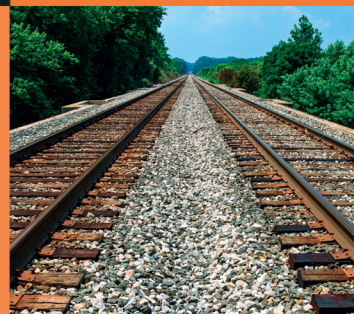




OKTATÁSI
HIVATAL

NAT
2020

Gyűjtemény a
Matematika
emelt szintű oktatásához



Gyűjtemény

a MATEMATIKA
emelt szintű oktatásához

OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2023. 02. 08-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/80-3/2023. számú határozattal.

A gyűjtemény megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet alapján készült – 2020. 01. 31. után kiadott Kerettantervre épülő matematika tantárgy érettségi követelményeinek.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Herczegné Kaszás Judit

Tananyagfejlesztők: Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona Helén, Bálint Zsuzsanna

Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba

Lektor: dr. Csapodi Csaba, dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön

Szerkesztette: Vépy-Benyhe Judit

Szakábra: Szalóki Dezső

Fedélterv és tipográfia: Bánáti János, Slezák Ilona, Mazán Enikő, Gados László, Orosz Adél

Fotó: © Shutterstock képügynökség, Thinkstock, iStock, © CULTiRiS / INTERFOTO

© Oktatási Hivatal, 2023

ISBN 978-963-436-282-1

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.

Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor elnök • Raktári szám: OH-MAT912AE

Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos

Műszaki szerkesztő: Fazekas Julianna

Grafikai szerkesztő: dr. Valaczka Bence, Mazán Enikő

Nyomdai előkészítés: Ozsváth Miklós András, Gados László

Terjedelem: 43,26 (A/5) ív • Tömeg: 840 gramm • 1. kiadás, 2023

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen

Felelős vezető: György Géza vezérigazgató

A nyomdai megrendelés törzsszáma:



Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001 számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

A könyv bemutatása

KINEK?



Kinek szól ez a gyűjtemény? Elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak, akik emelt szintű érettségire készülnek vagy akik szeretnének biztos alapokat szerezni egyetemi tanulmányaikhoz (akik matematikafakultációra járnak).

CÉLOK



A gyűjtemény célja, hogy felkészítsen az emelt szintű matematika érettségi vizsgára, illetve hogy elmélyítse és kiszélesítse a középiskolai matematikai ismereteket, és megalapozza a felsőbb matematika megértését.

MIT?



A gyűjtemény nem csak a 11-edikes és 12-edikes, hanem a 9-edikes és 10-edikes tananyag emelt szintű kiegészítéseit is tartalmazza.

KERETEK



A könyv feltételezi, hogy a tanév során a diákok ezzel párhuzamosan elsajátították vagy elsajátítják a középszintű érettségi követelményszintjének megfelelő „alap” tananyagot matematikából.

HOGYAN?



Hogyan használd ezt a könyvet? A könyv felépítésében és stílusában követi a TA jelzésű matematika tankönyveket. (A jelzés a raktári számok végén található. Pl.: OH-MAT10TA.) A témakörök úgy bomlanak leckékre, hogy a leckék tananyaga 1 vagy 2 tanóra alatt feldolgozható legyen.

FELEPÍTÉS



A leckékben színes fejlécek jelzik a különböző típusú tartalmakat. A leckék a következő részekből épülnek fel:



A jel után felsorolt fogalmakkal, ismeretekkel már találkozta a korábbi tanulmányaid során.



A jel után felsorolt fogalmakat és ismereteket új tananyagként mutatja be a könyv (a 9-edikes és 10-edikes kiegészítését is tartalmazza).

BEVEZETŐ

Itt arra találhatsz példát, hogyan kapcsolódik a tananyag egy mindennapi helyzethez vagy érdekes problémához.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy-egy szép, érdekes feladat megoldását ismerteti.

ELMÉLET

Összefoglalja és rendszerezi az ismereteket, definíciókat és tételeket. Folyamatábrák szemléltetik a módszereket és eljárásokat.

FELADAT

Ez a rész sok korábbi érettségi feladatot és gyakorlófeladatokat tartalmaz, amit néha egy-egy rejtvény színesít. Szintezés jelöli a feladatok nehézségét.

RÁADÁS

Ezek a részek további kiegészítéseket, érdekességeket tartalmaznak.

FELADATGYŰJTEMÉNY

Kiegészíti a témakörök végén lévő összefoglalást.



Az ikon után ötleteket találsz geometriai szoftver használatához, illetve számítógépen megoldható feladatokat.

JELÖLÉSEK



A feladatok szintezésénél használt jelölések arra utalnak, hogy középszintű vagy emelt szintű érettségiben fordulhat elő ilyen jellegű feladat, illetve az érettségi dolgozat első vagy második részében.

K2 középszintű érettségi második része

E1 emelt szintű érettségi első része

E2 emelt szintű érettségi második része

E2* nehezebb típusú emelt szintű feladat

ÉRETTSÉGI



Az emelt szintű szóbeli érettségire való felkészülést segítik a témakörök végén lévő összefoglaló táblázatok.

A gyakorlást segítik a témaköröket követő témazáró feladatgyűjtemények.



polinom, másodfokú egyenlet megoldása, diszkrimináns, másodfokú polinom gyöktényezős alakja

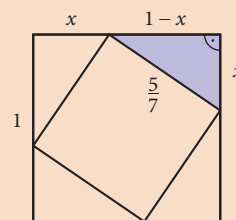


Viète-formulák, polinom fokszáma, foksám szerint rendezett alakja

FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2013)

Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy másik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5 : 7. Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét add meg!



2. K2 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán! Hányféle értelmes, 3 betűs magyar szót tudsz alkotni a helyes válaszhoz tartozó betűkből, amelyben mindegyik betűt felhasználsz?

	Két megoldása van, egyik a 6	Egyetlen megoldása a 6	Van megoldása, de az nem a 6	Nincs megoldása
$3x^2 - 17x - 6 = 0$	R	P	F	S
$x^2 + 5 = 3x - x^2 - 13$	A	Á	E	É
$(x - 9)(x - 3) + 9 = 0$	M	T	L	K

3. K2 Kösd össze azokat a kifejezéseket, amelyek ugyanazt a polinomot jelentik! Kettőnek nincs párja, azokat írd fel más alakban!

$(x - 8)^2$	$16 + x^2 - 8x$	$(4 + x)^2$	$(x + 4)(x - 8)$
$x^2 - 4x - 32$	$x^2 - 64$	$x^2 - 16x + 64$	$x^2 + 8x + 32$

4. K1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán, és töltsd ki a táblázatot!

	Gyökei	Gyökök összege	Gyökök szorzata
$x^2 - 2x - 15 = 0$			
$2x^2 - 10x - 28 = 0$			
$-x^2 + 9x - 8 = 0$			

5. E1 Add meg a polinomok foksám szerint rendezett alakját, és töltsd ki a táblázatot! Másodfokú polinomok esetében írd fel a polinom gyöktényezős alakját is!

	Polinom foksám szerint rendezett alakja	Polinom fokszáma	Polinom gyöktényezős alakja
$-23x + 4x^2 - 6$	$4x^2 - 23x - 6$	2	$4(x + 0,25)(x - 6)$
$9 - 12x + 4x^2$			
$x^2 - 2x + x^3$			
$4 - 2x$			

1. Másodfokú egyenlet megoldása

Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletben ($a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$) az $ax^2 + bx + c$ **polinom foksám szerint rendezett alakban** (kanonikus alakban) szerepel. A polinom **foksáma** az ismeretlen legmagasabb kitevője, azaz 2.

Az egyenlet **diszkriminánsa**: $D = b^2 - 4ac$.

- ▶ Ha a diszkrimináns negatív, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása.
- ▶ Ha a diszkrimináns nulla, akkor az egyenletnek egy valós megoldása van (más megfogalmazásban: két egybeeső valós megoldás van), melyet az egyenlet **kétszeres gyökének** nevezünk. A megoldás ekkor: $x = -\frac{b}{2a}$.
- ▶ Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két különböző valós megoldása van. Ezeket adja meg a **másodfokú**

egyenlet megoldóképlete: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. (Ennek bizonyítása a 7. leckében található.)

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldásai (gyökei) és az $ax^2 + bx + c$ polinom gyökei megegyeznek.

2. Másodfokú polinom gyöktényezős alakja

Ha vannak valós gyökök, akkor azok segítségével felírható egy másodfokú polinom **gyöktényezős alakja**. Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei x_1 és x_2 , akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$ax^2 + bx + c$	=	$a(x - x_1)(x - x_2)$
kanonikus alak		gyöktényezős alak

Például: $2x^2 - x - 3 = 0$ egyenlet megoldásai (gyökei) -1 és 1,5;

$2x^2 - x - 3$ polinom gyöktényezős alakja: $2(x + 1)(x - 1,5)$.

3. Viète-formulák: a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggések

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) másodfokú egyenletnek van két nem feltétlenül különböző valós gyöke (x_1 és x_2), akkor a megfelelő polinom felírható a gyöktényezős alak segítségével: $a(x - x_1)(x - x_2)$. Alakítsuk át a polinomot a következő módon:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - \underbrace{a(x_1 + x_2)}_{bx}x + \underbrace{ax_1x_2}_c.$$

A polinomok azonossága miatt $-a(x_1 + x_2) = b$, illetve $ax_1x_2 = c$, ezek alapján a gyökök összege is és a gyökök szorzata is kiszámítható az egyenlet együtthatóiból.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
----------------------------	-------------------------------

Ezeket az összefüggéseket nevezzük **Viète-formuláknak**.

Megjegyzés: A Viète-formulákból a gyökök összegére és szorzatára akkor is számolható egy valós szám, ha nincsenek valós gyökök. Ezért a Viète-formulák alkalmazása előtt ellenőrizni kell a diszkrimináns segítségével, hogy vannak-e valós gyökök.

FELADATOK

6. E1 Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet együtthatói összekeveredtek. Keresd meg mindegyiknek a megfelelő helyét!

A három együttható valamilyen sorrendben	Tudjuk az egyenletről	Mi lehetett az egyenlet?
-11 4 8	nincs megoldása a valós számok halmazán	
-12 -2 2	két gyöke van, ezek összege 6	
-1 1 4	két gyöke van, ezek szorzata -4	

7. E1 Add meg a hiányzó együtthatók értékét, majd ellenőrizd a diszkrimináns vizsgálatával, hogy van két valós megoldás!

- $3x^2 + \dots x + 7 = 0$ egyenletnek van két valós megoldása, és azok összege 8.
- $\dots x^2 + 16x + 7 = 0$ egyenletnek van két valós megoldása, és azok szorzata 5.
- $-x^2 + \dots x + \dots = 0$ egyenletnek van két valós megoldása, azok összege 4 és szorzata 3.



kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása



három- vagy többismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy edzőtáborban floorballviadalt rendeztek. 16 csapat mérte össze az erejét, rövid, 10 perces mérkőzéseken. Minden csapat minden csapattal pontosan egy meccset játszott. A győzelemért 3 pont, a döntetlenért 1 pont járt, a vereségért nem járt pont. András csapata 23 pontot szerzett. A győztes meccseiken átlagosan 4 gólt lőttek, a döntetlenre végződő meccseiken átlagosan 3-at, a vesztes meccseiken átlagosan 0,5 gólt. A gól-átlaguk a teljes viadalra nézve 3 gól volt. Összesen hány meccset nyertek?

Megoldás:

Jelöljük a győztes meccsek számát x -szel, a döntetlenre végződők számát y -nal, a vesztes meccsek számát z -vel. Mivel mindenkivel játszottak, ezért $x + y + z = 15$. Mivel 23 pontot értek el, ezért $3x + y = 23$. A lőtt gólok száma: az x db győztes meccsen átlagosan 4 gólt lőttek, az összesen $4x$, a döntetlenre végződő meccseken $3y$, a vesztes meccseken $0,5z$ gólt lőttek. A 15 meccsen átlagosan 3 gólt lőttek, ez összesen 45 gólt jelent. Ebből $4x + 3y + 0,5z = 45$. Felírható tehát a következő egyenletrendszer:



$$\begin{cases} x + y + z = 15 & \text{(I.)} \\ 3x + y = 23 & \text{(II.)} \\ 4x + 3y + 0,5z = 45 & \text{(III.)} \end{cases}$$

Az utolsó egyenletet szorozzuk meg 2-vel, és az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva vonjuk ki belőle a legelső egyenletet!

$$\begin{array}{r} 8x + 6y + z = 90 \\ - \quad x + y + z = 15 \\ \hline 7x + 5y = 75 \end{array}$$

A kapott egyenletben már csak két ismeretlen van. A II. egyenlettel egy kétismeretlenes egyenletrendszert alkot. Alkalmazzuk újból az egyenlő együtthatók módszerét, ehhez szorozzuk meg a II. egyenletet 5-tel, és vonjuk ki egymásból a két egyenletet!

$$\begin{array}{r} 15x + 5y = 115 \\ - \quad 7x + 5y = 75 \\ \hline 8x = 40 \end{array}$$

Ebből $x = 5$. Ezt visszahelyettesítve a kétismeretlenes egyenletek egyikébe, kapjuk, hogy $y = 8$. Ezt és az $x = 5$ -öt visszahelyettesítve a háromismeretlenes egyenletek bármelyikébe, kapjuk, hogy $z = 2$.

Ellenőrzés:

Összesen $5 + 8 + 2 = 15$ meccset játszottak Andrásék. Pontjaik száma $5 \cdot 3 + 8 = 23$. Az 5 győztes meccsen 20 gólt, a 8 döntetlen meccsen 24 gólt, a 2 vesztes meccsen 1 gólt lőttek, ez összesen 45 gól, aminek a meccsenkénti átlaga $\frac{45}{15} = 3$.

Válasz: Összesen 5 meccset nyertek.

Három- vagy többismeretlenes lineáris (azaz elsőfokú) egyenletrendszernek általában akkor van egyértelmű megoldása, ha annyi egymástól független egyenlet van, ahány ismeretlen szerepel az egyenletrendszerben.

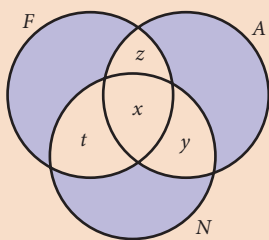
- ▶ A megoldás során arra törekszünk, hogy az ismeretlenek számát csökkentjük, azaz egy-egy ismeretlent „kiküszöböljünk”.
- ▶ Ha meghatároztuk az egyik ismeretlen értékét, akkor a lépéseken visszafelé haladva számolhatjuk ki a többi ismeretlen értékét, ha visszahelyettesítjük a már kiszámolt értékeket.
- ▶ A megoldás végén ne feledkezz el az ellenőrzésről, és arról, hogy válaszolj a feladatban feltett kérdésre!

FELADATOK

- 1. E1** Egy háromszög oldalainak hossza (mm-ben mérve) a , b és c . Tudjuk, hogy $a + b = 41$; $a + c = 53$ és $b + c = 58$. Mekkora a háromszög oldalai? Ellenőrizd, hogy a kapott oldalhosszúságokkal valóban létezik-e háromszög!

- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2009)
Egy 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia. Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:

- (1) Minden diák tanul legalább két nyelvet.
- (2) Az angolt is és a németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.
- (3) Angolul 27-en tanulnak.
- (4) A németet is és a franciát is tanulók száma 15.



- 3. E1** (Emelt szintű érettségi, 2019)
A p , q , r pozitív számok összege 180. Tudjuk továbbá, hogy $p : q = 7 : 8$ és $r : p = 5 : 3$. Határozd meg ezeket a számokat!

- 4. E1** Dóriogyorót, diót és mandulát vásárol. Ha mindegyikből egy-egy kg-ot vesz, akkor 14 500 Ft-ot fizet. Ha 2 kg diót venne és a másik kettőből pedig fél-fél kg-ot, az 13 550 Ft-ba kerülne. Ha 2 kg mandulát vásárol, és hozzá fél-fél kg-ot a dióból és aogyoróból, az 15 950 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül 1 kg dió, 1 kgogyoró, illetve 1 kg mandula?

- 5. E2** (Emelt szintű érettségi, 2009)

Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszereelésben árulják.

- a) Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon lévő összes ecetet összeöntenénk?
- b) Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet, valamint a tiszta víz literenkénti árából kalkulálják ki. Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft és a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra!)
- c) Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150 Ft, a 20%-os 156 Ft. Ha ezeket az árakat a b) részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát?

- 6. E2** (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie.

A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg. Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett fizetniük. Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára?



törtes egyenlet megoldása, másodfokúra visszavezethető egyenletrendszer megoldása

KIDOLGOZOTT FELADAT

Két valós szám összege 4. A két szám reciprokanak összege $\frac{16}{15}$. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

Jelöljük a számokat x -szel és y -nal! Mivel van reciproka, egyik szám sem lehet 0. Felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{16}{15} \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből x -et: $x = 4 - y$.

Ezt írjuk be a második egyenletbe:

$$\frac{1}{4-y} + \frac{1}{y} = \frac{16}{15}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(4-y)$ -nal és y -nal! Ezek egyike sem 0, ezért a szorzás során nem változik meg az egyenlet megoldáshalmaza.

$$y + 4 - y = \frac{16}{15}(4-y)y$$

$$\text{Rendezés után: } 4 = \frac{64}{15}y - \frac{16}{15}y^2.$$

Szorozzuk meg az egyenletet 15-tel, majd rendezzük:

$$60 = 64y - 16y^2$$

$$16y^2 - 64y + 60 = 0$$

A megoldóképlet segítségével kapjuk, hogy két megoldás van: $y_1 = \frac{3}{2}$ és $y_2 = \frac{5}{2}$. A megfelelő x értékek $x_1 = \frac{5}{2}$ és

$x_2 = \frac{3}{2}$. A két szám tehát a $\frac{3}{2}$ és az $\frac{5}{2}$.

$$\text{Ellenőrzés: } \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 \text{ és } \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}.$$

(A két változó felcserélhető ebben a feladatban.)



ELMÉLET

Mérlegelv

Nem változik meg az egyenlet megoldása, ha az egyenlőségjel két oldalán álló kifejezést

ugyanazzal a valós számmal növeljük vagy csökkentjük

✓

ugyanazzal a nullától különböző valós számmal szorozzuk vagy osztjuk

✓

Óvatosan kell eljárni, ha olyan kifejezéssel szeretnénk szorozni vagy osztani, amely ismeretlent tartalmaz. Ekkor külön meg kell vizsgálni, hogy ennek értéke lehet-e nulla.

- ▶ Ha nem lehet nulla, akkor oszthatunk vagy szorozhatunk vele, nem változik a megoldáshalmaz.
- ▶ Ha lehet nulla, akkor ezzel a lépéssel megváltozhat a megoldáshalmaz. Ezért ezt a lépést csak akkor végezzük el, ha külön megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a kifejezés értéke nulla.

FELADATOK

1. **K2** Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\frac{3}{x-5} + \frac{x}{2x+3}$

d) $\frac{1}{|x|-5}$

b) $\frac{x-4}{x^2-4}$

e) $\frac{x-7}{x+7} - \frac{2x+11}{2x-11}$

c) $\frac{5}{x^2-8x+15}$

f) $\frac{|x|+5}{(x-4)(3x+4)}$

2. **E1** (Emelt szintű érettségi, 2006)

Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztőbe begépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel.

Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül, ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

- a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati egyedül a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

	Panni	Kati
A teljes munkát hány óra alatt végezné el egyedül?	x	y
1 óra alatt a munka hányadrészét végzi el?	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
Hány órát dolgozik kedden?		

- b) Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a hátralévő 60% gépeléséhez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egyórányi időtartamra megszakította. Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán?

3. **E1** Egy tartályt két csapon keresztül lehet megtölteni. Ha egyszerre nyitva van mindkét csap, akkor az üres tartály 48 perc alatt telik meg.

Egy alkalommal a tartály pontosan a feléig van megtöltve, és ekkor az egyik csapot elzárják. Ha az első csapot zárják el, akkor a tartály megtöltéséhez 20 perccel több időre van szükség, mintha a második csapot zárják el.

Mennyi idő alatt telne meg az üres tartály, ha csak az első csap lenne nyitva?

4. **E1** Egy hagyományőrző egyesület 72 000 Ft támogatást kapott egy közös kirándulásra. Mivel két tagjuk lemondta a programot, kettővel kevesebben mennek, mint tervezték. Így fejenként 150 Ft-tal több támogatás jutott mindenkire a tervezetthez képest. Hányan mentek kirándulni?

5. **E1** Egy utazás során egy autó átlagsebessége $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt. Az út első harmadán azonban lassabban lehetett haladni, mint az út további kétharmad részén. Az út első harmadán az átlagsebesség $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kevesebb volt, mint a további kétharmad részén. Mekkora volt az átlagsebesség az út első harmadán?

6. **E1** Egy adathalmazban az adatok összege 120. Ha még hozzáveszünk az adathalmazhoz két darab 3-ast, akkor az átlag 0,5-del lecsökken. Hány elem volt eredetileg az adathalmazban?

7. **E1** (Középszintű érettségi, 2018)
Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x+2} = \frac{8}{(x+2)(x-2)}$$

8. **E2** Egy 400 m-es kör alakú futópályán tart edzést Tomi és Andris. Ha ugyanarról a helyről indulnak, de ellentétes irányba, akkor 50 másodperc múlva találkoznak.

Ha váltófutást tartanak, amelyben először Tomi, majd amikor ő visszaért, akkor Andris, majd Andris megérkezése után újra Tomi fut le egy teljes kört, akkor ez összesen 5 percig tart.

Mekkora sebességgel futnak, ha feltesszük, hogy edzés közben végig állandó a sebességük?



9. **E1** (Középszintű érettségi, 2012 és 2020)
Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2} = 1$

b) $\frac{1}{2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{2x+1}{2(x+2)}$



másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenlet, másodfokú egyenletrendszer

KIDOLGOZOTT FELADAT

- 1.** Oldd meg az egyenletet új ismeretlen bevezetésével a valós számok halmazán!

$$x^4 - 4x^2 - 45 = 0$$

Megoldás:

$x^4 = (x^2)^2$. Ezért ha x^2 helyére új ismeretlent vezetünk be, akkor x^4 felírható annak négyzeteként. Jelöljük x^2 -et a -val!

$$x^4 - 4x^2 - 45 = 0$$

$$a^2 - 4a - 45 = 0$$

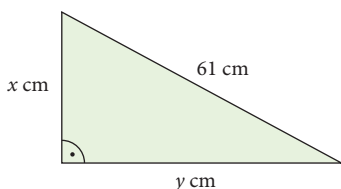
A megoldóképlettel kapjuk, hogy két megoldás van a -ra: 9 és -5 . Az a azonban egy valós szám négyzete, ezért nem lehet negatív. Csak az $a = 9$ esetben kapunk megoldást: $x^2 = 9$, ebből $x = 3$ vagy $x = -3$.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $x = 3$ és $x = -3$ valóban megoldások:

$3^4 - 4 \cdot 3^2 - 45 = 81 - 36 - 45 = 0$	✓
$(-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 - 45 = 81 - 36 - 45 = 0$	✓

2. Egy derékszögű háromszög területe 330 cm^2 , az átfogója 61 cm -es. Mekkora a befogói?

Megoldás:



Írjuk fel az x és az y segítségével a háromszög területét és átfogójának hosszát! Ez utóbbihoz felhasználjuk a Pitagorasz-tételt.



$$\left. \begin{array}{l} \frac{xy}{2} = 330 \\ x^2 + y^2 = 61^2 \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} xy = 660 \\ x^2 + y^2 = 3721 \end{array} \right\}$$

Az első egyenletből: $y = \frac{660}{x}$. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$x^2 + \left(\frac{660}{x}\right)^2 = 3721 \quad \blacktriangleright \quad x^2 + \frac{435\,600}{x^2} = 3721$$

Az x^2 helyett vezessünk be új ismeretlent, például az u -t ($u > 0$)! Ekkor egyenletünk így alakul:

$$u + \frac{435\,600}{u} = 3721$$

$$u^2 + 435\,600 = 3721u$$

$$u^2 - 3721u + 435\,600 = 0$$

Megoldóképlettel:

$$u_{1,2} = \frac{3721 \pm \sqrt{3721^2 - 4 \cdot 435\,600}}{2} = \frac{3721 \pm 3479}{2}$$

$$u_1 = 3600$$

$$u_2 = 121$$

Az $u = x^2$ helyettesítés miatt x olyan pozitív számot jelöl, amelynek a négyzete 3600 vagy 121. Tehát $x_1 = 60$ és $x_2 = 11$.

Számításunk azt mutatja, hogy a vizsgált háromszög egyik befogójának hossza 60 cm vagy 11 cm. A másik be-

fogó hosszát az $y = \frac{660}{x}$ egyenletből kapjuk meg:

$$y_1 = \frac{660}{x_1} = \frac{660}{60} = 11 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{660}{x_2} = \frac{660}{11} = 60.$$

Tehát egyféle háromszög felel meg a feladatunk feltételeinek, ennek az egyik befogója 11 cm, a másik 60 cm hosszúságú.

Ellenőrzés:

A 60 cm és 11 cm befogójú derékszögű háromszög területe $T = \frac{60 \cdot 11}{2} = 330 \text{ cm}^2$, és átfogójának hossza

$$\sqrt{60^2 + 11^2} = 61 \text{ cm.}$$

FELADATOK

1. E1 Oldd meg az egyenleteket új ismeretlen bevezetésével a valós számok halmazán!

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

c) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

d) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

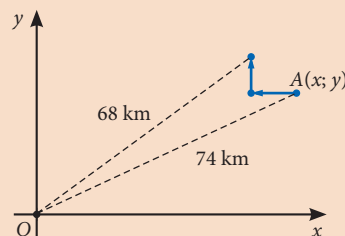
2. K2 Egy téglalap alakú telek területe 5040 m^2 . Legtávolabbi pontjainak távolsága 106 m . Mekkora a telek oldalai?

3. E1 Egy rombusz alakú papírsárkány területe 840 cm^2 , kerülete 148 cm . Milyen hosszúak az átlóknak használt pálcák?

4. E1 Egy derékszögű háromszög területe 180 cm^2 , kerülete 90 cm . Mekkora a háromszög oldalai?

5. E2 A tengeren egy hajó a világítótornyától 74 km távol van. A világítótornyhoz rögzített koordináta-rendszerben a hajó elhelyezkedését az ábrán az $A(x; y)$ pont jelzi (x és $y \text{ km}$ -ben van feltüntetve, és $x, y > 0$).

Ha a hajó 10 km -t nyugat felé és 8 km -t észak felé halad, akkor a világítótornytól 68 km távolságban lesz. Határozd meg a hajó kezdeti $(x; y)$ koordinátáit!



6. E1 Keresd meg az egymás utáni lépéseket! Az első oszlopban 4 egyenlet található. A második oszlopban az új ismeretlen meghatározása. A harmadik oszlopban pedig az, hogy az új ismeretlen bevezetésével milyen egyszerűbb egyenlethez jutunk. Kösd össze az összetartozókat!

$(x^2 + 3)^2 + x^2 + 3 = 2$	$a = x^2 + 3x - 3$	$a \cdot (a + 2) = 2$
$(x^2 + 3x - 3)(x^2 + 3x - 2) = 2$	$a = x^2$	$a^2 + a = 2$
$x^4 + 3x^2 = 2$	$a = x^2 + 3x$	$a^2 + 3a = 2$
$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 2$	$a = x^2 + 3$	$a \cdot (a + 1) = 2$

7. E2 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán új ismeretlen bevezetésével!

$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 8) = -12$

$(x^2 + 3x - 3)(x^2 + 3x - 2) = 2$

8. E1 Oldd meg az egyenletrendszereket a valós számok halmazán! Első lépésként vezess be új ismeretleneket $\frac{1}{x}$ és $\frac{1}{y}$ helyébe!

a)
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{7}{y} = 10 \end{cases}$$

9. E1 Egy tartályt két csapon keresztül lehet megtölteni. Ha az első csap 30 percig van nyitva, a második csap pedig csak 20 percig, akkor az üres tartály 70% -a lesz tele. Ha viszont fordítva történik, és az első csap 20 percig van nyitva, a második csap pedig 30 percig, akkor az üres tartály 80% -a lesz tele. Hány perc alatt töltén meg az üres tartályt külön az első csap, illetve külön a második csap?

10. E2 Oldd meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán! Vezess be új ismeretleneket!

a)
$$\begin{cases} \frac{4}{x+1} + \frac{1}{3-y} = 9 \\ \frac{5}{x+1} - \frac{2}{3-y} = 8 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{30}{x+2y} + \frac{16}{y-3x} = 1 \\ \frac{24}{x+2y} + \frac{10}{3x-y} = \frac{13}{2} \end{cases}$$



egyszerű abszolútértékes egyenlet grafikus megoldása



abszolútértékes egyenlet algebrai megoldása

KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik valós számok esetén teljesül, hogy $|2x - 8| = 3x - 7$?

Megoldás:

Egy kifejezés abszolút értéke egyenlő:

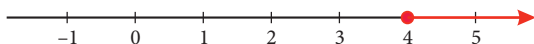
▶ magával a kifejezéssel, ha a kifejezés pozitív vagy 0;

▶ az ellentettjével, ha a kifejezés negatív.

Ez alapján bontsuk a megoldást két esetre!

1. eset: $2x - 8 \geq 0$.

Ez akkor teljesül, ha $2x \geq 8$, azaz ha $x \geq 4$.



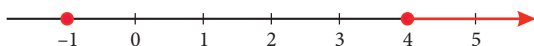
Vagyis az első esetben csak 4-nél nagyobb vagy egyenlő számok között keressük a megoldást.

Ekkor $|2x - 8| = 2x - 8$, hiszen $2x - 8$ nemnegatív. Ezért az egyenlet ilyen alakra írható:

$$2x - 8 = 3x - 7$$

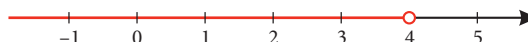
Ezt mérlegelvvel megoldva: $x = -1$.

Meg kell vizsgálni, hogy ez a megoldás eleme-e annak az intervallumnak, ahol ebben az esetben a megoldást kerestük. -1 kisebb, mint 4, ezért az abszolútértékes egyenletnek a -1 NEM megoldása.



2. eset: $2x - 8 < 0$.

Ez akkor teljesül, ha $2x < 8$, azaz ha $x < 4$.



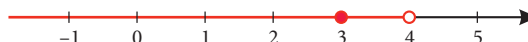
A második esetben tehát csak 4-nél kisebb számok között keressük a megoldást.

Ekkor $|2x - 8| = -2x + 8$, hiszen $2x - 8$ negatív. Ezért az egyenlet ilyen alakra írható:

$$-2x + 8 = 3x - 7$$

Mérlegelvvel megoldva: $5x = 15$, azaz $x = 3$.

Meg kell vizsgálni, hogy $x = 3$ eleme-e annak az intervallumnak, ahol ebben az esetben a megoldást kerestük. 3 kisebb, mint 4, ezért $x = 3$ megoldása az egyenletnek.



Behelyettesítéssel ellenőrizve:

$$|2 \cdot 3 - 8| = |-2| = 2 \quad \text{és} \quad 3 \cdot 3 - 7 = 2.$$

FELADATOK

- 1. E1** Egy bogár $9 \frac{m}{s}$ állandó sebességgel repül. Amikor elkezdjük figyelni, 18 m-re van egy lámpától, és egyenesen a lámpa felé tart. De nem száll le a lámpára, hanem közvetlenül mellette, irányváltoztatás nélkül ugyanolyan sebességgel repül tovább, és távolodik a lámpától. A megfigyelés pillanatától mérve melyik időpontokban lesz pontosan 3 m-re a lámpától?



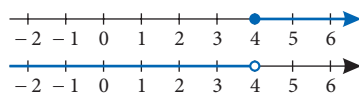
Abszolútértékes egyenlet megoldása

Leggyakrabban alkalmazható módszerek:

▶ algebrai megoldás esetszétválasztással

Segít, ha számegyenesen ábrázolod az egyes esetekhez tartozó intervallumokat.

Például:



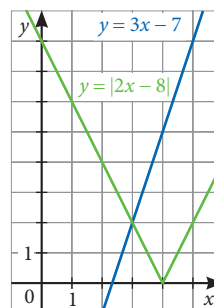
$x \geq 4$ esetben az $x = -1$ nem lehet megoldás;

$x < 4$ esetben az $x = 3$ lehet megoldás.

▶ grafikus megoldás

Olvasd le a grafikonról a megoldást, majd ellenőrizd behelyettesítéssel!

Például: A Kidolgozott feladat grafikusan megoldható az ábrán látható grafikon segítségével.



FELADATOK

2. E1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|3x + 2| = 4x + 2$

b) $3 - 5x = |8x - 6|$

c) $|7x + 5| = 5x - 5$

d) $14 - 9x = |12x - 7|$

3. E1 Egy valós számról tudjuk, hogy a számegyenesen a 12,4-től mért távolsága háromszor akkora, mint a -3,6-tól mért távolsága. Melyik lehet ez a szám? Írj fel olyan abszolútértékes egyenletet, amely megfelel a feladat szövegének!

4. E2 Melyik valós számra teljesül, hogy a számegyenesen a 15-től mért távolsága kétszer akkora, mint amennyivel a szám maga nagyobb 3-nál?

5. E1 (Emelt szintű érettségi, 2007, 2015, 2020)

Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2 = |x - 6|$

b) $|x - |x|| = 2x - 1$

c) $|x - 2| = 7 + 0,25x^2$

6. E2 A lépéseket követve, algebrai úton oldd meg az egyenletet!

$$|x + 3| + |2x + 4| = 8$$

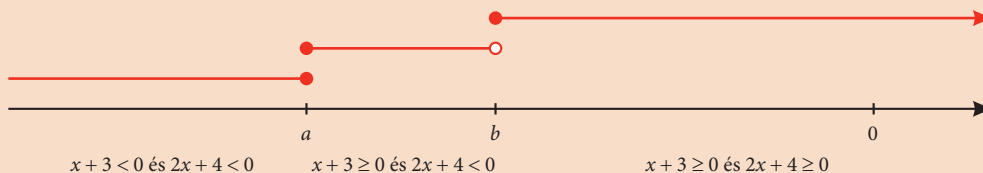
a) Melyik intervallumon lesz $x + 3$ pozitív vagy 0, és melyiken negatív?
Melyik intervallumon lesz $2x + 4$ pozitív vagy 0, és melyiken negatív?

b) Bontsd 3 esetre a feladatot! Az alábbi számegyenesen megjelöltünk 3 intervallumot. Mit jelöl a és b ?

c) Oldd meg az egyenletet mindhárom esetben! Figyelj arra, hogy amikor az abszolútérték-jelen belül szereplő kifejezés negatív, akkor annak abszolút értéke az ellentettje.

d) Mindhárom eredményt vedd össze azzal az intervallummal, amelyben épp akkor a megoldást kerestük! Melyik esetben van benne az intervallumban a megoldás, melyik esetben nincs?

e) A megoldásokat ellenőrizd behelyettesítéssel!





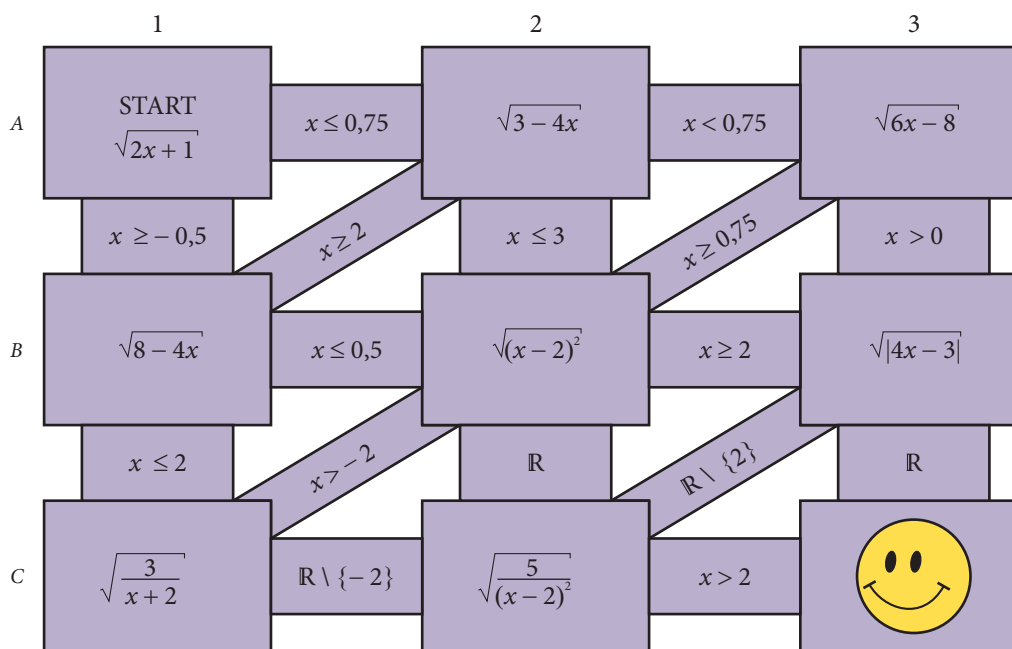
négyzetgyök fogalma, $\sqrt{x+b} = cx + d$ típusú egyenlet megoldása, hamis gyök



legfeljebb két négyzetre emeléssel megoldható egyenlet megoldása

BEVEZETŐ

Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát! Az egyes négyzetgyökben lévő kifejezések értelmezési tartománya megmutatja, hogy melyik úton lépi át a következő mezőre. Indulj a bal felső mezőről, és juss el a ☺-ig!



ELMÉLET

1. Ne felejtse el!

Bármely valós x esetén:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

2. Négyzetgyökös egyenletek megoldása:

Határozzuk meg az értelmezési tartományt!

Oldjuk meg az egyenletet!

Ellenőrizzünk!

Négyzetgyökkel alatt nem állhat negatív szám.

Négyzetre emelés előtt, ha lehet, rendezzük úgy az egyenletet, hogy a gyökös tag önmagában álljon!

Ha több gyökkel szerepel az egyenletben, akkor rendszerint több négyzetre emelés szükséges. Négyzetre emelés előtt összevonásokkal, mérlegelvével rendezzük az egyenletet minél egyszerűbb alakra.

Vigyázat! Kaphatunk hamis gyököt!

Helyettesítsük be a kapott x értéket ellenőrzésképpen az eredeti egyenletbe!

A négyzetre emelés különböző előjelű oldalak esetén nem ekvivalens átalakítás. Igaz ugyan, hogy ha két valós szám egyenlő, akkor a négyzetük is egyenlő, de visszafelé ez már nem teljesül. Ha két valós szám négyzete egyenlő, akkor a számok lehetnek különbözők, egymás ellentettjei.

$$A = B \Rightarrow A^2 = B^2, \quad \text{de} \quad A^2 = B^2 \Rightarrow A = B \text{ vagy } A = -B.$$

Ezért a négyzetre emelés után kapott egyenletnek több megoldása lehet, mint az eredeti egyenletnek. Kaphatunk **hamis gyököket**, vagyis olyan értéket, amely eleme ugyan az értelmezési tartománynak, de az eredeti egyenletnek nem megoldása. Ezért a négyzetre emelés után nagyon fontos az ellenőrzés, vagy azt megelőzően az oldalak előjelének vizsgálata.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet! $\sqrt{4x} + \sqrt{x+24} = 7$

Első megoldás:

A gyökjel alatti kifejezés nem negatív, ezért

$$4x \geq 0 \text{ és } x + 24 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

Emeljük négyzetre az egyenlet két oldalán álló kifejezést!

$$4x + 2 \cdot \sqrt{4x} \cdot \sqrt{x+24} + x + 24 = 49$$

Rendezzük úgy, hogy a gyökös kifejezés önmagában álljon az egyenlet egyik oldalán!

$$2\sqrt{4x(x+24)} = 25 - 5x$$

$$2\sqrt{4x^2 + 96x} = 25 - 5x$$

Emeljük ismét négyzetre!

$$16x^2 + 384x = 625 - 250x + 25x^2$$

Átrendezve: $9x^2 - 634x + 625 = 0$.

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{625}{9} \approx 69,44$.

Mivel az egyenlet megoldása során kétszer is négyzetre emeltünk (ami a valós számok halmazán általában nem ekvivalens művelet), ezért ellenőriznünk kell behelyettesítéssel, hogy x_1 és x_2 megoldásai-e az eredeti egyenletnek.

Ellenőrzés:

$x_1 = 1$ esetén $\sqrt{4x} + \sqrt{x+24} = \sqrt{4} + \sqrt{25} = 7$. Tehát $x_1 = 1$ valóban megoldás.

$$x_2 = \frac{625}{9} \text{ esetén } \sqrt{4x} + \sqrt{x+24} = \sqrt{\frac{2500}{9}} + \sqrt{\frac{841}{9}} =$$

$$= \frac{50}{3} + \frac{29}{3} \neq 7. \text{ Tehát } x_2 \text{ nem megoldás.}$$

Ezért egy megoldás van, az $x = 1$.

Második megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq 0$.

Az egyenlet megoldása során több olyan lépést végzünk, amikor négyzetre emeljük az egyenlet két oldalán álló kifejezést. Ezen lépés előtt azonban mindig vizsgáljuk meg, hogy melyik kifejezésnek mi az előjele.

- ▶ Ha azt látjuk, hogy mindkét oldal pozitív vagy 0, akkor a négyzetre emelés ekvivalens művelet.
- ▶ Ha az egyik oldal esetén egyértelmű, hogy az ott lévő kifejezés értéke pozitív vagy 0, akkor a másik oldal értéke is pozitív vagy 0 kell legyen, ez alapján érdemes leszűkítenünk az értelmezési tartományt.

$$\sqrt{4x} + \sqrt{x+24} = 7$$

Az értelmezési tartomány ($x \geq 0$) esetén mindkét oldal értéke pozitív vagy 0. Ezért a négyzetre emelés ekvivalens művelet.

$$4x + 2 \cdot \sqrt{4x} \cdot \sqrt{x+24} + x + 24 = 49$$

Rendezzük úgy, hogy a gyökös kifejezés önmagában álljon az egyenlet egyik oldalán!

$$2\sqrt{4x(x+24)} = 25 - 5x$$

$$2\sqrt{4x(x+24)} = 25 - 5x$$

A bal oldalon álló kifejezés értéke biztosan pozitív vagy 0.

Ezért a jobb oldalon álló kifejezés értéke is pozitív vagy 0 kell legyen.

Teljesül tehát, hogy $25 - 5x \geq 0$, azaz $x \leq 5$.

Szűkítsük le az értelmezési tartományt: $0 \leq x \leq 5$.

Ezen a halmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$16x^2 + 384x = 625 - 250x + 25x^2$$

Átrendezve: $9x^2 - 634x + 625 = 0$.

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{625}{9} \approx 69,44$.

A gyökök közül $x_2 > 5$, ezért nem megoldás. $x_1 = 1$ eleme a leszűkített értelmezési tartománynak. Ezen a halmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért $x = 1$ megoldása az eredeti egyenletnek, és más megoldás nincs.

Megjegyzés:

1. A második megoldás rávilágít arra, hogy miért kaphatunk hamis gyököt. Helyettesítsük be $x_2 = \frac{625}{9}$ -et a második négyzetre emelés előtt felírt $2\sqrt{4x(x+24)} = 25 - 5x$ egyenletbe!

$$2\sqrt{4x(x+24)} = 2\sqrt{4 \cdot \frac{625}{9} \cdot \frac{841}{9}} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{29}{3} = \frac{2900}{9}$$

$$25 - 5x = 25 - 5 \cdot \frac{625}{9} = \frac{225}{9} - \frac{3125}{9} = -\frac{2900}{9}$$

A két érték egymás ellentettje. A négyzetük egyenlő, ezért a négyzetre emelés során kapott egyenletnek a $\frac{625}{9}$ valóban megoldása, míg a négyzetre emelés előtti egyenletnek nem megoldása.

2. Megtehetjük, hogy átvisszük ez egyik gyökös tagot a másik oldalra, és úgy emeljük négyzetre az egyenletet.

$$\sqrt{x+24} = 7 - \sqrt{4x} \quad \text{négyzetre emelve:} \quad x + 24 = 49 - 14\sqrt{4x} + 4x.$$

Átrendezve: $14\sqrt{4x} = 3x + 25$, négyzetre emelve: $784x = 9x^2 + 150x + 625$, átrendezve: $9x^2 - 634x + 625 = 0$.
Innentől a megoldás követi az *Első megoldásban* leírt lépéseket.

FELADATOK

1. K2 Igaz vagy hamis? Add meg az állítások logikai értékét!

		Igaz vagy hamis?
A	$\sqrt{(-7)^2} = 7$.	
B	Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2} = x$.	
C	Van olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, melyre $-\sqrt{x^2} = x$.	
D	Ha x pozitív valós szám, akkor $(\sqrt{x})^2 = x$.	

2. K1 (Középszintű érettségi, 2010)

Válaszd ki az $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ halmaz elemei közül azokat a számokat, amelyek megoldásai a $\sqrt{x^2} = -x$ egyenletnek!

3. E1 Ha egy v_0 kezdősebességről induló test sebessége a gyorsulással változik, akkor a test sebessége a következő módon írható fel: $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$, ahol v_0 a test kezdősebessége, a a gyorsulása, s pedig a megtett út. Fékezésakor egy motorkerékpár gyorsulása $a = -7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

(A negatív érték azt jelenti, hogy a motorkerékpár sebessége csökken, azaz a jármű lassul.)

a) Mekkora út megtétele alatt áll meg, ha kezdősebessége $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

b) Mekkora út megtétele alatt tud lefékezni $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességről $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességre?

4. E1 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

$$\text{a) } \sqrt{\frac{1}{x-2}} = \sqrt{\frac{11}{x}} \quad \text{b) } \sqrt{3+\sqrt{x-3}} = 4$$

5. E1 A következő egyenleteknek a valós számok halmazán különböző számú gyöke van. Melyiknek mennyi?

$$\text{a) } \sqrt{2x+5} + x = -1 \quad \text{c) } \sqrt{2x+5} + 2 = \frac{1}{2}x$$

$$\text{b) } \sqrt{2x+5} + \frac{1}{2}x = -2$$

6. E1 Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

$$\text{a) } \sqrt{2x+12} - 2 = x$$

$$\text{b) } \sqrt{2+\sqrt{2x-5}} = 3$$

7. E1 (Emelt szintű érettségi, 2016)

Oldd meg a $[4; 6]$ alaphalmazon az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+10} - 1$$

8. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$$\sqrt{6x-24} = \sqrt{2x-7} - 1$$

9. E2 Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert! Vezess be új ismeretleneket!

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + 2\sqrt{2y+1} = 10 \\ 4\sqrt{x-2} - 3\sqrt{2y+1} = 7 \end{cases}$$



nevezetes azonosságok az $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ és $a^2 - b^2$ kifejezésekkel



egyenletmegoldás értelmezési tartomány, illetve értékkészlet vizsgálatával, valamint szorzattá alakítással, az $a^n - b^n$ és az $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ kifejezések szorzattá alakítása, a másodfokú egyenlet megoldóképletének bizonyítása

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{5x-2} + \sqrt{2-5x} + 10x = 4$

b) $\sqrt{5x-2} + \sqrt{2-5x} + 15x = 10$

Megoldás:

Határozzuk meg az egyenletek értelmezési tartományát! A gyökjel alatt nem állhat negatív szám, ezért $5x - 2 \geq 0$, amiből $x \geq \frac{2}{5}$, valamint $2 - 5x \geq 0$, amiből $x \leq \frac{2}{5}$. Ez a két feltétel azonban egyszerre csak akkor teljesül, ha $x = \frac{2}{5}$. Így az egyenlet értelmezési tartománya egyetlen számból áll: $\left\{\frac{2}{5}\right\}$. Meg kell vizsgálnunk azonban, hogy a lehetséges érték kielégíti-e az eredeti egyenletet. Ha az egyenlőség igaz, akkor az egyenlet megoldása $x = \frac{2}{5}$. Ha az egyenlőség nem teljesül, akkor nincs megoldás.

a) $\sqrt{5 \cdot \frac{2}{5} - 2} + \sqrt{2 - 5 \cdot \frac{2}{5}} + 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ ✓, ezért megoldása $x = \frac{2}{5}$.

b) $\sqrt{5 \cdot \frac{2}{5} - 2} + \sqrt{2 - 5 \cdot \frac{2}{5}} + 15 \cdot \frac{2}{5} \neq 4$, ezért nincs megoldás.

2. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $(2x - 3)^2 + |2x - 3| = -\sqrt{2x + 3}$

b) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

Megoldás:

a) Az egyenlőséggel bal oldalán álló tagok nem vehetnek fel negatív értéket. Így a bal oldal értéke legalább 0. A jobb oldalon álló kifejezés értéke viszont legfeljebb 0.

$$(2x - 3)^2 \geq 0$$

$$|2x - 3| \geq 0$$

$$-\sqrt{2x + 3} \leq 0$$

Ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a mindkét oldal egyenlő 0-val.

A bal oldal akkor 0, ha $2x - 3 = 0$, azaz $x = 1,5$.

A jobb oldal akkor 0, ha $2x + 3 = 0$, azaz $x = -1,5$.

Ezért nem lehet a két oldal értéke egyszerre 0, vagyis az egyenletnek nincs megoldása.

b) Emeljünk ki x -et!

$$x(x^4 - 8x^2 + 16) = 0$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben egy teljes négyzet szerepel!

$$x(x^2 - 4)^2 = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

$$x = 0$$

vagy

$$(x^2 - 4)^2 = 0$$



$$x^2 - 4 = 0$$



$$x = \pm 2$$

Ezért az egyenlet megoldásai 0; -2 és 2.



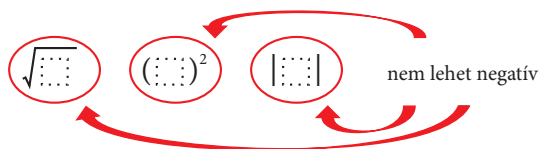
1. Egyenletmegoldás értelmezési tartomány vizsgálatával

Ha az egyenletben olyan algebrai kifejezések (pl. gyökös kifejezések) szerepelnek, melyek értelmezési tartományának nincs közös része, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha az értelmezési tartományok metszete csak néhány számból áll, akkor behelyettesítéssel ellenőrizni kell, hogy ezek megoldásai-e az egyenletnek.



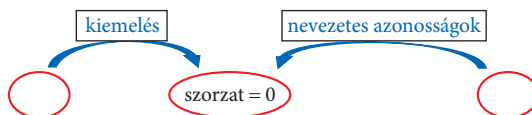
2. Egyenletmegoldás értékkészlet vizsgálatával

Négyzetre emelés, illetve gyökvonás eredménye nem lehet kisebb, mint 0. Ha az egyenlet két oldalán olyan algebrai kifejezés áll, melyek értékkészletének nincs közös része, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha az értékkészletek metszete csak néhány (pl. egy vagy két) szám, akkor azt kell ellenőrizni, hogy ugyanazon a helyen veszi-e fel a két kifejezés a közös értéket.



3. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással

Magasabb fokú egyenletek megoldásakor segíthet a szorzattá alakítás. Ha egy egyenlet olyan alakra rendezhető, hogy az egyik oldalon egy szorzat áll, a másik oldalon a 0, akkor az egyenlet gyökei az az értékek adják, amelyek a szorzat egyes tényezőit 0-vá teszik.



4. Nevezetes azonosságok

A szorzattá alakításban segíthetnek a nevezetes azonosságok.

Minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Minden $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$ esetén:

$\blacktriangleright$ $a^n - b^n$ szorzattá alakítható oly módon, hogy belőle az $(a-b)$ tényező kiemelhető:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$\blacktriangleright$ $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ szorzattá alakítható oly módon, hogy belőle az $(a+b)$ tényező kiemelhető:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + b^{2n})$$

Például: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Az azonosságokat (további azonosságokkal kiegészítve) megtalálod a függvénytáblázatban is.

5. A másodfokú egyenlet megoldóképletének bizonyítása

Igazoljuk az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) megoldóképletét!

Bizonyítás:

Szorozzuk meg az egyenletet $4a$ -val! ($4a \neq 0$)

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Mivel $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$, ezért a bal oldalon álló első két tag így írható: $(2ax + b)^2 - b^2$.

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor nincs valós gyök.

Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor $2ax + b = 0$

$\blacktriangleright$ egy (két egybeeső) valós gyök van: $x = -\frac{b}{2a}$.

Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor $|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$.

$$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{vagy} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$\blacktriangleright$ két különböző valós gyök van: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

- 1. K2** Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{3x-7}$ c) $\sqrt{\frac{5}{3-2x}}$ e) $\sqrt{-x^2}$
 b) $\sqrt{x^2-4}$ d) $\sqrt{(x-5)^2}$

- 2. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $\sqrt{x-5} + 4 = \sqrt{2-x}$
 b) $5 + \sqrt{2x-5} = \sqrt{2,5-x} + 2x$
 c) $\sqrt{\frac{x-1}{3}} + 4 = 2 - \sqrt{1-x}$

- 3. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3 = 2 - \sqrt{x}$
 b) $(12x-3)^2 + 3 = 3 - |4x-1|$

- 4. E2** Figyeld meg a kifejezések értelmezési tartományát, illetve értékkészletét, és ezek alapján a kifejezéseket felhasználva állíts össze olyan egyenleteket, amelyeknek nincs megoldása a valós számok halmazaán! Legalább két kifejezést használj az egyenletekben!

$\sqrt{2x-6}$ $\sqrt{5-2x}$ $\sqrt{\frac{1}{3-x}}$ $\frac{6}{x-4}$
 $-(x-5)^2$ x^2+5 $-|x+5|$ $\left|\frac{1}{x+5}\right|$

- 5. E1** Melyik (x, y) számpárok esetén teljesül az egyenlőség? Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $|x-7| + \sqrt{y+5} = 0$ b) $(x-6)^2 + \sqrt{\frac{1}{y}} = 0$

- 6. E2** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán! Segít a szorzattá alakítás.

a) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0$
 b) $2x^5 - 12x^4 + 18x^3 = 0$
 c) $\frac{-x^5 + 8x^2}{x-2} = 0$

- 7. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $x^3 - x^2 - 42x = 0$
 b) $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 = 0$

- 8. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán! Alkalmazd a nevezetes azonosságokat!

a) $\frac{x^3-8}{x-2} = 0$
 b) $\frac{27x^3-1}{3x-1} = 13$
 c) $\frac{x^4-625}{x^2+25} = 24$

- 9. E2** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán! Használd a nevezetes azonosságokat!

a) $\frac{x^3-27}{x-3} = 7$
 b) $\frac{x^4-16}{x-2} = 0$
 c) $\frac{125+x^3}{x+5} = 19$
 d) $\frac{x^3+1}{x+1} = 3$

- 10. E2** Melyik (x, y) számpárok esetén teljesül az egyenlőség? Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$
 b) $x^2 - 12x + y^2 + 2y + 37 = 0$
 c) $x^2 - 6x + y^2 + 10y = -34$





paraméter, paraméteres elsőfokú egyenletek megoldása

BEVEZETŐ

Mekkora sebességre kell lelassítanunk egy kanyarban, hogy az autó ne csússzon meg? A válasz attól függ, hogy milyen éles a kanyar és milyen csúszós az út. A kanyar sugara, valamint az autó és az út közötti súrlódási együttható egy-egy paraméter – ezek ismeretében lehetne kiszámolni a választ, hogy mekkora a megfelelő sebesség.

A paraméter a matematikai egyenletekben egy olyan együttható, amelynek nem ismerjük a konkrét értékét. Ha a paraméter helyébe különböző valós számokat helyettesítenénk be, akkor (rendszerint) különböző egyenletekhez jutnánk.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldd meg grafikus úton a $p^2x - 1 = x + p$ egyenletet a valós számok halmazán, ha a p paraméter a $\{0; 1; -1; 2; -2\}$ halmazban megadott értékeket veszi fel!

Megoldás:

Oldjuk meg a feladatot függvényábrázoló szoftver (pl. *GeoGebra*) segítségével! Vegyünk fel egy csúszkát, és nevezzük át p -nek! Ábrázoljuk az $y = p^2x - 1$ és az $y = x + p$ függvények grafikonját a valós számok halmazán, majd állítsuk be a csúszkán p -t a megadott értékekre! Mindkét oldal grafikonja egy egyenes. A p változtatásával azonban megváltozik az első függvény ($y = p^2x - 1$) esetén az egyenes meredeksége, míg a második függvény ($y = x + p$) esetén az, hogy az egyenes hol metszi az y tengelyt. Ha a két egyenes párhuzamos, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha a két egyenes egybeesik, akkor minden valós szám megoldás. Ha a két egyenes metszi egymást, akkor egy megoldás van.

$p = 0$	$p = 1$	$p = -1$	$p = 2$	$p = -2$
$p = 0$ esetén az egyenlet: $-1 = x$	$p = 1$ esetén az egyenlet: $x - 1 = x + 1$	$p = -1$ esetén az egyenlet: $x - 1 = x - 1$	$p = 2$ esetén az egyenlet: $4x - 1 = x + 2$	$p = -2$ esetén az egyenlet: $4x - 1 = x - 2$
Egy metszéspont van.	Az egyenesek párhuzamosak és nincs metszéspontjuk.	Az egyenesek egybeesnek.	Egy metszéspont van.	Egy metszéspont van.
megoldás: $x = -1$	nincs megoldás	minden valós szám megoldás	megoldás: $x = 1$	megoldás: $x = -\frac{1}{3}$

2. Hány megoldása van a valós számok halmazán a $p^2x - p^3 = 4x + 8$ egyenletnek a p paraméter különböző értékei esetén?

Megoldás:

Az egyenletben x az ismeretlen, azt kell kifejeznünk konkrét számok és a paraméter segítségével. Az x -re nézve ez egy elsőfokú, egyismeretlenes egyenlet, ezért úgy kell megoldani, mint azokat az egyismeretlenes elsőfokú egyenleteket, amelyek együtthatói konkrét számok. Ezért rendezzük egy oldalra és vonjuk össze az x -et tartalmazó tagokat, a másik oldalra az x -et nem tartalmazó tagokat.

$$p^2x - 4x = p^3 + 8$$

$$(p^2 - 4)x = p^3 + 8$$

Amikor lineáris egyenletet oldunk meg, a következő lépés az lenne, hogy osztunk az x együtthatójával. Ez az együttható azonban tartalmazza a paramétert, ezért esetszétválasztást kell alkalmazni: külön meg kell vizsgálni, hogyan alakul az egyenlet, amikor a paraméter miatt ez az együttható 0.

$p^2 - 4 = 0$ két esetben teljesül: $p = 2$ vagy $p = -2$.

1. eset: $p = 2$.

Ekkor az egyenletben konkrétan kiszámíthatjuk a hiányzó együtthatókat. Ezt kapjuk: $0x = 16$. Ennek nincs megoldása.

2. eset: $p = -2$.

Ekkor is kiszámolhatjuk a hiányzó együtthatókat. Ezt kapjuk: $0x = 0$. Ennek az egyenletnek minden valós szám a megoldása.

3. eset: $p \neq 2$ és $p \neq -2$.



Ekkor az egyenletben az x együtthatója nem nulla, ezért oszthatunk vele. Ezt kapjuk: $x = \frac{p^3 + 8}{p^2 - 4}$. Minden p esetén, amely nem 2 és nem -2, ez egy konkrét szám, ekkor ez az egyetlen szám az egyenlet megoldása.

Összefoglalva:

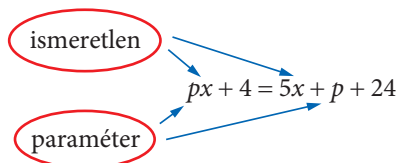
- ▶ ha $p = 2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása;
- ▶ ha $p = -2$, akkor az egyenletnek minden valós szám a megoldása,
- ▶ ha $p \neq 2$ és $p \neq -2$, akkor az egyenletnek egyetlen megoldása van: $x = \frac{p^3 + 8}{p^2 - 4}$.

ELMÉLET

Paraméteres egyenletek

Paraméteres egyenletről akkor beszélünk, ha az egyenlet néhány együtthatója nem ismert, és egy paraméter (pl. p) kifejezéséként van megadva.

Például:



Ha például p paraméter értéke 10, akkor az egyenlet így alakul: $10x + 4 = 5x + 34$.

Ennek megoldása: $x = 6$.

Ha egy paraméteres egyenlet gyökeit kell meghatároznunk, akkor az egyenlet rendezése közben úgy kell kezelünk a paramétert, mintha egy konkrét valós szám lenne. Körültekintően kell azonban eljárunk, mivel az értékét nem ismerjük. Ezért ha olyan kifejezéssel szeretnénk osztani vagy szorozni, amely tartalmazza a paramétert, akkor esetszétválasztást kell alkalmaznunk. Határozzuk meg, hogy a paraméter mely értékeinél lesz ez a kifejezés 0, majd vizsgáljuk meg, hogyan alakul az egyenlet ezekben a konkrét esetekben! Végül az egyenlet gyökeit a paraméter függvényében tudjuk meghatározni.

a paraméter (p) valós számot jelöl, úgy kell bánnunk vele, mintha konkrét valós szám lenne

az ismeretlen (x) a paraméteres tagból is kiemelhető ▶ $2x - px = (2 - p)x$

paramétert tartalmazó kifejezéssel szeretnénk osztani? ▶ esetszétválasztás

melyik konkrét p esetén lesz az a kifejezés nulla, amellyel osztanánk?

ezen konkrét p értékekkel oldjuk meg az eredeti egyenletet ▶ 1. eset / 2. eset ...

ha p ezektől az értékektől különbözik, akkor oszthatunk vele ▶ utolsó eset

A paraméter változását függvényábrázoló szoftverrel (pl. *GeoGebra*) egy csúszka állításával szimulálhatjuk. Így dinamikusan vizsgálhatjuk, hogy a paraméter értékétől függően hogyan alakul a feladat megoldása.

FELADATOK

A feladatokban p valós paramétert jelöl.

1. E1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3x + p = 12p - 8x$

b) $\frac{2x + p}{4} = \frac{3x - 2p}{2} - 1$

2. E1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2p - x = 5x - 10p + 3$

b) $\frac{x}{3} + \frac{p}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3x}{2}$

3. E1 A p paraméter mely értékei esetén lesz az egyenleteknek gyöke a 2?

a) $\frac{p+3}{2} + \frac{x+3}{5} = \frac{p+x}{4}$

b) $\left| \frac{3x+p}{4} \right| = 0,5$

4. E2 A valós számok halmazán értelmezett függvények esetében adj olyan értéket a hozzárendelési szabályban szereplő paraméternek, hogy a függvény grafikonja illeszkedjen a koordináta-rendszer megadott pontjára!

a) $f(x) = \frac{3}{4}x + p - \frac{1}{2}$ $A(2; 3)$

b) $g(x) = px + 2p - 1$ $B(4; 6)$

5. E2 Grafikon segítségével határozd meg, hogy hány megoldása van az egyenletnek a valós számok halmazán, ha p valós paraméter!

$$|x + 2| - 3 = p + 2$$

6. E2 A p valós paraméter mely értékei mellett lesz a valós számok halmazán az egyenletek gyöke a 0?

a) $3p + 4 = px + p^2$

b) $\frac{2p+1}{2} - \frac{x+p}{3} + \frac{px+1}{6} = 0$

7. E2 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $px + 3p = 9p - 10x$

b) $15 - 3px = 10p - 6x$

8. E2* Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3 - 6px = 3p + 3x$

b) $3x - p^2 = px - 9$

c) $p^2x - 25x = p^2 + 10p + 25$

9. E2* Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|2x - p| = 14$

b) $\frac{x+5}{p} = 3x - 4$

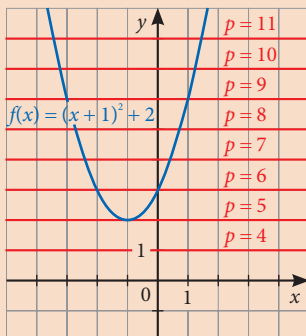


paraméteres másodfokú egyenlet

FELADATOK

- 1. E1** A grafikon segítségével határozd meg, hogy hány megoldása van az egyenletnek a valós számok halmazán, ha p valós paraméter!

$$(x+1)^2 + 2 = p - 3$$



- 2. E1** Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = (x+3)^2 - 4$ függvényt!

A grafikon segítségével határozd meg, hogy hány megoldása van a valós számok halmazán a $(x+3)^2 - 4 = 2p$ egyenletnek a p paraméter függvényében!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik számot jelölheti p , ha a $\left(\frac{5}{4}p - 1\right)x^2 + 2px + 4 = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van a valós számok halmazán?

Megoldás:

Az egyenletnek akkor van két különböző gyöke, ha

- ▶ másodfokú, azaz a főegyütthatója nem nulla, és
- ▶ a diszkriminánsa pozitív.

A főegyüttható akkor nem nulla, ha $\frac{5}{4}p - 1 \neq 0$, vagyis $p \neq 0,8$.

A diszkrimináns akkor pozitív, ha $D = (2p)^2 - 4\left(\frac{5}{4}p - 1\right) \cdot 4 = 4p^2 - 20p + 16 > 0$.

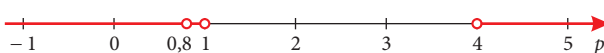
A diszkrimináns értékét egy p -től függő másodfokú kifejezés adja meg. Ábrázoljuk D értékét a p függvényében! A grafikon egy parabola, amely felfelé nyitott, hiszen a főegyütthatója pozitív, és zérushelyei meghatározhatók a megoldóképlet segítségével: $p = 1$ és $p = 4$.

A grafikonról leolvasható, hogy a diszkrimináns értéke pozitív, ha $p < 1$ vagy $p > 4$.

Összegezve:

Az egyenletnek két különböző gyöke van, ha $p \neq 0,8$, és $p < 1$ vagy $p > 4$.

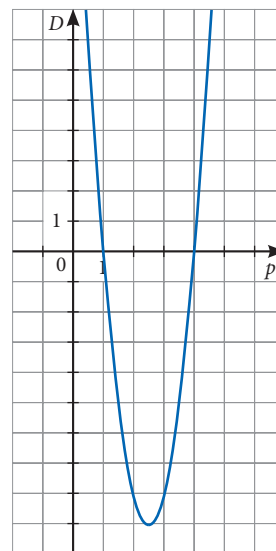
Számegyenesen ábrázolva:



Megjegyzés: Vizsgáljuk meg, hogy p néhány konkrét értéke esetén milyen egyenletet kapunk!

Ha $p = 8$ ▶ az egyenlet: $9x^2 + 16x + 4 = 0$ ▶ $D = 112$ ▶ két különböző megoldás $\mathbb{R}$ -en.

Ha $p = 2$ ▶ az egyenlet: $1,5x^2 + 4x + 4 = 0$ ▶ $D = -8$ ▶ nincs megoldás $\mathbb{R}$ -en.



Paraméteres másodfokú egyenletek

Vannak olyan paraméteres másodfokú egyenletek, amelyek esetében ismert valamilyen összefüggés vagy információ az egyenlet gyökeire vonatkozóan, és azt kell meghatározni, hogy a paraméter mely értékei esetén teljesül a megfogalmazott összefüggés, illetve információ. Például

ismert

ekkor felhasználhatjuk

az egyik valós gyök értéke

ezt az értéket behelyettesítve teljesül az egyenlőség

pontosan egy valós gyöke van

a diszkrimináns értéke nulla

nincs valós gyöke

a diszkrimináns értéke negatív

két különböző valós gyöke van

a diszkrimináns értéke pozitív

egyik gyöke pozitív, másik negatív

Viète-formulák, a diszkrimináns értéke pozitív

Ha a paraméter a főegyütthatóban is szerepel, akkor figyelni kell arra, hogy a paraméternek lehet olyan értéke, amely esetén a főegyüttható 0, ezért az egyenlet nem másodfokú. Ezt az esetet külön meg kell vizsgálni.

ha a főegyütthatóban szerepel
a paraméter

lehet olyan eset, amikor az egyenlet
nem másodfokú

Megjegyzés:

A másodfokú egyenlet megoldóképlete nem más, mint az $ax^2 + bx + c = 0$ paraméteres egyenlet valós megoldásainak felírása, melyben a , b és c valós paraméterek.

FELADATOK

- 3. E1** A p paraméter mely értéke esetén lesz az egyenleteknek pontosan egy megoldása a valós számok halmazán?

a) $x^2 - (p + 2)x + 16 = 0$

b) $x^2 + (p - 1)x + 2p - 5 = 0$

- 4. E2** A p paraméter melyik értéke esetén lesz a $px^2 + (p - 3)x + 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke a 3 a valós számok halmazán? Határozd meg ebben az esetben az egyenlet másik gyökét!

- 5. E2** A p paraméter mely értéke esetén lesz az egyenleteknek két különböző megoldása a valós számok halmazán?

a) $x^2 + px + 3p - 8 = 0$

b) $px^2 + px + 5 = 0$

c) $px^2 + (p - 3)x + 1 = 0$

d) $px^2 + (p + 2)x + \frac{9}{4} = 0$

- 6. E2** (Emelt szintű érettségi, 2020)

Adott az $x^2 - (4p + 1)x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

- a) Igazold, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!
- b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?
- c) Határozd meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

- 7. E2** (Emelt szintű érettségi, 2011)

Vizsgáld meg a következő paraméteres egyenlet megoldásainak számát a k paraméter függvényében! A k paraméter valós szám, az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. (Használj hozzá grafikont!)

$$|(x - 2)^2 - 1| = k$$



elsőfokú, másodfokú egyenlőtlenség megoldása, grafikus megoldás



egyenlőtlenség-rendszer, törtes, négyzetgyökös egyenlőtlenség megoldása

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldd meg az $\frac{x+3}{2x-2} > 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Első megoldás:

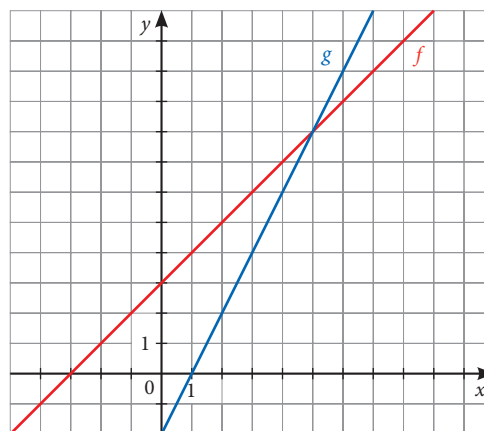
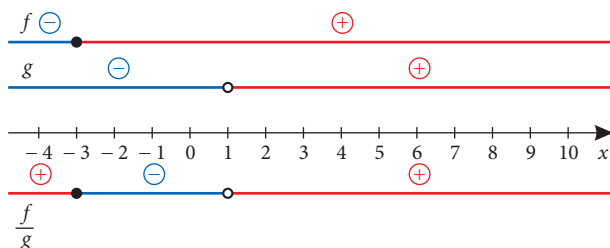
Az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x + 3$ és $g(x) = 2x - 2$ függvények grafikonját!

Mikor lesz a feladatban szereplő tört értéke pozitív?

- ▶ amikor a számlálóban és a nevezőben álló kifejezés értéke pozitív – ekkor mindkét grafikon az x tengely fölött halad;
- ▶ amikor a számlálóban és a nevezőben álló kifejezés értéke negatív – ekkor mindkét grafikon az x tengely alatt halad.

Érdekes számegyenesen ábrázolni a kifejezések előjelét. A számláló pozitív, ha $x > -3$, nulla, ha $x = -3$, és negatív, ha $x < -3$. A nevező pozitív, ha $x > 1$, és negatív, ha $x < 1$. A nevező nem lehet nulla, emiatt $x \neq 1$.



A számegyenesről leolvasható, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $x > 1$.

Más jelöléssel felírva: $x \in]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$.

Második megoldás:

Az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Egy tört értéke pozitív, ha számlálójának és nevezőjének az előjele megegyezik. Ez két esetre bontja a feladatot. Mindkét esetben egyszerre teljesül a számlálóra és a nevezőre felírt egyenlőtlenség, tehát két egyenlőtlenség-rendszert kapunk.

$$\text{Első eset: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ 2x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ 2x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 1 \end{cases}$$

Mindkét egyenlőtlenség teljesül, ha $x > 1$. (Ebben az esetben a számláló és a nevező is pozitív.)

$$\text{Második eset: } \begin{cases} x+3 < 0 \\ 2x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ 2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < 1 \end{cases}$$

Mindkét egyenlőtlenség teljesül, ha $x < -3$. (Ebben az esetben a számláló és a nevező is negatív.)

A feladat megoldása tehát: $x < -3$ vagy $x > 1$.

1. Egyenlőtlenség törtes kifejezésekkel

Egy tört értéke pozitív, ha számlálójának és nevezőjének az előjele megegyezik: vagy mindkettő pozitív vagy mindkettő negatív. A tört értéke negatív, ha a számláló és a nevező közül az egyik pozitív és a másik negatív. Ennek segítségével oldható meg egy törtes egyenlőtlenség, ha a relációs jel egyik oldalán a nulla áll. Érdekes grafikonon vagy számegyenesen ábrázolni, hogy a kifejezések mikor vesznek fel pozitív, és mikor negatív értéket.

Ha az egyik oldalon egy törtes kifejezés, a másik oldalon egy nullától különböző valós szám áll, akkor rendezzük egy oldalra az egyenlőtlenséget, és közös nevezőre hozva vonjuk össze a tagokat.

Például:

$$\frac{x+2}{x+10} > 3 \quad \rightarrow \quad \text{átrendezve: } \frac{x+2}{x+10} - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{a tagokat összevonva: } \frac{x+2-3(x+10)}{x+10} > 0$$

$$\text{egyszerűbb alakban: } \frac{-2x-28}{x+10} > 0 \quad \rightarrow \quad \text{a feladatot visszavezettük egy egyszerűbb feladatra.}$$

(A megoldás: $x \in]-14; -10[$.)

Megjegyzés: Egyenlőtlenség-rendszert oldunk meg, amikor azt vizsgáljuk, milyen valós számok esetén teljesül egyszerre két egyenlőtlenség, például az, hogy a számláló és a nevező is pozitív.

2. Egyenlőtlenség négyzetgyökös kifejezésekkel

Nemnegatív számok esetén teljesül, hogy nagyobb szám négyzete nagyobb, kisebb szám négyzete kisebb. Ezért ha az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív vagy nulla, akkor a négyzetre emelés után kapott egyenlőtlenség ugyanakkor teljesül, mint az eredeti egyenlőtlenség.

Négyzetgyökös egyenlőtlenségeknél ne feledkezz el az értelmezési tartományról!

3. Mérlegelv egyenlőtlenségek esetén

Nem változik meg az egyenlőtlenség megoldása, ha a relációs jel két oldalán álló kifejezést

ugyanazzal a valós számmal növeljük vagy csökkentjük;		✓
ugyanazzal a pozitív valós számmal szorozzuk vagy osztjuk;		✓
ugyanazzal a negatív valós számmal szorozzuk vagy osztjuk	és megfordítjuk a relációs jel irányát.	✓

Óvatosan kell eljárni, ha olyan kifejezéssel szeretnénk szorozni vagy osztani, amely ismeretlent tartalmaz. Ekkor külön meg kell vizsgálni, hogy ennek értéke lehet-e nulla, illetve hogy ennek értéke pozitív vagy negatív. Ha pozitív és negatív értéket is felvehet, akkor az algebrai levezetést több esetre kell bontani.

4. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Grafikus megoldás során ábrázoljuk annak a két függvénynek a grafikonját, amelyek az egyenlőtlenség két oldalán álló kifejezéshez tartoznak!

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben!

Ha segít, rendezzük át az egyenlőtlenséget!

Keressük a metszéspontokat!

Olvassuk le a metszéspontok első koordinátáit! Ellenőrizzünk behelyettesítéssel!

Olvassuk le a grafikonról a megoldást!

Melyik grafikon van „feljebb”, melyik van „lejjebb”?

Grafikus megoldást érdemes követni például a másodfokú és az abszolútértékes egyenlőtlenségeknél.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{2x+3} \leq 5$ b) $-2 < \sqrt{x-5}$

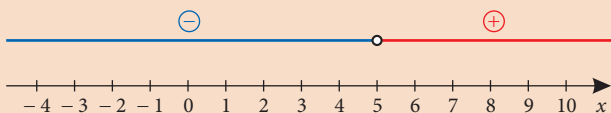
Megoldás:

a) Az értelmezési tartomány: $x \geq -1,5$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalán álló kifejezés értéke nemnegatív, ezért elég megoldani a négyzetre emelés után kapott $2x + 3 \leq 25$ egyenlőtlenséget. Ebből: $x \leq 11$, az értelmezési tartománnyal összevetve a feladat megoldása: $-1,5 \leq x \leq 11$.

b) Az értelmezési tartomány: $x \geq 5$. Az egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés értéke nemnegatív, ezért biztosan nagyobb, mint -2 . Ezért a megoldás az értelmezési tartomány minden eleme: $x \geq 5$.

FELADATOK

1. E1 A számegyenesen bejelöltük, hogy $x - 5$ értéke milyen x esetén pozitív, illetve negatív. Hasonló módon ábrázold, hogy $2 - x$ értéke mikor pozitív, mikor negatív!



A számegyenes segítségével oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x-5}{2-x} > 0$ b) $\frac{x-5}{2-x} \leq 0$

2. E1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x+4}{x+7} > 0$ b) $\frac{2x+10}{3-x} \leq 0$ c) $\frac{x-1}{3-x} > 0$

3. E1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{2x+8} < 4$ b) $\sqrt{4x+1} \geq 2$

4. E1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $|2x-1| \geq 3$ b) $|6-5x| \leq 3$

5. E2 (Középszintű érettségi, 2006)

Egy osztály történelemdolgozatot írt. Öt tanuló dolgozata jeles, tíz tanulóé jó, három tanulóé elégséges, két tanuló elégtelen dolgozatot írt. Hányan írtak közepes dolgozatot, ha tudjuk, hogy az osztályátlag 3,41-nál nagyobb és 3,42-nál kisebb?

6. E2 Egy vegyi üzemben összeöntenek 15 liter 10%-os oldatot és valahány liter 35%-os oldatot ugyanabból az anyagból. A keletkező oldat töménysége több mint 27%, és kevesebb mint 28%. Hány litert használhattak a 35%-os oldatból?

7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2018)

Oldd meg az $\frac{x-4}{x-6} \leq -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

8. E1 Add meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{4x+5-x^2}$ b) $\sqrt{14+5x-x^2}$

9. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\sqrt{\frac{x}{5}} - 4 < 20$$

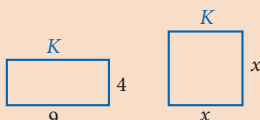


nevezetes középértékek, a középértékekre vonatkozó egyenlőtlenségek

FELADATOK

- 1. K2** Az $ABCD$ téglalap oldalai 4 egység és 9 egység hosszúak. Mekkora az oldalai annak a négyzetnek, amelynek

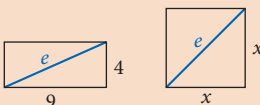
a) kerülete ugyanannyi, mint az $ABCD$ téglalap kerülete?



b) területe ugyanannyi, mint az $ABCD$ téglalap területe?



c) átlója ugyanolyan hosszú, mint az $ABCD$ téglalap átlója?



- 2. E1** Mi a válasz az 1. feladatban feltett kérdésekre, ha a téglalap oldalainak hossza a és b ($a, b \in \mathbb{R}^+$)?

- 3. E1** Az 1 km hosszú utat egyik irányban $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, visszafelé ugyanezt az utat $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tesszük meg.

- a) Összesen mennyi ideig tartott az oda-vissza út?
b) Mekkora volt az oda-vissza út során az átlagsebesség (átlagsebesség: a megtett út teljes hosszát elosztjuk a megtételéhez szükséges idővel)?
c) Mi a válasz az a) és b) pontban feltett kérdésekre, ha a sebességünk az egyik irányban $v_1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik irányban $v_2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

ELMÉLET

1. Nevezetes középértékek

Definíció: Legyenek a és b pozitív valós számok. Ekkor

a és b számtani közepe	az átlaguk, vagyis az összegük fele	$\frac{a+b}{2}$
a és b mértani közepe	a szorzatuk négyzetgyöke	$\sqrt{ab}$
a és b négyzetes közepe	a négyzeteik átlagának négyzetgyöke	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
a és b harmonikus közepe	a reciprokaik átlagának reciproka	$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

Megjegyzések:

- ▶ A számtani közepe értelmezzük minden valós szám esetén, azaz negatív számok és a nulla esetében is. A többi középértéket pozitív számok esetén szokták értelmezni.
- ▶ A középértékek több szám esetén is értelmezhetők.

2. Nevezetes közepek közti egyenlőtlenségek

Tétel: Minden a, b pozitív valós szám esetén teljesül:

harmonikus közepük $\leq$ mértani közepük $\leq$ számtani közepük $\leq$ négyzetes közepük.

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

Például a 4 és 9 számok nevezetes középértékei:

Harmonikus közép	Mértani közép	Számtani közép	Négyzetes közép
$\frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{72}{13} \approx 5,54$	$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} \approx 6$	$\frac{4+9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$	$\sqrt{\frac{4^2+9^2}{2}} = \sqrt{\frac{97}{2}} \approx 6,96$

3. Példák A középértékeket sokféle folyamatban, jelenségben felfedezhetjük.

- ▶ Számtani közép: átlagszámítás, pl. osztályzatok, életkorok, testmagasságok átlaga.
- ▶ Mértani közép: pénzügyi folyamatokban, pl. banki kamatozás, infláció.
- ▶ Négyzetes közép: hibaszámítás mérési eredmények elemzésekor, statisztikai szórás.
- ▶ Harmonikus közép: átlagsebesség, párhuzamos kapcsolás.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, ha $a, b \in \mathbb{R}^+$!

Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív szám áll, négyzetre emelhetjük a két kifejezést: a reláció pontosan akkor teljesül, amikor a négyzeteik között teljesül ugyanaz a reláció.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\geq (\sqrt{ab})^2 \\ \frac{a^2+2ab+b^2}{4} &\geq ab \\ a^2+2ab+b^2 &\geq 4ab \\ a^2-2ab+b^2 &\geq 0 \\ (a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az első egyenlőtlenség pontosan ugyanakkor teljesül, mint az utolsó. Az utolsó egyenlőtlenség minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ esetén teljesül (hiszen valós szám négyzete nem lehet negatív), ezért a tételben szereplő egyenlőtlenség is teljesül minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ esetén. Látszik az is, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.



2. Bontsuk fel a 24-et két pozitív valós szám összegére úgy, hogy a tagok szorzata a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

Jelöljük a két számot a -val és b -vel. Azt keressük, hogy ab mikor maximális. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 12. \quad \text{Mivel } \sqrt{ab} \text{ és } 12 \text{ is pozitív, ezért teljesül, hogy } ab \leq 12^2 = 144.$$

A szorzat maximuma 144, és ezt az értéket akkor veszi fel, amikor $a = b$, vagyis a 24-et két egyenlő számra bontottuk, mindkét szám a 12.

Megjegyzés: A feladat az $f(x) = x \cdot (24 - x)$ másodfokú függvény szélsőérték vizsgálatával is megoldható.

4. E1 (Középszintű érettségi, 2015)

Zsuzsa egyik testvére hét évvel idősebb a másik testvérénél. A két testvér életkorának mértani közepe 12. Hány éves Zsuzsa két testvére?

5. E1 Melyik az a két valós szám, melynek

- a) számtani közepe 12,5 és mértani közepe 10?
- b) mértani közepe 8 és harmonikus közepe 6,4?
- c) számtani közepe 45,5 és mértani közepe 42?
- d) számtani közepe 4 és négyzetes közepe 5?

6. E1 Egy vállalkozás vagyona az egyik évben 21%-kal növekedett, majd a következő évben további 69%-kal nőtt.

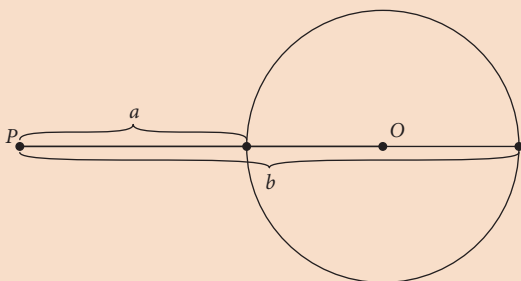
- a) Hány százalékkal nőtt a vagyon ez alatt a két év alatt?
- b) A 21% és a 69% számtani közepe (átlag) 45%. Hány százalékkal nőtt volna a vállalkozás vagyona, ha mindkét évben 45%-kal növekedett volna?
- c) Hány %-os éves növekedés esetén teljesülne, hogy mindkét évben ugyanannyi százalékkal nő a vagyon, és a két év elteltével ugyanannyi lesz, mint ha az első évben 21%-kal, a második évben 69%-kal nő?

7. E1 Egy 80 cm hosszú pálcából papírsárkányt készítünk úgy, hogy a pálcát kettétörjük, és a két rész lesz a deltoid két átlója. Hogyan törjük ketté, ha azt szeretnénk, hogy a papírsárkány területe a lehető legnagyobb legyen?

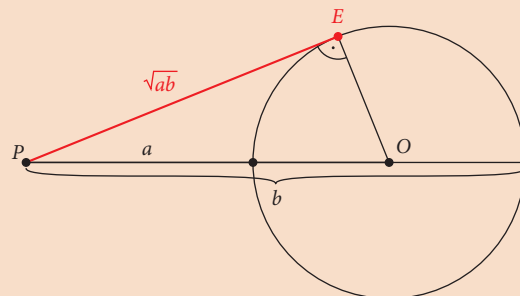
8. E1 Írjuk fel a 36-ot két pozitív valós szám szorzataként úgy, hogy a tényezők összege a lehető legkisebb legyen!

9. E2 Adott egy kör, és rajta kívül egy P pont. A P pontot összekötjük a kör középpontjával, és P -től a közelebbi metszéspontig tartó szakaszt jelöljük a -val, a távolabbi metszéspontig tartó szakaszt b -vel.

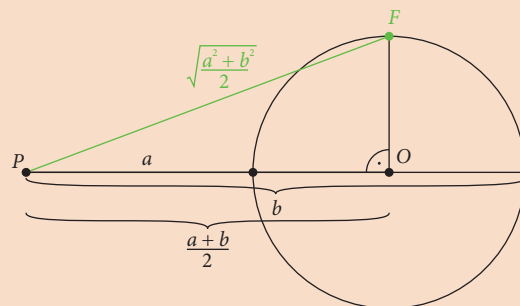
- a) Igazoljuk, hogy a PO szakasz hossza a és b számtani közepével egyenlő!



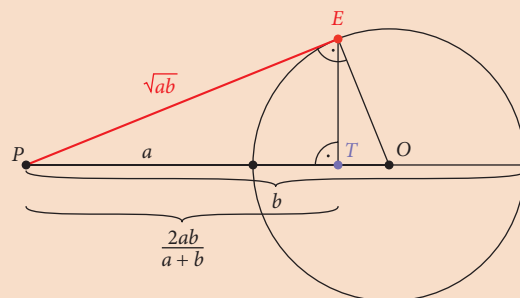
- b) Húzzunk érintőt P -ből a körhöz! Az érintési pontot jelöljük E -vel. Igazoljuk, hogy a PE szakasz hossza a és b mértani közepével egyenlő!



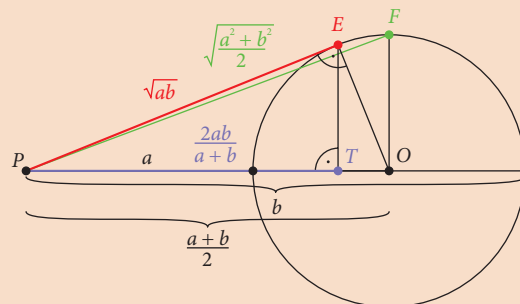
- c) Állítsunk merőlegest PO egyenesére az O pontban. Ennek és a körnek az egyik metszéspontja legyen F . Igazoljuk, hogy a PF szakasz hossza a és b négyzetes közepével egyenlő!



- d) Állítsunk merőlegest a PO egyenesre az E pontban. Ennek és a PO szakasznak a metszéspontja legyen T . Hasonlóság segítségével igazoljuk, hogy a PT szakasz hossza a és b harmonikus közepével egyenlő!



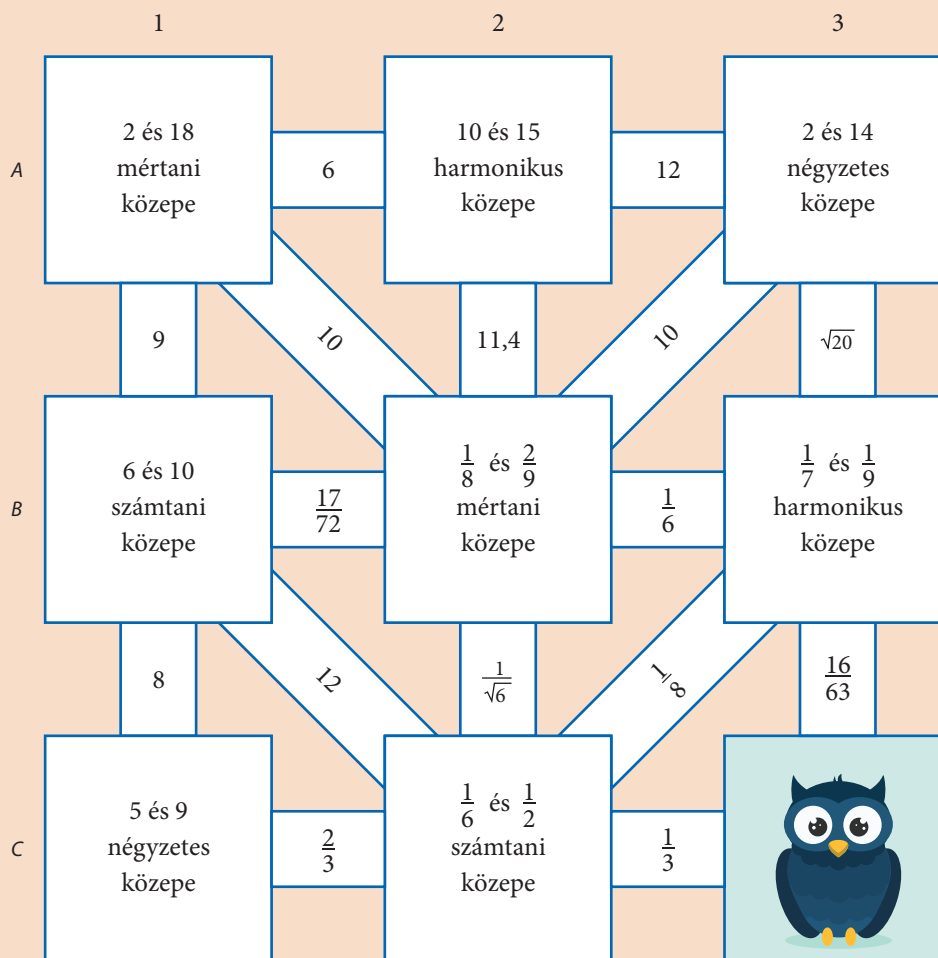
- e) Hogyan jelennek meg az ábrán a nevezetes középértékek közötti egyenlőtlenségek?



FELADATOK

1. E1 Melyik a helyes út? A továbblépés irányát mindig a helyes eredmény szabja meg. Indulj a bal felső sarokból, és juss

el a -ig.

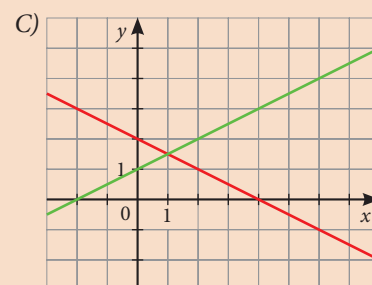
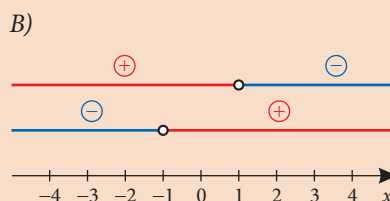
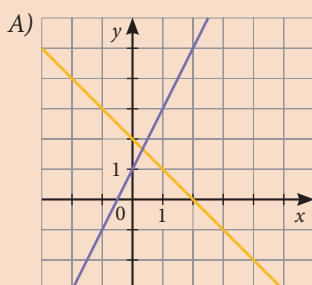


2. E1 Melyik egyenlőtlenséghez melyik ábra tartozik? Az egyenlőtlenségekhez tartozó grafikon, illetve számegyenes segítségével határozd meg az egyenlőtlenségek megoldását a valós számok halmazán!

a) $\frac{2-2x}{x+1} < 0$

b) $\frac{1+0,5x}{2-0,5x} > 0$

c) $\frac{2x+1}{2-x} \geq 0$



3. E1 A következő egyenletekben a p paraméter valós számot jelöl. Hány gyöke van az egyenleteknek a valós számok halmazán?

a) $3x + 8 - 6p = px + 11$ b) $\frac{2x+12}{3} - p = \frac{px}{6}$

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Van néhány dobozunk és valahány érménk. Ha minden dobozba egy érmét teszünk, akkor m darab érme kimarad. Ha minden dobozba pontosan m db érmét akarunk tenni, akkor m dobozba nem jut érme ($m \neq 1$). Hány érménk lehet, ha a dobozok száma 6?

5. E2 Legyen a pozitív valós szám. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével bizonyítsd be, hogy a -nak és a reciprokának összege nagyobb vagy egyenlő, mint 2. Melyik a esetén teljesül az egyenlőség?

6. E2 A p valós paraméter mely értékei esetén nincs megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán?

a) $(p+1)x^2 + 6px + 12 = 0$
b) $(p-2)x^2 - 4px + 10p + 6 = 0$

7. E2 Határozd meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + (2p-3)x + p^2 - 6p + 5 = 0$ egyenletnek a valós számok halmazán

- a) egy valós gyöke legyen; c) gyöke legyen a 0;
b) ne legyen valós gyöke; d) gyöke legyen az 1!

8. E1 Két pozitív szám harmonikus közepe $\frac{1}{10}$ és mértani közepe $\frac{1}{8}$. Melyik ez a két szám?

9. E1 Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszereket!

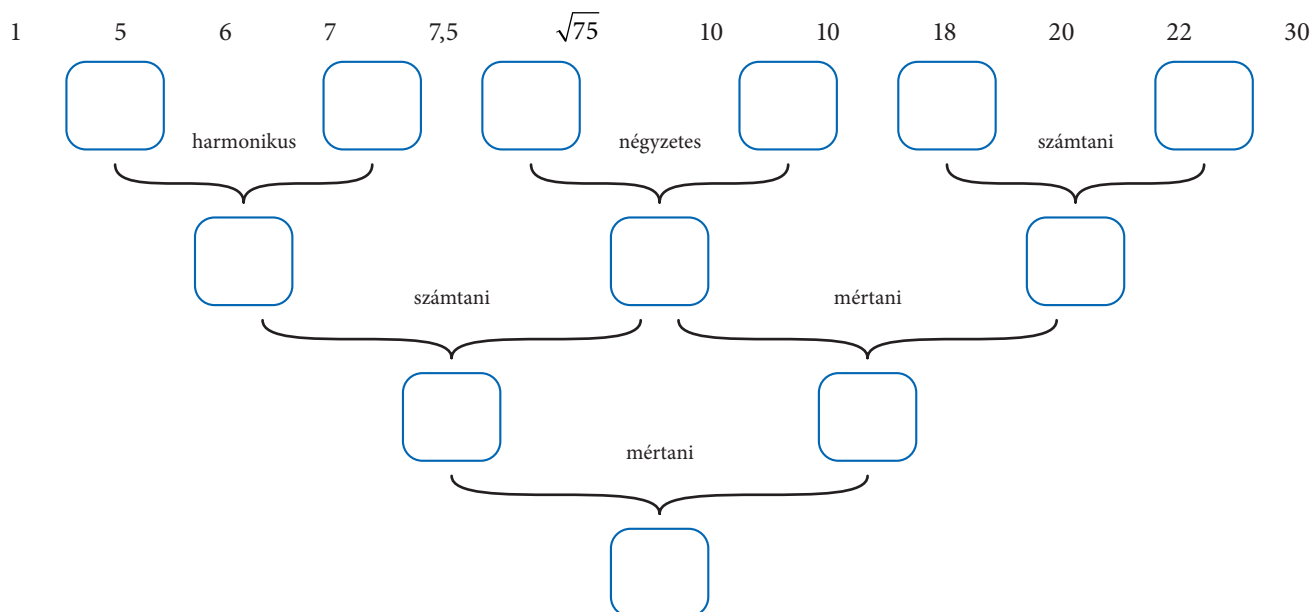
a)
$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ z - (x + y) = 16 \\ \frac{z+y}{x} = 4 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 9 \\ 2x + y = -1 \\ x - y = z - 6 \end{cases}$$

10. E1 Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\frac{1}{6x^2 + x - 1}$ b) $\sqrt{x^2 + 3x - 28}$ c) $\sqrt{\frac{1}{2x-5}}$

RÁADÁS

Helyezd el az ábrába a felsorolt számokat úgy, hogy két összekapcsolt szám alá a megadott középértéke kerüljön!



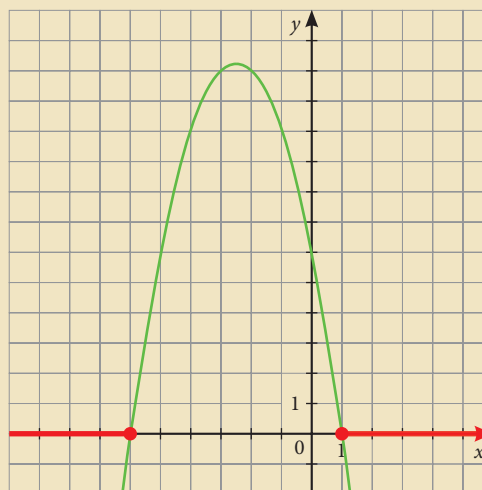
(D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás)

EGYENLETEK MEGOLDÁSA		
D	Polinom fokszáma, fokszám szerint rendezett alakja	A polinom fokszám szerint rendezett alakjában a tagok a fokszámuk szerint csökkenő sorrendben követik egymást. A polinom fokszáma egyenlő a legnagyobb fokszámú tag fokszámával. Egyváltozós polinom esetén ez egyenlő a változó legnagyobb kitevőjével.
M	Mérlegelv	Az egyenletek megoldása során nem változik meg az egyenlet megoldáshalmaza, ha az egyenlőségjel két oldalán álló kifejezést ugyanazzal a valós számmal növeljük vagy csökkentjük, illetve ugyanazzal a nullától különböző valós számmal szorozzuk vagy osztjuk.
	Ekvivalens átalakítás	Azok az átalakítások az ekvivalens átalakítások, amelyek során az eredeti egyenletnek egyetlen gyökét sem veszítjük el, és nem kapunk olyan megoldást, amely nem gyöke az eredeti egyenletnek. Nem feltétlenül ekvivalens átalakítás például az ismeretlennel való szorzás vagy osztás, páros hatványra emelés, gyökvonás.
	Hamis gyök/gyökvesztés	Hamis gyököt kaphatunk, vagy gyököt veszíthetünk akkor, ha az egyenletmegoldás során nem ekvivalens átalakításokat végzünk. Ilyen lehet például a négyzetre emelés, az ismeretlennel való szorzás, osztás. Ennek kiküszöbölésére használhatunk a művelet előtt újabb feltételeket, vagy a végén ellenőrizzük.
M	Egyenlet megoldásának módszerei	▶ az egyenlet rendezése mérlegelv segítségével ▶ új ismeretlen bevezetése ▶ értelmezési tartomány vizsgálata ▶ értékkészlet vizsgálata ▶ szorzattá alakítás kiemeléssel vagy nevezetes azonosságok segítségével
	Másodfokú egyenlet általános (kanonikus) alakja	$ax^2 + bx + c = 0$ (melyben $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$)
D	Másodfokú egyenlet diszkriminánsa	$D = b^2 - 4ac$, ha $D > 0$, akkor két különböző valós megoldás van; ha $D = 0$, akkor egy valós megoldás van (kétszeres gyök, két egybeeső gyök); ha $D < 0$, akkor nincs megoldás a valós számok halmazán.
T	Másodfokú egyenlet megoldóképlete	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
T	Másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja	$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökei.

T	Viète-formulák	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
T	Nevezetes azonosságok	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a^n - b^n$ és $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ szorzattá alakítható.
M	Paraméteres egyenlet	a paraméter valós számot jelöl ► úgy kell bánnunk vele, mintha konkrét valós szám lenne ha rendezzük az egyenletet ► az ismeretlen a paraméteres tagból is kiemelhető ha paramétert tartalmazó kifejezéssel osztunk ► esetszétválasztás
M	Másodfokú paraméteres egyenlet	ha a főegyütthatóban is szerepel a paraméter, akkor lehet olyan eset, amikor az egyenlet nem másodfokú ► esetszétválasztás ha ismert az egyik gyök ► helyettesítsük be ha pontosan egy (vagy két egybeeső) gyök van ► a diszkrimináns 0 ha nincs valós gyök ► a diszkrimináns negatív ha két különböző valós gyök van ► a diszkrimináns pozitív

EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

M	Mérlegelv egyenlőtlenségek esetén	Ha negatív valós számmal szorzunk vagy osztunk, akkor meg kell fordítani a relációs jel irányát. Ettől eltekintve az egyenleteknél írt szabályok érvényesek.
M	Egyenlőtlenség grafikus megoldása	Ábrázoljuk az egyenlőtlenség két oldalához tartozó függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben! A grafikonról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés milyen x esetén vesz fel kisebb, nagyobb, illetve egyenlő értéket, mint a jobb oldalon álló kifejezés.
M	Másodfokú egyenlőtlenség megoldása	0-ra rendezzük az egyenlőtlenséget; - megkeressük a másodfokú kifejezés gyökeit; - ábrázoljuk koordináta-rendszerben a kifejezéshez tartozó másodfokú függvényt; - leolvassuk az egyenlőtlenség megoldását.



M	Törtés egyenlőtlenség megoldása	A törtés egyenlőtlenséget érdemes úgy rendezni, hogy az egyenlőtlenség egyik oldalán nulla legyen. Egy tört értéke pozitív, ha a számláló és a nevező előjele megegyezik. A tört értéke negatív, ha a számláló és a nevező közül az egyik pozitív és a másik negatív. Ennek segítségével oldható meg egy törtés egyenlőtlenség, ha a relációs jel egyik oldalán nulla áll. Érdemes egymás alatti számegyeneseken ábrázolni, hogy a számláló és a nevező melyik intervallumban pozitív és melyik intervallumban negatív.												
M	Négyzetre emelés egyenlőtlenség esetén	Ha az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, akkor a négyzetre emelés után kapott egyenlőtlenségnek ugyanaz a megoldáshalmaza, mint az eredetinek.												
D	Nevezetes középértékek ($a; b \in \mathbb{R}^+$, a számtani közép esetén $a; b \in \mathbb{R}$)	<table> <tr> <td>a és b számtani közepe</td><td>az átlaguk, vagyis az összegük fele</td><td>$\frac{a+b}{2}$</td></tr> <tr> <td>a és b mértani közepe</td><td>a szorzatuk négyzetgyöke</td><td>$\sqrt{ab}$</td></tr> <tr> <td>a és b négyzetes közepe</td><td>a négyzeteik átlagának négyzetgyöke</td><td>$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$</td></tr> <tr> <td>a és b harmonikus közepe</td><td>reciprokaik átlagának reciproka</td><td>$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$</td></tr> </table>	a és b számtani közepe	az átlaguk, vagyis az összegük fele	$\frac{a+b}{2}$	a és b mértani közepe	a szorzatuk négyzetgyöke	$\sqrt{ab}$	a és b négyzetes közepe	a négyzeteik átlagának négyzetgyöke	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	a és b harmonikus közepe	reciprokaik átlagának reciproka	$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$
a és b számtani közepe	az átlaguk, vagyis az összegük fele	$\frac{a+b}{2}$												
a és b mértani közepe	a szorzatuk négyzetgyöke	$\sqrt{ab}$												
a és b négyzetes közepe	a négyzeteik átlagának négyzetgyöke	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$												
a és b harmonikus közepe	reciprokaik átlagának reciproka	$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$												
T	Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek	$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a; b \in \mathbb{R}^+)$												

FELADATGYŰJTEMÉNY

- E1** Egyszerűsítsd a következő törteket a gyöktényezőző alak segítségével!

a) $\frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 3,5x - 2}$

b) $\frac{15x^2 - 105x + 150}{5x^2 - 10x - 75}$
- E2** Ellenőrizd a diszkrimináns vizsgálatával, hogy van-e valós megoldása a $3x^2 - x - 2 = 0$ egyenletnek, majd számítsd ki a Viète-formulák segítségével, hogy mennyi a következő kifejezések értéke!

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $(x_1 - x_2)^2$
- E1** Oldd meg az egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\begin{cases} x + y - z = 9 \\ x - y + z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = -6 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - z = y - 9 \end{cases}$
- K2** Egy brigád egy családi ház építésén dolgozik. Ha a brigádból 3 embert egy másik építkezésre irányítanak, akkor 6 nappal hosszabb ideig tartana a munka. Ha viszont 3 emberrel többen lennének a csapatban, akkor 3 nappal rövidülne a munka elvégzéséhez szükséges idő. Hányan vannak a brigádban, és hány napig tart a munka eredetileg?

a) $x^3 + 5x^4 - 3x$

e) $(x - 2)(x + 5)$
- E1** Add meg a polinomok fokszám szerint rendezett alakját, fokszámát és főegyütthatóját!

b) $2x^2 - 6x^3 - 9$

f) $x(x + 1)(x + 2)$

c) $4 - 3x$

g) $(2 - 3x)^2$

d) $x^{12} + 2 - 3x$

h) $(2x + 1)^3$

6. E1 Ha egy háromszög két kisebb szögének összegét kivonjuk a legnagyobb szögből, akkor 20° -ot kapunk. A két kisebb szög közül az egyiket 2-vel szorozva, ugyanazt az értéket kapjuk, mint a másikat 3-mal szorozva. Mekkora a háromszög szögei?

7. K2 (Középszintű érettségi, 2018, 2020)
Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x+2}{x} - \frac{4}{5} = \frac{x-1}{2x} + \frac{8}{15}$ d) $\frac{x}{x+2} = \frac{8}{(x+2)(x-2)}$

b) $\frac{3}{2(x-1)} + \frac{6}{x-1} = 2,5$ e) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = 2$

c) $\frac{5}{x(x-1)} - \frac{x-4}{x} = \frac{3,5}{x-1}$

8. E2 Új ismeretlen bevezetésével oldd meg az egyenleteket, egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $x^6 - 3x^3 - 88 = 0$ c) $(x-2)^2 - 5(x-2) + 6 = 0$

b) $\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y-2} = 2 \\ \frac{10}{x+1} + \frac{2}{2-y} = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x-2}} + \frac{2}{\sqrt{y+3}} = 4 \\ \frac{5}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{y+3}} = 3,5 \end{cases}$

9. E2 (Emelt szintű érettségi, 2015)
Oldd meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0 \end{cases}$$

10. E1 Oldd meg az egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $|2x-7| = 4-3x$ b) $4x-3 = |-2x+5|$

11. E2 Algebrai úton oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $|x-4| + |3x+6| = 10$ b) $|2x-6| + |7-x| = 7$

12. E1 (Emelt szintű érettségi, 2021)
Oldd meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$$\sqrt{-2x+6} = x+1$$

13. E1 Hány gyöke van a következő egyenleteknek a valós számok halmazán?

a) $\sqrt{4-x} = \frac{1}{2}x+2$ c) $\sqrt{4-x} = \frac{1}{2}x-2$

b) $\sqrt{4-x} = -\frac{1}{2}x+2$

14. E2 Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} 2\sqrt{3-x} + \sqrt{2y-1} = 11 \\ 3\sqrt{3-x} - \sqrt{2y-1} = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{2x-3} + 5\sqrt{y+5} = 25 \\ 4\sqrt{2x-3} + 3\sqrt{y+5} = 15 \end{cases}$

15. E1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3x^5 - 24x^4 + 48x^3 = 0$ d) $\frac{x^4 - 25x^2}{x^2 - 10x + 25} = 0$

b) $\frac{x^2 + 2x}{x} = 0$ e) $\frac{9x^2 - 16}{9x^2 + 24x + 16} = 0$

c) $x^4 - 27x = 0$ f) $\frac{2x^2 + 250}{x+5} = 0$

16. E1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán! Az egyenletekben a p valós paraméter.

a) $5x + p - 1 = 2(p-x)$ d) $x + p^2x = 2px + p - 1$

b) $\frac{x-2p}{2} - \frac{p-x}{3} = 2$ e) $p^2x - p^3 = 25x + 125$

c) $p^2x - p = 16x + 4$

17. E1 A valós számok halmazán értelmezett függvények esetében adj olyan értéket a hozzárendelési szabályban szereplő paraméternek, hogy a függvény grafikonja illeszkedjen a koordináta-rendszer megadott pontjára!

a) $f(x) = -2x + p - 7$ $A(-1; 4)$

b) $g(x) = p^2x + 4p - 5$ $B(1; -8)$

18. E2 Grafikon segítségével határozd meg, hogy hány megoldása van az egyenletnek a valós számok halmazán, ha a p valós paraméter!

$$-|x-1| + 2 = p-1$$

19. E2 A következő egyenletekben a p valós paramétert jelöl. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|x-3p| = 5$ b) $|px-2| = 7$

20. E1 Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4x + 1$ függvényt!
A grafikon segítségével határozd meg, hogy a p valós paraméter függvényében hány megoldása van a valós számok halmazán az $x^2 - 4x + 1 = \frac{p}{3}$ egyenletnek!

21. E2 A p paraméter mely valós értéke esetén lesz pontosan egy megoldása az egyenleteknek a valós számok halmazán?

a) $px^2 - (p+2)x + 2 = 0$

b) $(p+1)x^2 - 2(p-1)x + p = 0$

22. E1 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Határozd meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

Az $x^2 - 2x + 4 = mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van.

23. E2 Adott a $px^2 - (3p+3)x + 2 - 2p = 0$ egyenlet, ahol a p valós paraméter.

a) Ha az egyenlet egyik gyöke a 4, akkor mennyi a másik gyöke?

b) Mely paraméter esetében van pontosan egy valós gyöke az egyenletnek?

c) Határozd meg a paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek két valós gyöke legyen és ezek reciprokanak összege 0 legyen!

24. E1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3x^2 - 4,5x - 2,5 \geq 0$

d) $\frac{x-2}{3-2x} \geq 0$

b) $-2x^2 + 12x + 14 > 0$

e) $\frac{4x+7}{x-4} < 0$

c) $x^2 - 4x < 0$

f) $\frac{x+3}{x-2} \geq -2$

25. E1 Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{-4x-5+x^2}$

c) $\sqrt{\frac{x-7}{3x+6}}$

b) $\sqrt{-2+5x-2x^2}$

d) $\sqrt{\frac{2x+3}{13-x}}$

26. E1 (Emelt szintű érettségi, 2018)

Oldd meg az $\frac{x-4}{x-6} \leq -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

27. E2 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{-5}{\sqrt{2x+5}} \geq 0$

c) $|3x-5| \geq 4$

b) $\frac{2}{\sqrt{7-2x}} \geq 0$

d) $\sqrt{8-2x} \geq 4$

28. E1 Melyik az a két valós szám, melynek

a) számtani közepe 34 és mértani közepe 30?

b) számtani közepe 10 és harmonikus közepe 9,6?

c) négyzetes közepe 10 és számtani közepe 9?

29. E2 A p paraméter mely valós értéke esetén teljesül, hogy a $(p-2)x^2 + px - 1 = 0$

a) egyenletnek két különböző megoldása van a valós számok halmazán?

b) egyenlet két valós gyöke közül az egyik pozitív, a másik negatív?

c) egyenlet két valós gyökének reciprokok összege egyenlő 2-vel?

d) egyenletnek két pozitív gyöke van?

30. E2* (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy középiskolában a tizedikesek évfolyamdolgozatot írtak matematikából. A dolgozatban maximálisan 100 pontot lehetett elérni. Az évfolyamra járó 80 tanuló közül a dolgozat megírásakor néhányan hiányoztak. A dolgozatokban elért pontszámok átlagát először úgy számították ki, hogy a hiányzó tanulók eredményét 0 pontostként vették figyelembe. Később, hogy realisabb képet kapjanak, a hiányzók figyelembevétele nélkül számoltak. Az így kapott átlag 4,2 ponttal magasabbnak adódott, mint az első számítás utáni átlag. Egy héttel később az első megírás alkalmával hiányzó tanulók pótolták a dolgozatot; az ő átlageredményük 64 pont lett (a pótdolgozatban is maximálisan 100 pontot lehetett elérni). A teljes tizedik évfolyam matematikadolgozatainak átlageredménye így 67 pontos lett.

Hány tanuló hiányzott a dolgozat első megírásakor? Hány pont volt azoknak a tanulóknak az átlageredménye, akik az első alkalommal megírták a dolgozatot (a hiányzók nélkül, a második módszerrel számolva)?

31. E2* Egy autós el akart utazni egy hosszú hétvégére. Odafele autópályán ment, így az autója 12 km-enként fogyasztott 1 liter benzint. Visszafelé azonban nagy dugó volt az autópályán, így a párhuzamos főutat használta (amely ugyanolyan hosszú volt, mint az autópálya lett volna), ekkor 16 km-enként fogyasztott az autója 1 liter benzint. Átlagosan mekkora utat tett meg 1 liter benzinnel?

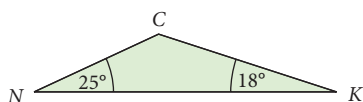
32. E2 Bizonyítsd be, hogy ha a és b pozitív valós számok, akkor a mértani közepük nagyobb vagy egyenlő, mint a harmonikus közepük, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő!



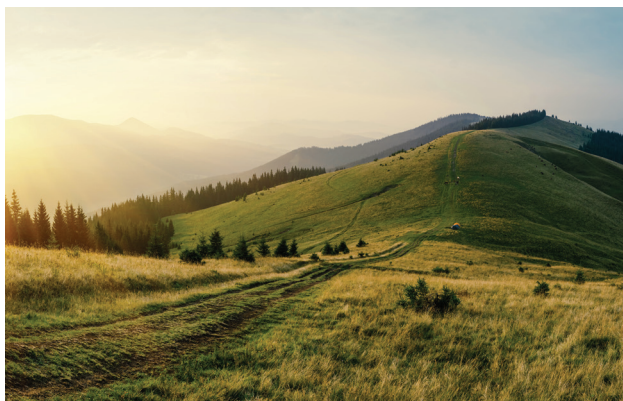
hegyesszögek, tompaszögek és a derékszög szögfüggvényei, szinusztétel, koszinusztétel

BEVEZETŐ

Sík vidéken álló domb tetejére két egyenes ösvény vezet fel, az egyik a keleti, a másik a nyugati oldalon. A nyugati domboldal meredekebb: az ösvény a vízszinteshez képest 25° -os szögben emelkedik, míg a lankásabb keleti oldalon ez a szög csak 18° .



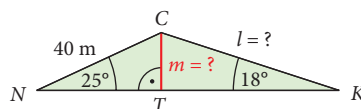
Megmértük a nyugati oldalon található ösvény hosszát a csúcsig: $NC = 40$ méter.



- a) Milyen magasan van a dombtető a környező síkság felett, azaz mekkora a C pont távolsága az NK alaptól?
- b) Milyen hosszú a keleti oldalon lévő CK lejtő?

Megoldás:

A keresett m magasság a dombot modellező háromszöget két derékszögű háromszögre bontja.



- a) Az NTC derékszögű háromszögről leolvashatjuk, hogy $\sin 25^\circ = \frac{m}{40}$, amiből $m = 40 \cdot \sin 25^\circ \approx 16,9$ (méter).
A dombtető tehát kb. 17 méterrel van a környező síkság felett.
- b) Hasonló módon, a KTC derékszögű háromszög jeleléseinek megfelelően $\sin 18^\circ = \frac{m}{l}$, ahonnan $l = \frac{m}{\sin 18^\circ} = \frac{16,9}{\sin 18^\circ} \approx 54,7$ (méter). A keleti lejtőn lévő ösvény tehát közelítőleg 55 méter hosszú.

FELADATOK

1. **K2** Számítsd ki a bevezető feladatban szereplő NK szakasz hosszát (azaz a domb alapjának szélességét) többféleképpen!
- a) Az NT és TK szakaszok hosszát kiszámíthatod a Pitagorasz-tétel segítségével.
- b) Az NT és TK szakaszok hosszát $\operatorname{tg} 25^\circ$, $\operatorname{tg} 18^\circ$ és az m magasság segítségével meghatározhatod.
- c) Számolhatsz $\cos 25^\circ$, $\cos 18^\circ$ és az ösvények hosszának felhasználásával.
- d) Az NKC háromszögre alkalmazd a szinusztételt!
- e) Az NKC háromszög NK oldalára írd fel a koszinusztételt!

2. **K2** Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz oldalainak hossza 2,4 cm, 3,6 cm, 5,2 cm és 3,6 cm. Rajzold le ezt a trapézt, majd bontsd fel egy téglalapra és két egybevágó derékszögű háromszögre!
- a) Mekkora egy ilyen háromszög szögei?
- b) Mekkora a trapéz szögei?
- c) Mekkora a trapéz átlói?
- d) Mekkora a trapéz területe?
3. **K2** Egy téglalap oldalainak hosszúsága 5,32 dm és 3,81 dm. Rajzold meg a téglalapot, és rajzold be a két átlóját! Határozd meg a keletkeztet szögek nagyságát!

1. Derékszögű háromszög esetén, hegyesszögek szögfüggvényei

$$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}$$

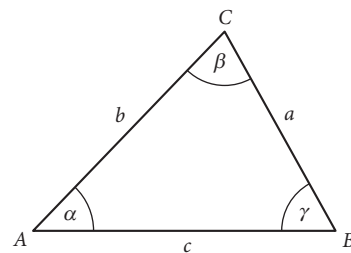
2. Minden háromszög esetén teljesül (a többi oldal, illetve oldalpár esetén is)

Színusztétel: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, másként: $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

(A háromszögben az oldalak hosszának aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszaival.)

Koszinusztétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$

A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$



3. Szögfüggvények kiterjesztése tompaszög és a derékszög esetére

Tompaszögre és derékszögre úgy értelmezzük a szögfüggvényeket, hogy a hegyesszögű háromszögre megfogalmazott tételek tompaszögű és derékszögű háromszögre is teljesüljenek.

- ▶ Tompaszög szinusa egyenlő kiegészítő szögének szinuszával:
- ▶ Tompaszög koszinusza egyenlő kiegészítő szöge koszinuszának ellentettjével:
- ▶ Tompaszög tangense egyenlő szinuszának és koszinuszának hányadosával:
- ▶ $\sin 90^\circ = 1$ és $\cos 90^\circ = 0$.
- ▶ A derékszögnek nem értelmezzük a tangensét.

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha).$$

$$\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha).$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

FELADATOK

4. E1 (Emelt szintű érettségi, 2018)

Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm. Igazold, hogy a háromszög hegyesszögű!

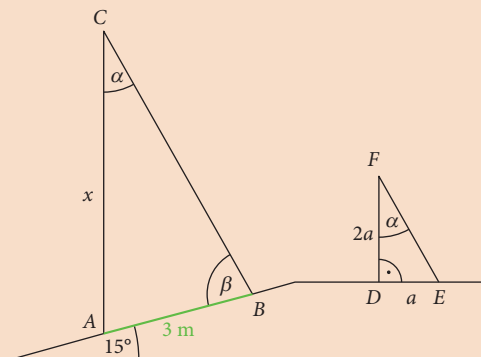
5. E1 Egy rombusz átlóinak hossza 5,91 cm, illetve 8,34 cm.

- a) Mekkora a szögei?
- b) Mekkora az oldalai?
- c) Mekkora a területe?

6. E1 (Emelt szintű érettségi, 2013)

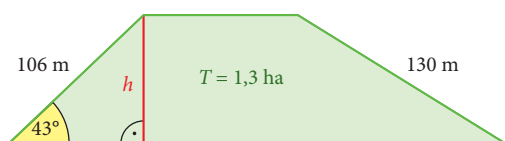
Egy 15° -os emelkedési szögű hegyoldal álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanabban az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának.

- a) Hány fokos szöget zárnak be a napsugarak a függőleges egyenesekkel?
- b) Hány fokos szöget zárnak be a napsugarak a lejtő síkjával?
- c) Hány méter magas a fa?



BEVEZETŐ

Egy szőlőbirtok trapéz alakú, a két szára 106 m és 130 m, a területe pedig 1,3 hektár. A hosszabbik alapon fekvő egyik szög 43° . Az adatok alapján az egyik földmérő gyakornok elkészített egy vázlatrajzot:



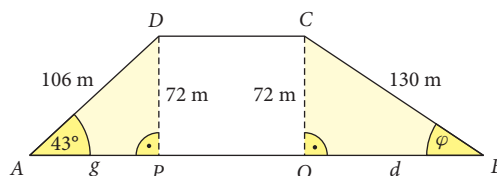
Határozd meg a rajz alapján

- a) a trapéz két párhuzamos oldalának távolságát;
- b) a trapéz szögeit;
- c) a trapéz párhuzamos oldalainak hosszát!

Megoldás:

- a) A trapéz magasságának kiszámítására egy alkalmas derékszögű háromszöget választunk (lásd az ábrát). Ebből: $\frac{h}{106} = \sin 43^\circ$, tehát $h = 106 \cdot \sin 43^\circ \approx 72,3$. A telek két párhuzamos oldalának távolsága tehát közelítőleg 72 m.

- b) A CQB derékszögű háromszögből: $\sin \varphi = \frac{72}{130}$, ahonnan $\varphi \approx 33,6^\circ$ adódik. A trapéz szögei tehát 43° , 34° , 146° és 137° nagyságúak.



- c) Az ábrán d -vel, illetve g -vel jelölt szakaszok hosszát egy-egy derékszögű háromszögből számolhatjuk:

$$d = 130 \cdot \cos \varphi \approx 108 \text{ (m)} \text{ és } g = 106 \cdot \cos 43^\circ \approx 78 \text{ (m)}.$$

A DC oldal hosszának kiszámításához használjuk fel a trapéz területét, amely $1,3 \text{ ha} = 13\,000 \text{ m}^2$.

Ebből a két derékszögű háromszög együttes területe $\frac{108 + 78}{2} \cdot 72 = 6696 \text{ (m}^2\text{)}$, ezért a $PQCD$ téglalap területe 6304 m^2 .

$$PQ = CD = \frac{6304}{72} \approx 88 \text{ (m)}.$$

A trapéz alapjainak hossza tehát 88 méter, illetve $78 + 88 + 108 = 274$ méter.

ELMÉLET

Számítások háromszögekben

Derékszögű háromszög

Használható a szögfüggvények definícióit.

Általános háromszög

Használható a szinusztételt.

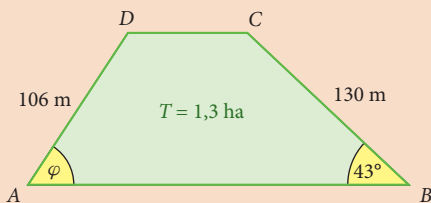
Használható a koszinusztételt.

Kereshetsz derékszögű háromszöget.

Például: Ha adott a háromszög oldalainak hossza, akkor szögeinek nagysága meghatározható a koszinusztétellel.

FELADATOK

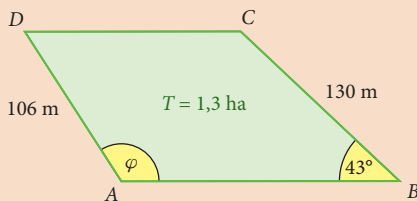
- 1. E1** (A kidolgozott feladat folytatása.) A telek adatai alapján egy másik földmérő gyakornok is készített egy vázlatot, ez azonban különbözött az első gyakornok rajzától.



Számítsd ki ebben az esetben az $ABCD$ trapéz

- a) magasságát; b) szögeit; c) alapjainak hosszát!

- 2. E1** (Az előző feladat folytatása.) Amikor a telek tulajdonosa meglátta a gyakornokok rajzait, illetve a számításokat, meghökkenve ceruzát fogott, és egy egészen más alakú trapézt rajzolt.



- a) Mekkora a trapéz magassága?

- b) Mekkora az alapok?

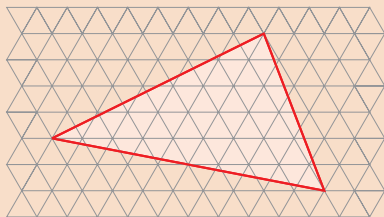
- c) Mekkora a trapéz szögei?

- 3. E1** (Az előző feladat folytatása.) Van még egy negyedik olyan trapéz is, amelynek a két szára 106 m és 130 m, a területe 1,3 hektár, és az egyik alapon fekvő szöge 43° -os.

- a) Melyik ez a trapéz? Megfelel-e a leckében szereplő Kidolgozott feladat szövegének?

- b) A Kidolgozott feladat megoldható úgy is, hogy a trapézt csak két részre bontjuk: egy paralelogrammára és egy háromszögre. Oldd meg ezzel a módszerrel is a lecke Kidolgozott feladatát!

- 4. E1** Az ábrán látható háló olyan szabályos háromszögekből épül fel, amelyek oldalhosszúsága 1 cm. Számítsd ki a piros háromszög kerületét és területét!



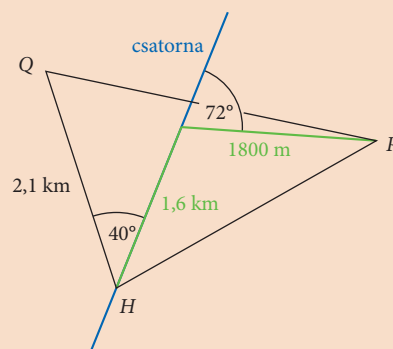
- 5. K2** Egy nagy viharban a Balatonon egy gumimatracos fürdőző a nyílt vízre sodródott. A vízi mentők csak azt tudják, hogy valószínűleg a mellékelt térképen látható négyszög alakú területen lehet. Számítsd ki

- a) az Alsóörs–Sóstó (AC) távolságot;
b) a Balatonalmádi–Sóstó–Alsóörs (BCA) szöget;
c) az Alsóörs–Siófok (AD) távolságot!



- d) Hány km^2 területet kell a mentőcsapatoknak át-kutatniuk?

- 6. E1** Egy háromszög alakú telket egy csatorna vág ketté. A birtok egyik csúcsa a H -val jelölt hídnál van. Innen a csatorna mentén 1,6 km után jobbra fordulva a dűlőúton 1800 métert kell megtenni a birtok másik csücskéig, a P pontig. Ez a dűlőút, ahogy az ábra mutatja, 72° -os szöget alkot a csatornával. Ha a H hídnál balra, 40° -os szögben indulnak el, és 2,1 km-t haladnak, éppen a birtok harmadik csücskét, Q -t érik el.



- a) Mekkora a birtok HP határszakasza?
b) Mekkora a QHP szög?
c) Mekkora a birtok PQ határszakasza?
d) Hány hektáros ez a birtok?

BEVEZETŐ

Részlet egy újságcikkből: „A világ legmagasabb épületének átadása nem csak lenyűgöző, tűzijátékos ünnepséggel lepte meg a világot, és nem is csak azzal, hogy a torony egyáltalán elkészült. A hétfői megnyitón Dubaj vezetője a hivatalos magasság – 828 méter – mellett még bejelentette: a torony új nevet kap: Burdzs Kalifának nevezték el. A 95 kilométerről látható monstrumot 75 ezer munkás öt év és három hónap alatt építette fel.”

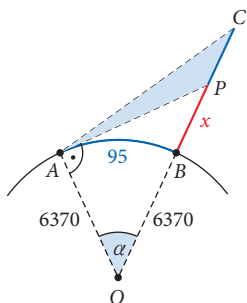
Mekkora magasságú rész látható 95 km távolságból a 828 méter magas toronyból, ha a Földet egy 6370 km sugarú gömbbel modellezzük?

Megoldás:

A feladathoz egy síkbeli, nem arányos ábrát készítünk. Ezen C a torony csúcsa, és a PB szakasz a toronynak az a része, amelyet nem lehet látni 95 km-ről. Jelöljük ennek a résznek a hosszát kilométerben mérve x -szel!

Az α középponti szöget az ívhosszból (95 km) és a sugárból (6370 km) számíthatjuk ki:

$$\alpha = \frac{95}{2\pi \cdot 6370} \cdot 360^\circ \approx 0,8545^\circ \text{ (itt indokolt a négy tizedesjegy, hiszen az } x\text{-et a feladathoz illeszkedően két tize-}$$



desjegy pontossággal szeretnénk megadni). Az OAP háromszög derékszögű, mert AP a kör érintőjére illeszkedik.

$$\text{Ezért: } OP = \frac{6370}{\cos \alpha} \approx 6370,71 \text{ (km), tehát } x = OP - 6370 = 0,71 \text{ (km).}$$

Tehát 95 km távolságból a torony megközelítőleg 710 méter feletti kb. 120 m-es része látszik.

Megjegyzés:

Dubaj a tengerparton fekszik, ezért a tenger felől hajóval érkezve a feladatnak megfelelő helyzetet könnyen el lehet képzelni.

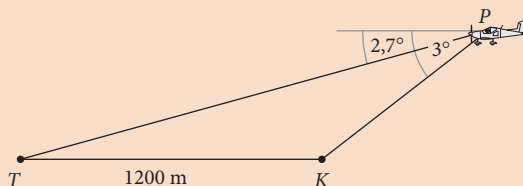


Kilátás a Burdzs Kalifából

FELADATOK

1. **E1** Határozd meg, hogy elméletileg mekkora távolságra lehet ellátni a Föld felszínén
 - a) a Burdzs Kalifa legmagasabb pontjáról, azaz 828 méter magasságból;
 - b) az Empire State Building tetejéről (381 m);
 - c) a Mount Everest legmagasabb pontjáról!
2. **E1** Egy leszálláshoz készülődő sportrepülőgép pilótája már beállt a leszállópálya irányába. Az 1200 méter hosszú pálya közelebbi végét 3° -os depressziószög

alatt látja, a távolabbit $2,7^\circ$ -os szög alatt. (Az ábrán az áttekinthetőség érdekében a szögeket a valóságosnál nagyobbaknak rajzoltuk.) Milyen magasan repül ez a repülőgép?



3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2021)

A Budavári Siklót 1870-ben építették. Korabeli források szerint a sikló (hegyoldali vasútvonal) kivitelezője, Wohlfarth Hen-



rik a pálya eredeti tervekben szereplő kb. 33 fokos hajlásszögét – ma már nem tudni, milyen okból – 30 fokra csökkentette. A kivitelezés során a felső állomás helye változatlan maradt, az alsó állomás azonban a tervekhez képest 6 méterrel feljebb került. (Az alsó állomás tervezett és valóságos helyét összekötő képzeletbeli egyenes merőleges a földfelszínre.) Hátározd meg a sikló pályájának hosszát, és a pálya szintemelkedését!

4. E1 Egy sík vidéken áll egy függőleges torony. A síkság két pontjából megmérjük, hogy milyen emelkedési szögben látszik a torony teteje. Az első pontból 25° , a második pontból 18° az emelkedési szög. A két mérési pont távolsága 300 m. A második mérési pontban még egy szögmérést végzünk: megmérjük, hogy milyen szög alatt látszik az első mérési pontot a torony alsó pontjával összekötő szakasz. Ez a szög 37° -os.

a) Készíts ábrát!

b) Milyen magas a torony?

5. K2 Igaz vagy hamis? A helyes válaszhoz tartozó betűkből két híres magyar matematikus (apa és fia) vezetékneve rakható ki. Kik ők?

	Igaz	Hamis
Ha egy háromszögben két oldal hossza egyenlő, akkor a háromszög két szögének a szinusza egyenlő.	O	E
Ha egy négyszögben két szög szinusza egyenlő, akkor két szög nagysága egyenlő.	T	L
Minden háromszögnek kisebb a területe, mint a két leghosszabb oldal hosszának szorzata.	A	G
A paralelogramma minden szögének szinusza egyenlő.	B	M
Ha egy négyszög minden szögének szinusza egyenlő, akkor a négyszög paralelogramma.	E	I
Bármely háromszög minden szögének van tangense.	K	Y

6. E1 A Baltimore városában (USA) található World Trade Center 123,5 m magas. Ez a világ legmagasabb szabályos ötszög alaprajzú épülete. A 30 szintes (a fényképen 28 irodai szint, továbbá a tetőtér és az alapszint látható) irodaépület összesített teljes alapterülete 39 200 m². (Minden szint egyforma területű.)



a) Hány m³ az épület térfogata?

b) Mekkora az alaprajz ötszöge köré írható kör sugara?

c) Hány méter hosszú az ötszög egy-egy oldala?

7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2012)

A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északra-keleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazold, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!

Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depressziószög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszodat fokban, egészre kerekítve add meg! Számításaid során a Föld görbületétől tekintsd el!



hegyesszögek, derékszög és tompaszögek szögfüggvényei



szögfüggvények kiterjesztése tetszőleges forgásszögre

ELMÉLET

1. Hegyesszögek szögfüggvényei

Ha két derékszögű háromszög egyik hegyesszöge egyenlő nagyságú (α), akkor a **hasonlóság** miatt a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő. Ezekkel az arányokkal definiáltuk a hegyesszögek szögfüggvényeit.

2. Derékszög és tompaszögek szögfüggvényei

A szögfüggvények segítségével több fontos összefüggés is felírható hegyesszögű háromszögekre. Ilyen például a szög szinuszával felírható területképlet, a szinusz-tétel és a koszinusz-tétel. A szögfüggvények fogalmát úgy terjesztettük ki derékszögre és tompaszögekre, hogy bármely háromszögben ugyanúgy teljesüljenek a felsorolt összefüggések.

Ha a Q pontot úgy kaptuk, hogy a P(1; 0) pontot β derékszöggel vagy tompaszöggel elforgattuk az origó körül pozitív irányban, akkor a Q pont koordinátái: $(\cos \beta; \sin \beta)$.

3. A szinusz és koszinusz szögfüggvények kiterjesztése tetszőleges forgásszögre

A derékszögre és tompaszögekre alkalmazott definíció tovább általánosítható tetszőleges forgásszögre. (A forgásszögek esetén az x tengely pozitív félegyeneséhez viszonyítunk, az óramutató járásával ellentétes forgatási irány a pozitív irány.)

Definíció: Forgassuk el a P(1; 0) pontot az origó körül α szöggel! Az elforgatással kapott P' pont első koordinátáját $(\cos \alpha)$ -nak, a pont második koordinátáját pedig $(\sin \alpha)$ -nak nevezzük.

A kiterjesztésnek olyannak kell lennie, hogy a korábban megismert összefüggések továbbra is érvényben maradjanak. Ezt az „elvárás” **permanenciaelv**nek nevezzük.

Így minden forgásszög esetén teljesül:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

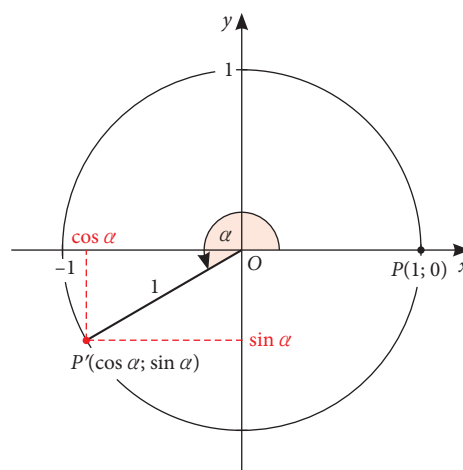
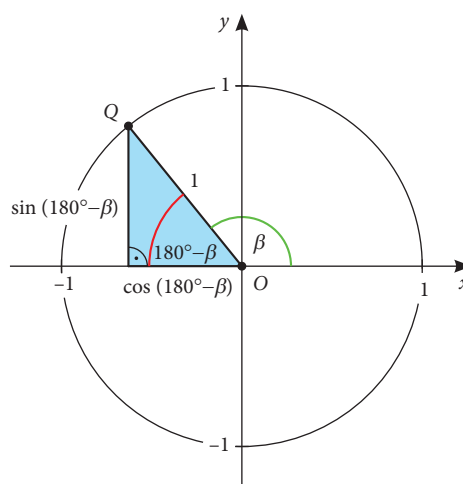
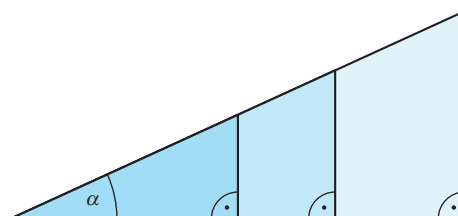
4. A tangens szögfüggvény kiterjesztése

Azokra a forgásszögekre, amelyeknek a koszinusza nem egyenlő 0-val, értelmezzük a tangens szögfüggvényt.

Definíció: Ha az α forgásszög olyan, hogy $\cos \alpha \neq 0$ (azaz $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$,

ahol k tetszőleges egész szám), akkor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Megjegyzés: A permanenciaelv megnyilvánulása, hogy a tangens szögfüggvényre a hegyesszögek esetében fennálló azonosság a kiterjesztés során definícióvá válik.



Az elforgatás számítógépes animációval is bemutatatható (például a GeoGebra programmal).

FELADATOK

1. E1 Rajzolj egy koordináta-rendszert! Forgasd el a $P(1; 0)$ pontot az origó körül 305° -kal!

- Melyik síknegyedben van a P képe, a P' pont?
- Melyik hegyesszög koszinuszával egyenlő a P' pont első koordinátájának abszolút értéke?
- Mennyi a $\cos 305^\circ$?
- Milyen előjelű a P' pont második koordinátája?
- Melyik hegyesszög szinuszával egyenlő a P' pont második koordinátájának abszolút értéke?
- Mennyi a $\sin 305^\circ$?

2. E1 Oldd meg az 1. feladatot úgy, hogy 305° helyett

- 200° -kal;
- (-55°) -kal;
- 560° -kal;
- (-415°) -kal

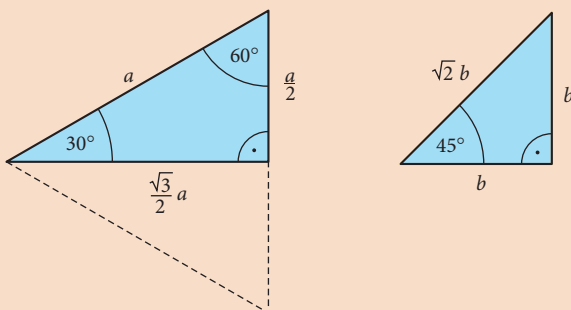
fordítod el a $P(1; 0)$ pontot!

3. E1 Mekkora α szöggel forgassuk el a koordináta-rendszer kezdőpontja körül a $P(1; 0)$ pontot, hogy a képe

- a második síknegyedbe kerüljön, és α szinusz megegyezzen a 15° szinuszával;
- a harmadik síknegyedbe kerüljön, és α szinusz megegyezzen a 287° szinuszával;
- az első síknegyedbe kerüljön, és α koszinusz megegyezzen a 342° koszinuszával;
- a negyedik síknegyedbe kerüljön, és α koszinusz megegyezzen a 400° koszinuszával?

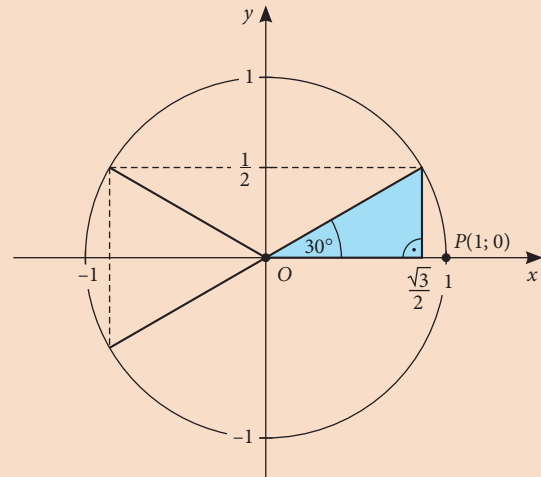
4. K2 A 0° , 30° , 45° , 60° , 90° -os szögeket nevezetes szögeknek hívjuk. A definíció, illetve a nevezetes derékszögű háromszögek alapján határozd meg ezen szögek szögfüggvényeinek **pontos** értékét!

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\operatorname{tg} \alpha$					nem létezik

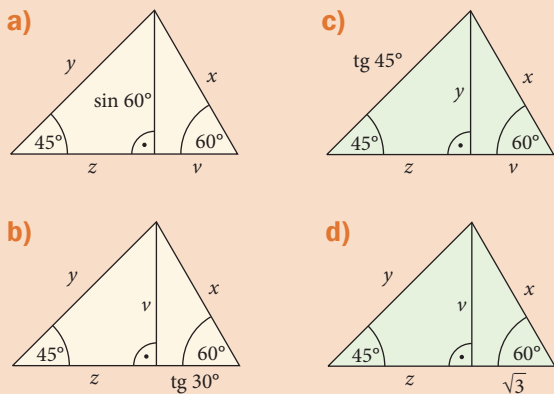


5. E1 Mekkora α szöggel forgassuk el az origó körül a $P(1; 0)$ pontot, hogy a képe

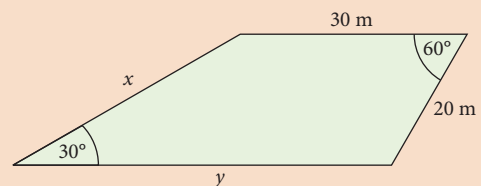
- a II. síknegyedbe kerüljön, és az α szög szinusz a 0,5 legyen;
- a III. síknegyedbe kerüljön, és az α szög koszinusz a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ legyen;
- a IV. síknegyedbe kerüljön, és $\operatorname{tg} \alpha = -1$ legyen?



6. K2 Mekkora a betűvel jelölt szakaszok? Számológép nélkül add meg a válaszaidat!



7. K2 Számítsd ki a trapéz alakú telek területét és területét! Használd a nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek pontos értékét!





középponti szög, körív hossza, hasonlóság



szögek ívmértéke

BEVEZETŐ

A teljes szög 360 egyenlő részre való felosztásának gondolata több mint 2500 éves. Eredete valószínűleg Babilóniába nyúlik vissza. A fokokban való szögmérés egyik fontos előnye, hogy így a nevezetes háromszögekben előforduló szögek (30° , 45° , 60° , 90°) mérőszámai egész számok. Mindezek mellett jogos a kérdés, hogy miért 360 részre osztjuk a teljes szöget. Nem lenne egyszerűbb, ha más egyiséget találnánk?

A szögmérésnek valóban létezik egy másik módja, amely során a szög nagyságát egy mértékegység nélküli valós számmal jellemezzük. Ezt alkalmaz-
zák például a körmozgás, a rezgőmozgás, a váltakozó áram leírásakor, illetve a matematika számos területén.



ELMÉLET

1. Szögek ívmértéke

Azonos középponti szögű körcikkek hasonlósága miatt ugyanakkora középponti szög esetén a középponti szöghöz tartozó körív hosszának és a kör sugarának a hányadosa állandó. A szög nagysága megadható tehát az ív és a sugár hosszának arányával. Ezt az arányt hívjuk a szög ívmértékének.

$$\frac{i_1}{r_1} = \frac{i_2}{r_2}$$

Definíció: szög ívmértéke, radián

A körben az α középponti szöghöz tartozó i körív és az r sugár hosszának hányadosát az α szög ívmértékének nevezzük.

1 radiánnak mondjuk azt a szöget, amelyhez mint középponti szöghöz egy körben ugyanolyan hosszú körív tartozik, mint amekkora a kör sugara. Jelölése: rad.

Megjegyzés: Mivel a szögek ívmértékét úgy kapjuk, hogy két hosszúságértéket osztunk el egymással, az ívmérték tekinthető egy mértékegység nélküli mennyiségnek, és a radiánt (rad) nem kötelező kiírni. Sokszor azonban megkönnyíti a megértést, ha zárójelben odaírjuk az ívmérték után.

2. Átváltás fok és radián között

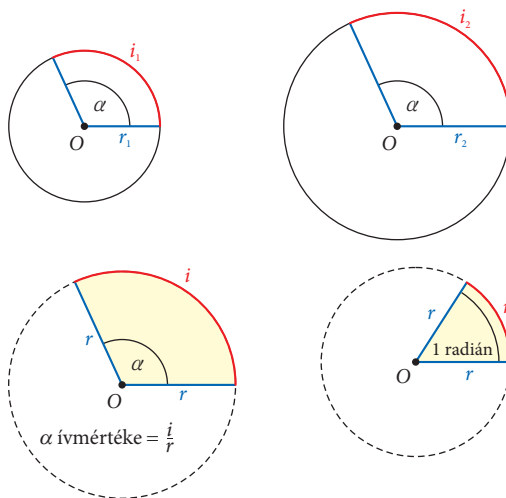
A teljes szöghöz (360°) tartozó körív éppen a teljes kör, aminek kerülete r sugarú kör esetén $2r\pi$. Ezért a teljes szög ívmértéke $\frac{2r\pi}{r} = 2\pi \approx 6,28$.

