

Gerőcs
László
.....

Orosz
Gyula
.....

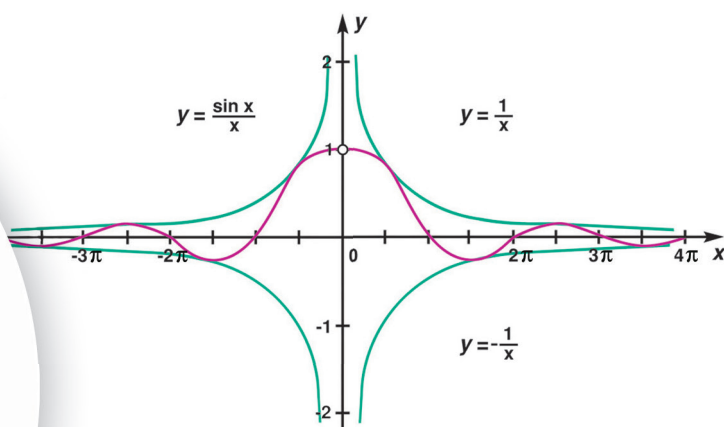
Paróczay
József
.....

Szászné
Simon
Judit

MATEMATIKA

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

Középszint
Emelt szint



OKTATÁSI
HIVATAL

**Dr. Gerőcs László – Orosz Gyula –
Paróczay József – Szászné dr. Simon Judit**

MATEMATIKA

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

Középszint
Emelt szint

A kiadvány 2018. 08. 17-től tankönyvi engedélyt kapott
a TKV/2475-12/2018. számú határozattal.

A tankönyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének [17/2004. (V. 20.) 3. számú melléklet].

A könyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet

3. számú melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04.; 3.3.2.2.;

4. számú melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára 4.2.04.;

5. számú melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára 5.2.04.;

14. számú melléklet: Kerettanterv a szakgimnáziumok 9–12. évfolyama számára
megnevezésű kerettantervek előírásainak és az érettségi vizsga követelményeinek
[40/2002. (V. 24.)].

Lektorok:

Pogács Ferenc

Rácz János

Grafikus:

Szalóki Dezső

Illusztráció:

Szücs Édua

Alkotószerkesztők:

Füleki Lászlóné

Tóthné Szalontay Anna

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:

dr. Várady Ferenc

Zarubay Attila

© dr. Geröcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit,
Oktatási Hivatal (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.), 2005

ISBN 978-963-19-7610-6

Tartalom

Előszó	5
<i>Jelölések, rövidítések</i>	6
I. KOMBINATORIKA	9
Bevezető feladatok	9
Permutációk, variációk	15
<i>Permutációk</i>	15
<i>Variációk</i>	16
<i>Vegyes feladatok a permutációk és variációk témaköréből</i>	18
Kombinációk, ismétléses kombinációk	23
<i>Kombinációk</i>	23
<i>Ismétléses kombinációk</i>	27
Összetett feladatok	29
Vegyes feladatok	39
II. GRÁFOK	51
Alapfogalmak	51
Összefüggések a gráf csúcsai és élei között	57
<i>Szabályos testek csúcsai, élei</i>	60
<i>Vegyes feladatok</i>	61
Összefüggő gráfok, fa, kör	63
Gráfok bejárása, Euler-féle poliédertétel	71
<i>Élek bejárása</i>	71
<i>Csúcsok bejárása</i>	73
<i>Vegyes feladatok</i>	74
<i>Euler-féle poliédertétel</i>	75
Vegyes feladatok	77
III. FÜGGVÉNYEK	83
Alapfogalmak	83
Függvénytípusok	96
<i>Nulladfokú és elsőfokú függvények</i>	96
<i>Abszolútértéket tartalmazó függvények</i>	99
<i>Másodfokú függvények</i>	102
<i>Racionális törtfüggvények</i>	105
<i>Előjel, egészrész- és törtrészfüggvények</i>	107
<i>Négyzetgyökfüggvények</i>	108
<i>Magasabb fokú és gyökös függvények</i>	109
<i>Exponenciális függvények</i>	110
<i>Logaritmusfüggvények</i>	112
Függvénytranszformációk	113
<i>Összetett függvények</i>	118

Függvények tulajdonságai	122
<i>Függvények tulajdonságai, műveletek függvényekkel</i>	122
<i>Inverz függvények</i>	123
<i>Páros és páratlan függvények</i>	124
<i>Monoton függvények</i>	126
<i>Periodikus függvények</i>	128
Függvények alkalmazása	129
IV. SOROZATOK	135
Sorozatok bevezetése	135
Számtani sorozatok	138
Mértani sorozatok	144
Rekurzív sorozatok	151
<i>Explicit és rekurzív alakok</i>	151
<i>Elsőrendű lineáris rekurziók</i>	153
<i>Másodrendű rekurziók</i>	154
<i>Vegyes rekurziók</i>	155
Vegyes feladatok	156
Kamatok kamat, járadékszámítás	163
V. AZ EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISÉNEK ELEMEI	167
Sorozat határértéke	167
<i>Mértani sorozat határértéke</i>	171
Függvény határértéke, Folytonosság	174
<i>Függvény határértéke</i>	174
<i>Folytonosság</i>	175
Differenciálszámítás	177
<i>Érintők</i>	179
<i>Szélsőérték</i>	181
<i>Függvényvizsgálat</i>	185
Integrálszámítás	187
<i>Határozott integrál</i>	191
<i>Területszámítás</i>	192
<i>Forgástestek térfogata</i>	196
<i>Más alkalmazások</i>	199
VI. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS	201
Táblázatok, grafikonok	201
Statisztikai közepek	231
Gyakoriság, relatív gyakoriság	238
Eseményalgebra	240
Valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja	242
<i>Más nemzetek érettségi feladataiból</i>	252
Valószínűség-számítási feladatok emelt szinten	253
ÉRETTSÉGI FELADATSOROK	259
Középszint	259
Emelt szint	275

Előszó

A feladatgyűjtemény tagja az Oktatási Hivatal (Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó) háromkötetes *feladatgyűjtemény-családjának*, amely – a hozzájuk tartozó három megoldáskötettel együtt – feldolgozza a teljes középiskolai matematika tananyagot az új *kétszintű érettségi* szellemében, *középszinten és emelt szinten* egyaránt.

A több ezer feladatot tartalmazó feladatgyűjteményekben *szintezzük az összes feladatot*. Ez a szintezés a feladatok nehézségi fokát is jelöli:

K1 = középszintű, könnyebb;

K2 = középszintű, nehezebb;

E1 = emelt szintű, könnyebb;

E2 = emelt szintű, nehezebb;

V = versenyre ajánlott feladat;

Gy = a gyakorlati vonatkozású, életközeli matematikapéldáknál áll.

A feladatgyűjtemények bőségesen tartalmaznak gyakorló példákat, azaz a matematika gyakorlati alkalmazását szolgáló feladatokat, segítve ezzel a későbbi felhasználást a szakmai, a tudományos vagy a mindennapi életben. A tananyagfeldolgozás módja lehetővé teszi a középszintű és az emelt szintű érettségire való felkészülést. Szerzői és lektorai mindannyian a matematika tanításának kiváló és elismert szakemberei.

A feladatok megértését néhol ábra is segíti, melynek sorszáma megegyezik a feladat sorszámaival.

A feladatok megoldása:

Mind a három kötethez megtalálható a *feladatok megoldása* a *www.tankonyv-katalogus.hu* címen. Általában részletes megoldást közlünk, de néhol csak útmutatást nyújtunk vagy a végeredményt adjuk meg, és néhány egyszerű feladat megoldását az olvasóra bizzuk.

Ajánljuk a tankönyvcsaládot a 9–13. évfolyamon minden matematikaórára a gyakorláshoz, a témakörök elmélyítéséhez, a tehetséggondozáshoz és az érettségire készülőknek egyaránt.

A szerkesztők

Jelölések, rövidítések

$=, \neq$	egyenlő, nem egyenlő	$a = 2, b \neq 5$
$\equiv$	azonosan egyenlő	$ax + b \equiv 5$
$\approx$	közelítőleg egyenlő	$a \approx 2,3; 8,54 \approx 8,6$
$<, \leq$	kisebb, kisebb vagy egyenlő	$2 < 3, 5 \leq x$
$>, \geq$	nagyobb, nagyobb vagy egyenlő	$6 > 4, a \geq 2$
$\mathbf{N}$	a természetes számok halmaza	$\{0; 1; 2; \dots\}$
$\mathbf{Z}$	az egész számok halmaza	$\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
$\mathbf{Z}^+, \mathbf{Z}^-$	a pozitív, a negatív egész számok halmaza	$\{1; 2; 3; \dots\},$ $\{-1; -2; -3; \dots\}$
$\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*$	a racionális, az irracionális számok halmaza	
$\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-$	a pozitív, a negatív racionális számok halmaza	
$\mathbf{R}$	a valós számok halmaza	
$\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$	a pozitív, a negatív valós számok halmaza	
$\in, \notin$	eleme, nem eleme a halmaznak	$5 \in \mathbf{N}, -2 \notin \mathbf{Z}^+$
$\subseteq, \subset$	részhalmaz, valódi részhalmaz	$A \subseteq B, \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$
$\not\subset$	nem részhalmaz a halmaznak	$\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^*$
$\cup, \cap$	halmazok uniója, metszete	$A \cup B, A \cap B$
$\setminus$	halmazok különbsége	$A \setminus B$
Δ	halmazok szimmetrikus különbsége	$A \Delta B$
$\times$	halmazok Descartes-szorzata	$A \times B$
$\emptyset, \{\}$	üres halmaz	
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere	
$ A $	az A halmaz elemszáma	$ \{0; 1; 2\} = 3$
$[a; b]$	zárt intervallum	
$[a; b[$	balról zárt, jobbról nyílt intervallum	
$]a; b]$	balról nyílt, jobbról zárt intervallum	
$]a; b[$	nyílt intervallum	
$ x $	az x szám abszolútértéke	$ -3,1 = 3,1$
$[x], \{x\}$	az x szám egészrésze, törtrésze	$[2,3] = 2, \{2,3\} = 0,3$
$a b$	a osztja b -t	$2 8$
(a, b)	a és b legnagyobb közös osztója	$(4, 6) = 2$
$[a, b]$	a és b legkisebb közös többszöröse	$[4, 6] = 12$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya	$f: x \mapsto 2x + 3$

$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen	$f(5)$, ha $x_0 = 5$
D_f, R_f	az f függvény értelmezési tartománya, értékészlete	
$f \circ g$	összetett függvény	
$!$	faktorális	$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$\binom{n}{k}$	n alatt a k	$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
$\nlessgtr$	szög	$ABC \nlessgtr$
$\neg$	állítások tagadása (negációja)	
$\vee, \wedge$	állítások diszjunkciója, konjunkciója	
$\Rightarrow, \Leftrightarrow, \rightarrow, \leftrightarrow$	állítások implikációja, ekvivalenciája	
$\forall$	univerzális kvantor (minden ...)	
$\Leftrightarrow$	akkor és csak akkor	
$\exists$	egzisztenciális kvantor (létezik ...)	
Σ	összeg (szumma)	$\sum_{i=1}^n i, \sum (2i - 3)$
Π	szorzat (produktum)	$\prod_{i=1}^4 i$
$\lim$	limesz, határérték	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0}$	jobb oldali határérték	
$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0}$	bal oldali határérték	
f'	az f függvény deriváltja	
$\int$	határozatlan integrál	$\int f(x) dx$
$\int_a^b$	határozott integrál	$\int_a^b f(x) dx$
$F(x), F'(x)$	primitív függvény és deriváltja	

I. Kombinatorika

Bevezető feladatok

K1 Gy 1. Az A városból a B városba 3 út vezet (ebből kettő földút, egy aszfaltút), a B városból a C városba 5 út (3 föld-, 2 aszfaltút).

a) Hányféle úton juthatunk el A -ból C -be B -n keresztül?

b) Ebből hány útvonal halad teljes egészében aszfaltúton?

K1 2. Feldobunk egy piros és egy fehér dobókockát. Hányféle eredménye lehet a dobásnak?

K1 3. Egy dobozba tíz cédulát teszünk, rajtuk rendre $A, A, A, E, I, K, M, M, T, T$ betűkkel. Egyenként kihúzva a cédulákat, hány esetben jöhet ki a MATEMATIKA szó?

K1 Gy 4. Nyolc csapat kieséses rendszerben játszik egymással. Hányféleképpen alakulhat a döntő párosítása a sorsolás után?

K1 Gy 5. Hányféle sakkállás alakulhat ki a játszma első lépéspárja után?

K1 6. Adott két párhuzamos egyenes, e és f . Kijelölünk az e egyenesen 6, az f egyenesen 10 pontot, és összekötjük mindegyik pontot mindegyik ponttal. Hány összekötő új egyenes keletkezett?

K2 Gy 7. Osszunk 20 sakkjátékost két csoportra. Két játékos akkor mérkőzik egymás ellen – mégpedig egyszer – ha különböző csapatba tartozik.

a) Hogyan valósítsuk meg a szétosztást, hogy a lehető legtöbb játszma kerüljön sor?

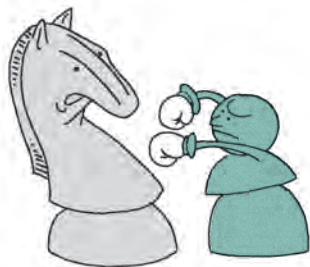
b) Oldjuk meg a feladatot 20 játékos helyett tetszőleges n számú játékosal is! ($n > 1, n \in \mathbb{Z}^+$)

K2 8. Három kockát feldobva, hányféleképpen lehet a dobott számok összege

a) 5;

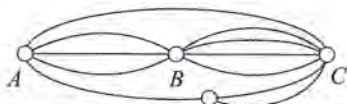
b) legfeljebb 5?

K2 9. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány darab 6-jegyű, 5-tel osztható szám készíthető? (Minden számjegyet fel kell használni.)



E1 10. Az alábbi I–III. ábrákon a vonalak mentén A -ból C -be szeretnénk eljutni. (Folyamatosan közeledni kell C -hez, visszafelé nem haladhatunk.)

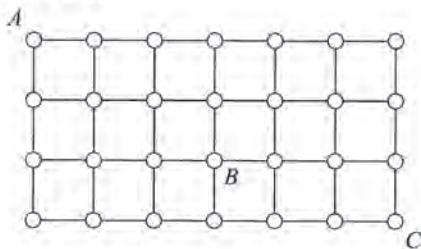
10/I. ábra



Vizsgáljuk meg mindhárom esetben, hogy:

- a) hányféle úton juthatunk el A -ból C -be;
- b) hányféle úton juthatunk el A -ból C -be, ha közben B -t érintenünk kell;
- c) hányféle úton juthatunk el A -ból C -be, ha közben B -t nem érinthetjük?

10/II. ábra



K1 11. Leírtuk a számokat 1-től 2004-ig. Eközben hány számjegyet írtunk le?

K1 12. Egy háromkötetes lexikon kötetei rendre 563, 552 és 581 lapból állnak. Hány számjegyet írunk le összesen, ha az oldalakat mindhárom kötetben 1-től kezdve sorszámozzuk?

K1 13. Egy nagyobb munka oldal-számozásához 2184 számjegy kellett.

Hány oldalból áll a munka?

K2 14. Leírtuk a számokat 1-től 1000-ig folyamatosan egymás után, így egy sokjegyű számot kapunk.

- a) Hány jegyű a kapott szám?
- b) Melyik számjegyet hányszor írtuk le?
- c) Mi a 100. számjegye a leírt számnak?

K2 15. Egy 625×625 -ös méretű táblán a tábla közepére szimmetrikusan beszíneztünk 2005 mezőt (kezdetben minden mező fehér színű volt). Bizonyítsuk be, hogy a 313. sorban található színezett mező.

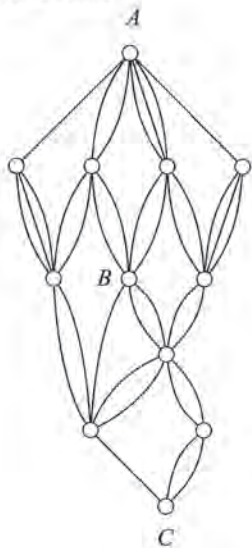
Hogyan tudnánk általánosítani a feladatot?

K1 16. a) Egy 5 elemű halmaznak hány 2 elemű részhalmaza van? b) És hány 3 elemű részhalmaza?

K2 Gy 17. Egy kör alakú asztalra két játékos felváltva egyforma érméket helyez el úgy, hogy az érmék nem fedhetik egymást. Az veszít, aki már nem tud újabb érmét az asztalra tenni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

K2 Gy 18. Az asztalra sorban 10 korongot helyeztünk el, piros oldalukkal felfelé, kék oldalukkal lefelé. Két játékos felváltva megfordíthat 1 vagy 2 szomszédos korongot.

10/III. ábra



szédos piros korongot (a fordítás végleges). Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha az nyer, aki az utolsó piros korongot fordítja meg?

Keressük meg a nyerő stratégiát akkor is, ha kezdetben a korongok egy körvonal mentén helyezkednek el!

K1 19. Hány részre osztja fel a teret

- a) egy kocka oldallapjainak hat síkja;
b) egy tetraéder oldallapjainak négy síkja?

K1 20. A 4 vagy 5 helyen kilyukasztott buszjegyből van több?

K2 Gy 21. Egy kisvárosban izgalmas reformlottót játszanak: a 90 számból 85-öt húznak ki.

a) Hol nehezebb telitalálatot elérni: a hagyományos lottóban (ahol 90 számból 5-öt húznak ki) vagy a reformlottóban?

b) Egy tíztagú társaság nézi izgatottan a reformlottó húzásának eredményét. Közülük körülbelül hányan lehet legalább 75 találat?

K2 22. Adott a síkon egy konvex hatszög.

- a) Hány egyenest határoznak meg a csúcsai?
b) Hány olyan négyszög van, amelynek csúcsai egyúttal a hatszög csúcsai is?
c) Legfeljebb hány metszéspontja van a hatszög átlóinak?

K2 23. Hány olyan egész szám található a 2, 4, 6, ..., 2000 szomszédos páros számok között, amelyek

- a) osztható 3-mal; b) osztható 5-tel;
c) osztható 3-mal és 5-tel; d) osztható 3-mal vagy 5-tel;
e) nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel?

K2 24. Egy versenyen az iskola tanulóinak 20%-a indult. A versenyzők két feladatot kaptak. Az elsőt a versenyzők 60%-a, a másodikat 65%-a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot. Csak a második feladatot 80-an oldották meg. Hányan járnak az iskolába?

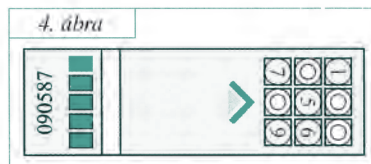
E1 25. Az egész számokra vonatkozóan tekintsünk három tulajdonságot:

- T_2 : a szám osztható 2-vel;
 T_3 : a szám osztható 3-mal;
 T_5 : a szám osztható 5-tel.

Hány egész szám található az 1001, 1002, 1003, ..., 2000 számok között, amelyekre

- a) mindhárom tulajdonság igaz;
b) egyik tulajdonság sem igaz;
c) a tulajdonságok közül pontosan egy igaz;
d) a tulajdonságok közül pontosan kettő igaz?

K1 E1 26. Egy dobozban 10 piros, 20 zöld és 7 sárga golyó van. Bekötött szemmel, véletlenszerűen kihúzzunk néhány (legalább egy) golyót. Legkevesebb hányat kell kihúznunk, hogy az alábbi állítások igazak legyenek?



A kihúzott golyók között

- a) van piros;
- b) van piros vagy zöld;
- c) van piros és zöld;
- d) van két piros vagy három zöld;
- e) van két piros és három zöld;
- f) ha van piros, akkor van zöld is;
- g) ha van a piros vagy zöld szín egyikéből, akkor van a másiktól is;
- h) amikor van két piros, akkor van három zöld is;
- i) van 2 piros vagy 3 zöld vagy 4 sárga;
- j) van 2 piros és 3 zöld és 4 sárga;
- k) ha van sárga, akkor van a másik két színből is;
- l) ha nincs piros, akkor nincs zöld sem.

K1 K2 27. Egy dobozban 30 darab piros, 20 zöld és 10 sárga zokni van. Bekötött szemmel, véletlenszerűen kihúzzunk néhány (legalább egy) zoknit. Legkevesebb hány darabot kell kivenni ahhoz, hogy az alábbi állítások igazak legyenek?

A kivett darabok között

- a) van két piros pár vagy három zöld pár;
- b) van két piros pár és három zöld pár;
- c) ha van piros pár, akkor zöld pár is van;
- d) van két piros pár vagy három zöld pár vagy négy sárga pár;
- e) van két piros pár és három zöld pár és négy sárga pár;
- f) ha nincs piros pár, akkor nincs zöld pár sem.

K1 28. Egy $n \times n$ -es méretű táblázat minden négyzetébe beírjuk a $-1, 0, 1$ számok valamelyikét. Lehetséges-e olyan beírási mód, hogy a tábla minden egyes sorába, minden egyes oszlopába és a két átlójába írt számok összege mind különböző szám?

K1 29. Hány mező belsején halad át egy 2004×999 -es méretű „sakktábla” átlója?

E1 30. Melyik az az egyenes, amelyik a legtöbb mezőn halad át egy

- a) 8×8 -as méretű;
- b) $n \times n$ -es méretű sakktáblán, $(k, n \in \mathbb{Z}^+)$?

V 31. Egy $11 \times 12 \times 13$ -as méretű téglatestet egységkockákból raktunk össze. Hány egységkocka belsején halad át a téglatest testátlója?

K2 32. Tekintsük az alábbi táblázatot.

		101		
		102	103	
	104	105	106	
107	108	109	110	
111	112	113	114	115 stb.

- a) Milyen szám áll a 2004. sor 100. helyén? (A 2004. sorban 2004 darab szám van.)
b) Melyik sorban, hányadik helyen található a táblázatban a 2005?

K1 Gy 33. 20 játékos kieséses versenyen vesz részt. A verseny lebonyolítása két-féleképpen történhet:

1. A párosmérkőzéses rendszerben minden forduló után összesorsolják a párokat, és minden párból a győztes jut tovább. (Ha valakinek nem jut ellenfél, erőnyerőként továbbjut.)

2. A kihívásos rendszerben az első párt összesorsolják, majd mindig a győztes játszik egy következő ellenféllel.

- a) Hány mérkőzést játszanak le a két esetben, amíg kiderül a győztes személye?
b) Hogyan általánosíthatjuk a feladatot?

K1 34. Egy 7×8 -as méretű négyzethálós papírdarabot bármely rácsegyenese mentén két részre vághatunk, majd az így kapott papírdarabokkal folytatjuk az eljárást. Legkevesebb hány vágásra van szükség ahhoz, hogy a kezdeti papírdarabot 1×1 -es négyzet alakú darabokra vágjuk szét, ha

- a) egy vágással egyszerre csak egyetlen darabot vághatunk el;
b) a darabokat elmozgathatjuk, egymásra helyezhetjük úgy, hogy egy vágással egyszerre több darabot is szétvágjunk?

K2 35. Egy $8 \times 8 \times 8$ -as méretű kockát síkbeli vágásokkal $1 \times 1 \times 1$ -es méretű kisebb kockákká daraboljuk. Legkevesebb hány vágásra van szükség, ha

- a) egy vágással egyszerre csak egyetlen darabot vághatunk el;
b) a darabokat elmozgathatjuk, egymásra helyezhetjük úgy, hogy egy vágással egyszerre több darabot is szétvágjunk?

K1 Gy 36. Anna és Béla egy igaz-hamis játékot játszanak. Anna gondol egy 16-nál nem nagyobb pozitív egész számra, Béla pedig a lehető legkevesebb eldöntendő kérdéssel megpróbálja a számot kitalálni. (Rákérdeznie már nem kell.)

- a) Legkevesebb hány kérdésre van Bélának szüksége?
b) Legkevesebb hány kérdésre van Bélának szüksége, ha csak előre meghatározott kérdéseket tehet fel? (Ez azt jelenti, hogy az egyes válaszok eredményétől függetlenül, előre rögzített kérdéseket szabad feltenni.)

K2 Gy 37. Adott öt fehér és egy piros golyó, melyek külsőre teljesen egyformák. A fehérek között egy hamis golyó van, melynek a tömege eltér a többi golyó tömegétől (nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb, mint a többi). Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, mellyel összehasonlításokat tudunk végezni.

- a) Hány mérésből lehet megtalálni a hamis golyót?
b) A hamis golyó könnyebb, vagy nehezebb a többinél?

K2 38. Kezdetben egy 1-est írunk a táblára, majd ezután minden lépésben a táblán lévő számot a kétszeresével vagy a négyzetével helyettesíthetjük. Elérhető a 2^{45} pontosan 10 lépésben?

V Gy 39. Egy bűvészmutatvány menete a következő:

27 kártyalapból egyet kihúzatunk a közönséggel úgy, hogy mi nem látjuk a kiválasztott lapot. Ezután a kártyákat egyesével három 9 lapból álló kupacra osztjuk, s megkérdezzük, hogy melyik csoportban van a kiválasztott lap. Miután ezt megmondták a nézők, összegyűjtjük a lapokat, s még kétszer elvégezzük ugyanezt az eljárást. Végezetül néhány bűvészkelléket felhasználva (kártyalapok megfújása, varázsigék mormolása) átlapozzuk a paklit, s egyszerűen megmondjuk, melyik volt a kiválasztott lap.

Mi a mutatvány magyarázata?

K2 40. Egy kocka csúsaiba egy-egy számot írtunk. Ezután minden lépésben valamely él végpontjaiban álló két számot eggyel-eggyel megnövelhetjük. Elérhető-e néhány lépés elvégzésével, hogy minden csúcson azonos szám álljon, ha a kezdeti számozás a következő:

a) az alaplapon körben 1, 2, 3, 4, a fedőlapon 5, 6, 7, 8 (az 1-es felett az 5-ös áll stb.);

b) 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;

c) 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 (az alaplapon két szemközti csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van).

V 41. 10 szék áll egymás mellett, az első nyolcon felváltva ül 4 fiú és 4 lány. Két egymás melletti gyerek feláll és ugyanebben a sorrendben átül a két üres helyre. Megint két szomszédos gyerek feláll és átül, és így tovább. Minél kevesebb helycserével érjük el, hogy egymás mellett legyen a 4 fiú és a 4 lány.

K2 42. Tekintsük az alábbi 10×10 -es méretű táblázatot.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Válasszunk ki minden sorból és minden oszlopból egy-egy számot (összesen tízet) úgy, hogy a tíz szám összege a lehető

a) legkisebb;

b) legnagyobb legyen!

K2 43. Bontsunk fel egy 7 cm oldalú négyzetet minél kevesebb párhuzamos állású négyzetre úgy, hogy a kapott négyzetek oldala cm-ben mérve (7-nél kisebb) egész hosszúságú legyen.

K2 44. Hány (egyszínű)

a) futó; b) gyalog

helyezhető el a 8×8 -as méretű sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást? (A két alapsoron is állhat gyalog.)

K1 Gy 45. Nagypáim dédapjai ugyanazok a személyek-e, mint dédapáim nagypapai? (Az ősök közt ötödíziglen nem volt rokonházasság.)

K1 Gy 46. 2000. január elseje szombatra esett. (2000 szökőév volt, a február hónap 29 napos.) Ebben az évben a hét melyik napjára esett leggyakrabban a) 20-a; b) 30-a; c) és péntek 13-a?

K2 47. Leírjuk a számokat 1-től 9999-ig folyamatosan egymás után, így egy sok jegyből álló számot kapunk.

a) Hány jegyű a kapott szám?

b) Melyik számjegyet hányszor írtuk le?

c) Mi a 2004. számjegye a leírt számnak?

V Gy 48. 5 láda mindegyikében 100-100 mérő súly van. Az egyik ládában minden súly 101 dkg-os, a többiben mind 100 dkg-os.

a) Hány méréssel lehet megállapítani, hogy melyik a hamis láda? (A mérésekhez egykarú mérleget használhatunk, amely a mért súlyok tömegét mutatja.)

b) Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha lehetséges, hogy több ládában is hamis súlyok vannak.

K2 Gy 49. Adott 8 külsőre egyforma, de csupa különböző tömegű golyó. Kétkarú mérleg segítségével, mellyel összehasonlításokat tudunk végezni, 9 méréssel ki kell választani a két legnehezebbet. Hogyan tehetjük ezt meg?

Permutációk, variációk

Permutációk

K1 50. Hány (nem szükségképpen értelmes) hárombetűs szó készíthető az A, B, C betűkből, ha minden betű pontosan egyszer szerepelhet?

Írjuk is le a szavakat!

K1 51. Hány háromjegyű szám készíthető az 1, 2, 3 számjegyekből, ha minden számjegy pontosan egyszer szerepelhet?

Írjuk is le a számokat!

K1 52. Hányféleképpen lehet négy tanulót (Attila, Bea, Cili, Dénes) sorba állítani?

K1 Gy 53. Négy labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással. Hányféle sorrendben végezhetnek a csapatok, ha nincs holtverseny?

K1 54. Egy összejövetelen 5 fiú és 5 lány vesz részt. A táncoló pároknak hányféle összetétele lehetséges, ha mindenki táncol, és a lányok egymással, illetve a fiúk egymással nem táncolnak?

K1 55. Hányféleképpen lehet 5 különböző színű golyót sorban elhelyezni?

K1 56. Hányféle sorrendje lehet

a) 10;

b) n

különböző elemnek, ($n \in \mathbb{N}$)?

K1 57. Adott két halmaz, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Hány olyan függvény van, amely az A halmaz elemeihez a B halmaz elemeit kölcsönösen egyértelműen rendeli hozzá?

K1 58. Néhány golyót 120-féleképpen rakhatunk sorba. Hány golyónk lehet, ha mindegyik különböző színű?

K1 59. Versenyezzünk! Adjunk meg három betűt úgy, hogy belőlük minél több értelmes hárombetűs szót lehessen alkotni. (Minden betű pontosan egyszer szerepelhet.)

A versenyt négybetűs szavakkal is megrendezhetjük.

Ismétléses permutációk

K2 60. Hány (nem feltétlenül értelmes) szó készíthető az alábbi betűkből, ha minden betű pontosan egyszer szerepelhet?

a) a, a, b, c ;

b) a, a, a, b, c ;

c) a, a, b, b, c ;

d) a, a, a, b, b, c .

K1 61. Versenyezzünk! Adjunk meg négy betűt úgy, hogy közöttük két egyforma legyen, és belőlük minél több értelmes, négybetűs magyar szót lehessen alkotni.

K2 62. Hány szám készíthető az alábbi számjegyekből? (Minden megadott számjegyet fel kell használni.)

a) 1, 1, 2;

b) 1, 1, 2, 3;

c) 1, 1, 2, 3, 4;

d) 1, 1, 1, 2, 3, 4;

e) 1, 1, 2, 2, 3;

f) 1, 1, 2, 2, 3, 4;

g) 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4;

h) 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3.

K2 63. Adott két halmaz, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c\}$. Hány olyan A -t B -re képező függvény van, amely minden B -beli elemet pontosan kétszer vesz fel értékkül?

Variációk

K1 64. Hány (nem szükségképpen értelmes) hárombetűs szó készíthető az alábbi betűkből, ha minden betű pontosan egyszer szerepelhet?

a) a, b, c, d ;

b) a, b, c, d, e ;

c) a, b, c, d, e, f .

K1 65. Hány háromjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy pontosan egyszer szerepelhet?

K1 66. Hányféleképpen ültethetünk le 6 emberből 3-at egy háromszemélyes padra? (Az üléshelyek számozottak.)

K1 67. 10 különböző színű üveggolyóból 5-öt felfűzünk egy láncra. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (Két felfűzést csak akkor tekintünk azonosnak, ha a megegyező színű golyókat ugyanabban a sorrendben fűzzük fel.)

K1 68. Legalább hány különböző számjegyre van szükség ahhoz, hogy 120 háromjegyű számot írassunk fel ezek felhasználásával? (Minden számjegy csak egyszer szerepelhet.)

K1 69. Adott két halmaz, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Hány olyan függvény van, amely az A halmaz elemeihez a B halmaz elemeiből kölcsönösen egyértelműen rendel hozzá hármat?

Ismétléses variációk

K1 70. Hány (nem szükségszerűen értelmes) kétbetűs szó készíthető az A, B, C betűkből, ha egy-egy betű többször is szerepelhet? Írjuk is le a szavakat!

K1 71. Hány hárombetűs szó készíthető az alábbi betűkből, ha egy-egy betű többször is szerepelhet?

a) a, b, c, d ;

b) a, b, c, d, e ;

c) a, b, c, d, e, f .

K1 72. Egy dobozban tíz különböző színű üveggolyó van, mindegyik színből nyolc-nyolc darab. A golyók közül ötöt felfűzünk egy láncra. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (Két felfűzést csak akkor tekintünk azonosnak, ha a megegyező színű golyókat ugyanabban a sorrendben fűzzük fel.)

K1 Gy 73. Hányféle kitöltött totószelvény van? (A klasszikus totószelvényen $13 + 1$ mérkőzés végeredményére tippelhetünk, mindegyik tipp lehet 1, 2 vagy X.)

K1 Gy 74. Hányféle lyukasztott buszjegy lehet?

K1 75. Hány négyjegyű tükörszám van? (Egy természetes szám tükörszáma, ha egyenlő a jegyei fordított sorrendjével felírt számmal.)

Ezek közül melyek négyzetszámok?

K1 76. A 2-es számrendszerben hány

a) 6 jegyű; b) legfeljebb 6 jegyű

természetes szám van?

K1 77. Az n alapú számrendszerben hány pontosan k jegyű természetes szám van? És hány legfeljebb k jegyű?

K1 Gy 78. Egy tudós társaság az emberek fogazatát vizsgálja. Az alapján osztályozzák a fogazatokat, hogy az egyes fogak hiányoznak valakinél vagy sem.

Hány ember megvizsgálása esetén lehet biztos a társaság abban, hogy van a vizsgált személyek között kettő, akiknek megegyezik a fogazata? (32 foggal számoljunk.)

K1 Gy 79. Az előző feladatbeli vizsgálatot pontosabban végzik el. Az új szempontok szerint a meglévő fogakat is kétfelé osztják: egészségesekre vagy már kezeltre, tömöttre. Most hány ember megvizsgálása esetén lehet biztos a társaság abban, hogy van a vizsgált személyek között kettő, akiknek megegyezik a fogazata?



K1 Gy 80. Egy páncélszekrényen 3 forgatható számtárcsán lehet beállítani az egyetlen nyitó számkódot. A tárcsákon a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek állíthatók. Mennyi ideig tart az összes kombináció kipróbálása, ha egy beállítás és nyitási próba 6 másodpercig tart?

K1 81. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, 3\}$ halmaznak?

K1 82. Adott két halmaz, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Hány olyan függvény van, amely az A halmaz elemeihez a B halmaz elemeit rendeli?

K1 83. Legalább hány számjegyre van szükség ahhoz, hogy 243 ötjegyű számot írassunk fel ezek felhasználásával?

Vegyes feladatok a permutációk és variációk témaköréből

K2 84. Hány szám készíthető az alábbi számjegyekből, ha minden számjegy pontosan egyszer szerepelhet?

- a) 0, 1, 2, 3;
- b) 0, 1, 1, 2, 3;
- c) 0, 1, 1, 2, 2, 3;
- d) 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4.

K1 85. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány ötjegyű

a) páros; b) páratlan szám készíthető? (Minden számjegy csak egyszer szerepelhet.) És hány háromjegyű páros, illetve páratlan szám készíthető?

K2 86. A 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű

a) páros; b) páratlan szám készíthető? (Minden számjegy csak egyszer szerepelhet.) És hány háromjegyű páros, illetve páratlan szám készíthető?

K2 87. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány hatjegyű, 5-tel osztható szám készíthető? (Minden számjegy csak egyszer szerepelhet.)

E1 88. Hány hétjegyű

a) páros; b) páratlan

szám készíthető a 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 számjegyekből?

E2 89. Hány tízjegyű, öttel osztható szám készíthető a 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5 számjegyekből?

K1 90. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan négyjegyű számot készíthetünk, amelyben szerepel a 3-as?

K1 91. Egy szabályos játékkockával öt dobást végzünk. Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amikor legalább egyszer hatost dobunk?

K1 Gy 92. Hány régi fajta rendszám tábla készíthető a 26 betű és 10 számjegy felhasználásával? (Két betűt és négy számjegyet használhatunk fel, pl.:

AB 12–34.)

K1 Gy 93. Melyik régi fajta rendszám táblából van több: amelyekben nem ismétlődik számjegy, vagy amelyekben igen? (Két betűt és négy számjegyet használhatunk fel, pl.: AB 12–34.)

K1 Gy 94. Hány rendszám tábla készíthető a 26 betű és 10 számjegy felhasználásával, ha három betűt és három számjegyet használhatunk fel? (Pl.: ABB 011.)

K1 Gy 95. Melyik fajta rendszám táblából van több: a régi típusúból (két betű, négy számjegy) vagy az újból (három betű, három számjegy)?

K2 96. Hány hatjegyű szám van, amelyben a számjegyek szorzata páros?

K1 97. Hány olyan 3-mal kezdődő ötjegyű szám írható fel az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyek felhasználásával, amelynek utolsó számjegye 1? (A számjegyeket többször is felhasználhatjuk.)

K1 98. A 4-es és 5-ös számjegyekkel hány olyan nyolcjegyű szám készíthető, amelyben a 4-esek és 5-ösök száma megegyezik?

K1 99. Hány olyan nyolcjegyű kettes számrendszerbeli szám van, melyben 3 darab 0 számjegy szerepel?

K2 100. Hány olyan nyolcjegyű kettes számrendszerbeli szám van, melyben legfeljebb 3 darab 0 számjegy szerepel?

K1 101. Leírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezhető összes négyjegyű számot úgy, hogy minden számjegyet csak egyszer használtunk fel.

a) Ezek között a számok között hány 4-gyel kezdődő van?

b) Ezek közül hány kezdődik 41-gyel?

c) Hány olyan szám van a leírtak között, amelyben az első helyen 4-es, az utolsó helyen 1-es áll?

d) Az a)–c) feladatokat oldjuk meg akkor is, ha egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk!

E1 102. A 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3 számjegyekből hány darab hatjegyű szám készíthető?

K2 103. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből hány olyan ötjegyű szám alkotható, amelyekben legalább egy számjegy ismétlődik?

K2 104. A 0, 1, 2, ..., 7 számjegyekből készíthető ötjegyű számok között hányban fordul elő az 1-es számjegy, ha

a) minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel;

b) a számjegyek ismétlődhetnek?

E2 105. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros?

K2 106. Hány hatjegyű páros szám készíthető a 0, 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből?

K1 107. Hány ötjegyű

a) 2-vel;

b) 3-mal;

c) 4-gyel

osztható szám van?

E2 108. Hány százjegyű, hárommal osztható szám van?

K1 109. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelyben előfordul az 5-ös számjegy?

K1 110. Hány olyan ötjegyű szám van, amelynek van páratlan számjegye, ha

a) minden számjegy csak egyszer szerepelhet;

b) a számjegyek ismétlődhetnek?

K1 111. Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb?

K1 112. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány 9-cel osztható

a) nyolcjegyű; b) kilencjegyű

számot készíthetünk?

E2 113. Hány nyolcjegyű, 3-mal osztható szám képezhető az

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6;

b) 0, 1, 2, 3, 4, 5;

c) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

számjegyekből?

E2 114. Hány százjegyű, 3-mal osztható szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből?

E2 115. Hány olyan ötjegyű szám van, amely 6-ra végződik és 3-mal osztható?

E2 116. Hány olyan 3-mal osztható ötjegyű szám van, amelyben előfordul a 6-os számjegy?

E2 117. Hány 3-mal osztható ötjegyű szám van, amelyben előfordul a 0 számjegy?

K2 118. Hányféleképpen lehet hat embert (A, B, C, D, E, F) egy padra úgy leültetni, hogy két kijelölt személy (pl. A és B) egymás mellett üljön? (Az ülőhelyek számozottak.)

K2 119. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 elemeknek hány olyan permutációja (sorrendje) van, amelyben az 1-es és a 2-es nincs egymás mellett?

K2 120. Hány olyan hétjegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, amelyben az 1-es és 2-es számjegy nem áll egymás mellett? (Minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel.)

K2 121. Nyolc ember – A, B, C, D, E, F, G, H – leül egy padra. (Az ülőhelyek számozottak.) Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy

- a) H ne kerüljön a pad szélére;
- b) A a B mellé és C a D mellé üljön;
- c) E ne kerüljön F mellé;
- d) sem D , sem E ne kerüljön a pad szélére?

E1 122. Az 1, 2, ..., 9 számokat sorba rendezzük.

- a) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok valamilyen sorrendben egymás mellé kerülnek?
- b) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok növekvő sorrendben kerülnek egymás mellé?
- c) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok egymáshoz képest (nem szükségképpen egymás mellett) növekvő sorrendben helyezkednek el?

E1 123. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből minden számjegyet felhasználva tízjegyű számokat készítettünk.

- a) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok valamilyen sorrendben egymás mellé kerülnek?
- b) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok növekvő sorrendben kerülnek egymás mellé?
- c) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok egymáshoz képest (nem szükségképpen egymás mellett) növekvő sorrendben helyezkednek el?

E2 124. Az 1, 2, 3, ..., n számokat sorba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az 1, 2, ..., k számok ($k \leq n$) valamilyen sorrendben egymás mellé kerülnek?

E2 125. Az 1, 2, 3, ..., n számokat sorba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben az 1, 2, ..., k számok ($k \leq n$) növekvő sorrendben kerülnek egymás mellé?

E2 126. Az 1, 2, 3, ..., n számokat sorba rendezzük. Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, ..., k számok ($k \leq n$) egymáshoz képest (nem szükségképpen egymás mellett) növekvő sorrendben helyezkednek el?

K2 127. Nyolc cédulára írjuk fel rendre az 1, 2, ..., 8 számokat. Hányféleképpen lehet a cédulákat úgy sorba rendezni, hogy

- a) azonos paritású számok ne kerüljenek egymás mellé;
- b) az első négy helyen csak páros szám álljon?

K2 128. Négy fiút és négy lányt sorba állítunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha

- a) elől állnak a lányok és utánuk a fiúk;
- b) a fiúk és a lányok felváltva állnak?

E2 129. Az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával hány ötjegyű számot lehet készíteni, amelyben

- a) az 1-es számjegyek egymás mellett vannak;
- b) a 2-es és 3-as számjegyek egymás mellett vannak;
- c) a 3-as és 4-es számjegyek nem állnak egymás mellett?

E2 130. Az 1, 1, 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával hány hatjegyű számot lehet készíteni, amelyben

- a) az 1-es számjegyek egymás mellett vannak;
- b) a 2-es és 3-as számjegyek egymás mellett vannak;
- c) a 3-as és 4-es számjegyek nem állnak egymás mellett?

E2 131. Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával hány hétjegyű számot lehet készíteni, amelyben

- a) az 1-es számjegyek egymás mellett vannak;
- b) a 2-es számjegyek egymás mellett vannak;
- c) a 3-as és 4-es számjegyek egymás mellett vannak;
- d) a 3-as és 4-es számjegyek nem állnak egymás mellett?

E2 132. A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan kilencjegyű számot lehet készíteni, amelyben

- a) a 2-es számjegyek egymás mellett vannak;
- b) a 2-es számjegyek nem állnak egymás mellett;
- c) a 3-as és 4-es számjegyek egymás mellett állnak;
- d) a 3-as és 4-es számjegyek nem állnak egymás mellett?

K1 Gy 133. Hányféleképpen lehet egy 52 lapos francia kártyából 8 lapot kihúzni, ha a kihúzott lapok sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és

- a) visszatevés nélkül húzunk;
- b) a kihúzott lapot minden húzás után visszatesszük?

K1 134. Egy 8×8 -as sakktáblán legfeljebb hány bástyát lehet elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat? Hány ilyen elhelyezés lehetséges? (A sakktábla számozott.)

E1 135. Legfeljebb hány királyt helyezhetünk el

- a) a 8×8 -as méretű sakktáblán;
- b) az 5×5 -ös méretű „sakktáblán”

úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást? (A sakktábla mezői számozottak.)

E1 Gy 136. Kilenc madarat kell – egy üres kalitka segítségével – úgy átköltöztetni, hogy mindegyik madár előírt kalitkába kerüljön. Megengedett művelet bármely madár átköltöztetése az éppen aktuális üres kalitkába. Legalább hány átköltöztetésre van ehhez szükség az alábbi esetekben? A madarak sorrendjét az 1 2 3 4 5 6 7 8 9 kalitkasorrendhez képest adjuk meg.

- a) 7 9 4 5 1 2 6 3 8;
- b) 3 7 8 5 6 4 1 9 2;
- c) 3 8 4 1 7 5 6 9 2.

E1 137. Hány olyan egybevágósági transzformációja van a síknak, amely egy adott

- a) szabályos háromszöget;
 b) négyzetet;
 c) szabályos ötszöget
 önmagába visz át? Melyek ezek a transzformációk?

E1 Gy 138. Hány eldöntendő kérdéssel található ki az A, B, C, D betűkből alkotott négybetűs jelsorozat, ha

- a) minden betű csak egyszer szerepel;
 b) egy-egy betű többször is szerepelhet?

K1 139. Az (a_n) sorozat kezdőtagja $a_0 = 1$, és minden további tagra $a_n = n \cdot a_{n-1}$ ($n \geq 1$). Mivel egyenlő a sorozat n . tagja?

Kombinációk, ismétléses kombinációk

Kombinációk

K1 140. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez összesen, ha a társaság létszáma

- a) 6 fő; b) n fő?

K1 141. Hány kételemű részhalmaza van az

- a) $\{a, b, c\}$;
 b) $\{a, b, c, d\}$;
 c) $\{a, b, c, d, e\}$

halmazoknak? Írjuk is le a részhalmazokat.

K1 142. Legfeljebb hány metszéspontja lehet 5 egyenesnek?

K1 143. Adott öt általános helyzetű pont a síkon (semelyik két pont nincs egy egyenesen). Hány egyenest húzunk be, ha összekötünk minden pontot minden ponttal?

K1 144. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hányan voltak a társaságban, ha összesen 136 kézfogás történt?

K1 145. Versenyezzünk! Adjunk meg négy betűt úgy, hogy belőlük minél több értelmes magyar szót lehessen alkotni. (Minden betű csak egyszer szerepelhet, de nem kell mindegyiket felhasználni.)

Érdekes a feladatot 3, illetve 5 betűvel is lejátszani.

K1 146. Hányféleképpen lehet 10 kártyalaphból

- a) 3;
 b) 7

lapot kiosztani?

K1 Gy 147. Egy futóverseny nyolc versenyzője közül az első négy jut tovább. Hányféleképpen alakulhat a továbbjutók csoportja?

K1 148. Adott öt kék és egy piros pont a síkon úgy, hogy semelyik három pont nincs egy egyenesen. A pontok által meghatározott háromszögek közül melyikből van több: amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs?

K1 149. Hány

- a) 2 elemű;
- b) 3 elemű;
- c) 4 elemű;
- d) 5 elemű

részhalmlaza van az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaznak?

K1 150. Oldjuk meg az alábbi feladatokat!

- a) Hány egyenest határoz meg 10 általános helyzetű pont a síkon? (Semelyik három pont nincs egy egyenesen.)
- b) Általánosítsuk a feladatot!
- c) Hány háromszöget határoz meg 10 általános helyzetű pont a síkon?
- d) És hány négyszöget?
- e) Hány pontot határoz meg 10 általános helyzetű egyenes a síkon? (Semelyik két egyenes nem párhuzamos és semelyik kettő metszéspontján nem megy át harmadik egyenes.)
- f) És hány háromszöget határoznak meg?

K2 151. Hányféleképpen lehet 5 piros és 4 zöld, egyforma méretű golyót sorba rendezni? Oldjuk meg a feladatot

- a) ismétléses permutáció alkalmazásával;
- b) kombináció alkalmazásával.

K1 Gy 152. Hányféleképpen tölthető ki egy hagyományos lottószelelvény? (90 számból kell 5-re tippelni.)

K2 153. Az 1, 1, 1, 2, 2, 2 számjegyekből hány 6 jegyű számot készíthetünk? Oldjuk meg a feladatot

- a) ismétléses permutáció alkalmazásával;
- b) kombináció alkalmazásával.

K1 Gy 154. Hány mérkőzést játszik 16 csapat összesen, ha mindegyik mindegyikkel játszik?

K2 155. Hányféleképpen jöhetett létre egy 7:5 végeredményű teniszjátszma?

K2 156. Az asztalitenisz-játszmákat 11 pontig játsszák úgy, hogy legalább két pont különbség kell a győzelemhez. (Ha tehát 10:10 után 11:10 lett az eredmény, tovább folytatják a játékot addig, amíg a játékosok között nem alakul ki két pont különbség.)

Hányféleképpen jöhet létre egy

- a) 11:5-ös;
- b) 13:11-es

eredményű játszma?

E1 157. Hányféleképpen alakíthatunk 8 lányból és 4 fiúból két hatfős sakks csapatot úgy, hogy mindkét csapatban legyen legalább egy fiú?

K1 Gy 158. Hány lottószelelvényt kell kitöltenünk a biztos ötös találathoz az egyes lottófajtákban?

- a) Hagyományos lottó: 90 számból húznak ki 5-öt;
- b) hatos lottó: 45 számból húznak ki 6-ot;
- c) skandináv lottó: 35 számból húznak ki 7-et.

K1 Gy 159. Hány lottószelevényt kell kitöltenünk a biztos ötös találatához az alábbi országokban?

- a) Belgium: 35 számból húznak ki 7-et;
- b) Hollandia: 41 számból húznak ki 6-ot;
- c) Jugoszlávia: 36 számból húznak ki 5-öt;
- d) Svájc: 36 számból húznak ki 6-ot.

K2 Gy 160. 500 termék között 4% a selejtes. Hányféleképpen lehet tíz terméket kiválasztani úgy, hogy

- a) egy selejtes se legyen;
- b) mind a tíz selejtes legyen;
- c) pontosan öt selejtes legyen?

K1 Gy 161. Hányféleképpen lehet egy 32 lapos magyar kártyából 8 lapot kiosztani? (Vagyis visszatevés nélkül húzunk, és nem vagyunk tekintettel a kihúzott lapok sorrendjére.)

K1 Gy 162. Hányféleképpen lehet a magyar kártyacsomagot kiosztani négy játékos között úgy, hogy mindegyik nyolc lapot kapjon?

K1 Gy 163. Az ulti kártyajátékban hányféle kezdeti kiosztás lehetséges?

(Az ulti játékban három játékos kap fejenként 10 lapot, és két lap kerül talonba. A talont a kezdő játékos automatikusan felveszi, vagyis ez a két lap az övé lesz.)

E2 164. Hányféleképpen alakulhat egy teniszjátszma? (Van rövidítés, tehát legfeljebb 7 : 6 lehet a végeredmény.)

K2 165. Hányféleképpen lehet 3 piros, 4 zöld és 5 kék, egyforma méretű golyót sorba rendezni? Oldjuk meg a feladatot

- a) ismétléses permutáció alkalmazásával;
- b) kombináció alkalmazásával.

K1 166. A határállomáson őrségben egyszerre négy katona áll. Hány tagú az őrszolgálati egység, ha 1365-féleképpen lehet a négy őrt kiválasztani?

E1 167. Hányféleképpen lehet 5 piros és 4 zöld, egyforma méretű golyót sorba rendezni úgy, hogy két zöld golyó ne legyen egymás után?

E1 168. A könyvespolcon 12 különböző könyv áll. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani 5-öt úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?

E1 169. Hányféleképpen lehet 4 piros, 3 fehér és 2 zöld, egyforma méretű golyóból olyan láncot készíteni, melyben nincs egymás mellett

- a) két zöld;
- b) két fehér;
- c) fehér és zöld golyó?

V 170. Hányféleképpen lehet 4 piros, 3 fehér és 2 zöld, egyforma méretű golyóból olyan karkötőt készíteni, melyben nincs egymás mellett

a) két zöld;

b) két fehér golyó?

K1 171. Egy dobozban 15 cédula van 1-től 15-ig számozva. Kihúzzunk öt cédulát visszatevés nélkül. Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5-nél?

E1 172. Egy dobozban 15 cédula van, melyekre rendre az 1, 2, ..., 15 számokat írtuk. Húzzunk ki 5 cédulát visszatevés nélkül. (Számít a kihúzott cédulák sorrendje.)

Hány esetben kapunk olyan számötöst, amelyben a számok növekvő sorrendben vannak?

E1 173. Hány hétjegyű szám van, amelynek számjegyei

a) növekvő;

b) csökkenő

sorrendben következnek egymás után? (Egyenlőség nem lehet a számjegyek között.)

K2 174. Hányféleképpen választhatunk ki három különböző, 30-nál nem nagyobb pozitív egész számot úgy, hogy az összegük páros legyen?

E1 175. Hány ötjegyű szám van a 16-os számrendszerben, amelyben a számjegyek

a) növekvő;

b) csökkenő

sorrendben vannak?

K2 Gy 176. 200 csavar közül 20 selejtes. A 200 csavarból tízet kivéve, hány esetben lesz köztük

a) legfeljebb négy;

b) legalább négy;

c) 20%

selejtes?

E2 177. Hány különböző számjegyekből álló ötjegyű szám van, amelynek számjegyei nem növekvő sorrendben következnek egymás után? És olyan, amelyben a számjegyek sorrendje nem csökkenő?

K1 K2 178. Egy kísérlet során 20-szor feldobtak egy érmét, s lejegyezték az így kapott fejekből és írásokból álló sorozatot.

a) Hányféleképpen kaphattak 10 fejet és 10 írást?

b) Hányféleképpen fordulhatott elő, hogy 4-gyel több lett a fej, mint az írás?

c) Mi valószínűbb: a 10 fej és 10 írás sorozat, vagy a 8 fej és 12 írás dobás-sorozat?

d) Melyik valószínűbb: az, hogy egyforma a fejek és írások száma, vagy az, hogy a fejek és írások eltérése 2?

Ismétléses kombinációk

E2 179. Három egyforma dobókockát feldobunk.

- Hányféle lehet a dobások eredménye?
 - Oldjuk meg ugyanezt a feladatot négy kockával.
 - Oldjuk meg ugyanezt a feladatot tíz kockával.
- (Pl. az 1, 1, 2 és 1, 2, 1 dobásokat nem tekintjük különbözőknek.)

V Gy 180. A cukrászdában négyféle fagylaltot árulnak. Hányféleképpen lehet egy hatgombócos fagylaltot összeállítani? (A gombócok sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

V 181. Egy dobozban 15 cédula van, rendre 1-től 15-ig megszámozva. Kihúzzunk öt cédulát visszatevéssel.

- Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?
- Hány esetben kapunk olyan számötöst, amelyben a számok sorrendje monoton növekvő? (A szomszédos számok lehetnek egyenlők is.)

V 182. a) Hányféleképpen lehet 6 piros és 3 zöld, egyforma méretű golyót sorba rendezni?

- És ha úgy szeretnénk sorba rendezni őket, hogy két zöld golyó ne legyen egymás után?

Ha lehetséges, oldjuk meg a feladatokat többféleképpen ismétléses permutáció, kombináció, illetve ismétléses kombináció alkalmazásával.

V 183. Tekintsük a $(2x + y + 3z)^5$ hatványt.

- Hány tagból álló kifejezést kapunk a műveletek elvégzése és az összevonások után?
- Hány tagban fog szerepelni az x ?
- Mennyi azon tagok együtthatóinak összege, amelyekben nem szerepel az x ?
- Mennyi azon tagok együtthatóinak összege, amelyekben szerepel az x ?

V 184. Magyar kártyából 5 lapot osztunk valakinek. Hányféle változat adódhat, ha csak a színeket vesszük figyelembe?

K1 Gy 185. Hányféleképpen veheti fel egy négytagú család kétszer a telefont? (Ugyanaz a személy kétszer is felveheti a telefont; a felvétel időbeli sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

V Gy 186. Egy tisztségre 3 jelölt van, ezek közül a 20 szavazó egyet választ ki. Hányféle eredménnyel végződhet a szavazás, ha mindenki csak egy jelöltre szavazhat? (Az eredmény azt jelenti, hogy ki hány szavazatot kapott.)

V 187. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek monoton növekvő sorrendben vannak? (Megengedünk szomszédos egyenlő számjegyeket is.)



V 188. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek monoton csökkenő sorrendben vannak? (Megengedünk szomszédos egyenlő számjegyeket is.)

V Gy 189. Hány háromgombócos fagyalt állítható össze 5-féle fagyaltból?

V 190. Hányféleképpen lehet egy 32 lapos magyar kártyából 8 lapot kihúzni, ha egyenként és visszatevéssel húzunk, és nem vagyunk tekintettel a kihúzott lapok sorrendjére?

V 191. Egy dobozban sok egyforma méretű fehér, piros és kék golyó van. Hányféle eredménye lehet 5 húzásnak, ha egyenként és visszatevéssel húzunk, és nem vagyunk tekintettel a kihúzott golyók sorrendjére?

V 192. Két sakkjátékos tízjátszmas párosmérkőzést vív. Hányféleképpen végződhet a mérkőzés?

V 193. Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 különböző személy postaszekrényébe, ha a levelek között nem teszünk különbséget, és egy rekeszbe

a) legfeljebb egy;

b) több levelet is tehetünk?

V 194. Hányféleképpen lehet 14 egyforma golyót elhelyezni 5 számozott dobozba, hogy

a) pontosan kettő;

b) legfeljebb kettő;

c) legalább kettő

doboz üres maradjon?

V 195. Hány megoldása van az $a + b + c = 9$ egyenletnek

a) a pozitív egész számok halmazán;

b) a természetes számok halmazán?

V 196. Hány megoldása van az $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30$ egyenletnek a természetes számok körében?

V 197. Hány megoldása van az $a + b + c + d = 48$ egyenletnek a nem-negatív egész számok körében, ha még azt is megköveteljük, hogy $a > 5$, $b > 6$, $c > 7$ és $d > 10$ legyen?

V Gy 198. Apollóniosz (Kr. e. ≈ 265 –190) görög matematikus a legnagyobb geometerek egyike volt. Híresek körérintési feladatai, mely szerint három adott körhöz kell szerkeszteni egy negyedik, mindhárom alakzatot érintő kört. Bármelyik adott kör helyett vehetünk egyenest (mint végtelen nagy sugarú kört) vagy pontot (mint nulla sugarú kört) is. Így a három adott alakzat többféle lehet, pl. adott három pont esetén szerkesztendő a háromszög köré írt kör. Hány Apollóniosz-féle körérintési feladat van?

Összetett feladatok

Blaise Pascal (1623–1662) francia matematikus a binomiális együtthatók tanulmányozása közben módszert alkotott kiszámításukra. Az ő nevét viseli az ún. Pascal-háromszög:

0. sor →						1						
1. sor →					1		1					
2. sor →				1		2		1				
3. sor →			1		3		3		1			
4. sor →		1		4		6		4		1		
5. sor →		1	5		10		10		5		1	
6. sor →	1	6	15		20		15		6		1	stb.

Ebben a háromszög alakú táblázatban a sorokat és oszlopokat is 0-tól szokás indexelni. Pl. a 3. sor 0., 1., 2. és 3. elemei rendre 1, 3, 3, 1.

E1 199. Milyen szabály alapján folytathatjuk a táblázatot?

E1 200. Mivel egyenlő az n . sor

- a) 0.;
b) 1.;
c) $(n - 1)$.;
d) n .
eleme?

E1 201. Igaz-e, hogy a táblázatban szereplő számok szimmetrikusan helyezkednek el? (A szimmetriatengely a kezdő 1 elemen átmenő függőleges egyenes.)

E2 202. Mutassuk meg, hogy az n . sor k . elemének értéke éppen $\binom{n}{k}$. (Vagyis

adjunk pl. kombinatorikai bizonyítást arra, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$,

ha $k \leq n$ pozitív természetes számok.)

E1 203. Hol találhatjuk meg a táblázatban azt a számot, amely megadja, hogy egy 6 elemű halmaznak hány 3 elemű részhalmaza van?

E1 204. Tudjuk, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ha $k \leq n$ természetes számok. Mi mutatja ezt a tényt a táblázatban?

E1 205. Határozzuk meg $(a + b)^n$ kifejtett alakjában az egyes tagok együtthatóit, ha

- a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 5$.

Mit vehetünk észre, ha az együtthatókat összehasonlítjuk a táblázat 1., 2., ..., 5. sorában lévő számokkal?

E2 206. Mutassuk meg általában is, hogy $(a + b)^n$ kifejtett alakjában az $a^{n-k}b^k$ tag együtthatója $\binom{n}{k}$. ($k \leq n$ természetes számok.)

E2 207. Bizonyítsuk be a binomiális tételt:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots \\ \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n. (k, n \in \mathbb{Z}^+)$$

E2 208. Mivel egyenlő $(a-b)^n$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$?

E1 209. Fejtsük ki a Pascal-háromszög segítségével az alábbi kéttagú hatványokat:

a) $(x+2)^5$; b) $(3-y)^6$; c) $(a+1)^7$.

E2 210. Adjunk többféle bizonyítást arra, hogy a Pascal-háromszög n . sorában az elemek összege 2^n , $(n \in \mathbb{N})$.

E2 211. Mivel egyenlő a Pascal-háromszög n . sorában lévő elemek váltakozó előjelű összege, $(n \in \mathbb{Z}^+)$?

E2 212. Ha n pozitív páros szám, mivel egyenlő

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$; b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1}$?

E2 213. Ha n pozitív páratlan szám, mivel egyenlő

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1}$; b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$?

E2 214. Mennyi $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{6}{2}$?

Általánosítsuk ezt az „átlótételt”.

E2 215. Hány részhalmaza van egy

a) 4; b) 5; c) 6; d) n elemű halmaznak?

És hány valódi részhalmaza?

E2 216. A 0, 1, 2, ..., 9 számjegyekből álló halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely legalább hételemű?

E2 217. Hány páros elemszámú részhalmaza van egy n elemű halmaznak? És hány páratlan elemszámú részhalmaza, $(n \in \mathbb{N})$?

E2 218. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből álló halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely

- a) tartalmazza az 1, 2 számjegyeket;
- b) tartalmazza az 1 és 2 számjegyek valamelyikét (esetleg mindkettőt is);
- c) csak páros számjegyet tartalmaz;
- d) tartalmaz páros számjegyet;
- e) nem tartalmaz prímszámot;
- f) legalább három elemű?

E2 219. Adott a $H = \{1, 2, \dots, 20\}$ halmaz. Hány olyan részhalmaza van H -nak, melyben az elemek szorzata

- a) 5-re végződik;
b) osztható 5-tel?
(A részhalmazok legalább kételeműek.)

V 220. Egy n elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmazát választhatjuk ki úgy, hogy közülük bármely kettőnek legyen közös eleme, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

E2 221. Hányféleképpen lehet hat tanuló között kilenc tárgyat kiosztani úgy, hogy valamelyik tanuló hármat, valamelyik kettőt, a többi egyet-egyet kapjon, ha
a) a tárgyak egyformák; b) a tárgyak különbözők?

E2 222. Négy diáknak szeretnénk 20 különböző jutalomtárgyat kiosztani úgy, hogy az első diák 3, a második 4, a harmadik 6, a negyedik 7 tárgyat kapjon. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

E2 223. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet szétosztani három egyforma tárgyat, ha egy tanuló

- a) legfeljebb egy tárgyat kaphat;
b) több tárgyat is kaphat;
c) legfeljebb két tárgyat kaphat?

V 224. a) Hányféleképpen oszthatunk szét 40 egyforma ajándékot három tanuló között?

b) Mi az eredmény akkor, ha egy-egy tárgyat minden tanulónak kapnia kell?

V 225. Hányféleképpen lehet 14 egyforma golyót elhelyezni 5 számozott dobozba, ha

- a) pontosan kettő;
b) legalább kettő;
c) legfeljebb kettő doboz üres marad?

E2 V 226. Tíz tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani három ajándékot, ha

- a) az ajándékok különbözők, és egy tanuló legfeljebb egy ajándékot kaphat;
b) az ajándékok különbözők, és egy tanuló több ajándékot is kaphat;
c) az ajándékok egyformák, és egy tanuló legfeljebb egy ajándékot kaphat;
d) az ajándékok egyformák, és egy tanuló több ajándékot is kaphat?

E2 V 227. Hányféleképpen oszthatunk szét 6 piros, 7 fehér és 8 zöld golyót
a) két;

b) három
gyerek között?

c) Mi az eredmény akkor, ha egy-egy golyót minden színből kapnia kell a gyerekeknek?

E2 V 228. Egy 28 tagú sakkszakosztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha

- a) a jutalmak egyenlők, és egy tag legfeljebb egy jutalmat kaphat;
b) a jutalmak egyenlők, és egy tag több jutalmat is kaphat;
c) a jutalmak különbözők, és egy tag legfeljebb egy jutalmat kaphat;
d) a jutalmak különbözők, és egy tag több jutalmat is kaphat?

E2 V 229. 5 urnába 8 golyót helyezünk. Hányféleképpen tehetjük meg, ha
 a) az urnák és a golyók is különbözők;
 b) az urnák különbözők, a golyók nem megkülönböztethetők;
 c) az urnák is és a golyók is egyformák;
 d) az urnák egyformák, a golyók különbözők?

E2 230. A 0, 1, 2 számokból vett öt összeadandó segítségével hányféleképpen állhat elő

- a) a 6;
 b) a 6-nál nagyobb összeg?
 (A tagok sorrendje is lényeges.)

E2 231. Hányféleképpen lehet a 6-ot hat nemnegatív egész szám összegeként előállítani? (A tagok sorrendje is lényeges.)

V 232. Hányféleképpen lehet a 10-et három nemnegatív egész összeadandóra felbontani? (A tagok sorrendje is lényeges.)

K1 233. Felírható-e a 100

- a) hat darab;
 b) hét darab

különböző, 5-tel osztható természetes szám összegeként?

E2 234. Hányféleképpen lehet kiválasztani n különböző tárgy közül néhányat (de legalább 1-et) úgy, hogy a kiválasztott tárgyak sorrendjére nem vagyunk tekintettel, ($n \in \mathbb{N}^+$)?

V 235. Hány különböző módon bonthatjuk fel az n pozitív egész számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is lényeges?

E2 236. Hányféleképpen lehet nyolc embert (A, B, C, D, E, F, G, H) egy kör alakú asztal köré leültetni?

E2 237. Hányféleképpen lehet nyolc embert (A, B, C, D, E, F, G, H) egy kör alakú asztal köré leültetni úgy, hogy

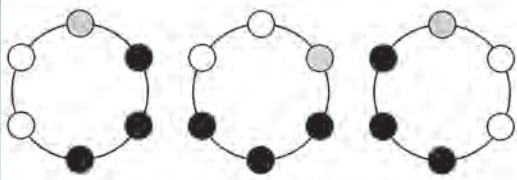
- a) A és B egymás mellé kerüljön;
 b) A, B és C (valamilyen sorrendben) egymás mellé kerüljön;
 c) A a B mellett és E az F mellett üljön?

E2 Gy 238. Hányféleképpen ülhet 6 házaspár egy kerek asztal köré, ha azt kívánjuk, hogy

- a) a házastársak egymás mellett üljenek;
 b) sem két nő, sem két férfi ne kerüljön egymás mellé;

c) a házastársak egymás mellett üljenek, de sem két férfi, sem két nő ne kerüljön egymás mellé?

239. ábra



E2 239. Hányféleképpen lehet 3 piros, 2 fehér és 1 zöld, egyforma méretű golyóból karkötőt készíteni? (A karkö-

tőknek van „alja” és „teteje”, tehát nem tekintjük különbözőnek a karkötő síkjára merőleges tengely körüli forgatással fedésbe hozható karkötőket. Pl. az ábrán az első két karkötő megegyezik, a harmadik különbözik tőlük.)

E2 240. Hányféle karkötőt készíthetünk n darab fehér és n darab kék golyóból, ha

a) $n = 2$; b) $n = 3$; c) $n = 4$?

K1 241. A Kerekasztal Lovagjai 12-en ülnek az asztalnál. Hányféleképpen lehet közülük 6 lovagot kiválasztani úgy, hogy szomszédosakat nem választunk?

V 242. Oldjuk meg az előző feladatot abban az esetben is, ha
a) 12 lovagból 5-öt; b) 50-ből 15-öt
választunk ki.

E2 243. a) Hányféleképpen olvasható ki a BUDAPEST szó az alábbi táblázatból, ha minden lépésben jobbra vagy lefelé lehet haladni?

B	U	D	A	P	E	S	T
U	D	A	P	E	S	T	
D	A	P	E	S	T		
A	P	E	S	T			
P	E	S	T				
E	S	T					
S	T						
T							

b) És ha még azt is kikötjük, hogy nem szabad kétszer egymás után jobbra lépni?

E2 244. Hányféleképpen olvasható ki a BUDAPEST szó az alábbi táblázatokból, ha minden lépésben jobbra vagy lefelé lehet haladni, és

a) a 3. sor 4. mezőjét nem érinthetjük;

B	U	D	A	P	E	S	T
U	D	A	P	E	S	T	
D	A	P		S	T		
A	P	E	S	T			
P	E	S	T				
E	S	T					
S	T						
T							

b) a 3. sor 4. és 5. sor 2. mezőjét nem érinthetjük;

B	U	D	A	P	E	S	T
U	D	A	P	E	S	T	
D	A	P		S	T		
A	P	E	S	T			
P		S	T				
E	S	T					
S	T						
T							

c) a 2. sor 3. és 3. sor 4. mezőjét nem érinthetjük.

B	U	D	A	P	E	S	T
U	D		P	E	S	T	
D	A	P		S	T		
A	P	E	S	T			
P	E	S	T				
E	S	T					
S	T						
T							

E2 245. Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót? (Az olvasás folyamán csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V
Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A
N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S
E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á
H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á	S

E2 246. Hányféleképpen lehet kiolvasni a táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót, ha nem szabad egymás után kétszer lefelé lépni? (Az olvasás folyamán csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V
Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A
N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S
E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á
H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á	S

E2 247. Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót, ha a 2. sor 6. betűje nem szerepelhet a kiolvasásban? (Az olvasás folyamán csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V
Z	N	E	H	É		K	I	O	L	V	A
N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S
E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á
H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á	S

V 248. Hányféleképpen lehet kiolvasni a táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót, ha a 2. sor 6. betűje és a 4. sor 9. betűje nem szerepelhet a kiolvasásban? (Az olvasás folyamán csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V
Z	N	E	H	É		K	I	O	L	V	A
N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S
E	H	É	Z	K	I	O	L		A	S	Á
H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á	S

E2 249. Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót? (Az olvasás folyamán csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E								
Z	N	E	H								
N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S
				Z	K	I	O	L	V	A	S
				K	I	O	L	V	A	S	Á

E2 250. Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót? (Az olvasás folyamán csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V
Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A
				É	Z	K	I	O	L	V	A
				Z	K	I	O	L	V	A	S
H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á	S

E2 251. Hányféleképpen lehet kiolvasni a táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót, ha a 2. sor 6. betűjét érinteni kell, de a 4. sor 9. betűje nem szerepelhet a kiolvasásban? (Az olvasás folyamán csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V
Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A
N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S
E	H	É	Z	K	I	O	L		A	S	Á
H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á	S

E2 V 252. a) Hányféleképpen olvasható ki a BUDAPEST szó, ha minden lépésben lefelé vagy átlósan lefelé lehet haladni?

							B							
							U	U	U					
							D	D	D	D	D			
							A	A	A	A	A	A		
							P	P	P	P	P	P	P	
							E	E	E	E	E	E	E	E
							S	S	S	S	S	S	S	S
							T	T	T	T	T	T	T	T

b) És ha még azt is kikötjük, hogy nem szabad kétszer egymás után átlósan lefelé jobbra lépni?

E2 V 253. Hányféleképpen olvasható ki a BUDAPEST szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet haladni, és
a) a 4. sor 3. elemét nem érinthetjük;

[illegible]

b) a 4. sor 3. elemét és a 7. sor 10. elemét nem érinthetjük;

[illegible]

c) a 4. sor 3. és a 7. sor 7. elemét nem érinthetjük?

							B							
							U	U	U					
							D	D	D	D	D			
							A	A		A	A	A	A	
							P	P	P	P	P	P	P	P
							E	E	E	E	E	E	E	E
							S	S	S	S	S		S	S
							T	T	T	T	T	T	T	T

E2 254. a) Hányféleképpen olvasható ki a BUDAPESTI szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet haladni?

							B							
							U	U	U					
							D	D	D	D	D			
							A	A	A	A	A	A	A	
							P	P	P	P	P	P	P	P
							E	E	E	E	E	E	E	
							S	S	S	S	S			
							T	T	T					
							I							

b) És ha még azt is kikötjük, hogy nem szabad kétszer egymás után jobbra lefelé lépni?

EV 255. Hányféleképpen olvasható ki a BUDAPESTI szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet haladni, és

a) a 4. sor 3. elemét nem érinthetjük;

							B							
							U	U	U					
							D	D	D	D	D			
							A	A		A	A	A	A	
							P	P	P	P	P	P	P	P
							E	E	E	E	E	E	E	
							S	S	S	S	S			
							T	T	T					
							I							

b) a 4. sor 3. elemét és a 6. sor 6. elemét nem érinthetjük;

				B				
			U	U	U			
		D	D	D	D	D		
	A	A		A	A	A	A	
P	P	P	P	P	P	P	P	P
	E	E	E	E	E		E	
		S	S	S	S	S		
			T	T	T			
				I				

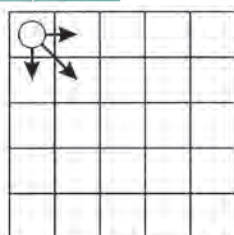
c) a 4. sor 3. elemét és a 6. sor 4. elemét nem érinthetjük?

				B				
			U	U	U			
		D	D	D	D	D		
	A	A		A	A	A	A	
P	P	P	P	P	P	P	P	P
	E	E	E		E	E	E	
		S	S	S	S	S		
			T	T	T			
				I				

E2 256. Egy 5×5 -ös tábla bal felső sarkából a jobb alsó sarkába akarunk eljutni egy olyan bábuval, amelyik csak jobbra és lefelé lépegethet egyet-egyet. A táblán kijelölünk egy tiltott mezőt, amelyre a bábu nem léphet. Melyik mező legyen ez, hogy minimális számú út vezessen a bal felső sarokból a jobb alsóba?

E2 257. Oldjuk meg az előző feladatot akkor is, ha a bábuval három irányban léphetünk: az eddigi jobbra és lefelé történő lépések mellett az átlós lefelé is megengedett (ábra).

257. ábra



Vegyes feladatok

K1 258. Egy kockának befestjük a felszínét, majd 125 egybevágó kis kockára daraboljuk. A kis kockák közül hánynak nem lesz egyetlen színes oldala sem?

K1 259. Egy $n \times n \times n$ -es méretű kocka felületét feketére festettük, majd a kockát n^3 egybevágó kis kockára daraboltuk ($n > 1, n \in \mathbb{N}^+$). Hány olyan kisebb kocka keletkezik, amelynek
a) 4; b) 3; c) 2; d) 1; e) 0
fekete lapja van?

K1 260. Piros, fehér, kék és zöld színű anyagokból zászlókat készítünk. Minden zászló vízszintes csíkokból áll, a szomszédos csíkok nem lehetnek azonos színűek. Hány különböző zászlót készíthetünk, ha egy-egy zászlón
a) 2; b) 3; c) 4
csíknak kell lennie?

K2 261. A 4-es és 5-ös számjegyekből hány 9-cel osztható
a) 8 jegyű; b) 9 jegyű
számot készíthetünk?

E2 262. Hány ötjegyű szám van, amely 16-ra végződik és 3-mal osztható?

E1 263. Mivel egyenlő az 1, 2, ..., 1000 számok számjegyeinek összege?

K2 264. Hány hatjegyű szám van, melyben
a) van 0 számjegy;
b) pontosan egy 0 számjegy van;
c) pontosan két 0 számjegy van?

V 265. Az előző feladat megoldása alapján számolás nélkül határozzuk meg az $\binom{5}{0} \cdot 9^6 + \binom{5}{1} \cdot 9^5 + \binom{5}{2} \cdot 9^4 + \binom{5}{3} \cdot 9^3 + \binom{5}{4} \cdot 9^2 + \binom{5}{5} \cdot 9$ összeg értékét.

K1 266. Hány
a) pontosan; b) legfeljebb
ötjegyű pozitív egész szám van a 3-as számrendszerben?

K1 267. Hány olyan természetes szám van, melyet a 9-es és a 11-es számrendszerben felírva, egyaránt háromjegyű számokat kapunk?

E2 268. Hány 3-mal osztható ötjegyű szám van, melyben előfordul a 6-os számjegy?

E2 269. Adottak a 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 számjegyek.

a) Hány 9 jegyű, 5-tel osztható szám készíthető belőlük?
b) Ezek között hány olyan van, amelyben a 3-as és 4-es számjegyek nincsenek egymás mellett?
c) És hány olyan van közöttük, amelyben a két 2-es számjegy nincs egymás mellett?

K2 Gy 270. Egy csoportban 6 fiú és 6 lány van. Kettesével ülnek le a 6 padba. Hányféle ülésrend készíthető, ha két lány, illetve két fiú nem ülhet egymás mellé?

K2 271. Egy társaságban 7 fiú és 5 lány van. Hányféleképpen alakítható be lölük

a) 5; b) 4

egyszerre táncoló pár?

E1 272. 4 fiú és 3 lány úgy ült le egy 7 személyes padra, hogy két lány nem került egymás mellé. Hányféle ültetési sorrend van? (Az ülőhelyek számozottak.

E1 Gy 273. 10 tagú társaság páros asztalitenisz-bajnokságot szervez úgy, hogy minden lehető pár minden lehetséges párral mérkőzzék. Hány játszmat kell összesen lejátszaniuk?

E1 274. Hányféleképpen lehet 20 lóval 5 négyes fogatot összeállítani?

E1 275. Szabályos játékkockával n dobást végzünk. Hány olyan kimenetel lehet a kísérletnek, amikor pontosan k darab 6-ost dobunk, ($k \leq n$, $n \in \mathbb{Z}^+$)

K2 276. Hányféleképp állítható fel 12 világos és 12 sötét gyalog a számozot sakktábla sötét mezőire?

K2 277. Hányféleképpen helyezhetünk el k darab korongot az $n \times m$ -es (számozott) táblára ($k \leq nm$), ha a korongok

a) megkülönböztethetők;

b) egyformák?

K2 278. Hányféleképpen helyezhetjük el a 8×8 -as sakktáblára

a) a világos és sötét huszárokat (2 + 2 darab);

b) a gyalogok közül 4 fehéret és 4 feketét;

c) a világos tiszteket (2 – 2 huszár, futó, bástya, 1 vezér)?

