk a test tengelyeit és éleit (**4.11.***d)* ábra). Figyeljük meg, hogy a kocka nem látható élei egybeesnek az axonometriatengelyekkel! Ebben az esetben a nem látható éleket ábrázoljuk vékony szaggatott vonallal!



4.11. ábra. A kocka (kétméretű) axonometrikus képének felépítése

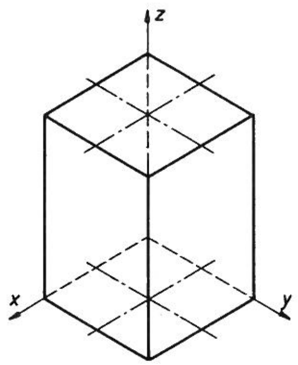
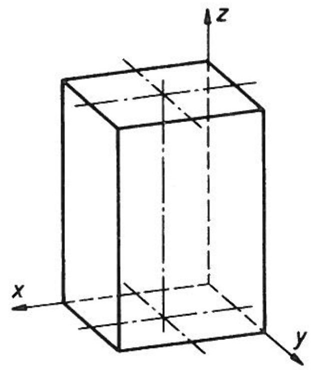
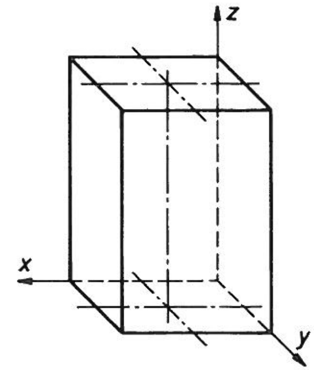
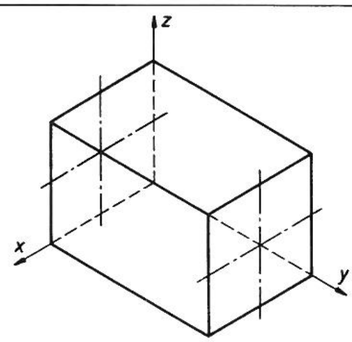
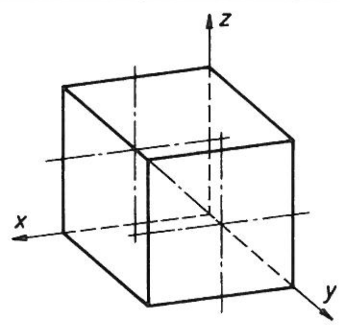
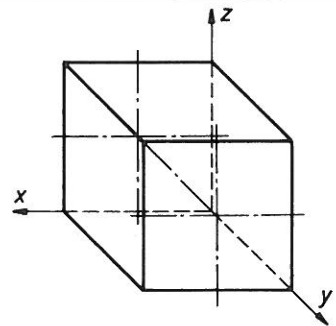
A négyzetes hasáb axonometrikus ábrázolása. A **4.1.** táblázatban figyeljük meg az álló és fekvő helyzetű négyzetes hasáb ábrázolását mindhárom axonometriában! Az egyméretű axonometriának a legnagyobb a helyigénye. Az egyméretű axonometriában keletkezik a legtöbb fedőegyenes: a látható él fedi a szimmetriatengelyt és a nem látható él egy darabját. (Ne feledjük a fedőegyenesek ábrázolási szabályait! Az ábrázolási sorrend: látható él, nem látható él, tengely. Ennek következménye, hogy a hasáb szimmetriatengelye ebben az esetben nem mutatható meg.) A fekvő hasábok kétméretű és frontális axonometriájában is fedőegyenesek a látható él, szimmetriatengely és nem látható él.

A szabályos háromszög alapú hasáb axonometrikus ábrázolása. A **4.2.** táblázatban figyeljük meg a hasáb leggyakoribb ábrázolási módjait! Az ábrákból kitűnik, hogy az alaplap ábrázolásához szükség van annak méret- és alakhű rajzára is.

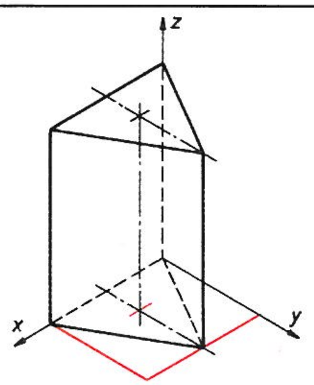
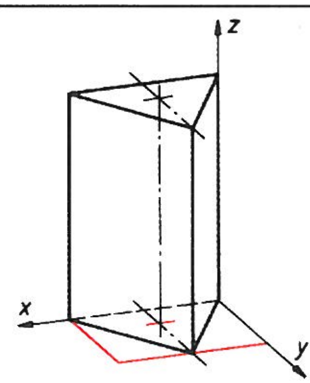
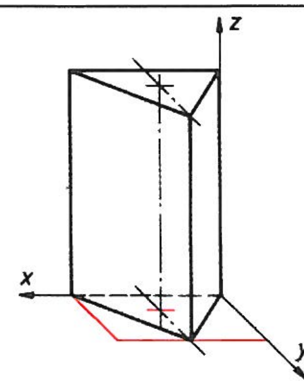
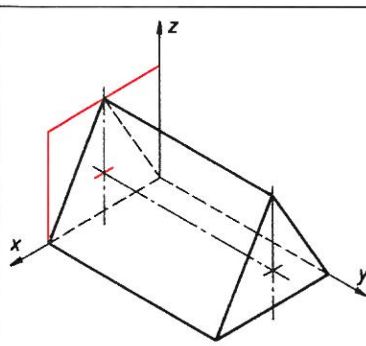
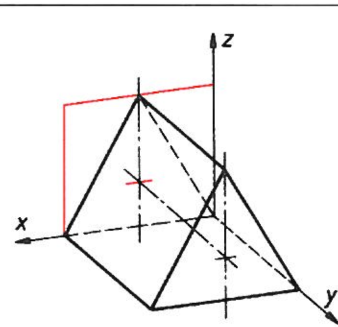
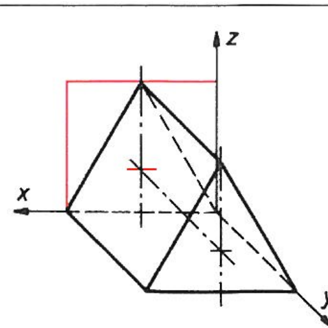
A négyzetes gúla axonometrikus ábrázolása. A **4.3.** táblázat *első sora* alapján tekintsük át a gúlák axonometrikus ábrázolásának sajátosságait! A gúlákat általában álló helyzetben ábrázoljuk. (Más elhelyezést a szimmetriatengely körüli elforgatással kapunk.) Az ábrázolás lépési egyszerűbbek. Az alaplap ábrázolása után megrajzoljuk a gúla tengelyét és erre mérjük a gúla magasságát. Az oldalélek a gúla csúcsának és az alaplap csúcsainak összekötésével keletkeznek.

A szabályos háromszög alapú gúla axonometrikus ábrázolása. Jellemzőit és az ábrázolási módokat a **4.3.** táblázat *második sorában* figyelhetjük meg.

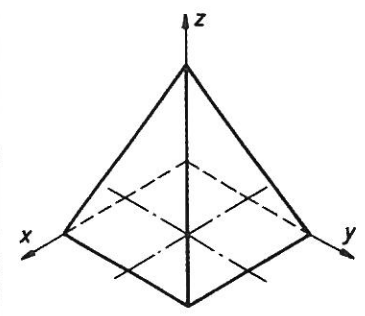
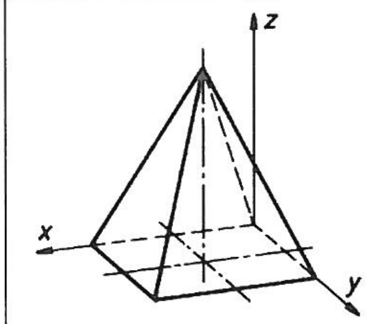
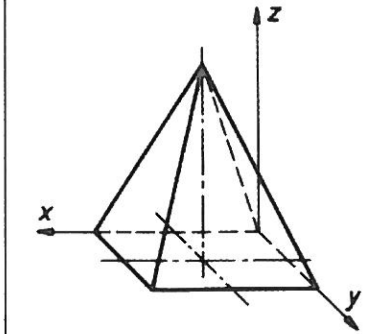
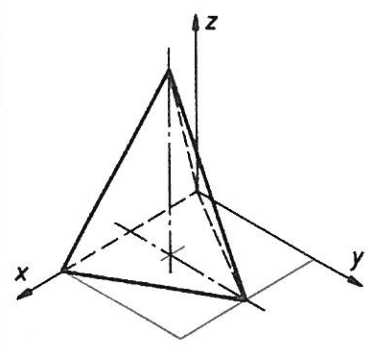
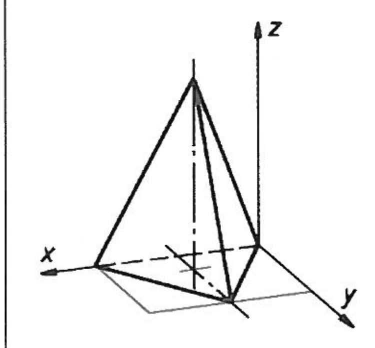
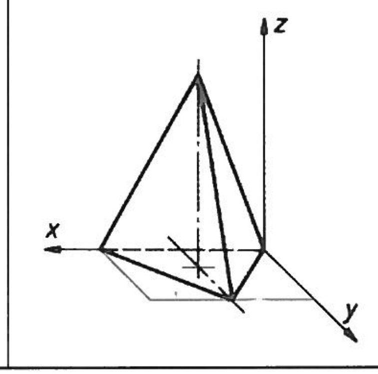
A négyzetes hasáb axonometrikus ábrázolása. **4.1.** táblázat

	Egyméretű axonometria	Kétméretű axonometria	Frontális axonometria
Álló hasábok			
Fekvő hasábok			

A szabályos háromszög alapú hasáb axonometrikus ábrázolása. **4.2.** táblázat

	Egyméretű axonometria	Kétméretű axonometria	Frontális axonometria
Álló hasábok			
Fekvő hasábok			

A négyzetes és a szabályos háromszög alapú gúla axonometrikus ábrázolása. **4.3.** táblázat

	Egyméretű axonometria	Kétméretű axonometria	Frontális axonometria
Négyzetes gúlák			
Szabályos háromszög alapú gúlák			

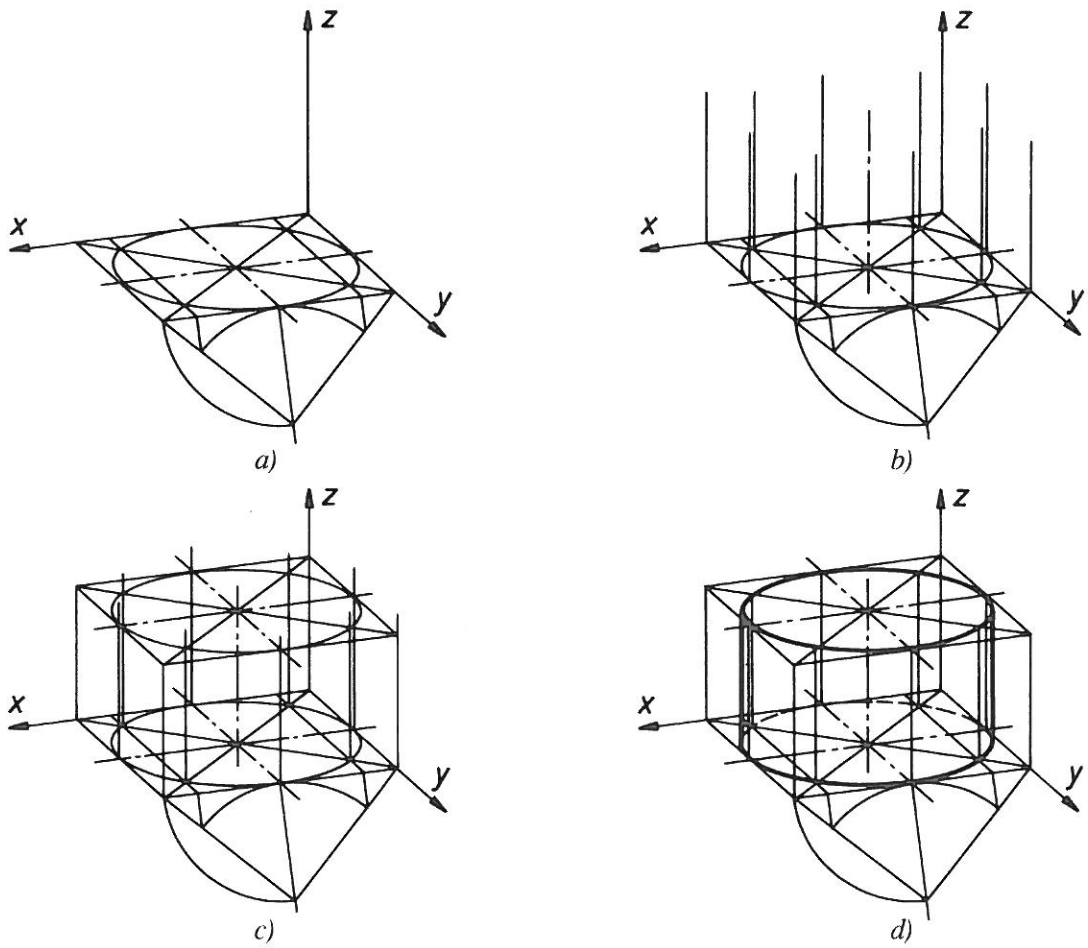
4.4. Forgástestek axonometrikus ábrázolása

Az axonometrikus rajzot a forgástestek esetében is felépítéssel készítjük. A forgástesteknek nincs oldaléle, ezért az ábrázolásban alkotóikat alkalmazzuk. Az ábrázolás sajátosságait a henger axonometrikus ábrázolásával figyeljük meg! Az ábrázolás lépéseit a **4.12.** ábra szemlélteti.

- Az első lépés az axonometriatengelyek ábrázolása és az *x-y* síkban, az alaplap szerkesztése. A befoglaló négyzet átlóin szerkesztéssel határozzuk meg az ellipszis pontjait (**4.12.***a)* ábra).
- A második lépés a *z* tengellyel párhuzamos vonalak rajza: a befoglaló négyszög tengelymetszeteiből és csúcspontjaiból, a tengelymetszetből, valamint az átlómetszetekből (**4.12.***b)* ábra).
- A harmadik lépésben a *z* tengelyre vagy a forgástengelyre felmérjük a hengermagasságot, és abból kiindulva, párhuzamos csúsztatással megrajzoljuk a fedőlap egyenes vonalait (az alaplap minden vonalával párhuzamos vonal), majd a kapott metszéspontokon át a fedőlap ellipszisét (**4.12.***c)* ábra).
- A negyedik lépés a rajz tisztázása, majd a láthatóság szerint a rajz befejezése. A *kontúralkotókat* a forgástengellyel párhuzamos ellipszisérintőként rajzoljuk meg. Az ábrázolás befejezését a **4.12.***d)* ábrán látjuk.

A henger axonometrikus ábrázolása. A **4.4.** táblázat bemutatja a henger axonometrikus ábrázolásának lehetőségeit a három ábrázolási módban, álló és fekvő hengerek esetén. Tanulmányozzuk a táblázat ábráin az axonometrikus ábrázolás sajátosságait és a szerkesztés lépéseit!

A kúp axonometrikus ábrázolása. Figyeljük meg a kúp ábrázolási lehetőségeit és lépéseit a **4.5.** táblázat első sora alapján!



4.12. ábra. A henger (kétméretű) axonometrikus képének felépítése

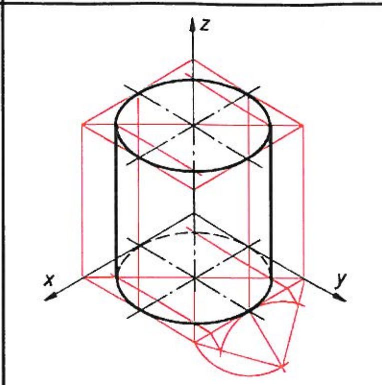
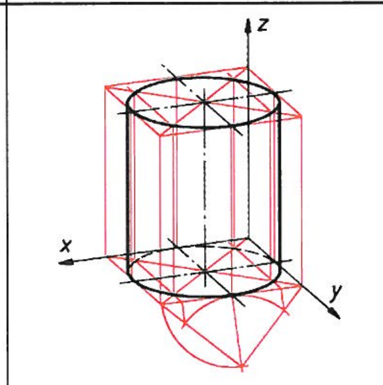
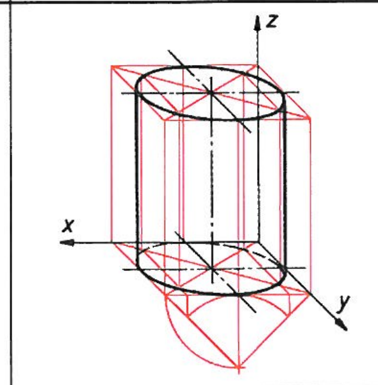
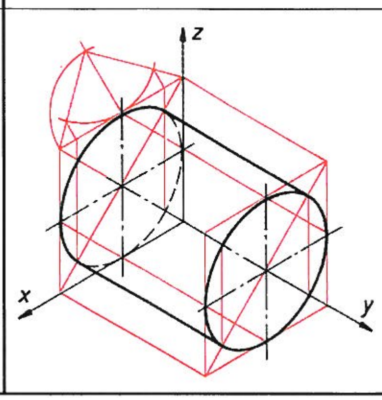
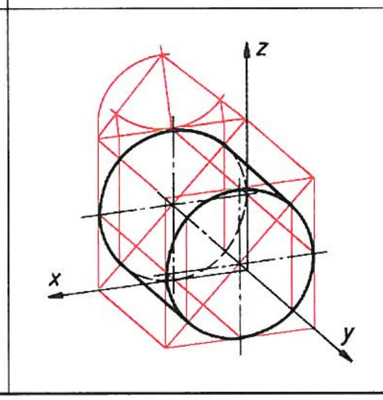
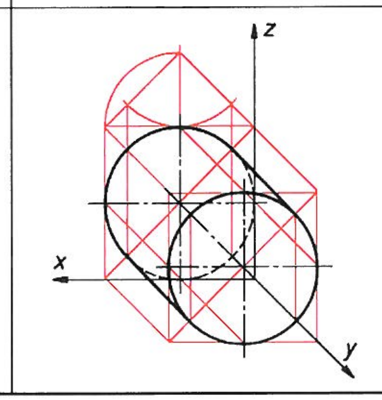
A gömb axonometrikus ábrázolása. *A gömb axonometrikus képét a gömbi főköröket burkoló körrel ábrázoljuk* (**4.5.** táblázat második oszlopa). Az ábrázolás több jellemzője is figyelmet érdemel. Először tekintsük át a szerkesztés lépéseit!

- Az axonometriatengelyeket mint *egymást metsző egyeneseket ábrázoljuk*. Így a tengelyek metszéspontja és a gömb középpontja egybeesik. Ügyeljünk arra, hogy a gömbátmérő helyett a gömb SR sugarát alkalmazzuk!
- *Ábrázoljuk a főköröket*. Az *x-y*, *x-z* és *y-z* tengelysíkokban ábrázoljuk a befoglaló négyszöget átlóival, majd megszerkesztjük az átlók és ellipszis metszéspontjait. (A szerkesztést elegendő egy síkban elvégezni. A szerkesztés vonalainak tengelymetszetei felhasználhatók a többi síkon is.) A kapott pontokon át megrajzoljuk mindhárom főkör képét, az ellipsziseket.
- Végül megrajzoljuk a gömb axonometrikus képét, amely *a három ellipszis (főkörök) burkolóköre*. Átmérője az ellipszisek nagytengelyével egyenlő.

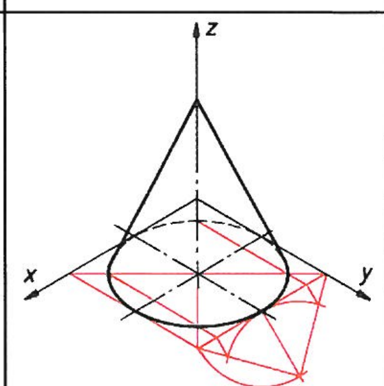
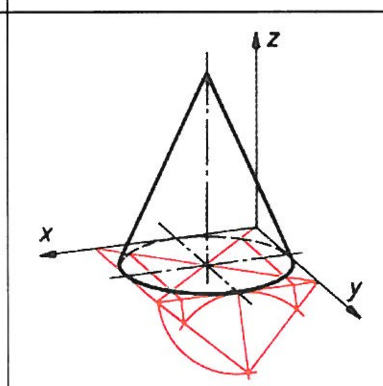
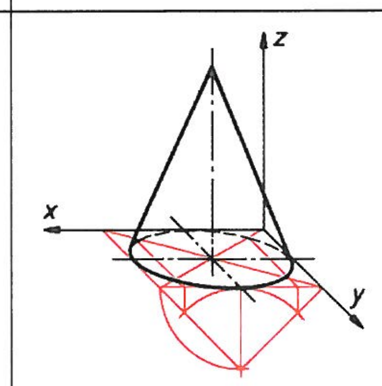
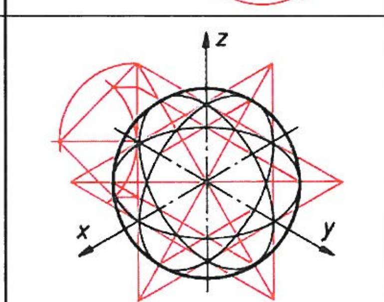
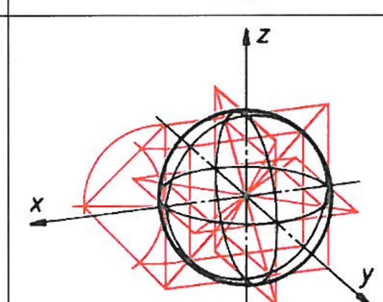
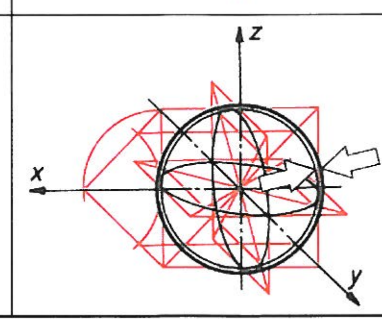
A forgástestek axonometrikus ábrázolásában a méretnövekedés a gömb axonometrikus képén figyelhető meg legjobban. A gömb rajzi átmérője mindhárom axonometriában nagyobb, mint a gömbátmérő. (A kör axonometriájából következően az egyméretű axonometriában 1,22 *d*, a kétméretű és frontális axonometriában 1,06 *d*.) A legszembetűnőbb a méretkülönbség a frontális axonometriánál (**4.5.** táblázat 3. oszlop, 2. sora), ahol az *x-z* síkjában nyugvó főkör és a gömb axonometrikus képe *két koncentrikus kört eredményez,* holott tudjuk, hogy a főkör- és a gömbátmérő egyenlő.

Ha a gyakorlati kivitelezésben a feladat meghatározása szabad választást tesz lehetővé, a következők szerint tervezzük meg munkánkat!

A henger axonometrikus ábrázolása. **4.4.** táblázat

	Egyméretű axonometria	Kétméretű axonometria	Frontális axonometria
Álló hengerek			
Fekvő hengerek			

A kúp és a gömb axonometrikus ábrázolása. **4.5.** táblázat

	Egyméretű axonometria	Kétméretű axonometria	Frontális axonometria
Kúpok			
Gömbök			

- Elemezzük az ábrázolni kívánt alakzatot!
- Az alakzat jellemzőinek ismeretében válasszuk meg az axonometrikus ábrázolási módot!
- Döntsük el, hogy a tengelyrendszerben hogyan célszerű elhelyezni az alakzatot (az alakzat tengelye és az axonometriatengely egybeessen vagy sem)!

Ellenőrző kérdések

1. Milyen ábrázolási mód az axonometrikus ábrázolás?
2. Hogyan keletkezik az axonometrikus kép?
3. Milyen lényeges jellemzőkben tér el az axonometrikus ábrázolás a látszati (perspektivikus) ábrázolástól?
4. Melyek az axonometrikus ábrázolás fő jellemzői?
5. Milyen axonometrikus ábrázolási módokat alkalmazunk szakterületünkön?
6. Melyek az egyméretű axonometria tengelyeinek jellemzői?
7. Hogyan rajzolhatjuk meg az egyméretű axonometria tengelyrendszerét?
8. Milyen méretarányokat alkalmazunk az egyméretű axonometria tengelyein?
9. Mi a különbség az axonometria méretarányai és a rajz méretaránya között?
10. Melyek a kétméretű axonometria tengelyeinek jellemzői?
11. Hogyan rajzolhatjuk meg a kétméretű axonometria tengelyrendszerét?
12. Milyen méretarányokat alkalmazunk a kétméretű axonometria tengelyein?
13. Melyek a frontális axonometria tengelyeinek jellemzői?
14. Hogyan rajzolhatjuk meg a frontális axonometria tengelyrendszerét?
15. Milyen méretarányokat alkalmazunk a frontális axonometria tengelyein?
16. Melyek az előnyei az egyes axonometrikus ábrázolás módoknak?
17. Melyek a hátrányai az egyes axonometrikus ábrázolási módoknak?
18. Milyen lépésekben ábrázolhatunk axonometrikusan mértani testet?
19. Mit alkalmazunk a testek axonometrikus ábrázolásában rajzbázisnak?

5. ÖSSZETETT TESTEK ÁBRÁZOLÁSA

Összetett testeknek nevezzük azokat az alakzatokat, amelyek egyszerű mértani testekből felépíthetőek, ill. azokból lebonthatóak.

Az egyszerű mértani testek az összetett testek **építőelemei.** Az összetett testek elemzésekor azt vizsgáljuk, hogy miként kapcsolódnak egymáshoz az építőelemek, milyen az egymáshoz való viszonyuk és mindezek hogyan ábrázolhatók.

Az építőelemek egymáshoz való viszonya alapján *az összetett testek két nagy csoportra oszthatók* (**5.1.** ábra). Ezek a csonkolt testek és a testek áthatása nyomán keletkező testek.

Csonkolt testeknek nevezzük azokat az összetett testeket, amelyekhez egyszerű mértani testek lebontásával, csonkításával jutunk.

Ennek megfelelően, a csonkolt testek esetében létezik egy olyan egyszerű mértani test, amely a csonkolt test **befoglaló formája.** A legegyszerűbb csonkolás a testek **síkmetszése.**

Testek áthatásának nevezzük azokat az alakzatokat, amelyeknél egy mértani test áthatol egy másikon. Az áthatás nyomán keletkező összetett testek két (vagy több) egyszerű mértani testből épülnek fel.

Azokat az összetett testeket (alkatrészeket, munkadarabokat stb.), amelyek egyes részleteik alapján mindkét előző csoportba besorolhatók, származtatott formáknak nevezzük.

Az összetett testek további felosztását az **5.1.** ábra szemlélteti.

A csonkolt testek csoportosítása

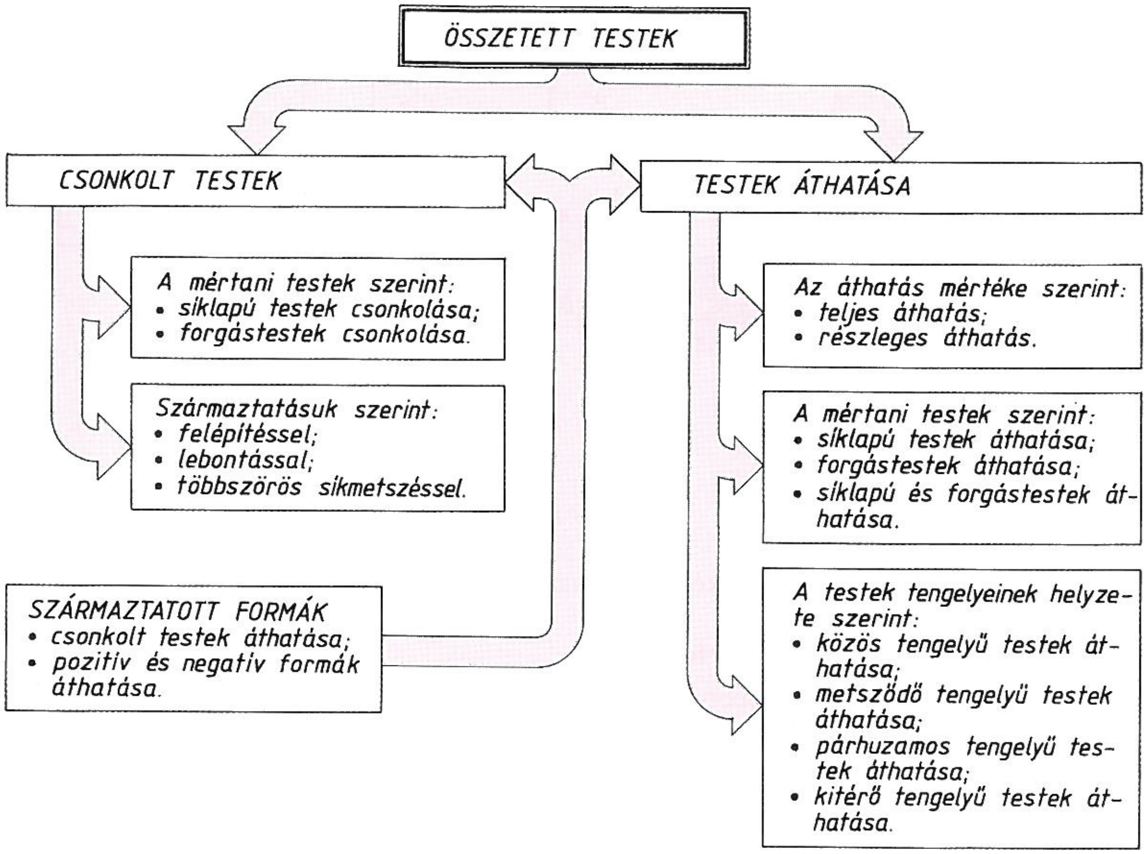
A csonkolt testeket csoportosíthatjuk a mértani test felülete szerint:

- csonkolt síklapú testek.
- csonkolt forgástestek.

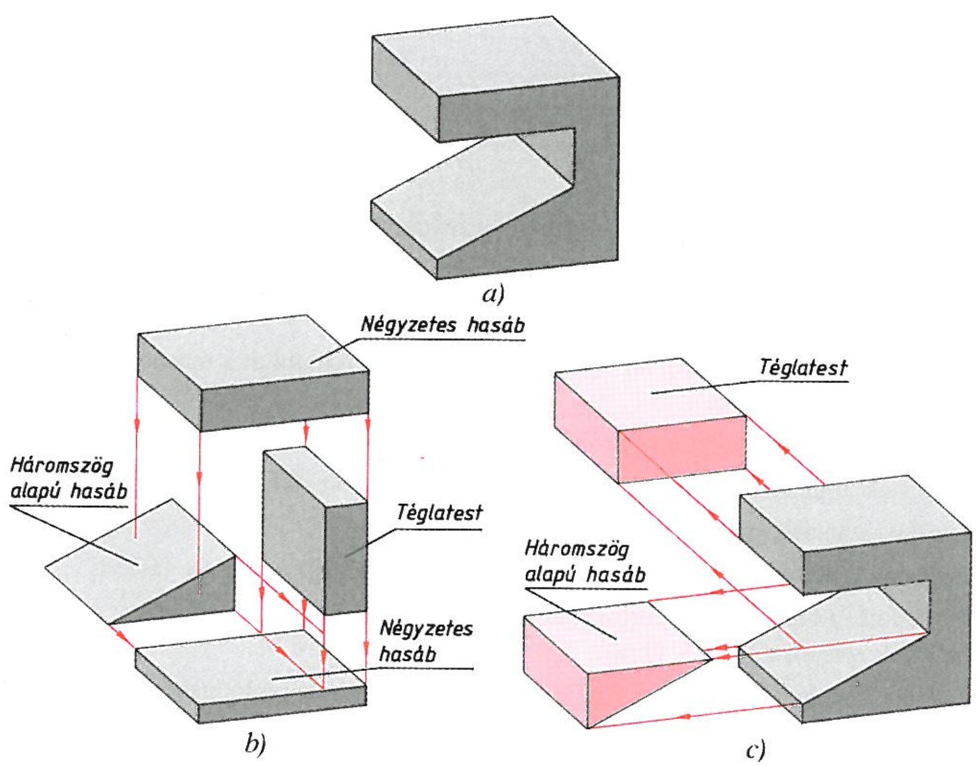
A csonkolt testeket (**5.2.***a)* ábra) csoportosíthatjuk származtatásuk alapján, azaz, hogy milyen művelettel jutunk a kapott alakzathoz:

- csonkolt testek felépítéssel (**5.2.***b)* ábra). A csonkolt testek egyszerű mértani testekből, mint *építőelemekből* felépíthetők,
- csonkolt testek lebontással (**5.2.***c)* ábra). A csonkolt testhez úgy jutunk, hogy a befoglaló formából (egyszerű testből) eltávolítjuk a fölösleges építőelemeket,
- csonkolt testek többszörös síkmetszéssel (**5.3.** ábra). A csonkolt testhez úgy jutunk, hogy az egyszerű mértani alakzatot több síkkal metsszük.

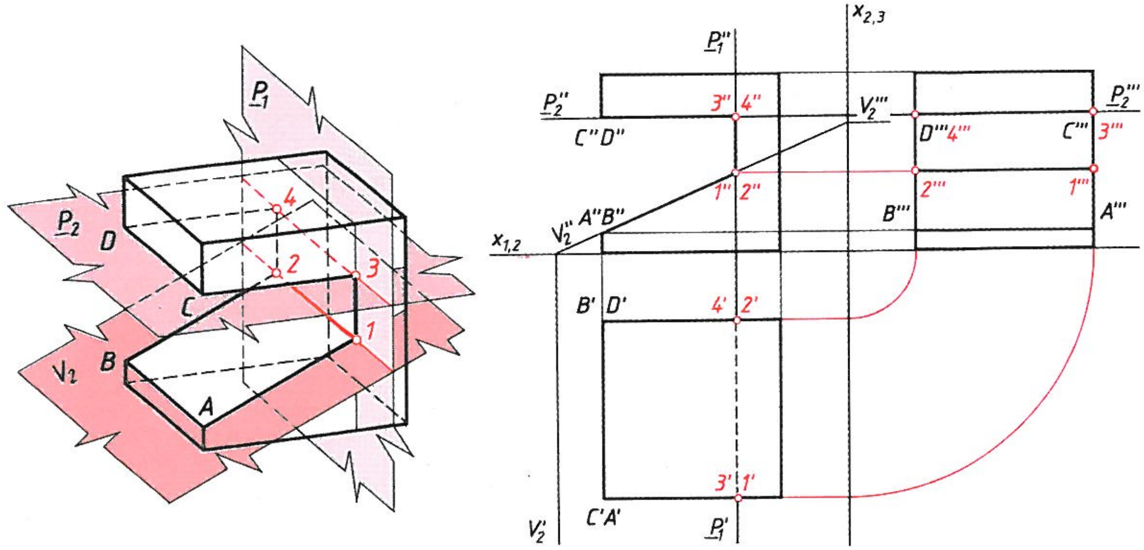
A metszősíkok egymást is metszik. Ezek metszőélei, valamint a síkmetszéssel kapott élek határozzák meg a csonkolt test egy-egy élét. Az ábrán kockát metszettünk három V_2 második vetítősíkkal, amelyek közül kettő egyben profilsík is ($\underline{P}_1$; $\underline{P}_2$). A könnyebb azonosítás kedvéért a metszősíkok nyomvonalaihoz a metszősík jelét írtuk.



5.1. ábra. Az összetett testek csoportosítása



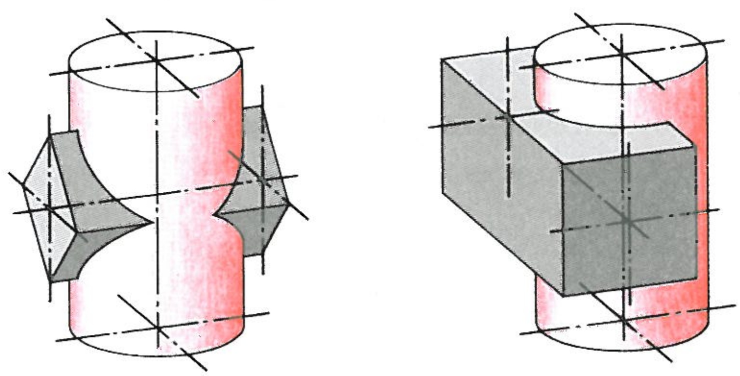
5.2. ábra. A csonkolt kocka származtatása



5.3. ábra. A csonkolt kocka származtatása többszörös síkmetszéssel

Az áthatásból keletkező testek csoportosítása

Az áthatásból keletkező testeket csoportosíthatjuk az áthatás mértéke szerint (**5.4.**ábra). Ez azt jelenti, hogy az áthatásban lévő testek milyen arányban alkotnak közös részletet.



a) *b)*

5.4. ábra. A testek áthatásának csoportosítása az áthatás mértéke szerint

- Teljes áthatás (**5.4.***a)* ábra). Az egyik test teljes keresztmetszetében áthatol a másik testen, azaz az egyik test döfi a másikat.
- Részleges áthatás (**5.4.***b)* ábra). Az egyik test csak részben hatol át a másik testen, azaz az egyik test belevágódik a másikba.

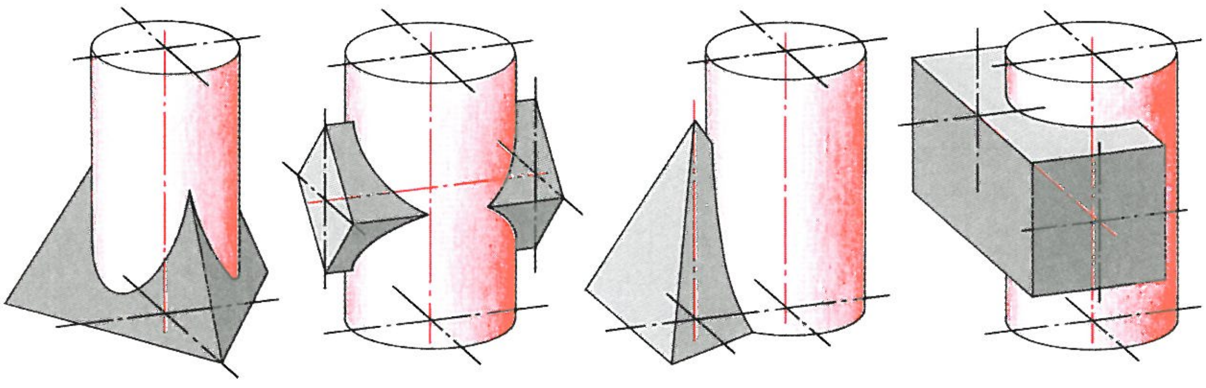
Az áthatásokból keletkező testeket csoportosíthatjuk a mértani testek felülete alapján.

- Síklapú testek áthatása: mindkét, az áthatásban szereplő test síklapú.
- Forgástestek áthatása: mindkét test forgástest.
- Síklapú és forgástestek áthatása: az egyik test síklapú, a másik pedig forgástest.

Az áthatásból keletkező testeket csoportosíthatjuk a testek tengelyeinek egymáshoz való viszonya, azaz a tengelyek helyzete szerint (**5.5.** ábra).

- Közös tengelyű testek áthatása (**5.5.***a)* ábra). Az áthatásban szereplő testek tengelyei egybeesnek. Helyzetük következménye, hogy teljes az áthatás.
- Metsződő tengelyű testek áthatása (**5.5.***b)* ábra). Az áthatásban szereplő testek tengelyei metszik egymást. A metsződő tengelyű testek áthatása teljes áthatás.

- Párhuzamos tengelyű testek áthatása (**5.5.***c)* ábra). Az áthatásban szereplő testek tengelyei párhuzamosak egymással. A keletkezett áthatás általában részleges, de lehetséges teljes áthatás is.
- Kitérő tengelyű testek áthatása (**5.5.***d)* ábra). A testek tengelyei elkerülik egymást, azaz kitérőek. Az eredmény általában részleges áthatás, de lehetséges teljes áthatás is.



a) *b)* *c)* *d)*

5.5. ábra. A testek áthatásának csoportosítása tengelyük helyzete szerint

Tanulmányaink során a csonkolt testeket is és az áthatolásból keletkező testeket is a **mértani testek felülete** alapján csoportosítjuk, és e szerint vesszük sorra.

A vetületi ábrázolásból eddig tanultak alapján tudjuk ábrázolni az összetett testeket is. Ismerjük azokat a műveleteket, amelyekkel a szakterületünkön előforduló alakzatok ábrázolhatók. A továbbiakban azt figyeljük meg, hogy milyen jellegű feladat megoldásához milyen művelet alkalmazása a célszerű! A kiindulópont mindig az alakzat jellemzőinek a felismerése. A jellemzők ismeretében tudjuk legegyszerűbben meghatározni az ábrázolás módját.

A csonkolt testek ábrázolásakor többféle feladat is előfordulhat.