Az egyenesszög (180°) ívmértéke a félkörív és a sugár hányadosa, azaz $\pi \approx 3,14$.

Az átváltás fok és a radián között az egyenes arányosság szabálya szerint, aránypárok segítségével történhet.

Például: Ha $\alpha = 20^\circ$, akkor α ívmértékét x -szel jelölve: $\frac{x}{20} = \frac{\pi}{180}$. Ebből $x = \frac{\pi}{9} \approx 0,349$. Vagyis $\alpha \approx 0,349$ (rad).

Ha $\alpha = 3$ (rad), akkor α fokokban mért nagyságát y -nal jelölve: $\frac{y}{3} = \frac{180}{\pi}$. Ebből $y = \frac{540}{\pi} \approx 171,9$. Vagyis $\alpha \approx 171,9^\circ$.



$$180^\circ = \pi \text{ (rad)}$$

FELADATOK

1. E1 Töltsd ki a táblázatot! Határozd meg a szögek fokban mért nagyságát!

Szög ívmértéke (rad)	π	$\frac{\pi}{2}$	1	2	4π	8π
Szög fokban mért nagysága	180°					

2. E1 Töltsd ki a táblázatot! Határozd meg a szögek radiánban mért nagyságát, vagyis a szögek ívmértékét! Válaszolj pontos értékkel és közelítő értékkel is!

Szög fokban mért nagysága		180°	18°	10°	36°	1080°
Szög ívmértéke (rad)	pontos érték	π				
Szög ívmértéke (rad)	közelítő érték	3,14				

3. E1 Figyeld meg az ábrán a nevezetes szögeket, és ez alapján kösd össze azokat az értékeket, amelyek ugyanolyan nagyságú szöghöz tartoznak!



$$90^\circ$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$60^\circ$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$45^\circ$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$30^\circ$$

$$\frac{\pi}{3}$$

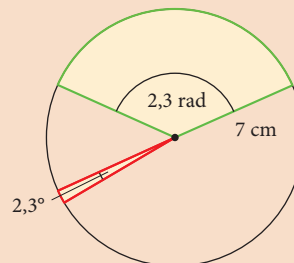
$$180^\circ = \pi \text{ (rad)}$$

4. E1 Milyen hosszú körív tartozik egy 7 cm sugarú körben

- a) a 2,3 radián nagyságú középponti szöghöz;
b) a $2,3^\circ$ -os középponti szöghöz?

5. E1 Mekkora területű körcikk tartozik a 7 cm sugarú körben

- a) a 2,3 radián nagyságú középponti szöghöz;
b) a $2,3^\circ$ -os középponti szöghöz?



6. E1 Egy 6 cm sugarú körben egy körcikk területe $13,5 \text{ cm}^2$. Mekkora a körcikkhez tartozó

- a) körív; b) középponti szög?

7. E1 Egy háromszög egyik szöge 24 fokos, másik szöge 1,2 radián nagyságú. Mekkora a harmadik szöge? Fejezd ki fokban is, radiánban is!

8. E1 Hány fokosak azok a szögek, amelyeknek az ívmértéke

a) $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$;

c) $\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{3}$;

b) $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$;

d) $\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{3}$;

RÁADÁS

Miért praktikus az ívmérték használata a fizikában? Hogyan alakulnának az egyenletes körmozgás leírására használt képletek, ha a szögelfordulást fokban mérnénk?

Egy egyenletes körmozgást végző test esetében a kör sugarát jelölje r , a periódusidőt T . Ha a szögsebességet fokban mérnénk, akkor a test szögsebessége $\omega = \frac{360^\circ}{T}$ lenne.

$$\text{Ekkor a kerületi sebessége } v = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2r\pi}{360^\circ} = r \cdot \omega \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}.$$

Vagyis a számolás során figyelembe kell venni egy $\frac{2\pi}{360^\circ}$ -os szorzótényezőt, a centripetális gyorsulás számolásakor pedig ennek a négyzetét. Ezt tudjuk kiküszöbölni, ha a szöget radiánban mérjük. Ekkor $v = r \cdot \omega$.

A radián használata esetén a szögelfordulást egységsugarú körben a hozzá tartozó körívvel, azaz a megtett út hosszával mérjük.





forgásszögek szögfüggvényei



radiánban kifejezett forgásszögek szögfüggvényei, az egységkör használata

FELADATOK

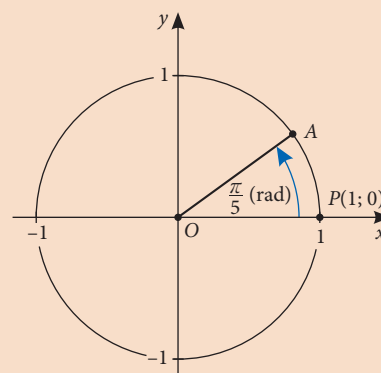
1. E1 Kösd össze az egymásnak megfelelőket!

60°	45°	30°	180°	360°	120°
2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

2. E1 Elforgatjuk az origó körül a koordináta-rendszer $P(1; 0)$ pontját. Az elforgatás szögét radiánban adjuk meg. Jelöld be az ábrába a megadott pontokat, majd válaszolj a kérdésre!

Az elforgatás szöge radiánban	$\frac{\pi}{5}$	$-\frac{\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{11\pi}{5}$	$\frac{12\pi}{5}$	$\frac{19\pi}{5}$
A forgatás után kapott pont jele	A	B	C	D	E	F

Melyek azok a pontok, amelyek egybeesnek?



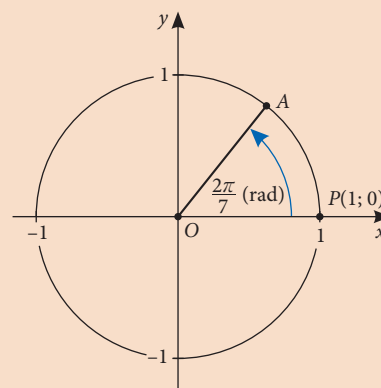
3. E1 Elforgatjuk az origó körül a koordináta-rendszer $P(1; 0)$ pontját. Az elforgatás szögét radiánban adjuk meg. Jelöld be az ábrába a megadott pontokat, majd válaszolj a kérdésekre!

Az elforgatás szöge radiánban	$\frac{2\pi}{7}$	$-\frac{2\pi}{7}$	$\frac{4\pi}{7}$	$\frac{5\pi}{7}$	$\frac{9\pi}{7}$	$\frac{16\pi}{7}$
A forgatás után kapott pont jele	A	B	C	D	E	F

Melyek azok a pontpárok, amelyek elhelyezkedése

a) tengelyesen szimmetrikus az x tengelyre?

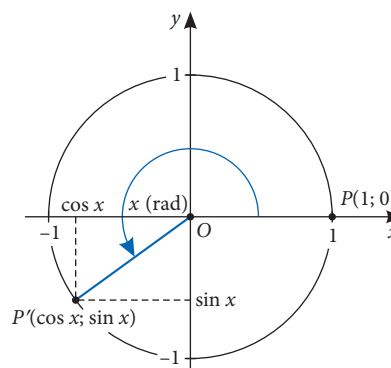
b) tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre?



ELMÉLET

Az 1 egység sugarú, origó középpontú kört **egységkörnek** nevezzük. Az egységkör sokat segít a szögfüggvényekhez kapcsolódó feladatok megoldásában. Az ábra a radiánban mért x forgásszög szinuszt és koszinuszt szemlélteti az egységkör segítségével.

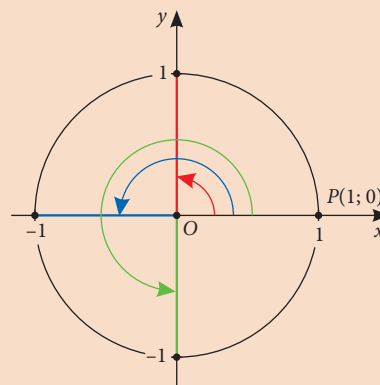
A radiánban mért forgásszögeknek ugyanúgy meghatározhatjuk a szögfüggvényeit, mint a fokokban mért forgásszögeknek. Számológép segítségével közvetlenül számolhatók a radiánban mért forgásszögek szögfüggvényei. Ehhez állítsd a számológépedet **RAD** módba!



FELADATOK

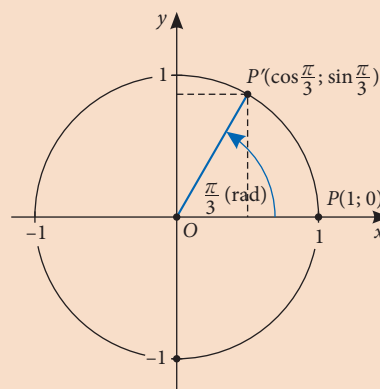
4. E1 Az egységkör segítségével válaszolj a kérdésekre! A forgásszögek mértékét radiánban add meg!

- a) Melyik az a 0 és 2π közötti forgásszög, amelynek szinusza 1?
- b) Melyik az a 0 és 2π közötti forgásszög, amelynek szinusza -1 ?
- c) Melyik az a $0 \leq x < 2\pi$ forgásszög, amelynek koszinusza 1?
- d) Melyik az a 0 és 2π közötti forgásszög, amelynek koszinusza -1 ?



5. E1 Az egységkör segítségével adj meg több olyan forgásszöget, amelynek szinusza egyenlő

- a) $\frac{\pi}{3}$ szinuszával;
- b) $-\frac{\pi}{3}$ szinuszával;
- c) $\frac{\pi}{3}$ koszinuszával;
- d) $-\frac{\pi}{3}$ koszinuszával!



6. E1

- a) Zsebszámológéped segítségével határozd meg, mennyi az 1 (rad) forgásszög szinusza!
- b) Az egységkör segítségével adj meg egy másik forgásszöget 0 és 2π között, amelynek ugyanennyi a szinusza!
- c) Az egységkör segítségével adj meg két másik forgásszöget 2π és 4π között, amelynek ugyanennyi a szinusza!
- d) Zsebszámológéped segítségével határozd meg, mennyi az 1 (rad) forgásszög koszinusza!
- e) Az egységkör segítségével adj meg egy másik forgásszöget 0 és 2π között, amelynek ugyanennyi a koszinusza!
- f) Zsebszámológéped segítségével határozd meg, mennyi az 1 (rad) forgásszög tangense!

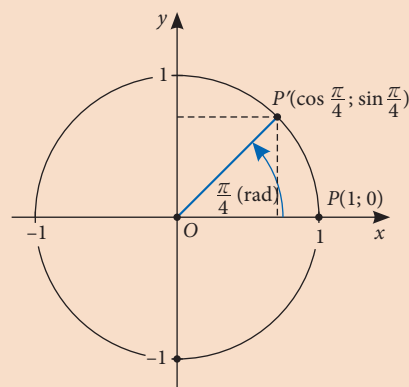


7. E1 Számológép használata nélkül, az egységkör segítségével állapítsd meg, hogy melyik kifejezések értéke egyenlő!

$$\sin \frac{\pi}{6} \quad \sin \frac{\pi}{3} \quad \sin 2\frac{\pi}{3} \quad \cos \frac{\pi}{6} \quad \cos \frac{\pi}{3}$$

8. E1 Az egységkör segítségével adj meg több olyan forgásszöget, amelynek szinusza egyenlő

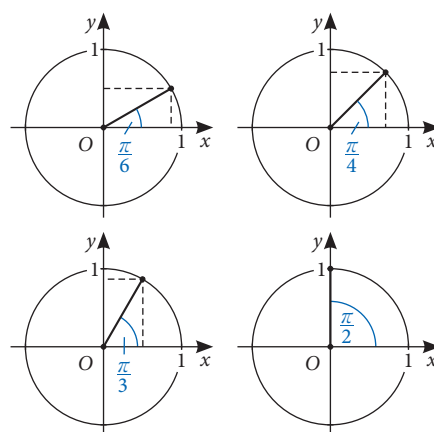
- a) $\frac{\pi}{4}$ szinuszával; c) $\frac{\pi}{4}$ koszinuszával;
b) $-\frac{\pi}{4}$ szinuszával; d) $-\frac{\pi}{4}$ koszinuszával!



ELMÉLET

A nevezetes szögekhez kapcsolódó szögfüggvényértékek

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nem létezik



RÁADÁS

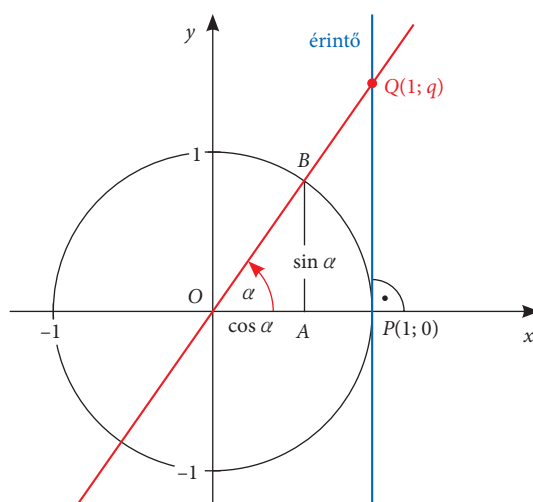
A tangens szögfüggvény és az egységkör

Az origó középpontú egységkörhöz érintőt húztunk a $P(1; 0)$ pontban. Az origón áthaladó, az x tengely pozitív irányával α szöget bezáró egyenes ezt az érintőt a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a Q pont második koordinátája az α szög tangensével egyenlő!

Megoldás:

Ha α hegyesszög, akkor tangense pozitív. Az ábra szerinti OAB háromszög oldalainak hossza $OA = \cos \alpha$, $AB = \sin \alpha$. Az OAB háromszög hasonló az OPQ háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. Az OPQ háromszög oldalainak hossza $OP = 1$ (hiszen egységkörben dolgozunk), illetve $PQ = q$. A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya egyenlő, ezért $\frac{q}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Ebből $q = \operatorname{tg} \alpha$.

Igazold az állítást arra az esetre, amikor α nem hegyesszög!





forgásszög meghatározása, ha ismert a szinusza vagy a koszinusza

KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyek azok a forgásszögek, amelyeknek a szinusza $\frac{1}{2}$? Határozd meg a megfelelő, radiánban mért forgásszögeket!

Megoldás:

Vegyük fel egy egységgörte. A keresett forgásszögek esetén a $P(1; 0)$ pont elforgatottjának, P' -nek a második koordinátája $\frac{1}{2}$. Ilyen P' pontot és x forgásszöget mutat az ábra.

Az ábra szerinti P' pontot megkaphatjuk, ha az elforgatás szöge 30° , azaz $\frac{\pi}{6}$ radián.

P' -t megkaphatjuk úgy is, ha az elforgatás szöge $30^\circ + 360^\circ$, vagy $30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$,

$30^\circ + 3 \cdot 360^\circ$ stb. Ugyancsak a P' ponthoz jutunk, ha az elforgatás szöge $-330^\circ = 30^\circ - 360^\circ$, $30^\circ - 2 \cdot 360^\circ$ vagy $30^\circ - 3 \cdot 360^\circ$ stb. Ezeket az eseteket összefoglalva így írhatjuk: $30^\circ + k \cdot 360^\circ$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Ugyanezeket radiánban így írhatjuk: $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

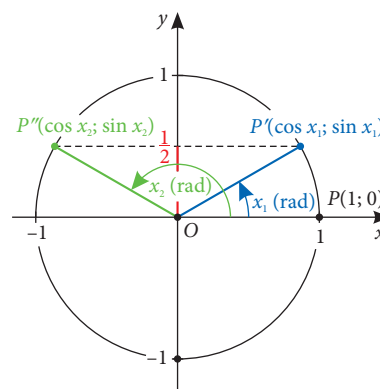
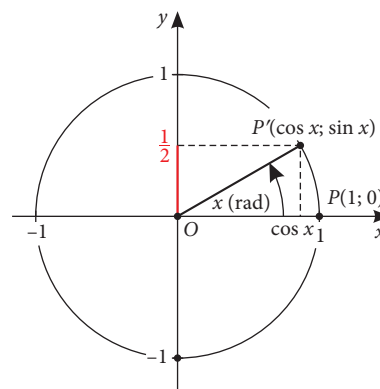
Vegyük észre, hogy van más megoldás is. A körön két különböző pont esetében is teljesül, hogy a pont második koordinátája $\frac{1}{2}$.

Az ábra szerinti P'' pontot megkaphatjuk, ha az elforgatás szöge 30° -kal kisebb, mint 180° , vagyis 150° , hiszen P' és P'' tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre. De az elforgatás szöge ebben az esetben is lehet 360° egész számú többszörösével több vagy kevesebb, mint 150° , azaz $150^\circ + n \cdot 360^\circ$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Radiánban felírva: $x_2 = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Azok a forgásszögek tehát, amelyeknek a szinusza $\frac{1}{2}$, két csoportban adhatók meg:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$



FELADATOK

1. E1 Az egységgör segítségével, számológép használata nélkül állapítsd meg, hogy mely kifejezések értéke egyenlő!

a) $\sin \frac{\pi}{10}, \sin \frac{3\pi}{10}, \sin \frac{5\pi}{10}, \sin \frac{7\pi}{10}, \sin \frac{9\pi}{10};$

b) $\sin \frac{11\pi}{10}, \sin \frac{19\pi}{10}, \sin \frac{21\pi}{10}, \sin \frac{24\pi}{10}, \sin \frac{26\pi}{10}.$

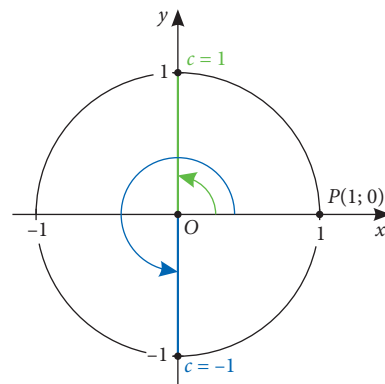
2. E1 Számológép használata nélkül, az egységgör segítségével állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat!

a) $\sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{6\pi}{5}, \cos \frac{6\pi}{5};$

b) $\cos 3\pi, \cos 10\pi, \cos \frac{13\pi}{2}.$

1. Melyek azok a radiánban mért forgásszögek, amelyek szinusza c ($c \in \mathbb{R}$)?

- ▶ Ha $c < -1$, vagy $c > 1$, akkor nincs olyan forgásszög, amelynek szinusza c .
- ▶ Ha $c = 1$, akkor az egységkörben egyetlen helyzet van, amely esetén a pont 42második koordinátája c . Ezért 0° és 360° között az egyetlen megoldás 90° , radiánban mérve $x = \frac{\pi}{2}$.



Figyelembe kell venni, hogy ugyanehhez a ponthoz jutunk, ha egy teljes körrel vagy akárhány teljes körrel elforgatjuk ezt a pontot pozitív vagy negatív irányban.

A teljes kör radiánban mérve 2π , ezért megfelelő forgásszöget kapunk, ha $\frac{\pi}{2}$ -höz

hozzáadjuk 2π egész számú többszörösét. A megoldás tehát: $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

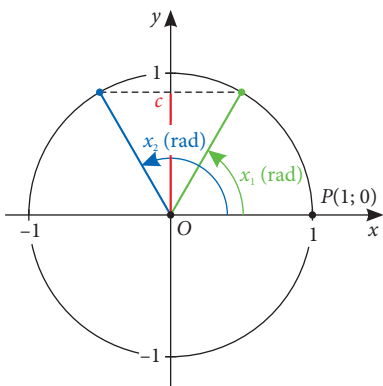
- ▶ Ha $c = -1$, akkor 0 és 2π között az egyetlen megoldás: $x = \frac{3\pi}{2}$. A forgatás figyelembevételével a megoldás:

$$\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- ▶ Ha $-1 < c < 1$:

$$0 < c < 1$$

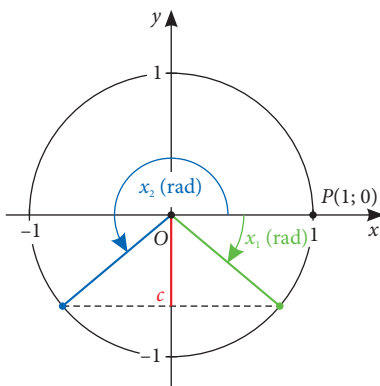
Ekkor 0 és 2π között két olyan forgásszög van, amelynek szinusza c .



A tengelyes szimmetria miatt $x_1 + x_2 = \pi$, s ez alapján $x_2 = \pi - x_1$.

$$-1 < c < 0$$

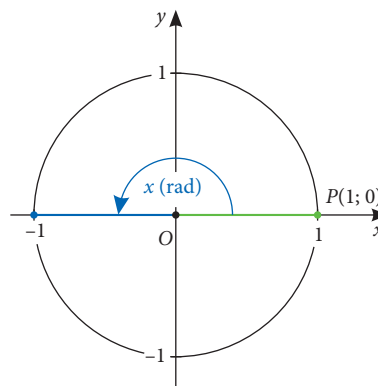
Ekkor a számológép azt a negatív forgásszöget adja meg, amelyhez tartozó P' pont a IV. síknegyedbe esik.



Az ábra szerint ekkor is felírható: $x_1 + x_2 = \pi$, és ez alapján $x_2 = \pi - x_1$.

$$c = 0$$

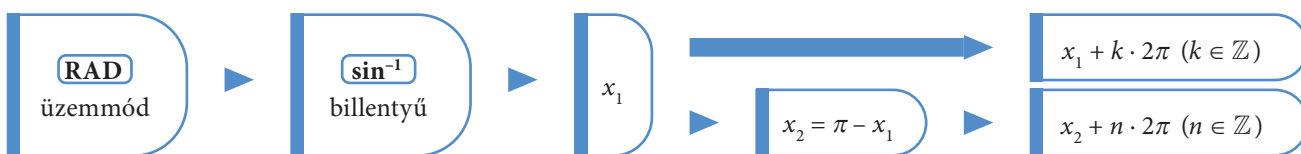
Ekkor $x_1 = 0$, és $x_2 = \pi$ olyan radiánban mért forgásszögek, amelyek szinusza c .



Ebben az esetben is teljesül, hogy $x_2 = \pi - x_1$.

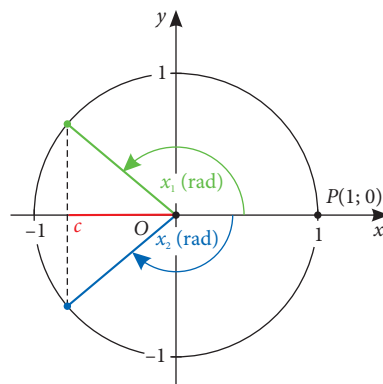
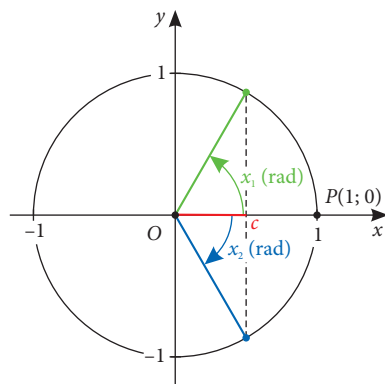
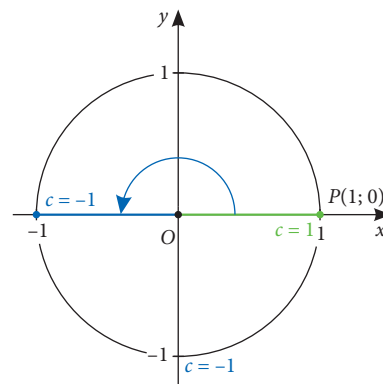
Ezenkívül figyelembe kell venni azt is, hogy a kapott forgásszögekhez 2π egész számú többszörösét adva az egységkörön ugyanazokhoz a pontokhoz jutunk.

Összefoglalva, ha $-1 \leq c \leq 1$, akkor végtelen sok olyan forgásszög van, amelynek szinusza c , és ezek a $c = \pm 1$ esettől eltekintve két csoportba sorolhatók. A számológép megad egyetlen értéket (x_1), majd egy kivonás segítségével ki tudunk számítani egy másodikat ($x_2 = \pi - x_1$), és a forgatás figyelembevételével fel tudjuk írni összesítve:

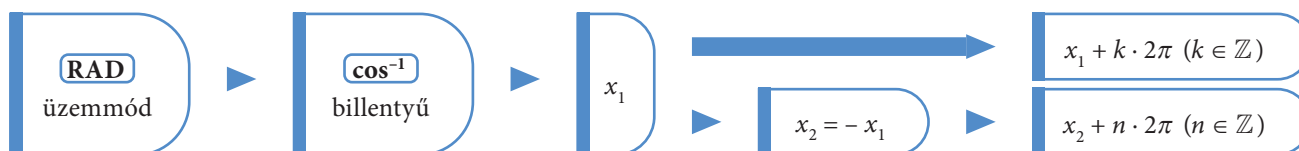


2. Melyek azok a radiánban mért forgásszögek, amelyek koszinusza c ($c \in \mathbb{R}$)?

- ▶ Ha $c < -1$, vagy $c > 1$, akkor nincs olyan forgásszög, amelynek a koszinusza c .
- ▶ Ha $c = 1$, akkor az egységgörőről leolvasható egyetlen megoldás az $x = 0$ forgásszöghöz tartozik. A forgatás figyelembevételével a megoldás: $k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- ▶ Ha $c = -1$, akkor 0 és 2π között az egyetlen megoldás: $x = \pi$. A forgatás figyelembevételével a megoldás: $\pi + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- ▶ Ha c egy -1 és 1 közötti valós szám ($-1 < c < 1$), akkor az egységgörbén két olyan helyzet áll elő, amikor a koszinusz értéke c . Ez a két helyzet tengelyesen szimmetrikus az x tengelyre, ezért felírható úgy, hogy a két forgásszög egymás ellentettje: $x_2 = -x_1$.



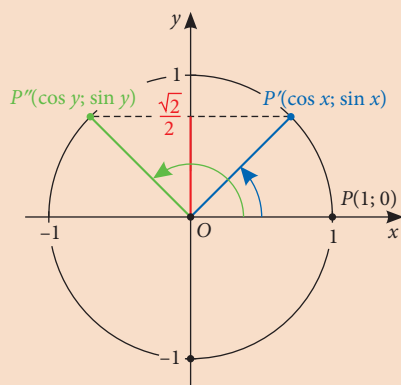
Ezért ha $-1 \leq c \leq 1$, akkor végtelen sok olyan forgásszög van, amelynek koszinusza c , és ezek a $c = \pm 1$ esettől eltekintve két csoportba sorolhatók. A számológép megad egyetlen értéket (x_1), majd ennek ellentettjeként kapunk egy másodikat ($x_2 = -x_1$), és a forgatás figyelembevételével fel tudjuk írni összesítve:



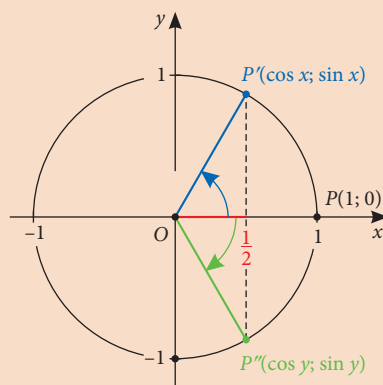
FELADATOK

3. E1 Az ábra alapján add meg az összes forgásszöget fokban is és radiánban is, amelyeknek

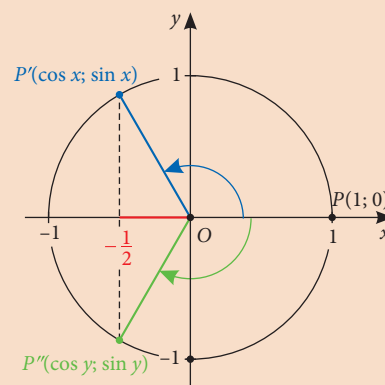
a) szinusza $\frac{\sqrt{2}}{2}$;



b) koszinusza $\frac{1}{2}$;



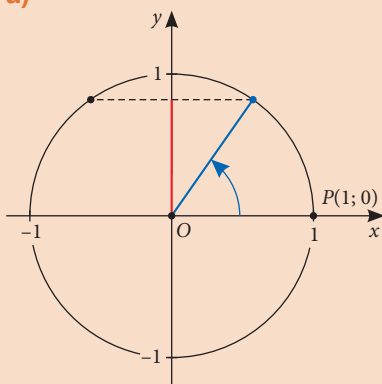
c) koszinusza $-\frac{1}{2}$.



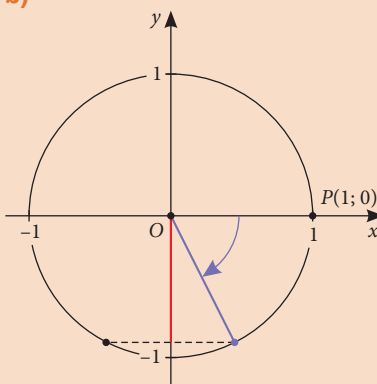
4. E1 Melyek azok a radiánban mért forgásszögek, amelyeknek szinusza az adott szám? Számológép segítségével töltsd ki a táblázat első oszlopát (x_1), majd ennek ismeretében a többi oszlopot! Hogyan jelenik meg az egységkörben az összes megoldás? Válaszd ki a feladatok soraihoz a megfelelő ábrát, és egészítsd ki!

Szögfüggvény értéke	x_1	x_2	Az összes megoldás ($k, n \in \mathbb{Z}$)	Ábra jele
$\sin x = 0,8192$	$\approx 0,960$	$\approx \pi - 0,960 \approx 2,18$	$\approx 0,960 + k \cdot 2\pi$ $\approx 2,18 + n \cdot 2\pi$	
$\sin x = 0,4618$				
$\sin x = -0,8912$				

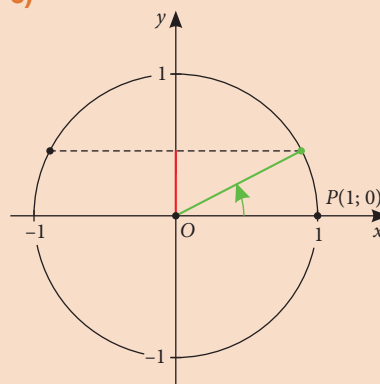
a)



b)



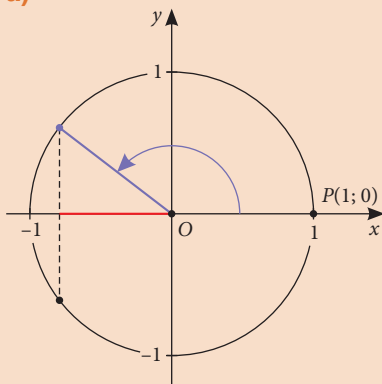
c)



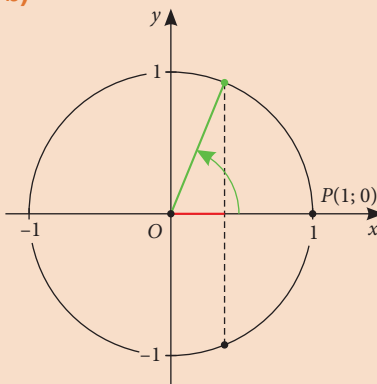
5. E1 Melyek azok a radiánban mért forgásszögek, amelyeknek koszinusza az adott szám? Számológép segítségével töltsd ki a táblázat első oszlopát (x_1), majd ennek ismeretében a többi oszlopot! Hogyan jelenik meg az egységkörben az összes megoldás? Válaszd ki a feladatok soraihoz a megfelelő ábrát, és egészítsd ki!

Szögfüggvény értéke	x_1	x_2	Az összes megoldás ($k, n \in \mathbb{Z}$)	Ábra jele
$\cos x = 0,1334$	$\approx 1,437$	$\approx -1,437$	$\approx 1,437 + k \cdot 2\pi$ $\approx -1,437 + n \cdot 2\pi$	
$\cos x = 0,3791$				
$\cos x = -0,7912$				

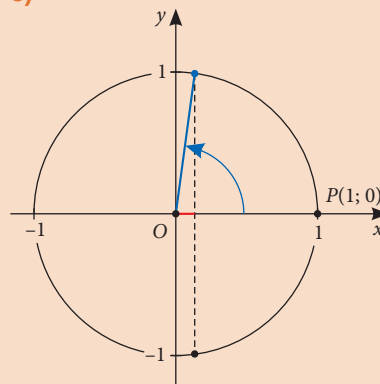
a)



b)



c)



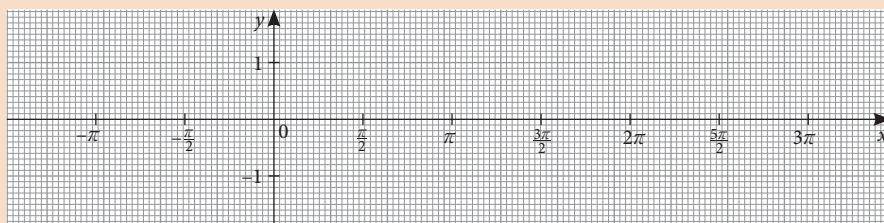


a valós számokon értelmezett trigonometrikus függvények

FELADATOK

- 1. E1** A forgásszögek radiánban mért értéke megfelel a valós számoknak, ezért definiálhatjuk a valós számok halmazaán az $x \mapsto \sin x$ függvényt. Ez alapján töltsd ki a táblázatot, majd annak segítségével ábrázold a valós számokon értelmezett $f(x) = \sin x$ függvényt!

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$										

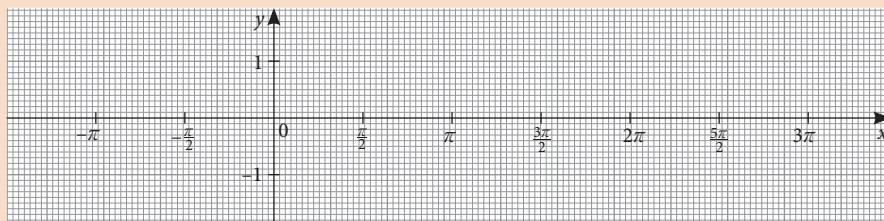


- 2. E1** Jelöld meg az előbbi koordináta-rendszer abszcisszatengelyén

- a) pirossal azokat a szakaszokat, amelyeken a szinuszfüggvény növekedő;
- b) kékkel azokat a pontokat, amelyekhez ez a függvény 1-et rendel hozzá (ezek a függvény maximumhelyei);
- c) feketével azokat a pontokat, amelyekhez ez a függvény (-1) -et rendel hozzá (ezek a függvény minimumhelyei)!

- 3. E1** Az x valós szám koszinusza megegyezik az x radián ívmértékű forgásszög koszinuszával. Ez alapján töltsd ki a táblázat üres helyeit, majd annak segítségével ábrázold a valós számokon értelmezett $f(x) = \cos x$ függvényt!

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$									

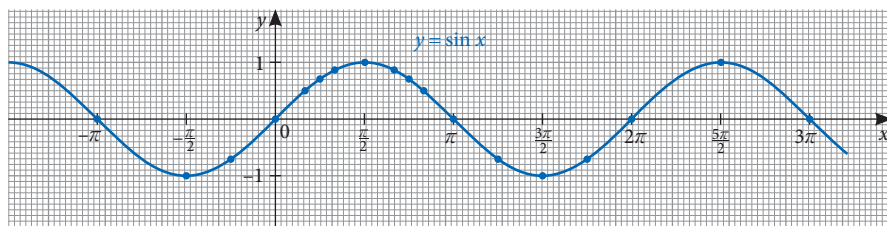


- 4. E1** Az előző feladat grafikonja alapján jellemezd a valós számok halmazán értelmezett koszinuszfüggvényt!

Értékkészlet	Zérushelyek	Maximumhelyek	Maximum értéke	Minimumhelyek	Minimum értéke

1. A szinuszfüggvény

Ha minden x valós számhoz hozzárendeljük az x radián ívmértékű forgásszög szinuszt, akkor a **szinuszfüggvényt** kapjuk. Grafikonja a **szinuszgörbe**.



- ▶ értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$;
- ▶ értékkészlet: $[-1; 1]$;
- ▶ zérushelyek: $x = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

A szinuszfüggvény

- ▶ szigorúan monoton nő a $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ intervallumokon, szigorúan monoton csökken a $\left[\frac{\pi}{2} + l\pi; \frac{3\pi}{2} + l\pi\right]$ intervallumokon ($k, l \in \mathbb{Z}$);
- ▶ maximumhelyei $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, a maximum értéke 1;
- ▶ minimumhelyei $x = \frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$, a minimum értéke -1 .

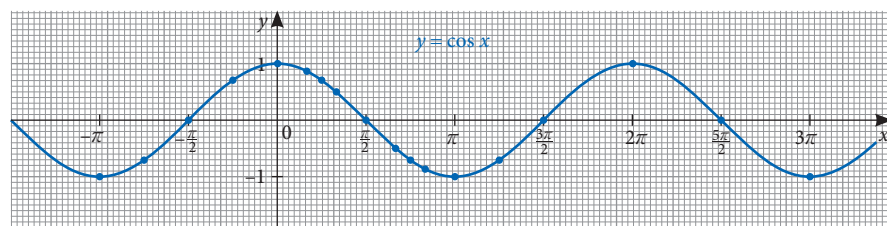


Megjegyzés:

A négyzetátlós füzetben a szinuszfüggvény ábrázolásakor (ahhoz, hogy a függvény grafikonja a körülbelül megfelelő arányokat mutassa) érdemes az egységeket a következő módon felvenni: az y tengelyen legyen 2 beosztásnál az egység, az x tengelyen pedig legyen 6 beosztásnál a π .

2. A koszinuszfüggvény

Ha minden x valós számhoz hozzárendeljük az x radián ívmértékű forgásszög koszinuszt, akkor a **koszinuszfüggvényt** kapjuk.



- ▶ értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$;
- ▶ értékkészlet: $[-1; 1]$;
- ▶ zérushelyek: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

A koszinuszfüggvény

- ▶ szigorúan monoton nő a $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$ intervallumokon, szigorúan monoton csökken az $[2l\pi; \pi + 2l\pi]$ intervallumokon ($k, l \in \mathbb{Z}$);
- ▶ maximumhelyei $x = k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, a maximum értéke 1;
- ▶ minimumhelyei $x = \pi + l \cdot 2\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$, a minimum értéke -1 .

3. További függvénytulajdonságok

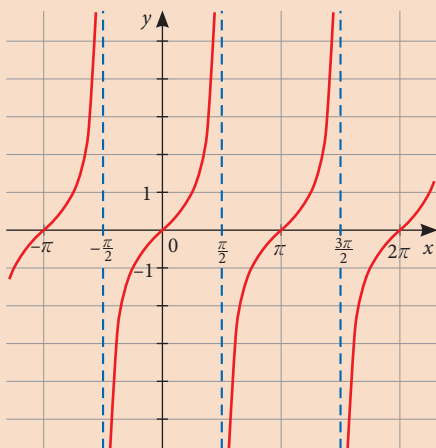
- ▶ A szinuszfüggvény és a koszinuszfüggvény **periodikus**, periódusuk 2π . A forgásszögek vizsgálatakor láttuk, hogy az elforgatott P pont egy kört megtéve újra visszatér ugyanabba a pozícióba, így az ennek megfelelő szinusz- és koszinuszértékek is újra ugyanazok lesznek. Ezt periodikusságnak nevezzük. Ez a szinusz- és a koszinuszfüggvényre nézve is azt jelenti, hogy ha a grafikonját az x tengellyel párhuzamosan eltoljuk 2π -vel, akkor az eredeti függvény grafikonját kapjuk (és ennél kisebb – nem nulla – eltolás esetén ez nem teljesül). A periodikusság azt jelenti, hogy $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ és $\cos x = \cos(x + 2\pi)$.
- ▶ A szinuszfüggvény a valós számok halmazán **páratlan** függvény. Ez azt jelenti, hogy ha x eleme az értelmezési tartománynak, akkor $(-x)$ is eleme az értelmezési tartománynak, és a $(-x)$ és az x helyen felvett függvényérték egymás ellentettje, azaz $\sin(-x) = -\sin x$. (A páratlan függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.)
- ▶ A koszinuszfüggvény viszont **páros** függvény. Ez azt jelenti, hogy ha x eleme az értelmezési tartománynak, akkor $(-x)$ is eleme az értelmezési tartománynak, és a $(-x)$ és az x helyen felvett függvényérték egyenlő, azaz $\cos(-x) = \cos x$. (A páros függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.)
- ▶ Azt, hogy egy függvény páros, illetve páratlan, a függvény **paritásának** mondjuk. Nagyon sok függvényre nem jellemző a paritás mint tulajdonság: sok függvény se nem páros, se nem páratlan.

4. A tangensfüggvény

Ha minden $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) valós számhoz hozzárendeljük az x radián ívmértékű forgásszög tangensét, akkor a **tangensfüggvényt** kapjuk. Ennek grafikonját és jellemzését a 5. feladatban találod.

FELADATOK

- 5. E1** A tangensfüggvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyek koszinusza nem nulla, azaz $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Az x valós szám tangense megegyezik az x radián ívmértékű forgásszög tangensével, ha ez létezik. Ábrázoltuk a tangensfüggvény grafikonját. A grafikon alapján jellemezd a függvényt! Töltsd ki a táblázatot!



Értékkészlet	
Zérushelyek	
Szélsőérték	
Periódus	
Paritás	

- 6. E1** Számológép használata nélkül állítsd monoton növekvő sorrendbe a felső sorban álló kifejezéseket! Használd a megoldáshoz a szinuszfüggvény grafikonját!

$\sin 1,5\pi$	$\sin 1,5$	$\sin 3\pi$	$\sin 3$	$\sin 31\pi$	$\sin 31$
M	Y	K	S	C	N

A kifejezésekhez tartozó betűket írd a megfelelő sorrendben az üres téglalapokba! Két további betűvel kiegészítve egy híres magyar festőművész nevét kapod megfejtésül. Ki ő?

		K			
--	--	---	--	--	--



függvénytranszformációk, kivéve az $f(cx)$ transzformáció



trigonometrikus függvények függvénytranszformációi, kivéve az $f(cx)$ transzformáció

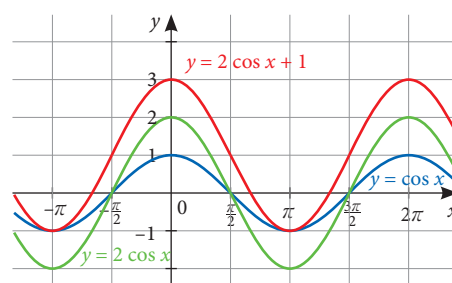
KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoljuk és jellemezzük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2 \cos x + 1$ függvényt!

Megoldás:

Az ábrázolást több lépésben végezhetjük el. Első lépésként a $g: x \mapsto \cos x$ függvény, másodikként a $h: x \mapsto 2 \cos x$, harmadik lépésben pedig az f függvény grafikonját rajzoljuk meg.

A g függvény grafikonját éppen az előző leckében ismertük meg. A h grafikonját úgy kapjuk meg, hogy g grafikonját az x tengelyre merőlegesen „kétszeresére nyújtjuk”. (Ez azt jelenti, hogy a grafikon minden pontjának második koordinátáját a 2-szeresére változtatjuk. Így minden pont 2-szer akkora távolságra kerül az x tengelytől, mint amekkora az eredeti távolsága volt.) Végül f grafikonját a h grafikonjának az y tengellyel párhuzamos, pozitív irányú, 1 egység nagyságú eltolásával kapjuk meg.



Az f függvény értékkészlete: $[-1; 3]$. A függvény periodikus, a periódusa megegyezik a koszinuszfüggvény periódusával: 2π .

A függvény maximumhelyei megegyeznek a koszinuszfüggvény maximumhelyeivel, ugyanez a minimumhelyekre is igaz. A maximum értéke 3, a minimum értéke -1 .

A függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, tehát az f páros függvény.

Az f függvény zérushelyei azok a valós számok, amelyekre $2 \cos x + 1 = 0$. Ezt az egyenletet átrendezve ezt kapjuk: $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Azok a valós számok, amelyek koszinusza $-\frac{1}{2}$, két csoportban írhatók fel: $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, illetve $-\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).

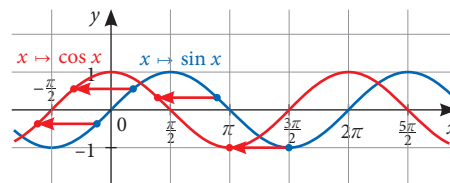
ELMÉLET

Függvénytranszformációk I.

Hogyan kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából egy, az f transzformálásával kapott függvény grafikonját?

$f(x) + c$	Eltoljuk f grafikonját az y tengellyel párhuzamosan c -vel.
$f(x + c)$	Eltoljuk f grafikonját az x tengellyel párhuzamosan $(-c)$ -vel.
$c \cdot f(x)$	Minden függvényérték c -szeresére változik. „Megnyújtjuk” vagy „zsugorítjuk” f grafikonját az y tengely irányában. Ha c negatív, akkor tükrözzük is az x tengelyre.
$-f(x)$	Tükrözzük f grafikonját az x tengelyre (ez az előzőnek egy speciális esete: $c = -1$).
$ f(x) $	A grafikonnak azt a részét, ahol f értéke negatív, tükrözzük az x tengelyre. Ahol f értéke nemnegatív, ott a függvény grafikonja nem változik.

A koszinuszfüggvény grafikonját megkaphatjuk úgy, hogy a szinuszgörbét az x tengellyel párhuzamosan eltoljuk $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ -vel ez megfelel a következő azonosságoknak: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

1. E1 Melyik az a függvény, amelynek grafikonját úgy kapjuk, hogy

a) az $x \mapsto \sin x$ függvény grafikonját eltoljuk az y tengely mentén $(-2, 5)$ -del;

b) az $x \mapsto \cos x$ függvény grafikonját „felére nyomjuk” az y tengely (ordinátatengely) mentén, azaz a grafikon minden pontjának második koordinátáját a felére csökkentjük?

c) Ábrázold a függvényeket!

2. E1 Ábrázold a függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben!

a) $f(x) = \sin x$ $g(x) = 2 \sin x$ $h(x) = 2 \sin x + 2$

b) $f(x) = \cos x$ $g(x) = -\cos x$ $h(x) = -\cos x - 1$

c) $f(x) = \sin x$ $g(x) = |\sin x|$ $h(x) = |\sin x + 1|$

d) $f(x) = \sin x$ $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$h(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

3. E1 Ábrázold és jellemezd az alábbi függvényeket!

a) $f(x) = -2 \sin x$

b) $g(x) = 0,5 \sin x + 2$

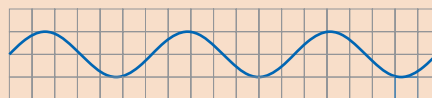
c) $h(x) = 1 - \cos x$

4. E2

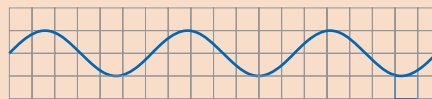
a) Rajzold be a koordinátatengelyeket úgy, hogy az ábra a megadott függvény grafikonját mutassa! Add meg az x tengelyen a π , az y tengelyen pedig az 1 szám helyét is!

b) Melyik függvény páros, és melyik páratlan?

A) $x \mapsto \cos x - 1$



B) $x \mapsto -\sin x$



5. E2 A függvények értékkészletének figyelembevételével pótolod a hozzárendelési szabályokból hiányzó számokat, majd ábrázold a függvények grafikonját!

a) $f(x) = \dots \sin x + \dots$ és $f(x)$ értékkészlete $[-3; 1]$;

b) $g(x) = \dots \cos x + \dots$ és $g(x)$ értékkészlete $[0; 6]$.

6. E2 A függvény megadott értékeinek segítségével ábrázold a függvény grafikonját, majd határozd meg a hozzárendelési szabályban a hiányzó számokat!

a) $f(x) = \dots \sin x + \dots$, ha $f(0) = 1$ és $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

b) $g(x) = \dots \cos x + \dots$, ha $g(0) = 1$ és $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.





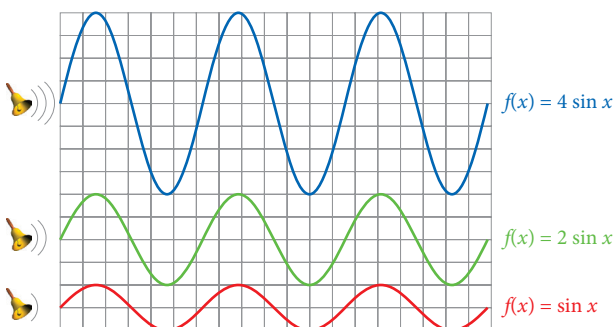
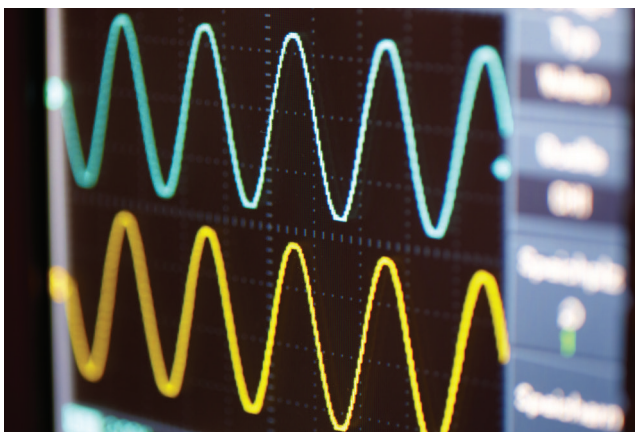
az $f(cx)$ függvénytranszformáció, a valós számokon értelmezett $f(x) = \sin cx$ és $g(x) = \cos cx$ függvények

BEVEZETŐ

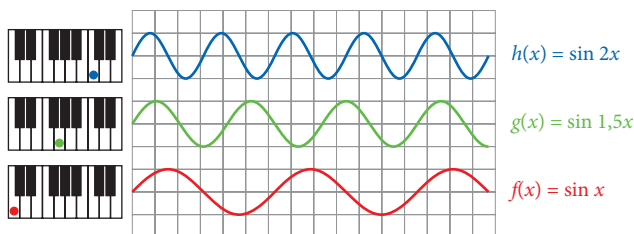
A hang forrása – egy hangszer, egy hangszóró membránja vagy akár az emberi hangszálak – rezgésbe hozza a levegő részecskéit, ezt a rezgést hangként érzékeljük a fülünkkel.

Az egyik legtisztább rezgés a hangvilla rezgése, amely az oszcilloszkóp képernyőjén egyszerű szinuszgörbéként jelenik meg.

Ha a hangvilla erősebb hangot ad ki, akkor az oszcilloszkóp képernyőjén nagyobb lesz a szinuszgörbe „magassága” (amplitúdója). Minél nagyobb az amplitúdó, annál nagyobb hangerővel szól a hang.



A különböző magasságú hangokhoz tartozó szinuszgörbék még egy fontos jellemzőjükben – a periódusuk hosszában – térnek el egymástól. A feleakkora periódus azt jelenti, hogy a hangforrás kétszer annyi teljes rezgést végzett egy másodperc alatt, mint a hosszabb periódusú. Feleakkora periódus esetén egy oktávval magasabb hangot hallunk.



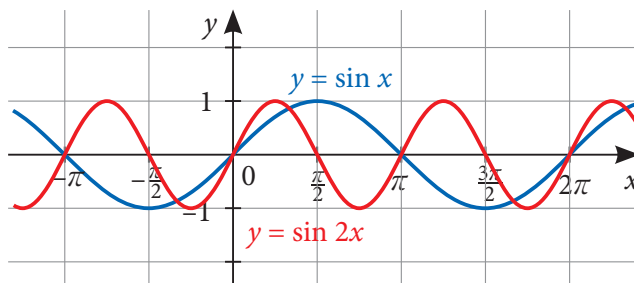
KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin 2x$ függvényt! (A $\sin 2x$ helyett $\sin (2x)$ is írható, de általában nem tesszük ki a zárójelet.)

Megoldás:

Képzeld el, hogy a $P(1; 0)$ pontot két példányban, kétféle sebességgel forgatjuk az origó körül! Amíg az egyik pont α szöggel fordul el, addig a másik pontosan 2α szöggel. A szinuszfüggvény megjeleníti az origó körül elforgatott $P(1; 0)$ pont második koordinátáját. Ha az elfordulás szöge x , akkor az elforgatott pont második koordinátája $\sin x$.

Mit jelent meg az $f(x) = \sin 2x$ függvény? Azt mutatja meg, hogy mennyi a „kétszer olyan gyorsan forgó” pont második koordinátája. Mivel a „kétszeres sebességgel” futó pont feleakkora idő alatt futja be a teljes kört, mint a másik pont, ezért a lassabban forgó pont még csak π szöggel fordult el addig, amíg a gyorsabb már 2π -vel. A gyorsabban forgó pont második koordinátáját tehát egy olyan függvény írja le, amelynek a periódusa π .



Függvénytranszformációk II.

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjából a $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin cx$ függvény grafikonját ($c \in \mathbb{R}$, $c > 0$) az x tengely irányában történő zsugorítással vagy nyújtással kapjuk meg. (Ha $c < 0$, akkor tükrözni is kell az y tengelyre.)

$g(x) = \sin 2x$	x tengely mentén felére zsugorítjuk	▶	periódusa π ;
$h(x) = \sin \frac{x}{3}$	x tengely mentén háromszorosára nyújtjuk	▶	periódusa 6π ;
$k(x) = \sin cx$	x tengely mentén $\frac{1}{c}$ -szeresére nyújtjuk	▶	periódusa $2\pi \cdot \frac{1}{c}$.

Hogyan kaphatjuk meg f függvény grafikonjából egy függvénytranszformáció során nyert függvény grafikonját?

A függvényérték transzformációi		
$f(x) + c$	A függvényértékek minden helyen c -vel növekednek.	Eltoljuk f grafikonját az y tengellyel párhuzamosan c -vel („fel vagy le”). Az eltolás vektora $v(0; c)$.
$c \cdot f(x)$	A függvényértékek minden helyen c -szeresükre változnak.	„Megnyújtjuk” vagy „zsugorítjuk” f grafikonját az y tengellyel párhuzamosan. Ha c negatív, akkor tükrözzük is az x tengelyre.
A függvényváltozó transzformációi		
$f(x + c)$	Az x helyen felvett függvényérték egyenlő az eredetileg $x + c$ helyen felvett függvényértékkel.	Eltoljuk f grafikonját az x tengellyel párhuzamosan $(-c)$ -vel („jobbra vagy balra”). Az eltolás vektora $u(-c; 0)$.
$f(cx)$	Az x helyen felvett függvényérték egyenlő az eredetileg cx helyen felvett függvényértékkel.	„Összenyomjuk” vagy „széthúzzuk” f grafikonját az x tengellyel párhuzamosan. Ha c negatív, akkor tükrözzük is az y tengelyre.



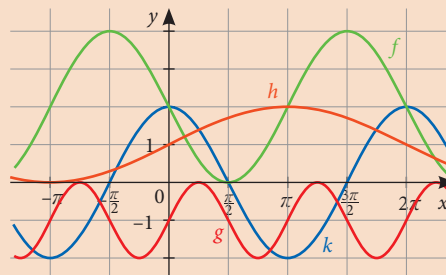
A grafikonok ábrázolásában segítenek a függvényábrázoló programok.

FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

- E1** A kidolgozott feladat grafikonja segítségével jellemezd az $f(x) = \sin 2x$ függvényt a következő szempontok alapján: értelmezési tartomány, értékészlet, periodikusság, paritás (páros, páratlan vagy egyik sem), zérushelyek, szélsőértékek!
- E1** Ábrázold és jellemezd az $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$ függvényt!
- E1** Ábrázold és jellemezd az $f(x) = 3 \cos 2x$ függvényt!
- E2** Ábrázold és jellemezd az $f(x) = 3 \sin 2x - 3$ függvényt!

- E1** Állítsd párba a függvények nevét és hozzárendelési szabályát!



- A) $x \mapsto \sin 2x - 1$ C) $x \mapsto 2 - 2 \sin x$
 B) $x \mapsto 2 \cos x$ D) $x \mapsto \sin \frac{x}{2} + 1$

- E2** Határozd meg az a és c paraméterek értékét a függvény tulajdonságainak ismeretében!
 $f(x) = a \cdot \sin cx$, ha f minimuma $-3,5$; és f zérushelyei között a legkisebb pozitív szám $\frac{2\pi}{3}$.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$

b) $\sin 2y = -\frac{1}{2}$

c) $4 \sin x + 4 = 2 \sin x + 3$

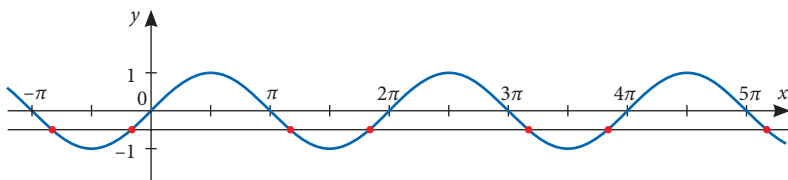
Megoldás:

- a) Azokat a valós számokat keressük, amelyeknek a szinusza $-\frac{1}{2}$.
0 és 2π között két olyan valós szám van, amelyre ez teljesül.

A $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ismeretében az ábráról leolvasható, hogy az egyik érték π -nél

$\frac{\pi}{6}$ -tal több, azaz $\frac{7\pi}{6}$, a másik érték 2π -nél $\frac{\pi}{6}$ -tal kevesebb, azaz $\frac{11\pi}{6}$.

De nemcsak a 0 és 2π közötti megoldásokat kell megkeresnünk, hanem az összes valós számot, amelynek szinusza $-\frac{1}{2}$. A grafikonról leolvashatjuk, hogy úgy kapjuk meg ezeket a számokat, ha a 0 és 2π közötti megoldásokhoz egész számszor hozzáadjuk a szinuszfüggvény periódusát, a 2π -t.



A megoldások tehát: $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ és $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

- b) Azokat a valós számokat keressük, amelyek kétszereséről tudjuk, hogy szinusza $-\frac{1}{2}$.

Keressük meg először azokat a számokat, amelyek szinusza $-\frac{1}{2}$. Az a) pontban épp ezeket határoztuk meg, s ezt találtuk:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

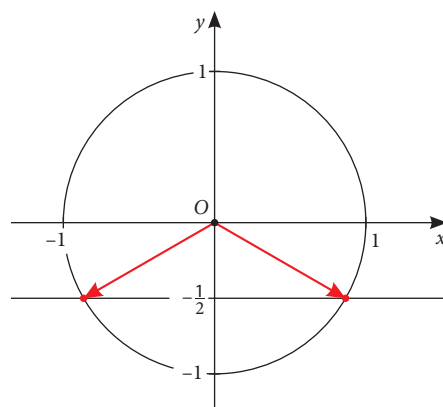
Az egyenletnek pontosan azok a számok lesznek a megoldásai, amelyeknek ezek a kétszeresei. Osszuk el ezért x_1 -et és x_2 -t 2-vel! Vigyázat, minden tagot osztani kell 2-vel, a $2k\pi$ és $2l\pi$ tagokat is!

$$\text{Az egyenlet megoldásai: } y_1 = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{11\pi}{12} + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

- c) Az egyenlet átrendezésével kapjuk: $2 \sin x + 4 = 3 \quad \blacktriangleright \quad 2 \sin x = -1 \quad \blacktriangleright \quad \sin x = -\frac{1}{2}$.

Az egyenlet megoldásait tehát az a) pontban meghatározott valós számok adják:

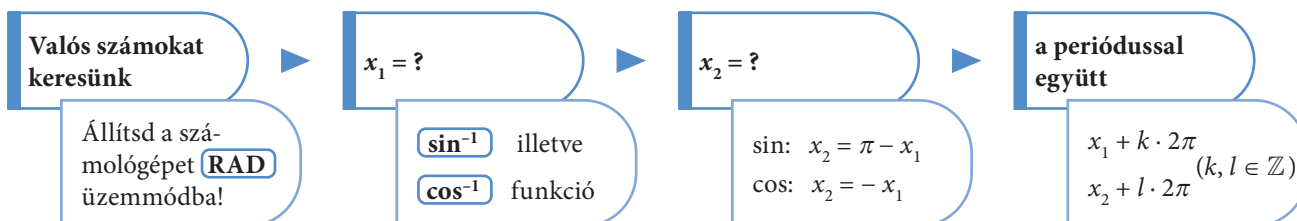
$$x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$



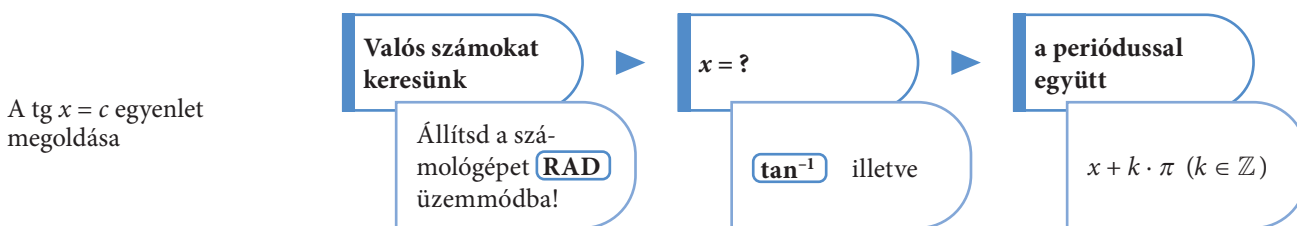
1. Az összes megoldás megkeresése

A szögfüggvények periodikus tulajdonsága miatt egy trigonometrikus egyenletnek a valós számok halmazán végtelen sok megoldása lehet.

Ha $c > 1$ vagy $c < -1$, akkor a $\sin x = c$, illetve $\cos x = c$ egyenleteknek nincs megoldása a valós számok halmazán. Ha $c = 1$ vagy $c = -1$, akkor egy csoportban, ha $-1 < c < 1$, akkor két csoportban sorolhatók fel azok a valós számok, amelyekre $\sin x = c$, illetve $\cos x = c$.



A tangensfüggvény minden valós számot felvesz, de periódusonként csak egyszer. Periódusa azonban nem 2π , hanem π .



2. A periódus változása

Figyelj arra, hogy amikor egy egyenletet osztunk egy számmal, akkor minden tagot, tehát a periódust is osztani kell.

Például: $\operatorname{tg} x = 1$ megoldása $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

$\operatorname{tg} 2x = 1$ esetén $2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, ebből a megoldás $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

FELADATOK

1. E1 Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 2y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = -\sqrt{3}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $3 \cos x - \sqrt{3} = \cos x$ $\cos 2x - 2 = 1$

e) $3 \sin x = \sqrt{2} + \sin x$ $\frac{\operatorname{tg} x}{3} - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{1}{6}$

2. E1 A hálózati váltakozó feszültség időbeli változását az $U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$ összefüggés adja meg, ahol t a mérés kezdete óta eltelt idő másodpercben mérve, és $U(t)$ a feszültség pillanatnyi értéke voltban mérve. A mérés első másodperce alatt ($0 < t \leq 1$ esetén) hány időpillanat van, amikor a feszültség értéke

- a) 0 V; c) 220 V;
b) 325 V; d) 400 V?

3. E1 Az $U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$ összefüggés szerinti váltakozó feszültség esetén (ahol t -t másodpercben és $U(t)$ -t voltban mérjük) határozd meg azokat a t időpillanatokat, amikor a feszültség értéke

- a) -325 V; b) $162,5$ V; c) 220 V!



másodfokú egyenletre visszavezethető trigonometrikus egyenletek, addíciós tételek

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\sin^2 x - 4 \sin x - 5 = 0$

b) $\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x = 0$

A $\sin^2 x$ leírással azt jelöljük, hogy a $\sin x$ -nek vesszük a négyzetét, azaz $\sin^2 x = (\sin x)^2$.

Megoldás:

a) Az egyenletben szerepel $\sin x$ is és a négyzete is. Vezessünk be $\sin x$ helyett új ismeretlent: $y = \sin x$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet így alakul: $y^2 - 4y - 5 = 0$.

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökeit meghatározhatjuk a megoldóképlettel.

Ezt kapjuk: $y_1 = 5$ és $y_2 = -1$.

Ebből $\sin x = 5$, illetve $\sin x = -1$.

A $\sin x$ értéke nem lehet 5, ez nem vezet megoldáshoz.

A valós számok halmazán a $\sin x = -1$ egyenlet megoldásai: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

b) Minden x valós számra $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Ezt alkalmazva az egyenlet így alakul:

$$1 + \cos x = 0, \text{ átrendezve: } \cos x = -1.$$

A megoldások:

$$x = \pi + 2k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

ELMÉLET

1. Másodfokú egyenletre visszavezethető trigonometrikus egyenletek

Ha egy trigonometrikus egyenletben egy szögfüggvény és annak a négyzete is szerepel, akkor érdemes először új ismeretlent bevezetni, és az így kapott másodfokú egyenletet megoldani.

2. Trigonometrikus azonosságok

A szögfüggvények kiterjesztése úgy történt, hogy a hegyesszögek szögfüggvényei között fennálló kapcsolatok tetszőleges forgásszögre is teljesülnek.

▶ Trigonometrikus Pitagorasz-tétel minden valós szám esetén teljesül:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

▶ A tangens szögfüggvény definíciója szerint minden $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) valós szám esetén:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Az előbbi két azonosság segítségével sok trigonometrikus egyenlet úgy alakítható, hogy ugyanazon szögnek ne kétféle szögfüggvénye szerepeljen benne, hanem csak egyféle.

3. Addíciós tételek

Két szög összegének szinusza általában nem egyenlő a szögek szinuszainak összegével. Például $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,366$, míg $\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$. Addíciós tételeknek nevezzük azokat az azonosságokat, amelyek azt adják meg, hogyan számíthatjuk ki két szög összegének és különbségének a szögfüggvényeit a két szög szögfüggvényei segítségével. Ezeket az azonosságokat megtalálhatod a *függvénytáblázatban* is.

I. Két szög összegének szinusza és koszinusza (tetszőleges α, β forgásszög esetén)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

II. Két szög különbségének szinusza és koszinusza (tetszőleges α, β forgásszög esetén)

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

III. Két szög összegének tangense (ha α -nak, β -nak, $(\alpha + \beta)$ -nak illetve 2α -nak létezik tangense)

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

FELADATOK

- 1. E1** Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\cos^2 x - 3 \cos x = 0$ **b)** $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$

- 2. E1** Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $\sin^2 x + 1 = 4 \sin x - \cos^2 x$

b) $\sin^2 x + 2 \cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

c) $\operatorname{tg} x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

d) $\sin x + 1 = \cos^2 x$

- 3. E1** A következő egyenletek visszavezethetők a tangens szögfüggvényre. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin x = -\cos x$ **b)** $3 \sin x = 8 \cos x$

- 4. E1** Az addíciós tételek segítségével oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin 2x = \sin x$

b) $\cos 2x = \sin x$

c) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$

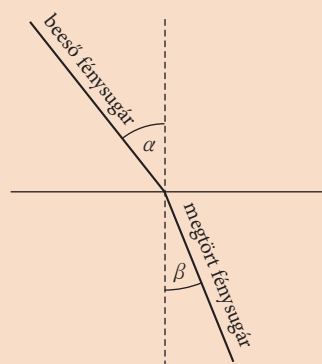
- 5. E1** Az addíciós tételek segítségével és a nevezetes szögek szögfüggvényeinek ismeretében add meg a következő szögfüggvények pontos értékét!

c) $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) =$

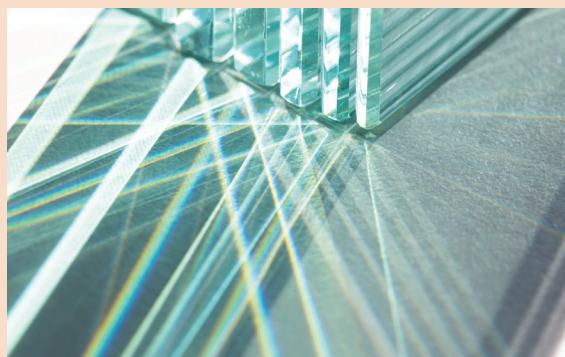
d) $\cos 15^\circ =$

e) $\operatorname{tg} 105^\circ =$

- 6. E1** A fénytörés törvénye alapján, ha α a beeső fénysugárnak, β pedig a megtört fénysugárnak a beesési merőlegessel bezárt szöge, akkor $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ értéke a közegekre jellemző érték, amit törésmutatónak nevezünk.



Határozd meg azt a beesési szöget (α -t), amely esetén $\alpha = 2\beta$, ha a törésmutató 1,6!



- 7. E2** Egy háromszög két oldalának hossza $a = 12$ cm és $b = 10$ cm. Ezen oldalakkal szemközti szögekre teljesül, hogy $\alpha = 2\beta$. Mekkora a háromszög szögei?



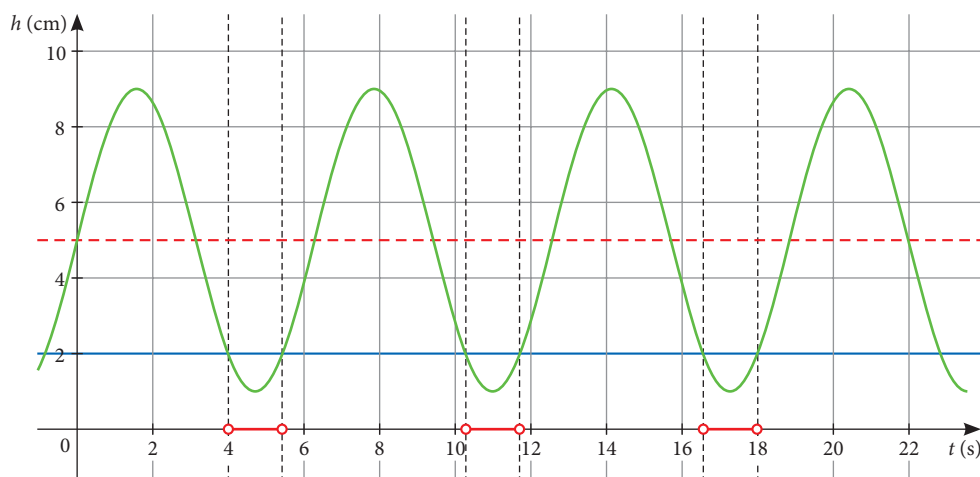
trigonometrikus egyenlőtlenségek

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy rugóra akasztott test harmonikus rezgőmozgást végez. Az egyensúlyi helyzet 5 cm-rel van az asztallap szintje fölött. A rezgés amplitúdója (legnagyobb kitérése) 4 cm, körfrekvenciája $\omega = 1 \frac{1}{s}$. Ábrázoljuk grafikonon a test kitérését az idő függvényében, és határozzuk meg azokat az időintervallumokat a tengelyen, amikor a test közelebb van az asztallaphoz, mint 2 cm!

Megoldás:

A testnek az egyensúlyi helyzettől mért távolságát (kitérését) az $y = A \cdot \sin \omega t$ összefüggés írja le, ahol A az amplitúdó, ω a körfrekvencia, t az eltelt idő. Ha az asztallaptól való távolságot h -val jelöljük, és figyelembe vesszük a fenti adatokat, akkor $h = 4 \cdot \sin t + 5$ függvény adja meg cm-ben mérve a test mozgását. Grafikonon ábrázoltuk az asztallaptól mért távolságot az idő függvényében. A grafikonon bejelöltük, hogy mely esetekben lesz a test 2 cm-nél közelebb az asztallaphoz.

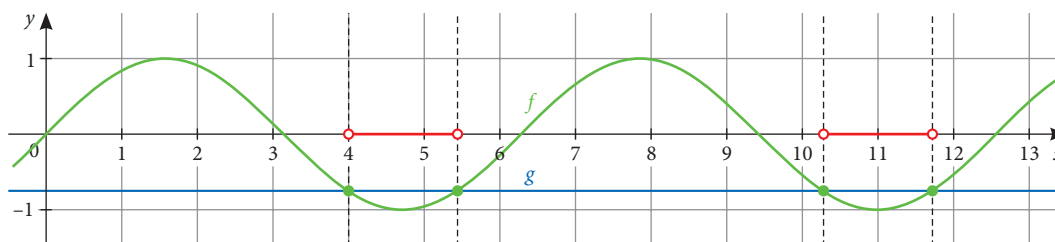


A megfelelő intervallumok felírásához a $4 \cdot \sin t + 5 < 2$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Az egyenlőtlenség mindkét oldalából vonjunk ki 5-öt, majd mindkét oldalt osszuk el 4-gyel!

$$4 \cdot \sin t < -3 \quad \Rightarrow \quad \sin t < -0,75$$

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett $f(t) = \sin t$ és $g(t) = -0,75$ függvényeket!



Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja „alatt” van. A megoldás felírásához keressük meg azokat a valós számokat, amelyekre $f(t) = g(t)$!

$$\sin t = -0,75, \quad \text{ebből} \quad t_1 \approx -0,848 + k \cdot 2\pi \quad \text{és} \quad t_2 \approx \pi - (-0,848) + k \cdot 2\pi \approx 3,990 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Azonosítsuk be, hogy pontosan melyik két érték határolja az ábrán látható első intervallumot! Ehhez kezdjük el felsorolni az egyenlet (pozitív) megoldásait. t_1 a következő megoldásokat jelenti: 5,435; 11,718... t_2 a következő megoldásokat jelenti: 3,990; 10,273; 16,556... A keresett intervallum tehát: $]3,990; 5,435[$. Az összes megoldás így írható: $]3,990 + k \cdot 2\pi; 5,435 + k \cdot 2\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$).

A test tehát másodpercenként mérve a következő időintervallumok esetén van 2 cm-nél közelebb az asztallaphoz:

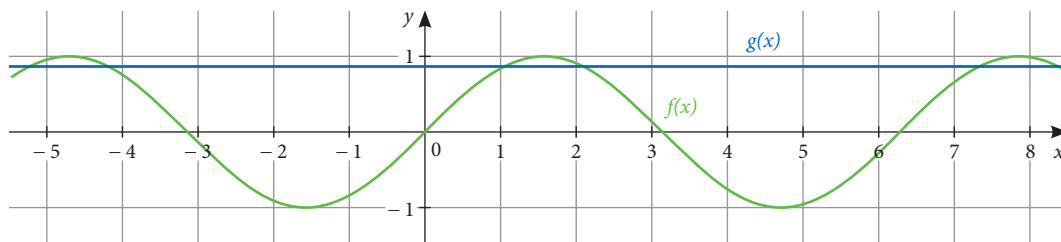
$3,990 < t < 5,435$, majd $10,273 < t < 11,718$, majd $16,556 < t < 18,001$ stb.

Összesítve: $3,990 + k \cdot 2\pi < t < 5,435 + k \cdot 2\pi$ (ahol $k \in \mathbb{N}$).

2. Oldjuk meg a $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Első megoldás:

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ függvényeket!



Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha az f függvény grafikonja a g függvény grafikonja „fölött” van. A megoldás felírásához keressük meg azokat a valós számokat a $[0; 2\pi]$ intervallumban, amelyekre $f(x) = g(x)$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ebből} \quad x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{és} \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Ebben a periódusban a megoldás tehát: $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Az összes megoldást úgy kapjuk meg, ha figyelembe vesszük, hogy a teljes intervallumot eltolhatjuk 2π egész számú többszörösével. Ehhez az intervallum két szélét jelentő számhoz 2π -nek ugyanazt a többszörösét kell adnunk.

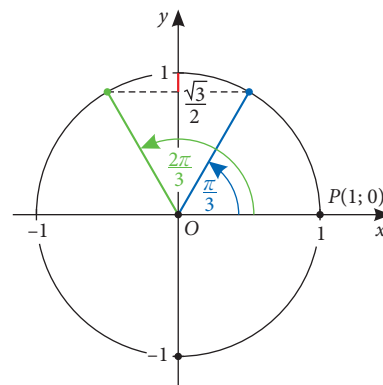
A megoldás: $\left[\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Második megoldás:

Keressük meg az egységkörön, hogy mely forgásszögek esetén teljesül, hogy az origó körül elforgatott $P(1; 0)$ pont második koordinátája nagyobb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ez teljesül,

ha $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. A periódus figyelembevételével a megoldás: $\left[\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right]$

($k \in \mathbb{Z}$).



FELADATOK

1. E1 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvényeket! Határozd meg a h függvények zérushelyeit!

a) $f(x) = \sin x$

$g(x) = 1,5 \cdot \sin x$

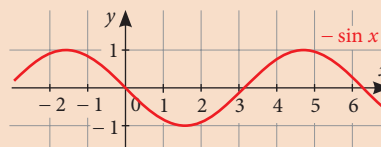
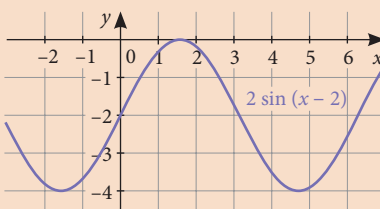
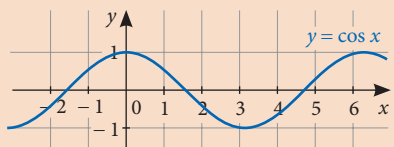
$h(x) = 1,5 \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = \cos x$

$g(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$h(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

2. E1 A grafikonok segítségével oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!



a) $\cos x \geq \frac{1}{2}$

b) $2 \sin x - 2 \geq 0$

c) $-\sin x \leq \frac{1}{2}$

3. E2 Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ függvényt, majd oldd meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán: $2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$!

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

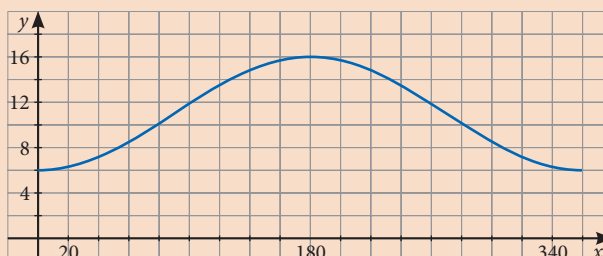
Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5,2 \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11,2,$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott évben belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \leq n \leq 365$, $n \in \mathbb{N}$).

Az alábbi ábra a $g: [1; 365] \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = -5,2 \cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11,2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f -nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Számítsd ki a modell alapján, hogy az év 5. napján milyen hosszú a nappal! Válaszodat óra:perc formátumban, egész percre kerekítve add meg!

b) Igazold, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

5. E2 Mely valós számok esetén van értelmezve a kifejezés?

a) $\sqrt{1 + \cos x}$

c) $\frac{1}{3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{\sin^2 x + 6 \cos x + 6}$

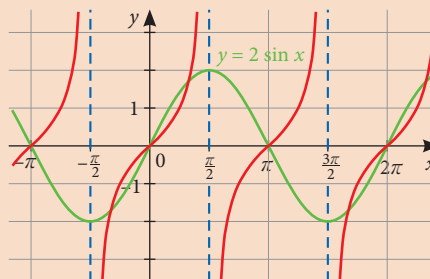
b) $\sqrt{\sin x - 0,5}$

d) $\frac{1}{2 \sin^2 x - 7 \sin x - 4}$

6. E2 Határozd meg mindazokat a $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ -be tartozó valós számokat, amelyekre igaz, hogy $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$!

a) A két grafikon alapján állapítsd meg, hány megoldás van, és adj becslést a megoldásokra!

b) Oldd meg a $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$ egyenletet a valós számok halmazán!



(D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás)

DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG

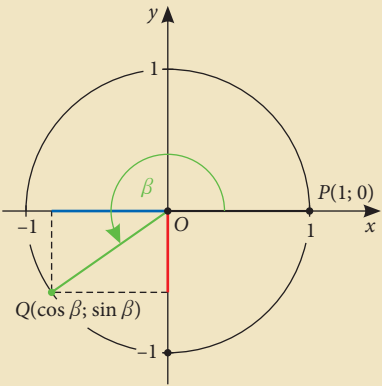
D	Szögfüggvények (derékszögű háromszögben)	$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$
		$\cos \alpha = \frac{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}}$
		$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}$
		$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\alpha \text{ szöggel szemben lévő befogó hossza}}$

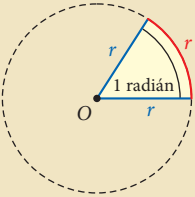
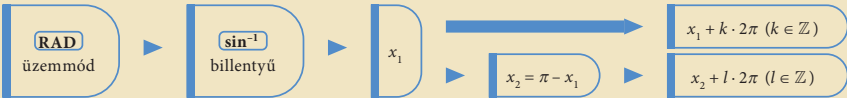
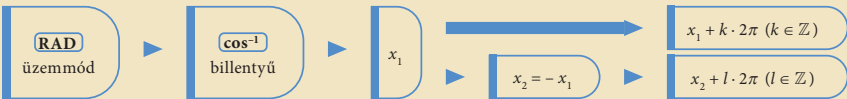
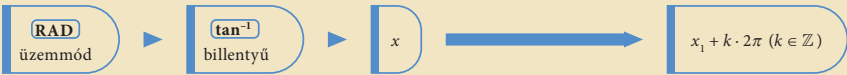
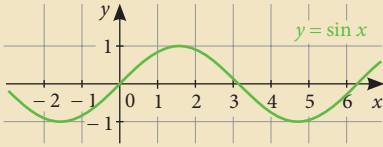
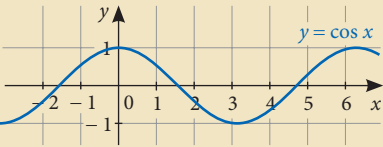
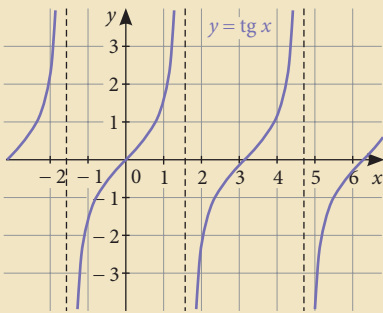
ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ TÉTELEK

(a szokásos jelöléseket alkalmazva)

T	Szinusztétel	$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
T	Koszinusztétel	$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$
T	A háromszög területe	$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$

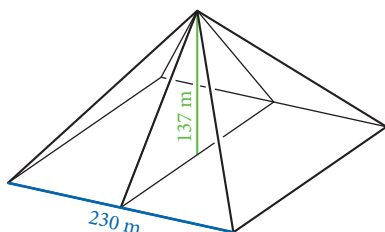
SZÖGFÜGGVÉNYEK

D	Szögfüggvények kiterjesztése tetszőleges forgásszögre	Ha a Q pontot úgy kaptuk, hogy a P(1; 0) pontot β szöggel elforgattuk az origó körül, akkor a Q pont koordinátái: $(\cos \beta; \sin \beta)$. 
T	Összefüggés egy szög szinusza és koszinusza között	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
D	A tangens szögfüggvény kiterjesztése, ha $\cos x \neq 0$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

D	Szögek ívmértéke (radián)	Azt a számot, amely megmutatja, hogy egy α középponti szöghöz tartozó körív hossza hányszorosa a sugár hosszának, az α szög ívmértékének nevezzük. 
M	Átváltás fok és radián között	$180^\circ = \pi \text{ (rad)}, \text{ ez alapján } 1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ, \text{ és } \alpha^\circ = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi \text{ (rad)}.$
M	$\sin x = a$ (Melyek azok a radiánban mért forgásszögek, amelyeknek szinusza a ?) $(-1 \leq a \leq 1)$	
M	$\cos x = a$ (Melyek azok a radiánban mért forgásszögek, amelyeknek koszinusza a ?) $(-1 \leq a \leq 1)$	
M	$\text{tg } x = a$ (Melyek azok a radiánban mért forgásszögek, amelyeknek tangense a ?)	
	Színuszfüggvény	$D_f = \mathbb{R}$ $R_f = [-1; 1]$ Zérushelyek: $x = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$ Periodikus, periódusa: 2π Páratlan függvény 
	Koszinuszfüggvény	$D_f = \mathbb{R}$ $R_f = [-1; 1]$ Zérushelyek: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$ Periodikus, periódusa: 2π Páros függvény 
	Tangensfüggvény	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$ $R_f = \mathbb{R}$ Zérushelyek: $x = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$ Periodikus, periódusa: π Páratlan függvény 

M	Függvénytranszformációk	A függvényérték transzformációi						
		$f(x) + c$	A függvényértékek minden helyen c -vel növekednek.			Eltoljuk f grafikonját az y tengellyel párhuzamosan c -vel. („fel vagy le”)		
		$c \cdot f(x)$	A függvényértékek minden helyen c -szeresükre változnak.			„Megnyújtjuk” vagy „zsugorítjuk” f grafikonját az y tengellyel párhuzamosan. Ha c negatív, akkor tükrözzük is az x tengelyre.		
		A függvényváltozó transzformációi						
		$f(x + c)$	Az x helyen felvett függvényérték egyenlő az eredetileg $x + c$ helyen felvett függvényértékkel.			Eltoljuk f grafikonját az x tengellyel párhuzamosan $(-c)$ -vel („jobbra vagy balra”).		
		$f(cx)$	Az x helyen felvett függvényérték egyenlő az eredetileg cx helyen felvett függvényértékkel.			„Összenyomjuk” vagy „széthúzzuk” f grafikonját az x tengellyel párhuzamosan. Ha c negatív, akkor tükrözzük is az y tengelyre.		
		Nevezetes szögek szögfüggvényei						
		x	0	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	
		$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
		$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
		$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nem létezik	
T	Addíciós tételek: Két szög összegének szinusza és koszinusza	$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$						
T	Két szög különbségének szinusza és koszinusza	$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$ $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$						
T	Szög kétszeresének szinusza és koszinusza	$\sin 2 \alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\cos 2 \alpha = \cos ^2 \alpha - \sin ^2 \alpha$						
T	Két szög összegének tangense	$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} ^2 \alpha}$						

- 1. E1** A gízai nagy piramis – más néven Kheopsz-piramis – a legrégebbi és egyben az egyedüli fennmaradt csoda az ókori világ hét csodája közül. Alakja – kisebb eltérésektől eltekintve – szabályos négyoldalú gúla, melynek alapéle 230 méter hosszú, magassága 137 méter. Határozd meg, mekkora a vízszintessel bezárt szögük az oldallapoknak, valamint az oldaléleknek!



- 2. E1** Az ABC háromszögben $AB = 65$ mm, $BC = 98$ mm, az ABC szög 108° -os. Mekkora ennek a háromszögnek

- a) a C csúcsból induló magassága;
- b) a területe;
- c) a két hegyesszöge;
- d) a B csúcsból induló magassága;
- e) az AC oldala?

- 3. E1** Egy körlapból olyan szabályos 7-szöget vágunk ki, amelynek oldalai 2,6 cm hosszúak.

- a) Mekkora sugarú körlap esetén oldható meg ez a feladat?
- b) Legkevesebb hány cm^2 hulladék keletkezik?
- c) A szabályos hétszögből újra kivágunk egy körlapot. Mekkora lehet ennek a sugara?

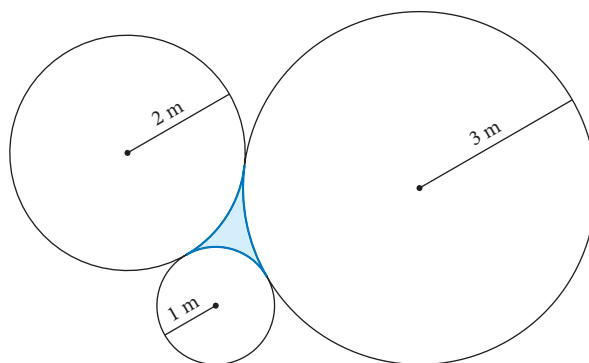
- 4. E1** A síkban a 17 cm sugarú kör K középpontjától 20 cm távolságra van a P pont. A P -ből két érintőt húzunk a körhöz.

- a) Mekkora szöget zár be a két érintő?
- b) Mekkora az érintőszakaszok hossza?
- c) Mekkora területű az a konvex síkidom, amelyet a kör egy íve és a két érintőszakasz határol?
- d) Mekkora területű az a konkáv síkidom, amelyet a kör egy íve és a két érintőszakasz határol?

- 5. E2** Egy háromszög két oldalának hossza 12 cm és 20 cm, az ezen oldalak által közbezárt szög nagysága 100° . Határozd meg a háromszög legnagyobb szögét felező egyenes háromszögbe eső részének hosszát!

- 6. E2** Két kör sugarának hossza 34 cm, illetve 78 cm. A körök középpontjainak távolsága 88 cm. Határozd meg a két kör közös húrjának hosszát, valamint annak a síkidomnak a területét, amelyet a két kör közösen fed le!

- 7. E2** Három, egymást páronként kívülről érintő kör sugarainak nagysága 1 m; 2 m; 3 m. Mekkora a három kör által létrehozott zárt síkidom kerülete és területe?



- 8. E1** A $P(1; 0)$ pontot elforgattuk az origó körül α forgásszöggel. Készíts ábrát az egységkörrel, és olvasd le az ábráról a forgatás után kapott pont koordinátáit, ha

- a) $\alpha = 135^\circ$; c) $\alpha = -270^\circ$;
- b) $\alpha = 210^\circ$; d) $\alpha = 330^\circ$!

- 9. E1** Mekkora α szöggel forgathattuk el az origó körül a $P(1; 0)$ pontot, ha a képe

- a) a II. síknegyedbe került, és szinusza $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- b) a III. síknegyedbe került, és koszinusza $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- c) a IV. síknegyedbe került, és tangense $-\sqrt{3}$?

- 10. E1** Melyek azok az α szögek, melyekre $360^\circ \leq \alpha \leq 1080^\circ$, és

- a) $\sin \alpha = 0,157$; c) $\cos \alpha = 0,823$;
- b) $\sin \alpha = -0,558$; d) $\cos \alpha = -0,731$?

- 11. E1** Határozd meg a következő radiánban mért forgásszögek szinuszt és koszinuszt!

1,5, 2,5, 3,5, -2, -5, 11.

- 12. E1** Számológép nélkül határozd meg a következő radiánban mért forgásszögek szinuszt és koszinuszt!

$-\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{3}$, 3π .

- 13. E2** Állítsd növekvő rendbe az alábbi mennyiségeket!
(Próbáld meg számológép nélkül dolgozni!)

$$\begin{array}{lll} A = \sin 3^\circ & B = \sin 43^\circ & C = \sin \pi \\ D = \cos 47^\circ & E = \cos \pi & F = \cos 234^\circ \end{array}$$

- 14. E1** Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sin x = \frac{1}{2} & \text{c)} \sin x = -0,707 \\ \text{b)} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{d)} \cos x = -0,1234 \end{array}$$

- 15. E1** Mennyi lehet annak a szögnek a koszinusza, melynek

$$\text{a)} \text{ szinusza } 0,35; \quad \text{b)} \text{ tangense } -1,2?$$

- 16. E1** Ábrázold a következő, valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordináta-rendszerben!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \sin x & \text{c)} h(x) = 3 \sin x + 3 \\ \text{b)} g(x) = 3 \sin x & \text{d)} k(x) = 3 \sin x - 1 \end{array}$$

- 17. E1** Ábrázold a következő, valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordináta-rendszerben!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \cos x & \text{c)} h(x) = 3 - 2 \sin x \\ \text{b)} g(x) = -2 \cos x & \text{d)} k(x) = |3 - 2 \cos x| \end{array}$$

- 18. E2** Ábrázold a következő, valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordináta-rendszerben!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \cos x & \text{c)} h(x) = \cos 3x + 2 \\ \text{b)} g(x) = \cos 3x & \text{d)} k(x) = |\cos 3x + 2| \end{array}$$

- 19. E1** Határozd meg a valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2 \sin x + 1 & h(x) = \sin 0,5x \\ g(x) = -\cos x + 5 & k(x) = \cos 2x - 2 \end{array}$$

- 20. E1** Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \operatorname{tg}(2x) = 0 & \text{c)} \sin x = \cos x \\ \text{b)} \frac{\cos x}{3} - \frac{\cos x}{4} = -\frac{1}{12} & \end{array}$$

- 21. E1** Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \\ \text{b)} 2 \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \end{array}$$

- 22. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{c)} \operatorname{tg} x = 0 \\ \text{b)} \sin x = -1 & \text{d)} \sin x - 0,5 = 0 \end{array}$$

- 23. E2** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2 \sin x = \sqrt{2} & \text{c)} |\operatorname{tg} x| = 1 \\ \text{b)} \cos^2 x = \frac{1}{2} & \text{d)} |\sin x| = \frac{1}{2} \end{array}$$

- 24. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2 \sin x = -5 \cos x & \text{c)} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x = -1 \\ \text{b)} \sin x - \cos x = 0 & \text{d)} 4 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 = 0 \end{array}$$

- 25. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\text{a)} 2 \cos^2 x + 5 \sin x + 1 = 0 \quad \text{b)} 2 \sin^2 x + \cos x = 1$$

- 26. E2** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\text{a)} 2 \sin x(1 - \operatorname{tg} x) = 0 \quad \text{b)} (2 \cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$$

- 27. E2** A megfelelő addíciós tétel segítségével oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \cos 2x = 4 + 5 \sin x - 4 \sin^2 x \\ \text{b)} 2 \sin^2 x - \sin 2x = \sin 2x - 2 \cos^2 x \\ \text{c)} 2 \sin^2 x - 1 = \cos x - 2 \cos 2x \end{array}$$

- 28. E2*** Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2 \cos^3 x - 5 \cos^2 x - 3 \cos x = 0 & \text{c)} \operatorname{tg}^4(3x) = \operatorname{tg}^2(3x) \\ \text{b)} 2 \sin^4 x = 3 \sin^3 x + \sin^2 x & \end{array}$$

- 29. E2*** (Emelt szintű érettségi, 2011)

Hány $(x; y)$ rendezett valós számpár megoldása van az alábbi egyenletrendszernek, ha x és y is a $[0; 2\pi]$ zárt intervallum elemei?

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0 \\ \sin x + \sin^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- 30. E2*** (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$, $b = \sqrt{27}$ és $\beta = 2\alpha$. Számítsd ki a háromszög szögeit!

sorba rendezési és kiválasztási feladatok, faktoriális, n alatt a k 

alaptípusok rendszerezése és elnevezései, ismétléses permutáció

BEVEZETŐ

Melyikből van több? A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy XVIII. században élt híres matematikus neve rakható ki. Ki ő?

Dobókockával háromszor dobva melyik dobássorozatból van több?	K	amelyikben van hatos	L	amelyikben nincs hatos
Dobókockával négyszer dobva melyik dobássorozatból van több?	U	amelyikben van hatos	O	amelyikben nincs hatos
Melyik jelszóból van több?	E	ami 7 különböző számjegyből áll	H	ami a 26 betű közül 4 különböző betűből áll
10 ember, köztük 5 nő és 5 férfi sorba áll. Melyik lehetőségből van több?	I	elől állnak a nők, utánuk a férfiak	E	felváltva állnak a nők és a férfiak
Nullákból és egyesekből álló kódot készítettünk. Melyikből van több?	R	ami 4 db nullából és 6 db egyesből áll	C	ami 7 db nullából és 3 db egyesből áll

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hányféle kód rakható ki a BICIKLI szó 7 betűjének felhasználásával úgy, hogy mind a 7 betűt felhasználjuk?

Megoldás:

7 különböző elem $7!$ féle módon rakható sorba. Most azonban vannak az elemek közt azonosak: 3 db I betű van.

Első lépésben különböztessük meg az egyformákat! Például kapjanak különböző színt az azonos betűk: **I**, **I** és **I**. Így már 7 különböző elemünk van, és ezek $7!$ féleképpen rendezhetők sorba.

Figyelembe kell azonban vennünk, hogy így minden kódot többször is számoltunk. Ezt a kódot: KICIBIL annyiszor számoltuk, ahányféleképpen a 3 db I betű elhelyezkedhetett. Mivel a 3 db szín $3! = 6$ -féleképpen rendezhető sorba, ezt az esetet – és minden más esetet is $3! = 6$ -szor számoltuk. A lehetőségek számát ezért megkapjuk, ha $7!$ -t osztjuk $3!$ -sal: $\frac{7!}{3!} = 840$.

Hasonló okokból a MOTORBICIKLI szó 12 betűjéből kirakható kódoknál a három I és a két O betű különböző elhelyezkedéseinek számával is kell osztanunk, azaz ebben az esetben a lehetőségek száma $\frac{12!}{3! \cdot 2!}$.

► Ha n elemet sorba rendezünk, és az elemek között van $k_1, k_2, \dots, k_i$ db egyforma, akkor a lehetséges sorba rendezések

száma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!}$.

($n, i, k_1, \dots, k_i$ pozitív egész számok, $n \geq k_1 + \dots + k_i$)

Színek
figyelembe-
vételével

KICIBIL
KICIBIL
KICIBIL
KICIBIL
KICIBIL
KICIBIL

6 eset



1 eset

Csak a betűk
figyelembe-
vételével

KICIBIL

A kombinatorika feladatok alaptípusai ($n, k \in \mathbb{Z}^+$; az ismétléses variációt kivéve $n \geq k$)

1. Permutációk

Permutáció: n db elem egy lehetséges sorba rendezése

- ▶ ismétlés nélküli permutáció: minden elem különböző

n különböző elem lehetséges sorba rendezéseinek száma: $n!$	Bizonyítás: Az első helyre az n elem bármelyikét választhatjuk. A második helyre a megmaradt $n - 1$ elem bármelyikét tehetjük. Az első választás mindegyike $(n - 1)$ -féleképpen folytatható, ezért ez eddig $n \cdot (n - 1)$ lehetőség. Ezek mindegyike folytatható a harmadik helyen $(n - 2)$ -féleképpen. És így tovább, mindig 1-gyel kevesebb elemből választunk az előbbi helyhez képest, végül az utolsó helyre a megmaradó 1 elemet tehetjük. Ez összesen $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ lehetőség.
--	---

- ▶ ismétléses permutáció: az elemek között vannak azonosak

n elem sorba rendezéseinek száma, ha közöttük $k_1, k_2, \dots, k_i$ db egyforma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!}$	Bizonyítás: Először különböztessük meg az egyformákat! Így az n elem $n!$ féleképpen rendezhető sorba. Ekkor azonban minden lehetőséget annyszor számoltunk, ahányféleképpen k_1 egyforma és k_2 db egyforma, ... és k_i db egyforma elem sorba rendezhető, azaz $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!$ -szer. Mivel ezen elemek egymás közötti sorrendjét nem kell figyelembe venni, ezért ezzel osztanunk kell az $n!$ -t.
--	--

- ▶ ciklikus permutáció: minden elem különböző, és az elemeket zárt láncba (körbe) rendezzük, azaz nincs közöttük első

n különböző elem lehetséges ciklikus sorba rendezéseinek (ciklikus permutációinak) száma: $(n - 1)!$	Bizonyítás: Egy elemet (jelöljük A-val) kiválasztunk és elhelyezzük bármelyik helyre. Hozzá képest a többi helynek már van sorrendje (pl A-tól jobbra az első, jobbra a második, stb.). Erre az $n - 1$ helyre kell sorba rendezni a megmaradt $n - 1$ elemet. Ez összesen $(n - 1)!$ lehetőség.
---	---

2. Variációk

Variáció: n különböző elemből kiválasztunk k db-ot, és számít a kiválasztás sorrendje

- ▶ ismétlés nélküli variáció: minden elem legfeljebb egyszer választható ki

n különböző elemből kiválasztunk k darabot, ▶ az elemek mind különbözők; ▶ számít a kiválasztás sorrendje; ▶ minden elem legfeljebb egyszer választható. A lehetőségek száma: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$	Bizonyítás: Az első helyre az n elem bármelyikét választhatjuk. A második helyre a megmaradt $n - 1$ elem bármelyikét tehetjük. Az első választás mindegyike $(n - 1)$ -féleképpen folytatható, ezért ez eddig $n \cdot (n - 1)$ lehetőség. Ezek mindegyike folytatható a harmadik helyen $(n - 2)$ -féleképpen. És így tovább, mindig 1-gyel kevesebb elemből választunk az előbbi helyhez képest. Összesen k db elemet választunk, ezért az utolsó elem az $(n - k + 1)$ -dik.
--	--

- ▶ ismétléses variáció: az elemek akár többször is kiválaszthatók

n különböző elemből kiválasztunk k darabot, ▶ az elemek mind különbözők; ▶ számít a kiválasztás sorrendje; ▶ az elemek többször is kiválaszthatók. A lehetőségek száma: n^k	Bizonyítás: Az első helyre választhatunk n -féle elemből. Bármit választottuk az első helyre, a második helyre is választhatjuk az n -féle elem bármelyikét. Ez eddig $n \cdot n = n^2$ db lehetőség. Ezek mindegyike folytatható a harmadik helyen n -féleképpen, és így tovább, összesen k alkalommal.
--	--

3. Kombinációk

Kombináció: n különböző elemből kiválasztunk k db-ot, és a kiválasztás sorrendje nem számít

- ismétlés nélküli kombináció: minden elem legfeljebb egyszer választható ki

n különböző elemből kiválasztunk k darabot,

- az elemek mind különbözők;
- nem számít a kiválasztás sorrendje;
- minden elem legfeljebb egyszer választható.

A lehetőségek száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Bizonyítás:

Ha számítana a sorrend, akkor akkor $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ féle lehetőség lenne. Ekkor azonban minden lehetőséget annyiszor számoltunk, ahányféleképpen a kiválasztott k db különböző db elem sorba rendezhető, azaz $k!$ -szor. Mivel ezen elemek egymás közötti sorrendjét nem kell figyelembe venni, ezért $k!$ -sal osztanunk kell az első szorzatot:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

FELADATOK

- 1. E1** Hányféleképpen állíthatók sorba a következő szavak betűi?

a) EREDET

b) MATEMATIKA

- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2015)

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el egymás mellé, egy rúdra. A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek. Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól?

- 3. E1** A $13 + 1$ kérdéses totónak minden kérdésére háromféle válasz, az 1; 2 és az X közül kell egyet megjelölni. Hányféle szabályos kitöltés van

- a) összesen;
- b) amelyben az első és az utolsó kérdésre X-et jelölünk;
- c) amelyben az első három kérdésre nem 1-et jelölünk;
- d) amelyben 3 db X-et, 8 db 1-et és 3 db 2-et jelölünk?

- 4. E1** Hányféle ötjegyű szám írható fel

- a) 2 darab ötös és 3 darab hatos számjeggyel?
- b) 2 darab ötös és 3 darab nullás számjeggyel?

- 5. E1** Hányféleképpen választhatunk ki az 1; 2; 3; ...; 50 pozitív egész számok közül kettőt úgy, hogy az összegük páros legyen, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?

- 6. E2** Három színben vannak lampionjaink, az azonos színűek egyformák. Közülük 4 piros, 5 narancssárga és 6 sárga színű. Hány különböző lampionsor készíthető belőlük, ha

- a) minden lampiont felhasználunk;
- b) csak 14 lampiont használunk fel?

- 7. E2** (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy telephely K, L, M, N, O, P, Q épületei közül az éjszakai első ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr. Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha a K és L épületet mindenképpen ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.)

- 8. E2** (Emelt szintű érettségi, 2014)

Egy üzemben a tárolórekeszeket egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (pl. 7WA3A egy lehetséges kód). Hány különböző kód lehetséges?

- 9. E2** (Emelt szintű érettségi, 2006)

Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-t, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.

- a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel?
- b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott számok összege 10?

BEVEZETŐ

Melyikből van több? Esetleg egyenlők? A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy híres matematikus neve rakható ki.

Az $\{1; 2; \dots; 9\}$ számhalmaz részhalmazait vizsgáljuk. Melyikből van több?	T amelyiknek eleme az 1	B amelyiknek nem eleme az 1	A az előbbiek egyenlők
Dobókockával hatszor dobva melyik dobássorozatból van több?	I amelyikben az első és az utolsó dobás azonos	S amelyikben az első és az utolsó dobás különböző	E az előbbiek egyenlők
Sorba áll 11 ember, köztük 6 férfi és 5 nő. Melyik lehetőségből van több?	R elöl állnak a nők, utánuk a férfiak	Y felváltva állnak férfiak és nők	S az előbbiek egyenlők
Melyik ötjegyű számból van több?	L minden jegye páros	G minden jegye páratlan	E az előbbiek egyenlők
Egy 10 elemű halmaz részhalmazait vizsgáljuk. Melyikből van több?	O amelyiknek az elemszáma páros	C amelyiknek az elemszáma páratlan	U az előbbiek egyenlők

ELMÉLET

1. Ellenőrző kérdések az összeszámláláshoz:

- ✓ Minden feltételt figyelembe vettem?
- ✓ Minden esetet számoltam?
- ✓ Nem számoltam valamelyik esetet többször?

2. Szorzás vagy összeadás?

Gondold végig, hogyan állítasz össze egy konkrét esetet!



Gondold végig, hogy miután kiválasztottad az első elemet, hányféle elemből választhatod a másodikat. Megváltozik-e ez a szám, ha egy másik elemet választasz elsőre?

nem

igen

Összeszorozhatod a lehetőségek számát.

Esetszétválasztás: össze kell adni a különböző csoportba tartozó lehetőségek számát.

3. Ötletek kombinatorikafeladatok megoldásához

- ▶ Melyiket könnyebb összeszámlolni: a kérdésben szereplő eseteket, vagy az összeset és a kimaradókat?
- ▶ Könnyíthet az esetek rendszerezésén, ha lerögzítünk valamit, és ahhoz viszonyítva figyeljük a további lehetőségeket. Például, ha kiszínezzük egy kockát 6 színnel, akkor fordítsuk a kockát úgy, hogy a piros oldal legyen lefelé.
- ▶ Melyik „irányból” érdemes végiggondolni? Például, ha 15 ember között sorsolunk 10 különböző tárgyat, akkor a tárgyakat rögzítsük le, és ahhoz válasszuk az embereket.
- ▶ Ha nem túl nagy az elemszám, meg lehet próbálni felsorolni a lehetőségeket. Helyezzük táblázatba vagy különböző oszlopokba, hogy átlátható legyen a felsorolásunk!
- ▶ Írjunk fel néhány konkrét megoldást, lehetőséget! Ez segíthet a feladat átlátásában. A felsorolás megkezdése elindíthatja a helyes gondolatmenet megalkotását.

(Emelt szintű érettségi, 2020) Egy továbbképzés egyik napján a résztvevők „keleties” ebédet kapnak. Az ételek ízesítéséhez hatféle fűszer áll rendelkezésükre: keserű, savanyú, édes, sós, csípős és fanyar. Hányféleképpen ízesíthetik az ételeiket a résztvevők úgy, hogy a hatból három- vagy négyféle fűszert használhatnak, a fűszerek sorrendjét nem kell figyelembe venni, ugyanakkor az édes és a keserű nem szerepelhet egyszerre? Oldjuk meg a feladatot többféle úton!



Első megoldás:

É + 2 másféle	K + 2 másféle	3 másféle	É + 3 másféle	K + 3 másféle	4 másféle
ÉSÓ; ÉSC; ÉSF	KSÓ; KSC; KSF	SÓC; SÓF	ÉSÓC; ÉSÓF	KSÓC; KSÓF	SÓCF
ÉÓC; ÉÓF	KÓC; KÓF	SCF	ÉSCF	KSCF	
ÉCF	KCF	ÓCF	ÉÓCF	KÓCF	
6 lehetőség	6 lehetőség	4 lehetőség	4 lehetőség	4 lehetőség	1 lehetőség

A megfelelő ízesítési lehetőségek száma tehát $6 + 6 + 4 + 4 + 4 + 1 = 25$.

Második megoldás:

Háromféle fűszer választása esetén:

- ▶ ha sem édes, sem keserű nincs közöttük, akkor a többi négyből kell hármat kiválasztani: ez 4-féleképpen lehetséges;
- ▶ ha édes van, de keserű nincs, akkor a többi négy fűszer közül kettőt kell még kiválasztani, ez $4 \cdot 3$ lehetőség, de nem számít a kiválasztás sorrendje, ezért a lehetőségek száma $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$;
- ▶ ha keserű van, de édes nincs, akkor szintén $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ lehetőség van.

Négyféle fűszer választása esetén:

- ▶ ha sem édes, sem keserű nincs a fűszerek között, akkor csak egyféle választás lehetséges;
- ▶ ha édes van, de keserű nincs, akkor a többi négy fűszer közül hármat kell még kiválasztani, ami 4-féleképpen lehetséges;
- ▶ ha keserű van, de édes nincs, akkor az előbbihez hasonlóan 4 lehetőség van.

Az összes ízesítési lehetőség száma tehát az előbb felsorolt lehetőségek összege: $4 + 6 + 6 + 1 + 4 + 4 = 25$.

Harmadik megoldás:

- ▶ Ha nincs sem édes, sem keserű a választott fűszerek között, akkor a többi négyből hármat vagy négyet kell választani, ezért a lehetőségek száma $\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + 1 = 5$.
- ▶ Ha van édes, de nincs keserű, akkor a többi négy közül kettőt vagy hármat kell választani, ezért $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$ lehetőség van.
- ▶ Ugyanígy 10 lehetőség van akkor is, ha keserű van, de édes nincs.

Az összes ízesítési lehetőség száma tehát $5 + 10 + 10 = 25$.

Negyedik megoldás:

Az összes, 3 vagy 4 fűszert tartalmazó lehetőségből levonjuk azoknak az ízesítéseknek a számát, amelyekben édes és keserű is szerepel. (Ezt nevezzük komplementer módszernek.)

- ▶ 3 vagy 4 fűszert összesen $\binom{4}{3} + \binom{6}{4} = 20 + 15 = 35$ különböző módon lehet választani. (Ez az „összes eset” száma.)
- ▶ Olyan ízesítést, amelyben édes és keserű is van, és 3 vagy 4 fűszert tartalmaz, akkor kapunk, ha az édes és a keserű mellé még egy vagy két fűszert választunk a maradék 4 fűszerből. Ezek száma $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$. (Ez a „kedvezőtlen esetek” száma.)

A megfelelő ízesítési lehetőségek száma tehát $35 - 10 = 25$.

FELADATOK

- 1. E1** Hányféleképpen választhatunk ki három fiú-lány párt 10 lány és 8 fiú közül,

- a) ha a párok a tánc során különböző koreográfiát követnek, ezért számít a párok sorrendje;
- b) ha nem számít a párok sorrendje?

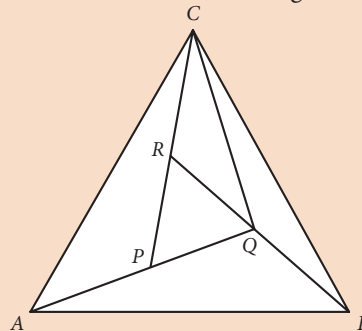
- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2012)
Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az A, B, C, D, E és F osztály egy-egy csapattal vett részt. Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az E osztály megelőzte az F osztályt?

- 3. E1** (Emelt szintű érettségi, 2016)
Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.)

- 4. E2** A 32 lapos magyar kártyában 4 „szín” van: piros, zöld, makk és tök. Minden színből 8 különböző lap: ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas és hetes. Hányféleképpen választhatunk ki 3 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan egy tök és pontosan egy alsó, ha a lapok sorrendje nem számít?

- 5. E2** (Emelt szintű érettségi, 2012)
Adott két párhuzamos egyenes, e és f . Kijelölünk e -n 5, f -en pedig 4 különböző pontot.
Hány (e -től és f -től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont?
Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?
Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?

- 6. E2** (Emelt szintű érettségi, 2017)
A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható ABQ , PCQ , CQR , ACP és PQR háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.) Összesen hány különböző színezés lehetséges?



- 7. E2** (Emelt szintű érettségi, 2010)
Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek egy-egy fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyik hátuljára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta a borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.
a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?
b) Hányféleképpen lehet az, hogy senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt?
c) Hányféleképpen lehet, hogy pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel?
- 8. E2** (Emelt szintű érettségi, 2018)
Ágoston a tanév első két hónapjában három osztályzatot szerzett matematikából (osztályzatok: 1, 2, 3, 4, vagy 5). A második osztályzata nem volt rosszabb, mint az első, a harmadik osztályzata pedig nem volt rosszabb, mint a második. Határozd meg a feltételeknek megfelelő számhármassok számát!



binomiális együtthatók, halmaz részhalmazainak száma



Pascal-háromszög, binomiális tétel

BEVEZETŐ

Az $E = \{F; O; R; M; A; I\}$ halmaznak 6 eleme van.

- ▶ A 3 elemű részhalmazainak száma $\binom{6}{3}$, mert 6 elemből választunk 3 elemet, és nem számít a kiválasztás sorrendje.
- ▶ Az E halmaz összes részhalmazainak a száma $2^6 = 64$, mert mind a 6 elem esetében eldönthetjük, hogy kiválasztjuk-e a részhalmazba vagy sem: ez összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$ lehetőség.
- ▶ Az E halmaz összes részhalmazainak a számát megkaphatjuk úgy is, hogy összeadjuk a 0 elemű, 1 elemű, 2 elemű, 3 elemű, ..., 6 elemű részhalmazok számát. $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6$.



ELMÉLET

1. n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma ($n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$)

Egy k elemű részhalmazt úgy kapunk, hogy kiválasztunk k db elemet, és nem számít a kiválasztás sorrendje.

Ez értelmezhető akkor is, ha $k = 0$, vagy ha $n = k = 0$.

0 elemű részhalmaz egy darab van, az üreshalmaz.

A 0 elemű halmaznak egyetlen 0 elemű részhalmaza van, az üreshalmaz.

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

2. n elemű halmaz összes részhalmazának száma ($n \in \mathbb{N}$)

Egy n elemű halmaz egy részhalmazát úgy kapjuk meg, hogy mindegyik elemről eldöntjük, hogy beletesszük-e a részhalmazba vagy sem. Mind az n db elem esetén dönthetünk kétféleképpen.

A részhalmazok számát úgy is megkaphatjuk, hogy összeadjuk, hány darab 0 elemű, hány db 1 elemű, ... hány darab n elemű részhalmaz van.

n elemű halmaz összes részhalmazának száma: 2^n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

3. A Pascal-háromszög

Az $\binom{n}{k}$ kifejezések felírhatók a Pascal-háromszög segítségével.

A Pascal-háromszög minden sorában az első és az utolsó elem az 1. A többi elemet úgy kapjuk, hogy a felette álló két tagot összeadjuk.

A Pascal-háromszög sorainak és a soron belül a tagoknak a számozása is 0-val kezdődik. Ezzel a számozással az n -edik sor k -adik eleme éppen $\binom{n}{k}$.

	1								$n = 0$
	1	1							$n = 1$
	1	2	1						$n = 2$
	1	3	3	1					$n = 3$
	1	4	6	4	1				$n = 4$
	1	5	10	10	5	1			$n = 5$
	1	6	15	20	15	6	1		$n = 6$
	1	7	21	35	35	21	7	1	$n = 7$
1	8	28	56	70	56	28	8	1	$n = 8$
...									...

1. E1

a) Keresd meg, hogy a Pascal-háromszögben hányadik sor hányadik tagjai a következő kifejezések, és olvasd le az értéküket!

$$\binom{0}{0}; \quad \binom{5}{0}; \quad \binom{6}{3}; \quad \binom{8}{4}; \quad \binom{8}{5}; \quad \binom{8}{7}$$

b) Mennyi az összege a Pascal háromszög 4. sorában álló számoknak?

c) Mennyi az összege a Pascal háromszög n -edik sorában álló számoknak? Indokold válaszodat!

2. K2

Hány olyan részhalmaza van a $H = \{m; a; t; e; k\}$ halmaznak, amely

- a) páros elemszámú;
- b) legfeljebb 3 elemű;
- c) tartalmazza az m elemet;
- d) nem tartalmazza az m elemet?

3. K2

Heten kenutúrára indulnak. Hányféleképpen alakulhat, hogy kik utaznak egy hajóban, ha a kenukon belüli helyeket nem különböztetjük meg, és rendezésre áll

- a) egy háromszemélyes és egy négyszemélyes kenu;
- b) egy háromszemélyes és két egyforma kétszemélyes kenu?

(Két elrendezést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egyikük valaki mással utazik.)

4. E2* (Emelt szintű érettségi, 2017)

Egy n elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű. Határozd meg a halmaz elemszámát, ha

- a) n legalább 4;
- b) n tetszőleges természetes szám!

5. E1

Adott a síkon 8 pont, amelyek közül semelyik 3 sincs azonos egyenesen.

- a) Hány egyenest határoznak meg a pontok?
- b) Hány háromszöget határoznak meg a pontok?
- c) Szeretnénk folytatni az a) és b) részben elkezdett gondolatmenetet, azonban ha azt kérdezzük, hogy hány négyszöget határoz meg a feladatban szereplő 8 pont, akkor óvatossá kell lenni a válasszal. Miért?
 - Gondold végig, hogy hány négyszöget határozhat meg a síkon négy pont, amelyek közül semelyik 3 sincs egy egyenesen!
 - Legalább hány négyszöget határoz meg a feladatban szereplő 8 pont?

6. E1

Bontsd fel a zárójelet, és figyeld meg, hogy a polinomban szereplő együttthatók hogyan jelennek meg a Pascal-háromszögben!

$$(a + b)^2; \quad (a + b)^3; \quad (1 + x)^4; \quad (2 + x)^3$$

7. E2

A Pascal-háromszög segítségével indokold, hogy

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

ELMÉLET

4. Binomiális tétel

Az $\binom{n}{k}$ kifejezéseket **binomiális együttthatóknak** nevezzük, mert ezek segítségével felírható egy kéttagú kifejezés (*binom*) n -edik hatványa (ahol n egy természetes szám). A Pascal-háromszög n -edik sorának elemei jelennek meg együttthatóként az $(a + b)^n$ felírásában.

$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$	=	$\binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$
$(a + b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	$\binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

Binomiális tétel: Ha a, b valós számok és n egy természetes szám, akkor

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n.$$



gráf, csúcs, él, foksám, foksámok összege, teljes gráf



hurokél, többszörös él, egyszerű gráf, komplementer gráf, izomorf gráfok

BEVEZETŐ

Zsuzsi és Tamás két különböző ábrát készített a következő feladat megoldása során.

(Emelt szintű érettségi, 2020) Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

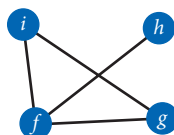
$$f(x) = (x + 4)(2 - x); \quad h(x) = x^2 - 4;$$

$$g(x) = x + 4; \quad i(x) = |x| - 4.$$

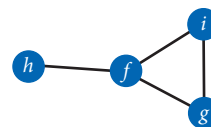
Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye. Rajzold fel az így kapott gráfot!

Mivel az f függvény zérushelyei -4 és 2 , a g függvény zérushelye -4 , a h függvény zérushelyei 2 és -2 , az i függvény zérushelyei 4 és -4 , meghatározhatjuk, hogy melyik csúcsot melyik csúccsal kell összekötni. Bár első ránézésre Zsuzsi és Tamás rajza elég különböző, mindketten helyesen oldották meg a feladatot. Rajzaik ugyanazt a gráfot ábrázolják.

Zsuzsi rajza



Tamás rajza



ELMÉLET

1. A gráfok jellemzői

A **gráfok** olyan helyzetek szemléltetésében, vagy olyan feladatok megoldásában segíthetnek, amikor fontos, hogy egy halmaz mely elemei között van kapcsolat.

Csúcsok (vagy pontok)	a gráf pontjai, ezek jelzik a halmaz elemeit
Élek	a csúcsokat összekötő vonalak, ezek szemléltetik az elemek közötti kapcsolatokat
Csúcs fokszáma	az adott csúcsból kiinduló élek száma



Tétel: Minden gráfban a foksámok összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

$$\text{foksámok összege} = 2 \cdot \text{élek száma}$$

Speciális élek:

Többszörös él (másként: párhuzamos élek)	két csúcs között egynél több él fut	
Hurokél	olyan él, amelynek két végpontja azonos (a hurokél a foksámot 2-vel növeli)	



Definíció: Egy gráf **egyszerű gráf**, ha nem tartalmaz hurokért és többszörös élt.

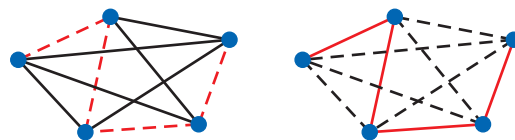


2. Teljes gráf

Definíció: Egy gráf **teljes gráf**, ha a gráf bármely két csúcsa között pontosan egy él fut.

Az n pontú teljes gráf ($n \in \mathbb{N}$) éleinek száma annyi, ahányféleképpen kiválaszthatunk az n csúcs közül kettőt úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Ez éppen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Egy egyszerű gráf **komplementer gráfja** az a gráf, melynek csúcsai megegyeznek a gráf csúcsaival, és két csúcsa között akkor és csak akkor van él, ha az eredeti gráfban nincs. A komplementer gráf élei tehát pontosan azok az élek, amelyekkel kiegészítve teljes gráfot kapunk.



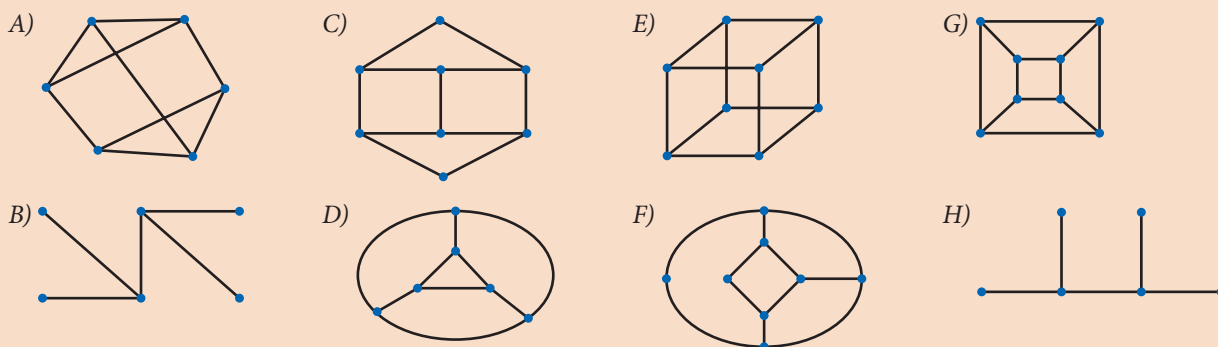
3. Izomorf gráfok

Két gráfot **izomorf**nak (gráfelméleti szempontból megegyezőnek) nevezünk, ha csúcsaik megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy két csúcs között az egyik gráfban pontosan akkor van él, amikor a másik gráfban.

Sokszor nem egyszerű feladat két gráfról eldönteni, hogy izomorfak-e. (Ennek vizsgálatát érdemes az élek számának és a csúcsok fokszámának meghatározásával kezdeni, és azt követően vizsgálni a csúcsok egymásnak való megfelelését.) Nagy gráfok (pl. 1000 csúcsú gráfok) esetén még számítógéppel is nagyon sokáig tart annak eldöntése, hogy két gráf izomorf-e vagy sem.

FELADATOK

1. E1 Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak?



2. E1 Hány éle van annak a 10 csúcsú egyszerű gráfnak,

a) amely teljes gráf;

b) amely komplementerének 20 éle van;

c) amelyben a fokszámok összege 42;

d) amely izomorf egy 18 élű gráffal?

3. E2 (Emelt szintű érettségi, 2015)

Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérkőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak?

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatának bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több. Hány célállomásra közlekednek jelenleg?

5. E2 (Emelt szintű érettségi nyomán, 2020)

Egy n pontú teljes gráf egyik élét pirosra színeztük. A többi él között azon élek száma, amelyeknek van közös csúcsa a piros színű éllel, egyenlő azon élek számával, amelyeknek nincs közös csúcsa a piros színű éllel. Hány csúcsa van a gráfnak?



gráfelméleti séta, út, kör, körséta, összefüggő gráf, fagráf

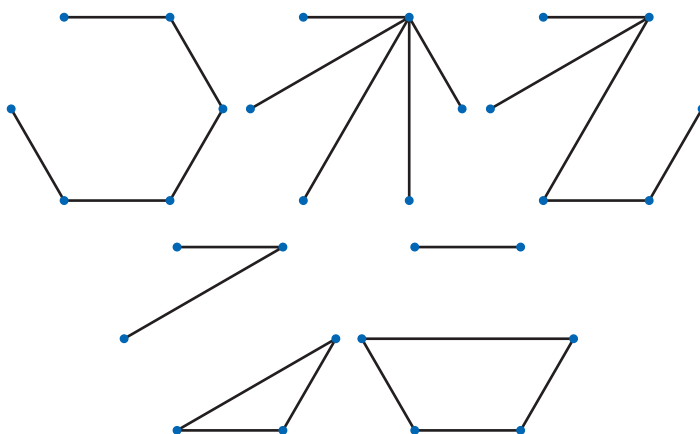
BEVEZETŐ

Legalább hány repülőjáratot kell indítani ahhoz, hogy 6 sziget közül bármelyikről bármelyikre el lehessen jutni repülővel?

Öt repülőjáratral ez már megoldható, ennél kevesebb járatral azonban nem. Az öt járatot sokféle módon megtervezhetjük. Felfűzhetjük a járatokat láncszerűen egymás után. Kinevezhetünk egy központi repülőteret, és onnan indíthatunk minden másik szigetre járatot. Választhatunk másféle elrendezést is.

Ezeket a gráfokat fagráfoknak nevezzük. Minden csúcsból minden másik csúcsba vezet élsorozat, mégpedig pontosan egy élsorozat.

Vegyük észre, hogy van olyan helyzet is, amikor öt járatot indítunk, mégsem lehet bármelyik városból bármelyik másik városba repülővel eljutni. Ezekben az esetekben a gráf nem összefüggő.



ELMÉLET

Egyszerű gráfok esetén (nem tartalmaz hurokért, sem többszörös élt) sok feladatban fontos, hogy hogyan lehet eljutni élek mentén egyik csúcsból egy másikba.

1. Séta, út, kör

A **séta** a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata, amelyben egy-egy csúcs vagy él akár többször is szerepelhet. Ha az élsorozat kezdő és végpontja azonos, akkor **körsétának** nevezzük.



Út

a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata, amelyben nincs ismétlődő csúcs

Kör

a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata, melynek kezdő és végpontja azonos, a többi csúcs viszont nem ismétlődik

Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két csúcsa között van út.

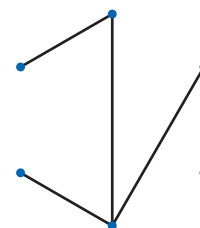
2. Fagráf

Definíció: Egy egyszerű gráfot **fagráf**nak nevezünk, ha bármely két csúcsa között pontosan egy út létezik.

A fagráf tulajdonságai:

- ▶ összefüggő gráf (azaz bármely két csúcsa között van út)
- ▶ nincs benne kör (ellenkező esetben lenne két olyan csúcs, amelyek között több út van)
- ▶ ha elhagyunk belőle egy élt, akkor már nem lesz összefüggő
- ▶ ha hozzáveszünk még egy élt, akkor lesz benne kör

Tétel: Az n pontú fagráf éleinek száma $n - 1$.



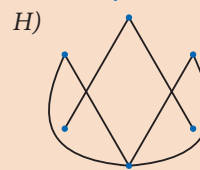
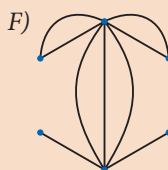
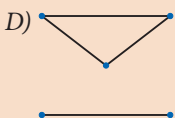
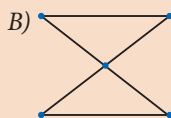
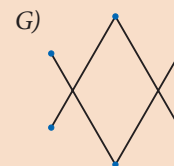
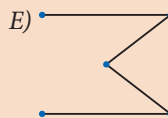
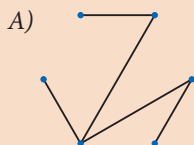
fagráf

n db csúcs esetén $n - 1$ db él

FELADATOK

1. E1 Csoportosítsd az ábrázolt gráfokat! Írd a gráf betűjelét a megfelelő cellákba!

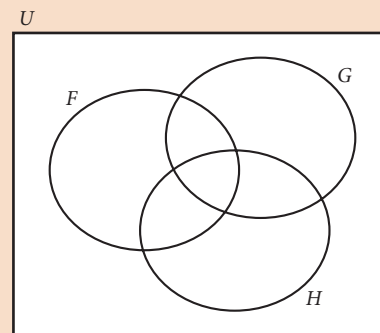
Egyszerű gráf (nincs benne hurokél és többszörös él)	Összefüggő gráf (bármely két csúcsa között van út)	Fagráf (bármely két csúcsa között pontosan egy út van)



2. E1 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

- a) Az ábrán satírozással jelöld meg és halmazműveletekkel is add meg az U -nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz!
- b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzolj pontosan egy lehetséges gráfot!



3. E1 Hány csúcsa van annak a fagráfnek,

- a) amelynek 23 éle van;
- b) amelyben a fokszámok összege 44;
- c) amelyben az egyik csúcs fokszáma 7, a többi csúcs fokszáma 1;
- d) amelyhez egyetlen élt hozzá téve teljes gráfot kapunk;
- e) amelyre igaz, hogy a komplementer gráfjának 21 éle van?

4. E1 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Több település közötti legkisebb költségű vezetékhálózat tervezésekor először egy **teljes gráfot** készítettek. Ebben a gráfban minden települést a gráf egy csúcsával, minden vezetékes kapcsolatot a gráf egy-egy élével jelöltek, majd a gráf minden élére ráírták, hogy mennyibe kerülne az adott kapcsolat kiépítése. Ezután egyesével kitörölték a „költséges éleket” úgy, hogy a törlés után megmaradó gráf összefüggő maradjon. A teljes gráf élei kétharmadának törlése után végül egy (a legkisebb költségű hálózatot megadó) **fagráfot** kaptak. Hány település szerepelt a tervben?

5. E1 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Igaz vagy hamis? Határozd meg az állítások logikai értékét!

		Igaz	Hamis
A	Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú.		
B	Ha egy 7 pontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.		
C	Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.		

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egybevágó szabályos hatszögekkel a sík hézagmentesen lefedhető. Láthatjuk ezt a méhek által épített kaptároknál, de alkalmazzák ezt társasjátékok tervezésekor vagy csempék, díszítőelemek készítésekor.

Egy cég egyforma szabályos hatszög alakú lapkával díszíti a kiállítóterét. A hatszögek oldalai és átlói közül néhány (nem 0) vonalat kékkel berajzolnak. A tervezés során a hatszög csúcsait megbetűzik az ábra szerint. Hányféle lapka készíthető,

a) amelyben pontosan 3 vonalat rajzolnak meg kékkel;

b) amelyben az AC vonal be van rajzolva kékkel;

c) amelyben az A csúcsból nem indul ki kék vonal?

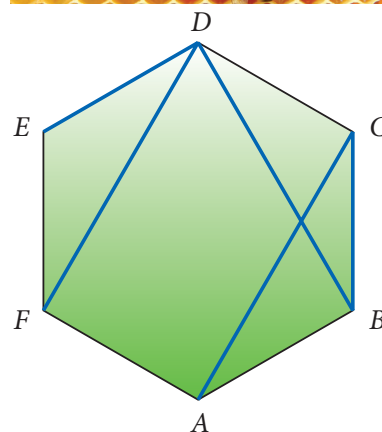
Megoldás: A feladat modellezhető a következő gráfelméleti fogalmakkal: tekintsük azokat a 6 csúcsú egyszerű gráfokat, amelyeknek 6 csúcsa az A, B, C, D, E, F pont, élei pedig a hatszög oldalai és átlói közül kerülnek ki, és van legalább egy éle.

a) A 6 csúcsú teljes gráfnak $\binom{6}{2} = 15$ db éle van. Az a) kérdésnek megfelelő gráfokat úgy kapunk, hogy a teljes gráf élei közül kiválasztunk hármat, és nem számít a

kiválasztás sorrendje. A lehetőségek száma $\binom{15}{3} = 455$.

b) A teljes gráf élei közül az AC átlót kiválasztjuk, és az összes többi él esetében eldönthetjük, hogy kiválasztjuk-e vagy sem. Vagyis a 15 él közül 14 esetében kétféle döntést hozhatunk. A lehetőségek száma 2^{14} .

c) A teljes gráf 15 éle között 5 db olyan él van, amely az A csúcsból indul ki. Ezeket nem választjuk ki, és a többi 10 él esetében eldönthetjük, hogy kiválasztjuk vagy sem. Ez $2^{10} = 1024$ lehetőség. Ezek között szerepel az is, amikor egyetlen élt sem választunk ki, ezért a lehetőségek száma $1024 - 1 = 1023$.



FELADATOK

1. E2 Hat település (A, B, C, D, E és F) között internet-kábeleket fektetnek le úgy, hogy a hat közül bármely két település között legyen kábeles összeköttetés (ez lehet közvetlen, de lehet több részből álló), és bármely két település között pontosan egyféle összeköttetés legyen. Az A települést pontosan 4 másikkal kötik össze közvetlenül. Hányféle hálózat közül választhatnak a tervezők? (Két hálózat különböző, ha van két olyan település, amelyik az egyik esetben össze van kötve, a másik esetben nincs.)

2. E1 Egy fagráfban a foksámok összege 40.

a) Hány csúcsa van a gráfnak?

b) Hány éle van a gráf komplementérének?

c) Mennyi lehet ebben a fagráfban a legnagyobb foksám?

3. E2 Emelt szintű érettségi, 2011)

Öt egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.

a) Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, a másikban nem.)

b) Takarékosági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggő legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól?

4. K2 (Emelt szintű érettségi, 2013)

Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körjárási irányban rendre A, B, C, D és E .

Hányféleképpen juthatunk el a hűrok mentén A -ból C -be, ha a B, D és E pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az A pontot csak az út kezdetén, a C pontot csak az út végén érinthetjük.)

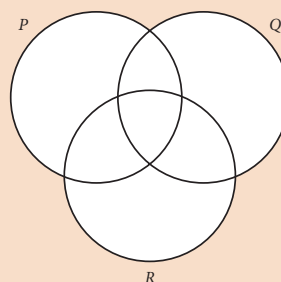
5. E1 (Emelt szintű érettségi, 2013)

Tekintsük a következő halmazokat:

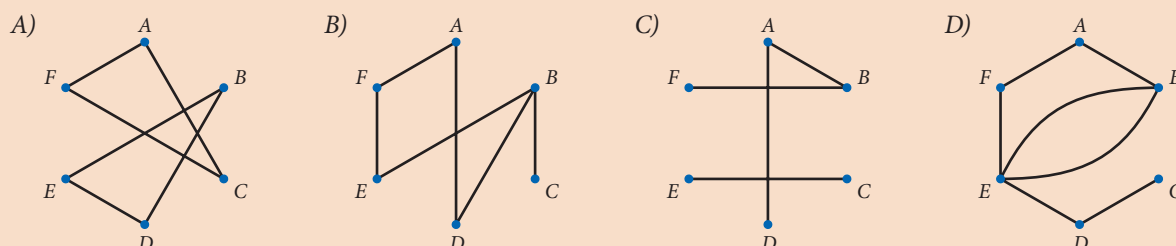
$P = \{\text{összefüggő gráfok}\}$

$Q = \{\text{egyszerű gráfok}\}$

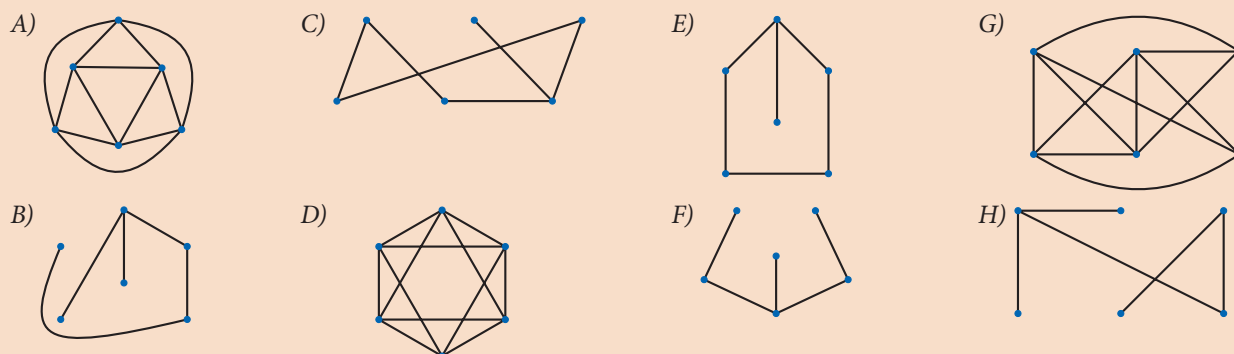
$R = \{\text{kört tartalmazó gráfok}\}$



Helyezd el az alábbi gráfok ábrájának betűjelét a fenti halmazábrán a megfelelő helyre!



6. E1 Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak? Melyek fagráfok?



7. E1 Igaz vagy hamis? A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy híres matematikus neve rakható ki. Ki ő?

	Igaz	Hamis
A 6 pontú teljes gráfnak 18 éle van.	T	S
Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a foksámok összege 11.	L	R
Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a csúcsainak száma páros.	E	A
Ha egy 6 pontú gráfnak 8 éle van, akkor a komplementerének 6 éle van.	D	A
Van olyan egyszerű gráf, amelynek ugyanannyi éle van, mint a komplementerének.	C	I
Ha két gráf izomorf, akkor a komplementer gráfjuk is izomorf.	P	Y

8. E2 Egy országban 12 város található. Az ország vasúthálózata olyan, hogy bármely városból bármely városba el lehet jutni vasúton, de csak egyféleképpen. Hányféleképpen választhatunk ki két várost, amely között nincs közvetlen vasúti összeköttetés?

(D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás)

KOMBINATORIKA		
D	Permutáció	n elem egy lehetséges sorba rendezése
T	Ismétlés nélküli permutáció	n különböző elemet sorba rendezünk, a lehetséges sorba rendezések száma: $n!$
T	Ismétléses permutáció	n elemet sorba rendezünk, az elemek között $k_1, k_2, \dots, k_i$ db egyforma, a sorba rendezések száma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!}$
T	Ciklikus permutáció	n különböző elemet körbe rendezünk, a lehetőségek száma: $(n - 1)!$
D	Variáció	n különböző elemből kiválasztunk k darabot, ▶ az elemek mind különbözők; ▶ számít a kiválasztás sorrendje.
T	Ismétlés nélküli variáció	n különböző elemből kiválasztunk k darabot, ▶ az elemek mind különbözők; ▶ számít a kiválasztás sorrendje; ▶ minden elem legfeljebb egyszer választható. A lehetőségek száma: $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$.
T	Ismétléses variáció	n különböző elemből kiválasztunk k darabot, ▶ az elemek mind különbözők; ▶ számít a kiválasztás sorrendje; ▶ az elemek többször is kiválaszthatók. A lehetőségek száma: n^k .
D	Kombináció	n különböző elemből kiválasztunk k darabot, ▶ az elemek mind különbözők; ▶ nem számít a kiválasztás sorrendje.
T	Ismétlés nélküli kombináció	n különböző elemből kiválasztunk k darabot, ▶ az elemek mind különbözők; ▶ nem számít a kiválasztás sorrendje; ▶ minden elem legfeljebb egyszer választható. A lehetőségek száma: $\binom{n}{k}$.
T	n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma ($n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$)	$\binom{n}{k}$

T	n elemű halmaz összes rész-halmazának száma ($n \in \mathbb{N}$)	2^n
T	Binomiális tétel	$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$
	Pascal-háromszög	$ \begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & \dots & & & & & & \end{array} $ $n = 0$ $n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$ $n = 5$ $\dots$

GRÁFOK

	Gráf	csúcsok (más szóval pontok) halmaza és a csúcsok között futó élek halmaza
D	Csúcsok fokszáma	az adott csúcsból kiinduló élek száma
T	Minden gráfban a fokszámok összege egyenlő az élek számának kétszeresével.	fokszámok összege = $2 \cdot$ élek száma
D	Többszörös él	két csúcs között egynél több él fut
D	Hurokél	olyan él, amelynek két végpontja azonos, (a hurokél az adott csúcs fokszámát 2-vel növeli)
D	Egyszerű gráf	Egy gráf egyszerű gráf, ha nem tartalmaz hurokért és többszörös élt.
D	Teljes gráf	Egy gráf teljes gráf, ha a gráf bármely két csúcsa között pontosan egy él fut.
T	n pontú teljes gráf ($n \in \mathbb{N}$) éleinek száma	$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
D	Komplementer gráf	Egy egyszerű gráf komplementer gráfja az az egyszerű gráf, melynek csúcsai megegyeznek a gráf csúcsaival, és két csúcsa között akkor és csak akkor van él, ha az eredeti gráfban nincs.
D	Izomorf gráfok	Két gráfot izomorfoknak nevezünk, ha csúcsaik megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy két csúcs között az egyik gráfban pontosan akkor van él, amikor a másik gráfban.
T	Azonos fokszámú pontok	Bármely (legalább kétpontú) egyszerű gráfban létezik két azonos fokszámú pont.
	Séta	egyszerű gráfban a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata; egy-egy csúcs vagy él akár többször is szerepelhet benne
	Körséta	egyszerű gráfban a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata, amelynek kezdő- és végpontja azonos; egy-egy csúcs vagy él akár többször is szerepelhet benne
	Út	egyszerű gráfban a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata, amelyben nincs ismétlődő csúcs
	Kör	egyszerű gráfban a gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata, melynek kezdő- és végpontja azonos, a többi csúcs viszont nem ismétlődik
D	Összefüggő gráf	Egy gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között van út.

D	Fagráf	Egy egyszerű gráfot fagráfnak nevezünk, ha bármely két csúcsa között pontosan egy út létezik.
	Fagráf tulajdonságai	▶ összefüggő gráf (azaz bármely két csúcsa között van út) ▶ nincs benne kör (ellenkező esetben lenne két olyan csúcsa, amelyek között több út van) ▶ ha elhagyunk belőle egy élt, akkor már nem lesz összefüggő ▶ ha hozzáveszünk még egy élt, akkor lesz benne kör
T	Az n pontú fagráf éleinek száma	Minden n pontú fagráfnak $n - 1$ éle van.

FELADATGYŰJTEMÉNY

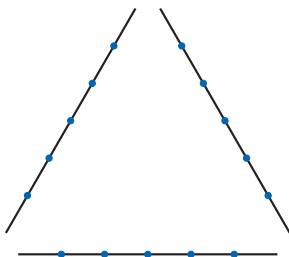
KOMBINATORIKA

- K2** Hányféleképpen rendezhető sorba 4 férfi és 4 nő, ha
 - elől a nők állnak, majd mögöttük sorban a férfiak;
 - felváltva állnak férfiak és nők?
- K2** Hány ötjegyű szám készíthető, amelynek minden számjegye különböző, és
 - első számjegye kisebb, mint 4;
 - szerepel benne az 1 és az 5 számjegy, és azok szomszédosak;
 - szerepel benne az 1 és az 5 számjegy, de azok nem szomszédosak?
- K2** Hányféleképpen oszthatunk ki 90 ember között 10 különböző ajándékot, ha senki sem kaphat egynél több ajándékot?
- E1** Hányféleképpen ülhet le 10 ember
 - egy 6 fős és egy 4 fős padra;
 - egy 6 fős és egy 4 fős kör alakú asztal köré? (Két leülést különbözőnek tekintünk, ha van olyan ember, akinek a jobb vagy a bal szomszédja más.)
- E1** Hányféleképpen rakhatók sorba az ADY ENDRE név betűi?
- E1** Hányféle kitöltése van a 13+1-es totószelvénynek, amelyben
 - pontosan 4 meccsre tippelünk x-et, a többire egyest;
 - pontosan 4 meccsre tippelünk x-et?
- K2** Hány olyan 6 jegyű szám írható fel az 1; 1; 1; 2; 2; 3 számjegyekből, amely 13-ra végződik?
- K2** Egy 11 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely
 - legalább 3 elemű;
 - páratlan elemszámú?
- E1** Feldobunk egy piros és egy fekete dobókockát. Hányféle eset van, amikor
 - a dobások között van hatos;
 - a dobások között nincs hatos;
 - a dobások összege páros;
 - a dobások szorzata páros?
- E1** Két házaspár érkezik egy étterembe. Hányféle sorrendben léphetnek az étterembe, ha semelyik feleség nem lép be az ajtón a férje előtt?
- E2*** Egy 30 fős osztályban 3 különböző ajándékot sorsolunk ki. Hányféle lehet a sorsolás végeredménye, ha akár több ajándékot is nyerhet ugyanaz a gyerek?
- E2** A 32 lapos magyar kártyából osztunk 5 lapot. Hányféle leosztás van, amelyben van tők és van ász? (A magyar kártyában 8 db tők van, 4 db ász van, és a 4 ász egyike a tők ász.)
- E1** A lórum játékot magyar kártyával játsszák, egy pakli magyar kártya 32 különböző lapból áll. Négyen lórumot játszanak. A játék kezdetén mindenkinek osztanak 8 lapot. Hányféle kezdő leosztás lehetséges?
- E1** Moziba megy 4 fiú és 3 lány. Hányféleképpen ülhetnek le 7 egymás melletti ülésre úgy, hogy semelyik két lány ne üljön egymás mellé?
- E1** (Emelt szintű érettségi, 2014)
András, Barbara, Cili, Dezső, Edit és Feri moziba mennek. Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön?

16. E2 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.

Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül?



17. E2 (Emelt szintű érettségi, 2015)

Az $ABCDE$ konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármelyik két szomszédos csúcsa különböző színű legyen. Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)

18. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Az $ABCD$ konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára, vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk?