K2 279. Helyezzünk a sakktáblára 5 bástyát úgy, hogy semelyik kettő ne üss egymást! Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

K2 280. Hány huszárt helyezhetünk el

a) a 8×8 -as sakktáblán;

b) az 5×5 -ös táblán

úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

K2 281. Hányféleképpen választhatunk ki 1 és 40 között 5 egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

E1 282. Vezessük be a következő jelöléseket ($k, n, a, b \in \mathbb{N}$):

– jelölje P_n az n különböző elem összes permutációjának számát;

– jelölje $P_n^{a,b,\dots}$ az n elem összes ismétléses permutációjának számát (ekkor a n elem között $a, b, \dots$ számú egyforma található);

– jelölje V_n^k az n különböző elem k -ad osztályú variációinak számát;

– jelölje $V_n^{k,i}$ az n különböző elem k -ad osztályú ismétléses variációinak számát;

– jelölje C_n^k az n különböző elem k -ad osztályú kombinációinak számát;

– jelölje $C_n^{k,i}$ az n különböző elem k -ad osztályú ismétléses kombinációinak számát.

Melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) $P_n = n!$;

c) $P_n^a = \frac{n!}{a!}$;

e) $V_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$;

g) $V_n^k = \frac{P_n}{P_k}$;

i) $V_n^{k,i} = n^k$;

k) $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \dots 2 \cdot 1}$;

m) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

o) $C_n^k \cdot P_k = V_n^k$;

q) $C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^k$;

s) ha $a+b=n$, akkor $P_n^{a,b} = C_n^a$;

u) a P_n^a képletben $n \geq a$;

w) a V_n^k képletben $n \geq k$;

y) a C_n^k képletben $n \geq k$;

b) $P_n = n(n-1)(n-2)!$;

d) $P_n^{a,b} = \frac{n!}{a! \cdot b!}$;

f) $V_n^k = \frac{n!}{k!}$;

h) $V_n^1 = P_n$;

j) $V_n^{k,i} = k^n$;

l) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;

n) $C_n^k = \binom{n}{k}$;

p) $C_n^{k,i} = C_k^{n,i}$;

r) $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$;

t) ha $a+b=n$, akkor $P_n^{a,b} = C_n^b$;

v) a $P_n^{a,b}$ képletben $n \geq a+b$;

x) a $V_n^{k,i}$ képletben $n \geq k$;

z) a $C_n^{k,i}$ képletben $n \geq k$.

K1 283. Hány háromszög van, melynek oldalai cm-ben mérve különböző egész számok, és 10 cm

a) a legnagyobb oldala;

b) a középső oldala;

c) a kerülete?

E1 284.

a) Egy konvex tízszögnek hány átlója van?

b) Az átlóknak legfeljebb hány metszéspontja lehet?

c) Legfeljebb hány ilyen metszéspont lehet egy átlón?

K2 285. Vegyünk fel három párhuzamos egyenest, s jelöljük ki az egyiken 5, a másikon 6, a harmadikon 7 pontot. Hány háromszöget határoznak meg a pontok? (Az adott három egyenesen lévő pontok kivételével semelyik három pont nincs egy egyenesen.)

E2 286. A sík e és f egyenese párhuzamos. Adott az e egyenesen n , az f egyenesen m pont, s egy-egy egyenessel összekötjük az előbbieket mindegyikét az utóbbiak mindegyikével. Legfeljebb hány metszéspontja lehet az összekötő egyeneseknek?

K2 287. Egy kocka éleit mint vektorokat tetszőlegesen irányíthatjuk. Legfeljebb hány különböző eredője lehet az így kapott 12 vektor összegének?

K2 288. Hány olyan mező van egy végtelen nagy „sakktáblán”, amelyet egy kiszemelt mezőről elérhetünk k lépésben a királlyal, de kevesebbel nem, ($k \in \mathbb{N}^+$)?

Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha csak vízszintes és függőleges lépéseket engedünk meg, átlósakat nem!

K2 289. Egy „bolyongó bolha” a számegyenes 0 pontjából indul, s minden lépésben pozitív vagy negatív irányba ugrik egy egységnyit. 20 ugrás után a bolha kifárad és megáll.

- Hányféle ugrássorozatot végezhet a bolha? (Két ugrássorozat csak akkor azonos, ha minden lépésben mindig ugyanabban az irányban történt az ugrás.)
- Hányféleképpen juthat el a (10) pontba?
- Hányféleképpen juthat el a (11) pontba?
- Hányféleképpen juthat el a (0) pontba?
- Melyik pontokban tartózkodhat a 20 ugrás után a bolha?
- Miután megállt a bolha, melyik pontban fog a legnagyobb valószínűséggel tartózkodni?

K2 290. Legkevesebb hány egyenes vágásra van szükségünk, hogy egy 8×8 -as méretű csokoládét 64 darab 1×1 -es részre szétvágjunk, ha

- egy vágással egyszerre csak egy csokidarabot vághatunk el;
- a csokidarabokat, ha szükséges, elmozdíthatjuk, egymásra is tehetjük stb.

K2 291. Oldjuk meg az előző feladat b) részét, ha 5×5 -ös méretű csokoládét 1×1 -es darabokra vágunk szét.

K2 292. Egy téglatest három élének hossza 5 cm, 6 cm és 7 cm. A téglatest felületét feketére festettük, majd 1 cm élű, egybevágó kis kockákra daraboltuk fel. Hány olyan kisebb kocka keletkezett, amelynek

- 4; b) 3; c) 2; d) 1; e) 0

fekete lapja van?

K2 293. Hány tetraédert határoz meg a térben p számú pont, ha ezek közül q darab egy síkban fekszik? (Semelyik három pont nincs egy egyenesen és a q pont síkján kívül semelyik négy pont nincs egy síkon; $p, q \in \mathbb{N}^+, q \leq p$.)

K2 294. Felvettünk három párhuzamos síkon rendre 8, 9 és 10 pontot. Hány tetraédert határoznak meg a pontok? (Az azonos síkban lévő pontok kivételével semelyik négy pont nincs egy síkban és semelyik három pont nincs egy egyenesen.)

K2 295. Egy kocka lapjait két színnel kiszínezzük (mindkét színt felhasználjuk). Hányféle kocka készíthető, ha a lapok

- előzetesen számozottak (pl. dobókocka);
- nem számozottak?

K2 Gy 296. Hány különböző, három vízszintes sávból álló zászlót készíthetünk, ha a sávok mindegyikét 6 különböző színnel színezhetjük ki, és nem lehet két egyforma színű sáv? (A magyar zászló például ilyen.) Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha k különböző színt használhatunk fel, ($k \in \mathbb{N}, 3 \leq k$).

K2 297. Hány különböző, három vízszintes sávból álló zászlót készíthetünk, ha a sávok mindegyikét 6 különböző színnel színezhetjük ki, és nem lehet egymás mellett két egyforma színű sáv? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha k különböző színt használhatunk fel, ($k \in \mathbb{N}, 2 \leq k$).

E1 298. Egy matematikaversenyen 30 feladat szerepel. Minden jól megoldott feladat 4 pontot ér, minden rossz -1 -et. Ha egy feladattal nem foglalkozik valaki, arra 0 pontot kap. Hányféle lehet egy versenyző összpontszáma?

K2 299. Hányféleképpen helyezhető el a sakktáblán két különböző színű király úgy, hogy ne üssék egymást?

E1 300. 9 ember csónakázni készül. Rendelkezésükre áll egy 4-, egy 3- és egy 2-személyes csónak.

a) Hányféleképpen foglalhatják el a csónakokat? (Egy csónakon belül a helyek sorrendje nem számít.)

b) Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha két személy, A és B egy csónakban akar ülni.

c) Oldjuk meg a feladatot, ha csak 8 ember indul csónakázni.

E1 301. $2n$ tagú társaságnak egy hosszú asztal mentén kell leülnie úgy, hogy az asztal mindkét oldalára a tagok fele kerüljön. A társaság p számú tagja az asztal egyik, q számú tagja a másik felén akar ülni. Hányféleképpen helyezkedhetnek így el? ($p, q \leq n$ természetes számok.)

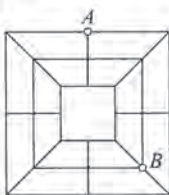
K2 302. Hányféle úton juthatunk el az a), b), c), d) ábrákon az A pontból a B pontba, ha folyamatosan közelednünk kell a célhoz?

K2 303. Hányféle úton juthatunk el az ábrán az A pontból a B pontba, ha folyamatosan közelednünk kell a célhoz? (A nyilak az egyirányú útszakaszokat jelzik.)

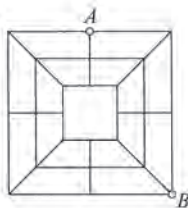
K2 304. Egy 4×4 -es négyzetrács alakú „labirintus” két átellenes csúcsában, a kijáratoknál egy egér és egy macska áll (ábra). Mindketten adott jelle, ugyanakkora sebességgel elindulnak a szemközt es kijárat felé úgy, hogy minden lépésben közelednek céljukhoz. Egy mást nem látják,

302. ábra

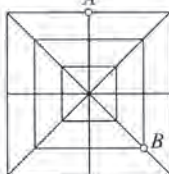
a)



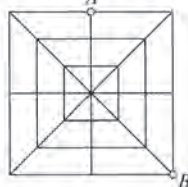
b)



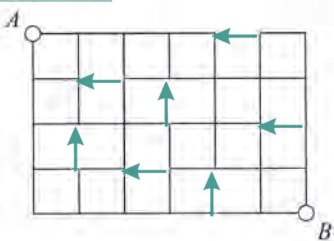
c)



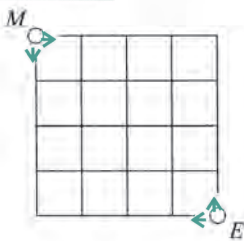
d)



303. ábra



304. ábra



útválasztásuk az elágazásokban véletlenszerű. (Amikor elágazáshoz érnek, a lehetséges két irány közül egyforma valószínűséggel választanak. A macska célja, hogy az E, az egéré, hogy az M kijáratnál hagyja el a „labirintust”.) Hányféle úton találkozhatnak?

K1 Gy 305. Hány Morse-jelsorozat készíthető pontosan négy jelből? (Mindegyik jel lehet pont vagy vonás.) Elég lenne ennyi lehetőség az angol ábécé 26 betűjének kódolásához?

K1 Gy 306. Hány Morse-jelsorozat készíthető legfeljebb négy jelből? Elég lenne ennyi lehetőség az angol ábécé 26 betűje és a 10 számjegy kódolásához?

K1 Gy 307. Hány Morse-jelsorozat készíthető legfeljebb öt jelből? (Mindegyik jel lehet pont vagy vonás.) Az alábbi táblázatban keressünk néhány 4 hosszú Morse-jelsorozatot, amelyeknek nem feleltetünk meg betűket.

a	· —	e	·	i	· ·	m	— —	r	· · ·	v	· · · —
b	— · · ·	f	· · — ·	j	· — — —	n	· · ·	s	· · ·	x	— · — —
c	— · — ·	g	— · — ·	k	— · — —	o	— — — —	t	—	y	· · — — —
d	— · ·	h	· · · ·	l	· — · ·	p	· — — ·	u	· · —	z	— — · ·

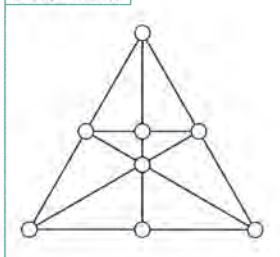
1	· — — — —	6	— · · · ·
2	· · — — —	7	— — · · ·
3	· · · — —	8	— — — · ·
4	· · · · —	9	— — — — ·
5	· · · · ·	10	— — — — —

K2 308. Öt sakkjátékos körmérkőzéses versenyt vívott, mindenki mindeenkivel egy játszmát játszott. A játszmák után a győztes 1 pontot kapott, míg döntetlen esetén mindkét játékos $1/2-1/2$ pontot. A játszmák után a versenyzők pontszámait csökkenő sorrendbe állíthattuk, s minden játékos legyőzte az öt e sorrendben közvetlenül megelőzőt. Mik voltak a további játszmák eredményei?

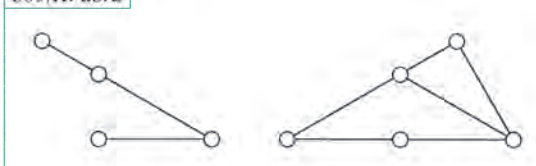
K2 Gy 309. Egy televíziós vetélkedőn szerepelt a kérdés: hány háromszöget látunk az ábrán (309/I.)?

(Bár a vetélkedőn nem pontosították, de azt az alakzatot tekintjük háromszögnek, amelynek csúcsai az ábrán jelölt 8 pont közül valók, s oldalai ténylegesen behúzott szakaszok. Pl. a 309/II. ábrán 0, illetve 3 háromszög van.)

309/I. ábra



309/II. ábra



K2 Gy 310. Egy 1×4 -es méretű igen vékony szalag négy egybevágó sorszámozott négyzetből áll. A szalagot 1×1 -es méretűre összehajtjuk. Hányféle különböző sorrendben következhetnek ekkor az 1, 2, 3, 4 számok?

K2 Gy 311. Bergengócia elnöke titkosított üzenetet küld a szomszédos baráti országba, Kukutyinba. (Bergengóciával ellenséges viszonyban van a másik szomszéd, Boncida királysága; a kémek miatt titkosítják a szöveget.) A titkosítás lényege, hogy a szöveget tíz karakter hosszú csoportokra bontják (ebbe beletartoznak a szóközők is), s egy-egy csoporton belül a karaktereket permutálják, az alábbi szabály szerint:

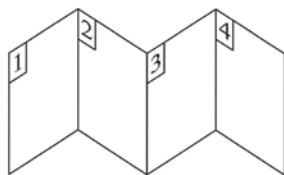
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	7	5	6	4	3	1	9	0

- a) Mi lesz a BONCIDA HARCRA KÉSZ üzenet kódolt szövege?
 b) A (nem matematikus végzettségű) hadügyminiszter úgy gondolja, hogy az így kapott szövegen nemzetbiztonsági okokból célszerű a kódolást még egyszer elvégezni, s ezáltal még jobban összekeverni a betűket. Igen ám, de a titkosszolgálat is hasonló megfontolásokkal él: ők is még egyszer kódolják a szöveget. Mi történik?

VGy 312. Egy multinacionális cég tesztelni kívánja az általa gyártott drága poharak ütéstállóságát. A cég székháza 36 emeletes. Megbízta egy híres mérnököt, hogy határozza meg, legfeljebb melyik emeletről ejthető le törés nélkül a pohár (lehet, hogy a 36. emeletről leejtve sem törik össze, de az is lehet, hogy már az első emelet is túlságosan magasnak bizonyul). Két egyforma mintapoharat bíznak a kétségbeesett mérnökre. Legkevesebb hány méréssel tudja szegény megoldani a problémát?

E1 313. Bergengóciában a Sárkánynak 100 feje van, a Királyfinak viszont olyan Varázskardja, amellyel egy csapásra 33, 21 vagy 17 fejét tudja a Sárkánynak levágni. Igen ám, de az első esetben a Sárkánynak 18 új feje nő ki, a másodikban 36, a harmadik esetben pedig 14. Ha a Sárkány összes feje lehullott, nem nő ki több. Le tudja-e győzni a Királyfi a Sárkányt?

12. ábra



E2 314. Az előző feladatbeli Bergengóciában az új Királyfinak (mí lett a régivel?) új Varázskardot kovácsoltak. Ezzel egy-egy csapással a 100 fejű Sárkány 7, 9 vagy 11 fejét tudja leütni; az egyes esetekben rendre 13, 18, illetve 5 új feje nő ki a Sárkánynak. (Ha a Sárkány összes feje lehullott, most sem nő ki több). Legkevesebb hány suhintással tudja a Királyfi legyőzni a Sárkányt?

E1 Gy 315. 16 teniszjátékos indult el a klub bajnokságán. A versenyzők között egyértelmű az erőssorrend (vagyis az erősebb játékos mindig legyőzi a gyengébbet). Legkevesebb hány mérkőzést kell lejátszani, míg kiderül,

- a) ki a legerősebb játékos;
- b) ki a két legerősebb játékos;
- c) ki a legerősebb és a leggyengébb játékos;
- d) ki a két legerősebb és a leggyengébb játékos;
- e) ki a két legerősebb és a két leggyengébb játékos?

E1 Gy 316. Jules Verne (1828–1905) Sándor Mátyás című regényében ismerteti az alábbi titkosírási módszert.

Az összeesküvők az üzenet 36 betűjét összekeverve, egy 6×6 -os táblázat alakjában rendezték el. A kiolvasás egy ún. rostély segítségével történt. A rostély egy 6×6 -os kartonlap, amelyen a 36 mezőből egyeseket előre kivágtak, s a rostély tetejét megjelölték egy kereszttel. A kiolvasást egyszerűen végezték: a kartonlapot kereszttel felfelé a szövegre helyezték; a karton kivágtott mezőinek helyén megjelölt betűket lejegyezték; a rostélyt 90° -kal adott irányban elforgatták; majd ezt az eljárást háromszor megismételték. Így a szöveg minden betűjét pontosan egyszer kapták meg.

Tegyük fel, hogy valaki meg akarja fejteni a titkosírást, s ezért az összes lehetséges rostélyt elkészíti. Hány van összesen?

E1 V 317. Hányféleképpen rendezhetünk sorba 3 piros, 4 fehér és 2 zöld, egyforma méretű golyót, ha azt akarjuk, hogy ne kerüljön egymás mellé

- a) két zöld;
- b) két piros;
- c) piros és zöld golyó?

E1 318. Egy céllövöldében öt zsinór mindegyikén 4-4 üveggolyó függ, céltáblául szolgálva. A feltétel az, hogy mindegyik zsinóron mindig a legelső golyót kell eltalálni. Hányféleképpen lehet az összes golyót lelőni?

E2 319. Rendezzük nagyság szerint növekvő sorba azokat a számokat, amelyek az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket pontosan egyszer tartalmazzák. Milyen szám áll a 100 000. helyen?

E1 320. Egy „bolyongó bolha” a számegyenes 0 pontjából indul, s minden lépésben vagy a pozitív irányba ugrik két egységnyit, vagy negatív irányba egy egységnyit. 10 ugrás után a bolha kifárad és megáll.

- a) Hányféle ugrássorozatot végezhet a bolha? (Két ugrássorozat csak akkor azonos, ha minden lépésben mindig ugyanabban az irányban történt az ugrás.)
- b) Hányféleképpen juthat el a (10) pontba?
- c) Hányféleképpen juthat el a (11) pontba?
- d) Melyik pontokban tartózkodhat a 10 ugrás után a bolha?

E2 321. Egy szabályos ötszög minden csúcsát piros vagy kék színnel kiszíneztük. Ezután az ötszöget tükrözzük az ábra szerinti t szimmetriatengelyre, majd a középpontja körül elforgatjuk 144° -kal. Hány olyan színezése lehetséges az ötszög csúcsainak, amelyeket a két transzformáció egymásutánja (szorzata) önmagába visz?

K1 322. Egy páncélszekrény három forgótárcsáján kell a 0, 1, ..., 9 számjegyek közül a megfelelőt beállítani, majd egy gombnyomásra kinyitni az ajtót. (Tehát a legkisebb beállítható szám 000, a legnagyobb 999.) A zár a legújabb divatnak megfelelően úgy működik, hogy ha valaki egy hamis számmal próbálkozik, akkor a nyitó kód értékét automatikusan megnöveli eggyel. Pl. ha a beállított kombináció 123 volt, akkor a helytelen próbálkozás után a kombináció 124-re változik; vagy ha 999 volt, akkor 000 lesz stb. Sajnos nem ismerjük a nyitó kódot. Milyen számkombinációkkal próbálkozzunk, ha a lehető legegyszerűbben (leggyorsabban) szeretnénk kinyitni a páncélszekrényt?

V 323. Az előző feladat páncélszekrényét felújították. A modernebb ajtón olyan a zárszerkezet, hogy minden számmal csak egyszer lehet kísérletezni (pl. az 123 eredménytelen kísérlet után az 123-at többé nem szabad kipróbálni, mert az ajtó véglegesen beragad). Ki lehet-e biztosan nyitni ezt az ajtót?

E2 324. Egy szabályos játékkockával öt dobást végzünk, a kapott számokat egymás mellé írjuk, s így egy ötjegyű számot kapunk.

- Hányféle számot kaphatunk?
- Hány olyan kimenetele lehet a kísérletnek, amikor legalább egyszer hatost dobunk?
- Hány esetben lesz a dobott pontok összege legalább 26?
- Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a dobások összege 11?
- Hány esetben kaphatunk 3-mal osztható számot?
- Hány esetben kaphatunk 6-tal osztható számot?
- Hány esetben kaphatunk 18-cal osztható számot?
- Hány esetben kaphatunk 1-est is és 6-ost is?

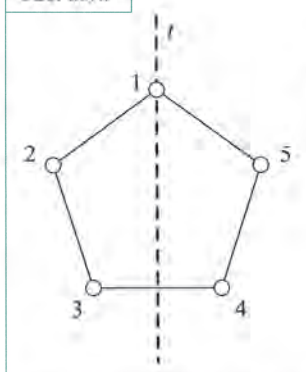
E2 325. Hány olyan ötjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek különbözők, és

- a számjegyek szorzata páros;
- a számjegyek szorzata 5-re végződik;
- egymás melletti számjegyei között szerepel a 25;
- a számjegyek összege páratlan;
- a számjegyek összege páros és a számjegyek között van 2-es?

E2 326. Hány négyjegyű szám készíthető a 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?

E2 327. Hány tízjegyű, öttel osztható szám készíthető a 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5 számjegyekből?

321. ábra



E2 328. A 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4 számjegyekből hány olyan tízjegyű szám készíthető, amelyben

- a) nincs egymás mellett két 2-es;
 b) nincs egymás mellett a 3-as és a 4-es;
 c) nincs egymás mellett 2-es és 4-es?

E2 329. Hány ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek szorzata 0-ra végződik?

E1 330. Hányféleképpen lehet 10 különböző könyvet úgy felrakni a polcra, hogy

- a) 2; b) 3

(előre kiválasztott) könyv egymás mellé kerüljön?

E1 331. Mennyi az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből képezett 5-re végződő összes ötjegyű szám összege, ha

- a) a számjegyek nem ismétlődhetnek;
 b) a számjegyek ismétlődhetnek?

E2 332. Egy „bolyongó bolha” a számegeyes 0 pontjából indul, a $[-5; 7]$ zárt intervallumon bolyong, s minden lépésben pozitív vagy negatív irányba ugrik egy egységnyit. (Ha a bolha az intervallum valamelyik végpontján túlra ugrik, akkor véglegesen eltűnik a szemünk elől.) Hányféleképpen kerülhet a bolha 12 lépés után a 6 pontba?

E1 333. Hányféleképpen lehet egy kocka hat lapját 1-től 6-ig megszámozni? (Nem tekintjük különbözőknek azokat a számozásokat, amelyek valamilyen mozgatással egymásba vihetők.)

V 334. Hányféleképpen lehet

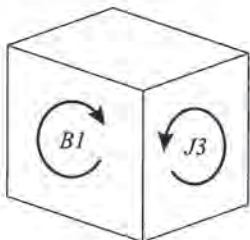
- a) egy szabályos tetraéder négy lapját 1-től 4-ig megszámozni;
 b) egy oktaéder nyolc lapját 1-től 8-ig megszámozni;
 c) egy dodekaéder tizenkét lapját 1-től 12-ig megszámozni;
 d) egy ikozaéder húsz lapját 1-től 20-ig megszámozni?

(Nem tekintjük különbözőknek azokat a számozásokat, amelyek valamilyen mozgatással egymásba vihetők.)

K2 335. Egy 8 egység élhosszúságú kockát szétvágunk 512 darab egységnyi élű kis kockára. Hány vágással tehetjük ezt meg, ha

- a) a szétvágással keletkező darabokat nem mozditjuk el egymástól;
 b) az egyes vágások után kapott darabokat alkalmas módon átrendezhetjük?

337. ábra



K2 336. Oldjuk meg az előző feladat b) részét, ha $5 \times 5 \times 5$ -ös méretű kockát $1 \times 1 \times 1$ -es darabokra vágunk szét.

V Gy 337. A kezünkben tartott, színek szerint rendezett Rubik-kockával B1 és J3 forgatásokat végzünk folyamatosan egymás után. (B1 a bal oldali lap óramutató járása szerinti 90° -os elfordítását

jelenti; hasonlóan $J3$ a jobb oldali lap -90° -os elfordítását, mint az ábrán látható.)

Igaz-e, hogy egy bizonyos számú forgatás után a kocka ismét rendezetté válik?

K2 338. a) Hányféle úton juthatunk el az ábrán A -ból C -be? (A szabályos háromszögrács élein folyamatosan közeledni kell C -hez, visszafelé nem haladhatunk.)

Hányféle úton juthatunk el A -ból C -be az egyes esetekben, ha közben:

b) B -t érintenünk kell;

c) B -t nem érinthetjük?

V 339. Hányféleképpen lehet egy bátyával a sakktábla $a1$ mezőjéről a $h8$ mezőre jutni, ha minden lépésben a célhoz közeledünk, és

a) 14; b) 12

lépést tehetünk?

E2 340. Mennyi a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből készíthető hatjegyű, 5-tel osztható számok összege? (A számjegyek nem ismétlődhetnek.)

V 341. 30 tanulót felállítottunk téglalap alakban, 6 sorban és 5 oszlopban. Minden sorból kiválasztottuk a legalacsonyabb tanulót, majd a hat tanuló közül kiválasztottuk a legmagasabbat, ez lett Aladár. Ezután az 5 oszlopból kiválasztottuk a legmagasabbakat, majd az így kapott öt tanuló közül a legalacsonyabbat, ez lett Béla. Melyik tanuló a magasabb?

V Gy 342. A közismert MasterMind játék egy változatában az egyik játékosnak 8 különböző színű pálcika sorrendjét kell meghatározni. Miután tippelt, partnere elárulja, hogy hány pálcikának sikerült eltalálni a sorrendbeli helyét. Jelöljük a színeket az 1, 2, ..., 8 számokkal.

A játékokban eddig két próbálgatás történt. Az első: 5 8 1 3 2 4 7 6, s tudjuk, hogy 5 szín volt a helyén. A második: 7 5 4 3 8 6 2 1, ekkor 4 találat történt. Mit mondhatunk az egyes pálcikák színéről?

V 343. Bizonyítsuk be, hogy ha $2 < p, q \in \mathbb{N}$, akkor

$$a) \binom{p}{2} + \binom{p}{1}\binom{q}{1} + \binom{q}{2} = \binom{p+q}{2};$$

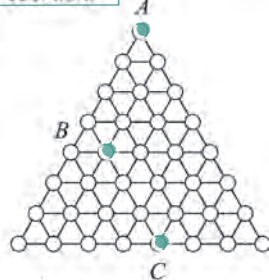
$$b) \binom{p}{3} + \binom{p}{2}\binom{q}{1} + \binom{p}{1}\binom{q}{2} + \binom{q}{3} = \binom{p+q}{3}.$$

V 344. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{p+k}{n} = \binom{p}{0}\binom{k}{n} + \binom{p}{1}\binom{k}{n-1} + \binom{p}{2}\binom{k}{n-2} + \dots + \binom{p}{n}\binom{k}{0}, \quad \text{ha } n \leq p, k \in \mathbb{N}.$$

V 345. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$

338. ábra

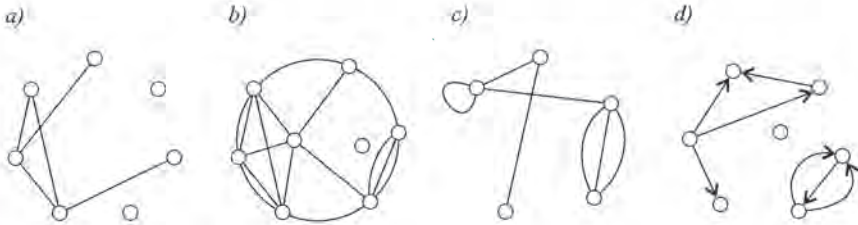


II. Gráfok

Alapfogalmak

K1 346. Jellemezzük az alábbi gráfokat. (Határozzuk meg a csúcsok, élek, komponensek számát, a csúcsok fokszámait; vizsgáljuk meg, van-e izolált pont az egyes gráfokban; van-e közöttük egyszerű gráf vagy irányított gráf.)

346. ábra



K1 347. Az alábbi feladatokban 5 pontú gráfok éleit felsorolással adtuk meg (pl. $\{1; 2\}$ az 1-es és 2-es csúcs közötti élt jelenti).

Rajzoljuk meg az egyes gráfokat, s állapítsuk meg, hogy hány komponensből állnak. Melyek közülük az egyszerű gráfok?

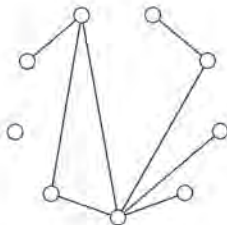
Az egyszerű gráfoknak rajzoljuk meg a komplementer gráfját is.

a) $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{2; 3\}, \{2; 5\}, \{4; 5\}$;

b) $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 5\}, \{2; 3\}, \{2; 5\}$;

c) $\{1; 2\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 2\}, \{2; 3\}, \{2; 5\}, \{4; 5\}, \{4; 5\}, \{5; 5\}$.

348. ábra



K1 Gy 348. Egy társaságban kilenc ember találkozott. A mellékelt gráf pontjai jelentik az egyes személyeket, s azokat kötöttük össze élekkel, akik ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.)

a) Kinek van a legtöbb ismerőse a jelenlévők között?

b) Fogalmazzuk meg az „ismeretségi” gráf izolált pontjának jelentését!

K1 Gy 349. Az alábbi táblázat néhány magyarországi nagyváros távolsági adatait jelzi kilométerben (személygépkocsival járható útvonalakra vonatkoztatva).

	Budapest	Debrecen	Győr	Kecskemét	Miskolc	Pécs	Siófok	Szeged
Budapest	–	226	123	85	179	198	106	171
Debrecen	226	–	350	191	98	367	332	224
Győr	123	350	–	208	303	241	118	294
Kecskemét	85	191	208	–	199	176	150	86
Miskolc	179	98	303	199	–	377	285	286
Pécs	198	367	241	176	377	–	122	189
Siófok	106	332	118	150	285	122	–	224
Szeged	171	224	294	86	286	189	224	–

a) Keressünk a táblázat alapján olyan városokat, amelyekre igaz, hogy a közöttük lévő útvonal további (felsorolt) városon halad át! (Hogyan látszik ez a tény a táblázatban?)

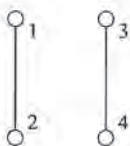
b) Rajzoljunk az adatok alapján egy olyan gráfmodellt, amely Budapest és a többi nagyváros távolsági adatait tartalmazza!

K1 Gy 350. Vizsgáljuk meg, hogy nagyapáink dédapjai és dédapáink nagyapai ugyanazok a személyek-e. (Rajzoljuk fel a családfát visszamenőleg öt generáció terjedelemben.)

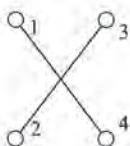
K1 351. a) Az alábbi négy gráf között vannak-e izomorfak?

351. ábra

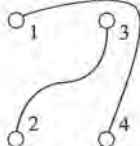
1.



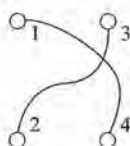
2.



3.



4.



b) Mi a válasz akkor, ha a gráf csúcsai számozottak? (Ekkor megkülönböztetjük az egyes csúcsokat; az ábrán 1-től 4-ig.)

K2 352. Töltsük ki az alábbi egyszerű gráfokra vonatkozó táblázatot, ($n > 6$, $n \in \mathbb{N}$).

csúcsok száma	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	n	n
élek száma	0	1	2	3	4	2	3	4	3	4	3	4
gráfok száma												

Rajzoljuk le az 5 csúcs, 4 él eset gráfjait.

K2 353. Töltsük ki az alábbi táblázatot, $(n > 4, n \in \mathbb{N})$.

csúcsok száma	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	n	n
élek száma	1	2	1	2	3	4	1	2	1	2	1	2
gráfok száma												

Rajzoljuk le a 4 csúcs, 2 él eset gráfjait.

K2 354. Töltsük ki az alábbi egyszerű gráfokra vonatkozó táblázatot, ha a gráf csúcsai számozottak. (Ekkor megkülönböztetjük az egyes csúcsokat.)

csúcsok száma	2	2	2	3	3	3	4	4	4
élek száma	0	1	2	1	2	3	1	2	3
számozott csúcsú gráfok száma									

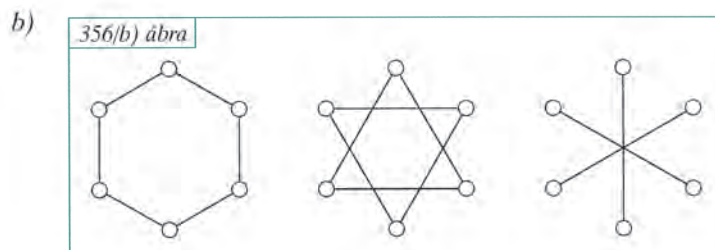
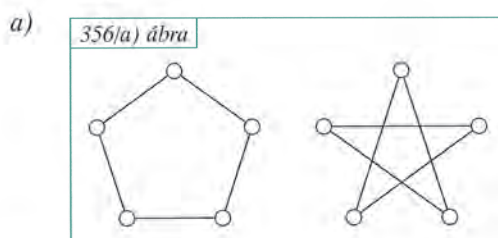
K2 355. Töltsük ki az alábbi táblázatot, ha a gráf csúcsai számozottak. (Ekkor megkülönböztetjük az egyes csúcsokat.)

csúcsok száma	1	1	2	2	2	3	3	4	4
élek száma	1	2	1	2	3	1	2	1	2
számozott csúcsú gráfok száma									

Rajzoljuk le a 2 csúcs, 3 él eset gráfjait.

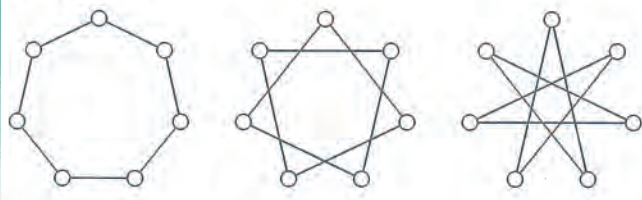
Izomorfak-e az alábbi gráfok? (356–358. feladatok)

K1 356.



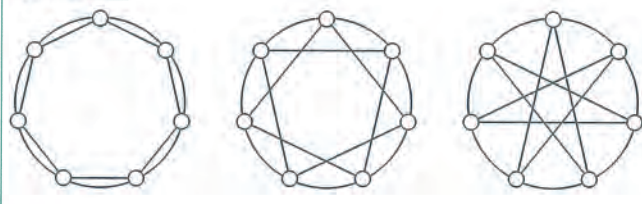
c)

356/c) ábra



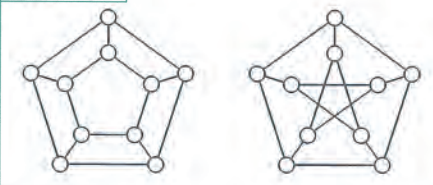
K2 357.

357. ábra



E2 358.

358. ábra



K2 359. a) Izomorf-e két egyszerű, 5 pontú gráf, ha a fokszámaik 2, 2, 2, 2, 2?
b) Izomorf-e két egyszerű, 6 pontú gráf, ha a fokszámaik 2, 2, 2, 2, 2, 2?

K2 360. A 6 pontú egyszerű gráfok közül melyikből van több:

a) amelyekben minden pont foka 3, vagy amelyekben minden pont foka 2?

b) amelyekben 7 él van, vagy amelyekben 8?

K2 361. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.

1. Ha két egyszerű gráf izomorf, akkor komplementerük is az.

2. Ha két egyszerű gráf komplementere izomorf, akkor az eredeti gráfok is azok.

3. Ha két gráf izomorf, akkor megfelelő csúcsaik fokszáma páronként egyenlő.

4. Ha két gráfbán a megfelelő csúcsok fokszáma páronként megegyezik, akkor a két gráf izomorf.

K2 362. Töltsük ki az alábbi, egyszerű gráfokra vonatkozó táblázatot. Találunk-e valamilyen érdekességet a táblázatban?

[illegible]

K2 363. Töltsük ki az alábbi, egyszerű gráfokra vonatkozó táblázatot, ha a gráf csúcsai számozottak. (Ekkor megkülönböztetjük az egyes csúcsokat.) Találunk-e valamilyen érdekességet a táblázatban?

csúcsok száma	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
élek száma	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6
számozott egyszerű gráfok száma											

K1 Gy 364. Hat labdarúgócsapat körmerkőzést játszik egymással, eddig három forduló zajlott le. A mérkőzéseket egy irányított gráffal szemléltettük: a pontok felelnek meg a csapatoknak, s két pontot akkor kötöttünk össze egy nyíllal, ha a két csapat játszott egymással. A nyíl mindig a győztes csapatnak megfelelő pontba mutat. (Nem született döntetlen.)

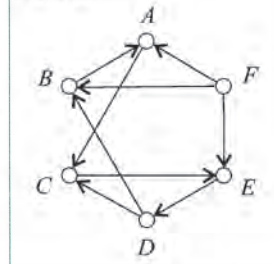
a) Mi jelzi az ábrán, hogy eddig három forduló zajlott le?

b) Van-e nyertlen csapat?

c) Van-e veretlen csapat?

d) Minden mérkőzésen a győztes csapat 3, a vesztes 0 pontot kap. Melyik csapatnak hány pontja van?

364. ábra



K1 Gy 365. Egy versenyen nyolc kosárlabdacsapat (A, B, C, D, E, F, G, H) egyfordulós körmerkőzést játszik. (Minden csapat mindegyikkel egyszer játszik, döntetlen nincs.) Néhány mérkőzés már lejajlott, ezek eredményét mutatja az alábbi táblázat.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	–	71 : 75		63 : 62				52 : 70
B	75 : 71	–	64 : 69			60 : 62		
C		69 : 64	–	72 : 73	73 : 59		63 : 71	
D	62 : 63		73 : 72	–			72 : 78	
E			59 : 73		–	51 : 58		
F		62 : 60			58 : 51	–		81 : 80
G			71 : 63	78 : 72			–	67 : 72
H	70 : 52					80 : 81	72 : 67	

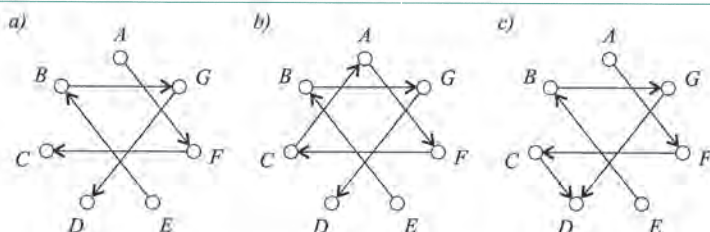
Rajzoljuk meg a verseny irányított gráfját, s válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket, egyaránt figyelembe véve a táblázat és a gráf jellemzőit. (Az irányított gráfban a pontok felelnek meg a csapatoknak, a nyílak a mérkőzéseknek. Két pontot akkor kötünk össze egy nyíllal, ha a két csapat játszott egymással, és a nyíl mindig a győztes csapatnak megfelelő pontba mutat.)

a) Melyik csapat játszotta a legtöbb, illetve legkevesebb mérkőzést?

b) Melyik csapatnak van a legtöbb, illetve legkevesebb győzelme?

c) Lehetséges-e, hogy a csapatok között egyértelmű az erőssorrend? (Vagyis a jobbik csapat mindig legyőzi a gyengébbet.)

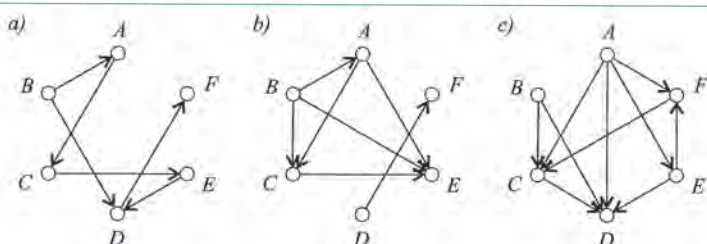
366. ábra



K1 Gy 366. Hét különböző tömegű érmét vizsgálunk egy kétkarú mérleg segítségével. Minden egyes mérés folyamán egy-egy érmét tudunk összehasonlítani. Irányított gráffal szemléltetjük az eddig lezajlott méréseket (a nyíl a nehezebb érme felé mutat). Meg tudjuk mondani, hogy melyik a legnehezebb érme az egyes esetekben?

K1 Gy 367. Hat játékos asztalitenisz sportágban mérte össze az erejét. Az eddig lezajlott mérkőzéseket irányított gráffal szemléltetjük, a nyíl a győztes játékosnak megfelelő pontba mutat.

367. ábra



a) Tétélezzük fel, hogy a játékosok játéktudásuk alapján sorba rendezhetők úgy, hogy a jobb játékos mindig legyőzi a nála gyengébben rangsoroltakat. Meg tudjuk-e mondani az egyes esetekben, hogy mi a játékosok erősorrendje?

b) Vannak-e „felesleges” mérkőzések az egyes esetekben? (Tehát amik nem adnak további információt, ezért el is hagyhatjuk őket.)

c) Legkevesebb hány mérkőzést kell mindenféleképpen lejátszani ahhoz, hogy a legjobb játékost kiválaszthassuk?

d) Legfeljebb hány mérkőzést játszhatnak le a játékosok, ha azok eredményéből még nem derül ki az erősorrend?

K1 Gy 368. Az ábra szerinti gráf nyolc csapat kieséses versenyének a sorsolását mutatja.

a) Hány mérkőzést játszanak le a csapatok, míg kiderül, melyikük a győztes?

b) Hányféleképpen alakulhat – az összes mérkőzést tekintve – a verseny?

368. ábra



c) Hányféleképpen alakulhat az elődöntő, ha az egyik résztvevő csapat B ? (Az elődöntőt az 1–2, illetve 3–4 csapatok játsszák.)

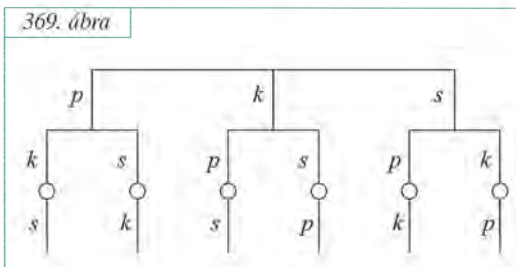
d) Hányféleképpen alakulhat a verseny, ha a D és G csapatok játsszák a döntőt?

K1 369. Egy urnában három golyó van, színük piros, kék és sárga. Egymás után, visszatevés nélkül, véletlenszerűen kihúzzuk a három golyót. Az ábra szemlélteti a folyamatot.

a) Hányféle kimenetele van a folyamatnak? (Hányféle „végződése” van a gráfnak?)

b) Hányféle kimenetele lehetséges a folyamatnak, ha kezdetben az urnában öt különböző színű golyó van?

369. ábra



K2 370. Egy urnában négy egyforma méretű golyó van, két piros, egy kék és egy sárga. Egyesével, visszatevés nélkül, véletlenszerűen kihúzzuk a golyókat.

a) Készítsük el a folyamat gráfját.

b) Készítsük el a folyamat gráfját akkor is, ha a két piros golyót megkülönböztetjük.

c) A kihúzott golyókat helyezzük el sorban egymás mellett. Melyik sorozatot kapjuk a legnagyobb valószínűséggel?

K1 K2 371. Egy szabályos pénzérmét háromszor egymás után feldobunk, a kapott eredményeket (fej vagy írás) lejegyezzük.

a) Készítsük el a folyamat gráfját.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy két fejet és egy írást dobunk?

V Gy 372. Öt különböző tömegű érmét szeretnénk tömegük szerint növekvő sorba rendezni. Egy kétkarú mérleget használhatunk, amellyel a két serpenyőben lévő egy-egy érme tömegét hasonlíthatjuk össze.

a) Legkevesebb hány mérésre van szükség?

b) Adjunk meg egy eredményes mérési eljárást irányított gráf segítségével.

Összefüggések a gráf csúcsai és élei között

K2 373. Egy társasági összejövetelen tíz vendég vett részt. A házigazda kérdésére mindannyian megmondták, hogy a többi vendég között hány ismerősük van. Ezek voltak a válaszok: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7. A házigazda rövid gondolkodás után rájött, hogy valaki tévedett. Hogyan gondolkozhatott? (Az ismeretség kölcsönös.)

K2 374. Mutassuk meg, hogy bármely társaságban azok száma, akiknek páratlan számú ismerősük van, páros.

d) 1, 1, 2, 3, 4, 4.

E1 377. Egy házibuli fiú és lány résztvevői társasjátékot játszottak. A tréfás vetélkedő egyik feladataként össze kellett írni mindkét csapat tagjainak, hogy az összejövetel előtt hány ismerőse volt a másik csapatból. Ezután mindkét csapaton belül összeadták a kapott számokat, s az a csapat nyert, aki nagyobb összeget kapott eredményül. Melyik csapat nyert, ha senki sem tévedett?

K2 378. Bizonyítsuk be, hogy bármely társaságban van két olyan személy, akiknek ugyanannyi barátjuk van a társaságban. (Feltételezzük, hogy a barátság kölcsönös.)

d) Ha egy egynél több pontból álló egyszerű gráfban nincs izolált pont és kevesebb él van, mint ahány pont, akkor a gráfnak van elsőfokú pontja.

d) 2, 2, 3, 3, 5, 5;

E1 381. Oldjuk meg az előző feladatot akkor is, ha a gráf csúcsai számozottak.

d) 1, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 7:

e) 1, 1, 3, 4, 6, 7, 7, 7?

b) Hány gráf van akkor, ha a csúcsokat megkülönböztetjük egymástól?

K1 384. Mutassunk példát olyan 7 pontú egyszerű gráfokra, amelyekben minden pont foka 2, de a gráfok nem izomorfak.

E1 385. Hány olyan 5 pontú egyszerű gráf van, amely izomorf a komplementerével?

K2 386. Hány ismeretség van egy

a) öt tagú;

b) n tagú

társaságban, ha mindenki mindenkit ismer, ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$)?

K2 387. Húzzuk be egy konvex n -szög oldalait és átlóit. Összesen hány szakaszt rajzoltunk, ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$)?

K2 388. Hány éle van egy egyszerű gráfnak és komplementerének együttesen?

K2 389. Egy körmérkőzéses sakkversenyen eddig összesen 65 mérkőzést játszottak le és mindenkinek még 2 mérkőzése van hátra. Hányan szerepelnek a versenyen?

E1 390. Hány 5 pontú, számozott csúcsú egyszerű gráf van?

E1 Gy 391. Egy dominókészlet lapjai a 0, 1, 2, 3, 4 számokból összeállítható különböző számpárokat tartalmaznak.

A készlethez egy 5 pontú gráfot rendelhetünk oly módon, hogy a gráf csúcsait megszámozzuk 0, 1, 2, 3, 4-gyel, s két csúcsot, pl. i -t és j -t ($0 \leq i, j \leq 4$) akkor kötünk össze éllel, ha az i, j számokat tartalmazó dominó a készlethez tartozik.

a) Mi jellemzi a hiánytalan készlethez rendelhető gráfot?

b) Hány dominóból áll a hiánytalan készlet?

c) Hányféleképpen választhatunk ki 4-et a dominólapok közül?

E1 392. Egy dominókészlet lapjai a 0, 1, 2, ..., 6 számokból összeállítható számpárokat tartalmaznak (a két szám egyenlő is lehet).

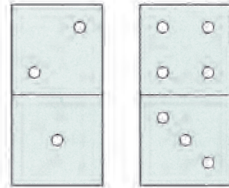
a) Mi jellemzi a hiánytalan készlethez rendelhető gráfot?

b) Hány dominóból áll a hiánytalan készlet?

K2 393. Hány átlója van egy konvex n -szögnek, ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$)?

V 394. Egy 20×20 -as négyzetrács pontjait két színnel, pirossal és kékkel színeztük ki. Ezután két szomszédos egyszínű pontot összekötöttünk a végpontjaikkal egyező színű szakasszal, különböző színű szomszédos pontokat fekete szakasszal kötöttünk össze. A piros pontok száma 219, közülük 39 a határon van, de a 4 sarokcsúcs kék. A fekete szakaszok száma 237 lett. Hány kék szakasz van?

391. ábra



Szabályos testek csúcsai, élei

A szabályos testeket egybevágó szabályos sokszöglapok határolják, s minden csúcsukban ugyanannyi lap találkozik. Ez alapján meghatározhatjuk a testek csúcsainak és éleinek számát. Például a tetraéder 4 darab egybevágó szabályos háromszöglapból áll, s minden csúcsában három lap találkozik. Ezért egy-egy lapon 3 csúcs, a négy lapon $4 \cdot 3 = 12$ csúcs van. De mivel minden csúcsában három lap találkozik, ezért minden csúcsot háromszor számoltunk. A csúcsok száma tehát $\frac{12}{3} = 4$.

E1 395. Határozzuk meg hasonló módon a tetraéder éleinek számát.

Oldjuk meg hasonló módon az alábbi 396–402. feladatokat.

E1 396. Az oktaéder 8 darab egybevágó szabályos háromszöglapból áll, minden csúcsában négy háromszöglap találkozik. Határozzuk meg ez alapján, hogy hány csúcsa és éle van a testnek.

E1 397. Az ikozaéder 20 darab egybevágó szabályos háromszöglapból áll, minden csúcsában öt lap találkozik. Határozzuk meg ez alapján, hogy hány csúcsa és éle van a testnek.

E1 398. Lehetséges-e, hogy egy poliéder minden csúcsában hat (vagy több) szabályos háromszöglap találkozik?

E1 399. A hexaéder (kocka) hat darab egybevágó négyzetből áll, minden csúcsában három lap találkozik. Határozzuk meg ez alapján, hogy hány csúcsa és éle van a testnek.

E1 400. Lehetséges-e, hogy egy poliéder minden csúcsában négy (vagy több) négyzet találkozik?

E1 401. A dodekaéder 12 darab egybevágó szabályos ötszöglapból áll, minden csúcsában három lap találkozik. Határozzuk meg ez alapján, hogy hány csúcsa és éle van a testnek!

E1 402. Lehetséges-e, hogy egy poliéder minden csúcsában négy (vagy több) szabályos ötszöglap találkozik?

K2 403. Az öt szabályos test a szabályos tetraéder, a kocka, a szabályos oktaéder, a szabályos dodekaéder és a szabályos ikozaéder. A testek csúcsai és élei egy-egy gráfot határoznak meg. Töltsük ki az alábbi táblázatot. Találunk-e valamilyen összefüggést az adatok között?

	tetraéder	kocka	oktaéder	dodekaéder	ikozaéder
lapok száma					
csúcsok száma					
élek száma					

A szabályos testek esetében a csúcs, él, lap jellemzők közül bármelyik segítségével a másik kettő meghatározható (feltéve, hogy rendelkezünk azzal az ismerettel, hogy egy csúcsban hány lap találkozik). A fenti feladatokban a lapok segítségével határoztuk meg a csúcsok és élek számát, az alábbi 404–406. feladatokban feltételezzük, hogy más adatot ismerünk.

E1 404. Határozzuk meg az ikozaéder csúcsainak és lapjainak számát, ha tudjuk, hogy az élek száma 30, és minden csúcsában öt háromszöglap találkozik.

E1 405. Határozzuk meg az oktaéder csúcsainak és lapjainak számát, ha tudjuk, hogy az élek száma 12, és minden csúcsában négy háromszöglap találkozik.

E1 406. Határozzuk meg a dodekaéder lapjainak és éleinek számát, ha tudjuk, hogy a csúcsok száma 20, és minden csúcsában három ötszöglap találkozik.

Vegyes feladatok

K2 407. Körmérkőzést játszik 10 csapat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges időpontban található két olyan csapat, amelyik ugyanannyi mérkőzést játszott. Hogyan általánosíthatnánk a feladatot n csapatra?

K2 408. Bizonyítsuk be, hogy ha 10 csapat körmérkőzéses versenyén legalább 11 mérkőzést már lejátszottak, akkor van olyan csapat, amelyik legalább háromszor játszott. Hogyan általánosíthatnánk a feladatot n csapatra?

K2 409. Egy csapatbajnokságra 16 csapat nevezett be. Legalább hány mérkőzés zajlott már le, ha van olyan csapat, amelyik legalább négy mérkőzést játszott?

K1 410. Egy táncmulatságon 18 fiú és 15 lány vett részt. Az összejövetel végén kíváncsiságból összeírták, hogy kinek hány partnere volt (akivel esetleg többször is táncolhatott), s az eredményeket külön összesítették a fiúkra s külön a lányokra. Az így kapott számok közül melyik lett a nagyobb? (Csak különmeműek táncoltak egymással.)

E1 411. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex n -szög átlóinak?

K2 412. Hány n pontú, számozott csúcsú egyszerű gráf van?

K2 413. Döntsük el, melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül.

1. Ha két gráfban a megfelelő csúcsok fokszáma egyenlő, akkor a két gráf izomorf.

2. Ha egy n pontú gráfban az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.

3. Ha egy n pontú egyszerű gráfban az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.

4. Egy 5 csúcsú, egyszerű gráfnak nem lehet 11 éle.

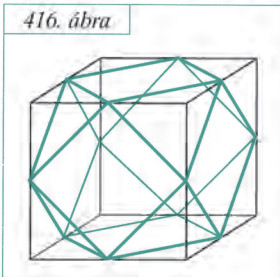
5. A fokszámok egyértelműen meghatározzák a gráfot.

6. A foksámok egyértelműen meghatározzák az egyszerű gráfot.
 7. Ha az n csúcsú összefüggő gráfnak n -nél kevesebb éle van, akkor van elsőfokú csúcsa.
 8. A legalább két pontú gráfban van két azonos foksámú pont.
 9. A legalább két pontú egyszerű gráfban van két azonos foksámú pont.
 10. A G gráf komplementerének a komplementere izomorf G -vel.

K1 414. Az irányított gráfokban az adott pontba befutó, illetve a pontból kifutó élekről beszélünk. Mi jellemző a kifutó élek és a befutó élek foksámainak összegére?

K2 415. Igaz-e, hogy konvex poliéderekben páros számú olyan csúcs van, amelyekből páratlan számú él indul ki?

416. ábra



K2 416. A szabályos háromszögekből és négyzetekből álló „csonkolt kockát” láthatjuk az ábrán. A testet úgy képzelhetjük el, hogy a kocka 8 csúcsánál rendre levágunk egy-egy szabályos háromszög alapú derékszögű tetraédert, figyelve arra, hogy a metsző sík a csúcsba befutó 3 él felezőpontján menjen át.

a) Határozzuk meg „minél ügyesebben”, hogy hány háromszög és négyzet határolja a testet.

b) Határozzuk meg a test csúcsainak és éleinek számát.

K2 Gy 417. Igaz-e, hogy minden szénhidrogén-molekulában páros számú hidrogénatom van?

K1 418. Egy táncmulatságon 18 fiú és 15 lány vett részt. Az összejövetel végén kíváncsiságból összeírták, hogy ki hányszor táncolt, s az eredményeket külön összesítették a fiúkra s külön a lányokra. Melyik szám lett a nagyobb? (Csak különműek táncoltak egymással; lehetséges, hogy valaki ugyanazzal a partnerrel többször is táncolt.)

K2 419. Egy 15-ös létszámú versenyen mindenki mindenkivel egyszer mérkőzik, már 98 mérkőzés lezajlott. Bizonyítsuk be, hogy van olyan résztvevő, aki már befejezte a versenyt.

K2 420. Egy 16 főből álló csapat nyáron táborozik. Minden délután 4-4 tag sakk-körmérkőzést vív. Hány napja tarthat a tábor, ha vannak a rajnak olyan tagjai, akik legalább kétszer mérkőztek egymással?

E2 Gy 421. Mutassuk meg, hogy ha 20 telefonközpont mindegyikének van a többiek közül legalább 10-zel közvetlen összeköttetése, akkor bármely két telefonközpont között létesíthető telefonkapcsolat (esetleg többük közvetítése révén).

Igaz-e a feladat általánosítása $2n$ számú telefonközpontra és n közvetlen összeköttetésre?

K2 422. Igaz-e, hogy ha egy legfeljebb $2n$ pontú egyszerű gráf minden pontjának foka $n - 1$, akkor a gráf összefüggő?

K2 Gy 423. Lehet-e 5 gyufásdobozt úgy összeépíteni, hogy pontosan

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4

szomszédja legyen mindegyiknek? (Két skatulya szomszédos, ha az érintkező felületeknek közös belső pontja van.)

E1 Gy 424. Lehet-e 6 darab gyufásdobozt úgy összeépíteni, hogy pontosan

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5

szomszédja legyen mindegyiknek? (Két skatulya szomszédos, ha az érintkező felületeknek közös belső pontja van.)

E1 Gy 425. a) Az előző feladatok nem mindegyikét lehetett megoldani. Módosítsuk a szomszédsági definíciót: elég, ha a két skatulya pontban érintkezik egymással. Így most már találunk megoldást?

b) Amelyik esetekben nem találtunk megoldást, ott további engedményeket teszünk. A gyufáskatulya helyett *tetszőleges tárgyakból* építhetünk. Sikerült minden esetre megoldást találni?

Összefüggő gráfok, fa, kör

K1 Gy 426. 6 város között telefonösszeköttetést terveznek.

a) Legalább hány vonalat kell kiépíteni ahhoz, hogy bármely városból bármely másikba (esetleg további városokon keresztül) lehessen telefonálni?

b) Biztonsági okokból úgy tervezik a vonalakat, hogy akkor is bármely városból bármely másikba lehessen telefonálni, ha valamelyik szakasz megsérül. Legalább hány vonalat kell ekkor kiépíteni?

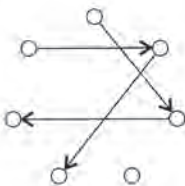
K1 Gy 427. 32 csapatot kieséses rendszerben összesorsoltak. Hány mérkőzést kell lejátszani, míg kiderül, melyik a győztes csapat?

K1 Gy 428. Oldjuk meg az előző feladatot 20 csapatra is. Ekkor erőnyerő az a csapat (vagyis mérkőzés nélkül jut tovább), amelyiknek az aktuális fordulóban nincs ellenfele.

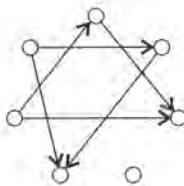
K1 Gy 429. Hét játékos közötti mérkőzéseket irányított gráffal szemléltetünk (a nyíl mindig a győztes játékos felé mutat). Egyértelmű erősorrendet feltételezve, legkevesebb hány további mérkőzést kell lejátszani az alábbi esetekben ahhoz, hogy kiderüljön a győztes személye?

429. ábra

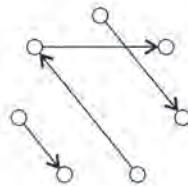
a)



b)



c)



V 430. Egy térképen pontokként tüntettük fel egy területi régió 10 városát (a városok olyan helyzetűek, hogy bármely kettő távolsága különböző). A térképen minden pontot a hozzá legközelebbi ponttal összekötöttük egy szakasszal, így egy gráfot kaptunk. Bizonyítsuk be, hogy

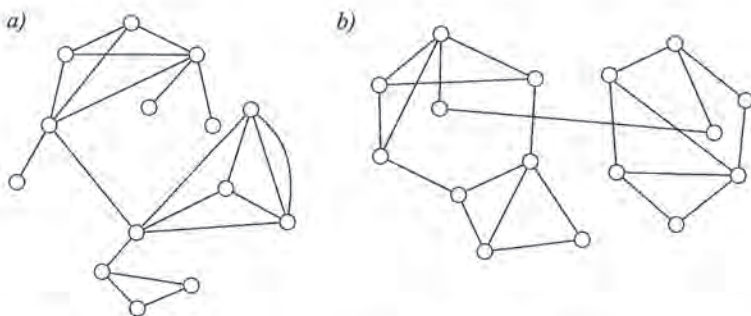
- a) két szakasz nem metszheti egymást;
- b) nem jöhet létre háromszög az ábrán;
- c) nem jöhet létre zárt töröttvonal az ábrán.
- d) Előfordulhat-e, hogy a kapott gráf nem összefüggő?

K2 431. Legkevesebb hány egyenes vágásra van szükségünk, hogy egy 5×7 -es méretű csokoládét 35 darab 1×1 -es részre szétvágjunk, ha

- a) egy vágással egyszerre csak egy csokidarabot vághatunk ketté;
- b) a csokidarabokat, ha szükséges, elmozdíthatjuk, egymásra is tehetjük stb.

K2 432. Legkevesebb hány „vágásra” van szükségünk, hogy az alábbi összefüggő gráfokat 6 komponensre vágjuk szét? (Minden vágással egy élt szüntethetünk meg.)

432. ábra



K2 Gy 433. Kilenc különböző tömegű érme közül kell kiválasztani a legnehezebbet. Legkevesebb hány összehasonlító mérésre van ehhez szükség?

K2 434. Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van.

E2 435. Legalább és legfeljebb hány éle van egy n pontú, k komponensű egyszerű gráfnak ($n \geq k$)?

E2 436. Legfeljebb hány éle lehet egy 10 pontú nem összefüggő egyszerű gráfnak?

E2 437. Igaz-e, hogy ha egy n pontú gráf éleinek száma legalább

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}, \text{ akkor a gráf összefüggő?}$$

E1 438. Hány olyan 8 pontú nem összefüggő egyszerű gráf van, amelyben minden pont foka legalább 3?

E1 439. Hány olyan 9 pontú nem összefüggő egyszerű gráf van, amelyben minden pont foka legalább 3?

E2 440. Hány olyan 7 pontú nem összefüggő egyszerű gráf van, amelynek 15 éle van?

E2 441. Hány olyan 7 pontú nem összefüggő egyszerű gráf van, amelynek a) 14; b) 13; c) 10 éle van?

K1 442. Igaz-e, hogy ha n számú telefonközpont közül bármely kettő között létesíthető telefonkapcsolat, akkor van e központok között $n - 1$ számú közvetlen összeköttetés is?

K2 E1 Gy 443. 16 amatőr teniszzjátékos versenyt rendez egymás között. Sajnos a játékosoknak egyszerre soha nincs szabadidejük, rendszertelenül mérkőznek egymással. A játékszabályban úgy állapodnak meg, hogy a vesztes kiesik, már nem folytatja a játékot.

a) Legalább hány mérkőzést kell lejátszani ahhoz, hogy megtudják, ki a legjobb közülük?

b) Legalább hány mérkőzést kell lejátszani ahhoz, hogy megtudják, ki a legjobb és a második legjobb?

c) Legalább hány mérkőzést kell lejátszani ahhoz, hogy megtudják, ki a legjobb, a második legjobb és a leggyengébb? (Feltételezzük, hogy a játékosok között egyértelmű az erőssorrend, és az erősebb játékos mindig legyőzi a gyengébbet.)

K2 Gy 444. Válaszoljunk meg az előző feladat kérdéseit a kihívásos rendszerű versenyek esetében. (A kihívásos versenyek esetén mindig a győztes marad játékban, hozzá sorsolják a következő ellenfelet.) Mennyi az egyes esetekben a maximális, ill. minimális mérkőzésszám?

K1 445. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

a) Igaz-e, hogy ha egy $n > 1$ pontú egyszerű gráf bármely két pontját pontosan egy út köti össze, akkor a gráf fa?

b) Igaz-e, hogy ha egy gráf körmentes és összefüggő, akkor az fa?

c) Igaz-e, hogy ha egy n pontú gráf körmentes és $n - 1$ élű, akkor az fa?

d) Igaz-e, hogy ha egy n pontú gráf összefüggő és $n - 1$ élű, akkor az fa?

e) Igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráf bármely élét elhagyva két komponensre esik szét, akkor az fa?

f) Hány csúcsa van egy 5 fából álló, 100 élű ligetnek?

g) Igaz-e, hogy minden fának van két elsőfokú pontja?

K2 446. Hány 6 csúcsú, nem izomorf fa van?

K2 447. Hányféle, a síkba kiterített összefüggő hálózata van a kockának? (Két hálózatot nem tekintünk különbözőnek, ha fedésbe hozhatók.)

K2 Gy 448. Egy kocka papírból készült makettjét az élei mentén úgy vágjuk fel, hogy síkba kiteríthető, összefüggő hálózatot kapjunk. Legalább hány éle mentén kell felvágni a kockát?

K2 Gy 449. A paraffinmolekulák általános képlete C_nH_{2n+2} . A molekulákat gráffal szemléltethetjük, amelyben a szénmolekulának a negyedfokú, a hidro-

gémolekulának az elsőfokú pontok felelnek meg. Rajzoljuk meg az alábbi molekulák gráfjait!

a) $n = 1$ (metán);

b) $n = 2$ (etán);

c) $n = 3$ (propán);

d) $n = 4$ (bután).

E1 Gy 450. Mutassuk meg, hogy a $C_n H_{2n+2}$ képlettel adott paraffinmolekulák modellje mindig fagráf (nyílt szénláncok).

E1 451. a) Mit állíthatunk arról a gráfról, melyben minden pont foka 2?

b) És ha további feltételként még azt is kikötjük, hogy a gráf összefüggő?

E1 452. Nyolc sakkozó körmérkőzéses versenyt vív egymással, két forduló már lezajlott. A versenyt hagyományos módon gráffal szemléltethetjük: a pontok felelnek meg a játékosoknak, az élek a mérkőzéseknek. Igaz-e, hogy az így kapott gráfban mindig van zárt töröttvonal (gráfelméleti kör)?

E1 Gy 453. Nyolc teniszzjátékos körmérkőzéses versenyét irányított gráffal szemléltetjük. A versenyen két forduló már lezajlott. A játékosok között egyértelmű erőssorrendet feltételezve (mely szerint az erősebb játékos mindig legyőzi a gyengébbet), melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) A győztes személye még nem állapítható meg.

b) Elképzelhető, hogy megállapítható a győztes személye.

c) Megállapítható a győztes személye.

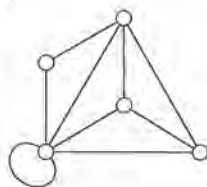
E1 454. Egy ismerkedési esten minden meghívottnak legalább két ismerőse volt a társaságban. Igaz-e, hogy a gráfmodellben (a pontok felelnek meg a vendégeknek, az élek az ismeretségeknek) van zárt töröttvonal?

K2 Gy 455. Egy lakópark 6 háztömbje között sétautakat terveznek. Legalább hány útszakaszt kell létrehozni, ha a tervezők azt szeretnék, hogy bármely háztömbtől bármely háztömbhöz (esetleg további háztömböket közbeiktatva) legalább kétféle úton el lehessen jutni?

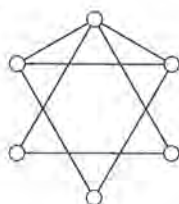
E1 456. Hány kör van az alábbi gráfokban?

456. ábra

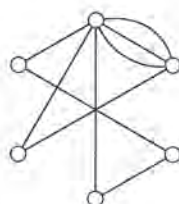
a)



b)



c)



E1 457. Hány irányított kör van a 457. ábra szerinti gráfokban?

E1 458. Döntsük el, melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül!

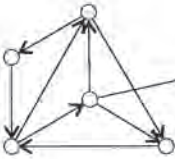
a) Egy n pontú, k komponensű gráfnak legalább $n - k$ éle van.

b) Az n pontú, $n - 1$ élű összefüggő gráf fa.

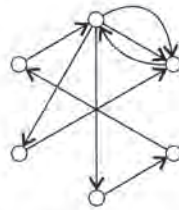
c) Ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma legalább 2, akkor van benne kör.

457. ábra

a)



b)



d) Ha egy egyszerű gráfban minden pont foka 2, akkor a gráf kör.

e) Ha egy összefüggő gráf minden csúcsa másodfokú, akkor a gráf kör.

f) Ha egy n pontú összefüggő gráfnak n éle van, akkor a gráf kör.

g) Van olyan nem összefüggő egyszerű gráf, melyben minden csúcs másodfokú.

h) Ha egy összefüggő gráf tetszőleges körének egy élet elhagyjuk, összefüggő gráfot kapunk.

i) Ha egy összefüggő gráfból elhagyunk egy olyan élt, amely egyetlen körben sincs benne, akkor a gráf nem marad összefüggő.

j) Ha egy n pontú gráfban bármely két pont között létezik út, akkor van olyan két pont, melyeket $n - 1$ hosszú út köt össze, ($n > 1$).

k) Minden összefüggő gráfnak van faváza.

E1 459. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú gráfnak van legalább n éle, akkor van benne kör!

E1 460. Mutassuk meg, hogy tetszőleges 5 csúcsú egyszerű gráfra igaz, hogy vagy maga a gráf, vagy a komplementere tartalmaz kört! Mely egyéb n értékekre marad még igaz az állítás?

K1 461. Egy összefüggő gráf csúcsait pirossal és kézzel kiszíneztük. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban különböző színű csúcsokat összekötő él.

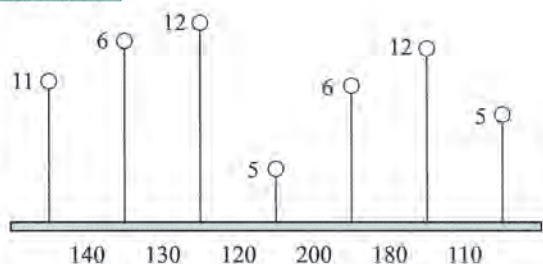
V 462. Hány olyan kör van egy 5 csúcsú teljes gráfban, amely tartalmazza a gráfnak egy kijelölt csúcsát? Oldjuk meg a feladatot n csúcsú teljes gráfra is.

V 463. Egy 6 csúcsú teljes gráfnak hány különböző köre van? Oldjuk meg a feladatot n csúcsú teljes gráfra is.

V 464. Igaz-e, hogy ha egy társaságban mindenki legalább k másik személyt ismer ($k \geq 2$), akkor leül-tethető közülük legalább $k + 1$ személy egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a két szomszédja?

K2 Gy 465. Az ábrán egy fő-útvonalat és hét település

465. ábra



bekötőútjait ábrázoltuk. Jelöltük az egyes településeken lakó iskolás diákok számát és a bekötőutak egymástól mért távolságát is.

Minden reggel megérkezik az iskolabusz, s a főútvonalon lévő egyetlen megállóban felveszi a diákokat. A lakosok szeretnék úgy meghatározni a megálló helyét, hogy az iskolások által a megállóig megtett utak összege a lehető legkisebb legyen.

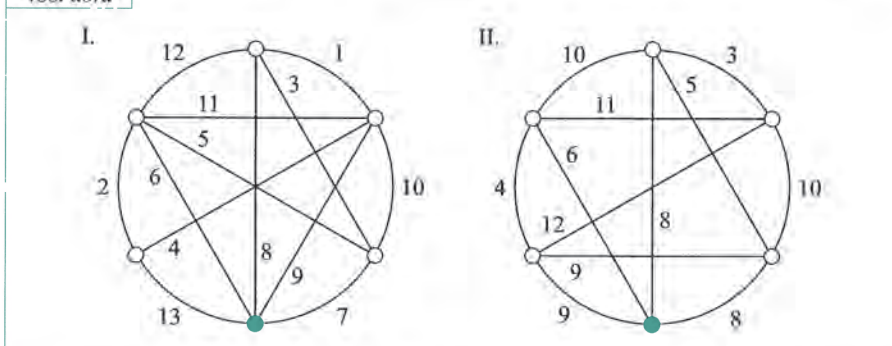
a) Szükség van-e további adatokra (pl. az egyes bekötőutak hosszára)?

b) Esetleg vannak felesleges adatok az ábrán?

c) Nos, hová helyezzük a megállót?

E1 Gy 466. Hat település között vízvezetékrendszert terveznek. A települések helyzetét és a közöttük lévő esetleges csatornafektetés összköltségeit az alábbi egy-egy ábra modellezi. Színnel jelöltük azt a települést, amelyik az országos

466. ábra



hálózatra csatlakozik. (A költségek a különböző domborzati viszonyok és távolságok miatt nagyon eltérőek; eleve nem rajzoltuk be a megépíthetetlen vezetéseket.) A tervezési szempontok a következők:

1. Minden települést be kell kötni a hálózatba.
2. A lehető leggazdaságosabban kell eljárni, vagyis cél az összköltség minimalizálása.

a) Bizonyítsuk be, hogy a gazdaságos hálózat a gráf egy faváza.

b) Adjuk meg a leggazdaságosabban megépíthető rendszert a két esetben.

E1 Gy 467. Az előző feladatban ún. gazdaságos favázat kerestünk. Vizsgáljuk meg, hogy a következő algoritmus milyen eredményt ad ugyanerre a problémára. Az algoritmus:

1. Vegyük a gráf legkisebb költségű élét (ha több is van, akkor az egyiket).
2. További élt a legkisebb költségűek közül válasszunk, ügyelve arra, hogy ne kapjunk kört.
3. A 2. lépést ismételjük, amíg lehet.

Hajtsuk végre az algoritmus lépéseit az előző feladat két gráfján. Mit tapasztalunk?

E1 Gy 468. Gazdaságos faváz keresésére egy másik lehetőség az alábbi algoritmus.

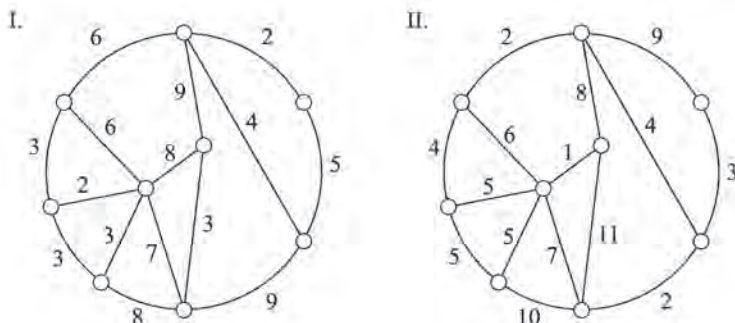
1. A gráfból töröljük a körökben szereplő legnagyobb költségű élt (ha több is van, akkor az egyiket).

2. Az 1. lépést ismételjük, amíg lehet.

Hajtsuk végre az algoritmus lépéseit az előző feladat két gráján. Mit tapasztalunk?

E1 Gy 469. Keressünk minimális költségű favázat az alábbi gráfokban.

469. ábra



a) Mennyi a minimális költség?

b) Hány megoldás van?

E1 Gy 470. Határozzuk meg az előző két gráf maximális költségű favázat is.

K2 471. Mutassuk meg, hogy bármely egyszerű gráf vagy a komplementere összefüggő.

K2 472. Egy ország minden városát vagy hajó-, vagy repülőút köti össze. Mutassuk meg, hogy vagy csak hajóval, vagy csak repülővel bejárható az ország összes városa.

E1 473. Igaz-e, hogy ha egy legfeljebb $2n$ pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább n , akkor a gráf összefüggő?

K1 474. Igaz-e, hogy ha egy n pontú összefüggő gráfnak n éle van, akkor a gráf egyetlen kör?

K2 475. Adott 10 pont a síkon úgy, hogy bármely két pont távolsága különböző. Mindegyik pontot összekötjük egy szakasszal a hozzá legközelebbi ponttal.

a) Mennyi a behúzott szakaszok minimális, illetve maximális száma?

b) Elérhető-e minden szám a két szélsőérték között? (A pontokat tetszőlegesen elrendezhetjük.)

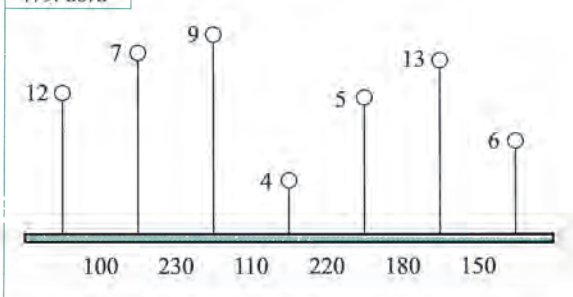
K1 Gy 476. A Kék és a Piros Párt „békéltető összejövetelt” szervez a tagok számára. Egy házigazda meghívta néhány barátját vendégségbe. A meghívottak szintén további barátokat hívtak, akik szintén hozhattak magukkal barátokat és így tovább. Mutassuk meg, hogy ha minden vendég a két párt egyikéből kerül ki, akkor találhatók olyan barátok, akik különböző pártokhoz tartoznak.

V 477. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka legalább k ($k \geq 2$), akkor van a gráfban egy legalább $k + 1$ hosszúságú kör.

E2 478. Egy öttagú társaság minden tagja a társaság legalább három másik tagjával (kölcönös) ismeretségben van.

- a) Bizonyítsuk be, hogy a társaság leülhet egy kerek asztal köré úgy, hogy mindekinek mindkét szomszédja ismerőse legyen.
 b) Igaz-e az állítás hattagú társaság esetén?
 c) Igaz-e az állítás héttagú társaság esetén?

479. ábra



kokat. Hová helyezzük a megállót ahhoz, hogy az iskolások által a megállóig megtett utak összege a lehető legkisebb legyen?

K2 Gy 480. Nyolc település, $A, B, \dots, H$ között villanyvezeték-rendszert építenek. Feltétel, hogy az elektromos áram mindegyik településre eljusson, s a lehető legolcsóbb legyen a telepítés. Az alábbi táblázat az egyes települések között felállítható vezetékek kiépítésének költségeit tartalmazza (az egységár 100 000 Ft).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	–	6	10	10	6	3	7	10
B	6	–	4	–	6	7	9	10
C	10	4	–	5	3	–	8	–
D	10	–	5	–	2	7	9	5
E	6	6	3	2	–	6	7	4
F	3	7	–	7	6	–	6	5
G	7	9	8	9	7	6	–	2
H	10	10	–	5	4	5	2	–

- a) Legalább hány vezeték kiépítésére lesz szükség?
 b) Mennyi a legolcsóbb rendszer költsége?
 c) Hány megoldás van?

V 481 Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráfban van egy legalább harmadfokú pont, akkor vagy G , vagy G komplementere tartalmaz háromszöget!

K2 Gy 479. Az ábrán egy főútvonalat és hét település bekötőútjait ábrázoltuk. Jelöltük az egyes településeken lakó iskolás diákok számát és a bekötőutak egymástól mért távolságát is.

Minden reggel megérkezik az iskolabusz, s a főútvonalon lévő egyetlen megállóban felveszi a diá-

V 482. Bizonyítsuk be, hogy minden 6 pontú egyszerű gráfnak vagy komponenterének van háromszög részgráfja. Igaz-e az állítás hatnál több, illetve kevesebb csúcsú gráfra is?

Gráfok bejárása, Euler-féle poliédertétel

Élek bejárása

K2 Gy 483. 1736-ban *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus írta a legelső, gráfelméleti tárgyú matematikai munkát. A dolgozat megszületését tulajdonképpen a XVIII. századi Königsberg város polgárainak köszönheti. A várost átszelő Pregel folyón hét híd haladt át az ábrán látható módon.

„Lehet-e olyan sétát tenni, amely közben minden hídon pontosan egyszer haladna át a járókelő?” – ezzel a kérdéssel fordultak a város polgárai Eulerhez, a pétervári akadémia tanárához. Nos, lehet?

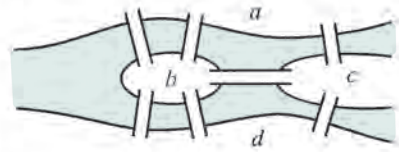
K2 484. Az ábra egy királyi palota alaprajzát mutatja.

Az uralkodó minden reggel bemegy a palotájába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a szobák között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben, és fogadja a látogatóit. Melyik a trónterem?

