



OKTATÁSI
HIVATAL

NAT
2020

11

Matematika

tankönyv

MATEMATIKA 11.

Az érthető matematika



OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2022. február 21-től 2027. augusztus 31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/73-7/2022. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet alapján készült – 2020. 01. 31. után kiadott Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára szóló matematika tantárgy kerettantervének.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők: dr. Várady Ferenc

Tananyagfejlesztők: Juhász István, Orosz Gyula

Kerettantervi szakértő: dr. Csapodi Csaba

Lektor: dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön

Szerkesztette: Csajági Sándor

Szakábra: Szalóki Dezső

Illusztráció: Urmai László

Fedélterv: Slezák Ilona terve alapján összeállította Bánáti János

Tipográfia: Bajtai Zoltán

Fotó: ©Shutterstock képügynökség; ©MTI/MTVA; © CULTiRiS: INTERFOTO/NG Collection, EMILIO SEGRE VISUAL ARCHIVES/AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS/SCIENCE PHOTO LIBRARY, INTERFOTO/Sammlung Rauch, AKG-Images, Bridgeman Art Library, AKG-Images/British Library

A könyvben felhasználtuk Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit Matematika 11. tankönyv c. művét. Raktári szám: NT-17312.

© Oktatási Hivatal, 2022

ISBN 978-963-436-281-4

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.

Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök • Raktári szám: OH-MAT11TB

Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos

Műszaki szerkesztő: Orlai Márton, Fazekas Julianna

Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné, Mikes Vivien, dr. Valaczka Bence • Nyomdai előkészítés: Gados László

Terjedelem: 48,93 (A/5) ív • Tömeg: 950 gramm • 1. kiadás, 2022

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen

Felelős vezető: György Géza vezérigazgató

A nyomdai megrendelés törzsszáma:



Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001 számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020

2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TARTALOM

Fontosabb jelölések	6
A tankönyv használatáról	7

I. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS 8

1. Vegyes algebrafeladatok (Ismétlés)	9
2. Egész kitevőjű hatványok, azonosságok	11
3. Számok n -edik gyöke	14
4. Az n -edik gyökvonás azonosságai (Emelt szint)	19
5. Az n -edik gyökvonás azonosságainak alkalmazása (Emelt szint)	22
6. Racionális kitevőjű hatvány, permanenciaelv	25
7. Az exponenciális függvény	28
8. Exponenciális egyenletek	32
9. Exponenciális egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek (Emelt szint)	36
10. A logaritmus fogalma	39
11. A logaritmusfüggvény (Emelt szint)	41
12. A logaritmus azonosságai	44
13. Logaritmosus egyenletek (Emelt szint)	48
14. Logaritmosus egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek (Emelt szint)	52
Miért használunk logaritmusskálákat? (Olvasmány)	55
15. Exponenciális növekedés a természetben és a társadalomban (Emelt szint)	59
16. Exponenciálisan csökkenő mennyiségek	65
Pénzügyi alapfogalmak (Olvasmány)	68
Közelítő értékek (Olvasmány)	70



II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI 76

A matematikai jelölésrendszer kialakulása (Olvasmány)	77
17. A maradékos osztás, az oszthatóság fogalma, tulajdonságai	78
18. Oszthatósági szabályok	83
19. Prímszámok, a számelmélet alaptétele	88
20. Legnagyobb közös osztó, euklideszi algoritmus, legkisebb közös többszörös	93
Kifejezések, polinomok oszthatósága (Olvasmány)	96
21. Számrendszerek	98
Tudáspróba (Tananyagon kívüli, nem kötelező rész)	101



III. VEKTOROK 102

22. Vektor szorzása számmal	103
23. Az egyértelmű vektorfelbontás tétele (Emelt szint)	106
24. Vektorok a koordinátáson, helyvektorok	111
25. Felezőpont, osztópont	113
26. Háromszög súlypontjába mutató vektor.	117
27. Vektor elforgatása $\pm 90^\circ$ -kal	118





IV.	TRIGONOMETRIA	122
28.	Hegyesszögek szögfüggvényei	123
29.	Derékszögű háromszögek adatainak meghatározása	130
30.	Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között	135
31.	Háromszögek adatainak meghatározása	140
32.	Síkbeli és térbeli számítások szögfüggvények segítségével (Alkalmazások)	145
33.	Tompaszögű háromszögek	151
34.	A koszinusztétel. A tompaszög koszinusza	156
35.	A szinusz- és koszinusztétel alkalmazása	160



V.	FORGÁSSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI (Emelt szint)	168
36.	A szögfüggvények általánosítása	169
37.	Szögfüggvények ábrázolása	178
38.	Trigonometrikus egyenletek 1.	193
39.	Trigonometrikus egyenletek 2.	201
40.	Trigonometrikus egyenlőtlenségek	208



VI.	KOORDINÁTAGEOMETRIA	214
41.	Ismerkedés a koordinátageometriával	215
42.	Az egyenes koordinátageometriája	220
43.	Két egyenes metszéspontja	227
44.	Párhuzamos és merőleges egyenesek	229
	Geometriai transzformációk és koordináták (Olvasmány)	238
45.	A kör koordinátageometriája	240
46.	Egyenes és kör kölcsönös helyzete (Emelt szint)	245
47.	Két kör kölcsönös helyzete, érintkező körök (Emelt szint)	250
48.	Ponthalmazok a koordinátasíkon (Egyenlet, egyenlőtlenség, mértani hely) (Kiegészítő anyag)	253
	A parabola és a másodfokú egyenlet (Olvasmány) (Emelt szint)	259
49.	Alkalmazások	263



VII.	SKALÁRIS SZORZAT (Emelt szint)	270
50.	Két vektor skaláris szorzata	271
51.	Skaláris szorzattal megoldható feladatok a koordináta-rendszerben	276
52.	Egyenesek a koordinátasíkon	279

VIII.	KOMBINATORIKA, GRÁFOK	284
53.	Ismétlés	285
54.	Binomiális együtthatók	291
	Binomiális tétel, pascal-háromszög (Olvasmány)	299
	A kombinatorika leggyakoribb összeszámlálási modelljei (Olvasmány)	305
55.	Modellalkotás gráfokkal	308
56.	A gráfmodell alkalmazása	315
57.	A gráfok jellemzői	324
58.	Kombinatorikai és gráfelméleti alkalmazások	331
IX.	VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS, STATISZTIKA	338
59.	Bevezetés	339
60.	Független események	340
61.	Binomiális eloszlás	345
62.	Statisztikai mintavétel (Visszatevéssel vagy visszatevés nélkül)	348
63.	Játékok elemzése	353
64.	Miért fontos a várható nyereség ismerete?	356
65.	Statisztikai jellemzők (Középértékek)	359
66.	Statisztikai jellemzők (A középértékek jósága)	361
67.	Mennyi mindent tud a doboz (box plot) diagram?	368
	A kvartilisek kiszámítása különböző számítógépes programok alkalmazásával (Olvasmány)	375
	FOGALOMTÁR	377



FONTOSABB JELÖLÉSEK

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae vagy $\overline{Ae}$

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2) \sphericalangle$

A B csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A , másik szárán a C pont található: $ABC \sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C \sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\Delta$

Az $ABC\Delta$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög félkerülete:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

A derékszög jele: $\perp$

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC_{\Delta} \cong A'B'C'_{\Delta}$

Hasonlóság: $\sim$; $ABC_{\Delta} \sim A'B'C'_{\Delta}$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Az A pontba mutató helyvektor: $\underline{a}$ vagy $\overrightarrow{A}$

A v vektor: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$ vagy $\vec{v}$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \dots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$

$\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza:

$\mathbf{Z}^+, \mathbf{Z}^- \quad \{1; 2; 3; \dots\}, \{-1; -2; -3; \dots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}, -2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}, \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Nem részhalmaza a halmaznak: $\not\subseteq$; $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^+$

Halmazok uniója, metszete: $\cup, \cap$; $A \cup B, A \cap B$

Halmazok különbsége: $\setminus$; $A \setminus B$

Üres halmaz: $\emptyset, \{\}$

Az A halmaz komplementere: $\overline{A}$

Az A halmaz elemszáma: $|A|$; $|\{0; 1; 2\}| = 3$

Végtelen: ∞ ; $|\mathbf{N}| = \infty$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3,1| = 3,1$

Az f függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

D_f, R_f

Az f függvény hozzárendelési szabálya:

$f: x \mapsto f(x)$; $f: x \mapsto 2x + 3$

$f(x) = y$; $f(x) = 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen:

$f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

Az f függvény inverze: f^{-1}

n faktoriális: $n!$; $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Az X sokaság átlaga: $\overline{X}$

Az összegzés jele: $\sum$; $\sum_{i=1}^8 x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_8$

Permutációk: P_n ; $P_n = n!$, $P_4 = 4! = 24$

Ismétléses permutációk: $P_n^{k,l,m}$, $(k + l + m \leq n)$;

$$P_n^{k,l,m} = \frac{n!}{k! \cdot l! \cdot m!}; P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

Variációk: V_n^k ; $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$;

$$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Ismétléses variációk: $V_n^{k,i}$; $V_n^{k,i} = n^k$, $V_5^{3,i} = 5^3 = 125$

Kombinációk: C_n^k vagy $\binom{n}{k}$;

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}; C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Binomiális együttható: $\binom{n}{k}$; $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Állítások tagadása (negációja): $\neg$

Állítások diszjunkciója, konjunkciója: $\vee, \wedge$

Állítások implikációja, ekvivalenciája: $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ vagy $\rightarrow, \leftrightarrow$

Univerzális kvantor (minden ...) $\forall$

Egzisztenciális kvantor (létezik ...) $\exists$

A TANKÖNYV HASZNÁLATÁRÓL

A tankönyv elsősorban a középszintű érettségi vizsga tananyagát tartalmazza, de megtalálható benne néhány olyan kiegészítés is, amely az emelt szintű érettségi vizsga követelményrendszeréhez tartozik.

A tankönyv nem tartalmaz minden ismeretet az emelt szintű érettségi vizsgára való felkészüléshez.

A tankönyvben a matematikai szemlélet fejlesztése a definíciókhoz és a fogalmakhoz kapcsolódó *tananyag*elemek kidolgozásával történik. A matematika megértéséhez, sikeres tanulásához feltétlenül hozzátartozik a *bizonyítási készség* kialakítása és fejlesztése. Minden lecke végén összegyűjtöttük a fontosabb új **fogalmakat**. Kiegészítő anyagként ajánljuk az olvasmányok és matematikatörténeti ismertetések, érdekességek elolvasását.

A tankönyvben **Emelt szint**-tel (és apró betűvel), jól elkülönítve jelöltük azokat a kiegészítéseket, amelyek csak **az emelt szintű érettségi vizsgán** kérhetők számon.

A tankönyvben a definíciók és a tételek fejléccel ellátott keretbe kerültek. Abban az esetben, amikor nincs fejléc, fontos gondolatokat emeltünk ki.

A könyvben szereplő *Olvasmányok* általában érdekességeket, az érettségi vizsga anyagán túlmutató kiegészítő anyagrészeket tartalmaznak.

Számos kidolgozott példa található a tankönyv minden leckéjében, amelyek fokozatosan vezetnek be a tanulókat az elsajátítandó tananyagba. A tananyag gyakorlását, elmélyítését, az otthoni tanulást és az érettségi vizsgára való felkészülést a leckék végén kitűzött feladatok segítik. Ezeket a nehézségi szintjük szerint is csoportosítottuk:

K1 = közép szint, könnyebb;

K2 = közép szint, nehezebb;

E1 = emelt szint, könnyebb;

E2 = emelt szint, nehezebb feladat;

= kiegészítő anyag.

Az érdeklődők vagy gyakorolni vágyók számára a leckék végén még **további feladatokat** is ajánlunk, amelyeket az Oktatási Hivatal *MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény* családjából jelöltünk ki.

A felkészüléshez ajánlott példatárak:

Geröcs László – Orosz Gyula – Paróczay József – Szászné Dr. Simon Judit:

16125/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.

16126/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

Czapáry Endre – Czapáry Endréné – Csete Lajos – Hegyi Györgyné – Iványiné Harró Ágota –

Morvai Éva – Reiman István:

16127/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.,
Geometriai feladatok gyűjteménye

I. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

A középkor végének Európájában egyre fontosabbá vált a hajózás, a csillagászat, a kereskedelem és az ipar fejlesztése. Ezt a felgyorsult fejlődést elsősorban műszaki és matematikai vívmányoknak köszönhetjük. A pénzforgalomban érdekelt szakemberek számára a kamatos kamat gyors kiszámítása érdekében táblázatokat készítettek. A megfeleltetést a görög logosz, arány és arithmosz, szám összevonásából latinosan logaritmusnak nevezték el.

1. VEGYES ALGEBRAFELADATOK (Ismétlés)

A 9. és 10. osztályban elsajátított algebrai módszerek és eszközök már sokféle feladat megoldását teszik lehetővé. Ismétlésképpen a hatványozás, a gyökvonás és a nevezetes azonosságok témaköréből válogattunk össze néhány feladatot. Ezek megoldásához néha valamilyen ötlet kell – és a megoldás leírása elegánsan, néhány sorban megadható.

Az alábbi feladatsorban az $A, B, \dots, F$ számértékeket kell meghatározni. Próbáljuk ügyes számolással, a számológép használata nélkül megoldani a feladatot!

1. példa

Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$A = 312\,421^2 + 212\,421^2 - 624\,842 \cdot 212\,421;$$

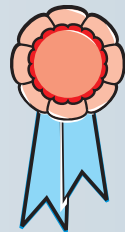
$$C = 444\,444\,445^2 + 111\,111\,111 - 444\,444\,444^2;$$

$$E = \frac{12\,343\,212\,345}{12\,343\,212\,346^2 - 12\,343\,212\,345 \cdot 12\,343\,212\,347};$$

$$B = 777\,777\,778^2 - 222\,222\,223^2;$$

$$D = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{100}\right);$$

$$F = \sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}.$$



Segítség:

A: Az $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$ azonosságot alkalmazhatjuk.

B: Segít az $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ azonosság.

C: Az $x^2 + y - z^2$ kifejezés tagjait érdemes $x^2 - z^2 + y$ sorrendbe csoportosítani.

D: Alakítsuk át a tényezőket közösítő törté!

E: Legyen például $x = 12\,343\,212\,346$, ekkor a tört $\frac{x-1}{x^2 - (x-1)(x+1)}$ alakú.

F: Észrevehetjük, hogy a két négyzetgyök alatt teljes négyzetek szerepelnek.

Eredmények:

$$A = (312\,421 - 212\,421)^2 = 100\,000^2 = 10^{10}.$$

$$B = (777\,777\,778 + 222\,222\,223)(777\,777\,778 - 222\,222\,223) = 1\,000\,000\,001 \cdot 555\,555\,555 = (1\,000\,000\,000 + 1) \cdot 555\,555\,555 = 555\,555\,555\,000\,000\,000 + 555\,555\,555 = 555\,555\,555\,555\,555\,555$$

(18 darab 5-ös).

$$C = (444\,444\,445 + 444\,444\,444)(444\,444\,445 - 444\,444\,444) + 111\,111\,111 = 888\,888\,889 + 111\,111\,111 = 1\,000\,000\,000 = 10^9.$$

$$D = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{100}{99} \cdot \frac{101}{100} = \frac{101}{2}. \text{ (A } 3, 4, \dots, 100 \text{ tényezőkkel egyszerűsíthetünk.)}$$

$$E = x^2 - (x-1)(x+1) = x^2 - (x^2 - 1) = 1, \text{ így a tört } E = \frac{x-1}{1} = \frac{12\,343\,212\,345}{1} \text{ alakú.}$$

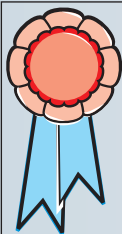
$$F: 10 - 4\sqrt{6} = (\sqrt{6} - 2)^2 \text{ és } 10 + 4\sqrt{6} = (\sqrt{6} + 2)^2, \text{ így}$$

$$F = \sqrt{(\sqrt{6} - 2)^2} - \sqrt{(\sqrt{6} + 2)^2} = |\sqrt{6} - 2| - |\sqrt{6} + 2| = \sqrt{6} - 2 - (\sqrt{6} + 2) = -4.$$

Másképpen is eljárhatunk:

$$F^2 = 10 - 4\sqrt{6} + 10 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{(10 - 4\sqrt{6})(10 + 4\sqrt{6})} = 20 - 2\sqrt{100 - 16 \cdot 6} = 16, \text{ s mivel } F < 0, \text{ ebből } F = -4 \text{ következik.}$$

A következő két példa egy-egy matematikai alkalmazás. Most is először önállóan próbáljuk megoldani a feladatokat!