GRÁFOK

19. K2 Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak,

- a) amelynek 105 éle van;
- b) amelyik mindegyik csúcsának fokszáma 10;
- c) amelyben a fokszámok összege 462?

20. E1 Egy 6 pontú gráf csúcsait megfeleltetjük egy kocka oldallapjainak. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha az oldallapok szomszédosak.

- a) Rajzold le ezt a gráfot!
- b) Hány éle van ennek a gráfnak?
- c) Hány éle van a komplementer gráfjának?

21. E1 Egy egyszerű gráfnak 7 csúcsa van, és kétszer annyira van, mint a komplementer gráfjának.

- a) Mennyi a gráfban a fokszámok összege?
- b) Mennyi lehet a gráfban a legnagyobb fokszám?
- c) Mennyi lehet a gráfban a legkisebb fokszám?

22. E2 Fogalmazd meg az állítások megfordítását! Add meg az állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

- A Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma legalább 2, akkor a gráf összefüggő.
- B Ha egy gráf teljes gráf, akkor minden csúcs fokszáma egyenlő.

23. E1 Egy 10 pontú fagráfban 9 pont fokszámát ismerjük. Mi a hiányzó fokszám, ha az ismert fokszámok a következők? Rajzolj egy ilyen gráfot!

- a) 1, 3, 1, 2, 4; 1, 1, 1, 1
- b) 2, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2

24. E1 Egy kieséses rendszerben megrendezett bajnokságon 40 csapat indul. A csapatokból párokat sorsolnak, akik lejátsszanak egymás között egy mérkőzést, a vesztes kiesik, a győztes továbbjut. A győztesekből újból párokat sorsolnak, és így tovább. Ha páratlan számú továbbjutó van, akkor kisorsolnak egy csapatot, aki mérkőzés nélkül továbbjut a következő fordulóra.

- a) Összesen hány mérkőzésre kerül sor?
- b) Hány mérkőzést játszhat az a csapat, aki megnyeri a bajnokságot?

25. E1 Hány pontú az a fagráf, amely komplementerének 16-tal kevesebb éle van, mint az ugyanennyi pontú teljes gráfnak?

26. E2* Egy 8 fős társaságban van olyan személy, akinek a jelenlévők közül páros számú ismerőse van. Legfeljebb hány ismeretség lehet a társaságban? (Az ismeretségek kölcsönösek, és senkit sem tekintünk önmaga ismerősenek.)

27. E2 Egy 20 pontú egyszerű gráf minden pontjának fokszáma legalább 10. Bizonyítsd be, hogy a gráf összefüggő!

28. E2 Egy nyári kézműves táborba 10 gyerek érkezik 4 osztályból. Az osztálytársak ismerik egymást, de a különböző osztályból érkezők közül senki nem ismer senkit. Az érkezéskor 16 ismeretség van a 10 gyerek között. Előfordulhat-e, hogy a gyerekek között

- a) van 7, akik osztálytársak;
- b) van 6, akik osztálytársak;
- c) az egyik osztályból pontosan öten érkeztek?

29. E2 Nyolc közeli falu között olyan a bicikliút-hálózat, hogy a nyolc falu bármelyikéből bármelyik másikba el lehet jutni bicikliúton, de csak egyféleképpen. Pályázati pénzből a bicikliút-hálózathoz 3 új szakaszt építhetnek meg úgy, hogy mindegyik megépített szakasz közvetlen összeköttetést jelent két település között. Hányféleképpen választhatják ki, hogy melyik legyen az a 3 bicikliút, amit megépítenek?



osztó, többszörös, prímszám, összetett szám, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, oszthatósági szabályok, maradékos osztás



az oszthatóság tulajdonságai, a számelmélet alaptétele, oszthatósági szabály 11-re

BEVEZETŐ

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), a kiváló tehetségű, sokoldalú német tudós (matematikus, fizikus és csillagász) jelentősen hozzájárult a matematika különböző területeinek, így többek között a számelméletnek a fejlődéséhez. Gyakran a „matematika fedelmeként” emlegetik. Ugyanakkor Gauss a tudományokat ruházta fel uralkodói tulajdonsággal. „A matematika a tudományok királynője, és a matematika királynője a számelmélet.” Gauss azért ítélhette kiemelkedő fontosságúnak a számelméletet, mert – bár a problémák, sejtések könnyen megfogalmazhatók – az állítások bizonyítása rendkívüli ötletességet, tudást, valamint a matematika különböző területeihez (mint például analízis, algebra, gráfelmélet, kombinatorika) való alapos hozzáértést igényel. Gauss egész életét annak szentelte, hogy minden odaadásával és tudásával ezeket az „uralkodókat” szolgálja.



A számelmélet területén – ahogyan a matematika és más tudományágak területein is – jelenleg is vannak megoldásra váró problémák.

Ilyen például az ún. ikerprím-sejtés, miszerint végtelen sok olyan p prímszám van, amelyre $p + 2$ is prím. A sejtés igazolása a mai napig nyitott probléma, pedig ezt a felvetést Eukleidész még Kr. e. 300 körül fogalmazta meg.

Több mint ezer éve keresik a választ arra is, hogy létezik-e páratlan tökéletes szám, vagyis olyan pozitív egész, amely megegyezik valódi osztóinak összegével.

A – Christian Goldbach (1690–1764) német matematikustól származó – páros Goldbach-sejtés (bármely 4-nél nagyobb páros szám két prím összege) jelenleg is megoldatlan probléma. A páratlan Goldbach-sejtést (bármely 5-nél nagyobb páratlan szám három prím összege) Vinogradov az 1930-as évek elején bebizonyította „elegendően nagy pozitív egészekre”, de általánosan még nem sikerült bizonyítani minden páratlan számra.

Pierre de Fermat (1601–1665) XVII. században megfogalmazott sejtésének bizonyítására egészen 1995-ig várni kellett. Nézz utána az interneten, hogy pontosan mi volt ez a sejtés! Matematikai tanulmányaid során már találkozhattál az állítás legkisebb hatványkitevőre felírt alakjával. Vajon mi volt ez?

A számelméleti kutatások képezik az alapját a titkosítás, a kriptográfia tudományának. Nagy jelentőséggel bír a számelméleten alapuló módszerek, eljárások alkalmazása a hadiiparban, a gyógyszeriparban és a bankszférában is.

ELMÉLET

Ne keverd össze az alábbiakat!

- ▶ Az **osztás egy művelet**, melynek során két számhoz rendelünk eredményképpen egy harmadikat.
- ▶ Az **oszthatóság két szám közötti kapcsolat** (reláció), mely a számok szorzásán, többszörözésén alapul. Emiatt a 0-val való osztásnak nincs értelme, de 0 osztója a 0-nak, ugyanis a definíció szerint van olyan k természetes szám, amelyre $0 \cdot k = 0$.

1. Az oszthatóság tulajdonságai

Az a ; b ; c természetes számok esetén fennáll:

1. $a \mid a$ és $1 \mid a$ és $a \mid 0$.
2. Ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $a = b$.
3. Ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$.
4. Ha $a \mid b$, akkor $a \mid (b \cdot c)$, de megfordítva nem igaz az állítás.
5. Ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid (b + c)$, de megfordítva nem igaz az állítás.
6. Ha $a \mid b$ és $a \nmid c$, akkor $a \nmid (b + c)$, de
ha $a \nmid (b + c)$, akkor vagy $a \mid b$ és $a \nmid c$, vagy $a \nmid b$ és $a \mid c$, vagy $a \nmid b$ és $a \nmid c$.

2. A számelmélet alaptétele:

Bármely 1-nél nagyobb természetes szám felbontható véges sok prímszám szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Megjegyzések:

1. Ha egy pozitív egész szám osztóit keressük, akkor alkalmazhatjuk a tanult (2-re, 4-re, 8-ra, 3-ra, 9-re, 5-re, 25-re, 125-re vonatkozó) oszthatósági szabályokat.

2. Oszthatósági szabály a 11-gyel való oszthatóságra

Egy természetes szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha váltakozó előjellel összeadott számjegyeinek összege osztható 11-gyel.

Például: $11 \mid 1372492$, mert $11 \mid (1 - 3 + 7 - 2 + 4 - 9 + 2)$;

$11 \mid 62513$, mert $11 \mid (6 - 2 + 5 - 1 + 3)$.

Bizonyítsd általánosan a 11-gyel való oszthatósági szabályt egy ötjegyű pozitív egész számra!

3. Minden 1-nél nagyobb egész számnak van prím osztója.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Írd fel a 299 prímtenyezős felbontását!

Megoldás:

Az oszthatóság vizsgálatát elegendő a $\sqrt{299} \approx 17,3$ -nél kisebb prímszámokra vonatkozóan megtenni. Az oszthatósági szabályok segítségével belátható, hogy a 299 nem többszöröse a 2-nek, 3-nak, 5-nek.

A 7-tel, a 11-gyel, a 13-mal, valamint a 17-tel való oszthatóság vizsgálatához írjuk fel a 299-et rendre olyan összegként, amelyben néhány tag biztosan osztható 7-tel, 11-gyel, 13-mal, illetve 17-tel.

Így arra jutunk, hogy

$299 = 210 + 49 + 40$, ahol $7 \mid 210$ és $7 \mid 49$ és $7 \nmid 40$, ezért $7 \nmid 299$;

$299 = 220 + 77 + 2$, ahol $11 \mid 220$ és $11 \mid 77$ és $11 \nmid 2$, ezért $11 \nmid 299$;

$299 = 260 + 39$, ahol $13 \mid 260$ és $13 \mid 39$, ezért $13 \mid 299$;

$299 = 289 + 2$, ahol $17 \mid 289 = 17^2$ és $17 \nmid 2$, ezért $17 \nmid 299$.

A 299 újabb osztójának meghatározásához elegendő, ha megkeressük a megkapott osztónak, a 13-nak az osztópárját. Ez a 23, és mivel 23 is prímszám, így 299 prímfelbontása: $299 = 13 \cdot 23$.



Megjegyzés: Egy pozitív egész szám osztópárjai közül az egyik soha nem nagyobb a szám négyzetgyökénél, ezért az osztók meghatározása esetén elegendő a szám négyzetgyökéig keresni az osztókat (ha addig nem találunk osztót, akkor a szám prímszám).

2. Igazold az alábbi állítást!

$$10 \nmid 22^{33} + 44^{55} + 66^{77} + 88^{99}$$

Megoldás:

A 10-zel való oszthatóság miatt vizsgáljuk meg a $22^{33} + 44^{55} + 66^{77} + 88^{99}$ összeg utolsó számjegyét!

22^{33} esetén elegendő, ha a 2 végű számok hatványainak utolsó számjegyét határozzuk meg.

A 2 végű számok pozitív egész kitevős hatványainak utolsó számjegye rendre: 2; 4; 8; 6; 2; 4; ..., vagyis a végződés 4-es periódusban állnak elő, így $22^{33} = 22^{4 \cdot 8 + 1}$ utolsó számjegye a 2.

Hasonlóan látható, hogy a 4-re végződő számok pozitív egész kitevős hatványai rendre 4; 6; 4; 6; ..., ezért 44^{55} utolsó számjegye 4. A 8-ra végződő számok hatványai rendre: 8; 4; 2; 6; 8; 4; ..., ezért 88^{99} utolsó számjegye 2. A 6-ra végződő számok pozitív egész kitevős hatványai pedig minden esetben 6 végű számot adnak.

Az előbbieket miatt az összeg egyes tagjai

$$22^{33} = 10k + 2; \quad 44^{55} = 10l + 4; \quad 66^{77} = 10m + 6; \quad 88^{99} = 10n + 2$$

alakú számokat adnak, ahol $k; l; m; n \in \mathbb{N}$.

Így a hatványértékek összege

$$10k + 2 + 10l + 4 + 10m + 6 + 10n + 2 = 10(k + l + m + n) + 14,$$

amiből következik, hogy az egyes helyi értéken álló számjegye a 4, tehát a $22^{33} + 44^{55} + 66^{77} + 88^{99}$ nem osztható 10-zel.

FELADATOK

1. K2 Tudjuk, hogy $A = 2 \cdot 3^n \cdot 5^k \cdot 11$ (ahol n és k pozitív egész szám) és $45 \mid A$.

- Milyen számok állhatnak az n és k helyén?
- Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz biztosan, melyik lehetséges és melyik nem lehetséges az A számra vonatkozóan!

$$18 \nmid A \quad 36 \mid A \quad 54 \mid A$$

$$100 \mid A \quad 110 \nmid A \quad 605 \mid A$$

2. E1 Hány olyan pozitív egészekből álló $(n; k)$ számpár van, amelyre a

- $3^n \cdot 5^{2k} \cdot 7^6$ szám $2 \cdot 10^6$ -nál kisebb négyzetszám;
- $2^3 \cdot 3^n \cdot 5^k$ szám legfeljebb 6 jegyű köbszám;
- $3^{12} \cdot 7^n \cdot 11^k$ szám egyszerre négyzet-, és köbszám;
- $2^4 \cdot 3^n \cdot 5^2 \cdot 7^k \cdot 11$ szám osztója a $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^2$ számnak?

3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2018)

A 72-nek és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27 720. Határozd meg az n lehetséges értékeinek számát, és add meg az n legkisebb lehetséges értékét!

4. E1 Hány 0 áll a 2021! végén?

5. E1 (Emelt szintű érettségi, 2006)

Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

- Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?
- Ezen számok közül hány osztható 12-vel?
- Bizonyítsd be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2010)

- Hány olyan tízjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye a $\{0; 8\}$ halmaz eleme?
- Írd fel a 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és a 8-as számjegyeket tartalmazza!

7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Bizonyítsd be, hogy $12 \mid (n^4 - n^2)$, ha $n \in \mathbb{N}$!

Megoldás: Szorzattá alakítás után: $12 = 2^2 \cdot 3$ és $(n^4 - n^2) = n^2(n^2 - 1) = n^2(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n^2(n + 1)$,

vagyis azt kell belátni, hogy $2^2 \cdot 3 \mid (n - 1)n^2(n + 1)$.

Ha n páros, akkor $2 \mid n$, ezért $2^2 \mid n^2$; ha n páratlan, akkor $2 \mid n - 1$ és $2 \mid n + 1$, ezért $2^2 \mid (n - 1)(n + 1)$.

$3 \mid (n - 1)n^2(n + 1)$, mert az $(n - 1)$, n , $(n + 1)$ három egymást követő egész szám szorzata, amelyek közül az egyik biztosan osztható 3-mal. Az előbbiekből következik, hogy $2^2 \cdot 3 \mid (n - 1)n^2(n + 1)$.

2. Milyen n egész számra lesz $\frac{3n-4}{n+2}$ egész szám?

Megoldás: Az algebrai törtet hozzuk olyan alakra, hogy csak a nevezőben szerepeljen az ismeretlen:

$$\frac{3n-4}{n+2} = \frac{3(n+2)-10}{n+2} = \frac{3(n+2)}{n+2} - \frac{10}{n+2} = 3 - \frac{10}{n+2} \text{ egész számot ad, ha } \frac{10}{n+2} \text{ egész szám.}$$

$\frac{10}{n+2}$ akkor egész szám, ha $|n+2| \mid 10$.

Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket:

$n+2$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
n	-12	-7	-4	-3	-1	0	3	8
$\frac{3n-4}{n+2}$	4	5	8	13	-7	-2	1	2

Tehát a $\frac{3n-4}{n+2}$ egész szám, ha $n \in \{-12; -7; -4; -3; -1; 0; 3; 8\}$.

FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható?

2. E1 Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) Van olyan természetes szám, amely számjegyeinek szorzata 910.

b) $5 \mid (11^0 + 11^1 + 11^2 + \dots + 11^9)$

c) A $4^{20} - 1$ prímszám.

d) Ha $4 \mid \overline{ab}$, akkor $12 \mid \overline{ababab}$ (ahol a és b pozitív egész egyjegyű szám).

e) Van olyan természetes szám, amelynek a fele négyzetszám, a negyede pedig egy természetes szám negyedik hatványa.

3. E1 Bizonyítsd be az állításokat! ($n \in \mathbb{N}$)

a) $255 \mid (2^{16} - 1)$

c) $4 \mid (n^4 - 2n^3 + n^2)$

b) $30 \mid (n^5 - n)$

d) $3 \mid (2 \cdot 7^n + 1)$

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2017)

a) Határozd meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{1c28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, amelynek első számjegye p , további számjegyei pedig rendre q , r és s .)

b) Igazold, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal!

5. E1 Milyen n egész számra lesz $\frac{5n+10}{n-1}$ egész szám?



prímtényezőkre bontás



a pozitív osztók száma, végtelen sok prímszám van

KIDOLGOZOTT FELADAT

Rajzolj a derékszögű koordináta-rendszerben olyan egész oldalhosszúságú téglalapot, amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, és amely a „bal alsó sarkában” magában foglalja azt az egység oldalhosszúságú $ABCD$ négyzetet, amelynek csúcsai az $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$ és $D(0; 1)$ pontok!

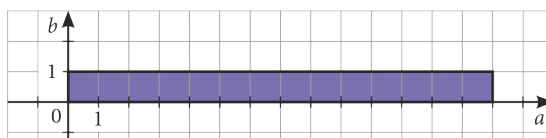
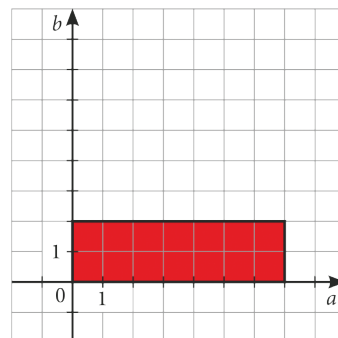
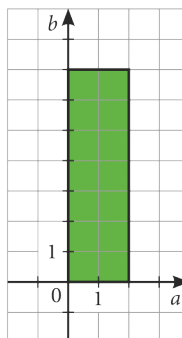
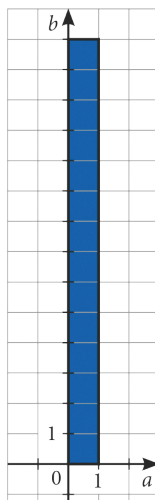
Hány ilyen téglalap van, ha a területe

- a) 14; b) 45; c) 360 területegység?

Két téglalapot különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik tengelyre illeszkedő oldalaik hossza különböző.

Megoldás:

- a) Ha a keresett téglalap oldalainak hosszúságát $a \in \mathbb{Z}^+$ és $b \in \mathbb{Z}^+$ jelöli, akkor a területe felírható $a \cdot b = 14$ alakban. A feltételek miatt ez olyan a, b pozitív egészekre igaz, amelyek a 14 osztói, tehát az egyik oldal hosszának lehetséges értékei $a = 1; 2; 7; 14$, az ehhez tartozó másik oldal hosszai rendre $b = 14; 7; 2; 1$. A derékszögű koordináta-rendszerben a lehetséges elhelyezéseket az ábra mutatja:



Tehát 4 ilyen téglalap van.

- b) Az előbbi feladatrész megoldásához hasonlóan gondolkodhatunk. Ebben az esetben a keresett téglalap oldalainak hosszát a 45 osztói adják meg. A megoldásokat táblázatba foglalva:

a	1	3	5	9	15	45
b	45	15	9	5	3	1

Az osztópároknak megfelelő oldalhosszúságokkal 6 téglalap rajzolható a feltételeknek megfelelően.

- c) Az előbbiekhöz hasonlóan a terület mérőszámának, a 360 osztóinak számát kell meghatároznunk. A 360 prímtényezősbontása ($360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$) alapján egyszerűbb az osztók megkeresése. Az osztók mindegyike a felbontásban szereplő egyes prímtényezők hatványainak szorzataként állítható elő. A 2 hatványai közül szóba jöhet a 2^0 , a 2^1 , a 2^2 , és a 2^3 , a 3 hatványai közül a 3^0 , a 3^1 , a 3^2 , valamint az 5 hatványai közül az 5^0 , és az 5^1 .

Osztója például a 360-nak a $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, a $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$, valamint a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Az osztók előállításakor a 2 hatványaiból 4, a 3 hatványaiból 3, az 5 hatványaiból 2 választási lehetőség adódik. Mivel a különböző prímtényezők hatványai közül függetlenül választhatjuk a megfelelőket, ezért 360 összes osztóinak száma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Tehát 24 olyan téglalap van, amely teljesíti a feltételeket.



1. A pozitív osztók száma

Ha az A összetett szám prímtényezős alakja az $A = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ (ahol a $p_1; p_2; p_3; \dots; p_k$ különböző prímszámok, és az $n_1; n_2; n_3; \dots; n_k$ pozitív egész számok), akkor az A szám osztóinak száma $d(A) = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot (n_3 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$.

Például: $A = 2^5 \cdot 3 \cdot 11^3$ esetén az osztók száma: $d(A) = (5 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (3 + 1) = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$

2. Tétel a prímekek számáról

Tétel: Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás:

Az állítással ellentétben (indirekt módon) tegyük fel, hogy véges sok prímszám van, pontosan a következő n darab: $p_1; p_2; p_3; \dots; p_n$.

Tekintsük az $A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ egész számot. Az indirekt feltevésünk szerint ez csak összetett szám lehet.

Ez a szám a $p_1; p_2; p_3; \dots; p_n$ prímekek egyikével sem osztható, mert bármelyikkel osztva 1 maradékot ad. De mivel indirekt feltevésünk szerint a $p_1; p_2; p_3; \dots; p_n$ az összes prímszám, ezért az A számnak nincs prím osztója. Ez azonban ellentmond annak, hogy minden 1-nél nagyobb összetett számnak van prím osztója.

Így ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti állítás igaz.

FELADATOK

1. E1 Határozd meg a $7!$ osztóinak számát!

2. E1 Hány négyzetszám osztója van a $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 11^4$ számnak?

3. E1 Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan

a) 15 pozitív osztója;

b) 18 pozitív osztója van?

4. E1 Bizonyítsd be, hogy a négyzetszámoknak páratlan számú pozitív osztója van!

5. E1

a) Határozd meg a $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7$ prímtényezős alakban felírható szám páratlan és páros osztóinak számát!

b) Mennyi a $2^7 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^4 \cdot 13$ prímtényezős alakban felírható szám prím osztói számának és nem prím osztói számának az aránya?

6. E2

a) Mennyi az 1000 összes pozitív osztóinak összege?

b) Mennyi az 1000 összes pozitív osztóinak szorzata?

RÁADÁS

Milyen „sűrűn” helyezkednek el a prímszámok a természetes számok között? Az ikerprímek esetében két szomszédos prím különbsége 2. Belátható azonban, hogy két szomszédos prím különbsége tetszőlegesen nagy lehet. Ezt megfogalmazhatjuk úgy is, hogy bármely pozitív egész n esetén található n darab egymást követő összetett szám.

Ezt az állítást úgy bizonyítjuk, hogy tetszőleges n -hez konstruálunk n darab egymást követő összetett számot.

Tudjuk, hogy az $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ összetett szám bármely $2 < n$ esetén (mivel osztója a 2, a 3, ..., az $n-1$ és az n).

Az oszthatóság tulajdonságai alapján belátható, hogy $2 < n$ esetén teljesül:

$2 \mid ((n+1)! + 2)$, azaz $(n+1)! + 2$ összetett szám,

$3 \mid ((n+1)! + 3)$, azaz $(n+1)! + 3$ összetett szám,

$4 \mid ((n+1)! + 4)$, azaz $(n+1)! + 4$ összetett szám, és így tovább ..., $n \mid ((n+1)! + n)$, azaz $(n+1)! + n$ összetett szám,

tehát megadtunk n darab egymást követő számot, amelyek mindegyike összetett szám.



helyiértékes írásmód, számrendszerek, áttérés más alapú számrendszerre



műveletek számrendszerekben

BEVEZETŐ

a) Kérdés: Mi lehet a közös az alábbi jelekben?

- 1.
2. 〇 一 二 三 四 五 六 七 八 九 十, 百, 千, 万
3.

.	..	...		—	..	...	
---	----	-----	------	---	----	-----	------
4. I V X L C D M
5. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Válasz: Mindegyik szimbólum számokat jelöl.

1. sor: a 10 hatványait megjelenítő egyiptomi jelek:

1; 10; 100; 1000; 10 000; 100 000; 1 000 000

2. sor: Kínában és Japánban használatos számok:

0; 1; ...; 10; 100; 1000; 10 000

3. sor: maja hieroglifák: 1; 2; ...; 9

4. sor: római számok: 1; 5; 10; 50; 100; 500; 1000

5. sor: arab számok

b) Kérdés: Hány darab van egy tucatban? Hány tucat egy nagytucat? Hány darab van egy nagytucatban?

Válasz: A tucat szó (ami valószínűleg a latin duodecim szóból származik) a magyarban 12 darabot jelöl.

Például: Ha a boltban egy dobozban 12 darab tojás van, akkor az egy tucat tojás. Ha ebből 12 dobozzal veszel, akkor az már egy nagytucat (másképp grossz), ami összesen $12 \cdot 12 = 12^2 = 144$ darab tojás. Ha 12 nagytucat tojást szállítanak egy boltba (nagygrossz), akkor az 12-szer 12 doboz tojás, ami – mivel dobozonként 12 darab tojás – összesen $12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^3 = 1728$ darab tojás.

Ebben a példában, ebben a csoportosításban a tucat, vagyis a 12 az alapszám.

Nézz utána, hogy különböző nyelveken hogyan mondják a tucatnak megfelelő mennyiségeket!

A mennyiségek egyértelmű kifejezéséhez, a számok leírásához azonos szimbólumokra (számjegyekre) és azonos ábrázolási módra, leírási rendszerre (számrendszerre) van szükség.

Különböző mennyiségekhez különböző alapszámokat, váltószámokat használunk, különböző egységeket más és más számú kisebb egységre, csoportra bontunk.

A legnépszerűbb és leggyakoribb számrendszer, amit a hétköznapi életben használunk, a tízes számrendszer.

A tízes számrendszerben használt számjegyeket, vagyis alaki értékeket a 10 hatványainak megfelelő, jobbról balra növekvő $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$ ($n \in \mathbb{N}$) helyi értékű helyeken helyezük el. Minden szám valódi értéke egyértelműen felírható a számjegyek alaki értéke és a megfelelő helyi értékek szorzatainak összegeként.

Például: $78\,204 = 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

A számítástechnikában, az informatikai eszközökben az adatok egyszerűbb tárolása és átvitele miatt a 2-es alapú (bináris) számrendszert használják.



Tétel: Ha az a 1-nél nagyobb rögzített egész szám, akkor bármely A pozitív egész szám egyértelműen felírható az a -nál kisebb $c_n; c_{n-1}; c_{n-2}; \dots; c_1; c_0$ természetes számok segítségével

$$A = c_n \cdot a^n + c_{n-1} \cdot a^{n-1} + c_{n-2} \cdot a^{n-2} + \dots + c_1 \cdot a^1 + c_0 \cdot a^0$$

alakban ($n \in \mathbb{N}; c_i \in \mathbb{N}; i = 0; 1; \dots; n$), amit az A szám a alapú számrendszerben való felírásának nevezünk és $A = c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_1 c_0_a$ alakban írjuk,

ahol $c_n; c_{n-1}; c_{n-2}; \dots; c_1; c_0$ az A szám számjegyeit jelenti az a alapú számrendszerben.

Az a alapú számrendszerben előforduló számjegyek mindegyike kisebb az a -nál.

Például: $A = 1057_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 559_{10}$.

Megjegyzések:

1. A 10-es számrendszer esetén megállapodás szerint nem jelezzük jobb alsó indexben a számrendszer alapját.
2. A 10-nél nagyobb alapú számrendszerekben a 9-nél nagyobb, egynél több karakterből álló számjegyeket zárójelezzük, vagy azokat az ábécé betűivel jelöljük.

Például 16-os számrendszerben $(10) = A; (11) = B; (12) = C; \dots; (15) = F$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Írjuk fel a 10-es számrendszerbeli alakját a $24\,105_6$ számnak!

Megoldás:

A 6-os számrendszerbeli helyi értékek az ötjegyű szám esetén: $6^4; 6^3; 6^2; 6^1; 6^0$, ezért a szám értéke a 10-es számrendszerben:

$$2 \cdot 6^4 + 4 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 3497.$$

2. Írjuk fel a 8-as számrendszerben a 3082 -t!

Megoldás:

Ebben az esetben a 8-as számrendszerbeli helyi értékek ($a^8; \dots; 8^3; 8^2; 8^1; 8^0$ ($n \in \mathbb{N}$)) közül az előforduló legnagyobb a 8^3 lehet, mivel $3082 < 8^4$.

Ezt felhasználva a maradékos osztás elvégzése alapján $3082 = 6 \cdot 8^3 + 10$, vagyis a legnagyobb helyi értéken a 6 számjegy áll. A $10 = 0 \cdot 8^2 + 10$, ezért a következő helyi értéken a 0 áll.

Az eljárást folytatva $10 = 1 \cdot 8^1 + 2$, ezért a következő számjegy az 1, az azt követő pedig a 2.

Tehát mivel $3082 = 6 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 2$, ezért $3082 = 6012_8$.

3. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $11011_2 + 10010_2$

b) $6431_8 + 6052_8 + 7143_8$

c) $2431_6 - 152_6$

Első megoldás:

A számokat átírjuk 10-es számrendszerbe, majd az eredményt visszaírjuk az eredeti számrendszerbe.

Oldd meg gyakorlásképpen ezzel a módszerrel a feladatokat!

Második megoldás:

Alkalmazzuk a 10-es számrendszerben megszokott, a helyi értékeknek megfelelően egymás alá írás módszerét, ahol figyelembe vesszük a számrendszer alapjának (és többszöröseinek) helyiérték-átlépési szabályait.



A megoldás során:

zöld színnel jelöltük az egyes lépésekben kapott **eredmény utolsó számjegyét**, amely megmutatja, hogy a számrendszer alapján, vagy annak többszörösénél mennyivel nagyobb a kapott összeg;

kék színnel jelöltük az egyes lépésekben kapott **maradékokat**, melyek megmutatják, hogy a számrendszer alapjának hány-szorosát értük el, vagy léptük át.

a) 1. lépés	2. lépés	3. lépés	4. lépés	5. lépés
$\begin{array}{r} 11011_2 \\ 10010_2 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 11011_2 \\ 10010_2 \\ \hline 01 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 11011_2 \\ 10010_2 \\ \hline 101 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11011_2 \\ 10010_2 \\ \hline 1101 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 11011_2 \\ 10010_2 \\ \hline 101101_2 \end{array}$
$1 + 0 = 1$, leírjuk az 1-et	$1 + 1 = 10$, leírjuk a 0-át továbbviszünk 1-et	$1 + 0 + 0 = 1$, leírjuk az 1-et	$1 + 0 = 1$, leírjuk az 1-et	$1 + 1 = 10$, leírjuk a 0-át továbbviszünk 1-et, $1 = 1$, leírjuk az 1-et

Tehát $11011_2 + 10010_2 = 101101_2$.

b)

$$\begin{array}{r} 6431_8 \\ 6052_8 \\ + 7143_8 \\ \hline 23646_8 \end{array}$$

Az egyes helyi értéken $1 + 2 + 3 = 6$ (a nyolcas számrendszerben).
A nyolcas helyi értéken $3 + 5 + 4$ a nyolcas számrendszerben 14,
ebből leírjuk a 4-est és tovább visszük az 1-t.

A 64-es helyi értéken $1 + 4 + 0 + 1 = 6$.

Az 512-es helyi értéken $6 + 6 + 7$ a nyolcas számrendszerben 23.

Tehát $6431_8 + 6052_8 + 7143_8 = 23646_8$.

c) Írásbeli kivonáskor a kisebbítendő alá írjuk a kivonandót. A kivonás helyi értékek szerint történik. Ha nem tudjuk kivonni az egyik számból a másikat, akkor a következő (vagyis az azt megelőző) helyi értékből kell beváltani.

kisebbitendő 2431_6

kivonandó -152_6

maradék 2235_6

helyi értékek IV. III. II. I.

A I. helyi értéken az $1 - 2$ nem végezhető el, ezért az 1-hez beváltunk az előző II. helyi értékről még egy 1-est (melynek értéke a 6-os számrendszer miatt 6), így $(6 + 1) - 2 = 5$ kerül az eredménybe az I. helyi értékre.

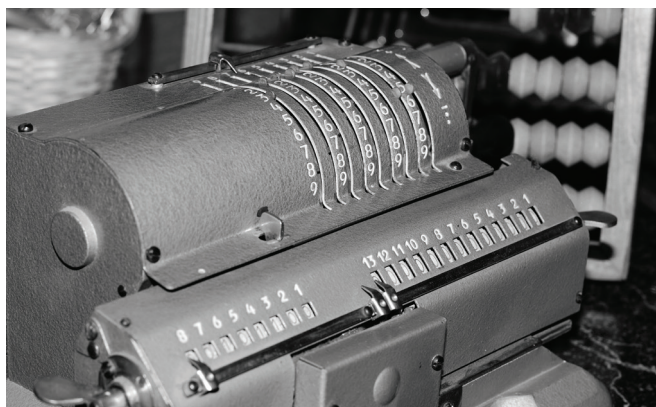
A beváltott 1-est hozzáadjuk a kivonandóhoz a II. helyi értéken, így $3 - (5 + 1)$ értékét kellene számolni, de ez nem végezhető el, ezért a megelőző III. helyi értékről beváltunk egy 1-est, emiatt $(6 + 3) - (5 + 1) = 3$ kerül a maradék II. helyi értékére.

Az előbb beváltott 1-est hozzáadjuk a kivonandóhoz a III. helyi értéken, így $4 - (1 + 1) = 2$ kerül a maradékban III. helyi értékére.

A IV. helyi értéken $2 - 0 = 2$ számjegyet írunk.

Tehát $2431_6 - 152_6 = 2235_6$.

Ellenőrzés: $2235_6 + 152_6 = 2431_6$.



(D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás)

D	Oszthatóság	A b természetes szám osztható az a természetes számmal, ha van olyan k természetes szám, amelyre $a \cdot k = b$. Ekkor az a természetes számot a b természetes szám osztójának, a b természetes számot az a természetes szám többszörösének nevezzük. Jele: $a \mid b$.
T	Az oszthatóság tulajdonságai ($a \in \mathbb{N}$; $b \in \mathbb{N}$; $c \in \mathbb{N}$ esetén)	a) $a \mid a$ és $1 \mid a$ és $a \mid 0$. b) Ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $a = b$. c) Ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$. d) Ha $a \mid b$, akkor $a \mid (b \cdot c)$. e) Ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid (b + c)$. f) Ha $a \mid b$ és $a \nmid c$, akkor $a \nmid (b + c)$.
D	Prímszám	Egy pozitív egész szám prímszám, ha pontosan két pozitív osztója van.
T	Prímek száma	Végtelen sok prímszám van.
D	Összetett szám	Egy pozitív egész szám összetett szám, ha kettőnél több osztója van.
T	A számelmélet alaptétele	Bármely 1-nél nagyobb természetes szám felbontható véges sok prímszám szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.
D	Legnagyobb közös osztó	Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztója a legnagyobb olyan szám, amely mindegyik adott számnak osztója.
M	Legnagyobb közös osztó meghatározása	Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját a számok prím-tényezős felbontásából megkapjuk, ha az összes közös prím-tényezőt az előforduló legkisebb hatványára emeljük, majd ezeket összeszorozzuk.
D	Legkisebb közös többszörös	Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse a legkisebb olyan szám, amely mindegyik adott számnak többszöröse.
M	Legkisebb közös többszörös meghatározása	Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét megkapjuk, ha a számok prím-tényezős felbontásában az összes előforduló prímszámot az előforduló legnagyobb hatványán összeszorozzuk.
D	Relatív prím kapcsolat	Két pozitív egész szám egymással relatív prím párt alkot, ha a legnagyobb közös osztójuk 1.
T	Az osztók száma	Ha az A összetett szám prím-tényezős alakja az $A = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ (ahol a $p_1; p_2; p_3; \dots; p_k$ különböző prímszámok, és az $n_1; n_2; n_3; \dots; n_k$ pozitív egész számok), akkor az A szám pozitív osztóinak száma $d(A) = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot (n_3 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$.
	Számrendszerek	Ha az a 1-nél nagyobb rögzített egész szám, akkor bármely A pozitív egész szám egyértelműen felírható $A = c_n \cdot a^n + c_{n-1} \cdot a^{n-1} + c_{n-2} \cdot a^{n-2} + \dots + c_1 \cdot a^1 + c_0 \cdot a^0$ alakban ($n \in \mathbb{N}$; $c_i \in \mathbb{N}$; $i = 0; 1; \dots; n$), amit az A szám a alapú számrendszerben való felírásának nevezünk és $A = c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_1 c_0 a$ alakban írjuk, ahol $c_n; c_{n-1}; c_{n-2}; \dots; c_1; c_0$ az A szám számjegyeit jelenti. Az a alapú számrendszerben előforduló számjegyek mindegyike kisebb az a -nál.

1. **K2** Határozd meg a felírt szám hiányzó számjegyeit úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság! Keresd meg az összes lehetséges megoldást!

a) $15 \mid \overline{1x25y}$	c) $75 \mid \overline{146x2y}$
b) $72 \mid \overline{3x28y}$	d) $33 \mid \overline{7x2y54}$
2. **K2** Tudjuk, hogy $A = 2^n \cdot 3^k \cdot 5^3$ (ahol n és k pozitív egész szám).
Van-e olyan n és k pozitív egész szám, amely esetén teljesülnek az alábbiak?
Ha igen, akkor mi lehet az n és k értéke?

a) $250 \mid A$	d) $295 \mid A$
b) $350 \mid A$	e) $1250 \mid A$
c) $450 \mid A$	f) $5\,184\,000 \mid A$
3. **E1** Igaz-e, hogy bármilyen pozitív egész n esetén teljesül, hogy

a) $72 \mid (10^n + 8)$;	c) $33 \mid (10^{2n+1} + 386)$?
b) $6 \mid (10^{n+2} + 752)$;	
4. **E1** Bizonyítsd be az alábbi állításokat!

a) $11 \mid (100^{100} - 1)$	b) $10 \mid (777^{777} - 333^{555})$
c) $156 \mid (5^{200} - 1)$	
5. **E1** Hány darab

a) 8-cal osztható $\overline{abab}$;	b) 99-cel osztható $\overline{aabb}$;
c) 6-tal osztható $\overline{abba}$	

 alakú négyjegyű szám van a tízes számrendszerben?
6. **E2**
Milyen n természetes szám esetén lesz az $\frac{5n+33}{n+3}$ kifejezés értéke egész szám?
7. **E2** Bizonyítsd be, hogy tetszőleges a, b pozitív egész számok esetén teljesülnek a következő állítások!

a) Ha $7 \mid (3a + 2b)$, akkor $7 \mid (9a + 20b)$.	b) Ha $17 \mid (5a + 2b)$, akkor $17 \mid (32a + 40b)$.
c) Ha $23 \mid (4a + 3b)$ és $23 \mid (7a + 2b)$, akkor $23 \mid (11a + 28b)$.	
8. **E2** Mi lehet az n természetes szám értéke, ha az $n^3 + n^2 - 30n$ -nek pontosan 8 darab pozitív osztója van?
9. **E1** Milyen a és b pozitív egész számok esetén igaz?

a) $(a; b) = 84$ és $[a; b] = 2520$	b) $a + b = 570$ és $(a; b) = 30$
c) $a + b = 270$ és $[a; b] = 1820$	
10. **E1** Végezd el az alábbi műveleteket!

a) $110101_2 - 1011_2 - 110_2$	b) $1032_4 + 2133_4 - 1021_4$
c) $1051_8 + 12021_4 - 1110_2$	
11. **E2** Milyen pozitív egész x értékek esetén igazak a következő egyenlőségek?

a) $111_x + 211_{2x} = 134_{2x+1}$	b) $11_x - 11_{x+2} = 310_{x-2}$
------------------------------------	----------------------------------
12. **E2** Melyik igaz, melyik hamis? Válaszod indokold!

a) Van olyan számrendszer, amelyben $1256 + 243 - 421 = 1100$.	b) 54 darab olyan pozitív egész szám van, amelyiknek hármasszámrendszerbeli alakja négyjegyű.
c) 2 olyan tízes számrendszerbeli szám van, amelynek ötös számrendszerbeli alakja $\overline{a0b}$ és hetes számrendszerbeli alakja $\overline{b0a}$.	d) Négy olyan számrendszer van, amelyben a tízes számrendszerbeli 1000 átírása során négyjegyű számot kapunk.
13. **E2** Melyik az a számrendszer, amelyikben a 3024-et 23-mal osztva hányadosul 121-et, maradékul 21-et kapunk?
14. **E2** (Emelt szintű érettségi, 2011)
Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestettük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockákra vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros.
Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata?
15. **E2** (Emelt szintű érettségi, 2017)

a) Ha $a \mid b$ igaz, akkor $a \mid b^2$ is teljesül (a és b pozitív egész számok). Fogalmazd meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsd meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszod indokold! ($a \mid b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.)	b) Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?
---	--



pozitív egész kitevőjű hatvány, hatványazonosságok



a hatványozás azonosságainak bizonyítása

BEVEZETŐ

Hányszor tudsz félbehajtani egy papírlapot?

Körülbelül mekkora lesz a vastagsága a hajtogatást követően, ha 1-szer, 2-szer, 3-szor, 10-szer, 15-ször, 20-szor hajtottad félbe, és az eredeti lap vastagsága 1 tized mm volt?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a vékony lap elég nagy területű (körülbelül egy kézilabdapálya méretű), és annyszor tudjuk félbehajtani, ahányszor csak szeretnénk.

A papír rétegeinek száma és a papír vastagsága minden összehajtás után duplázódik, vagyis n összehajtás után 2^n réteg keletkezik, és a vastagság az eredeti vastagságnak a 2^n -szerese lesz.

Így a 2 megfelelő hatványainak értéke megadja, hogy 1 összehajtás után 0,2 mm, 2 hajtás után 0,4 mm, 3 hajtás után 0,8 mm vastagságú réteg keletkezik.

A 10. összehajtás utáni magasság már meghaladja a 10 centimétert, 15 hajtást követően már egy „papírtorony” jön létre, aminek majdnem 328 cm a magassága. A 20. félbehajtást követően már 104,8576 méter lenne a „lap” vastagsága.

Megjegyzések:

1. A mítosz szerint egy átlagos papírlap legfeljebb 7-szer hajtható félbe.
2. Egy ausztrál-amerikai tudományos csoport (a „Mítoszrombolók”) tagjainak sikerült egy futballpálya méretű, nagyon vékony lapot 11-szer félbehajtania (az utolsó néhány hajtást követően már kénytelenek voltak úthenger segítségét igénybe venni a papírfelület kiegyengetéséhez.)



KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik hatvány értéke a nagyobb?

a) $A = 2^3$ vagy $B = 3^2$

b) $A = 9^{15}$ vagy $B = 15^9$

c) $A = 111^{333}$ vagy $B = 333^{111}$

Megoldás:

Mindhárom esetben két olyan hatvány értékét kell összehasonlítani, ahol az A kisebb hatványalapot, ugyanakkor nagyobb hatványkitevőt tartalmaz, mint a B , ezért az összehasonlítás számolás vagy átalakítás nélkül nem tehető meg.

a) Egyszerű fejszámolással eldönthető a reláció, mivel $A = 2^3 = 8$, valamint $B = 3^2 = 9$, tehát $A < B$.

b) Ebben az esetben fejben vagy írásban számolással nagyon hosszú idő alatt jutnánk megoldásra.

I. megoldás: (számológéppel számolva)

Ellenőrizd számolással az alábbi megoldást!

$A = 9^{15} = 205\,891\,132\,094\,649$, valamint

$B = 15^9 = 38\,443\,359\,375$, tehát $A > B$.

II. megoldás: (a kifejezések átalakításával)

$$A = 9^{15} = (3^2)^{15} = 3^{30}, \text{ valamint}$$

$$B = 15^9 = (3 \cdot 5)^9 = 3^9 \cdot 5^9.$$

Két pozitív szám relációjának eldöntéséhez elég, ha megvizsgáljuk, hogy a hányadosuk kisebb vagy nagyobb 1-nél:

$$\frac{A}{B} = \frac{3^{30}}{3^9 \cdot 5^9} = \frac{3^{9+21}}{3^9 \cdot 5^9} = \frac{3^9 \cdot 3^{21}}{3^9 \cdot 5^9} = \frac{3^{21}}{5^9} = \frac{(3^7)^3}{(5^3)^3} = \left(\frac{3^7}{5^3}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{3^6 \cdot 3}{5^3}\right)^3 = \left(\frac{9^3 \cdot 3}{5^3}\right)^3 > 1, \text{ tehát } A > B.$$

ELMÉLET

1. A hatványozás azonosságai

($a; b \in \mathbb{R}; m; n \in \mathbb{Z}^+$, és $n < m$),

(ha a nevezőben szerepel, akkor $a; b \neq 0$)

c) Ebben az esetben nehezen boldogulnánk a hatványozósságok ismerete nélkül. A megoldást átalakítások segítségével végezzük.

Kövess nyomon a megoldás lépéseit, és fogalmazd meg az egyes lépésekben használt alapelveket, azonosságokat!

$$A = 111^{333} = 111^{111+222} = 111^{111} \cdot 111^{222}, \text{ valamint}$$

$$B = 333^{111} = (3 \cdot 111)^{111} = 3^{111} \cdot 111^{111}.$$

A két szám hányadosa:

$$\frac{A}{B} = \frac{111^{111} \cdot 111^{222}}{3^{111} \cdot 111^{111}} = \frac{111^{222}}{3^{111}}.$$

A számlálóban a hatványalap és a kitevő is nagyobb, mint a nevezőben, ezért a tört értéke nagyobb 1-nél.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

FELADATOK

1. E1 Végezd el az alábbi műveleteket!

($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

a) Az $\frac{a^5 \cdot (a^3)^7}{(a^2 \cdot a^4)^3}$ kifejezést add meg az a egyetlen hatványaként!

b) Az $\frac{a^8 \cdot (a \cdot b^4)^2}{(a^2 \cdot b^3)^4}$ kifejezést add meg egy törtkifejezés második hatványaként!

c) Az $\frac{(b^5)^3 \cdot (a^4 \cdot b)^5}{(a^3 \cdot b^2)^6 \cdot (a^4)^5} \cdot \left(\frac{a^{10}}{b^3}\right)^2$ kifejezést add meg $a \cdot b$ hatványaként!

2. E1 Számológép használata nélkül dönts el, hogy melyik szám a nagyobb!

a) $3^{10} \cdot (9^3)^4$ vagy $\frac{81^{10} \cdot (3^3)^5}{27^2}$;

b) $(3^5)^{(3^2)}$ vagy $(3^2)^{(3^3)}$;

c) $8^{10} + 2^{24}$ vagy $2^{15} + 4 \cdot 2^{13}$;

d) $\frac{1}{5^{18}} + \frac{1}{5^{19}}$ vagy $\frac{31}{5^{20}} - \frac{4}{5^{21}}$.

3. E1

a) Számológép használata nélkül igazold, hogy az alábbi, 3 darab kettes számjegy felhasználásával felírt számok között fennállnak a következő relációk!

$$2^2 < 222 < 22^2 < 2^{22}$$

b) Írd fel 3 darab ötös számjegy felhasználásával (az a) feladatrészen felírt számokhoz hasonlóan) a lehetséges számokat, és számológép használata nélkül állítsd azokat növekvő sorrendbe!

4. E2 Bizonyítsd be, hogy $\frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1} \geq \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$.

5. E2 Melyik az a négyjegyű szám, amelyik megegyezik számjegyei összegének negyedik hatványával?

6. E2

a) Mi az utolsó számjegye a $2021^{2022} + 2022^{2023} + 2023^{2024} + 2024^{2025} + 2025^{2026}$ számnak?

b) Mi az utolsó számjegye $n; k \in \mathbb{Z}^+$ esetén a $(10n+9)^{4k} + (10n+7)^{4k+1} + (10n+5)^{4k+2} + (10n+3)^{4k+3} + (10n)^{4k+4}$ számnak?

2. Példák hatványazonosságok bizonyítására pozitív egész kitevő esetén ($a; b \in \mathbb{R}, m; n \in \mathbb{Z}^+$)

Tétel: Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Bizonyítás: $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ darab tényező}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ darab tényező}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ darab tényező}} = a^{m+n}$

a hatványozás definíciója miatt a szorzás asszociatív tulajdonsága miatt a hatványozás definíciója miatt

Tétel: Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \text{ha } a \neq 0; n < m$$

Bizonyítás: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ darab tényező}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ darab tényező}}} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n \text{ darab tényező}}}{1} = a^{m-n}$

a hatványozás definíciója miatt a tört egyszerűsítése miatt a hatványozás definíciója miatt

Tétel: Szorzat hatványa egyenlő a tényezők hatványának szorzatával.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Bizonyítás: $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ darab tényező}} = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ darab tényező}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ darab tényező}} = a^n \cdot b^n$

a hatványozás definíciója miatt a szorzás asszociatív tulajdonsága miatt a szorzás kommutatív tulajdonsága miatt a hatványozás definíciója miatt

Ezzel beláttuk a tételt. Hasonló módon bizonyítható, hogy hányados hatványa egyenlő a számláló hatványának és a nevező hatványának hányadosával.

Tétel: Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Bizonyítás: $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{m \text{ darab tényező}} = \underbrace{a^{n+n+\dots+n}}_{m \text{ darab tag}} = a^{m \cdot n}$

a hatványozás definíciója miatt azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság miatt a szorzás definíciója miatt





nulla kitevőjű hatvány, negatív egész kitevőjű hatvány, racionális kitevőjű hatvány, a négyzetgyökvonás, a négyzetgyökvonás azonosságai, az n -edik gyök



a permanenciaelv, irracionális kitevőjű hatvány, n -edik gyökvonás azonosságai

BEVEZETŐ

Ha egy műveletet már definiáltunk egy számkörben, akkor a bővebb számkörre való kiterjesztését úgy kell végrehajtunk, hogy a szűkebb számkörben érvényes azonosságok a bővebb számkörben is érvényben maradjanak. Ez az elv a **permanenciaelv** (az állandóság elve). (Ezt az elvet alkalmaztuk korábban a szögfüggvények fogalmának kiterjesztése során.) A pozitív egész kitevőre értelmezett hatványozás fogalmát kiterjesztjük minden egész kitevőre, majd egész kitevőről racionális kitevőre, azt követően racionális kitevőről irracionális kitevőre, ezáltal minden valós kitevőre. A permanenciaelv értelmében a kiterjesztést úgy végezzük, hogy az új, bővebb számkörökben való értelmezések esetén a pozitív egész kitevőkre érvényes azonosságok továbbra is teljesüljenek.

KIDOLGOZOTT FELADAT

a) A $\frac{3^5}{3^5}$ hányados írható:

- ▶ ha erre az esetre is igazak a hatványazonosságok, akkor $\frac{3^5}{3^5} = 3^0$, valamint
- ▶ az egyszerűsítés elvégzése után $\frac{3^5}{3^5} = 1$ alakban.

Ha azt szeretnénk, hogy a hatványazonosságok érvényben maradjanak, akkor fenn kell állnia a $3^0 = 1$ egyenlőségnek.

b) A $\frac{2^4}{2^7}$ hányados írható:

- ▶ az egyszerűsítés elvégzése után $\frac{2^4}{2^7} = \frac{1}{2^3}$ alakban, valamint
- ▶ ha erre az esetre is igazak a hatványazonosságok, akkor $\frac{2^4}{2^7} = 2^{-3}$.

Ha azt szeretnénk, hogy a hatványazonosságok érvényben maradjanak, akkor fenn kell állnia a $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ egyenlőségnek, ami írható $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ alakban is.

c) Vegyük az $5^{\frac{2}{3}}$ hatvány harmadik hatványát!

Ekkor ha hatvány hatványára teljesül az azonosság, akkor $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^2$ egyenlőségnek teljesülnie kellene.

Ugyanakkor $\sqrt[3]{5^2}$ -nek a harmadik hatványa a köbgyök definíciója miatt: $(\sqrt[3]{5^2})^3 = 5^2$.

Ha azt szeretnénk, hogy a hatványazonosságok érvényben maradjanak, akkor fenn kell állnia a $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ egyenlőségnek.

ELMÉLET

A hatványozás fogalmának kiterjesztése

A hatványozás műveletének kiterjesztése (a permanenciaelv értelmében) úgy történik, hogy végig érvényben maradnak a hatványozás azonosságai.



1. Pozitív egész kitevőjű hatványok

Definíció: Az $a \in \mathbb{R}$ esetén $a^1 = a$.

Definíció: Ha $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ és $1 < n$, akkor a^n egy olyan n tényezős szorzat, amelynek minden tényezője a .

2. A hatványozás egész kitevőre

Definíció (nulladik hatvány): Az $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $a^0 = 1$.

Megjegyzés: A 0^0 nem értelmezett.

Definíció (negatív egész kitevőjű hatvány): Az $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén legyen $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

3. Racionális kitevőjű hatvány

Definíció: Az $a \in \mathbb{R}^+$ és $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ esetén $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

4. Irracionális kitevőjű hatvány

A hatványozás az irracionális kitevő esetére is kiterjeszthető. Ennek pontos definícióját a határérték-számítás módsze-reivel lehet megadni. Szemléletes képet alkothatunk róla a kétoldali közelítés módszerével.

Például: A 2^π hatvány értékét meghatározhatjuk úgy, hogy a π értékét közelítjük nála kisebb, illetve nála nagyobb racionális számokkal:

$$\begin{aligned} 3 &< \pi < 4 \\ 3,1 &< \pi < 3,2 \\ 3,14 &< \pi < 3,15 \\ &\dots \end{aligned}$$

A 2 alapú exponenciális függvény szigorú monoton növekvő racionális kitevők esetén, és ezt megköveteljük az irracionális kitevőkre vonatkozóan is.

$$\begin{aligned} 2^3 &< 2^\pi < 2^4 \\ 2^{3,1} &< 2^\pi < 2^{3,2} \\ 2^{3,14} &< 2^\pi < 2^{3,15} \\ &\dots \end{aligned}$$

A 2^π -re és más irracionális kitevőjű hatványokra a kétoldali közelítés alapján az előbbiek szerint kapunk egyértelmű, az azonosságokat teljesítő definíciót.

Ezzel a hatványozást tetszőleges pozitív valós alap esetén **kiterjesztettük tetszőleges valós kitevőre**.

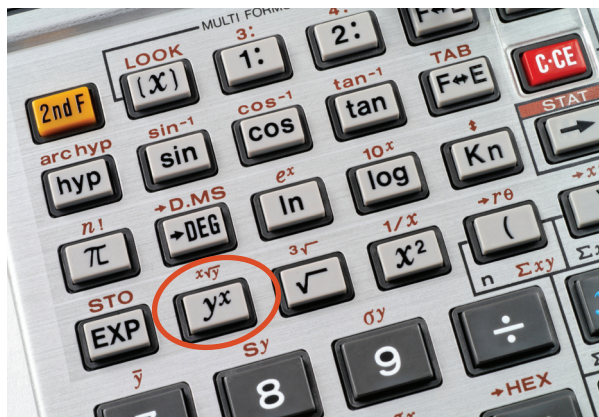
Belátható, hogy az előbbi értelmezések mindegyike megfelel annak az elvárásnak, hogy a korábban megfogalmazott (pozitív egész kitevőjű hatványokra vonatkozó) azonosságok érvényben maradjanak, tehát érvényesül a permanencia elve. A hatványazonosságok érvényesek bármilyen valós kitevő esetén, amennyiben az azokban szereplő hatványoknak értelme van.

A hatványozást ezt követően minden esetben pozitív valós alapra értelmezzük. Ha ezt nem így tennénk, akkor sok esetben ellentmondásra, illetve nem egyértelmű eredményre jutnánk különböző hatványok értékének meghatározásakor.

Például:

1. $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$; ugyanakkor $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$, tehát két különböző eredményre, így ellentmondásra vezet.

2. $\sqrt{-4}$: nincs értelme a valós számok halmazán; ugyanakkor $\sqrt{-4} = (-4)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{\frac{2}{4}} = ((-4)^2)^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$, ami ellentmond az eredeti értelmezéssel.



1. K2

a) Írd fel a 3 egyetlen hatványaként a $27^4 \cdot (81^{-1})^{-2,5}$ számot!

b) Írd fel az x egyetlen hatványaként az $\frac{1}{x^2} \cdot (x^{-2,6})^{-4}$ kifejezést, ahol $x \in \mathbb{R}^+$!

2. E1

a) Írd fel a 2 egyetlen hatványaként a $2^{-3} \cdot 0,5^{2,4} \cdot (8^{-1})^{-0,2} \cdot 0,25^3$ számot!

b) Írd fel az m egyetlen hatványaként az $m^{\frac{1}{10}} \cdot \left(\left(m \cdot m^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{5}}$ kifejezést, ahol $m \in \mathbb{R}^+$!

3. E2 Írd fel a p egyetlen hatványaként az alábbi kifejezéseket, ahol $p \in \mathbb{R}^+$!

a) $p^1 \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot \dots \cdot p^{99} \cdot p^{100}$

b) $\left(\left(\left(\left(p^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{98}{99}} \right)^{\frac{99}{100}} \right)^{\frac{100}{99}}$

4. E2 Melyik nagyobb? A feladat megoldása során ne használj számológépet!

a) $\frac{5^{-1} + 1}{2 - 5^{-2}} \cdot \frac{3^{-2} - 4}{3^{-1} + 1}$ vagy $\left(-\frac{13}{25} \right)^{-1}$

c) $(c^{0,3})^6 \cdot (c^2)^{0,1}$ vagy $c^{\frac{\pi}{3}}$, ahol $a \in \mathbb{R}^+$ és $c < 1$

b) $(\sqrt{5} + 2)^{-1}$ vagy $(\sqrt{5})^{-2}$

5. E1 Az n főkvantumszámú elektronpályán lévő elektron kötési energiáját az

$$E = -\frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \text{ összefüggés adja meg.}$$

Az összefüggésben szereplő fizikai állandók:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}; h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

a) Számítsd ki az atomban az elektron energiáját $n = 2$ esetén!

b) Ellenőrizd, hogy az adott mértékegységek esetén az energia joule-ban (J) adódik! A levezetés során használd fel, hogy $C = A \cdot s, J = V \cdot A \cdot s, J = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$!

ELMÉLET

5. A gyökvonás általánosítása

A négyzetgyökvonás mellett értelmeztük az $\sqrt[n]{a}$ kifejezést, ha n tetszőleges 1-nél nagyobb egész szám. A négyzetgyökvonás azonosságaihoz hasonlóan megfogalmazhatók a gyökvonás általános azonosságai.

Definíció: n -edik gyök páros n esetén ($a \in \mathbb{R}_0^+, k \in \mathbb{Z}^+; n = 2k$)

$\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a nemnegatív valós számot, melynek $2k$ -adik hatványa a , azaz $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}_0^+$ és $(\sqrt[n]{a})^{2k} = a$.

Tétel:

$$a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \text{ esetén } \sqrt[n]{a^{2k}} = |a|$$

Definíció: n -edik gyök páratlan n esetén ($a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+; n = 2k + 1$)

$\sqrt[n]{a}$ jelenti azt a valós számot, melynek $2k + 1$ -edik hatványa a , azaz $(\sqrt[n]{a})^{2k+1} = a$.

Az n -edik gyökvonást néhány fontos szempontból szét kell választanunk páros, illetve páratlan n esetén. Páros n esetén a nemnegatív számokra, páratlan n esetén minden valós számra értelmezhető. Páros n esetén az n -edik gyökvonás eredménye nemnegatív, míg páratlan n esetén bármely valós szám lehet.

Minden valós a szám esetén van n -edik gyöke az a^n hatványnak. Figyelni kell azonban arra, hogy $\sqrt[n]{a^n}$ páros n esetén $|a|$ -val, páratlan n esetén a -val egyenlő.

Tétel: $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ és $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

A gyökvonásra vonatkozó azonosságok

($a, b, k \in \mathbb{R}$ és $m, n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$; páros n vagy m esetén $a, b \in \mathbb{R}^+$)

Szorzat n -edik gyöke egyenlő a tényezők n -edik gyökeinek szorzatával.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Tört n -edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező n -edik gyökének hányadosával.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Hatvány n -edik gyöke egyenlő a hatványalap n -edik gyökének hatványával.	$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$
Egy szám m -edik gyökének n -edik gyöke egyenlő a valós szám $n \cdot m$ -edik gyökével.	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
Hatvány n -edik gyökének értéke nem változik, ha a gyökkitevőt és hatványkitevőt ugyanazzal a pozitív egész számmal szorozzuk.	$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}}$

Megjegyzés: A gyökvonás azonosságai bizonyíthatók a gyökvonás definíciójának, valamint a hatványazonosságok felhasználásával segítségével. (A bizonyítás leírása megtalálható a *Halmazok, logika* témakörben.)

FELADATOK

6. E2 Tedd ki a helyes relációjelet a két szám közé! A feladat megoldása során ne használj számológépet!

- a) $\frac{\sqrt{5^3} \cdot (125^2)^{-1}}{\sqrt[3]{5^6} \cdot (25^{-1})^3}$ ☐ $\frac{\sqrt{5}\sqrt{5}\sqrt{5}}{5}$
- b) $(\sqrt{3} - 1)^2$ ☐ $(2 + \sqrt[4]{12})(2 - \sqrt[4]{12})$
- c) $\left(2^{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$ ☐ $\sqrt{\sqrt{4}}$
- d) $(\sqrt{8+\sqrt{15}} - \sqrt{8-\sqrt{15}})^2$ ☐ $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$

7. E1 Írd fel a kifejezések legegyszerűbb alakját gyökvonás nélkül, egész kitevőjű hatványok segítségével!

- a) $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^3 \cdot c^9 \cdot d^{12}}$, ha $a \in \mathbb{R}_0^+$; $b \in \mathbb{R}_0^+$; $c \in \mathbb{R}$; $d \in \mathbb{R}^-$;
- b) $\sqrt[4]{81a^8 \cdot b^{12} \cdot c^4 \cdot d^{16}}$, ha $a \in \mathbb{R}_0^+$; $b \in \mathbb{R}_0^+$; $c \in \mathbb{R}$; $d \in \mathbb{R}^-$;
- c) $\sqrt[8]{\frac{a^{16} \cdot d^{24}}{256 \cdot b^{32} \cdot c^8}}$, ha $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^-$; $c \in \mathbb{R}^-$; $d \in \mathbb{R}_0^+$;
- d) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$, ha $x \in]0; 2[$.

8. E2 Írd fel az A kifejezést a B hatványaként! ($n \in \mathbb{N}$; $2 < n$)

$$A = \sqrt[n]{\sqrt[n-1]{\sqrt{\dots \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^{n+1}}}}}}} \quad \text{és} \quad B = \sqrt[n]{2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n}$$



a logaritmus fogalma, az exponenciális függvény



a logaritmusfüggvény, az inverz függvény

BEVEZETŐ

A természetben lejátszódó folyamatok, a fizikai és kémiai tulajdonságok jellemzése szempontjából **nélkülözhetetlen a logaritmus fogalma**. Lássunk erre néhány példát!

1. A földrengés erősségét a Richter-skála alapján is szokták jellemezni. A földrengés magnitúdóját úgy határozzák meg, hogy a földrengés epicentrumától 100 km-re lévő szabvány szeizmográf által rajzolt szeizmogramban megméri a műszer által jelzett legnagyobb kitérést mikrométerben (10^{-6} m-ben), és annak tízes alapú logaritmusát veszik. Ha például a műszer legnagyobb kitérése $1 \text{ cm} = 10^4$ mikrométer, akkor a földrengés a Richter-skála szerint $\lg 10^4 = 4$ -es erősségű. (A seismos szó görögül rázkódást, rengést jelent.) Ha a földrengés erősségének értéke 1-gyel növekszik, akkor az 10-szeres növekedést jelent a talajelmozdulás nagyságában, és több mint 30-szoros növekedést az energiefelszabadulás mértékében.

Általában: Ha a szabványos műszer mutatójának legnagyobb kitérése x mikrométer, akkor a földrengés erőssége a Richter-skálán $\lg x$ egy tizedesjegyre kerekített értéke.

2. A kozmetikumok világában, olykor még a „tudományoskodó” reklámokban is találkozunk a pH-érték kifejezéssel. A pH egy olyan szám, mely egy adott oldat savasságát vagy lúgosságát jellemzi. Híg vizes oldatokban a pH-érték az oxóniumion-koncentráció tízes alapú logaritmusának ellentettjével egyenlő, azaz $\text{pH} = -\lg x$, ahol x jelöli a koncentráció értékét (oxóniumion = H_3O^+). A tiszta víz pH-ja 7, a savas közegé 7-nél kisebb, a lúgosé 7-nél nagyobb.



FELADATOK

1. E1

- Mekkora annak a földrengésnek a Richter-skála szerinti erőssége, amelynél a szabvány szeizmográf legnagyobb kitérése 0,5 cm?
- Hányszor akkora a szabvány szeizmográf legnagyobb kitérése az 5-ös erejű földrengésnél, mint a 4-es erejűnél?
- Mekkora az oxóniumion-koncentráció abban a vizes oldatban, amelynek a pH-értéke 4-gyel egyenlő?

ELMÉLET

1. A logaritmus fogalma

Definíció (a alapú logaritmus b): Bármely $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ és $b \in \mathbb{R}^+$ esetén, az $\log_a b$ jelenti azt a valós hatványkitevőt, amelyre az a -t emelve b -t kapunk, azaz $a^{\log_a b} = b$.

Megjegyzés: Bármely $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén $\log_a a = 1$, valamint $\log_a 1 = 0$.

2. A logaritmusfüggvény

Definíció: Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor a pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \log_a x$ függvényt **a alapú logaritmusfüggvénynek** nevezzük.

Például: kettes alapú logaritmusfüggvény: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \log_2 x$.

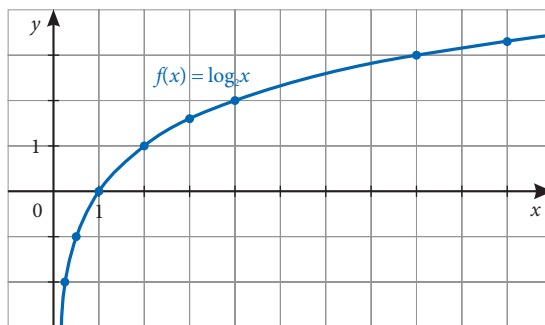
KIDOLGOZOTT FELADAT

- a) Ábrázold az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \log_2 x$ függvényt!
- b) Ábrázold az előbbivel közös koordináta-rendszerben a kettes alapú exponenciális függvényt!
Figyeld meg, milyen kapcsolat van a két grafikon között!

Megoldás:

- a) Táblázatba foglaltuk a függvény néhány helyettesítési értékét, majd ezek segítségével ábrázoltuk a függvény grafikonját.

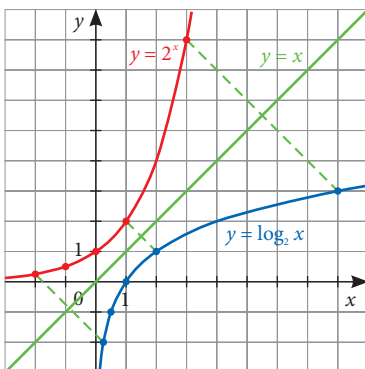
x	0,25	0,5	1	2	3	4	8	10
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	1,6	2	3	3,3



- b) A két grafikon egymás tükörképe az $y = x$ egyenletű egyenesre nézve.

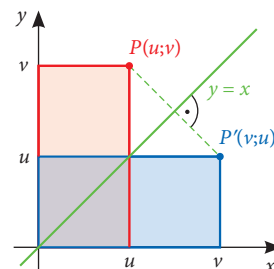
Először nézzünk néhány pontot táblázatba foglalva:

Pont az exponenciális függvény grafikonján	$(-2; 0,25)$	$(-1; 0,5)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(3; 8)$	$(p; 2^p)$
Pont a függvény grafikonján	$(0,25; -2)$	$(0,5; -1)$	$(1; 0)$	$(2; 1)$	$(8; 3)$	$(2^p; p)$



Ha a koordináta-rendszer egy tetszőleges $P(u; v)$ pontját tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor a két koordináta felcserélésével kapott $P'(v; u)$ ponthoz jutunk.

Láthatjuk, hogy a táblázat pontjaira igaz, hogy ha egy $P(u; v)$ pont rajta van az exponenciális függvény grafikonján, akkor a $P'(v; u)$ pont rajta van a logaritmusfüggvény grafikonján, és viszont. Ez az állítás a grafikonok minden pontjára igazolható, ezáltal bizonyítható, hogy a két grafikon egymás tükörképe.

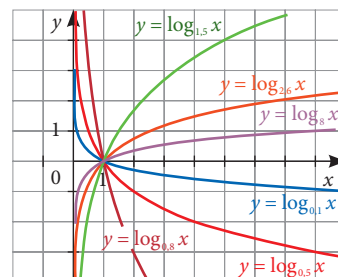


ELMÉLET

3. A logaritmusfüggvény jellemzése

Az $x \mapsto \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$) logaritmusfüggvény legfontosabb tulajdonságai:

- ▶ értékkészlete a valós számok halmaza; $\mathbb{R} = \mathbb{R}$
- ▶ szigorúan monoton függvény: ha $a > 1$, akkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ha $0 < a < 1$, akkor szigorúan monoton csökkenő;
- ▶ nincs szélsőértéke;
- ▶ zérushelye $x = 1$;
- ▶ az a alapú logaritmusfüggvény az a alapú exponenciális függvény inverze. (Az inverz függvény fogalmának pontos leírása a *Differenciálszámítás* témakörben található.)



A számológépek elterjedése előtt
logarléccel számolták a logaritmust

FELADATOK

- 2. E1** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket, majd állapítsd meg, milyen geometriai kapcsolat van az egyes függvények grafikonjai között!

$$f: x \in \mathbb{R}, f(x) = 3^x \quad g: x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \log_3 x$$

$$h: x \in \mathbb{R}^+, h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

- 3. E1** Állítsd párba azokat a hozzárendelési szabályokat, amelyek ugyanazt a függvényt adják meg (azonos értelmezési tartomány esetén)!

$$f: x \mapsto \frac{\log_2 x}{2} \quad g: x \mapsto 1 + \log_2 x$$

$$h: x \mapsto \log_2(2x) \quad k: x \mapsto \log_2 \sqrt{x}$$

- 4. E2** Számológép használata nélkül határozd meg a kifejezések pontos értékét!

a) $\log_3 \log_3 \sqrt[3]{3}$ **e)** $\log_8 \log_4 \log_{0,5} 0,25$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$

c) $\log_2 \cos \frac{\pi}{3} + \log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \log_4 \cos \frac{\pi}{4}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{4} - \log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \log_{\frac{1}{4}} \sin \frac{\pi}{6}$

- 5. E2** Határozd meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\log_5(12 - 3x^2)$ **d)** $\log_{x+3}(27 - x^3)$

b) $\log_2 \frac{-5}{8x-7}$ **e)** $\lg \frac{x^2 + 5x}{x-2}$

c) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 - 2x - 24}$

- 6. E2** Számológép használata nélkül határozd meg a kifejezések pontos értékét!

a) $\left(\frac{\sqrt{5}}{25}\right)^{\log_5 4}$

e) $9^{\log_{\frac{1}{3}} 5 - \log_{\frac{1}{81}} 16}$

b) $\left(\frac{49}{\sqrt{7}}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 16}$

f) $4^{\log_{\frac{1}{2}} 7 - \log_{\frac{1}{16}} 9}$

c) $16^{\log_2 3 - \log_{256} 81}$

g) $\log_4 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$

d) $9^{\log_3 2 - \log_{81} 16}$

- 7. E2*** A következő függvények értelmezési tartománya a valós számok legbővebb részhalmaza, amelyen a függvény értelmezhető.

$f(x) = \log_3 |x| \quad g(x) = |\log_{0,5} x|$

$h(x) = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x\right| \quad i(x) = 5^{|x|}$

- a)** Add meg az értelmezési tartományt!

- b)** Ábrázold a függvények grafikonját!

- c)** Határozd meg a függvények értékkészletét!



RÁADÁS

Adottak a következő számok: $a = 2^{21}$, $b = 2^{22}$ és $c = 2^{23}$.

- a)** Hányszorosa 2^{20} -nak az a , b és c számok

- ▶ számtani közepe, azaz $S = \frac{a+b+c}{3}$;
- ▶ mértani közepe, azaz $M = \sqrt[3]{abc}$;
- ▶ harmonikus közepe, azaz $H = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$;
- ▶ négyzetes közepe, azaz $N = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$?

- b)** Hányszorosa $\log_2 a$ -nak

- ▶ $\log_2 b$;
- ▶ $\log_a 2$;
- ▶ $\log_2 bc$;
- ▶ $\log_2 \frac{c}{b}$?



a hatványozás azonosságai, a logaritmus fogalma



a logaritmus azonosságai, a logaritmus azonosságainak bizonyítása

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy bizonyos algafaj telepének felülete évente megkétszereződik, ha komolyabb környezeti hatások nem érik. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket!

Hány év múlva nő a telep az eredeti méret

- a) ötszörösére; c) ötvenszeresére;
b) tízszeresére; d) százhuszonötszörösére?

Megoldás:

A telep méretét a $T(x) = T_0 \cdot 2^x$ összefüggéssel adhatjuk meg, ahol x az eltelt évek száma, és T_0 az eredeti méret.

- a) Arra vagyunk kíváncsiak, hogy a 2^x szorzótényező mikor jelent ötszörös növekedést. Tehát meg kell oldanunk a $2^x = 5$ egyenletet. Felírhatjuk logaritmus segítségével is a megoldást: $x = \log_2 5 \approx 2,32$. Tehát kb. 2,32 évnek kell eltelnie.
- b) Ezúttal a $2^x = 10$ egyenletet kell megoldanunk. A logaritmus segítségével kifejezhető ismét x értéke:

$$n = \log_2 10 = \frac{\lg 10}{\lg 2} \approx 3,32.$$

- c) Megoldhatjuk a $2^x = 50$ egyenletet is, de az előző két feladat megoldásának ismeretében másként is megválaszolhatjuk a kérdést. Hiszen tudjuk, hogy közelítőleg 2,32 év elteltével megötszörösödik az algatelep felülete, és közelítőleg 3,32 év elteltével pedig megtízszereződik. Ha tehát 2,32 évet várunk, majd ezután még 3,32 évet, akkor a megötszörösödött felület tízszeresre növekedve összességében ötvenszeres méretet ér el. Ez alapján:

$$\log_2 5 + \log_2 10 = \log_2 50.$$

- d) Ezúttal a $2^x = 125$ egyenletet kellene megoldanunk. Vegyük észre, hogy $125 = 5^3$, tehát háromszor kell eltelnie a megötszörösödéshez szükséges időnek, vagyis a közelítőleg 2,32 évnek. Eszerint körülbelül 6,96 év elteltével nő a felület mérete a kezdeti méret 125-szörösére. Ezek alapján:

$$\log_2 5^3 = 3 \cdot \log_2 5.$$

ELMÉLET

A logaritmus azonosságai ($a, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $x, y \in \mathbb{R}^+$; $k \in \mathbb{R}$)

Például:

Szorzat logaritmus a egyenlő a tényezők logaritmusainak összegével.	$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_3 (27 \cdot 81) = \log_3 27 + \log_3 81 = 3 + 4 = 7$ $\log_4 \frac{1}{3} + \log_4 0,75 = \log_4 \frac{1}{3} \cdot 0,75 = \log_4 \frac{1}{4} = -1$
Hányados logaritmus a egyenlő az osztandó és az osztó logaritmusának különbségével.	$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{125} = \log_5 \sqrt[3]{5} - \log_5 125 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{20}{3}$ $\log_2 1,4 - \log_2 22,4 = \log_2 \left(\frac{1,4}{22,4} \right) = \log_2 (0,0625) = -4$
Hatvány logaritmus a egyenlő a hatványkitevő és a hatványalap logaritmusának a szorzatával.	$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$	$\log_3 27^{16} = 16 \cdot \log_3 27 = 16 \cdot 3 = 48$
Áttérés más alapú logaritmusra	$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$	$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ $\frac{\log_3 7}{\log_3 4} = \log_4 7$

Megjegyzések:

1. Az azonosságok nem pusztán formai összefüggések. Minden esetben figyelni kell a kifejezések értelmezésére.

Például: $\log_2 (-5)^6 \neq 6 \cdot \log_2 (-5)$, mert a jobb oldalon álló kifejezés nem értelmezett a valós számok halmazán. Az azonosság használata ilyen esetben helyesen a $(-5)^6 = 5^6$ egyenlőség miatt: $\log_2 (-5)^6 = \log_2 5^6 = 6 \cdot \log_2 5$.

2. A logaritmusazonosságok bizonyíthatók a hatványazonosságok és a logaritmus definíciójának felhasználásával.

Például:

Állítás: $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$, ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $x \in \mathbb{R}^+$; $y \in \mathbb{R}^+$.

Bizonyítás:

A logaritmus definíciója szerint:

$$a^{\log_a x} = x, \quad a^{\log_a y} = y, \quad a^{\log_a (x \cdot y)} = x \cdot y.$$

Az azonos alapú hatványok szorzására érvényes hatványazonosság felhasználásával:

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Az előbbiek alapján:

$$x \cdot y = a^{\log_a (x \cdot y)}, \text{ valamint } x \cdot y = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Az egyenlőségek bal oldalainak egyenlősége miatt fennáll a jobb oldalak egyenlősége, ezért:

$$a^{\log_a (x \cdot y)} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Az a alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y. \text{ Ezzel beláttuk a tételt.}$$

FELADATOK

A feladatok megoldása során ne használj számológépet!

1. E1 Melyik szám 5-ös alapú logaritmusa a

- a) $4 \cdot \log_5 2$; c) $6 \cdot \log_5 12 - \log_5 12^4$;
b) $3 \cdot \log_5 \frac{4}{7}$; d) $\frac{2}{3} \cdot \log_5 8 - 3 \cdot \log_9 1$?

2. E1 Számítsd ki az alábbi kifejezések pontos értékét!

- a) $\lg \sqrt{44} - \lg 11 + 100^{\lg 3} - \lg 5 - \lg 200 + \lg \sqrt{275}$
b) $5^{\log_5 2 - \log_{25} 16 + 2 \log_{\frac{1}{5}} 3}$
c) $\log_7 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \log_6 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \log_5 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \log_4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot$
 $\cdot \log_3 \sin \frac{\pi}{3}$

3. E1 Döntsd el, melyik nagyobb!

- a) $\log_3 18$ vagy $\log_5 100$ d) $\frac{\log_5 3}{\log_5 2}$ vagy $\frac{\log_7 4}{\log_7 5}$
b) $\log_4 12$ vagy $\log_6 30$ e) $\frac{1}{\log_2 6}$ vagy $\frac{\log_5 3}{\log_5 6}$
c) $7^{\lg 6}$ vagy $6^{\lg 7}$

4. E2 Mennyi az összegek pontos értéke?

- a) $\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \lg \frac{4}{5} + \dots + \lg \frac{98}{99} + \lg \frac{99}{100}$
b) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ esetén: $\log_{n!} 2 + \log_{n!} 3 + \log_{n!} 4 +$
 $+ \dots + \log_{n!} (n-1) + \log_{n!} n$

5. E1 Adott $p = \log_6 3$, valamint $q = \log_6 2$. Fejezd ki p és q segítségével az alábbi számokat!

$$\begin{aligned} A &= \log_6 12 & C &= \log_6 \sqrt[5]{48} & E &= \log_{\frac{1}{6}} 2 \\ B &= \log_6 \frac{8}{9} & D &= \log_2 6 & F &= \log_3 2 \end{aligned}$$

6. E2

- a) Mennyi a $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ szorzat értéke?
b) Igazold a következő egyenlőséget!
 $\log_4 7 + \log_4 3 = \log_5 21 \cdot \log_4 5$
c) Tudjuk, hogy $\log_5 (xy) + \log_5 (yz) + \log_5 (xz) = 100$, ahol $x; y; z \in \mathbb{R}^+$. Határozd meg az $\log_5 (xyz)$, a $\log_{25} (xyz)$, valamint a $\log_{0,2} (xyz)$ kifejezések pontos értékét!



exponenciális folyamatok, exponenciális egyenlet



összetettebb exponenciális egyenletek, exponenciális egyenlőtlenség és egyenletrendszer

BEVEZETŐ

A Newton-féle lehűlési törvény

1701-ben Isaac Newton fogalmazta meg először a hőátadás folyamatát. Lejegyezte, hogy minél nagyobb a test és környezete hőmérséklete közötti eltérés, annál gyorsabb a lehűlés. Ennek a felismerésnek a nyomán született meg a Newton-féle lehűlési törvény.

Az állandó $T_{\text{környezet}}$ hőmérsékletű környezetben lévő, kezdetben T_0 hőmérsékletű anyag T hőmérséklete t óra elteltével az alábbi összefüggés szerint alakul:

$$T = T_{\text{környezet}} + (T_0 - T_{\text{környezet}}) \cdot e^{-Kt},$$

ahol $e \approx 2,718$ (Euler-féle szám), K az úgynevezett hőátadási vagy lehűlési tényező, amely függ a test hőkapacitásától és felületének nagyságától, mértékegysége $\frac{1}{\text{óra}}$. (A hőmérsékletek $^{\circ}\text{C}$ -ban értendők.)

Mennyi idő alatt hűl le a 24°C hőmérsékletű szobában a 100°C hőmérsékletű leves 60°C -ra, ha tudjuk, hogy $K = 5 \frac{1}{\text{óra}}$?

A lehűlési törvényben szereplő mennyiségek mindegyike adott, a hatványkitevőben lévő t ismeretlen meghatározása a célunk.

Az adatok behelyettesítésével $60 = 24 + (100 - 24) \cdot e^{-5t}$ adódik. $\blacktriangleright 0,4737 = e^{-5t}$. A logaritmus definíciója szerint $\ln 0,4737 = -5t$, amelyből $t = 0,1494$ (óra). A leves tehát 0,1494 óra, vagyis közel 9 perc alatt hűl le 100°C -ról 60°C -ra.

Megjegyzés:

Mivel a feladatban az exponenciális kifejezés alapján az Euler-féle e szám szerepelt, ezért az ismeretlen meghatározásához az e alapú logaritmus (természetes logaritmus, logaritmus naturalis, jelölése: $\ln$) definícióját használtuk.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a valós számok halmazán az exponenciális egyenlőtlenséget és egyenleteket!

a) $5 \cdot 8^{2x-3} < 320$

b) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

c) $3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{x+1} - 75 \cdot 5^{x-2} = 2$

Megoldás:

a) Mindkét oldalt 5-tel elosztva: $8^{2x-3} < 64$.

A 64 a 8-nak a 2. hatványa, tehát $8^{2x-3} < 8^2$.

A 8-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért a hatvány értéke akkor és csak akkor kisebb, ha a kitevő kisebb. $2x - 3 < 2$, amiből $x < \frac{5}{2}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty; 2,5[$.

b) Ez egy másodfokú egyenletre vezető exponenciális egyenlet. Észrevehetjük, hogy $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$. Ha bevezetjük az $a = 3^x$ új ismeretlent, akkor az $a^2 - 7a - 18 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai:

$$a_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}, \text{ ebből } a_1 = 9, a_2 = -2.$$

Tudjuk, hogy a 3^x kifejezés értéke csak pozitív lehet, ezért $0 < a$. Így az $a = 9$ megoldáshoz vezet, míg az $a = -2$ nem ad megoldást.

$a = 9 = 3^x$, amiből $x = 2$ az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása: $x = 2$. Ellenőrizzük a megoldás helyességét:

$$9^2 - 7 \cdot 3^2 - 18 = 81 - 63 - 18 = 0.$$

- c) Az 5 alapú hatványok kitevője rendre x , $x + 1$ és $x - 2$. Az azonos alapú hatványok szorzására, osztására vonatkozó azonosságok között fordult elő, hogy a kitevőben összeg, illetve különbség állt, tehát ezt a kapcsolatot használjuk most:

$$5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1 = 5 \cdot 5^x;$$

$$5^{x-2} = 5^x : 5^2 = \frac{1}{25} \cdot 5^x.$$

Ezért a $3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{x+1} - 75 \cdot 5^{x-2} = 2$ egyenlet így alakítható át:

$$3 \cdot 5^x + 2 \cdot 5 \cdot 5^x - 75 \cdot \frac{1}{25} \cdot 5^x = 2,$$

$$3 \cdot 5^x + 10 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x = 2.$$

A bal oldalon most már elvégezhető az összeadás és a kivonás: $10 \cdot 5^x = 2$, ami írható $5^x = \frac{1}{5} = 5^{-1}$ alakban.

Ebből (az 5-ös alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x = -1$ adódik.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy a -1 valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

FELADATOK

1. E1 Oldd meg az alábbi exponenciális egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5 \cdot 3^x + 8 \cdot 3^x = 117$

b) $2,8 \cdot 5^{x^2-7} = 70$

c) $3^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 9^{3x} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{81}$

2. E1 1975-ben Gordon E. Moore – egy nemzetközi informatikai vállalat egyik alapítója – megállapította azt a tapasztalati törvényt, hogy egy processzorban található tranzisztorok száma (ami használható a számítási teljesítmény durva mérésére)

kétévente megduplázódik. Ezt a változást az $n = n_0 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ képlettel írta fel, ahol $n_0 = 2000$ a processzor tranzisztorainak számát jelöli az 1971-es állapot szerint, valamint n a processzor tranzisztorainak számát azt követően t évvel.

Számítsd ki, hogy a felírt összefüggés alapján melyik évben lehetett 256 000, valamint $4,6 \cdot 10^7$ a tranzisztorok száma!

Megjegyzés: A törvény nem örök érvényű, mert a tranzisztorok mérete hamarosan atomi méretekig csökken, és ez határt szab a technológiai megvalósításnak.

3. E1 Milyen egész számok teszik igazzá az alábbi egyenleteket?

a) $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} = \frac{16}{3}$

b) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+3} + 2^{x+5} = -1,25$

c) $4^x + 16 = 17 \cdot 2^x$

4. E1 A Newton-féle lehűlési törvény segítségével számítsd ki, hogy mennyi idő alatt hűl le a 20°C hőmérsékletű szobában a 160°C hőmérsékletű rétes 50°C -ra, ha tudjuk, hogy $K = 0,4 \frac{1}{\text{óra}}$.

A lehűlési törvény: $T = T_{\text{környezet}} + (T_0 - T_{\text{környezet}}) \cdot e^{-Kt}$, ahol $T_{\text{környezet}}$ a környezet hőmérséklete, T_0 a lehűlő anyag kezdeti hőmérséklete, T pedig a lehűlt anyag hőmérséklete t (óra) idő elteltével, valamint K a hőátadási tényező.



5. E1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3^{x+2} + 3^x > 270$

b) $0,5^{5x-1} > 2$

c) $4^{2x+1} \leq 2^{3x-1}$

6. E1 Oldd meg az egyenletrendszereket a valós számok halmazán! (Új ismeretlenek bevezetése segíthet a megoldásban.)

a) $\begin{cases} 2^x - 3 \cdot 5^y = 1 \\ 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 \cdot 4^x - 12 \cdot 3^y = -4 \\ 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 3^y = 246 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0,5^x - 6 \cdot 0,2^y = -14 \\ 0,5^x + 3 \cdot 0,2^y = 31 \end{cases}$



mérlegelv, másodfokú egyenlet



logaritmust tartalmazó egyenletek

FELADATOK

1. E1 Alkalmazd a logaritmus azonosságait! Alakítsd a kifejezéseket egyetlen logaritmust tartalmazó kifejezéssé!

a) $3 \cdot \log_2 5 + 0,5 \cdot \log_2 3 - \frac{2}{3} \log_2 6$

c) $\log_4 6 + 1$

b) $2 \cdot \lg a + 3 \cdot \lg b - 0,5 \cdot \lg c \quad (a, b, c > 0)$

d) $\log_4 10 + \log_2 5$

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg az alábbi, logaritmust tartalmazó egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x-2) = 2 - \lg 5$

c) $2 \lg(x+1) - \lg x^2 = \lg 1,44$

b) $\lg(x-2) - \lg x = 2$

Megoldás:

A megoldás első lépéseként határozzuk meg az egyenletben szereplő kifejezések értelmezési tartományát!

a) A $\lg(x-2)$ kifejezés értelmezési tartománya miatt $0 < x-2$, ezért $2 < x$.A jobb oldalon a 2 helyett írhatunk $\lg 100$ -at:

$$\lg(x-2) = \lg 100 - \lg 5.$$

A logaritmus azonosságai miatt ez így alakítható tovább:

$$\lg(x-2) = \lg \frac{100}{5}, \text{ ebből } \lg(x-2) = \lg 20.$$

A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton, ezért $x-2 = 20$, vagyis $x = 22$.Igaz, hogy $22 \in]2; +\infty[$, és az átalakítások az értelmezési tartományban ekvivalensek voltak. Az egyenlet egyetlen megoldása tehát a 22.Az ekvivalencia vizsgálata helyett behelyettesítéssel is igazolhatjuk, hogy a 22 gyöke az egyenletünknek: $\lg(22-2) = 2 - \lg 5$ igaz, mert a bal oldal értéke $\lg 20$, a jobb oldalé pedig szintén ennyi.**b)** A logaritmus értelmezése miatt egyrészt $x > 2$, másrészt $x > 0$ szükséges, tehát az egyenlet értelmezési tartománya $]2; +\infty[$.Ezen a halmazon – felhasználva, hogy a 2 helyett ismét $\lg 100$ -at írhatunk – az egyenlet így is alakítható:

$$\lg \frac{x-2}{x} = \lg 100.$$

A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\frac{x-2}{x} = 100$, vagyis $x = -\frac{2}{99}$ adódik.A $\left(-\frac{2}{99}\right)$ nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát nem megoldása az egyenletnek.**c)** Csak a pozitív számoknak van logaritmusuk, ezért kell, hogy az $(x+1)$ is és az x^2 is pozitív legyen, vagyis egyrészt $x > -1$, másrészt $x \neq 0$. Ezért az egyenlet értelmezési tartománya: $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$.Kezdhethük úgy is az egyenlet megoldását, hogy mindkét oldalhoz hozzáadjuk a $\lg x^2$ -et:

$$2 \lg(x+1) = \lg 1,44 + \lg x^2.$$

A hatvány és a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság szerint ez azt jelenti, hogy

$$\lg(x+1)^2 = \lg(1,44x^2).$$

A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $(x+1)^2 = 1,44x^2$.A négyzetre emelést elvégezve, majd az egyenletet nullára rendezve: $0,44x^2 - 2x - 1 = 0$.

A másodfokú egyenlet megoldóképletével két gyököt

$$\text{kapunk: } x_1 = -\frac{5}{11} \text{ és } x_2 = 5.$$

Mindkét szám eleme az értelmezési tartománynak. Mivel az értelmezési tartományon az átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért mindkét szám megoldása az eredeti egyenletnek.

(Az utolsó mondat helyett természetesen a két szám behelyettesítésével is igazolhatjuk, hogy mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.)

- 2.** Az űrhajózás alapkövének tartott Ciolkovszkij-féle „rakétaegyenlet” matematikai kapcsolatot ír le a rakéta tömegének üzemanyag-égetéssel járó változása, a kiáramló gázok sebessége, valamint a rakéta végsebessége között:

$$v_t = v_g \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_t} \right), \text{ ahol}$$

v_t : a rakéta sebessége t időpillanatban $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ -ban,

v_g : a rakétát elhagyó gáz sugar sebessége a rakétához képest (általában: $4,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$),

m_0 : a rakéta induló tömege,

m_t : a rakéta tömege az indulástól számított t idő múlva.

A tömegének hány százalékát veszítette el a rakéta addig a pillanatig, mikorra a sebessége $8000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ lett?

Megoldás:

A $v_t = 8000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ismeretében határozzuk meg az $\frac{m_t}{m_0}$

hányados értékét. Mivel $v_t = 8000 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 8000 \frac{\text{km}}{3600 \text{ s}}$

$= 2,22 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, így az adatok behelyettesítésével $2,22 =$

$$= 4,5 \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_t} \right).$$

Egyenletrendezés után $0,49 = \ln \left(\frac{m_0}{m_t} \right)$. Az egyenlet a lo-

garitmus fogalmának felhasználásával $\ln(e^{0,49}) = \ln \left(\frac{m_0}{m_t} \right)$

alakban írható, amiből az e alapú logaritmusfüggvény szí-

gorú monotonitása miatt $e^{0,49} = \frac{m_0}{m_t}$, vagyis $\frac{m_0}{m_t} = 1,63$.

Az előbbi hányados reciproka, $\frac{m_t}{m_0} = 0,61$ alapján tudjuk,

hogy a rakéta tömege az indulástól számított t idő múlva a rakéta induló tömegének 61%-a. Tehát a rakéta a tömegének 39%-át veszítette el az adott pillanatig.

FELADATOK

- 2. E1** Melyik valós számot helyettesíthetjük az x helyére, hogy igaz legyen az állítás?

a) $\log_2(x + 10) = 1$ **c)** $\log_4(x + 10) = 0,5$

b) $\log_3(x + 10) = 2$ **d)** $\log_5(x + 10) = 0$

- 3. E1** Határozd meg a következő egyenletek értelmezési tartományát, majd oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x + 5) = \lg x$ **c)** $\log_2(x - 3)^2 = 16$

b) $2 \cdot \log_2(x - 3) = 16$

- 4. E1** Alakítsd egyetlen logaritmussá az egyenletek jobb oldalát is és bal oldalát is, majd oldd meg az alábbi logaritmos egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3 + \lg(5x - 8) = \lg(4000x)$

b) $\log_2(x - 6) + \log_2 x = 4$

c) $1 + \lg \frac{3x - 4}{100} = \lg \frac{3x - 4}{10}$

d) $4 + \lg \frac{3x - 4}{100} = \lg \frac{3x - 4}{10}$

- 5. E1** A hangosság szintjét úgy jellemzik, hogy megadják azt, hogy a vizsgált hangforrás intenzitása hány-szorosa a $10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ -nek. Ha a hangforrás intenzitása

x -szer akkora, mint a $10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, akkor a hangforrás

hangossága $\lg x$ bel (B), vagy inkább a szokásos módon megadva $10 \cdot \lg x$ decibel (dB) (W a watt mértékegység rövidítése.)

Hány decibel hangosságú az a hangforrás, amelynek intenzitása $1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$?

- 6. E1** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

b) $\log_2(1 + \log_3(2 + \log_4(3 + x))) = 1$

c) $\log_4(1 + \log_3(2 + \log_2(3 + x))) = 1$

- 7. E2** Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{3}$

b) $\log_4(\log_2 x) = \log_2(\log_4 x)$

FELADATOK

1. E1 Végezd el a számításokat a logaritmus azonosságainak felhasználásával számológép nélkül!

a) $10^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}$

b) $\sqrt{100^{2 + \frac{1}{2}\lg 16}}$

2. E1 Az ólom egyik izotópja radioaktív, azaz folyamatosan elbomlik, más atommá alakul. A bomlást az jellemzi, hogy azonos időtartamonként ugyanannyi részére csökken az ólom részecskeszám. A folyamatot a következő egyenlet írja le:

$$N(t) = 4,2 \cdot 10^{24} \cdot 0,97^t,$$

ahol az egyenletben az időt (t) percben mérjük, $N(t)$ -vel jelöljük, hogy a mérés kezdete után t perccel hány radioaktív ólomrészecske van még az anyagban.

- a) Mennyi ólomizotóp volt az anyagban a mérés kezdetekor?
- b) Mennyi idő elteltével lesz a radioaktív ólomizotóp részecskeszám egy mol, azaz $6 \cdot 10^{23}$?
- c) Mennyi a folyamatban a felezési idő?
3. E2 A decibel az akusztikában a „hangosság” vonatkozó H arányszám, amelynek mértéke a mért I hangnyomásszint (azaz hangerősség) és az emberi I_0 hallásküszöb (az a legkisebb hangnyomásszint, melyet az emberi fül érzékelni képes) hányadosának tízes alapú logaritmusából számolható a $H = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ képlet alapján.

- a) Hány decibel a hang erőssége, ha az éppen akkora, mint a hallásküszöb mértéke?
- b) Egy modern porszívó zaja körülbelül 600-szor olyan intenzitású, mint a hallásküszöb. Hány decibel hangerősséget eredményez a porszívó hangja?
- c) A hosszan tartó 90 decibel feletti hangok halláskárosodást okozhatnak. Érdemes-e fülvédőt használnia annak, aki olyan fűnyírót használ, aminek a hangintenzitása a hallásküszöbnek a $9 \cdot 10^8$ -szorosa?
- d) Hányszorosára változik a hang intenzitása, ha a zene hangereje 90 decibelel 100 decibele (a már kellemetlennek minősülő hangerőre) változik?

4. E1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $2^{x-1} = 16 \cdot \sqrt{8}$;

b) $4^{x+2} + 4^x - 2 \cdot 4^{x+1} = 18$.

5. E1 Add meg az egyenletek értelmezési tartományát, majd oldd meg az egyenleteket!

a) $\log_5 (x-1) = 3$

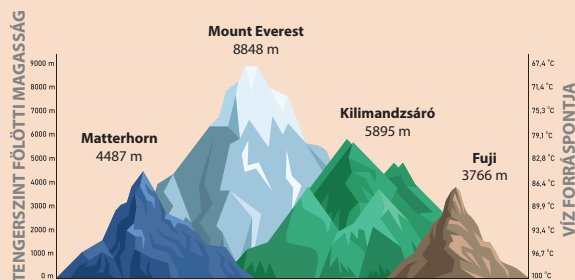
b) $\log_3 (10x-2) - 2 \cdot \log_3 (x+1) = \log_3 2$

6. E1 A légnyomás értéke a tengerszinten átlagosan $p_0 = 10^5$ Pa (pascal). Nagyobb magasságokban (a tengerszinttől h magasságban) a nyomás p értékét az úgynevezett barometrikus magasságformula adja meg (azonos $\frac{\rho_0 g h}{p_0}$ hőmérsékletű légoszlopot feltételezve): $p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$.

Az összefüggésben a ρ_0 a levegő sűrűsége a tengerszinten, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a gravitációs gyorsulás.

Számítsd ki, hogy milyen magasságban lesz a nyomás a tengerszinten mért nyomás értékének a fele, ha tudjuk, hogy az adott helyen $\rho_0 = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$!

Megjegyzés: Egyre nagyobb magasságban az egyre kisebb légnyomás miatt a víz alacsonyabb hőmérsékleten forr, például 8 km magasan kb. 70 °C a forráspontja.



7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk. Az egyiknél 500 000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450 000 forintot fektetünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik. Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?



logaritmust tartalmazó egyenlőtlenség

KIDOLGOZOTT FELADAT

Híg vizes oldatok savasságát vagy lúgosságát a pH-értékekkel szokás jellemezni, amely az oxóniumion-koncentráció tízes alapú logaritmusának ellentettjével egyenlő, azaz $\text{pH} = -\lg x$ (x jelöli a koncentráció értékét $\frac{\text{mól}}{\text{liter}}$ -ben).

Mekkora az oxóniumion-koncentráció abban az oldatban, amelynek pH-értéke legfeljebb 3,4?

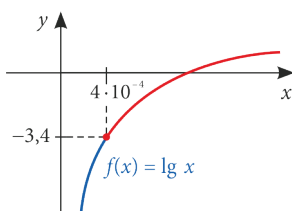
Megoldás:

Meg kell oldanunk a

$$-\lg x \leq 3,4$$

logaritmust tartalmazó egyenlőtlenséget.

Az egyenlet -1 -gyel való beszorzása miatt a relációjel megfordul: $\lg x \geq -3,4$.



A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt:

$$x \geq 10^{-3,4}, \\ x \geq 4 \cdot 10^{-4}.$$

Tehát legfeljebb 3,4 pH-értéknek megfelelő koncentráció legalább $4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mól}}{\text{liter}}$.



Megjegyzés:

Az exponenciális és logaritmust tartalmazó egyenlőtlenségek megoldása során a relációjel a függvények szigorú monoton növekvő tulajdonsága miatt változatlanul marad, ha a két oldalon 1-nél nagyobb hatványalapot, vagy 1-nél nagyobb alapú logaritmust hagyunk el (vagy hozunk be).

FELADATOK

1. E1 Oldd meg az egyenlőtlenségeket a logaritmusfüggvény tulajdonságainak felhasználásával!

a) $\log_2 x \geq 100$

b) $-1 < \log_{0,1} x < 1$

c) $\log_4 (3x + 2) > 1,5$

d) $\log_{0,25} (3x + 2) > -1,5$

2. E1 A tízes alapú logaritmus segítségével meghatározhatjuk, hogy egy szám a tízes számrendszerben hány jegyű. Tudjuk, hogy $\lg 100\,000 = 5$ és $\lg 1\,000\,000 = 6$. Ha egy n egész számról tudjuk, hogy hatjegyű, akkor $100\,000 \leq n < 1\,000\,000$. Ekkor a logaritmusfüggvény monotonitása miatt $5 \leq \lg n < 6$.

a) Hány jegyű az az n egész szám, melyre $\lg n \approx 7,81$?

b) Hány jegyű szám a tízes számrendszerben a 20^{80} hatvány?

3. E2 (Emelt szintű érettségi, 2015)

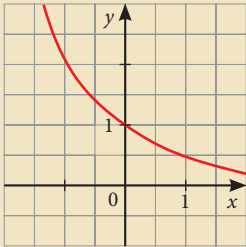
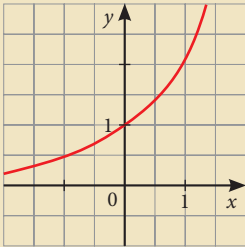
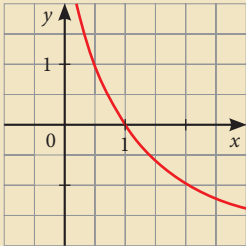
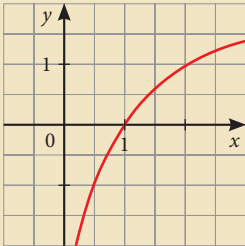
Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$ -os kamattal számol ($p > 0$). A havi állandó törlesztőrészletet $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki. A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt? A választ ezer forintra kerekítve add meg!

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?

(D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás)

D	Pozitív egész kitevőjű hatvány	$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$ és $1 < n$ esetén $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tényező}}$ $a \in \mathbb{R}$ esetén $a^1 = a$.
D	Nulladik hatvány	$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $a^0 = 1$. (0^0 nem értelmezett.)
D	Negatív egész kitevőjű hatvány	$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.
D	Racionális kitevőjű hatvány	$a \in \mathbb{R}^+$ és $p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ esetén $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
T	Hatványazonosságok	$a; b \in \mathbb{R}^+$ és $m; n \in \mathbb{R}$ esetén: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{ha } a \neq 0)$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{ha } b \neq 0)$
D	Négyzetgyök	Az $a \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $\sqrt{a}$ azt a nemnegatív valós számot jelenti, melynek második hatványa a , azaz $(\sqrt{a})^2 = a$.
T		$a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = a $
D	n -edik gyök (páros gyökkitevő)	$a \in \mathbb{R}_0^+$, és $n = 2k$ esetén, ahol $n; k \in \mathbb{Z}^+$: $(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$. Vagyis $a \in \mathbb{R}_0^+$, és $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\sqrt[2k]{a}$ jelenti azt a nemnegatív valós számot, melynek $2k$ -adik hatványa a .
T		$a \in \mathbb{R}$ és $n = 2k$ esetén, ahol $n; k \in \mathbb{Z}^+$: $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = a $.
D	n -edik gyök (páratlan gyökkitevő)	$a \in \mathbb{R}$ és $n = 2k + 1$ esetén, ahol $n; k \in \mathbb{Z}^+$: $(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$. Vagyis $a \in \mathbb{R}$, és $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\sqrt[2k+1]{a}$ jelenti azt a valós számot, melynek $2k + 1$ -edik hatványa a .
T		$a \in \mathbb{R}$ és $n = 2k + 1$ esetén, ahol $n; k \in \mathbb{Z}^+$: $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

T	A gyökvonás azonosságai	$a, b, k \in \mathbb{R}$ és $m, n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$; páros n esetén $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ (ha $k = 0$, akkor $a \neq 0$) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$ $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}}$
D	Logaritmus	Az $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ és $b \in \mathbb{R}^+$ esetén az $\log_a b$ jelenti azt a valós hatványkitevőt, amelyre az a -t emelve b -t kapunk, azaz $a^{\log_a b} = b$.
T	Logaritmusazonosságok	$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; x, y \in \mathbb{R}^+; k \in \mathbb{R}$ esetén $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
T	Áttérés más alapú logaritmusra	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; b \in \mathbb{R}^+; c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
	Exponenciális függvény	$f(x) = a^x$, ha $0 < a < 1$  $f(x) = a^x$, ha $1 < a$  Értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$ Értékkészlet: $R_f = \mathbb{R}^+$ Zérushely: nincs Szélsoérték: nincs Monotonitás: szigorúan monoton csökkenő $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = \mathbb{R}^+$ nincs nincs szigorúan monoton növekedő
	Logaritmusfüggvény	$f(x) = \log_a x$, ha $0 < a < 1$  $f(x) = \log_a x$, ha $1 < a$  Értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}^+$ Értékkészlet: $R_f = \mathbb{R}$ Zérushely: $x = 1$ Szélsoérték: nincs Monotonitás: szigorúan monoton csökkenő $D_f = \mathbb{R}^+$ $R_f = \mathbb{R}$ $x = 1$ nincs szigorúan monoton növekedő

1. E1 Számológép használata nélkül számítsd ki!

a) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 =$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 18 - \log_{\frac{1}{3}} 2 =$

c) $\log_6 120 - \log_6 20 =$

d) $\log_5 \operatorname{tg} 45^\circ =$

e) $\log_7 4 + \log_7 \sin 30^\circ + \log_7 \operatorname{tg} 30^\circ + \log_7 \sin 60^\circ =$

f) $3 \cdot \log_2 24 - \log_2 27 =$

2. E1 Tudjuk, hogy $\log_5 A = 1,3979$ és $\log_5 B = -0,2518$. Számológép használata nélkül írd fel, hogy 5-nek melyik

hatványa: $A \cdot B$; $\frac{B}{A}$; B^2 ; A ; $\frac{A^2}{B^3}$.

3. E1 Tudjuk, hogy $\lg A = 2,5$ és $\lg B = 0,4$. Számológép használata nélkül add meg a következő számokat!

$\lg(A \cdot B)$; $\lg \frac{A}{B}$; $\lg A^4$; $\lg B^{0,5}$; $\lg \frac{1}{B}$

4. E1 Számítsd ki a V értékét!

a) $\lg V = \lg 27 - \lg 3$ d) $\lg V = 3 \lg 5 + \lg 24 - 2 \lg 30$

b) $\lg V = 4 \lg 3 + \lg 5$ e) $\lg V = -2 \lg 5 + 3 \lg 2$

c) $\lg V = \frac{\lg 81}{2}$

5. E1 Végezd el a számításokat a logaritmus definíciójának felhasználásával!

a) $3^{\frac{1}{3} \log_3 343}$; $25^{\log_5 2}$; $81^{\log_3 5}$; $16^{\log_2 5}$; $0,25^{\log_4 5}$; $0,2^{\log_5 7}$

b) $10^{-\lg 3}$; $10^{2 - \lg 2,5}$; $10^{\lg 5 + \lg 4}$; $100^{-\lg 5}$; $0,1^{-\lg 3}$; $0,01^{\lg 3 + \lg 11}$

6. E1 Milyen x -ekre értelmezhetők az alábbi kifejezések?

a) $\log_8 \frac{1}{x-4}$ c) $\lg \frac{2x+3}{x+2}$

b) $\frac{\lg(x+1)}{x-1}$ d) $\log_{0,5} |x|$

7. E1 Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\lg(x-1,5) + 1 = \lg(14x+65) - 1$

b) $5x - 3 \cdot 5^{x+1} + 5^{x-1} = -345$

c) $(\sqrt{8})^{2x+1} = 4$

8. E1 Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_5(x+4) + \log_5 x = 1$

b) $\log_3(x-8) + \log_3 x = 2$

9. E1 Hány jegyű szám a tízes számrendszerben az 50^{100} ?

10. E1 Ábrázold közös koordináta-rendszerben a megadott két-két függvényt! A függvények értelmezési tartománya mindegyik esetben a pozitív valós számok halmaza.

a) $x \mapsto \log_2 x$ és $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$

b) $x \mapsto \log_3 x$ és $x \mapsto -\log_3 x$

c) $x \mapsto \log_2(2 \cdot x)$ és $x \mapsto \log_2 \frac{x}{2}$

d) $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$ és $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$

11. E1 Állítsd párba azokat a hozzárendelési szabályokat, amelyek ugyanazt a függvényt adják meg (azonos értelmezési tartomány esetén)!

a) $x \mapsto 3 + \log_2 2$ c) $x \mapsto -3 + \log_2 x$

b) $x \mapsto \log_2 \frac{x}{8}$ d) $x \mapsto \log(8x)$

12. E1 (Középszintű érettségi, 2010)

Az $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3 + \log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

a) $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3 \log_2 x$ c) $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_2 3x$

b) $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_2 8x$ d) $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_2 x^3$

13. E1 Oldd meg az egyenleteket és az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $3^{x+1} + 3^{x+2} = 36$ c) $\left(\frac{7}{8}\right)^{5x-4} < \frac{8}{7}$

b) $4^{3x-1} \cdot 2^{2x} = 2^{4x+1}$

14. E1 Add meg az egyenletek értelmezési tartományát, majd oldd meg az egyenleteket!

a) $\log_{\frac{1}{3}}(2-x) = -2$

b) $\log_7(3x+16) - \log_7(x+2) = 1$

15. E1 Oldd meg az egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $\lg(x-2) + \lg x = \lg 8$

b) $\lg 3x - \lg 2x = \lg 3 - \lg x$

c) $\log_3(x^2 - 2x - 34) = 0$

d) $\lg(x+6) - \frac{\lg(2x-3)}{2} = 2 - \lg 25$

e) $\lg \sqrt{x-30} + \frac{1}{2} \lg(x+30) = 1 + 2 \lg 2$

16. E1 (Emelt szintű érettségi, 2006)

Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$2^x = 3^{2x+1}$

- 17. E2** Az ember szervezetében az egyik legkönnyebben felhalmozódó radioaktív anyag a 90-es tömegszámú stronciumizotóp, melynek felezési ideje 26,5 év. Az atomok N számának pillanatnyi értéke t idő elteltével

az $N = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$ bomlási törvény szerint alakul, ahol N_0 az atomok számának kezdeti értéke, T a felezési idő (az az időtartam, amely alatt a radioaktív magok száma a felére csökken).

- a) Mennyi idő alatt csökken a pajzsmirigyben felhalmozódott Sr^{90} mennyisége az eredeti mennyiség ötödére?
- b) Hány stronciumatom marad a pajzsmirigybe került 10^7 darab atomból 20 év elteltével?

- 18. E1** (Középszintű érettségi, 2009)

Ha az eredetileg $I_0 \left(\frac{W}{m^2} \right)$ intenzitású lézersugár x mm ($x \geq 0$) mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0,1^{\frac{x}{6}} \left(\frac{W}{m^2} \right)$ lesz.

Ezt az anyagot $I_0 = 800 \left(\frac{W}{m^2} \right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

- a) Töltsd ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat kerekítve add meg!)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)$ $\left(\frac{W}{m^2} \right)$	800						

- b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15%-a? (A választ tízedezimalméterre kerekítve add meg!)

- 19. E2** (Emelt szintű érettségi, 2008)

Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazaán!

$$(x-2) \cdot \lg(x^2-8) = 0$$

- 20. E2** (Emelt szintű érettségi, 2008)

Mutasd meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke!

- 21. E2** (Emelt szintű érettségi, 2013)

Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}} \quad x \neq -4$$

- 22. E2** Milyen negatív egész számok teljesítik az alábbi egyenlőtlenséget?

$$3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x \geq 3$$

- 23. E1** Adott a $g(x) = \log_{0,5}(4x-5) + 3$ függvény a valós számok lehető legbővebb részalmazán értelmezve.

- a) Mennyi a függvény értéke $\frac{11}{8}$ -nál?
- b) Hol veszi fel a függvény az 1 értéket?
- c) Add meg azokat a valós x értékeket, amelyekre a függvény értéke negatív!

- 24. E2** Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$49^x \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} > \left(\frac{1}{343} \right)^{-2}$$

- 25. E1** William E. Hick angol pszichológus szerint, ha egy döntéshelyzetben azonnal kell választani n előre ismertetett és egyformán valószínű lehetőség közül, akkor a döntés meghozatalához szükséges reakcióidő (másodpercben) arányos az $(n+1)$ kettes alapú logaritmusával. Ezt az információt manapság például web-lapkészítők használják, amikor a weblapon elhelyezett linkek számáról kell dönteni.

Egy kísérlet eredményeit elemezve a kutatók azt találták, hogy a reakcióidő jó közelítéssel a $T(n) = 0,15 \cdot \log_2(n+1)$ összefüggés szerint függ a lehetőségek számától. Legfeljebb hány választási lehetőséget kínálunk fel, ha azt akarjuk, hogy a döntéshozáshoz a modell szerint szükséges idő ne legyen több, mint fél másodperc?

- 26. E1** (Emelt szintű érettségi, 2019)

Hány olyan egész szám van, amelyik megoldása az alábbi egyenlőtlenségnek?

$$\log_{0,5}(2x+100) \geq -8$$

- 27. E2** (Emelt szintű érettségi, 2011)

Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x}\}$ és

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > -2\}.$$

Add meg az $A \cup B$, az $A \cap B$, valamint a $B \setminus A$ halmazokat!

- 28. E1** Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

- a) $3^{2x+3} < 3^{5-2x}$ c) $1,4^{x^2-5x+6} \geq 1$
- b) $\left(\frac{3}{4} \right)^{3x-7} \leq \frac{4}{3}$ d) $9^x - 34 \cdot 3^x + 33 \leq 0$



vektor koordinátái, vektorműveletek koordinátákkal, vektor merőleges elforgatottja, vektor hossza



vektorösszeadás esetén a koordinátákra vonatkozó összefüggés igazolása, adott vektorral azonos irányú egységvektor koordinátái

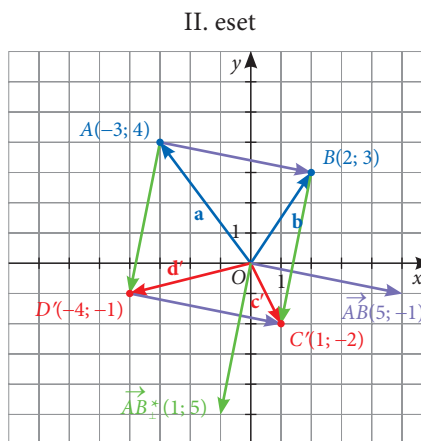
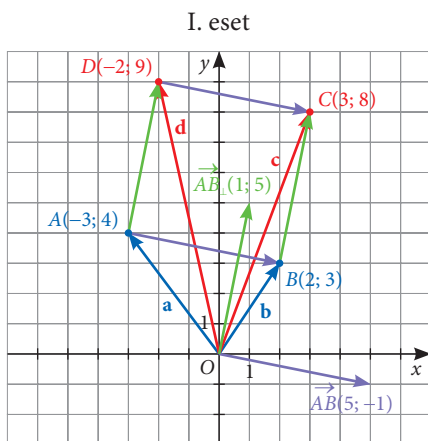
KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy sík területen kalandpark létesítéséhez négyzet alakú terület-részt szeretnének kijelölni. A szükséges infrastruktúra gazdaságos kialakításához (áramellátás, vízvezeték) a térképhez rögzített koordináta-rendszerben az $A(-3; 4)$ és a $B(2; 3)$ pontot veszik alapul a négyzet két szomszédos csúcsaként.

Határozd meg a négyzet alakú telek hiányzó csúcsainak (C és D pontok) koordinátáit!

Megoldás:

Két eset van.



I. eset

A négyzet egyik oldalvektora az A és B pontok koordinátáiból meghatározható $\overrightarrow{AB}(5; -1)$. Mivel a négyzet oldalai egyenlő hosszúak, és szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, így az $\overrightarrow{AB}$ vektor $+90^\circ$ -os elforgatásával a négyzet egy másik oldalvektorához jutunk, ami $\overrightarrow{AB}_\perp(1; 5)$. Ha ezt a vektort hozzáadjuk az A és B pontokba mutató $\mathbf{a}(-3; 4)$, valamint $\mathbf{b}(2; 3)$ helyvektorokhoz, akkor a négyzet C , illetve D csúcsába mutató $\mathbf{c}$, valamint $\mathbf{d}$ helyvektorokhoz jutunk:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \overrightarrow{AB}_\perp; \text{ illetve } \mathbf{d} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AB}_\perp, \text{ ezért } \mathbf{c}(3; 8), \text{ valamint } \mathbf{d}(-2; 9).$$

A négyzet alakú telek hiányzó csúcsai tehát $C(3; 8)$, illetve $D(-2; 9)$.

II. eset

Az előbbi esethez hasonlóan, de most az $\overrightarrow{AB}$ vektor -90° -os elforgatásával adódó $\overrightarrow{AB}_\perp^*(-1; -5)$ vektorral végezzük a műveleteket: $\mathbf{c}' = \mathbf{b} + \overrightarrow{AB}_\perp^*$; illetve $\mathbf{d}' = \mathbf{a} + \overrightarrow{AB}_\perp^*$, ezért $\mathbf{c}'(1; -2)$, valamint $\mathbf{d}'(-4; -1)$.

A négyzet alakú telek hiányzó csúcsai tehát $C'(1; -2)$, illetve $D'(-4; -1)$.

Műveletek vektorokkal

Ha $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$, c pedig valós szám, akkor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és $c \cdot \mathbf{a}$ vektorok koordinátái felírhatók $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok koordinátaival:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}(a_1 + b_1; a_2 + b_2), \text{ valamint}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b}(a_1 - b_1; a_2 - b_2) \text{ és}$$

$$c \cdot \mathbf{a}(c \cdot a_1; c \cdot a_2).$$

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektor merőleges elforgatottjai: -90° -os elforgatottja $\mathbf{a}_\perp(-a_2; a_1)$; $+90^\circ$ -os elforgatott $\mathbf{a}_\perp^*(a_2; -a_1)$.

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektor hossza: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

A nullvektortól különböző $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektorral azonos irányú egységvektor koordinátáit megkapjuk, ha az $\mathbf{a}$ vektor koordinátáit elosztjuk $\mathbf{a}$ vektor hosszával.

A koordinátaikkal adott vektorok közötti műveletekre kapott fenti összefüggések a tanult definíciók és tulajdonságok alapján igazolhatók.

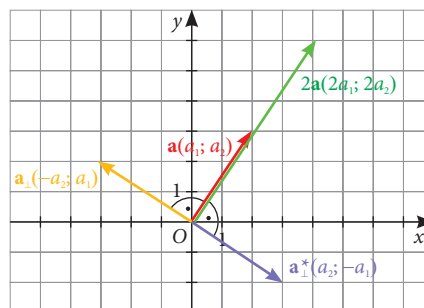
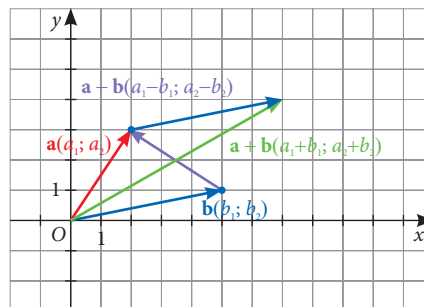
Például: Igazoljuk az összegvektor koordinátáira vonatkozó összefüggést!

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ jelölések egyenértékűek az $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$ bázisvektoros felírással.

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} = a_1 \mathbf{i} + b_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + b_2 \mathbf{j} = (a_1 + b_1) \mathbf{i} + (a_2 + b_2) \mathbf{j}$, vagyis az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor koordinátái rendre $a_1 + b_1$, valamint $a_2 + b_2$.

Tehát igazoltuk, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

A többi műveletre hasonlóan igazolható a koordinátákkal felírt összefüggés.



FELADATOK

- 1. K2** Adottak az $\mathbf{a}(-3; 9)$ és $\mathbf{b}(7; -10)$ vektorok.

Határozd meg a $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; $5\mathbf{a} + 0,5\mathbf{b}$; $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{5}\mathbf{b}$ vektorok koordinátáit!

- 2. K2** Adottak az $\mathbf{a}(2; -6)$ és $\mathbf{b}(-3; -8)$ vektorok.

Határozd meg a $4\mathbf{a} - \mathbf{b}$; $\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$; $-3\mathbf{a} - 0,1\mathbf{b}$; $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b}$ vektorok koordinátáit!

- 3. K2** Írd fel az alábbi vektorokkal azonos irányú egységvektor (egységhosszúságú vektor) koordinátáit!

$$\mathbf{a}(-3; 4) \quad \mathbf{b}(-5; -12) \quad \mathbf{c}(-7; 7) \quad \mathbf{d}(9; -40)$$

- 4. E1** Adott az $A(2; -7)$ és $B(-9; 1)$ pont.

Állíts az AB szakasz B végpontjában az eredeti szakasz hosszával azonos nagyságú, az AB szakaszra merőleges szakaszt. Határozd meg az így kapott szakasz másik végpontjának koordinátáit!

- 5. E1** Adott a síkon az $A(-3; 7)$ és $B(2; 5)$ pont.

- a)** Hosszabbítsd meg az AB szakaszt az A ponton túl az eredeti szakasz hosszának 4-szeresével. Mik lesznek az így kapott P pont koordinátái?
- b)** Hosszabbítsd meg az AB szakaszt a B ponton túl az eredeti szakasz hosszának ötödrészesével, és jelöld az így kapott végpontot Q -val. Mik a Q pont koordinátái?

- 6. E1** Egy négyzet két szemközti csúcsa $A(-3; 1)$ és $C(5; 7)$. Határozd meg a négyzet hiányzó csúcsainak koordinátáit!

- 7. E1** Egy téglalap egyik oldalának két végpontja $A(-6; 4)$ és $B(-9; 1)$. A másik oldal hossza kétszerese az előbbinek. Határozd meg a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit!

- 8. E2** Egy szabályos háromszög két csúcsa $A(-4; 5)$ és $B(2; -3)$. Határozd meg a háromszög harmadik csúcsának koordinátáit!



vektorműveletek, elsőfokú egyenletrendszer megoldása



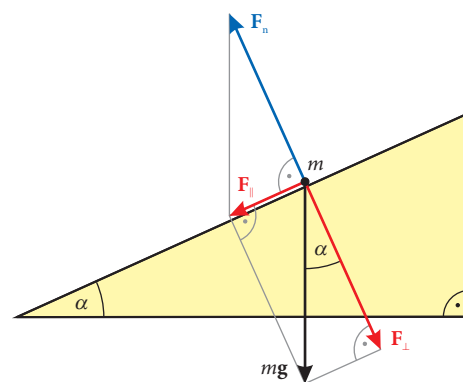
vektor felbontása összetevőkre

BEVEZETŐ

A lejtőre helyezett m tömegű, pontszerű testre hat az mg nehézségi erő. Ez az erővektor felbontható két olyan összetevőre, amelyek közül az egyik a lejtővel párhuzamos ($F_{\parallel}$), a másik pedig a lejtőre merőleges ($F_{\perp}$) vektor. (Az összetevők nagysága a test tömegének és a lejtő adatainak ismeretében meghatározható az ábrán lévő derékszögű háromszögek hasonlóságából felírt kapcsolatok, vagy szögfüggvények segítségével.)

A nehézségi erő lejtővel párhuzamos összetevője a testet a lejtővel párhuzamosan lefelé gyorsítja. A lejtőre merőlegesen a test nem gyorsul, mert a lejtő az ilyen irányú mozgást a lejtőre merőleges nyomóerővel (F_n) megakadályozza.

A fizikai törvényszerűségek (mozgásegyenletek; Newton-törvények) felhasználásával meghatározható a lejtőn mozgó test gyorsulása, valamint a sebessége a lejtő különböző pontjain.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Adott a sík $\mathbf{a}(1; -4)$, $\mathbf{b}(-3; 2)$ és $\mathbf{c}(-4; -14)$ vektora.

Írd fel a $\mathbf{c}$ vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként, vagyis az $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos vektorok összegeként!

Megoldás:

Keressük azokat a λ ; μ valós számokat, amelyekre $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.

Mivel $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, ezért $\underbrace{-4\mathbf{i} - 14\mathbf{j}}_{\mathbf{c}} = \lambda(\underbrace{\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}_{\mathbf{a}}) + \mu(\underbrace{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}_{\mathbf{b}})$,

ami átalakítás után $-4\mathbf{i} - 14\mathbf{j} = (\lambda - 3\mu)\mathbf{i} + (-4\lambda + 2\mu)\mathbf{j}$.

Az egyenlőség két oldalán álló vektorok egyenlők. Ez csak úgy teljesülhet, hogy az $\mathbf{i}$ vektor együtthatója az egyenlőség két oldalán egyenlő, és hasonlóan a $\mathbf{j}$ vektor együtthatója az egyenlőség két oldalán egyenlő. Vagyis a keresett λ ; μ számokat a

$$\begin{cases} -4 = \lambda - 3\mu \\ -14 = -4\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \text{egyenletrendszer megoldása adja.}$$

Megoldva $\lambda = 5$; $\mu = 3$ adódik.

Tehát $\mathbf{c} = 5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Megjegyzés: Azt tapasztaltuk, hogy a $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ egyenlet következményeként külön az első koordinátákkal és külön a második koordinátákkal is felírható egy-egy egyenlet:

$$\begin{cases} c_1 = \lambda a_1 - \mu b_1 \\ c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases} \quad \text{Ebből az egyenletrendszerből a vektorkoordináták ismeretében } \lambda \text{ és } \mu \text{ meghatározható.}$$



Egyértelmű vektorfelbontási tétel

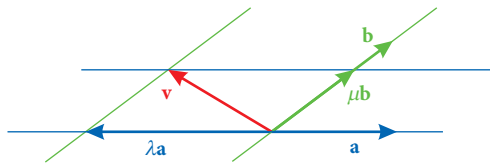
Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a síknak két nem párhuzamos vektora, melyek egyike sem nullvektor!

Ekkor a sík egy tetszőleges $\mathbf{c}$ vektora egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Vagyis $\mathbf{c}$ előáll az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skalárszorosainak (számszorosainak) összegeként (másképp: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként), és ez az előállítás egyértelmű.

Jelöléssel: $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$; $\mu \in \mathbb{R}$; $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Megjegyzés:

A fenti vektorfelbontásban az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat bázisvektoroknak, a λ és μ számokat pedig a $\mathbf{c}$ vektor ezen bázisvektorokra vonatkoztatott koordinátáinak nevezzük.



FELADATOK

1. E1 Írd fel a $\mathbf{c}(11; 10)$ vektort az $\mathbf{a}(3; 4)$ és $\mathbf{b}(1; -2)$ vektorokkal párhuzamos vektorok összegeként!

a) Töltsd ki a táblázatot, majd egészítsd ki a feladat megoldására vezető egyenletrendszert a pontok helyén a hiányzó számokkal!

	$\mathbf{c}$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$
Első koordináta	11		
Második koordináta	10		

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$$

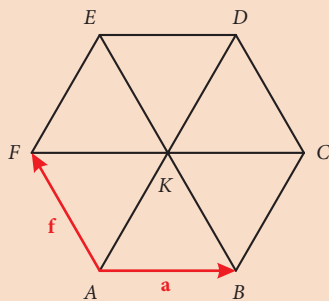
$$\begin{cases} 11 = \lambda \cdot \dots + \mu \cdot \dots \\ 10 = \lambda \cdot \dots + \mu \cdot \dots \end{cases}$$

b) Oldd meg az egyenletrendszert, és add meg a megoldást a megfelelő számok beírásával!

$$\mathbf{c} = \dots \cdot \mathbf{a} + \dots \cdot \mathbf{b}$$

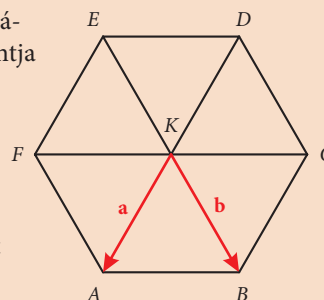
2. E1 Adottak a sík $\mathbf{a}(-2; 5)$, $\mathbf{b}(-1; -4)$ és $\mathbf{c}(-9; 2)$ vektorai. Írd fel a $\mathbf{c}$ vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos vektorok összegeként!

3. E1 Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben adott az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}(2; 0)$, $\overrightarrow{AF} = \mathbf{f}(-1; \sqrt{3})$, valamint jelölje K a szabályos hatszög középpontját.



- a) Írd fel a $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DB}$ vektorokat az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{f}$ lineáris kombinációjaként!
- b) Határozd meg az a) részben felírt vektorok koordinátáit!

4. E1 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja K , és adott $\overrightarrow{KA} = \mathbf{a}(1; -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{KB} = \mathbf{b}(-1; -\sqrt{3})$.



a) Írd fel a $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DB}$ vektorokat az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként!

b) Határozd meg az a) részben felírt vektorok koordinátáit!

5. E1 Egy AB szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}(-4; 5)$, illetve $\mathbf{b}(2; -3)$. A szakasz P pontjára fennáll, hogy $AP : PB = 2 : 3$, valamint a szakasz Q pontjára fennáll, hogy $AQ : QB = 3 : 7$.

a) Állítsd elő a P pontba mutató $\mathbf{p}$, valamint a Q pontba mutató $\mathbf{q}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként!

b) Határozd meg az a) részben felírt vektorok koordinátáit!

6. E2 Az $ABCD$ négyszög oldalvektorai $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}(4; 1)$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}(-3; 5)$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}(-7; 2)$. Fejezd ki a megadott vektorok segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort, majd add meg a vektor koordinátáit!

7. E2 Az $ABCD$ paralelogramma átlóvektorai $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}(8; -2)$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{f}(-6; 4)$. Fejezd ki a megadott vektorok segítségével az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ oldalvektorokat, majd add meg ezek koordinátáit!



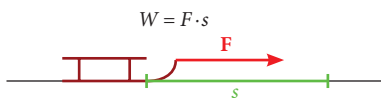
vektor hossza, egységvektor, nullvektor, vektorok hajlásszöge



skaláris szorzat, skaláris szorzás tulajdonságai, koszinusztétel egy bizonyítása

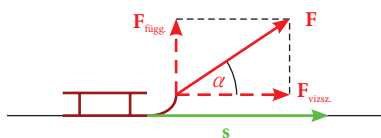
BEVEZETŐ

Ha egy szánkót vízszintes úton s távolságon F nagyságú vízszintes erővel előre felé húzunk, akkor eközben a szánkón $W = F \cdot s$ nagyságú mechanikai munkát végzünk. (Az elmozdulással ellentétes irányú, F nagyságú erő munkája pedig $W = -F \cdot s$, azaz negatív lenne.)



A valóság azonban az, hogy a szánkót általában nemcsak vízszintesen, hanem kissé felfelé is húzzuk. Az erő és az elmozdulás is vektormennyiségek, nagyságuk és irányuk is van, és – mint az ábrán látható is – egyáltalán nem biztos, hogy a két vektor iránya megegyezik. Hogyan számítsuk ki a végzett mechanikai munkát az ábra szerinti esetben?

Az erővektort az elmozdulás irányába eső (most vízszintes) és arra merőleges (függőleges) összetevőre bontjuk fel. Ezek az összetevők az ábra alapján: $|\mathbf{F}_{\text{függ}}| = |\mathbf{F}| \cdot \sin \alpha$ és $|\mathbf{F}_{\text{vízsz}}| = |\mathbf{F}| \cdot \cos \alpha$ nagyságúak.



Mivel a szánkó függőleges irányban nem mozdul el, ezért az $\mathbf{F}$ erő függőleges összetevője nem végez mechanikai munkát. A vízszintes összetevő az elmozdulás irányába mutat, tehát az $\mathbf{F}$ erő munkája: $W = \mathbf{F}_{\text{vízsz}} \cdot \mathbf{s}$. Ez egyenértékű a $W = |\mathbf{F}| \cdot \cos \alpha \cdot |\mathbf{s}|$ összefüggéssel.

Ez az összefüggés akkor is teljesül, ha az $\mathbf{F}$ erő és az $\mathbf{s}$ elmozdulás szöge nagyobb, mint 90° .

Látható, hogy az $\mathbf{F}$ erő munkája csak az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{s}$ vektoroktól függ (a két vektor nagyságától és a vektorok által bezárt szögtől).

A munkavégzés kérdésének fizikai tárgyalását egyszerűsíti, ha a munkára vonatkozó eredeti összefüggést erő- és elmozdulásvektorok esetén is ugyanabban a formában írhatjuk: $W = \mathbf{F} \mathbf{s}$.

Ehhez az $\mathbf{F} \mathbf{s}$ „szorzatot” úgy kell értelmeznünk, hogy $\mathbf{F} \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos \alpha$ teljesüljön.

Az $\mathbf{F} \mathbf{s}$ „szorzat” tehát egy olyan számot (szakkifejezéssel: **skalármennyiséget**) jelöl, amelyet a két vektor abszolút értéke és a két vektor által bezárt α szög határoz meg.

A munka az erő és elmozdulásvektorból származtatott előjeles fizikai mennyiség, de nem vektormennyiség (nincs iránya).

ELMÉLET

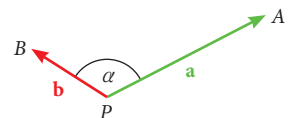
1. Skaláris szorzat

Definíció: Két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ **skaláris szorzatán** (vagy skalárszorzatán) az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$ szorzatot értjük, ahol $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$ az $\mathbf{a}$, illetve a $\mathbf{b}$ hosszát, α pedig az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ hajlásszögét jelöli.

Jelölés: $\mathbf{a} \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vagy $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, így például $\mathbf{a} \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$.

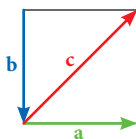
Megjegyzések:

1. Két vektor hajlásszöge a közös kezdőpontból induló vektorok által meghatározott, legfeljebb 180° nagyságú szög.
2. Két vektor skaláris szorzata mindig egy valós szám.
3. Két vektor esetében az ún. vektoriális szorzat is értelmezhető. Erről részletesebben 52. leckében olvashatsz.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 3 egység oldalhosszúságú négyzet oldalvektorai (az ábrának megfelelően) **a** és **b**, a megjelölt átlóvektora **c**. Mennyi



a) **ab** és **ba**; **b)** **ac** és **ca**; **c)** **bc** és **cb**?

Megoldás:

a) A két vektor abszolút értéke 3, a szögük 90° -os, ennek a koszinusza 0, ezért

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 3 \cdot 0 = 0 \text{ és}$$

$$\mathbf{ba} = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 3 \cdot 0 = 0.$$

b) Itt $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 3 \cdot \sqrt{2}$, a két vektor szöge 45° -os, ennek a koszinusza $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{ac} &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \alpha = 3 \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 9 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 9 \cdot 1 = 9 \text{ és} \end{aligned}$$

$$\mathbf{ca} = |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9.$$

c) Itt $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 3 \cdot \sqrt{2}$, a szögük 135° -os, ennek a koszinusza $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{bc} &= |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \alpha = 3 \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= -9 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = -9 \cdot 1 = -9 \text{ és} \end{aligned}$$

$$\mathbf{cb} = (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -9.$$

FELADATOK

1. E1 Az egy síkban lévő **a**, **b**, **c**, **d** és **e** vektorokról a következőket tudjuk:

$|\mathbf{a}| = 2,5$, $|\mathbf{b}| = 4$, **c** az **a** 180° -os elforgatottja, **d** az **a** (pozitív irányú) 270° -os elforgatottja, **e** az **a** 1080° -os elforgatottja, továbbá $\mathbf{ab} = 5$.

a) Mekkora **a** és **b** szöge?

b) Számítsd ki az **ac**, **ad** és **ae** skaláris szorzatokat!

c) Számítsd ki a **ba**, **bc**, **bd** és **be** skaláris szorzatokat!

d) Mekkora az **af**, ha **f** az **a** 90° -os elforgatottja?

2. E1 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 7$. Mennyi $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ skaláris szorzata, ha a két vektor szöge

a) 43° ; **b)** 90° ; **c)** 103° ; **d)** 180° ?

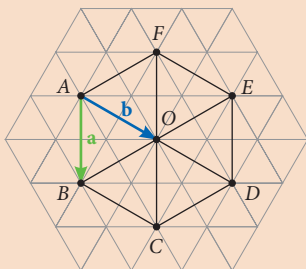
3. E1 Az **i** és **j** két egymásra merőleges egységvektor. Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat!

a) **ii** **b)** **ji** **c)** $(\mathbf{i} + \mathbf{j})\mathbf{i}$ **d)** $(\mathbf{i} - \mathbf{j})\mathbf{i}$

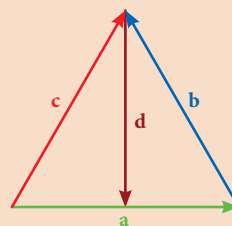
4. E1 Mekkora szöget zár be két egységvektor egymással, ha skaláris szorzatuk:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b)** 0; **c)** -1; **d)** 0,5?

5. E1 Az ábrán látható szabályos hatszög minden oldala két egység hosszúságú. Számítsd ki a következő skaláris szorzatokat: **ab**, **ba**, **bb**, $2(\mathbf{ab})$, $\mathbf{a}(2\mathbf{b})$, $(2\mathbf{a})\mathbf{b}$, $\mathbf{a}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.



6. E1 Megrajoltuk egy 6 egység oldalhosszúságú szabályos háromszög három oldalvektorát és egyik magasságvektorát.



a) Válassz ki a 4 vektor közül minden lehetséges módon kettőt-kettőt, és számítsd ki mindegyik esetben a kiválasztott két vektor skaláris szorzatát! (Figyelj a vektorok szögére!)

b) Igaz-e, hogy $\mathbf{c} + \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{a}$?

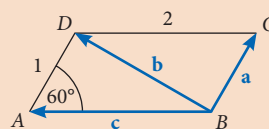
c) Határozd meg a $(\mathbf{c} + \mathbf{d})^2$ skaláris szorzatot!

d) Határozd meg a $\mathbf{c}^2$, $\mathbf{d}^2$, $2\mathbf{cd}$, skaláris szorzatokat! Hasonlítsd össze a kapott értékek összegét a c) feladatrész eredményével!

e) Számítsd ki, mennyi az $\mathbf{ac} + \mathbf{ad}$ összeg, és mennyi az $\mathbf{a}(\mathbf{c} + \mathbf{d})$ skaláris szorzat!

7. E1 Az ABCD paralelogramma oldalai 2 és 1 egység hosszúak, hegyesszöge pedig 60° -os. Igazold az ábra szerint felvett **a**, **b**, **c** vektorok esetében, hogy

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$



2. Skaláris szorzat kapcsolata a vektorok merőlegességével

Tétel: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Megjegyzés: Ebben a tételben figyelembe vesszük, hogy a nullvektor iránya (definíció szerint) tetszőleges, tehát a nullvektor minden vektorra merőleges.

3. A skaláris szorzat további tulajdonságai:

Minden $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektor és $k \in \mathbb{R}$ esetén igaz, hogy:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$$

$$k(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(k\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{a}\mathbf{d} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{d}$$



Megjegyzések:

- ▶ A vektorok között értelmezett összeadás, kivonás és skaláris szorzat műveletek esetén ugyanazokat a szimbólumokat (rendre: $+$; $-$; $\cdot$) használjuk, mint a valós számok összeadása, kivonása, szorzása esetén. A műveleti jelek azonosságának ellenére azonban az említett műveletek egészen más jelentéssel bírnak a vektorok, valamint a valós számok esetén. Például: az összeadás valós számok esetén mennyiségek összegzését, míg vektorok esetén a vektorok összegvektorának meghatározását jelenti; valós számok szorzásával a mennyiségek többszörözését végezzük, két vektor skaláris szorzata pedig a definícióban megadott módon a vektorok bizonyos jellemzőinek szorzata.
- ▶ Két egyirányú vektor skaláris szorzata a vektorok abszolút értékének szorzatával egyenlő, mert a vektorok szöge 0° és $\cos 0^\circ = 1$.
- ▶ Az $\mathbf{a}\mathbf{a}$ skaláris szorzat jelölésére használjuk az $\mathbf{a}^2$ szimbólumot is. Egy vektor önmagával vett skaláris szorzata a vektor hosszának (abszolút értékének) négyzetével egyenlő. Ha az $\mathbf{a}$ vektor hosszát a -val jelöljük, akkor $\mathbf{a}^2 = a^2$.
- ▶ Mivel $c(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (c\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(c\mathbf{b})$, ezért mindegyik szám helyett egyszerűen a $c\mathbf{a}\mathbf{b}$ jelet használjuk.

4. A koszinusztétel bizonyítása a skaláris szorzat segítségével

A skalárszorzat segítségével könnyen belátható a – régebben már tanult és feladatok megoldásában használt – koszinusztétel.

Tétel: Koszinusztétel

Bármely háromszögben megkapjuk az egyik oldal hosszának négyzetét, ha a másik két oldal hosszának négyzetösszegéből kivonjuk e két oldal hosszának és az általuk közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát, vagyis a szokásos jelöléseket használva: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Bizonyítás:

Használjuk az ábra jelöléseit! Helyezzünk vektorokat az ABC háromszög két oldalára:

$\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, a vektor abszolút értéke a , ez a BC oldal hossza.

$\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, b vektor abszolút értéke b , ez az AC oldal hossza.

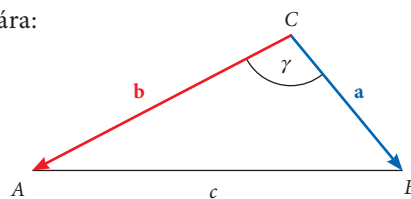
Az AB oldal hosszát c -vel jelöljük. Ez a c az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor abszolút értéke.

Az $\overrightarrow{AB}$ önmagával való skaláris szorzatát (a négyzetét) kétféleképpen írjuk fel:

$$\overrightarrow{AB}^2 = c^2, \text{ mert } |\overrightarrow{AB}| = c.$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2, \text{ mert } \mathbf{a}, \text{ illetve } \mathbf{b} \text{ abszolút értéke } a, \text{ illetve } b.$$

E kétféle felírás alapján: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, ezzel bebizonyítottuk a koszinusztételt.





skaláris szorzat kiszámítása koordinátákból, két vektor hajlásszögének kiszámítása

KIDOLGOZOTT FELADAT

Adott az $A(3; 2)$ és a $B(-3; 5)$ pont.

- Számítsuk ki az origóból az A -ba, illetve a B -be mutató vektorok skaláris szorzatát!
- Számítsuk ki az a)-beli két vektor hosszát!
- Számítsuk ki az a)-beli két vektor által bezárt szöveget!

Megoldás:

Az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ bázisvektorok megállapodás szerinti felvétele miatt $\vec{OA} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ és $\vec{OB} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})(-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$.

A két összegvektor skaláris szorzását pontosan úgy végezhetjük, mint a valós számok esetében: minden tagot minden taggal skalárisan összeszorozunk, és a kapott szorzatokat (vagyis a kapott négy valós számot) összeadjuk:

$$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})(-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = -9\mathbf{ii} + 15\mathbf{ij} - 6\mathbf{ji} + 10\mathbf{jj}.$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = 0$, mert a két bázisvektor egymásra merőleges.

Azt is tudjuk, hogy a bázisvektorok hossza 1, ezért $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = 1$.

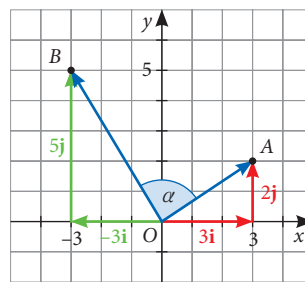
Ezeket felhasználva folytathatjuk a skaláris szorzat kiszámítását:

$$(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})(-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = -9\mathbf{ii} + 15\mathbf{ij} - 6\mathbf{ji} + 10\mathbf{jj} = -9 \cdot 1 + 15 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 10 \cdot 1 = -9 + 10 = 1. \text{ Tehát } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1.$$

b) A vektorkoordinátákból: $|\vec{OA}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ és $|\vec{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

c) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{13} \cdot \sqrt{34} \cdot \cos \alpha = \sqrt{442} \cdot \cos \alpha$, másrészt az a) feladat megoldása alapján $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1$.

Így $\sqrt{442} \cdot \cos \alpha = 1$, amiből $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{442}} \approx 0,0476$. Ebből pedig $\alpha \approx 87,3^\circ$.