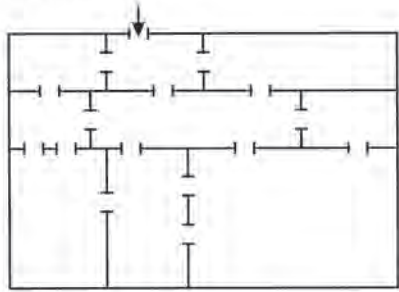
K2 Gy 485. Megrajzolhatjuk-e az alábbi ábrákat egyetlen ceruzavonással, a ceruza felemelése nélkül? (Már megrajzolt vonalat keresztezhetünk, de rajta nem haladhatunk.)

Vizsgáljuk meg azt is, hogy az eredmény szempontjából számít-e, honnan kezdjük a rajzolást.

483. ábra

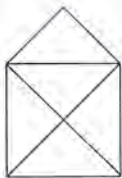


484. ábra

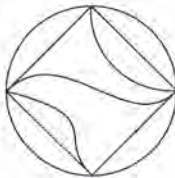


485. ábra

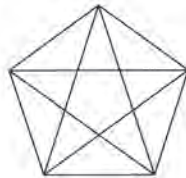
a)



b)



c)



K2 Gy 486. Egy 3×3 mezőből álló rácsalakzatot készítünk cérnából. (A rács négy függőleges és négy vízszintes szakaszból áll, egy-egy négyzet élhosszája egységnyi.). Kirakható-e az alakzat

- a) 8 darab 3 egységnyi cérnából; b) 4 darab 6 egységnyi cérnából;
c) 6 darab 4 egységnyi cérnából; d) 3 darab 8 egységnyi cérnából?

A cérnaszálat elvágni nem lehet.

K2 Gy 487. Egy 12 dm hosszúságú drótdarabból 1 dm élű kocka élvázát kell elkészítenünk.

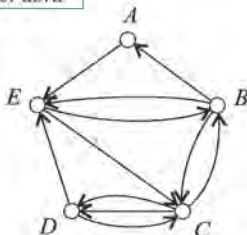
- a) Legfeljebb hány kockaélt tudunk elkészíteni úgy, hogy közben nem vágjuk el a drótot?
b) Legkevesebb hány drótdarabból tudjuk elkészíteni a kocka élvázát? (Hányszor kell elválnunk a drótot?)

K2 488. Mely teljes n gráfok rajzolhatók meg egyetlen ceruzavonással, a ceruza felemelése nélkül? (Már megrajzolt vonalat keresztezhetünk, de rajta nem haladhatunk.)

K2 489. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e.

- a) Ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor van Euler-vonala.
b) Ha egy összefüggő gráfban minden pont foka páros, akkor van Euler-vonala.
c) Ha egy összefüggő gráfban minden pont foka páros, akkor van zárt Euler-vonala.
d) Ha egy gráfban 0, 1 vagy 2 páratlan fokú pont van, akkor a gráf éleit megrajzolhatjuk anélkül, hogy a ceruzánkat felemelnénk, vagy már korábban megrajzolt szakaszon haladnánk.

490. ábra

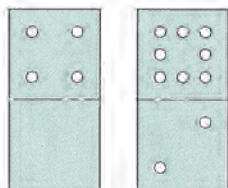


e) Ha egy gráfban 2 páratlan fokú pont van, akkor van nyitott Euler-vonala; a bejárás az egyik páratlan fokú pontban kezdődik, és a másikban végződik.

f) Ha egy összefüggő gráfban 2 páratlan fokú pont van, akkor van nyitott Euler-vonala; a bejárás az egyik páratlan fokú pontban kezdődik, és a másikban végződik.

K2 490. Egy biztonsági őr szállásáról indulva az ábrán látható ellenőrzési útvonalat járta be. Hol van a szállása, és hol van most?

491. ábra



E1 Gy 491. A teljes dominókészlet lapjai a 0, 1, ..., 8 számokból összeállítható szám-párokat tartalmazzák.

- a) Hány elemű a teljes készlet?
b) Milyen hosszú láncot készíthetünk csatlakozó dominólapokkal (a szabályok szerint megengedett módon)?
c) Ha a lánc egyik végén az 5-ös szám van, akkor milyen szám lehet a másik szabad végén?

Csúcsok bejárása

K2 492. Be lehet-e járni a sakktabla sötét mezőit a királlyal úgy, hogy minden mezőn csak egyszer haladhatunk át?

K2 493. Egy $3 \times 3 \times 3$ -as méretű kocka 27 kis kockára bontható fel. A középső kis kockából elindul egy hangya úgy, hogy csak a lapban csatlakozó kis kockákban folytathatja az útját.

a) Bejárhatja-e a nagy kockát, ha minden kis kockát csak egyszer szabad érintenie?

b) Melyik kis kockából indulhat el a nagy kockát „szabályosan” bejáró hangya?

K2 494. Egy gráf valamennyi pontját tartalmazó útját Hamilton-útnak, valamennyi pontját tartalmazó körét Hamilton-körnek nevezzük. Van-e Hamilton-útja, illetve Hamilton-köre az alábbi szabályos testeknek:

a) a kockának;

b) a szabályos tetraédernek;

c) az oktaédernek;

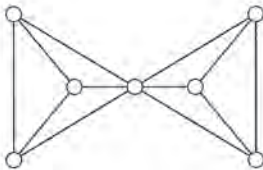
d) a dodekaédernek;

e) az ikozaédernek?

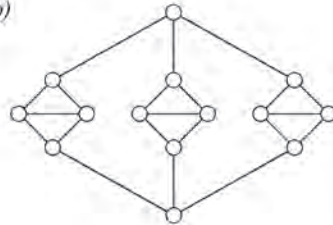
E1 495. Van-e az alábbi gráfoknak Hamilton-útja, illetve Hamilton-köre?

495. ábra

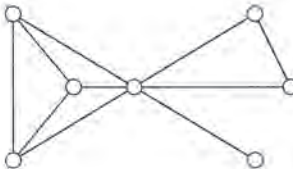
a)



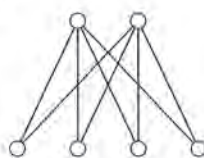
b)



c)



d)



K2 496. Hány Hamilton-köre van

a) a tetraéder gráfjának; b) a kocka gráfjának?

K2 497. Be lehet-e járni az alábbi méretű „sakktablákat” egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? Tetszőlegesen választott mezőről indulhatunk. A tábla mérete legyen

a) 3×3 -as; b) 4×4 -es; c) 5×5 -ös.

Vegyes feladatok

K2 498. Egy 5×5 -ös tábla minden mezőjében van egy katicabogár. Adott jelre mindegyik egy élben szomszédos mezőre átugrik. Elérhető-e, hogy minden mezőre csak egy katica kerüljön?

K2 Gy 499. Egy 4×4 -es rács kirakható-e

a) 8 darab 5 egységnyi cérnából;

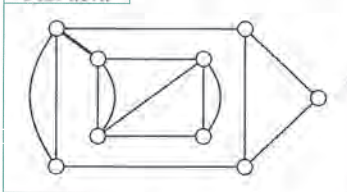
b) 5 darab 8 egységnyi cérnából?

A cérnaszálakat elvágni nem lehet.

K2 500. Megrajzoltuk egy szabályos $(2n + 1)$ -szög oldalait és átlóit. Bizonyítsuk be, hogy az ábra vonalai végigjárhatóak úgy, hogy minden vonalon egyszer haladunk végig.

K2 Gy 501. Legkevesebb hány drótdarabból készíthetjük el a szabályos testek (tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder) élvázát?

502. ábra



K2 502. Lehet-e úgy irányítani az ábrán látható gráf éleit, hogy a közlekedési feltétel teljesüljön? (Vagyis bármely csúcsból bármely csúcsba el lehessen jutni irányított élekből álló úton.)

K2 503. Az előbbi ábrán felvehetünk még egy további élt. Melyik két pontot köthetjük össze, ha azt akarjuk, hogy

a) teljesüljön a közlekedési feltétel;

b) továbbá a gráf éleit bejárhassuk úgy, hogy minden élen csak egyszer haladjunk át?

E1 504. Van-e ciklikus huszárbejárása az alábbi méretű „sakktáblának”? A ciklikus bejárás során minden mezőt pontosan egyszer érintünk, és az utoljára érintett mező lóugrásnyira van a kezdőmezőtől. Tetszőlegesen választott mezőről indulhatunk. (A tábla mezőit egy gráf csúcsainak, a lehetséges lépéseket a gráf éleinek tekintve azt is kérdezhetnénk, hogy az így kapott gráfban van-e Hamilton-kör.) A tábla mérete:

a) 6×6 -os; b) 7×7 -es.

E2 505. Maximálisan milyen hosszú láncot készíthetünk a hiányos dominókészletből, ha a lapok számozása:

a) 0, 1, 2, ..., 6; b) 0, 1, 2, ..., 7?

V 506. 10 teniszjátékos teljes körmérkőzést játszott egymással. Bizonyítsuk be, hogy a versenyzők sorba rendezhetők úgy, hogy mindenki legyőzte e sorban az őt követő játékost!

V 507. Igaz-e, hogy ha $n \geq 2$, akkor az n csúcsú teljes irányított gráfban van Hamilton-út?

V Gy 508. Járjuk be a 8×8 -as sakktáblát egy huszárral úgy, hogy a bal alsó mezőről indulunk és minden mezőt pontosan egyszer érintünk. Próbálkozzunk különböző stratégiákkal. (Például igyekezzünk először a tábla szélét bejárni,

majd kívülről befelé haladni; vagy a gyakorlatban elég jól használható Wansdorf szabálya: a huszárral mindig arra a mezőre lépünk, amelyről a legkevesebb számú lépést teheti a még nem érintett mezőkre.)

V Gy 509. Adjuk meg a 8×8 -as sakktábla egy „tagolt huszárbejárását”. (Euler módszere szerint felosztjuk a táblát kisebb részekre, ezeket külön-külön bejárjuk, majd az egyes résztáblák bejárásait összekötjük.) Melyik mezőről kezdhetjük a bejárást?

Euler-féle poliédertétel

E1 510. Bizonyítsuk be, hogy konvex poliéderekben

- a) a páratlan fokú csúcsok száma páros;
- b) a páratlan oldalú lapok száma páros;
- c) van két olyan csúcs, melyeknek egyenlő a fokszáma;
- d) van két olyan lap, melyeknek egyenlő az oldalszáma.

E1 511. Szabályos test minden lapja egybevágó szabályos sokszög, és minden csúcsába ugyanannyi lap fut be. Hány szabályos test készíthető négyzetekből?

E1 512. Hány szabályos test készíthető háromszögekből?

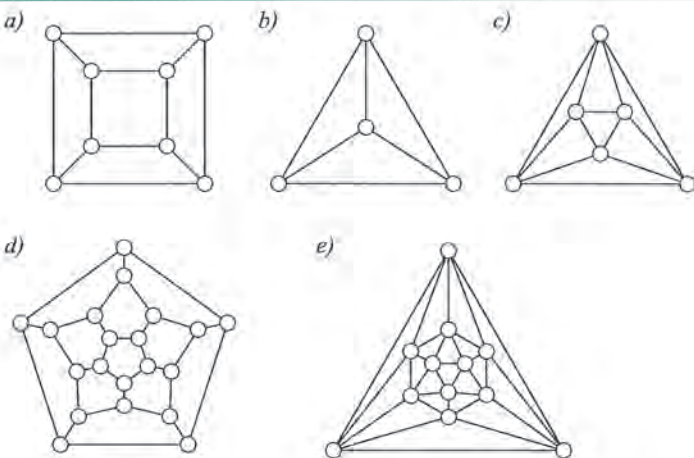
E1 513. Hány szabályos test készíthető ötszögekből?

E1 514. Hány szabályos test van?

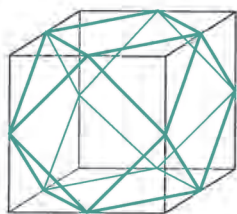
E1 515. A szabályos testek síkba rajzolt modelljei is gráfot alkotnak. Az egyes csúcsok közötti kapcsolat nem változik, ha a poliéder egyik lapjára a többi csúcsot centrálisan rávetítjük. (Az is látható, hogy ezt az eljárást bármilyen konvex poliéderrel megtehetjük.)

Mely szabályos testek gráfjai láthatók az alábbi ábrákon?

515. ábra

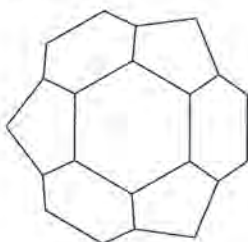


516. ábra



E1 516. A szabályos háromszögekből és négyzetekből álló „csonkolt kockát” láthatjuk az ábrán. A testet úgy képzelhetjük el, hogy a kocka 8 csúcsánál rendre levágunk egy-egy szabályos háromszöget, figyelve arra, hogy a metsző sík a csúcsba befutó 3 él felezőpontján menjen át. Hány csúcsa, éle, lapja van ennek a testnek?

517. ábra



E1 517. A futballabdának megfelelő poliéder szabályos öt- és hatszöglapokból áll. Minden ötszöghöz 5 darab hatszöglap csatlakozik, minden hatszöghöz felváltva 3-3 ötszög- és hatszöglap. Ez alapján a test egy részlete látható az ábrán. Egyszerűen megszámlálhatjuk egy focilabdán, hogy a neki megfelelő poliédert 12 ötszöglap határolja. Ez alapján hány csúcsa, éle, lapja van a testnek?

E1 518. Töltsük ki az alábbi táblázatot, s keressünk összefüggéseket az egyes adatok között:

	kocka	tetra- éder	okta- éder	ikoza- éder	dodeka- éder	csonkolt kocka	futballabda- poliéder
csúcs							
lap							
él							

E2 519. Az előző feladat konvex poliédereire észrevehettük a „csúcsok száma + lapok száma = élek száma + 2” sejtést. Hogyan fogalmazhatjuk meg a sejtést síkba rajzolható gráfok esetén? Egy gráf síkba rajzolható, ha létezik vele izomorf gráf, melynek csúcsai a sík pontjai, és az élei nem metszik egymást (a végpontjaikon kívül más közös pontjuk nincs).

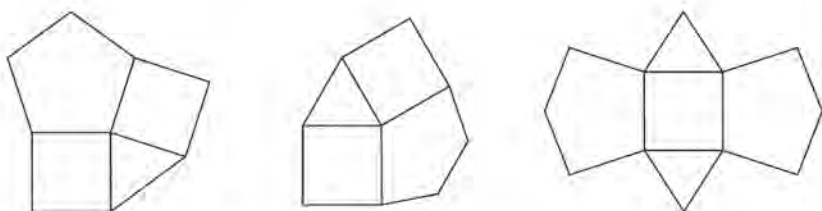
E2 520. Bizonyítsuk be síkba rajzolható összefüggő gráfokra Euler tételét: „csúcsok száma + tartományok száma = élek száma + 2”. (Itt a +2 az előző feladatbeli megszorítással értendő.)

E2 521. Határozzuk meg a futballabda-poliéder csúcs, lap, él jellemzőit Euler tétele segítségével.

E2 522. Egy test szabályos háromszögekből, négyzetekből és szabályos ötszögekből áll. Hálózatának egyes részleteit a következő ábrák mutatják. (Minden csúcsban két négyzet és egy – egy háromszöglap, valamint ötszöglap találkozik; egy ötszöglaphoz élben négyzetek csatlakoznak; egy háromszöglap-

hoz élben négyzetek csatlakoznak; végül egy négyzetlaphoz élben két-két szemköztes háromszöglap és ötszöglap csatlakozik.)

522. ábra



a) Határozzuk meg, hogy hány háromszöglap, négyszöglap és ötszöglap határolja a testet.

b) Határozzuk meg a test csúcsainak és éleinek számát.

E2 523. Mutassuk meg Euler tétele segítségével, hogy legfeljebb öt szabályos test van.

K2 524. Egy körlemez határán sorban felvesszünk 1, 2, 3, 4 pontot, s ezeket egyenes szakaszokkal összekötjük egymással. A szakaszok a körlemezre rendre 1, 2, 4, 8 részre osztják. Ez alapján van-e sejtésünk, hogy 6 pont esetén a szakaszok legfeljebb hány részre osztják a körlemez?

E2 525. Oldjuk meg az előző feladatot $n = 10$ pontra. Vagyis a kör kerületén vegyünk fel 10 pontot, ezeket szakaszokkal kössük össze egymással, s határozzuk meg a keletkezett tartományok maximális számát.

Vegyes feladatok

K1 526. Hány egyenes húzható egy kocka nyolc csúcsán át úgy, hogy minden egyenes két csúcsot tartalmazzon?

K1 527. Adott öt kék és egy piros általános helyzetű pont a síkon. A pontok által meghatározott háromszögek közül melyikből van több: amelyiknek van piros csúcsa vagy amelyiknek nincs?

K2 528. Egy kocka 5 csúcsát kékre, 3 csúcsát fehérre színezzük, majd a kocka (kiterített) hálózatában a csúcsokat a megfelelő színnel jelöljük. Van-e olyan hálózata a kockának, amikor a hálózatban több fehér csúcs van, mint kék?

K2 529. Hány rács téglalapot határoznak meg egy 6×10 -es négyzetrács rácspontjai? (A téglalapok oldalai rács egyenesek.)

K2 530. Igaz-e, hogy ha egy öttagú társaságban mindenkinek legalább három ismerőse van, akkor van olyan személy is, aki mindenkit ismer?

K2 531. Legfeljebb hány ismeretség lehet egy nyolctagú társaságban, ha van olyan személy, akinek páros sok ismerőse van?

K2 532. Három házaspár közös vacsorán vesz részt. Mindenki más-más időpontban érkezik a vacsora színhelyére. Minden újonnan érkező ember érkezéskor kezet fog a már ott tartózkodókkal, kivéve a saját házastársával. Miután mindenki leült vacsorázni, az egyik ember megkérdezte az összes többitől, hogy hány emberrel fogott kezet érkezéskor. Hányadikként érkezhettek a kérdező, ha kérdésére öt különböző választ kapott?

K2 533. Egy sakkversenyen n nő és $2n$ férfi vett részt. Mindenki mindenkiel pontosan egyszer játszott. Nem volt döntetlen, és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint $7 : 5$. Hány nő vett részt a játékban?

E1 534. Egy labdarúgó bajnokságban 18 csapat vesz részt. Igaz-e, hogy a nyolcadik forduló után még van olyan három csapat, melyek közül semelyik kettő nem játszott egymással?

E1 535. Adott a síkon n darab általános helyzetű pont (semelyik három nincs egy egyenesen). Minden pontot két színnel, pirossal vagy kézzel kiszíneztünk, majd összekötöttük a különböző színű pontokat egy szakasszal. Hogyan kell kiszíneezni a pontokat, hogy maximális számú szakaszt kapjunk? Legfeljebb hány szakasz keletkezhett?

E1 536. Egy asztallapra helyezünk el n darab tízfillérest. (Egymást nem fedhetik, de érintkezhetnek.) Bizonyítsuk be, hogy $3n$ -nél kevesebb az érintkezési pontok száma.

E2 537. Adott a síkon n darab általános helyzetű pont (semelyik három nincs egy egyenesen és semelyik négy nincs egy körön). Minden ponthármass köré kört írunk. Bizonyítsuk be, hogy a körök között lévő egységsugarú körök száma

legfeljebb $\frac{n(n-1)}{3}$.

V 538. 627 piros és 273 kék pontot négyzet alakban 30 sorba és 30 oszlopba rendeztünk el. A piros pontok közül 2 esett a négyzet kerületére. Egy sorban fekvő szomszédos pontokat és egy oszlopban fekvő szomszédos pontokat egyenes szakaszokkal kötünk össze, így négyzetrács keletkezik. Piros pontok összekötő szakasza piros, kék pontok összekötő szakasza kék, különböző színű pontokat összekötő szakasz fekete, és fekete szakaszból 101 jött létre. Hány piros összekötő szakasz keletkezett?

K2 539. Adott a síkon végtelen sok pont. Bizonyítsuk be, hogy közöttük végtelen sok különböző távolság lép fel.

K2 540. Egy téglalap alakú egyszintes lakásról a következőket tudjuk.

- Bármely két helyiség között legfeljebb egy ajtó van.
- Bármely helyiségből legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
- A lakásban összesen 12 ajtó van.
- A helyiségek téglalap alakúak.

Legalább hány helyiség van a lakásban?

E1 541. Egy hattagú társaságban mindenkinek pontosan 3 barátja van. Egy alkalommal 6 mozijegyet kaptak, három moziba, mindegyikbe kettőt. Mindenki csak valamelyik barátjával együtt hajlandó moziba menni. Meg tudják-e szervezni a mozilátogatást?

V 542. Egy hattagú társaságban mindenkinek pontosan 3 barátja van. Igaz-e, hogy leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a szomszédja?

V 543. Egy 6 csúcsú teljes gráf éleit két színnel kiszíneztük.

- Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszög, amelynek az oldalai azonos színűek.
- Esetleg több ilyen háromszög is van?
- Igaz-e, hogy ha valamelyik csúcsból négy piros él indul ki, akkor legalább két olyan háromszöget kapunk, melynek oldalai azonos színűek?
- Igaz-e az eredeti állítás 5 csúcsú teljes gráfra?

V 544. 17 csúcsú teljes gráf éleit három színnel színeztünk ki. Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszög, amelynek az oldalai azonos színűek.

K2 545. Mi a hiba az alábbi feladat megoldásában?

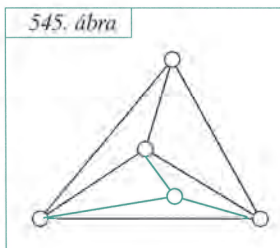
„Egy háromszög belsejében vegyünk fel 6 pontot úgy, hogy a háromszög csúcsaival együtt kapott 9 pont közül semelyik három ne legyen egy egyenesen. Bontsuk fel a sokszöget háromszögekre úgy, hogy minden háromszög csúcsa csak a sokszögcúcsokkal vagy a felvett pontokkal essen egybe. Hány háromszög keletkezhetett?

Megoldás:

Az első pont három részháromszögre bontja az eredeti háromszöget, ezután az újabb pont valamelyik háromszög belsejébe kerül (ábra).

Ha az új pontot összekötjük a háromszög csúcsaival, a részháromszögek száma kettővel nő, öt részháromszöget kapunk. Az eljárást folytatva, a részháromszögek száma minden újabb pont felvételekor kettővel nő, 6 pont felvétele után tehát 13 részháromszög keletkezik.”

545. ábra



E1 546. Bizonyítsuk be az előző feladatbeli sejtést: akárhogyan is vesszük fel a 6 (általános helyzetű) pontot, mindig 13 részháromszög keletkezik.

E1 547. Igazak-e az alábbi állítások?

- Egy 13 elemű halmaz bármely négy 10 elemű részhalmazának közös része nem üres.
- Ha egy 13 fős társaságban bárkinek van legalább 10 ismerőse, akkor bármely négy személynek van közös ismerőse.

E2 548. Egy iskola két osztályának tanulói közül néhányan asztalitenisz egyéni versenyen mérték össze tudásukat. Minden résztvevő mindenkivel egyszer játszott. Először az azonos osztályba járó tanulók között játszották le a körmérkőzéseket, majd a két osztály tanulói egymással játszottak. Kiderült, hogy

az osztálytársak között lejátszott mérkőzések száma megegyezett azon mérkőzések számával, amelyek résztvevői nem voltak osztálytársak. Hány tanuló vehetett részt a versenyen osztályonként, ha egyik osztály létszáma sem haladja meg a 24-et, és minden osztályból 2-nél többen versenyeztek?

V 549. Egy jégtánc edzésen öt fiú és öt lány vett részt. Mindegyik fiú mindegyik lánnyal táncolt, vagy polkát, vagy egy keringőt. Bizonyítsuk be, hogy volt két fiú és két lány, akiknek egymás közötti négy tánc ugyanaz volt.

V Gy 550. Az alábbi feladattal a Bergengóc Légitársaság bízta meg a Királyi Tervezőmérnököt. A légitársaság ingajáratokat szeretne közlekedtetni néhány város között úgy, hogy teljesüljön a következő két feltétel:

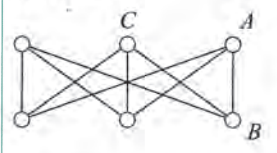
- bármely városból legfeljebb három másikba lehet közvetlenül eljutni;
- legfeljebb egy átszállással viszont már eljuthatunk bárhonnan bárhova.

Legfeljebb hány város között járhatnak a gépek?

A Királyi Tervezőmérnök megoldása így szólt:

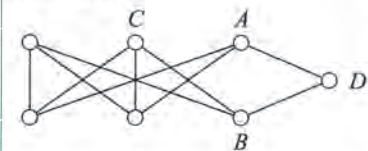
„Tekintsük a városokat egy gráf pontjainak, az ingajáratokat a gráf éleinek. Például az alábbi 1. ábrán látható $n = 6$ pontú gráf a feltételeknek megfelelő.

550/1. ábra



Könnyen látható, hogy a gráf egyetlen éle sem hagyható el; pl. az AB él elhagyása után ezen két város között csak két átszállással lehetne közlekedni. Ugyanakkor az ábrán pl. az AC út háromféleképpen is megtehető, ezért megpróbálkozhatunk n növelésével.

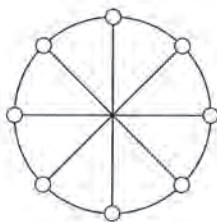
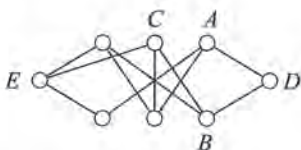
550/2. ábra



Az $n = 7$ esetben, az új D pont felvételekor legalább egy élt el kell hagynunk, legyen ez AB . Mivel az AB utat pótolni kell, vegyük fel a DA és DB élt; az így kapott $n = 7$ pontú gráf megfelelő (2. ábra). (Sőt több gráf is konstruálható; a CB él helyett vehetnénk a CD élt is stb.)

Az $n = 8$ esetben pl. a 3. ábra gráfjai megfelelők:

550/3. ábra



Azonban az $n = 9$ esetre egyik ábra sem fejleszthető tovább; sőt elég sok próbálkozás után az is belátható, hogy nem készíthető a feltételeknek megfelelő 9 pontú gráf. Vagyis legfeljebb 8 város között járhatnak gépek.”

Nos, mi a hiba ebben a megoldásban?

V 551. Adjunk helyes megoldást az előző feladatra.

V 552. a) Bizonyítsuk be, hogy egy hattagú társaságban kiválasztható három ember úgy, hogy vagy mind ismerik egymást, vagy egyikük sem ismeri a másikat! (Az ismeretség kölcsönös.)

b) Igaz-e az állítás öttagú társaságban is?

V 553. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Háromféle témáról leveleznek összesen, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról az egy témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármely kettő azonos témáról levelez egymással.

V 554. 66 színész közül bármely kettő játszott egymással vagy közös színházi előadáson, vagy szinkronban, vagy filmen, vagy tévéjátékban, de mindenki mindenkiel csak egyféle produkcióban. Bizonyítsuk be, hogy van köztük három olyan színész, akik ugyanabban a produkcióban vettek részt.

E1 555. Egy páncélajtón három kétállapotú nyomógomb található, az állapotokat jelölhetjük 0-val és 1-gyel. A gombok állapota látható, kezdetben 101. Az ajtó nyitó kombinációja ismeretlen számhármass. Minden lépésben valamelyik (de csak az egyik!) gomb állapotát megváltoztathatjuk.

a) Legkevesebb hány próbálkozással lehet kinyitni az ajtót? (Ha pl. a nyitó kód 011 volt, három lépéses megoldás az 101 – 001 – 011 próbálkozássorozat.)

b) Hányféleképpen nyitható ki az ajtó? (Vagyis hányféle olyan nyitó nyomássorozat van, melyben a lehető legkevesebbszer próbálkozzunk?)

E2 Gy 556. Egy úrhajós kabinokból lakást épít magának az űrben. A lakásról a következőket tudjuk:

a) Bármely két kabin között legfeljebb egy zsilip van.

b) Bármely kabinból legfeljebb egy zsilip nyílik a lakáson kívüli űrbe.

c) A lakásban összesen 21 zsilip van.

d) A kabinok egybevágó téglalapok.

Legalább hány kabin van a lakásban?

V 557. a) Igaz-e, hogy hat irracionális szám közül kiválasztható három, amelyek közül bármely kettő összege irracionális?

b) Igaz-e az állítás öt irracionális számra?

V 558. Egy 50×50 pontot tartalmazó rácsban minden pontot kékre vagy pirosra színeztünk. A közvetlenül egymás mellett vagy egymás alatt lévő azonos színű pontokat velük egyező színű szakaszokkal, a különböző színű pontokat fekete szakaszokkal kötöttük össze. A pontok között 1510 kék akadt, ebből 110 a szélen és egy sem a sarokban. A vonalak között 947 piros volt. Hány fekete és kék vonalat húztunk be?

V 559. A síkon n vízszintes és n függőleges egyenes n^2 pontban metszi egymást ($n \in \mathbb{N}^+$). Az egyeneseket pirosra, kékre vagy zöldre színezzük. Két azonos színű egyenes metszéspontját ugyanolyan színűre, két különböző színű egyenes metszéspontját pedig a harmadik színre színezzük. Határozzuk meg az n^2 pont különböző színezéseinek számát az egyenesek színezésétől függően.

V 560. Egy szabályos $6n + 1$ csúcsú sokszög csúcsait pirossal és kézzel kiszíneztük. Bizonyítsuk be, hogy az egyszínű csúcsokkal rendelkező egyenlő szárú háromszögek száma a színezéstől független! (Csak a piros és kék csúcsok számától függ.)

V 561. A négydimenziós térben az egységkocka csúcsainak koordinátái $(0; 0; 0; 0)$, $(0; 0; 0; 1)$, $(0; 0; 1; 0)$, $\dots$, $(1; 1; 1; 1)$. Hány csúcsa, éle, lapja, háromdimenziós lapja van a négydimenziós kockának?

Kétszemélyes játékok

K2 Gy 562. Kilenc cédulára rendre a SZITA, SÜN, BÉKA, PIRUL, ÉPÍT, KIVI, TÖNK, ÉDES, PANDA szavakat írtuk. Két játékos felváltva vesz el egy-egy cédulát; az a játékos nyer, akinek először sikerül összegyűjtenie három olyan szót, amelyekben van közös betű. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

K2 Gy 563. Adott 15 szó: DOB, ÚGYSE, TŰ, FŰZ, ÉN, NYOM, ZENE, GYER, HIT, IFÁS, HA, MÚLÓ, ÍNY, LÁDA, ÍRÓ. Két játékos a játék kezdetén egy-egy különböző kezdőszót választ. Ezután a játékosok felváltva választanak egy új szót úgy, hogy ennek a legutoljára választott saját szóval legyen közös betűje. (A játék folyamán egy korábban választott szó esetleg többször is szerepelhet.) Az a játékos nyer, aki a másik aktuális szavát tudja választani. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? (NY, GY egy betűnek számít.)

K1 Gy 564. Ketten felváltva egy szabályos 10-szög átlóit vagy oldalait húzzák be úgy, hogy a szakaszok nem metszhetik egymást. Az a játékos veszít, aki már nem tud újabb szakaszt behúzni. Kinek van nyerő stratégiája?

K2 Gy 565. Oldjuk meg az előző feladatot szabályos 11-szögre.

E1 Gy 566. Az 564. feladatban a 10 pont szabályos 10-szöget alkotott. Lehetőséges-e, hogy ha a pontok kezdeti helyzetét megváltoztatjuk, akkor az új játékban már a másik játékosnak lesz nyerő stratégiája?

E2 Gy 567. Ketten felváltva egy szabályos 11-szög átlóit vagy oldalait húzzák be úgy, hogy a behúzott szakaszoknak nem lehet közös pontja (csúcsban sem). Az a játékos veszít, aki már nem tud újabb szakaszt behúzni. Kinek van nyerő stratégiája?

E2 Gy 568. Adott 6 pont a síkon. Ketten felváltva húznak be éleket a gráfban, az a játékos nyer, aki a gráfot összefüggővé teszi. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? (Hurokél, többszörös él nem húzható be.)

K2 Gy 569. Adott 6 pont a síkon. Ketten felváltva húznak be éleket a gráfban, az a játékos veszít, aki egy gráfelméleti kört hoz létre. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

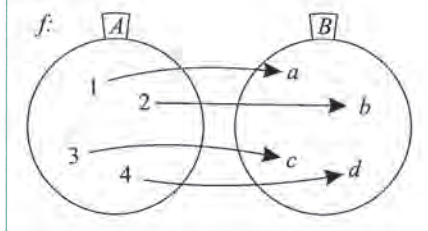
K2 Gy 570. Adott egy szabályos hatszög 6 csúcsa. Ketten felváltva húznak be éleket a gráfban; az a játékos veszít, aki olyan háromszöget hoz létre, amelynek minden csúcsa az adott 6 pont közül való. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? (Hurokél, többszörös él nem húzható be.)

III. Függvények

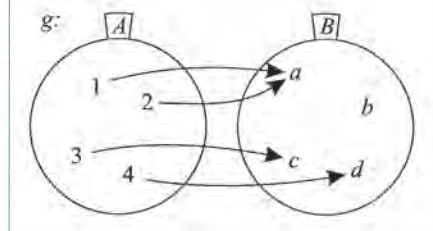
Alapfogalmak

K1 571. Adott az A és a B halmaz, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Az f, g, h, i utasítások az A halmaz minden elemének megfeleltetik a B halmaz egy-egy elemét az alábbi ábráknak megfelelően.

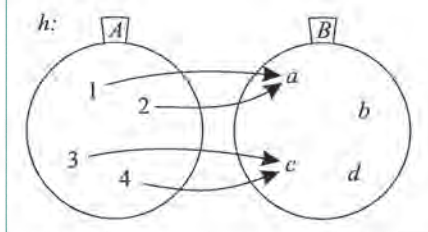
571/1. ábra



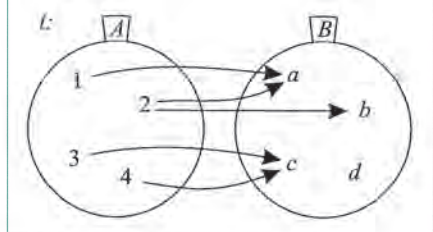
571/2. ábra



571/3. ábra



571/4. ábra

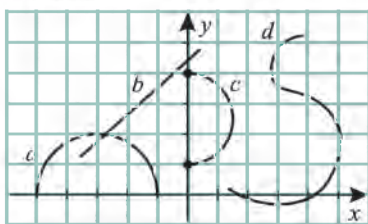


- Az f, g, h, i hozzárendelések közül melyik függvény?
- Van-e közöttük kölcsönösen egyértelmű függvény?
- Mi az egyes függvények értékkészlete?

K1 572. Adott a $C = \{e, f, g, h\}$ és $D = \{6, 7, 8, 9\}$ halmaz. Rendezett párokkal jelöljük, ha a C halmaz valamely eleméhez a D halmaz egy elemét rendeljük. Például $(e, 6)$ jelenti az $e \mapsto 6$ hozzárendelést. Függvényt határoznak-e meg az alábbi hozzárendelések? Van-e közöttük kölcsönösen egyértelmű függvény? Mi az egyes függvények értékkészlete?

- a : $(e, 6), (f, 7), (g, 9), (h, 8)$;
- b : $(e, 6), (f, 7), (g, 9), (h, 9)$;
- c : $(e, 6), (f, 6), (g, 6), (h, 6)$;
- d : $(e, 6), (e, 7), (f, 8), (g, 9)$.

573. ábra



K1 573. Az ábrán látható $a)$ – $d)$ görbék közül melyik lehet egy függvény képe?

K1 574. Az alábbi, egész számokon értelmezett függvények néhány értékét táblázattal adtuk meg. Mi lehet a függvények hozzárendelési szabálya?

x	1	2	3	10	-5	-10
$a(x)$	3	4	5	12	-3	-8
x	3	6	21	-12	0	33 333
$b(x)$	2	3	8	-3	1	11 112
x	1	2	3	4	10	20
$c(x)$	1	2	4	7	46	191
x	1	2	3	10	-2	-10
$d(x)$	3	5	5	3	11	9

K1 575. Az alábbi relációk közül melyik függvény és melyik nem?

- Minden emberhez hozzárendeljük a cm-ekben mért magasságát.
- A Föld felszínének minden pontjához hozzárendeljük az ott mérhető szél-erősséget.
- Egy osztály minden tanulójaához hozzárendeljük az év végi matematika osztályzatát.
- Minden egyes osztályzathoz (1, 2, 3, 4, 5) hozzárendeljük azokat a diákokat, akiknek év végi matematika érdemjegye ez az osztályzat.
- Minden természetes számhoz hozzárendeljük a nála eggyel kisebb természetes számot.
- Minden természetes számhoz hozzárendeljük a nála eggyel kisebb egész számot.
- Minden emberhez hozzárendeljük a hajszínét.

K1 576. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat a pozitív egész számok halma-zán. Melyik reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív?

- Kisebb;
- kisebb vagy egyenlő;
- osztója;
- többszöröse.

K1 577. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat a sík egyenesei körében. Melyik reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus vagy tranzitív?

- Egyállású;
- metszi.

K1 578. Tekintsük a $K(x) = 2x^2 - 3x + 1$ kifejezést és az $f: x \mapsto K(x)$ valószínűségi függvényt. Magyarázzuk meg konkrét példák segítségével, mi a különbség az alábbi elnevezések között:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) kifejezés helyettesítési értéke; | b) egyenlet; |
| c) függvény hozzárendelési szabálya; | d) függvény helyettesítési értéke; |
| e) függvény; | f) függvény képe; |
| g) függvény képének neve; | h) függvény képének egyenlete; |
| i) függvény grafikonja. | |

K1 579. Rendeljük hozzá minden egyjegyű pozitív egész számhoz a pozitív osztóinak számát, s írjuk fel az így kapott függvény rendezett párait.

K1 580. Igaz-e, hogy egy $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ függvényt adunk meg, ha

- minden egész számhoz hozzárendeljük az ellentettjét;
- minden természetes számhoz hozzárendeljük a négyzetét;
- minden egész számhoz hozzárendeljük az osztóit;
- minden természetes számhoz hozzárendeljük az 1-et és minden negatív egész számhoz hozzárendeljük a -1 -et;
- minden racionális számhoz hozzárendeljük az egészrészét?

Melyik függvényre igaz, hogy az értékkészlete az egész számok halmaza?

K1 581. Egyenlőek-e az alábbi f és g függvények?

- $f: x \mapsto x + 2, x \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$;
 g : az egyjegyű pozitív prímszámokhoz hozzárendeljük a náluk kettővel nagyobb számokat;
- $f: x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; x \mapsto 2x$;
 g : az első öt páros pozitív szám sorozata;
- $f: x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; x \mapsto 2x - 1$;
 $g(x)$ = az x . pozitív páratlan szám.

K1 582. Adott az f függvény: $f: x \mapsto -2x + 1, x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. A g függvény néhány elemét rendezett párokkal adtuk meg: $(0; 1), (2; -3), (-2; y)$.

- Mennyi y értéke, ha $f = g$? (Az f és g függvények értelmezési tartománya megegyezik.)
- Mennyi $g(1)$?
- Soroljuk fel g hiányzó elemeit, ha $f = g$.

K1 583. Az f és g függvények hozzárendelési szabálya megegyezik. Milyen feltétel esetén teljesül, hogy $f = g$?

K1 584. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket.

Rendeljük minden egyjegyű pozitív egész számhoz

- az ellentettjét;
- a kétszeresét;
- pozitív osztóinak számát;
- azt a számot, ahány betűből áll a szám neve;
- a 0-t, ha a szám prím, egyébként 1-et;
- magát a számot;
- a szám négyzetgyökét.

K1 585. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

a) $a(x) = 2x$, ha $x \geq 0$;

$a(x) = \frac{1}{2}x$, ha $x < 0$;

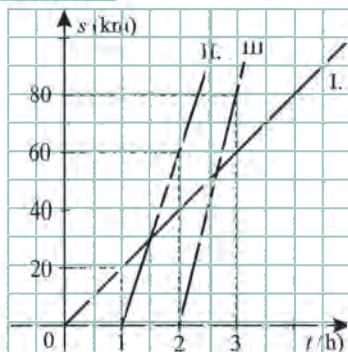
c) $c(x) = 2x + 3$, ha $x \geq 2$;

$c(x) = -x + 9$, ha $x < 2$.

b) $b(x) = 2x$, ha $x \geq 0$;

$b(x) = 0$, ha $x < 0$;

586. ábra



K1 Gy 586. Közös koordináta-rendszerben megrajzoltuk az egy helyről induló, egyenletes sebességgel haladó kerékpár, motor-kerékpár és személygépkocsi út-idő grafikonját (ábra).

Jellemezzük a görbéket.

a) Melyik görbe melyik járműhöz tartozik?

b) Mekkora az egyes járművek átlagsebessége?

c) Mi a járművek indulási sorrendje?

d) Mikor találkoztak egymással az egyes járművek?

K1 Gy 587. Az alábbi táblázatban a magyarországi népesség korcsoportok szerinti eloszlását tüntettük fel (2003. január 1.). Elemezzük az adatokat.

a) Hasonlítsuk össze néhány azonos korcsoportban az 1990. és 2003. évi adatokat.

korcsoport, év	1990, ezer fő	2003, ezer fő	ebből férfi, ezer fő	ebből nő, ezer fő
0–4	617	477	245	232
5–9	656	540	277	263
10–14	857	615	315	300
15–19	767	645	328	317
20–24	679	751	385	366
25–29	620	844	430	414
30–34	774	721	366	355
35–39	847	632	317	315
40–44	717	645	317	328
45–49	675	823	399	424
50–54	598	731	347	384
55–59	607	614	283	331
60–64	586	552	240	312
65–69	530	477	194	283
70–74	268	435	168	267

korcsoport, év	1990, ezer fő	2003, ezer fő	ebből férfi, ezer fő	ebből nő, ezer fő
75–79	317	335	117	218
80–84	172	202	64	138
85–89	68	72	21	51
90–	20	41	11	30

b) Ábrázoljuk mindkét évben a népesség nagyságát a korcsoportok függvényében.
c) Ábrázoljuk ugyanazon a grafikonon a férfiak és nők számát 2003-ban, korcsoportonként.

d) Hogyan becsülhetjük meg az 1990-es és 2003-as adatok alapján valamely korcsoport lélekszámának 13 év alatti természetes fogyását?

K1 Gy 588. Ábrázoljuk az alábbi táblázat megyéinek népességét és területét. Alkalmazzunk csoportosított oszlopdiagramot a megyék területének nagyság szerint csökkenő sorrendjében. Mekkora az egyes megyék népsűrűsége? (2003. január 1.)

területi egység	népesség, ezer fő	terület, km ²
Bács-Kiskun	545	8445
Békés	396	5631
Fejér megye	428	4359
Hajdú-Bihar	552	6211
Heves	325	3637
Komárom-Esztergom	317	2265
Pest megye	1106	6394
Somogy	336	6036
Vas	267	3336

K1 Gy 589. Az alábbi táblázatban 1990 és 2002 közötti néhány évben a különböző típusú oktatási intézményeket elvégzett diákok számát tüntettük fel.

végzettség (ezer fő)	1990	1999	2001	2002
8 évfolyam	172,9	119,1	119,3	118,8
gimnáziumi érettségi	27,3	36,3	38,0	40,2
szakközépiskolai érettségi	40,6	53,3	50,9	50,2
felsőfokú oklevél	24,1	42,3	47,4	50,5

a) Hány tanuló szerzett középiskolai érettségit az egyes években?

b) Az összes végzettséget szerzett tanulóknak ez hány százaléka volt?

c) Határozzuk meg az alap- és felsőfokú végzettséget szerzett diákok százalékos arányát is.

d) Ábrázoljuk az érettségit szerzett diákok számát az egyes években.

e) Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

K1 Gy 590. Az alábbi táblázatban 1990/91 és 2002/03 közötti néhány évben az általános iskolai (nappali) oktatással, neveléssel kapcsolatos adatokat tüntettük fel.

	1990/91	1999/2000	2001/02	2002/03
iskolák száma	3723	3897	3852	3792
összes tanuló (nappali + esti tagozat, 1000 fő)	1177,6	972,9	947,0	993,1
tanulók száma (nappali, 1000 fő)	1166,1	969,8	944,2	930,3
ebből első évfolyamon (1000 fő)	130,4	127,3	117,6	117,1
osztályok száma	51 981	47 626	47 682	46 574
pedagógusok száma	96 791	89 424	90 294	89 029
osztálytermek száma	49 842	52 526	43 195	54 257

- a) Az összes nappali tagozatos tanulónak hány százaléka járt az első évfolyamra az egyes években?
 b) Átlagosan hány tanulóra jut egy pedagógus?
 c) Átlagosan hány tanulóra jut egy osztályterem?
 d) Mennyi volt az átlagos osztálylétszám az egyes években?
 e) Ábrázoljuk az első évfolyamos tanulók számát az egyes években.

K1 Gy 591. A turista és topográfiai térképeken szintvonalakat látunk. (Pl.: Közpiskolai földrajzi atlasz 3. oldal, Cartographia, 2002) Milyen függvénykapcsolatot jeleznek a szintvonalak?

K1 Gy 592. Egy kórházi beteg testhőmérsékletét kétóránként megmérték, a kapott értékeket az alábbi táblázatban láthatjuk.

idő (óra)	8	10	12	14	16	18	20	22
testhőmérséklet (°C)	38,3	38,5	38,8	38,7	38,9	39,2	39,3	38,5

Szemléltessük az adatokat vonaldiagrammal.

K1 Gy 593. Az alábbi táblázatban 1990 és 2002 közötti néhány évben a kiadott szépirodalmi könyvek számát tüntettük fel, műfajuk szerint csoportosítva.

művek száma	1990	2000	2001	2002	példányszám (2002-ben, ezer db)
verses mű, antológia	219	410	382	301	396
regény, elbeszélés	972	1362	1661	1680	11 150
színmű	45	55	63	65	188
egyéb széppróza	234	223	204	198	495

- a) Hány szépirodalmi művet adtak ki összesen az egyes években?
 b) A kiadott művek hány százaléka volt színmű az egyes években?
 c) Mennyi volt az egyes művek átlagos példányszáma 2002-ben?
 d) A táblázat alapján készítsünk csoportosított oszlopdiagramot.

K1 Gy 594. Az alábbi táblázatban az 1990 és 2002 közötti néhány évben a személyi sérüléssel járó közúti közlekedési balesetekről soroltunk fel néhány adatot.

	1990	2000	2001	2002
balesetek száma	27 801	17 493	18 505	19 686
ebből: járművezető hibája	23 890	15 302	16 235	17 317
gyalogos hibája	3426	1886	2031	2001
műszaki hiba	241	129	82	105
ittasan okozott balesetek száma	4258	2062	2138	2440
ebből: járművezető hibája	3741	1827	1928	2209
gyalogos hibája	507	233	208	226
meghalt személyek száma	2432	1200	1239	1429
sérült személyek száma	36 996	22 698	24 149	25 978

a) Egy-egy átlagos napra hány baleset, ittasan okozott baleset, személyi sérülés, halállal végződő sérülés jut?

b) Mekkora az egyes években a gyalogosok hibájából történt balesetek százalékos aránya?

c) Ábrázoljuk vonaldiagrammal az egyes években az ittas járművezetők, illetve gyalogosok hibájából okozott balesetek számát.

d) Készítsünk az adatokból halmozott, majd 100%-ig halmozott vonaldiagramot is.

K1 Gy 595. Az alábbi táblázat a 2001-ben és 2002-ben legnagyobb példányszám-ban megjelent tíz országos napilapot tartalmazza.

Országos napilap (átlagos megjelenési példányszám, ezer db)

sajtótermék	2001	2002
Metro	280	320
Blikk	244	257
Népszabadság	222	221
Nemzeti Sport	114	117
Magyar Nemzet	88	116
Mai Lap	-	73
Magyar Hírlap	47	57
Expressz	58	38
Népszava	47	36
Világgazdaság	16	14

a) Készítsünk ez alapján normál oszlopdiagramot a 2001-es év öt legnagyobb napilapja példányszámának feltüntetésével.

b) Készítsük el a két évre a halmozott oszlopdiagramokat is ezekkel az adatokkal.

c) Készítsük el a két évre a 100%-ig halmozott oszlopdiagramokat is.

K1 Gy596. Az előző táblázat alapján készítsünk kördiagramot a 2001-es és 2002-es év öt legnagyobb napilapja példányszámának feltüntetésével.

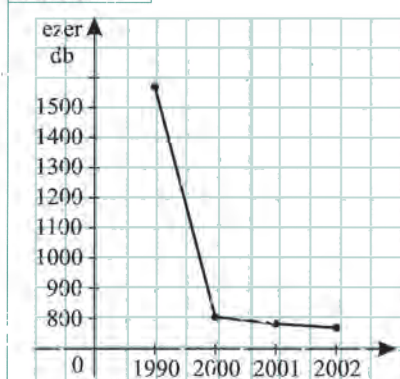
K1 Gy597. Az alábbi táblázatban 1990 és 2002 közötti néhány évben a hazai állatállomány nagyságát tüntettük fel.

állatállomány (ezer db)	1990	1999	2001	2002
szarvasmarha	1571	805	783	770
juh	1865	1129	1136	1103
sertés	8000	4834	4822	5082
tyúkféle	43 309	30 716	34 343	32 206

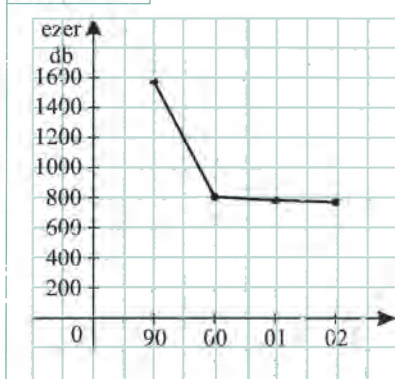
a) Készítsünk két kördiagramot, melyben a szarvasmarha-, juh- és sertésállomány százalékos arányáról tájékozódhatunk 1990-ben és 2002-ben.

b) Az alábbi két grafikon a szarvasmarha-állomány nagyságát ábrázolja az egyes években. Mi az alapvető különbség a két szemléltetés között?

597/b)1. ábra



597/b)2. ábra



K1 Gy598. Készítsük el az előző táblázat alapján a szarvasmarha-, juh- és sertésállományt ábrázoló halmozott területgrafikon. (Lehet 100%-ig halmozott területgrafikon is.)

K1 Gy 599. Az alábbi táblázatban 1990-ben, 2001-ben és 2002-ben a Magyarországon kiadott szépirodalmi könyvek számát tüntettük fel, a szerzők állampolgársága szerint csoportosítva.

állampolgárság	1990	2001	2002	példányszám (2002, ezer db)
amerikai (USA)	270	604	670	7537
angol	140	144	129	502
cseh	35	20	16	50
francia	53	96	94	279
lengyel	8	13	15	33
magyar	753	1145	1065	2918
német	88	128	116	541
olasz	12	37	28	64
orosz	30	17	21	90
összesen	1470	2310	2244	12 229

a) A felsorolt 9 országon kívüli szerzőktől hány mű jelent meg az egyes években?

b) Hány százalékkal részesedtek az amerikai, angol stb. szerzők 2002-ben az összpéldányszámból?

c) Mennyi volt az amerikai, angol stb. szerzők műveinek átlagos példányszáma 2002-ben?

d) Ábrázoljuk a magyar szerzők szépirodalmi műveinek alakulását a három évben.

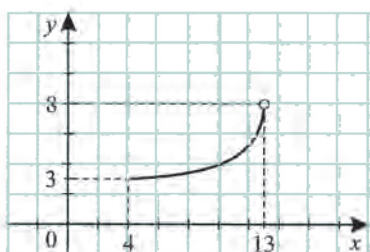
K Gy 600. Az alábbi táblázatban az egyes intézmények hallgatóinak számát tüntettük fel (ezer fő).

intézmény	1990/91	1999/2000	2001/02	2002/03
óvoda	391,9	366,9	342,3	331,7
általános iskola	1177,6	972,9	947,0	933,1
szakiskola	225,4	121,7	133,0	134,0
középiskola	360,0	505,3	516,1	519,4
felsőfokú iskola	108,4	305,7	349,3	381,6
összesen	2263,3	227,5	2287,7	2299,8

a) Szemléltessük valamely tetszőlegesen választott diagrammal az egyes intézmények hallgatói számának időbeli változását.

b) Milyen tendencia figyelhető meg?

601/a) ábra



K1 601. Az ábrákon egy-egy függvény képe látható. Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

K1 602. Az $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$ számok mindegyikéhez rendeljük hozzá a pozitív osztóiok számát. Mi az így kapott függvény értékkészlete?

K1 603. Az alábbi függvények közül melyek kölcsönösen egyértelmű leképezések? (Ahol külön nem jelöltük, az értelmezési tartomány a valós számok halmaza.)

a) $a: x \mapsto 2x + 1$;

c) $c: x \mapsto x^3 + 1$;

e) $e: x \mapsto x^2 + 1, \quad x > 3$;

b) $b: x \mapsto x^2 + 1$;

d) $d: x \mapsto 2x + 1, \quad x \in \mathbb{N}$;

f) $f: x \mapsto \sin x, \quad 0 < x < 90^\circ$.

K2 604. Létesítsünk

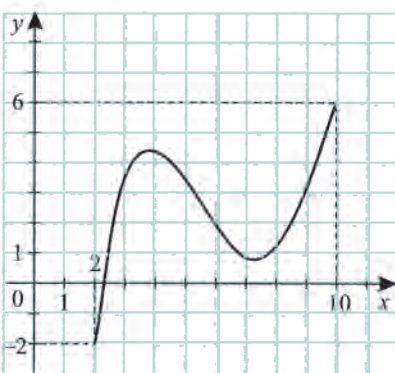
a) kölcsönösen egyértelmű; b) nem kölcsönösen egyértelmű leképezést az $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq -1\}$ és a $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$ halmazok között.

K1 605. Az f függvény képe a derékszögű koordináta-rendszerben az AB és CD szakaszokból áll, $A(-2; -5)$, $B(1; 4)$, $C(3; 3)$, $D(4; 9)$. Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

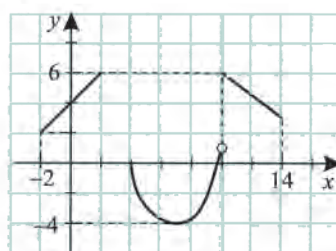
K2 606. Adott az ABC háromszög AB és AC oldala, $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm. A két oldal által bezárt φ szöghöz rendeljük hozzá az ABC háromszög területét. Mi az így kapott függvény értelmezési tartománya és értékkészlete? Kölcsönösen egyértelmű a függvény?

K2 607. Az f függvény képe a derékszögű koordináta-rendszerben az AB szakaszból áll, $A(-1; 1)$, $B(3; 7)$. Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát.

601/b) ábra



601/c) ábra



K2 608. Hány olyan függvény van, melynek értelmezési tartománya $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, értékkészlete B , ha

a) $B = \{a, b, c\}$;

b) $B = \{a, b, c, d\}$;

c) $B = \{a, b, c, d, e\}$;

d) $B = \{a, b, c, d, e, f\}$?

K2 609. Hány olyan függvény van, melynek értelmezési tartománya $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, képhalmaza B , ha

a) $B = \{a, b, c\}$; b) $B = \{a, b, c, d, e, f\}$?

K1 610. Határozzuk meg az $f(a+1) - f(a)$ különbségeket, ha

a) $f(x) = 2x$;

b) $f(x) = 2x + 1$;

c) $f(x) = 5x$;

d) $f(x) = 5x - 3$;

e) $f(x) = x^2$;

f) $f(x) = x^2 + 2$;

g) $f(x) = x^2 + 2x + 2$;

h) $f(x) = 3x^2 + 3$;

i) $f(x) = x^3 - 2$;

j) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$.

Milyen érdekességet vehetünk észre?

K2 Gy 611. Töltsük ki az alábbi táblázatot 10 jegy pontossággal! Milyen érdekességet vehetünk észre?

x	$x - \frac{x^3}{3!}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$
0				
0,01				
0,02				
0,03				
0,04				
0,05				
0,1				
0,2				
$\frac{\pi}{10}$				
$\frac{\pi}{6}$				
$\frac{\pi}{3}$				
$\frac{\pi}{2}$				
π				

K2 612. Az előző feladathoz hasonlóan vizsgáljuk meg a $\cos x$, valamint az $1 - \frac{x^2}{2!}$ és $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ értékeit 0-hoz közeli pozitív x értékekre. Mit veszünk észre?

K1 613. Mely pontban metszik a derékszögű koordináta-rendszer y tengelyét az alábbi függvények görbéi?

a) $a(x) = 2x - 3$;

b) $b(x) = \frac{4}{x-2} + 2, \quad x \in [-1; 1]$;

c) $c(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x - 7$;

d) $d(x) = 2^{x+3} - \sin(3x)$;

e) $e(x) = x^3, \quad x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;

f) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x}$.

K1 614. Mely pontban metszik a derékszögű koordináta-rendszer x tengelyét az alábbi függvények görbéi?

a) $a(x) = 2x - 3$;

b) $b(x) = -x + \sqrt{2}, \quad x \in [-1; 1]$;

c) $c(x) = x^2 - 4$;

d) $d(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

K1 615. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) Van olyan függvény, melynek értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete pedig véges halmaz.

b) Van olyan függvény, melynek értelmezési tartománya véges, értékkészlete pedig végtelen halmaz.

c) Van olyan függvény, melynek értelmezési tartománya korlátos, értékkészlete pedig végtelen halmaz.

d) Van olyan függvény, amelyik kölcsönösen egyértelmű, értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete pedig véges halmaz.

K2 616. Adott két függvény: $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 6}$, $g(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$.

Legyen D_f illetve D_g a függvények értelmezési tartománya, s határozzuk meg az alábbi halmazokat:

a) $A = \{x \in \mathbf{R}; x \in D_f \text{ és } x \in D_g\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{R}; x \in D_f \text{ vagy } x \in D_g\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ legalább az egyik halmaznak eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

d) $D = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ legalább } D_g \text{-nek eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

e) $E = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ legfeljebb az egyik halmaznak eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

f) $F = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ legfeljebb } D_g \text{-nek eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

g) $G = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ csak az egyik halmaznak eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

h) $H = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ csak } D_g \text{-nek eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

i) $I = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ pontosan az egyik halmaznak eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

j) $J = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ pontosan } D_g \text{-nek eleme } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

k) $K = \{x \in \mathbf{R}; \text{ ha } x \text{ eleme az egyik halmaznak, akkor eleme a másik halmaznak is}\}$;

l) $L = \{x \in \mathbf{R}; \text{ ha } x \in D_f, \text{ akkor } x \in D_g\}$;

m) $M = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ nem eleme egyik halmaznak sem } (D_f \text{ és } D_g \text{ közül})\}$;

n) $N = \{x \in \mathbf{R}; x \text{ nem eleme } D_g \text{-nek}\}$.

K1 617. Adottak az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{a, b, c, d\}$ halmazok. Mutassunk példát olyan függvényekre, amelyekre igaz, hogy:

a) az A halmazt a B halmazba képezik le;

b) az A halmazt a B halmazra képezik le.

Melyik esetben kaphatunk kölcsönösen egyértelmű függvényt?

E1 618. Adjunk meg egy olyan függvényt (leképezést, transzformációt), amely egy 10 cm hosszúságú szakasz pontjainak halmazát leképezi

a) egy másik 10 cm hosszú szakasz pontjainak halmazára;

b) egy 20 cm hosszú szakasz pontjainak halmazára;

c) egy 10 cm átmérőjű félkörív pontjainak halmazára;

d) egy 20 cm átmérőjű félkörív pontjainak halmazára.

E1 619. Adjunk meg egy olyan függvényt (leképezést, transzformációt), amely egy 10 cm átmérőjű zárt körlemez pontjainak halmazát leképezi

a) egy másik 10 cm átmérőjű zárt körlemez pontjainak halmazára;

b) egy 20 cm átmérőjű zárt körlemez pontjainak halmazára.

V 620. Adjunk meg egy olyan függvényt (leképezést, transzformációt), amely egy 10 cm hosszúságú félig zárt szakasz pontjainak halmazát leképezi

a) egy félegyenes pontjainak halmazára;

b) egy egyenes pontjainak halmazára.

K2 621. Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz. Hány olyan függvény van, amely az A halmazt

a) önmagába képezi le;

b) önmagára képezi le?

c) Ezek között hány kölcsönösen egyértelmű függvény van?

E2 622. Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ halmaz. Hány olyan függvény van, amely

a) az A halmazt a B halmazba képezi le;

b) az A halmazt a B halmazra képezi le;

c) az A halmazból a B halmazba képez le;

d) az A halmazt a B halmaz valamely 2 elemű részhalmazába képezi le;

e) kölcsönösen egyértelmű és az A halmazt a B halmaz valamely 5 elemű részhalmazába képezi le;

f) az A halmazt a B halmazba képezi le és monoton növekvő;

g) az A halmazt a B halmazba képezi le és szigorúan monoton növekvő?

Függvénytípusok



Nulladfokú és elsőfokú függvények

K1 623. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

a) $a(x) = 0$;

b) $b(x) = -2$;

c) $c(x) = 2x - 3$;

d) $d(x) = \frac{1}{2}x + 4$;

e) $e(x) = -x + 1,5$;

f) $f(x) = ax$, ahol rendre $a = 1, a = 2, a = 3, a = -1$;

g) $g(x) = x + b$, ahol rendre $b = 0, b = 1, b = 2, b = -1$;

h) $h(x) = 2(x - c)$, ahol rendre $c = 0, c = 1, c = 2, c = -1$.

K1 624. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények értékkészlete?

a) $x \in [-2; 3], a(x) = 2$.

b) $x \in [-3; 4[, b(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

c) $c(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, & \text{ha } 2 < x \leq 5; \\ x - 2, & \text{ha } 5 < x \leq 8. \end{cases}$

d) $d: x \mapsto x + 2$, ha $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

K1 625. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények értékkészlete?

a) $a(x) = \frac{x-1}{x-1}$;

b) $b(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$;

c) $c(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$ a $[-5; 5]$ intervallumon;

d) $d(x) = \frac{-2x^2+7x-3}{2x-1}$ a $[-2; 2]$ intervallumon;

e) $e(x) = \frac{x^2+9-(x+1)^2}{8-2x}$;

f) $f(x) = \frac{2x-3}{(x-2)^2-(2-x)^2}$.

K1 626. Az x és y mennyiségek egyenesen arányosak egymással. Melyik grafikon ábrázolhatja ezt a függvénykapcsolatot? Mennyi az arányossági tényező az egyes esetekben?

K2 Gy 627. Adjunk meg olyan képleteket, amelyek segítségével a Celsius-hőmérő és a Fahrenheit-hőmérő értékeit átválthatjuk. (A Celsius-skálán 0°C jelöli a víz fagyáspontját, 100°C a forráspontját; ugyanezen értékek a Fahrenheit-skálán 32°F , illetve 242°F ; továbbá mindkét skála lineáris beosztású.)

Egyenesen arányosak a Celsius-, illetve Fahrenheit-fokban mért értékek?

K2 Gy 628. David Fahrenheit (1686–1736) német származású, Angliában és Hollandiában élt fizikus 1714-ben hőmérsékleti skálájának egyik alappontjául (0°F) az 1709-es év leghidegebb napjának hőmérsékletét választotta, az emberi test hőmérsékletére pedig 100° -ot kapott. Határozzuk meg ezeket az értékeket Celsius-fokban is.

K1 Gy 629. Adjunk meg olyan képleteket, amely segítségével a Celsius-hőmérő és a Réaumur-hőmérő értékeit átválthatjuk. (A Réaumur-skálán 0°R jelöli a víz fagyáspontját, 80°R a forráspontját; a skála lineáris beosztású.)

Egyenesen arányosak a Celsius-, illetve Réaumur-fokban mért értékek?

(René Antoine Ferchault de Réaumur (1683–1757) francia jogász és természet-tudós, Anders Celsius (1701–1744) svéd csillagász volt.)

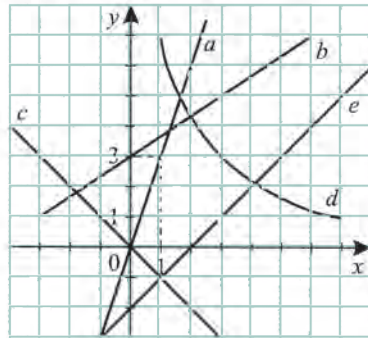
K1 630. Adott r sugarú körben az α középponti szöghöz i hosszúságú ív és h hosszúságú húr tartozik ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$).

Határozzuk meg az alábbi mennyiségek közötti függvénykapcsolatot. Mely mennyiségekre igaz, hogy egyenesen arányosak?

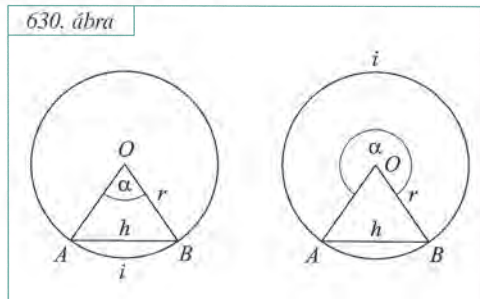
A mennyiségek:

- α és i ;
- α és h ;
- i és h ;
- α és az OAB körcikk kerülete;
- α és az OAB körcikk területe;
- α és az OAB háromszög kerülete;
- α és az OAB háromszög területe;

626. ábra



630. ábra



h) α és h és i által határolt körszelet kerülete;

i) α és h és i által határolt körszelet területe.

Mi az arányossági tényező az *a)* esetben, ha a kör sugara egységnyi és a középponti szöget ívmértékben (radiánban) mérjük?

K1 631. Oldjuk meg az előző feladatot, ha α adott és r változhat.

K1 632. Rendeljük minden négyzet oldalhosszúságához

a) az átlójának hosszát; *b)* kerületét; *c)* területét.

Egyenes arányosságok-e a kapott függvények?

K1 633. Az $f(x) = ax + b$ függvényre $f(0) = -3$, $f(4) = 5$. Határozzuk meg a és b értékét.

K1 634. Az $f(x) = ax + b$ függvényre $f(-2) = 5$, $f(3) = -5$. Határozzuk meg a és b értékét.

K1 635. Az f függvény képe a derékszögű koordináta-rendszerben az A és B ponton átmenő egyenes, $A(-1; 1)$, $B(3; 7)$. Adjuk meg a függvényt.

K2 Gy 636. Az úszómedencét két befolyó csövön keresztül tölthetjük meg vízzel. Az első csövön keresztül 6 óra, a második csövön keresztül 8 óra alatt telik meg a medence.

a) Határozzuk meg, hogyan függ az egyes esetekben a medencében levő víz magassága a töltési időtől. (A medencében általában 160 cm-es víz van.)

b) Határozzuk meg a vízmagasság-idő függvénykapcsolatot, ha mindkét csövet kinyitjuk. Mennyi idő alatt telik meg a medence?

c) Ábrázoljuk az egyes esetekben a vízmagasság-idő függvényt. Egyenes arányosságot kaptunk?

K2 Gy 637. Egy 12 cm magas gyertya 6 óra alatt, egy 9 cm-es gyertya 9 óra alatt ég el. Egyszerre meggyújtjuk mindkét gyertyát, amelyek ezután egyenletesen égnék (fogásuk egyenletes).

a) Ábrázoljuk a gyertyák magasságát az eltelt idő függvényében.

b) Meggyújtásuk után hány perccel lesz kétszer akkora az egyik gyertya, mint a másik?

c) Adjunk választ az előző feladatokra abban az esetben is, ha az első gyertyát 2 órával a második után gyújtjuk meg.

d) Az azonos anyagú gyertyák egységnyi hosszának égési ideje közelítőleg egyenesen arányos a keresztmetszetükkel. Mekkora a két gyertya keresztmetszetének aránya?

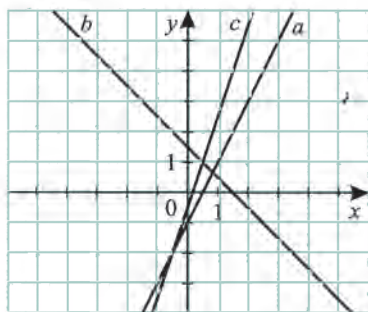
K2 Gy 638. Az országút mentén fekvő A és B városok távolsága 200 km. Reggel 8 órakor elindul A -ból B -felé egy kerékpáros $v_k = 15$ km/h átlagsebességgel, 9 órakor B -ből A -felé egy versenykerékpáros $v_v = 35$ km/h átlagsebességgel.

a) Ábrázoljuk a két kerékpáros mozgását az út-idő grafikonon.

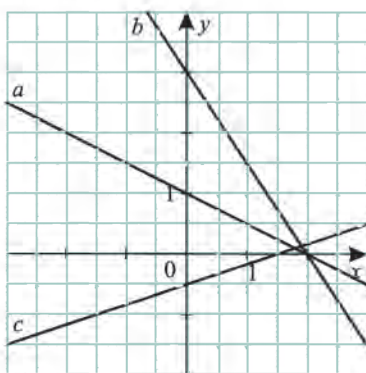
b) Mikor találkoznak?

c) Oldjuk meg az előző feladatokat akkor is, ha a kerékpáros A -ból nem a B város felé, hanem ellentétes irányban indul el.

639. ábra



640. ábra



K1 639. Mi a 639. ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

K1 640. Mi a 640. ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

Abszolútértéket tartalmazó függvények

K1 641. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények érték-készlete?

a) $a(x) = |x|$;

b) $b(x) = |-x|$;

c) $c(x) = -|x|$ a $[-5; 5]$ intervallumon;

d) $d(x) = \sqrt{x^2}$.

K1 642. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények érték-készlete?

a) $a(x) = |x| - 2$;

b) $b(x) = |x - 1|$, ha $-3 < x \leq 2$;

c) $c(x) = 2|x|$, ha $x \in [-2; 6]$;

d) $d(x) = -3|x|$;

e) $e(x) = \left| \frac{1}{2}x \right|$;

f) $f(x) = |-2x|$, ha $x \in [-3; 5]$;

j) $g(x) = \sqrt{4x^2}$.

K2 643. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények érték-készlete?

a) $a(x) = 2|x - 1|$;

b) $b(x) = -\frac{1}{2}|x + 2|$;

c) $c(x) = -2|x - 3| + 3$, ha $x \in]-2; 6]$;

d) $d(x) = 0,4|x + 1,5| + 3,2$;

e) $e(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - 3$;

f) $f(x) = -2\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 3$ a $[-1; 5]$ intervallumon;

g) $g(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - 2,5$, ha $-2 \leq x \leq 2$.

K2 644. Vázzoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények érték-készlete?

a) $a(x) = \frac{|x|}{x}$;

b) $b(x) = \frac{|x|}{-x}$, ha $x \in [-3; 5]$;

c) $c(x) = \frac{2x^2}{|x|^2}$;

d) $d(x) = \frac{3|x^3|}{x^3}$, ha $-2 < x \leq 3$;

K2 645. Mi a 645. ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

K2 646. Mi a 646. ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

K2 647. Vázzoljuk az alábbi függvények grafikonját.

a) $a(x) = |x| + x$;

b) $b(x) = x - |x|$, ha $x \in [-3; 4]$;

c) $c(x) = |x - 1| + 2x$;

d) $d(x) = -2|x + 1| + 2x - 3$, ha $-3 \leq x < 3$;

e) $e(x) = -2|x + 3| + 3x - 1$;

f) $f(x) = |2x + 3| + x - 1$, ha $x \in [-3; 3]$;

g) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - x + 2$;

h) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x - 2$, ha $x \in]-3; 4]$.

K2 648. Vázzoljuk az alábbi függvények grafikonját.

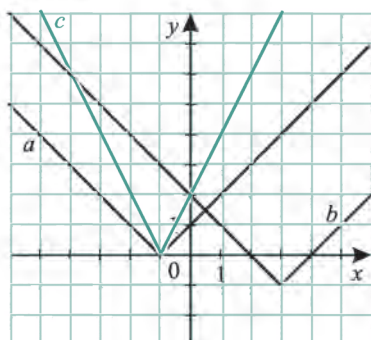
a) $a(x) = |x + 2| + |x - 3|$;

b) $b(x) = |x + 2| - |x - 3|$;

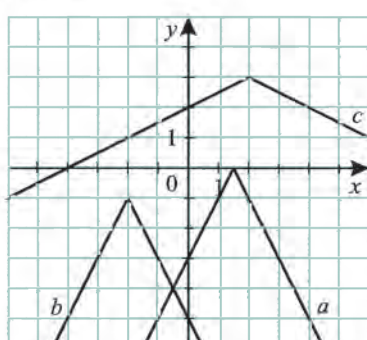
c) $c(x) = 2|x + 2| - |x - 3|$;

d) $d(x) = -2|x + 1| + |x - 2|$.

645. ábra



646. ábra



K2 649. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

a) $a(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$, ha $x \in [-5; 5]$;

b) $b(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{|x| + 1}$;

c) $c(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2x - 1}$, ha $x \in [-3; 3]$.

E1 650. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

a) $a(x) = |x + 1| + |x + 3| - 2x$, ha $x \in [-4; 5]$;

b) $b(x) = |2x - 3| - |x - 1| - |x + 2|$;

c) $c(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 3\sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

K2 651. Az $f(x) = a|x| + b$ függvényre $f(-2) = 1$, $f(1) = -1$. Határozzuk meg a és b értékét.

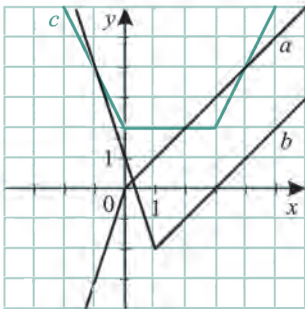
K2 652. Az $f(x) = |x + a| + b$ függvényre $f(-1) = 3$, $f(4) = 0$. Határozzuk meg a és b értékét!

E1 653. Az $f(x) = a|x + b| + c$ abszolútérték-függvény képe a derékszögű koordináta-rendszerben „felfelé nyitott” V betű alakú, melynek csúcsa a $C(-3; -1)$ pontban van. Határozzuk meg a , b és c értékét, ha a függvénygörbe átmegy az $A(1; 7)$ ponton.

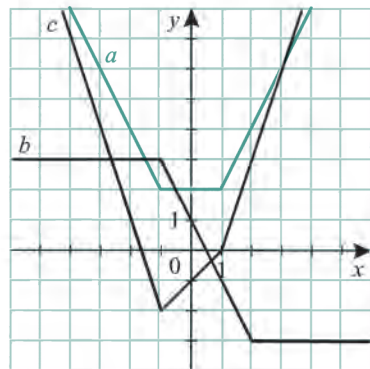
K2 654. Mi a 654. ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

K2 655. Mi a 655. ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

654. ábra



655. ábra



Másodfokú függvények

K1 656. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

a) $a(x) = x^2$;

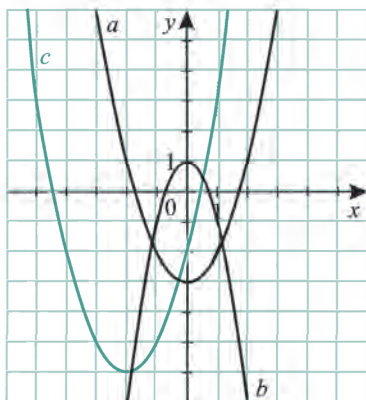
b) $b(x) = (x - 2)^2$;

c) $c(x) = x^2 - 2$;

d) $d(x) = -2x^2 + 3$;

e) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 3$.

657. ábra



K1 657. Mi az ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

K2 658. Tekintsük az alábbi valós-valós függvényeket:

a) $a(x) = x^2 + 2x - 3$;

b) $b(x) = -2x^2 + 3x + 2$;

c) $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 2$.

Adjuk meg a függvények

1. értelmezési tartományát,
2. értékkészletét,
3. tengelymetszeit,
4. grafikonját.

K2 659. Hogyan változik meg az $f(x) = x^2 + bx + c$ kifejezés szélsőértéke és szélsőérték helye, ha a kifejezéssel az alábbi műveleteket végezzük:

- a) a kifejezés szorzása 2-vel;
- b) szorzás -3 -mal;
- c) pozitív konstans hozzáadása, kivonása;
- d) négyzetre emelés;
- e) a kifejezés reciprokát vesszük;
- f) a kifejezés abszolútértékét vesszük.

K1 660. Van-e olyan $x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény ($a \neq 0$), amelynek értékkészlete

- a) a teljes valós számhalmaz;
- b) a negatív számok halmaza;
- c) a nemnegatív számok halmaza;
- d) $[-2; \infty[$?

K1 661. Az $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) másodfokú kifejezés hiányos, ha $b = 0$ vagy $c = 0$. Mi jellemzi a hiányos másodfokú függvények képét?

K2 662. Mi az ábrán látható függvények hozzárendelési szabálya?

K2 663. Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet két gyöke u és v . Hogyan látható ez a tény az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvény grafikonján? Milyen kapcsolat van a gyökök és a függvény szélsőérték helye között?

K1 664. Hogyan jellemezhetjük – közös pontjaik száma alapján – a parabola és egyenes helyzetét?

K2 665. Adottak az A, B, C pontok a koordinátasíkon. Ha lehetséges, adjuk meg annak a parabolának az egyenletét, amelynek tengelye párhuzamos az ordináta tengellyel, s átmegy az adott pontokon.

- a) $A(1, 0), B(-2, 0), C(3, 20)$;
- b) $A(0, 2), B(1, -6), C(-3, 2)$;
- c) $A(0, 0), B(1, 1), C(2, 2)$;
- d) $A(-2, 1), B(1, 7), C(7, 19)$.

K2 666. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényre $f(0) = -1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 13$. Határozzuk meg a, b és c értékét.

K2 667. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény két zérushelye $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Határozzuk meg a, b és c értékét, ha a függvény görbéje átmegy az $(1; 4)$ ponton.

K2 668. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola csúcspontja $C(3; 2)$, y tengelymetszete $M(0; -3)$. Határozzuk meg a, b és c értékét.

K2 669. Adott az $f: x \mapsto x^2 + 2x + c$ függvény. Hogyan kell c értékét megválasztani, hogy

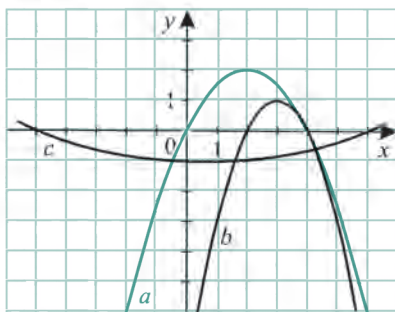
- a) a függvénynek 2 zérushelye legyen;
- b) a függvénynek 1 zérushelye legyen;
- c) a függvénynek 0 zérushelye legyen;
- d) a függvény egyik zérushelye az $x = 3$ helyen legyen;
- e) a függvény szélsőértéke $y = 3$ legyen;
- f) a függvény minden felvett értéke pozitív legyen;
- g) a függvény minden felvett értéke negatív legyen?

K2 670. Adott az $f: x \mapsto x^2 + bx + c$ függvény. Hogyan kell b és c értékét megválasztani, hogy a függvény szélsőértéke az $x = 2$ helyen $y = 3$ legyen?

K2 671. Ábrázoljuk az $f: x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$ függvényt, s a grafikon alapján állapítsuk meg az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldásainak halmazát.

