

5.1.4.2. Parciális integrálás

A szorzatfüggvény differenciálási szabályának megfordításából adódik az alábbi tétel:

Tétel: Ha az f és g függvények valamely intervallumon differenciálhatók, továbbá az $f' \cdot g$ szorzatfüggvénynek létezik a primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor a szóban forgó intervallumon az $f \cdot g'$ szorzatfüggvénynek is létezik a primitív függvénye és

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

Bizonyítás: A tétel könnyen belátható az alábbi módon:

A szorzatfüggvény deriválási szabálya szerint ugyanis

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \text{amiből} \quad f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$$

Mivel az $f \cdot g$ függvénynek létezik primitív függvénye, ezért a bal oldalon szereplő szorzatfüggvénynek is létezik a primitív függvénye, azaz

$$\int f \cdot g' = \int (f \cdot g)' - \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

A fenti tétel alkalmazását nevezik **parciális integrálásnak**. A parciális integrálás módszerével az eredeti integrálási feladatot egy másik - könnyebben megoldható - integrálfeladatra vezethetjük vissza. Általános módszer nem adható arra, hogy a szorzat melyik tényezőjét válasszuk f -nek ill. g' -nek. Néhány példa kapcsán a megoldás mellett a válsztást is megindokoljuk

Példák:

1. $\int x \sin x dx = ?$

f és g megválasztásához elvileg két lehetőségünk van:

a. $f: x \mapsto \sin x$ és $g': x \mapsto x$, ekkor

$$f': x \mapsto \cos x \quad \text{és} \quad g: x \mapsto \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$$

Ezen az úton az eredetinél bonyolultabb integrált kaptunk, tehát ez a választás nem vezet eredményre.