ELMÉLET

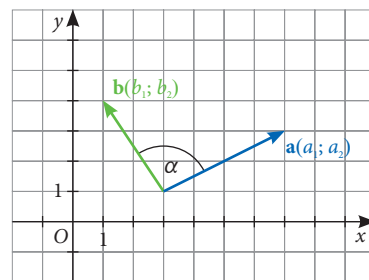
Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és a $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektor skaláris szorzata kiszámítható a vektorok koordinátáiból úgy, hogy az első koordináták szorzatához hozzáadjuk a második koordináták szorzatát, azaz: $\mathbf{ab} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) &= a_1 \cdot b_1\mathbf{ii} + a_1 \cdot b_2\mathbf{ij} + a_2 \cdot b_1\mathbf{ji} + a_2 \cdot b_2\mathbf{jj} = \\ &= a_1 \cdot b_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ + a_1 \cdot b_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ + a_2 \cdot b_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ + a_2 \cdot b_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = \\ &= a_1 \cdot b_1 \cdot 1 + a_1 \cdot b_2 \cdot 0 + a_2 \cdot b_1 \cdot 0 + a_2 \cdot b_2 \cdot 1 = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma$$

$$\mathbf{ab} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

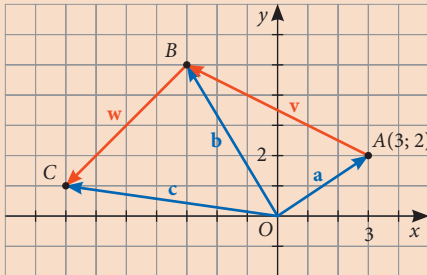


1. E1 Számítsd ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatát, a vektorok hosszát és a vektorok hajlásszögét!

a) $\mathbf{a}(4; -1)$ és $\mathbf{b}(2; 6)$

b) $\mathbf{a}(1; 5)$ és $\mathbf{b}(3; 2)$

2. E1 A repülőgépek mozgását koordináta-rendszerben ábrázolják és figyelik. A koordináta-rendszerben egy egység 10 km.



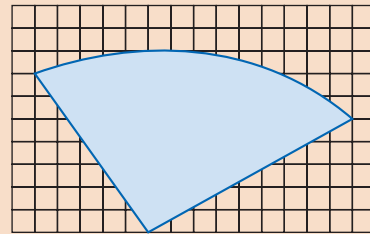
Egy állandó magasságban mozgó utasszállító repülőgép a megfigyelés kezdetén az $A(3; 2)$ pontban volt, a következő megfigyeléskor pedig a B pontban. Elmozdulását a $\mathbf{v}(-6; 3)$ adja meg. Később a gép a B -ből a C -be jutott, elmozdulását a $\mathbf{w}(-4; -4)$ mutatja.

- a) Határozd meg a B és a C pont koordinátáit!
- b) Mekkora szöggel változott az elmozdulás iránya a második megfigyeléskor az elsőhöz képest (azaz mekkora szöggel fordult el a repülő)?

3. E1

- a) Mekkora lehet y értéke, ha az origóból az $A(-2; 5)$, illetve $B(3; y)$ pontokba mutató vektorok skaláris szorzata 14?
- b) Mekkora lehet a k valós szám értéke, ha az origóból a $K(k; -6)$, illetve $L(k + 4; 2)$ pontokba mutató vektorok skaláris szorzata -15 ?

4. E1 Egy gyógyfürdő meleg vizes medencéjének környékét az ábrán látható módon járólapozták.



- a) Állapítsd meg a medence két egyenes oldalának hosszát! (Hosszúságegységként használd a járólapok egy élének hosszát.)
- b) Mekkora szöget zár be a medence két egyenes oldala?

5. E1 Az $ABCD$ négyszög A csúcsa az origóban van. Az A csúcsból a másik 3 csúcsba mutató vektorok rendre $\overrightarrow{AB}(6; -1)$, $\overrightarrow{AC}(1; 7)$ és $\overrightarrow{AD}(-1; 5)$.

- a) Add meg a B , C és D csúcsok koordinátáit!
- b) Add meg a $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokat koordinátáik segítségével!
- c) Számítsd ki az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok skaláris szorzatát!

6. E2 A koordináta-rendszer origója legyen O ; két pontja $A(-3; -4)$ és $B(1; -1)$. Melyik P pontba mutat az $\overrightarrow{OP}$, ha

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$;

b) $\overrightarrow{OP}$ az $\overrightarrow{AB}$ -nak $+90^\circ$ -os elforgatottja?

Mindkét előbbi esetben határozd meg $\overrightarrow{OP}$ és $\overrightarrow{OA}$ vektorok szögét!

RÁADÁS

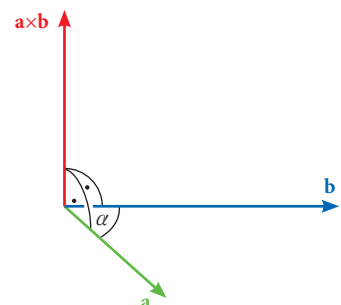
Két vektor esetében értelmezzük a vektorok **vektoriális szorzatát**.

Ha az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ szöge α , akkor azt a vektort,

- ▶ amely merőleges mindkét adott vektorra, és
- ▶ amelynek az abszolút értéke az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$ számmal egyenlő,
- ▶ az $\mathbf{a}$ irányából nézve a $\mathbf{b}$ -t pozitív irányú 90° -os forgatás viszi át a „szorzatvektorral” azonos irányú vektorba,

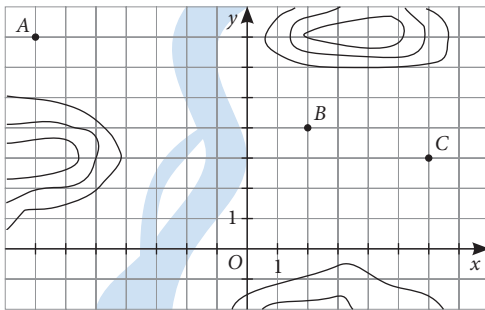
az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ **vektoriális szorzatának** nevezzük.

Jele: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (olvasd: a kereszt b).



KIDOLGOZOTT FELADAT

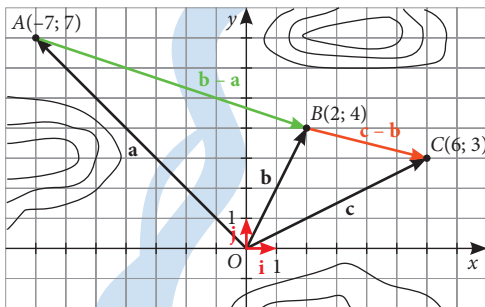
Az Elektromos Művek a térképen látható dombos vidéken, egy folyó fölött szeretne egyenesen keresztülvezetni egy új vezetékét. A mérnök, akire a villanyoszlopok helyének kijelölését bízta, az A , B és C pontokat jelölte meg a térképvázlaton. A munkát ellenőrző társa szerint azonban ezek a pontok nem esnek egy egyenesre.



Kinek van igaza? Egy egyenesre esik a három pont, vagy nem?

Első megoldás:

Ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ párhuzamosak, akkor a három pont egy egyenesre esik, ha nem párhuzamosak, akkor a pontok nem esnek egy egyenesre.



Indítsunk helyvektorokat az A , B és C ponthoz! Ezeknek a helyvektoroknak a koordinátái megegyeznek a végpontjaik megfelelő koordinátaival.

Emiatt $\mathbf{a} = (-7; 7)$, $\mathbf{b} = (2; 4)$ és $\mathbf{c} = (6; 3)$.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (2; 4) - (-7; 7) = (9; -3) \text{ és}$$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (6; 3) - (2; 4) = (4; -1).$$

Párhuzamos-e ez a két vektor? Ha igen, akkor létezik egy olyan c valós szám, hogy $\overrightarrow{AB} = c \cdot \overrightarrow{BC}$, vagyis $(9; -3) = (4c; -c)$.

A második koordináták egyenlőségéből viszont az látható, hogy csak $c = 3$ lehetne, de ekkor $4c = 12 \neq 9$.

Beláttuk, hogy nincs olyan c valós szám, amelyre igaz, hogy $\overrightarrow{AB} = c \cdot \overrightarrow{BC}$, vagyis az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{BC}$ nem párhuzamos vektorok.

Tehát A , B és C nem esik egy egyenesre.

Második megoldás:

Jelölje $\overrightarrow{BA}(-9; 3)$ és $\overrightarrow{BC}(4; -1)$ vektorok hajlásszögét α !

A $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok skalárszorzata

I. a definíció szerint:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{(-9)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot \cos \alpha,$$

II. a vektorok koordinátaival:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-9) \cdot 4 + 3 \cdot (-1).$$

Mivel az I. és II. pontban felírt egyenlőségek bal oldalai egyenlők egymással, ezért fennáll a jobb oldalak egyenlősége is, azaz

$$\begin{aligned} \sqrt{(-9)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot \cos \alpha &= \\ &= (-9) \cdot 4 + 3 \cdot (-1). \end{aligned}$$

Az egyenlőségből átrendezéssel következik, hogy

$$\cos \alpha = \frac{(-9) \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{(-9)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2}},$$

amiből $\alpha \approx 175,6^\circ$.

Ha az A , B és C pontok egy egyenesre esnének, akkor az α szög nagysága 180° (egyenesszög) lenne. Tehát – mivel a szög értéke nem 180° – az A , B és C pontok nem esnek egy egyenesre.

Megjegyzés:

A fenti megoldás alapelvét sokszor használjuk, amikor két, koordinátaival adott vektor hajlásszögét keressük.



1. Ha az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és a $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ párhuzamosak, akkor van olyan c valós szám, hogy $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$. Ez azt is jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ koordinátái $b_1 = ca_1$ és $b_2 = ca_2$.

Megfordítva: Ha egy vektor a másiknak számszorosa, akkor ezek párhuzamos vektorok.

2. Két adott vektor esetén, ahol $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$, és a vektorok egyike sem nullvektor, a skaláris szorzat segítségével ki számítható a vektorok α hajlásszöge a

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \text{ összefüggésből.}$$

FELADATOK

1. **E1** Adottak az $\mathbf{a}(-5; -1)$, $\mathbf{b}(-3; 15)$, $\mathbf{c}(1; -5)$ és $\mathbf{d}(25; 5)$ vektorok.

- a) Minden lehetséges módon válassz ki két vektort a fentiek közül, és számítsd ki ezek skaláris szorzatát!
- b) Melyek párhuzamosak az adott vektorok között?
- c) Melyek merőlegesek az adott vektorok között?
- d) Határozd meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ vektorok hajlásszögét! Válaszod fokokban, egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

2. **E1** Az $OABC$ paralelogramma 3 csúcsa: $O(0; 0)$, $A(20; -15)$ és $C(7; 24)$.

- a) Add meg a B csúcs koordinátáit!
- b) Mekkora a paralelogramma oldalai?
- c) Számítsd ki az $\overrightarrow{OB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ skaláris szorzatát!
- d) Mekkora a paralelogramma szögei?

3. **E1** Melyik valós számot kell a k betű helyére írunk, hogy az $\mathbf{u}(6; 18)$ és a $\mathbf{v}(-3; k)$

- a) párhuzamos legyen; b) merőleges legyen?

4. **E1** Egy négyszög csúcsai: $A(-2; -2)$; $B(4; 0)$; $C(-1; 2)$ és $D(2; 3)$.

- a) Igazold, hogy a négyszög trapéz, azaz van két párhuzamos oldala! Melyek a párhuzamos oldalak?
- b) Milyen hosszúak a négyszög oldalai?
- c) Számítsd ki a skaláris szorzat segítségével a négyszög szögeit!

5. **E1** (Emelt szintű érettségi, 2006)

A $PQRS$ négyszög csúcsai: $P(3; -1)$, $Q(1; 3)$, $R(-6; 2)$ és $S(-5; -5)$.

Döntsd el, hogy a következő három állítás közül melyik igaz és melyik hamis!

Válaszaidat indokold, támaszd alá számításokkal!

- a) A állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs derékszöge.
- b) B állítás: A $PQRS$ négyszög húrnégyszög.
- c) C állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs szimmetriaközéppontja.

6. **E1** (Emelt szintű érettségi, 2012)

A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2; 1)$, $B(7; -4)$, $C(11; p)$.

Határozd meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60° -os!

7. **E2** (Emelt szintű érettségi, 2009)

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:

$\mathbf{a}(\cos t; \sin t)$ és $\mathbf{b}(\sin^2 t; \cos^2 t)$.

- a) Add meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli!
- b) Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge $t = \frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészen kerekítve add meg!)
- c) Határozd meg a t olyan valós értékeit, amelyek esetén az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek egymásra!





szakasz felezőpontjának koordinátái

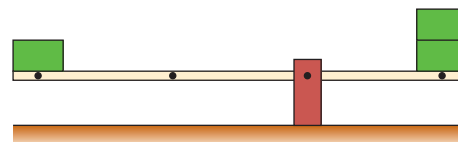


szakasz harmadolópontjainak koordinátái, háromszög súlypontjának koordinátái

BEVEZETŐ

A mérleghinta egy sokak által kedvelt játék, melynek működési alapelve az ún. forgatónyomaték segítségével írható le.

A hintaként szolgáló merev rúdnak szokásos módon a felezőpontjában van elhelyezve a tengelye, így az egyik és a másik hintázó két, ugyanolyan hosszúságú rúd végpontján helyezkedik el. Ez az elhelyezkedés kellemes játékot ígér a közel azonos tömegű résztvevőknek (könnyedén egyensúlyba hozható a hinta), de kínos helyzetek alakulhatnak ki, ha túl nagy a két hintázó testtömege közötti különbség. A kellemetlenségek elkerülését jelenthetné, ha a mérleghinta tengelyét alkalmasszerűen áthelyezhetnénk a rúd egy másik pontjára. A fizikai törvényszerűségek alapján ismert, hogy az egyensúly akkor jön létre, ha a hintázók testtömege és a hintázóknak a hinta tengelyétől való távolsága egymással fordított arányban van. Például, ha a két hintázó tömegének aránya 1 : 2, akkor az egyensúly – ugyanakkor a felhőtlen szórakozás – elérésének érdekében a tengelytől való távolságaiknak aránya 2 : 1 kell, hogy legyen (vagyis a tengely a rúd azon harmadolópontja, amely közelebb van a nagyobb tömegű hintázóhoz).



KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Melyek az AB szakasz H_A és H_B harmadolópontjainak koordinátái, ha $A(-4; 3)$ és $B(10; 7)$?

Megoldás:

Számoljuk ki az A végponthoz közelebbi H_A harmadolópont koordinátáit!

Jelöljük a H_A pont $\overrightarrow{OH_A}$ helyvektorát $\mathbf{h}$ -val!

Az ábra alapján: $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AH_A}$ ezért először az $\overrightarrow{AH_A}$ vektorral foglalkozunk.

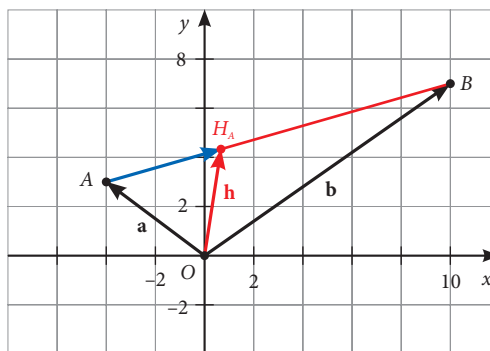
$$\overrightarrow{AH_A} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{3} (14; 4) = \left(\frac{14}{3}; \frac{4}{3} \right).$$

$$\text{Tehát } \mathbf{h} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AH_A} = (-4; 3) + \left(\frac{14}{3}; \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3} \right).$$

Mivel a $\mathbf{h}$ helyvektor, ezért a H_A koordinátái megegyeznek a vektor koordinátaival: $H_A: \left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3} \right)$.

Az előbbihez hasonlóan adódnak a szakasz B ponthoz közelebb eső H_B harmadolópontjának koordinátái: $H_B: \left(\frac{16}{3}; \frac{17}{3} \right)$.

Megjegyzés: Az osztópontnak a szakasz végpontjaitól való távolságai fordított arányban állnak a koordinátákra alkalmazott szorzótényezők értékeivel.



2. Határozzuk meg az ábra szerinti ABC háromszög BC oldalának F felezőpontját, majd az AF szakasz harmadolópontjait, majd az ABC háromszög súlypontját!

Megoldás:

A háromszög csúcsai: $A(-6; 2)$, $B(2; 0)$ és $C(1; 7)$.

A BC oldal F felezőpontja: $F\left(\frac{2+1}{2}; \frac{0+7}{2}\right) = (1,5; 3,5)$.

Az AF szakasz A végpontjához közelebb eső harmadolópontja

$$H_A\left(\frac{2 \cdot (-6) + 1,5}{3}; \frac{2 \cdot 2 + 3,5}{3}\right) = (-3,5; 2,5),$$

F végpontjához közelebb eső harmadolópontja pedig

$$H_F\left(\frac{-6 + 2 \cdot 1,5}{3}; \frac{2 + 2 \cdot 3,5}{3}\right) = (-1; 3).$$

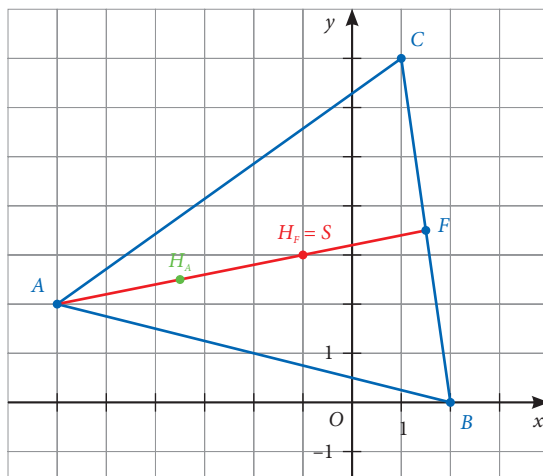
Az AF szakasz az ABC háromszög súlyvonala, így ennek a szakasznak az F oldalfelező ponthoz közelebbi harmadolópontja éppen a háromszög súlypontja. Tehát $S(-1; 3)$.

Megfigyelhetjük, hogy a súlypont koordinátái éppen a csúcsok megfelelő koordinátáinak átlagaként állnak elő: a csúcsok első koordinátái: $-6; 2; 1$;

ezek átlaga: $\frac{-6 + 2 + 1}{3} = -1$;

a csúcsok második koordinátái: $2; 0; 7$;

ezek átlaga: $\frac{2 + 0 + 7}{3} = 3$.



ELMÉLET

1. Ha egy szakasz két végpontja $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, akkor a szakasz

- ▶ felezőpontja: $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$,
- ▶ az A -hoz közelebbi harmadolópontja: $H_A\left(\frac{2a_1 + b_1}{3}; \frac{2a_2 + b_2}{3}\right)$,
- ▶ a B -hez közelebbi harmadolópontja: $H_B\left(\frac{a_1 + 2b_1}{3}; \frac{a_2 + 2b_2}{3}\right)$.

2. **Tétel:** A háromszög súlypontjának első koordinátája a csúcsok első koordinátáinak átlaga, a háromszög súlypontjának második koordinátája a csúcsok második koordinátáinak átlaga.

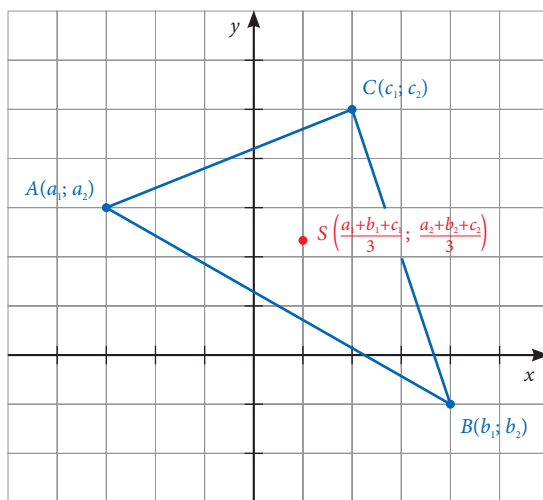
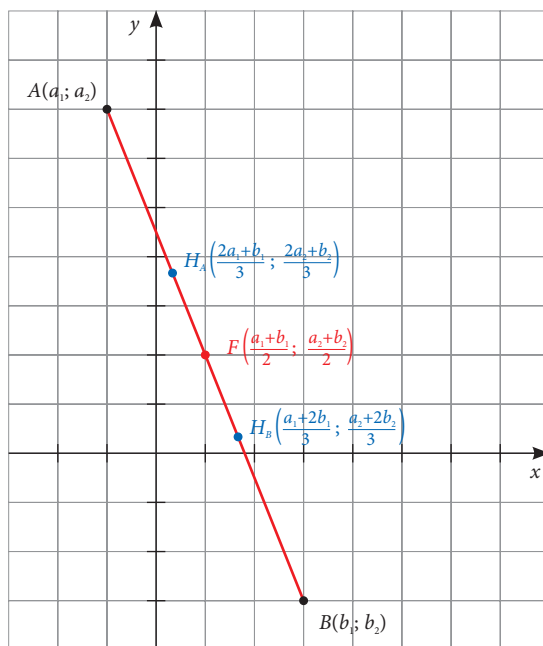
Ha az ABC háromszög csúcsai $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$, akkor a háromszög súlypontja az $S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$ pont.

Bizonyítás:

Ha az AB oldal felezőpontja $F(f_1; f_2)$, akkor az $S(s_1; s_2)$ súlypont a CF szakasz F -hez közelebbi harmadolópontja. A megismert összefüggések szerint tehát

$$s_1 = \frac{2}{3}f_1 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{1}{3}c_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3};$$

$$s_2 = \frac{2}{3}f_2 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_2 + b_2}{2} + \frac{1}{3}c_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$



1. E1 Egy PQ szakasz egyik végpontja $P(3; 5)$. A szakasz egyik harmadolópontja $H(-1; -1)$. Határozd meg, melyik pont lehet a szakasz Q végpontja!

2. E1 Adott az $A(-3; 9)$ és a $B(-7; -5)$ pont.

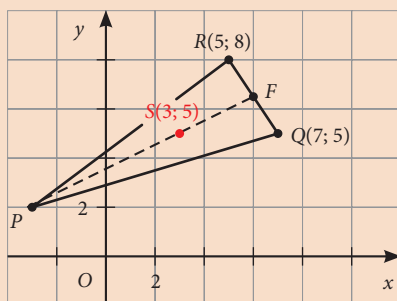
a) Határozd meg az AB szakasz B ponthoz legközelebb eső hatadolópontjának koordinátáit!

b) Hosszabbítsd meg az AB szakaszt a B ponton túl az eredeti szakasz hosszának felével, és jelöld C -vel az így kapott pontot! Határozd meg a C pont koordinátáit!

3. E1 PQR háromszögnek ismerjük két csúcspontját és a súlypontját: $Q(7; 5)$, $R(5; 8)$ és $S(3; 5)$. A QR oldal felezőpontját F -fel jelöljük. Határozd meg a P pont koordinátáit kétféleképpen:

a) a súlypont koordinátáira vonatkozó képlet alkalmazásával;

b) az $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + 3 \overrightarrow{FS}$ számítást követve!



4. E1 Egy háromszög csúcsai $A(-6; 2)$; $B(2; 0)$ és $C(1; 7)$.

a) Add meg az ABC háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit!

b) Számítsd ki az ABC háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit!

c) Hasonlítsd össze az ABC háromszög és az ABC háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit!

d) Mutasd meg általánosan, hogy a háromszög középvonalai olyan háromszöget határoznak meg, melynek súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával!

5. E1 Adott az ABC háromszög: $A(-3; -3)$, $B(5; -1)$, $C(-2; 4)$.

a) Igaz-e, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú?

b) Igaz-e, hogy az ABC háromszög súlypontja az origó?

c) Nagyítsd az ABC háromszöget az origóból a kétszeresére! Add meg a nagyított $A'B'C'$ háromszög csúcsait!

6. E1 A PQR háromszög súlypontja az $S(-2; -1)$ pont, és adott $P(-12; -7)$ és $R(4; 8)$. Határozd meg a Q pont koordinátáit!

7. E1 Az ABC háromszög oldalfelező pontjait ismerjük: $F_A(7; 2)$; $F_B(1; 0)$; $F_C(4; -5)$.

a) Készíts ábrát!

b) Add meg a felezőpontok által meghatározott háromszög súlypontját!

c) Határozd meg az eredeti ABC háromszög csúcsait!

8. E1 (Az érettségi vizsgálatok tételei az 1895–96. iskolai év végén a Budapest. VIII.ker. községi főreáliskolában, eredeti szóhasználatlalt és jelöléssel. Forrás: Középiskolai Matematikai Lapok, 1896. december)

Valamely háromszög alapvonalának egyenlete $55y + 18x - 256 = 0$. Végpontjainak x koordinátái $x_1 = 2$, $x_2 = 7,5$. A háromszög súlypontjának koordinátái $\alpha = 5$, $\beta = 6$. Mekkora az oldalak és a szögek?





egyenes egyenlete $y = mx + b$ alakban



normálvektor, egyenes egyenletének normálvektoros alakja

KIDOLGOZOTT FELADAT

Keressük a $P_0(2; 3)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(3; 5)$ -ra merőleges e egyenes egyenletét!

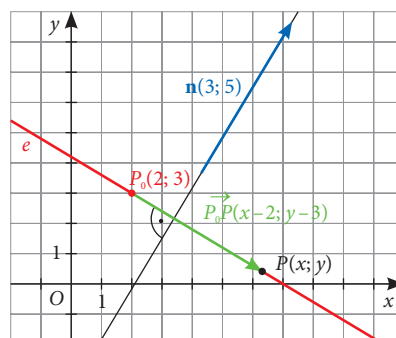
Megoldás:

A sík egy tetszőleges $P(x; y)$ pontja pontosan akkor van az e egyenesen, ha az $\mathbf{n}$ merőleges a $\overrightarrow{P_0P}$ -ra, vagyis ha a vektorok skaláris szorzatára teljesül, hogy $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

$\overrightarrow{P_0P} = (x - 2; y - 3)$, így

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 3(x - 2) + 5(y - 3) = 3x + 5y - 21.$$

A $(2; 3)$ ponton átmenő és az $\mathbf{n}(3; 5)$ -re merőleges egyenes egy egyenlete tehát: $3x + 5y - 21 = 0$, átalakítva: $3x + 5y = 21$.



ELMÉLET

1. Egyenes normálvektora

Definíció: Egy egyenesre merőleges vektort, ha az nem a nullvektor, az egyenes **normálvektorának** nevezzük.

2. Az egyenes egyenletének normálvektoros alakja

Ha az egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(A; B)$ és egy adott pontja $P_0(x_0; y_0)$, akkor az egyenlete felírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakban.

Bizonyítás:

Az egyenes egy tetszőleges pontja (úgynevezett futópontja) legyen $P(x; y)$. Ekkor a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor így írható: $(x - x_0; y - y_0)$. A $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra, hisz $\overrightarrow{P_0P}$ az egyenes két pontját köti össze, az $\mathbf{n}$ pedig az egyenesre merőleges vektor. Ez akkor is igaz, ha P egybeesik P_0 ponttal, hiszen akkor $\overrightarrow{P_0P}$ nullvektor, ami minden vektorra merőleges. Ha két vektor merőleges, akkor skalárszorzatuk 0, ezért $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$. A vektorok skalárszorzatát a koordinátákkal felírva: $(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0$.

A zárójelet felbontva ez átrendezhető a keresett alakra: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

Például: ha $\mathbf{n}(3; 5)$ és $P_0(2; 3)$, akkor az egyenes egyenlete $3x + 5y = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$.

Ha $\mathbf{n} = (0; 5)$ és $P_0(3; 2)$, akkor az egyenlet: $5y = 10$, és ha $\mathbf{n} = (8; 0)$ és $P_0(3; 2)$, akkor az egyenlet $8x = 24$ alakban írható.

Megjegyzés:

Ha az $ax + by = c$ egyenletben a , b és c adott valós számok, de a és b közül legalább az egyik nem egyenlő 0-val, akkor ez egy egyenes egyenlete. Ezt az egyenletet az egyenes pontjainak koordinátái kielégítik, az egyenesen kívül lévő pontok koordinátái viszont nem. Az egyenes egyik normálvektora az $\mathbf{n}(a; b)$. Az egyenes tetszőleges pontját megkaphatjuk úgy, hogy az x -nek vagy az y -nak egy konkrét értéket adunk, és a kapott egyismeretlenes egyenletet megoldva megkapjuk a pont másik koordinátáját.

3. Egyenes egyenletének felírása a normálvektor segítségével

az egyenes egy pontja

$$P(x_0; y_0)$$

az egyenes egy normálvektora
(az egyenesre merőleges vektor,
nem nullvektor)

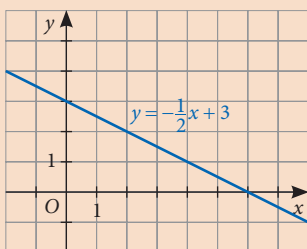
$$\mathbf{n}(A; B)$$

az egyenes egyenlete

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{C \text{ valós szám}}$$

FELADATOK

- 1. E1** Koordináta-rendszerben ábrázoltuk az $y = -\frac{1}{2}x + 3$ egyenest.



- a)** Olvasd le az ábráról az egyenes egy pontját! Számolással ellenőrizd, hogy a pont koordinátái igazgá tesszik-e az egyenes egyenletét!
- b)** Határozd meg az ábra segítségével az egyenes egy normálvektorát!
- c)** Írd fel az egyenes egyenletének normálvektoros alakját!

- 2. E1** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely

- a)** illeszkedik az origóra és merőleges az $\mathbf{n}(5; -2)$ vektorra;
- b)** illeszkedik a $P(-3; 7)$ pontra és merőleges az $\mathbf{n}(4; -5)$ vektorra;
- c)** illeszkedik a $Q(-1; 9)$ pontra és merőleges az $\mathbf{n}(3; -7)$ vektorra!

- 3. E1** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek pontjai egyenlő távolságban vannak a sík $P(0; -6)$ és $Q(8; 4)$ pontjától!

- 4. E1** Add meg az

$$e: 3x - 5y = 18, \quad f: 2y = 7x - 1, \quad g: 8y - 9 = 0$$

egyenesek két-két normálvektorának és két-két pontjának koordinátáit!

- 5. E1** Az $ABCD$ rombusz szemközti csúcsai $A(2; -3)$ és $C(10; 9)$. Írd fel a rombusz BD átlójának egyenletét!

- 6. E1** Egy négyzet két szomszédos csúcsa $A(1; 5)$ és $B(-2; 3)$.

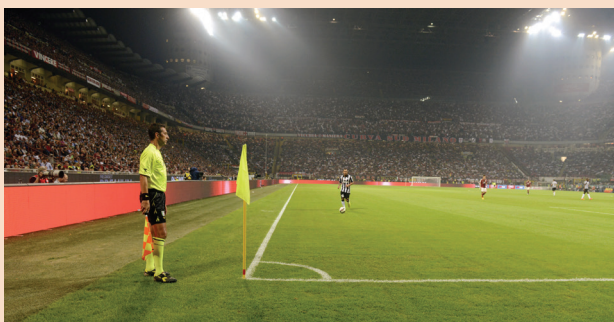
- a)** Írd fel az AB oldallal szomszédos oldalak egyenesének egyenletét!
- b)** Határozd meg a négyzet hiányzó két csúcsának koordinátáit! Hány megoldás van?

- 7. E1** Egy háromszög három csúcsa: $A(-6; 4)$, $B(2; 10)$ és $C(6; -2)$.

Hol metszi a háromszög C csúcsból induló magasságvonala az y tengelyt?

- 8. E2** Adottak a síkon az $A(-7; 2)$, $B(2; 8)$ és $C(0; 11)$ pontok.

- a)** Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!
- b)** Hol metszi a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magasságvonala az x tengelyt?





irányvektor, egyenes egyenletének irányvektoros alakja

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy sík terepen mozgó test az $A(-5; -2)$ pontban van, és az óránkénti elmozdulásvektora az állandó $\mathbf{v}(4; 3)$ vektorral adható meg. Illeszkedik-e a $B(5; 5,6)$ pont az A pontban lévő, egyenes vonalú mozgást végző test pályájára?

Megoldás:

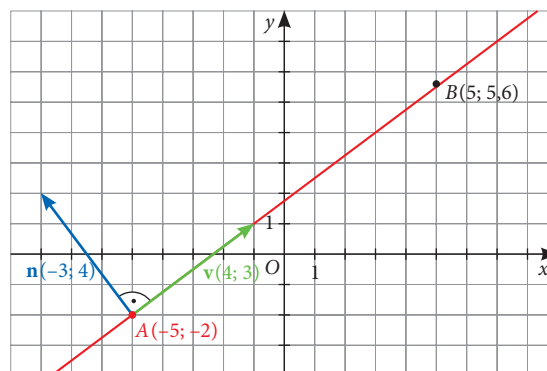
A mozgó test pályája egy, az $A(-5; -2)$ ponton áthaladó olyan egyenes, amelyik párhuzamos a $\mathbf{v}(4; 3)$ vektorral.

Ha a $\mathbf{v}(4; 3)$ vektort elforgatjuk 90° -kal, akkor a pályaegyenest egy normálvektorát kapjuk, legyen ez az $\mathbf{n}(-3; 4)$.

Az egyenes egyenlete egy pontjának és egy normálvektorának ismeretében: $-3x + 4y = (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot (-2)$.

Egyszerűbb alakban: $-3x + 4y = 7$.

Helyettesítsük ebbe az egyenletbe a B pont koordinátáit: $-3 \cdot 5 + 4 \cdot 5,6 = 7$, azaz $7,4 = 7$. Ez hamis kijelentés, tehát a B pont nincs rajta a mozgást végző test pályáján.



ELMÉLET

1. Egyenes irányvektora

Definíció: Ha egy vektor párhuzamos egy egyenessel, és nem a nullvektor, akkor ezt az egyenes **irányvektorának** nevezzük.

Egy irányvektorból úgy kaphatjuk meg az egyenes egy normálvektorát, hogy az irányvektort elforgatjuk 90° -kal.

Például:

Ha egy egyenes egyik irányvektora a $\mathbf{v}(2; 9)$, akkor az egyenesnek normálvektorai a $(-9; 2)$ és $(9; -2)$ vektorok (valamint ezek minden 0-tól különböző skalárszorosa) is.

2. Az egyenes egyenletének irányvektoros alakja

Adott a sík $P_0(x_0; y_0)$ pontja és egy $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ vektora, ahol $\mathbf{v} \neq 0$.

A P_0 ponton átmenő, $\mathbf{v}$ irányvektorral párhuzamos egyenes egyenlete:

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0.$$

Bizonyítás:

A P_0 ponton átmenő, $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$Ax + By = Ax_0 + By_0.$$

Az egyenes $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektora merőleges az egyenes $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorára, vagyis az adott irányvektort 90° -kal elforgatva az $\mathbf{n}(v_2; -v_1)$ normálvektort kapjuk. Ezzel felírva a P_0 ponton átmenő egyenes egyenletének normálvektoros alakját, éppen a

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$$

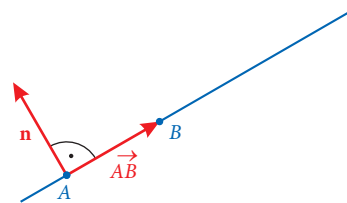
alakot kapjuk, ami bizonyítja az állítást.



3. Két pontjával adott egyenes egyenletének felírása

Ha adott a sík két pontja, A és B , akkor koordinátaik segítségével felírható az $\overrightarrow{AB}$ vektor, ami az A és B pontokon áthaladó egyenes egy irányvektora.

- ▶ Az irányvektor és az egyik pont (A vagy B) segítségével felírható az egyenes egyenletének irányvektoros alakja.
- ▶ Forgassuk el az $\overrightarrow{AB}$ vektort 90° -kal! A kapott vektor az egyenes egy normálvektora, melynek segítségével felírható az egyenes egyenletének normálvektoros alakja.



FELADATOK

- 1. E1** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek egy irányvektora $\mathbf{v}(4; 3)$, és átmegy

- a) a $P(-1; 4)$ ponton; c) az $R(3; -2)$ ponton;
b) a $Q(0; 5)$ ponton!

- 2. E1** Add meg az egyenes egy irányvektorát és egy normálvektorát, ha az egyenes átmegy a megadott két ponton!

- a) $A(0; 4)$ és $B(3; 0)$
b) $A(5; 2)$ és $B(-1; -1)$

- 3. K1** Add meg az egyenesek két-két irányvektorának és két-két pontjának koordinátáit, ha az egyenesek egyenlete

$$e: 2x - 5y = 2; \quad f: 0 = 7x - 8; \quad g: y = -3x + 4.$$

- 4. E1** Egy háromszög három csúcsa: $P(-1; 7)$, $Q(2; 5)$ és $R(0; 3)$.

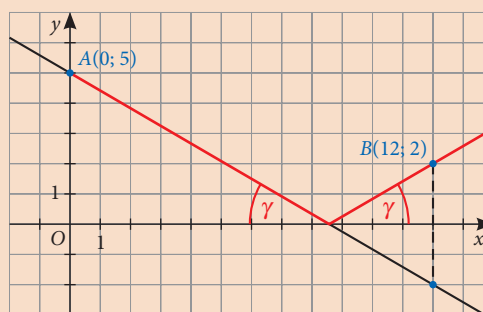
- a) Írd fel a háromszög PQ oldalegyenesének egyenletét!
b) Írd fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonalának egyenletét!
c) Hol metszi az x tengelyt a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonala?

- 5. E1** Adott az ABC háromszög három csúcsa. Írd fel a leghosszabb oldal egyenesének egyenletét!

- a) $A(0; 0)$, $B(5; -1)$, $C(7; 3)$
b) $A(-10; -3)$, $B(5; 7)$, $C(9; 1)$



- 6. E2** A koordináta-rendszer $A(0; 5)$ pontjából egy fénysugarat indítunk. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely mentén indítani kell a fénysugarat, hogy az x tengelyre helyezett tükörben visszaverődve, a visszaverődés után áthaladjon a $B(12; 2)$ ponton!



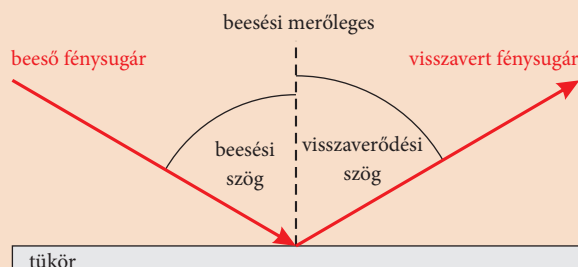
(Ahogy az ábra mutatja, a visszaverődő fénysugár ugyanakkora γ szöget zár be az x tengellyel, mint a beeső fénysugár. Fontos: a fizikában használt beesési szög, illetve visszaverődési szög nem az ábrán jelölt γ szögek! Lásd az oldal alján lévő ábrát!)

- 7. E2** Adottak a síkban az $A(2; 5)$, $B(0; -3)$, $C(7; 2)$ és $D(8; 6)$ pontok.

- a) Igazold, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz!
b) Írd fel a trapéz középvonalának egyenletét!

- 8. E2** Adottak a síkban az $A(-2; 5)$, $B(1; -3)$, $C(4; 0)$ és $D(1; 8)$ pontok.

- a) Igazold, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!
b) Írd fel a paralelogramma átlóinak egyenletét!





két vektor hajlásszögének kiszámítása a koordinátaikból, egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének koordinátagéometriai leírása

BEVEZETŐ

A geometriai feladatok megoldásában igen nagy szerepe van az egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének. A síkgeometriai és térgeometriai feladatok megoldása során gyakran alkalmazzuk a következő lépéseket:

- ▶ az egyenesre egy adott pontjában merőlegest állítunk;
- ▶ az egyenesre egy rajta kívüli pontból merőlegest állítunk;
- ▶ szakaszfelező merőlegest hozunk létre;
- ▶ az egyenessel párhuzamos egyenest veszünk fel egy, az egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül.

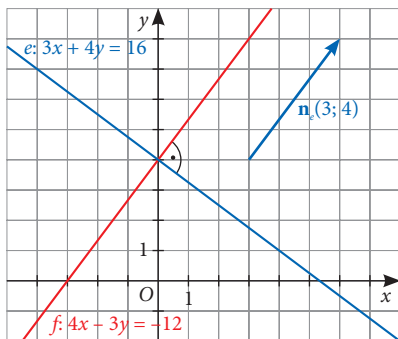
Ezeket az eljárásokat a megismert koordinátagéometriai eszköztárunk segítségével is meg tudjuk oldani.

KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Az e egyenes egyenlete: $3x + 4y = 16$. Írjuk fel az alábbi egyenesek egyenletét!
 - a) Az e egyenes egy tetszőleges pontjában állítsunk merőlegest az e -re!
 - b) A $P(3; 5)$ ponton keresztül állítsunk merőlegest az e -re!
 - c) A $P(3; 5)$ ponton keresztül húzzunk párhuzamost az e -vel!

Megoldás:

- a) Az e egyenes egy pontja az $A(0; 4)$ pont, mert az egyenes egyenletét igazgá teszi. Az e egyenes $\mathbf{n}_e(3; 4)$ normálvektora merőleges az e -re, ezért egyben a keresett egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_e(3; 4)$.

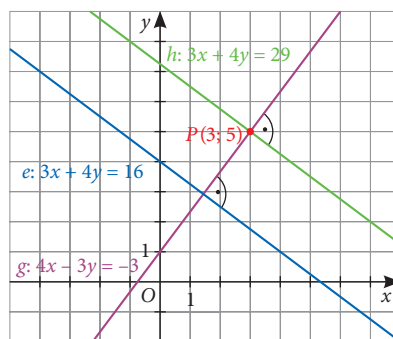


Az $A(0; 4)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}_f(3; 4)$ irányvektorú f egyenes egyenlete: $4x - 3y = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 4$, azaz $4x - 3y = -12$.

Ezzel tehát megadtuk egy olyan egyenes egyenletét, amely merőleges az e egyenesre.

- b) A P ponton átmenő, e -re merőleges g egyenes párhuzamos az a)-beli f egyenessel. Emiatt az f egyenes egyik normálvektora egyben a g egyenesnek is normálvektora. $\mathbf{n}_g = \mathbf{n}_f = (4; -3)$.

A g egyenes egyenlete: $4x - 3y = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5$, azaz $4x - 3y = -3$.



- c) A P ponton átmenő, e -vel párhuzamos h egyenes egyik normálvektora megegyezik az e egyenes egyik normálvektorával: $\mathbf{n}_h = \mathbf{n}_e = (3; 4)$. A h egyenes egyenlete tehát: $3x + 4y = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5$, azaz $3x + 4y = 29$.

Megjegyzés:

A feladat a) részében azt is felhasználhattuk volna, hogy ha egy f egyenes merőleges az $ax + by = c$ egyenletű e egyenesre, akkor az f egyenlete felírható $bx - ay = d$ alakban, mert az e egyenes egyik normálvektora az $(a; b)$ vektor, és az f egyenes normálvektorának választhatjuk ennek egyik 90° -os elforgatottját, például a $(b; -a)$ vektort.

2. Az e egyenes egyenlete $-3x + 5y = 12$. Az f egyenes egyenlete $10x + 6y = 7$, a g egyenes egyenlete pedig $12x - 20y = 13$. Mutassuk meg, hogy az f egyenes merőleges az e egyenesre, a g egyenes pedig párhuzamos az e -vel!

Megoldás:

Az egyenesek egyenletéből rendre a következő normálvektorokat olvashatjuk ki: $\mathbf{n}_e(-3; 5)$, $\mathbf{n}_f(10; 6)$ és $\mathbf{n}_g(12; -20)$. $\mathbf{n}_e \mathbf{n}_f = -3 \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$, tehát a két normálvektor merőleges

egymásra. Emiatt az előbbi két normálvektorra merőleges egy-egy egyenes is merőleges egymásra, tehát valóban igaz, hogy $f \perp e$.

$\mathbf{n}_g = (12; -20) = -4 \cdot (-3; 5) = -4 \cdot \mathbf{n}_e$, tehát a g egyenes egyik normálvektora párhuzamos az e egyik normálvektorával. Emiatt az előbbi két normálvektorra merőleges egy-egy egyenes is párhuzamos egymással.

Ezzel mindkét állítást beláttuk.

FELADATOK

1. E1 A térképen egy hosszú egyenes útszakasz egyenesének egyenlete $e: 3x - 4y = -7$. A térkép $P(-1; 5)$ pontja egy megfigyelőállomás helyét mutatja.

- Egy másik egyenes f út merőleges az e -re, és áthalad a P ponton. Írd fel f egyenesének egyenletét!
- Határozd meg az e egyenesnek a P ponthoz legközelebb lévő pontját!
- Egy másik megfigyelőpontot a P pont e egyenesére vonatkozó tükröképeként hoznak létre. Hol lesz ennek a P' állomásnak a pontos helye?

2. E1 Határozd meg az alábbi egyenesek egy-egy normál- vagy irányvektorának koordinátáit, és azok ismeretében határozd meg, hogy melyik egyenesek párhuzamosak egymással vagy merőlegesek egymásra! Ha találsz két egymással nem párhuzamos és nem merőleges egyenest, akkor számítsd ki azok hajlásszögét!

$$e: 5x - 2y = 6 \quad g: 2x + 5y = 7 \quad i: 10x - 4y = -7$$

$$f: 6x + 15y = 21 \quad h: 2x - 5y = -6 \quad j: 15x + 6y = -22$$

3. E1 Határozd meg az $A(-1; 5)$, $B(3; -1)$, $C(9; 3)$ csúcsú háromszög leghosszabb oldalához tartozó magasságának hosszát!

4. E2 Egy háromszög A csúcsán átmenő magasságvonala egyenlete $x + y = 5$. Az A csúcson átmenő súlyvonal egyenlete $9x + 5y = 21$.

A B csúcs koordinátái $B(-2; -2)$. Határozd meg a háromszög csúcsait az alábbi lépések segítségével (először készíts vázlatot)!

- Add meg az A csúcs koordinátáit!
- Írd fel a háromszög BC oldalának egyenletét!
- Add meg a BC oldal F felezőpontjának koordinátáit!
- Add meg a C csúcs koordinátáit!

5. E1 Számítsd ki annak a négyzetnek a területét és területét, amelyben két szemközti oldal egyenesének egyenlete $5x - 12y = 20$ és $5x - 12y = 10$.

6. E2 Egy háromszög egyik csúcsa $A(3; 4)$, két magasságvonala egyenlete $3x + 5y = 5$ és $2x + y = 1$.

- Határozd meg a magasságvonalak irányszögét!
- Határozd meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit!

7. E2 Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $2x - y = -9$ és $3x + 2y = -10$, átlóinak metszéspontja a $K(6; -7)$ pont.

- Határozd meg a paralelogramma csúcsainak koordinátáit!
- Határozd meg az oldalegyenesek irányszögét!
- Számítsd ki a paralelogramma szögeit!

ELMÉLET

1. Egyenesek merőlegessége, párhuzamossága

- Két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha normálvektoraik (vagy irányvektoraik) skaláris szorzata 0. Például a $8x + 3y = 7$ egyenes merőleges az $1,5x - 4y = 3$ egyenesre, mert $(8; 3) \cdot (1,5; -4) = 12 - 12 = 0$.
- Két egyenes pontosan akkor párhuzamos egymással, ha a normálvektoraik (vagy irányvektoraik) párhuzamosak, vagyis egymásnak nullától különböző skalárszorosai. Például a $8x + 3y = 7$ egyenes párhuzamos a $12x + 4,5y = 0$ egyenessel, mert $(12; 4,5) = 1,5 \cdot (8; 3)$.

2. Egyenesek hajlásszöge

Ha két egyenes egymással párhuzamos, akkor hajlásszögük nagysága 0° .

Ha két egyenes egymásra merőleges, akkor hajlásszögük nagysága 90° .

Ezekről eltérő esetekben az egyenesek hajlásszögét normálvektoraik (vagy irányvektoraik) hajlásszögének ismeretében tudjuk megadni:

- ▶ ha a két egyenes egy-egy normálvektorának (vagy irányvektorának) hajlásszöge α hegyesszög, akkor az egyenesek hajlásszöge α .
- ▶ ha a két egyenes egy-egy normálvektorának (vagy irányvektorának) hajlásszöge α tompaszög, akkor az egyenesek hajlásszöge $180^\circ - \alpha$.

3. Az egyenes iránytangensének, irányvektorának és normálvektorának kapcsolata

Tudjuk, hogy az $y = mx + b$ az egyenes egyenletének iránytényező alakja, ahol m az egyenes iránytangense (az egyenes α irányszögének a tangense: $m = \tan \alpha$), és az egyenes az y tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi.

Tekintsük az egyenes egyenletének $Ax + By = Ax_0 + By_0$ normálvektoros, valamint $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$ irányvektoros alakját.

Ez utóbbiakból $B \neq 0$, valamint $v_1 \neq 0$ feltételek mellett átrendezéssel adódik, hogy

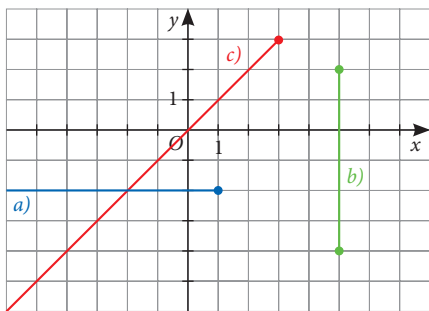
$$y = \frac{-A}{B}x + \frac{Ax_0 + By_0}{B}, \quad \text{valamint} \quad y = \frac{v_2}{v_1}x + \frac{-v_2x_0 + v_1y_0}{v_1}.$$

Amennyiben az előbbi három alak ugyanazon egyenes egyenlete, akkor fennáll, hogy $m = \frac{-A}{B}$, valamint $m = \frac{v_2}{v_1}$.

Ez azt jelenti, hogy az egyenes meredeksége (iránytangense), valamint az egyenes irányszöge meghatározható az egyenest jellemző vektorok koordinátáinak segítségével.

RÁADÁS

1. Hogyan jellemezhetnénk az ábrán látható ponthalmazok pontjainak koordinátáit?



Megoldás:

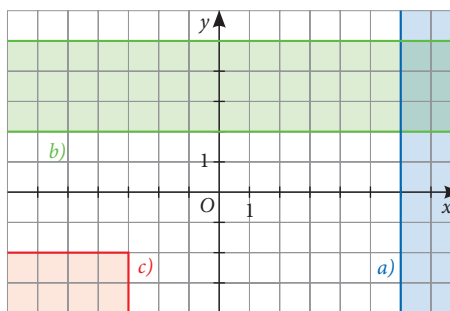
Az a) félegyenes az $y = -2$ egyenletű egyenes része, azonban az x koordináta itt már nem lehet nagyobb, mint 1, ezért a fenti egyenletet ki kell egészíteni az $x \leq 1$ egyenlőtlenséggel.

A félegyenest tehát pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek koordinátáira teljesül, hogy $x \leq 1$ és $y = -2$.

A b) szakaszt pontosan azok a pontok alkotják, amelyeknek koordinátáira teljesül: $x = 5$ és $-4 \leq y \leq 2$.

A c) félegyenes így adható meg: $x \leq 3$ és $y = x$.

2. Egyenlőtlenségek segítségével a sík összetettebb részhalmazait is jellemezhetjük. Milyen feltételeknek tesznek eleget az ábrán látható ponthalmazok pontjainak koordinátái?



Megoldás:

Azok a rendezett számpárok, amelyekre igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

- a) $x \geq 6$;
- b) $2 \leq y \leq 5$;
- c) $x \leq -3$ és $y \leq -2$.

FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2017)



Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzolóprogram segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0; 0)$, $B(30; 0)$, $C(30; 48)$, $D(0; 48)$ koordinátájú pontok adják meg.

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18; 24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút lesz majd.

Határozd meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsd ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát!

2. E1 Határozd meg, hogy milyen helyzetűek (párhuzamosak, merőlegesek, az előbbieket egyike sem) az alábbi egyenespárok!

- a) $e: -7x - 6y = 2$ és $f: 6x + 7y = -2$
 b) $e: 5x + 6y = 7$ és $f: 12x - 10y = 7$
 c) $e: -2x - 3y = 10$ és $f: 4x + 6y = 5$
 d) $e: -9x - 6y = 11$ és $f: -3x + 4,5y = -22$

3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2015)

Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16; 10)$, $B(2; 4)$, $C(10; 2)$.

- a) Számítsd ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő belső szögét!
 b) Határozd meg a K pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy a K pont egyenlő távolságra van A -tól, B -től és C -től.

4. E1 Milyen k valós paraméter esetén lesz az egyenletével megadott két egyenes, az

- a) $e: -2x - 5y = 2$ és az $f: kx + 7y = -2$ merőleges egymásra;
 b) $e: 5x + 3y = 7$ és az $f: 4x - ky = 6$ párhuzamos egymással;
 c) $e: 8x - 2y = 10$ és az $f: 4x - y = 4 + k^2$ egybeeső;
 d) $e: 2(k + 3)x + ky = 11$ és az $f: 4x + 2ky = k$ merőleges egymásra?

5. E1 Egy szimmetrikus trapéz alapjaira illeszkedő egyenesek egyenlete $7x - 2y = 5$, valamint $7x - 2y = -8$. A trapéz átlóinak metszéspontja a $K(1; 4)$ pont, a trapéz egyik csúcsa az $A(-2; -3)$ pont. Írd fel a trapéz szimmetriatengelyének és egyik átlójának egyenletét! Számítsd ki az átló irányszögét!

6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$ és $C(0; 8)$. Igazold, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű e egyenes felezi az ABC háromszög területét és kerületét is!

7. E2 Egy teljesen sík vidéken, a $3x + 2y = 24$ egyenletű Nyílegyes folyó közelében él Kukori és Kotkoda. A környékről készült térképen elhelyezett koordináta-rendszerben Kotkoda tartózkodási helyét a $K(3; 1)$, Kukori lakhelyét a $Q(-12; 17)$ pont jelzi. Kotkoda a folyó érintésével szeretne friss vizet szerezni, majd eljutni Kukori lakhelyéig. Melyik pontján érintse a folyót, hogy a lehető legrövidebb úton érjen célba?

8. E2 (Emelt szintű érettségi, 2010)

Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$$\begin{aligned} DA: 3x - 4y &= 20, & AB: 3x + 5y &= 20, \\ BC: 4x - 3y &= -12, & CD: 5x + 3y &= -15. \end{aligned}$$

- a) Igazold, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge!
 b) Bizonyítsd be, hogy ez a négyszög húrnégyszög!



kör egyenletének középponti alakja, teljes négyzetté alakítás



kör egyenletének általános alakja

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy grafikus az egyik geometriai szoftver (pl. *GeoGebra*) parancssorába az alábbi kétismeretlenes egyenleteket írta:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 30 = 0$.

Vajon milyen ponthalmaz képe jelent meg az egyes esetekben a képernyőn? Próbáld ki te is, hogy a megadott egyenletek beírásával milyen alakzatokat rajzol ki a számítógép!

Megoldás:

- a) Csoportosítsuk az egyenlet bal oldalán lévő tagokat, és adjunk 20-at mindkét oldalhoz: $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$.

Alkalmazzuk a teljes négyzetté kiegészítés módszerét!

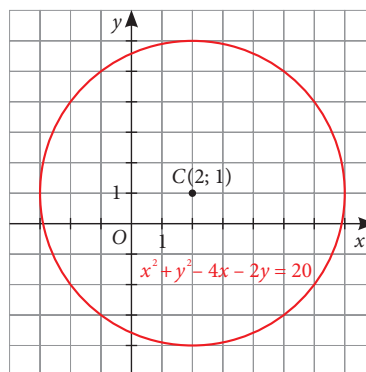
Az egyenlet első két tagja megegyezik az $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ kifejezés első két tagjával. Az egyenlet második két tagja megegyezik az $(y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1$ kifejezés első két tagjával. Vagyis:

$$(x^2 - 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) = 20.$$

Ebből ezt az alakot kapjuk:

$$(x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 20, \text{ amit rendezés után az } (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \text{ alakban is írhatunk.}$$

Az $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$ egyenlettel tehát a $C(2; 1)$ középpontú, $r = 5$ sugarú kört láthatjuk a képernyőn.



- b) Az $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$ egyenlet $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$ alakra rendezhető.

Mivel a bal oldalon két valós szám négyzete szerepel, ezért összegük csak akkor 0, ha $x = -3$ és $y = 1$, így az alakzat a $(-3; 1)$ pont.

Tehát ebben az esetben egy pont jelenik meg a képernyőn.

- c) Az $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 30 = 0$ egyenlet $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = -1$ alakra rendezhető.

Mivel a bal oldalon két valós szám négyzete szerepel, ezért összegük nem lehet -1 , így egyetlen olyan pont sincs a síkon, amely az egyenletnek megfelelne.

Tehát ebben az esetben semmilyen alakzat nem jelenik meg a képernyőn.

ELMÉLET

Tétel: A kör egyenlete

A $C(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenletének középponti (centrális) alakja:**

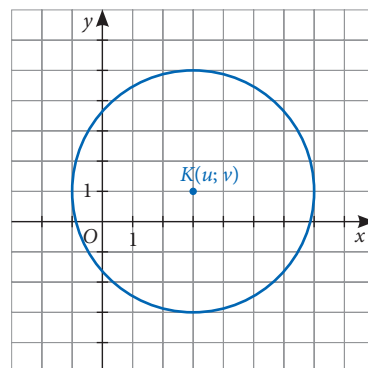
$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2, \text{ ahol } u; v \in \mathbb{R}; r \in \mathbb{R}^+.$$

Bizonyítás:

A $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor pontja a körnek, ha sugárnyi távolságra van a kör középpontjától, tehát ha $\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = r$.

Mivel r pozitív, így ez akkor és csak akkor teljesül, ha $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

Ezzel bizonyítottuk az állítást.



Ha az $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ egyenletben felbontjuk a zárójeleket és kivonunk mindkét oldalból r^2 -et, akkor az

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$$

alakhoz jutunk, amely általánosan

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

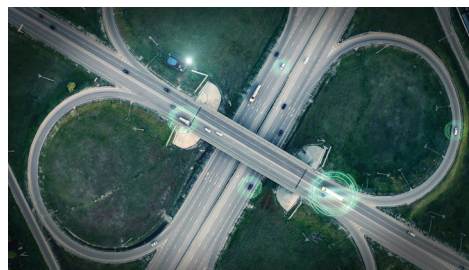
formában írható, ahol $a; b; c \in \mathbb{R}$. Ez a **kör egyenletének általános alakja**.

Például: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$



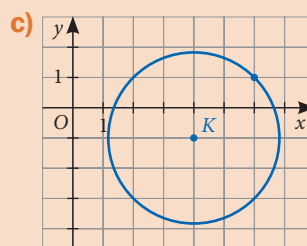
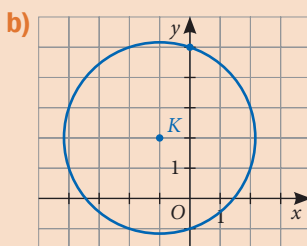
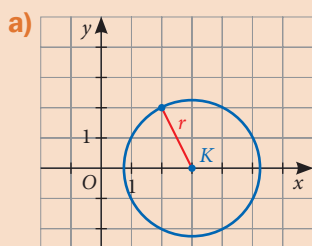
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4,$$

átrendezve: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ (ebben az esetben az előbbi jelölésekkel $a = -6, b = -2, c = 6$).



FELADATOK

- 1. E1** Az alábbi ábrákon jelöltünk két-két rácspontot: az egyik a kör középpontja, a másik a körvonal egy pontja. Határozd meg a kör középpontjának koordinátáit, és a kör sugarának hosszát, majd írd fel a körök egyenletének középponti és általános alakját!



- 2. E1** Írd fel három olyan kör egyenletét, amely koncentrikus az $x^2 + y^2 + 10x - 7y + 31 = 0$ körrel!

(Koncentrikusnak nevezünk két kört, ha azonos a középpontjuk.)

- 3. E1** Kört adnak-e meg a koordinátasíkon az alábbi egyenletek? Ha igen, akkor add meg a kör középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát!

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4y + 13 = 0$

- 4. E1** Adott az $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 31 = 0$ egyenletű kör.

a) Igazold, hogy a $P(-2; 7)$ pont rajta van a körön!

b) Add meg a kör $P(-2; 7)$ ponttal átellenes pontjának koordinátáit!

- 5. E2** Határozd meg az $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ egyenletű kör $(5; -7)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenletét!

- 6. E2** Melyik valós számot írhatjuk a c helyére, hogy az $x^2 + y^2 + 10x - 7y + c = 0$ egyenlettel

a) egy pont egyenletét kapjuk;

b) egy kör egyenletét kapjuk;

c) olyan egyenletet kapjunk, amelynek egyetlen pont koordinátái sem felelnek meg?

- 7. E2** Egy animáció elkészítésekor a $\mathbf{v}(-2; 7)$ vektorral eltolják a $k: x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ egyenletű kört.

a) Add meg az eredeti kör két pontját! Jelöld ezeket a pontokat P -vel, Q -val!

b) Írd fel az eltolás után kapott kör k' egyenletét!

c) Számítsd ki az a) részben megadott P és Q pont $\mathbf{v}(-2; 7)$ vektorral való eltolással kapott képének (P' és Q' pont) koordinátáit, és mutasd meg, hogy ezek a pontok illeszkednek a k' egyenletű körre!

- 8. E2** Milyen feltételt kell teljesítenie az $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ egyenletben szereplő $a; b; c$ paramétereknek ahhoz, hogy az egyenlet valóban kör egyenlete legyen?

Fejezd ki az $a; b; c \in \mathbb{R}$ paraméterek segítségével a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ egyenletű körpályán mozgó test felé közelít a körpálya síkjában az $x - 7y = 21$ egyenletű egyenes vonal mentén repülő tárgy.

Fennáll-e a veszélye annak, hogy a két tárgy összeütközik (vagyis metszi vagy érinti egymást a két test pályája), vagy elkerülik egymást?

Megoldás:

A két pályagörbe metszi vagy érinti egymást, ha van a síknak olyan pontja, amely illeszkedik mindkét görbére. Keressük tehát azokat az x és y pontkoordinátákat, amelyek igazgá teszik mindkét alakzat egyenletét. Ehhez oldjuk meg az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0 \\ x - 7y = 21 \end{cases}$$

egyenletekből álló egyenletrendszert!

A második egyenletből

$$x = 7y + 21.$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$(7y + 21)^2 + y^2 + 8(7y + 21) - 9 = 0.$$

A műveletek elvégzése és az egyenlet rendezése után:

$$y^2 + 7y + 12 = 0,$$

ebből $y_1 = -3$, valamint $y_2 = -4$.

Visszahelyettesítve ezeket az $x = 7y + 21$ egyenletbe, $x_1 = 0$, valamint $x_2 = -7$ adódik.

Ezzel azt kaptuk, hogy a két pályagörbének van két közös pontja: $P_1(0; -3)$ és $P_2(-7; -4)$.

Tehát a két test pályája metszi egymást, ezért fennáll a veszélye a két test összeütközésének (de remélhetőleg nem lesznek egy helyen, egy időben).

2. Adott az $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 13$ egyenletű kör.

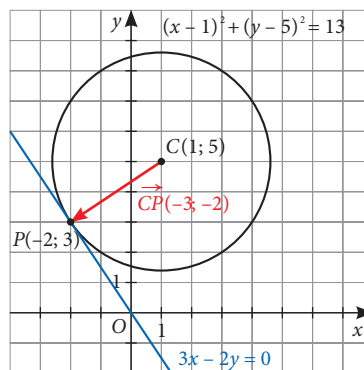
- a) Mutassuk meg, hogy a $P(-2; 3)$ pont rajta van a körön!
b) Írjuk fel a P pontban a körhöz húzható érintő egyenletét!

Megoldás:

- a) A P koordinátáit behelyettesítve kapjuk:

$$(-2 - 1)^2 + (3 - 5)^2 = 13, \quad (-3)^2 + (-2)^2 = 13, \quad \text{vagyis} \quad 13 = 13. \quad \text{Ez igaz, tehát a } P \text{ valóban rajta van a körön.}$$

- b) Az érintő egyenletének felírásához felhasználjuk azt a tényt, hogy az érintési pontba vezető sugár merőleges az érintőre. Tehát a kör $C(1; 5)$ középpontjából a P pontba mutató $\vec{CP}(-3; -2)$ vektor éppen az érintő egyik normálvektora. Egyszerűbb egyenletet kapunk, ha a $\vec{CP}$ helyett az ellentettjét, a $(3; 2)$ vektort választjuk normálvektornak. Ezzel az érintő egyenlete: $3x + 2y = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3$, vagyis $3x + 2y = 0$.



FELADATOK

1. **E1** Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja a $K(2; -3)$ pont, és amely érinti
a) az x tengelyt;
b) az y tengelyt!
2. **E1** Milyen a kölcsönös helyzete az $(x + 6)^2 + (y + 4)^2 = 20$ egyenletű körnek és az $x - y = -4$ egyenletű egyenesnek?

3. **E1** A koordináta-rendszerben az FGH háromszög beírt körének egyenlete:

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0.$$

A háromszög oldalai ezt a kört $P(3; 0)$, $Q(6; 9)$, illetve $R(-2; 5)$ pontokban érintik.

- a) Határozd meg a kör középpontját és sugarát!
b) Írd fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét!

4. E1 Az $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$ egyenletű kör az x tengelyt a $P(-5; 0)$ és a $Q(1; 0)$ pontban metszi.

- a) Melyik pont ennek a körnek a középpontja?
b) Írd fel a kör P -beli és Q -beli érintőjének az egyenletét!

5. E1 Az $ABCD$ négyzet minden oldala érinti az

$$x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0$$

egyenletű kört. Az AB oldal érintési pontja a $P(1; 11)$ pont.

- a) Határozd meg a másik három érintési pontot!
b) Írd fel a négyzet oldalegyeneseinek egyenletét!

6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2018)

Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.

- a) Igazold, hogy az $E(-7; 5)$ pont rajta van a k körön!
b) Írd fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét!
c) Határozd meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja!

7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2009)

Jelölje e azokat az egyeneseket, amelyeknek egyenlete $2x + y = b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú, 4 egység sugarú körnek?

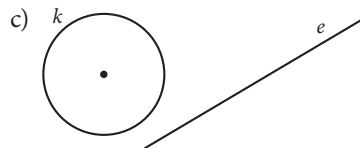
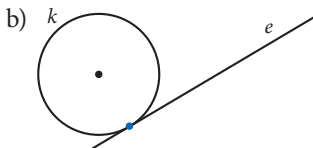
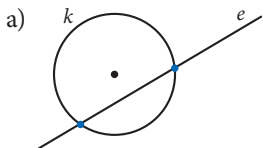
ELMÉLET

A kör és az egyenes kölcsönös helyzete

A két ponthalmaz közös pontjainak meghatározásához a két ponthalmaz egyenletéből álló egyenletrendszert oldjuk meg. Az egyenletrendszer megoldásainak számából tudunk következtetni a két ponthalmaz kölcsönös helyzetére.

A kölcsönös helyzetek osztályozhatók az egyenes és a kör középpontja közötti távolság alapján is.

	A kör és egyenes kölcsönös helyzetének megnevezése	Az egyenesnek a kör középpontjától való távolsága	A közös pontok száma	A ponthalmazok egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásainak száma	A ponthalmazok egyenleteiből adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa
a)	metszik egymást	kisebb, mint a kör sugarának hossza	2	2	pozitív
b)	érintik egymást	megegyezik a kör sugarának hosszával	1	1	nulla
c)	elkerülik egymást	nagyobb, mint a kör sugarának hossza	0	0	negatív



RÁADÁS

Bebizonyítható, hogy a $P(x_0; y_0)$ pont és az $Ax + By + C = 0$ egyenletű e egyenes $d(P; e)$ távolsága kiszámítható a

$$d(P; e) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{úgynevezett távolságképlet) segítségével.}$$

Egy kör középpontjának és egy adott egyenesnek a távolságát meghatározhatjuk e képlet segítségével.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Adott két kör az egyenletével:

a) $k_1: (x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$ és $k_2: (x-2)^2 + (y+5)^2 = 4$;

b) $k_1: x^2 + (y-1)^2 = 26$ és $k_2: (x-9)^2 + (y+5)^2 = 65$.

Van-e közös pontja a köröknek? Ha igen, melyek ezek?

Megoldás:

- a) A körök középpontjai: $C_1(-4; -1)$; $C_2(2; -5)$, a körök sugara $r_1 = 3$, valamint $r_2 = 2$.

A középpontok távolsága

$$C_1C_2 = \sqrt{(2+4)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{52},$$

ami nagyobb a két sugár hosszának összegénél ($2+3 = \sqrt{25} < \sqrt{52}$), ezért az egyik kör a másikon kívül helyezkedik el, tehát nincs közös pontjuk.

- b) A körök középpontjai: $C_1(0; 1)$; $C_2(9; -5)$, a körök sugara $r_1 = \sqrt{26}$, valamint $r_2 = \sqrt{65}$. A középpontok távolsága $C_1C_2 = \sqrt{(9-0)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{117}$, ami kisebb a két sugár hosszának összegénél ($\sqrt{117} \approx 10,82$ és $\sqrt{26} + \sqrt{65} \approx 13,16$), valamint nagyobb a nagyobb sugár és a kisebb sugár hosszának különbségénél ($\sqrt{65} - \sqrt{26} < \sqrt{117}$), ezért a körök metszik egymást, tehát van közös pontjuk.

A közös pontok meghatározásához oldjuk meg az

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 26 \\ (x-9)^2 + (y+5)^2 = 65 \end{cases}$$

egyenletrendszert. A műveletek elvégzése és az egyenletek rendezése után kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 - 18x + 10y + 41 = 0. \end{cases}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsó egyenletet! A két egyenlet különbsége a legegyszerűbb alakban: $3x - 2y - 11 = 0$.

Ebből x kifejezhető: $x = \frac{2}{3}y + \frac{11}{3}$.

Ezt helyettesítsük be a k_1 kör egyenletébe, majd végezzük el a négyzetre emelést és rendezzük az egyenletet! Azt kapjuk, hogy $y^2 + 2y - 8 = 0$.

Az egyenlet diszkriminánsa pozitív, ezért van két különböző valós gyöke: $y_1 = -4$, $y_2 = 2$.

Visszahelyettesítéssel kapjuk a megfelelő első koordináták értékét: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

A két körnek tehát van két közös pontja: $P_1(-4; 1)$ és $P_2(2; 5)$.

ELMÉLET

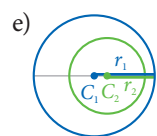
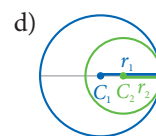
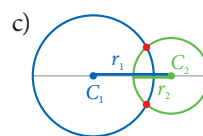
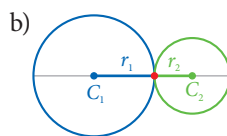
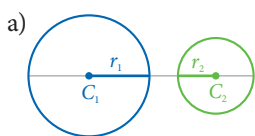
Két kör kölcsönös helyzete

Két kör közös pontjainak meghatározásához a két ponthalmaz egyenletéből álló egyenletrendszert kell megoldani:

1. lépés: ha nem 1 a másodfokú tagok együtthatója, akkor az egyenletek leosztásával elérjük, hogy 1 legyen;
2. lépés: kivonjuk egymásból a körök egyenletét;
3. lépés: a különbségként kapott elsőfokú egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent;
4. lépés: a kapott kifejezést visszahelyettesítjük valamelyik kör egyenletébe;
5. lépés: megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet (amennyiben nem kapunk megoldást, a két körnek nincs közös pontja);
6. lépés: amennyiben az 5. lépésben kapunk valós gyököket, akkor visszahelyettesítéssel (célszerű a különbségként kapott elsőfokú kifejezésbe) kiszámítjuk a másik ismeretlent.

A körök kölcsönös helyzete meghatározható a középpontok távolsága és a sugarak ismeretében. (Ezt a vizsgálatot érdemes megtenni a körök metszéspontjainak kiszámítása előtt.)

	A két kör kölcsönös helyzetének megnevezése	A két kör közép-pontjának (C_1 és C_2) távolsága és a körök sugarainak (r_1 és r_2) kapcsolata	A közös pontok száma	A körök egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásainak száma	A körök egyenleteiből felírt egyenletrendszer megoldása során adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa
a)	elkerülik egymást, az egyik kör a másikon kívül van	$r_1 + r_2 < C_1C_2$	0	0	negatív
b)	kívülről érintik egymást	$r_1 + r_2 = C_1C_2$	1	1	nulla
c)	metszik egymást	$ r_1 - r_2 < C_1C_2$ és $C_1C_2 < r_1 + r_2$	2	2	pozitív
d)	belülről érintik egymást	$C_1C_2 = r_1 - r_2 \neq 0$	1	1	nulla
e)	elkerülik egymást, az egyik kör a másikon belül van	$C_1C_2 < r_1 - r_2 \neq 0$	0	0	negatív



Megjegyzés:

Amennyiben a körök két pontban metszik egymást, az egyenleteik különbségeként adódó egyenlet megadja a két kör közös szelőjének egyenletét. Ha ugyanis vannak olyan pontok, amelyeknek a koordinátái igazsá teszik mindkét kör egyenletét, akkor ki kell elégíteniük a két kör egyenletének különbségéből adódó egyenletet is.

Ha a körök nem metszik egymást, akkor az egyenleteik különbségeként adódó egyenlet megadja a két kör hatványvonalának egyenletét. A hatványvonal azon pontok halmaza a síkon, melyekből azonos hosszúságú érintő szakaszok húzhatók a körökhöz.

FELADATOK

1. E1 Add meg két olyan, különböző sugarú körnek az egyenletét, amelyek egymást a $P_1(-5; 4)$ és $P_2(-1; 0)$ pontokban metszik!

2. E1 Hány olyan pontja van a síknak, amely 4 egység távolságra van az $A(2; -3)$ ponttól, és ugyanakkor $\sqrt{40}$ egység távolságra van a $B(8; 3)$ ponttól? Melyek ezek a pontok?

3. E1 Határozd meg az $(x + 1)^2 + y^2 = 20$ és az $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 50$ egyenletű körök közös húrjának hosszát!

4. E1

a) Igazold, hogy az $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ egyenletű körnek a $P_1(2; -1)$ pont belső pontja!

b) Írd fel annak a $(2; -1)$ középpontú körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ egyenletű kört belülről érinti!

5. E1 Hány olyan 2 egység sugarú kör van, amely kívülről érinti az $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ egyenletű kört? Milyen pontthalmazt alkotnak a feltételt teljesítő körök középpontjai? Írd fel a pontthalmaz egyenletét!



parabola, a parabola egyenlete (ha szimmetriatengelye az y tengely és tengelypontja az origó)

BEVEZETŐ

„Repül a nehéz kő: ki tudja, hol áll meg?
Ki tudja, hol áll meg s kit hogyan talál meg?”
(Arany János: Toldi – Harmadik ének)

Az idézet kapcsán felmerülhetnek újabb kérdések:

- ▶ ki tudja, milyen pályán mozog a kő?
- ▶ ki tudja meghatározni a pályagörbe matematikai alakját?

Válasz:

Ha a léghellenállástól eltekintünk, akkor egy ferdén elhajított test parabola alakú pályán mozog. Közelítőleg ilyen pályát ír le az elhajított kő, a szabadrúgáskor elrúgott labda, az ágyúból és puskából kilőtt lövedék (ez utóbbiak pályája az úgynevezett ballisztikus pálya).



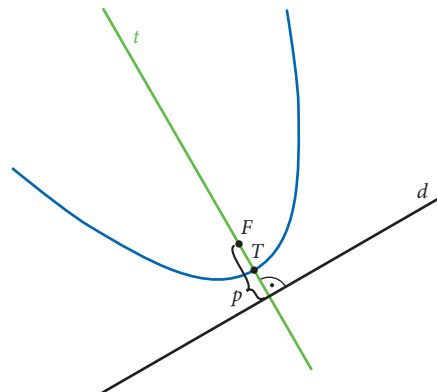
ELMÉLET

1. A parabola

Definíció: A **parabola** azoknak a pontoknak a halmaza (mértani helye) a síkban, amelyek a sík egy adott egyenesétől és a sík egy adott, az egyenesre nem illeszkedő pontjától egyenlő távolságra vannak.

Az egyenes a parabola **vezéregyenes**e, melynek jele d , a pont a parabola **fókuszpontja**, melynek jele F . Az adott egyenes és az adott pont távolsága a parabola **paramétere**, melynek jele: p .

A parabola tengelyesen szimmetrikus pontthalmaz, szimmetriatengelye illeszkedik a fókuszpontra és merőleges a vezéregyenesre. A parabola szimmetriatengelyre illeszkedő pontja a parabola **tengelypontja**, melynek jele T .



2. A parabola egyenlete

A derékszögű koordináta-rendszerben az $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ fókuszponttal és $d: y = -\frac{p}{2}$ egyenletű vezéregyenessel megadott parabola egyenlete $y = \frac{1}{2p}x^2$.

Bizonyítás:

Legyen a parabola fókusza a koordináta-rendszer $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ pontja, vezéregyenesre pedig az $y = -\frac{p}{2}$ egyenletű egyenes.

A sík egy tetszőleges $P(x; y)$ pontjából állítsunk merőlegest a vezéregyenesre! Ez a merőleges a vezéregyenesre az $M\left(x; -\frac{p}{2}\right)$ pontban metszi. A vezéregyenes és a P pont távolsága tehát $PM = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$.

A P pont és a fókuszpont távolsága: $FP = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$.

A $P(x; y)$ pontosan akkor van rajta a parabolán, ha $PM = FP$, azaz $\sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$.

Ez tehát a parabola egyenletének egyik alakja. Egyszerűbb alakra is juthatunk, ha ekvivalens átalakításokat végzünk. A négyzetre emelés most ekvivalens átalakítás, hiszen mindkét oldalon nemnegatív számok vannak, és a négyzetgyök alatt is mindkét oldalon nemnegatív számok állnak.

Az $\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$ egyenletben elvégezve a kéttagúak négyzetre emelését:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}.$$

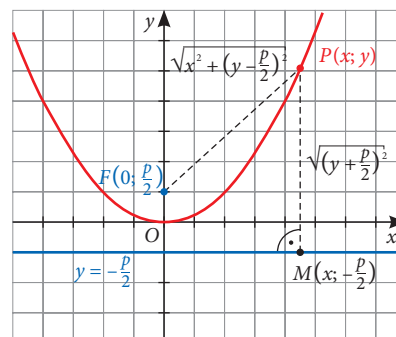
Rendezés után kapjuk: $y = \frac{1}{2p}x^2$.

Eredményünk azt bizonyítja, hogy az $x \mapsto \frac{1}{2p}x^2$ másodfokú függvény grafikonja

egy olyan parabola, amelynek fókusza az $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ pont, vezéregyenesé pedig az

$y = -\frac{p}{2}$ egyenletű egyenes.

A másodfokú függvények vizsgálatánál elfogadtuk, de a fentiekhez hasonlóan bizonyíthatjuk is, hogy minden, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény grafikonja parabola.



Megjegyzés: Hasonlóan belátható, hogy az $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ fókuszponttal és $d: y = -\frac{p}{2}$ egyenletű vezéregyenessel megadott parabola egyenlete $y = -\frac{1}{2p}x^2$.

FELADATOK

1. E1 Írd fel az origó tengelypontú parabola egyenletét, ha

a) szimmetriatengelye az y tengely és fókuszpontja $F(0; 4)$;

b) vezéregyenesének egyenlete $d: y = -3$;

c) szimmetriatengelye az y tengely és fókuszpontja $F(0; -1)$;

d) vezéregyenesének egyenlete $d: y = 7$.

2. E1 Határozd meg a parabola fókuszpontjának koordinátáit és vezéregyenesének egyenletét, ha a parabola egyenlete

a) $y = \frac{1}{10}x^2$; **c)** $y = \frac{3}{8}x^2$;

b) $y = -2x^2$; **d)** $y = 0,6x^2$.

3. E1 Hol metszik az $y = 3x^2$ egyenletű parabolát a következő egyenletekkel megadott egyenesek?

$e: x = 2$

$g: y = 12x$

$f: y = 12$

$h: 3x - y = -6$

4. E1 Hol metszik az $y = -4x^2$ egyenletű parabolát az alábbi egyenletekkel megadott egyenesek?

$e: x = -3$

$g: y = 6x$

$f: y = -36$

$h: 4x - y = -8$

5. E2 Egy alagút bejáratának íve olyan parabola, amely alul 10 méter széles, és tudjuk, hogy a parabola paramétere 0,8 méter. Milyen magas az alagút?

6. E2 Egy szabadrúgás során a parabolapályán mozgó labda az elrúgás helyétől 24 méter távolságban érne földet, ha mozgását addig semmi nem akadályozná. Lehet-e gól ebből a rúgásból, ha tudjuk, hogy a rúgás helyétől a 2,5 méter magas kapu 20 méterre van, és a labda pályájának legmagasabb pontja 3,2 méter?

FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2005)

Egy háromszög két csúcsa $A(8; 2)$, $B(-1; 5)$, a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

- a) Add meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit!
- b) Add meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

2. E1 (Emelt szintű érettségi, 2011)

Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2; 5)$ pontra, valamint az $x + y = 4$ és az $x + y = 6$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3.

3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2008)

Egy háromszög két oldalegyenese: az x tengely, valamint az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Írd fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú, és

- a) az alapja az x tengelyre illeszkedik;
- b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei!

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Egy $ABCD$ négyzet A csúcsa a koordináta-rendszer y tengelyére, szomszédos B csúcsa pedig a koordináta-rendszer x tengelyére illeszkedik.

- a) Bizonyítsd be, hogy a négyzet K középpontjának koordinátái vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei!
- b) Egy ilyen négyzet középpontja a $(7; 7)$ pont. A négyzet oldala 10 egység hosszú. Számítsd ki a négyzet koordinátatengelyekre illeszkedő két csúcsának koordinátáit!

5. E2 (Emelt szintű érettségi, 2016)

- a) Add meg az $5x^2 + 5y^2 - 14x + 22y - 11 = 0$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

Adott a k kör, amelynek középpontja a $K(-5; 7)$ pont, és a sugara 10 egység. Ezen a körön belül adott az $A(-4; 14)$ pont.

- b) Írd fel annak az A ponton áthaladó e egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a KA szakaszra!
- c) Határozd meg a k kör e egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!
- d) A koordináta-rendszer $P(x; y)$ pontját rácspontnak nevezzük, ha x és y egész számok. Hány rácsponton megy át a k körvonal?

6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2005)

Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1; -2)$.

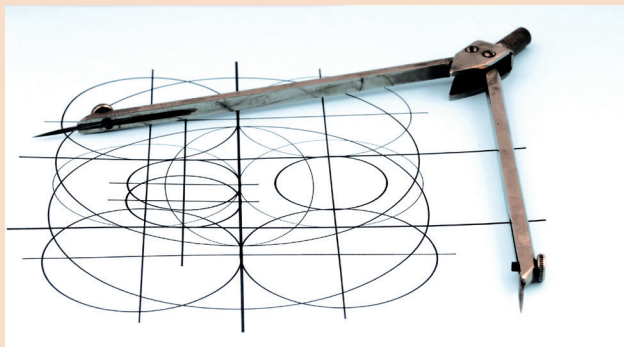
Számítsd ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit!

Pontos értékekkel számolj!

7. E2* (Emelt szintű érettségi, 2005)

Az $ABCD$ húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x - y = 4$. A trapéz AB alapjának egy belső pontja $P(-5; 1)$, BC szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység.

Határozd meg a trapéz csúcsainak koordinátáit!



(D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás)

VEKTOROK, VEKTORMŰVELETEK, KOORDINÁTÁKKAL MEGADOTT VEKTOROK ESETÉN $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ ÉS $\mathbf{c}(c_1; c_2)$ VEKTOROK, k VALÓS SZÁM

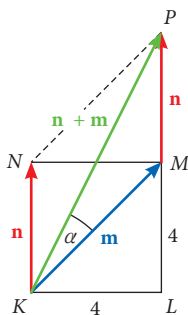
	Műveletek vektorokkal	$\mathbf{a} + \mathbf{b}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ $\mathbf{a} - \mathbf{b}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ $k \cdot \mathbf{a}(k \cdot a_1; k \cdot a_2)$
	Vektor merőleges elforgatottjai	-90° -kal: $\mathbf{a}_\perp(a_2; -a_1)$ $+90^\circ$ -kal: $\mathbf{a}_\perp^*(-a_2; a_1)$
	Vektor hossza	$ \mathbf{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
T	Egyértelmű vektorfelbontási tétel	Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a síknak két nem párhuzamos vektora, melyek egyike sem nullvektor! Ekkor a sík egy tetszőleges $\mathbf{c}$ vektora egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre.
M	$\mathbf{c}$ vektor felbontása adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre ($\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$)	Keressük azokat a λ és μ valós számokat, amelyekre $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}.$ A koordináták segítségével felírható a következő egyenletrendszer: $\begin{cases} c_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases}$ Az egyenletrendszer megoldásával meghatározható λ és μ.
D	Vektorok skaláris szorzata	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \cos \alpha$ $(\alpha \text{ az } \mathbf{a} \text{ és } \mathbf{b} \text{ hajlásszögét jelöli})$
T	Skaláris szorzat és a merőlegesség kapcsolata	Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.
T	Vektorok skaláris szorzata koordinátákkal	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
	Vektorok hajlásszöge (α)	$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

PONTOK ÉS EGYENESEK A KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

T	Szakasz felezőpontja	$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2)$ végpontok esetén $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
---	----------------------	---

T	Szakasz harmadolópontjai	$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2)$ végpontok esetén az A -hoz közelebb eső: $H_A\left(\frac{2a_1+b_1}{3}; \frac{2a_2+b_2}{3}\right)$ a B -hez közelebb eső: $H_B\left(\frac{a_1+2b_1}{3}; \frac{a_2+2b_2}{3}\right)$
T	A háromszög súlypontja	$A(a_1; a_2), B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$ csúcspontok esetén $S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$
D	Egyenes normálvektora	Egy egyenesre merőleges vektort, ha az nem nullvektor, az egyenes normálvektorának nevezzük.
T	Az egyenes egyenletének normálvektoros alakja	Az egyenes egy adott $P(x_0; y_0)$ pontja és egy $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektora esetén $Ax + By = Ax_0 + By_0$.
D	Egyenes irányvektora	Ha egy vektor párhuzamos egy adott egyenessel és nem nullvektor, akkor ezt az egyenes irányvektorának nevezzük.
T	Az egyenes egyenletének irányvektoros alakja	Az egyenes egy adott $P(x_0; y_0)$ pontja és egy $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektora esetén $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$.
T	Az egyenes egyenletének iránytényezős alakja	Az egyenes egy adott $P(x_0; y_0)$ pontja és az egyenes m meredeksége esetén $m(x - x_0) = y - y_0$; az egyenesre illeszkedő $P(0; b)$ pont és m meredekség esetén $y = mx + b$.
	Egyenesek párhuzamosságának, merőlegességének kapcsolata a normálvektoraikkal, valamint meredekségükkel	Két egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha normálvektoraik párhuzamosak, valamint ha meredekségük egyenlő. Két egyenes pontosan akkor merőleges, ha normálvektoraik merőlegesek egymásra, azaz normálvektoraik skaláris szorzata 0, valamint ha meredekségeik szorzata -1 .
KÖR ÉS PARABOLA		
T	A kör egyenletének középponti (centrális) alakja	A $C(u; v)$ középpont, r sugár esetén $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.
T	A kör egyenletének általános alakja	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, ahol $a; b; c \in \mathbb{R}$
D	Parabola	A parabola azoknak a pontoknak a halmaza (mértani helye) a síkban, amelyek a sík egy adott egyenesétől és a sík egy adott, az egyenesre nem illeszkedő pontjától egyenlő távolságra vannak.
T	A parabola egyenlete	$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ fókuszpont és $d: y = -\frac{p}{2}$ egyenletű vezéregyenes esetén $y = \frac{1}{2p}x^2$.
M	Ponthalmazok (alakzatok) metszéspontjainak meghatározása	Az alakzatok egyenletéből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásai adják a közös pontok koordinátáit.

- 1. E1** A 4 egység oldalú $KL MN$ négyzetben a K -ból M -be mutató vektort $\mathbf{m}$ -mel, a K -ból N -be mutató vektort $\mathbf{n}$ -nel jelöltük. Számítsd ki az $(\mathbf{m} + \mathbf{n})\mathbf{m}$ skaláris szorzatot!



- 2. E1** A szabályos $ABCDEF$ hatszög középpontja a $K(2; 2)$ pont, az A csúcs koordinátái $(-1; -1)$.

Készíts vázlatrajzot erről a hatszögről! Jelöld az A -ból a B -be mutató vektort $\mathbf{b}$ -vel, az A -ból a D -be mutató vektort $\mathbf{d}$ -vel! A többi csúcs koordinátáinak kiszámítása nélkül állapítsd meg, hogy mennyi

- a)** $|\mathbf{b}|$; **b)** $|\mathbf{d}|$; **c)** $(\mathbf{b} + \mathbf{d})(\mathbf{b} - \mathbf{d})$.

- 3. E1** Végezd el az alábbi skaláris szorzásokat!

- a)** $(2\mathbf{i} + \mathbf{j})\mathbf{i}$; **c)** $(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})(2\mathbf{j})$;
b) $-3\mathbf{j}(2\mathbf{j} - 9\mathbf{i})$; **b)** $3,4\mathbf{i}(1,5\mathbf{i} + 2,7\mathbf{j})$.

- 4. E1** Adott a sík $\mathbf{a}(4; -2)$, $\mathbf{b}(-3; 7)$ és $\mathbf{c}(-1; 30)$ vektora. Írd fel a $\mathbf{c}$ vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos vektorok összegeként!

- 5. E1** Adott az $A(2; -9)$ és $B(3; -4)$ pont.

- a)** Határozd meg az AB szakasz azon P pontjának koordinátáit, amelyre teljesül az $AP : BP = 1 : 5$ arány!
b) Hosszabbítsd meg az AB szakaszt az A ponton túl az eredeti szakasz hosszának kétszeresével, és jelöld Q -val az így kapott pontot! Határozd meg a Q pont koordinátáit!

- 6. E1** Adva van a koordináta-rendszerben két pont: $A(7; 8)$ és $B(2; -5)$.

- a)** Add meg az origóból a pontokba mutató vektorok skaláris szorzatát!
b) Mekkora szöget zár be egymással az origóból az A és a B pontba mutató két vektor?

- 7. E1** Adott a koordináta-rendszerben három pont: $A(3; 1)$; $B(5; 0)$ és $C(6; 7)$.

- a)** Add meg az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok skaláris szorzatát!
b) Add meg az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok által bezárt szöveget!
c) Mekkora szöget zár be egymással az $\overrightarrow{AC}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektor?
d) Add meg az ABC háromszög belső szögeit!

- 8. E1** Adva van az $A(-5; 2)$ és $B(10; 4)$ pont. Add meg az alábbi pontok koordinátáit! Megoldásodat ellenőrizd a koordináta-rendszerben!

- a)** F az AB szakasz felezőpontja;
b) G és H az AB szakasz harmadolópontjai;
c) K és L az AB szakasz hatadolópontjai közül az A -hoz és a B -hez legközelebb eső hatadolópontok.

- 9. E1** Egy háromszög csúcsai rendre $A(3; 4)$, $B(2; 6)$, $C(-2; 5)$.

- a)** Hol van a súlypontja?
b) A skaláris szorzat segítségével határozd meg, mekkorák a háromszög szögei!

- 10. E1** Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely

- a)** illeszkedik a $P(4; 1)$ pontra és merőleges az $\overrightarrow{AB}(11; -3)$ vektorra;
b) illeszkedik a $Q(-1; 9)$ pontra és merőleges az $\mathbf{n}(5; -7)$ vektorra!

- 11. E1** Add meg a következő egyenesek két-két normálvektorának és két-két pontjának koordinátáit!

$$e: 2x - 3y = 12 \quad f: 0 = 5x - 3 \quad g: y = 7x - 5$$

- 12. E1** Egy húrtrapéz hosszabbik alapjának végpontjai $A(5; 8)$ és $B(-7; -4)$. Írd fel a trapéz szimmetriatengelyének egyenletét!

- 13. E1** Írd fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha a háromszög csúcsai

- a)** $A(-21; 14)$, $B(7; -7)$ és $C(14; 35)$;
b) $A(20; 75)$, $B(85; 15)$ és $C(-30; 55)$!

- 14. E1** Egy háromszög három csúcsa: $A(-1; 4)$, $B(2; -3)$ és $C(1; 5)$.

- a)** Írd fel az AB oldalegyenesének egyenletét!
b) Írd fel a háromszög A csúcsához tartozó súlyvonalának egyenletét!

- 15. E1** (Középszintű érettségi, 2011)

Adott két egyenes: $e: 5x - 2y = -14,5$; $f: 2x + 5y = 14,5$.

- a)** Határozd meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit!
b) Igazold, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek!
c) Számítsd ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét!

16. E1 (Emelt szintű érettségi, 2005)

Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$$AB: y = 0, \quad BC: x + 10y = 20, \quad CA: y = \frac{1}{2}x - 4.$$

a) Számítsd ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit!

b) Számítsd ki a háromszög B csúcsánál lévő belső szöget!

17. E1 Milyen távolságra van az $x^2 + y^2 - 2x + 12y - 16 = 0$ egyenletű kör középpontja az origótól, valamint a koordinátatengelyektől?**18. E1** Határozd meg az alábbi körök középpontját és sugarát!

a) $x^2 + y^2 = 16$

d) $(x - 3)^2 + (y - 10)^2 = 25$

b) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

e) $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

c) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 17$

19. E1 Add meg azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek

a) középpontja rajta van az $y = 2x + 1$ egyenesen, a középpont abszcisszája 3, és érinti az x tengelyt;

b) középpontja rajta van az $y = 2x + 1$ egyenesen, a középpont ordinátája 9, és érinti az x tengelyt;

c) középpontja rajta van az $y = 2x + 1$ egyenesen, sugara 3 egység, és érinti valamelyik tengelyt!

20. E1 Adott a $K(2; 3)$ középpontú, 4 egység sugarú kör.

a) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely kívülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont ordinátája 3!

b) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely belülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont ordinátája 3!

c) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely kívülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont abszcisszája 2!

d) Add meg annak a körnek az egyenletét, amely belülről érinti, sugara 2 egység, és a középpont abszcisszája 2!

21. E1 (Középszintű érettségi, 2008)

Adott a koordináta-rendszerben az $A(9; -8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.

a) Számítsd ki az $y = -16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit!

b) Írd fel a kör $P(1; -2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Add meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)!

22. E1 (Középszintű érettségi, 2009)

Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8,4 = 0$ egyenletű egyenes.

a) Számítsd ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit!

b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?

23. E1 (Középszintű érettségi, 2013)

Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1; -3)$ és $B(7; -1)$.

a) Írd fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét!

b) Számítással igazold, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$ egyenletű k körre, és számítsd ki az AB húr hosszát!

Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra.

c) Számítsd ki a k kör és az f egyenes (A -tól különböző) metszéspontjának koordinátáit!

24. E1 (Középszintű érettségi, 2016)

a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3; -1)$ és $B(3; 7)$, súlypontja az origó. Határozd meg a C csúcs koordinátáit!

b) Írd fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3 -hoz -1 -et és 3 -hoz 7 -et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax + b$ alakban add meg!)

c) Adott az $A(-3; -1)$ és a $B(3; 7)$ pont. Számítsd ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!

25. E1 (Középszintű érettségi, 2016)

Adott az $x + 2y = 13$ egyenletű e egyenes és az $x^2 + (y + 1)^2 - 45 = 0$ egyenletű k kör.

a) Add meg az e egyenes meredekségét és azt a pontot, ahol az egyenes metszi az y tengelyt!

b) Határozd meg a k kör középpontját és sugarának hosszát!

c) Számítással igazold, hogy az e egyenesnek és a k körnek egyetlen közös pontja van!

26. E1 (Középszintű érettségi, 2017)

A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $4x + y = 17$ egyenletű e egyenes, továbbá az e egyenesre illeszkedő $C(2; 9)$ és $T(4; 1)$ pont. Az A pont az origóban van.

a) Igazold, hogy az ATC szög derékszög!

Az A pont e egyenesre vonatkozó tükörképe a B pont.

b) Számítsd ki a B pont koordinátáit!

c) Határozd meg az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit!

27. E1 (Emelt szintű érettségi, 2017)

Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzolóprogram segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0; 0)$, $B(30; 0)$, $C(30; 48)$, $D(0; 48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.

Add meg ennek a körnek az egyenletét!

28. E1 Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(6; 0)$, $B(11; 1)$ és $C(3; 5)$. Az A középpontú, 3 sugarú kört jelöljük k -val, a B pontra illeszkedő, 1 meredekségű egyenest e -vel és a BC egyenest f -fel!

a) Írd fel a k kör, az e egyenes és az f egyenes egyenletét!

b) Igazold, hogy e és f egyenesek közül az egyik metszi, a másik nem metszi a k kört!

c) Mekkora az ABC háromszög területe?

29. E2 (Emelt szintű érettségi, 2006)

Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a; \lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab; \lg \frac{a}{b}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0 < a < 1$, illetve $1 < b$ teljesül.

a) Bizonyítsd be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátájánál!

b) Bizonyítsd be, hogy az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra!

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge?

d) Legyen $a = \frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Add meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A , illetve a B pontok halmazát!

30. E1 Írd fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek

a) fókuszpontja az $F(0; -4)$ pont, vezéregyenesének egyenlete $d: y = 4$;

b) tengelypontja az origó, paramétere $p = 3$;

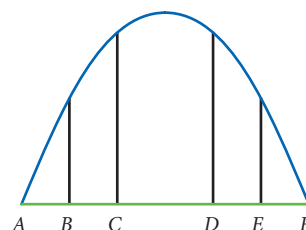
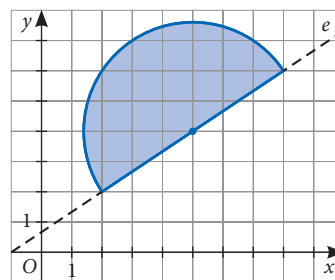
c) tengelypontja az origó, és illeszkedik rá a $P(4; 2)$ pont!

31. E1 Határozd meg a parabola paraméterét, fókuszpontjának koordinátáit és vezéregyenesének egyenletét, ha a parabola egyenlete

a) $y = 0,4x^2$; c) $y = \frac{5}{3}x^2$;

b) $y = -\frac{1}{10}x^2$;

d) $y = -\frac{9}{7}x^2$.

32. E1 Egy barlang bejáratának keresztmetszete parabola. A bejárat magassága 4 méter, a talajszinten mért szélessége $AF = 6$ méter. Milyen hosszúságú, függőlegesen álló fagerendákkal lehet alátámasztani a bejáratot, ha azokat az ábrán jelölt módon szeretnék elhelyezni a B , C , D , E pontokban, és tudjuk, hogy $AB = BC = DE = EF = 1$ méter?**33. E2** Hogyan határozhatjuk meg az ábrán látható zárt félkör alakú lemez pontjait a koordinátaikkal? (Az, hogy „zárt”, azt jelenti, hogy az alakzat határán lévő pontok is az alakzathoz tartoznak.) A kör középpontja és berajzolt átmérőjének két végpontja is rácspon.**34. E2** Milyen alakzatot határoznak meg azok a pontok, amelyek koordinátáira teljesülnek a következő egyenlőtlenségek?

a) $y \geq \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ és $y \geq -2x + 6$;

b) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 10$ és $y \geq \frac{1}{3}x$;

c) $-2 \leq y \leq 8$ és $-7 \leq x \leq 3$ és $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 9$!



függvény, függvénytulajdonságok



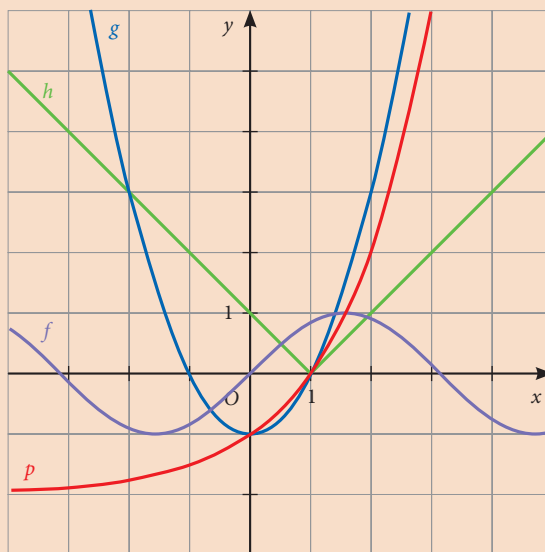
függvénytulajdonságok definíciói, lokális (helyi) maximum és minimum

FELADATOK

1. E1 Ábrázoltuk néhány függvény grafikonját. A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Írd a táblázatba azoknak a függvényeknek a betűjelét, amelyekre teljesül az adott tulajdonság!

Kölcsönösen egyértelmű	$x = 1$ helyen zérushelye van	Nincs maximuma	$x = 1$ helyen minimuma van

Minimuma az $y = -1$	Periodikus	Páros	Páratlan



2. E1 Fogalmazd meg, hogyan állapítható meg egy függvény grafikonjáról:

- a) a függvény zérushelye;
- b) a függvény minimumhelye és értéke;
- c) hogy a függvény szigorúan monoton nő-e;
- d) hogy a függvény kölcsönösen egyértelmű-e;
- e) hogy a függvény páros-e;
- f) hogy a függvény páratlan-e!

3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk az adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a

$$d: [5; 20] \rightarrow \mathbb{R}, d(x) = -0,25x^2 + 20x + 40$$

függvény adja meg, ahol x a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

- a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves?
- b) Hány dm^2 -rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben?
- c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter?

4. E1 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Adott két függvény: $f:]0; 130[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 900 - 0,25(x - 60)^2$, illetve $g:]0; 130[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 6,4x$.

- a) Add meg az f zérushelyét!
- b) Számítsd ki az $f(20) - g(20)$ különbség értékét!
- c) Add meg a $h:]0; 130[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (típusát, helyét és értékét)!

5. E1 Melyik függvény páros, melyik páratlan, ha a függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza?

$$f(x) = |x| - 1$$

$$g(x) = -|x|$$

$$h(x) = |x - 1|$$

$$j(x) = x^3$$

$$k(x) = x^3 - 1$$

$$l(x) = -2$$

$$m(x) = 2 \sin x$$

$$n(x) = \cos x + 2$$

6. E1 Ábrázold a függvény grafikonját! Határozd meg az értékkészletét és a zérushelyét!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -3 & \text{ha } x \leq -2 \\ 2x + 1 & \text{ha } -2 < x \leq 1 \\ 3 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

7. E1 Van-e olyan függvény, amely egyszerre páros és páratlan is?

ELMÉLET

1. Függvénytulajdonságok

A tanult függvénytulajdonságokat megfogalmazhatjuk szavakkal vagy leírhatjuk matematikai szimbólumokkal. Néhány példát mutatunk erre, a fejezet végén lévő összefoglaló táblázat tartalmazza a többi is.

Kölcsönösen egyértelmű	Az értelmezési tartomány különböző elemeihez a függvény különböző elemeket rendel. Azaz ha $x_1, x_2 \in D_f$ és $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Szigorúan monoton növekvő	A függvény az értelmezési tartomány egy intervallumán szigorúan monoton növekvő , ha az intervallum bármely két eleme esetén a nagyobb elemhez a függvény nagyobb értéket rendel, mint a kisebbhez. Azaz ha $x_1, x_2 \in D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$.
Páros / páratlan	A függvény páros , ha az értelmezési tartomány minden eleme esetén az ellentettje is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen a két helyen a helyettesítési érték egyenlő. Azaz $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$. A függvény páratlan , ha az értelmezési tartomány minden eleme esetén az ellentettje is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen a két helyen a helyettesítési érték egymás ellentettje. Azaz $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.
Periodikus	Az f függvény periodikus , ha van olyan p pozitív valós szám, amelyre teljesül, hogy az értelmezési tartomány minden x eleme esetén $x + p$ is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen a két helyen a helyettesítési érték egyenlő. Azaz $x \in D_f$ esetén $x + p \in D_f$ és $f(x + p) = f(x)$. A legkisebb ilyen p számot a függvény periódusának nevezzük.

2. Lokális (helyi) szélsőérték

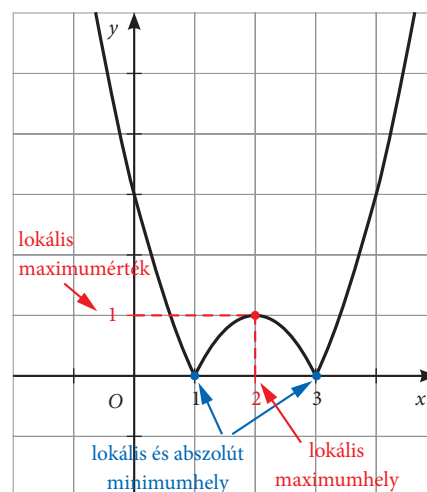
A szélsőérték fogalma nem csak a teljes értelmezési tartományra vonatkoztatva értelmezhető.

Egy $x_0 \in D_f$ helyen az f függvénynek **lokális (helyi) maximuma** van, ha

- az x_0 egy környezetében a függvény értelmezhető (létezik olyan $]a; b[$, melyre $]a; b[\subset D_f$ és $x_0 \in]a; b[$), és
- x_0 -nak ebben a környezetében a függvény sehol sem vesz fel nagyobb értéket, mint x_0 -ban.

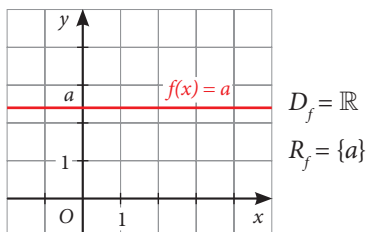
Egy $x_0 \in D_f$ helyen az f függvénynek **lokális (helyi) minimuma** van, ha

- az x_0 egy környezetében a függvény értelmezhető (létezik olyan $]a; b[$, melyre $]a; b[\subset D_f$ és $x_0 \in]a; b[$), és
- x_0 -nak ebben a környezetében a függvény sehol sem vesz fel kisebb értéket, mint x_0 -ban.

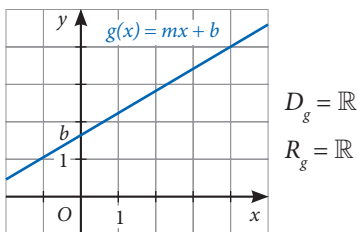


3. Az alapfüggvények áttekintése

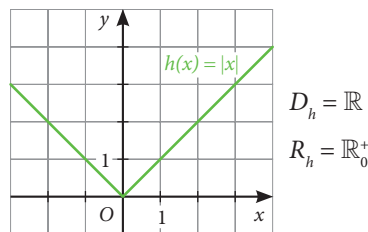
Konstans függvény



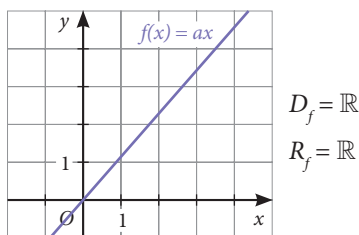
Elsőfokú függvény ($m \neq 0$)



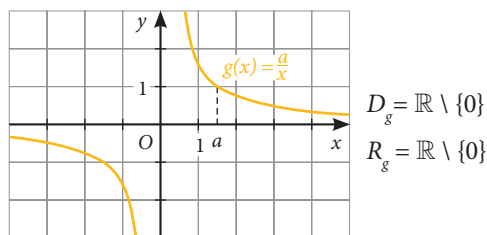
Abszolútérték-függvény



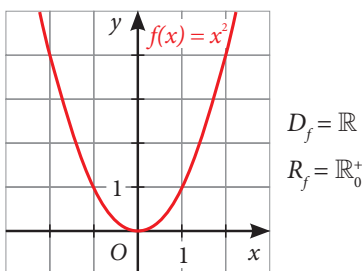
Egyenes arányosság függvénye ($a \neq 0$)



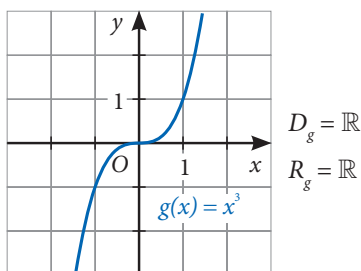
Fordított arányosság függvénye ($a \neq 0$)



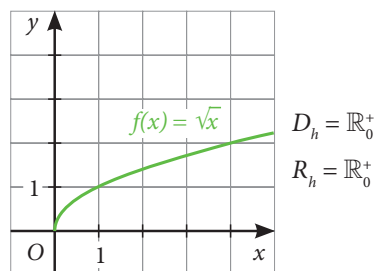
Másodfokú függvény



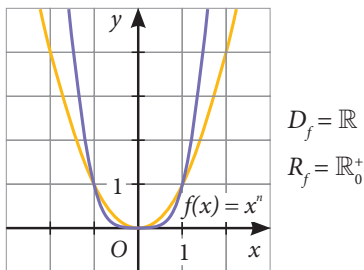
Harmadfokú függvény



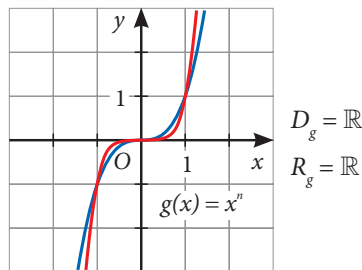
Négyzetgyökfüggvény



x^n függvény, ha $n \in \mathbb{Z}^+$ és n páros

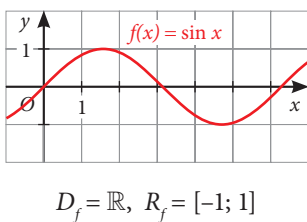


x^n függvény, ha $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ és n páratlan

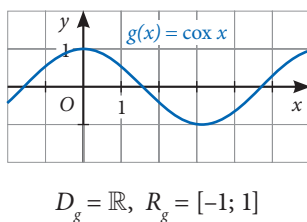


Trigonometrikus függvények

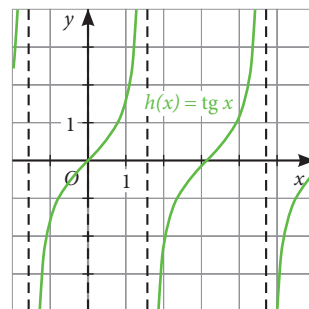
Színuszfüggvény



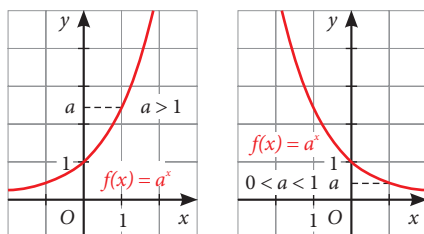
Koszinuszfüggvény



Tangensfüggvény

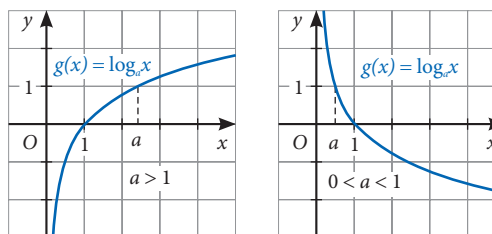


Exponenciális függvény



$$D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}^+$$

Logaritmus függvény



$$D_g = \mathbb{R}^+, R_g = \mathbb{R}$$

Az egyenlőtlenségek grafikus megoldása arra épül, hogy ábrázoljuk az algebrai kifejezéshez tartozó függvény grafikonját, és a grafikon alapján meghatározzuk az egyenlőtlenség megoldását. Az exponenciális és a logaritmusos egyenlőtlenségnél figyelni kell arra, hogy a függvény monotonitása függ attól, hogy az a^x illetve $\log_a x$ kifejezésben az a alapszám kisebb vagy nagyobb, mint 1.

Például:

- ▶ Mivel az $f(x) = 2x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért $2^x > 2^4 \Leftrightarrow x > 4$.
- ▶ Mivel a $g(x) = 0,5x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért $0,5^x > 0,5^4 \Leftrightarrow x < 4$.

4. Műveletek függvényekkel

Definíció: Ha az f és a g függvények értelmezési tartománya megegyezik, akkor értelmezhető a függvények **összeg-, különbség-, szorzat- és hányadosfüggvénye**. Minden $x \in D_f$ esetén

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x); \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{és} \quad g(x) \neq 0 \text{ esetén: } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

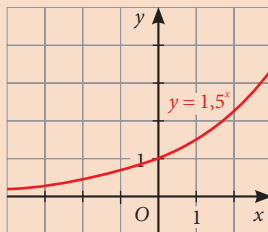
Például:

- ▶ A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$ esetén:
- ▶ $(f+g)(x) = \sin x + \cos x; \quad (f \cdot g)(x) = \sin x \cdot \cos x; \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \quad (\text{ha } \cos x \neq 0).$

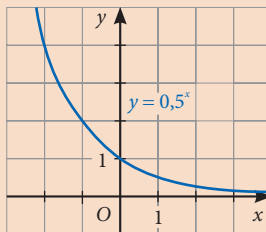
FELADATOK

- 8. E1** Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán! A megoldásban segítenek az ábrázolt függvénygrafikonok.

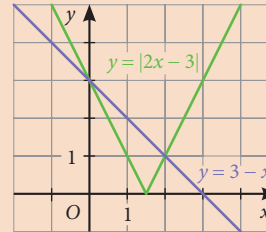
a) $\frac{2}{3} \leq 1,5^{x-1} \leq \frac{3}{2}$



b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} > 4$



c) $|2x-3| \leq 3-x$





inverz függvényre néhány konkrét példa



inverz függvény, függvény leszűkítése és kiterjesztése

ELMÉLET

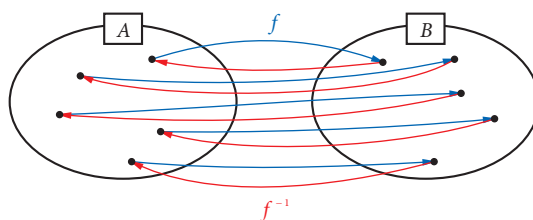
1. Függvény inverze

Kölcsönösen egyértelmű függvény esetén a hozzárendelés megfordítása is egy függvény. Ha f egy kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor azt a hozzárendelést, amely során az értékkészlet minden y eleméhez hozzárendeljük az értelmezési tartomány azon x elemét, amelyhez az eredeti f függvény az y -t rendelte, az f függvény **inverz függvényének** (röviden: **inverzének**) nevezzük.

Jelölés: az f függvény inverze: f^{-1} .

Vigyázat! A kitevőben a -1 mást is jelenthet. Figyelj a különbségre:

- ▶ $x^{-1} = \dots$ algebrai kifejezés esetén hatványozást jelöl,
- ▶ f^{-1} függvény esetén az inverzfüggvényt jelöli.



$$f(x) = y \text{ esetén}$$

$$f^{-1}(y) = x$$

2. Függvény leszűkítése és kiterjesztése

Ha egy függvény nem kölcsönösen egyértelmű, akkor nincs inverz függvénye. Megtehetjük azonban, hogy leszűkítjük az értelmezési tartományt úgy, hogy a leszűkített értelmezési tartományon a függvény kölcsönösen egyértelmű legyen.

Például: Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény nem kölcsönösen egyértelmű, ezért nem létezik inverze. Ha leszűkítjük az értelmezési tartományt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra, akkor azon már kölcsönösen egyértelmű, és létezik inverz függvénye.

Ennek a függvénynek a megfelelője a zsebszámológép **$\sin^{-1}$** funkciója.

		Például:
$f: A \rightarrow B$ függvény leszűkítése	▶ az A helyett annak egy részhalmaza lesz az új értelmezési tartomány, és ▶ a hozzárendelési szabály nem változik.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ egy leszűkítése: $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$
$f: A \rightarrow B$ függvény kiterjesztése	▶ az új értelmezési tartománynak részhalmaza az A halmaz, és ▶ az A-beli elemek esetén a hozzárendelés nem változik.	$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ egy kiterjesztése: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x $

Az adott részhalmazra a leszűkítés egyértelmű, míg a kiterjesztés többféle módon lehetséges.

3. Inverz függvény meghatározása és jellemzői

- ▶ Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya megegyezik az f függvény értékkészletével.
- ▶ Az f^{-1} inverz függvény értékkészlete megegyezik az f függvény értelmezési tartományával.
- ▶ Az inverz függvény hozzárendelési szabályát sok esetben megkaphatjuk úgy, hogy az $y = f(x)$ alakban felírt hozzárendelési szabályból kifejezzük x -et.
- ▶ Egy függvénynek és az inverz függvényének grafikonja tengelyesen szimmetrikus a koordináta-rendszer $y = x$ egyenesére.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ függvény inverzét!

Megoldás:

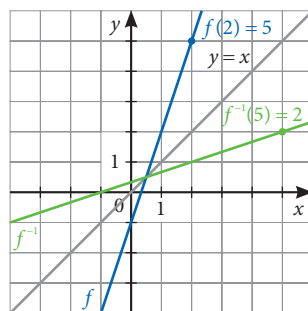
Az f függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért van inverze. Értékkészlete a valós számok halmaza, ezért az f^{-1} értelmezési tartománya is a valós számok halmaza.

Az f függvény az x valós számhoz a $3x - 1$ értéket rendeli, jelöljük ezt y -nal: $y = 3x - 1$. Hogyan kaphatjuk meg, hogy az y valós számot melyik x valós számhoz rendeltük?

$$y = 3x - 1 \quad \triangleright \quad y + 1 = 3x \quad \triangleright \quad x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$$

Azaz ha adott egy y valós szám, akkor $\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ az a valós szám, amelyhez az f függvény az y -t rendelte, ez lesz tehát az inverz függvény esetében az y képe: $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$. A függvények jelölésében azonban az értelmezési tartomány elemeit nem y -nal, hanem x -szel jelöljük, ezért az y helyett x -et szokás írni.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$



FELADATOK

1. E1 Határozd meg a következő függvények inverzét!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 8$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{4}{5}x - 2$

$h: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 1,5x$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2,5x + 10$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$

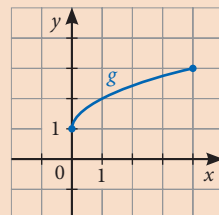
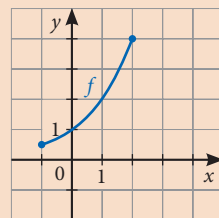
$h: [0; 12] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{4}x$

2. E2 Ábrázold a következő függvények inverzének grafikonját, majd töltsd ki a táblázatot!

a) $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$

b) $g: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$

	f	f^{-1}	g	g^{-1}
Értelmezési tartomány	$[-1; 2]$			
Értékkészlet				
Minimumhely				
Minimum				
Maximumhely				
Maximum				
Monotonitás				
Zérushely				
Hozzárendelési szabály	$f(x) = 2^x$		$g(x) = \sqrt{x} + 1$	





függvénytranszformációk

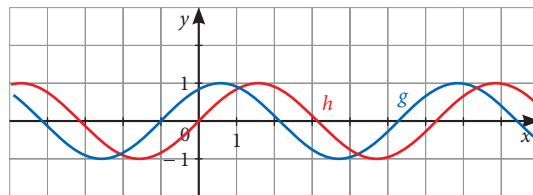
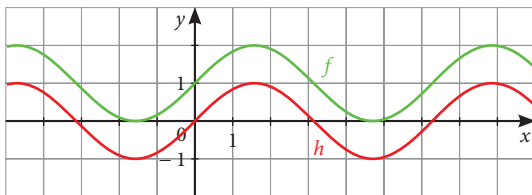


összetett függvény

BEVEZETŐ

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x + 1$ függvény hozzárendelési szabálya szavakkal így fogalmazható meg: „vedd az x szinuszt, majd az eredményhez adj hozzá 1-et”. A $g(x) = \sin(x + 1)$ függvény hozzárendelési szabálya pedig megfelel ennek az utasításnak: „adj az x -hez 1-et, majd vedd az eredmény szinuszt”. A két hozzárendelési szabályban ugyanaz a két művelet szerepel, de különböző sorrendben.

A függvénytranszformációkról tanultak alapján az f és a g függvény grafikonja megkapható a valós számok halmazán értelmezett $h(x) = \sin x$ függvény grafikonjának eltolásával.



ELMÉLET

Összetett függvény

Összetett függvényről akkor beszélünk, ha két hozzárendelést egymás után hajtunk végre olyan módon, hogy az első hozzárendelés során kapott függvényértékekkel végezzük el a második hozzárendelést. Olyan ez, mint amikor két „gépet” egymás alá helyeznek, a felső gépbe „dobjuk be” a változót (x -et), a felső gép abból meghatározza $g(x)$ -et, ez kerül az alsó gépbe, és ebből számítja ki az alsó gép a végső értéket, $f(g(x))$ -et.

Jelölés: $f \circ g$ (így olvasd: f kör g).

Definíció: Adott egy $g: A \rightarrow B$ függvény és egy $f: B \rightarrow C$ függvény. Ekkor az $f \circ g$ **összetett függvény** értelmezési tartománya az A halmaz, képhalmaza a C halmaz, hozzárendelési szabálya pedig $x \mapsto f(g(x))$.

Az összetett függvény esetében figyelni kell a műveletben szereplő függvények sorrendjére. $f \circ g$ esetén g függvény szerinti hozzárendelést kell elsőként végrehajtani. g függvényt **belső függvénynek** nevezzük, f függvényt pedig **külső függvénynek**. (Az elnevezések az $f(g(x))$ felíráshoz kapcsolódnak.)

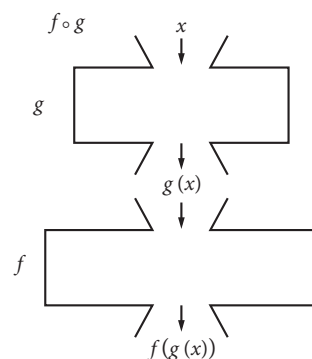
Például: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 1$ esetén:

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(g(x)) = (3x + 1)^2 + 4 = 9x^2 + 6x + 5,$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(f(x)) = 3(x^2 + 4) + 1 = 3x^2 + 13,$$

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Megjegyzés: A korábban tanult függvénytranszformációk is összetett függvényekkel vannak kapcsolatban.



$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ g(\quad) = g(x) \\ \downarrow \\ f(\quad) = f(g(x)) \end{array}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

- 1. E1** Hasonlítsd össze az $f \circ g$ és a $g \circ f$ összetett függvényeket! Határozd meg, hogy mi lesz a függvényérték az egyes lépések után! Töltsd ki mindkét táblázatot!

$$f \circ g \quad f(x) = x^2 - 5 \quad \text{és} \quad g(x) = 4x + 7$$

x	1	-2	x ▼
$g(x)$			$4x + 7$ ▼
$f(g(x))$			$(4x + 7)^2 - 5$

$$g \circ f \quad f(x) = x^2 - 5 \quad \text{és} \quad g(x) = 4x + 7$$

x	1	-2	x ▼
$f(x)$			▼
$g(f(x))$			

- 2. E1** Határozd meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési szabályát!

- a)** $f(x) = \cos x$ és $g(x) = x + \frac{\pi}{3}$
b) $f(x) = 2x^2 + 3$ és $g(x) = 3x - 4$
c) $f(x) = |x - 1|$ és $g(x) = -4x$
d) $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = 3^x - 4$

- 3. E1** Határozd meg a g függvény hozzárendelési szabályát!

- a)** $f(x) = |x + 1|$ és $(f \circ g)(x) = |2x - 4|$
b) $f(x) = x^2 - 1$ és $(f \circ g)(x) = x^2 + 8x + 15$

- 4. E1** Határozd meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények értékészletét!

- a)** $f(x) = \sin x$ és $g(x) = 3 \cdot |x|$
b) $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = |x|$
c) $f(x) = 2^x$ és $g(x) = x + 4$

- 5. E1** Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett következő függvények grafikonját!

- a)** $f(x) = 2(x - 2)^2 + 2$ **c)** $h(x) = |x^2 + 4x|$
b) $g(x) = 3 + \sin 2x$ **d)** $p(x) = -1 + \cos \frac{x}{2}$

- 6. E1** Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 1$

b) $g(x) = 3 \sin 2x - 1$

- 7. E1** (Középszintű érettségi, 2009)

A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját a $v(2; -4,5)$ vektorral eltoltuk.

- a)** Add meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel!
b) Határozd meg f zérushelyeit!
c) Ábrázold f grafikonját a $[-2; 6]$ intervallumon!
d) Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{1}{2}x^2 \leq 2x + \frac{5}{2}$$

- 8. E2** Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + |x| - 1$ függvény grafikonját megkaphatjuk, ha két részre bontjuk a feladatot. Kövesd a feladat útmutatásait és ábrázold az f függvény grafikonját!

- a)** Ha $x \geq 0$, akkor $3x + |x| - 1 = 3x + x - 1 = 4x - 1$. Ez alapján ábrázold a grafikonnak azt a részét, amelyik az $x \geq 0$ feltételhez kapcsolódik!
b) Hogyan írható egyszerűbb alakban a hozzárendelési szabály, ha $x < 0$?
c) Ábrázold a grafikonnak azt a részét, amelyik az $x < 0$ feltételhez kapcsolódik!

- 9. E2** (Emelt szintű érettségi, 2005)

- a)** Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben az $f: [0; 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ függvény grafikonját!
b) Add meg az f függvény értékészletét!
c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a $[0; 7]$ intervallumon?



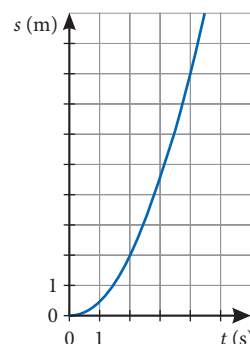
kör érintője, két adott ponton átmenő egyenes (szelő) egyenletének felírása



görbe érintője

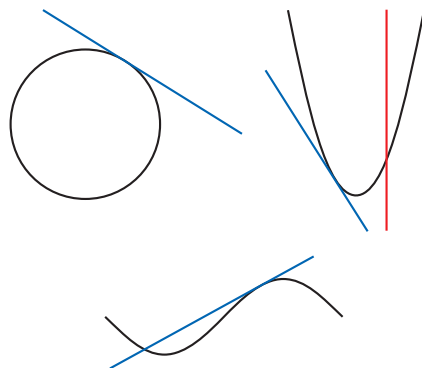
BEVEZETŐ

Az oldalsó grafikon egy test mozgását szemlélteti, a test által megtett utat adja meg az idő függvényében. (Ez a grafikon egy egyenletesen gyorsuló mozgáshoz tartozik.) A grafikonról nemcsak azt lehet leolvasni, hogy melyik időpillanatig mennyi utat tett meg a test, hanem következtetni tudunk a test sebességére is. A test gyorsuló mozgást végez: az első másodperc alatt 0,5 métert, a második másodperc alatt 1,5 métert, a harmadik alatt 3 métert tett meg. Ahol a grafikon „meredekebb”, ott nagyobb a test pillanatnyi sebessége ahhoz képest, mint ahol a grafikon „kevésbé meredek”. Hogyan lehetne jellemezni egy görbe „meredekségét”? Régóta tudják, hogy ez az adott pontban húzott érintővel áll kapcsolatban.



Az érintő keresése azonban érdekes kérdésekre világít rá. Mit nevezünk érintőnek?

Kör esetében könnyen találtunk rá definíciót: olyan egyenes a kör síkjában, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel. Parabola esetében ez a definíció már nem állja meg a helyét, hiszen van olyan egyenes, amelynek egy közös pontja van a görbével, mégsem tekintjük érintőnek (mint az ábrán a piros egyenes). A szinuszgörbe esetén pedig az is előfordul, hogy az érintőnek több közös pontja van a függvénygörbével.



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Írjuk fel a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 1$ és $x_1 = 2$ abszcisszájú pontokra illeszkedő szelőjének egyenletét!

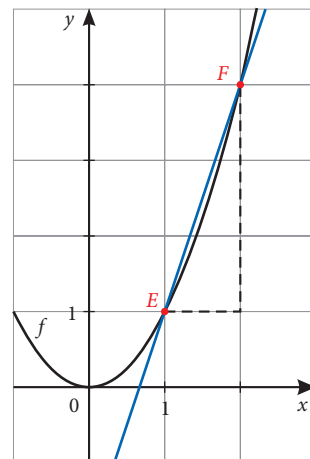
Megoldás:

A hozzárendelési szabályba behelyettesítve meghatározhatjuk a metszéspontok második koordinátáját, és így a szelő két pontjának koordinátáit: $E(1; 1)$ és $F(2; 4)$.

A szelő meredeksége: $m = \frac{4-1}{2-1} = 3$. Ezért a szelő egyenletét $y = 3x + b$ alakban kereshetjük.

Helyettesítsük be az $y = 3x + b$ egyenletbe az egyik metszéspont, például $F(2; 4)$ megfelelő koordinátáit! $4 = 3 \cdot 2 + b$. Ebből $b = -2$.

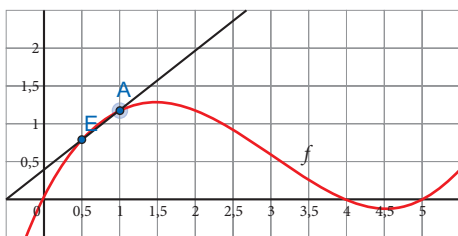
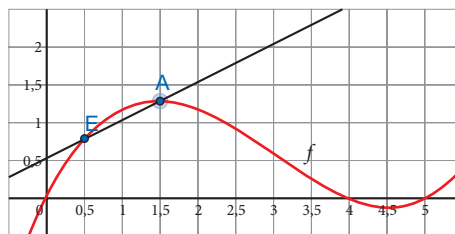
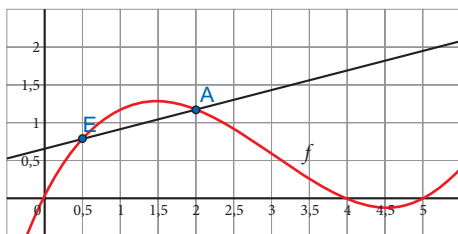
A szelő egyenlete tehát $y = 3x - 2$.





2. Rajzoltassuk meg függvényábrázoló (pl. a *GeoGebra*) programmal az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,1x^3 - 0,9x^2 + 2x$ függvény grafikonját! Rögzítsük le a görbén az E pontot úgy, hogy első koordinátája 0,5 legyen! Jelöljük ki a görbén az ettől különböző A pontot, melynek első koordinátája 2, és húzzuk meg az EA egyenest, ami egy szelő. Mozgassuk a görbén az A pontot az E pont felé!

Megoldás:



Ha az A pont a mozgatás során fedésbe kerül (egybeesik) E -vel, akkor nem keletkezik szelő, mert egyetlen pont nem határoz meg egyenest. A számítógépes program azonban ebben az esetben is ábrázol egyenest: az érintőt.

A görbe E pontbeli érintője nem más, mint ezeknek a szelőknek a „határhelyzete”, ha az A ponttal egyre pontosabban megközelítjük E -t.

ELMÉLET

1. Görbe érintője

A görbe érintőjének pontos definíciója magasabb matematikai ismereteket igényel. Mi itt megelégszünk a (fenti vizsgálaton alapuló) szemléletes képpel. (Már maga az, hogy „görbe”, egy olyan fogalom a matematikában, amelynek pontos definiálása nem is olyan egyszerű.) Foglalkozzunk olyan görbékkel, amelyek egy folytonos vonallal megrajzolhatók, sehol sem szakadnak meg és sehol sem törnek meg. Ilyenek például a valós számok halmazán értelmezett polinomfüggvények grafikonjai.

- ▶ Ha kijelöljük egy görbe két pontját, akkor ezen pontok által meghatározott egyenes a görbe egyik szelője. Az érintő a szelők „határhelyzete” abban az értelemben, hogy a görbe egy pontját lerögzítjük, egy másik pontját pedig „mozgatjuk” a görbe mentén a lerögzített pont felé, és közben rendre meghúzzuk a szelőket.
- ▶ Az érintő a görbe egy adott pontjához tartozik.
- ▶ Egy görbének egy E pontban húzott érintője nem a teljes görbét jellemzi, hanem csak a görbének az E pont kis környezetében lévő részét.

Megjegyzések:

- ▶ A kör, illetve a parabola érintőjére ezzel az eljárással ugyanazokat az egyeneseket kapjuk érintőként, mint korábban.
- ▶ A matematikában másféle „görbék” is léteznek, és nem minden esetben létezik egy görbének egy adott pontjában érintője.



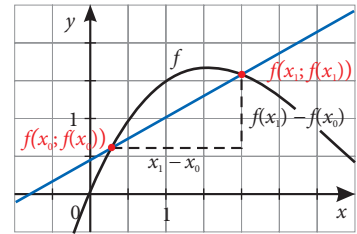
A függvényábrázoló programokban érintőt rajzolhatsz egy görbéhez egy adott pontból, pl. a *GeoGebra* programban a  ikon segítségével.

2. A szelő egyenletének felírása

Ha adott a koordináta-rendszerben két különböző pont, akkor a koordináta geometriában tanult módon fel lehet írni a két pontra illeszkedő egyenes egyenletét. A szelő egyenletének $y = mx + b$ alakját felírhatjuk például a következő módon:

A függvénygörbe két pontjának első koordinátái legyenek x_0 és x_1 .

1. Számítsuk ki a pontok második koordinátáit a függvény hozzárendelési szabálya alapján!
2. Határozzuk meg a szelő meredekségét: $m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Ezt írjuk be az $y = mx + b$ alakba!
3. Helyettesítsük be az egyik pont koordinátáit is az $y = mx + b$ alakba, és fejezzük ki b -t!
4. Adjuk meg a szelő egyenletét $y = mx + b$ alakban!



a szelő meredeksége:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$y = mx + b$$

a szelő egy pontja: $E(x_0; f(x_0))$

FELADATOK

- 1. E1** A valós számok halmazán értelmezett minden másodfokú függvény, így az $f(x) = x^2 - 3x + 4$ függvény grafikonja is egy parabola. Írd fel annak a szelőnek az egyenletét, amely a grafikon azon pontjaira illeszkedik, amelyeknek első koordinátái

- a) $x_0 = 1$ és $x_1 = 3$;
- b) $x_0 = -1$ és $x_1 = 2$.

- 2. E1** A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény grafikonja egy parabola. Írd fel a parabola szelőjének meredekségét, ha a grafikon pontjainak első koordinátái

- a) $x_0 = 1$ és $x_1 = 1,1$;
- b) $x_0 = 1$ és $x_1 = 1,01$;
- c) $x_0 = 1$ és $x_1 = 1,001$.
- d) Vajon milyen értékhez közelít a szelők meredeksége, ha az x_1 -gyel közelítjük x_0 -t?

- 3. E1** A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3$ függvény grafikonja esetén határozd meg a szelő meredekségét, ha a szelő a grafikon azon pontjaira illeszkedik, amelyeknek első koordinátái

- a) $x_0 = 1$ és $x_1 = 1,1$;
- b) $x_0 = 1$ és $x_1 = 1,01$;
- c) $x_0 = 1$ és $x_1 = 1,001$.
- d) Vajon mennyi az érintő meredeksége: szerinted milyen értékhez közelít a szelők meredeksége, ha az x_1 -gyel közelítjük x_0 -t?

- 4. E1** Ábrázold függvényábrázoló szoftver (pl. GeoGebra) segítségével a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 0,25x^2 - 2x + 1$ függvény grafikonját!



- a) Keresz olyan szelőt, amelynek meredeksége 0,5.
- b) Keresz olyan érintőt, amelynek meredeksége 0.
- c) Keresz olyan érintőt, amelynek meredeksége 1.
- d) Keresz olyan érintőt, amelynek meredeksége -1.

5. E2 Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$ és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 1$ függvény.

- a) Írd fel az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabályát, majd a függvénygörbe $x_0 = -3$ és $x_1 = 1$ abszcisszájú pontjaira illeszkedő szelőjének egyenletét!
- b) Írd fel a $g \circ f$ függvény hozzárendelési szabályát, majd a függvénygörbe $x_0 = 0$ és $x_1 = 1,5$ abszcisszájú pontjaira illeszkedő szelőjének egyenletét!

6. E2* Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ függvény.

- a) Határozd meg a függvény zérushelyeit!
- b) A görbe E pontjának első koordinátája $x_0 = -2$ és F pontjának első koordinátája $x_1 = 1$. Írd fel az EF szelő egyenletét!
- c) Az EF szelő az E és F pontokon kívül még egy további pontban metszi a függvény grafikonját. Melyik ez a pont?

RÁADÁS

Matematikatörténeti kitekintés

Newton és Leibniz volt az a két híres matematikus, akik a XVII. században, egymással párhuzamosan kidolgozták a differenciálszámítás alapjait. Az ő munkásságukkal fejlődésnek indult a matematikának ez a területe. Az általuk kifejlesztett differenciálszámítást, a deriválási szabályokat ma már széles körben használják a folyamatok, változások leírására a természettudományoktól a társadalomtudományokig.

Érdekes azonban, hogy – bár a differenciálszámítás alkalmazásának eredményeit nem vitatták – a matematikusok eközben fontos problémákat vetettek föl a differenciálszámítás megalapozásával kapcsolatban. Mit jelentenek azok a megfogalmazások, hogy „tart egy számhoz”, „végtelenül megközelíti”, „végtelenül kicsi”, „határérték”? Vajon hogyan illeszthetők be ezek a szavak a matematikai fogalmak közé?



Sir Isaac Newton
(1642–1727)



Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646–1716)

Mintegy kétszáz évet kellett várni a pontos matematikai leírásra. Kiderült, hogy a határérték definíciója jóval összetettebb, mint az addig megszokott definíciók. Cauchy és Weierstrass nevéhez köthető a pontos definíció.

Most azt az utat követjük, amit a tudománytörténet is bejárt. Először megismerjük a szemléletes fogalmat. Azután tanulunk olyan szabályokat, eljárásokat, amelyek segítségével a derivált értéke pontosan kiszámítható, majd ezeket sokféle feladatban és helyzetben alkalmazzuk. A konkrét példák, feladatok és számítások megmutatják a deriválás hatalmas gyakorlati jelentőségét, és segítenek abban, hogy jobban megértsük a derivált mélyebb tartalmát és jelentését. Később (az *Integrálás* témakörben) megismerkedünk majd a határérték és a derivált pontos definíciójával.



Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)



Karl Weierstrass
(1815–1897)



egyenest egyenletének felírása, ha ismert a meredeksége és egy pontja



deriváltahányados, differenciálhányados (derivált) egy adott x_0 helyen

BEVEZETŐ

Zénón egyik híres paradoxona egy nyílvevőszőről szól. Azt állítja, hogy a nyílvevőszőr minden időpillanatban a tér egy konkrét helyén található, tehát nem mozoghat. A nyíl kezdő- és végpontja egy-egy konkrét helyen van, a nyílvevőszőr pedig pontosan e két pont között tartózkodik. Ha pontosan ott van, akkor nem mozog, hanem nyugalomban van, a mozgás tehát egy illúzió.



Ez a gondolatmenet látványosan megmutatja, hogy nem is olyan könnyű matematikai fogalmakkal (pont, tér, koordináták, számok) leírni a mozgást. Valóban, a matematika alapvető fogalmai statikusak, és épp ezért tudunk velük jól bánni, mert rögzítenek, „kimerevítnek” egy-egy helyzetet, így van lehetőségünk azt tüzetesen megvizsgálni. A változás leírására és jellemzésére új fogalmak bevezetésére volt szükség.

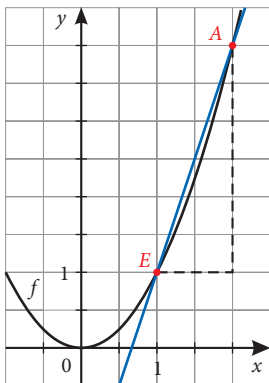
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény esetében határozzuk meg a grafikon $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjában húzható érintő meredekségét!

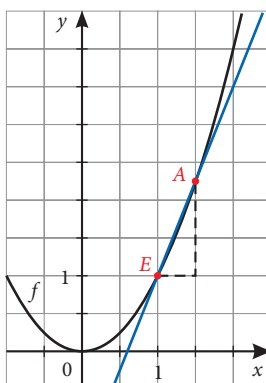
Megoldás:

Az érintési pont a grafikon $x_0 = 1$ helyhez tartozó pontja: $E(1; 1)$. A grafikon E -től különböző A pontjának első koordinátája legyen x_1 . Vegyük fel az A pontot három különböző módon az ábra szerint, és írjuk fel mindhárom esetben az EA szelő meredekségét! (Az A pontot „mozgó pontnak” is szokták nevezni.)

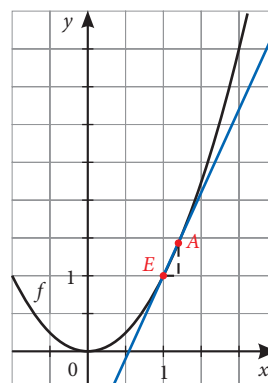
Ha $x_1 = 2$, akkor az A pont koordinátái $(2; 4)$. Az EA szelő meredeksége ekkor $\frac{4-1}{2-1} = 3$.



Ha $x_1 = 1,5$, akkor az A pont koordinátái $(1,5; 2,25)$. Az EA szelő meredeksége ekkor $\frac{2,25-1}{1,5-1} = 2,5$.



Ha $x_1 = 1,2$, akkor az A pont koordinátái $(1,2; 1,44)$. Az EA szelő meredeksége ekkor $\frac{1,44-1}{1,2-1} = 2,2$.



Ahogy az ábra szerint az A pont egyre jobban megközelíti az E érintési pontot, úgy az AE szelő egyre jobban megközelíti az érintőt. Amikor azonban az A „eléri” az E -t és egybeesik a két pont, nem határoznak meg szelőt, mert egyetlen pont nem határoz meg egyenest.

Figyeljük meg, hogyan változik a szelő meredeksége, amikor az A ponttal közelítünk az E ponthoz!

Ha az A pont első koordinátája x , akkor a második koordinátája x^2 : $A(x; x^2)$.

Ha A az E -től különböző pont, akkor $x \neq 1$, és a szelő meredeksége: $m = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

A nevezetes azonosság alapján ez egyszerűbben írható: $m = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$.

Ha az A ponttal tartunk az E ponthoz, akkor az A első koordinátájával (x -szel) egyre jobban megközelítjük az E első koordinátáját, vagyis az 1-et. Ez alapján m értéke egyre jobban megközelíti $1 + 1$ -et, azaz 2-t.

Az E ponton átmenő szelők „határhelyzete” az az egyenes, amelynek meredeksége $m = 2$.

Az E ponton átmenő, 2 meredekségű egyenes egyenlete $y = 2x - 1$. Hány közös pontja van az $y = 2x - 1$ egyenesnek és az $y = x^2$ parabolának? $x^2 = 2x - 1$ átrendezve: $x^2 - 2x + 1 = 0$. Ennek egyetlen megoldása van: $x = 1$, ami egy kétszeres gyök.

Az E pontra illeszkedő érintő meredeksége $m = 2$.

2. Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény esetében a grafikon $x_0 = 3$ abszcisszájú pontjában húzható érintő meredekségét!

Megoldás:

Az érintési pont a grafikon x_0 helyhez tartozó pontja: $E(3; 9)$.

Ha az A pont első koordinátája x , akkor a második koordinátája x^2 : $A(x; x^2)$.

Mivel A az E -től különböző pont, ezért $x \neq x_0$, és a szelő meredeksége: $m = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

A nevezetes azonosság alapján ez egyszerűbben írható: $m = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x + 3$.

Ha az A ponttal tartunk az E ponthoz, akkor az A első koordinátájával (x -szel) egyre jobban megközelítjük az E első koordinátáját, vagyis a 3-at. Ez alapján m értéke egyre jobban megközelíti $3 + 3$ -at, azaz 6-ot.

Az E pontra illeszkedő érintő meredeksége $m = 6$.

Általánosan is belátható, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény esetében a grafikon x_0 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének meredeksége $m = 2x_0$.

ELMÉLET

1. Differenciahányados

A másodfokú függvények, a polinomfüggvények és sok, már általunk tárgyalt függvény folytonos függvények. Ha egy függvény grafikonja egy folytonos vonal, akkor biztosan folytonos függvény. A függvény folytonosságának pontos definíciója azonban árnyaltabb ennél. A következő megfogalmazásoknál feltesszük, hogy a függvény folytonos.

Legyen az f függvény értelmezve az x és x_0 helyeken. Az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hányadost az f függvény x_0 és x helyekhez tartozó **differenciahányadosának** (különbségi hányadosának) nevezzük.

Ez egyenlő annak a szelőnek a meredekségével, amely a grafikon ezen két pontjára illeszkedik.

2. Differenciálhányados vagy derivált

Legyen f függvény esetén x_0 és x az értelmezési tartomány két különböző eleme. Ekkor az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ differenciahá-

nyados meghatározható. Rögzített x_0 mellett változtassuk az x értékét úgy, hogy egyre jobban megközelítse x_0 -t! Ha ez megtehető, és eközben a differenciahányados egy konkrét értékhez „tart”, akárhogyan közelítünk is x_0 -hoz, akkor azt mondjuk, hogy f **deriválható az x_0 helyen**, és a differenciahányadosnak ezt a határértékét nevezzük az x_0 -**beli differenciálhányadosnak**, más szóval **deriváltnak**.

Az x_0 helyhez tartozó érintő meredeksége egyenlő ezzel a határértékkel, vagyis az x_0 -beli derivált értékével.

			Szemléletes jelentése
Differenciahányados	x_0 és x helyen	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	a szelő meredeksége
Differenciáhányados vagy derivált	x_0 helyen	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határértéke, ha x -szel tartunk x_0 -hoz	az érintő meredeksége

► A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény deriváltja az x_0 helyen $2x_0$.