K2 672. Adott az $f: x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$ és $g: x \mapsto -x^2 + 2x - 9$ függvény. Oldjuk meg az $f(x) \leq g(x)$ egyenlőtlenséget.

662. ábra



K2 673. Egyenletesen gyorsuló személygépkocsi álló helyzetből indulva 1 perc alatt 100 km/h sebességet ér el.

- a) Mekkora utat tesz meg ez alatt az idő alatt?
 b) Ábrázoljuk a jármű mozgását az út–idő grafikonon.
 c) Mennyi idő alatt teszi meg az autó a gyorsulási útszakasz felét?

K2 Gy 674. 40 km/h sebességgel haladó személygépkocsi fél perc alatt 100 km/h sebességre gyorsul fel. Mekkora utat tesz meg ez alatt az idő alatt? Ábrázoljuk a jármű mozgását az út–idő grafikonon. (A gyorsulás egyenletes.)

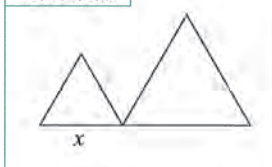
K2 Gy 675. Egy kavicsot 20 m/s kezdősebességgel függőleges irányban felfelé elhajítunk. Állapítsuk meg, hogyan függ a kavics föld felszínétől mért távolsága, s ábrázoljuk a távolságot az idő függvényében. (A közegellenállást elhanyagolhatjuk, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.)

E1 Gy 676. Oldjuk meg az előző feladatot, ha a kavicsot egy 10 m magas ház tetejéről hajítjuk el, függőleges irányban felfelé.

E1 Gy 677. A folyóparton 40 m hosszú kerítéssel téglalap alakú területet kerítünk be három oldalról (a negyedik oldal a folyópart). A terület parttal párhuzamos oldalának hosszát jelöljük x -szel, a partra merőleges oldalak hosszúságát y -nal.

- a) Adjuk meg a terület nagyságát x függvényében.
 b) Adjuk meg a terület nagyságát y függvényében.
 c) Hogyan válasszuk meg az x és y oldalak hosszúságát, hogy a bekerített terület a lehető legnagyobb legyen?

678. ábra



E1 678. Egy adott 20 cm hosszú szakasz fölé rajzoljunk az ábra szerint két szabályos háromszöget. Hogyan függ a két háromszög területének összege az első háromszög oldalának hosszától? Hogyan válasszuk meg a háromszögek oldalainak hosszát, hogy a területük összege

- a) minimális legyen; b) maximális legyen?

E1 679. Oldjuk meg az előző feladatot, ha a szabályos háromszögek helyett a) két négyzetet; b) két félkört frunk a szakaszok fölé.

K1 680. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

- a) $a(x) = x^2$, ha $x \geq 0$; $a(x) = -x$, ha $x < 0$;
 b) $b(x) = (x-2)^2$, ha $x \geq 0$; $b(x) = x+4$, ha $x < 0$.

K2 681. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

$$a) a(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad b) b(x) = \frac{x^3 - x^2}{|x - 1|}; \quad c) c(x) = \sqrt{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

E1 Gy 682. Egy autó gyorsulása útjának első 10 másodpercében $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$, majd a következő 10 másodpercben $a_2 = 4 \text{ m/s}^2$ volt.

- a) Mekkora utat tett meg ez alatt az autó?
 b) Ábrázoljuk a jármű mozgását az út–idő grafikonon.
 c) Mekkora volt az autó átlagos gyorsulása?

E1 Gy 683. Egy autó 100 méteres útszakaszon $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$, majd a következő 100 méteren $a_2 = 4 \text{ m/s}^2$ gyorsulással haladt.

a) Ábrázoljuk a jármű mozgását az út-idő grafikonon.

b) Mekkora volt az autó átlagos gyorsulása?

E1 Gy 684. Vázzoljuk az alábbi függvények grafikonját.

a) $a(x) = |x^2 + 4x - 5|$; b) $b(x) = |-2x^2 - x + 10|$.

E1 Gy 685. Vázzoljuk az alábbi függvények grafikonját.

a) $a(x) = x^2 - 2|x| - 8$; b) $b(x) = x^2 + 2|x| - 8$;
c) $c(x) = |x^2 - 2|x| - 8|$; d) $d(x) = |x^2 + 2|x| - 8|$.

Racionális törtfüggvények

K1 Gy 686. Egy medencébe 5 azonos keresztmetszetű cső vezet. Ha egy csövön keresztül engedjük be a vizet, akkor a medence 24 óra alatt telik meg.

a) Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha 2, 3, 4, illetve 5 csövön keresztül engedjük bele a vizet?

b) Milyen kapcsolat van a megnyitott csövek száma és a medence feltöltéséhez szükséges idő között?

c) Ábrázoljuk a töltési időt a megnyitott csövek számának függvényében.

K1 Gy 687. Egy üzem részegységében olyan munkadarabokat állítanak össze, amelyeket egy munkás átlagosan 1 óra 20 perc alatt tud elkészíteni. Összesen 45 munkadarab elkészítése a feladat.

a) Mennyi idő alatt készül el a munkával 1, 2, 3, ..., 30 munkás?

b) Milyen kapcsolat van a munkások száma és a munkadarabok elkészítéséhez szükséges idő között?

c) Ábrázoljuk a munkadarabok elkészítéséhez szükséges időt a munkások számának függvényében.



K1 Gy 688. Két város távolsága 1200 km. A pihenők számától és hosszától függően egy autó legkevesebb 40 km/h és legfeljebb 100 km/h átlagsebességgel teheti meg az utat.

a) Milyen kapcsolat van az út megtételéhez szükséges idő és az átlagos sebesség között?

b) Ábrázoljuk az út megtételéhez szükséges időt az átlagsebesség függvényében!

K1 689. Mi jellemzi a fordított arányosság grafikonját?

K2 690. Vázzoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

a) $a(x) = \frac{1}{x}$; b) $b(x) = \frac{2}{x}$;

$$c) c(x) = -\frac{1}{3x};$$

$$d) d(x) = \frac{1}{x-2};$$

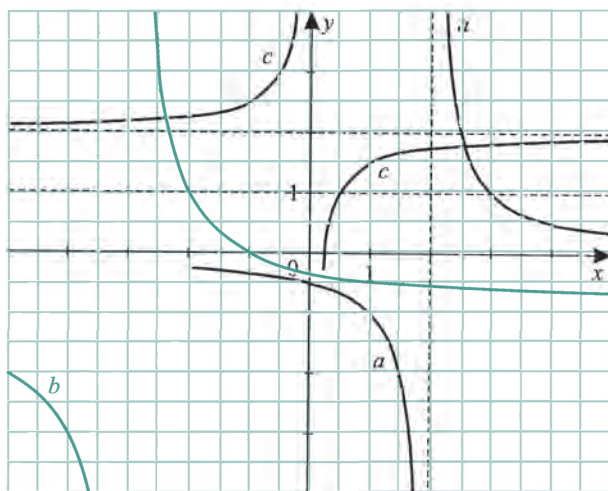
$$e) e(x) = 3 + \frac{2}{x-1}.$$

E1 691. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények érték-készlete?

$$a) a(x) = \frac{|x|}{x^2}; \quad b) b(x) = \frac{2x-1}{x-1}; \quad c) c(x) = \frac{1-3x}{x+1}.$$

K2 692. Az ábrán néhány függvény képe látható (a görbék hiperbolaívek). Mi a függvények hozzárendelési szabálya?

692. ábra



K2 693. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját. Mi a függvények érték-készlete?

$$a) a(x) = \frac{x+1}{x^2-1};$$

$$b) b(x) = \frac{x-1}{x^2-1};$$

$$c) c(x) = \frac{x^2-25}{10+3x-x^2};$$

$$d) d(x) = \frac{x^2+x-6}{4-x^2}.$$

K2 694. Egy fordított arányosság értelmezési tartománya $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 13\}$. A grafikon illeszkedik a $(3; 4)$ pontra. Vázoljuk a függvény grafikonját.

K2 695. Van-e olyan egyenes vagy fordított arányosság, melynek grafikonjára illeszkedik az A és B pont, ha:

$$a) A(2; 3), B(4; 7); \quad b) A(-2; -3), B(6; 1); \quad c) A(-3; -2), B(3; 2).$$

K2 696. Egy lineáris törtfüggvény grafikonja átmegy az A , B , C pontokon. Határozzuk meg a függvényt, ha

$$a) A\left(0; -\frac{5}{3}\right), \quad B(1; -2), \quad C(2; -3);$$

$$b) A(-2; 5), \quad B(0; -1), \quad C(2; 1);$$

$$c) A(-2; 2), \quad B(0; 6), \quad C(3; 12).$$

K2 697. Egy lineáris törtfüggvény grafikonja az y tengelyt a $(0; 1)$, az x tengelyt az $(1; 0)$ pontban metszi. Határozzuk meg a függvényt, ha értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

E1 698. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

$$a) a(x) = \frac{1}{|x|};$$

$$b) b(x) = \left| \frac{1}{x} \right|;$$

$$c) c(x) = \frac{1}{|x| - 2};$$

$$d) d(x) = \left| \frac{1}{x - 2} \right|;$$

$$e) e(x) = \left| \frac{2}{x + 3} - 1 \right|;$$

$$f) f(x) = \left| -\frac{2}{x + 1} - 1 \right|.$$

E1 699. Hány rácponton megy át az alábbi függvények grafikonja? $(P(x; y)$ pont rácpont, ha $x, y \in \mathbf{Z}$.)

$$a) x \mapsto \frac{2x + 3}{x};$$

$$b) x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 1};$$

$$c) x \mapsto \frac{4x + 5}{1 - x};$$

$$d) x \mapsto \frac{x + 6}{2x - 1}.$$

Előjel, egészrész- és törtreszfüggvények

E1 700. Ábrázoljuk az $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ előjelfüggvényt.

E1 701. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$$a) a(x) = \operatorname{sgn}(x - 3); \quad b) b(x) = \operatorname{sgn}(2x); \quad c) c(x) = \operatorname{sgn}(-2x + 6).$$

E2 702. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$$a) a(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{x^2 - 1}{x + 1}\right);$$

$$b) b(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right);$$

$$c) c(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4);$$

$$d) d(x) = \operatorname{sgn}(2x^2 + 3x - 2).$$

E1 703. Adjuk meg egyszerűbb alakban az alábbi függvényeket:

$$a) a(x) = |\operatorname{sgn}(x)|;$$

$$b) b(x) = \operatorname{sgn}|x|;$$

$$c) c(x) = |\operatorname{sgn}(x - 2)|;$$

$$d) d(x) = \operatorname{sgn}|x - 2|;$$

$$e) e(x) = \operatorname{sgn}(|x| - 2).$$



a) $\operatorname{sgn}(x) < x$; b) $2\operatorname{sgn}(x) > |x|$;
c) $\operatorname{sgn}^2(x) \leq |\operatorname{sgn}(x)|$; d) $\operatorname{sgn}^2(x) \geq \operatorname{sgn}|x|$.

$$\begin{array}{ll} a) a(x) = [x - 3]; & b) b(x) = [2x]; \\ c) c(x) = \left[\frac{x}{2} - 3 \right]; & d) d(x) = [-2x + 4]. \end{array}$$

a) $[2x - 3] = 5$; b) $[2x - 3] = x$;
c) $[x + 3,4] = 2x$; d) $[x - 3,7] = 2x + 2,4$;
e) $[x + 3,4] \geq 2x$; f) $[x - 3,7] \leq 2x + 2,4$.

a) $a(x) = \{x - 3\}$; b) $b(x) = \{2x\}$;
c) $c(x) = \{2x - 2,5\}$; d) $d(x) = \{-2x + 0,5\}$.

$$\begin{array}{ll} a) a(x) = \llbracket x \rrbracket; & b) b(x) = \lceil x \rceil; \\ c) c(x) = \{\lceil x \rceil\}; & d) d(x) = \lceil \{x\} \rceil. \end{array}$$

a) $a(x) = x - [x]$; b) $b(x) = x + [x]$;
c) $c(x) = [x] - x$; d) $d(x) = [x] + \{x\}$;
e) $e(x) = [x] - \{x\}$.

Négyzetgyök függvények

a) $a(x) = \sqrt{x}$;
b) $b(x) = \sqrt{x} - 2$;
c) $c(x) = 2\sqrt{x}$;
d) $d(x) = -2\sqrt{x}$.

a) $a(x) = \sqrt{x+3}$; b) $b(x) = \sqrt{4x}$; c) $c(x) = \sqrt{-4x}$.

$$a) a(x) = 2\sqrt{x+3};$$

$$b) b(x) = -0,5 \cdot \sqrt{x-1} + 2;$$

$$c) c(x) = \sqrt{2x+4} - 1;$$

$$d) d(x) = -\sqrt{6-2x} + 3.$$

K2 715. Mi az ábrán látható négyzetgyök függvények hozzárendelési szabálya?

K2 Gy 716. Az álló helyzetből egyenletes gyorsulással induló tehervonat 20 s alatt 200 m utat tett meg. Mennyi idő alatt tett meg 10 m-t, 20 m-t, ..., 200 m-t? Ábrázoljuk a menetidőt a megtett út függvényében.

K2 Gy 717. A matematikai inga h hosszúságú fonálra függesztett m tömegű testből álló rendszer. Ha az egyensúlyi helyzetből $\alpha < 90^\circ$ -kal kimozdított ingát elengedjük, a test függőleges síkban, egy körív mentén periodikus mozgást végez. Az inga lengésidejének azt az időtartamot nevezzük, amely alatt először ér vissza kezdőhelyzetébe a kitérített test.

A T lengésidejt jó közelítéssel a $T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$ képlet segít-

ségével határozhatjuk meg, ahol g a nehézségi gyorsulás. (A Föld felszínén $g \approx 9,81$ m/s.) A modell érvényességi körét (a képlet pontosságát) az határozza meg, hogy milyen közelítéseket alkalmazunk a mozgás leírásakor.

a) Milyen feltételek teljesülése esetén kapunk pontos eredményt?

b) Elemezzük a képletet. Mitől függ a lengésidej? Mitől nem függ?

c) A pontosan járó ingaóra ingájának láncát meghosszabbítjuk. Hogyan változik meg a lengésidej?

d) Hogyan változik meg a Földön pontosan járó ingaóra lengésideje a Holdon? (A Holdon a nehézségi gyorsulás kb. hatoda a földiének.)

E1 718. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$$a) a(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1};$$

$$b) b(x) = \sqrt{|x|};$$

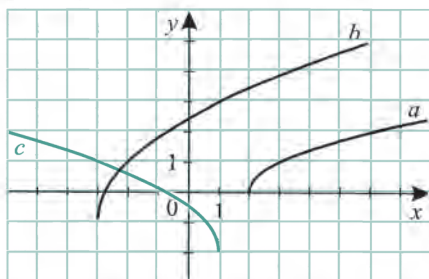
$$c) c(x) = \sqrt{|x-2|};$$

$$d) d(x) = \sqrt{|x|-2};$$

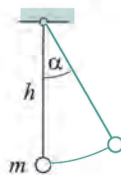
$$e) e(x) = \sqrt{|x|+2};$$

$$f) f(x) = \left| -2\sqrt{x+1} + 3 \right|.$$

715. ábra



717. ábra



Magasabb fokú és gyökös függvények

E1 719. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket a $[0; 1]$, majd a $[-2; 2]$ intervallumon, s állapítsuk meg nagyságrendi viszonyaikat.

$$a) a(x) = x;$$

$$b) b(x) = x^2;$$

$$c) c(x) = x^3;$$

$$d) d(x) = x^4;$$

$$e) e(x) = \sqrt{x};$$

$$f) f(x) = \sqrt[3]{x};$$

$$g) g(x) = \sqrt[4]{x}.$$

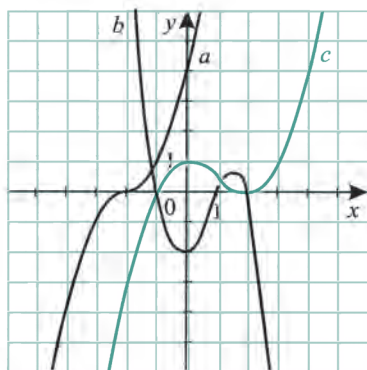
E1 720. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

- a) $a(x) = x^3 - 1$; b) $b(x) = -\frac{x^3}{2} + 1$;
 c) $c(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$; d) $d(x) = (x^2-1)(x+2)$;
 e) $e(x) = (x-1)^2(x+2)$; f) $f(x) = -\frac{1}{6}(x-3)(x-1)(x+2)$;
 g) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$; h) $h(x) = -x^2(x-2)$.

E1 721. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

- a) $a(x) = \sqrt[3]{x+2}$; b) $b(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} - 1$;
 c) $c(x) = |x|^3 - 1$; d) $d(x) = |x-1|^3$;
 e) $e(x) = |1-x^3|$.

722. ábra



E2 722. Mi az ábrán látható polinom-függvények hozzárendelési szabálya?

Exponenciális függvények

K1 K2 723. Vázzoljuk az alábbi függvények grafikonját. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékészletét, tengelymetszeteit.

- a) $a(x) = 2^x$; b) $b(x) = 4 \cdot 2^x$; c) $c(x) = 2^{x+2}$;
 d) $d(x) = 2^{x-2} - 1$; e) $e(x) = 2 \cdot 2^{x-1} + 1$; f) $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot 2^{x+1} + 5$;
 g) $g(x) = 5^{x-2} - 2$; h) $h(x) = 2^{x+1} \cdot 5^x - 3$; i) $i(x) = -2 \cdot 10^x + 3$;
 j) $j(x) = \sqrt{3^{2x-2}} + 1$; k) $k(x) = 3^{-x+2} - 3$; l) $l(x) = -16^{-\frac{x}{2}} + 1$.

K1 724. Vázzoljuk az alábbi függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Mit tapasztalunk? (Mi jellemzi a függvénygörbék egymáshoz viszonyított helyzetét?)

- a) $a(x) = 2^x$; b) $b(x) = 3^x$;

$$c) c(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x;$$

$$d) d(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

K1 725. Vázzuk az alábbi függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben! Mit tapasztalunk?

$$a) a(x) = 2^{2-2x};$$

$$b) b(x) = 4 \cdot \frac{1}{2^{2x}};$$

$$c) c(x) = \left(\frac{2}{2^x}\right)^2;$$

$$d) d(x) = \frac{4}{4^x}.$$

K2 E1 726. Vázzuk az alábbi függvények grafikonját. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, tengelymetszeteit.

$$a) a(x) = 2^{1-x} - \frac{3}{2^x};$$

$$b) b(x) = 2^{2-x};$$

$$c) c(x) = 2^{|x|};$$

$$d) d(x) = 2^{|2-x|};$$

$$e) e(x) = 2^{2-|x|}.$$

K1 Gy 727. Több ezer éves hindu feladat a következő:

Egy tavirózsa felülete minden nap a kétszeresére nő, és így 20 nap alatt teljesen benövi a tavat.

a) Hány nap alatt borítaná be a tavirózsa félig a tavat?

b) Hány nap alatt borítaná be a tavirózsa negyedrézsig a tavat?

c) Hány nap alatt borítaná be 8 tavirózsa a tavat?

d) Az a) és c) esetekben határozzuk meg, hogy a tavirózsa az eltelt napok függvényében a tó felszínének mekkora részét borítja be.

K1 Gy 728. Egy tenyészetben a baktériumok osztódással szaporodnak, kellő mennyiségű tápanyag jelenléte esetén percnként történik egy osztódás. Az élettér kb. 10^8 baktériumot tud eltartani. Ha nincs más korlátozó feltétel, akkor mennyi idő alatt telítődik az élettér, ha kezdetben

a) 1; b) 10

baktériumból áll a tenyészet?

Adjuk meg a baktériumok számát az eltelt idő függvényében.

K2 729. Egy $f(x) = a^x, x \in [-5; 5]$ exponenciális függvényre $f(-1) = \frac{5}{6}$. Adjuk meg a függvényt. Mi a függvény értékkészlete?

K2 730. Egy $f(x) = a^x + b, a > 0, x \in [-5; 5]$ exponenciális függvény görbéje az x tengelyt a 2, az y tengelyt a $-\frac{5}{4}$ pontban metszi. Adjuk meg a függvényt. Mi a függvény értékkészlete? Átmegy-e a függvény görbéje a (3; 1) ponton?

Logaritmusfüggvények

K1 731. Vázzuk az alábbi függvények grafikonját. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, tengelymetszeteit.

$$a) a(x) = \log_2 x;$$

$$b) b(x) = \log_2 (x + 3);$$

$$c) c(x) = \log_2 (2x);$$

$$d) d(x) = 3\log_2 x;$$

$$e) e(x) = 1 - 2\log_2 (x + 1);$$

$$f) f(x) = \lg x;$$

$$g) g(x) = \log_5 (x - 2) + 2;$$

$$h) h(x) = \lg (2x - 2) + \lg 0,5 - 3;$$

$$i) i(x) = -2\log_{\sqrt{2}} x + 1;$$

$$j) j(x) = -2\log_{\sqrt{2}} (x + 1);$$

$$k) k(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + 3;$$

$$l) l(x) = \log_3 (-x + 2);$$

$$m) m(x) = -2\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x + 1}.$$

K1 732. Vázzuk az alábbi függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Mit tapasztalunk? (Mi jellemzi a függvénygörbék egymáshoz viszonyított helyzetét?)

$$a) a(x) = \log_2 x;$$

$$b) b(x) = \log_3 x;$$

$$c) c(x) = \log_{\frac{1}{2}} x;$$

$$d) d(x) = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

K1 733. Vázzuk az alábbi függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Mit tapasztalunk? (Mi jellemzi a függvénygörbék egymáshoz viszonyított helyzetét?)

$$a) a(x) = \log_2 x; \quad b) b(x) = \log_2 (2x); \quad c) c(x) = 1 + \log_2 x.$$

E1 734. Vázzuk az alábbi függvények grafikonját. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, tengelymetszeteit.

$$a) a(x) = \log_3 (-x + 3);$$

$$b) b(x) = 2 + \log_3 \left(-\frac{1}{3}x \right);$$

$$c) c(x) = \log_3 |x|;$$

$$d) d(x) = |\log_3 x|;$$

$$e) e(x) = |\log_3 |x||.$$

K1 735. Vázzuk az alábbi függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Mit tapasztalunk? (Mi jellemzi a függvénygörbék egymáshoz viszonyított helyzetét?)

$$a) a(x) = \log_2 x; \quad b) b(x) = \frac{1}{2} \log_2 x^2; \quad c) c(x) = \frac{1}{3} \log_2 x^3.$$

K1 736. Vázzuk az alábbi függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Mit tapasztalunk? (Mi jellemzi a függvénygörbék egymáshoz viszonyított helyzetét?)

$$a) a(x) = \log_2 x; \quad b) b(x) = \log_4 x; \quad c) c(x) = \frac{\log_2 x}{2}.$$

K2 737. Vázzuk az alábbi függvények grafikonját. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, tengelymetszeteit.

$$a) a(x) = \lg (x^2 - 5x + 6) - \lg (x - 2);$$

b) $b(x) = \log_2 x - 2\log_4 x + 6\log_8 x + \log_{\frac{1}{2}} x$;

c) $c(x) = \log_{\frac{1}{3}} |x - 1|$;

d) $d(x) = \log_3 \sqrt{x^2 + 4x + 4}$;

e) $e(x) = 10^{\lg x}$;

f) $f(x) = \log_2 4^x$;

g) $g(x) = 10^{\frac{1}{2} \lg x^2}$;

h) $h(x) = 3^{\log_3 (4-x^2)}$.

K1 738. Vázzuk az alábbi függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Mit tapasztalunk? (Mi jellemzi a függvénygörbék egymáshoz viszonyított helyzetét?)

a) $a(x) = \log_2 x$;

b) $b(x) = 2^x$;

c) $c(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$;

d) $d(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

E1 739. Minden tízes számrendszerbeli pozitív egész számhoz rendeljük hozzá a szám tízes alapú logaritmusát. Mi a függvényértékek szemléletes jelölése?

K2 740. Egy $f(x) = \log_a x$, $x \in]0; 5]$ logaritmusos függvényre $f\left(\frac{9}{4}\right) = 2$.

Adjuk meg a függvényt. Mi a függvény értékkészlete?

K2 741. Egy $f(x) = \log_a x + b$, $x \in]0; 5]$ függvény görbéje az x tengelyt a 2 pontban metszi, és átmegy az $(1; 1)$ ponton. Adjuk meg a függvényt. Mi a függvény értékkészlete? Átmegy-e a függvény görbéje a $(3; -1)$ ponton?

Függvénytranszformációk

K1 742. Függvényérték transzformációja

Az ábrán az $y = f(x)$ függvény képe látható.

Ez alapján vázzuk az alábbi függvények grafikonját:

a) $y = f(x) - 1$; b) $y = f(x) + 1$;

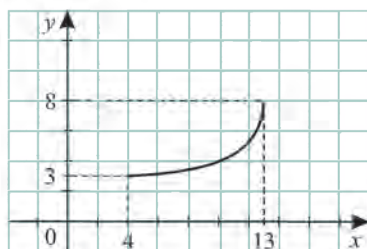
c) $y = f(x) + 2$; d) $y = 2f(x)$;

e) $y = \frac{1}{2} f(x)$; f) $y = -f(x)$;

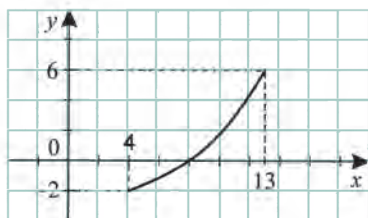
g) $y = -3f(x)$.

Mi az értelmezési tartománya és az értékkészlete a függvényeknek?

742. ábra



743. ábra



K1 743. Függvényváltzó transzformációja

Az ábrán az $y = f(x)$ függvény képe látható.

Ez alapján vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

a) $y = f(x - 1)$; b) $y = f(x + 2)$;

c) $y = f(2x)$; d) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

e) $y = f(-x)$; f) $y = f(-2x)$.

Mi az értelmezési tartománya és az értékkészlete a függvényeknek?

K2 744. Ábrázoljuk az $x \mapsto -2(x - 1)^2 + 3$ függvényt az alábbi transzformációs lépések sorozatával.

1. $x \mapsto x^2$;
2. $x \mapsto (x - 1)^2$;
3. $x \mapsto 2(x - 1)^2$;
4. $x \mapsto -2(x - 1)^2$;
5. $x \mapsto -2(x - 1)^2 + 3$.

K2 745. Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket.

a) $a(x) = 2(x - 3)^2 - 4$;

b) $b(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$;

c) $c(x) = 2x^2 + 3x - 5$;

d) $d(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)^2 - 1$.

K2 746. Ábrázoljuk az $x \mapsto -2\sqrt{x - 1} + 3$ függvényt az alábbi transzformációs lépések sorozatával.

1. $x \mapsto \sqrt{x}$;
2. $x \mapsto \sqrt{x - 1}$;
3. $x \mapsto 2\sqrt{x - 1}$;
4. $x \mapsto -2\sqrt{x - 1}$;
5. $x \mapsto -2\sqrt{x - 1} + 3$.

K2 747. Ábrázoljuk az $x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{-2(x + 2)} + 3$ függvényt az alábbi transzformációs lépések sorozatával.

1. $x \mapsto \sqrt{x}$;
2. $x \mapsto \sqrt{x + 2}$;
3. $x \mapsto \sqrt{2(x + 2)}$;
4. $x \mapsto \sqrt{-2(x + 2)}$;

$$5. x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{-2(x+2)};$$

$$6. x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{-2(x+2)};$$

$$7. x \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{-2(x+2)} + 3.$$

K2 748. Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket.

$$a) a(x) = 2\sqrt{\frac{1}{3}(x+1)} - 2;$$

$$b) b(x) = -\sqrt{2(x+1)} + \sqrt{2};$$

$$c) c(x) = -2\sqrt{6-2x} + 3;$$

K2 749. Adott a $P(3; 2)$ pont. Hajtsuk végre a P ponttal az alábbi transzformációkat, s adjuk meg a P pont képének koordinátáit.

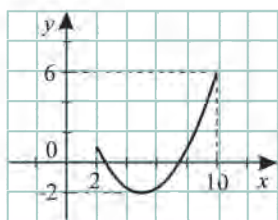
- a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
- b) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
- c) középpontos tükrözés az origóra;
- d) középpontos tükrözés a $(2; 3)$ pontra;
- e) $\lambda = 2$ arányú nagyítás az origóból;
- f) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú kicsinyítés az origóból;
- g) $\lambda = -3$ arányú nagyítás az origóból;
- h) eltolás a $(3; 0)$ vektorral;
- i) eltolás a $(0; -2)$ vektorral;
- j) eltolás az $(1; 2)$ vektorral;
- k) merőleges vetítés az x tengelyre;
- l) merőleges vetítés az y tengelyre;
- m) tengelyes tükrözés az $y = x$ egyenletű egyenesre;
- n) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
- o) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
- p) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
- q) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
- r) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
- s) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre.

K2 750. Tekintsük az $f(x) = x^2$ valós-valós függvényt! Adjuk meg a függvény képének az egyenletét, ha az alábbi transzformációkat hajtjuk végre.

- a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
- b) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
- c) középpontos tükrözés az origóra;
- d) középpontos tükrözés a $(2; 3)$ pontra;

- e) eltolás a $(2; 0)$ vektorral;
 f) eltolás a $(0; -1)$ vektorral;
 g) eltolás a $(2; -1)$ vektorral;
 h) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
 i) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
 j) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
 k) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
 l) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
 m) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre.

751. ábra



K2 751. Az ábrán az $y=f(x)$ függvény képe látható.

Hajtsuk végre az alábbi geometriai transzformációkat, s vázoljuk az így kapott függvények képét.

- a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
 b) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
 c) középpontos tükrözés az origóra;
 d) középpontos tükrözés a $(2; 3)$ pontra;
 e) eltolás a $(2; 0)$ vektorral;
 f) eltolás a $(0; -3)$ vektorral;

g) eltolás a $(2; -3)$ vektorral;

- h) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
 i) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
 j) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
 k) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
 l) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre.

Mi az értelmezési tartománya és az értékkészlete a függvényeknek?

K2 752. Tekintsük az $f(x) = x^2$ valós-valós függvényt. Adjuk meg a függvény képeinek az egyenletét $y=f(x)$ alakban az alábbi transzformációk után.

- a) $\lambda = 2$ arányú nagyítás az origóból;
 b) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú kicsinyítés az origóból;
 c) $\lambda = -3$ arányú nagyítás az origóból;
 d) tengelyes tükrözés az $y = x$ egyenletű egyenesre.

K2 753. Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket.

a) $a(x) = 2x^2 + 3x - 5$;

b) $b(x) = 1,5\sqrt{3x-1} + 2$;

c) $c(x) = \frac{x+2}{2x+6}$;

d) $d(x) = \frac{2x-1}{x-1}$;

e) $e(x) = 2[x - 2] - 2;$

f) $f(x) = -3\{x + 0,5\} + 1;$

g) $g(x) = 0,5 \cdot (x + 2)^3 - 1;$

h) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} - 1;$

i) $i(x) = -2 \cdot \log_2(x + 3) + 1.$

K2 754. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény képének az egyenletét, ha a függvény képén rendre az alábbi transzformációkat hajtjuk végre.

- a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
- b) középpontos tükrözés az $(1; 2)$ pontra;
- c) eltolás a $(-2; 1)$ vektorral;
- d) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre.

K2 755. Adjuk meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény képének az egyenletét, ha a függvény képén rendre az alábbi transzformációkat hajtjuk végre.

- a) Tengelyes tükrözés az y tengelyre;
- b) középpontos tükrözés a $(-1; 2)$ pontra;
- c) eltolás a $(2; -1)$ vektorral;
- d) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre.

K2 756. Adjuk meg az $f(x) = x^3$ függvény képének az egyenletét, ha a függvény képén rendre az alábbi transzformációkat hajtjuk végre.

- a) Tengelyes tükrözés az y tengelyre;
- b) középpontos tükrözés a $(2; 1)$ pontra;
- c) eltolás a $(4; 2)$ vektorral;
- d) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre.

K2 757. Adjuk meg az $f(x) = 2^x$ függvény képének az egyenletét, ha a függvény képén rendre az alábbi transzformációkat hajtjuk végre.

- a) Tengelyes tükrözés az y tengelyre;
- b) középpontos tükrözés a $(-1; 2)$ pontra;
- c) eltolás a $(2; 3)$ vektorral;
- d) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre.

K2 758. Adjuk meg az $f(x) = \log_2 x$ függvény képének az egyenletét, ha a függvény képén rendre az alábbi transzformációkat hajtjuk végre.

- a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
- b) középpontos tükrözés az $(1; -2)$ pontra;
- c) eltolás a $(-2; -3)$ vektorral;
- d) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre.

Hajtsuk végre az alábbi transzformációkat, s adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát (759–763 feladatok).

K2 759. Az $a(x) = x^2$ függvény görbéjére alkalmazzunk

- a) $\lambda = 4$ arányú merőleges affinitást az x tengelyre;
- b) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitást az y tengelyre.

K2 760. A $b(x) = \sqrt{x}$ függvény görbéjére alkalmazzunk

a) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitást az x tengelyre;

b) $\lambda = \frac{1}{4}$ arányú merőleges affinitást az y tengelyre.

K2 761. A $c(x) = \frac{1}{x}$ függvény görbéjére alkalmazzunk

a) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitást az x tengelyre;

b) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitást az y tengelyre.

K2 762. A $d(x) = 2^x$ függvény görbéjére alkalmazzunk

a) eltolást a $(-1; 0)$ vektorral;

b) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitást az x tengelyre.

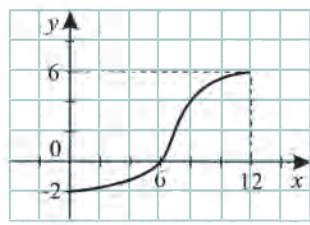
K2 763. Az $e(x) = \log_2 x$ függvény görbéjére alkalmazzunk

a) eltolást a $(0; 1)$ vektorral;

b) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitást az y tengelyre.

Összetett függvények

764. ábra



E1 764. Az ábrán az $y = f(x)$ függvény képe látható, $D_f = [0; 12]$.

Ez alapján vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

a) $a(x) = |f(x)|$, $D_a = [0; 12]$;

b) $b(x) = f(|x|)$, $D_b = [-12; 12]$;

c) $c(x) = |f(|x|)|$, $D_c = [-12; 12]$.

Mi az értékkészlete az így kapott függvényeknek?

Az $f \circ g$ (vagyis az $x \mapsto f(g(x))$) összetett függvényt két lépésben ábrázolhatjuk. Először megrajzoljuk az $x \mapsto g(x)$ belső függvény grafikonját, majd az így kapott $g(x)$ értékek alapján vázolhatjuk a $g(x) \mapsto f(g(x))$ függvény képét. Mivel a külső függvényt pontonként „illesztjük” a belső függvény képe alapján, célszerű felvenni egy olyan értéktáblázatot, amelyben „elegendően sok x helyen” megadjuk $g(x)$ értékét, s ez alapján a $g(x)$ helyeken $f(g(x))$ értékét is. (Általában nem tudjuk minden x -re meghatározni a g függvényértékeket; elég annyi helyen kiszámolni ezeket amennyi pontból az f függvényt – ismerve a karakterisztikáját – a kívánt pontossággal már ábrázolni tudjuk.)

E1 765. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = x$ és

$$a) f(x) = |x|; \quad b) f(x) = x^2; \quad c) f(x) = \sqrt{x};$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}; \quad e) f(x) = x^3; \quad f) f(x) = [x];$$

$$g) f(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

E1 766. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = x + 4$ és

$$a) f(x) = |x|; \quad b) f(x) = x^2; \quad c) f(x) = \sqrt{x};$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}; \quad e) f(x) = x^3; \quad f) f(x) = [x];$$

$$g) f(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

E1 767. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = 2x + 1$ és

$$a) f(x) = |x|; \quad b) f(x) = x^2; \quad c) f(x) = \sqrt{x};$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}; \quad e) f(x) = x^3; \quad f) f(x) = [x];$$

$$g) f(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

E1 768. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = -2x + 4$ és

$$a) f(x) = |x|; \quad b) f(x) = x^2; \quad c) f(x) = \sqrt{x};$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x}; \quad e) f(x) = x^3; \quad f) f(x) = [x]; \quad g) f(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

E2 769. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = |x|$ és

$$a) f(x) = x^2; \quad b) f(x) = \sqrt{x}; \quad c) f(x) = \frac{1}{x};$$

$$d) f(x) = x^3; \quad e) f(x) = [x]; \quad f) f(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

E2 770. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = |2x - 4|$ és

$$a) f(x) = x^2; \quad b) f(x) = \sqrt{x}; \quad c) f(x) = \frac{1}{x};$$

$$d) f(x) = x^3; \quad e) f(x) = [x]; \quad f) f(x) = \operatorname{sgn}(x).$$

E1 771. Ábrázoljuk összetett függvényként az alábbi függvényeket. Mit vehetünk észre?

$$a) a(x) = |x|; \quad b) b(x) = |-x|; \quad c) c(x) = x^2;$$

$$d) d(x) = (-x)^2; \quad e) e(x) = |x|^2; \quad f) f(x) = |2 - x|;$$

$$g) g(x) = |x - 2|; \quad h) h(x) = (x - 2)^2; \quad i) i(x) = (2 - x)^2.$$

E1 772. Írjuk fel az $u = f \circ g$ és $v = g \circ f$ függvények hozzárendelési szabályát, határozzuk meg az értelmezési tartományukat és értékkészletüket, majd ábrázoljuk a függvényeket:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 2x - 3; & g(x) = 3x + 5; \\ b) f(x) = |x|; & g(x) = 2x - 3; \\ c) f(x) = x^2; & g(x) = 3x + 1; \\ d) f(x) = \sqrt{x}; & g(x) = 2x + 6; \\ e) f(x) = \frac{1}{x}; & g(x) = -2x + 2; \\ f) f(x) = 2^x; & g(x) = -2x + 3; \\ g) f(x) = \log_2 x; & g(x) = 2x - 3. \end{array}$$

E2 773. Írjuk fel az $f \circ (g \circ h)$ függvény hozzárendelési szabályát, s ábrázoljuk az $f), g), h), i)$ függvényeket:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = |x|, & g(x) = 2x - 3, & h(x) = x; \\ b) f(x) = |x|, & g(x) = 2x - 4, & h(x) = x + 2; \\ c) f(x) = x^2, & g(x) = |x|, & h(x) = x - 2; \\ d) f(x) = \sqrt{x}, & g(x) = |x|, & h(x) = 2x + 1; \\ e) f(x) = |x|, & g(x) = \frac{1}{x} + 1, & h(x) = x - 2; \\ f) f(x) = \operatorname{sgn}(x), & g(x) = \frac{1}{x} + 1, & h(x) = x - 2; \\ g) f(x) = |x|, & g(x) = 2^x - 3, & h(x) = x - 2; \\ h) f(x) = |x|, & g(x) = x - 3, & h(x) = 2^{x-2}; \\ i) f(x) = |x|, & g(x) = \log_2 x - 1, & h(x) = x + 2. \end{array}$$

E2 774. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

$$\begin{array}{l} a) a(x) = ||x| - 1|; \\ b) b(x) = |||x| - 1| - 1|; \\ c) c(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|. \end{array}$$

E2 775. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

$$\begin{array}{ll} a) a(x) = |x^2 - 4x + 3|; & b) b(x) = |x^2 - 4|x| + 3|; \\ c) c(x) = |x^2 + 4x + 3|; & d) d(x) = |x^2 + 4|x| + 3|. \end{array}$$

E2 776. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

$$a) a(x) = |\sqrt{x-1} - 3|; \quad b) b(x) = |\sqrt{|x-1|} - 3|;$$

$$c) c(x) = \left| \sqrt{|x| - 1} - 3 \right|; \quad d) d(x) = \left| \sqrt{||x| - 1|} - 3 \right|.$$

E2 777. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

$$\begin{aligned} a) a(x) &= \left| \frac{1}{x-1} - 2 \right|; & b) b(x) &= \left| \frac{1}{|x-1|} - 2 \right|; \\ c) c(x) &= \left| \frac{1}{||x|-1} - 2 \right|; & d) d(x) &= \left| \frac{1}{||x|-1|} - 2 \right|. \end{aligned}$$

E1 778. Ábrázoljuk az $x \mapsto 2^{2x}$ függvényt az alábbi módszerekkel:

- a) az $x \mapsto 2^x$ függvény transzformációja $\left(\lambda = \frac{1}{2} \right.$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre $\left. \right)$;
- b) összetett függvényként: $2^{2x} = (2^x)^2$;
- c) áttérve új függvényre: $2^{2x} = 4^x$.

E1 779. Ábrázoljuk az $x \mapsto \log_2(4x)$ függvényt az alábbi módszerekkel:

- a) az $x \mapsto \log_2 x$ függvény változójának transzformációja $\left(\lambda = \frac{1}{4} \right.$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre $\left. \right)$;
- b) $\log_2(4x) = 2 + \log_2 x$; az $x \mapsto \log_2 x$ függvény értékének transzformációja (eltolás az y tengely pozitív irányában 2 egységgel);
- c) áttérve új függvényre: $\log_2(4x) = 2 \cdot \log_4(4x) = 2 + 2 \cdot \log_4 x$.

V 780. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket:

$$\begin{aligned} a) a(x) &= \sqrt{-x^2 + 4}; \\ b) b(x) &= \sqrt{-x^2 + 4x - 3}; \\ c) c(x) &= \sqrt{-4x^2 + 24x - 35}; \\ d) d(x) &= \sqrt{x^2 - 4x + 4}; \\ e) e(x) &= \sqrt{x^2 - 4}; \\ f) f(x) &= \sqrt{x^2 - 4x}. \end{aligned}$$

Függvények tulajdonságai

III

Függvények tulajdonságai, műveletek függvényekkel

K1 781. Az $u: x \mapsto \sqrt{x+4}$ és $v: x \mapsto \log_2(5-x)$ függvényekkel az alábbi műveleteket végezzük:

$$a) a(x) = 3u(x);$$

$$b) b(x) = -2v(x);$$

$$c) c(x) = u(x) + v(x);$$

$$d) d(x) = 2u(x) - 3v(x);$$

$$e) e(x) = u(x) \cdot v(x);$$

$$f) f(x) = u^2(x);$$

$$g) g(x) = |u(x)|;$$

$$h) h(x) = \frac{1}{v(x)};$$

$$i) i(x) = \frac{u(x)}{v(x)};$$

$$j) j(x) = \sqrt{v(x)}.$$

Határozzuk meg az $a, b, \dots, j$ függvények értelmezési tartományát.

K2 782. Adott három polinomfüggvény: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x) = (x-1)x(x+1)$ és $h(x) = x(x-1)(x-2)$. Mi az alábbi egyenletek gyökeinek halmaza?

$$a) f(x) + g(x) = 0;$$

$$b) f(x)g(x) = 0;$$

$$c) \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

$$d) f^2(x) + g^2(x) = 0;$$

$$e) f(x) + g(x) + h(x) = 0;$$

$$f) f(x)g(x)h(x) = 0;$$

$$g) \frac{f(x)g(x)}{h(x)} = 0;$$

$$h) \frac{f(x)}{g(x)h(x)} = 0;$$

$$i) f^2(x) + g^2(x) + h^2(x) = 0.$$

K2 783. Az f és g függvények értelmezési tartománya D_f és D_g , zérushelyeik halmaza Z_f és Z_g . Mi az alábbi függvények értelmezési tartománya?

$$a) c \cdot f \ (c \in \mathbf{R});$$

$$b) f + g;$$

$$c) f \cdot g;$$

$$d) \frac{1}{f};$$

$$e) \frac{f}{g}.$$

K2 784. Adottak az alábbi f és g függvények. Vázoljuk az $u = f + g$ és $v = f \cdot g$ függvények grafikonját.

$$a) f: x \mapsto 2,$$

$$g: x \mapsto x;$$

$$b) f: x \mapsto 2x - 4,$$

$$g: x \mapsto x + 1;$$

$$c) f: x \mapsto -2x,$$

$$g: x \mapsto x - 2;$$

$$d) f: x \mapsto x^2,$$

$$g: x \mapsto 2x;$$

$$e) f: x \mapsto |x - 3|,$$

$$g: x \mapsto |x - 4|;$$

$$f) f: x \mapsto x,$$

$$g: x \mapsto \frac{1}{x};$$

$$g) f: x \mapsto x^2,$$

$$g: x \mapsto \frac{1}{x};$$

$$\begin{array}{ll} h) f: x \mapsto x, & g: x \mapsto \frac{1}{x^2}; \\ i) f: x \mapsto \sqrt{x-2}, & g: x \mapsto \sqrt{x-2}; \\ j) f: x \mapsto 2^x, & g: x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x. \end{array}$$

E1 785. Adjuk meg az $f: x \mapsto \frac{x}{2} + 3$ függvény olyan leszűkítését, amelynek az értékkészlete

- a) $[0; 4]$;
- b) $]-2; 3]$;
- c) a természetes számok halmaza;
- d) az egész számok halmaza;
- e) a racionális számok halmaza.

E1 786. Adjuk meg az $f: x \mapsto -x^2 + 16$, $x \in [1; 2]$ függvény egy olyan kiterjesztését, amelynek az értékkészlete

- a) $[7; 12[$; b) $[0; 9]$; c) $]-\infty; -9]$.

Inverz függvények

K1 787. Az alábbiakban az f és g függvényeket rendezett párok segítségével adtuk meg. Mi az inverz függvény az egyes esetekben?

- a) $f: (1, a), (2, b), (3, c)$;
- b) $g: (1, 1), (2, 4), (3, 9)$.

K1 788. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?

- a) Ha egy függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor van inverze.
- b) Ha egy függvény invertálható, akkor kölcsönösen egyértelmű.
- c) Ha egy függvény monoton növekvő, akkor van inverze.
- d) Ha egy függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor van inverze.

K2 789. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzeit, majd ábrázoljuk a függvényeket és inverzüket ugyanabban a koordináta-rendszerben.

- a) $a(x) = x + 2$; b) $b(x) = 2x - 3$;
- c) $c(x) = -x + 1$; d) $d(x) = |x + 2|$, $x \in [-1; 3]$
- e) $e(x) = x^2 - 4x$, $x \geq 2$; f) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$;
- g) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \leq -1$; h) $h(x) = \frac{4}{x}$;
- i) $i(x) = \sqrt[3]{x - 2}$; j) $j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

- k) $k(x) = \log_2 x$, $x \in [0,5; 8]$.

Melyik függvény korlátos alulról, illetve felülről?

K1 790. Adjunk meg néhány olyan függvényt, mely azonos az inverzével. Mi jellemzi e függvények grafikonját?

Páros és páratlan függvények

K1 791. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?

- a) A páros függvény görbéje szimmetrikus az x tengelyre.
 b) A páratlan függvény görbéje szimmetrikus az origóra.
 c) Minden függvényre igaz, hogy vagy páros, vagy páratlan.
 d) Ha egy függvény páros, akkor nem lehet páratlan, és fordítva.
 e) Van olyan függvény, ami páros is és páratlan is.
 f) Csak egyetlen olyan függvény van, ami páros is és páratlan is.
 g) Minden páros vagy páratlan függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a 0-ra.
 h) Sem páros, sem páratlan függvény értelmezési tartománya nem lehet korlátos.
 i) Van olyan páros és páratlan függvény is, amelyik az $x = 0$ helyen nincs értelmezve.
 j) Van olyan páros és páratlan függvény is, amelyik értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
 k) Van olyan páros és páratlan függvény is, amelyik értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.
 l) Van olyan páros és páratlan függvény is, amelynek értelmezési tartománya k darab hely kivételével a valós számhalmaz ($k \in \mathbf{Z}^+$).

K1 792. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

- a) $a(x) = 5$; b) $b(x) = 0$;
 c) $c(x) = 2x$; d) $d(x) = x + 1$;
 e) $e(x) = |x|$, $x \in [-5; 5]$; f) $f(x) = |x - 1|$;
 g) $g(x) = |x| - 3$; h) $h(x) = 8$, $x \in [-2; 3]$;
 i) $i(x) = -x$, $x \in [-4; 1]$.

K1 793. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

- a) $a(x) = x^2$; b) $b(x) = (x - 1)^2$;
 c) $c(x) = x^2 + 2$; d) $d(x) = \frac{1}{x}$;
 e) $e(x) = -\frac{3}{x}$; f) $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$;
 g) $g(x) = \sqrt{x}$; h) $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$;
 i) $i(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; j) $j(x) = x^3$;
 k) $k(x) = \sqrt[3]{x}$.

K1 794. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

- a) $a(x) = \sin x$; b) $b(x) = \cos x$;
 c) $c(x) = \operatorname{tg} x$; d) $d(x) = \operatorname{ctg} x$;
 e) $e(x) = \sin(x - 1)$; f) $f(x) = \cos x - 2$;
 g) $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; h) $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;
 i) $i(x) = 2^x$; j) $j(x) = \log_2 x$.

K2 795. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

a) $a(x) = 3x^6 + 4x^4 - x^2 + 5$;

b) $b(x) = 3x^7 + 4x^5 - x^3 + 2x - 5$;

c) $c(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;

d) $d(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - 1$;

e) $e(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$;

f) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$.

K2 796. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

a) $a(x) = x + \sin x$;

b) $b(x) = x + \sin x - 1$;

c) $c(x) = x \cdot \sin x$;

d) $d(x) = x^2 \cdot \sin x$;

e) $e(x) = x^2 + \sin x$;

f) $f(x) = x + \cos x$;

g) $g(x) = x \cdot \cos x$;

h) $h(x) = x^2 \cdot \cos x$;

i) $i(x) = x \cdot \sin^2 x$;

j) $j(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$;

k) $k(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$.

K2 797. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi a)–d) állítások közül?

a) Ha egy f páratlan függvény az $x = 0$ helyen értelmezett, akkor $f(0) = 0$ lehet csak.

b) Ha egy páros függvény görbéje szimmetrikus az x tengelyre, akkor a függvény páratlan is.

c) Ha egy polinomfüggvényben csak páros kitevőjű tagok vannak, akkor a függvény páros.

d) Ha egy polinomfüggvényben csak páratlan kitevőjű tagok vannak, akkor a függvény páratlan.

e) Az f függvényre teljesül, hogy ha $x \in D_f$, akkor $-x \in D_f$ is. Mikor nem páros az f függvény?

f) Az f függvényre teljesül, hogy ha $x \in D_f$, akkor $-x \in D_f$ is. Mikor nem páratlan az f függvény?

K2 798. Legyen f és g páros függvény, $D_f = D_g$. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

a) $2f$;

b) $-f$;

c) cf ($c \neq 0$ adott állandó);

d) $f + g$;

e) $f \cdot g$;

f) $\frac{1}{f}$.

K2 799. Legyen f és g páratlan függvény. (Egyik sem az azonosan 0 függvény, illetve annak valamilyen leszűkítése.) Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

a) $2f$;

b) $-f$;

c) cf ($c \neq 0$ adott állandó);

d) $f + g$;

e) $f \cdot g$;

f) $\frac{1}{f}$.

K2 800. Legyen f páros és g páratlan függvény. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

a) $f+g$; b) $f \cdot g$; c) $\frac{f}{g}$; d) $\frac{g}{f}$.

E1 801. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

a) $a(x) = \sqrt{|x|} - 2$;

b) $b(x) = \sqrt{|x-2|}$;

c) $c(x) = \sqrt{|x|} - 2$;

d) $d(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+1}$;

e) $e(x) = \frac{2|x|+5}{|x|+1}$;

f) $f(x) = \frac{x^4+3x^2-5}{x^2-1}$.

V 802. Az f függvény értelmezési tartománya $[-a, a]$ ($a \in \mathbb{R}$). Igaz-e, hogy f felbontható egy páros és egy páratlan függvény összegére?

V 803. Bontsuk fel egy páros és egy páratlan függvény összegére az alábbi függvényeket.

a) $a(x) = -2x + 3$;

b) $b(x) = 2(x-3)^2 - 4$;

c) $c(x) = \frac{2x+5}{x+1}$, $x \neq -1$;

d) $d(x) = [x]$;

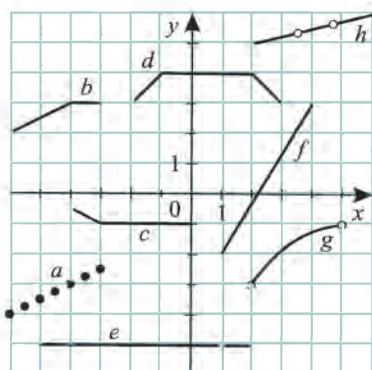
e) $e(x) = 2^x$;

f) $f(x) = e^x$.

Monoton függvények

K2 804. Adjuk meg az alábbi definíciókat. Az $]a; b[$ intervallumon értelmezett f függvény

805. ábra



- a) monoton növekvő;
- b) szigorúan monoton növekvő;
- c) monoton csökkenő;
- d) szigorúan monoton csökkenő;
- e) nem monoton növekvő;
- f) nem szigorúan monoton csökkenő.

K1 805. Melyik monoton növekvő, szigorúan monoton növekvő, monoton csökkenő és szigorúan monoton csökkenő az ábrán látható függvények közül?

K1 806. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- a) Ha egy függvény nem növekvő, akkor csökkenő.

b) Van olyan függvény, amelyik monoton növekvő és monoton csökkenő is.

c) Van olyan függvény, amelyik szigorúan monoton növekvő és monoton csökkenő is.

K1 807. Az alábbi függvények közül melyik monoton növekvő és melyik monoton csökkenő? Melyik korlátos alulról, illetve felülről?

a) $a(x) = 2x - 4$;

b) $b(x) = |2x - 4|$, $x \in [0; 5]$;

c) $c(x) = x^2 + 2x + 3$;

d) $d(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in [0; 5]$;

e) $e(x) = \sqrt{2x - 3}$;

f) $f(x) = \frac{2}{x - 3}$;

g) $g(x) = [x + 1]$;

h) $h(x) = a^x$, $a \in \mathbf{R}^+$;

i) $i(x) = \log_a x$, $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$.

E1 808. Értelmezési tartományuk melyik részhalmazán monoton növekvők, illetve monoton csökkenők az alábbi függvények?

a) $a(x) = x^2 - 4x + 3$;

b) $b(x) = \frac{2x - 4}{x - 3}$;

c) $c(x) = -2|2x + 6|$;

d) $d(x) = \left| \frac{2x - 4}{x - 3} \right|$;

e) $e(x) = \frac{2|x| - 4}{|x| - 3}$.

K2 809. Legyen f és g szigorúan monoton növekvő függvény, értékkészletük a pozitív valós számok részhalmaza. Melyek a szigorúan monoton növekvő, s melyek a csökkenő függvények?

a) $f + g$;

b) $2f$;

c) cf ($c \in \mathbf{R}^+$);

d) $-f$;

e) fg ;

f) $\frac{1}{f}$.

K2 810. Legyen f és g szigorúan monoton csökkenő függvény, értékkészletük a pozitív valós számok részhalmaza. Melyek a szigorúan monoton növekvő, s melyek a csökkenő függvények?

a) $f + g$;

b) $2f$;

c) cf ($c \in \mathbf{R}^+$);

d) $-f$;

e) fg ;

f) $\frac{1}{f}$.

E1 811. Adjunk meg olyan függvényt, amelyik szigorúan monoton nő, és

a) értelmezési tartománya $\mathbf{R}$, értékkészlete $] -\infty; 2]$;

b) értelmezési tartománya $] -\infty; 5]$, értékkészlete $] -\infty; 2]$;

c) értelmezési tartománya $[2; 5]$, értékkészlete $] -\infty; 2]$;

d) értelmezési tartománya $[2; 5]$, értékkészlete $] -\infty; 2]$;

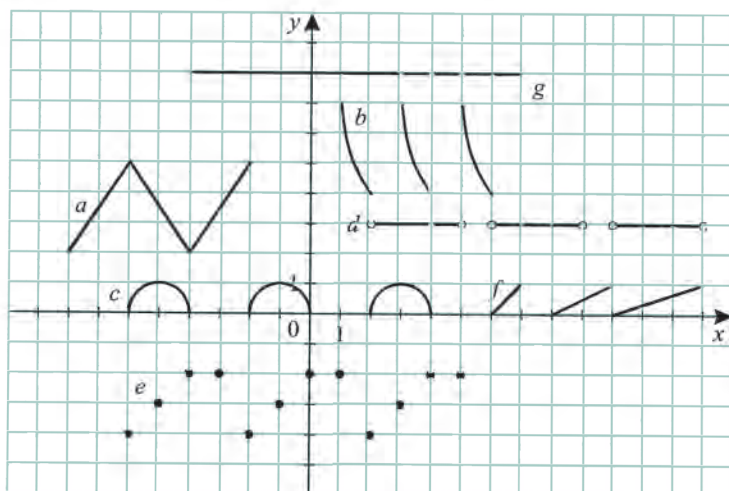
e) értelmezési tartománya $\mathbf{R}$, értékkészlete $] -2; 4]$;

f) értelmezési tartománya $[2; \infty[$, értékkészlete $] -\infty; 2]$.

Periodikus függvények

K1 812. Az ábrán látható függvények közül melyik periodikus? (Csak véges intervallumon ábrázoltuk a függvényeket.) Mi a függvények alapperiódusa?

812. ábra



K2 813. Mikor nem periodikus egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény? (Miért nem periodikus pl. az $x \mapsto [x]$ függvény?)

K2 814. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?

- a) Ha egy függvény periodikus, akkor értelmezési tartománya végtelen halmaz.
- b) Ha egy függvény periodikus, akkor értelmezési tartománya nem korlátos.
- c) Ha egy függvény periodikus p periódussal, akkor periodikus $2p$ -vel is.
- d) Ha egy függvény periodikus, akkor létezik legkisebb periódusa (alapperiódus).
- e) Ha egy függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor nem lehet periodikus.
- f) Ha egy függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve véges sok helyet, akkor a függvény nem lehet periodikus.

K2 815. Az f függvény periodikus, alapperiódusa p . Periodikusak-e az alábbi függvények, és mi az alapperiódusuk, ($c \in \mathbb{R}^+$)?

- a) $a(x) = f(x) + c$;
- b) $b(x) = f(x + c)$;
- c) $c(x) = c \cdot f(x)$;
- d) $d(x) = f(cx)$.

K2 816. Melyik periodikus az alábbi függvények közül? Mi a függvények alapperiódusa?

- a) $a(x) = 5$; b) $b(x) = \{x\}$;
 c) $c(x) = 2\{x\} + 1$; d) $d(x) = \sin x$;
 e) $e(x) = \cos(2x)$; f) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;
 g) $g(x) = -2 \operatorname{ctg}(-2x)$; h) $h(x) = 2 \sin(x-1)$, $x \in [-10; 10]$;
 i) $i(x) = \cos(2x+1)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

K2 E1 817. Melyik periodikus az alábbi függvények közül? Mi a függvények alapperiódusa?

- a) $a(x) = \cos^2 2x$; b) $b(x) = 2\{x+3\} - 2$;
 c) $c(x) = (x-2k)^2$, ha $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [2k; 2k+2[$; d) $d(x) = |\sin x|$;
 e) $e(x) = \sin x \cdot \cos x$; f) $f(x) = \sin x + \cos x$;
 g) $g(x) = \frac{(2x-2)\sin x}{x-1}$.

Függvények alkalmazása

K1 Gy 818. Egy gyerek súlyát egy bizonyos életkorban az $s(x) = \frac{67,5x^2 + 4,5}{x^2 + 8x + 1}$ (kg) függvény írja le, ahol x az életkor években. Mi lehet a függvény értelmezési tartománya?

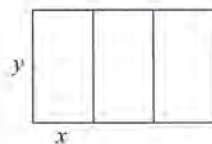
E1 819. Egy téglalapot az ábra szerint három egybevágó részre osztottunk.

a) Adjuk meg a k kerületet x függvényeként, ha a téglalap területe 1200 m^2 .

Ábrázoljuk az így kapott függvényt, s határozzuk meg az értékkészletét.

b) Adjuk meg a t területet y függvényeként, ha a téglalap kerülete 1200 m . Ábrázoljuk az így kapott függvényt, s határozzuk meg az értékkészletét.

819. ábra



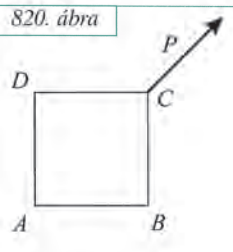
K2 Gy 820. Az $ABCD$ négyzet oldala 10 egység hosszúságú. Egy P pont az ábra szerinti AC egyenesen A -tól és C -től távolodva mozog v sebességgel úgy, hogy kezdetben a C pontban van.

Határozzuk meg az ABP háromszög kerületét és területét

a) az eltelt idő függvényében;

b) a P pontnak az AD egyenestől való távolsága függvényében.

820. ábra



K2 Gy 821. A koordináta-rendszer kezdőpontjából ki-lőtt lövedék röppályáját az $f(x) = x - 0,1x^2$ függvény grafikonja írja le.

a) Mekkora a lőtávolság?

b) Mekkora a lövedék által elért legnagyobb magasság?

K1 822. Egyenlő szárú háromszög oldalainak hossza 10 cm. Jelöljük a (váltózó) alap hosszát a -val, a hozzá tartozó magasságot m -mel, a szarak által bezárt szöveget α -val, s fejezzük ki az $s = a + m$ összeget

a) a -val; b) m -mel; c) α -val.

E2 d) Határozzuk meg az s függvény értékkészletét. Milyen a , m , α értékekre lesz s maximális?

E2 823. Tekintsük a $]0; 1[$ intervallumban lévő számokat. Mely számra lesz a lehető legnagyobb a szám és harmadik hatványának különbsége? Ábrázoljuk az így kapott függvényt.

K1 824. Egy egyenes körhengert elmeteszünk a tengelyén átmenő, az alapjára merőleges síkkal; a kapott síkmetszet kerülete 12 cm. Jelöljük a henger alapkörének sugarát r -rel, magasságát m -mel.

a) Írjuk fel a henger térfogatát r függvényeként!

E2 b) Vázoljuk az így kapott függvény grafikonját. Mi a függvény értékkészlete?

c) Írjuk fel a henger térfogatát m függvényeként is.

K2 Gy 825. Egy adatbankban N adat rendezéséhez szükséges idő az I. és II. eljárásban az alábbi:

I: $t = 0,0001N^3 + 0,0002N$;

II: $t = 0,002N^2 + 0,004N$.

Nagy N értékekre a II. eljárás a gyorsabb. Mely $N \geq 2$ értékekre gyorsabb az I. módszer?

E2 Gy 826. Egy $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ méretű téglalap alakú kartonlap sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, s a papírból felül nyitott dobozt készítünk. Jelöljük x -szel a levágott négyzetek cm-ben mért oldalának hosszát.

a) Határozzuk meg a doboz térfogatát x függvényében.

b) Ábrázoljuk az így kapott függvényt.

c) Mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

d) Mekkora x -et, hogy a doboz térfogata 96 cm^3 legyen?

E2 827. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket a $[-5; 5]$ intervallumon:

$$a) a(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2};$$

$$b) b(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{2 - x};$$

$$c) c(x) = \frac{x^3 + x^2}{x - 1};$$

$$d) d(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^3 - x^2};$$

E1 828. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

$$a) a(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1,5}; \quad b) b(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}; \quad c) c(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1,5}.$$

E1 829. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

$$a) a(x) = \sqrt{-1 + \sqrt{x+1}}; \quad b) b(x) = \sqrt{|x+1| + |x+2|};$$

$$c) c(x) = \sqrt{x + 4\sqrt{x+1}} + 5;$$

$$d) d(x) = \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1};$$

$$e) e(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}.$$

K2 830. Az f függvény bármely valós x értékre x -nek a $[0; 2]$ intervallum legtávolabbi egész értékétől való távolságát veszi fel.

a) Ábrázoljuk és írjuk fel az f függvényt képlettel.

b) Oldjuk meg a feladatot, ha a legtávolabbi egész érték helyett a legközelebbi (nem szükségképpen egész) értéktől való távolságot tekintjük.

E1 831. Mi lehet a mellékelt „fűrészfűggvény” hozzárendelési szabálya?

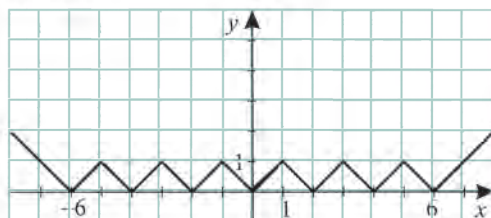
K2 832. Hány gyöke van az alábbi egyenleteknek?

a) $x = 25 \sin x;$

b) $\frac{\log x}{2} = \sin x;$

c) $\lg x = x.$

831. ábra



E1 833. Hogyan függ a p paramétertől az $|x^2 + 6x + 8| = x + p$ egyenlet megoldásainak száma?

E1 834. Határozzuk meg az összes a, b valós számpárt, amelyre az $||x| + x - 4| = ax + b$ egyenletnek végtelen sok megoldása van.

E1 835. Határozzuk meg a $[-1; 5]$ intervallumon értelmezett alábbi függvények értékkészletét:

a) $a(x) = |x-1| + |x-2|;$

b) $b(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|;$

c) $c(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|;$

d) $d(x) = 2|x-1| + 3|x-2| + 4|x-3| + |x-4|.$

E2 836. Mennyi lehet a $K = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-n|$ kifejezés minimuma, $(4 < n \in \mathbb{Z}^+)$?

E2 837. Tekintsük a $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x$ és $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ függvényeket.

a) Ábrázoljuk az f és g függvényt.

b) Vázoljuk az $(f+g)$ függvény grafikonját.

c) Határozzuk meg az $(f+g)$ függvény értékkészletét.

E2 838. Határozzuk meg az alábbi függvények értékkészletét:

a) $a(x) = x^3 - x, x \in [-1,2; 1,1];$

b) $b(x) = 2x(x-1)(x-2), x \in [0,3; 3];$

c) $c(x) = x(x-2)(x+5) + 1, x \in [-5,2; 2,2];$

d) $d(x) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-8), x \in [1,8; 8,1].$

K1 839. Adjunk meg olyan f függvényt, amely a $[0,1]$ intervallumon értelmezett, és

- a) nincs maximuma;
b) nincs maximuma, de korlátos.

E1 840. Bizonyítsuk be, hogy bármely x valós számnak a legközelebbi egész számtól való távolsága $\frac{1}{2} - \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|$.

E2 841. Van-e olyan f függvény, amely minden valós számra értelmezve van, és minden valós értéket pontosan kétszer vesz fel?

V 842. Van-e olyan, a valós számokon értelmezett folytonos f függvény, amely racionális helyen irracionális, irracionális helyeken racionális értékeket vesz fel?

K2 843. Van-e olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ elsőfokú polinomfüggvény, hogy minden x -re

- a) $f(x) + f(x+1) = 2x + 4$; b) $f(x+1) - f(x-1) = 6$;
c) $f(x) + f(x+2) = 10x$; d) $f(2x) + f(x+1) = 12x + 4$?

E1 844. Van-e olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, hogy minden x -re

- a) $f(x) - f(-x) = c$ ($c \in \mathbf{R}$);
b) $f(x) - f(-x) = x + 1$;
c) $f(x) - f(-x) = ax^2 + c$ ($a, c \in \mathbf{R}$)?

E1 845. Van-e olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, hogy minden x -re

- a) $2f(x) + 3f(1-x) = c$ ($c \in \mathbf{R}$);
b) $2f(x) + 3f(1-x) = 6x - 1$;
c) $2f(x) + 3f(2-x) = 2x - 7$;
d) $f(x) + (x+1)f(1-x) = 1$;
e) $7f(x-1) + 5f(-x) = 12x - 10$?

E1 846. Van-e olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, hogy minden x -re

- a) $f(x-1) - f(1-x) = x$; b) $f(x-1) - f(1-x) = x^2$?

E1 847. Van-e olyan $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, hogy minden $x \neq 0$ esetén

- a) $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, b) $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2$?

V 848. Van-e olyan (nem azonosan 0) $f(x)$ polinomfüggvény, melyre teljesül, hogy minden egész x -re

- a) $xf(x-1) = (x+1)f(x)$; b) $(x-1)f(x+1) = (x+2)f(x)$?

E1 849. Hány olyan függvény van, amelyre $f(x) + f(x+2) = c$ (konstans)?

E2 850. Ha az $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ polinomban az x helyébe egy másik $g(x)$ polinomot helyettesítünk, akkor a $h(x) = 12x^4 + 56x^2 + 70$ polinomot kapjuk. Határozzuk meg a $g(x)$ polinom együtthatóinak összegét.

E1 851. Az x és y valós számokhoz az $(x; y) \mapsto \frac{|x-y| + x+y}{2}$ utasítással rendelünk értéket. Hogyan adhatjuk meg egyszerűbben ezt a kétváltozós függvényt?

K2 852. Hány rácsponton megy át az alábbi függvények görbéje? (A derékszögű koordináta-rendszer $P(x; y)$ pontját akkor nevezzük rácspontnak, ha x és y egész szám.)

a) $a(x) = 3x$, $x \in [-20; 20]$;

b) $b(x) = \frac{x}{2} - 1$, $x \in [-20; 20]$;

c) $c(x) = x + c$, ahol $c \in \mathbf{R}$ paraméter;

d) $d(x) = dx$, ahol $d \in \mathbf{R}$ paraméter;

e) $e(x) = \frac{2x}{x-1}$, $x \in [-5; 5]$;

f) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $x \in [-5; 5]$;

E1 g) $g(x) = \frac{3x+1}{2x-2}$;

h) $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $x \in [-20; 20]$;

i) $i(x) = \lg_2 x$, $x \in [-20; 20]$;

j) $j(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^{x-3} + 1$, $x \in [-20; 20]$;

k) $k(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x + 1}$, $x \in [-20; 20]$.

V 853. Lehet-e egy exponenciális és egy logaritmus görbének kettőnél több közös pontja?

IV. Sorozatok

Sorozatok bevezetése

K1 854. Lerajzolok egy M betűt, egy szívet aláhúzva, egy nyolcast és egy dárdát. Hogyan folytatható a sorozat?

854. ábra

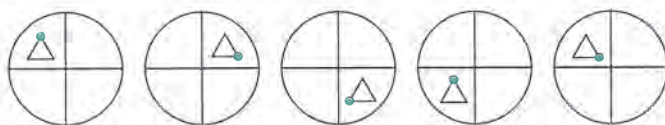


K1 855. Hogyan folytathatjuk az ábrákat? Milyen lesz a 20. alakzat? Milyen lesz a 111. alakzat? És a 778.?

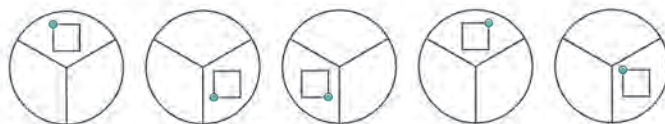
855/a. ábra



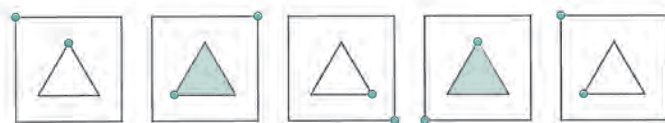
855/b. ábra



855/c. ábra



855/d. ábra



K1 856. Folytassuk az alábbi sorozatokat. Mi lehet a képzési szabály? Mi lehet ez alapján a sorozatok 20. tagja?

a) 10, 11, 13, 17, 25, ...

b) 2, 4, 16, 37, 58, ...

c) 1, 2, 4, 8, 7, 5, ...

K1 857. Az alábbi függvények értelmezési tartománya az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz. Ábrázoljuk a függvényeket. Melyik sorozatok első 6 tagját kaptuk így meg?

a) $a: x \mapsto 5;$

b) $b: x \mapsto x + 3;$

c) $c: x \mapsto 2x - 1;$

d) $d: x \mapsto |x - 3| - 1;$

e) $e: x \mapsto x^2 - 8x + 12;$

f) $f: x \mapsto 2^x;$

g) $g: x \mapsto 3^{x-1}.$

K2 858. Az első (pozitív) páros szám a 2, a második a 4, a harmadik a 6 és így tovább.

a) Melyik a 30. páros szám?

b) Melyik a 200. páros szám?

c) Melyik a 2005. páros szám?

d) Melyik a k . páros szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

e) Melyik a $(2k + 7)$. páros szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

f) Melyik a k^2 . páros szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

K2 859. Az első nemnegatív páros szám a 0, a második a 2, a harmadik a 4 és így tovább.

a) Melyik a 18. nemnegatív páros szám?

b) Melyik a 150. nemnegatív páros szám?

c) Melyik a 2005. nemnegatív páros szám?

d) Melyik a k . nemnegatív páros szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

e) Melyik a $(2k + 3)$. nemnegatív páros szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

f) Melyik a k^2 . nemnegatív páros szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

K2 860. Az első (pozitív) páratlan szám az 1, a második a 3, a harmadik az 5 és így tovább.

a) Melyik a 20. páratlan szám?

b) Melyik a 100. páratlan szám?

c) Melyik a 2005. páratlan szám?

d) Melyik a k . páratlan szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

e) Melyik a $(2k + 1)$. páratlan szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

f) Melyik a k^2 . páratlan szám, $(k \in \mathbb{N}^+)$?

K1 861. A 7, 10, 36, 100, 111, 12 345 számok közül melyek szerepelhetnek és hányadik tagként a sorozatokban?

a) 1, 4, 7, 10, ...

b) 0, 1, 4, 9, ... (a négyzetszámok sorozata)

c) $c_n = n^2 - 12n + 68$, $n \in \mathbb{N}^+;$

d) $d_n = 5n + 2$, $n \in \mathbb{N}^+.$

K1 862. Írjuk fel képlettel az alábbi sorozatok n . tagját, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

a) $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots$

b) $-1, 1, -1, 1, \dots$

c) $-2; -0,5; 0; 0,25; 0,4; 0,5; \dots$

d) az első tag 3, majd minden további tag az előző kétszerese;

e) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$

f) $7, 11, 15, 19, \dots$

K1 863. Szüksük le a pozitív egész számok halmazára az alábbi függvényeket:

a) $a: x \mapsto 2^x$;

b) $b: x \mapsto 2^{x+4}$;

c) $c: x \mapsto 2^{x-3}$;

Az így kapott a, b, c sorozatok 100. tagja egyenlő lesz a másik két sorozat valamelyik tagjával. Melyikkel?

K1 864. Mi az alábbi sorozatok, illetve véges részsorozataik értékkészlete, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

a) $a_n = (-1)^n + 1^n$;

b) $b_n = 2005^n$ utolsó két számjegyéből alkotott szám;

c) $c_n = n^2 - 7n + 10$, ha $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

d) $d_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$;

e) $e_n = \left\lfloor \frac{20}{n} \right\rfloor$;

f) $f_n = \frac{1}{2} \cdot f_{n-1}$, ha $f_1 = 1$, és $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$.

E1 865. Legyen x tetszőleges, egyjegyű pozitív egész szám. Egy számsorozat első eleme x , második eleme x^2 utolsó számjegye, harmadik eleme x^3 utolsó számjegye és így tovább.

a) Mi lehet a sorozat 2005. tagja?

b) Mi lehet a sorozat 15. tagja?

c) Hány elemű lehet a sorozat értékkészlete?

K1 866. Azonosak az alábbi sorozatok, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

a) $(-1)^n$ és $\sin \frac{(4n+1)\pi}{2}$;

b) $(-1)^n$ és $\sin \frac{(n+2)\pi}{2}$;

c) $(-1)^n$ és $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$;

d) $(-1)^n$ és $\cos \frac{\pi}{n}$;

e) $(-1)^n$ és $\operatorname{tg} \frac{(2n+1)\pi}{4}$;

f) $\sin \frac{n\pi}{4}$ és $\cos \frac{(n+1)\pi}{4}$;

g) $\sin \frac{n\pi}{4}$ és $\cos \frac{(n-2)\pi}{4}$;

h) $\sin \frac{n\pi}{4}$ és $\sin \frac{(n+8)\pi}{4}$.

K1 K2 867. Hányadik eleme az alábbi sorozatoknak a 16, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

a) $a_n = 2n + 2$;

b) $b_n = 2n^2 - 3n - 4$;

c) $c_n = n^3 + 3n^2 + 3n - 47$;

d) $d_n = \log_2 \left(\sqrt[n]{2} \right)$;

e) $e_n = 2 \cdot 3^n - 2$;

f) $f_n = 19 \cdot (-1)^n + 3 \cdot (-1)^{n+1}$.

K2 868. Az első 3-mal osztva 2 maradékot adó (pozitív) szám a 2, a második az 5, a harmadik a 8 és így tovább.

a) Melyik a hárommal osztva 2 maradékot adó számok közül a 25.?

b) Melyik a 100.?

c) Melyik a 2005.?

d) Melyik az n ., $(n \in \mathbb{N}^+)$?

e) Melyik a $(2n - 3)$., $(n \in \mathbb{N}^+)$?

K2 869. Keressünk természetes számokból álló sorozatot, amelyben bármely két egymás után következő tag összege egyenlő a tagok négyzeteinek különbségével.

E1 870. Egy számsorozat bármely három szomszédos tagjának szorzata megegyezik a középső szám négyzetével. Az első öt elem szorzata azonos a második öt elem szorzatával, ami éppen 2. Határozzuk meg a sorozat 2005. tagját. $(n \in \mathbb{N}^+)$.

E1 871. Egy számsorozatban bármely 3 szomszédos tag összege 2. A sorozat 10. tagja 3, a 200. tag 8. Mi a sorozat 333. tagja?

V 872. Egy számsorozat első tagja egyjegyű pozitív egész szám. Ezután a sorozat minden egyes tagja a megelőző tag számjegyeinek négyzetösszegével egyenlő.

a) Igaz-e, hogy a sorozat periodikus?

b) Melyik kezdőszámra leghosszabb a periódus?

V Gy 873. Aladár egy dobozba valahány golyót helyezett el (üresen is hagyhatta), Béla megpróbálja kitalálni a golyók számát. Minden rossz tipp után Aladár egy újabb golyót tesz a dobozba. A játéknak akkor van vége, ha tippjével Béla eltalálja az éppen aktuális golyószámot. Hogyan játsszon Béla?

Számtani sorozatok

K1 874. Melyik sorozat számtani az alábbiak közül? (A sorozatokat n -edik tagjukkal adtuk meg, $n \in \mathbb{Z}^+$),

a) $a_n = 3n - 8$;

b) $b_n = 3 + 2(n - 1)$;

c) $c_n = -2,3 + 5,2(2n + 1,7)$;

d) $d_n = \frac{2n + 1}{6}$;

$$e) e_n = \frac{2n+3}{n+1};$$

$$g) g_n = (-1)^n;$$

$$i) i_n = n^2 + 2n - 3;$$

$$k) k_n = \frac{n^2 - 9}{n - 3};$$

$$m) m_n = 0.$$

$$f) f_n = \frac{3}{n} + 1;$$

$$h) h_n = n^2;$$

$$j) j_n = \frac{n^2 - 16}{n + 4};$$

$$l) l_n = 1;$$

K1 875. Tekintsük a $dn + b$ kifejezést, ahol n pozitív egész szám, d és b tetszőleges valós számok. Igaz-e, hogy egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk, ha n helyébe rendre az 1, 2, 3, 4, ... értékeket helyettesítjük?

K2 876. Mutassuk meg, hogy minden számtani sorozat felírható $(dn + b)$ alakban, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, d és b pedig állandó valós számok.

