

3. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

A természetben lejátszódó jelenségek leírásakor, a jelenséget leíró függvények vizsgálatakor szükségünk van arra, hogy megtudjuk mondani a függvényről, hogyan viselkedik, ha a független változó minden határon túl nő, vagy pl. olyan "a" számhoz közeli értéket vesz fel, ahol a függvény nincs értelmezve.

Hogyan fejezzük ki matematikailag, hogy egy x szám a végtelenbe ill. egy adott "a" számhoz tart? A végtelenhez tartás azt jelenti, hogy az adott érték bármilyen tetszőlegesen nagy értéknél is nagyobb. Ha egy x szám közelít az "a" számhoz ($x \rightarrow a$), akkor x és az "a" szám közötti különbség tetszőlegesen kicsiny szám, azaz x benne van az "a" számnak bármilyen kicsi környezetében ($x \in K_\delta(a)$). Ha $x \rightarrow a$ estén az $f(x)$ függvényértékek egy meghatározott A számhoz közelítenek, azaz $|f(x)-A|$ nulla felé tart, akkor azt mondjuk, hogy az A szám az f függvény határértéke az "a" pontban. Ha $x \rightarrow a$ estén az $f(x)$ függvényértékek minden határon túl növekednek, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az "a" pontban $+\infty$. Az alábbiakban megadjuk a határérték pontos definícióit.

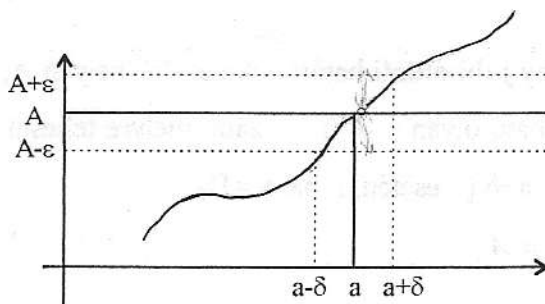
3.1. Határérték véges helyen

3.1.1. Véges határérték

Definíció: Valamely f függvény határértéke az "a" helyen A , ha bármely (kicsi) $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$ szám, melyre teljesül, hogy $|f(x)-A| < \varepsilon$ minden $x \in K_\delta(a)$ esetén, ha $x \in D_f$.

Jelölése: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

A függvény képét tekintve ez azt jelenti, hogy tetszőleges $A-\varepsilon$, $A+\varepsilon$ sávhoz létezik "a"-nak olyan δ sugarú környezete, hogy e környezetből való bármely x -hez rendelt $f(x)$ függvényérték $A-\varepsilon$ és $A+\varepsilon$ közé esik.



3.1. ábra