2. példa

Megfigyelhetjük, hogy

$$11 - 2 = 3 \cdot 3;$$

$$1111 - 22 = 33 \cdot 33;$$

$$111\ 111 - 222 = 333 \cdot 333.$$

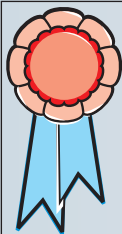
Vajon folytatódik ez a szabályosság?

Megoldás

Azt kell igazolnunk, hogy $\underbrace{11\dots1}_{2k \text{ darab}} - \underbrace{22\dots2}_{k \text{ darab}} = \underbrace{33\dots3}_{k \text{ darab}} \cdot \underbrace{33\dots3}_{k \text{ darab}}$ minden pozitív egész k számra teljesül. Helyettesítsük a k darab 1-esből álló $\underbrace{11\dots1}_{k \text{ darab}}$ számot a -val! Ekkor az $\underbrace{11\dots1}_{2k \text{ darab}}$ szám $a \cdot 10^k + a$, és az igazolandó

állítás $a \cdot 10^k + a - 2a = 3a \cdot 3a$ alakú. Átrendezés és a -val való egyszerűsítés után $10^k - 1 = 9a$ egyenlet adódik, és ez minden fenti a -ra igaz: $10^k - 1$ éppen k darab 9-esből áll.

Az észrevett szabályosság tehát folytatódik.

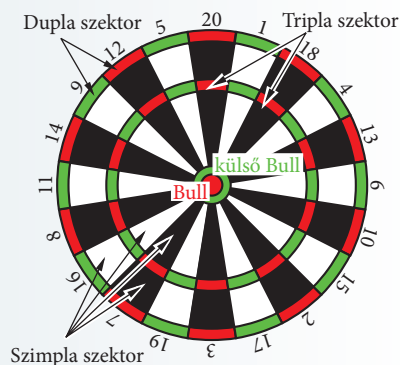


3. példa

A darts nevű ügyességi játékban a céltábla egyes mezőire dobónyíllal célzunk. A megfelelő 1, 2, ..., 20 mezőket eltalálva ennyi pontot ér egy-egy dobás. A külső vékony körgyűrűt eltalálva a dobásérték duplázódik, a beljebb lévő körgyűrű eltalálása pedig háromszorozza az értéket. Még két speciális mező van: a céltábla piros közepe (Bull) 50 pontot, a körülötte levő zöld külső Bull pedig 25 pontot ér.

Három dobásból legfeljebb 180 pont érhető el, ha három tripla 20-ast dob a játékos ($T20 + T20 + T20 = 180$).

Feladat: mutassuk meg, hogy a 173 pont nem érhető el három dobásból!



Megoldás

Ha az egyik dobás 50-es Bull (vagy kisebb értékű), akkor a maradék 123 pont túl sok, két dobásból nem érhető el. Minden dobásnak tehát 50-nél nagyobboknak, azaz triplának kell lennie.

De a tripla találatok, valamint összegük is mind oszthatók 3-mal, míg a 173-ra ez nem igaz. Ezért a 173 pont valóban nem állítható elő.

FELADATOK

1. K2

Mennyi az alábbi kifejezések kiszámított értékében a számjegyek összege?

a) $(10^{10})^5 - 7$; b) $10^{(10^5)} - 7$; c) $9 + 99 + 999 + \dots + \frac{99\dots9}{2011 \text{ darab}}.$

2. E1

Mennyi az $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$ kifejezés pontos értéke?

(Segítség: gyöktelenítsük a törtetekt!)

2. EGÉSZKITEVŐJŰ HATVÁNYOK, AZONOSSÁGOK

Előző évi tanulmányainkban értelmeztük a valós számok egészkitevőjű hatványát. Természetes a kérdés: bővíthető-e a hatványozás fogalma tetszőleges racionális, esetleg irracionális kitevőkre is? Ezt a kérdést fogjuk megvizsgálni, előtte ismétljük át a hatványozás azonosságait.

1. Azonos alapú hatványok szorzata:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$$

1. példa

$$5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^{-6} = 5^{3+5-6} = 5^2;$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{7}\right)^{3-4} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{5};$$

$$p^3 \cdot p^a \cdot p^{-b} = p^{3+a-b}.$$

2. Szorzat hatványozása:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbf{Z}.$$

2. példa

$$(2 \cdot 7)^3 = 2^3 \cdot 7^3;$$

$$(k \cdot l \cdot n)^b = k^b \cdot l^b \cdot n^b.$$

3. Azonos alapú hatványok hányadosa:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$$

3. példa

$$\frac{3^2}{3^{-1}} = 3^{2-(-1)} = 3^3;$$

$$\frac{a^5 \cdot a^2}{a^4} = a^{5+2-4} = a^3.$$

4. Tört (hányados) hatványozása:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbf{Z}.$$

4. példa

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}; \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{3^{-2}} = \frac{9}{16}.$$

5. Hatvány hatványozása:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$$

5. példa

$$(7^2)^{-3} = 7^{-6} = \frac{1}{7^6};$$

$$\left(\frac{k^{-2}}{l^5}\right)^{-3} = \frac{k^6}{l^{-15}}, \quad k, l \in \mathbf{R}, k \neq 0, l \neq 0.$$

Nézzünk néhány példát az azonosságok összetett használatára, ezek segítségével kifejezések egyszerűbb alakját keressük.

6. példa

Határozzuk meg az $\frac{1}{5}a^{-2}b^4a^3b^{-3}$ kifejezés értékét, ha $a = -\frac{1}{8}$, $b = 8$!

Megoldás

$$\frac{1}{5}a^{-2}b^4a^3b^{-3} = \frac{1}{5}ab = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 8 = -\frac{1}{5}.$$

7. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

$$a) \frac{m^3 \cdot n^{-2}}{m \cdot n^{-1}} \cdot \left(\frac{n^5}{m^{-3}}\right)^4 : (m^7 \cdot n^{-2})^{-4}, \quad m, n \in \mathbf{R}, mn \neq 0;$$

$$b) pq(p^{-1} + q^{-1})(q^2 - p^2)^{-1}, \quad p, q \in \mathbf{R}, pq \neq 0, q \neq p.$$

Megoldás

$$a) \frac{m^3 \cdot n^{-2}}{m \cdot n^{-1}} \cdot \left(\frac{n^5}{m^{-3}}\right)^4 : (m^7 \cdot n^{-2})^{-4} = m^2 \cdot n^{-1} \cdot n^{20} \cdot m^{12} \cdot m^{28} \cdot n^{-8} = m^{42} \cdot n^{11};$$

$$b) pq(p^{-1} + q^{-1})(q^2 - p^2)^{-1} = pq\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q^2 - p^2}\right) = \\ = pq \cdot \frac{p+q}{p \cdot q} \cdot \frac{1}{(p-q)(p+q)} = (q+p)\left(\frac{1}{(q+p)(q-p)}\right) = \frac{1}{q-p}.$$

FELADATOK

1. K1 Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2^8, & -2^8, \quad (-2)^8; \\ \text{b) } (3^5 \cdot 3^6) : 3^9; & \text{d) } \frac{(7^4)^3 \cdot 49^5}{(7^3)^7 \cdot 7}; \\ \text{c) } \frac{5^8 \cdot 5^{22}}{25 \cdot (5^2)^{15}}; & \text{e) } \frac{2^5 + 2^6 + 2^7}{14 \cdot 2^6}; \\ & \text{f) } \frac{4^4}{2^7 + 2^8}. \end{array}$$

2. K1 Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi egyenlőségek! Ahol az egyenlőség nem igaz, javítsuk ki úgy, hogy igaz legyen!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5 \cdot 5^{41} = 25^{41}; & \text{d) } 8^{40} = 4^{80}; \\ \text{b) } 9 \cdot 3^{24} = 3^{26}; & \text{e) } 2^{40} \cdot 4^{40} = 8^{80}; \\ \text{c) } (9 \cdot 3)^{24} = 27^{26}; & \text{f) } 2^{40} \cdot 4^{40} = 8^{40}. \end{array}$$

3. K1 Írjuk fel egyetlen hatványként az alábbi műveletek eredményét!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{12^{40} \cdot 9^2 \cdot 8^3}{3^2 \cdot (6^7)^6}; & \text{b) } \frac{25^2 \cdot 3^{18} \cdot 8^{10}}{15^4 \cdot 12^{15}}. \end{array}$$

4. K1 Írjuk fel negatív kitevő nélkül az alábbi hatványokat!

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } 2^{-3}; & \text{b) } 3^{-5}; & \text{c) } \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}; & \text{d) } \frac{1}{2^{-1}}; & \text{e) } \frac{5^{-2}}{4}. \end{array}$$

5. K1 Írjuk fel egyetlen hatványként az alábbi kifejezéseket, ha $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x^5 \cdot x^6) \cdot (x^9)^3; & \text{d) } \frac{x^3 \cdot x^{-5} \cdot (x^{-2})^4}{x^{10}}; \\ \text{b) } \frac{x^8 \cdot x^{22}}{x^2 \cdot (x^2)^{15}}; & \text{e) } \frac{(y^{-5})^4 \cdot (y^{11})^4}{(y^{-6})^7 \cdot y^9}. \\ \text{c) } \frac{(y^4)^3 \cdot (y^5)^4}{(y^3)^7 \cdot y}; & \end{array}$$

6. K2 Írjuk egyszerűbb alakba az alábbi kifejezéseket, ha $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b \neq 0$!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{a^3 \cdot b^{-2}}{b \cdot a^{-1}} \cdot \left(\frac{a^5}{b^{-3}}\right)^3 : (a^8 \cdot b^{-3})^{-4}, & \\ \text{b) } \frac{a^6 + a^7 + a^8}{a^7} \cdot \frac{a^{10}}{a^2 + a + 1}. & \end{array}$$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény
I. 816–825, 827–828, 834–840.

Franciaországban 1795-ben elfogadott prefixumok:

A prefixum		A prefixum jele	A prefixum	
neve	értéke		eredete	jelentése
kilo	10^3	k	görög	ezer
hekto	10^2	h	görög	száz
deka	10^1	da	görög	tíz
deci	10^{-1}	d	latin	tized
centi	10^{-2}	c	latin	század
milli	10^{-3}	m	latin	ezred

3. SZÁMOK n -EDIK GYÖKE

Az előző évben megismerkedtünk a négyzetgyök definíciójával, azonosságával és néhány alkalmazásával. Ebben az évben olyan problémákra is rátérünk, amelyek megoldásához érdemes a számok harmadik, negyedik, vagy tetszőleges n -edik gyökét is bevezetni.

Előtte nézzük át újra a négyzetgyökről tanultakat.

Definíció

Egy nemnegatív szám négyzetgyökén azt a nemnegatív számot értjük, aminek a négyzete maga a szám ($(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$).

I. Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával.

Ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

II. Tört (hányados) négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.

Ha $a \geq 0$ és $b > 0$, akkor $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

III. Egy nemnegatív szám négyzetgyökének egész kitevős hatványa egyenlő a szám ugyanazon kitevős hatványának négyzetgyökével.

Ha $a \geq 0$ és $n \in \mathbf{Z}$, akkor $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$.

A gyakorlati életben is – kamatszámítások, területszámítások, térfogatszámítások stb. – gyakran kell meghatároznunk olyan számot, melynek második, harmadik, n -edik hatványát ismerjük.

1. példa

Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amelynek területe

a) 81 cm^2 ;

b) $\frac{16}{9} \text{ cm}^2$;

c) 50 cm^2 ?

Megoldás

Ha a keresett négyzet oldala $a \text{ cm}$ ($a > 0$), akkor területe $a^2 \text{ cm}^2$.

Tehát keressünk olyan pozitív számot, amelyet önmagával szorozva a terület mérőszámát kapjuk!

a) $a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$, mert $9 \cdot 9 = 81$. A négyzet oldala 9 cm .

b) $a^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$, mert $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$. A négyzet oldala $\frac{4}{3} \text{ cm}$.

c) Ha $a^2 = 50$, akkor, mivel a nem racionális, ezért értékét nem tudjuk pontosan meghatározni. Azt megállapíthatjuk, hogy a négyzet oldalára teljesül: $7 \text{ cm} < a < 8 \text{ cm}$.

2. példa

Mekkora annak a kockának az éle, melynek térfogata

a) 125 cm^3 ;

b) 100 cm^3 ?

Megoldás

Ha a kocka éle b cm hosszú, akkor térfogata b^3 cm³. Keressünk olyan b pozitív számot, melynek harmadik hatványa:

a) $b^3 = 125$. Ekkor $b = 5$, mert $5^3 = 125$. A kocka éle 5 cm.

b) $b^3 = 100$. Nincs olyan racionális szám, melyre az állítás teljesül, ezért nem tudjuk b értékét pontosan meghatározni. Annyi megállapítható, hogy $4 < b < 5$, mert $4^3 = 64 < 100 < 5^3 = 125$.

3. példa

Körülbelül mekkora éves kamatra kellene lekötünk 1 000 000 Ft-ot, hogy 20 év múlva 9 500 000 Ft-ot kapjunk?

Megoldás

Jelöljük az éves kamatot $p\%$ -kal. Ekkor a feltételek szerint

$$1\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 9\,500\,000,$$

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 9,5.$$

Olyan számot kell keresnünk, melynek 20. hatványa 9,5. Számológéppel közelítően megadható a keresett szám:

$1,11^{20} \approx 8,06$, $1,12^{20} \approx 9,65$. Körülbelül 11,9%-os kamatra kell lekötünk pénzünket, ám a pontos értéket nem tudjuk így megállapítani.

Az előző példákban nem minden esetben jutottunk megoldáshoz, mert nem definiáltunk megfelelő műveletet az eredmény meghatározásához.

Célszerű a következőt bevezetni:

Definíció

Egy tetszőleges a nemnegatív valós szám n -edik gyökén azt a nemnegatív valós számot értjük, melynek n -edik hatványa az a számmal egyezik meg, ahol $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

A definíció szerint: $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Az $\sqrt[n]{a}$ kifejezésben szereplő n számot gyökkitevőnek nevezzük.

Ennek alapján megválaszolhatók eddigi problémáink:

Ha $a^2 = 50$, akkor $a = \sqrt{50}$.

Ha $b^3 = 100$, akkor $b = \sqrt[3]{100}$.

Ha $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 9,5$, akkor $1 + \frac{p}{100} = \sqrt[20]{9,5}$, azaz $p = 100 \cdot (\sqrt[20]{9,5} - 1)$.

Megjegyzés

A kapott értékeket pontos megoldásnak tekintjük a definíció szerint. Sok esetben nehéz „érezkelni” a nagyságukat. Ehhez közelítő számításokat, illetve számológéppel történő számításokat végezhetünk.

I. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Felmerül a kérdés, létezik-e olyan negatív szám, melynek értelmezhetjük az n -edik gyökét, hiszen az eddigi definíció csak nemnegatív számok n -edik gyökére alkalmazható.

4. példa

Keressünk olyan számokat, amelyek hetedik hatványa -1 , harmadik hatványa -8 . stb. Ha léteznek ilyen számok, ezeket is nevezhetjük a számok hetedik, harmadik, ...stb. gyökének.

$$\sqrt[7]{-1}; \quad \sqrt[3]{-8}; \quad \sqrt[5]{-243}; \quad \sqrt[4]{-625}.$$

Megoldás

Tudjuk, hogy ha páratlan darab negatív számot szorzunk össze, akkor a szorzat is negatív szám lesz. Ezt felhasználva:

$$\sqrt[7]{-1} = -1, \text{ mert } (-1)^7 = -1;$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ mert } (-2)^3 = -8;$$

$$\sqrt[5]{-243} = -3, \text{ mert } (-3)^5 = -243,$$

$$\sqrt[4]{-625} \text{ nem értelmezhető, mivel páros darab azonos előjelű szám szorzata nem lehet negatív.}$$

Az általános definíciót megfogalmazhatjuk a gyökkitevő paritásától függően a következő módon:

Definíció

Az $\sqrt[n]{a}$ definíciója:

1. eset

Ha n pozitív páros szám, azaz $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^+$, akkor az a nemnegatív szám $2k$ -adik gyökén azt a nemnegatív számot értjük, melynek $2k$ -adik hatványa a .

$$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a, \text{ ahol } a \geq 0, \text{ és } k \in \mathbf{N}^+.$$

5. példa

$$\sqrt[2]{64} = 8, \text{ mert a gyökkitevő páros, és teljesül, hogy } 64 \geq 0, 8 \geq 0, \text{ és } 8^2 = 64.$$

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ mert a gyökkitevő páros, és teljesül, hogy } 81 \geq 0, 3 \geq 0, \text{ és } 3^4 = 81.$$

Megjegyzés

A négyzetgyök esetén a 2-es gyökkitevőt szokás elhagyni, pl. $\sqrt[2]{64} = \sqrt{64}$.