K1 877. Adjuk meg a $(dn + b)$ számtani sorozatban $(n \in \mathbb{N}^+)$ a d és b paraméterek értékét úgy, hogy a sorozat

a) szigorúan növekvő legyen;

b) szigorúan csökkenő legyen;

c) állandó legyen.

Mennyi a differencia értéke az egyes esetekben?

K1 878. Hogyan mutathatjuk meg, hogy egy (a_n) sorozat nem számtani?

K1 879. Mutassuk meg – lehetőleg több módszerrel is –, hogy az alábbi sorozatok nem számtaniak.

$$a) \left(\frac{1}{n}\right); \quad b) (n^2 - 4); \quad c) (2^n); \quad d) \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right).$$

K1 880. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket, ha értelmezési tartományuk az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz:

$$a) x \mapsto x; \quad b) x \mapsto 2x; \quad c) x \mapsto 3x - 1.$$

Mit tapasztalunk?

K1 881. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az $(an + b)$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$ számtani sorozatok első hat tagját, ha:

$$a) a = 1, b = 0; \quad b) a = 2, b = 0; \quad c) a = 3, b = -1.$$

Milyen ponthalmazt határoz meg általában a számtani sorozatok függvényképe?

K2 882. Igaz-e, hogy egy számtani sorozat minden második tagja is számtani sorozatot alkot?

Igaz-e, hogy egy számtani sorozat minden harmadik tagja is számtani sorozatot alkot?

Hogyan általánosíthatunk?

K1 883. Hány elemű lehet egy végtelen számtani sorozat értékkészlete?

K1 884. Egy (a_n) számtani sorozat ötödik tagja 7, tizenegyedik tagja 19. Adjuk meg a sorozat kezdőtagját és differenciáját.

K1 885. Az (a_n) számtani sorozatban $a_4 = -2$, $a_{11} = 5$. Mivel egyenlő a_{2005} ?

K1 886. Egy (a_n) számtani sorozat harmadik tagja 16, tízedik tagja -5 . Határozzuk meg a_n értékét.

K1 887. Egy számtani sorozat nyolcadik tagja 8, differenciája 3. Hány tagja van a sorozatnak 500 és 700 között?

K2 888. Adjuk meg az alábbi számtani sorozatok 100-adik, n -edik, k^2 -edik tagját, $(k, n \in \mathbb{N}^+)$.

a) 1, 4, 7, ...; b) $-4, -2, 0, \dots$;

c) 0,3; 1,3; 2,3; ...; d) 13, 14, 15, ...;

e) $\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, \dots$

K1 889. Körben áll n gyerek. Megszámozzuk őket 1-től n -ig. A 20-as számot kapott gyerekekkel átellenben az 53-as számú áll. Hány gyerek van?

K1 890. Az 1 és 2 számok közé iktassunk be tíz számot úgy, hogy a megadot számokkal együtt egy számtani sorozat első 12 elemét alkossák.

K1 891. Határozzuk meg az alábbi számtani sorozatok első 100, illetve első n tagjának összegét, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

a) 1, 2, 3, ...; b) 10, 11, 12, ...;

c) 1, 4, 7, ...; d) $-4, -2, 0, \dots$;

e) 0,3; 1,3; 2,3; ...; f) $\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, \dots$

K1 892. Határozzuk meg

a) a háromjegyű páros számok összegét;

b) a háromjegyű páratlan számok összegét;

c) a legfeljebb háromjegyű páros, illetve páratlan számok összegét.

E1 893. Határozzuk meg

a) az első $(3n + 7)$ páratlan természetes szám összegét, $(n \in \mathbb{N}^+)$;

b) az első $(2n + 3)$ pozitív egész szám összegét;

c) az első n darab, 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egész szám összegét

K1 894. Határozzuk meg a háromjegyű, hárommal osztható pozitív egészek összegét.

K1 895. Határozzuk meg azoknak a kétjegyű pozitív egész számoknak a összegét, amelyek 4-gyel osztva 1-et adnak maradékkal.

K2 896. Meddig adtuk össze 1-től kezdve a természetes számokat, ha az összegük négyjegyű szám lett?

K2 897. Egy számtani sorozat első eleme -210 , n -edik eleme 228. A közbülső tagok összege 45. Hány közbülső tag van? Írjuk fel az első n tagot.

K1 898. Szorozzuk össze 2 első száz pozitív egész kitevőjű hatványát. Hány jegyű az így kapott $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{100}$ szám?

K1 899. Miért nevezzük *számtani* sorozatnak a számtani sorozatot?

K1 900. Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) számtani sorozatban a_k számtani közepe a_{k-p} -nek és a_{k+p} -nek, $(p < k; p, k, n \in \mathbb{N}^+)$.

K1 901. Mivel egyenlők az (a_n) számtani sorozatban az alábbi kifejezések?

a) $\frac{a_7 + a_9}{2};$

b) $\frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{5};$

c) $\frac{a_7 + a_8 + a_{12} + a_{13}}{4};$

d) $\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{13}}{7};$

e) $\frac{a_6 + a_7 + a_{11} + a_{12} + a_{16} + a_{17} + a_{21} + a_{22}}{8};$

f) $\frac{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{4}.$

K1 902. Egy számtani sorozat ötödik tagja 10. Határozzuk meg az első kilenc tag összegét.

K1 903. Egy fogyó számtani sorozat első 25 tagjának összege 0. Hány pozitív tagja van a sorozatnak?

K2 904. Három szám összege 18, szorzata 192, a három szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a három szám?

K2 905. Négy szám összege 8, szorzata -15 , a négy szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a sorozat?

K2 906. Egy számtani sorozat első két tagjának négyzetösszege 130, a második és a harmadik tag négyzetösszege 202. Határozzuk meg a sorozatot.

K1 Gy 907. Egy vállalat kezdetben 300 terméket gyárt, majd minden héten 5 darabbal többet az előző hetinél.

a) Ezt az ütemet tartva, mennyi idő múlva kétszereződik meg a termelés?

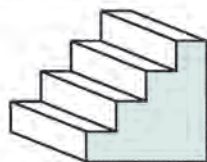
b) Összesen mennyi terméket gyártanak egy év alatt? (Számoljunk 52 héttel.)

K1 Gy 908. Egy lépcsőfeljáró két oldalát a házban lakók mozaiklapokkal szeretnék lefedni (ábra).

a) Hány mozaiklapra van szükségük, ha a feljáró 16 fokból áll, és egy lépcsőfok egyik oldalát 6 lappal fedhetik le?

b) A házban több lépcsőfeljáró is van, különböző számú lépcsőfokokkal. Oldjuk meg a feladatot általánosan: hány mozaiklapra van szükség egy n hosszú lépcsőfeljáró két oldalának burkolásához?

908. ábra



K1 Gy 909. Egy trapéz alakú nézőtér első sorában 20 szék van, majd minden további sorban eggyel több. Összesen 22 sor van a nézőtéren; hány ülőhely van?

K1 Gy 910. Egy trapéz alakú nézőtér első sorában 10 szék van, majd minden további sorban kettővel több. Hány sor szék van a nézőtéren, ha az ülőhelyek száma 252?

K1 Gy 911. Az egyiptomi Rhind-papiruszon (Kr. e. 2000 körül) olvasható következő feladat:

Öt ember között 100 cipót úgy kell elosztanunk, hogy a második ugyanannyi cipót kapjon többet az elsőnél, mint a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél; továbbá a két kisebbik rész összege három nagyobb rész összegének a hetede legyen. (Ez a legrégibb írásos emléke, amelyik sorozat megoldására vezető feladatot tartalmaz.)

Hogyan végezzük el az osztást?

K1 Gy 912. Két, egymástól 119 km távolságra lévő városból egy-egy kerékpáros indul egymással szembe. Az első kerékpáros az első órában 20 km utat tesz meg, és minden további órában 2 km-rel kevesebbet, mint az előzőben. A második kerékpáros, aki két órával később indul, mint az első, az első órába 10 km utat tesz meg, és minden további órában 3 km-rel többet, mint az előzőben. Mikor találkozik a két kerékpáros? Milyen messze van a találkozás helye a két várostól?

K1 Gy 913. Néhány munkás feladatuk kapta egy árok kiásását. Ha kezdettől teljes létszámban dolgoztak volna, akkor 24 óra alatt lettek volna készen munkával. Kezdekor azonban csak egy ember tudott munkába állni, bizonyos idő múlva csatlakozott hozzá a második, ugyanannyi idő múlva a harmadik, és így tovább. A munka befejeztével kiderült, hogy az a munkás, aki elsőnek fogott a munkához, 11-szer több ideig dolgozott, mint az, aki utolsónak állt munkába. Hány órát dolgozott az első munkás? Összesen hány munkás vett részt munkában?

K2 Gy 914. Készítsünk 3×3 -as bűvös négyzetet az 1, 2, 3, ..., 9 számokból. A bűvös négyzetben a sorokban, az oszlopokban és a két főátlóban álló számok összege megegyezik; ez az ún. bűvös állandó. (A feladat első ismert megoldás több mint háromezer évvel ezelőtt írott kínai könyvből származik.)

K2 Gy 915. Mutassuk meg, hogy ha kilenc szám számtani sorozatot alkot, akkor mindig készíthetünk e számokból 3×3 -as bűvös négyzetet.

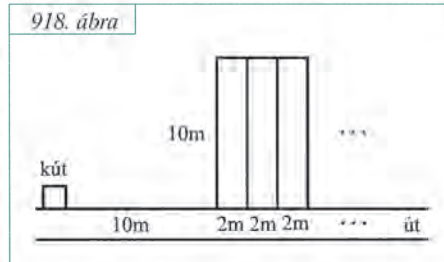


K1 Gy 916. Egy felszámolás alatt álló háztáji gazdaságban 15 tyúkot tartottak. A gazda kiszámolta, hogy ha hetenként minden egyes tyúk egy lite takarmányt fogyaszt el, akkor meddig elég az éppen meglévő takarmány. Azonban a tyúkok száma minden héten eggyel csökkent, és így a tárolt takarmány éppen kétszer annyi ideig tartott, mint eredetileg tervezték. Mennyi takarmányt tároltak eredetileg és mennyi időre szánták?

K2 Gy 917. Egy sakkversenyen hétfő diák vett részt, mindenki játszott mindenkiével. Mérfőzősenként a győzte:

1 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékos fél-fél pontot. Hány pontja volt a diákoknak a körmérkőzés végén, ha a rangsor alapján felírt pontok éppen számtani sorozatot alkottak?

K1 Gy 918. Egy konyhakert a bekötőút egyik oldalán 20 darab 10 méter hosszú és 2 m széles veteményes ágyból áll. A kertész az öntözéshez szükséges vizet a bekötőúton, a kert szélétől 10 méterre lévő kútból hordja (ábra). Minden egyes fordulóval éppen egy-egy ágyást tud megöntözni úgy, hogy a közöttük lévő keskeny utakon teljesen körüljárja az ágyást.



Összesen milyen hosszú utat tesz meg a kertész, míg az egész veteményes kertet megöntözi, ha a kúttól indul, s a végén visszaviszi az üres vödöröket a kúthoz? (A veteményes ágyak közötti út szélességét elhanyagolhatjuk.)

K2 919. Milyen $n > 1$ természetes számokra igaz, hogy n darab szomszédos természetes szám összege osztható n -nel?

K1 920. Tekintsük a k -ad szomszédos $a + k, a + 2k, a + 3k, \dots, a + nk$ pozitív egész számok összegét ($a, k, n \in \mathbb{N}^+, n > 1$). Milyen feltétel esetén osztható az összeg n -nel?

K2 921. Mennyi az $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + \dots$ sorozat első 2005 tagjának összege?

K2 922. Egy (a_n) sorozat első n tagjának összege $3n^2 + 5n$ ($n \in \mathbb{N}^+$). Igaz-e, hogy számtani a sorozat?

K1 923. Hány olyan háromszög van, melynek területe 30 egység, az oldalai egész számok és egy számtani sorozat egymást követő tagjai? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőeknek.)

K1 924. Hány olyan háromszög van, amelynek a szögei fokokban mérve egész számok és egy számtani sorozat egymást követő tagjai? (A hasonló háromszögeket nem tekintjük különbözőeknek.)

K2 925. Hány oldalú az a sokszög, amelynek a szögei egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek az első tagja 120° , a differenciája pedig 5° ?

K1 926. Egy derékszögű háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak, hosszuk egész szám. Mekkora a háromszög szögei?

K2 927. Tekintsük az alábbi táblázatot.

		1		
	2		3	
4	5		6	
7	8	9	10	
11	12	13	14	15 stb.

- a) Milyen szám áll a 100. sor 13. helyén? (A 100. sorban 100 darab szám van.)
 b) Milyen szám áll az n . sor k . helyén, $(k, n \in \mathbb{N}^+, k \leq n)$?
 c) Melyik sorban, hányadik helyen található a táblázatban az 1000?

K2 928. A páratlan számokat beírjuk a következő háromszög alakú táblázatba:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 3 & & 5 & & & \\ 7 & & 9 & & 11 & & \\ 13 & 15 & 17 & 19 & \dots & & \end{array}$$

- a) Számítsuk ki a tizedik sorban álló számok összegét.
 b) Melyik szám áll a 11. sor közepén?
 c) Milyen szám áll az n . sor k . helyén, $(k, n \in \mathbb{N}^+, k \leq n)$?

K1 929. Egy $n \times n$ -es táblázat első sora 1, 2, ..., n ; második sora 2, 3, ..., $n+1$; harmadik sora 3, 4, ..., $n+2$ és így tovább. Mennyi a táblázat elemeinek összege?

K2 930. Egy számtani sorozat első n elemének összege b , első $2n$ elemének összege pedig c . Határozzuk meg az első $3n$ elemének összegét, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

E1 931. A 17, 18, ... szomszédos egész számok sorozatából kivettünk egy tagot. A maradék számok átlaga 52,4 lett. Hány tagú volt eredetileg a sorozat és melyik számot vettük ki?

Mértani sorozatok

K1 932. Melyik mértani sorozat az alábbiak közül? (A sorozatokat n -edik tagjukkal adtuk meg, $n \in \mathbb{N}^+)$.

- | | | |
|----------------------------|---|--|
| a) $a_n = 3n - 8$; | b) $b_n = 2^n$; | c) $c_n = 2 \cdot 3^{n-3}$; |
| d) $d_n = 0,1^n + 3$; | e) $e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+3}$; | f) $f_n = \frac{2n+3}{n+1}$; |
| g) $g_n = 2$; | h) $h_n = (-1)^n$; | i) $i_n = n^2$; |
| j) $j_n = n^2 + 2^n - 3$; | k) $k_n = 0$; | l) $l_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$. |

K1 933. Tekintsük az aq^n kifejezést, ahol n pozitív egész szám, a és q tetszőleges valós számok. Igaz-e, hogy egy mértani sorozat szomszédos tagjait kapjuk, ha n helyébe rendre az 1, 2, 3, 4, ... értékeket helyettesítjük?

K1 934. Adjuk meg az (aq^{n-1}) mértani sorozatban $(n \in \mathbb{N}^+)$ az a és q paraméterek egy lehetséges értékét úgy, hogy a sorozat

- a) szigorúan növekvő legyen;
 b) szigorúan csökkenő legyen;
 c) állandó legyen;
 d) ne legyen sem monoton növekvő, sem monoton csökkenő.

K1 935. Hogyan mutathatjuk meg, hogy egy (a_n) sorozat nem mértani, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

K1 936. Mutassuk meg – lehetőleg több módszerrel is –, hogy az alábbi sorozatok nem mértaniak, $(n \in \mathbb{N}^+)$!

$$\begin{array}{ll} a) \left(\frac{1}{n}\right); & b) (n^2 - 4); \\ c) (2^n + 1); & d) \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right). \end{array}$$

K1 937. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket, ha értelmezési tartományuk az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz:

$$\begin{array}{ll} a) x \mapsto 2^{x-2}; & b) x \mapsto 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}; \\ c) x \mapsto (-2)^{x-1}; & d) x \mapsto 2; \\ e) x \mapsto (-1)^n. \end{array}$$

Mit tapasztalunk?

K2 938. Igaz-e, hogy egy mértani sorozat minden második tagja is mértani sorozatot alkot?

Igaz-e, hogy egy mértani sorozat minden harmadik tagja is mértani sorozatot alkot?

Hogyan általánosíthatunk?

K1 939. Hány elemű lehet egy végtelen mértani sorozat értékkészlete?

K1 940. Egy (a_n) mértani sorozat harmadik tagja 12, hetedik tagja 192. Határozzuk meg a sorozat kezdőtagját és hányadosát! Mi a sorozat explicit alakja, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

K1 941. Az (a_n) mértani sorozatban $a_4 = -8$, $a_{11} = -64 \cdot \sqrt{2}$. Határozzuk meg a_{2005} és a_n értékét.

K1 942. Egy mértani sorozat első tagja 7, kvóciense 2.

- Szerepel-e a sorozatban 10-nek valamelyik hatványa?
- Hány 3-mal osztható szám szerepel a sorozatban?
- A sorozat tagjai között hány tízjegyű szám van?

K2 943. Hány olyan végtelen mértani sorozat van, amelyben

- a harmadik tag -2 és a huszadik tag 0;
- véges sok tag 0;
- végtelen sok, de nem minden tag 0;
- a harmadik tag negatív, a hetedik tag pozitív;
- a harmadik tag -2 , a hetedik tag -162 ?

K2 944. Egy (a_n) mértani sorozat második tagja 6, ötödik tagja $18 \cdot \sqrt{3}$. Hány 1000 és 3000 közé eső tagja van a sorozatnak?

K2 945. Adjuk meg az alábbi mértani sorozatok 100-adik, n -edik, $(8k-5)$ -ödik tagját, $(k, n \in \mathbb{N}^+)$!

- a) 1, 2, 4, ...; b) -4, -2, -1, ...;
 c) 3, -6, 12, ...; d) 0,1; 0,01; 0,001; ...;
 e) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

K1 946. Az 1 és 2 számok közé iktassunk be tíz számot úgy, hogy a megadott számokkal együtt mértani sorozatot alkossanak.

K1 Gy 947. Egy gyáregység termelése havonta az előző havi termelés 1%-ával nő.

- a) Hány százalékkal emelkedik a termelés egy év alatt?
 b) Hány hónap alatt kétszereződik meg a termelés?

K2 948. Egy mértani sorozat harmadik és hetedik tagja is 5. Határozzuk meg az első 10 tag összegét.

K1 949. Mennyi $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}$ értéke?

E1 950. Határozzuk meg az $a_n = aq^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) mértani sorozat első n tagjának összegét.

K1 K2 951. Határozzuk meg az alábbi mértani sorozatok összegét.

- a) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{13}$;
 b) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$;
 c) $9 + 18 + 36 + \dots + 9216$;
 d) $8 + 4 + 2 + \dots + 2^{-12}$;
 e) $-27 + 81 - 243 \pm \dots + (-3)^{n+2}$.

K1 952. Egy mértani sorozat első négy tagjának összege 40, a második, harmadik, negyedik, ötödik tag összege pedig 120. Melyik ez a sorozat?

K2 953. Egy mértani sorozat első hét tagjából az első három elem összege 26, a három utolsó elem összege pedig 2106. Mennyi a hét tag összege?

K1 954. Miért nevezzük *mértani* sorozatnak a mértani sorozatot?

K2 955. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív számokból álló (a_n) mértani sorozatban a_k mértani közepe a_{k-p} -nek és a_{k+p} -nek, $(p < k; p, k, n \in \mathbb{N}^+)$!

K1 956. Mivel egyenlők az (a_n) mértani sorozatban az alábbi kifejezések?

- a) $a_7 \cdot a_9$; b) $\sqrt{a_3 a_5}$;
 c) $\sqrt[3]{a_3 a_4 a_5}$; d) $\sqrt[5]{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$;
 e) $\sqrt[4]{a_7 a_8 a_{12} a_{13}}$; f) $\sqrt[7]{a_1 a_3 a_5 \dots a_{13}}$;
 g) $\sqrt[8]{a_6 a_7 a_{11} a_{12} a_{16} a_{17} a_{21} a_{22}}$; h) $\sqrt[4]{a_4 a_5 a_6 a_7}$.

K1 957. Egy mértani sorozat ötödik tagja 10. Mennyi az első kilenc tag szorzata?

K2 958. Három szám egy mértani sorozat három egymás utáni eleme. A számok összege 26, négyzeteik összege 364. Melyik ez a három szám?

K2 959. Három szám mértani sorozatot alkot. Szorzatuk 1000, összegük 62. Határozzuk meg a sorozatot.

K1 Gy 960. A legenda szerint mintegy 2000 évvel ezelőtt Perzsia uralkodóját rendkívül elbűvölte a sakkjáték szépsége. Maga elé idézte a játék feltalálóját, hogy személyesen jutalmazza meg találmányaért. A „szerény” bölcset azt kérte, hogy helyezzenek a tábla első négyzetére egy szem búzát, a másodikra két szemet, a harmadikra négyet, a negyedikre nyolcat és így tovább; s ezen búza-szemek összege legyen a jutalma. A kérése nem volt teljesíthető. Miért?

K1 Gy 961. Egy irodai eszköz beszerzési ára 85 000 Ft. Mekkora értékkel tartják nyilván a leltárban 5 év múlva, ha félévente 5%-kal csökken az értéke?

K1 Gy 962. Hány hajtásvonal látható az n -szer párhuzamosan hajtogatott papírlapon, ($n \in \mathbb{N}^+$)?

K1 Gy 963. Egy papírlapot először függőlegesen, majd vízszintesen félbehajtunk. Ezután ismét függőlegesen, majd vízszintesen hajtjuk félbe és így tovább. Összesen 8 hajtogatást végzünk.

a) Mekkora az összehajtogatott papír mérete, ha az eredeti $20 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ -es volt?

b) Hány függőleges és vízszintes hajtásvonal lesz a kihajtogatott papíron?

c) Mekkora a párhuzamos hajtásvonalak távolsága?

K1 Gy 964. 10 évre vonatkozóan összehasonlították két vállalat termelését. Kezdetben az I. vállalat termelése 100 egység, a II. vállalaté 80 egységnyi volt. Az I. vállalat termelése félévenként 3%-kal nőtt, a II. vállalaté félévenként 5%-kal.

a) Utolérte-e a II. vállalat termelése az I. vállalatét? Jelenleg melyik termel többet?

b) Melyik vállalat termelt többet a 10 év alatt?

K2 Gy 965. 10 évre vonatkozóan összehasonlították két vállalat termelését. Kezdetben mindkét vállalat termelése egyenlő volt, s a 10. év végére mindkét vállalat megduplázta termelését. Az I. vállalat termelése évente mindig ugyanannyival növekedett, a II. vállalat termelése minden évben ugyanannyi százalékos volt.

a) Mutassuk meg, hogy az I. vállalat többet termelt a 10 év alatt.

b) Azonos ütemű fejlődést feltételezve, hány év múlva „előzi meg” a II. vállalat össztermelése az I. vállalatét?

K1 Gy 966. Egy papírlapot hatszor egymás után félbehajtunk. Ezután egy lyukasztóval átlukasztjuk a papírt, majd kihajtogatjuk.

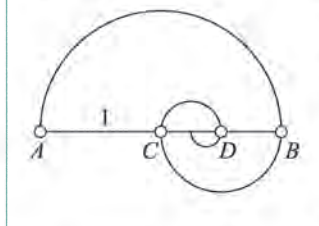
a) Hány lyuk lesz a kihajtogatott papíron?

b) Hány lyuk lesz a kihajtogatott papíron, ha kezdetben három lyukat ütöttünk?

K1 Gy 967. Egy kereskedő az első vevőnek eladta összes almájának felét és még egy fél almát. A második vevőnek eladta a maradék almák felét és még egy fél almát; a harmadiknak ismét a maradék almák felét és még egy fél almát és így

tovább, egészen a hetedik vevőig. Ezután több almája nem maradt. Hány almája volt eredetileg?

968. ábra



K2 968. A 2 egység hosszú AB szakasz egyik oldalára mint átmérőre félkört rajzolunk; a B pontból folytatva a szakasz másik oldalára az $\frac{1}{2}$ sugarú BC félkört emeljük; ezután ismét a szakasz innenső felére rajzolunk folytatólágosan $\frac{1}{4}$ sugarú félkört és így tovább. Az eljárást az $\frac{1}{4}$ sugarú félkörökkel folytatjuk (ábra).

- Mekkora lesz az így kapott, félkörívекből álló vonal hossza 10 lépés után?
- Hány lépés után kapunk hosszabb spirális, mint az AB átmérőjű kör kerülete?
- Mekkora lesz 10 lépés után a spirális hossza, ha nem befelé, hanem kifelé haladunk? (A második félkör sugara 2 egység, a harmadiké 4, stb.)

K2 969. Egy 60° -os szögtartományba a szögszárakat és egymást is érintő 5 kört rajzolunk. Ha a középső kör sugara r , mekkora a többi kör sugara?

K1 Gy 970. A papucsállatkák átlagban 27 óra alatt osztódnak ketté. Ha a szaporodásukat semmilyen külső tényező nem befolyásolná, mennyi időre lenne szükség ahhoz, hogy egyetlen papucsállatka utódainak térfogata egyenlő legyen a Föld térfogatával? (A papucsállatkák 40. generációja összegyűjtve kb. 1 m^3 térfogatú; a Föld térfogata $\approx 10^{12} \text{ km}^3$.)

K1 Gy 971. Egy papírlap vastagsága 0,1 mm.

- Hányszor kellene félbehajtanunk, hogy felülete legalább ezredrészére csökkenjen?
- Elméletileg legalább hányszor kellene félbehajtanunk a papírt, hogy a hajtogatás után a vastagsága elérje a Föld–Hold távolságot (kb. 384 ezer km)?

K2 972. Adjunk képletet az alábbi sorozatok n . tagjára, ($n \in \mathbb{N}^+$):

- $9, 99, 999, \dots, \underbrace{99\dots9}_{n\text{-szer}}, \dots$;
- $5, 45, 455, \dots, \underbrace{45\dots5}_{n\text{-szer}}, \dots$;
- $12, 1122, 111222, \dots, \underbrace{111\dots122}_{n\text{-szer}}\dots2, \dots$

K2 973. Mennyi az alábbi g alapú számrendszerbeli számok értéke a tízes számrendszerben, ($g \in \mathbb{N}^+, g > 3$)?

- $\underbrace{11\dots1}_{n\text{-szer}};$
- $\underbrace{2323\dots23}_{2n \text{ db}};$
- $\underbrace{22\dots2}_{n\text{-szer}}\underbrace{233\dots3}_{n\text{-szer}}.$

K1 Gy 974. Az A0-s méretű papírt hosszabbik oldalánál félbehajtva kapjuk az A1-es papírt; ezt ismét a hosszabbik oldalánál félbehajtva kapjuk az A2-est és így tovább. Az A4-es papír közelítő mérete $21\text{ cm} \times 29,7\text{ cm}$.

- a) Mekkora az A0-s papír mérete és területe?
- b) Mekkora az A5-ös papír mérete és területe?
- c) Mekkora lenne az A10-es papír mérete és területe?

K1 Gy 975. 1 liter vízben feloldunk 5 g sót. Ezután a víz ötödét kiöntjük, helyére tiszta vizet töltünk. Ezt a műveletet további 9-szer (összesen 10-szer) megismételjük. Mennyi só marad az 5 g-ból? (Ideális keveredést tételezünk fel.)

K1 Gy 976. Egy 20 literes vízzel teli edényből kiöntünk 1 liter vizet és helyébe 1 liter alkoholt töltünk. Ezenletesen elkeverjük, majd ismét kiöntünk 1 liter folyadékot és helyébe 1 liter alkoholt öntünk. Az eljárást összesen 15-ször hajtjuk végre. Az eljárás végén mennyi tiszta alkohol lesz az edényben?

E1 Gy 977. 1 000 000 Ft-os hosszú lejáratú kölcsönt vettünk fel, évi 8%-os kamatra. A törlesztő részlet minden év végén 100 000 Ft.

- a) Hány év alatt fizetjük vissza a tartozást?
- b) Összesen mekkora a visszafizetett összeg?

K2 Gy 978. A normál a hang frekvenciája 440 Hz, az egy oktávval magasabb a hangé 880 Hz. Az oktávhoz tartozó félhangok frekvenciáit megkaphatjuk, ha ezt a hangközt 12 részre osztjuk úgy, hogy az egyes frekvenciák mértani sorozatot alkossanak. Mekkora az egyes félhangok frekvenciája?

K1 979. Három szám egyszerre alkot mértani és számtani sorozatot is. Határozzuk meg az összes ilyen tulajdonságú véges sorozatot.

K1 980. Három szám számtani, reciprokaik mértani sorozatot alkotnak. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú számhármast.

K2 981. Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első és a második eleme; a mértani sorozat harmadik eleme 1-gyel nagyobb a számtani sorozat harmadik eleménél, és 3-mal nagyobb a mértani sorozat első eleménél. Írjuk fel mindkét sorozat első három elemét.

K2 982. Három szám számtani sorozatot alkot, összegük 15. Ha a középső számból 1-et kivonunk, egy mértani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Mi lehet a három szám?

K2 983. Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha a középső számhoz 4-et adunk, a három szám számtani sorozatot alkot. Mi lehet a három szám?

K2 984. Három szám, amelyeknek összege 114, egy mértani sorozat első három eleme, de tekinthetők egy számtani sorozat 1., 4. és 25. elemének is. Melyik ez a három szám?

K2 985. Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha az elsőhöz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a kapott három szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a három szám?

K2 986. Három pozitív szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Ha a másodikhoz hozzáadunk négyet, egy számtani sorozat három egymás utáni tagját kapjuk. Végül, ha ezután a harmadik tagot 32-vel növeljük, ismét egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik ez a három szám?

K2 987. Négy szám közül az első három egy számtani, az utolsó három pedig egy mértani sorozat három szomszédos eleme. A két szélső szám összege 22, a két középső szám összege 20. Melyik ez a négy szám?

K2 988. (a_n) nem állandó számtani sorozat. Melyik számtani, melyik mértani az alábbi sorozatok közül?

- a) $(a_n + a_{n+1})$; b) $(a_{n+1} - a_n)$; c) $(2a_n)$;
d) (a_n^2) ; e) (2^{a_n}) .

K1 989. (a_n) és (b_n) számtani sorozat. Melyik számtani, melyik mértani az alábbi sorozatok közül?

- a) $(a_n + b_n)$; b) $(a_n - b_n)$; c) $(2a_n - 3b_n)$.

K1 990. (a_n) pozitív tagokból álló mértani sorozat. Melyik számtani, melyik mértani az alábbi sorozatok közül?

- a) $(a_n + a_{n+1})$; b) $(a_{n+1} - a_n)$;
c) $(2a_n)$; d) (a_n^2) ;
e) $(\sqrt{a_n})$; f) $\left(\frac{1}{a_n}\right)$;
g) $(\lg a_n)$.

K1 991. Tekintsük egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első $2n$ tagját $(n \in \mathbb{N}^+)$. Ha minden tagot összeadunk, az összeg háromszor akkora lesz, mint amikor közülük csak a páratlan sorszámú tagokat adjuk össze. Mekkora a sorozat hányadosa?

K2 992. Egy (a_n) mértani sorozat első nyolc tagjának összege 250. Tudjuk továbbá, hogy $(a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 150$. Határozzuk meg a sorozatot.

K2 993. Egy háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak.

- a) Milyen értékeket vehet fel a sorozat hányadosa?
b) Lehet-e derékszögű a háromszög?

K2 994. Határozzuk meg az alábbi mértani sorozatok első n tagjának összegét (S), szorzatát (P), négyzetösszegét (N) és reciprokeinak összegét (R). $(n \in \mathbb{N}^+; 0$ nem eleme a sorozatnak.)

- a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; b) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

E1 995. Egy mértani sorozat első eleme 3, az első n elem összege 93. Ugyanezen elemek reciprokok értékeinek összege $\frac{31}{48}$. Határozzuk meg a sorozat első n tagját.

K2 Gy 996. Egy erdőben a faállomány egy időpontban $10\,000\text{ m}^3$. Ettől kezdve a faállomány 20 éven át átlagosan 6%-kal gyarapodik. A 20. év végén ritkítás céljából kivágják az állomány 10%-át. Ettől kezdve az gyarapodás 15%-os lesz. A 10%-os ritkítást a 23. és a 26. év végén is megismétlik. Az évi gyarapodás 15%-os marad. Mennyi fát termelnek ki összesen a három ritkítás alkalmával, s mekkora lesz a faállomány a 26. év végére?

E1 997. Egy mértani sorozatban $a_1 + a_3 + a_5 = 63$, $a_2 + a_4 = 30$. Melyik ez a sorozat?

Rekurzív sorozatok

Explicit és rekurzív alakok

A sorozat explicit megadása azt jelenti, hogy az a_n tagot olyan képlettel adjuk meg, amely csak n -től függ (tehát nem függ a sorozat korábbi tagjaitól).

A rekurzív formula olyan egyértelmű utasítás, amellyel a sorozat tagjait a korábbi tagok segítségével fejezhetjük ki. Ekkor a sorozat bizonyos számú kezdő-tagját előre meg kell adni, hiszen csak így tudjuk a később következő tagokat meghatározni.

E1 998. Adjuk meg az alábbi sorozatok explicit és rekurzív alakját.

- a) 2, 2, 2, ... (konstans sorozat);
- b) 6, 8, 10, ... (számtani sorozat);
- c) -2, 0, 2, ... (számtani sorozat);
- d) 8, 16, 32, ... (mértani sorozat);
- e) -4, 2, -1, 0,5, ... (mértani sorozat);
- f) -2, 2, -2, 2, ... (a tagok periodikusan ismétlődnek);
- g) 3, 7, 3, 7, ... (az első két tag periodikusan ismétlődik);
- h) 5, 6, 8, 11, 15, ... (a szomszédos tagok különbsége számtani sorozat);
- i) 7, 7 + 9, 7 + 9 + 11, 7 + 9 + 11 + 13, ... (az összeadandók számtani sorozatot alkotnak);
- j) 1, 1 · 2, 1 · 2 · 3, 1 · 2 · 3 · 4, ... (a tényezők számtani sorozatot alkotnak);
- k) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ (számtani sorozat reciprokai);
- l) $\sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \dots$ (számtani sorozat tagjaiból vonunk négyzetgyököket).

E1 999. Adjuk meg az alábbi – explicit módon megadott – sorozatok egy rekurzív alakját, ($n \in \mathbb{N}^+$).

- a) $a_n = 2n - 3$;
- b) $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- c) $c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$;
- d) $d_n = (-1)^{n+1}$;

$$e) e_n = (-2)^n;$$

$$f) f_n = \frac{2n+3}{n};$$

$$g) g_n = \frac{5}{4} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{4}.$$

Rekurziók osztályozása

A sorozatokat jellemezhetjük attól függően, hogy a rekurziós összefüggésben – a sorozat hány korábbi tagja szerepel (vagyis hányadrendű a rekurzió);
– található-e konstans tag (ha nem, a rekurzió homogén, egyébként inhomogén);
– a tagok milyen hatványkitevővel szerepelnek (lineáris, másodfokú stb. rekurzió).

E1 1000. Jellemezzük az alábbi rekurzív sorozatokat.

$$a) a_n = a_{n-1} + d \text{ (ha } n \geq 2), a_1 = c \text{ (} c, d \text{ állandó);}$$

$$b) b_n = qb_{n-1} \text{ (ha } n \geq 2), b_1 = c \text{ (} c, q \neq 0 \text{ állandók);}$$

$$c) c_n = nc_{n-1} \text{ (ha } n \geq 1), c_0 = 1;$$

$$d) d_n = d_{n-1}^2 \text{ (ha } n \geq 2), d_1 \text{ adott;}$$

$$e) e_n = \frac{1}{e_{n-2}} \text{ (ha } n \geq 3), e_1, e_2 \text{ adottak;}$$

$$f) f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ (ha } n \geq 2), f_0 = f_1 = 1;$$

$$g) g_n = g_{n-1} \cdot g_{n-2} + g_{n-4} \text{ (ha } n \geq 5), g_1, g_2, g_3, g_4 \text{ adottak.}$$

E1 1001. Adjuk meg a 2, 4, 6, ... számtani sorozatot

$$a) \text{ elsőrendű lineáris rekurzióval; } b) \text{ másodrendű lineáris rekurzióval;}$$

$$c) \text{ negyedrendű lineáris rekurzióval; } d) \text{ nemlineáris rekurzióval.}$$

Teljes indukció

A rekurzív összefüggés alapján felírhatjuk a sorozat néhány kezdőtagját, s innen megsejthetjük az explicit alakot; majd a sejtést pl. teljes indukcióval bizonyítjuk.

E1 1002. Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$), sorozat 100. tagját, ha:

$$a) a_1 = 1; \quad b) a_1 = 10.$$

E1 1003. Határozzuk meg az $a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}$, $\left(n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2, a_1 = \frac{1}{2} \right)$

sorozat explicit alakját.

E1 1004. Az $a_n = 2a_{n-1} - 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$, $a_1 = 2$) sorozat mely tagjai oszthatók 3-mal?

Elsőrendű lineáris rekurziók

A számtani sorozat $a_n = a_{n-1} + d$ ($n \geq 2$), $a_1 = c$ (c, d állandó) rekurzív formuláját általánosíthatjuk pl. úgy, hogy a képletben a d konstans helyett egy n -től függő változót szerepeltetünk. Ha a változót f_n -nel jelöljük, akkor az $a_n = a_{n-1} + f_{n-1}$ ($n \geq 2$, $a_1 = c$, c állandó) rekurziót kapjuk.

E1 1005. Határozzuk meg az $a_n = a_{n-1} + f_{n-1}$ ($n \geq 2$, $a_1 = c$, ahol c állandó) rekurzív sorozat explicit alakját.

E1 1006. A 10, 14, 19, 25, 32, ... sorozat szomszédos tagjainak különbségei számtani sorozatot alkotnak.

a) Mi lehet a sorozat 2005. tagja?

b) A sorozat mely tagjai oszthatók 3-mal?

E1 1007. Hány átlója van egy konvex n -szögnek, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 3$)?

E2 1008. Legfeljebb hány részre osztja n egyenes a síkot, ($n \in \mathbb{N}$)?

E2 1009. Legfeljebb hány részre osztja n kör a síkot, ($n \in \mathbb{N}^+$)?

E2 1010. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n darab párhuzamos helyzetű téglalap, ($n \in \mathbb{N}^+$)?

További általánosítási lehetőség, amikor az $a_n = b \cdot a_{n-1} + c$ képletben az a , b , c együtthatók állandók, de $b \neq 1$.

E2 1011. Adjuk meg az $a_n = b \cdot a_{n-1} + c$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$, $a_1 = e$) rekurzív sorozat explicit alakját.

E2 1012. Határozzuk meg az $a_n = 2a_{n-1} + 1$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$, $a_1 = 3$) sorozat explicit alakját.

E2 1013. Határozzuk meg az $a_n = 3a_{n-1} - 8$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$) sorozat 20. tagját, ha

a) $a_1 = 4$; b) $a_1 = 5$.

c) Mivel egyenlő a_n ?

V 1014. Adjuk meg az $a_n = b_n \cdot a_{n-1} + c_n$ ($n \geq 1$, $a_0 = e$) általános elsőrendű lineáris rekurzió megoldását.

E2 1015. Határozzuk meg az $a_n = 2a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$) sorozat explicit alakját.

E2 1016. Határozzuk meg az $a_n = 2a_{n-1} + n$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$) sorozat explicit alakját.

V 1017. Vizsgáljuk meg az $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $a_0 = 1$) rekurziót.

a) Határozzuk meg a sorozat explicit alakját.

b) Írjuk fel a sorozat első n elemének összegét n függvényeként.

c) Állapítsuk meg, hogy a sorozat mely tagjai oszthatók 5-tel.

E1 1018. Valaki évente 20 000 Ft-ot rak a takarékpénztárba évi 5% kamatos kamatra. Hány év múlva lesz 1 000 000 Ft-ja?

Másodrendű rekurziók

A másodrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris rekurziók általános alakja $a_n = b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_0, a_1 adottak, $b, c \neq 0$ konstansok).

E2 1019. Adjuk meg az $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ ($n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$) rekurzív sorozat explicit alakját.

E2 1020. Adjuk meg az $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^+$) rekurzív sorozat explicit alakját, ha

a) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$; b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$; c) $a_0 = 1$, $a_1 = -2$.

E2 1021. Adjuk meg az $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$, $a_0 = -2$, $a_1 = 3$) rekurzív sorozat explicit alakját.

E1 Gy 1022. A következő híres feladat *Leonardo Pisano* (1175–1250), ismertebb nevén *Fibonacci* könyvéből való; a továbbiakban pedig ennek alkalmazására látunk néhány példát.

Hány pár nyúl származik egy évben egyetlen pártól, ha minden pár havonta egy új párt szül, és minden új pár kéthónapos korától kezdve válik tenyészképessé? (Évközben egyetlen nyúl sem pusztul el.)

E1 1023. Hányféleképpen lehet 12 forintot 1 és 2 forintosokkal kifizetni, ha az érmék sorrendjét is figyelembe vesszük?

E1 1024. Hányféleképpen lehet egy 12 szintes lépcső tetejére felmenni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőt léphetünk? (Két út akkor azonos, ha minden lépésben ugyanarra a lépcsőfokra lépünk.)

E1 1025. Hányféleképpen lehet 2×1 -es dominókkal lefedni egy 2×12 -es táblázatot? (A dominók nem fedik egymást és nem lógnak ki a tábláról.)

E1 1026. Piros és kék színű üveggolyókból tíz golyó hosszúságú láncot készítünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha nem akarjuk, hogy kék golyók kerüljenek egymás mellé?

E1 1027. Hányféleképpen lehet egy tízszemélyes padra fiúkat és lányokat leültetni úgy, hogy lány lány mellé ne ülhessen?

E2 1028. Határozzuk meg az $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 3$), $f_1 = f_2 = 1$ Fibonacci-sorozat explicit alakját.

E2 1029. Hányféleképpen lehet egy 12 szintes lépcső tetejére felmenni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőt léphetünk, és az 5. fokra – pl. biztonsági okokból – nem léphetünk rá?

V 1030. Hányféleképpen lehet egy 100 szintes lépcső tetejére felmenni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőt léphetünk, és az 5. fokra – pl. biztonsági okokból – nem léphetünk rá?

V 1031. Határozzuk meg az $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$) rekurzív sorozat explicit alakját.

E1 1032. $a_{20} = 2$, $a_{100} = 5$, $a_{n+1} = -a_n - a_{n-1} + 3$, ha $n \geq 2$. Határozzuk meg a sorozat n . tagját.

Vegyes rekurziók

E1 1033. Tekintsük az 1, 11, 111, ... sorozatot. A sorozat mely tagjai oszthatók 7-tel?

E1 1034. Adjuk meg az (a_n) sorozat explicit alakját, ha $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, és $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$, ha $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^+$.

E2 Gy 1035. Tíz év alatt minden év elején 100 000 forintot teszünk a bankba. Tíz év leteltével 100 000 forintot veszünk ki évenként. Mennyi pénzünk lesz a huszadik év végén, ha évi 8%-os a kamat? Mikor fogy el a pénzünk?

E2 Gy 1036. Tíz év alatt minden év elején 100 000 forintot teszünk a bankba. Tíz év leteltével egyenlő összegeket akarunk felvenni minden év végén úgy, hogy a 10 év letelte után ne maradjon pénzünk. Mekkora összeget vegyünk fel évente, ha évi 8%-os a kamat?



E1 1037. Melyek azok az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ mértani sorozatok, amelyben $a \neq 0$, és minden n pozitív egész számra az $a_n = \frac{1}{6}(a_{n+2} - a_{n+1})$ egyenlőség érvényes?

E2 1038. Az $A_1, A_2, \dots$ sorozatra az $A_{n+1} = A_n - A_{n-1} + A_{n-2}$ képlet érvényes ($n \in \mathbb{N}^+$), $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 2$. Határozzuk meg a_{2005} értékét.

E1 1039. Az (a_n) sorozatra $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$.

Határozzuk meg a sorozat n . tagját.

V 1340. Az a_n sorozatra $a_0 = a_1 = 1$ és $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$, ha $n \geq 0$. Határozzuk meg a_{2005} értékét.

E2 1041. Amikor Attila felmegy a lépcsőházban, lépésenként 1, 2 vagy 3 fokot halad egyszerre.

a) Hányféleképpen tud felmenni a 10 hosszú lépcsőn? (Az utolsó fokon kell befejezni az utat; két út akkor azonos, ha minden lépésben ugyanarra a lépcsőfokra lép.)

b) Hányféleképpen tud felmenni a 10 hosszú lépcsőn, ha a 6. lépcsőfokra nem lép rá? (Korábban már egyszer elesett ott.)

V 1042. Mi a hiba az alábbi feladat megoldásában? (Oldjuk is meg a feladatot.)
Feladat: „Bontsunk fel egy háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy bárhol kiválasztva három pontot a felbontást adó háromszögek csúcsai közül, azok ne essenek egy egyenesre. Igazoljuk, hogy a felbontásban szereplő kis háromszögek száma csak páratlan szám lehet.”

Megoldás (hibás): „Tegyük fel, hogy a háromszög belsejében $n - 1$ pontot felvéve H_{n-1} kis háromszöget kapunk. Az n . pont valamelyik kis háromszög belsejébe kerül. Ha ennek csúcsaival összekötjük a pontot, a felbontást adó háromszögek száma kettővel nő. Így a $H_n = H_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$, $H_1 = 3$) rekurziót kapjuk, melynek megoldása $H_n = 2n + 1$ ($n \geq 1$).”

V Gy 1043. Egy számítógéppel a következő sorozatot vizsgáljuk:

Legyen $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, s minden további tagra $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 2$).

A gép a rekurzív összefüggés egymásutáni alkalmazásával rendre kiszámolja a sorozat tagjait. Mit várunk pl. a_{200} értékére?

E2 1044. Az (a_n) és (b_n) rekurzív sorozatokra $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$ és $a_1 = b_1 = 1$. Adjuk meg a_{100} és b_{100} értékét, ha

a) $b_n = b_{n-1} + 2$; b) $b_n = b_{n-1} + n$; c) $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$.

E2 1045. Az (a_n) , (b_n) , (c_n) sorozatokat a következőképpen képezzük:

$a_n = b_{n-1} - c_{n-1}$, $b_n = c_{n-1} - a_{n-1}$, $c_n = a_{n-1} - b_{n-1}$, ha $n \geq 2$, s legyen $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$.

a) Megválaszthatjuk-e a kezdő a , b , c egész számokat úgy, hogy a_{2004} éppen 2004 legyen?

b) Adjuk meg az (a_n) , (b_n) , (c_n) sorozatok explicit alakját.

V 1046. Az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ pontok egy körvonalon helyezkednek el. Hányféleképpen lehet legfeljebb 100 szín felhasználásával kiszínezni a pontokat úgy, hogy a szomszédos pontok különböző színűek legyenek?

Vegyes feladatok

E1 1047. Határozzuk meg az alábbi hatványösszegeket ($n \in \mathbb{N}^+$).

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$; b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

E1 1048. Határozzuk meg az alábbi hatványösszegeket.

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$; b) $7^2 + 8^2 + 9^2 + \dots + 17^2$;

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$; d) $5^3 + 6^3 + 7^3 + \dots + 13^3$.

E1 1049. Határozzuk meg az alábbi hatványösszegeket.

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2$; b) $7^2 + 9^2 + 11^2 + \dots + 33^2$;

c) $3^2 + 7^2 + 11^2 + \dots + (4k-1)^2$; d) $8^2 + 10^2 + 12^2 + \dots + 34^2$;

e) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3$; f) $5^3 + 8^3 + 11^3 + \dots + 23^3$.

E1 1050. Határozzuk meg az alábbi összegek értékét ($n \in \mathbb{N}^+$).

$$a) S_a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2005} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2005} \right) + \\ + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{3}{2005} \right) + \dots + \left(\frac{2004}{2005} \right);$$

$$b) S_b = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}};$$

$$c) S_c = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)};$$

$$d) S_d = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$e) S_e = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

E1 1051. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = 9 \text{ egyenletet}$$

($n \in \mathbb{N}^+$).

E1 1052. Határozzuk meg az alábbi összegeket ($n \in \mathbb{N}^+$).

$$a) S_a = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_{10\text{-szer}};$$

$$b) S_b = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{n\text{-szer}};$$

$$c) S_c = a + aa + \dots + \underbrace{aa\dots a}_{n\text{-szer}}.$$

E1 1053. Hányszor fordul elő az 1-es számjegy az $N = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{2005\text{-szor}}$ szám tízes számrendszerbeli alakjában?

K2 1054. Milyen szabályosság vehető észre az alábbi műveletekben? Folytatódik-e ez a továbbiakban is?

$$11 - 2 = 3 \cdot 3;$$

$$1111 - 22 = 33 \cdot 33;$$

$$111111 - 222 = 333 \cdot 333;$$

$$11111111 - 2222 = 3333 \cdot 3333.$$

E1 1055. Milyen szabályosság vehető észre az alábbi műveletekben? Mi lehet az ötödik sor? Folytatódik-e a szabályosság a továbbiakban is?

$$3^2 + 4^2 = 5^2;$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2;$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2;$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2.$$

E1 1056. Határozzuk meg az alábbi összegeket, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

- a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$;
 b) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2)$;
 c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \dots + n(n+3)$;
 d) $1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$;
 e) $n \cdot 1 + (n-1) \cdot 3 + (n-2) \cdot 5 + \dots + 1 \cdot (2n-1)$;
 f) $1 \cdot (a-1) + 2 \cdot (a-2) + \dots + n(a-n)$.

E1 1057. Határozzuk meg az alábbi összegeket, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

- a) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$;
 b) $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + \dots + n(n+2)(n+4)$;
 c) $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n + \dots + (n-1) \cdot n$, $(n \geq 2)$.

K2 1058. Határozzuk meg az alábbi összegeket, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

- a) $S_a = 8 + 4 + 2 + \dots + \frac{1}{2^n}$;
 b) $S_b = 1 - 3 + 3^2 \pm \dots + 3^{2n}$;
 c) $S_c = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

K2 1059. Határozzuk meg azon n értékeket, amelyekre az $S = -1^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + 4^2 \pm \dots + (2n)^2$ összeg értéke prímszám, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

E1 1060. Bizonyítsuk be, hogy az $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$ szorzat kisebb, mint 0,1!

K2 1061. Bizonyítsuk be, hogy $(1+2)(1+2^2)(1+2^4) \dots (1+2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} - 1$, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

K2 1062. a) Mennyi az $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{400}\right)$ szorzat értéke?

b) Hozzuk egyszerűbb alakra az $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ kifejezést, $(n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$.

E1 1063. Mutassuk meg, hogy

- a) $51 \cdot 52 \cdot \dots \cdot 100 = 2^{50} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 99$;
 b) $(n+1)(n+2) \dots (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

E2 1064. Mennyi a $2^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{16}} \cdot \dots \cdot \left(2^n\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ szorzat értéke, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

K2 1065. Adjunk meg két szigorúan növekvő, természetes számokból álló számtani sorozatot úgy, hogy

- a) ne legyen közös elemük;
 b) csak egy közös elemük legyen.

K2 1066. Van-e olyan nem állandó, természetes számokból álló számtani sorozat, amelynek

- a) egyik tagja sem négyzetszám;
- b) egyik tagja sem köbszám;
- c) minden tagja prím?

K2 1067. Van-e olyan különböző természetes számokból álló számtani sorozat, melyben

- a) bármely tag prím;
- b) bármely két szomszédos tag relatív prím;
- c) bármely két tag relatív prím?

K2 1068. Adjunk meg olyan természetes számokból álló, nem állandó számtani sorozatot, amelynek egyik eleme sem áll elő két pozitív prím összegeként.

K2 1069. Van-e olyan pozitív tagokból álló mértani sorozat, melynek hányadosa irracionális, és

- a) végtelen sok racionális tagja van;
- b) véges sok irracionális tagja van?

K2 Gy 1070. Egy légritkító szivattyú a dugattyú minden felhúzásakor 8%-kal csökkenti az edényben lévő levegő nyomását. Az eredeti nyomás az edényben 10^5 Pa.

- a) Mekkora lesz a nyomás a dugattyú 20 felhúzása után?
- b) Hányszor kell felhúzni a dugattyút ahhoz, hogy az edényben a nyomás 100 Pa legyen?

K2 1071. Egy téglatest térfogata 192 cm^3 , az egy csúcsban összefutó élek hosszának összege 18 cm. Az élek hosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a téglatest felszíne?

K2 1072. Egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. Mekkora a legnagyobb és a legkisebb oldal aránya, ha a háromszögnek van

- a) 100° -os;
- b) 120° -os szöge?

K2 1073. Egy háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak. A háromszög kerülete 30 cm, legrövidebb és leghosszabb oldalának szorzata 96 cm^2 . Mekkora a háromszög területe?

K2 Gy 1074. Az $1, 2, 3, \dots, n^2$ számokból bővös négyzetet készítettünk. Mennyi a bővös állandó értéke? (A sorokban, az oszlopokban és a két főátlóban álló számok összege megegyezik; ez az ún. bővös állandó.)

K2 Gy 1075. Egy sakkversenyen minden versenyző egyszer játszott a többi versenyzővel. A verseny végén megállapították, hogy a versenyzők elért pontszámai egy olyan csökkenő számtani sorozat egymást követő elemei, melyek között a különbség 0,5. Az utolsó helyezett 3,5 pontot szerzett. Hány pontja volt a győztesnek? (Győzelemért 1, döntetlenért 0,5 pont jár.)

E1 1076. Lehetnek-e $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{5}$ ugyanannak a számtani sorozatnak elemei?

E1 1077. Lehetnek-e $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{5}$ ugyanannak a mértani sorozatnak elemei?

E1 1078. Állítsuk elő az 1024-et szomszédos természetes számok összegeként.

K2 1079. Melyek azok az x valós számok, amelyekre $\sin x$, $\sqrt{\cos x}$, $\operatorname{tg} x$ egy mértani sorozat egymás utáni tagjai?

K2 1080. Melyik az a téglalap, amelynek három, egy csúcsba futó éle egy mértani sorozat, e csúcsra illeszkedő három lapjának területe pedig egy számtani sorozat három egymást követő tagja?

K2 1081. Egy monoton növekvő számtani sorozatnak eleme a 3 és az 5. Adott a $H = \left\{ 1; 2; 2, 1; 3, 1; \pi; \sqrt{10}; 3, 27; \frac{23}{7}; 8; 2005 \right\}$ halmaz. Az alábbi állítások

közül melyik igaz a halmaz egyes elemeire? Az elem

a) szerepel a sorozatban;

b) nem szerepel a sorozatban.

K2 1082. Egy monoton növekvő mértani sorozatnak eleme a 3 és az 5. Adott a $H = \left\{ \pi; \sqrt{10}; 4; \frac{5^{100}}{3^{99}} \right\}$ halmaz. Az alábbi állítások közül melyik igaz a halmaz

egyes elemeire? Az elem

a) szerepel a sorozatban;

b) nem szerepel a sorozatban.

V 1083. Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozzuk meg a sorozat első négy tagjának összegét.

K2 1084. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amelyik

a) 3-mal osztva 1 maradékot ad;

b) 5-tel osztva 2 maradékot ad;

c) 3-mal osztva 1 és 5-tel osztva 2 maradékot ad?

K2 1085. Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amelyik 2-vel osztva 1, 3-mal osztva 2, 7-tel osztva 3 maradékot ad?

E1 1086. Hány 500-nál kisebb közös tagja van az $a_n = 3n - 1$ és $b_n = 5n + 4$ sorozatoknak, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

E1 1087. 2000 és 4000 között hány közös tagja van az alábbi számtani sorozatoknak? Melyek ezek a tagok?

a) 2, 11, 20, 29, ...;

b) 7, 15, 23, 31, ...;

c) 8, 19, 30, 41, ...

E1 1088. Adott a derékszögű koordináta-rendszer $T = \{20 \leq x \leq 50 \text{ és } 15 \leq y \leq 40\}$ egyenlőtlenségekkel meghatározott téglalaptartománya. Hány T -beli rácsponton megy át az $e: 2x - 3y = 11$ egyenes?

V 1089 Milyen n pozitív egész számokra lesz az $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$ összeg egy egész számnak négyzete vagy magasabb egész kitevőjű hatványa?

E1 1090. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ nullától különböző számok egy számtani sorozat szomszédos elemei, akkor
$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

E2 1091. Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

K2 1092. Egy természetes számokból álló sorozat bármely tagjából úgy kapjuk meg a következőt, hogy az előzőt 1,5-szer vesszük. Mi lehet a sorozat első öt tagja, ha azokat egymás mellé írva és egyetlen számnak tekintve tízjegyű számot kapunk?

E1 1093. Hány 5-tel osztható szám van az $a_n = a_{n-1} + n^2$, ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$, $a_1 = 1$) sorozat első 100 tagja között?

E1 1094. Egy sorozat első tagja $a_1 = 1$, és $a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot a_n$, ($n \in \mathbb{N}^+$).

Számítsuk ki a sorozat n -edik tagját és első n tagjának szorzatát.

E2 1095. Adott a d differenciájú (a_n) számtani sorozat. A sorozathoz található olyan p és q valós szám, hogy minden 1-nél nagyobb n természetes szám esetén $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$. Határozzuk meg p és q lehetséges értékeit, ha (a_n) a) nem állandó sorozat;

b) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1 \neq 0$;

c) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1 = 0$.

E1 1096. Egy számsorozat első eleme 2, második eleme 3, és $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, ha $n \geq 3$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

a) Írjuk fel a sorozat n -edik elemét n függvényeként.

b) Mivel egyenlő a sorozat első n elemének összege?

E2 1097. Egy sorozat első n eleme $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ..., $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$).

a) Fejezzük ki a_n -et n függvényeként.

b) Legalább hány elemet kell összeszorozni az első elemtől kezdve, hogy a szorzat értéke 50 000-nél nagyobb legyen?

K2 1098. Egy végtelen számsorozatban bármely három szomszédos elem összege 0. Tudjuk, hogy $a_{10} = 2$, $a_{200} = 3$. Mi a sorozat 3333. tagja?

V 1099. Legfeljebb hány részre osztja a teret n darab sík, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

K2 1100. Hány közös eleme van az alábbi (a_n) és (b_n) sorozatoknak, $(n \in \mathbb{N}^+)$?

$$a) a_n = \frac{1}{n+1}, b_n = \frac{1}{n(n+2)};$$

$$b) a_n = 2^n, b_n = 3^n + 1;$$

$$c) a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right), b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right);$$

$$d) a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right), b_n = \frac{(-1)^n}{2};$$

$$e) a_n = \sqrt{n}, b_n = \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}.$$

K2 1101. Van-e a 17-nek olyan többszöröse, amelyik 2001-re végződik?

E1 1102. Az (a_n) sorozatot másodrendű számtani sorozatnak nevezzük, ha a különbségsorozata számtani sorozat. (A harmadrendű számtani sorozat különbségsorozata másodrendű számtani sorozat és így tovább.)

a) Igaz-e, hogy $a_n = 2n^2 + 3n + 1$ másodrendű számtani sorozat?

b) Igaz-e, hogy $b_n = an^2 + bn + c$ másodrendű számtani sorozat? (a, b, c valós paraméterek, $a \neq 0$.)

c) Öt szám egy másodrendű számtani sorozat egymást követő öt tagja. Az első szám 3, az utolsó 27, a számok összege 65. Melyek ezek a számok?

E1 1103

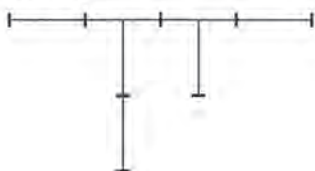
a) Hány test van egy tíz soros piramisban, ha a legfelső szinten 1×6 darab van? (Minden szinten eggyel nő a testek száma mindkét irányban.)

b) És ha a piramis n sorból áll?

E2 1104. Egy 80 tagú számsorozatról tudjuk, hogy bármely közbülső tagja egyenlő szomszédainak szorzatával. Továbbá az első 40 tag szorzata is 8, valamint összes tagjának szorzata is 8. Határozzuk meg a sorozat első és második elemét.

E2 1105. Egy sorozat első tagja 1999, az újabb tagot pedig mindig úgy kapjuk, hogy az előző tag számjegyeinek összegét megszorozzuk 13-mal. Határozzuk meg a sorozat 2005. tagját.

1106. ábra



V Gy 1106. Egy moszat növekedését formális szabályokkal írjuk le. A moszat minden egységnyi szakaszának a 0, 1, 2, 3 számjegyek egyikét feleltethetjük meg (a szakasz hossza nem függ a számjegytől!). Ha leágazások keletkeznek, a rájuk vonatkozó számjegyeket zárójelbe tesszük. Például az 11(23)2(2)1 kódú moszat képe az ábrán látható.

A növekedést úgy modellezhetjük, hogy a moszat kódjában szereplő jeleket a növekedést leíró szabályok szerinti jelsorozatra cseréljük. A szabályok:

1. $0 \rightarrow 01$
2. $1 \rightarrow (3)2$
3. $2 \rightarrow 2$
4. $3 \rightarrow 32$
5. $(\rightarrow ($
6. $) \rightarrow)$

(Az utolsó két szabály azt mondja ki, hogy a zárójelek változatlanok maradnak.)
 Tegyük fel, hogy a moszat növekedését nem befolyásolja más külső tényező.
 Milyen hosszú lesz 100 időegység múlva, ha a kódja kezdetben 0? (A leágazások is számítanak.)

Kamatos kamat, járadékszámítás

K1 Gy 1107. A község három élelmiszerboltjának üzleti forgalmáról tudjuk, hogy a felső bolt forgalma 15%-kal több, az alsóé 30%-kal kevesebb, mint a középsőé. Hány százaléka az alsó bolt forgalma a felsőének?

K1 Gy 1108. Donna Rosa három pizzériáját a fiai vezetik, Alberto, Gianni és Pietro. A forgalomról a következő adatokat tudja Donna Rosa:

Alberto 18 720 eurót forgalmazott, ami a tavaly forgalmának 104%-a.

Gianni éve nem sikerült túl jól, 2%-kal visszaesett a forgalma, így 16 660 euró volt, míg

Pietro 21 525 eurós forgalma 5% növekedést jelent tavalyhoz képest.

Most azon gondolkozik Donna Rosa, nőtt vagy csökkent-e a forgalma, és hány százalékkal tavaly óta? Számoljuk ki.

K1 Gy 1109. Mennyit fizetnek ki június 10-én 2 800 000 Ft-ra, amit 7%-os évi kamatra tettünk be január 1-jén? (Legyen az évközi kamat „egyszerű kamat”, és minden hónap 30 napos.)

K1 Gy 1110. Mekkora a kamatláb, ha a bútortvásárlásnál 366 000 Ft kölcsön után öt hónapra 27 450 Ft kamatot kell fizetnünk? (Legyen az évközi kamat „egyszerű kamat”, és minden hónap 30 napos.)

K1 Gy 1111. Mekkora összeget kap két év múlva az, aki most köti le 50 000 forintját fix 12%-os kamatos kamatra?

K1 Gy 1112. Mekkora összeget helyezzen el a 2 éves futamidejű, évi 12%-os fix kamatos kamatozású takaréklevelebe az, aki a második év végén 500 000 Ft-ot akar kapni?

K1 Gy 1113. Egy klinika belgyógyászati osztályának dolgozói egyszeri bérkiegészítést kaptak, átlagosan 23 000 Ft-ot. Az osztályon 17-en dolgoztak, és mindenki kapott pénzt. A nyolc ápolónő mindegyike 10 000 Ft-ot kapott, a főnővér 14 000 Ft-ot, a 4 tanársegéd 25 000 forintot, az adjunktusok 31 000 Ft-ot, az osztályvezető egyetlen helyettese, a docens úr 45 000 Ft-ot. Már csak azt nem tudjuk, mennyit kapott az osztályvezető főorvos, a professzor úr? (Hány docens dolgozott az osztályon?)

K1 1114. Hány év alatt duplázódik meg 8%-os kamatláb mellett
a) 3000 Ft; b) 2 500 000 Ft?

K1 Gy 1115. A bank az első évben 15%, a második évben csak 11% kamatot fizet a bennlévő összegre, amelyhez a két év során se hozzá nem tettünk, se el nem vettünk. Mekkora az átlagkamat?

K1 Gy 1116. Egy országban a Szerencsejáték Vállalat a szerencsejátékon befolyt pénz 10%-át kezelési költségként levonja, az eredeti összeg 20%-át a cég nyereségeként megtartja. A fennmaradó összeg képezi a nyereséyalapot. A nyertesek azonban nyeresményük után további 20% adót fizetnek. Az eredetileg befolyt összeg hány százaléka jut a nyertesek kezébe?

K1 Gy 1117. Mekkora a törlesztő részlete annak a 2 000 000 forintos áruvásárlási kölcsönnek, amelyet január 1-jén 5 évre veszünk fel évi 27 %-os kamatos kamatra? (A következő évtől minden évben január 1-jén történik a visszafizetés egyenlő részletekben.)

K1 Gy 1118. Legalább mekkora éves átlaghozammal kell befektetni 400 000 forintot, hogy 10 év múlva ki tudjunk fizetni 1 000 000 forintot? És ha csak 100 000 forintot fektetünk be?

K1 Gy 1119. Mikor kell befektetnie annak a szülőnek, aki azt szeretné, hogy gyermeke 25 éves korában egymillió forintot kapjon, ha évi 10% átlaghozammal számol és

- a) egyszeri induló befektetésként 300 000 forintot;
- b) minden év elején 50 000 forintot tud befektetni?

K1 Gy 1120. Egyetem alatt a család úgy kívánja segíteni gyermekét, hogy öt évig minden évben 100 000 forintot szándékozik adni neki. Elég-e ehhez, ha az időszak előtti évben egyszer 400 000 forintot évi 10%-os kamatozású betétbe helyeznek?

K1 Gy 1121. 50 000 forintot szeretnénk 7 évre befektetni. Három befektetés közül választhatunk:

- a) minden év végén hozzátesznek a pénzünkhöz egy fix összeget, 7500 forintot, ami az eredeti összeg 15%-a;
 - b) 11%-os kamatos kamatot fizetnek;
 - c) az első évben 17% kamatot kapunk, majd évente 2%-kal csökken, míg eléri a 7 %-ot, és ennyit kamatozik az utolsó évben is.
- Melyik befektetés a legkedvezőbb?

E1 Gy 1122. Egymillió forint összegű jelzálogkölcsönt veszünk fel 20 évre 15%-os kamatra. Mennyi az évi törlesztőrész? Foglaljuk táblázatba, mennyi fordítódik a kamatfizetésre, és mennyi az adósság törlesztésére? (Kamatot mindig csak az aktuális adósság után kell fizetni.) Ábrázoljuk grafikonon.

K1 Gy 1123. Mennyi pénzt fizetnénk ma egy olyan értékpapírért, amely öt év múlva fizet 100 000 forintot (közben nincs kifizetés), ha feltesszük, hogy az évi átlagos elvárt hozam 10%?

K1 1124. Hány év alatt növekszik egy 100 000 forint értékű betét 1 000 000 forint értékűre, ha évi 15%-os kamattal számolunk?

K1 1125. Egy értékpapírt, amelyik 5 év múlva fizet 1 000 000 forintot, ma vettünk meg 500 000 forintért. Mekkora éves átlaghozamot jelent ez a befektetés számunkra, ha az értékpapírt lejáratig megtartjuk?

K1 1126. Hány éven át kell évi 50 000 Ft-ot befizetni, ha az utolsó befizetés utáni év végén 1 millió Ft-tal akarunk rendelkezni? Az éves kamatláb 12%.

E1 Gy 1127. Mekkora volt az induló tőke, ha 10 év alatt 10% kamatozással negyedéves kamatozási periódus mellett 402 760 forintra nőtt fel?

E1 1128. Áruvásárlási kölcsönt veszünk fel 10 hónapra, amelynek összege 300 000 forint. Az egy évnél rövidebb futamidejű kölcsönök éves kamatlába 36%. Határozzuk meg a havi törlesztőrészletek nagyságát, ha egyenlő részletekben törlesztünk, és éven belül havi kamatozással számolnak.

E1 1129. Az alábbi négy befektetés közül melyik a legelőnyösebb?

- a) a pénzt évi 21%-os kamatra tesszük be, és évenként tőkésítenek;
- b) a pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be, és félévenként tőkésítenek;
- c) a pénzt évi 19,5%-os kamatra tesszük be, és havonta tőkésítenek;
- d) a pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be, és naponta tőkésítenek.

E1 Gy 1130. Egy millió forint hitel vesznek fel 10 éves tartamra $i = 14\%$ -os hitelkamatra. A törlesztés egy időszakkal a felvétel után kezdődik el. Mekkora az éves törlesztőrészlet?

K1 Gy 1131. Minden év elején 450 000 Ft-ot helyezünk el a bankba, éves 6,5%-os kamatra.

- a) Mennyi pénz gyűlik össze a 6. év végére?
- b) Hány év alatt gyűlik össze 6 millió Ft?

K1 Gy 1132. Egy adott időszakban a fűtőolaj árát kétszer egymás után 3%-kal felemelték, majd 5%-kal csökkentették. Ezután újból 3%-kal megemelték, majd 4%-kal csökkentették.

- a) Az adott időszak végén nagyobb, vagy kisebb-e a fűtőolaj ára, mint az időszak elején?
- b) Hány százalékkal változott az időszak végére a fűtőolaj ára az időszak elejéhez képest?

K2 Gy 1133. Melyik pénzügyi ajánlat előnyösebb ma, és mennyivel 15%-os piaci kamatláb mellett:

- a) Most kapunk 2 millió Ft-ot, majd az elkövetkező 8 évben 250-250 ezer forintot évente?
- b) Most kapunk 1 millió Ft-ot, négy év múlva 2 milliót, majd rá két évre újabb 2 millió forintot?

K1 Gy 1134. Mekkora összeget kell 5 éven át minden év elején a bankban elhelyeznünk évi 15%-os kamat mellett, ha azt akarjuk, hogy az ötödik év végén ugyanannyi legyen a követelésünk, mintha az első év elején egyszerre 300 000 forintot tettünk volna be ugyanekkora kamatra?

K1 Gy 1135. Évi 8%-os reálkamatot feltételezve 10 év múlva tudnánk megvenni a lakást. Mekkora kamatot kellene elérnünk, hogy már a 8 év végén megvehessük?



K1 Gy 1136. Valaki egymás után kétszer fogadott a lóversenyen. Az első fogadást megnyerte, és így pénzét bizonyos százalékkal növelte. A következő fogadáskor az előbbi százaléknál 5%-kal kevesebbet vesztített. Így ugyanannyi pénze maradt, mint az első fogadás előtt volt. Hány százalékos volt a nyeresége, illetve a vesztesége?

K1 Gy 1137. Két üzem közül az első most egy év alatt annyit termel, mint a másik 9 hónap alatt. Ha az első üzem termelése évente 10%-kal, a másodiké 5%-kal nő, hány év alatt éri utol az első üzem termelése a másodikét?

K1 Gy 1138. Két szálloda közül az első forgalma a második forgalmának 80%-a. Hány %-kal nő az első szálloda forgalma évente, ha a másodiké 3%-kal nő, és azt

akarjuk, hogy 8 év alatt érje utol az első szálloda forgalma a másodikét?

K1 Gy 1139. Három évre 3%-os kamatra 6000 euró kölcsönt vettünk fel. Az első év végén sikerült 3000 eurót törleszteni. A maradékot két egyenlő részletben törlesztjük a második és harmadik év végén. Mekkora ez a részlet?

K1 Gy 1140. Két állásajánlat közül választhatunk. Az egyik helyen 1600 eurós, a másikon 1650 eurós havi jövedelmet kínálnak, ráadásul ott évi 2%-os béremelkedést terveznek. Hány %-os évi bérnövekedést kellene az első helyen elérni ahhoz, hogy 3 év múlva már elérjük a másik helyen kapott jövedelmet?

K1 Gy 1141. Mutassuk meg, elég 380 000 forintot 10%-os kamatra lekötni ahhoz, hogy a következő 5 évben évi 100 000 forintot felvehessünk.

V. Az egyváltozós valós függvények analízisének elemei

Sorozat határértéke

K1 1142. Adjunk meg egy olyan nöövő és egy olyan fogyó sorozatot, amelynek az összege növekedő.

K1 1143. Adjunk meg egy olyan nöövő és egy olyan fogyó sorozatot, amelynek az összege fogyó.

K1 1144. Megadható-e két monoton fogyó sorozat úgy, hogy a szorzatuk monoton nöövő legyen?

K1 1145. Igaz-e, hogy két monoton növekedő sorozat szorzata is monoton nöő?

K1 1146. Legyen a_n és b_n két monoton nöövő sorozat, és a b_n egyik tagja sem nulla. Igaz-e ekkor, hogy az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat monoton nöövő?

K1 1147. Legyen a_n és b_n két felülről korlátos sorozat, és a b_n egyik tagja sem nulla. Igaz-e ekkor, hogy az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is felülről korlátos?

K2 1148. Legyen a_n és b_n két korlátos sorozat, és a b_n egyik tagja sem nulla. Lehetséges-e ekkor, hogy az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat sem alulról, sem felülről nem korlátos?

E1 1149. Legyen a_n olyan konvergens sorozat, amelynek a határértéke A , és legyen $b_n = a_n + 100$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a b_n sorozat is konvergens, és a határértéke szintén A .

E1 1150. Egy konvergens sorozat, amelynek a határértéke 1, felírható az a_n és b_n sorozatok hányadosaként. Következik-e ebből, hogy az a_n és b_n sorozatok is konvergenssek, és a határértékük egyenlő?

E1 1151. Az a_n és b_n két olyan sorozat, amelyeknek a különbsége nullához konvergál. Következik-e ebből, hogy az a_n és b_n sorozatok is konvergenssek?

E1 1152. Az a_n és b_n két olyan sorozat, amelyeknek a szorzata nullához konvergál. Következik-e ebből, hogy

a) az a_n és b_n sorozatok is konvergenssek?

b) legalább az egyik sorozat konvergens, és a határértéke nulla?

E1 1153. Legyen a_n olyan konvergens sorozat, amelynek a határértéke 3, és definiáljuk a b_n sorozatot a következőképpen:

$$b_1 = a_2; b_2 = a_1; b_3 = a_4; b_4 = a_3; \dots; b_{2n-1} = a_{2n}; b_{2n} = a_{2n-1}; n \in \mathbb{N}^+.$$

Bizonyítsuk be, hogy a b_n sorozat is konvergens, és a határértéke 3.

E1 1154. Legyen a_n olyan konvergens sorozat, amelynek a határértéke 5, és legyen $b_n = a_{2n}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a b_n sorozat is konvergens. Mi a határértéke?

E1 1155. Az a_n és b_n két olyan sorozat, amelyeknek az összege konvergens, de a_n nem konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a b_n sorozat sem konvergens. Mutassunk példát két ilyen sorozatra.

E1 1156. Az a_n és b_n két olyan sorozat, amelyekre létezik az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat, és egyhez konvergál. Legyen a_n olyan konvergens sorozat, amelynek a határértéke 0. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a b_n sorozat is nullához konvergál. Mutassunk példát két ilyen sorozatra.

E1 1157. Az a_n és b_n két olyan sorozat, amelyekre létezik az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat, és egyhez konvergál. Legyen b_n olyan konvergens sorozat, amelynek a határértéke 0. Mennyi lehet az a_n sorozat határértéke?

E1 1158. Legyen a_n és b_n két olyan sorozat, amelyekre igaz, hogy $\lim (a_n + b_n) = +\infty$. Következik-e ebből, hogy $\lim a_n = +\infty$ vagy $\lim b_n = +\infty$?

E1 1159. Legyen a_n és b_n két olyan sorozat, amelyekre igaz, hogy $\lim a_n b_n = +\infty$. Következik-e ebből, hogy

a) $\lim a_n = +\infty$ vagy $\lim b_n = +\infty$?

b) legalább az egyik sorozat nem korlátos?

E1 1160. Legyen a_n és b_n két olyan sorozat, amelyekre igaz, hogy $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Következik-e ebből, hogy vagy $\lim a_n = +\infty$ vagy $\lim b_n = 0$?

E1 1161. Igaz-e, hogy ha az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat olyan, hogy $\lim b_n = 0$, de $\lim a_n \neq 0$, akkor következik, hogy $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$?

E1 1162. Határozzuk meg az $(a_n + b_n)$ és az $(a_n b_n)$ sorozat határértékét, ha

$$(a_n) = \left(\frac{n^2 - 1}{n}\right) \text{ és } (b_n) = \left(\frac{2n - 1}{n^2 + 1}\right).$$

E1 1163. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) számtani sorozat egyik tagja sem és a differenciája sem nulla, akkor az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat konvergens és határértéke nulla.

E1 1164. Az (a_n) számtani sorozat első tagja 2. Tudjuk, hogy az $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ sorozat konvergens és határértéke 5. Határozzuk meg az (a_n) sorozat első n tagjának az összegét.

E1 1165. Az (a_n) mértani sorozat hányadosának az abszolútértéke egynél kisebb szám. Jelöljük az (a_n) sorozat első n tagjának az összegét S_n -nel, és képezzük a $b_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy a (b_n) sorozat nem konvergens.

E1 1166. Legyen az (a_n) és a (b_n) két számtani sorozat. Tudjuk, hogy az $(a_n - b_n)$ sorozat konvergens és a határértéke nullával egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = b_n$ minden pozitív egész n esetén.

E1 1167. Az a_n számtani sorozat első tagja 5. Jelöljük S_n -nel a sorozat első n tagjának összegét. Tudjuk, hogy az $\left(\frac{S_n}{a_n^2}\right)$ sorozat létezik, konvergens és a határértéke 2. Határozzuk meg az a_n sorozat differenciáját.

E1 1168. Az (a_n) számtani sorozat első n tagjának összegét S_n -nel jelöltük. Tudjuk, hogy az $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ sorozat konvergens és a határértéke 2. Határozzuk meg az (a_n) sorozat első tagját és differenciáját.

E2 1169. Az (a_n) és a (b_n) két olyan számtani sorozat, amelyeknek az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ hányadossorozata létezik, konvergens és a határértéke 3. Jelöljük az (a_n) sorozat első n tagjának az összegét S_n -nel, a (b_n) sorozat első n tagjának az összegét pedig R_n -nel. Igazoljuk, hogy ha az $\left(\frac{S_n}{R_n}\right)$ sorozat létezik, akkor konvergens. Számítsuk ki e sorozat határértékét.

E1 1170. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét. Adjunk meg egy $\varepsilon = 0,01$ -hez tartozó küszöbindexet.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1};$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-5};$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n^2+2n-15};$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{5-2n+n^2}.$

E1 1171. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

$$a) \lim \frac{2n}{3 - 5n^2};$$

$$b) \lim \frac{n^2 - 7n + 3}{2n^2 + 3n - 5};$$

$$c) \lim \frac{1 - n^4}{9n^4 + n^3 - 2n + 5};$$

$$d) \lim \frac{3n^3 - n^2 - 5n - 1}{\sqrt{n^2 + 1} - 2\sqrt{n^2 - 1}};$$

$$e) \lim \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 5}};$$

$$f) \lim \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{2\sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

E2 1172. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

$$a) \lim \frac{2n^2 + 3}{1 + 2 + 3 + \dots + n};$$

$$b) \lim \frac{2 + 4 + \dots + 2n}{3n - 5};$$

$$c) \lim \frac{n^3 - 2n^2 + 3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2};$$

$$d) \lim \frac{1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n}{(n + 1)!}.$$

E1 1173. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

$$a) a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n};$$

$$b) a_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - n;$$

$$c) a_n = n - \sqrt{n^2 + 5n};$$

$$d) a_n = \sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1};$$

$$e) a_n = \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}{n};$$

$$f) a_n = \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}.$$

E2 1174. Bizonyítsuk be, hogy konvergens sorozat mindig korlátos. Igaz-e az állítás megfordítása?