Megjegyzés:

Belátható, hogy csak folytonos függvénynek van differenciáhányadosa, és csak folytonos függvény deriválható.

Nem minden esetben létezik ez a határérték, így nem mindig létezik egy függvénynek deriváltja az értelmezési tartomány valamely x_0 helyén. Nem deriválható például a valós számok halmazán értelmezett $|x|$ függvény az $x_0 = 0$ helyen.

3. Az érintő egyenlete

Ha egy függvény az x_0 helyen deriválható, akkor az x_0 helyen felvett függvényérték és a derivált ismeretében felírható az x_0 -beli érintő egyenlete. A derivált adott helyen felvett helyettesítési értéke egyenlő az érintő meredekségével (az $y = mx + b$ alakban szereplő m -mel). Ha az $y = mx + b$ alakba az m -en kívül az érintési pont koordinátáit is behelyettesítjük, akkor meghatározhatjuk b értékét is.

Például: A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény grafikonja esetén az $x_0 = 10$ helyhez tartozó érintő egyenlete:

Az érintő meredeksége $m = 2 \cdot x_0 = 20$  az érintési pont: $(10; 100)$

Behelyettesítve: $100 = 20 \cdot 10 + b$.

$100 = 200 + b$ ► ebből $b = -100$ ► az érintő egyenlete: $y = 20x - 100$.

FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

1. Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja esetén írd fel az érintő egyenletét, ha az érintési pont első koordinátája

- a) $x_0 = 1,5$; b) $x_0 = -5$; c) $x_0 = 4$; d) $x_0 = -2$.

2. E1 Az $f(x) = x^2$ függvény melyik x_0 helyéhez tartozik a függvénygörbe érintője, ha meredeksége

- a) 1; b) 2,4; c) -0,8; d) 0?

3. E1 Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^2 + 2$ függvények grafikonját! A két grafikon közötti kapcsolat felhasználásával írd fel a g függvény grafikonja esetén az érintő egyenletét az

- a) $x_0 = 4$ helyen; b) $x_0 = -2$ helyen?

4. E2* A felsorolt lépések segítségével határozd meg az $f(x) = x^3$ függvény grafikonjához húzható érintő meredekségét, ha az érintési pont első koordinátája $x_0 = 2$!

- a) Add meg az érintési pontot a koordinátaival!
b) A grafikon egy tetszőleges pontjának koordinátái: $(x; x^3)$. Ha $x \neq 2$, akkor írd fel a differenciahányadost!
c) Keress olyan nevezetes azonosságot, amelynek segítségével egyszerűsíteni lehet a differenciahányadost, és írd fel szorzat alakban a számlálót!
d) Gondold végig, milyen értéket vesz fel a kapott kifejezés, ha x egyre jobban megközelíti 2-t (x tart 2-höz)!



deriváltfüggvény, x^n deriváltfüggvénye, összeg-, különbség- és számszoros függvény deriváltfüggvénye

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2$ függvény esetében a grafikonhoz húzható érintő meredekségét az x_0 helyen!

Megoldás:

$$\text{A szelő meredeksége, ha } x \neq x_0: m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{5x^2 - 5x_0^2}{x - x_0} = 5 \cdot \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 5 \cdot \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 5(x + x_0).$$

Az $(x + x_0)$ kifejezésről a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvény vizsgálata során láttuk, hogy $2x_0$ -hoz tart. Az érintő meredeksége az x_0 pontban ezért $m = 5 \cdot 2x_0 = 10x_0$. Ez éppen 5-szöröse az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjához ugyanezen x_0 helyen húzható érintő meredekségének.

ELMÉLET

1. Deriváltfüggvény

x_0 helyen

Folytonos függvények esetén megfogalmaztuk, hogy mit jelent az, hogy a függvény deriválható az értelmezési tartomány egy x_0 helyén. Ez egy adott pontbeli (**lokális**) tulajdonság.

minden $x_0 \in D_f$ helyen

Ha egy függvény az értelmezési tartományának minden pontjában deriválható, akkor mondjuk azt, hogy a **függvény deriválható**.

Ha egy függvény deriválható, akkor azt a függvényt, amely az értelmezési tartomány minden eleméhez az ezen helyhez tartozó derivált értékét rendeli, **deriváltfüggvénynek** (röviden **deriválnak**) nevezzük. A deriváltfüggvény ismerete azért hasznos, mert nem kell a továbbiakban hosszadalmas közelítő eljárást alkalmazni, hanem egyetlen hozzárendelési szabály (képlet) alapján az értelmezési tartomány bármely helyén kiszámítható a derivált, és így az érintő meredeksége.

Jelölés: f függvény deriváltfüggvényének jele: f' . (Használható a $\frac{df}{dx}$ jelölés is.)

Például: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ deriváltfüggvénye $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

2. x^n deriváltfüggvénye

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény ($n \in \mathbb{Z}^+$) deriváltfüggvénye $f'(x) = nx^{n-1}$.

(Később bizonyítani fogjuk ezt az állítást.)

Például: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ deriváltfüggvénye $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

3. A konstansfüggvény deriváltfüggvénye

Ha c egy valós szám, akkor az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ függvény (konstansfüggvény) grafikonja egy x tengellyel párhuzamos egye-

nes. Ennek meredeksége 0. Ha $x \neq x_0$, akkor a differenciahányados $m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0$. Miközben x

egyre jobban megközelíti x_0 -t, aközben ez a kifejezés folyamatosan 0, ezért a „határértéke”, a differenciáhányados is 0. Az f konstansfüggvény deriváltfüggvénye $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Megjegyzés: Az elemi geometriában az egyenesnek nincs érintője. A lineáris függvénynek is van azonban deriváltfüggvénye, és függvényteni szempontból ekkor is beszélhetünk érintőről.

4. Függvény számszorosának, függvények összegének, különbségének deriváltfüggvénye

Ha a valós számok halmazán értelmezett két függvény, f és g deriválható, akkor deriválható a függvény számszorosa ($c \cdot f$, ahol $c \in \mathbb{R}$), a függvények összege ($f + g$) és különbsége ($f - g$) is.

- ▶ Függvény számszorosának deriváltja: a deriváltfüggvény számszorosa.
- ▶ Összeg- és különbségfüggvény: tagonként deriválható.

Polinomfüggvény deriválásához alakítsd a polinomot kanonikus alakra (bontsd fel a zárójelet, ha van), ezután a polinomfüggvény tagonként deriválható.

Megjegyzés: Vigyázat! Szorzatfüggvény, hányadosfüggvény és összetett függvény esetén a deriválási szabály jóval bonyolultabb. Ezeket majd a *Deriválási szabályok* című leckében tárgyaljuk.

$$\begin{aligned}(c \cdot f)' &= c \cdot f' \\ (f + g)' &= f' + g' \\ (f - g)' &= f' - g'\end{aligned}$$

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Határozd meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \frac{(x-2)^3}{2}$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Rendezzük a polinomot kanonikus alakra!

$$\frac{(x-2)^3}{2} = \frac{x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3}{2} = 0,5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$$

Ebben az alakban a polinomfüggvény tagonként deriválható.

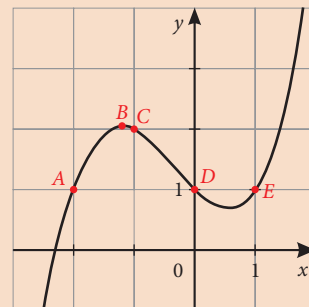
$$f'(x) = 0,5 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2x + 6 = 1,5x^2 - 6x + 6$$

FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

1. E1 Ábrázoltuk egy függvény grafikonját, majd bejelöltük a grafikon néhány pontját. Felsoroltuk a pontok által megjelölt helyekhez tartozó deriváltak értékét. Párosítsd össze, hogy melyik ponthoz melyik derivált érték tartozhat!

Derivált értéke	-1	-0,5	0	1,5	3
Pont betűjele					



2. E1 Deriváld a függvényeket!

$f(x)$	x^2	x^3	x^8	x^{12}	x^{20}
$f'(x)$					

$g(x)$	x	$-x$	$4x$	$-0,11x$	$\sqrt{2} \cdot x$
$g'(x)$					

$h(x)$	1	3	$3x - 9$	0
$h'(x)$				

3. E1 Deriváld a függvényeket!

$k(x)$	$x^2 + 5x$	$4x^3 + 7$	$3x^5 - 1,5x^2$	$10x^6 - x^4 - 2$
$k'(x)$				

4. E1 Végezd el a műveleteket, majd utána deriváld a függvényeket!

a) $f(x) = (x + 3)^2$

c) $h(x) = (4x^3)^2$

e) $g(x) = (2x + 1)^2$

b) $g(x) = (x^2 + 1)^2$

d) $k(x) = (x - 5)(x + 10)$

f) $k(x) = (x - 10)(x + 3)$

5. E1 Hol veszi fel a függvény deriváltja a 0 értéket?

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $g(x) = x^3 - 6x^2$

c) $h(x) = (2x - 5)^2$

d) $k(x) = x^3 + 9x^2 + 8$

6. E1 Írd fel az x_0 helyhez tartozó érintő egyenletét!

a) $g(x) = x^2 + 6x - 4$; $x_0 = -1$

b) $f(x) = x^3 + x^2$; $x_0 = 1$

7. E2 Ábrázoltuk az $f(x) = x^4$ függvény grafikonját és a görbe érintőjét a grafikon $E(1; 1)$ pontjában.

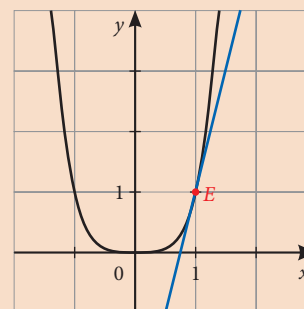
a) Mennyi az E pontban húzott érintő meredeksége?

b) Melyik a grafikonnak az a pontja, amelyben az érintő meredeksége -4 ?

c) Melyik a $g(x) = x^4 + 2$ függvény grafikonjának az a pontja, amelyben az érintő meredeksége 4 ?

d) Melyik a $g(x) = (x - 1)^4$ függvény grafikonjának az a pontja, amelyben az érintő meredeksége 4 ?

e) Melyik a $g(x) = (x - 1)^4 + 2$ függvény grafikonjának az a pontja, amelyben az érintő meredeksége 4 ?



RÁADÁS

A 68. lecke Bevezetőjében egy gyorsuló mozgást végző test út-idő grafikonját elemeztük. Határozzuk meg, hogy az indulástól számítva t idő elteltével mekkora a test pillanatnyi sebessége, ha a test által megtett út (a grafikon szerint) $s(t) = \frac{1}{2} t^2$!

Megoldás:

Ahol „meredekebb” a grafikon, ott a test hosszabb utat tesz meg ugyanannyi idő alatt, ezért a sebessége nagyobb. A pillanatnyi sebesség kapcsolatban van a grafikon adott pontbeli meredekségével, vagyis az s függvény deriváltfüggvényével. Hogyan magyarázható ez a kapcsolat?

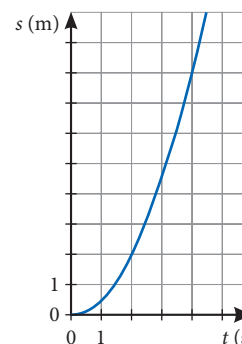
Ha kiválasztunk két időpontot t_0 -t és t_1 -et, akkor a test *átlagsebessége* ezen két időpont között kiszámítható a két időpont között megtett út és az eltelt idő hányadosaként: $\bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$.

A *pillanatnyi sebességet* úgy kapjuk meg, hogy a t_1 időpontot egyre jobban közelítjük a t_0 időponthoz.

Az átlagsebesség az s függvény egy differenciáhányadosa, a pillanatnyi sebesség pedig ennek határértéke, vagyis a differenciáhányados értéke a t_0 helyen. A test pillanatnyi sebességét tehát az s függvény deriváltfüggvénye adja meg.

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t = t$$

Azt kaptuk, hogy a test pillanatnyi sebessége $1 \cdot t \frac{\text{m}}{\text{s}}$, vagyis ez a test állandó $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nagyságú gyorsulással halad.





monotonitás és a derivált kapcsolata, szélsőérték és a derivált kapcsolata

BEVEZETŐ

Polinomfüggvény deriválása

Alakítsd át a polinomot
kanonikus alakra!

Bontsd fel a zárójeleket!

Tagonként deriváld!

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Figyelj a konstans tagra!

Konstans tag deriváltja 0.

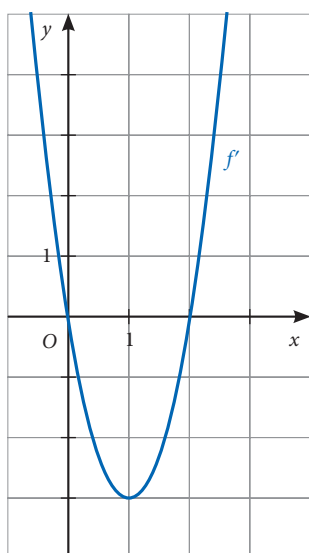
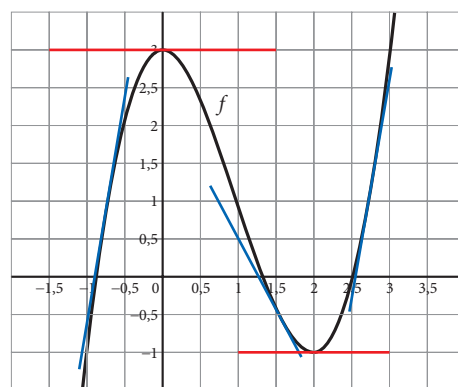
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Jellemezzük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ függvényt monotonitás és szélsőérték szempontjából!

Megoldás:

Számítógép segítségével ábrázoltuk az f függvény grafikonját, valamint be-
rajzoltuk néhány pontban az érintőt. A grafikonról leolvasható, hogy azokon
az intervallumokon, ahol a függvény szigorúan monoton nő, az érintő mere-
deksége pozitív. Ezek a $]-\infty; 0[$ és a $]2; \infty[$ intervallumok. Azon az interval-
lumon, ahol a függvény szigorúan monoton csökken, az érintő meredeksége
negatív. Ez a $]0; 2[$ intervallum. Ahol a függvénynek lokális szélsőértéke van,
ott a függvény grafikonjának az érintője párhuzamos az x tengellyel, vagyis
az érintő meredeksége 0. Mivel az adott pontbeli érintő meredeksége a deri-
váltfüggvény adott helyen vett értéke, ezért a monotonitás és a szélsőérték
vizsgálata megtehető a derivált előjelének vizsgálatával.

Az f függvény deriváltfüggvénye $f'(x) = 3x^2 - 6x$.



Az f' egy másodfokú függvény. Grafikonja egy parabola, amely metszi az x tengelyt. Azon az
intervallumon, ahol a parabola pontjainak második koordinátája negatív, ott a deriváltfügg-
vény értéke is negatív. Ekkor az eredeti f függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége
negatív és f szigorúan monoton csökken. Azokon az intervallumokon, ahol a parabola pont-
jainak második koordinátája pozitív, ott a deriváltfüggvény értéke is pozitív. Ekkor az ere-
deti f függvény grafikonjához húzott érintő meredeksége pozitív és f szigorúan monoton nő.

Az f lokális szélsőértékhelyei azokon a helyeken lehetnek, ahol a deriváltfüggvény értéke 0.

A $3x^2 - 6x = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.

Ezért az f függvénynek csak az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ helyeken lehet szélsőértéke.

Táblázatba foglalva ($\nearrow$ = szigorúan monoton nő; $\searrow$ = szigorúan monoton csökken):

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	lokális maximumhely	$\searrow$	lokális minimumhely	$\nearrow$

2. Jellemezzük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3$ függvényt monotonitás és szélsőérték szempontjából, és írjuk fel a grafikon $x_0 = 0$ helyhez tartozó érintőjének egyenletét!

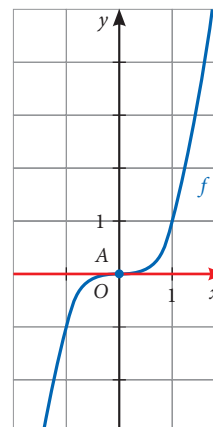
Megoldás:

Az $f(x) = x^3$ deriváltja $f'(x) = 3x^2$.

A deriváltfüggvény egyetlen helyen, az $x = 0$ esetén lesz egyenlő 0-val, minden más esetben az értéke pozitív. Ez azt jelenti, hogy az f függvény $x < 0$ és $0 < x$ esetén is szigorúan monoton nő. Ebben az esetben nem lehet szélsőértéke az $x = 0$ helyen.

Táblázatba foglalva:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x)$	+	0	+
f	↗	nincs szélsőérték!	↗



Az $f(x) = x^3$ függvény a valós számok halmazán szigorúan monoton nő, és nincs szélsőértéke.

Az $x_0 = 0$ helyen a deriváltfüggvény értéke $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, és az érintő egyenlete $y = 0$. A grafikon jól mutatja, hogy ez az érintő az érintési pontban elmetshi (!) a függvény grafikonját. Az ilyen tulajdonságú pontot **inflexiós pontnak** nevezzük.

ELMÉLET

Olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya a valós számok halmaza (vagy azon belül egy nyílt intervallum), és deriválható függvények (pl. polinomfüggvények).

1. A monotonitás és a derivált kapcsolata

A monotonitás összefügg a függvénygörbe érintőjének meredekségével, és így a függvény deriváltjának értékével.

Ha egy $]a, b[$ intervallumon

a derivált értéke pozitív	$\Rightarrow$	a függvény szigorúan monoton nő
a derivált értéke negatív	$\Rightarrow$	a függvény szigorúan monoton csökken

$f'(x) > 0$	$\Rightarrow$	$f \nearrow$
$f'(x) < 0$	$\Rightarrow$	$f \searrow$

a függvény szigorúan monoton nő	$\Rightarrow$	a derivált értéke pozitív vagy 0
a függvény szigorúan monoton csökken	$\Rightarrow$	a derivált értéke negatív vagy 0

$f \nearrow$	$\Rightarrow$	$f'(x) \geq 0$
$f \searrow$	$\Rightarrow$	$f'(x) \leq 0$

2. A szélsőérték és a derivált kapcsolata

Ahol a függvénynek lokális szélsőértéke van, ott a grafikon érintője párhuzamos az x tengellyel, az érintő meredeksége 0, azaz a derivált értéke 0.

Visszafelé azonban vigyázni kell: a derivált értéke nem csak a függvény szélsőérték helyein lehet 0.

x_0 helyen a derivált értéke 0	$\Rightarrow$	x_0 helyen a függvénynek lokális szélsőértéke van
ÉS		
x_0 helyen a derivált előjelet vált		

Vigyázz! Ha a függvényt egy $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezzük, akkor a függvénynek szélsőértéke lehet az $x = a$, illetve $x = b$ helyeken is! Ezt például a grafikon segítségével lehet ellenőrizni.

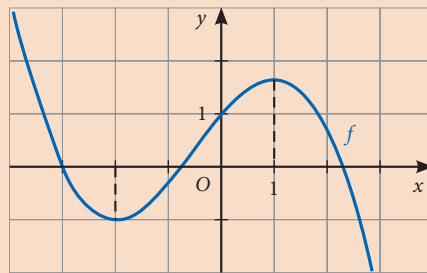
Szélsőérték helyek meghatározása



FELADATOK

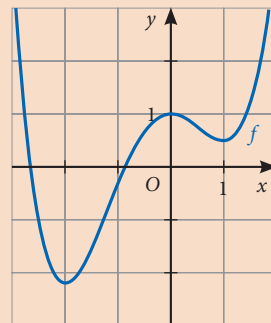
1. E1 Ábrázoltuk egy, a valós számok halmazán értelmezett függvény grafikonját, és bejelöltük a grafikonon, hogy mely helyeken van a függvénynek lokális szélsőértéke. A grafikon alapján töltsd ki a táblázatot!

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f (monotonitás / szélsőértékhely)	monoton csökken	lokális minimumhely			
f' (+ / - / 0)					



2. E1 Ábrázoltuk egy, a valós számok halmazán értelmezett függvény grafikonját. Állapítsd meg, hogy a megadott helyeken mi a derivált előjele!

x	-2,5	-1	-0,5	0,5	1,5
$f'(x)$ előjele					



3. E1 Jellemezd monotonitás és szélsőértékek szempontjából a következő függvényt!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x^2 + 2$$

- Deriváld a függvényt!
- Hol lesz a deriváltfüggvény értéke 0?
- Mely intervallumokon pozitív, mely intervallumokon negatív a deriváltfüggvény értéke?
- Hol van a függvénynek lokális minimuma, lokális maximuma?
- Töltsd ki a táblázatot!

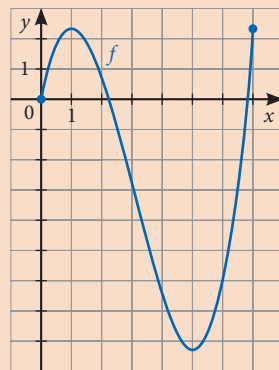
x					
f'					
f					

4. E1 Grafikonon ábrázoltuk a következő függvényt: $f: [0; 7] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$.

Határozd meg deriválással és az intervallum határainak vizsgálatával a függvény minimumhelyeit és maximumhelyeit! Hol van a függvénynek abszolút minimuma, illetve abszolút maximuma?

5. E1 Egy részvény árfolyama függ az olaj világpiaci árától. Ha az olaj világpiaci ára x dollár (és $x \in]70; 120[$), akkor a részvény árfolyama dollárban számolva jellemezhető az $f(x) = -0,001x^3 + 0,18x^2 - 8x + 60$ függvénnyel.

- Mennyi a részvény árfolyama, ha az olaj világpiaci ára 80 dollár?
- Milyen világpiaci olajár esetén lesz a részvény árfolyama a lehető legnagyobb? Mennyi ez a maximális érték?



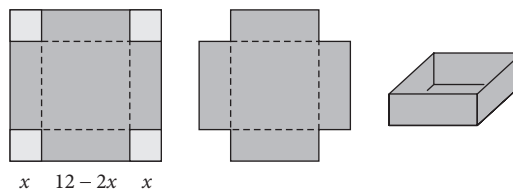
6. E1 Jellemezd a függvényt monotonitás és szélsőértékek szempontjából!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$

b) $g: [-3; 4] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 12 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú fémlapból tállát készítünk az ábra szerint. A lemez mindegyik sarkánál kivágunk egy-egy egybevágó kis négyzetet, majd az így kialakult téglalap alakú részeket felhajtjuk. Mekkora oldalhosszúságú négyzeteket vágunk ki, hogy a tálla térfogata a lehető legnagyobb legyen?



Megoldás:

Jelöljük a kivágott négyzetek oldalát x -szel. Ahhoz, hogy létrejöjjön a tálla: $0 < x < 6$ (cm).

A keletkező tálla négyzet alapú egyenes hasábot határoz meg, ennek térfogatát megkapjuk, ha az alapterületét megszorozzuk a magassággal. Az alapél $12 - 2x$, ezért az alapterület $(12 - 2x)^2$, a magasság x , a térfogat tehát $(12 - 2x)^2 \cdot x$.

Azt keressük, hogy a $V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x$ függvénynek hol van maximuma a $]0; 6[$ intervallumban. Ez egy polinomfüggvény, melynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0. A deriváltfüggvény felírásához bontsuk fel a zárójelet!

$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$



$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$

Keressük meg, hogy a deriváltfüggvény hol veszi fel a 0 értéket!

$$144 - 96x + 12x^2 = 0, \text{ ebből } x_1 = 2 \text{ és } x_2 = 6.$$

$x_2 = 6$ nem eleme a $]0; 6[$ intervallumnak, ezért csak $x_1 = 2$ lehet megoldás.

Teljesül-e, hogy az $x_1 = 2$ helyen a V függvénynek maximuma van? Ez teljesül, ha V az x_1 -nél kisebb értékek esetén szigorúan monoton nő (deriváltja pozitív), és x_1 -nél nagyobb értékek esetén szigorúan monoton csökken (deriváltja negatív). Táblázatba foglalva:

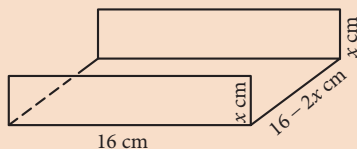
x	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 6$
V'	+	0	-
V	↗	lokális maximum	↘

A tálla térfogata akkor maximális, ha 2 cm oldalhosszúságú négyzeteket vágunk ki. A maximális térfogat

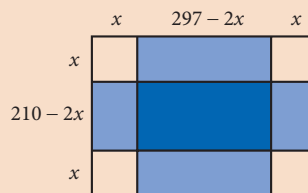
$$V(2) = 144 \cdot 2 - 48 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 128 \text{ cm}^3.$$

FELADATOK

- 1. E1** Egy $16 \times 16 \text{ cm}^2$ -es bádoglemezből etetőt hajtogatunk úgy, hogy két szemközti oldalán két ugyanolyan magas peremet hajtunk a lemezből. Milyen széles sávot hajtsunk fel, hogy az etető „térfogata” a lehető legnagyobb legyen?



- 2. E1** Egy A/4-es, $297 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}$ nagyságú kartonlap négy sarkából egybevágó négyzeteket vágunk ki, majd – a kidolgozott feladatban leírt módon – a kialakult téglalap alakú részeket felhajtjuk, és így egy fedél nélküli, téglatest alakú dobozt készítünk. Mekkora oldalhosszúságú négyzeteket vágunk ki, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?



- 3. E1** Egy részvény aktuális árfolyama az az ár, amennyiért az adott napon el lehet adni, illetve meg lehet vásárolni annak a részvénynek darabját. Ez az aktuális árfolyam napról napra változhat, például egy gyógyszergyár részvényeinek ára megemelkedik, ha piacra dobnak egy új gyógyszert. De megváltozhat egy részvény árfolyama, ha változik a valuta árfolyama, vagy az olaj világpiaci ára.

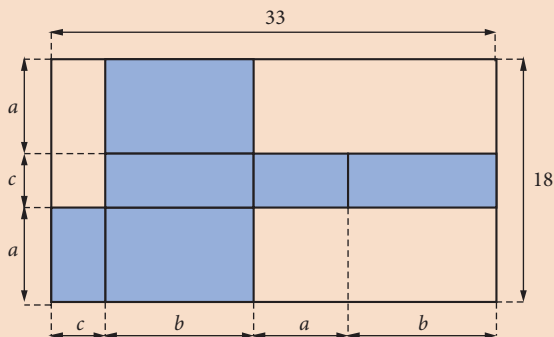
Egy befektetőnek kétféle részvénye van, A és B típusú. Táblázatba foglaltuk, hogy hány darab van ezekből, és hogy mennyi a részvények aktuális árfolyama. Ha az euró árfolyama x forinttal megnő ($0 < x < 80$), akkor az A részvény várható árfolyama $2x^2$ -tel megemelkedik, míg a B részvény várható árfolyama $0,5x^3$ -nal csökken.

Töltsd ki a táblázatot, majd határozd meg, hogy az euró árfolyamának milyen változása esetén lenne a befektetés várható összértéke a lehető legnagyobb!

Részvény	db	Aktuális árfolyam (Ft)	Várható árfolyam, ha az euró ára x forinttal megnő (Ft)
A	840	2000	
B	60	2200	

- 4. E2** (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglalest alakú dobozt készítenek. A doboz (kékre színezett) kiterített hálóját és méreteit az ábra szerint választják meg.



- a)** Határozd meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm!
b) Hogyan kell megválasztani az a , b , c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

- 5. E2** A gyártási folyamatok során a nyereség a bevételnek és a kiadásnak a különbsége. Sok esetben azonban a bevétel, a kiadás és a nyereség is függ attól, hogy hány darab terméket gyártanak. A legnagyobb

nyereség sokszor nem ugyanabban az esetben áll elő, amikor a bevétel a lehető legnagyobb. Kövesd végig a következő példában, hogyan alakul a bevétel, a kiadás és a nyereség, ha havonta x db terméket állítanak elő!

Egy termék gyártása során a gyártó cég olyan szerződést kötött egy nagykereskedővel, hogy a nagykereskedő az összes előállított terméket megveszi. A termék ára azonban függ attól, hogy hány darabot állítanak elő belőle. A szerződés szerint ha x db terméket állítanak elő, akkor az eladási ár $A(x) = 10\,000 - x$ (euró).

Egy db termék ára	Ennyit db-ot adnak el belőle	Bevétel
$10\,000 - x$	x	$(10\,000 - x) \cdot x$

- a)** Hány termék előállítása esetén lenne a gyártó cég bevétele a lehető legnagyobb?

A gyártókapacitás alapján a gyár havonta legalább 100 db, legfeljebb 300 db terméket állít elő. A termelés költsége havonta, x db termék előállítása esetén

$$K(x) = 430\,000 + 400x + 5x^2 + 0,1x^3.$$

- b)** Havi hány termék előállítása esetén lesz a nyereség a legnagyobb?
c) Mekkora a maximális nyereséghez tartozó árbevétel, illetve költség? Mekkora a maximális nyereség?

- 6. E2** (Emelt szintű érettségi, 2010)

Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés havi mennyisége (x mennyisége) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kg krém eladási ára: $(36 - 0,03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő havi kiadást (költséget) a $0,0001x^3 - 30,12x + 13\,000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

- a)** Számítsd ki, hogy hány kg krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?
b) Add meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kg krém értékesítése esetén valósul ez meg? (nyereség = bevétel - kiadás)

- 7. E2** Bontsd fel a 10-et két valós szám összegére olyan módon, hogy az első rész négyzetének és a második rész köbének az összege a lehető legkisebb legyen!



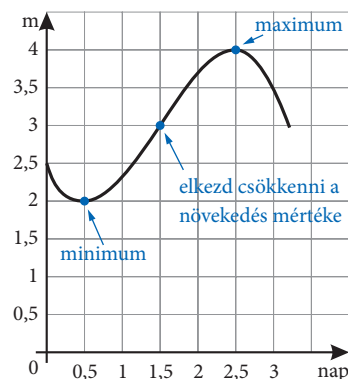
konvexitás szemléletes fogalma, inflexiós pont, függvény második deriváltja

BEVEZETŐ

Grafikonon ábrázoltuk egy patak vízszintjének alakulását. A grafikonról könnyen leolvashatjuk, hogy mikor volt a vízszint a legalacsonyabb, és mikor tetőzött.

A grafikonon bejelöltünk még egy érdekes pontot. Ez a pont ahhoz a helyzethez tartozik, amikor a vízszint emelkedésének üteme elkezd lassulni. Továbbra is emelkedik a vízszint, de már nem olyan intenzíven, mint korábban, egyre kevesebbet emelkedik óránként.

Fogalmazd meg többféleképpen, hogyan jellemezhető a folyamat, illetve hogyan jellemezhető a grafikon ezen pont előtt és ezen pont után!

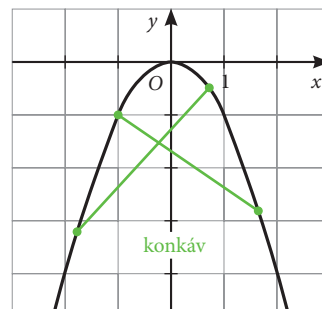
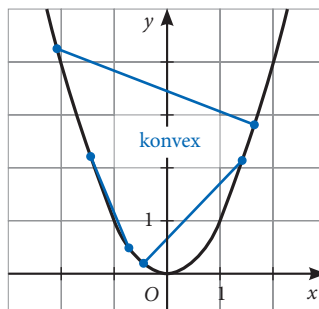


ELMÉLET

1. Konvexitás

A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény grafikonja felfelé nyíló parabola. Ez a függvény **konvex**, míg a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = -x^2$ függvény **konkáv**. (A konvex, illetve konkáv tulajdonságot nevezzük a függvény **konvexitásának**.)

A konvexitás matematikai leírásához azzal jutunk közelebb, ha összehasonlítjuk a függvénygörbe bármely két pontja által létrehozott szakasz (ún. húr) és a függvénygörbe egymáshoz viszonyított helyzetét.



Ha a grafikonon a függvénygörbe bármely két pontját összekötő húr a függvénygörbe fölött van, akkor a függvény **konvex**. Ha a függvénygörbe bármely két pontját összekötő húr a függvénygörbe alatt van, akkor a függvény **konkáv**.

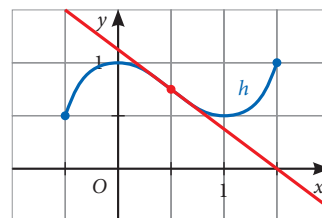
A konvexitás nemcsak a függvény teljes menetére vizsgálható, hanem – a monotonitáshoz hasonlóan – az értelmezési tartomány valamely részintervallumára.

2. Inflexiós pont

A grafikonon ábrázolt h függvény a $[-0,5; 0,5]$ intervallumon konvex és a $[0,5; 1,5]$ intervallumon konkáv. Azt a pontot, ahol a konvexitás megváltozik, **inflexiós pontnak** nevezzük. A h függvénynek inflexiós pontja van az $x = 0,5$ helyen.

Az inflexiós pontban húzott érintő az érintési pontban átmetszi a függvény grafikonját.

A grafikon meredekségének az inflexiós pontban szélsőértéke van. Ez kapcsolatban van azzal, hogy a függvény deriváltfüggvényének az inflexiós pontban szélsőértéke van. Ezért az inflexiós pontot megkereshetjük úgy, hogy a deriváltfüggvényt deriváljuk, és ennek a második deriváltfüggvénynek keressük a zérushelyét.



3. A második derivált és a konvexitás kapcsolata

A függvény **második deriváltja** a függvény deriváltfüggvényének deriváltja. Jele: f'' .

Például: $f(x) = x^3 + x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x + 2$

Ha egy $]a, b[$ intervallumon

a második derivált-függvény értéke pozitív	$\Rightarrow$	első deriváltfüggvény szigorúan monoton nő	$\Rightarrow$	a függvény konvex	$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvex
a második derivált-függvény értéke negatív	$\Rightarrow$	első deriváltfüggvény szigorúan monoton csökken	$\Rightarrow$	a függvény konkáv	$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ konkáv

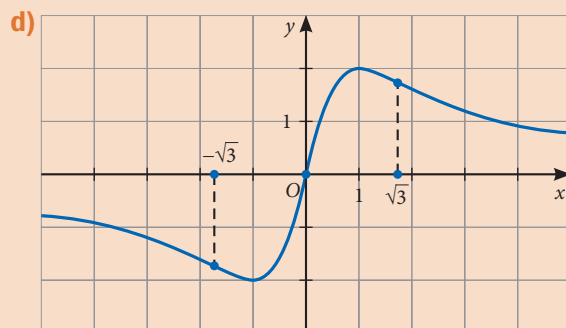
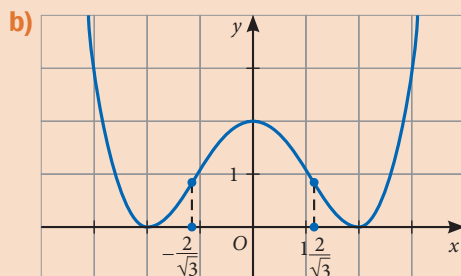
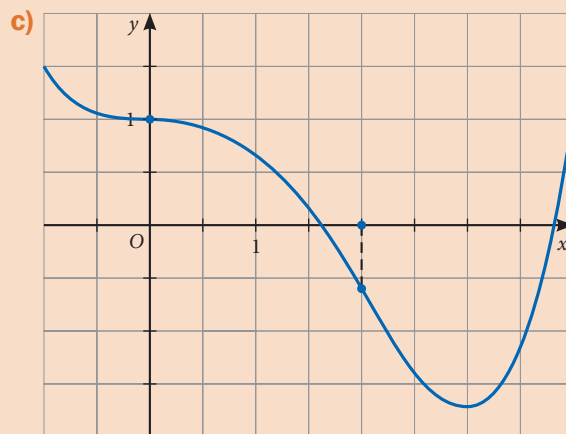
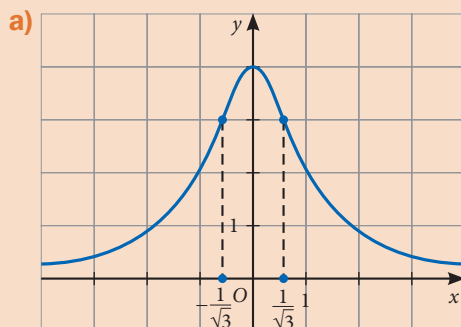
a függvény konvex	$\Rightarrow$	első deriváltfüggvény szigorúan monoton nő	$\Rightarrow$	a második derivált értéke pozitív vagy 0	f konvex $\Rightarrow f''(x) \geq 0$
a függvény konkáv	$\Rightarrow$	első deriváltfüggvény szigorúan monoton csökken	$\Rightarrow$	a második derivált értéke negatív vagy 0	f konkáv $\Rightarrow f''(x) \leq 0$

x_0 helyen a második derivált értéke 0	$\Rightarrow$		x_0 helyen a függvénynek inflexiós pontja van
ÉS			
x_0 helyen a második derivált előjelet vált			

FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények tartománya a valós számok halmaza (kivéve: 4. és 5. feladat).

- 1. E1** Ábrázoltuk néhány függvény grafikonját, és bejelöltük a grafikonon a függvény összes inflexiós pontját. Olvasd le a grafikonokról, hogy mely intervallumokon konvex, mely intervallumokon konkáv a függvény!



2. E1 Írd fel a függvények második deriváltját!

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x + 1$$

$$g(x) = (x - 3)^2$$

$$h(x) = (x + 1)^3$$

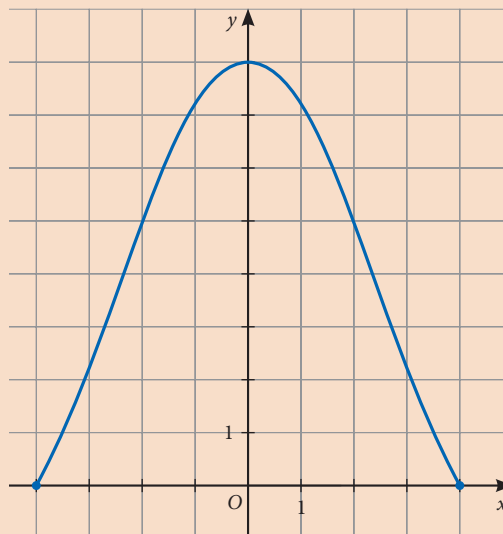
3. E1 Jellemezd az $f(x) = x^3 - 6x^2$ függvényt konvexitás szempontjából! Határozd meg, hogy mely x helyen veszi fel a függvény második deriváltja a 0-t! Határozd meg a második derivált előjelét az egyes intervallumokban! Töltsd ki a táblázatot!

x	$x < \square$	$x = \square$	$\square < x$
$f''(x)$ előjele			
f (konvex / inflexiós pont / konkáv)			

4. E1 Egy alagút keresztmetszetét írja le a következő függvény:

$f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8$. (Az alagút a szimmetriasíktól x távolságban $f(x)$ méter magas.)

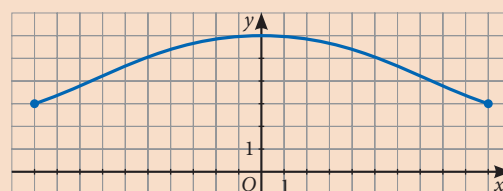
- a) Hol a legmeredekebb az alagút fala?
b) Mekkora szöget zár be a fal a vízszintessel az a) részben meghatározott pontokon?



5. E1 Egy csarnok tetejének ívét az $y = 0,0001x^4 - 0,04x^2 + 6$ egyenletű függvénygörbe $[-10; 10]$ intervallumra eső íve írja le. (Az x tengelyen a függőleges szimmetriatengelytől való távolságot, az y tengelyen pedig a padlószinttől való távolságot mérjük méterben.)

Határozd meg, hogy az ív melyik pontjára szereljenek hófogó tüskéket, ha azt a tető legmeredekebb részére szeretnék tenni!

- a) Add meg az ív ezen pontjainak koordinátáit!
b) Határozd meg, hogy ezeken a pontokon a tető meredeksége mekkora szöget zár be a vízszintessel!



6. E1 Jellemezd a függvényeket konvexitás szempontjából! Foglald táblázatba a függvény második deriváltjának előjelét és a konvexitást (a 3. feladat táblázatához hasonlóan)!

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$

b) $g(x) = 2x^4 - 3x^2$



7. E1 Írd fel az $f(x) = x^3 - x + 1$ függvény esetében annak az érintőnek az egyenletét, amely az érintési pontban elmetszi a függvény grafikonját!



szélsőérték és a második derivált kapcsolata

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy cég henger alakú, felül nyitott fémdobozokat állít elő. A tervezés során azzal kalkulálnak, hogy a felül nyitott henger felszíne 200 cm^2 . Hogyan válasszák meg a henger méreteit, hogy térfogata a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás:

Egy henger térfogata úgy számolható ki, hogy az alapkör területét megszorozzuk a henger magasságával. Jelöljük az alapkör sugarát R -rel, a henger magasságát pedig m -mel. Ekkor a térfogat $V = R^2\pi \cdot m$.

Ebben az összefüggésben két változó szerepel, R és m . Egyiket sem ismerjük. Az R és az m értéke azonban nem lehet teljesen tetszőleges, mert a feladat szövege megfogalmaz egy feltételt: a felül nyitott henger felszíne 200 cm^2 . A felület egy darab körlepből és a henger palástjából áll. Ha a palástot kiterítjük síkba, akkor egy olyan téglalapot kapunk, melynek egyik oldala a henger magassága, másik oldala az alapkör kerülete, ezért $200 = R^2\pi + 2R\pi \cdot m$. Fejezzük ki m -et ebből az összefüggésből: $m = \frac{200 - R^2\pi}{2R\pi}$.

Ha ezt behelyettesítjük a henger térfogatának képletébe, akkor egyetlen változó, R függvényeként kapjuk meg a térfogatot.

$$V(R) = R^2\pi \cdot \frac{200 - R^2\pi}{2R\pi} = \frac{R \cdot (200 - R^2\pi)}{2} = 100R - \frac{\pi}{2}R^3. \quad (\text{A geometriai értelmezés miatt } R \text{ és } m \text{ pozitív valós számot jelöl.})$$

Keressük V szélsőértékét a derivált segítségével!

$$V'(R) = 100 - \frac{3\pi}{2}R^2$$

V ott veheti fel a szélsőértékét, ahol V' értéke 0. $100 - \frac{3\pi}{2}R^2 = 0$. Ebből $R_1 = \sqrt{\frac{200}{3\pi}} \approx 4,61$ és $R_2 = -\sqrt{\frac{200}{3\pi}} \approx -4,61$ cm. Negatív értéket R nem vehet fel, így csak az első megoldás jöhet szóba.

Ellenőrizni kell, hogy V -nek maximuma van-e az R_1 helyen. Megvizsgálhatnánk, hogy V' előjelet vált-e R_1 -ben. Végig gondolhatjuk azonban azt is, hogy milyen a V függvény konvexitása R_1 -ben. Ezt a második derivált mutatja meg. $V''(R) = -3\pi R$. Ennek értéke R_1 -ben negatív, ezért R_1 -ben V konkáv. Belátható, hogy ekkor a V függvénynek R_1 -ben maximuma van.

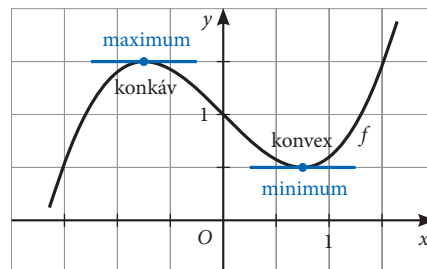
Annak a hengernek a legnagyobb a térfogata, amely alapkörének sugara $R \approx 4,6$ cm és magassága $m \approx \frac{200 - 4,61^2 \cdot \pi}{2 \cdot 4,61^2 \cdot \pi} \approx 4,6$ cm.

ELMÉLET

Szélsőérték és a második derivált

Ha f az $]a; b[$ intervallumon értelmezett polinomfüggvény, és az x_0 helyen szélsőértéke van, akkor az alapján, hogy ott az f függvény konkáv vagy konvex, meghatározható, hogy a szélsőérték maximum vagy minimum.

- ▶ A szélsőérték létezésének igazolása nemcsak azzal tehető meg, hogy megvizsgáljuk, hogy a deriváltfüggvény előjelet vált-e x_0 -ban, hanem azzal is, hogy a második derivált segítségével megvizsgáljuk f konvexitását x_0 -ban.



$f'(x_0) = 0$	$\Rightarrow$	x_0 helyen a függvénynek lokális szélsőértéke van
ÉS		
$f''(x_0) \neq 0$		

$f'(x_0) = 0$	$\Rightarrow$	x_0 helyen lokális minimum van
ÉS		
$f''(x_0) > 0$		

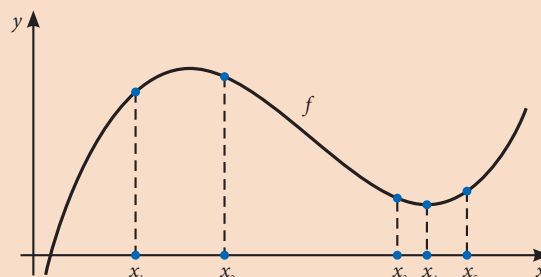
$f'(x_0) = 0$	$\Rightarrow$	x_0 helyen lokális maximum van
ÉS		
$f''(x_0) < 0$		

FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2019)

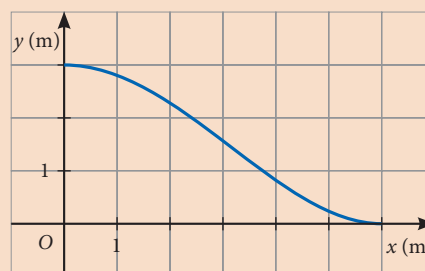
Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet. Mindegyik esetben dönts el, hogy az adott helyen az f első, illetve a második deriváltjának előjele pozitív (P), vagy negatív (N)! Válaszodat írd a megadott táblázat megfelelő cellájába! (Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)

Hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					



2. E1 Egy vidéki ház kertjében elkerítene egy téglalap alakú részt a baromfik számára. Az elkerített terület egyik oldala a gazdasági épületek fala, ehhez az oldalhoz nincs szükség kerítésre. A másik három oldalhoz összesen 10 m kerítés áll rendelkezésre. Hogyan válasszák meg a téglalap oldalait, hogy az elkerített rész területe a lehető legnagyobb legyen?

3. E2 Egy csúszda íve az $f: [0; 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{4} + 3$ függvénnyel írható le. Határozd meg a csúszda legmeredekebb pontjának koordinátáit!



4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2015)

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

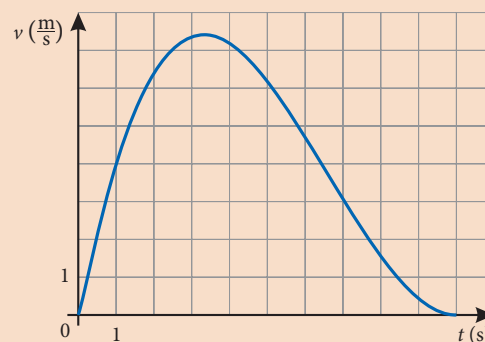
a) Igazold, hogy $x = -15$ -ben abszolút minimuma, $x = 0$ -ban lokális maximuma, $x = 9$ -ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazold, hogy f konkáv a $]-9; 5[$ intervallumon!

5. E2 Egy test sebessége az idő függvényében a $v: [0; 10] \rightarrow \mathbb{R}, v(t) = 0,05t^3 - t^2 + 5t$ függvénnyel jellemezhető.

a) Melyik pillanatban maximális a test sebessége?

b) A maximális sebesség elérése után a test lassul, majd a $t = 10$ s időpillanatban a test megáll. E két helyzet között melyik pillanatban maximális a sebesség változása?





polinomfüggvény deriváltfüggvénye

 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^a$ függvény ($a \in \mathbb{R}$) és a trigonometrikus függvények deriváltfüggvénye

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy cég henger alakú, 1 literes (1000 cm^3 -es) konzervdobozokat készít. Hogyan kell megválasztani a henger méreteit ahhoz, hogy a lehető legkevesebb anyagra legyen szükség egy konzervdoboz elkészítéséhez?

Megoldás:

Adott térfogat mellett a felszínt leíró függvény minimumát keressük. A henger felszíne három részből áll: az alapkör, a fedőkör és a palást területéből. Ha a palástot kiterítjük síkba, akkor egy olyan téglalapot kapunk, melynek egyik oldala a henger magassága, másik oldala az alapkör kerülete. Jelöljük az alapkör sugarát R -rel, a henger magasságát pedig m -mel. Ekkor a felszín $A = 2R^2\pi + 2R\pi \cdot m$.

Ebben az összefüggésben két változó szerepel, R és m . Az R és az m értéke azonban nem lehet teljesen tetszőleges, mert a feladat szövege megfogalmaz egy feltételt: a henger térfogata $1000 \text{ (cm}^3\text{)}$, ezért $1000 = R^2\pi \cdot m$. Fejezzük ki m -et ebből az összefüggésből: $m = \frac{1000}{R^2\pi}$.

Ha ezt behelyettesítjük a henger felszínének képletébe, akkor a felszínt megkapjuk R függvényeként.

$$A(R) = 2R^2\pi + 2R\pi \cdot \frac{1000}{R^2\pi} = 2R^2\pi + \frac{2000}{R}. \quad (\text{A geometriai jelentés miatt } R \text{ és } m \text{ is pozitív.})$$

A felszín (A) ott veheti fel a szélsőértékét, ahol az A' értéke 0. Az első tagot ($2R^2\pi$) tudjuk deriválni, a másodikat $\left(\frac{2000}{R}\right)$ azonban még nem. Szükség van arra, hogy a polinomfüggvényeken kívül más függvények deriváltját is megismerjük.

ELMÉLET

1. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^a$ függvény deriváltfüggvénye ($a \in \mathbb{R}$)

Azt már láttuk, hogy pozitív egész n kitevőkre a deriváltfüggvény $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

Belátható, hogy ez bármilyen valós kitevőre igaz, azaz $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$.

Mivel $\frac{1}{x} = x^{-1}$, illetve $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, ezért az $\mathbb{R}^+$ halmazon értelmezett $f(x) = \frac{1}{x}$ és $g(x) = \sqrt{x}$ függvények deriváltfüggvénye így írható:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \frac{1}{x} = x^{-1} & \quad \blacktriangleright \quad (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

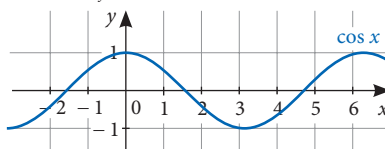
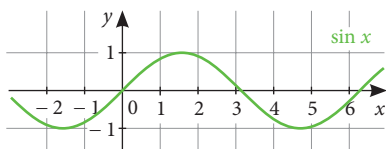
$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & \quad \blacktriangleright \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Trigonometrikus függvények deriváltfüggvénye ($D_f = \mathbb{R}$)



$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

- ▶ ahol a $\sin x$ függvénynek szélsőértéke van, ott a $\cos x$ függvény értéke 0,
- ▶ ahol a $\sin x$ függvény szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ott a $\cos x$ értéke pozitív (negatív),
- ▶ ahol a $\sin x$ függvény konvex (konkáv), ott a $\cos x$ függvény növekvő (csökkenő).

KIDOLGOZOTT FELADAT

Fejezzük be a kidolgozott feladat megoldását!

Megoldás folytatása:

Keressük az A szélsőértékét a deriváltfüggvény segítségével! $A(R) = 2R^2\pi + \frac{2000}{R}$ $\rightarrow$ $A'(R) = 4R\pi - \frac{2000}{R^2}$.

Ahol az A -nak szélsőértéke van, ott $A'(R)$ értéke 0. $4R\pi - \frac{2000}{R^2} = 0$ $\rightarrow$ $R^3 = \frac{2000}{4\pi}$ $\rightarrow$ $R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$ cm.

Ha megvizsgáljuk $A''(R)$ előjelét, akkor igazolhatjuk, hogy $R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ esetén a felszín értéke minimális.

$$A''(R) = 4\pi - 2000 \cdot (R^{-2})' = 4\pi + 4000 \cdot R^{-3}.$$

Ennek mindkét tagja pozitív, ezért a második derivált pozitív, tehát A -nak minimuma van. Akkor a legkisebb tehát a felszín, ha $R \approx 5,42$ cm és $m \approx \frac{1000}{5,42^2\pi} \approx 10,84$ cm.

FELADATOK

1. E1 Felül nyitott, négyzetes hasáb alakú dobozt készítünk. A doboz térfogata 2 dm^3 . Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit úgy, hogy az anyagköltség a lehető legkevesebb legyen?

2. E2 (Emelt szintű érettség, 2013)

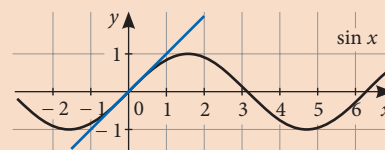
Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdni, amelynek térfogata 1000 cm^3 . A doboz aljának és tetejének anyagköltsége $0,2 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$, míg oldalának anyagköltsége

$0,1 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$. Mekkora legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják?

3. E1 Hogyan válasszuk meg egy körcikk adatait, hogy a kerülete a lehető legkisebb legyen, ha a területe 12 cm^2 ?

4. E1 Írd fel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjához húzható érintő egyenletét az $x_0 = 0$ helyen!

5. E1 Gondold végig, milyen transzformációval kapjuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjából az alábbi függvények grafikonját, majd ez alapján írd fel a függvények grafikonjához húzható érintő egyenletét az adott x_0 helyen!



a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x + 4$, $x_0 = 0$

b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -\sin x$, $x_0 = 0$

c) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin(x - 2)$, $x_0 = 2$



összetett függvény



szorzatfüggvény, hányadosfüggvény és összetett függvény deriválása

BEVEZETŐ

A ferde hajtás fizikai törvényei szerint, ha a közegellenállástól eltekintünk, akkor a talaj magasságából v_0 kezdősebességgel α szögben elhajított test $\frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ távolságban ér földet. Hogyan válaszszuk meg a hajtás α szögét, hogy a távolság a lehető legnagyobb legyen? A kérdés megválaszolásához szükségünk lenne a valós számokon értelmezett $\sin x \cdot \cos x$ függvény deriváltfüggvényére.

Függvények szorzatának deriválása azonban nem olyan egyszerű, mint például az összegük deriválása. Nem végezhetjük úgy, hogy a tényezőket külön-külön deriváljuk, majd ezeket összeszorozzuk. Például a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvényre teljesül, hogy $f(x) = x \cdot x$, ugyanakkor $f'(x) = 2x$, míg $x' \cdot x' = 1 \cdot 1 = 1$.



ELMÉLET

Beláthatók a következő összefüggések:

1. Szorzatfüggvény, hányadosfüggvény deriváltja

Ha f és g függvények deriválhatók x_0 -ban, akkor szorzatuk is deriválható x_0 -ban, és $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Ha f és g függvények deriválhatók x_0 -ban, $g(x_0) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is deriválható

x_0 -ban, és $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

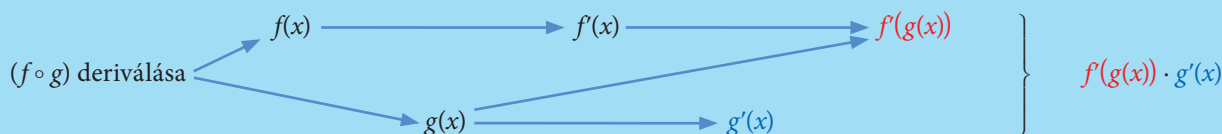
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

2. Összetett függvény deriváltja

Ha g deriválható x_0 -ban és f deriválható $g(x_0)$ -ban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is deriválható x_0 -ban, és

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Deriváld a függvényeket!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin x$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

Megoldás:

a) A szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján: $f'(x) = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$.

b) A hányadosfüggvény deriválási szabálya alapján: $g'(x) = \frac{(1)' \cdot (x^2 + 3) - 1 \cdot (x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{0 \cdot (x^2 + 3) - 1 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$.

2. Deriváld a függvényt: $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

Megoldás:

Gondoljuk végig, hogy milyen függvények összetételéből áll a h függvény. A külső függvény és a belső függvény deriváltjára is szükség van a megoldáshoz.

$$(f \circ g) \text{ deriválása } \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \\ g(x) = x^2 + x \longrightarrow g'(x) = 2x + 1 \end{array} \right\} h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \cdot (2x + 1)$$

3. Deriváld a valós számok halmazán értelmezett $h(x) = (3x - 2)^2$ függvényt!

Megoldás:

Három különböző megközelítést alkalmazhatunk. Hasonlítsuk össze a megoldásokat!

Megközelítés	$(3x - 2)^2$ felbontása	$(3x - 2)^2$ deriváltja
Kanonikus alakra rendezve	$9x^2 - 12x + 2$	$18x - 12$
Szorzatfüggvényként	$(3x - 2) \cdot (3x - 2)$	$3 \cdot (3x - 2) + (3x - 2) \cdot 3 = 18x - 12$
Összetett függvényként	külső függvény: $f(x) = x^2$ belső függvény: $g(x) = 3x - 2$	$2 \cdot (3x - 2) \cdot 3 = 18x - 12$

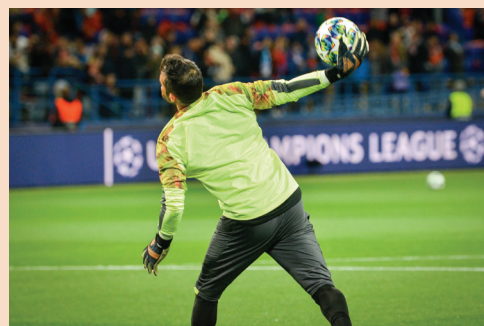
Mindhárom megközelítés ugyanahhoz a megoldáshoz vezet. A h függvény deriváltfüggvénye: $h'(x) = 18x - 12$.

FELADATOK

1. E2 Deriváld az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvényt, majd annak segítségével határozd meg, hogyan válasszuk meg a ferde hajítás szögét, hogy a talaj magasságából v_0 kezdősebességgel α szögben elhajított test a lehető legtávolabb érjen földet, ha a légellenállástól eltekin-tünk! (A Bevezetőben olvashatod, hogy a távolság $\frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.)

2. E2 Az egyik addíciós tétel szerint $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$. Ez alapján az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvény $f(x) = \frac{\sin 2x}{2}$ alakban írható. Oldd meg az előző feladatot úgy, hogy az f függvénynek ezt az alakját használod és az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazod!

3. E1 A hányadosfüggvény deriválási szabálya alapján határozd meg a tangensfüggvény deriváltját!



4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Az 1917-ben gyártott és nosztalgiajárműként megőrzött 109.109 sorozatszámú gőzmozdonynál több próbaút során is vizsgálták, hogy a mozdony szénfogyasztása hogyan függ a mozdony átlagsebességétől. A mérések szerint $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén ($50 < v < 100$) jó közelítéssel $0,5v^2 - 65v + 3800$ kg volt az óránkénti szénfogyasztás. A mozdony a hozzákapcsolt szerkocsiban 6,1 tonna szenet tudott magával vinni.



a) Számítsd ki, hogy $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén (a megadott modell szerint) hány km hosszúságú útra elegendő a 6,1 tonna szénkészlet!

b) Határozd meg azt az átlagsebességet, amelynél a 6,1 tonna szén a lehető leghosszabb útra elegendő!

5. E2* Az $f:]2; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3x-6}$ függvény grafikonjának határozd meg azt az érintőjét, amelyik párhuzamos az $y = 0,75x$ egyenessel!

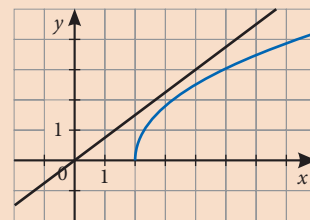
6. E2 Deriváld az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$ függvényt kétféle módon: a függvények szorzatára felírt deriválási szabállyal, illetve az összetett függvény deriválási szabályával!

7. E2 Deriváld a függvényeket!

a) $f:]-0,5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x+1}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2+4}$

8. E2 Hol van lokális szélsőértéke a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ függvénynek? Ellenőrizd függvényábrázoló programmal a megoldásodat!



RÁADÁS

1. A derivált definíciója alapján ellenőrizzük az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény deriváltfüggvényének képletét! Írjuk fel a differenciahányadost az értelmezési tartomány egy x_0 és egy ettől különböző x helyén!

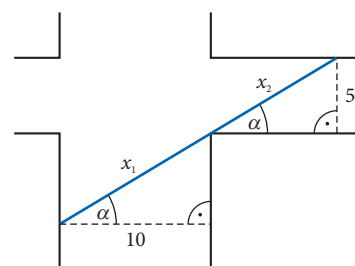
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{x \cdot x_0}$$

Szemléletesen végiggondolható, de a határérték fogalmának bevezetése után bebizonyítható, hogy amennyiben x tart x_0 -hoz, akkor ennek értéke tart $-\frac{1}{(x_0)^2}$ -hez. $\blacktriangleright f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0)^2}$.

2. Egy 10 méter széles csatornából rá merőlegesen egy 5 méter széles elágazás nyílik az ábra szerint. Mekkora az a leghosszabb hajó, amely be tud kanyarodni az elágazásba, ha a hajó szélességét elhanyagoljuk?

Az ábra azt mutatja, hogy milyen hosszú hajó férne el abban a pillanatban, amikor a hajó hossz tengelye és a csatorna elágazásának fala α szöget zár be ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Az ábra szerint $x_1 = \frac{10}{\cos \alpha}$ és $x_2 = \frac{5}{\sin \alpha}$, ezért az $f(x) = \frac{10}{\cos x} + \frac{5}{\sin x}$ függvény minimumát kell meghatározni. Határozd meg f minimumhelyét, majd a hajó hosszát!



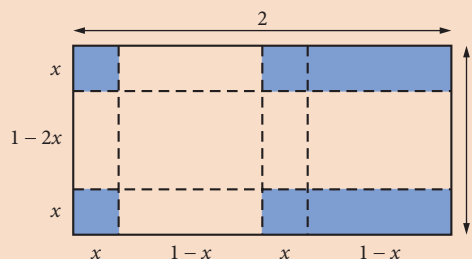


szélsőérték keresése egész számokon értelmezett feladat esetén

FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Egy üzemben egyforma, nagy méretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méterszer 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagvesztéssel.) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen?



2. E2 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ függvény.

- Jellemezd a függvényt monotonitás szempontjából!
- Határozd meg a függvény lokális szélsőértékhelyeit!
- Jellemezd a függvényt konvexitás szempontjából!
- Határozd meg a függvény inflexiós pontját!
- Írd fel a függvénygörbe érintőjének egyenletét az $x_0 = 1$ pontban!

3. E2 (Emelt szintű érettségi, 2013)

Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- ▶ az üzemeltetési költség $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén $400 + 0,8x$ Ft kilométerenként,
- ▶ a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsikilométerenkénti működtetési költsége? Válaszodat $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban, egészre kerekítve add meg!

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2011)

A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

- Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?
- A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

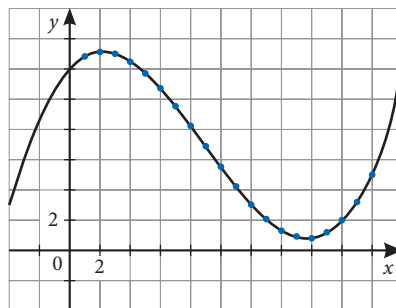
5. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Határozd meg a $10\,000\text{ cm}^2$ felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatú henger alapkörének a sugarát és a henger magasságát!

Szélsőérték keresése egész számokon értelmezett függvény esetén

Ha egy függvény értelmezési tartománya a természetes számok halmaza vagy az egész számok halmaza, akkor nem deriválható. Ha azonban kiterjesztjük a függvényt a valós számok halmazára, akkor deriválható függvényt kaphatunk.

Ha a kiterjesztett függvény szélsőértékhelye nem egész szám, akkor az eredeti függvény szélsőértékhelye nem feltétlenül az ehhez legközelebb eső egész szám. Behelyettesítéssel ellenőrizni kell a függvényértékeket a szomszédos egész számok helyén.



FELADATOK

6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n -szer 10 Ft-al alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni ($n \in \mathbb{Z}^+$). Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

- Határozd meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik!
- Mekkora n érték esetén lenne maximális sorsjegyek eladásából származó havi bevétel?

7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek).

Egy hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékkal növeli a jegy nélküli utazások arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékkal csökkentené a bliccelések arányát. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni, és a modell a 245 tallérnál drágább és 455 tallérnál olcsóbb jegyárakra vonatkozik.

- Mekkora lenne a vonaljegyekből származó napi bevétel a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?
- Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel?

RÁADÁS

Egyenletesen lassuló mozgás

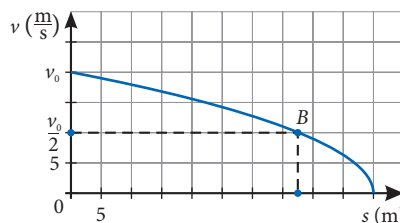
Grafikonon ábrázoltuk, hogyan alakul egy egyenletesen lassuló autó esetében az autó sebessége a megtett út függvényében (vagyis azt, hogy a fékút melyik helyén mennyi a test sebessége).

Ha a kezdősebesség $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a gyorsulás $a = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, akkor a test 5 s alatt áll meg,

eközben 50 m utat tesz meg, és ezalatt a sebessége a $v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2as} = \sqrt{400 - 8s}$

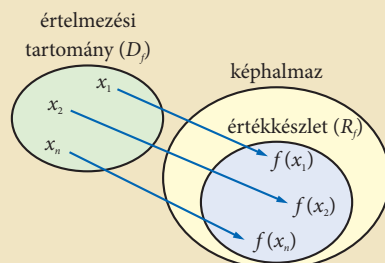
függvény szerint változik. A fékút $\frac{3}{4}$ -ed részének megtételekor a kezdeti sebesség csak a felére csökken. A kezdeti sebes-

ség $\frac{3}{4}$ -ed részével való csökkentéséhez a teljes féktáv $\frac{15}{16}$ -od részének a megtétele szükséges! Azaz a sebességcsökkenés legnagyobb része a fékezési távolság végére esik. Ez a gyökfüggvény menetéből és konkáv tulajdonságából fakad.



(D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás)

D	Függvény, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet, helyettesítési érték	Legyen A és B két nem üres halmaz. Ha az A halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a B halmaz pontosan egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük, melynek értelmezési tartománya az A halmaz és képhalmaza a B halmaz. Az $x \in A$ elemhez hozzárendelt B halmazbeli elemet az x helyen vett helyettesítési értéknek nevezzük. A függvény értékkészlete a B halmaz azon elemeinek halmaza, melyeket az A elemeihez hozzárendelünk.
D	Függvény grafikonja	Ha az f függvény értelmezési tartománya és képhalmaza is számhalmaz, akkor a függvényt szemléltethetjük grafikonjával, amit úgy kapunk, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk azokat az $(x; y)$ számpárokat, melyekre $x \in D_f$ és $y = f(x)$.
FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK		
D	Kölcsönösen egyértelmű függvény	Az értelmezési tartomány különböző elemeihez a függvény különböző elemeket rendel. Azaz ha $x_1, x_2 \in D_f$ és $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$.
D	Zérushelyek	Az értelmezési tartomány azon eleme vagy elemei, melyekhez a függvény a 0 értéket rendeli.
D	Monotonitás	A függvény az értelmezési tartomány egy intervallumán ▶ szigorúan monoton növekvő, ha az intervallum bármely két eleme esetén a nagyobb elemhez a függvény nagyobb értéket rendel, mint a kisebbhez. Azaz ha $x_1, x_2 \in D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$. ▶ szigorúan monoton csökkenő, ha $x_1, x_2 \in D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$. ▶ monoton növekvő, ha $x_1, x_2 \in D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$. ▶ monoton csökkenő, ha $x_1, x_2 \in D_f$ és $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$.
D	Szélsőérték	Maximum: az értékkészlet legnagyobb eleme, ha létezik ilyen. Maximumhely vagy maximumhelyek: az értelmezési tartomány azon eleme vagy elemei, melyekhez a függvény a maximumot rendeli. ▶ A függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen (abszolút) maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$. Ekkor x_0 maximumhely és $f(x_0)$ a maximum. Minimum: az értékkészlet legkisebb eleme, ha létezik ilyen. Minimumhely vagy minimumhelyek: az értelmezési tartomány azon eleme vagy elemei, melyekhez a függvény a minimumot rendeli. ▶ A függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen (abszolút) minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$. Ekkor x_0 minimumhely és $f(x_0)$ a minimum.



D	Lokális (helyi) szélsőérték	Egy $x_0 \in D_f$ helyen az f függvénynek lokális (helyi) maximuma van, ha – az x_0 egy környezetében a függvény értelmezhető (van olyan $]a; b[$, melyre $]a; b[\subset D_f$ és $x_0 \in]a; b[$) és – x_0-nak ebben a környezetében a függvény sehol sem vesz fel nagyobb értéket, mint x_0-ban. Egy $x_0 \in D_f$ helyen az f függvénynek lokális (helyi) minimuma van, ha – az x_0 egy környezetében a függvény értelmezhető (van olyan $]a; b[$, melyre $]a; b[\subset D_f$ és $x_0 \in]a; b[$) és – x_0-nak ebben a környezetében a függvény sehol sem vesz fel kisebb értéket, mint x_0-ban.
D	Paritás	A függvény páros, ha az értelmezési tartomány minden eleme esetén az ellentettje is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen a két helyen a helyettesítési érték egyenlő. Azaz $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$. A függvény páratlan, ha az értelmezési tartomány minden eleme esetén az ellentettje is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen a két helyen a helyettesítési érték egymás ellentettje. Azaz $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.
D	Periodikusság	Az f függvény periodikus, ha van olyan p pozitív valós szám, amelyre teljesül, hogy az értelmezési tartomány minden x eleme esetén $x + p$ is eleme az értelmezési tartománynak, és ezen a két helyen a helyettesítési érték egyenlő. Azaz $x \in D_f$ esetén $x + p \in D_f$ és $f(x + p) = f(x)$. A legkisebb ilyen p számot a függvény periódusának nevezzük.
	Konvexitás	Polytonos függvény esetén a függvény konvexitásáról szemléletes képet ad a függvény grafikonja. Ha a függvénygörbe bármely két pontját összekötő húr a függvénygörbe fölött van, akkor függvény konvex. Ha a függvénygörbe bármely két pontját összekötő húr a függvénygörbe alatt van, akkor a függvény konkáv. A konvexitás vizsgálható az értelmezési tartomány egy részintervallumán is.
D	Inflexiós pont	Azt a pontot, ahol a konvexitás megváltozik, inflexiós pontnak nevezzük.
INVERZ FÜGGVÉNY ÉS ÖSSZETETT FÜGGVÉNY		
D	Függvény inverze	Ha f egy kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor azt a hozzárendelést, amely során az értékkészlet minden y eleméhez hozzárendeljük az értelmezési tartomány azon x elemét, amelyre $f(x) = y$, az f függvény inverz függvényének (röviden: inverzének) nevezzük. Jele: f^{-1} .
M	Inverz függvény meghatározása	▶ Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya megegyezik az f függvény értékkészletével. ▶ Egy függvénynek és az inverz függvényének grafikonja tengelyesen szimmetrikus az $y = x$ egyenesre. ▶ Az inverz függvény hozzárendelési szabályát sok esetben megkaphatjuk úgy, hogy az $y = f(x)$ alakban felírt hozzárendelési szabályból kifejezzük x-et.
D	Függvény leszűkítése	Az $f: A \rightarrow B$ függvény leszűkítése olyan függvény, melynek értelmezési tartománya az A halmaz helyett annak egy részhalmaza, ugyanazon hozzárendelési szabálya mellett.

D	Függvény kiterjesztése	Az $f: A \rightarrow B$ függvény kiterjesztése olyan függvény, mely esetén az értelmezési tartománynak részhalmaza az A halmaz, és az A halmaz elemei esetén a hozzárendelési szabály ugyanaz, mint az f függvényénél.
D	Összetett függvény	Adott egy $g: A \rightarrow B$ függvény és egy $f: B \rightarrow C$ függvény. Ekkor az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya az A halmaz, képhalmaza a C halmaz, hozzárendelési szabálya pedig $x \mapsto f(g(x))$. Jelölés: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS FOGALMAI

D	Differenciahányados	Legyen az f függvény értelmezve az x és x_0 helyeken. Az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hányadost az f függvény x_0 és x helyekhez tartozó differenciahányadosának (különbségi hányadosának) nevezzük.
	Differenciálhányados (szemléletes leírás)	Az f függvény esetén x_0 és x legyen az értelmezési tartomány két különböző eleme. Ekkor az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ differenciahányados meghatározható. Rögzített x_0 mellett változtassuk az x értékét úgy, hogy egyre jobban megközelítse x_0 -t! Ha ez megtehető, és eközben a differenciahányados egy konkrét értékhez „tart”, akárhogyan közelítünk is x_0 -hoz, akkor azt mondjuk, hogy f deriválható az x_0 helyen , és ezt a „határértéket” nevezzük az x_0-beli differenciálhányadosnak , más szóval deriváltnak .
D	Deriváltfüggvény	Ha egy függvény az értelmezési tartományának minden pontjában deriválható, akkor azt a függvényt, amely az értelmezési tartomány minden eleméhez az ezen helyhez tartozó derivált értékét rendeli, deriváltfüggvénynek (röviden deriváltnak) nevezzük. Jele: f' .
M	Görbe érintője (szemléletes kép)	Az érintő a szelők „határhelyzete” abban az értelemben, hogy a görbe egy pontját lerögzítjük, egy másik pontját pedig „mozgatjuk” a görbe mentén a lerögzített pont felé, és közben rendre meghúzzuk a szelőket. Deriválható függvény esetén a függvénygörbe $E(x_0; y_0)$ pontjában húzható érintőjének meredeksége egyenlő a deriváltfüggvény x_0 helyen felvett helyettesítési értékével.
M	Érintő egyenletének felírása	1. $f(x_0)$ kiszámolása 2. f' meghatározása 3. $m = f'(x_0)$ 4. $f(x_0) = mx_0 + b$ egyenletből b meghatározása 5. $y = mx + b$
T	Deriválási szabályok	$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$ $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

T	x^n deriváltfüggvénye	Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ függvény $(n \in \mathbb{Z}^+)$ deriváltfüggvénye $f'(x)=n \cdot x^{n-1}$.														
T	Néhány elemi függvény deriváltja	$(x^a)'=a \cdot x^{a-1} \quad (a \in \mathbb{R} \text{ és } D_f=\mathbb{R}^+)$ $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (D_f=\mathbb{R}^+)$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2} \quad (D_f=\mathbb{R} \setminus \{0\})$ $(\sin x)'=\cos x \quad (D_f=\mathbb{R})$ $(\cos x)'=-\sin x \quad (D_f=\mathbb{R})$														
T	Monotonitás és a derivált kapcsolata	Ha egy $]a, b[$ intervallumon <table><tr><td>$f'(x) > 0$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$f \nearrow$</td><td>$f \nearrow$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$f'(x) \geq 0$</td></tr><tr><td>$f'(x) < 0$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$f \searrow$</td><td>$f \searrow$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$f'(x) \leq 0$</td></tr></table>			$f'(x) > 0$	$\Rightarrow$	$f \nearrow$	$f \nearrow$	$\Rightarrow$	$f'(x) \geq 0$	$f'(x) < 0$	$\Rightarrow$	$f \searrow$	$f \searrow$	$\Rightarrow$	$f'(x) \leq 0$
$f'(x) > 0$	$\Rightarrow$	$f \nearrow$	$f \nearrow$	$\Rightarrow$	$f'(x) \geq 0$											
$f'(x) < 0$	$\Rightarrow$	$f \searrow$	$f \searrow$	$\Rightarrow$	$f'(x) \leq 0$											
T	Szélsőérték és a derivált kapcsolata	<table><tr><td>x_0 helyen a derivált értéke 0</td></tr><tr><td>ÉS</td></tr><tr><td>x_0 helyen a derivált előjelet vált</td></tr></table>	x_0 helyen a derivált értéke 0	ÉS	x_0 helyen a derivált előjelet vált	$\Rightarrow$	x_0 helyen a függvénynek lokális szélsőértéke van									
x_0 helyen a derivált értéke 0																
ÉS																
x_0 helyen a derivált előjelet vált																
T	Második derivált és a konvexitás kapcsolata	Ha egy $]a, b[$ intervallumon <table><tr><td>$f''(x) > 0$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>f konvex</td><td>f konvex</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$f''(x) \geq 0$</td></tr><tr><td>$f''(x) < 0$</td><td>$\Rightarrow$</td><td>f konkáv</td><td>f konkáv</td><td>$\Rightarrow$</td><td>$f''(x) \leq 0$</td></tr></table>			$f''(x) > 0$	$\Rightarrow$	f konvex	f konvex	$\Rightarrow$	$f''(x) \geq 0$	$f''(x) < 0$	$\Rightarrow$	f konkáv	f konkáv	$\Rightarrow$	$f''(x) \leq 0$
$f''(x) > 0$	$\Rightarrow$	f konvex	f konvex	$\Rightarrow$	$f''(x) \geq 0$											
$f''(x) < 0$	$\Rightarrow$	f konkáv	f konkáv	$\Rightarrow$	$f''(x) \leq 0$											
T	Inflexiós pont és a második derivált kapcsolata	<table><tr><td>x_0 helyen a második derivált értéke 0</td></tr><tr><td>ÉS</td></tr><tr><td>x_0 helyen a második derivált előjelet vált</td></tr></table>	x_0 helyen a második derivált értéke 0	ÉS	x_0 helyen a második derivált előjelet vált	$\Rightarrow$	x_0 helyen a függvénynek inflexiós pontja van									
x_0 helyen a második derivált értéke 0																
ÉS																
x_0 helyen a második derivált előjelet vált																
T	Szélsőérték és a második derivált kapcsolata	<table><tr><td>$f'(x_0) = 0$</td></tr><tr><td>ÉS</td></tr><tr><td>$f''(x_0) \neq 0$</td></tr></table>	$f'(x_0) = 0$	ÉS	$f''(x_0) \neq 0$	$\Rightarrow$	x_0 helyen a függvénynek lokális szélsőértéke van									
$f'(x_0) = 0$																
ÉS																
$f''(x_0) \neq 0$																

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. K2 (Középszintű érettségi, 2007)

Add meg a $[-2; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 + 1$ függvény értékkészletét!

2. K2 Adott az $f:]-\infty; 0] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvény.

- Az értelmezési tartomány melyik eleméhez rendel 3-at az f függvény?
- Határozd meg a függvény értékkészletét!
- Jellemezd az f függvényt monotonitás szempontjából!

3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2009)

Legyen f és g a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \leq -1 \\ 2x+1 & \text{ha } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = x^2 - 2.$$

Ábrázold ugyanabban a koordináta-rendszerben mindkét függvényt! Add meg az $f(x) = g(x)$ egyenlet valós megoldásait!

- 4. E1** Add meg a következő függvények inverz függvényét!
- a)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x + 9$
- b)** $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{4}x - 1$
- c)** $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -1,5x + 2,5$
- d)** $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -\frac{2}{5}x - 6$
- 5. E1** Add meg a következő függvények inverz függvényét!
- a)** $f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0,2x$
- b)** $g: [1; 3] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 5$
- c)** $h: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3x + 1$
- 6. E1** Add meg a következő függvények inverz függvényét!
- a)** $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x$
- b)** $g: [1; 5] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_5 x$
- c)** $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2^{x+3}$
- 7. E2** Add meg a következő függvények inverz függvényét!
- a)** $f: [0; 9] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - 1$
- b)** $g: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x+1}$
- c)** $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 + 5$
- 8. E1** Igaz vagy hamis? Határozd meg a kifejezések logikai értékét! Indokold!
- a)** Ha egy függvény monoton csökkenő, akkor van inverz függvénye.
- b)** Ha egy függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor van inverz függvénye.
- c)** Ha egy függvénynek van inverz függvénye és van maximuma, akkor az inverz függvényének is van maximuma.
- d)** Ha egy monoton növekedő függvénynek van inverz függvénye, akkor az is monoton növekedő.
- 9. E1** A valós számok halmazán értelmezett f és g függvények esetén határozd meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési szabályát!
- a)** $f(x) = 5x + 1$ és $g(x) = 2x - 1$
- b)** $f(x) = |2x - 1|$ és $g(x) = 3x - 7$
- c)** $f(x) = x^2 - x$ és $g(x) = 0,5x - 2$
- d)** $f(x) = 3x + 4$ és $g(x) = x^2 + 2$
- 10. E1** A valós számok halmazán értelmezett f és g függvények esetén határozd meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési szabályát!
- a)** $f(x) = \sin x$ és $g(x) = x^2$
- b)** $f(x) = \cos x$ és $g(x) = |x - 1|$
- c)** $f(x) = 9^x$ és $g(x) = 0,5x - 2$
- d)** $f(x) = 4^x$ és $g(x) = x^2 + 2$
- 11. E1** Határozd meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvények értékészletét!
- a)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x| + 1$
- b)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x| - 1$
- c)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - 2$
- 12. E1** (Emelt szintű érettségi, 2016)
Adott az f , a g és a h függvény:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x - 1$
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + 2$
- $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 12 - x^2$
- a)** Legyen a k összetett függvény belső függvénye az f és a külső függvénye a h (vagyis $k(x) = h(f(x))$ minden x valós szám esetén).
- Igazold, hogy $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$.
- b)** Oldd meg az $f(g(x)) < g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
- 13. E1** Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 1$ függvény. Írd fel a grafikon azon szelőjének egyenletét, amely esetében a metszéspontok első koordinátái
- a)** $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$; **b)** $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$!
- 14. E1** Deriváld a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!
- a)** $f(x) = x^2 + 4$ **c)** $h(x) = x^2 + 4x + 4$
- b)** $g(x) = x^2 + 4x$
- 15. E1** Deriváld a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!
- a)** $f(x) = 3x^5 + 4x$ **c)** $h(x) = 0,2x^5 + 3x + 8$
- b)** $g(x) = x^7 + 6x^2$
- 16. E1** Deriváld a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!
- a)** $f(x) = (x + 4)^2$ **c)** $h(x) = (x + 0,5)^2$
- b)** $g(x) = (x - 6)^2$

17. E1 Deriváld a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = 3(x + 4)^2$ **c)** $h(x) = (5x + 2)^2 + (8x - 3)^2$

b) $g(x) = 2(3x - 6)^2 + 4x$

18. E1 Egyenletének felírásával add meg a függvény grafikonjának érintőjét az $x_0 = 1$ helyen!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x - 1)^2$

19. E1 Egyenletének felírásával add meg a függvény grafikonjához húzható érintőjét $x_0 = -1$ helyen!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2(x + 2)^2$

20. E1 Egyenletének felírásával add meg a függvény grafikonjához húzható érintőjét $x_0 = 2$ helyen!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 5x$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^3 + 4x$

21. E2 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazold, hogy ha $x \in]0; 3[$, akkor $x > 0$.

b) Írd fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét!

22. E1 Jellemezd monotonitás szempontjából a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = -x^3 + x$

b) $g(x) = x^3 - 27x$

23. E1 Jellemezd monotonitás szempontjából a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = 2x^3 - 2$

b) $g(x) = x^3 + 6x^2 - 1$

24. E1 (Emelt szintű érettségi, 2007)

Adott az f függvény: $f:]-1; 6[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x^3 + 192x$. Határozd meg f zérushelyeit, és elemezd az f függvényt monotonitás szempontjából!

25. E1 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Deriváltfüggvényének segítségével elemezd az $f:]-2; 3[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke!

26. E1 (Emelt szintű érettségi, 2006)

Adott az $f: [-2,5; 2,5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$ függvény.

a) Határozd meg az f függvény zérushelyeit!

b) Vizsgáld meg az f függvényt monotonitás szempontjából!

c) Add meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

27. E1 (Emelt szintű érettségi, 2017)

Határozd meg a következő függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

$f:]-4; -1[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$

28. E1 Jellemezd a valós számok halmazán értelmezett függvényt konvexitás szempontjából!

a) $f(x) = 2x^3 - 12x$

c) $h(x) = x^3 - 2x^2$

b) $g(x) = x^3 + x^2 - 1$

29. E1 Deriváld a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$

b) $g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2}$

30. E2 Deriváld a függvényeket!

a) $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

b) $g: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x}$

c) $h: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = (\sqrt{x} - 2)^2$

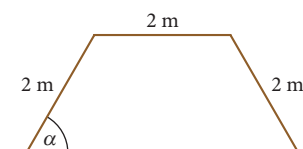
31. E2 Írd fel a függvénygrafikon inflexió pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

a) $f(x) = x^3 + 6x^2$

b) $g(x) = x^3 - 12x^2 - 1$

32. E2 Felül nyitott, négyzetes hasáb alakú dobozt készítünk. A doboz térfogata 2 dm^3 . Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit úgy, hogy az anyagköltség a lehető legkevesebb legyen, ha az alaplappal más anyagból készül, ezért annak egységára kétszer annyi, mint az oldallapoké?

33. E2 Egy gazda elkerít egy trapéz alakú részt a gazdasági épület oldalánál. Az elkerítéshez 3 darab 2 m hosszú merev deszkapalánkot használ fel, ezekből lesz a trapéz két szára és a rövidebbik alapja. A trapéz hosszabbik alapja az épület oldala, ehhez nem használ fel kerítéselmet. Milyen szögben illeszkedjen a trapéz szára a hosszabbik alaphoz, hogy az elkerített terület a lehető legnagyobb legyen?



34. E2* (Emelt szintű érettségi, 2021)

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt 45° -os szögre törekszik a dobás indításánál. Petra dobásának modellezéséhez határozd meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0; 2)$ és a $Q(4,6; 3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig 45° ! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban add meg!

35. E2* (Emelt szintű érettségi, 2012)

Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p - 3)x^2 + p^2x - 6$.

- a) Határozd meg a p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!
- b) Határozd meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

36. E2* (Emelt szintű érettségi, 2018)

Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket. Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt”, azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az örök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén a bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is). A tanulmány szerint a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). Egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót ellenőriz, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjból és bírságokból kell kifizetni. A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

- a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?
- b) Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjból származó napi nettó bevétel maximális?

37. E2* (Emelt szintű érettségi, 2016)

A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950\,000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.



- a) A modell alapján hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?
- b) Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km. Igazold, hogy $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$ kg. ($v > 0$)
- c) A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq 1100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

- 38. E2** Egy számítógépes játékban a pálya egyik pontján van egy akna. Ha egy figura rálép az aknára, akkor az minden alkalommal ugyanazzal a p valószínűséggel felrobban. Annak a valószínűsége, hogy 5 alkalomból pontosan háromszor robban fel az akna a binomiális eloszlásra vonatkozó összefüggés alkalmazásával $\binom{5}{3} \cdot p^3(1 - p)^2$. Hogyan válassza meg a programozó a p valószínűséget, ha azt szeretné, hogy a lehető legnagyobb legyen annak a valószínűsége, hogy 5 alkalomból pontosan háromszor felrobban, és pontosan kétszer nem robban fel az akna?



síkbeli egybevágósági transzformációk, háromszögek egybevágósága



síkidomok egybevágósága

BEVEZETŐ

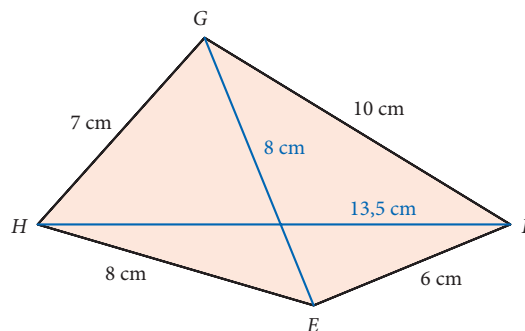
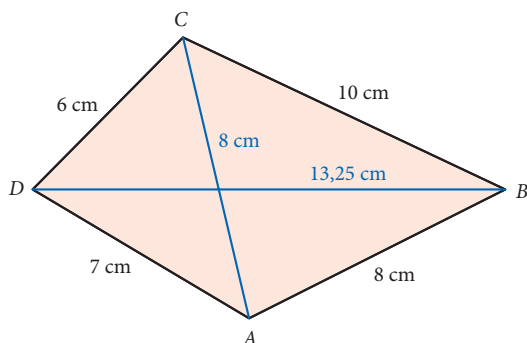


Kérdés: Igaz-e, hogy két négyszög egybevágó, ha oldalaik páronként egyenlő hosszúsúak?

Válasz: Nem igaz. Aki már hajtogatott colstokot, az pontosan tudja, hogy négy ugyanolyan hosszúságú lécből sokféle négyszög alkotható.

Két síkidom egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi. A definíció alapján tehát úgy igazolhatjuk két síkidom egybevágóságát, hogy megadunk olyan egybevágósági transzformációt, amely egyiket a másikba viszi. Ez azonban körülményes lehet. Sokszor alkalmazzuk azokat a tételeket, amelyek oldalak hosszára, szögek nagyságára vonatkozó feltételeket fogalmaznak meg síkidomok egybevágóságára.

Két négyszög egybevágóságához nem elegendő, hogy az oldalaik páronként egyenlő hosszúsúak. Belátható azonban, hogy az már elegendő, ha megfelelő oldalaik is és átlói is páronként egyenlő hosszúsúak. Fontos, hogy az *egymásnak megfelelő* szakaszok hossza egyezzen meg. Az alábbi ábrán két olyan négyszög látható, amelyeknek oldalaik és átlói páronként egyenlő hosszúsúak, a négyszögek mégsem egybevágók.



Szerkeszd meg az ábrán látható négyszögeket egy geometriai szoftver (pl. a *GeoGebra*) segítségével!

FELADATOK

- 1. E1** Rajzolj két síkidomot, amelyekre teljesül a következő állítás, de a két síkidom nem egybevágó!

Mindkét síkidom olyan

- a) paralelogramma, amelynek oldalai 3 cm és 6 cm hosszúsúak.
- b) deltoid, amelynek oldalai 3 cm és 6 cm hosszúsúak.

- c) deltoid, amelynek oldalai 3 cm és 6 cm hosszúsúak, és a 6 cm hosszú oldalai által közbezárt szög 30° nagyságú.
- d) négyszög, amelynek mindkét átlója 8 cm hosszú, és átlói merőlegesek egymásra.
- e) középpontosan szimmetrikus hatszög, amelynek minden oldala 5 cm hosszú.

1. A sík egybevágósági transzformációi

Definíció: A **geometriai transzformáció** olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés (függvény), amelynek értelmezési tartománya is, értékkészlete is ugyanaz a ponthalmaz.

Definíció: Ha egy geometriai transzformáció távolságtartó (vagyis bármely két pont távolsága ugyanakkora, mint a képek távolsága), akkor ezt **egybevágósági transzformációnak** nevezzük.

A helybenhagyás is egybevágósági transzformáció, amikor minden pont képe saját maga. Egybevágósági transzformációk egymásutánja is egybevágósági transzformáció.

Bebizonyítható, hogy a sík egybevágósági transzformációi előállíthatók a következő transzformációk akár többszöri egymás utáni elvégzésével:

- ▶ tengelyes tükrözés,
- ▶ pont körüli elforgatás,
- ▶ pontra vonatkozó tükrözés (ez megegyezik a 180 fokokos elforgatással),
- ▶ eltolás.

Definíció: Két alakzat **egybevágó**, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi. Jele: $\cong$.

2. Háromszögek egybevágóságának alapesetei

Tétel: Ha két háromszögben fennáll a következő esetek valamelyike, akkor a két háromszög egybevágó:

- ▶ egy-egy oldal hossza és az ezeken fekvő két-két szög nagysága egyenlő;
- ▶ két-két oldal hossza és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő;
- ▶ a három oldal hossza páronként egyenlő;
- ▶ két-két oldal hossza és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő.

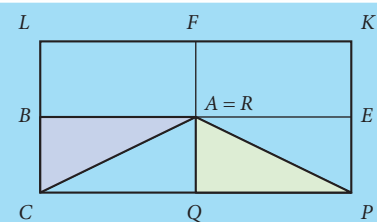
Jelölés:

$$ABC\triangle \cong KLM\triangle$$

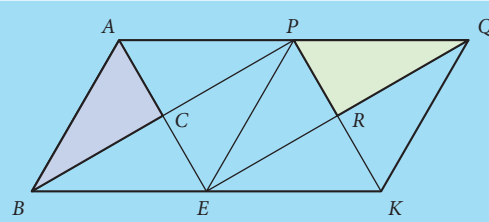
FELADATOK

2. E1 Keress olyan egybevágósági transzformációt, vagy több egybevágósági transzformáció egymásutánját, amely az ABC háromszöget a PQR háromszögbe viszi! Keress több megoldást! Figyelj rá, hogy a transzformációt pontos leírással add meg. (Tengelyes tükrözésnél add meg a tengelyt, középpontos tükrözésnél a középpontot, forgatásnál a forgatás középpontját és irányszögét, eltolásnál az eltolás vektorát.)

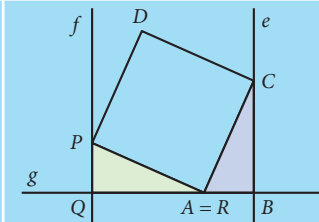
a) $CRKL$ négyszög téglalap, BE és QF középvonalak.



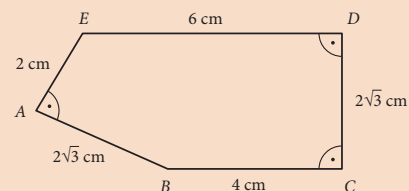
b) $ABKQ$ négyszög paralelogramma, a hosszabbik oldalai kétszer olyan hosszúak, mint a rövidebb oldalai, E és P oldalfelező pontok.



c) $ACDP$ négyszög egy négyzet, e és f egyenesek merőlegesek a g egyenesre.



3. E2 Vágd az ötszöget két egybevágó négyszögre! Igazold a két négyszög egybevágóságát!

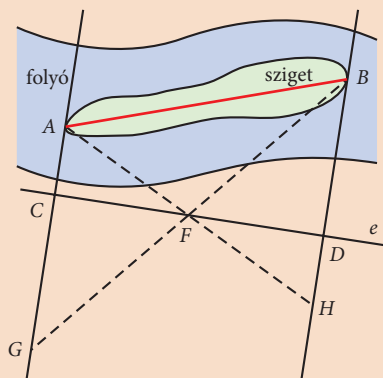


4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2018)

Thalész, a hét görög bölcse egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget AB hosszát a folyóparton maradván határozta meg.

Először felvett egy e egyenest a parton. Ezen az e egyenesen megkereste azt a C , illetve D pontot, amelyekben a CA , illetve a DB irány merőleges az e egyenesre. Ezután a CD szakasz F felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az AC egyenesen haladva megjelölte azt a G pontot, amelyre B , F és G egy egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az AF és BD egyenesek H metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a GH távolsággal egyezik meg.

Igazold Thalész állításának helyességét!



KIDOLGOZOTT FELADAT

Az egybevágóság segítségével bebizonyítható Pitagorasz tétele és annak megfordítása. Végezzük el a bizonyítást!

I. Pitagorasz-tétel: Ha egy háromszög derékszögű, akkor a befogók hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével. (Az ábra jelöléseivel: $a^2 + b^2 = c^2$.)

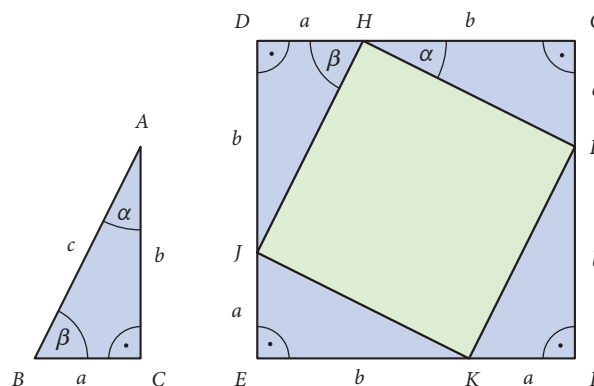
Bizonyítás:

Használjuk az ábra jelöléseit! Vegyünk fel egy $a + b$ oldalhosszúságú négyzetet, kössük össze az ábra szerint az oldalak megfelelő osztópontjait! $DJH \triangle \cong CAB \triangle$, mert két oldalának hossza egyenlő (a , illetve b), és az ezek által közbezárt szög nagysága is egyenlő (90°). Az egybevágóság miatt $HJ = c$. Hasonló módon igazolható, hogy a $HJKL$ négyszög minden oldalának hossza c . Másrészt az egybevágóság miatt

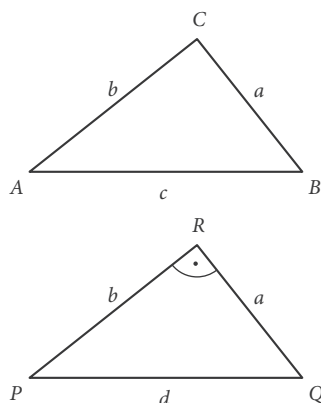
$$\angle LHJ = 180^\circ - \angle JHD - \angle GHL = 180^\circ - \beta - \alpha = 90^\circ.$$

Vagyis a $HJKL$ négyszög egy c oldalhosszúságú négyzet. Az $EFGD$ négyzet területe egyrészt $(a + b)^2$, másrészt felírható a részek, azaz a négy háromszög és a négyzet területének összegeként.

$$T = a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \quad \text{Mivel } 2ab = 4 \cdot \frac{ab}{2}, \quad \text{ezért} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$



II. A Pitagorasz-tétel megfordítása: Ha egy háromszög oldalaira teljesül, hogy két rövidebb oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a leghosszabb oldal hosszának négyzetével (jelöléssel: $a^2 + b^2 = c^2$, ahol c a háromszög leghosszabb oldalának hossza), akkor a háromszög derékszögű.



Bizonyítás:

Indirekt úton bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög oldalaira teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, de a háromszög nem derékszögű.

Vegyünk fel egy olyan PQR derékszögű háromszöget, amelyben a befogók hossza a és b . A PQR háromszög átfogójának hosszát jelöljük d -vel. A PQR háromszög derékszögű, ezért teljesül rá a Pitagorasz-tétel, vagyis $a^2 + b^2 = d^2$.

Így $c^2 = d^2$, és mivel c és d is pozitív, ezért $c = d$. Ekkor az ABC és a PQR háromszögekben három oldal hossza páronként egyenlő, ezért egybevágók. Az egybevágóság miatt a megfelelő szögek egyenlők, ezért $\angle ACB = 90^\circ$, ami az indirekt feltevés miatt nem teljesül. Ellentmondásra jutottunk, ezért az eredeti állítás igaz, vagyis a háromszög derékszögű.

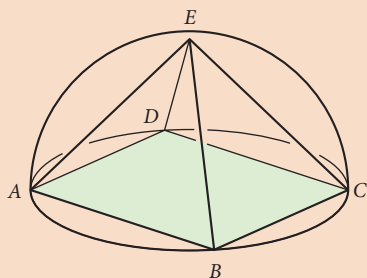
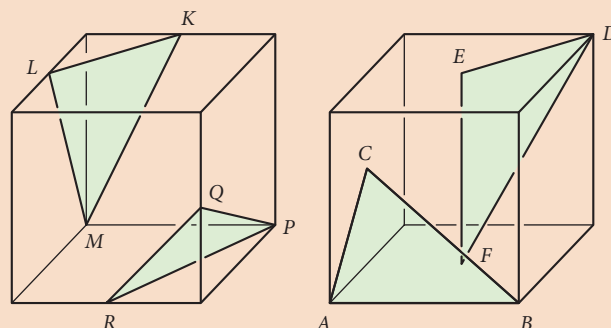


példák térbeli egybevágósági transzformációkra, merőleges vetítés

FELADATOK

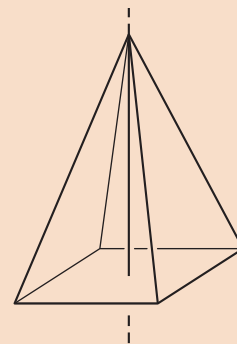
- 1. E1** Az ábra szerinti kockákban K , L , Q és R élfelező pontok, E , F és C pedig lapközéppontok. Bizonyítsd be, hogy

- a) KLM és PQR háromszögek egybevágók;
b) ABC és DEF háromszögek egybevágók!

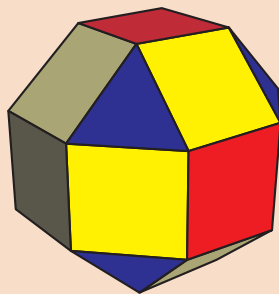


- 2. E2** Egy 12 cm sugarú félgömbbe az ábra szerint egy szabályos négyoldalú gúlát írunk. A gúla alaplapja a félgömböt határoló körlapba írt négyzet, a gúla E csúcsa pedig a félgömbnek a határoló síktól mért leg távolabbi pontja.

- a) Milyen hosszúak a gúla élei?
b) Mekkora a gúla felszíne?



- 3. E2** Egy szabályos négyoldalú gúlát elforgattunk 45° -kal a gúla magasságára illeszkedő tengely körül. Milyen testet határoz meg az eredeti gúla és az elforgatott gúla közös része? Határozd meg a keletkezett test térfogatát, ha a négyoldalú gúla alapélei 16 cm hosszúak, magassága pedig 27 cm hosszú! (A gúla térfogata $V = \frac{T \cdot m}{3}$, ahol T az alaplap területe, m pedig a gúla magassága.)

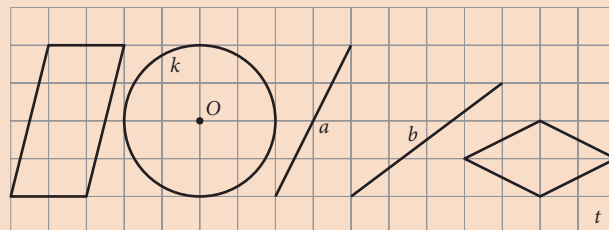


- 4. E2** Az ábrán látható testet egybevágó négyzetek és egybevágó szabályos háromszögek határolják. Minden „csúcsalakzata” egybevágó, azaz ha kiválasztunk két csúcsot, akkor van olyan egybevágósági transzformáció, amely során az egyik csúcsnak és a hozzá illeszkedő éleknek a képe a másik csúcs és az ahhoz illeszkedő élek. (A test neve rombikub-oktaéder. Nézz utána az arkhimédészi testeknek az interneten!)

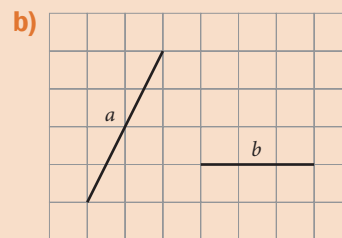
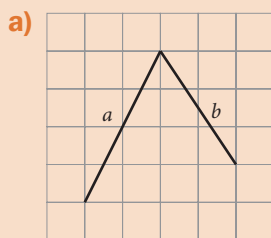
- a) Hány négyzet és hány háromszög határolja a testet?
b) Hány csúcsa és hány éle van?
c) Határozd meg a test felszínét, ha éleinek hossza 5 cm!

- 5. E2**

- a) Az ábrán látható alakzatok közül melyek azok, amelyeknek a t egyenesre eső merőleges vetülete egyenlő hosszúságú?
b) Milyen testnek lehet merőleges vetülete az ábrán látható k kör?



- 6. E2** Szerkessz a síkon olyan egyenest, amelyre az a és a b szakasz merőleges vetülete egyenlő hosszúságú!



ELMÉLET

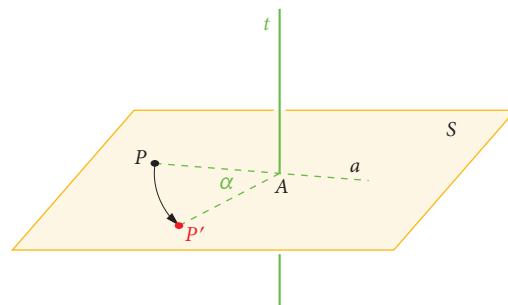
Legfontosabb térbeli geometriai leképezések: az egybevágóság, a hasonlóság és a merőleges vetítés.

1. Példák egybevágósági transzformációkra a térben

Tengely körüli forgatás

Adott a térben egy t egyenes és egy α irányszög.

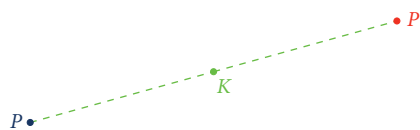
- ▶ A t egyenes pontjainak képe önmaga.
- ▶ A tér tetszőleges, t -re nem illeszkedő P pontja esetén a P -t tartalmazó, t -re merőleges sík legyen S , az S síknak a t -vel való metszéspontja A . A P ponthoz az S síknak azt a P' pontját rendeljük, amelyre a PAP' irányszög α .



Középpontos tükrözés térben

Adott a térben egy K pont.

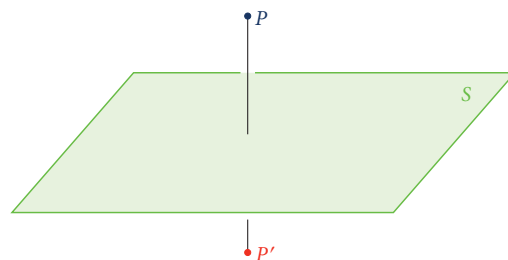
- ▶ A K pont képe önmaga.
- ▶ A tér tetszőleges (K -tól különböző) P pontjának képe az a P' pont, melyre a PP' szakasz felezőpontja a K pont.



Síkra való tükrözés

Adott a térben egy S sík.

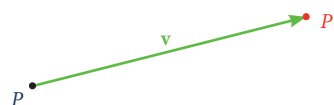
- ▶ Az S sík pontjainak képe önmaga.
- ▶ Az S síkra nem illeszkedő P pont képe az a P' pont, amelyre a PP' szakaszt merőlegesen felezi az S sík.



Eltolás térben

Adott a térben egy $\mathbf{v}$ vektor.

- ▶ A tér tetszőleges P pontjának képe az a P' pont, melyre $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$.



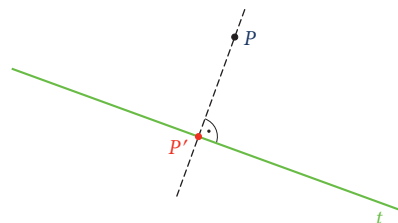
2. A merőleges vetítés

A műszaki életben sokszor használják a vetületi ábrázolást. Ez a leképezés nem kölcsönösen egyértelmű, ezért nem geometriai transzformáció. Ekkor egy térbeli test pontjainak képe egy síkbeli alakzat.

Merőleges vetítés a síkban:

Adott a síkon egy t egyenes.

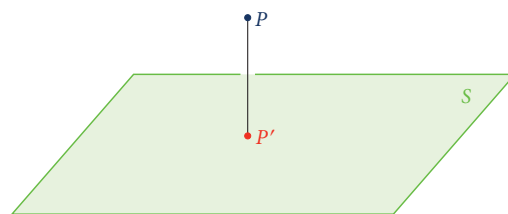
- ▶ A sík tetszőleges P pontjának képe a P pontból a t -re bocsájtott merőleges egyenes és a t egyenes metszéspontja.



Merőleges vetítés a térben:

Adott egy S sík.

- ▶ A tér tetszőleges P pontjának képe a P pontból az S -re bocsájtott merőleges egyenes és az S sík metszéspontja.

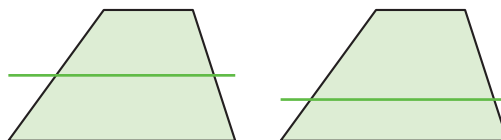




párhuzamos szelők tétele, párhuzamos szelőszakaszok tétele

BEVEZETŐ

Egy trapézt az alapokkal párhuzamos egyenes segítségével kettévágunk az ábra szerint. Ha az egyenes felezi a trapéz magasságát, akkor a rövidebb alapot is tartalmazó rész területe kisebb, mint a másik rész területe. Hol vágjunk ketté egy trapézt az alapokkal párhuzamos egyenessel, hogy a keletkező két rész területe egyenlő legyen?



ELMÉLET

1. A párhuzamos szelők tétele

Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel úgy metsszük el, hogy az egyik száron keletkező szakaszok egyenlő hosszúságúak, akkor a másik száron keletkező megfelelő szakaszok is egyenlő hosszúságúak. Az állítás belátható egybevágó háromszögek segítségével (lásd az ábrát). Az állítás általánosítása a következő tétel.

Párhuzamos szelők tétele: Ha egy szög két szárát párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával.

Megjegyzés: A párhuzamos szelők tétele fennáll akkor is, ha a szakaszok részben fedik egymást, vagy ha az egyik metsző egyenes a szög csúcsán megy keresztül.

2. Megfordítható-e a párhuzamos szelők tétele?

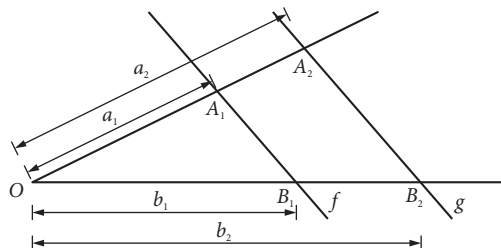
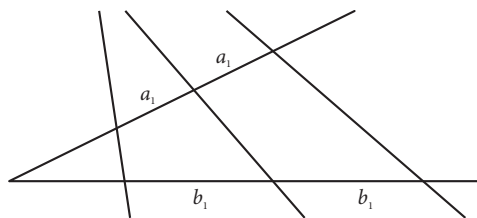
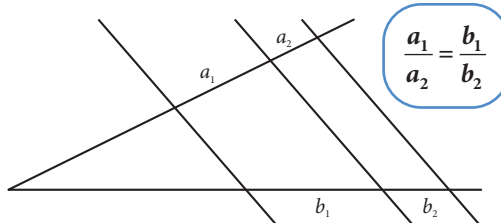
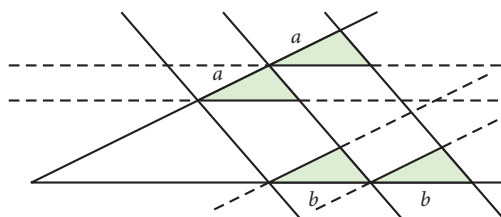
A párhuzamos szelők tételének megfordítása általános módon nem teljesül. Lehet ugyanis olyan esetet mutatni, amikor egy szög szárait egyenesekkel metsszük, a szögszárakon keletkező megfelelő szakaszok aránya egyenlő, de a szögszárát metsző egyenesek nem párhuzamosak (lásd az ábrát).

A tétel egy speciális esete, ha azoknak az egymásnak megfelelő szakaszoknak az arányát vizsgáljuk, amiket két párhuzamos egyenes a szögszárakból a csúcstól mérve kimetsz (lásd az ábrát). Ennek a speciális esetnek a megfordítása is érvényes.

Tétel: Ha két egyenes egy szög száraiból a csúcstól mérve olyan szakaszokat metsz ki, hogy a megfelelő szakaszok hosszának aránya egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.

Például: Az ábra jelöléseit használva:

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} \quad \Rightarrow \quad f \parallel g$$

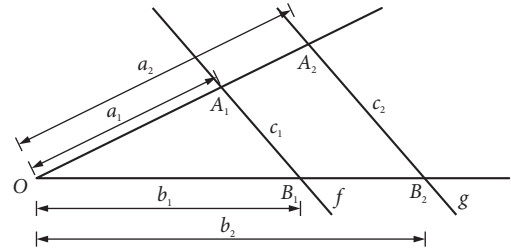


3. A párhuzamos szelőszakaszok tétele

Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor a szög-szárak által a párhuzamos metsző egyenesekből kimetszett szakaszok, (ún. **szelőszakaszok**) hosszának aránya is kapcsolatba hozható a szög-száron keletkező, szögcsúcstól mért szakaszok hosszának arányával.

Párhuzamos szelőszakaszok tétele: Ha egy szög szárait két párhuzamos egyenessel metsszük, akkor a szög-szárak által a párhuzamos metsző egyenesekből kimetszett szelőszakaszok (az ábrán: c_1, c_2) hosszának aránya egyenlő a száron keletkező, az ábrán a_1 -gyel, a_2 -vel, illetve b_1, b_2 -vel jelölt szakaszok hosszának arányával.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{és} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az ABCD trapéz AB alapja 8 cm, CD alapja 5 cm, magassága 3 cm hosszú. Az AD és BC szárakat meghosszabbítjuk. A szárak egyenesének metszéspontja legyen P. (A DCP háromszög a trapéz ún. **kiegészítő háromszöge**.)

- a) Milyen távol van a P pont a trapéz CD alapjától?
b) Milyen arányban osztja a trapéz magasságát a Bevezetőben említett egyenes, amely párhuzamos az alapokkal és felezi a trapéz területét?

Megoldás:

- a) Bocssáunk a P pontból merőlegest az alapokra! Az ábrán d -vel jelölt szakasz hosszát keressük. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján $\frac{PD}{PA} = \frac{c}{a}$, a párhuzamos szelők tétele alapján $\frac{PD}{PA} = \frac{d}{d+m}$. Ebből $\frac{c}{a} = \frac{d}{d+m}$.
Helyettesítsük be az adatokat! $\frac{5}{8} = \frac{d}{d+3}$. Átrendezve: $5d + 15 = 8d$, ebből $d = 5$ cm.

- b) A trapéz területe $T = \frac{(a+c) \cdot m}{2} = 19,5 \text{ cm}^2$. Ha ezt két egyenlő területű részre vágjuk, akkor mindkét rész területe $9,75 \text{ cm}^2$. Használjuk az ábra jelöléseit!

Egészítsük ki a trapézt a DCP háromszöggel! A DCP háromszög területe

$$\frac{c \cdot d}{2} = 12,5 \text{ cm}^2, \text{ ezért az EFP háromszög területe } 9,75 + 12,5 = 22,25 \text{ cm}^2.$$

Legyen az EFCD trapéz magassága x , az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapéz belsejébe eső része, azaz EF hossza legyen y . A párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $\frac{c}{y} = \frac{d}{d+x}$. Átrendezve: $\frac{c}{d} = \frac{y}{d+x}$. Mivel $\frac{c}{d} = \frac{5}{8} = 1$, ezért $y = d + x$.

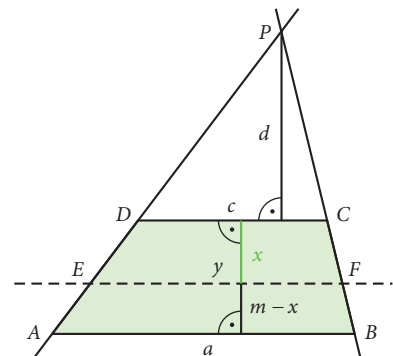
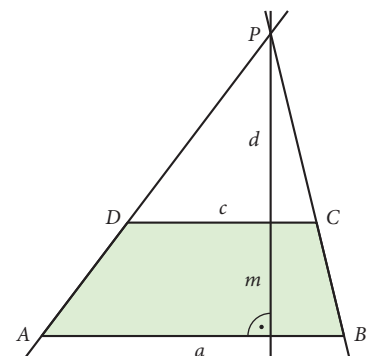
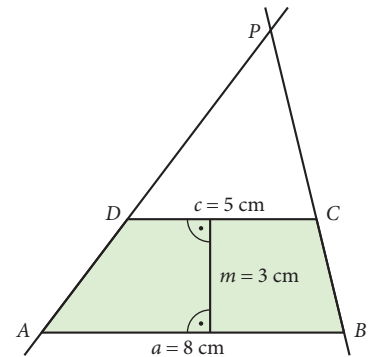
$$\text{Ezeket a jelöléseket használva az EFP háromszög területe } \frac{y \cdot (d+x)}{2} = \frac{y^2}{2} = 22,25.$$

$$\text{Ebből } y = \sqrt{44,5} \approx 6,67 \text{ cm.}$$

Ezért $d + x \approx 6,67$, az EFCD trapéz magassága $x \approx 6,67 - 5 = 1,67$ cm. Az ABFE trapéz magassága $m - x \approx 3 - 1,67 = 1,33$ cm.

A magasságok aránya tehát $1,67 : 1,33 \approx 1,26$.

Megjegyzés: A feladat megoldható a hasonlóságról tanult ismeretek segítségével is.

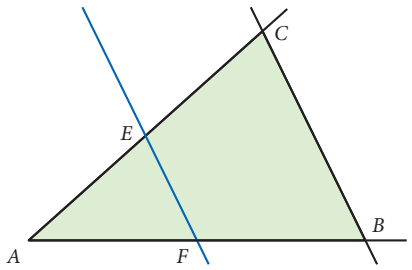


- 2.** Bizonyítsuk be, hogy a háromszög középvonala párhuzamos és feleolyan hosszú, mint a háromszögnek a középvonal végpontjait nem tartalmazó oldala!

Bizonyítás:

Az ábrának megfelelően az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja legyen E , az AB oldal felezőpontja legyen F . Tekintsük az AB és AC félegyeneseket és az EF és CB egyeneseket!

A középvonal definíciója szerint a BAC szög szarait úgy metszettük el az EF és CB egyenesekkel, hogy a szög csúcsától számított megfelelő szakaszok aránya egyenlő, $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$. A párhuzamos szelők tétele speciális esetének megfordítása

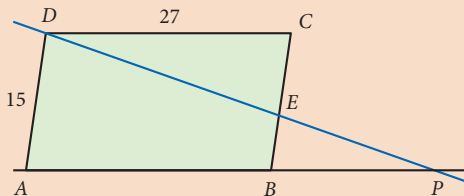


szerint a szög szarait metsző két egyenes párhuzamos, ezért $EF \parallel CB$. Másrészt a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint $\frac{EF}{CB} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$. Vagyis EF feleolyan hosszú, mint CB . A háromszög középvonala tehát párhuzamos és feleolyan hosszú, mint a háromszög nem mellette fekvő oldala.

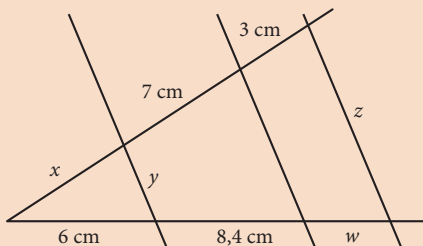
FELADATOK

- 1. E1** Bizonyítsd be, hogy ha egy szög szarait párhuzamos egyenesekkel úgy metsszük el, hogy az egyik száron keletkező szakaszok egyenlő hosszúságúak, akkor a másik száron keletkező megfelelő szakaszok is egyenlő hosszúságúak!

- 2. E1** Az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Az AB oldal egyenesén lévő P pontot a D -vel összekötő egyenes a BC oldalt E -ben metszi (lásd az ábrát). Az E pont a BC oldalt 2 : 3 arányban osztja. Mekkora a BP távolság?



- 3. E1** Milyen hosszúak az ábrán az x , y , z , w szakaszok?



- 4. E2** Az $ABCD$ konvex négyszögben az AB oldalnak az A csúcsához közelebbi harmadolópontja legyen P , az AD oldalnak az A csúcsához közelebbi harmadolópontja legyen S , a CB oldalnak a C csúcsához közelebbi harmadolópontja legyen Q , a CD oldalnak a C csúcsához közelebbi harmadolópontja legyen R . Bizonyítsd be, hogy a $PQRS$ négyszög paralelogramma!

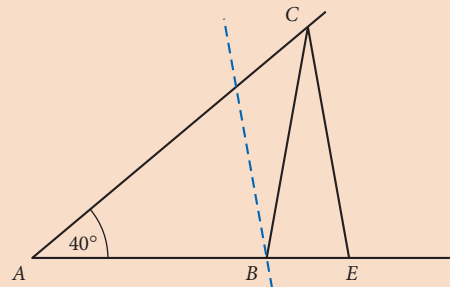
- 5. E2** Egy trapéz két alapja 18 cm és 6 cm hosszú. A trapéz magassága 8 cm. Milyen arányban osztja ketté a trapéz magasságát az az egyenes, amely párhuzamos az alapokkal és felezi a trapéz területét?

- 6. E2** Adott a derékszögű koordináta-rendszerben két párhuzamos egyenes az egyenletével:

$$e: 4x + 5y = 40 \quad \text{és} \quad f: 4x + 5y = 100.$$

Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos e -vel és f -fel, és az e -től való távolsága háromszor akkora, mint az f -től való távolsága!

- 7. E2** Egy 40° -os szög szaraira az ábra szerint felmérjük AB , BC és CE szakaszokat úgy, hogy azok hossza egyenlő. Milyen arányban osztja ketté az AC szakaszt az az egyenes, amely átmegy a B ponton és párhuzamos az EC szakasszal?



- 8. E2** Adott a síkon egy AB szakasz. Szerkeszd meg az AB szakasznak

a) a harmadolópontjait;

b) azt a P pontját, amelyre $AP : PB = \sqrt{2} : 1$;

c) azt a Q pontját, amelyre $AQ : QB = \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

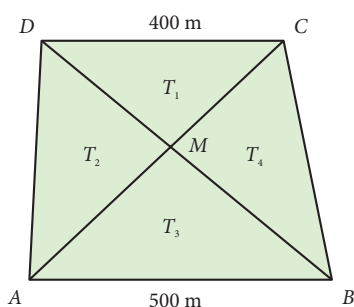


középpontos hasonlóság, hasonlóság



háromszögek hasonlóságának alapesetei

KIDOLGOZOTT FELADAT



Egy trapéz alakú telek párhuzamos oldalainak hossza 500 m és 400 m. A telken az ábra szerint a trapéz átlói mentén keresztül halad két út.

a) Milyen arányban osztja ketté egymást a két út?

b) Az utak a telket négy részre osztják. Mekkora a részek területeinek aránya?

Megoldás:

a) Az ABM háromszög és a CDM háromszög szögei páronként egyenlők (az M -nél lévő szögek csúcsszögek, az A -nál és C -nél, illetve B -nél és D -nél lévő szögek váltószögek). Emiatt ezek a háromszögek hasonló: $ABM\triangle \sim CDM\triangle$. A hasonlóság

aránya egyenlő a megfelelő oldalak hosszának arányával, ezért $\lambda = \frac{500}{400} = \frac{5}{4}$. Ez az

arány minden, egymásnak megfelelő oldalhosszúság esetén fennáll, ezért $\frac{AM}{MC} = \frac{5}{4}$ és $\frac{BM}{MD} = \frac{5}{4}$. Az átlók tehát 5 : 4 arányban osztják ketté egymást.

b) Hasonló síkidomok esetében, ha a hasonlóság aránya λ , akkor a síkidomok területének aránya λ^2 .

$$\text{Emiatt } \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1,25^2.$$

$$\rightarrow T_3 = 1,25^2 \cdot T_1.$$

Az AMD és az MCD háromszögek esetén az AM , illetve az MC oldalhoz tartozó magasság megegyezik. Emiatt $T_2 : T_1 = \frac{AM \cdot m}{2} : \frac{MC \cdot m}{2} = AM : MC$.

Az a) részben leírtak miatt $AM : MC = 1,25$.

$$\rightarrow T_2 = 1,25 \cdot T_1.$$

Hasonló módon belátható, hogy $T_4 : T_1 = BM : MD = 1,25$.

$$\rightarrow T_4 = 1,25 \cdot T_1.$$

A területek aránya tehát $T_1 : T_2 : T_3 : T_4 = 1 : 1,25 : 1,25^2 : 1,25$.

ELMÉLET

1. A sík hasonlósági transzformációi

Definíció: Ha egy geometriai transzformáció aránytartó, vagyis bármely két pont esetén a képek távolságának és a két pont távolságának aránya állandó, akkor ezt **hasonlósági transzformációnak** nevezzük.

A középpontos hasonlóság (középpontos nagyítás, kicsinyítés) aránytartó, ezért hasonlósági transzformáció. A megfelelő pontok távolságának aránya egyenlő a hasonlóság arányszámával, illetve negatív szám esetén ennek abszolút értékével. Bebizonyítható, hogy minden hasonlósági transzformáció egy középpontos hasonlóság és egy egybevágóság egymásutánja. (A tétel középpontos hasonlóságra is teljesül. Ekkor az egybevágósági transzformáció a helyben hagyás.)

Definíció: Két síkidom **hasonló**, ha hasonlósági transzformációval egymásba vihetők. Jele: $\sim$.

A síkidomok hasonlóságának definíciója a hasonlósági transzformációhoz kapcsolódik. Fontosak emellett azok a tételek, amelyek szögek nagyságára, oldalak hosszára vonatkozó feltételeket fogalmaznak meg a hasonlóság igazolására.

2. Háromszögek hasonlóságának alapesetei

Tétel: Ha két háromszögben fennáll a következő esetek valamelyike, akkor a két háromszög hasonló:

- ▶ két-két szög nagysága egyenlő;
- ▶ két-két megfelelő oldal hosszának aránya és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő;
- ▶ a három oldal hosszának aránya páronként egyenlő;
- ▶ két-két megfelelő oldal hosszának aránya és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő.

Jelölés:

$ABC\triangle \sim KLM\triangle$

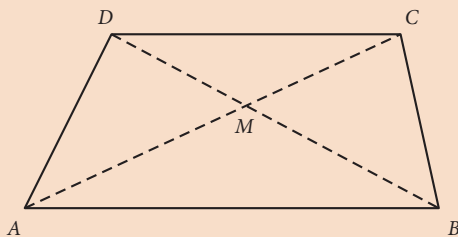
FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2006)

Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD úgy, hogy $AB > CD$. A trapéz átlóinak metszéspontja K . Az ABK háromszög AB oldalához tartozó magassága kétszerese a CDK háromszög CD oldalához tartozó magasságának. Jelölje T az ADK háromszög területét. Hányszorosa az $ABCD$ trapéz területe T -nek?

2. E1 (Emelt szintű érettségi, 2010)

Egy 90 m^2 területű, trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást virágokkal ültetik be úgy, hogy átlagosan 50 virágot ültetnek négyzetméterenként. A trapéz átlóival négy háromszögre bontották a virágágyást. Az ABM háromszögbe sárga virágokat, a DMC háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek. Hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek be?



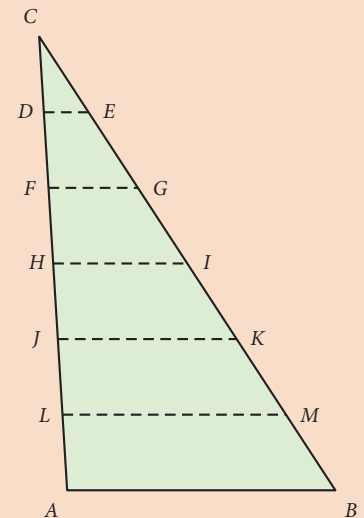
3. E1 Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontja 8 egységre van az alap felezőpontjától, és 17 egységre van az alapon fekvő csúcsoktól. Mekkora a háromszög szögei és oldalai?

4. E1 Egy trapéz átlói harmadolják egymást. A trapéz rövidebbik alapja 24 cm, magassága 40 cm hosszú.

- a) Készíts ábrát!
- b) Milyen hosszú a trapéz hosszabbik alapja?
- c) Az átlók metszéspontján keresztül, az alapokkal párhuzamos egyenessel a trapézt két részre vágjuk. Mekkora a keletkező részek területe?

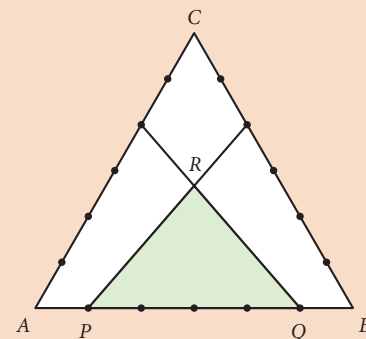
5. E2 Az ABC háromszög AC és BC oldalát az ábra szerint hat egyenlő részre osztottuk. A megfelelő osztópontokat összeköttöttük, és így az AB oldallal párhuzamos szakaszokat kaptunk.

- a) Hány trapéz található az ábrán?
- b) Az ábrán található trapézok közül melyek hasonlóak? Minden esetben add meg a hasonlóság arányát is!



6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2014)

Az egyenlő oldalú ABC háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a PQR háromszöget. Számítsd ki a PQR háromszög területének pontos értékét!



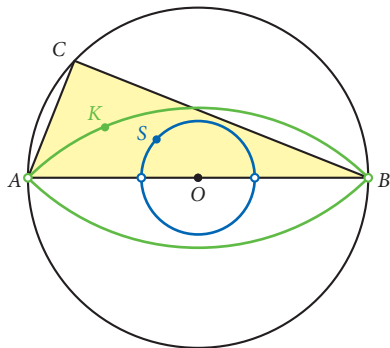
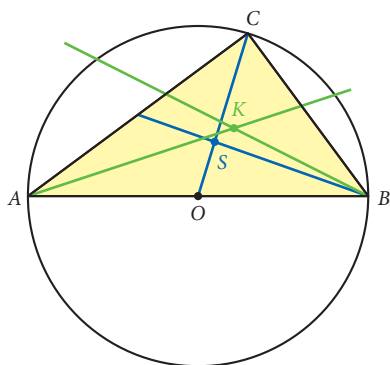


háromszögek nevezetes pontjai, vonalai



belső szögfelező tétel; annak bizonyítása, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást

BEVEZETŐ



Használj az alábbi ponthalmazok meghatározásához geometriai szoftvert, például a *GeoGebra* programot!

Vegyél fel egy AB szakaszt! Vizsgáld azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek az AB szakasz az átfogója! Ezeknek a háromszögeknek a C csúcsa az AB szakasz Thalész-körére illeszkedik. Szerkeszd meg az AB szakasz Thalész-körét, majd vegyél fel azon egy C pontot. Hol helyezkednek el az ABC háromszög nevezetes pontjai?

A körülírható kör középpontja az átfogónak, vagyis az AB szakasznak a felezőpontja. A magasságpont a magasságok metszéspontja, ami éppen a derékszögű csúcs, vagyis a C pont. A beírható körének középpontját (K -t) megkaphatjuk a belső szögfelezők metszéspontjaként. Az S súlypontot megkaphatjuk a súlyvonalak metszéspontjaként.

Milyen pályát fut be a K pont és az S pont, ha a C csúcs végigfut a Thalész-körön? K , illetve S pont esetében kapcsold be a „nyomvonal” mutatását (*GeoGebra*-ban a jobb egérgombbal...). Ha ezután mozgatod a C pontot a Thalész-körön, akkor láthatóvá válik az ábrán a K és az S pontok nyomvonala. A beírható kör középpontjának nyomvonala két körív, a súlypont nyomvonala pedig egy olyan kör, amely koncentrikus a Thalész-körrel. Ha a C pont az A vagy a B pontba esik, akkor nem jön létre az ABC háromszög, így a nyomvonalon lesz két szakadási pont. (A beírható kör középpontjának nyomvonalára néhány lecke múlva még visszatérünk.)

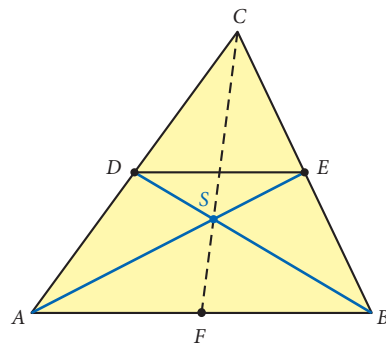
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást!

Bizonyítás:

Használjuk az ábra jelöléseit! Az AE és BD súlyvonalak metszéspontját jelöljük S -sel! Az ABS háromszög hasonló az EDS háromszöghöz, mert szögeik nagysága páronként egyenlő. Ezért a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő, így $\frac{ES}{SA} = \frac{DS}{SB} = \frac{ED}{AB}$. Mivel ED középvonal az ABC háromszögben, ezért az előbb felírt arány $\frac{1}{2}$. Emiatt az S pont harmadolópont mindkét súlyvonalon, mégpedig a csúcstól távolabbi harmadolópont.

Hasonló módon belátható, hogy az AE és CF súlyvonalak metszéspontja is a súlyvonalak csúcstól távolabbi harmadolópontja. Mivel az AE súlyvonalon az A csúcstól távolabbi harmadolópontot S -sel jelöltük, ezért a CF -fel való metszéspont is azonos S -sel. Vagyis S olyan pont, amely mindhárom súlyvonalra illeszkedik, ezért a három súlyvonal egy pontban metszi egymást.



2. Egy háromszög oldalainak hossza 3 cm, 5 cm és 7 cm. Milyen hosszúságú részekre osztja a legnagyobb belső szög szögfelező egyenese a szemközti oldalt?

Megoldás:

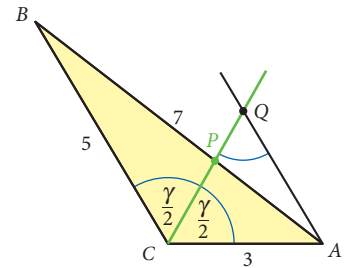
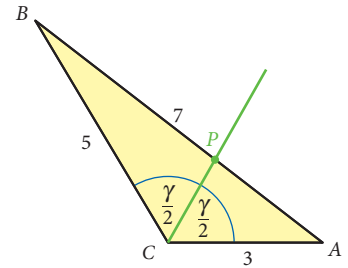
A háromszögben a legnagyobb belső szög a leghosszabb oldallal van szemben. Mivel $AB > BC > AC$, így a legnagyobb szög a C csúcsnál lévő belső szög (γ). A γ szög szögfelező egyenese és az AB oldal metszéspontja legyen P , így az AP és PB szakaszok hosszának meghatározása a feladat.

Az A csúcson át a BC oldalegyenessel húzott párhuzamos egyenes a γ szög szögfelező egyenesét a Q pontban metszi. Az AQP szög váltószög az PCB szöggel, ezért $\angle AQP = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$. Ugyanakkor $\angle PCA = \frac{\gamma}{2}$, így az AQC háromszögben van két egyenlő nagyságú szög, ezért egyenlő szárú háromszög: $AQ = 3$ cm.

A PAQ háromszög hasonló a PBC háromszöghöz, mert van két egyenlő nagyságú szögük ($\angle AQP = \angle PCB$; valamint $\angle QPA = \angle CPB$, mert csúcsszögek). A hasonlóság miatt a háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BC}$. Használjuk ki, hogy

$AQ = 3$ cm. $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}$. AP és PB hosszának aránya egyenlő a CA és CB oldalhosszak arányával.

$$AP = \frac{3}{3+5} \cdot 7 = \frac{21}{8}, \text{ valamint } PB = \frac{5}{3+5} \cdot 7 = \frac{35}{8}.$$



ELMÉLET

Szögfelezőtétel: A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a megfelelő szomszédos oldalak hosszának arányában osztja két részre.

A tétel bizonyítása a 2. kidolgozott feladatban leírt gondolatmenet alapján végezhető el.

FELADATOK

1. **E1** Bizonyítsd be, hogy az AB átfogójú derékszögű háromszög súlypontja illeszkedik arra a körre, amelynek középpontja az AB szakasz felezőpontja, és sugara az AB szakasz hosszának hatodrésze! (Ezt a kört láthatod a Bevezető ábráján.)
2. **E1** Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $AB = 153$ cm és $AC = 20$ cm. Milyen távol van egymástól a B csúcshoz tartozó súlyvonalnak és a B csúcshoz tartozó belső szögfelezőnek az AC oldallal vett metszéspontja?
3. **E1** Állapítsd meg az állítások logikai értékét!
 A A derékszögű háromszög magasságpontja a háromszög egyik csúcsa.
 B A háromszög köré írható körének középpontja mindig valamelyik súlyvonalra esik.
 C Van olyan háromszög, amelynek valamelyik oldalfelező merőlegesére illeszkedik a háromszög súlypontja.
 D Van olyan háromszög, amely beírható körének középpontja illeszkedik a háromszög egyik középvonalára.
4. **E1** Az ABC háromszög oldalainak hossza $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm és $BC = 17$ cm. Milyen arányban osztja az A csúcsból húzott belső szögfelező a B csúcsból húzott súlyvonalat?
5. **E1** Egy egyenlő szárú háromszögben az alap hossza 10 cm, a szárak hossza 13 cm. Milyen távol van egymástól a háromszög súlypontja és a beírható kör középpontja?
6. **E2** Egy háromszög alakú telek oldalainak hossza $AB = 50$ m, $BC = 70$ m és $AC = 80$ m. A telken két mezsgyét (határt jelölő, megműveletlenül hagyott keskeny, kiemelkedő földcsík) alakítanak ki. Az egyiket a B csúcsból induló súlyvonal, a másikat a B csúcsból induló belső szögfelező egyenes mentén.
 a) Milyen hosszú az egyik, illetve a másik mezsgye?
 b) Határozd meg a két mezsgye hajlásszögét!
 c) Milyen nagyságú területrészekre osztja a két mezsgye a telket?

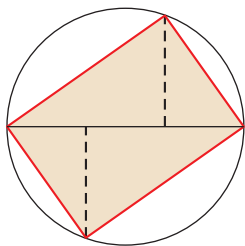


Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel



magasságtétel, befogótétel

BEVEZETŐ



Az ácsok úgy mérik ki egy henger alakú fatörzs keresztmetszetén a legerősebb gerendát, hogy megrajzolják a kör egyik átmérőjét, azt három egyenlő részre osztják, majd az osztópontokban merőlegest állítanak a megrajzolt átmérőre. Ezeknek a merőlegeseknek a körrel való metszéspontjai és az átmérő végpontjai egy téglalapot határoznak meg az ábra szerint: ez lesz a gerenda keresztmetszete.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy henger alakú fatörzs átmérője 24 cm. A Bevezetőben leírt módon egy téglalap keresztmetszetű gerendát készítünk belőle. Mekkora a téglalap oldalai?

Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit! $ADC\triangle \sim CDB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. Emiatt a megfelelő oldalhosszak aránya egyenlő: $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB}$,

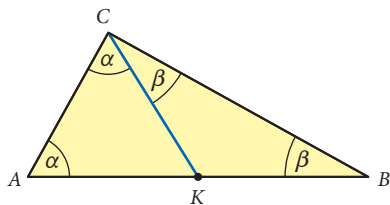
azaz $\frac{8}{m} = \frac{m}{16}$. Ebből $m^2 = 8 \cdot 16 = 128$, tehát $m \approx 11,3$ cm. Ennek ismeretében a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámolhatók a téglalap oldalhosszai: $a \approx 13,9$ cm, $b \approx 19,6$ cm.

Megjegyzés: Az ADC , CDB , valamint ABC háromszögek hasonlók. Ezen hasonlóságok alapján bizonyítható a derékszögű háromszögekre vonatkozó ún. magasságtétel, valamint befogótétel.

2. Bizonyítsuk be a Thalész-tétel megfordítását!

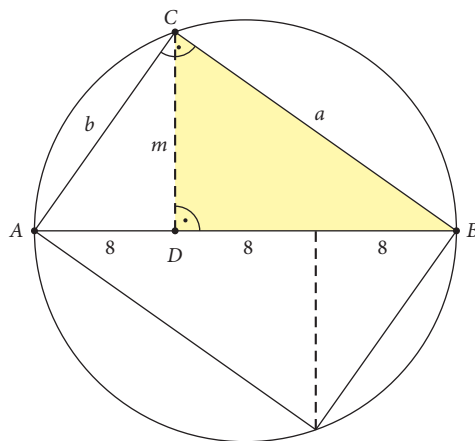
Tétel (a Thalész-tétel megfordítása):

Ha egy C pontból egy AB szakasz derékszögben látszik, akkor a C pont rajta van az AB átmérőjű körön. (Másképp: a derékszögű háromszög köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja.)



Bizonyítás:

Az ABC háromszög derékszögű, és két hegyesszögének összege 90° , az ábra szerinti jelöléssel $\alpha + \beta = 90^\circ$. Vegyük fel a CK szakaszt úgy, hogy $ACK\angle = \alpha$. Ekkor $BCK\angle = 90^\circ - \alpha = \beta$. Az $ACK\triangle$ egyenlő szárú, azaz $AK = CK$. A $BCK\triangle$ is egyenlő szárú, azaz $BK = CK$. Ezért $AK = BK$, vagyis K pont az AB szakasz felezőpontja, és a K pont egyenlő távol van az A , a B és a C pontoktól, így C rajta van az AB átmérőjű körön.



Derékszögű háromszögre vonatkozó fontosabb tételek

Pitagorasz-tétel és megfordítása:

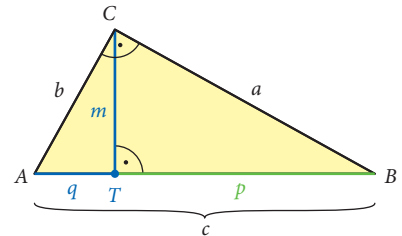
- ▶ Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogói hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.
- ▶ Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

Thalész-tétel és megfordítása:

- ▶ Ha egy C pont rajta van egy AB átmérőjű körön, de különbözik A -tól és B -től, akkor a C pontból az AB szakasz derékszögben látszik.
- ▶ Ha egy C pontból egy AB szakasz derékszögben látszik, akkor a C pont rajta van az AB átmérőjű körön.

Magasságtétel: A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza egyenlő a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek mértani közepével, vagyis az ábra jelöléseivel $m = \sqrt{pq}$.

Befogótétel: A derékszögű háromszögben a befogó hossza egyenlő az átfogóra eső merőleges vetületének és az átfogó hosszának mértani közepével, vagyis az ábra jelöléseivel $a = \sqrt{pc}$, illetve $b = \sqrt{qc}$.



FELADATOK

- 1. E1** Bizonyítsd be a magasságtételt és a befogótételt! Segítségként használd az 1. kidolgozott feladat ábráját és a megoldás gondolatmenetét!

- 2. E1** Mekkora a trapéz területének pontos értéke, ha
- alapjainak hossza 7, illetve 19 egység, valamint szárainak hossza 5, illetve 13 egység;
 - alapjainak hossza 7, illetve 20 egység, valamint szárainak hossza 5, illetve 12 egység?

- 3. E1** (Emelt szintű érettségi, 2018)
Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.
- Igazold, hogy az oldalak hosszának aránya $3 : 4 : 5$.
 - Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121,5 \text{ cm}^2$. Számítsd ki a háromszög oldalainak hosszát!

- 4. E1** (Emelt szintű érettségi, 2007)
Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, CA befogójának hossza 6 cm. A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$. Milyen hosszú a PB szakasz?

- 5. E1** Az ABC derékszögű háromszög átfogóján jelöljük a következő pontokat: T az átfogóhoz tartozó magasság talppontja, E a beírható kör érintési pontja, K a körülírható kör középpontja és P a derékszögű csúsból húzott belső szögfelezőnek az átfogóval vett metszéspontja.

- Milyen sorrendben helyezkednek el ezek a pontok az átfogón?
- Add meg a szomszédos pontok távolságát, ha a befogók hossza 15 cm és 20 cm!

- 6. E1** Egy derékszögű háromszög esetében a befogók átfogóra eső vetületeinek hossza 4 cm és 6 cm. A derékszögű háromszöget megforgatjuk az átfogója körül. Mekkora az így kapott forgástest felszíne?

- 7. E2** (Emelt szintű érettségi, 2009)
A K középpontú és R sugarú kört kívülről érinti az O középpontú és r sugarú kör ($R > r$). A KO egyenes a nagy kört A és E , a kis kört E és D pontokban metszi. Forgassuk el a KO egyenest az E pont körül α hegyesszöggel! Az elforgatott egyenes a nagy kört az E -től különböző B pontban, a kis kört C pontban metszi.

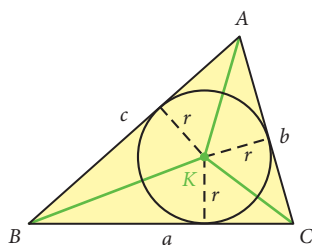
- Igazold, hogy az $ABDC$ négyszög trapéz!
- Igazold, hogy az ABC háromszög területe $T = R \cdot (R + r) \cdot \sin 2\alpha$.



a háromszög területképletének bizonyítása, a háromszög két új területképlete

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög területét megkaphatjuk úgy, hogy a beírt kör sugarának hosszát megszorozzuk a háromszög kerületének felével, azaz $T = r \cdot \frac{K}{2}$.



Bizonyítás

Használjuk az ábra jelöléseit! A beírt kör K középpontját kössük össze a háromszög csúcsaival! Az ABC háromszög területe egyenlő az így kapott ABK , BCK és CAK háromszögek területének összegével. Az ABK háromszög AB oldalához tartozó magassága egyben a beírt kör sugara, azaz r . Ezért az ABK háromszög területe $\frac{c \cdot r}{2}$. Hasonló

módon a BCK háromszög területe $\frac{a \cdot r}{2}$, a CAK háromszög területe $\frac{b \cdot r}{2}$. Ezért az ABC

háromszög területe $T = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot \frac{K}{2}$.

ELMÉLET

Síkidomok területe

Speciális síkidomok területét már általános iskola óta számoljuk, anélkül hogy a terület fogalmát definiáltuk volna. Most pontosabbá, ezáltal általánosabbá tesszük a terület fogalmát.

Minden síkidomhoz hozzárendelhetünk egy pozitív valós számot, amely a síkidom területét jelenti.

A hozzárendelés rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- ▶ Az egységnyi oldalú négyzet területe 1.
- ▶ Az egybevágó síkidomok területe egymással egyenlő.
- ▶ Ha egy síkidomot véges sok, páronként diszjunkt darabra bontunk, akkor a darabok területének összege megegyezik az eredeti síkidom területével.