2. eset

Ha $n \geq 3$ pozitív páratlan szám, azaz $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}^+$, akkor az a valós szám $(2k + 1)$ -edik gyökén azt a valós számot értjük, melynek $(2k + 1)$ -edik hatványa a .

$$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a, \text{ ahol } a \in \mathbf{R}, \text{ és } k \in \mathbf{N}^+.$$

6. példa

$$\sqrt[3]{-343} = -7, \text{ mert } (-7)^3 = -343.$$

$$\sqrt[3]{343} = 7, \text{ mert } 7^3 = 343.$$

$$\sqrt[5]{-100\,000} = -10, \text{ mert } (-10)^5 = -100\,000.$$

A (-9) hetedik gyöke: $\sqrt[7]{-9}$ (ez a jelölése a pontos értéknek), mely három tizedesjegy pontossáig számológéppel meghatározva: $\sqrt[7]{-9} \approx -1,369$.

7. példa

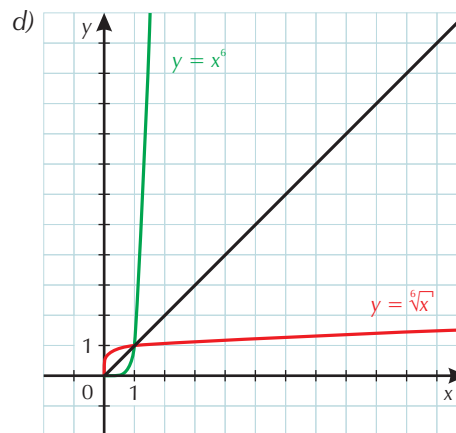
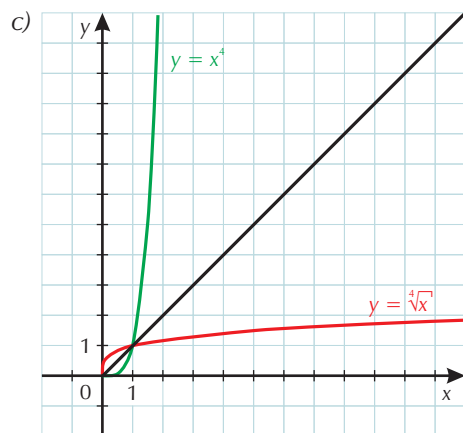
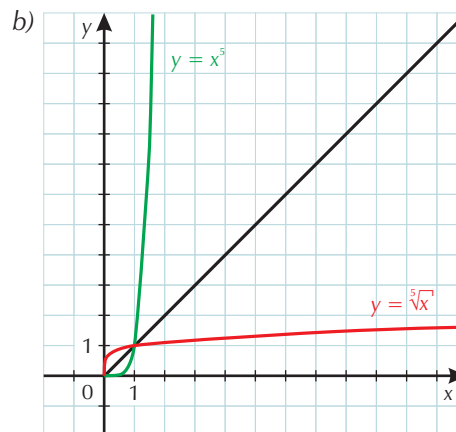
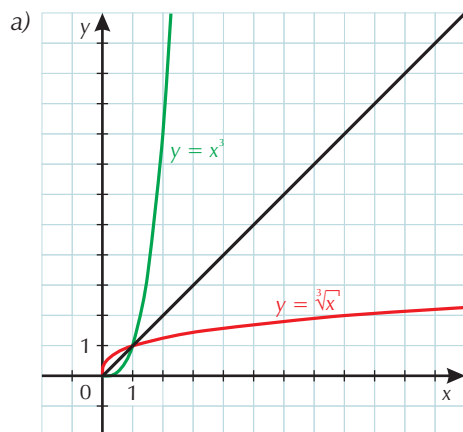
Figyeljük meg a következő függvények grafikonját, monotonitását, ha a függvények értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza!

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3$;

b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = x^5$;

c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = x^4$;

d) $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $g(x) = x^6$.



Megoldás

Megfigyelhetjük, hogy a kapott függvénpárok grafikonjai egymás tükörképei az $x \mapsto x$ függvény egyenesére nézve.

Minden esetben igaz az is, hogy a gyökös függvények szigorúan monoton növekvők.

Fogalmak

négyzetgyök: $\sqrt{x}$;

köbgyök: $\sqrt[3]{x}$;

$\sqrt[4]{x}$;

$\sqrt[n]{x}$;

$\sqrt[2k]{x}$;

$\sqrt[2k+1]{x}$.

FELADATOK

1. K1

Határozzuk meg a következő gyökök értékét!

$$\sqrt{121}; \quad \sqrt[3]{8}; \quad \sqrt[3]{-8}; \quad \sqrt[7]{(-3)^7}; \quad \sqrt[7]{5^7}.$$

2. K1

Határozzuk meg a következő gyökök értékét!

$$\sqrt{\frac{9}{4}}; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}}; \quad \sqrt[3]{-\frac{27}{125}}; \quad \sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}}; \quad \sqrt[99]{-1}.$$

3. K1

Keressük meg a művelet sorok eredményét!

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{16} - \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{16}; \\ \text{b) } & \sqrt[3]{\frac{125}{8}} - \sqrt[4]{\frac{81}{16}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{1}{4}}; \\ \text{c) } & \sqrt[3]{0,001} - \sqrt[4]{\frac{1}{10\,000}} + \sqrt{0,01}. \end{aligned}$$

4. E1

Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

$$\sqrt[7]{a}; \quad \sqrt[4]{b}; \quad \sqrt[3]{c-3}; \quad \sqrt{d-3}; \quad \sqrt[6]{2e-10}.$$

5. E1

Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát, majd határozzuk meg a következő gyökök értékét!

$$\sqrt[4]{x^4}; \quad \sqrt[3]{y^3}; \quad \sqrt{z^4}; \quad \sqrt[3]{w^6}.$$



4. AZ n -EDIK GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

Emelt szint

A négyzetgyöknél megismertük a négyzetgyökre vonatkozó azonosságokat. Ezeket felhasználtuk négyzetgyökös kifejezések átalakítása esetén. Vizsgáljuk meg, hogy az azonosságok érvényben maradnak-e n -edik gyök esetén is, illetve milyen új azonosságokat használhatunk fel a feladatmegoldásokban!

Azonosságok

I. Szorzat n -edik gyöke egyenlő a tényezők n -edik gyökének szorzatával.

Ha $a \geq 0$, $b \geq 0$ és $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

II. Tört (hányados) n -edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező n -edik gyökének hányadosával.

Ha $a \geq 0$, $b > 0$ és $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

III. Egy pozitív szám n -edik gyökének egész kitevőjű hatványa egyenlő a szám ugyanazon kitevőjű hatványának n -edik gyökével.

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ és $k \in \mathbf{Z}$, akkor $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

IV. Az n -edik gyök k -adik gyökét felírhatjuk úgy is, hogy a gyökjel alatti kifejezés (nk) -edik gyökét vesszük.

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ és $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

V. Hatvány alakú kifejezés gyökénél a hatványkitevő és a gyökkitevő egyszerűsíthető, bővíthető.

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, $m \in \mathbf{Z}$, akkor $\sqrt[n]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Az első három azonosság bizonyítása hasonlóan egyszerűen történhet, mint azt a négyzetgyök esetén láthattuk. Példaként figyeljük meg a IV. és V. azonosság igazolását!

1. példa

Igazoljuk, hogy egy pozitív valós szám n -edik gyökének k -adik gyökét felírhatjuk úgy is, hogy a gyökjel alatti kifejezésből (nk) -edik gyököt vonunk:

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ és $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, akkor $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Megoldás

Emeljük mindkét oldalt (nk) -edik hatványra:

$$(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = (\sqrt[nk]{a})^{nk}.$$

$$\text{Ekkor: } (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = \left[(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n \right]^k = (\sqrt[k]{a})^k = a \quad \text{és} \quad (\sqrt[nk]{a})^{nk} = a.$$

Az átalakítások során a hatványozás azonosságait, valamint az n -edik gyök definícióját használtuk fel. Mivel a nem negatív számok halmazán a pozitív egész kitevőjű hatványra emelés kölcsönösen egyértelmű és mindkét esetben ugyanahhoz az eredményhez jutottunk, ezért az állítás igaz.

2. példa

Bizonyítsuk be, hogy hatvány alakú kifejezés gyökénél a hatványkitevő és a gyökkitevő egyszerűsíthető, bővíthető, azaz:

ha $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, $m \in \mathbf{Z}$, akkor $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$!

Megoldás

Emeljük mindkét oldalt (nk) -adik hatványra:

$$(\sqrt[nk]{a^{mk}})^{nk} = a^{mk}, \text{ a gyök definíciója miatt.}$$

$(\sqrt[n]{a^m})^{nk} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^k = (a^m)^k = a^{mk}$, az átalakításaink végig ekvivalensek voltak a hatványozás azonosságai miatt.

Mivel mindkét esetben ugyanahhoz az eredményhez jutottunk, ezért az állítás igaz.

3. példa

Számítsuk ki a kifejezések pontos értékét az azonosságok felhasználásával!

a) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$;

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{1}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}$;

b) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$, $\frac{\sqrt[7]{5^9}}{\sqrt[7]{25}}$;

e) $\sqrt[12]{5^{16}}$;

c) $(\sqrt[4]{7})^8$;

f) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$.

Megoldás

a) A gyökkitevők megegyeznek, alkalmazzuk az I. azonosságot:

$$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 \cdot 2} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ mert } 2^4 = 16.$$

$$\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{27 \cdot 9} = \sqrt[5]{243} = 3, \text{ mert } 3^5 = 243.$$

b) A gyökkitevők megegyeznek, alkalmazzuk a II. azonosságot:

$$\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2.$$

$$\frac{\sqrt[7]{5^9}}{\sqrt[7]{25}} = \sqrt[7]{\frac{5^9}{5^2}} = \sqrt[7]{5^7} = 5.$$

c) A III. azonosság alapján:

$$(\sqrt[4]{7})^8 = \sqrt[4]{7^8} = \sqrt[4]{(7^2)^4} = 7^2 = 49.$$

d) Alkalmazzuk a IV. azonosságot:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{1}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{1}} = \sqrt[12]{1} = 1.$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

e) Vegyük észre, hogy a hatványkitevő nagyobb, mint a gyökkitevő. És nem relatív prímek. Alkalmazzuk az V. azonosságot:

$$\sqrt[12]{5^{16}} = \sqrt[3 \cdot 4]{5^{4 \cdot 4}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 5 \cdot \sqrt[3]{5} \approx 8,55.$$

A közelítő értéket számológép segítségével határoztuk meg.



f) Először hozzunk azonos gyökkitevőre:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^4} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16};$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{(\sqrt[4]{3})^3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^3}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}.$$

Az átalakításokat felhasználva:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{16} \cdot \sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{432} \approx 1,658.$$

A közelítő értéket számológép segítségével határoztuk meg.

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki a kifejezések értékét!

a) $\sqrt[3]{64}$; b) $\sqrt[3]{-64}$; c) $\sqrt[4]{16}$; d) $\sqrt[4]{5^8}$; e) $\sqrt[5]{2^{15}}$.

2. E1 Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt[3]{a}$; b) $\sqrt[4]{b}$; c) $\sqrt[5]{3c-4}$; d) $\sqrt[6]{2d-8}$.

3. E1 Számítsuk ki a kifejezések értékét!

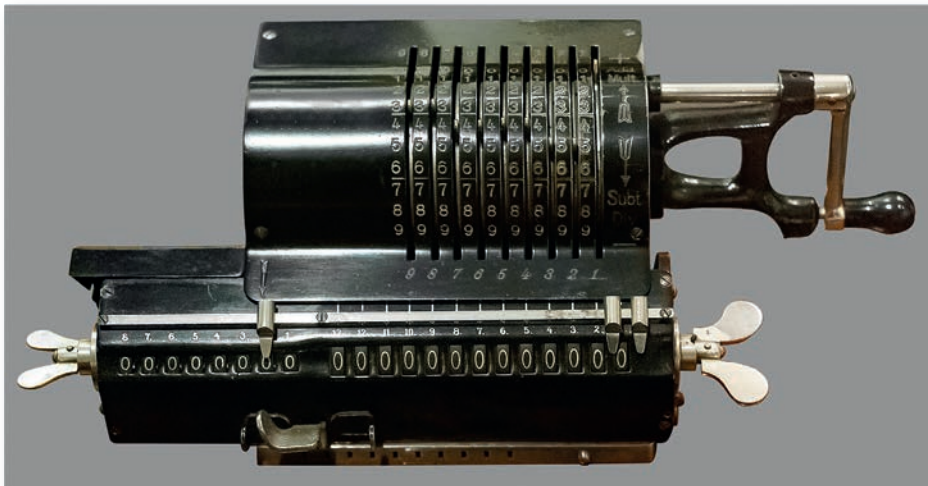
a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[3]{56} \cdot \sqrt[3]{63} \cdot \sqrt[3]{21}$; c) $\sqrt[3]{\frac{25}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$; d) $\sqrt[6]{81} : \sqrt[3]{3}$.

4. E1 Írjuk fel egyetlen gyökkel segítségével a kifejezéseket, majd számítsuk ki számológép nélkül az értékeket, ha lehet!

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^{24}}}$; c) $\sqrt[12]{\sqrt[5]{1}}$; e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}$.
b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{7^{120}}}$; d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$;

5. E1 Adjuk meg a kifejezés értelmezési tartományát és legegyszerűbb alakját!

a) $5^4 \sqrt{2a} \cdot 2^4 \sqrt{8a^3}$; c) $\sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{2c} \cdot \sqrt[4]{3c}$; e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{30}b^{60}}}$.
b) $\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[6]{b^5}$; d) $(\sqrt[12]{d^{11}} : \sqrt[4]{d^3})^2$;



Antik tekerős számológép

Emelt szint

5. AZ n -EDIK GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAINAK ALKALMAZÁSA

1. példa

Keressük meg a kifejezés egyszerűbb alakját!

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3 + 3ab(a + b)}.$$

Megoldás

Mivel a gyökkitevő páratlan szám, ezért a kifejezés minden valós a, b számon értelmezhető. A gyökjel alatt harmadik hatványok vannak, ezért gondolhatunk egy összeg harmadik hatványára:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3, \text{ tehát}$$

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3 + 3ab(a + b)} = \sqrt[3]{(a + b)^3} = a + b.$$

2. példa

Melyik szám nagyobb: $4\sqrt[3]{3}$ vagy $3\sqrt[3]{5}$?

Megoldás

Próbálkozzunk a négyzetgyöknél megismert trükkel: „bevitel a gyökjel alá”.

$$4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{192}; \quad 3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{135}.$$

Mivel az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény szigorúan monoton nő, ezért $4\sqrt[3]{3} > 3\sqrt[3]{5}$.

3. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra: $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$!

Megoldás

A gyökkitevők azonosak, de összeadni nem lehet a gyökös kifejezéseket.

Vizsgáljuk meg a gyökjel alatti számok prímfelbontását:

$$54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3;$$

$$16 = 2^4 = 2 \cdot 2^3;$$

$$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^3} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

Az átalakítások során a „kihozatal a gyökjel alól” műveletet használtuk.



Egy kis tudománytörténet

Marin Mersenne (1588–1648) francia matematikus és fizikus szerzetes korának nagy hatású ismeretterjesztője volt, szinte minden jelentős kortárs matematikussal levelezett. Nevét őrzik a $2^p - 1$ alakú prímek. (Ekkor p szükségképpen prímszám. Miért?)