E2 1175. Bizonyítsuk be, hogy korlátos és monoton sorozat mindig konvergens.

E2 1176. Bizonyítsuk be, hogy konvergens sorozat alsó és felső határa közül legalább az egyik (de lehet, hogy mindkettő) maga is mindig tagja a sorozatnak. Mindhárom esetre keressünk példát.

E2 1177. Igazoljuk, hogy korlátos sorozatból mindig kiválasztható konvergens részsorozat.

E2 1178. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat korlátosság, monotonitás, torlódási helyek és határérték szempontjából.

$$a) a_n = \frac{2^{n+1} + 5}{3^n};$$

$$b) a_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^n};$$

$$c) a_n = \frac{5^{n+1}}{n!};$$

$$d) a_n = \frac{n + 2}{2n} + \frac{2}{(-1)^n};$$

$$e) a_n = \frac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}};$$

$$f) a_n = \frac{n + 2(-1)^n}{2n + (-1)^{n-1}};$$

$$g) a_n = 1 + (-1)^n \frac{n + 1}{n}.$$

Mértani sorozat határértéke

E1 1179. Melyek konvergensek az alábbi sorozatok közül? Határozzuk meg a konvergens sorozatok határértékét, $(n \in \mathbb{N}^+)$.

$$a) a_n = 5^n;$$

$$b) b_n = 1,1^n;$$

$$c) c_n = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n;$$

$$d) d_n = 1,000\,001^n;$$

$$e) e_n = 10^{-100} \cdot 1,0001^n;$$

$$f) f_n = 10^{-100} \cdot 1,0001^{n-200};$$

$$g) g_n = 1,001^{2n};$$

$$h) h_n = (-1,001)^{2n};$$

$$i) i_n = (-1)^{4n};$$

$$j) j_n = 0,999\,999^n;$$

$$k) k_n = (-0,99)^n;$$

$$l) l_n = (0,1)^n;$$

$$m) m_n = (-0,1)^{n-100};$$

$$n) n_n = (-1,01)^{2n-8};$$

$$o) o_n = (-2,54)^{n+444};$$

$$p) p_{n+1} = 2 \cdot p_n, \text{ ha } p_1 = 10^{-8};$$

$$q) q_{n+1} = 0,5 \cdot q_n, \text{ ha } q_1 = 10^8;$$

$$r) r_{n+1} = -0,1 \cdot r_n, \text{ ha } r_1 = 123\,456.$$

E1 1180. Határozzuk meg az $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) sorozat határértékét (azaz határozzuk meg az $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ végtelen sor összegét), ha $|q| < 1$.

E1 1181. Határozzuk meg az alábbi végtelen mértani sorok összegét.

$$a) A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots;$$

$$b) B = 10 + 5 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{10}{2^{n-1}} + \dots;$$

$$c) C = 18 + 6 + 2 + \dots + \frac{18}{3^{n-1}} + \dots;$$

$$d) D = -4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \dots - \frac{4}{5^{n-1}} + \dots;$$

$$e) E = -6 + 3 - \frac{3}{2} \pm \dots + (-1)^n \cdot \frac{6}{2^{n-1}} + \dots;$$

$$f) F = -4 + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} \pm \dots + 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \dots;$$

$$g) G = 2 - 1 + \frac{1}{2} \dots + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

E1 1182. Határozzuk meg az $S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ végtelen sor összegét, ha

$$a) a = 3, q = 0,4;$$

$$b) a = 3, q = -0,4;$$

$$c) a = -2, q = 0,1;$$

$$d) a = -2, q = -0,1.$$

E1 1183. Határozzuk meg az alábbi végtelen sorok összegét.

a) $A = 1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n-2} + \dots$, ha $q = \frac{1}{2}$;

b) $B = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots$, ha $q = \frac{1}{3}$;

c) $C = 3 + 6q + 9q^2 + \dots + 3nq^{n-1} + \dots$, ha $q = \frac{1}{5}$;

d) $D = 5 + 6q + 7q^2 + \dots + (n+4)q^{n-1} + \dots$, ha $q = -\frac{1}{2}$;

e) $E = 1 + 3q + q^2 + 3q^3 + q^4 + 3q^5 + \dots + q^{n-1} + 3q^n + \dots$, ha $q = \frac{1}{2}$;

f) $F = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$;

g) $G = \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+5)} + \dots$;

h) $H = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} + \dots$

E1 Gy 1184. Anna a zsebszámológépével kísérletezett, és érdekes dolgot tapasztalt. Kezdetben beírt egy kétjegyű természetes számot, elosztotta 9-cel, majd az így kapott számot osztotta 9-cel, ezután ezt osztotta 9-cel és így tovább. Anna azt vette észre, hogy akármelyik kezdeti számból indult is ki, előbb-utóbb eredményül mindig 0-t kapott. Hogy lehetséges ez? (Hiszen pozitív számnak a fele is mindig pozitív.)

E1 1185. Mit kap eredményül Anna, ha az előző eljárásban

a) tetszőlegesen nagy (2-nél több jegyű) számmal kezd;

b) 9 helyett csak 2-vel végzi az osztásokat;

c) negatív számmal kezd?

E1 1186. Írjuk fel az alábbi (végtelen szakaszos) tizedestörteket két egész szám hányadosaként.

a) $a = 0,4$; b) $b = 5,4$; c) $c = 0,3\dot{9}$; d) $d = -12,3\dot{9}$;

e) $e = 2,15\dot{7}$; f) $f = 4,3\dot{1}$; g) $g = 1,234\dot{5}$; h) $h = 0,1234\dot{5}$.

E1 1187. Legyen az AB szakasz hossza 2 egység. A szakasz egyik oldalára mint átmérőre félkört rajzolunk; a B pontból folytatva a szakasz másik oldalára

az $\frac{1}{2}$ sugarú BC félkört emeljük; ezután ismét a sza-

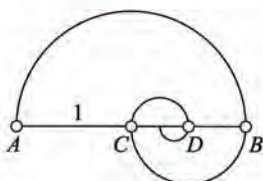
kasz innenső felére rajzolunk folytatólágosan $\frac{1}{4}$

sugarú félkört és így tovább, az eljárást az $\frac{1}{8}$,

$\frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ sugarú félkörökkel folytatjuk.

Mekkora lesz az így kapott, félkörívekből álló vonal hossza?

1187. ábra



E1 1188. Anna ezúttal az $1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots + (-1)^{n+1} \pm \dots$ végtelen összeg értékét szeretné meghatározni. Ha az $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ zárójelezést alkalmazza, az összeg értéke 0 lesz; ha pedig az $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$ zárójelezést, akkor az összeg értéke 1. Hogyan lehetséges ez? Melyik a helyes eredmény?

E1 1189. Egy kartonlapból egységnyi területű szabályos háromszöget készítünk, majd beszínezzük a középvonalak által meghatározott középháromszöget. Ezután az eljárást a maradék három, színezetlen szabályos háromszöggel folytatjuk: beszínezzük mindegyiknek a középháromszöget. Ezután 9 színezetlen háromszöget kaptunk, ezeknek is beszínezzük a középháromszögeit és így tovább. Tetszőlegesen sokáig folytatva a színezést, mekkora lesz a beszínezett terület nagysága?

E1 1190. Egy kartonlapból egységnyi területű szabályos háromszöget készítünk, majd a középvonalak által meghatározott négy háromszög közül a felsőt pirosra, a bal oldalt sárgára és a jobb oldalt kékre színezzük (a háromszöget az alapjára állítottuk). Ezután az eljárást a középső, még színezetlen háromszöggel folytatjuk: behúzzuk a középvonalait, s az így kapott négy háromszög közül a felsőt pirosra, a bal oldalt sárgára és a jobb oldalt kékre színezzük stb. Tetszőlegesen sokáig folytatva a színezést, mekkora lesz a piros, sárga, kék és fehér (színezetlen) területek nagysága?

E1 1191. Egy x hosszúságú szakaszra mint oldalra szabályos háromszöget rajzolunk (tehát ennek oldalai x hosszúak). Ezután a szakaszt hosszának n -ed részével meghosszabbítjuk, s erre a szakaszra is szabályos háromszöget rajzolunk. Ezután a meghosszabbítás n -ed részét s a hozzá tartozó háromszöget rajzoljuk meg és így tovább. Mekkora az így meghatározott háromszögek kerületének és területének az összege?

E1 Gy 1192. Zenon görög filozófus mintegy két és félezer évvel ezelőtt úgy okoskodott, hogy Akhilleusz és a teknősbéka versenyfutásában Akhilleusz soha nem tudja utolérni a teknőst, ha az valamekkora előnnyel indul. A „bizonyítás” a következő volt:

„Tegyük fel, hogy Akhilleusz 12-szer gyorsabban fut, és induláskor a teknősbéka egy egységnyi úttal van Akhilleusz előtt. Amíg Akhilleusz ezt az egységnyi utat megteszi, azalatt a teknősbéka $\frac{1}{12}$ -nyi utat tesz meg, tehát ennyivel előzi meg Akhilleuszt. Mikorra Akhilleusz ezt az $\frac{1}{12}$ -nyi utat is megteszi, addigra a teknősbéka már ennek $\frac{1}{12}$ részével, tehát $\frac{1}{144}$ -nyi úttal jár előrébb, s a gondolatmenet folytatható: mikorra Akhilleusz utolérné a teknősbékát, az már ismét további előnyt szerzett.”
Mí a hiba a bizonyításban?

Függvény határértéke. Folytonosság

Függvény határértéke

E1 1193. Határozzuk meg a következő függvények határértékét $+\infty$ -ben.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x-7x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x+7}{4x-5x^2}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-7x^3+3x^2-5x+7}{4x-5x^2-x^4}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2-5x+7)(x^2+x-2)}{(4x-5)(x^3-5x)}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-5x+7}{4x^2-x^3-5x+7}$; f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+7}}{4x}$;
 g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+7}{\sqrt{4x-5x^2}}$.

E1 1194. Határozzuk meg a következő függvények határértékét $-\infty$ -ben.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-15x+13}{3x^2-x^3}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x+7}{4x^2-x+9}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x - x)$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-9}}{3x-1}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+7} \right)$.

E1 1195. Határozzuk meg a következő függvények határértékét az $x=0$ helyen.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-5}{x+6}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2-7x}{5x^3-x^2}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

E1 1196. Határozzuk meg a következő függvények határértékét a megadott helyen.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2x}{x^3-x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{9-x^2}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8}$; d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+7x+10}{x^2+5x+6}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$;

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

E2 1197. Határozzuk meg a következő függvények határértékét a megadott helyen.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 7x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x);$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x + 4} - \sqrt{4 - \sin x}}{x};$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a},$$

E1 1198. Melyik számot jelöli a t , ha tudjuk, hogy az

$$f: \left(\mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\} \right) \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{x+t}{3x+2}$$

függvénynek a 0 helyen -6 a határértéke? ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E2 1199. Számítsuk ki a következő jobb és bal oldali határértékeket.

$$a) \lim_{x \rightarrow 3-0} [x];$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3+0} [x];$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x+1}{5x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x+1}{5x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 5x + 6};$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9};$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 5x + 6};$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Folytonosság

Folytonosak-e az alábbi függvények az $x = 2$ helyen? (1200–1201. feladat)

E1 1200.

$$a) x \mapsto \frac{x-2}{x^2-2};$$

$$b) x \mapsto \frac{x-2}{x^2-4};$$

$$c) x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$d) x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{ha } x \neq 2; \\ 0,25, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

$$e) x \mapsto \begin{cases} \frac{x - 2}{x^2 - 4}, & \text{ha } x \neq 2; \\ 0,25, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

$$f) x \mapsto x - [x];$$

$$g) x \mapsto [x] + [-x].$$

$$\text{E2 } 1201. x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

Folytonosak-e az alábbi függvények az $x = a$ hely(ek)en? (1202–1203. feladat)

E1 1202.

$$a) x \mapsto \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{x - 3}, \quad a \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3; 9\};$$

$$b) x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)(x + 1)}, \quad a \in \{-1; 2; 3\};$$

$$c) x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{ha } x \neq 2 \\ \sqrt{20 - x^2}, & \text{ha } x = 2 \end{cases} \quad a \in \{0; 2\}.$$

E2 1203.

$$a) x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in Q \\ 1, & \text{ha } x \in Q^* \end{cases} \quad a \in \{-\sqrt{2}; 0; 1\};$$

$$b) x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in Q \\ x, & \text{ha } x \in Q^* \end{cases} \quad a \in \{-\sqrt{2}; 0; 1\}.$$

E2 1204. Válasszuk meg a p paraméter értékét (ha lehet) úgy, hogy a függvény folytonos legyen!

$$a) x \mapsto \begin{cases} 3x - 2, & \text{ha } x < 5; \\ x + p, & \text{ha } x \geq 5; \end{cases}$$

$$b) x \mapsto \begin{cases} 2x + 5, & \text{ha } x < 5; \\ px + 10, & \text{ha } x \geq 5; \end{cases}$$

$$c) x \mapsto \begin{cases} 4x - 2, & \text{ha } x < 5; \\ px + p, & \text{ha } x \geq 5; \end{cases}$$

$$d) x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{ha } x \neq -2; \\ p, & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

$$e) x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{ha } x < -2; \\ p - x, & \text{ha } x \geq -2 \end{cases}$$

$$f) x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \leq 1 \\ p - x, & 1 < x \leq 3. \\ 3x - 4, & 3 < x \end{cases}$$

E2 1205. Tudjuk, hogy az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvénynek mindenütt létezik véges határértéke. Igaz-e, hogy az f folytonos függvény? ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E1 1206. Adjuk meg az a valós szám értékét úgy, hogy az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2 - 4, & \text{ha } x > 2, \\ \frac{x-2}{-x+a}, & \text{ha } x \leq 2 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen! ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E1 1207. Tudjuk, hogy az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2 - ax + 5, & \text{ha } x \neq 5, \\ b, & \text{ha } x = 5 \end{cases}$$

függvény folytonos az 5 helyen. Határozzuk meg a és b értékét. ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E1 1208. Hány olyan rendezett valós $(a; b)$ számpár van, amelyre az alábbi függvény folytonos?

$$a) x \mapsto \begin{cases} 3x - 7, & \text{ha } x < 5, \\ ax + b, & \text{ha } x \geq 5, \end{cases}$$

$$b) x \mapsto \begin{cases} x^2 - 3x - 2, & \text{ha } x < 5, \\ ax + b, & \text{ha } x \geq 5, \end{cases}$$

$$c) x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 1 & x \leq 1 \\ ax + b & 1 < x \leq 3; \\ 3x - 4 & 3 < x \end{cases}$$

$$d) x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 3 & x \leq 1 \\ b - ax & 1 < x \leq 3; \\ 2x - 4 & 3 < x \end{cases}$$

$$e) x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{3x + 3}, & \text{ha } x \neq -1, \\ ax + b, & \text{ha } x = -1 \end{cases}$$

$$f) x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 + ax + 3}{x - 3}, & \text{ha } x \neq 3, \\ b, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

Differenciálszámítás

E2 1209. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1, \\ ax + (1 - a), & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény folytonos. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy f differenciálható legyen az 1 helyen. ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E2 1210. Deriváljuk a következő függvényt.

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [1; 2], \\ (x-1)^2(x-2)^2, & \text{ha } x \notin [1; 2]. \end{cases}$$

($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E1 1211. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto (x-1)(x-a)(x^2+1)$ függvény deriváltja az 1 helyen 0. Mennyi az a értéke? ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E2 1212. Igazoljuk, hogy az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x|x+1| + |x+1|$ függvény minden valós helyen differenciálható. ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E1 1213. Számítsuk ki az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto (x^2 - 3x + 1)(2 - x^3)$ függvény differenciálhányadosát az 1 helyen.

E2 1214. Legyen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \rightarrow x(x - 1)(x - 2) \dots (x - 10)$. Határozzuk meg $f'(0)$ értékét.
($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

Deriváljuk a következő függvényeket. (1215–1243. feladat)

E1 1215. $y = \frac{2x}{1 - x^2}.$

E1 1216. $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}.$

E1 1217. $y = \frac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^3}.$

E1 1218. $y = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}.$

E1 1219. $y = \frac{(1 - x^2)^p}{(1 + x)^q}.$

E1 1220. $y = \frac{x^p(1 - x)^q}{1 + x}.$

E1 1221. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$

E1 1222. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

E1 1223. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$

E1 1224. $y = x\sqrt{1 + x^2}.$

E2 1225. $y = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\sqrt[3]{3 + x^3}.$

E2 1226. $y = m + \sqrt[n]{(1 - x)^m(1 + x)^n}.$

E2 1227. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

E2 1228. $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}.$

$$\text{E2} \quad 1229. \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

$$\text{E1} \quad 1230. \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{E1} \quad 1231. \quad y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

$$\text{E1} \quad 1232. \quad y = \cos 2x - 2 \sin x.$$

$$\text{E1} \quad 1233. \quad y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x.$$

$$\text{E2} \quad 1234. \quad y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x).$$

$$\text{E2} \quad 1235. \quad y = \sin^n x \cos nx.$$

$$\text{E2} \quad 1236. \quad y = \sin[\sin(\sin x)].$$

$$\text{E1} \quad 1237. \quad y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$

$$\text{E1} \quad 1238. \quad y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$$

$$\text{E1} \quad 1239. \quad y = \frac{1}{\cos^n x}.$$

$$\text{E1} \quad 1240. \quad y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

$$\text{E1} \quad 1241. \quad y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$\text{E1} \quad 1242. \quad y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x.$$

$$\text{E2} \quad 1243. \quad y = 4 \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}.$$

Érintők

E1 1244. Van-e az $y = x^3 - 6x$ egyenletű görbének az x tengellyel párhuzamos érintője? Ha van, akkor melyik az érintési pont?

E2 1245. Bizonyítsuk be, hogy $y = x^2$ egyenletű parabolának a $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ ponton áthaladó érintői merőlegesek egymásra.

E1 1246. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x^2 \sin x$ függvény grafikonját a $(\pi; 0)$ pontban érinti? ($\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli.)

E1 1247. Az $y = 7x^{13} - \sqrt{5}x^8 + 2x + 3$ egyenletű görbe a P pontban metszi az ordinátatengelyt. Írjuk fel a görbe P -beli érintőjének az egyenletét.

E1 1248. Van-e bármely valós m -re az $y = 8 - x^2$ egyenletű görbének az $y = mx + 3$ egyenessel párhuzamos érintője?

E2 1249. Határozzuk meg α értékét úgy, hogy az $y = \frac{\alpha}{x^2 - 1}$ görbe $x = 3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő az x tengellyel 60° -os szöget alkosson.

E1 1250. Van-e az $y = x^2 + 1$ parabolának olyan érintője, amely átmegy a P ponton? Ha van, határozzuk meg az érintési pontot, és írjuk fel az érintő egyenletét:

a) $P(1; 3)$; b) $P(3; 3)$; c) $P(-2; 5)$.

E2 1251. Állapítsuk meg, milyen összefüggésnek kell fennállnia p és q között ahhoz, hogy a $P(p; q)$ ponton az $y = x^2 + 1$ parabolának 2; 1; 0 érintője haladjon át. (Vessük össze az előző feladattal.)

E2 1252. Határozzuk meg az $y = x^3$ görbének azt az érintőjét, amely az $(1; 1)$ pontban metszi a görbét.

E2 1253. Határozzuk meg p és q értékét úgy, hogy az $y = x^3 + px + q$ parabola érintse az $y = x$ egyenest

a) az $x_0 = 2$,

b) az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban.

E2 1254. Határozzuk meg a , b és c értékét úgy, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ parabola átmenjen a $(2; 4)$ ponton, az $y = 2x - 1$ egyenes pedig érintse ezt a parabolát az $x = 1$ abszcisszájú pontjában.

E2 1255. Igazoljuk, hogy az $y = \cos^2 x + \sin 2x$ és az $y = -5x^2 + 2x + 1$ egyenletű görbék $x = 0$ abszcisszájú pontjukban érintik egymást (ezen azt értjük, hogy ebben a pontban érintőjük is azonos).

E2 1256. Milyen szögben metszi

a) az $y = x^2$ parabolát az $x = 3$ egyenes;

b) az $y = \sin x$ görbét az $x = \frac{5}{4}\pi$ egyenes;

c) az $y = \cos x$ görbét az $y = 0,5$ egyenes?

E2 1257. Írjuk fel az $y = 8x^3 - 1$ görbének az x és az y tengellyel való metszéspontjában az érintő egyenletét. Milyen szögben metszi a görbe az x és az y tengelyt?

E2 1258. Igazoljuk, hogy az $x^2 = 4(y + 1)$ és az $x^2 = -16(y - 4)$ parabolák merőlegesen metszik egymást.

E2 1259. Az $y = \sin \frac{x}{a}$ függvény grafikonja a milyen értékénél metszi az x tengelyt 30° -os szögben?

Szélsőérték

E1 1260. Az $a = 8$ számot bontsuk két pozitív összeadandóra úgy, hogy a tagok
 a) szorzata;
 b) négyzetösszege;
 c) négyzetének különbsége;
 d) köbeinek összege
 (amennyiben ez lehetséges) szélsőértéket vegyen fel.

E1 1261. Határozzuk meg az $x^6 + y^6$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha tudjuk, hogy $x^2 + y^2 = 1$.

E1 1262. Vizsgáljuk az összes olyan háromszöget, amelynek két oldala a , illetve b . Van-e közöttük legnagyobb és legkisebb területű?

K2 1263. Egy derékszögű háromszög átfogója 20 cm hosszúságú. Határozzuk meg az x és y befogót úgy, hogy maximális legyen
 a) a háromszög kerülete; b) a két befogó összege.

K2 1264. Határozzuk meg valamely adott háromszögbe írt téglalapok közül a maximális területűt.

K1 1265. Határozzuk meg adott t területű téglalapok közül a legkisebb kerületűt.

K2 1266. Határozzuk meg a legnagyobb területű az adott r sugarú
 a) körbe; b) félkörbe
 írt téglalapok közül.

K2 1267. Határozzuk meg az adott $2p$ kerületű téglalapok közül azt, amelynek az átlója
 a) a leghosszabb; b) a legrövidebb.

E1 1268. Egy trapéz kisebbik alapja és szárai 1 dm hosszúak. Válasszuk meg a hiányzó oldal hosszát úgy, hogy a trapéz területe a lehető legnagyobb legyen. Mekkora ennek a trapéznek a szögei?

E2 1269. Válasszuk ki az adott k kerületű körcikkek közül azt, amelynek a legnagyobb a területe.

E1 Gy 1270. Egy 25 m hosszú alagút keresztmetszete téglalapra helyezett félkör alakú. A keresztmetszet kerülete 18 m. Hogyan kell megválasztani a félkör sugarát, hogy az alagút térfogata a lehető legnagyobb legyen?

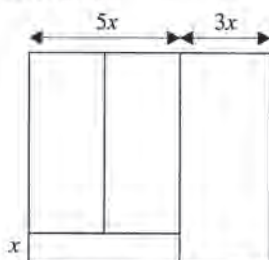
E1 Gy 1271. Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete: p . Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

E1 1272. Írjunk be az x tengely és az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola által határolt síkrészbe maximális területű téglalapot.

K1 1273. Egy síkbeli xy koordináta-rendszerben adott az $A(0; 3)$ és a $B(4; 5)$ pont. Határozzuk meg az x tengelynek azt a C pontját, amelyre $\ell = AC + BC$ minimális.

E2 1274. A $(2; 0)$ pontból úgy kell eljutnunk a $(9; 5)$ pontba, hogy közben a $(0; 0)$ és $(4; 4)$ pontok által meghatározott egyenes szakasz valamely pontját is érintsük. Melyik legyen ez a pont, ha a legrövidebb utat kívánjuk választani?

1275. ábra

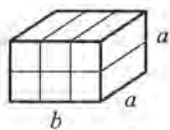


E1 Gy 1275. A mellékelt tervrajzon a falak összhosszúsága 90 m, a folyosó szélessége x m. Hány méter legyen x , ha azt akarjuk, hogy a 3 szoba együttes területe a lehető legnagyobb legyen?

E1 Gy 1276. Egy négyzet alakú lemez sarkairól egybevágó négyzeteket vágunk le. Mekkora legyenek a levágott négyzetek, hogy az oldaltéglalapot felhajtásával létrejött nyitott doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen? (A lemez oldalait vegyük pl. 24 cm hosszúnak.)

E2 1277. Adott egy R sugarú körlap (itatóspapírból). Mekkora középponti szögű körcikket vágjunk ki belőle, hogy az abból készíthető tölcsér alakú szűrő maximális térfogatú legyen?

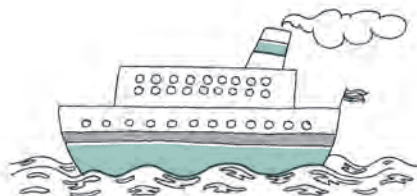
1278. ábra



E1 Gy 1278. Adott térfogatú (pl. $V = 28 \text{ dm}^3$) négyzetes oszlop alakú csomagot az ábrán látható módon kötünk át. Hogyan válasszuk meg a csomag méreteit, hogy az átkötő spárja hossza a lehető legrövidebb legyen?

E2 Gy 1279. Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 2,4 m, illetve 1,6 m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

E2 Gy 1280. Egy a szélességű folyóból, a folyó irányára merőlegesen b szélességű csatorna indul ki. Mekkora annak a leghosszabb hajónak a hosszúsága, amely a folyóból a csatornába be tud fordulni? (A hajó szélességét hanyagoljuk el; legyen $a = 240 \text{ m}$; $b = 30 \text{ m}$.)



E2 Gy 1281. Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag fogyasztás és egyéb kiadások képzik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások óránként B Ft-ot tesznek ki.

Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B -t pl. 480 Ft-nak.)

E1 Gy 1282. Ismert tény, hogy egy gerenda szilárdsága egyenesen arányos a keresztmetszet hosszúságával és szélességének a négyzetével. Határozzuk meg a d cm átmérőjű hengeres fatörzsből készíthető legszilárdabb gerenda keresztmetszetének a méreteit.

E1 Gy 1283. A vízszinteshez képest x szögben, adott v_0 kezdősebességgel elhajítunk egy követ. A kő (ha a levegő ellenállását elhanyagoljuk) $\frac{v_0^2 \cdot \sin^2 x}{g}$ magasságra emelkedik, és vízszintes irányban $\frac{v_0^2 \cdot \sin 2x}{g}$ távolságra jut el. Milyen szögben hajítsuk a követ, hogy

a) a legmagasabbra emelkedjék;

b) a legtávolabbra jusson vízszintes irányban?

E1 Gy 1284. Elhajítunk egy testet 25 m/s sebességgel, a vízszintessel α szöget bezáróan; a test a hajtás helyétől d távolságban ér földet. Hogyan válasszuk meg az α szöget, hogy d a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a maximális távolság? (A levegő ellenállását hanyagoljuk el.)

E2 Gy 1285. Valamely AB egyenes A pontjában van egy fényforrás, amelynek erőssége α , a tőle adott d távolságra levő B -ben pedig egy β erősségű fényforrás. Határozzuk meg az AB szakasz legkevésbé megvilágított pontját. (Útmutatás: A megvilágítás erőssége fordítottan arányos a fényforrástól mért távolság négyzetével.)

E2 Gy 1286. Milyen magasra kell elhelyezni valamely R sugarú kör alakú futópálya közepén a lámpát, ha azt akarjuk, hogy a futópálya megvilágítása a lehető legerősebb legyen? (Útmutatás: A megvilágítás erőssége tetszőleges P pontban egyenesen arányos a beeső fénysugár és a pálya síkja hajlásszögének szinuszával, és fordítottan arányos a fényforrás és P pont távolságának négyzetével.)

E2 Gy 1287. Egy 2 m átmérőjű kerek asztal közepe fölött egy fel és letoltható lámpa van. Milyen magasra kell a lámpát helyezni, hogy az asztal körül ülők a lehető legjobban lássanak? (L. az előző feladatot.)

E1 Gy 1288. Milyen mértékkel készüljön az a 32 m^3 térfogatú négyzetes oszlop alakú medence, amelynek elkészítéséhez (alap és oldallapjaihoz) a lehető legkevesebb anyag szükséges?

E1 Gy 1289. Milyen méretei vannak a legkisebb felszínű 1 dm^3 térfogatú henger alakú konzervdoboznak?

E1 1290. Határozzuk meg annak a maximális térfogatú egyenes hengernek a méreteit, amelynek tengelymetszete 6 m kerületű.

E1 1291. Határozzuk meg adott S felszínű egyenes körhengerek közül a legnagyobb térfogatú sugarát.

E1 1292. Határozzuk meg adott felszínű fedetlen hengerek közül a legnagyobb térfogatút.

E1 1293. Határozzuk meg adott R sugarú gömbbe írt egyenes hengerek közül azt, amelynek legnagyobb a
a) térfogata; b) palástjának területe.

E1 1294. Igazoljuk, hogy ha valamely R sugarú és M magasságú egyenes körkúpba maximális térfogatú hengert írunk, akkor annak r sugara és m magassága eleget tesz az $r = \frac{2}{3}R$ és $m = \frac{2}{3}M$ feltételeknek.

E1 1295. Írjunk maximális felszínű egyenes hengert adott R sugarú a) félgömbbe; b) gömbbe.

E1 1296. Adott r sugarú és m magasságú egyenes henger köré írjunk minimális térfogatú kúpot.

E1 Gy 1297. Adott P palástú sátrak (egyenes körkúpok) közül válasszuk ki a legnagyobb térfogatút.

E1 1298. Határozzuk meg az adott R sugarú gömbbe írt egyenes körkúpok közül a legnagyobb térfogatút.

E1 1299. Egy forgáshenger magasságának és sugarának az összege 24 cm. Válassza meg az adatokat úgy, hogy a henger térfogata maximális legyen.

E2 1300. Írjunk adott gömb köré minimális térfogatú a) kúpot; b) csonkakúpot.

E1 Gy 1301. Egy test hőmérséklete melegítés folytán a $T = 0,4t^2$ függvény szerint emelkedik (T a hőmérséklet ($^{\circ}\text{C}$ -ban), a t az idő (s-ban)). Határozzuk meg a hőmérséklet változásának

- a) átlagos sebességét a $t_1 = 4$ és a $t_2 = 8$ időpontok között;
b) a $t = 5$ időponthoz tartozó átlagsebesség függvényét;
c) pillanatnyi sebességét a $t = 5$ időpontban.

E1 1302. Valamely Q mennyiség az időtől függően a $Q = 3t^2 + t$ függvény szerint változik. Számítsuk ki a változás sebességét
a) a $t = 5$ időpontban; b) tetszőleges t időpontban.

E1 1303. Valamely T mennyiség a $T = 0,4t^2 - 0,1t$ függvény szerint az időtől függően változik. Számítsuk ki a változás sebességét
a) a $t = 2$ időpontban; b) tetszőleges t időpontban.

E1 1304. Egy pont mozgását az $s(t) = v_0t + \frac{at^2}{2}$ (s az út (m-ben); t az idő (percben)) függvény jellemzi. Határozzuk meg a mozgás pillanatnyi sebességét
a) a mozgás kezdetén; b) a , t_0 időpontban.

E2 Gy 1305. Az egymástól 600 m távolságra levő A és B pontok között csővezeték kell fektetni, amely közben valahol elágazik C pont felé. A C pont az AB szakasz egyenesétől 300 m-re, A ponttól 500 m-re van. A csővezeték az

elágazásig olyan csőből készül, amelynek ára folyóméterenként 90 Ft. Az elágazástól B -ig 60 Ft/m-es, C -ig 50 Ft/m-es csövet fektetnek. Hol létesítsük az elágazást, hogy a fektetendő vezeték ára a legkisebb legyen?

E2 1306. Adott ABC háromszögnek $BC = a$ oldala és ehhez tartozó $AH = m$ magassága. A BC oldalon kijelölünk egy rögzített O pontot. Az AB , illetve AC oldalakon az A -ból kiindulva mozog D , illetve E pont úgy, hogy DE mindig párhuzamos BC -vel, és megállnak akkor, amikor B -be, illetve C -be érnek. Hogyan változik az ODE háromszög területe?

E2 1307. Az $y^2 = 2px$ parabolát határoljuk el az $x = a$ egyenessel. Ebbe a parabolaszéletbe írunk olyan téglalapokat, amelyeknek középvonala a parabola tengelye. Melyik téglalap lesz maximális területű?

E2 1308. Vizsgáljuk az F felszínű négyzetes hasáb térfogatát, mint az alapél függvényét. Hol van, és milyen típusú a szélsőértéke?

E2 1309. Egyenes kúpba írható hengerek közül melyiknek a palástja a legnagyobb területű?

E2 Gy 1310. Földünkön egy szélességi kör és egy hosszúsági kör két pontban metszi egymást. Határozzuk meg: a két pont távolságát a szélességi kör mentén és a hosszúsági kör mentén.

Melyik szélességi kör esetén lesz a két távolság különbsége maximális? Ez esetben mekkora a két pont távolsága a szélességi, illetve a hosszúsági kör mentén? (A Föld sugara 6378 km.)

Függvényvizsgálat

E1 1311. Vizsgáljuk a következő függvényeket:

a) $x \mapsto x^2 + 3x + 2$;

b) $x \mapsto -x^2 - 2x + 2$;

c) $x \mapsto 5x^2 + 3x - 2$;

d) $x \mapsto x^3 - x$;

e) $x \mapsto x^3 - 6x^2$;

f) $x \mapsto 1 + 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

E1 1312. Diszkutáljuk a következő függvényeket:

a) $y = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$;

b) $x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$;

c) $x \mapsto x^4 - 2x^2 - 3$;

d) $x \mapsto \frac{1}{10}(x^4 - 13x^2 + 36)$;

e) $x \mapsto \frac{x^4}{16} + \frac{5}{2}x^2 + 9$.

E1 1313. Ábrázoljuk részletes diszkusszió után a következő függvényeket:

a) $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x}$;

b) $x \mapsto \frac{6}{x^2 + 1}$;

c) $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$;

d) $x \mapsto \frac{x}{x - 1}$;

$$e) x \mapsto \frac{x-1}{x};$$

$$g) x \mapsto \frac{x}{1-x^2};$$

$$i) x \mapsto x^2 + \frac{2}{x};$$

$$f) x \mapsto \frac{1}{1-x^2};$$

$$h) x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1};$$

$$j) x \mapsto \frac{x^2-2x-1}{x-1}.$$

E1 1314. Ábrázoljuk és vizsgáljuk a következő függvényeket:

$$a) y = \sqrt[3]{x^2};$$

$$b) y = \sqrt{x+8} + \sqrt{8-x};$$

$$c) y = x\sqrt{x+3};$$

$$d) y = \sqrt{x^3-3x}.$$

E1 1315. Diszkutáljuk a következő függvényeket:

$$a) x \mapsto \sin 2x + 2 \cos x;$$

$$b) x \mapsto x + 2 \sin x;$$

$$c) x \mapsto \sin^2 x - 2 \cos 2x + 2;$$

$$d) x \mapsto \frac{\cos x + 1}{\cos x};$$

$$e) x \mapsto \sin^3 x + \cos^3 x.$$

E2 1316. Vizsgáljuk a következő függvényt:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

E2 1317. Ábrázoljuk és vizsgáljuk a következő függvényt:

$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

E2 1318. Vizsgáljuk a következő függvényt:

$$y = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

E2 1319. Tekintsük a következő függvényt (x a változó):

$$y = \frac{2x^2 - 5ax + 8}{x - 2a}.$$

a) Milyen a értékre lesz a függvény szigorúan növekedő az értelmezési tartomány minden helyén?

b) Milyen a értékre lesz a függvénynek szélsőértéke, és ez minimum vagy maximum?

E2 1320. Hány valós gyöke van a $2x^4 + x^3 - 2 = 0$ egyenletnek?

E2 1321. Egy harmadfokú egész függvénynek szélsőértéke van az $x = 1$ és az $x = 2$ helyen. A függvény értéke $x = 0$ -nál $y = 0$ és $x = 1$ -nél $y = -\frac{10}{3}$. Ábrázoljuk és írjuk le a függvényt.

E2 1322. a) Vizsgáljuk az $y = \sin 2x + 2 \cos x$ függvényt a $[0; 2\pi]$ intervallumban.
b) Hány érintőt húzhatunk ezen intervallumon belül a függvény görbéjéhez, amelynek iránytangense adott m szám?

E2 1323. Milyen értéket kell adnunk m -nek, hogy az

$$y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 4x + m} \text{ függvénynek ne legyen szélsőértéke?}$$

E1 1324. Melyik az a másodfokú egész függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. ha $x = -1$, akkor: $y = -6$,

2. ha $x = 1$, akkor: $y = 0$,

3. és a függvény szélsőértéke $-\frac{49}{8}$.

E2 1325. Határozzuk meg a -t és b -t úgy, hogy az

$y = x^3 + ax^2 + bx$ függvénynek akkor legyen minimuma, ha $x = a$, és akkor legyen maximuma, ha $x = b$.

E2 1326. Mutassuk meg, hogy az $y = x^3 - x^2 + x - k$ függvény grafikonja csak egy pontban metszheti az x tengelyt, bármilyen valós szám k .

E2 1327. Határozzuk meg a p és q számokat úgy, hogy az

$$y = \frac{x^2 + px + 3}{x^2 + qx + 5}$$

függvénynek az $x = 2$ helyen maximuma, az $x = -1$ helyen minimuma legyen. Ábrázoljuk és diszkutáljuk a kapott függvényt.

Integrálszámítás

Határozzuk meg a következő határozatlan integrálok értékét. (1328–1343. feladat)

E1 1328.

a) $\int 5x^4 dx;$

b) $\int 3x^4 dx;$

c) $\int 4\sqrt{x^3} dx;$

d) $\int 8\sqrt[3]{x^5} dx;$

e) $\int \frac{5}{7} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^6}}.$

E1 1329.

a) $\int \sqrt[3]{\sqrt{x}} dx;$

b) $\int \sqrt{\sqrt[3]{x}} dx;$

c) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx;$

d) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} dx;$

e) $\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}} dx.$

E1 1330.

$$a) \int \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot x^{-2}}{\sqrt[5]{x}} dx; \quad b) \int \frac{y \sqrt[3]{\sqrt[5]{y}}}{\sqrt[10]{\sqrt[4]{y^5}}} dy; \quad c) \int \frac{\sqrt[3]{z} \sqrt{z} \sqrt{z}}{z \sqrt{z}} dz.$$

E1 1331.

$$\begin{aligned} a) \int (2x^3 - 3x^2 + x - 4) dx; & \quad b) \int (5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1) dx; \\ c) \int \left(4x^3 + 5x + 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) dx; & \quad d) \int (3 - x)^2 dx; \\ e) \int (3 - x)^3 dx. & \quad f) \int (8x^3 - 2x + 3) dx; \\ g) \int (5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + 2) dx; & \quad h) \int \left(\frac{2}{7} x^5 - \frac{1}{4} x^3 + \frac{2}{5} x \right) dx; \\ i) \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + 5 \right) dx; & \quad j) \int \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^5} dx. \end{aligned}$$

E1 1332.

$$\begin{aligned} a) \int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx; & \quad b) \int \frac{4 - 4x + x^2}{3x - 6} dx; \\ c) \int \frac{x + x^{-1} + x^{-2}}{\sqrt{x}} dx; & \quad d) \int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx; \\ e) \int \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx. \end{aligned}$$

E1 1333.

$$a) \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx; \quad b) \int \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \right) dx; \quad c) \int \left(\frac{x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{x} \right) dx.$$

E1 1334.

$$\begin{aligned} a) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx; & \quad b) \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \\ c) \int \frac{(x^a - x^b)^2}{\sqrt{x}} dx; & \quad d) \int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx. \end{aligned}$$

E1 1335.

$$\begin{aligned} a) \int (\sin x + 5) dx; & \quad b) \int (\cos x - 3, 7) dx; \\ c) \int (2 \sin x - 8 \cos x) dx; & \quad d) \int (5 \cos x - 3 \sin x + 8) dx; \end{aligned}$$

$$e) \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx;$$

$$g) \int \left(\frac{\sin x}{5} - \frac{\cos x}{7} \right) dx;$$

E1 1336.

$$a) \int \sin x \cos x dx;$$

$$c) \int \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) dx;$$

$$e) \int \cos \left(\frac{x}{3} - 1 \right) dx;$$

$$g) \int \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx.$$

E1 1337.

$$a) \int \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$c) \int (\sin x + \cos x)^2 dx;$$

$$e) \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}};$$

$$g) \int \frac{dx}{\sin^2 5x};$$

E1 1338.

$$a) \int (t-5)^{-3} dt;$$

$$c) \int \left(t + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} dt;$$

$$e) \int (t-2) \sqrt{t-2} dt.$$

E1 1339.

$$a) \int \frac{dx}{(2-x)^3};$$

$$c) \int \frac{dx}{(x-2)^3};$$

$$e) \int \frac{dx}{(1-3x)^4}.$$

$$f) \int (\sin 2x + \cos 3x) dx;$$

$$h) \int \left(\frac{1}{3} \cos x - \frac{2}{3} \sin x \right) dx;$$

$$b) \int 3 \sin 2x dx;$$

$$d) \int \sin(\pi - 2x) dx;$$

$$f) \int \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx;$$

$$b) \int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} dx;$$

$$d) \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

$$f) \int \frac{dx}{\cos^2 kx};$$

$$h) \int \frac{dx}{\sin^2 nx}.$$

$$b) \int (t + \sqrt{3})^{-2} dt;$$

$$d) \int \sqrt{t+8} dt;$$

$$b) \int \frac{dx}{(3x+1)^4};$$

$$d) \int \frac{dx}{(3x-1)^4};$$

E1 1340.

a) $\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx;$

c) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}};$

e) $\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$

b) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x^3+x^2+x+5)^2} dx;$

d) $\int \frac{3dx}{2\sqrt{5-4x}};$

E1 1341.

a) $\int \frac{a dt}{\sqrt{1-t}};$

c) $\int \frac{t dt}{\sqrt{t^2+1}};$

e) $\int \frac{dx}{5\sqrt{x-1}};$

g) $\int \frac{dx}{0,5\sqrt{3x-1}};$

b) $\int \sqrt{a-bt} dt;$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$

f) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x-4}};$

h) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx.$

E1 1342.

a) $\int \sin 3x \cos 5x dx;$

c) $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx;$

e) $\int \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx.$

b) $\int \sin 10x \sin 15x dx;$

d) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx;$

E1 1343.

a) $\int 2x \sin x^2 dx;$

c) $\int (3x^2+1) \cos(x^3+x-2) dx;$

e) $\int (2x+5) \cos(x^2+5x-8) dx.$

b) $\int \frac{x}{10} \cos(3x^2-1) dx;$

d) $\int (3x^2+1) \sin(x^3+x-2) dx;$

E1 1344. Van-e olyan függvény, amelynek deriváltja a $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ függvény, és amely az $x = 0$ helyen a 2 értéket veszi fel?

E1 1345. Van-e olyan függvény, amelynek deriváltja $f(x) = 5x^2 - 7x + 4$, és amely az $x = 1$ helyen a 3 értéket veszi fel?

E1 1346. Határozzuk meg az $f(x) = 3x^2 - 4$ függvénynek azt a primitív függvényét, amelynek egyik zérushelye: $x = -1$.

E1 1347. Határozzuk meg azt az $F(x)$ függvényt, amelynek deriváltja az $F'(x) = 5 - 9x + 4x^2$ függvény, és amelynek görbéje átmegy a $(2; 50)$ ponton.

E1 1348. Határozzuk meg azt a $G(x)$ függvényt, amelyre $G(1) = 2$, és amelynek derivált függvénye: $G'(x) = x^3 - 5x^2 + x + 1$.

E2 1349. Határozzuk meg, milyen irányúak az $y = f(x)$ függvény primitív függvényeinek az érintői az x_0 abszcisszájú pontban, ha

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 - 3}}$, $x_0 = -2$;

c) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\frac{x}{\cos \frac{x}{2}}}}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

E2 1350. Van-e az $y = f(x)$ függvénynek olyan primitív függvénye, amelynek görbéje átmegy a $P(x_0, y_0)$ ponton?

a) $f(x) = 3 \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$; $y_0 = 2$;

b) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x_0 = 2,5$; $y_0 = 0$;

c) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2$, $x_0 = 0$; $y_0 = 0$.

E2 1351. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{2(x-1)}{(x^2-2x)^2}$ függvény primitív függvényei közül azt, amelynek az $x = 5$ zérushelye.

E2 1352. Határozzuk meg az $y = 2x^3 \cos\left(x^4 - \frac{\pi}{2}\right)$ függvénynek azt a primitív függvényét, amely az $x = 0$ helyen a 3 értéket veszi fel.

Határozott integrál

Határozzuk meg a következő határozott integrálok értékét, (1353–1356. feladat)

E1 1353.

a) $\int_0^a x \, dx$;

b) $\int_0^u (x^2 - ax) \, dx$;

c) $\int_2^3 \frac{5}{x^2} \, dx$;

d) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;

e) $\int_{2a}^{3a} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

E1 1354.

a) $\int_1^2 \sqrt{2x+1} \, dx$;

b) $\int_1^7 \sqrt{3x+1} \, dx$.

E1 1355.

$$a) \int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{2}} \frac{-dx}{(1+x)^2};$$

$$b) \int_{-5}^5 \frac{-2x dx}{(1+x^2)^2}.$$

E1 1356.

$$a) \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^3} dx;$$

$$b) \int_0^1 (8-7x)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Számítsuk ki a következő feladatokban megadotti integrálokat. (1357–1359. feladat)

E1 1357.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx;$$

$$c) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx;$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx.$$

E1 1358.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x + 3 \cos x) dx;$$

$$b) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx;$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$

E1 1359.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$$

Területszámítás

E1 1360. Mekkora területet határol az $y = f(x)$ görbe és az x tengely, ha

$$a) f(x) = 4 - x^2;$$

$$b) f(x) = x^2 + 4x - 5;$$

$$c) f(x) = 6x - x^2;$$

$$d) f(x) = 3 - 2x - x^2.$$

E1 1361. Bizonyítsuk be, hogy egy parabolából a parabola tengelyére merőleges egyenessel levágott szelet területe $\frac{2}{3}$ része a szelet köré írható téglalapnak.

E1 1362. Határozzuk meg az $y = ax^2$ parabola két, az x tengellyel párhuzamos húrja és a két megfelelő parabolaív által határolt területet.

E1 1363. Mekkora területet határol egy fél szinuszhullám és az x tengely?

E1 1364. Mekkora területet határol az $y = f(x)$ görbe és az x tengely, ha

a) $f(x) = x - x^3$;

b) $f(x) = 4 - 5x^2 + x^4$;

c) $f(x) = (x - 2)(x - 3)^2$;

d) $f(x) = x^5 - x^3$.

E1 1365. Mekkora területet fognak közre az $y = 3x^2 - x + 5$ és az $y = 2x^2 + 4x - 1$ egyenlettel megadott parabolák?

E1 1366. Számítsuk ki a két parabola, illetve az egyenes és a parabola közti területet.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 7$ és $g(x) = 2x - 3$;

b) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ és $g(x) = -2x - 1$;

c) $f(x) = -x^2 + 8x - 5$ és $g(x) = -7x^2 + 56x - 77$;

d) $f(x) = -x^2 + 11x - 10$ és $g(x) = -2x^2 + 22x - 28$;

e) $f(x) = -x^2 + 5x - 9$ és $g(x) = -5x^2 + 25x - 25$.

E1 1367. Mekkora területet határolnak az $y = 2x^2$ és az $y = 2\sqrt{x}$ egyenletű görbék?

E1 1368. Mekkora a területe az $y = x^2$ és az $y = -x^2 + 2$ egyenletű görbék által határolt síkidomnak?

E1 1369. Mekkora a területe az $y = -x^2$ és az $y = x^2 - 2$ egyenletű görbék által határolt síkidomnak?

E1 1370. Mekkora a területe az $y = -x^2 + 1$ és az $y = x^2 - 1$ egyenletű görbék által határolt síkidomnak?

E1 1371. Milyen arányban osztja fel az $y = (x - 1)^2$ egyenletű parabola és az $y = -x + 3$ egyenletű egyenes által határolt zárt síkidom területét az y tengely?

E2 1372. Számítsuk ki az $y = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$ egyenletű görbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -3$ és $x_2 = 2$ határok között.

E1 1373. Mekkora a területe annak a háromszögnek, amelyet az $y = x^2 + 5$ egyenletű parabola $(-2; 9)$ pontjára illeszkedő érintője és a két koordinátatengely alkot?

E2 1374. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelyet az $y = x^3$ egyenletű görbe $\frac{1}{8}$ ordinátájú pontjára illeszkedő érintő, az $y = 0$ és az $x = 10$ egyenletű egyenes határol.

E2 1375. Mekkora területet határol az x tengely, az $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ egyenletű görbe és az a két ordinátavonal, amely a görbe lokális szélsőérték helyeihez tartozik?

E1 1376. Tekintsük az $y = x^2$ és $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 7,5$ egyenletű parabolák által határolt síkidomot. Mekkora területű részekre osztja ezt a síkidomot az $y = x$ egyenletű egyenes?

E2 1377. Számítsuk ki az $y = x^2$ és $y = 0,5x^2 + x + 7,5$ egyenletű parabolák által határolt zárt síkidom területét.

E2 1378. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelyet az $y = x^2 + 2$ egyenletű parabola $x = 3$ abszcisszájú pontjában húzott érintő az $y = -2x + 20$ egyenletű egyenes és az x tengely határol.

E2 1379. Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola átmegy a $(6; 0)$ ponton és az origón is, ahol érintőjének iránytangense 1.

a) Határozzuk meg a , b , c értékét.

b) Mekkora területet fog közre az x tengely, a parabola és ennek az $x = 5$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő?

E2 1380. Az $y = x^2 - 8x + 15$ parabola zérushelyei: x_1 és x_2 ($x_1 < x_2$).

a) Határozzuk meg a parabola érintőjét az $\frac{x_1}{2}$ abszcisszájú P pontban.

b) Mekkora az x tengely, a parabola és a vizsgált érintő által közrefogott síkrész területe?

c) Mekkora az y tengely, a parabola és a vizsgált érintő által közrefogott síkrész területe?

E2 1381. Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola átmegy az O origón, csúcspontja $C(3; 2)$.

a) Határozzuk meg az x tengellyel való másik A metszéspont koordinátáit.

b) Határozzuk meg az a , b , c számot.

c) Írjuk fel a parabola O - és A -beli érintőjének egyenletét, legyen ezek metszéspontja M .

d) Mekkora az OMA háromszög területe?

e) Mekkora területet határol az OM , az AM szakasz és a parabola OA íve?

E1 1382. Az $y = -x^2 + 6x - 5$ parabola és az x tengely metszéspontjait jelöljük A -val, illetve B -vel. Mekkora területet határol a parabola és az A és a B ponthoz tartozó érintője?

E1 1383. Egy parabola tengelye párhuzamos az y tengellyel, csúcspontja $C(2; 5)$, a görbe átmegy a $K(0; 4)$ ponton. Határozzuk meg annak a görbevonalú háromszögnek a területét, amelyet a parabola $x_1 = -2$ és $x_2 = 4$ abszcisszájú P , illetve Q pontjához tartozó érintő és a parabolaív határol.

E2 1384. Két parabola átmegy a $(-2; 3)$ és a $(4; 3)$ pontokon, tengelyük párhuzamos az y tengellyel, csúcspontjuk ordinátája 6, illetve 1. Mekkora területet határol ez a két parabola?

E2 1385. Két parabola átmegy az $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ és a $\left(3; \frac{5}{2}\right)$ ponton, tengelyük párhuzamos az y tengellyel, csúcspontjuk ordinátája 6,5, illetve 4. Mekkora területet fog közre ez a két parabola?

E1 1386. Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola az $x = 1$ abszcisszájú pontban érinti az $y = 3x^2$ parabolát, az y tengelyt pedig a -10 ordinátájú pontban metszi.

(1) Határozzuk meg a , b és c értékét.

(2) Határozzuk meg azt a területet, amelyet ez a két parabola és az x tengely alkot.

E2 1387. Az $y = k^2 - 4x^2$ és az $y = 1 - \frac{4x^2}{k^2}$ parabola az A és a B pontban metszi az x tengelyt. Határozzuk meg k^2 értékét úgy, hogy az első parabola háromszor akkora területet fogjon közre az x tengellyel, mint a második.

E2 1388. Határozzuk meg a $k > 1$ számot úgy, hogy az $y = x^2 + 3x + 4k$ és az $y = kx^2 + 3x + 4$ parabolák által közrefogott terület $\frac{32}{3}$ legyen.

E2 1389. A $P(2; 0)$ pont közös pontja az $y = -x^3 - 3x^2 + 20$ és az $y = -x^3 - 3x^2 + 5x + 10$ görbének. Határozzuk meg az $m < 2$ számot úgy, hogy a két görbének az $[m; 2]$ intervallumhoz tartozó íve és az $x = m$ egyenes 2,5 egységnyi területet határoljon.

E2 1390. Az $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ függvény egyik zérushelye $x_1 = 1$. Határozzuk meg azt a területet, amelyet az x tengelynek a másik két zérushely közé eső szakasza és az $f(x)$ görbe határol.

E1 1391. Határozzuk meg a megadott egyenletű görbék közti területet.

a) $y = \frac{x^2}{2}; \quad x = 1; \quad x = 3; \quad y = 0;$ b) $y = 2 - x^2; \quad y^3 = x^2;$

c) $x = 2 - y - y^2; \quad x = 0.$

E1 1392.

a) $y = x^2; \quad y = x^3;$ b) $y = 2 - x; \quad y^2 = 4 - 2x;$

c) $y = x^3 + 1; \quad y = 2x^3; \quad x = 0;$ d) $y = x^2; \quad y = 8 - x^2;$

e) $x = 4y - y^2; \quad y = x.$

E1 1393. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ és az $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ görbék közötti területet, ha $0 \leq x \leq \pi$.

Forgástestek térfogata

E1 1394. Számítsuk ki az $y = x^3 - 1$ egyenletű görbének az x tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ határok között.

E1 1395. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet az $y = x^3$ egyenletű görbéből az $y = 9x$ egyenletű egyenes levág, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E1 1396. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkidomot, amelyet az $y = x^2$ egyenletű parabolából az $y = x$ egyenletű egyenes levág, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E1 1397. Mekkora a térfogata annak a forgástestnek, amelyet az $y = -(x - 2)^2 + 4$ és az $y = 0$ egyenletű görbék által határolt zárt síkidom x tengely körüli forgatásakor kapunk?

E1 1398. Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = x^3$, az $y = -x^3$ és az $y = 5$ egyenletű görbék által határolt síkrész x tengely körüli forgatásakor kapunk.

E1 1399. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet az $y = 3(x - 2)^2 - 27$ egyenletű parabolából az $y = 0$ egyenletű egyenes levág, és számítsa ki az így kapott forgástest térfogatát.

E1 1400. Forgassuk meg az x tengely körül az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű kört és az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű ellipszist. Mennyi a keletkezett két forgástest térfogatának aránya?

E1 1401. Forgassuk meg az x tengely körül az $y = x^2$ és az $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{15}{2}$ egyenletű parabolák által határolt síkrészt, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E1 1402. Forgassuk meg az $y^2 = x$, az $y^2 = 3x$ és az $x = 5$ egyenletű görbék által határolt síkidomot az x tengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

E1 1403. Számítsuk ki az $y^2 = 2x$ egyenletű parabolából az $x = 5$ egyenletű egyenessel levágott síkidomnak az x tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát.

E1 1404. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet az $y = x^2 + 1$ egyenletű parabolából az $A(-1; 2)$ és a $B(3; 10)$ pontokon átmenő egyenes levág, és számítsuk ki az így kapott forgástest térfogatát.

E1 1405. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet az $y = x^2 + 1$ egyenletű parabolából a $(-2; 0)$ ponton átmenő 2 irántangensű egyenes levág és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E2 1406. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet az $y = -x^2 - 4x + 5$ egyenletű parabola vág le a második síknegyedből, és számítsuk ki az így kapott forgástest térfogatát.

E2 1407. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola átmegy az $A(2; -7)$, a $B(-1; 20)$ és a $C(0; 9)$ pontokon. E parabola x tengely által levágott szeletét forgassuk meg az x tengely körül, és számítsuk ki az így keletkezett forgástest térfogatát.

E2 1408. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola átmegy az origón és csúcspontjának koordinátái $(5; -7)$. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amit e parabolából az x tengely levág, és számítsuk ki az így keletkezett forgástest térfogatát.

E2 1409. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola átmegy az origón és csúcspontjának koordinátái $(3; 5)$. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet a parabola, és a parabolának az x tengellyel való metszéspontjaiban húzott érintők határolnak. Mekkora lesz a keletkezett forgástest térfogata?

E1 1410. Két parabola átmegy a $(2; 0)$ és a $(6; 0)$ pontokon, tengelyük párhuzamos az y tengellyel, csúcspontjuk ordinátája pedig 4, illetve 8. A két parabola által határolt síkrészt forgassuk meg az x tengely körül, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E1 1411. Tekintsük azt a síkrészt, amit az $y = 3x^2$ egyenletű parabola, az x tengelyes és a parabola $(2; 12)$ pontjára illeszkedő érintő határol, és forgassuk meg az x tengely körül! Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

E1 1412. Az $y = -9x^2 + c^2$ egyenletű parabola egyenletében határozzuk meg c értékét úgy, hogy a parabolából az x tengely 12 egységnyi területet vágjon le. Forgassuk meg ezt a levágott parabolaszületet az x tengely körül, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E2 1413. Forgassuk meg az $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ egyenletű hiperbola $x = 10$ egyenletű egyenes által levágott részét az x tengely körül, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E2 1414. Mekkora a térfogata annak a forgástestnek, amelyet az $y = x^3 - 2$ egyenletű görbe, az x és az y tengely által határolt síkrész x tengely körüli forgatásakor keletkezik?

E2 1415. Az $y = -x^2 + 2x + 3$ egyenletű parabolának az x tengely által levágott ívét forgassuk meg az x tengely körül. Mekkora lesz a keletkezett forgástest térfogata?

E2 1416. Tekintsük az $y = 2x^2 - 5x + 1$ egyenletű parabola és az $y = x - 3$ egyenletű egyenes által határolt síkrészt, és ezt a síkidomot forgassuk meg az x tengely körül. Mekkora lesz a keletkezett forgástest térfogata?

E1 1417. Az $y = 2x - 1$, az $y = 6$ és az $y = -x + 20$ egyenletű egyenesek által határolt síkidomot forgassuk meg az x tengely körül. Mekkora lesz a keletkezett forgástest térfogata?

E1 1418. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amely az $y = -x^3$ és az $y = -\sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrefogott síkrész x tengely körüli forgatásakor keletkezik?

E1 1419. Forgassuk meg az x tengely körül azt a körszeletet, amelyet az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körből az $x - 3y = -5$ egyenletű szelő levág. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

E2 1420. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkidomot, amelyet az x tengely $[0, \pi]$ szakasza és az $y = \sqrt{\sin x}$ görbe határol. Mekkora az előálló test térfogata?

E2 1421. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkidomot, amelyet az $y = \sin x$ görbe, az x tengely és az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenes határol. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

E2 1422. Forgassuk meg az x tengely körül az $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$; $y = 0$, $x = 0$ görbékkel határolt síkidomot, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

E2 1423. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis x tengely körüli forgásakor keletkező test térfogatát.

E2 1424. Az $y^2 = (x - 1)^3$ görbét megforgatjuk szimmetriatengelye körül, majd a keletkezett forgásfelületet elmetsszük az x tengelyre merőleges, a tengely 2, 3, 4 abszcisszája pontján áthaladó síkokkal. Mekkora a létrejött három test térfogata?

E1 1425. Forgassuk meg a következő görbékkel határolt síkidomokat az y tengely körül, majd számítsuk ki a kapott forgástest térfogatát:

a) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$; $x = \pm 3$;

b) $y^2 = (x + 4)^3$; $x = 0$;

c) $y^2 = 4 - x$; $x = 0$;

d) $x = a - \frac{y^2}{a}$; $x + y = a$;

e) $y^2 - x^2 = 4$; $x = \pm 2$.

E1 1426. Egy derékszögű háromszöget, amelynek befogói 2,5, illetve 5 egység hosszúak, megforgatunk hosszabbik befogója körül. Milyen test keletkezik? Mekkora a keletkező test felszíne és térfogata?

E2 Gy 1427. Egy vízzel telt, henger alakú pohárba csúcsával lefelé olyan forgásparaboloidot helyeznek, amelynek alaplappja is, magassága is megegyezik a hengerével. Mennyi víz marad a pohárban, ha az alapkör sugara r , a testek magassága h ? Legyen

a) $h = 2r = 10$ cm; b) $h = 12$ cm; $r = 3$ cm.

E1 1428. Egy test alaplapja egyenlő szárú háromszög (alapja: $AB = 21$ cm, magassága: $OC = 30$ cm), keresztmetszete pedig olyan parabolaszélet, amely ugyanolyan magas, mint széles ($DE = KM$). Határozzuk meg a test térfogatát.

Más alkalmazások

E1 1429. Egy pont egyenes pályán állandó 8 m/s^2 gyorsulással mozog, kezdősebessége $v_0 = 100 \text{ (m/s)}$.

a) Írjuk fel a sebességfüggvényét.

b) Írjuk fel a mozgás út-idő függvényét, ha tudjuk, hogy a pont a $t = 10 \text{ (s)}$ pillanatban a kezdőponttól $s = 800 \text{ (m)}$ távolságra van.

c) Határozzuk meg t -nek azokat az értékeit, amelyekre $s(t) = 0$.

E2 1430. Egy pont az x tengelyen az origó körül harmonikus rezgő mozgást végez, sebességét a $v = v_0 \cos \omega t$ képlet adja meg, ahol t az idő, v_0 és ω konstans.

a) Írjuk fel a rezgő mozgás törvényét, ha $t = 0$ időpontban a kitérés: $x = 0$.

b) Számítsuk ki a sebesség abszolútértékének egy periódusra vonatkozó átlagát.

E2 1431. Egy tömegpont mozog az x tengelyen az $F(x)$ erő hatására. Számítsuk ki a $[0; 1]$ és a $[3; 4]$ szakaszon végzett munkát, ha

a) $F(x) = 1$; b) $F(x) = x$; c) $F(x) = x^2$.

E2 1432. Egy anyagi pont mozog az x tengelyen az $F(x) = 10 \cos x$ erő hatására. Mekkora a végzett munka, ha az elmozdulás a $[0; \pi]$ szakaszon történik?

E1 1433. Mekkora munkát kell végeznünk ahhoz, hogy 4 cm -rel megnyújtsunk egy olyan rugót, ami 1 N erő hatására 1 cm -rel nyúlik meg?

E2 Gy 1434. Egy $l = 200 \text{ m}$ hosszú, méterenként 500 N súlyú lánc csigára tekeredik. Mekkora munkára van szükség ahhoz, hogy a teljes lánc feltekeredjék? (A csiga méreteit hanyagoljuk el.)

E2 Gy 1435. Mekkora munkát végzünk, amikor egy vízzel telt forgáskúpából kiszivattyúzzuk a vizet, ha a kúp fedőkörének sugara R és mélysége H ?

E2 1436. Egy vízzel teli henger alakú edény alapterülete $T = 420 \text{ cm}^2$, magassága $h = 40 \text{ cm}$. Az alján $t = 2 \text{ cm}^2$ területű nyílás van. Mennyi idő alatt folyik ki az összes víz, ha a kifolyási sebességet a $v = \mu \sqrt{2gx}$ képlet adja meg, ahol x a folyadékoszlop magassága, μ pedig egy konstans, ami a nyílás alakjától, a folyadék minőségétől...stb. függ. Legyen most $\mu = 0,6$.

E2 1437. Számítsuk ki az $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = h$ egyenesekkel határolt téglalap tehetetlenségi nyomatékát ($\rho = 1$)

a) az x tengelyre;

b) az y tengelyre vonatkozóan.

(*Útmutatás:* Az $y = f(x) > 0$ folytonos görbe és az $x = 0$, $x = a$ egyenesek által határolt síkidomnak az y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát a következő képlet adja: $\Theta_y = \rho \int_0^a x^2 f(x) dx$.)

E2 1438. Számítsuk ki az $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ egyenesekkel határolt háromszög tehetetlenségi nyomatékát ($\rho = 1$)
 a) az x tengelyre;
 b) az y tengelyre vonatkozóan.
 (*Útmutatás az előző példánál.*)

E2 1439. Számítsuk ki az $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = x^2$ egyenesekkel határolt síkidom tehetetlenségi nyomatékát ($\rho = 1$) az y tengelyre vonatkozóan.

E2 Gy1440. Az $I(t) = a \sin \omega t$ erősségű váltakozó áram egy R állandó ellenálláson megy át. Számítsuk ki az 1 másodperc alatti energiafogyasztást (teljesítményt), ha tudjuk, hogy az egy periódus alatti energiafogyasztást az

$$E = \int_0^T R \cdot I^2(t) dt \text{ integrál adja.}$$

VI. Statisztika, valószínűség-számítás

Táblázatok, grafikonok¹

K1 1441. a) Az alábbi táblázat alapján készítsünk oszlopdiagramot az összes orvos koreloszlásáról.

b) Ábrázoljuk kördiagramon az orvosnők koronkénti megoszlását.

Orvosok száma életkor és nemek szerint 1999-ben:

korcsoport	férfi	nő	összesen	ebből dolgozó orvos
30-on aluli	1 857	2 102	3 959	3 339
30–34	2 549	2 715	5 264	4 474
35–39	2 391	2 963	5 354	4 641
40–44	2 613	3 288	5 901	5 295
45–49	2 486	3 094	5 580	5 073
50–54	2 330	2 707	5 037	4 608
55–59	2 630	2 242	4 872	4 185
60–64	2 052	1 675	3 727	2 606
65 éves és idősebb	4 755	2 111	6 866	2 165
összesen	23 663	22 897	46 560	36 386

c) Számítsuk ki, hogy korcsoportonként az orvosok hány százaléka praktizál?

d) Ábrázoljuk oszlopdiagramon.

K1 1442. A következő táblázat a felnőttek fogászati ellátását mutatja.

a) Milyen kezelés csökkent 1999-re a legnagyobb arányban 1990-hez képest: a fogeltávolítások száma, a fogtömések (végleges és gyökér) száma vagy a (koronák, hidak) beépítések száma?

b) Ábrázoljuk oszlopdiagramon ezeknek a kezeléseknak a számát az évek függvényében.



¹ Az adatok, táblázatok forrása a Magyar statisztikai évkönyv 1999-KSH 2000, a Demográfiai évkönyv 2001-KSH 2002 és ENSZ statisztikák.

felőttfogászat	1990	1997	1998	1999
rendelésen megjelen- tek száma	9 142 019	4 387 260	4 597 311	4 496 977
fogászati röntgen- felvételek száma	827 604	389 830	432 180	554 399
fogeltávolítások száma	1 744 049	948 600	915 971	867 879
végleges tömések száma	1 235 341	795 403	862 377	837 717
gyökértömések	297 612	128 151	149 510	156 335
behelyezett koronák száma	614 954	105 316	73 351	74 540
behelyezett hidak száma	22 039	14 436	5 453	8 143
behelyezett lemezes fogművek száma	281 207	101 083	111 823	107 718

K1 1443. a) Hogyan változott az egy kórházra jutó kórházi ágyak átlaga az alábbi táblázat alapján?

b) Ábrázoljuk vonaldiagramon.

c) A táblázat alapján hány főre becsülhető a kórházi orvosok száma?

ellátási mutatók	1980	1990	1997	1998	1999
kórházak száma	154	148	168	167	172
működő kórházi ágyak összesen	95 539	105 097	83 485	83 770	83 992
száz kórházi ágyra jutó orvos	11,1	13	15,2	14,5	14,1

K1 Gy 1444. Meg lehet-e állapítani, hogy Budapest lakossága e szerint a statisztika szerint hány százaléka az ország lakosságának 1980-ban és 1999-ben?

10000 lakosra jutó működő	1980	1999
kórházi ágy összesen	89,2	83,6
Ebből Budapesten	141,7	131,9
a többi városban és a községekben	76,7	73

K1 1445. Ábrázoljuk vonaldiagrammon a népesség számára vonatkozó adatokat. (Figyeljünk az éveknél a beosztásra.)

év	január 1-jén (ezer fő)
1949	9 205
1960	9 961
1969	10 284
1979	10 687
1989	10 421
1990	10 375
1991	10 355
1992	10 337
1993	10 310
1994	10 277
1995	10 246
1996	10 212
1997	10 174
1998	10 135
1999	10 092
2000	10 043

K1 1446. a) Milyen diagramot találja legmegfelelőbbnek az alábbi táblázat összefüggéseinek bemutatására? Miért?

b) Készítsük el a diagramot.

Regisztrált kábítószer-fogyasztók Magyarországon; az év végén nyilvántartott összes beteg:

	1997	1998	1999
összesen	7 945	8 957	11 373
ebből férfi	5 375	6 291	7 846
nő	2 570	2 666	3 527

K1 1447. a) Az összes balesetek számának csökkenése mellett, milyen összefüggés olvasható ki a kor függvényében, az alábbi táblázatból?

b) Melyik korcsoportban változott legjobban a személyi sérüléssel járó közúti balesetet okozó járművezetők aránya 1999-ben 1990-hez képest?

b) Ábrázoljuk a táblázat adatait oszlopdiagramon, az egyes évek adatait egy-egy oszlopban a kormegoszlási százalékoknak megfelelően.

korcsoport	1990	1997	1998	1999
18 év alatt	2 871	1 418	1 279	1 216
19–30	8 563	6 084	4 944	4 686
31–40	5 275	2 977	2 353	2 276
41–50	3 342	2 847	2 457	2 223
51–60	1 872	1 488	1 515	1 480
60 év feletti	2 192	1 819	1 486	1 434
összesen	24 115	16 633	14 034	13 315

K1 1448. a) Határozzuk meg, a balesetek hány százaléka történik az adott időintervallumokban országosan, illetve Budapesten.

b) Ábrázoljuk oszlopdiagramon.

c) Mivel indokolható, hogy éjfél és 8 óra között a budapesti baleseti arányszám az országosnál kisebb, míg azután nagyobb?

A személyszerüléssel közlekedési balesetek száma a nap órái szerint, 1999-ben:

óra	összesen	ebből Budapesten
0,01 – 5	1 195	164
5,01 – 8	2 082	359
8,01 – 12	3 921	808
12,01 – 15	3 231	690
15,01 – 18	4 053	822
18,01 – 22	3 650	778
22,01 – 24	791	172

K1 1449. a) Ábrázoljuk oszlopdiagramon a következő táblázat adatait.

b) Határozzuk meg melyik évben volt legmagasabb, illetve legalacsonyabb a válások aránya a házasságkötésekéhez viszonyítva.

év	házasságkötések száma	válások száma
1995	53 463	24 857
1996	48 930	22 590
1997	46 905	24 992
1998	44 915	25 763
1999	45 465	25 605

K2 1450. a) Vessük össze a Magyarországon várható élettartamokat néhány más országgal a táblázat alapján.

- b) Mi lehet a jobb és rosszabb értékek magyarázata? (Vizsgáljuk a területi eloszlást.)
 c) Milyen grafikonon lenne legcélszerűbb ábrázolni? Ábrázoljuk.

ország	férfi	nő
Ausztria	74,3	80,8
Csehország	71,4	78,1
Dánia	73,8	79,3
Finnország	73,8	81,0
Franciaország	74,8	82,7
Görögország	75,9	81,2
Hollandia	75,3	81,2
Lengyelország	68,8	77,5
Magyarország	66,3	75,1
Nagy-Britannia	74,7	80,2
Románia	66,1	73,7
Szlovákia	69,0	77,0

K1 1451. a) Készítsünk vonalgrafikont az alábbi táblázatból.

b) Van-e olyan terület, ahol lényegesen, hogy több a nők várható élettartama, mint a férfiaké?

c) Mi okozhatta a „hullámvölgyet” a férfiak grafikonjának közepén? (Figyeljük az évszámokat.)

Születéskor várható átlagos élettartam:

év	férfi	nő
1985	65,09	73,07
1986	65,30	73,21
1987	65,67	73,74
1988	66,16	74,03
1989	65,44	73,79
1990	65,13	73,71
1991	65,02	73,83
1992	64,55	73,73
1993	64,53	73,81
1994	64,84	74,23
1995	65,25	74,50
1996	66,06	74,70
1997	66,35	75,08
1998	66,14	75,18
1999	66,32	75,13

K1 1452. A következő táblázat a nappali tagozatos képzésben részesülők számát mutatja 1989–1999-ig:

Hogy változik a felsőfokú tanulmányokat folytatóknak a középiskolásokéra vonatkozó százalékaránya? Ábrázoljuk.

év	középiskolában tanulók (ezer fő)	felsőfokú oktatásban részesülők (ezer fő)
1989	274	72
1990	292	77
1991	309	83
1992	323	92
1993	331	104
1994	337	116
1995	349	130
1996	361	142
1997	369	153
1998	377	163
1999	387	172

K1 1453. A táblázat a mozi-, színház- és múzeumlátogatók számának alakulását mutatja 1000 főben.
a) Ábrázoljuk oszlopgrafikonon a mozi-, színház- és múzeumlátogatók számának alakulását.

b) Az 1987-es év adatait bázisadatnak tekintve melyik intézmény látogatottsága csökkent a legnagyobb mértékben 1999-re?

c) Határozzuk meg a mozi-látogatások indexét 1988 és 1999 között az előző évre vonatkozóan!

év	mozi- látogatás	színház- látogatás	múzeum- látogatás
1987	558,33	58,68	200,66
1988	507,30	57,17	183,35
1989	465,19	51,95	162,56
1990	362,20	49,91	139,77
1991	217,52	50,40	118,84
1992	152,28	47,49	101,20
1993	147,98	44,18	93,18
1994	159,12	41,40	106,23
1995	140,40	40,68	90,64
1996	132,87	38,92	98,88
1997	165,72	40,75	94,78
1998	145,77	41,16	100,09
1999	140,71	40,13	97,14

K1 1454. a) Vizsgáljuk meg a bűncselekmények számának alakulását 1995 és 1999 között.
 b) Ábrázolja oszlopdiagramon.
 c) Megállapíthatjuk-e hogy a rendőrség munkája hatékonyabbá vált 1998-ról 1999-re?
(Javaslat: nézzünk utána, hogy változott-e a szabálysértés és a bűncselekmény törvényi definíciója.)

év	bűncselekmények száma
1995	502 036
1996	466 050
1997	514 403
1998	600 621
1999	505 716

K1 1455. Az 1455., 1456. és 1458. feladatok táblázatait az Országos Meteorológiai Szolgálat adatait tartalmazzák.

a) Ábrázoljuk oszlopgrafikonon az évi középhőmérsékletet.
 b) Ábrázoljuk az abszolút hőingadozást 1998-ban és 1999-ben szabadon választott grafikonfajtan.

(°C)	középhőmérséklet			a hőmérséklet abszolút maximuma			a hőmérséklet abszolút minimuma		
év	Budapest	Debrecen	Szombat-hely	Budapest	Debrecen	Szombat-hely	Budapest	Debrecen	Szombat-hely
1998	12	10,2	10,1	37	34,3	33,8	-11,5	-16,5	-13,7
1999	12	10,6	10,1	34,5	33,2	33,2	-9,2	-16,2	-13,7

K2 1456. A táblázat Budapest adatait mutatja 1999-ben.

Ábrázoljuk úgy, hogy a középhőmérséklet legyen az x tengely, és ehhez képest mutassa a hónapok maximális és minimális értékeit az y tengelyen pozitív és negatív irányban.

hónap	közép-hőmérséklet	abszolút max.	abszolút min.
január	1,0	10,0	-6,8
február	1,7	15,5	-5,9
március	8,3	20,4	-0,4
április	13,3	24,1	3,4
május	16,9	30,3	7,2
június	20,1	30,0	9,1
július	23,1	34,5	15,2
augusztus	21,3	32,2	12,1
szeptember	19,7	28,7	11,6
október	12,0	24,7	3,1
november	4,6	17,0	-1,8
december	2,0	9,6	-9,2

K2 1457. Ez a táblázat néhány magyar város népességének alakulását mutatja az elmúlt 20 évben.

- a) Ábrázoljuk vonalgrafikonon a főváros kivételével.
 b) Melyik lélekszáma csökkent legnagyobb arányban?
 c) Melyik a legdinamikusabban fejlődő város?

város	1980	1990	2000
Budapest	2 059 347	2 016 774	1 811 552
Debrecen	198 195	212 235	203 648
Győr	124 147	129 338	127 119
Miskolc	208 103	196 442	172 357
Nyíregyháza	108 235	114 152	112 419
Pécs	169 134	170 039	157 332
Kecskemét	96 828	102 516	105 606
Szeged	164 437	169 930	158 158
Székesfehérvár	103 571	108 958	105 119
Szombathely	82 851	85 617	81 228

K2 1458. A következő táblázat a napsütéses órák számát mutatja 1999-ben hónapról hónapra.

- a) Ábrázoljuk oszlopdiagramon.
 b) Mennyi az egyes városokban a napsütéses órák átlaga, mediánja, szórása?

hónap	Budapest	Debrecen	Szombathely
január	55	49	45
február	79	82	95
március	169	196	136
április	178	194	161
május	251	263	211
június	225	248	234
július	290	281	237
augusztus	277	283	191
szeptember	219	231	186
október	130	140	126
november	39	58	42
december	69	65	75

- K2 1459.** a) Ábrázoljuk közös vonaldiagrammon a gazdaságilag aktív népesség számát és a GDP változását 1990 és 1997 között, a táblázat alapján.
 b) Készítsünk a végső fogyasztásból oszlopdiagramot.
 c) Számítsuk ki, hogy alakult a lakosság fogyasztása az összes fogyasztáson belül.

	gazdaságilag aktív népesség száma január 1. (ezer fő)		végső fogyasztás	
			összesen	ebből a lakosság összes fogyasztása
1990	5 251	306	252	240
1991	5 153	269	239	226
1992	4 940	261	240	226
1993	4 753	259	253	230
1994	4 514	267	247	230
1995	4 313	271	231	215
1996	4 240	275	223	208
1997	4 206	288	228	212

- K1 1460.** A várható átlagos élettartam Magyarországon:

év	születéskor várható átlagos élettartam		30		40		50		60		70	
			éves korban várható átlagos további élettartam									
	férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő
1998	66,14	75,18	37,78	46,31	28,89	36,84	21,34	28,01	14,95	19,79	9,77	12,43
1999	66,32	75,13	37,82	46,17	28,86	36,66	21,31	27,86	14,92	19,62	9,62	12,26

Az 1999-ben a

harmincadik évét,
 negyvenedik évét,
 ötvenedik évét,
 hatvanadik évét,
 hetvenedik évét

éppen most betöltő férfiak átlagosan hány éves korukban halnak meg?
 Magyarazzuk meg, miért kapott növekedő számsort.

