

Ha az $[a; b]$ intervallumban vannak olyan részintervallumok, amelyeken $f(x) > 0$, míg másokon $f(x) < 0$, akkor ezen részintervallumokra külön-külön számítjuk ki a területet, s ezek összege adja a keresett területet.

Példa:

Számítsuk ki az

$$f: x \mapsto x^2 - x - 6 \quad x \in [-3; 5]$$

függvény görbéje, az $x = -3$, $x = 5$ és az $y = 0$ egyenesek által határolt területet!

A függvény zérushelyei: $x = -2$, $x = 3$. Tehát a függvény két pontban metszi az x -tengelyt. $f > 0$, ha $x \in]-\infty, -2[$, $f < 0$, ha $x \in]-2, 3[$ és $f > 0$, ha $x \in]3, +\infty[$. Ezért három szakaszon kell elvégezni az integrálást.

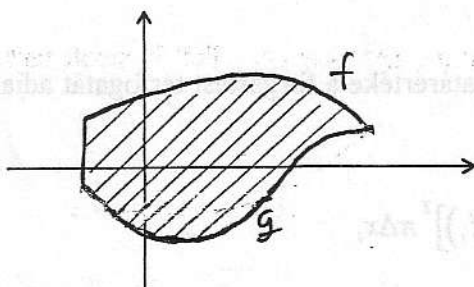
$$T_1 = \int_{-3}^{-2} (x^2 - x + 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-3}^{-2} = \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) - \left(-9 - \frac{9}{2} + 18 \right) = \frac{17}{6}$$

$$-T_2 = \int_{-2}^3 (x^2 - x + 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-2}^3 = \left(9 - \frac{9}{2} - 18 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) = -\frac{125}{6}$$

$$T_3 = \int_3^5 (x^2 - x + 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_3^5 = \left(-\frac{125}{3} - \frac{25}{2} - 30 \right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18 \right) = \frac{76}{6}$$

$$\text{A teljes terület: } T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{17}{6} - \left| -\frac{156}{6} \right| + \frac{76}{6} = \frac{109}{3}$$

Két függvény f és g grafikonja, valamint az $x=a$ és az $x=b$ egyenesek által határolt terület a fenti definíció alapján szintén megadható. (5.2. ábra)



5.3. ábra

$$T = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$$