Nem ismeretes, hogy vajon végtelen sok Mersenne-féle prímszám van-e; de a jelenlegi legnagyobb prímszám-rekordokat is ezen számok körében keresik.

Nézz utána az interneten, melyek a jelenleg ismert legnagyobb prímszámok! (Ezek egyúttal Mersenne-prímek is lesznek.)

4. példa

Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a kifejezést: $\sqrt{2 \cdot \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}}}$!

Megoldás

Alkalmazzuk többször a „bevitel a gyökjel alá” típusú átalakítást, illetve a hatványozás és a gyökvonás azonosságait:

$$\begin{aligned}\sqrt{2 \cdot \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}}} &= \sqrt[5]{2^5 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}} = \sqrt[10]{2^6 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}} = \sqrt[10]{\sqrt[3]{(2^6)^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}} = \\ &= \sqrt[30]{2^{19} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[30]{\sqrt{(2^{19})^2 \cdot 2}} = \sqrt[60]{2^{39}} = \sqrt[20]{2^{13}}.\end{aligned}$$

5. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra!

$$\text{a) } \sqrt[4]{\frac{x}{y}} : \sqrt[3]{\frac{y}{x}}; \quad \text{b) } \frac{n+m}{n-m} \sqrt[3]{\frac{(n^2-m^2)^4}{(n+m)^8}}.$$

Megoldás

a) A kifejezés akkor értelmezhető, ha $x \neq 0$, $y \neq 0$, valamint ha x és y azonos előjelű. Hozzunk közös gyökkitevőre, majd alkalmazzuk az ismert azonosságokat:

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y}} : \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = \sqrt[12]{\left(\frac{x}{y}\right)^3} \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{x}{y}\right)^4} = \sqrt[12]{\left(\frac{x}{y}\right)^7}.$$

b) A kifejezés akkor értelmezhető, ha $n \neq m$, illetve $n \neq -m$. Alkalmazzuk a gyökjel alá bevitel módszerét, majd egyszerűsítsünk a gyökjel alatt:

$$\frac{n+m}{n-m} \sqrt[3]{\frac{(n^2-m^2)^4}{(n+m)^8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{n+m}{n-m}\right)^3 \cdot \frac{(n-m)^4(n+m)^4}{(n+m)^8}} = \sqrt[3]{\frac{(n+m)^7(n-m)^4}{(n-m)^3(n+m)^8}} = \sqrt[3]{\frac{n-m}{n+m}}.$$

6. példa

Gyöktelenítsük a törtek nevezőjét!

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt[3]{9}}; \quad \text{b) } \frac{2x}{\sqrt[4]{x^3}}, \text{ ha } x > 0; \quad \text{c) } \frac{k-l}{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{l}}, \text{ ha } k \neq l.$$

Megoldás

Azt szeretnénk elérni, hogy a nevezőben gyökös kifejezések helyett racionális kifejezések álljanak. Az ilyen átalakítások már köbgyökös kifejezések esetén is bonyolultak, magasabb gyökkitevők esetében még bonyolultabbak, ezért fokozott figyelmet igényelnek.

a) Bővítsük a törtet $(\sqrt[3]{9})^2$ -nel, mert ekkor a nevezőben harmadik gyök harmadik hatványa szerepel, majd alkalmazzuk a gyökre és a hatványra vonatkozó azonosságokat:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{9})^2}{(\sqrt[3]{9})^2} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{9^2}}{(\sqrt[3]{9})^3} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{3^4}}{9} = \frac{3^2 \cdot \sqrt[3]{3}}{9} = \sqrt[3]{3}.$$

b) Bővítünk az előző példában látottak szerint $(\sqrt[4]{x^3})^3$ -al:

$$\frac{2x}{\sqrt[4]{x^3}} \cdot \frac{(\sqrt[4]{x^3})^3}{(\sqrt[4]{x^3})^3} = \frac{2x \cdot \sqrt[4]{x^9}}{x^3} = \frac{2x \cdot x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}{x^3} = 2\sqrt[4]{x}.$$

c) $\frac{k-l}{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{l}}$, ha $k \neq l$.

A nevező gyöktelenítéséhez használjuk a következő azonosságokat:

$$1. k-l = (\sqrt[3]{k})^3 - (\sqrt[3]{l})^3.$$

$$2. a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$\text{azaz: } (\sqrt[3]{k})^3 - (\sqrt[3]{l})^3 = (\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{l})((\sqrt[3]{k})^2 + \sqrt[3]{k}\sqrt[3]{l} + (\sqrt[3]{l})^2).$$

$$\frac{k-l}{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{l}} = \frac{(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{l})(\sqrt[3]{k}^2 + \sqrt[3]{kl} + \sqrt[3]{l}^2)}{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{l}} = \sqrt[3]{k^2} + \sqrt[3]{kl} + \sqrt[3]{l^2}.$$

FELADATOK

1. E1

Vigyük be a gyökjel előtti szorzótényezőt a gyökjel alá!

a) $2^4\sqrt{8}$; b) $3^5\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{5}$; d) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{27}{8}}$.

2. E1

Vigyük be a gyökjel előtti szorzótényezőt a gyökjel alá!

a) $ab^3\sqrt{a^2b}$; b) $\frac{c}{d}\sqrt[6]{\frac{d^3}{c^2}}$; c) $(e+f)^4\sqrt{\frac{1}{e+f}}$; d) $(m+n)^3\sqrt{\frac{mn}{(m+n)^5}}$.

3. E1

Vigyük a gyökjel elé a lehetséges szorzótényezőket!

a) $\sqrt[3]{81}$; b) $\sqrt[4]{64}$; c) $\sqrt[5]{64}$; d) $\sqrt[11]{2^{13} \cdot 7^{12}}$; e) $\sqrt[3]{4^2 \cdot \frac{1}{81}}$.

4. E2

Vigyük a gyökjel elé a lehetséges szorzótényezőket!

a) $\sqrt[5]{a^7 \cdot b^{10}}$; b) $\sqrt[3]{c^4 \cdot d^7 \cdot e^{11}}$; c) $\sqrt[k]{p^{k+1} \cdot q^{k+3}}$; d) $\sqrt[n+1]{x^{2n+3} \cdot y^{3n+5}}$.

5. E1

Végezzük el a műveleteket!

a) $(\sqrt{3} - \sqrt[3]{9} + \sqrt[4]{27}) \cdot \sqrt{3}$; c) $(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[4]{b^9}) \cdot (\sqrt{b^3} + \sqrt[6]{b})$;
b) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[4]{a^3})$; d) $\left(\frac{a}{b} \cdot \sqrt{k} - \frac{3a}{b}\sqrt[4]{k^3}\right) \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{k} - \sqrt[3]{k^2}\right).$

6. E1

Válasszuk ki az állítások közül az azonosságokat!

a) $\sqrt[n]{a^4} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a^2}$, $a \geq 0$; c) $\sqrt[5]{c^2} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{c^2} = \sqrt[30]{c^{17}}$;
b) $\sqrt[6]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[9]{b^{10}}$; d) $\sqrt[4]{d} + \sqrt[5]{d} = \sqrt[9]{d^2}$.

6. RACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNY, PERMANENCIAELV

Az előzőekben az egészkitevőjű hatványokat értelmeztük, a hatványozás és az n -edik gyök azonosságait ismételtük át. Nyilvánvalóan felmerül a kérdés, kiterjeszthető-e a hatványozás fogalma tetszőleges racionális kitevőkre. Ha ez lehetséges, akkor úgy járunk el, hogy az eddig megismert azonosságok érvényben maradjanak. Ezt az igényt nevezzük **permanenciaelvnek**. (Lényegében amikor a nulladik és a negatív egész kitevőre értelmeztük a hatványokat, akkor is ezt az elvet használtuk.)

Vegyük figyelembe a következő azonosságot:

$$(a^k)^l = a^{kl}, \text{ ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Tehát ha racionális kitevőre szeretnénk értelmezni a hatványozást, akkor legyen igaz:

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m, \text{ ahol } a > 0, n \geq 2, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ha mindkét oldalból n -edik gyököt vonunk:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vizsgáljuk meg, miért is tettünk újabb kikötéseket az alap és a kitevő estén. Három probléma merülhet fel.

1. probléma

Miért nem lehet a , a hatvány alapja 0, illetve negatív egész?

$(-3)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-3)^3}$ nem értelmezhető a valós számok halmazán, ezért a negatív alapot ki kell zárunk. 0^0 -t nem tudjuk értelmezni, ezért az alap nulla sem lehet.

2. probléma

Ha $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$, akkor $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k}{l}}$ teljesül-e?

Az igazoláshoz alakítsuk át a feltételt.

Ha $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$, akkor $m \cdot l = k \cdot n$.

Induljunk ki az igazolandó egyenlőség bal oldalából.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{ml}} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[l]{a^k} = a^{\frac{k}{l}}.$$

Az egyenlőségsorozat harmadik lépésénél használtuk ki a feltételt, és igazoltuk az állítást, azaz a törtkitevő más alakban történő felírásától nem függ a hatvány értéke.

(Negatív alap esetén ez sem teljesülne: $(-3)^{\frac{3}{4}} \neq (-3)^{\frac{6}{8}}$.)

3. probléma

A permanenciaelv vizsgálata:

Bizonyítható, hogy a hatványozás azonosságai is érvényben maradnak.

Példaként vizsgáljuk meg, hogy az $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}$ azonosság érvényes-e!

Egyrészt: $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}}$.

Másrészt: $a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}}$.

Az egyenlőségek jobb oldalai megegyeznek, tehát a bal oldalak is egyenlők.

Ezzel beláttuk, hogy a régebben ismert $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}$ azonosság érvényben maradt.

Hasonlóan igazolható a többi azonosság megmaradása is.

Definíció

Egy tetszőleges pozitív a szám $\frac{m}{n}$ -edik hatványa az a szám m -edik hatványából vont n -edik gyök, azaz

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ ahol } a > 0, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

1. példa

Számítsuk ki a következő hatványok pontos értékét!

$$a) 8^{\frac{1}{3}}; \quad b) \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}; \quad c) 0,01^{-2,5}; \quad d) 625^{\frac{4}{3}}.$$

Megoldás

$$a) 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2; \quad b) 0^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0^3} = 0;$$

$$c) \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{81}{16}\right)^5} = \sqrt[4]{\frac{3^{20}}{2^{20}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^5;$$

$$d) 0,01^{-2,5} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{5}{2}} = \sqrt{100^5} = 10^5 = 100\,000;$$

$$e) 625^{\frac{4}{3}} = (5^4)^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{5^{16}} = 5^5 \cdot \sqrt[3]{5}.$$

2. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket!

$$a) \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} \cdot \sqrt[3]{2^2}; \quad b) \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt[4]{a})^3}, \text{ ha } a > 0.$$

Megoldás

$$a) \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{-\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{4+2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}};$$

$$b) \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt[4]{a})^3} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}, \text{ ha } a > 0.$$

3. példa

Végezzük el az alábbi műveleteket, ha a hatványok alapja pozitív valós szám!

$$a) \left(a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}};$$

$$b) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2.$$

Megoldás

$$a) \left(a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{25}} b^{\frac{2}{15}} = a^{\frac{20}{105}} b^{\frac{14}{105}} = {}^{105}\sqrt{a^{20} b^{14}};$$

$$b) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = a^{\frac{2}{3}} + 2(ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}.$$

Fogalmak

permanenciaelv;
racionális kitevőjű
hatványozás.

FELADATOK

1. K1 Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!

$$a) 32^{\frac{1}{5}};$$

$$b) 8^{\frac{4}{3}};$$

$$c) \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{3}};$$

$$d) 0,00001^{-3,5};$$

$$e) 1331^{\frac{2}{3}};$$

$$f) 16^{0,75};$$

$$g) 32^{-0,4};$$

$$h) 27^{-\frac{10}{6}};$$

$$i) \left(\frac{1}{81}\right)^{-6,5};$$

$$j) 0,36^{-\frac{5}{2}}.$$

2. K1 Írjuk át az alábbi kifejezéseket gyökös alakba!

$$a) 5^{\frac{1}{3}};$$

$$b) 10^{\frac{3}{4}};$$

$$c) 7^{-\frac{5}{4}};$$

$$d) 6^{-2,5};$$

$$e) 13^{\frac{4}{3}}.$$

3. K2 Írjuk fel az alábbi kifejezéseket egyetlen szám hatványaként!

$$a) \sqrt[4]{8};$$

$$b) \sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^2};$$

$$c) \sqrt[3]{25 \cdot 5^{\frac{2}{3}}};$$

$$d) 8^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[5]{2^8} \cdot \sqrt[3]{16}.$$

4. K2 Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével az alábbi műveletek eredményét!

$$a) \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{-5} \cdot \sqrt[3]{3^2};$$

$$b) \frac{\sqrt[3]{5^2} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt[4]{5})^3};$$

$$c) \sqrt[5]{a} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-5} \cdot \sqrt[3]{a^4}, \text{ ha } a > 0 \text{ és } b > 0;$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[4]{b^2} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[6]{b})^5}, \text{ ha } b > 0.$$

5. K2 Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

$$a) \left(2^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}};$$

$$b) \frac{5^{3,2} \cdot 4^{\frac{21}{10}}}{10^{\frac{26}{5}}};$$

$$c) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2, \text{ ha } a > 0 \text{ és } b > 0.$$

6. E1 Írjuk a lehető legegyszerűbb alakba az alábbi kifejezéseket, ha a és b pozitív valós számok!

$$a) a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{(a+b)^{-1}};$$

$$b) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot \frac{ab}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 927–937.

7. AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

Az előző leckében értelmeztük a pozitív alapú, racionális kitevőjű hatványt. Magasabb matematikai módszerekkel bizonyítható, hogy az értelmezés kiterjeszthető irracionális kitevőkre is. Ez a kiterjesztés, a permanenciaelvnek megfelelően, megtartja az eddig megismert hatványozásazonosságokat, valamint teljesül a **következő tulajdonság**:

- ha $a > 1$ valós szám, p, r racionális számok, q irracionális szám és $p < q < r$, akkor $a^p < a^q < a^r$;
- ha $0 < a < 1$ valós szám, p, r racionális számok, q irracionális szám és $p < q < r$, akkor $a^p > a^q > a^r$. (1-nél nagyobb alap esetén, nagyobb kitevőhöz nagyobb hatványérték tartozik. Ha ez a tulajdonság teljesül, akkor egyértelműen megkapjuk az összes irracionális hatvány értékét. Ha az alap 0 és 1 közé esik, akkor a kitevő növelése esetén csökken a hatvány értéke. Ha az alap egy, akkor a hatvány értéke minden kitevő esetén 1 lesz.)

Az exponenciális kifejezések vizsgálatát, egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását segíti, ha megismerjük az exponenciális függvényeket és legfontosabb tulajdonságait.

Definíció

Azokat a függvényeket, amelyekben a változó csak a kitevőben szerepel, **exponenciális függvényeknek** nevezzük. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$, ahol $a > 0$ függvény az a alapú exponenciális függvény.

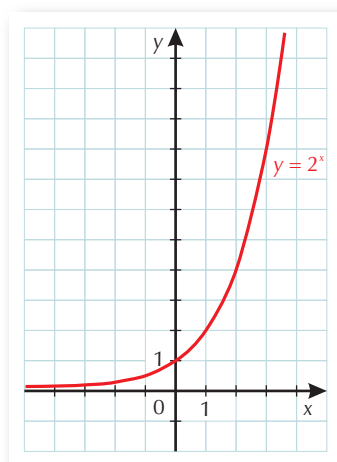
Vizsgáljuk meg az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$ függvényt, ahol $a > 0$!

Tekintsük először az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = 2^x$ függvényt.

Az $x \mapsto 2^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő.

A bevezetőben említettük, hogy bizonyítható, hogy ha az értelmezési tartományt kiterjesztjük a valós számok halmazára, akkor a függvény monotonitása nem változik, és a hatványazonosságok érvényben maradnak (permanencia elv).

