

Példák:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = -\lim_{\infty} \frac{1}{x} - (-1) = 0 + 1 = 1 \quad (\text{konvergens improprius integrál})$$

$$2. \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \lim_{\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty \quad (\text{divergens improprius integrál})$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\infty} \arctg x - \lim_{-\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(konvergens improprius integrál)

5.2.2.2. Nem korlátos függvények integrálja

Definíció: Legyen az f függvény az $[a; b]$ intervallumon értelmezett, de az "a" pont környezetében nem korlátos függvény és legyen integrálható az $[a+\varepsilon; b]$

intervallumon minden $\varepsilon > 0$ esetén. Ekkor, ha a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az f az $[a; b]$ intervallumon

impropriusan integrálható és $\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f$.

Ha ez a határérték véges, az improprius integrált konvergensnek, ha nem létezik vagy nem véges, akkor divergensnek nevezzük.

Hasonló módon értelmezhető az improprius integrál, ha az f függvény nem korlátos az $[a; b]$ intervallum jobb oldali végpontjának, vagy mindkét végpontjának környezetében.

(Leegyszerűsítve: az improprius integrál kiszámításánál az $F(b)$ ($F(a)$) helyettesítési érték helyett $\lim_a F(x)$ ($\lim_b F(x)$) határértéket vesszük, ha a függvény végtelenné válik az alsó (felső) határon.)