

Gerőcs
László
.....

Orosz
Gyula
.....

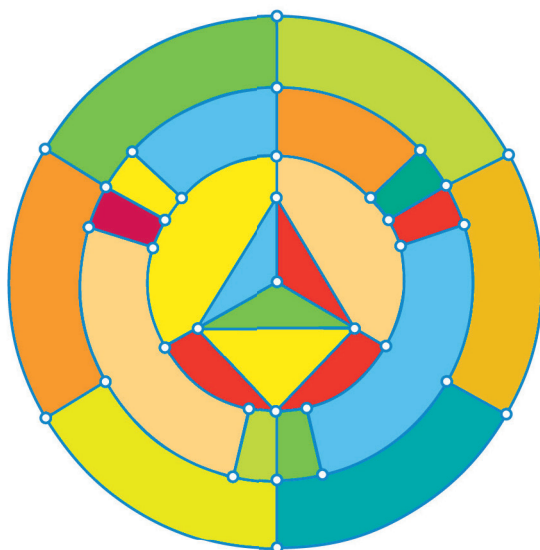
Paróczay
József
.....

Szászné
Simon
Judit

MATEMATIKA

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.

Középszint
Emelt szint



OKTATÁSI
HIVATAL

**Dr. Gerőcs László – Orosz Gyula –
Paróczay József – Szászné dr. Simon Judit**

MATEMATIKA

**Gyakorló és érettségire felkészítő
feladatgyűjtemény I.**

A kiadvány 2018. 08. 17-től tankönyvi engedélyt kapott
a TKV/2474-13/2018. számú határozattal.

A tankönyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének [17/2004. (V. 20.) 3. számú melléklet].

A könyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet:

3. számú melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04.; 3.3.2.2.;

4. számú melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára 4.2.04.; 4.3.2.;

5. számú melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára 5.2.04.;

14. számú melléklet megnevezésű kerettantervek előírásainak és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2002. (V. 24.)].

Lektorok: Pogács Ferenc, Rácz János

Grafikus: Szalóki Dezső

Szerkesztők: Füleki Lászlóné, Tóthné Szalontay Anna

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:

dr. Várady Ferenc, Zarubay Attila

© dr. Geröcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szász dr. Simon Judit,
Oktatási Hivatal (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.), 2005

ISBN 978-963-19-7609-0

Oktatási Hivatal

1055 Budapest, Szalay utca 10–14.

Telefon: (+36-1) 374-2100

E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök

Raktári szám: NT-16125/NAT

Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna

Utánnymásra előkészítette: Vépy-Benyhe Judit

Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos

Műszaki szerkesztő: Orlai Márton, Marcsek Ildikó

Grafikai szerkesztő: Villám Péter

Terjedelem: 17,55 (A/5) ív

Tömeg: 210 gramm

1. kiadás, 2022

Nyomdai előkészítés: 

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.

Nyomta és kötötte a Szekszárdi Nyomda Kft.

Felelős vezető: Vadász Katalin

Tartalom

Előszó	5
<i>Jelölések, rövidítések</i>	6
I. MATEMATIKAI LOGIKA	9
Logikai feladatok	9
Bizonyítási módszerek	17
<i>Skatulyaelv</i>	18
<i>Indirekt bizonyítások</i>	19
<i>Teljes indukció</i>	20
<i>Invariáns tulajdonságok</i>	23
<i>Szita formula</i>	24
II. HALMAZELMÉLET	25
Halmazok megadása	25
Műveletek halmazokkal	30
Halmazok elemszáma	40
<i>Végtelen halmazok számossága</i>	44
Vegyes feladatok	46
III. SZÁMELMÉLET	51
Oszthatósági alapfogalmak, oszthatósági szabályok	51
Számjegyes feladatok	55
Prímszámok. A számelmélet alaptétele	56
Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma	60
Diofantoszi problémák, diofantoszi egyenletek	66
Számrendszerek	69
Vegyes számelméleti feladatok	76
IV. ALGEBRA	81
Algebrai átalakítások. Polinomok	81
Nevezetes azonosságok	85
Algebrai törtek	91
<i>Algebrai törtek összeadása, kivonása</i>	93
<i>Algebrai törtek szorzása, osztása</i>	96
Racionális és irracionális kifejezések	98
Hatvány, gyök, logaritmus	107
<i>Egész kitevőjű hatványok</i>	107
<i>Négyzetgyök fogalma és azonosságai</i>	111
<i>Az n-edik gyök fogalma és azonosságai</i>	121
<i>Törtekitevőjű hatványok</i>	126

<i>A logaritmus fogalma és azonosságai</i>	129
<i>Nehezebb feladatok a témakörből</i>	135
Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	137
<i>Elsőfokú egyváltozós egyenletek</i>	137
<i>Egyenletrendszerek</i>	144
<i>Paraméteres egyenletek, egyenletrendszerek</i>	150
<i>Szöveges feladatok</i>	153
<i>Elsőfokú egyenlőtlenségek</i>	161
Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	164
<i>Másodfokú egyenletek</i>	164
<i>Összefüggések a gyökök és együtthatók között</i>	171
<i>Másodfokú egyenletrendszerek</i>	177
<i>Szöveges feladatok</i>	181
<i>Vegyes feladatok</i>	186
<i>Másodfokú egyenlőtlenségek</i>	191
<i>Paraméteres és összetett egyenlőtlenségek</i>	192
Magasabbfokú egyenletek	195
Irracionális egyenletek, egyenlőtlenségek	198
<i>Irracionális egyenletek</i>	198
<i>Irracionális egyenlőtlenségek</i>	201
Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek	203
<i>Abszolútértékes egyenletek</i>	203
<i>Abszolútértékes egyenlőtlenségek</i>	204
<i>Nehezebb feladatok</i>	205
Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	207
<i>Exponenciális egyenletek</i>	207
<i>Exponenciális egyenletrendszerek</i>	210
<i>Exponenciális egyenlőtlenségek</i>	211
<i>Logaritmikus egyenletek</i>	212
<i>Logaritmikus egyenlőtlenségek</i>	218
<i>Exponenciális és logaritmikus egyenletrendszerek</i>	220
<i>Nehezebb feladatok a témakörből</i>	223
Vegyes és gyakorlati feladatok	225
Nevezetes egyenlőtlenségek	233

Előszó

A feladatgyűjtemény tagja az Oktatási Hivatal 3 kötetes *feladatgyűjtemény-családjának*, amely feldolgozza a teljes középiskolai matematika tananyagot az új *kétszintű érettségi* szellemében, *középszinten* és *emelt szinten* egyaránt.

A több ezer feladatot tartalmazó feladatgyűjteményekben *szintezzük az összes feladatot*. Ez a szintezés a feladatok nehézségi fokát is jelöli:

K1 = középszintű, könnyebb;

K2 = középszintű, nehezebb;

E1 = emelt szintű, könnyebb;

E2 = emelt szintű, nehezebb;

V = versenyre ajánlott feladat;

Gy = a gyakorlati vonatkozású, életközeli matematikapéldáknál áll.

A feladatgyűjtemények bőségesen tartalmaznak gyakorló példákat, azaz a matematika gyakorlati alkalmazását szolgáló feladatokat, segítve ezzel a későbbi felhasználást a szakmai, a tudományos vagy a mindennapi életben. A tananyag-feldolgozás módja egyszerre teszi lehetővé a középszintű és az emelt szintű érettségire való felkészülést. Szerzői és lektorai mindannyian a matematika tanításának kiváló és elismert szakemberei.

Feladatok megoldása

Mind a három kötethez megtalálható majdnem az összes *feladat megoldása* a <https://www.tankonyvkatalogus.hu> címen. Legtöbbször részletes megoldást közlünk, de néhol csak útmutatást vagy végeredményt adunk, és néhány egyszerű feladat megoldását az olvasóra bizzuk.

Ajánljuk a tankönyvcsaládot 9–13. évfolyamon minden matematikaórára a gyakorláshoz, a témakörök elmélyítéséhez, a tehetséggondozáshoz és az érettségire készülőknek egyaránt.

Köszönjük Kósa Tamás értékes segítségét, melyet a szerzőknek nyújtott.

Jelölések, rövidítések

$=, \neq$	egyenlő, nem egyenlő	$a = 2, b \neq 5$
$\equiv$	azonosan egyenlő	$ax + b \equiv 5$
$\approx$	közelítőleg egyenlő	$a \approx 2,3; 8,54 \approx 8,6$
$<, \leq$	kisebb, kisebb vagy egyenlő	$2 < 3, 5 \leq x$
$>, \geq$	nagyobb, nagyobb vagy egyenlő	$6 > 4, a \geq 2$
N	a természetes számok halmaza	$\{0; 1; 2; \dots\}$
Z	az egész számok halmaza	$\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
Z⁺, Z⁻	a pozitív, a negatív egész számok halmaza	$\{1; 2; 3; \dots\},$ $\{-1; -2; -3; \dots\}$
Q, Q*	a racionális, az irracionális számok halmaza	
Q⁺, Q⁻	a pozitív, a negatív racionális számok halmaza	
R	a valós számok halmaza	
R⁺, R⁻	a pozitív, a negatív valós számok halmaza	
$\in, \notin$	eleme, nem eleme a halmaznak	$5 \in \mathbf{N}, -2 \notin \mathbf{Z}^+$
$\subseteq, \subset$	részhalmaz, valódi részhalmaz	$A \subseteq B, \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$
$\not\subset$	nem részhalmaza a halmaznak	$\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^*$
$\cup, \cap$	halmazok uniója, metszete	$A \cup B, A \cap B$
$\setminus$	halmazok különbsége	$A \setminus B$
Δ	halmazok szimmetrikus különbsége	$A \Delta B$
$\times$	halmazok Descartes-szorzata	$A \times B$
$\emptyset, \{\}$	üres halmaz	
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere	
$ A $	az A halmaz elemszáma	$ \{0; 1; 2\} = 3$
$[a; b]$	zárt intervallum	
$[a; b[$	balról zárt, jobbról nyílt intervallum	
$]a; b]$	balról nyílt, jobbról zárt intervallum	
$]a; b[$	nyílt intervallum	
$ x $	az x szám abszolútértéke	$ -3,1 = 3,1$
$[x], \{x\}$	az x szám egészrésze, törtrésze	$[2,3] = 2, \{2,3\} = 0,3$
$a b$	a osztja b -t	$2 8$
(a, b)	a és b legnagyobb közös osztója	$(4, 6) = 2$
$[a, b]$	a és b legkisebb közös többszöröse	$[4, 6] = 12$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya	$f: x \mapsto 2x + 3$
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke, az x_0 helyen	$f(5)$, ha $x_0 = 5$

D_f, R_f	az f függvény értelmezési tartománya, értékkészlete	
$f \circ g$	összetett függvény	
$!$	faktoriális	$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$\binom{n}{k}$	n alatt a k	$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
$\nexists$	szög	$ABC \nexists$
$\neg$	állítások tagadása (negációja)	
$\vee, \wedge$	állítások diszjunkciója, konjunkciója	
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$ $\rightarrow, \leftrightarrow$	állítások implikációja, ekvivalenciája	
$\forall$	univerzális kvantor (minden ...)	
$\Leftrightarrow$	akkor és csak akkor	
$\exists$	egzisztenciális kvantor (létezik ...)	
Σ	összeg (szumma)	$\sum_{i=1}^n i, \Sigma(2i - 3)$
Π	szorzat (produktum)	$\prod_{i=1}^4 i$
$\lim$	limesz, határérték	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
f'	az f függvény deriváltja	
$\int$	határozatlan integrál	$\int f(x) dx$
$\int_a^b$	határozott integrál	$\int_a^b f(x) dx$
$F(x), F'(x)$	primitív függvény és a deriváltja	

I. Matematikai logika

Logikai feladatok

K1 1. Döntsük el a következő állításokról, hogy igazak vagy hamisak:

- a) Minden 8-cal osztható szám osztható 4-gyel is.
- b) Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor 48-cal is osztható.
- c) Több olyan valós szám is van, amelynek a reciproka önmaga.
- d) Minden négyzetszámnak – a 0 kivételével – páratlan sok osztója van.
- e) Ha egy háromszögnek köré írt körének középpontja a háromszögön kívül van, akkor a magasságpontja is.
- f) Ha egy négyszög átlói merőlegesen egymásra és egyenlő hosszúak, akkor az négyszög.

K1 2. Egy négyszögről négy gyerek tett egy-egy kijelentést. Íme az általuk mondottak:

Aladár: Ez a négyszög egy paralelogramma.

Balambér: Én úgy látom, hogy ez egy négyzet.

Csenge: Szerintem kétségtelenül egy deltoidról van szó.

Daniella: Valójában egy trapézról beszélünk.

Utólag kiderült, hogy három gyerek állítása igaz, egyiküké pedig hamis volt. Milyen négyszögről beszélgettek?

K1 3. Anna, Balázs, Csaba és Dóra közül valaki betört egy ablakot. Megkérdeztük, ki tette? A következő válaszokat kaptuk:

Anna: Csaba volt.

Balázs: Nem én voltam.

Csaba: Balázs volt.

Dóra: Csaba hazudik.

a) Ki volt a tettes, ha pontosan egy gyerek mondott igazat?

b) Ki volt a tettes, ha pontosan egy gyerek hazudott?

K1 4. Péter azt mondta Pálnak: *Tegnap az uszodában heten versenyeztek az 1-től 7-ig számozott pályákon. Megfigyeltem, hogy akik páratlan számú pályán úsztak, azok közt nem lett senki sem első, sem harmadik, sem ötödik, sem hetedik. No, akkor biztos, hogy nem is volt verseny tegnap* – mondta Palkó. Honnan tudta? Válaszát indokolja!

K1 5. Egy repülőgép egyenes vonalban repül az A repülőtérrel a B repülőtérre, majd vissza. Sebessége állandó, és végig szélcsend van. Megváltozna-e az utazási idő, ha a gép saját sebessége végig az eredetivel megegyező állandó maradna, de az oda- és visszaúton is állandó erősségű szél fújna A -ból B felé?

K1 6. Tudjuk, hogy Bodri kutya tarka vagy fekete. Továbbá azt is, hogy barnaszemű. De Bodri kutya udvarában, ha egy kutya barnaszemű, akkor a bundája nem lehet sem fehér, sem tarka. Igaz-e, hogy Bodri kutya fekete?

K1 7. Egy furcsa szigeten járunk. Az itt élők egy része lovag, másik része lóköltő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lóköltők mindig hazudnak. Természetesen a szigetlakók ismerik egymást, tudják egymásról, hogy ki lovag, ki lóköltő. Mi nem ismerjük őket. A szigeten sétálva két őslakóval találkoztunk. Egyikük így nyilatkozott saját magukról:

– *Legalább az egyikünk lóköltő.*

Meg tudjuk-e állapítani, melyikük miféle?



K1 8. Ismét a lovagok és lóköltők szigetén járunk. Egy reggel kissé álmosan hallgattuk két bennszülött beszélgetését. Íme párbeszédük egy részlete:

A: *Legalább egyikünk lóköltő.*

B: *Különböző típushoz tartozunk.*
Meg tudjuk-e állapítani, melyikük miféle?

K1 9. Ismét a lovagok és lóköltők szigetén járunk. Megkérdeztük,

mifélek ők. Hármuk közül ketten nyilatkoztak:

1. lakos: *Mindhárman hazudósak vagyunk.*

2. lakos: *Pontosan egyikünk hazudik.*

Igazmondó vagy hazudós a harmadik lakos?

K1 10. Ismét a lovagok és lóköltők szigetén járunk. Egy alkalommal megkérdeztünk öt embert, akik ismerték egymást, hogy „Hány lovag van köztetek?”. A következő válaszokat kaptuk: 0, 1, 2, 3, 4. Hány lovag volt az öt ember között?

K2 11. Tizenkét ember ül egy asztal körül: lovagok és lóköltők. Így szólt mindegyikük: *Mindenki – esetleg rajtam és szomszédaimon kívül – lóköltő.*

Hány lovag ül az asztalnál, ha tudjuk, hogy a lóköltők mindig hazudnak, a lovagok pedig mindig igazat mondanak?

K2 12. Hét szigetlakóval ültünk egy szobában. Mindegyiküknek feltettük a kérdést: *Hány igazmondó van köztetek?* A válaszok az alábbiak voltak:

Közöttünk legfeljebb 1 igazmondó van.

Közöttünk legfeljebb 2 igazmondó van.

Közöttünk legfeljebb 3 igazmondó van.

Közöttünk legfeljebb 4 igazmondó van.

Közöttünk legfeljebb 5 igazmondó van.

Közöttünk legfeljebb 6 igazmondó van.

Közöttünk legfeljebb 7 igazmondó van.

Hány igazmondó volt a szobában?

K2 13. Hét szigetlakóval ültünk egy szobában. Mindegyiküknek feltettük a kérdést: *Hány igazmondó van köztetek?* A válaszok az alábbiak voltak:

Közöttünk legalább 1 igazmondó van.

Közöttünk legalább 2 igazmondó van.

Közöttünk legalább 3 igazmondó van.

Közöttünk legalább 4 igazmondó van.

Közöttünk legalább 5 igazmondó van.

Közöttünk legalább 6 igazmondó van.

Közöttünk legalább 7 igazmondó van.

Hány igazmondó volt a szobában?

K1 14. Hét szigetlakóval ültünk egy szobában. Mindegyiküknek feltettük a kérdést: *Hány igazmondó van köztetek?* A válaszok az alábbiak voltak:

Közöttünk pontosan 1 igazmondó van.

Közöttünk pontosan 2 igazmondó van.

Közöttünk pontosan 3 igazmondó van.

Közöttünk pontosan 4 igazmondó van.

Közöttünk pontosan 5 igazmondó van.

Közöttünk pontosan 6 igazmondó van.

Közöttünk pontosan 7 igazmondó van.

Hány igazmondó volt a szobában?

K1 15. Az egyik évben három egymást követő hónap mindegyikében négy vasárnap volt. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül az egyik hónap biztosan február volt!

K1 16. Világszép kisasszonynak három ládája van: egy arany, egy ezüst és egy ólom. Az egyikbe elrejtette az arcképét. Kérői közül az nyerheti el a kezét, aki kitalálja, melyik láda rejtje a festményt. A szerencsétlen kérőket a ládákon lévő felirat segíti. Íme, a feliratok:

Aranyláda: *A kép nem az ezüstitládikában van.*

Ezüstláda: *A kép nem ebben a ládikában van.*

Ólomláda: *A kép ebben a ládikában van.*

Tudjuk, hogy a feliratok között van igaz is, és van hamis is. Melyik ládát válassza a kérő, ha el szeretné venni az ifjú hölgyet?

K1 17. Négy kártya van az asztalra téve, mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betű van. Ezt látjuk az asztalon:

Valaki ezt állítja: *Minden páros szám túllalálán magánhangzó van.*

Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenőrizzük az állítás helyességét?

17. ábra

2	2	M	M	A	A	7	7
2	2	M	M	A	A	7	7

K1 18. Egy diáktalálkozón 19 tanuló vett részt. A találkozót követő napokban elkezdtek egymással levelezni, mindegyikük 2 vagy 4 levelet adott fel. Lehetséges-e, hogy mindegyikük pontosan 3 levelet kapott?

K1 19. Mi a következő állítások tagadása?

a) Van olyan hét, hogy minden lottószelvényemen van találat.

b) Minden asszony életében van egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.

c) Minden évben van olyan tárgy, amelynek minden órájára felkészültem.

K1 20. Ancsa, Borcsa, Julcsa és Marcsa osztálytársak. Matematikából egyikük sem bukott meg, de mindannyian különböző osztályzatot kaptak. Kinek milyen osztályzata volt, ha az alábbi kijelentések mindegyike tartalmaz egy igaz és egy hamis állítást?

Marcsa osztályzata jeles, Julcsáé jó.

Marcsa osztályzata jó, Julcsáé közepes.

Ancsa osztályzata jó, Borcsáé közepes.

K1 21. Aladár, Béla és Csaba egy rablás gyanúsítottjai. A tárgyaláson a következő tények derülnek ki:

a) Csaba ártatlan, vagy Béla bűnös.

b) Ha Béla bűnös, Csaba ártatlan.

c) Aladár és Csaba soha nem dolgoznak együtt, és Aladár soha nem dolgozik egyedül.

d) Ha Béla bűnös, akkor Aladár is az.

Ki, vagy kik lehettek a tettesek?

K1 22. Edit, Márti és Zsófi barátnők. Az egyikük Pesten, a másik Budán, a harmadik Budakeszin lakik. Mindhárman kitűnően beszélnek angolul. Második nyelvként egyikük spanyolt tanul, a másik németet, a harmadik olaszt. Márti és Zsófi nem tanul olaszul, Márti nem lakik Budán, a budakeszi lány nem jár spanyolra; aki viszont Budán lakik, az németül tanul. Ki hol lakik, és milyen nyelvet tanul?

K1 23. a) A teniszezők közül a legjobb futó azonos-e a futók közül a legjobb teniszezővel?

b) A futók közül a legfiatalabb teniszező azonos-e teniszezők közül a legfiatalabb futóval?

K1 24. Ugyanazt jelenti-e a két állítás?

a) Az A halmaz minden a eleméhez van a B halmaznak olyan b eleme, hogy $a < b$.

b) A B halmaznak van olyan b eleme, hogy A halmaz minden a elemére $a < b$.

E1 25. Vizsgáljuk a következő állításokat!

A : Az $ABCD$ négyszög téglalap.

B : Az $ABCD$ négyszög átlói felezik egymást.

C : Az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

D : Az $ABCD$ négyszög rombusz.

E : Az $ABCD$ négyszög négyzet.

Melyek igazak az alábbiak közül?

$A \Rightarrow B$; $\neg A \Rightarrow \neg B$; $C \Rightarrow A$; $(C \wedge A) \Rightarrow B$; $B \wedge C \Rightarrow E$;

$E \Rightarrow A \vee D$; $B \Rightarrow C$; $\neg A \Rightarrow \neg C$; $(A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg E$; $D \vee E \Rightarrow B$.

K1 26. Tekintsük a következő állításokat:

A : Az n szám hattal osztható; B : az n szám páros szám;

C : Az n szám 12-re végződik; D : az n szám prímszám;

E : Az n szám 4-gyel osztható; F : az n szám nem osztható 9-cel;

G : Az n szám számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Írjuk le az előző állításokból a következő műveletekkel megfogalmazott új állításokat:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $A \rightarrow C$; | b) $B \rightarrow D$; |
| c) $(B \wedge D) \rightarrow F$; | d) $(B \vee A) \rightarrow (A \wedge G)$; |
| e) $E \rightarrow C$; | f) $(G \vee B) \leftrightarrow A$; |
| g) $(E \wedge B) \rightarrow D$. | |

Döntsük el, melyik igaz, melyik hamis!

K1 27. Tekintsük a következő két kijelentést:

1. Ha esik az eső, ernyőt viszek magammal.
2. Ma ernyőt vittem magammal.

Logikai következménye-e 1-nek és 2-nek a következő állítás: Ma esett az eső.

E1 28. Ellenőrizzük értéktáblázattal, hogy helyes-e a következtetés:

- Premissák (feltételek):
1. Ha egy szám páratlan, akkor prímszám.
 2. Az n szám nem prímszám.

Konklúzió (következmény): Az n szám nem páratlan szám.

K1 29. Tudjuk, hogy ha Péter moziba megy, akkor másnap nem megy iskolába. Péter ma nem volt iskolában (holott tanuló). Péter azt hírszteli magáról, hogy ő egyáltalán nem jár moziba. Hihető-e Péter állítása?

K1 30. Tudjuk, hogy ha egy pozitív egésznek nem két darab osztója van, akkor nem prímszám. Az a pozitív egész prímszám. Helyes-e logikailag az a következtetés, hogy az a számnak két osztója van?

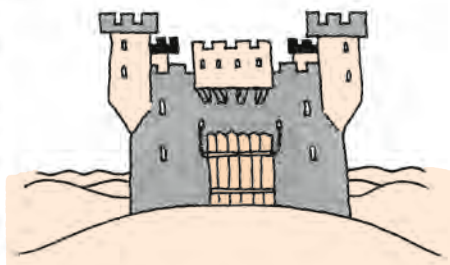
K1 31. A borítón lévő ábrát színezzük ki újra a lehető legkevesebb színnel. Legalább hány színnel lehet kiszínezni, ha azonos színű mezők nem lehetnek szomszédosak?

K1 32. Antal, Béla és Csaba is az iskolából hazaérve otthon azt mesélte, hogy ma ötöst kapott. Béla még azt is mondta, hogy Antallal együtt kapta az ötöst. Az „ügyről” a következőket tudjuk biztosan: van olyan tanuló, aki igazat mondott, és ha Antal ötöst kapott, akkor Béla nem; ha Béla kapott ötöst, akkor Csaba nem kapott, és ha Csaba kapott ötöst, akkor Antal nem kapott.

- a) Hány tanuló kapott ötöst?
- b) Melyik tanuló nem mondott biztosan igazat?
- c) Hány tanuló mondott igazat egyáltalán?

K1 33. Réges-rég egy messzi vidéken dúló háborúban egy sivatagi erőd ostrom alatt állt. Az erőd négyzet alakú volt 8 védőállással: egy-egy volt a négyzet csúcsaiban és egy-egy az oldalak felezőpontjaiban. Az erőd parancsnoka tudta, hogy az ostromlók nem támadnak, amíg minden oldalon 15 élő védőt látnak, így 40 emberéből minden védőállásba 5-5-öt állított. Mikor egy katonája elveszett, úgy állította fel a többieket, hogy továbbra is 15-öt lássanak minden oldalon.

Hogy csinálta ezt a parancsnok?



A védőket további veszteségek érték. Magyarázza meg, hogy csoportosíthatta át az embereit a parancsnok, hogy megakadályozza a támadást!

Az erősítés abban a pillanatban érkezett meg, amikor az ellenség éppen támadni készült. Hány védő volt még ekkor életben?

E1 34. Vacsorát akarunk készíteni úgy, hogy az összes fogás készen legyen 18:30-ra. Az alábbiak a vacsora elkészítéséhez szükséges tennivalók:

	Feladat	Szükséges idő (percben)	Előfeltétel
A	Kézmosás	1	Nincs
B	A hús kiolvasztása	8	Nincs
C	A hús előkészítése	4	A, B
D	A hús sütése	11	C
E	A krumpli megpucolása	10	Nincs
F	A krumpli megsütése	11	A, E
G	A saláta elkészítése	12	A
H	Terítés	3	A
I	Tálalás	2	A, D, F, G, H

A fentiek alapján melyik az a legkésőbbi időpont, amikor neki kell állnunk a vacsora készítésének, ha időben kész akarunk lenni?

A saláta elkészítése tart a leghosszabb ideig. Ha ez az idő öt perccel rövidebb lenne, igaz-e, hogy öt perccel később is elég lenne elkezdni a vacsora készítését?

E2 35. Egy tízéves érettségi találkozó megszervezésére az alábbi bizottságok alakultak: Vacsora, Meghívók, Műsor, Szállás, Díszítés és Öregdiák-album. Néhány ember több bizottságba is jelentkezett, például Simon a Vacsora és a Műsor bizottságnak is tagja, így ha azt szeretnénk, hogy mindkét bizottság ülésén ott legyen, nem tehetjük a két ülést ugyanarra az időpontra.

Az egyes bizottságok és a tagságuk

Vacsora	Meghívók	Műsor	Szállás	Díszítés	Öregdiák-album
Angéla	Kati	Károly	Anna	Tódor	Zoli
Amália	Gergely	Juli	Jolán	Mátyás	Aliz
Rita	Jakab	Erik	Anita	Róbert	Erik
Simon	Dani	Tamás	Tamás	Jakab	Róbert
Rozália	Rozália	Simon	Tódor	Gergely	Mátyás
Dani		Rita			

Minimum hány időpontra van szükség a bizottsági ülések számára, hogy mindenki ott tudjon lenni minden bizottságának az ülésén?

Mely bizottságok ülésezhetnek egyszerre?

E2 36. Négy környezetszennyező találkozik Budapesten. A nevük András, Róbert, Tamás és Hugó. Egyikük zaj-, a másik víz-, a harmadik talaj- és a negyedik levegőszennyező, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. András, Róbert és a talajszennyező az ország keleti feléből jöttek, a zajszennyező pedig a nyugati feléből. Kedvenc sportjaik a következők: légszennyezőnek a tenisz, Tamásnak a hoki, a zajszennyezőnek a foci és a talajszennyezőnek a hoki. András és a talajszennyező házasságban, a többiek agglegények. A teniszező felesége a zajszennyező nővére, és ez a nővér az öccsével él Sopronban. Tamás egyszer elvált, majd újra elvette ugyanazt a nőt, aki jelenleg is a felesége. Róbert soha nem volt nős. A teniszező keletről jött, de a felesége otthon maradt.

Nevezük meg a levegő-, víz-, talaj- és zajszennyezőt.

K1 37. Egy új bank elhatározta, hogy egy olyan fiókot hoz létre, amelyik csak hétfvégen tart nyitva, tehát csak szombaton és vasárnap. A bankfióknak 8 alkalmazottja van: két fiókvezető (Ubul és Vazul), négy manipulátor (Walter, Xavér, Yvett és Zebulon) és két pénztáros (Szerafin és Tihamér). Az alkalmazottak beosztásánál a következő feltételeknek kell teljesülniük:

- Mindkét nap kell dolgoznia fiókvezetőnek.
- Két fiókvezető nem dolgozhat ugyanazon a napon.
- Legalább két manipulátor dolgozzon minden nap.
- Walter és Xavér ne dolgozzanak ugyanaznap.
- Szerafin és Zebulon csak szombaton dolgozik.
- Senki ne dolgozzon két egymást követő napon, de mindenki dolgozzon valamelyik nap.
- Mindig kell legyen pénztáros.

Melyik állítás lesz mindig igaz és melyik lesz mindig hamis a következők közül?

- Ha U szombaton dolgozik, akkor V vasárnap.
- Ha X szombaton dolgozik, akkor W vasárnap.
- T bármelyik nap dolgozhat.
- Ha W szombaton dolgozik, és Y vasárnap, akkor X is vasárnap dolgozik.
- Ha U vasárnap dolgozik, akkor X szombaton.

K1 38. Megint az előző bankfiókról van szó, és a feltételek ugyanazok. Melyik lehet egy szombati beosztás?

- | | | |
|-----------|------------|-----------|
| a) ZWYST; | b) UVWYZS; | c) VWXST; |
| d) UZST; | e) VWZS. | |

K1 39. Az előző bankfiókban, ha W vasárnap dolgozik, akkor az alábbi állítások közül melyik igaz, illetve melyik hamis biztosan?

- X szombaton dolgozik.
- Y szombaton dolgozik.
- T vasárnap dolgozik.
- Z vasárnap dolgozik.
- U vasárnap dolgozik.

K1 40. Egy új bank elhatározta, hogy egy olyan fiókot hoz létre, amelyik csak hétfvégen tart nyitva, csak szombaton és vasárnap. A bankfióknak 8 alkalmazottja van: két fiókvezető (Ubul és Vazul), négy manipulátor (Walter, Xavér,

Yvett és Zebulon) és két pénztáros (Szerafin és Tihámér). Az alkalmazottak beosztásánál a következő feltételeknek kell teljesülniük:

- Mindkét nap kell dolgoznia fiókvezetőnek.
- Két fiókvezető nem dolgozhat ugyanazon a napon.
- Legalább két manipulátor dolgozzon minden nap.
- Walter és Xavér ne dolgozzanak ugyanaznap.
- Szerafin és Zebulon csak szombaton dolgozik.
- Senki ne dolgozzon két egymást követő napon, de mindenki dolgozzon valamelyik nap.

Melyik állítás mindig igaz és melyik lesz mindig hamis a következő állítások közül?

- T mindig egy napon dolgozik Y -nal.
- S soha nem dolgozik, ha U dolgozik.
- Z soha nem dolgozik, ha X dolgozik.
- Ha W szombaton dolgozik, akkor Y mindig vasárnap.
- Csak két manipulátor dolgozik szombaton.

E1 41. Legyen p , q és r logikai változó. Jelöljük i -vel, illetve h -val az igaz, illetve hamis logikai értéket. Oldjuk meg p , q , r -re a következő egyenleteket:

- $p \wedge q \wedge r = i$;
- $p \wedge q \wedge r = h$;
- $(p \vee q) \wedge r = i$;
- $(p \wedge q) \rightarrow r = h$;
- $(p \wedge q) \rightarrow r = h$;
- $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge q) = h$;
- $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r) = i$;
- $[(p \wedge i) \vee (p \wedge h)] \leftrightarrow (q \wedge r) = h$.

E1 42. Írjunk a $(p \vee q)$ logikai változókat jelölő betűk közé két olyan műveleti jelet, hogy az eredmény értéktáblázata a következő legyen:

p	q	$(p \vee q)$
i	i	i
i	h	i
h	i	h
h	h	h

E1 43. Mutassuk meg, hogy a $p \rightarrow q = \neg(p \wedge \neg q)$ egyenlőség azonosság.

E1 44. Következik-e a $p \wedge q = i$ formulából, hogy $p \vee q = i$?

E1 45. Igaz-e, hogy $(p \rightarrow q) = h$ esetén $(p \wedge \neg q) = h$?

E1 46. Mi mondható $p \rightarrow q = p \leftrightarrow q$ esetén a $q \rightarrow p$ művelet eredményéről?

E1 47. Igazoljuk értéktáblázat segítségével az úgynevezett de Morgan-féle azonosságokat:

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q, \text{ valamint}$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

E1 48. A következő logikai egyenletek közül melyek azonosságok:

- $(p \vee q) = p \wedge q$;
- $p \wedge i = p$;
- $p \vee q \vee i = i$;
- $p \wedge \neg q = \neg p \wedge q$;
- $p \vee q = \neg p \rightarrow q$;
- $\neg p \wedge q = p \leftrightarrow q$;
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = p \leftrightarrow q$;
- $(p \wedge q) = (p \rightarrow q)$.

E1 49. Az alábbi következtetésformák közül melyek helyesek:

- a) $\frac{(p \vee q) \wedge \neg p}{q}$; b) $\frac{p \wedge q}{p \vee q}$; c) $\frac{p}{p \vee q}$;
 d) $\frac{p \wedge \neg q}{\neg p \vee q}$; e) $\frac{(p \leftrightarrow q) \wedge p}{q}$; f) $\frac{(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q}{p \vee q}$;
 g) $\frac{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)}{p \rightarrow q}$; h) $\frac{(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)}{p}$.

E1 50. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{p \rightarrow q}{\neg(p \wedge \neg q)}$ következtetésforma megfordítható, azaz helyes a $\frac{\neg(p \wedge \neg q)}{p \rightarrow q}$ következtetésforma is.

Bizonyítási módszerek

Skatulyaelv

E1 51. Egy dobozban 15 piros, 12 kék, 6 fehér és 5 zöld golyó van. Hányat kell közülük véletlenszerűen visszatevés nélkül kivenni, hogy biztosan legyen közöttük

- a) zöld;
 b) piros vagy kék;
 c) piros és kék;
 d) két különböző színű;
 e) legalább 4 kék;
 f) minden színből legalább három;
 g) valamelyik színből legalább három.

E1 52. Egy dobozban négyféle színű golyóból összesen 40 db van. Tudjuk, hogy bekötött szemmel húzva legalább 32 db-ot kell kivenni ahhoz, hogy a kihúzottak közül mind a négyféle golyóból biztosan legyen legalább egy.

- a) Legalább hány golyó van egy-egy színből?
 b) Legfeljebb hány golyó lehet egy színből?

E1 53. A szobámban, egy fiókban 12 pár barna és 12 pár fekete zoknim van, de nincsenek párosítva. Sajnos benn alszik a húgom, így sötétben kell kivennem annyit, hogy ne nevéssenek ki a háromnapos kiránduláson a barátaim a felemás zoknik miatt. Hányat hozzak ki, hogy biztosan fel tudjak venni mindennap egy tiszta párt?



E1 54. Legalább hányan járunk az osztályba, ha biztosan tudom, hogy van négy diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat?

E1 55. Bizonyítsuk be, hogy három egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 2-vel.

E1 56. Bizonyítsuk be, hogy három négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 3-mal.

E1 57. Bizonyítsuk be, hogy három négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 4-gyel.

E1 58. Bizonyítsuk be, hogy öt 10-nél nagyobb prímszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 10-zel.

E1 59. Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 10-zel.

E2 60. Bizonyítsuk be, hogy öt egészszám között mindig van három, amelyek összege osztható 3-mal.

E2 61. Igaz-e, hogy 7 különböző négyzetszám között mindig van kettő, melyek különbsége 15-tel osztható?

E2 62. Legfeljebb hány különböző prímszámot lehet megadni úgy, hogy közülük bármely három összege is prím legyen?

E1 61. Bizonyítsuk be, hogy a 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak utolsó jegyéből álló sorozat periodikus.

E1 64. Bizonyítsuk be, hogy a 2 pozitív egész kitevőjű hatványainak utolsó két jegyéből álló sorozat periodikus.

E1 65. Bizonyítsuk be, hogy a 17 többszörösei között van olyan, amelyik csak 1-es számjegyekből áll.

E1 66. Hány darab $13+1$ találatos totóoszlopot kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen olyan oszlop, amelyben legalább 5 találatunk van?

E1 67. Adott a síkon 10 egyenes. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő, amelyek 20° -nál kisebb szöget zárnak be egymással.

E1 68. Bizonyítsuk be, hogy öt rácspont között mindig van kettő, amelynek a felezőpontja is rácspont. (Rácspont a koordináta-rendszer olyan pontja, amelynek mindkét koordinátája egész.)

E1 69. Bizonyítsuk be, hogy a térben 9 rácspont között, ha semelyik három nem esik egy egyenesre, mindig van kettő, amelyek által meghatározott szakasz felezőpontja is rácspont.

E2 70. Bizonyítsuk be, hogy a síkon 13 rácspont között, ha semelyik három nem esik egy egyenesre, mindig van három, amelyek által meghatározott háromszög súlypontja is rácspont. (Rácspont a koordináta-rendszer olyan pontja, amelynek mindkét koordinátája egész.)

E1 71. Leírtuk a természetes számokat sorban 1-től 123-ig, azután aláírtuk még egyszer ugyanezeket a számokat, de tetszőleges sorrendben. (Leírtuk egy permutációjukat.) Végül a felső sorban álló számokból kivontuk az alattuk állókat, és a különbségeket összeszoroztuk. Bizonyítsuk be, hogy páros szám lett a végeredmény.

E2 72. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív n egész számhoz található olyan k pozitív egész, hogy nk tízes számrendszerbeli alakja csak 3-asokból és nullákból áll.

E1 73. Egységsugarú körlap alakú céltáblát 7 találat ért. Bizonyítandó, hogy van két találati pont, amelyek távolsága legfeljebb 1.

E1 74. Egy 15 méter oldalú szabályos háromszög alakú virágoskertben elültettünk 10 rózsatövet. Mutassuk meg, hogy biztosan van kettő, amelyek távolsága kisebb, mint 5 méter.

E1 75. Adott egy 2 egység oldalú négyzet. El lehet-e helyezni a négyzet belsejében vagy a határán 9 pontot úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1 legyen? És 10 pontot?

Indirekt bizonyítások

E1 76. Bizonyítsuk be, hogy egy bulin, ahol az ismeretségek kölcsönösek, mindig található két ember, akiknek ugyanannyi ismerőse van.

E2 77. Egy fordulós körmérkőzéses bajnokságban 14 csapat mindegyike pont egyszer játszott mindenkivel. Lehetséges-e, hogy minden csapat ugyanannyi döntetlent ért el, mint ahányszor nyert? (A különböző csapatoknál a döntetlenek száma eltérhet.)

E1 78. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{5}$ szám irracionális.

E1 79. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{35}$ szám irracionális.

E1 80. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{45}$ szám irracionális.

E2 81. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ szám irracionális.

E1 82. Bizonyítsuk be, hogy irracionális szám tizedes tört alakjában legalább egy számjegy végtelen sokszor szerepel.

E2 83. Bizonyítsuk be, hogy irracionális szám tizedes tört alakjában legalább két számjegy végtelen sokszor szerepel.

E2 84. Bizonyítsuk be, hogy négy irracionális szám között mindig van három, amelynek az összege is irracionális.

E2 85. Van-e két olyan természetes szám, amelyek legkisebb közös többszöröse egyenlő az összegükkel?

E2 86. Lehet-e $3 -$ nem feltétlenül különböző – egész kitevős hatványai közül ezernek az összege éppen 3333?

E2 87. Egy körben 15 lámpa helyezkedik el. Mindegyik lámpa vagy ég, vagy nem ég. Egy lépésben megváltoztathatjuk három egymást követő lámpa állapotát: az égőket leoltjuk, amelyik nem égett, azt fölkapcsoljuk. El lehet-e érni, hogy minden lámpa égjen, ha kezdetben csak egy égett?

E1 88. Egy négyszög oldalai fölé, mint átmérők fölé Thalész-köröket írunk. Bizonyítsuk be, hogy így a négyzet minden belső pontja le van fedve valamelyik körrel.

E2 89. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan háromszög a derékszögű koordináta-rendszerben, melynek minden csúcsának mindkét koordinátája egész és minden oldala páratlan egész szám.

E2 90. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik szabályos rácsháromszög. Mit mondhatunk a szabályos rácshatszög létezéséről?

E2 91. Létezik-e szabályos rácsoöttszög?

E2 92. Mutassuk meg, hogy ha $n > 6$, akkor nem létezik szabályos rácsoöttszög.

E2 93. Ki lehet-e tölteni valahány lottószelvényt úgy, hogy minden lehetséges számpár pontosan egyszer szerepeljen?

E1 94. Egy kocka éleire rá lehet-e írni 1-től 12-ig a számokat úgy, hogy az egy csúcsba futó három élen lévő szám összege minden csúcsnál ugyanannyi legyen?

E2 95. Bizonyítsuk be, hogy ha az $1111\dots 1$ azaz n darab 1-esből álló szám prím, akkor n is prím. Igaz-e az állítás megfordítása?

Teljes indukció

E1 96. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely pozitív n természetes számra igaz, hogy $a^{n-1} = 1$, ahol a tetszőleges pozitív szám.

Bizonyítás teljes indukcióval. Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$, igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy a tétel igaz $n \leq k$ -ra, akkor állítjuk, hogy $n = k + 1$ -re is igaz,

mivel $a^{(k+1)-1} = \frac{a^{(k-1)} \cdot a^{(k-1)}}{a^{(k-2)}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$, az indukciós feltétel szerint.

E1 97. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$.

Bizonyítás teljes indukcióval. Ha $n=1$, akkor $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}$, ami igaz.

Tegyük fel, hogy a tétel igaz n -re, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{(n+1)}. \end{aligned}$$

És ezt kellett bizonyítani.

E1 98. Adott a síkon néhány egyenes. Ezek a síkot tartományokra bontják. Mutassuk meg, hogy ezek a részek kiszínezhetők két színnel úgy, hogy a közös határszakasszal, határegyenessel vagy -félegyenessel rendelkező részek különböző színűek legyenek.

E1 99. Mutassuk meg, hogy minden négyzet feldarabolható n darab négyzetre, ha $n > 5$.

E1 100. Mutassuk meg, hogy minden szabályos háromszög feldarabolható n darab szabályos háromszögre, ha $n > 5$.

E2 101. Mutassuk meg, hogy minden háromszög feldarabolható n darab hozzá hasonló háromszögre, ha $n > 5$.

Igazoljuk a következő oszthatóságokat minden pozitív természetes számra:

E1 102. $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$.

E1 103. $9 \mid 7^n + 3n - 1$.

E1 104. $17 \mid 7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$.

E1 105. $4 \mid 3 \cdot 17^{2n} + 25^n$.

E1 106. $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

E1 107. $23 \mid 2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$.

E1 108. $19 \mid 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$.

Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket minden n pozitív természetes számra:

E1 109. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

E1 110. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

E1 111. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

E1 112. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

E1 113. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket minden n pozitív természetes számra:

E1 114. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

E1 115. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$.

E1 116. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

E1 117. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket minden n pozitív természetes számra:

E1 118. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$

E1 119. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

E1 120. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket minden n pozitív természetes számra:

E2 121. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1.$

E2 122. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}, \text{ ha } n \geq 2.$

E2 123. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \text{ ha } n \geq 2.$

E2 124. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \text{ ha } n \geq 2.$

E2 125. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \text{ ha } n > 1 \text{ természetes szám.}$

E2 126. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}, \text{ ha } n > 1 \text{ természetes szám.}$

E2 127. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n egyenes?

(Állítás: $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre.)

E2 128. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n kör?

(Állítás: $n^2 - n + 2$ részre.)

Igazoljuk a következő trigonometrikus azonosságokat:

E2 129. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}, \text{ ahol}$

$\sin x \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}.$

E2 130. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \text{ ahol}$

$\sin \frac{x}{2} \neq 0, n \in \mathbb{N}.$

$$\text{E2} \quad 131. \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}, \quad \text{ahol}$$

$$\sin \frac{x}{2} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

E2 132. Adott n darab különböző méretű (középen lyukas) korongból egy rúdon, amelyből egy tornyot felépítettünk úgy, hogy a korongok átmérője felfelé csökken. Az a feladat, hogy egyenként tegyük át egy másik rúdra az összes korongot úgy, hogy ugyanilyen sorrendben legyenek. Segítségül egy harmadik rudat használhatunk. Egy lépésben egyetlen korongot szabad áthelyezni egyik rúdról egy másikra, és közben is tilos nagyobb korongot tenni a kisebbre. Adjunk képletet a szükséges lépések minimális számára n függvényében.

Invariáns tulajdonságok

E1 133. Egy papírlapot 10 részre vágunk, majd az így kapott részek közül néhányat újra 10 részre vágunk szét és így tovább. Kaphatunk-e ezt az eljárást néhányszor megismételve 2000 papírdarabot?

E2 134. Egy papírlapot 6 részre vágunk, majd az így kapott részek közül az egyiket 11 részre vágjuk szét, majd a kapott részek közül az egyiket 6 részre és így tovább, arra sem vigyázva, hogy a 6, illetve 11 részre osztást változtatva végezzük. Kaphatunk-e így 2000 papírdarabot?

E1 135. Egy táblára felírtuk az egész számokat 1-től 10-ig. Egy alkalommal két számot törölünk le, és helyette a különbségüket írjuk fel. Ezt kilencszer elvégezve maradhat-e nulla a táblán?

E1 136. Egy háromszög csúcsaiba gyufaszálakat helyezünk. Egy alkalommal bármelyik csúcsból elvehetünk gyufaszálakat, de a másik két csúcs mindegyikébe kétszer annyi gyufaszál kell tennünk. Ha kezdetben az egyik csúcsban egy, a másik kettőben nulla gyufaszál volt, akkor elérhető-e, hogy egy idő után mindegyik csúcsban ugyanannyi gyufa legyen?

E2 137. Egy tisztáson 14 fa áll körben, és mindegyiken egy-egy mókusz ül. Egy perc elteltével valamelyik két mókusz átugrik a szomszédos fára

a) az egyik az óramutató járásával megegyező, a másik azzal ellentétes,

b) mindkettő tetszőleges

irányban. Össze tudnak-e gyűlni egy fára valamennyien?

E2 138. Egy 10×10 -es tábla 9 darab 1×1 -es mezője gyomos. Egy újabb parcella akkor gyomosodik el, ha legalább két szomszédos mező gyomos. Lehetséges-e, hogy előbb-utóbb az egész tábla gyomos lesz?

És ha 10 parcella gyomos?

E2 139. Egy táblára felírtuk az $x^2 - 10x + 20$ polinomot. Egy alkalommal a polinom egyik együtthatóját szabad 1-gyel növelni vagy csökkenteni. Egy idő múlva az $x^2 - 20x + 10$ polinom áll a táblán. Bizonyítsuk be, hogy volt a táblán közben olyan polinom, amelyiknek volt egész gyöke.

Szita formula

E1 140. Hány olyan kétjegyű szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal?

E1 141. Hány olyan legfeljebb háromjegyű szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel?

E1 142. Hány olyan legfeljebb háromjegyű szám van, amely az 5, 6, 7 számok közül pontosan kettővel osztható?

E2 143. Hány olyan legfeljebb 8 jegyű szám van, amely csak az 5; 6; 7 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

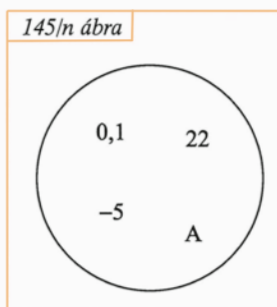
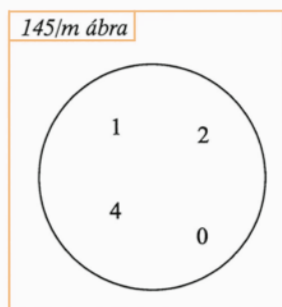
E1 144. Hány olyan 5-ös számrendszerbeli legfeljebb 8 jegyű szám van, amely jegyei között az 1; 2; 3; 4 számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul?

II. Halmazelmélet

Halmazok megadása

K1 Gy 145. A következő definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy halmazt? (Az $a) - l)$ esetben körülírást alkalmaztunk, az $m) - o)$ esetben diagramokkal szemléltettük a halmazokat.)

- a) Magas emberek;
- b) sötét hajú lányok;
- c) egy adott osztály tanulói;
- d) budapesti lakosok;
- e) Budapest hídjai;
- f) az ókori világ hét építészeti világcsodája;
- g) magyar származású Nobel-díjas tudósok;
- h) alapvető irodalmi műnemek;
- i) Petőfi Sándor költeményei;
- j) olimpiai versenyszámok;
- k) a három legnagyobb prímszám;
- l) néhány természetes szám;
- m);
- n);
- o).



K1 146. Adottak az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ halmazok.

- a) Adjuk meg a halmazokat képlettel.
- b) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal.

K1 147. Adjuk meg az alábbi halmazokat felsorolással.

- $A = \{\text{egyjegyű prímszámok halmaza}\};$
- $B = \{\text{legfeljebb kétjegyű négyzetszámok}\};$
- $C = \{\text{egy adott osztályban tanító tanárok}\}.$

K1 148. Megmérték egy nyelvi csoportba járó diákok testmagasságát, s a következő eredményt kapták (centiméterben): 158, 159, 161, 161, 162, 165, 170, 171, 173, 174, 174, 174, 176, 177, 177, 181. Hány elemű halmazt alkotnak ezek az értékek? Hány elemű halmazt alkotnak a diákok?

K1 Gy 149. A következő táblázat egy középiskola természettudományos tagozatán kiírt verseny írásbeli fordulójának eredményeiből tartalmaz egy részletet. Az egyes sorokban a 15 tanuló biológiából, fizikából és kémiából kapott pontszámai találhatók, az elérhető pontszám mindegyik tantárgyból 30 pont volt.

sorszám	név	B	F	K	sorszám	név	B	F	K
1.	Na. Já.	20	15	14	9.	Po. No.	30	20	29
2.	Ko. Zo.	23	30	29	10.	Tó. No.	14	17	11
3.	Sza. Ti.	24	24	24	11.	Fa. Gi.	27	28	20
4.	Sze. Já.	29	27	25	12.	Fa. Ná.	23	17	20
5.	Ki. Ka.	17	27	18	13.	Ke. Zsi.	24	25	18
6.	Ko. Év.	26	22	19	14.	Va. Zsa.	18	21	22
7.	Ke. Me.	28	30	22	15.	Dö. Ki.	13	17	19
8.	Ma. Pé.	21	18	16					

A szóbeli fordulóra azokat a tanulókat hívják be biológiából, akik legalább 25 pontot értek el; fizikából azokat, akik legalább 26 pontot; kémiából pedig azokat, akik legalább 21 pontot.

Jelöljük B -vel a biológiából, F -vel a fizikából és K -val a kémiából ebből a csoportból szóbeli fordulóra behívott tanulók halmazát, s szemléltessük a B , F , K halmazokat Venn-diagrammal!

K1 150. Soroljuk fel az alábbi halmazok elemeit.

a) $A = \{\text{az Európai Unió tagállamai 2004. júniusában}\};$

b) $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b < 40, b \text{ prím}\};$

c) $C = \{2^n \text{ lehetséges végződése, ahol } n \in \mathbb{N}\};$

d) $D = \{\text{az } x^3 - 9x = 0 \text{ egyenlet gyökei}\};$

e) $E = \{3\text{-ra végződő páros számok}\};$

f) $F = \{3k + 2 \mid 3 \leq k \leq 6, k \in \mathbb{N}\}$

g) $G = \{14\text{-re végződő, 4-gyel osztható egész számok}\}.$

K1 K2 151. Eleme-e a racionális számok halmazának a

a) 2; b) $\sqrt{2}$; c) $-\sqrt{6}$;

d) 2,123; e) $-1,23\overline{456}$; f) $\frac{3}{1}$;

g) $\frac{3,4}{1,3}$; h) $2,333\dots (= 2,\dot{3})$;

i) 2,101 001 000 100 001... (két 1-es között mindig eggyel több nulla szerepel);

j) π ; k) $\sin 60^\circ$; l) $\log_2 16$?

K1 152. Tekintsük a következő halmazokat: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, A\}$, $C = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$. (A B halmaz egyik eleme az A halmaz.) Melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) $1 \in A$; b) $1 \in B$; c) $1 \notin C$; d) $A \in B$; e) $B \in A$; f) $A \notin B$; g) $A \notin C$.

K1 K2 153. Jelöljük P -vel a prímszámok halmazát, s helyettesítsük a következő feladatokban az A halmaz helyére rendre a $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$ és P halmazokat. Melyik teljesül az alábbi állítások közül?

a) Ha $a \in A$ és $b \in A$, akkor $a + b \in A$.

b) Van olyan $a \in A$ és $b \in A$, amelyre $a + b \in A$.

c) Ha $a \in A$ és $b \in A$, akkor $a \cdot b \in A$.

d) Van olyan $a \in A$ és $b \in A$, amelyre $a \cdot b \in A$.

e) Ha $a \in A$ és $b \in A$, akkor $a - b \in A$.

f) Van olyan $a \in A$ és $b \in A$, amelyre $a - b \in A$.

K1 154. Az alábbi halmazok közül melyek egyenlők?

a) $A = \{\text{páros prímszámok és ellentettjeik}\}$;

b) $B = \{\text{páros prímszámok}\}$;

c) $C = \{x^2 - 2x = 0 \text{ egyenlet megoldásai}\}$;

d) $D = \{x^2 - 2x = 0 \text{ egyenlet pozitív megoldásai}\}$;

e) $E = \{\text{legkisebb nemnegatív páros szám}\}$;

f) $F = \{\text{legkisebb pozitív páros szám}\}$;

g) $G = \{x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ egyenlet gyökeinek összege}\}$;

h) $H = \{x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ egyenlet gyökeinek összege}\}$.

K1 155. Az alábbi halmazok közül melyek egyenlők?

a) $A = \{\text{kétjegyű páros prímszámok}\}$;

b) $B = \{\}$;

c) $C = \{\text{a legnagyobb prímszám}\}$;

d) $D = \{x^2 + 2x = 0 \text{ egyenlet megoldásai}\}$;

e) $E = \{x^2 + 2x = 0 \text{ egyenlet pozitív megoldásai}\}$;

f) $F = \emptyset$;

g) $G = \{\emptyset\}$;

h) $H = \{0\}$;

i) $I = \{\text{a Földön élő marslakók}\}$;

j) $J = \{\text{a magyar egyetemeken tanuló hottentotta diákok}\}$;

k) $K = \{4\text{-gyel osztva 2 maradékot adó páratlan számok}\}$.

K1 156. Hány eleműek az alábbi halmazok?

a) $A = \{a \mid a = k^2, a < 1000, k \in \mathbb{N}\}$;

b) $B = \{\text{a 40-nél kisebb prímszámok}\}$;

c) $C = \{2^n \text{ lehetséges végződésai, ahol } n \in \mathbb{N}\}$;

d) $D = \{\text{az } x^3 - 9x = 0 \text{ egyenlet gyökei}\}$;

e) $E = \{7\text{-re végződő páros számok}\}$;

f) $F = \{14\text{-re végződő, 4-gyel osztható egész számok}\}$;

g) $G = \{\text{prímszámok}\}$;

h) $H = \{\text{a sík pontjai}\}$;

i) $I = \{\text{a sík adott irányú egyenesei}\}$;

j) $J = \{\text{a sík adott irányú, origón átmenő egyenesei}\}$;

k) $K = \{k \in \mathbb{N}; k \mid 30\}$;

l) $L = \{60 \text{ osztói}\}$.

11

$a) 1 \in A;$ $b) 1 \subseteq A;$ $c) \{1\} \subseteq A;$
 $d) 1 \in B;$ $e) 1 \subseteq B;$ $f) \{1\} \subseteq B;$
 $g) 1 \in 1;$ $h) 1 \subseteq 1;$ $i) 1 \in \{1\};$
 $j) 1 \subseteq \{1\};$ $k) \{1\} \subseteq \{1\};$ $l) \{1\} \subseteq \{1, 2\};$
 $m) \{3, 4\} \subseteq A;$ $n) \{3, 4\} \subseteq B;$ $o) \{3, 4\} \subseteq \{3, 4\};$
 $p) \{3, 4\} \in \{3, 4\};$ $q) A \in B;$ $r) A \subseteq B;$
 $s) \{A\} \subseteq B;$ $t) \emptyset \in A;$ $u) \emptyset \subseteq A;$

- K2 165.** a) Igaz-e, hogy ha $a \in A$, akkor $\{a\} \subseteq A$?
 b) Ha $\{a\} \in A$, fennáll-e az $a \in A$ reláció?
 c) Mit állíthatunk az A és B halmazokról, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$?

K2 166. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- a) Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.
 b) Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.
 c) Ha $A \subseteq B$, akkor $|A| < |B|$.
 d) Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor $|A| < |B|$.

K1 K2 Gy 167. Egy játékdobozban műanyag figurák vannak (logikai készlet). A figurák síkbeli alakzatok, jellemzőik a következők:

1. *Alak:* lehetnek kör, háromszög vagy négyzet alakúak.
2. *Szín:* színük lehet fehér, fekete vagy szürke.
3. *Méret:* vannak közöttük kicsik és nagyok.
4. *Kitöltés:* mindegyik figura lehet lyukas vagy nem lyukas (vagyis teli).

Az ábrán pl. egy nagy, teli, szürke négyzet, egy kis, lyukas, fekete háromszög és egy nagy, lyukas, fehér kör látható.

a) Összesen hány darabból áll a készlet, ha minden lehetséges figurából pontosan egy darab van?

Jelöljük a fehér alakzatok halmazát F -fel, a kör alakúak halmazát K -val, a teli alakzatok halmazát T -vel. Hány eleműek az alábbi halmazok?

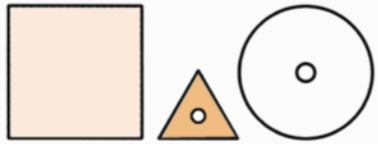
- b) F ;
 c) $F \cap K$;
 d) $F \cup K$;
 e) {szürke sokszögek};
 f) $\bar{F} \cap T$ ($\bar{F}$ a nem fehér alakzatok halmazát jelenti);
 g) {fehér vagy kör vagy lyukas alakzatok};
 h) {fehér vagy kör és lyukas alakzatok}.

K2 168. $AH = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ alaphalmaz A, B, C, D részhalmazait az alábbi táblázattal adtuk meg:

H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
B	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
C	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
D	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Az első sorban a H halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes halmazoknál 1-est írtunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Pl. $4 \in A$, de $5 \notin A$. Válaszoljunk a táblázat segítségével az alábbi kérdésekre.

167. ábra



- a) Hány elemű az A halmaz?
 b) Van-e a halmazok között olyan pár, amelyek közül egyik halmaz a másiknak részhalmaza?
 c) Hány elemű $\bar{A}$? ($\bar{A}$ -be azok a H -beli elemek tartoznak, amelyek nincsenek benne A -ban.)
 d) Melyik halmaz elemszáma a legnagyobb?

K2 169. Definíáljuk két halmaz egyenlőségét a részhalmazfogalom segítségével, s az alkalmazásra mutassunk egy konkrét példát. (Pl. mutassuk meg Thalész tétele és a tétel megfordítása bizonyításának elvét.)

K2 170. Az A halmaz elemszáma 5.

- a) Hány k elemű részhalmaza van A -nak ($0 \leq k \leq 5$)?
 b) Hány $5 - k$ elemű részhalmaza van A -nak ($0 \leq k \leq 5$)?
 c) Hány páros elemszámú részhalmaza van A -nak?
 d) Hány páratlan elemszámú részhalmaza van A -nak?
 e) Hány részhalmaza van A -nak összesen?

Műveletek halmazokkal

K1 171. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$; b) $A \cup B = 1, 2, 3$; c) $A \cap B = 2$;
 d) $A \cap B = \{2\}$; e) $A \setminus B = \emptyset$; f) $B \setminus A = 2$;
 g) $B \setminus A = \{2\}$; h) $B \setminus A = \{3\}$; i) $A \setminus B = \{1, 3\}$;
 j) $B \setminus A = \{3, \emptyset\}$; k) $B \setminus A = \{3\} \cup \emptyset$.

K1 172. Adott két halmaz, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{b \in \mathbf{Z} \mid 4 \leq b \leq 8\}$. Adjuk meg az alábbi halmazokat:

- a) $A \cup B$; b) $B \cup A$; c) $A \cap B$; d) $B \cap A$; e) $A \setminus B$; f) $B \setminus A$.

K1 173. Mivel egyenlő az alábbi halmazok komplementere? (Alaphalmaznak tekintjük a valós számok $\mathbf{R}$ halmazát.)

- a) $\mathbf{Q}$;
 b) $\mathbf{R}^+$;
 c) $\mathbf{Z}$;
 d) $\{x; -2 < x \leq 3\}$;
 e) $\{\text{végtelen, nem szakaszos tizedestörtek}\}$;
 f) $\mathbf{R}$;
 g) $\emptyset$.

K1 K2 174. Mivel egyenlők az alábbi halmazok?

- a) $\bar{\mathbf{N}}$ a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon;
 b) pozitív páratlan számok halmazának komplementere a $\mathbf{Z}^+$ alaphalmazon;
 c) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ komplementere a természetes számok halmazán;
 d) 6-tal osztható számok halmazának komplementere a 3-mal osztható számok halmazán;
 e) 3-mal osztható számok halmazának komplementere a 6-tal osztható számok halmazán;

- f) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ komplementere a $\mathbf{Z}^+$ alaphalmazon;
 g) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ komplementere a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon;
 h) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ komplementere az $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ alaphalmazon;
 i) $\overline{A}$ a B alaphalmazon, ha $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$;
 j) $\overline{\overline{A}}$ a B alaphalmazon, ha $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

K1 K2 175. Hány eleműek az alábbi halmazok komplementerei? (Alaphalmaz a legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok halmaza.)

- a) $A = \{\text{legfeljebb kétjegyű pozitív páratlan számok}\}$;
 b) $B = \{\text{legfeljebb kétjegyű, 5-tel osztható pozitív számok}\}$;
 c) $C = \{3k + 1; k \in \mathbf{N}, k \leq 32\}$;
 d) $D = \{\text{kétjegyű pozitív egész számok}\}$;
 e) $E = \{20, 21, 22, \dots, 29\}$;
 f) $\overline{F}$, ahol $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
 g) $\overline{\overline{G}}$, ahol $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 h) $\overline{\overline{H}}$, ahol $H = \{\text{legfeljebb kétjegyű prímszámok}\}$;
 i) $I = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

K2 Gy 176. A következő táblázat egy középiskola természettudományos tagozatán kiírt verseny írásbeli fordulójának eredményeiből tartalmaz egy részletet. Az egyes sorokban a 15 tanuló biológiából, fizikából és kémiából kapott pontszámait találhatók, az elérhető pontszám mindegyik tantárgyból 30 pont volt.

sorszám	név	B	F	K	sorszám	név	B	F	K
1.	Ho. Gá.	22	26	19	9.	Pe. Ib.	28	28	30
2.	Ki. Pé.	24	25	19	10.	Tó. Ve.	20	20	20
3.	Sza. Lá.	13	19	14	11.	Fa. Ki.	26	27	21
4.	Na. Kl.	19	25	15	12.	Fa. Be.	24	21	22
5.	Ko. Ba.	20	19	18	13.	So. Zsi.	28	27	30
6.	Va. Év.	16	29	17	14.	Va. Zso.	29	30	30
7.	Né. Me.	27	30	28	15.	Ke. Gyö.	20	22	20
8.	Ma. Já.	18	17	15					

A szóbeli fordulóra azokat a tanulókat hívják be biológiából, akik legalább 19 pontot értek el; fizikából azokat, akik legalább 20 pontot; kémiából pedig azokat, akik legalább 22 pontot.

Jelöljük B -vel a biológiából, F -fel a fizikából és K -val a kémiából szóbeli fordulóra ebből a csoportból behívott tanulók halmazát.

- a) Hogyan értelmezhetjük a $\overline{B}$, $\overline{F}$, $\overline{K}$ halmazokat?
 b) Hány eleműek a B , F , K , $\overline{B}$, $\overline{F}$, $\overline{K}$ halmazok?

K1 177. Tekintsük a $H = \{\text{legfeljebb kétjegyű pozitív egész számok}\}$ alaphalmazt, s legyenek az A halmaz elemei a legfeljebb kétjegyű, páros pozitív egész számok, a B halmaz elemei pedig a legfeljebb kétjegyű, hárommal osztható

pozitív egész számok. Adjuk meg – tulajdonsággal vagy körülírással – az alábbi halmazokat:

- a) $A \cup B$; b) $B \cup A$; c) $A \cap B$; d) $B \cap A$;
e) $A \setminus B$; f) $B \setminus A$; g) $\overline{A \cup B}$; h) $\overline{A \cap B}$.

Hány eleműek az egyes halmazok?

K1 178. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- a) Ha $A \subseteq B$, akkor $\overline{A} \not\subseteq \overline{B}$.
b) Ha az alaphalmaz H , akkor $\overline{A} \subseteq H$.
c) Ha az alaphalmaz H és $A \subseteq H$, akkor $\overline{A} \subseteq H$.
d) Ha az alaphalmaz H és $A \subseteq B \subseteq H$, akkor $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.
e) Ha az alaphalmaz H , akkor $\overline{A} = H \setminus A$.

K2 Gy 179. A következő táblázat egy iskolai matematikaverseny első három fordulójának eredményeiből tartalmaz egy részletet. Az elérhető pontszám mindig fordulóban 50 pont volt.

sorszám	név	I.	II.	III.	sorszám	név	I.	II.	III.
1.	Ko. LÁ.	22	49	21	9.	Po. Ni.	32	39	38
2.	Ko. Má.	30	31	27	10.	Ke. Zso.	31	33	48
3.	Tó. Já.	15	41	42	11.	Va. Zsu.	32	33	20
4.	Cso. Já.	40	36	33	12.	Fa. Jó.	50	49	39
5.	Ba. Ti.	50	41	42	13.	Sá. Sá.	44	45	44
6.	Fé. Dö.	24	23	50	14.	Ma. Me.	31	26	50
7.	Ke. Me.	42	40	31	15.	Dö. Ki.	32	33	37
8.	Ki. LÁ.	48	47	41					

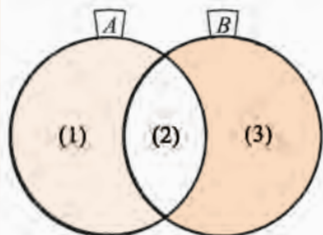
Jelöljük A -val, B -vel és C -vel azoknak a tanulóknak a halmazát, akik az első, második, illetve harmadik fordulóban legalább 35 pontot értek el, s adjuk meg – tulajdonsággal vagy körülírással – az alábbi halmazokat:

- a) $A \cup B$; b) $B \cap C$; c) $A \setminus C$; d) $B \setminus C$.

Hány eleműek az alábbi halmazok?

- e) $A \cup C$; f) $C \cap B$; g) $B \setminus A$; h) $A \setminus C$.

180. ábra



K1 180. Adott két halmaz, A és B . Venn-diagramjukon (1), (2), illetve (3)-mal jelöltük az egyes tartományokat.

Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az alábbi halmazok:

- a) $A \cup B$; b) $B \cup A$; c) $A \cap B$;
d) $B \cap A$; e) $A \setminus B$; f) $B \setminus A$.

K2 181. Adott három halmaz, A , B és C . $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,

$B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2k, 4 \leq k \leq 9, k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{20\text{-nál kisebb, } 3\text{-mal osztható pozitív egész számok halmaza}\}$. Adjuk meg az alábbi halmazokat:

- a) $(A \cup B) \cup C$; b) $A \cup (B \cup C)$;
 c) $(A \cap B) \cap C$; d) $A \cap (B \cap C)$;
 e) $(A \setminus B) \setminus C$; f) $A \setminus (B \setminus C)$.

K2 182. Adott három halmaz, A , B és C . Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (7)-tel jelöltük az egyes tartományokat.

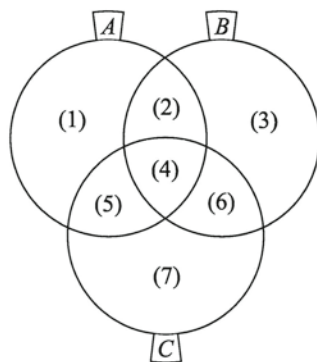
Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az alábbi halmazok:

- a) $(A \cup B) \cup C$; b) $A \cup (B \cup C)$;
 c) $(A \cap B) \cap C$; d) $A \cap (B \cap C)$;
 e) $(A \setminus B) \setminus C$; f) $A \setminus (B \setminus C)$.

K1 183. Értékeljük ki az $A \cup B \cup C \cup D$ kifejezést (A, B, C, D halmazok)! Milyen sorrendben lehet elvégezni az előírt műveleteket?

K1 184. Értékeljük ki az $A \cap B \cap C \cap D$ kifejezést (A, B, C, D halmazok)! Milyen sorrendben lehet elvégezni az előírt műveleteket?

182. ábra



K2 185. Adott három halmaz, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{c \in \mathbb{N} \mid 4 \leq c \leq 8\}$.

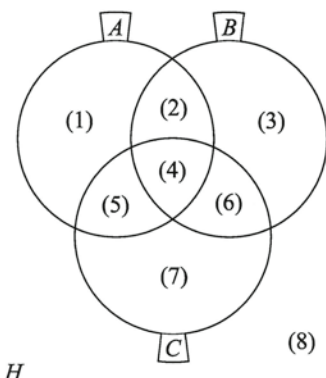
- a) Szemléltessük a három halmazt Venn-diagrammal!
 b) Mivel egyenlő $(A \cup B) \setminus C$, illetve $A \cup (B \setminus C)$?
 c) Mivel egyenlő $(A \cap B) \setminus C$, illetve $A \cap (B \setminus C)$?

K1 K2 186. Adott a H alaphalmaz, valamint három halmaz, A, B és C . Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (8)-cal jelöltük az egyes tartományokat.

Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az alábbi halmazok:

- a) $(A \cup B) \cap C$; b) $A \cup (B \cap C)$;
 c) $(A \cap B) \cup C$; d) $A \cap (B \cup C)$;
 e) $(A \cup B) \setminus C$; f) $A \cup (B \setminus C)$;
 g) $(B \cap C) \setminus A$; h) $B \cap (C \setminus A)$;
 i) $(B \setminus C) \cup A$; j) $B \setminus (C \cup A)$;
 k) $(B \setminus C) \cap A$; l) $B \setminus (C \cap A)$;
 m) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

186. ábra



K1 187 Legyen a természetes számok $\mathbb{N}$ alaphalmazának két részhalmaza

$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 9\}$ és $B = \{x \mid x \text{ legfeljebb kétjegyű páratlan szám}\}$.

Mivel egyenlő $\overline{A}$, illetve $\overline{B}$?

K1 188. Legyen a H alaphalmaz $H = \{x \in \mathbb{Z}; |x| < 10\}$, s ennek két részhalmaza $A = \{x; -3 < x < 6\}$, valamint $B = \{x; -5 \leq x \leq 8\}$.

a) Mivel egyenlő $\overline{A}$? b) Mivel egyenlő $\overline{B}$?

c) Mivel egyenlő $\overline{\overline{A}}$? d) Mivel egyenlő $\overline{A}$, ha B -t tekintjük alaphalmaznak?

K1 189. Jelölje – hagyományos módon – a természetes számok, egész számok, racionális számok, irracionális számok, valós számok halmazát rendre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$; s ugyanígy a pozitív egész számok halmazát $\mathbb{Z}^+$ ($= \mathbb{N}^+$), a negatív racionális számok halmazát $\mathbb{Q}^-$ stb. Mivel egyenlők az alábbi halmazok?

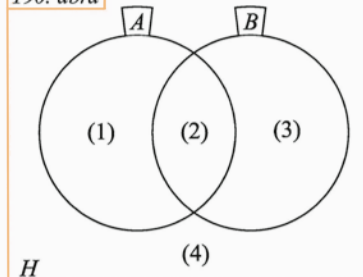
a) $\overline{\mathbb{Z}^+}$ az $\mathbb{N}$ alaphalmazon; b) $\overline{\mathbb{Z}^+}$ a $\mathbb{Z}$ alaphalmazon;

c) $\overline{\mathbb{N}}$ a $\mathbb{Z}$ alaphalmazon; d) $\overline{\mathbb{Z}}$ a $\mathbb{Q}$ alaphalmazon;

e) $\overline{\mathbb{Q}}$ az $\mathbb{R}$ alaphalmazon; f) $\overline{\mathbb{Q}}$ a $\mathbb{Q}^*$ alaphalmazon;

g) $\overline{\mathbb{N}}$ a $\mathbb{Q}^*$ alaphalmazon.

190. ábra



K1 K2 190. Adott a H alaphalmaz, valamint két halmaz, A és B . Venn-diagramjukon (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat. (Pl. (1) jelenti az $A \setminus B$ részhalmazt.)

Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az alábbi halmazok:

a) $\overline{A}$; b) $\overline{B}$; c) $\overline{A \cup B}$;

d) $\overline{A \cap B}$; e) $\overline{A \setminus B}$; f) $\overline{B \setminus A}$.

K2 191. Legyen a $H = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ alaphalmaz három részhalmaza

$A = \{20\text{-nál nem nagyobb pozitív páros számok}\}$, $B = \{5k \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 4\}$, $C = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazokat:

a) $\overline{A \cup B}$;

b) $\overline{B \cap C}$;

c) $\overline{C \setminus A}$;

d) $\overline{A \cup B \cup C}$;

e) $\overline{(B \setminus C) \setminus A}$;

f) $\overline{A \cup (B \cap C)}$;

g) $\overline{(A \cap B) \cup C}$.

K2 Gy 192. A következő táblázat egy iskolai matematikaverseny első három fordulójának eredményeiből tartalmaz egy részletet. Az elérhető pontszám mindegyik fordulóban 50 pont volt.

sorszám	név	I.	II.	III.	sorszám	név	I.	II.	III.
1.	Ko. Lás.	22	49	21	9.	Po. Ni.	32	39	38
2.	Ko. Mát.	30	31	27	10.	Ke. Zso.	31	33	48
3.	Tó. Ját.	15	41	42	11.	Va. Zsu.	32	33	20
4.	Cso. Ját.	40	36	33	12.	Fa. Jó.	50	49	39
5.	Ba. Tí.	50	41	42	13.	Sá. Sá.	44	45	44
6.	Fé. Dö.	24	23	50	14.	Ma. Me.	31	26	50
7.	Ke. Me.	42	40	31	15.	Dö. Ki.	32	33	37
8.	Ki. Lás.	48	47	41					

Jelöljük A -val, B -vel és C -vel azoknak a tanulóknak a halmazát, akik az első, második, illetve harmadik fordulón legalább 35 pontot értek el, s adjuk meg – tulajdonsággal vagy körülírással – az alábbi halmazokat:

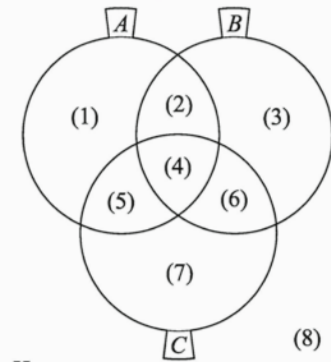
- a) $(A \cup B) \cup C$; b) $(A \cap B) \cap C$;
 c) $(A \cap B) \setminus C$; d) $(A \setminus B) \setminus C$;
 e) $A \setminus (B \cup C)$; f) $\overline{A \cup C}$;
 g) $\overline{A \cup B \cup C}$; h) $\overline{A \cap B \cap C}$;
 i) $\overline{A} \cap (B \cup C)$; j) $\overline{B \cup C} \cap A$.

K2 193. Adott a H alaphalmaz, valamint három halmaz, A , B és C . Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (8)-cal jelöltük az egyes tartományokat.

Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az alábbi halmazok:

- a) $\overline{A}$; b) $\overline{A \cup B}$;
 c) $\overline{B \cap C}$; d) $\overline{C \setminus A}$;
 e) $\overline{A \cup B \cup C}$; f) $\overline{A \cap B \cap C}$;
 g) $\overline{(B \setminus C) \setminus A}$; h) $\overline{B \setminus (C \setminus A)}$;
 i) $\overline{(A \cup B) \cap C}$; j) $\overline{A \cup (B \cap C)}$;
 k) $\overline{(A \cap B) \cup C}$; l) $\overline{A \cap (B \cup C)}$.

193–194. ábra



K2 194. Adott a H alaphalmaz, valamint három halmaz, A , B és C . Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (8)-cal jelöltük az egyes tartományokat.

Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az alábbi halmazok:

- a) $\overline{(A \cup B) \setminus C}$; b) $\overline{A \cup (B \setminus C)}$;
 c) $\overline{(B \cap C) \setminus A}$; d) $\overline{B \cap (C \setminus A)}$;
 e) $\overline{(B \setminus C) \cup A}$; f) $\overline{B \setminus (C \cup A)}$;
 g) $\overline{(B \setminus C) \cap A}$; h) $\overline{B \setminus (C \cap A)}$.

K2 195. A $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ alaphalmaz A , B , C , D részhalmazait a következő táblázattal adtuk meg:

H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
B	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
C	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
D	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Az első sorban a H halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes halmazoknál 1-est írtunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Pl. $4 \in A$, de $5 \notin A$. Válaszoljunk a táblázat segítségével az alábbi kérdésekre. Mivel egyenlő

- $a) (A \cup B) \cup C;$ $b) A \cap (B \cap C);$ $c) (A \cap B) \cup C;$
 $d) A \cup (C \setminus D);$ $e) A \cup (C \setminus B);$ $f) (A \cup C) \setminus (B \cup D);$
 $g) \overline{A \cup B};$ $h) \overline{B \cap (C \setminus D)};$ $i) \overline{A \cup B \cup C};$
 $j) \overline{(B \setminus C) \setminus A};$ $k) \overline{A \cap C}?$

K1 196. Legyen $A = [3; 6[, B =]5; 7]$. Határozzuk meg az alábbi halmazokat: $a) A \cup B;$ $b) A \cap B;$ $c) A \setminus B;$ $d) B \setminus A.$

K1 K2 197. Legyen a H alaphalmaz $H = [-10; 10]$, továbbá $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \leq 5\}$, $D = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < 5\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazokat:

- $a) C \cup D;$ $b) C \cap D;$ $c) C \setminus D;$ $d) D \setminus C;$ $e) \overline{C};$
 $f) \overline{D};$ $g) \overline{C \cup D};$ $h) \overline{C \cap D};$ $i) \overline{C \setminus D};$ $j) \overline{D \setminus C}.$

K2 198. Legyen a H alaphalmaz $H = [-5; 15]$, továbbá $A = [-2; 7]$, $B =]1; 10]$, $C =]6; 11[$. Határozzuk meg az alábbi halmazokat:

- $a) \overline{A};$ $b) \overline{A \cup B};$ $c) \overline{B \cap C};$
 $d) \overline{C \setminus A};$ $e) \overline{A \cup B \cup C};$ $f) \overline{A \cap B \cap C};$
 $g) \overline{(B \setminus C) \setminus A};$ $h) \overline{B \setminus (C \setminus A)};$ $i) \overline{(A \cup B) \cap C};$
 $j) \overline{A \cup (B \cap C)};$ $k) \overline{(A \cap B) \cup C};$ $l) \overline{A \cap (B \cup C)}.$

K2 199. Adott a négyszögek H alaphalmaza, a trapézok TR és a deltoidok D halmaza (pl. három téglalap alakú halmazzal szemléltetve). Hogyan kell elhelyezni ezen a Venn-diagramon a téglalapok T halmazát?

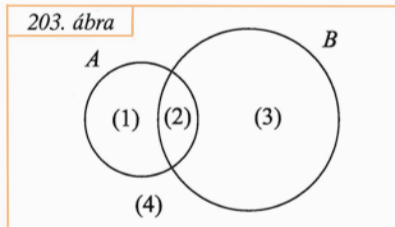
K2 200. Legyen H a húrnégyszögek, D a deltoidok, TR a trapézok halmaza. Határozzuk meg a $H \cap D \cap TR$ halmazt!

K2 201. Legyen C a középpontosan szimmetrikus négyszögek, T a tengelyesen szimmetrikus négyszögek halmaza. Határozzuk meg a $C \cap T$ halmazt!

K1 202. Az S síkon felvett koncentrikus körök középpontja O , sugara 5 cm, illetve 8 cm.

Megadjuk a körlemez pontjait halmazok segítségével: $A = \{P \in S \mid OP \leq 5 \text{ cm}\}$ és $B = \{P \in S \mid OP \leq 8 \text{ cm}\}$. Határozzuk meg az $A \setminus B$, $B \setminus A$ és $\overline{A}$ halmazokat.

203. ábra



K1 203. Az S síkon felvett A kör középpontja O , sugara 5 cm; a B kör középpontja Q , sugara 8 cm.

Megadjuk a körlemez pontjait halmazok segítségével: $A = \{P \in S \mid OP \leq 5 \text{ cm}\}$ és $B = \{P \in S \mid QP \leq 8 \text{ cm}\}$. Határozzuk meg az alábbi tartományok által tartalmazott nyílt pontthalmazokat:

- $a) (1);$ $b) (2);$ $c) (3);$ $d) (4);$ $e) (1) \cup (3);$ $f) (1) \cup (4);$ $g) (2) \cup (4).$

K2 204. Jelöljük $(x; y)$ -nal a derékszögű koordinátásík pontjainak koordinátáit. Az A, B, C halmaz rendre azon $(x; y)$ koordinátájú pontok halmaza, melyekre $y > |x|$, $y \leq 2x - 1$ és $y \leq 3$.

Ábrázoljuk az alábbi halmazokat:

a) A ; b) B ; c) C ; d) $A \cap B$; e) $A \cap \overline{C}$; f) $\overline{B} \cap C$.

K2 205. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ és $C = \{2, 3, 4\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazokat:

a) $A \times B$; b) $B \times A$; c) $A \times C$; d) $C \times A$.

K2 206. Legyen $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x < 3\}$, $B = \{y \in \mathbf{R} \mid -1 < y \leq 3\}$. Milyen pontthalmazt határoznak meg a derékszögű koordináta-rendszerben az $(x; y)$ koordinátapárok?

K2 207. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2k \mid k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq 5\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazokat:

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

b) azon elemek, amelyek vagy csak az A -ban, vagy csak a B -ben vannak (ún. „kizáró vagy” művelet);

c) $A \triangle B$; d) $(A \triangle B) \triangle C$; e) $A \triangle (B \triangle C)$.

K2 208. Mivel egyenlő tetszőleges A halmaz esetén

a) $A \times \emptyset$; b) $A \triangle A$?

K2 209. Ha $|A| = a$ és $|B| = b$ ($a, b \in \mathbf{N}$), akkor mennyi lehet az alábbi halmazok elemszáma?

a) $A \times A$; b) $A \times B$; c) $A \times \emptyset$; d) $A \triangle A$; e) $A \triangle B$; f) $A \triangle \emptyset$.

K1 210. Ha $A \subseteq B$, akkor mivel egyenlő

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$; e) $\overline{A} \setminus \overline{B}$; f) $\overline{B} \setminus \overline{A}$?

Ha $|A| = a$ és $|B| = b$ ($a, b \in \mathbf{N}$, $a \leq b$), akkor mennyi lehet a fenti halmazok elemszáma?

K1 211. Ha $A \cap B = B$, akkor mivel egyenlő

a) $A \cup B$; b) $A \setminus B$; c) $B \setminus A$; d) $\overline{A} \setminus \overline{B}$; e) $\overline{B} \setminus \overline{A}$?

K1 212. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor mivel egyenlő

a) $A \setminus B$; b) $B \setminus A$; c) $\overline{A} \setminus \overline{B}$; d) $\overline{B} \setminus \overline{A}$?

Ha $|A| = a$ és $|B| = b$ ($a, b \in \mathbf{N}$), akkor mennyi lehet a halmazok elemszáma?

K1 213. Ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor mivel egyenlő

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $B \setminus A$; d) $\overline{A} \setminus \overline{B}$; e) $\overline{B} \setminus \overline{A}$?

K1 214 Melyik igaz az alábbi állítások közül, ha $A \subseteq B$?

a) $A \cup B = B$; b) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$; c) $A \cap B = A$; d) $A \setminus B = \emptyset$;

K2 e) $A \times B \subseteq B \times B$; f) Melyik állításnak igaz a megfordítása?

Milyen feltételek esetén teljesülnek az alábbiak, ha $H \neq \emptyset$? (215–221. feladat)

K1 215.

a) a H alaphalmazon $A \subseteq \overline{A}$; b) $A \cup B = A \cap B$; c) $A \setminus B = B \setminus A$.

K1 216. a) $A = A \cup B$; b) $B = A \cap B$; c) $A \cap B = A \setminus B$;

d) a H alaphalmazon $H \setminus A = \overline{A}$.

K2 217. a) $A \times B = A \times C$; b) $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B$;
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

K2 218. a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; b) $A \cap (B \cup C) = \emptyset$;
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

K2 219. a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$.

K2 220. a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; b) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$.

K2 221. a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$; b) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = \emptyset$.

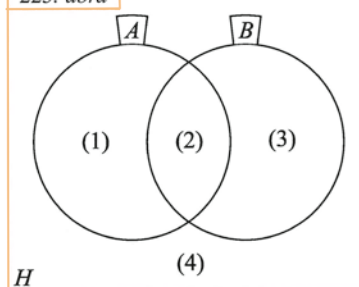
K1 K2 222. Mivel egyenlők az alábbi halmazok?

- a) $A \setminus A$; b) $A \setminus \emptyset$; c) $\emptyset \setminus A$;
d) $A \cup \bar{A}$; e) $A \cap \bar{A}$; f) $(A \setminus B) \cap B$;
g) $A \cap \bar{B}$; h) $(A \cup B) \cap \bar{A}$; i) $(\bar{B} \setminus \bar{A}) \cup (A \cap B)$;
j) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$.

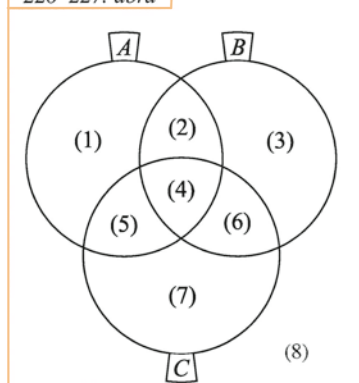
K1 223. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- a) Ha $A \subseteq B \subseteq C$, akkor $A \cup B \cup C = B$. b) Ha $A \subseteq B \subseteq C$, akkor $A \cap B \cap C = B$.
c) Ha $x \in A$ és $x \notin B$, akkor $x \notin A \setminus B$. d) Ha $x \in A$ és $x \notin B$, akkor $x \in A \cup B$.
e) Ha $x \in A$ és $x \in B$, akkor $x \in A \cap B$. f) Ha $x \in A \setminus B$, akkor $x \notin B$.

225. ábra



226–227. ábra



K2 224. Bizonyítsuk be az ún. de Morgan-féle azonosságokat:

Tetszőleges A, B halmazokra

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

K2 225. Adott a H alaphalmaz, valamint két halmaz, A és B . Venn-diagramjukon (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat.

Mutassuk meg, hogy az egyes tartományok megadhatók

- a) az unió és komplementer műveletek segítségével;
b) a metszet és komplementer műveletek segítségével;
c) a különbség és komplementer műveletek segítségével!

K2 226. Adott három halmaz, A, B és C . Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (8)-cal jelöltük az egyes tartományokat.

Fejezzük ki az unió és a különbség műveletek felhasználásával az alábbi tartományokat:

a) (1); b) (2); c) (4).

Mely további tartományok fejezhetők még ki ezzel a két művelettel?

K2 227. Adott a H alaphalmaz, valamint három halmaz, A , B és C . Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (8)-cal jelöltük az egyes tartományokat.

Mely tartományokat határozzák meg az $A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ halmazok?

K1 228. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$. Határozzuk meg az A és B halmazt.

K2 229. Az A , B , C halmazokról tudjuk, hogy $A \setminus B = \{1, 2, 3, 9, 10\}$, $B \setminus C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $C \setminus A = \{12, 13, 14, 15\}$, $A \cap B \cap C = \{11\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13\}$,

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Határozzuk meg az A , B , C halmazokat, ha $|C| = 6$.

K2 Gy 230. A következő táblázat egy iskolai matematikaverseny első három fordulójának eredményeiből tartalmaz egy részletet. Az elérhető pontszám mind-egyik fordulóban 50 pont volt.

sorszám	név	I.	II.	III.	sorszám	név	I.	II.	III.
1.	Ko. LÁ.	22	49	21	9.	Po. Ni.	32	39	38
2.	Ko. MÁ.	30	31	27	10.	Ke. Zso.	31	33	48
3.	Tó. JÁ.	15	41	42	11.	Va. Zsu.	32	33	20
4.	Cso. JÁ.	40	36	33	12.	Fa. Jó.	50	49	39
5.	Ba. TI.	50	41	42	13.	SÁ. SÁ.	44	45	44
6.	FÉ. DÖ.	24	23	50	14.	Ma. Me.	31	26	50
7.	Ke. Me.	42	40	31	15.	DÖ. Ki.	32	33	37
8.	Ki. LÁ.	48	47	41					

Jelöljük A -val, B -vel és C -vel azoknak a tanulóknak a halmazát, akik az első, második, illetve harmadik fordulóban legalább 40 pontot értek el, s határozzuk meg ezen halmazok segítségével az alábbi körülírással megadott halmazokat:

- azon tanulók, akik legalább egy fordulóban 40 pontot értek el;
- azon tanulók, akik csak az első fordulóban értek el 40 pontot;
- azon tanulók, akik legfeljebb egyszer értek el 40 pontot;
- azon tanulók, akik pontosan egyszer értek el 40 pontot;
- azon tanulók, akik pontosan kétszer értek el 40 pontot;
- azon tanulók, akik a második fordulóban nem értek el 40 pontot, de a harmadikban igen;
- azon tanulók, akikre igaz, hogy ha valamelyik fordulóban elérték a 40 pontot, akkor legalább még egy fordulóban elérték a 40 pontot.

Halmazok elemszáma

K1 K2 231. Legyen a $H = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ alaphalmaz négy részhalmaza $A = \{\text{páros számok}\}$, $B = \{3\text{-mal osztható számok}\}$, $C = \{\text{négyzetszámok}\}$, $D = \{\text{prímszámok}\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemszámait:

- a) A ; b) B ; c) $\overline{C}$;
 d) D ; e) $A \cup B$; f) $B \cap C$;
 g) $B \cap D$; h) $A \setminus C$; i) $\overline{A \cup C}$;
 j) $\overline{A \setminus C}$; k) $\overline{C \setminus A}$; l) $\overline{C \cap D}$.

K1 232. Legyen $|A| = 8$, $|B| = 11$. Mekkora lehetnek az alábbi értékek?
 a) $|A \cap B|$; b) $|A \cup B|$; c) $|A \setminus B|$; d) $|B \setminus A|$.

K1 233. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $|A \cup B| = 6$, $|A \setminus B| = 3$, $|A \cap B| = 2$. Határozzuk meg az A és B halmaz elemeinek számát!

K1 234. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $|A| = 7$, $|B| = 9$, $|A \setminus B| = 3$. Határozzuk meg $|A \cap B|$ -t és $|A \cup B|$ -t!

K2 235. Az A, B, C halmazokról tudjuk, hogy $|A \setminus B| = 5$, $|B \setminus C| = 5$, $|C \setminus A| = 4$, $|A \cap B \cap C| = 1$, $|A \cup B| = 13$, $|A \cup C| = 12$, $|C| = 7$. Határozzuk meg az A és B halmazok elemszámát!

K2 236. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} \mid 4 \leq b \leq 7\}$.

- a) Hány elemű az $A \times B$ halmaz?
 b) Hány elemű $(A \times B) \cap (B \times A)$?

K2 237. A, B, C véges halmazok. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- a) Ha $|A| = |A \cup B|$, akkor $B \subseteq A$;
 b) $|A \cup B| = |A| + |B|$;
 c) $|A \cap B| \leq \frac{|A| + |B|}{2}$;
 d) $|A| + |B| \geq |A \cup B|$;
 e) $|A| - |A \setminus B| = |A \cap B|$;
 f) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
 g) $|A| + |B| + |C| > |A \cup B \cup C|$;
 h) $|A \cap B \cap C| \leq \frac{|A| + |B| + |C|}{3}$.

K2 238. A $H = \{a, b, c, \dots, j\}$ alaphalmaz A, B, C, D részhalmazait az alábbi táblázattal adtuk meg:

H	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
A	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
B	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
C	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
D	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Az első sorban a H halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes halmazoknál 1-est írtunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Pl. $d \in A$, de $e \notin A$. Válaszoljuk meg a táblázat segítségével, hogy mivel egyenlő az alábbi halmazok elemszáma.

- a) $(A \cup B) \cup C$; b) $A \cap (B \cap C)$; c) $(A \cap B) \cup C$;
 d) $A \cup (C \setminus D)$; e) $A \cup (C \setminus B)$; f) $(A \cup C) \setminus (B \cup D)$;
 g) $\overline{A \cup B}$; h) $\overline{B \cap (C \setminus D)}$; i) $\overline{A \cup B \cup C}$;
 j) $\overline{(B \setminus C) \setminus A}$; k) $\overline{A} \cap \overline{C}$.

K2 239. Az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik

- a) osztható 2-vel;
 b) osztható 3-mal;
 c) osztható 2-vel és 3-mal;
 d) osztható 2-vel vagy 3-mal;
 e) osztható vagy 2-vel, vagy 3-mal (de csak az egyikkel);
 f) a 2 és 3 közül legalább az egyikkel osztható;
 g) a 2 és 3 közül legfeljebb az egyikkel osztható;
 h) a 2 és 3 közül pontosan az egyikkel osztható;
 i) ha osztható 2-vel, akkor osztható 3-mal is;
 j) a 2 és 3 közül ha osztható az egyikkel, akkor osztható a másikkal is;
 k) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

K1 Gy 240. Két kirándulás közül az elsőre elment az osztály 70%-a, a másodikra 80%-a. 15 gyerek vett részt mindkét kiránduláson. Mennyi az osztálylétszám?



K2 Gy 241. Egy osztály tanulóiak $\frac{2}{3}$ része közepesnél nem rosszabb, $\frac{3}{5}$ része közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban, ha az osztálylétszám 30? Mennyi az osztályátlag, ha a közepesnél jobb tanulók átlaga 4, a gyengébbeké pedig 2,5?

K2 Gy 242. Egy matematikaversenyen 3 feladatot tűztek ki. A 30 induló közül az első feladatot 19-en, a másodikat 15-en, a harmadikat 18-an oldották meg hibátlanul. Az első és második feladatra 7, a második és harmadik feladatra 10, az első és harmadik feladatra 9 tanuló adott helyes megoldást. Mindhárom feladat megoldása 3 diáknak sikerült. Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani?

K2 243. Bizonyítsuk be az ún. logikai szita formula alábbi azonosságait (A, B, C véges halmazok):

$$a) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$b) |A \cup B \cup C| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

K2 244. Az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik

a) osztható 2-vel, 3-mal vagy 5-tel;

b) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel;

c) a 2, 3, 5 számok közül pontosan a 2-vel osztható;

d) a 2, 3, 5 számok közül pontosan kettővel osztható?

K2 Gy 245. Mi a hiba az alábbi feladat megoldásában?

„Feladat: Egy osztályban a diákok három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Tudjuk, hogy angolul 16-an, németül 10-en, franciául 15-en tanulnak; angolul és franciául 8-an, angolul és németül 2-en, németül és franciául 4-en; valamint mindhárom nyelven 3-an tanulnak. Mennyi az osztálylétszám, ha valamilyen nyelvet mindenki tanul?

Megoldás: Jelöljük az angolul, németül, illetve franciául tanuló diákok halmazát rendre A -val, N -nel és F -fel, s alkalmazzuk a logikai szita formulát! Ekkor az $|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |N \cap F| - |A \cap F| + |A \cap N \cap F|$ összefüggés alapján azok száma, akik valamelyik nyelvet tanulják, $16 + 10 + 15 - 8 - 2 - 4 + 3 = 30$. Mivel valamilyen nyelvet mindenki tanul az osztályban, az osztálylétszám 30.”

K2 Gy 246. Egy 30 fős társaságban franciául 20-an, németül 22-en, angolul 25-en beszélnek. (Legalább az egyik nyelvet mindenki beszéli.)

a) Hányan beszélhetnek mindhárom nyelven?

b) Legalább hányan beszélnek két nyelven?

K2 247. $|A \times B| = 60$. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit $|A \cup B|$, illetve $|A \cap B|$ felvehet?

K2 248. $|A| = 7$, $|B| = 8$, $|C| = 9$, $|A \cap B \cap C| = 3$. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit felvehet $|A \cup B \cup C|$?

K2 249. Három halmaz páronként vett metszete nem üres, de közös részük üres halmaz. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit felvehet

$|A \cup B \cup C|$, ha

$$a) |A| = 7, |B| = 8, |C| = 9;$$

$$b) |A| = 7, |B| = 8, |C| = 10?$$

K2 250. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit felvehet $|A \cup B \cup C|$, ha

a) $|A \cup B| = 7$, $|A \cup C| = 7$, $|B \cup C| = 6$;

b) $|A \cup B| = 8$, $|A \cup C| = 7$, $|B \cup C| = 6$?

K2 251. Hány elemű lehet az A és B halmaz, ha

a) $|A \cap B| = 3$ és $|A \cup B| = 5$;

b) $|A \cap B| = 2$ és $|A \cup B| = 5$;

c) $|A \cup B| = 5$?

K2 252. Páros vagy páratlan elemszámú az a H véges halmaz, amelyre igaz, hogy bármely elemének reciproka is és ellentettje is eleme a halmaznak?

K2 253. Páros vagy páratlan elemszámú az a H véges halmaz, amelyre igaz, hogy bármely elemének reciproka is eleme a halmaznak?

K2 254. Adjunk meg három olyan halmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike:

1. bármely kettőnek van közös eleme;
2. a három halmaz metszete üres halmaz;
3. a halmazok elemszáma egyenlő;
4. a halmazok elemszáma a lehető legkisebb.

E2 255. Adjunk meg négy olyan halmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike:

1. bármely kettőnek van közös eleme;
2. bármely három halmaz metszete üres halmaz;
3. a halmazok elemszáma egyenlő;
4. a halmazok elemszáma a lehető legkisebb.

E2 256. Adjunk meg öt olyan halmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike:

1. bármely négy halmaz metszete nem üres halmaz;
2. az öt halmaz metszete üres halmaz;
3. a halmazok elemszáma egyenlő;
4. a halmazok egyesítésének az elemszáma a lehető legkisebb.

K2 257. Adjunk meg három olyan halmazt, amelyek közül bármely kettőnek végtelen sok közös eleme van, de a három halmaz közös része üres.

K2 258. Bontsuk fel a természetes számok halmazát két részhalmazra úgy, hogy egyszerre teljesüljenek az alábbi feltételek:

1. a két részhalmaznak végtelen sok közös eleme van;
2. a két részhalmaz uniója a természetes számok halmaza.

K2 259. Bontsuk fel a természetes számok halmazát három részhalmazra úgy, hogy egyszerre teljesüljenek az alábbi feltételek:

1. bármely két részhalmaznak végtelen sok közös eleme van;
2. a három részhalmaz közös része üres halmaz;
3. a három részhalmaz uniója a természetes számok halmaza.

K2 260. Bontsuk fel a természetes számok halmazát végtelen sok végtelen elemszámú részhalmazra úgy, hogy

- a) bármely két részhalmaznak végtelen sok közös eleme legyen;
- b) semelyik két halmaznak se legyen közös eleme.

Végtelen halmazok számossága

E2 261. Igaz-e, hogy ha egy megszámlálhatóan végtelen halmazhoz hozzáveszünk

- a) 1;
 - b) 2;
 - c) 100;
 - d) n (ahol n tetszőleges pozitív egész szám)
- új elemet, akkor a halmaz továbbra is megszámlálhatóan végtelen marad?

E2 262. Legyen A és B két megszámlálhatóan végtelen halmaz. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- a) $A \subseteq \mathbb{Z}$.
- b) A elemei sorba rendezhetők.
- c) A elemei nagyság szerint növekvő sorozatba rendezhetők.
- d) A elemei között van legkisebb vagy legnagyobb.
- e) A bármely végtelen elemszámú részhalmaza is megszámlálhatóan végtelen.
- f) A és $\mathbb{N}$ elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.
- g) A és $\mathbb{Z}$ elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.
- h) Ha A valódi részhalmaza B -nek, akkor B számossága nagyobb.
- i) A és B elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.
- j) $A \cup B$ megszámlálhatóan végtelen halmaz.

E2 263. Az alábbi állításokban A és B megszámlálható (véges vagy végtelen) halmazok. A megszámlálhatóan végtelen halmazok számosságát az elemszámhoz hasonlóan jelöljük, tehát pl. $|H| = |\mathbb{N}| = \infty$. Melyik állítás igaz, s melyiknek igaz a megfordítása?

- a) Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $|A| = |B|$.
- b) Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor $|A| < |B|$.
- c) Ha $A \subseteq B$, akkor $|A| \leq |B|$.
- d) Ha $|A| = |B|$, akkor az A és B halmaz elemei között megadható egy kölcsönösen egyértelmű leképezés.
- e) Ha van olyan kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, amely az A halmaz elemeit a B halmaz egy valódi részhalmazára képezi le, akkor $|A| \neq |B|$.
- f) Ha van olyan kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, amely az A halmaz elemeit a B halmaz egy valódi részhalmazára képezi le, akkor $|A| < |B|$.
- g) Ha az A végtelen számhalmaz elemei nagyság szerint növekvő sorba rendezhetők, akkor az A halmaz megszámlálhatóan végtelen.
- h) Ha az A számhalmaz elemei nem rendezhetők nagyság szerint növekvő sorozatba, akkor az A halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

V 264. Egy bergengóciai szállodában végtelen sok szoba van, mindegyik foglalt. Egy új vendég érkezik.

- a) Hogyan biztosít szobát az új vendég számára az ügyes szállodatulajdonos?
- b) Mit tehet akkor a szállodatulajdonos, ha 100 új vendég érkezik?
- c) Mit tehet akkor, ha (megszámlálhatóan) végtelen sok új vendég érkezik?

V Gy 265. *Georg Ferdinand Cantor (1845–1918)* német matematikus megmutatta, hogy a racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen. A következő ábráról leolvashatjuk, hogy milyen módszerrel rendezte sorba a pozitív racionális számokat.

a) Melyik a 2004. racionális szám ebben a sorban?

b) Melyik racionális szám található pl. a 100. sor 10. helyén?

c) Hányadik szám a pozitív racionális számok sorában pl. a $\frac{17}{26}$?

d) A pozitív racionális számok sorba rendezése alapján hogyan rendezhetők sorba a racionális számok?

V Gy 266. Hogyan mutathatta meg Cantor, hogy a valós számok halmaza viszont nem megszámlálhatóan végtelen halmaz?

E2 267. Mutassuk meg, hogy az A és B halmazok számossága megegyezik, ha

a) $A = \mathbf{Z}^+$, $B = \mathbf{N}$;

b) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{N}$;

c) $A = \mathbf{Z}^+$, $B = \{11, 12, 13, \dots\}$;

d) $A = \mathbf{Z}^+$, $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$;

e) $A = \{6, 8, 10, 12, \dots\}$, $B = \{-3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$;

f) $A = \{\text{prímszámok}\}$, $B = \{\text{köbszámok}\}$;

g) $A = \mathbf{Q}$, $B = \{\text{pozitív páros számok}\}$.

V 268. Létesíthető-e az A és B halmazok között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, ha

a) $A = \mathbf{N}$, $B = \{q \in \mathbf{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\}$;

b) $A =]0; 1[$, $B =]1; \infty[$;

c) $A = \{\text{négyszetszámok}\}$; $B = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$;

d) $A = [0; 1]$, $B = [0; 5]$;

e) $A = [a; b]$, $B = [c; d]$, ahol $a < b$, $c < d$ valós számok;

f) $A =]-\infty; \infty[$, $B =]-1; 1[$;

g) $A =]-\infty; \infty[$, $B =]a; b[$, ahol $a < b$ valós számok;

h) $A =]0; 1[$, $B = [0; 1]$;

i) $A = \{\text{adott } CD \text{ szakasz pontjai}\}$; $B = \{\text{adott félegyes pontjai}\}$;

j) $A = \{\text{adott } CD \text{ szakasz pontjai}\}$; $B = \{\text{adott egyes pontjai}\}$;

k) $A = \mathbf{Q}$, $B = \{\text{adott négyzetlemez pontjai}\}$?

E2 269. Az A vagy a B halmaz számossága a nagyobb, ha

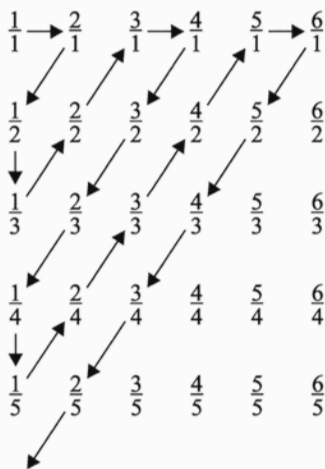
a) $A = \{\text{egész számok}\}$, $B = \{\text{egy } 10 \text{ cm sugarú körvonal pontjai}\}$;

b) $A = \mathbf{Q}^+$, $B = [0; 1]$;

c) $A = \mathbf{Q}$, $B =]0; 10^{-20}[$;

d) $A = \{\text{prímszámok}\}$, $B = \{\text{egy } 1 \text{ cm sugarú körlemez pontjai}\}$?

265. ábra



Vegyes feladatok

K1 270. Az alábbi feladatokban felsoroltuk egy-egy halmaz néhány elemét, de mindig bekerült az elemek közé egy oda nem illő is. Keressük meg a kakukktójt.

a) 543, 372, 542, 192, 471, 291, 813;

b) 543, 672, 165, 411, 291, 133, 870;

c) 576, 111, 100, 961, 144, 529, 441;

d) 407, 232, 435, 288, 211, 148, 133;

e) Jövendőlés, A Tisza, Toldi, A XIX. század költői, Arany Lacinak, Szeptember végén, Anyám tyúkjá.

K2 271. Azt mondjuk, hogy egy művelet a H halmazon zárt, ha a halmaz bármely elemeire elvégezve a műveletet, az eredmény is a H halmazban van. Pl.: az összeadás az egész számok halmazán zárt, mert bármely két egész szám összege is egész; vagy a négyzetgyökvonás a valós számok halmazán nem zárt, mert pl. $\sqrt{-2}$ nem valós szám. Melyek zárt műveletek az alábbiak közül?

a) A szorzás a $\mathbf{Z}$ halmazon;

b) a kivonás a $\mathbf{Z}$ halmazon;

c) a szorzás a $\mathbf{Z}^+$ halmazon;

d) a kivonás a $\mathbf{Z}^+$ halmazon;

e) a szorzás az $\mathbf{N}$ halmazon;

f) a szorzás a $\mathbf{Q}$ halmazon;

g) az osztás a $\mathbf{Q}$ halmazon;

h) az összeadás a $\mathbf{Q}^*$ halmazon;

i) a szorzás a $\mathbf{Q}^*$ halmazon;

j) a négyzetgyökvonás a $\mathbf{Q}^+$ halmazon (pozitív irracionális számok);

k) a négyzetgyökvonás a $\mathbf{Q}^+$ halmazon;

l) a négyzetgyökvonás az $\mathbf{R}^+$ halmazon;

m) a szorzás a $\{2; 0,5; 1\}$ halmazon;

n) a szorzás az $\frac{1}{n}$ alakú törtek halmazán ($n \in \mathbf{Z}^+$).

K2 272. A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre.

1. Okosabb-e a majom, mint az ember?

2. Szebb-e a majom, mint az ember?

3. Igaz-e, hogy a majom az ember őse?

Az 1. kérdésre 23-an, a 2. kérdésre 17-en, a 3-asra 23-an szavaztak igennel.

Az 1. kérdésre igennel szavazók közül 13-an a 2., 12-en pedig a 3. kérdésre feleltek nemmel.

Igent mondott a 2. és 3. kérdésre 6 „akadémikus”, de közülük ketten az első kérdésre nemmel szavaztak.

Hányan szavaztak mind a három kérdésre nemmel?

K2 273. A $H_1, H_2, H_3, \dots$ halmazokból álló sorozat képzési szabálya a következő:

$H_1 = \{1\}$, $H_2 = \{2, 3\}$, $H_3 = \{4, 5, 6\}$ stb. (Mindig a soron következő természetes számok kerülnek be az új halmazba, és az n . halmazban n darab szám van ($n \in \mathbb{N}$)).

a) Mely elemekből áll H_{40} ?

b) Mennyi H_{40} elemeinek összege?

K2 274. Adott három polinomfüggvény, f , g és h ; zérushelyeik halmaza rendre F , G , H . Mi lesz az alábbi egyenletek gyökeinek halmaza?

a) $f(x)g(x) = 0$;

b) $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

c) $f^2(x) + g^2(x) = 0$;

d) $f(x)g(x)h(x) = 0$;

e) $\frac{f(x)g(x)}{h(x)} = 0$;

f) $\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = 0$;

g) $f^2(x) + g^2(x) + h^2(x) = 0$.

h) Igaz-e, hogy az $f(x) + g(x) = 0$ egyenlet gyökei halmazának részhalmaza $F \cap G$?

E1 275. Bizonyítsuk be, hogy egy n elemű halmaznak ugyanannyi k elemű részhalmaza van, mint amennyi $(n - k)$ elemű részhalmaza. ($k \leq n$; $k, n \in \mathbb{N}$)

E1 276. Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak? ($n \in \mathbb{N}$)

E1 277. Milyen n természetes számra igaz, hogy egy n elemű halmaz páros és páratlan elemszámú részhalmazainak a száma megegyezik?

K2 Gy 278. Tudjuk, hogy a férfiak 80%-a legalább 170 cm magas, 85%-nak barna haja van, 90%-a legalább 70 kg és 95%-a nem bajszos. A férfiak hány százaléka rendelkezik biztosan az összes felsorolt tulajdonsággal?

K2 Gy 279. Egy osztály az iskolai évben három kirándulást szervezett. Az elsők a tanulók 70%-a, a másodikon 80%-a, a harmadikon pedig 90%-a vett részt. Így 12 tanuló háromszor, a többi pedig kétszer kirándult. Hányan voltak az osztályban?

E2 280. Hány olyan ötjegyű pozitív egész szám van, amelyben van 8-as és 9-es számjegy is?

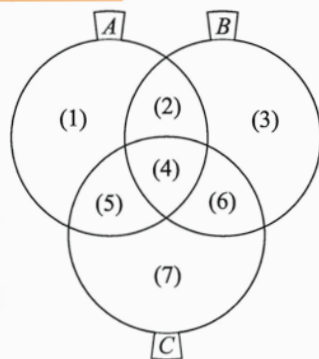
E2 281. Legyen A azoknak a tízjegyű számoknak a halmaza, melyekben az 1, 2, 3 számjegyek szerepelnek, de mindegyik szerepel legalább egyszer. Hány elemből áll az A halmaz?

E2 282. Könnyen készíthetünk Venn-diagrammot egy, kettő vagy három kör segítségével. (Pl. az alábbi ábrán azokat az elemeket, amelyek az A és B halmazban benne vannak, de a C -ben nincsenek, a (2)-es tartományba sorolhatjuk.)

Készíthető-e Venn-diagram négy körrel?

E2 283. Készíthető-e Venn-diagram tetszőleges számú halmazzal? (A halmazokat bármilyen alakzatokkal szemléltethetjük, nem szükséges köröket alkalmaznunk.)

282. ábra



K2 284. Az f és g függvények értelmezési tartománya D_f és D_g , az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenletek zérushelyeinek halmaza Z_f és Z_g . Mi lesz az alábbi egyenletek gyökeinek halmaza?

a) $f(x)g(x) = 0$; b) $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

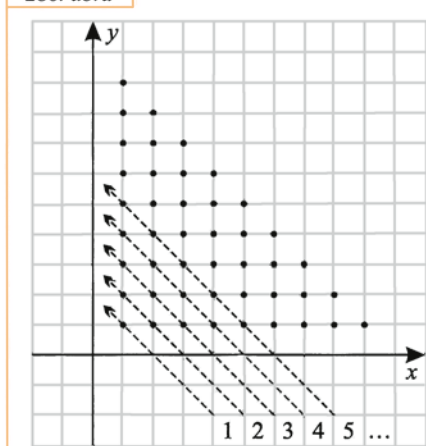
E1 285. A $H_1, H_2, H_3, \dots$ halmazokból álló sorozat képzési szabálya a következő:

$H_1 = \{1\}, H_2 = \{3, 5\}, H_3 = \{7, 9, 11\}$ stb. (Mindig a soron következő páratlan természetes számok kerülnek be az új halmazba, és az n . halmazban n darab szám van ($n \in \mathbb{N}^+$)).

a) Mely elemekből áll H_{40} ? (A 40. halmazban 40 elem van.)

b) Mennyi H_{40} elemeinek összege?

286. ábra



E2 286. Tekintsük az $\frac{x}{y}$ alakú po-

zitív racionális számokat ($x, y \in \mathbb{Z}^+$), s feleltessük meg mindegyiknek a derékszögű koordináta-rendszer $(x; y)$ pontját! Az ábráról leolvasható, hogy ezek a számok sorba rendezhetők, vagyis halmazuk megszámlálhatóan végtelen.

a) Melyik az 1000. racionális szám ebben a sorban?

b) Hányadik szám a racionális számok ezen sorában pl. a $\frac{21}{57}$?

E1 287. Tegyük fel, hogy bizonyos tárgyak között van két különböző

színű, továbbá van két különböző alakú. Mutassuk meg, hogy akkor van a tárgyak között két olyan, amelyek színben is, alakban is különböznek!

E1 Gy 288. Kr. e. a VI. században Epimenidész krétai költő híres kijelentése: „Minden krétai hazudik.”, nagy fejtörést okozott kortársai körében.

Ha ugyanis Epimenidész igazat mondott, akkor – állítása tartalma szerint – hazudott, s ez ellentmondás.

Ha viszont hazudott, akkor állításának éppen az ellenkezője igaz, tehát a krétaiak igazat mondanak, s ez ellentmondásban van azzal, hogy Epimenidész hazudott.

Mi a véleményünk erről a gondolatmenetről?

E2 Gy 289. Egyszer idegen érkezett egy faluba, ahol megkérdezte a borbélyt, hogy van-e elég munkája.

– Egyáltalán nincs konkurenciám. A falu férfi lakosai közül természetesen nem borotválom azokat, akik maguk borotválkoznak, de mindazokat én borotvá-

lom, akik nem maguk borotválkoznak – felelte a borbély.

– Ez lehetetlen! – kiáltott fel az idegen. Mire gondolhatott?

V 290. Mi a véleményünk az alábbi gondolatmenetben kapott ellentmondásról?

„Legyen a H az összes olyan halmaz halmaza, amelyek nem elemei önmaguknak. Ekkor tehát *tetszőleges* A halmaz esetén A pontosan akkor eleme H -nak, ha A nem eleme A -nak. Amit kapunk, H -ra is teljesül; vagyis H pontosan akkor eleme H -nak, ha H nem eleme H -nak.”



K2 291. Hány elemű lehet

- a) $A \cup B$, ha $|A \cap B| = 3$ és $|A \setminus B| = 5$;
- b) $A \cap B$, ha $|A \cup B| = 10$ és $|A \setminus B| = 5$;
- c) $A \setminus B$, ha $|A \cup B| = 5$?

E1 292. Az A és B halmazokra teljesül az $|A \times B| = 36$ összefüggés. Határozzuk meg $|A \cup B|$ és $|A \cap B|$ lehetséges legnagyobb és legkisebb értékét.

E1 293. Tekintsük az $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ halmaz összes részhalmazát.

- a) Mennyi a részhalmazok elemszámainak összege?
- b) Mennyi a részhalmazok elemeinek összege?

K2 294. Hányféleképpen adhatjuk meg az A és B halmazokat, ha

- a) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ és $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- b) $A \cap B = \{1, 2\}$ és $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- c) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

E2 295. Hány különböző A, B, C halmazhármass van (ahol a halmazok sorrendje lényeges), melyre $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$ és $A \cap B \cap C = \emptyset$? És ha elhagyjuk az $A \cap B \cap C = \emptyset$ feltételt, akkor hány lehetőség van?

E1 296. Az $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ halmaznak hány olyan H részhalmaza van, melyre teljesülnek az alábbi feltételek?

- a) 1 eleme a részhalmaznak;
- b) 1 és 2 is eleme a részhalmaznak;
- c) 1 és 2 közül legalább az egyik eleme a részhalmaznak;
- d) 1 és 2 közül legfeljebb az egyik eleme a részhalmaznak;
- e) az 1 eleme, de a 2 nem eleme a részhalmaznak;
- f) sem az 1, sem a 2 nem eleme a részhalmaznak;
- g) a részhalmazban az elemek szorzata 5-re végződik;
- h) a részhalmazban az elemek szorzata páros;
- i) a részhalmazban az elemek szorzata 3-mal osztható.

E1 297. Bizonyítsuk be, hogy egy 9 elemű halmaz bármely négy 7 elemű rész-halmazának közös része nem üres.

E2 298. Legyenek $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2000}$ az M halmaz különböző részhal-mazai, melyek elemszámai legalább akkorák, mint M elemszámának kéthar-mada. Mutassuk meg, hogy van olyan eleme M -nek, amely legalább 1334 darab részhalmazban benne van.

V 299. Egy n elemű H halmaznak ($n > 1$) legfeljebb hány részhalmazát lehet úgy kiválasztani, hogy semelyik kettő közös része ne legyen üres?

V 300. A H halmaz elemei olyan természetes számok, amelyek prímosztói a 2, 3 és 5 közül kerülnek ki. Legfeljebb hány számot választhatunk ki a H hal-mazból úgy, hogy semelyik kettő szorzata ne legyen négyzetszám?

V 301. Legyen G a $H = \{1, 2, \dots, 100\}$ halmaz tetszőleges 10 elemű részhal-maza. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható G két közös elem nélküli és nem üres részhalmaza, S és T úgy, hogy S és T elemeinek összege egyenlő.

V 302. Az A halmaz elemei egész számok, $|A| = 100$. Mutassuk meg, hogy mindig található az A halmaznak olyan részhalmaza, amelyben az elemek összege két nullára végződik.

V Gy 303. Egy bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik ülésen 10 fő volt jelen. A bizottság bármely két tagja legfeljebb egy ülésen vett együtt részt. Bizonyít-suk be, hogy a bizottság legalább 60 tagból állt.

V Gy 304. Anna és Béla a következő játékot játsszák. Először Anna felosztja a természetes számok halmazát három közös elem nélküli, végtelen részre (vagyis ha a részhalmazok A, B, C , akkor $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, $|A| = |B| = |C| = \infty$ és $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$). A felosztást ismerteti Bélával. Ezután Béla kiválaszt az egyik halmazból három elemet, s elárulja ezek összegét Annának. Ez alapján próbálja meg Anna kitalálni, hogy az A, B vagy C halmazból válasz-tott-e számokat Béla. Tud-e olyan felosztást készíteni Anna, amely alapján mindig kitalálhatja a Béla által kiválasztott halmazt?

III.

Számelmélet

Oszthatósági alapfogalmak, oszthatósági szabályok

K1K2 305. Legyenek $A = 2$, $B = 3$, $C = 4$, $D = 5$, $E = 6$, $F = 9$, $G = 12$, $H = 15$, $I = 18$, $J = 24$, $K = 36$, $L = 72$, $M = 128$, $N = 256$, $O = 300$, $P = 342$ és $Q = 2004$.

Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis?

- a) $A \mid B$; b) $C \mid G$; c) $B \mid P$; d) $A + B \mid O$; e) $G \mid B + H + I$,
f) L többszöröse E -nek, g) O többszöröse K -nak, h) N többszöröse M -nek,
i) $F - D \mid N$; j) $L - K \mid M$, k) $A + B + C \mid P$, l) $B + C \mid E + F + G$,
m) Q többszöröse $A + C$ -nek, n) O nem többszöröse $C + D - B$ -nek,
o) $N + O$ nem többszöröse C -nek, p) $F + G + H$ osztható K -val,
q) $J + K + L$ nem többszöröse F -nek, r) $A + B + C + D + E$ nem osztója O -nak.

K1 306. Az alábbi kifejezések közül melyek a páros számok és melyek a páratlanok (a kifejezésekben szereplő betűk természetes számok)?

- a) $4n + 6$, b) $6n + 4$, c) $10k + 9$,
d) $12l + 3$, e) $2a + 4b$, f) $2p + 4q + 5$,
g) $10r + 6s - 2$, h) $2004n + 6k - 2005$, i) $(a + b)^2 + a^2 - b^2$,
j) $(a - b)^2 + b^2 - a^2$, k) $(2k - n)^2 - n(n + 2)$,
l) $(2x - 3y)^2 - 3(3y + 4x)$, m) $(4k + 1)^2 + (4k - 1)^2$,
n) $(2p - 4x + y)^2 - y(2 + y)$.

K1 307. Legyenek n és k pozitív egész számok. Az alábbi állítások közül melyek igazak, és melyek hamisak:

- a) Ha n és k páros, akkor $n + k$ is páros.
b) Ha n és k páratlan, akkor $n + k$ is páratlan.
c) Ha n és k páratlan, akkor $n - k$ páros.
d) Ha n páros és k páratlan, akkor $n + k$ páratlan.
e) Ha n páros, k páratlan, akkor $n \cdot k$ páratlan.
f) Ha n páros, k páros, akkor $n \cdot k$ páros.
g) Ha n és k páratlan, akkor $n \cdot k$ páratlan.
h) Ha $n \cdot k$ páratlan, akkor n is, k is páratlan.
i) Ha $n \cdot k$ páros, akkor n is, k is páros.

K1K2 308. Mennyi maradékot kapunk, ha az alábbi számokat elosztjuk 3-mal (a kifejezésekben szereplő betűk természetes számok)?

- a) $3a + 12$, b) $6a + 20$,

- c) $9n + 3k + 2$,
 e) $(3p + q)^2 - q(q + 12)$,
 g) $(5x + 2y)^2 - (x^2 + y^2) + xy$.

- d) $6r + 3q - 1$,
 f) $(2p + 3s)^2 + p(2p - 3)$,

K1 K2 309. Mennyi maradékot kapunk, ha az alábbi számokat elosztjuk 7-tel (a kifejezésekben szereplő betűk természetes számok)?

- a) $7b + 12$,
 c) $7n + 14k + 8$,
 e) $10n^2 + (2n - 1)^2 - 3n$,

- b) $21k - 22$,
 d) $35n + 7k - 4$,
 f) $(3n + 1)^2 + (2n - 1)^2 + n^2 + 5(n + 1)$.

K1 K2 310. Bizonyítsuk be, hogy ha n és k olyan természetes számok, hogy mindkettő osztható 5-tel, akkor $n + k$ és $n - k$ is osztható 5-tel.

K2 311. Bizonyítsuk be, hogy ha $2a + 3b$ osztható 7-tel, akkor $20a + 9b$ is osztható 7-tel.

K2 312. Bizonyítsuk be, hogy ha $a + 2b + 3c$ osztható 11-gyel, akkor $3a - 5b - 2c$ is osztható 11-gyel.

K2 313. Bizonyítsuk be, hogy ha $a + b$ osztható 17-tel, akkor $b(2b + 3) + a(4b + 3) + 19a^2$ is osztható 17-tel.

K2 314. Bizonyítsuk be, hogy ha $2a - b$ osztható 13-mal, akkor $12a(a - b) + 3b(5 + b) - 4a$ is osztható 13-mal.

K2 315. Bizonyítsuk be, hogy ha $5a - 4b$ osztható 17-tel és $9a + 3b$ szintén osztható 17-tel, akkor $11b - a$ is osztható 17-tel.

K2 316. Bizonyítsuk be, hogy ha $2a + b$ osztható 13-mal és $5a - 4b$ szintén osztható 13-mal, akkor $a - 6b$ is osztható 13-mal.

K1 317. Határozzuk meg az alábbi számok 3-mal, 4-gyel, 5-tel, illetve 9-cel való osztási maradékait:

7, 14, 216, 1848, 2005, 13 367, 521 966, 123 456, 654 321.

E1 318. Egy ötjegyű számnak leírtuk egymás után a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal való osztási maradékait és így az eredeti ötjegyű számot kaptuk. Mi volt az eredeti ötjegyű szám?

K2 319. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

- a) 2-vel a páros számok és csak a páros számok oszthatók;
 b) 3-mal azok és csak azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek összege osztható 3-mal;
 c) 4-gyel azok és csak azok a számok oszthatók, melyek utolsó 2 számjegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 4-gyel;
 d) 5-tel azok és csak azok a számok oszthatók, amelyek 0-ra vagy 5-re végződnek;
 e) 6-tal azok és csak azok a számok oszthatók, melyek párosak és amelyek számjegyeinek összege osztható 3-mal;
 f) 8-cal azok és csak azok a számok oszthatók, melyek utolsó 3 számjegyéből alkotott háromjegyű szám osztható 8-cal.



K2 320. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromjegyű számból kivonjuk a számjegyeinek fordított sorrendjében felírt háromjegyű számot, az eredmény osztható 9-cel.

K1 K2 321. Határozzuk meg az alábbi példákban szereplő ismeretlen számjegyek értékét úgy, hogy a feltételek teljesüljenek:

- | | |
|--|--|
| a) $\overline{2a3}$ osztható 9-cel; | b) $\overline{5b31}$ osztható 3-mal; |
| c) $\overline{6b42}$ osztható 6-tal; | d) $\overline{4x3y}$ osztható 5-tel; |
| e) $\overline{5x3y4}$ osztható 12-vel; | f) $\overline{3x4y}$ osztható 15-tel; |
| g) $\overline{52x3y}$ osztható 30-cal; | h) $\overline{6x53y}$ osztható 45-tel; |

K2 322. Az $A = \overline{3a72b}$ szám osztható 45-tel, a $B = \overline{3c72d}$ szám osztható 36-tal. Lehetséges-e, hogy $A = B$?

K2 323. Milyen számjegyeket írhatunk X helyébe, hogy az 137 és 34X számok összege osztható legyen 9-cel?

K2 324. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható 6-tal.

K2 325. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő pozitív egész szám szorzata osztható 24-gyel.

K2 326. Bizonyítsuk be, hogy két tetszőleges páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal.

K1 K2 327. Három természetes szám összege osztható 3-mal. Az alábbi állítások közül melyik lehetséges és melyik nem:

- mindhárom osztható 3-mal;
- közülük pontosan egy szám osztható 3-mal;
- közülük pontosan kettő osztható 3-mal;
- egyik sem osztható 3-mal.

K2 328. Négy természetes szám összege osztható 4-gyel. Az alábbi állítások közül melyik lehet igaz és melyik nem:

- mind a négy szám osztható 4-gyel;
- közülük pontosan három szám osztható 4-gyel;
- közülük pontosan 2 szám osztható 4-gyel;
- közülük pontosan egy szám osztható 4-gyel;
- egyik sem osztható 4-gyel.

K1 K2 329. Az n természetes szám 7-tel osztva 5 maradékot ad, a k természetes szám 7-tel osztva 3 maradékot ad. Mennyi maradékot ad 7-tel osztva:

- | | | | |
|--------------|-----------------|----------------|---------------------------|
| a) $n + k$; | b) $n - k$; | c) $2n + 3k$; | d) $5n - 4k$; |
| e) nk ; | f) $n(k + 3)$; | g) $n^2 k^2$; | h) $(n^2 + 1)(k^2 - 1)$. |

K2 330. Az x természetes szám 11-gyel osztva 5 maradékot ad, az y természetes szám 11-gyel osztva 7 maradékot ad, a z természetes szám 11-gyel osztva 10 maradékot ad. Mennyi maradékot ad 11-gyel osztva

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| a) $x + y + z$; | b) $x + 2y - z$; | c) $x - y + 3z$; | d) $2x - 3y + 4z$; |
| e) $xy + z$; | f) $x(y + z)$; | g) $x^2(y - z)$; | h) $x(y^2 + z^2)$. |

E1 331. A p és q pozitív egész számok egyike sem osztható 3-mal. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $p^2 - q^2$ osztható 3-mal.

E1 332. Az n természetes szám nem osztható 5-tel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n^4 - 1$ osztható 5-tel.

E2 333. Legyenek n, k és m pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $nkm(n^2 - k^2)(n^2 - m^2)(k^2 - m^2)$

osztható 120-szal.

K1 334. Vizsgálja meg a természetes számok négyzetének utolsó számjegyét! Milyen számjegyre nem végződhet négyzetszám?

K1 K2 335. Mi az utolsó számjegye az alábbi számoknak:

a) 2^{100} ; b) 3^{100} ; c) 4^{112} ; d) 5^{1223} ; e) 6^{255} ; f) 7^{844} ; g) 8^{421} ; h) 9^{127} .

K2 336. Milyen számjegyre végződnek az alábbi összegek:

a) $2^{20} + 3^{20}$; b) $4^{12} + 5^{12} + 6^{12}$; c) $11^{11} + 22^{22} + 33^{33}$,
d) $123^{123} + 124^{124} + 125^{125}$; e) $1234^{4321} + 4321^{1234}$.

E1 337. Lehet-e $2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003}$ négyzetszám?

E1 338. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi összeg osztható 10-zel:

$2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 1$.

E1 339. Milyen maradékokat kaphatunk, ha egy négyzetszámot elosztunk 8-cal?

E1 340. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyzetszámot elosztunk 16-tal, a maradék minden esetben négyzetszám lesz.

E1 341. Igaz-e, hogy bármely természetes szám négyzetét 12-vel elosztva a maradék négyzetszám?

342. ábra

	1	2
	3	
4		
5		

E1 342. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt.

Vízs. 1. A 36 osztóinak összege.

3. Egy prímszámnál eggyel nagyobb szám.

5. A háromjegyű szám tulajdonsága, hogy a számjegyek szorzata négyzetszám.

Függ. 1. Prímszám.

2. 6 osztói növekvő sorrendben.

4. Köbszám.

E1 343. Határozzuk meg az n pozitív egész számot úgy, hogy az alábbi törtek értéke pozitív egész szám legyen:

a) $\frac{3n}{6}$; b) $\frac{4n+1}{3}$; c) $\frac{5n+2}{4}$; d) $\frac{n-4}{5}$;

e) $\frac{kn+1}{n}$ ($k \in \mathbb{N}^+$); f) $\frac{n+1}{n-1}$; g) $\frac{2n-3}{n+2}$; h) $\frac{5n+3}{n+7}$;

$$\begin{array}{llll}
 i) \frac{6n-1}{3n+2}; & j) \frac{9n+4}{n+5}; & k) \frac{3n+20}{n+1}; & l) \frac{6n+11}{2n-2}; \\
 m) \frac{8n+17}{n-3}; & n) \frac{10n+1}{5n-1}; & o) \frac{6n+8}{n+1}; & p) \frac{n^2+6}{n-1}; \\
 q) \frac{n^2+5}{n-3}; & r) \frac{n^2+2n+6}{n+1}; & s) \frac{n^2+3n-7}{n-1}.
 \end{array}$$

Számjegyes feladatok

- K2 344.** Melyek azok az $\overline{ab}$ kétjegyű számok, amelyekre $\overline{ab} + \overline{ba} = 88$?
- K2 345.** Melyek azok az $\overline{ab}$ kétjegyű számok, amelyekre $\overline{ab} - \overline{ba} = 72$?
- K2 346.** Melyek azok a háromjegyű számok, amelyekre $\overline{a0b} + \overline{b0a} = 303$?
- K2 347.** Melyek azok a háromjegyű számok, amelyekre $\overline{abb} + \overline{baa} = 888$?
- K2 348.** Egy kétjegyű számhoz hozzáadtuk számjegyeinek összegét s így 81-t kaptunk. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?
- E1 349.** Egy kétjegyű szám jegyei különbözők. E számnak és „fordítottjának” a számtani közepe olyan kétjegyű szám, melynek számjegyei 5-nél nagyobbak és egyenlők. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?
- E1 350.** Egy háromjegyű számot megszoroztunk 9-cel. Így egy olyan négyjegyű számot kaptunk, melynek utolsó három jegye azonos az eredeti háromjegyű számmal. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti szám osztható 125-tel.
- E1 351.** András bácsi 63 évvel idősebb unokájánál, aki 2000-ben még nem volt 10 éves. Születési évük ugyanazokból a számjegyekből állnak, csak más sorrendben. Hány éves volt András bácsi 2000-ben?
- E1 352.** Egy kétjegyű szám jegyei közé beírtunk egy számjegyet. Az így kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe az eredeti kétjegyű szám „fordítottja”. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?
- E1 353.** Rekonstruáljuk az alábbi műveleteket (azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek).
- $$\begin{array}{ll}
 a) \overline{aba} \cdot \overline{aa} = \overline{aaaa}; & b) \overline{ab}^2 = \overline{cab}; \\
 c) \overline{ab}^b = \overline{acc}; & d) \overline{ppp}^2 = \overline{\alpha\phi\alpha}; \\
 e) \overline{abb} + \overline{bab} + \overline{bba} = \overline{bbb0}; & f) 2a + 6b = a^a + b^a; \\
 g) \overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2005.
 \end{array}$$
- K2 354.** Mely a és b számjegyekkel teljesül, hogy $\overline{abb} + \overline{bab} + \overline{bba} = 777$?
- K2 355.** Hány db olyan $\overline{abab}$ alakú négyjegyű szám van, mely osztható 15-tel?
- E1 356.** Bizonyítsuk be, hogy bármely $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ számokra $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} + \frac{\overline{cdcd}}{\overline{abab}} \geq 2$.

- E1 357.** Melyek azok az $\overline{xy}$ kétjegyű számok ($x \neq y$), amelyekre $\frac{\overline{xy}}{\overline{yx}} = 2 - \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$?
- E1 358.** Egy kétjegyű számhoz hozzáadtunk 1-et, így a szám „fordítottjának a kétszeresét kaptuk. Mi volt az eredeti kétjegyű szám?
- E2 Gy 359.** Melyik az a háromjegyű szám, amelynek háromszorosa 49-cel kisebb a szám „fordítottjánál”?
- E1 360.** Mikor született az az ember, aki 2005-ben annyi idős, mint születése éve számjegyeinek összege?
- E2 361.** Egy neves közgazdász így szólt: „2006-ban vezetjük be az eurót, én ekkor éppen annyi idős leszek, mint születési évem számjegyei négyzetének összege.” – Mikor született az illető?
- E1 362.** Egy 60 km hosszú, kör alakú pályán egy kerékpáros indulás után $\frac{1}{2}$ órával az $\overline{AB}$ kilométerkő mellett haladt el. Újabb $\frac{1}{2}$ óra elteltével a $\overline{BA}$ kilométerkő mellett volt éppen ($B < A$). Mekkora a kerékpáros sebessége?
- E2 363.** Egy háromjegyű számhoz hozzáadtuk számjegyeinek összegét, s így egy olyan számot kaptunk, melynek minden számjegye egyenlő. Ezután az eredeti számból kivontuk számjegyeinek összegét, s ekkor is olyan számot kaptunk, melynek minden számjegye egyenlő. Mi volt az eredeti szám?
- E1 364.** Határozzuk meg az összes olyan természetes számot, mely egyenlő számjegyei összegének 11-szeresével.

Prímszámok. A számelmélet alaptétele

- K1 365.** Az alábbi természetes számok közül melyek a prímek?
2, 5, 7, 21, 41, 51, 77, 127, 361, 441, 891, 897, 1027, 1237, 1997, 1999, 2003, 2007, 5687, 7741, 12563, 14023, 26653.
- K2 366.** Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyre p , $p + 4$ és $p + 14$ számok mindegyike prímszám legyen.
- K2 367.** Bizonyítsuk be, hogy ha $2^k - 1$ prímszám ($k \in \mathbb{N}$), akkor k is prímszám.
- K1 368.** Bizonyítsuk be, hogy bármely prímszámot 30-cal elosztva, a maradék vagy 1 vagy prímszám.
- K1 369.** Jelöljük $p(n)$ az n -nél kisebb prímszámok számát. Mivel egyenlő $p(10)$, $p(20)$, $p(45)$, $p(50)$, $p(73)$.
- K1 K2 370.** Ha $p(n)$ jelöli az n -nél kisebb prímszámok számát, akkor $\frac{p(100)}{100}$ kisebb vagy nagyobb, mint $\frac{1}{4}$?

K1 K2 371. Ha p egy prímszám, akkor az alábbiak közül melyik lehet prímszám:
 $p + 3$, $p + 11$, $p + 13$, $p + 6$.

K2 372. Milyen p prímszámra teljesül, hogy $4p^4 + 1$ is prím?

K2 373. Bizonyítsuk be, hogy bármely 3-tól különböző prímszám négyzete 3-mal osztva csak 1 maradékot adhat.

K2 374. Milyen p prímszámra teljesül, hogy $8p^2 + 1$ is prím?

E1 375. Bizonyítsuk be, hogy bármely 3-nál nagyobb prím négyzete 24-gyel osztva 1 maradékot ad.

E1 376. Melyek azok a p, q, r prímszámok, amelyekre $p + q + r = 22$?

E1 377. Melyek azok a p, q, r prímszámok, amelyekre $p^2 + q^2 + r^2 = 134$?

E1 378. Nevezzük „Ikerprímeknek” az olyan prímszámpárokat, melyek között a különbség 2. (Ilyenek pl. a 11, 13, vagy 41, 43, stb.) Bizonyítsuk be, hogy bármely két, háromnál nagyobb ikerprímszám összege mindig osztható 12-vel.

E1 379. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan derékszögű háromszög, mely mindhárom oldalának mértéke egész szám, és befogói ikerprímek.

E1 380. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $2p - 1$ és $2p + 1$ ikerprímek?

E1 381. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 5-nél nagyobb ikerprímpár második tagjának 4-szereséből 1-et elveszünk, az eredmény nem lehet prímszám.

E1 382. Nevezzük „hármasier-prímeknek” az olyan prímszámhármasokat, melyek közül az első kettő is, és az utolsó kettő is ikerprím. Bizonyítsuk be, hogy a 3, 5, 7 számhármason kívül nem léteznek ilyen hármasierprímek.



E1 383. Lehet-e az 1-től 2004-ig terjedő egész számokat két csoportba osztani úgy, hogy minden szám valamelyik csoportban legyen, és az egyik csoportban levő számok szorzata egyenlő legyen a másik csoportban levő számok szorzatával?

E1 384. Mely p prímekre teljesül, hogy $p^4 + 4$ prímszám?

E1 385. Legyen p olyan prímszám, melyre $p^2 + p + 1$ és $p^2 - p + 1$ is prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ vagy prímszám, vagy négyzetszám.

E1 386. Hogyan lehetne az 1, 2, 3, 4,, 40 számokat olyan sorrendben leírni, hogy bármely két szomszédos tag összege prímszám legyen?

E2 387. Általánosítsuk az előző feladatot.

E1 388. Melyek azok a p prímek, amelyekre $4p + 1$ egy természetes szám köbével egyenlő?

E1 389. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan p prímszám, melyre $6p + 1$ egy természetes szám köbével egyenlő.

E1 390. Három különböző prímszámról a következőket tudjuk: összegük osztható 20-szal, a legnagyobb és a középső összege is, különbsége is 8-ra végződik; szorzatuk pedig kisebb 1000-nél. Melyek ezek a prímek?

E1 391. Melyek azok a 2000 és 3000 közé eső prímszámok, melyek utolsó két jegye egyenlő, továbbá egyetlen számjegye sem összetett és számjegyeinek összege egyjegyű prímszám?

K1 392. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyre a $\frac{p^2 - 1}{p - 1}$ tört értéke is prímszám.

E1 393. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $20^n - 6 \cdot 4^{n+1} + 5^n - 24$ kifejezés értéke egy prímszámmal egyenlő?

E1 394. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyre $8^p + p^2$ értéke ugyancsak prímszám.

E2 395. Határozzuk meg az összes olyan p, q, r különböző prímhármaszt, melyek reciprokai egy számtani sorozat egymást követő elemei.

E2 396. Legyen p egy prímszám. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre $\sqrt{\frac{n+p}{n-p}}$ kifejezés értéke egész szám.

E2 397. András és Béla már elmúltak 5 évesek, mindkettőjük életkora prím-szám. Ha András annyi idős lesz, mint Béla most, akkor Béla életkora ismét prím-szám lesz. Bizonyítsuk be, hogy amikor András született, Béla éveinek a száma osztható volt 6-tal.

K2 398. Öt db egymást követő pozitív egész szám közül a negyedik prím-szám. Bizonyítsuk be, hogy e számok szorzata osztható 240-nel.

K2 399. Bizonyítsuk be, hogy 12 db ötnél nem kisebb prímszám négyzetének összege osztható 12-vel.

E1 400. Egy háromjegyű prímszám minden számjegye 1-nél nagyobb négy-zetszám. E prímet megszoroztuk első számjegyével, majd az eredményhez hozzáadtuk a prím utolsó számjegyét. Mit kaptunk eredményül?

E1 401. Határozzuk meg azokat a p, q prímeket, melyekre $p + p^2 + p^3 + q + q^2 + q^3 = 2393$.

E2 402. Legyen p prímszám. Határozzuk meg az n természetes számot úgy, hogy az $x^2 - nx + p = 0$ egyenlet gyökei egész számok legyenek.

E2 403. Egy háromszög a, b, c oldalai egész számok, $c = p$ prímszám. Az a és b oldalakhoz tartozó magasságok összege egyenlő a c oldalhoz tartozó magassággal. Mekkora a háromszög oldalai?

E2 404. Melyek azok a p, q prímek, amelyekre $p^q + q^p$ szintén prím?

E2 405. Bizonyítsuk be, hogy bármely 5-nél nagyobb prímszámnak van olyan pozitív egész kitevőjű hatványa, melynek utolsó 3 számjegye: ...001.

E2 406. Legyenek p, q, r 2-nél nagyobb prímek.

Bizonyítsuk be, hogy a $px^2 + qx - r = 0$ egyenletnek nincs racionális gyöke.

K1 407. Bontsuk fel prímszámok szorzatára az alábbi természetes számokat.

a) 340; b) 2222; c) 6912; d) 1232; e) 3400; f) 4550;
g) 2004; h) 2005; i) 1234; j) 8505; k) 12465; l) 32316.

K1 K2 408. Határozzuk meg $10!$ prímtényezős felbontását.

K1 K2 409. Hogyan dönthető el egy természetes szám prímtényezős felbontásából, hogy e szám osztható 8-cal, illetve 9-cel?

K1 410. Hogyan dönthető el egy természetes szám prímtényezős felbontásából, hogy e szám négyzetszám?

K1 411. Igaz-e, hogy ha egy n természetes szám osztója a k^2 négyzetszámnak, akkor n osztója k -nak is?

K1 412. Az A és B számok prímtényezős felbontása:

$$A = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^4, \quad B = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 13.$$

Adjuk meg $A \cdot B$ prímtényezős felbontását.

K2 413. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 4410-et megszorozva négyzetszámot kapunk? Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 4410-t elosztva 1-nél nagyobb négyzetszámot kapunk?

K2 414. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 360-t megszorozva köbszámot kapunk? Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 360-t elosztva 1-nél nagyobb köbszámot kapunk?

E1 415. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt. Igaz-e, hogy a négyzetekben szereplő számjegyek összege prímszám?

Vízs.: 1. 20-nál kisebb prímszám, mely jegyeinek összege köbszám.

4. Azonos számjegyek.

Függ.: 2. Középső jegye a két szélsőnek számtani közepe.

3. Prímszám, mely jegyeinek összege 5, szorzata négyzetszám.

415. ábra

	1	2
3		
4		

416. ábra

1		2
3		

417. ábra

	1	2	3
4		5	
6	7		
8			

E1 416. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt. Igaz-e, hogy a négyzetekben szereplő számjegyek összege prímszám?

Vízs. 1. Olyan 200-nál kisebb prímszám, mely jegyeinek összege is, szorzata is prímszám.

3. Második jegye az elsőnek harmada.

Függ. 1. Egy prímszám négyzete.

2. Egy 4-nél nagyobb szám négyzete.

E2 417. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt. Adjuk meg a négyzetekben szereplő számjegyek szorzatának prímtényezős felbontását.

Vízs. 1. A 140 prímtényezős felbontásában szereplő különböző prímek növekvő sorrendben.

5. Prímszám, mely jegyeinek összege köb-szám.

6. Négyzetszám.

8. 9-cel osztható.

Függ. 2. Azonos számjegyek.

3. „Palindromszám”, azaz visszafelé olvasva ugyanazt a számot kapjuk.

4. A függőleges 2. 13-szorosa.

7. 9-cel osztható.

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma

K2 418. Határozzuk meg a következő számpárok legnagyobb közös osztóját:

- a) 55; 75, b) 125; 225, c) 36; 96, d) 128; 512,
e) 336; 180, f) 567; 1053, g) 629; 799, h) 840; 1560,
i) 1024; 400, j) 2025; 750, k) 4900; 126, l) 3660; 1999.

K2 419. Az alábbi kifejezésekben különböző betűk különböző prímszámokat jelölnek. Határozzuk meg az alábbi kifejezések legnagyobb közös osztóját:

- a) $p^3 q^2$; $p q^4$, b) $p q r^3$; $p^3 q^2 r$, c) $k l^3 m^2$; $l^4 m t^2$,
d) $x^3 y p^2 q$; $x y^4 s^2 q^3$, e) $x^7 y p^2$; $x^9 y^3 q$, f) $k^2 m^3 s^3 t$; $k m^4 s^3 q^2$.

K2 420. Legyenek $A = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, $B = 2 \cdot 5^4 \cdot 11$,
 $C = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 13$, $D = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 17$.

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:

- a) $(AB; C)$, b) $(A; BC)$, c) $(ABC; D)$,
d) $(AD; BC)$, e) $(BCD; AD)$, f) $(AC; BD)$,
g) $((A; B); C)$, h) $((B; C); (A; D))$, i) $((A; C); BD)$.

K1 K2 421. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis? (A hamis állításokra adjunk egy-egy ellenpéldát.

1. Két szám legnagyobb közös osztója kisebb mindkét számnál.
2. Két szám legnagyobb közös osztója kisebb a nagyobbik számnál.
3. Két szám legnagyobb közös osztója nem lehet nagyobb a kisebbik számnál.
4. Két szám legnagyobb közös osztója egyenlő lehet a kisebbik számmal.
5. Ha a és b relatív prímek, b és c is relatív prímek, akkor a és c is relatív prímek.
6. Ha $(a; b) = d > 1$, $(b; c) = k > 1$, akkor $(a; c) \neq 1$.
7. Két szomszédos egész szám mindig relatív prím.
8. Ha két szám között a különbség 2, akkor relatív prímek.
9. Ha $(a; b) = 1$, akkor bármely k pozitív egészre $(a; kb) = 1$.
10. Ha $(a; b) = d > 1$, akkor $\left(\frac{a}{b}; \frac{b}{d} = 1\right)$.

K1 422. Az alábbi számok közül, melyek a relatív prímpárok?

5, 9, 10, 15, 21, 24, 35, 42, 55, 60, 72, 75, 102, 120, 150, 215.

K2 423. Legyenek a és b relatív prímek. Mivel egyenlő $(a + b; a - b)$?

K2 424. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b relatív prímek, akkor

- a) $(a; a + b) = 1$, b) $(a; b^2) = 1$, c) $(a + b; b^2) = 1$,
d) $(b; b - a) = 1$, e) $(a^2; a - b^2) = 1$.

K2 425. Az alábbi törtokről tudjuk, hogy egyszerűsíthetők. Mivel egyszerűsíthetők e törték?

- a) $\frac{n+1}{n-1}$; b) $\frac{n+3}{n-2}$; c) $\frac{2n+1}{n+3}$; d) $\frac{3n-1}{2n+4}$.

K2 426. Legyenek n és k olyan természetes számok, amelyekre $(n; 4) = 2$ és $(k; 4) = 2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(n + k; 4) = 4$.

E1 427. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n esetén $(2^n + 1; 2^n - 1) = 1$.

E1 428. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n esetén $(2^n + 1; 4^n + 1) = 1$.

E1 429. Melyek azok a kétjegyű egész számok, amelyeket 9-cel osztva a hányados h , a maradék m , és 5-tel osztva a hányados m , a maradék h ?

E1 430. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyeket 19-cel osztva a hányados p , a maradék q , 11-gyel osztva a hányados q , a maradék p ?

E1 431. Tudjuk, hogy az $\frac{m}{n}$ tört nem egyszerűsíthető, de a $\frac{3n-m}{5n+2m}$ tört igen. Mivel egyszerűsíthető ez utóbbi tört?

E1 432. Mivel egyszerűsíthető a $\frac{11m+2k}{18m+5k}$ tört, ha $(m; k) = 1$?

E1 433. Van-e olyan n természetes szám, melyre a $\frac{3n+2}{4n+1}$ egyszerűsíthető?

E1 434. Van-e olyan n természetes szám, melyre a $\frac{2n-5}{3n-7}$ egyszerűsíthető?

E1 435. Az $f_0 = f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ módon definiált számsorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy a Fibonacci-sorozat bármely két szomszédos eleme relatív prím.

E1 436. Definiáljuk az alábbi számsorozatot:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \text{ és } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Igaz-e, hogy az így definiált számsorozatnak bármely két szomszédos eleme relatív prím?

E1 437. Definiáljuk az alábbi számsorozatot:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1 \text{ és } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5}.$$

Igaz-e, hogy az így definiált számsorozatnak bármely két szomszédos eleme relatív prím?

K2 438. Határozzuk meg az alábbi számhármak legnagyobb közös osztóját (az egyes kifejezésekben szereplő betűk egy-egy prímszámot jelölnek).

- | | | |
|--------------------------------|--|-----------------------------------|
| a) $(24; 45; 55)$, | b) $(100; 325; 725)$, | c) $(30; 75; 630)$, |
| d) $(17; 34; 263)$, | e) $(187; 323; 391)$, | f) $(1230; 133; 56)$, |
| g) $(p^3 q; p q^2; p q r^2)$, | h) $(k^4 r^2 m; k^2 r^4 s; k r^3 m^2 t^2)$, | i) $(xy^4; x^2 y^2; x^2 y p q)$. |

K2 439. Igazak-e az alábbi állítások?

- Ha $(a; b) = 1$, $(b; c) = 1$ és $(a; c) = 1$, akkor $(a; b; c) = 1$.
- Ha $(a; b) = d > 1$, $(b; c) = k > 1$ és $(a; c) = r > 1$, $(a; b; c) \neq 1$.
- Ha $(a; b; c) = d > 1$, $(a; b) = r$, akkor $d \mid r$.
- Ha $d \mid a$, $d \mid b$ és $d \mid c$, akkor $d \mid (a; b; c)$.

K2 440. Adjunk meg négy számot úgy, hogy relatív prímek legyenek, de páronként ne legyenek relatív prímek (azaz, bármely kettőnek legyen 1-nél nagyobb közös osztója).

E1 441. Adjunk meg k darab számot úgy, hogy relatív prímek legyenek, de páronként ne legyenek relatív prímek (azaz, bármely kettőnek legyen 1-nél nagyobb közös osztója).

K1 K2 442. Határozzuk meg a következő számpárok (kifejezések) legkisebb közös többszörösét. (Az egyes kifejezésekben szereplő betűk egy-egy prímszámot jelölnek.)

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| a) 8; 28, | b) 45; 150, | c) 105; 180, |
| d) 348; 476, | e) 475; 570, | f) 1840; 3400, |
| g) $p^2 q; p q r$, | h) $a^2 b^2 c; a^3 b d^2$, | i) $k m^2 n^5; k^2 l^2 m^3$, |
| j) $x^3 y p^2 q; x y^4 s^2 q^3$, | k) $x^7 y p^2; x^9 y^3 q$, | l) $k^2 m^3 s^2 t; k m^4 s^3 q^2$. |

K1 443. A következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis? Két szám legkisebb közös többszöröse mindig

1. Mindkét számnál nagyobb.
2. Legalább akkora, mint a nagyobbik szám.
3. Nagyobb, mint a két szám legnagyobb közös osztója.



4. Kisebb, mint a két szám szorzata.
5. Legalább akkora, mint a két szám szorzata.
6. Ha a két szám relatív prím, akkor egyenlő a két szám szorzatával.
7. Ha a két szám nem relatív prím, akkor kisebb, mint a két szám szorzata.
8. Mindig osztható a két szám legnagyobb közös osztójával.
9. Legalább akkora, mint a legnagyobb közös osztó.
10. Ha a két szám nem egyenlő, akkor nagyobb a nagyobbik számnál.

K2 444. Mely k pozitív egész számra teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

- a) $[123; 126] = k$; b) $(k; 8) = 80$; c) $[k; 16] = 48$;
 d) $(k; 60) = 15$; e) $[k; 60] = 540$; f) $[k; 21] = 3k$.

K2 445. Milyen n és k pozitív egészekre teljesülnek az alábbiak?

- a) $(n; k) = 13$ és $[n; k] = 2002$; b) $(n; k) = 26$ és $[n; k] = 4784$;
 c) $[n; k] = 360$ és $n + k = 98$; d) $(n; k) = p$ és $[n; k] = pq^2$ (p és q príme).

K2 446. Legyenek

$$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2, \quad B = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13, \quad C = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 19, \quad D = 2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 17.$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét.

- a) $[(A; B); B]$; b) $[[[(A; B); C]]$; c) $[[[(B; D)]; (A; B)]]$;
 d) $[(A; B; C); [A; D]]$; e) $((A; B); [C; D])$; f) $[(A; B; C); (A; B; D)]$.

E1 447. Melyik az a legkisebb 1-nél nagyobb pozitív egész szám, mely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal és 7-tel osztva egyaránt 1 maradékot kapunk?

E1 448. Melyik az a háromjegyű szám, amelyből 6-t elvéve 7-tel osztható, 7-t elvéve 8-cal osztható, 8-t elvéve 9-cel osztható számot kapunk?

K1 K2 449. Egy országút egyik oldalát fasor szegélyezi. A fák 12 méterenként állnak. Az út másik oldalán táviróoszlopok sorakoznak 40 méterenként. Egy bizonyos helyen az út két oldalán egymással szemben áll egy fa és egy oszlop. Milyen távolságban lesz legközelebb egymással szemben egy fa és egy oszlop?

E1 450. Melyek azok a k, l, m természetes számok, amelyekre $[k; l; m] = 60984$, $88k = 9l$ és $11m = 2k$.

E1 451. Az A és B helységek közötti távolság $\frac{1}{4}$ részét egy kerékpáros 1 óra alatt tette meg, a hátralevő utat pedig 4 óra alatt. Sebességének mérőszáma (km/órában mérve) mindkét szakaszon egész szám. Mekkora az AB távolság, ha a sebességek legkisebb közös többszöröse 72 km/óra?

E1 452. Mivel egyenlő $(3960; A)$ és $[3960; A]$, ahol A az alábbi keresztretjévény négyzeteiben szereplő számjegyek szorzata?

Vízs.: 1. A és B legnagyobb közös osztójának és C -nek legkisebb közös többszöröse, ahol $A = 72$, $B = 108$, $C = 18$.

3. A vízsz. 1. 21-szerese.

Függ.: 1. Három olyan prímszám, melyek egy $d = 2$ differenciájú növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai.

2. Negyedik hatvány.

452. ábra

1		
		2
3		

453. ábra

	1	2	3
4		5	
6	7		
8			

E1 453. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt.
Vízzs.: 1. 110 és 120 közé eső prímszám.

5. Az első számjegye a második $\frac{2}{3}$ -a.

6. a és b , ahol $a < b$ és $(a; b) = 4$, $[a; b] = 84$.

8. A 40 és 50 közé eső legkisebb és legnagyobb prímszám.

Függ.: 2. Négyzetszám.

3. (396; 252).

4. Négyzetszám.

7. Négyzetszám.

K1 454. Legyen $d = d(n)$ a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény, mely minden n pozitív egész számhoz hozzárendeli a pozitív osztóinak a számát. Mivel egyenlő

a) $d(1)$;

b) $d(4)$;

c) $d(10)$;

d) $d(12)$;

e) $d(24)$;

f) $d(32)$;

g) $d(100)$;

h) $d(93)$.

E2 455. Bizonyítsuk be, hogy ha az N természetes szám prímtenyezős felbontása:

$$N = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \text{ akkor } d(N) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \dots (k_r + 1).$$

K1 K2 456. Az előző feladatban kapott eredmény alapján határozza meg az alábbi számok osztóinak a számát!

a) 125;

b) 360;

c) 1024;

d) 400;

e) 625;

f) 10 000.

K2 457. Melyek azok a számok, amelyek osztóinak a száma páros, és melyek azok, amelyek osztóinak a száma páratlan?

K2 458. Adjunk meg három-három olyan természetes számot, melyek osztóinak a száma

a) 3;

b) 4;

c) 12;

d) 8;

e) 20;

f) 16.

K2 459. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, mely osztóinak a száma

a) 3;

b) 5;

c) 6;

d) 8;

e) 10;

f) 12.

E1 460. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, mely osztható 42-vel és pontosan 42 osztója van.

K2 461. Az alábbi számok közül melyek a négyzetszámok (a kifejezésekben szereplő betűk egy-egy prímszámot jelölnek)?

a) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$;

b) $2^6 \cdot 5^4 \cdot 11^{10}$;

c) $5^6 \cdot 7^8 \cdot 11^{13}$;

d) $p^4 \cdot q^6 \cdot r^2$;

e) $p^6 \cdot q^7 \cdot r^{12}$;

f) $p^2 \cdot q^3 \cdot r^4$.

K2 462. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, mellyel az alábbi számot meg kell szoroznunk, hogy négyzetszámot kapjunk:

a) 364;

b) 128;

c) 2;

d) 5544;

e) 12 600.

K2 463. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, mellyel az alábbi számot meg kell szoroznunk, hogy egy szám köbét kapjuk:

a) 72;

b) 664;

c) 1080;

d) 10 000;

e) $2 \cdot p^4 \cdot q^3$.

E1 464. Egy természetes számnak 5 osztója van. Lehet-e ez a szám osztható 6-tal?

K2 465. Legyen $A = 3^x \cdot 5^2 \cdot 7$ és $B = 2^y \cdot 3^2 \cdot 7^3$. Tudjuk, hogy A -nak 24, B -nek pedig 60 osztója van. Hány osztója van $A \cdot B$ -nek?

E1 466. Bizonyítsuk be, hogy ha egy természetes szám osztóinak a száma 6, akkor ez a szám nem lehet 105-tel osztható.

E1 467. Valamely N természetes számra $d(d(N)) = 3$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor N nem lehet osztható 30-cal.

E2 468. Az N természetes szám prímtényezői alakja: $N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$. Tudjuk, hogy az N háromszorosának 15-tel, négyszeresének pedig 24-gyel több osztója van, mint N -nek. Melyik az ez N szám?

E1 469. Legyen n egy pozitív egész szám, és jelölje $p(n)$ az alábbi egyenlet (x, y) megoldásainak a számát:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \quad (x, y \in \mathbb{N}).$$

(pl. ha $n = 2$, akkor a megoldások: $(3; 6)$, $(6; 3)$, $(4; 4)$, tehát $p(2) = 3$).

a) Mivel egyenlő $p(2005)$? b) Milyen n -re lesz $p(n) = 2005$?

E1 470. Hány megoldása van az alábbi egyenletnek a pozitív egész számok halmazán:

a) $n^2 - k^2 = 12$; b) $n^2 - k^2 = 36$;

c) $n^2 - k^2 = 72$; d) $n^2 - k^2 = p$ ($p > 2$ prímszám);

e) $n^2 - k^2 = 3p^2$ ($p > 2$ prímszám).

E1 471. Hány osztója van az alábbi keresztretjévi négyzeteiben szereplő számjegyek összegének?

Vízzs.: 1. $d(144)$.

3. Visszafelé $d\left(\frac{10!}{7}\right) + 1$.

6. Számjegyeinek összege 5.

7. 9-cel osztható szám.

Függ.: 1. $[d(d(45^2))]^2$.

2. Palindron-szám. (Visszafelé olvasva ugyanazt a számot kapjuk.)

4. Négyzetszám.

5. $S(12)$.

E1 472. Hány osztója van az alábbi keresztretjévi négyzeteiben szereplő számjegyek szorzatának?

Vízzs.: 1. Köbszám fordítva.

4. Palindron-szám; első két jegye kétjegyű négyzetszám.

7. A vízsz. 4. számjegyei valamilyen sorrendben.

Függ.: 2. $[d(36)]^4$.

3. A legkisebb tökéletes szám köbe.

5. Prímszám.

6. A házszámunk.

Legyen $S = S(n)$ a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény, mely minden n egész számhoz hozzárendeli osztóinak az összegét.

471. ábra

	1	2	
	3		4
5		6	
7			

472. ábra

	1	2	
3			
4	5		6
7			

K1 473 Határozzuk meg az alábbi értékeket (az egyes kifejezésekben szereplő betűk egy-egy prímszámot jelölnek).

- a) $S(1)$; b) $S(5)$; c) $S(10)$; d) $S(24)$;
 e) $S(100)$; f) $S(128)$; g) $S(640)$; h) $S(p)$;
 i) $S(p \cdot q)$; j) $S(p \cdot q^3)$; k) $S(p^2 \cdot q^3)$; l) $S(p^k \cdot q^n)$.

K2 474. Bizonyítsuk be, hogy

$$a) S(2^3 \cdot 3^2) = S(2^3) \cdot S(3^2); \quad b) S(2^n \cdot 3^k) = S(2^n) \cdot S(3^k).$$

E1 475. Bizonyítsuk be, hogy $S(p^k \cdot q^n) = S(p^k) \cdot S(q^n)$.

Nevezzük „tökéletes” számnak azokat a természetes számokat, melyek osztóinak összege egyenlő a kérdéses szám kétszeresével, azaz melyekre $S(n) = 2n$. (Ilyen pl. a 6, hiszen $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 2 \cdot 6$.)

K2 476. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi számok tökéletes számok:

- a) 28; b) 496; c) 8128.

E1 477. Bizonyítsuk be, hogy prímszám nem lehet tökéletes szám.

E1 478. Legyen k olyan pozitív egész, melyre $2^{k+1} - 1$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $2^k(2^{k+1} - 1)$ tökéletes szám.

E2 479. Bizonyítsuk be, hogy bármely $2^k(2^{k+1} - 1)$ alakú tökéletes szám (ahol $2^{k+1} - 1 = p$ prím) osztói reciprokának összege mindig 2.

K2 480. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{S(672)}{672} = 3$.

K2 481. Számítsuk ki $S(220) - 220$ és $S(284) - 284$ értékét. Milyen érdekességet tapasztal?

K2 482. Az előző feladatban szereplő két számra igaz: 220 nála kisebb osztóinak összege 284 és 284 nála kisebb osztóinak összege 220. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező számpárokat „barátságos számok”-nak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az 1184 és az 1210 szintén barátságos számok.

Diofantoszi problémák, diofantoszi egyenletek

K1 K2 483. Hány megoldása van az egész számok halmazán az $n + k = 12$ egyenletnek? Hogyan változik a megoldások száma, ha a természetes számok halmazán keressük a megoldásokat? Hogyan változik a megoldások száma, ha azt is kikötjük, hogy $n \neq k$?

K1 K2 484. Három különböző pozitív páratlan szám összege 15. Melyek lehetnek ezek a számok? Hogyan változik a feladat megoldása, ha nem kötjük ki azt, hogy e számok különbözők?

K1 K2 485. Három különböző pozitív páros szám összege 22. Melyek ezek a számok?

K2 486. Melyek azok a 3-mal osztható pozitív egész számok, amelyek 7-tel osztva 2-t adnak maradékul?

K2 487. Melyek azok a természetes számok, amelyek 3-mal osztva 2-t, 5-tel osztva 3-t adnak maradékul?

K2 488. Melyek azok a természetes számok, amelyek 7-tel osztva 5-t, 6-tal osztva 3-t adnak maradékul?

K2 489. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az alábbi egyenleteket.

- a) $2n + 3k = 21$; b) $5n + 7k = 40$; c) $10n + 7k = 84$;
d) $5p + 3q = 39$; e) $2k + 3m = 60$; f) $7x + 10y + 5z = 55$.

K1 K2 490. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, ahol p , q , r különböző prím-számok.

- a) $p + q = 19$; b) $p + q + r = 26$; c) $2p + q = 28$;
d) $3p + 4q = 41$; e) $p + q + 3r = 22$; f) $p + p^2 = 131$.

K1 K2 491. Egy farmon, ahol több ló van, mint kacsá, a tehenek száma a lovak és kacsák összegének a harmada. A lovak és kacsák összes fejének és lábainak a száma 100. Hány tehen van a farmon?

E1 492. Az Állatiskola Sárkányosztályába 4 és 5 fejű sárkányok járnak. Egy négyfejű sárkánynak kétszer annyi négyfejű osztálytársa van, mint ötfejű, és a négyfejűek összes fejének a száma 1-gyel nagyobb, mint a háromfejűek összes fejének a száma. Hány 3, 4 és 5 fejű sárkány jár ebbe az osztályba, ha összes fejek száma nem több, mint 132?

E1 493. Egy háromszög oldalainak mértéke prímszámok. A háromszög kerülete 4000. Mekkora a háromszög oldalai?

K2 494. Öt db egymás utáni pozitív egész szám közül az első 3 négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő négyzetének összegével. Melyek ezek a számok?

K2 495. Hét db egymás utáni pozitív egész szám közül az első 4 négyzetének összege egyenlő az utolsó három négyzetének összegével. Melyek ezek a számok?

E1 496. Általánosítsuk az előző két feladatot.

E1 497. Keressünk négy db olyan egymást követő pozitív egész számot, melyek közül az első három köbének összege egyenlő a negyedik köbével.

E1 498. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az alábbi egyenleteket ($n \neq k$).

- a) $k^3 + 7n = n^3 + 7k$; b) $k^4 + 9n^2 = n^4 + 9k^2$.

E1 499. Található-e olyan derékszögű háromszög, melynek minden oldala páratlan egész szám?

K2 500. Van-e olyan derékszögű háromszög, melynek oldalai egész számok, és két oldala páratlan, egy oldala pedig páros?

K2 501. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, akkor nem lehet mindkét befogója páratlan.

E1 502. Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor valamelyik oldala osztható 5-tel.

K2 503. Bizonyítsuk be, hogy, ha $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$, akkor $x^2 + y^2 = z^2$.

E1 504. Figyeljük meg az alábbi Pitagoraszai számhármassokat:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 7^2 + 24^2 = 25^2, \quad 9^2 + 40^2 = 41^2.$$

Milyen sejtés olvasható ki e példákból? Keressünk hasonló szerkezetű Pitagoraszai számhármassokat.

K2 505. Figyeljük meg az alábbi Pitagoraszai számhármassokat:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 20^2 + 21^2 = 29^2, \quad 119^2 + 120^2 = 169^2.$$

Bizonyítsa be, hogy ha

$$n^2 + (n+1)^2 = k^2, \text{ akkor } (3n+2k+1)^2 + (3n+2k+2)^2 = (4n+3k+2)^2.$$

Ennek alapján „gyártsunk” hasonló szerkezetű Pitagoraszai számhármassokat.

E1 506. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán.

a) $xy + x + y = 11$;

b) $ab + a + b = 13$;

c) $kn + k + n = 20$;

d) $xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 15$.

E1 507. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán.

a) $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{5}$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$;

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{13}$;

d) $\frac{1}{n} + \frac{2}{k} = \frac{1}{11}$;

e) $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{5}$;

f) $\frac{1}{a} + \frac{5}{b} = \frac{1}{7}$.

E1 508. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán.

a) $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{2}{7}$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{11}$;

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{19}$.

K2 E1 509. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán.

a) $ab + 2a + 3b = 22$;

b) $xy - 2x + 3y = 17$;

c) $kn - 4k + 5n = 30$.

E1 510. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 6-tal nagyobbak, mint számjegyeik szorzatának és összegének az összege?

E1 511. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 8-cal nagyobbak, mint számjegyeik szorzatának és összegének az összege?

E1 512. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 22-vel nagyobbak, mint számjegyeik szorzatának és összegének a különbsége?

E1 513. Két természetes szám szorzatának, összegének, különbségének és hányadosának az összege 26. Melyek ezek a számok?

E1 514. Két természetes szám szorzatának, összegének, különbségének és hányadosának az összege 72. Melyek ezek a számok?

E1 515. Egy tál süteményt szeretnénk feldarabolni a téglalap alakú tepsi oldalával párhuzamos vágásokkal úgy, hogy szeletelés után a tepsi szélével érintkező (kicsit égett) sütemények száma egyenlő legyen a tepsi szélével nem érintkező sütemények számával. Hogyan tehetjük ezt meg?

E1 516. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a pozitív egész számok halmazán.

a) $x^2 + 6x + y = 20$;

b) $a^2 + b^2 + 8a + 2b = 44$;

c) $k^2 + 3k + 2n = 20$;

d) $p^3 + 12q - p = 2006$;

e) $2x^2 + y^2 + 4x + y = 2005$;

f) $ab^2 + 2ab + a - 75b = 0$.

Számrendszerek

K1 517. Bináriában kilenc pénzérme van forgalomban: 1 beuro, 1 pengő, 1 tallér, 1 pityke, 1 garas, 1 krajcár, 1 peták, 1 fabatka, 1 bitu. 1 beuro = 2 pengő, 1 pengő = 2 tallér, 1 tallér = 2 pityke, ..., 1 fabatka = 2 bitu.

a) Hány bitut ér 1 beuro?

b) Hány bitut ér egy teljes érmesorozat? (1 beuro + 1 pengő + ... + 1 fabatka + 1 bitu)

c) Hányféleképpen lehet kifizetni egy 10 bitus csokoládét?

d) A lehető legkevesebb érmével szeretnénk kifizetni 10 bitut. Milyen érméket használjunk?

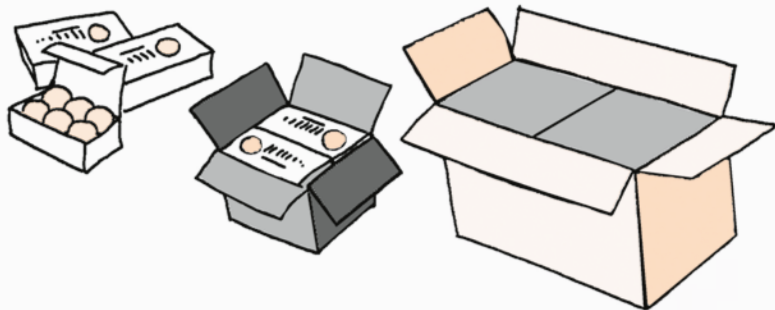
e) A lehető legkevesebb érmével szeretnénk kifizetni 100 bitut. Milyen érméket használjunk?

f) A lehető legkevesebb érmével szeretnénk kifizetni 500 bitut. Milyen érméket használjunk?

K2 518. Egy sportszergyártó cég a pingponglabdák csomagolására az alábbi szabványt tartja a legjobbnak:

- a pingponglabdákat hatosával csomagolják kis fehér dobozokba;
- hat fehér dobozt egy kék dobozba tesznek;
- hat kék dobozt beraknak egy nagyobb zöld dobozba;
- hat zöld dobozt egy nagy sárga tartóba pakolnak;
- hat sárga tartót egy óriási piros dobozba csomagolnak.

Hogyan lehet a szabványokat betartva 10 000 pingponglabdát becsomagolni? Lesz-e kimaradó labda? Melyik dobozból hányat látunk a csomagolás végén?



E1 E2 519. *a)* A lehető legkevesebb mérő súly segítségével szeretnénk lemérni egész kilogramm tömegű, 100 kg-nál nem nehezebb tárgyakat. Használhatunk egy kétkarú mérleget, melynek az egyik serpenyőjébe tesszük a megmérendő tárgyat, a másikba pedig a mérő súlyokat. Milyen mérő súlyokat használjunk? (Olyan súlykészletre van szükség, hogy minden esetre felkészülve az összes tárgy lemérhető legyen.)

b) Milyen súlyokat használjunk akkor, ha a mérleg mindkét serpenyőjébe tehetjük őket?

K1 520. Írjuk fel a következő számokat 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös és 12-es számrendszerben.

a) 12; *b)* 64; *c)* 100; *d)* 128; *e)* 321; *f)* 1000.

K1 521. Írjuk fel 10-es számrendszerben az alábbi számokat. (B a 11-es, F a 15-ös számjegyet jelöli a 16-os számrendszerben.)

a) $1000_2, 10101_2, 1111_2$;

b) $1000_4, 1203_4, 13231_4$;

c) $303_6, 452_6, 1204_6$;

d) $162_{16}, 1000_{16}, B6F_{16}$;

e) $1, 1_2, 0,01_2, 10, 11_2, 231, 2_3, 30, 32_4$.

K2 522. Írjuk fel az A számot az 5-ös számrendszerben.

$$A = 3 + 5 \cdot (1 + 5 \cdot [2 + 5 \cdot \{3 + 5 \cdot (2 + 5 \cdot 1)\}]).$$

K1 523. *a)* Írjuk fel a következő számokat hármass számrendszerben.

$$137; \quad 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1; \quad 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 5.$$

b) Írjuk fel a következő számokat kilences számrendszerben.

$$100; \quad 5 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^4 + 2 \cdot 9 + 7 \cdot 9^3 + 6; \quad 21\,021\,101_3.$$

c) Írjuk fel a következő számokat kettes számrendszerben.

$$112_3; \quad 2011_4; \quad 4215_6; \quad 111\,111_4.$$

K1 524. *a)* Hány legfeljebb hatjegyű pozitív egész szám van a 2-es számrendszerben?

b) Hány legalább háromjegyű, de legfeljebb hatjegyű pozitív egész szám van a hatos számrendszerben?

K2 525. *a)* Az 34_6 szám melyik számrendszerben írható 20_x alakban?

b) Az 1034_5 szám melyik számrendszerben írható 100_x alakban?

c) Az 1101110_2 szám melyik számrendszerben írható 110_x alakban?

d) Az 354_{10} szám melyik számrendszerben írható le 542_x alakban?

E1 526. *a)* Igaz-e, hogy minden pozitív egész szám előállítható a 2 különböző nemnegatív egész kitevőjű hatványainak összegeként?

b) Igaz-e, hogy minden pozitív egész szám előállítható a 3 különböző nemnegatív egész kitevőjű hatványainak összegeként?

c) Igaz-e, hogy az első 20 000 pozitív egész szám kevesebb, mint 3 %-a állítható elő különböző nemnegatív egész kitevőjű 3-hatványok összegeként?

K1 527. Írjuk fel nagyság szerint növekvő sorrendben a következő számokat!
 101_2 ; 101_3 ; 20_4 ; 10_8 ; 10_9 .

K1 528. Melyik szám a nagyobb? Mennyivel?

a) 7^7 vagy $6 \cdot 7^6 + 6 \cdot 7^5 + 6 \cdot 7^4 + 6 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6$;

b) 10000000_6 vagy 5555443_6 .

K2 529. Tudjuk, hogy $0 < a < b < c < d < 7$. Írjuk fel nagyság szerint növekvő sorrendben a következő számokat.

cd_9 ; $abcd_8$; $a0c_7$; ddd_8 ; dcc_9 ; bc_8 ; $acdb_8$.

K2 530. Az 1_2 -től kezdve leírtuk minden harmadik 2-es számrendszerbeli egész számot: 1_2 , 100_2 , 111_2 , ... Melyik a 20. leírt szám?

K2 531. Mennyi az első 20 kettes számrendszerbeli pozitív egész szám összege kettes számrendszerben felírva?

K1 532.

a) Írjuk fel az 11011011_2 -nél 1-gyel nagyobb számot.

b) Írjuk fel az 11011011_2 -nél 101_2 -gyel nagyobb számot.

c) Írjuk fel az 11011011_2 kétszeresét.

d) Írjuk fel az 11011011_2 négyszeresét.

K2 533. Végezzük el a következő műveleteket.

a) $34_5 + 100_5 + 4000_5$;

b) $2323_7 + 4344_7$;

c) $164225_9 - 34112_9$;

d) $45210_8 - 14401_8$;

e) $11110_2 + 11101_2 + 11011_2 + 10111_2$;

f) $230_4 \cdot 120_4$;

g) $220330_8 : 14_8$.

K2 534 a) Milyen alapú számrendszerben igazak a következő hiányos számolások? (Pótoljuk a hiányzó számjegyeket.)

$11_x + a1_x = 110_x$; $a2_x + 1b4_x = 211_x$; $4a21_x - 13b_x = c160_x$.

b) Milyen alapú számrendszerben igazak a következő számolások?

$8_x \cdot 8_x = 54_x$; $32_x \cdot 5_x = 202_x$; $13_x \cdot 13_x = 301_x$.

K1 535. Melyik számolás helyes az alábbiak közül?

$12 \cdot 21 = 252$; $12_9 \cdot 21_9 = 252_9$; $12_8 \cdot 21_8 = 252_8$.

K1 536. Melyik szám a nagyobb: az $101_2 \cdot 11_2$ vagy az $111_2 \cdot 10_2$?

K1 537. Végezzük el a következő műveleteket.

a) $123 \cdot 10$; b) $123_4 \cdot 10_4$; c) $123_5 \cdot 100_5$; d) $35_7 \cdot 101_7$; e) $123_6 \cdot 1001_6$.

K1 538. a) Legfeljebb hány jegyű szám lehet két háromjegyű pozitív szám összege a 6-os számrendszerben?

b) Legfeljebb hány jegyű szám lehet két háromjegyű pozitív szám szorzata a 6-os számrendszerben?

K1 539. Egy szám négyzetét számoltuk ki a 8-as számrendszerben. (Különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)

$$\begin{array}{r} ABC \cdot ABC \\ B \cdot D \\ E \cdot C \\ \hline A \cdot D \\ \hline \end{array}$$

Melyik ez a szám?

E1 540. Páros vagy páratlan? Döntsük el minél kevesebb számolással.

a) 123_4 ; 111111_2 ; 111111_3 ; 2010_4 ; 1010101010_5 ; 8652076_9 ;

121010011212_4 .

b) Melyek a páros számok a 2-es, a 3-as, a 4-es, és az 5-ös számrendszerben?

K2 541. Válasszuk ki a páros számokat?

4210_6 ; $1\ 101\ 101_5$; $1\ 234\ 567_8$; 1357_9 ; $12\ 345_7$; $23\ 210\ 312\ 341\ 523_9$.

E1 542. Milyen maradékot adhat 2-vel osztva az alábbi három szám?

a) xyy_7 ; b) xyx_7 ; c) $xxyy_7$.

E1 543. Ha $aaabb_5$ páros szám és $aabbb_5$ páratlan szám, akkor $aaabbb_5$ páros vagy páratlan szám?

E1 544. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan alapú számrendszerben felírt egész szám akkor és csak akkor páratlan, ha páratlan sok páratlan számjegyet tartalmaz.

K2 545. Igaz-e, hogy minden $abab_3$ alakú szám a tízes számrendszerben felírva 0-ra végződik?

E1 546. a) Mely számmal osztható az a 8-as számrendszerben felírt szám, ami 4-re végződik?

b) Mely számmal osztható az a 12-es számrendszerben felírt szám, ami 6-ra végződik?

c) Mely számmal osztható az a 6-os számrendszerben felírt szám, ami 3-ra végződik?

E1 547. Válasszuk ki az alábbi számok közül a nyolccal oszthatókat.

10113_4 ; 2212_4 ; 3304_4 ; 123020_4 ; 210332_4 ; 221200_4 .

Fogalmazzuk meg a 8-cal oszthatóság szabályát a 4-es számrendszerben.

E1 548. Ha egy szám 5-re vagy 6-ra végződik valamely n -alapú számrendszerben, akkor nem tudjuk eldönteni, hogy a szám összetett szám-e, vagy sem. Tudjuk, hogy a számrendszer alapszáma 13-nál kisebb. Melyik lehet ez a számrendszer?

E2 549. a) Tíz-es számrendszerben egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható kilencel. Miért helyes ez a szabály?

b) Tíz-es számrendszerben egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható hárommal. Miért helyes ez a szabály?

c) Kilences számrendszerben mely számmal való oszthatóságról árulkodik a számjegyek összege?

E2 550. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hetes számrendszerben felírt szám számjegyeinek összege 18, akkor a szám osztható 6-tal.

K2 551. Pótoljuk a hiányzó számjegyeket úgy, hogy

a) 132_2 osztható legyen 2-vel;

b) 324_2 osztható legyen 2-vel;

c) 250_2 osztható legyen 16-tal;

d) 310_2 osztható legyen 3-mal;

e) 41_6 osztható legyen 27-tel;

f) 3_25 osztható legyen 10-zel;

g) 36_3 osztható legyen 6-tal és 4-gyel;

h) 31_52 osztható legyen 56-tal.

E2 552. Válasszunk egy 8-as számrendszerben felírt négyjegyű számot, melynek számjegyei nem egyenlők. Rendezzük a számjegyeit csökkenő sorrendbe és a kapott négyjegyű számból vonjuk ki a gondolt számot. Adjuk össze az eredmény számjegyeit és írjuk fel a kapott számot 8-as számrendszerben. Ennek a számnak is adjuk össze a számjegyeit. Ha jól számoltunk, a 7-et kaptuk. Miért van ez így?

E1 553. Melyik állítás igaz az 5-ös, illetve a 6-os számrendszerben?

a) Ha egy szám minden számjegye páros, akkor a szám páros.

b) Ha egy szám minden számjegye páratlan, akkor a szám lehet páros.

c) Ha egy szám utolsó számjegye páros, akkor a szám páros.

d) Ha egy szám utolsó számjegye hárommal osztható, akkor a szám hárommal osztható.

e) Ha egy szám számjegyeinek összege kettővel osztható, akkor a szám kettővel osztható.

f) Ha egy szám számjegyeinek összege négyvel osztható, akkor a szám négyvel osztható.

g) Ha egy szám számjegyeinek összege ötten osztható, akkor a szám ötten osztható.

E1 554. Keressük meg az alábbi számok néhány valódi osztóját.

a) 2390 , 1101010_2 , 1101000_2 , 11320_4 , 45400_7 ;

b) 2302_4 , 1253_6 , 3714_8 ;

c) 246_8 , 306_7 , 70707_9 , 228404_{11} .

E1 555. Oldjuk meg az egyenleteket.

a) $1001_5 \cdot xy_5 = 32032_5$;

b) $abab_n : ab_n = 101_2$.

E2 556. Egy számítástechnikai könyv tördelőszerkesztője az oldalszámokat kettes számrendszerben írta fel. A könyv 17 ugyanolyan hosszú fejezetből áll és a sorszámozás az első fejezet első oldalán kezdődik az 1-gyel. A 17. fejezet után,

a könyv utolsó oldalán a tartalomjegyzék következik. Ha az első fejezet utolsó oldalán lévő oldalszám mögé írjuk a második fejezet első oldalszámát, akkor az utolsó oldalon található oldalszámot kapjuk. Legfeljebb hány oldalas lehet a könyv?

E1 557. Oldjuk meg az egyenletet: $abbb_n + abbb_n = abbbb_n$.

E2 558. Keressünk egy lehetséges szabályt. Folytassuk a számsorozatot három taggal.

a) 1, 11, 101, 111, 1001, 1011, ...;

b) 1, 2, 11, 22, 121, ...;

c) 1, 11, 10, 111, 21, 1111, 120, 11111, 1011, ...

E2 559. Írjuk be a hiányzó számjegyeket úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség. $2ab0_4 = c2d3_5$.

E2 560. Oldjuk meg az egyenletet: $ab_n \cdot ab_n = abab_n$.

E2 561. Oldjuk meg az egyenletet: $a_n + a0_n + a00_n + a000_n = 2000_{10}$.

E2 562. a) 1_3 -től kezdve növekvő sorrendben leírtuk azokat a hármas számrendszerbeli egész számokat, melyekben nem szerepel a 2-es számjegy. Melyik a 20. leírt szám?

b) 1_4 -től kezdve növekvő sorrendben leírtuk azokat a négyes számrendszerbeli egész számokat, melyekben nem szerepel a 2-es és a 0 számjegy. Melyik a 126. leírt szám?

E2 563. A 452 egy másik számrendszerben felírva olyan négyjegyű szám, melynek az utolsó számjegye 2. Melyik ez a számrendszer?

E2 564. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, ami 8-as számrendszerben felírva 3-ra, 9-es számrendszerben felírva pedig 4-re végződik?

E1 565. a) Tudjuk, hogy $11^2 = 121$. Igaz-e, hogy $11_3^2 = 121_3$? Igaz-e, hogy $11_4^2 = 121_4$? Igaz-e, hogy $11_n^2 = 121_n$ ($n > 2$)?

b) Oldjuk meg az egyenletet $11_n^3 = 1331_n$ ($n > 3$).

c) Igaz-e, hogy 14641_n négyzetszám minden 6-nál nagyobb n -re?

E1 566. a) Milyen n -re lesz 1331_n köbszám?

b) Milyen n -re lesz 1331_n négyzetszám?

c) Legyen p egy 3-nál nagyobb prímszám. Lehet-e 1331_p négyzetszám?

E1 567. Hány olyan ötös számrendszerbeli ötjegyű szám van, melyben minden számjegy különböző? Hány páros szám van közöttük?

E2 568. Van-e olyan szám, ami valamilyen számrendszerben felírva négyjegyű, ám, ha az eggyel nagyobb alapszámú számrendszerben írjuk fel, akkor kétjegyű számot kapunk?

E2 569. Milyen számrendszerben lehetnek a következő számok prímszámok?

a) 121_n b) 10201_n c) 10101_n d) 101010_n e) 12221_n f) $110_n + 41_{10}$

E2 570. a) Van-e prímszám azon 9-es számrendszerbeli kilencjegyű számok között, melyekben minden számjegy különböző?

b) Van-e prímszám azon 7-es számrendszerbeli hétjegyű számok között, melyekben minden számjegy különböző?

E2 571. Lehet-e egy legalább négyjegyű, páros sok 1-esből álló szám prímszám valamilyen számrendszerben?

E2 572. a) Bizonyítsuk be, hogy minden hármasszámrendszerbeli számnak van olyan pozitív egész számú többszöröse, amiben a 2-es számjegy nem szerepel.

b) Igaz-e, hogy minden hármasszámrendszerbeli számnak van olyan pozitív egész számú többszöröse, amiben az 1-es számjegy nem szerepel?

c) Igaz-e, hogy minden hármasszámrendszerbeli számnak van olyan pozitív egész számú többszöröse, amiben a 0 számjegy nem szerepel?

E2 573. Csupaegy számnak nevezzük azokat a számokat, amelyek csak 1-es jegyeket tartalmaznak. Van-e olyan 1-nél nagyobb szám, ami tízes számrendszerben és kettes számrendszerben is csupaegy szám?

E1 574. a) Igaz-e, hogy minden kettes számrendszerbeli számnak van csupaegy többszöröse?

b) Igaz-e, hogy minden kettes számrendszerbeli páratlan számnak van csupaegy többszöröse?

E1 575.

a) Van-e olyan 1-nél nagyobb csupaegy szám a hármasszámrendszerben, ami négyzetszám?

b) Van-e olyan 1-nél nagyobb csupaegy szám a kettes számrendszerben, ami négyzetszám?

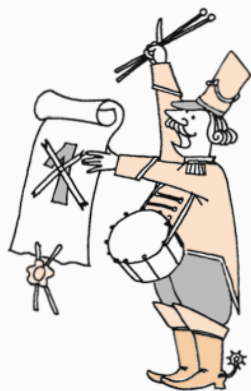
E2 576. a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 3$ egész számra az 1320_n szám 6-tal osztható.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden $n > 5$ egész számra $100040_n - 5000_n$ osztható 120-szal.

E2 577. Határozzuk meg azt a 9-es számrendszerben felírt háromjegyű számot, melyet a 7-es számrendszerben ugyanazokkal a számjegyekkel írhatunk le, csak fordított sorrendben.

E2 578. I. Kázmér király halála után II. Kázmér egy évre betiltotta országában az 1-es számjegy használatát. Ezentúl 1 évig így kellett számlálni: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 22, ... 30, 32, ... 99, 200, 202, ...

Vajon milyen számot használtak II. Kázmér király birodalmában a 2004 helyett, azaz melyik a 2004. szám a számsorukban?



E2 579. Keressünk olyan számrendszert, melyben előfordulhat, hogy egy azonos számjegyből álló kétjegyű szám négyzete, szintén azonos számjegyekből álló négyjegyű szám.

Vegyes számelméleti feladatok

E1 580. Legyen n természetes szám. Határozzuk meg az $A = n^3 + n^2 - 30n$ természetes számot úgy, hogy A -nak pontosan 8 osztója legyen.

E2 581. Legyenek p és q 3-nál nagyobb prímek, melyekről azt tudjuk, hogy p^2q és pq^2 összegének és különbségének hányadosa egy k egész szám. Bizonyítsuk be, hogy k osztható 6-tal.

E1 582. A 2^n szám tízes számrendszerbeli alakjának utolsó számjegyét levágjuk és megszorozzuk vele a visszamaradt számot. Bizonyítsuk be, hogy a kapott eredmény osztható 6-tal.

E1 583. Bizonyítsuk be, hogy két 9-re végződő természetes szám négyzetének különbsége osztható 40-nel.

E2 584. Határozzuk meg a p, q prímszámokat úgy, hogy az $n = pq^3 + p^3q$ számnak pontosan 12 osztója legyen.

E2 585. Egy 8×8 -as sakktábla négyzeteibe a bal felső sarokból indulva, balról jobbra, felülről lefelé haladva beírtuk az 1, 2, 3, ..., 64 természetes számokat. Ezután a tábla mezőit minden lehetséges módon letakartuk egy 2×2 -es négyzettel.

a) Hány esetben lesz a letakart négyzetekben levő számok összege 3-mal osztható?

b) Hány esetben lesz a letakart négyzetekben levő számok összege négyzet-szám?

E2 586. Legyenek n és k pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy $n^{2k} + 1$ szám nem végződhet egynél több 0-ra.

E1 587. Van-e olyan n jegyű szám, melynek minden számjegye 2-es és felírható két négyzetszám különbségeként?

E1 588 Határozzuk meg azokat az $\overline{nk}$ kétjegyű számokat, melyekre:

$$\overline{nk} + \overline{(n-1)(k-1)} = n^3 + k^3.$$

E2 589. Milyen n -re lesz $n^5 + n^4 + 1$ prímszám?

E2 590. Egy 1-gyel kezdődő természetes szám elejéről letöröltük az 1-est és a szám végére írtuk, így az eredeti szám háromszorosát kaptuk. Melyik a legkisebb ilyen tulajdonságú szám?

E2 591. Egy derékszögű háromszög oldalai kétjegyű egész számok. Egyik befogója $\overline{ab}$, átfogója $\overline{ba}$. Mekkora a háromszög oldalai?

E2 592. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x^4 + 17x^2 + 60}$ görbe összes rácspontját (azaz olyan pontját, melynek mindkét koordinátája egész szám).

E1 593. Az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a \neq -1$) harmadfokú függvény együtthatói 0-tól és egymástól különböző egész számok. Határozzuk meg az együtthatókat, ha $f(a) = a^3$ és $f(b) = b^3$.

E2 594. Milyen maradékot kapunk, ha $2005^{2006} + 2006^{2005}$ összeget elosztjuk $2005 \cdot 2006$ -tal?

E2 595. Az $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 27^2$ 27 db négyzetszámot osszuk három kilences csoportba úgy, hogy az egyes csoportokban levő számok összege egyenlő legyen.

E1 596. Pisti – aki nem ismeri a Fermat-tételt, mely szerint az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek $n > 2$ esetén nincs megoldása a pozitív egész számok körében – szeretne három kockát készíteni úgy, hogy azok élei egész számok, egy számtani sorozat egymást követő elemei, és a két kisebb kocka térfogatának összege egyenlő legyen a legnagyobb kocka térfogatával. Bizonyítsuk be, hogy ez nem lehetséges.

E2 597. Az a és b különböző természetes számok számtani közepe az $\overline{nk}$ kétjegyű szám, mértani közepük a $\overline{kn}$ kétjegyű szám. Határozzuk meg az a és b számokat.

E1 598. Határozzuk meg az összes $\overline{444\dots4}$ alakú négyzetszámot.

E1 599. Határozzuk meg az összes $\overline{aabb}$ alakú négyjegyű négyzetszámot.

E2 600. Legyenek a, b, c, d olyan pozitív egészek, melyekre $a \cdot b = c \cdot d$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a négy szám négyzetének összege nem lehet prím-szám.

E1 601. Melyek azok a kétjegyű $\overline{ab}$ számok, amelyeknek négyzetére $\overline{ab}^2 = \overline{acdc}$ és „fordítottjára” $\overline{ba}^2 = \overline{dca}$?

E2 602. 222 db természetes szám közül 221 db négyzetének összege egyenlő a 222. négyzetével. Bizonyítsuk be, hogy e 222 szám mindegyike nem lehet páratlan.

E1 603. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyik 9, 10 és 11 egymás utáni pozitív egész számnak is összege?

E1 604. Egy versenykerékpáros (állandó sebességgel haladva egy mindkét irányban végtelen országúton) elhaladt egy kilométerkő mellett, melyre az $\overline{xy}$ kétjegyű szám volt írva ($y > x$). Egy óra múlva egy másik km-kő mellett haladt el, melyen az $\overline{yx}$ kétjegyű szám szerepelt. Újabb 3 óra elteltével olyan km-kőhöz ért, melyen az $\overline{x(2y)y}$ háromjegyű szám szerepelt. Mekkora a kerékpáros sebessége?

E2 605. Legyenek $p > s > z$ prímek. Egy dobozban elhelyeztünk p^4 db piros, s^4 db sárga és z^4 db zöld golyót. Legyen k az a legkisebb pozitív egész

szám, ahány golyót ki kell vennünk a dobozból, hogy biztosan legyen a kivett golyók között három különböző, és legyen n az a legkisebb szám, ahány golyót ki kell vennünk a dobozból, hogy legyen a kivett golyók között három egyforma. Összesen hány golyó van a dobozban, ha $k + n + 5$ ugyancsak prímszám?

E1 606. Melyek azok az a , b , c különböző számjegyek, amelyekre

$$\frac{1bbb\dots b}{bbb\dots c} = \frac{1}{c}.$$

(A bal oldalon a számlálóban és a nevezőben n db számjegy szerepel.)

E2 607. Százlábú robotot üzemí baleset érte. Lábfégeit – melyek libasorban egymás után helyezkedtek el – egy fogaskerék elforgatta ugyanabba az irányba 30° -kal. Ezután egy második fogaskerék elforgatta minden második lábfejét az előzővel megegyező irányba 30° -kal. Eztán egy harmadik fogaskerék minden harmadik lábfejét, egy negyedik fogaskerék minden negyedik lábfejét és így tovább (a k -adik fogaskerék minden k -adik lábfejét; $k \leq 100$) elforgatta mindig ugyanabba az irányba 30° -kal. A mérnöki konzílium megállapítása szerint a százlábúnak minden olyan lábfejét cserélni kell, amelyik nincs olyan állásban, mint eredetileg volt. Mely lábfejeit nem kell cserélni a százlábú robotnak?

E2 608. Egy négyjegyű négyzetszám számjegyeit fordított sorrendben leírva olyan négyzetszámot kapunk, mely az eredetinek egész számszorosa. Mi volt az eredeti négyzetszám?

E2 609. Melyik az a háromjegyű szám, amelyik egyenlő számjegyei köbének összegével, és amelyről elmondhatjuk, hogy a nála eggyel nagyobb szám ugyancsak egyenlő számjegyei köbének összegével?

E2 610. Bizonyítsuk be, hogy $2^k + 3^k$ semmilyen pozitív egész k -ra nem lesz négyzetszám. Igaz-e, hogy $7^k + 8^k$ szintén nem lehet négyzetszám?

E1 611. Bizonyítsuk be, hogy

a) három egymást követő természetes szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

b) négy egymást követő természetes szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

c) öt egymást követő természetes szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

d) hat egymást követő természetes szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

e) hét egymást követő természetes szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

E1 612. Jelölje $*$ az alábbi műveletet: ha a és b valós számok, akkor $a * b = ab + a + b + 1$. Oldja meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán: $(x * y) * 2 = 2004$.

E1 613. Melyek azok a p prímszámok, melyekre

a) $4p + 1$ egy köbszám; b) $6p + 1$ egy köbszám; c) $14p + 1$ egy köbszám.

E1 614. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amelynek ha utolsó két számjegyét letakarjuk, éppen az eredeti szám számjegyeinek összegét kapjuk?

K2 615. Határozzuk meg az a és b különböző számjegyeket úgy, hogy az alábbi 3 db hatjegyű szám összege osztható legyen 7-tel:

$$\overline{ababab}, \quad \overline{abaabb}, \quad \overline{abbaab}.$$

E1 616. Hat db pozitív egész szám közül valamelyik három n -edik hatványának összege egyenlő a másik három n -edik hatványának összegével. Bizonyítsuk be, hogy e hat szám összege nem lehet prímszám.

E1 617. A karácsonyfa minden ágán annyi szaloncukor van, mint ahány ága van a fának. Egy alkalommal véletlenül feldőlt a fa, és két ága letörött. Miután újból fölállították a fát, Andris minden megmaradt ágról lecsent néhány cukrot (minden ágról ugyanannyit), majd így szólt: *Jé, most éppen feleannyi cukor van a fán, mint eredetileg volt.* Testvére Kati erre így szólt: *Akkor rosszul számoltál.* Vajon melyiküknek van igaza?

E1 618. Egy dobozban elhelyeztünk p -féle különböző színű golyót, mind a p színből q darabot, ahol p és q prímek. Ha legkevesebb annyi golyót akarunk kivenni a dobozból, hogy minden színből legyen a kivett golyók között, akkor 17-tel kevesebbet kell kivennünk, mint ha legkevesebb annyi golyót akarnánk kivenni a dobozból, hogy valamely színből mind a q darabot kivegyük. Hány golyó van a dobozban?

E1 619. Van-e olyan $n > 0$ egész szám, melyre $2^{4n+2} - 2$ három egymást követő egész szám szorzata?

E2 620. Határozzuk meg az összes olyan p prímet, melyre $p^n + 1$ négyzet-szám.

E2 621. Bizonyítsuk be, hogy nem léteznek olyan p, q prímszámok, melyekre $p^{2q} + q^{2p}$ prímszám.

E1 622. Határozzuk meg azt az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, melyre a $\sqrt{7 - \sqrt{abcd}}$ szám egész szám.

E2 623 Legyen $p > 5$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan n pozitív egész, hogy p^n utolsó 2005 db számjegye: ...00000001 (az 1-es előtt 204 db 0 szerepel).

IV. Algebra

Algebrai átalakítások. Polinomok

K1 624. Írjuk fel betűk használata segítségével azokat az egész számokat, amelyek:

- a) Öttel oszthatók.
- b) Hárommal osztva egy maradékot adnak.
- c) Kettővel oszthatók, de négyvel nem.
- d) Héttel osztva 6 maradékot adnak.

K1 625. Írjunk fel négy-négy olyan számot, amely eleget tesz a következő feltevéseknek:

- a) $2n + 1$ alakú $n \in \mathbb{Z}$;
- b) $3l + 2$ alakú $l \in \mathbb{Z}$;
- c) $7m + 5$ alakú $m \in \mathbb{Z}$;
- d) $7t - 2$ alakú $t \in \mathbb{Z}$.

K1 626. Írjuk fel kétféle módon azokat a pozitív számokat, amelyek 11-gyel osztva 10 maradékot adnak.

K1 627. Egy háromszög oldalai egymást követő természetes számok. A legnagyobb oldal $2k + 1$ alakú. Írjuk fel a többi oldalt ennek az oldalnak a segítségével, és adjuk meg a területét. Adjunk meg két konkrét példát.

K2 628. Döntsük el igazak-e a következő állítások.

- a) Ha két szám összegéhez hozzáadjuk a különbségüket, akkor az egyik szám kétszeresét kapjuk.
- b) Ha a természetes számok sorozatában három egymás utáni számnak kiszámítjuk a számtani közepét, és tudjuk, hogy a középső szám páros, akkor a három szám számtani közepe $2k$ alakban írható.
- c) Ha két szám összegéből kivonjuk a különbségüket, akkor az első szám (-2) -szeresét kapjuk.

K2 629. Egy téglalap egyik oldala 7-tel osztható, másik oldala héttel osztva 5 maradékot ad. Írjuk az állítások mellé az A; B; C betűk valamelyikét.

A. Mindig igaz.

B. Van olyan eset, amikor igaz.

C. Biztosan nem igaz.

- a) Az egyik oldala $7k$ alakú.
- b) Az egyik oldala $7m - 3$ alakú.
- c) Ha az egyik oldala $7m$ alakú, akkor a másik oldal $7m + 5$ alakú.
- d) A kerülete osztható 7-tel.
- e) A kerülete $28k + 10$ alakú.
- f) A kerülete felírható $14n - 4$ alakban.

IV

g) A területe $7k \cdot (7l - 2)$ alakú.

h) A területe 7-tel osztható.

(k ; l ; m ; n pozitív egész számok)

K1 630. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő változó csökkenő hatványai szerint.

a) $7x - 3x^6 - 5 + 2x^2 + \frac{1}{2}x^5$;

b) $\frac{7}{8}y^9 - 0,3y + 16y^8 - 16y^2 + \frac{3}{4}y^3 + 1 + 4y^5$;

c) $-z^{12} + 2z - 3z^{11} + 4 - 5z^2 + 6z^{10} - 7z^7 + 8z^3$.

K1 631. Rendezzük a következő polinomokat a bennük levő valamely változó növekvő hatványai szerint.

a) $a^5b - 2ab^3 + 9a^2b^2 - 7a^4b^5 - 8a^3b^4$;

b) $\frac{2}{3}cd^2 - \frac{3}{2}c^2d - 11c^4 + \frac{1}{11}d^5 + 3c^9d^{10} + 3d^6 - 88$.

K1 632. Írjunk fel olyan polinomot, az A és a B halmazok minden elemének egyszeri felhasználásával, melynek együtthatóit az $A = \left\{ -1; \frac{2}{3}; 100; \frac{5}{4}; -\frac{3}{2} \right\}$,

a változó kitevőit a $B = \{3; 1; 66; 7; 5\}$ halmazokból választjuk. A polinomban az együtthatók és kitevők nagyságuk szerint ellentétesen legyenek rendezve.

K1 633. Melyek az egynemű kifejezések a következő egytagú kifejezések között?

a) $-xy^2$; $2xy$; $\frac{1}{8}x^2y$; $17xy$; $9x^2y$; $-2xy$; $\frac{9}{7}xy^2$; $4x^2y$.

b) $5a^2bc$; ab^2c ; $-3abc$; $2ab^2c$; $7a^2bc$; $9abc^2$; $-6a^2bc$; $3abc$; $-abc^2$; $5ab^2c$; $-6ab^2c$.

K1 634. Melyek az egytagú algebrai kifejezések?

$2a + b$; a^2 ; $\frac{7}{5}x$; b^5a ; axy ; $a + x + y$; $\frac{x}{2}$; $\frac{a}{3} + \frac{b}{2}$; $x^2 + y^3$; $2a(1 - x)$; $-2y^{13}$; $5b^2 - 2a$.

K1 635. Határozzuk meg a kifejezések értékét, ha

$a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{4}$!

a) $2ab$; $-3a^3$; $0,6x^2$; $-\frac{2}{5}y$; $-3b$;

b) $3x^2y$; $2xy^2$; $-x^3y$; $-x^2y^2$; $5xy$;

c) abc ; $2a^2bc^2$; $-3ab^3$; $4abc^2$; $4a^2bc$.

Végezzük el a következő összevonásokat: (636–642. feladat)

K1 636.

a) $3a - (a + 2b)$;

b) $5x - (3x + 2y)$;

c) $4y - (5 + y)$;

d) $(2m - 3n) - (5m - 6n)$;

e) $(6a^2 - 5a) - (a^2 + 7a)$.

K1 637.

a) $(12c + 16d) - (6c - 7d)$;

b) $(11x^3 - 2x^2) - (x^3 - x^2)$;

c) $(3a^3b - 13b^2) - (3a^3b + 6b^2)$;

d) $(4x^2y + 8xy^2) - (3x^2y - 6xy^2)$.

K1 638.

a) $(13x - 11y + 10z) - (-15x + 10y - 15z)$;

b) $(7m^2 - 4mn - n^2) - (2m^2 - mn + 2n^2)$;

c) $(14ab - 37bc - 2cd) - (16bc + 11cd)$;

d) $(11abc - 16bcd - 24cde) - (-9abc + bcd)$.

K1 639.

a) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{5}z\right) - \left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z\right)$;

b) $\left(\frac{1}{5}ab + \frac{1}{7}bc - \frac{2}{3}ac\right) - \left(-\frac{4}{5}ab + \frac{3}{14}bc - \frac{1}{5}ac\right)$;

c) $(0, 6ab - 0, 5bc + cd) - (-0, 5ab + 2, 5bc - cd)$;

d) $(0, 5abc + 0, 3bcd - 1, 5acd) - (-1, 5abc + 0, 6bcd - 2acd)$.

K2 640.

a) $\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{5}{6}a^2b^2 - 1\right) - \left(a^2b^2 - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{12}ab - \frac{1}{4}\right)$;

b) $\left(\frac{2}{3}x^3 - 3x^2y + \frac{1}{4}xy^2 - 2y^3 - 1\right) - \left(3x^3 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{3}x^2y - 2xy^2\right)$.

K2 641.

a) $(4a^2 - 2ab - b^2) - (-a^2 + b^2 - 2ab) + (3a^2 - ab + b^2)$;

b) $(-8x^3 + 4x^2 - x + 1) + (2x^3 - 3 + x^2 - 6x) - (5x^3 - 8x^2 - 3x - 1)$.

K1 K2 642.

a) $(5a^2 - 3b^2) + [-(a^2 - 2ab - b^2) + (5a^2 - 2ab - 3b^2)]$;

b) $3a - \{2c - [6a - (c - b) + c + (a + 8b - 6c)]\}$;

c) $(3m + 5n) - \{9m - [6m + 2n - (12n - 10m)] - m - (7m - 4n)\}$;

d) $15a^2 - \{-4a^2 + [5a - 8a^2 - (2a^2 - a) + 9a^2] - 3a\}$.

K1 643. Vonjuk össze a következő kifejezéseket, és írjuk a legegyszerűbb alakba:

a) $3a - 4a + 7a$;

b) $2a - (-3a) + (-a)$;

c) $7a^2 - (-8a^2) - 17a^2$;

d) $5k^3l^2 - 4k^3l^2 + 13k^3l^2$;

e) $\frac{2}{5}b^2c - \frac{4}{3}b^2c + b^2c - \frac{3}{2}b^2c$;

f) $5x^2y^3 - 3x^2y^3 + 8x^2y^3 - 11x^2y^3 - 5x^2y^3$;

g) $6a^n + 3a^2 - 4a^n + a^n - 5a^2$.

K1 644. Bontsuk fel a zárójeleket, és végezzük el a lehetséges összevonásokat:

a) $8b - 2 - 2(3b - 5) + 6(2b - 1)$;

b) $3c - 11d - (5c - 21d) - 4(2d - c)$;

c) $(6i - 4k) - 5(2i - 4j) + 3(3j - 5i)$;

d) $(4x^2 - 5xy + 3y^2) - (5x^2 - xy - 4y^2) + (-x^2 - 2xy - y^2)$;

e) $(4a^3 - 2a^2 + 5a - 1) + (-2a^3 + 3a^2 - 11a - 4) - (a^3 - 6a^2 + 3a - 3)$.

Végezzük el a következő egytagú kifejezések szorzását, osztását, hatványozását: (645–647. feladat)

K1 K2 645.

a) $2x^2 \cdot 3x^3$;

b) $4a^3 \cdot 2a$;

c) $5m \cdot 3m^2$;

d) $(-6p^2) \cdot (-2p^4)$;

e) $(+6c^2) \cdot (-3c)$;

f) $(-8d) \cdot (-2d^3)$;

g) $(-t^2) \cdot (-3t)$;

h) $(-5b^2) \cdot (+4b^2)$;

i) $(-6a^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2\right)$;

j) $(-3a^n) \cdot \left(-\frac{2}{3}a^{n+3}\right)$;

k) $(+4x^{2n+1}) \cdot \left(-\frac{3}{4}x^{n-1}\right)$.

K1 K2 646.

a) $(+3ab) \cdot (-2a^2b)$;

b) $(-8x^2y) \cdot (-2xy^2)$;

c) $\left(+\frac{2}{3}c^3d^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}c^2d\right)$;

d) $(-m^2n^2) \cdot \left(+\frac{5}{9}m^3n\right)$;

e) $(-0,6x^2y^3) \cdot (+0,5x^3y^3)$;

f) $(+2,4k^2b^4) \cdot (-0,5k^3)$;

g) $(-0,4a^n b^m) \cdot (-0,8a^{n+1} b^{2m})$;

h) $\left(-\frac{2}{3}x^{k-1}y^2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}xy^k + 1\right)$.

K1 647.

a) $a^3 \cdot a^5$;

b) $2b^7 \cdot 5b^{10}$;

c) $-c^6 \cdot 14c^4 \cdot \left(-\frac{4}{7}c^3\right)$;

d) $4d^2e^3 \cdot (-8e^2d^5)$;

e) $\frac{3}{5}g^8h^2 \cdot \frac{10}{9}h^5g^3$;

f) $\frac{i^7}{i^4}, i \neq 0$;

g) $\frac{2l^{13}}{4l^{15}}, l \neq 0$;

h) $\left(\frac{14j^4j^5}{21j^8}\right)^3, j \neq 0$;

i) $\frac{4}{5}k^7l^5 \cdot \frac{2}{10}l^4k^{11}$.

K2 648. Végezzük el a következő hatványokkal a megadott műveleteket:

$$G = \frac{7n^2m^5}{9r^3n^5m^3}, \quad H = \frac{81n^5m^4r}{7^2n^4r^2m^7}, \quad n, r, m \neq 0;$$

a) G^2 ; b) H^3 ; c) $G \cdot H$; d) $\frac{G}{H}$; e) $\frac{G^4}{H^5}$.

K1 649. Végezzük el a következő szorzásokat:

- a) $2a(a - 4b)$; b) $-5c(3c - 4)$;
 c) $4x(3x^2 - 6x + 5)$; d) $(6i^2 - 4i - 3)2i^2$;
 e) $(-9p^2 + 6pq - 12q^2)\frac{2}{3}pq$; f) $\left(\frac{4}{7}r^3s^2 + \frac{2}{5}r^2s - \frac{3}{2}rs - \frac{3}{4}s^2\right)\left(-\frac{7}{3}r^2s\right)$.

E1 650. Bontsuk fel a zárójeleket:

- a) $a^k(a^k - 3a^3)$; b) $2b^n(3b^{n-1} - 5b^n + 7b^2)$;
 c) $(4i^{k-3} + 2i^{k+1} - 5i^k)(-3i^{k-1})$; d) $(7x^n - 5x^{n-1} + 3x^{n-2})3x^{2n}$.

K1 651. Végezzük el a szorzásokat, és rendezzük a hatványkitevő csökkenő sorrendje szerint:

- a) $(a - 3)(a - 4)$; b) $(3 - b)(2b + 5)$;
 c) $(5c - 4d)(3d + 2c)$; d) $(3p^2 - 2q)(4q - 2p)$;
 e) $(6u^2v - 2uv)\left(\frac{1}{2}uw^2 - \frac{3}{2}v\right)$; f) $(2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2)(3x^2 - 2xy)$.

K1 652. Bontsuk fel a zárójeleket, és végezzük el a lehetséges összevonásokat:

- a) $(a - 5)(a + 3) + (a - 3)(a + 5)$;
 b) $(b + 2)(b + 5) - (b - 1)(b + 4)$;
 c) $(c^2 + c + 1)(c^2 + c - 1)$;
 d) $(d^3 - d^2 + d - 1)(d + 1)$;
 e) $(e^2 - 2)(e^2 + 3) - 2(e^2 + 7)(3 - e^2) + 3(2 - e^2)(2 + e^2)$.

Nevezetes azonosságok

K1 653. Párosítsuk össze a következő kifejezéseket, mindnek van-e párja?

- a) $(a + 2)^2$; A) $a^2 - 1$;
 b) $(2a + 1)^2$; B) $4a^2 + 4a + 1$;
 c) $\left(\frac{1}{2}a - 2\right)^2$; C) $a^2 + 4a + 4$;
 d) $(a - 2)(a + 2)$; D) $\frac{1}{4}a^2 - 2a + 4$;
 e) $(a + 2)(a + 2)$; E) $a^2 + 4$.

K1 654. Párosítsuk össze:

- | | |
|-------------------|------------------|
| A) $(c-3)^2$; | a) c^2-9 ; |
| B) $(-c-3)^2$; | b) c^2+9 ; |
| C) $(3-c)^2$; | c) c^2+9+6c ; |
| D) $(3+c)^2$; | d) c^2-6c+9 ; |
| E) $(3-c)(3+c)$; | e) $-c^2-6c-9$; |
| F) $(c+3)(c-3)$; | f) $-c^2-6c+9$. |
| G) $-(c+3)^2$. | |

K1 655. Mivel egyenlő $(b-1)^2-4$ kifejezés?

- a) $(b-3)(b+1)$; b) $(b+3)(b-1)$; c) b^2-2b-3 ; d) $(b-1-2)^2$.

K1 656. Melyik kéttagú kifejezés négyzete a:

- | | |
|---------------------------|--|
| a) c^2-2c+1 ; | b) b^2+6b+9 ; |
| c) $l^2-20l+100$; | d) $49z^2-112rz+64r^2$; |
| e) $144j^2+120ij+25i^2$; | f) $\frac{16}{9}l^2-2kl+\frac{9}{16}k^2$; |
| g) a^4-4a^2+4 ; | h) d^6+10d^3+25 ; |
- i) $4p^4-12p^2q^3+9q^6$ kifejezés?

K1 657. Keressük meg a hiányzó kifejezést úgy, hogy teljes négyzet legyen. Írjuk fel, hogy melyik kifejezésnek a teljes négyzete.

- | | |
|----------------------------------|-------------|
| A. $x^2 \dots + 4$; | a) $+2x$; |
| B. $4x^2 \dots + 9$; | b) $+12x$; |
| C. $\frac{1}{4}x^2 \dots + 16$; | c) $-4x$; |
| D. $4x^2 \dots + 4$; | d) $+4x$; |
| | e) $-12x$; |
| | f) $-2x$; |
| | g) $-8x$. |

K1 K2 658. Bontsuk fel a zárójelet:

- | | | |
|---|--------------------------------------|---|
| a) $(a+1)^2$; | b) $(b-3)^2$; | c) $(2c-5)^2$; |
| d) $(4d-3)^2$; | e) $\left(\frac{1}{2}e+3\right)^2$; | f) $(-f-3)^2$; |
| g) $(3a^2b-1)^2$; | h) $(4ab^2-3ab)^2$; | i) $\left(\frac{3}{2}x^2y+\frac{2}{3}xy^3\right)^2$; |
| j) $\left(\frac{5}{7}x^4y^2-\frac{4}{3}x^2y^3\right)^2$. | | |

K2 659. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket $(A \pm B)^2 \pm C$ alakú kifejezéssé, az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, illetve az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ azonosságok segítségével:

- a) $a^2 - 8a + 16$; b) $b^2 - 8b + 15$; c) $c^2 + 4c + 3$;
d) $d^2 - 3d + 2$; e) $e^2 - 10e + 6$; f) $f^2 + 7f + 5$.

E1 660. Bontsuk fel a zárójelet:

- a) $(a + b + c)^2$; b) $(x + y + 1)^2$; c) $(mx + b + 3)^2$;
d) $\left(ax - b + \frac{1}{2}\right)^2$; e) $(2a - 3b - 4)^2$; f) $(-3a + 5b - c)^2$.

E2 661. Egészítsük ki a következő kifejezéseket úgy, hogy háromtagú kifejezés négyzete legyen. Írjuk fel, melyik kifejezés négyzete a kapott kifejezés:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz \dots$; b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc \dots$;
c) $2cd - 2ce - 2ed \dots$; d) $4x^2 + 9y^2 + 12xy - 4xz \dots$;
e) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz \dots$; f) $m^4 + 3m^2 + 2m + 1 \dots$

E2 662. A következő kifejezések háromtagú kifejezés négyzetei. Melyek ezek a kifejezések?

- a) $c^4 + 2c^3 + 3c^2 + 2c + 1$;
b) $4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 12x + 4$;
c) $a^4 - 4a^3 + 10a^2 - 12a + 9$.

K1 K2 663. Végezzük el a zárójelfelbontást:

- a) $(x + y)^3$; b) $(k - l)^3$; c) $(a - 3)^3$; d) $(c + 1)^3$;
e) $(2b + 3)^3$; f) $(d - 4)^3$; g) $\left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}q\right)^3$; h) $\left(\frac{5}{3}x + 2y\right)^3$;
i) $(2x^2y - 3xy^3)^3$ j) $\left(-\frac{3}{2}a^4y - \frac{1}{3}ay^3\right)^3$.

K1 K2 664. Végezzük el a következő szorzásokat az $(a + b)(a - b)$ nevezetes szorzat felhasználásával:

- a) $(a - 1)(a + 1)$; b) $(b + 3)(b - 3)$; c) $(2c - 5)(2c + 5)$;
d) $(3d - 5c)(3d + 5c)$; e) $(3f^2 - 2)(3f^2 + 2)$; f) $(4ij + 3k)(4ij - 3k)$;
g) $(5r^2 - 3r)(5r^2 + 3r)$; h) $(a^n + b^4)(a^n - b^4)$; i) $(3x^2y + 2)(3x^2y - 2)$.