A függvény grafikonja:



A függvény legfontosabb **tulajdonságai**:

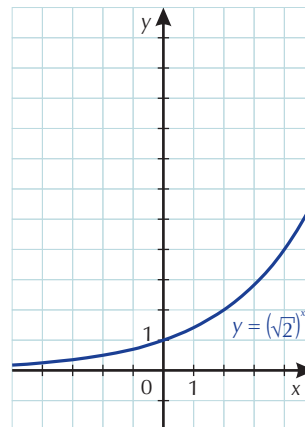
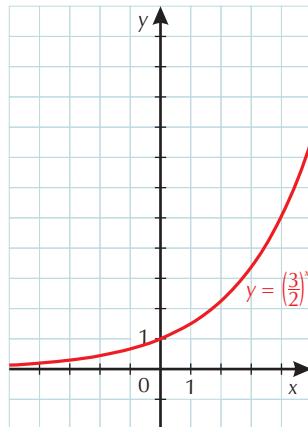
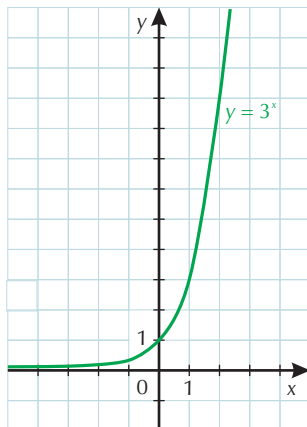
1. $D_f = \mathbf{R}$.
2. $R_f = \mathbf{R}^+$ (minden pozitív értéket felvesz pontosan egyszer).
3. Szigorúan monoton növekvő.
4. Zérushelye nincs.
5. Az ordinátatengelyt a grafikon a $(0; 1)$ pontban metszi.

Felmerül a kérdés: Milyen lényeges tulajdonságok változnak meg, ha az alapot módosítjuk?

1. eset

Legyen az alap: $a > 1$. Tekintsük a következő függvényeket:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = 3^x; \quad g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x; \quad h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, h(x) = (\sqrt{2})^x.$$



Megállapíthatjuk, hogy a 2^x -en függvény tulajdonságainak mindegyike érvényes ezekre a függvényekre is.

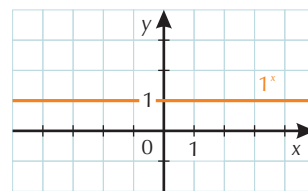
2. eset

Legyen az alap: $a = 1$;

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = 1^x.$$

Ebben az esetben a függvény konstans függvény, grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes.

(Megjegyzés: Sok esetben az $a = 1$ alapot nem engedik meg.)



3. eset

Legyen az alap $0 < a < 1$. Tekintsük a következő függvényeket:

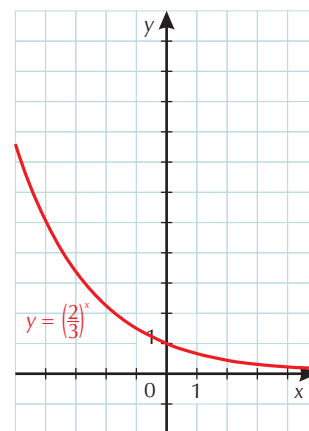
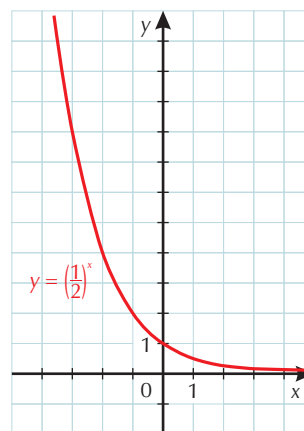
$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x;$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

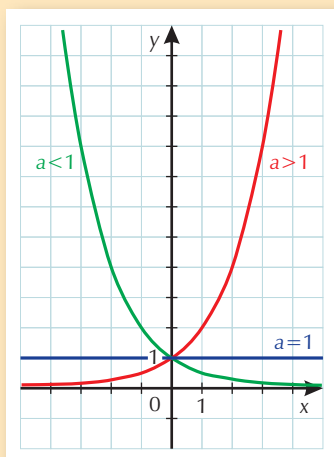
Látható, hogy lényeges változás csak a monotonitásban történt!

Tulajdonságok:

1. $D_f = \mathbf{R}$.
2. $R_f = \mathbf{R}^+$, azaz csak pozitív értékeket vesz fel.
3. Szigorúan monoton csökkenő.
4. Zérushelye nincs.
5. Az ordinátatengelyt a grafikon a $(0; 1)$ pontban metszi.



Összegezzük megfigyeléseinket!



Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$ függvényt, ahol $a > 0$, **exponenciális függvénynek** nevezzük. A függvény **legfontosabb tulajdonságai**:

Ha $a = 1$, akkor a függvény konstans függvény. (Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $a = 1$ esetben nem beszélhetünk exponenciális függvényről.)

Ha $0 < a < 1$, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Ha $a > 1$, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő.

Mindhárom függvény csak pozitív értékeket vesz fel, így zérushelye nincsen, valamint az ordinátatengelyt a $(0; 1)$ pontban metszi.

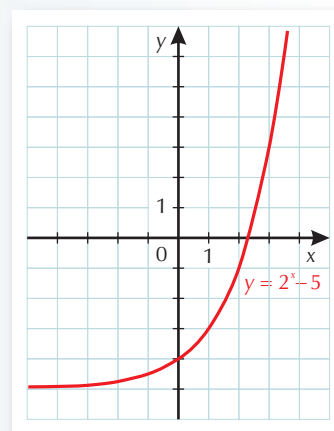
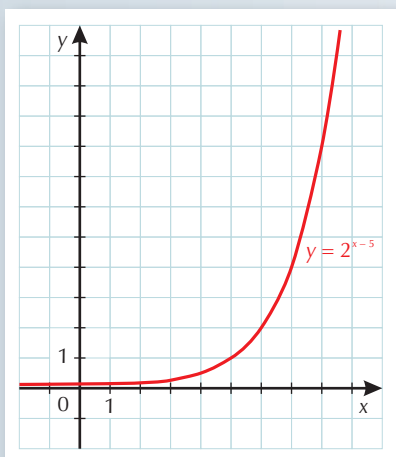
1. példa

Ábrázoljuk és jellemezzük a függvényeket!

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - 5$; b) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 2^{x-5}$; c) $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $h(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

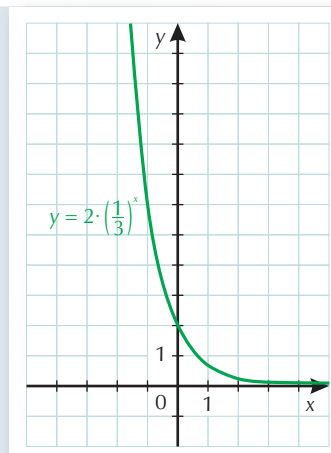
Megoldás

a) Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - 5$ szigorúan monoton növekvő, mert az alap 1-nél nagyobb. A függvény grafikonja eltolással kapható a $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $k(x) = 2^x$ függvény grafikonjából, az eltolás vektora: $\underline{v}(0; -5)$.



b) A $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = 2^{x-5}$ szigorúan monoton növekvő, mert az alap 1-nél nagyobb. A függvény grafikonja eltolással kapható a $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $k(x) = 2^x$ függvény grafikonjából, az eltolás vektora: $\underline{v}(5; 0)$.

c) A $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $h(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ szigorúan monoton csökkenő, mert az alap 1-nél kisebb. A függvény grafikonja a $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $k(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény grafikonjából y irányú 2-szeres nyújtással kapható.



2. példa

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletet!
 $2^x = -x + 6$

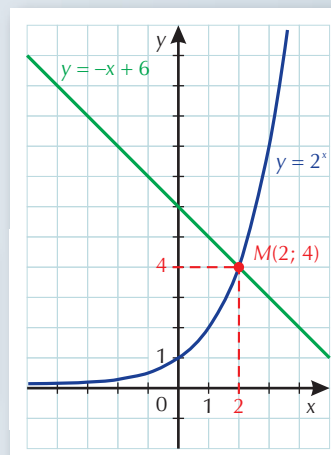
Megoldás

Ábrázoljuk grafikusan az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$ és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = -x + 6$ függvényeket!

Az $f(x) = 2^x$ egy szigorúan monoton növekvő függvény, míg a $g(x) = -x + 6$ egy szigorúan monoton csökkenő függvény. Ebből következik, hogy az egyenletnek csak egy megoldása lehet, ez pedig az $x = 2$, a metszéspont első koordinátája.

Az eredeti egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy a 2 valóban megoldása a feladatnak.

Fogalom
exponenciális
függvény.



FELADATOK

1. K1 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett az $f: x \mapsto 10^x$ függvényt!

2. K1 Válasszuk ki az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül azokat, amelyek szigorúan monoton csökkenőek!

a: $x \mapsto 5^x$; b: $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$; c: $x \mapsto \left(\frac{4}{5}\right)^x$; d: $x \mapsto \frac{2^x}{5}$; e: $x \mapsto 4^{-x}$; f: $x \mapsto 0,1^{-x}$.

3. K1 Ábrázoljuk a megadott függvények grafikonjait! Határozzuk meg, hogy hol veszi fel, és mennyi az f függvény minimuma és maximuma!

$f: [-1; 3] \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto 4^x$;

$g: [-2; 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto 3^{-x}$;

$h: [0; 5] \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{10^x}{10}$.

4. K1

Az eddig tanult függvénytranszformációk felhasználásával ábrázoljuk az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

$$f: x \mapsto 3^{x-2}; \quad g: x \mapsto 3^{x+4}; \quad h: x \mapsto 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x;$$

$$k: x \mapsto -3^x; \quad m: x \mapsto 2^{1-x}.$$

5.

Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

$$\text{K1 a) } x \mapsto 3^{-x}; \quad \text{K1 d) } x \mapsto -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}; \quad \text{K2 f) } x \mapsto 3^{-|x|};$$

$$\text{K1 b) } x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad \text{K2 e) } x \mapsto 3^{|x|}; \quad \text{K2 g) } x \mapsto 3^{-|x|}.$$

$$\text{K1 c) } x \mapsto -3^{-x};$$

6. K2

Keressük meg grafikus úton az egyenletek megoldásait!

$$\text{a) } 3^{x-1} = 5 - 2x; \quad \text{b) } 2|x| = 2^x.$$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 723–730.



Meteoreső a Föld légkörében (NASA)

8. EXPONENCIÁLIS EGYENLETEK

Korábban olyan gyakorlati problémákkal foglalkoztunk, amelyek megoldása során első, vagy másodfokú egyenleteket oldottunk meg. Ha azonban pénzünk banki kamatozásával kapcsolatos számításokat végzünk, akkor exponenciális egyenletet is meg kell oldanunk. Először az exponenciális egyenletekkel ismerkedünk meg, utána pedig ezek segítségével a természetben és a társadalomban lejátszódó folyamatokat tanulmányozunk. Lássunk egy példát!

Az osztódással szaporodó baktériumok száma – rövid alkalmazkodási periódus után, és mindaddig, amíg ezt a környezet lehetővé teszi – exponenciális növekedést mutat. Ha a baktériumok száma elér egy magas szintet, akkor bekövetkezik egy úgynevezett telítődési szakasz. A környezeti erőforrások végeessége miatt, ez mindenképpen bekövetkezik. Mi most a folyamatnak azt a szakaszát vizsgáljuk, amikor még az exponenciális növekedés a jellemző.

Egy 1 ml-es laboratóriumi mintában a kutatók egy adott időpontban körülbelül 100 millió baktériumot számoltak össze, két óra múlva pedig 200 milliót.

Írj fel egy olyan képletet, amely a mérés kezdetétől eltelt idő függvényében megadja a baktériumok számát!

- Hány baktérium lesz ebben a tenyészetben az első mérés után 3 órával?
- Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés előtt 3 órával?
- Mennyi idő alatt nő duplájára a baktériumok száma a mintában?

A megoldást lásd az „Exponenciális növekedés a természetben és a társadalomban” című leckében.

Ahhoz, hogy ilyen problémákat meg tudjunk oldani, behatóbban kell tanulmányoznunk az exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket, egyenletrendszereket.

1. példa

$$a) 3^x = 243; \quad b) 343^x = \frac{1}{7}; \quad c) \frac{4}{8^x} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad d) 5^{2x-3} = 1.$$

Ötlet: az „alapegyenletekben” szereplő számokat, kifejezéseket írjuk fel azonos alapú hatványokkal.

Megoldás

$$a) 3^x = 243; \quad b) 343^x = \frac{1}{7}; \quad c) \frac{4}{8^x} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad d) 5^{2x-3} = 1;$$

$$3^x = 3^5; \quad 7^{3x} = 7^{-1}; \quad 2^{2-3x} = 2^{-\frac{1}{2}}; \quad 5^{2x-3} = 5^0.$$

Értelmezzük az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket mint egy-egy exponenciális függvényt. Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton (kölsönösen egyértelmű), így a megoldások a kitevők egyenlőségéből következnek:

$$\begin{array}{llll} a) x = 5; & b) 3x = -1; & c) 2 - 3x = -\frac{1}{2}; & d) 2x - 3 = 0; \\ & x = -\frac{1}{3}; & \frac{5}{2} = 3x; & x = \frac{3}{2}. \\ & & \frac{5}{6} = x; & \end{array}$$

Megoldásainkat ellenőrizzük!

$$\text{Például:} \quad a) 3^5 = 243; \quad b) 343^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{343}} = \frac{1}{7} \text{ valóban.}$$

Összetett egyenletek esetén először törekedjünk arra, hogy ekvivalens átalakításokkal az 1. példában láttott „alapegyenlethez” jussunk.

2. példa

Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$13^{x^2+3x-18} = 1.$$

Megoldás

$13^{x^2+3x-18} = 13^0$. Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton, így

$$x^2 + 3x - 18 = 0;$$

$$(x+6)(x-3) = 0;$$

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 3.$$

Ellenőrzéssel megállapíthatjuk, hogy a kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

Ha az egyenletben azonos alapú hatványok összege szerepel:

3. példa

Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$3^{2x} + 3^{2x+2} = 270.$$

Megoldás

Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát:

$$3^{2x} + 3^2 \cdot 3^{2x} = 270;$$

$$10 \cdot 3^{2x} = 270;$$

$$3^{2x} = 27;$$

$$3^{2x} = 3^3.$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton, így a kitevőkre:

$$2x = 3;$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

Végezzünk ellenőrzést!

$$3^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 27; \quad 3^{2 \cdot \frac{3}{2} + 2} = 3^5 = 243; \quad 27 + 243 = 270.$$

Tudod-e,

hogyan kell kiolvasni ezt a számot:

123 132 213 231 312 321 124?

Segítségül használhatod a táblázatot.

10^6 – millió

10^9 – milliárd

$(10^6)^2$ – billió

10^{15} – billiárd

$(10^6)^3$ – trillió

$(10^6)^4$ – quadrillió

Ha az egyenletben különböző alapú hatványok szerepelnek:

4. példa

Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$25^x - 3 \cdot 5^x - 10 = 0.$$

Megoldás

Azonos alapú hatványokká alakítva a két hatványt:

$$5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0, \text{ most } 5^x\text{-re nézve másodfokú egyenlethez jutottunk:}$$

$$(5^x)^2 - 3 \cdot 5^x - 10 = 0;$$

$$(5^x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}.$$

Tehát egyrészt

$$5^x = 5.$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, tehát minden értéket csak egyszer vesz fel, így $x = 1$.

Másképpen $5^x = -2$.

Ez utóbbi egyenletnek nincs megoldása, mivel 5^x csak pozitív értékeket vesz fel.

Ellenőrzéssel megállapíthatjuk, hogy a kapott gyök kielégíti az egyenletet.

5. példa

Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$2^x + 3^{x-2} = 3^x - 2^{x+1}.$$

Megoldás

Ekvivalens átalakításokkal:

$$2^x + 3^{x-2} = 3^x - 2^{x+1};$$

$$2^x + 2 \cdot 2^x = 3^x - \frac{1}{9} \cdot 3^x;$$

$$3 \cdot 2^x = \frac{8}{9} \cdot 3^x.$$

Mivel $3^x \neq 0$, így

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^3}{3^3};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, így $x = 3$.

Ellenőrzés: $2^3 + 3^{3-2} = 8 + 3 = 11$;

$$3^3 - 2^{3+1} = 27 - 16 = 11. \text{ A két oldal egyenlő.}$$

6. példa

Mutassuk meg, hogy az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán!