- Adott az axonometrikus kép, amely alapján az adott alakzatot a képsíkrendszerben kell ábrázolni.
- Adott egy (vagy két) vetületi kép, amely alapján a hiányzó vetületet (vetületeket) kell ábrázolni. Ezt az ábrázolási módot **vetületkiegészítésnek** nevezzük.
- Adott a vetületi ábrázolás, amely alapján valamelyik axonometrikus képet kell elkészíteni. Ez a feladat kapcsolódhat a vetületkiegészítéshez is.

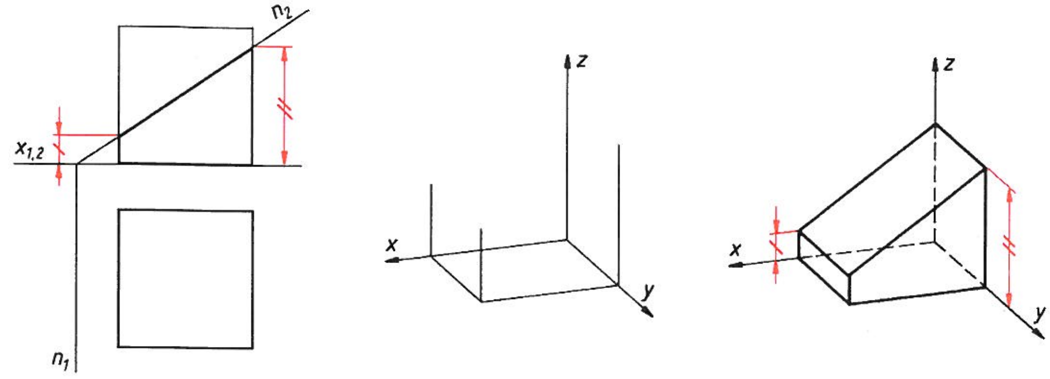
5.1. Síkmetszésből származó összetett testek axonometrikus ábrázolása

A síkmetszés a gyakorlatban csonkolás, amelynek eredménye (a síkmetszéssel kapott alakzat) **a csonkolt test**. A csonkolt testeket felületeik alapján soroljuk az **összetett testek** közé. Összehasonlítva az egyszerű mértani testekkel felszínük tagoltabb, azaz összetett. A továbbiakban a síkmetszéssel kapott alakzatok (összetett testek, csonkolt testek) axonometrikus ábrázolásának szabályaival ismerkedünk meg.

Az összetett testek axonometrikus ábrázolásánál általános szabály, hogy **az ábrázolás alapja a vetületi ábrázolás.** Kiindulásként mindig a vetületi képeket rajzoljuk meg. Ehhez általában két vetület elegendő. Továbbra is tartsuk szem előtt (amit a síkidomok axonometrikus ábrázolásánál tanultunk), hogy méretet csak a tengelyekre, ill. azokkal párhuzamosan tudunk felvinni a rajzra.

A kocka síkmetszésével kapott alakzat axonometrikus képe (5.6. ábra). Ábrázoljuk a kocka síkmetszését két vetületben (**5.6.***a)* ábra). Megrajzoljuk az axonometrikus tengelyrendszert (itt a kétméretű axonometria tengelyeit (**5.6.***b)* ábra), a kocka alaplapját és a függőleges éleket. A függőleges élekre felmérjük a vetületi kép elölnézetéről az n_2 által meghatározott egyszer és kétszer áthúzott méreteket (**5.6.***c)* ábra), majd láthatóság szerint megrajzoljuk a kapott alakzatot.

Gyakoroljuk a tanultakat a **34. munkalapon!**

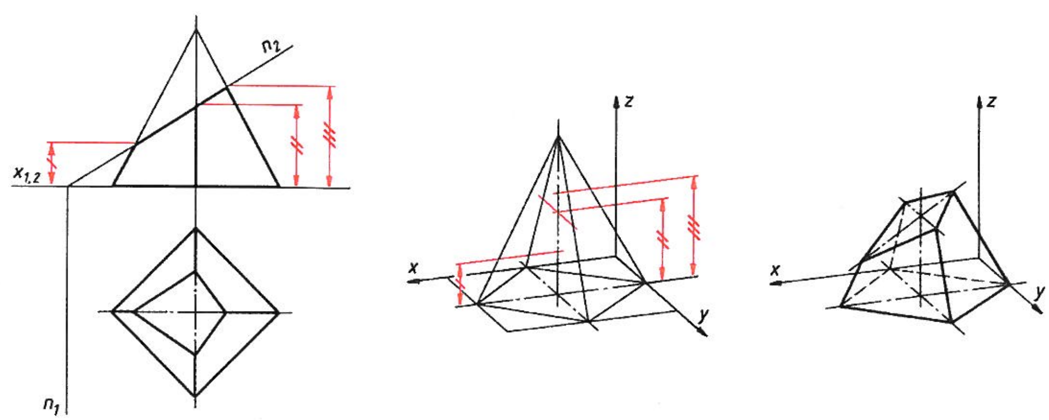


a) *b)* *c)*

5.6. ábra. A csonkolt kocka axonometrikus ábrázolása

A gúla síkmetszésével kapott alakzat axonometrikus képe (5.7. ábra). Ábrázoljuk a gúla síkmetszését két vetületben (**5.7.***a)* ábra). Megrajzoljuk az axonometrikus tengelyrendszerben a gúlát, és *tengelyére* felmérjük a vetületi kép elölnézetéről az n_2 által meghatározott egyszer, kétszer és háromszor áthúzott méreteket. Az axonometriatengelyekkel párhuzamosan azokat a gúla oldaléleire vetítjük. A kapott pontok az alakzat zárólapjának csúcspontjai (**5.7.***b)* ábra). Láthatóság szerint megrajzoljuk a kapott alakzatok (**5.7.***c)* ábra).

Gyakoroljuk a tanultakat a **35. munkalapon!**

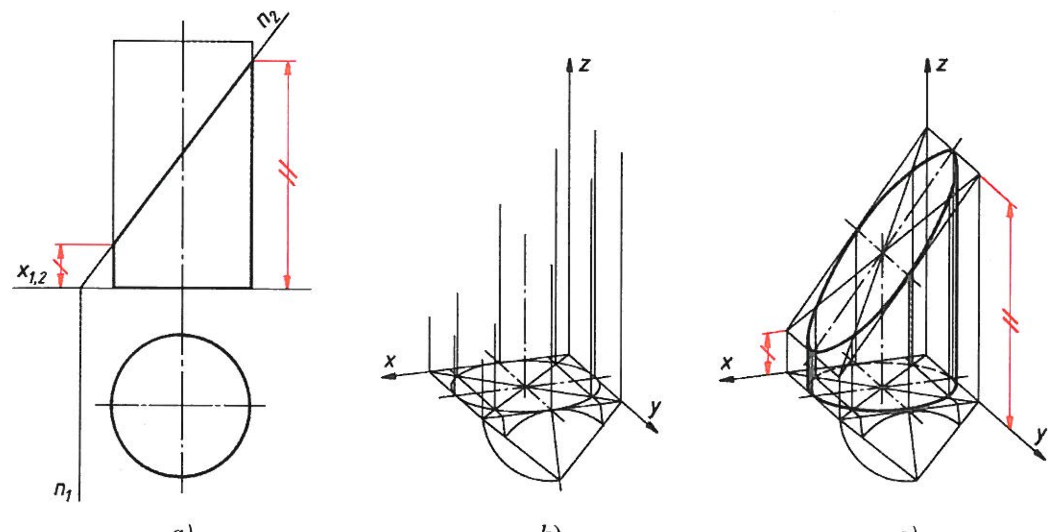


a) *b)* *c)*

5.7. ábra. A csonkolt gúla axonometrikus ábrázolása

A henger síkmetszésével kapott alakzat axonometrikus ábrázolása (5.8. ábra). Ábrázoljuk a henger síkmetszését két vetületben (**5.8.***a)* ábra). Megrajzoljuk az axonometrikus tengelyrendszerben a henger alapkörét alkotóival (**5.8.***b)* ábra). Az *x* tengellyel párhuzamos tengelymetszetekre állított alkotókra felmérjük a vetületi kép elölnézetéről az n_2 által meghatározott egyszer és kétszer áthúzott méreteket. Az alkotókon kapott pontokon át megrajzoljuk a zárólap tengelyét, majd párhuzamos csúsztatással annak további vonalait. A megrajzolt vonalak és az alkotók metszéspontjain át a zárólap ábrázolható. Ábrázoljuk a kontúralkotókat (mint az alap- és zárólap érintőit), majd láthatóság szerint megrajzoljuk a kapott alakzatot (**5.8.***c)* ábra).

Gyakoroljuk a tanultakat a **36. munkalapon!**

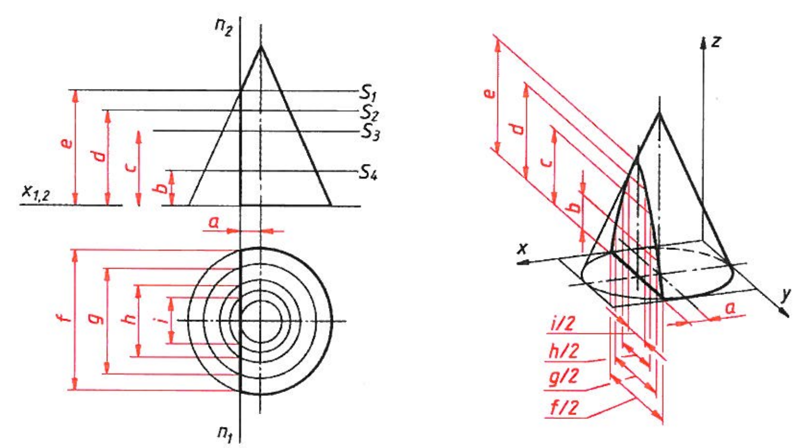


a) b) c)

5.8. ábra. A csonkolt henger axonometrikus ábrázolása

A kúp síkmetszésével kapott alakzat axonometrikus ábrázolása (5.9. ábra). Ábrázoljuk a kúp síkmetszését két vetületben (**5.9.***a)* ábra)!

A hiperbola szerkesztéséhez alkalmazott szeletelősíkok által meghatározott pontok helyzete alkalmas az axonometrikus kép szerkesztésére is. A metszősík nyomvonala *a* távolságban van a forgástengelytől. A szeletelősíkok az $x_{1,2}$ tengelytől *b–e* magasságban helyezkednek el. A felülnézeten a szeletelősíkok és a metszősík nyomvonalának metszéspontjai *i–f* távolságra vannak egymástól. Mint vízszintes és függőleges (tengelyekkel párhuzamos) méretek az axonometrikus ábrázolásban felhasználhatók.



a) b)

5.9. ábra. A csonkolt kúp axonometrikus ábrázolása

Megrajzoljuk az axonometrikus tengelyrendszerben a kúpot (**5.9.***b)* ábra). Forgástengelyétől felmérjük az *a* távolságot és megrajzoljuk a hiperbola tengelyét. Erre a tengelyre mérjük fel a szeletelősíkok alapkörtől mért távolságát (*b–e*). Párhuzamos csúsztatással rajzoljuk meg a szeletelősíkokat (csak a hiperbola síkjába eső vonalait), és ezekre mérjük fel a hiperbolapontokat (*i–f*)! Ügyeljünk a mérésre! Mint *y*-tengellyel párhuzamos méretek rövidülnek (*i*/2–*f*/2), de a távolságokat a hiperbolatengelytől mérjük, így ezeket tovább kell felezni. Az ábrázolást a vonalak láthatóság szerinti megrajzolásával fejezzük be.

Gyakoroljuk a tanultakat a **37. munkalapon!**

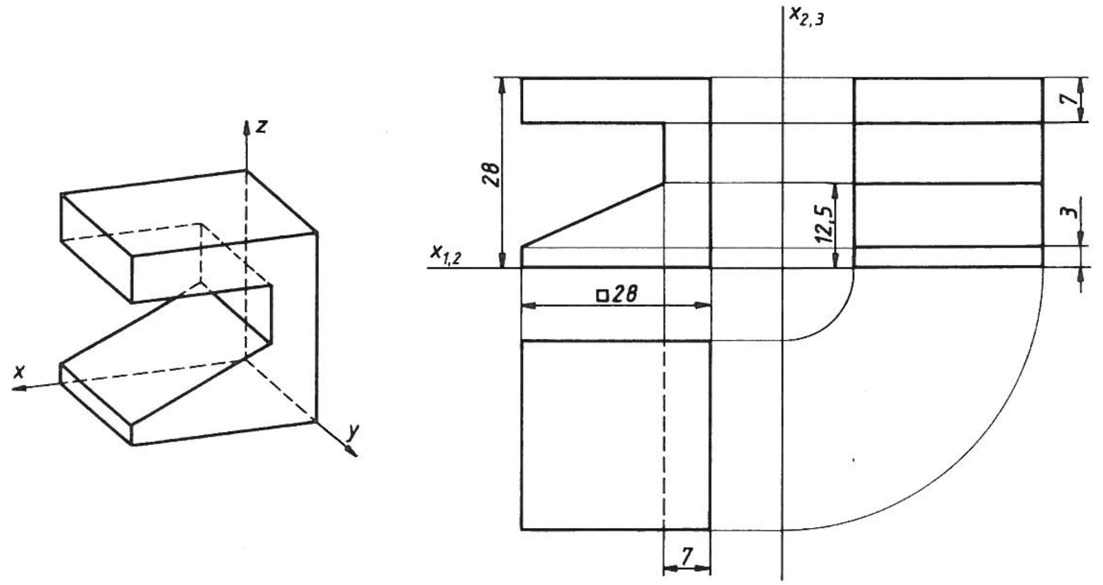
5.2. Csonkolt testek vetületi és axonometrikus ábrázolása

Természetes környezetünkben a minket körülvevő tárgyak a legritkább esetben hasonlítanak az egyszerű mértani testekre. Ha az összes előforduló alakzatot két csoportra osztjuk, mint természetes és mesterséges tárgyakra, egyszerűsíthetjük elemzésüket. Mi csak a *mesterséges tárgyakkal foglalkozunk* és ezen belül is csak a szakmánkban előforduló alakzatokkal (pl. gépalkatrészekkel). Ezekről megállapíthatjuk, hogy *egyszerű mértani testekből felépíthetők, ill. egyszerű mértani testek lebontásával kialakíthatók.*

5.2.1. Csonkolt síklapú testek ábrázolása

A csonkolt kocka ábrázolása

A csonkolt kocka alkalmas arra, hogy elemzésével megértsük a csonkolt testek, ezen belül a csonkolt síklapú testek ábrázolásának sajátosságait. Az **5.10.** ábra alapján tekintsük át jellemzőit!



a) *b)*

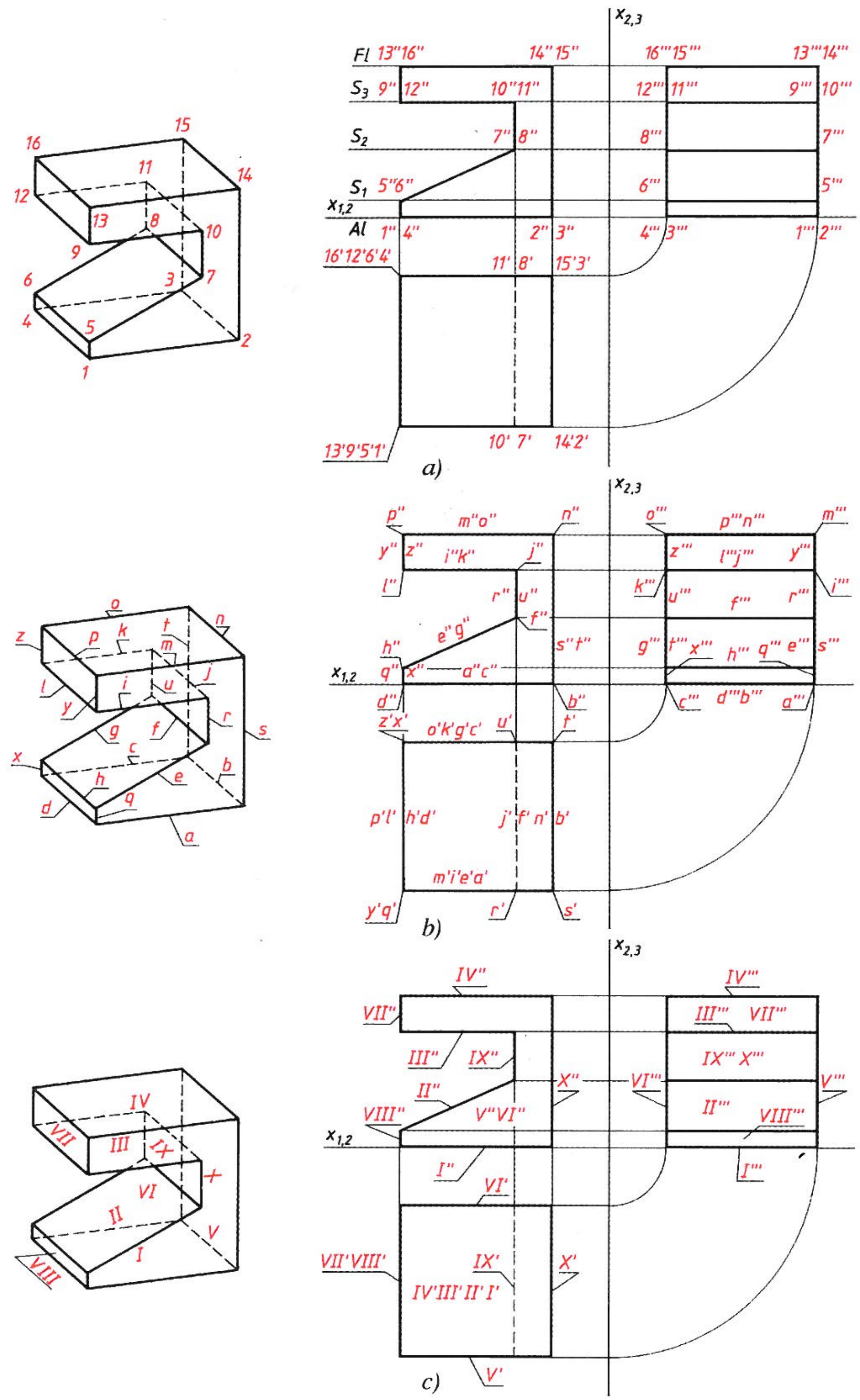
5.10. ábra. A csonkolt kocka ábrázolása
a) kétméretű axonometrikus képe; *b)* vetületi ábrázolása

A csonkolt síklapú testek ábrázolásának legegyszerűbb módja a méretek ismeretében a csúcsok helyzetének meghatározása. *A csúcsok meghatározzák a közöttük lévő éleket, az élek pedig körülhatárolják a lapokat* (a csonkolt test határolólapjait).

Amint tapasztaljuk, a feladatmegoldás közben folyamatos felületelemzést végzünk. A felületelemzés lehet önálló feladat is, de az összetett testek ábrázolása folyamatos felületelemzéssel párosul. Gyakorlásként tekintsük át a csonkolt kocka felületelemzését az **5.11.** ábra alapján!

Csúcsok azonosítása (**5.11.***a)* ábra). A már eddig is alkalmazott egyszerűsítéssel, számozással (a nagybetűk helyett) jelöljük a csúcsokat. A számozásban (a csúcsok számbavételében) valamilyen előre eldöntött rendet követünk. Itt az alaplap (*Al*) csúcsaival kezdtük, majd az alaplappal párhuzamos szeletelősíkok (S_1; S_2; S_3) mentén folytattuk a fedőlap (*Fl*) síkjával bezárólag. A fedőpontok jelölésénél ügyeljünk a helyes sorrendre!

Élek azonosítása (**5.11.***b)* ábra). Az élek jelölésére a kisbetűket alkalmazzuk. A műveletnél itt is valamilyen célszerű rendet követünk. Az alaplap élei után a vele párhuzamos (ill. az azt megközelítő) lapok határoló élei, végül a függőleges élek kerülnek sorra. Ügyeljünk a fedőélek jelölésének sorrendjére!



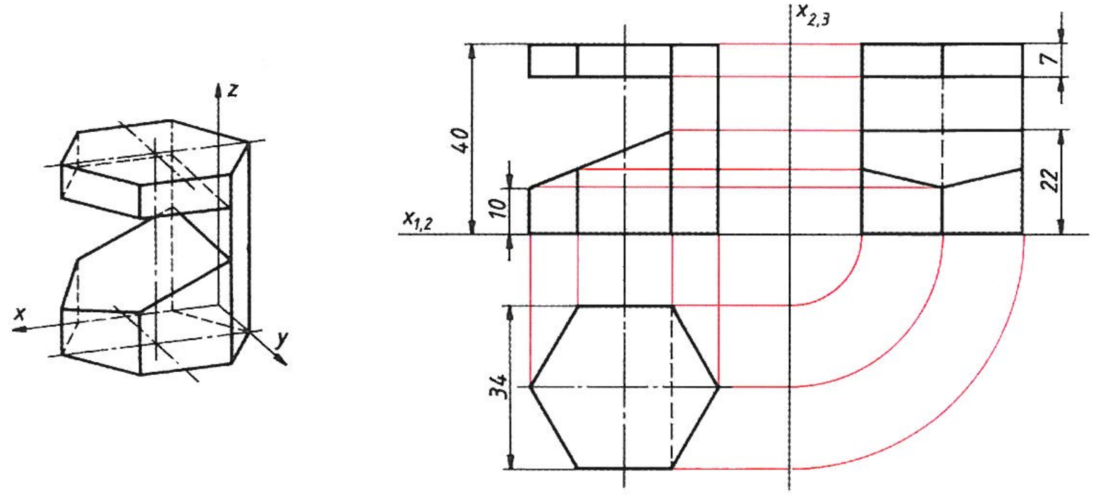
5.11. ábra. A csonkolt kocka felületelemzése

Határoló lapok azonosítása (**5.11.**c) ábra). A jelölésre a római számokat használjuk. A művelet sorrendjét az előzőek szerint határozhatjuk meg. Ügyeljünk a fedőlapok (itt az egymást takaró lapok) jelölésének sorrendjére!

Gyakoroljuk a tanultakat a **38., 39. munkalapon!** A **39.** munkalapot tekintsük elrendezési példának a további önálló feladatmegoldásához (pl. a példatári feladatok megoldásához)!

A csonkolt hasáb ábrázolása

A csonkolt hasábok ábrázolásával kapcsolatos feladatmegoldás a csonkolt kockához hasonlóan a feladatmeghatározástól függ. Az ábrázolás lépései, a részfeladatok megoldása, a felületelemzés rendje a csonkolt kockáéval azonos. Mindezek figyelembevételével elemezzük egy csonkolt, szabályos hatszög alapú hasáb kétméretű axonometrikus és vetületi ábrázolását az **5.12.** ábra alapján!

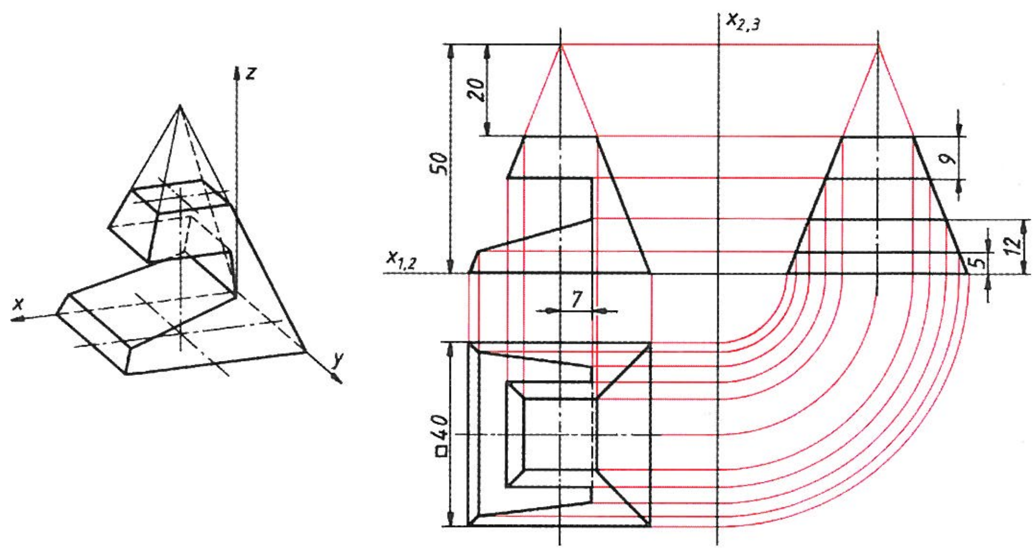


a) *b)*

5.12. ábra. Csonkolt hasáb ábrázolása
a) kétméretű axonometrikus képe; *b)* vetületi ábrázolása

A csonkolt gúla ábrázolása

Az eddigiekhez hasonlóan oldjuk meg a csonkolt gúla ábrázolásával kapcsolatos feladatokat is. Az **5.13.** ábra alapján elemezzük egy csonkolt, négyzetes gúla kétméretű axonometrikus és vetületi ábrázolását!



a) *b)*

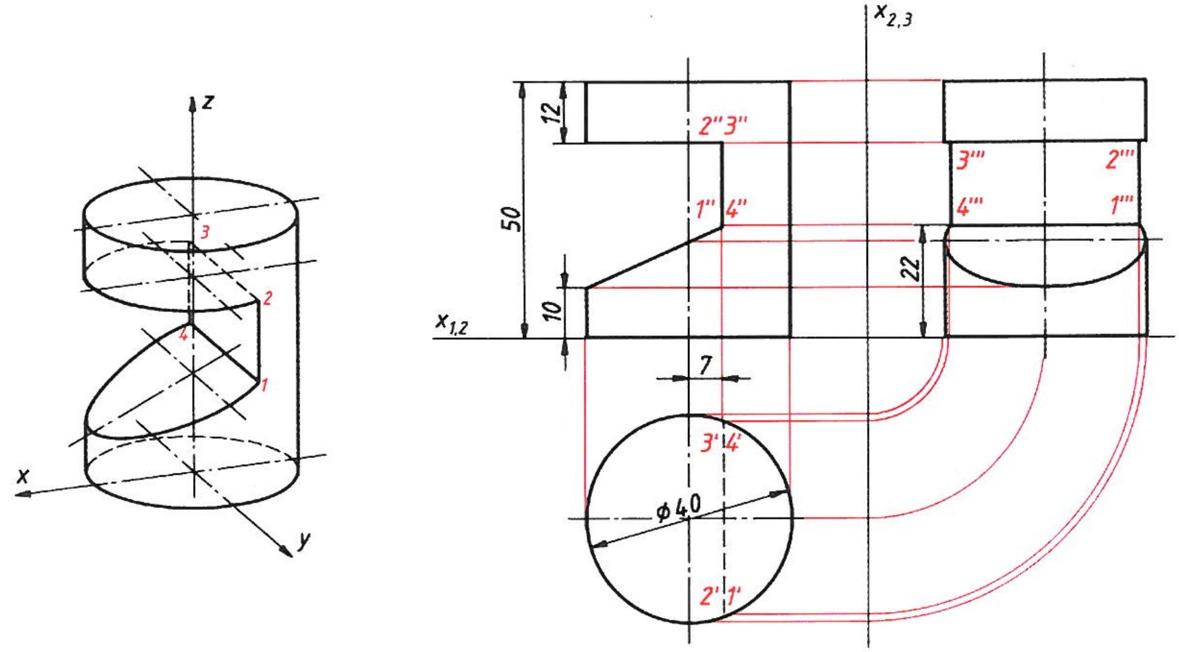
5.13. ábra. Csonkolt gúla ábrázolása
a) kétméretű axonometrikus képe; *b)* vetületi ábrázolása

5.2.2. Csonkolt forgástestek ábrázolása

A csonkolt henger ábrázolása

A forgástestek csonkolását csak összetett síkmetszéssel tudjuk megoldani. Könnyen belátható, hogy akár felépítéssel, akár lebontással kívánjuk létrehozni az új alakzatot, az *építőelemek is legtöbb esetben csonkolt testek lesznek.*

Az ábrázolást megelőző feladatunk a felületelemzés. A metszősíkokat a forgástengelyhez viszonyítva elemezzük! A henger ábrázolásán keresztül (**5.14.** ábra) kövessük nyomon a csonkolt forgástestek ábrázolásának módját!



a) *b)*

5.14. ábra. Csonkolt henger ábrázolása
a) kétméretű axonometrikus képe; *b)* vetületi ábrázolása

Vetületi ábrázolás axonometrikus kép alapján

A csonkolás három sík hengermetszetének eredménye. Egy tengelyre merőleges, egy tengellyel párhuzamos és egy általános helyzetű (a tengelyt hegyesszögben metsző) sík metszete. A síkok egymást is metszik a *2–3* és az *1–4* élekben. A csonkolt felületeket a síkmetszetek és a metszőélek határolják. Az ábrázolás lépései a következők.

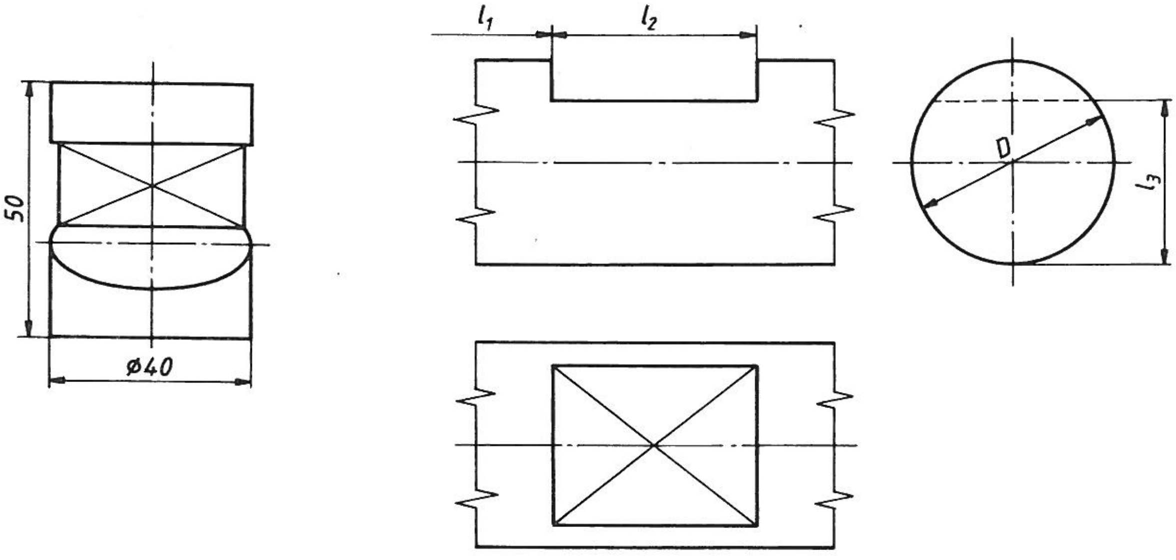
- Ábrázoljuk a befoglaló hengert a képsíkrendszerben!
- Megválasztjuk az elölnézet irányát úgy, hogy a metszősíkok második vetítősíkok (V_2) legyenek.
- A méretek ismeretében ábrázoljuk a csonkolt henger elölnézetét.
- Az elölnézet alapján ábrázoljuk a felülnézetet és a kettő alapján az oldalnézetet. A szerkesztéshez felhasználjuk a metszőélek és a hengerpalást döféspontjait (*1–4* csúcsok vetületeit), valamint a szélső pontokat (a kontúralkotókon lévő pontok).
- A feladatot a méretházózat felépítésével fejezzük be.

Axonometrikus ábrázolás a vetületi képek alapján

- A feladattól függően ábrázoljuk az axonometriatengelyeket.
- Ábrázoljuk az alaplapot és a tengelyek által meghatározott alkotókat, majd az alaplapon a metszőélek vetületét (felülnézet alapján) és a hozzájuk tartozó alkotókat.

- A méreteket a megfelelő alkotókra mérjük, majd megrajzoljuk az ellipszisek ábrázolását segítő romboidokat. A pontok azonosítására alkalmazzuk az alapkör pontjaiba rajzolt alkotókat!
- Elkészítjük az egyes síkfelületek rajzát, majd a láthatóság szerint megrajzoljuk az éleket és a kontúralkotókat.

Elemezzük az **5.14.** ábrán az oldalnézetet! A csonkolt henger vetülete a *4'''–1'''* él fölött két darab téglalap. A felsőről tudjuk, hogy hengerfelület, az alsóról pedig, hogy síkfelület. A könnyű felismerést szabványos jelkép teszi lehetővé, amelyet az **5.15.** ábra mutat be.



5.15. ábra. A sík felületre utaló átló
a) alkalmazása a csonkolt hengeren; *b)* példa gyakorlati alkalmazására

A sík felületre utaló átló. Tagolt felületű forgástesten (összetett testen) található négyzet vagy téglalap alakú sík felületekre a négyszög átlóival hívjuk fel a figyelmet. *Az átlókat vékony, folytonos vonallal rajzoljuk.*

Az **5.15.***b)* ábra olyan gyakorlati példát mutat be, amellyel a későbbi tanulmányainkban gyakran találkozunk. A hengerdarab, ún. tengelylépcső egyszerű csonkolása az elölnézeten figyelhető meg. A tengellyel párhuzamos síkmetszését két tengelyre merőleges síkmetszés zárja le (V_2 vetítősíkok). Vetítősugarakkal oldal- és felülnézete megszerkeszthető. *A felülnézetre rajzoljuk a sík felületre utaló átlót.* Méreteinek megadásában kiemelést érdemel a csonkolás mélységének megadása. Az oldalnézeten figyelhetjük meg az l_3 méretet! A gyakorlatban mindig olyan méretet adunk meg, amely mérhető. Itt pl. a csonkolás méretét vastagsági (hossz-) méretben adtuk meg.

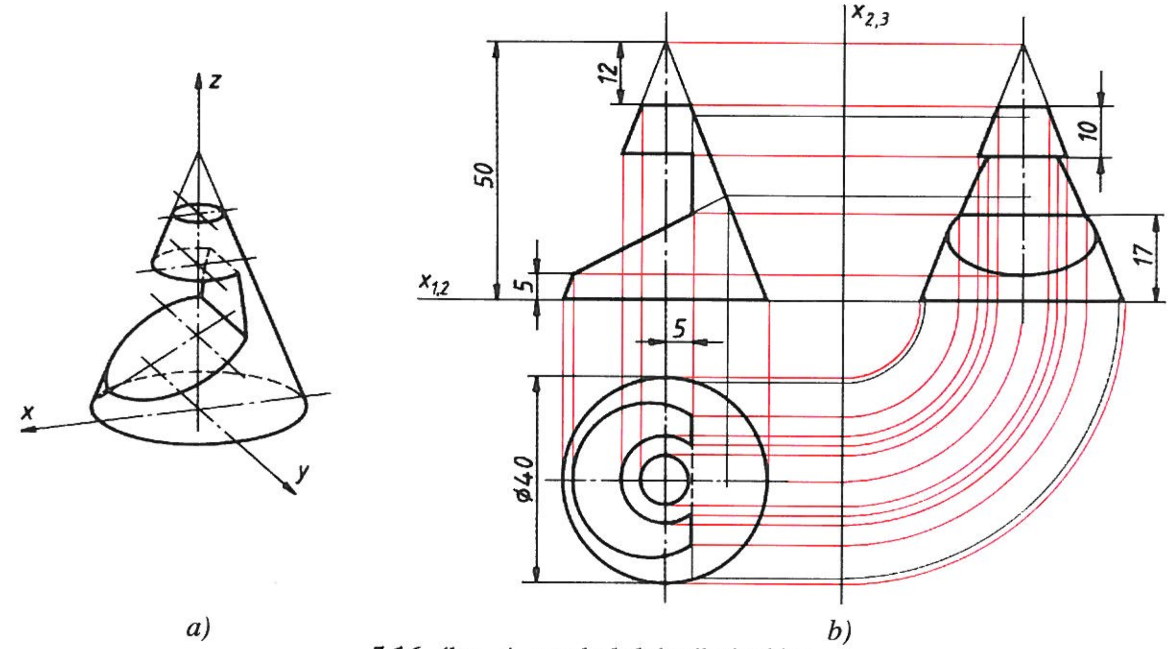
A hengereknek, tengelyeknek az **5.15.***b)* ábrán látható kialakítását **lapolásnak** nevezzük. A lapolás lehet egyoldali, kétoldali (párhuzamos) és négyoldali (négyzetes). (A négyoldali lapolás nem téveszthető össze a négyzetes oszloppal, mert a lapok között megmarad a hengeres felszín keskeny darabja.) A lapolás egyaránt alkalmazható tengelylépcsőn és tengelyvégen.

Gyakoroljuk a tanultakat a **40. munkalapon!**

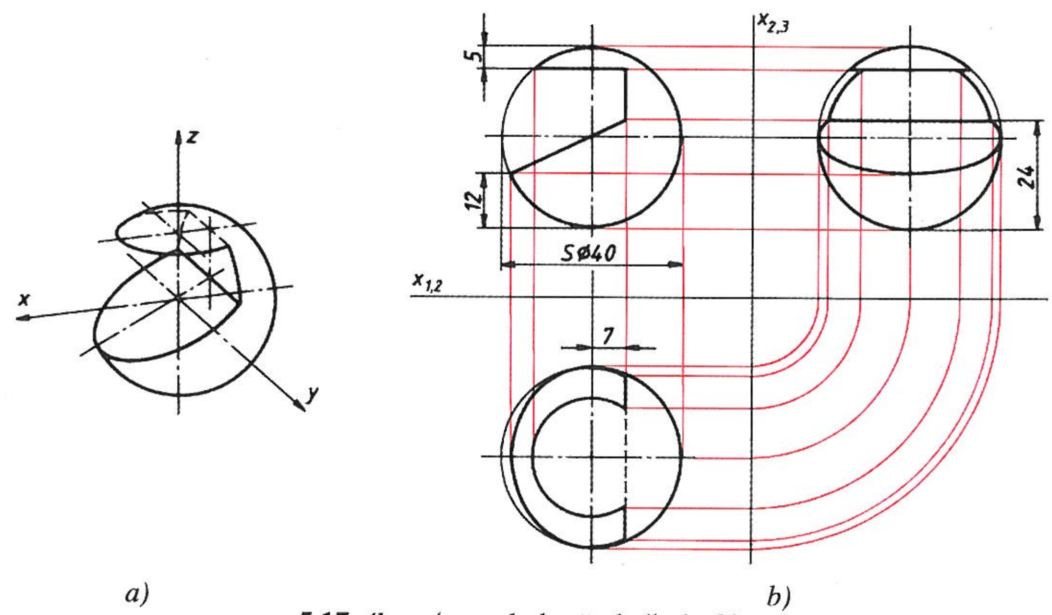
A csonkolt kúp ábrázolása

A csonkolt henger ábrázolásánál tanultakat alkalmazzuk a csonkolt kúp (ne tévesszük össze a csonkakúppal) ábrázolásánál is. Elemezzük az **5.16.** ábrát és egyúttal figyeljük meg a kúp jellemzőiből adódó sajátosságokat!

Az ábrázolt csonkolt kúp két körmetszet, egy hiperbolametszet és egy ellipszismetszet eredménye. *A metszőélek végpontjai a szomszédos síkokon keletkezett görbék közös pontjai.* A görbék pontjait a kúp síkmetszésénél tanultak alapján szerkesztjük. A csúcspontokat és szélső pontokat akkor is jelöljük ki, ha az adott görbének csak a metszőélig tartó, ill. metszőélek közötti részét rajzoljuk meg. Az ábrán ezt vékony fekete vonal szemlélteti.



5.16. ábra. A csonkolt kúp ábrázolása
a) kétméretű axonometrikus képe; *b)* vetületi ábrázolása



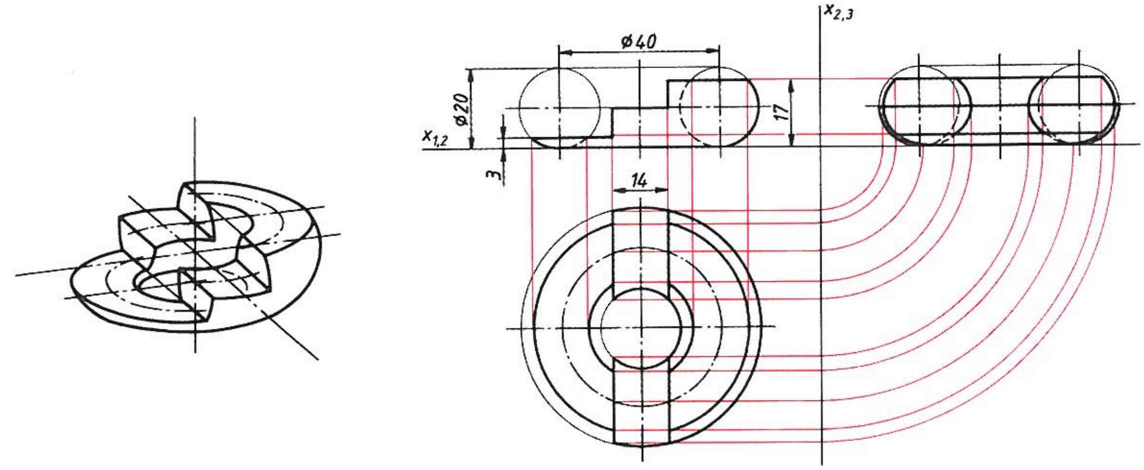
5.17. ábra. A csonkolt gömb ábrázolása
a) kétméretű axonometrikus képe; *b)* vetületi ábrázolása

A csonkolt gömb ábrázolása

Az eddigiekhez hasonlóan oldjuk meg a csonkolt gömb ábrázolásával kapcsolatos feladatokat is. Az **5.17.** ábra alapján elemezzük a csonkolt gömb kétméretű axonometrikus és vetületi ábrázolását!

