

4.3.2. Határozzuk meg az $x \mapsto |x|$ függvény differenciálhányadosának értékét az $a=0$ helyen!

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Ez a határérték nem létezik, mert a baloldali határérték -1 , a jobboldali határérték pedig $+1$. Az abszolútérték-függvény tehát nem differenciálható az $a=0$ pontban.

A differenciálhatóság a függvény pontbeli (lokális) tulajdonsága, de természetesen lehet a függvény értelmezési tartományának több olyan pontja is, ahol a függvény differenciálható.

4.4. A differenciálhányados (vagy derivált) függvény

Definíció: Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya azon x pontok halmaza, ahol az f differenciálható, és amelynek értéke minden ilyen x pontban $f'(x)$, az f függvény **differenciálhányados**-, vagy **deriváltfüggvényének** nevezzük.

Az előző példák közt meghatároztuk az $f: x \mapsto x^2$ függvény tetszőleges " a " helyhez tartozó deriváltját. $f'(a) = 2a$

Mivel ez a kifejezés bármilyen " a " értékre értelmezhető, az $x \mapsto x^2$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában deriválható, s derivált függvénye:

$$f': x \mapsto 2x \quad x \in \mathbb{R}$$

4.5. A differenciálhányadosra vonatkozó szabályok

Az előzőekben bemutatott példák is azt mutatták, hogy viszonylag egyszerű függvények differenciálhányadosát is elég nehézkes megadni a derivált definíciója alapján. Szerencsére jó néhány olyan tétel van, amelyek megkönnyítik a derivált értékének, vagy a derivált függvénynek a meghatározását.

4.5.1. Függvény konstansszorosának deriváltja

Tétel: Ha az f függvény differenciálható, akkor a cf függvény is ($c \in \mathbb{R}$) differenciálható,
és $(cf)' = cf'$