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + (\sqrt{3})^{2x} = 0.$$

Megoldás

Az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel, így $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$, és $(\sqrt{3})^{2x} > 0$, ezért összegük nem lehet 0.

Fogalom
exponenciális
egyenlet.

FELADATOK

1.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

K1 a) $5^x = 125$;

K1 e) $\frac{3^x}{81} = \frac{3}{3^{-2}}$;

K1 i) $\sqrt{2^{x-2}} = 8$;

K1 b) $3^{x-2} = 243$;

K1 f) $2^{5x-8} = 2$;

K2 j) $3 \cdot \sqrt{3^{3x-5}} = 9$;

K1 c) $11^x = 11 \cdot 11^{20}$;

K1 g) $9^{6-2x} = 1$;

K2 k) $4^{x+15} = 8^{x-6} \cdot 2$;

K1 d) $(2^x)^{12} = 4^{15}$;

K1 h) $7^{4-x} = 0$;

K2 l) $(5^{2x+1})^2 \cdot 25^{x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3-2x} \cdot 5$.

2.

Van-e az alábbi egyenleteknek megoldása az egész számok halmazán?

K1 a) $2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^{15}$; **K2** c) $6^{2x} \cdot 9^{x-1} = 4^x \cdot 27^{x+30}$;

K1 b) $3^x - 3^{x-2} = 648$; **E1** d) $9^{x^2} \cdot 27^x \cdot 3^{-4} = 9^{3+x} \cdot 243$.

3. K2

Új ismeretlen bevezetésével oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^x + 2^{x+1} = 192$;

b) $5^{x+1} - 4 \cdot 5^x + 5^{x-1} = 150$;

c) $3^{2x-1} + 9^{x+1} = 9^{\frac{2x+1}{2}} + 171$.

4. E1

Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek az egész számok halmazán?

a) $3^{2x^2} \cdot 3^x = 9^{2x+1}$;

c) $4^x = 9 \cdot 2^x - 8$;

e) $2^{x+1} = 10 - 2^{3-x}$;

b) $4^x = 3 \cdot 2^{x+1} - 5$;

d) $5^{3x^2+x-2} = 1$;

f) $7^{x+1} - 7^{1-x} = 48$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1603–1609, 1612–1613, 1616.

Emelt szint

9. EXPONENCIÁLIS EGYENLETRENDSZEREK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Az egyenletrendszerek megoldásakor alkalmazzuk a már jól ismert módszerek valamelyikét, célszerű először ekvivalens átalakításokkal egyszerűbb alakú egyenleteket keresni. Az új ismeretlen bevezetése gyakran egyszerűsítheti a feladatmegoldást.

1. példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

(1) $3^x + 2^{y+1} = 11$; (2) $5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3$.

Megoldás

Végezzük el az (1) egyenletben a következő átalakítást: $2^{y+1} = 2 \cdot 2^y$.

Vezessünk be új ismeretleneket, legyen $3^x = a$, $2^y = b$, ahol a, b pozitív számok. Ekkor:

(1) $a + 2b = 11 \Rightarrow a = 11 - 2b$;

(2) $5a - 3b = 3$.

Behelyettesítve:

$5(11 - 2b) - 3b = 3$;

$55 - 13b = 3$;

$52 = 13b$;

$4 = b \Rightarrow a = 3$.

Visszatérve az eredeti ismeretlenekre:

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1, 2^y = 4 = 2^2 \Rightarrow y = 2, \text{ mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton.}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $(x; y) = (1; 2)$.

Ellenőrzés:

$$(1) 3^1 + 2^{2+1} = 3 + 8 = 11;$$

$$(2) 5 \cdot 3^1 - 3 \cdot 2^2 = 15 - 12 = 3.$$

2. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$$a) 3^x \geq 81; \quad b) \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1; \quad c) 5^{3x-4} \geq \frac{1}{25}; \quad d) \left(\frac{5}{2}\right)^{5x-1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^x.$$

Megoldás

$$a) 3^x \geq 81;$$

$$3^x \geq 3^4.$$

Mivel a hatvány alapja 1-nél nagyobb, az $f(x) = 3^x$ függvény szigorúan monoton nő, így akkor vesz fel 3^4 -nél nem kisebb értéket, ha

$$x \geq 4.$$

(Figyeljük meg, hogy a relációjel állása változatlan maradt.)

$$b) \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

Mivel a hatvány alapja 1-nél kisebb, az $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökken, így akkor vesz fel $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ -nál nem nagyobb értéket, ha

$$x \geq 0.$$

(Figyeljük meg, hogy a relációjel állása megfordult.)

$$c) 5^{3x-4} \geq \frac{1}{25};$$

$$5^{3x-4} \geq 5^{-2}.$$

Mivel a hatvány alapja 1-nél nagyobb, az $f(x) = 5^{3x-4}$ függvény szigorúan monoton nő, így akkor vesz fel 5^{-2} -nél nem kisebb értéket, ha

$$3x - 4 \geq -2;$$

$$3x \geq 2;$$

$$x \geq \frac{2}{3}.$$

(Figyeljük meg, hogy a relációjel állása változatlan maradt!)

$$d) \left(\frac{5}{2}\right)^{5x-1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^x;$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{5x-1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{-x}.$$

Mivel az alapok egyenlők és $\frac{5}{2} > 1$, így a kitevőkre fennáll az alábbi egyenlőtlenség

$$5x - 1 \leq -x;$$

$$6x - 1 \leq 0;$$

$$x \leq \frac{1}{6}.$$

(Figyeljük meg, hogy a relációjel állása változatlan maradt!)

Fogalmak
exponenciális
egyenletrendszer;
exponenciális
egyenlőtlenség.

FELADATOK

1. K1

Ismételjük át, mikor mondjuk azt egy függvényről, hogy

a) szigorúan monoton növekedő;

b) szigorúan monoton csökkenő!

2. K1

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ x \mapsto 2^x$ és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvényeket!

a) Vizsgáljuk meg a függvényeket monotonitás szempontjából!

b) Általánosan milyen esetekben

– szigorúan monoton növekedő;

– szigorúan monoton csökkenő egy exponenciális függvény?

3. E1

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $2^x < 8;$

b) $3^{x+2} \geq \sqrt{3};$

c) $0,1^x < 0,001;$

d) $3 \cdot \frac{5^{x+3}}{25} \leq 15.$

4. E1

Ábrázoljuk számegyenesen az alábbi egyenlőtlenségek megoldásait a valós számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \frac{1}{16};$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{3}{2};$

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^{x+2} \leq 0,8;$

d) $0,01^{1-x} \geq 1000.$

5. E1

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $4^{x+3} < 2^{1-2x};$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geq 1;$

c) $0,01^{x-1} < 10^{2x-3};$

d) $2^{x^2+5x-9} \leq \frac{1}{8}.$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1619–1622, 1626–1628.

10. A LOGARITMUS FOGALMA

1. példa

Vizsgáljuk 600 000 Ft lekötését, évi 4,5%-os kamatos kamat esetén. Mennyi időre kell lekötni a pénzünket ahhoz, hogy 1 millió Ft követelésünk legyen a bankkal szemben?

Megoldás

1 év múlva $600\,000 \cdot 1,045 = 627\,000$ Ft-ot,
 2 év múlva $627\,000 \cdot 1,045 = 600\,000 \cdot 1,045^2 = 655\,215$ Ft-ot,
 3 év múlva $655\,215 \cdot 1,045 = 600\,000 \cdot 1,045^3 \approx 684\,700$ Ft-ot,

·
·
·

n év múlva $600\,000 \cdot 1,045^n$ Ft-ot követelhetnénk.

Tehát a következő egyenlet megoldását keressük:

$600\,000 \cdot 1,045^n = 1\,000\,000$,
 ahol n a keresett évek számát jelöli. Rendezve

$$1,045^n = \frac{1\,000\,000}{600\,000} = 1,6.$$

Nilvánvaló a kérdés: Létezik-e olyan n egész szám, amelyre $1,045^n = 1,6$?

Mivel n pozitív egész szám (évek száma), ezért próbálgatással, számológéppel számolva:

$$1,045^{11} \approx 1,62, \quad 1,045^{12} \approx 1,696.$$

Tehát minimum 12 évre kellene lekötünk a 600 000 Ft-ot, 12 év elteltével követelésünk:

$$\approx 1\,017\,529 \text{ Ft.}$$

Az egyenletnek ennél pontosabb megoldására most a feladat szövege miatt nyilván nincs szükségünk.

Általánosan nézve a problémát, az

$$a^x = b \quad (x \in \mathbf{R})$$

alakú egyenletnek keressük a megoldását, ahol x valós szám, a hatvány alapja és értéke is pozitív valós szám ($a, b \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$).

Úgy is fogalmazhatunk: olyan x kitevőt keresünk, amelyre a pozitív alapot, a -t emelve a hatvány értéke a pozitív b szám. A keresett kitevőt a továbbiakban *a alapú logaritmus b-nek* fogjuk nevezni.

Definíció

A b pozitív szám **a alapú** ($a > 0$, és $a \neq 1$) **logaritmusának** nevezzük azt a kitevőt, amelyre a -t emelve b -t kapunk.

A kitevő jelölése: $\log_a b$. (Kiolvasva: 'a alapú logaritmus b'.)

Tehát a definíció szerint: $a^{\log_a b} = b$.

Ha a logaritmus alapja 10, akkor rövidebb jelölést használunk: $\log_{10} b$ helyett $\lg b$ -t írunk.



I. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Megjegyzés

A matematikában fontos egy speciális alapú logaritmus használata, ez az „e” alapú logaritmus, melynek jelölése $\log_e x$ helyett az $\ln x$. (Az e szám a π -hez hasonló irracionális szám, értéke kb. 2,718281...)

2. példa

Definíció egyszerű használata:

a) $\log_2 16 = 4$, mert $2^4 = 16$.

b) $\lg 1000 = 3$, mert $10^3 = 1000$.

c) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, mert $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

d) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125} = 3$, mert $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$.

e) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, mert $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$.

f) $\log_6 1 = 0$, mert $6^0 = 1$.

g) $\log_3 \sqrt[5]{27} = \frac{3}{5}$, mert $3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$.



Az osebergi viking hajót 834-ben készíthették, de egyes részei 800 körül keletkeztek, illetve még régebből. Az ilyen leletek korának meghatározása exponenciális bomlási folyamatok megoldásával történik, a logaritmus felhasználásával

FELADATOK

1. K1

Írjuk át a logaritmus fogalmának felhasználásával az alábbi hatványokat logaritmosus alakba!

a) $3^5 = 243$, $11^2 = 121$, $2^{10} = 1024$, $\sqrt{3^4} = 9$, $10^{-2} = 0,01$;

b) $2^{-5} = \frac{1}{32}$, $4^{\frac{3}{2}} = 8$, $9^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{243}$, $\sqrt{11^{-2}} = \frac{1}{11}$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5} = 10^5$.

2. K1

Írjuk át hatvány alakba az alábbi egyenlőségeket!

a) $\log_2 16 = 4$, $\log_9 81 = 2$, $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = -6$, $\log_{49} \frac{1}{7} = -\frac{1}{2}$, $\lg 0,01 = -2$.

3. K1

Számítsuk ki az alábbi logaritmusértékeket!

a) $\log_2 8$, $\log_2 128$, $\log_2 0,5$, $\log_3 1$, $\log_7 (-1)$, $\log_2 \frac{1}{8}$;

b) $\log_5 0$, $\log_5 \frac{1}{25}$, $\log_{\frac{1}{5}} 125$, $\log_{\sqrt{2}} 32$, $\log_2 \sqrt[4]{8}$, $\log_{\sqrt[3]{8}} 16$.

4. K2

Számítsuk ki az alábbi logaritmosus kifejezések értékét!

a) $2^{\log_2 6}$; b) $4^{\log_2 5}$; c) $16^{\log_2 3}$; d) $2^{\log_4 9}$; e) $3^{\log_9 25 + 1}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 942–948.

Fogalmak

b pozitív szám
a alapú
logaritmusa;
10-es alapú
logaritmus.

11. A LOGARITMUSFÜGGVÉNY

Emelt szint

A logaritmus definíciója alapján értelmezhetjük a logaritmusfüggvényt.

Definíció

Azt a függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, és minden számhoz annak az a alapú ($a > 0$, $a \neq 1$) logaritmusát rendeli hozzá, az a alapú **logaritmusfüggvénynek** nevezzük. $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$.

1. példa

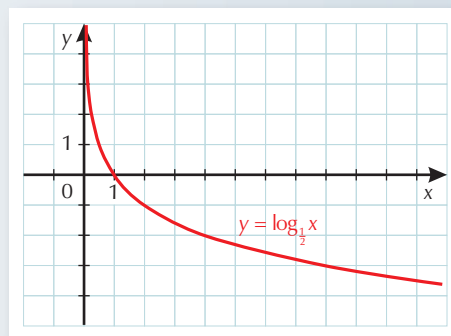
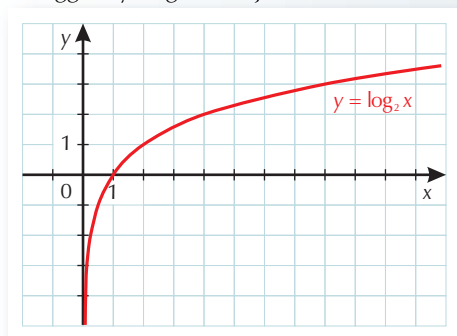
Ábrázoljuk, jellemezzük az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_2 x$ és a $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvényeket!

Megoldás

Készítsünk értéktáblázatot:

x	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$
$\log_2 x$	0	1	-1	2	-2	3	-3
$\log_{\frac{1}{2}} x$	0	-1	1	-2	2	-3	3

A függvények grafikonjai:



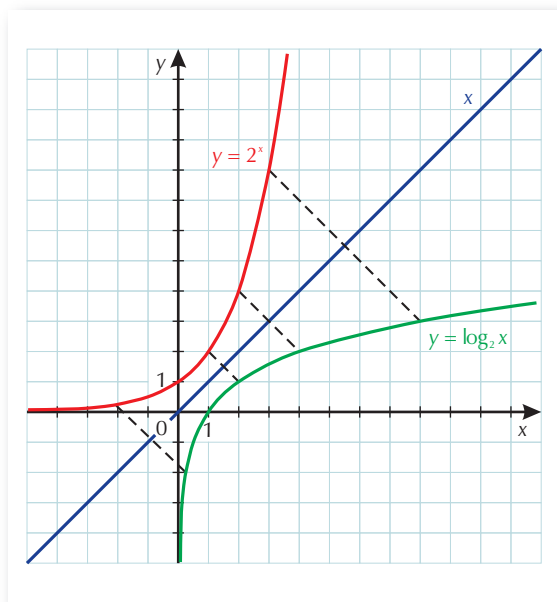
Tulajdonságok: 1. A vizsgált *logaritmusfüggvények minden valós értéket felvesznek*. Ez következik az exponenciális függvény tulajdonságaiból, hiszen bármilyen x valós számra igaz, hogy $\log_2 2^x = x$.

2. Az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, hiszen ha $0 < x_1 < x_2$, vagy más alakban $2^{\log_2 x_1} < 2^{\log_2 x_2}$, akkor az exponenciális függvény monotonitása miatt $\log_2 x_1 < \log_2 x_2$. Tehát $f(x_1) < f(x_2)$, vagyis a függvény szigorúan monoton növekvő. Az $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, hiszen ha $0 < x_1 < x_2$, vagy más alakban $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x_1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x_2}$, akkor az exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenése miatt $\log_{\frac{1}{2}} x_1 > \log_{\frac{1}{2}} x_2$. Tehát $f(x_1) > f(x_2)$, ami éppen azt jelenti, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő.

3. A szigorúan monotonitásból következik, hogy mindkét függvény kölcsönösen egyértelmű.

4. Zérushelyük az $x = 1$.

5. A függvényeknek se minimuma, se maximuma nincs.



Az exponenciális függvény és a logaritmusfüggvény értelmezéséből következik, hogy szoros kapcsolat van a két függvény között. Ha az előbbi táblázat első két sorát megcseréljük,

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
2^x	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

akkor az értéktáblázatunk a $g(x) = 2^x$ függvény értéktáblázatának egy részlete.

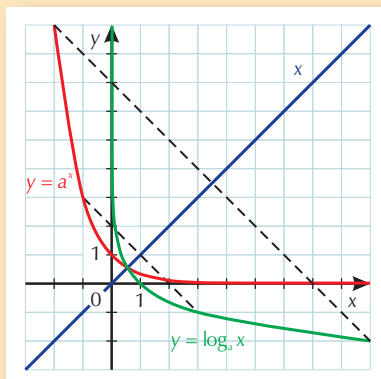
Az f logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a g exponenciális függvény értékkészletével egyezik meg, míg a g exponenciális függvény értelmezési tartománya az f logaritmusfüggvény értékkészletével azonos, és ha az f tetszőleges x -hez $f(x)$ -et rendel, akkor a g az $f(x)$ -hez x -et rendel.

Ezen tulajdonságok miatt a két függvény egymás inverze, grafikonjaik egymás tükörképei a $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = x$ függvény grafikonjára (egyenesére) nézve.

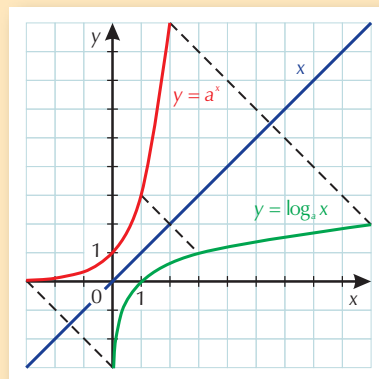
Belátható, hogy ez a kapcsolat tetszőleges a alap esetén is érvényes.

Adott $a > 0$, és $a \neq 1$ alap esetén, az $x \mapsto a^x$ és az $x \mapsto \log_a x$ függvények **egymás inverzei**.

Amennyiben $0 < a < 1$, akkor a két függvény **szigorúan monoton csökkenő**:



Amennyiben $a > 1$, akkor a két függvény **szigorúan monoton növekvő**:



Összegezve megállapításainkat az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ logaritmusfüggvény **legfontosabb tulajdonságai**:

1. A logaritmusfüggvény a pozitív számok halmazán értelmezett, kölcsönösen egyértelmű függvény.
2. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton
 - növekvő, ha $a > 1$;
 - csökkenő, ha $0 < a < 1$.

- Inverze a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+, g(x) = a^x$ függvénynek; a függvények grafikonjai egymás tükörképei a $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = x$ függvény grafikonjára nézve.
- Minden nem transzformált logaritmusrfüggvény grafikonjára illeszkedik az $(1; 0)$ pont, azaz a függvény zérushelye az $x = 1$.
- A függvénynek se minimuma, se maximuma sincs.

2. példa

Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényt: $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 + \log_{\frac{1}{3}} x$!

Adjuk meg a függvény inverzét!

Megoldás

Az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 + \log_{\frac{1}{3}} x$ függvény grafikonját a $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ függvény grafikonjából eltolással kapjuk, az eltolás vektora: $\underline{v}(0; 5)$.

Az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 5 + \log_{\frac{1}{3}} x$ függvény jellemzése:

Értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza.

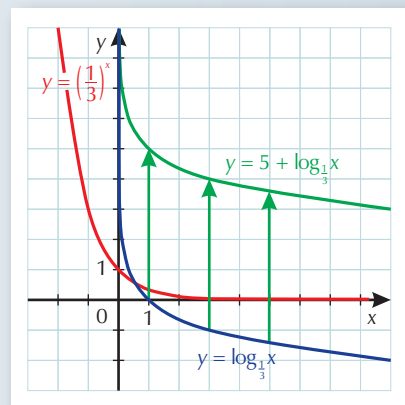
Értékkészlete a valós számok halmaza.

Zérushelye az $x = 243$, mert $5 + \log_{\frac{1}{3}} 243 = 5 + \log_{\frac{1}{3}} 3^5 = 5 - 5 = 0$.

Szélsőértéke nincs.

Szigorúan monoton csökkenő függvény.

A függvény inverz függvénye: $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$ (az inverz függvény jelölésére az előző tanévben vezettük be a $f^{-1}(x)$ jelölést).



Fogalom
logaritmusrfüggvény
tulajdonságai.

FELADATOK

1. E1 Ábrázoljuk és jellemezzük az $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \log_3 x$ függvényt!

2. E1 Válasszuk ki az alábbi függvények közül a monoton növekvőket!

a) $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \log_5 x$;

d) $k: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, k(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;

b) $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \lg x$;

e) $l: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, l(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

c) $h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$;

3. E1 Ábrázoljuk függvénytranszformációk felhasználásával az alábbi függvényeket a valós számok halmazán! Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát! (A megoldások előtt nézzétek meg a kilencedikes tankönyv függvénytranszformációkról szóló olvasmányát.)

a) $f: x \mapsto \log_2(x+1)$;

b) $g: x \mapsto \log_2 x - 1$;

c) $h: x \mapsto 2 \cdot \log_2 x$.

4. E1

Ábrázoljuk az $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \log_2 x$ grafikonjának felhasználásával az alábbi függvényeket! Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát!

- a) $f: x \mapsto -\log_2 x$;
- b) $g: x \mapsto \log_2 (-x)$;
- c) $h: x \mapsto |\log_2 x|$;
- d) $k: x \mapsto \log_2 |x|$.



A képen egy logarlécet látsz. Ilyen eszközökkel számoltak az elektronikus számológépek megjelenése előtt logaritmust. A logarlécről és használatáról az alábbi helyen olvashatsz: <https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/tudomany/igy-szamoltunk-a-logarlec>



5. E1

Oldjuk meg grafikusán az alábbi egyenleteket!

- a) $\log_2 x = x - 5$;
- b) $|\log_{1,5}(x + 2)| = -x^2 - 1$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 731–733, 737–738.

12. A LOGARITMUS AZONOSSÁGAI

Feladatmegoldásokban, egyenletmegoldások esetén gyakran kell átalakítanunk logaritmikus kifejezéseket. Ehhez ismernünk kell az átalakítások szabályait, azaz a logaritmus azonosságait. Ezek megfogalmazásához felhasználjuk a definíciót, valamint a logaritmusfüggvény megismert tulajdonságait.

A logaritmus azonosságai a hatványozás azonosságaival egyeznek meg. Itt ugyanazokat az azonosságokat soroljuk fel, csak a logaritmus (kitevő) segítségével.

Például az azonos alapú hatványok szorzásánál a kitevőket össze kell adni (első azonosság). Osztásnál a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét (második azonosság). Hatvány hatványozásánál a kitevőket össze kell szorozni (harmadik azonosság).

Ezeket az azonosságokat pontos matematikai formában is leírjuk.

Ezek az azonosságok tették lehetővé, hogy a számológépek előtti időkből aránylag könnyen tudjunk nagyobb számokat összeszorozni, osztani, hatványozni, vagy esetleg gyököt vonni belőlük. Ezeknek a műveleteknek itt az összeadás kivonás vagy esetleg egész számmal osztás vagy szorzás felel meg.

Például két nagy szám szorzásánál logaritmus táblázat segítségével megkaptuk a két szám logaritmusát. Ezeket csak össze kellett adni, ezután pedig meg kellett keresni, hogy melyik számnak a logaritmusát a kapott összeg.

Szorzat logaritmus

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, azaz szorzat logaritmus egyenlő a tényezők logaritmusának összegével.

Bizonyítás

Egyrészt: $a^{\log_a b} = b$, és $a^{\log_a c} = c \Rightarrow bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$. Másrészt: $bc = a^{\log_a(bc)}$.

Összevetve a két egyenlőséget: $bc = a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a(bc)} \Rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

A bizonyításban a hatványozás ismert tulajdonságai alapján végeztük az átalakításokat, valamint felhasználtuk az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát.

Hányados logaritmusa

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c, \text{ ha } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, \text{ azaz}$$

hányados logaritmusa egyenlő a számláló és a nevező logaritmusának különbségével.

Bizonyítás

$$\text{Egyrészt: } a^{\log_a b} = b, \text{ és } a^{\log_a c} = c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = a^{\log_a b - \log_a c}. \text{ Másrészt: } \frac{b}{c} = a^{\log_a \left(\frac{b}{c} \right)}.$$

$$\text{Összevetve a két egyenlőséget: } \frac{b}{c} = a^{\log_a b - \log_a c} = a^{\log_a \left(\frac{b}{c} \right)} \Rightarrow \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$$

A bizonyításban a hatványozás ismert tulajdonságai alapján végeztük az átalakításokat, valamint felhasználtuk az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát.

Hatvány logaritmusa

$$\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b, \text{ ha } a > 0, a \neq 1, b > 0, k \in \mathbf{R}, \text{ azaz}$$

hatvány logaritmusa egyenlő az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzatával.

Bizonyítás

$$\text{Egyrészt: } b^k = a^{\log_a (b^k)}. \text{ Másrészt: } b^k = (a^{\log_a b})^k = a^{k \cdot \log_a b}.$$

$$\text{Összevetve a két egyenlőséget: } b^k = a^{\log_a (b^k)} = a^{k \cdot \log_a b} \Rightarrow \log_a (b^k) = k \cdot \log_a b.$$

A bizonyításban a hatványozás ismert tulajdonságai alapján végeztük az átalakításokat, valamint felhasználtuk az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonságát.

n -edik gyök logaritmusa

Az előző eset speciálisan, $k = \frac{1}{n}$ esetén, $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}, \text{ azaz}$$

n -edik gyök logaritmusa egyenlő a gyök alatti kifejezés logaritmusának és a gyökkitevőnek a hányadosával.

Áttérés tízes alapú logaritmusra

Bizonyítható az alábbi összefüggés:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \text{ ha } a > 0, a \neq 1, b > 0, \text{ azaz}$$

egy szám a alapú logaritmusát megkapjuk, ha a szám tízes alapú logaritmusát elosztjuk az alap tízes alapú logaritmusával.

1. példa

Számítsuk ki a kifejezés pontos értékét!

$$3 \log_3 6 + \log_3 35 - \log_3 20 - \log_3 42.$$

Megoldás

$$3 \log_3 6 + \log_3 35 - \log_3 20 - \log_3 42 = \log_3 \frac{6^3 \cdot 35}{20 \cdot 42} = \log_3 \frac{7650}{840} = \log_3 9 = 2.$$

2. példa

Adjuk meg a kifejezés értelmezési tartományának legbővebb halmazát! Fejezzük ki x értékét a , b , c , d segítségével!

$$\log_a x = \frac{2}{3} \log_a b + \frac{4}{3} \log_a c - \frac{1}{3} \log_a d.$$

Megoldás

A kifejezés értelmezhető, ha $a \neq 1$, és $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

$$\log_a x = \frac{2}{3} \log_a b + \frac{4}{3} \log_a c - \frac{1}{3} \log_a d = \log_a \frac{b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{4}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}} = \log_a \sqrt[3]{\frac{b^2 c^4}{d}};$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{b^2 c^4}{d}}.$$

3. példa

Határozzuk meg $\lg 6$ értékét a és b segítségével, ha $a = \lg 48$, és $b = \lg 72$!

Megoldás

Célszerű a számok prímtényezőss felbontásából kiindulni:

$$48 = 2^4 \cdot 3 \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad 6 = 2 \cdot 3$$

Célunk meghatározni $\lg 2$ -t és $\lg 3$ -at a és b segítségével, mert $\lg 2 + \lg 3 = \lg 6$.

$$a = \lg 48 = 4 \lg 2 + \lg 3,$$

$$b = 3 \lg 2 + 2 \lg 3.$$

Azt próbáljuk meg elérni, hogy $\lg 3$ együtthatói azonosak legyenek, ekkor különbségükben nem szerepel $\lg 3$:

$$2a - b = 8 \lg 2 + 2 \lg 3 - (3 \lg 2 + 2 \lg 3) = 5 \lg 2;$$

$$\frac{2a - b}{5} = \lg 2.$$



Most fejezzük ki $\lg 3$ -at:

$$a = 4 \cdot \frac{2a-b}{5} + \lg 3;$$

$$\lg 3 = a - \frac{8a-4b}{5} = \frac{4b-3a}{5};$$

$$\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 = \frac{2a-b}{5} + \frac{4b-3a}{5} = \frac{3b-a}{5}.$$

A számológép használata

A legtöbb számológépen az $\langle x^y \rangle$ vagy $\langle ^ \wedge \rangle$ billentyűkkel végezhető el a hatványozás, de néhány típuson az $\sqrt[n]{}$ műveletre nincs külön billentyű. Ezeken az $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ azonosságot alkalmazhatjuk.

Általában csak a 10-es és e alapú logaritmus számolható közvetlenül; c alap esetén a

$$\log_c x = \frac{\lg x}{\lg c}$$
 azonosság vezet célhoz.

4. példa

Igaz-e a következő egyenlőség: $\log_2 10 \cdot \log_7 3 = \log_7 10 \cdot \log_2 3$?

Megoldás

Térjünk át tizes alapú logaritmusra.

$$\frac{\lg 10}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 7} = \frac{\lg 10}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 2}$$

$$\frac{\lg 10 \cdot \lg 3}{\lg 2 \cdot \lg 7} = \frac{\lg 10 \cdot \lg 3}{\lg 7 \cdot \lg 2}$$

Mind a két oldalon azonos tényezők szerepelnek, tehát az egyenlőség igaz.

Fogalom

a logaritmus azonosságai.

FELADATOK

1. K1

Számítsuk ki az x értékét!

a) $\log_5 4 + \log_5 2 = \log_5 x$;

b) $\lg 18 - \lg 2 = \lg x$;

c) $\lg x = \lg 4 + \lg 9 - \lg 12$;

d) $\log_2 x = \log_2 60 - 2$.

2. K1

Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

a) $\lg 4 + 3 \lg 5 + \lg 11 - \lg 55$;

b) $\log_3 27 + 2 \log_3 5 - \log_3 20 \frac{1}{2} + \log_3 16 - \log_3 5$;

c) $\frac{1}{2} \lg 52 + 3 \lg 2 + \lg 125 + \frac{1}{2} \lg 325 - \lg 13$.

3.

Hozzuk egyszerűbb alakra!

K1 a) $\frac{1}{\lg 35}(\lg 25 + \lg 49)$;

K2 b) $\log_a \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3}$.

4. K1

Írjuk át az alábbiakat tízes alapú logaritmus alakra!

a) $a = \log_7 2$;

b) $b = \log_5 3$;

c) $c = \log_9 3\sqrt{3}$;

d) $d = \log_{0,1} 4$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 958–960, 961, 963.

Emelt szint

13. LOGARITMUSOS EGYENLETEK

Példákon keresztül mutatjuk be a logaritmusos egyenletek megoldásának néhány alapötletét. A feladatmegoldások során gyakran hivatkozunk a logaritmusfüggvény és az exponenciális függvény tulajdonságaira, a logaritmus azonosságaira.

Fontos az egyenletek értelmezési tartományának vizsgálata, valamint a megoldás ellenőrzése, hogy kiszűrjük a fellépő hamis gyököket!

1. példa

Az egy főre jutó bruttó hazai termék (GDP) 20 000 dollár körül volt Közép-Európában, a dél-európai államokban pedig 30 000 dollár 2020-ban. Feltételezzük, hogy Közép-Európában 6% körül alakul az éves növekedés, Dél-Európában pedig csak 4% körül.

Hány év múlva lesz körülbelül egyforma a két régióban ez a mutató?

Megoldás

Írjuk fel hogyan alakul a két régióban a GDP.

Hat százalékos növekedés esetén minden évben az előző év 106 százaléka lesz a következő évi adat. Bárminek a 106%-át úgy is kiszámíthatjuk, hogy megszorozzuk 1,06-tal.

Ezek után ha n éven keresztül folytatódik a növekedés és egyenlő lesz, akkor

$$20\,000 \cdot 1,06^n = 30\,000 \cdot 1,04^n$$

Ez így egy exponenciális egyenlet, de hamar kiderül, hogy az exponenciális egyenletek megoldása során tanult módszerekkel nem jutunk a végére.