K1 1461. Fogyasztóiár-index alakulása néhány országban 1995–1999-ben:

ország	változás az előző évhez képest, %				
	1995	1996	1997	1998	1999
Ausztria	2,3	1,5	1,3	1	0,6
Belgium	1,4	2,1	1,6	1	1,1
Csehország	9,1	8,8	8,5	10,7	2,1
Dánia	2	2,1	2,3	1,8	2,4
Finnország	1	0,6	1,2	1,5	1,2
Franciaország	1,7	2	1,2	0,8	0,6
Görögország	8,9	8,2	5,5	4,7	2,7
Hollandia	2	2	2,2	2	2,2
Írország	2,4	1,7	1,5	2,4	1,6
Lengyelország	27,8	19,9	14,8	11,6	7,3
Magyarország	28,2	23,6	18,3	14,3	10
Nagy-Britannia	3,4	2,4	3,2	3,4	1,6
Németország	1,8	1,4	1,9	1	0,6
Norvégia	2,5	1,3	2,7	2,2	2,4
Olaszország	5,2	4	2	2	1,7
Portugália	4,1	3,1	2,3	2,7	2,3
Románia	32,3	38,8	154,8	59,1	45,8
Spanyolország	4,6	3,6	1,9	1,8	2,3
Svájc	1,8	0,8	0,5	0,1	0,8
Svédország	1,5	0,1	0,9	0,4	0,3
Szlovákia	9,9	5,8	6	6,7	10,5

a) Csoportosítsuk az országokat.

Az átlagos árindex-növekedés 3 %-nál kisebb;

3–7 % közötti;

7%-nál nagyobb.

b) Ábrázoljuk Magyarország és még négy ország adatait grafikonon.

c) Értelmezzük, mit jelent Ausztriánál az utolsó két oszlopban található 1 és 0,6 szám?

d) Ha valaki 1994-ben 34 000 forintot az ágynemű közé rejtett, hány forintnak felel meg a vásárlóereje 1999-ben?

K2 1462. A válások száma a házasság időtartama szerint 1999-ben.

a) Ábrázoljuk kördiagramon.

b) Min alapszik az a mondas, hogy „a hetedik a legnehezebb év”?

a házasság időtartama	(darab)
2 évnél rövidebb	1 399
2–4 év	4 264
5–9 év	6 362
10–14 év	4 677
15–19 év	3 488
20 év és hosszabb	5 415
összesen	25 605

K2 1463.

A következő táblázat az út- és vasúthálózat adatait tartalmazza 1997-ben.

(Az a) 1996-os adat, és a b) 1999-es adat.)

a) Miért tartják jellemzőbbnek az 1000 km-re jutó hálózatot az összhossznál?

b) Ábrázoljuk a közút és autópálya viszonyát az egyes országokban egy megfelelő diagramon.

c) Ábrázoljuk oszlopdiagramon az országok vasút és közút hálózatának adatait.

ország	az 1000 km ² -re jutó hálózat km, 1997		
	vasút	országos közút	ebből autópálya
Ausztria	68	1 268	19
Belgium	112	4 751 ^{a)}	55 ^{a)}
Bulgária	39	336	3
Csehország	120 ^{b)}	703 ^{b)}	499 ^{b)}
Dánia	52	1 657	20
Finnország	17	230	1
Franciaország	58	1 765	16
Görögország	19	879 ^{a)}	0 ^{a)}
Hollandia	69	2 845	55
Írország	27	1 363	1
Lengyelország	73 ^{b)}	1 189 ^{b)}	268 ^{b)}
Magyarország	85	325^{b)}	5^{b)}
Nagy-Britannia	70	1 615	14
Németország	108	1 773	32
Norvégia	12	282	2
Olaszország	53	1 050 ^{a)}	32 ^{a)}
Spanyolország	25	322	15
Svájc	71	1 721	39
Svédország	22	306	3
Szlovákia	75 ^{b)}	362 ^{b)}	295 ^{b)}
Szlovénia	59 ^{b)}	993 ^{b)}	342 ^{b)}

K2 1464. A következő táblázat mutatja a népesség számát, nemek szerint január 1-jén, 1995 és 2000 között.

a) Hogyan alakult a nők aránya az évek során?

b) Számítsuk ki, hány nő jut 1000 fér-fira az egyes években.

c) Ábrázoljuk a lakosság számának alakulását egy célszerűen választott grafikonon.

év	férfi	nő
	ezer fő	
1995	4 903,70	5 342,00
1996	4 883,90	5 328,40
1997	4 863,30	5 311,20
1998	4 841,90	5 293,50
1999	4 817,60	5 274,20
2000	4 791,80	5 251,40

K2 1465. a) Ábrázoljuk a korösszetételt kördiagramon.

b) Határozzuk meg az idős népesség eltartottsági rátáját (a 15–64 évesekre vonatkozóan).

c) Határozzuk meg a gyermeknépesség eltartottsági rátáját (a 15–64 évesekre vonatkozóan).

d) Ábrázoljuk együtt vonalgrafikonon.

e) Határozzuk meg az összes eltartott rátáját (a 15–64 évesekre vonatkozóan).

f) Mekkora a %-ban mért öregedési index?

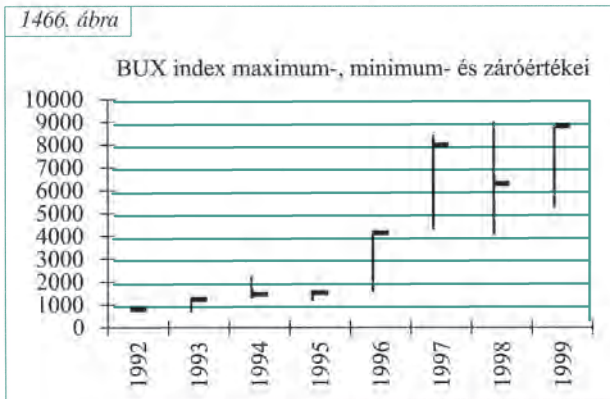
(100 gyerek/idős) Ábrázoljuk vonalgrafikonon.

év	korösszetétel (%)		
	–14	15–64	65–
1996	18,0	67,8	14,2
1997	17,7	68,0	14,3
1998	17,5	68,1	14,4
1999	17,3	68,2	14,5
2000	17,1	68,3	14,6

E1 1466. A következő táblázat mutatja a budapesti tőzsde részvényindexének alakulását, 1992 és 1999 között:

időszak	maximum	minimum	záró
	1991. január 2. = 1 000,0		
1992	913,93	747,94	796,48
1993	1 269,04	667,03	1 228,72
1994	2 255,32	1 265,21	1 470,10
1995	1 629,40	1 159,45	1 528,92
1996	4 134,31	1 557,91	4 134,31
1997	8 483,79	4 291,29	7 999,10
1998	9 016,36	3 775,02	6 307,67
1999	8 875,18	5 253,03	8 819,45

Ennek egy szokásos ábrázolása a következő grafikon:



a) Értelmezzük, hogyan készült a grafikon.

b) Milyen mozgás jellemezheti az 1994-es, 1996-os és 1998-as decemberi tőzsdeindexet?

c) Milyen tendenciát olvashatunk le az 1995–1996–1997-es mozgásról?

E1 1467. a) A következő táblázat alapján ábrázolja a lakosság forint és devizabetéteinek alakulását halmozott oszlopgrafikonon. (Az adatok milliárd forintban szerepelnek.)

b) Ábrázoljuk a különböző gazdálkodóegységek betétállományát körgrafikonon.

gazdálkodóegység	1996	1997	1998	1999
lakosság betétei	1 342,70	1 663,30	2 505,00	2 815,70
ebből:	milliárd forint			
forintbetét	857,9	1 140,50	1 889,40	2 167,30
devizabetét	484,8	522,8	615,6	648,4
kisvállalkozók betétei	48,6	82,8	98,5	123,1
vállalatok betétei	749,8	956,3	1 032,20	1 212,90
önkormányzati és egyéb betétek	215,1	259,2	287,3	312,5

E1 1468. Magyarország külföldi adósságállományának alakulását (millió euróban) mutatja a táblázat 1996 és 1999 között.

a) A nettó adósságállománynak hány százaléka a bruttó adósságállomány az egyes években?

b) Ábrázoljuk oszlopdiagramon.

c) Ábrázoljuk a nettó külföldi adósság alakulását halmazott oszlopdiagramon.

megnevezés	1996	1997	1998	1999
bruttó külföldi adósság (tulajdonosi hitelekkel)	22 574	22 109	23 368	29 003
nettó külföldi adósság (tulajdonosi hitelekkel)	11 797	10 699	11 031	11 206
ebből: kormányzati szektor és MNB	6 236	4 293	3 887	2 938
magánszektor	5 561	6 406	7 144	8 268

E1 1469. Ábrázoljuk a nemélet-biztosítási módokat megoszlását kördiagramon.

nemélet-biztosítás, ezer db	8 142,20	7 880,80	8 104,00	8 363,90
ebből				
vagyonsbiztosítás	3 385,90	3 252,50	3 220,00	3 197,80
kötelező gépjármű- felelősségbiztosítás	2 945,60	2 756,50	2 866,60	2 945,50
casco	376,4	377,6	421,4	542,8

E1 1470. Személyesrűléses közúti közlekedési balesetet okozó járművezetők életkor szerinti megoszlását mutatja a következő táblázat.

a) Ábrázoljuk kördiagramon az 1999-es adatokat.

b) Halmazott oszlopdiagramon vizsgáljuk az összes baleset számának változását az évek függvényében.

Melyik korosztályban csökkent legkisebb mértékben a balesetek száma?

korcsoport	1990	1997	1998	1999
14 éves és fiatalabb	688	477	487	522
15–18	2 183	941	792	694
19–30	8 563	6 084	4 944	4 686
31–40	5 275	2 977	2 353	2 276
41–50	3 342	2 847	2 457	2 223
51–60	1 872	1 488	1 515	1 480
60 év feletti	2 192	1 819	1 486	1 434

E1 1471. A táblázat az 1000 lakosra jutó személygépkocsi számát mutatja 1998-ban.

- a) Melyik oszlopban található adatokat lehet egymáshoz viszonyítani, ha a közutak zsúfoltságára akarunk következtetni?
 b) Ábrázoljuk a második oszlop adatait oszlopdigramon.
 c) Mekkora ennek az adatsornak a mediánja?
 d) Melyik ország értéke van legközelebb az átlaghoz?
 e) Mekkora a szórás?
 f) Hány ország értéke van az egyszeres, illetve a kétszeres szóráson kívül?

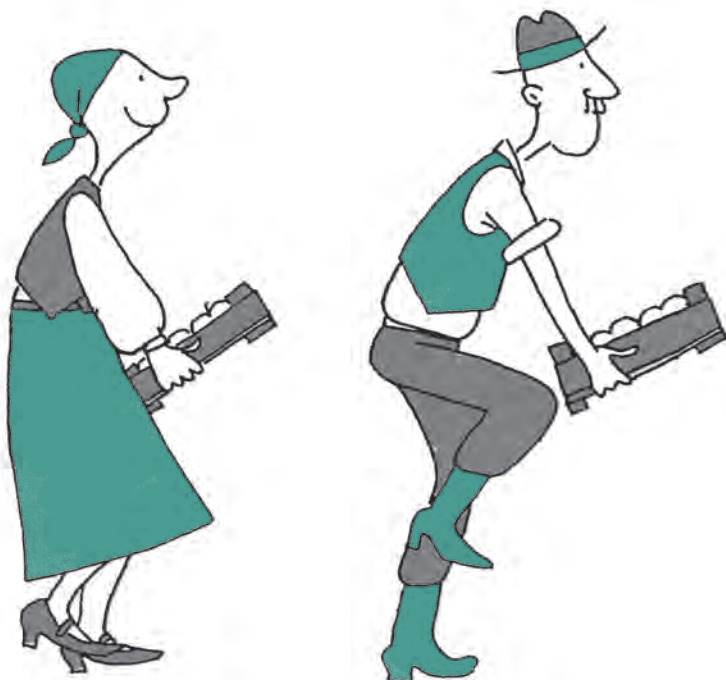
	személygépkocsi- állomány 1998-ban	ezer lakosra jutó személygépkocsi
ország	ezer db	1998-ban db
Ausztria	3 887	482
Belgium	4 458	437
Bulgária	1 703	206
Csehország	3 678	358
Dánia	1819	343
Finnország	2 008	390
Franciaország	26 810	456
Görögország	2 605	248
Hollandia	5 931	378
Írország	1 197	323
Lengyelország	7 526	230
Magyarország	2 255^{b)}	220^{b)}
Nagy-Britannia	27 010	461
Németország	41 717	509
Norvégia	1 786	403
Olaszország	31 500	549
Spanyolország	16 050	408
Svájc	3 383	477
Svédország	3 792	428
Szlovákia	1 208	222
Szlovénia	813	402

^{b)} 1999-es adat

E1 1472. Az alábbi táblázat adatai az alkalmazásban állók havi átlagkeresetét mutatják meg Magyarországon nemenként:

év	bruttó átlagkereset			nettó átlagkereset		
	férfi	nő	együtt	férfi	nő	együtt
1995	44 087	35 310	39 854	28 831	24 283	26 637
1996	52 879	41 738	47 491	33 787	28 202	31 086
1997	65 186	50 910	58 259	42 395	34 760	38 690
1998	71 931	59 216	68 192	47 137	40 557	44 266
1999	84 649	68 431	76 973	53 896	45 365	49 858

- a) A táblázat szerint férfi vagy női alkalmazott van több?
 b) Ábrázoljuk a nemek szerinti bruttó átlagkeresetet az évek függvényében.
 c) Hány százaléka a nettó átlagkereset a bruttó átlagkeresetnek az egyes években a férfiaknál és a nőknél?
 d) Miért magasabb a nőkre kijött arány?
 e) Mi okozhatja a változást az évek függvényében?



E2 1473. A táblázat mutatja az alkalmazásban állók havi bruttó átlagkeresetét néhány gazdasági ágban a gazdasági ág átlagának százalékában, iskolai végzettség szerint, 1999-ben.

a) Miből adódhat, hogy a szálláshely-szolgáltatásban dolgozó felsőfokú végzettségűek az átlagnak több, mint háromszorosát kapják, míg a pedagógusok csak kb. 25%-kal kapnak többet az átlagnál?

b) Hogyan lehet értelmezni, hogy bár az összes ágazatra számolva a felsőfokú végzettségűek átlagkeresete az átlag 168,9%-a, de az utolsó oszlop átlaga 219,1%?

	legmagasabb iskolai végzettség			
	8 általános, vagy kevesebb	szakiskola, szakmunkás- képző iskola	középfokú	felsőfokú
ipar	65,4	82,1	112,2	244,4
mezőgazd., erdőgazd., és halászat	81,5	87,9	113,3	243,2
kereskedelem, javítás	63,7	66,3	100,1	260,9
szálláshely-szolgáltatás, vendéglátás	65,1	76,3	110,5	302,5
szállítás, raktározás, posta, távközlés	67,7	76,7	98,4	234,7
pénzügyi tevékenység	56,3	60,6	70,6	174,7
oktatás	54,1	61	74,6	125,3
egészségügyi, szociális ellátás	71,4	82,3	94,2	167,1
összes ágazatra	61,9	77	101,2	168,9

Forrás: Országos Munkaügyi Kutató és Módszertani Központ.

E2 1474. A táblázat mutatja a foglalkozásonkénti kereseti adatokat a nemzetgazdaságban, 1999-ben.

(Relatív szórásnak hívjuk a szórás és az átlag hányadosát.)

a) Készítsünk oszlopgrafikont az átlagkeresetekről.

b) Számítsuk ki, milyen határok között keres az átlagtól legfeljebb egyszeres szórásnyira eltérő munkavállaló az egyes foglalkozásokban, (Vigyázat! Minimálbér 1999-ben = 25 000 Ft.)

foglalkozás	bruttó kereset	
	átlaga, Ft / hó	relatív szórása, %
vegyésmérnök	143 601	51,9
gépésmérnök	146 238	54,8
építésmérnök	111 879	70,2
mezőgazdasági mérnök	120 479	51
számítástechnikai szervező	160 417	58,2
szoftverfejlesztő, informatikus	182 776	59,1
fizikus	125 247	47
vegyész	139 875	54,4
általános orvos	95 191	44,6
állatorvos	125 427	37,4
felsőfokú tanintézeti oktató	109 757	44,7
középiskolai tanár	91 004	28,7
általános iskolai tanár, tanító	76 856	26,2
óvónő	62 520	21,4
gyógypedagógus	82 236	28,1
közgazdász	210 282	96,4
adószakértő, szaktanácsadó	212 644	50,8
könyvvizsgáló, könyvszakértő	308 353	57,5
piackutató, marketinges	208 980	54,2
üzletkötő	195 399	73,8
jogász, jogtanácsos	198 424	58,5
ügyész	283 475	23,1
bíró	276 377	23,2
könyvtáros	76 727	48,5
újságíró	82 641	62,9

E2 1475. A reálkereset és a reáljövedelem:

év	egy keresőre jutó nettó nominál átlagkereset	fogyasztói árindex	egy keresőre jutó reálkereset	egy főre jutó reáljövedelem
1990	100,0			
1991	125,5	135,0	93,0	98,3
1992	152,2	166,1	91,7	94,9
1993	179,1	203,5	88,1	90,4
1994	228,0	241,8	94,4	92,8
1995	256,7	310,0	82,9	87,9
1996	301,4	383,2	78,8	87,5
1997	374,0	453,3	82,7	88,4
1998	442,8	518,1	85,5	91,8

a) Készítsünk vonalgrafikont az egy főre jutó reáljövedelem alakulásáról 1990-hez képest. (Milyen évek a lokális maximumok?)

b) Számítsuk ki a fogyasztói árindex alakulását %-ban mindig az előző évet tekintve bázisnak.

c) Találjunk képletet (összefüggést) a nominál átlagkereset, a reál átlagkereset és a fogyasztói árindex között.

E2 1476. Magyarország halandósági táblája 1995/1996 (részlet):

A következő táblázatban azt lehet leolvasni a második és negyedik, illetve a harmadik és ötödik oszlopokban, hogy 100 000 élve született nőből, illetve 100 000 élve született férfiből várhatóan hány nő, illetve férfi éri meg az első oszlopban jelzett kort.

a) Ábrázoljuk közös vonalgrafikonon a négy oszlop adatait.

b) Igazságos-e, ha a nyugdíj összegét mindkét nemre ugyanabból a halandósági táblából számolják, bármilyen is az?

c) Mekkora a valószínűsége 1995-ben annak, hogy egy 50 éves férfi megéri az 51. évét?

d) Mekkora a valószínűsége 1996-ban annak, hogy egy 50 éves férfi megéri az 51. évét? (Javult-e az esélye?)

e) Mekkora a valószínűsége 1996-ban annak, hogy egy 50 éves nő meghal az 51. születésnapja előtt?

f) Mekkora a valószínűsége 1995-ban annak, hogy egy 50 éves férfi 5 éven belül meghal?

g) Mekkora a valószínűsége 1995-ban annak, hogy egy 50 éves férfi még öt évig él, de a hatodik évben meghal?

éves	1995-ben		1996-ban	
	nő	férfi	nő	férfi
35	97 620	95 329	97 563	95 859
36	97 468	94 923	97 429	95 530
37	97 295	94 469	97 278	95 157
38	97 100	93 964	97 108	94 737
39	96 882	93 405	96 917	94 266
40	96 640	92 791	96 706	93 738
41	96 375	92 119	96 472	93 151
42	96 090	91 388	96 217	92 499
43	95 787	90 597	95 939	91 776
44	95 464	89 744	95 637	90 980
45	95 121	88 829	95 311	90 113
46	94 752	87 849	94 957	89 177
47	94 353	86 805	94 575	88 178
48	93 921	85 697	94 161	87 122
49	93 454	84 526	93 714	86 009
50	92 951	83 287	93 236	84 835
51	92 410	81 977	92 725	83 595
52	91 834	80 592	92 186	82 285
53	91 223	79 128	91 622	80 901
54	90 575	77 586	91 032	79 442
55	89 885	75 967	90 410	77 906
56	89 147	74 275	89 746	76 292
57	88 354	72 516	89 033	74 597
58	87 499	70 696	88 267	72 822
59	86 579	68 817	87 440	70 968
60	85 590	66 879	86 546	69 037
61	84 530	64 878	85 575	67 034
62	83 400	62 814	84 522	64 969
63	82 201	60 690	83 381	62 852
64	80 931	58 508	82 148	60 686
65	79 579	56 269	80 813	58 464

E2 1477. A táblázat mutatja a 15 éves és idősebb népesség családi állapot szerinti adatait (2000. január 1.).

a) Készítsünk kördiagramot mindkét nemre az összesített adatokból.

b) Számítsuk ki, majd ábrázoljuk oszlopdiagramon az elvált nők koreloszlásának alakulását.

év, korcsoport, éves	százalékos megoszlás 2000-ben			
férfiak	nőtlen	házas	özvegy	elvált
összesen 3911,8 ezer fő	32,2	55,8	3,9	8,2
ebből:				
15–29	81,7	16,9	0	1,4
30–39	23,9	65,0	0,3	10,8
40–49	12,2	71,3	1,3	15,1
50–59	6,2	77,5	3,2	13,0
60–69	4,2	80,3	8,0	7,5
70–	2,8	69,0	25,1	3,1
nők	hajadon	házas	özvegy	elvált
összesen 4414,1 ezer fő	21,7	49,7	18,3	10,3
ebből:				
15–29	69,3	27,9	0,1	2,7
30–39	12,7	71,7	1,7	13,9
40–49	5,2	70,8	6,0	18,0
50–59	3,8	65,3	15,8	15,2
60–69	3,1	50,8	35,7	10,4
70–	4,1	22,4	68,1	5,5

E1 1478. A táblázat mutatja az önkormányzati tulajdonú lakások értékesítését 1990 és 1999 között.

a) Ábrázoljuk az értékesített lakások számát oszlopdiagramon.

b) A forgalmi érték hány százalékaért lehetett megvenni az önkormányzati lakásokat az egyes években?

c) Átlagosan melyik évben adták el a legnagyobb, és melyikben a legkisebb lakásokat?

év	értékesített lakások száma	egy lakásra	egy m ² -re	egy lakásra	egy m ² -re
		jutó átlagos forgalmi érték, ezer Ft		jutó eladási ár, ezer Ft	
1990	54 023	1 148,50	21,2	268,8	5,0
1992	74 133	1 024,90	23,1	236,3	5,3
1993	58 391	1 223,30	23,3	306,8	5,8
1994	91 959	1 353,90	25,1	369,5	6,9
1995	105 924	1 396,70	27,0	433	8,4
1996	46 774	1 488,20	28,2	441,2	8,4
1997	19 221	2 025,20	33,5	506,8	8,4
1998	14 068	2 303,60	40,7	568,2	10,0
1999	10 117	2 508,20	43,2	736,7	12,7



E1 1479. A táblázat néhány európai ország termésátlagát mutatja búzából 1999-ben.

a) Készítsünk a táblázathoz oszlopgrafikont.

b) Határozzuk meg az átlagot, a mediánt, és a szórást.

c) Az országok hány százalékának termésátlaga van az egyszeres szóráson belül?

ország	búza (kg/hektár)
Ausztria	4 670
Belgium és Luxemburg	7 620
Bulgária	3 280
Csehország	4 560
Dánia	7 280
Finnország	2 520
Franciaország	7 220
Görögország	2 230
Hollandia	7 300
Írország	8 030
Lengyelország	3 610
Magyarország	3 590
Nagy-Britannia	7 790
Németország	6 990
Olaszország	3 400
Oroszország	1 390
Portugália	1 490
Románia	2 800
Spanyolország	2 120
Svájc	6 340
Svédország	5 570
Szlovákia	4 330
Szlovénia	4 850
Törökország	2 080
Ukrajna	2 390

E2 1480. a) Csoportosítsuk az országokat területük szerint *nagy* (100 000 km² felett), *közepes* (10 000–100 000 km² között) és *kis országokra* (10 000 km² alatt).

b) Adjunk becslést a következő országok népességére: Ausztria; Hollandia; Málta; Szlovénia.

ország	terület	népsűrűség,
	ezer km ²	fő/km ²
Ausztria	83,9	96
Belgium	30,5	336
Dánia	43,1	124
Finnország	338,1	15
Franciaország	551,5	107
Görögország	132	80
Hollandia	41,5	387
Írország	70,3	55
Luxemburg	2,6	169
Nagy-Britannia	244,1	244
Németország	357	231
Olaszország	301,3	192
Portugália	91,9	109
Spanyolország	506	80
Svédország	450	20
Ciprus	9,3	86
Csehország	78,9	129
Észtország	45,2	30
Lengyelország	312,7	124
Lettország	64,6	36
Litvánia	65,3	53
Magyarország	93	109
Málta	0,3	1300
Szlovákia	49	110
Szlovénia	20,3	98

E2 1481. A táblázat a fogyasztói árak alakulását mutatja az előző évhez képest %-ban a következő országokban (2004. május 1-jétől az EU tagországai). a) Számítsuk ki, hány-szorosára nőttek az árak az 1995-öshöz képest a 2004-ben csatlakozó országokban az egyes években.

b) Ábrázoljuk vonalgrafikonon annak az öt országnak az 1995. évi árakhoz viszonyított évenkénti árváltozását, amelyeknél ez a legnagyobb lett 2001-re.

Ha a 2004 előtt is EU-országok 1995-höz viszonyított növekedési átlagát a táblázatból számított adatok átlagával számítjuk, 113,58%-ot kapunk. Mégis az EU-s változás csak 111,51%. Miért? Melyik ország árszínvonala a legstabilabb (a legkisebb) közülük?

ország	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Ausztria	1,8	1,2	0,8	0,5	2,0	2,3
Belgium	1,8	1,5	0,9	1,1	2,7	2,4
Dánia	2,1	1,9	1,3	2,1	2,7	2,3
Finnország	1,1	1,2	1,4	1,3	3,0	2,7
Franciaország	2,1	1,3	0,7	0,6	1,8	1,8
Görögország	7,9	5,4	4,5	2,1	2,9	3,7
Hollandia	1,4	1,9	1,8	2,0	2,3	5,1
Írország	2,2	1,2	2,1	2,5	5,3	4,0
Luxemburg	1,2	1,4	1,0	1,0	3,8	2,4
Nagy-Britannia	2,5	1,8	1,6	1,3	0,8	1,2
Németország	1,2	1,5	0,6	0,6	2,1	2,4
Olaszország	4,0	1,9	2,0	1,7	2,6	2,3
Portugália	2,9	1,9	2,2	2,2	2,8	4,4
Spanyolország	3,6	1,9	1,8	2,2	3,5	2,8
Svédország	0,8	1,8	1,0	0,6	1,3	2,7
Ciprus	3,0	3,6	2,2	1,7	4,1	2,0
Csehország	8,8	8,5	10,7	2,1	3,9	4,7
Észtország	23,1	11,2	8,2	3,3	4,0	5,8
Lengyelország	19,4	14,8	11,6	7,3	10,1	5,5
Lettország	17,6	8,4	4,7	2,4	2,6	2,5
Litvánia	24,6	8,9	5,1	0,8	1,0	1,3
Magyarország	23,6	18,3	14,3	10,0	9,8	9,2
Málta	2,5	3,1	2,4	2,1	2,4	2,9
Szlovákia	5,8	6,1	6,7	10,6	12,0	7,3
Szlovénia	9,9	8,4	7,9	6,1	8,9	8,4

E2 1482. A táblázatban látható a reálbérek indexe az előző év százalékában, néhány országban.

a) Mit jelent Magyarország 1996-os adata?

b) Csökkentették-e ebben az évben a béreket?

c) Számítsuk ki és ábrázolja vonalgrafikonon az 1995. évi reálbérekhez viszonyított évenkénti változást Magyarország, Lengyelország, Észtország, Szlovénia és Szlovákia esetében.

d) Az előző feladat első kérdésének segítségével határozzuk meg, hányszorosa lett a felsorolt öt országban az átlagbér (nominálbér).

ország	1996	1997	1998	1999	2000	2001
	változás az előző évhez képest, %					
Ciprus	3,1	2,9	2,7	3	2,7	3,1
Csehország	8,9	1,9	-1,3	6	2,6	3,6
Észtország	2,2	7,8	6,7	4,3	6,3	6,1
Lengyelország	5,7	5,8	3,4	12,4	1	3,3
Lettország	-6,2	12,2	3,8	3,2	3	3,5
Litvánia	3,9	13,5	12,9	7,2	- 5,1	-0,3
Magyarország	-5	4,9	3,6	2,5	1,5	6,4
Szlovákia	8,8	6,7	1,6	-3	- 4,9	0,8
Szlovénia	4,7	2,8	1,5	3,1	1,6	3,2

E2 1483. A gazdaságilag aktív népesség a lakosság százalékában:

ország	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Németország	58,3	58,2	57,7	57,6	57,7	57,7	57,9	57,5	57,5
Olaszország	47,9	47,4	47,4	47,7	47,7	47,8	48,1	48,1	48,3
Portugália	58,8	58,5	58,1	57,7	57,7	60,9	61,3	61,4	62,1
Svédország	60,9	59,8	69,1	61,3	60,8	60,2	60,9	60,4	62,7
Csehország	61,4	61,6	61,5	61,2	61,1	61,0	61,0	60,4	60,0
Magyarország	51,8	49,9	48,5	47,8	47,1	47,3	48,2	48,4	48,1
Málta	46,9	47,0	47,4	48,0	47,8	47,7	48,4	49,9	49,3
Szlovákia	62,2	61,1	59,5	60,1	59,9	59,9	60,0	60,3	60,7
Szlovénia	52,5	57,4	58,7	57,5	59,5	59,4	57,9	57,9	58,3

a) Ábrázoljuk az adatokat vonaldiagramon.

b) Miért kellett felemelni 62 évre a nyugdíjkorhatárt Magyarországon? (Olaszországban a férfiak nyugdíjkorhatára 65, a nőké 60 év.)

E2 1484. Munkanélküliségi ráta néhány országban, százalékban:

ország	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Franciaország	12,4	12,6	12,1	12	10,2	8,6
Hollandia	12,4	12,6	12,1	12	10,2	8,6
Németország	8,8	9,9	9,8	8,9	7,9	7,8
Spanyolország	22,2	20,9	18,8	15,6	13,9	10,4
Csehország	3,9	4,8	6,5	8,7	8,8	8,1
Lengyelország	12,3	11,2	10,6	13,9	16,1	18,2
Magyarország	9,9	8,7	7,8	7	6,4	5,7
Szlovákia	11,3	11,8	12,5	16,2	18,6	19,2

a) Ábrázoljuk vonalgrafikonon.

b) Miért vezettek be korlátozásokat a 2004-ben csatlakozó országok munkavállalói szemben a legtöbb „rég” EU-s országban?

c) Hány százalékkal kellene öt éven át egyenletesen változtatni a munkanélküliségi rátát Spanyolországban és Szlovákiában, hogy az 1996-os értékről a 2001-es értéket kapjuk?

E2 1485. A 15 évnél idősebb rendszeresen dohányzók százalékos aránya egyes országokban, 2000-ben:

ország	nők	férfiak
Horvátország	26,6	34,1
Csehország	17,3	29,7
Nagy-Britannia	25,0	29,0
Magyarország	30,4	53,1
Románia	10,1	32,3
Dánia	29,0	32,0
Portugália	7,9	29,3
Franciaország	21,0	33,0
Németország	22,3	34,7

a) Ábrázoljuk oszlopdiagramon.

b) Határozzuk meg mindkét nemre az átlagot és a szórást.

c) Évi 3%-os csökkenést feltételezve hány év alatt lehetne leszorítani a dohányzók arányát a jelenlegi portugál szintre?

E2 1486. Az alábbi táblázat a 2003-as FORMULA1 versenyben a pilóták végeredményét mutatja.

- Melyik versenyző teljesítménye van legközelebb az átlaghoz?
- Mennyi a megszerzett pontok szórása?
- Kik nincsenek belül az egyszeres szóráson?
- Ez hány százaléka az értékelt versenyzőknek?

Pilóták 2003-ban:

1.	M. Schumacher	93 pt
2.	K. Räikkönen	91 pt
3.	J. P. Montoya	82 pt
4.	R. Barrichello	65 pt
5.	R. Schumacher	58 pt
6.	F. Alonso	55 pt
7.	D. Coulthard	51 pt
8.	J. Trulli	33 pt
9.	J. Button	17 pt
10.	M. Webber	17 pt

11.	H. H. Frentzen	13 pt
12.	G. Fisichella	12 pt
13.	C. da Matta	10 pt
14.	O. Panis	6 pt
15.	J. Villeneuve	6 pt
16.	N. Heidfeld	6 pt
17.	M. Gené	4 pt
18.	T. Sato	3 pt
19.	J. Wilson	1 pt
20.	R. Firman	1 pt

E2 1487. A férfi teniszezők világranglistájának első 15 helyezettje így nézett ki 2004. június 30-án.

- Mennyi a dél-amerikai teniszezők pontjainak átlaga és szórása?
- Mekkora az európai versenyzők pontszámának terjedelme?

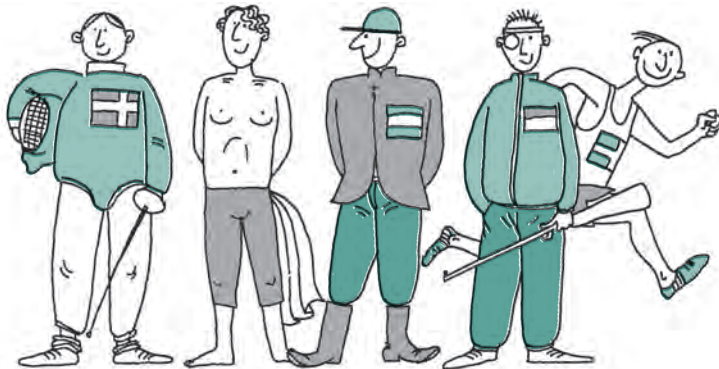
1	Federer, Roger (SUI)	546
2	Coria, Guillermo (ARG)	472
3	Moya, Carlos (ESP)	384
4	Roddick, Andy (USA)	314
5	Gaudio, Gaston (ARG)	285
6	Safin, Marat (RUS)	282
7	Henman, Tim (GBR)	269
8	Hewitt, Lleyton (AUS)	266
9	Nalbandian, David (ARG)	252
10	Hrbaty, Dominik (SVK)	182
11	Chela, Juan Ignacio (ARG)	179
12	Robredo, Tommy (ESP)	176
13	Agassi, Andre (USA)	168
14	Kuerten, Gustavo (BRA)	158
15	Pavel, Andrei (ROM)	157

E2 1488. A táblázatban látható az olimpiákon a férfiak részére kiosztott öttusa egyéni érmek megoszlása országokként, 2000-ig

a) Az összes érem hány százalékát szerezte magyar versenyző?

b) Ábrázoljuk kördiagramon Magyarország érmeinek eloszlását.

	összes	arany	ezüst	bronz
Svédország	19	9	6	4
Magyarország	12	4	6	2
Lengyelország	2	2	-	-
Szovjetunió+FÁK	10	1	3	6
Olaszország	4	1	1	2
Oroszország	2	1	1	-
Németország	2	1	-	1
Kazahsztán	1	1	-	-
USA	4	-	2	2
Finnország	2	-	1	1
Bulgária	1	-	-	1
Csehország	1	-	-	1



2 1489. Ez a táblázat a magyar labdarúgó válogatott teljesítményét mutatja 1983 és 2002 között.

a) Ha győzelemért 3 pont, döntetlenért 1 pont jár, és vereségnél nulla pont, akkor melyik volt a válogatott legsikeresebb és melyik a leggyászosabb éve? (Vegyük figyelembe, hogy nem ugyanannyi mérkőzést játszottak az egyes években.)

b) Melyik évben van legközelebb a gólkülönbség teljes időszakra vonatkozó átlagához? (gólkülönbség = rúgott gólok – kapott gólok)

c) Mennyi a gólkülönbség szórása?

d) Mely években egyezik meg a gólkülönbség a gólkülönbség teljes időszakra vonatkozó mediánjával?

év	mérkőzések száma	győzelem	döntetlen	vereség	rúgott gólok	kapott gólok
1983	10	3	3	4	19	18
1984	11	6	3	2	21	10
1985	8	6	0	2	13	4
1986	10	5	1	4	14	12
1987	9	4	2	3	12	10
1988	11	4	4	3	12	14
1989	9	2	4	3	9	15
1990	10	5	2	3	18	12
1991	12	3	3	6	13	19
1992	11	5	3	3	17	10
1993	9	3	1	5	7	13
1994	12	0	4	8	12	31
1995	8	3	1	4	8	12
1996	8	3	0	5	8	15
1997	11	3	3	5	15	22
1998	9	6	2	1	16	7
1999	10	2	5	3	11	9
2000	9	4	4	1	15	10
2001	11	2	4	5	15	17
2002	10	3	3	4	13	14

E2 1490. Ez a táblázat az 1996-ban és 2000-ben rendezett olimpiák nem hivatalos pontversenyének az első hét helyezettjét mutatja:

	Atlanta 1996	Sydney 2000
ország	pont	
USA	676	659
Oroszország	469	565
Németország	470	419
Kína	357	392
Ausztrália	268	382
Franciaország	283	291
Olaszország	256	246

- a) Ábrázoljuk oszlopdiagramon.
 b) Hány százalékkal változott az egyes országok pontszáma Atlantához képest?
 c) Mennyi az első hét ország pontszámának a szórása az egyes olimpiákon?

Statisztikai közepek

K1 1491. Az iskolában öt kilencedikes osztály van, amelyekbe rendre 31, 29, 33, 36, 31 tanuló jár. Mekkora az összes kilencedikes tanulmányi átlaga, ha tudjuk, hogy az egyes osztályok átlagai 3,68; 4,12; 4,01; 3,94 és 4,23?

K1 1492. Egy 72 db megfigyelés eredményét rögzítő számsokaság módusza 54, mediánja 54,5 és átlaga 55,7. A 73. megfigyelés eredménye 56 lett. Megadható-e az új, 73 megfigyelésből álló számsokaság módusza, mediánja és átlaga?

K1 1493. Adjunk meg 13 darab pozitív egészszámot úgy, hogy a mediánja 2, az átlaga 2000 legyen. Létezik-e ilyen sokaság, ha azt is megköveteljük, hogy egyetlen módusza legyen, és annak értéke

- a) 1; b) 2; c) 1514;
 d) 6000 legyen? e) Mennyi lehet maximum a módusz?

K1 1494. Egy 16 fős csoportban a kémia átlag 3,81 volt. (Két tizedesre kerekítve.) Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.

- a) Legfeljebb hányan kaphattak kettest?
 b) Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?
 c) Igaz-e, hogy ha a módusz 4, akkor a medián is 4?

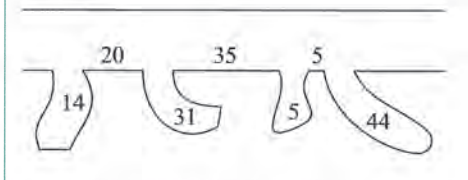
K1 1495. Egy nyolcelemű számsokaság mediánja $M = 3,8$. Mi mondható a mediánról, ha kilencedik számelemként hozzáveszünk egy 4-et?

K1 1496. Az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ számsokaságban meg kell határoznunk a legkisebb számot. Ehhez minden lépésben csak két számot lehet összehasonlítani. Hány összehasonlítás kell a legkisebb szám kiválasztásához?

K1 Gy1497. A Nekerdesi edzőtáborban a kosarasok és pehelysúlyú birkózók vegyes csapata focimeccsre hívta ki az atlétákat. A győztes csapat testmagasságai nagyság szerint rendezve a következők: (11 játékos + 3 csere) 152, 157, 158, 158, 160, 161, 168, 178, 188, 188, 191, 192, 192, 198. Melyik csapat nyerhetett?

K1 Gy1498. Zoli minden nap 14 és 15 óra között véletlenszerűen, egyenletes eloszlással érkezik az Astoria metróállomásra az iskolából. Arra a metróra száll fel, amelyik előbb érkezik az állomásra, ha a Moszkva tér felé jön előbb, a barátnőjéhez megy, ha a másik irányba, akkor a nagymamáját látogatja meg. Mindkét végállomásról 5 percenként pontosan indítják a szerelvényeket, és Zoli sohasem csal. Nagymamája mégis panaszkodott, hogy egy hónap alatt csak hatszor járt nála. Lehetséges ez?

1499. ábra



K1 Gy1499. Szalagtelek lakói naponta egyszer utaznak autóbusszon. Az autóbussz csak a főúton, egyetlen helyen áll meg, amelyhez a lakók csak a kivezető utcákon tudnak eljutni. Hová tegyék a megállót, hogy az összes lakos által megtett út összege a lehető legkisebb legyen?

Az utcácskákba írt számok az ott lakók számát adják meg.

K1 1500. Ki lehet-e úgy is számolni az a, b, c számok számtani közepét, hogy először kiszámítjuk a és b számtani közepét, majd a kapott eredménynek és c -nek vesszük az átlagát?

Ha $a < b < c$, akkor az így kapott számról el lehet-e döntení, hogy kisebb, nagyobb vagy egyenlő lesz-e a tényleges számtani középénél?

K1 1501. Ki lehet-e úgy is számolni az a, b, c, d számok számtani közepét, ha $a < b < c < d$ számok esetén az első kettőnek vesszük az átlagát, azután az utolsó kettőnek, és a két átlag átlagát tekintjük a négy szám számtani közepének? (Ez kisebb, nagyobb vagy egyenlő lesz-e a tényleges számtani középénél?)

K1 1502. Egy 35 fős osztályban a karácsonyi ajándékozáshoz mindenki felírja a nevét egy cédulára, egy sapkába teszi, összerázzuk, majd mindenki húz egy nevet. Határozzuk meg azok számának a várható értékét, akik a saját nevüket húzták.

K1 1503. Egy szabályos dobókockát feldobtunk egymás után 40-szer, a dobások eredményét az alábbi táblázat mutatja.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
3	6	1	4	4	2	1	5	5	5	1	2	4	5	1	6	2	6	2	3

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
4	5	4	4	3	3	2	1	2	2	5	5	1	3	5	4	6	1	4	4

a) Mennyi az egyes dobások gyakorisága?

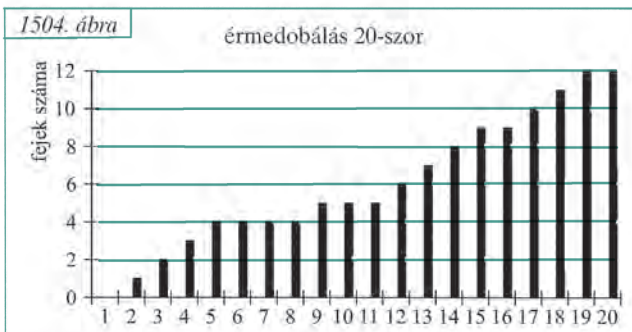
b) Mennyi a négyes dobásának relatív gyakorisága?

c) Mennyi a relatív gyakorisága annak az eseménynek, hogy a dobott szám legfeljebb 2?

d) Mennyi a relatív gyakorisága annak az eseménynek, hogy a dobott szám prím?

e) Mennyi a relatív gyakorisága annak az eseménynek, hogy a dobott szám legalább 4?

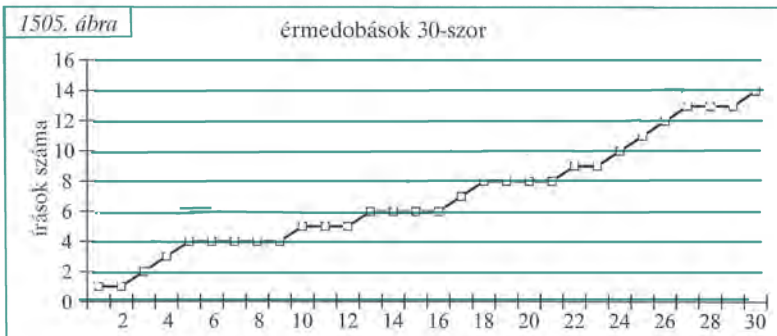
K1 1504. Egy érmével 20-szor dobtunk. A fejek számának alakulását ábrázoltuk:



a) Írjuk fel a dobássorozatot.

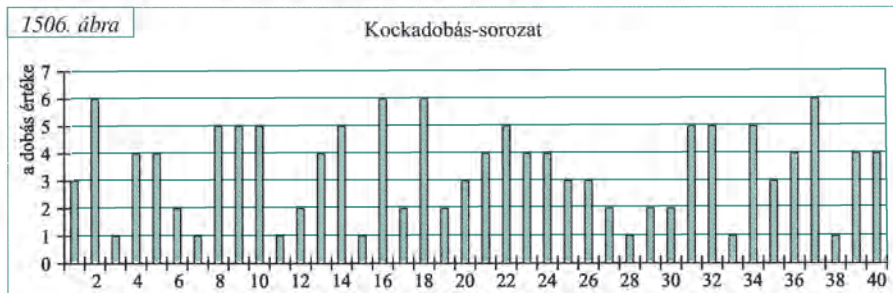
b) Mennyi az írások számának relatív gyakorisága?

K1 1505. Ez a grafikon mutatja a 30 érmedobásból álló sorozatban az írások számát.



- a) Milyen alaphiba van a grafikonon?
 b) Számítsuk ki, hogyan változik a relatív gyakoriság dobásról dobásra.
 c) Mekkora a legnagyobb eltérés a fejek és írások száma között?

K1 1506. A következő grafikon megmutatja 40 kockadobás értékeit:



- a) Mi a kettes, négyes, ötös dobásának gyakorisága?
 b) Mi az egyes, hármas, hatos dobásának relatív gyakorisága?
 c) Mi a dobássorozat módusza?
 d) Mi a dobássorozat átlaga?
 e) Mennyi a medián?
 f) Mekkora a szórás?

K1 1507. Egy osztályban egy matematika dolgozat érdemjegyei: 2 db jeles, 5 db jó, 7 db közepes, 13 db elégséges, 6 db elégtelen.

- a) Mekkora az egyes jegyek relatív gyakorisága?
 b) Készítsen az érdemjegyek százalékos eloszlásáról oszlopdiagramot; kördiagramot.

K1 1508. Egy osztályban az év végén a tanulók 12%-a jeles, 21%-a jó, 45%-a közepes, 14%-a elégséges, 8%-a elégtelen tanulmányi eredményt ért el. Készítsen az adatok alapján

- a) egy oszlopból;
 b) több oszlopból álló oszlopdiagramokat;
 c) kördiagramot.

K1 Gy 1509. Egy erdőgazdaság elhatározza, hogy az erdőből fenyőfákat vágnak ki. A környezetvédelmi tiltakozások hatására a gazdaság vezetője igyekszik megnyugtani az érdekelteket: az erdő 99%-a fenyőfából áll, a favágás után pedig az erdő 98%-a még mindig fenyő lesz. Az erdő hány százalékát akarják kivágni?



K1 Gy 1510. Egy kesztyűgyár napi bőrfelhasználása 125 napon át az alábbi (m²-ben mérve) táblázatban látható:

93	88	86	79	82	80	73	74	75	76	65	68	80	80	75	85	68	90	77	77	69	85	74	71	74
83	69	58	89	81	75	48	62	87	70	80	70	57	76	77	73	65	85	67	73	81	82	74	75	75
77	68	53	87	78	76	76	95	65	55	97	79	60	82	62	74	70	85	66	74	80	77	75	76	71
75	71	50	84	81	77	69	90	70	63	91	86	65	75	59	77	72	81	67	75	72	73	72	76	60
70	63	95	78	74	75	55	84	68	79	64	83	79	60	92	70	69	80	63	73	72	73	70	77	72

a) Számítsa ki az adatok középértékét (átlagát).

b) Készítsen olyan táblázatot, amelyben a 125 adatot 97,5-től 47,5-ig 10 (egyenlő szélességű) osztályba sorolja.

c) Számítsa ki a csoportosított adatok középértékét.

d) Számítsa ki a csoportosított adatok szórásnégyzetét és szórását.

K1 Gy 1511. Egy bevásárlóközpontban naponta megszámlálják a belépők számát. Ezt nagyság szerint rendezve az alábbi táblázat adja meg:

2565	3105	3362	3596	3740	3918	4070	4256	4551	4797	5045	6727
2596	3116	3370	3599	3744	3922	4071	4282	4554	4825	5058	6776
2717	3116	3384	3621	3768	3924	4076	4289	4554	4832	5118	6900
2718	3127	3390	3622	3781	3931	4099	4305	4555	4849	5346	7119
2725	3161	3397	3628	3796	3935	4112	4328	4570	4864	5350	
2743	3175	3409	3630	3808	3937	4121	4359	4605	4868	5377	
2863	3200	3409	3632	3809	3944	4133	4375	4618	4871	5378	
2888	3213	3423	3638	3812	3998	4136	4385	4621	4876	5455	
2925	3254	3434	3648	3813	4009	4144	4425	4646	4893	5514	
2977	3264	3471	3650	3818	4012	4167	4429	4716	4916	5553	
2979	3286	3471	3671	3824	4019	4170	4439	4716	4936	5586	
3014	3296	3471	3677	3853	4022	4173	4449	4737	4937	6160	
3064	3297	3476	3679	3854	4022	4175	4460	4771	4942	6176	
3068	3319	3488	3706	3869	4041	4223	4501	4773	4942	6197	
3089	3319	3499	3713	3873	4047	4234	4507	4790	4964	6212	
3090	3320	3509	3728	3907	4056	4239	4522	4792	5006	6459	
3099	3359	3588	3735	3910	4061	4242	4547	4794	5039	6555	

a) Állapítsuk meg a minta mediánját és móduszát.

b) Számítsuk ki a minta terjedelmét.

c) Rendezzük a megadott minta elemeit 500 fős osztályközökbe (az első osztályköz végpontja legyen 3000 fő), és a kapott adatokkal készítsük el az oszlopdiagramot.

K1 1512. a) Rendezzük az előző feladatban megadott minta elemeit 1000 fős osztályközökbe, ahol az első osztályköz kezdőpontja legyen 2501 fő, majd készítsük el az oszlopdiagramot.

b) Rendezzük a minta elemeit 1000 fős osztályközökbe, ahol az első osztályköz végpontja legyen 3000 fő, majd készítsük el az oszlopdiagramot.

c) Hasonlítsuk össze az a) és b) diagramot! Milyen következtetést vonhatók le az összehasonlításból?

d) a) Számítsuk ki az adatokból az egy napon átlagosan belépők számát (a minta középértékét).

K1 1513. Egy iskola 16 osztályának tanulmányi átlagai az év végén :

3,41	3,46	3,51	3,56	3,60	3,65	3,72	3,77
3,83	3,84	3,98	4,06	4,11	4,19	4,22	4,31

a) Mekkora a minta terjedelme, mediánja, módusza?

b) Középértéke (átlaga), szórása? Pontosan az iskolaátlagot kapjuk? (mi a különbség ennek a mintának az átlaga és az iskolába járó tanulók tanulmányi átlaga között?)

K1 Gy 1514. Könyvkötő vászon szakítási szilárdságára vonatkozóan 16 mérés adata N/cm^2 -ben a következő:

84,5	97,8	100,0	106,5	118,8	100,5	97,9	110,2
93,0	107,3	103,7	108,3	101,4	101,0	106,2	98,8

a) Mekkora a minta terjedelme, mediánja, módusza?

b) Mekkora a szakítószilárdság középértéke, szórása?

c) Készítsünk grafikont a szakítószilárdság ingadozására a mérések sorrendjének függvényében.

K1 Gy 1515. Egy konzervgyár szennyvizének szervesanyag-tartalmát vizsgálva egy hónap alatt időrendben a következő 16 elemű mintát kapták mg/literben mérve:

192	166	144	128	214	104	84	136
124	200	162	172	111	76	156	185

a) Mekkora a minta terjedelme, mediánja, módusza?

b) Van-e olyan három, egymást követő mérés, amelynek adatai meghaladják a 160 mg/liter értéket?

c) Mekkora a szervesanyag-tartalom átlagos értéke, szórása?

d) Hány olyan mérés van, amelynek értéke meghaladja az átlagnak a szórással megnövelt értékét?

e) Ha a megengedett maximális érték 190 mg/liter, javítani kell-e a szűrőberendezésen?

f) Készítsünk a szervesanyag-tartalom változásáról grafikont.

K1 Gy 1516. Egy gazdaságban megmérték a sertések leadási tömegét. Az alábbi értékeket kapták kg-ban:

leadási tömeg (kg)	gyakoriság
85–90	5
90–95	20
95–100	26
100–105	53
105–110	34
110–115	10
115–120	2

- a) Készítsünk a gyakoriságok alapján oszlopdiagramot.
 b) Mekkora a minta elemeinek középértéke, szórása?
 c) Hány osztály fedi le a középértéktől legfeljebb szórásnyira levő elemeket? Ezekbe az osztályokba hány elem esik? Ez az elemek hány %-a?

K1 Gy 1517. Izzólámpák élettartalmára egy vizsgálat során a következő értékeket kapták:

élettartam (üzemóra)	gyakoriság
650– 750	10
750– 850	33
850– 950	91
950–1050	102
1050–1150	58
1150–1250	31
1250–1350	5

- a) Határozzuk meg a minta terjedelmét, az egyes osztályokba sorolt elemek relatív gyakoriságát.
 b) Mekkora a minta elemeinek az átlaga, a szórása?
 c) A gyakoriság és a (%-ban kifejezett) relatív gyakoriság értékeit szemléltessük egy-egy oszlopdiagrammal. Mely diagram elkészítése a célszerűbb, és miért?
 d) Ha a szabvány óra élettartamot ír elő, akkor a minta elemei teljesítik-e ezt? Hány % a selejt?

K1 Gy 1518. Négy vállalat egy termékének piaci részesedése százalékban kifejezve 6 év alatt a következő módon alakult:

vállalat	1. év	2. év	3. év	4. év	5. év	6. év
A	28	20	15	20	21	27
B	22	25	30	28	24	21
C	30	30	32	28	31	27
D	20	25	23	24	24	25

Szemléltessük az adatokat

a) grafikonnal; b) oszlopdiagrammal;

Gyakoriság, relatív gyakoriság

K1 1519. Feldobtunk egy pénzdarabot egymás után 30-szor. Az írások számának gyakoriságát a táblázat mutatja;

dobások száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
írárok száma	0	1	1	1	2	3	3	4	4	4	5	5	6	7	7

dobások száma	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
írárok száma	7	7	8	9	9	9	10	10	11	11	12	13	13	14	14

Írjuk fel a dobássorozatot. (Mi volt az egyes dobások eredménye?)

K1 1520. Feldobtunk egy szabályos játékkockát 25-ször egymás után. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok dobásának gyakoriságát a táblázat mutatja:

dobások száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1-es dobásának száma	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5
2-es dobásának száma	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
3-as dobásának száma	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6
4-es dobásának száma	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
5-ös dobásának száma	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4
6-os dobásának száma	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4

Írjuk fel a dobássorozatot.

K1 1521. Feldobtunk egy pénzdarabot 30-szor egymás után. Az írások számának relatív gyakoriságát a táblázat mutatja:

dobások száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
íráások relatív gyakorisága	0	0,5	0,33	0,25	0,4	0,5	0,43	0,5	0,44	0,4

dobások száma	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
íráások relatív gyakorisága	0,45	0,42	0,46	0,5	0,47	0,44	0,41	0,44	0,47	0,45

dobások száma	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
íráások relatív gyakorisága	0,43	0,45	0,43	0,46	0,44	0,46	0,48	0,5	0,52	0,53

Írjuk fel a dobássorozatot.

K1 1522. Egy dobozban három piros és három kék golyó van. Egymás után 30-szor találomra kihúztuk az egyik golyót, a színét feljegyeztük, majd a golyót visszatettük a dobozba. A húzások eredményét az alábbi táblázat mutatja (piros = p, kék = k):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	p	k	p	p	k	k	p	k	p	p	k	k	p	p
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	p	k	k	k	p	p	k	p	p	k	p	p	k	k

- a) Mennyi a kék golyók számának gyakorisága?
b) Mennyi a piros golyók számának relatív gyakorisága?

K1 1523. Egy számítógépes játékban az alábbi táblázat S jelű mezőjéről elindulunk egy bábuval. Minden lépésben egy szinttel lejjebb lépünk: a bábu alatt lévő, balra vagy jobbra átlósan elhelyezkedő mezők közül véletlenszerűen kiválasztjuk az egyiket. Az utolsó lépésben a 6. szint A, B, ..., G mezőjének egyikére kerül a bábu, ahol elhagyja a játékteret.

				S					
			1		1				
		2		2		2			
	3		3		3		3		
	4		4		4		4		4
	5		5		5		5		5
A	B	C		D	E	F		G	

Ezt a játékot 60-szor lejátszva a következő eredményt kaptuk:

játékos	A	B	C	D	E	F	G
bábu végső helyzete	3	6	9	29	8	4	1

- a) Mennyi a relatív gyakorisága annak, hogy a bábu a játéktábla jobb oldalán hagyta el a pályát?
 b) Mennyit tippeltél volna a játék megkezdése előtt? (Mi lett volna a „legjobb tipp”?)

Eseményalgebra

K1 1524. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy dobókockával páros számot dobunk, B jelentse azt, hogy 3-nál nagyobbat. Mit jelent az

- a) $A + B$ esemény; b) $A \cdot B$ esemény; c) $A - B$ esemény; d) $\bar{A}$ esemény?

K1 1525. Találomra felírunk egy kétjegyű számot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a szám páratlan; B azt, hogy a szám osztható 3-mal; C azt, hogy a szám osztható 4-gyel. Mit jelentenek az alábbi események:

- a) $A + B$; b) $A \cdot B$;
 c) $\bar{A} \cdot B$; d) $A - B$;
 e) $A \cdot C$; f) $\bar{A} \cdot C$;
 g) $A - C$; h) $B \cdot C - \bar{A}$?

K1 1526. Jelentse $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ rendre azokat az eseményeket, hogy egy dobókockával 1-est, 2-est, ..., 6-ost dobunk. Írjuk le a következő eseményeket:

- a) a dobott szám osztható 2-vel;
 b) a dobott szám osztható 3-mal;
 c) a dobott szám osztható 2-vel *vagy* 3-mal;
 d) a dobott szám osztható 2-vel *és* 3-mal;

e) a dobott szám *sem* 2-vel, *sem* 3-mal nem osztható;

f) a dobott szám osztható 2-vel, *de* 3-mal nem;

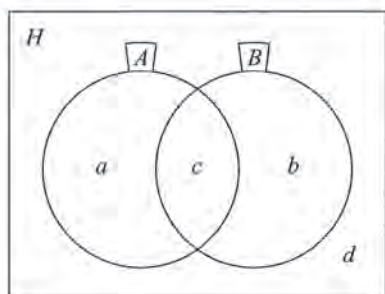
g) a dobott szám *nem* osztható 2-vel;

h) a dobott szám *legalább* 4;

i) a dobott szám *legfeljebb* 4.

K1 1527. Jelentse H azt az eseményt, hogy egy szám kétjegyű; A azt az eseményt, hogy egy kétjegyű szám páros, B pedig azt, hogy egy kétjegyű szám 5-tel osztható. Az alábbi ábrán a , b , c , d eseményeket jelölnek.

1527. ábra



- a) Írjuk le az a, b, c, d eseményeket A, B, H segítségével.
 b) Írjuk le az $(a + b)$ eseményt A, B, H segítségével.
 c) Hogyan írhatjuk le, hogy egy kétjegyű szám nem 0-ra végződik?

K1 1528. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy dobókockával páros számot dobunk, B jelentse azt, hogy 3-nál nagyobbat. Mit jelent az

- a) $A + B$ esemény; b) $A \cdot B$ esemény; c) $A - B$ esemény;
 d) $\overline{A}$ esemény; e) $B - \overline{A}$ esemény; f) $B \cdot \overline{A}$ esemény?

K2 Gy 1529. Egy áruházban két személyszállító liftet és egy mozgólépcsőt építettek. Jelentse A_1 azt az eseményt, hogy az első lift működik, A_2 azt, hogy a második, M pedig azt, hogy a mozgólépcső üzemképes.

Határozza meg, mit jelentenek a következő események:

- a) $A_1 + A_2 + M$; b) $A_1 \cdot A_2 \cdot M$;
 c) $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{M}$; d) $(A_1 \cdot A_2) + (A_1 \cdot M) + (A_2 \cdot M)$;
 e) $\overline{A_1 + M}$; f) $\overline{A_2 \cdot M}$.

K2 Gy 1530. A jelentse azt az eseményt, hogy egy gyár 4%-nál alacsonyabb selejtszázalékkal dolgozik; B azt, hogy 2%-nál alacsonyabb a selejtszázalék. Mit jelent az

- a) $A - B$ esemény; a) $B - A$ esemény?

K2 1531. Egy kör alakú céltáblára célba lövünk. A jelentse azt az eseményt, hogy lövésünk a céltábla bal oldali részébe esik, B azt, hogy az alsó részébe. Mit jelent az

- a) $A - B$ esemény; b) $B - A$ esemény;
 c) $B \cdot \overline{A}$ esemény; d) $\overline{A \cdot B}$?

K2 1532. Legyen B az az esemény, hogy osztályunk legidősebb tanulója betöltötte a 18-ik életévét; A az, hogy a legidősebb tanuló betöltötte a 17-ik életévét. Mit jelent az $A - B$ esemény?

K2 1533. A jelentse azt az eseményt, hogy osztályunkban legalább 3 tanulónak lesz minden tárgyból jelese; B azt, hogy legalább 3 tanulóknak lesz matematikából jelese. Mit jelent az

- a) $A + B$ esemény; b) $A \cdot B$ esemény?

K2 1534. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy csomag magyar kártyából kihúzott lap piros; B azt, hogy figura; C azt, hogy ász. Mit jelent az

- a) $A + B$; b) $A \cdot B$; c) $A + C$; d) $A \cdot C$;
 e) $B + C$; f) $B \cdot C$; g) $A + B + C$; h) $A \cdot B \cdot C$;
 i) $(A + B)C$; j) $A \cdot C + B \cdot C$; k) $A(B + C)$; l) $A \cdot B + C$
 esemény?

E1 1535. A jelentse azt az eseményt, hogy egy csomag magyar kártyából kihúzott lap piros; B azt, hogy zöld és C azt, hogy hetes. Mit jelent az

- a) $A + B + C$; b) $(A + B) - C$;
 c) $(A \cdot B) - C$; d) $(C - A) - B$
 esemény?

E1 Gy 1536. A lottón az 1, 2, 3, ..., 90 számok közül 5-öt húznak ki. A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelöljük A -val azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van a 14, 37, 42, 51; B -vel pedig azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van a 37, 41, 68. Mit jelent az

a) $A + B$; b) $A \cdot B$
esemény?

E1 1537. Milyen A , B , C eseményekre igaz, hogy $(A - B) - C = A - (B - C)$?

E1 Gy 1538. Egy raktárból lehet vasúton is és közúton is árut szállítani. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, B pedig azt, hogy aznap van közúti szállítás. Mit jelentenek ekkor a következő események?

- | | |
|--|--------------------------|
| a) $A + B$; | b) $B - A$; |
| c) $\overline{A} + \overline{B}$; | d) $\overline{A} + B$; |
| e) $\overline{A} \cdot \overline{B}$; | f) $A + \overline{AB}$. |

Valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja

K1 1539. Mi a valószínűsége annak, hogy ha az A , B , D , E , P , S , T , U betűket taláломra egymás mellé írjuk, éppen a BUDAPEST szót kapjuk?

K1 1540. Mi a valószínűsége annak, hogy ha a B , C , D , E , E , E , N , R betűket taláломra egymás mellé írjuk, akkor a DEBRECEN szót kapjuk?

K1 1541. Egy dobozba 10 cédulát teszünk, amelyeken rendre a következő betűk állnak: A , A , A , E , I , K , M , M , T , T . Húzzuk ki a dobozból egyenként a cédulákat, és helyezzük el egymás mellé a kihúzás sorrendjében. Mi a valószínűsége annak, hogy a MATEMATIKA szót kapjuk?

K1 1542. Egy csomag magyar kártyából kihúzzunk egymás után két lapot úgy, hogy az elsőként kihúzott lapot nem tesszük vissza. Mi a valószínűsége annak, hogy mindkét kihúzott lap király lesz?

K1 1543. Egy csomag magyar kártyából kihúzzunk egymás után két lapot úgy, hogy az elsőként kihúzott lapot a második húzás előtt visszatesszük. Mi a valószínűsége annak, hogy mindkét kihúzott lap király lesz?

K1 1544. Egy csomag magyar kártyából húzzunk ki taláломra 4 lapot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott négy lap közül három hetes?

K1 1545. Húzzunk ki egy csomag 32 lapos magyar kártyából egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lap

a) piros; b) 7-es; c) piros vagy 7-es?

K1 1546. Húzzunk ki egy csomag 52 lapos francia kártyából két lapot. Határozzuk meg, melyik esetben nagyobb a valószínűsége annak, hogy két 7-est húzzunk, ha:

- az első lap kihúzása után a lapot visszatesszük, és a csomagot újrakeverjük;
- az első kihúzott lapot nem tesszük vissza a második húzás előtt.

K1 1547. Válasszunk ki találmra a kocka 8 csúcsa közül 3-at. Mi a valószínűsége annak, hogy az így kiválasztott 3 csúcs között nincs kettő, amelyik egy él végpontja lenne?

K1 1548. Válasszunk ki találmra a kocka 8 csúcsa közül 3-at. Mi a valószínűsége annak, hogy az így kiválasztott 3 csúcsra fektethető sík nem illeszkedik a kocka egy negyedik csúcspontjára?

K1 1549. Két szabályos dobókockát egymástól függetlenül feldobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

- a) legalább egy 6-ost dobunk;
b) legfeljebb egy 6-ost dobunk;
c) két különböző számot dobunk;
d) mindkét dobás nagyobb, mint 2;
e) a dobott számok összege 5;
f) a dobott számok összege 9;
g) a dobott számok összege legalább 5?

K2 1550. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B eseményre

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

K2 1551. Egy kísérletben az A esemény valószínűsége 0,6; a B eseményé 0,7. Milyen határok között mozoghat $P(AB)$? Mutasson példát mindkét szélsőértékre.

E2 1552. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A , B és C eseményekre

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

K2 1553. Egy szabályos játékkockával 36-szor dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1, 2, ..., 6 számok mindegyikét éppen hatszor dobtuk?

K2 1554. Két szabályos dobókockát feldobunk, és a dobott számok összegét tekintjük. Mekkora valószínűséggel lesz az összeg

- a) 4-nél nagyobb; b) 10-nél kisebb;
c) páros; d) 4-nél nagyobb és páros?

K2 1555. Mi a valószínűsége, hogy ha egy szabályos dobókockát n -szer feldobunk, és a dobott számok összege osztható lesz 2-vel?

K2 1556. Mi a valószínűsége, hogy ha egy szabályos dobókockát n -szer feldobunk, és a dobott számok összege osztható lesz 6-tal?

K2 1557. Egy szabályos játékkockával egymás után ötször dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

- a) legalább egyszer 6-ost dobunk;
- b) legalább egyszer 1-est vagy 6-ost dobunk;
- c) először az ötödik dobásunk lesz 6-os?

K2 1558. Két szabályos játékkockával egyszerre dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege páratlan, B pedig azt, hogy legalább az egyik kockán 6-os van. Mennyi a valószínűsége az alábbi események bekövetkezésének:

- a) $A \cdot B$; b) $A + B$;
c) $\overline{A} + B$; d) $\overline{A + B}$?

K2 Gy 1559. A hagyományos 13+1-es totón kitöltünk egy szelvényt (mind a 14 eredményre az 1, 2 vagy X tippeket adhatjuk). Ha a mérkőzések végeredménye véletlenszerű, mekkora annak a valószínűsége, hogy

- a) 13+1 találatos szelvényünk lesz;
b) csak az utolsó tippet hibázzuk el;
c) csak egy tippet hibázzunk el?

K2 1560. Tíz ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -, I -, K -val – leül egy padra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy A és B egymás mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű? (Két ülésrend nem különbözik, ha mindenkinek ugyanazok a szomszédai.)

K2 1561. Tíz ember – jelöljük őket rendre A -, B -, C -, D -, E -, F -, G -, H -, I -, K -val – leül egy padra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy A B mellé és G H mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű? (Két ülésrend nem különbözik, ha mindenkinek ugyanazok a szomszédai.)

K2 1562. Egy padra leül n ember ($n > 4$). Mennyi a valószínűsége annak, hogy A B mellé és C D mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű? (Két ülésrend nem különbözik, ha mindenkinek ugyanazok a szomszédai.)

E1 Gy 1563. Egy kerek asztal mellé leül n ember ($n > 4$). Mennyi a valószínűsége annak, hogy A B mellé és C D mellé kerül, ha minden elhelyezkedés egyenlően valószínű? (Két ülésrend nem különbözik, ha mindenkinek ugyanazok a szomszédai.)

E1 Gy 1564. Egy raktárban egy bizonyos típusú alkatrészből a darab van. Közülük b darab selejtes ($b < a$). Vegyünk ki a raktárból taláalomra b darabot a szóban forgó alkatrészből. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kivett alkatrészek között

- a) egyetlen selejtes sem lesz; b) mindegyik selejtes lesz?

K2 Gy 1565. Egy páncélszekrény rejtjeles zárral van ellátva; egy tengelyen 5 forgható korong van, amelyeken a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok láthatók. A zár csak az 5 korong egy bizonyos beállításában nyílik, azaz amikor a korongokon elől látható számjegyek egy meghatározott ötjegyű számot alkotnak. (A 0-val kezdődés is megengedett.) Tegyük fel, hogy valaki tudja azt, hogy az 5 számjegy között pontosan egy 2-es és pontosan egy 3-as van, s addig próbálkozik, amíg a zárat ki tudja nyitni. Ha percenként 20 lehetőséget tud kipróbálni, mennyi a valószínűsége annak, hogy 6 óra alatt ki tudja nyitni a zárat?

K2 Gy 1566. Egy páncélszekrény rejtjeles zárral van ellátva; egy tengelyen 6 forgható korong van, amelyeken a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok láthatók. A zár csak a 6 korong egy bizonyos beállításában nyílik, azaz amikor a korongokon elől látható számjegyek egy meghatározott hatjegyű számot alkotnak. (0-val is kezdődhet.) Valaki ki akarja nyitni a zárat. Ha percenként 20 lehetőséget tud kipróbálni, mennyi a valószínűsége annak, hogy 6 óra alatt ki tudja nyitni a zárat?

K2 Gy 1567. Két sakkozó, A és B , hatjátszmas mérkőzést játszik egymás ellen. Eddigi egymás elleni játszmáikból ismeretes, hogy annak a valószínűsége, hogy

egy parti A győzelmével, döntetlenül vagy B győzelmével végződik, rendre $\frac{2}{7}$,

$\frac{1}{4}$, $\frac{13}{28}$. Mi a valószínűsége annak, hogy a mérkőzés 3 : 3 arányban döntetlenül végződik?

E1 Gy 1568. Egy fiút akkor engednek el játszani, ha három egymás utáni sakkparti közül legalább két egymás utánit megnyer. Partnerei: Apa és Papa, mégpedig vagy Apa-Papa-Apa, vagy Papa-Apa-Papa sorrendben. Apa jobban játszik, mint Papa. Melyik sorrend kedvezőbb a fiú számára?

E1 1569. Az alábbi táblázatból a MAGYARORSZÁG szót úgy kell kiolvasni, hogy az M betűtől indulva csak jobbra vagy lefelé haladhatunk.

M	A	G	Y	A	R	O	R
A	G	Y	A	R	O	R	S
G	Y	A	R	O	R	S	Z
Y	A	R	O	R	S	Z	Á
A	R	O	R	S	Z	Á	G

Ha a lehetséges lépések közül véletlenszerűen választunk, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiolvasás folyamán nem haladunk át a 3. sor 5. mezőjén?

E1 Gy 1570. Az A és B között öt út vezet, három aszfaltozott, kettő földút. A B városból C városba két aszfaltozott út és egy földút vezet. Találomra választott úton elutazunk az A városból B -n keresztül C -be.

- a) Mekkora valószínűséggel haladunk végig aszfaltozott úton?
b) Mekkora valószínűséggel haladunk aszfaltozott úton és földúton is?

K2 1571. Egy szabályos dobókockát feldobva mi a valószínűbb, hogy prím-szám lesz felül, vagy hogy páros szám?

K2 1572. Egy szabályos dobókockát feldobva mi a valószínűbb, hogy összetett szám lesz felül, vagy 4-nél nagyobb?

K2 1573. Dobjunk fel egy szabályos játékkockát egymás után ötször, és a dobott pontszámokat a dobások sorrendjében balról jobbra haladva írjuk egymás mellé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ötten osztható ötjegyű számot kapunk?

K2 1574. Egy szabályos játékkockát egymás után kétszer feldobunk. Az így kapott számokat a dobás sorrendjében egymás mellé írjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy hárommal osztható kétjegyű számot kapunk?

K2 1575. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobva mi a valószínűbb, hogy a dobott számok összege 3 lesz, vagy hogy 11?

K2 1576. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobva mi a valószínűbb, hogy a dobott számok összege kevesebb, mint 4 lesz, vagy hogy több, mint 10?

K2 1577. Egy játékkocka három oldalán 1-es, három oldalán pedig -1-es van. A kockát ötször egymás után feldobjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege páratlan szám lesz?

K2 1578. Egy játékkocka két oldalán 1-es, két oldalán 0-s, két oldalán pedig –1-es van. A kockát ötször egymás után feldobjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege páros szám lesz?

K2 1579. Egy csoportban 4 lány és 6 fiú van. Véletlenszerűen kiválasztunk kettőt közülük. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egyikük fiú, a másik lány?

K2 1580. Egy osztályból 5 fiú és 5 lány együtt megy moziba. Egymás mellé ülnek mind a tízen. Az ülésrendet sorsolás alapján döntik el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy lány lány mellé, fiú fiú mellé nem kerül, ha bármilyen ülésrend egyenlően valószínű?

K2 1581. Négyen kártyáznak a 32 lapos magyar kártyával. Osztáskor mindenki 8 lapot kap. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legidősebb játékosnál – feltéve, hogy van ilyen – van a piros ász?

K2 1582. Négyen kártyáznak a 32 lapos magyar kártyával. Osztáskor mindenki 8 lapot kap. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz olyan játékos, akinek csak zöldje van?

K2 1583. Négyen kártyáznak a 32 lapos magyar kártyával. Osztáskor mindenki 8 lapot kap. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nálam van a piros király és a piros felső?

K2 1584. Mennyi a valószínűsége, hogy a legkisebb kihúzott lottószám a 14-es?

K2 1585. Mennyi a valószínűsége, hogy a legnagyobb kihúzott lottószám a 74-es?

K2 1586. Mennyi a valószínűsége, hogy az összes kihúzott lottószám 18 és 81 között van?

K2 1587. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott középső lottószám a 21?

K2 1588. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott középső lottószám nagyobb 50-nél?

K2 1589. Mennyi a valószínűsége, hogy az öt kihúzott lottószám növekvő sorrendben került kihúzásra?

K2 1590. Mekkora valószínűsége van, hogy a lottón
a) ötösünk lesz; b) hármasunk lesz;
c) nem nyerünk,
ha egy szelvényrel játszottunk?

K2 1591. Mekkora a valószínűsége, hogy egy 52 lapos francia kártyából 13-at kihúzva mind a 4 bubi közte van?

K2 1592. Mekkora a valószínűsége, hogy egy 52 lapos francia kártyából 13-at kihúzva legfeljebb 3 ász van közte?

E1 1593. Egy urnában 5 piros és 10 kék golyó van. Mi a valószínűsége, hogy kettőt kivéve azok *különböző* színek lesznek, ha az elsőre húzott golyót
a) nem tesszük vissza; b) visszatesszük
a második húzása előtt?

E1 1594. Egy urnában 5 piros és 10 kék golyó van. Mi a valószínűsége, hogy kettőt kivéve azok *azonos* színek lesznek, ha az elsőre húzott golyót
a) nem tesszük vissza; b) visszatesszük a második húzása előtt?

E1 1595. Egy urnában 3 piros, 3 fehér és 3 zöld golyó van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 6 golyót visszatevés nélkül kihúzva mindhárom színű lesz közöttük?

E1 1596. Véletlenszerűen kiválasztunk két különbözőt az 1, 2, 3, 4 és 5 számok közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy köztük pontosan egy páros lesz?

E1 Gy 1597. Egy dobozban 50 szál gyufa van. Minden szál csak $p = 0,9$ valószínűséggel gyullad meg. Mennyi annak valószínűsége, hogy legfeljebb 4 próbálkozással meg lehet gyújtani a tábornützet?

E1 1598. Eddig 10-szer dobunk fel egy kockát, és egyetlen 6-ost sem dobunk. Mennyi annak valószínűsége, hogy a következő 10 dobás során sem kapunk hatost?

E1 1599. Mi a valószínűbb, hogy egy kockával dobva 4 dobás közt lesz 6-os, vagy hogy két kockával dobva 24 dobás közt lesz egyszer mindkettőn 6-os?

E1 Gy 1600. A BKV-ellenőrök munkarendje munkanapon olyan, hogy egy adott buszjáraton Péter reggel hét óra és fél nyolc között 4%-os valószínűséggel találkozik valamelyikükkel. Ez olyan kicsi valószínűség, hogy Péter próbát tesz: egy hónapon keresztül reggelenként egyszer sem lyukaszt jegyet. Mi annak a valószínűsége, hogy a 20 munkanapot megússza büntetés nélkül?

E1 Gy 1601. Egy villamoson $p = 0,04$ valószínűséggel jelennek meg ellenőrök. A jegy nélkül utazókat 3000 Ft bírsággal sújtják. Mekkora annak valószínűsége, hogy a bírság fedezi a bliccelő által a lebukásig okozott kárt, ha egy jegy ára 150 forint?

K2 Gy 1602. Ezen a héten az 1, 3, 5, 7, 11 számokat játszottam a lottón. A villamoson hallottam, hogy a legkisebb és legnagyobb kihúzott szám különbsége 10. Mekkora annak valószínűsége, hogy legalább négyesem van?

E1 1603. Legalább hány pénzérmét kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb valószínűséggel legyen közöttük fej?

E1 1604. Legalább hány kockát kell feldobni, hogy 75%-nál nagyobb valószínűséggel legyen közöttük hatos?

E2 Gy 1605. Egy villanykörtét gyártó cég termékei között 8% az előírtnál lényegesen rövidebb élettartamú, ezeket is selejtesnek tekinti az átvéő.

Mekkora annak a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen választott körte között – legalább két selejtes,

– pontosan négy selejtes körte található?

Legalább hány körtét kell megvizsgálni ahhoz, hogy köztük 0,99 valószínűséggel legalább egy selejteset találjunk?

E2 Gy 1606. A gyártás során a mobiltelefonok 1%-a hibás. Ha 500 darabot vesz egy nagykereskedés, hány hibás lesz közöttük a legnagyobb valószínűséggel, és mekkora ez a valószínűség?

E1 Gy 1607. Egy vizsgán az A és B tételek elméleti, a C tételek gyakorlati jellegűek. Mindhárom tételsor 10 feladatból áll, s a vizsgázónak mindegyik sorból egy-egy tételt kell húznia. Ha a vizsgázó bármelyik tételét nem tudja, akkor megbukik. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy diáknak 80%-os felkészültséggel nem sikerül a vizsgája? (A 80%-os felkészültség ez esetben azt jelenti, hogy minden tételsorból nyolc tételt tanult meg, kettőt nem.)