Az alábbi feladatokban alakítsunk szorzattá kiemeléssel: (665–669. feladat)

K1 665.

- a) $2a + 2b$; b) $6c - 3d$; c) $ad + bd$;
d) $15xy - 5yz$; e) $12cd - 21ac$; f) $xy^2 - zy$.

K1 666.

- a) $6 - 3n$; b) $a^5 - a^3$; c) $y^4 + xy^3$; d) $9x^3 - 18x$;
 e) $24y^3 - 36y$; f) $ab^2 + a^2b^3$; g) $a^4y^3 - a^2y^2$.

E1 667.

- a) $x^n - x^{n+1}$; b) $y^{2k} + y^{5k}$; c) $14z^n - 21z^{n-2}$; d) $a^3x^{k+3} + 3a^2x^{k-1}$.

E1 668.

- a) $ay + by + cy$; b) $a^4 - 4a^2 - 2a$;
 c) $3n^2m + 15nm - 6nm^2$; d) $35a^2bc - 5ab^2c + 20abc^2$.

K2 669.

- a) $x(a+2) + y(a+2)$; b) $6(j-3) + j(j-3)$;
 c) $2x(x-y) - 3y(x-y)$; d) $5m(a-b) - 3n(a-b)$;
 e) $2a(x-y) - 3b(y-x)$; f) $5(m-2) + m(2-m)$;
 g) $3x(x+5) - 4(5+x)$; h) $7u(u-1) - (1-u)$.

K1 670. A következő feladatokban alakítsunk szorzattá csoportosítással.

- a) $2x + 2y + ax + ay$; b) $an - am + bn - bm$;
 c) $i^2 - ij + ik - jk$; d) $5a(u-v) + u - v$;
 e) $2a(a-2) - a + 2$; f) $7na - 5mb - 7nb + 5ma$;
 g) $22i^2 - 15jk - 10ij + 33ik$; h) $x^4 - x^3 - x^2 + x$.

E1 671. A következő kifejezésekben alakítsunk szorzattá. (Útmutatás: a megfelelő tagot bontsuk ketté.)

- a) $a^2 - 5a + 6$; b) $b^2 - 8b + 15$; c) $c^2 - c - 12$; d) $d^2 + 7d - 30$;
 e) $2g^2 + 2g - 4$; f) $-8 + 6h - h^2$; g) $-l^2 + 3l + 10$.

A következő feladatokban az eddig tanult nevezetes azonosságok segítségével alakítsunk szorzattá: (672–681. feladat)

K1 672.

- a) $x^2 - y^2$; b) $m^2 - n^2$; c) $q^2 - 16$; d) $4r^2 - 9$;
 e) $x^2 - 1$; f) $a^2 - 25$; g) $9 - c^2$; h) $b^2 - 4$.

K1 673.

- a) $64 - c^4$; b) $l^4 - 9k^2$; c) $25u^2r^4 - 16p^6$;
 d) $49 - d^4$; e) $\frac{4}{9}p^2 - 1$; f) $\frac{25}{36}q^4 - 169$.

K2 674.

- a) $1 - x^2y^2$; b) $4p^4 - 9$; c) $p^2 - a^2b^2$; d) $a^6b^2 - c^4d^4$;
 e) $16i^4 - 9j^2$; f) $81u^2v^2 - 1$; g) $100m^4 - 64n^6$; h) $1 - 0,01x^2$.

K2 675.

- a) $0,04x^2 - \frac{36}{49}y^2$; b) $0,01t^2 - 0,25u^4$; c) $\frac{144}{25}x^{2k} - \frac{81}{64}y^{2k-2}$;
 d) $\frac{1}{9m^2} - \frac{25m^2}{121}m \neq 0$; e) $\frac{0,04}{t^4} - \frac{9t^2}{r^2}t \neq 0$; $r \neq 0$.

K1 676.

- a) $a^2 + 2ab + b^2$; b) $x^2 - 2xy + y^2$; c) $n^2 - 6n + 9$;
 d) $2cd + c^2 + d^2$; e) $a^2 - 2a + 1$; f) $b^2 + 4b + 4$;
 g) $4c^2 + 4c + 1$; h) $-d^2 - 2d - 1$; i) $-6e - e^2 - 9$;
 j) $-9c^2 + 12cd^2 - 4d^4$.

K1 677.

- a) $a^4 + 2a^2b + b^2$; b) $c^4 - 2bc^2 + b^2$; c) $25m^4 - 10m^2n + n^2$;
 d) $9k^4 + 6k^2l + l^2$; e) $-i^4 - 2i^2j - j^2$.

K1 678.

- a) $a^3 + b^3$; b) $a^3 - b^3$; c) $m^3 + n^3$;
 d) $c^3 - d^3$; e) $a^3 + 8$; f) $l^3 + 27$;
 g) $r^3 - 343$; h) $q^3 + 1$; i) $64 - j^3$.

K1 679.

- a) $1 + a^3$; b) $1 - 8b^3$; c) $8a^3 + b^3$;
 d) $8 - 27i^3$; e) $125x^3 + 64y^6$; f) $\frac{1}{8}k^3 - \frac{27}{125}l^6$.

K1 680.

- a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; b) $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$;
 c) $p^3 - 6p^2q + 12pq^2 - 8q^3$; d) $8c^3 + 12c^2d + 6cd^2 + d^3$.

E1 681.

- a) $125m^3 + 75m^2 + 15m + 1$; b) $64 - 96a + 48a^2 - 8a^3$;
 c) $a^3 + 18a^2 + 108a + 216$; d) $\frac{27}{64}a^3b^6 - \frac{9}{8}a^2b^4c^2 + ab^2c^4 + \frac{8}{27}c^6$.

Alakítsuk át szorzattá az alábbi kifejezéseket különböző módszerek segítségével.
 (682–691. feladat)

K1 682.

- a) $11a^2 - 11b^2$; b) $3c^2 - 3d^2$; c) $7m^2 - 7$;
 d) $x^3 - x$; e) $c^4 - c^2$; f) $a^3b - ab^3$.

K1 683.

- a) $6m^2 - 6n^2$; b) $5i^2 - 20j^2$; c) $8p^2r^2 - 72q^2r^2$; d) $4u^4v^2 - 9u^2v^4$.

K1 684.

- a) $2a^2 - 4ab + 2b^2$; b) $5c^2 + 10cd + 5d^2$; c) $6m^2 + 12m + 6$;
 d) $3rs^2 - 6rs + 3r$; e) $2u - 4uv + 2uw^2$; f) $18j^5k + 12j^4k^2 + 2j^3k^3$.

E1 685.

- a) $a^2 + 2ab + b^2 - 1$; b) $c^2 - 2cd + d^2 - 4$; c) $25 - x^2 + 2xy - y^2$;
 d) $1 - i^2 - 2ij - j^2$; e) $4a^2 - 20ab + 25b^2 - 36$; f) $16m^2 - 8mn + n^2 - 49$.

K2 686.

- a) $a^2 - b^2 + a - b$; b) $c^2 - d^2 + c + d$; c) $e^2 - f^2 - e + f$;
 d) $k^3 - k^2l - kl^2 + l^3$; e) $i^3 + i^2j - ij^2 - j^3$; f) $x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz$.

K2 687.

- a) $a^2 - 5a + 6$; b) $b^2 + 6b + 8$; c) $c^2 - 7cd + 12d^2$;
 d) $e^2 - 7ef + 10f^2$; e) $i^2 - i - 12$; f) $g^2 + g - 12$;
 g) $k^2 - 3kl - 10k^2$; h) $m^2 + 2mn - 15n^2$.

K2 688.

- a) $2x^2 + 10x + 12$; b) $2x^2 + 14x + 24$; c) $2y^2 - 6y + 4$; d) $3y^2 + 27y + 54$.

E1 689.

- a) $a^4 + a^3 + a^2 + a$; b) $b^3 - 8 + 6b^2 - 12b$; c) $m^5 - m^3 + m^2 - 1$;
 d) $n^3 - n^2m - nm^2 + m^3$; e) $d^4 + d^3 + d + 1$; f) $e^6 - e^4 + 4e^3 + 4e^2$.

K2 E1 690.

- a) $a^8 + a^4 + 1$; b) $a^4 + a^2b^2 + b^4$; c) $a^3 - 3a + 2$; d) $a^3 + 3a^2 - 4$.

K2 E1 691.

- a) $x^3 + x^2 - 2$; b) $x^3 + 8x^2 + 19x + 12$; c) $y^6 - y^4 + 2y^3 + 2y^2$;
 d) $y^4 + 5y^3 + 15y - 9$; e) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$; f) $x^2 + 10xy - 70y - 49$.

K2 692. Bizonyítsuk be, hogy két szomszédos páratlan szám négyzetének különbsége osztható nyolccal.

K2 693. Bizonyítsuk be, hogy két egymást követő egész szám négyzetének különbsége páratlan szám.

E1 694. Számítsuk ki a K értékét, ha

$$K = 1003^2 - 1002^2 + 1001^2 - 1000^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2.$$

K2 695. Számítsuk ki a következő tört értékét.

- a) $\frac{121\,212 \cdot 242\,423 + 242\,423 \cdot 121\,214}{484\,848 \cdot 121\,213 - 242\,426}$;
 b) $\frac{60\,000\,000 \cdot 60\,000\,004 - 60\,000\,002 \cdot 59\,999\,998}{60\,000\,000 \cdot 60\,000\,001 - 60\,000\,001 \cdot 59\,999\,999}$.

E1 696. Igazoljuk, hogy a következő kifejezés értéke minden egész szám esetén páratlan szám!

$$\frac{80a}{4a - 10} : \left(\frac{2a + 5}{2a - 5} - \frac{2a - 5}{2a + 5} \right).$$

E2 697. Egy háromtagú összeg tagjai: két szomszédos egész szám négyzete, valamint szorzatuk négyzete. Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg mindig négyzet-szám.

Algebrai törtek

K1 698. Értelmezhetők-e a minden valós szám esetén az alábbi kifejezések? Ahol szükséges, adjuk meg, mely valós szám esetén nem lehet értelmezni:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{a-3}{5}; & b) \frac{5}{a-3}; & c) \frac{b+5}{b-2}; & d) \frac{1}{3}(c^2-9); \\ e) \frac{d^2+4}{d+2}; & f) \frac{e(e-5)}{e^2}; & g) \frac{6i-5}{4f+3}; & h) \frac{n(n-4)}{n^2-16}; \\ i) \frac{11h-99}{11h(h-3)}; & j) \frac{5m}{m^2+2}. \end{array}$$

K1 699. Vizsgáljuk meg, mely törtek estében változik meg a kifejezés előjele, ha az a értékét ellentettjére változtatjuk: $a \neq 0$

$$a) \frac{4}{a}; \quad b) \frac{1}{a^2}; \quad c) \frac{a^3}{4}; \quad d) \frac{a^2+5}{a^2}; \quad e) \frac{a^3}{3+a^2}.$$

K1 700. Változik-e, és hogyan az alábbi törtek értéke, ha az a , illetve b értékét kétszeresére változtatjuk? $|a| \neq |b|$, $b \neq 0$

$$a) \frac{a}{a-b}; \quad b) \frac{a+b}{a-b}; \quad c) \frac{a^2}{b}; \quad d) \frac{2a^3}{7b}; \quad e) \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

K2 701. Az alábbi kifejezések értékének megváltoztatása nélkül végezzünk olyan átalakítást, hogy a törtek előtt „-” előjel álljon.

$$a) \frac{1}{1-a}; \quad b) \frac{b}{b-1}; \quad c) \frac{a-b}{c-d}; \quad d) \frac{a-5}{a-2}; \quad e) \frac{-n-m}{a+b}.$$

K2 702. Indokoljuk meg, miért igazak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{array}{l} a) \frac{x-2}{y-5} = \frac{2-x}{5-y} = -\frac{x-2}{5-y} = -\frac{2-x}{y-5}; \\ b) \frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{(b-a)(c-a)} = \frac{-1}{(a-b)(c-a)} = -\frac{1}{(b-a)(a-c)}. \end{array}$$

K1 703. Egyszerűsítsük a következő törteket a változók lehetséges értékei mellett:

$$a) \frac{10a^2}{2a}; \quad b) \frac{2ab^2}{12b^3}; \quad c) \frac{3d^5x^3}{15d^3x^2}; \quad d) \frac{162p^4q^6}{135p^5q^5}; \quad e) \frac{143r^4s^8t^5}{66r^5s^2t^3}.$$

Egyszerűsítsük a következő törteket: (704–706. feladat)

K1 704.

$$\begin{array}{llll} a) \frac{a-b}{b-a}; & b) \frac{b-3}{3-b}; & c) \frac{3a(c-d)}{2b(d-c)}; & d) \frac{5n(i-j)}{15m(j-i)}; \quad e) \frac{ac-bc}{ac+bc}; \\ f) \frac{c}{c^2+cd}; & g) \frac{ef}{e-ef}; & h) \frac{ik^3}{i^2k-ik^2}; & i) \frac{rs+bs}{s^2+st}; \quad j) \frac{n^2+n}{na+nb}. \end{array}$$

K1 705.

$$\begin{array}{llll}
 a) \frac{a^2 - a}{a^2 - 1}; & b) \frac{b - b^2}{b^2 - 1}; & c) \frac{(c - d)^2}{c^2 - d^2}; & d) \frac{e^2 - 4}{2 - e}; \\
 e) \frac{m - n}{(n - m)^2}; & f) \frac{(a + 1)^2}{a^2 - 1}; & g) \frac{b^2 - 9}{(b - 3)^2}. &
 \end{array}$$

K2 706. A következő törtkifejezéseknél alakítsuk szorzattá a nevezőt és a számlálót, majd egyszerűsítsük a törtet a változók lehetséges értékei mellett:

$$\begin{array}{llll}
 a) \frac{a^2 - 1}{a - 1}; & b) \frac{2(b - 5)}{3b - 15}; & c) \frac{c^2 - 6c + 9}{3c - 9}; & d) \frac{d^2 - 81}{5d + 45}; \\
 e) \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}; & f) \frac{7f}{2f - f^2}; & g) \frac{g - 5}{5 - g}; & h) \frac{3k^2 - kl}{l^2 - 3kl}; \\
 i) \frac{n - m^2 n}{m + 1}; & j) \frac{5c^2 - 5cd}{5(c + d)^2}; & k) \frac{45e^2 - 20f^2}{2(3e - 2f)^2}. &
 \end{array}$$

Egyszerűsítsük a következő törtet a változók lehetséges értékei mellett: (707–712. feladat)

K2 707.

$$\begin{array}{lll}
 a) \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}; & b) \frac{x^3 + y^3}{x^4 - y^4}; & c) \frac{x^2 + xy + y^2}{x^3 - y^3}; \\
 d) \frac{x^4 - y^4}{x^3 - y^3}; & e) \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}; & f) \frac{9 - 3x + x^2}{x^3 + 27}.
 \end{array}$$

K2 708.

$$\begin{array}{lll}
 a) \frac{7a^3 b + 7ab^3}{a^4 - b^4}; & b) \frac{c^4 - d^4}{cd^2 + c^3}; & c) \frac{10e + 20}{e^3 + 8}; \\
 d) \frac{g^2 + 2gh + h^2}{3g^4 - 3h^4}; & e) \frac{1 - 2n + n^2}{n^2 - 1}; & f) \frac{4n^2 - 4m^2}{6m^3 + 6n^3}.
 \end{array}$$

K2 709.

$$\begin{array}{ll}
 a) \frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{3a^2 - 3b^2}, (a \neq \pm b); & b) \frac{3c^2 - 27d^2}{5c^2 + 30cd + 45d^2}, (c \neq -3d); \\
 c) \frac{a^4 - b^4}{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4}, (a; b \neq 0); & d) \frac{(c + d)^3}{3c^2 + 6cd + 3d^2}, (c \neq -d); \\
 e) \frac{am^2 + 2am + a}{m^3 - m}, (m \neq 0; m \neq \pm 1); & f) \frac{i^3 - 8}{i^3 + 2i^2 + 4i}, (i \neq 0); \\
 g) \frac{u^3 - 9u^2 + 27u + 27}{u^2 - 9}, (u \neq \pm 3); & h) \frac{18t^2 + 36t + 18}{9t^3 + 9}, (t \neq -1).
 \end{array}$$

K2 710.

a) $\frac{5x - 5y + ax - ay}{4a + 20}, (a \neq -5);$

b) $\frac{p^2 - pq - px + qx}{p^2 - 2px + x^2}, (p \neq x);$

c) $\frac{c^3 + d^3}{c^2 - c - d^2 - d}, (c \neq -d; c \neq d + 1).$

K2 711.

a) $\frac{a^3 + b^3}{(a - b)^2 + ab};$

b) $\frac{x^2 - 4ax + 4a^2}{x^2 - 4a^2};$

c) $\frac{xy - 2x - 3y + 6}{xy - 2x}.$

E1 712.

a) $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + 4a + 4};$

b) $\frac{b^2 + 6b + 5}{b^2 + 3b + 2};$

c) $\frac{c^2 - 7c + 12}{c^2 - 6c + 9};$

d) $\frac{d^2 + 8d + 7}{d^2 + 2d + 1}.$

Algebrai törtek összeadása, kivonása

Végezzük el a következő törtek összevonását: (713–715. feladat)

K1 713.

a) $\frac{2m + 5}{6} + \frac{m - 1}{8};$

b) $\frac{4a - 5b}{12} - \frac{3a - 2b}{18};$

c) $\frac{2c^2 - 3d^2}{5} - \frac{5c^2 - d^2}{4};$

d) $\frac{2u + 3v}{2} - \frac{u - 2v}{3} + \frac{u - v}{4}.$

K1 714.

a) $\frac{2n - 3m}{3} - \frac{2(n - 2m)}{5} + \frac{3(n + m)}{2};$

b) $\frac{5(2a - b)}{8} - \frac{3(a - 3b)}{2} + \frac{7(a - b)}{6};$

c) $\frac{(x + y)^2}{6} + \frac{(x - y)^2}{12} - \frac{x^2 - y^2}{4}.$

K1 715.

a) $3a + \frac{a - 2}{2} - \frac{a - 3}{3};$

b) $\frac{2c - 5d}{2} - c - \frac{3c - d}{4};$

c) $\frac{m + n}{3} - m + n;$

d) $r - \frac{r - s}{8} + \frac{r + s}{4} - s.$

Végezzük el a következő összeadásokat, kivonásokat a változók lehetséges értékei mellett: (716–718. feladat)

K1 716.

a) $\frac{2c}{ax} + \frac{3d}{bx};$

c) $\frac{5p}{mn} - \frac{3n}{mp};$

e) $\frac{6b-3a}{b} + \frac{3a^2-7b^2}{ab};$

g) $\frac{3}{4e^2g} - \frac{5}{12fg^2} + \frac{8}{9f^2e};$

i) $\frac{2a^2+3a-5}{a^2b} + \frac{4a-1}{ab};$

b) $\frac{5}{2x} - \frac{7}{3x^2};$

d) $\frac{2a}{d^2} - \frac{3}{d};$

f) $\frac{3}{a^3b^3} - \frac{4}{a^4b^2};$

h) $\frac{4a-3b}{a^2b} - \frac{7a-6b}{ab^2};$

j) $\frac{2m^2-3m+4}{m^2n} - \frac{3m-1}{mn}.$

K1 717.

a) $\frac{8}{a-1} + \frac{3}{a};$

b) $\frac{1}{b+2} - \frac{3}{b};$

c) $\frac{7i}{2(i-1)} + \frac{5i}{i-1};$

d) $\frac{9d}{4(d+2)} - \frac{1}{d+2};$

e) $\frac{3}{e-f} + \frac{4}{e+f};$

f) $\frac{1}{j+k} - \frac{1}{j-k};$

g) $\frac{1}{2a-b} - \frac{1}{2a+b}.$

K1 718.

a) $\frac{5}{c-d} - \frac{3}{c+d};$

b) $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m-n};$

c) $\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3}.$

A nevező szorzattá alakítása után végezzük el ez összevonásokat a változók lehetséges értékei mellett: (719–724. feladat)

K1 719.

a) $\frac{5}{2x-2} + \frac{3}{4x-4};$

b) $\frac{a}{3a+3b} - \frac{2a}{6a+6b};$

c) $\frac{2m}{5m+5n} + \frac{3n}{5m-5n}.$

K1 K2 720.

a) $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2} - \frac{4}{a^2-4};$

b) $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x-2} - \frac{x+2}{x^2-4};$

c) $\frac{m-n}{2m+2n} + \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$

d) $\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2} - \frac{c+d}{2c-2d};$

e) $\frac{5e-1}{2e^2+6e} + \frac{4-2e}{e^2-9};$

f) $\frac{i-j}{3i+3j} - \frac{i^2+j^2}{i^2-j^2};$

g) $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x+2}{2x^2-2};$

h) $\frac{u+v}{u} - \frac{u}{u-v} + \frac{v^2}{u^2-uv}.$

K2 721.

$$a) \frac{5}{8a^2 - 18b^2} + \frac{1}{2a^2 + 3ab} - \frac{1}{4ab - 6b^2};$$

$$b) \frac{5}{b+2} + \frac{b^2-4}{b^2-4} - \frac{3b+1}{b^2-4b+4};$$

$$c) \frac{5}{p-3} - \frac{p-2}{p^2-9} + \frac{p-1}{2p+6};$$

$$d) \frac{3}{2m+6} - \frac{m-2}{m^2+6m+9};$$

$$e) \frac{5-g}{g^2-8g+16} + \frac{6}{5g-20}.$$

K2 722.

$$a) \frac{1}{2a+2} - \frac{a-1}{3a^2+6a+3};$$

$$b) \frac{5}{2b-3} + \frac{2}{2b+3} - \frac{b-1}{9-4b^2};$$

$$c) \frac{1}{3m-2} - \frac{4}{2+3m} - \frac{3m-5}{4-9m^2};$$

$$d) \frac{1}{p-3} - \frac{3}{2p+6} - \frac{p}{2p^2-12p+18};$$

$$e) \frac{4x-3}{3-2x} - \frac{4+5x}{3+2x} - \frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}.$$

K2 723.

$$a) \frac{4a^2-3a+5}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} + \frac{6}{1-a};$$

$$b) \frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2a-4a^2};$$

$$c) \frac{a^2-2a+1}{a^2-1} - \frac{a^2-1}{a^2-1} - \frac{a^2+2a+1}{a^2-1};$$

$$d) \frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3} - \frac{b-a}{a^2+ab+b^2}.$$

E1 724.

$$a) \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)};$$

$$b) \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{a+c}{(a-b)(b-c)};$$

$$c) \frac{(x-y)^2}{(z-x)(z-y)} + \frac{(y-z)^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{(z-x)^2}{(y-x)(y-z)};$$

$$d) \frac{4a^2 - (b-c)^2}{(2a+c)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (c-2a)^2}{(2a+b)^2 - c^2} + \frac{c^2 - (2a-b)^2}{(b+c)^2 - 4a^2}.$$

Algebrai törtek szorzása, osztása

Végezzük el a törtek szorzását, osztását a változók lehetséges értékei mellett: (725–727. feladat)

K1 725.

$$a) \frac{5c^2 d^4}{6ab^3} \cdot \frac{9a^2 b^2}{15cd};$$

$$b) \frac{5c}{42d^2} \cdot 21cd;$$

$$c) \frac{12ab}{25c} : 8a^2;$$

$$d) \frac{9xy}{5ab} \cdot \frac{3ab}{4yz} \cdot \frac{4bz}{3axy};$$

$$e) \left(\frac{8b^2 cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3} \right) \cdot \frac{14a^2}{3b^2};$$

$$f) \left(\frac{3p^2 m}{2a^2 b^2} \cdot \frac{4pxy}{63a^2 bc} \right) \cdot \frac{7abc}{8x^2 y}.$$

K1 726.

$$a) \frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{b^2}{a};$$

$$b) \frac{e^2 + eg}{e} : \frac{eg + g^2}{g};$$

$$c) \frac{4p^2 - 9q^2}{p^2 q^2} : \frac{2np + 3nq}{2pq};$$

$$d) \frac{x^2 - xy}{x^2 + xy} \cdot \frac{x^2 y + xy^2}{xy};$$

$$e) \frac{c^2 - d^2}{(c+d)^2} \cdot \frac{3c + 3d}{4c - 4d}.$$

K2 727.

$$a) \frac{2a + 2b}{3a - 3b} : \frac{6a + 6b}{5a - 5b};$$

$$b) \frac{2a^3 - 2b^3}{3a + 3b} \cdot \frac{6a^2 - 6b^2}{a^2 - 2ab + b^2};$$

$$c) \frac{x^2 + xy}{5x^2 - 5y^2} : \frac{x^2 - xy}{3x^3 + 3y^3};$$

$$d) \frac{3a^2 + 3ab + 3b^2}{4a + 4b} \cdot \frac{2a^2 - 2b^2}{9a^3 - 9b^3};$$

$$e) \frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 + 7a + 12} \cdot \frac{a^2 + 3a}{a^2 - 4a + 4}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket a változók lehetséges értékei mellett: (728–729. feladat)

K1 728.

$$a) \left(\frac{a}{a+1} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2} \right);$$

$$b) \left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} \right) : \frac{4m}{10m-5};$$

$$c) \left(\frac{3a}{1-3a} - \frac{2a}{3a+1} \right) : \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2};$$

$$d) \left[\frac{1}{(j+k)^2} - \frac{1}{(j-k)^2} \right] : \left[\frac{1}{j+k} + \frac{1}{j-k} \right];$$

$$e) \left(\frac{q}{p^2-pq} + \frac{p}{q^2-pq} \right) \cdot \frac{p^2q+pq^2}{p^2-q^2};$$

$$f) (x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + 1 \right);$$

$$g) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 \right).$$

E1 729.

$$a) \left(\frac{a^2-ab}{a^2b+b^3} - \frac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{b-1}{a} - \frac{b}{a^2} \right);$$

$$b) \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1} \right) \cdot \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4a}{a^2-1} \right);$$

$$c) \left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2} + \frac{b}{3b-2a} \right) : \left(1 - \frac{2a-3b}{2a+3b} \right).$$

E2 730. Igazoljuk, ha $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, akkor $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$.

E1 731. Mutassuk meg, hogy ha két tört összege egyenlő eggyel, akkor a törtek különbsége egyenlő négyzeteinek különbségével.

E2 732. Igazoljuk a következő egyenlőségeket. $\frac{43}{85} = \frac{4343}{8585} = \frac{434343}{858585}$.

Általánosítsuk a megállapított összefüggést.

V 733. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=0$, akkor

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = 0.$$

V 734. Egyszerűsítsük a törtet.

$$\frac{a^2b^2+c^2(2ab-a^2)-b^2(2ac+b^2)+c^4}{(b+c)a+b^2+c^2}.$$

V 735. Képezzük az $\frac{a}{b}$ tört és reciprok értékének szorzatát, összegük és különbségük felét.

Igazoljuk, hogy ezek az értékek lehetnek egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai.

V 736. Mutassuk meg, hogy a tört értéke független a, b, c értékétől.

$$a) \frac{(35a + 14b - 10c)^2 + (35b + 14c - 10a^2) + (35c + 14a - 10b^2)}{(15a + 10b - 6c)^2 + (15b + 10c - 6a)^2 + (15c + 10a - 6b)^2}.$$

b) Általánosítsuk az állítást.

E2 737. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, akkor $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$,

$b \neq 0, c \neq 0, a + c \neq 0$.

E2 738. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a + b)(b + c) = 0$ és $abc \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}.$$

E2 739. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ és $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, akkor

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, abc \neq 0, xyz \neq 0.$$

E2 740. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor a

$$\left(\frac{9}{n^2} + \frac{n}{3} \right) : \left(\frac{3}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \right)$$
 kifejezés értéke is minden n -re pozitív egész szám.

V 741. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész, akkor az

$$\frac{(n-1)(n+1)^n - n(n+1)^{n-1} + 1}{n^2}$$
 kifejezés egész szám.

Racionális és irracionális kifejezések

K2 742. Pontosan 5 db 2-es számjegy és tetszőlegesen sok műveleti jel és zárójel felhasználásával állítsuk elő a következő számokat.

1; 7; 11; 34; 485.

K1 743. Jelölje A a következő műveletsort:

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Változtassunk meg néhány $+$ jelet $-$ jele úgy, hogy a műveletsor eredménye

a) $A + 20$; b) $A - 20$; c) $28 - A$; d) 0 legyen.

K1 744. El lehet-e osztani 80 CD-t 3 embernek úgy, hogy mindenki páratlan darabszámú CD-t kapjon?

K2 E1 745. Van-e olyan tízes számrendszerbeli

a) kétjegyű,

b) háromjegyű szám,

melyben a számjegyek összege megegyezik a számjegyek szorzatával?

K2 746. A 0; 1; 2; 3; ...; 8; 9 számjegyeket pontosan egyszer felhasználva írjunk fel olyan a ; b ; c számokat melyekre:

a) $a + b + c = 10\,629$; b) $a : b : c = 4 : 3 : 2$; c) $a - bc = 65\,415$.

K2 747. Keressünk olyan $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ számokat, melyben a számjegyek mind különbözők, és szorzat alakjukban ezek a számjegyek szerepelnek.

K2 748. Az első 9 természetes számból állítsunk elő „bűvös” négyzetet úgy, hogy

a) Minden sorban, oszlopban, átlóban az összeg egyenlő.

b) Helyezzük el a számokat úgy is, hogy oszloponként, soronként és az átlóban a szorzat megegyezzen.

E1 749. A B számról a következőket tudjuk

a) B egy természetes szám négyzete,

b) B a tízes számrendszerben olyan négyjegyű szám, amelynek mindegyik jegye kisebb mint 7,

c) ha minden számjegyét 3-mal növeljük, akkor ismét egy természetes szám négyzetét kapjuk.

Melyik ez a szám?

K2 750. Legyenek a ; b egész számok.

Mikor lehetnek igazak az alábbi állítások?

a) $a + b$ egész szám; b) a^b egész szám; c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$;

d) $\frac{a}{b}$ pozitív egész; e) $\frac{b}{a}$ racionális szám; f) $a - b$ negatív egész.

K1 751. Az $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$ törtek, műveleti jelek és zárójelek felhasználásával állítsuk elő azokat a törteket, amelyek értéke:

$\frac{1}{16}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{37}{60}$; $\frac{1}{2}$.

K1 752. Rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő racionális számokat:

a) $\frac{4}{7}$; $-\frac{13}{5}$; $-\frac{38}{14}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{24}{27}$; b) $\frac{11}{43}$; $-\frac{23}{52}$; $-\frac{3}{11}$; $\frac{19}{7}$; $\frac{8}{17}$.

K1 753. Végezzük el a következő műveleteket:

a) $A = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 5$; b) $B = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : 5$; c) $C = A + B$;

d) $D = (-A) - (-B)$; e) $E = A \cdot B$; f) $F = \frac{A}{B}$.

K1 754. Egy tört számlálója és nevezője pozitív egész. Hogyan változik meg az értéke, ha a számlálóhoz és a nevezőhöz ugyanazt a természetes számot hozzáadjuk, ha

a) a tört értéke 1-nél nagyobb? b) a tört értéke 1-nél kisebb?

K2 E1 755. Számítsuk ki a kifejezések értékét:

$$a) A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2004 \cdot 2005};$$

$$b) B = \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{101 \cdot 104};$$

$$c) C = \frac{5}{2 \cdot 7} + \frac{5}{7 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \dots + \frac{5}{72 \cdot 77};$$

$$d) D = \frac{12}{5 \cdot 9} + \frac{12}{9 \cdot 13} + \frac{12}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{12}{101 \cdot 105};$$

$$e) E = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}.$$

K2 756. A tört kiszámítása nélkül döntsük el, melyik állítás igaz, melyik hamis:

$$A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}}.$$

a) Az A szám értéke 1-nél nem kisebb.

b) Az A szám racionális szám.

c) Az A szám megoldása az $x^2 - 4 = 0$ egyenletnek.

d) Az A értéke nő, ha a $+$ jelet váltakozva, balról jobbra haladva; $-$ $+$ jelekre cseréljük.

e) Számítsuk ki az A értékét.

K1 757. Legyenek $a; b; c; d$ egész számok, $b \neq 0$ és $d \neq 0$.

Töltsük ki a táblázatot.

	Mindig igaz	Van amikor igaz	Soha nem igaz
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ racionális szám			
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ egész			
Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor $a = c$ és $b = d$			
$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ racionális szám			

K1 758. Adjunk meg öt olyan racionális számot, amelyekre igaz, hogy:

- a) 5-től való távolsága kisebb mint 0,1;
 b) 1-től való távolsága nagyobb, mint 0,03;
 c) -2 -től való távolsága kisebb, mint 0,5.

Mindhárom esetben készítsünk olyan számegeyenest, ahol ezt ábrázolni is lehet.

K1 759. Adjunk meg három olyan racionális számot, amely a megadott intervallumokba esik:

- a) $[0; 1]$; b) $[-2; -3]$; c) $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$; d) $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right]$; e) $\left[\frac{1}{10}; \frac{1}{20}\right]$;
 f) $\left[\frac{1}{104}; \frac{1}{102}\right]$.

K1 760. Írjunk a $\frac{4}{7}$ és $\frac{5}{8}$ közé 5 darab racionális számot. Adjunk meg olyan eljárást, amelynek felhasználásával tetszőlegesen sok racionális szám írható a két tört közé.

K2 761. A $7\frac{1}{3}$ és a $7\frac{1}{2}$ között hány, tovább már nem egyszerűsíthető tört van, melyeknek számlálója és nevezője egyaránt kétjegyű?

K2 762. Milyen számjegy áll a következő törtek tizedestört alakjában a tizedesvessző után a 2005. helyen?

$$\frac{19}{7}; \frac{43}{26}.$$

K1 763. Bővítsük a következő törteket úgy, hogy a nevezője 10 hatvány legyen:

$$\frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{11}{20}; \frac{37}{50}; \frac{4}{3}; \frac{13}{18}; \frac{3}{8}; \frac{6}{30}; \frac{3}{14}.$$

K1 764. Egy tört bővíthető úgy, hogy nevezője 10 hatvány legyen. Milyen kétjegyű szám lehet a nevezője? Hány ilyen kétjegyű nevező van?

K1 765. A következő racionális számokat csoportosítsuk aszerint, hogy tizedestört alakja véges tizedestört, tiszta szakaszos, vagy vegyes szakaszos végtelen tizedestört:

$$\frac{3}{20}; \frac{5}{7}; \frac{647}{400}; \frac{152}{125}; \frac{5}{12}; \frac{67}{81}; \frac{92}{108}; \frac{42}{225}.$$

K1 766. Adjuk meg a következő szakaszos tizedestörteket két egész szám hányadosaként:

$$0,24; 0,625; 0,\dot{3}; 2,072; 0,\dot{6}; 0,5215; 1,\dot{3}; 3,26; 1,\dot{1}.$$

K2 767. Egy üdítőt forgalmazó cég forgalmát a következőképpen szeretné növelni: A vásárlókat arra ösztönzik, hogy a félliteres üdítős üvegek kupakjait gyűjtsék össze, majd 10 összegyűjtött kupakért cserébe 1 darab félliteres üdítőt adnak. Így 1 üveg üdítő többet ér. Mennyit?



K2 768. Az a és b egész számok, $b \neq 0$. Tudjuk, hogy $\frac{a}{b}$ tört tizedestört alakja véges tizedestört.

Mely állítások hamisak?

- Az a -t elosztva b -vel nincs maradék.
- b csak páros szám lehet.
- b -nek csak 2 és 5 prímosztója lehet.
- A $bx = a$ egyenlet megoldása racionális szám.
- Lehet a nevező 2001 hatványa.

K1 769. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis? Az igaz állítást igazoljuk, a hamis állítást ellenpéldával támasszuk alá!

- Ha két racionális szám összege egész szám, akkor az összeadandók is egész számok.
- Ha két racionális szám szorzata egész szám, akkor a tényezők is egészek.
- Ha két racionális szám különbsége egész szám, akkor a kisebbítendő és a kivonandó is egész szám.
- Egy racionális szám négyzete is racionális.
- Ha egy racionális szám négyzete egész szám, akkor az eredeti szám is egész.

E1 770. Bizonyítsuk be, ha két racionális szám összege és szorzata egész szám, akkor a két szám is egész.

K2 771. Mely állítások igazak az alábbi egyenlet gyökeire, ha $a; b; c; d$ számok egész számok ($b \neq 0; d \neq 0$):

$$\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$$

- $x \in \mathbb{Z}$.
- $x \in \mathbb{Q}$.

c) Van olyan $a; b; c; d$ mely esetén $x = 0$.

d) x mindig pozitív szám.

e) $x = \frac{bc}{ad}$ mindig megoldás.

f) Ha $a = b$ és $c = d$, akkor azonosság.

E2 772. Igazoljuk, hogy a $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)$ kifejezés semmilyen $(a; b; c; d)$ pozitív egészekből álló számnégyes esetén sem lehet pozitív egész.

K2 E1 773. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{n+2}{n}$; $\frac{n^3+n^2}{n^2+3n+2}$; $\frac{n+1}{n}$ törtek szorzata természetes szám ($n > 0$, egész).

E2 774. Melyik az a legkisebb pozitív egész nevezőjű és számlálójú $\frac{p}{q}$ tört, amelyre $\frac{99}{100} < \frac{p}{q} < \frac{100}{101}$?

E2 775. Legyenek p, q pozitív egész számok, amelyre teljesül, a következő két egyenlőtlenség:

$$90 < p + q < 100 \text{ és } 0,9 < \frac{p}{q} < 0,91.$$

Határozzuk meg a p, q számokat.

V 776. Egy egész számot 1989-cel osztva a tizedesvessző után valahol négy db 9-est kaptunk egymás után.

Bizonyítsuk be, hogy a számolás során valahol hibáztunk.

E2 777. Igazoljuk, ha x tetszőleges racionális szám, akkor az $\{x\} + \{x^2\} = 1$ egyenletnek nincs megoldása. ($\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti).

V 778. Létezik-e olyan $(a; b)$ racionális számpár, amelyekre $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ összeg és $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ összeg is egész szám?

Adjuk meg az összes ilyen $(a; b)$ számpárt.

E2 779. 1-től n -ig (n pozitív egész) felírtuk a pozitív egész számokat. Egyet kihagyva a megmaradt számok számtani közepe $\frac{602}{17}$. Melyik számot hagytuk ki?

E2 780. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenesen ($a; b \neq 0$) hány olyan pont lehet, melynek mindkét koordinátája racionális szám?

Adjunk példákat a különböző esetekre.

V 781. Igaz-e az állítás? Ha egy $\frac{a}{b}$ törtszám felbontható n db $\frac{1}{c}$ alakú törtszám összegére (a ; b ; c természetes számok, $b \neq 0$ $c \neq 0$), akkor felbontható n -nél több, különböző $\frac{1}{c}$ alakú tört összegére is.

E2 782. Ha a $\frac{19^3 + 65^3}{46^3 + 65^3}$ törtben „elhagyjuk” a kitevőket, akkor a tört értéke nem változik. Mikor tehetjük meg ezt az „egyszerűsítést”?

E2 783. Melyek azok a racionális számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyekre igaz, hogy $\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)$ értéke nullától különböző egész szám?

V 784. Négy számról a ; b ; c ; d -ről tudjuk, hogy a belőlük képezhető hat darab kéttagú összeg közül három racionális, három pedig irracionális értékű.

- a) Racionális szám-e az $a + b + c + d$ összeg?
b) Hány racionális szám lehet a négy szám között?

K1 785. Szerkesszük meg a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$ helyét a számegyenesen. Adjunk meg két racionális és két irracionális számot $\left[\sqrt{2}; \sqrt{3}\right]$ a számközben.

K1 786. Melyik két egész szám között vannak a számegyenesen a következő irracionális számok?

$$\sqrt{15} - 3; \quad 2\sqrt{13} + 2; \quad 11 - \sqrt{110}; \quad 23 - 2\sqrt{6}.$$

K1 787. Döntsük el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

- a) Bármely két irracionális szám között van racionális szám.
b) Bármely két racionális szám között van irracionális szám.
c) Van legnagyobb irracionális szám.
d) Van legkisebb pozitív irracionális szám.

E1 788. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{\sqrt{2} - 3}{5}$ irracionális szám.

E1 789. A következő számok közül csoportosítsuk a számokat aszerint, hogy racionálisak vagy irracionálisak:

- a) $\sqrt{3\sqrt{29} - 6} \cdot \sqrt{3\sqrt{29} + 6}$; b) $\sqrt{4\sqrt{5} + 3} \cdot \sqrt{4\sqrt{5} - 3}$;
c) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$;
e) $\sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$; f) $\sqrt[4]{28 + 16\sqrt{3}} - \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$.

K1 790. Állapítsuk meg a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

- a) Két irracionális szám összege irracionális.
b) Két irracionális szám különbsége irracionális.

- c) Két irracionális szám szorzata irracionális.
 d) Lehet két irracionális szám összege racionális.
 e) Lehet két irracionális szám szorzata racionális.
 f) Egy racionális és egy irracionális szám összege racionális.
 g) Egy racionális és egy irracionális szám szorzata irracionális, feltéve, hogy a racionális szám nem 0.
 h) Lehet egy racionális és egy irracionális szám különbsége racionális.

K2 791. Igaz-e, hogyha a és b irracionális számok összege racionális, akkor a) a különbségük irracionális; b) az $a + 2b$ irracionális?

K2 792. Bizonyítsuk be, hogy a következő kifejezés racionális szám.

$$\left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}} \right)^2$$

K2 793. Igaz-e, hogy az alábbi kifejezés racionális szám tetszőleges $a, b \in \mathbb{Q}$ esetén? Az állítást indokoljuk. $K = \sqrt{a+b+\sqrt{4ab}} \cdot \sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}$

K2 794. Bizonyítsuk be hogy az $(3 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$ egész szám.

E1 795. Döntsük el a következő számok előjelét.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; b) $\sqrt{6} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

E2 796. Legalább mekkora legyen az n értéke $n \in \mathbb{N}^+$, hogy a $K = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{(n+1)}}$ összeg 0,9-nél nagyobb legyen?

K2 E1 797. Bizonyítsuk be a következő összefüggést.

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-y}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-y}}{2}},$$

ha x, y nemnegatív valós számok, és $x \geq y$.

E2 798. Bizonyítsuk be, hogy a következő szám felírható négy pozitív egész szám négyzetgyökének összegeként.

$$A = \sqrt{36 + 14\sqrt{6} + 14\sqrt{5} + 6\sqrt{30}}.$$

E2 799. Mutassuk meg, hogy az $x^3 + 3x + 2$ értéke nulla, ha

$$x = (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{2} - 1)^{-\frac{1}{3}}.$$

E2 800. Számítsuk ki a $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ polinomok értékét az alábbi helyeken.

a) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$;

b) $x_2 = 1 + \sqrt{2}$;

c) $x_3 = 1 - 2\sqrt{2}$;

d) $x_4 = 1 + 2\sqrt{2}$;

e) $x_5 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Mutassuk meg, hogy $P(x_1) + P(x_2) = P(x_3) + P(x_4)$.

E2 801. Adjuk meg $7 + 2\sqrt{10}$ négyzetgyökét $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ alakban.

E2 802. Írjuk fel az alábbi kifejezést két racionális szám négyzetgyökének összegeként: $\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$.

E1 803. Legyenek A és B racionális számok, $B \geq 0$; $A - \sqrt{B} \geq 0$. Adjunk meg olyan eljárást, amelyben $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ kifejezés felírható két racionális szám négyzetgyökének összegeként vagy különbségeként.

E2 804. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ számot fel lehet írni két racionális szán negyedik gyökének különbségeként.

E2 805. Írjuk fel a következő kifejezést $x + y\sqrt{3} + z\sqrt{5}$ alakban.

$$K = \sqrt{18 - 4\sqrt{15} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{3}}.$$

E2 806. Határozzuk meg azokat a pozitív egész a, b számokat, amelyekre teljesül, hogy: $(\sqrt{30} - \sqrt{18})(3\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 12$.

E2 807. Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre $\frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{n}}{2\sqrt{7} - \sqrt{n}}$ egész szám?

E2 808. Igazoljuk, hogy $\sqrt[3]{2}$ nem állítható elő $a + b\sqrt{c}$ alakban, ahol a, b, c racionális számok, és c pozitív.

E1 809. Az alábbi képletből fejezzük ki az A értékét r segítségével, ha

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

$$A = \sqrt{2 \left(r^2 - r \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \right)}.$$

E1 810. Határozzuk meg annak a téglalapnak az oldalait, amelynek területe akkora, mint az a oldalú négyzet területe, kerülete kétszerese a négyzet kerületének.

K2 811. Az (a_n) végtelen sok elemű számtani sorozat elemei között lehet-e pontosan két racionális szám?

K2 E1 812. Igazoljuk, hogy egy végtelen sok elemű számtani sorozat elemei között nem lehet pontosan két irracionális szám.

E2 813. Az ABC háromszög oldalainak hossza rendre: $2, n, n + 1$, ahol n tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész szám. Legyen egy tetszőleges belső pontja P , ennek távolsága az oldalaktól: x, y, z . Bizonyítsuk be, hogy egyidejűleg x, y, z nem lehetnek racionális számok.

V 814. Határozzuk meg minden pozitív egész n -re a $\sqrt{n^2 + n + 1}$ számban a tizedesvessző után álló első számjegyet.

V 815. Melyek a következő egyenlőségekben mutatkozó szabályszerűségek?
 $\sqrt{79} = 8,888\dots$; $\sqrt{320} = 17,888\dots$; $\sqrt{723} = 26,888\dots$; $\sqrt{1288} = 35,888\dots$.
 Van-e végtelen sok olyan természetes szám, amelyek négyzetgyökében az első három tizedesjegy 8-as?

Hatvány, gyök, logaritmus

Egész kitevőjű hatványok

K1 816. Számítsuk ki a következő hatványokat.

a) 3^2 ; 2^6 ; 4^2 ; 2^4 ; 5^3 ; $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(\frac{2}{5}\right)^4$.

b) 5^{-2} ; 2^{-5} ; $0,2^{-1}$; $1,3^{-2}$; $1,2^{-3}$; $2,6^{-4}$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; $\frac{2}{6^{-1}}$; $\frac{5^{-2}}{3^{-3}}$; $\frac{0,02}{5^{-2}}$; $\frac{0,025}{2^{-4}}$.

d) $\frac{5^{-3}}{2^3}$; $\frac{5^3}{2^{-3}}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$; $\left(\frac{3^{-2}}{5^3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{3^2}{5^{-3}}\right)^2$.

K1 817. Írjuk fel

- a) A 2 első 10 db pozitív egész kitevőjű hatványát.
- b) A 3 első 5 db pozitív egész kitevőjű hatványát.
- c) Az első 10 pozitív egész szám négyzetét és köbét.

K1 818. Egy papírlap 0,1 mm vastag. A papírlapot 50-szer kettéhajtottuk. Milyen vastag lesz? (Fejezzük ki a hajtogatás utáni vastagságot km-ben.)

K2 819. Egy alkalommal az 5-ös lottón kihúzott számok mindegyike 3-nak hatványa. Milyen számokat húztak ki a lottón?

Állapítsuk meg számológép és függvénytáblázat használata nélkül, hogy az alábbi feladatokban, a két szám közül melyik nagyobb (820–822. feladat):

K1 820.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ vagy $\frac{7}{3}$; b) $2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2$ vagy 3^4 .

K2 821.

a) $2^{-2} \cdot 3^{-3}$ vagy $3^{-2} \cdot 2^{-3}$; b) $5 \cdot 2^{-2} + 3 \cdot 2^{-3}$ vagy $1,5$;
 c) $3 \cdot 2^{-8} \cdot 5^{-6}$ vagy $8 \cdot 2^{-7} \cdot 5^{-7}$; d) $2 \cdot 3^{-18} + 4 \cdot 3^{-19} - 4 \cdot 3^{-20}$ vagy 3^{-17} ;
 e) $\frac{10 \cdot 7^{-5}}{3^6} - \frac{4 \cdot 3^{-8}}{7^4}$ vagy $\frac{7^{-4}}{3^6}$; f) $2^{-8} + 2^{-12}$ vagy 2^{-9} .

E1 822.

a) $\frac{3 \cdot 5^{-8}}{3^{10}}$ vagy $\frac{3^{-9}}{5^6}$; b) 10^{20} vagy 20^{10} .

823. ábra

1		
		2
3		

K2 823. Az alábbi keresztrejtvény négyzeteiben egy-egy számjegy szerepel. Számítsuk ki – a helyes kitöltés után – az egyes négyzetekben szereplő prímek összegét.

Vízs. 1. 2-nek hatványa.

3. A középső szám a két szélsőnek számtani közepe.

Függ. 1. 2-nek hatványa.

2. 72 osztóinak a száma.

Írjuk fel az alábbi kifejezéseket törtmentes alakban: (824–826. feladat)

K1 824.

a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{243}$; $\frac{2}{5^4}$; $\frac{4}{3^8}$;
 b) $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{27}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{11}{7}$; $3,2$; $0,12$;
 c) $\frac{1}{a^3}$; $\frac{3}{x^4}$; $\frac{1}{a^5 b^4}$; $\frac{(x+1)}{(x+1)^4}$; $\frac{(a+2b)}{(a+2b)^2}$.

K2 825.

a) $\frac{2}{a^{-2}}$; $\frac{x}{k^{-3}}$; $\frac{(x+y)^3}{(x-y)^{-3}}$; $\frac{a^2 b^5}{x^3 y^{-4}}$; $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}}$;
 b) $\frac{p^2 q^{-4}}{r^3 s^{-4}}$; $\frac{m^4 n^{-5}}{k^{-3} l^7}$; $\frac{(a+b)^3}{(a^2+2ab+b^2)^5}$; $\frac{(x^2-2xy+y^2)^{-2}}{(x-y)^4}$.

E1 826. $\frac{a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3}{(a+b)^{10}}; \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 - y^2}.$

Írjuk fel az alábbi kifejezéseket negatív kitevő használata nélkül: (827–829. feladat)

K1 827.
 $4a^{-2}; 6b^{-10}; x^0 \cdot y^{-6}; a^{-2}b^{-4}; p^{-6}q^{-1}; x^{-1}y^{-2}z^{-3}q^{-4}.$

K2 828.
 a) $\frac{x^{-2}}{y^{-2}}; \frac{a^{-100}}{a^{-99}}; \frac{3x^{-2}y^{-3}}{2^{-1}xy^{-1}}; \frac{p^{-3}b^2}{p^3b^{-2}}; \frac{(x^{-1}+y^{-1})^{-1}}{x^{-1}y^{-1}};$

b) $a^{-2}+b^{-2}+2a^{-1}b^{-1}; \left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^{-1}; (a^{-2}+b^{-2}) \cdot \frac{1}{(a^2+b^2)^{-1}}.$

E1 829. $\frac{a^{-2}+a^{-1}}{a^{-2}-a^{-1}}; \frac{p^2q^{-1}+q^2p^{-1}}{p^2q^{-1}-q^2p^{-1}}; \frac{xy^{-1}z^{-1}+yx^{-1}z^{-1}+zx^{-1}y^{-1}}{(xyz)^{-1}}.$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket a megadott számértékeknél: (830–831. feladat)

K1 830. $3,8 \cdot a^{-20} \cdot b^5 \cdot a^{21} \cdot b^{-4},$ ha $a = -\frac{1}{8}, b = 4.$

E1 831.
 a) $\frac{x^{-3}y}{3x^{-6}y^{-2}},$ ha $x = \frac{1}{3}, y = -3;$
 b) $\left(\frac{a^{-2}-b^{-1}}{a^{-2}+b^{-1}}\right)^{-1},$ ha $a = \frac{1}{6}, b = 2;$
 c) $\left(\frac{p+p^{-1}}{p-p^{-1}}\right)^{-1} \cdot (p+1)^{-1},$ ha $p = \frac{3}{2}.$

K2 832. Számítsuk ki a következő kereszt-rejtvény mezőiben szereplő számjegyek összegét.

Vízs. 1. 10-zel kisebb, mint a 14 valamelyik hatványa.

3. 2^4 és 2^5 közé eső legnagyobb prímszám.

5. A függ. 1-től különböző köbszám.

Függ. 1. Köbszám.

2. Négyzetszám.

4. Számjegyeinek szorzata 16.

832. ábra

1	2		
3			4
5			

833. ábra

	1	
2		
3		

K2 833. Írjuk fel az alábbi keresztrejtvényben szereplő számjegyekkel felírható legnagyobb hatjegyű számot.

Vízs. 2. A legnagyobb egyjegyű prímnek hatványa.

3. Számjegyeinek szorzata 9.

Függ. 1. Számjegyeinek szorzata 3^4 .

2. Négyzetszám.

A hatványozás azonosságainak alkalmazásával végezze el az alábbi műveleteket: (834–836. feladat)

K1 834.

a) $x^3 x^{-5}$, $a^4 a^6$, $p^2 p^{12}$, $b^{-5} b^{-2}$, $y^4 y^{-4}$;

b) $a^3 a^6 a^4$, $x^{10} x^{-3} x$, $q^{-4} q^{-6} q^9$, $y^5 y^4 y^{-9}$;

c) $(x^2 + x^3 + x^4) x^{-2}$, $(a^{-1} + a^{-2} + a^3) \cdot 2a^4$, $\left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^{-2} - \frac{1}{4} y^{-3}\right) \cdot 12y^5$;

d) $(a^3)^5$, $(b^6)^{10}$, $(x^2 x^{-3})^4$, $(p^2 p^3 p^{-4})^2$, $(y^4 y^{-4})^{1000}$.

K2 835.

a) $(a^2 b^4 x^3)^3 \cdot (a^{-2} b^2 x^{-1})^4$, $(p^6 q^{-2} r^5)^4 \cdot (p^{-2} q^2 r^4)^{-3}$, $(x^2 y^3 s^{-4})^{-3} : (x^3 y s^{-2})^5$;

b) $\left(\frac{a^2 b c^3}{x^{-2} y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3 b^{-2} c^{-2}}{x^2 y^3}\right)^{-1}$, $\left(\frac{2p^3 q^2 k^{-3}}{x^5 y^{-1}}\right)^4 : \left(\frac{p^{-1} q^{-2} k^2}{4x^{-2} y^3}\right)^{-2}$.

E1 836.

a) $(a^{-1} + b^{-1})^{-2} \cdot (a + b)^2$, $(x^2 y^{-3} + xy^4 + x^{-1} y^3) \cdot x^2 y^{-2}$;

b) $(p^3 q^2 + q^3 p^2) \cdot (p^{-1} q^{-1} + pq)$, $(ab + a^2 b^{-1} + a^{-1} b^2) \cdot (a^3 b^{-1} - b^3 a^{-1})$;

c) $\left(\frac{a^2 b}{x^{-2}} + \frac{a^{-2} b^3}{x^4}\right) \cdot \frac{a^3 b^{-2}}{x^2}$, $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{x^{-3}}{y^3} + \frac{x^2}{y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{y} - \frac{x^{-1}}{y^{-2}}\right)$.

Döntsük el segédeszközök használata nélkül, hogy melyik szám nagyobb: (837–838. feladat)

K2 837.

a) 20^{100} vagy 100^{20} ;

b) 10^{16} vagy 16^{10} ;

c) $\frac{10^{-1} + 20^{-1}}{10^{-1} - 20^{-1}}$ vagy $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$;

d) $\frac{5}{7^{10} 3^{11}}$ vagy $\frac{12}{7^{11} 3^{10}}$.

E1 838.

a) $\frac{a}{p^n q^k}$ vagy $\frac{apq}{p^{n+1} q^{k-1}}$ ($a, p, q > 0$, n és k egészek);

b) $\frac{123456 \cdot 123458 - 123457 \cdot 123455 + 1}{123457 \cdot 123458 - 123456^2}$ vagy $(1,5)^{-1}$.

Írjunk az alábbi kifejezések mellett szereplő négyzetekbe „i” vagy „h” betűt, aszerint, hogy az egyenlőség igaz vagy hamis (839–840. feladat):

K1 839.

a) $(x^4 y^{-3})^2 = x^6 y^{-6}$ ☐;

b) $(x^2 y^3)^2 \cdot (x^{-1} y^{-2})^4 = y^2$ ☐;

c) $(a^2 b^3)^{-1} \cdot (a^{-2} b^{-3})^2 = a^{-6} b^{-9}$ ☐;

d) $(xy^2 p^3)^2 \cdot (x^2 y^{-1} p^{-2})^3 = x^8 y$ ☐.

K2 840.

a) $\left(\frac{a^2 b}{xy}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{ab^{-1}}{x^2 y^{-1}}\right)^2 = \frac{y^3}{x^3 b^3}$ ☐;

b) $\left(\frac{p^3 q^2 r^{-1}}{x^2 y}\right)^{-2} : \left(\frac{p^{-1} q^{-2} r^2}{x^{-1} y^{-2}}\right)^3 = \frac{q^2 x}{p^3 r^4 y^4}$ ☐.

E1 841. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi tört bármely pozitív egész n esetén egyszerűsíthető 16-tal:

$$\frac{23^{n+1} - 4^{n+1} \cdot 19^n - 7^n \cdot 23 + 2^{2n+2} \cdot 3^n}{41^{n+1} - 41 \cdot 5^{2n}}.$$

E1 842. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi tört bármely pozitív egész n esetén egyszerűsíthető 41-gyel:

$$\frac{7^{2n+1} + 2^{3n+5} + 2 \cdot 2^{3n}}{9 \cdot 2^{n+1} + 23 \cdot 43^n}.$$

E2 843. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan háromszög, melynek oldalai különböznek és minden oldalának mérőszáma 2-nek pozitív egész kitevőjű hatványa.

A négyzetgyök fogalma és azonosságai

Végezzük el az alábbi műveleteket, illetve hozza egyszerűbb alakra a kifejezéseket, figyelembe véve a változók lehetséges értékeit (844–845. feladat):

K1 844.

a) $\sqrt{16}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{100 \cdot 49}$, $\sqrt{2500}$;

b) $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{y^4}$, $\sqrt{(a-1)^2}$, $\sqrt{(b+3)^2}$;

c) $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$, $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, $\sqrt{9x^2 - 6x + 1}$;

d) $\sqrt{9a^2}$, $\sqrt{36b^2}$, $\sqrt{(-a)^2}$, $\sqrt{81y^{12}}$.

K2 845.

$$a) \sqrt{a^2 c^2}, \sqrt{\frac{a^2 b^4}{x^4 y^6}}, \sqrt{\frac{x^8 r^4}{9a^6 b^4}}, \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{x^{12} y^{16}}};$$

$$b) \sqrt{\frac{x^4 y^8 z^{12}}{a^4 b^6 c^8}}, \sqrt{\frac{(x+y)^4}{x^2 + y^2 + 2xy}}, \sqrt{\frac{p^4 q^4 (p+q)^2}{x^6 y^8 (x+y)^4}}.$$

Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát: (846–848. feladat)

K1 846.

$$a) \sqrt{x-1}, \sqrt{x+3}, \sqrt{x-6}, \sqrt{-x-2}, \sqrt{|x|-3};$$

$$b) \sqrt{2x+1}, \sqrt{3x-3}, \sqrt{x^2}, \sqrt{x^2-2x+1}, \sqrt{x^2+2};$$

$$c) \sqrt{-x^2+4x-4}, \sqrt{-(x+3)^2}, \sqrt{x^2-8x+7}, \sqrt{-x^2-6x}.$$

K2 847.

$$a) \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}, \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}, \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}}, \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-1}}, \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1};$$

$$b) \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}, \sqrt{\frac{ax+2}{x}} \quad (a > 0), \sqrt{\frac{bx-5}{x-2}} \quad (0 < b < 2),$$

$$\sqrt{\frac{ax-b}{x-2}} \quad \left(0 < a < \frac{b}{2}\right).$$

$$\mathbf{E1} \quad \mathbf{848.} \quad \sqrt{\frac{x^2-16}{|x|-1}}, \sqrt{\frac{x^2-7x+6}{-x^2+11x-24}}, \frac{\sqrt{x^2-7x+6}}{\sqrt{-x^2+11x-24}}.$$

Legyen A halmaz az a kifejezés, B halmaz a b kifejezés értelmezési tartománya. Határozzuk meg az $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmaz elemeit: (849–850. feladat)

K2 849.

$$a) a = \sqrt{2x-1}, \quad b = \sqrt{x^2-5}; \quad b) a = \sqrt{-x^2+4}, \quad b = \sqrt{x^2-10x}.$$

$$\mathbf{E1} \quad \mathbf{850.} \quad a = \sqrt{x^2-5x+4} \quad b = \sqrt{x^4-5x^2+4}.$$

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket, figyelembe véve a változók lehetséges értékeit (851–853. feladat):

$$\mathbf{K1} \quad \mathbf{851.} \quad \sqrt{25x^2}, \sqrt{100a^2b^3}, \sqrt{121a^4b^2}, \sqrt{p^2q^3s^4}.$$

K2 852.

$$a) \sqrt{\frac{16a^4 x^2}{9z^5 d^2}}, \sqrt{\frac{49(p+q)^3}{9p^2 q^2}}, \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{25a^4 b^4}{4(a+b)^2}}, \frac{a}{7} \cdot \sqrt{\frac{49x^5 y^6}{a^5 b^4}} \quad (x > 0, y > 0);$$

$$b) \sqrt{\frac{x^3 y - y^3 x}{x^4 y^4}} \quad (x > y > 0), \sqrt{\frac{a^5 b^2 + b^5 a^2}{x^4 y^4 (a^3 + b^3)}}, \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 - 2xy)^4}{p^5 q^5}} \quad (pq > 0).$$

$$E1 \quad 853. \quad \sqrt{\frac{a - ax + b - bx}{1 - 4x + 4x^2 - x^3}}, \sqrt{\frac{4a^2 x^2 + 4b^2 x^2 - 8abx^2}{a^2 y^2 + b^2 y^2 - 2aby^2}}.$$

Írjunk az alábbi kifejezések mellett szereplő négyzetekbe „i” vagy „h” betűt, aszerint, hogy a reláció igaz vagy hamis: (854–855. feladat)

K1 854.

$$a) 2\sqrt{3} > 3\sqrt{2} \quad \square;$$

$$b) 2\sqrt{5} < \sqrt{20} \quad \square.$$

K2 855.

$$a) a\sqrt{b} > b\sqrt{a} \quad (a > b) \quad \square;$$

$$b) 4\sqrt{5} > \sqrt{96} \quad \square;$$

$$c) \frac{\sqrt{54}}{3} < \frac{\sqrt{150}}{5} \quad \square;$$

$$d) \sqrt{50} - 2\sqrt{3} = \frac{20 - \sqrt{96}}{2\sqrt{2}} \quad \square;$$

$$e) 4\sqrt{10} - \sqrt{120} = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{6} + \sqrt{8}} \quad \square.$$

K1 K2 856. Vonjuk össze az alábbi kifejezéseket:

$$a) \sqrt{2} + \sqrt{8}; \quad b) \sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27};$$

$$c) 4\sqrt{2} + 3\sqrt{18} - \sqrt{50}; \quad d) 5\sqrt{3} + \sqrt{75} - \frac{1}{2}\sqrt{147};$$

$$e) 5\sqrt{4x} + 4\sqrt{x} + \sqrt{9x}; \quad f) 2\sqrt{45} + \sqrt{20} - 3\sqrt{80};$$

$$g) 3\sqrt{2b} + \sqrt{18b} - \sqrt{8b} + 2\sqrt{50b}; \quad h) 4\sqrt{12y} + 3\sqrt{75y} + 2\sqrt{300y} - 5\sqrt{3y}.$$

Végezzük el a következő műveleteket: (857–859. feladat)

K1 857.

$$a) (\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50}) \cdot 2\sqrt{2}; \quad b) (2\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{12}) \cdot 5\sqrt{3};$$

$$c) (\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2}); \quad d) (\sqrt{8} + \sqrt{3})(\sqrt{8} - \sqrt{3});$$

$$e) \sqrt{5 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{24}}; \quad f) \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{20}}.$$

K2 858.

$$a) (\sqrt{108} + \sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \cdot 2\sqrt{3};$$

$$b) (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3});$$

$$c) (a\sqrt{b} + b\sqrt{a})(a\sqrt{b} - b\sqrt{a});$$

$$d) (\sqrt{a^3b} + \sqrt{b^3a})(\sqrt{a^3b} - \sqrt{b^3a});$$

$$e) (3\sqrt{5} + 2\sqrt{20})(\sqrt{45} + 2\sqrt{5} - \sqrt{125});$$

$$f) (4\sqrt{3} + \sqrt{8} - 2\sqrt{27})(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$g) (\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y});$$

$$h) \frac{6+4\sqrt{2}}{4} + \frac{3-6\sqrt{2}}{6};$$

$$i) \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 4}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 4}}.$$

E1 859.

$$a) \sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}};$$

$$b) \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}.$$

Vigyünk be a négyzetgyök alá az előtte szereplő szorzótényezőt: (A feladatokban szereplő paraméterek pozitív valós számok, a törtek nevezőinek egyike sem 0.) (860–862. feladat)

$$\mathbf{K1 \ 860.} \ a) 3\sqrt{2}, \ 5\sqrt{4}, \ 2\sqrt{10}, \ 10\sqrt{2}, \ 7\sqrt{7}.$$

K2 861.

$$a) 4\sqrt{\frac{5}{2}}, \ 5\sqrt{\frac{3}{10}}, \ 2\sqrt{\frac{9}{2}}, \ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}, \ \frac{4}{7}\sqrt{\frac{7}{2}};$$

$$b) a\sqrt{b}, \ xy\sqrt{x^2y^2}, \ 2a\sqrt{3a^2}, \ 5p\sqrt{4p^3}, \ 2x^2y\sqrt{y^3x^5};$$

$$c) p\sqrt{\frac{q}{p}}, \ t^3\sqrt{\frac{r}{t^5}}, \ \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}, \ \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}, \ x^2y^2\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}}.$$

$$\mathbf{E1 \ 862.} \ (a+b)\sqrt{\frac{x^2+y^2-2xy}{a^2+b^2+2ab}}, \ x\sqrt{1+\frac{2a}{x}+\frac{a^2}{x^2}}, \ (p-q)\sqrt{\frac{2}{p^2-q^2}}.$$

Végezzük el az alábbi hatványozásokat: (863–865. feladat)

$$\mathbf{K1 \ 863.} \ (\sqrt{3})^2, \ (\sqrt{(-5)^2})^2, \ (3\sqrt{5})^2, \ (5\sqrt{3})^2.$$

K2 864.

$$a) (a\sqrt{b})^2, (x^2\sqrt{y})^2, (p^2q\sqrt{pq})^2, (s^3t^4\sqrt{s^3t^5})^2;$$

$$b) (-\sqrt{2})^3, (3\sqrt{3})^3, (-5\sqrt{2})^5, (-3\sqrt{7})^4;$$

$$c) (1+\sqrt{3})^2, (\sqrt{5}-2)^2, (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2, (2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2;$$

$$d) (\sqrt{a}-1)^2, (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2, (p\sqrt{q}-q\sqrt{p})^2;$$

$$e) (1+\sqrt{x})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2, (3\sqrt{2}-1)^2;$$

$$f) (\sqrt{1+\sqrt{2}}-1)^2, (\sqrt{\sqrt{3}-2}+2)^2, (\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^2.$$

E1 865.

$$a) (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2, (\sqrt{5}-\sqrt{2}+1)^2, (1+\sqrt{a}+a)^2;$$

$$b) (\sqrt{\sqrt{20}+2}+\sqrt{\sqrt{20}-2})^2, (\sqrt{2\sqrt{3}+2}-\sqrt{2\sqrt{3}-2})^2;$$

$$c) \left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{a}}{b}-\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^2, \left(\frac{1}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x\right)^2.$$

Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket: (866–868. feladat) (Az egyes négyzetgyökök alatt nem negatív kifejezések szerepelnek.)

K1 866.

$$a) \sqrt{2}+\sqrt{6}, \sqrt{3}-\sqrt{15}, \sqrt{7}+7, \sqrt{75}+\sqrt{15};$$

$$b) \sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{10}, \sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{18}, \sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{15}.$$

K2 867.

$$a) a+\sqrt{a}, x-\sqrt{x}+\sqrt{xy}, a\sqrt{b}+b\sqrt{a}, p+\sqrt{p}+p^2+\sqrt{p^3};$$

$$b) \sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}, pq+\sqrt{p}, \sqrt{x-y}+\sqrt{x^2-y^2}, x\sqrt{x+y}-y\sqrt{x^2-y^2};$$

$$c) \sqrt{xy}+\sqrt{pq}+\sqrt{py}+\sqrt{xq}, xy-2\sqrt{xy}+x.$$

E1 868.

$$a) \sqrt{a^4b^2}+\sqrt{a^2b^4}-\sqrt{a^3b^3}, pq\sqrt{pq}+q^2\sqrt{pq}-p^2\sqrt{pq}+p^2q^2;$$

$$b) a+4b+4\sqrt{ab}, x^2+x-2\sqrt{x^3}, p^2q+q^2p+2\sqrt{p^3q^3};$$

$$c) x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x, 2\sqrt{a}+\sqrt{b}+2a+\sqrt{ab}+2\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}.$$

Egyszerűsítsük az alábbi törtet: (869–871. feladat) (A feladatokban szereplő paraméterek pozitív valós számok, a törtnek nevezőinek egyike sem 0.)

K1 869. a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{15} + \sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{21} - \sqrt{3}}{\sqrt{14} - \sqrt{2}}$; c) $\frac{2\sqrt{14} + \sqrt{28}}{\sqrt{72} + 6}$.

K2 870.

a) $\frac{\sqrt{ab} + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a^2b} + 2a}$; b) $\frac{\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^4y}}{\sqrt{xy} - 2y}$;

c) $\frac{2pq + p\sqrt{q}}{\sqrt{4q^2} + \sqrt{q}}$; d) $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

E1 871. a) $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + y + 2\sqrt{xy}}$; b) $\frac{\sqrt{px} - \sqrt{qy} - \sqrt{qx} + \sqrt{py}}{p + q - 2\sqrt{pq}}$.

Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét: (872–873. feladat)

K2 872.

a) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{48} + \sqrt{5})$;

b) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - \sqrt{27} + 5\sqrt{3}) \cdot (7\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$;

c) $\left(\frac{2}{2\sqrt{3} - 1} + \frac{3}{2\sqrt{3} + 1} \right) \cdot (10\sqrt{3} + 1)$;

d) $\left(\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) \cdot (\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$;

e) $\left(\frac{12}{\sqrt{6} + 1} - \frac{4}{\sqrt{6} - 1} + 2 \right) \cdot (4\sqrt{6} + 3)$;

f) $\left(\frac{6}{4 + \sqrt{10}} + \frac{24}{8 - \sqrt{40}} \right) \cdot (12 - \sqrt{10})$;

g) $\left(\frac{1}{\sqrt{7} - 2} + \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 2} \right) \cdot (23 + 5\sqrt{7})$;

h)

$(3\sqrt{32} + 2\sqrt{48} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{75})(\sqrt{242} + \sqrt{32} - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - \sqrt{12})$.

E1 873.

$$a) \left(\frac{8}{\sqrt{5}+3} - \frac{20}{\sqrt{5}-3} - \frac{4}{\sqrt{5}-2} \right) \cdot (13 + \sqrt{5});$$

$$b) \sqrt{5\sqrt{3} + \sqrt{59}} \cdot \sqrt{5\sqrt{3} - \sqrt{59}};$$

$$c) \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{7}} + \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{7}}.$$

Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét: (874–876. feladat)

K1 874.

$$a) \frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{5}}, \frac{12}{\sqrt{3}}, \frac{24}{\sqrt{8}}, \frac{11}{\sqrt{11}};$$

$$b) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}, \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}};$$

$$c) \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, \frac{5}{3\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{10 + \sqrt{5}}{2\sqrt{10}}.$$

K2 875.

$$a) \frac{a}{\sqrt{a}}, \frac{b}{\sqrt{ab}}, \frac{p^2}{\sqrt{pq}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \frac{xy}{\sqrt{y}};$$

$$b) \frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}, \frac{ab^2}{b\sqrt{a}}, \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}, \frac{a + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}, \frac{2pq^2}{\sqrt{pq}};$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{x-y}}, \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}, \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{p+q}}, \frac{a^2-b^2}{2\sqrt{a+b}}, \frac{2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}};$$

$$d) \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}}{\sqrt{3}}, \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{10} - \sqrt{80}}{\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{2} + 6\sqrt{8} + 3\sqrt{18}}{\sqrt{2}}.$$

E1 876.

$$a) \frac{6}{\sqrt{2\sqrt{6}}}, \frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}, \frac{12}{\sqrt{3\sqrt{2}}}, \frac{a}{\sqrt{a\sqrt{a}}}, \frac{pq}{\sqrt{p\sqrt{q}}};$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{4}{\sqrt{5}-1}, \frac{12}{4+\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{8}-2}, \frac{6}{2\sqrt{3}-3};$$

$$c) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}, \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}, \frac{15}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}};$$

$$d) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \quad \frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{17}+\sqrt{15}}{\sqrt{17}-\sqrt{15}};$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{a}+1}, \quad \frac{a}{\sqrt{a}-1}, \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \quad \frac{p\sqrt{q}+q\sqrt{p}}{p\sqrt{q}-q\sqrt{p}};$$

$$f) \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}, \quad \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p-1}-\sqrt{q-1}}, \quad \frac{p+q}{\sqrt{p^2+1}-\sqrt{q^2+1}};$$

$$g) \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}, \quad \frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}, \quad \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2}}}}.$$

Határozzuk meg az alábbi kifejezések előjelét a változók lehetséges értékeinél: (877–878. feladat)

E1 877.

$$a) \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2};$$

$$b) \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5} - \sqrt{5+2\sqrt{6}};$$

$$c) 2 + \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+\sqrt{8}};$$

$$d) \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} - \sqrt{3};$$

$$e) \sqrt{3\sqrt{5}+2\sqrt{11}} + \sqrt{3\sqrt{5}-2\sqrt{11}} - \sqrt{2(3\sqrt{5}+1)}.$$

E2 878. $\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}.$

879. ábra

	1	2
3		
4		

K1 879. Hány db hétjegyű szám képezhető az alábbi keresztrejtvényben szereplő számjegyek mindegyikének felhasználásával?

Vízs. 1. Negyedik hatvány. 4. Négyzetszám, mely jegyeinek összege 9.

Függ. 2. Páratlan négyzetszám. 3. Hatodik hatvány.

Végezzük el az alábbi műveleteket, figyelembe véve a változók lehetséges értékeit: (880–882. feladat)

K2 880.

$$a) \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(5+\sqrt{2})^2},$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{10}-3)^2}} - \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{10}+3)^2}}.$$

$$\text{E1} \quad 881. \left(\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-1}} - \frac{2}{a-1} \right) \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a+3}}.$$

$$\text{E2} \quad 882.$$

$$a) (2 - \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

$$b) \left(\frac{\sqrt{p+q} - \sqrt{p-q}}{\sqrt{p+q} + \sqrt{p-q}} - \frac{\sqrt{p+q} + \sqrt{p-q}}{\sqrt{p+q} - \sqrt{p-q}} \right) : \frac{4}{q\sqrt{p^2 - q^2}};$$

$$c) \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) : (a + \sqrt{a^2 - b^2});$$

$$d) \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : \left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}} + \frac{y}{x - \sqrt{xy}} - \frac{x}{y + \sqrt{xy}} \right);$$

$$e) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right);$$

$$f) \left(\frac{p\sqrt{p} + q\sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} - \sqrt{pq} \right) : (p - q) + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}};$$

$$g) \left(\frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right) : \left(\frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^2.$$

Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket: (883–884. feladat)

$$\text{E2} \quad 883.$$

$$a) \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \quad a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b;$$

$$b) \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a - \sqrt{b}} \quad a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b.$$

$$\text{E2} \quad 884. \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

E2 885. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \geq 4$ tetszőleges valós szám, akkor az alábbi kifejezés értéke egész szám:

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{a}}{a} \cdot \left(\sqrt{4 + a - 4\sqrt{a}} + \sqrt{4 + a + 4\sqrt{a}} \right)}.$$

E1 886. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög oldalaira fennáll az alábbi összefüggés, akkor a háromszög derékszögű:

$$\sqrt{\frac{c-a}{c+a}} + \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{c+a}\right) \cdot \left(\frac{c-b}{c+b}\right)} = 1.$$

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket: (887–888. feladat)

E1 887.

a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2004} + \sqrt{2006} + \sqrt{2007} < 4 \cdot \sqrt{2005}$;

b) $\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2+1} < 2a \quad (a > 1).$

E2 888.

$$\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2-2} + \sqrt{a^2+2} + \dots + \sqrt{a^2-k} + \sqrt{a^2+k} < 2ka \quad (a^2 \geq k > 0).$$

E1 889. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c, d pozitív valós számokra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

akkor $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \sqrt{\frac{a^4+c^4}{b^4+d^4}}$.

E1 890. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés értelmezési tartománya egyetlen prímszámot se tartalmazzon:

$$\sqrt{\frac{-x^2+px-p+x}{x^2-2005x+2004}}.$$

E1 891. Az alábbi kifejezés értelmezési tartománya pontosan egy prímszámot tartalmaz. Határozzuk meg p értékét.

$$\frac{\sqrt{-x^2+(2+p)x-2p}}{\sqrt{-x^2+2005x}}.$$

E1 892. Mekkora legyen az $a > 1$ paraméter értéke, hogy az alábbi kifejezés értelmezési tartománya pontosan 5 db prímszámot tartalmazzon?

$$\frac{\sqrt{-4x^2+2(a+1)x-a}}{\sqrt{x^2-12x+35}}.$$

E1 893. Melyik az az $\overline{ab}$ kétjegyű szám, melyre $\sqrt{\overline{ab}} = \overline{a} + \overline{b}$?

E2 894. Határozzuk meg az alábbi kifejezés előjelét:

$$\sqrt{2005 + \sqrt{2005^2 - b^2}} - \sqrt{2005 - \sqrt{2005^2 - b^2}} - \sqrt{6}.$$

Az n-edik gyök fogalma és azonosságai

Végezzük el a következő gyökvonásokat: (895–896. feladat)

K1 895.

- a) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-64}$;
 b) $\sqrt[3]{0,027}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{-243}$, $\sqrt[7]{-128}$;
 c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;
 d) $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[4]{-64}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}$.

K2 896. $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[4]{b^4}$, $\sqrt[6]{c^6}$, $\sqrt[k]{a^k}$ (k páros egész), $\sqrt[p]{x^{2p}}$.

Vigyünk ki a gyökjel elé a lehetséges szorzótényezőket: (897–898. feladat) (Az egyes gyökök alatti hatványalapok pozitívak.)

K1 897.

- a) $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[5]{64}$, $\sqrt[3]{81}$;
 b) $\sqrt[3]{8b^2}$, $\sqrt[4]{64x^3}$, $\sqrt[3]{16a^2b^4}$, $\sqrt[4]{p^5q^6}$.

K2 898.

- a) $\sqrt[k]{a^{k+1}}$, $\sqrt[n]{b^{2n+1}}$, $\sqrt[p]{x^{p+q}}$, $\sqrt[n+1]{k^{n+3}}$;
 b) $\sqrt[n]{a^{n+2}b^{n+1}}$, $\sqrt[k]{c^{3k+1}d^{2k+3}}$, $\sqrt[k+2]{x^{2k+5}y^{k+3}}$.

Vigyünk a gyökjel előtti szorzótényezőt a gyökjel alá: (899–901. feladat) (Az egyes gyökök alatt mindenütt pozitív mennyiségek szerepelnek.)

K1 899. $2\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{5}$, $2\sqrt[4]{3}$, $3\sqrt[5]{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

K2 900.

- a) $a\sqrt[3]{a}$, $b\sqrt[4]{b}$, $c^2\sqrt[5]{c}$, $d^{33}\sqrt[4]{d^2}$, $ab\sqrt[4]{a^2b^3}$;
 b) $p^2q\sqrt[3]{q^2p}$, $x^4y^5\sqrt[8]{x^3y^7}$, $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$, $\frac{m}{n}\sqrt[4]{\frac{n}{m}}$.

E1 901.

- a) $\frac{a}{pq}\sqrt[6]{\frac{p^2q^4}{a^3}}$, $\frac{x}{yz^2}\sqrt[6]{\frac{x^3}{y^4z^2}}$, $\frac{ab^2c^3}{xy^4}\sqrt[3]{\frac{abc}{xy}}$, $(x+y)\sqrt[4]{\frac{1}{x+y}}$;
 b) $2x\sqrt[3]{1+x+x^2}$, $3m^2\sqrt[4]{m^2+m^3}$, $2a^2b\sqrt[3]{a^2-3ab+2b^2}$;
 c) $(p^2+2pq+q^2)\sqrt[3]{\frac{1}{(p+q)^5}}$, $\frac{a+b}{a-b}\sqrt[3]{\frac{a^2-2ab+b^2}{(a+b)^2}}$.

Végezzük el a következő műveleteket: (902–904. feladat) (Az egyes gyökök alatt mindenütt pozitív mennyiségek szerepelnek.)

K1 902.

$$a) \sqrt[3]{8 \cdot 125}, \sqrt[3]{27 \cdot 64}, \sqrt[4]{16 \cdot 64}, \sqrt[5]{32 \cdot 243};$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{27}{8}}, \sqrt[3]{\frac{64}{125}}, \sqrt[4]{\frac{0,0016}{81}}, \sqrt[5]{\frac{32}{243}};$$

$$c) \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{8}, \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{80}, \sqrt[5]{5^3 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[5]{25 \cdot 27}, \sqrt[6]{2^4 \cdot 7^4} \cdot \sqrt[6]{4 \cdot 49}.$$

K2 903.

$$a) \sqrt[5]{4^8 \cdot 3^6} \cdot \sqrt[5]{16 \cdot 81}, \sqrt[7]{a^5 \cdot b^4} \cdot \sqrt[7]{a^2 \cdot b^3}, \sqrt[6]{p^8 \cdot q^{10}} \cdot \sqrt[6]{p^4 \cdot q^2};$$

$$b) \sqrt[n]{x^{2n-3} y^{3n+1}} \cdot \sqrt[n]{x^{n+3} y^{n-1}}, \sqrt[k]{m^{k^2+k+1} n^{2k+2}} \cdot \sqrt[k]{m^{3k-1} n^{k-2}};$$

$$c) \sqrt[3]{12 + \sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12 - \sqrt{19}}, \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 - \sqrt{19}},$$

$$\sqrt[5]{8 - \sqrt{32}} \cdot \sqrt[5]{8 + 4\sqrt{2}};$$

$$d) \left(\sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \right)^5, \left(\sqrt[4]{11 + \sqrt{57}} \cdot \sqrt[4]{11 - \sqrt{57}} \right)^3.$$

E1 904.

$$a) \sqrt[3]{\frac{8a^2}{b^5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{27b^4}}, \sqrt[4]{\frac{x^6 y^3}{z^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2 y^5}{z^6}}, \sqrt[5]{\frac{p^8 q^4}{32r^4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{p^7 q^6}{r}};$$

$$b) \sqrt[3]{x-y} \cdot \sqrt[3]{x^2-2xy+y^2}, \sqrt[3]{m^2-n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{(m-n)^2}{m+n}}.$$

Végezzük el a következő műveleteket: (905–907. feladat) (Az egyes gyökök alatt mindenütt pozitív mennyiségek szerepelnek.)

K1 905.

$$a) \sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{128} : \sqrt[5]{4}, \sqrt[3]{243} : \sqrt[3]{9};$$

$$b) \sqrt[3]{0,005} : \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{\frac{9}{8}} : \sqrt[3]{\frac{8}{3}}, \sqrt[4]{\frac{8}{27}} : \sqrt[4]{\frac{3}{2}}, \sqrt[5]{\frac{81}{16}} : \sqrt[5]{\frac{2}{3}}.$$

K2 906.

$$a) \sqrt[3]{16a^5} : \sqrt[3]{2a^2}, \sqrt[4]{32x^7} : \sqrt[4]{2x^3}, \sqrt[5]{128p^8} : \sqrt[5]{4p^3},$$

$$b) \sqrt[3]{a^7 b^5} : \sqrt[3]{ab^2}, \sqrt[4]{x^{13} y^{21}} : \sqrt[4]{x^5 y}, \sqrt[5]{m^{32} n^{23} k^{19}} : \sqrt[5]{m^{12} n^3 k^4}.$$

$$\mathbf{E1 \quad 907.} \quad \sqrt[4]{\frac{a^6 b^5}{c^9}} : \sqrt[4]{\frac{a^2 b}{c^5}}, \sqrt[3]{\frac{81x^{13} y^{22}}{z^{10}}} : \sqrt[3]{\frac{3xy}{z}}, \sqrt[5]{\frac{128p^{21} q^{32}}{9r^{16}}} : \sqrt[5]{\frac{108pq^2}{r^6}}.$$

Végezzük el a következő műveleteket: (908–909. feladat) (Az egyes gyökök alatt mindenütt pozitív mennyiségek szerepelnek.)

K2 908.

$$a) \left(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2} \right);$$

$$b) \left(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{16} \right).$$

E1 909.

$$a) \left(\sqrt[3]{p^2} - \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} \right);$$

$$b) \left(\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} \right).$$

Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket: (910–913. feladat) (Az egyes gyökök alatt mindenütt pozitív mennyiségek szerepelnek.)

K1 910.

$$a) \sqrt[3]{\sqrt{2}}, \sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[5]{\sqrt{7}}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}, \sqrt[6]{\sqrt[7]{10}};$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt{a}}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^5}}, \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^4}}, \sqrt[7]{\sqrt{y^5}}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{z^3}}};$$

$$c) \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{3}}, \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt[3]{5}}, \sqrt[4]{6 \cdot \sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{7}}.$$

K2 911.

$$a) \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a}}, \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[3]{a}}, \sqrt[4]{b \cdot \sqrt[3]{b^5}}, \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}};$$

$$b) \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}}, \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt{3}}}, \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}}, \sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{5}}};$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}}}, \sqrt[4]{\frac{5}{7} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{7}}}, \sqrt[5]{\frac{2}{9} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{81}}}, \sqrt[3]{\frac{3}{11} \cdot \sqrt[5]{\frac{11}{3}}}.$$

E1 912.

$$a) \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a}}}, \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}}, \sqrt[6]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b^4 \cdot \sqrt{b^5}}};$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}, \sqrt{\frac{p^3}{q^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{p^4}{q^5}}}, \sqrt[4]{\frac{x}{y^2} \cdot \sqrt{\frac{y^4}{x^5}}}, \sqrt[5]{\frac{m^3}{n^4} \cdot \sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}};$$

$$c) \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a}}}, \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}}.$$

E2 913.

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^3}{y^2}}}}, \sqrt[5]{\frac{p^2}{q^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{p}{q} \cdot \sqrt[4]{\frac{p^3}{q^2}}}}, \sqrt[6]{\frac{p}{q} \cdot \sqrt[5]{\frac{q}{p} \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{q} \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{p}}}}}$$

IV

Írjunk az alábbi kifejezések mellett szereplő négyzetekbe „i” vagy „h” betűt, aszerint, hogy a reláció igaz vagy hamis: (914–915. feladat) (Az egyes gyökök alatt mindenütt pozitív mennyiségek szerepelnek.)

K2 914.

$$a) \sqrt[6]{a^5 \cdot \sqrt[5]{a^6}} = a \cdot \sqrt[30]{a} \quad \square;$$

$$b) \sqrt[8]{p^6 \cdot \sqrt[3]{p^5}} = \sqrt[24]{p^{23}} \quad \square;$$

$$c) \sqrt[11]{m^{10} \cdot \sqrt[10]{m^{11}}} = \sqrt[21]{m^{110}} \quad \square;$$

$$d) \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[9]{x^8} \quad \square;$$

$$e) \sqrt[n]{a^k \cdot \sqrt{a}} = \sqrt[2n]{a^{2k+1}} \quad \square.$$

E1 915.

$$a) \sqrt[p]{k^r \cdot \sqrt[3]{k^p}} = \sqrt[3p]{k^{3rp}} \quad \square;$$

$$b) \sqrt[k]{m^2 \cdot \sqrt{m \cdot \sqrt[3]{m^k}}} = \sqrt[6+k]{m^{15+k}} \quad \square;$$

$$c) \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[5]{a}}} = \sqrt[30]{a^{13}} \quad \square;$$

$$d) \text{ ha } \sqrt[n]{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[15]{a^{14}}, \text{ akkor } n = 5 \quad \square;$$

$$e) \text{ ha } \sqrt[6]{a^2 \cdot \sqrt[k]{a^3}} = \sqrt[3]{a}, \text{ akkor } k = 3 \quad \square;$$

$$f) \text{ ha } \sqrt[3]{p^5 \cdot \sqrt[4]{p^x}} = \sqrt[12]{p^{23}}, \text{ akkor } x = 3 \quad \square;$$

$$g) \text{ ha } \sqrt[6]{m^x \cdot \sqrt[3]{m^2}} = \sqrt[18]{m^{14}}, \text{ akkor } x = 4 \quad \square.$$

Írjunk fel egyetlen gyökjel segítségével az alábbi kifejezéseket: (916–918. feladat) (Az egyes gyökök alatt mindenütt pozitív mennyiségek szerepelnek.)

K1 916.

$$a) \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}, \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{5};$$

$$b) \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{5}, \quad \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[7]{3}.$$

K2 917.

$$a) \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{5}}, \quad \sqrt[4]{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{2}};$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{3}}, \quad \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt[5]{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{9}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}};$$

$$c) \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}, \quad \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{b}, \quad \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[6]{x}, \quad \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[8]{p};$$

$$d) \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}, \quad \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4}, \quad \sqrt[5]{p^4} \cdot \sqrt[8]{p^5}, \quad \sqrt[6]{m^7} \cdot \sqrt[5]{m^3};$$

$$e) \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \quad \sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{y^2}}, \quad \sqrt[6]{\frac{p^3}{q}} \cdot \sqrt[5]{\frac{q^4}{p^3}}, \quad \sqrt[4]{\frac{m^7}{n^5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{m^3}{n^3}}.$$

E1 918.

$$a) \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{p^2}{q}} \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{q^2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{q^3}{p^4}}, \quad \sqrt[6]{\frac{m}{n^5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{n}{m^6}} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}};$$

$$b) \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a}, \quad \sqrt[4]{b^5} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[4]{b^3}, \quad \sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt[6]{y^5} \cdot \sqrt[5]{y^3};$$

$$c) \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt[5]{\frac{x^2}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y^2}} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^5}}, \quad \sqrt{m} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{m^2}} \cdot \sqrt[6]{n^5} \cdot \sqrt[4]{\frac{n}{m^5}}.$$

Végezzük el a következő műveleteket: (919–921. feladat)

K2 919.

$$a) (\sqrt{2} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{8}) \cdot \sqrt{2};$$

$$b) (\sqrt{3} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[4]{27}) \cdot \sqrt{3}.$$

E1 920.

$$a) (\sqrt{a} + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{a^3}) \cdot \sqrt{a};$$

$$b) (\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt[3]{2});$$

$$c) (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^7}) \cdot (\sqrt{x^3} + \sqrt[6]{x});$$

$$d) \left(\frac{1}{2} \sqrt{p} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{p^5} \right) \cdot (2\sqrt{p} - \sqrt[3]{p^2});$$

$$e) \frac{x+y}{x-y} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x^2-y^2)^4}{(x+y)^8}}.$$

$$\mathbf{E2} \quad \mathbf{921.} \quad \left[\frac{\left(\sqrt[3]{mn^2} \cdot \sqrt{n} - \sqrt[3]{mn} \cdot \sqrt{n} \right)^2}{mn \cdot \sqrt[6]{mn}} + 4 \right] : \frac{m\sqrt{n} + n\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}.$$

E1 922. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőséget:

$$\sqrt[3]{1 - 12 \cdot \sqrt[3]{7} + 6 \cdot \sqrt[3]{49}} + \sqrt[3]{7} = 2.$$

E1 923. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezés értéke egész szám:

$$\sqrt[3]{1 - 27 \cdot \sqrt[3]{26} + 9 \cdot \sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}.$$

E2 924. Milyen pozitív egész n -re és k -ra teljesül az alábbi egyenlőség ($a > 1$):

$$\sqrt[n]{a \cdot k \sqrt[k]{a^2}} \cdot \sqrt[k]{a \cdot n \sqrt[n]{a^2}} = a.$$

E2 925. Milyen pozitív egész p -re és q -ra teljesül a következő egyenlőség ($x > 1$):

$$\sqrt[p]{x^{2 \cdot q \sqrt[q]{x}}} \cdot \sqrt[q]{x^{3 \cdot p \sqrt[p]{x^4}}} = x.$$

E2 926. Számítsuk ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2} (3\sqrt{3} - 5)}{2}}.$$

Törtkitevőjű hatványok

Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét (927–928. feladat).

K1 927.

a) $4^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $32^{\frac{1}{5}}$, $27^{\frac{1}{3}}$, $100^{\frac{1}{2}}$;

b) $25^{\frac{3}{2}}$, $27^{\frac{4}{3}}$, $64^{\frac{5}{6}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $16^{0,5}$;

c) $100^{-\frac{3}{2}}$, $64^{-\frac{1}{2}}$, $125^{-\frac{2}{3}}$, $49^{-\frac{3}{2}}$, $1000^{-\frac{1}{3}}$.

K2 928. d) $0,25^{-1,5}$, $0,125^{-\frac{5}{3}}$, $0,04^{-2,5}$, $\left(\frac{4}{49}\right)^{-\frac{5}{2}}$, $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{3}}$.

Írjuk fel törtkitevőmentesen (gyökjelek segítségével) az alábbi hatványokat (a hatványok alapja pozitív) (929–930. feladat).

K1 929.

a) $2^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{3}{4}}$, $4^{\frac{2}{5}}$, $6^{\frac{1}{6}}$, $10^{\frac{1}{10}}$;

b) $8^{-\frac{1}{2}}$, $13^{-\frac{2}{3}}$, $54^{-\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

$$c) a^{\frac{1}{4}}, \quad b^{\frac{2}{3}}, \quad c^{-\frac{1}{4}}, \quad x^{-\frac{3}{2}}, \quad p^{-\frac{4}{3}}.$$

$$d) (9x)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}, \quad \left(\frac{1}{3}a\right)^{\frac{1}{3}}, \quad 8y^{-\frac{2}{3}}, \quad (8y)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$\text{K2} \quad 930. \quad \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \left(m^{\frac{3}{4}}n^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(p^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Írjunk az alábbi kifejezések mellett szereplő négyzetekbe „i” vagy „h” betűt, aszerint, hogy az egyenlőség igaz vagy hamis (931–933. feladat). (A hatványok alapja pozitív.)

K2 931.

$$a) \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \square;$$

$$b) \left(x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{4}} \quad \square;$$

$$c) \left(p^{\frac{2}{3}} \cdot p^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = p^{-\frac{1}{12}} \quad \square;$$

$$d) \left(m^{-\frac{3}{4}} \cdot m^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{m} \quad \square;$$

$$e) \left(n^{\frac{2}{3}} \cdot n^{-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{n^2} \quad \square.$$

E1 932.

$$a) \left(q^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{2}{3}} \cdot q^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}} = q^{\frac{16}{9}} \quad \square;$$

$$b) \left(b^{\frac{1}{8}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{b}} \quad \square;$$

$$c) \left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[9]{a^3b^8} \quad \square;$$

$$d) \left(x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt[18]{y^5}}{\sqrt[12]{x^7}} \quad \square.$$

E2 933.

$$a) \left(p^{\frac{3}{5}} \cdot q^{-\frac{1}{10}} \right)^{\frac{10}{3}} = \frac{p^2}{\sqrt[3]{q}} \quad \square;$$

$$b) \left(m^{\frac{8}{3}} \cdot n^{-\frac{5}{3}} \right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{n^5}{m^4}} \quad \square.$$

Írjuk fel törtkitevők segítségével a következő kifejezéseket (934–936. feladat).

$$\mathbf{K1} \quad \mathbf{934.} \quad \sqrt[3]{a}, \quad \sqrt[4]{x^3}, \quad \sqrt[5]{p^7}, \quad \sqrt[n]{x^r}, \quad \sqrt[2k]{m^6}.$$

K2 935.

$$a) \sqrt[3]{p^2 q}, \quad \sqrt[4]{rs^3}, \quad \sqrt[5]{x^3 y^4}, \quad \sqrt[6]{m^5 n^8}, \quad \sqrt[10]{a^4 b^7};$$

$$b) \sqrt{a} \sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt{b^3}}, \quad \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt{x^3}}, \quad \sqrt[5]{y^6 \cdot \sqrt[3]{y^2}};$$

$$c) \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{b^2 c}}, \quad \sqrt[3]{x^4 \cdot \sqrt[3]{y^2}}, \quad \sqrt[4]{p^3 \cdot \sqrt[5]{q^4}}, \quad \sqrt[5]{m^2 \cdot \sqrt[4]{m^5}}.$$

E1 936.

$$\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}}, \quad \sqrt[3]{b^2 c \cdot \sqrt[4]{c^2 b}}, \quad \sqrt[6]{x^2 y^3 \cdot \sqrt[4]{xy^3}}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket (937–938. feladat).

K2 937.

$$a) \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right) \cdot x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}, \quad \left(2a^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{1}{4}} \right) \cdot 5a^{-\frac{1}{12}}, \quad \left(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(p^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$b) \left(m^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{5}{2}} \right) \cdot \left(m^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{5}{2}} \right), \quad \left(2a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - 2b^{\frac{3}{2}} \right), \quad \left(1 + x + x^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} - x \right).$$

E1 938.

$$a) 2b^{\frac{1}{2}} \left(b^{\frac{1}{2}} - 3 \right) - 3b^{\frac{3}{2}} \left(b^{\frac{1}{2}} - b^{-1} \right), \quad 10x^{\frac{2}{3}} \left(x^{\frac{1}{3}} - 1 \right) - \left(5x^{\frac{2}{3}} - 2 \right) \cdot \left(2x^{\frac{2}{3}} + 3 \right);$$

$$b) \frac{\left(p^{\frac{1}{2}} p^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{p^3}}, \quad \frac{\left(m^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{m^2 \cdot m^{\frac{1}{3}}}}, \quad \frac{\left(q^{-\frac{2}{3}} q^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{q^3 \cdot q^{\frac{3}{8}}}}, \quad \frac{\sqrt[6]{x^5 \cdot x^{\frac{2}{3}}}}{\left(x^{-\frac{3}{7}} \cdot x^{\frac{5}{14}} \right)^{-\frac{7}{2}}}.$$

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket (939–941. feladat).

K2 939.

$$a) \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}};$$

$$b) \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}.$$

E1 940.

$$a) \sqrt[3]{p^{-\frac{1}{2}}q^{-1}} \cdot p^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{p^{-1}q^{\frac{2}{3}}};$$

$$b) \frac{b-c}{b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}+c^{\frac{1}{4}}}.$$

E2 941.

$$a) \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{mn^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}n} + \frac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{mn^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}n} \right) \cdot \frac{m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{1}{2}}}{m-n} - \frac{2n}{m-n};$$

$$b) \left(r^{\frac{1}{2}}+s^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} \cdot (r^{-1}+s^{-1}) + \frac{2 \left(r^{-\frac{1}{2}}+s^{-\frac{1}{2}} \right)}{\left(r^{\frac{1}{2}}+s^{\frac{1}{2}} \right)^3};$$

$$c) \left(y^{\frac{3}{5}}+1 \right)^2 - \left(y^{\frac{2}{5}}+1 \right) \cdot \left(y^{\frac{4}{5}}-y^{\frac{2}{5}}+1 \right).$$

A logaritmus fogalma és azonosságai

Adjuk meg a következő kifejezések értékét a logaritmus definíciója alapján (942–943. feladat).

K1 942.

$$a) \log_2 8, \log_3 9, \log_5 5, \log_6 36, \log_{2000} 1;$$

$$b) \log_4 16, \log_8 64, \log_{11} 121, \log_7 49, \log_2 32;$$

$$c) \log_5 \frac{1}{5}, \log_9 \frac{1}{3}, \log_6 \frac{1}{36}, \log_{25} \frac{1}{5}, \log_2 \frac{1}{64};$$

$$d) \log_8 \frac{1}{2}, \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}, \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}, \log_3 \sqrt{27}, \log_{\sqrt{27}} 3;$$

$$e) \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}, \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 16, \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{81}, \log_{\frac{1}{9}} \sqrt{3}, \log_{0,5} \sqrt{32}.$$

K2 943.

$$a) \log_3 \sqrt[5]{81}, \log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{125}, \log_{125} \sqrt[7]{25}, \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt[4]{36}};$$

$$b) \log_a a^3, \log_{\frac{1}{b}} b^4, \log_{\sqrt{c}} \sqrt[3]{c}, \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} x^{\frac{2}{3}}, \log_{p^5} \frac{1}{\sqrt[5]{p}}.$$

K1 944. Írjunk az alábbi kifejezések mellett szereplő négyzetekbe „i” vagy „h” betűt, aszerint, hogy az egyenlőség igaz vagy hamis. (A változók mindegyike pozitív, a logaritmusok alapja sehol nem egyenlő 1-gyel.)

- a) ha $\log_3 x = 2$, akkor $x = 9$ ☐;
 b) ha $\log_4 x = 3$, akkor $x = 64$ ☐;
 c) ha $\log_5 x = 25$, akkor $x = 2$ ☐;
 d) ha $\log_{0,5} x = 2$, akkor $x = \frac{1}{4}$ ☐;
 e) ha $\log_{\sqrt{5}} x = 4$, akkor $x = 25$ ☐;
 f) ha $\log_8 x = \frac{3}{2}$, akkor $x = 4$ ☐;
 g) ha $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{2}{3}$, akkor $x = \frac{1}{4}$ ☐;
 h) ha $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -\frac{1}{2}$, akkor $x = \sqrt[4]{2}$ ☐;
 i) ha $\log_{\sqrt{a}} x = 6$, akkor $x = a^6$ ☐;
 j) ha $\log_{\frac{1}{\sqrt{b}}} x = -3$, akkor $x = b^{\frac{3}{2}}$ ☐;
 k) ha $\log_x 8 = 3$, akkor $x = 2$ ☐;
 l) ha $\log_x \sqrt{3} = 0,5$, akkor $x = 3$ ☐;
 m) ha $\log_x 25 = 2$, akkor $x = \pm 5$ ☐;
 n) ha $\log_x \frac{1}{125} = 3$, akkor $x = 0,2$ ☐;
 o) ha $\log_x \sqrt[4]{2} = 0,25$, akkor $x = \sqrt{2}$ ☐;
 p) ha $\log_x \frac{1}{4} = 2$, akkor $x = \frac{1}{2}$ ☐;
 q) ha $\log_x 1 = 0$, akkor $x = 1$ ☐.

Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét (945–947. feladat).

- K1 945.** $2^{\log_2 132}$, $3^{\log_3 7}$, $5^{\log_5 8}$, $14^{\log_{14} 5}$, $10^{\lg 3}$, $8^{\log_8 1}$.
K2 946. a) $10^{1 - \log 2}$, $3^{2 + \log_3 4}$, $2^{4 - \log_2 3}$, $5^{2 + \log_5 4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2 - \log_{0,5} 6}$;
 b) $25^{\log_5 3}$, $4^{\log_2 5}$, $16^{\log_4 3}$, $49^{\log_7 2}$, $125^{\log_5 2}$;
 c) $8^{\log_2 3}$, $27^{\log_3 4}$, $81^{\log_3 2}$, $32^{\log_{\sqrt{2}} 3}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 5}$;
 d) $3^{\log_3 4}$, $5^{\log_{125} 8}$, $4^{\log_{64} 7}$, $11^{\log_{121} 9}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 25}$.

E1 947.

$$a) 100^{\lg 2 + \lg 3}, \quad 8^{\log_{\sqrt{8}} 5 + \log_{64} 9}, \quad 16^{\log_4 3 - \log_2 3}, \quad 5^{1 + \log_{25} 4 - \log \frac{1}{5} 3};$$

$$b) 4^{2 + \log_{16} 9} + 36^{1 - \log_6 2} + 10^{-\lg 2}, \quad 49^{1 + \log_{\sqrt{7}} 2} + 16^{2 - \log_2 3} - \frac{2}{10^{-\lg 3}}.$$

Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát (948–951. feladat).

K1 948.

$$a) \lg(x-4), \quad \log_2(2x-5), \quad \log_3(3x+7), \quad \lg(5x-18);$$

$$b) \lg(|x|-3), \quad \log_5(3|x|-12), \quad \lg(|4x|-16), \quad \log_2(|x|-22).$$

K2 949.

$$a) \frac{\lg(3x+5)}{x-1}, \quad \frac{\lg(2x-6)}{5x-25}, \quad \frac{\lg(|x|-5)}{x+10}, \quad \frac{\lg(2|x|-14)}{x^2-100};$$

$$b) \lg(2x+6) + \lg(5-x), \quad \lg(4x-14) + \lg(6-x), \quad \lg(|x|-3) + \lg(3x-18);$$

$$c) \lg(x^2-16), \quad \lg(2x^2-8), \quad \log_3(x^2-8x+7), \quad \log_2(x^2-2x-35).$$

E1 950.

$$a) \frac{\lg(x^2-8x+12)}{x^2-16}, \quad \frac{\log(x^2-3x-10)}{x^2+3x-18}, \quad \frac{\log_2(x^2-9x)}{-x^2+9x+10};$$

$$b) \lg \frac{x+3}{2x-1}, \quad \lg \frac{x-3}{3x-2}, \quad \lg \frac{5x-10}{3-x}, \quad \lg \frac{4x-6}{3x+1};$$

$$c) \lg \frac{x^2-49}{5-x}, \quad \frac{\lg(x^2-49)}{\lg(5-x)}, \quad \lg \frac{x^2-10x}{-x^2+7x-10}, \quad \frac{\lg(x^2-10x)}{\lg(-x^2+7x-10)};$$

$$d) \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x-1}}, \quad \sqrt{3 - \log_2(2x-1)}, \quad \sqrt{6 + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4x+2)}.$$

E2 951.

$$a) \frac{\lg(x^2-25)}{\lg(x^2-7x+10) - \lg(-x^2+13x-36)}, \quad \frac{\sqrt{x^2-8x+15}}{\lg(2x-4) + \lg(6-x)};$$

$$b) \lg(x^4-5x^2+4) + \lg(x^2-5x+4), \quad \frac{1}{\lg(x^4-13x^2+36)} + \lg(x^2-13x+36).$$

Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékészletét (952–953. feladat).

K2 952.

$$a) \lg(-x^2+1), \quad \log_2(-x^2+4), \quad \log_{\sqrt{2}}(8x-x^2);$$

$$b) \log_5(-x^2-4x+21), \quad \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x^2-4x+8), \quad \log_{\sqrt{3}}(-x^2-2x+8).$$

E1 953.

$$a) 4^{\log_2(-x^2-6x-7)}, \quad 6^{\log_3\left(x^2+8x+\frac{49}{3}\right)}, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{2}}(x^2+8x+18)};$$

$$b) \lg \sin x, \quad \lg \cos x, \quad \frac{1}{\log_{0,5} \sin x}, \quad \log_2 \sin x + \log_2 \cos x.$$

954. ábra

	1	2
3		
4		

K2 954. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt:

Vízs. 1. $\log_2 5$ -nél nagyobb, de $\log_2 35$ -nél kisebb négyzetszám négyzete.

4. Az $\lg(-x^2+10x-16)$ kifejezés értelmezési tartományában előforduló prímek csökkenő sorrendben.

Függ. 2. A keresztrejtvényben szereplő számjegyek szorzata $7!$ (7 faktoriális)

3. Az $\log_n x = n$ (n egész szám) egyenlet megoldása.

955. ábra

1		2
3		

K2 955. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt:

Vízs. 1. Az $x^2 - 111x + 530 = 0$ egyenlet zérushelyeinek a „távolsága”.

3. A vízsz. 1. fordítottja.

Függ. 1. 1-gyel nagyobb, mint az $\lg x = 2$ egyenlet megoldása.

2. A keresztrejtvényben szereplő számjegyek összege 10-nél nagyobb prím.

A logaritmus azonosságainak a felhasználásával írjuk fel az alábbi kifejezések logaritmusát a benne szereplő változók és mennyiségek logaritmusának segítségével (956–957. feladat). (A feladatokban szereplő paraméterek pozitív valós számok, a törtek nevezőinek egyike sem 0.)

K1 956.

$$a) x = abc, \quad x = 6pq, \quad x = 10mn^2, \quad x = 5(r+s), \quad x = a^2 - b^2;$$

$$b) x = a^2 b^3 c^4, \quad x = 2p^6 q^3 r^2, \quad x = \frac{m+n}{m-n}, \quad x = \frac{abc}{4T};$$

K2 957.

$$a) x = \frac{2a^3}{3b^2}, \quad x = \frac{4r^3 \pi}{3}, \quad x = \frac{mn}{r^2}, \quad x = ab^2 \cdot \frac{2pq}{r^2 s^3};$$

$$b) x = \frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}, \quad x = \frac{p^2 \cdot \sqrt[3]{q}}{q^3(p+q)}, \quad x = \frac{m \cdot \sqrt[5]{n}}{m^2 - n^2}, \quad x = \frac{m^3 \cdot \sqrt[3]{n}}{\sqrt{m^3 n}};$$

$$c) x = \sqrt{\frac{a\sqrt{b}}{a^4}}, \quad x = \sqrt[3]{\frac{p^4 \cdot \sqrt[4]{q^3}}{p^4 q^2}}, \quad x = \left(\frac{m^4}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^5, \quad x = \sqrt{s^4 \cdot \sqrt[3]{\frac{s^2 r}{\sqrt{sr^3}}}}.$$

A logaritmus azonosságainak a felhasználásával fejezzük ki x -et az alábbi egyenlőségekből (958–959. feladat).

K1 958.

$$a) \lg x = \lg a + \lg b, \quad \lg x = \lg p + \lg q - \lg r, \quad \lg x = 2 \lg m + 3 \lg n;$$

$$b) \lg x = \frac{1}{2} \lg a + \frac{1}{3} \lg b, \quad \lg x = \frac{2}{3} \lg p + \frac{3}{4} \lg q - \frac{1}{2} \lg r,$$

$$\lg x = \frac{3}{5} (\lg a - \lg b).$$

K2 959. $\lg x = \frac{1}{3} \lg a - \frac{2}{3} \left(\lg b + \frac{1}{2} \lg c \right),$

$$\lg x = \frac{3}{4} \left[\lg p + \frac{2}{3} \left(\lg q - \frac{1}{4} \lg r \right) \right].$$

Számítsuk ki az alábbi kifejezések pontos értékét (960–964. feladat).

K1 960.

$$a) \lg \sqrt{275} + \lg \sqrt{44} - \lg 11; \quad b) 2 \lg 2 + 3 \lg 5 + \lg 18 - 2 \lg 3;$$

$$c) \frac{\lg 5 + \lg 2}{\lg 6} \cdot (\lg 9 + 2 \lg 2); \quad d) (\lg 81 + 2 \lg 4) \cdot \frac{\lg 25 + \lg 4}{\lg 36}.$$

K2 961.

$$a) 3 \lg 15 + 2 \lg 2 + \lg 14 - \lg 21 - \lg 9;$$

$$b) \log_{25} 15 - \log_{25} 21 + \log_{25} 35;$$

$$c) \log_{\sqrt{35}} 7 + \log_{\sqrt{35}} 5 - \log_{\sqrt{35}} 25 - \log_{\sqrt{35}} 49 + 3 \log_{\sqrt{35}} 35.$$

E1 962.

$$a) \frac{\log_2 48}{\log_6 2} - \frac{\log_2 3}{\log_{96} 2}; \quad b) \frac{\log_3 45}{\log_{135} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{1215} 3}; \quad c) \frac{a+1}{\log_{n^3-a} n} + \frac{a-2}{\log_{n^a} n}.$$

K2 963.

$$a) \lg 33 - \frac{1}{2} \lg 44 - \lg 15 - \lg \sqrt{1100};$$

$$b) \lg \sqrt{52} + \lg 8 + \lg 125 + \lg \sqrt{325} - \lg 13;$$

$$c) \log_3 \sqrt{45} + \frac{1}{2} \log_3 20 + \log_3 6 - \log_3 30 - \log_3 2;$$

$$d) \log_5 \sqrt{175} + \log_5 15 + \frac{1}{2} \log_5 28 - \log_5 42 + 1.$$

E2 964.

$$\log_{pq} \sqrt{p^7 q} + \log_{pq} \sqrt{q^7 p} - 3 \log_{pq} p^2 + \frac{1}{2} \log_{pq} p - 3 \log_{pq} q^2 + \frac{1}{2} \log_{pq} q.$$

Számológép vagy a logaritmustáblázat segítségével számítsuk ki az alábbi mennyiségeket (965–967. feladat).

K1 965. $3245,6 \cdot 432,7$, $546,9 \cdot 368,5$, $7654:254,65$.

K2 966.

a) $56,8 \cdot \sqrt[3]{156,8}$, $\sqrt[6]{12340} \cdot \sqrt[4]{345,7}$, $166,9^3 \cdot \sqrt[4]{3677}$;

b) $\frac{66,8^3 \cdot \sqrt{9854}}{\sqrt[3]{236,4^2}}$, $\frac{\pi^3 \cdot \sqrt{467^5}}{1336 \cdot \sqrt[5]{9887}}$, $\frac{65,66^5 \cdot \sqrt[4]{\pi^5}}{1255^4}$.

E2 967. $\sqrt{\frac{378,6^3 \cdot \pi^4}{54,3 \cdot \sqrt[3]{66,7}}}$, $\sqrt[3]{\frac{1,987 \cdot \sqrt{0,0016}}{144^4}}$, $\sqrt[4]{\frac{36,65^3 \cdot \sqrt[5]{17,66}}{2435 \cdot \sqrt[3]{14^4}}}$.

K2 968. Legyen $\lg 75 = a$, $\lg 45 = b$. Mivel egyenlő ekkor $\lg 15$?

K2 969. Legyen $\lg 48 = p$, $\lg 72 = q$. Fejezzük ki p és q segítségével $\lg 6$ -t.

E1 970. Legyen $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$ és $\lg 7 = k$. Fejezzük ki m , n és k segítségével $\lg (10!)$ -t.

E1 971. Ha $\lg_6 5 = k$, akkor mivel egyenlő $\log_6 \sqrt{150}$?

E1 972. Legyen $\log_{\frac{p}{q}} p = 3$. (p és q különböző pozitív valós számok.) Mivel

egyenlő $\log_{\frac{p}{q}} \frac{p^5}{\sqrt[q]{q}}$?

E1 973. Legyenek a, b, c 1-től különböző valós számok és $abc \neq 1$. Ha

$\log_a x = p$, $\log_b x = q$ és $\log_{abc} x = \frac{p+q}{2}$,

akkor mivel egyenlő $\log_c x$?

E2 974. Bizonyítsuk be segédeszközök nélkül, hogy

$2\sqrt{2} < \log_2 3 + \log_3 4 < 3$.

Bizonyítsuk be a következő azonosságokat (975–976. feladat). (Az egyes kifejezésekben szereplő paraméterek mindegyike pozitív, a logaritmusok alapjai sehol nem egyenlők 1-gyel.)

K2 975.

a) $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$;

c) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$;

b) $\log_a b = \log_{a^n} b^n$;

d) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$.

E1 976.

$$a) \frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b;$$

$$b) \log_{bn} an = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n};$$

$$c) \log_{a^n b} a^{n+1} = \frac{(n+1) \cdot \log_b a}{1 + n \log_b a};$$

$$d) \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} = 10 \cdot \log_b a.$$

E2 977. Ha a, b, c egy derékszögű háromszög megfelelő oldalai és $n > 1$ valós, akkor bizonyítsuk be, hogy:

$$\frac{2}{\log_b n} = \frac{1}{\log_{c-a} n} + \frac{1}{\log_{c+a} n}.$$

E2 978. Ha m a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága, továbbá p és q az a két szakasz, melyre m az átfogót bontja és $x > 0$ valós szám, akkor bizonyítsuk be, hogy:

$$\frac{2}{\log_m x} = \frac{1}{\log_p x} + \frac{1}{\log_q x}.$$

E1 979. Egy háromszög a és b oldalai által közrefogott szögfelező a harmadik oldalt p és q hosszúságú szakaszokra bontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden megengedett x -re

$$\frac{\log_p x \cdot \log_q x}{\log_a x \cdot \log_b x} = \frac{\log_q x - \log_p x}{\log_b x - \log_a x}.$$

Bizonyítsuk be, hogy (980–982. feladat):

K2 980. $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) = -1.$

K2 981. $\log_{3+2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2}) + \log_{3-2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2}) = -2.$

E2 982. $(\log_{n!} x)^{-1} = \sum_{i=2}^n (\log_i x)^{-1} \quad (x > 0).$

Nehezebb feladatok a témakörből

E1 983. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A, B, C mennyiségek közül valamelyik a másik kettő mértani közepe legyen:

$$A = \left(\frac{64^{\frac{3}{2}} - 64^{\frac{2}{3}}}{31} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad B = (-\log_8 \log_4 \log_3 9)^{-1}, \quad C = \log_8 (-p^2 - 4p + 60).$$

E2 984. Legyenek x és y 1-től különböző pozitív valós számok és $xy \neq 1$. Egy derékszögű háromszög a és b befogóira

$$\log_x a = \log_{xy} b = \log_{y^2} (a + 2b).$$

Mekkora a háromszög szögei?

E2 985. Legyen A halmaz az $a)$ kifejezés, B halmaz pedig a $b)$ kifejezés értelmezési tartománya. Határozzuk meg a $B-A$ halmaz elemeit:

$$a) \sqrt{4 \log_2^2 x - 37 \log_2 x + 9}; \quad b) \sqrt{4 \log_2^4 x - 37 \log_2^2 x + 9}.$$

E2 986. Legyenek x, y , és z 1-nél nagyobb pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\log_x xyz^9 + \log_y yzx^9 + \log_z zxy^9 > 21.$$

E2 987. Legyenek a és b egytől különböző pozitív valós számok és legyen $\log_a b > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$4 \log_a^2 b + 16 \log_b^2 a + 19 > 4 \sqrt{3} (\log_a b + 2 \log_b a).$$

E2 988. Bizonyítsuk be, hogy:

$$2005\sqrt{4} + 2005\sqrt{9} + 2005\sqrt{16} > 2005\sqrt{6} + 2005\sqrt{8} + 2005\sqrt{12}.$$

E2 989. Legyen $a > 2$ valós szám. Bizonyítsuk be, hogy:

$$2\sqrt{2} < \log_a(a+1) + \log_{a+1} a^2 < 3.$$

E2 990. Függvénytáblázat és számológép használata nélkül állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi A, B, C mennyiségeket:

$$A = \log_2 3, \quad B = \log_3 5, \quad C = \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2.$$

E2 991. Bizonyítsuk be, hogy ha $k \neq 1$ pozitív valós szám és

$$\log_{ab^2} k + \log_{a^2 b} k = \log_{ab} k + \log_{a^2 b^2} k, \quad \text{akkor vagy } a = 1 \quad \text{vagy } b = 1.$$

E2 992. Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát:

$$\frac{\sqrt{-\log_3^2(x^2-1) + 3 \cdot \log_3(x^2-1) + 4}}{\sqrt{-x^2 + 2x + 15}}.$$

E2 993. Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát:

$$\frac{\sqrt{4^x - 68 \cdot 2^x + 256} + \sqrt{16^x - 68 \cdot 4^x + 256}}{\sqrt{-x^2 + x + 30}}.$$

E2 994. Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát:

$$\frac{\sqrt{-7x^2 + 29x - 4}}{\sqrt{\log_x 5 - \log_5 x}}.$$

E1 995. Az $a > b > 0$ valós számokra $a^2 + b^2 = 18ab$. Határozzuk meg az alábbi kifejezés értékét:

$$\log_{\sqrt{2}}(a - b) - \frac{1}{2}(\log_{\sqrt{2}} a + \log_{\sqrt{2}} b).$$

E1 996. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$n = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}}.$$

(A jobb oldalon n db négyzetgyökkel van egymásba „skatulyázva”.)

E2 997. Egy téglalap csúcspontjainak koordinátái: $A(\lg 2^n; \lg 8^n)$, $B(\lg 8^n; \lg 8^n)$, $C(\lg 8^n; \lg 16^n)$, $D(\lg 2^n; \lg 16^n)$. A téglalap területét az $y = x + 1$ egyenletű egyenes felezi. Mekkora a téglalap területe?

E2 998. Legyen a egy 1-től különböző pozitív valós szám. A

$$(\log_3 a)x + \left(\log_3 \frac{1}{a^2}\right)y = 9$$

egyenletű egyenes és a koordinátatengelyek alkotta háromszög területe $\frac{81}{16}$.

Mekkora e háromszög kerülete?

E2 999. Egy téglatest élei: $\log_a b$, $\log_b a$, $\log_a ab$, ahol a és b 1-nél nagyobb valós számok. Bizonyítsuk be, hogy a felszín mérőszáma a térfogat mérőszámának több, mint 4-szerese.

ELSŐFOKÚ EGYENLETEK, EGYENLETRENDSZEREK, EGYENLŐTLENSÉGEK

ELSŐFOKÚ EGYVÁLTOZÓS EGYENLETEK

K1 1000. Próbáljuk fejben megoldani az alábbi egyenleteket:

a) $a = 44 + 58 - 23 + 56 - 68 + 33$;

b) $b = 218 + 523 - 217 - 1042 + 1997 - 521$;

c) $c = \frac{1}{3} + \frac{5}{8} - \frac{3}{10} + \frac{2}{6} - \frac{17}{10} + \frac{3}{8} + \frac{4}{12}$;

d) $d = \frac{1}{3} + \frac{6}{7} - \frac{4}{9} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} - \frac{4}{10}$;

e) $e = 4 \cdot 133 \cdot 25$;

f) $f = 97 \cdot 615 + 615 \cdot 3$;

g) $g = 22 \cdot 38 + 19 \cdot 38 - 21 \cdot 38$.

K1 1001. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

- a) $2x = 3$; b) $5x - 1 = 0$;
 c) $-4x + 2 = 6$; d) $2x + 3 = x - 1$;
 e) $1,2x - 2 = 3,2x + 3$; f) $-3,1x - 2,7 = 4,3 - 2,4x$;
 g) $\frac{2}{3}x + 2 = -x + \frac{1}{3}$; h) $-\frac{3x}{5} + \frac{7}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$;
 i) $\frac{x-2}{5} + 1,2 = \frac{2x+1}{4} + \frac{3}{5}$.

K1 1002. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket. (Ahol külön nem jelöljük, az alaphalmaz a valós számok halmaza.):

- a) $2x + 3 + (5x - 8) = 1 - 2x$;
 b) $(-2x + 1) - (x + 2) = 3x - 1$, $x \in \mathbf{R}^+$;
 c) $2(x - 2) - 3(2x + 1) = 3(-2x + 3) - (x - 2) + 3$;
 d) $5x + 3,48 - 2,35x = 5,12 - 2,6x + 10,42$, $x \in [-2; 3]$;
 e) $0,3x + 2,1 - (1,3x + 1,5) = -2(2,3 - x)$, $x \in \mathbf{Q}$;
 f) $8 - \frac{2x}{3} = 3 - \frac{x-1}{2}$;
 g) $\frac{1}{4}x - 2 + \left(\frac{3}{8}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{3x}{2} - 1,5$;
 h) $\frac{3x}{8} - \left(\frac{5}{3} + \frac{1-x}{6}\right) = \frac{x-5}{2} + \frac{7}{8}$, $-2 < x \leq 2$;
 i) $x - \frac{6-2x}{3} = 2x - 4 - \frac{x+3}{2}$, $x \in \mathbf{N}$;
 j) $\frac{2x}{3} + 2,12 - \left(2 - \frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{x-1,1}{5}$.

K1 1003. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- a) $3x + 1 - [x + 2 - (x - 1)] = 2x - 1$, $x \in \mathbf{Q}$;
 b) $-\{x - 2[x - 3(x + 4)]\} = 5$, $x \in \mathbf{Q}^+$;
 c) $x - \{3x + [2x - (4x + 1)]\} = 1$, $x < 5$;
 d) $-2[4 - 3(x - 1)] + 2(1 - 3x) = 5[2x - 3(2 - x)]$;
 e) $2,4\{3 - 2[4,5 + 3(x + 1)] - 1,5\} = 1,2[5 - 1,5(2 - x)] - \{1 - 4[2 - (x + 1)]\}$;
 f) $\frac{1}{2} - \left\{x - \left[\frac{3}{8} + x - 2\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)\right]\right\} = \frac{1}{4}\left(3x - \frac{1}{2}\right)$, ha $x \in]-2; 3]$;
 g) $\frac{x}{2} - \left\{\frac{x}{4} - \frac{1}{3}\left[\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - 2\right)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{5x}{3}\right)$;
 h) $\frac{3}{2}\left\{x - \left[3\left(x + \frac{7}{3}\right) - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} = 3(x - 48)$, $x \in \mathbf{N}$.

K1 1004. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) 9 - 6(x + 5) = \frac{2}{3} \left(6 - \frac{3}{2}x \right), \quad x \in [-6; 6];$$

$$b) \frac{x-4}{3} - \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6}, \quad x \in \mathbb{Q};$$

$$c) \frac{2x}{3} - \frac{x-2}{2} + \frac{11x+6}{6} = 2(x-4);$$

$$d) \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{5x}{6} - 3 = \frac{x}{4} + 1, \quad -3 < x < 3;$$

$$e) \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{3} \right) = - \left(-\frac{x}{6} + \frac{x}{5} \right) + x + 1, \quad x > 0;$$

$$f) \frac{7}{3} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{4} \right) - \frac{4}{5} \left(\frac{5x}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \right), \quad x < 0;$$

$$g) \frac{1,8-8x}{1,2} - \frac{1,3-3x}{2} = \frac{5x-0,4}{0,3}.$$

K1 K2 1005. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \frac{x}{x-3} = \frac{8}{x-3};$$

$$b) x(x-3) = 8(x-3);$$

$$c) \frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3};$$

$$d) \frac{x}{x-5} = \frac{8}{5-x};$$

$$e) \frac{9-x}{x-4} = \frac{5}{x-4} + 3;$$

$$f) x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{x^2+1}{x} + 1;$$

$$g) 1 - \frac{x+1}{2} = x - \frac{3x-1}{2};$$

$$h) \frac{2x}{x-3} = \frac{x}{3x+1};$$

$$i) (3x+1)(x+1) = 7(x+1);$$

$$j) (x+1)(x-1)(x-3) = 0;$$

$$k) \frac{x(x^2-1)(x+2)(x+3)}{x(x+3)(x+4)} = 0.$$

K1 K2 1006. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) 2x - 10 = \frac{x+6}{3}, \quad -5 < x < 5;$$

$$b) \frac{2x+3}{5} = 2-x, \quad x \in \mathbb{N};$$

$$c) \frac{3x+7}{2} = -3x-1, \quad x \in \mathbb{Z}^-;$$

$$d) \frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+3}{3} = -3;$$

$$e) \sqrt{x-3} = 2-x;$$

$$f) (7x+2)(7x+3) = 2005, \quad x \in \mathbb{Z};$$

$$g) 2x + 5y = 0, \quad x, y \in \mathbb{N};$$

$$h) 2x + 3y = -4z, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

K2 1007. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \frac{12x-9}{3x-2} + \frac{6x-5}{2-3x} = 2x-2;$$

$$b) \frac{12x-9}{3x-2} + \frac{6x-5}{2-3x} = 3x;$$

$$c) \frac{12x-9}{3x-2} + \frac{6x-5}{2-3x} = 2;$$

$$e) \frac{x^2-1}{x-1} = 2;$$

$$g) \frac{x^2+4x+4}{x+2} = 2x+4;$$

$$i) \frac{3}{x(2x-1)} + \frac{5}{x} = \frac{1}{2x-1};$$

$$k) \frac{x+2}{x+6} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) = \frac{2x}{3}.$$

$$d) \frac{x^2-1}{x-1} = 3;$$

$$f) \frac{x^2+4x+4}{x+2} = 2x-3;$$

$$h) \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-3} = \frac{3}{x^2-9};$$

$$j) \frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0;$$

K2 1008. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) 3x + \frac{1}{x-3} = x^2 + \frac{1}{x-3};$$

$$b) x(x-3) = (x-3)(x-5);$$

$$c) x(x-3) = (x-2)(x-5);$$

$$d) (13-25x)^2 - (12-24x)^2 - (5-7x)^2 = 0;$$

$$e) \left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}x \right) = \left(\frac{3x}{2} - \frac{7}{6} \right) \left(\frac{7}{8} - \frac{2}{3}x \right);$$

$$f) (x-1)^3 + 2 = x^3 + 3x - 2;$$

$$g) 5x(x-3)^2 - 5(x-1)^3 + 15(x+2)(x-2) = 5.$$

K2 1009. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) x + 2y = 3 - z, \quad x, y, z \in \mathbf{N};$$

$$b) \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = \frac{1}{2}, \quad x, y, z \in \mathbf{N};$$

$$c) \frac{17}{6}x - \frac{2}{3} = \frac{20}{6} + \frac{2x-y}{3} + \frac{x}{6}, \quad x, y \in \mathbf{N};$$

$$d) \frac{4x+6y-7z}{7} + 5t = 0, \quad x, y, z \in \mathbf{N}, 3 \leq z \leq 5;$$

$$e) 3x - 5 + 8z - y = 0, \quad x, y, z \in \mathbf{N}, |y| \leq 10;$$

$$f) 3x + 9y = 112, \quad x, y \in \mathbf{Z}.$$

E1 1010. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a megadott számhalmazon:

$$a) 2x + 5y = 97, \quad x, y \in \mathbf{N};$$

$$b) 5x + 7y = 800, \quad x, y \text{ legfeljebb kétjegyű természetes számok};$$

$$c) 7x - 2y = 11, \quad x, y \text{ egyjegyű (pozitív vagy negatív) egész számok};$$

$$d) 2x + 6y - 8z = 123, \quad x, y, z \in \mathbf{Z};$$

$$e) 3x + 2y = 19, \quad x, y \in \mathbf{Z};$$

$$f) 5x - 17y = 132, \quad x, y \in \mathbf{Z}.$$

Egyszerű szöveges feladatok

K1 1011. Melyik az a szám, amelynek

a) $\frac{2}{3}$ -a 5-tel nagyobb, mint $\frac{3}{4}$ -e;

b) $\frac{2}{3}$ -a 5-tel nagyobb, mint $\frac{4}{3}$ -a;

c) $\frac{2}{3}$ -a 5-tel nagyobb, mint $\frac{4}{6}$ -a;

d) $\frac{3}{8}$ -a 3-mal nagyobb, mint $\frac{2}{9}$ -e;

e) $\frac{3}{8}$ -a 3-mal kisebb, mint $\frac{2}{9}$ -e;

f) harmada feleakkora, mint ötödének fele;

g) harmada 2-vel több, mint negyede;

h) ellentettje 3-mal nagyobb, mint maga a szám;

i) $\frac{2}{7}$ része 4-gyel kevesebb, mint a $\frac{6}{5}$ része;

j) ha a kétszereséből kivonjuk az ellentettjét, s az így kapott számot elosztjuk 3-mal, akkor magát a számot kapjuk?

K1 Gy 1012. A Kr. e. 2000. év környékéről származó ún. Rhind-papirusz az egyik legrégebbi matematikai tartalmú írásos emlék. Innen származik néhány alábbi feladat:

a) Egy szám és a negyede összesen 15. Melyik ez a szám?

b) „Háromszor férek az edénybe. Ha ehhez hozzáadom nagyságom egyharmadát és harmadának harmadát, majd nagyságom kilencedét, akkor 1-et kapok.”

Mi lehet a feladatban kimondatlan kérdés? Válaszoljuk is meg!

c) Ha egy számhoz hozzáadom a kétharmadát és az így nyert számból kivonom az összeg harmadát, akkor 10-et kapok. Melyik ez a szám?

d) Egy szám kétharmada, fele és a háromhetede együttvéve 67. Melyik ez a szám?

e) Valaki elvitte a kincseskamra kincseinek tizenharmad részét, majd másvalaki a maradéknak a tizenheted részét. Ezek után a kincstárban 150 darab kincs maradt. Hány darab volt eredetileg?

K1 Gy 1013. Egy focicsapat 11 játékosának átlagéletkora 22 év. Az egyik játékost kiállították, így a csapat átlagéletkora 21 év lett. Hány éves volt a játékos?**K1 1014.** Két szomszédos egész szám összege

a) 2004; b) 2005.

Mik lehetnek a számok?

K1 1015. Egy osztály tanulóinak $\frac{4}{9}$ része lány. Ha még három lány jönne az osztályba, akkor a tanulók fele lenne lány. Hány tanuló van az osztályban?

K1 1016. Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredeti szám $\frac{8}{3}$ -szorosát kapjuk. Melyik ez a szám?

K1 1017. Öt gyerek életkorának összege 45 év. Mennyi lesz az életkoruk összege öt év múlva?

K1 Gy 1018. Egy apa most háromszor annyi időse, mint a fia. 14 év múlva már csak kétszer annyi időse lesz. Hány évesek most?

K2 Gy 1019. Egy bűvész felszólít egy nézőt, hogy gondoljon egy pozitív egész számra. Ezután a számot szorozza meg 2-vel, az így kapott számhoz adjon hozzá 5-öt, a kapott szám mögé írjon egy 0-t, ezután vonjon ki a kapott számból 100-at, majd ossza el az így kapott számot 10-zel. Ez után megkérdezi, hogy milyen számot kapott eredményül a néző, majd – szinte gondolkodás nélkül – megmondja, hogy mi volt a gondolt szám.

a) Hogyan ügyeskedett a bűvész?

b) Milyen számra gondolt a néző, ha a számolás eredményeként 111-et kapott?

K2 Gy 1020. Gödöllő és Eger távolsága 100 km. Két túrakerékpáros indul Gödöllőből Eger felé.

a) Hány órákor érnek Egerbe, ha reggel 8 órákor indultak és az egyik kerékpáros átlagsebessége $v_1 = 12$ km/h, a másiké $v_2 = 15$ km/h?

b) Mennyi idő múlva lesz az első kerékpáros kétszer olyan távol Egertől, mint a második? (Ábrázoljuk a kerékpárok mozgását az út–idő grafikonon.)

c) Mekkora növelje az átlagsebességét az első kerékpáros, ha legfeljebb egy órával szeretne később érkezni Egerbe? ($v_2 = 15$ km/h)

K2 Gy 1021. Gödöllő és Eger távolsága 100 km. Két túrakerékpáros indul el, az első Gödöllőből Eger felé, a másik Egerből Gödöllő felé.

a) Hány órákor találkoznak, ha reggel 8 órákor indultak és az első kerékpáros átlagsebessége $v_1 = 12$ km/h, a másiké $v_2 = 15$ km/h?

b) Mennyi idő múlva lesz a második kerékpáros kétszer olyan távol Hatvantól, mint az első? (A Gödöllő–Hatvan távolság 28 km.) Ábrázoljuk a kerékpárok mozgását az út–idő grafikonon.

c) Mennyi idő múlva lesz az első kerékpáros olyan messze Hatvantól, mint a második Egertől?

d) Mekkora növelje az átlagsebességét az első kerékpáros, ha egy órával korábban szeretnének találkozni?

K2 Gy 1022. Az országút mentén fekvő A és B városok távolsága 150 km. Reggel 6 órákor elindul A -ból B felé egy kerékpáros $v_1 = 16$ km/h átlagsebességgel, 7 órákor B -ből A felé egy másik kerékpáros $v_2 = 36$ km/h átlagsebességgel.

a) Mikor találkoznak a kerékpárosok?

b) Ábrázoljuk a két kerékpáros mozgását az út–idő grafikonon.

c) Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha az első kerékpáros A -ból nem a B város felé, hanem ellentétes irányban indul el.

K2 Gy 1023. A városból B városba 60 km/h átlagsebességgel elindult egy személyvonat, majd 1 óra múlva 90 km/h átlagsebességgel egy gyorsvonat. Mekkora

ra a két város távolsága, ha a gyorsvonat fél órával előbb ért *B*-be, mint a személyvonat?

K1 1024. Mivel egyenlő 3500 Ft

- a) 1%-a; b) 10%-a; c) 22%-a; d) 75%-a;
 e) 100%-a; f) 120%-a; g) 210%-a; h) 0,2%-a;
 i) 0,04%-a; j) 4 ezreléke; k) 6 tízezerléke?

K1 1025. Hány százaléka 240 méternek

- a) 48 méter; b) 60 méter; c) 2,4 méter; d) 100 méter;
 e) 240 méter; f) 500 méter; g) 1 méter; h) 10 centiméter?

K1 1026.

- a) Mennyi 2004-nek a 75%-a?
 b) Melyik az a szám, amelyiknek a 80%-a 2004?

K1 1027. Melyik az a szám, amelyiknek 30%-a 90-nel nagyobb, mint az $\frac{1}{5}$ -e?

K1 1028. Van-e olyan szám, amelynek 5%-a egyenlő az $\frac{1}{19}$ részével?

K1 1029. Hányszor nagyobb egy pozitív szám $\frac{5}{4}$ -szerese a 75%-ánál?

K1 Gy 1030. Egy nadrág árát a kereskedő 20%-kal felemelte, majd a felemelt árát 20%-kal csökkentette. A kétszeri árváltozás után csökkent vagy növekedett az eredeti árhoz képest a nadrág ára?

K1 Gy 1031. a) Egy nadrág árát a kereskedő 25%-kal felemelte. Hány százalékkal kell csökkentenie az új árát, ha eredményül az eredeti árát szeretné visszakapni?

b) Egy nadrág árát a kereskedő 25%-kal csökkentette. Hány százalékkal kell növelnie az új árát, ha eredményül az eredeti árát szeretné visszakapni?

K1 Gy 1032. Egy áru árát 40%-kal felemelték, majd 30%-kal csökkentették. A kétszeri árváltozás után az áru az eredeti árhoz képest hány százalékkal lett olcsóbb vagy drágább?

K1 Gy 1033. Hogyan változott egy áru ára az alábbi 1. és 2. árváltozások után?

a) 1. Az árát felemelték először 10%-kal, majd (az új árát) 15%-kal.

2. *Fordítva:* az árát először 15%-kal, majd 10%-kal emelték fel.

b) 1. Az árát felemelték először 10%-kal, majd (az új árát) 15%-kal csökkentették.

2. *Fordítva:* az árát először 15%-kal csökkentették, majd felemelték 10%-kal.

c) 1. Az árát felemelték először 10%-kal, majd az új árát ismét 10%-kal, végül a legutolsó árát csökkentették 20%-kal.

2. Az árát felemelték 10%-kal, az új árát csökkentették 20%-kal, majd az így kapott árát ismét megnövelték 10%-kal.

K2 Gy 1034*. Összekeverünk 20 liter 30%-os és 30 liter 25%-os alkoholt. Hány százalék a keverék alkoholtartalma?



K2 Gy 1035*. Hány százalékos alkoholt kapunk, ha összekeverünk

- a) 4 liter 55%-os és 6 liter 25%-os alkoholt;
- b) 40 liter 15%-os és 50 liter 22%-os alkoholt;
- c) 23 liter 18%-os és 45 liter 31%-os alkoholt;
- d) 50 liter 30%-os alkoholt és 30 liter tiszta vizet;
- e) 50 liter 30%-os alkoholt és 30 liter tiszta (100%-os) alkoholt;
- f) 25 liter 20%-os, 30 liter 23%-os és 40 liter 10%-os alkoholt?

K2 Gy 1036*. Hány liter vizet kell öntenünk

- a) 32 liter 20%-os alkoholhoz, hogy 15%-os alkoholt kapjunk;

- b) 40 liter 20%-os alkoholhoz, hogy 15%-os alkoholt kapjunk;
- c) 40 liter 25%-os alkoholhoz, hogy 15%-os alkoholt kapjunk;
- d) 30 liter 20%-os alkoholhoz, hogy 22%-os alkoholt kapjunk;
- e) 12 liter 18%-os és 22 liter 10%-os alkoholhoz, hogy 8%-os alkoholt kapjunk?

K2 Gy 1037*. Mennyi lesz az alábbi keverékek sótartalma, ha összeöntünk

- a) 10 kg 6%-os és 10 kg 10%-os sóoldatot;
- b) azonos mennyiségű 10%-os és 20%-os sóoldatot;
- c) 10%-os sóoldatot és feleannyi mennyiségű 16%-os sóoldatot;
- d) 6%-os sóoldatot és háromszor annyi 10%-os sóoldatot?

K2 Gy 1038*. Adott mennyiségű 30%-os sóoldathoz mennyi vizet öntsünk, hogy a keverék

- a) 10%-os; b) 20%-os; c) 30%-os legyen?

Egyenletrendszerek

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán, grafikus és algebrai úton is (1039–1042. feladat).

K1 1039.

- a) $(1) y = 2x + 1,$
 $(2) y = -x + 4;$

- b) $(1) y = x + 1,$
 $(2) y = 2x - 1.$

* A különböző koncentrációjú oldatok keverésekor fellépő esetleges térfogatváltozásoktól eltekintünk.

K1 1040.

$$\begin{aligned} a) (1) y &= -\frac{x}{5} - 1, \\ (2) y &= 2x + 4,5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) y &= \frac{2}{3}x + 2, \\ (2) y &= -\frac{1}{2}x - 1. \end{aligned}$$

K1 1041.

$$\begin{aligned} a) (1) y &= 1,1x - 2, \\ (2) y &= 2,3x + 1,4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) y &= \sqrt{2}x + \sqrt{3}, \\ (2) y &= -\sqrt{2}x + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

K1 1042.

$$\begin{aligned} a) (1) y &= \sqrt{2}x + \sqrt{3}, \\ (2) y &= -\sqrt{2}x + \sqrt{5}; \\ c) (1) 2x + 3y &= 4, \\ (2) 5x - 6y &= -7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) 2x + y &= 5; \\ (2) -x + y &= -1; \end{aligned}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a behelyettesítő módszer alkalmazásával. (Ha nem adjuk meg azt az alaphalmazt, amelyben az egyenletek megoldásait keressük, akkor azt a lehető legtágabbnak kell tekintenünk.) (1043–1046. feladat.)

K1 1043.

$$\begin{aligned} a) (1) 2x + 3y &= 5, \\ (2) x - 2y &= -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) 0,5x - y - 3 &= 0, \\ (2) -x - 2y &= 2. \end{aligned}$$

K1 1044.

$$\begin{aligned} a) (1) 2x + 1,3y &= 7, \\ (2) 3x &= 14 - x + 1,1y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) 3y &= 3 - 2x, \\ (2) -x + \frac{3}{2}y + 1 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

K1 1045.

$$\begin{aligned} a) (1) \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y &= x - \frac{3}{4}, \\ (2) -\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y &= y + \frac{7}{8}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) \sqrt{2}x + \sqrt{3}y &= 1 + \sqrt{6}, \\ (2) 2x + \sqrt{2}y &= 2 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

K1 1046.

$$\begin{aligned} a) (1) \sqrt{5}x + \sqrt{6}y &= 2\sqrt{3}, \\ (2) -\sqrt{2}x + y - \sqrt{2} &= 0; \\ c) (1) 2x + 4y &= 5, \\ (2) 5x + 10y + 7 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) 2x - y - 7 &= 0, \\ (2) -4x + 2y &= -14; \end{aligned}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket az egyenlő együtthatók módszerének alkalmazásával (1047–1051. feladat).

K1 1047.

$$\begin{aligned} a) (1) 2x + 3y &= 7, \\ (2) 3x - 2y &= 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (1) 2,5x + y &= -2, \\ (2) -5x - 3y &= 1. \end{aligned}$$

K1 1048.

a) (1) $2x + \frac{7}{3}y = 2,$

(2) $2x - \frac{7}{3}y = -4;$

b) (1) $0,5x - 1,3y = 1,$

(2) $-3x + 5,3y = -6.$

K1 1049.

a) (1) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{6},$

(2) $-4x + \frac{5}{6}y = \frac{7}{8};$

b) (1) $-\frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y = 1,8,$

(2) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y = 3,4.$

K1 1050.

a) (1) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}y = 6,$

(2) $-\frac{2}{7}x + \frac{3}{4}y = 3;$

b) (1) $\sqrt{3}x + 2y = 5,$

(2) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -2.$

K1 1051.

a) (1) $\sqrt{5}x + (1 + \sqrt{7})y = 10,$

(2) $2x + \sqrt{3}y = 4\sqrt{5};$

c) (1) $2x + 4y = -5,$

(2) $5x + 10y = -12,5.$

b) (1) $-2x + y = 5,$

(2) $4x - 2y = 3;$

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket úgy, hogy új ismeretlenek bevezetésével egyszerűbb alakra hozzuk őket (1052–1053. feladat).

K2 1052.

a) (1) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1,$

(2) $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -7;$

b) (1) $-\frac{4}{x+1} + \frac{2}{y-2} = 0,$

(2) $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{2y-4} = 4.$

K2 1053.

a) (1) $\frac{7}{2x+3y} - 2 = \frac{1}{2y-3x},$

(2) $\frac{3}{2x+3y} + \frac{1}{3x-2y} = \frac{10}{7};$

b) (1) $\frac{4}{2x-y+2} + \frac{3}{x+y+1} = 5,$

(2) $\frac{3}{2x-y+2} + \frac{6}{-x-y-1} = 1;$

c) (1) $2(2x+4y-2) - 3(2x-y+1) = -2,$

(2) $3(x+2y-1) - 2x + y = 7.$

Oldjuk meg – lehetőleg több módszerrel is – az alábbi egyenletrendszereket (1054–1057. feladat).

K2 1054.

a) (1) $2x + \frac{3}{y-1} = -1,$

(2) $11x - \frac{6}{y-1} = -13, \text{ ha } x, y \in \mathbf{Q};$

b) (1) $0,5x - (\sqrt{2} - 1)y = 8,$

(2) $\frac{x}{4} + (1 + \sqrt{5})y = 4, \text{ ha } -5 < y < 5.$

K2 1055.

a) (1) $3x - 1,4y = -6,$

(2) $x + \frac{y}{2} = \frac{17}{6}, \text{ ha } x, y > 0;$

b) (1) $2x + 3y = \frac{1}{\sqrt{7}},$

(2) $-2x + 3y = \frac{5}{\sqrt{7}}, \text{ ha } x, y \in \mathbf{Q}^*.$

K2 1056.

a) (1) $\frac{5}{2x+y-1} - \frac{2}{3x-y} = 9,$

(2) $\frac{2}{2x+y-1} + \frac{1}{3x-y} = 9, \quad (y < 0);$

b) (1) $22x - 14y - 1 = 0,$

(2) $-1,1x + 0,7y - 2 = 0, \quad (x, y \in \mathbf{Q}).$

K2 1057.

a) (1) $(\sqrt{2} + 1)x + 2y = 3,$

(2) $x - y = 1, \text{ ha } x \in \mathbf{Q}^*;$

b) (1) $1,2x + 3,7y = 3,1,$

(2) $1,4x - 2,3y = 1,6;$

c) (1) $2,25x - 4,1y = 15,55,$

(2) $-9x + 16,4y = -62,2, \text{ ha } x \in \mathbf{Z};$

d) (1) $2(2x + y - 1) - 3(3x + y - 4) = 4,$

(2) $-3(2x + y - 1) - 2(3x + y - 4) = -6.$

Egyenletrendszerrel megoldható egyszerű szöveges feladatok

K1 1058. Melyik az a két szám, melyek összege 20, különbsége 10?

K1 Gy 1059. Az ókorból maradt ránk az alábbi feladat (a hagyomány szerint Euklidész görög matematikustól származik):

„A ló és az öszvér egymás mellett mentek, hátukon zsákokkal, mikor a ló panaszkodni kezdett nehéz terhére. Erre az öszvér azt mondta:

– Ha egy zsákot áteszek a hátadról, akkor az én csomagom kétszer olyan nehéz lesz, mint a tied. Ha azonban te vennél át egy zsákot az én hátamról, akkor a te csomagod még mindig csak olyan nehéz lenne, mint az enyém.

Hány (egyenlő nehéz) zsákot vitt a ló és az öszvér?”

K1 Gy 1060. Egy kertben kétlábú csirkék és négylábú nyulak vannak. A fejek száma együttesen 23, lábaik száma összesen 66. Nyúl vagy csirke van több a kertben?

K1 Gy 1061. Egy kollégiumban 2-, illetve 3-ágyas szobák vannak, összesen 72. Melyikből hány darab van, ha a férőhelyek száma 176?

K1 Gy 1062. Babiloni ékírásos cseréptáblán maradt fenn az alábbi feladat Kr. e. 2000 körüli időkből. (A feladatot mai mértékegységekkel közöljük.)

„Az egyik területről négyzetméterenként $\frac{2}{3}$ kg búzát arattam. A másik földem

minden négyzetméterén $\frac{1}{2}$ kg gabona termett. A két terület terméshozama között a különbség 500 kg. A két földterület összesen 1800 m^2 . Hány négyzetméter a két földem külön-külön?”

K1 1063. Melyik az a két szám, amelyekre teljesül, hogy egyrészt a nagyobbik 20%-a 12-vel több, mint a kisebbik $\frac{5}{6}$ része; másrészt a nagyobbik szám kétszerese éppen 280-nal nagyobb a kisebbik szám háromszorosánál?

K2 1064. Határozzuk meg azt a kétjegyű számot, amelyre teljesül, hogy maga a szám 18-cal nagyobb számjegyei összegénél, és egyik számjegye kétszerese a másik számjegyének.

K2 1065. Határozzuk meg azt a kétjegyű számot, amelyik 7-tel nagyobb, mint számjegyei összegének 2-szerese.

K2 Gy 1066. Egy szigeten 400 lakosra jut egy kutya. A kutyák száma évente 4%-kal növekszik, a lakosok száma évente 12%-kal csökken. 2 év múlva hány lakosra jut majd egy kutya?

K1 1067. Két szám összege 34,44. Ha az első számot tízzel elosztjuk, akkor a második kétszeresét kapjuk. Melyik ez a két szám?

Többszörös egyenletrendszerek

Oldjuk meg az alábbi háromváltozós egyenletrendszereket (1068–1073. feladat).

E1 1068.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & 2x + 3y - z = 1, \\ (2) \quad & x - 6y + 2,5z = 1, \\ (3) \quad & -2x - 3y + 5z = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (1) \quad & x + y + 2z = 3, \\ (2) \quad & x - 3y - z = -2, \\ (3) \quad & -x + 2y + z = 3. \end{aligned}$$

E1 1069.

- a) (1) $x + y + 3z = 5$,
 (2) $4x - 5y + 6z = 5$,
 (3) $-7x + 8y - 9z = -8$;

- b) (1) $4x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 2$,
 (2) $3x - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = \frac{5}{4}$,
 (3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = -\frac{37}{24}$.

E1 1070.

- a) (1) $1,2x - 2,3y + 1,28z = 4,1$,
 (2) $-0,4x + 1,6y + 3,1z = -2,2$,
 (3) $x + 2y - 3z = -0,5$;

- b) (1) $x + 2y = 4$,
 (2) $x - 3z = 5$,
 (3) $3y + z = 2$.

E1 1071.

- a) (1) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$,
 (2) $-\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y + \frac{z}{2} = \frac{37}{30}$,
 (3) $2y - \frac{z}{3} = \frac{2}{3}$;

- b) (1) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{3+y} + \frac{1}{z} = -6$,
 (2) $\frac{4}{x-1} + \frac{1}{3+y} - \frac{2}{z} = 6$,
 (3) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3+y} + \frac{3}{z} = \frac{3}{2}$.

E1 1072.

- a) (1) $\frac{2}{x} + \frac{3}{1-y} + z = 4$,
 (2) $\frac{1}{x} - \frac{5}{y-1} + z = 3,5$,
 (3) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y-1} + 3z = 8,5$;

- b) (1) $2x + 4y = 5 + 4z$,
 (2) $5x + 10y - 10z = 1$,
 (3) $x - y + 2z = 7,3$.

E1 1073.

- a) (1) $x + 2y - z = 2$,
 (2) $x - 3y + z = 1$,
 (3) $-2x - 4y + 2z = -4$;

- b) (1) $x + y + z = 6$,
 (2) $x - y + z = 2$,
 (3) $-2x + 2y - 2z = -4$.

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket (1074–1076. feladat).

E1 1074.

- a) (1) $x + y = 7$,
 (2) $y + z = 9$,
 (3) $x + z = 8$;

- b) (1) $x - y = 3$,
 (2) $y - z = -6$,
 (3) $z - x = 3$.

E1 1075.

- a) (1) $x + 2y = 6$,
 (2) $-y - 2z = -1$,
 (3) $z + 2x = 3,5$;

- b) (1) $2x + 3y = 7$,
 (2) $2y + 3z = 7$,
 (3) $2z + 3x = 7$.

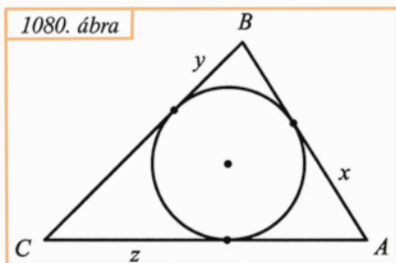
E1 1076.

- a) (1) $\frac{1}{x} - 2z^2 = -3$, (2) $z^2 - 2y = -1,2$, (3) $y - \frac{2}{x} = -0,4$;
 b) (1) $x - y + z = 5,5$, (2) $y - z + x = 18,5$, (3) $x - z - y = 4,5$;
 c) (1) $x + y + z = 6$, (2) $y + z + u = 9$, (3) $z + u + x = 8$, (4) $u + x + y = 7$.

K2 1077. Három szám összege 1680. Az első szám a második 30%-a, a harmadik pedig a második $\frac{3}{2}$ -szerese. Melyik ez a három szám?

K2 Gy 1078. Három polcon összesen 82 könyv van, a másodikon 2-vel több van, mint az elsőn levő könyvek számának a kétszerese, a harmadikon pedig 4-gyel kevesebb, mint az elsőn levők háromszorosa. Hány könyv van az egyes polcokon?

1080. ábra



E1 Gy 1079. Négy jóbarát bélyegeket gyűjt. Mindegyiküknek 34 bélyeggel többje van, mint a többiek fennmaradó bélyegeinek egyötöde. Kinek hány bélyege van?

E1 1080. Az ABC háromszög oldalai $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$ egység hosszúak. Szerkesszük meg a háromszög beírt körét; mekkorák az ábrán x , y , z -vel jelölt érintési szakaszok?

Paraméteres egyenletek, egyenletrendszerek

Oldjuk meg (x -re) a valós számok halmazán az alábbi paraméteres egyenleteket (a , $b \in \mathbb{R}$ paraméterek) (1081–1082. feladat).

E1 1081.

- a) $ax = 3$; b) $ax = 0$;
 c) $ax = b$; d) $ax + 3 = 2x - 5$;
 e) $ax + 3 = 2x + b$; f) $ax - 8 = 4a - 2x$;

E1 1082.

- a) $2ax + 4 = a - 1 + 3x$; b) $2ax + 4 = b - 1 + 3x$;
 c) $a^2x - 1 = x + a$; d) $a^2x - 15 = 5a - 3ax$;
 e) $a^2x + 1 = a^2 + ax$.

Hogyan függ a p paramétertől az alábbi egyenletek gyökeinek előjele? (1083–1084. feladat.)

E2 1083.

- a) $2x + 3 = p$; b) $px - 2 = -2x$;
 c) $px + 3 = 2x + p$; d) $px + 2 = 2x + p$;
 e) $px - 3p = 2x - 6$; f) $px + 9 = 3x + p^2$.

E2 1084.

$$a) 3 - 2p = \frac{4p + 1}{x - 2};$$

$$c) 2p - 3 = \frac{3 - 2p}{x + 2};$$

$$b) 2 - p = \frac{5 + p}{x - 1};$$

$$d) 1 - p = \frac{2 - p}{x + 3}.$$

Oldjuk meg (x -re, y -ra és z -re) az alábbi paraméteres egyenletrendszereket ($a, b \in \mathbf{R}$ paraméterek). (1085–1090. feladat.)

E2 1085.

$$a) (1) x + ay = 2,$$

$$(2) 2x - 4y = 4;$$

$$b) (1) x + ay = 2,$$

$$(2) 2x - 4y = 6.$$

E2 1086.

$$a) (1) x + y = 3a + 1,$$

$$(2) 2x - y = 2;$$

$$b) (1) 2x + y = 2a + 1,$$

$$(2) x + 3y = a + 3.$$

E2 1087.

$$a) (1) (a + 1)x - 2y = 3 + a,$$

$$(2) x + 2y = 3 - a;$$

$$b) (1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2a,$$

$$(2) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2.$$

E2 1088.

$$a) (1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a,$$

$$(2) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b;$$

$$b) (1) \frac{x}{a - 1} + y = \frac{1}{a + 2},$$

$$(2) x - 2y = 3 - a.$$

E2 1089.

$$a) (1) x + ay = 5,$$

$$(2) bx - 2y = -1;$$

$$b) (1) \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 2,$$

$$(2) \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4.$$

E2 1090.

$$a) (1) x + y = 4,$$

$$(2) y + z = -a,$$

$$(3) x + z = 3a;$$

$$b) (1) x + y = 4,$$

$$(2) 2x + 2y + az = 8,$$

$$(3) x - y - z = a.$$

Az a, b paraméter milyen értékei esetén van végtelen sok megoldása az alábbi egyenletrendszereknek? Milyen értékekre nincs megoldása az egyenletrendszereknek? (1091–1094. feladat.)

E2 1091.

$$a) (1) x + 2y = 5,$$

$$(2) 2x + ay = 10;$$

$$b) (1) x - 2y = 3,$$

$$(2) 2,5x + ay = b.$$

E2 1092.

a) (1) $9x + 10,5y = a$,

(2) $6x + by = 7$;

b) (1) $-3x + ay = 6$,

(2) $bx - 2y = 12$.

E2 1093.

a) (1) $ax + 2y = a + 2$,

(2) $x + by = 2b - 1$;

b) (1) $ax + 2y = a + 4$,

(2) $x + by = 2b - 1$.

E2 1094.

a) (1) $ax + 3y = a + 2$,

(2) $x - by = 3b + 1$;

b) (1) $ax + 2y = a + 2$,

(2) $x - y = 2a - 3$.

E2 1095. Ha x és y racionális számok, lehet-e megoldása az alábbi egyenleteknek? (a valós paraméter)

a) $2x + a = 3$;

c) $2x + \sqrt{2} = 3 - a$;

e) $2x + ay = \sqrt{2}$;

b) $2x + \sqrt{2} = 5$;

d) $2x + \sqrt{2}y = a$, $a \in \mathbf{Q}$;

f) $ax + \sqrt{2}y = a - 1$.

E2 1096. A p paraméter milyen értéke esetén nagyobb 2-nél az alábbi egyenletek gyöke?

a) $x + 2 = 3x - p$;

c) $px + 6 = 2x + 3p$;

e) $3 - p = \frac{4p + 1}{x + 3}$.

b) $px + 2 = 3x - p$;

d) $3 - p = \frac{4p + 1}{x - 4}$;

E2 1097. Határozzuk meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre

a) $3x + 5y = 33$, $x, y > 0$;

b) (1) $2x + 3y = 41$ vagy (2) $x + y = 18$, $x, y > 0$;

c) (1) $3x + 4y = 45$ vagy (2) $2x - y = 5$, $-5 \leq x \leq 16$, $-7 \leq y \leq 14$.

E2 1098. Hány megoldása van az alábbi paraméteres egyenleteknek?

a) $|x| = 2p - 4$;

b) $|x - 2| + 1 = p$;

c) $|x - p| = 2p - 1$;

d) $|x + 1| = px$;

e) $|x - 3| = px - 2$;

f) $|x - 3| = px - 3$.

E2 1099. Hány megoldása van az alábbi paraméteres egyenleteknek?

a) $2x + 3 = p$, $x > -1$;

c) $px + 3 = 2x + p$, $x \leq 0$;

e) $px + 4 = 2x + p^2$, $-3 < x < 3$;

g) $|x - 3| + |x + 1| = px$;

b) $px - 2 = -2x + 3$, $x < 1$;

d) $px - 2p = 3x - 6$, $x \in \mathbf{R}^+$;

f) $|x - 2| + |x + 2| = p$;

h) $|x - 1| + |x + 4| = px + 3$.

E1 1100. Határozzuk meg a k paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszereknek egyetlen megoldása legyen.

a) (1) $2x + 3y = 7$,

(2) $x - y = 1$,

(3) $x + y = k$;

b) (1) $kx + 2y = 5$,

(2) $-x - 2y = 3$,

(3) $0,5x + 3y = 7$.

E2 1101. Hogyan függ az alábbi egyenletrendszerek megoldásszáma a p, q paraméterek értékétől?

a) (1) $x - 3y = 6$,

(2) $px + y = -2$;

d) (1) $x + y = q$,

(2) $2x - py = 8$;

b) (1) $x - y = p$,

(2) $2x - py = p + 2$;

e) (1) $px + y = p - 2$,

(2) $qx + 3y = q + 1$.

c) (1) $x - y = p$,

(2) $2x - py = p + 3$;

E2 1102. A p valós paraméter mely értékeire van racionális x, y megoldása az alábbi egyenletrendszereknek?

a) (1) $2x + y = 3 + p$,

(2) $x - y = \sqrt{3}p - 1$;

c) (1) $2x + y = 3 + p$,

(2) $2x + \sqrt{2}y = p + 2$;

b) (1) $x + y = 3 + p$,

(2) $2x - \sqrt{2}y = 3p$;

d) (1) $px + \sqrt{2}y = 3 - \sqrt{2}$,

(2) $px - y = p + 2, \quad p \in \mathbb{Q}$.

Szöveges feladatok

K1 1103. Melyik az a szám, amelyikhez hozzáadva a tizedét, a hússzorosát és még hármat, 467,2-t kapunk?

K1 1104. Két szám aránya 2 : 5, összegük 21. Melyik ez a két szám?

K1 Gy 1105. A tollgyárban megkövetelik, hogy egy toll 1 km hosszú vonalat tudjon húzni. Mekkora a tollal beszínezhető terület nagysága, ha a vonal szélessége 0,4 mm?

K1 Gy 1106. Egy fajtátékokat gyártó vállalkozó hat alkalmazottal dolgozik. Egy alkalmazottja hetente átlagosan 60 darab játékot tud előállítani. A vállalkozó a következő hét végére 320 darabos megrendelést kap a játékból, de két alkalmazottja is szabadságra megy. Készen lesznek-e a többiek a munkával, vagy a vállalkozónak is segítenie kell? (Számoljunk 5 napos munkahéttel; szükség esetén túlóráznak az alkalmazottak, így egy-egy nap 10 órát is dolgozhatnak.)

K1 Gy 1107. Mikor Anna célba ért, nem volt mellette senki, de ekkor a versenyzők $\frac{1}{3}$ -a előtte volt, fele mögötte. Hányadik lett Anna?

K1 Gy 1108. Egy 100 méter hosszú vonat egy 200 méter hosszú hídon negyed perc alatt halad át. Mekkora a vonat sebessége?

K1 1109. Egy téglalap egyik oldalának mérőszámát 2 egységgel csökkentettük, a másik oldalt 3 egységgel növeltük. Ezekkel az oldalakkal készített téglalap területének mérőszáma 6-tal kevesebb az eredeti téglalap területénél. Mekkora a két oldal aránya?

K1 Gy 1110. Hány oldalas az a könyv, amelynél az oldalak számozásához összesen 600 számjegyet írtak le?

K1 Gy 1111. Az egyiptomi Rhind-papiruszról (Kr. e. 2000 körül) származik a következő feladat.

„Egy négyzetnek, meg egy másiknak, amelynek oldala az első négyzet oldalának háromnegyede, területe összesen 100. Mondd meg nekem!”

Minek a kiszámolására vonatkozhatott az eredeti felszólítás? Oldjuk is meg a feladatot!

K1 Gy 1112. Egy állandó sebességgel haladó teherautó 15 perc alatt tette meg kitűzött útja $\frac{2}{3}$ részének 25%-át, azaz 10 km-t. Mennyi idő alatt teszi meg a hátralévő útjának a 40%-át? (A teherautó sebessége állandó.)

K1 1113. Egy tört értéke $\frac{5}{6}$. A számláló és a nevező összege háromjegyű szám. Ez a háromjegyű szám egy természetes számnak a négyzete. Melyik ez a tört?

K2 1114. Az A mennyiségnek hány százaléka a B mennyiség?

K2 Gy 1115. Egy osztályban a tanulók 30%-ának volt félévkor jelese matematikából. Ha 4-gyel kevesebb jeles lett volna, akkor matematikából ötször annyi tanulónak lett volna jelestől különböző osztályzata, mint ahány jeles lett volna. Mennyi az osztálylétszám?

K2 Gy 1116. Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot a versenyzők 60%-a, a másodikat is a versenyzők 60%-a oldotta meg. Mindenki meg tudott oldani legalább egy példát, 9-en pedig mindkettőt megcsinálták. Hányan indultak a versenyen?

K1 Gy 1117. Az alábbi feladattal (illetve átfogalmazásaival) igen régi francia és orosz nyelvű feladatgyűjteményekben is találkozhattunk.

„Egy szolga egyévi munkabére 100 tallér és egy öltözet ruha volt. Hét hónap elteltével azonban a gazda elküldte, s jogos bérként megkapta a ruhát és még 20 tallért. Hány tallért ért a ruha?”

K2 Gy 1118. Egy diák felszólítja társát, hogy gondoljon egy pozitív egész számra. Ezután a számhoz adjon 4-et, a kapott eredményt szorozza meg 3-mal, az így kapott számból vegyen el 11-et, a kapott számból vonja ki a gondolt számot, ezután az eredményt szorozza meg 2-vel, vonjon ki a kapott számból 1-et, majd árulja el, milyen számot kapott. Ezután a diák – minimális gondolkodás után – megmondja, hogy mi volt a gondolt szám.

a) Hogyan ügyeskedett a diák?

b) Milyen számra gondolt a társa, ha a számolás eredményeként 101-et kapott?

K2 Gy 1119. Az előző játék egy módosítása a következőképpen hangzik. „Gondoljunk egy pozitív egész számra. A számhoz adjunk 8-at, a kapott eredményt szorozzuk meg 2-vel, az így kapott számból vegyünk el 4-et, a kapott szá-

mot osszuk el 2-vel, az eredményből vonjuk ki a gondolt számot, a kapott szám-
ból vonjunk ki 4-et, majd áruljuk el, milyen számot kaptunk.”

Mi lehet a gondolt szám, ha a végeredmény 2?

K1 1120. Összeadtunk n darab szomszédos természetes számot, s ered-
ményül 600-at kaptunk. Lehetett-e n értéke

a) 3; b) 4?

K1 1121. Három egymást követő páros szám összegéből kivontuk a köztük
levő páratlan számok összegét s eredményül

a) 2004-et; b) 2005-öt

kaptunk. Melyik ez a három páros szám?

K1 1122. Két természetes szám összege 759. Az összeg egyik tagja 0-ra
végződik. Elhagyva ezt a 0-t, éppen az összeg másik tagját kapjuk. Melyik ez a
két szám?

K2 1123. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 12. Ha a jegyeket fordított
sorrendben írjuk, akkor az eredeti szám és az új szám különbsége egy pozitív
számnak a négyszete. Melyik az eredeti szám?

K2 1124. Hány kétjegyű természetes szám van, amelyre teljesül, hogy a tíze-
sek helyén álló számjegy 4-gyel kisebb, mint az egyesek helyén álló számjegy,
valamint ha a jegyeket fordított sorrendben írjuk, akkor az új szám és az ere-
deti különbsége

a) 27; b) 36?

K2 1125. Oldjuk meg az előző feladatot, ha most a tízesek helyén álló szám-
jegy 3-mal kisebb, mint az egyesek helyén álló számjegy. (A másik feltétel vál-
tozatlan.)

K1 1126. Egy apa háromszor annyi idős, mint a fia. 7 évvel ezelőtt ötször
annyi idős volt. Hány év múlva lesz kétszer annyi idős?

K2 1127. Egy apa és fia életkorának összege 50 év. Öt év múlva az apa
háromszor annyi idős lesz, mint a fia. Hány év múlva lesz a fiú feleannyi idős,
mint az apa?

K1 Gy 1128. Ha Nagy Sándor 3 évvel korábban halt volna meg, életének har-
madrészében uralkodott volna. Ha 7 évvel tovább élt volna, életének felében
uralkodott volna. Tudván, hogy királyként halt meg, hány évig uralkodott Nagy
Sándor?

K2 1129. András és Béla együtt 70 évesek. András ma kétszer annyi idős,
mint Béla volt akkor, amikor András annyi idős volt, mint most Béla. Hány éves
Béla?

K2 Gy 1130. Mekkora szöveget zár be az óra kis- és nagymutatója 9 óra 20 perckor?

E1 Gy 1131. Milyen időpontokban fedi egymást az óra kis- és nagymutatója?

K1 Gy 1132. Egy asszony két kosár almát vitt a piacra, a kosarakban 30-30 alma
volt. Úgy tervezte, hogy az egyikből hármat ad 50 Ft-ért, a másikkól kettőt

40 Ft-ért. Végül is összeöntötte a két kosár almát, s ötöt adott 90 Ft-ért. Ugyanannyi volt a bevétele?

K2 Gy 1133. Egy osztályban 25-en írtak matematikadolgozatot. Elégtelen nem volt, a dolgozatok átlaga 3,44 lett.

a) Lehet-e, hogy a dolgozatok között nem volt 5-ös?

b) Legfeljebb hány 2-es dolgozat lehetett?

K2 Gy 1134. Az orvosok és ügyvédek egy csoportjában az átlagéletkor 40 év. Tudjuk, hogy az orvosok átlagéletkora 35 év, az ügyvédeké 50 év. Határozzuk meg az orvosok és ügyvédek számának arányát!



K2 Gy 1135. Egy lakótelepi egyesületben háromféle sportágat űznek: labdarúgás, tenisz, kézilabda.

A labdarúgók átlagéletkora 37 év, a teniszezőké 41 év, a kézilabdázóké 23 év. Ha együtt vannak, a labdarúgók és a teniszezők átlagéletkora 39,5 év, a labdarúgóké és a kézilabdázóké 29 év, a teniszezőké és a kézilabdázóké 33 év. Mennyi az egyesület tagjainak átlagéletkora? (Mindenki csak az egyik sportágat űzi.)

K2 Gy 1136. Ali, Béla és Cili kártyáznak. A játék elején a gyerekek leírt sorrendjében a náluk lévő zsetonok 11 : 10 : 9 arányban oszlottak el. A játék végére ez az arány 11 : 7 : 3-ra módosult. Mennyi zseton volt a gyerekeknél a játék végén, ha tudjuk, hogy valaki 363 zsetont veszített?

E1 Gy 1137. Egy vizsgán 20 kérdésre kellett válaszolni. Az értékeléskor minden jó válasz 5-5 pontot ért, viszont minden rossz válasz esetén 2-2 pontot levontak. Ha egy kérdésre a vizsgázó nem válaszolt, akkor arra 0 pontot kapott. Így valamelyik vizsgázó 48 pontot gyűjtött. Hány jó választ adott?

E1 Gy 1138. Két iskola – A és B – tanulói együtt vesznek részt egy vizsgán. Az alábbi táblázat a tanulók által elért pontszámok átlagait tartalmazza a fiúk, a lányok, a fiúk és a lányok együtt, valamint az A , a B , és az A és B iskolák szerinti bontásban. Mennyi az A és B iskolák összes leánytanulójának az átlaga, valamint a két iskola összes tanulójának átlaga?

	A iskola	B iskola	A és B iskola
fiúk	71	81	79
lányok	76	90	
együtt	74	84	

K1 1139. Mekkora a háromszög szögei, ha a második 10° -kal nagyobb az első kétszeresénél, a harmadik pedig 30° -kal kisebb a másodikonál?

K1 1140. Egy téglalap két párhuzamos oldalát 20–20%-kal csökkentettük. Hány százalékkal kell változtatni a másik két oldal hosszát, hogy az így kapott új téglalap

- a) területe ne változzon;
- b) területe az eredeti téglalap területének kétszerese legyen;
- c) területe az eredeti harmada legyen;
- d) területe az eredetiénél 30%-kal kisebb legyen;
- e) területe az eredetiénél 20%-kal kisebb legyen;
- f) területe az eredetiénél 10%-kal kisebb legyen?

K1 1141. Egy téglatest egyik élét 2 cm-rel, másik élét 20%-kal növeltük, harmadik élét pedig 50%-kal csökkentettük. Így olyan kockát kaptunk, amelynél a térfogat és a felszín mérőszáma megegyezik. Mekkora volt a téglatest felszíne és térfogata?

K1 Gy 1142. Egy földterületet a régi traktorral 6 óra, az új traktorral 4 óra alatt tudnának felszántani. Mennyi ideig tart a szántás, ha mindkét gép egyszerre dolgozik?

K2 Gy 1143. Egy medencébe három csövön keresztül folyhat be víz. Az egyik cső 4, a másik 6, a harmadik 12 óra alatt tölti tele egyedül a medencét vízzel. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mind a három cső egyszerre van nyitva?

K2 Gy 1144. Egy medencét az A jelű cső egymagában 6 óra, a B jelű cső egymagában 8 óra alatt tölti meg vízzel, a C lefolyó pedig 10 óra alatt üríti ki a teli medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha

- a) az A és B csöveket egyszerre nyitjuk ki;
- b) a B csövet és a C lefolyót egyszerre nyitjuk ki;
- c) az A csövet és a C lefolyót egyszerre nyitjuk ki;
- d) az A , B csöveket és a C lefolyót egyszerre nyitjuk ki;
- e) a medence 30%-át az A és B csövekkel együtt töltjük meg, majd a B -t elzárjuk;
- f) az A csövet kinyitjuk, majd 2 óra múlva kinyitjuk a B -t, de egy újabb óra múlva a C lefolyó is kinyílik;
- g) a medencét harmadrészig már feltöltötték, és az A és B csapot nyitjuk ki egyszerre?

K2 Gy 1145. András és Béla sakkoznak. Andrásnak 6 másodperccel kevesebb, Bélának 10 másodperccel több időre van szüksége ahhoz, hogy saját figuráit felállítsa a táblára, mint amennyi időre akkor lenne szükség, ha az összes sakkfigurát közösen raknák fel. Mennyi idő alatt rakja fel ki-ki a saját figuráit?

K1 Gy 1146. Két gépiró gépel egy szöveget. Az egyik egyedül 2 óra alatt, a másik egyedül 3 óra alatt lenne készen a munkával. Mennyi idő alatt lesznek készen, ha úgy osztják el az anyagot, hogy a lehető legrövidebb idő alatt legyen készen a munka? Milyen arányban kell kettéosztaniuk a munkát?

K2 Gy 1147. Egy földterületet három aratómunkás közül az első a , a második b , a harmadik c óra alatt kaszál le. Mennyi ideig tart a munka, ha együtt dolgozik

- a) az első két munkás;
- b) mindhárom munkás?

K2 Gy 1148. Egy kerékpáros 9 km-t haladt 5 m/s sebességgel, majd másfél óra alatt 37 km-t tett meg, végül 2 órán keresztül 15 km/h sebességgel hajtott. Mekkora volt az átlagsebessége az egész útra vonatkozólag?

K2 Gy 1149. Az országút mentén fekvő A és B város távolsága 300 km. A -ból elindul B felé egy autó 60 km/h átlagsebességgel. Egy órával korábban B -ből elindult egy motoros 30 km/h átlagsebességgel. A motoros indulása után mennyi idővel lesz a két jármű egymástól 15 km-re?

K2 Gy 1150. Mekkora az átlagsebessége annak az autónak, amelyik

- a) útjának egyik felét 60 km/h, a másik felét 80 km/h sebességgel teszi meg;
- b) menetidejének egyik felében 60 km/h, a másik felében 80 km/h sebességgel halad;
- c) útjának egyik felét a km/h, a másik felét b km/h sebességgel teszi meg;
- d) menetidejének egyik felében a km/h, a másik felében b km/h sebességgel halad;
- e) útjának egyik harmadát a km/h, a másik harmadát b km/h, az utolsó harmadát c km/h sebességgel teszi meg;
- f) menetidejének első harmadában a km/h, a második harmadában b km/h, az utolsó harmadában c km/h sebességgel halad?

K2 Gy 1151. Egy 15 cm magas gyertya 5 óra alatt, egy 10 cm-es gyertya 6 óra alatt ég el. Egyszerre meggyújtjuk mindkét gyertyát.

- a) Mennyi idő múlva lesz a két gyertya magassága egyenlő?
- b) Mennyi idő múlva lesz kétszer akkora az egyik gyertya, mint a másik?
- c) Oldjuk meg az előző feladatokat abban az esetben is, ha az első gyertyát 1 órával a második után gyújtjuk meg.

E1 Gy 1152. Az alábbi feladat *Pólya György* magyar származású matematikustól származik.

„Egy túrázó öt órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, azután megfordult, és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 kilométert tett meg óránként. Mekkora utat járt be?”

K2 Gy 1153. Egy hajó a folyón a vízfolyás irányában haladva az útját 3 óra alatt teszi meg, majd ugyanez az út a vízfolyással szemben haladva 4 óráig tart. Mennyi idő alatt teszi meg ugyanezt az utat egy tutaj, amelyik a folyó vizének sebességével halad?

K2 Gy 1154. András, Béla és Csaba egy autós terepversenyen indult el. A verseny végén kiderült, hogy Béla

- óránként 15 km-rel kevesebb utat tett meg Andrásnál, így nála 12 perccel később ért célba;
- óránként 3 km-rel több utat tett meg, mint Csaba, így nála 3 perccel korábban ért célba.

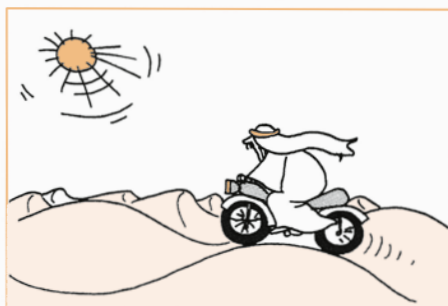
Határozzuk meg, hogy

- a) milyen hosszú volt a versenypálya;
- b) mekkora volt András, Béla és Csaba átlagsebessége;
- c) mennyi idő alatt értek célba.

K2 Gy 1155. Egy sivatagi karaván 30 km/h átlagsebességgel halad. Az egyik motoros kísérőt megbízzák, hogy végezzen felderítést a menetirány mentén.

a) Mennyi idő múlva érkezik vissza a felderítő, ha sebessége 60 km/h, és 40 km távolságig kell felderítenie a terepet?

b) Mekkora távolságig tudja a kísérő felderíteni a terepet, ha sebessége 60 km/h, és két óra múlva kell visszaérkeznie a karavánhoz?



K2 Gy 1156. Egy motorcsónak és egy evezős csónak ugyanakkor, azonos irányban elindul a Balatonon. A motorcsónak 15 km út megtévése után visszafordul, és a visszafordulás helyétől 9 km-re találkozik a csónakkal. Határozzuk meg a motorcsónak átlagsebességét, ha a csónaké 4 km/óra.

K2 E1 Gy 1157. Egy áruháznál mozgólépcsőjén egy csomag 15 másodperc alatt ér le az első emeletről a földre. Egy vásárló 12 másodperc alatt teszi meg ugyanezt az utat a nem működő mozgólépcsőn.

a) Mennyi idő alatt ér le ez a vásárló a működő mozgólépcsőn az első emeletről a földre, ha közben ugyanúgy lépeget lefelé, mint akkor, amikor a lépcső nem működött?

b) Oldjuk meg a feladatot paraméterekkel is. (A csomag t_1 , a vásárló t_2 másodperc alatt ér le a földre.)

K2 Gy 1158. Az A4-es papír magasság/szélesség aránya ugyanakkora, mint a hosszabbik oldala mentén félbehajtott A4-es papírnak (ez már A5-ös). Mekkora ez az arány?

K2 1159. Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, melynél az átlók száma a csúcsok számának háromszorosa?

K1 1160. Egy számtani sorozat első tagja 1, második tagja 13. Tagja-e a sorozatnak

a) 2004; b) 2005?

K2 Gy 1161. A frissen kaszált fű nedvességtartalma 60%, a széna nedvességtartalma pedig 15%. Hány kilogramm széna lesz 1 tonna fűből?

K2 Gy 1162. A szilvának 80%-a víz, az aszalt szilvának már csak 40%-a. Mennyi szilvából lesz 100 kg aszalt szilva?

K2 Gy 1163. Egy 25 fős osztályban matematika, fizika és kémia szakkörre járnak a gyerekek. Minden gyerek jár legalább egy szakkörre, de senki nem jár pontosan kettőre. Matematika szakkörre az osztály 48%-a, fizikára 36%-a, kémiára 56%-a jár. Hányan járnak mindhárom szakkörre?

K2 Gy 1164. Egy osztály létszáma 33. Az osztályból 13 tanuló indult a kémiaversenyen és 16 tanuló vett részt a fizikaversenyen. Kétszer annyi tanuló nem vett

részt egyik versenyen sem, mint ahányan mindkettőn indultak. Hány tanuló szerepelt mindkét versenyen az osztályból?

K2 Gy 1165. 10%-os árleszállítás után egy könyv eladásán 8% a haszon. Hány százalékos a könyvesbolt haszna árleszállítás előtt?

K2 Gy 1166. Egy áru árát kétszer egymás után az előző ár 20%-ával csökkentették, így a tiszta haszon a felére csökkent. Az előállítási árnak hány százaléka volt eredetileg a haszon?

K1 Gy 1167. Régi hindu feladat az alábbi:

„Három fáradt utazó egy tál gombócot rendelt. Mire a vendéglős kihozta az ételt, már mindhárman elaludtak. Felébredt az egyikük, megette a gombócok egyharmadát és tovább aludt. Felébredt a második, de nem vette észre, hogy egyik társa már evett az ételből; ő is megette a gombócok egyharmadát, majd tovább aludt. Hasonlóan cselekedett a harmadik is: elfogyasztotta a gombócok harmadrészét és visszafeküdt aludni. A tálban nyolc gombóc maradt. Hány gombóc volt eredetileg?”

K2 1168. Három szám aránya $3 : 4 : 5$, négyzeteik összege 200. Melyik ez a három szám?

K1 1169. Két iskolába összesen 805-en járnak. Az egyik iskola tanulói számának harmada egyenlő a másik iskola tanulói számának felével. Hányan járnak a két iskolába?

E1 1170. Ha adott négy szám közül kiválasztunk hármat, ezek közül kettő-kettő összege rendre 8, 9, 11. Mik lehetnek a számok, ha a négy szám összege 24?

K1 Gy 1171. Egy munkahely dolgozói közül az év során 70-en üdültek, nyáron 30-cal többen, mint az év többi részében. Az üdülők hány százaléka üdült nyáron?

K2 Gy 1172. Négy testvérnek összesen 4500 Ft-ja van. Ha az első pénzéhez 200 Ft-ot adunk, a másodikéból 200 Ft-ot elveszünk, a harmadikét megkét-szerezünk és a negyedikét elfelezzük, akkor mindegyik testvérnek ugyanannyi pénze lesz. Mennyi pénzük volt eredetileg külön-külön?

K2 Gy 1173. *Isaac Newton (1643–1727)* algebra tankönyvéből származik az alábbi feladat.

Egy kereskedőnek volt egy bizonyos pénzösszege. Az első évben ebből az összegből elköltött 100 fontot, majd a megmaradt összeghez hozzátette ezen összeg harmadát. A következő évben ismét elköltött 100 fontot, majd a maradék összeget megnövelte ezen összeg harmadával. A harmadik évben újra elköltött 100 fontot, majd miután a maradékhoz hozzáadta annak harmadrészét, tőkéje az eredeti tőke kétszeresére emelkedett. Mennyi volt a kereskedő kezdeti tőkéje?

K1 Gy 1174. Annának 18 darab pénzérméje van, mindegyik 2 vagy 5 forintos. Ha a 2 forintosokat 5 forintosra, az 5 forintosokat pedig 2 forintosokra cseréljük, akkor megkétszerezük a pénzét. Hány forintja van Annának?

K2 Gy 1175. Egy dinnyetermelő dinnyét vitt a piacra. Az első árusnál eladta a dinnyék felét és még egy dinnyét. A második árusnál a maradék felét és még egy dinnyét. A harmadiknál az új maradék felét és még egy dinnyét. A maradék három dinnyét a barátaival megette. Hány dinnyével indult a piacra?

K2 Gy 1176. Év elején egy iskola tanulóinak 40%-a fiú volt. Évközben a fiúk száma 10%-kal növekedett, a lányok száma viszont 5%-kal csökkent. Hány %-kal változott az iskola tanulóinak összlétszáma?

K2 Gy 1177. Egy kisvárosnak 3311 lakosa van. Tudjuk, hogy a gyerekek között 10%-kal több a lány, mint a fiú, a felnőttek között pedig 15%-kal több a férfi, mint a nő. A városban 20%-kal több gyerek van, mint felnőtt. Hány fiú és hány férfi lakik a városban?

K2 Gy 1178. Egy osztályban 24-en írtak matematika dolgozatot. Feleannyi 5-ös dolgozat volt, mint 4-es. A dolgozatok közül 20%-kal több volt a 3-as, mint a 2-es. A 4-es és 5-ös dolgozatok együttes száma megegyezett az 1-es, 2-es és 3-as dolgozatok együttes számával. Mennyi volt a dolgozatok átlaga?

K2 1179. Hány háromjegyű természetes szám van, amelyre teljesül, hogy – a százask helyén álló számjegy 4-gyel kisebb, mint az egyesek helyén álló számjegy;

– valamint a tízesek helyén 7-es számjegy áll;

– továbbá ha a jegyeket fordított sorrendben írjuk, akkor az új szám 396-tal nagyobb a keresett számnál.

K2 Gy 1180. Egy kisváros 1440 aktív munkavállalója közül 20%-nak a jövedelme az országos átlagjövedelem alatt van; ez az adat külön-külön a nőkre 22,5% és a férfiakra 18,75%. Hány nő és hány férfi dolgozik a városban?

K2 Gy 1181. A kék szeműek között átlagosan több a szőke, mint az összes ember között. Következik-e ebből, hogy a szőkék között nagyobb a kék szeműek aránya?

Elsőfokú egyenlőtlenségek

K1 1182. Mely valós számokra teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek? Ábrázoljuk a megoldásokat számegyenesen.

$$a) 2x < 5; \quad b) \frac{1}{3}x \geq 4; \quad c) -4x < 12.$$

K1 1183. Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségek megoldását az egész számok halmazán.

$$a) 1 \leq a < 5; \quad b) -4 < b < 2; \quad c) \frac{4}{3} < c < 3; \\ d) 0,2 \leq d \leq 0,8; \quad e) \frac{5}{6} < e \leq \frac{24}{5}; \quad f) -\frac{5}{4} \leq f < \frac{2}{3}.$$

K1 1184. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket! Ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen.

a) $10 < 4x < 21$;

b) $5 \leq 3x \leq 15$;

c) $-6 \leq -3x \leq 26$;

d) $-12 < -5x \leq 24$;

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket (1185–1188. feladat).

K1 1185.

a) $9a + 8 < 15 + 7a$;

b) $-3(a + 20) < -20$;

c) $-\frac{b}{2} \leq 3b - \frac{3 + 2b}{4}$;

d) $\frac{1}{2}(3m - 1) + \frac{m}{5} < 7m + 10, 1$.

K1 1186.

a) $\frac{3x + 5}{7} + \frac{10 - 3x}{5} < \frac{2x + 7}{3} - 8$;

b) $\frac{7x}{3} - \frac{11(x + 3)}{6} < \frac{3x - 1}{5} - \frac{13 - x}{2}$;

c) $3 - \frac{3 - 7y}{10} + \frac{y + 1}{2} > 4 - \frac{7 - 3y}{5}$;

d) $7(3y - 6) + 4(17 - y) > 11 - 5(y - 3)$.

K1 1187.

a) $\frac{2}{3}n + \frac{3}{2} \leq \frac{3n - 2}{4} + 1$;

b) $\frac{3 - 2z}{5} + 8 > \frac{5z + 2}{2} - z$;

c) $5 - \frac{y}{3} < \frac{3}{2} - \frac{4y + 1}{8}$;

d) $3 - \frac{3e}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4e - 3}{6}$.

K1 1188.

a) $5(f - 1) - f(7 - f) < f^2$;

b) $(r + 1)^2 \leq (r - 2)^2$;

c) $a - \frac{a - 1}{2} > \frac{a - 3}{4} - \frac{a - 2}{3}$;

d) $\frac{5b - 1}{4} - \frac{3b - 13}{10} \geq \frac{5b + 1}{3}$.

K2 1189. Oldjuk meg az egyenlőtlenségrendszereket a valós számok halmazán.

a) $\left. \begin{array}{l} 2x > 4x + 10 \\ 3x + 7 < 2x + 8 \end{array} \right\}$;

b) $\left. \begin{array}{l} 3x + 1 > x + 12 \\ 4x - 6 < 3x + 18 \end{array} \right\}$;

c) $\left. \begin{array}{l} 11x - 8 < 20x + 2 \\ 8x + 7 < 3x - 3 \end{array} \right\}$;

d) $\left. \begin{array}{l} \frac{3x - 1}{2} - \frac{5 - 2x}{3} > 2x + 1 \\ \frac{2(x + 2)}{3} + \frac{4 - 3x}{4} < \frac{5x + 1}{2} \end{array} \right\}$.

K2 1190. Mely valós számokra igaz az alábbi egyenlőtlenségrendszer?

a) $\left. \begin{array}{l} 5(a + 1) + 6(a + 2) > 9(a + 3) \\ 7a - 3(2a + 3) > 2(a - 18) \end{array} \right\}$;

$$\left. \begin{array}{l} b) \frac{(b-3)(b-4) < (b+1)(b+2)}{b(b+1) + b(b+2) > (2b-1)(b+3)} \Bigg\}; \\ c) \frac{\frac{7-n}{2} - 3 < \frac{3+4n}{5} - 4}{\frac{5}{3}n + 5(4-n) < 2(4-n)} \Bigg\}.$$

K2 1191. Egy cég 5 db íróasztalt rendel az irodába. 10 000 Ft előleget fizettek, és azt a tájékoztatást kapták, hogy a fennmaradó költség 150 000 Ft és 160 000 Ft között lesz. Mennyibe kerül egy íróasztal?

K2 1192. Egy test mozgása során a test által megtett utat az $s = 7t + 11$ összefüggés írja le. Adjuk meg század pontossággal mennyi ideig mozgott a test, ha a megtett útja 19 és 22 m között van.

Mely valós számokra teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek (1193–1199. feladat).

K1 1193.

$$\begin{array}{ll} a) (x+3)^2 - 4 < (x+1)^2; & b) 5 - (x-2)^2 > (3-x)(3+x) + 7; \\ c) (x+5)^2 - 16 \leq (2-x)^2 - 8; & d) 2(4-x)^2 - 5 \geq (x+5)(x-5) + x^2. \end{array}$$

K1 1194.

$$\begin{array}{ll} a) (a-1)^2 - 5a - 6 < 3a + 2 + (a+3)^2; \\ b) (b-4)^2 + 4b - 8 \geq 3 + (b-2)^2; \\ c) 2(m+2)^2 - 5(3m-3) > 25 + 2(5-m)^2; \\ d) (2n-3)^2 - 6(n+5) \leq (1-2n)^2 + 4n - 12. \end{array}$$

K1 1195.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{a-2}{5} \geq 0; & b) \frac{3}{b+4} < 0; \\ c) \frac{-5}{2c+3} > 0; & d) \frac{6-3d}{-7} \leq 0. \end{array}$$

K1 1196.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{1}{x} > 1; & b) \frac{2}{x} \leq 1; \\ c) -\frac{4}{x} < 2; & d) \frac{1}{x} \geq \frac{1}{3}. \end{array}$$

K1 1197.

$$\begin{array}{lll} a) \frac{3m-4}{m+2} < 0; & b) \frac{7-2n}{4+3n} > 0; & c) \frac{12-3f}{2f+5} \geq 0; \\ d) \frac{3e-7}{4e+8} \leq 0; & e) \frac{2r+7}{4-r} \leq 0; & f) \frac{5-t}{-2t-6} > 0. \end{array}$$

K2 1198.

a) $\frac{2x+3}{x-2} < 1;$

b) $\frac{3x}{x-3} \geq 2;$

c) $\frac{3-5x}{2+x} > -4;$

d) $\frac{4}{2x+1} < 3;$

e) $\frac{2(x+4)}{3-2x} \geq 1;$

f) $\frac{3(4-2x)}{3x-1} \geq -1;$

g) $\frac{5(2x-3)}{3(3x+1)} < \frac{3}{4}.$

K2 1199.

a) $1 - \frac{3x-2}{2x+5} \geq 3;$

b) $\frac{5x-2}{x-1} + \frac{2}{3} \leq \frac{3x+4}{x-1};$

c) $\frac{2}{x-4} \geq \frac{5}{x-4} - 3.$

Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek**Másodfokú egyenletek****K1 1200.** Felsorolunk néhány kifejezést:

1. $2x^2 + 3xy + 5z;$

2. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{x}{5} + \frac{1}{6};$

3. $\frac{2x+3}{x+1};$

4. $\sqrt{2x+3y+1};$

5. $\sqrt[3]{x+z};$

6. $|2x+3y^2-1|;$

7. $-\frac{2x^3z}{7}.$

Osztályozzuk a kifejezéseket az alábbi szempontok alapján:

- a) a típusuk szerint (racionális egész kifejezés (polinom), törtkifejezés, abszolútértékes kifejezés, gyökös kifejezés);
 b) egész kifejezések osztályozása a foksámuk szerint: (elsőfokú, másodfokú, ...);
 c) egész kifejezések osztályozása a tagok száma szerint (egytágú, kéttagú, ...);
 d) a változók száma szerint (egyváltozós, kétváltozós, ...).

K1 1201. Melyik kifejezés másodfokú az alábbiak közül?

a) $x^2 + 3x + 1;$

b) $x^2 + 3y + 1;$

c) $\sqrt{x^2 + 3x + 1};$

d) $x^2 + 3x + \frac{2}{x} + 1;$

e) $x^2 + 3x + \frac{x}{2} + 1;$

f) $x^2 + 3x + \frac{y}{2} + 1;$

g) $x^2 + y^2 + z^2;$

h) $x^2 + xy + y^2;$

i) $x^2 + xz + y^2;$

j) $x^2 + xyz + y^2;$

k) $(x-2)(x+3) + y - 2;$

l) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}.$

K1 1202. Mi a különbség az alábbi, egyváltozós másodfokú alakokra vonatkozó elnevezések között? Mutassuk meg pl. az $5x^2 - 2x - 3$ példán a fogalmakat.

- a) Kifejezés; b) egyenlet;
 c) függvény hozzárendelési szabálya; d) függvény helyettesítési értéke;
 e) kifejezés helyettesítési értéke; f) függvény;
 g) függvény képe (grafikonja); h) függvény képének neve;
 i) függvény képének egyenlete.

K1 1203. Ekvivalensek-e az alábbi kifejezések?

- a) $(x-3)(x+1)+3$ és x^2-2x ;
 b) $(x-3)(x+1)$ és x^2-2x-4 ;
 c) $\frac{(x-3)(x+1)+3}{x}$ és $x-2$;
 d) $(x-3)(x+1)+3+\frac{3}{x}$ és $x^2-2x+\frac{3}{x}$;
 e) $\sqrt{x^2}$ és x ;
 f) $\sqrt{x^2}$ és x , ha $x \geq 0$;
 g) $\frac{x^3}{x}$ és x^2 ;
 h) $\sqrt{x^2+4x+4}$ és $x+2$, ha $x > -1$;
 i) $\sqrt{x^4}$ és x^2 ;
 j) $\frac{x^2-4}{x+2}$ és $x-2$;
 k) $\frac{x^2-4}{x+2}$ és $x-2$, ha $x \in \mathbb{N}$;
 l) $(x-3)(x+1)+3+\frac{3}{y}$ és $x^2-2x+\frac{3y}{y^2}$;
 m) $(x-3)(x+1)+3+\sqrt{-y^2-z^2}$ és $x^2-2x+5y-6z$,

ha a két kifejezésnek azonos az alaphalmaz.

K1 K2 1204. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket előbb a racionális, majd a valós számok halmazán (a, b racionális paraméterek).

- a) $x^2-4=0$; b) $2x^2=10$; c) $x^2+1=0$;
 d) $ax^2-2=0$; e) $ax^2+2a=0$; f) $ax^2-2a=0$;
 g) $ax^2+b=0$.

K1 1205. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket előbb a racionális, majd a valós számok halmazán (a, b racionális paraméterek).

- a) $x^2-4x=0$; b) $2x^2=-5x$; c) $ax^2-(a+1)x=0$;
 d) $ax^2+2ax=0$; e) $ax^2+bx=0$.

K1 1206. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

- a) $4x^2-0,64=0$; b) $x(x-3)=4x-6x^2$; c) $5x^2-8x+3(x+2)x=0$.

K1 1207. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$a) \frac{3x^2 - 11}{4} + \frac{74 - 2x^2}{6} = 20; \quad b) \frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 2.$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán. (Ahol szükséges, alkalmazzuk a teljes négyzetté alakítás módszerét.) (1208–1214. feladat.)

K1 1208.

$$a) (x - 1)^2 = 0;$$

$$c) x^2 - 4x + 4 = 0;$$

$$b) (x + 3)^2 = 0,75;$$

$$d) x^2 + 2x + 1 = 4.$$

K1 1209.

$$a) x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$c) x^2 - 5x - 3 = -2x + 1;$$

$$b) x^2 + 6x - 7 = 0;$$

$$d) x^2 + 7x - 19 = -(x - 1)^2.$$

K1 1210.

$$a) 5x^2 + 2x + 5 = 3x^2 - 3x + 1;$$

$$c) 2x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0;$$

$$b) -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2x}{3} + 14 = 0;$$

$$d) \frac{x^2}{3} + 1,5x - 2 = (x - 1)^2 + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}.$$

K1 1211.

$$a) \left(1 + \sqrt{2}\right)x^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{2} = x - 3 + \sqrt{2};$$

$$b) \frac{12}{x} - \frac{7x - 6}{6} + 5x - 26 = 0.$$

K1 1212.

$$a) 0,45x^2 + 0,2x - 0,32 = 0,1x^2 - 0,07x - 0,14;$$

$$b) 3x^2 - 5\sqrt{2}x = x^2 - \sqrt{2}x + 2.$$

K1 1213.

$$a) \frac{2x + 3}{5} - \frac{4x + 1}{x + 1} = 2x - 3,5; \quad b) \left(x - \sqrt{2}\right)^2 = (x + 1,5)^2;$$

$$c) (x + 7)^2 + (x + 8)^2 = (x + 9)^2; \quad d) (x + 3)^2 + (x + 4)^2 + (x + 5)^2 = (x + 6)^2.$$

K1 1214.

$$a) (x + 1,5)^2 - (x - 1,5)^2 = (2x - 1,5)^2; \quad b) x^3 + (2x - 3)^2 - 5 = (x - 1)^3.$$

E1 1215. Vezessük le a másodfokú egyenlet megoldóképletét a teljes négyzetté alakítás módszerével.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket teljes négyzetté alakítással vagy a megoldóképlet segítségével (1216–1220. feladat).

K1 1216.

$$a) x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$c) 2x^2 + 5x - 7 = 0;$$

$$b) x^2 - 2x + 3 = 0;$$

$$d) -x^2 + 4x - 3 = 0.$$

K1 1217.

a) $\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + 1 = 0;$

b) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2x}{3} + 22 = 0.$

K1 1218.

a) $x^2 - x + \sqrt{2} = 2;$

b) $5x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = x^2 + 5\sqrt{2}x - 1.$

K1 1219.

a) $\frac{2x-3}{7} - \frac{2x-1}{x+3} = -x + \frac{3x+6}{11} + 2;$

b) $x^2 - (\pi + 1)x + \pi = 0;$

c) $x - 3 - \sqrt{x-3} = 2.$

K1 1220.

a) $(x+2)^3 + 3x^2 - 7 = x^3 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 13;$

b) $(x+2)^4 = (x-2)^4.$

K2 E1 1221. Megadunk négy valós-valós függvényt:

a) $a(x) = 2x^2 + 3x - 5;$

b) $b(x) = -x^2 + 2x - 1;$

c) $c(x) = x^2 - 4x + 5;$

d) $d(x) = -2x^2 + 3x - 2.$

1. Írjuk fel a függvények transzformációs alakját teljes négyzetté alakítással.

(Az $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) kifejezés transzformációs alakja $-$, teljes négyzetté

alakítás után: $a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$ vagy $a \cdot \left(x + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.)

2. Határozzuk meg a függvények értékkészletét.

3. Ábrázoljuk a függvényeket a transzformációs lépések segítségével.

4. A függvénytranszformáció egyes lépései milyen geometriai transzformációknak felelnek meg?

5. Az egyenlet gyökeit grafikusán is meghatározhatjuk. Hogyan?

6. Oldjuk meg grafikusán az $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ és $d(x) = 0$ egyenleteket! (Két megoldási módszer alkalmazható: a közvetlen függvényábrázolás az egyenlet redukálása után, illetve az egyenlet átrendezése esetén kétoldali függvényábrázolás.)

7. Mi a grafikus megoldás hátránya?

8. Oldjuk meg algebrai úton is az $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, $c(x) = 0$ és $d(x) = 0$ egyenleteket.

K2 1222. Az egyváltozós, másodfokú függvény ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) képe

a) Igaz-e, hogy minden másodfokú, egyváltozós kifejezés grafikonja parabola?

b) Milyen helyzetű a parabola tengelye?

c) Mitől függ az, hogy a parabola melyik irányban nyitott?

d) Mitől függ a parabola nyitottságának mértéke?

e) Mi jellemzi a hiányos másodfokú kifejezések grafikonját?

K1 1223. Mi jellemezheti a parabola és a vele egysíkú egyenes kölcsönös helyzetét?

K1 1224. Adjunk meg két olyan másodfokú kifejezést, amelyek összege
a) másodfokú; b) elsőfokú; c) nulladfokú kifejezés.

K1 1225. Mit nevezünk a másodfokú kifejezés diszkriminánsának? Mit jelent ez a szó?

K2 1226. Értelmezzük az alábbi táblázatot.

diszkrimináns	gyökök száma	a parabola helyzete
pozitív	kettő	az x tengelyt metszi
nulla	egy	az x tengelyt érinti
negatív	nulla	az x tengelyt elkerüli

K1 1227. Határozzuk meg az alábbi egyenletek gyökeinek számát a gyökök kiszámolása nélkül.

a) $-x^2 + 6x = 8$;

b) $2x^2 - 3x = 5$;

c) $x^2 + 6x = -9$;

d) $x^2 + 3 = 0$;

e) $x^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{8} = 0$.

K2 1228. Adjuk meg az $x^2 + 3x + c = 0$ egyenletben a c paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek

a) kettő;

b) pontosan egy;

c) nulla gyöke legyen.

K1 Gy 1229. Az ókori Egyiptomból maradt ránk az alábbi feladat. (A legrégebb matematikai tartalmú írásos emlék az ún. Rhind-papirusz, kb. Kr. e. 2000-ben íródott.)

„Egy négyzetnek, meg egy másiknak, amelynek oldala az első négyzet oldalának háromnegyede, területe összesen 100. Mondd meg nekem!”

Mi lehetett az eredeti feladat?

K1 Gy 1230. Az ún. Moszkvai-papiruszon maradt fenn kb. Kr. e. 2000-ből az alábbi egyiptomi feladat:

Határozzuk meg a derékszögű háromszög oldalainak a hosszát, ha ismerjük az a és b befogó arányát ($a : b = 3 : 4$), és a háromszög területét ($t = 24$ terület-egység).

K1 Gy 1231. Középkori hindu feladat a következő:

„Egy majomcsapat elbújt a barlangban. Közülük csak egy volt látható, amelyik egy közeli fára mászott. Hányan voltak a barlangban? Megtudod, ha a majmok öttel kisebbített létszámának harmadrészét négyzetre emeled.”

K2 Gy 1232. Egy baráti társaság minden tagja kezet fogott egymással, összesen 66 kézfogás történt. Hányan voltak a társaságban?

K2 Gy 1233. Adott egy számtani sorozat: $-4, -1, 2, 5, 8, \dots$

a) Határozzuk meg a sorozat n . tagját.

b) Az első elemtől kezdve legalább hány tagját kell összeadni a sorozatnak ahhoz, hogy az összeg ezernél nagyobb legyen?

E1 1234. A $-10, -7, -3, 2, 8, 15, \dots$ sorozat képzési szabálya szerint a tagok közötti különbség mindig eggyel nő.

a) Határozzuk meg a sorozat n . tagját.

b) A sorozat mely tagja lesz először nagyobb, mint ezer?

K1 Gy 1235. A középkori Indiából származik az alábbi feladat:

„Egy méhraj $\frac{8}{9}$ része elszakadt a rajtól. A megmaradt méhek egy része, melyek száma az eredeti rajban levő méhek felének négyzetgyökével volt egyenlő, egy jázminbokorra telepedett le. Egy méhecske pedig egy lótuszvirág körül keríngett, hallgatva az illatos virág csapdájába került társa segélykérő zümmögését. Hány méh volt összesen a rajban?”

K1 1236. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2};$$

$$b) \frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1};$$

$$c) \frac{7}{x} - \frac{21+65x}{7} + 8x + 11 = 0.$$

K2 1237. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \frac{6}{1-x^2} = \frac{2}{1+x};$$

$$b) \frac{3x}{4x^2-1} = \frac{2}{2x-1} - 1;$$

$$c) \frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{3x^2-38}{x^2-1};$$

$$d) \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1};$$

$$e) \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} - \frac{4}{x^2+2x} = 0.$$

K2 1238. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1};$$

$$b) \frac{2x-1}{x-2} + \frac{3x+1}{x-3} = \frac{5x-14}{x-4};$$

$$c) \frac{x\sqrt{5}}{2x-\sqrt{5}} = \frac{2x}{x\sqrt{5}-3};$$

$$d) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0.$$

K2 1239. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) \frac{3}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^2} + \frac{3}{x(x-3)};$$

$$b) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{3}.$$

E1 Gy 1240. Egy osztályban számolási versenyt rendeztek. A feladat az volt, hogy az alábbi „bonyolult” egyenletek gyökeit ki tudja a lehető leggyorsabban meghatározni. A győztes Aladárnak néhány perc elegendő volt az összes feladat megoldására. Hogyan okoskodhatott?

Az egyenletek:

$$a) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{63};$$

$$b) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{24};$$

$$c) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{88};$$

$$d) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{8};$$

$$e) \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{2}{45}.$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán (1241–1246. feladat).

E1 1241.

$$a) 4x^4 - 25 = 0;$$

$$b) 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0.$$

E1 1242.

$$a) 2x^4 + 3x^2 - 5 = 0;$$

$$b) (x-1)^4 + 3(x-1)^2 = 10.$$

E1 1243.

$$a) -x^6 + 5x^3 + 24 = 0;$$

$$b) 3x^6 - 4x^3 - 7 = 0.$$

E1 1244.

$$a) (x^2 + x)^2 - 3(x^2 + x) - 10 = 0;$$

$$b) (x^2 + 2x)^2 + (x+1)^2 = 13.$$

E1 1245.

$$a) (x^2 - 4x)^2 + 2x^2 - 3 = 8x - 1;$$

$$b) (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1) = 45;$$

$$c) (x^2 + x + 3)(x^2 + x + 1) = 15.$$

E1 1246.

$$a) \frac{1}{x^2 - 3x + 1} - x^2 + 3x + 0,5 = 0;$$

$$b) \frac{3}{x^2 + 3x - 3} - 2x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, ha x, y valós számok (1247–1254. feladat).

E1 1247.

$$a) 3x^2 + 5x = 7 - \frac{2x^2 + x + 1,7}{3}, \quad x \geq 1; \quad b) 2x^2 + x = 10 - y^2, \quad \text{ha } x \in [2; 10];$$

$$c) x^2 + 2x + y^2 = 4y - 5.$$

E1 1248.

$$a) x^2 + 3x + \sqrt{x-3} - 18 = 0;$$

$$b) x^2 + 4x + 3\sqrt{x-1} = 5 - y^2.$$

E1 1249.

a) $3x^2 + 2x + 2\sqrt{x-2} - 4 = 12y - 2y^2 - 6;$

b) $x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 6x + 1} + 6 = 2 - y^2.$

E1 1250.

a) $\sqrt{-x^2 + 11x - 24} + x^2 + 3x + y^2 - 6y = 9;$

b) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = 2.$

E1 1251.

a) $\sqrt{x-5} + \sqrt{9-2x} = (2x+3y-1)^2 + 2x - y + 3;$

b) $\sqrt{2 + \sqrt{x-1}} = 1.$

E1 1252.

a) $\sqrt{x+3} = -2x-6;$

b) $\sqrt{9 + \sqrt{x-2}} = 2y - y^2 + 2.$

E1 1253.

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + x^2 - 2x - 4 = 0;$

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + y^2 - 4y + x^2 - 1 = 0.$

E1 1254.

a) $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{2x^2 - 3x + 9} = 2;$

b) $1 + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x+1}.$

Összefüggések a gyökök és együtthatók között**K1 1255.** Az alábbi kifejezések közül melyik lehet egy $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) másodfokú kifejezés gyöktényezős alakja?

a) $a(x) = 2(x+2)(x-1);$

b) $b(x) = (x+2)(x-1) + 1;$

c) $c(x) = -3(x-5)(x+1);$

d) $d(x) = 2(2x+4)(x-1);$

e) $e(x) = -(x-2)(3-x);$

f) $f(x) = 3(x-3);$

g) $g(x) = (x-2)^2;$

h) $h(x) = 2x^2;$

i) $i(x) = \sqrt{2}(x-0,5)(x+\sqrt{3});$

j) $j(x) = (1+\sqrt{3})(x+2)(2x+1);$

k) $k(x) = -2(x+\pi)x(x+\sqrt{2}).$

Határozzuk meg az alábbi kifejezések gyöktényezős alakját (1256–1258. feladat).

K1 1256.

a) $a(x) = 2x^2 + 3x - 5;$

b) $b(x) = (x+3)(x-2) + 4;$

c) $c(x) = (x-5)^2 - (x+1)^2;$

d) $d(x) = 2(2x+4)(x-1).$

K1 1257.

a) $e(x) = 2(x-2)(3-x);$

b) $f(y) = y^2 - 6y + 7;$

c) $g(z) = z^2 - 4z + 4;$

d) $h(x) = x^2 - 4x + 5.$

K1 1258.

a) $i(x) = 4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$;

b) $j(x) = 8x^2 + 2x(1 - 2\pi) - 4\pi$;

c) $k(x) = -a^2 + (1 + \sqrt{2})a - \sqrt{2}$;

d) $l(x) = 3x^2 - (\sqrt{27} + 3\pi)x + 3\sqrt{3}\pi$.

E1 1259. *François Viète (1540–1603)* francia matematikustól származnak a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti kapcsolatokat leíró összefüggések, az ún. Viète-formulák. Mutassuk meg, hogy ha az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

másodfokú egyenlet két (esetleg egyenlő) gyöke x_1 és x_2 , akkor $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

E1 1260. Állapítsuk meg az $x^2 + bx + c = 0$ típusú egyenletek Viète-formuláit. (Vagyis ekkor a főegyüttható $a = 1$.)

K1 1261. Hány olyan másodfokú egyenlet van, melynek a két gyöke 2 és 3?

K2 E1 1262. Adjunk meg olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei:

a) 2 és 3;

b) 4 és -5;

c) 2 és 0;

d) 2 és 0,5;

e) 0,4 és -0,04;

f) $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$;

g) $2 + \sqrt{2}$ és $2 - \sqrt{2}$;

h) a és b ($a, b \in \mathbf{Z}$);

i) a és $\frac{1}{a}$ ($a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$);

j) π és 2π ;

k) $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ ($a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$);

l) két tetszőleges racionális szám.

Bontsuk fel elsőfokú tényezőkre szorzatára az alábbi polinomokat (1263–1265. feladat).

K2 1263.

a) $x^2 + 6x - 7$;

b) $x^2 + 6x - 9$;

c) $0,5x^2 - 3x + 4$;

d) $y^2 + y - 12$.

K2 1264.

a) $x^2 + ax - 2a^2$;

b) $t^2 - 4t + 5$;

c) $2z^2 - 0,5$;

d) $2x^2 + x(1 - 2\pi) - \pi$.

K2 1265.

a) $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{6} - 2$;

b) $\frac{x^2}{2} - x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2}$.

K2 1266. Egyszerűsítsük az alábbi törteteket:

$$a) \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 6x + 9};$$

$$b) \frac{5y^2 - 2y - 7}{y^2 - 8y - 9};$$

$$c) \frac{2x^2 + 8x - 90}{3x^2 - 36x + 105};$$

$$d) \frac{2a^2 - ab - 3b^2}{2a^2 - 5ab + 3b^2}.$$

A Viète-formulák használatának egyik előnye, hogy segítségükkel egyszerűbb esetekben fejben is meghatározhatjuk a gyököket, szorzattá alakíthatunk stb. Állapítsuk meg az alábbi egyenletek gyökeit a megoldóképlet használta nélkül (1267–1269. feladat).

E1 1267.

$$a) x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$b) y^2 + y - 42 = 0;$$

$$c) 2t^2 + 3t - 5 = 0;$$

$$d) x^2 - (a + 1)x + a = 0.$$

E1 1268.

$$a) x^2 - (b + 2)x + 2b = 0;$$

$$b) 2x^2 + 3x = 0;$$

$$c) 5x^2 + 8x - 13 = 0;$$

$$d) x^2 + ax - 2a^2 = 0.$$

E1 1269.

$$a) 2x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$b) x^2 - (1 + \pi)x + \pi = 0;$$

$$c) x^2 + (1 + \pi)x + \pi = 0;$$

$$d) x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0.$$

Az alábbi egyenleteknek két valós gyöke van. Az egyenletek megoldása nélkül határozzuk meg a gyökök előjelét (1270–1271. feladat).

E1 1270.

$$a) 2x^2 - 3x - 5 = 0;$$

$$b) -x^2 + x + 6 = 0;$$

$$c) a^2 - 14a + 49 = 0;$$

$$d) b^2 + 4b + 3 = 0.$$

E1 1271.

$$a) 4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9};$$

$$b) 8x^2 + 2x(1 - 2\pi) - 4\pi;$$

$$c) -a^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)a - \sqrt{2};$$

$$d) x^2 - 2 = 0;$$

$$e) \frac{x^2}{2} - x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}.$$

E1 1272. A Viète-formulák ismeretének további előnye, hogy a kapott gyökök általában könnyen ellenőrizhetők. Oldjuk meg az előző két feladatot algebrai úton, és a gyökök ellenőrzését fejben végezzük el.

K2 1273. Az alábbi polinomok közül melyek szimmetrikusak?

$$a) 2x + 2y + 5;$$

$$b) a^2 + b^2 + 3ab - 2;$$

$$c) xn + yn - 5x^3y^3;$$

d) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;

e) $uw^2 + u^2v$;

f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

g) $\frac{x}{y^5} + \frac{y}{x^5} - 1$;

h) $2x + 3y - 4$;

i) $x + xy$;

j) xy^2 ;

k) $\frac{1}{x} - y$.

E1 1274. Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet két valós gyöke u és v . Fejezzük ki az együtthatók segítségével az alábbi polinomokat:

a) $2u + 2v$;

b) $-3uv$;

c) $u^2 + v^2$;

d) $2(u^3 + v^3)$;

e) $u^4 + v^4$;

f) $\frac{1}{u} + \frac{1}{v}$;

g) $\frac{u}{v^2} + \frac{v}{u^2}$.

E1 1275. A $2x^2 + 3x - 5 = 0$ egyenletnek két valós gyöke van. A gyökök kiszámítása nélkül határozzuk meg a gyökök

a) négyzetösszegét;

b) köbének összegét;

c) reciprokainak összegét;

d) négyzeteik reciprokának összegét;

e) köbeik reciprokának összegét.

E1 1276. Oldjuk meg az előző feladatot a

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;

b) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

egyenletekre is! Milyen furcsaságot tapasztalunk pl. az a) esetben?

E2 1277. Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet két gyöke legyen u és v . Fejezzük ki az együtthatók segítségével az alábbi kifejezéseket:

a) $(u - v)^2$;

b) $u - v$;

c) $u^2 - v^2$;

d) $u^3 - v^3$;

e) $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$.

E2 1278. A $2x^2 + 3x - 5 = 0$ egyenletnek két valós gyöke van. A gyökök kiszámítása nélkül határozzuk meg a gyökök

a) különbségének négyzetét;

b) különbségét;

c) négyzeteinek különbségét;

d) köbeinek különbségét;

e) reciprokainak különbségét.

E2 1279. Oldjuk meg ugyanezt a feladatot a $2x^2 - 3x + 5 = 0$ egyenlet esetében is.

E2 1280. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet gyökeinek

a) ellentettjei;

b) kétszeresei;

c) n -szeresei (n egész szám);

d) reciprokai;

e) négyzetei.

E1 1281. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + 2px + 2 - p = 0$ egyenlet valós gyökeire teljesüljön, hogy

- a) mindkettő pozitív; b) mindkettő negatív;
c) különböző előjelűek; d) az egyik gyök 0.

Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $5x^2 - 19x + p = 0$ egyenletben teljesüljön, hogy: (1282–1284. feladat)

E2 1282.

- a) az egyik gyök 3;
b) a két gyök összege 6;
c) a gyökök egyenlők;
d) a gyökök aránya 2:3.

E2 1283.

- a) az egyik gyök a másik gyök négyzete;
b) a két gyök különbsége 1;
c) a két gyök azonos előjelű;
d) mindkét gyök pozitív.

E2 1284.

- a) mindkét gyök negatív; b) a két gyök különböző előjelű;
c) az egyik gyök 0; d) nincs valós gyök;
e) pontosan egy valós gyök van.

E2 1285. Oldjuk meg az előző három feladatot, ha

I. $x^2 + (2 - p)x - 2p = 0$; II. $x^2 - 3px + 3x + 2p^2 - 3p = 0$.

Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 - 4px + 3p + 1 = 0$ egyenletben teljesüljön, hogy: (1286–1287. feladat)

E1 1286.

- a) nincs valós gyök;
b) az egyik gyök 0;
c) az egyik gyök -4 ;
d) a két gyök összege 8.

E1 1287.

- a) a gyökök egyenlők; b) két különböző valós gyök van;
c) a két gyök azonos előjelű; d) a két gyök különböző előjelű;
e) nincs pozitív gyök.

E2 1288. Oldjuk meg az előző két feladatot, ha

I. $(p+4)x^2 + (2p+12)x + 2p+9 = 0$; II. $(2-p)x^2 - 2x + 2p = 0$.

E2 1289. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + (8p - 2)x + 15p^2 - 2p - 6 = 0$ egyenletben teljesüljön, hogy

- a) a gyökök négyzetének összege 24;
b) a gyökök reciprokanak összege 10;
c) a gyökök négyzetösszegének reciproka 1.

E1 1290. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelyben

- a) a gyökök négyzetének összege 24;
b) a két gyök összege 25 és az egyik gyöke 19-cel nagyobb a másíknál;
c) a két gyök szorzata 2 és különbsége 0,5;
d) a két gyök szorzata 2 és összege 0,5.

E1 1291. Oldjuk meg az alábbi másodfokú paraméteres egyenleteket:

a) $\frac{a^3x}{b} = \frac{b}{ax};$

b) $(x+a)(x-b) + (x+b)(x-a) = 2a^2 - 2ab;$

c) $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = \frac{8}{3};$

d) $\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} = 0;$

e) $\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} = 0 \quad (a, b > 0).$

E1 1292. Oldjuk meg az alábbi másodfokú paraméteres egyenleteket. Hogyan függ a megoldások száma az a, b paraméterek értékétől?

a) $x^2 - ax + b = 0;$

b) $x^2 - (a+b)x = -ab;$

c) $x^2 + a^2 - b^2 = 2ax.$

E1 1293. Hogyan függ az alábbi egyenletek megoldásszáma az a, b paraméterek értékétől?

a) $x + \frac{1}{x} = a;$

b) $\frac{x}{x-a} + \frac{x-a}{x} = \frac{5}{2};$

c) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}.$

E1 1294. Az a, b, c paraméterek mely értékeire van az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek legalább három különböző gyöke?

E2 1295. Hogyan függ a p paraméter értékétől a $(p^2 - 1)x^2 + (1 - p)x + p - 1 = 0$ egyenlet megoldásszáma?

E1 1296. Adott az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet, ahol c adott valós szám. Hogyan kell b értékét megválasztani, hogy az egyenletnek

a) 2 gyöke legyen;

b) 1 gyöke legyen;

c) 0 gyöke legyen;

d) egyik gyöke adott legyen (pl. $x_1 = 3$)?

Egyenletek összetett függvényekkel

K2 1297. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $x^2 = 2|x|;$

b) $x^2 - 4x - 3|x - 2| + 6 = 0;$

c) $|x + 2|x = 1.$

K2 1298. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $|x^2 - 16| = 2;$

b) $|x^2 - 5x + 4| = 1;$

c) $\frac{1}{|2x^2 - 3x + 2|} = 1;$

d) $\frac{1}{x^2 - 2|x| - 2} = -1.$

E2 1299. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket ($[x]$ az x szám egészrészét, $\{x\}$ a tört részét jelenti):

a) $x^2 - 2[x] - 3 = 0;$

b) $[x^2 - 2x] - 3 = 0;$

c) $x^2 - [2x + 3] = 0;$

d) $x^2 - 2\{x\} - 3 = 0;$

e) $x^2 - \{2x - 3\} = 0;$

f) $x^2 - 2[x] - 3,6 = 0;$

g) $[x^2 - 2x - 3] = 0.$

Másodfokú egyenletrendszerek

K1 1300. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán algebrailag és grafikus úton is. Hány megoldás van?

- (1) $x + y = 4$,
(2) $y - x^2 + 4x = 6$.

Vizsgáljuk meg az alábbi egyenletrendszerek grafikus jelentését és oldjuk meg az egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán (1301–1302. feladat).

K1 1301.

- a) (1) $x + y = 1$,
(2) $2x - 3y + y^2 - 2 = 0$;
- b) (1) $2x + 3y = 5$,
(2) $x^2 + y^2 = 2$.

E1 1302.

- a) (1) $2x + 3y = 5$,
(2) $-x^2 + 2x + y^2 - 3y + 1 = 0$;
- b) (1) $xy = -3$,
(2) $x + 2y = -5$.

K1 Gy 1303. Hammurabi babiloni uralkodó idejéből való az alábbi feladat: Ha egy téglalap területéhez hozzáadjuk két oldalának különbségét, akkor 183-at kapunk. A hosszúság és a szélesség összege pedig 27 egység. Mekkora a téglalap hossza, szélessége és területe?

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket. (Ahol szükséges, alkalmazzunk helyettesítést!) Hány megoldás van? (1304–1306. feladat.)

K2 1304.

- a) (1) $x + 2y^2 = 11$,
(2) $2x - y^2 = -3$;
- b) (1) $y^4 - 2x^2 = -7$,
(2) $x^2 + 3y^4 = 7$.

K2 E1 1305.

- a) (1) $2x^3 - 3y^2 + 1 = 0$,
(2) $2y^2 - x^6 = 1$;
- b) (1) $(x - 1)^2 + 2y = 5$,
(2) $2y^2 + x^2 - 2x = 4$.

K2 1306.

- (1) $y^2 + 2xy + x^2 + 3y = 4$,
(2) $2x + y = 1$.

K1 1307. Két szám összege, szorzata, hányadosa egyenlő. Melyik ez a két szám?

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket úgy, hogy az egyik ismeretlent kifejezzük és helyettesítsük (1308–1312. feladat).

K1 1308.

- a) (1) $x - y = 8$,
(2) $xy = -15$;
- b) (1) $x - y - 3xy = -47$,
(2) $xy = 14$.

K1 1309.

- a) (1) $x^2 + y^2 = 34$,
(2) $x - y = 2$;
- b) (1) $x^2 + 3x + 4xy - 5y^2 - 2y - 1 = 0$,
(2) $x - 2y + 1 = 0$.

K1 1310.

$$a) \begin{cases} (1) x^2 + 2y^2 = 3, \\ (2) xy = 2; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (1) y = x^2 - 2x + 1, \\ (2) 4x + 2y = 2. \end{cases}$$

K1 1311.

$$a) \begin{cases} (1) 4x^2 + 4y^2 = 17xy, \\ (2) x + y = 10; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (1) xy = 8, \\ (2) y = x^2. \end{cases}$$

K1 1312.

$$a) (1) x - y = -1,$$

$$(2) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6};$$

$$b) (1) \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1,$$

$$(2) \frac{3}{x+3} = \frac{2}{y}.$$

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket közvetlen helyettesítéssel (új változó bevezetésével) (1313–1316. feladat).

K2 E1 1313.

$$a) (1) \frac{y}{x-2} = 1,$$

$$(2) xy - 2y = 4;$$

$$b) (1) \frac{1}{3-x} + \frac{1}{y-2} = 2,$$

$$(2) \frac{3}{3-x} - \frac{5}{y-2} = -3.$$

K2 E1 1314.

$$a) (1) \sqrt{2x+1} + y^2 = 4,$$

$$(2) 4x + y^4 = 17;$$

$$b) (1) \sqrt{x-1} + \sqrt{3+y} = 3,$$

$$(2) \sqrt{2x-2} - 2\sqrt{y+3} = \sqrt{2} - 4.$$

K2 E1 1315.

$$a) (1) x + xy - y = 1,$$

$$(2) x^2y - y^2x = -6;$$

$$b) (1) x^4 + 2y^2 = 9,$$

$$(2) x^2 + y^2 = 5.$$

K2 E1 1316.

$$(1) 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4,$$

$$(2) \sqrt{xy} = 2.$$

Oldjuk meg az alábbi szimmetrikus egyenletrendszereket (1317–1320. feladat).

E1 1317.

$$a) (1) x + y = 3,$$

$$(2) xy = 2;$$

$$b) (1) x^2 + y^2 + x + y = 14,$$

$$(2) xy = 3.$$

E1 1318.

$$a) (1) x + y = 15,$$

$$(2) 4x^2 + 4y^2 = 17xy;$$

$$b) (1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1,$$

$$(2) x + y = 4.$$

E1 1319.

$$a) (1) x^2 + y^2 + 4xy = 286,$$

$$(2) x + y = 14;$$

$$b) (1) x^2 + 4y^2 = 17,$$

$$(2) xy = 2.$$

E1 1320.

- (1) $x - y = 2$,
 (2) $x^3 - y^3 = 26$.

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket nevezetes azonosságok alkalmazásával (1321–1324. feladat).

K2 1321.

- a) (1) $x^2 - y^2 = 81$,
 (2) $x - y = 1$;
- b) (1) $x^2 + y^2 = 25$,
 (2) $xy = 12$.

K2 1322.

- a) (1) $x^2 - y^2 = 20$,
 (2) $x + y = 10$;
- b) (1) $x + y = 11$,
 (2) $x^3 + y^3 = 341$.

K2 1323.

- a) (1) $x^2 + xy = 35$,
 (2) $y^2 + xy = 14$;
- b) (1) $x^3 + y^3 = 35$,
 (2) $x^2 - xy + y^2 = 7$.

K2 1324.

- (1) $x^3 = 5x + y$,
 (2) $y^3 = 5y + x$.

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket (1325–1326. feladat).

E2 1325.

- a) (1) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$,
 (2) $2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5y = 4$;
- b) (1) $2x^2 + 3xy - 14y^2 = 0$,
 (2) $x^2 + 3y^2 - 7 = 0$.

E2 1326.

- a) (1) $x^2 + xy - y^2 = -5$,
 (2) $2x^2 - 3y^2 = -25$;
- b) (1) $x^2 - 3xy + y^2 = -1$,
 (2) $3x^2 - xy + 3y^2 = 13$.

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket szorzattá alakítás segítségével (1327–1330. feladat).

E1 1327.

- a) (1) $(x - 1)y + 2(x - 1) = 0$,
 (2) $x(y - 1) + 3(y - 1) = 0$;
- b) (1) $xy - 2y - x + 2 = 0$,
 (2) $2x^2 - 3xy + 5y = 5$.

E1 1328.

- a) (1) $x^2 = 4y^2$,
 (2) $2x^2 + 3y^2 - 2y = 9$;
- b) (1) $x^2 - y^2 - 10x + 10y = 0$,
 (2) $xy - 6x + 3y = 18$.

E1 1329.

- a) (1) $x^2 - y^2 = 2(x + y)$,
 (2) $x^2 + y^2 = 5(x - y)$;
- b) (1) $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13$,
 (2) $x^2 - y^2 + 2xy = 1$.

E1 1330.

- a) (1) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 1 = 0$,
 (2) $(x + y)^4 + x = 2$;
- b) (1) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 18x + 12y = -9$,
 (2) $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y = -3$.

K1 1331. Két szám összege 1. Ha a két szám szorzatához hozzáadjuk a nagyobbik szám négyzetét, eredményül

a) a nagyobbik;

b) a kisebbik

számot kapjuk. Melyik ez a két szám?

K2 1332. Két konvex sokszög összes átlójának száma 158, belső szögeik összege 4320° . Hány oldalúak a sokszögek?

K1 1333. Derékszögű háromszög területe 55 cm^2 , átfogója $\sqrt{221} \text{ cm}$. Mekkora a befogói?

K2 1334. Ha egy kétjegyű számot megszorozunk a számjegyek felcserélésével nyert számmal, akkor 1612-t kapunk. A keresett szám számjegyeinek négyzetösszege 40. Melyik ez a kétjegyű szám?

K1 1335. Egy tört számlálója 4-gyel kisebb, mint a nevezője. A tört és reciprokanak összege $\frac{58}{21}$. Melyik ez a tört?

K2 1336. Melyik az a kétjegyű szám, amelynek az első jegye 4-gyel nagyobb, mint a második, továbbá a szám és a szám jegyei összegének a szorzata 306?

K1 Gy 1337. Egy előadótérben 336 szék van. Ha minden sorban 3-mal több széket helyeznénk el és a sorok számát 2-vel megnövelnénk, akkor a férőhelyek száma 437 lenne. Hány sor és soronként hány szék van az előadótérben?

Oldjuk meg az alábbi, három ismeretlent tartalmazó egyenletrendszereket (1338–1339. feladat).

E1 1338.

a) (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 29$,
(2) $xy + xz + yz = -10$,
(3) $x + y = -1$;

b) (1) $xy + xz + yz = 752$,
(2) $x : y : z = 3 : 4 : 5$.

E1 1339.

a) (1) $xy + yz = 9$,
(2) $yz + xz = 5$,
(3) $xy + xz = -16$;

b) (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$,
(2) $x + y + z = 19$,
(3) $x - y = 1$.

E1 1340. Mekkora a téglatest térfogata, ha

a) három lapjának felszíne 6, 8 és 12 cm^2 ;

b) három lapjának kerülete 14, 18 és 24 cm ;

c) három lapátlója $\sqrt{13}$, $\sqrt{29}$ és $\sqrt{34} \text{ cm}$ hosszú?

E1 1341. Az a , b paraméterek mely értékére van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek?

a) (1) $x + y = a$,
(2) $xy = b$;

b) (1) $x + y = a$,
(2) $x^2 + y^2 = c$;

c) (1) $x^2 + y^2 = a$,
(2) $xy = b$.

Az a paraméter mely értékére van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek? (1342–1344. feladat.)

E2 1342.

a) (1) $x + y = a$,
(2) $y + 2x^2 = a$;

b) (1) $x + y = a$,
(2) $y + 2x^2 = 1$.

E2 1343.

a) (1) $x + y = a$,
(2) $x^2 + 2xy = 3$;

b) (1) $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$,
(2) $x = ay$.

E2 1344.

a) (1) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$,
(2) $ax + 2y = 1$;

b) (1) $x + y^2 = a$,
(2) $y + x^2 = a$.

E1 Gy 1345. Egy kör c méter hosszúságú kerületén két test mozog. Az első t másodperccel hamarabb fut végig a körön, mint a második. Ha egy irányban haladnak, n másodpercenként találkoznak. Mekkora a két test sebessége?

E1 Gy 1346. Egy vállalat T teher elszállítására gépkocsikat igényelt, amelyekkel egy fordulóban tudná a szállítást elvégeztetni, ha minden kocsira egyenlő súlyú terhet raknak fel. Az igényelt gépkocsik számánál x -szel kevesebb számú gépkocsit kapott a vállalat, ezért minden gépkocsira y tonnával több terhet raktak fel, s így a szállítást egy fordulóban végrehajtották. Hány kocsit igényelt a vállalat?

Szöveges feladatok

K1 1347. Milyen egész számmal kell elosztani a 660-at, hogy a hányados az osztónál 3-mal nagyobb szám, a maradék pedig az osztó fele legyen?

K1 1348. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9. Ha a számjegyeket felcseréljük, és az így kapott számot az eredetivel megszorozzuk, szorzatul 2268-at kapunk. Melyik ez a szám?

K1 1349. Ha elosztjuk két egymás után következő páratlan szám szorzatát a köztük lévő páros számmal, hányadosul $11\frac{11}{12}$ -et kapunk. Melyek ezek a páratlan számok?

K2 1350. A 122-es szám melyik számrendszerben lesz $\overline{442}$ alakú?

E1 1351. Melyik számrendszerben lesz

a) az $\overline{114}$ alakú szám négyzetszám, b) az $\overline{1331}$ alakú szám köbszám?

K1 1352. Egy négyzet oldala 20 cm. Mennyivel csökkentsük az egyik oldalt, és növeljük ugyanannyival a másikat, ha azt akarjuk, hogy az így kapott téglalap területe

a) 360 cm^2 ; b) 420 cm^2 legyen?

K1 Gy 1353. $12 \times 18\text{ cm}$ -es méretű fényképnek körben egyforma szélességű kerete van. Határozzuk meg a keret szélességét, ha területe egyenlő a kép területének 25%-ával.

K1 1354. Egy kocka minden élét 2 cm-rel növeljük, s így térfogata 152 cm^3 -rel nő. Mekkora a kocka eredeti élhossza?

K2 1355. Hány oldalú sokszögnek van annyi átlója, mint ahány oldala?

K2 1356. Egy szabályos sokszög oldalainak száma n . Ha az oldalak számát 1-gyel növeljük, akkor a keletkezett $n + 1$ oldalú szabályos sokszög egy-egy belső szöge 12° -kal lesz nagyobb az n oldalú szabályos sokszög egy belső szögénél. Hány oldalú a sokszög?

K2 Gy 1357. Labdarúgó-bajnokságon, amelyen minden csapat egy alkalommal játszott a többi csapattal, 55 mérkőzést játszottak. Hány csapat vett részt a bajnokságon?

K2 Gy 1358. 19 200 Ft-ot kell bizonyos számú személy között egyenlően elosztani. Ha kettővel kevesebben volnának, akkor mindegyiknek 800 Ft-tal több jutna. Hányan voltak eredetileg?

K2 Gy 1359. A könyvtárból 720 oldalas könyvet kölcsönöztem. Ha naponta 20 oldallal többet olvasnék el, mint kezdetben terveztem, akkor 6 nappal előbb olvasnám el a könyvet. Hány napig olvastam volna a könyvet eredetileg?

K1 Gy 1360. Kétfajta áruból vásároltunk, mindkettőből 3600 Ft értékben. Az első fajta áruból, amelyeknek kg-ja 20 Ft-tal volt drágább, mint a másiké, 2 kg-mal kevesebbet vettünk. Mekkora mennyiséget vásároltunk a két áruból?

K1 Gy 1361. Egy áru ára két ugyanolyan százaléku árcsökkenés folytán 1800 Ft-ról 1458 Ft-ra esett. Hány százalékkal lett olcsóbb az áru az egyes árcsökkenésekkor?

K1 Gy 1362. Egy városban új gyár létesült, ezért a város lakossága két év leforgása alatt 20 000-ről 23 100-ra növekedett. A második évben a szaporulat százalékos kifejezett értéke kétszerese volt az előző évinek. Hány százalékos volt a város lakosságának gyarapodása évenként?

K2 Gy 1363. Egy 36 literes edény tele van alkohollal. Az edényből kiöntünk valamennyi folyadékot, és a helyére vizet öntünk. Összekeverés után ismét kiöntünk ugyanannyi folyadékot, mint először. Az edényben 25 liter alkohol maradt. Mennyi alkoholt öntöttünk ki először és mennyit másodszor?

K2 Gy 1364. Egy üzem egy év alatt 43%-kal növelte termelését. Ez a növekedés két forrásból származott: egyrészt növekedett a munkások száma, másrészt növekedett az egy főre jutó termelés. Hány százalékkal nőtt a munkások száma, ha az egy főre jutó termelés háromszor akkora százalékkal nőtt, mint a munkások száma?

K2 Gy 1365. Két rézötvözetünk van. Az első 6 kg, a második 12 kg vörösréz tartalmaz. A vörösréztartalom százaléka az első ötvözetben 40-nel kisebb, mint a másodikban. Ha a két ötvözetet összeötvözzük, 36%-os vörösréztartalmú ötvözetet kapunk. Hány százalék vörösréz van az első, illetve a második ötvözetben?

K1 Gy 1366. Két kőműves együttes munkával 6 nap alatt épít fel egy falat. Hány nap alatt építenék fel a falat külön-külön, ha az egyiknek az egész munka 5 nappal tovább tartana, mint a másiknak?

K1 Gy 1367. Két különböző teljesítőképességű traktor együttes munkájával egy területet 4 nap alatt szántottak fel. Ha először a terület kétharmad részét az egyik traktorral szántották volna fel, majd a többit a másikkal, az egész munka 8 napot vett volna igénybe. Hány nap alatt lehet felszántani az egész területet külön az egyik és a másik traktorral?

K2 Gy 1368. Egy brigád bizonyos munkát 15 nap alatt végezne el. Ha a brigádnak 4-gyel kevesebb tagja volna, és napi 2 órával többet dolgoznának, a munka 16 napig tartana. 8 nap alatt akarják elvégezni, ezért 4 új tagot szerveznek be, és napi 4 órával többet dolgoznak. Hány tagú volt eredetileg a brigád és hány órát dolgoztak volna naponta?

K1 Gy 1369. Egy út javítását két társaság végezte. Mindkét csapat 10 km-es szakaszt javított, de a második társaság egy nappal kevesebbet dolgozott. Hány km-t javított mindegyik társaság naponta, ha együtt egy nap alatt 4,5 km-t javítottak?

K2 Gy 1370. Egy medence az első befolyócsövön át 3 órával hamarabb telik meg, mint a másodikon. Egy alkalommal, hogy a medencét megtöltsék, mind a két csövet megnyitották. 10 óra múlva az elsőt elzárták; ezután 5 óra 45 perc múlva a medence megtelt. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét külön az egyik, külön a másik cső?

K2 Gy 1371. Három cső együtt 2,5 óra alatt tölt meg egy medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence az egyes csöveken át külön-külön, ha egyedül a második csövön át kétszer annyi, egyedül a harmadik csövön át 5 órával hosszabb idő alatt telik meg, mint az elsőn?

K2 Gy 1372. Ha egy kád csapját is, lefolyóját is megnyitjuk, a tele kád 24 perc alatt kiürül. Mennyi idő alatt telik meg az üres kád, ha csak a csapot nyitjuk ki, és tudjuk, hogy a tele kád kiürítése a lefolyón keresztül 2 perccel rövidebb időbe kerül, mint az üres kád megtöltése a csapon át?

K2 Gy 1373. Két aratógép együttes munkával 6 nap alatt gyűjtené be a termést. A termés harmadát az egyik aratógép, utána a többit a másik gyűjtötte be, s így a munka 15 napig tartott. Hány nap alatt gyűjtené be a termést külön az egyik és külön a másik aratógép?

E1 Gy 1374. Egy munka elvégzésére három gépet használtak. Ezt a munkát az első és a második gép együtt 7,2 nap alatt, az első és a harmadik gép együtt 9 nap alatt, a második és a harmadik gép pedig 12 nap alatt végezné el.

a) Hány nap alatt végeznék el a gépek a munkát külön-külön?

b) Miután a gépek 3 napig dolgoztak a munkán, a második gépet máshová vették. Hány napig kellett még dolgoznia az első és a harmadik gépnek a munka hátralévő részén?

K2 Gy 1375. Egy turista 80 km-t gyalogolt. Ha naponta 4 km-rel kevesebbet tett volna meg, akkor útja 1 nappal tovább tartott volna. Hány km-t tett meg eredetileg naponta? Készítsük el a mozgás út-idő grafikonját is.

K1 Gy 1376. Egy repülőgép 20 perc késéssel érkezett az A városból a tőle 500 km-re levő B városba, mert 50 km/h sebességű ellenszéllel szemben repült. Mekkora a repülőgép saját sebessége?



K2 Gy 1377. Egy vonatnak 700 km-es utat kellett volna megtennie. Az út felének megtétele után hóakadály miatt egy órát vesztetelt, és ezért, hogy időre érkezzen, átlagsebességét 12 km/h-val megnövelte. Mekkora volt az eredeti

átlagsebessége, és hány óra alatt ért a kiindulási állomásról a célállomásra? Készítsük el a mozgás út–idő grafikonját.

K2 Gy 1378. A személyvonatot 6 percig feltartóztatták. Hogy késését behozza, egy 20 km-es szakaszon eredeti sebességét 10 km/h-val növeli. Mekkora volt az eredeti sebessége?

K2 Gy 1379. Az A városból két gépkocsi megy a B város felé. Az első gépkocsi sebessége 10 km/h-val nagyobb a másodikénál, és így egy órával hamarabb ér célhoz. Határozzuk meg a gépkocsik sebességét, ha a két város közti távolság 500 km, s ábrázoljuk a mozgásukat az út–idő grafikonon.

K2 Gy 1380. Egyszerre elindul az A és B városokból egymás felé egy gyorsvonat, illetve egy személyvonat. Találkozásuk után 1 óra 15 perccel, illetve 3 óra 12 perccel érnek célba.

a) Mennyi ideig tartott a két vonat útja?

b) Készítsük el a mozgások út–idő grafikonját, ha a két város távolsága 260 km.

K2 Gy 1381. Két vonat egyidejűleg indul A és B városból egymással szemben. Az A -ból induló vonat sebessége 10 km/órával nagyobb a másik vonat sebességénél. A vonatok az út felétől 28 km-re találkoznak. Ha az A -ból induló vonat 45 perccel később indulna, akkor az út felénél találkoznak. Határozzuk meg az AB távolságot és a vonatok sebességét, s készítsük el a mozgások út–idő grafikonját.

K2 Gy 1382. Egy kikötőből egyszerre indul két hajó: az egyik északnak, a másik keletnek. Két óra múlva 60 km-re lesznek egymástól. Állapítsuk meg mindkét hajó sebességét, ha az egyik óránként 6 km-rel többet halad, mint a másik.

E1 Gy 1383. H méter magasságban haladó repülőgépre a légvédelmi tüzérek abban a pillanatban nyitnak tüzet, amelyben elhalad felettük. Hány méterrel kell a gép elé célozni, hogy eltalálják, ha a repülőgép u m/s, a lövedék pedig v m/s sebességgel mozog?

K2 Gy 1384. Egy derékszög mindkét szárán egy pont mozog a csúcstól kiindulva. Az első másodpercenként 4,4 métert fut be, a második pedig, amelyik 2 másodperccel később indult el, egy másodperc alatt 3,6 m-t tesz meg. Az első pont indulásától számítva hány másodperc múlva lesz a két mozgó pont távolsága 20,4 méter? Ábrázoljuk a két pont távolságának négyzetét az eltelt idő függvényében.

K2 Gy 1385. Két folyóparti kikötő között a távolság 80 km. A gőzhajónak, hogy eljusson az egyik kikötőből a másikba és vissza, 4 óra 20 percre van szüksége. Mekkora a gőzhajó sebessége állóvízben, ha a folyó vízének sebessége óránként 4 km?

K2 Gy 1386. Egy motorcsónak és egy tutaj egy időben indul a folyón lefelé. A motorcsónak 15 km út megtévése után visszafordul, és a visszafordulás helyétől 9 km-re találkozik a tutajjal. Határozzuk meg a motorcsónak sebességét, ha a tutajé 4 km/óra.

K2 Gy 1387. 500 m hosszú, kör alakú pályán két korcsolyázó halad egy irányban. A gyorsabbik, aki fél perccel hamarabb fut körül a pályán, 10 percnként elmegy a lassúbb mellett. Határozzuk meg a két korcsolyázó óránkénti sebességét!

K2 1388. Egy 50 m hosszú menetoszlop végéről az elejére szalad egy futár, majd azonnal visszatér az oszlop végére. Közben az oszlop 120 m utat tesz meg. Mekkora utat tett meg a futár?

K2 Gy 1389. Az egyik balatoni üdülőtérület napi zöldség- és gyümölcscellátásához 150 t zöldárut kellett az üdülőkhöz szállítani. Az autóközlekedési vállalat a szállításhoz megrendelt autók teherbírásánál 2 t-val kisebb teherbírású kocsikat küldött, de 20 kocsival többet, mint ahányat rendeltek, és így a szállítás rendben megtörtént. Hány autót küldött a vállalat és hány tonnásak voltak az autók?

K1 Gy 1390. Egy társaság 48 000 Ft-ért kisbuszt bérelt. Az elutazás pillanatában még egy utas csatlakozott hozzájuk, így mindegyik utasnak 200 Ft-tal kevesebbet kellett fizetnie. Hány utas volt eredetileg?

K1 Gy 1391. 240 m-es távon egy kocs első kereke 20-szal többet fordul, mint a hátsó, amelynek kerülete 1 m-rel nagyobb az elsőnél. Mekkora a kerekek kerülete?

K2 Gy 1392. A 25 m/s-os sebességgel feldobott labda hány másodperc múlva ér 20 m magasra? ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$)

K2 Gy 1393. Két elektromos fogyasztó eredő ellenállásának értéke soros kapcsolás esetén 27 Ohm, párhuzamos kapcsolás esetén $\frac{20}{3}$ Ohm. Mekkora az ellenállásuk külön-külön?

E1 Gy 1394. Rajzoljuk meg az első öt másodpercben a magasság-idő grafikonját annak a ferdén elhajított kavicsnak, melyet egy 10 m magas háztetőről, 20 m/s függőleges irányú kezdősebességgel dobtunk el ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$). A háztól mekkora távolságban ér földet a kavics, ha a dobás vízszintes kezdősebessége 15 m/s volt?

E1 Gy 1395. Egy szakadék széléről a szakadékba követ ejtünk. A kő földhöz ütdését 10 s múlva halljuk. Milyen mély a szakadék? ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$, a hangsebesség $c = 340 \text{ m/s}$.)

Vegyes feladatok

K2 1396. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) 1 - \frac{x}{1-x} = \frac{5}{5+x}; \quad b) \left(1 + \frac{6}{x^2-x-12}\right) \left(1 - \frac{1}{x-3}\right) = 0;$$

$$c) \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{3-x} = \frac{48}{(x-3)(x+38)}; \quad d) \frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}.$$

K2 1397. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán:

$$a) (1) \frac{1}{x-3} + \frac{2}{y} = \frac{1}{(x-3)y}, \quad (2) y^2 - 4(y-x) = 9;$$

$$b) (1) x^2 + xy = 210, \quad (2) y^2 + xy = 231;$$

$$c) (1) x + y + xy = 7, \quad (2) x^2 + y^2 + xy = 13.$$

K2 1398. Melyik az a sokszög, amelyben az átlók számát kapjuk, ha az oldalak számához hozzáadjuk azt a számot, amely megmutatja, hogy a szögek összege hány derékszög?

K2 1399. Van-e olyan kétjegyű természetes szám, amely a jegyei összegének négyzetével egyenlő?

K2 1400. Milyen számjegy a és b , ha a -ban b egész a -tizedszer van meg?

K2 1401. Melyik az a háromjegyű természetes szám, amelynek az első két jegyből álló szám akkora, mint a második és a harmadik jegyének szorzata?

K2 1402. Valaki életkora olyan kétjegyű egész szám, amelyet számjegyeinek szorzatával megszorozva csupa azonos jegyből álló háromjegyű számot kapunk. Hány éves az illető?

K2 1403. Milyen alapú számrendszerben írható le a 62 három darab kettessel?

K2 1404. Milyen számrendszerben osztható 6-tal $\overline{2310}$?

K2 1405. Milyen számrendszerben teljesül, hogy $\overline{4321} = 7369$?

K2 Gy 1406. Egy termék árát $p\%$ -kal emelték, majd egy akció során az új árat $\frac{p}{2}\%$ -kal csökkentették; így a termék csak $\frac{p}{3}\%$ -kal kerül többbe, mint eredetileg. Határozzuk meg p értékét.

E1 1407. Adott két, a valós számokon értelmezett függvény: $f(x) = tx^2 - x + 1$; $g(x) = 2tx - 1$, ahol t valós paraméter. Hány közös pontja van f és g grafikonjának?

E1 1408. Mutassuk meg, hogy az az egész számok körében az alábbi egyenleteknek nincs megoldása $(x, y, z \in \mathbb{Z})$.

$$a) x^2 + 43x - 2005 = 0; \quad b) x^2 + y^2 + x + y = 2005;$$

$$c) x^2 - 3y = 17; \quad d) 3x^2 - 4y^2 = 13;$$

$$\begin{aligned} e) x^2 + y^2 - 4z &= 3; \\ g) x^2 - y^2 &= 2006; \\ i) x^2 - 2xy &= 1998; \\ k) x^2 - 2y^2 &= 11; \\ m) x^2 - 1991y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) x^2 + y^2 &= 403; \\ h) x^2 + 4x - 8y &= 11; \\ j) x^2 + y^2 &= 1998; \\ l) x^2 - 2y^2 + 8z &= 3; \end{aligned}$$

E1 1409. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok körében ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned} a) 2a + 3b + ab &= 29; & b) 4a - b - 2ab &= 16; \\ c) 4ab + 3a + 4b + 2 &= 0; & d) 4ab + 3a + 4b + 1 &= 0. \end{aligned}$$

E1 1410. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok körében ($a, b \in \mathbb{Z}$).

$$a) a^2 + ab - a - 2b = 16; \quad b) 2a^2 + 2ab - 5a - b = 8.$$

K2 1411. Melyek azok az egész számok, amelyek összege és szorzata megegyezik?

E2 1412. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek 13-mal nagyobbak, mint a számjegyeik szorzata?

E1 1413. Melyek azok a kétjegyű $\overline{ab}$ számok, amelyekre $\overline{ab} + \overline{ba} + a \cdot b = 113$?

E1 1414. Az $x^3 + x^2 - 14x + m = 0$ egyenlet egyik gyöke 3. Határozzuk meg m és a másik két gyök értékét.

E1 1415. Határozzuk meg az a, b, c valós számokat, ha az

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c)$$

egyenlőség minden valós x szám esetén teljesül.

E2 1416. Bizonyítsuk be, hogy ha $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, akkor $a = b = c$.

E1 1417. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$\begin{aligned} a) \sqrt{(17-x)^2} &= \left(3 - \sqrt{x}\right)^2; \\ b) x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{2x^2 - 8x + 7} &= 1; \\ c) \frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} &= \frac{x-50}{x-50} + \frac{50}{x-49}; \\ d) (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8) + 24 &= 0; \\ e) \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} &= 2 \cdot \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket (1418–1421. feladat).

E2 1418.

$$\begin{aligned} a) x - 19 - 30 \sqrt{\frac{x-19}{x+5}} - \frac{175}{x+5} &= 0; \\ b) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x} &= 3. \end{aligned}$$

E2 1419.

a) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2-x} = -1$;

b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2-y^2$.

E2 1420.

a) $x^2 + y^2 + \frac{3}{4} = z + \sqrt{x+y-z}$;

b) $x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xz - 2y - 4yz + 1 = 0$.

V 1421. $x^2 - 4 = \sqrt{x+4}$.

E1 1422. Oldjuk meg a $2x^2 + 5mx - 3m^2 = 0$ egyenletet, haa) x az ismeretlen, m valós paraméter;b) m az ismeretlen és x a paraméter.

Hogyan függ az egyenletek gyökeinek száma a paraméter értékétől?

E1 1423. A $6x^3 - 7x^2 + px + 12 = 0$ egyenlet egyik gyöke 2. Határozzuk meg a p paraméter és a másik két gyök értékét.*Hogyan függ az a , b , c , paraméterektől az alábbi egyenletek megoldásainak száma? (1424–1426. feladat)***E1 1424.**

a) $(x-2)(x-4) + a(x-3)(x-5) = 0$;

b) $(p-3)x^2 - 5x + 6 = 0$;

c) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$, ha a , b , c különböző valós számok.

E1 1425.

a) $(1+a^2)x^2 + 2abx + b^2 + c^2 = 0$;

b) $(1+a^4)x^2 - 2a^2bx + b^2 + 2 = 0$;

c) $(1+a^2)x^2 - 2abx + b^2 - 1 = 0$, $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

E2 1426.

a) $x^4 + 2px^2 + p + 1 = 0$; b) $x^4 + 2x^2 + p = 0$; c) $x^4 + (1+p)x^2 + p = 0$.

E1 1427. Határozzuk meg a p paraméter értékét, ha az alábbi egyenletek gyökei egész számok:

a) $2x^2 - (p+2)x + 6 = 0$, $p \in \mathbf{Z}$;

b) $2x^2 - (p+2)x + 3 = 0$;

c) $x^2 + 2px + 6 = 0$;

d) $x^2 + (p-3)x - p = 0$, $p \in \mathbf{Z}$.

E2 1428. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a természetes számok körében ($x, y \in \mathbf{N}$).

a) $x^2 - 8xy + 16y^2 + 16x + 34y - 1798 = 0$;

b) $x^2 - 4x + 2xy + y^2 + 4y - 13 = 0$;

c) $3x^2 - 9x - 3 + y^2 = 0$.

E1 1429. Melyek azok a kétjegyű $\overline{ab}$ számok, amelyekre $\overline{ab} - \overline{ba} = (a+b)^2$? (a, b számjegyek)

E2 1430. Milyen n egész szám esetén lesz $n^2 + n + 41$ egy egész szám négyzete?

E2 1431. Határozzuk meg az $x^2 + bx + 4 = 0$ egyenletben a b paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek

- a) legyen gyöke;
- b) legyen két (különböző) gyöke;
- c) legyen két különböző pozitív gyöke;
- d) legyen két különböző előjelű gyöke;
- e) egyik gyöke $x_1 = 1$ legyen;
- f) egyik gyöke $x_1 = 0$ legyen;
- g) mindkét gyöke -2 -nél nagyobb legyen;
- h) mindkét gyöke -6 -nál nagyobb legyen;
- i) egyik gyöke -6 -nál nagyobb, másik gyöke -6 -nál kisebb legyen;
- j) két különböző gyöke a $(-4; -1)$ nyílt intervallumban legyen.

E1 E2 1432. Határozzuk meg a $-x^2 + (2 - p)x + 4p + 8 = 0$ egyenletben a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek

- a) legyen gyöke;
- b) legyen két (különböző) gyöke;
- c) legyen két különböző pozitív gyöke;
- d) legyen két különböző előjelű gyöke;
- e) egyik gyöke $x_1 = -1$ legyen;
- f) mindkét gyöke 1 -nél nagyobb legyen;
- g) egyik gyöke 1 -nél nagyobb, másik gyöke 1 -nél kisebb legyen;
- h) két különböző gyöke az $(1; 5)$ nyílt intervallumban legyen.

E1 E2 1433. Határozzuk meg a $(p + 2)x^2 + (2p + 3)x - 2 = 0$ egyenletben a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek

- a) legyen gyöke;
- b) legyen két különböző gyöke;
- c) legyen két különböző előjelű gyöke;
- d) egyik gyöke $x_1 = -1$ legyen;
- e) mindkét gyöke -1 -nél nagyobb legyen;
- f) mindkét gyöke -3 -nál nagyobb legyen;
- g) egyik gyöke -3 -nál nagyobb, másik gyöke -3 -nál kisebb legyen;
- h) mindkét gyöke a $(-3; -1)$ nyílt intervallumban legyen.

E2 1434. Milyen p valós paraméter esetén lesz az $x^2 + 1,2px + p^2 - 3p = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege a legnagyobb?

E2 1435. Oldjuk meg a valós $(x; y)$ számpárok halmazán az alábbi egyenlet-rendszert (p paraméter):

$$(1) 2(p + 2)x - (p + 1)y = p, \quad (2) p^2(x - y) = 4x - y.$$

E2 1436. Milyen $p > 0$ paraméter esetén van egyetlen megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$(1) x^3 - y^3 = p^2, \quad (2) x - y = p.$$

E2 1437. A p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$(1) x^3 + y^3 + 3xy = p; \quad (2) x + y = xy.$$

E2 1438. Milyen p egész paraméterekre van megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$(1) x + y + z = p; \quad (2) x^2 + y^2 + z^2 = p.$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok körében ($x, y, z \in \mathbf{Z}$). (1439–1440. feladat.)

E2 1439.

$$a) x^2 + y^2 = 2x + 2y - 3;$$

$$b) x^2 + y^2 + x + y = 98;$$

$$c) x^4 - 2x^2y + 3y^2 + 2 = 0;$$

$$d) 3x^2 - 2y + 5 = 0.$$

E2 1440.

$$a) 7x^2 - 4y^2 = 21;$$

$$b) 2x^2 + 5xy - 12y^2 = 21;$$

$$c) x^2 - 4xy + 5y^2 = 4;$$

$$d) x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz;$$

$$e) x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz + 4.$$

E1 1441. Melyik kétjegyű természetes szám egyenlő a jegyeiből képezett összegnek és különbségnek a szorzatával?

E2 1442. Valamely kétjegyű számot megszorozva a számjegyeinek összegével, eredményül a jegyek köbeinek összegét kapjuk. Melyik lehet ez a szám?

E1 1443. A 74-et t alapú számrendszerbe átszámolva olyan négyjegyű számot kapunk, amelynek utolsó jegye 5. Határozzuk meg t értékét és a hiányzó jegyeket.

E1 1444. Határozzuk meg az egymástól különböző a és b számjegyeket úgy, hogy az $\overline{ab}$ és $\overline{ba}$ kétjegyű számok reciprokainak különbsége $\frac{1}{270}$ legyen.

E1 1445. Határozzuk meg az összes olyan négyjegyű $\overline{abc3}$ alakú természetes számot, amelyben $a^2 + b^2 = 16c - 46$ és $c^2 = 2a + 16b - 82$.

E1 1446. Tekintsük a következő összegeket:

$$S_0 = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1;$$

$$S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1;$$

$$S_2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1;$$

$$S_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \text{ stb.}$$

Milyen szabályszerűséget veszünk észre az $S_0, S_1, S_2, \dots$ értékek meghatározásakor?

Fogalmazzuk meg a sejtést $S_n = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ értékére, és bizonyítsuk is be.

E1 1447. Az a, b, c, x, y, z valós számokra $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ és $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Határozzuk meg $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ értékét.

E2 1448. Igazoljuk, hogy ha

(1) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (ahol $a, b, c \neq 0$) és (2) $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$, akkor

(3) $xy + xz + yz = 0$.

E2 1449. Van-e olyan racionális $(a; b)$ számpár, amelyre $\frac{a+b}{a} + \frac{a}{a+b} = b$ (ahol $a \neq 0, a \neq -b$)?

V 1450. Mutassuk meg, hogy ha az $x^2 + bx + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{Z}$) egyenletnek van racionális gyöke, akkor az szükségképpen egész szám.

V 1451. Mutassuk meg, hogy ha az $x^2 + bx + c = 0$ egyenletben b, c páratlan (egész) számok, akkor az egyenletnek nincs racionális gyöke.

E2 1452. Legyen n tízes számrendszerben felírt kétjegyű szám, s pedig számjegyeinek négyzetösszege. Mi az $(n - s)$ különbség legkisebb és legnagyobb értéke?

E2 1453. Állapítsuk meg a $\frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$ kifejezés minimumát és maximumát.

E2 1454. Határozzuk meg a $K = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} + (1 + x - y)^2 - 1$ kifejezés minimumát.

E2 1455. Tekintsük az összes olyan $(x; y)$ számpárt, amelyik teljesíti az $x^2y^2 + x^2 - 10xy - 8x + 16 = 0$ egyenletet. Milyen értékeket vehet fel az xy szorzat?

E2 1456. Az a, b, c pozitív egész számok összege 300.

Mennyi $K = \frac{a+2b}{bc} + \frac{b+2c}{ac} + \frac{c+2a}{ab}$ minimuma?

E2 1457. Hogyan függ a p paramétertől az alábbi egyenletek megoldásainak száma?

a) $|x^2 + 4x + 3| = x + p$;

b) $|x^2 - 6|x| + 5| - p = 0$;

c) $\sqrt{2x+4} + x - p = 0$;

d) $\sqrt{2x+p+1} - 1 = x$;

e) $|x^2 + 4x + 3| = px$.

V 1458. Milyen m valós értékek esetén írható fel a $P(x) = 2x^2 + 2mx + m^2 - 10$ polinom két egész együtthatós elsőfokú polinom négyzetének különbségeként?

Másodfokú egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán: (1459–1462. feladat)

K1 1459.

a) $x^2 - 14x + 45 > 0$;

b) $z^2 - 11z + 30 \geq 0$;

c) $x^2 - 4x + 3 < 0$.

K1 1460.

a) $-a^2 - 108 < -22a$;

b) $b^2 + 4 < 6b - 5$;

c) $2c^2 - 8c + 4 \leq c^2 - 3c$;

d) $\frac{5}{2}d^2 - 8d + 32 > 1, 5d^2 + 25$.

K1 1461.

a) $2p^2 - 3p + 7 < 0$;

b) $3q^2 - 4q + 5 < 0$;

c) $3r^2 - 11r - 4 \leq 0$;

d) $5s^2 - 8s - 4 > 0$.

K1 1462.

a) $-2 + a - 3a^2 < 0$;

b) $-5 + 4b - 3b^2 > 0$;

c) $2c^2 - 3c + 4 > c^2 + 2c - 2$;

d) $2d^2 - 2d - 7 \geq d^2 + 5d - 17$.

K2 E1 1463. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségrendszert.

a)
$$\left. \begin{aligned} 3m^2 - 5m - 2 > 0 \\ 6m^2 - 14m + 12 < 0 \end{aligned} \right\};$$

b)
$$\left. \begin{aligned} 5n^2 - 7n + 2 < 0 \\ 3n^2 - 2n + 5 > 0 \end{aligned} \right\}.$$

K2 E1 1464. A változó milyen értékeire teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek?

a) $\frac{(m-1)(m-2)}{m-3} > 0$;

b) $\frac{(n-3)(n-5)}{n-2} > 0$;

c) $\frac{m-1}{m^2+4m+2} < 0$;

d) $\frac{n^2-6n+18}{n-4} > 0$.

K2 E1 1465.

a) $\frac{p^2+2p-3}{p^2-2p+8} > 0$;

b) $\frac{q^2+5q+4}{q^2-5q-6} > 0$;

c) $2 - \frac{r-3}{r-2} > \frac{r-2}{r-1}$;

d) $3 - \frac{3s-17}{s-5} > \frac{s-5}{s+2}$.

Paraméteres és összetett egyenlőtlenségek

E1 1466. Vizsgáljuk meg m értékétől függően az alábbi egyenlőtlenség megoldásait.

a) $x^2 + 2x + m > 0$;

b) $x^2 - 5x - m > 0$;

c) $x^2 + 6x + (5m-1)(m-1) > 0$;

d) $x^2 + 2x + m > 10$.

E1 1467. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, az m valós paraméter értékei esetén.

$$mx^2 + 12x - 5 < 0.$$

E1 1468. Létezik-e olyan m valós paraméter, mely esetén az egyenlőtlenségnek nincs valós megoldása?

$$(m+3)x^2 - 5x - 4 < 0.$$

E1 1469. Mely valós paraméter esetén teljesül minden valós x -re az egyenlőtlenség?

$$x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 > 0.$$

E1 1470. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, az m valós paraméter értékei esetén.

$$x^2 + (m + 2)x + 8m + 1 > 0.$$

E2 1471. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, az m valós paraméter értékei esetén.

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 < 0.$$

E2 1472. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, az m valós paraméter értékei esetén.

$$(m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m + 1)x + 3 > 0.$$

K2 E1 1473. Egy téglalap kerülete 40 cm.

a) Mekkora lehet a téglalap maximális területe? Mekkora ebben az esetben a téglalap oldalai?

b) Mekkora lehet a téglalap oldala, ha a területe 50 cm-nél nagyobb?

E1 1474. Egy számítógép-alkatrészeket gyártó cég termelési mutatóiról a következőket tudjuk:

A költség a darabszám függvényében a $k(x) = 25\,675x + 50\,000$ függvény írja le, ahol az x a darabszám, a $k(x)$ Ft-ban számolt érték.

A bevétel $b(x) = 25x^2 - 5500x - 43\,750$ alapján számolható.

a) Határozzuk meg 1000 db, illetve 2000 db esetén a bevétel és a költség értékét!

b) Hány db előállítás esetén lesz az alkatrész gyártása nyereséges? (Azaz a bevétel több, mint a költség.)

K2 1475. Egy kétjegyű szám második jegye 3-mal nagyobb, mint az első jegye, értéke 25 és 49 között van. Melyik ez a kétjegyű szám?

K2 1476. Egy folyón a hajókikötő mellett $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel halad egy hajó. Egy motorcsónak 4 s múlva indul el vele egy irányba, $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással. Mennyi idő eltelte után tesz meg több utat a motorcsónak, mint a hajó?

E1 1477. Oldjuk meg az egész számok halmazán az egyenlőtlenségeket.

$$a) (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 4x + 7) \geq 0;$$

$$b) (x^2 - 6x + 10)(x^2 - 10x + 25) \leq 0.$$

E2 1478. Jelentse x egy derékszögű háromszög nagyobbik befogóját, y a kisebbik befogót, z az átfogót. Igazoljuk, hogy

$$x + \frac{y}{2} > z > \frac{8}{9} \left(x + \frac{y}{2} \right).$$

V 1479. Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekhez van olyan x, y , hogy

$$p = x + y \text{ és } x^2 + 4y^2 + 8y + 4 \leq 4x.$$

E1 1480. Keressük meg az összes olyan t számot, amelyre az alábbi két állítás közül pontosan az egyik igaz:

(1) az $x^2 + (t+1)x + 1 = 0$ egyenletnek két különböző pozitív gyöke van,

(2) a $4x^2 + (t-2)x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenség minden pozitív x -re teljesül.

V 1481. Legyen

$$K = \frac{(p^2 + 2p - 24)x^2 - 6(p+6)x + (p^2 - 10p + 24)}{(p^2 - 9p + 18)x^2 - 8(p-6)x + (p^2 - 3p - 18)}.$$

Határozzuk meg p -nek összes olyan értékét, melyre

a) $K > 0$ tetszőleges x mellett;

b) $K < 0$ tetszőleges x mellett.

V 1482. Jelöljön p pozitív valós számot. Felvehet-e a $\left[0, \frac{4}{p}\right]$ zárt intervallu-

mon értelmezett $f(x) = -\frac{1}{2p}x^2 + x$ függvény 1-nél nagyobb értéket?

V 1483. Határozzuk meg az összes olyan x, y, n pozitív egész számhármast, amelyben x és y egyaránt n -jegyű tízes számrendszerbeli szám, valamint $x^2 = y^3$.

E2 1484. Szilveszterre szendvicseket is készítünk. Egy sajtoshoz 5 dkg kenyér, 1 dkg vaj, 2 dkg sajt szükséges, míg a szalámishoz 5 dkg kenyér, $\frac{5}{3}$ dkg vaj és 1 dkg szalámi kell. Bevásároltunk 2 kg kenyeret, fél kg vajat, 60 dkg sajtot és 20 dkg szalámit.

Hány szendvics készíthető maximálisan? Ebből mennyi a sajtos, mennyi a szalámis?

Ha a sajtos szendvics 1 perc alatt, a szalámis két perc alatt készül el – maximális darabszám mellett –, akkor mennyi idő alatt készülnek el a leghamarább?

K2 1485. Mely $(x; y)$ egész számpárookra teljesül az alábbi egyenlőtlenségrendszer?

$$x^2 + y^2 \geq 1; \quad x^2 + y^2 - 6x \leq 0.$$

K2 1486. Oldjuk meg az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazon a következő egyenlőtlenségrendszert.

$$x^2 + y^2 \leq 5x; \quad y \leq x - 2.$$

E2 1487. A $2bx + b = 3cx + c$ egyenletben b és c is az 1, 2, 3, 4, 5, 6 értékek valamelyikét veheti fel. Hány esetben lesz pozitív az egyenlet megoldása?

V 1488. Az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ számokról a következőket tudjuk:

$$x_{n+1} = x_1,$$

$$100(1 + x_i) \geq 101x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq 100n.$$

Igazoljuk, hogy az x_i számok egyenlők.

E2 V 1489. Legyenek a, b, c, d pozitív számok. Bizonyítsuk be, hogy nem teljesülhetnek az alábbi egyenlőtlenségek egyidejűleg:

$$a + b < c + d;$$

$$(a + b)(c + d) < ab + cd;$$

$$(a + b)cd < ab(c + d).$$

Magasabbfokú egyenletek

K2 1490. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán.

$$a) 16x^4 = 81;$$

$$b) 81x^4 = 625;$$

$$c) 8x^3 = 125.$$

K2 1491. Oldjuk meg az egyenleteket – új ismeretlen bevezetésével – a valós számok halmazán.

$$a) x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$$

$$b) 2x^4 - 5x^2 - 3 = 0;$$

$$c) x^8 - 17x^4 + 16 = 0.$$

K2 1492. Határozzuk meg az egyenlet gyökeit a negatív számok halmazán.
 $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0.$

K2 1493. Az $A = \{2, -1, -10, 3, 2005\}$ halmaz elemei közül egy beletartozik az alábbi egyenlet megoldáshalmazába. Melyik ez a szám?

$$2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 0.$$

K2 1494. Oldjuk meg az egyenletet – új ismeretlen bevezetésével – a valós számok halmazán.

$$(x + 1)^2 + 5(x + 1) - 14 = 0.$$

K2 1495. Oldjuk meg az egyenletet – új ismeretlen bevezetésével – a valós számok halmazán.

$$\left(\frac{2}{3}x - 5\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}x - 5\right) - 15 = 0.$$

E1 1496. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{1}{3x^2 + 6x - 13} + x^2 + 2x - 6 = 1.$$

E1 1497. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0.$$

E1 1498. Oldjuk meg az egyenletet – új ismeretlen bevezetésével – a valós számok halmazán.

$$x^2 + \frac{25x^2}{(x + 5)^2} = 11.$$

E2 1499. Oldjuk meg az egyenletet – új ismeretlen bevezetésével – a valós számok halmazán. Először csoportosítva a tagokat, állapítsuk meg, melyik kifejezésre vezessünk be új ismeretlent.

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 6 = 0.$$

E2 1500. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$$

E2 1501. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^3 - \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}x + 1 = 0.$$

E2 1502. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$2x^3 + 7x^2 - 7x - 2 = 0.$$

E2 1503. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0.$$

E2 1504. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$20x^4 + 8x^3 - 105x^2 + 8x + 20 = 0.$$

E2 1505. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0.$$

E2 1506. Oldjuk meg az egyenletet – szorzattá alakítással – a valós számok halmazán.

$$(1 + x)^4 = 16x^2.$$

E1 1507. Oldjuk meg az egyenletet a természetes számok halmazán.

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0.$$

E2 1508. Oldjuk meg az egyenletet – szorzattá alakítással – a valós számok halmazán.

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0.$$

E2 1509. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet.

$$6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0.$$

E2 1510. Oldjuk meg az egyenletet – szorzattá alakítással – a valós számok halmazán.

$$x^{10} - 5x^8 + 4x^6 - 64x^4 + 320x^2 - 256 = 0.$$

V 1511. Oldjuk meg az egyenletet – szorzattá alakítással – a pozitív egész számok halmazán.

$$xyz + xy + yz + xz + x + y + z = 2232.$$

V 1512. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

függvényt. Határozzuk meg a függvény minimumát.

E1 1513. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0.$$

V 1514. Milyen n természetes számokra lesz négyzetszám az alábbi kifejezés értéke?

$$n^5 - n^4 - 2n^3 + 2n^2 + n - 1.$$

V 1515. Határozzuk meg xy értékét, ha x és y egymástól különböző valós számok:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}.$$

V 1516. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet:

$$\frac{(x+a+b)^7 + (x-a-b)^7 - (x-a+b)^7 - (x+a-b)^7}{(x+a+b)^5 + (x-a-b)^5 - (x-a+b)^5 - (x+a-b)^5} = 7(a^2 + b^2).$$

V 1517. Kettőn játszanak. Váltakozva írhatnak be A , B , C helyére tetszőleges egész számot. Mutassuk meg, a kezdő mindig elérheti, hogy kitöltés után az egyenletnek három – nem feltétlenül különböző – egész gyöke legyen.

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

V 1518. Határozzuk meg úgy a p és q paraméterek értékét, hogy az

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

egyenletnek x_1, x_2, x_3 és x_4 gyökei valós számok legyenek, valamint teljesüljön:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}.$$

V 1519. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$x + y + z = a \quad \text{és} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a},$$

akkor x, y, z közül legalább az egyik a -val egyenlő.

V 1520. Ha $abc \neq 0$ és $ab^2 + 1 = 0$, akkor mely c értékek esetén lesz az egyenlet gyökeinek száma 0, vagy 1, vagy 2, vagy 3?

$$\frac{x}{a} + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{c} = bc.$$

V 1521. Az $(x_0; y_0)$ számpár kielégíti az alábbi egyenletet:

$$x^2 y^2 + x^2 - 10xy - 8x + 16 = 0.$$

Milyen értékeket vehet fel az xy szorzat?

Irracionális egyenletek, egyenlőtlenségek

IV Irracionális egyenletek

K1 1522. Oldjuk meg grafikus úton a következő egyenleteket:

$$a) \sqrt{x} = x;$$

$$b) \sqrt{x} = x - 2;$$

$$c) \sqrt{x} = -x;$$

$$d) \sqrt{x} = -x - 3.$$

K1 1523. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

$$a) \sqrt{x} = x^2;$$

$$b) \sqrt{x} = |x|;$$

$$c) \sqrt{x} = \frac{1}{x};$$

$$d) \sqrt{-x} = |x|;$$

$$e) \sqrt{x+3} = x+1;$$

$$f) \sqrt{x-1} = x^2 - 3.$$

K1 1524. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) \sqrt{x+5} = 1;$$

$$b) \sqrt{x-7} = 3;$$

$$c) \sqrt{4-x} = 2,5;$$

$$d) \sqrt{x+3} = -2.$$

K1 **1525.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) 2\sqrt{x-4} = 1;$$

$$b) 3\sqrt{11 - 2x} = 6;$$

$$c) 2\sqrt{x+1} - 3 = 5;$$

$$d) 1 - 2\sqrt{x + 3,5} = -4;$$

$$e) \frac{3}{2} \sqrt{x + \frac{1}{9}} - 2 = 3.$$

K2 **1526.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) \sqrt{2x-3} = 2x-3;$$

$$b) \sqrt{2x-3} = 3-2x.$$

K2 **1527.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) \sqrt{2x+4} = \sqrt{x-3};$$

$$b) \sqrt{3x - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{7}{3} - 4x}.$$

K2 **1528.** Oldjuk meg:

$$a) \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3;$$

$$b) \sqrt{4 - 4x + x^2} = 2x + 3;$$

$$c) \sqrt{\frac{4}{5}x - 3} = \sqrt{\frac{1}{2} - 2x}.$$

K2 1529. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$a) 3 - 4\sqrt{x} = 5\sqrt{x} - 15;$$

$$b) \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \frac{\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 7};$$

$$c) \frac{2\sqrt{x} - 1}{3(\sqrt{x} + 2)} = \frac{2\sqrt{x} - 3}{3\sqrt{x} - 2};$$

$$d) (3\sqrt{x} + 3)^2 + (3\sqrt{x} - 4)^2 = (3\sqrt{x} + 5)^2.$$

K2 1530. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\sqrt{2x+12} = x+2$;

b) $\sqrt{5-x} = x-3$;

c) $\sqrt{5-x} = \frac{1}{2}x-3$;

d) $\sqrt{2x+12} - 2 = x$;

e) $2x - \sqrt{-5-4x} = -4$;

f) $\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2}{9}x} = \frac{1}{3}x - 2$.

K2 1531. Oldjuk meg:

a) $\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{4x-3} = 3x-1$;

b) $\sqrt{2x+2} \cdot \sqrt{x-3} = x+1$;

c) $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{2x+6}$;

d) $\sqrt{2x+3} = \frac{7x-2}{3\sqrt{3x-8}}$.

K2 1532. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs megoldása a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4,25} = 0$;

b) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1} = 0$;

c) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{3x+5} = -2$;

d) $\sqrt{x-\frac{7}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}-x} = 3$.

E1 1533. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x-11} + \sqrt{15-x} = 2$;

b) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$;

c) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{2-x} = 3$;

d) $\sqrt{\frac{1}{5}x+1,6} - \sqrt{x+4} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0$.

E1 1534. Oldjuk meg:

a) $\sqrt{5x+4} - \sqrt{4x-3} = \sqrt{3x+1}$;

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2x+19}$;

c) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$;

d) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-7}$.

K1 1535. Hányadik emeletről eshetett le az a gumilabda, amelynek a sebessége a földet érés pillanatában $18\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

A mozgást leíró egyenlet: $v = \sqrt{2gs}$. A képletben szereplő betűk jelentése: v az elért sebesség, g a nehézségi gyorsulás, melynek értéke $g = 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, s a megtett út.

K2 1536. Egy szánkó a lejtő aljára $36\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel érkezik. Milyen hosszú úton áll meg, ha a szánkó lassulása $3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$? A szánkó mozgását leíró egyenlet: $v = \sqrt{v_0^2 - 2as}$. A képletben szereplő betűk jelentése: v a végső sebesség, v_0 a kezdősebesség, a a lassulás mértéke, s a megtett út, a sebesség mértékegységének átváltásához $3,6\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

K2 1537. Egy motorkerékpár lassulása $7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Mekkora út megtétele után

képes $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre lefékezni, ha a sebességkorlátozó tábla megpillantásakor

a) $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, b) $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad?

A számításhoz felhasználható képlet: $v = \sqrt{v_0^2 - 2as}$. A képletben szereplő betűk jelentése: v a végső sebesség, v_0 a kezdősebesség, a a lassulás mértéke, s a megtett út, a sebesség mértékegységének átváltásához $3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

E1 1538. Hány valós gyöke van az alábbi egyenleteknek? Melyek ezek?

a) $4\sqrt{x^2 + 5x - 7} = x^2 + 5x - 19$;

b) $3\sqrt{x^2 + 7x - 8} = x^2 + 7x - 12$;

c) $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 18$.

E1 1539. Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek a nemnegatív számok halmazán?

a) $4 - x = \sqrt{16 - x}\sqrt{16 + x^2}$; b) $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$.

E1 1540. Oldjuk meg az egyenletet:

$$\frac{6}{\sqrt{x-8}-9} + \frac{1}{\sqrt{x-8}-4} + \frac{7}{\sqrt{x-8}+4} + \frac{12}{\sqrt{x-8}+9} = 0.$$

E2 1541. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}.$$

E2 1542. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = x^2 - 5x + 7.$$

E2 1543. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}.$$

V 1544. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$x^2 - 4 = \sqrt{x+4}.$$

V 1545. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$x = \sqrt{-3+4\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4x}}}.$$

E2 1546. Oldjuk meg a valós számok halmazán.

$$\sqrt{2x+7} = \frac{x^2-7}{2}.$$

V 1547. Oldjuk meg a valós számok halmazán.

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} = 2.$$

V 1548. Oldjuk meg a valós számok halmazán.

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3}.$$

E2 1549. Oldjuk meg a valós számok halmazán.

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt[3]{x}.$$

E2 1550. Oldjuk meg a valós számok halmazán.

$$\sqrt[4]{16+x} + \sqrt[4]{16-x} = 4.$$

V 1551. Melyek azok a valós p paraméterek, melyekre van megoldása az alábbi egyenletnek?

$$x + \sqrt{p + \sqrt{x}} = p.$$

V 1552. Határozzuk meg azokat a valós a, b, c paramétereket, melyekre az egyenletnek végtelen sok megoldása van: $\sqrt{x + a\sqrt{x}} + b = c$.

V 1553. Határozzuk meg azokat a valós a, b, c paramétereket, melyekre az egyenletnek végtelen sok megoldása van: $\sqrt{x + a\sqrt{x}} + b + \sqrt{x} = c$.

V 1554. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$4x^3 - 3x + (1 - 4x^2)\sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Irracionális egyenlőtlenségek

K1 1555. Oldjuk meg grafikusan a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{x} < 4$;

b) $\sqrt{x-1} < 2$;

c) $\sqrt{x-2} \geq x+2$.

K1 1556. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen:

a) $\sqrt{3x+3} \geq x+1$; b) $\sqrt{3x+10} \leq x+4$; c) $\sqrt{3x+7} < x-1$.

E1 1557. Mely valós számok megoldásai az alábbi egyenlőtlenségeknek?

a) $\sqrt{5x+16} > x+2$; b) $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x+1}$; c) $\sqrt{4x-5} \leq \sqrt{3x-7}$.

E1 1558. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket és ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen.

a) $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9} \leq 3$; b) $\sqrt{x^2+2x+1} \leq x+3$;

c) $\sqrt{x^2+10x+25} - x \geq -2$.

E1 1559. Mely egész számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenségeket? Határozzuk meg a legkisebb, illetve a legnagyobb egész megoldást.

$$a) \sqrt{x-5} + \sqrt{x} \leq 5; \quad b) \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3.$$

E1 1560. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget.

$$\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1.$$

E2 1561. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket.

$$a) \sqrt{1 - \frac{x+2}{x^2}} < \frac{2}{3}; \quad b) \frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$$

E2 1562. Milyen x valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$x^2 - 2\sqrt{x^2+1} - 2 \geq 0.$$

E1 1563. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, mely kielégíti az egyenlőtlenséget.

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

E1 1564. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget.

$$\frac{(x^2-x-6)(x^2+4x-5)}{\sqrt{x^2+10x+25}} \geq 0.$$

E2 1565. Milyen valós számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség?

$$(x-17)(x+7) - 14\sqrt{(x-17)(x+7)} + 45 \geq 0.$$

E2 1566. Határozzuk meg mely valós számok elégítik ki az egyenlőtlenséget.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1.$$

V 1567. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket, az ismeretlen az x , a p valós paramétert jelöl.

$$a) x - \sqrt{p-2x} < 0; \quad b) (p+1)\sqrt{2-x} < 1.$$

V 1568. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < b < a < x < a+b$, akkor

$$\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{b} < \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} < \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{b}.$$

V 1569. Igazoljuk, hogy a következő egyenlőtlenség minden n természetes számra igaz.

$$1 - \frac{1}{n+1} < \frac{1 + \sqrt{n^2+1}}{(n+1)\sqrt{n^2+3}} + \frac{2 + \sqrt{n^2+2}}{(n+2)\sqrt{n^2+4}} + \dots + \frac{n + \sqrt{n^2+n}}{2n\sqrt{n^2+n+2}} < 1.$$

Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek

Abszolútértékes egyenletek

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán: (1570–1576. feladat)

K1 1570.

$$\begin{array}{llll} a) |x| - 4 = 6, & |x| - 3 = 9, & |x| - 2 = 12, & |x| + 3 = 14; \\ b) |x| - 3 = 4 - |x|, & |x| + 5 = 7 - |x|, & 7 - |x| = |x| + 11; \\ c) |x - 2| = 6, & |x + 3| = 12, & |x - 5| = 15, 5. \end{array}$$

K2 1571.

$$\begin{array}{lll} a) \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 12, & \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 4, & \sqrt{x^2 + 10x + 25} = 1; \\ b) |2x - 4| = 5, & 12 = |3x - 1|, & |x - 4| + 2 = 10 - |x - 4|. \end{array}$$

E1 1572.

$$\begin{array}{lll} a) |x| + |x - 1| = \frac{1}{2}, & |x - 1| + |x + 1| = 3, & |x + 2| - |x - 2| = 4; \\ b) ||x| - x + 1| = 4, & |\sqrt{x^2 - 8x + 16} + x - 1| = 6, & ||x - 2| + x - 2| = 2. \end{array}$$

K2 1573.

$$\begin{array}{lll} a) |x^2 - 4| = 20, & |x^2 - 20| = 4, & |x^2 - 2x| = 4; \\ b) x^2 - |x| - 6 = 0, & |x^2 - x| = 6, & x^2 - |x - 6| = 0; \\ c) 2x^2 = |x - 1|, & 2x^2 - 5x = 3|x - 2|, & |x^2 - 5x + 4| = 1. \end{array}$$

E1 1574.

$$\begin{array}{ll} a) |x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5, & |x^2 - 25| - |x^2 - 16| = 9; \\ b) \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = 4, & \sqrt{x^4 + 6x^2 + 9} = 6. \end{array}$$

K2 1575.

$$\begin{array}{ll} a) |3x - 1| = 3x - 1, & |2 - 4x| = 4x - 2; \\ b) \left| \frac{2x - 6}{2 + x} \right| = \frac{2x - 6}{2 + x}, & \left| \frac{5x + 3}{4 - x} \right| = \frac{5x + 3}{x - 4}. \end{array}$$

E1 1576.

$$\begin{array}{ll} a) \left| \frac{4}{2 + x} \right| + \left| \frac{2 + x}{4} \right| = 2, & \left| \frac{3 - x}{x - 1} \right| + \left| \frac{x - 1}{3 - x} \right| = \frac{5}{2}; \\ b) x^2 + 4|x| + x + 2 = 0; \\ c) x^2 - 3|x - 2| + 3 = 0; \\ d) x^2 + 3|x + 1| - 1 = 0. \end{array}$$

Abszolútértékes egyenlőtlenségek

Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenségeket?
(1577–1580. feladat)

K1 1577.

$$\begin{aligned} a) |x| \leq 1, & \quad |x+3| \geq 2, & \quad |x-6| < 8, & \quad |x+4,5| > 9; \\ b) |2x-1| \geq 3, & \quad |4x+2| < 8, & \quad |3x-2| \leq 8. \end{aligned}$$

K2 1578.

$$\begin{aligned} a) |x^2-1| \leq 4, & \quad |2x^2+6| \geq 10, & \quad |4x^2-10| < 26; \\ b) \sqrt{x^2-2x+1} \geq 4; \\ c) \sqrt{x^2+6x+9} < 2; \\ d) \sqrt{x^2-10x+25} \leq 0. \end{aligned}$$

K2 E1 1579.

$$a) |2x+6| < x+1; \quad b) |4x-2| \geq x-1; \quad c) |x+3| \leq x-3.$$

E1 1580.

$$\begin{aligned} a) \sqrt{x^4-4x^2+4} \leq 2; & \quad b) \sqrt{x^4-6x^2+9} \geq 2; \\ c) \sqrt{x^4-14x^2+49} \geq 7; & \quad d) |x+2| + |x| \geq 5. \end{aligned}$$

Oldjuk meg grafikusán az alábbi egyenlőtlenségeket:
(1581–1582. feladat)

E1 1581.

$$a) |x+2| + |x-2| > 4; \quad b) |x-3| - |x+3| < x+1; \quad c) ||x-2| + x-4| > 1.$$

E2 1582.

$$a) ||x+2| - x-6| \leq x+4, \quad b) \left| \sqrt{x^2-4x+4} + x-4 \right| \geq x.$$

K2 1583. Oldjuk meg az alábbi abszolútértékes egyenlőtlenségeket:

$$a) |a| \leq 2; \quad b) |b| + 3|b| \geq 3 - |b|; \quad c) |c-3| > 5; \quad d) |d+2| < 8.$$

K2 1584. Oldjuk meg grafikusán az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} a) |x-4| \leq 2x+1; & \quad b) |x+2| < x+1; \\ c) |x-1| \geq x-1; & \quad d) |x+2| \geq 5-2x. \end{aligned}$$

E1 1585. Oldjuk meg algebrai úton az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} a) x + |x| > 6; & \quad b) |x+6| + |x-2| \leq 0; \\ c) |x-1| + |x+2| \geq 4; & \quad d) |x+1| + |x-5| \leq 7; \\ e) |x-3| - |x+1| > 3; & \quad f) |2-x| + |2x+5| < 6. \end{aligned}$$

Határozzuk meg a sík azon $P(x; y)$ pontjait, melyek koordinátáira:
(1586–1589. feladat)

K2 1586.

$$a) |x+y| \leq 1; \quad b) |x|+y \geq 1; \quad c) |x+y| \leq 2; \quad d) |x-y| \geq 2.$$

E1 1587.

$$a) |x|+|y| \leq 1; \quad b) |x|-|y| \leq 1;$$

$$c) |x-1|-|y-1| \leq 4; \quad d) (|x-1|)^2 + (|y-1|)^2 \leq 4.$$

E1 1588.

$$a) |x+y|+|x-y| \leq 2; \quad b) \frac{y-|x|}{y+|x|} \geq 0; \quad c) \frac{x+y}{|x-y|} < 0.$$

E1 1589.

$$a) \frac{|x|-y}{|x+y|} \geq 0; \quad b) \frac{|x^2-4|-y}{x-y} > 0; \quad c) \frac{y-|x^2-2|x|}{y-x^2} \leq 0.$$

Határozzuk meg és ábrázolja a számegetyenesen a következő kifejezések értelmezési tartományát: (1590–1592. feladat)

K1 1590.

$$a) \frac{\sqrt{x-1}}{|2-x|}; \quad b) \frac{\sqrt{2x+6}}{|x|-1}; \quad c) \frac{\sqrt{4x-12}}{|x-4|}.$$

K2 1591.

$$a) \frac{\sqrt{4x-3}}{|2x-6|}; \quad b) \frac{\sqrt{|x|-4}}{|x-5|}; \quad c) \frac{\sqrt{|x+1|-5}}{|x|-9}.$$

K2 1592.

$$a) \frac{\sqrt{x^2-2|x|}}{|x|}; \quad b) \frac{\sqrt{-x^2+4x}}{|x|-3}; \quad c) \frac{\sqrt{-x^2+100x}}{x^2-10|x|+24}.$$

Nehezebb feladatok

E1 1593. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletnek pontosan egy megoldása legyen.

$$|x-2|+x-1=px.$$

E1 1594. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$|2\cos 2x-1|+4\sin^2 x-1=0.$$

IV

E1 1595. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletnek végtelen sok megoldása legyen.

$$||x - 2| + x - 4| = ax + b.$$

E1 1596. Adottak az $ax^2 + bx + c = 0$ és $cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq c$) másodfokú egyenletek. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$|a + c| = |b|,$$

akkor az egyenleteknek van közös gyöke. Igaz-e az állítás megfordítása?

E1 1597. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left| \log_2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right| = \log_2 \frac{x}{4x^2 - 4x + 1}.$$

E2 1598. Mekkora legyen a k paraméter értéke, hogy a következő egyenletnek pontosan 2 megoldása legyen.

$$||x - 6| - 6| = kx + 3.$$

E2 1599. Oldjuk meg az alábbi egyenletet, ha tudjuk, hogy pontosan 2 megoldása van ($p > 0$).

$$|x - p| - |x + p| = ax + 2p - 1.$$

E2 1600. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x + 3| - |x - 3| = x^{\frac{|x|}{x}}.$$

E2 1601. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^{\frac{|x|}{x}} = |x^2 - 2|x||.$$

E2 1602. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán (az egyenlet bal oldalán összesen n db egymásba skatulyázott abszolútérték van).

$$|\dots||x - 1| - 1| \dots - 1| = 1.$$

Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

IV

Exponenciális egyenletek

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán: (1603–1615. feladat)

K1 1603.

- a) $2^x = 16$;
 c) $4^x = 64$;
 e) $3^{2x} = 81$;
 g) $5^{3x-1} = 125$;

- b) $3^x = 27$;
 d) $5^x = 1$;
 f) $2^{x+4} = 64$;
 h) $6^{4x+3} = 36$.

K1 1604.

- a) $49^{5x-3} = 7$;
 c) $9^{|x|-2} = 3$;
 e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} = 125$;

- b) $64^{3(2x-1)} = 2$;
 d) $4^3|x|^{-5} = 64$;
 f) $\left(\frac{1}{9}\right)^{4+2(x-3)} = 81$.

K1 1605.

- a) $5^{x^2+x-6} = 1$;
 c) $10^x = 0,0001$;
 e) $36^x = -6$;

- b) $2^{-3x} = \frac{1}{4}$;
 d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+4} = \frac{25}{4}$;
 f) $4^{2x+5} = 32^{x-4}$.

K2 1606.

- a) $\left(\frac{1}{0,2}\right)^{3x+4} = 125^{x+2}$;
 c) $\left(\frac{1}{0,125}\right)^{1+\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{2-x}$;
 e) $\left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$;

- b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} = 64^{x-3}$;
 d) $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{9}{16}\right)^{x-3}$;
 f) $6^x = 11^x$;

g) $3^{-4x+2} = \frac{1}{9^{6x+7}}$;

h) $\left(\frac{1}{27}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$.

K2 1607.

a) $3^{x^2+2x-35} = 1$;

b) $7^{x^2+9x+14} = 1$;

IV

$$c) \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{2x+1}} = 0,5;$$

$$d) 3^{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{3};$$

$$e) \sqrt{4^{2x+3}} = \frac{1}{2};$$

$$f) \left(\frac{3}{8}\right)^{x^2-1} = 7\frac{1}{9}.$$

K2 1608.

$$a) \left(\frac{9}{4}\right)^{3x+5} = \frac{8}{27};$$

$$b) \left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x} = 125^{3+2x};$$

$$c) \left(\frac{4}{3}\right)^{|x|+x-1} = \frac{16}{9};$$

$$d) 6,25^{-2x+4} = 0,4^{4x+3};$$

$$e) 100 \cdot 2^x = 10^{3x+3} \cdot 5^{-x};$$

$$f) 7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^x - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 342.$$

K2 1609.

$$a) \frac{1}{8} \cdot \sqrt{2^{3x-1}} = 4;$$

$$b) \frac{1}{27} \cdot \sqrt{9^{x+2}} = 81;$$

$$c) 16 \cdot 4\sqrt{2^{2x+3}} = \frac{1}{32};$$

$$d) 25 \cdot 5\sqrt{0,2^{x+5}} = \frac{1}{25};$$

$$e) \left(\frac{1}{49}\right)^{x-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{7^{x+1}}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+1};$$

$$f) \sqrt{2^{2x+3}} \cdot \sqrt[3]{8^{x+2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1}.$$

E1 1610.

$$a) \frac{8}{\sqrt[4]{32^{3x+5}}} = (0,5)^{x+3} \cdot \frac{1}{64};$$

$$b) \left(\frac{1}{125}\right)^{3x+7} = \sqrt[5]{25^{4x+3}};$$

$$c) 9^x \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{27^{4x+3}}} = \left(\frac{1}{243}\right)^{x+2};$$

$$d) 5^{x+1} \cdot 25^{x+2} \cdot 125^{x+3} = 0,2;$$

$$e) \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{4-x} = \frac{27}{8};$$

$$f) \left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^{2x-1} = 1,25^{3x+4}.$$

E1 1611.

$$a) \left(\frac{7}{3}\right)^{|x|-4} \cdot \sqrt{\left(\frac{49}{9}\right)^{2x+2}} = \frac{3}{7};$$

$$b) \frac{1}{16} \cdot \sqrt[6]{8^{5x-3}} = (128)^{x+3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1};$$

$$c) 3^{4x+5} \cdot \frac{\sqrt{27^{x+5}}}{9^{2x-4}} = \left(\frac{1}{81}\right)^{6-x};$$

$$d) \left(\sqrt{x^2+x-5}\right)^{4|x|-3} = 1;$$

$$e) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 11}} \right)^{x^2 - 1} = 1; \quad f) \left(\sqrt{x^2 + 4x - 20} \right)^{x^2 - 2x - 3} = 1.$$

K1 1612.

- a) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 121$;
 b) $3 \cdot 4^{x+2} - 2 \cdot 4^{x+1} + 8 \cdot 4^{x-1} = 5 \cdot 4^x + 148$;
 c) $9 \cdot 3^{x-2} + 6 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+1} + 18$;
 d) $4 \cdot 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x - \frac{1}{10} \cdot 5^{x+2} = 20,5$.

K1 1613.

- a) $5 \cdot 2^{2x+1} - 4^{x+1} + 3 \cdot 4^x = 6 \cdot 4^{x-1} + 15$;
 b) $2^{x-2} + 8^{\frac{x}{3}-1} - 4^{0,5x-2} = 10$;
 c) $3 \cdot 8^{x+1} + 2 \cdot 64^{\frac{x}{2}+1} - 15 \cdot 2^{3x-1} = 144,5$;

E1 1614.

- a) $\left(\frac{9}{4} \right)^x \cdot \left(\frac{8}{27} \right)^{x-1} = \frac{3}{2}$;
 b) $\left(\frac{2}{3} \right)^x \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{x+1} \cdot \left(\frac{81}{16} \right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\sqrt{6-x}}$;
 c) $7^x \cdot (\sqrt[3]{5})^{6x+1} - \frac{(35)^x}{25^{x-1}} = 0$;

E1 1615.

- a) $6^x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4^{x-1}}} \right)^3 - \left(\frac{3}{2} \right)^x = 0$;
 b) $90^x \cdot (\sqrt{3})^{2(x^2-6)} = 30^x$;
 c) $5^x \cdot (\sqrt[3]{3})^{3x^2-12} - \left(\frac{5}{27} \right)^x = 0$.

Másodfokú egyenletre visszavezetve oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán: (1616–1618. feladat)

K2 1616.

- a) $5^{2x} + 25 = 5^{x+2} + 5^x$; b) $49^x + 7 = 8 \cdot 7^x$; c) $4^{x+1} - 2^x = 2^{x+4} - 18$.

E1 1617.

a) $3^{-2x} + 4 \cdot 3^{1-x} + 27 = 0;$

b) $5^{x+2} - 5^{\frac{x}{2}-1} = \sqrt{5^x} + 619;$

c) $4^{\sqrt[3]{x^2-1} + \frac{1}{2}} + 8 = 17 \cdot 4^{\sqrt{x^2-1}};$

d) $2 \cdot 2^{6\sqrt{x+1}} - 15 \cdot 4^{\frac{3\sqrt{x+1}}{2}} = 8.$

E1 1618.

a) $1024^x + 2^{5x+1} = 8;$

b) $\sqrt[3]{10^{2x+3}} - 1 = 9 \cdot 10^{\frac{x}{3}};$

c) $6 \cdot 3^x - 13 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 6 \cdot 2^x = 0.$

Exponenciális egyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a racionális szám párok halmazán:
(1619–1622. feladat)

K1 1619.

a) (1) $2^x - 4 \cdot 3^y = -8,$

(2) $3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 18;$

b) (1) $2 \cdot 5^{x+1} - 2^{y+1} = -6,$

(2) $3 \cdot 5^{x+2} + 2 \cdot 2^{y-1} = 19.$

K2 1620.

a) (1) $8 \cdot 6^{x+2} + 2 \cdot 3^{y-1} = 10,$

(2) $2 \cdot 6^{x+3} - 3^{y+2} = -15;$

c) (1) $2 \cdot 9^{x+1} + 3 \cdot 5^{y-1} = 57,$

(2) $3 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 5^y = 11;$

b) (1) $3 \cdot 4^{x-2} + 2 \cdot 3^{y+1} = 14,$

(2) $5 \cdot 3^{y+2} - 2 \cdot 4^{x-1} = -17;$

d) (1) $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^y} = \frac{25}{8},$

(2) $3^{y+1} = 2^{x-3}.$

K2 1621.

a) (1) $5 \cdot 6^x + 6 \cdot 5^y = 11,$

(2) $\frac{5}{6^x} + \frac{6}{5^y} = 11;$

b) (1) $\frac{2}{5^x} - \frac{3}{4^y} = -\frac{11}{10},$

(2) $2 \cdot 5^x - 3 \cdot 4^y = 4.$

E1 1622.

a) (1) $\sqrt{2^x + 3^y - 6} = 5,$

(2) $9^y - 4^x = 23 \cdot (2^x + 3^y);$

b) (1) $\left(4^x\right)^{\frac{1}{y}} = 32 \cdot \left(8^y\right)^{\frac{1}{x}},$

(2) $\left(3^x\right)^{\frac{1}{y}} = 3 \cdot \left(9^{1-y}\right)^{\frac{1}{y}};$

c) (1) $\left(5^x\right)^{\frac{1-y}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{y-1},$

(2) $\left(49^x\right)^{1+y} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x-5y}.$

Milyen számot (betűt) írjunk az x helyébe, hogy az alábbi egyenlőségláncolatok igazak legyenek? (A hatványalapok mindegyike 1-től különböző pozitív valós szám.) (1623–1625. feladat)

K2 1623.

a) $a^3 = b^4 = (ab)^x$;

b) $p^2 = q^3 = (pq)^{2x}$.

E1 1624.

a) $m^2 = n^3 = k^4 = (mnk)^x$;

b) $r^4 = s^5 = z^{12} = (rsz)^x$.

E2 1625.

a) $\left(\frac{1}{a}\right)^3 = b^4 = c^5 = (abc)^{3x}$;

b) $a^p = b^q = c^r = (abc)^x$.

Exponenciális egyenlőtlenségek

Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenségeket? (1626–1629. feladat)

K1 1626.

a) $3^x > 27$,

$2^x \geq 128$,

$5^x \leq 25$,

$6^x < 36$;

b) $4^x \leq \frac{1}{4}$,

$7^x > \frac{1}{49}$,

$8^x > \frac{1}{64}$,

$9^x \geq \frac{1}{81}$.

K2 1627.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{2}$,

$\left(\frac{1}{4}\right)^x < \frac{1}{16}$,

$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{4}{9}$,

$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{25}{9}$;

b) $4^x > 32$,

$16^x \leq \frac{1}{2}$,

$\left(\frac{1}{16}\right)^x \geq \frac{1}{2}$,

$27^x \leq \frac{1}{81}$;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} > \frac{1}{9}$,

$5^{3x-4} < \left(\frac{1}{25}\right)$,

$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x+12} \leq \frac{1}{8}$,

$\left(\frac{3}{7}\right)^{4-3x} \geq \frac{49}{9}$.

K2 1628.

a) $15^{2|x|-1} > 225$,

$36^{4-|x|} < 6$,

$\left(\frac{1}{25}\right)^{|2x-1|-1} \leq 125$,

$0,2^{|x|-1} \geq \frac{1}{25}$;

b) $4^x \leq 1$,

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 1$,

$\left(\frac{3}{8}\right)^{2x+4} < 1$,

$\left(\frac{7}{6}\right)^{5x-1} > \left(\frac{6}{7}\right)^0$,

E1 1629.

$$a) (x-4)^{x^2+x-6} > 1 \quad (x > 4), \quad (3x+6)^{4x-6} \leq 1 \quad (x > -2),$$

$$\left(\sqrt{x-15}\right)^{x+3} < 1 \quad (x \geq 15);$$

$$b) 2^x + 2^{1-x} < 3, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+18} < \left(\frac{1}{8}\right), \quad 3^{2x} - 7 \cdot 3^x < 18.$$

Pihenő

1630. ábra

	1	2
3		
4		

K2 1630. Melyik szám nagyobb: az alábbi keresztrejtvényben szereplő számjegyek összege vagy szorzata?

Vízs.: 1. A $3^x + 27 \cdot 3^{-x} = 12$ egyenlet gyökei csökkenő sorrendben.

4. A függ. 2. „fordítottja”.

Függ.: 2. Négyzetszám.

3. Az $1 + 5^{1-2x} = \frac{6}{5^x}$ egyenlet gyökei növekvő sorrendben.

1631. ábra

	1	2	3
		4	
5	6		
7			

E1 1631. Határozza meg az alábbi keresztrejtvény négyzeteiben szereplő prímszámok számát!

Vízs.: 1. A $2^{x-2} > 1$ egyenlőtlenség megoldáshalmazában szereplő három legkisebb prímszám növekvő sorrendben.

4. Meghatározása azonos a függ. 2. meghatározásával.

5. Prímszám.

7. 2^5 és 2^4 .

Függ.: 2. Olyan kétjegyű prímszám, melynek minden számjegye prímszám.

3. Ötödik hatvány.

5. Az $\frac{5^x + 5^{4-x}}{130} = 1$ egyenlet gyökei növekvő sorrendben.

6. Szomszédos egészek (prímszámok) csökkenő sorrendben.

Logaritmikusan egyenletek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán (1632–1638. feladat).

K1 1632.

$$a) \log_2 x = 1, \quad \log_3 x = -1, \quad \log_{\frac{1}{2}} x = 3, \quad \log_3 x = -1;$$

$$b) \log_5(x+1) = 0, \quad \log_7(4-x) = 2, \quad \log_{\frac{1}{8}}(4-x) = -\frac{1}{3}.$$

K2 1633.

$$\begin{aligned}
 a) \log_9(5-3x) &= -\frac{1}{2}, & \log_{125}(2x+5) &= \frac{1}{3}, & \log_7(x^2-15) &= 2; \\
 b) \log_{36}(36+x) &= 1, & \lg(10x-2) &= 2, & \log_4(|x|-1) &= 1.
 \end{aligned}$$

K1 1634.

$$\begin{aligned}
 a) \log_2(3x-4) &= 1; & b) \log_4(x-2) &= 2; \\
 c) \log_{x-2}(5-x) &= 1; & d) \log_{x+3}(2x+8) &= 1.
 \end{aligned}$$

K2 1635.

$$\begin{aligned}
 a) \log_{|x|+2}(4x+3) &= 1; & b) \log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-34) &= 0; \\
 c) \log_3(x^2-6x+8) &= 1; & d) \log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+8) &= -1.
 \end{aligned}$$

K2 1636.

$$\begin{aligned}
 a) \log_x(x^3+x^2-9x+14) &= 3; & b) \log_{x+1}(x^3+3x^2+4x+2) &= 3.
 \end{aligned}$$

K1 1637.

$$\begin{aligned}
 a) \frac{\lg(2x+1)}{\lg(x-1)} &= 2; & b) \frac{\log_2(2x+5)}{\log_2(x+4)} &= 1.
 \end{aligned}$$

K1 1638.

$$\begin{aligned}
 a) \frac{\log_6(3x+1)}{\log_6(2x+3)} &= 1; & b) \frac{\log_{\frac{1}{2}}(x+4)}{\log_{\frac{1}{2}}(5-2x)} &= 1.
 \end{aligned}$$

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán (1639–1643. feladat).

K1 1639.

$$\begin{aligned}
 a) \log_2(\log_3 x) &= 1, & \log_4(\log_2(x-3)) &= 0.
 \end{aligned}$$

K2 1640.

$$\begin{aligned}
 a) \log_6(1-\log_2 x) &= 1, & \log_{\frac{1}{16}}[5+3(2-\log_8 x)] &= -\frac{1}{2}; \\
 b) \log_5[\log_3(\log_2(x+2))] &= 0, & \log_3[1+\log_2(x-4)] &= 1.
 \end{aligned}$$

K2 1641.

$$\begin{aligned}
 a) \log_3[1+\log_2(1+3\log_3 x)] &= 1; \\
 b) \log_5[6-\log_3(1+\log_2 x)] &= 1; \\
 c) \log_8[4-2\log_6(5-x)] &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

K2 1642.

$$\begin{aligned}
 a) \log_{25} \left[\frac{1}{5} \log_3 \left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x \right) \right] &= -\frac{1}{2}; \\
 b) \log_{49} \{ 5 + 2 \log_3 [4 - \log_2 (x-6)] \} &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

E1 1643.

$$a) \log_{64} \{11 + 5 \log_3 [5 - \log_5 (x + 11)]\} = \frac{2}{3};$$

$$b) \log_2 \{1 + \log_3 [1 + \log_4 [1 + \log_5 (1 + \log_6 x)]]\} = 0.$$

Pihenő

1644. ábra

	1	
2		
3		

1645. ábra

	1	
2		
3		

E1 1644. Oldjuk meg a $\log_7 x + \log_{28} k = 2$ egyenletet, ahol k az alábbi keresztretjvény négyzeteiben szereplő számjegyek összege!

Vízsz. 2. Az $\log_2 (x^3 + x^2 - 12x + 35) = 3$ egyenlet megoldásai növekvő sorrendben.

3. Egyenlő x -szel, ha $\log_n x = n$ ($n > 1$ egész szám).

Függ. 1. 3-mal osztható háromjegyű szám, melynek minden jegye prímszám.

2. A $\log_3 (x^2 - 56x + 111) = 1$ egyenlet gyökei különbségének abszolútértéke.

E1 1645. Oldjuk meg az

$\log_n x + \log_n 2 + \log_n 4 = 1$ egyenletet, ahol n az alábbi keresztretjvényben szereplő számok összege!

Vízsz. 1. Egyenlő x -szel, ha $\log_k x = k$ ($k > 1$ egész szám).

2. Egyik számjegye a másiknak négyszerese.

3. Számjegyeinek összege 10.

Függ. 1. $(\log_2 32)! + 8^{\log_2 5}$

2. Különböző számjegyekből álló kétjegyű prímszám.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán (1646–1662. feladat).

K1 1646.

$$a) 2 \log_2 x = \log_2 x + 2,$$

$$\log_3 x + \log_3 2 = 3;$$

$$b) \frac{1}{2} \lg x = 2 \lg 3,$$

$$\lg x = 1 - \lg 2;$$

$$c) \log_3 x = 2 - \log_3 5,$$

$$\lg 2x = 2 + \lg 2.$$

K1 1647.

$$a) \lg 4x = \lg 20 - \lg 2,$$

$$\log_4 2 + \log_4 x = \log_4 (x + 3);$$

$$b) \lg (x - 9) + \lg (2x - 1) = 2,$$

$$\lg (x - 4) + \lg (x + 3) = \lg (5x + 4).$$

K2 1648.

$$a) 2 \log_3 (x - 2) + \log_3 (x^2 - 8x + 16) = 0;$$

$$b) \frac{\lg (2x + 5) - \lg x}{2 + \lg 100} = \frac{1}{4}.$$

K1 1649. $\lg(x-13) - \lg(x-3) + \lg 2 = 1.$

K2 1650.

a) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_5 8 + \log_5(x-2);$

b) $\lg 10 + \frac{1}{3} \lg(271 + 3\sqrt{2x}) = 2;$

c) $2 \cdot \lg \frac{1}{5} + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5).$

K2 1651.

a) $4 - 3\sqrt{\lg x} = \lg x;$

b) $\lg \sqrt{3x-5} + \frac{1}{2} \lg(7x-3) = 1 + \frac{1}{2} \lg 0,11.$

K1 1652.

a) $\frac{1}{2} \lg(x^2 - 3x) - \lg \sqrt{3-x} = 0.$

K2 1653.

a) $2 \log_2 \left(\frac{x-7}{x-1} \right) + \log_2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = 1;$ b) $\frac{\log_3 x}{\log_3 x - \log_3 2} = 3.$

K1 1654. $\lg \sqrt{5x+8} + \frac{1}{2} \lg(2x+3) = \frac{1}{2} \lg 126.$

E1 1655.

a) $\lg^2 3 - \lg^2 2 = (1 - \lg x) \cdot \lg \frac{3}{2};$

b) $\lg^2 16x - \lg^2 4x = \lg(10x^2 + 15x + 186)^{\lg 4};$

c) $\lg^2 x + \lg x^2 = -1.$

E1 1656.

a) $\lg \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \lg^2 x;$

b) $(\log_2 2x)^2 = \log_2 \frac{x^2}{2} + 3.$

K2 1657. $\log_5(9^{\sqrt{x+3}} - 118) - 3 = 0.$

E1 1658.

a) $\lg^2 x^2 + 3 \lg x^2 = 40;$

b) $x(1 - \lg 5) = \lg(2^x + x - 1);$

c) $9^{\frac{1}{2} + \log_2 x} + 1 = 28 \cdot 3^{\log_2 x - 1};$

d) $4^{\log_3 x + 1} + 8 = 33 \cdot 2^{\log_3 x}.$

E1 1659.

a) $x(1 - \log_{21} 3) = \log_{21} 30 - \log_{21}(7^x + 1);$

b) $2 \log_8(2x) + \log_8(x^2 - 2x + 1) = \frac{4}{3};$

c) $\log_{|x|}(2|x| - 6x + 3) = 1.$

E1 1660.

a) $\log_4 (12 \cdot 2^x + 1) = -\frac{x}{2};$

b) $\log_{4-x} (x^2 + 16) + \log_{4-x} (2x + 1) = \log_{4-x} 2x + \log_{4-x} (x^2 + 21).$

E2 1661.

a) $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + \frac{16}{\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 4} = 6;$

b) $\frac{\sqrt{\log_x 5x}}{\log_x 5} = \sqrt{2}.$

E2 1662.

a) $\frac{\sqrt{\log_x 3x^5}}{\log_x 9} = \sqrt{\frac{3}{2}};$

b) $\left[64^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\log_{27} 8} \right]^{\frac{2}{3}} + \log_2 x^3 = 16;$

c) $\log_2 \sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_2 \log_2 x} = 1 + \sqrt{2}.$

Pihenő

1663. ábra

1		
		2
3		

E2 1663. Oldjuk meg az $\log_n (x^2 + x - 2n) = 1$ egyenletet, ahol n az alábbi keresztrejtvény mezőiben szereplő számjegyek összege.

Vízs. 1. A $\log_2 x + \log_2 (x^2 - 1) = \log_2 (x^2 + x) + \log_2 (x - 1)$ egyenlet legnagyobb kétjegyű megoldása.

3. Az $\log_x (3 - \log_2 \frac{1}{4}) = \frac{1}{3}$ egyenlet megoldása.

Függ. 1. A középső számjegy a két szélsőnek a mértani közepe.

2. A keresztrejtvényben szereplő számjegyek összegéből 6-t levonva $n!$ -t kapunk.

1664. ábra

	1	2	3
4		5	
6	7		
8			

E2 1664. Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt.

Vízs. 1. A legnagyobb háromjegyű négyzetszám.

5. Az $\lg (-x^2 + 9x - 14)$ kifejezés értelmezési tartományában szereplő prímek szorzata.

6. A függ. 4. jegyeinek összege „visszafelé”.

8. Egy mértani sorozat tagjai növekvő sorrendben.

Függ. 2. Prímszám.

3. Az $\lg x - 1 = \lg 9 - \lg \left(11 - \frac{x}{3}\right)$ egyenlet gyökei növekvő sorrendben.

4. Négyzetszám, mely jegyeinek összege szintén négyzetszám.

7. $5^{\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_{25} 9}$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán (1665–1672. feladat).

E1 1665.

a) $\log_2 x + \log_4 x = 6, \quad \log_3 x + \log_{27} x = 4, \quad \log_4 x + \log_{\frac{1}{4}} x = 0;$

b) $\log_5 x + \log_{25} x + \log_{125} x = \frac{11}{6}, \quad \log_3 (x+1) + \log_9 (x+1) = 1;$

c) $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 8, \quad 3 \log_5 x + \log_{25} x = 7.$

E1 1666.

a) $\log_2 x - 3 \log_8 x = 2 \log_4 x + 1; \quad b) \log_7 x + 3 = \log_{49} x + 2 \log_{\frac{1}{7}} x;$

c) $(\log_3 x)(\log_9 3x) = 2 \log_9 3.$

E1 1667.

a) $(\log_a x)(\log_{a^2} x)(\log_{a^3} x) = \frac{4}{3} \quad (a > 0, \quad (a \neq 1));$

b) $\log_x 8 - \log_{2x} 16 = \log_{4x} 8;$

c) $\log_{19} (x+20) \cdot \log_x \sqrt{19} = 1.$

E1 1668.

a) $\sqrt{\log_x 6x} \cdot \log_6 x = \sqrt{2};$

b) $6 \log_x 5 + 3 \log_{25x} 5 + \frac{\log_{5x} x}{\log_5 x} = 0;$

c) $\frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{1}{1 + \log_x 2} = 3 + \log_5 x + \log_x 5.$

E2 1669.

a) $\log_2 (\log_4 x) = \log_4 (\log_2 x);$

b) $\log_a (\log_{a^2} x) = \log_{a^2} (\log_a x), \quad (a > 0, \quad (a \neq 1));$

c) $\log_x^2 a + \log_{\frac{1}{a}}^2 \frac{1}{x} + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{a} + \log_{\sqrt{a}} x + \frac{3}{4} = 0, \quad (a > 0, \quad (a \neq 1)).$

E2 1670.

a) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 x = 3;$

b) $3 \cdot \log_8 (x-1) + 2 \cdot \log_4 (x+3) - 5^{x-3} \cdot \log_2 (x^2 + 2x - 3) = 0;$

c) $\sqrt{\log_2 x \cdot (\log_x 2 + \log_2 x - 2)} + \sqrt{\log_2 x \cdot (\log_x 2 + \log_2 x + 2)} = 2.$

E2 1671.

$$a) \sqrt{9 \cdot \left(\log_3^2 x - \frac{2}{\log_x 27} \right)} + 1 = \log_3 x^2;$$

$$b) \log_{|x-4|} (x+6) \cdot \log_{|x|} \sqrt{|x-4|} = 1;$$

$$c) \log_{x-3} (x+90) \cdot \log_x \sqrt[3]{x-3} = \frac{2}{3}.$$

E2 1672.

$$a) \log_{\frac{1}{2^x}} 4 + \log_4 2^x = x + \frac{5}{2},$$

$$b) \sqrt{\log_x a^2 x} \cdot \log_{a^2} x + \sqrt{6} = 0, \quad (a \neq 0, \quad a \neq 1).$$

Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenleteket (1673–1675. feladat).

E2 1673.

$$a) \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} \right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} \right)^x = \sqrt{32};$$

$$b) \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^x = 4.$$

E2 1674.

$$a) x \cdot \log_{100} 3 + \lg(2^x + 3^{\frac{x}{2}}) + \log_{0,1} 21 = \frac{x-2}{\log_2 \sqrt{2} + \log_4 5};$$

$$b) x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \lg x} = \sqrt{x}.$$

$$\mathbf{E2 \quad 1675.} \quad 3^{y+1} + 3^{2x+1} = 1 + 3^{x+2} + \sqrt{6 \cdot 3^y - 3^{2(y+1)}} - 1.$$

Logaritmikus egyenlőtlenségek

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán (1676–1686. feladat).

K1 1676.

$$a) \log_2 x < 1, \quad \log_3 x > \frac{1}{2}, \quad \log_5 x \leq -1;$$

$$b) \log_4 (x-2) < 0, \quad \log_6 (x+3) > 0, \quad \log_3 (2x-4) \geq 0.$$

K2 1677.

$$a) \log_{\frac{1}{2}} (5-x) > 1, \quad \log_{\frac{1}{3}} (4x-2) < -2, \quad \log_{0,2} (6x-4) \leq -1;$$

$$b) \log_4 (x^2 - 16) < 0, \quad \log_3 (2x^2 - 5) > 0, \quad \log_5 (x^2 - x) \leq 0.$$

K2 1678.

$$a) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 6) > 1, \quad \log_{\frac{1}{5}}(x^2 + x - 30) < 0, \quad \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - |x|) \geq -1;$$

$$b) \log_x(2x - 1) > 1, \quad \log_{x-1}(x - 3) < 1, \quad \log_{2x-1}(4x + 2) \leq 0.$$

E1 1679.

$$a) \log_{|x|}(2|x| - 1) < 1, \quad \log_{4-x}(x^2 - 10x) > 0, \quad \log_{x+3}(6 - x) \leq 1;$$

$$b) \log_2(x - 3) < \log_{\frac{1}{2}}(2x + 4), \quad \log_4(6x + 2) > \frac{1}{2} \log_2(x - 5).$$

E1 1680.

$$a) \log_3 x \geq \log_x 3, \quad \log_{x^2+1}(x^2 + 7x - 18) > 1;$$

$$b) \log_{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{3x-1} < 0, \quad \log_3 \frac{3x-1}{x+2} < 1.$$

E1 1681.

$$a) \log_8 \frac{x^2 - 3x}{x - 2} \geq \frac{1}{3}, \quad \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2 - 8x}{x + 2} \leq -\frac{1}{2};$$

$$b) \log_2(x + 1) + \log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2) > -1; \quad c) |\log_2(x - 4)| < 1.$$

E1 1682.

$$a) \left| \log_{\frac{1}{3}}(x + 2) \right| \geq 2; \quad b) \lg(x + 8) \geq \lg(x^2 - 3x - 4).$$

E1 1683.

$$a) \log_{\pi}(x + 27) - \log_{\pi} x \leq \log_{\pi}(16 - 2x);$$

$$b) \log_{1+|x|}(6|x| - 3) - 1 \leq 0.$$

E2 1684.

$$a) \log_2 \log_4 x \leq \log_4 \log_2 x;$$

$$b) \log_{\frac{1}{x^2}}(x^2 - 2x - 8) \geq 0.$$

E2 1685.

$$a) \sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1;$$

$$b) \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)-3} \geq 1.$$

$$\text{E2 1686. } x - \sqrt{x} \cdot \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \geq \sqrt{x} - x \cdot \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x.$$

Exponenciális és logaritmikus egyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán (1687–1695. feladat).

K1 1687.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & 3^x + 2 \cdot 2^y = 11, \\ (2) \quad & 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (1) \quad & 2^x + 5 \cdot 7^y = 7, \\ (2) \quad & 2^x - 3 \cdot 7^y = -1. \end{aligned}$$

K2 1688.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & 3^{x+1} - 2^y = 5, \\ (2) \quad & 5 \cdot 3^x + 2^{y+1} = 23; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (1) \quad & \lg x + 5 \cdot \lg y = 7, \\ (2) \quad & 3 \cdot \lg x - 2 \cdot \lg y = 4. \end{aligned}$$

K2 1689.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & \lg x - 2 \cdot \lg y = 3, \\ (2) \quad & 5 \cdot \lg x + \lg y = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (1) \quad & \log_3(2x + y) + \log_3(2x - y) = 1, \\ (2) \quad & \log_2(2x + y) + \log_2(2x - y) = 1. \end{aligned}$$

K2 1690.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & \log_2 \log_3(x + y) = 1, \\ (2) \quad & \lg x + \lg y = 3 \cdot \lg 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (1) \quad & \lg(x - y) - \lg 4 = 1 - \lg(x + y), \\ (2) \quad & \lg x - \lg 3 = \lg 7 - \lg y. \end{aligned}$$

K2 1691.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & \lg(x + y) - \lg(x - y) = 2 \lg 2 + \lg 3, \\ (2) \quad & \lg(x^2 + y^2 + 10) = 2 + \lg 3; \\ b) \quad (1) \quad & 2^x - 4 \cdot 8^y = 0, \\ (2) \quad & \log_5 x + \log_5 y = 1. \end{aligned}$$

K2 1692.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & 3^x \cdot 2^y = 576, \\ (2) \quad & \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (1) \quad & \lg \sqrt{x} + \lg \sqrt{y} = \lg(4 + \sqrt{x}), \\ (2) \quad & \sqrt{(25\sqrt{x})^{\sqrt{y}}} = 125 \cdot 5\sqrt{y}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad (1) \quad & \log_8 x + \log_4 y^2 = 5, \\ (2) \quad & \log_8 y + \log_4 x^2 = 7. \end{aligned}$$

E1 1693.

$$\begin{aligned} a) \quad (1) \quad & \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} = -\frac{1}{2}, \\ (2) \quad & \log_2(2x) + \log_2(2y)^2 = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (1) \quad & 4^{\log_2(x+y) - \log_2(x-y)} = \frac{49}{16}, \\ (2) \quad & \sqrt{3^{x-3y}} = \sqrt[3]{27}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad (1) \quad & x^2 + 5^{\log_{25}(x^2 - y + 3)} = y + 9, \\ (2) \quad & \log_2(x + 6y) - \log_2(x + y + 2) = 2. \end{aligned}$$

E2 1694.

$$a) (1) \frac{\sqrt{2}}{\log_7 y} = \sqrt{\log_x 7y^3},$$

$$(2) xy + y^2 = 2x^2;$$

$$b) (1) \log_2 \frac{x}{y} - \log_2 \frac{y}{x} = \log_2 \log_2 \left(64^{\frac{2}{3}} \right),$$

$$(2) 25^{\sqrt{2x^2 + 3y - 1}} = 0,2^{-\frac{2x}{y}};$$

$$c) (1) \log_2^2 x^2 - \sqrt{\log_2^2 x - \log_3 y + 8} = \log_3 y^4 + 28,$$

$$(2) 3^{\log_2 x} = y^3.$$

E2 1695.

$$a) (1) \log_3 \frac{x^{100}}{y} - \log_3 \frac{y^{100}}{x} = 101,$$

$$(2) x^{\log_{3y} x} + y^{\log_{\frac{x}{3}} y} = 2004;$$

$$b) (1) x + 3^{\log_{27} 8} = 4^{\log_2 (x+y)} - y,$$

$$(2) (2^{x+y})^{\frac{1}{x}} = (0,25)^{\frac{1}{3y}}.$$

Pihenő

E1 1696. Oldjuk meg a $\log_n (2x - 6) = \frac{1}{5}$ egyenletet, ahol n az alábbi keresztrejtvény négyzeteiben szereplő számjegyek összege.

Vízs.: 1. $16^{\log_{\sqrt{5}} 2} + 3^{\log_{625} 25}$.

3. A függőleges 1. fele.

Függ.: 1. Az egyik szám a másiknak a köbe.

2. A $2^{2 \log_3 (x-2)} = 18 \cdot \sqrt{4^{\log_2 (x-2)}} - 32$ egyenlet gyökei csökkenő sorrendben.

1696. ábra

1		2
	3	

E1 1697. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, mellyel az alábbi keresztrejtvény mezőiben levő számjegyek szorzatát meg kell szoroznunk, hogy négyzetszámot kapjunk?

Vízs.: 3. A $(125^{\log_5 2})! : (7^{\log_{49} 25})!$ kétszerese.

5. Osztható 3-mal.

Függ.: 1. A $\log_{2n} x = n$ egyenlet megoldása (n pozitív egész szám).

2. Az $\lg(-x^2 + 17x - 52)$ kifejezés értelmezési tartományában levő legnagyobb és legkisebb egész szám.

4. Prímszám.

1697. ábra

1		2
3	4	
	5	

E1 1698. Mivel egyenlő $n^{\log_{125} 8}$, ahol n az alábbi keresztrejtvény mezőiben szereplő számjegyek összege?

1698. ábra

	1	2	3
4		5	
6			

Vízs.: 1. A $2 \cdot \log_9 [13 - 2 \log_3 (2x - 1)] = 1$ egyenlet megoldása.

5. $243^{\log_3 2}$

6. Olyan négyzetszám, mely visszafelé olvasva is négyzetszám.

Függ.: 2. A $\lg(-2x^2 + 65x - 32)$ kifejezés értelmezési tartományában levő legkisebb és legnagyobb prímszám.

3. Ennyibe kerül 2 db kifli.

4. Négyzetszám is, köbszám is.

E1 1699. Mit kapunk eredményül, ha az alábbi keresztretjvény mezőiben szereplő számjegyek összegének 18-szorosából levonjuk ezen összeg prímtenyezős felbontásában szereplő különböző prímekek összegének kétszeresét?

1699. ábra

		1	2	3	4
5		6			
7	8		9		
10					
			11	12	
13					

Vízs.: 1. Az $\log_n x = n$ egyenlet megoldása, ahol $n > 0$ egész szám.

6. A függ. 12. négyzete.

7. A függ. 8. „fordítottja”.

9. A $\log_3(-4x^2 + 48x - 135)$ kifejezés értelmezési tartományában levő egész számok növekvő sorrendben.

10. Palindronszám.

(Azaz olyan szám, melynek számjegyei szimmetrikusan helyezkednek el.)

11. Az első számjegye a másik kettő számtani közepe.

13. Olyan hárommal osztható szám, melynek a második és harmadik számjegye egy kétjegyű köbszám.

Függ.: 1. Azonos számjegyek.

2. Jegyeinek szorzata: $6!$.

$$3. \left(27^{\log_{\sqrt{3}} 2} \right) \cdot \left(\sqrt{5}^{-\log_{25} \sqrt{2}} \right) - 30 \cdot \log_{\sqrt{2}} - 1 \left(\sqrt{2} + 1 \right).$$

4. Két prím és azok számtani közepe.

5. Szomszédos egész számok csökkenő sorrendben.

8. Az $\log_{\frac{1}{3}} \left\{ 5 - \log_{\sqrt{2}} \left[2 + \lg(x^2 - 8x + 16) \right] \right\} = -1$ egyenlet megoldá-

sai növekvő sorrendben.

12. Olyan prímszám, mely számjegyeinek összege 2-vel kisebb, mint a függ. 3. számjegyeinek összege.

Nehezebb feladatok a témakörből

E1 1700. Legyen p egytől különböző pozitív valós szám. Mekkora legyen x értéke, hogy az alábbi három mennyiség ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymást követő elemei legyenek?

$$\log_p x, \log_{p^2} x, \log_p (\log_{p^2} x).$$

E1 1701. Mivel egyenlő $\log_{2004} x$, ha

$$\log_3 x = a, \log_4 x = b, \log_{167} x = c?$$

E1 1702. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenlőtlenség minden valós x -re teljesüljön.

$$\log_{a-1} (x^2 + 3) \geq 1.$$

E1 1703. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_{\cos x} \sin x + 4 \cdot \log_{\sin x} \cos x = 4.$$

E1 1704. Egy téglatest a, b, c pozitív egész éleire fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\frac{1}{2 \log_a 13} + \log_{169} b + \log_{13} \sqrt{c} = 1.$$

Hányszorosa a téglatest felszínének a mérőszáma a térfogat mérőszámának?

E1 1705. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\log_{\sin x} (25^{\log_5 \sqrt{2}} + 2 \cdot \log_2 \sin x) \leq 0.$$

E1 1706. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\log_{\sin x + \frac{1}{\sin x}} \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) < 1.$$

E2 1707. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_2^2 x - 20 \cdot \log_4 x + 29 = \frac{11}{\log_4^2 x - 5 \cdot \log_4 x + 9}.$$

E2 1708. Határozzuk meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:

$$\frac{\sqrt{-\log_3^2 (x^2 - 1) + 3 \cdot \log_3 (x^2 - 1) + 4}}{\sqrt{-x^2 + 2x + 15}}.$$

E2 1709. Legyen A az $a)$ kifejezés, B pedig a $b)$ kifejezés értelmezési tartománya. Határozzuk meg a $B \setminus A$ halmaz elemeit.

$$a) \sqrt{4 \log_2^2 x - 37 \log_2 x + 9}, \quad b) \sqrt{4 \log_2^4 x - 37 \log_2^2 x + 9}.$$

IV

E2 1710. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséggláncolatot a valós számok halmazán:

$$\log_3 x \leq \sqrt{9 \cdot \left(\log_3^2 x - \frac{2}{\log_x 27} \right)} + 1 \leq \log_3 x^2.$$

E2 1711. Legyen az A halmaz az $a)$ kifejezés értékkészlete, a B halmaz a $b)$ kifejezés értelmezési tartománya. Határozzuk meg az $A-B$ halmaz elemeit.

$$a) 5^{\log_{\sqrt{6}} \log_3 (-x^2 + 6x + 55)}, \quad b) \frac{1}{\lg \left[2 \sin \left(\frac{\pi x}{10} \right) - 1 \right]}.$$

E2 1712. Legyenek x, y, z 1-nél nagyobb valós számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\log_x xyz^9 + \log_y yxz^9 + \log_z zxy^9 > 21.$$

E2 1713. Legyen $a > 1$ valós szám. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{\frac{1}{a^x}} a^2 + \log_{a^2} a^x > x + \frac{a^2 + 1}{a}.$$

E2 1714. Bizonyítsuk be – segédeszközök használata nélkül –, hogy

$$12 < \log_2^2 7 + 36 \log_2^2 2 < 13.$$

E2 1715. Legyen a 1-től különböző pozitív valós szám. A

$$(\log_3 a)x + \left(\log_3 \frac{1}{a^2} \right)y = 9$$

egyenletű egyenes és a koordinátatengelyek alkotta háromszög területe $\frac{81}{16}$.

Mekkora e háromszög kerülete?

E2 1716. Mely x, y valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőséget:

$$\log_{\sqrt[4]{2}} \frac{2 \sin^2 x (1 + \operatorname{ctg} x)}{\sin 2x} = -y^2 + 6y - 5.$$

E2 1717. Mely x, y, z ($x, y > 1$) elégítik ki az alábbi egyenletrendszert:

$$\log_x x^2 y^3 + \log_y y^2 x^3 = \log_{\sqrt[3]{2}} (-z^2 + 8z - 12), \quad xyz + xy = 2005.$$

E2 1718. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_3 -2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} \right) + \frac{1}{\log_{3+2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 6x + 9}} = \frac{5}{2}.$$

E2 1719. Legyenek n és k pozitív egészek. Mely x, y, z ($x, y > 1$) elégítik ki az alábbi egyenletrendszer:

$$\log_x x^n y^k + \log_y y^n x^k = 4 \cdot \sqrt{nk},$$

$$x^{\log_y z} + y^{\log_x z} + (1 - \sqrt{z})^2 = 2005.$$

Vegyes és gyakorlati feladatok

K2 1720. Az első 9 páratlan számot elrejtettük az alábbi négyzetekbe úgy, hogy az egyes sorokban, ill. oszlopokban levő számok szorzata a kérdéses sor, illetve oszlop melletti szám legyen. Töltésük ki az ábrát! Milyen szám kerül az X helyébe:

1720. ábra

			495
			85
			819
X	195	385	

K2 1721. A négyzetrács négyzeteibe beírtuk az első 9 db prímszámot úgy, hogy az egyes sorokban, ill. oszlopokban levő prímek összege a kérdéses sor, illetve oszlop melletti szám legyen. Töltésük ki a táblázatot.

1721. ábra

			20
			25
			55
33	25	42	

E1 1722. Az A és B számok reciprokának összege: Mátyás trónra lépésének éve. A és C számok reciprokának összege: a második legkisebb négyjegyű négyzetszám. A és D számok reciprokának összege: Bethlen Gábor halálának éve. A és D számok reciprokának összege: a kiskutyám születésének éve. Hány éves a kutya 2004-ben?

E1 1723. Az x és y számok mértani közepe: I. András trónra lépésének éve. Az y és z számok mértani közepe: a Karácsony György féle török ellenes felkelés kibontakozásának éve. z és q számok mértani közepe: I. István fejedelemsége kezdetének 2000. évfordulója. Az x és a q számok mértani közepe a kiscicám születésének éve. Hány éves a cicu 2004-ben?

E1 1724. Az a és b számok reciprokának számtani közepe: a mohácsi vész éve. b és c számok reciprokának számtani közepe: az ankarai csata éve. c és d számok reciprokának számtani közepe: a kiegyezés éve. Az a és d számok reciprokának számtani közepe: az unokám születésének éve. Mikor lesz nagykorú az unokám?

E2 1725. Az alábbi állítások közül melyik lehet igaz:

Egy természetes számhoz 1-et hozzáadtunk, így az eredeti szám számjegyeinek összege

- a) 2002-vel csökkent; b) 2003-mal csökkent;
c) 2004-gyel csökkent; d) 2005-tel csökkent;
e) 2006-tal csökkent.

K2 1726. Ciang-ciang ókori kínai várost négyzet alakú kőfallal vették körül, melynek oldalai az egyes égtájak felé néztek és oldalai felénél egy-egy kaput építettek. Az északi kaputól északra 4 km-re volt egy világítótorony. Ha a déli kaputól délre haladunk 4 km-t, majd nyugatra fordulunk és haladunk 10,5 km-t, akkor éppen meglátjuk e világítótornyot. Hány lakosa volt a városnak, amikor népsűrűsége 860 fő/km^2 .

E1 1727. Abdul Al-Mahin beduin törzsfőnök halottas ágyánál áll három fia és felesége, akinek végakarátát diktálja: „Vagyonom, 10 db államkötvény a Budapest Banknál, egyenként 100, 200, 300,... 1000 dollár értékben. Úgy tudom, várandós vagy. Nos, kötvényeim közül egy legyen a tied, de olyat válassz, hogy akár születik még egy gyermekem, akár nem, a többi kilenc kötvényt igazságosan el lehessen osztani a gyermekeim között.” Melyik kötvény jut az asszonynak?

E1 1728. Luck Skywalker kiadta a parancsot: minden, a lázadók birtokában levő bolygóról, minden ugyanilyen bolygóra induljon egy időben egy-egy gyorsfutár egy titkos üzenettel. A parancsot azonban nem tudják végrehajtani, mert a lázadók űrflottájának 160 űrhajójából 10 elromlott. Ha e 10 közül néhányat megjavítanak, akkor már végrehajtható a parancs. Hány bolygó van a lázadók birtokában?

E1 1729. András 7, Béla 9, Cili 15, Dóra 24, Edit pedig 13 könyvet készült elvinni az árvaház kis lakóinak. Sajnos egyikük nem tudott elmenni, de a többiek könyveit sikerült igazságosan szétosztani az árva gyerekek között. Hány lakója van az árvaháznak, ha számuk nagyobb, mint 10, de kisebb, mint 20?

1730. ábra

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.

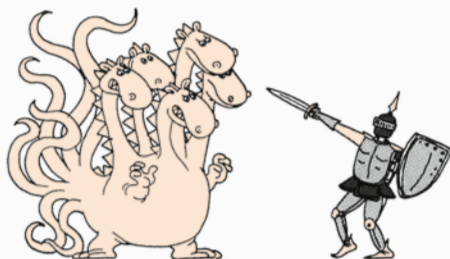
E2 1730. Az alábbi négyzeteket úgy kell kitölteni, hogy az első négyzetbe azt a számjegyet írjuk, ahány 1-es van a négyzetekben összesen. A 2. négyzetbe azt a számot, ahány 2-es, a harma-

dikba azt a számot, ahány 3-as, stb. az utolsó négyzetbe azt a számot ahány 0 van összesen a négyzetekbe írva.

E2 1731. Egy híres matematikus – a múlt század szülötte – 1999-ben éppen annyi idős volt, mint születési éve számjegyei négyzetének összege. Mikor született ez a matematikus?

E1 Gy 1732. Egy biciklista kiszámította, hogy ha 20 km/h sebességgel halad, akkor pont du. 4 órára ér haza, ha 30 km/h sebességgel megy, akkor pont du. 3-ra ér haza. Mekkora sebességgel haladjon, ha azt akarja, hogy pontosan $1/2$ 4-re érjen haza?

E1 Gy 1733. Egy hős vitéznek meg kell küzdenie egy sok fejű és sok farkú sárkánnyal. A vitéz egy kardvágással egy fejet vagy egy farkat, vagy két fejet, vagy két farkat tud levágni. De ha a sárkánynak levágják egyik fejét, új nő helyette, ha levágják egy farkát, két újabb nő helyette, ha levágják két fejét,



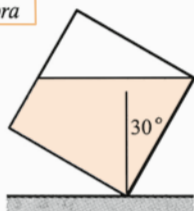
nem nő helyette semmi, ha levágják két farkát, egy új fej nő helyette. Hogyan lehet legyőzni egy 5 fejű, 7 farkú sárkányt, azaz elérni, hogy se feje, se farka ne legyen?

K2 Gy 1734. Az M menedékház a V várostól 6 km-re, a T turistaháztól 4 km-re van. A TV távolság 8 km. M-ből kétféle módon juthatunk V-be: vagy gyalog megyünk M-ből V-be, vagy az M-ből T-be, s onnan a T-ből V-be vezető utat járjuk be, vagyis elgyalogolunk M-ből T-be, ahonnan minden egész órakor indul egy 10 km/h sebességgel haladó kisvasút V-be. Melyik utat válasszuk, ha gyalog egy óra alatt 2 km utat teszünk meg, és a lehető legrövidebb idő alatt szeretnénk V-be jutni?

K2 1735. Andrásnak, Bélának, Csabának, Daninak és Elemérnek (lelkes telefonkártya-gyűjtőknek) rendre 24, 38, 31, 27, illetve 28 telefonkártyája volt. Egy alkalommal négyen közülük összejöttek, egy kupacba rakták kártyáikat, majd kis idő múlva Elemér így szólt: *Jé, a kupacban éppen négyszer annyi külföldi kártya van, mint magyar.* Melyik fiú hiányzott közülük?

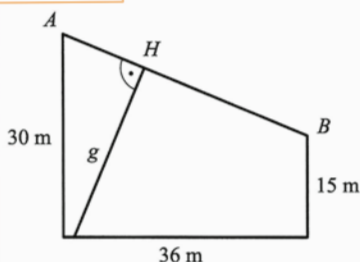
E1 Gy 1736. Egy asztalon álló, kocka alakú akváriumból ki akarjuk önteni a vizet. A víz akkor kezd kiömleni az akváriumból, ha azt megdöntjük egyik éle körül 30° -kal. Hány fokkal kellene megdönteni, hogy az akváriumban levő víz fele kifolyjon?

1736. ábra



E1 Gy 1737. Egy toronyépület derékszögű trapéz alakú fém tetőszerkezetét látjuk az ábrán. Az anyagismeret birtokában a statikusok megállapították, hogy a „ferde” tető akkor lesz a legstabilabb, ha azt az AB tető A -hoz közelebbi H harmadoló pontjában AB -re merőlegesen elhelyezett gerendával támasztják ki. Mekkora legyen a gerenda d hossza?

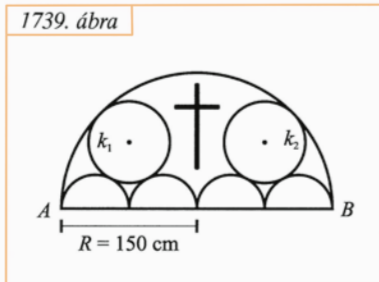
1737. ábra



IV

E1 1738. Egy csiga az útest egyik oldaláról a másik oldalára állandó úton és állandó sebességgel szokott átmenni. Egy alkalommal a távolság $p\%$ -át szokásos sebességénél $p\%$ -kal kisebb sebességgel tette meg. Ekkor észrevett egy közeledő autót. Hogy baj nélkül áterjen a túloldalra, a hátralevő utat szokásos sebességénél $2p\%$ -kal nagyobb sebességgel tette meg, és így szokásos menetideje $\frac{5}{6}$ részére csökkent. Határozzuk meg p értékét.

1739. ábra



K2 Gy 1739. Egy dél-németországi kisváros templomának bejárata fölött található az a rózsablak, melyet ábrákon szemléltetünk. Az $R = 150$ cm sugarú félkör AB átmérőjére illesztettek 4 db egyenlő sugarú, egymást érintő félkört, majd két-két szomszédos félkört kívülről és az eredeti félkört belülről érintő k_1 és k_2 kör alakú üvegablakokat helyeztek el. Mekkora az üvegablakok sugara?

E1 1740. Tom és Jerry, miközben kergetik egymást, egyszerre érkeznek egy cső bejáratához. Tom a csővön, Jerry a cső belsejében folytatja útját, s közben mindketten pihennek egy kicsit. Tom harmadannyi ideig pihen, mint amennyi időt Jerry futással tölt, Jerry pedig negyedannyi ideig pihen, mint amennyit Tom futással tölt, és így egyszerre érkeznek a cső végéhez. Tom sebessége futás közben 99 NÁSE (Nemzetközi Állat Sebesség Egység). Mekkora Jerry sebessége?

E2 Gy 1741. A labdarúgópálya alapvonalának közepén, a két kapufa között húzódik a gólvonal. A gólvonal egyik végpontja az alapvonal egyik szögletzászlójától a , a másik végpont e szögletzászlótól b távolságra van. Az oldalvonal mely pontjából legjobb szabadrúgást végezni (azaz az oldalvonal mely pontjából látszik a gólvonal a legnagyobb szögben)?

E1 Gy 1742. Pisti kerékpárral várakozott a vonatállomáson. Mivel megunta a várakozást, elindult a következő állomás felé kerékpáron állandó sebességgel. Amikor a két állomás közötti út egyötödénél járt, visszapillantott és meglátta az előző állomás felé közeledő vonatot, melynek sebessége 40 km/h. Ha azonnal visszafordul, éppen eléri a vonatot. Ha tovább halad sebességével, akkor is éppen eléri a vonatot, de a következő állomáson. Mekkora Pisti sebessége?

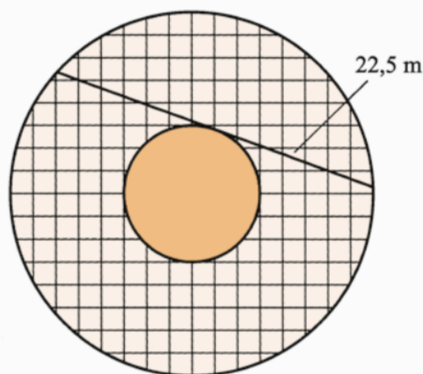
E1 Gy 1743. Kovács úr egy reklámújságban meglátott egy igen kedvező árú dolgot. Elment a boltba, hogy megvásárolja, és döbbenet tapasztalta, hogy a pénztárnál 49 Ft-tal többet számláztak, mint az újságban feltüntetett ár háromszorosa. Miután panaszt tett, kiderült, hogy az újságban az ár (háromjegyű egész szám) első és harmadik számjegyét véletlenül felcserélték. Mennyit kell fizetnie Kovács úrnak, ha megveszi az árut?

E2 1744. A budapesti és a szekszárdi állatkertbe érkezett Afrikából összesen 257 papagáj: sárgák, pirosak, fehérek és kékek. Tudjuk, hogy nincs közöttük 5

különböző korú, azonos színű papagáj. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik állatkertben lesz legalább 9 azonos színű és azonos korú papagáj.

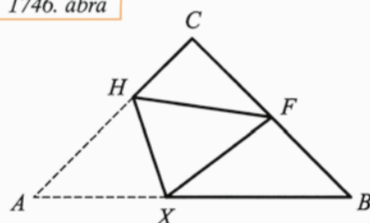
K2 1745. Egy körfolyosó kicsempézésével bíztak meg egy szakembert. Mivel a körfolyosó alkotta koncentrikus körök sugarait nem lehetett megmérni, ezért a szakember kifeszített egy kötelet, mely érintette a körfolyosó belső körét (lásd ábra). Hány doboz csempét hozzon a mester, ha a kötel hossza 22,5 m, egy doboz csempé $1,6 \text{ m}^2$ -re elegendő és a területre számolandó csempemennyiségnél 10%-kal többet kell számolnia szegélyek törése miatt?

1745. ábra



E1 Gy 1746. Egy óbudai kisvendéglőben a terítékhez használt papírszalvétát úgy hajtották össze (lásd ábra), hogy az ABC egyenlő szárú háromszög A csúcsa a BC szár F felezőpontjába került. Ekkor a hajtás élének egyik végpontja az AC szár C -hez közelebbi H harmadoló pontjába került. Hová kerül a hajtás élének másik végpontja?

1746. ábra

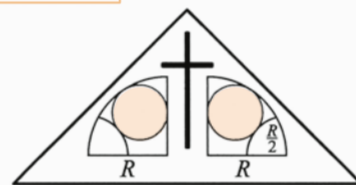


E2 1747. Egy egyenes út mentén valamely pontból kiindulva egymástól 10 m-es távolságra pontosan 10 m magas fákat ültettek. András, Béla, és Csaba egy-egy fa tövéből megmérte a legelső fa látószögét. Miután mérési eredményeiket egyeztették, András csodálkozva felkiáltott: *Jé, az általam mért szögek összege pontosan megegyezik az általam mért szöggel.* Hányadik fa tövében mért Béla és Csaba, ha András a tizedik fa tövében végezte a mérést, és a szomszédos fa tövében nem mért senki?

K2 Gy 1748. Juli néni minden évben 90 fej fokhagymát használ el főzéshez. Egy fej fokhagyma 6 gerezdől áll. Minden gerezdől tavaszi elültetése után egy fej fokhagyma lesz. Hány gerezdet kell elültetnie tavasszal Juli néninek ahhoz, hogy elegendő legyen a jövő évi fogyasztáshoz is és ültetéshez is?

E1 Gy 1749. Az ábrán egy balatonfelvidéki falucska modern kápolnájának a bejárata fölötti díszítőelem látható. Mekkora a besatírozott körök sugara?

1749. ábra



E1 1750. Abdul Al-Mahin olajsejkeknek van egy négyzet alakú olajmezője, melynek egy részét át akarja adni három fiának. Felszólítja őket, hogy álljanak a mező területének egy-egy pontjába, s ekkor a három fiú által meghatározott háromszögnyi terület lesz a fiúké. Hogyan álljanak fel a fiúk, hogy a lehető legnagyobb területű olajmezőt kapják?

K2 Gy 1751. Egy kémiai laboratóriumban kétféle mérőpoharat használnak. Az egyik belseje forgáskúp alakú, a másik pedig forgáshenger alakú. Mindkettő 1 literes. A kúp alakú poharat magasságának $\frac{4}{5}$ részéig megtöltjük vízzel, majd átöntjük a másikba. Milyen magasan áll ez utóbbiban a víz, ha ennek magassága 30 cm?

1752. ábra

egyik oldal				másik oldal			
			1	2			
5				19			
				ε			

E2 Gy 1752. Egy könyvnyomdában a könyveket 32 oldalanként ívekre nyomtatják úgy, hogy az ívek mindkét oldalára 16-16 oldal kerüljön. Ezután az íveket egymás után négyszer félbehajtják, középen összefűzik, s a szélein felvágják. Az ábrán az első ilyen ív látható, melyre öt oldalszámot ráírtunk. Írjuk be a hiányzó 27 oldalszámot a megfelelő lap alárá úgy, hogy hajtogatás után a kialakuló könyv oldalai 1-től 32-ig legyenek megszámozva.

E1 Gy 1753. Egy banketten 42-en vettek részt. Az első lány 7 fiúval táncolt, a második 8-cal, a harmadik 9-cel egészen az utolsó lányig, aki az összes fiúval táncolt. Hány fiú és hány lány vett részt a banketten?

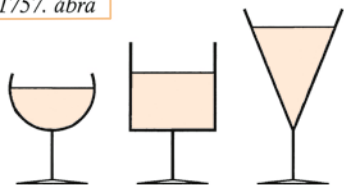
1754. ábra

		6		8							1	
--	--	---	--	---	--	--	--	--	--	--	---	--

K2 Gy 1754. Egy bankkártya száma 14 számjegyből áll. Kovács úr észrevette, hogy saját bankkártyájának (lásd ábra) a számában bármely négy szomszédos számjegy összege 20. Adjuk meg Kovács úr bankkártyaszámát.

E1 Gy 1755. András és Béla beültek sörözni egy kiskocsmába. András rendelt 3 üveg, Béla 2 üveg sört. Kis idő múlva Csaba is csatlakozott hozzájuk, így hárman fogyasztották el a söröket, mindenki ugyanannyit. Később Csaba távozott, de otthagytott nekik 5 Eurót fizetségül. Ebből András eltett 3 Eurót (hiszen ő 3 üveg sört rendelt), Béla pedig 2 Eurót. Igazságos-e a kapott 5 Euró elosztása?

1757. ábra



E1 Gy 1756. Egy légi bemutatón négy repülőgép száll kötelékben, mindegyik mindegyiktől ugyanakkora távolságra. Három gép 1200 m magasságban, a negyedik 1500 m magasságban repül. Számítsuk ki két repülőgép távolságát.

K2 Gy 1757. Az ábrán látható három pohárban ugyanannyi kóla van. Az első po-

hár megtöltött része félgömb alakú, a második pohár forgáshenger alakú, a harmadik forgáskúp alakú. Mindhárom pohárban a folyadék felszíne 9 cm átmérőjű kör. Számítsuk ki a második és a harmadik pohárban levő kóla magasságát.

K2 1758. Egy folklór táncegyüttesben háromszor annyi fiú van, mint lány. Egy előadáson nyolc pár lépett fel közülük, így a fel nem lépők között ötször annyi fiú volt, mint lány. Hány fiú és hány lány van e táncegyüttesben?

K2 1759. A számítógép nyomtatója meghibásodott és nem nyomtatja ki az alábbi műveleti jeleket:

+ - × : ()

Pótoljuk az alábbi sort a megfelelő hiányzó jelekkel úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön.

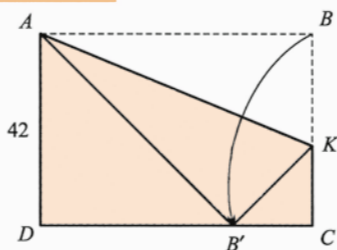
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100.

K2 Gy 1760. Biológiaórán a diákok a közeli patak vizének szennyezettségét vizsgálták. Ehhez hozni kellett a patakról pontosan 3 liter vizet, de a szertárban csak egy-egy beosztás nélküli 6 és 7 literes edény állt rendelkezésükre. Hogyan tudtak a patakról hozni 3 liter vizet?

K2 1761. Egy statisztikai hivatal felmérést végzett 1000 családban a családok által használt háztartási gépekkel kapcsolatban. Kiderült, hogy a családok 85%-a rendelkezik mosógéppel, 70%-a rendelkezik robotgéppel és 45,2%-a rendelkezik mosogatógéppel. Igaz-e, hogy a családok között van legalább egy olyan, amelyik mindhárom háztartási eszközzel rendelkezik?

K2 1762. Egy téglalap alakú asztalterítő szélessége 42 cm (lásd ábra). A terítőt úgy hajtották össze az AK egyenes mentén, hogy a B pont illeszkedjen a CD oldalra. Ezek után azt tapasztalták, hogy a $B'KC$ háromszög egyenlő szárú. Mekkora az „összehajtott” terítő területe (be-satírozott rész)?

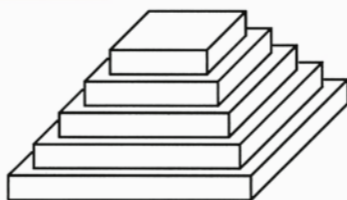
1762. ábra



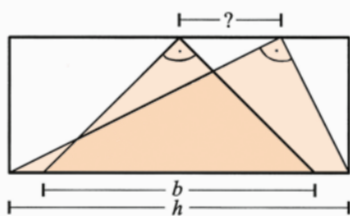
K2 Gy 1763. A mexikói Teotihuacan romvárosban található a „Nap piramis”, mely egymásra rakott hasábokból áll, s amelynek szemmel látható felületét bearanyozták az ősi aztékok.

A legalsó hasáb alapnégyzete 10 m, a legfelsőé 4 m. A piramis teljes magassága 5 m. Az egyes hasábok magassága egyenlő, az alapnégyzetek oldalhossza szabályosan csökken (vagyis a szomszédos hasábok alapéleinek különbsége állandó). Mekkora területű részt vontak be arannyal az aztékok?

1763. ábra



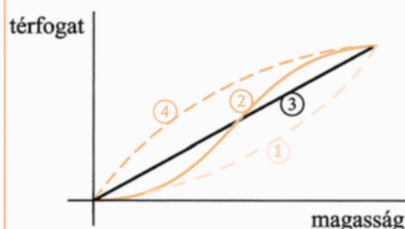
1764. ábra



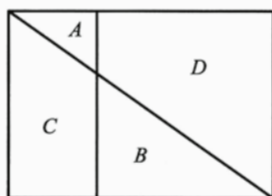
1765/a. ábra



1765/b. ábra



1766. ábra



szünet idején a 17-es szék volt mellette. Hány ülés volt ekkor a libegőn, ha 1-től vannak számozva és szabályos közönként követik egymást?

E1 1768. Egy 120° -os körcikk alakú telekre olyan négyzet alapterületű házat szeretnének építeni, amelynek két csúcsa a körcikk egy-egy sugarára, másik két csúcsa pedig a határoló körívre illeszkedik. Egy helyi szabvány szerint a telekre csak olyan ház építhető, melynek alapterülete nem haladja meg a telek területének 50%-át. Megépíthetjük-e ezt a házat?

E1 1764. Egy h hosszúságú pincehelyiséget két lámpával világítanak meg. A lámpák 90° -os nyílásszögű kúp alakú fényt bocsátanak ki (lásd 1764. ábra). Az egyik lámpát a mennyezet közepére szerelték és ez egy b átmérőjű kör alakú részt világít meg. A másik a teljes h hosszú padlót megvilágítja, de a falakat már nem. Számítsuk ki a két lámpa távolságát.

K2 Gy 1765. Egy olajmező tárolójában négyféle hordóban tárolják a nyersolajat. Gömb alakú, kétféle kúp alakú és henger alakú hordókat használnak. A hordók magassága és térfogata egyenlő. A grafikonok az egyes hordókban levő nyersolaj térfogatát mutatják a kérdéses hordóban levő folyadék magasságának függvényében. Melyik grafikon melyik hordónak felel meg?

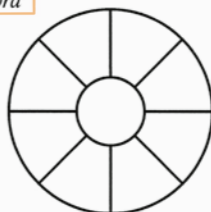
K2 Gy 1766. Egy virágkertészetben egy téglalap alakú virágágyat virágültetés előtt két egyenes szakasszal két háromszögre és két trapézra bontottak (lásd ábra).

Az A és B háromszögek területe rendre 100 m^2 és 400 m^2 . Mekkora a C és D trapézok területe?

K2 1767. A budai libegő egy alkalommal áramszünet miatt leállt pár percre, majd újra elindult. A jánoshegyi végállomáson összetalálkozott András és Béla – aki a 68-as számú széken ült – azt mesélte Andrásnak, hogy amikor az áramszünet volt, éppen a 92-es szék volt mellette. András a 33-as széken ült, s elmondása szerint az áram-

K2 1769. Egy franciaországi község kápolnájában látható az alábbi „rózsablak”. Készítője úgy találta esztétikusnak, ha a belső kör területe megegyezik a körülötte levő 8 db üvegtábla mindegyikének a területével. A belső kör átmérője 80 cm. Milyen hosszú a szomszédos üvegbetéteket elválasztó merevítő „küllő”?

1769. ábra



E1 1770. Egy gazda egy r sugarú füves réten épített egy lebetonozott, négyzet alapú istállót kecskéje számára. A négyzet oldala $\frac{r}{2}$, és egyik csúcsa a kör középpontjába esett. Ezután e csúcshoz illesztett karóra kikötötte a kecskét egy r sugarú kötéllal. Hány %-át legelheti le a kecske a füves rétnak?

E1 1771. 100 db papírlap közül néhányat kettévágtunk, majd a meglevő összes papírlap közül kétszer annyit, mint előbb, újra kettévágtunk. Ezután az összes papírlap közül kétszer annyit, mint legutóbb, újra kettévágtunk, és az eljárást így folytattuk (mindig kétszer annyit kettévágtunk, mint legutóbb). Hány lapot vágtunk ketté legelőször, ha legvégül összesen 2005 db papírlapunk lett?

Nevezetes egyenlőtlenségek

K1 1772. Bontsuk fel 18-at két szám összegére úgy, hogy a számok szorzata a legnagyobb legyen.

K1 1773. Két szám összege 100. Mely két számra teljesül, hogy a szorzatuk maximális?

K1 1774. Egy téglalap kerülete 150 cm, mikor lesz a területe maximális?

K2 1775. Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 18 cm. Mikor lesz a háromszög területe maximális?

K1 1776. $a + b = 42$. Milyen a és b esetén lesz $a^2 + b^2$ minimális?

K1 1777. Egy 50 cm hosszúságú szakaszt bontsunk fel két részre úgy, hogy a szakaszok fölé rajzolt négyzetek területének összege minimális legyen.

K1 1778. Egy 160 cm hosszú szalagot vágjunk ketté úgy, hogy a levágott szakaszokból készített négyzetek területének összege minimális legyen.

K2 1779. Legyenek x és y pozitív egész számok, melyekre $x + y = 17$. Létezik-e és ha igen mennyi xy maximuma?

E1 1780. Legyenek x és y pozitív valós számok és $x + y = 1$. Keressük az alábbi kifejezés

a) minimumát,

b) maximumát.

$$S = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{y} \right)^2.$$

E2 1781. Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyek négyzetösszege 1. Létezik-e minimuma a következő kifejezésnek?

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

E2 1782. Legyenek x, y, z pozitív valós számok, melyekre:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1.$$

$$\text{Legyen } S = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}.$$

Mikor van az S -nek minimuma?

E2 1783. Legyenek a, b, c pozitív valós számok és $a + b + c = 1$.

Adjuk meg az $S = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$ maximumát.

V 1784. Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, melyekre $abc = 1$ teljesül.

$$\text{Bizonyítsuk be, hogy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

V 1785. Az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nemnegatív számok összege 1. Milyen nagy lehet $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n$ értéke?

V 1786. Legyenek x, y, z pozitív számok, valamint $x + y + z = 1$. A számok egyike sem nagyobb bármely másik kétszeresénél. Mennyi a három szám szorzatának a maximuma?

V 1787. Az x, y, z valós számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$a) \ x + y = 2z - 1;$$

$$b) \ x^2 + y^2 = z^2 + 2z - 3.$$

Mely z érték esetén lesz az xy szorzat értéke minimális?

V 1788. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$2x^3 = x^4 + \frac{27}{16}.$$

E2 1789. Keressük meg az $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(8-x)^2$ függvény maximumát.

E2 1790. Határozzuk meg az $f(z) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2 y^2}$ függvény minimumát.

Értelmezzük az f függvényt a pozitív valós számok halmazán.

E2 1791. Legyen $f(x) = \frac{9x^2 + 4}{x}$. Keressük meg az $f(x)$ függvény minimumát.

V 1792. Legyenek a és b olyan pozitív egész számok, amelyekre teljesül az, hogy $15a + 16b$ és $16a - 15b$ mindegyike négyzetszám. Határozzuk meg ezen két négyzetszám minimumának legkisebb lehetséges értékét.

V 1793. Az $n \geq 3$ db különböző könyvből k db a kedvencem. A könyveket véletlenszerűen felraktam egy polcra (azaz az n db könyv bármelyik sorrendje egyenlő valószínűségű).

Milyen k esetén lesz maximális, illetve minimális a valószínűsége annak, hogy a felrakáskor a k db kedvenc könyvem egymás mellé kerül?

E2 1794. Egy derékszög csúcsa C , egyik szárán levő A pontból $v_A = 8$ m/s sebességgel egy pont mozog C irányába, míg C -ből a másik száron levő B pont felé $v_C = 6$ m/s sebességgel egy másik pont halad. Az AC kezdeti távolság 100 m. Ha egyszerre indulnak el mennyi idő múlva lesznek egymáshoz a legközelebb?

E2 Gy 1795. Négy falu áll egy 10 km oldalú négyzet négy sarkában. A lakosság olyan útvendzert szeretne építeni, amelyen bármelyik faluból bármelyik faluba el lehet jutni. A rendelkezésükre álló pénzük 27,5 km hosszú út megépítéséhez elegendő. Elég-e ez a kívánt útvendzert megépítéséhez?

E2 1796. Legfeljebb mekkora lehet a háromszög területe, ha a, b, c oldalaira a következő egyenlőtlenségek teljesülnek?

$$0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3.$$

E2 1797. Az adott k kerületű háromszögek közül melyikben lesz legkisebb a súlyvonalak négyzetösszege?

V 1798. Legyenek a háromszög oldalai: a, b, c .

Határozzuk meg az $S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}$ kifejezés minimumát.

E2 1799. Egy a oldalú négyzetlap négy sarkából vágjunk ki egybevágó négyzeteket úgy, hogy a lap négy szélének felhajtásával keletkezett doboz térfogata maximális legyen.

E2 1800. Adott A felszínű téglatestek közül melyik testátlója a legkisebb?

E2 1801. Az egyenlő térfogatú téglatestek közül melyikben legkisebb az egy csúcsban összefutó élek négyzetének az összege?