A csonkolt körgyűrűfelület ábrázolása

Az **5.18.** ábrán egy lépcsőzetesen csonkolt tórusz axonometrikus és vetületi ábrázolását figyelhetjük meg.



a) b)

5.18.ábra. A csonkolt körgyűrűfelület ábrázolása
a) kétméretű axonometrikus képe; *b)* vetületi ábrázolása

5.3. Áthatásból származó összetett testek vetületi és axonometrikus ábrázolása

Az 5. fejezet bevezetéseként, az összetett testek értelmezésénél és csoportosításánál megtanultuk a testek áthatásának fogalmát és csoportosítását. A következőkben megismerjük további jellemzőit és a testek felszíne szerinti csoportosításban szerkesztésük módját.

Az áthatásban lévő testek felületén olyan határolóvonalak keletkeznek, amelyek *elválasztják egymástól a két test felületeit.* Ezeket a vonalakat **áthatási vonalaknak** nevezzük. Az áthatási vonalak *lehetnek áthatási élek* és *folyamatos átmenetek.* Elhelyezkedhetnek a *síkban* és a *térben.*

Az áthatási vonalak az áthatások legjellemzőbb vonalai. A testek áthatásának ábrázolásában az áthatási vonalakat szerkesztjük meg. Az áthatási vonalak legfontosabb jellemzői a következők.

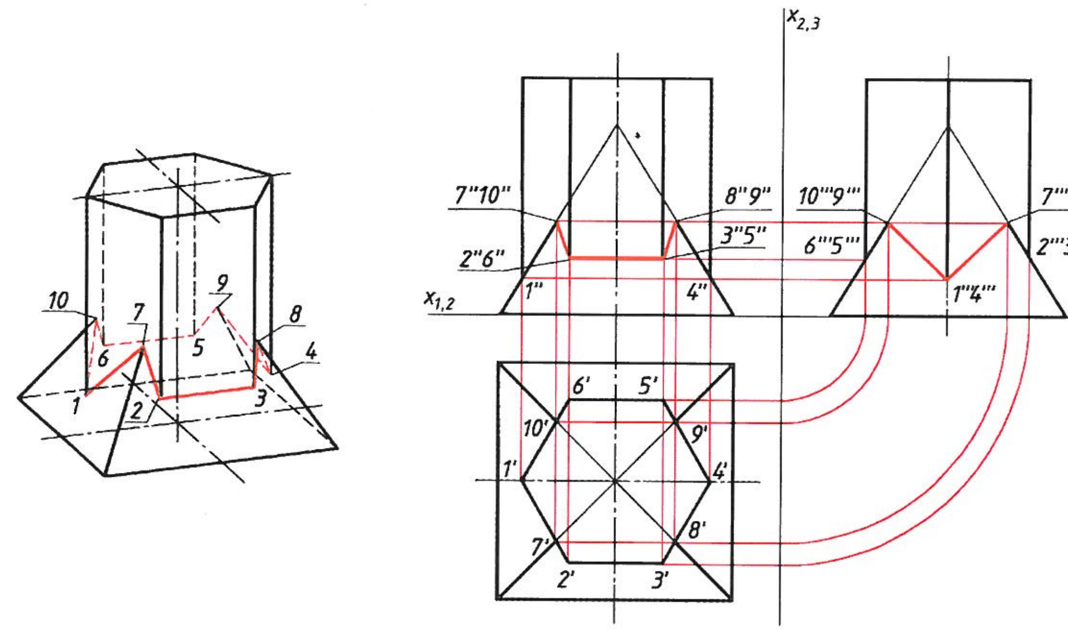
- Az áthatási vonal a két felület metszővonala.
- Az áthatási vonal mindkét testen rajta van.
- Az áthatási vonal pontjai a két test közös pontjai.

Az áthatásból keletkező testet vizsgálva három lehetőség adódik. Foglalkozhatunk a keletkező teljes testtel, a keletkező testtel a közös rész nélkül és csak a közös résszel. Az ábrázolás során először az első változattal foglalkozunk, és ahol indokolt, ott kitérünk a másik két változatra is. A testek áthatásával egyetlen összetett test keletkezik, így felületükön belül az egyes testek vonalai nem értelmezhetőek, ezért azokat nem ábrázoljuk. Ceruzarajznál megengedett, hogy szerkesztési vonalként a rajzlapon maradjanak. Tankönyvünk ábráin a könnyebb megértés kedvéért vékony folytonos vonallal ábrázoltuk őket.

5.3.1. A síklapú testek áthatása

Síklapú testek áthatásánál az áthatási vonalak egyenes élek. A testek élei döfik a másik test felszínét. **Az áthatási élek a döféspontokat összekötő egyenes szakaszok.** A síklapú testek áthatásánál az áthatási élek szerkesztése tehát visszavezethető a síklapú testek döfésére egyenesekkel.

Közös tengelyű síklapú testek áthatása



a) *b)*

5.19. ábra. Közös tengelyű síklapú testek áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Az **5.19.** ábra egy szabályos hatszög alapú hasáb és egy négyzetes gúla áthatásának szerkesztését mutatja be.

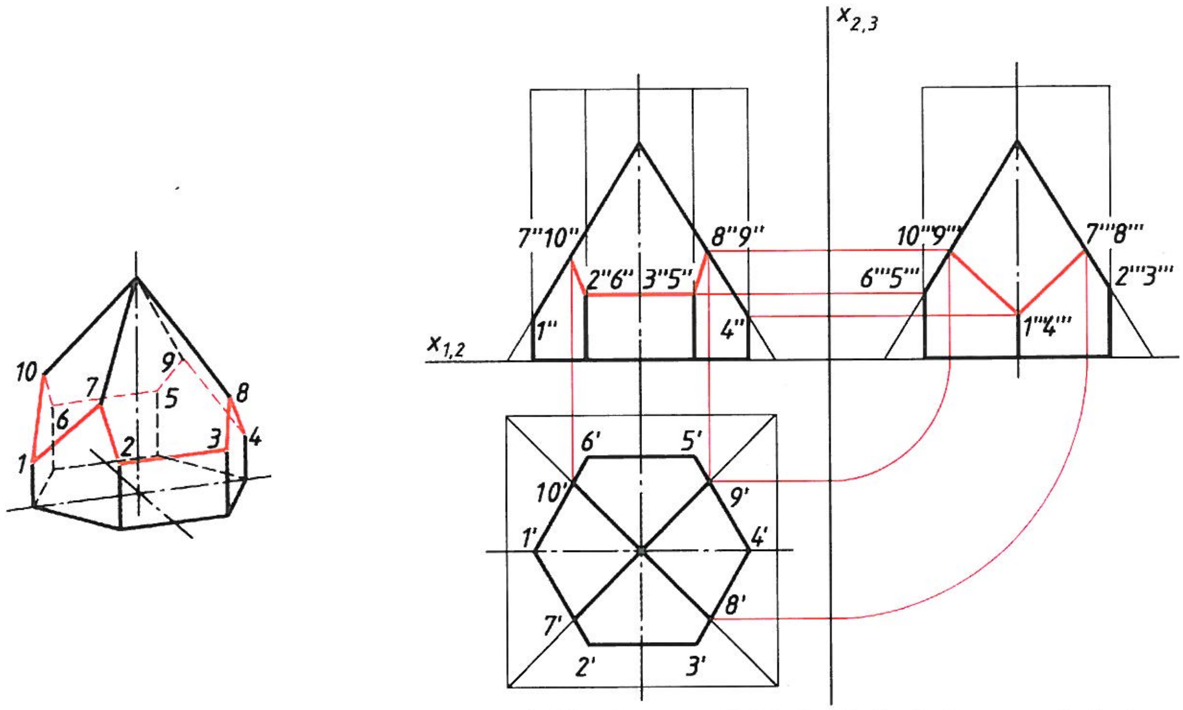
- Az áthatások szerkesztésének első lépése, hogy a képsíkrendszerben ábrázoljuk mindkét, az áthatásban részt vevő testet. A testek vonalai vékonyak legyenek!
- Elemezve a vetületeket, megkeressük azokat a döféspontokat, amelyek az eddigi ábrázolásból közvetlenül adódtak. Az **5.19.** ábrán ilyen pontok az elölnézeten a testek kontúrvonalainak metsződései, azaz *1"* és *4"* döféspontok. Az oldalnézeten az előzőhöz hasonlóan a *6'"*; *5'"*, ill. *2'"*; *3'"* döféspontok.
- A hiányzó pontokat a döféspontok azonosításával keressük meg. Így az elölnézeten a felülnézetről határozhatóak meg a *7"*; *10"*, ill. *8"*; *9"* döféspontok, az oldalnézetről pedig *2"*; *6"*, ill. *3"*; *5"* döféspontok. Az oldalnézet hiányzó pontjai az elölnézetről *1'"*; *4'"*, valamint *10'"*; *9'"*, ill. *7'"*; *8'"* döféspontok (az utóbbiak a felülnézetről is azonosíthatóak).
- Az áthatási éleket a döféspontok összekötésével ábrázoljuk. A felülnézeten ellenőrizve a pontok követését (*1-7-2-3-8-4-9-5-6-10-1*), láthatóság szerint rajzoljuk meg a vonalakat. Az **5.19.** ábrán látható elrendezésben a nem látható élek mind fedett élek, így csak vastag folytonos vonalak látszódnak.

A szemléltető ábrán szembetűnőbb az eredmény, miszerint az áthatási élek egy térben elhelyezkedő sokszöget (térsokszöget) eredményeznek.

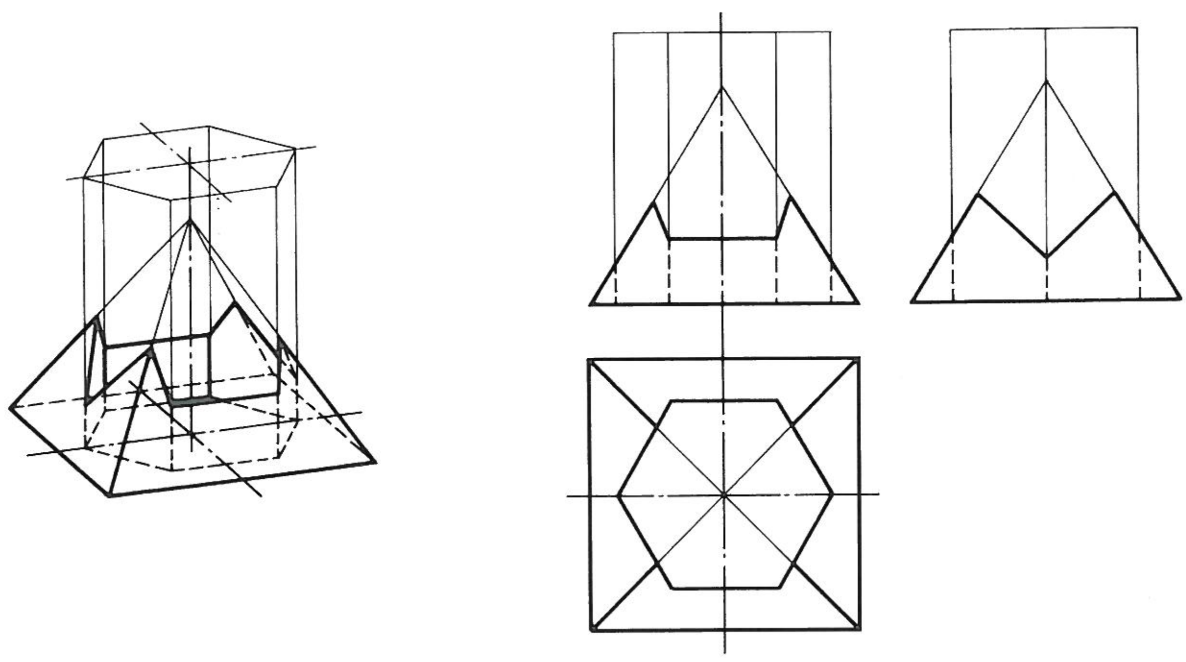
A közös tengelyű testek áthatásáról azt tanultuk az 5. fejezetben, hogy két áthatási vonal keletkezik. Elméletben ebben az elrendezésben is létezik második áthatási él-sokszög, de az a testek alaplapjaival közös síkban található, ezért a gyakorlatban élek nem képződnek.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen új alakzatok származtathatóak a közös tengelyű, szabályos hatszög alapú hasáb és négyzetes gúla áthatásából. Követjük az **5.19.** ábrán megfigyelhető elrendezést.

Az **5.20.** ábrán olyan alakzatot figyelhetünk meg, amelyen egy egyszerű mértani test egy másik egyszerű mértani testben folytatódik. A két test határolóvonalai *áthatási élek* (tér-sokszög), amelyek azonosak az **5.19.** ábrán látható áthatási élekkel. Ennek megfelelően a szerkesztés lépései is azonosak. A kapott alakzat további élei azonban mások. Az áthatásban részt vevő testek azon éleit rajzoljuk meg, amelyek benne vannak a másik testben. Ezzel olyan alakzatot ábrázolunk, amelyet mindkét test tartalmaz, azaz mindkét test közös részlete.



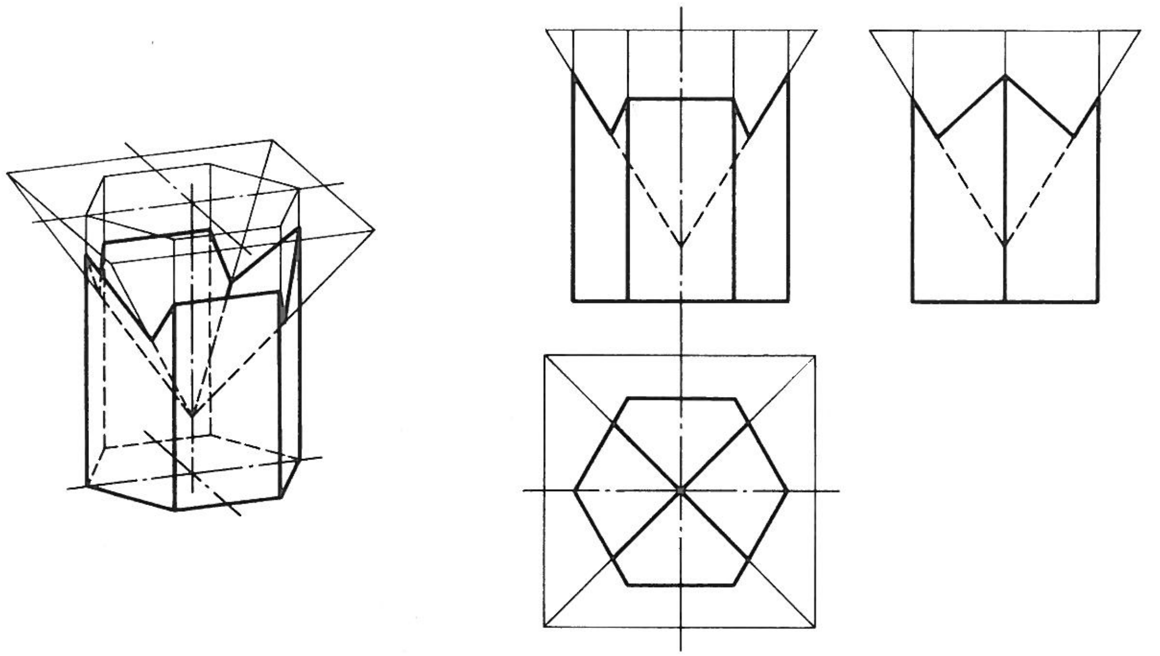
5.20. ábra. Közös tengelyű síklapú testek áthatása, a testek közös részletének megtartásával



5.21. ábra. Közös tengelyű síklapú testek áthatása üregeléssel

Az **5.21.** ábrán az előzőekkel azonos helyzetű testek áthatását tanulmányozhatjuk. Az áthatás eredménye azonban azoktól eltérő. A két test áthatásából egy új, összetett alakzat jött létre. Ez az alakzat úgy jött létre, hogy a négyzetes gúlát döftük a szabályos hatszög alapú hasábbal, amely a gúlán új felszíneket alakított ki. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az új alakzat egy szabályos hatszög alapú hasáb, mint negatív forma és egy négyzetes gúla, mint pozitív forma áthatásának eredménye. A kapott alakzatot elemezve tapasztalható a teljes áthatás. Az előző szerkesztésekkel azonos áthatási élek mellett megtalálhatóak a gúla alaplapján létrejött áthatási élek, amelyek azonosak a hasáb alaplapjának éleivel. A belső felületek a hasáb oldallapjaival, az élek pedig a hasáb éleivel azonosak. A szerkesztés befejezése után csak a gúla éleit rajzoljuk meg: az alapéleket, a megmaradó oldaléleket, az áthatási éleket és az új, belső éleket. Ügyeljünk a láthatóságra!

A műszaki gyakorlatban az alakzaton (gépalkatrészen) azonos keresztmetszetben áthatoló folytonossági hiányt (lyukat) **üregnek** nevezzük.



5.22. ábra. Közös tengelyű síklapú testek áthatása süllyesztéssel

Végül, az előző testelhelyezésnél maradva, az **5.22.** ábra segítségével elemezzük azt a változatot, amikor a gúla a negatív forma. A szabályos hatszög alapú hasábban a négyzetes gúla „lenyomata" képződik. A nézetrend megválasztása a kialakítás következménye, így az előzőekhez képest fordított. A szemléltető ábrán megfigyelhetőek a keletkezett alakzaton mind a hasáb, mind a gúla jellemzői és azok határolóvonalai, az áthatási élek. A vetületi ábrán a korábban megismert szerkesztést alkalmaztuk.

A műszaki gyakorlatban az alakzatban (gépalkatrészben) kialakított részleges folytonossági hiányt **süllyesztésnek** nevezzük.

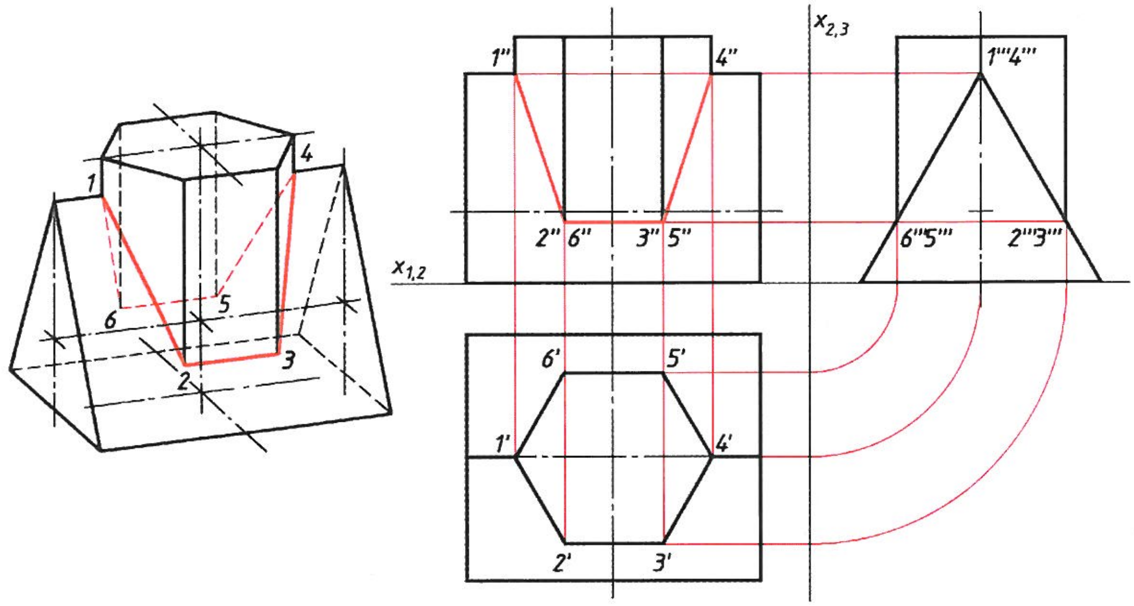
Gyakoroljuk a tanultakat a **41. munkalapon!**

Metsződő tengelyű síklapú testek áthatása

Az **5.23.** ábrán olyan szabályos háromszög alapú hasáb és szabályos hatszög alapú hasáb áthatását figyelhetjük meg, amelyeknek tengelyei merőlegesen metszik egymást.

A szemléletető képet (axonometrikus ábrát) elemezve azt tapasztaljuk, hogy síklapú testek áthatásában az oldalélek metszhetik egymást (*1* és *4* pont). A további pontok döféspontok. A szabályos hatszög alapú hasáb oldalélei a *2*; *3*; *5* és *6* pontokban döfik a szabályos háromszög alapú hasáb oldallapjait.

A vetületi ábrázolást a testek ábrázolásával kezdjük. A felülnézet alapján megállapíthatjuk, hogy az ábrázolt két test áthatása teljes áthatás. Mivel a két test alaplapja egy síkban van, ott az áthatási élek nem ábrázolhatóak (hasonlóan a közös tengelyű síklapú testek áthatásánál tapasztaltakhoz). A felülnézeten jelöljük a metsző- és döféspontokat (a szabályos hatszög alapú hasáb zárólapjának csúcsai fedik azokat). Az elölnézeten az *1"* és *4"* metszéspontok a testek ábrázolásából közvetlenül adódnak. A döféspontok az oldalnézetről, a kontúrvonalak metszéspontjából azonosíthatók.



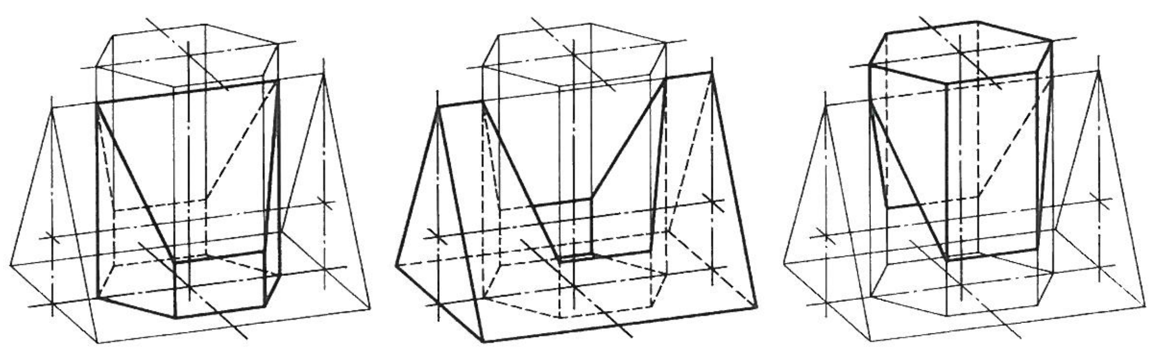
a) *b)*

5.23. ábra. Metsződő tengelyű hasábok áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása.

A metsződő tengelyű síklapú testek áthatásából származtatott formák

Elemzésüket a közös tengelyű testekhez hasonló módon tesszük. Így jellemzésük kiemelésére elegendő az axonometrikus képek megfigyelése. Az **5.24.** ábrán megtalálhatóak az áthatásból származtatható formák változatai.

Gyakoroljuk a tanultakat a **42. munkalapon!**



a) *b)* *c)*

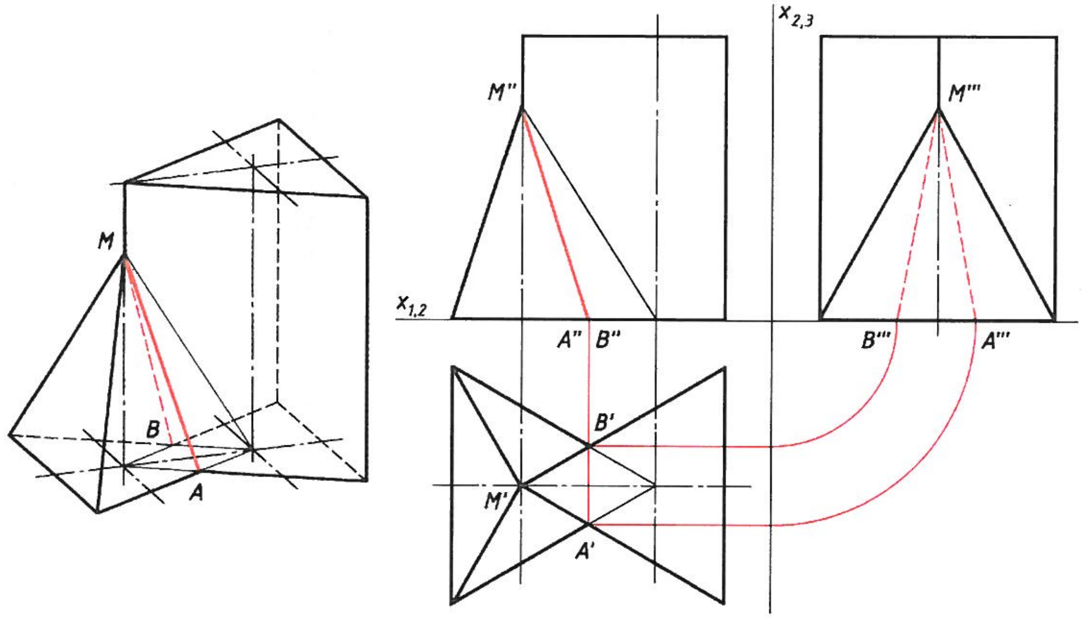
5.24. ábra. A metsződő tengelyű síklapú testek áthatásából származtatott formák
a) a testek közös részletének megtartásával keletkezett alakzat;
b) a hasáb döfésével keletkezett alakzat; *c)* a hasáb bevágódásával keletkezett alakzat

Párhuzamos tengelyű síklapú testek áthatása

Az **5.25.** ábra olyan szabályos háromszög alapú gúla és szabályos háromszög alapú hasáb áthatását mutatja be, amelyeknek tengelyei egymással párhuzamosak.

Az áthatási élek nem alkotnak zárt él-sokszöget, ill. az *AB* áthatási vonal az alaplapokkal közös síkba esik. Az ábrázolt áthatás *részleges áthatás*. Az áthatási élek *A* és *B* végpontjait a felülnézeten a testek alaplapjának metszéspontjai határozzák meg. Az áthatási élek másik végpontja egybeesik a gúla *M* csúcsával. Az elölnézeten A''–M'' áthatási él fedőegyenese a B''–M'' áthatási élnek. A felülnézeten a hasáb zárólapjának élei fedőegyenesei az áthatási éleknek. Az oldalnézeten az áthatási élek nem látható vonalak.

Gyakoroljuk a tanultakat a **43. munkalapon!**

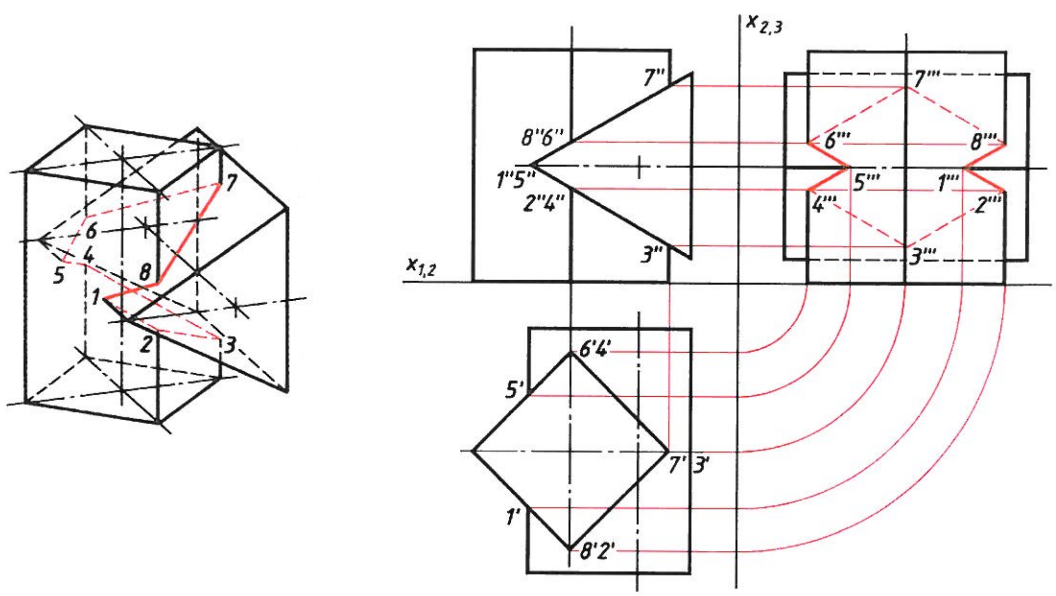


a) *b)*

5.25. ábra. Párhuzamos tengelyű síklapú testek áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Kitérő tengelyű síklapú testek áthatása

Az **5.26.** ábra olyan szabályos háromszög alapú hasáb és négyzetes hasáb áthatását mutatja be, amelyeknek tengelyei kitérőek.



a) *b)*

5.26. ábra. Kitérő tengelyű síklapú testek áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Az áthatási élek egyetlen, zárt tér-sokszöget alkotnak. Az ábrázolt áthatás *részleges áthatás*. Az áthatási élek végpontjait az egyik test oldaléleinek döféspontjai határozzák meg a másik test oldallapjain. Az elöl-és felülnézeten a testek zárólapjainak élei az áthatási élek fedőegyenesei. A két vetület összevetésével az áthatási élek azonosíthatóak a döféspontok jelölésével.

Gyakoroljuk a tanultakat a **44. munkalapon!**

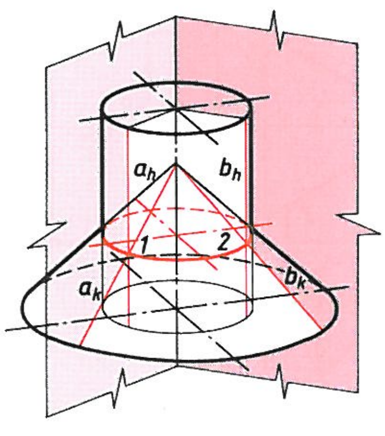
5.3.2. A forgástestek áthatása

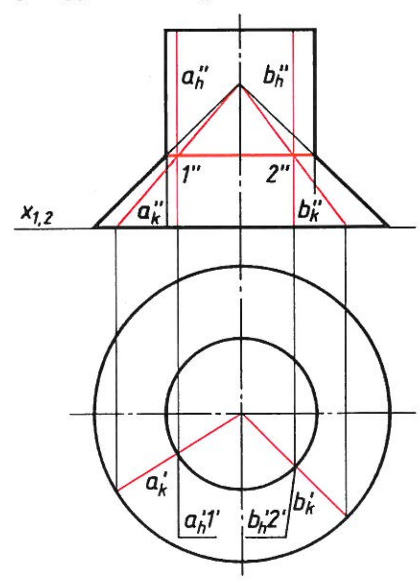
A síklapú testek és a forgástestek áthatásában a legnagyobb különbség az áthatási vonalak között van. Amíg a síklapú testeknél csak élekkel találkoztunk (leszámítva a közös alaplapok síkjába eső áthatási vonalakat), addig a forgástesteknél az áthatási vonalak lehetnek élek és lehetnek folyamatos átmenetek. Az áthatási élek elhelyezkedhetnek egy síkban (pl. kör, ellipszis), de leírhatnak térben elhelyezkedő görbét is.

Közös tengelyű forgástestek áthatása

A közös tengelyű forgástestek áthatásának eredménye mindig kör. Ezt egy kúp és egy henger áthatásán keresztül vizsgáljuk meg az **5.27.** ábra alapján!

Megállapításunk igazolására használjuk fel a forgástestek származtatásáról tanultakat! A leíróegyenes zárólapok közötti szakasza az alkotó. Forgatás közben az alkotó pontjai a forgástengelyre merőleges, egymással párhuzamos köröket, paralelköröket írnak le. Az alkotók a forgástengellyel közös síkban (meridiánsíkban) helyezkednek el. Henger és kúp közös tengelyű áthatásánál ebben a közös síkban van a henger és kúp alkotója is. Alkotóik metszik egymást és a forgatás közben ez a metszéspont is párhuzamos kört ír le. Ez a párhuzamos kör rajta van mind a henger, mind a kúp palástján. A két test közös párhuzamos köre a közös tengelyű henger és kúp áthatási éle. A **5.27.** ábrán a forgatás két állapotát ábrázoltuk. A jelöléseknél alsó indexben adtuk meg, hogy az *a* vagy *b* alkotó a henger (*h*) vagy a kúp (*k*) alkotója. A forgástengellyel azonos síkban lévő *a* jelű alkotók az *1* pontban, a *b* jelűek pedig a *2* pontban metszik egymást. A metszéspontok a henger és kúp közös párhuzamos körén vannak. Belátható, hogy bármely egymást metsző alkotópár metszéspontja ugyanezen a párhuzamos körön található.

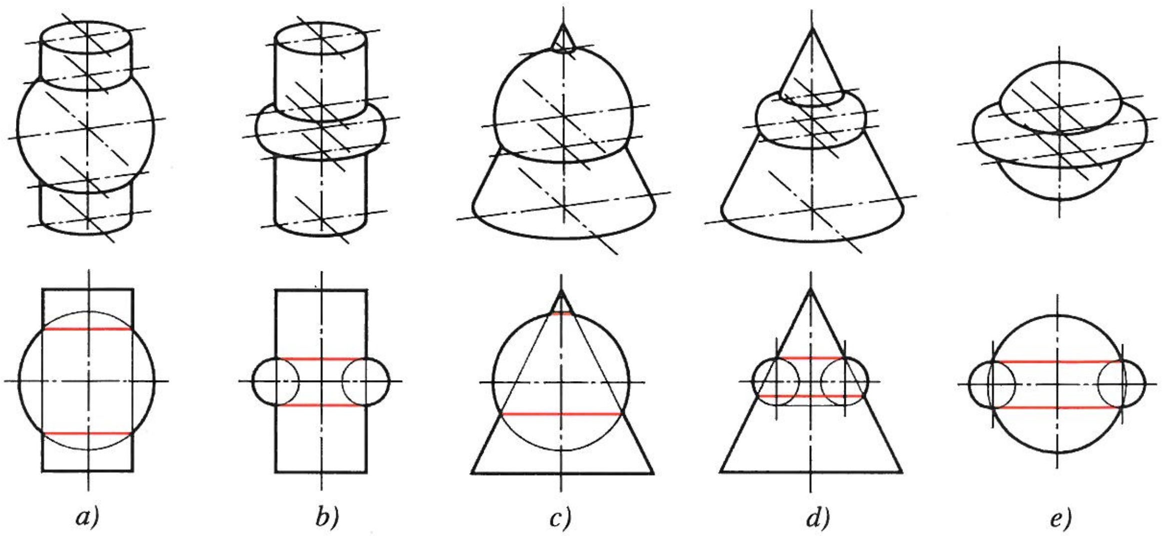




a) *b)*

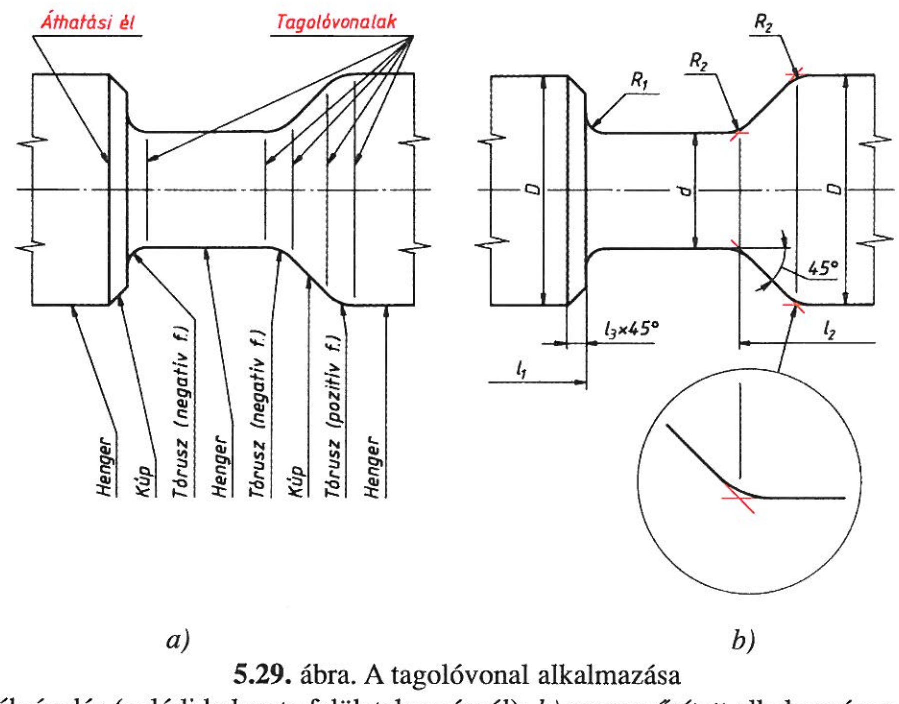
5.27. ábra. Közös tengelyű kúp és henger áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Megállapításunk igaz a leíró körrel származtatott forgástestek esetében is. Kiterjesztve megfigyelésünket, a leíró egyenesek és leíró körök metszéspontjai a közös tengely körül megforgatva, párhuzamos köröket írnak le. A párhuzamos körök egyben a közös tengelyű forgástestek áthatási élei. Ezt figyelhetjük meg az **5.28.** ábra példáin.



5.28. ábra. Közös tengelyű forgástestek áthatása
a) henger és gömb áthatása; *b)* henger és tórusz áthatása;
c) kúp és gömb áthatása; *d)* kúp és tórusz áthatása; *e)* gömb és tórusz áthatása

Vetületi ábrázolásban az áthatás eredménye az elölnézeten (ill. ahol a tengely párhuzamos a képsíkkal) a kontúralkotók metszéspontját összekötő egyenes szakasz.

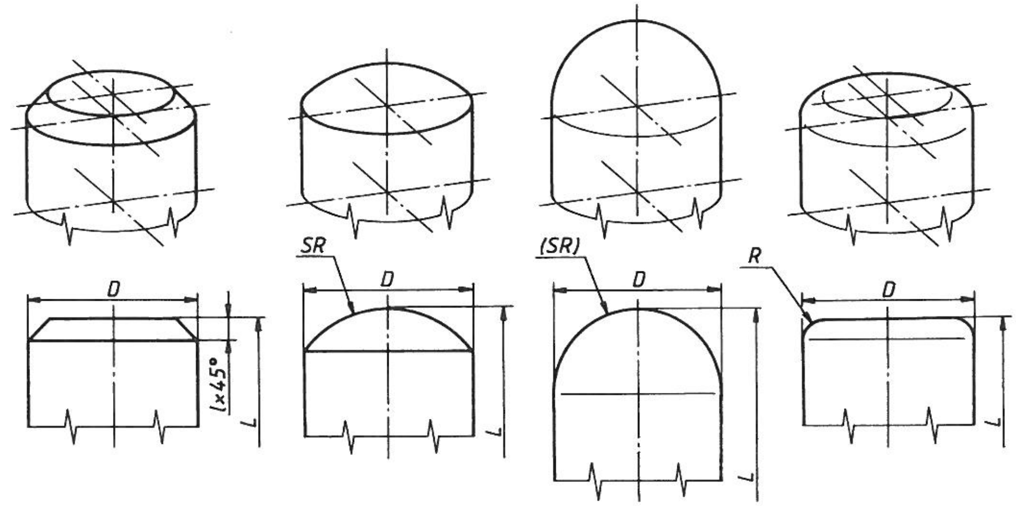


5.29. ábra. A tagolóvonal alkalmazása
a) részletes ábrázolás (valódi helyzete felületelemzésnél); *b)* egyszerűsített alkalmazása a gyakorlatban

A közös tengelyű forgástestek áthatásánál gyakran fordulnak elő **folyamatos átmenetek** az áthatásban résztvevő testek felülete között. Eddig az ábrázolási gyakorlatban élek ábrázolásával mutattuk meg a különböző alakzatok határait. Így a felületeken kialakult folyamatos átmenetek nem ábrázolhatóak. Egyezményes jelképpel viszont felhívhatjuk a figyelmet két különböző alakzat határára (áthatására). Ez a jelkép a **tagolóvonal.** Ábrázolását és alkalmazását az **5.29.** ábra alapján figyeljük meg!

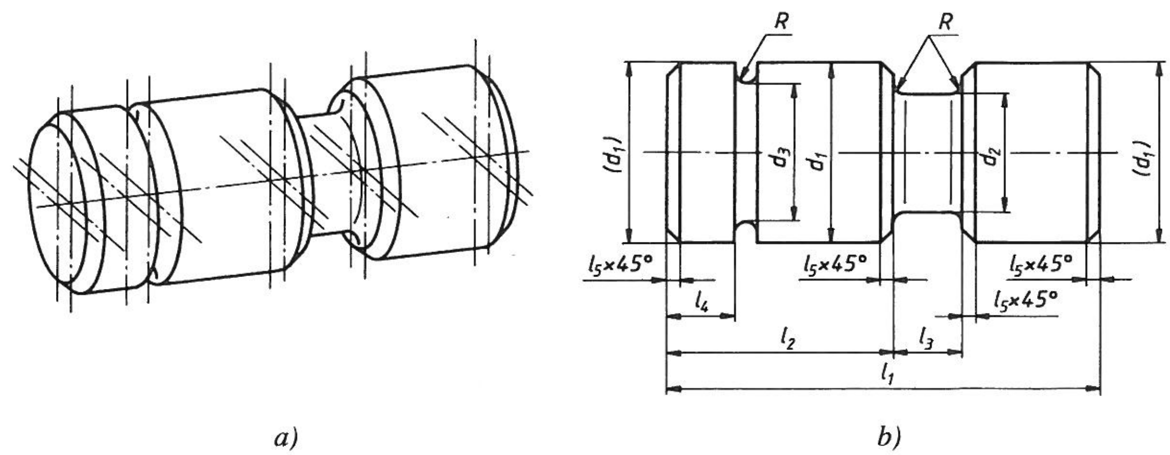
A tagolóvonal olyan ábrázolási jelkép, amely a folyamatos átmenetű áthatási vonalak rajzi jelölésére való. *Vékony, folytonos vonallal ábrázoljuk,* amelyet a kontúrvonalak közelében megszakítunk. A kontúrvonalaktól 1,5–2 mm-es távolságot hagyunk ki. A **5.29.***a)* ábrán látható minden tagolóvonal. Segítségükkel egyszerűbb a felületelemzés. A különböző felületek jól elkülönülnek. A részletes ábrázolás (különösen kis méretű lekerekítések esetén) fölöslegesen teszi zsúfolttá a rajzot. Ezért a gyakorlatban az egyszerűsített ábrázolást alkalmazzuk. Az **5.29.***b)* ábrán ezt az ábrázolási módot figyelhetjük meg. Az egyértelmű felületeknél nem ábrázoljuk, pl. az R_1 mérettel jelölt körgyűrűfelület és hengerfelület között. Más esetben, mint pl. az R_2 mérettel jelölt lekerekítéseknél nem követjük a részletes felületeket, hanem a tagolóvonalat *a kontúrvonalak metszéspontjai között rajzoljuk meg*. Rajzolási módját a kinagyított részlet mutatja meg. Az egyszerűsített ábrázolás előnye a méretmegadásban is megfigyelhető. A kúpos felület hosszúsági méreténél (l_2) a tagolóvonal méretvonal-határoló is.

A műszaki gyakorlatban egyik leggyakrabban előforduló áthatás a közös tengelyű forgástestek áthatása. Az alkalmazási példák közül tekintsünk át két jellegzetes területet! A hengerek végződése a gyakorlatban tengelyek, csapok, kötőgépelemek végződéseit jelenti. Ezt ábrázolja az **5.30.** ábra.



5.30. ábra. Tengelyvégződések
a) élletörés (henger és csonkakúp áthatása); *b)* gömbölyítés (henger és gömbszelet áthatása); *c)* gömbölyítés (henger és félgömb áthatása); *d)* gömbölyítés (henger és körgyűrűfelület áthatása)

A másik jellegzetes terület, ahol közös tengelyű forgástestek áthatásával találkozunk, az a *tengelyek ábrázolása*. Szerepükkel, csoportosításukkal, részletes kialakításukkal a későbbiekben részletesen foglalkozunk. Az **5.31.** ábrán azt elemezzük, hogy milyen felületek találhatók a tengelyen, hol vannak áthatási élek és folyamatos átmenetek. Figyeljük meg, hogy hol alkalmazunk élletörést, ill. lekerekítést!



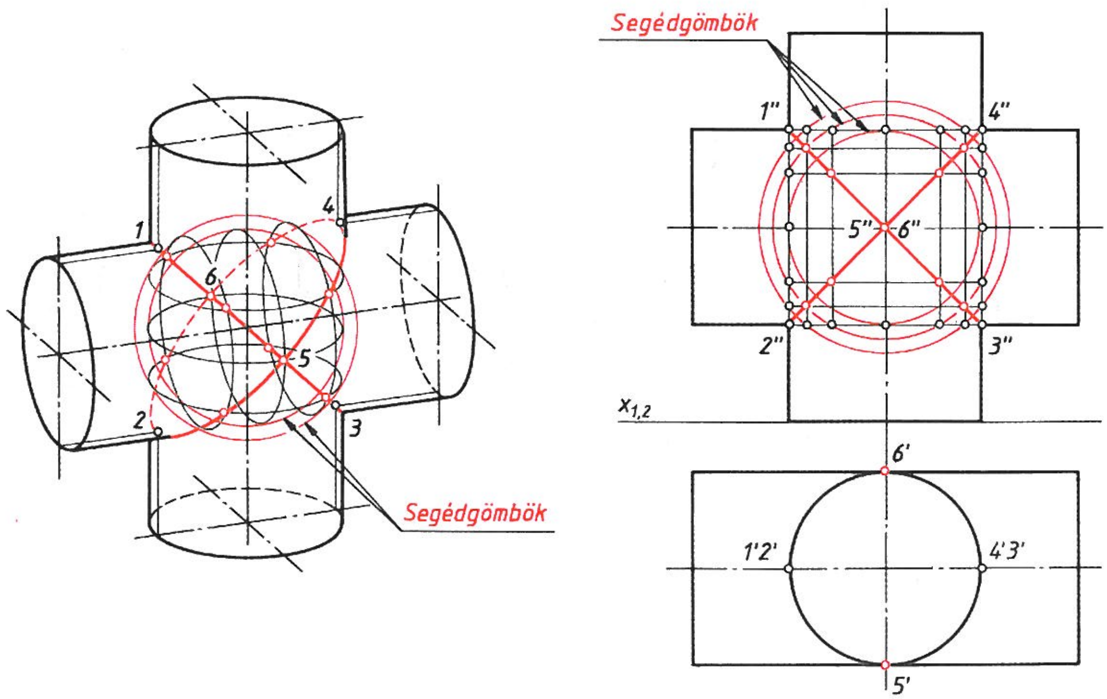
5.31. ábra. Tengely
a) szemléltető képe; *b)* ábrázolása egy vetületben

Metsződő tengelyű forgástestek áthatása (szerkesztés segédgömbökkel)

A metsződő tengelyű forgástestek áthatását hengerek áthatásával vizsgáljuk meg! Először olyan azonos átmérőjű hengereket válasszunk, amelyeknek tengelyei merőlegesek egymásra és párhuzamosak a második képsíkkal!

Merőlegesen metsződő tengelyű, azonos átmérőjű hengerek áthatása

Amennyiben az előzőekben rögzített módon ábrázoljuk a hengereket a képsíkrendszerben, közvetlenül adódnak olyan pontok, amelyek mindkét henger palástján megtalálhatóak (**5.32.** ábra). Így az elölnézeten a kontúralkotók metszéspontjai (*1"–4"*) és a felülnézeten a hengerek érintési pontjai (*5'–6'*). Ezek az érintési és metszőpontok egyben a két test áthatási vonalának pontjai is. További áthatási pontokat eredményez az ún. **segédgömbös módszer.**



a) *b)*

5.32. ábra. Merőlegesen metsződő tengelyű, azonos átmérőjű hengerek áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

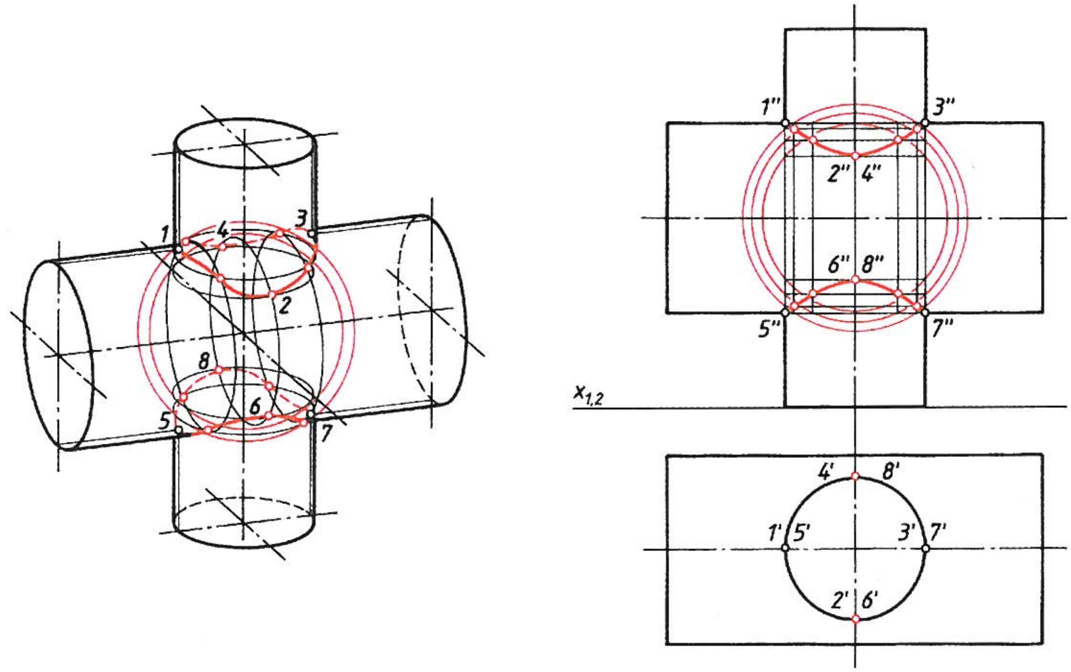
Segédgömböknek nevezzük azokat a célszerűen választott gömböket, amelyeknek középpontjai egybeesnek a hengerek tengelyeinek metszéspontjával és van olyan felületi pontjuk, amely rajta van mindkét henger felszínén.

Ebből következik, hogy a legkisebb segédgömb átmérője egyenlő a hengerek átmérőjével (a kisebb átmérőjű gömböknek nincs közös pontja a hengerekkel). A legnagyobb segédgömb fk_2 második gömbi főkörén (az elölnézeten vetülete kör) rajta vannak a hengerek kontúralkotóinak *1"–4"* metszéspontjai (a nagyobb átmérőjű gömböknek nincs olyan pontja, amely mindkét hengeren rajta van). Mivel az *1"–4"* metszéspontok mint áthatási pontok az ábrázolásból közvetlenül adódnak, a legnagyobb segédgömböt nem alkalmazzuk.

Az **5.32.***a)* ábrán figyeljük meg a segédgömbök alkalmazásának elméletét! A szerkesztéshez a segédgömbök és a hengerek áthatását, pontosabban a keletkezett áthatási vonalakat használjuk fel. Az ábrán vékony, piros vonallal mutattuk meg a segédgömbök kontúralkotóit és vékony, fekete vonallal az áthatási vonalakat. A kisebbik segédgömb egy-egy áthatási vonalat képez a két hengerrel. Metszéspontjuk az *5* és *6* pont, amelyek a hengerek áthatási pontjai. A nagyobbik segédgömb a hengerekkel két-két áthatási vonalat képez, amelyek metszéspontjai adják a hengerek áthatásának további pontjait. Az ábrán számjel nélküli nullkörökkel ábrázoltuk őket. A kapott pontokon keresztül megrajzolhatók a hengerek áthatási vonalai, amelyek az *5* és *6* pontban metsződő két ellipszisél. *A metsződő tengelyű hengerek áthatása mindig teljes áthatás.*

Az **5.32.***b)* ábrán az előzőeket követjük. A szerkesztés lépéseit az elölnézeten figyelhetjük meg.

- Ábrázoljuk a hengereket és jelöljük kontúralkotóik metszéspontjait!
- A hengerek tengelymetszetéből megrajzoljuk a segédgömbök főköreit.
- A főkörök metszik a hengerek alkotóit (fekete nullkörök). Az azonos főkörökhöz tartozó metszéspontokat összekötve ábrázoljuk a segédgömbök és a hengerek áthatási vonalait.
- Az azonos főkörökhöz tartozó áthatási vonalak metszik egymást (piros nullkörök), amelyeken át megrajzoljuk az eredményt, a merőlegesen metsződő tengelyű, azonos átmérőjű hengerek áthatási éleit.



a) *b)*

5.33. ábra. Merőlegesen metsződő tengelyű, különböző átmérőjű hengerek áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Merőlegesen metsződő tengelyű, különböző átmérőjű hengerek áthatása

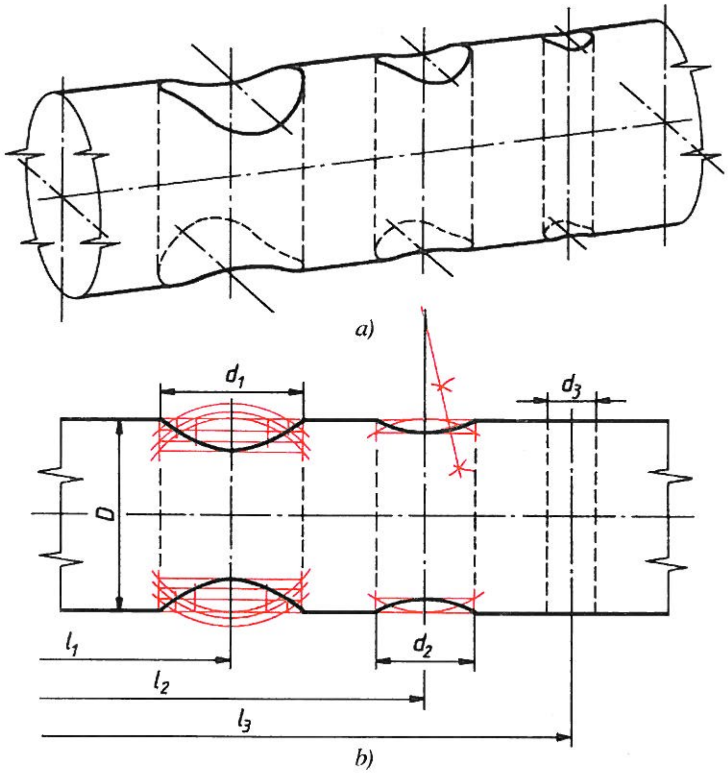
A megoldást itt is a segédgömbök alkalmazása nyújtja (**5.33.** ábra). A legkisebb segédgömb átmérője a nagyobbik hengerátmérővel egyenlő (attól kisebb gömbátmérő esetén a nagyobb átmérőjű hengerrel nem lenne közös pont). Az áthatási pontokat ebben az esetben is a hengerek és segédgömbök áthatási vonalainak metszete adja. A kapott pontokon át rajzolhatók meg az áthatási élek, amelyek jellegzetes térgörbék. Ez leginkább a szemléltető ábrán (**5.33.***a)*ábra) figyelhető meg.

A vetületi ábrát (**5.33.***b)* ábra) elemezve, figyeljük meg a tanult szerkesztési módszer alkalmazását!

Gyakoroljuk a tanultakat a **45. munkalapon!**

A merőlegesen metsződő tengelyű, különböző átmérőjű hengerek áthatásából származtatott formák közül legfontosabbak a hengeres alakzatok (többnyire tengelyek) *furatai.* A furatok mint negatív formák az eddig tanultakkal megegyező áthatási éleket eredményeznek. Jellemzőit tekintsük át az **5.34.** ábra segítségével!

Egy D átmérőjű henger áthatását ábrázoltuk d_1; d_2 és d_3 átmérőjű hengerekkel mint negatív formákkal úgy, hogy tengelyeik merőlegesen metszik egymást. A segédgömbök alkalmazásával az áthatási élek egy vetületben megszerkeszthetők. A d_1 átmérőjű henger (mint furat) áthatását a korábban megismert módon szerkesztettük, de kevesebb vonallal. A segédgömböket csak a d_1 henger alkotómetszetéig ábrázoltuk, valamint a D henger áthatási éleit csak a hozzá tartozó áthatási élek metszetéig rajzoltuk.



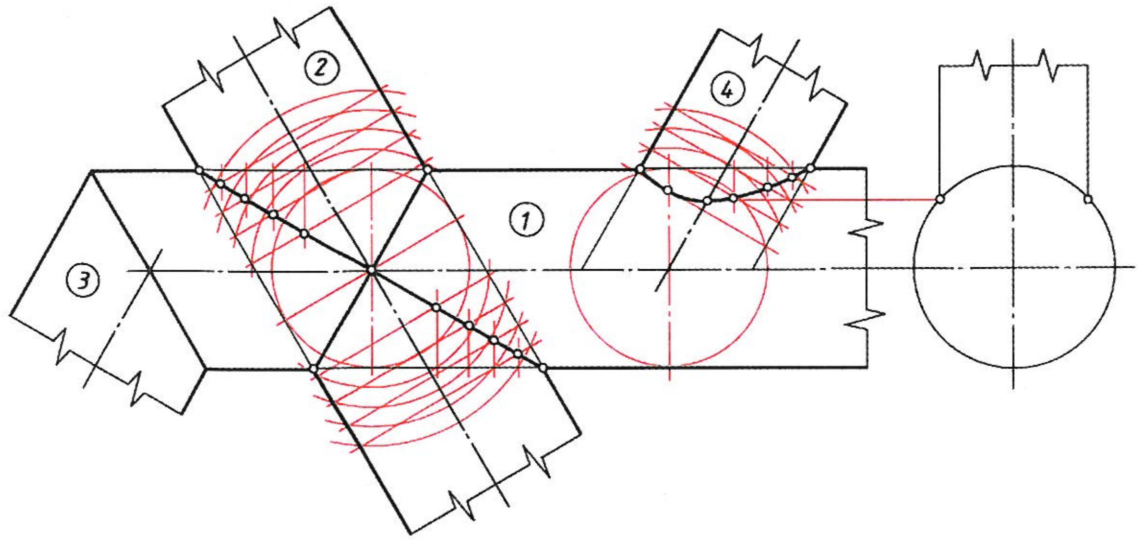
5.34. ábra. Hengeres alakzat furatai merőleges tengelymetszetekkel
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Kisebb átmérőjű furatok (hengerek) esetében megengedett az egyszerűsített ábrázolás. A d_2 henger áthatási élének rajzolásánál helyettesítő görbeként körívet alkalmaztunk. Egy segédgömb segítségével kijelöltük az áthatási él szélső pontját. Ezt a pontot és a hengerek kontúralkotóinak metszéspontját használtuk fel a körív középpontjának meghatározására (a húrfelező merőleges átmegy a kör középpontján). Ezt az ábrázolási módot akkor alkalmazhatjuk, ha a kisebb henger átmérője kevesebb, mint a nagyobb henger átmérőjének a fele.

Egészen kis átmérőjű furat esetén, ha a kisebbik henger átmérője kisebb, mint a nagyobb henger átmérőjének negyede, folyamatosan ábrázolhatjuk a nagyobb henger kontúrvonalát. Ezt alkalmaztuk a d_3 henger áthatási élének elhagyásánál.

Általános szögben metsződő tengelyű hengerek áthatása

Az **5.35.** ábrán több henger áthatása is látható. A könnyebb azonosítás érdekében számmal jelöltük azokat. Közös jellemzőjük, hogy tengelyeik a derékszögtől eltérő szögben metszik egymást. Az ① és ② számmal jelölt hengerek azonos átmérőjűek. A segédgömbös szerkesztési módszert alkalmazva azt tapasztaljuk, hogy a segédgömbök és a hengerek áthatási éleinek csak azon az oldalon lesz metszéspontja, ahol a hengerek tengelyei hegyes szöget zárnak be. Azt is tapasztaljuk, hogy a megszerkesztett pontokon át megrajzolva a két henger áthatási élét, egyenes vonalat kapunk. Ezt a tapasztalatunkat összevetve az **5.32.** ábra alapján nyert megfigyeléseinkkel, általánosítva megfogalmazhatjuk a következőket. Metsződő tengelyű, azonos átmérőjű hengerek áthatási élei azon a vetületen, ahol a hengerek tengelyei párhuzamosak a képsíkkal, mindig **egyenes szakaszok.** Az áthatási élek a hengerek kontúralkotóinak metszéspontjait a tengelyek metszéspontján át kötik össze. Ezek figyelembevételével rajzoltuk meg az ① és ② hengerek hiányzó áthatási éleit.



5.35. ábra. Általános szögben metsződő tengelyű hengerek áthatása

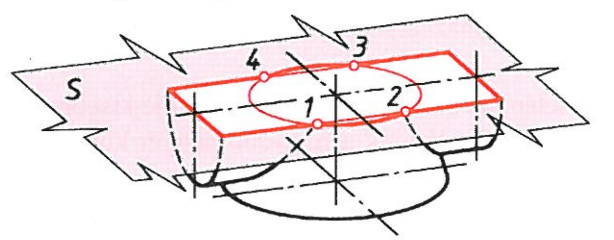
Megfigyelhetjük azt a tulajdonságát is az azonos átmérőjű, metsződő tengelyű hengerek áthatási éleinek, hogy merőlegesek egymásra és felezik egymást.

Az előbbi általánosítást alkalmaztuk az ① és ③ jelű hengerek áthatásánál is.

Az ① és ④ jelű hengerek áthatása különböző átmérőjű, metsződő tengelyű hengerek áthatása. A segédgömbökkel kapott áthatási pontokat kiegészítjük a szélső pont szerkesztésével. (Itt az oldalnézet nem teljes vetület! Ábrázolási szabályait a metszeti ábrázolásnál tanuljuk meg.)

Metsződő tengelyű forgástestek áthatása (szerkesztés szeletelősíkokkal)

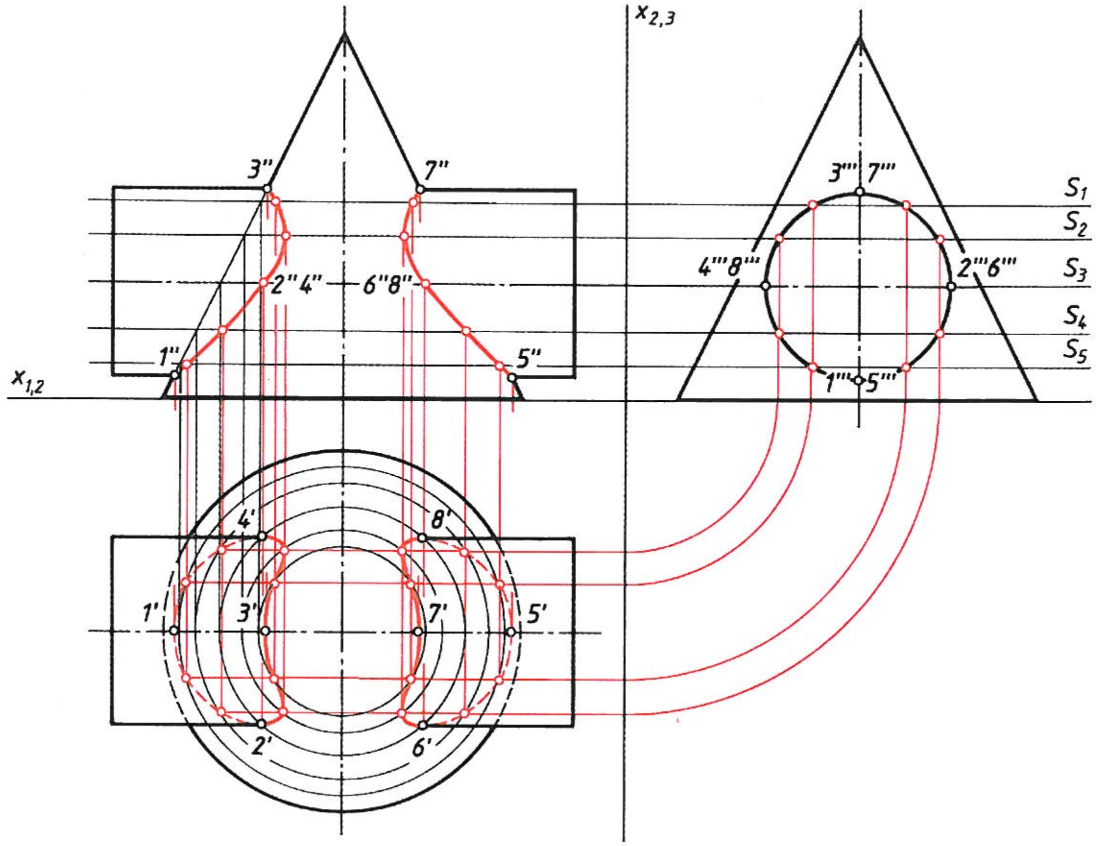
A segédgömböket áthatások szerkesztésére általában hengerek esetében alkalmazzuk. Általánosabb szerkesztési módszer a szeletelősíkok alkalmazása. Ennél a szerkesztési módnál is azt az elvet követjük, hogy az áthatási vonalak pontjai rajta vannak mindkét test felületén. A közös felületi pontokat határozzuk meg, amelyeken keresztül az áthatási vonalak megrajzolhatóak. Az **5.36.** ábra alapján figyeljük meg a módszer alkalmazását kúp és henger áthatásánál!



5.36. ábra. A szeletelősík alkalmazása kúp és henger áthatásánál

A kúp és a henger forgástengelye merőlegesen metszik egymást. Olyan szeletelősíkot választottunk, amely metszi mindkét testet, valamint merőleges a kúp tengelyére és rajta van a henger tengelyén. A forgástestek síkmetszésénél tanultak alapján tudjuk, hogy a kúpmetszet kör, a hengermetszet pedig olyan téglalap, amelynek oldalai a henger alkotói. A kör és az alkotók metszik egymást az *1-4* pontokban, amelyek rajta vannak mindkét test felületén is. Több (a kúp tengelyére merőleges és a henger tengelyével párhuzamos) szeletelősíkot választva, a kúp és henger felületén további közös felületi pontokat határozhatunk meg, amelyek az áthatás vonalainak pontjai.

Az **5.37.** ábrán olyan kúp és henger áthatását tanulmányozzuk, amelyek tengelyei merőlegesen metszik egymást. Áthatásuk teljes áthatás, ahol a henger döfi a kúpot. Így az eredmény két áthatási él, amelyek térgörbét írnak le. A szerkesztést szeletelősíkokkal végezzük. Ábrázoljuk a kúpot és a hengert a képsíkrendszerben, három vetületével! A testeket úgy helyezzük el, hogy az elölnézeten tengelyeik párhuzamosak legyenek a K_2 második képsíkkal!



5.37. ábra. Metsződő tengelyű kúp és henger áthatása

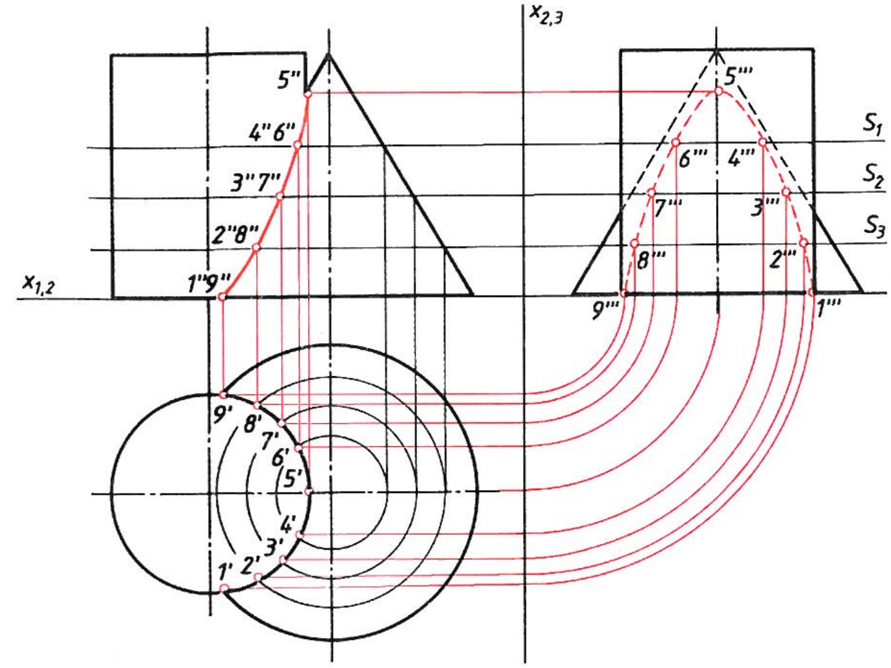
A közös pontokat a testek felületein szeletelősíkokkal határozunk meg. A szeletelősíkok helyzetét az oldalnézet alapján, a henger kerületének tizenkét részre osztásával célszerű meghatározni. A szeletelősíkokat ábrázoljuk az elölnézeten, majd vetületüket a felülnézeten!

- Azonosítjuk a szélső pontokat. A kúp és henger kontúralkotóinak metszéspontjai mindkét test felületén rajta vannak, így azok az áthatási élek pontjai (*1"*; *3"*; *5"* és *7"*). A vízszintes tengelyen lévő S_3 szeletelősík első vetülete metszi a henger alkotóit, amelyek meghatározzák a *2'*;*4'*;*6'* és *8'* felületi pontokat. A szélső pontokat azonosítjuk a vetületeken.
- A további közös pontokat (amelyeket számokkal külön nem jelöltünk) az S_1, S_2, S_4 és S_5 szeletelősíkok segítségével szerkesztjük. *Az oldalnézetről vetítjük a felülnézetre a pontokat.* Az oldalnézeten a kerületi pontok fedőpontok és egy vetítősugár két kerületi ponthoz is tartozik, így a felülnézeten egy vetítősugár négy pontot határoz meg. A felülnézetről rendezőkkel azonosítjuk az elölnézet pontjait, ügyelve a megfelelő szeletelősíkra.
- A kapott, közös felületi pontokon át megrajzoljuk az áthatási éleket. Ügyeljünk a láthatóságra! A felülnézeten a *2'-3'-4'*, valamint a *6'-7'-8'* éldarab látható él. A *4'-1'-2'*, valamint a *8'-5'-6'* éldarab nem látható él.

Gyakoroljuk a tanultakat a **46. munkalapon!**

Párhuzamos tengelyű forgástestek áthatása

A párhuzamos tengelyű forgástestek áthatását szeletelősíkokkal szerkesztjük. Jellemzőit egy henger és kúp áthatásán vizsgáljuk meg az **5.38.** ábra alapján! Az áthatás részleges áthatás, amely egy áthatási élt eredményez. Az áthatási él a testek alapköreinek metszéspontjáig értelmezhető.



5.38. ábra. Párhuzamos tengelyű henger és kúp áthatása

- Ábrázoljuk a hengert és a kúpot a képsíkrendszerben úgy, hogy alaplapjukkal a K_1 képsíkra illeszkedjenek!
- Azonosítjuk az ábrázolásból közvetlenül adódó pontokat (szélsőpontok) a vetületeken. Ezek az *1*, *5* és *9* pontok vetületei.
- Ábrázoljuk az elöl- és oldalnézeten a szeletelősíkokat ($S_1 - S_3$), majd a felülnézeten az általuk meghatározott vetületet (köröket)!
- A felülnézeten a szeletelősíkok által meghatározott körök metszik a henger vetületét. A kapott pontok *a két test felületének közös pontjai,* amelyeket azonosítunk a többi vetületen. A testek közös felületi pontjain keresztül, láthatóság szerint megrajzoljuk az áthatási élt.

Gyakoroljuk a tanultakat a **47. munkalapon!**

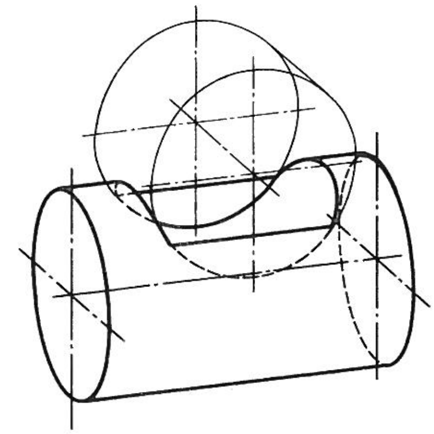
Kitérő tengelyű forgástestek áthatása

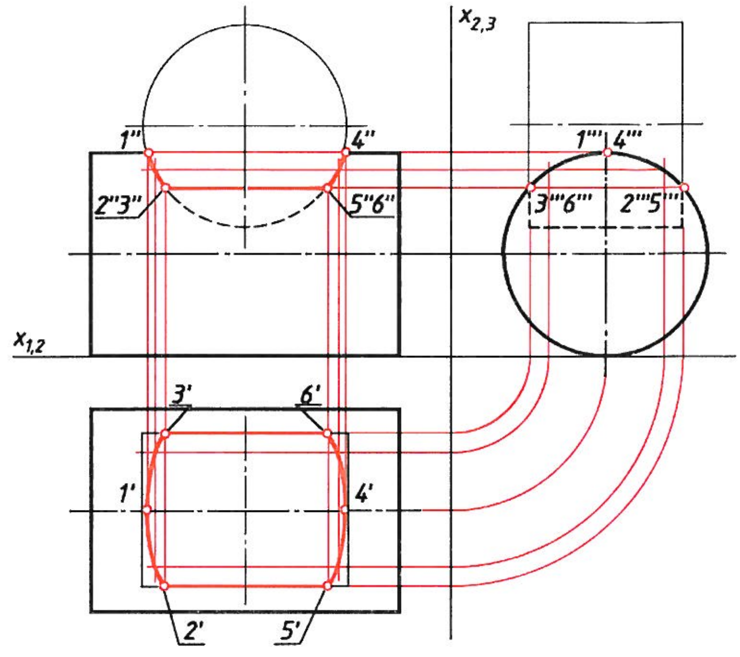
A kitérő tengelyű forgástestek áthatását egy gyakorlati példán keresztül ismerjük meg! A **5.39.** ábrán kitérő tengelyű hengerek áthatását ábrázoltuk. Az **5.39.***a)* ábrán egy henger, mint pozitív forma és egy korong (tárcsa), mint negatív forma áthatása figyelhető meg. Ez a későbbiekben, mint íves reteszhorony gyakran előfordul tengelyek kialakításánál.

Az **5.39.***b)* ábra alapján kövessük nyomon a szerkesztés menetét! Ábrázoljuk a hengereket a képsíkrendszerben úgy, hogy a pozitív forma tengelye párhuzamos legyen a K_2 képsíkkal, a negatív forma tengelye pedig merőleges legyen arra! Jelöljük az ábrázolásból közvetlenül adódó közös felületi pontokat (a kontúrvonalak metszéspontjai)! Az ábrán ezek a számmal jelölt és nullkörökkel ábrázolt pontok. A pontokat azonosítjuk a vetületeken.

A további munkánkat megkönnyíti, ha felismerjük, hogy a *2–5* és a *3–6* pontok egyenes szakaszt, a *2–1–3* és az *5–4–6* pontok térgörbét határoznak meg. A kialakított belső felületek pedig a tárcsa hengerfelületének darabja és a tárcsa zárólapjainak egy-egy körszelete.

Az ábrázoláshoz további pontok határozhatók meg az elöl- vagy oldalnézeten, a körvetületeken kijelölt pontok azonosításával (a művelet azonos a szeletelősíkok alkalmazásával). A kapott pontokon át megrajzoljuk az áthatási éleket, majd a nem látható éleket és kontúrvonalakat.





a) b)

5.39. ábra. Kitérő tengelyű hengerek áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Összegezve tapasztalatinkat a példa kapcsán: részleges áthatást ábrázoltunk, ahol zárt áthatási vonalat kaptunk. Az áthatási élek két egyenes szakaszból és két térgörbéből tevődnek össze.

5.3.3. Síklapú testek és forgástestek áthatása

A síklapú testek és a forgástestek áthatásának szerkesztésében az áthatásban lévő testek felületeinek jellemzőit alkalmazzuk. *A síklapú test egy oldallapja mint sík metszi a forgástestet*, így a szerkesztés visszavezethető a forgástestek síkmetszésére. A szerkesztés annyi síkmetszés összegzése, ahány oldala a síklapú testnek részt vesz az áthatásban. A síkmetszésből csak a metsző élt vesszük figyelembe. Ezek összessége a két test áthatási éle. A síkmetszés mellett alkalmazzuk a forgástestek döfését egyenessel is. A síklapú testek élei döfik a forgástestet és az így keletkezett pontok (csúcsok) határolják le a síkmetszésből kapott görbéket. A síklapú és forgástestek áthatási vonalai tehát döféspontokban kapcsolódó metszőélek (síkgörbék) sorozata, amelyek együttesen a térben helyezkednek el. Ezek alapján ismerkedjünk meg a síklapú és forgástestek áthatásával!

Közös tengelyű síklapú testek és forgástestek áthatása (négyzetes hasáb és kúp)

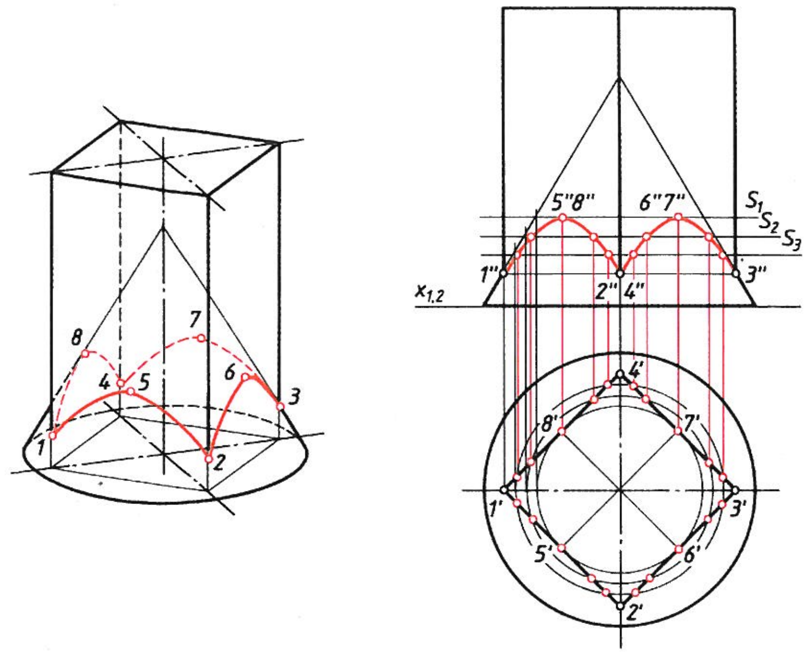
A közös tengelyű síklapú testek és forgástestek áthatását egy négyzetes hasáb és egy kúp áthatásán keresztül elemezzük! Ezt mutatja be az **5.40.** ábra.

Tájékozódásunkat segíti a testek vonalainak folytatása a másik testben (vékony, folytonos vonal). A négyzetes oszlop odallapjai metszik a kúp felszínét. Az oldallapok párhuzamosak a tengellyel, így a kúp felszínét hiperbolagörbében metszik. A négy oldallap négy hiperbolát határoz meg.

A négyzetes oszlop oldalélei döfik a kúp felszínét. Ezek az *1-4* döféspontok.

Az áthatás vonalai a döféspontokkal határolt négy, síkbeli hiperbolaél, amelyek párhuzamosak egymással, ill. merőlegesek egymásra. Az áthatási élek együttesen térben helyezkednek el.

Az áthatás szerkesztését az **5.40.***b)* ábra szemlélteti.

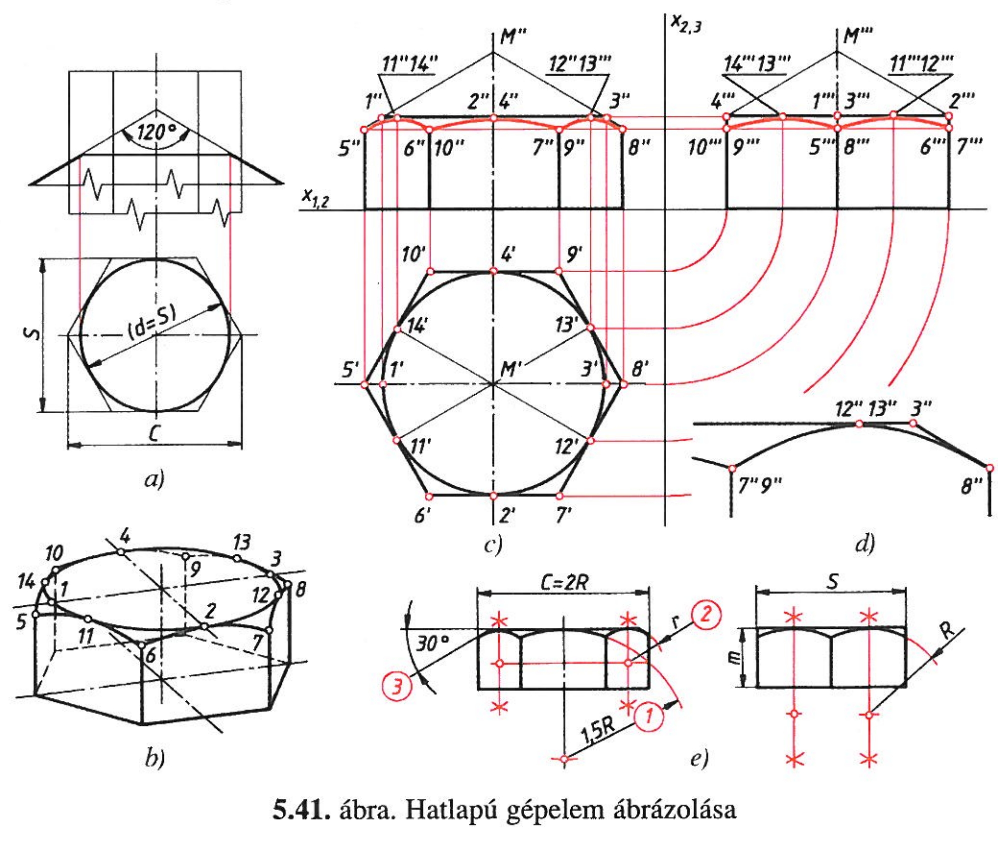


a) b)

5.40. ábra. Közös tengelyű négyzetes hasáb és kúp áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Közös tengelyű síklapú testek és forgástestek áthatásából származtatott alakzat

Részletesen foglalkozunk a közös tengelyű síklapú testek és forgástestek áthatásából származtatható formák közül a szabályos hatszög alapú hasáb és a csonkakúp áthatásával. Az **5.41.** ábra az ezzel kapcsolatos tudnivalókat mutatja be.



5.41. ábra. Hatlapú gépelem ábrázolása

A szabályos, közös tengelyű hatszög alapú hasáb és a csonkakúp áthatása az **5.41.**_a)_ ábrán tanulmányozható. A szabályos hatszög alapú hasáb S laptávolsága adott, a C csúcstávolság adódó méret. A csonkakúp csúcsszöge 120° és zárólapjának d átmérője egyenlő az S laptávolsággal (a szabályos hatszögbe írható kör átmérője).

A két test áthatásából származtatott forma az az alakzat, amelyik az áthatásban lévő testek közös része. Ezt az **5.41.**_b)_ ábra mutatja be. Az áthatásból származtatott alakzat mindannyiunk számára ismerős, hiszen az egyik leggyakrabban alkalmazott forma a gépészetben (csavarok, csavaranyák stb.). Ezért fontos jól ismerni felületi jellemzőit és ábrázolási módjait. Az **5.41.**_c)_ ábra alapján figyeljük meg az áthatásból kapott alakzat szerkesztését! Az ábrázolás elemzésénél folyamatosan vessük össze a vetületi ábrázolást az **5.41.**_b)_ ábrán lévő axonometrikus rajzzal!

Az **5.41.**_d)_ ábrán kinagyítva ábrázoltuk az elölnézet egyik részletét, amelyet a számjelölésekkel tudunk azonosítani. A kinagyított részleten jól látható az élek és kontúrvonal ábrázolási módja.

Az oldalnézet vonalainál ügyeljünk arra, hogy a $10'''-4'''-9'''$ és a $6'''-2'''-7'''$ áthatási élek egy egyenesbe esnek a hasáb oldallapjának vetületével! A hasáb szélessége ezen a vetületen egyenlő a laptávolsággal, így a csonkakúp zárólapjának átmérőjével is, ezért az oldalnézet kontúrvonalai téglalapot képeznek. A kinagyított részlet kapcsán már rögzítettük, hogy a hasáb éleit csak a döféspontokig rajzoljuk, így az $1'''$; $3'''$ és az $5'''$; $8'''$ pontok között nincs látható él.

A műszaki ábrázolásban gyakran alkalmazunk egyszerűsítéseket. Ezeket bonyolult görbék helyett, ill. olyan esetekben alkalmazzuk, amikor gyakran ismétlődnek a görbék. Az egyszerűsítéseket csak egyezményesen és egyöntetűen alkalmazhatjuk, így _csak szabványos egyszerűsítéseket használhatunk._ A **5.41.**_e)_ ábra alapján figyeljük meg a hatlapú gépelemrészlet **egyszerűsített ábrázolásának** módját és a későbbiekben ennek megfelelően alkalmazzuk!

Mivel a felülnézet részletes és egyszerűsített ábrázolása azonos, itt nem ábrázoltuk. A kiinduló adatok az S laptávolság és m magasság, valamint a 120°-os kúpszög. Az ábrázoláshoz szükséges további adatok ezek alapján meghatározhatóak. Így a C csúcstávolság a felülnézetről, a kúposítás 30°-os mérete a fél csúcsszög kiegészítő szögeként határozható meg. Az **áthatási éleket körívekkel** ábrázoljuk, amelyek a hiperbolaívek helyettesítő görbéi. A körív sugara a C csúcstávolságból ($C=2R$, azaz a hatszög köré rajzolható kör sugara), ill. r sugár a szerkesztésből adódik.

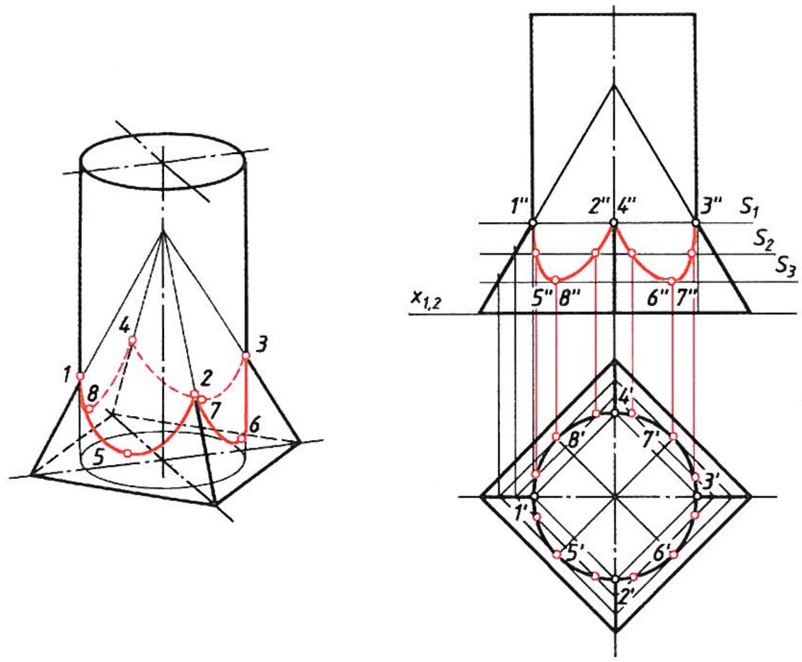
- Az elölnézeten a felső tengelymetszetből a tengelyen kijelöljük az $1{,}5R$ sugárral a körív középpontját, amelyből megrajzoljuk a középső áthatási élt és egyben metsszük a kontúrvonalat (a műveletet ① számmal jelöltük).
- A hasáb két oldalsó lapjának vetületét a tengellyel párhuzamosan felezzük, amelynek vonalait a kontúrvonalon előzőekben metszett pontból rajzolt, tengelyre merőleges egyenessel metsszük. Ezek a két oldalsó áthatási él középpontjai, így azok a felezővonalon, a befoglaló téglalap felső vonaláig mért r sugárral megrajzolhatók (a műveletet ② számmal jelöltük).
- Az r sugár kontúrvonalmetszeteiből megrajzoljuk a kúpalkotókat (a műveletet ③ számmal jelöltük).
- Az oldalnézeten a hasáb lapjainak vetületeit tengellyel párhuzamosan felezzük, felső vonalától R sugárral kijelöljük az áthatási élek középpontjait, majd azokból az áthatási éleket megrajzoljuk.
- A feladatot az élek és alkotók láthatóság szerinti rajzolásával fejezzük be.

Gyakoroljuk a tanultakat a **48. munkalapon!**

Közös tengelyű síklapú testek és forgástestek áthatása (négyzetes gúla és henger)

A közös tengelyű síklapú és forgástestek áthatásaiból vizsgáljunk meg még egy példát! A **5.42.** ábrán egy négyzetes gúla és egy henger áthatásának axonometrikus és vetületi ábrázolása látható.
Az axonometrikus ábrát elemezve (**5.42.**_a)_ ábra) a következőket figyelhetjük meg.

- A gúla oldalélei döfik a hengert _1–4_ pontokban.
- A gúla oldallapjai általános hengermetszetet, ellipszismetszetet hoznak létre.
- Az áthatási vonalak tehát az _1–4_ döféspontig tartó ellipszisélek, amelyek egymáshoz viszonyítva is és együttesen is a térben helyezkednek el.

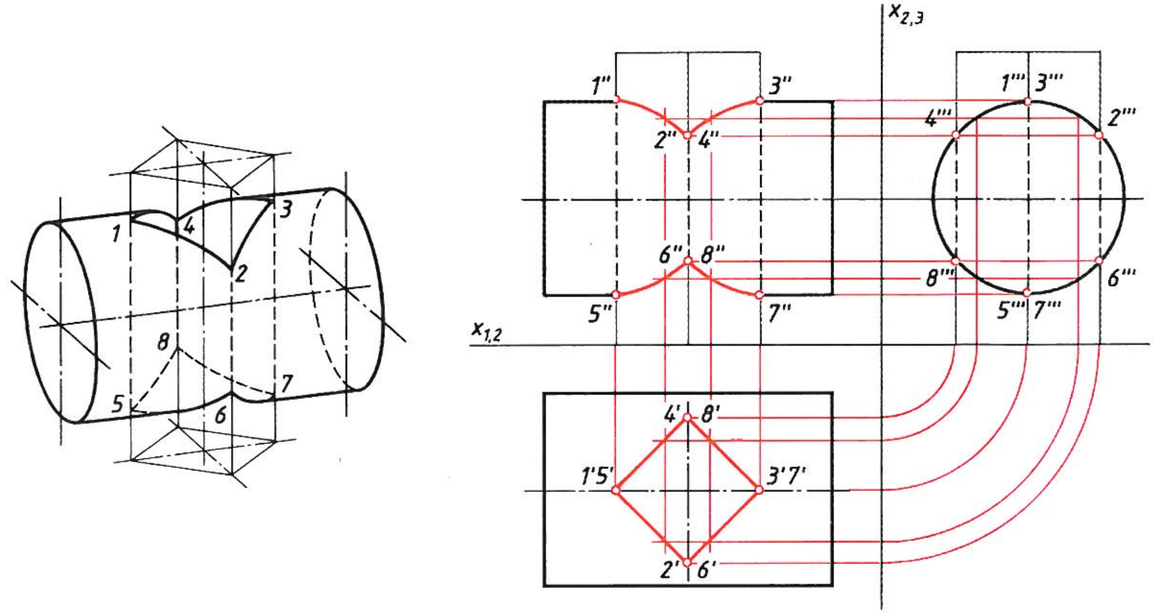


a) *b)*

5.42. ábra. Közös tengelyű négyzetes gúla és henger áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Metsződő tengelyű síklapú és forgástestek áthatása

A metsződő tengelyű síklapú testek és forgástestek áthatását vizsgáljuk meg egy olyan henger és négyzetes hasáb áthatásán, ahol a testek tengelyei merőlegesen metszik egymást, valamint a henger pozitív forma, a négyzetes hasáb pedig negatív forma! Az ezzel kapcsolatos tudnivalókat az **5.43.** ábra szemlélteti.



a) *b)*

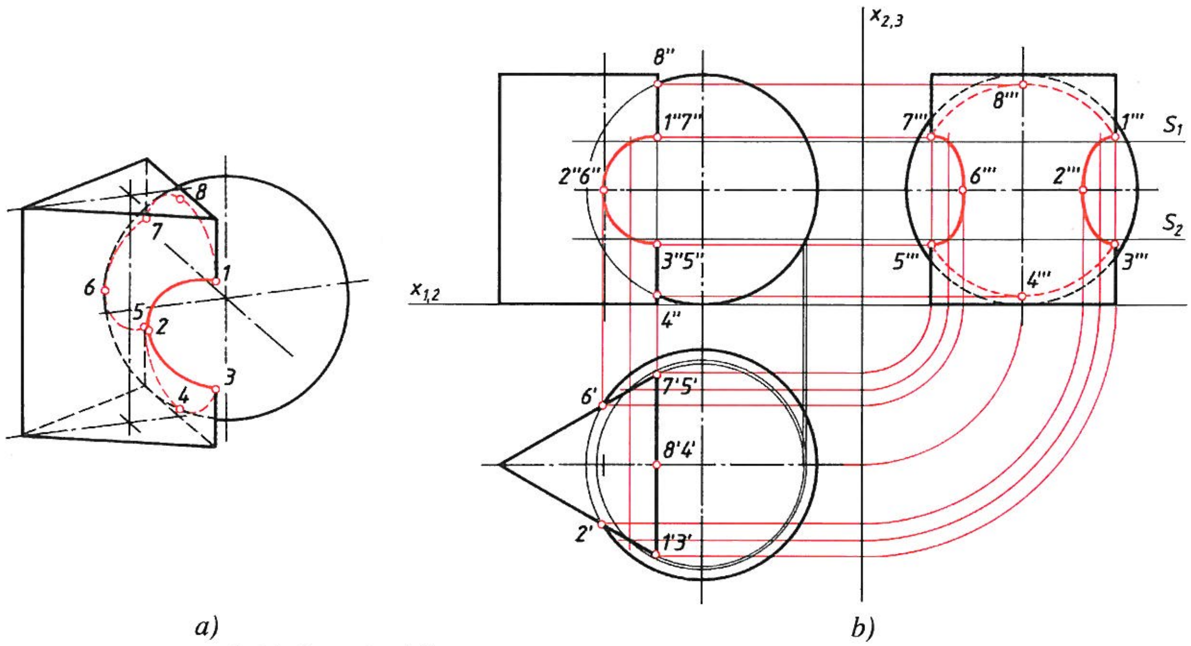
5.43. ábra. Merőlegesen metsződő tengelyű henger és négyzetes hasáb áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Az axonometrikus ábrán (**5.43.***a)* ábra) megfigyelhetjük, hogy a négyzetes hasáb döfi a hengert, így az eredmény teljes áthatás. A műszaki gyakorlatban az így keletkezett alakzatot úgy jellemezzük, hogy henger (tengely) négyzetes üreggel. A két test kapcsolatáról megállapíthatjuk, hogy a négyzetes hasáb oldallapjai a hengeren ellipszismetszeteket hoznak létre. Az egy síkban lévő áthatási élek egy ellipszis egy-egy ívei. Így pl. az *1-2* ellipszisél és az *5–6* ellipszisél ugyanannak az ellipszisnek az ívei.

Gyakoroljuk a tanultakat a **49. munkalapon!**

Párhuzamos és kitérő tengelyű síklapú testek és forgástestek áthatása

A párhuzamos és kitérő tengelyű síklapú testek és forgástestek jellemzőit egyaránt megfigyelhetjük egy szabályos háromszög alapú hasáb és egy gömb áthatásán. A gömb geometriájából következik, hogy amíg egy másik test tengelyével egyik tengelye párhuzamos, addig másik tengelye kitérő helyzetű. Áthatásuk jellemzőit figyeljük meg az **5.44.** ábrán.



5.44. ábra. Szabályos háromszög alapú hasáb és gömb áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

A két test áthatásának axonometrikus rajzán megfigyelhetjük, hogy a hasáb és gömb áthatása részleges áthatás. Tudjuk, hogy *a gömb* bármilyen irányú *síkmetszete kör*. A hasáb három oldallapjának síkja tehát körmetszeteket határoz meg. A hasáb két oldaléle döfi a gömböt az *1*; *3* és a *7*; *5* pontokban. Az áthatási élek tehát a döféspontok közötti körívek. Az áthatás vonalai a térben helyezkednek el.

Gyakoroljuk a tanultakat a **50. munkalapon!**

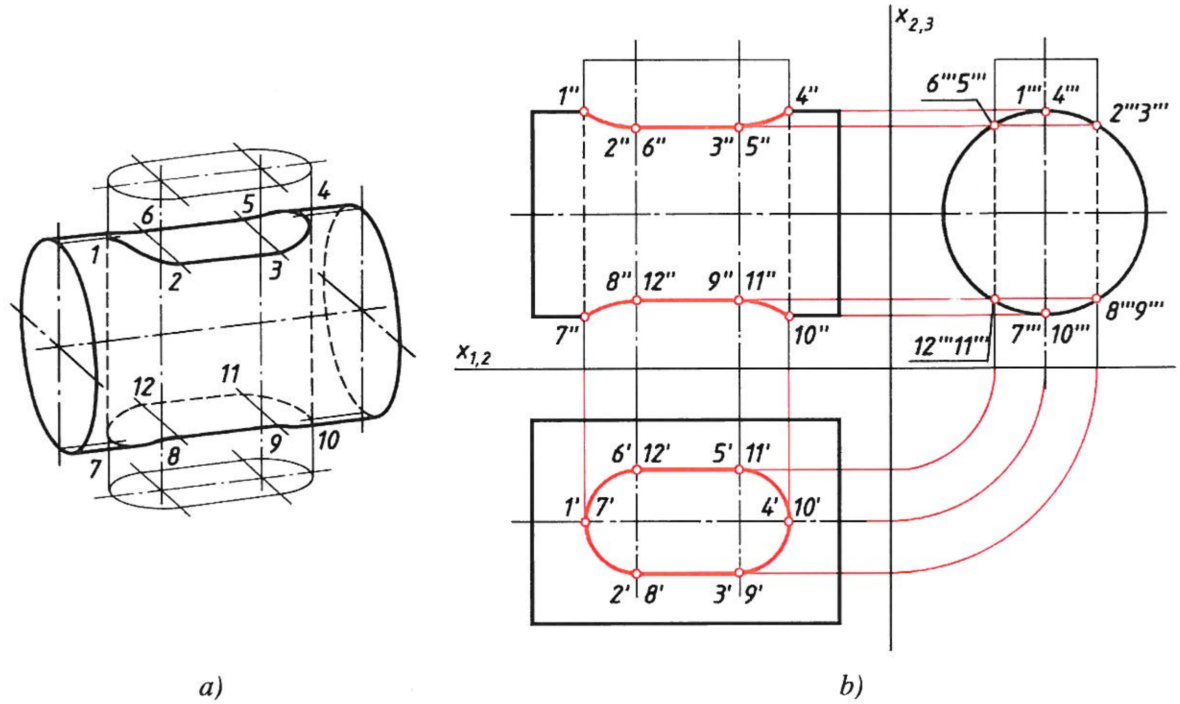
5.4. Származtatott formák ábrázolása

Eddigi tanulmányaink alapján tudjuk, hogy a különböző méretű és felületű testek csonkolásával és (vagy) áthatásával változatos alakzatok hozhatók létre. Gyakran találunk példát a későbbi ábrázolási feladatokban a csonkolt testek áthatására. Ez két részfeladatot jelent: a csonkolás elemzése és ábrázolása, ill. az áthatás elemzése és ábrázolása. A sorrend a feladat alapján dönthető el.

Az összetett alakzatok ábrázolásánál találkozunk olyan áthatásokkal is, ahol az egyik alakzat önmagában is összetett test. Ez utóbbira vizsgáljunk meg egy jellegzetes példát a **5.45.** ábra alapján!

A testek elemzéséből kitűnik, hogy az egyik test henger mint pozitív forma, a másik test összetett test mint negatív forma. Az összetett alakzat egy téglatestből és két félhengerből építhető fel (magasságuk azonos és a félhengerek átmérői egyenlőek a téglatest vastagságával). Jellemzője a két, egymással párhuzamos tengelyvonal (a félhengerek tengelye), amelyek merőlegesen metszik a másik test, a henger tengelyét.

Az ehhez hasonló áthatásokkal későbbi tanulmányaink alatt, mint reteszhornyok kialakításával gyakran találkozunk.



5.45. ábra. Henger és összetett test áthatása
a) szemléltető képe; *b)* vetületi ábrázolása

Feladat

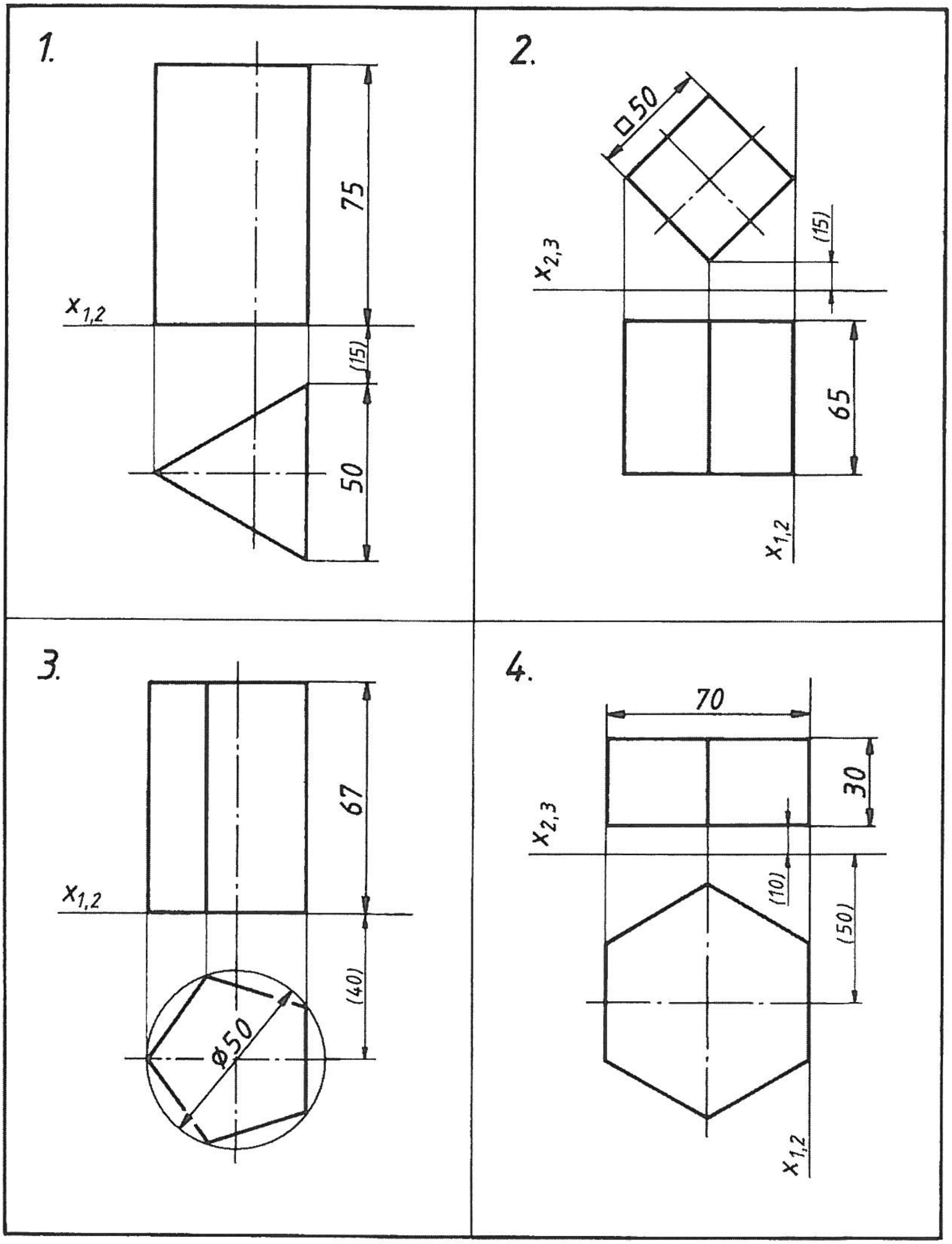
Végezzünk teljes felületelemzést a tankönyv **5.19., 5.23., 5.26., 5.32., 5.33., 5.37., 5.40., 5.42–5.45.** ábrái alapján! Mintának használjuk a **28. munkalap** táblázatát! Az *„élek”* oszlopait egészítsük ki a *„térgörbék”* megnevezésű oszloppal!

Ellenőrző kérdések

1. Milyen rajz alapján készítjük el az összetett mértani testek axonometrikus rajzát?
2. Az axonometrikus rajz méreteit milyen irányokban vihetjük fel a rajzlapra?
3. Milyen alakzatok az összetett testek?
4. Milyen alakzatok a csonkolt testek?
5. Milyen alakzatok keletkeznek a testek áthatása során?
6. Milyen alakzatok a származtatott formák?
7. Hogyan csoportosíthatjuk a csonkolt testeket?
8. Hogyan csoportosíthatók a testek áthatásai?
9. Milyen jellemzők azonosításával ábrázoljuk a csonkolt síklapú testeket?
10. Milyen jellemzők alapján ábrázoljuk a csonkolt forgástesteket?

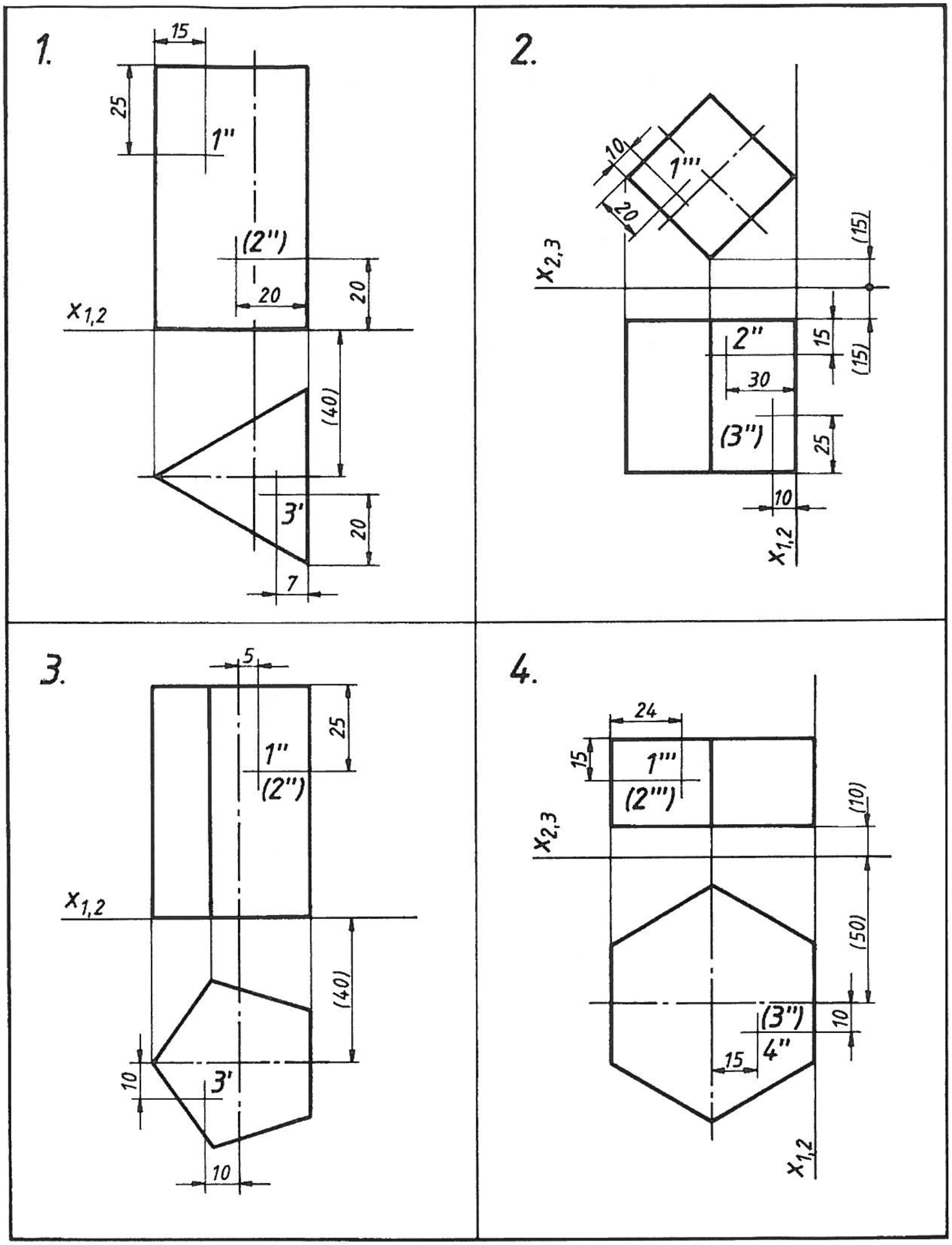
11. Hol alkalmazzuk a sík felületre utaló átlót?
12. Mi a lapolás és melyek a jellemzői?
13. Melyek az áthatási vonalak jellemzői?
14. Milyen jellemzőket alkalmazunk a síklapú testek áthatásának szerkesztésénél?
15. Hogyan származtatható új alakzat a testek áthatásából?
16. Mit nevezünk üregnek?
17. Mit nevezünk süllyesztésnek?
18. Milyen áthatási vonalak keletkeznek síklapú testek áthatásánál?
19. Milyen áthatási vonalak keletkezhetnek a közös tengelyű forgástestek áthatásánál?
20. Mit nevezünk tagolóvonalaknak?
21. Mit jelent a tagolóvonal részletes ábrázolása és egyszerűsített ábrázolása?
22. Melyek a segédgömbök jellemzői?
23. Milyen áthatási vonalak keletkeznek azonos átmérőjű, metsződő tengelyű hengerek áthatásánál azon a vetületen, ahol a tengelyek párhuzamosak a képsíkkal?
24. A szeletelősík milyen jellemzőit használjuk fel a forgástestek áthatásánál?
25. Melyek a testek ábrázolásából közvetlenül adódó áthatási pontok?
26. Milyen jellemzőket alkalmazunk a síklapú testek és a forgástestek áthatásának szerkesztésénél?

FELADATGYŰJTEMÉNY

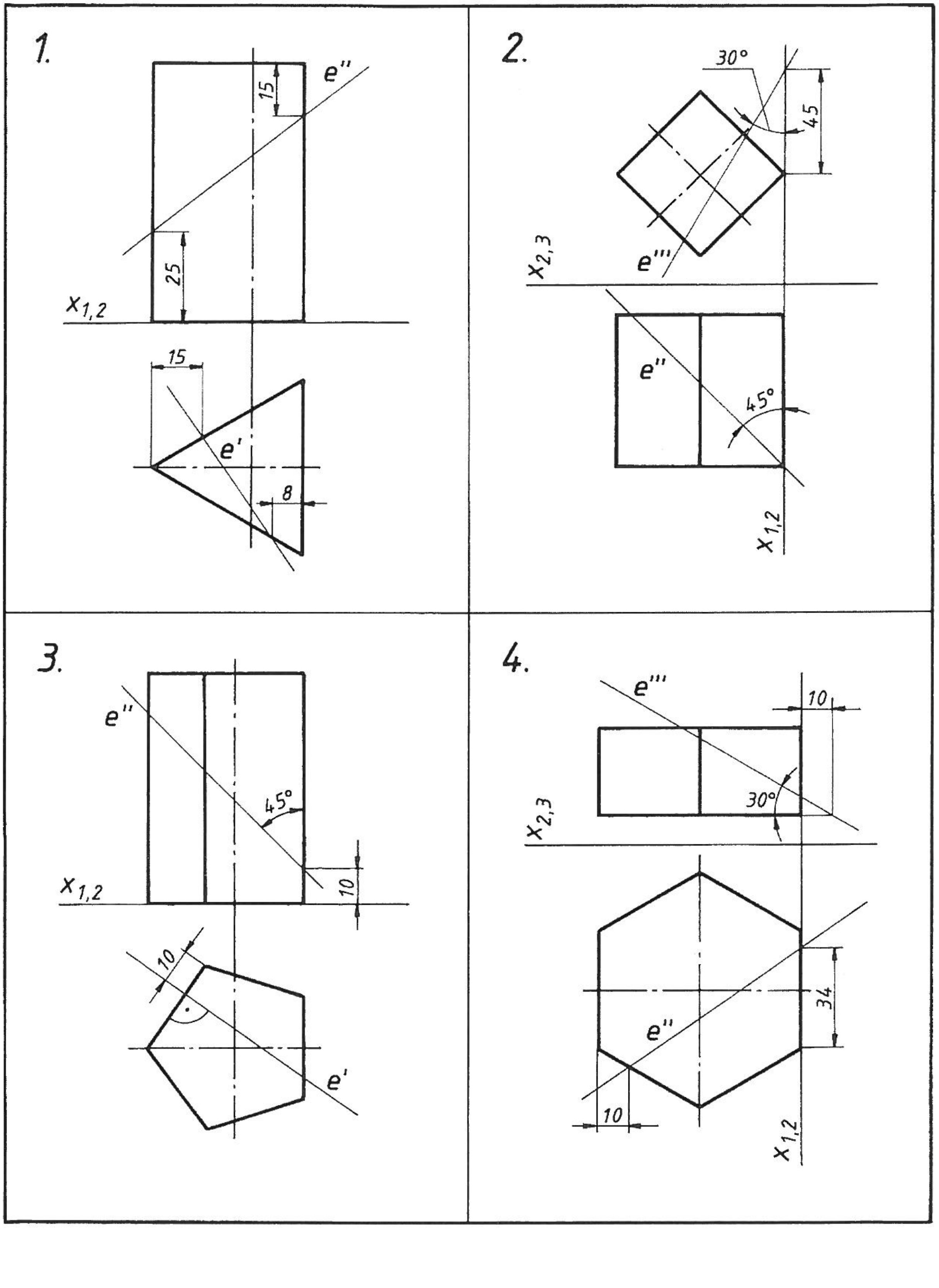


1. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a hasábokat a három képsíkos rendszerben (mérethálózat nélkül)! A méretarány **1:1**. Azonosítsuk a csúcsokat nagybetűkkel, az oldaléleket kisbetűkkel és az oldallapokat római számokkal!

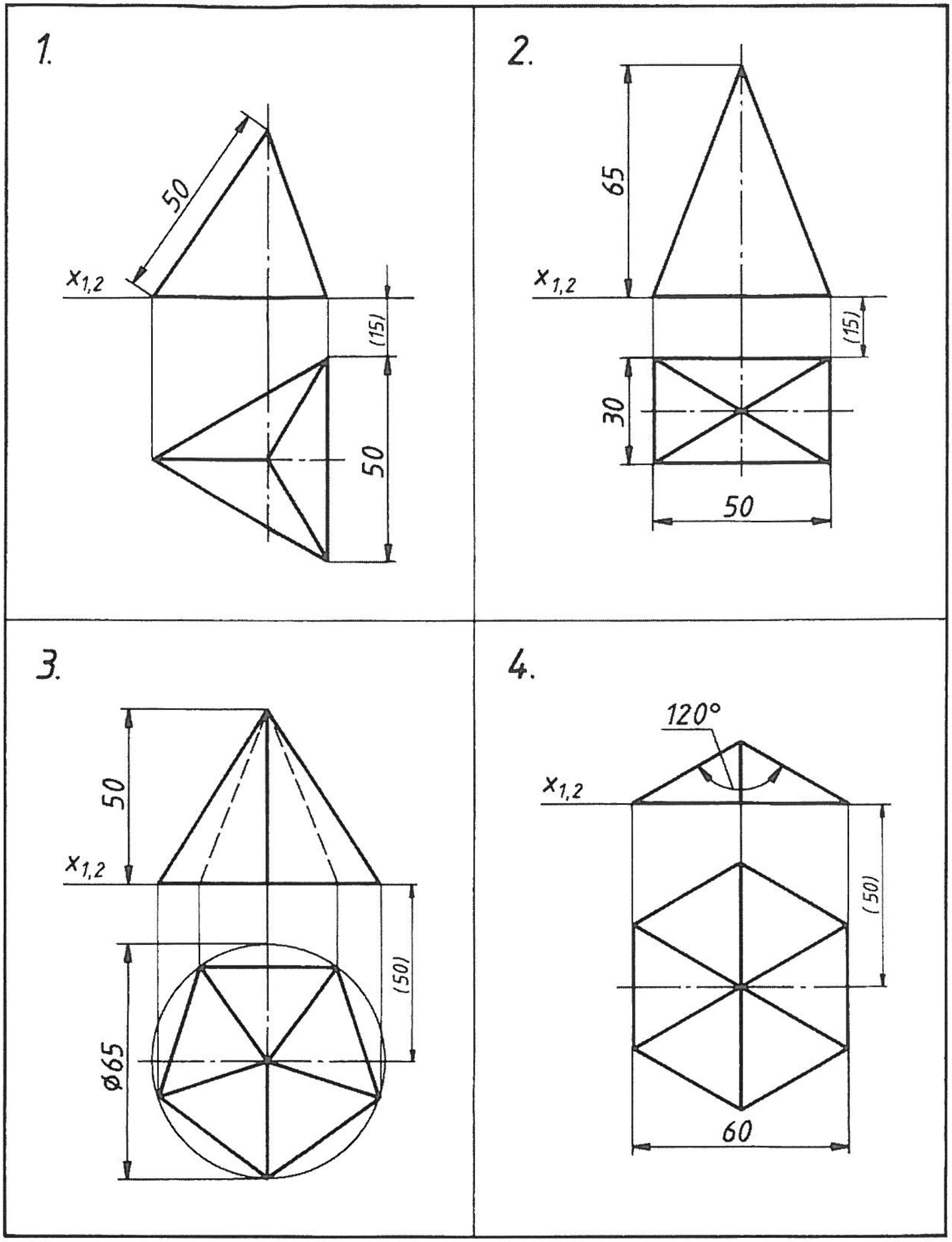
2. feladat: Szerkesszük meg rajzlapon a hasábok hálóját!



3. feladat: Ábrázoljuk a hasábokat az **1. feladatban** leírtak szerint! Azonosítsuk az adott pontokat a többi vetületen! (A fedett pontokra zárójel hívja fel a figyelmet.)

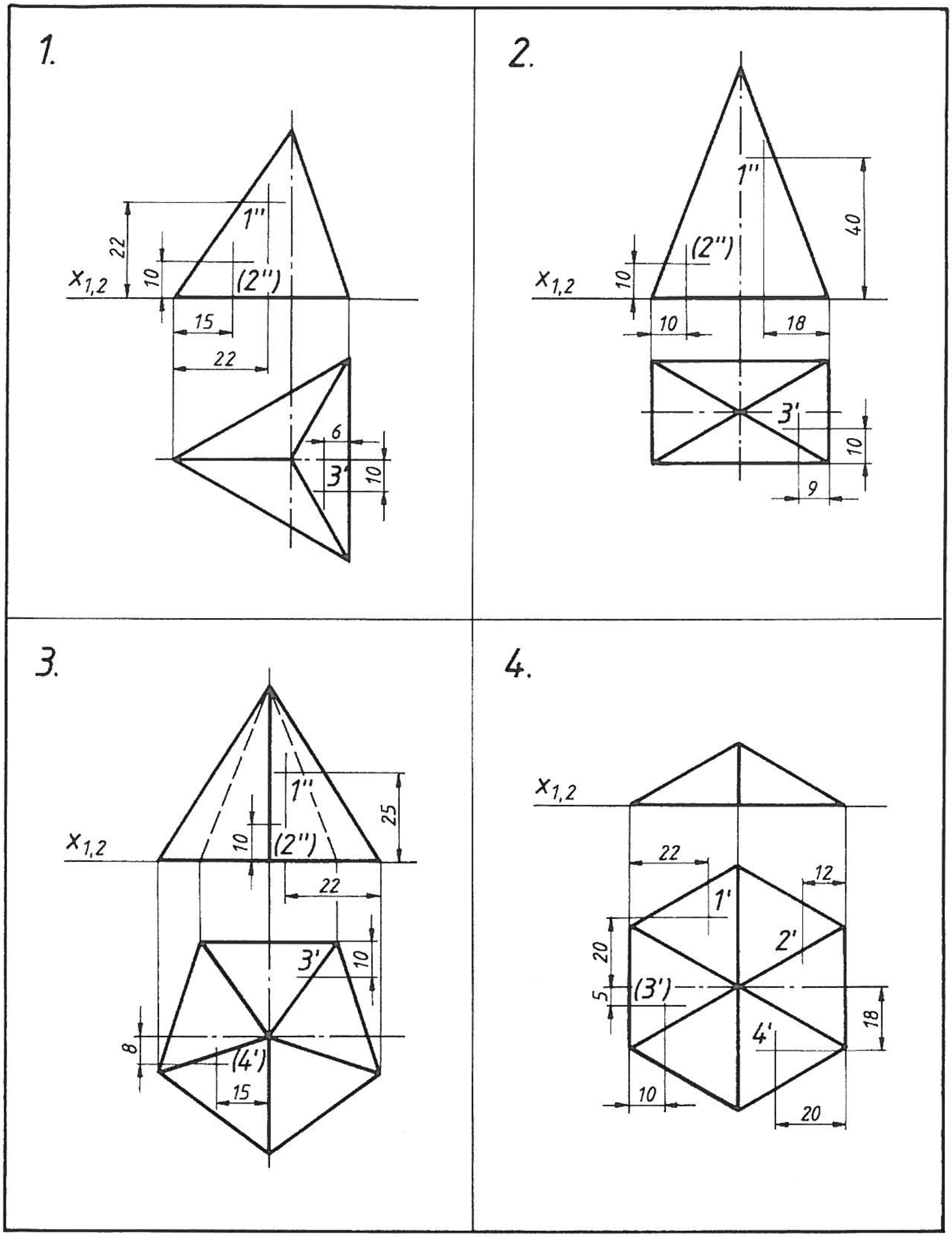


4. feladat: Ábrázoljuk a hasábokat az **1. feladatban** leírtak szerint! Szerkesszük meg az *e* egyenes döféspontjait! Rajzoljuk meg az *e* egyenest a láthatóság figyelembevételével!



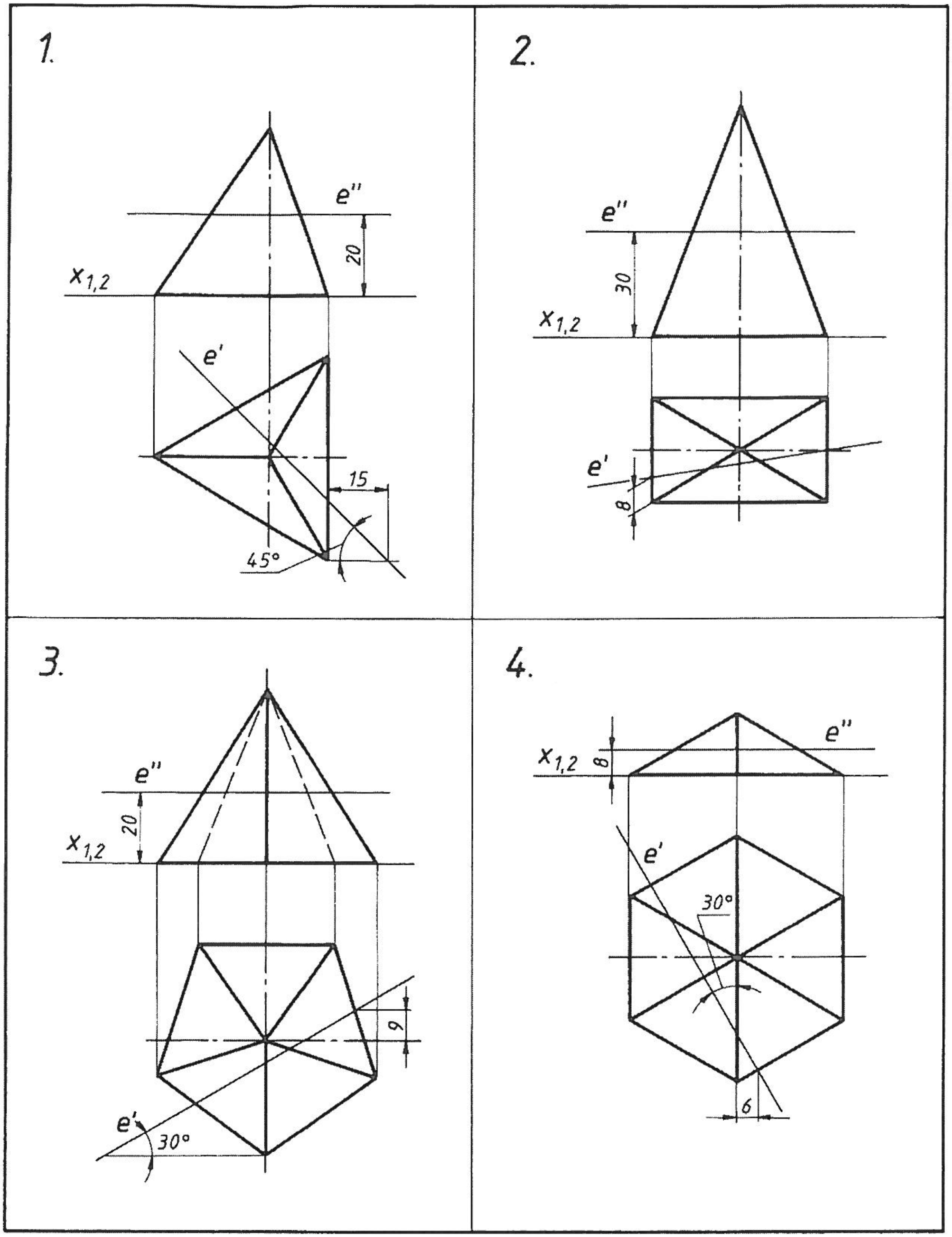
5. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a gúlákat a három képsíkos rendszerben (méretgázlózat nélkül)! A méretarány **1:1**. Azonosítsuk a csúcsokat nagybetűkkel, az oldaléleket kisbetűkkel és az oldallapokat római számokkal!

6. feladat: Szerkesszük meg rajzlapon a gúlák hálóját!

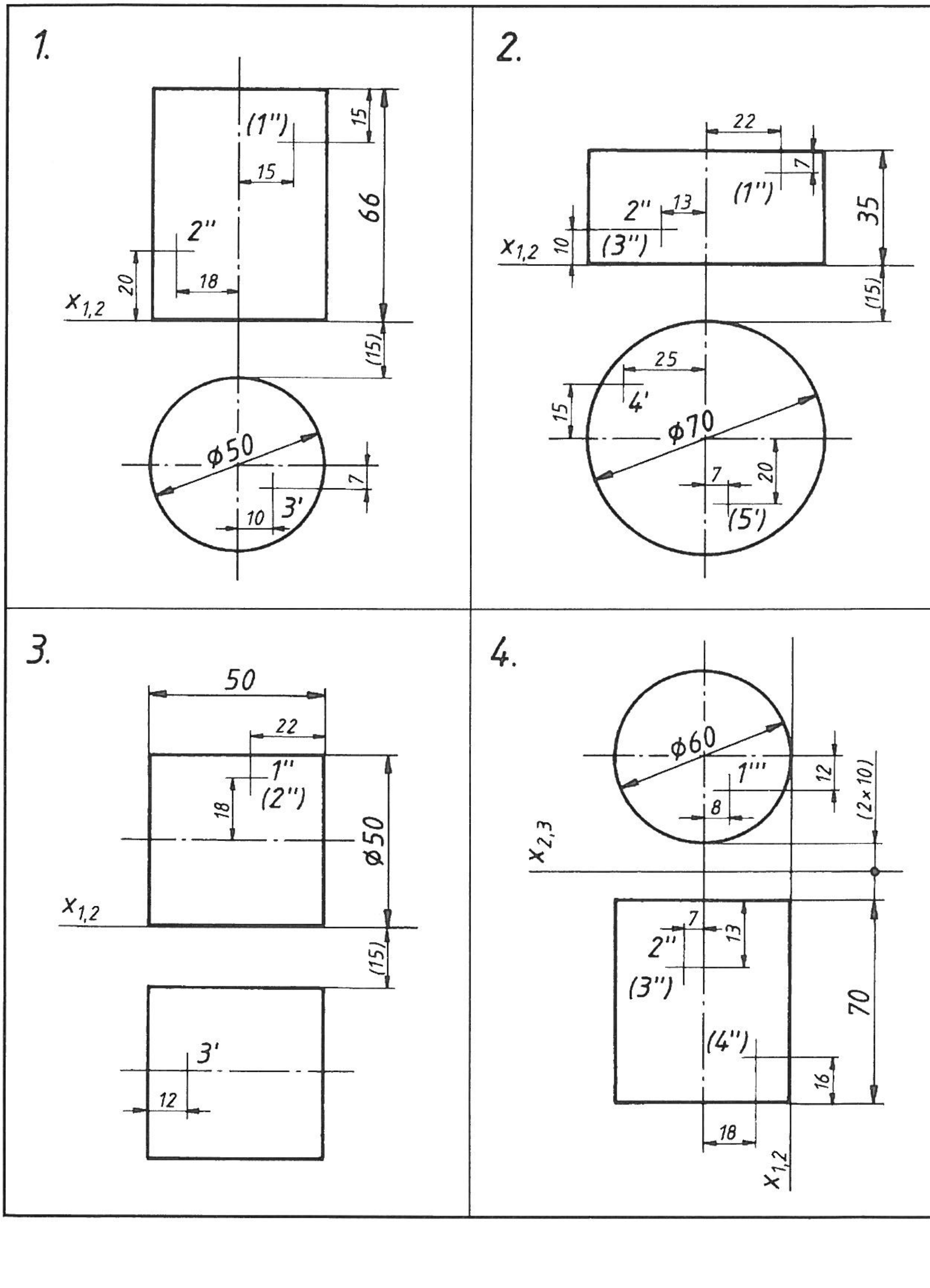


7. feladat: Ábrázoljuk a gúlákat a **5. feladatban** leírtak szerint! Azonosítsuk az adott pontokat alkotók módszerével a többi vetületen! (A fedett pontokra zárójel hívja fel a figyelmet.)

8. feladat: Oldjuk meg a **7. feladatot** a szeletelősíkok módszerével!

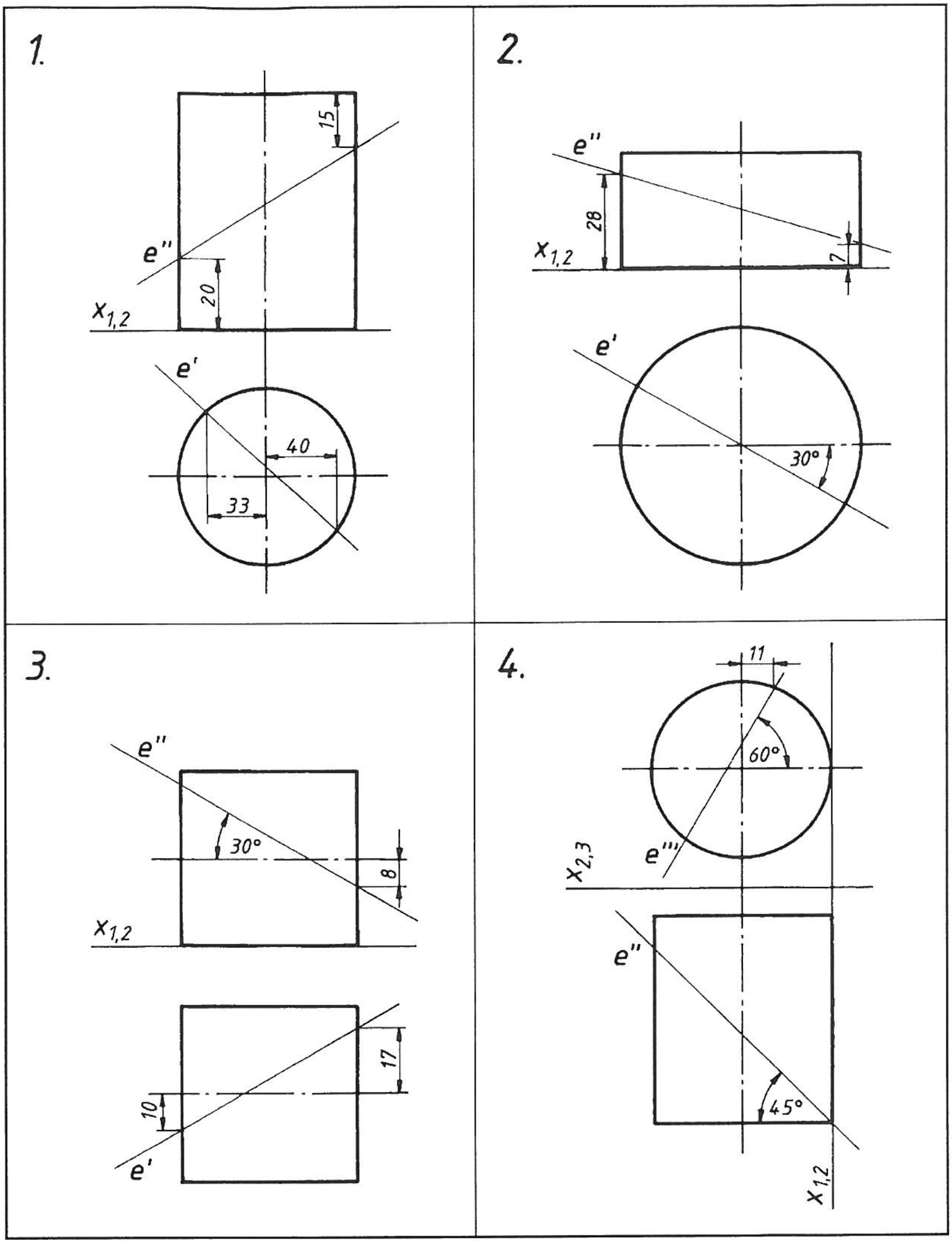


9. feladat: Ábrázoljuk a gúlákat a **5. feladatban** leírtak szerint! Szerkesszük meg az *e* egyenes döféspontjait! Rajzoljuk meg az *e* egyenest a láthatóság figyelembevételével!

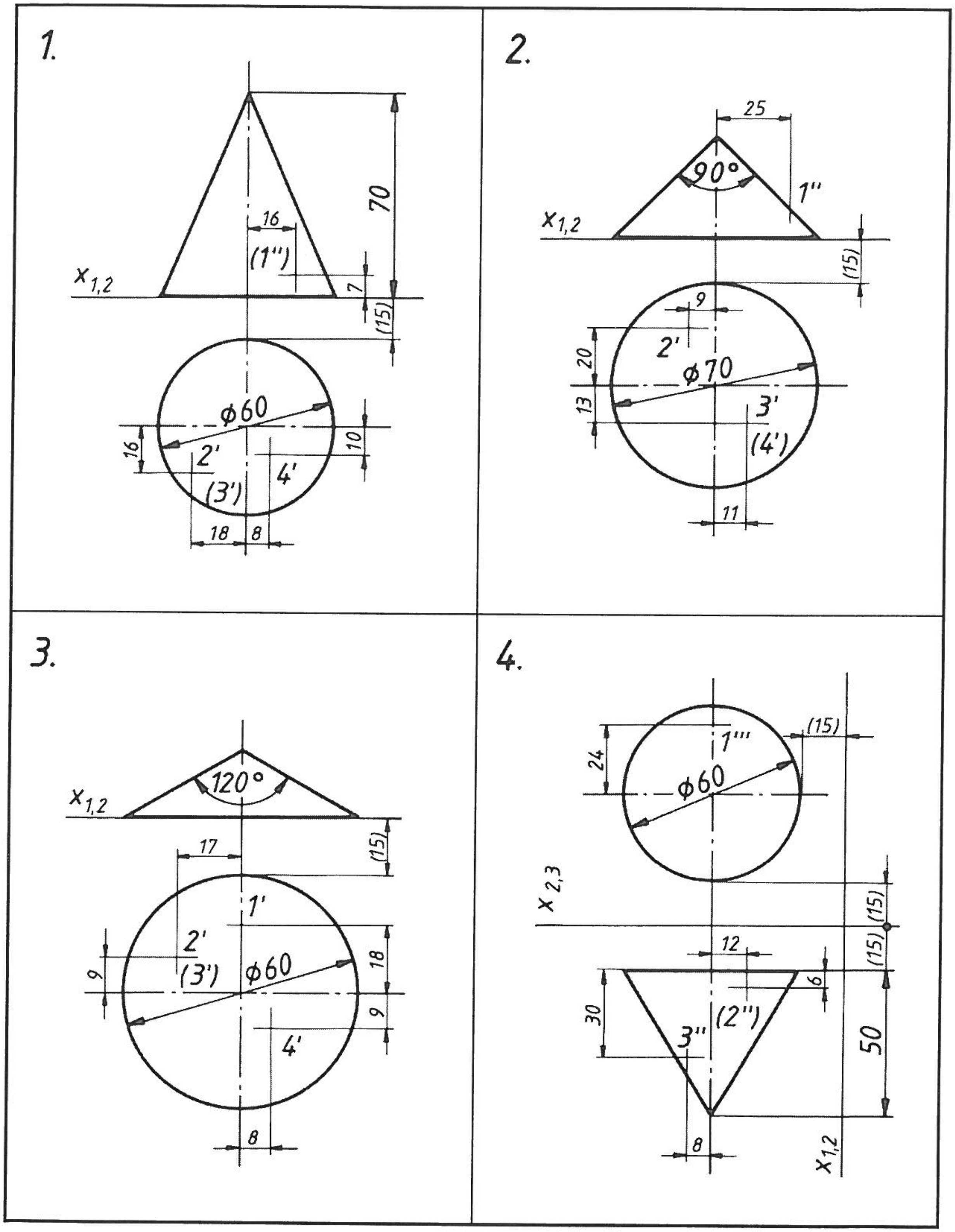


10. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a hengereket a három képsíkos rendszerben (merethálózat nélkül)! A méretarány **1:1**. Azonosítsuk az adott pontokat a többi vetületen! (A fedett pontokra zárójel hívja fel a figyelmet.)

11. feladat: Szerkesszük meg a hengerek hálórajzát!

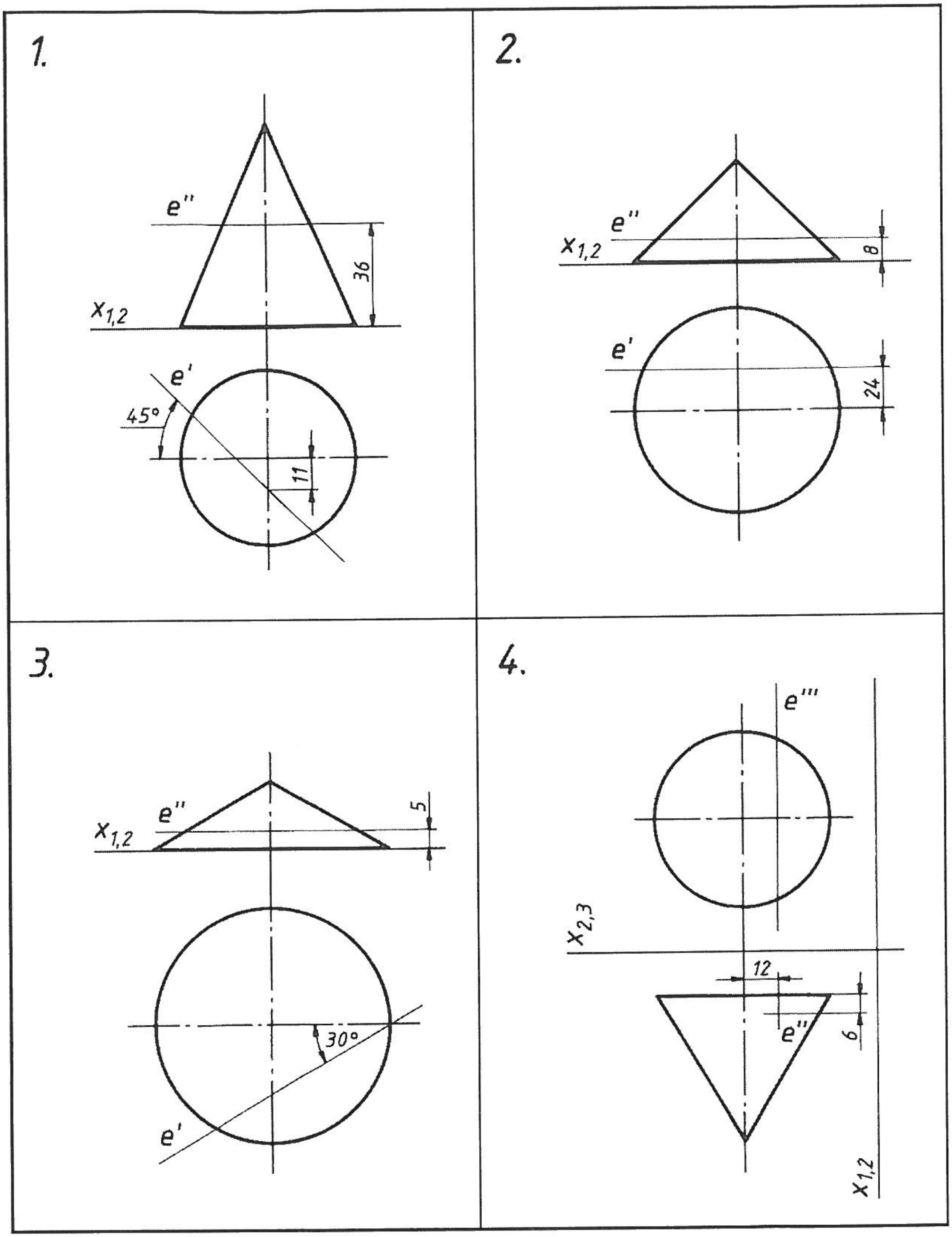


12. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a hengereket a **10. feladatban** leírtak szerint! Szerkesszük meg az *e* egyenes döféspontjait! Rajzoljuk meg az *e* egyenest a láthatóság figyelembevételével!

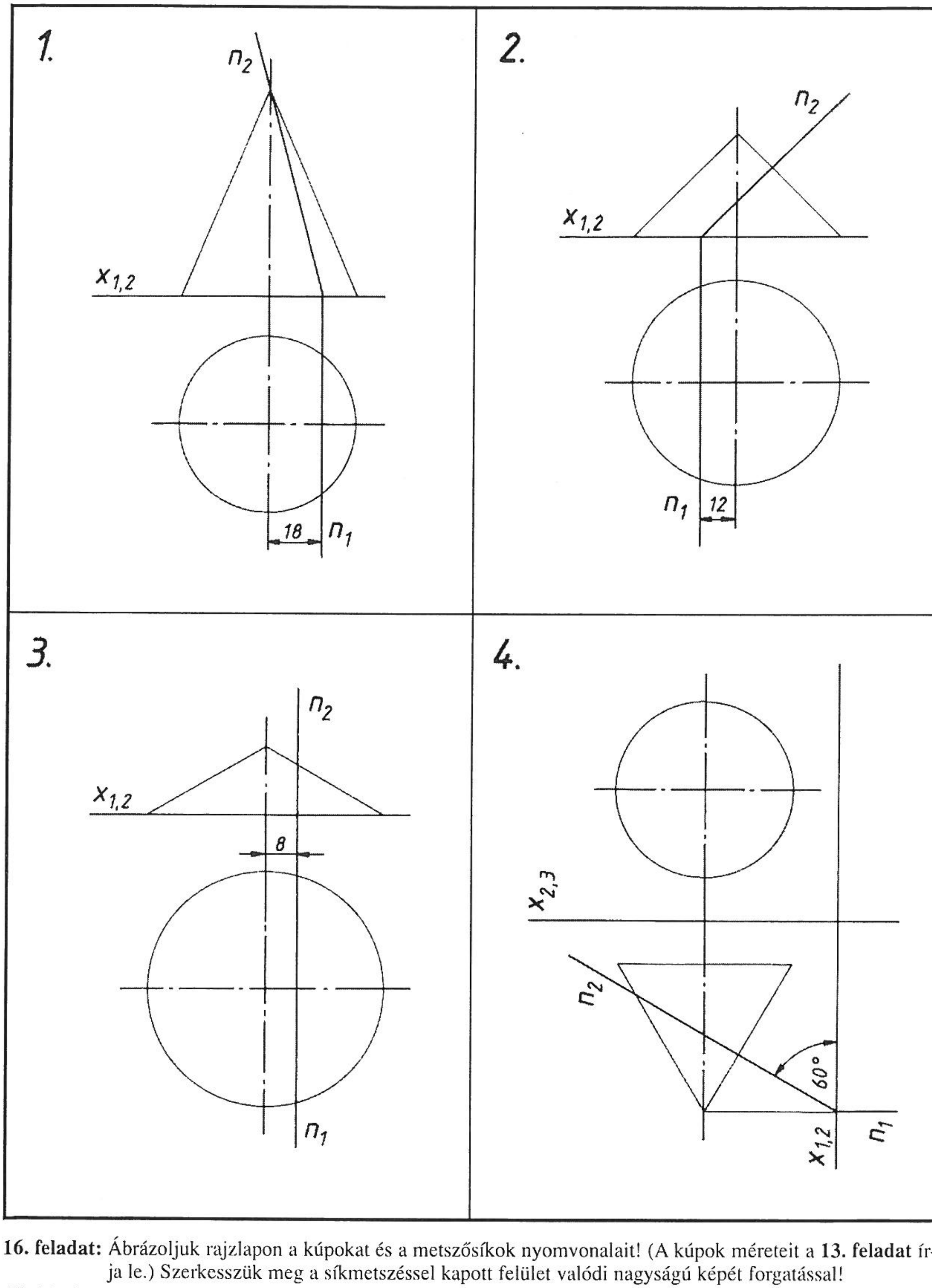


13. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a kúpokat a három képsíkos rendszerben (méretrhálózat nélkül)! A méretarány **1:1**. Azonosítsuk az adott pontokat a többi vetületen! (A fedett pontokra zárójel hívja fel a figyelmet.)

14. feladat: Szerkesszük meg a kúpok hálórajzát!



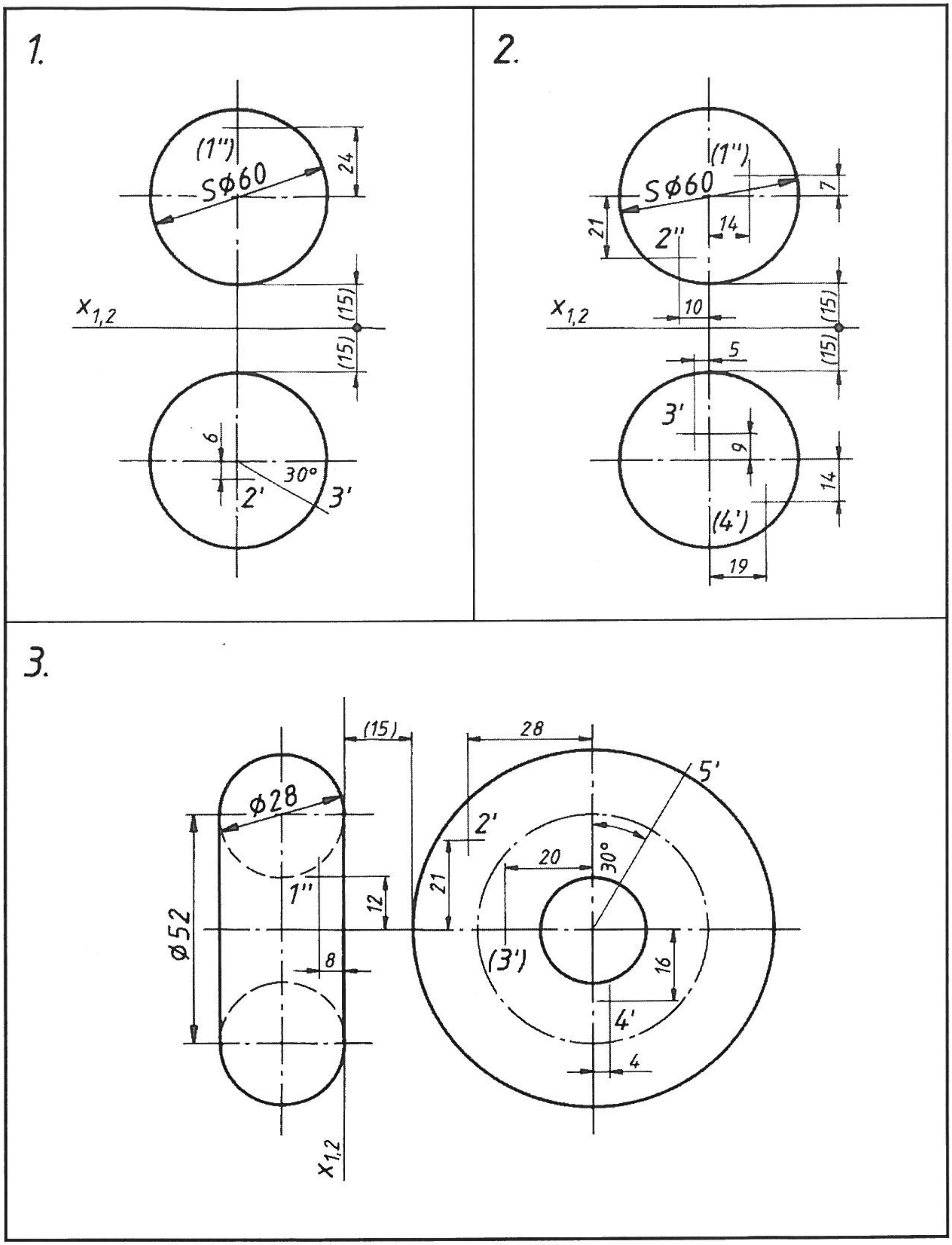
15. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a kúpokat a **13. feladatban** leírtak szerint! Szerkesszük meg az *e* egyenes döféspontjait! Rajzoljuk meg az *e* egyenest a láthatóság figyelembevételével!



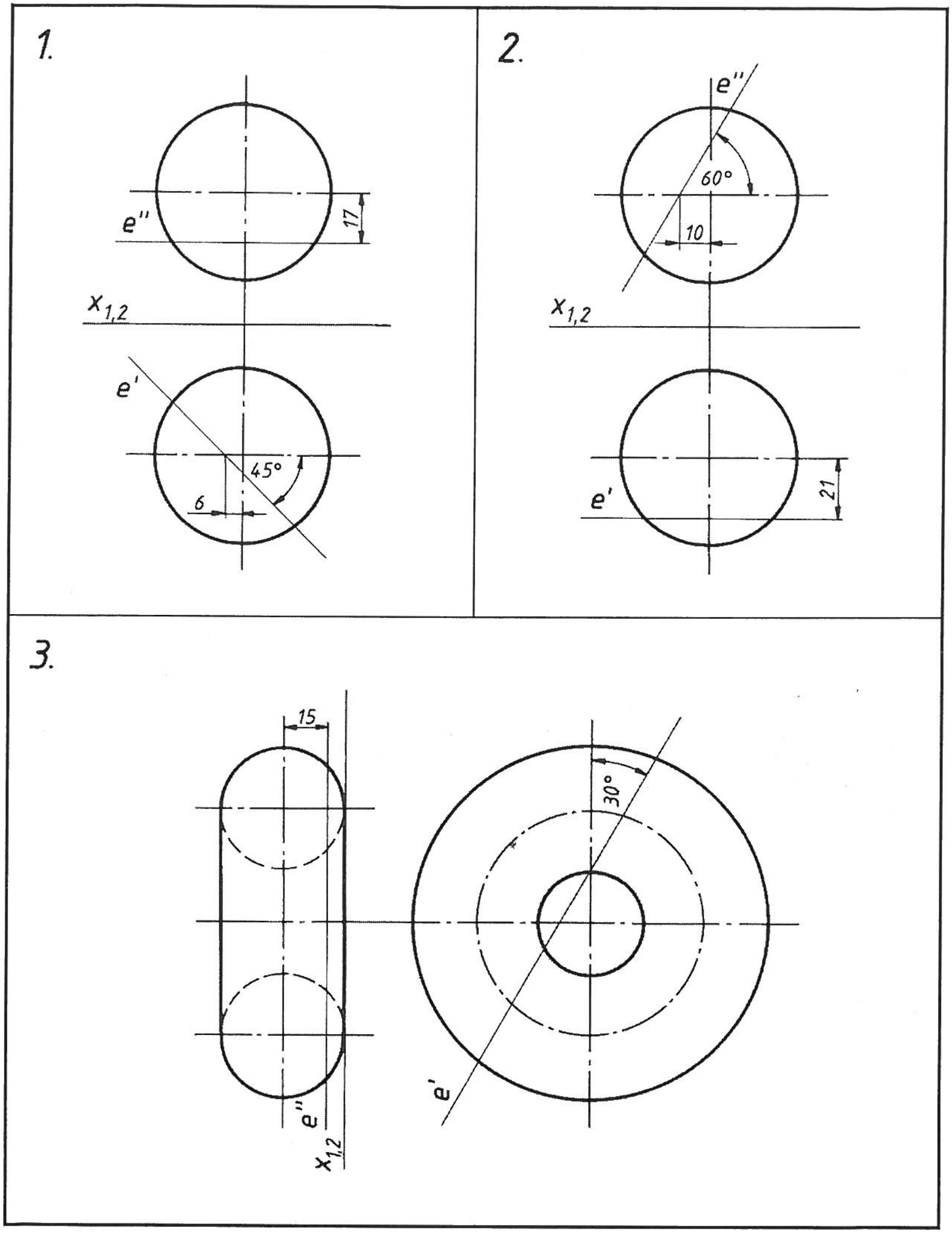
16. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a kúpokat és a metszősíkok nyomvonalait! (A kúpok méreteit a **13. feladat** írja le.) Szerkesszük meg a síkmetszéssel kapott felület valódi nagyságú képét forgatással!

17. feladat: Szerkesszük meg a síkmetszéssel kapott felület valódi nagyságú képét transzformálással és a **4. feladat** hálórajzát!

18. feladat: Végezzünk a síkmetszéssel kapott alakzatokon teljes felületelemzést! (Mintának használjuk a **28. munkalap** táblázatát!)

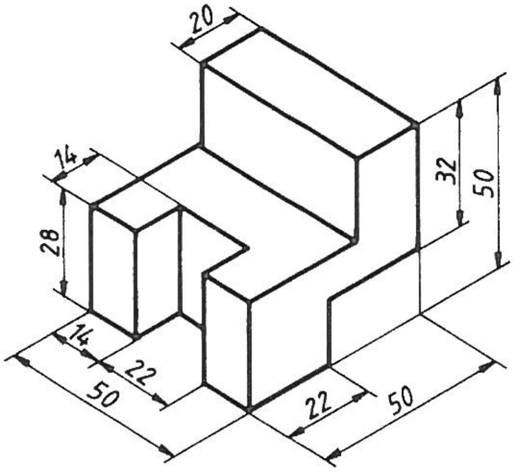


19. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a gömböket és a körgyűrűfelületet a három képsíkos rendszerben (mérethálózat nélkül)! A méretarány **1:1**. Azonosítsuk az adott pontokat a többi vetületen! (A fedett pontokra zárójel hívja fel a figyelmet.)

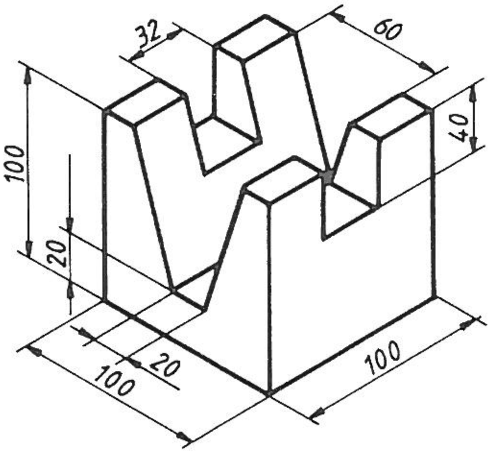


20. feladat: Ábrázoljuk rajzlapon a gömböket és a körgyűrűfelületet a **19. feladatban** leírtak szerint! Szerkesszük meg az *e* egyenes döféspontjait! Rajzoljuk meg az *e* egyenest a láthatóság figyelembevételével!

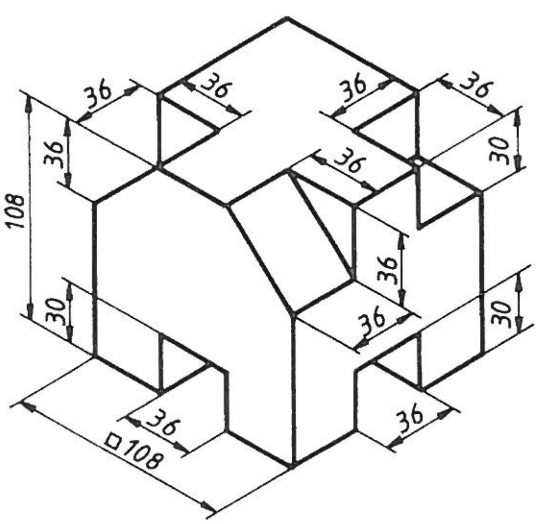
1.



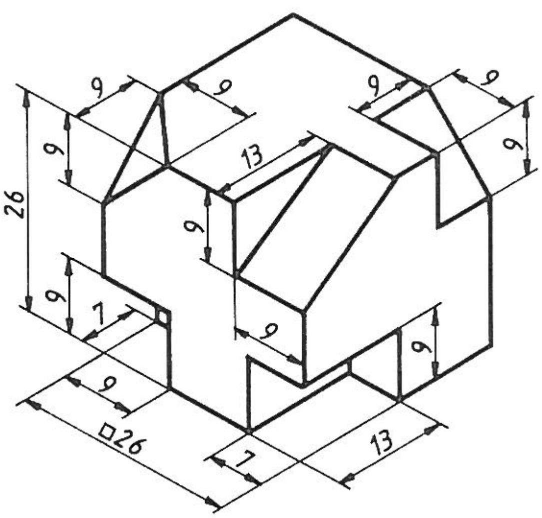
2.



3.



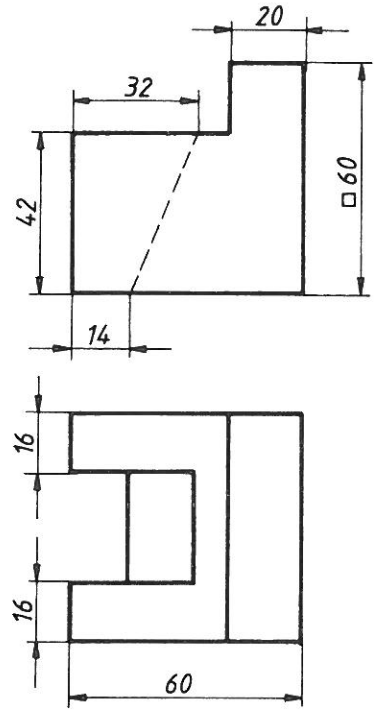
4.



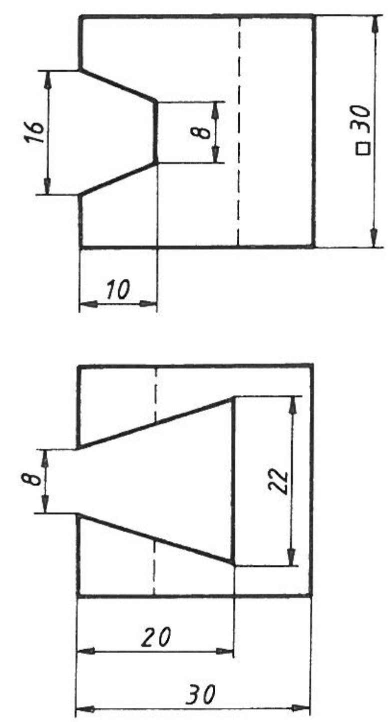
21. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt kockákat a képsíkrendszerben, az axonometrikus ábrák alapján! Építsük fel a mérethálózatot!

22. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!

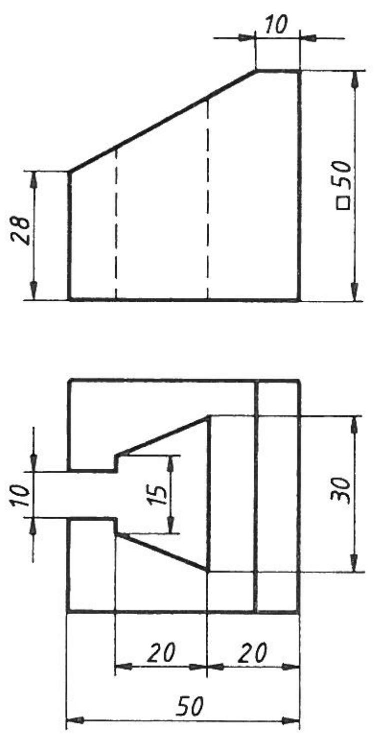
1.



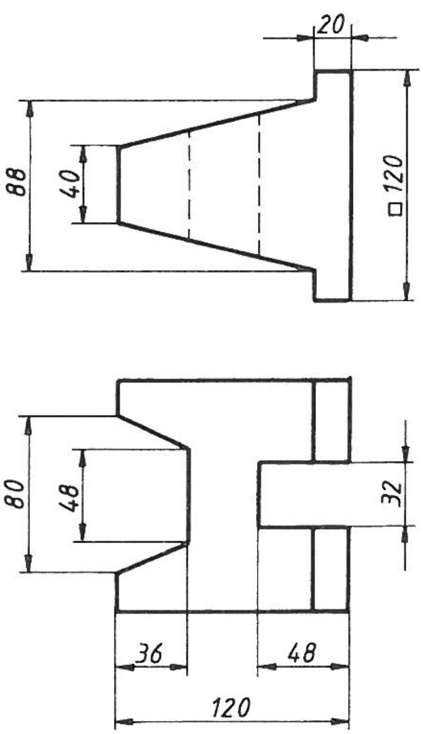
2.



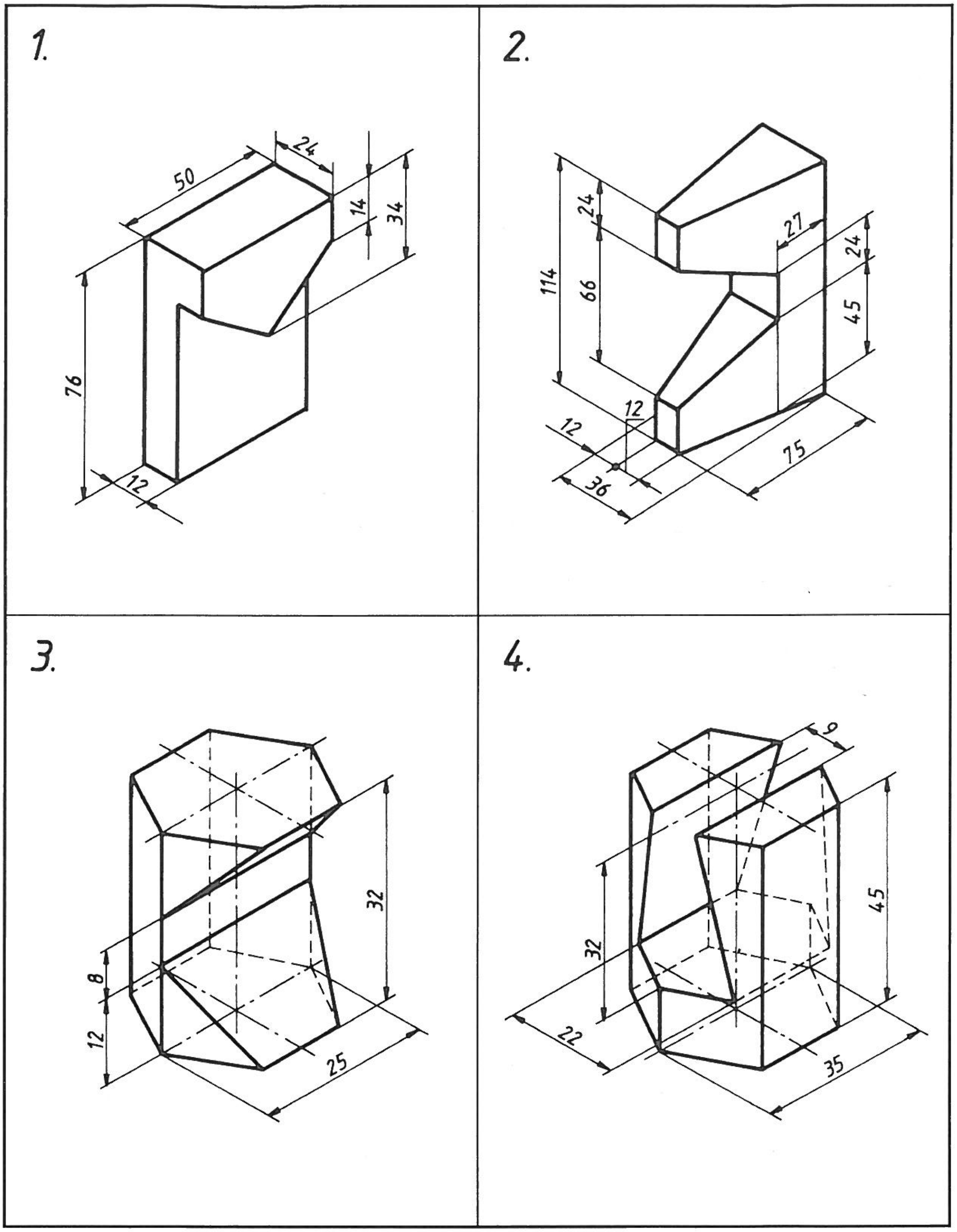
3.



4.

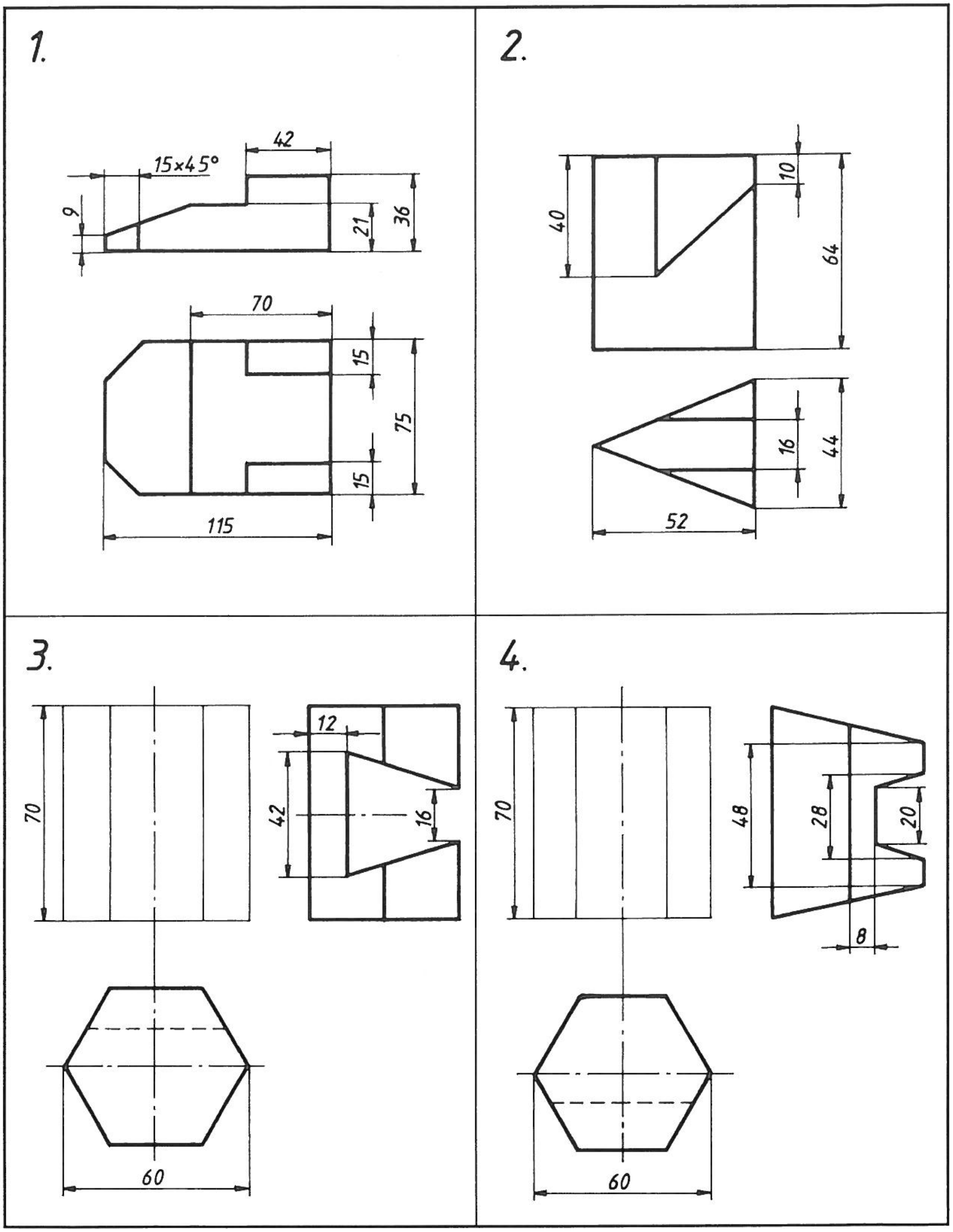


23. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt kockákat a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!
24. feladat: Szerkesszük meg a csonkolt kockák frontális axonometrikus képét!
25. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!



26. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt hasábokat a képsíkrendszerben, az axonometrikus ábrák alapján! Építsük fel a mérethálózatot!

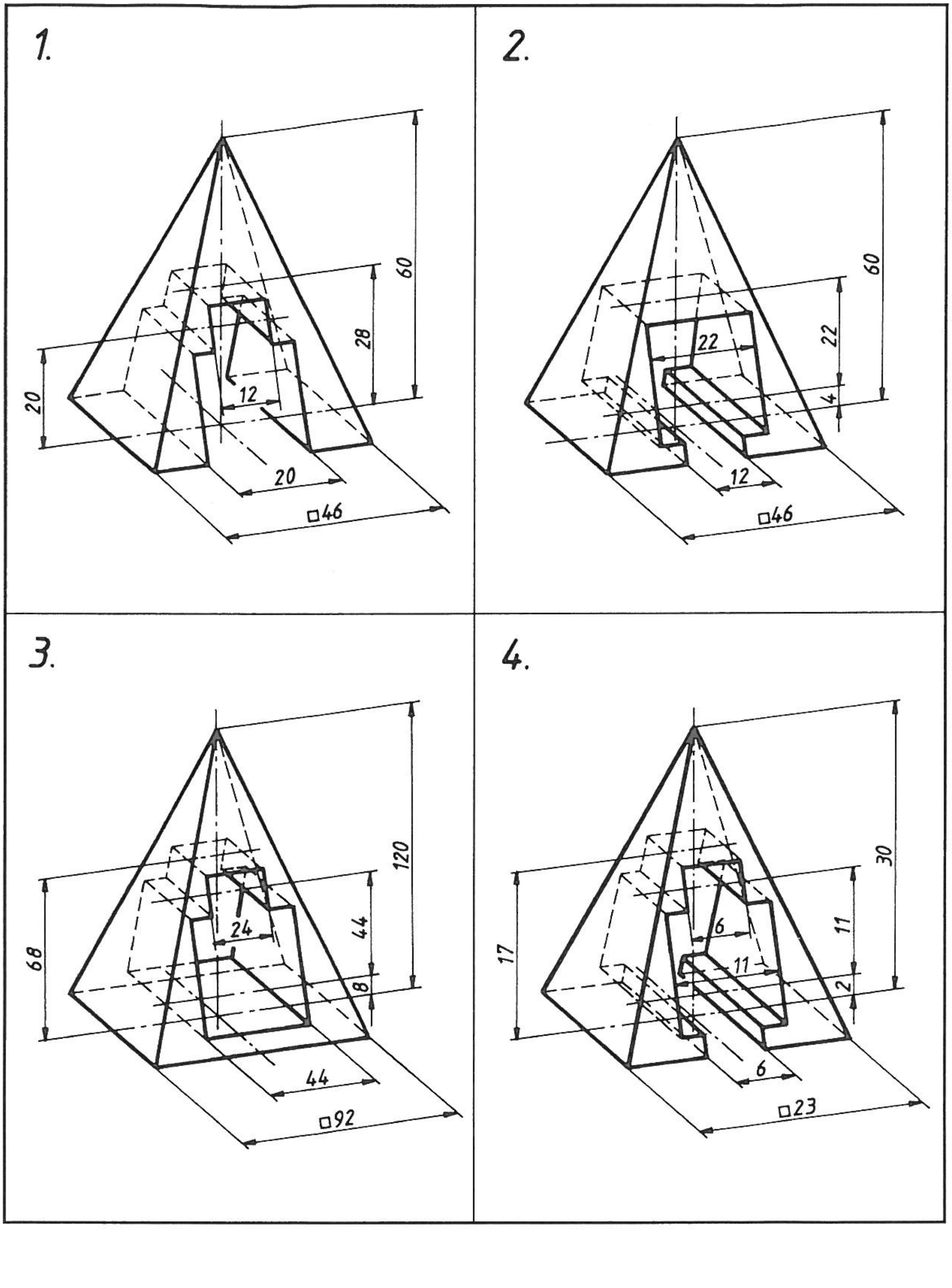
27. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!



28. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt hasábokat a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!

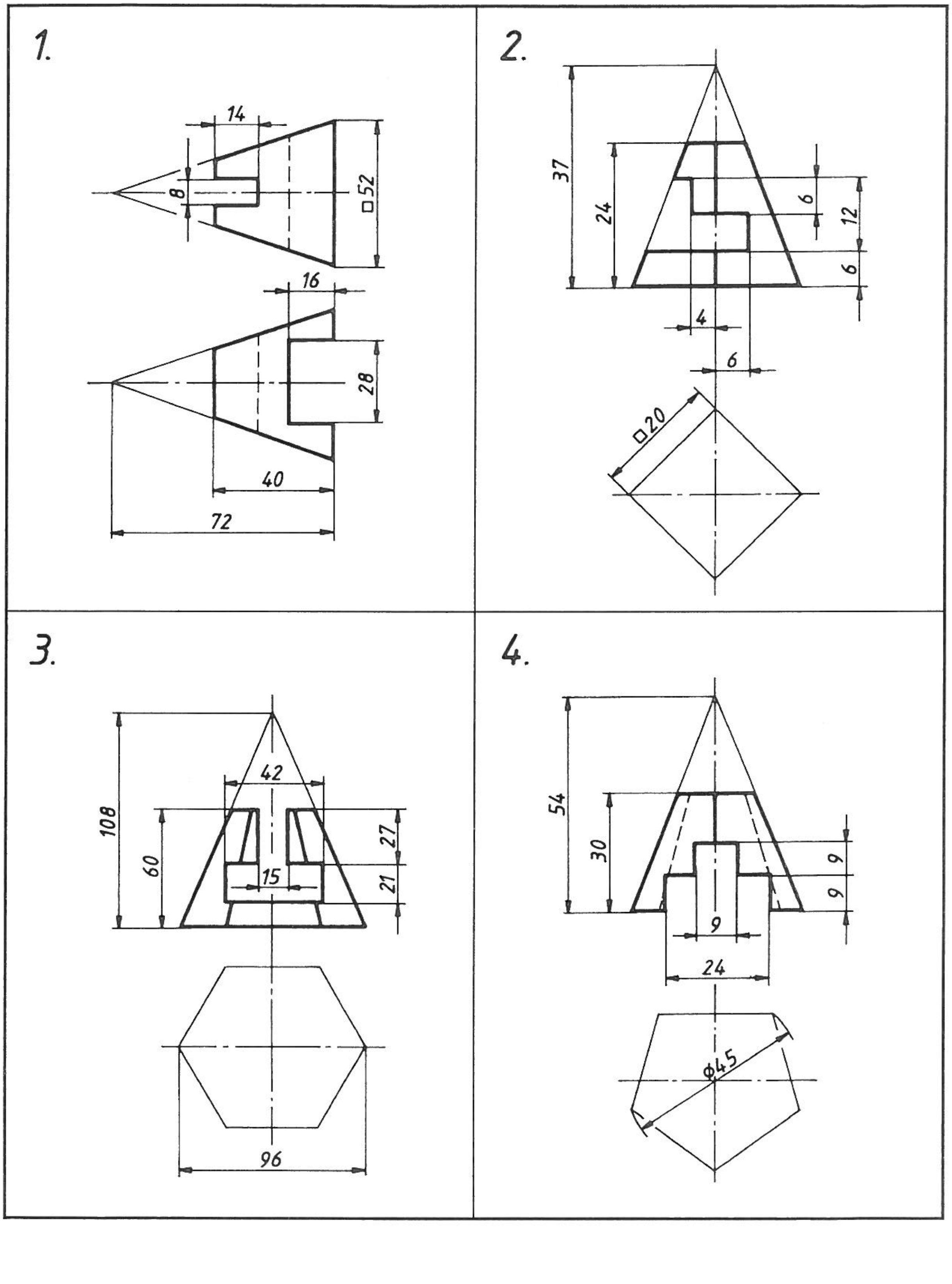
29. feladat: Szerkesszük meg a csonkolt hasábok egyméretű axonometrikus képét!

30. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!



31. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt gúlákat a képsíkrendszerben, az axonometrikus ábrák alapján! Építsük fel a mérethálózatot!

32. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!

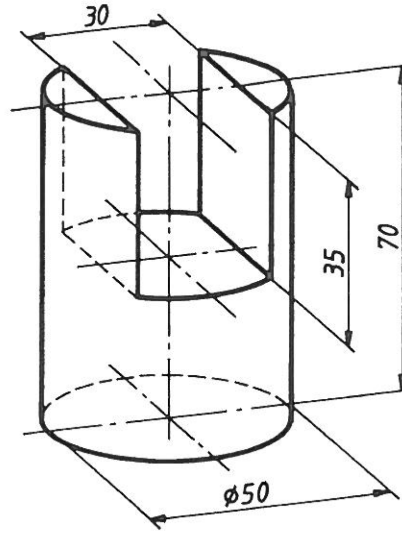


33. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt gúlákat a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!

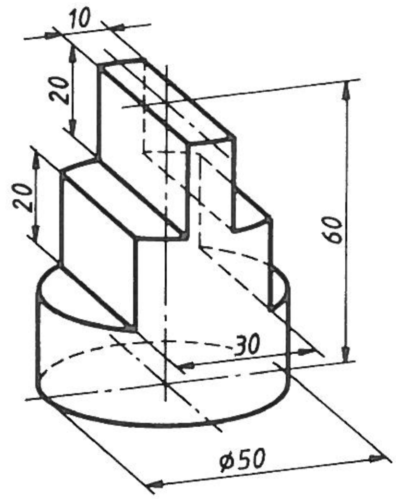
34. feladat: Szerkesszük meg a csonkolt gúlák kétméretű axonometrikus képét!

35. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!

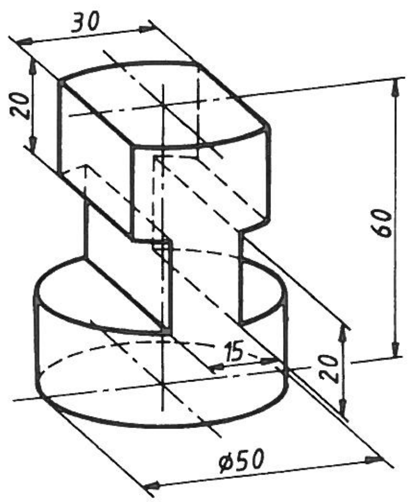
1.



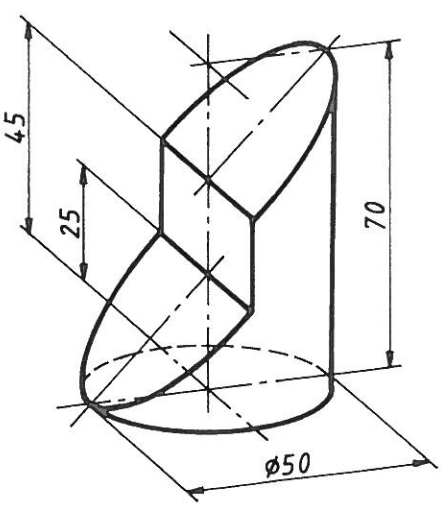
2.



3.

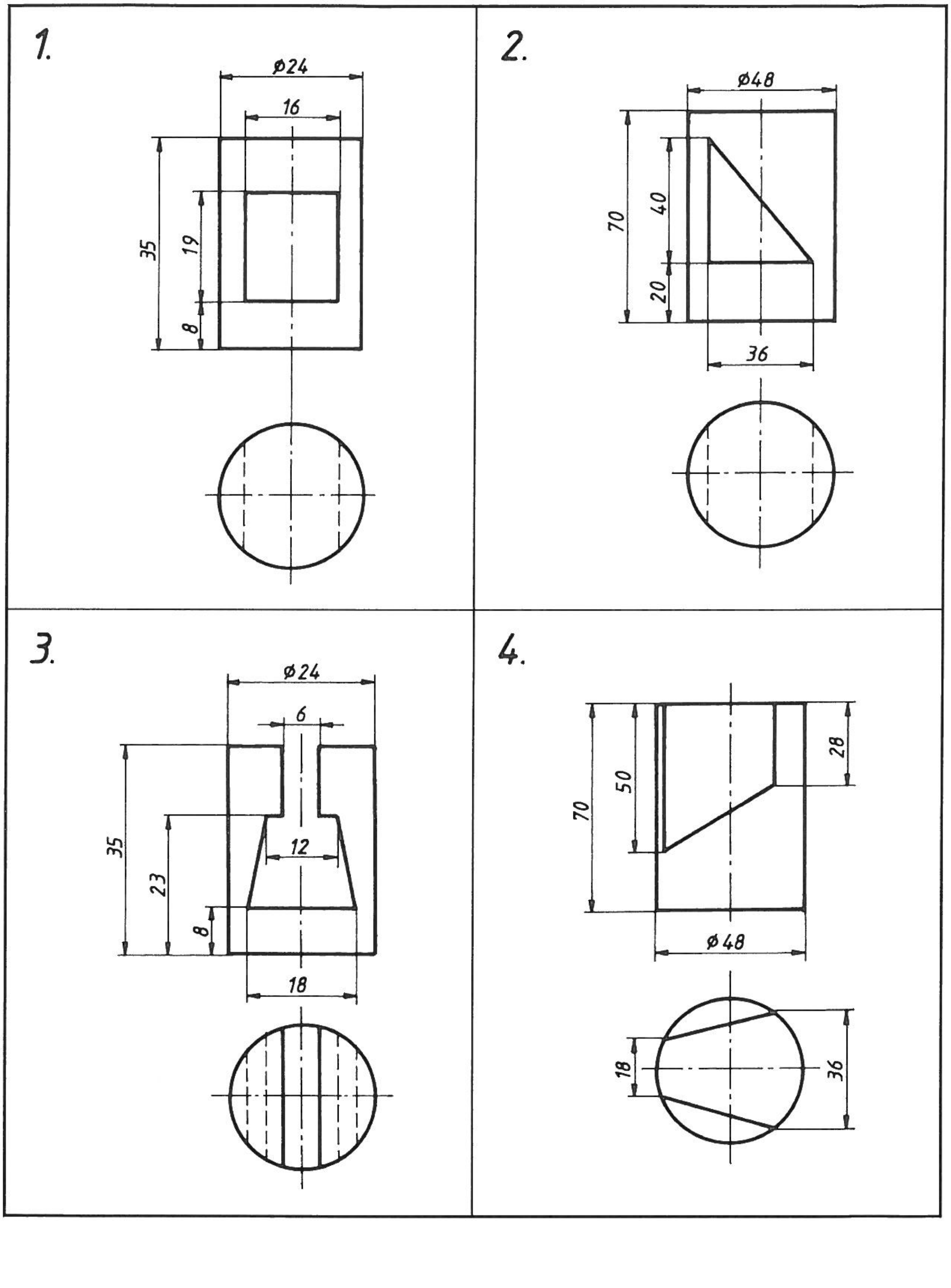


4.



36. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt hengereket a képsíkrendszerben, az axonometrikus ábrák alapján! Építsük fel a mérethálózatot!

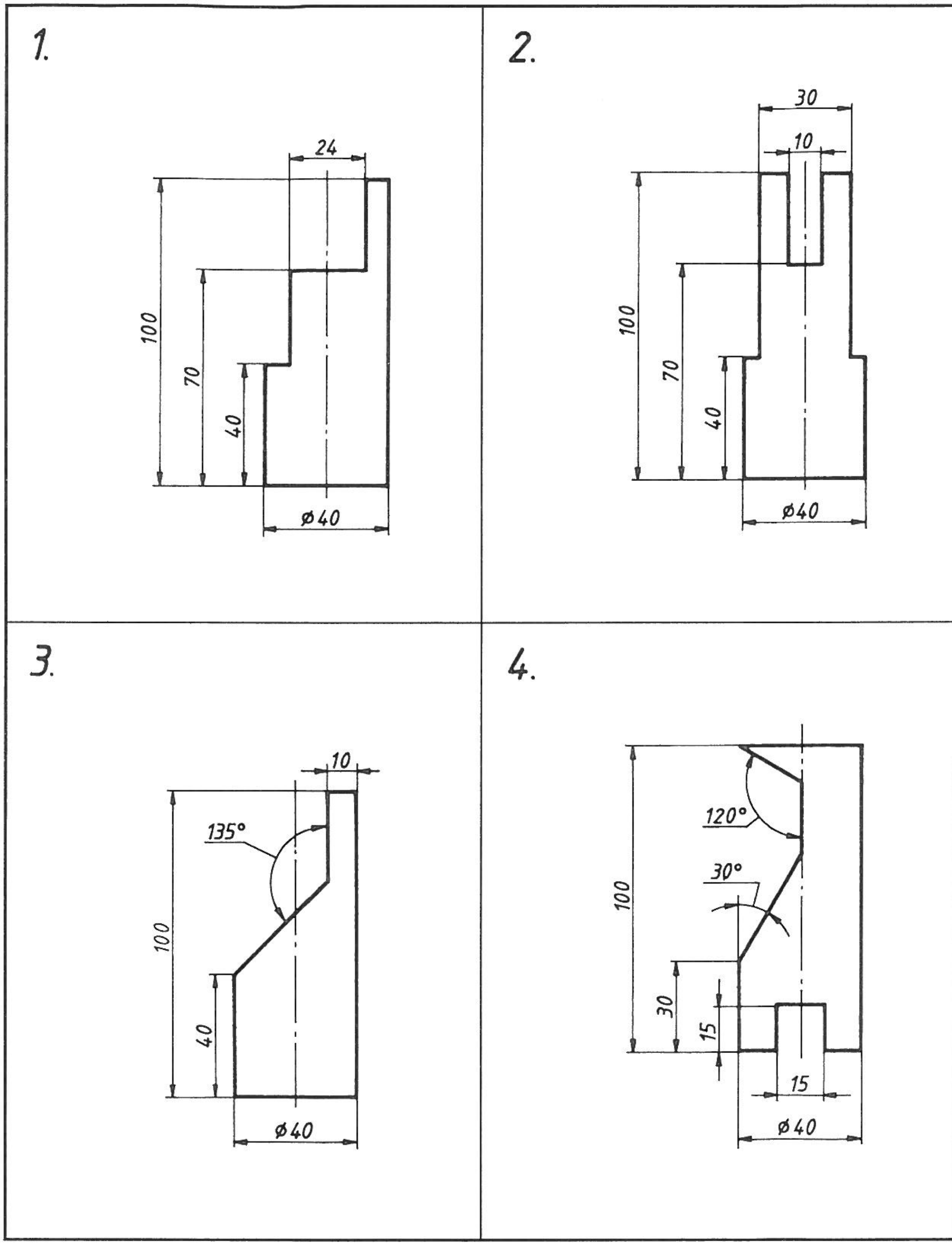
37. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!



38. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt hengereket a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!

39. feladat: Szerkesszük meg a csonkolt hengerek kétméretű axonometrikus képét!

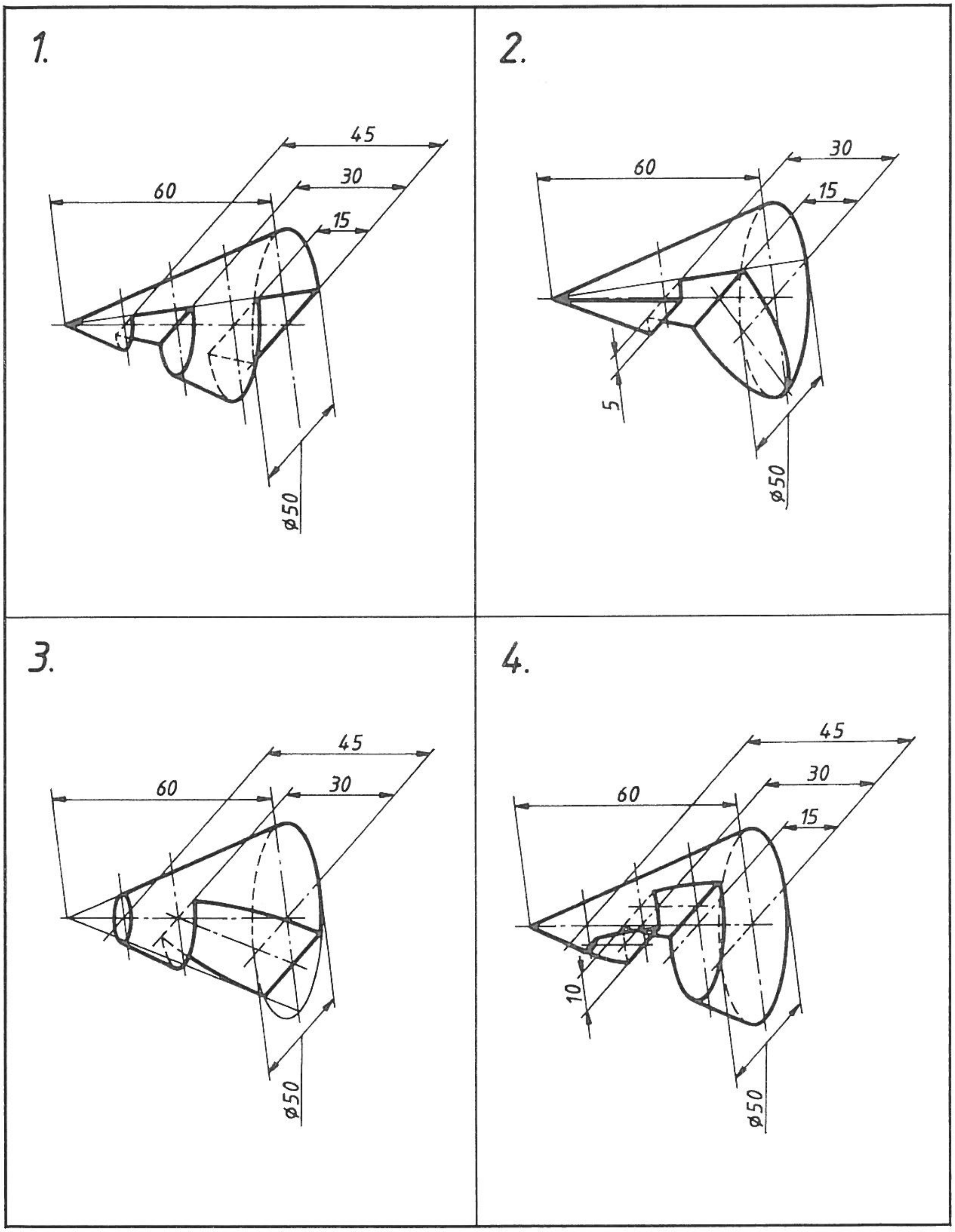
40. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!



41. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt hengereket a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!

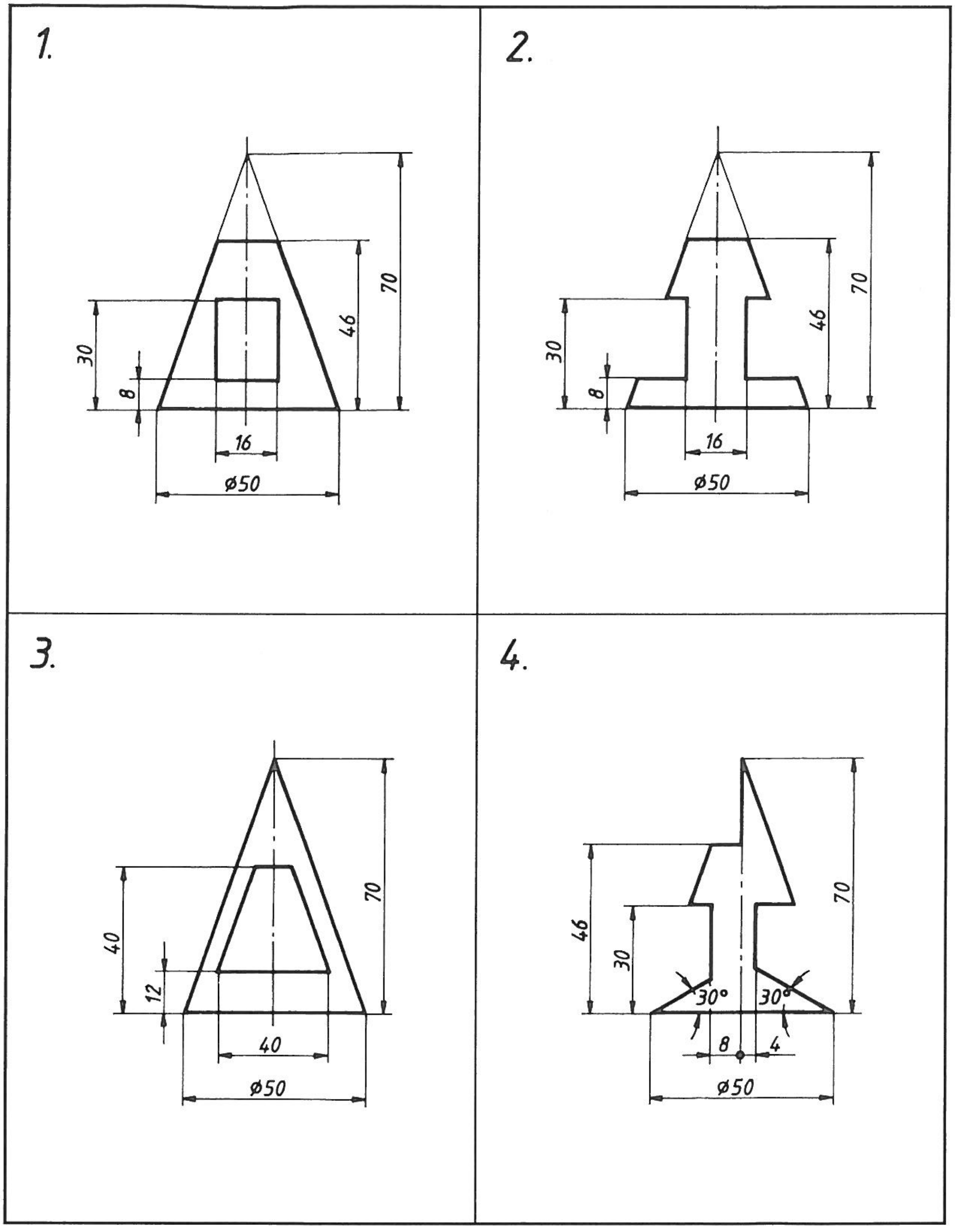
42. feladat: Szerkesszük meg a csonkolt hengerek kétméretű axonometrikus képét!

43. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!



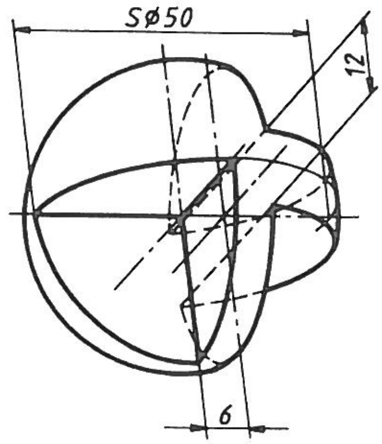
44. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt kúpokat a képsíkrendszerben, az axonometrikus ábrák alapján! Építsük fel a mérethálózatot!

45. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!

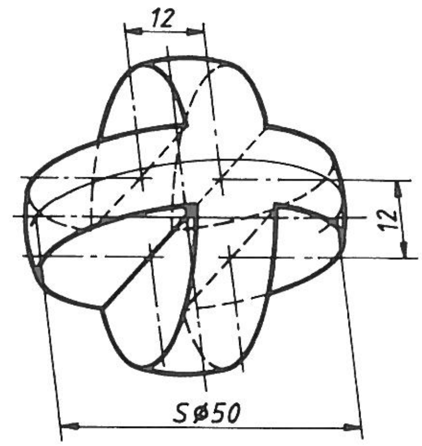


46. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt kúpokat a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!
47. feladat: Szerkesszük meg a csonkolt kúpok kétméretű axonometrikus képét!
48. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!

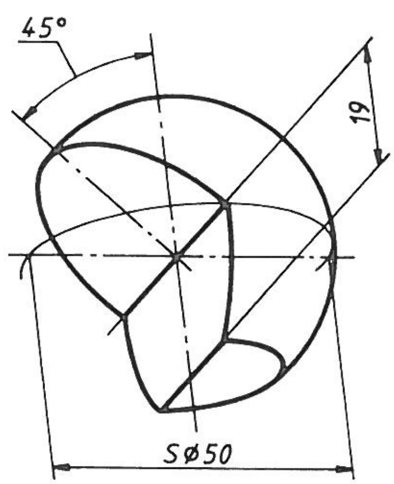
1.



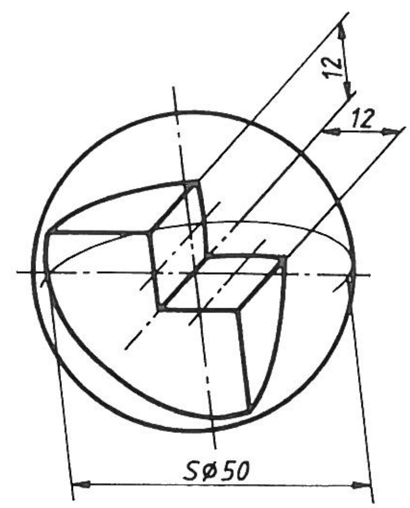
2.



3.



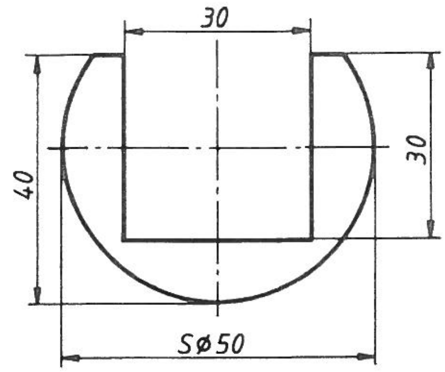
4.



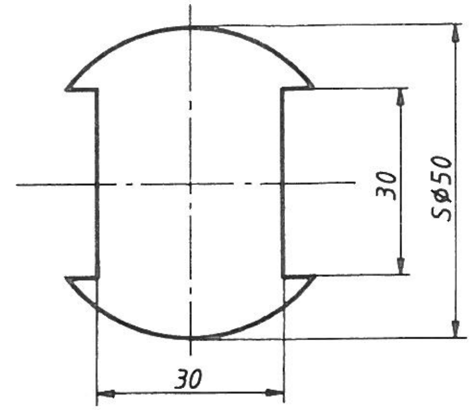
49. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt gömböket a képsíkrendszerben, az axonometrikus ábrák alapján! Építsük fel a méretlhálózatot!

50. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!

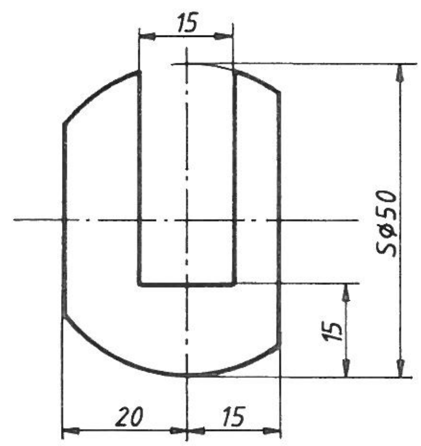
1.



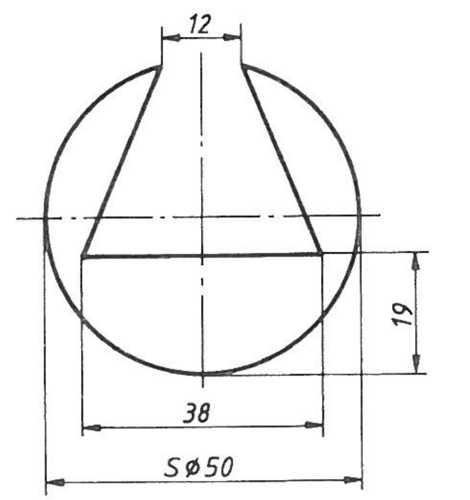
2.



3.



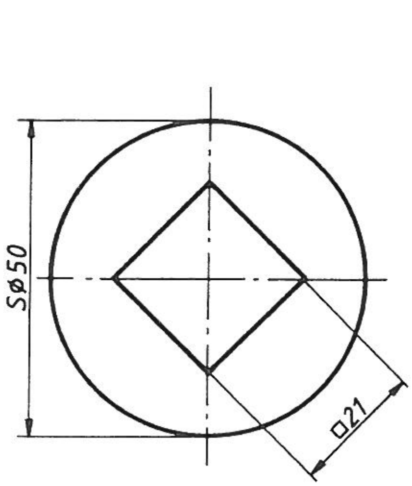
4.



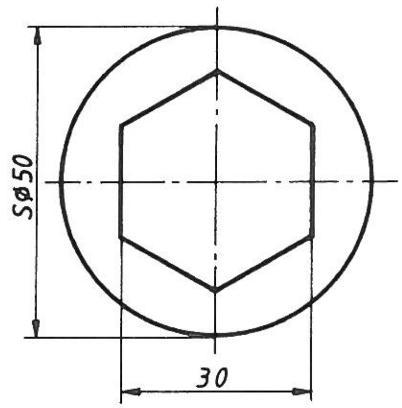
51. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt gömböket a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!

52. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!

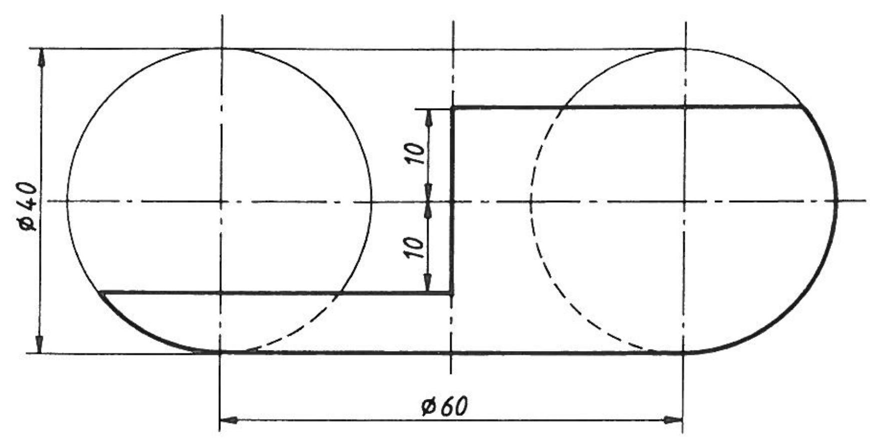
1.



2.

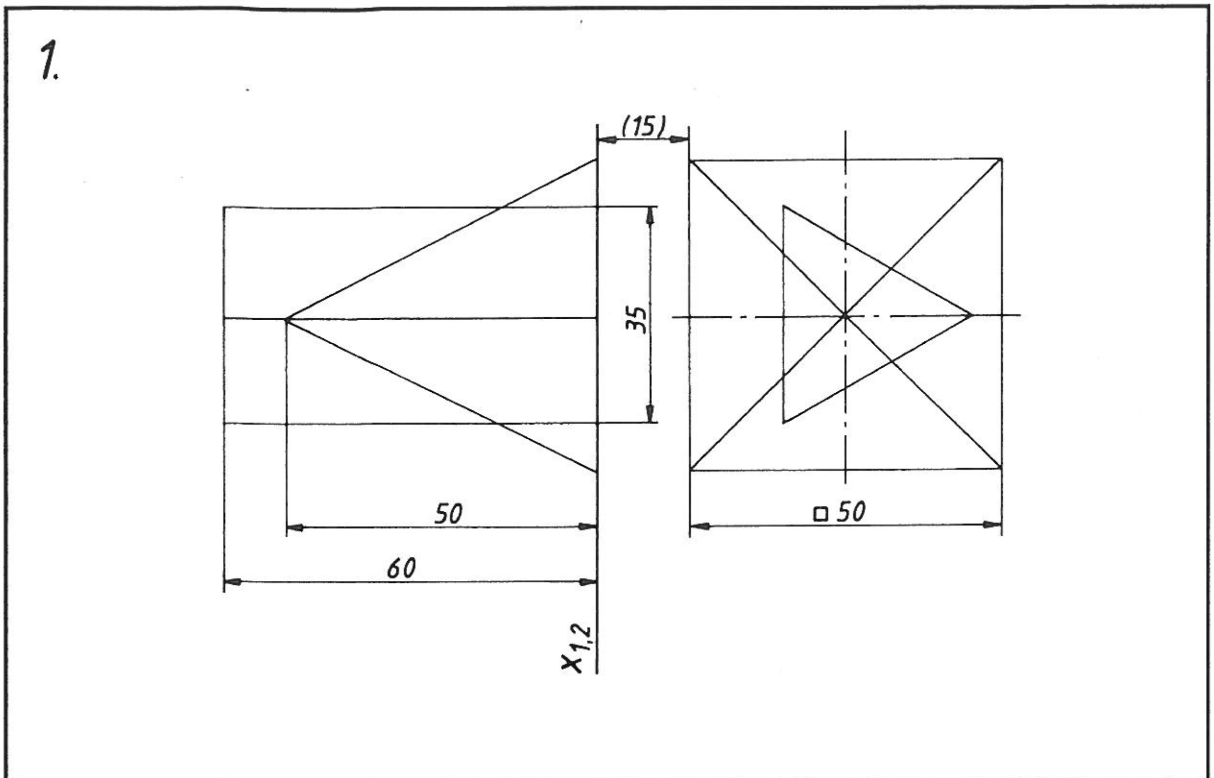


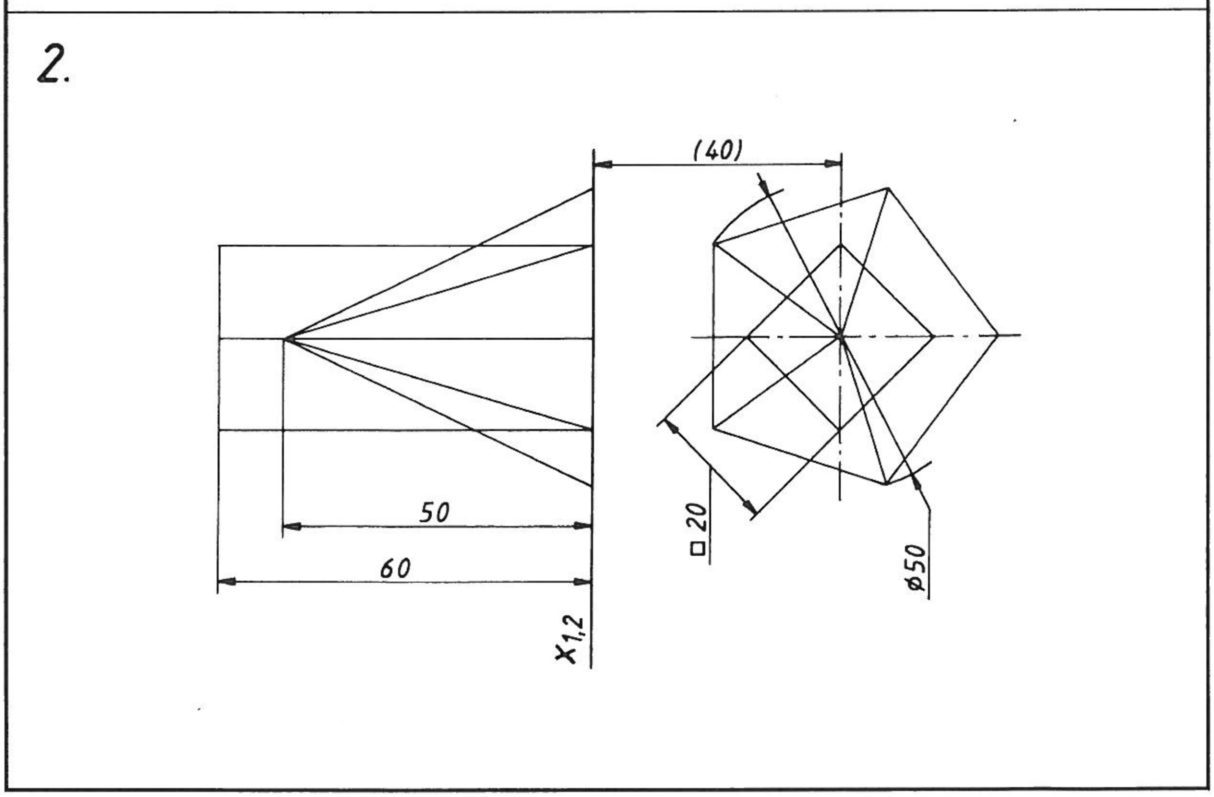
3.



53. feladat: Ábrázoljuk a csonkolt gömböket és körgyűrűfelületet a képsíkrendszerben, a hiányzó vetületekkel kiegészítve!

54. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!

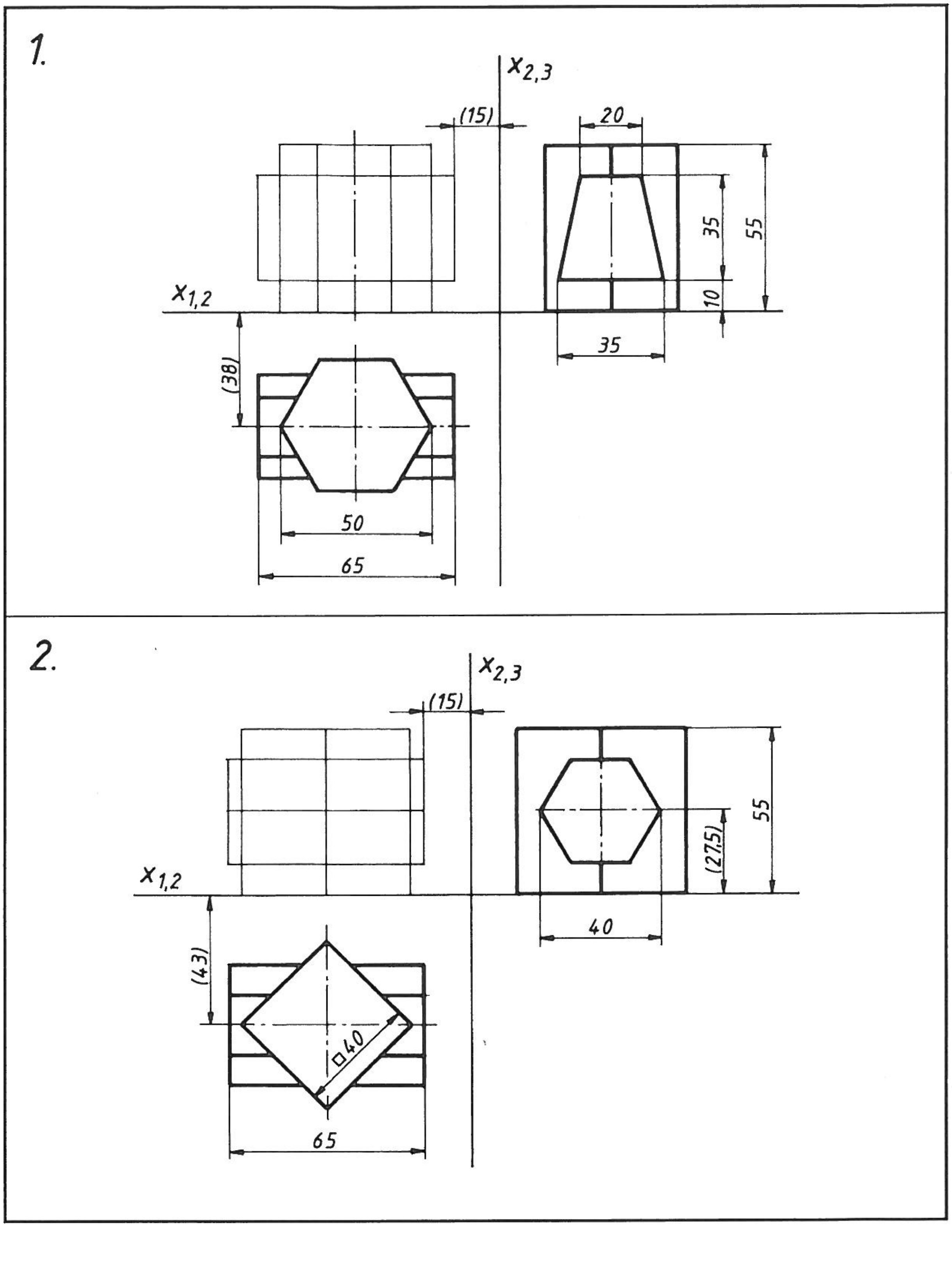




55. feladat: Ábrázoljuk az alakzatokat a képsíkrendszerben! Szerkesszük meg a testek áthatását!

56. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!

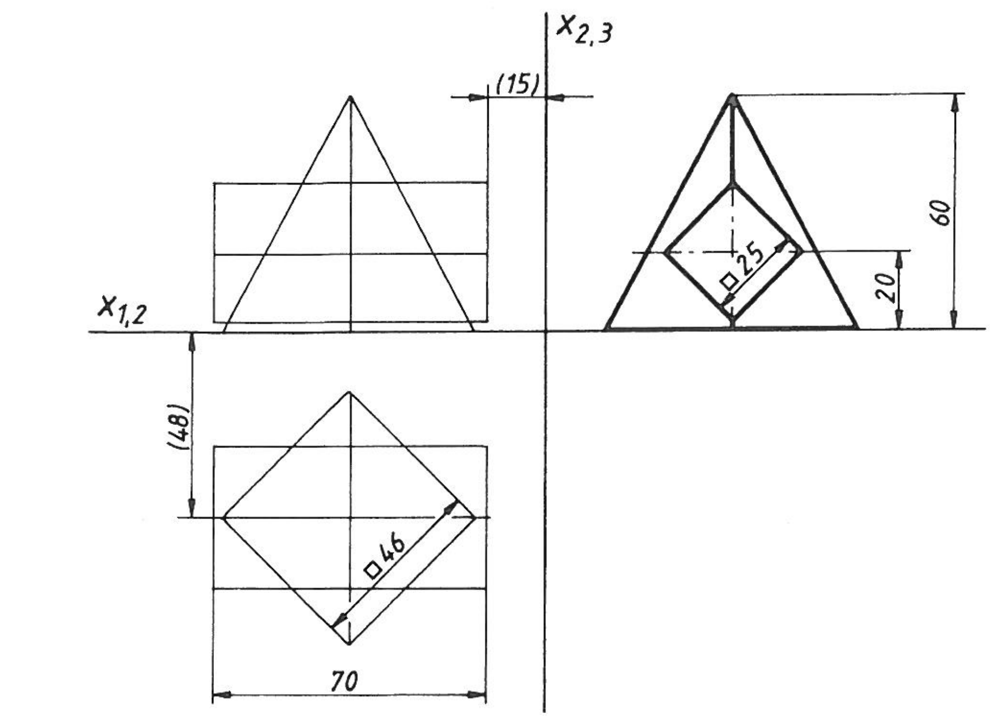
57. feladat: Ábrázoljuk a testek áthatásából származtatott közös részletet!



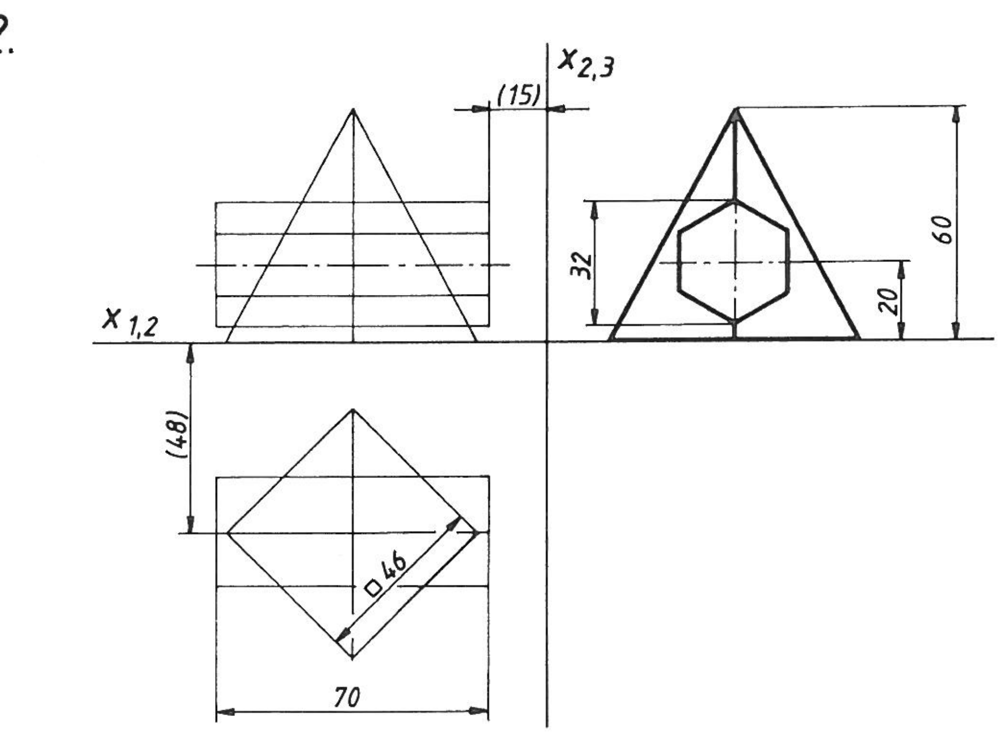
58. feladat: Ábrázoljuk az alakzatokat a képsíkrendszerben! Szerkesszük meg a testek áthatását!

59. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!

1.



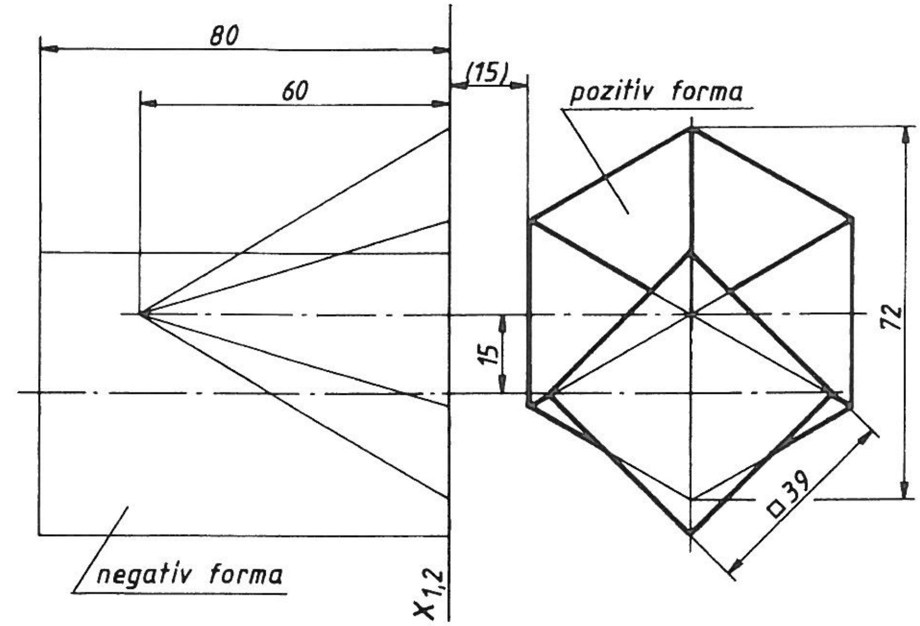
2.



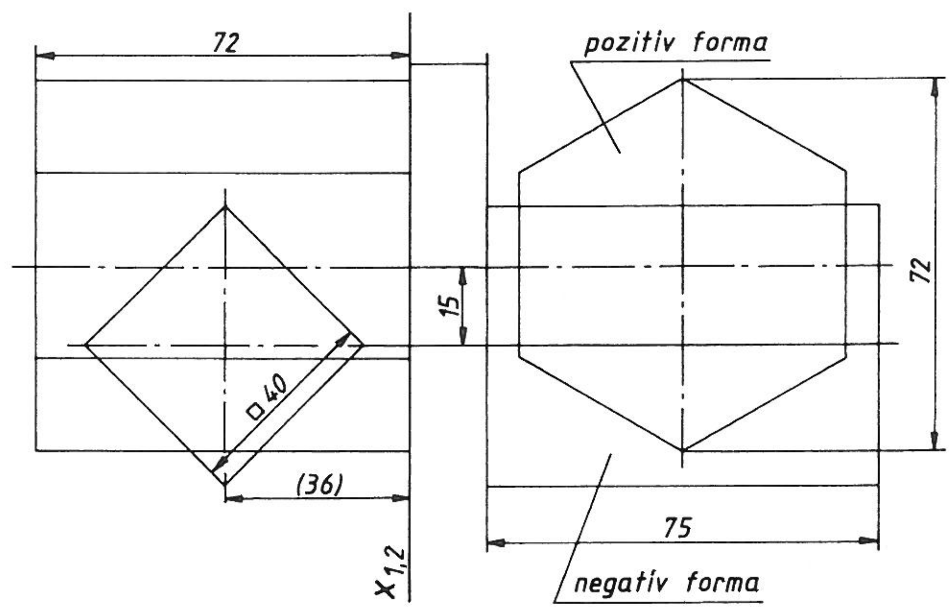
60. feladat: Ábrázoljuk az alakzatokat a képsíkrendszerben! Szerkesszük meg a testek áthatását!

61. feladat: Azonosítsuk a csúcsokat, éleket és felületeket!

1.

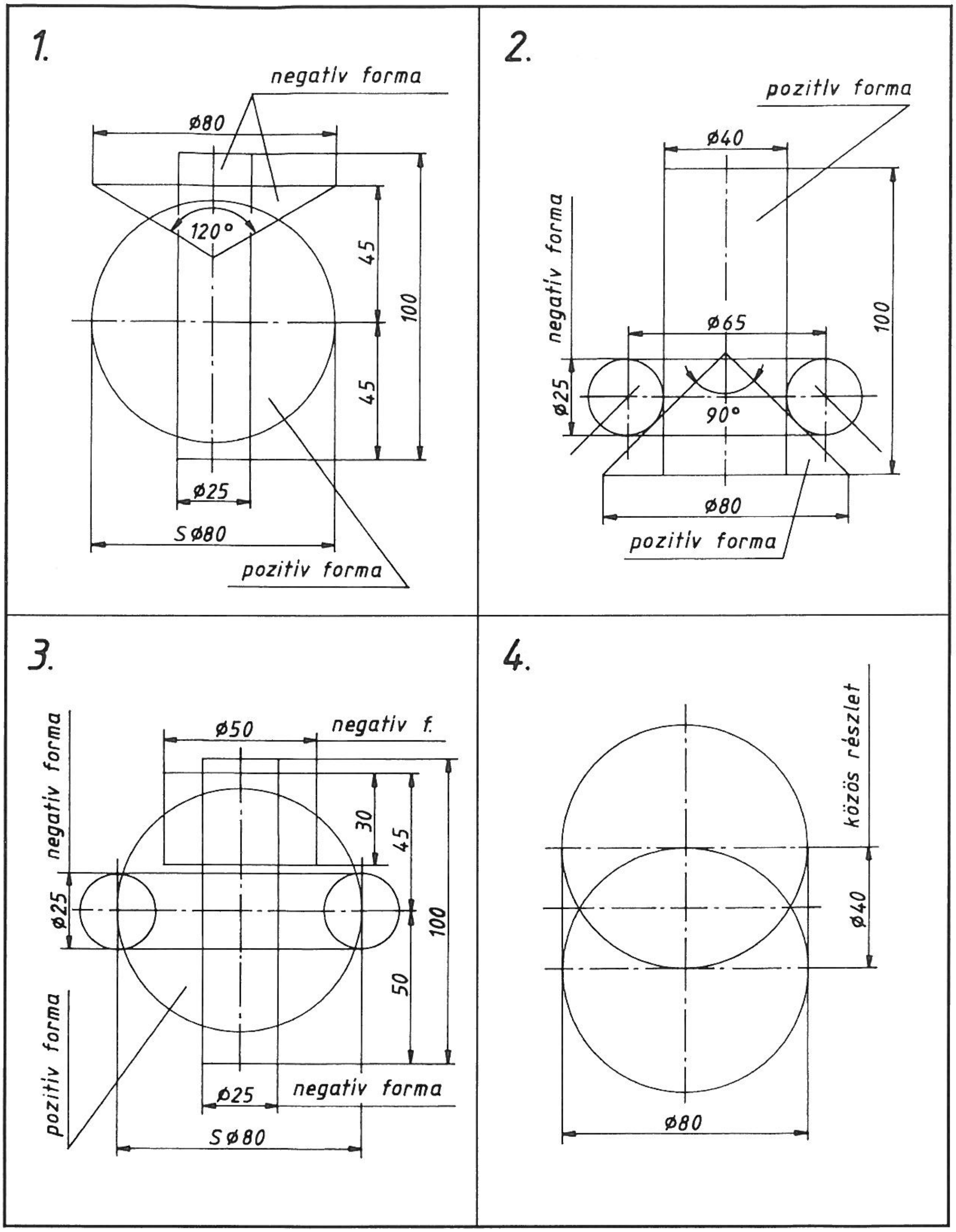


2.



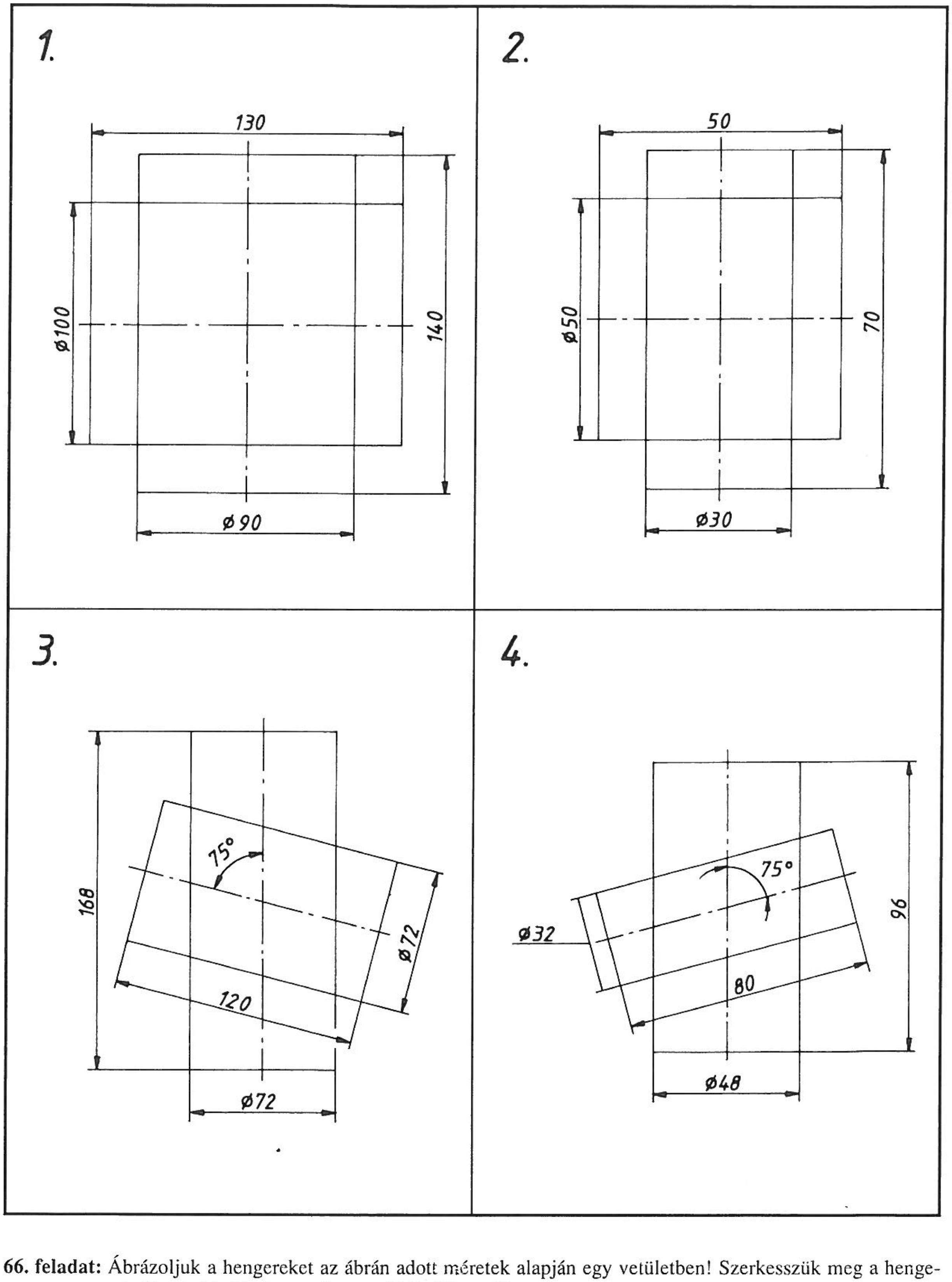
62. feladat: Ábrázoljuk az alakzatokat a képsíkrendszerben! Szerkesszük meg a testek áthatását!

63. feladat: Ábrázoljuk a testek áthatásából származtatott alakzatokat, a pozitív és negatív formák figyelembevételével!



64. feladat: Ábrázoljuk a forgástesteket az ábrán adott méretek alapján egy vetületben! Rajzoljuk meg az áthatás eredményét a láthatóság figyelembevételével!

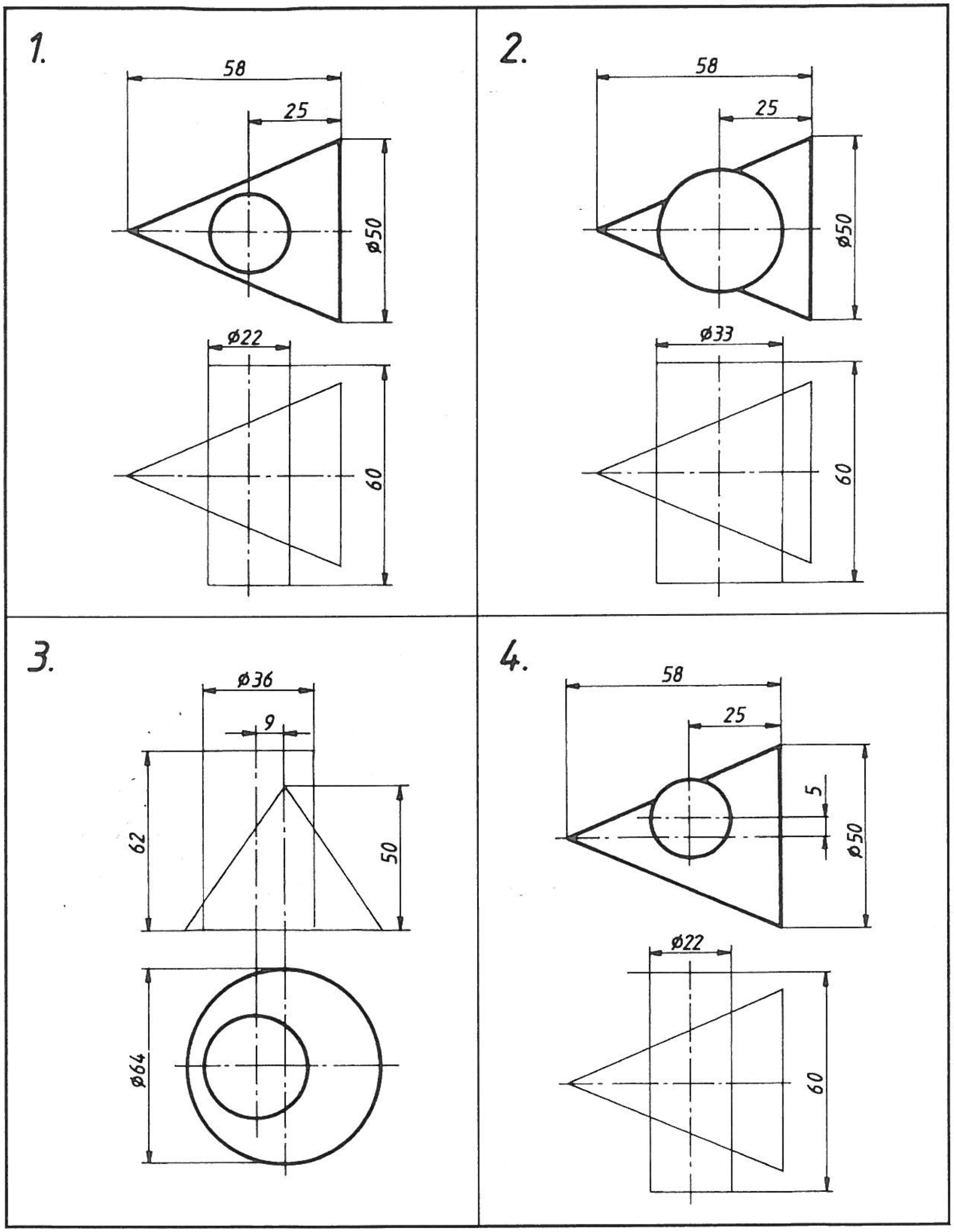
65. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az áthatással kapott alakzatokon!



66. feladat: Ábrázoljuk a hengereket az ábrán adott méretek alapján egy vetületben! Szerkesszük meg a hengerek áthatását! Alkalmazzuk a segédgömbös módszert!

67. feladat: Ábrázoljuk a hengerek áthatását úgy, hogy a kisebbik átmérőjű hengerek negatív formaként szerepeljenek (**1.**, **2.** és **4.** feladat)!

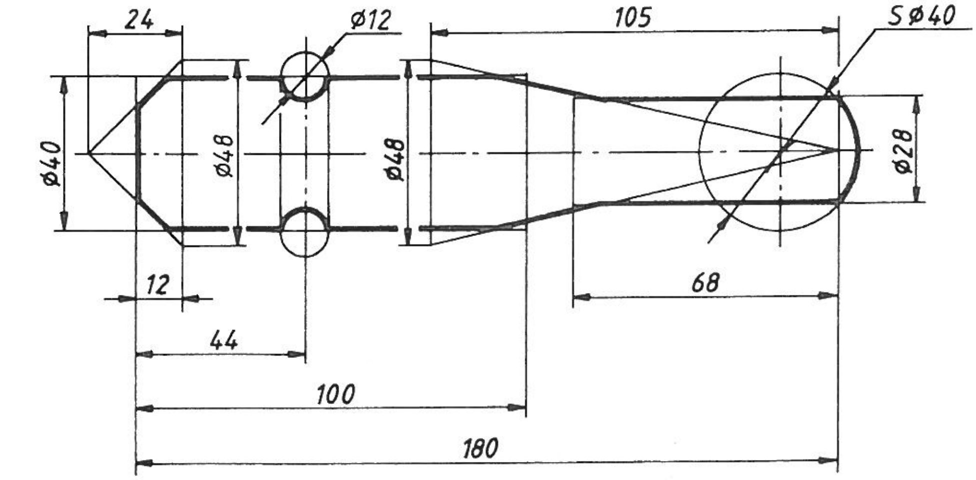
68. feladat: Ábrázoljuk az áthatással kapott közös részletet három vetületben (**3.** feladat)!



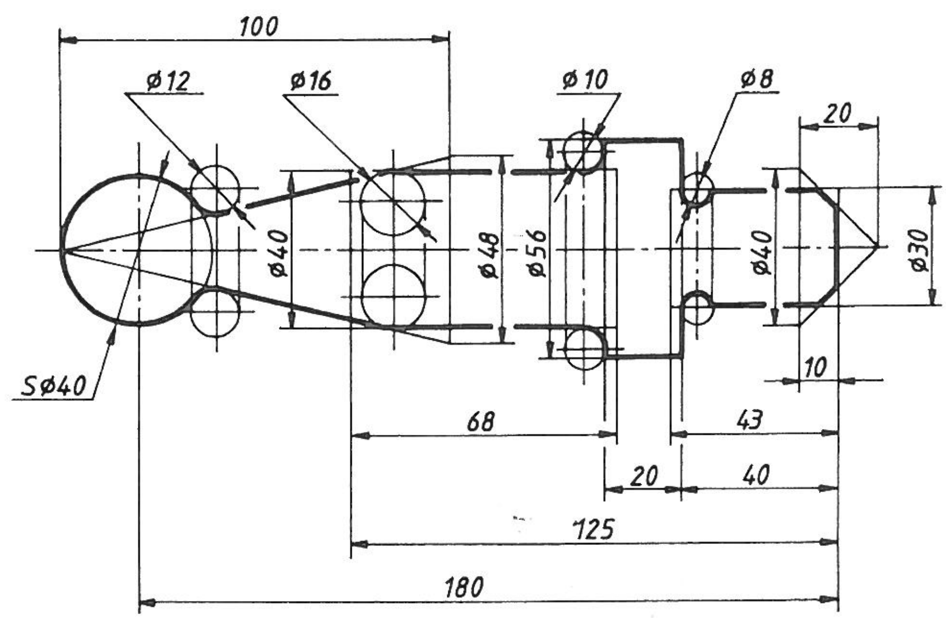
69. feladat: Ábrázoljuk a forgástesteket az ábrán adott méretek alapján három vetületben! Szerkesszük meg a testek áthatását szeletelősíkok segítségével!

70. feladat: Ábrázoljuk a testek áthatását úgy, hogy a döfő test negatív formaként szerepeljen!

1.

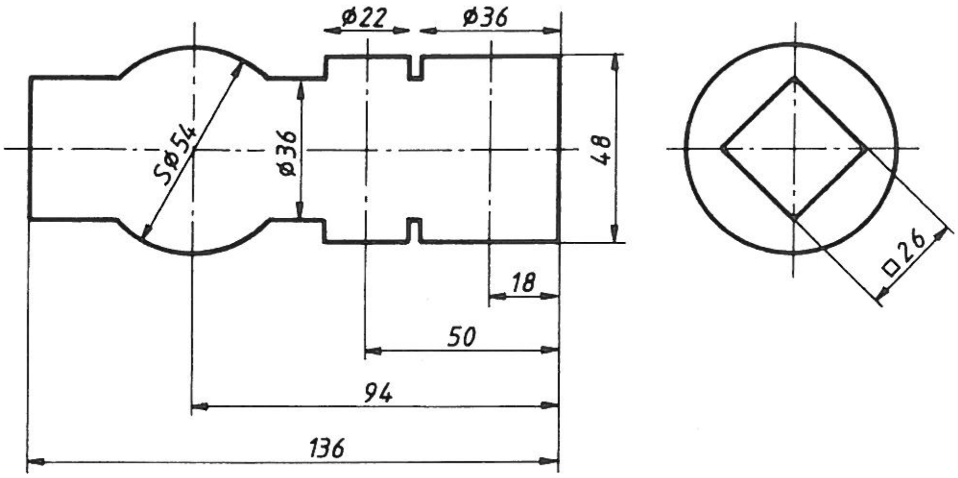


2.

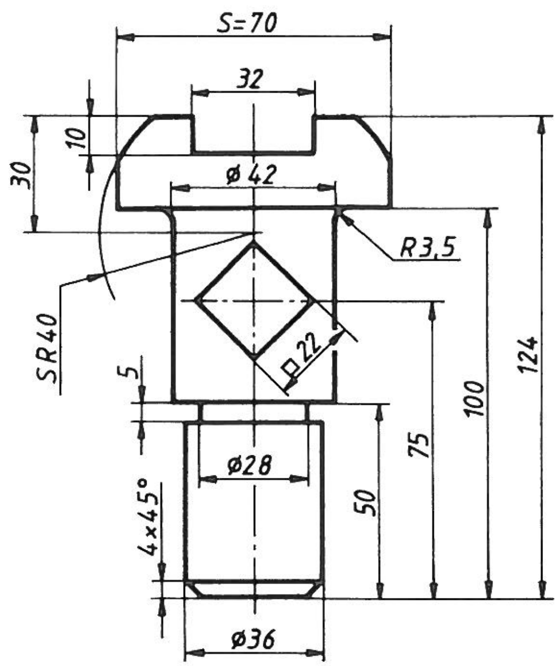


71. feladat: Ábrázoljuk az összetett testeket az ábrán adott méretek alapján egy vetületben! Rajzoljuk meg az áthatás vonalait (élek, tagolóvonalak) a kontúrvonalak figyelembevételével! Építsük fel a mérethálózatot!

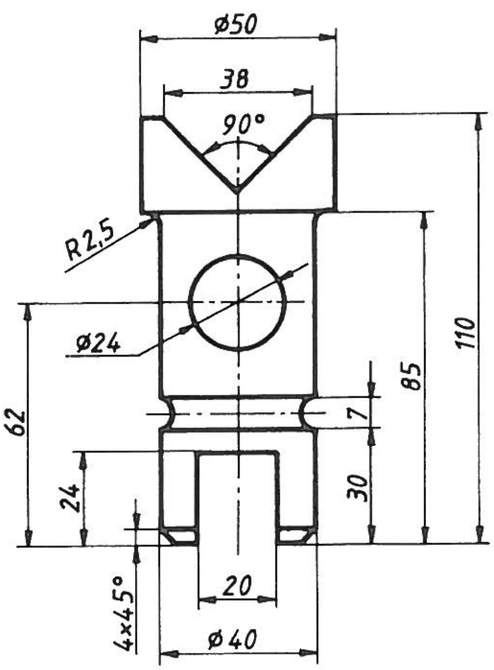
1.



2.



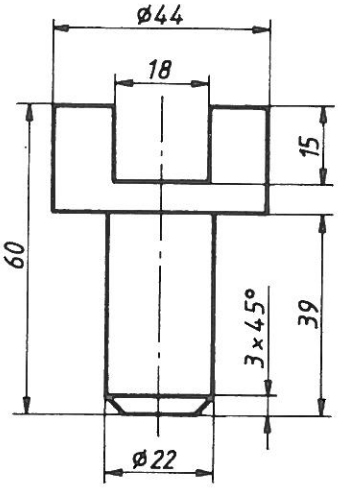
3.



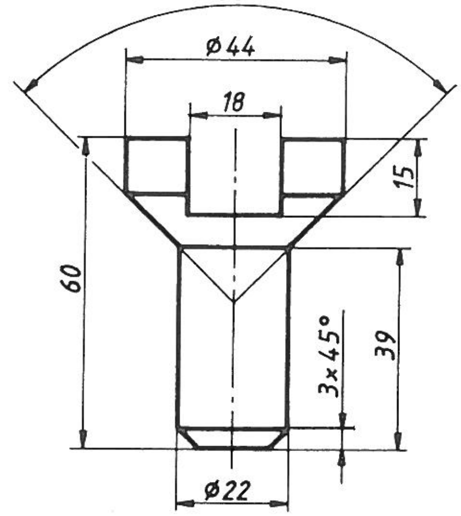
72. feladat: Ábrázoljuk az összetett testeket az ábrán adott méretek alapján három vetületben! Alkalmazzuk az áthatásnál tanultakat! Építsük fel a mérethálózatot!

73. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!

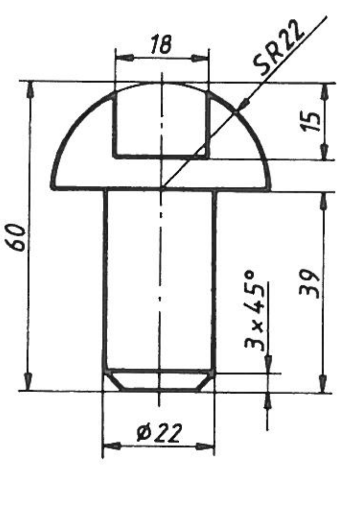
1.



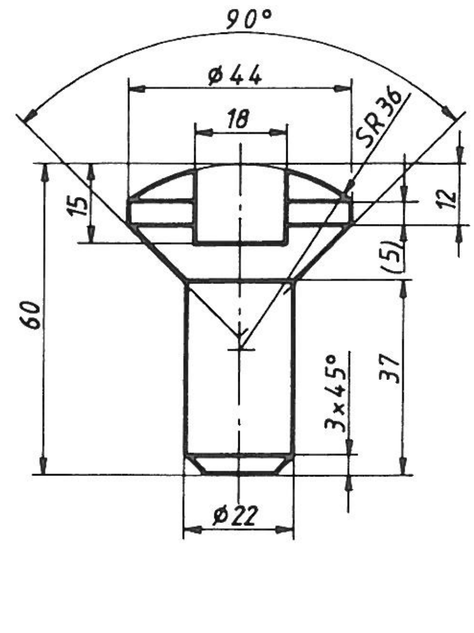
2.



3.



4.



74. feladat: Ábrázoljuk az összetett testeket az ábrán adott méretek alapján három vetületben! Alkalmazzuk az áthatásnál tanultakat! Építsük fel a mérethálózatot!

75. feladat: Végezzünk teljes felületelemzést az ábrák alapján!