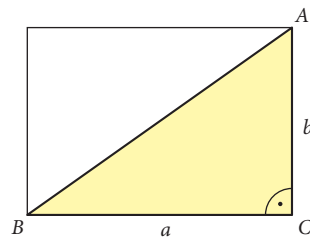
Belátható, hogy ez a hozzárendelés ugyanazokhoz a területképletekhez vezet, mint a korábban tanult területképletek.

A háromszög területe

Sok esetben, így a háromszögek esetében is, a síkidom területképletét a téglalap területképletére vezetjük vissza. Nem bizonyítjuk, de felhasználjuk, hogy az a és b oldalú téglalap területe ab .

I. Derékszögű háromszög területe

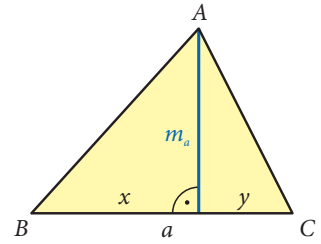
Az a és b oldalú téglalapot az átlója az ábra szerint két egybevágó derékszögű háromszögre bontja, ezért az a és b befogójú derékszögű háromszög területe $T_{ABC} = \frac{ab}{2}$.



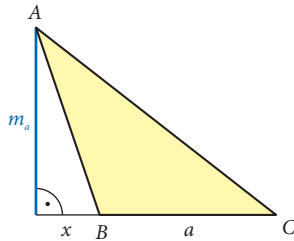
II. A hegyesszögű háromszög területe

A háromszöget a magasság az ábra szerint két derékszögű háromszögre bontja. ►

$$T_{ABC} = \frac{x \cdot m_a}{2} + \frac{y \cdot m_a}{2} = \frac{(x+y) \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}.$$



III. Tompaszögű háromszög területe



Ha a magasság a háromszögön belül halad, akkor a területképlet és annak bizonyítása megegyezik a hegyesszögű esettel. Ha kívül halad a magasság, akkor a háromszöghöz toldjunk hozzá egy derékszögű háromszöget az ábra szerint! ►

$$T_{ABC} = \frac{(x+a) \cdot m_a}{2} - \frac{x \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}.$$

A háromszög területe bármelyik oldal és a hozzá tartozó magasság hosszának segítségével

$$\text{kiszámolható: } T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}.$$

A háromszög további területképletei:

► két oldal hossza és a közbezárt szög szinusa segítségével felírva:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin \beta}{2}$$

► a beírt kör sugara és a kerület segítségével felírva:

$$T = r \cdot \frac{K}{2}$$

► a három oldal hosszából számolva (s jelöli a kerület felét), (Hérón-képlet):

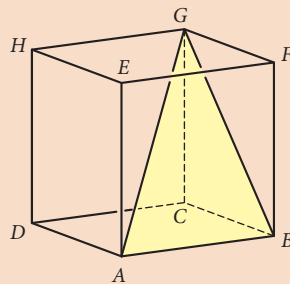
$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

FELADATOK

- 1. E1** Az ABC háromszög oldalainak hossza $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm és $AC = 9$ cm. Milyen arányban osztja ketté a háromszög területét az A csúcsból húzott belső szögfelező? Mekkora a keletkező két rész területe?

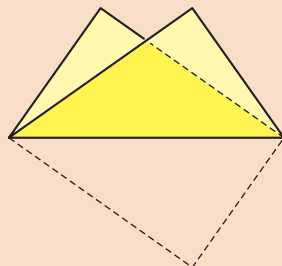
- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2021)

Az ábrán látható $ABC-DEFGH$ kocka élhosszúsága 10 egység. Számold ki az ABG háromszög beírt körének sugarát!



- 3. E1** (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$ -es téglalap alakú (A/4-es) papírlapot összehajtottunk az egyik átlója mentén (az ábra szerint). Mekkora a kétszeresen fedett síkrész területe?



- 4. E1** Bizonyítsd be, hogy ha a szokásos jelölésekkel a háromszög két oldalának hossza a és b , ezen oldalak által közbezárt szög γ , akkor a háromszög területe

$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$. A bizonyítás során különböztess meg azokat az eseteket, ahol γ derékszög, hegyesszög, illetve tompaszög.

- 5. E1** (Emelt szintű érettségi, 2021)

Egy konferencia épülete egy háromszög alakú telken van. Ha a háromszög csúcsai A , B és C , akkor $AB = AC = 130$ méter és $BC = 100$ méter. A telket kettéosztja az egyenes CD kerítés úgy, hogy a BCD háromszög alakú rész területe 2000 m^2 . (D az AB oldalon van.) Milyen hosszú a CD kerítés?

- 6. E2** (Emelt szintű érettségi, 2021)

Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg?

- 7. E2** (Emelt szintű érettségi, 2008)

Az ABC háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a BC oldal hossza pedig megegyezik az A csúcsból induló súlyvonal hosszával.

a) Mekkora a BC oldal hosszának pontos értéke?

b) Mekkora a háromszög területének pontos értéke?

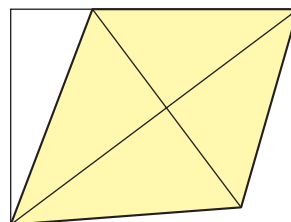
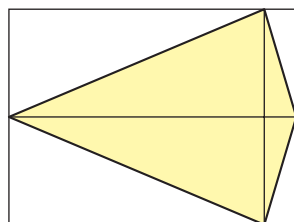
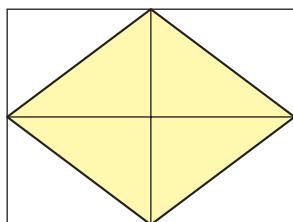
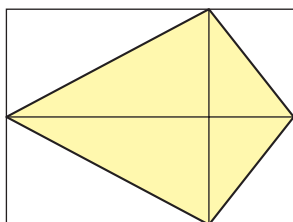


területképletek bizonyítása

BEVEZETŐ

Sándor, József és Benedek deltoid alakú papírsárkányt készítenek. Úgy szeretnék elhelyezni az átlókat a $40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ nagyságú papírlapon, hogy a papírsárkány területe a lehető legnagyobb legyen. Az átlókhöz egy 40 cm hosszú és egy 30 cm hosszú pálcát használnak. Sándor azt javasolja, úgy helyezzék el a pálcákat, hogy azok merőlegesen felezzék egymást. József úgy gondolja, hogy akkor érik el céljukat, ha az egymásra merőleges pálcák közül az egyik felezőpontját a másik harmadolópontjába helyezik. Benedek szerint mindegy, hogyan helyezik el a pálcákat, csak az fontos, hogy az egyik felezzé a másikat és a két pálcá egymásra merőleges legyen. Kinek van igaza?

Ha két deltoid átlói egyenlő hosszúak, akkor a két deltoid területe is egyenlő. Akárhogyan helyezzük el a lapon a pálcákat a papírlap oldalaival párhuzamosan, a terület ugyanakkora lesz: $\frac{40 \cdot 30}{2} = 600 \text{ cm}^2$. Érdekes, hogy a pálcá mozgatásával a terület nem változik, de a deltoid kerülete igen. A kerület akkor a legkisebb, ha a deltoid egyben rombusz. Másik érdekesség, hogy a $40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ nagyságú papírlapból kivágható 600 cm^2 -nél nagyobb területű deltoid, ha az átlók nem párhuzamosak a papírlap oldalaival. (Az ábrán az első három deltoid területe egyenlő, utolsó deltoid területe viszont nagyobb az előtte állók területénél.)

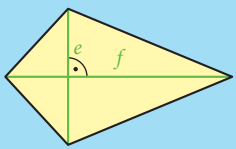
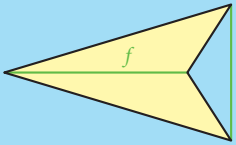
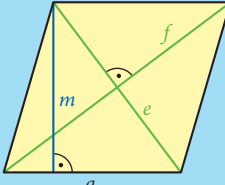


ELMÉLET

1. Speciális négyszögek területe

A paralelogramma és a deltoid területképletei bebizonyíthatók a téglalap területképletének segítségével. A trapéz és a rombusz területképletei visszavezethetők a paralelogramma, illetve a deltoid területképletére. (Az indoklás során felhasználjuk, hogy az a és b oldalú téglalap területe ab .)

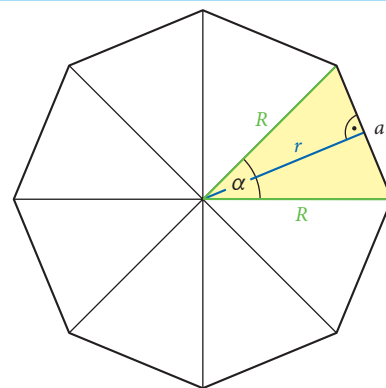
Négyszög típusa és területképlete		Indoklás
paralelogramma $T = a \cdot m_a$ $T = b \cdot m_b$ $T = a \cdot b \cdot \sin \alpha$		A paralelogramma átdarabolható egy vele egyenlő területű téglalappá, melynek oldalai a és m_a hosszúságúak. Továbbá: $m_a = b \cdot \sin \alpha$
trapéz $T = \frac{(a+c) \cdot m}{2}$		Tükrözzük középpontosan a trapézt az egyik szár felezőpontjára! A két trapézból kapott sokszög paralelogramma, és területe a trapéz területének kétszerese.

Négyszög típusa és területképlete		Indoklás
deltoid $T = \frac{e \cdot f}{2}$	 	A konvex deltoid az ábra szerint kiegészíthető téglalappá, melynek területe a deltoid területének kétszerese, és oldalai e és f hosszúságúak. A konkáv deltoid az ábra szerint kiegészíthető téglalappá. A téglalap területének fele az e oldalú és x magasságú háromszög területével több, mint a deltoid területe.
rombusz $T = a \cdot m$ $T = \frac{e \cdot f}{2}$		A rombusz egyben paralelogramma és egyben deltoid, így alkalmazható rá a paralelogramma és a deltoid területképlete is.

2. Szabályos sokszögek területe

A szabályos n -szög felbontható n darab egybevágó egyenlő szárú háromszögre az ábra szerint. A háromszögekben a szárak hosszúsága egyenlő a szabályos n -szög körülírt körének R sugarával, a szárak által bezárt szög $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, valamint a háromszög alapjához tartozó magasság hossza egyenlő a szabályos n -szög beírható körének r sugarával.

A szabályos n -szög területe:
$$T = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}{2} \quad \text{és} \quad T = n \cdot \frac{a \cdot r}{2}.$$



FELADATOK

- 1. E1** Egy szabályos nyolcszög alakú asztal oldalainak hossza 70 cm. Az asztalt egy kör alakú terítővel borítjuk le, amelynek átmérője 2 méter. A terítő minden oldalon túllóg az asztalon, így annak teljes lapját befedi. A terítő területének hány százaléka lóg le az asztalról?

- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2020)

Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 17$ cm és $AD = 8$ cm. Az $APCQ$ rombusz P csúcsa a téglalap AB oldalának belső pontja, Q csúcsa pedig a CD oldal belső pontja. Számítsd ki a rombusz kerületét!

- 3. E1** Egy trapéz alapjai 14 cm és 10 cm, szárai 6 cm és 8 cm hosszúak.

- a) Igazold, hogy (egybevágóság erejéig) egyetlen ilyen trapéz létezik!
- b) Mekkora a trapéz szögei?
- c) Mekkora a trapéz területe?

- 4. E2** Egy szabályos nyolcszög alakú aranylemezen hat ember osztozkodik. Egyikük azt javasolja, hogy osztozzanak egyenlő mértékben. Egy másik ember szerint történjen úgy az osztozkodás, hogy a nyolcszög egy csúcsából húzható átlókkal darabolják fel a lemezt, majd kapjanak ebből egy-egy darabot a szerencsére bízva, véletlenszerűen. (A lemez anyaga homogén, és a lemez mindenhol azonos vastagságú.)

- a) Hány ember kaphat értékesebb darabot a második módszer segítségével, mint az elsővel?
- b) Hány százaléka a második esetben kapható rész az első esetben kapható résznek a hat ember esetében?

- 5. E2** A Bevezetőben szereplő $40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ -es papírlapból a lehető legnagyobb területű deltoidot szeretnénk kivágni. Mekkora ennek a deltoidnak

- a) az átlói; b) a szögei; c) a területe?



érintő, érintőszakasz, szelő



egymást érintő körök

BEVEZETŐ

A képen látható szíjáttétel hajtószíja feszesen illeszkedik a két kerékhez. Ha a szíj kellően feszes, akkor két körívből és két egyenes szakaszból áll, az egyenes szakaszok a két kör közös érintőire illeszkednek.



KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozd meg a Bevezetőben szereplő szíj hosszát centiméterben két tizedesjegy pontossággal, ha ismert, hogy a kisebb kerék egy 3 cm sugarú kör, a nagyobb kerék egy 5 cm sugarú kör, és a körök középpontjainak távolsága 14 cm!

Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit! Az EF és az $E'F'$ szakaszok a körök közös külső érintőire illeszkedő, az érintési pontok közé eső szakaszok. A szíj hosszát egyfelől ezek, másfelől a piros színnel jelölt körívek hosszának összege adja. A körök szimmetriája miatt $EF = E'F'$, így a szíj hossza $2 \cdot EF + i_1 + i_2$.

I. Az EF érintőszakasz hossza

Az érintési pontokba húzott sugarak AE és BF . Az $ABFE$ derékszögű trapéz az A csúcsból a BF szakaszra állított merőleges egyenes az ABT derékszögű háromszögre, valamint az $ATFE$ téglalapra bontja. Az ABT háromszög derékszögű, átfogójának hossza $AB = 14$ cm, BT befogójának hossza $BT = BF - TF = 5 - 3 = 2$ cm. Így az AT hossza a Pitagorasz-tétel alapján: $AT = \sqrt{14^2 - 2^2} = \sqrt{192} \approx 13,86$ cm. Az EF érintőszakasz hossza tehát az AT szakasz hosszával való egyenlősége miatt 13,86 cm.

II. A két körív hossza

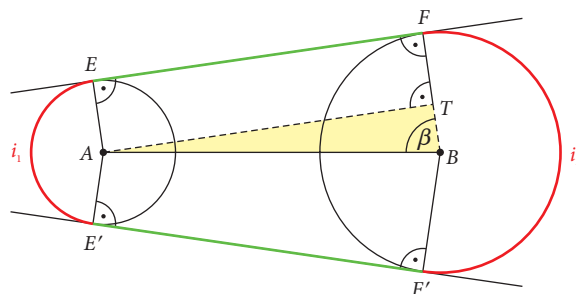
Az ívek hosszának meghatározásához szükség van az ívekhez tartozó középponti szögek nagyságára.

Az ABT derékszögű háromszögben a B csúcsnál lévő szögre felírható: $\cos \beta = \frac{TB}{AB} = \frac{2}{14}$ $\rightarrow \beta \approx 81,8^\circ$.

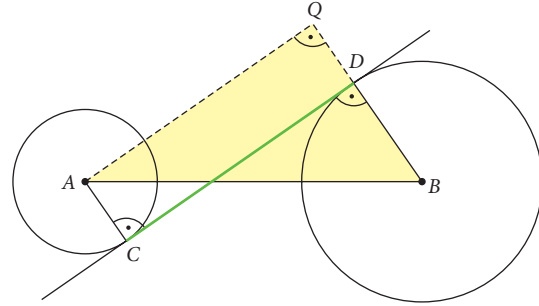
Így az i_2 ívhez tartozó középponti szög nagysága $360^\circ - 2\beta = 360^\circ - 163,6^\circ \approx 196,4^\circ$, ezért az ív hossza az 5 cm sugarú körben: $i_2 \approx \frac{2 \cdot 5 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 196,4^\circ \approx 17,14$ cm.

Az i_1 ívhez tartozó középponti szög nagysága az $E'AE$ és $F'BF$ egyállású szögek egyenlősége miatt $2\beta \approx 163,6^\circ$, ezért az ív hossza a 3 cm sugarú körben: $i_1 \approx \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 163,6^\circ \approx 8,57$ cm.

A szíj hossza tehát $2 \cdot EF + i_1 + i_2 = 2 \cdot 13,86 \text{ cm} + 8,57 \text{ cm} + 17,14 \text{ cm} = 53,43 \text{ cm}$.



2. Az ún. kereszthajítás esetében a kerekeket meghajtó szíj a közös belső érintők mentén mozog. Határozd meg a szíj érintési pontok közé eső szakaszának hosszát egy tizedesjegy pontossággal az előző feladatban megadott adatokkal!



Megoldás:

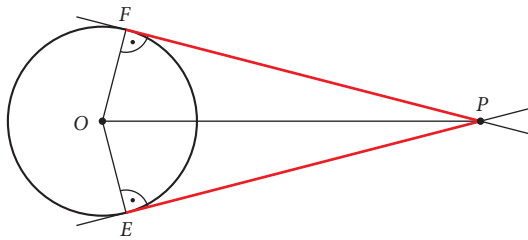
A közös belső érintőn lévő C és D érintési pontokba húzott sugarak AC és BD . A BD szakaszt a D ponton túl 3 cm-rel – vagyis a másik kör sugarának hosszával – meghosszabbítva adódik a Q pont.

Mivel $AC \parallel DQ$ és $AC = DQ$, így az $ACDQ$ négyszög téglalap, ezért ABQ háromszög derékszögű. A háromszög átfogójának hossza $AB = 14$ cm, és egyik befogója $BQ = 5 + 3 = 8$ cm hosszú. Pitagorasz tétele alapján $AQ = \sqrt{132} \approx 11,5$ cm. A CD érintőszakasz hossza tehát az AQ szakasz hosszával való egyenlősége miatt 11,5 cm.

A szíj hossza tehát két érintési pont között 11,5 cm.

3. Bizonyítsuk be, hogy a körhöz a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak!

Bizonyítás:



Használjuk az ábra jelöléseit! Az OPE és az OPF háromszögekben OP közös oldal, $OE = OF = r$, és az E és F csúcsoknál derékszög van, hiszen az érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra. $OP > r$, hiszen P külső pont. Az OPE és OPF háromszögekben tehát két-két oldal egyenlő, és a hosszabb oldalakkal szemben lévő szögek egyenlők, ezért $OPE \trianglecong OPF \triangle$. Az egybevágóság miatt a megfelelő oldalak hossza egyenlő, ezért $PE = PF$. Ezzel beláttuk a tételt.

ELMÉLET

1. A kör és érintői

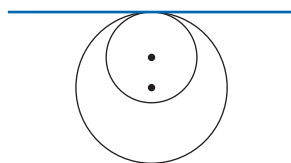
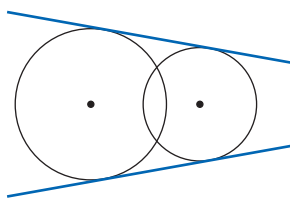
Definíció: A kör **érintője** olyan egyenes a kör síkjában, amelynek a körrel egy közös pontja van (az ún. **érintési pont**).

Tétel: A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

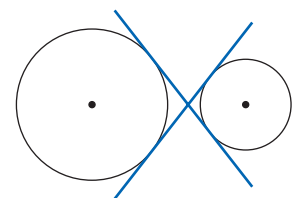
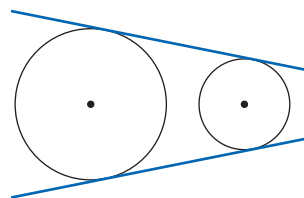
Definíció: Adott a síkon egy kör, és a körön kívül egy P pont. A P pontból a körhöz húzott érintő érintési pontját és a P pontot összekötő szakaszt **érintőszakasznak** nevezzük.

Tétel: A körhöz adott külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.

Definíció: Két, azonos síkban lévő kör **közös érintője** olyan egyenes, amely mindkét kört érinti.



közös külső érintők



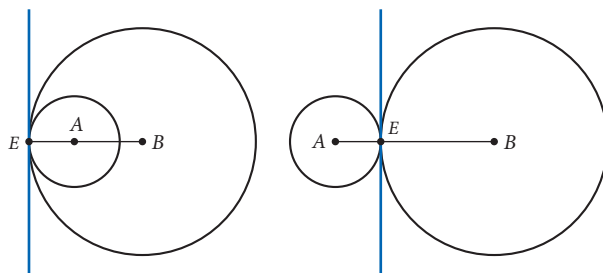
közös belső érintők

2. Egymást érintő körök

Definíció: Két kör érinti egymást, ha egy síkban vannak és pontosan egy közös pontjuk van.

Tétel: Ha két kör érinti egymást, akkor az érintési pontjuk illeszkedik a két kör középpontját összekötő egyenesre (az ún. centrálisra).

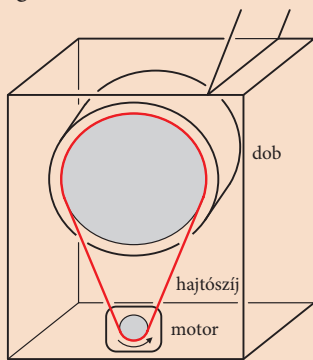
Tétel: Ha két kör érinti egymást, akkor az érintési pontban húzott érintőjük közös érintő.



FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2013)

Az ábrán egy mosógép vázlatos rajza látható. A kisebb, 1 cm sugarú kerék a motor tengelyéhez kapcsolódik, és egy hajtósíj segítségével forgatja meg a mosógép dobjához rögzített, 20 cm sugarú kereket, amittől a dob és benne a ruhák forognak mosás közben. A két kerék tengelye párhuzamos, a tengelyek távolsága 46 cm. (A hajtósíj a tengelyekre merőleges síkban van.) Milyen hosszú a feszes hajtósíj?



2. E2 Egy 24 méter átmérőjű, kör alakú telekre 3 vagy 4 darab szabályozható, de azonos hatótávolságra beállított locsolófejet szeretnének elhelyezni. Telkes úr és felesége azt szeretnék elérni, hogy a locsolófejek által locsolt területek ne fedjék egymást, ne locsoljanak a telekhatáron túlra, ugyanakkor a telek lehető legnagyobb részén biztosítsák az öntözést. Telkes úr szerint 3, Telkesné szerint 4 locsolófejet kellene beállítani a feltételek eléréséhez.

a) Kinek van igaza?

b) A telek hány százalékan biztosítják az öntözést az egyik, illetve a másik elhelyezéssel?

3. E2 Az R és r sugarú körök kívülről érintik egymást.

a) Bizonyítsd be, hogy a körök közös külső érintőjén az érintési pontokat összekötő szakasz hossza kétszer akkora, mint a két kör sugarának mértani közepe!

b) A két kör egyik közös külső érintőjének az érintési pontok közé eső szakaszát megforgatjuk a körök középpontjára illeszkedő egyenes körül. Fejezd ki a keletkező csonkakúp palástjának területét R és r segítségével!

4. E1 A biliárdjátékban használt 16 golyót tároláskor egy négyzet alapú fadobozban tartják úgy, hogy a golyók egymást érintik. A játék kezdetekor a 15 színes golyót – megfelelő szabály szerint – egy „lekerekített háromszög” alakú keretbe helyezik el, ekkor a szomszédos golyók ugyancsak érintik egymást. A szabvány méretű biliárdgolyó átmérője közelítőleg 57 mm.

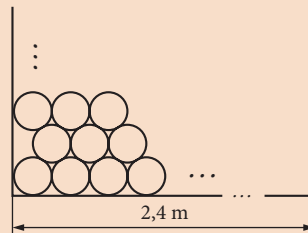


a) Mekkora a tárolódoboz alapjának belső oldalhossza?

b) Határozd meg a játék indításakor használt keret belső részének területét!

5. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Egy teherautó raktere 2,4 m széles, 2 m magas és 7 m hosszú. Ezzel a teherautóval kell olyan, méretre vágott farönköket szállítani, amelyek forgáshenger alakúak, átmérőjük 24 cm és hosszuk 7 m. A rakomány biztonsági okokból nem nyúlhat túl a raktérben egyik irányban sem. A szállítócég az ábrán látható stratégiával rendezi a farönköket.



a) Mutasd meg, hogy legfeljebb 86 farönköt lehet így a raktérben elhelyezni!

b) A raktérnek hány százaléka marad üresen, ha 86 farönköt szállítanak?



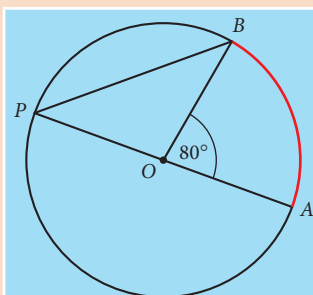
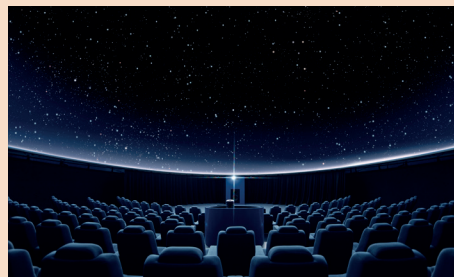
középponti szög, körív, körcikk



kerületi szög, látókörív

FELADAT

1. Egy planetárium kör alakú nagytermében ismeretterjesztő filmet vetítenek a körív alakban elhelyezett kivetítőre. Az előadó a terem középpontjából (adott magasságban, vízszintes irányban) 80° nagyságú szög alatt látja a képet. Az alábbi ábrák a terem alaprajzát mutatják. A pirossal jelölt AB íven van a vetítővászon. Megjelöltünk a terem szélén néhány pontot. Vajon hány fokban látják a kivetített képet a látogatók a kör P, Q, R, S pontjaiból? Keress egyenlő szárú háromszögeket, és azok segítségével határozd meg a táblázat utolsó két sorában szereplő szögek nagyságát! Milyen érdekes sejtést fogalmazhatunk meg ezek alapján?



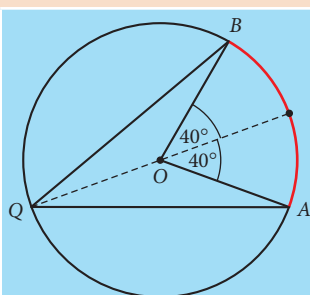
$OP = OB$, ezért a $POB \triangle$ egyenlő szárú.

Ezért $\angle BPO = \angle OBP$.

Az O csúcsnál lévő külső szög 80° (ez egyenlő a két, nem mellette fekvő belső szög nagyságának összegével), így $\angle OPB + \angle OBP = 80^\circ$.

Mekkora az OPB szög?

Mekkora az APB szög?



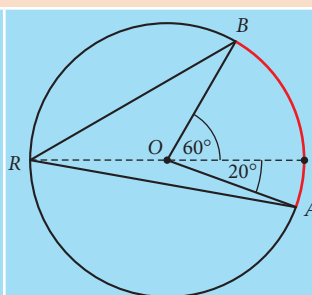
Keress egyenlő szárú háromszögeket!

Jelöld az ábrán az egyenlő szögeket!

Mekkora az OQA szög?

Mekkora az OQB szög?

Mekkora az AQB szög?



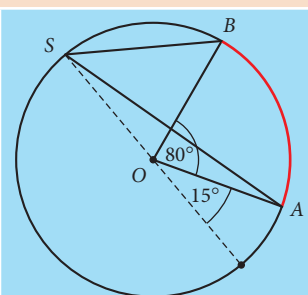
Keress egyenlő szárú háromszögeket!

Jelöld az ábrán az egyenlő szögeket!

Mekkora az ORA szög?

Mekkora az ORB szög?

Mekkora az ARB szög?



Keress egyenlő szárú háromszögeket!

Jelöld az ábrán az egyenlő szögeket!

Mekkora az OSA szög?

Mekkora az OSB szög?

Mekkora az ASB szög?

1. Középponti szög és körcikk

Definíció: A körben a **középponti szög** olyan szög, amelynek csúcsa a kör középpontja.

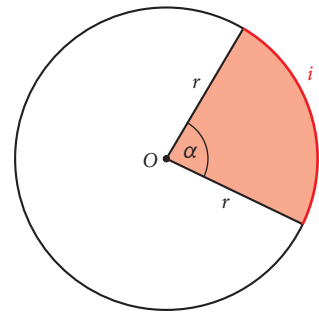
Tétel: Egy körben egyenlő nagyságú középponti szögekhez egyenlő hosszúságú körívek és egybevágó körcikkek tartoznak.

Tétel: Adott körben a középponti szögek nagysága és az ezekhez tartozó ívek hossza között egyenes arányosság van.

Tétel: Adott körben a középponti szögek nagysága és az ezekhez tartozó körcikkek területének nagysága között egyenes arányosság van.

Az r sugarú körben:

Az 1° nagyságú középponti szöghöz tartozó ív nagysága:	$i = \frac{1^\circ}{360^\circ} \cdot 2r\pi = \frac{1}{360} \cdot 2r\pi$	Az α nagyságú középponti szöghöz tartozó ív nagysága:	$i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2r\pi$
Az 1° nagyságú középponti szöghöz tartozó körcikk területének nagysága:	$T_{\text{cikk}} = \frac{1^\circ}{360^\circ} \cdot r^2\pi = \frac{1}{360} \cdot r^2\pi$	Az α nagyságú középponti szöghöz tartozó körcikk területének nagysága:	$T_{\text{cikk}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi = \frac{i \cdot r}{2}$



2. Kerületi szögek

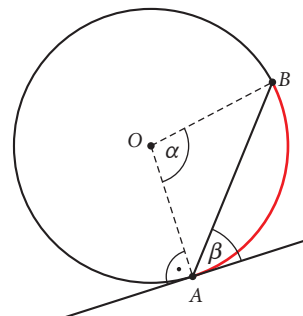
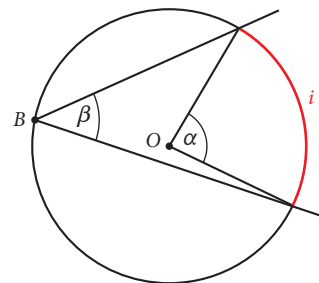
Definíció: A kör **kerületi szöge** olyan konvex szög, amelyeknek csúcsa a körvonal egyik pontja, és a két szára a kör egy-egy húrára illeszkedik.

Az ábrán az i körívhez tartozó egyik kerületi szög a β szög. Az i körívhez végtelen sok kerületi szög tartozik, és csak egyetlen középponti szög, az α szög.

Kerületi és középponti szögek tétele: Egy körben egy adott ívhez tartozó kerületi szög feleakkora, mint az ugyanezen ívhez tartozó középponti szög. Vagyis: $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

➡ **Kerületi szögek tétele:** Egy körben az egyenlő hosszúságú körívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

Kiegészítés: Érintőszárú kerületi szögek nevezzük azt a konvex szöget, melynek csúcsa a kör egy pontja, egyik szára a csúcsból induló egyik húr, másik szára az adott pontba húzott húrt érintő. Az ábrán az AB körívhez tartozó egyik érintőszárú kerületi szög látható. Erről is bebizonyítható, hogy nagysága egyenlő az AB ívhez tartozó kerületi szögek nagyságával.



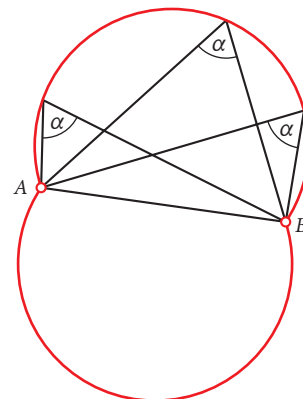
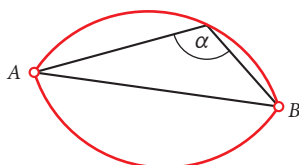
3. Látókörv

Az, hogy egy AB szakasz a sík egy P pontjából α szögben látszik ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), azt jelenti, hogy az APB szög nagysága α .

Ha adott egy AB szakasz és egy α szög ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), akkor azon pontok halmaza a síkon, amelyekből az AB szakasz α szögben látszik, két körívnek a pontjai, kivéve az AB szakasz végpontjait. Ezeket **látókörv**eknek nevezzük.

Az AB szakasz $\alpha = 90^\circ$ nagyságú szöghöz tartozó látóköríve az AB szakasz Thalész-köre.

Látókörv, ha $\alpha > 90^\circ$:



KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Bizonyítsuk be a kerületi és középponti szögek tételét!

Bizonyítás:

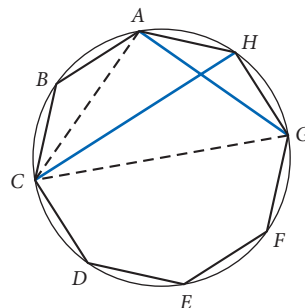
Három esetre bontjuk az állítást aszerint, hogy a kerületi szög száraihoz képest hol helyezkedik el a kör középpontja. Használjuk az ábrák jelöléseit! Bizonyítandó, hogy $\alpha = 2\beta$.

Ha a kör középpontja illeszkedik az egyik szögcsúrra	Ha a kör középpontja a szögtartomány belsejében van	Ha a kör középpontja a szögtartományon kívül esik
Az OPB háromszög egyenlő szárú, ezért P -nél levő szöge is β . Mivel α az OPB háromszög külső szöge, ezért egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, azaz $\alpha = 2\beta$.	Bontsuk a β szöget két részre a kör középpontján átmenő egyenessel az ábra szerint! Az előző eset alapján $\alpha_1 = 2\beta_1$ és $\alpha_2 = 2\beta_2$. Mivel $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ és $\beta = \beta_1 + \beta_2$, ezért $\alpha = 2\beta$.	Húzzuk be az AO félegyenest! Az első eset alapján az ábra szerinti $\alpha_1 = 2\beta_1$ és $\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$. Ebből a két egyenlőségből következik, hogy $\alpha = 2\beta$.

2. Milyen arányban osztja az ábra szerinti szabályos nyolcszög CH átlója az AG átlót?

Megoldás:

A nyolcszög körülírt körén az AH és a HG körívek hossza egyenlő. Ezért a hozzájuk tartozó kerületi szögek nagysága is egyenlő. Így $\angle ACH = \angle HCG$, tehát a CH egyenese egy belső szögfelező a CGA háromszögben. A szögfelező tétel szerint a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a mellette lévő megfelelő oldalak hosszának arányában osztja. Az ACG háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért a kért arány $1 : \sqrt{2}$.

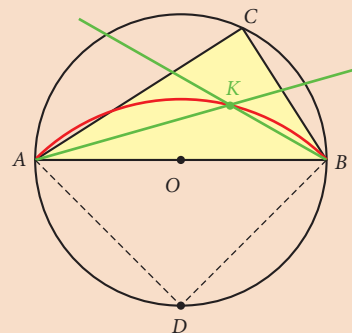


FELADATOK

- E1** Egy körben egy 12 cm hosszú ívhez tartozó kerületi és középponti szög nagyságának összege 132° . Mekkora a kör sugara?
- E1** Az ABC háromszög két szöge 76° és 41° nagyságú. Mekkora szögben látszanak a háromszög oldalai a köré írt kör középpontjából?
- E1** Mekkora szögben látszik a 8 cm sugarú körben a 14 cm hosszú húr a körív (a húrok végpontjaitól különböző) pontjaiból?
- E1** Egy szabályos kilencszög egyik csúcsából meghúzzuk az összes átlót. Mekkora szöget zárnak be egymással a szomszédos átlók?
- E1** (Emelt szintű érettségi, 2016)
A $PQRS$ húrnégyszöget a PR és QS átlóival négy há-

romszögre bontottuk. Igazold, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz!

- E2** Bizonyítsd be, hogy az AB átfogójú derékszögű háromszög beírható körének középpontja rajta van azon az AB köríven, melynek középpontja az ábra szerint a D pont, és sugara a Thalesz-kör sugarának $\sqrt{2}$ -szöröse! (Ez a körív látható a 83. lecke Bevezetőjében is.)





húrnégyszögek tétele, érintőnégyszögek tétele

BEVEZETŐ



A képen látható háromszög, illetve szimmetrikus trapéz alakú dupla ablakon szeretnénk elhelyezni egy aprócska égőt (pontoszerű fényforrást) úgy, hogy a lámpa az ablakkeret csúcsaitól egyenlő távolságra legyen.

- Hogyan keressük meg az égő helyét? Biztosan van ilyen pont?
- Hová helyezzük az égőt akkor, ha azt szeretnénk, hogy az ablakkeret mindegyik oldalától egyenlő távolságra legyen? Biztos, hogy van ilyen pont mindkét ablakon?

Megoldás:

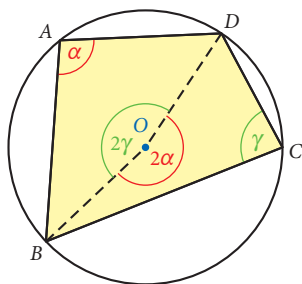
- Két csúcstól egyenlő távolságban lévő pontok rajta vannak a két csúcstól meghatározott szakasz szakaszfelező merőlegesén. Az ablak síkjában az a pont lesz az égő helye, amelyik illeszkedik minden oldalfelező merőleges egyenesre. Ez egyben a síkidom köré írt körének középpontja. Ilyen pont bármely háromszög esetén létezik, de nem létezik minden sokszög, csak az ún. húrsokszögek esetén.
- Két oldalegyenestől egyenlő távolságban lévő pontok rajta vannak a két oldal által meghatározott szög szögfelező egyenesén. Az ablak síkjában az a pont lesz az égő helye, amelyik illeszkedik minden belső szög szögfelező egyenesére. Ez egyben a síkidom beírt körének középpontja. Ilyen pont bármely háromszög esetén létezik, de nem létezik minden sokszög, csak az ún. érintősokszögek esetén.

ELMÉLET

1. A húrnégyszög

Definíció: Azt a négyszöget, amelyhez létezik olyan kör, amelyre mind a négy csúcsa illeszkedik, **húrnégyszögnek** nevezzük.

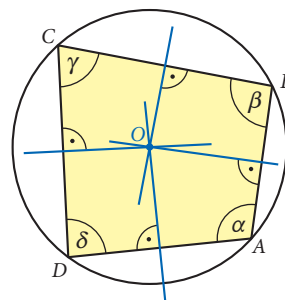
- ▶ A húrnégyszög négy oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást, ez a köré írt kör középpontja.



Húrnégyszög tétele: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor a szemben fekvő szögeinek összege 180° . A szokásos jelölésekkel $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

Bizonyítás:

Használjuk az ábra jelöléseit! A négyszög α szöge egy kerületi szög a négyszög körülírt körében, ezért a hozzá tartozó középponti szög 2α . A négyszög γ szöge ugyancsak kerületi szög a négyszög körülírt körében, ezért a hozzá tartozó középponti szög 2γ . Mivel az ábra szerint $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, ezért $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Mivel minden négyszögben a szögek nagyságának összege 360° , ezért a másik két szög nagyságának összege szintén 180° .



A tétel megfordítása: Ha egy négyszög szemben fekvő szögeinek összege 180° , akkor a négyszög húrnégyszög.

Húrnégyszögek például: négyzet, téglalap, húrtrapéz, derékszögű deltoid.

2. Az érintőnégyyszög

Definíció: Azt a négyszöget, amelyhez létezik olyan kör, amelyet mind a négy oldala érint (azaz van beírható köre), **érintőnégyyszögnek** nevezzük.

- ▶ Az érintőnégyyszög négy belső szögfelezője egy pontban metszi egymást, ez a beírható kör középpontja.
- ▶ Az érintőnégyyszög területe kiszámolható a beírható kör sugarának hossza és a négyszög kerülete segítségével: $T = \frac{r \cdot K}{2}$.

Érintőnégyyszög tétele: Ha egy négyszög érintőnégyyszög, akkor a szemben fekvő oldalai hosszának összege egyenlő. A szokásos jelölésekkel: $a + c = b + d$.

Bizonyítás:

Használjuk az ábra jelöléseit! A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúságúak. Ha a négyszög csúsaiból a beírható körhöz húzott érintőszakaszok hosszát rendre x, y, z, w -vel jelöljük, akkor a négyszög oldalainak hossza

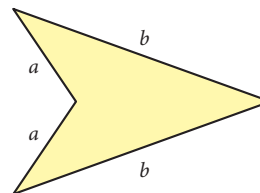
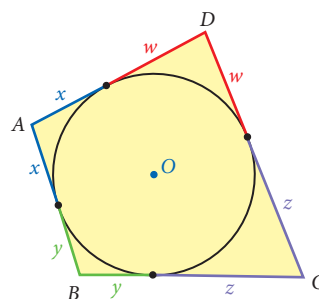
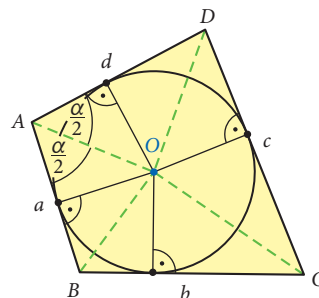
$$AB = x + y, BC = y + z, CD = z + w \text{ és } DA = w + x.$$

$$\text{Ezért } AB + CD = x + y + z + w = BC + DA.$$

A tétel megfordítása nem teljesül, mert létezik ellenpélda, azaz van olyan négyszög, amelynek a szemben fekvő oldalai hosszának összege egyenlő, a négyszög azonban nem érintőnégyyszög. Ilyen például a konkáv deltoid. Konkav négyszögek esetében azonban teljesül a tétel megfordítása is.

Tétel: Ha egy konvex négyszög szemben fekvő oldalai hosszának összege egyenlő, akkor a négyszög érintőnégyyszög.

Érintőnégyyszögek például: négyzet, rombusz, konvex deltoid.



FELADATOK

1. E1 Egy húrnégyszög három szomszédos oldala a körülírt kör középpontjából rendre 70° , 80° és 90° nagyságú szögben látszik. Mekkora a húrnégyszög szögei?

2. E2 Karesz öntözőberendezést vásárol a trapéz alakú kertjébe. A barkácsáruházban veszi észre, hogy a kert adatairól készített jegyzeteit otthon felejtette. Arra biztosan emlékszik, hogy a kert három oldalának hossza 8 méter, 12 méter, illetve 23 méter. Azt is tudja, hogy a kertben el tudja helyezni úgy a locsolófejet, hogy a berendezés által belocsolt rész egy olyan kör legyen, amely éppen érinti a telek oldalait. Mekkora lehet a kert területe?

3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2005)
Az ABCD derékszögű érintőtrapéz AB és CD alapjai ($AB > CD$) hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szarat. Számítsd ki a trapéz oldalainak hosszát!

4. E1 (Emelt szintű érettségi, 2016)

Az ABCD húrnégyszög AB oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög BC oldala 3 cm, a CD oldala 5 cm hosszú, továbbá $\angle BCD = 120^\circ$. Számítsd ki a négyszög BD átlójának, AB oldalának és AD oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét!

5. E2 Egy érintőnégyyszög beírható körét a négyszög érintési pontjai $1 : 2 : 3 : 4$ arányban osztják négy részre, ebben a sorrendben.

a) Bizonyítsd be, hogy a négyszög trapéz!

b) Mekkora az érintőnégyyszög területe, ha a beírható kör sugara 12 cm?

6. E1 Egy trapézzal a következőket tudjuk:

- egyik alapjának hossza 25 cm,
- másik alapjának hossza 9 cm,
- van beírható köre, és a kör sugara 7,5 cm,
- van köré írható köre.

Mekkora a beírható és a köré írható kör területének és területének aránya?



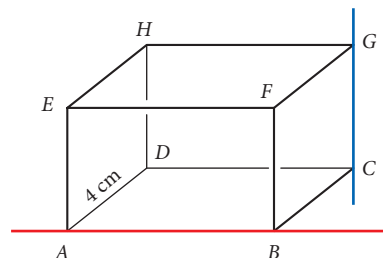
kitérő egyenesek távolsága és hajlásszöge

BEVEZETŐ

Tekintsük az ábra szerinti téglatest élegyeneseit! Az AB és a CG egyenesek úgynevezett kitérő egyenesek, mert nincs olyan sík, amelyre mindkét egyenes illeszkedik. Mekkora szöget zárnak be egymással, és mekkora a két egyenes távolsága?

Ha két egyenes közül az egyiket párhuzamosan eltoljuk, akkor a két egyenes szöge nem változik. Ez alapján CG és AB egyenesek hajlásszöge egyenlő a CG -vel párhuzamos BF egyenes és az AB egyenes hajlásszögével. A CG és AB egyenesek hajlásszöge tehát 90° .

Ha az AB egyenes valamely pontját a CG egyenes valamely pontjával összekötjük, akkor végtelen sok, különböző hosszúságú szakasz jöhet létre. Van azonban e szakaszok között egy legrövidebb, ez pedig éppen az AB egyenesre is, és a CG egyenesre is merőleges BC szakasz hossza, ebben az esetben 4 cm.



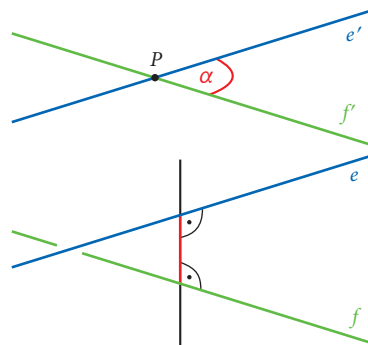
ELMÉLET

Kitérő egyenesek

Definíció: Két egyenes **kitérő**, ha nincs olyan sík, amelyre mindkét egyenes illeszkedik.

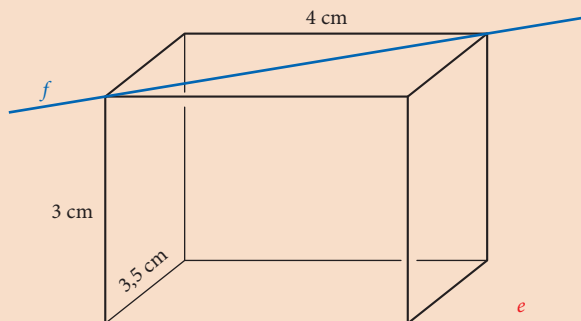
- ▶ Kitérő egyenesek hajlásszögét úgy határozzuk meg, hogy a tér egy tetszőleges pontján át párhuzamost húzunk mindkét egyenessel, és vesszük ezen metsző egyenesek hajlásszögét.
- ▶ Kitérő egyenesek távolságán a pontjaik közti távolságok közül a legkisebb távolságot értjük. Minden kitérő egyenespár esetében van egy mindkettőre merőleges egyenes, amely mindkettőt metszi. Ezen a merőleges egyenesen lévő metszéspontok távolsága egyenlő a kitérő egyenesek távolságával.

Ha az e egyenes merőleges egy síkra, akkor merőleges a sík minden egyenesére, így például az ebben a síkban fekvő, e -hez képest kitérő egyenesekre is.

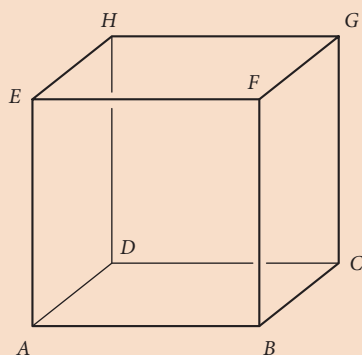


FELADATOK

1. E1 Az ábrán látható téglatest esetében mekkora az e és az f egyenesek hajlásszöge és távolsága?



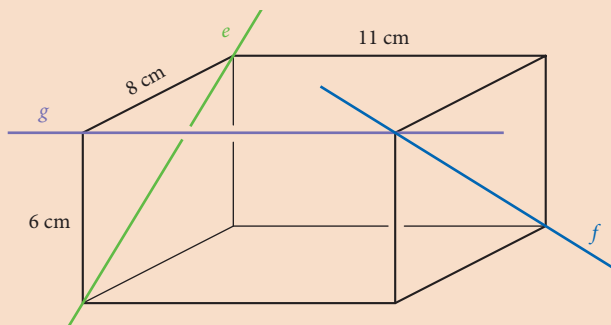
2. E1 Az ábrán egy kocka látható.



- a) Az EC testátló és az FG oldalél egyenesei kitérő egyenesek. Keress olyan egyenest, amely párhuzamos az FG egyenessel, és metszi az EC egyenest! Ennek segítségével határozd meg az EC és FG egyenesek hajlásszögét!
- b) Az EC testátló és az AB oldalél egyenesei kitérő egyenesek. Keress olyan egyenest, amely párhuzamos az AB egyenessel, és metszi az EC egyenest! Ennek segítségével határozd meg az EC és AB egyenesek hajlásszögét!

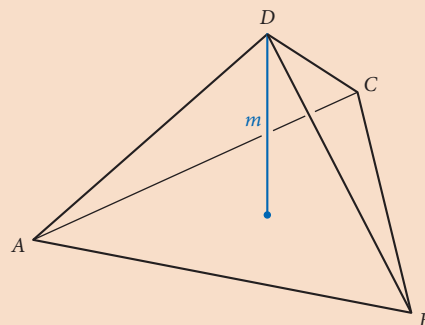
3. E2 Az ábrán látható téglatest esetében mekkora a hajlásszöge és a távolsága

- a) az e és az f lapátló egyeneseknek;
b) az e -nek és az egyik élre illeszkedő g egyenesnek?



4. E2 Egy szabályos négyoldalú gúla alaplapja 12 cm oldalhosszúságú négyzet, oldallapjai egyenlő szárú háromszögek, amelyekben a szárak hossza 18 cm. Mekkora szöget zár be az alaplap egyik oldalegyenese a hozzá képest kitérő egyik szár egyenesével?

5. E1 A szabályos tetraédernek 4 oldalapja van, ezek egybevágó szabályos háromszögek. Milyen távol van a 16 cm élhosszúságú szabályos tetraéder magasságának egyenese a hozzá képest kitérő oldalegyenestől?

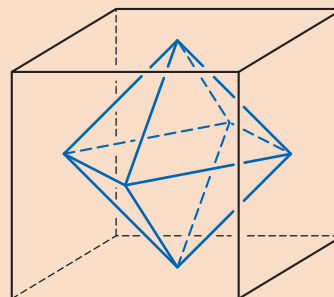


6. E2 A kocka egy szabályos test, mert minden oldalapja egybevágó szabályos sokszög (négyzet), és a szomszédos lapok egymással egyenlő nagyságú szöget zárnak be.

A kocka lapközéppontjai egy másik szabályos testet, oktaédert határoznak meg.

Válaszd ki az oktaéder két olyan élegyenesét, melyek egymással kitérők!

Határozd meg a kiválasztott két egyenesnek a hajlásszögét és a távolságát, ha ismert, hogy az eredeti kocka élének hossza 10 cm!



7. E2 Egy szabályos ötszög alapú gúla alaplapja alapélei 8 cm, oldalélei 12 cm hosszúak. A gúla magasságára illeszkedő egyenest jelöljük m -mel, az alaplap egyik átlójára illeszkedő egyenest e -vel.

- a) Mekkora az m és e egyenesek hajlásszöge?
b) Mekkora az m és e egyenesek távolsága?

1. **E1** Egy húrtrapéz alapjainak hossza 22 cm és 12 cm, a trapéz szárai pedig 13 cm hosszúak. A trapézt megforgatjuk az egyik, majd a másik alapja körül. Mekkora az így keletkezett forgástestek térfogatának aránya?

2. **E1** Egy forgáskúp tengelymetszetének területe 108, alapkörének területe pedig 81π területegység.

- a) Határozd meg a kúp nyílásszögét!
b) Határozd meg a kúp kiterített palástjának közép-ponti szögét!
c) Mekkora a kúp alapkörének és a kúppalást területének aránya?

3. **E1** Bizonyítsd be, hogy a csonkakúp térfogata
$$V = \frac{m \cdot \pi (R^2 + Rr + r^2)}{3},$$
 ha R az alapkör sugara, r a fedőkör sugara és m a csonkakúp magassága!

4. **E2** Egy sétálóutcat nagy méretű virágládákkal szegeleznék. A virágládák kétféle alakúak. Ez egyik láda szabályos négyoldalú csonkagúla alakú, melynek a kisebbik alaplapja érintkezik a talajjal. A láda belső méretei: a csonkagúla alaplapjai 50 cm, illetve 64 cm oldalhosszúságú négyzetek, a csonkagúla magassága 45 cm. A másik láda alakja húrtrapéz alapú egyenes hasáb, és ennek a legkisebb területű oldallapja érintkezik a talajjal. A láda belső méretei: a trapéz alapjai 35 cm és 46 cm hosszúak, a trapéz magassága 45 cm, az egyenes hasáb magassága 80 cm hosszú.

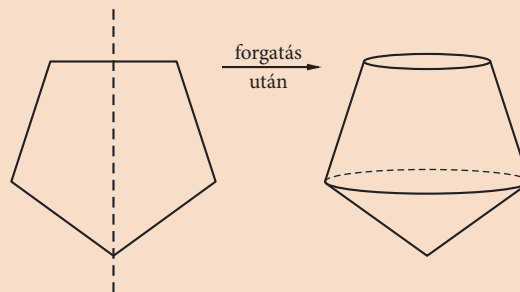
- a) Melyik láda (belső) térfogata a nagyobb?
b) Mindkét ládát 40 cm magasságig töltik meg virágfölddel. Melyik ládában van több föld?



5. **E1** Egy csonkakúp térfogata 5000 cm^3 , az alapkör sugara 6,5 cm, magassága 44 cm. Mekkora a fedőlapp sugara?

6. **E2** (Emelt szintű érettségi, 2014)

Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőönt” gyárt, amelynek nehezeke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetriatengelye körüli forgatásával származtatható. Hány cm^3 a nehezek térfogata?



7. **E2** Egy forgáshenger alakú olvasztótégelyben folyékony viasz van. A henger alapkörének sugara 20 cm, a henger magassága 50 cm. Ha a hengert úgy helyezzük el, hogy alkotói vízszintesen álljanak, akkor a hengerben lévő viasz magassága 36 cm. (A henger minden helyzetében biztonságosan zárható, viasz csakis akkor folyik ki belőle, ha a csapot kinyitjuk.)

- a) Milyen magasan áll a viasz a hengerben, ha azt az alaplapjára állítjuk?
b) Hány olyan szabályos négyoldalú gúla alakú gyertyát tudunk kiönteni a hengerben lévő viaszból, amelynek alapéle 6 cm, testmagassága 5 cm hosszú, ha gyártás közben az anyagveszteség 12%?

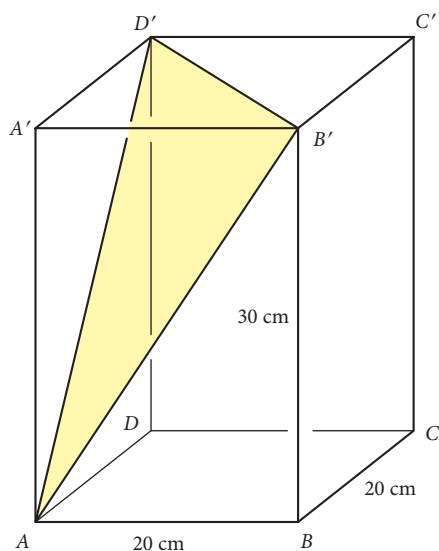
8. **E2** Egy szabályos („fejjel lefelé álló”) négyoldalú csonkagúla alakú tartályba vizet töltenek. A csonkagúla alapéle 1,8 méter, fedőéle 1,5 méter, magassága pedig 1 méter. A feltöltőrendszer óránként 720 liter vizet juttat a tartályba. Egy adott pillanatban történt mérés szerint a tartályban 1045 liter víz van.

- a) Hány órát kell még várni, hogy a rendszer színültig töltse a tartályt?
b) Milyen magasan áll a víz a mérés pillanatában?

9. **E2*** (Emelt szintű érettségi, 2015)

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík 30° -os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot. Számold ki a részek térfogatának arányát!

KIDOLGOZOTT FELADAT



Egy négyzetes hasáb alakú viasztömböt az ábra szerint három lapátlójára illeszkedő sík mentén kettévágnak. Vajon befér-e egy fiókba a kisebbik levágott test (valamelyik lapjára állítva), ha a fiók téglatest alakú, vízszintes méretei 40 cm és 60 cm, magassága pedig 12 cm?

Megoldás:

Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatestből levágott test az $AB'D'A'$ tetraéder. A tetraédernek bármelyik oldallapja lehet az alaplapja, és térfogatát bármelyik oldallap és a hozzá tartozó magasság segítségével kiszámolhatjuk. Ha azt akarjuk megállapítani, hogy a test befér-e a fiókba, akkor a tetraéder legkisebb magasságát kell kiszámolni, ami pedig a legnagyobb területű oldallaphoz tartozik. A tetraéder térfogatát viszont akkor a legegyszerűbb kiszámolni, ha az ábra szerinti felső $B'D'A'$ oldallapot (a fél négyzetet), tekintjük a tetraéder alaplapjának, mert ehhez az oldallaphoz tartozó magassága éppen a négyzetes hasáb AA' magassága, azaz 30 cm.

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{20 \cdot 20}{2} \cdot 30}{3} = 2000 \text{ cm}^3.$$

A legnagyobb oldallap (az $AB'D'\triangle$) olyan egyenlő szárú háromszög, melynek oldalai $\sqrt{400} \approx 28,28$, illetve $\sqrt{1300} \approx 36,06$, és területe (pl. a Héron-képlet alapján) $T \approx 469 \text{ cm}^2$.

Mivel $V = \frac{T \cdot m}{3}$, ezért $2000 = \frac{469 \cdot m}{3}$, és ebből $m \approx 12,8 \text{ cm}$. Mivel a legkisebb magasság is nagyobb, mint 12 cm, ezért a test nem fér bele a fiókba.

ELMÉLET

Ötletek hosszúságok és szögek meghatározásához

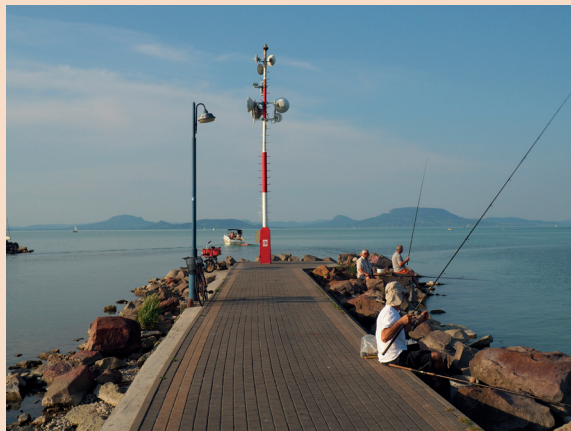
Ötlet, megoldási módszer	A számítások során alkalmazható tételek, képletek
Keress derékszögű háromszöget!	▶ Pitagorasz-tétel, hegyesszögek szögfüggvényei
Keress olyan általános háromszöget, amelyben három adat ismert!	▶ szinusztétel, koszinusztétel
Írd fel többféle módon egy háromszög területét!	▶ a különféle módon felírt területek egyenlők
Alkalmazd a hasonlóságot!	▶ a megfelelő oldalhosszak aránya egyenlő



- 1. E1** Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 8 cm. Helyezzük el az $ABCD$ négyzet síkjában úgy az 5 cm oldalhosszúságú $A'B'C'D'$ négyzetet, hogy
- A' csúcsa egybeessen az A csúccsal, és mindkét négyzetnek legyen szimmetriatengelye az AC átló egyenese;
 - illeszkedjen az A' és B' csúcs az AB oldalra ($AA'B'B$ sorrendben elhelyezkedve), és legyen a négyzeteknek közös szimmetriatengelye;
 - legyenek párhuzamosak a négyzetek – betűzés szerinti – megfelelő oldalai, és essen egybe a két négyzet szimmetria-középpontja;
 - essen egybe a két négyzet szimmetria-középpontja és átlóik 45° -os szöget zárjanak be egymással, valamint a $C'D$ háromszög ne fedjen le közös területet az $A'B'C'D'$ négyzettel!

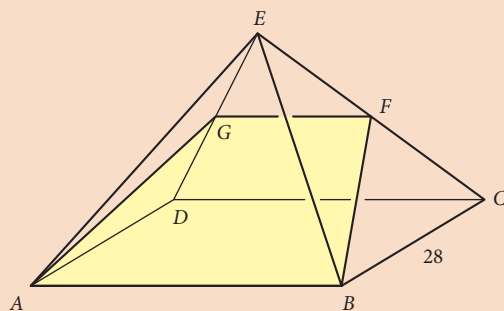
Határozd meg a mindegyik esetben a CC' távolságot!

- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2019)
A Balaton szélessége Balatonvilágos és Balatonalmádi között a legnagyobb, kb. 12,7 km. Legalább hány méterrel kell a vízfelszín fölé emelkednie a balatonvilágosi kikötőben elhelyezett jelzőoszlopnak ahhoz, hogy az oszlop tetején rögzített viharjelző készülék fényjelzése – a Föld görbületét is figyelembe véve – látható legyen a balatonalmádi strandon fürdőzők számára is? (A Földet tekintsük egy 6370 km sugarú gömbnek.)



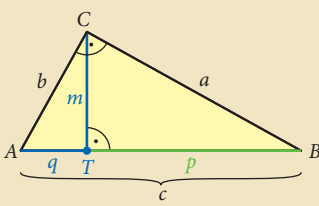
- 3. E2** Négy darab 6 cm sugarú golyót úgy helyezünk el egy asztallapon, hogy a golyók középpontjai egy négyzet csúcsai. A szomszédos golyók érintik egymást. Mekkora annak a kisebb golyónak a sugara, amely befér a négy golyó és az asztallap közé úgy, hogy érinti mind a négy golyót és az asztallapot is?
- 4. E1** Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ szabályos nyolcszög köré írható körének átmérője 24 egység. Mekkora az $A_1A_6A_7$ síkidom területe?

- 5. E2** (Emelt szintű érettségi, 2014)
Vízszintes, sík terepen futó patak túlsópartján álló fa magasságát kell meghatároznunk. A síkra merőlegesen álló fát megközelíteni nem tudjuk, de van egy kis méretű, digitális műszerünk, amellyel szöget és távolságot is pontosan tudunk mérni. A patakparton kitűzzük az A és B pontokat, amelyek 10 méterre vannak egymástól. Az A pontból 55° -os, a B -ből 60° -os emelkedési szög alatt látszik a fa teteje. Szögméréssel még megállapítjuk, hogy $ATB \sphericalangle = 90^\circ$, ahol T a fa „talppontja”. Milyen magas a fa?
- 6. E2** Egy tetőtérben lévő helyiség olyan szabályos négyoldalú gúla, amelynek alaplapja az $ABCD$ négyzet, ötödik csúcsa pedig az E pont. A B csúcsból indul egy pók, és úgy mászik végig a BCE oldalfalon, hogy az EC élre merőlegesen halad nyílegyenesen, és az EC él P pontjába érkezik. A P pontból továbbindul a CED oldalfalon, ahol ugyancsak egyenesen halad az ED élre merőlegesen, és az ED él Q pontjába érkezik. Ezt követően a Q pontból függőlegesen ereszkedik le a talajra, és ott az R pontba érkezik.
- Mekkora utat tett meg összesen, míg a B pontból az R -be érkezett, ha a helyiség alapéle 10 méter, oldaléle 13 méter hosszú?
 - Mennyi idő alatt tette meg az utat, ha a falon 50 centimétert, a levegőben ereszkedéskor 30 centimétert tesz meg másodpercenként?
 - Mennyivel lenne rövidebb a mozgási ideje, ha a B pontból közvetlenül az R pontba haladna a leg-rövidebb úton?
- 7. E2*** (Emelt szintű érettségi, 2008)
Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnek, G pedig a DE oldalélnek a felezőpontja. Az $ABFG$ négyszög területe 504 terület-egység. Milyen hosszú a gúla oldaléle?



(D = definíció T = tétel M = módszer)

D	Geometriai transzformáció	Kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelynek értelmezési tartománya is, értékkészlete is ugyanaz a ponthalmaz.
D	Egybevágósági transzformáció	Távolságtartó transzformáció; vagyis olyan transzformáció, amely esetén bármely két pont távolsága egyenlő a képek távolságával.
	Egybevágósági transzformációk a síkban	Tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó tükrözés, pont körüli elforgatás, eltolás, valamint ezek egymás utáni elvégzése.
	Egybevágósági transzformációk a térben	Tengely körüli forgatás, középpontos tükrözés térben, síkra tükrözés, tengelyes tükrözés térben, eltolás, továbbá ezek egymás utáni elvégzése.
D	Két alakzat egybevágó	Van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.
T	Háromszögek egybevágóságának alapesetei	▶ egy-egy oldal hossza és az ezeken fekvő két szög nagysága egyenlő; ▶ két-két oldal hossza és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő; ▶ a három oldal hossza páronként egyenlő; ▶ két-két oldal hossza és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő.
T	Párhuzamos szelők tétele	Ha egy szög két szárát párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával.
T	A párhuzamos szelők tétele speciális esetének megfordítása	Ha két egyenes egy szög száraiból a szög csúcsától mérve olyan szakaszokat metsz ki, hogy a megfelelő szakaszok hosszának aránya egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.
T	Párhuzamos szelőszakaszok tétele	Ha egy szög szárait két párhuzamos egyenessel metsszük, akkor a szög-szárok által a párhuzamos metsző egyenesekből kimetszett szelőszakaszok hosszának aránya egyenlő a száron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával.
D	Hasonlósági transzformáció	Aránytartó geometriai transzformáció, vagyis olyan transzformáció, amely esetén bármely két pont távolságának és a képek távolságának aránya állandó.
T	Hasonlósági transzformáció	Minden hasonlósági transzformáció egy középpontos hasonlóság és egy egybevágóság egymásutánja.
D	Hasonló síkidomok	Két síkidom hasonló, ha hasonlósági transzformációval egymásba vihető.
T	Háromszögek hasonlóságának alapesetei	▶ két-két szög nagysága egyenlő; ▶ két-két megfelelő oldal hosszának aránya és az általuk közbezárt szög nagysága egyenlő; ▶ a három oldal hosszának aránya páronként egyenlő; ▶ két-két megfelelő oldal hosszának aránya és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög nagysága egyenlő.
T	Szögfelezőtétel	A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a megfelelő szomszédos oldalak hosszának arányában osztja két részre.

T	Pitagorasz-tétel	Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogói hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.
T	A Pitagorasz-tétel megfordítása	Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.
T	Thalész-tétel	A kör átmérője a körvonal bármely pontjából – kivéve az átmérő két végpontjából – derékszög alatt látszik.
T	A Thalész-tétel megfordítása	Ha az AB szakasz egy C pontból derékszögben látszik, akkor a C pont rajta van az AB átmérőjű körön.
T	Magasságtétel, befogótétel	Az ábra jelöléseit használva: Magasságtétel: $m = \sqrt{pq}$ Befogótétel: $a = \sqrt{pc}$, $b = \sqrt{qc}$. 
T	A háromszög területképletei (a szögek és oldalak szokásos jelöléseivel)	$T = a \cdot \frac{m_a}{2}$, ahol m_a az a oldalhoz tartozó magasság $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}$ $T = r \cdot \frac{K}{2}$, ahol r a beírt kör sugara, K a háromszög kerülete $T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, ahol $s = \frac{K}{2}$ (Hérón-képlet)
T	A speciális négyszögek területképletei (az oldalak és az átlók szokásos jelöléseivel)	paralelogramma: $T = a \cdot m_a$ $T = a \cdot b \cdot \sin \alpha$ trapéz: $T = \frac{(a+c) \cdot m}{2}$ deltoid: $T = \frac{e \cdot f}{2}$
T	Kör érintője, sugár	A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
T	Érintőszakaszok hossza	A körhöz adott külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.
T	Egymást érintő körök	Ha két kör érinti egymást, akkor az érintési pontjuk illeszkedik a körök középpontjait összekötő egyenesre (az ún. centrálisra).
D	Középponti szög	Olyan szög, amelynek csúcsa a kör középpontja, két szára pedig a kör két sugarára illeszkedő félegyenes.
T	Középponti szög és ív kapcsolata	Adott körben a középponti szögek nagysága és az ezekhez tartozó ívek hossza között egyenes arányosság van.
T	Középponti szög és körcikk területének kapcsolata	Adott körben a középponti szögek nagysága és az ezekhez tartozó körcikk területének nagysága között egyenes arányosság van.
D	Kerületi szög	Olyan konvex szög, amelynek csúcsa a körvonal egyik pontja, és a két szára a kör egy-egy húrjára illeszkedik.
D	Érintőszárú kerületi szög	Olyan konvex szög, amelynek egyik szára a kör egy húrja (vagy húrjának félegyenes), másik szára a húr egyik végpontjába állított érintő félegyenes.
T	Kerületi és középponti szögek tétele	Egy körben egy adott ívhez tartozó kerületi szög feleakkora, mint az ugyan-ezen ívhez tartozó középponti szög.

T	A kerületi és középponti szögek tételének következménye	Egy körben az egyenlő hosszúságú körívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.
D	Látókörív	Ha adott egy AB szakasz és egy α szög ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), akkor azon pontok halmaza a síkon, amelyekből az AB szakasz α szögben látszik, két körívnek a pontjai, kivéve az AB szakasz végpontjai.
D	Húrnégyszög	Azt a négyszöget, amelyhez létezik olyan kör, amelyre mind a négy csúcsa illeszkedik (azaz van köré írható köre), húrnégyszögnek nevezzük.
T	Húrnégyszögek tétele	Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor a szemben fekvő szögeinek összege 180° .
T	A húrnégyszögek tételének megfordítása	Ha egy négyszög szemben fekvő szögeinek összege 180° , akkor a négyszög húrnégyszög.
D	Érintőnéyszög	Azt a négyszöget, amelyhez létezik olyan kör, amelyet mind a négy oldala érint (azaz van beírható köre), érintőnéyszögnek nevezzük.
T	Érintőnéyszögek tétele	Ha egy négyszög érintőnéyszög, akkor a szemben fekvő oldalai hosszának összege egyenlő.
T	Konvex négyszög mikor érintőnéyszög	Ha egy konvex négyszög szemben fekvő oldalai hosszának összege egyenlő, akkor a négyszög érintőnéyszög.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. E1 Az ABC háromszög AB oldalának hossza 12 cm, BC oldalának hossza 17 cm, a C csúcsnál lévő szöge 40° nagyságú.

- Mekkora a háromszög területe?
- Mekkora lehet a háromszög kerülete?

2. E1 Az ABC háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölésekkel $a = 6$ cm, $b = 8$ cm és $c = 9$ cm. Milyen arányban osztja ketté a háromszög területét

- az B csúcsból induló súlyvonal;
- a c oldalhoz tartozó magasságvonal;
- az A csúcsból húzott belső szögfelező?

3. E1 Egy húrtrapéz alapjai 3 cm és 7 cm hosszúak. A trapéz magassága 8 cm. Milyen távol van a szárak egyenesének metszéspontja

- a rövidebb alap egyenesétől;
- az átlók metszéspontjától?

4. E1 Egy trapézt a két átlója 4 háromszögre bontja, melyek közül az alapokra illeszkedő háromszögek területe 8 cm^2 és 18 cm^2 . A trapéz magassága 5 cm.

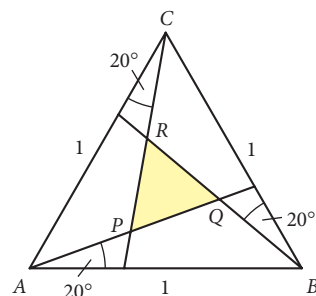
- Milyen hosszúak a trapéz alapjai?
- Mekkora a szárakra illeszkedő háromszögek területe?

5. E2 Egy trapéz alapjai 7 cm és 16 cm hosszúak, a trapéz magassága 6 cm.

- Milyen arányban osztja ketté a trapéz területét az az alapokkal párhuzamos egyenes, amely 2 cm távol van a hosszabbik alap egyenesétől?
- Milyen távol van a hosszabbik alap egyenesétől az az alapokkal párhuzamos egyenes, amely felezi a trapéz területét?

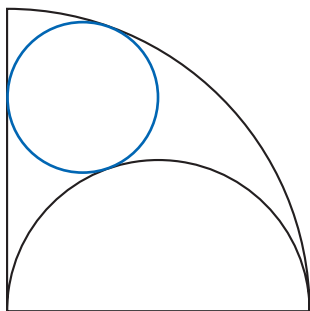
6. E2 (Emelt szintű érettség, 2017)

Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható PQR szabályos háromszöget kaptuk. Számítsd ki a PQR háromszög oldalának hosszát!

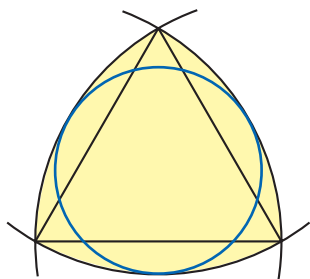


7. E1 Egy derékszögű háromszög átfogóját a derékszögű csúcsból húzott magassága $2 : 5$ arányban osztja. Milyen arányban osztja ketté a háromszög területét a derékszögű csúcsból húzott belső szögfelező?

- 8. E1** Egy 10 cm sugarú negyedkört egyik határoló sugarára félkört rajzoltunk az ábra szerint. Mekkora az ábrán látható kör sugara, amely érinti a félkörívet, a negyedkörívet és a köríket egyik határoló sugarát?



- 9. E1** Egy 12 cm sugarú szabályos háromszög mindegyik csúcsából 12 cm sugarú kört rajzolunk. A három körlemez közös része az ábra szerinti ún. Reuleaux-háromszög. (Ilyen alakú fúrófejet használnak a négyzetes furat készítéséhez.) Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti a Reuleaux-háromszög mindhárom határoló ívét?



- 10. E2** (Emelt szintű érettségi, 2022)

A társasház kertje egy 15 méter hosszú, 10 méter széles téglalap alakú földterület, amely az egyik átlója mentén ketté van osztva: az egyik fele füvesítve van, a másik felén virágágyás található. A füvesített rész derékszögű csúcsában van egy öntöző, amely egy 10 méter sugarú negyedkör alakú területet locsol a kertben. Mekkora az a füvesített terület, amelyet nem ér el az öntöző?

- 11. E1** Egy 14 cm sugarú körlepből kivágunk egy 200° -os középponti szögű köríket, majd ebből egy forgáskúpot formázunk. Mekkora a forgáskúp térfogata?

- 12. E1** Egy egyenes körkúp kiterített palástjának a területe t . A kiterített palást középponti szöge 120° . Mekkora a kúp térfogata? (Pontos értékekkel számold!)

- 13. E1** Két, egymást metsző kör közös AB húrjának hossza 9 cm. Az AB húr az egyik kör végtelen sok pontjából 30° -os szögben, a másik kör végtelen sok pontjaiból 60° -os szögben látszik. Milyen távol lehet egymástól a két kör középpontja?

- 14. E1** (Emelt szintű érettségi, 2020)
Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója 6 cm hosszú. Határozd meg a tízszög oldalának hosszát!

- 15. E1** (Emelt szintű érettségi, 2020)
Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 20$, $BC = 18$, valamint $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle CAD = 50^\circ$. Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

- 16. E1** Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 20 cm hosszú, palástjának területe hatszorosa az egyik alaplapp területének. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? Határozd meg a hasárból kifaragható maximális térfogatú henger felszínét, ha a henger alaplappja a hasáb alaplappjára illeszkedik!

- 17. E2** Egy forgáskúp alakú kupolában két pontszerű fényforrást helyeznek el. Az egyik lámpa a kúp beírható, míg a másik a kúp köré írható gömbjének középpontjába kerül. Határozd meg a két fényforrás távolságát, ha ismert, hogy a kupola alapkörének átmérője 8 méter, a kupola magassága 5 méter! Válaszod méterben, két tizedesjegy pontossággal add meg!

- 18. E1** Egy étteremben a nap végén megmaradt tíz darab 1 cm sugarú, és két darab 3 centiméter sugarú túrógombóc gyártásához elegendő mennyiségű massa. A humoros szakács úgy dönt, hogy a személyzetnek készít ebből az anyagból egyetlen nagy gombócot. (A gombócok mindegyike gömb alakú.)

a) Mekkora lesz az így kapott gombóc sugara?

b) Hányszorosa lesz az elkészített gombóc befedéséhez szükséges prézli mennyisége az eredetileg eltervezett gombócokéhoz képest?

- 19. E1** Egy gúla alaplappja szabályos háromszög, oldallapjai olyan egyenlő szárú, egymással egybevágó háromszögek, amelyeknek a területe az alaplapp területének a kétharmadszorosa. Mekkora az oldallapoknak az alaplappal bezárt szöge?

- 20. E1** (Emelt szintű érettségi, 2007)

A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága. Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól?

- 21. E2** (Emelt szintű érettségi, 2012)

Egy forgáskúp nyílásszöge 90° , magassága 6 cm.

a) Számítsd ki a kúp térfogatát és felszínét!

b) A kúp alaplappjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata, ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján?



halmazműveletek, részhalmazok száma



de Morgan-azonosságok

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy négyfős kertészeti vállalkozás egyik tagja megállapította, hogy az elmúlt hónapban úgy osztották ki egymás között a feladatokat, hogy nem volt két olyan feladat, amelyen ugyanaz a csapat dolgozott, és bármely két feladat esetén volt négyük között olyan ember, aki mindkét feladatban részt vállalt. (Lehetett olyan feladat, amit egyedül végzett el valaki, de lehetett olyan is, amelyben mindannyian részt vállaltak.)

Legfeljebb hány feladatot végeztek el az elmúlt hónapban?

Megoldás:

A négy ember közül $2^4 = 16$ -féleképpen választhatunk ki egy csoportot – ebben benne van az az eset is, amikor mindnyájan benne vannak a csoportban, és benne van az is, amikor egyikük sem. Ez a 16 csoport 8 párba állítható úgy, hogy minden csoport párja az a csoport, amelyet a kimaradó emberek alkotnak. A négy embert négy betűvel jelölve, például az ABC csoport párja a D. A párt alkotó csoportok olyanok, hogy a két csoportban nincs közös ember, így ezen két csoport közül csak az egyik fordulhatott elő az elmúlt hónapban mint az egyik feladatot végző team. Ezért 8-nál több feladatot nem végeztek el.

Lehetséges-e, hogy pontosan 8 feladatot végeztek el? Egy ilyen lehetőség például, hogy A, AB, AC, AD, ABC, ABD, ACD, ABCD csoportokban végezték a feladatokat. Ezért a válasz az, hogy legfeljebb 8 feladatot végeztek el.

Fogalmazzuk meg a feladatot a halmazelmélet kifejezéseivel! Egy H halmaz négy eleme megfeleltethető a vállalkozás négy tagjának. Minden munkához a H halmaz valamely részhalmaza tartozik. A feladatban azt kell meghatározni, hogy hány részhalmaz választható ki egy négyelemű halmazban úgy, hogy bármely két részhalmaznak van közös eleme. Másként megfogalmazva: semelyik két részhalmaz nem **diszjunkt**. (Emlékeztető: két halmaz diszjunkt, ha nincs közös elemük.) Egy négyelemű halmazból tehát legfeljebb 8 részhalmaz választható ki úgy, hogy semelyik kettő nem diszjunkt.



FELADATOK

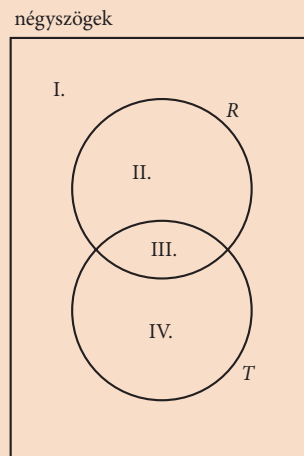
1. **E1** Egy iskolai évfolyam tanulói között kétszer annyian vannak, akik bevallásuk szerint szeretik a rapzenét, mint akik szeretik a dzsesszt. 22-en mindkét műfajt, és 71-en legalább az egyik műfajt szeretik az előbbiekből. Hányan vannak, akik szeretik a dzsesszt, de nem szeretik a rapet?
2. **E1** Adj meg az elemei felsorolásával három olyan halmazt, amelyekre egyszerre teljesülnek a következő kijelentések és a halmazok elemszámának összege a lehető legkisebb:
 - semelyik kettő nem diszjunkt;
 - a három halmaz metszete az üres halmaz;
 - a halmazok elemszáma egyenlő;
 - mindhárom halmaz elemszáma osztható 3-mal.
3. **E1** A pozitív egyjegyű egész számok halmazának hány olyan részhalmaza van, amely
 - a) részhalmaza a $\{3; 4; 5; 6\}$ halmaznak;
 - b) diszjunkt a $\{3; 4; 5; 6\}$ halmazzal;
 - c) háromelemű, és egyik eleme az 1?
4. **E1** Hányféleképpen adhatók meg az A és B halmazok, ha $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ és $A \cap B = \{4; 5\}$?
5. **E1** Egy 12 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely

a) legalább 11 elemű;	c) páros elemszámú;
b) legalább 3 elemű;	d) páratlan elemszámú?

6. E2 Egy iskolában két nyári táborra lehetett jelentkezni. Sporttáborba pontosan másfélszer annyian jelentkeztek, mint vándortáborba. A vándortáborba jelentkezők pontosan háromnegyede a sporttáborba is jelentkezett. Hányan jelentkezhetek az egyes táborokba, ha azok száma, akik legalább az egyik táborba jelentkeztek, több, mint 30 és kevesebb, mint 50?

7. E1 A Venn-diagramon R a rombuszok, T a téglalapok halmaza, az alaphalmaz pedig a négyszögek halmaza. Határozd meg, hogyan lehet R és T , valamint halmazműveletek segítségével felírni a táblázatban megadott négyszögek halmazát! Add meg azt is, hogy a Venn-diagram melyik tartományai tartoznak az adott részhalmazhoz!

Négyszögek jellemzője	Részhalmaz megadása halmazműveletekkel	Venn-diagramon a tartományok sorszáma
nem rombuszok és nem téglalapok	$\overline{R \cap T}$	I.
nem rombuszok vagy nem téglalapok		
nem teljesül, hogy rombuszok vagy téglalapok		
nem négyzetek		
négyzetek vagy nem rombuszok		



Melyek egyenlők a táblázatban felírt részhalmazok közül?

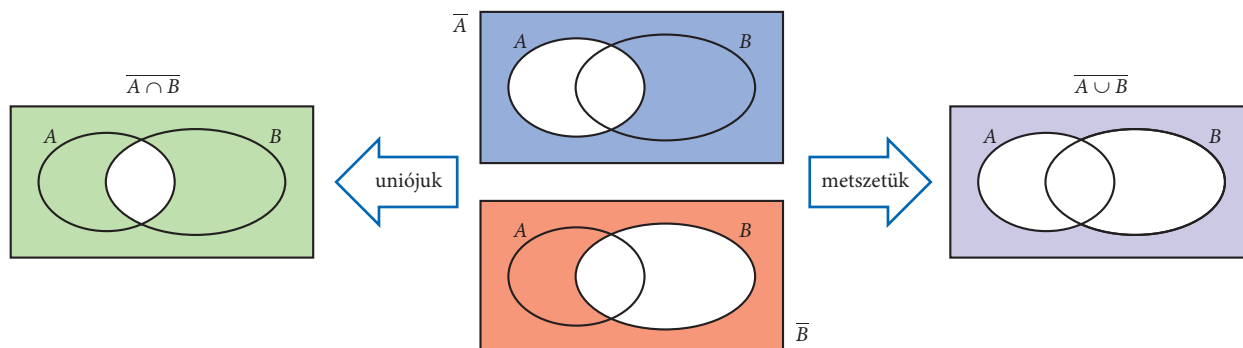
8. E2 Adott az A és a B halmaz. A felsorolt halmazok közül válaszd ki azokat, amelyek egyenlők!

$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A \cup B}$
$\overline{A \cap B}$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{\overline{A \cap B}}$	$\overline{\overline{A \cup B}}$

ELMÉLET

Tétel: de Morgan-azonosságok

Minden A és B halmaz esetében teljesül, hogy $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.



A Venn-diagramon megfigyelhető, hogy két halmaz metszetének komplementere ugyanazokat a tartományokat fedi le, mint a halmazok komplementereinek uniója. Hasonló módon: két halmaz uniójának komplementere ugyanazokat a tartományokat fedi le, mint a halmazok komplementereinek metszete. Ezeket a kapcsolatokat írják le a de Morgan-azonosságok.



szitaformula

KIDOLGOZOTT FELADAT

Hány olyan pozitív háromjegyű szám van, amely a 10, 12, 16 számok közül legalább az egyikkel osztható?

Megoldás:

A 16-tal osztható pozitív háromjegyű számok összeszámolását megtehetjük úgy, hogy megkeressük a legnagyobb ilyen számot (ez a $992 = 62 \cdot 16$) és a legkisebb ilyen számot (ez a $112 = 7 \cdot 16$). Ez azt jelenti, hogy 62 darab 992-nél nem nagyobb pozitív egész szám osztható 16-tal, de közülük $7 - 1 = 6$ darab még nem háromjegyű. Vagyis a megfelelő számok száma $62 - 6 = 56$.

A pozitív háromjegyű számok halmazán (H) belül jelöljük A -val a 10-zel oszthatók, B -vel a 12-vel oszthatók, C -vel a 16-tal oszthatók halmazát! A pozitív háromjegyű számok között:

a 10-zel oszthatók száma 90

$$\triangleright |A| = 90$$

a 12-vel oszthatók közül a legkisebb a $108 = 9 \cdot 12$, a legnagyobb a $996 = 83 \cdot 12$

$$\triangleright |B| = 83 - 8 = 75$$

a 16-tal oszthatók közül a legkisebb a $112 = 7 \cdot 16$, a legnagyobb a $992 = 62 \cdot 16$

$$\triangleright |C| = 62 - 6 = 56$$

10-zel és 12-vel azok a számok oszthatók, melyek oszthatók 10 és 12 legkisebb közös többszörösével, azaz 60-nal.

a 60-nal oszthatók közül a legkisebb a $120 = 2 \cdot 60$, a legnagyobb a $960 = 16 \cdot 60$

$$\triangleright |A \cap B| = 16 - 1 = 15$$

10-zel és 16-tal azok a számok oszthatók, melyek oszthatók 10 és 16 legkisebb közös többszörösével, azaz 80-nal.

a 80-nal oszthatók közül a legkisebb a $160 = 2 \cdot 80$, a legnagyobb a $960 = 12 \cdot 80$

$$\triangleright |A \cap C| = 11$$

12-vel és 16-tal azok a számok oszthatók, melyek oszthatók 12 és 16 legkisebb közös többszörösével, azaz 48-cal.

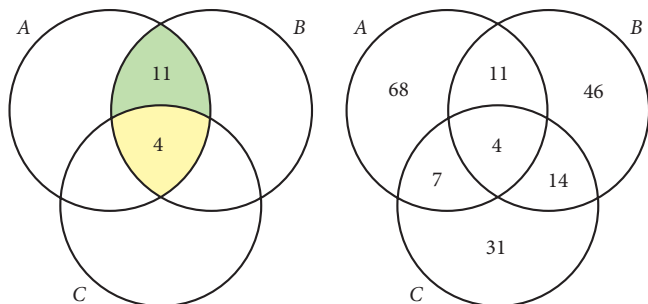
a 48-cal oszthatók közül a legkisebb a $144 = 3 \cdot 48$, a legnagyobb a $960 = 20 \cdot 48$

$$\triangleright |B \cap C| = 20 - 2 = 18$$

10-zel, 12-vel és 16-tal azok oszthatók, melyek oszthatók 10, 12 és 16 legkisebb közös többszörösével, azaz 240-nel.

a 240-nel osztható háromjegyű számok a 240, 480, 720, 960

$$\triangleright |A \cap B \cap C| = 4$$



1. módszer: Készítsünk Venn-diagramot, majd az ábrába írjuk bele az egyes tartományok számosságát, „belülről kifelé” haladva. Az $A \cap B \cap C$ halmaz számossága 4, ez kerül a sárga színű tartományba. Az $A \cap B$ számossága 15, ezért a zöld tartományban $15 - 4 = 11$ elem van. Hasonló módon végiggondolható mindegyik tartomány számossága.

A megfelelő számok összege adja a kért számok számát.

$$|A \cup B \cup C| = 4 + 7 + 14 + 11 + 31 + 46 + 68 = 181$$

2. módszer: Alkalmazzuk a szitaformulát:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 90 + 75 + 56 - 15 - 11 - 18 + 4 = 181$$

Tehát a kért számokból 181 darab van.

Megjegyzés: Számossághoz kapcsolódó feladatban ellenőrzésképpen mindig készíts Venn-diagramot, és írd be az egyes tartományok számosságát az ábrába. Megadhatók olyan kiindulási adatok, amelyek esetén valamelyik tartományba negatív szám kerülne, és ekkor a feladatnak nincs megoldása.

1. E1 Hány olyan pozitív négyjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 12 és a 35 számok közül legalább az egyikkel osztható?

2. E1 Az A , B és C halmazokról ismert, hogy $|A| = 8$, $|B| = 10$, $|C| = 13$, valamint $|A \cap B \cap C| = 4$.

a) Mennyi lehet az $|A \cup B \cup C|$ legnagyobb értéke? Adj meg egy ehhez tartozó Venn-diagramot az egyes tartományok elemszámaival!

b) Mennyi lehet az $|A \cup B \cup C|$ legkisebb értéke? Adj meg egy ehhez tartozó Venn-diagramot az egyes tartományok elemszámaival!

3. E1 Egy középiskolás diák nyári munkán a 3Íz fagyizóban vállalt munkát, ahol mindennap pontosan 3-féle fagyiból választhattak a vendégek. Az egyik napon összeszámolta, hogy csokifagyiból a vendégek 75 százaléka, vaníliából 60 százaléka választott, míg eperfagyit az összes vendég 80 százaléka kért. Így 45 vendég mindhárom ízűből, az összes többi két ízűből vásárolt. Hány vásárlója volt aznap a fagyizóknak?

4. E1 Egy kertbarátkör éves taggyűlésén a titkár az alábbi módon számolt be a tagság virágtermesztési szokásairól: „Az idén 40 főre bővült a virágot ültetők száma. Mindenki termeszt a következő virágok valamelyikét: rózsát, tulipánt és levendulát. 26-an termesztnek rózsát, 16-an tulipánt és 27-en levendulát. 12-en vannak, akik rózsát és tulipánt is, 14-en, akik tulipánt és levendulát is, 11-en, akik levendulát és rózsát is tartanak.”

a) Igazold, hogy a statisztika hibás, és nem állhatnak fenn ezek az adatok egyszerre!

b) Kiderült, hogy az egyik adatot rosszul másolták át a beszámolóba. A levendulát és rózsát termesztők száma nem 11 volt, hanem 14. Hány tag kertjében terem mindhárom növényt?



5. E1 Egy ifjúsági könyvtár látogatóinak 80%-a olvasta a Harry Potter-könyveket, 70%-a olvasta a Gyűrűk ura-sorozatot, és 60%-a olvasta a Szent Johanna Gimi könyveket. A könyvtár látogatóinak legalább hány %-a olvasta mindhárom sorozatot?

6. E1 (Emelt szintű érettségi, 2009)

A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresetneve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen. A család tagjairól tudjuk:

- csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;
- egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;
- Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani, sikertelenül.

Legalább hány tagja van a Kovács családnak?

7. E1 Legyen H a négyjegyű PIN-kódok halmaza. Az A halmaz elemei legyenek ezek közül azok a PIN-kódok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.

Hány eleme van a $C \setminus (A \cap B)$ halmaznak?

8. E1 (Emelt szintű érettségi, 2005)

Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálhatnak vegetáriánus menüt?

9. E2 Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely

a) osztható 12-vel vagy 15-tel;

b) nem osztható 20-szal;

c) 12-vel vagy 15-tel osztható, vagy nem osztható 20-szal?

10. E2 Három házaspár érkezik a moziba, és úgy foglalnak helyet hat egymás melletti széken, hogy senki sem ül a házastársa mellé. Hányféle sorrendben ülhetek le?



megszámlálhatóan végtelen halmaz, adott műveletre zárt halmaz

BEVEZETŐ



David Hilbert, német matematikus nevéhez fűződik a híres Grand Hotel-paradoxon. Egy valódi szállodában, ha minden szobát kiadtak, akkor az újonnan érkező vendégeknek nem tudnak szobát biztosítani. A paradoxonban szereplő szállodában azonban nem így van.

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek végtelen sok szobája van. A szobák számozása 1-től indul és sorban egyesével nő, így minden pozitív egész számhoz tartozik egy szoba. Tegyük fel, hogy a szálloda tele van, azaz minden szobában lakik egy vendég. Ha ekkor érkezik újabb 2 vendég, akkor megtehetjük azt, hogy minden eddigi lakónak azt mondjuk, hogy költözzön abba a szobába, amelynek a szobaszáma 2-vel nagyobb, mint a mostani szobaszáma. Így az első két szoba felszabadul az új vendégeknek, és ugyanakkor minden eddigi vendégnek is jut szoba.

Ezzel az eljárással egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést adtunk meg az $\{1; 2; 3; 4; \dots\}$ halmaz elemei és az $\{a; b; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ halmaz elemei között. Ez azért is érdekes, mert az első halmaz részhalmaza a második halmaznak. Végtelen halmazok esetén akkor mondjuk, hogy két halmaz számossága egyenlő, ha megadható a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés.

A Grand Hotel-paradoxonhoz számos további érdekes feladvány és megállapítás tartozik. Nézz utána az interneten!

ELMÉLET

1. Megszámlálhatóan végtelen halmazok

Két véges halmaz számossága egyenlő, ha elemeik száma egyenlő. Vajon össze lehet-e hasonlítani a végtelen halmazok számosságát? Vajon mondhatjuk-e, hogy egy végtelen halmaz számossága nagyobb, mint egy másiké?

Ha két véges halmaz számossága egyenlő, akkor az elemeik „párba állíthatók”, azaz létezik közöttük kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés. Ezt a tulajdonságot végtelen halmazok között is meg lehet vizsgálni. Ha két végtelen halmaz elemei között létezik kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz számossága egyenlő.

Megadható például kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a természetes számok halmazának és a pozitív egész számok halmazának elemei között. Egy ilyen hozzárendelés, ha $\mathbb{N}$ elemeihez az 1-gyel nagyobb számot rendeljük $\mathbb{Z}^+$ -ból, ahogy a táblázat mutatja.

$\mathbb{N}$ elemei	0	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{Z}^+$ elemei	1	2	3	4	5	6	...

Meglepőnek tűnhet, de megadható kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a természetes számok halmazának és az egész számok halmazának elemei között is. $\mathbb{Z}$ elemeinek egy lehetséges sorba rendezése: $0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \dots$. Ezen felsorolás segítségével megadhatunk egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ elemei között, ahogy a táblázat mutatja.

$\mathbb{N}$ elemei	0	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{Z}$ elemei	0	1	-1	2	-2	3	...

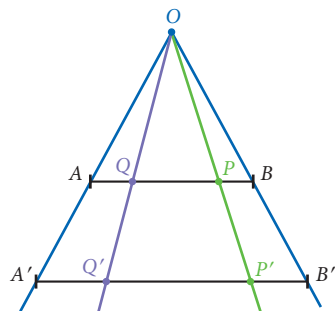
A természetes számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük. Azok a halmazok megszámlálhatóan végtelen számosságúak, amelyek esetén megadható egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a halmaz elemei és a természetes számok között (tehát a halmaz elemeinek létezik sorba rendezése). Ez megtehető például egy hozzárendelési szabállyal (pl. $n \mapsto n + 1$).

Megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok például a négyzetszámok halmaza, a 3-mal osztható természetes számok halmaza, az egész számok halmaza, a racionális számok halmaza. Nézz utána az interneten, hogy milyen eljárással lehet a racionális számok egy felsorolását létrehozni!

Vannak olyan végtelen halmazok, amelyek számossága nem megszámlálhatóan végtelen. Ilyen halmazok például:

- ▶ a valós számok halmaza,
- ▶ a valós számokon megadott intervallumok (pl. $[a; b]$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$),
- ▶ egy szakasz pontjainak halmaza,
- ▶ egy egyenes pontjainak halmaza.

Az ábra két különböző hosszúságú szakasz pontjai között ad meg egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Így igazolható, hogy a két szakasz pontjainak halmaza egyenlő számosságú.



2. Adott műveletre zárt halmaz

Egy H halmaz zárt egy adott műveletre, ha a H halmaz bármely elemei esetén a művelet eredménye is eleme H -nak.

Például:

A természetes számok halmaza zárt az összeadás műveletére nézve. Azaz minden $a, b \in \mathbb{N}$ esetén $a + b \in \mathbb{N}$.

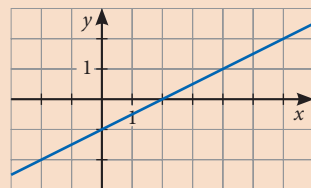
A természetes számok halmaza nem zárt a kivonás műveletére, mert meg tudunk adni két természetes számot, melyek különbsége nem természetes szám. Például $8 \in \mathbb{N}$ és $10 \in \mathbb{N}$, de $8 - 10 = -2 \notin \mathbb{N}$.

FELADATOK

- 1. E1** A következő táblázat egy-egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést ad meg a természetes számok, illetve **a)** esetben a pozitív páros számok, **b)** esetben az egész számok halmaza között. Határozd meg a hozzárendelés szabályát, majd töltsd ki a táblázat üres celláit!

$\mathbb{N}$ (természetes számok halmaza)	0	1	2	3	4	5	...	10	...		...	n
a) pozitív páros számok halmaza	2	4	6	8	10	12	...		...		...	
b) $\mathbb{Z}$ (egész számok halmaza)	0	1	-1	2	-2	3	...		...	15	...	

- 2. E2** Igazold, hogy a koordináta-rendszer azon rácspontjainak halmaza, amelyek illeszkednek az $y = 0,5x - 1$ egyenesre, megszámlálhatóan végtelen! Adj meg kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést $\mathbb{N}$ és ezen rácspontok halmaza között!



- 3. E1** Állapítsd meg, hogy zárt-e a megadott halmaz az adott műveletre! Ha nem zárt, akkor adj meg ellenpéldát!

Halmaz	Művelet	Zárt vagy nem zárt?	Ha nem zárt, akkor ellenpélda
páros természetes számok halmaza	szorzás		
páros természetes számok halmaza	kivonás		
páratlan természetes számok halmaza	szorzás		
páratlan természetes számok halmaza	összeadás		
négyzetszámok halmaza	szorzás		
racionális számok halmaza	kivonás		
irracionális számok halmaza	összeadás		
irracionális számok halmaza	szorzás		



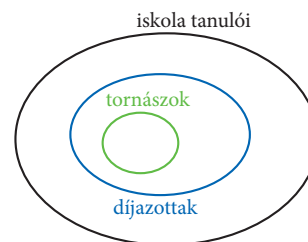
logikai műveletek, tétel és megfordítása



szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel

BEVEZETŐ

Egy iskola a saját diákjai jutalmazására egy alapítványt hoz létre. Az alapítvány kuratóriuma úgy dönt, hogy ebben az évben több más tanuló mellett az országos győzelmet elérő tornászcsapat minden tagját díjazzák. Venn-diagramon ábrázoltuk az iskola tanulóinak, a díjazott tanulóknak és a tornászcsapat tagjainak halmazát.



Csak az lehet díjazott, aki az iskola tanulója,

ez a díjazásnak **szükséges feltétele**.

Ha valaki a győztes tornászcsapat tagja, azt díjazzák,

ez a díjazásnak **elégséges feltétele**.

FELADATOK

- 1. E1** A táblázat első oszlopában szereplő állításokról tudjuk, hogy igazak. Fogalmazz meg szükséges, illetve elégséges feltételeket az állításokhoz kapcsolódóan, és a megadott sorok alapján töltsd ki a táblázat üres celláit!

Ha egy ember magyar állampolgár, akkor európai uniós állampolgár is.	Az, hogy egy ember magyar állampolgár	elégséges feltétele annak, hogy	európai uniós állampolgár is.
Ha egy állat bogár, akkor rovar.		elégséges feltétele annak, hogy	
Ha egy kémiai elem halogén, akkor vízben oldódik.		elégséges feltétele annak, hogy	
Ha egy természetes szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal.		elégséges feltétele annak, hogy	
Ha egy négyszög téglalap, akkor paralelogramma.	Az, hogy egy négyszög paralelogramma,	szükséges feltétele annak, hogy	a négyszög téglalap.
Ha egy deriválható függvénynek x_0 -ban szélsőértéke van, akkor x_0 -ban a derivált értéke 0.		szükséges feltétele annak, hogy	
Ha két háromszög egybevágó, akkor területük egyenlő.		szükséges feltétele annak, hogy	
Ha egy gráf fagráf, akkor nem tartalmaz kört.		szükséges feltétele annak, hogy	

- 2. E1** A táblázat első oszlopában szereplő állításokról tudjuk, hogy igazak. Fogalmazz meg szükséges és elégséges feltételeket az állításokhoz kapcsolódóan!

Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180° .		szükséges és elégséges feltétele annak, hogy	
Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 21-gyel, ha osztható 3-mal és 7-tel.		szükséges és elégséges feltétele annak, hogy	

Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel

Minden „ha ..., akkor ...” típusú állítás (implikáció) megfogalmazható a szükséges feltétel, illetve az elégséges feltétel fogalmak segítségével. Ha az $A \rightarrow B$ állítás igaz, akkor

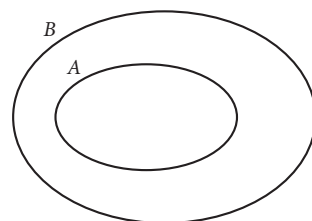
- az A állítás igaz logikai értéke esetén a B állítás is igaz,
- csak a B állítás igaz logikai értéke esetén lehet igaz az A állítás,
- az A állítás **elégséges feltétele** a B állításnak;
- a B állítás **szükséges feltétele** az A állításnak.

Ha egy $A \rightarrow B$ állítás és annak **megfordítása**, a $B \rightarrow A$ állítás is igaz, akkor az A állítás **szükséges és elégséges feltétele** a B állításnak, illetve fordítva: a B állítás szükséges és elégséges feltétele az A állításnak. Ekkor a két állítás ekvivalens.

Megjegyzés:

Segíthet a szükséges és az elégséges feltétel fogalmának megértésében, ha a logikai állítások mellé egy halmazábrát rajzolunk. Az $A \rightarrow B$ állítás megfeleltethető egy olyan Venn-diagramnak, ahol az A halmaz részhalmaza a B halmaznak (minden $x \in A$ esetén $x \in B$).

- ▶ Ahhoz, hogy x eleme legyen az A halmaznak, **szükséges**, hogy x eleme legyen a B halmaznak.
- ▶ Ha tudjuk, hogy $x \in A$, akkor ez már **elég** információ ahhoz, hogy tudjuk, hogy $x \in B$.



FELADATOK

3. **E1** Határozd meg az összetett kijelentések logikai értékét az A és B kijelentések különböző lehetséges logikai értékei esetén, és töltsd ki a táblázatot! Egy oszlopban a négy sor $2^4 = 16$ -féleképpen tölthető ki. Ha helyesen dolgozol, a 16 oszlopban előáll mind a 16 lehetőség.

A	B	$A \vee \neg A$	$A \vee B$	$A \vee \neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge \neg A$	$A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$
i	i										
i	h										
h	i										
h	h										

A	B	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$	$A \wedge A$	$B \vee B$	$\neg A \vee \neg A$	$\neg B \wedge \neg B$
i	i						
i	h						
h	i						
h	h						

4. **E1** Írd fel az $A \rightarrow B$ logikai művelet igazságtáblázatát! A 3. feladat melyik művelete egyezik meg az $A \rightarrow B$ művelettel?

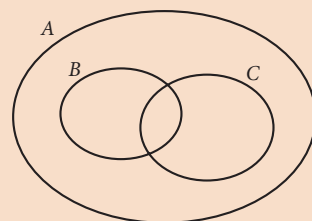
5. **E2** (Emelt szintű érettségi, 2021)

Határozd meg az $(A \vee B) \rightarrow C$ állítás logikai értékét az A , B és C kijelentések különböző lehetséges logikai értékei esetén! Készítsd el az $(A \vee B) \rightarrow C$ állítás igazságtáblázatát!

6. **E1** Venn-diagramon ábrázoltuk, hogy egy bankhoz egy adott hónapban milyen cégek folyamodtak hitelért.

- A = {ennél a banknál vezetik folyószámlájukat}
- B = {az elmúlt évben nyereségesek voltak}
- C = {idén jelentős pályázati támogatást nyertek el}

Azok a cégek kaptak hitelt, melyek elemei a $B \cap C$ halmaznak. Foglalmaz meg állításokat szükséges és elégséges feltételekkel az adott hónapban a bank hitelezési eljárásával kapcsolatban!





néhány konkrét direkt bizonyítás



a direkt bizonyítás elve, módszere

BEVEZETŐ

*Minden ember halandó.
Szókratész ember.*



Szókratész halandó.

Arisztotelész (Kr. e. 384–322) tudományelméleti és logikai írásai egy – filozófiai és tudományos szempontból nagy jelentőségű – négykötetes műben maradtak fenn. A görög tudós a könyv több fejezetében a formális logikát és annak a tudományos kutatásban és bizonyításban való alkalmazását tárgyalta. Az arisztotelészi logika gondolkodási törvényei – mely szerint a logika feladata igaznak tekintett állításokból származtatott igaz következtetések levonása – több mint egy évezreden keresztül általánosan elfogadottak voltak. Tovább lépés csak a XVII. századtól kezdődően, Descartes, Leibniz, majd később Boole, de Morgan és Frege munkásságának köszönhetően következett be.

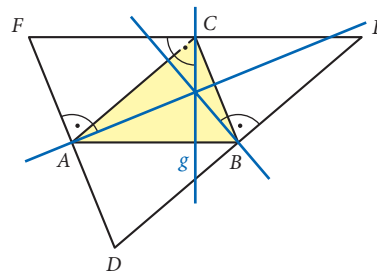


KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást!

Bizonyítás:

Az ABC háromszög csúcsain keresztül húzzunk párhuzamost a szemben lévő oldal egyenessel! A párhuzamosok metszéspontjai legyenek az ábra szerint D , E és F . Az ABC háromszög C csúcsból húzott magasságvonalát jelöljük g -vel.



Az ACF és ABC háromszögekben fennáll az egybevágóság egyik alapesete: egy-egy oldal és az ezeken fekvő két-két szög egyenlő.	▶	$ACF\triangle \cong ABC\triangle$
Az ECB és ABC háromszögekben hasonló módon egy oldal és a rajta fekvő két szög egyenlő.	▶	$ECB\triangle \cong ABC\triangle$
Az egybevágóság miatt $CE = AB$ és $CF = AB$.	▶	$CF = CE$
$EF \parallel AB$, emiatt g nemcsak AB -re merőleges, hanem EF -re is, továbbá a C pont felezőpontja az EF oldalnak.	▶	A g egyenes oldalfelező merőleges a DEF háromszögben.

Hasonló módon belátható, hogy az ABC háromszög másik két magasságvonala is a DEF háromszög oldalfelező merőlegese egyben. Mivel a DEF háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ezért az ABC háromszög magasságvonalai szintén egy pontban metszik egymást.

2. Bizonyítsuk be a négyzetgyökvonás egyik azonosságát, mely szerint $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Bizonyítás:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 & = & (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 & = & a \cdot b & = & (\sqrt{ab})^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{a szorzat hatványára} & & \text{a gyökvonás} & & \text{a gyökvonás} & & \\ \text{vonatkózó} & & \text{definíciója} & & \text{definíciója} & & \\ \text{azonosság miatt} & & \text{miatt} & & \text{miatt} & & \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{ab} \text{ és } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ négyzete tehát egyenlő.}$$

Mivel mindkét kifejezés értéke nemnegatív, így $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

3. Bizonyítsuk be a más alapú logaritmusra áttérés szabályát: $a, b, c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, c \neq 1$ esetén $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Bizonyítás:

A bizonyítás során felhasználjuk a logaritmus definícióját, a hatványozás egyik azonosságát, és azt, hogy az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű. Vizsgáljuk meg, hogy egyenlő számokat kapunk-e, ha az a számot arra a hatványkitevőre emeljük, ami az egyenlőség bal, illetve jobb oldalán áll!

Bal oldal a kitevőben	Jobb oldal a kitevőben
A logaritmus definíciója miatt: $a^{\log_a b} = b$.	Az $a^{\left(\frac{\log_c b}{\log_c a}\right)}$ kifejezést a c alap segítségével írjuk fel, ehhez felhasználjuk, hogy $a = c^{\log_c a}$.
	$a^{\left(\frac{\log_c b}{\log_c a}\right)} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\left(\frac{\log_c b}{\log_c a}\right)} = c^{\left(\log_c a \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a}\right)} = c^{\log_c b} = b.$ $\uparrow$ logaritmus definíciója $\uparrow$ hatványozás azonossága $\uparrow$ algebrai átalakítás $\uparrow$ logaritmus definíciója

Azt kaptuk, hogy $a^{\log_a b} = a^{\left(\frac{\log_c b}{\log_c a}\right)}$.

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért a két kitevő egyenlő, tehát $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

ELMÉLET

A direkt bizonyítás

A direkt bizonyítás logikai sémája: ha egy A állításról tudjuk, hogy igaz, valamint az $A \rightarrow B$ állításról (implikációról) tudjuk, hogy igaz, akkor a B állítás logikai értéke is igaz.

Ezt több lépcsőben is alkalmazhatjuk, azaz ha továbbá $B \rightarrow C$ igaz, akkor hasonlóképp a C állítás is igaz, és így tovább.

Az ábra egy olyan helyzetet mutat, amikor 5 állítás láncolata igazolja az E állítást (tételt).

A direkt bizonyítás során tehát olyan állításokból indulunk ki, amelyek igazak. (Ezeket korábban már bizonyítottuk, vagy alapigazságként, azaz axiómaként igaznak fogadjuk el.) Ezután helyes logikai következtetéseket alkalmazunk.

Direkt bizonyítással bizonyítottuk például a háromszögek és a speciális négyszögek területképleteit, a háromszögek nevezetes vonalairól szóló tételeket, a Pitagorasz-tételt és a Thalész-tételt.

Jelölés: $\rightarrow$: a „ha..., akkor” logikai művelet (implikáció) jele, a kiinduló állítás nem feltétlenül igaz;

$\Rightarrow$: az előtte álló igaz állítások bizonyítják az utána lévő állítás teljesülését („Ebből következik ...”).

$$\left. \begin{array}{ll} A & \text{igaz} \\ A \rightarrow B & \text{igaz} \end{array} \right\} \Rightarrow B \text{ igaz}$$

$$\left. \begin{array}{ll} A & \text{igaz} \\ A \rightarrow B & \text{igaz} \\ B \rightarrow C & \text{igaz} \\ C \rightarrow D & \text{igaz} \\ D \rightarrow E & \text{igaz} \end{array} \right\} \Rightarrow E \text{ igaz}$$

Direkt bizonyítást alkalmazhatunk például az algebrai azonosságok bizonyításakor.

A gyökvonás azonosságainak bizonyítása során felhasználhatjuk:

- a gyökvonás definícióját ($(\sqrt{a})^2 = a$, ahol $a \in \mathbb{R}_0^+$);
- a hatványozás azonosságait;
- a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

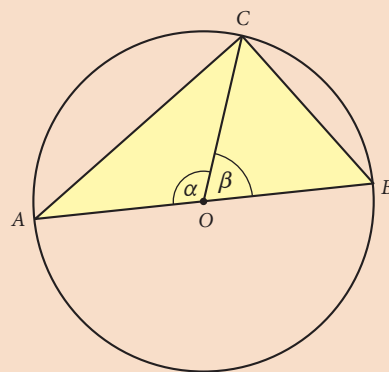
A logaritmus azonosságainak bizonyítása során felhasználhatjuk:

- a logaritmus definícióját ($a^{\log_a b} = b$, ahol $a; b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$);
- a hatványozás azonosságait;
- a szorzás, összeadás műveleti tulajdonságait;
- az exponenciális függvény a valós számok halmazán kölcsönösen egyértelmű.

FELADATOK

- 1. E1** A Thalész-tétel bizonyításának mondatai összekeveredtek. Állítsd megfelelő sorrendbe a bizonyítás mondatait! Használjuk az ábra jelöléseit! Kössük össze az ABC háromszög C csúcsát a kör O középpontjával! Az AOC szöveget jelöljük α -val, a COB szöveget β -val!

I	Az AOC háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, így $ACO \sphericalangle = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$.
II	$ACB \sphericalangle = ACO \sphericalangle + OCB \sphericalangle = \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \beta}{2} =$ $= \frac{360^\circ - (\alpha + \beta)}{2} = \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ$.
III	$AO = OC$, ezért az $AOC\triangle$ egyenlő szárú.
IV	$BOC\triangle$ is egyenlő szárú, és $OCB \sphericalangle = \frac{180^\circ - \beta}{2}$.



- 2. E1** A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság bizonyításának állításai összekeveredtek. Állítsd megfelelő sorrendbe a bizonyítás A, ..., E mondatait! ($a, x \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $k \in \mathbb{R}$)

1.	A logaritmus definíciója szerint $a^{\log_a x^k} = x^k$. Vizsgáljuk meg az $a^{k \cdot \log_a x}$ kifejezés értékét is!
A	$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$.
B	$a^{\log_a x^k} = x^k = a^{k \cdot \log_a x}$.
C	A hatványozás azonossága szerint $a^{k \cdot \log_a x} = (a^{\log_a x})^k$.
D	Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért azonos alap esetén a kitevők egyenlők.
E	A logaritmus definíciója szerint $(a^{\log_a x})^k = x^k$.

- 3. E2** Bizonyítsd be a gyökvonás alábbi azonosságait!

a) $a \in \mathbb{R}_0^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$

- 4. E2** Bizonyítsd be a logaritmus alábbi azonosságait!

a) $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ esetén $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

b) $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ esetén $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

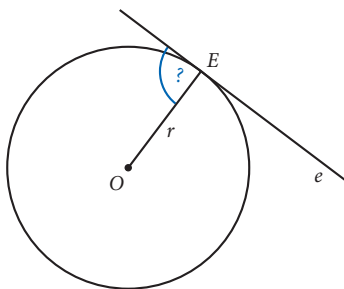


néhány konkrét indirekt bizonyítás (pl: Végtelen sok prímszám van.)



az indirekt bizonyítás elve, módszere

BEVEZETŐ



Hogyan lehet bebizonyítani, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra? „Így kell legyen, máshogy nem lehet, mert akkor az egyenes nem lesz érintő” – talán így kezdene valaki egy indoklást. Elég nehéz ugyanakkor direkt módon levezetni, hogy pontosan miből következik a merőlegesség.

Ennél a tételnél (és sok más tételnél is) az indirekt bizonyítás a célravezető. Tegyük fel, hogy nem teljesül a tétel, és nincs derékszög az érintési pontban. Ha ez a kiindulás később ellentmondásra vezet, abból az következik, hogy a feltevés nem lehet igaz.

KIDOLGOZOTT FELADAT

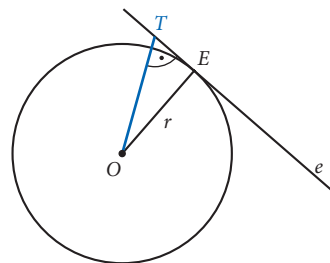
1. Bizonyítsuk be, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra!

Bizonyítás:

A bizonyítás során felhasználjuk, hogy az érintőnek az érintési ponttól különböző pontjai a körön kívül eső pontok, ezért ezek távolsága a kör középpontjától nagyobb, mint a kör sugara. Használjuk az ábra jelöléseit!

Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az e érintő nem merőleges az E érintési pontba húzott sugárra.

Bocsássunk merőlegest a kör O középpontjából az érintőre, ennek metszéspontja az érintővel legyen T . Az ábrába is bejelöltük, hogy T az O -ból az e -re bocsájtott merőleges talppontja, tehát T -nél derékszög van. (Az, hogy az ábrán másként „látszik”, még nem bizonyíték, mert az ábra torzíthat.) A T pontra teljesül, hogy körön kívüli pont, ezért $OT > r$. Másrészt az $OTE\triangle$ -ben T -nél derékszög van, ezért $OT < OE = r$. Ez ellentmondás, tehát az induló feltételezésünk hamis, ezért e merőleges az EO sugárra.



2. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám!

Bizonyítás:

Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel az eredeti állítással ellentétben, hogy a $\sqrt{2}$ racionális szám, vagyis felírható két egész szám hányadosaként. $\sqrt{2}$ pozitív, létezik tehát olyan a és b pozitív egész szám, hogy $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát b -vel, majd emeljük négyzetre: $b \cdot \sqrt{2} = a \rightarrow b^2 \cdot 2 = a^2$.

Vizsgáljuk meg a kapott egyenlőség bal, illetve jobb oldalán álló pozitív egész számok prímtényezős felbontásában a 2 kitevőjét! Egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden prímszám páros kitevőn szerepel. Így a jobb oldal prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páros pozitív szám vagy 0, tehát páros, míg a bal oldal prímtényezős felbontásában a 2 kitevője biztosan páratlan szám. A számelmélet alaptétele szerint a prímtényezős felbontás (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelmű, ezért ellentmondásra jutottunk. A bizonyítás elején megfogalmazott feltevés tehát hamis, ezért a $\sqrt{2}$ irracionális szám.

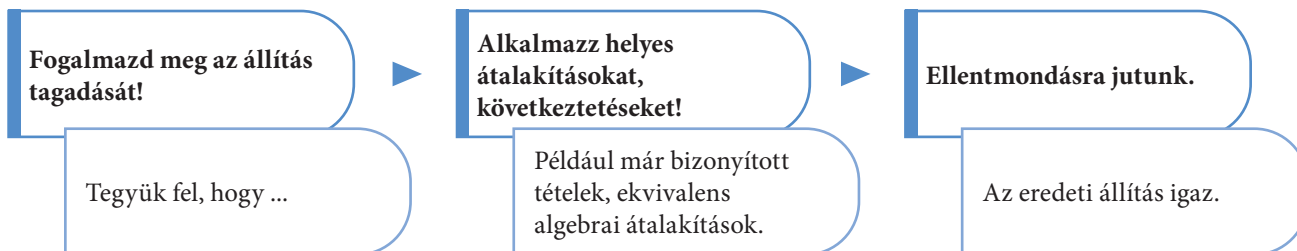
1. Az indirekt bizonyítás elve

Egy állítás és a tagadása közül pontosan az egyik igaz, a másik hamis. Ezért ha egy állítás tagadásáról belátjuk, hogy hamis, abból az következik, hogy az eredeti állítás igaz. Ezen a gondolatmeneten alapul az **indirekt bizonyítás**.

Az indirekt bizonyítás során megfogalmazzuk a bizonyításra váró tétel tagadását: feltételezzük, hogy az állítás hamis. (Gyakran ilyen módon fogalmazzuk: „tegyük fel, hogy...”.) Ezután olyan tételeket, eljárásokat, algebrai átalakításokat alkalmazunk, amelyekről tudjuk, hogy igazak. Ha ez a levezetés ellentmondásra vezet, akkor a kiinduló feltevés nem lehet igaz. A tételbeli állítás tagadása tehát hamis, s ebből következik, hogy a tétel állítása igaz.

Ha például azt szeretnénk bebizonyítani valamiről, hogy nem létezik, akkor tegyük fel, hogy létezik. Ekkor bevezethetjük rá a szokásos jelöléseket. A konkrét jelölésekkel felírhatunk összefüggéseket, egyenleteket stb. Ha ezek ellentmondásra vezetnek, akkor a feltevésünk hamis.

2. Az indirekt bizonyítás módszere



3. Gráfokhoz kapcsolódó tételek, ismeretek (Ismétlés, 31–32. lecke.)

A gráfokhoz kapcsolódó feladatokban sokszor használhatunk indirekt bizonyítást. A levezetés során felhasználhatjuk a következő tételeket, ismereteket:

Minden gráf esetén:	A gráf fokszámainak összege egyenlő az élek számának kétszeresével. (A gráf fokszámainak összege páros.)	fokszámok összege = $= 2 \cdot \text{élek száma}$
Az n pontú teljes gráf (bármely két pont között pontosan egy él fut) esetén:	Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{n}{2}$.	élek száma $= \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
Egyszerű gráfok esetén (nincs benne hurokél, sem többszörös él):	Az n pontú egyszerű gráf éleinek száma legfeljebb a teljes gráf éleinek száma. Minden pont fokszáma legfeljebb $n - 1$.	élek száma $\leq \binom{n}{2}$ fokszám $\leq n - 1$
Az n pontú fagráf esetén (összefüggő és nincs benne kör):	Az n pontú fagráf éleinek száma $n - 1$.	élek száma $= n - 1$

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Egy hétpontú egyszerű gráfban minden pont fokszáma legalább 5. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban olyan pont, amelynek a fokszáma 6.

Bizonyítás:

Egy hétpontú egyszerű gráfban minden pont fokszáma legfeljebb 6.

Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy nincs a gráfban olyan pont, amelynek a fokszáma 6. Ekkor minden pont fokszáma legfeljebb 5. A feladat szerint ugyanakkor minden fokszám legalább 5. Tehát minden fokszám egyenlő 5-tel. A fokszámok összege ekkor $7 \cdot 5 = 35$. A fokszámok összege azonban nem lehet páratlan, ezért ez ellentmondás.

Az indirekt feltevés tehát nem teljesülhet, vagyis a gráfban van olyan pont, amelynek a fokszáma 6.

Ilyen gráf létezik, például ilyen gráf a hétpontú teljes gráf.

- 1. E1** Egy indirekt bizonyítás mondatai összekeveredtek. Tedd megfelelő sorrendbe a bizonyítás mondatait! Bizonyítsuk be, hogy a pozitív valós számok között nincs legkisebb!

A	Találtunk tehát egy a -tól különböző pozitív valós számot, amely kisebb, mint a .
B	A pozitív valós számok között tehát nincs legkisebb.
C	Tegyük fel, hogy a pozitív valós számok között van legkisebb szám.
D	$\frac{a}{2}$ egy olyan valós szám, amely pozitív, és kisebb, mint a .
E	Ez ellentmondás.
F	Jelöljük ezt a számot a -val.

- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2018)
Dönts el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszodat indokold!
Van olyan G_1 , illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfoknak van legalább egy csúcsa.)
- 3. E1** Egy egyszerű gráf minden pontjának fokszáma páratlan. Bizonyítsd be, hogy páros számú pontja van!
- 4. E1** Egy nyolccsúcsú egyszerű gráfról tudjuk, hogy éleinek száma 9. Bizonyítsd be, hogy van olyan csúcsa, amelynek a fokszáma legalább 3.
- 5. E1** (Emelt szintű érettségi, 2012)
Bizonyítsd be, hogy ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.
- 6. E2** (Emelt szintű érettségi nyomán, 2020)
G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek 6 éle van.
- a)** Bizonyítsd be, hogy G csúcsai közt biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 2.
- b)** Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2?

- 7. E2** Egy ország öt szigetből áll. Bármely két sziget között van közvetlen közlekedési eszköz: vagy hajójárat, vagy repülőjárat, de a kettő közül csak az egyik. Bármely három szigetet választjuk ki, a három sziget közötti járatok között van hajójárat és repülőjárat is. Bizonyítsd be, hogy minden szigetről pontosan két hajójárat és pontosan két repülőjárat indul!
- Adj meg egy olyan ötpontú gráfot, amelyben kétféle színe lehet az éleknek, és az öt sziget közötti közlekedési hálózatra szemléltet egy, a feladat szövegének megfelelő lehetőséget!



- 8. E2** Egy kisvárosban labdarúgókupát rendeztek 8 csapattal, amely során minden csapat minden másikkal pontosan egy mérkőzést játszott, nem volt visszavágó. Bizonyítsd be, hogy nem lehetséges, hogy minden csapat ugyanannyi döntetlent játszott, mint ahányszor nyert!
- 9. E1** Bizonyítsd be, hogy a $\sqrt{3}$, a $\sqrt{5}$, illetve a $\sqrt{6}$ irracionális számok!
- 10. E2** Bizonyítsd be, hogy a $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, illetve a $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ irracionális számok, ugyanakkor a szorzatuk racionális szám!
- 11. E1** 30 különböző pozitív egész szám összege 890. Bizonyítsd be, hogy a számok között legalább kettő páros!
- 12. E2** Bizonyítsd be, hogy minden irracionális szám tizedes tört alakjában van olyan számjegy, amely végtelen sokszor szerepel!
- 13. E2*** Bizonyítsd be, hogy $\log_3 5$ irracionális szám!



skatulyaelv

BEVEZETŐ

Képzeld el, hogy galambok népesítenek be egy galambdúcot. Lesz-e olyan galamblyuk, amelyikbe egynél több galamb kerül? A galambok addig tudják egyesével feltölteni a helyeket, amíg minden galamblyuk be nem telik. Ha 32 járat van és 33 galamb, akkor biztosan van olyan galamblyuk, amelybe egynél több galamb kerül.

Ezt a gondolatot a matematika skatulyaelvnek nevezi (angol neve pigeonhole principle). Van n darab skatulyánk, ezekbe osztunk szét több mint n darab elemet. Nem feltételezzük, hogy egyenletesen töltik ki az elemek a skatulyákat. Maradhatnak üres skatulyák. A skatulyaelv azt mondja ki, hogy bárhogy helyeztük el az elemeket a skatulyákba, *van olyan* skatulya, amelybe *legalább* két elem került.



ELMÉLET

A skatulyaelv

Tétel (skatulyaelv): Ha n darab elemet k darab skatulyába („kategóriába”) helyezünk el, és $n > k$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelybe egynél több, azaz legalább két elem kerül. ($n, k \in \mathbb{Z}^+$)

- ▶ A skatulyaelv indirekt úton bizonyítható. Tegyük fel, hogy nincs ilyen skatulya. Ekkor minden skatulyában az elemek száma legfeljebb egy. Ezért az elemek száma legfeljebb k , azaz $n \leq k$. Viszont tudjuk, hogy $n > k$, ez pedig ellentmondás. Az indirekt feltevés tehát nem teljesül, ezért van olyan skatulya, amelybe legalább két elem kerül.
- ▶ Nem igaz ugyanakkor, hogy biztosan létezik olyan skatulya, amelybe pontosan két elem kerül. Előfordulhat például, hogy vannak üres skatulyák, vagy hogy ugyanabba a skatulyába kerül az összes elem.
- ▶ A skatulyaelv általánosítható. Ha n darab elemet k darab skatulyába szeretnénk elhelyezni, és $n > k \cdot p$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelybe p -nél több, azaz legalább $(p + 1)$ elem kerül. ($n, k, p \in \mathbb{Z}^+$)

A skatulyaelv felhasználási területei például:

- ▶ oszthatósági, maradékosztályokhoz kapcsolódó feladatok,
- ▶ kombinatorikai feladatok,
- ▶ gráfokhoz kapcsolódó feladatok.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Adj meg olyan ötpontú (egyszerű) gráfot, amelyben a pontok fokszámai

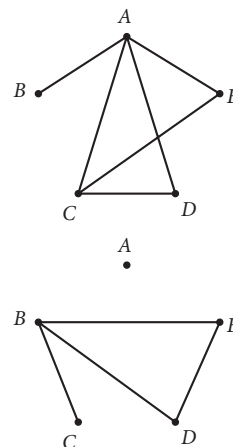
a) 1; 2; 2; 3; 4,

b) 0; 1; 2; 2; 3,

c) mind különbözők!

Megoldás:

- a) A 4 fokszámú pontból (A) minden tőle különböző pontba fut él. Az 1 fokszámú pontból (B) több él nem indul. A 3 fokszámú pontból (C) minden B-től különböző pontba fut él. Ekkor a maradék két pontból (D és E) két él indul, ezért több él nincs a gráfban. (felső ábra)
- b) A 0 fokszámú pont (A) izolált pont. A 3 fokszámú pontból (B) minden A-tól különböző pontba fut él. Az 1 fokszámú pontból (C) több él nem indul. A maradék két pontból (D és E) két él indul, ez csak úgy lehet, ha közöttük van él. (alsó ábra)
- c) Érdekes kísérletezni, próbálgatni. Vajon miért nem sikerül ezt a helyzetet előállítani?



2. Bizonyítsd be, hogy bármely (legalább kétpontú) egyszerű gráfban létezik két azonos fokszámú pont!

Bizonyítás:

A gráf pontjainak számát jelöljük n -nel ($n \geq 2$). Minden pont esetében a fokszám a $0; 1; \dots; n-1$ számok valamelyike. Ez n különböző lehetőség. Nem lehetséges azonban hogy egyidejűleg van olyan pont, amelynek a fokszáma 0 (ennek semelyik másik ponttal nincs közös éle, azaz izolált pont) és van olyan pont, amelynek a fokszáma $n-1$ (ennek minden tőle különböző ponttal van közös éle). Ezért a pontok fokszáma $(n-1)$ -féle lehet. A fokszámok felelnek meg a skatulyáknak. Van $(n-1)$ fokszám és n pont, így a skatulyaelv alapján az n pont között van legalább két olyan, amelynek azonos a fokszáma.

3. Felírunk hat darab különböző pozitív egész számot. Bizonyítsd be, hogy kiválasztható a hat szám közül kettő, amelyek különbsége osztható 5-tel! Az 5-féle maradék felel meg az 5 skatulyának.

Bizonyítás:

Egy pozitív egész számot 5-tel osztva a maradék 5-féle lehet: $0; 1; 2; 3$ vagy 4 . Az 5-féle maradék felel meg az 5 skatulyának, így az 5-tel osztva azonos maradékot adó számok kerülnek azonos skatulyába. Hat darab szám van és öt skatulya, ezért van legalább két olyan szám, amely azonos skatulyába kerül. Ha ezek közül választunk kettőt, majd a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket, akkor a különbség osztható 5-tel.

Megjegyzés: Maradékosztálynak nevezi a matematika azon pozitív egész számok halmazát, amelyeknek egy adott számmal való osztás során az osztási maradéka egyenlő. Az 5-tel való oszthatóság szempontjából 5 maradékosztály létezik.

FELADATOK

1. E1 Hány fős az osztályotok?

- a) Anélkül, hogy mindenkit megkérdeznél, el tudod-e dönteni, hogy van-e az osztályotokban legalább két olyan ember, aki ugyanabban a hónapban született?
- b) Biztosan van-e az osztályotokban két olyan ember, aki ugyanolyan sorszámu napon született?
- c) Fogalmazd meg és válaszold meg az előbbi kérdéseket „három olyan ember” esetére is!
- d) Az iskolátokban vajon van-e legalább két olyan diák, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk? És lehet, hogy akad legalább három olyan diák is?

2. E1 Andor nem szereti párosítani a zoknijait. A fiókjában 14 darab egyforma kék zokni, 16 darab egyforma zöld zokni és 8 darab egyforma fekete zokni van. Hány zoknit kell kivennie a fiókból, hogy biztosan legyen a kivett zoknik között

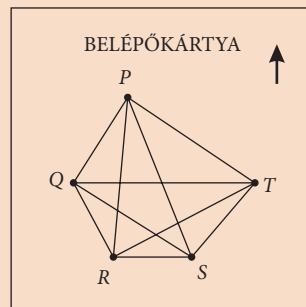
- a) egy pár zokni;
- b) egy pár fekete zokni;
- c) két pár zokni?

3. E1 Bizonyítsd be a skatulyaelv segítségével, hogy

- a) 5 pozitív egész szám közül kiválasztható kettő, amelyek különbsége osztható 4-gyel;
- b) 3 pozitív egész szám közül kiválasztható kettő, amelyek összege osztható 2-vel!

4. E1 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a $PQRST$ konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyikén szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.) A konferenciának 400 résztvevője lesz. Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya?



5. E1 Igazold, hogy bármely tíztágú társaságban van két olyan ember, akiknek ugyanannyi ismerőse van a társaságon belül! (Feltételezzük, hogy az ismeretségek kölcsönösek.)

6. E2 Egy alkalommal 8 ember várakozik egy hivatali előcsarnokban. A 8 ember között 9 ismeretség van, azaz 9 olyan pár van, akik egymás ismerősei. (Feltételezzük, hogy az ismeretség kölcsönös.) Bizonyítsd be, hogy van köztük olyan ember, akinek legalább 3 ismerőse van az előcsarnokban!

BEVEZETŐ



1986 és 2009 között minden évben megrendezték Hollandiában a dominónapot (Domino day). Minden évben újabb kísérletet tettek a világrekord megdöntésére. Egy hatalmas csarnokban különleges alakzatokban rengeteg dominót állítottak fel, s az volt a cél, hogy végül egyetlen dominót eldöntve minél több dominó felboruljon. 2009-ben 4 800 000 dominót állítottak fel, s a kísérlet során ezek közül 4 491 863 dőlt el.

Mi kell ahhoz, hogy egy dominósor minden dominója feldőljön? Az kell hozzá, hogy minden dominó feldöntse a mögötte lévő dominót. Ha tehát mindig igaz, hogy a k -adik dominó felborítja a $(k + 1)$ -edik dominót, és feldöntjük a legelső dominót, akkor a teljes dominósor felborul.

ELMÉLET

A teljes indukció

A teljes indukciós bizonyítás során szeretnénk bebizonyítani, hogy egy n -től függő állítás (ahol $n \in \mathbb{Z}^+$) minden pozitív egész n esetén teljesül.

A bizonyítási eljárás lépései:

1. Ellenőrizzük, hogy igaz-e az állítást $n = 1$ -re (a kezdőértékre).
2. Feltételezzük, hogy az állítás teljesül $n = k$ -ra.
Ez az úgynevezett **indukciós lépés**, és a k -ra megfogalmazott állítás az **indukciós feltevés**.
3. Megfogalmazzuk az állítást $n = k + 1$ -re, és az indukciós feltevés felhasználásával belátjuk, hogy igaz.

A lépés megfelelője a dominós példában:

Eldől-e az első dominó?

Tegyük fel, hogy eldől a k -adik dominó.

Bizonyítsuk be, hogy ha a k -adik eldől, akkor a $(k + 1)$ -edik is eldől.

1. lépés:

Ellenőrizzük, hogy igaz-e az állítást az $n = 1$ esetre!

2. lépés:

(indukciós feltevés)
Írd le az állítást $n = k$ -ra!
Tegyük fel, hogy...

3. lépés:

Bizonyítsd be az állítást $n = k + 1$ -re!

- ▶ A levezetés előtt érdemes leírni az állítást $(k + 1)$ -re: ezt az állítást kell igazolni.
- ▶ A bizonyítás, levezetés során fel kell használnod az indukciós feltevés során megfogalmazott, k -ra vonatkozó állítást.
- ▶ A bizonyítás, levezetés során felhasználhatod a már ismert tételeket, ekvivalens algebrai átalakításokat.

Teljes indukció alkalmazható olyan feladatokban, amelyekben a feladatban szereplő állítás a pozitív egész számoktól függő állítás. Például sorozatokhoz kapcsolódó feladat, oszthatósággal kapcsolatos feladatok.

Megjegyzések:

1. Szokatlan és meglepő az a gondolat, hogy a bizonyítás során feltételezzük és felhasználjuk magát a tételben szereplő állítást. Fontos különbség van azonban a következők között:
 - ▶ a tételben azt mondjuk ki, hogy *minden* n -re teljesül egy állítás,
 - ▶ a bizonyítás során azt feltételezzük, hogy *egy konkrét* n -re teljesül az állítás (ezt a konkrét n -et jelöljük k -val), és ebből következtetünk arra, hogy a következő esetre is teljesül az állítás. Vagyis a teljes indukció 3. lépésében tulajdonképpen az állítás „öröklődését” igazoljuk.
2. A teljes indukció alkalmazható olyan esetben is, amikor egy állítás nem minden pozitív egész n -re teljesül, hanem valamely pozitív egész m -től kezdődően. Ekkor a kezdőérték nem 1, hanem az adott m . Más tételekben az állítás például a pozitív páros számokról szól. Ekkor az indukciós feltevés $2k$ -ra vonatkozik, és az állítást $2k + 2$ -re bizonyítjuk.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Bizonyítsuk teljes indukcióval, hogy az első n pozitív páratlan szám összege n^2 , azaz $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Bizonyítás:

1. lépés: Ellenőrizzük az állítást $n = 1$ -re! A bal oldal 1, a jobb oldal $1^2 = 1$, ezek egyenlők, így az állítás $n = 1$ -re igaz.
2. lépés: Indukciós feltevés: tegyük fel, hogy $n = k$ esetén teljesül az állítás, azaz $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$.
3. lépés: Bizonyítani kell, hogy az állítás teljesül $n = k + 1$ esetén is, azaz $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

A bal oldal: $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$.

Az indukciós feltevés miatt ezeknek a tagoknak az összege k^2 .

A nevezetes azonosság miatt $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, tehát $(k + 1)$ -re teljesül az állítás.

A teljes indukció mindhárom lépését elvégeztük, ezzel beláttuk, hogy minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén teljesül az állítás.

FELADATOK

1. **E1** Bizonyítsd be teljes indukcióval, hogy az első n pozitív páros szám összege $n^2 + n$, azaz $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$.

- a) Ellenőrizd az állítást $n = 1$ esetére!
- b) Fogalmazd meg az indukciós feltevést $n = k$ -ra!
- c) Fogalmazd meg az állítást $(k + 1)$ -re!
- d) Bizonyítsd be az indukciós feltevés segítségével az állítást $(k + 1)$ -re!

2. **E2** Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

3. **E2** (Emelt szintű érettségi, 2020)
Egy társasjátékban a játékosok egyforma méretű golyókból piramist építenek az ábra szerint. Az n rétegű

piramis $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ darab golyóból áll ($n \in \mathbb{Z}^+$). Bizonyítsd be, hogy

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



2. Bizonyítsuk be, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^n$ függvény deriváltfüggvénye $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ (ahol $n \in \mathbb{Z}^+$)!

Bizonyítás:

1. lépés: Ellenőrizzük az állítást $n = 1$ -re! $f(x) = x^1 = x$ Igaz-e, hogy $x' = 1 \cdot x^{1-1}$?

$$\left. \begin{array}{l} \text{▶ a bal oldal: } f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1 \Rightarrow f'(x) = x' = 1 \\ \text{▶ a jobb oldal: } 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{A bal és jobb oldal} \\ \text{egyenlősége miatt az} \\ \text{állítás } n = 1 \text{ esetén igaz.} \end{array}$$

2. lépés: Indukciós feltevés: tegyük fel, hogy $n = k$ -ra teljesül az állítás, azaz $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$.

3. lépés: Bizonyítanunk kell, hogy az állítás teljesül $n = k + 1$ -re, azaz $(x^{k+1})' = (k+1) \cdot x^k$.

Alkalmazzuk a hatványozás szorzatra vonatkozó azonosságát és a szorzatfüggvény deriválási szabályát!

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x' \cdot x^k = k \cdot x^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = k \cdot x^k + x^k = (k+1) \cdot x^k$$

Itt alkalmazzuk az indukciós feltevést.

Teljesül tehát, hogy $(x^{k+1})' = (k+1) \cdot x^k$.

Ezért az állítás minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén teljesül.

3. Bizonyítsd be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor $5 \mid (2^{4n+1} + 3)$.

Bizonyítás:

1. lépés: Ellenőrizzük az állítást $n = 1$ -re!

$$2^{4+1} + 3 = 32 + 3 = 35, \text{ ami osztható } 5\text{-tel.} \quad \text{▶ } n = 1\text{-re igaz.}$$

2. lépés: Tegyük fel, hogy k -ra teljesül az állítás, azaz

$$5 \mid (2^{4k+1} + 3).$$

3. lépés: Bizonyítsuk be, hogy az állítás teljesül $k + 1$ -re, azaz $5 \mid (2^{4(k+1)+1} + 3)$, másként: $5 \mid (2^{4k+5} + 3)$.

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait!

$$2^{4k+5} + 3 = 2^4 \cdot 2^{4k+1} + 3 = 16 \cdot 2^{4k+1} + 3.$$

Az 5-tel való oszthatóságot vizsgáljuk, ennek bizonyításához bontsuk $16 \cdot 2^{4k+1}$ -t két tag összegére!

$$16 \cdot 2^{4k+1} + 3 = \underbrace{15 \cdot 2^{4k+1}} + \underbrace{2^{4k+1} + 3}$$

5-tel osztható
a 15-ös szorzó miatt.

5-tel osztható az
indukciós feltevés miatt.

Mindkét tag osztható 5-tel, ezért a kapott kifejezés osztható 5-tel. Teljesül tehát, hogy $5 \mid (2^{4(k+1)+1} + 3)$.

Ezért az állítás minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén teljesül.

FELADATOK

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2017)
Igazold (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!

5. E2 Bizonyítsd be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor $4 \mid (7^n + 3^{n+1})$.

6. E2 Bizonyítsd be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor $6 \mid (n^3 - n)$.

7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)
Igazold, hogy az első n pozitív köbszám összege

$$K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bizonyítsd be teljes indukcióval, hogy $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$, ha n pozitív egész szám!

Bizonyítás:

Ellenőrizzük az állítást $n = 1$ -re! $\blacktriangleright$ A bal oldal $1 \cdot 4$, a jobb oldal $1 \cdot 2^2$, ezek egyenlők. $\blacktriangleright$ $n = 1$ -re igaz.

Tegyük fel, hogy k -ra teljesül az állítás, azaz $1 \cdot 4 + \dots + k(3k + 1) = k(k + 1)^2$.

Bizonyítani szeretnénk, hogy ebben az esetben $1 \cdot 4 + \dots + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2$.

Alakítsuk az egyenlőség bal oldalát az indukciós feltevés és algebrai átalakítások segítségével!

$$\underbrace{1 \cdot 4 + \dots + k(3k + 1)}_{\text{indukciós feltevés}} + (k + 1)(3k + 4) = \underbrace{k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4)}_{\text{algebrai átalakítások}} = (k + 1)[k(k + 1) + (3k + 4)] = (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Itt alkalmazzuk az indukciós feltevést.

Teljesül tehát a $(k + 1)$ -re felírt egyenlőség. Ezért minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén teljesül az állítás.

FELADATOK

- 1. E1** Határozd meg az összetett kijelentések logikai értékét az A és B kijelentések különböző lehetséges logikai értékei esetén, és töltsd ki a táblázatot!

a)

A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

b)

A	B	$\neg B$	$A \rightarrow \neg B$
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

- 2. E1** Fogalmazd meg az állítások megfordítását! Állapítsd meg az állítások és megfordításuk logikai értékét! Ha az állítás hamis, akkor mutass ellenpéldát!

- a) Ha egy gráfban a csúcsok fokszámai 1, 2, 2 és 3, akkor a gráfnak 4 csúcsa és 4 éle van.
- b) Ha két halmaznak nincs közös eleme, akkor az uniójuk elemszáma egyenlő a halmazok elemszámának összegével.

- 3. E2** Fogalmazd meg az állítások megfordítását! Állapítsd meg az állítások és megfordításuk logikai értékét! Ha az állítás hamis, akkor mutass ellenpéldát!

- a) Ha egy 8 csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.
- b) Ha egy 7 csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

- 4. E2** (Emelt szintű érettségi, 2012 és 2019)

Alkalmazd az indirekt bizonyítást a következő feladatokban!

- a) Igazold, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!
- b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazold, hogy a háromszögnek nincs 60° -os szöge!

- 5. E2** Alkalmazd a skatulyaelvet!

- a) Bizonyítsd be, hogy 11 pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani kettőt úgy, hogy a különbségük osztható 10-zel!
- b) Bizonyítsd be, hogy bármely hét négyzetszám közül ki lehet választani kettőt, amelyek különbsége osztható 10-zel!

- 6. E2** Egy sakkturnán 10 résztvevő indul. Mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik. Bizonyítsd be, hogy ha 11 játszma már véget ért, akkor van olyan versenyző, aki legalább 3 meccset játszott!

- 7. E2** Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor

- a) $6 \mid (n^3 + 11n)$; b) $8 \mid (5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1)$.

D = definíció, T = tétel, M = módszer, eljárás

HALMAZOK

T	De Morgan-azonosságok	A és B halmazok esetén: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
T	Szitaformula (logikai szita)	A és B halmazok esetén: $ A \cup B = A + B - A \cap B $ A, B és C halmazok esetén: $ A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C $
D	Megszámlálhatóan végtelen számosság	Egy végtelen halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen, ha létezik kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés a halmaz elemei és a természetes számok halmaza között. Ellenkező esetben a végtelen halmaz számossága nem megszámlálhatóan végtelen.
D	Adott műveletre zárt halmaz	A H halmaz zárt egy adott műveletre, ha a H halmaz bármely elemei esetén a művelet eredménye is eleme H-nak.

LOGIKA

D	Elégséges feltétel	Ha az $A \rightarrow B$ állítás igaz és az A is igaz, akkor ez már elégséges ahhoz, hogy B állítás igaz legyen. Tehát ekkor az A állítás elégséges feltétele a B állításnak.
D	Szükséges feltétel	Ha az $A \rightarrow B$ állítás igaz, akkor a B állítás igaz logikai értéke szükséges ahhoz, hogy A igaz lehessen. Tehát ekkor a B állítás szükséges feltétele az A állításnak.
D	Szükséges és elégséges feltétel	Ha az $A \rightarrow B$ állítás és annak megfordítása, a $B \rightarrow A$ állítás is igaz, akkor az A állítás szükséges és elégséges feltétele a B állításnak, illetve fordítva: a B állítás szükséges és elégséges feltétele az A állításnak. Ekkor a két állítás ekvivalens.
M	Direkt bizonyítás	Igaz állításokból indulva helyes logikai lépések során a bizonyítandó állításhoz jutunk.
M	Indirekt bizonyítás	Az állítás tagadásának feltételezéséből, helyes logikai lépések során ellentmondásra jutunk, amiből az következik, hogy az eredeti állítás igaz.
M	Skatulyaelv	Ha n darab elemet k darab skatulyába szeretnénk elhelyezni, és $n > m \cdot k$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelybe m -nél több, azaz legalább $m + 1$ elem kerül. ($m, n, k \in \mathbb{Z}^+$)
M	Teljes indukció	n -től függő (ahol $n \in \mathbb{Z}^+$) állítások bizonyítására használható. Lépései: 1. Az állítás igazságát ellenőrizzük a kezdő n érték esetében. 2. Feltételezzük, hogy $n = k$ esetén az állítás igaz. (indukciós feltevés) 3. Az indukciós feltevés felhasználásával bizonyítjuk $n = k + 1$ -re az állítás igazságát.

1. **E1** Adottak a $H = \{\text{egyjegyű pozitív egész számok}\}$, $A = \{\text{egyjegyű prímek}\}$, $B = \{1; 2; 5; 6\}$, $C = \{1; 3; 5; 8\}$ halmazok. Elemeik felsorolásával add meg az alábbi halmazokat!
 $\overline{A \cap B}$; $\overline{A \cup C}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{C \cap B}$; $\overline{A \cup B \cup C}$;
 $\overline{C \cap B \cup A}$; $\overline{A \setminus B}$; $\overline{C \setminus A}$
2. **E1** Ismerjük néhány halmaz számosságát:
 $|H| = 18$, $|A| = 9$, $|B| = 8$, $|C| = 9$,
 $|B \setminus C| = 3$, $|A \setminus B| = 5$, $|C \setminus A| = 6$,
 $|A \cap B| = 4$, $|A \cap B \cap C| = 2$.
 Határozd meg $|\overline{A}|$, $|B \cap C|$, $|B \setminus A|$ és $|\overline{A} \cup \overline{B}|$ értékét!
3. **E1** (Emelt szintű érettségi, 2021)
 Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható?
4. **E1** (Emelt szintű érettségi, 2005)
 Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsők az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hány tanulója van az osztálynak?
5. **E1** (Emelt szintű érettségi, 2020)
 Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az A halmaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.
 Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak?
6. **E1** Egy 32 fős osztály mozilátogatásra készül. A megnevezhető mozifilmekről titkos szavazáson döntenek, melyen minden tanuló részt vesz. Szavazhatnak az Első, a Második, valamint a Harmadik című filmekre úgy, hogy ezek közül mindenki egyet vagy kettőt választhat. A Másodikat és a Harmadikat 3-an, az Elsőt és a Másodikat 4-en jelölték meg. Senki nem volt, aki az Elsőt és a Harmadikat is bejelölte. A szavazás végén kiderült, hogy mindegyik filmre ugyanannyian szavaztak. Hány olyan diák volt, aki csakis az Első, csakis a Második, illetve csakis a Harmadik filmre voksolt?
7. **E1** Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható a 2; 3; 4; 5; 6 számok egyikével sem?
8. **E1** Hányféleképpen ülhet le 8 gyerek – köztük Anna, Bea és Cili – egymás mellé egy hosszú padra, ha Anna, Bea és Cili közül semelyik két lány nem ül egymás mellett?
9. **E1** Hány olyan, legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, amely 20, 24 és 25 közül legalább az egyikkel osztható?
10. **E1** Zárt-e a négyzetszámok halmaza
 a) a négyzetre emelés műveletére;
 b) a gyökvonás műveletére;
 c) az összeadásra nézve?
11. **E1** Véges, megszámlálhatóan végtelen vagy nem megszámlálhatóan végtelen számosságúak-e az alábbi halmazok? Mennyi a véges halmazok számossága?
 $A = \{3\text{-mal osztható négyjegyű számok}\}$
 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 < x\}$
 $C = \{\text{köbszámok}\}$
 $D = \{7\text{-tel osztva 2 maradékot adó legfeljebb ötjegyű pozitív egészek}\}$
 $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 6\}$
12. **E2** Tekintsük az alábbi állításokat:
 A : Az n szám osztható 15-tel.
 B : Az $ABCD$ négyszög téglalap.
 C : Az α szög szinusza pozitív előjelű.
 Add meg az állítások
 a) egy szükséges, de nem elégséges;
 b) egy elégséges, de nem szükséges;
 c) egy szükséges és elégséges feltételét!
13. **E1** Bizonyítsd be, hogy a $]8; 10[$ nyílt intervallumban lévő számok között nincs legkisebb!
14. **E1** Bizonyítsd be, hogy akárhogyan választunk ki tíz különböző számot a $]0; 9[$ intervallumból, a kiválasztott tíz szám között van kettő, amelyek különbsége kisebb, mint 1.
15. **E1** Bizonyítsd be, hogy egy 25 fős társaságban biztosan van legalább négy ember, aki a hét ugyanazon napján született!
16. **E1** (Emelt szintű érettségi, 2018)
 Egy 34 fős osztály az egyik óra elején egy rövid, öt kijelentést tartalmazó tesztet írt. A tanulóknak meg kellett határozniuk a kijelentések logikai értékét (igaz vagy hamis). Tudjuk, hogy mind a 34 tanuló mind az öt tesztkérdésre válaszolt. Bizonyítsd be, hogy van két olyan tanuló, aki ugyanúgy töltötte ki a tesztlapot!
17. **E2** Bizonyítsd be, hogy az első n darab páratlan szám négyzetének összege $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ -mal egyenlő!



terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás



átlagos abszolút eltérés

KIDOLGOZOTT FELADAT

Minőség-ellenőrzést végeztek egy tejipari üzemben. 20 doboz 850 grammos kiszerelésű tejfől esetében ellenőrizték a dobozban lévő tejfől tömegét. Táblázatba foglaltuk a mért eredményeket.

a) Mennyi a 20 adat átlaga és szórása?

b) Mennyi a 20 adat esetében a 850-től vett átlagos abszolút eltérés?

Megoldás:

Számoljuk ki az adatok átlagát ($\bar{x}$), majd egészítsük ki a táblázatot újabb sorokkal, melyekben az adatok átlagtól való eltérése ($x_i - \bar{x}$), annak a négyzete ($(x_i - \bar{x})^2$), illetve az adatok 850-től vett abszolút eltérése ($|x_i - 850|$) szerepel.

Adat (x_i)	844	846	848	850	852
Gyakoriság (n_i)	1	2	3	10	4
$x_i - \bar{x}$	-5,4	-3,4	-1,4	0,6	2,6
$(x_i - \bar{x})^2$	29,16	11,56	1,96	0,36	6,76
$ x_i - 850 $	6	4	2	0	2

Adat (x_i)	844	846	848	850	852
Gyakoriság (n_i)	1	2	3	10	4

adatok átlaga:

$$\bar{x} = \frac{844 + 2 \cdot 846 + 3 \cdot 848 + 10 \cdot 850 + 4 \cdot 852}{20} = 849,4$$

szórásnégyzet:

$$\sigma^2 = \frac{29,16 + 2 \cdot 11,56 + 3 \cdot 1,96 + 10 \cdot 0,36 + 4 \cdot 6,76}{20} = 4,44$$

850-től vett átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{20} = 1,4$$

A táblázat utolsó előtti sora segítségével számolhatjuk a szórásnégyzetet, ez 4,44, ezért az adathalmaz szórása $\approx 2,107$.

A táblázat utolsó sora tartalmazza az elvárt 850-től vett abszolút eltéréseket, ennek segítségével számolható az átlagos abszolút eltérés, ami 1,4.

FELADATOK

1. E1 A következő táblázat néhány Forma-1-es versenypálya hosszát és a verseny során a megteendő körök számát tartalmazza.

Név	Ország	Pályahossz (m)	Körök száma
Le Castellet	Franciaország	5842	53
Spielberg	Ausztria	4326	71
Silverstone	Nagy-Britannia	5891	52
Hockenheim	Németország	4574	67
Hungaroring	Magyarország	4381	70



a) Határozd meg a pályák hosszának átlagát, szórását és az átlagtól való átlagos abszolút eltérést!

b) Határozd meg a versenytávok szórását és az átlagtól való átlagos abszolút eltérést!

Egy adatsokaságban az adatok „szóródását” leggyakrabban a következő mutatókkal jellemzik:

▶ szórás: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$

▶ átlagos abszolút eltérés (egy konkrét a értéktől): $\frac{|x_1 - a| + \dots + |x_n - a|}{n}$

Jelölések:

adatok: $x_1, x_2, \dots, x_n$
átlag: $\bar{x}$ **szórás:** σ

Gyakorlati számítások során a értékének leggyakrabban az adatok mediánját, más esetben az adatok átlagát ($\bar{x}$) szokták választani. Az átlagos abszolút eltérés akkor lesz minimális, ha a az adatsokaság mediánja.

Például az átlagtól való átlagos abszolút eltérés meghatározása:

Számítsd ki az adatok átlagát!

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Vedd az adatok és az átlag különbségének abszolút értékét!

$$|x_1 - \bar{x}|, \dots, |x_n - \bar{x}|$$

Számold ki ezek átlagát!

$$\frac{|x_1 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Megjegyzés:

Szórás vagy átlagos abszolút eltérés? Melyik mire való? Melyiket érdemes alkalmazni?

Mindkét mutató az adatok szóródásának mérésére szolgál, és több mindentől függ, hogy mikor melyiket érdemes figyelembe venni. A szórás kiszámítása során használt másodfokú függvénynek előnyösebb tulajdonságai vannak, mint az abszolútérték-függvénynek (pl. deriválható), ezért a szórás használata az elterjedtebb (pl. a pénzügyi kockázat jellemzésére). Ugyanakkor, ha néhány kiugró adat van az adatsokaságban, az jobban befolyásolja a szórást, mint az átlagos abszolút eltérést. Egy adott termék esetében a szabványmérettől való eltérést sokszor az átlagos abszolút eltéréssel jellemzik.

FELADATOK

2. E1 Öt barát testmagassága egy védőnői mérés napján 158 cm, 160 cm, 166 cm, 170 cm és 171 cm volt. A következő, egy évvel későbbi mérésig mind az ötén 2 cm-t nőttek.

Hogyan változott meg ez alatt az év alatt a barátok testmagasságának átlaga, szórása és az átlagtól való átlagos abszolút eltérés?

3. E1 Egy vetélkedő három győztese bankba tette a nyereményként kapott 15 000, 18 000, illetve 20 000 Ft-ot. Egy év elteltével mindegyikük nyerevénye 5%-ot kamatozott.

Hány %-kal változott meg a három bankbetét átlaga, szórása és az átlagtól való átlagos abszolút eltérés?

4. E1 Határozd meg, hogy a táblázatba foglalt adatok esetén mennyi az adatsokaság

a) átlagtól vett átlagos abszolút eltérés;

b) mediánjától vett átlagos abszolút eltérés!

Adat	10	11	12	13	14	15
Gyakorisága	3	5	6	12	3	3

5. E1 (Emelt szintű érettségi, 2018)

500 különböző pozitív egész szám átlaga 1000. Legfeljebb mekkora lehet a számok közül a legnagyobb?

6. E1 (Emelt szintű érettségi, 2015)

Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egyik az A futószalagra kerül, a másik a B futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az A futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g és 46 g. Igazold, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik!

7. E1 Egy osztályban ugyanabból a témából két különböző feladatlapot írtak a diákok, 14-en az A jelűt, 16-an a B jelűt. Az A csoportban az átlagpontszám 22,5, míg a B csoportban 27 pont lett az átlag.

a) Hány pont lett a dolgozatot író 30 diák átlaga?

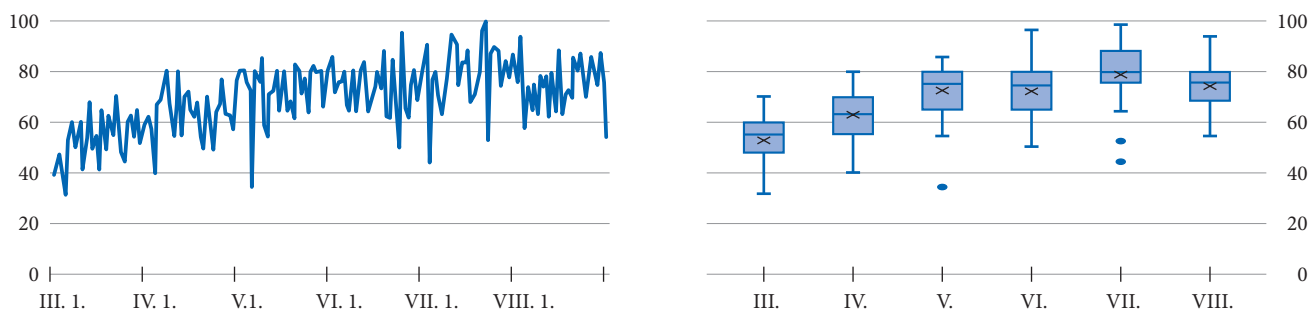
b) A számonkérés során hiányzó tanulók később pótolták a dolgozat írását. Ők mindannyian a maximális 30 pontot érték el, így ezzel együtt az osztály-átlag 25,2 pont lett egy tizedesjegyre kerekítve. Hányan pótolták utólag a dolgozatot?



diagramok, dobozdiagram

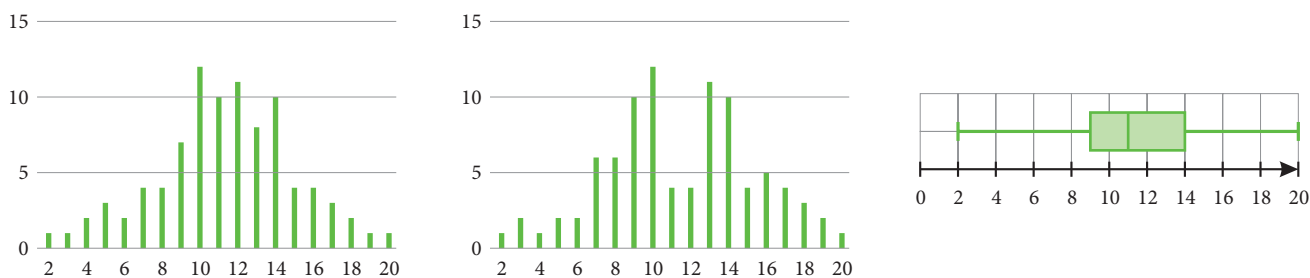
BEVEZETŐ

Grafikonon ábrázoltuk, hogy hányan kattintottak egy ismeretterjesztő honlapra egy féléves időtartam egyes napjain. Érdeemes az ábra szerinti kusza grafikon helyett egy jobban átlátható, könnyebben elemezhető ábrázolást választani. Jól szemlélteti az adatokat, ha egymás mellett a hat hónapra vonatkozó hat dobozdiagramot készítjük el.



Leolvasható például, hogyan alakult az egyes hónapokban a medián, melyik hónapban voltak kiugró adatok. Ebben az esetben a dobozdiagramok áttekinthetőbb képet adnak az adatokról és a folyamatról, mint az első vonaldiagram.

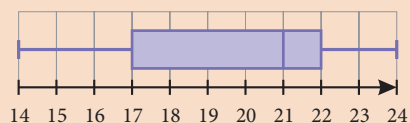
A dobozdiagram hátránya ugyanakkor, hogy vannak az adathalmaznak olyan jellemzői, amelyekről nem ad egyértelmű információt. Az ábra szerinti két oszlopdiagram esetében fontos különbség van a középső (átlagos) adatok számában, mindezek ellenére a két oszlopdiagramhoz ugyanaz a dobozdiagram tartozik.



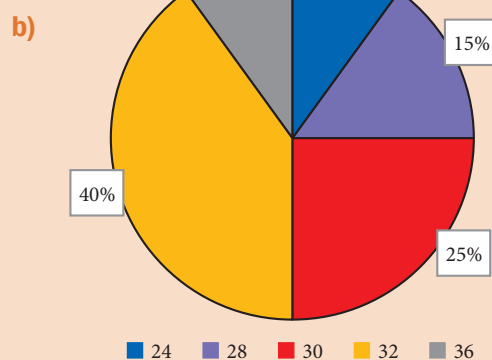
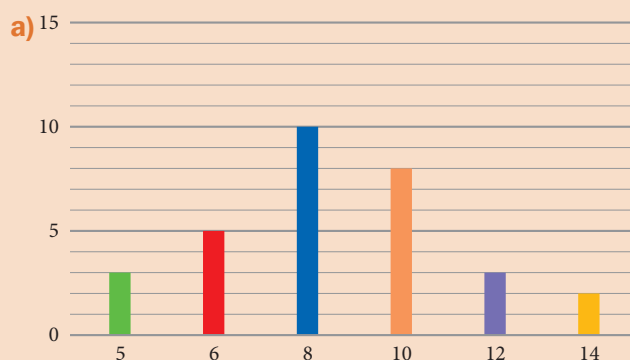
FELADATOK

- 1. E1** Igaz vagy hamis? Dobozdiagramon ábrázoltunk egy 90 adatból álló adatsokaságot. Állapítsd meg az állítások logikai értékét!

A	Az adatok közt szerepel a 22.
B	Ha az adatsokasághoz hozzá tesszük a 21-et, akkor nem változik meg az adatokhoz tartozó dobozdiagram.
C	Lehetséges, hogy az adatok fele nagyobb, mint 16 és kisebb, mint 21.
D	Legalább 0,25 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott adat kisebb, mint 18.
E	Kevesebb, mint 50% annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott adat nagyobb, mint 18 és kisebb, mint 22.



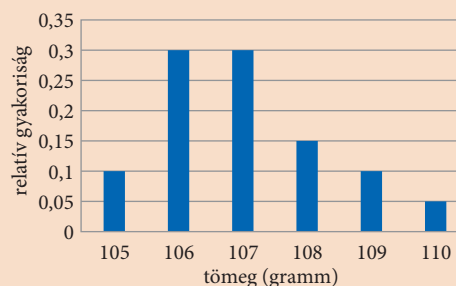
- 2. E1** Határozd meg az oszlopdiagramon, illetve a kördiagramon ábrázolt adatok szórását és az átlagtól való átlagos abszolút eltérését! Készíts dobozdiagramot a két adatsokaságról!



- 3. E1** (Emelt szintű érettségi, 2014)

Egy minőség-ellenőrzés során 120 darab terméket vizsgáltak meg. Feljegyezték az egyes darabok egész grammokra kerekített tömegét. Hatféle tömeg fordult elő, ezek relatív gyakoriságát mutatja az oszlopdiagram.

Készíts gyakorisági táblázatot a 120 adatról, és számold ki ezek átlagát és szórását!



- 4. E2** Egy felmérés során néhány középiskola diákjait kérték meg arra, hogy egy héten át jegyezzék fel az étkezési szokásaikat, és utána válaszoljanak arra, hogy naponta átlagosan hány percet fordítanak étkezésre. A válaszok között a legkisebb adat a 36 perc volt, a legnagyobb adat a 105 perc. Az adatokból következtetni lehet arra, hogy 0,25 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák naponta kevesebb, mint 52 percet, és 0,25 annak a valószínűsége, hogy több, mint 90 percet fordít étkezésre. Az adatok mediánja 72 perc volt.

a) Ábrázold dobozdiagramon a felmérés adatait!

b) Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztva a felmérésben részt vevő diákok közül két diákot, mindkettő több, mint 90 percet fordít étkezésre?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztva a felmérés adatai közül 5 adatot, azok közül 2 kisebb, mint 52 és 3 nagyobb vagy egyenlő, mint 52?

- 5. E1** Melyik fajta adatsorhoz melyik diagramtípust választanád? Indokold meg a választásodat!

a) A születések száma megyénként egy adott évben.

b) Egy részvény értékének változása adott időszakban.

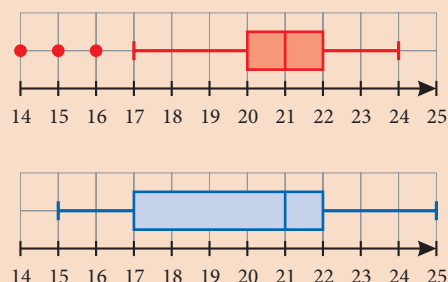
c) Egy ország erdőterületeinek fajtánkénti megoszlása egy adott évben.

d) Különböző energiahordozók felhasználásának százalékos aránya adott országban, adott évben.

e) Magyarországra érkező turisták száma országok szerint, adott hónapban

- 6. E1** Dobozdiagramon ábrázoltuk, hogy két úszó ugyanazon a távon milyen időeredményeket ért el a verseny előtti hónapban az edzések alatt. (Az időeredmények 1:14 (azaz 1 perc 14 másodperc) és 1:25 között vannak, a diagramon az 1 perc fölötti másodpercek jelennek meg.) Fogalmazz meg állításokat a diagramok alapján a két úszó időeredményeiről!

A két versenyző egyike ezen a távon nemcsak egyéniben, hanem az úszó vegyesváltó tagjaként is indulhat. Érveldj amellet, hogy melyik versenyzőt nevezné be a váltó tagjaként!





eseménytér, események összege, szorzata, a valószínűség fogalma, események függetlensége



események összegének és szorzatának a definíciója

KIDOLGOZOTT FELADAT

Három baráti házaspár érkezik egy étterembe: a Kiss, a Lovas és a Murai házaspár. Véletlenszerű sorrendben lépnek be egymás után az ajtón.

- a) Mennyi a valószínűség, hogy senki nem lép be közvetlenül a házastársa után?
 b) Független-e egymástól a következő két esemény? K : a Kiss házastársak közvetlenül egymás után lépnek be;
 M : a Murai házastársak közvetlenül egymás után lépnek be.

a) *Első megoldás:*

A hat ember $6! = 720$ -féle sorrendben léphet be az ajtón. A kedvező esetek összeszámolásához készítsünk Venn-diagramot! A K halmazba kerüljenek azok a sorrendek, amikor a Kiss házaspár tagjai közvetlenül egymás után lépnek be. Hasonlóan értelmezzük az L és M halmazt is.

Azok az esetek, amikor a Kiss házaspár tagjai egymás után lépnek be, megszámlálhatók kombinatorikai úton. Vegyük egy elemnek a Kiss házaspár tagjait, így velük együtt 5 elem van. 5 elem $5!$ -féle sorrendbe állítható. A Kiss házaspár tagjai kétféle sorrendben követhetik egymást, így a lehetőségek száma $5! \cdot 2$. Ezért a K halmaz számossága $5! \cdot 2 = 240$.

A $K \cap L$ halmaz számossága azon sorba rendezések száma, amikor a Kiss és a Lovas házaspár tagjai is egymás után jönnek. Ha a Kiss házaspár tagjait is, és a Lovas házaspár tagjait is egy-egy elemnek vesszük, akkor 4 elem van, ezek sorrendje $4!$ lehet. Mivel mindkét házaspár tagjai kétféleképpen állhatnak sorba, így a lehetőségek száma $4! \cdot 2 \cdot 2 = 96$.

Hasonló módon meghatározható a többi halmaz számossága is.

$$|K| = 5! \cdot 2 = 240$$

$$|L| = 5! \cdot 2 = 240$$

$$|M| = 5! \cdot 2 = 240$$

$$|K \cap L| = 4! \cdot 2 \cdot 2 = 96$$

$$|L \cap M| = 4! \cdot 2 \cdot 2 = 96$$

$$|M \cap K| = 4! \cdot 2 \cdot 2 = 96$$

$$|K \cap L \cap M| = 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$$

Azok a lehetőségek, amikor valamelyik házaspár tagjai egymás után következnek, a $K \cup L \cup M$ halmazban vannak. A kedvező lehetőségek száma tehát a $\overline{K \cup L \cup M}$ halmaz számosságával egyenlő. Alkalmazzuk a szitaformulát!

$$|K \cup L \cup M| = 240 + 240 + 240 - 96 - 96 - 96 + 48 = 480$$

$$\overline{K \cup L \cup M} = 720 - 480 = 240$$

Mivel az összes lehetőség $6! = 720$, a valószínűség:

$$P = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}.$$

Az eseménytér fogalmait használva a feladat így írható le.

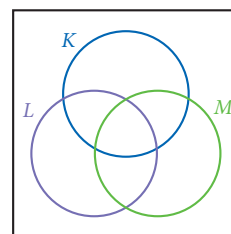
A hat ember 720 lehetséges sorrendje alkotja az **eseményteret**. Minden sorba rendezés egy **egyenlően valószínű elemi esemény**. Meghatározhatunk az eseménytéren belül három (nem elemi) **eseményt**:

K : a Kiss házaspár tagjai egymás után következnek.

L : a Lovas házaspár tagjai egymás után következnek.

M : a Murai házaspár tagjai egymás után következnek.

A feladat a $K + L + M$ esemény **komplementerének**, vagyis a $\overline{K + L + M}$ eseménynek a valószínűségét kérdezi.

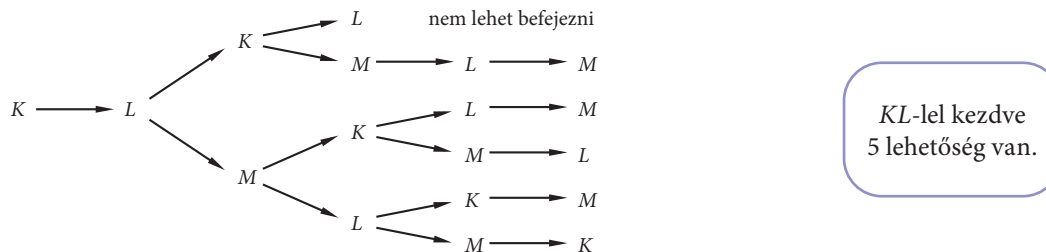


Második megoldás:

Minden sorrend megfeleltethető a K, K, L, L, M, M betűk egy sorrendjének. Nem különböztetjük meg a házaspárok tagjait, csak azt jegyezzük fel, hogy egy konkrét sorrendben Kiss (K), Lovas (L) vagy Murai (M) házastárs lép be az ajtón. A feladat ekkor átfogalmazható úgy, hogy ha véletlenszerűen sorba rendezzük a K, K, L, L, M, M betűket, akkor mennyi a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé azonos betű.

Sorba rendezünk hat elemet, melyek közül $2 - 2 - 2$ azonos (ismétléses permutáció). Az esetek száma $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$.

Ábrázoljuk gráffal azokat a sorba rendezéseket, amikor az első elem K , a második L , és nincs egymás mellett azonos betű.



Az első két betűt $3 \cdot 2 = 6$ -féleképpen választhatjuk, ezért a lehetőségek száma $6 \cdot 5 = 30$. A valószínűség: $P = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

Megjegyzés:

Az első megoldásban a hat ember 720 sorba rendezése, a második megoldásban a hat betű 90 sorba rendezése alkotja az eseményteret. Nagyon fontos, hogy az elemi események mindkét esetben egyenlően valószínűek.

- b) Két esemény akkor független egymástól, ha annak a valószínűsége, hogy mindkét esemény bekövetkezik, egyenlő azon valószínűségek szorzatával, hogy az egyik esemény, illetve a másik esemény bekövetkezik: $P(K \cdot M) = P(K) \cdot P(M)$.

Használjuk fel az a) részben az első megoldásban számolt eredményeket! ($|K| = |M| = 240$ és $|K \cap M| = 96$)

$$P(K) = \frac{240}{720} = \frac{1}{3} \quad P(M) = \frac{240}{720} = \frac{1}{3} \quad P(K \cdot M) = \frac{96}{720} = \frac{2}{15} \quad \blacktriangleright \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \neq \frac{2}{15}$$

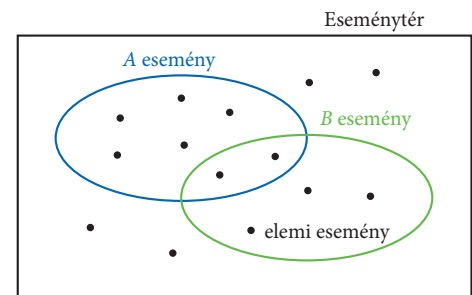
K és M tehát nem független egymástól. (A K esemény nagyobb valószínűséggel következik be $\overline{M}$ esetén, mint M esetén.)

ELMÉLET

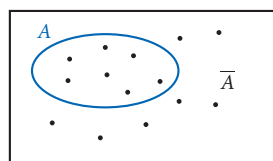
1. Esemény, események összege és szorzata

Definíció: Egy véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük, ezek halmaza az **eseménytér**. Az eseménytér részhalmazai az **események**.

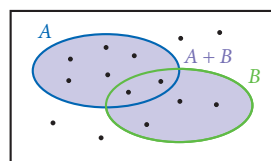
- ▶ Az A esemény **komplementerének** azt az eseményt nevezzük, amikor az A esemény nem következik be. Jele: $\overline{A}$.
- ▶ Az A és a B esemény **összegének** azt az eseményt nevezzük, amikor az A esemény és a B esemény közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A + B$.
- ▶ Az A és a B esemény **szorzatának** azt az eseményt nevezzük, amikor az A esemény és a B esemény is bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$, illetve AB .



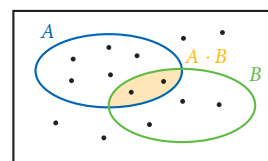
Az A és a B események **egymást kizáró események (diszjunkt események)**, ha egyszerre nem következhetnek be. Így a szorzatuk bekövetkezésének valószínűsége $P(A \cdot B) = 0$. (Pl. az elemi események diszjunkt események.)



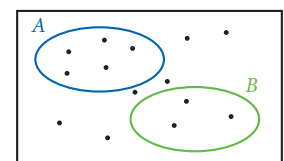
komplementer események



események összege



események szorzata



egymást kizáró események

Megjegyzés:

A valószínűség egy olyan P függvényként definiálható, amelynek értelmezési tartománya az események halmaza, és minden A eseményhez egy valós számot rendel úgy, hogy

- ▶ $0 \leq P(A) \leq 1$;
- ▶ a biztos esemény valószínűsége 1;
- ▶ ha A és B egymást kizáró események, akkor a $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

2. Független események

Definíció: Az A és a B események **függetlenek**, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Sok esetben a független események olyanok, hogy nincsenek egymással semmilyen kapcsolatban. Például ha feldobunk kétszer egy dobókockát, akkor az az esemény, hogy először hatost dobunk, nincs hatással arra, hogy másodszor ötöst dobunk-e. (Függetlenek lehetnek azonban olyan események is, amelyek valamilyen módon kapcsolatban vannak egymással.) A függetlenség akkor teljesül, ha a B esemény valószínűsége ugyanakkora abban az esetben, ha az A esemény bekövetkezik, mint amikor az $\bar{A}$ következik be.

FELADATOK

- 1. E1** Feldobunk két szabályos dobókockát. Az alábbi táblázatban soronként állapítsd meg az A , a B és az $A \cdot B$ események valószínűségét, és ennek ismeretében dönts el, hogy az A és B események függetlenek-e.

A esemény	B esemény
Az egyik dobás páros.	Az első dobás páratlan.
A dobások összege 7.	A második dobás osztója 5-nek.
Az egyik dobás hatos.	A dobások összege 8.
A dobások összege prímszám.	A dobások szorzata négyzetszám.
Az első dobás négyzetszám.	A dobások különbsége 6.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- 2. E1** Ha $P(A) = 0,6$ és $P(B) = 0,7$, akkor mi a lehető legnagyobb és legkisebb értéke $P(A + B)$ -nek és $P(A \cdot B)$ -nek?

- 3. E1** Egy előrejelzés szerint 0,5 a valószínűsége annak, hogy Pécsen, és 0,3 a valószínűsége annak, hogy Szegeden esni fog holnap az eső. 0,15 annak a valószínűsége, hogy mindkét városban esni fog. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik városban esni fog az eső?

- 4. E1** Feldobunk két dobókockát. Igazold, hogy a következő események páronként függetlenek, ugyanakkor annak a valószínűsége, hogy egyszerre mindhárom esemény bekövetkezik, nem egyenlő $P(A)$, $P(B)$ és $P(C)$ szorzatával!

A: Az első dobás páros.
B: A második dobás páratlan.
C: A két dobás összege páros.

- 5. E2** Három baráti házaspár tagjai véletlenszerű sorrendben lépnek be egymás után egy ajtón. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy olyan házaspár van, akik közvetlenül egymás után lépnek be?

- 6. E2** Egy könyvespolcon 9 darab könyv van, a Gyűrűk ura sorozat 3 kötete, az Alapítvány trilógia 3 kötete és a Korfu trilógia 3 kötete. Ha véletlenszerűen rakják a 9 könyvet egymás mellé a polcra, akkor mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik sorozat 3 kötete egymás mellé kerül?

- 7. E2** (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egy n pontú teljes gráf egyik élét pirosra színeztük ($n \geq 3$). Ezután a többi él közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott élnek és a piros élnek van közös csúcsa, a B esemény az, hogy nincs közös csúcsuk.

Ha az A és a B esemény egyenlő valószínűségű, akkor hány pontja van a gráfnak?



feltételes valószínűség

BEVEZETŐ

Vannak olyan betegségek, amelyek előfordulásának gyakorisága különböző a férfiak és a nők között. Ilyen például a színtévesztés. A nőknek körülbelül 0,4%-a, míg a férfiaknak 8%-a színtévesztő. Ez azt jelenti, hogy ha egy véletlenszerűen kiválasztott emberről tudjuk, hogy férfi, akkor 0,08 valószínűséggel színtévesztő. Ha tudjuk, hogy nő, akkor 0,004 valószínűséggel színtévesztő. A valószínűséget nem a teljes emberi populációra vonatkoztatva ismerjük, hanem egy feltétellel: a férfiakra vonatkoztatva, vagy a nőkre.



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy településen a nők és a férfiak aránya 50–50%. A nőknél 0,004, a férfiaknál 0,08 annak a valószínűsége, hogy közülük valakit véletlenszerűen kiválasztva, az adott személy színtévesztő. Mennyi a valószínűség, hogy a településen

a) egy véletlenszerűen kiválasztott ember színtévesztő;

b) ha a színtévesztő emberek közül választunk ki véletlenszerűen egy embert, akkor ő férfi?

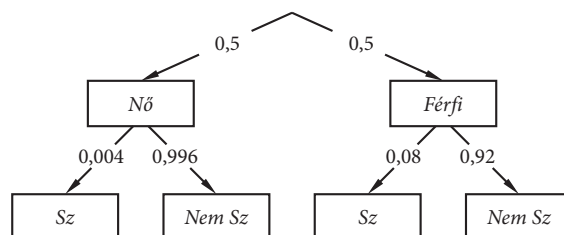
Első megoldás:

Használjuk az eseményekre a következő jelöléseket, és ábrázoljuk gráffal a valószínűségeket!

Nő: egy véletlenszerűen kiválasztott ember nő

Férfi: egy véletlenszerűen kiválasztott ember férfi

Sz: egy véletlenszerűen kiválasztott ember színtévesztő



a) A gráfról leolvasható, hogy (mivel a teljes lakosság 50%-ának a 0,4 százaléka színtévesztő nő stb.)

$$P(Nő \text{ és } Sz) = 0,5 \cdot 0,004, \quad P(Férfi \text{ és } Sz) = 0,5 \cdot 0,08.$$

Mivel a *Nő* és *Sz*, valamint a *Férfi* és *Sz* egymást kizáró események, így annak a valószínűsége, hogy egy ember színtévesztő, a két valószínűség összege:

$$P(Sz) = 0,5 \cdot 0,004 + 0,5 \cdot 0,08 = 0,042. \quad (\text{Ez megfelel annak, hogy a településen lakó emberek 4,2\%-a színtévesztő.})$$

b) Ha a színtévesztő emberek közül választunk véletlenszerűen egy embert, akkor az a) részben meghatározott 4,2% közül

$$\text{választunk valakit (ez az „alaphalmaz”). Így a valószínűség: } P(Férfi, \text{ ha } Sz) = \frac{P(Férfi \text{ és } Sz)}{P(Sz)} = \frac{0,5 \cdot 0,08}{0,042} \approx 0,952.$$

Második megoldás:

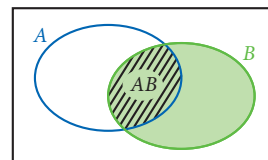
Foglaljuk táblázatba a településen élők számát aszerint, hogy valaki férfi vagy nő, illetve színtévesztő vagy nem. Mivel csak valószínűségekre (arányokra) vagyunk kíváncsiak, feltehetjük, hogy a településen 1000 ember él. Ezt írjuk a jobb alsó sarokba. A lakosok fele nő és fele férfi, tehát beírhatjuk alulra, hogy 500, 500. A férfiak 0,08 része színtévesztő tehát $500 \cdot 0,08 = 40$ ember. A nők 0,004 része színtévesztő, ez $500 \cdot 0,004 = 2$ ember. (Ennek a feladatnak a megoldásához nem szükséges, de a táblázat többi mezőjét is ki lehet már tölteni.)

	Nő	Férfi	
Színtévesztő	2	40	42
Nem színtévesztő	498	460	958
	500	500	1000

A táblázat utolsó oszlopából és első sorából kiolvasható, hogy a) $P(Sz) = \frac{42}{1000} = 0,042$, b) $P(Férfi, \text{ ha } Sz) = \frac{40}{42} \approx 0,952$.

Ha az A és a B események esetében – ahol B nem lehetetlen esemény – azt vizsgáljuk, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik, akkor **feltételes valószínűségről** beszélünk. Jele: $P(A|B)$.

Az ábra alapján belátható, hogy $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.



FELADATOK

- 1. E1** Táblázatba foglaltuk egy színházi előadás nézőinek nem és életkor szerinti megoszlását. Mennyi a valószínűsége, hogy

	Nő	Férfi
50 évnél fiatalabb	210	170
50 éves vagy annál idősebb	320	300

- a) egy véletlenszerűen kiválasztott női néző 50 évnél fiatalabb;
b) két véletlenszerűen kiválasztott 50 évnél fiatalabb néző közül mindkettő férfi?

- 2. E1** Két dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) a dobott számok összege 8, ha legalább az egyik dobás hatos;
b) legalább az egyik dobás hatos, ha a dobott számok összege 8;
c) a dobott számok összege páratlan, ha a két dobás egyenlő;
d) a két dobás egyenlő, ha a dobott számok összege páros;
e) mindkét dobás prím, ha a dobások összege prím;
f) a dobások összege prím, ha mindkét dobás prím?

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- 3. E1** Egy élelmiszerboltba két termelőtől érkezik alma. Az első szállítmánnyal érkezett az almák 65%-a, ezeknek a gyümölcsöknek a 0,2%-a sérült. A többi alma a második szállítmánnyal érkezett, amelynek 0,5%-a sérült.

- a) Készíts valószínűségi gráfot, amely ábrázolja azt, hogy az almák milyen valószínűséggel érkeztek az egyes szállítmányokkal, és azon belül milyen valószínűséggel sérültek!
b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy alma az első szállítmánnyal érkezett, ha tudjuk, hogy sérült?

- 4. E2** (Emelt szintű érettségi, 2018)

Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogatásnak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette?
b) A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a. Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

- 5. E2** Egy orvosi teszt egy bizonyos vírus szervezetben való jelenlétének kimutatására szolgál. A teszt útmutatója azt írja, hogy a vírus jelenlétét 98%-os biztonsággal mutatja ki. A tesztről tudjuk, hogy a vírushordozók esetében 0,982 valószínűséggel pozitív, 0,018 valószínűséggel negatív eredményt mutat. A teszt néha azoknál is pozitívat jelez, akik nem hordozzák a vírust, náluk 0,01 a valószínűséggel pozitív, 0,99 valószínűséggel negatív eredményt mutat. Ismert továbbá, hogy 0,005 annak a valószínűsége, hogy egy ember hordozza ezt a vírust.

- a) Egy embernél elvégezték ezt a tesztet, és azt tapasztalták, hogy a teszt eredménye pozitív. Mennyi a valószínűsége, hogy vírushordozó?
b) Egy embernél a teszt eredmény pozitív, ezért még egyszer elvégezték nála a tesztet. Ha a második teszt is pozitív, akkor mennyi a valószínűsége, hogy vírushordozó?
c) Szerinted megfelelő-e ennek a tesztnek a megbízhatósága? Válaszod indokold!



ELMÉLET

1. A binomiális eloszlás

Sokszor előfordul, hogy egy véletlen kísérlet többször ismétlődik, akár egymás után, akár egyszerre. Például többször egymás után dobunk a dobókockával, vagy egyszerre több dobókockával dobunk, vagy ugyanazt a fizikai kísérletet végezzük többször ugyanolyan körülmények között, vagy egyenlő valószínűséggel jellemző egy tulajdonság egy halmaz minden elemére.

Binomiális eloszlásról beszélünk, ha $(n, k \in \mathbb{N}, k \leq n)$

- ▶ n -szer ismétlődik ugyanaz a kísérlet (ugyanolyan körülmények között);
- ▶ minden egyes kísérlet kimenetele p valószínűséggel az A esemény, és $1 - p$ valószínűséggel az $\bar{A}$ esemény;
- ▶ azt vizsgáljuk, hogy mennyi a valószínűsége, hogy n kísérletből pontosan k kísérlet kimenetele az A esemény.

$$P(n \text{ kísérletből pontosan } k \text{ esetben lesz a kimenetel } A) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

2. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

A statisztika a tömegesen előforduló jelenségekkel és az azokból nyert adatok elemzésével foglalkozik. Nagyon nagy adatszám esetén a tulajdonságok vizsgálatát nem terjesztik ki minden adatra, hanem az adatsokaságból véletlenszerűen kiválasztott adatokat vesznek alapul, vagyis ún. **mintát** vizsgálnak, és ez alapján vonnak le következtetéseket.

Visszatevéses mintavétel során a minta elemeit egyenként választjuk ki, majd a vizsgálat után visszatesszük, ezután kivesszük a következőt, és így tovább. A visszatevés miatt ez egyszerűbb eljárás, mivel nem kell külön figyelmet fordítani a már kiemelt elemek gyűjtésére. Ez egy olyan véletlen kísérlet, amelyet tetszőlegesen sokszor lehet megismételni ugyanolyan körülmények között, az egymást követő kísérletek függetlenek egymástól. A mintavétel elvégzésekor azt ellenőrizzük, hogy a kiválasztott n elem közül hány rendelkezik egy előre meghatározott tulajdonsággal. Ezt a mintavételt a binomiális eloszlás jellemzi.

Visszatevés nélküli mintavétel során egymás után vesszük ki az elemeket a sokaságból, de a már kivett elemeket nem tesszük vissza. Ezt úgy is végrehajthatjuk, hogy egyszerre emeljük ki a minta kiválasztott elemeit. Azt vizsgáljuk, hogy ha N elemből M rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal (az összes többi pedig nem), akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy n darabot (visszatevés nélkül) kihúzva pontosan k rendelkezik az adott tulajdonsággal a kiválasztottak közül. Ezt a mintavételt a **hipergeometriai eloszlás** írja le.



$$P(A) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Megjegyzések:

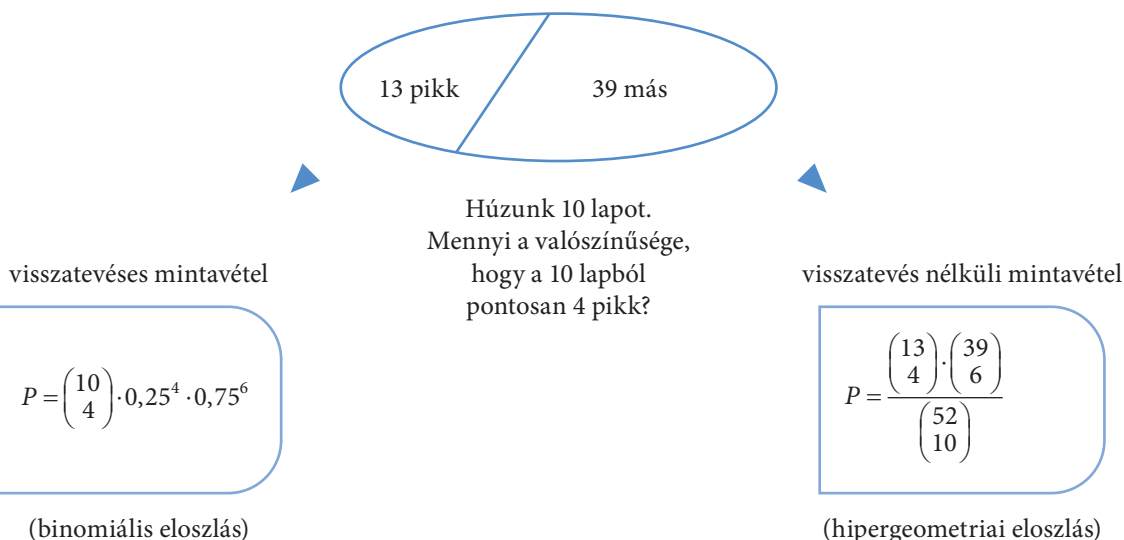
1. A visszatevéses mintavétel esetén az egymást követő kísérletek egymástól független események: egy ilyen kísérlet kimenetele nem függ attól, hogy az előző kísérletnek mi volt az eredménye. Minden kísérletnél az A esemény valószínűsége p és az $\bar{A}$ esemény valószínűsége $1 - p$.

A visszatevés nélküli mintavétel esetén ez nem teljesül. Minden kísérletnél az A , illetve az $\bar{A}$ (kedvező, illetve nem kedvező) kimenetel valószínűségét befolyásolja az, hogy az előző kísérleteknek mi volt a kimenetele.

2. Ha nagyon nagy elemszámú halmazból választunk a halmaz elemszámánál jóval kevesebb számú elemet, akkor a kétféle mintavétellel kapott valószínűségek alig térnek el egymástól. A binomiális eloszlás értékeit azonban nagy elemszám esetén sokkal könnyebb kiszámolni. Ezért bizonyos esetekben a visszatevéses modell alapján érdemes számolni.

Például:

Egy pakliban 52 kártya van, közte 13 pikk, a többi nem pikk. Véletlenszerűen húzva 10 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között pontosan 4 pikk?



FELADATOK

1. E1 Egy pakliban 52 kártya van, közte 13 pikk, a többi nem pikk. Véletlenszerűen húzva 10 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy közülük pontosan 4 pikk, ha

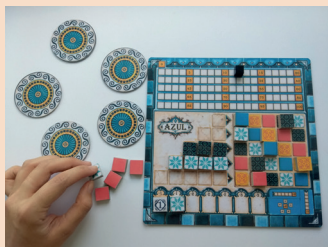
- a) visszatevéssel választunk;
- b) visszatevés nélküli mintavételt alkalmazunk?

2. E1 Egy gyárban az egyik gyártósor meghibásodik, és az ott készült termékek 3%-a hibás. Egyik nap 90 termék készült azon a gyártósoron. Mennyi a valószínűsége, hogy a 90 termék közül legfeljebb 2 termék hibás?

3. E1 Egy társasjáték 5-féle mintázatú csempét tartalmaz, mindegyikből 20-20 db-ot.

A játék elején mind a 100 csempét beletesszük egy zsákba, és véletlenszerűen húzzunk a zsákból 4 db csempét. Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőként kihúzott 4 csempe között

- a) pontosan 2 db fekete háttérű csempe van;
- b) pontosan 3 db sárga háttérű van;
- c) pontosan 2 db fekete és 2 db sárga háttérű van;
- d) 2 db fekete háttérű, 1 db sárga háttérű és 1 db egyszínű kék csempe található?



4. E1 (Emelt szintű érettségi, 2021)

- a) Egy egyetemi előadáson 32-en ülnek a teremben. Ha négy lány távozna, akkor a jelenlévők több mint 60%-a fiú lenne. Ha azonban a 32 főhöz további hat lány csatlakozna, akkor a jelenlévők több mint fele lenne lány. Hány fiú és hány lány lehet jelen az előadáson?
- b) Az egyetem több ezer hallgatójának 60%-a fiú, 40%-a lány. (Ezt tekinthetjük úgy, hogy 0,6 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgató fiú, és 0,4 annak a valószínűsége, hogy lány.) Ha az egyetem büféjében egy asztalhoz véletlenszerűen ül le négy hallgató, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy több fiú van közöttük, mint lány?
- c) Ha három lány hallgató találkozik véletlenszerűen, akkor 0,008 annak a valószínűsége, hogy mindegyikük rendszeresen sportol. A lányok hányadrésze sportol rendszeresen?

5. E2 Egy részvény tőzsdei ára 1600 Ft-on zárt egy adott napon. A szakértői előrejelzések alapján az elemzők úgy számolnak, hogy a következő napokban a részvény záró ára minden nap 0,58 valószínűséggel 1%-kal emelkedni, 0,42 valószínűséggel 1%-kal csökkenni fog.

- a) Mennyi lenne ezen modell szerint a részvény záró ára, ha 8 egymás utáni napon 1%-kal emelkedne, majd utána 2 napon 1%-kal csökkenne?
- b) Mennyi a valószínűsége, hogy ezen modell szerint 10 nap elteltével a részvény záró ára 1698 Ft?
- c) Mennyi a valószínűsége, hogy ezen modell szerint 10 nap elteltével a részvény záró ára legalább 1698 Ft?

6. E2 Egy szobában párhuzamosan egymástól 10 cm-re padlórések futnak. Leejtünk egy 5 cm hosszú tűt. 1777-ben Buffon grófia vetette fel azt a feladatot, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy a tű átmetsz egy padlórést.

Bizonyítható, hogy ilyen hosszúság arányok esetén a valószínűség $\frac{1}{\pi}$.



Ez azért is érdekes eredmény, mert ennek segítségével kísérletekkel becslés adható a π -re. 1885-ben Stephan Smith angol matematikus 3200-szer hajtotta végre ezt a kísérletet, és így π -re 3,1553-at kapott.

Ha véletlenszerűen leejtünk 10 ilyen tűt, akkor mennyi a valószínűsége, hogy

- a) pontosan 5 metszi át valamelyik padlórést;
- b) legalább 8 metszi át valamelyik padlórést?

7. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy dobozban 4 piros és 3 zöld golyó van.

a) A dobozba beteszünk még s darab sárga golyót. A golyók közül visszatevéssel kihúzzunk kettőt. Határozd meg s értékét, ha 0,09 annak a valószínűsége, hogy mindkét kihúzott golyó zöld!

b) A dobozba beteszünk még k darab kék golyót ($k \geq 1$). A golyók közül visszatevés nélkül kihúzzunk hármat. Igazold, hogy annak a valószínűsége, hogy három különböző színű golyót húzzunk,

$$\frac{72k}{(k+7)(k+6)(k+5)}.$$

c) A dobozba beteszünk még k darab kék golyót ($k \geq 1$). A golyók közül visszatevés nélkül kihúzzunk hármat. Határozd meg k értékét, ha annak a valószínűsége, hogy három különböző színű golyót húzzunk, megegyezik annak a valószínűségével, hogy mindhárom kihúzott golyó kék!

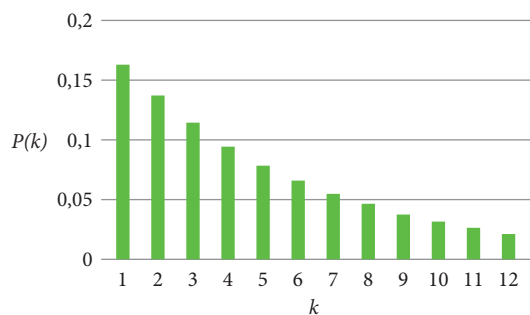
RÁADÁS

Binomiális eloszlásról beszélünk, ha ugyanazt a kísérletet ismétljük n -szer, és azt kérdezzük, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy az n kísérletből pontosan k alkalommal kedvező a kísérlet kimenetele. Másféle gondolatmenethez és másik eloszláshoz vezet, ha ugyanazt a kísérletet ismétljük n -szer, de más a kérdés.

Például: Szabályos dobókockával dobunk sokszor egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy a k -adik dobás az *első* hatos dobás?

Ahhoz például, hogy az ötödik dobás legyen az első hatos dobás, annak kell bekövetkezni, hogy négyszer nem dobunk hatost,

ötödikre viszont hatost dobunk. Ennek valószínűsége $P(5) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0804$.



$$P(\text{a } k\text{-adik dobás az első hatos dobás}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

Ennek az eloszlásnak érdekessége, hogy a legvalószínűbb a $k = 1$ eset, ugyanakkor az eloszlás várható értéke 6. Átlagosan a hatodik dobás az első hatos. (Aki sokszor játszott társasjátékot, az tapasztalhatta, hogy sokszor előfordul, hogy egyből hatost dobunk, de olyan eset is van, hogy nagyon sokáig nem dobunk hatost. Így áll elő, hogy *átlagosan* a hatodik dobás az első hatos dobás.)



← várható érték

→ binomiális eloszlás várható értéke

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy szerencsekerék úgy van cikkekre osztva, hogy ha egyszer megpörgetjük, akkor 0,3 valószínűséggel nyerünk 850 Ft-ot és 0,7 valószínűséggel nem nyerünk semmit. A vurstliban egy 1500 Ft-ba kerülő kuponért 5-ször lehet megpörgetni ezt a szerencsekeréket. Egy kupon vásárlása esetén

- mennyi a nyertes pörgetések számának várható értéke?
- mennyi a teljes nyereség várható értéke?
- mennyi a vurstli tulajdonosának várható nyeresége?

Megoldás:

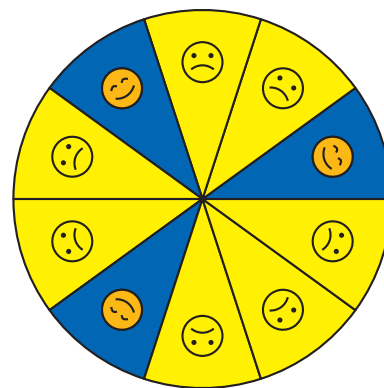
- Soroljuk fel a kísérlet lehetséges kimeneteleit, és határozzuk meg, hogy melyik kimenetel mekkora valószínűséggel következik be! A lehetséges kimeneteket a nyerő pörgetések száma jelenti, vagyis az, hogy az 5 pörgetésből pontosan 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 alkalommal nyerünk. Annak a valószínűsége például, hogy pontosan 2 alkalommal nyerünk, a binomiális eloszlás szerint

$$P(2) = \binom{5}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^3 = 0,3087. \text{ Táblázatba foglaltuk a számítások eredményeit.}$$

Nyertes pörgetések száma	0	1	2	3	4	5
Valószínűség	0,1681	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

Egy kísérlet kimenetelének várható értéke a lehetséges kimenetelnek a hozzájuk tartozó valószínűségekkel súlyozott átlaga. $E = 0 \cdot 0,1681 + 1 \cdot 0,3602 + 2 \cdot 0,3087 + 3 \cdot 0,1323 + 4 \cdot 0,0284 + 5 \cdot 0,0024 = 1,5$. Ez azt jelenti, hogy 5 pörgetésből átlagosan 1,5-szer nyerünk.

- Mivel a nyereség minden alkalommal 850 Ft, így 5 pörgetés esetén a nyereség várható értéke $1,5 \cdot 850 = 1275$ Ft. Pontosán ekkora nyereség az 5 pörgetésből sosem lehet. Lehet nyerni 0; 850; 1700; 2550; 3400 vagy 4250 Ft-ot. Az átlagos nyereség azonban 1275 Ft.
- Minden eladott kuponért 1500 Ft-ot kap, és várhatóan 1275 Ft-ot fizet. Egy kuponra a nyereség várható értéke 225 Ft.



ELMÉLET

1. Várható érték

Foglaljuk táblázatba a kísérlet lehetséges kimeneteleit!



Határozzuk meg az egyes kimenetel valószínűségeit!



Számoljuk ki a kimenetelnek a valószínűségeikkel súlyozott átlagát!

2. A binomiális eloszlás várható értéke

Bebizonyítható, hogy a binomiális eloszlás várható értéke:

$$E = n \cdot p$$

(ha n jelöli a kísérletek számát, és p jelöli az egyes kísérletekben a „kedvező” kimenetel valószínűségét)

Például ha 30-szor dobunk a dobókockával, akkor a hatosok számának várható értéke $30 \cdot \frac{1}{6} = 5$.

Megjegyzés:

Ha egyetlen kísérletet hajtunk végre, akkor a „kedvező” kimenetek száma p valószínűséggel 1 és $1 - p$ valószínűséggel 0. Ezért az egyetlen kísérlet várható értéke $1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$. Belátható, hogy független események esetén az egyes eseményekre számolt várható értékek összeadódnak. Így ha n -szer végezzük el ugyanezt a kísérletet, akkor a várható érték $n \cdot p$.

FELADATOK

1. E1 Mennyi a hatos dobások számának várható értéke, ha

a) 50-szer dobunk egy dobókockával;

b) 20-szor dobunk két dobókockával?

2. E2 Egy részvény záró ára az egyik napon 2450 Ft. Egy szakértői modell szerint a következő 3 napban ezen részvény záró ára 0,55 valószínűséggel 3%-kal emelkedik és 0,45 valószínűséggel 2%-kal csökken. Határozd meg, hogy a modell szerint 3 nap múlva mennyi a részvény záró árának várható értéke!

3. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)

a) Az egyik héten Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a hátralevő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja!

b) A héten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba. A jobb oldali táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találattal nem lehet nyerni). Számold ki, hogy mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft!

Találatok száma	Nyertes szelvények száma	Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1 617	34 925
2	62 757	1 970

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az egyik járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni. Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy ezen járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve?

5. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egy étteremben 12 és 14 óra között 3900 Ft befizetéséért annyit fogyaszt a vendég, amennyit szeretne. A befizetendő összeget egy előzetes felmérés alapján állapították meg. A felmérés során osztályokba sorolták a vendégeket aszerint, hogy az étteremnek hány forintjába kerültek. Az alábbi táblázat mutatja a felmérés eredményét. A táblázat első sorában az osztályközépek láthatók. A táblázatba foglalt információkat tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen betérő vendég esetén például 0,25 annak a valószínűsége, hogy a vendég 2800 Ft-ba kerül az étteremnek.

Fejenként ennyi Ft-ba került az étteremnek	1000	1900	2800	3600	4400	5200
A vendégek ennyi %-a	10	20	25	30	10	5

a) A felmérés eredményét felhasználva számold ki, hogy az étteremnek 1000 vendég esetén mekkora a várható haszna!

b) A fenti táblázat értékeivel számolva mennyi a valószínűsége, hogy két (ebédre betérő) vendég együttes fogyasztása veszteséget jelent az étteremnek?

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy járvány terjedésének felfelé ívelő szakaszában a járványügyi szakértők arra kéri a politikusokat, hogy ne engedélyezzék a 100 főnél nagyobb összejöveteleket, mert azokon nagyon nagy a fertőződés veszélye. A szakértők azzal számolnak, hogy a járvány jelenlegi szakaszában a lakosság 0,5%-a fertőző, amit úgy modelleznek, hogy minden ember 0,5% valószínűséggel fertőző. A javaslat egyik ellenzője szerint nincs szükség korlátozásra, mert 1-nél kevesebb a 100 fő közül a fertőző emberek számának várható értéke, tehát általában nem kell számolni azzal, hogy valaki fertőző. Állapítsd meg ebben a modellben a következő két állítás logikai értékét!

A: Egy 100 fős rendezvényen a résztvevők között a fertőzők számának várható értéke kisebb, mint 1.

B: Annak a valószínűsége, hogy egy 100 fős rendezvényen részt vesz legalább egy fertőző, nagyobb, mint 39%.

Megoldás:

Mivel a modell szerint minden ember egymástól függetlenül 0,005 valószínűséggel fertőző, binomiális eloszlásról van szó, melyben $p = 0,005$ és $n = 100$. A fertőzöttek számának várható értéke a 100 ember között: $E = n \cdot p = 100 \cdot 0,005 = 0,5$. Az A állítás tehát igaz.

Annak a valószínűsége, hogy legalább egy ember fertőző, a komplementer esemény segítségével számolható.

$$P(\text{a 100 ember közül senki sem fertőző}) = 0,995^{100} \approx 0,6058 \quad \blacktriangleright \quad P(\text{legalább 1 fertőző}) = 1 - 0,6058 = 0,3942.$$

A B állítás is igaz: 39,4% annak a valószínűsége, hogy legalább egy ember fertőző.

Meglepőnek tűnhet egymás mellett a két állítás. Az, hogy a várható érték kisebb, mint 1, nem jelenti azt, hogy nagyon nagy valószínűséggel nincs fertőző a 100 fő között. Igaz, hogy 60,58% valószínűséggel nincs köztük fertőző, de kifejezetten jelentős annak a valószínűsége, hogy van.

A 100 fő között a fertőzők számának várható értéke 0,5.



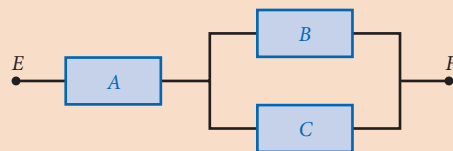
39,42% valószínűséggel van fertőző a 100 fő között.

Megjegyzés: A határozat meghozatalakor a szakértőknek más szempontokat is mérlegelni kell. Például azt, hogy a betegség hordozója milyen valószínűséggel fertőz meg egy másik embert, mennyi a betegség ellen védettek aránya, milyen súlyos betegségről van szó.

FELADATOK

1. E2 Gondold végig a kidolgozott feladatban vázolt járványra vonatkozó állításokat 50 fős, illetve 200 fős rendezvény esetére! (Egy járvány egy adott szakaszában a lakosság 0,5%-a fertőző, amit úgy modelleznek, hogy minden ember 0,5% valószínűséggel fertőző. Mennyi az 50, illetve a 200 fős rendezvényen résztvevők közül a fertőző emberek számának várható értéke? Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy fertőző van az 50, illetve a 200 résztvevő között?)

2. E1 Az ábrán látható kapcsolási rajzban szereplő fogyasztók előregedtek. Az A fogyasztó 0,2 valószínűséggel, a B fogyasztó 0,3 valószínűséggel, a C fogyasztó pedig 0,4 valószínűséggel zárlatos. A fogyasztók zárlatos meghibásodásai egymástól független események. A kapcsolási rajz alapján akkor folyik áram az E és F pont között, ha az A fogyasztó nem zárlatos és a B és C fogyasztó közül legalább az egyik nem zárlatos.



a) Mekkora a valószínűsége, hogy folyik áram az E és F pontok között?

b) Ha nem folyik áram az E és F pontok között, akkor mekkora a valószínűsége, hogy a hibát az okozza, hogy az A fogyasztó zárlatos?

3. E1 Egy A esemény valószínűsége 0,8, egy B esemény valószínűsége 0,6. Mennyi lehet az $A + B$ és az $A \cdot B$ esemény valószínűsége?

4. E1 Egy A esemény valószínűsége 0,4, egy B esemény valószínűsége 0,15. Mekkora a $P(A | B)$ valószínűség, ha

a) A és B független események;

b) A és B diszjunkt események?

5. E1 (Emelt szintű érettségi, 2018)

Egy matematika-vizsgafeladatban három állítás logikai értékét kell meghatározni. Három helyes válasz esetén 2, két helyes válasz esetén 1, kettőnél kevesebb helyes válasz esetén 0 pontot kap a vizsgázó. Béla tanult egy keveset, de bizonytalan a tudása: mindegyik kérdésnél 0,6 valószínűséggel találja el a helyes választ. Számold ki annak a négy eseménynek a valószínűségét, hogy Béla sikeres tippjeinek száma 3, 2, 1, illetve 0, és határozd meg Béla pontszámának várható értékét!

6. E2 Petra olyan helyen lakik, hogy a négyes és a hatos villamossal is el tud jutni az iskolájába. Minden reggel kimegy a villamosmegállóba, és felszáll az első villamosra. Feltesszük, hogy minden alkalommal 0,5 valószínűséggel négyes, 0,5 valószínűséggel hatos villamos érkezik előbb.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy öt egymás utáni napon mindig ugyanolyan számú villamossal utazik?

b) Ha tudjuk, hogy az elmúlt 3 napból pontosan kétszer négyessel utazott, akkor mennyi a valószínűsége, hogy tegnap négyessel utazott?



7. E2 Egy szerencsekerék megpörgetése során 0,2 valószínűséggel nyerünk, 0,8 valószínűséggel nem nyerünk.

a) Ha 10-szer megpörgetjük a kereket, akkor mennyi a valószínűsége, hogy legalább egyszer nyerünk?

b) Hányszor kell megpörgetni ezt a szerencsekereket, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer nyerünk, nagyobb legyen, mint 0,9?

8. E1 Háromszor feldobunk egy szabályos pénzérmét. Független-e az alábbi két esemény?

a) A : pontosan két dobás fej

B : az első és a második dobás különböző

b) A : az első dobás írás

B : pontosan kétszer dobunk írást

9. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

a) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4?

b) Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának n forintot ($n > 80$); ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet ($n - 80$) forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak $2(n - 80)$ forintot. Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0?

10. E1 Egy évfolyamból véletlenszerűen megszólítunk egy diákot, és megkérdezzük tőle, hogy hányan járnak az osztályukba. Mennyi a válaszok várható értéke, ha az évfolyamon 3 osztály van, 28, 30 és 37 fővel?

11. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

a) Egy szabályos dobókockával hatszor dobtunk. A dobott számok egyetlen módusza, a mediánja és az átlaga – ebben a sorrendben – egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három szomszédos tagja. Adj meg egy megfelelő dobássorozatot, és igazold, hogy a megadott dobássorozat a feltételeknek megfelel! Igaz-e, hogy az általam megadott hat szám szórása is tagja ugyanennek a számtani sorozatnak?

b) Egy szabályos dobókockával háromszor dobtunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a másodiknak dobott szám éppen a másik két dobott szám átlaga?



(D = definíció T = tétel M = módszer)

D	Szórás	$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$ (ahol x_i az adatokat, $\bar{x}$ ezek átlagát jelöli)
D	Átlagtól való átlagos abszolút eltérés	$\frac{ x_1 - \bar{x} + \dots + x_n - \bar{x} }{n}$ (ahol x_i az adatokat, $\bar{x}$ ezek átlagát jelöli)
M	Adatok ábrázolása	Oszlopdiagram, kördiagram, vonaldiagram, sávdiaagram, dobozdiagram.
D	Elemi esemény	Egy véletlen kísérlet lehetséges kimenetele.
D	Eseménytér	Elemi események halmaza.
D	Esemény	Az eseménytér valamely részhalmaza.
D	Komplementer esemény	Az A esemény komplementere az az esemény, amikor az A esemény nem következik be. Jele: $\bar{A}$.
D	A és B esemény összege	Az az esemény, amikor az A esemény és a B esemény közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A + B$.
D	A és B esemény szorzata	Az az esemény, amikor az A esemény és a B esemény is bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$, illetve AB .
D	Egymást kizáró, vagy diszjunkt események	Olyan események, amelyek egyszerre nem következhetnek be. $P(A \cdot B) = 0$
D	Az események valószínűsége	$0 \leq P(A) \leq 1$ A biztos esemény valószínűsége 1. Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
D	Független események	Az A és B események függetlenek, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.
D	Feltételes valószínűség	Annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezik. Jele: $P(A B)$. $P(A B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$
T	Binomiális eloszlás (visszatevéses mintavétel esetén)	Annak a valószínűsége, hogy n kísérletből pontosan k esetben lesz a kimenetel a p valószínűséggel bekövetkező A esemény: $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
T	Hipergeometrikus eloszlás (visszatevés nélküli mintavétel esetén)	Ha N elemből M rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal (az összes többi pedig nem), akkor annak a valószínűsége, hogy n darabot kihúzva pontosan k rendelkezik az adott tulajdonsággal a kiválasztottak közül: $P = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
T	A binomiális eloszlás várható értéke	$E = n \cdot p$ (ahol n a kísérletek száma és p a kedvező kimenetel valószínűsége)

- 1. E1** Egy óvodai csoportba járó gyerekek testmagasságának gyakoriságai láthatók a táblázatban.

Magasság (cm)	82	86	95	100	110
Gyakoriság	5	2	3	2	4

- a) Mennyivel változna az átlagos testmagasság, és hogyan változna a terjedelem, az átlagos abszolút eltérés és a szórás, ha minden gyerek magassága 10 cm-rel nőne?
- b) Mennyivel változna az átlagos testmagasság, és hogyan változna a terjedelem, az átlagos abszolút eltérés és a szórás, ha minden gyerek magassága 10%-kal nőne?
- c) Az óvoda egy másik csoportjában 20 gyerek van, átlagmagasságuk 105 cm. Mennyi a két csoportba járó gyerekek átlagmagassága?

- 2. E1** (Emelt szintű érettségi, 2019)

Egy egyenlő szárú háromszög oldalhosszúságainak átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!

- 3. E1** (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egy továbbképzésen részt vevő csoport tagjai életkorának átlaga 28 év. Az öt legidősebb résztvevő életkorának átlaga 40 év, a többieké 25,6 év. Hány nő és hány férfi vesz részt a továbbképzésen, ha 1,5-szer annyi nő van a csoportban, mint férfi?

- 4. E1** (Emelt szintű érettségi, 2017)

Az egyik hét munkanapjain utasszámlálást végeztek a személyvonaton. Hétfőn 200, kedden 160, szerdán 90, csütörtökön 150 utast jegyeztek fel. Hány utas volt pénteken, ha tudjuk, hogy az öt adat átlaga is szerepel az adatok között, továbbá az adatok (egyetlen) módusza nem egyenlő a mediánjukkal?

- 5. E1** Két dobókockával dobunk egyszerre. Legyen az A esemény az, hogy a két dobott szám összege páros, a B esemény pedig az, hogy legalább az egyik kockával prímszámot dobunk. Számold ki az A , B , $A + B$, valamint az $A \cdot B$ események valószínűségét!

- 6. E1** Egy honlap minden belépőnek véletlenszerűen generál egy 6 karakterből álló jelszót. A program minden karaktert a 10 számjegy és az angol ábécé 26 kisbetűje közül választ. Mennyi a valószínűsége, hogy egy jelszót 3 betűből és 3 számjegyből áll, ha

- a) a karakterek ismétlődhetnek;
- b) minden karakter különböző?

- 7. E2** Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a két dobás összegének várható értéke,

- a) ha tudjuk, hogy a két dobás értéke egyenlő;
- a) ha tudjuk, hogy az egyik dobás hatos?

- 8. E1** Egy osztály 35 tanulója között 15 szemüveges.

- a) Ha véletlenszerűen kiválasztunk az osztályból 6 tanuló, akik egy hatfős csoportként képviselik az osztályt egy rendezvényen, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a csoportnak pontosan a fele szemüveges?
- b) Az egyik tanítási napon hat különböző órája van az osztálynak. A hat különböző tanár mindegyike véletlenszerűen választ egy felelőt a 35 tanuló közül. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3-szor felel szemüveges diák?

- 9. E1** Egy reál tagozatos gimnáziumban a tapasztalat szerint a tanulók 75%-a tanul tovább műszaki pályán. A pályaaorientációs napon az iskolában 15 véletlenszerűen kiválasztott tanulóval készítenek riportot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 15 kiválasztott tanuló

- a) mindannyian műszaki pályán szeretnének továbbtanulni;
- b) legfeljebb három készül műszaki pályára;
- c) legalább három tervezi a műszaki pályát?

- 10. E1** Egy nagyváros tömegközlekedésének felmérése során azt tapasztalták, hogy a tömegközlekedést igénybe vevők 60%-a autóbusszal, 25%-a trolival, a fennmaradó rész pedig villamossal utazik leggyakrabban. Az autóbusszozók 70%-a, a trolin utazók 80%-a, míg a villamossal utazók 65%-a vesz rendszeresen bérletet. A városban egy tömegközlekedéssel utazó embert véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) bérlettel rendelkezik;
- b) ha nincs bérlete, akkor trolival utazik?

- 11. E1** Egy iskola diákjainak három kirándulást szerveztek: az Alföldre, a Bükkbe, illetve a Cserhátra. Legyen rendre A , B , C az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák elment a megfelelő kirándulásra. A kirándulások adataiból kiderült, hogy:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,7 & P(B) &= 0,55 & P(C) &= 0,6 \\ P(A \cdot B) &= 0,35 & P(A \cdot C) &= 0,5 & P(B \cdot C) &= 0,3 \\ P(A \cdot B \cdot C) &= 0,2 \end{aligned}$$

Mennyi annak a valószínűsége, hogy az iskola egy véletlenszerűen kiválasztott diákja

- a) legalább az egyik kirándulásra részt vett;
- b) pontosan két kirándulásra vett részt?



sorozat fogalma, sorozat rekurzív megadása, számtani és mértani sorozat



számtani és mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggés bizonyítása

BEVEZETŐ



A XIII. században fogalmazta meg az Itáliában élő Fibonacci híres feladatát, amellyel egy nyúlcsalád szaporodását modellezte. Kezdetben 1 újszülött nyúlpár van. Minden újszülött nyúlpár 2 hónap alatt válik ivaréretté, és onnantól kezdve minden hónapban szül egy új nyúlpárt. Ha ez a folyamat soha nem szakadna meg (a nyulak folyamatosan élnek, és mindig ebben a ritmusban szaporodnának), akkor hány nyúlpár lenne az n -edik hónapban?

Az 1. és a 2. hónapban 1 nyúlpár él. A 3. hónapban születik egy újabb nyúlpár. A sorozatoknál szokásos jelölést alkalmazva $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Az n -edik hónapban élni fognak az előző hónapban életben lévő nyúlpárok, va-

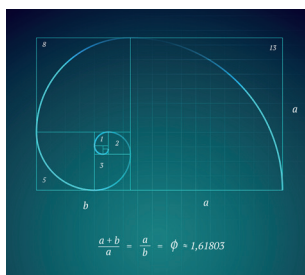
lamint új nyúlpárt szülnek pontosan azok a nyúlpárok, amelyek 2 hónappal korábban már életben voltak (akkor születtek vagy már korábban születtek). Ezért teljesül, hogy $n > 2$ esetén $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Ezzel a gondolatmenettel a következő, Fibonacciról elnevezett híres számsorozathoz jutunk:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; ...

A Fibonacci-sorozathoz vezető egyéb problémák, feladatok:

- ▶ Hányféleképpen juthatunk fel egy n fokú lépcsőn, ha egyszerre egy vagy két lépcsőfokot léphetünk?
- ▶ Hányféleképpen tudunk kifizetni n eurót 1 és 2 eurós érmékkel?
- ▶ Egybevágó négyzetes oszlopokból tornyot építünk. A négyzetes oszlopok alapja 1×1 egység méretű négyzet, magassága 2 egység. A torony alapja 1×2 egység méretű téglalap. Hányféleképpen építhetünk fel egy n egység magas tornyot?



Fibonacci-spirálnak nevezik az ábra szerinti spirált, amelyben negyed körívek illeszkednek egymáshoz, a körívek sugara pedig rendre a Fibonacci-számok értéke. Ezt a spirált ismerhetjük fel a napraforgó szemek elrendeződésében, a nautiluszok, vagy akár a spirálgalaxisok alakjában.



A Fibonacci-sorozathoz számtalan érdekes állítás, érdekes feladat kapcsolódik. Például:

- ▶ A sorozat tagjait a fenti definícióban olyan eljárással adtuk meg, amely segítségével lépésről lépésre határozhatók meg a tagok: először a_1 , majd a_2 és a_3 segítségével a_4 , majd a_5 , és így tovább. (Ezt nevezik rekurzióknak.) Bizonyítható azonban, hogy a tagok közvetlenül is kiszámíthatók az n változó értékéből a következő képlet alapján:
$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}.$$
 (Ami azért is meglepő, mert egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy az így kapott szám egy természetes szám.)
- ▶ Az egymást követő tagok hányadosa az aranymetszés arányával van kapcsolatban. Bebizonyítható, hogy az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados az aranymetszés arányához tart, ha n értéke tart a végtelenbe.

1. A számsorozat fogalma (ismétlés)

Definíció: Számsorozatnak nevezzük azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza és értékkészlete a valós számok halmaza.

A sorozat megadható: – rekurzív módon;
– zárt alakban az ún. **általános taggal**;
– egyéb módon, körülírással, utasítással.

2. A számtani sorozat

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozatot **számtani sorozatnak** nevezzük, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag különbsége állandó, vagyis $n > 1$ esetén $a_n - a_{n-1}$ értéke állandó. Ez az állandó a sorozat **differenciája** (különbsége). Jele: d .

A számtani sorozat tulajdonságai:

- ▶ A definíció alapján (rekurzív módon) felírható a sorozat n -edik tagja: $a_n = a_{n-1} + d$ (ha $n > 1$).
- ▶ **Tétel:** Ha az $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja a_1 és differenciája d , akkor az n -edik tag $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
- ▶ **Tétel:** Ha $\{a_n\}$ számtani sorozat és $n > 1$, akkor $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, azaz a_n számtani közepe az előtte és utána álló tagoknak. Általánosan: ha $n > k$, akkor $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ ($n, k \in \mathbb{Z}^+$).

3. A mértani sorozat

Definíció: A $\{b_n\}$ sorozatot **mértani sorozatnak** nevezzük, ha a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag hányadosa állandó, vagyis $n > 1$ esetén $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ értéke 0-tól különböző állandó. Ez az állandó a sorozat **kvóciense** (hányadosa). Jele: q .

A mértani sorozat tulajdonságai:

- ▶ Mértani sorozatnak nem tagja a 0, és a kvóciens sem 0 ($b_n \neq 0$ és $q \neq 0$).
- ▶ A definíció alapján (rekurzív módon) felírható a sorozat n -edik tagja: $b_n = b_{n-1} \cdot q$ (ha $n > 1$).
- ▶ **Tétel:** Ha a $\{b_n\}$ mértani sorozat első tagja b_1 és kvóciense q , akkor a sorozat n -edik tagja $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
- ▶ **Tétel:** Ha $\{b_n\}$ mértani sorozat és $n > 1$, akkor $(b_n)^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, azaz bármelyik tag négyzete megegyezik szomszédainak szorzatával. Általánosan: ha $n > k$, akkor $(b_n)^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$ ($n, k \in \mathbb{Z}^+$). Ha a tagok pozitívak, akkor b_n mértani közepe az előtte és utána álló tagoknak.

4. A mértani sorozat n -edik tagjáról szóló tétel bizonyítása

Bizonyítsuk be, hogy ha $\{b_n\}$ egy mértani sorozat, melynek első tagja b_1 és kvóciense q , akkor a sorozat n -edik tagja felírható a következő módon: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ (ahol $n \in \mathbb{Z}^+$, $q \neq 0$).

Bizonyítás:

Teljes indukcióval bizonyítunk.

1. lépés: Ellenőrizzük az állítást $n = 1$ -re! $b_1 = b_1 \cdot q^0 = b_1$ ▶ $n = 1$ -re igaz.
2. lépés: Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra teljesül az állítás, azaz $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.
3. lépés: Bizonyítani szeretnénk, hogy ebben az esetben az állítás teljesül $k + 1$ -re is, azaz $b_{k+1} = b_1 \cdot q^k$.

Határozzuk meg b_{k+1} -et! $b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^k$.

itt alkalmazzuk az
indukciós feltételt

Teljesül tehát, hogy $b_{k+1} = b_1 \cdot q^k$.

A teljes indukció alapján tehát minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén igaz az állítás.

Az előbbi bizonyítás lépéseit követve hasonlóan bizonyítható a számtani sorozat n -edik tagjának képlete:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, ahol a_1 a sorozat első tagja, d a differenciája.

Egy számtani sorozat első három tagjának összege 48. Ha az első taghoz 9-et, a másodikhoz 2-t adunk és a harmadik tagból 2-t kivonunk, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Mennyi a számtani sorozat első három tagja?

Megoldás:

Jelöljük a számtani sorozat differenciáját d -vel – a szimmetria és a jobb kezelhetőség miatt –, a második tagot a -val.

Ekkor a számtani sorozat első három tagja: $a - d$, a , $a + d$.

Ezen tagok összege 48, ezért $3a = 48$, így $a = 16$. A tagok tehát: $16 - d$, 16 , $16 + d$.

A megfelelő változtatások után kapjuk a mértani sorozat tagjait: $25 - d$, 18 , $14 + d$.

A mértani sorozat második tagjának négyzete egyenlő az első és a harmadik tag szorzatával.

$$16^2 = (25 - d)(14 + d) \quad 324 = 11d - d^2 + 350 \quad d^2 - 11d - 26 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $d_1 = 13$ és $d_2 = -2$. A feladatnak két megoldása van.

$d = 13$ esetén a számtani sorozat tagjai: 3; 16; 29; a mértani sorozat tagjai: 12; 18; 27, ekkor $q = 1,5$;

$d = -2$ esetén a számtani sorozat tagjai: 18; 16; 14; a mértani sorozat tagjai: 27; 18; 12, ekkor $q = \frac{2}{3}$.

FELADATOK

- 1. E1** Bizonyítsd be teljes indukcióval, hogy ha $\{a_n\}$ egy számtani sorozat, melynek első tagja a_1 , differenciája d , akkor a sorozat n -edik tagja felírható a következő módon:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \text{ (ahol } n \in \mathbb{Z}^+ \text{)!}$$

- 2. E1** Egy laboratóriumban 1 liter 70%-os vizes oldatot úgy hígítottak, hogy kiöntöttek belőle 1 dl oldatot, majd hozzáöntöttek 1 dl vizet. Hányszor hajtották végre ezt az eljárást, ha a kapott oldat töménysége $10\% \pm 1\%$?

- 3. E1** Az $\{a_n\}$ sorozat első három tagjának összege 21, a következő három tagjának összege pedig 168. Add meg a sorozat hetedik tagját, ha

- a) $\{a_n\}$ egy számtani sorozat;
b) $\{a_n\}$ egy mértani sorozat!

- 4. E1** (Emelt szintű érettségi, 2012)
Egy vetélkedőn négy csapat indult. A győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$ -szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A pontok száma összesen 139. Határozd meg az egyes csapatok által elért pontszámot!

- 5. E2** (Emelt szintű érettségi, 2022)
Egy mértani sorozat első és második tagjának összege 6, harmadik és negyedik tagjának összege pedig 96. Add meg a sorozat első tagját és kvóciensét!

- 6. E1** Egy számtani sorozat differenciája 50. Ha az első tagból 16-ot, a második tagból 30-at kivonunk, és a harmadik taghoz 10-et hozzáadunk, akkor az így kapott három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Határozd meg a számtani sorozat első tagját!

- 7. E2** Egy véges halmaz elemeinek száma több, mint 3. Az egyelemű, a kételemű és a háromelemű részhalmazainak a száma ebben a sorrendben egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Hány eleme van a halmaznak?

- 8. E2** Az $\{a_n\}$ sorozat első tagja $a_1 = 2$, és $n > 1$ esetén a sorozat n -edik tagja $a_n = 2a_{n-1} - 1$. Bizonyítsd be teljes indukcióval, hogy a rekurzív módon megadott sorozat n -edik tagja felírható $a_n = 2^{n-1} + 1$ alakban!

- 9. E2** Az $\{a_n\}$ sorozat első tagja $a_1 = 1$, és $n > 1$ esetén a sorozat n -edik tagja $a_n = \sqrt{(a_{n-1})^2 + 1}$. Határozd meg a sorozat első 5 tagját, majd írd fel az általános tagot (vagyis írd fel olyan zárt képletet, amely segítségével közvetlenül n ismeretében a_n számolható)! Bizonyítsd be teljes indukcióval a képlet érvényességét!

- 10. E2** Legyen $\{a_n\}$ egy számtani sorozat, melynek differenciája d . Bizonyítsd be teljes indukcióval, hogy a sorozat első n tagjának összege

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \cdot \left(a_1 + (n-1) \frac{d}{2} \right)!$$



számtani és mértani sorozat első n tagjának összege

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Júlia 16 000 000 Ft hitelt vesz fel, 10 év futamidőre, évi 7,2%-os kamattal, amit havonta egyenlő részletekben törleszt (havi $\frac{7,2}{12}$ %-os kamattal). Mekkora a hitel törlesztőrésze?

Megoldás:

Az évi 7,2%-os kamat havi törlesztés esetén havi $\frac{7,2}{12} = 0,6\%$ -os kamatot jelent. A törlesztőrészt jelöljük x -szel, és számoljuk a folyamatot millió Ft-ban felírva.

Eltelt hónapok száma	Tartozás a hónap végén a befizetés előtt	Befizetés	Tartozás a befizetés után
1	$16 \cdot 1,006$	x	$16 \cdot 1,006 - x$
2	$(16 \cdot 1,006 - x) \cdot 1,006 = 16 \cdot 1,006^2 - 1,006x$	x	$16 \cdot 1,006^2 - 1,006x - x$
3	$(16 \cdot 1,006^2 - 1,006x - x) \cdot 1,006 = 16 \cdot 1,006^3 - 1,006^2x - 1,006x$	x	$16 \cdot 1,006^3 - 1,006^2x - 1,006x - x$

n hónap múlva a befizetés után a tartozás: $16 \cdot 1,006^n - x \cdot 1,006^{n-1} - x \cdot 1,006^{n-2} - \dots - x \cdot 1,006 - x$.

A 10 év során 120 hónap telik le, és az utolsó befizetés után a tartozás 0 Ft.

Ezért: $16 \cdot 1,006^{120} - x \cdot 1,006^{119} - x \cdot 1,006^{118} - \dots - x \cdot 1,006 - x = 0$

Átrendezve: $16 \cdot 1,006^{120} = x \cdot 1,006^{119} + x \cdot 1,006^{118} + \dots + x \cdot 1,006 + x$

Kiemelve x -et: $16 \cdot 1,006^{120} = x \cdot (1,006^{119} + 1,006^{118} + \dots + 1,006 + 1)$

A jobb oldal: Egy olyan mértani sorozat első 120 tagjának összege, melynek első tagja 1 és kvóciense 1,006.

A mértani sorozat első 120 tagjának összege: $1 \cdot \frac{1,006^{120} - 1}{1,006 - 1} \approx 175$.

Ebből: $16 \cdot 1,006^{120} = 175x \quad \blacktriangleright \quad 32,8 = 175x \quad \blacktriangleright \quad x \approx 0,187430$ millió Ft.

A törlesztőrészlet tehát havi 187 430 Ft.

Megjegyzés: Így Júlia a 10 év alatt $10 \cdot 12 \cdot 187\,430 \approx 22,5$ millió Ft-ot fizet vissza. Közgazdasági szempontból azonban a mostani 187 430 Ft és a 10 év múlva esedékes 187 430 Ft nem egyenlő értékű, és a $10 \cdot 12 \cdot 187\,430$ számolás figyelmen kívül hagyja a pénz időértékét, ezért jelentős következtetésekre nem ad alapot.

ELMÉLET

Tétel: Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első n tagjának összege: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.



Ha felhasználjuk a sorozat n -edik tagjára vonatkozó tételt: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Tétel: A $\{b_n\}$ mértani sorozat első n tagjának összege:

▶ ha a sorozat kvóciense $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot b_1$; ▶ ha a sorozat kvóciense $q \neq 1$, akkor $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Összeadtuk a következő sorozatok első n tagját. Legalább hány tagot adtunk össze, ha az összeg nagyobb, mint 1000?

a) $a_n = 1,2n - 28$

b) $b_n = 3,2 \cdot 1,2^n$

Megoldás:

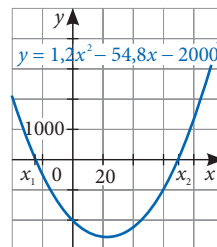
a) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat, mivel $a_{n+1} - a_n = 1,2(n+1) - 28 - (1,2n - 28) = 1,2$ $\rightarrow a_1 = -26,8$ és $d = 1,2$.

$$\text{A számtani sorozat összegképlete alapján } S_n = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} = n \cdot \frac{-53,6 + (n-1) \cdot 1,2}{2} = n \cdot \frac{-54,8 + 1,2n}{2}.$$

Írjuk fel, majd rendezzük az egyenlőtlenséget! $n \cdot \frac{-54,8 + 1,2n}{2} > 1000$

$$n \cdot (-54,8 + 1,2n) > 2000 \quad \rightarrow \quad 1,2n^2 - 54,8n - 2000 > 0$$

A valós számokon értelmezett $f(x) = 1,2x^2 - 54,8x - 2000$ függvény grafikonja felfelé nyíló parabola, melynek zérushelyei $x_1 \approx -23,9$ és $x_2 \approx 69,6$. Ezért a legkisebb pozitív egész szám, amelyre teljesül az egyenlőtlenség, az $n = 70$. Tehát legalább 70 számot adtunk össze.



b) A $\{b_n\}$ mértani sorozat, mivel $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3,2 \cdot 1,2^{n+1}}{3,2 \cdot 1,2^n} = 1,2$ $\rightarrow b_1 = 3,84$ és $q = 1,2$.

$$\text{A mértani sorozat összegképlete alapján } S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3,84 \cdot \frac{1,2^n - 1}{1,2 - 1} = 3,84 \cdot \frac{1,2^n - 1}{0,2} = 19,2 \cdot (1,2^n - 1).$$

Írjuk fel, majd rendezzük az egyenlőtlenséget! $19,2 \cdot (1,2^n - 1) > 1000 \quad \rightarrow \quad 1,2^n > \frac{1000}{19,2} + 1.$

Mivel a valós számokon értelmezett $g(x) = 1,2^x$ függvény szigorúan monoton növekedő, ezért

$$n > \log_{1,2} \left(\frac{1000}{19,2} + 1 \right) \approx 21,8. \quad \rightarrow \quad \text{Legalább 22 számot adtunk össze.}$$

FELADATOK

1. E1 Mennyi az n lehető legkisebb értéke, ha a sorozat első n tagjának összege nagyobb, mint 2500?

a) $b_n = 0,8 \cdot 1,3^n$

b) $a_n = 1,3n + 42$

2. E1 Anna 3 000 000 Ft hitelt vesz fel, 5 éves futamidőre, évi 6%-os kamattal, amit havonta egyenlő részletekben törleszt. Mekkora a törlesztőrészlet?

3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza, majd tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel. Egy alkalommal András (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (A labda csak függőleges irányban mozog.)

4. E2 Egy mértani sorozat első 8 tagjának összege 17-szerese az első 4 tag összegének. Mekkora lehet a sorozat kvóciense?

5. E2 Az $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája 2. A sorozat első $2n$ tagjának összege 2200, első $3n$ tagjának összege 5175 ($n \in \mathbb{Z}^+$). Határozd meg n értékét!

6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2009)

András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, naponta 10 000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon és így folytatta, páratlan sorszámu napon 10%-kal többet, párosan 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.

a) Hány métert úszott le András a 6. napon?

b) Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt?

c) Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen kiválasztunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20 000 métert teljesített?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. András hitelt vett fel egy banknál, melyet havonta, egyenlő részletekben fizet vissza. A hitel futamideje 5 év, és a havi törlesztőrészlet 29 000 Ft.

- a) Mennyit ér a hitel felvételekor az 5 év múlva esedékes utolsó törlesztőrészlet, ha az infláció minden évben 5%?
b) Mekkora hitelt vett fel, ha a hitel kamata évi 6%?

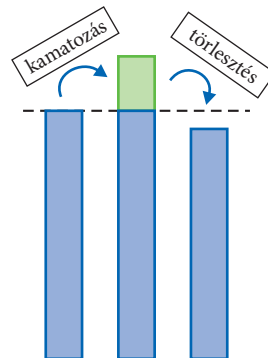
Megoldás:

- a) Az utolsó törlesztőrészletet pontosan öt év múlva kell befizetni. Az inflációval úgy tudunk számolni, hogy ami most 100 Ft-ba kerül, az egy év múlva $100 \cdot 1,05 = 105$ Ft-ba kerül, öt év múlva pedig $100 \cdot 1,05^5 \approx 127,6$ Ft-ba kerül. Az öt év múlva esedékes 29 000 Ft tehát $29\,000 : 1,05^5 \approx 22\,722$ Ft-ot érne most. (A jövőbeni pénz mai értékét nevezzük jelenértéknek.)

		$\cdot 1,05^5$
Most	Egy év múlva	Öt év múlva
100 Ft	$100 \cdot 1,05 = 105$ Ft	$100 \cdot 1,05^5 \approx 127,6$ Ft
?		29 000 Ft
		$: 1,05^5$

- b) Az évi 6%-os kamat havi törlesztés esetén havi $\frac{6}{12} = 0,5\%$ -os havi kamatot jelent. Ha a felvett hitel összegét H -val jelöljük, akkor a pénzügyi folyamat így írható le:

- ▶ Egy hónap múlva a tartozás $H \cdot 1,005$, a törlesztés miatt ez csökken 29 000-rel, így a tartozás ezután $H \cdot 1,005 - 29\,000$.
- ▶ Két hónap múlva a tartozás $(H \cdot 1,005 - 29\,000) \cdot 1,005 = H \cdot 1,005^2 - 29\,000 \cdot 1,005$, a törlesztés miatt ez csökken, így a tartozás ezután $H \cdot 1,005^2 - 29\,000 \cdot 1,005 - 29\,000$.
- ▶ Három hónap múlva a tartozás: $(H \cdot 1,005^2 - 29\,000 \cdot 1,005 - 29\,000) \cdot 1,005 = H \cdot 1,005^3 - 29\,000 \cdot 1,005^2 - 29\,000 \cdot 1,005$, a törlesztés miatt ez csökken 29 000-rel, így a tartozás ezután $H \cdot 1,005^3 - 29\,000 \cdot 1,005^2 - 29\,000 \cdot 1,005 - 29\,000$.
- ▶ n hónap múlva a 29 000 Ft befizetése után a tartozás:
 $H \cdot 1,005^n - 29\,000 \cdot 1,005^{n-1} - 29\,000 \cdot 1,005^{n-2} - \dots - 29\,000 \cdot 1,005 - 29\,000$.



Az öt év során 60 hónap telik le, és az utolsó befizetés után a tartozás 0 Ft.

Ezért: $H \cdot 1,005^{60} - 29\,000 \cdot 1,005^{59} - 29\,000 \cdot 1,005^{58} - \dots - 29\,000 \cdot 1,005 - 29\,000 = 0$.

Átrendezve: $H \cdot 1,005^{60} = 29\,000 \cdot 1,005^{59} + 29\,000 \cdot 1,005^{58} + \dots + 29\,000 \cdot 1,005 + 29\,000$.

A jobb oldal egy olyan mértani sorozat első 60 tagjának összege, melynek első tagja 29 000 és kvóciense 1,005.

A mértani sorozat első 60 tagjának összege: $S_{60} = 29\,000 \cdot \frac{1,005^{60} - 1}{1,005 - 1} \approx 2\,023\,330$.

A hitel összege tehát $H = \frac{2\,023\,330}{1,005^{60}} \approx 1\,500\,000$ Ft.

A folyamat jól követhető táblázatkezelő program segítségével. A hónap eleji tartozás a hónap végére 1,005-szörösére nő, majd a befizetett törlesztőrészlettel csökken. Az így kapott tétel kerül a következő sorban a második cellába.

Eltelt hónapok	Tartozás a hónap elején	Tartozás a hónap végén a befizetés előtt	Befizetett összeg	Tartozás a hónap végén a befizetés után
1	H	$H \cdot 1,005$	29 000	$H \cdot 1,005 - 29\,000$
2	$H \cdot 1,005 - 29\,000$	$H \cdot 1,005^2 - 29\,000 \cdot 1,005$	29 000	$H \cdot 1,005^2 - 29\,000 \cdot 1,005 - 29\,000$
...				
60				0

1. A pénz jelenértéke

Ha az éves infláció 10%, az azt jelenti, hogy egy ma 1000 Ft-ba kerülő „átlagos árukosárért” egy év múlva 1100 Ft-ot kell fizetni. Ezért az egy év múlva esedékes 1000 Ft bevétel vásárlóértéke kevesebb, mint a ma meglévő 1000 Ft-é. Az egy év múlva esedékes 1000 Ft **jelenértéke**

azonban nem 10%-kal kevesebb, mint 1000 Ft, hanem ma $\frac{1000}{1,1} \approx 910$ Ft-ot ér.

	· 1,1
Most	Egy év múlva
100 Ft	$100 \cdot 1,1 = 110$ Ft
?	1000
	: 1,1

2. Kamatszámítás

- ▶ **egyszerű kamatozás:** a kamat nem adódik a tőkéhez (pl. kivesszük vagy másik bank-számlára átvesszük)
- ▶ **kamatos kamatozás:** a kamat a tőkéhez adódik és azzal együtt (tőkeként) kamatozik tovább

Az összehasonlíthatóság érdekében a bankoknak törvény írja elő, hogy a kamatlábat éves időtartamra és egyszerű kamatozás esetére adják meg. Például ha a negyedévre lekötött tőke kamata 3%, akkor az éves kamatláb 12%, és ennek az adatnak kell szerepelnie a tájékoztatókban. Emiatt havi, negyedéves vagy féléves kamatos kamatozás esetén a valódi növekedés (hozam) több, mint a kamatláb.

Például:

negyedéves jóváírási
periódus, kamatos
kamatozás, évi 8% kamatláb

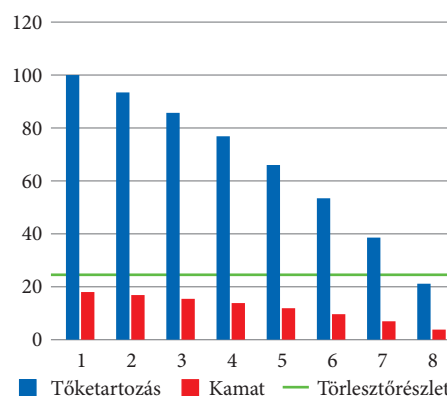
a negyedéves kamatláb
 $8 : 4 = 2\%$

egy év alatt
 $1,02^4 = 1,0824$, azaz
8,24% növekedés

3. Hiteltörlesztés egyenlő részletekben

A jobb oldali diagram azt mutatja, hogyan alakul egy átlagos hiteltörlesztés során a tartozás a bank felé. A kék színű oszlop jelenti a fennálló tőketartozást, a piros színű oszlop a hónap végén esedékes kamatot. A törlesztőrészlet fedezi a kamatot, és a fennmaradó része fordítódik a tőke csökkentésére.

Megfigyelhető, hogy az első időszakban nagyobb részben kamatot fizetünk, a folyamat végén pedig alig van már kamat, és a tőke törlesztése a jelentősebb.



KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Oldjuk meg az előző lecke feladatát jelenértékkel számolva! Júlia 16 000 000 Ft hitelt vesz fel, 10 év futamidőre, évi 7,2%-os kamattal, amit havonta egyenlő részletekben törleszt. Mekkora a hitel törlesztőrészlete?

Második megoldás:

A közgazdaságtanban a pénzügyi tételek jelenértékével számolnak. A törlesztőrészlet kiszámolható úgy is, hogy a később befizetésre kerülő tételek helyett azok jelenértékét vesszük figyelembe. Ezek összege egyenlő a felvett hitel nagyságával.

Az egy hónap múlva esedékes törlesztőrészlet x millió Ft, ennek jelenértéke $\frac{x}{1,006}$.

A két hónap múlva esedékes törlesztőrészlet jelenértéke $\frac{x}{1,006^2}$.

Az n hónap múlva esedékes törlesztőrészlet jelenértéke $\frac{x}{1,006^n}$.



A 120 hónap alatt esedékes törlesztőrészek jelenértékének összege egyenlő a hitellel:

$$\frac{x}{1,006} + \frac{x}{1,006^2} + \frac{x}{1,006^3} + \dots + \frac{x}{1,006^{120}} = 16 \quad \blacktriangleright \quad x \left(\frac{1}{1,006} + \frac{1}{1,006^2} + \frac{1}{1,006^3} + \dots + \frac{1}{1,006^{120}} \right) = 16.$$

A zárójelben egy olyan mértani sorozat első 120 tagjának összege áll, melynek első tagja $\frac{1}{1,006}$ és kvóciense $\frac{1}{1,006}$.

$$S_{120} = \frac{1}{1,006} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,006} \right)^{120} - 1}{\frac{1}{1,006} - 1} \approx 85,367 \quad \blacktriangleright \quad 85,367x = 16 \quad \blacktriangleright \quad x \approx 0,187430.$$

A törlesztőrészlet tehát 187 430 Ft.

FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk. Az egyiknél 500 000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – befektetésbe 450 000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik. Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?

2. E2 Péter 300 000 Ft-ot keresett nyári diákmunkával. Ezt a pénzt bankban helyezte el éves 6%-os kamatos kamatra úgy, hogy a kamatot negyedévente számítsák és jóváírják (tőkésítik). Mennyi pénz lesz Péter számláján 3 év múlva, ha

- addig nem nyúl a számlájához;
- 1 év múlva további 100 000, majd 2 év múlva további 150 000 Ft-tal növeli a tőkét;
- 3 havonta további 50 000 Ft-ot fizet be erre a számlára, összesen 11 alkalommal?

3. E2 Mekkora a törlesztőrészlete annak a 4 évre felvett 12 000 000 Ft-os hitelnek, amelynek kamata évi 8,4%, és

- havonta egyenlő részletekben törlesztik;
- negyedévente egyenlő részletekben törlesztik?

6. E2 Egy cég hitelt vesz fel, és egyedi szerződést köt a bankkal a törlesztésről, mivel a bevételei várhatóan növekedni fognak az évek során. A hitelt 5 év alatt fogják visszafizetni, de nem egyenlő részletekben, hanem a táblázatban rögzített részletekben. A hitel kamata évi 9%. Töltsd ki a táblázatot, és állapítsd meg, hogy mekkora hitelt vett fel a cég!

Eltelt évek száma	Tartozás az év elején	Tartozás az év végén a befizetés előtt	Befizetés (Ft)	Tartozás az év végén a befizetés után
1			150 000	
2			300 000	
3			450 000	
4			600 000	
5		750 000	750 000	0

4. E2 Edina bankbetétbe helyezett el 300 000 Ft-ot, kamatos kamatozásra. A bank évi 8% kamatot vállal, negyedéves kamatjótárási periódussal. Edina úgy dönt, hogy ezentúl rendszeresen a negyedévente 100 000 Ft megtakarítását is befizeti erre a számlára. Mennyi pénz lesz Edina számláján 5 év múlva?

5. E2 Robi 3 000 000 Ft hitelt vesz, fel, amit havonta egyenlő részletekben szeretne törleszteni. A hitel éves kamata 9,6%. Hány hónapon át fog törleszteni, ha havonta legfeljebb 40 000 Ft törlesztést tud vállalni?





sorozat monotonitása és korlátossága

BEVEZETŐ

A kamatos kamat témaköréhez kapcsolódik a következő érdekes sorozat.

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1; \quad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2; \quad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3; \quad a_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4; \quad \dots, \quad \text{azaz } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A sorozat első néhány tagja: $a_1 = 2$; $a_2 = 2,25$; $a_3 \approx 2,37$ $a_4 \approx 2,44$.



Hogyan kapcsolódik ez a sorozat a kamatos kamatozáshoz?

Az évi 100%-os kamatozás azt jelenti, hogy a befektetett tőke egy év elteltével szorozódik $a_1 = 2$ -vel. Ha évi 100% a kamat, de félévente van kamatjótérítés, akkor a féléves kamat $\frac{100\%}{2} = 50\%$, és a befektetett tőke félévente

szorozódik $\left(1 + \frac{50}{100}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)$ -del, vagyis az év végére $a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$ -szeresére nő. Hasonlóképpen, ha harmadévente történik a kamatjótérítés, három alkalommal van kamatozás, a szorzó $1 + \frac{1}{3}$, ezért az év végére a tőke

$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$ -szorosára nő. Ha az év során n -szer történik kamatjótérítés, akkor az év végére a tőke $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ -szeresére nő.

Belátható, hogy az $\{a_n\}$ sorozatnak a második tagtól kezdve minden tagja nagyobb, mint az előtte álló tag. Ez annak felel meg, hogy ha ugyanakkora az éves kamatláb, de gyakrabban van kamatjótérítés, ami a tőke nagyobb növekedését vonja maga után. Vajon hogyan alakulna ez a növekedés, ha a kamatjótérítési periódus perc vagy másodperc hosszúságú lenne? A periódus hosszának csökkenésével a tőke növekszik, azonban tetszőlegesen kicsi periódus esetén sem lesz az éves szorzószám nagyobb, mint 2,72. Ha 100%-os a kamat, a pénzünk egy év alatt maximum 2,72-szeresére növekedhet.

ELMÉLET

1. Sorozat monotonitása

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n < a_{n+1}$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n > a_{n+1}$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **monoton növekvő**, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **monoton csökkenő**, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

Egy sorozat monoton növekedése bizonyítható úgy, hogy minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén az $a_{n+1} - a_n$ különbségről bebizonyítjuk, hogy nemnegatív. Ha a sorozat minden tagja pozitív, akkor a monoton növekedés bizonyítható úgy is, hogy az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányadosról bizonyítjuk, hogy minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén nagyobb vagy egyenlő, mint 1.

2. Sorozat korlátossága

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat **alulról korlátos**, ha van olyan k valós szám, melyre minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $k \leq a_n$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **felülről korlátos**, ha van olyan K valós szám, melyre minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \leq K$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

A k a sorozat egy **alsó korlátja**, K pedig egy **felső korlátja**.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \frac{3n+5}{2n+1}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos! ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Megoldás:

A sorozat első néhány tagja $a_1 = \frac{8}{3}$, $a_2 = \frac{11}{5}$, $a_3 = \frac{14}{7}$. Az első három tagra valóban teljesül, hogy $a_1 > a_2 > a_3$.

Írjuk fel két egymást követő tag különbségét! Közös nevezőre hozva vonjuk össze a két törtet!

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)+5}{2(n+1)+1} - \frac{3n+5}{2n+1} = \frac{3n+8}{2n+3} - \frac{3n+5}{2n+1} = \frac{(3n+8)(2n+1) - (3n+5)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \\ &= \frac{6n^2 + 16n + 3n + 8 - (6n^2 + 10n + 9n + 15)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-7}{(2n+3)(2n+1)} \end{aligned}$$

A tört nevezője két pozitív szám szorzata, ezért pozitív. A számláló negatív, így a tört értéke negatív, vagyis $a_{n+1} - a_n < 0$. Ezért a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Mivel a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ezért minden tagja kisebb, mint az első tag. Így a sorozat egy felső korlátja az $a_1 = \frac{8}{3}$. Mivel minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén a $\frac{3n+5}{2n+1}$ tört számlálója és nevezője is pozitív, ezért a tört értéke pozitív. Így a sorozat egy alsó korlátja a 0. (Belátható, hogy van ennél nagyobb alsó korlát is.) A sorozat tehát korlátos.

FELADATOK

1. E1 Igazold, hogy az $\{a_n\}$ sorozat monoton és korlátos!

a) $a_n = \frac{6n}{2n+5}$

b) $a_n = \frac{n+3}{2n+7}$

2. E1 Írj olyan valós számot a k helyébe, hogy az $\{a_n\}$ sorozat korlátos legyen!

a) $a_n = \left(-\frac{k}{3}\right)^n$

b) $a_n = k \cdot \left(\frac{5}{k}\right)^n$

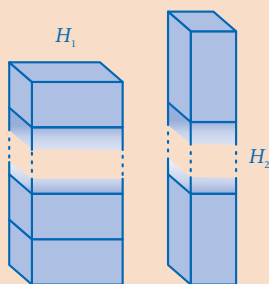
3. E1 (Emelt szintű érettségi, 2012)

Két egyenes hasábot építünk: H_1 -et és H_2 -t. Az építéshez használt négyzet alapú egyenes hasábok egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építéskor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építéskor pedig az alaplapjukkal – az ábra szerint.

a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa:

$$\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8.$$

Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1 -et és H_2 -t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?



b) Igazold, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2008)

Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

$\{a_n\}$, ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;

$\{b_n\}$, ahol $b_n = |n - 23| - |n - 10|$;

$\{c_n\}$, ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)^2$.

Vizsgáld meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszolj mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem. Válaszodat indokold! Korlátos sorozat esetében adj meg egy alsó és egy felső korlátot!

5. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egy élelmiszergyártó kisüzem levesporkészítő részlegében 700 kg levespor van raktáron. A raktárkészlet csökkentése érdekében az eladással foglalkozó vezető azt tervezi, hogy minden hónapban először (eladás-sal, jótékony célú ajándékozással) 24%-kal csökkentik az aktuális raktárkészletet, ezután a készletet megnövelik a havonta előállított 60 kg levesporral (így például az első hónap végén 592 kg levespor lesz raktáron).

a) Ha sikerül a terv megvalósítása, akkor összesen hány kg levesport adnak/ajándékoznak el 18 hónap alatt?

b) Igazold, hogy a tervezett módszert 18 hónapon túl (gondolatban akár végtelen sokáig) is alkalmazva a raktárkészlet minden hónapban csökken ugyan, de soha nem csökken 250 kg alá!



sorozat határértéke, konvergens sorozat

BEVEZETŐ

Az előző lecke Bevezetőjében bemutatott $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat első néhány tagja:

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 2,25; \quad a_3 \approx 2,37; \quad a_4 \approx 2,44.$$

A sorozat tagjai azt adják meg, hogy hányszorosára nő a tőke, ha kamatos kamatozás során a kamatláb éves 100%, és az év során n -szer történik kamatjótérítés. Ekkor a tőke egy kamatelszámolási periódus alatt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ -szeresére, az év során pedig $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ -szeresére nő.

Ha gyakoribb a kamatjótérítés, akkor az éves növekedés nagyobb. Napi kamatjótérítés esetén ($n = 365$) $a_{365} \approx 2,71457$. Ha órákra osztanánk az évet ($n = 8760$), akkor $a_{8760} \approx 2,7181$. Bebizonyítható, hogy ennek a sorozatnak az egyre nagyobb sorszámú tagjai egyre jobban megközelítenek egy konkrét valós számot (másképp: a sorozat tart egy konkrét valós számhoz) – ezt nevezzük a sorozat határértékének.

Ennek a sorozatnak a határértéke a matematika egy nevezetes száma, az ún. Euler-féle szám. Jele: e . Belátható, hogy irracionális szám, és értéke $e \approx 2,7183$. Kiemelkedően fontos szerepe van a felsőbb matematikában.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Vizsgáljuk meg a következő sorozatok viselkedését, ha n értéke nő. Melyek azok, amelyekre a szemlélet alapján azt mondanánk, hogy a sorozat „tart egy valós számhoz”?

A sorozat általános tagja	1. tag	2. tag	3. tag	4. tag	5. tag	6. tag	...
$a_n = \frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	...
$c_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \frac{2}{n}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$	1	$\frac{1}{1}$	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	...

Megoldás:

Szemléletes módon úgy írhatjuk körül azt, hogy a sorozat „tart egy valós számhoz”, hogy a sorozat tagjai (valamely sorszámtól kezdve) az n növekedése esetén „egyre közelebb vannak” egy konkrét valós számhoz.

$\{a_n\}$	A sorozat tagjai egyre jobban megközelítik a 0-t.	▶	Az $\{a_n\}$ sorozat 0-hoz tart.
$\{b_n\}$	A sorozat tagjai váltakozó előjellel, de egyre jobban megközelítik a 0-t.	▶	A $\{b_n\}$ sorozat 0-hoz tart.
$\{c_n\}$	A sorozat tagjai között tetszőlegesen nagy szám előfordul.	▶	Nincs olyan valós szám, amelyhez a $\{c_n\}$ sorozat tart.

2. a) A szemlélet alapján a következő sorozatok közül melyikre mondanánk, hogy a sorozat „tart egy valós számhoz”?

$$d_n = (-1)^{n+1} \quad e_n = 1 + 0,1^n$$

b) Hányadik tagtól teljesül, hogy az $\{e_n\}$ sorozat tagjai közelebb vannak 1-hez, mint 0,0001?

Megoldás:

a)	$\{d_n\}$	A sorozat tagjai váltakozva 1 és -1 .	▶	Nincs olyan valós szám, amelyhez a $\{d_n\}$ sorozat tart.
	$\{e_n\}$	A sorozat tagjai egyre jobban megközelítik az 1-et.	▶	Az $\{e_n\}$ sorozat 1-hez tart.

b) Soroljuk fel az $\{e_n\}$ sorozat első néhány tagját! $e_1 = 1,1$; $e_2 = 1,01$; $e_3 = 1,001$; $e_4 = 1,0001$; $e_5 = 1,00001$.

Mivel a negyedik tagtól kezdve ($n > 3$ esetén) a sorozat n -edik tagját úgy kapjuk, hogy az 1-hez $0,1^3 = 0,0001$ -nél kisebb számot adunk, ezért $n > 3$ esetén az $\{e_n\}$ sorozat tagjai közelebb vannak 1-hez, mint 0,0001.

ELMÉLET

Sorozat határértéke

Definíció: Az A valós szám ε sugarú környezetének nevezzük az $]A - \varepsilon; A + \varepsilon[$ nyílt intervallumot ($\varepsilon > 0$).

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozatnak létezik **határértéke**, és ez az A valós szám, ha minden pozitív ε esetén létezik olyan N pozitív egész szám, hogy a sorozat N -nél nagyobb indexű tagjai az A szám ε sugarú környezetébe esnek.

Definíció: Ha egy sorozatnak van (valós) határértéke, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat **konvergens**.

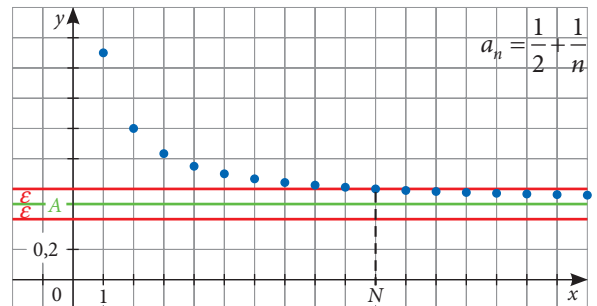
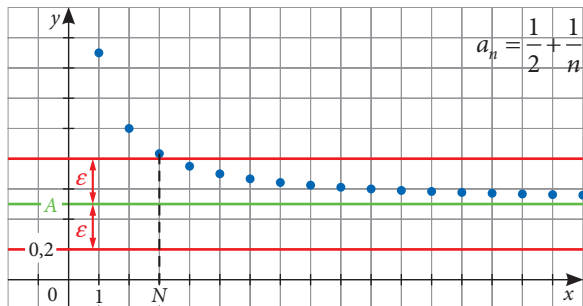
Az adott ε -hoz tartozó N számot **küszöbindexnek** vagy **küszöbszámnak** nevezzük.

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ vagy $a_n \rightarrow A$. Szóhasználat: $\{a_n\}$ sorozat határértéke A . $\{a_n\}$ sorozat tart A -hoz.

Azt, hogy a sorozat egy a_n tagja az A szám ε sugarú környezetébe esik, megfogalmazhatjuk úgy is, hogy az a_n -nek az A -tól való eltérése kisebb, mint ε , azaz $|a_n - A| < \varepsilon$.

A sorozat függvény, a grafikonját ábrázolhatjuk a derékszögű koordináta-rendszerben. Az x tengelyen a sorozat indexe, azaz n jelenik meg, az y tengelyen pedig a_n . A sorozat grafikonja különálló (másként: diszkrét) pontokból áll.

A koordináta-rendszerben az A valós szám ε sugarú környezete egy párhuzamos egyenesek által határolt sáv. A határérték definíciója azt jelenti, hogy akárhogyan választunk egy $\varepsilon > 0$ valós számot, egy küszöbszámtól kezdve a grafikon pontjai az A valós szám körüli 2ε széles sávba esnek. Az ábrán például az $\varepsilon = 0,3$ -hez tartozó küszöbszám az $N = 3$. Ha egy ennél kisebb $\varepsilon > 0$ számot választunk (pl. $\varepsilon = 0,1$), akkor ahhoz is található alkalmas küszöbszám (az ábrán $N = 10$).



Kiegészítések:

- ▶ A konvergens sorozat felveheti a határértékét. A definíció azt írja elő, hogy a sorozat tagjai az ε sugarú környezetbe esnek, és ebbe az intervallumba beletartozik a határérték is. Konvergens sorozat például az is, amelynek – egy kezdőindextől kezdve – minden tagja egyenlő.
- ▶ Amikor egy sorozat határértékét keressük, akkor azt érdemes átgondolni (akár néhány konkrét tag kiszámításával), hogyan alakul a sorozat tagjainak értéke nagyon nagy pozitív egész n esetén.
- ▶ Amikor egy sorozat határértékét keressük, akkor a definícióban szereplő ε -t úgy érdemes elképzelni, hogy az egy nagyon kicsi pozitív szám (pl. 0,0001).
- ▶ Nem szükséges, hogy adott ε -hoz a lehető legkisebb küszöbindexet határozzuk meg. A definíció szerint elég, ha találunk egy alkalmas küszöbindexet ε -hoz. (Sőt az is elég, ha igazoljuk, hogy létezik alkalmas küszöbindex.)

Sorozat határértéke – a definíció több, ekvivalens megfogalmazása

Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens és határértéke az A valós szám, ha minden pozitív ε esetén:

van olyan N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén a_n az A -nak az ε sugarú környezetébe esik.

van olyan N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

az A -nak az ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

Megjegyzés:

► $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jelölés a latin eredetű limes (határ) szó rövidítése.

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Ábrázoltuk az $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ sorozatot. Ez a sorozat $\frac{1}{2}$ -hez tart, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$. Adj meg küszöbindexet, ha $\varepsilon = 0,001$.

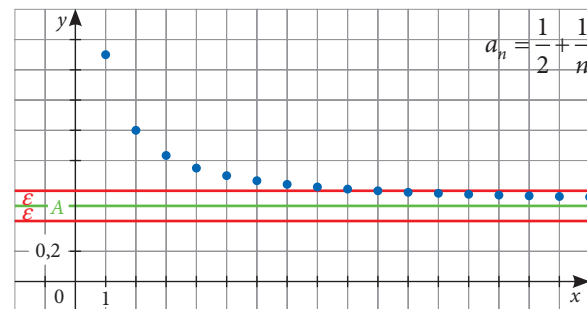
Megoldás:

Olyan N küszöbindexet keresünk az ε -hoz, melyre az $n > N$ esetén teljesül: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Most $A = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ és $\varepsilon = 0,001$

Az n pozitív, így $\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$

Az egyenlőtlenség átrendezésével kapjuk:



$$|a_n - A| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right| < 0,001.$$

$$\frac{1}{n} < 0,001.$$

$$n > \frac{1}{0,001} = 1000.$$

Az $N = 1000$ esetén tehát teljesül az egyenlőtlenség, így az $N = 1000$ egy alkalmas küszöbindex.

Például $n = 1005$ esetén $a_{1005} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1005}$, és erre valóban teljesül, hogy $\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{1005} - \frac{1}{2} \right| \approx 0,000995 < 0,001$.

4. Bizonyítsuk be a határérték definíciója alapján, hogy

a) az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

b) a $b_n = 5$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$.

Megoldás:

Azt kell igazolni, hogy minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik megfelelő N küszöbindex, melyre az $n > N$ esetén (vagyis az N -nél nagyobb sorszámú tagok esetén) $|a_n - A| < \varepsilon$. Legyen ε egy tetszőleges, de rögzített pozitív valós szám!

$$\text{a) } |a_n - A| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad (\text{mivel } \frac{1}{n} \text{ pozitív}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Küszöbindexnek pozitív egész számot kell megadni ► az $\frac{1}{\varepsilon}$ egész része egy alkalmas küszöbindex.

Mivel találtunk alkalmas küszöbindexet, teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\text{b) } |b_n - A| = |5 - 5| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \varepsilon. \text{ Ez minden esetben teljesül } \quad \text{► az } 1 \text{ egy alkalmas küszöbindex.}$$

Mivel találtunk alkalmas küszöbindexet, teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$.

FELADATOK

1. E1 Az $a_n = \frac{1}{n^2}$ sorozat 0-hoz tart, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Adj meg küszöbindexet, ha

a) $\varepsilon = 0,01$; **b)** $\varepsilon = 10^{-8}$.

2. E1 A $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Adj meg küszöbindexet, ha

a) $\varepsilon = 0,01$; **b)** $\varepsilon = 10^{-6}$; **c)** $\varepsilon > 0$.

3. E1 A $c_n = 25 + \frac{1}{n}$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 25$.

Adj meg küszöbindexet, ha

a) $\varepsilon = 0,02$; **b)** $\varepsilon = 10^{-10}$; **c)** $\varepsilon > 0$.

4. E1 Az $a_n = \frac{1}{n+120}$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Adj meg küszöbindexet, ha

a) $\varepsilon = 0,001$; **b)** $\varepsilon = 10^{-12}$; **c)** $\varepsilon > 0$.

5. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

a) Igazold, hogy $\frac{2}{(n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)!

b) Számold ki az $a_n = \frac{2}{(n+1)^2 - 1}$ sorozat első négy tagjának az összegét!

c) Határozd meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ határértékét!

ELMÉLET

A határérték fogalmának kiterjesztése

Definíció: Divergensnek nevezzük azokat a sorozatokat, amelyek nem konvergensek, azaz nincs valós határértékük.

Például: $1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots$ $1; -1; 1; -1; 1; -1; \dots$ $2; -4; 8; -16; 32; -64; \dots$ $1; 2; 1; 3; 1; 4; 1; 5; \dots$

Az $1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots$ sorozatra teljesül ugyanakkor, hogy minden K valós számhoz található olyan N küszöbindex, hogy az N -nél nagyobb indexű tagok esetében a sorozat minden tagja nagyobb, mint K . Erre a sorozatra azt mondjuk, hogy végtelenbe tart.

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat **végtelenbe tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik N küszöbindex, hogy $N < n$ esetén $K < a_n$.

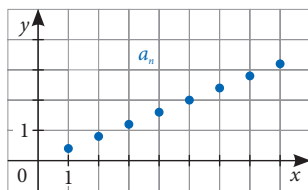
Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ vagy $a_n \rightarrow \infty$.

Definíció: Az $\{a_n\}$ sorozat **mínusz végtelenbe tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik N küszöbindex, hogy $N < n$ esetén $a_n < K$.

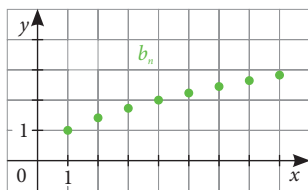
Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ vagy $a_n \rightarrow -\infty$.

Példák végtelenbe tartó sorozatokra:

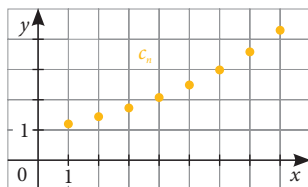
$$a_n = 0,4 \cdot n$$



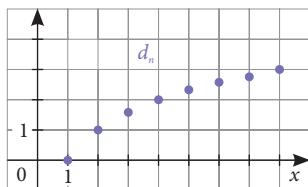
$$b_n = \sqrt{n}$$



$$c_n = 1,2^n$$



$$d_n = \log_2 n$$



konvergens sorozatok összege, különbsége, szorzata, hányadosa

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \frac{20n+3}{5n-1}$ sorozat határértéke 4, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$.

Megoldás:

Érdemes megvizsgálni a_n értékét egy nagyon nagy n esetén. Ha $n = 10\,000$, akkor $a_n = \frac{200\,003}{49\,999} \approx 4,00014$.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy pozitív valós szám. Vizsgáljuk a következő összefüggést: $|a_n - 4| = \left| \frac{20n+3}{5n-1} - 4 \right| < \varepsilon$.

Az abszolútérték-jelen belül közös nevezőre hozva: $\left| \frac{20n+3}{5n-1} - 4 \right| = \left| \frac{20n+3-4(5n-1)}{5n-1} \right| = \left| \frac{20n+3-20n+4}{5n-1} \right| = \left| \frac{7}{5n-1} \right|$.

Mivel n pozitív egész szám, így $n \geq 1$, ezért a $\frac{7}{5n-1}$ tört értéke pozitív. Kapjuk: $\left| \frac{7}{5n-1} \right| = \frac{7}{5n-1} < \varepsilon$.

Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a kapott (paraméteres) egyenlőtlenséget! $\frac{7}{5n-1} < \varepsilon$

Mivel $5n - 1$ pozitív, ezért az előbbi egyenlőtlenség ekvivalens a következőkkel:

$$7 < (5n - 1)\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 7 < 5n\varepsilon - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 7 + \varepsilon < 5\varepsilon \cdot n.$$

Mivel 5ε pozitív, ezért ezt kapjuk: $n > \frac{7+\varepsilon}{5\varepsilon}$ ▶ Így $\frac{7+\varepsilon}{5\varepsilon}$ egész része egy alkalmas küszöbindex.

Találtunk tehát alkalmas küszöbindexet, ezért teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n+3}{5n-1} = 4$.

Megjegyzés:

Vizsgáljuk meg, hogy milyen küszöbindexet jelent ez egy konkrét ε esetén!

Ha például $\varepsilon = 0,001$, akkor $\frac{7+\varepsilon}{5\varepsilon} = \frac{7,001}{0,005} = 1400,2$ ▶ Ekkor $N = 1400$ egy alkalmas küszöbindex.

$n = 1401$ esetén $a_{1401} = \frac{20 \cdot 1401 + 3}{5 \cdot 1401 - 1} = \frac{28\,023}{7004} \approx 4,0009994$, vagyis $|a_{1401} - 4| < 0,001$.

ELMÉLET

1. Hogyan lehet igazolni egy sorozatról, hogy konvergens?

1. módszer: közvetlenül a definícióban leírt egyenlőtlenséget igazoljuk. Ez a módszer rámutat a definíció jelentésére. Ugyanakkor a módszer nehézsége, hogy szükség van hozzá a határérték ismeretére, illetve hogy egy paraméteres egyenlőtlenség megoldását igényli.

2. módszer: előállítjuk a sorozatot olyan konvergens sorozatok összegeként, különbségeként, szorzataként vagy hányadosaként, amelyeknek a határértéke ismert. Ebben az esetben nem közvetlenül a definíciót alkalmazzuk, hanem a definícióból következő tételket (ezeket soroljuk fel a következő alponthan).

Vannak még további, a felsőbb matematikában alkalmazott módszerek. Érdekes, hogy van olyan tétel, amely segítségével be lehet bizonyítani egy sorozatról, hogy konvergens, anélkül hogy a határértékét megadnánk. Belátható ugyanis, hogy ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

2. Konvergens sorozatok összege, különbsége, szorzata, hányadosa

Tétel: Legyen $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ két konvergens sorozat, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ (ahol $A, B \in \mathbb{R}$).

Ekkor az $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ sorozatok, és $k \in \mathbb{R}$ esetén a $\{k \cdot a_n\}$ sorozatok is konvergenssek, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot A.$$

Ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor az $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ sorozat létezik, konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$.

Megjegyzés:

Ha egy $\{a_n\}$ sorozat két olyan polinom hányadosa, amelyben az n az ismeretlen, akkor a határérték megállapítására jól használható az a módszer, hogy a számlálót és a nevezőt is osztjuk n -nek a nevezőben előforduló legmagasabb hatványával, majd felhasználjuk, hogy az $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ stb. sorozatok 0-hoz tartanak.

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \frac{8n^2 - 3n + 10}{2n^2 - 5n + 1}$ sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét!

Megoldás:

Érdekes megvizsgálni a_n értékét egy nagyon nagy n esetén. Ha $n = 1000$, akkor $a_{1000} = \frac{7\,997\,010}{1\,995\,019} \approx 4,0085$.

Korábban bizonyítottuk, hogy az $\frac{1}{n}$ sorozat 0-hoz tart, ezt felhasználjuk a megoldás során.

Osszuk el a számlálót is és a nevezőt is n^2 -tel, ekkor a tört értéke nem változik. ($n \in \mathbb{Z}^+$, ezért $n \neq 0$)

$$a_n = \frac{8n^2 - 3n + 10}{2n^2 - 5n + 1} = \frac{8 - \frac{3}{n} + \frac{10}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}. \quad \text{A } \frac{3}{n}, \frac{10}{n^2}, \frac{5}{n}, \frac{1}{n^2} \text{ sorozatok 0-hoz tartanak } \left(\text{pl. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10}{n^2}\right) = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \right).$$

A számláló tehát 8-hoz tart, a nevező 2-höz tart $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{8}{2} = 4$.

FELADATOK

1. E1 Határozd meg az $\{a_n\}$ sorozat határértékét!

a) $a_n = \frac{4n + n^2 - 2}{7n^2 - 6}$

c) $a_n = \frac{9n + 15}{n^2 + 3n}$

b) $a_n = \frac{100 - 32n^3}{10n + 4n^3}$

d) $a_n = \frac{1 + n - 2n^2}{1 - n + 8n^3}$

2. E2 Határozd meg a sorozat határértékét!

a) $a_n = \frac{\binom{n}{2}}{n^2 - 4}$

b) $b_n = \frac{\binom{n}{3}}{4n - 5n^3}$

3. E2 Határozd meg a sorozat határértékét!

a) $a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{1 - 4n^2}$ **b)** $b_n = \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}$

4. E1 Határozd meg a k együttható értékét, hogy a sorozat határértéke a megadott valós számmal legyen egyenlő!

a) $a_n = \frac{kn^2 - 7n}{5n^2 + 2}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$

b) $b_n = \frac{65 - 45n^2 - 5}{kn^2 - 8n}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,2$

c) $c_n = \frac{5n^2 + 8n - 3}{kn^3 + 8n + 2}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

5. E2 Állapítsd meg a sorozat határértékét, majd adj meg küszöbindexet $\varepsilon > 0$ esetén!

a) $a_n = \frac{4n - 2}{8n - 5}$ **b)** $b_n = \frac{10 - 6n^2}{1 + n^2}$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bizonyítsd be a definíció alapján, hogy az $a_n = 0,8^n$ sorozat 0-hoz tart, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,8^n = 0$. Adj meg alkalmas küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$, valamint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetére!

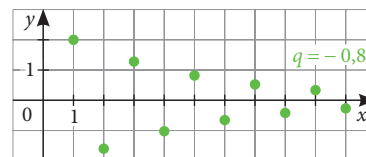
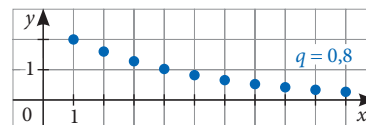
Megoldás:

A $|0,8^n - 0| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk a pozitív egész számok halmazán, ahol ε pozitív valós paraméter.

$|0,8^n - 0| = 0,8^n$. A valós számokon értelmezett $f(x) = 0,8^x$ exponenciális függvény alapszáma kisebb, mint 1, ezért szigorúan monoton csökkenő. Így: $0,8^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{0,8} \varepsilon$.

$\varepsilon = 10^{-6}$ esetén $\log_{0,8} 10^{-6} \approx 61,9$ $\Rightarrow$ $N = 61$ egy alkalmas küszöbindex.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\log_{0,8} \varepsilon$ egész része egy alkalmas küszöbindex.



ELMÉLET

Ha $q, a_1 \neq 0$, akkor az $a_n = a_1 \cdot q^n$ mértani sorozat

- $\rightarrow$ 0-hoz tart, ha $|q| < 1$;
- $\rightarrow$ a_1 -hez tart, ha $q = 1$;
- $\rightarrow$ ∞ -be vagy $-\infty$ -be tart, ha $q > 1$;
- $\rightarrow$ nincs határértéke, ha $q < -1$.

FELADATOK

1. E1 Az alábbi sorozatok esetében állapítsd meg a sorozatok határértékét, és adj meg alkalmas küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-8}$ esetére!

- a) $a_n = 20\,000 \cdot 0,7^n$ c) $c_n = 5 \cdot (-0,9)^n$
 b) $b_n = 4 \cdot 0,99^n$ d) $d_n = 6 \cdot 1,2^n \cdot (-0,5)^n$

2. E1 Határozd meg a sorozatok határértékét! Alkalmazd a konvergens sorozatok összegére, szorzatára vonatkozó tételt!

- a) $a_n = 45 + 0,3^n + (-0,8)^n$
 b) $b_n = (6 + 0,95^n) \cdot (3 - 0,45^n)$

3. E1 Bontsd a sorozatokat mértani (vagy más, már ismert) sorozatok összegére, és ennek segítségével határozd meg a sorozatok határértékét!

- a) $a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n}$ c) $c_n = \frac{3 \cdot 10^{n+1} + 8^n}{10^n}$
 b) $b_n = \frac{5^n + 6^n}{6^n}$ d) $d_n = \frac{9^{n+1} + 3^n}{3^{2n}}$

4. E2 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma ezen formulával írható le:

$$B(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L}{B_0} - 1 \right) \cdot 0,75^t}$$

A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve ($0 \leq t < 30$), L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban ($0 < B_0 < L$).

Egy nagyvárosban $L = 1,5$ millió, $B_0 = 1000$.

- a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani a városban a járvány kezdete után 5 nappal?
 b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint?
 c) Igazold, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor a $b_n = \frac{L}{1 + K \cdot 0,75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekvő, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.



mértani sorozat első n tagjának összege



mértani sor, mértani sor összege

BEVEZETŐ

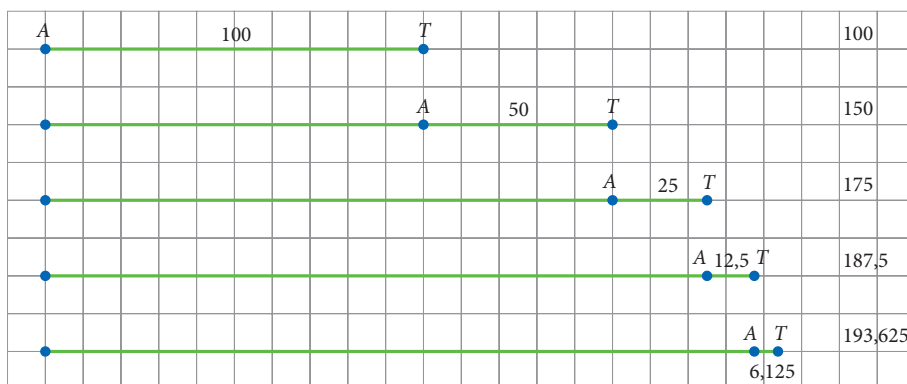
Zénóntól, az ókori görög filozófustól származik a következő híres paradoxon.

Versenyt futnak Akhilleusz (a leggyorsabb görög) és a teknős. Mivel Akhilleusz tudja, hogy a teknős lassabb nála, ezért 100 láb előnyt ad neki. Elindul a verseny. Mire Akhilleusz odaér, ahol a teknős induláskor volt, a teknős már továbbhaladt onnét. Mire Akhilleusz odaér, ahol a teknős akkor volt, amikor az indulási helyét Akhilleusz elérte, akkor a teknős már továbbhaladt onnét. És így tovább: mire Akhilleusz odaér, ahol a teknős az előző pillanatban volt, a teknős már továbbhaladt onnét. Ezek szerint Akhilleusz nem tudja utolérni a teknőst?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Tegyük fel, hogy Akhilleusz 100 láb előnyt ad a teknősnek, és kétszer olyan gyorsan fut, mint a teknős. Ábrázoltuk, hogyan alakul Akhilleusz (A) és a teknős (T) helyzete Zénón leírása szerint. Zénón nem egyenlő időközönként vizsgálta a folyamatot, hanem a következő pillanat mindig az, amikor Akhilleusz eléri a teknős „előző” pozícióját.



Felírtuk az ábra jobb oldalára, hogy addig az időpontig Akhilleusz összesen hány láb utat tett meg. Bizonyítsuk be, hogy az Akhilleusz megtett útját leíró 100; 150; 175; 187,5; 193,625; ... sorozat minden tagja kisebb, mint 200.

Megoldás:

Az ábráról leolvasható, hogy a részávok a 100; 50; 25; 12,5; ... sorozat tagjai, tehát egy mértani sorozat tagjai, melynek első tagja 100 és kvóciense 0,5. Az Akhilleusz által megtett út ezen mértani sorozat első n tagjának összege.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 100 \cdot \frac{0,5^n - 1}{-0,5} \quad \blacktriangleright \quad \text{Igaz-e, hogy bármely } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ esetén } 100 \cdot \frac{0,5^n - 1}{-0,5} < 200?$$

$$100 \cdot \frac{0,5^n - 1}{-0,5} < 200 \quad \Leftrightarrow \quad -200 \cdot (0,5^n - 1) < 200 \quad \Leftrightarrow \quad (0,5^n - 1) > -1 \quad \Leftrightarrow \quad 0,5^n > 0$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén teljesül, a vele ekvivalens első egyenlőtlenség is teljesül. A Zénón által leírt folyamatban Akhilleusz útja mindig kevesebb, mint 200 láb.

Figyeljük meg a mozgáshoz tartozó időtartamokat! A Zénón által leírt folyamat nem egyenlő időtartamokra bontja a mozgást, hanem mértani sorozat szerint csökkenő időtartamokra. Ha 100 láb lefutásához fél percre lenne szükség, akkor az előbbihez hasonló gondolatmenettel belátható, hogy a részeit összege mindig kevesebb, mint 1 perc. Ezen időtartamon belül, vagyis az első 1 percen belül valóban helyes a következtetés, és Akhilleusz nem éri utol a teknőst. Ez a gondolatmenet azonban nem szól arról, hogy mi történik 2 perc múlva, 3 perc múlva, 5 perc múlva.

2. Vizsgáljuk tovább Akhilleusz útját, vagyis azt a mértani sorozatot, melynek első tagja a 100 és kvóciense 0,5. Bizonyítsuk be, hogy az első n tag összegéből álló $\{S_n\}$ sorozat konvergens, és állapítsuk meg a határértékét!

Megoldás:

Az $\{a_n\}$ mértani sorozat első néhány tagja:

$$a_1 = 100; a_2 = 50; a_3 = 25; a_4 = 12,5 \dots \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Az első n tag összegéből álló $\{S_n\}$ sorozat első néhány tagja:

$$S_1 = 100; S_2 = 100 + 50 = 150; S_3 = 100 + 50 + 25 = 175; \\ S_4 = 100 + 50 + 25 + 12,5 = 187,5 \dots$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 100 \cdot \frac{0,5^n - 1}{0,5 - 1} = 100 \cdot \frac{0,5^n - 1}{-0,5}$$

Ha n tart végtelenbe, akkor a $0,5^n$ sorozat 0-hoz tart, ezért a tört számlálója (-1) -hez tart, és ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 100 \cdot \frac{-1}{-0,5} = 200.$$

Az $\{S_n\}$ sorozat tehát konvergens, és a határértéke 200.

Megjegyzés: Meglepő lehet, hogy végtelen sok pozitív tagot összeadva véges szám, 200 az eredmény.

ELMÉLET

Definíció: Az $\{a_n\}$ mértani sorozat tagjaiból képzett $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (végtelen tagú) összeget **mértani sornak** nevezzük. A mértani sorozat első 1, 2, ... tagjából képzett $S_1, S_2, \dots$ összegek a (végtelen) **mértani sor részletösszegei**. Ha a mértani sorozat részletösszegeiből álló $\{S_n\}$ sorozatnak létezik határértéke, akkor a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ határértéket a **mértani sor összegének** nevezzük.

Tétel: Ha $|q| < 1$, akkor a (végtelen) mértani sor összege $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$.

Megjegyzés: Ha $q \geq 1$ és $a_1 > 0$, akkor a mértani sor összege $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.
Ha $q \geq 1$ és $a_1 < 0$, akkor a mértani sor összege $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$.
Ha $q \leq -1$, akkor az $\{S_n\}$ sorozat divergens.

Ha $|q| < 1$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Bizonyítsuk be, hogy az $x = 42,8\dot{1}2\dot{3}$ ($= 42,8123123123\dots$) végtelen szakaszos tizedes tört racionális szám! Írjuk fel két egész szám hányadosaként!

Első megoldás:

Két egész szám, amelynek hányadosaként x felírható, meghatározható a következő egyenletrendszerből:

$$\left. \begin{aligned} 1000x &= 42\,812,3123123123\dots \\ x &= 42,8123123123\dots \end{aligned} \right\}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót!

$$999x = 42\,769,5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{427\,695}{9990}.$$

x -et felírtuk két egész szám hányadosaként, és így x racionális szám.

Második megoldás:

$$42,8\dot{1}2\dot{3} = 42,8 + 0,0123 + 0,0000123 + \dots$$

A $0,0123 + 0,0000123 + \dots$ összeg egy mértani sor összege. A mértani sorozat első tagja 0,0123 és kvóciense 0,001. Ezért a mértani sor összege:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,0123}{1 - 0,001} = \frac{0,0123}{0,999} = \frac{123}{9990}.$$

$$x = 42,8 + \frac{123}{9990} = \frac{427\,572}{9990} + \frac{123}{9990} = \frac{427\,695}{9990}.$$

FELADATOK

1. E1 Határozd meg a mértani sor összegét, ha

- a) $a_1 = 15$ és $q = 0,2$; c) $a_1 = 520$ és $q = -0,3$;
b) $a_1 = -42$ és $q = 0,5$; d) $a_1 = 62$ és $q = -0,25$.

2. E1 Írd fel a végtelen szakaszos tizedes törtet két egész szám hányadosaként!

- a) $0,\dot{1}8$ c) $0,5\dot{1}7\dot{3}$
b) $2,\dot{3}6\dot{1}$ d) $3,96\dot{1}4\dot{4}$

3. E2 Állapítsd meg a mértani sor összegét, majd adj meg $\varepsilon = 0,001$ -hez alkalmas küszöbindexet!

a) $a_1 = 175$ és $q = 0,75$

b) $a_1 = 1500$ és $q = -0,2$

c) $a_1 = 10$ és $q = -0,98$

4. E1 Határozd meg a mértani sorok összegét!

a) $\frac{15}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \frac{5}{162} + \dots$

b) $\frac{8}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \dots$

c) $\frac{49}{10} - \frac{7}{2} + \frac{5}{2} - \frac{25}{14} + \frac{125}{98} - \dots$

5. E1 Adj meg több olyan mértani sorozatot első tagjával és kvóciensével, amelyhez tartozó mértani sor összege

a) 100;

b) -20;

c) 15,8;

d) 0!

6. E2 Egy fáradékony bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul, és mindig pozitív irányba ugrik. Ha végtelen sokáig ugrálna, akkor melyik pontba tartana, ha az első ugrása 20 egység hosszúságú, és minden további ugrás hossza

a) az előtte lévő ugrás hosszának 95%-a;

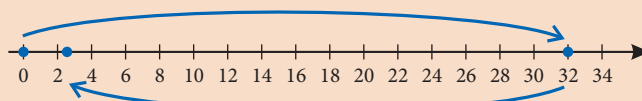
b) az előtte lévő ugrás hosszánál 7%-kal kevesebb?



7. E2 Egy másik alkalommal a fáradékony bolha úgy ugrál a számegyenesen, hogy az origóból pozitív irányba indul, és felváltva hol pozitív, hol negatív irányba ugrik. Az első ugrása 32 egység hosszúságú, és minden további ugrásának hossza az előző ugrás hosszának 92%-a. Ha végtelen sokáig ugrálna, akkor

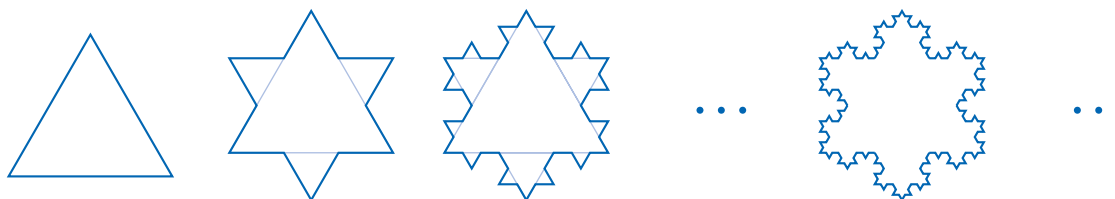
a) melyik pontba tartana;

b) mennyi lenne a teljes megtett útjának hossza?



RÁADÁS

Adott egy 1 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög. Minden oldal középső harmada fölé kifelé egy szabályos háromszöget rajzolunk az ábra szerint. Az így létrejött sokszög esetén megismételjük az eljárást: minden oldal középső harmada fölé kifelé egy szabályos háromszöget rajzolunk. Folytassuk ugyanezt az eljárást a kapott alakzattal az ábra szerint! A rajzolás során kapott „határalakzat” az ún. Koch-féle hópehely.



a) Mekkora az alakzat határoló vonalának hossza a 3. ábrán?

b) Mekkora lesz a „hópehely” területe a 4. rajz elkészítése után?

c) Mutasd meg, hogy a határalakzat „kerülete”, azaz határoló vonalának hossza végtelen nagy, vagyis a kerületek sorozatának határértéke végtelen!

d) Mutasd meg, hogy a határalakzat területe véges, vagyis a területek sorozata konvergens!



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy 60° -os középponti szögű körcikkbe egy kisebb 60° -os középponti szögű körcikket rajzolunk az ábra szerint. (A körcikknek közös a szimmetriatengelyük, és a kisebb körcikk csúcsai a nagyobb körcikk határoló vonalára esnek.) Majd a második körcikkbe az előző eljárás szerint egy harmadik 60° -os középponti szögű körcikket rajzolunk, és így tovább, az ábra szerint. Az első körcikk sugarának hossza $r_1 = 15$ cm.

Ha minden határon túl folytatnánk ezt az eljárást, akkor mekkora lenne az összes körcikk

a) kerületének összege;

b) területének összege?