E1 1608. A lottószelvényemen ezen a héten a 7, 22, 51, 54, 78 számokat játszottam meg. Éppen a húzást figyelem, és eddig a 78, 13, 22 számokat húzták ki. Ebben a pillanatban mekkora a valószínűsége, hogy legalább hármasom lesz?

E1 Gy 1609. Elfelejtettem a bankkártyám személyi azonosító (PIN) kódját. Csak arra emlékszem, hogy az első jegy biztosan nem volt nulla, és a négy számjegy között pontosan két hármas volt. Ha az automata egy próbálkozásnál két hibás kódot enged meg, harmadikra elveszi a kártyát, és minden nap az iskolába jövet és menet is próbálkozom, mekkora eséllyel találok ki a kódot egy hónap (25 tanítási nap) alatt?

E1 Gy 1610. Egy szavazókörzetben összesen N szavazásra jogosult állampolgár él. Mindegyikük p valószínűséggel megy el szavazni a többiekétől függetlenül. Mekkora a valószínűsége, hogy a választópolgárok több, mint 50%-a részt vesz a szavazáson?

E1 1611. Valaki azt állítja, hogy a kártyák színét tapintással felismeri. Állításának igazát próbának vetettük alá. Egy csak a babás lapokat tartalmazó, jól megkevert magyar kártyacsomagból bekötött szemmel kellett neki a négy pirosat kiválasztania. Ezzel szemben a négy kiválasztott kártya között csak két piros volt. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy különleges képességekkel nem rendelkező személy, aki véletlenszerűen választja ki a négy lapot, ugyanilyen jól választ.

K1 1612. Egy középiskolai osztályban egy felelőst kell választani, mégpedig minden tanulót egyforma valószínűséggel lehet kiválasztani. Tudjuk, hogy fiú választásának a valószínűsége $2/3$ -ad része annak a valószínűségnek, hogy lányt választanak. Mekkora a fiúk és lányok aránya az osztályban?

E1 1613. Aladár és Barnabás kockával játszanak. Az nyer, aki eltalálja, hogy a következő dobássorozatban hányadikra jön ki először hatos. Aladár elhatározta, hogy mindig 6-ot fog tippelni, hiszen ez a várható érték, Barnabás szimulációval próbálkozik. Először elvégez egy dobássorozatot, és az ott kapott eredményt fogja tippelni. Kinek van nagyobb esélye a nyeresésre?

E1 1614. Mekkora annak valószínűsége, hogy a lottóhúzásnál kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen 10?

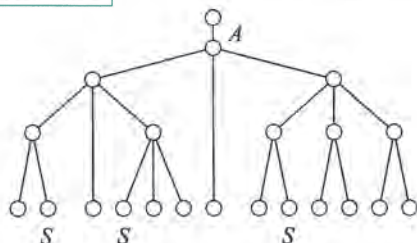
E2 1615. Egy szabályos dobókockával addig dobunk, míg hatost nem kapunk. Mi a valószínűsége, hogy ezalatt egyszer sem dobunk egyest?

E2 1616. Feldobunk három kockát. Mi a valószínűsége, hogy a kísérletet megismételve ugyanazt az eredményt kapjuk?

V 1617. Valamely urnában n golyó van, melyek közül néhányat kihúznak. Mi valószínűbb: a kihúzott golyók száma páros vagy páratlan? (KöMaL F1096)

E2 Gy 1618. Egy egér az A jelű pontból elindul az ábrán jelölt járatokon lefelé, mert sajtszagot érez. A sajtszag egyformán érezhető mindegyik csatornában, így az egér az elágazásokban egyforma valószínűséggel választ az egyes járatok között (visszafelé nem fordul). Sajt csak bizonyos járatok végén található az ábra szerint (S).

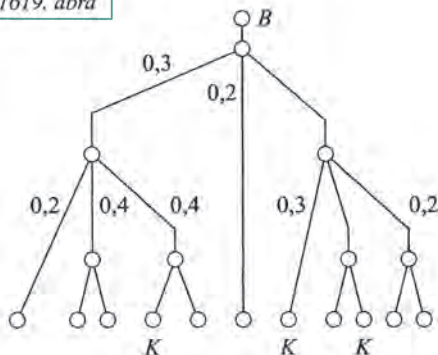
1618. ábra



Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egér megtalálja a sajtot?

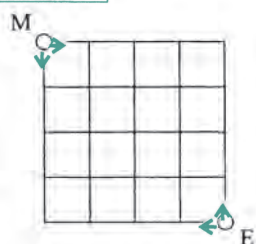
E2 1619. Az ábra szerinti labirintusban a B bejáratból indulunk, fentről lefelé haladunk a járatokban. Az elágazásokban az egyes járatok közül a rájuk írt valószínűségekkel választunk (nem jelöltük a 0,5 valószínűségeket). Mekkora annak a valószínűsége, hogy kijutunk valamelyik K kijáraton?

1619. ábra



E2 1620. Egy 4×4 -es négyzet-rács alakú labirintus két átteljes csúcsában – a kijáratoknál – egy egér és egy macska van. Mindketten adott jelre, ugyanakkora sebességgel elindulnak a szemköztes kijárat felé úgy, hogy minden lépésben közelednek céljukhoz (ábra). Egymást nem látják, útválasztásuk az elágazásokban véletlenszerű. (Ez azt jelenti, hogy amikor elágazáshoz érnek, a lehetséges két irány közül egyforma valószínűséggel választanak.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy találkoznak?

1620. ábra



E2 1621. Egy pálcát véletlenszerűen kettétörünk. Jelöljük a pálcá végpontjait A -val és B -vel, a töréspontot Q -val.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a Q pont közelebb lesz A -hoz, mint B -hez?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a törés után az egyik szakasz legalább kétszer akkora lesz, mint a másik?

E2 1622. Egy egységnégyzetben kiválasztunk egy pontot véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy a pont közelebb van a négyzet középpontjához, mint valamelyik csúcsához?

E1 1623. Az $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$ egységnégyzetben kiválasztunk egy $P(x; y)$ pontot véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy a pont koordinátáinak összege nagyobb, mint 1?

E2 1624. Egy 12 egység hosszúságú szakasz 11 csuklós pontban meghajlítható. A csuklós pontok egymástól egyenlő távolságra vannak. Véletlenszerűen válasszunk ki két pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott két pont olyan, hogy ott alkalmasan behajlítva a csuklós szerkezetet

- a) háromszöget; b) egyenlő oldalú háromszöget;
c) egyenlő szárú háromszöget; d) derékszögű háromszöget;
e) hegyesszögű háromszöget; f) tompaszögű háromszöget
kapunk?

E2 1625. 11 egység hosszúságú szakasz 10 csuklós pontban meghajlítható. A csuklós pontok egymástól egyenlő távolságra vannak. Véletlenszerűen válasszunk ki két pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott két pontban a szerkezet alkalmasan meghajlítva

- a) háromszöget; b) egyenlő oldalú háromszöget;
c) egyenlő szárú háromszöget; d) derékszögű háromszöget;
e) hegyesszögű háromszöget; f) tompaszögű háromszöget
kapunk?

E2 1626. A számegyenes 0 és +5 pontjában van egy-egy pont; A , illetve B . Minden egész percben valamelyik szomszédos egész koordinátájú pontba ugrik át. A kiindulási állapotot tekintjük 0-dik percnak. Mindkét pont $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

valószínűséggel választja a pozitív, illetve a negatív irányt. A két pont egymástól függetlenül mozog. Mi a valószínűsége annak, hogy

- a) a harmadik percben a két pont a számegyenes megegyező helyén tartózkodik;
b) a k -adik percben a két pont a számegyenes ugyanazon pontjában tartózkodik;
c) az ötödik percben a két pont helyet cserél;
d) a harmadik percben a két pont közötti távolság abszolút értéke 1 lesz;
e) a k -adik percben a két pont közötti távolság abszolút értéke 6 lesz?

E2 1627. A számegyenes 0 és +6 pontjában van egy-egy pont, A , illetve B . Minden egész percben valamelyik szomszédos egész koordinátájú pontba ugrik át. A kiindulási állapotot tekintjük a 0-dik percnak. Mindkét pont $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

valószínűséggel választja a pozitív, illetve a negatív irányt. A két pont egymástól függetlenül mozog. Mi a valószínűsége annak, hogy

- a) a második percben a két pont a számegyenes megegyező helyén tartózkodik;
b) a harmadik percben a két pont a számegyenes megegyező helyén tartózkodik;

- c) a negyedik percben a két pont a számegyenes megegyező helyén tartózkodik;
 d) az ötödik percben a két pont közötti távolság abszolútértékben 1 lesz;
 e) a k -adik percben a két pont közötti távolság abszolútértéke 1 lesz;
 f) a k -adik percben a két pont közötti távolság abszolútértéke 5 lesz;
 g) a hatodik percben a két pont helyet cserél;
 h) a nyolcadik percben a két pont helyet cserél?

E2 1628. Egy pálcát véletlenszerűen három részre törünk. Jelöljük a pálcá végpontjait A -val és B -vel, a töréspontokat Q -val és R -rel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a törés után a három szakaszból háromszög szerkeszthető?

V 1629. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az 1, 2, ..., 179 fokok szögekből tetszés szerint választott 3 szög egy különböző oldalú háromszög három szöge? (KöMaL F995.)

E2 Gy 1630. Egy teraszon a négyzethálósan lerakott csempe oldalai 50 cm hosszúak. Egy 2 cm-es átmérőjű érmét célzás nélkül leejtettünk a teraszra. Mi a valószínűsége annak, hogy az érme egy fugára (vonaltra) esik?

E2 Gy 1631. 4 mm-es átmérőjű drótból készített kerítésen a szomszédos vízszintes és függőleges merevítő drótok tengelyeinek távolsága 10 cm. (Ez egy nagyon ritka kerítés.) Mekkora valószínűséggel ütközik valamelyik drótdarabnak egy véletlenszerűen kilőtt 4 mm-es sörétszem? (Feltehetjük, hogy a kerítés szabályos négyzetrács, és a sörét a kerítés bármely pontjára ugyanakkora valószínűséggel éri.)

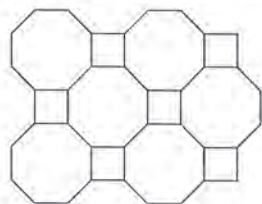
E2 Gy 1632. a) Egy sörétes patron 10 darabot tartalmaz a 4 mm-es átmérőjű sörétszemekből. Mekkora valószínűséggel halad át mind a 10 sörétszem a 1631. feladatban szereplő kerítésen?
 b) És ha a patron 20 szemet tartalmaz?

E2 Gy 1633. Janci és Juliska megbeszéli, hogy de. 10 és 11 óra között találkoznak. Érkezésük ezen időszak közben véletlenszerű. Mi annak a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell negyed óránál többet várnia?

E2 Gy 1634. Egy deszkára erősített papír céltábla hátoldalára egy alak van rajzolva, amelyet azonban a céllövész nem lát, és így csak arra igyekszik, hogy a lövés a céltáblát eltalálja. (Feltesszük hogy annak valószínűsége, hogy a céltábla valamely részébe talál, arányos ennek a résznek a területével.) 5 lövést végzve azt látjuk, hogy az 5 lövés közül kétszer talált olyan pontba, amely a céltábla hátlapjára rajzolt alakra esik. Mekkora a céltáblára rajzolt alak területének az az értéke, amelynél ennek az eseménynek a valószínűsége a legnagyobb?

E2 1635. Az ábrán látható szabályos négy-, illetve nyolcszögekből álló parkettán véletlenszerűen válasszunk ki egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont négyzet belsejébe esik?

1635. ábra



E2 Gy 1636. A sík $(0; 0)$, $(3; 2)$ és $(3; -2)$ pontjai mint középpontok köré rajzoljunk egy-egy egységsugarú kört; jelentsenek ezek a körök urániumtömböket. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy, a $(2; 0)$ pontból találomra választott irányban haladó neutron nem ütközik bele egyik tömbbe sem.

Más nemzetek érettségi feladataiból

K1 1637. (Török érettségi, 1988) Egy dobozban van 4 piros, 5 fehér és 7 zöld azonos alakú ceruza. Véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége, hogy piros, vagy fehér lesz?

Lehetőségek: $1/16$, $5/16$, $1/4$, $7/16$, $9/16$.

K1 1638. Egy urnában ugyanannyi piros és fehér golyó van. Ha visszatevés nélkül kiválasztunk közülük kettőt, akkor annak a valószínűsége, hogy mindkettő piros, $\frac{8}{33}$ lesz. Hány golyó van az urnában?

K2 1639. (USA érettségi, 1984) Véletlenszerűen lerakunk 3 piros, 4 zöld, 5 fehér golyót egy sorba úgy, hogy bármelyik lehetséges sorrend egyenlő valószínűségű. Legyen P annak a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé két zöld golyó. Mekkora a közönséges törtként egyszerűsített formában felírt P számlálójának és nevezőjének az összege?

K1 1640. (Török érettségi, 1995) Egy dobozban 6 fehér és 4 sárga golyó van. Kihúzzunk belőle hármat visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy 1 fehéret és 2 sárgát húzzunk ki?

K1 1641. (USA érettségi, 1984) Egy dobozban 11 golyó van, 1-től 11-ig megszámozva. Kihúzzunk közülük visszatevés nélkül hatot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok összege páratlan?

K1 1642. (Török érettségi, 1990) Véletlenszerűen kiválasztunk két különbözőt az 1, 2, 3, 4 és 5 számok közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy köztük pontosan egy páros lesz?

K2 1643. (Török érettségi, 1997) Az A dobozban 3 fehér és 4 piros, a B dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Véletlenszerűen (egyenlő valószínűséggel) kiválasztjuk az egyik dobozt, és abból visszatevéssel kihúzzunk két golyót. Mi a valószínűsége, hogy az egyik fehér, a másik piros lesz?

K1 1644. (Török érettségi, 1992) Egy dobozban 2 fehér, 4 fekete és 6 kék golyó van. Visszatevés nélkül kiválasztunk közülük kettőt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egyik fehér, a másik fekete?

K2 1645. (Török érettségi, 1988) Egy csoportban 4 lány és 6 fiú van. Véletlenszerűen kiválasztunk kettőt közülük. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egyikük fiú, a másik lány?

K2 1646. (USA érettségi, 1986) Véletlenszerűen kiválasztunk hat különbözőt az 1, 2, 3, ..., 10 számok közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok között a második legkisebb a 3?

Lehetőségek: a) $1/60$, b) $1/6$, c) $1/3$, d) $1/2$, e) más.

K2 1647. (USA érettségi, 1988) Legyen m/n annak a valószínűsége, hogy 10^{99} egy véletlenszerűen választott osztója többszöröse lesz 10^{88} -nak. Mekkora $m + n$ legkisebb értéke?

K2 1648. (USA érettségi, 1985) Egy nullától különböző d számjegyet

$\log(d + 1) - \log(d)$

valószínűséggel választunk ki. Az alábbi halmazok közül melyik az, amelyikbe a kiválasztott számjegy kétszer akkora valószínűséggel esik, mint amekkora a 2 kiválasztásának a valószínűsége.

Lehetőségek: a) $\{2, 3\}$, b) $\{3, 4\}$, c) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, d) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$,
e) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Valószínűség-számítási feladatok emelt szinten

E1 Gy 1649. Egy takarítógépet áruló ügynök naponta 10 ügyfelet keres fel. Az ügyfelek $1/3$ valószínűséggel vásárolnak egy takarítógépet. Az ügynök 4 darab takarítógépet visz magával. Mennyi a valószínűsége, hogy a készlet elég lesz?

E1 Gy 1650. Kovács úr, az egyik polgármester jelölt azt állítja, hogy a lakosság 60%-a őt támogatja. Azt gyanítjuk, hogy túlbecsülte a támogatók arányát. Véletlenszerűen kiválasztunk 20 embert, és megkérdezzük őket, kit támogatnak. Csak 9-en választották Kovács úr nevét. Mekkora az esélye, hogy a 20 közül ennyi, vagy még kevesebb támogatója van Kovács úrnak, ha feltesszük, hogy igazat állít?

E1 Gy 1651. Hazánkban a népesség 4%-a cukorbeteg. Egy nem teljesen pontos gyorseszteszt szolgál a betegség felismerésére. A teszt a cukorbeteg 95%-ánál ad pozitív jelzést, és az egészségesek 2%-ánál szintén pozitív jelzést ad.

Mennyi a valószínűsége, hogy a teszt pozitív eredményt ad?

Mennyi a valószínűsége, hogy a teszt pozitív, de a személy egészséges?

Mekkora valószínűséggel téved a teszt?

E1 Gy 1652. Egy bizonyos vírus jelenlétének kimutatására vértesztet alkalmaznak. A teszt előzetes vizsgálatok alapján 1000 fertőzöttből 998 esetben mutat pozitív eredményt. Különböző okokból azonban 100 nem fertőzöttből 5 esetben pozitívat mutat, azaz tévesen riaszt. Becslések szerint egy nagyváros lakói közül legfeljebb egy ezrelék lehet az adott vírussal fertőzött. Valakin elvégzik a tesztet, és pozitívnak találják.

Mekkora az esélye, hogy tényleg fertőzött?

E1 1653. Van négy számkártyánk, amelyekre a 0,1,3,5 számok vannak írva. Alapos keverés után kiválasztunk közülük kettőt. Mi a valószínűsége, hogy a két kártya

a) összege páros; b) különbsége páros; c) szorzata páros.

Mekkora a

$P(\text{szorzat páros} \mid \text{összeg páros})$,

$P(\text{összeg páros} \mid \text{szorzat páros})$

feltételes valószínűségek?

E1 Gy 1654. Egy választás során az A jelölt a , a B jelölt b szavazatot kapott, ahol a határozottan nagyobb b -nél. A szavazók véletlenszerűen, egymástól függetlenül érkeztek szavazni. Mekkora valószínűséggel vezetett végig az A jelölt?

E2 Gy 1655. Egy jegypénztárhoz $2n$ számú vásárló érkezik. Közülük n vásárlónak csak ezrese, a többinek csak ötszázasa van. Egy jegy ára ötszáz forint, és nyitáskor a pénztárban nem volt pénz. Feltesszük, hogy a $2n$ vevő egymástól függetlenül érkezik, bármely sorrendnek ugyanakkora a valószínűsége. Mekkora a valószínűsége, hogy egyetlen vevőnek se kelljen várnia?

E1 Gy 1656. (USA érettségi, 1983) Artur király 25 lovagja egy kerek asztal körül ül. Egy sárkányölő kommandóba közülük hármat választanak ki úgy, hogy bármelyik három ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra. Legyen P annak a valószínűsége, hogy a három kiválasztott lovak közül legalább kettő egymás mellett ül. Ez a P egy racionális szám. Mekkora a közönséges törtként egyszerűsített formában felírt P számlálójának és nevezőjének az összege?

E2 1657. (Török érettségi, 1989) Véletlenszerűen kiválasztunk két együtthatót az $(1+x)^6$ hatvány polinomiális előállításában szereplő 7 együttható közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az összegük kisebb 25-nél?

Lehetőségek: 16/21; 15/21; 12/21; 10/21; 9/21.

E2 Gy 1658. Három cowboy, Ben, Joe és Sam egyetlen pisztolypárbajt vív. Egyszerre körbe állnak, és bármelyikük lőhet bármelyikükre. Ben–Joe–Sam sorrendben lőnek. Tudják egymásról, hogy Ben 0,3; Joe 1; és Sam 0,5 valószínűséggel talál, ha lő. A párbajnak akkor van vége, ha már csak egy él közülük. A szépséges Mary a párbaj előtti este Ben első töltényét vaktöltényre cserélte. Milyen érzélemmel viseltetett a leány Ben iránt?

E2 Gy 1659. Egy hagyományos, ötös lottószelvénnel játszunk.

Mi a valószínűsége, hogy nyerünk?

Hány héten át kell játszsanunk, hogy legalább 50% eséllyel legalább egyszer nyerjünk?

Hány héten át kell játszsanunk, hogy legalább 50% eséllyel legalább egyszer nagy nyereményünk (négyes vagy ötös) legyen?

Mennyi az első nagy nyerésig eltelt hetek számának a várható értéke?

E2 Gy 1660. Egy automata gépről lekerülő szegecs hossza normális eloszlású valószínűségi változó. A várható érték 100 mm, a szórás 2 mm. Mennyi a valószínűsége, hogy a szegecs hossza a várható értéktől legfeljebb 4 mm-rel tér el? Mennyi a valószínűsége, hogy a szegecs hossza a várható értéktől legfeljebb 1 mm-rel tér el? Mekkora pontossággal biztosítható 0,98 valószínűséggel?

E2 Gy 1661. A millenniumi földalattin, a mai napon a külföldiek aránya 15%. A végállomáson kiszálló 80 utast vizsgáljuk. Mekkora valószínűséggel lesz pontosan 12 külföldi közöttük? Mekkora valószínűséggel lesz legfeljebb 3 külföldi? Melyik intervallumba esik a külföldiek száma 80%-os valószínűséggel?

E2 Gy 1662. Egy tantárgyat 220 hallgató vett fel. Mivel nem kötelező az előadásra bejárni, minden hallgató $1/2$ valószínűséggel megy el az órára. Mekkora terembe írják ki az előadásokat, hogy 90%-os valószínűséggel mindenki le tudjon ülni, aki eljött?

E2 Gy 1663. A legújabb hiperkence bemutatójára 1000 meghívót osztottak szét. A tapasztalat szerint a meghívottak egymástól függetlenül 0,1 valószínűséggel fogadják el a meghívást. Mekkora terembe írják ki a bemutatót, hogy 90%-os valószínűséggel mindenki le tudjon ülni, aki eljött?

E2 Gy 1664. Egy kiállítócsarnokban 150 kiállítási hely van. A szervezők tapasztalata szerint a jelentkezők 15%-a lép vissza valamilyen okból. Ezért 170 jelentkezést fogadnak el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem mindenkinek jut hely azok közül, akiknek visszaigazolták a jelentkezését?

E2 Gy 1665. Egy virág nagykereskedésben a szállítások során a rózsák tized része sérül meg átlagosan. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 400 darabból álló tételben legfeljebb 50 rózsza sérül meg?

Hány darabos tételt szállítson le a cég, ha legalább 99 százalékos valószínűséggel 500 ép rózsát akar eljuttatni a megrendelőhöz?

E2 Gy 1666. Egy pályaalakmassági tesztben 300 kérdést tesznek fel, amelyekre három lehetséges választ lehet adni. Ezek közül egy, és csak egy a helyes. A tesztet akkor értékelik pozitívan, ha a pályázó legalább a kérdések felét helyesen válaszolja meg.

Valakinek halvány fogalma sincs a helyes válaszokról, és teljesen véletlenszerűen, egyenlő valószínűséggel adja meg minden kérdésre a választ. Milyen valószínűséggel megy át a teszten?

E2 1667. Egy érmével addig dobunk, amíg két egymás utáni dobás eredménye azonos nem lesz. Mennyi a szükséges dobások számának eloszlása és várható értéke?

E2 1668. Egy kockával addig dobunk, amíg valamelyik korábban dobott szám ismétetlen előfordul. Mennyi a szükséges dobások számának eloszlása és várható értéke?

E1 1669. Legyen X az öttel osztható nyerőszámok száma a lottóhúzásnál. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét.

E1 1670. A 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk 4 lapot. Jelölje X a kihúzott ászok, Y pedig a kihúzott hetesek számát. Függetlenek-e a valószínűségi változók?

E2 1671. Egy dobozban 99 kék és 1 piros golyó van. Egyesével addig húzzunk visszatevés nélkül, amíg ki nem húzzuk a pirosat. Ha X a húzások számát jelöli, adjuk meg X eloszlását.

E2 Gy 1672. Egy csokoládégyár felmérést végzett egy iskolában. Kiderült, hogy egyre több diák vásárol az új csokijukból. Megkérnek egy statisztikust, hogy ellenőrizze a sejtést. Egy véletlen mechanizmust találnak ki erre a célra. Arra a kérdésre, hogy valaha vásároltál-e ebből a csokiból, 3 érme feldobása után kell válaszolni, mégpedig akkor kell igazat mondani, ha nem mindhárom érme esik fejre, és lóditani, ha mindegyik fej. 100 megkérdezett diák közül Y ad igen választ ezzel a stratégiával. Adjunk meg egy becslést Y függvényében azok számára, akik már valóban vásároltak ebből a csokiból.

E2 Gy 1673. Egy réten három szarvas legelészik. Három vadász figyeli őket egymásról mitse tudva. A vadászok egyszerre tüzelnek, és minden lövésük halálos. Mennyi a lövések után a rétről elfutó szarvasok számának várható értéke és szórása? (Mivel a vadászok nem tudnak egymásról, többen is lőhetnek ugyanarra az állatra.)

E1 Gy 1674. Egy másológép p valószínűséggel gyűri be a következő lapot. Ilyenkor le kell állni, hogy kipiszkálhassuk a papírt. Jelölje X a két begyűrdés között lemásolt lapok számát. Adjuk meg X eloszlását és várható értékét.

E2 Gy 1675. Egy lőtéren 100 újonc katona célba lő. Mindegyikük a többiek eredményétől és az előző lövéseitől függetlenül 0,4 valószínűséggel találja el a célt. Minden katonának 32 tölténye van. Jelölje X_k a k -adik újonc találatainak számát! Jelölje az össztalálatok számát $Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{100}$. Mekkora Z várható értéke és szórásnégyzete?

E2 Gy 1676. Egy golyószóróba 200 töltényes hevedert lehet betölteni. Mindegyik golyó egymástól függetlenül 0,98%-os valószínűséggel lőhető ki. Adjuk meg, milyen intervallumba esik a teljes heveder kilövése után a sikeresen kilőtt töltények száma 90%-os valószínűséggel.

E2 Gy 1677. A vasboltban kilogrammos dobozokban lehet a szöveget kapni, és rá van írva, hogy $\pm 1\%$. Mit mondhatunk, mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott doboznak a tömege valóban ebben az intervallumban van?

E2 Gy 1678. Egy párt választási győzelmének esélye p . A közvélemény-kutatók ezt az ismeretlen p paramétert az összes megkérdezett lakos közül a pártot választók számának és az összes megkérdezett számának arányával becsülik. Mekkora kell lennie a megkérdezettek számának ahhoz, hogy reprezentatív minta esetén 99,9%-os biztonsággal lehessen állítani, hogy a becslés valószínűség p -től legfeljebb 0,01-al tér el? Ennél a becslésnél még milyen fontos jellemzőt nem vettünk figyelembe?

E2 Gy 1679. A férfiak átlagmagassága 175 cm 10 cm-es szórással, a nőké 165 cm 8 cm-es szórással. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott nő magasabb, mint egy tőle függetlenül kiválasztott férfi? (Az eredményt $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény segítségével adjuk meg.)

E2 Gy 1680. Egy narancsból átlag 50 ml narancslé csavarható ki, 2 ml szórással. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két narancsot kell kicsavarnom

ahhoz, hogy ihassak egy deciliter narancslevet? (Az eredményt $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény segítségével adjuk meg.)

E2 Gy 1681. Egy körzetben a tiszai áradások tetőzéseinek magassága átlagosan 700 cm, 100 cm szórással. Milyen magasra építsük a gátat, ha azt akarjuk, hogy az elkövetkező 100 évben 99%-os valószínűséggel ne öntse el a víz a gát mögötti falut?

E2 Gy 1682. Két játékos egy szabályos érmével játszik. András akkor győz, ha – nem szükségképpen egymás után – öt fej jön ki, Béla pedig akkor, ha öt írás. A játszma négy fej, két írás állásnál véglegesen félbeszakad. Hogyan osztoznak a játékosok az 1600 Ft-os tétten?

E2 Gy 1683. A Monte-Belloi kaszinóba belépőknek először egy furá játékban kell kipróbálni szerencséjüket. Ez a játék a következő: Egy dobozba két nyerő és három vesztes golyót tesznek, amelyek külső formájukban teljesen megegyeznek. Ebből a dobozból visszatevés nélkül húznak ki golyókat. Nyerő golyó húzása után a kaszinó fizet a játékosnak 10 pénzt, vesztes golyó húzása esetén pedig a játékos fizet a kaszinónak 10 pénzt. A játékosnak joga van bármelyik húzás előtt a játékot abbahagyni, akár már az első húzás előtt is. Kinek kedvez ez a játék? Érdemes-e egyáltalán húzást kérni? Hogyan érdemes játszani?

Érettségi feladatsorok

Középszint

1. feladatsor

1. rész (10 feladat, 30 pont)

Felhasználható idő: 45 perc

1. Az A halmaz elemei a 0-ra végződő kétjegyű természetes számok, $B = \{3k; k \in \mathbb{N}\}$. Határozza meg az alábbi halmazokat:

a) $A \cap B$;

b) $A \setminus B$!

(2 pont)

2. Egy könyvkereskedő az egyik könyv árát 5%-kal leszállította, s így a vevők 8%-kal több könyvet vásároltak. Hány százalékkal nőtt a könyv eladásából származó tervezett bevétel, ha az összes könyvet sikerült eladni?

(2 pont)

3. Legyen $A = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^7$, $B = 4^3 \cdot 5^4 \cdot 7^5$. Határozza meg A és B

a) legnagyobb közös osztójának;

b) legkisebb közös többszörösének

prímtényezős felbontását!

(2 pont)

4. Pista kíváncsi volt, hogy „szabályos-e” házilag gyártott dobókockája, ezért 100-szor feldobta a kockát, s a dobási eredményeket lejegyezte. Összesítés után az alábbi táblázatot kapta:

a dobott szám	1	2	3	4	5	6
előfordulások száma	11	15	17	19	10	28

Mennyi az így kapott adathalmaz

a) módusza;

b) mediánja;

c) átlaga?

(3 pont)

5. Oldja meg a valós számok halmazán: $|x - 3| \leq 8$.

(3 pont)

6. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) Ha egy négyszög két-két szöge egyenlő, akkor a négyszög paralelogramma.

b) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

c) Ha egy paralelogramma átlói egyenlő hosszúak, akkor oldalai merőlegesek.

(3 pont)

7. Egy egyenletesen haladó turista reggel 8 órakor 16 km-re van a céljától, 9 óra 30 perckor ez a távolság már csak 11,5 km. Mekkora távolságra lesz 10 óra 45 perckor a céljától? (Feltételezzük, hogy a turista egyenletes sebességgel halad.)

(3 pont)

8. Egy dobozban 5 piros és 8 kék golyó van. Három golyót véletlenszerűen kivesszünk a dobozból. Legalább és legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a negyedik húzásra piros golyót húzunk?

(2 pont)

9. Mely pontokban metszi a derékszögű koordináta-rendszer x és y tengelyét az $f: x \mapsto \log_2(x+3)$ függvény görbéje? (Pontos értéket adjon meg!)

(4 pont)

10. Egy épület homlokzata egyenlőszárú háromszög alakú. A háromszög alapja 6 méter, szárai 5 méter hosszúak.

a) Mekkora a homlokzat felülete?

(3 pont)

b) Mekkora szöget zár be a háztető síkja a vízszintes talajjal?

(3 pont)

Válaszait indokolja!

II./A rész (3 feladat, 36 pont)

Felhasználható idő: 135 perc (II/A és II/B)

11. Egy toronyból ferdén elhajított test földfelszíntől mért távolságát az idő függvényében a $h(t) = -5t^2 + 20t + 25$ függvény írja le. (A távolságot méterben, az időt másodpercben mérjük, a feldobás kezdetétől számítva a földre érkezésig.)

a) Milyen magas a torony?

b) Mekkora a test által elért maximális magasság?

c) Mí a h függvény értelmezési tartománya?

(12 pont)

12. Feri egy táblázatot talált a régi papírai között. A táblázatban 2001-ben és 2002-ben a Magyarországon kiadott szépirodalmi könyvek számát tüntették fel, a művek műfaja szerint csoportosítva. Sajnos, a táblázat egyes celláiba írt számok már elmosódtak, olvashatatlanná váltak, ennek ellenére Feri sikerrel válaszolt az alábbi kérdésekre. Mik voltak a válaszai?

műfaj	2001	2002	példányszám (2002, ezer darab)
verses mű, antológia	382	301	396
regény, elbeszélés	1661	1680	11 150
színmű		65	188
egyéb széppróza	204	198	
összesen:	2310		12 229

- a) Hány színmű jelent meg 2001-ben?
 b) Hány művet adtak ki összesen 2002-ben?
 c) Hány százalékkal változott 2001 és 2002 között a kiadott verses művek, illetve antológiák száma?
 d) 2002-ben az összes kiadott műnek hány százaléka volt regény?
 e) A négy műfaji kategória közül melyiknek volt a legmagasabb a művenkénti átlagos példányszáma 2002-ben?

(12 pont)

13. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-3; 1)$ és $B(5; 7)$ pont. Mely pontokban metszi az $e: y = x$ egyenletű egyenest az AB átmérőjű kör? Mekkora az egyenesből kimetszett húr hossza?

(12 pont)

II./B rész (2. feladat, 34 pont)

Az alábbi három feladat közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

- 14.** Az ABC háromszög oldalai $AB = 23$ cm, $BC = 25$ cm, területe $t = 100$ cm².
 a) Milyen hosszú lehet a harmadik oldal?
 b) Mekkora a háromszög leghosszabb magassága?
 c) Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

(17 pont)

- 15.** 2 000 000 Ft, évi 6%-os kamatú hosszúlejáratú kölcsönt kétféleképpen vehetünk fel a banktól. Vagy havonta 19 000 Ft-tal törlesztjük az összeget, 12 éven keresztül, vagy – havi kamatozás mellett – havonta 20 000 Ft törlesztőrészt fizetünk, amíg tart az adósságunk. Mindkét esetben vizsgáljuk meg, hogy
 a) mennyi ideig tart a teljes törlesztés; és hogy
 b) mekkora a teljes visszafizetett összeg.

(17 pont)

- 16.** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sin(2x) + \cos(2x) = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

(17 pont)

2. feladatsor

I. rész (10 feladat, 30 pont)

Felhasználható idő: 45 perc

- 1.** A hármas számrendszerben felírt 1201 szám értéke mennyi a tízes számrendszerben? (2 pont)
2. Legyen $X = 3 \cdot 10^{140}$ és $Y = 5 \cdot 10^{-150}$. Írja fel normálalakban
 a) $X \cdot Y$;
 b) $\frac{X}{Y}$ értékét! (2 pont)

3. A táblázatban egy osztály matematika dolgozatának eredményeit tüntettük fel:

érdemjegy	elégtelen	elégséges	közepes	jó	jeles
darabszám	3	2	7	7	11

Mennyi az így kapott adathalmaz

- a) mediánja;
b) módusza;
c) átlaga?

(3 pont)

4. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Válaszait indokolja!

- a) Ha egy természetes szám osztható 4-gyel és 5-tel, akkor osztható 20-szal is.
b) Ha egy természetes szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor osztható 24-gyel is.
c) Ha egy természetes szám osztható 24-gyel, akkor osztható 4-gyel és osztható 6-tal is.

(3 pont)

5. Mennyi az $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 1111$ számok összege?

(3 pont)

6. Az ABC háromszögben $\sin \alpha = 0,4$. Mekkora lehet α ?

(2 pont)

7. Hány 25-tel osztható, különböző számjegyekből álló ötjegyű természetes szám van?

(4 pont)

8. Egy számsorozat bármely tagja az előző tagnál 3-szor nagyobb. Határozza meg a sorozat 20. tagját, ha a 12. tag értéke $\frac{2}{81}$.

(3 pont)

9. Ábrázolja a $[-2; 5[$ intervallumon értelmezett $f(x) = 6 - |x|$ függvényt és határozza meg a függvény értékkészletét!

(4 pont)

10. Az e egyenes áthalad a derékszögű koordináta-rendszer $A(-2; 3)$ és $B(1; 9)$ pontjain. Határozza meg az egyenes egyenletét!

(4 pont)

II./A rész (3 feladat, 36 pont)

Felhasználható idő: 135 perc (II/A és II/B)

11. $A = \{\text{trapézok}\}$; $B = \{\text{deltoidok}\}$; $C = \{\text{húrnégyszögek}\}$. Határozza meg az alábbi halmazokat!

- a) $A \cap B$;
b) $B \cap C$;
c) $A \cap C$.

(12 pont)

12. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2^{x+2} + \frac{5}{2^x - 3} = 41 - 2^x.$$

(12 pont)

13. Egy tengeri világítótorony 25 m magas.

a) Kedvező látási viszonyok között mekkora távolságból észlelhetik a jelzőfényt a hajók?

b) Mekkora a látótávolság, ha a torony 30 m magas?

(A Földet 6370 km sugarú gömbnek tekinthetjük.)

(12 pont)

II./B rész (2 feladat, 34 pont)

Az alábbi három feladat közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. Egy sakkegyesület 11 ifjúsági korú játékosa közül 4 lány és 7 fiú. A játékosok hányféleképpen alakíthatnak két 4 fős csapatot, ha

a) az egyik csapat a 4 lányból áll;

b) 2 lány az egyik, 2 lány a másik csapatba kerül;

c) a nyolc legjobb játékos (5 fiú és 3 lány) alkotja a két csapatot, valamilyen megoszlásban?

(17 pont)

15. Egy 5 dl térfogatú, csonkakúp alakú tejfölös pohár alapkörének (belső) átmérője 6 cm, fedőkörének átmérője 9 cm.

a) Mekkora a pohár magassága?

b) Milyen magasságú a 2,5 dl térfogatú tejföl szintje a pohárban?

(17 pont)

16. Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

(1) $\log_2(x + 8) - \log_2(y + 4) = 3,$

(2) $\log_2 x + \log_2(-2y) = 5.$

(17 pont)

3. feladatsor

I. rész (10 feladat, 30 pont)

Felhasználható idő: 45 perc

1. Melyik nagyobb: 50 kilométer 40 százalékanak a háromnegyede vagy 1600 méter 250 százalékanak $\frac{18}{5}$ -szöröse? Válaszát indokolja!

(3 pont)

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 666-ot megszorozva négyzetszámot kapunk eredményül?

(2 pont)

3. Oldja meg a valós számok halmazán: $\frac{17}{7-x} \leq 0!$

(2 pont)

4. Öt cédulára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat, majd az összekevert cédulákat véletlenszerűen egymás mögé téve egy ötjegyű számot kaptunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható 6-tal?

(3 pont)

5. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Válaszait indokolja.

- a) Ha egy négyszög két szemközti szöge egyenlő, akkor a négyszög deltoid.
- b) Ha egy deltoid átlói felezik egymást, akkor oldalai egyenlő hosszúak.
- c) Minden deltoid felbontható – valamelyik átlójának behúzásával – két egyenlő szárú háromszögre.

(6 pont)

6. Egy számsorozat bármely tagja az előző tagnál 4-gyel nagyobb. Határozza meg a sorozat 100. tagját, ha a 12. tag értéke -3 .

(2 pont)

7. Az ABC háromszög AB oldalának A -hoz közelebbi harmadolópontja H , a BC oldal B -hez közelebbi negyedelő pontja N . Mekkora az $AHNC$ négyszög területe, ha az ABC háromszög területe 60 cm^2 ?

(3 pont)

8. Elhelyeztünk a bankban 1 000 000 Ft-ot évi 9 %-os kamatra. Mekkora a növekedik az összeg egy év múlva, ha havonta tőkésítik?

(2 pont)

9. Ábrázolja az $f: x \mapsto |-2x + 4|$ függvényt a $]-1; 3]$ intervallumon. Mi a függvény értékkészlete?

(3 pont)

10. Határozza meg a $\sin x = \sin(2x)$ egyenlet megoldását, ha $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$!

(4 pont)

II./A rész (3 feladat, 36 pont)

Felhasználható idő: 135 perc (II/A és II/B)

11. Egy háromszög alakú, 5,8 hektár nagyságú földterület két szomszédos oldala 450 méter, illetve 410 méter hosszú.

- a) Mekkora lehet a két oldal által bezárt szög?
- b) Milyen hosszú lehet a földterület harmadik oldala?

(12 pont)

12. Egy termosztokban lévő forró tea lehűlését közelítőleg az $f(t) = 70 \cdot 0,8^t$ függvény írja le, ahol a t időt órában, a tea hőmérsékletét Celsius fokban mérjük.

- a) Mennyi lesz a tea hőmérséklete a megfigyelés kezdete után 2 órával?
- b) Mennyi volt a tea hőmérséklete a megfigyelés kezdete előtt 1 órával?
- c) Határozza meg az f függvény értelmezési tartományát, ha 90°C -os teát öntöttünk a termosztokba, és a külső környezet hőmérséklete 10°C !

(12 pont)

13. Adott a valós számok halmazán értelmezett két függvény:

$f: x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$, $g: x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$. Mely valós x értékekre teljesül, hogy $f(x) \geq g(x)$?

(12 pont)

II./B rész (2 feladat, 34 pont)

Az alábbi három feladat közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. Két autó mozgását a derékszögű koordináta-rendszerben modellezhetjük. Ebben a modellben az A , B és C városok koordinátái $A(-7; 2)$, $B(2; -9)$ és $C(8; 9)$. A $t = 0$ időpillanatban elindul A -ból egy autó, melynek sebességvektora $(2; 1)$. A $t = 2$ időpillanatban elindul egy másik autó B -ből C felé $\sqrt{40}$ egységnyi sebességgel. Határozza meg, hogy mely pontokban lesznek az autók

a) $t = 11$ időegység múlva;

b) illetve akkor, amikor legközelebb kerülnek egymáshoz!

(17 pont)

15. Az alábbi táblázat egy dobókockával végrehajtott dobássorozat eredményeinek egy részét tartalmazza.

dobott érték	1	2	3	4	5	6
dobásszám	5		9	12		9

a) Hány 2-es és hány 5-ös dobás történt, ha tudjuk, hogy a dobások átlaga 3,58, és kétszer annyi 2-est dobtunk, mint 5-öst?

b) Melyik érték relatív gyakorisága a legnagyobb? Mennyi ez az érték?

c) Mennyi a dobássorozat mediánja és módusza?

d) Mennyi a dobássorozat szórása?

(17 pont)

16. Az $ABCD$ háromszög alapú gúla ABC alaplaja egyenlő szárú háromszög, melynek AB alapja 8 cm, BC és AC szárai pedig $4\sqrt{5}$ cm hosszúak. A gúla AD , BD , CD oldalélei egyenlő hosszúak.

a) Mekkora a gúla térfogata, ha magassága $m = 12$ cm?

b) Mekkora a gúla oldalélei?

(17 pont)

4. feladatsor

I. rész (11 feladat, 30 pont)

Felhasználható idő: 45 perc

1. Az A halmaz elemei a 20-nál kisebb pozitív egész számok. Az B halmaz elemei a pozitív prímszámok. Hány eleme van az $A \setminus B$ halmaznak?

(2 pont)

2. Melyik száma nagyobb: $\log_3 3$ vagy $\sin 30^\circ$?

(2 pont)

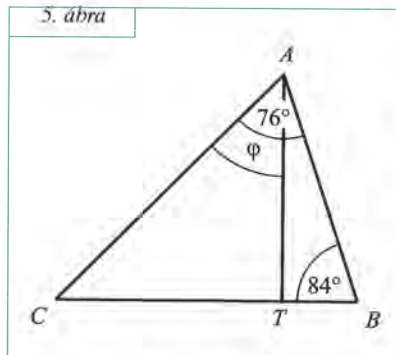
3. Egy házibulin minden résztvevő minden résztvevővel koccint egyszer, így összesen 21 koccintás hallatszik. Hányan vettek részt ezen a házibulin?

(2 pont)

4. Milyen távolságra van az x tengelytől az $y = -2x + 6$ egyenletű egyenesnek az a pontja, melynek x koordinátája $x = -4$?

(2 pont)

5. ábra



5. Az ABC háromszögben $\alpha = 76^\circ$, $\beta = 84^\circ$. Az A csúcsból induló magasság talppontja T . Mekkora az ábrán φ -vel jelölt szög?

(2 pont)

6. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $3^{x+1} = 81$, b) $3^{x-1} = 81$,

c) $3^{1-x} = 81$.

(3 pont)

7. Határozza meg az X és Y számjegyeket úgy, hogy az $13XY$ ötjegyű szám osztható legyen 30-cal!

(3 pont)

8. Mekkora annak a hengernek a felszíne, melynek sugara 8 cm, magassága pedig egyenlő az alapkör átmérőjével?

(3 pont)

9. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

a) A háromszög magasságpontja mindig a háromszög belsejében van.

b) A háromszög köré írható körének a középpontja mindig a háromszög belsejében van.

c) A háromszög súlypontja mindig a háromszög belsejében van.

(3 pont)

10. Egy falu lakóinak a száma 1260 fő. A lakók 30%-a felnőtt nő, a felnőtt férfiak száma 386. Hány kiskorú él a faluban?

(4 pont)

11. Ábrázolja az $f(x) = \left| \sqrt{x+1} - 2 \right|$ függvényt a $]-1; 3]$ intervallumon!

(4 pont)

II./A rész (3 feladat, 36 pont)

Felhasználható idő: 135 perc (II/A és II/B)

12. Valamely számtani sorozatban minden n -re $a_n = 4n - 5$.

a) Számítsa ki a sorozat első 100 elemének összegét! (5 pont)

b) Hány darab háromjegyű tagja van a sorozatnak? (7 pont)

13. Egy iskola 11. évfolyamos diákjai között felmérést készítettek dohányzási szokásaikkal kapcsolatban. Ennek eredményét mutatja az alábbi táblázat.

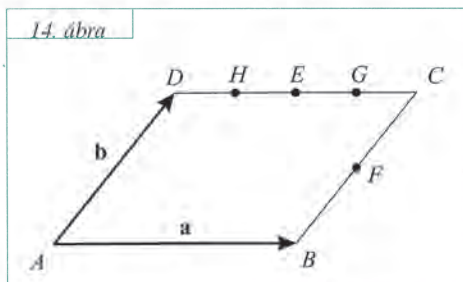
	még soha nem dohányzott	ritkán rágyújt	rendszeresen dohányzik
fiúk	24	19	8
lányok	26	21	14

a) A megkérdezettek hány százaléka rendszeres dohányzó? (5 pont)

b) 1 év múlva ugyanezen diákok között megismételték a felmérést. Eszerint a rendszeresen dohányzók száma 50%-kal, a ritkán rágyújtók száma 60%-kal emelkedett. Ekkor a soha nem dohányzók száma hány %-a a rendszeresen dohányzóknak?

(7 pont)

14. Legyen $\mathbf{a}$ vektor az $ABCD$ paralelogramma AB oldalvektora, $\mathbf{b}$ vektor pedig az AD oldalvektor. A DC oldal negyedelő pontjai: H , E és G (ábra).



a) Írja fel az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{HB}$ vektort! (3 pont)

b) Írja fel az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{GA}$ vektort! (3 pont)

c) Írja fel az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{BE}$ vektort! (6 pont)

II./B (3 feladat, 34 pont)

Az alábbi három feladat közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

15. Egy térképhez rögzített koordináta-rendszerben (ahol az egység mindkét tengelyen 1 km) az A és B falu koordinátái: $A(2; 3)$, $B(8; 5)$. Az országút egyenlete $y = 0$.

a) Hová helyezték az országúton az M buszmegállót, hogy az az A és B falutól egyenlő távolságra legyen? (6 pont)

b) A megyei önkormányzat egy-egy egyenes utat épít mindkét faluból a buszmegállóhoz. Ha 1 km út megépítése 2,6 millió Ft, és az önkormányzatnak erre a célra összesen 18,2 millió Ft-ja van, akkor mennyi állami támogatást kell kérnie, hogy az utakat meg lehessen építeni? (6 pont)

c) Kb. mekkora szögben látszik a buszmegállóból a két falut összekötő szakasz? (5 pont)

16. Adott az $f(x) = \sqrt{-x^2 + 16x - 39}$ függvény.

a) Határozza meg $f(x)$ értelmezési tartományát! (5 pont)

b) Az értelmezési tartomány egész számai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mekkora annak a valószínűsége, hogy prímszámot, vagy négyzetszámot választottunk? (5 pont)

c) Határozza meg az $\frac{1}{f(x)}$ függvény értékkészletét! (7 pont)

17. Egy egyenes körhenger alakú, felül nyitott edény alapkörének a sugara 12 cm. Az edényben elég magasan áll a víz. Belejtünk 3 db fémről készült négyzet alapú egyenes gúlát, melyek minden éle 6 cm. E gúlák elsüllyednek a vízben.

a) Mennyit emelkedik a vízszint? (10 pont)

b) Miután a gúlákat kivettük és megszáritottuk, befestjük őket egy speciális festékkel. Hány doboz festéket kell megvásárolnunk, ha egy doboz festék 54 cm^2 felület befestéséhez elegendő? (7 pont)

5. feladatsor

I. rész (11 feladat, 30 pont)

Felhasználható idő: 45 perc

1. András pénze 60%-ának a 20%-a 460 Ft. Mennyi pénze van Andrásnak? (2 pont)

2. Az A halmaznak 12 eleme van, a B halmaznak 18 eleme van. Az $A \cap B$ elemeinek a száma 7. Hány eleme van az $A \cup B$ halmaznak? (2 pont)

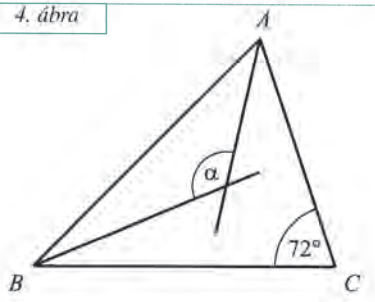
3. Kovács úr a 25 méter magas háztól 38 méterre parkol a kocsijával. Mekkora depresszió szögben látja házának tetejétől az autóját?

(2 pont)

4. Megrajzoltuk az ABC háromszög A -ból és B -ből induló szögfelezőjét. Mekkora az ábrán α -val jelölt szög?

(2 pont)

4. ábra



5. András, Béla, Csaba és Daniella színházba mentek. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha Béla és Daniella mindenképpen egymás mellé szeretnének ülni?

(2 pont)

6. Szerkesszen az ábrán látható téglalappal azonos területű szabályos háromszöget!

(3 pont)

6. ábra



7. Egy dobókockával egyszer dobtunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott szám nem prím és nem is négyzetszám?

(3 pont)

8. Írja fel az $A(2; -4)$ és $B(6; 2)$ pontokon átmenő egyenes szakaszfelező merőlegesének az egyenletét!

(2 pont)

9. Egy téglalap oldalai 5 cm és 12 cm. Számítsa ki az átlók hajlásszögét!

(4 pont)

10. a) Ábrázolja a $[-1; 2[$ intervallumon az $f(x) = 2x - x^2$ függvényt!

(2 pont)

b) Az adott intervallumon mikor lesz a függvényérték pozitív?

(2 pont)

11. Mekkora legyen az A számjegy, hogy az alábbi két négyjegyű szám összege osztható legyen 9-cel? $\overline{441A}$, $\overline{5647}$

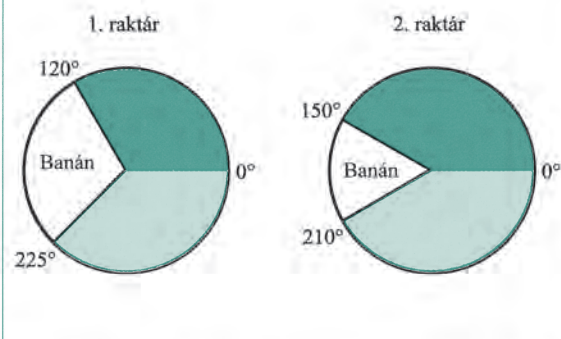
(4 pont)

II. rész

II./A rész (3 feladat, 36 pont)

Felhasználható idő: 135 perc (II/A és II/B)

12. ábra



12. Egy gyümölcs-nagykereskedő alma, banán és narancs eladásával foglalkozik. Két raktárában tárolja e gyümölcsöket: az 1. raktárban 124 q, a másodikban pedig 144 q gyümölcsöt tárolnak, melyek raktáronkénti megoszlását az alábbi kördiagramok szemléltetik.

a) A 2. raktár banánkészlete hány %-a az 1. raktár banánkészletének?

(3 pont)

b) Ábrázolja egy kördiagramon a teljes alma, banán és narancskészletet!

(6 pont)

c) Mindkét raktárt kiürítik. Ehhez egyforma ládákat használnak. Egy ládába 24 kg alma vagy 20 kg banán vagy 30 kg narancs fér. Hány láda kell a raktárak kiürítéséhez, ha egy ládában csak egy fajta gyümölcsöt szállíthatnak?

(3 pont)

13. Az iskolai Túra Szakosztály mind a 42 tagja részt vett az idei három túra valamelyikén. A második kiránduláson 1-gyel, a harmadikon pedig 5-tel többen vettek részt, mint az elsőn. Azok száma, akik két túrán vettek részt 3-szor, akik pedig egy túrán vettek részt 10-szer annyi, mint azok száma, akik mindhárom túrán részt vettek.

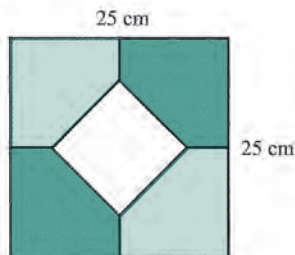
a) Hányan vettek részt pontosan egy kiránduláson?

(6 pont)

b) Hányan vettek részt az első, a második és a harmadik kiránduláson?

(6 pont)

14. ábra



14. Az ábrán egy 25 cm oldalú négyzet alakú üveglakot láthatunk. Tervezője úgy tervezte, hogy a belső öt síkrész területei mind egyenlők.

a) Mekkora a belső négyzet oldala? (5 pont)

b) Milyen hosszú a négy síkrészt körbefogó „fémváz”?

(7 pont)

II./B (2 feladat, 34 pont)

Az alábbi három feladat közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

15. a) Igazolja, hogy az alábbi egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = 10$, $y = 6$.

$$\log_2(x + y) - \log_2(x - y) = \log_3 9, \quad y^2 + 2x = 56.$$

(10 pont)

b) Egy számtani sorozat első tagja 10, differenciája 6. Van-e olyan k egész szám, melyre teljesül, hogy a számtani sorozat első, harmadik és k -adik tagja egy mértani sorozat szomszédos elemei?

(7 pont)

16. Egy téglalap alapterületű ház alapterületének oldalai 6 m és 4 m. A tetőtérrel beépítették: a falat 1,2 m-rel megemelték, majd az ábrán látható módon húzták fel a „sátortetőt”.

a) Mekkora a beépített tetőtér térfogata?

(6 pont)

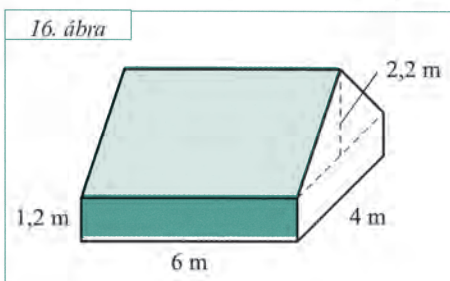
b) A tetőtér oldalfalait és a mennyezetet kifestették. Egy vödör festék $4,5 \text{ m}^2$ felület befestésére elegendő. Hány vödör festékre van szükség, ha a nyílászárók (ablakok, ajtó) az oldalfal és a mennyezet területének 10%-a?

(6 pont)

c) Egy szabvány szerint hasznos alapterületnek az minősül, melynek belmagassága legalább 1,6 m. Mekkora ennek a tetőtérnek a hasznos alapterülete?

(5 pont)

16. ábra



17. Egy térkép részletét látjuk az ábrán. Az országút M pontjából az úttal 34° -os szöget bezárva indul a 2,4 km hosszú út, mely az A faluba vezet. M -ből 5 km-t tovább haladva az országúton a K ponthoz jutunk, ahol az úttal 72° -os szöget bezárva indul az 1,6 km hosszú út a B faluba.

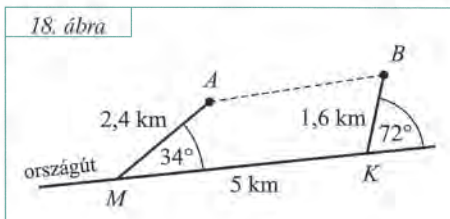
a) Milyen távol van egymástól a két falu?

(11 pont)

b) A -ból és B -ből egy-egy bekötő utat építenek, melyek az országúthoz vezetnek és a lehető legrövidebbek. A talajviszonyok miatt az A -ból vezető bekötőút km-ként 4,6 mill. Ft, a B -ből vezető bekötő út km-ként 6,6 millió Ft. Melyik falu önkormányzata fizet többet az utépítésért?

(6 pont)

18. ábra



6. feladatsor

1. rész (11 feladat, 30 pont)

Felhasználható idő: 45 perc

1. Andrásnak 110 200, feleségének 98 600 Ft a havi nettó fizetése. Mindketten kaptak 12%-os fizetésemelést. Mennyi lesz ekkor kettejük fizetésének összege? (2 pont)

2. Legyen az A halmaz azon x valós számok halmaza, melyekre $x \leq 10$. Az B halmaz azon x valós számok halmaza, melyekre $-3 \leq x$, végül C halmaz azon x valós számok halmaza, melyekre $-3 < x < 20$. Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemeit! (2 pont)

3. Jelölje a négyzetekbe írt i vagy h betűvel, hogy az állítás igaz vagy hamis (α és β hegyes szögek)! (2 pont)

a) ha $\alpha > \beta$, akkor $\sin \alpha > \sin \beta$ ☐ ;

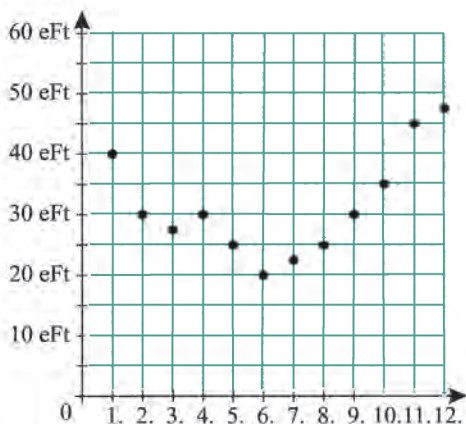
b) ha $\alpha > \beta$, akkor $\cos \alpha > \cos \beta$ ☐ .

(2 pont)

4. Számítsa ki az $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ egyenletű kör területét! (2 pont)

(2 pont)

5. ábra



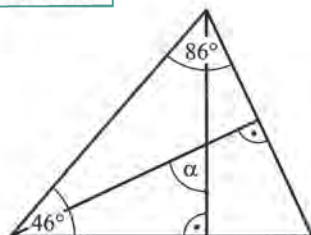
5. Egy családnak a fűtésre és melegvízre fordított költségeit mutatja az ábra valamely évben. Mely időszakban (mely hónapokban) haladta meg a költség a 30 ezer Ft-ot? (2 pont)

(2 pont)

6. Egy hegyesszögű háromszögnek megrajzoltuk két magasságát. Mekkora az ábrán α -val jelölt szög? (3 pont)

(3 pont)

6. ábra



7. Egy bajnokságon hat csapat versenyzett egymással: **A, B, C, D, E** és **F**. A bajnokság utolsó fordulója előtt már biztos volt, hogy **A** és **B** közül az egyik lesz az első helyezett, a másik a második, és **D** lesz az utolsó. Tudva ezeket, hányféleképpen alakulhat a végső sorrend? **(3 pont)**

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán: $\log_2(2x - 2) = 2$. **(3 pont)**

9. Az alábbi állítások közül melyik igaz? Ha három pozitív egész szám összege páros, akkor

a) mindhárom páros;

b) mindhárom páratlan;

c) a párosok száma páratlan. **(3 pont)**

10. Ábrázolja a $(0; 5]$ intervallumon az $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ függvényt! **(4 pont)**

11. Egy derékszögű háromszög befogóinak az összege 14, a befogók különbsége 2. Mekkora a háromszög legkisebb szöge? **(4 pont)**

II./A (3 feladat, 36 pont)

Felhasználható idő: 135 perc (II/A és II/B)

12. Egy 33-as létszámú zenetagozatos osztályban hegedülni és zongorázni tanulnak a diákok. (Minden diák játszik legalább egy hangszerezen.) Azok száma, akik mindkét hangszerezen játszanak, akik csak hegedülnek, illetve akik csak zongoráznak, egy nem állandó számtani sorozat egymást követő tagjai.

a) Hányan tanulnak csak hegedülni? **(6 pont)**

b) Ha legalább 5-en játszanak mindkét hangszerezen, akkor hányan lehetnek azok, akik csak zongoráznak? **(6 pont)**

13. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának két végpontja $A(-2; 2)$, $B(-2; 6)$.

a) Határozza meg a harmadik csúcs koordinátáit, ha az illeszkedik az $3y - x = 4$ egyenletű egyenesre! **(6 pont)**

b) Mekkora a háromszög kerülete? **(6 pont)**

14. Egy felmérés során megkérdeztek 60 családot a családban élő gyerekek számáról, ill. azok neméről. A felmérés eredményét az alábbi táblázat mutatja: (Tehát pl. olyan család, melyben egyetlen gyermek sincs 7 db volt, míg olyan, amelyben 1 fiú és két lány, 4 volt.)

a) Átlagosan hány gyermek van egy családban? **(6 pont)**

b) Összesen hány fiú és hány lány van a megkérdezett családokban? **(6 pont)**

fiúk száma

	0	1	2	3	4	5
0	7	1	3	2	1	0
1	2	3	3	1	2	1
2	5	4	2	1	3	0
3	4	2	3	1	1	0
4	1	1	2	1	0	0
5	0	1	1	1	0	0

lányok száma

II./B (2 feladat, 34 pont)

Az alábbi három feladat közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

15. Egy ókori arab várost kör alakú kőfállal vettek körül, melynek sugara 2 km. A kőfalon volt négy kapu, melyek az egyes égtájak felé mutattak. Az északi kaputól északra 1 km-re volt egy világítótorny.

a) Egy vándor a déli kaputól délre haladt 1 km-t, majd onnan nyugatra fordult. Mekkora utat kell megtennie nyugati irányban, hogy olyan P pontba jusson, ahonnan megpillanthatja a világítótornyot?

(9 pont)

b) Mikor a vándor P -be ért, meglátta a közeledő ellenséget, így a legrövidebb idő alatt vissza kellett érnie a városba. A déli vagy a nyugati kapuhoz siessen?

(8 pont)

16. Az 1, 1, 1, 2, 4, 4, 4 számjegyek mindegyikének felhasználásával nyolcjegyű számokat akarunk képezni.

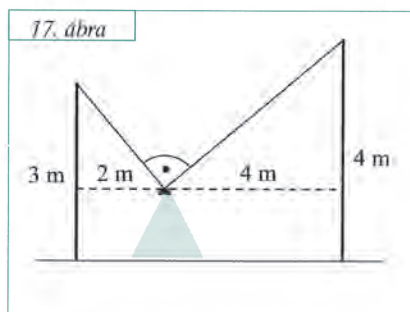
a) Hány db nyolcjegyű szám képezhető ilyen módon?

(6 pont)

b) Az így kapott nyolcjegyű számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az osztható 4-gyel?

(11 pont)

17. Egy 3 és egy 4 méter magas pózna két végéhez rögzítettek egy kötelet, majd erre felakasztottak egy lámpát, mely lesüllyedve kifeszítette az egymásra merőleges kötélrészeket, és a 3 méteres póznától 2, a 4 méteres póznától 4 méter távolságban helyezkedett el (ábra).



ván a lámpa?

a) Milyen magasan
(12 pont)

b) A lámpa fénykúpjának nyílásszöge 52° . Mekkora területű kört világít meg a lámpa a földön?

(5 pont)

Emelt szint

1. feladatsor (Felhasználható idő: 240 perc)

I. rész (4 feladat, 51 pont)

1. Egy sporttagozatos osztályban (ahol mindenki sportol), atletizálnak, birkóznak és cselgáncsoznak a tanulók. Három olyan diák van, aki mindhárom sportot űzi. Akik pontosan 2 sportot űznek, 10-zel kevesebben vannak, mint azok, akik pontosan egy sportot űznek. Akik csak birkóznak kétszer annyian vannak, mint akik csak atletizálnak, és fele annyian vannak, mint akik csak cselgáncsoznak. Melyik állítás lehet igaz?

a) Osztálylétszám: 31 fő.

b) Osztálylétszám: 33 fő.

c) Osztálylétszám: 35 fő.

(12 pont)

2. Egy számtani sorozatban minden n -re $a_n = 5n - 7$.

a) Számítsa ki a sorozat első 100 elemének összegét!

(6 pont)

b) Hány db kétjegyű tagja van a sorozatnak?

(6 pont)

3. Egy rombusz alakú füves kert minden oldala 20 méter, egyik szöge 60° . E szög csúcsához kikötöttük kecskénket egy olyan hosszú kötélre, hogy a kecske lelegelhesse a kert felét. A szemközti csúcsba a szomszéd kötötte ki a kutyáját, de megkértük, hogy csak olyan hosszú legyen a kutya kötele, hogy ne érhesse el kecskénket. Milyen hosszú lehet ez a kötel?

(13 pont)

4. Ábrázolja az alábbi valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \frac{4x - 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9}} \text{ függvényt!}$$

(14 pont)

II. rész (4 feladat, 64 pont)

Az alábbi öt feladat közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. Egy drogériakereskedés-láncolat 60 boltjában kétféle márkájú terméket árulnak: A -t és B -t. Egy alkalommal felmérést készítettek arról, hogy egy adott héten mely boltokban hány db terméket adtak el az egyes márkákból. E felmérést szemlélteti az alábbi táblázat:

A -ból eladott $\rightarrow$ B -ből eladott $\downarrow$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	3	1	1	2	0
1	2	2	1	1	1	1	0
2	3	2	2	1	3	0	0
3	3	2	2	2	2	1	1
4	1	1	1	2	2	1	0
5	1	1	1	2	1	1	0
6	0	1	2	1	1	0	0

(Tehát pl. olyan üzletből, amelyik 2 db A -t és 1 db B -t adott el 1 volt, míg pl. olyan, amelyik 2 db B -t és A -ból egyet sem, 3 volt.)

a) Töltse ki az alábbi táblázatot, melyben a 60 üzletet az eladott termékek száma szerint kell csoportosítani!

(6 pont)

Eladott termékek száma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Üzletek száma										

b) Számítsa ki: átlagosan hány terméket adtak el egy üzletben!

(3 pont)

c) Az A termék beszerzési ára 1240 Ft, a B termék beszerzési ára 1660 Ft. Az A terméken 22%, a B -n pedig 14% haszna van a cégnek. Mennyi haszna volta a cégnek az adott héten?

(7 pont)

6. Adott $(n+3)$ db számjegy: 1 db 1-es, 1 db 2-es, n db 3-as és 1 db 4-es. Képezünk ezekkel a számjegyekkel (mindegyiket felhasználva) az összes lehetséges módon $n+3$ jegyű számokat, majd ezek közül tetszőlegesen kiválasztunk egyet.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám páros?

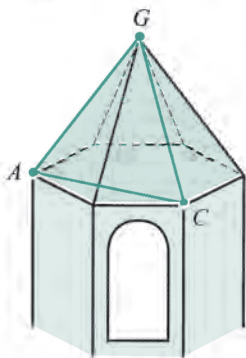
(6 pont)

b) Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható 4-gyel: $\frac{1}{8}$. Hány db 3-as számjegyet használtunk fel?

(10 pont)

7. Egy román kori templomrom tetejét úgy alakították ki, hogy azon egy olyan szabályos hatszög alapú egyenes gúla áll (ld. ábra), mely alaphatszögének oldala $4\sqrt{3}$ méter. E tetőt úgy tervezték, hogy az ACG háromszög szabályos legyen.

7. ábra



a) Mekkora a tetőszerkezet légtere ? (9 pont)

b) A tetőszerkezet külső felületét egy speciális színes égetett cseréppel akarják bevonni, melynek m^2 -re 16 000 Ft. Mennyibe kerül a tető teljes befedése? (7 pont)

8. Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet együtthatói egész számok.

a) Bizonyítsa be, hogy a diszkrimináns nem lehet sem 2002, sem 2003. (10 pont)

b) Lehet-e a diszkrimináns 2005? (6 pont)

9. Egy $a = 2,8$ méter oldalú ABC szabályos háromszög alakú vasútmodell-pálya A csúcsából B irányában egyszerre indul két vasútmodell. Az egyik sebessége a másiknak éppen a duplája.

a) A BC oldal mely pontjában tartózkodik a gyorsabb vonat (még az első körben), amikor a két vonat között a távolság a legkisebb? (12 pont)

b) Mekkora ez a legkisebb távolság ? (4 pont)

2. feladatsor (Felhasználható idő: 240 perc)

I. rész (4 feladat, 51 pont)

1. Oldja meg az alábbi egyenletet, illetve egyenlőtlenséget a valós számok halmazan!

a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq 2 - |x|$, b) $\sqrt{\lg^2 x - 4 \lg x + 4} \leq 2 - \lg x$. (12 pont)

2. Milyen távol van a $P(7; 1)$ ponttól a $2y - x = 5$ egyenesnek az a pontja, amelyik az $A(-2; 1)$ és $B(6; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra van ? (12 pont)

3. Egy kisváros 6 osztályos gimnáziumának tanulóiról felmérést készítettek aszerint, hogy hányan vannak „bejárók” (azaz olyan tanulók, akik minden nap hazamennek), és hányan vannak a kollégiumi ellátást igénybe vevők. E felmérés eredményét szemlélteti az alábbi táblázat.

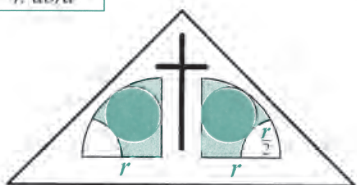
		7. évf.	8. évf.	9. évf.	10. évf.	11. évf.	12. évf.
bejárók	fiúk	8	5	6	9	10	8
	lányok	6	9	11	6	6	9
kollégisták	fiúk	12	14	9	5	7	7
	lányok	7	1	4	8	5	3

a) Szemléltesse egy oszlopdiagramon évfolyamonként a fiú-lány arányt! (4 pont)

b) Az iskola tanulóinak hány százaléka kollégista fiú? (4 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztva két lányt, mekkora annak a valószínűsége, hogy mindkettő koleszos? (5 pont)

4. ábra



4. Az ábrán egy balatonfelvidéki falucska felújított, modern kápolnájának a bejárata fölötti díszítőelem látható. Mekkora a besatírozott körök (üvegablakok) sugara, ha a negyedkörök sugara:

$$r = 90 \text{ cm} ?$$

(14 pont)

II. rész (4 feladat, 64 pont)

Az alábbi öt feladat közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. Az $ax + by = c$ egyenes és a koordinátatengelyek alkotta háromszög területe 0,5 területegység.

a) Határozza meg az egyenes egyenletét, ha a , b és c egy nem állandó számtani sorozat egymást követő elemei! (7 pont)

b) Határozza meg az egyenes egyenletét, ha a , b és c egy nem állandó mértani sorozat egymást követő elemei! (7 pont)

6. Egy tantestület 18 férfi és 24 nő tagja négy fős delegációt készül elküldeni az önkormányzathoz.

a) Hányféleképpen választhatják ki a delegáció tagjait? (4 pont)

b) Hányféleképpen választhatják ki a delegáció tagjait, ha azt akarják, hogy a delegációban két nő és két férfi legyen? (5 pont)

c) Időközben rájöttek, hogy érdemes a delegációban egy szószólót (vezetőt) választani. Mivel Béla a tantestület legjobb fellépésű tagja, ezért ő lesz a delegáció vezetője, és emellett a másik három tagból legalább 2 nő. Ilyen feltételekkel hányféleképpen állíthatják össze a delegációt? (7 pont)

7. Szemléltesse a sík azon $P(x; y)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$) pontjainak halmazát, melyekre

$$\sin(x + y) \geq \cos(x - y)!$$

(16 pont)

8. Egy űrsiklóról kilöttek tesztelés céljából egy hőkövető rakétát. A rakéta földtől való távolságát a kilövés után az $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 10$ függvény írja le, ahol az egység az 1. tengelyen $t = 1 = 12$ perc a 2. tengelyen 1 km. A rakéta pályáját 1 órán keresztül követték a megfigyelő szakemberek.

a) Milyen magasságból lőtték ki a rakétát? (3 pont)

b) Mikor észlelték a földtől legtávolabb a rakétát a megfigyelt időszakban, és milyen távol volt ekkor a földtől a rakéta? (8 pont)

c) Egy radar minden a földtől legfeljebb 7000 méter távolságra levő tárgyat észlelni képes. Észlelhette-e ez a radar a kilőtt rakétát a vizsgált egy órában? (5 pont)

9. a) Mely k pozitív egész és p pozitív prímekre teljesül, hogy $k^2 p - 11k$ értéke prímszám? (7 pont)
 b) Milyen pozitív egész k -ra teljesül, hogy $k^2 - 12k + 5$ értéke négyzetszám? (9 pont)

3. feladatsor (Felhasználható idő: 240 perc)

I. rész (4 feladat, 51 pont)

1. Makó és Veszprém között a távolság 270 km vasúton. Reggel 8-kor elindult egy vonat Makóról 60 km/h sebességgel. 9-kor ugyanazon az útvonalon Veszprémből indult egy gyorsvonat 80 km/h sebességgel.

a) Mikor találkoznak és Makótól milyen messzire van ez a találkozási pont vasúton? (5 pont)

b) András a makói, Béla pedig a veszprémi vonaton ült. Mindkettőjüknek volt egy-egy 40 km hatósugarú adóvevő (ennek segítségével akkor tudnak egymással beszélni, amikor a távolság közöttük legfeljebb 40 km). Mely időszakban tud beszélni egymással a két jóbarát?

(7 pont)

2. Egy autógyár háromféle hengerűrtartalmú autót gyárt: 1000, 1200 és 1400 cm³-eket, mindhármát normál-, illetve kombi kivitelben. Egy alkalommal – biztonsági okokból – felmérést készítettek az általuk gyártott, forgalomban levő autók életkoráról. E felmérés eredményét szemlélteti az alábbi táblázat:

		0–5 éves	5–10 éves	10–15 éves	15–20 éves
1.0	normál	1240	962	620	164
	kombi	865	572	384	66
1.2	normál	1664	1824	862	217
	kombi	1220	1625	664	184
1.4	normál	1428	2020	1024	193
	kombi	1130	1642	1003	80

a) A forgalomban levő autók hány százaléka kombi? (4 pont)

b) Szemléltesse egy oszlopdiagramon korosztály szerint a különböző úrtartalmú autókat!

(4 pont)

c) Tekintsük egy autó életkorát saját korosztálya átlagának (tehát pl. egy 5-10 éves korosztályban tartozó autó életkorát tekintsük 7,5 évnek). Ilyen feltétellel mennyi a forgalomban levő autók átlagéletkora?

(4 pont)

3. Legyen az A halmaz a 4-gyel osztható négyjegyű számok halmaza, a B halmaz pedig az 5-tel osztható négyjegyű számok halmaza.

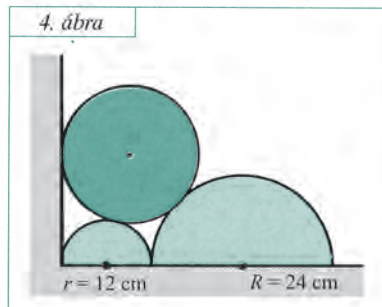
a) Hány eleme van az A és a B halmaznak?

(6 pont)

b) Egy urnában elhelyeztük az A halmaz elemeit, majd utána elhelyeztük ugyanebben az urnában a B halmaz elemeit is. Ez után véletlenszerűen kivettünk az urnából egy számot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kivett szám eleme az $A \cap B$ halmaznak?

(7 pont)

4. ábra



4. A fal mellett (a falat érintve) van a földön egy $r = 12$ cm sugarú félgömb, mellette a félgömböt érintve egy másik, kétszer akkora sugarú félgömb. Egy lufi éppen úgy esett le, hogy mindkét félgömböt és a falat is érinti. (A lufi és a két félgömb középpontja egy, a falra merőleges síkban van.) Mekkora a lufi sugara?

(14 pont)

II. rész (4 feladat, 64 pont)

Az alábbi öt feladat közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

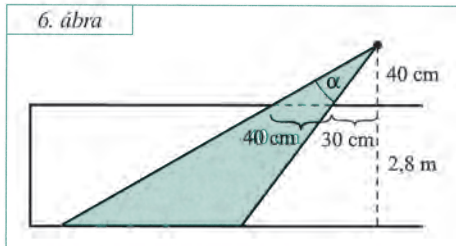
5. a) Milyen hosszú húrt metsz ki az $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ egyenletű körből a $2y = x + 10$ egyenletű egyenes?

(6 pont)

b) Van-e olyan pontja az egyenesnek, melyből a körhöz húzható érintők merőlegesek egymásra?

(10 pont)

6. ábra



6. Egy 2,8 méter magasan levő álmennyezetben vágta egy 40 cm széles sávot; ezen keresztül akarják megvilágítani a mennyezet fölött 40 cm-re elhelyezett lámpával a padlózát egy bizonyos részét (ábra).

a) Milyen széles a padlón megvilágított sáv?

(10 pont)

b) Mekkora a padlót megvilágító fénycsóva nyílásszöge?

(6 pont)

7. Adott 3 db párhuzamos egyenes. Mindegyikén kijelöltünk 5-5 pontot úgy, hogy bárhogyan is választunk ki egy-egy pontot a három egyenesen, egyik pont-hármas sem esik egy egyenesbe. Ezek után képeztük az összes olyan háromszöget, melynek 2 csúcsa valamelyik egyenesen, harmadik csúcsa egy másik

egyenesen van, valamint képeztük az összes olyan négyszöget, melynek két-két csúcsa egy-egy egyenesen van.

a) Miből van több: háromszögből vagy négyszögből? (7 pont)

b) Miből van több: háromszögből vagy négyszögből, ha valamelyik egyenesen nem 5, hanem 6 pontot jelöltünk ki? (9 pont)

8. Legyenek a és b pozitív valós számok, és definiáljuk az alábbi számsorozatot:

$$a_1 = a, \quad a_2 = b \quad \text{és} \quad n > 2 \quad \text{esetén} \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}.$$

a) Igazolja, hogy ekkor $a_{2002} + a_{2003} + a_{2005} + a_{2006} \geq 4$. (8 pont)

b) Ha a és b pozitív egészek, akkor milyen n egész számra teljesül, hogy

$$a_{2002} + a_{2003} + a_{2005} + a_{2006} = n? \quad (8 \text{ pont})$$

9. Az $f(x) = x^2 + ax + b$ és $g(x) = x^2 + bx + a$ függvényekhez ($a > b > 0$) pontosan egy olyan x_0 hely található, melyben a függvények görbéjéhez tartozó érintők merőlegesek egymásra.

a) Ábrázolja a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényt! (8 pont)

b) Számítsa ki az $f(x)$, és $g(x)$ függvények görbéje, valamint az y tengely által közbezárt terület nagyságát! (8 pont)

Oktatási Hivatal
1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100
E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök
Raktári szám: NT-16126/NAT
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna
Utánnymásra előkészítette: Vépy-Benyhe Judit
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton, Marcsek Ildikó
Grafikai szerkesztő: Villám Péter
Terjedelem: 21,12 (A/5) ív
Tömeg: 220 gramm
1. kiadás, 2022
Formakészítés: 

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma: