

3.3. Határértékek kiszámítására vonatkozó tételek

3.3.1. Tétel: Ha $\lim_a f = A$ és $\lim_a g = B$ ("a" lehet ∞ is)

akkor

a. $\lim_a (f \pm g) = \lim_a f \pm \lim_a g = A \pm B$

b. $\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B$

c. $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{A}{B}, \quad \text{ha } g \neq 0 \text{ és } B \neq 0.$

3.3.2. Tétel: Ha $\lim_a f = 0$, akkor $\lim_a \frac{1}{f} = \infty$

3.3.3. Tétel: Ha $\lim_a f = \infty$, akkor $\lim_a \frac{1}{f} = 0$.

Egy függvény különböző módon (különböző "sebességgel") tarthat 0 vagy ∞ felé. Ezért két 0-hoz, vagy ∞ -hez tartó függvény hányadosa lehet 0 vagy más véges szám, de ∞ is. Ugyanígy általában két végtelenhez tartó függvény különbségének határértéke sem 0.

3.4. A határérték-számítás szabályainak alkalmazása

3.4.1. Racionális egész függvények (f. $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$), határértéke

Legyen $a_n > 0$ (ha $a_n < 0$ -1 kiemelhető szorzóként)

a. **véges helyen** megegyezik a helyettesítési értékkel

b. **végtelenben:** $+\infty$ -ben $+\infty$,

$-\infty$ -ben $+\infty$, ha n páros, és $-\infty$, ha n páratlan.

Példa: $\lim_{+\infty} (4x^3 - 5x^2 + 2) = \lim_{+\infty} x^3 \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = \lim_{+\infty} x^3 \cdot \lim_{+\infty} \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty$

mivel $\lim_{+\infty} x^3 = +\infty$ és $\lim_{+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén. (3.3.3. tétel)

$\lim_{-\infty} (4x^3 - 5x^2 + 2) = \lim_{-\infty} x^3 \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = \lim_{-\infty} x^3 \cdot \lim_{-\infty} \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$

mivel $\lim_{-\infty} x^3 = -\infty$ és $\lim_{-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén. (3.3.3. tétel)