Megoldás:

Első ránézésre úgy tűnhet, hogy a második körcikk sugara fele az első körcikk sugarának, de ez nem teljesül. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az AFE háromszög szabályos, mert $EAF \sphericalangle = 60^\circ$, és a tengelyes szimmetria miatt $AE = AF$. A DEF háromszög is szabályos, mert $EDF \sphericalangle = 60^\circ$, és $DE = DF$. Mivel e két háromszögnek az EF oldala közös, ezért a két háromszög egybevágó: $AFE \triangle \cong DEF \triangle$.

$$\text{Így } DT = TA = r_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \blacktriangleright \quad r_1 = AD = AT + TD = r_2 \cdot \sqrt{3}.$$

Minden körcikk hasonló az előtte lévőhöz, és a hasonlóság arányszáma $\lambda = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

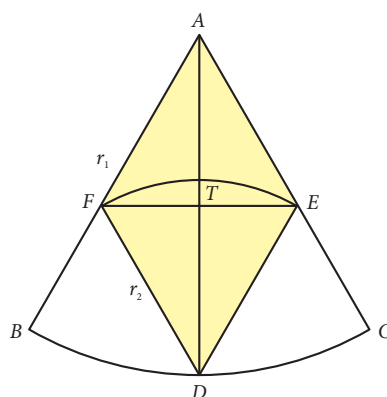
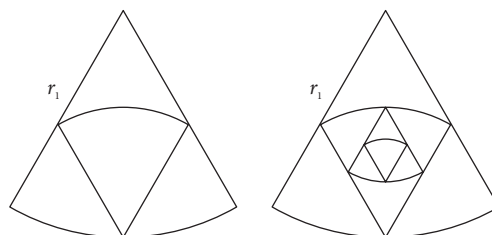
A körcikk sugarai hosszának sorozata, $r_1, r_2, r_3, \dots$ egy mértani sorozat, melynek kvóciense $\lambda = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ekkor a körcikk kerületének sorozata $K_1, K_2, K_3, \dots$ is mértani sorozat, és kvóciense ugyancsak $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

A hasonló síkidomokról területéről tanultak alapján a körcikk területének sorozata $T_1, T_2, T_3, \dots$ is mértani sorozat, és kvóciense $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Alkalmazzuk a mértani sor összegére vonatkozó összefüggést!

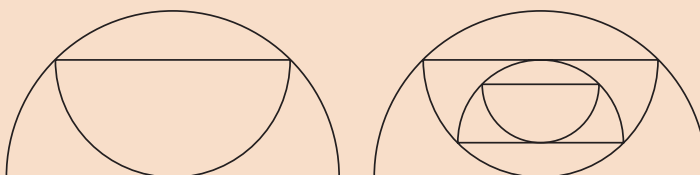
$$K_1 = 2 \cdot 15 + \frac{2 \cdot 15 \cdot \pi}{6} \approx 45,7 \text{ és } q = \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577 \quad (|q| < 1) \quad \blacktriangleright \quad \text{a kerületek összege: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \approx \frac{45,7}{0,423} \approx 108 \text{ cm.}$$

$$T_1 = \frac{15^2 \cdot \pi}{6} \approx 117,8 \text{ és } q = \lambda^2 = \frac{1}{3} \quad (|q| < 1) \quad \blacktriangleright \quad \text{a területek összege: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \approx \frac{117,8}{0,6667} \approx 176,7 \text{ cm}^2.$$



FELADATOK

1. E1 Egy 22 cm sugarú félkörbe az ábra szerint egy újabb félkört rajzolunk úgy, hogy a félkörök átmérői párhuzamosak, és a kisebb félkör átmérőjének két végpontja a nagyobb félkörívre esik. Ha ezt az eljárást hasonlóképpen folytatjuk tovább minden határon túl, akkor mennyi a félkörök kerületének, illetve területének összege?

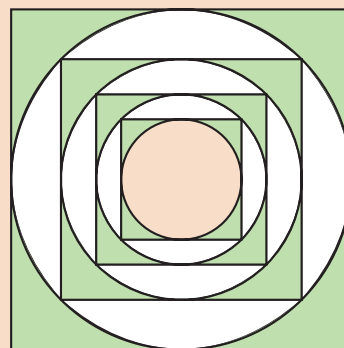


- 2. E2** Egy 8 cm oldalhosszúságú négyzetbe megrajzoljuk a beírható körét. Majd a körbe négyzetet írunk, melynek oldalai párhuzamosak az első négyzet megfelelő oldalaival. A második négyzetbe is megrajzoljuk a beírható kört, majd ebbe a körbe is négyzetet rajzolunk, melynek oldalai párhuzamosak az első négyzet oldalaival.

Minden lépésben zöldre színezzük a négyzetnek a beírható körén kívül eső részét.

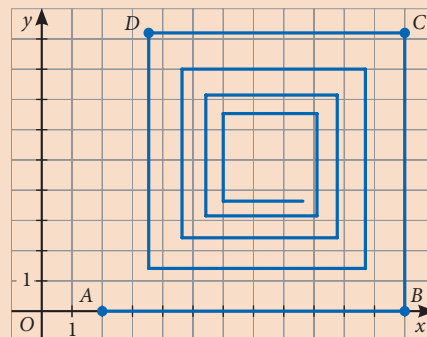
Ha minden határon túl folytatjuk az eljárást, akkor mekkora

- a) a zöld színű rész területe;
b) a fehér színű rész területe?



- 3. E2** A derékszögű koordináta-rendszerben egy törött vonalat rajzolunk az ábra szerint. A törött vonal kezdőpontja az $A(2; 0)$ pont. Az AB szakasz hossza 10 egység. A hozzá csatlakozó BC szakasz merőleges AB -re, a hossza 8%-kal kevesebb, mint az AB szakasz hossza. A BC szakaszhoz csatlakozó CD szakasz merőleges BC -re, a hossza 8%-kal kevesebb, mint a BC szakasz hossza, és így tovább. Ha minden határon túl folytatnánk ezt az eljárást, akkor

- a) mekkora lenne a törött vonal hossza;
b) a koordináta-rendszer melyik pontjába „érkeznénk”?



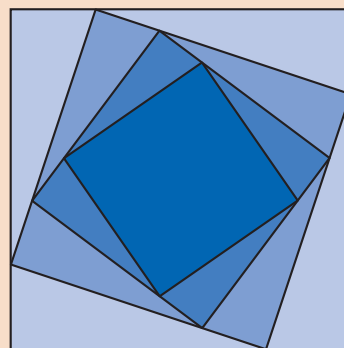
- 4. E2** Egyre kisebb kockákból tornyot építünk. Az első kocka oldaléle 25 cm hosszú. A második kocka oldaléle akkora, hogy a második kocka elhelyezhető az első kockára úgy, hogy az egymásra kerülő oldallapokon a második kocka csúcsai az első kocka oldaléleire illeszkednek, és azt 1 : 4 arányban osztják. A harmadik kocka oldaléle akkora, hogy a harmadik kocka elhelyezhető a második kockára úgy, hogy az egymásra kerülő oldallapokon a harmadik kocka csúcsai a második kocka oldaléleire illeszkednek, és azt 1 : 4 arányban osztják.

Az ábra a torony felülnézetét mutatja 4 kocka egymásra helyezése után.

Ha ezt az eljárást folytatjuk minden határon túl, akkor mennyi lenne az így kapott torony

- a) magassága; b) térfogata; c) felszíne?

Válaszod cm-ben, cm^3 -ben, cm^2 -ben add meg két tizedesjegyre kerekítve!



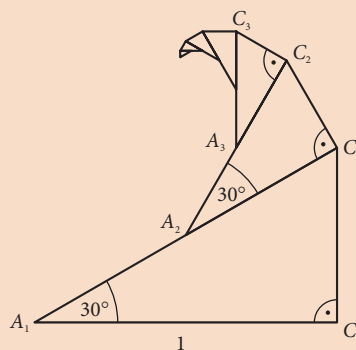
- 5. E2** (Emelt szintű érettségi, 2011)

Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30° -os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2 .

Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljuk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3 .

Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzoljuk. Ez az eljárás tovább folytatható.

- a) Számold ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe)!
b) Igazold, hogy a $C_0C_1C_2\dots C_n$ törött vonal hossza minden pozitív egész n -re kisebb, mint 1,4.



(D = definíció T = tétel M = módszer)

D	Számsorozat	Olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza és értékészlete a valós számok halmaza.
D	Számtani sorozat	Olyan számsorozat, amelyben a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag különbsége (a differencia) állandó, vagyis $1 < n, n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n - a_{n-1} = d$.
T	A számtani sorozat n -edik tagja	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, ahol a sorozat első tagja a_1 és differenciája d .
T	Kapcsolat a számtani sorozat tagjai között	$1 < n$ esetén $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ és $k < n$ esetén $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ ($n, k \in \mathbb{Z}^+$).
T	A számtani sorozat első n tagjának összege	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$
D	Mértani sorozat	Olyan számsorozat, amelyben a második tagtól kezdve bármely tag és az előtte álló tag hányadosa (a kvóciens) állandó, vagyis $1 < n$ esetén $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$.
T	A mértani sorozat n -edik tagja	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ahol a sorozat első tagja a_1 és kvóciense q .
T	Kapcsolat a mértani sorozat tagjai között	$1 < n$ esetén $(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ és $k < n$ esetén $(a_n)^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$ ($n, k \in \mathbb{Z}^+$)
T	A mértani sorozat első n tagjának összege	Ha $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot a_1$, ha $q \neq 1$, akkor $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.
D	Számsorozat monotonitása	Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n < a_{n+1}$; monoton növekvő, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$; szigorúan monoton csökkenő, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n > a_{n+1}$; monoton csökkenő, ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.
D	Számsorozat korlátossága	Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos, ha van olyan k valós szám (alsó korlát), melyre minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $k \leq a_n$. Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos, ha van olyan K valós szám (felső korlát), melyre minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \leq K$. Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.
D	Valós szám ε sugarú környezete	Az A valós szám ε sugarú környezetének nevezzük az $]A - \varepsilon; A + \varepsilon[$ nyílt intervallumot ($\varepsilon > 0$).

D	Számsorozat konvergenciája, határértéke	Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az A valós szám (és ezt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ módon jelöljük), ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{Z}^+$, hogy ha $N < n$, akkor a_n az A ε sugarú környezetébe esik, azaz $a_n - A < \varepsilon$. A N számot az adott ε-hoz tartozó küszöbindexnek nevezzük. Ha egy sorozatnak van (valós) határértéke, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat konvergens.
T	Műveletek konvergens sorozatokkal	Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens sorozatok esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, és $k \in \mathbb{R}$, akkor az $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\{k \cdot a_n\}$ is konvergens sorozatok, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B,$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot A,$ és ha minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor az $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ sorozat létezik, konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$.
D	A határérték fogalmának kiterjesztése	Az $\{a_n\}$ sorozat végtelenbe tart ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$), ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik N küszöbindex, hogy $N < n$ esetén $K < a_n$. Az $\{a_n\}$ sorozat mínusz végtelenbe tart ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$), ha minden $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $a_n < K$.
T	Mértani sorozat határértéke	Ha $q, a_1 \neq 0$ és $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, akkor az $\{a_n\}$ mértani sorozat esetében $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } q < 1 \\ a_1, & \text{ha } q = 1 \\ \infty \text{ vagy } -\infty, & \text{ha } q > 1, \end{cases}$ és nincs határérték, ha $q \leq -1$.
D	Mértani sor, mértani sor összege	Az $\{a_n\}$ mértani sorozat tagjaiból képzett $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (végtelen tagú) összeget mértani sornak nevezzük. A mértani sorozat első 1, 2, ... tagjaiból képzett $S_1, S_2, \dots$ összegek a (végtelen) mértani sor részletösszegei. Ha a mértani sorozat részletösszegeiből álló $\{S_n\}$ sorozatnak létezik határértéke, akkor a határértéket a mértani sor összegének nevezzük.
T	Mértani sor összege	Ha egy mértani sorozat első tagja a_1, kvóciense q és $q < 1$, akkor a (végtelen) mértani sor összege $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

FELADATGYŰJTEMÉNY

- 1. E1** Milyen valós x esetén lesz a három kifejezés egy számtani sorozat egymást követő három tagja?

a) $\log_2 x$; $\log_4 x^2$; $\log_8 x^3$

b) $\log_2 x$; $\log_2 (x + 2)$; $\log_2 (x + 6)$

c) $\lg x$; 1; $\operatorname{ctg} x$
- 2. E1** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, a hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom számjegyű tagja van a sorozatnak?
- 3. E1** Egy számtani sorozat első hat tagjának az összege a tizenötöde a következő kilenc tag összegének. Az első húsz tag összege 470. Add meg a sorozat első tagját és differenciáját!
- 4. E1** Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja. A háromszög területe 81-gyel nagyobb, mint a rövidebb befogó hossza. Mekkora a háromszög köré íráható körének sugara?

5. E1 Egy mértani sorozat negyedik tagja hatvannal nagyobb a harmadik tagjánál, valamint első tagja tizenöt-tel kisebb a második tagjánál.

a) Határozd meg a sorozat első tagját, kvóciensét és az első kilenc tag összegét!

b) Írd fel a sorozat első n tagjának szorzatát az n függvényében a legegyszerűbb alakban!

6. E1 Pista észrevette, hogy egy mellettük elsuhanó autó rendszámában a PST betűk mellett egy olyan háromjegyű szám van, amelynek jegyei különbözők és a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

a) Hány ilyen szám van?

Jóska – aki nagyon jó fejszámoló – azt is kiszámolta, hogy ha a számot elosztja a számjegyeinek az összegével, akkor hányadosul 23-at, maradékként 12-t kap. Továbbá ha a számban a százask és az egyesek számát felcseréli, akkor az eredetinel 396-tal nagyobb számot kap.

b) Mi lehetett az autó rendszáma?

7. E1 A kelmeboltban egy 5 cm átmérőjű rúd csavarának fel 20 méter szövetet. Mekkora a keletkező henger átmérője, ha a szövet vastagsága 1 mm?

(Ha egy vastag szövetet, például egy szőnyeget felterkerünk, úgynevezett „arkhimédészi spirált” kapunk. Nézz utána, milyen tulajdonságokkal rendelkezik ez a görbe!)

8. E1 (Írásbeli érettségi-felvételi feladat, 1990)
Négy testvér az életkorukról kérdezik. A legidősebb azt mondja: „Születési éveink egy számtani sorozat első négy tagját adják.” A korbán utána következő pedig így nyilatkozik: „15 évvel ezelőtt testvéreim életkora egy mértani sorozat első három tagjával volt egyenlő, most pedig életkoruk összege $\frac{11}{4}$ -szerese az enyémnek.” Számold ki a testvérek jelenlegi életkorát!

9. E1 Egy sorozatra teljesül: $a_n = 5n - 4$.

a) Igazold, hogy a sorozat számtani sorozat!

b) Hány háromjegyű szám tartozik a sorozat tagjai közé?

c) A sorozatnak van három olyan egymást követő tagja, amelyből az első 1-gyel csökkentve, a másodikat 14-gyel, a harmadikat 39-cel növelve az így kapott számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai lesznek. Melyik ez a három tag, és mennyi a kapott mértani sorozat kvóciense?

10. E2 Egy mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 20, ugyanezen tagok reciprokaik összege $\frac{5}{4}$. Add meg a sorozat első három tagját!

11. E1 Egy számtani sorozat első kilenc tagjának az összege 171. A sorozat első, nyolcadik és 36. tagja egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Add meg a mértani sorozat kvóciensét!

12. E1 Egy értékpapírért 2 millió forintot fizetünk.

a) Ha hat év múlva 2,3 millió forintot fizet a bank, akkor milyen éves kamatlábbal számolt?

b) Hány év múlva vehetünk fel 2,5 millió forintot, ha az éves kamatláb 8%?

13. E1 Bendegúz 10 millió forint kölcsönt vesz fel a bankból 3 év futamidőre, évi 12%-os kamatra.

Mennyi törlesztőrészletet kell fizetnie havonta, ha a törlesztést a felvételt követő hónapban kezdi el?

14. E2 Egy mértani sorozat kvóciense pozitív valós szám, és 1-gyel kisebb a sorozat első tagjánál. Van olyan pozitív egész n , melyre a következő feltételek egyidejűleg teljesülnek a sorozatra vonatkozóan:

I. az első n tag összege 21,

II. az első tag és az n -edik tag szorzata 36.

Számold ki a sorozat első tagját, kvóciensét, valamint az n értékét!

15. E2 (Emelt szintű érettségi, 2015)

Egy pénzügyi intézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$ -os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$

képlettel számolja ki. A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzügyi intézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?

c) Számold ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ határértéket, ha $q = 1,02$ és $H = 2\,000\,000$.

16. E2 Róbert gyűjtőszámlát nyit. Az első évben minden negyedévben befizet a számlára 180 000 Ft-ot. Attól kezdve évente csak egyszer fizet be a számlára pénzt, az év elején 700 000 Ft-ot. Mekkora összeg lesz a számlán 1; 3; illetve 8 év múlva, ha az éves kamatláb 12%, a számla kamatos kamatozása, és a kamatjováírás negyedévente történik?

17. E2 (Az írásbeli érettségi vizsgálat tételei az 1892–93. Isk. év végén; forrás: KöMaL 1893. december 6–8. oldal.)

a) (Brassó. Róm. kath. főgymnasium)

Egy jószág megvételére 3 ajánlat van:

A) 15 évig 3500 frtot ígér minden évnek végével;
B) 15000 forintot azonnal kész adni s ezen kívül 12 évig 2450 frtot ígér minden évnek végével;
C) 30000 frtot ígér 6 év múlva s ezután 3 év múlva 5000 frtot, s azután 8 évig 1600 frtot kíván fizetni minden év végével. Melyik ajánlat a legelőnyösebb s mennyi készpénzt ér mindegyiknek ajánlata 4% kamatos kamattal?

Megjegyzés: A feladat a három ajánlat jelenértékét hasonlítja össze. De nem inflációról beszél, hanem arról, hogy a pénzt minden évben évi 4%-os kamatos kamatra tudnánk befektetni.

b) (Budapest. V. kerületi állami főreáliskola)

B és C összesen 3400 frtot helyezett valamely vállalatba. B a tőke és egy évi kamattal fejeben visszakar összesen 2070 frtot. C a tőke és a 16 havi kamattal fejeben 1920 frtot. Hány forintot helyezett B a vállalatba?

Megjegyzés: A feladatban egyszerű kamatozás történik, azonos éves kamatlábbal, és a 16 havi kamattal az éves kamattal 1,25-szerosa.

c) (Budapest. Fő- és székvárosi IV. ker. főreáliskola)
Valaki 15 200 frtnyi vagyonát pénzintézetbe helyezi a végett, hogy 5% kamatosítással 18 éven át minden év elején egyenlő évjáradékot élvezhessen. Mennyire rúg az évjáradék?

Megjegyzés: Az évjáradék azt jelenti, hogy a bank évente egyszer ugyanakkora összeget (járadékot) fizet az illetőnek az adott számla terhére. Az történik tehát, hogy eltelik egy év, a 15 200 Ft kamatozik 5%-kal, és a bank kifizet ebből az összegből x Ft-ot járadékként. Ismét eltelik egy év, a bent maradt tőke kamatozik 5%-kal, és a kifizetés miatt megint csökken x Ft-tal. És így tovább. A 18. év végén a számlán lévő pénz újból kamatozik, és az x Ft kifizetése után elfogy a számláról a pénz.

d) (Budapest. Fő- és székvárosi VIII. ker. főreáliskola)
Valaki egy 9 év után kezdődő és 18 évig tartó 1600 frtnyi járadékot egy másik járadékra akar átválttatni, mely 12 év után kezdődjék és 15 évig tartson. Mekkora lesz az új járadék, ha a kifizetés mindig az év végén történik és 4,5%-ot számítunk?

18. E2

a) Mutasd meg, hogy az $a_n = \frac{3n+1}{4n+7}$ sorozat konvergens!

b) Add meg az $a_n = \frac{3n+1}{4n+7}$ sorozathoz tartozó a küszöbszámot $\varepsilon = 10^{-3}$ esetén!

19. E1 Határozd meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 5}{5n^2 + 3n + 1}$ **c)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 \cdot 0,4^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 7n + 3}{2n^3 - 4n + 9}$ **d)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 4^n}{3 \cdot 4^n}$

20. E2 Határozd meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{3n^2 - 5n + 7}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 8 + 11 + \dots + (3n+2)}{(3n+2)(2n+3)}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(2n^2-1)}{\binom{n}{4}}$ **d)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{3}}{\binom{n}{3}}$

21. E1 Írd fel két egész szám hányadosaként az alábbi tizedes törtet!

a) 0,21 **b)** 4,59 **c)** 6,4753

22. E2 Egy egységoldalú négyzetet 4 egybevágó négyzetre bontunk, majd ezek közül 3 négyzetet befestünk rendre pirosra, kékre, zöldre. A negyedik négyzetet újra 4 egybevágó négyzetre bontjuk, a kapott kisebb négyzetek közül 3 négyzetet ismét pirosra, kékre és zöldre festünk. Ezt az eljárást összesen n lépésben folytatjuk. Mennyi lesz a pirosra festett részek területe összesen, ha n tart a végtelenbe?

23. E2 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Tekintsük az $\{a_n\}$ sorozatot:

$$a_1 = \binom{2}{2} = 1, a_2 = \binom{3}{2} = 2, a_3 = \binom{4}{2} = 6 \text{ és így}$$

$$\text{tovább, } a_n = \binom{n+1}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

a) Számold ki az $\{a_n\}$ sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását!

b) A fenti $\{a_n\}$ sorozatból képezzük a $\{b_n\}$ sorozatot:
 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Mennyi a $\{b_n\}$ sorozat határértéke?

c) A $\{c_n\}$ számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első n tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300 ($n \in \mathbb{Z}^+$). Határozd meg n értékét!



sorozat határértéke, egy valós szám ε sugarú környezete



függvény határértékének és folytonosságának szemléletes fogalma

BEVEZETŐ

A differenciálszámítást a XVII. századtól kezdve, Newton és Leibniz munkássága óta a tudomány és a technika számos területén alkalmazzák. Maradt azonban ezzel kapcsolatban néhány olyan kérdés, amelynek a megválaszolására közel 200 évet kellett várni. Mit jelent az, hogy „végtelenül kicsiny”? Mit jelent az, hogy „végtelenül megközelíteni egy értéket”? Mit jelent az, hogy egy függvény „tart valahová”? A pontos definíciókat először a sorozatokra vonatkozóan mondták ki a matematikusok. Ennek ismeretében léptek tovább, és értelmezték a függvény határértékét.

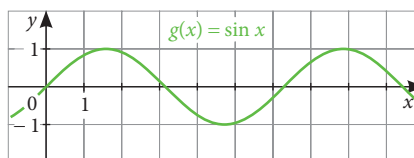
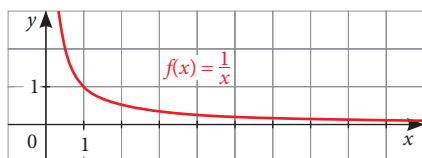
KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvények grafikonját egyre nagyobb x -ek esetében!

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x$

Megoldás:



Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonja „egyre jobban megközelíti” az x tengelyt, ahogy „ x tart a végtelenbe”. Ez azt jelenti, hogy egy bizonyos x értéktől kezdve a függvényértékek tetszőlegesen közel lesznek a 0-hoz, még ha nem is érik el azt soha. Erre a függvényre azt fogjuk mondani, hogy a végtelenben a határértéke 0.

A $g(x) = \sin x$ függvény grafikonja nem „szorul be” egy tetszőlegesen keskeny sávba, ha x tart a végtelenbe, hanem a függvény újra és újra felveszi például az 1 és a -1 értékeket is. Nincs olyan érték, amit a függvényértékek tetszőlegesen megközelítenek egy bizonyos x_0 értéktől kezdve. Ennek a függvénynek nincs határértéke a végtelenben.

ELMÉLET

1. Függvény határértéke a végtelenben (szemléletes kép)

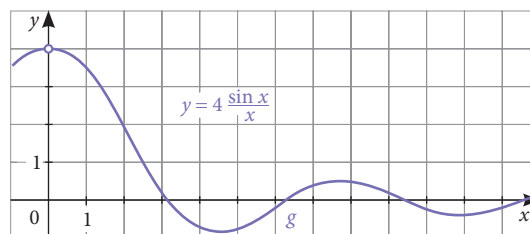
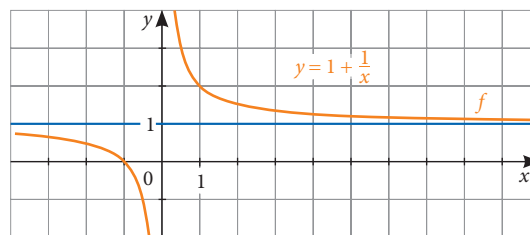
Egy függvény esetében csak akkor beszélünk végtelenben vett határértékről, ha van olyan a valós szám, amelyre minden $x > a$ valós szám esetén a függvény értelmezve van.

A végtelenben vett határérték szemléletesen úgy jelenik meg, hogy a függvény grafikonja az x növekedésével egyre keskenyebb sávba esik a határérték körül.

Például: Az ábrán látható f függvény a végtelenben 1-hez tart, a g függvény pedig 0-hoz tart.

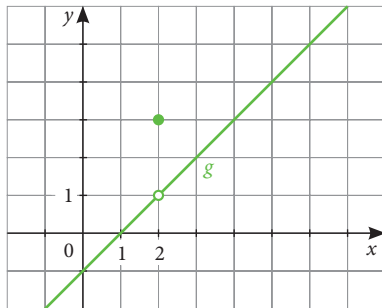
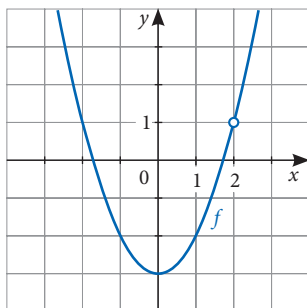
Jelölés: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Hasonlóan értelmezhető a $-\infty$ -ben vett határérték is.



2. Ábrázoltuk két függvény grafikonját. Figyeld meg a függvények „viselkedését” az $x_0 = 2$ hely környezetében!

Megoldás:



Az f függvény az $x_0 = 2$ helyen nincs értelmezve, az $x_0 = 2$ hely környezetében azonban igen. Az $x_0 = 2$ hely környezetében a függvényértékek nagyon közel vannak 1-hez.

A g függvény az $x_0 = 2$ helyen értelmezve van, de a 2 helyen felvett függvényérték nagyon „kilóg” azok közül a függvényértékek közül, amelyeket a függvény az $x_0 = 2$ hely környezetében felvesz. Az $x_0 = 2$ hely környezetében a függvényértékek nagyon közel vannak 1-hez.

Mindkét esetben azt fogjuk mondani, hogy az $x_0 = 2$ helyen a függvény határértéke 1. Az, hogy a függvénynek a 2 helyen vett határértéke 1, megtörténhet tehát úgy, hogy a függvény ezen a helyen nincs is értelmezve, vagy úgy, hogy ezen a helyen értelmezve van, de más az értéke, mint a határérték, és természetesen úgy is (ez a „legtermészetesebb” helyzet), hogy a határérték megegyezik a függvényértékkel (ez áll elő az f és a g függvényeknél minden, a 2-től különböző x helyen).

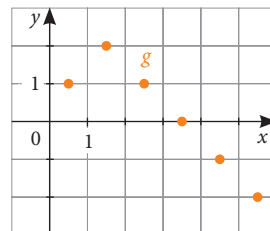
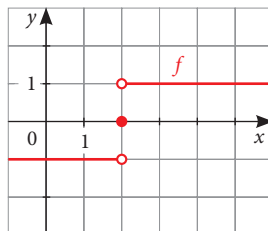
3. Ábrázoltuk az f és a g függvény grafikonját. Figyeld meg a grafikonokat! Fogalmazd meg, miért mondjuk azt, hogy ezeknek a függvényeknek nincs határértéke az $x_0 = 2$ helyen!

Megoldás:

Az f függvény értékei az $x_0 = 2$ hely környezetében más-más értékeket közelítenek meg, ha $x < 2$, illetve ha $x > 2$. Ha „balról” közelítünk a 2-höz, akkor a 2-ben -1 -et várunk függvényértéknek, ha „jobbról”, akkor viszont 1 -et.

A g függvény nincs értelmezve az $x_0 = 2$ hely környezetében.

A függvény határértékét az $x_0 = 2$ helyen akkor tudjuk értelmezni, ha a függvény értelmezve van az $x_0 = 2$ hely egy környezetében, és van olyan környezete az $x_0 = 2$ hely körül, amelyben a függvényértékek ugyanannak a valós számnak a közelében vannak. Az f függvény esetében nem teljesül a második feltétel, a g függvény esetében pedig nem teljesül az első feltétel sem, ezért ennek a két függvénynek nincs határértéke az $x_0 = 2$ helyen.



ELMÉLET

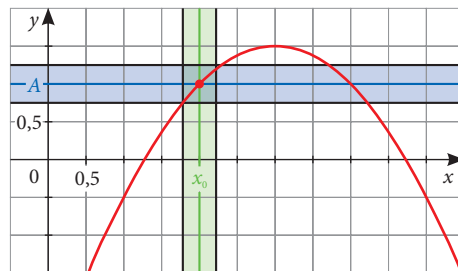
2. Függvény határértéke az x_0 helyen (szemléletes kép)

A függvény véges helyen vett határértéke különösen fontos fogalom, mert ennek segítségével lehet a differenciálhányados pontos definícióját megfogalmazni.

Egy függvénynek a véges x_0 helyen vett határértéke nem az x_0 helyen felvett függvényértékkel áll kapcsolatban, hanem az x_0 környezetében felvett függvényértékekkel. Ezért csak akkor beszélhetünk x_0 helyen vett határértékről, ha a függvény értelmezve van x_0 egy környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyet.

Ha egy függvény határértéke egy x_0 helyen egy A valós szám, akkor az x_0 hely környezetében (esetleg magát az x_0 helyet kivéve) a függvényértékek az A szám közelében vannak. Szemléletesen ez a függvény grafikonján úgy jelenik meg, hogy ha az x_0 hely körüli sávból választjuk x -et, akkor a függvényérték az A körüli sávba esik. Jele: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Megjegyzés: Ha egy függvény grafikonja folytonos vonallal megrajzolható, akkor az értelmezési tartomány minden helyén van határértéke, és az minden helyen egyenlő az adott helyen vett függvényértékkel.



3. Függvény folytonossága az x_0 helyen

Egy f függvény folytonos az értelmezési tartományának egy x_0 helyén, ha:

- ▶ értelmezve van az x_0 egy környezetében is (azaz van olyan nyílt intervallum, amelynek az x_0 egy belső pontja, és amely részhalmaza az értelmezési tartománynak);
- ▶ van véges határértéke az x_0 helyen (azaz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ létezik);
- ▶ az x_0 helyen a függvény helyettesítési értéke megegyezik a határértékével (azaz $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$).

Egy függvény folytonos, ha értelmezési tartományának minden helyén folytonos.

Megjegyzés: Ha egy függvény grafikonja folytonos vonallal megrajzolható, akkor ez a függvény folytonos.

4. Függvény határértéke tágabb értelemben

A határérték fogalma kiterjeszthető úgy, hogy értelmezzük azt is, hogy a függvény határértéke egy x_0 helyen végtelen, illetve a ∞ -ben vagy a $-\infty$ -ben végtelen.

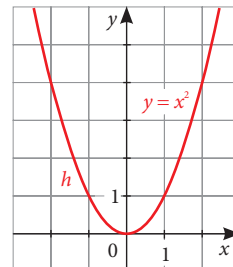
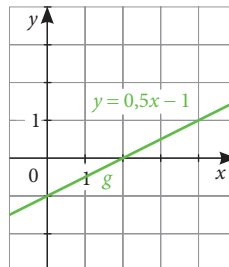
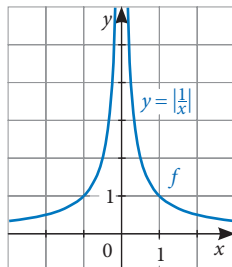
Például:

az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény határértéke az $x_0 = 0$ helyen ∞ , a $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben vett határértéke egyaránt 0;

a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0,5x - 1$ függvény határértéke a ∞ -ben ∞ , a $-\infty$ -ben $-\infty$;

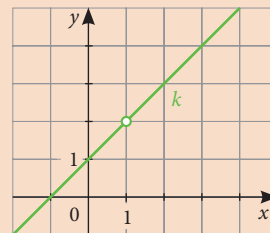
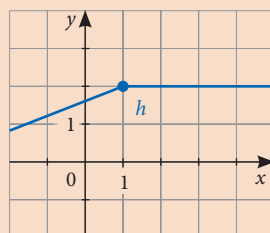
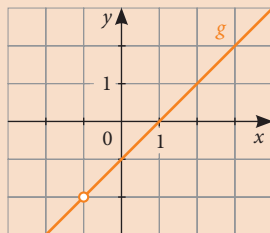
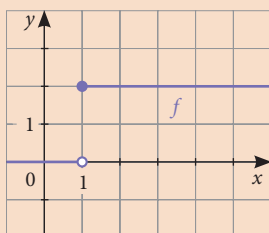
a $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ függvény határértéke a ∞ -ben és a $-\infty$ -ben is ∞ ;

a $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin x$ függvénynek tágabb értelemben sincs határértéke a ∞ -ben.



FELADATOK

1. E1 Ábrázoltuk néhány függvény grafikonját. Írd a függvények betűjelét a táblázat megfelelő helyeire!



	Van helyettesítési értéke az $x = 1$ helyen	Van határértéke az $x = 1$ helyen	Folytonos az $x = 1$ helyen	Folytonos az $x = -1$ helyen	Hozzárendelési szabálya $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	Hozzárendelési szabálya $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
Függvény betűjele						

2. E1 A következő függvények grafikonja egy-egy „lyukas” egyenes. A számláló szorzattá alakításának segítségével ábrázold a függvények grafikonját! Állapítsd meg a grafikon segítségével, hogy mi a függvény határértéke azon az x helyen, ahol nincs értelmezve!

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

c) $h: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

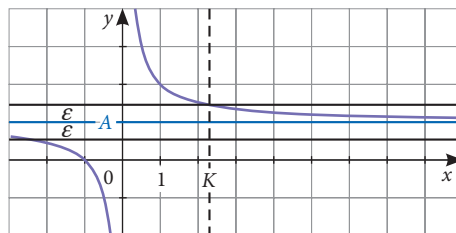
d) $k: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

Függvény határértéke – definíciók

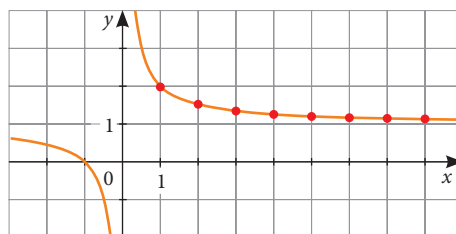
Egy függvénynek a végtelenben, illetve a véges helyen felvett határértéke is kétféle módon definiálható. Bebizonyítható, hogy a két definíció ugyanazt a fogalmat határozza meg.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvényhez van olyan a valós szám, amelyre minden $x > a$ valós szám esetén a függvény értelmezve van. Az f függvény **határértéke a végtelenben** egy A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik K valós szám, hogy minden $x > K$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Megjegyzés: A definícióban szereplő K függ az ε -tól: minden pozitív valós ε -hoz található alkalmas K valós szám.

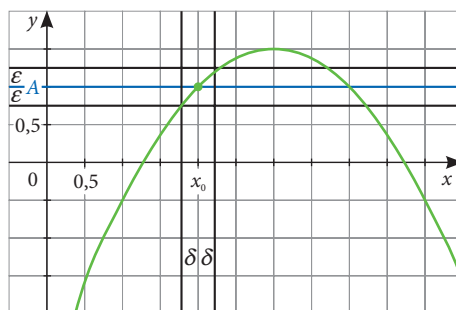


Másik lehetséges definíció: Tegyük fel, hogy az f függvényhez van olyan a valós szám, amelyre minden $x > a$ valós szám esetén a függvény értelmezve van. Egy f függvény **határértéke a végtelenben** egy A valós szám, ha minden végtelenbe tartó $\{x_n\}$ sorozat esetén a függvényértékek sorozata A -hoz tart. Azaz $x_n \rightarrow \infty$ esetén $f(x_n) \rightarrow A$.



Definíció: Legyen az f függvény olyan, hogy értelmezve van az x_0 egy környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyet. Az f függvénynek létezik **határértéke az x_0 helyen**, és ez a határérték az A valós szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ valós szám, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Megjegyzés: A definícióban szereplő δ az ε függvénye. Ez a definíció azt fogalmazza meg pontos matematikai kifejezésekkel, hogy tetszőleges pozitív ε valós szám esetén meghatározható az x_0 -nak egy olyan környezete, hogy ebből a környezetből véve x -et (kivéve x_0 -t) a függvényértékek kevésbé térnek el A -tól, mint ε .



Másik lehetséges definíció: Legyen az f függvény olyan, hogy értelmezve van az x_0 egy környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyet. Az f függvénynek létezik **határértéke az x_0 helyen**, és ez a határérték az A valós szám, ha minden x_0 -hoz tartó $\{x_n\}$ sorozatra, amelynek minden tagja az értelmezési tartomány x_0 -tól különböző eleme, a függvényértékek sorozata A -hoz tart. Azaz $x_n \rightarrow x_0$ esetén $f(x_n) \rightarrow A$.

Például: Vizsgáljuk az $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ függvény határértékét az $x_0 = 1$ helyen ezen definíció alapján!

Válasszunk egy olyan $\{x_n\}$ sorozatot, amely $x_0 = 1$ -hez tart.

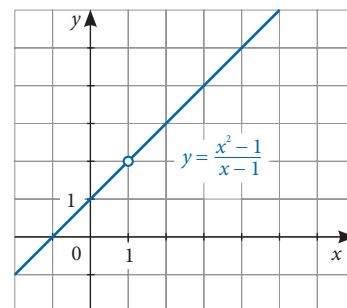
Ilyen sorozat például az $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Figyeljük a függvényértékek sorozatát!

$$f(x_n) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 2 + \frac{1}{n}$$



Ez a sorozat a 2-höz tart.



Bebizonyítható, hogy minden 1-hez tartó $\{x_n\}$ sorozat esetén a függvényértékek sorozata 2-höz tart. Ezért a függvény határértéke az $x_0 = 1$ helyen 2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$



differenciálhányados szemléletes fogalma és alkalmazásai



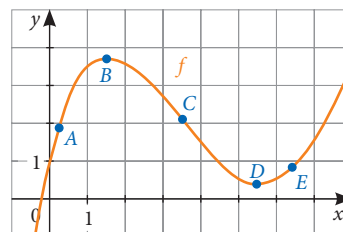
differenciálhányados definíciója

BEVEZETŐ

Korábban már megismerkedtünk a differenciálhányados szemléletes fogalmával. A differenciálszámítás segítségével oldottuk meg a következő típusú feladatokat:

- ▶ függvénygörbe érintőjének felírása;
- ▶ függvény jellemzése monotonitás és konvexitás szempontjából;
- ▶ szélsőérték-feladatok.

A határérték segítségével most megfogalmazzuk a differenciálhányados pontos definícióját.



	A	B	C	D	E
f' előjele	+	0	-	0	+
f'' előjele	-	-	0	+	+

ELMÉLET

1. A differenciálhányados (derivált) definíciója

Definíció: differenciahányados

Legyen az f függvény értelmezve az x és x_0 helyeken. Az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hányadost az f függvény x és x_0 helyekhez tartozó

differenciahányadosának (különbségi hányadosának) nevezzük.

Megjegyzés: A természettudományokban szokás, hogy a differenciahányadost $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ módon jelölik. (Például: $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ a $\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ differenciahányadost jelöli.)

Definíció: differenciálhatóság, differenciálhányados az x_0 helyen

Legyen értelmezve az f függvény az x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény **differenciálható** az x_0 helyen, ha az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvénynek létezik véges határértéke. Ez a határérték az f függvény x_0 -beli **differenciálhányadosa** (**deriváltja**). Jele: $f'(x_0)$.

Ha egy f függvény értelmezési tartománya minden helyén deriválható, akkor derivált függvénye az a függvény, amely x -hez $f'(x)$ -et rendel.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Néhány elemi függvény deriváltfüggvénye (ismétlés)

$f(x)$	c	x^n	x^a	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	$n \cdot x^{n-1}$	$a \cdot x^{a-1}$	$\cos x$	$-\sin x$

$c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$

(a függvények értelmezési tartománya a valós számok legbővebb részhalmaza, amelyen a függvény értelmezhető)

3. Függvény szélsőértékének keresése, ha a függvény deriválható, és $D_f = \mathbb{R}$ (ismétlés)

Az f függvénynek az x_0 helyen szélsőértéke van, ha:

$$f'(x_0) = 0 \text{ ÉS } f'(x) \text{ az } x_0 \text{ helyen előjelet vált vagy } f''(x_0) \neq 0$$

1. A valós számokon értelmezett $f(x) = x^2$ függvény esetében határozzuk meg a $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ differenciáhányados függvény határértékét az x_0 helyen!

Megoldás

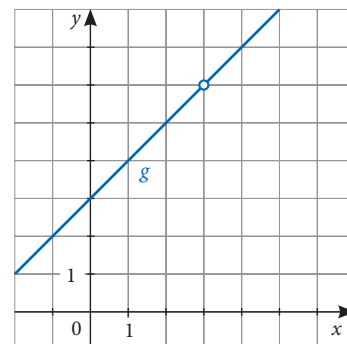
$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

Ennek határértékét keressük az x_0 helyen, ehhez az $x \neq x_0$ esetben kell vizsgálni ezt a kifejezést.

$$\text{Ha } x \neq x_0, \text{ akkor } g(x) = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0.$$

A g függvény grafikonja tehát egy „lyukas” egyenes (meredeksége 1, tengelymetszete x_0 , és az $x = x_0$ helyen nincs értelmezve). Az ábrán az $x_0 = 3$ esethez tartozó grafikon látható.

A g függvény határértéke az x_0 helyen $2x_0$. Ezt a határértéket nevezzük az $f(x) = x^2$ függvény x_0 -beli differenciáhányadosának. Mivel az értelmezési tartomány minden x_0 elemére a differenciáhányados $2x_0$, ezért az $f(x) = x^2$ függvény deriváltfüggvénye $f'(x) = 2x$.



2. Jellemezd az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(2x - 3)$ függvényt monotonitás, szélsőértékek és konvexitás szempontjából!

Megoldás:

A monotonitás és a szélsőérték a függvény első deriváltja, a konvexitás a második deriváltja segítségével vizsgálható.

A deriválásához hozzuk kanonikus alakra a polinomot!

$$f(x) = x^2(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2 \quad \blacktriangleright \quad f'(x) = 6x^2 - 6x \quad \blacktriangleright \quad f''(x) = 12x - 6$$

Az f lokális szélsőérték helyei azokon a helyeken lehetnek, ahol az első derivált értéke 0. A $6x^2 - 6x = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$, ezért az f függvénynek csak ezeken a helyeken lehet szélsőértéke. Ahol az első derivált értéke negatív, ott az f függvény szigorúan monoton csökken, ahol az első derivált pozitív, ott f szigorúan monoton nő.

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	szigorúan monoton nő	lokális maximumhelye van, a maximum értéke 0	szigorúan monoton csökken	lokális minimumhelye van, a minimum értéke -2	szigorúan monoton nő

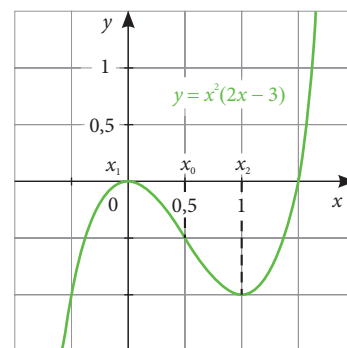
Az f függvénynek azon a helyen lehet inflexiós pontja, ahol a második derivált értéke 0. Ez az $x_0 = 0,5$ hely. Ha a második derivált értéke pozitív, akkor f konvex, ha a második derivált negatív, akkor f konkáv.

x	$x < 0,5$	$x = 0,5$	$0,5 < x$
$f''(x)$	-	0	+
f	konkáv	inflexiós pont	konvex

Az $x_0 = 0,5$ helyen az f függvénynek inflexiós pontja van.

Az f függvény grafikonja a jobb oldali ábrán látható.

(A levezetés során használt összefüggéseket és táblázatokat a 78. lecke mutatja be.)



3. Egy vállalat az egyik termék x darabjának előállítására összesen $350 + 32x + 0,001x^3$ euró költséget fordít ($x < 6000$). A terméket darabonként $180 - 0,03x$ euróért tudják értékesíteni. Hány darab előállítása esetén érhetik el a legnagyobb hasznot?

Megoldás:

A haszon a bevétel és a költség különbsége, ahol a bevételt az eladási ár és az eladott mennyiség szorzata adja.

A haszon x darab termék előállításakor: $h(x) = (180 - 0,03x)x - (350 + 32x + 0,001x^3) = -0,001x^3 - 0,03x^2 + 148x - 350$.

Vizsgáljuk a h függvényt a valós számok halmazán! Ahol a h -nak maximuma van, ott a deriváltfüggvény értéke 0.

$$h'(x) = -0,003x^2 - 0,06x + 148 = 0 \quad \blacktriangleright \quad x_1 \approx -232,3, \quad x_2 \approx 212,3.$$

Ha ezen helyek valamelyikében a második derivált értéke negatív, akkor ott a h függvénynek maximuma van.

$$h''(x) = -0,006x - 0,06. \text{ Az } x_1 \text{ helyen } h'' \text{ pozitív, az } x_2 \text{ helyen negatív} \quad \blacktriangleright \quad x_2 \approx 212,3 \text{ maximumhely.}$$

Mivel h folytonos, ezért a természetes számok halmazán a h függvénynek az $x \approx 212,3$ maximumhellyel szomszédos természetes számok esetén lehet maximuma. Számológéppel ellenőrizhetjük, hogy $h(212) > h(213)$. (A két érték különbsége kevesebb, mint 1 euró: $h(212) \approx 20\,150$ és $h(213) \approx 20\,149$.)

A legnagyobb haszon tehát akkor érhető el, ha a darabszám $x = 212$.

FELADATOK

1. E1 Deriváld a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ d) $k(x) = (x + 5)(x - 1)$

b) $g(x) = 3x^4 + 12x^2 - 5x - 3$

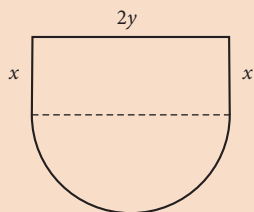
c) $h(x) = (x - 2)^3$

2. E1 Egy cég nemzetközi piacra gyárt termékeket. Egy termékből x darab eladása esetén a termék darabárát a $t(x) = 700 - 2x$ függvény, a gyártás összköltségét x darab gyártása esetén az $k(x) = -0,1x^2 + 200x + 1350$ függvény adja meg euróban, ahol x legalább 100 és legfeljebb 200.

Határozd meg, hány gyártott darab esetén lesz maximális az adott termékből származó

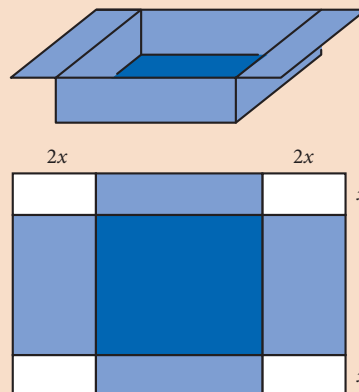
- a) bevétel; b) összköltség; c) haszon!

3. E1 Egy szervezet logójának alakja az ábra szerint egy téglalapból és egy hozzá illesztett félkörből áll. A logó kerülete 12 cm. Hogyan válasszuk meg a logó méreteit, ha azt szeretnénk, hogy a logó területe a lehető legnagyobb legyen?



4. E1 Egy téglalap alakú kartonlap oldalainak hossza 20 cm és 30 cm. A kartonlapból téglatest alakú, felül nyitott dobozkat készítünk, melynek az ábra szerint két oldallapjánál pereme is van. A dobozt úgy készítjük, hogy a kartonlap mindegyik sarkából levágunk egy-egy ugyanolyan téglalapot, amelynek a 30 cm-es oldalra illeszkedő oldala kétszer olyan hosszú, mint a 20 cm-es oldalra illeszkedő oldala, majd a megma-

radt lap szélein keletkezett téglalapokat felhajtjuk, végül a peremeket visszahajtjuk. (A perem szélessége ugyanakkora, mint a téglatest magassága.) Mekkora legyen a levágott téglalapok oldala, hogy a kapott téglatest térfogata a lehető legnagyobb legyen?



5. E1 Határozd meg az alábbi függvények szélsőérték-helyeit és inflexiós pontjait, és jellemezd a függvényeket monotonitás és konvexitás szempontjából! Az eredményeket foglald táblázatba!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0,1x^3 + 0,3x^2 - 2,4x$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 0,1x^4 + 0,4x^3 + 1$

6. E1 Határozd meg a következő függvények deriváltfüggvényét!

a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$



deriváltfüggvények



primitív függvény

BEVEZETŐ

Ha ismerjük egy mozgás út-idő függvényét, akkor következtetni tudunk a pillanatnyi sebesség nagyságára. Az $s(t)$ függvényből deriválás segítségével megkaphatjuk a pillanatnyi sebességet leíró $v(t)$ függvényt. Vajon mi a helyzet fordított esetben? Ha ismerjük minden pillanatban a pillanatnyi sebességet (azaz ismert a $v(t)$ függvény), akkor hogyan tudunk következtetni a mozgás alatt megtett útra (az $s(t)$ függvényre)?



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Adjunk meg olyan f függvényt, melynek deriváltfüggvénye $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x - 5$.

Megoldás:

A valós számokon értelmezett $g(x) = x^2$ függvény deriváltfüggvénye $(x^2)' = 2x$. A $3g$ függvény deriváltfüggvénye $(3x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$. A valós számokon értelmezett $h(x) = 5x$ függvény deriváltfüggvénye $(5x)' = 5$. A deriválási szabályok alapján $(3x^2 - 5x)' = 6x - 5$.

A feladat egyik megoldása tehát az $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 3x^2 - 5x$ függvény.

Egy másik megoldás például az $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = 3x^2 - 5x + 1$ függvény, hiszen $(3x^2 - 5x + 1)' = 6x - 5$. További megoldásokat kapunk, ha az 1 helyébe bármely más valós számot írunk. Ezeket együtt így írhatjuk fel:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Más megoldás nincs. Ugyanis ha f_1 és f_2 olyan deriválható függvények, melyeknek deriváltja az f függvény, akkor $(f_1 - f_2)' = f_1' - f_2' = 0$. A két függvény különbségének deriváltfüggvénye tehát a konstans 0 függvény. Belátható, hogy csak a konstans függvények $(x \mapsto c)$, ahol $c \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy deriváltfüggvényük minden valós x esetén 0. Így f_1 és f_2 függvények csak egy konstans tagban különbözhetnek. A megoldás tehát:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

2. Adjunk meg olyan f függvényt, melynek deriváltfüggvénye $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = x^n$.

Megoldás:

A valós számokon értelmezett $g(x) = x^{n+1}$ függvény deriváltfüggvénye $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$. Ennek segítségével felírha-

tunk egy alkalmas függvényt: $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{(n+1) \cdot x^n}{n+1} = x^n$.

További megoldásokat kapunk, ha tetszőleges valós számot hozzáadunk ehhez a függvényhez.

Ezeket együtt így írhatjuk fel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$. Az előző feladathoz hasonlóan belátható, hogy más megoldás nincs.

1. Primitív függvény és a határozatlan integrál

Definíció: Ha egy, a valós számok halmazán értelmezett f függvényhez találunk olyan F függvényt, amelyre az értelmezési tartományból vett minden x esetén $f(x) = F'(x)$, akkor ezt az f függvény egy **primitív függvényének** nevezzük.

Ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok primitív függvénye van. Belátható azonban, hogy ezek csak egy konstans tagban térnek el egymástól, minden primitív függvény $F(x) + c$ alakú, ahol c tetszőleges valós szám.

Definíció: A valós számokon értelmezett f függvény összes primitív függvényének halmazát az f függvény **határozatlan integráljának** nevezzük.

jelölés: $\int f(x) dx$

2. Az $f(x) = x^n$ függvény határozatlan integrálja ($n \in \mathbb{N}$)

A valós számokon értelmezett $f(x) = x^n$ függvény ($n \in \mathbb{N}$) határozatlan integrálja $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Ugyanis: $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (x^{n+1})' + c' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. Integrálási szabályok

A deriválási szabályok alapján belátható, hogy amennyiben az f és a g függvényeknek van határozatlan integrálja, akkor az $f + g$, $f - g$ és cf függvényeknek is van határozatlan integrálja, és az felírható az f és g függvények határozatlan integráljával. Ezek alapján a polinomok határozatlan integrálja (a deriváláshoz hasonlóan) tagonként meghatározható.

$$\begin{aligned} \int (f \pm g)(x) &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ \int (cf)(x) &= c \cdot \int f(x) dx \end{aligned}$$

Függvények szorzatának, hányadosának, illetve összetett függvények integráljának meghatározására nincsenek ilyen általános szabályok. A határozatlan integrál meghatározása nagyon bonyolult feladat is lehet.

FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

1. E1 Add meg a függvények egy primitív függvényét!

$f(x)$	x^4	x	5	$\sin x$	$\cos x$
$\int f(x) dx$					

2. E1 Add meg a függvények egy primitív függvényét!

- a)** $f(x) = x^2 - 8x + 4$ **c)** $h(x) = x^5 + 2x^3 - 9$
b) $g(x) = 4x^3 - 10x$

3. E1 Add meg a függvények határozatlan integrálját!

- a)** $f(x) = x^3 + x - 3$ **c)** $h(x) = 2\sin x + 3\cos x$
b) $g(x) = 3x^4 - 3x$

4. E1 Az $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ függvénynek melyik az a primitív függvénye, amely az $x_0 = 2$ helyen 3-at vesz fel?

5. E1 Az $f(x) = 2x^3 + 6x - 12$ függvénynek melyik az a primitív függvénye, amelynek egyik zérushelye az $x_0 = 10$?

6. E1 Melyek azok a függvények, amelyek *nem* primitív függvényei az adott sorban szereplő első függvénynek? A helyes válaszhoz tartozó hat betűből egy festői magyar település neve rakható ki. Melyik ez a település?

$f(x) = 2x + 1$	A	$F_1(x) = (x + 1)^2$	E	$F_2(x) = x(x + 1)$	Y	$F_3(x) = x^2 + 1$
$g(x) = 2x - 4$	H	$G_1(x) = (x + 2)^2$	T	$G_2(x) = x(x - 2)$	K	$G_3(x) = (x - 2)^2$
$h(x) = 2x + 6$	M	$H_1(x) = (x + 3)^2$	P	$H_2(x) = x(x + 6)$	N	$H_3(x) = x^2 + 3x$
$k(x) = 3x^2 + 6x$	I	$K_1(x) = (x + 1)^3$	Ó	$K_2(x) = x^2(x + 3)$	É	$K_3(x) = x^3 + 3x^2 + 1$



görbe alatti terület, határozott integrál

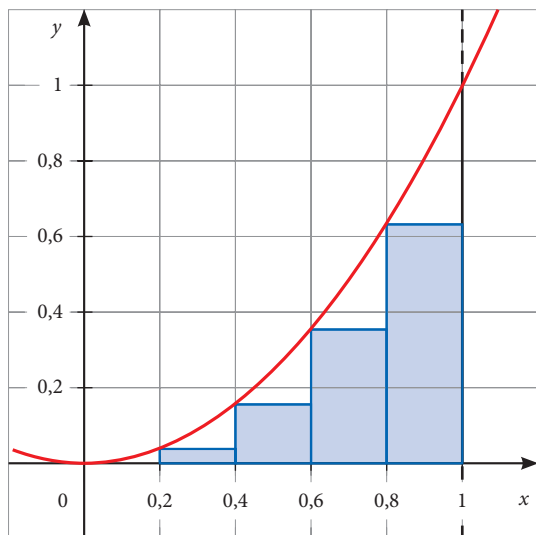
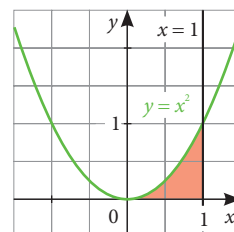
KIDOLGOZOTT FELADAT

Mekkora annak síkidomnak a területe, amit a valós számokon értelmezett $f(x) = x^2$ függvény grafikonja, az x tengely és az $x = 1$ egyenes határol?

Megoldás:

A síkidom egyik határoló vonala egy parabolaív. Nem ismerünk olyan területképletet, amelyet alkalmazhatnánk. Megtehetjük azonban, hogy közelítő eljárást alkalmazunk.

I. Alkalmazzunk alsó becslést! Az ábra szerint azonos szélességű téglalapokat írunk a síkidomba úgy, hogy a téglalap egyik oldala az x tengelyre, egy csúcsa a parabola ívére illeszkedik. A téglalapok területének összege kisebb, mint a keresett síkidom területe. Ha a $[0; 1]$ intervallumot n egyenlő részre osztjuk, akkor a téglalapok egyik oldalának hossza $\frac{1}{n}$, a másik oldal hossza pedig a megfelelő függvényértékkel egyenlő. A szemléletünk azt sugallja, hogy ha n nő, akkor a téglalapok területének összegével egyre jobban megközelítjük a görbe alatti terület nagyságát.



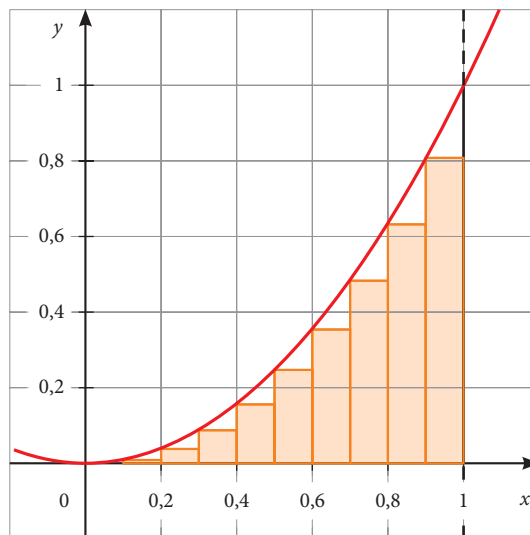
Bontsuk fel a $[0; 1]$ intervallumot 5 egyenlő részre!

Az ábra szerint ekkor 4 téglalapot kapunk. Mindegyik téglalap szélessége $\frac{1}{5} = 0,2$.

Táblázatba foglaljuk a kapott téglalapok adatait.

Osztópont	0,2	0,4	0,6	0,8
A téglalap magassága	$0,2^2 = 0,04$	0,16	0,36	0,64
A téglalap területe	$0,2 \cdot 0,04 = 0,008$	0,032	0,072	0,128

A téglalapok területeinek összege 0,24.



Bontsuk fel a $[0; 1]$ intervallumot 10 egyenlő részre!

Az ábra szerint ekkor 9 téglalapot kapunk. Mindegyik téglalap szélessége $\frac{1}{10} = 0,1$.

Táblázatba foglaljuk a kapott téglalapok adatait.

Osztópont	0,1	0,2	0,3	0,4	...	0,9
A téglalap magassága	0,01	0,04	0,09	0,16	...	0,81
A téglalap területe	0,001	0,004	0,009	0,016	...	0,081

A téglalapok területeinek összege 0,285.

Bontsuk fel a $[0; 1]$ intervallumot n egyenlő részre! Ekkor $n - 1$ darab téglalapot kapunk. Mindegyik téglalap szélessége $\frac{1}{n}$.

Foglaljuk táblázatba a téglalapok adatait!

Osztópont	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	...	$\frac{n-1}{n}$
A téglalap magassága	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{4}{n^2}$	$\frac{9}{n^2}$	$\frac{16}{n^2}$	...	$\frac{(n-1)^2}{n^2}$
A téglalap területe	$\frac{1}{n^3}$	$\frac{4}{n^3}$	$\frac{9}{n^3}$	$\frac{16}{n^3}$	...	$\frac{(n-1)^2}{n^3}$

A téglalapok területeinek összege:

$$s_n = \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{9}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} (1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2).$$

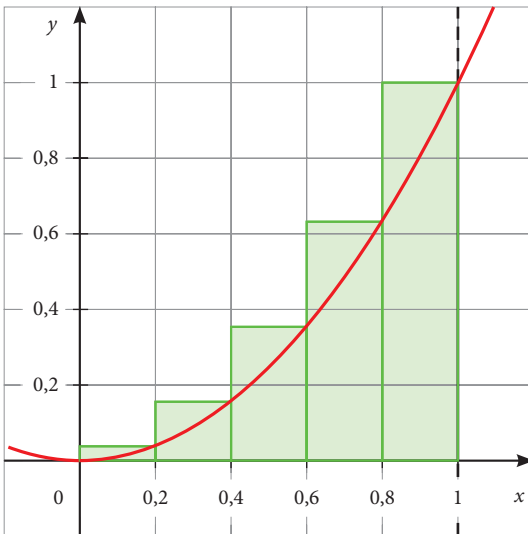
Használjuk fel a négyzetszámok összegére fennálló (korábban teljes indukcióval bizonyított) összefüggést! Ha 1-től n -ig a pozitív egész számok négyzeteit összeadjuk, akkor az összeg $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ezt n helyett $(n - 1)$ -re alkalmazva kapjuk: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$.

$$s_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Az s_n egy számsorozat, a tagjait **alsó közelítő összegnek** nevezzük. Az s_n sorozat minden tagja kisebb, mint a síkidom területe. Ha n tart a végtelenhez, akkor az $\frac{1}{2n}$ és $\frac{1}{6n^2}$ tagok 0-hoz tartanak, ezért s_n tart $\frac{1}{3}$ -hoz: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{3}$.

II. Alkalmazzunk felső becslést! Vegyünk fel azonos szélességű téglalapokat az ábra szerint úgy, hogy a téglalapok együttesen „befedjék” a síkidomot. Az ábra szerint kapott 5 téglalap szélessége 0,2, és a téglalapok magassága minden esetben a nagyobbik osztópontához tartozó függvényérték.



Osztópont	0,2	0,4	0,6	0,8	1
A téglalap magassága	0,04	0,16	0,36	0,64	1
A téglalap területe	0,008	0,032	0,072	0,128	0,2

A téglalapok területeinek összege 0,44.

Ha 10 részre osztjuk a $[0; 1]$ intervallumot, akkor a téglalapok területeinek összege 0,385.

Bontsuk fel a $[0; 1]$ intervallumot n egyenlő részre! Ekkor n darab téglalapot kapunk. Mindegyik téglalap szélessége $\frac{1}{n}$. Az első téglalap területe $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}$, az utolsó téglalap területe pedig $\frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{n^2}{n^3}$.

$$S_n = \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{9}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} (1 + 4 + 9 + \dots + n^2).$$

A négyzetszámok összegére felírt összefüggés szerint $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.

A téglalapok területének összege: $S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.

Az S_n egy számsorozat, a tagjait **felső közelítő összegnek** nevezzük. Az S_n sorozat minden tagja nagyobb, mint a keresett síkidom területe. Ha n tart a végtelenhez, akkor az $\frac{1}{2n}$ és $\frac{1}{6n^2}$ tagok 0-hoz tartanak, ezért S_n tart $\frac{1}{3}$ -hoz: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$.

Kézenfekvő, hogy $\{s_n\}$ és $\{S_n\}$ sorozatok közös határértékét tekintsük a síkidom területének. ► A síkidom területe $\frac{1}{3}$.

1. Alsó, illetve felső közelítő összeg

Korlátosnak nevezünk egy f függvényt egy $[a; b]$ zárt intervallumon, ha megadhatók olyan k és K valós számok, amelyekre minden $x \in D_f$ esetén $k \leq f(x) \leq K$. Egy $[a; b]$ zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény esetén beszélhetünk az alsó, illetve felső közelítő összegek sorozatáról.

Alsó közelítő összeget kapunk a következő eljárással. Osszuk fel az $[a; b]$ zárt intervallumot n egyenlő részre, és minden részintervallumban keressük meg a függvény minimumát. Ezekkel az adatokkal az ábra szerint olyan téglalapokat határozhatunk meg, amelyek területének összege kisebb, mint az $[a; b]$ intervallumon a függvénygörbe és az x tengely közötti terület nagysága. A téglalapok területének összegét alsó közelítő összegnek nevezzük, és s_n -nel jelöljük.

Felső közelítő összeget kapunk, ha a részintervallumokban a függvény maximumát keressük meg. Ekkor a téglalapok területének összege nagyobb, mint az $[a; b]$ intervallumon a függvénygörbe és az x tengely közötti terület nagysága. Ezen téglalapok területének összege a felső közelítő összeg, jele S_n .

Ezek az összegek minden n -re meghatározhatók, így két sorozatot kapunk: az alsó közelítő összegek sorozatát $\{s_n\}$ és a felső közelítő összegek sorozatát $\{S_n\}$.

2. Határozott integrál

Definíció: Legyen egy f függvény korlátos egy $[a; b]$ zárt intervallumon. Ha az alsó közelítő összegek sorozatának és a felső közelítő összegek sorozatának létezik közös határértéke, akkor a függvény **integrálható** az $[a; b]$ intervallumon, és ezt a közös határértéket az f függvény $[a; b]$ intervallumon vett **határozott integráljának** nevezzük. Jele: $\int_a^b f(x) dx$.

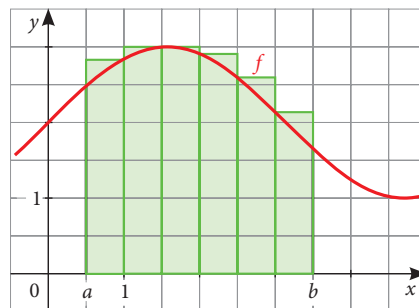
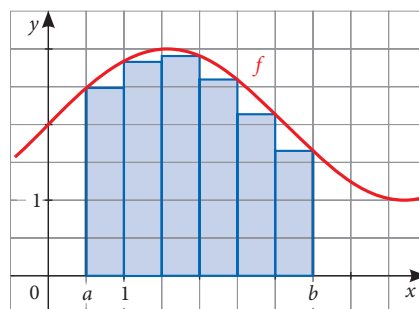
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{esetén} \quad f \text{ integrálható } [a; b]\text{-n és} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\text{Például: } \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

A határozott integrál segítségével a függvénygörbe „alatti” terület meghatározható. Ez annak a síkidomnak a területe, amelyet a függvénygörbe, az x tengely és az $x = a$, valamint az $x = b$ egyenesek zárnak közre. Ha az adott intervallumon a függvény és az x tengely által meghatározott síkidom az x tengely

- ▶ fölött van, akkor a határozott integrál értéke pozitív;
- ▶ alatt van, akkor a határozott integrál értéke negatív.

Ha az adott intervallumon a függvény grafikonja metszi az x tengelyt, akkor a tengely „alatti” tartományok területe negatív, a tengely „fölötti” tartományok területe pozitív.



FELADATOK

- 1. E1** A kidolgozott feladatban beláttuk, hogy a $[0; 1]$ intervallumon az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény grafikonja alatti terület nagysága $\frac{1}{3}$. Ennek felhasználásával határozd meg, hogy mekkorák a következő síkidomok!
 - a)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény grafikonja alatti terület a $[-1; 1]$ intervallumon
 - b)** $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$ függvény grafikonja alatti terület a $[-1; 1]$ intervallumon
 - c)** $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -x^2 + 1,5$ függvény grafikonja alatti terület a $[-1; 1]$ intervallumon
- 2. E2** Mekkora az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonja alatti terület a $[0; 1]$ intervallumon?
- 3. E2** A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3$ függvény esetében számold ki a $[0; 1]$ intervallumon az alsó és felső közelítő összeget $n = 10$ esetén!



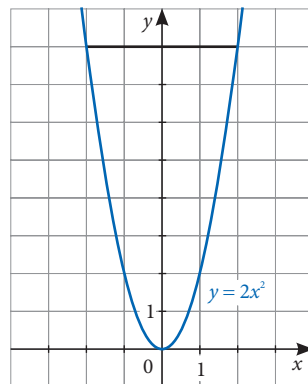
Newton–Leibniz-tétel, integrálfüggvény

BEVEZETŐ



Egy színházi jelmezhez használt pajzs alakját ábrázoltuk a koordináta-rendszerben. Mekkora területű a pajzs, ha a koordináta-rendszer 1 egysége a valóságban 1 dm-nek felel meg?

A válaszhoz egy parabolaszélet területét kell meghatározni. Az alsó és felső közelítő összeg meghatározása, majd a határérték megállapítása hosszadalmas feladat lenne. Sokat segít egy olyan összefüggés, amely a határozott és a határozatlan integrál fogalma között teremt kapcsolatot.



ELMÉLET

Azon függvények esetében, amelyeknek van primitív függvénye, a függvény határozott integrálja kiszámolható a primitív függvény segítségével. Bebizonyítható a következő tétel.

Newton–Leibniz-tétel: Ha egy $[a, b]$ intervallumon egy f függvény

- ▶ integrálható, és
- ▶ létezik primitív függvénye, azaz létezik olyan F függvény, melyre $F' = f$,

akkor $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Jelölés: Ha a Newton–Leibniz-tétel segítségével számoljuk ki az $\int_a^b f(x) dx$ értékét, akkor az első lépés az F primitív függvény felírása. Ezt a lépést külön megjelenítjük úgy, hogy szögletes zárójelbe tesszük F -et.

Például: $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Adott a esetén az $\int_a^x f(t) dt$ függvényt integrálfüggvénynek nevezzük.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

határozatlan integrál:
primitív függvények halmaza

határozott integrál:
alsó és felső közelítő összeg közös határértéke (a görbe alatti terület)

Newton–Leibniz-tétel:
A határozatlan integrál segítségével a határozott integrál számolható.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Mekkora a Bevezetőben megadott pajzs területe?

Megoldás:

Helyezzük el a pajzsot úgy a koordináta-rendszerben, hogy a területe egy függvénygörbe alatti területtel legyen megadható. Az ábra szerinti elrendezésben a pajzs területe egyenlő a g függvény grafikonja alatti területtel az $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$ értékek között, vagyis a következő határozott integrál értékével:

$$T = \int_{-2}^2 g(x) dx = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx$$

A Newton–Leibniz-tétel értelmében ennek kiszámításához a g függvény egy primitív függvényére van szükség.

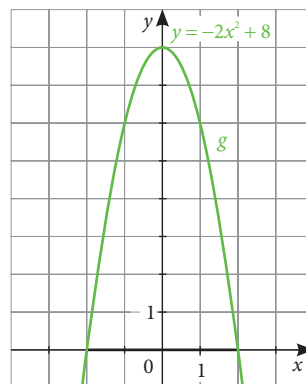
A primitív függvények halmaza megegyezik a g függvény határozatlan integráljával.

$$\int g(x) dx = \int (-2x^2 + 8) dx = -2 \cdot \frac{x^3}{3} + 8x + c \quad (\text{ahol } c \in \mathbb{R})$$

$$T = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 8x + c \right]_{-2}^2 = \left(-\frac{16}{3} + 16 + c \right) - \left(\frac{16}{3} - 16 + c \right) = \frac{64}{3} \approx 21,3 \text{ dm}^2$$

Megjegyzés: A primitív függvények közül érdemes azt választani, amikor $c = 0$.

A terület a Bevezetőben szereplő függvény integrálásával is meghatározható, kivonás segítségével.



FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

1. E1 Add meg a függvények határozatlan integrálját!

- a) $f(x) = x^2 + 3x$ c) $h(x) = x^3 - 1,5x$
b) $g(x) = -x^2 + 12$ d) $k(x) = -x^4 + x^3$

2. E1 Számold ki az alábbi határozott integrálokat!

- a) $\int_1^2 (x^2 + 3x) dx$ c) $\int_1^2 (x^3 - 1,5x) dx$
b) $\int_1^2 (-x^2 + 12) dx$ d) $\int_1^2 (-x^4 + x^3) dx$

3. E1 Számold ki az alábbi határozott integrálokat!

- a) $\int_0^1 (-2x^3 + 3x^2) dx$ c) $\int_1^3 (-2x^3 + 3x^2) dx$
b) $\int_0^2 (-2x^3 + 3x^2) dx$ d) $\int_2^4 (-2x^3 + 3x^2) dx$

4. E1 Számold ki az alábbi határozott integrálokat!

- a) $\int_{-4}^2 (-3x^2 + 4x - 1) dx$
b) $\int_{-3}^6 (0,3x^2 - 0,5x) dx$

5. E2 (Emelt szintű érettségi, 2016)

Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény.

$$f(x) = x^2 - 2 \text{ és } g(x) = 10 + 10x - x^2$$

- a) Oldd meg az $|f(x) - g(x)| \geq 8$ egyenlőtlenséget!
b) Igazold, hogy a $[2; 8]$ intervallumon az f és a g függvény is csak pozitív értékeket vesz fel!
c) Határozd meg azt a t valós számot a $[2; 8]$ intervallumban, amelyre teljesül, hogy az f függvény görbéje alatti terület a $[2; t]$ intervallumon megegyezik a g függvény görbéje alatti területtel a $[t; 8]$ intervallumon!

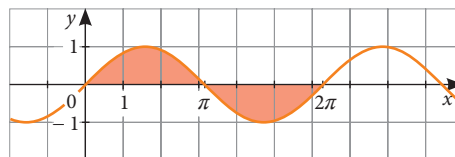
KIDOLGOZOTT FELADAT

Mekkora a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja alatti terület a $[0; 2\pi]$ intervallumon?

Megoldás:

Számoljuk ki a $[0; 2\pi]$ intervallumon a függvény határozott integrálját!

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$



Miért kaptunk 0-t? Azért, mert a határozott integrál a görbe alatti előjeles terület értékét adja meg. A grafikon alapján a függvény szimmetriatulajdonságainak ismeretében látható, hogy a szinuszfüggvény grafikonja és az x tengely közötti előjeles terület a $[0; \pi]$ és a $[\pi; 2\pi]$ intervallumon egymás ellentettje. Ezért a kért terület nagyságát akkor kapjuk meg, ha a $[0; \pi]$ intervallumon számoljuk ki a határozott integrált, és a kapott értéket megszorozzuk 2-vel. (A terület nagysága egyenlő a valós számok halmazán értelmezett $x \rightarrow |\sin x|$ függvénynek a $[0; 2\pi]$ intervallumon vett határozott integráljával.)

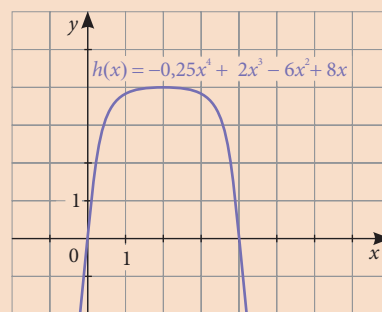
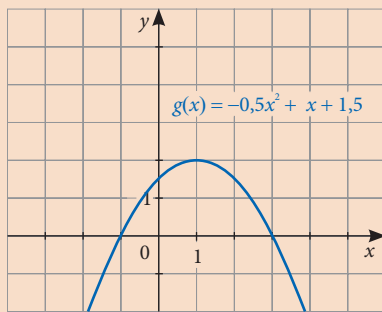
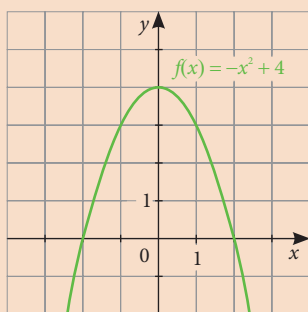
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2 \quad \blacktriangleright \quad \text{A keresett terület 4 egység.}$$

Ellenőrizd az előbbi eredményt a $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$ kiszámításával!

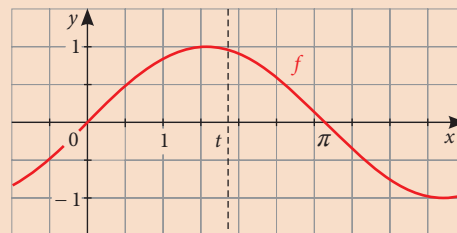
FELADATOK

Az 1–4. feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

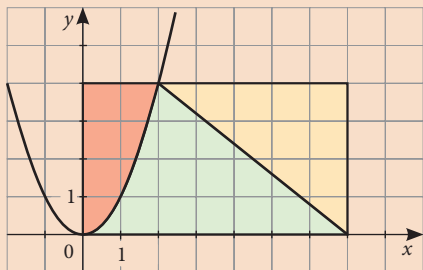
1. E1 Ábrázoltuk néhány függvény grafikonját. Határozd meg a grafikon és az x tengely által közbezárt terület nagyságát!



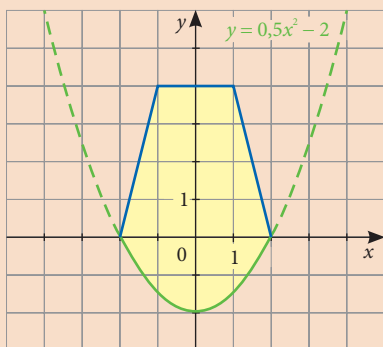
2. E1 Tekintsük az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidomot a $[0; \pi]$ intervallumon. Határozd meg t értékét úgy, hogy $t \in [0; \pi]$ és az $x = t$ egyenes a síkidom területét az ábra szerint 2 : 1 arányban ossza két részre!



- 3. E2** Egy névjegykártya háttérét 3 színnel színezték ki. Az ábra szerint az egyik határvonal egy parabolaív, az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának egy íve, a másik határvonal egy szakasz. Hogyan aránylik egymáshoz a három rész területe?

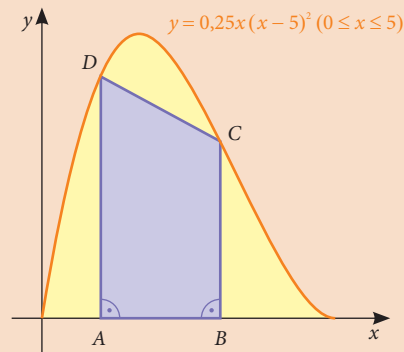


- 4. E2** Egy víztorony tartályának keresztmetszete látható az ábrán. Az alsó határolóív egy parabolaív, az $f(x) = 0,5x^2 - 2$ függvény grafikonjának egy íve. Mekkora a keresztmetszet területe, ha az ábrán 1 egység a valóságban 1 méternek felel meg?



- 5. E2** (Emelt szintű érettségi, 2021)

Adott az $y = 0,25x(x - 5)^2$, $(0 \leq x \leq 5)$ egyenletű görbe és az $ABCD$ derékszögű trapéz. A trapéz két csúcsa az $A(1; 0)$ és a $B(3; 0)$ pont, a másik két csúcs pedig a megadott görbén van, az ábra szerint. A görbe és az x tengely $[0; 5]$ szakasza egy korlátos síkidomot fog közre. Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a síkidomnak egy pontját, mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznak is pontja?



- 6. E2** (Emelt szintű érettségi, 2007)

Adott az $f:]-1; 6[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^3 + 192x$ függvény.

- a)** Határozd meg f zérushelyét, és elemezd a függvényt monotonitás szempontjából!
- b)** Jelölje c az f értelmezési tartományának egy pozitív elemét. Határozd meg c értékét úgy, hogy az x tengely $[0; c]$ közötti szakasza, az $x - c = 0$ egyenletű egyenes és az f grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 egység legyen!

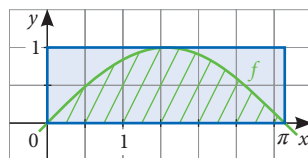
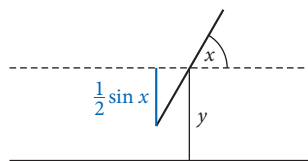
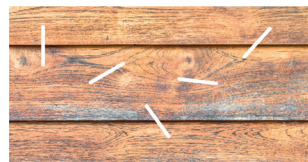
RÁADÁS

Egy véletlen kísérlet, amellyel statisztikai becslés adható a π értékére

Egy szoba padlózatán párhuzamos padlórések futnak. 1777-ben Buffon grófja (Georges-Louis Leclerc) vetette fel azt a kérdést, hogy mennyi a valószínűsége, hogy egy elejtett tű úgy esik a padlóra, hogy átmetszi valamelyik padlórést. Határozzuk meg a valószínűséget, ha a tű hossza 1 egység és a rések távolsága 2 egység!

Egy tű helyzetét két változóval határozhatjuk meg. Jelöljük x -szel az ábra szerinti szöget és y -nal a tű középpontjának a hozzá legközelebbi padlóréstől való távolságát. Az ábrán a kék szakasz hossza $\frac{1}{2} \sin x$. A tű akkor metszi át a padlórést, ha $y \leq \frac{1}{2} \sin x$.

Mi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk egy $(x; y)$ valós számpárt, melyre $0 \leq x \leq \pi$ és $0 \leq y \leq 1$, akkor $y \leq \frac{1}{2} \sin x$? A valószínűség geometriai modellje alapján ez egyenlő a koordináta-rendszerben a megfelelő alakzatok területének arányával. Az összes esetnek egy téglalap pontjai felelnek meg, melynek oldalai 1 és π , területe tehát π . A kedvező eseteknek az $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ függvény grafikonja és az x tengely közötti pontok felelnek meg a $[0; \pi]$ intervallumon, ennek területe $\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos x \right]_0^\pi = 1$. A valószínűség tehát $\frac{1}{\pi}$. Ezért ha sokszor elvégzi valaki ezt a kísérletet, akkor a relatív gyakoriság alapján becslést adhat a π értékére.



→ két függvénygörbe által közbezárt korlátos síkidom területe

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoltuk a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 2x - 2$ és a $g(x) = -x^2 + 2$ függvények grafikonját. Mekkora a két függvénygörbe által közbezárt síkidom területe?

Megoldás:

Az ábrán látható, hogy a síkidom egyik része az x tengely alatt helyezkedik el. A terület nagyságát meghatározhatnánk úgy is, hogy részekre bontjuk a síkidomot, és figyelembe vesszük azt, hogy a területrész mikor van az x tengely alatt, illetve fölött. Ennél azonban van hatékonyabb módszer.

Adjunk hozzá mindkét függvényhez egy megfelelő számértéket úgy, hogy a vizsgált síkidom teljes terjedelmével az x tengely fölé kerüljön. Megfelelő ebben az esetben például a 4. A 4 hozzáadása mindkét függvény grafikonján ugyanazt a transzformációt, a $(0; 4)$ vektorral való eltolást eredményezi, így a kapott g_1 és f_1 függvények grafikonja közötti síkidom egybevágó az eredetivel, területe egyenlő a feladatban keresett területtel. A területet megkapjuk, ha a függvénygörbék metszéspontjait megadó x_1 és x_2 értékek között integráljuk a $g_1(x) = g(x) + 4$ függvényt, majd ebből kivonjuk az $f_1(x) = f(x) + 4$ függvény integrálját ugyanezen határok között.

A metszéspontok x_1 és x_2 koordinátái az $f(x) + 4 = g(x) + 4$ egyenletből, tehát az $f(x) = g(x)$ egyenletből számolhatók.

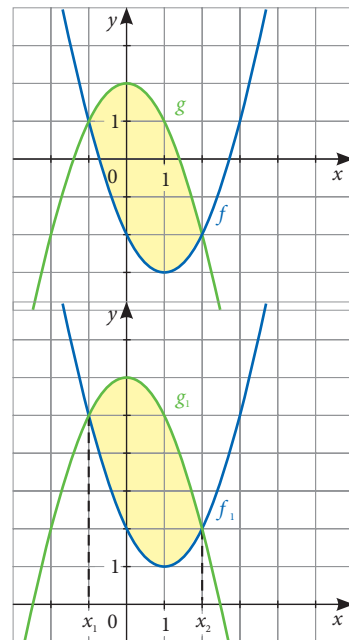
$$x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -1 \text{ és } x_2 = 2$$

Tehát a $[-1; 2]$ intervallumon integrálunk. A határozatlan integrálásra tanult műveleti szabályok itt is érvényesek.

$$T = \int_{-1}^2 (g(x) + 4) dx - \int_{-1}^2 (f(x) + 4) dx = \int_{-1}^2 (g(x) + 4 - f(x) - 4) dx$$

$$T = \int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + 2 - x^2 + 2x + 2) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^2 = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3} \right) = 9$$

Vegyük észre, hogy a számolás során a választott konstans értéke nem befolyásolja a végeredményt, tehát minden esetben a két eredeti függvény különbségének integrálja adja meg a két függvénygörbe által közbezárt síkidom területének nagyságát a metszéspontok által kijelölt intervallumon.



ELMÉLET

Két függvénygörbe által közbezárt síkidom területének kiszámítása

Ha a valós számok halmazán értelmezett integrálható f és g függvények grafikonja két pontban metszi egymást és korlátos síkidomot zárnak közre, akkor a közbezárt síkidom területe kiszámolható az $f - g$ függvény határozott integrálja segítségével. A határozott integrál értéke előjeles terület, a síkidom területe ennek abszolút értékével egyenlő.

$$f(x) = g(x)$$

a metszéspontok első koordinátái, integrálási határok: x_1 és x_2

$$\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx$$

$T =$ az integrál abszolút értéke

FELADATOK

A feladatokban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

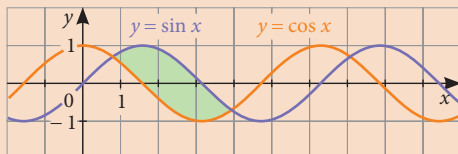
1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2020)

Adott két függvény:

$$f(x) = (x + 4)(2 - x) \quad \text{és} \quad g(x) = x + 4.$$

Határozd meg az f és a g függvények grafikonja által közbezárt korlátos síkidom területét!

2. E1 Mekkora a szinuszgörbe és a koszinuszgörbe által közbezárt zöld színnel jelölt terület?



3. E1 Mekkora a következő függvények grafikonja által közbezárt terület?

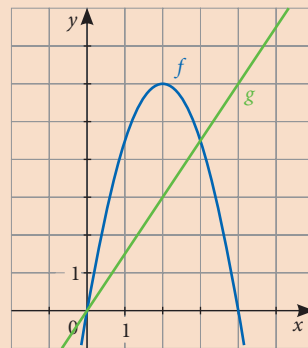
a) $f(x) = x^2 + x - 1$ és $g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x$ és $g(x) = x^2 + 3x + 1$

4. E1 (Emelt szintű érettségi, 2021)

Adott az $y = \frac{1}{3}(-2x^2 + 11x)$ egyenletű g görbe és az a h egyenes, amely áthalad az origón és az $A(4; 4)$ ponton. Mekkora a g és a h által közbezárt korlátos alakzat területe?

5. E2 Milyen arányban vágja ketté az $f(x) = -1,5x^2 + 6x$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt korlátos síkidom területét a $g(x) = 1,5x$ függvény grafikonja?



6. E2 Mekkora annak a korlátos síkidomnak a területe,

a) amelyet az y tengely, az $f(x) = 0,5x^2 + 5$ függvény grafikonja, valamint az $f(x)$ függvény $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjába húzott érintője zár közbe?

b) amelyet az y tengely, a $g(x) = \sin x$ függvény grafikonja, valamint a $g(x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{3}$ abszcisszájú pontjába húzott érintője zár közbe?

7. E2 (Emelt szintű érettségi 2009)

Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja a $C(0; 7)$ pont, szárainak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa illeszkedik az $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabolára.

a) Számold ki a másik két csúcs koordinátáit!

b) Mekkora területű részekre osztja a háromszöget a parabola íve?

RÁADÁS

Forgástest térfogata

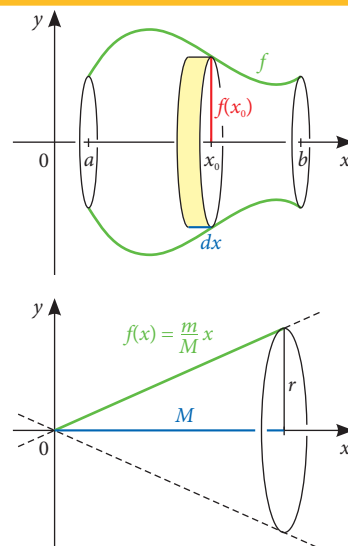
Forgassuk meg az $[a; b]$ intervallumon értelmezett folytonos $f(x) \geq 0$ függvény grafikonját az x tengely körül! Az így keletkező felület (két körlappal kiegészítve) egy forgástestet határoz meg. A keletkező forgástest térfogata meghatározható integrálás segítségével. (Ennek háttérében az a gondolat áll, hogy a test térfogata közelíthető forgáshengerek segítségével, az ábra szerint.)

Egy darab henger térfogata: $f^2(x_0) \cdot \pi \cdot dx$ ➤ A forgástest térfogata: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$.

Határozzuk meg a forgáskúp térfogatát, ha magassága M és alapkörének sugara r !

A forgáskúphoz a $[0; M]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \frac{r}{M}x$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával juthatunk.

$$V = \pi \cdot \int_0^M \left(\frac{r}{M}x \right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{r^2}{M^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^M = \pi \cdot \frac{r^2 M}{3}$$



KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy iparművész két formában tervez meg egy tűzzománc képet. Az első esetben félkör alakú, a második esetben parabolaszélet alakú a kép kerete, az ábra szerint. A képek alapja egyenlő hosszúságú. Melyik esetben van szükség több tűzzománcra?

Megoldás:

A síkidomokat egymásra helyezve nehéz megállapítani, hogy melyiknek nagyobb a területe.

A számításokhoz szükség van arra, hogy alkalmas módon elhelyezzük a parabolát a koordináta-rendszerben és felírjuk az egyenletét. A függőleges tengelyű parabola egyenletét 3 pontja egyértelműen meghatározza. Az ábra szerint elhelyezett parabola 3 pontja: $A(0; 6)$, $B(-5; 0)$ és $C(5; 0)$. Az y tengellyel párhuzamos szimmetriatengelyű parabolák egyenlete $y = ax^2 + bx + c$, ahol a , b és c valós számok. Mivel az A pont illeszkedik a parabolára, ezért a $(0; 6)$ számpár kielégíti a parabola egyenletét, és ehhez hasonlóan a B és a C pont koordinátái is.

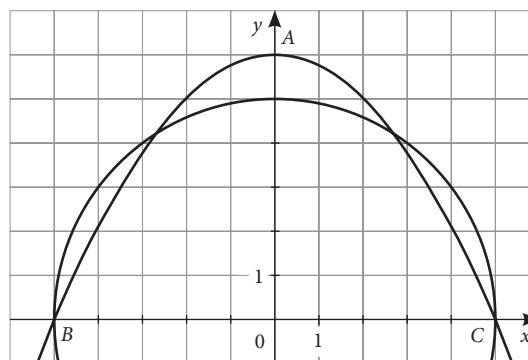
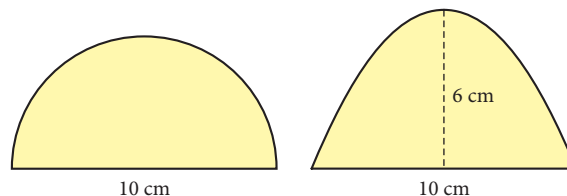
$$\begin{array}{llll} A(0; 6) & \rightarrow & 6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & \rightarrow & 6 = c \\ B(-5; 0) & \rightarrow & 0 = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c & \rightarrow & 0 = 25a - 5b + c \\ C(5; 0) & \rightarrow & 0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c & \rightarrow & 0 = 25a + 5b + c \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 = -10b & \rightarrow b = 0 \\ 0 = 50a + 2c & \rightarrow a = -\frac{2c}{50} = -\frac{6}{25} \end{array} \right.$$

A parabola egyenlete tehát $y = -\frac{6}{25}x^2 + 6$.

A parabolaszélet területét határozott integrállal, míg a félkör területét a területképlete alapján számolhatjuk.

$$T_p = \int_{-5}^5 \left(-\frac{6}{25}x^2 + 6 \right) dx = \left[-\frac{6}{25} \cdot \frac{x^3}{3} + 6x \right]_{-5}^5 = 40 \text{ cm}^2 \quad T_{fk} = \frac{r^2 \pi}{2} \approx 39,27 \text{ cm}^2$$

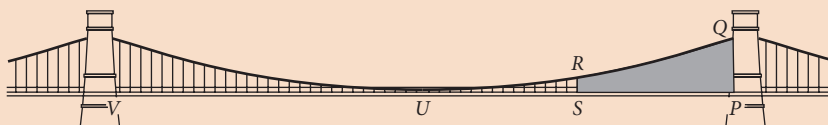
Tehát a parabolaszélet területe a nagyobb, ezért a parabola alakú kép esetében kicsivel több tűzzománcra van szükség.



FELADATOK

1. E1 (Emelt szintű érettségi, 2018)

Egy cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővász-
nat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére. A híd két támpillérének PV távolsága kb. 200 méter. A fő tartó-
lánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a PV felezőpontja
(U), tengelye pedig PV felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon
tervezett szélessége $PS = 50$ méter. A tervek szerint a QR íven felfüggesztett hirdetővász-
on az ábrán sötétített $PQRS$ területet fedi majd be. (RS merőleges PS -re.) Hány m^2 területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt
8% veszteséggel számol a tervező?



Ötletek területszámításhoz a koordináta-rendszerben

- ▶ Kör, félkör, körszelet, körcikk területe meghatározható az ismert területképletekkel.
- ▶ A lineáris függvények grafikonja alatti terület meghatározható a négyszögekre tanult területképletek segítségével.
- ▶ Sokszögek területének meghatározását elvégezhetjük elemi geometriai módszerekkel, kiegészítéssel, átdarabolással.
- ▶ A nem lineáris függvények grafikonja alatti terület határozott integrállal számolható ki.

Megjegyzés: A kör területe meghatározható integrálással is, de az eljárás meghaladja a középiskolai ismereteket.

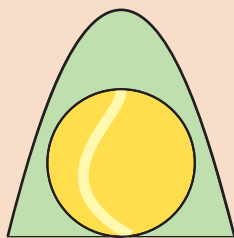
FELADATOK

2. E1 (Emelt szintű érettségi, 2015)

Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszélet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszéletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete:

$$x^2 + y^2 - 2,6y = 0.$$

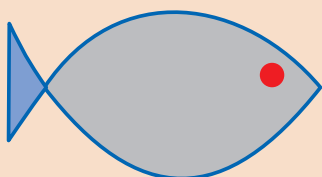
Hány százaléka a kör területe a parabolaszélet területének?



3. E1 Határozd meg az $f(x) = x(x - 2)(x + 2)$ függvénygörbe és az x tengely közötti terület nagyságát a $[-1; 3]$ intervallumon!

4. E1 Számold ki, mekkora annak a területnek a nagysága, amelyet az $f(x) = x^3$ és a $g(x) = x^2 + 6x$ függvények grafikonjai zárnak közre!

5. E1 Egy horgászciikk-nagykereskedés olyan hal alakú cégért készít, amelynek határvonalait a koordináta-rendszerben az y tengely, az $f(x) = 0,1x^2 - 2,8x + 24$, valamint a $g(x) = -0,2x^2 + 4,4x$ függvények görbéi határozzák meg. Mennyi kék festéket kell felhasználni a hal farokuszonyának, és mennyi szürke festéket a hal testének befestéséhez, ha négyzetméterenként 1,2 dl festék szükséges, és a koordináta-rendszer tengelyein az egységek a valóságban 1 dm-nek felelnek meg? (A hal szemét egy piros lámpa szolgáltatja, de az alatta lévő felületet befestik szürkére.)

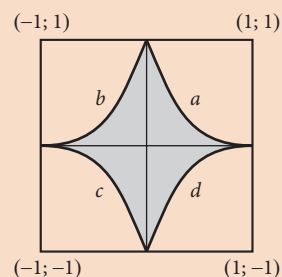


6. E2 (Emelt szintű érettségi, 2019)

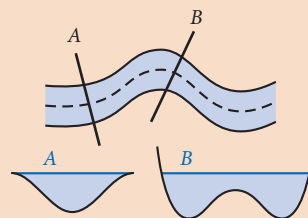
Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus. Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$ és $(1; -1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az a jelű ív egyenlete: $y = (1 - x)^3$, $0 \leq x \leq 1$.

a) Írd fel a másik három (az ábrán b , c , illetve d jelű) ív egyenletét is!

b) A társasjáték gyártója a 2 dm oldalú tábla fehér színű részének bevonásához egy speciális anyagot használ. Ebből 1 kg mennyiség 12 m² terület bevonásához elegendő. Számold ki, hogy 4000 darab tábla elkészítéséhez hány kg speciális anyag szükséges!



7. E2 Egy folyó medrének keresztmetszete az A helyen az $f(x) = -\cos x + 1$ függvény, míg B helyen a $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ függvény grafikonjával közelíthető. Az átáramló folyóvíz az A helyen $[-\pi; \pi]$ intervallum szélességében, a B helyen $[-1,5; 1,5]$ intervallumon szélességében tölti meg a medret (ahol 1 egység a valóságban 1 méternek felel meg). Határozd meg az A , illetve B helyen átáramló víz sebességének hányadosát, ha a két helyen adott idő alatt átáramló víz mennyisége azonos, és a sebesség fordítottan arányos az áramlási keresztmetszet nagyságával! A számolásokat két tizedesjegy pontossággal végezd el!



(D = definíció, T = tétel, M = módszer)

D	Függvény folytonossága az x_0 helyen	Az f függvény az értelmezési tartományának x_0 helyén folytonos, ha az x_0 helyen létezik határértéke, és ez megegyezik a függvény x_0 -beli helyettesítési értékével.
D	Függvény folytonossága	Egy függvény folytonos, ha értelmezési tartományának minden helyén folytonos.
D	Differenciálhatóság, differenciálhányados	Legyen értelmezve az f függvény az x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az x_0 helyen, ha az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvénynek létezik véges határértéke. Ez a határérték az f függvény x_0 -beli differenciálhányadosa (deriváltja) . Jele: $f'(x_0)$.
D	Primitív függvény	A valós számok halmazán értelmezett f függvény egy primitív függvényének nevezzük az F függvényt, ha minden valós x esetén $f(x) = F'(x)$.
D	Határozatlan integrál	A valós számokon értelmezett f függvény összes primitív függvényének halmazát az f függvény határozatlan integráljának nevezzük.
T	Integrálási szabályok	$\int (f \pm g)(x) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ $\int (cf)(x) = c \cdot \int f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$
T	Alapintegrálok	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R})$ $\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \text{és} \quad \int \cos x dx = \sin x + c \quad (c \in \mathbb{R})$
D	Alsó közelítő összeg, felső közelítő összeg	Legyen az f függvény korlátos az $[a; b]$ zárt intervallumon. Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot n egyenlő részre, és minden részintervallumban keressük meg a függvény minimumát. Azon téglalapok területének összegét, melyeknek egyik oldala az intervallum hosszának n -edrésze, másik oldala a részintervallumban a függvény minimuma, alsó közelítő összegnek nevezzük. Felső közelítő összeget kapunk, ha minimum helyett f maximumát vesszük. Jele s_n , illetve S_n .
D	Határozott integrál	Legyen egy f függvény korlátos egy $[a; b]$ zárt intervallumon. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ akkor a függvény integrálható az $[a; b]$ intervallumon, és ezt a közös határértéket az f függvény $[a; b]$ intervallumon vett határozott integráljának nevezzük.
D	Integrálfüggvény	Ha f integrálható $[a; b]$ -n, akkor az $[a; b]$ -n értelmezett $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ függvényt integrálfüggvénynek hívjuk.

T	Newton–Leibniz-tétel	Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett f folytonos, integrálható függvény esetén, ahol F függvény az f függvény egyik primitív függvénye: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$
M	A függvénygörbe alatti terület meghatározása	Az $[a; b]$ intervallumon integrálható f függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesek és az x tengely által közbezárt korlátos síkidom területének számítása: I. Meghatározzuk az f függvény zérushelyeit. (pl. $x_1; x_2$) II. A zérushelyek ismeretében az $[a; b]$ -t részintervallumokra bontjuk. (pl. $x_1 \in [a; b]$ esetén: $[a; x_1]; [x_1; b]$) III. Kiszámoljuk az f függvény határozott integrálját a részintervallumokon. (pl. $\int_a^{x_1} f(x) dx$, valamint $\int_{x_1}^b f(x) dx$) IV. A keresett terület a kapott integrálok abszolút értékeinek összege.
M	Két függvénygörbe által közbezárt terület kiszámítása (ha f és g integrálható függvények)	I. Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásával meghatározzuk a grafikonok metszéspontjainak első koordinátáit. (x_1 és x_2) II. Kiszámoljuk az $\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx$ határozott integrál értékét. III. A keresett terület a kapott határozott integrál abszolút értéke.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. E1 Deriváld a függvényeket!

a) $f(x) = x^2 + 4x - 10$

b) $g(x) = 2x^3 - 7x$

c) $h(x) = x^4 + 8x - 9$

2. E1 Deriváld a függvényeket!

a) $f(x) = \sin x$

b) $g(x) = 2\cos x - 1$

c) $h(x) = 3\sin x - 2\cos x$

3. E1 Hozd egyszerűbb alakra a függvények hozzárendelési szabályát, majd ábrázold a függvények grafikonját! A grafikonok segítségével állapítsd meg, hogy mi a függvény határértéke azon az x helyen, ahol nincs értelmezve!

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x}$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 16}{2x - 8}$

c) $h: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2x^2 + 12x + 18}{x + 3}$

d) $k: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{3x - 3}$

4. E1 Adj meg két olyan függvényt, amelynek deriváltja:

a) $f(x) = 3x^2 + 2x;$

c) $h(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 8;$

b) $g(x) = x^2 + 5x - 4;$

d) $i(x) = \sin x - 3\cos x.$

5. E1 Add meg a valós számok halmazán értelmezett f függvénynek azt a primitív függvényét, amely átmegy a P ponton, ha

a) $f(x) = x^2 + 6x - 3$ és $P(-4; 2);$

b) $f(x) = 12x^3 + 3x^2 - 1$ és $P(1; -2);$

c) $f(x) = \sin x + 2\cos x$ és $P\left(-\frac{\pi}{4}; 3\right).$

6. E1 Számold ki az alábbi integrálok értékét!

a) $\int_1^3 (-3x^2 + 6x + 5) dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (3\sin x - 2\cos x) dx$

b) $\int_{-1}^3 (-4x^3 + 4x - 7) dx$

e) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin x + 4\cos x) dx$

c) $\int_{-2}^1 (8x^3 - 6x^2 + 10x - 1) dx$

7. E1 Végezd el a lehetséges algebrai műveleteket, majd számold ki az integrálok értékét!

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{-1}^2 2x(x^2 - 3x + 7) dx & \quad \text{c)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3x^3 + 7x^2 - 4x}{2x} dx \\ \text{b)} \int_0^4 (5x - 2)(3x + 1) dx & \end{aligned}$$

8. E1 Határozd meg az alábbi integrálok értékét!

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_0^1 (3x - 1)^2 dx & \quad \text{b)} \int_2^4 x \cdot \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx \end{aligned}$$

9. E1 Határozd meg az alábbi integrálok értékét!

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx & \quad \text{b)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin x - \cos x) dx \end{aligned}$$

10. E1 Mekkora az x tengely és a függvény grafikonja által közbezárt korlátos síkidom területe?

$$\begin{aligned} \text{a)} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) &= -3x^2 + 4x \\ \text{b)} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) &= 4x^2 + 10x \end{aligned}$$

11. E1 Az $f(x) = ax^2 + bx$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Határozd meg a és b valós együtthatók értékét, ha

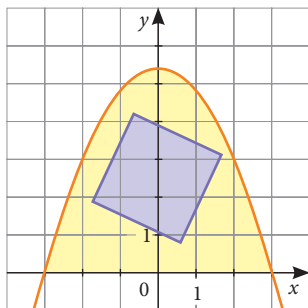
$$f(3) = 45 \quad \text{és} \quad \int_1^2 f(x) dx = 16.$$

12. E2 Határozd meg az a , b és c valós együtthatók értékét, ha az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényről tudjuk a következőket:

$$f(2) = 10; \quad f'(-2) = -32; \quad \int_0^3 f(x) dx = 24.$$

13. E1 Egy szervezet logója parabolaszlet alakú. A parabolaszletben egy lila színű négyzet látható, a parabolaszlet többi része sárga. A parabolaszletet az x tengely és az $f(x) = -0,6x^2 + 5,4$ függvény grafikonja határolja.

Határozd meg a négyzet oldalának hosszát, ha a sárga rész területe kétszer akkora, mint a lila rész területe!



14. E2 Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ függvény grafikonjának meghúztuk azt az érintőjét, amelyik a lokális minimumában érinti a függvénygörbét. Mekkora az érintő és az f függvény grafikonja által közbezárt korlátos síkidom területe?

15. E2 Mekkora az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt korlátos síkidomok területének összege?

16. E2 Számold ki az $f(x) = (x - 3)(2x + 2)(3x + 9)$ függvénygörbe és az x tengely által határolt korlátos síkidomok területének összegét!

17. E1 Mekkora annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet a valós számok halmazán értelmezett

$$\text{a)} f(x) = 3(x - 2)^2 \quad \text{és} \quad g(x) = -3x + 12$$

$$\text{b)} f(x) = 2x^2 + 5x - 3 \quad \text{és} \quad g(x) = x^2 + 8x + 1$$

függvények grafikonjai zárnak közre?

18. E1 Milyen p valós paraméterek esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek?

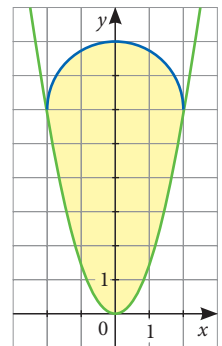
$$\text{a)} \int_{-3}^2 (-2x^3 + px) dx = 30$$

$$\text{b)} \int_1^p (5 - x) dx = 7,5$$

19. E2 Határozd meg annak a síkidomnak a területét, amelyet az $f(x) = (x - 6)^2 - 2$ egyenletű parabola grafikonja, a parabola 3 abszcisszájú pontjára illeszkedő érintője és az x tengely bezár!

20. E2 Egy test alaplapját egy olyan tengelyesen szimmetrikus alakzat alkotja, amely egy téglalap és egy, a téglalap egyik rövidebb oldalára kifelé illesztett parabolaívból áll össze. A téglalap oldalainak hossza 6 cm, valamint 4 cm, és a parabola csúcspontja a téglalap rövidebb oldalától 8 cm távolságra (a másik rövidebb oldaltól 14 cm távolságra) van. Mekkora az alaplap területe?

21. E2 Mekkora a területe annak a korlátos síkidomnak, melynek egyik határoló íve a $[-2; 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 1,5x^2$ függvény grafikonja, másik határoló íve a grafikon két végpontjára mint átmérők végpontjára illesztett félkör az ábra szerint?



MEGOLDÁSOK

1. lecke: 1. 3 : 4. 2. négyet. 7. a) -24. b) 1,4. c) 4; -3.

2. lecke: 1. 18 mm, 23 mm és 35 mm. 2. 12; 9.

3. 54; $\frac{189}{4}$ és $\frac{315}{4}$. 4. 4200 Ft, 4500 Ft és 5800 Ft.

5. a) 13,6 %-os. b) 107 Ft, 136 Ft és 166 Ft. c) végtelen sok megoldás van. 6. 5720 Ft, illetve 1950 Ft.

3. lecke: 2. a) 30 óra, 20 óra. b) 17 órára. 3. 80 perc.

4. 30-an. 5. 53 km/h. 6. 16. 7. 4. 8. Mindketten 4 m/s,

vagy $\frac{16}{3}$ m/s és $\frac{8}{3}$ m/s. 9. a) -3 és 2. b) 3.

4. lecke: 1. a) $\pm 0,5$; ± 3 . b) -1; 2. c) ± 1 ; ± 5 . d) ± 4 . 2. 90 m és 56 m. 3. 24 cm és 70 cm. 4. 9 cm, 40 cm és 41 cm.

5. (70; 24). 7. a) -1 és -2. b) -4; 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. 8. a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

b) (0,5; -3,5). 9. 100 perc és 50 perc. 10. a) (-0,5; 2).

b) (2; 2).

5. lecke: 1. $\frac{5}{3}$ s és $\frac{7}{3}$ s. 2. a) 0. b) nincs megoldás. c) nincs

megoldás. b) 1 és $-\frac{7}{3}$. 3. 0,4 és -11,6. 4. 7. 5. a) -3 és 2.

b) $-\frac{1}{4}$. c) -2 és 6. 6. -5 és $\frac{1}{3}$.

6. lecke: 2. -1 és 0. 3. a) 327 m. b) 480 m. 4. a) 2,2. b) 172.

5. a) 1 db gyök ($x = -2$). b) 0 db gyök. c) 2 db gyök (2 és -2).

6. a) 2. b) 27. 7. 6. 8. 4. 9. (18; 4).

7. lecke: 1. a) $x \geq \frac{7}{3}$. b) $x \leq -2$ vagy $x \geq 2$. c) $x < 1,5$. d)

$\mathbb{R}$. e) 0. 2. a) nincs megoldás. b) 2,5. c) nincs megoldás.

3. a) nincs megoldás. b) 0,25. 5. a) (7; -5). b) nincs megoldás.

6. a) -2; 0. b) 0; 3. c) 0. 7. a) 0; 7 és -6. b) 0; 1 és -2,5.

8. a) nincs megoldás. b) 1; $-\frac{4}{3}$. c) -7; 7. 9. a) -1; -2. b) -2.

c) 2; 3. d) 2. 10. a) (5; -3). b) (6; -1). c) (3; -5)

8. lecke: 1. a) p . b) $\frac{5p+4}{4}$. 2. a) $2p - 0,5$. b) $\frac{24-6p}{55}$.

3. a) -8. b) -4, vagy -8. 4. a) 2. b) $\frac{7}{6}$. 6. a) 4 és -1. b) -1.

9. lecke: 3. a) 6 és -10. b) 3 és 7. 4. $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{2}$. 5. a) $p < 4$

vagy $p > 8$. b) $p < 0$ vagy $p > 20$. c) $p \neq 0$ és $p < 1$ vagy $p > 9$. d) $p \neq 0$ és $p < 1$ vagy $p > 4$.

10. lecke: 2. a) $x < -7$ vagy $x > -4$. b) $x \leq -5$ vagy $x > 3$.

c) $1 < x < 3$. 3. a) $-4 \leq x < 4$. b) $x \geq 0,75$. 4. a) $x \leq -1$

vagy $x \geq 2$. b) $0,6 \leq x \leq 1,8$. 5. 11. 6. $31,875 < x < 38,57$.

7. $5 \leq x < 6$. 8. a) $-1 \leq x \leq 5$. b) $-2 \leq x \leq 7$. 9. $20 \leq x < 2020$.

11. lecke: 1. a) 6,5. b) 6. c) $\sqrt{47,5}$. 3. a) 25 perc.

b) 4,8 km/h. 4. 9, illetve 16 éves. 5. a) 5 és 20. b) 4 és 16.

a) 28 és 63. b) 1 és 7. 6. a) 104%-kal. b) 110 %-kal. c) 43%.

7. a felénél. 8. $36 = 6 \cdot 6$.

12. lecke: 4. 8 vagy 9. 5. 1. 8. $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{16}$. 9. a) (2; -5, 13).

b) (2; -5; 13).

14. lecke: 1. 88 m. 2. a) $67,1^\circ$; $22,9^\circ$ és 90° . b) $67,1^\circ$ és $112,9^\circ$. c) 5 cm. d) $12,6 \text{ cm}^2$. 3. 90° ; $54,4^\circ$; $35,6^\circ$; $71,2^\circ$;
 $108,8^\circ$. 4. A legnagyobb szöge $\approx 85,9^\circ$. 5. a) $109,4^\circ$ és $70,6^\circ$.

b) 5,11 cm. c) $24,6 \text{ cm}^2$. 6. a) $26,57^\circ$. b) $78,43^\circ$. c) 6,6 m.

15. lecke: 1. a) 89 m. b) 43° ; 57° ; 123° és 137° . c) 70 m és

223 m. 2. a) 89 m. b) 165 m és 128 m. c) 43° ; 123° ; 57°

és 137° . 4. $39,4 \text{ cm}^2$. 5. a) 11,8 km. b) $27,7^\circ$. c) 9,6 km.

d) $64,4 \text{ km}^2$. 6. a) 2,75 km. b) 78° . c) 3,1 km. d) 283 hektáros.

16. lecke: 1. a) 103 km. b) 70 km. c) 335 km. 2. 565 m.

3. 96 m, 48 m. 4. 85 m. 6. a) 161 373 m^3 . b) 23,4 m.

c) 27,6 m. 7. a) a távolság $\approx 5,7 \text{ km} < 6 \text{ km}$. b) 5° .

17. lecke: 6. a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\frac{1}{2}$. b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 1; $\sqrt{2}$ és 1.

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{6}}$. d) $2\sqrt{3}$; 3; 3 és $3\sqrt{2}$.

7. $\sqrt{3} \cdot 10$, $\sqrt{3} \cdot 20,50$ (m); $(100 + \sqrt{3} \cdot 20)$ m és $400\sqrt{3} \text{ m}^2$.

18. lecke: 4. a) 16,1 cm. b) 0,28 cm. 5. a) $56,35 \text{ cm}^2$.

b) $0,98 \text{ cm}^2$. 6. a) 4,5 cm. b) 0,75 radián $\approx 43^\circ$.

7. $87,2^\circ \approx 1,52$ radián. 8. a) 165° . b) 105° . c) 264° . d) 24° .

19. lecke: 6. a) 0,8415. b) $\pi - 1 \approx 2,14$. c) $1 + 2\pi \approx 4,28$;

$\pi - 1 + 2\pi \approx 8,43$. d) 0,5403. e) $2\pi - 1 \approx 5,28$. f) 1,156.

20. lecke: ($k, l \in \mathbb{Z}$) 3. a) $\frac{\pi}{4} + k2\pi$ és $\frac{3\pi}{4} + l2\pi$.

b) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ és $-\frac{\pi}{3} + l2\pi$. c) $\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ és $-\frac{2\pi}{3} + l2\pi$.

23. lecke: 6. 3,5 és 1,5.

24. lecke: ($k \in \mathbb{Z}$) 1. a) $\frac{5\pi}{6} + k2\pi$ és $\frac{7\pi}{6} + k2\pi$; $\frac{5\pi}{12} + k\pi$

és $\frac{7\pi}{12} + k\pi$. b) $-\frac{\pi}{3} + k\pi$; $-\frac{2\pi}{3} + k2\pi$. c) $\frac{\pi}{4} + k2\pi$

és $\frac{3\pi}{4} + k2\pi$; $\frac{\pi}{8} + k\pi$ és $\frac{3\pi}{8} + k\pi$. d) $\frac{\pi}{6} + k2\pi$ és

$\frac{11\pi}{6} + k2\pi$; nincs megoldás. e) $\frac{\pi}{4} + k2\pi$ és $\frac{3\pi}{4} + k2\pi$;
 $\frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$. 2. a) 100. b) 50. c) 100. d) 0.
 3. a) $0,015 + k \cdot 0,02$. b) $\frac{1}{600} + k \cdot 0,02$ és $\frac{5}{600} + k \cdot 0,02$.
 c) $0,002367 + k \cdot 0,02$ és $0,007633 + k \cdot 0,02$.

25. lecke: ($k, l, m \in \mathbb{Z}$) 1. a) $\frac{\pi}{2} + k\pi$. b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ és
 $1,25 + k\pi$. 2. a) $\frac{\pi}{6} + k2\pi$ és $\frac{5\pi}{6} + k2\pi$. b) $k2\pi$.
 c) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$. d) $k\pi$ és $\frac{3\pi}{2} + l2\pi$. 3. a) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$.
 b) $1,212 + k\pi$. 4. a) $k\pi$ és $\frac{\pi}{3} + l2\pi$ és $-\frac{\pi}{3} + m2\pi$.
 b) $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$ és $\frac{\pi}{6} + l2\pi$ és $\frac{5\pi}{6} + m2\pi$. c) $k\pi$ és $\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}$.
 5. a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. c) $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$. 6. $73,7^\circ$.
 7. $53,1^\circ$, $106,2^\circ$ és $20,7^\circ$.

26. lecke: ($k, l \in \mathbb{Z}$) 2. a) $-\frac{\pi}{3} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
 b) $\frac{\pi}{2} + k2\pi$. c) $-\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + k\pi$.
 3. $-\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$. 4. a) 6 óra 8 perc. b) 164.
 6. b) 0; π ; 2π ; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$.

28. lecke: 1. a) 120. b) 151 200. 2. 105. 3. a) 4 782 969.
 b) 531 441. c) 1 417 176. d) 60 060. 4. a) 10. b) 4. 5. 600.
 6. a) 630 630. b) 630 630. 7. 1200. 8. $6 \cdot 100 \cdot 26^3$.
 9. a) 243. b) 51.

29. lecke: 1. a) 241 920. b) 40 320. 2. 360. 3. 105. 4. 651.
 5. 20, 70, 60. 6. 48. 7. a) 2. b) 9. c) 8. 8. 35.

30. lecke: 1. c) 2^n . 2. a) 16. b) 26. c) 16. d) 16. 3. a) 35.
 b) 105. 4. a) 14. b) 0; 1; 14. 5. a) 28. b) 56. c) 3; 70.

31. lecke: 2. a) 45. b) 25. c) 21. d) 18. 3. 23. 4. 15.
 5. 2 vagy 7.

32. lecke: 3. a) 24. b) 23. c) 8. d) 3. e) 8. 4. 6.

33. lecke: 1. 20. 2. a) 21. b) 190. c) 20. 3. a) 1024. b) 125.
 4. 16. 8. 55.

35. lecke: 1. a) $n \geq 2$, $k \geq 1$. 2. a) 0. b) 2. c) végtelen. d) 12.
 3. 12 lehetőség, a legkisebb 385. 4. 503. 5. a) 120. b) 24.
 6. a) 512. b) 8 888 888 880. 7. 192.

36. lecke: 1. 42. 2. a) hamis. b) igaz. c) hamis. d) igaz.
 e) igaz (0). 4. a) 3 és 6. 5. -14, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 16.

37. lecke: 1. 60. 2. 96. 3. a) 144. b) 180. 5. a) 48 páratlan,
 192 páros. b) 1 : 191. 6. a) 0,234. b) $2^{24} \cdot 5^{24}$.

38. lecke: 1. a) 1467_8 . b) 22000_3 . 2. a) 101101_2 , 231_4 , 55_8 ,
 illetve 1000111_2 , 1013_4 , 107_8 , illetve 1111001_2 , 1321_4 , 171_8 ,
 illetve 11101010_2 , 3222_4 , 352_8 . 4. a) 101010_2 . b) 11201_6 .
 c) 11111100_2 . 5. a) 4. b) 4. c) 5.

40. lecke: 5. 2401. 6. a) 9. b) 0.

41. lecke: 1. a) 3^{22} . b) $x^{8,4}$. 2. a) $2^{-10,8}$. b) $m^{0,7}$. 3. a) p^{5050} .
 b) $p^{0,01}$. 4. a) első. b) első. c) második. 5. a) $-2,1 \cdot 10^{19}$.

6. a) <. b) =. c) >. d) >. 8. $A = B^{\frac{2}{n+1}}$.

42. lecke: 1. a) 3,7. b) 10-szer. c) 10^{-4} mol/dm³. 4. a) -1.

b) 4. c) $-\frac{7}{4}$. d) $\frac{3}{2}$. e) $-\frac{1}{3}$. 6. a) $\frac{1}{8}$. b) $\frac{1}{64}$. c) 9. d) 1.

e) $\frac{4}{25}$. f) $\frac{3}{49}$. g) -3.

43. lecke: 1. a) 16. b) $\left(\frac{4}{7}\right)^3$. c) 144. d) 4. 2. a) 7. b) $\frac{1}{18}$.

c) 0. 4. a) -2. b) 1. 6. a) 3. c) 50, 25, -50.

44. lecke: 1. a) 2. b) 3; -3. c) -1. 2. 1985 és 2000. 3. a) -1.

b) -2. c) 0; 4. 4 óra. 5. a) $x > 3$. b) $x < 0$. c) $x \leq -3$.

6. a) (2; 0). b) (3; 3). c) (-4; -1).

45. lecke: 2. a) -8. b) -1. c) -8. d) -10. 3. a) nincs megol-

dás. b) 259. c) 259 és -253. 4. a) 61. b) 9. c) $x > \frac{4}{3}$. d) $\frac{4}{3}$.

5. 120 dB. 6. a) 8. b) 1. c) $2^{25} - 3$. 7. a) 9. b) 16.

46. lecke: 1. a) 1,5. b) 400. 2. a) $4,2 \cdot 10^{24}$. b) 64 perc múlva.
 c) 22,76 perc. 3. a) 0 dB. b) 28 dB. c) 89,5 dB. d) 10-szere-
 sére. 4. a) 6,5. b) 0,5. 5. a) 126. b) 1 és 2. 6. 5888 m. 7. a 36.
 hónap végén.

47. lecke: 1. a) $x \geq 2^{100}$. b) $0,1 < x < 10$. c) $x > 2$. d) $x < 2$.
 2. a) 8 jegyű. b) 105 jegyű. 3. a) 3 033 000 Ft. b) Legalább
 56 hónap.

49. lecke: 4. (-1; 12) vagy (-17; -10). 5. a) (-23; 15).

b) $\left(3; \frac{23}{5}\right)$. 6. (4; 0), (-2; 8). 7. (-3; -5), (0; -2) vagy
 (-15; 7), (-12; 10). 8. $(-1 + 4\sqrt{3}; 1 + 3\sqrt{3})$ vagy
 $(-1 - 4\sqrt{3}; 1 - 3\sqrt{3})$.

50. lecke: 3. b) (-4; 0), (-1; $-\sqrt{3}$), (-3; $\sqrt{3}$), (0; $-2\sqrt{3}$).

4. b) (4; 0), (1; $\sqrt{3}$), (3; $\sqrt{3}$), (0; $-2\sqrt{3}$). 5. b) $\left(-\frac{8}{5}; \frac{9}{5}\right)$,

$\left(-\frac{22}{10}; \frac{26}{10}\right)$. 6. (-1,5; 1,5). 7. (1; 1) és (7; -3).

51. lecke: 1. a) 60° . d) 0. 2. a) 10,239. b) -3, 149. c) 0.
 d) -14. 3. a) 1. b) 0. c) 1. d) 1. 4. a) 150° . b) 90° . c) 180° .
 d) 60° . 5. 2; 2; 4; 4; 4; 4; 2. 6. c) 9. d) 36; 27; -54; 9.
 e) $18 + 0 = 18$; $6 \cdot 3 = 18$.

52. lecke: 1. a) 2; $\sqrt{17}$; $\sqrt{40}$; $85,6^\circ$. b) 13; $\sqrt{26}$; $\sqrt{13}$;
 45° . 2. a) (-3; 5) és (-7; 1). b) $71,6^\circ$. 3. a) 4. b) 2 vagy -6.

4. a) $\sqrt{74}$ és $\sqrt{106}$. b) $96,49^\circ$. 5. a) (6; -1), (1; 7), (-1; 5).

b) (5; -8) és (-2; 2). c) -11. 6. a) (4; 3). b) (-3; 4), 163,7° és 106,3°.

53. **lecke:** 1. a) 0; 0; -130; -78; 0; 0. d) 119,7°. 2. a) (27; 9). b) 25. c) 0. d) 69,4°. 3. a) -9. b) 1. 4. b) 6,32; 3,61; 4,12 és 3,16. c) 57,53°, 126,46°, 74,74°, 105,26°. 5. a) hamis. b) igaz.

c) igaz. 6. $4 + 4\sqrt{3}$. 7. a) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$. b) 78°.

c) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$, vagy $m\frac{\pi}{2}$, ahol $k, m \in \mathbb{Z}$.

54. **lecke:** 1. (-9; -13) vagy (-3; -4). 2. a) $\left(-\frac{19}{3}; \frac{17}{3}\right)$.

b) (-9; 3). 3. (-3; 2). 4. a) (1,5; 3,5); (-2; 1) és (-2,5; 4,5).

b) (-1; 3). c) azonos. 5. c) (-6; -6), (10; -2) és (-4; 8).

6. (2; 2). 7. b) (4; -1). c) (-2; -7), (10; -3) és (4; 7). 8. 9,81; 8,55 és 5,79; 60°, 36° és 84°; (2; 4), (7,5; 2,2) és (5,5; 11,8).

55. **lecke:** 6. b) (0; 0) és (3; 2) vagy (-4; 6) és (-1; 8).

7. (0; 6). 8. b) $\frac{86}{7}$.

57. **lecke:** 1. b) $\left(\frac{23}{25}; \frac{61}{25}\right)$. c) $\left(\frac{71}{25}; -\frac{3}{25}\right)$. 2. 90°; 43,6° és 46,4°.

3. $\sqrt{26}$. 4. a) (-1; 6). c) (1,5; 1,5). d) (5; 5). 5. 3 és

0,58. 6. a) -31° és -63°. b) $\left(-\frac{15}{11}; \frac{20}{11}\right)$, $\left(\frac{6}{11}; -\frac{1}{11}\right)$.

7. a) (12; -23), (16; -15), (0; 9). b) 63°, -56°. c) 119°, 61°.

58. **lecke:** 1. 537 m. 3. a) 175,6°. b) (49; 175). 4. a) -17,5. b) -2,4. c) ± 1 . d) -2, illetve 6. 5. 67°. 7. (2; 9).

59. **lecke:** 4. b) (12; -1). 6. a) 37,25.

61. **lecke:** 2. (2; 1), (6; -3). 3. $\sqrt{40}$.

62. **lecke:** 5. 15,625 m. 6. nem.

63. **lecke:** 1. a) (3; 2). b) $\left(\frac{7}{3}; \frac{13}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$. 4. b) (0; 6)

és (8; 0), illetve (0; 8) és (6; 0). 5. c) $2\sqrt{50}$. d) 12.

6. (-5; -2 + 2 $\sqrt{3}$), (-5; -2 - 2 $\sqrt{3}$). 7. (-7; 2), (9; -6), (11; 8), (3; 12).

65. **lecke:** 3. a) 21,5 cm. b) 0,5 dm². c) 18 éves. 4. a) 120. b) 372. c) 47,2, illetve 556,96. 8. a) $0 \leq x \leq 2$. b) $x < -5$. c) $0 \leq x \leq 2$.

68. **lecke:** 4. a) 5. b) 4. c) 6. d) 2. 6. a) -2; 0 és 3. c) (2; -8).

69. **lecke:** 2. a) 0,5. b) 1,2. c) -0,4. d) 0. 4. a) (2; 8).

70. **lecke:** 5. a) 1 és -1. b) 0 és 4. c) 2,5. d) 0 és -6. 7. a) 4. b) (-1; 1). c) (1; 3). d) (2; 1). e) (2; 3).

71. **lecke:** 5. a) 60 dollár. b) 90,55 dollár; 69 dollár.

72. **lecke:** 1. 4 cm. 2. 40 mm. 3. ha az euró ára 37 Ft-tal növekedne. 4. a) 308 cm³. b) 5 cm, 10 cm és 8 cm. 5. a) 5000 db. b) 160 db. c) 1 574 400; 1 031 600; 542 800 (Euró). 6. a) 600 kg, 10 800 Euró. b) 380 kg eseten, 2306,4 Euró. 7. 7,73 és 2,27

73. **lecke:** 4. a) 2,6 m. b) 71°. 5. 8,165 m távolságra.

a) A koordináták (8,16; 3,78) és (-8,16; 3,78).

74. **lecke:** 2. 2,5 m és 5 m. 3. (3; 1,5), 37°. 5.) 3,33 s. b) 6,67 s.

75. **lecke:** 1. 1,6 dm és 0,8 dm. 2. 4,3 cm és 17,2 cm; 70 Ft. 3. 3,46 és 114°.

76. **lecke:** 1. 45°. 2. 45°. 4. a) 215 km. b) kb. 87 km/h.

5. $y = 0,75x - 0,5$; $E\left(\frac{10}{3}; 2\right)$.

77. **lecke:** 1. 21 cm, 79 cm és 58 cm. 3. 52 km/h.

4. a) 400 000 Ft. b) 48 db, 240 000 Ft. 5. 23 cm és 46 cm.

6. a) 2 700 000 Ft. b) 27. 7. a) 25 200 000 tallér.

b) 260 tallér.

80. **lecke:** 2. a) $12\sqrt{2}$. b) $288(1 + \sqrt{3})$ cm². 3. 1909 cm³. 4. c) 623 cm².

81. **lecke:** 2. 18. 3. 5 cm, 4,17 cm, 12,5 cm, 3,6 cm.

5. 4,94:3,06. 6. $4x + 5y = 55$. 7. 1:0,347

82. **lecke:** 1. 4,5 szerese. 2. 720, 2160 és 1620. 3. 30 cm, 31,875 cm, 62°, 56°. 4. b) 48 cm. c) 409 cm², 1138 cm².

5. a) 15. 6. $24\sqrt{3}$.

83. **lecke:** 2. 2,5 cm. 4. 9:12. 5. 0,7 cm. 6. a) 45,8 m, 44,1 m. b) 8,27°. c) 866 m², 145 m², 721 m².

84. **lecke:** 2. a) 65. b) $\frac{810}{13}$. 4. 10 cm. 6. 80π cm³.

85. **lecke:** 1. 3:1, 14,2 cm² és 9,4 cm². 2. 3,41. 3. 234 cm².

5. 92,4 m. 7. a) $\sqrt{2}$. b) $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

86. **lecke:** 1. 24,7%. 2. 41,5 cm. 3. b) 46,5°; 133,5°; 75,5° és 104,5°. c) 69,7 cm². 4. a) négy. b) 42,5%, 106,4%, 150%.

5. a) $30\sqrt{2}$. b) 90°. c) 900 m².

87. **lecke:** 1. 166 cm. 2. a) 5 m, illetve 5,57 m. b) 30% és 35%. 4. a) 228 mm. b) 1042 mm. 5. b) 19%.

88. **lecke:** 2. 7,8 cm. 3. 152°, 82°, 126°. 4. 61° és 119°. 5. 20°.

89. **lecke:** 1. 95°, 75°, 85°, 105°. 2. 86 m² vagy 210 m².

3. 12,68; 9,28; 7,32 és 10,72. 4. 7 cm, 8,08 cm, 4,04 cm, 38,2°, 68,2°, 111,8°. 5. b) 792,6 cm². 6. 1,7, illetve 2,9.

90. **lecke:** 1. 41°, 3 cm. 2. a) 54,7°. b) 54,7°. 3. a) 73,7°;

11 cm. b) 90°; 4,8 cm. 4. 70,5°. 5. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. 6. 60°, $5\sqrt{2}$.

7. a) 90°. b) 2,1 cm.

91. **lecke:** 1. $\frac{23}{28}$. 2. a) 73,7°. b) 216. c) $\frac{3}{5}$. 4. a) 146,9 dm³,

illetve 145,8 dm³, csomkagúla. b) 126,9 dm³, illetve 127,6 dm³, hasáb. 5. 5,5 cm. 6. 13,6 cm³. 7. a) 47,4 cm. b) 873 db. 8. a) 1,85 órát. 9. 1 : 5.

92. lecke: 1. a) $3\sqrt{2}$ vagy $13\sqrt{2}$. b) 3,35 vagy 13,1.
c) $1,5\sqrt{2}$ vagy $6,5\sqrt{2}$. d) 4,03. 2. 13 m. 3. 3 cm.
4. 72 egység. 5. 11 m. 6. a) 21,2 m. b) 49,7 s. c) 28,5 s.
7. 30,53 egység.

94. lecke: 1. 9. 3. a) 16. b) 32. c) 28. 4. 8. 5. a) 13. b) 4017.
c) 2048. d) 2048. 6. V: 20, 24, 28, S: 30, 36, 42.

95. lecke: 1. 986. 2. a) 23. b) 14. 3. 300. 4. b) 11. 5. 10%.
6. Legalább 7. 7. 3235. 8. a) 5. b) 4. 9. a) 1200. b) 8550.
c) 8700. 10. 240.

96. lecke: 1. 22; -5, 29; 60.

100. lecke: 2. a) 4. b) 32. c) 6.

104. lecke: 1. a) 5003 m, 710 m; 691 m. b) 1222 m; 952 m.
4. 375 250. 6. a) 24,9 pont. b) 2.

105. lecke: 2. a) 2,5, illetve 2. b) 3, illetve 2,3. 3. átlag
107 g, szórás 1,3 g. 4. b) 0,0625. c) 0,26.

106. lecke: 2. 0,7 és 1; 0,3 és 0,6. 3. 0,65. 5. 0,4. 6. 0,22.
7. 7.

107. lecke: 1. a) 0,4. b) 0,2. 2. a) 0,18. b) 0,4. c) 0. d) 0,3.
e) 0. f) 0. 3. b) 0,43. 4. a) 0,327. b) 0,323. 5. a) 0,33. b) 0,98.

108. lecke: 1. a) 0,146. b) 0,147. 2. 0,47. 3. a) 0,15. b) 0,02.
c) 0,009. d) 0,02. 4. a) 14 vagy 15 lány és 17 vagy 18 fiú.

b) 0,475. c) $\frac{1}{5}$ rész. 5. a) 1698 Ft. b) 0,1. c) 0,14. 6. a) 0,12.
b) 0,0024. 7. a) 3. c) 10.

109. lecke: 1. a) 8,3. b) 6,7. 2. 2468 Ft. 3. a) $\frac{171}{3741}$.
b) 177,7 Ft. 4. 0,974 és 18 Euró. 5. a) 940 000 Ft. b) 0,1375.

110. lecke: 2. a) 0,704. 4. a) 0,4. b) 0. 5. 0,216; 0,432; 0,288,
illetve 0,064. E = 0,864. 6. a) 0,0625. b) 0,67. 7. 32.

9. a) $\frac{5}{18}$. b) 120 Ft. 10. a) 0,89. b) 11. 11. b) 0,083.

112. lecke: 2. 18-szor vagy 19-szer. 3. a) $\frac{266}{3}$. b) 192.
4. 48; 36; 30. 5. 1,2 és 4 vagy -2 és -4. 6. 40. 7. 7.

113. lecke: 1. a) 26. b) 38. 2. 57 998 Ft. 3. 9,59 m. 4. +1, -1,
+2, -2. 5. 25. 6. a) 9703 m. b) 199 841 m. c) 0,474.

114. lecke: 1. 36. 2. a) 358 685 Ft. b) 630 539 Ft.
c) 960 746 Ft. 3. a) 295 213 Ft. b) 890 817 Ft.
4. 2 775 520 Ft. 5. 115.

115. lecke: 2. a) $-3 \leq k \leq 3$. b) $k \geq 5$, vagy $k \leq -5$. 3. a) 6.
5. a) 1527 kg.

116. lecke: 1. a) 10. b) 10 000. 2. a) 10 000. b) 10^{12} . c) ε^{-2} .
3. a) 50. b) 10^{10} . c) ε^{-1} . 4. a) 880. b) pl. 10^{12} . c) pl. ε^{-1} .

5. b) $\frac{17}{15}$. c) $\frac{3}{2}$.

117. lecke: 1. a) $\frac{1}{7}$. b) -8. c) 0. d) 0. 2. a) $\frac{1}{2}$. b) $-\frac{1}{5}$.

3. a) $-\frac{1}{8}$. b) 1. 4. a) -15. b) 225. c) $k \neq 0$. 5. a) 0,5. b) -6.

118. lecke: 1. a) 0; 79. b) 0; 1970. c) 0; 190. d) 0; 39.
2. a) 45. b) 18. 3. a) 0. b) 1. c) 30. d) 9. 4. a) 4200. b) 18.

119. lecke: 1. a) 18,75. b) -84. c) 400. d) 49,6. 3. a) 700; 46.
b) 1250; 8. c) $\frac{500}{99}$; 422. 4. a) $\frac{15}{4}$. b) $\frac{32}{9}$. c) $\frac{343}{120}$.

6. a) 400. b) 285,7. 7. a) 16,6 b) 400.

120. lecke: 1. 386,2; 1520,5. 2. a) 27,47. b) 36,53. 3. a) 125.
b) (7,1; 4,98). 4. a) 142,55 cm. b) 35 571,38 cm³.

c) 9062,5 cm². 5. a) 0,433. b) határértéke: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

123. lecke: 2. a) 175. b) 132. c) 200. 3. $x = y = 1,68$. 4. 2,83
és 5,66 cm.

125. lecke: 1. a) $\frac{2}{3}$. b) $\frac{14}{3}$. c) $\frac{7}{3}$. 2. $\frac{2}{3}$. 3. 0,2025; 0,3025.

126. lecke: 2. a) $\frac{41}{6}$. b) $\frac{29}{3}$. c) 1,5. d) -2,45. 3. a) 0,5. b) 0.
c) -14. d) -64. 4. a) -102. b) 10,2. 5. a) $x \geq 0$ vagy $x \leq -1,6$.
c) 6.

127. lecke: 1. $\frac{32}{3}$, $\frac{16}{3}$, 12,8. 2. 1,91. 3. 8:19:15. 4. $\frac{52}{3}$.
5. 0,538. 6. a) 0. b) $\sqrt{8}$.

128. lecke: 1. $\frac{125}{6}$. 2. $2 \cdot \sqrt{2}$. 3. a) $\frac{32}{3}$. b) 1,125. 4. $\frac{64}{9}$.
5. 27:37. 6. a) $\frac{4}{3}$. b) 0,133. 7. a) (-2; 0) és (2; 0). b) $\frac{8}{3}$ és $\frac{34}{3}$.

129. lecke: 1. 507 m². 2. 49,77%-a. 3. 12. 4. $\frac{253}{12}$. 5. Kék
0,538 dl, szürke 2,46 dl. 6. b) 10 kg. 7. 0,25.

TARTALOM

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Egyenletek megoldása	4
2. Egyenletrendszerek	6
3. Ismeretlen a nevezőben	8
4. Új ismeretlen bevezetése	10
5. Abszolútértékes egyenletek	12
6. Négyzetgyökös egyenletek	14
7. Egyenletmegoldás más módszerekkel	17
8. Paraméteres egyenletek	20
9. Paraméteres másodfokú egyenletek	23
10. Egyenlőtlenségek	25
11. Nevezetes középértékek	28
12. Gyakorlás	31
13. Összefoglalás	33

TRIGONOMETRIA

14. Feladatok háromszögekre	38
15. Hosszúságok és szögek kiszámítása	40
16. Milyen magas a torony?	42
17. A szögfüggvények kiterjesztése	44
18. Szögek ívmértéke	46
19. Az egységkör	48
20. Feladatok az egységkörön	51
21. Trigonometrikus függvények	55
22. Transzformációk, függvénytulajdonságok	58
23. Hangfrekvencia és függvénytranszformáció	60
24. Trigonometrikus egyenletek I.	62
25. Trigonometrikus egyenletek II.	64
26. Trigonometrikus egyenlőtlenségek	66
27. Összefoglalás	69

KOMBINATORIKA ÉS GRÁFOK

28. Sorba rendezés, kiválasztás	74
29. Gyakorlás	77
30. A binomiális tétel	80
31. Gráfok	82
32. Fagráfok	84
33. Gyakorlás	86
34. Összefoglalás	88

SZÁMELMÉLET

35. A számelmélet alaptétele	92
36. Gyakorlás	95
37. A pozitív osztók száma	96
38. Számrendszerek	98
39. Összefoglalás	102

HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

40. A hatványozás azonosságai	104
41. A hatványozás kiterjesztése	107
42. A logaritmus	111
43. A logaritmus azonosságai	114
44. Exponenciális egyenlet és egyenlőtlenség	116
45. Logaritmust tartalmazó egyenletek	118
46. Gyakorlás	120
47. Logaritmus és egyenlőtlenség	121
48. Összefoglalás	122

KOORDINÁTAGEOMETRIA

49. Vektorműveletek	126
50. Vektorok felbontása összetevőkre	128
51. A skaláris szorzat	130

52. A skaláris szorzat kiszámítása koordinátákból ...	133
53. Vektorok hajlásszöge	135
54. Osztópontok, a háromszög súlypontja	137
55. Az egyenes egyenletének normálvektoros alakja	140
56. Az egyenes egyenletének irányvektoros alakja	142
57. Párhuzamos és merőleges egyenesek	144
58. Gyakorlás	147
59. A kör egyenlete	148
60. Kör és egyenes	150
61. Körök metszéspontjai	152
62. A parabola egyenlete	154
63. Gyakorlás	156
64. Összefoglalás	157

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

65. Függvények	162
66. Az inverz függvény	166
67. Az összetett függvény	168
68. Görbe érintője	170
69. A másodfokú függvény deriváltja	174
70. Polinomfüggvény deriváltfüggvénye	177
71. Polinomfüggvények jellemzése	180
72. Szélsőérték-feladatok	183
73. A második derivált	185
74. Szélsőérték és a második derivált	188
75. Deriváltfüggvények	190
76. Deriválási szabályok	192
77. Gyakorlás	195
78. Összefoglalás	197

GEOMETRIA

79. Egybevágóság	204
80. Geometriai leképezések	207
81. Párhuzamos szelők tétele	209
82. Hasonlóság	212
83. Háromszögek	214

84. Derékszögű háromszögek	216
85. A háromszög területe	218
86. Sokszögek területe	220
87. A kör	222
88. Kerületi szögek	225
89. Húrnégyszög, érintőnéyszög	228
90. Kitérő egyenesek	230
91. Testek térfogata és felszíne	232
92. Távolságok és szögek síkban és térben	234
93. Összefoglalás	236

HALMAZOK, LOGIKA

94. Halmazok, halmazműveletek	240
95. Halmazok számossága, véges halmazok	242
96. Halmazok számossága, végtelen halmazok	244
97. Logikai műveletek	246
98. Következtetések	248
99. Indirekt bizonyítás	251
100. Skatulyaelv	254
101. Teljes indukció	256
102. Gyakorlás	259
103. Összefoglalás	260

STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

104. Adatsokaság statisztikai mutatói	262
105. Diagramok	264
106. Események összege és szorzata	266
107. A feltételes valószínűség	269
108. Eloszlások	271
109. A várható érték	274
110. Gyakorlás	276
111. Összefoglalás	278

SOROZATOK

112. Sorozat n -edik tagja	280
113. Gyakorlás	283
114. Pénzügyi számítások emelt szinten	285
115. Sorozatok jellemzői	288

116. Sorozatok határértéke	290	125. A határozott integrál	315
117. Gyakorlás	294	126. A Newton–Leibniz-tétel	318
118. Mértani sorozat határértéke	296	127. Területszámítás	320
119. Mértani sor összege	297	128. Két görbe közötti síkidom területe	322
120. Mértani sorok geometriai alakzatokban	300	129. Gyakorlás	324
121. Összefoglalás	302	130. Összefoglalás	326

ANALÍZIS, INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

122. Függvény határértéke és folytonossága	306	Megoldások	329
123. A differenciálhányados	310	Képlegyűjtő	336
124. A primitív függvény	313		

KÉPJEGYZÉK

Szakábrák: Szalóki Dezső

173. o. bal felső kép: Gottfried Kneller festménye alapján John Smith: Isaac Newton portréja, 1712, Rijksmuseum, Amsterdam, public domain

173. o. jobb felső kép: E. Fiquet: Gottfried Wilhelm von Leibniz portréja, © CULTiRiS / INTERFOTO / Sammlung Rauch

173. o. bal alsó kép: Gregoire et Deneux: Augustin Louis Cauchy portréja, Smithsonian Libraries and Archives, Washington DC, public domain

173. o. jobb alsó kép: Karl Weierstrass portréja, Smithsonian Libraries and Archives, Washington DC, public domain

194. o. Az (ex)Déli Vasút 109.109-es mozdonya (Vasúttörténeti park), Fotó: Bakó Ádám

Shutterstock: 3. o., 8. o., 9. o., 10. o., 12. o., 17. o., 19. o., 21. o., 27. o., 29. o., 31. o., 38. o., 46. o., 47. o., 49. o., 56. o., 60. o., 65. o., 78. o., 86. o., 92. o., 93. o., 96. o., 98. o., 99. o., 100. o., 101. o., 104. o., 106. o., 108. o., 111. o., 112. o., 113. o., 117. o., 120. o., 121. o., 126. o., 128. o., 132. o., 135. o., 136. o., 137. o., 139. o., 142. o., 143. o., 147. o., 149. o., 154. o., 156. o., 161. o., 174. o., 192. o., 203. o., 204. o., 222. o., 223. o., 224. o., 225. o., 228. o., 230. o., 233. o., 234. o., 240. o., 243. o., 253. o., 254. o., 256. o., 257. o., 262. o., 269. o., 271. o., 273. o., 277. o., 280. o., 286. o., 287. o., 293. o., 299. o., 318. o., 321. o.

Shutterstock szerkesztői képek: 6. o. smileimage9, 42. o. Sergii Figurnyi, 43. o. bal kép: LMWH, 43. o. jobb kép: Ritu Manoj Jethani, 59. o. Renata Sedmakova, 80. o. Michael Cola, 141. o. Paolo Bona, 187. o. Phuong D. Nguyen, 193. o. Vlad1988, 235. o. Raketir, 244. o. Lois GoBe, 248. o. Irma eyewink, 272. o. Nataliya Pokrovska, 273. o. társasjáték: Joni Hanebutt, 277. o. villamos: Ceri Breeze, 288. o. RichartPhotos, 297. o. Fotokon

Thinkstock: 313. o.

iStock: 20. o.

A KöMaL feladatok forrása: <http://db.komal.hu/scan/>