Először átalakítjuk az egyenletet, utána felhasználjuk a logaritmus azonosságait

$$20\,000 \cdot 1,06^n = 30\,000 \cdot 1,04^n \quad /:20\,000$$

$$1,06^n = 1,5 \cdot 1,04^n \quad /:1,04^n$$

$$\left(\frac{1,06}{1,04}\right)^n = 1,5 \quad / \lg(\quad)$$

Nem tudjuk a két oldalt ugyanolyan alapú hatványokká alakítani, ezért most vesszük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát. Ez egy ekvivalens átalakítás lesz, hiszen a $\log_{10} x = \lg x$ függvény szigorúan monoton növekvő, tehát egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést valósít meg.

$$\lg\left(\frac{1,06}{1,04}\right)^n = \lg 1,5$$

Felhasználjuk a logaritmus azonosságait

$$n \cdot \lg\left(\frac{1,06}{1,04}\right) = \lg 1,5$$

$$n = \frac{\lg 1,5}{\lg\left(\frac{1,06}{1,04}\right)} = 21,29$$

Tehát több mint 21 évre van szükség ilyen körülmények között, hogy az egyik régió felzárkózzon a másikhoz.

2. példa

Ha az egyenlet egyik oldalán konstans érték szerepel.

Oldjuk meg az egyenletet! $2 \log_3 (3x - 5) = 2$.

Megoldás

A hamis gyök fellépése elkerülhető a következő módon:

$$2 \log_3 (3x - 5) = 2;$$

$$\log_3 (3x - 5) = 1;$$

$$\log_3 (3x - 5) = \log_3 3;$$

$$3x - 5 = 3;$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

A megoldásban felhasználtuk a logaritmus függvény szigorúan monoton tulajdonságát.

Ellenőrzés:

$$2 \log_3 \left(3 \cdot \frac{8}{3} - 5\right) = 2 \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2.$$



Stanley Fuller mahagóni logarléce 1919-ből (Magángyűjtemény)

3. példa

(Ha az egyenlet mindkét oldalán szerepel logaritmikus kifejezés.)
Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\lg \sqrt{3x-5} + \lg \sqrt{7x-3} = 1 + \lg \sqrt{\frac{11}{100}}.$$

Megoldás

Az egyenlet akkor értelmezhető, ha $3x-5 > 0$, valamint ha $7x-3 > 0$, azaz $x > \frac{5}{3}$.

Első észrevételünk: $1 = \lg 10$, behelyettesítve és a szorzat logaritmusára alapján:

$$\lg(\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{7x-3}) = \lg\left(10 \cdot \sqrt{\frac{11}{100}}\right);$$

$$\lg(\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{7x-3}) - \lg\left(10 \cdot \sqrt{\frac{11}{100}}\right) = 0;$$

$$\lg \frac{\sqrt{21x^2 - 44x + 15}}{10 \cdot \frac{\sqrt{11}}{10}} = 0.$$

A definíció alapján:

$$\frac{\sqrt{21x^2 - 44x + 15}}{\sqrt{11}} = 1;$$

$$21x^2 - 44x + 15 = 11.$$

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2}{21}$, ahol x_2 nem eleme az értelmezési tartománynak.

Ellenőrzés:

$$\lg(\sqrt{3 \cdot 2 - 5} \cdot \sqrt{7 \cdot 2 - 3}) = \lg \sqrt{11};$$

$$1 + \lg \sqrt{\frac{11}{100}} = \lg 10 + \lg \sqrt{\frac{11}{100}} = \lg\left(10 \cdot \sqrt{\frac{11}{100}}\right) = \lg\left(10 \cdot \frac{\sqrt{11}}{10}\right) = \lg \sqrt{11}.$$

A két oldal egyenlősége miatt az $x = 2$ gyöke az egyenletnek.

4. példa

Adjuk meg az egyenlet nemnegatív megoldásait!

$$\lg(x^2 - 5x - 9) - \lg(2x - 1) = 0.$$

Megoldás

Az egyenlet akkor értelmezhető, ha

$$x^2 - 5x - 9 > 0, \quad \text{illetve ha} \quad 2x - 1 > 0, \text{ azaz ha:}$$

$$x < \frac{5 - \sqrt{61}}{2} \text{ vagy } x > \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \quad \text{és} \quad x > \frac{1}{2}.$$

A feltételeket összevetve az értelmezési tartomány:

$$x > \frac{5 + \sqrt{61}}{2} (\approx 6,4).$$

$$\lg(x^2 - 5x - 9) - \lg(2x - 1) = 0;$$

$$\lg \frac{x^2 - 5x - 9}{2x - 1} = 0.$$

A logaritmus definíciója alapján:

$$\frac{x^2 - 5x - 9}{2x - 1} = 1;$$

$$x^2 - 5x - 9 = 2x - 1; \quad x_1 = 8, \quad x_2 = -1.$$

(-1) nem eleme az értelmezési tartománynak.

Ellenőrzés:

$$\lg(8^2 - 5 \cdot 8 - 9) - \lg(2 \cdot 8 - 1) = \lg 15 - \lg 15 = 0.$$

Az egyenlet gyöke: $x = 8$.

Érdekesség

Egy Angliában széles körben elterjedt, kedves történet szerint Viktória királynő annyira el volt ragadtatva Lewis Carroll *Alice Csodaországban* című művétől, hogy a szerző lelkére kötötte: a következő könyvét, amint elkészül, feltétlenül küldje el neki. Így is történt: amint befejezte, Lewis Carroll rövest elküldte az új művét, amely a királynő legnagyobb megrökönyödésére a **Determinánsok vizsgálata elemi módszerekkel** címet viselte.

(Lewis Carroll – eredeti nevén Charles Lutwidge Dodgson [1832–1898] – kiváló matematikus volt, az oxfordi egyetem professzora, a geometria, mátrixalgebra, a valószínűség-számítás és a matematikai logika művelője.)

5. példa

Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$3^{2x+1} = 2^{4-3x}.$$

Megoldás

$3^{2x+1} = 2^{4-3x}$. A hatványozás azonosságai alapján:

$$3 \cdot 9^x = \frac{16}{8^x}, \text{ rendezéssel}$$

$$9^x \cdot 8^x = \frac{16}{3};$$

$$72^x = \frac{16}{3}.$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát, ez megtehető, mivel az egyenlet mindkét oldalán pozitív szám áll.

$$\lg 72^x = \lg \frac{16}{3};$$

$$x \cdot \lg 72 = \lg \frac{16}{3};$$

$$x = \frac{\lg \frac{16}{3}}{\lg 72} \approx 0,3914.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a kapott gyök megoldása az egyenletnek.



Tim Burton: Alice Csodaországban (2010)

Fogalmak
logaritmusos
egyenletek.

FELADATOK

1. E1 Határozzuk meg az alábbi egyenletek megoldásait!

a) $\log_3 x = 9,$

$\log_4 x = 32,$

$\lg x = \sqrt[3]{0,01},$

$\log_2(x^2 - 1) = 3;$

b) $\lg x = -1,$

$\log_{\sqrt{2}} x = 16,$

$\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{9},$

$\log_2 x = 0,25.$

2. E1

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3 x + \log_3 6 = 9$;

b) $\log_7(x^2 + x + 7) = 2$;

c) $\log_3(x + 2) - \log_3 x = 1$;

d) $\log_{(x-3)}(x + 3) = 2$;

e) $\frac{1}{2} \lg 2x + \lg \sqrt{x+1} = \lg(3-x)$;

f) $\log_2[12 + (1 - \log_3 x)^2] = 4$.

3. E1

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket! (Segíthet egy új ismeretlen bevezetése.)

a) $\frac{\lg \sqrt{x}}{3} = \lg \sqrt{x}$;

c) $\log_3 x \cdot \log_3 9x = \log_3 27$;

b) $(\log_2 x)^2 = 5 \log_2 x - 6$;

d) $\frac{1}{\lg x + 1} - \lg 10 = \frac{\lg x}{\lg x^2 - \lg 100}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1639–1657.

Emelt szint

14. LOGARITMUSOS EGYENLETRENDSZEREK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Logaritmusos egyenletrendszerek esetén az egyenletrendszerek megoldásainak különböző módjait, valamint a logaritmus azonosságait használhatjuk fel. Egyenlőtlenségek esetén a logaritmusfüggvény monotonitása alapján figyeljünk a relációjel állására.

1. példa

Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

(1) $\lg x - 2 \lg y = 3$,

(2) $5 \lg x + \lg y = 4$.

Megoldás

Az egyenlet akkor értelmezhető, ha $x > 0$, és $y > 0$.

Az egyik leggyakrabban használható ötlet az új ismeretlen bevezetése, ekkor egyszerűbb egyenletrendszert kapunk.

Legyen $a = \lg x$, és $b = \lg y$. Ekkor:

(1) $a - 2b = 3$,

(2) $5a + b = 4$.

A második egyenlet kétszeresét az első egyenlettel összevonva:

$11a = 11$, visszahelyettesítve: $1 - 2b = 3$,

$a = 1$, $-1 = b$.

Visszatérve az eredeti ismeretlenekre:

$$\begin{aligned} 1 &= \lg x, & -1 &= \lg y, \\ 10 &= x, & \frac{1}{10} &= y. \end{aligned} \quad \text{illetve}$$

Ellenőrzés:

$$(1) \lg 10 - 2 \lg \frac{1}{10} = 1 - 2 \cdot (-1) = 3,$$

$$(2) 5 \lg 10 + \lg \frac{1}{10} = 5 \cdot 1 + (-1) = 4.$$

A kapott gyökök kielégítik az egyenletet, így a megoldás: $(x; y) = \left(10; \frac{1}{10}\right)$.

2. példa

Oldjuk meg az egyenletrendszert a rendezett valós számpárok halmazán. Ábrázoljuk a megoldást koordináta-rendszerben!

$$(1) \log_2 \log_3(x + y) = 1,$$

$$(2) \lg x + \lg y = 3 \lg 2.$$

Megoldás

Az egyenletrendszer akkor értelmezhető, ha $x > 0$, és $y > 0$.

Írjuk fel az egyenleteket az azonosságok alapján egyszerűbb alakban:

$$(1) \log_2 \log_3(x + y) = 1, \quad (2) \lg x + \lg y = 3 \lg 2,$$

$$\log_3(x + y) = 2, \quad \lg(xy) = \lg 2^3,$$

$$x + y = 9; \quad xy = 8.$$

Oldjuk meg behelyettesítéssel a kapott egyenletrendszert!

$$y = 9 - x \Rightarrow x(9 - x) = 8;$$

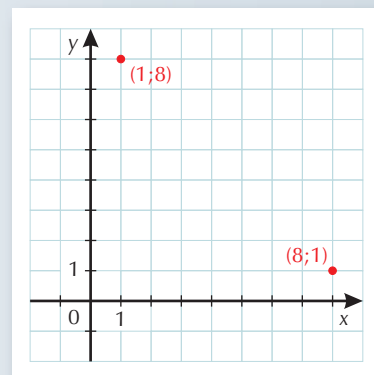
$$-x^2 + 9x - 8 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{-2} \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 8.$$

A megfelelő y értékek:

Ha $x_1 = 1$, akkor $y_1 = 9 - 1 = 8$, illetve ha $x_2 = 8$, akkor $y_2 = 9 - 8 = 1$.

Tehát a megoldás két pont a koordináta-rendszerben: $(1; 8)$, és a $(8; 1)$.



3. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$$a) \log_3(2x + 1) \geq 3; \quad b) \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) \geq 3.$$

Megoldás

$$a) \log_3(2x + 1) \geq 3.$$

Az egyenlőtlenség akkor értelmezhető, ha $x > -\frac{1}{2}$.

A 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért

$$\log_3(2x + 1) \geq 3;$$

$$2x + 1 \geq 3^3.$$

(Figyeljük meg, hogy nem fordult meg a relációjel.)

$$x \geq 13.$$

Ezek a számok az értelmezési tartománynak elemei, tehát a megoldás: $x \geq 13$.

$$b) \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) \geq 3.$$

Az egyenlőtlenségnek akkor lehet megoldása, ha $x > -\frac{1}{2}$.

Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért

$$2x + 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

(Vegyük észre, hogy megfordult a relációjel.)

$$2x \leq -\frac{26}{27};$$

$$x \leq -\frac{13}{27}.$$

Összevetve az értelmezési tartománnyal, mivel $-\frac{1}{2} < -\frac{13}{27}$, ezért az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{13}{27}.$$

4. példa

Ábrázoljuk számegyenesen az egyenlőtlenség pozitív megoldásait:

$$\lg(2x - 6) + \lg(x + 5) \leq 1 + \lg(x - 3).$$

Megoldás

Az egyenlőtlenség akkor értelmezhető, ha

$$2x - 6 > 0 \quad \text{és} \quad x + 5 > 0 \quad \text{és} \quad x - 3 > 0, \text{ azaz ha } x > 3.$$

$\lg(2x - 6) + \lg(x + 5) \leq 1 + \lg(x - 3)$. A logaritmus azonosságai alapján:

$$\lg \frac{(2x - 6)(x + 5)}{x - 3} \leq 1.$$

A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért

$$\frac{(2x - 6)(x + 5)}{x - 3} \leq 10.$$

(Figyeljük meg, hogy nem fordult meg a relációjel.)

A törtet egyszerűsíthetjük a pozitív $(x - 3)$ tényezővel:

$$2(x + 5) \leq 10;$$

$$x \leq 0.$$

Ezek a számok nem elemei az értelmezési tartománynak, így az egyenlőtlenségnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

Fogalmak

logaritmusos
egyenletrendszer;
logaritmusos
egyenlőtlenség.

FELADATOK

1. E1

Mely valós számokra értelmezhetők az alábbi kifejezések?

a) $\log_5(x+4)$; b) $\sqrt{\log_2 x}$; c) $\frac{\lg x}{\lg(4-x)}$.

2. E1

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\log_3 x \geq 1$; b) $\log_5(x-1) < 0$; c) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 1$; d) $\log_{0,2} x < -1$.

3. E1

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\log_4(x^2+3) \leq 1 + \log_4(4x-3)$; b) $\log_{0,5}(2x-1) \geq \log_{0,5}(4x-3)$.

4. E1

Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek valós megoldásait!

a) $2 \lg x + 3 \lg y = 3$,

$3 \lg x - 2 \lg y = 11$;

b) $\lg x + \lg y = 1 + 2 \lg 3$,

$\lg(x-y) = 0$;

c) $\log_2 xy = 5$,

$\log_{0,5} \frac{x}{y} = 1$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1689–1692, 1676–1678.

MIÉRT HASZNÁLUNK LOGARITMUSSKÁLÁKAT? (Olvasmány)

A természettudományokban felmerülő mennyiségek nagyon széles skálán mozoghatnak. Az akár több nagyságrenden keresztül számunkra értelmezhető mennyiségeket olyan formában kell a nagyobb nyilvánosság elé tárni, hogy azt mindenki könnyen értelmezni tudja.

Nézzünk egy klasszikus példát!

Szemünk és fülünk is logaritmikus érzékenységgű, ez teszi lehetővé, hogy nagyon nagy fény, illetve hangintenzitás változást is könnyedén érzékelhető módon közvetítse agyunknak.

A **hangerősséget** általában **decibelben** (dB) szokták megadni.

Hogyan készült a decibel skála?

Határozzuk meg az emberi fül számára még érzékelhető legkisebb hangerőt. Ez egészséges fül esetén $P_0 = 10^{-12}$ W teljesítmény (például: egy szúnyog repülésének a zaja három méterről). Ezt tekintjük referencia értéknek. Egy P teljesítményű hang esetén a $\frac{P}{P_0}$ hányadosnak vesszük a 10-es alapú logaritmusát. Ekkor kapjuk a **hangteljesítmény** Bell-ben (B) vett mértékét. Ennek a tízszerese lesz a dB (decibel) értéke, mint ahogyan a neve is mutatja. A hangteljesítmény és a decibel között fennálló összefüggés:

$$X(\text{dB}) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right).$$

Ezek szerint, ha a fülünkbe érkező hang teljesítménye 10-szeresére nő, akkor a decibelben mért értéke tízzel nő.

Indoklás: Tételezzük fel, hogy az eredeti hang teljesítménye P , akkor ennek a mértéke $10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right)$.

Nézzük meg, hogyan változik ez az érték, ha P 10-szeresére nő!

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{10P}{P_0} \right) = 10 \cdot \log_{10} 10 \left(\frac{P}{P_0} \right) = 10 \cdot \left[\log_{10} 10 + \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right) \right] = 10 + 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right).$$

Tehát tízzel nőtt a hangerősség dB-ben vett értéke.

A decibel használatának az oka a fülünk azon képessége, hogy nagyon széles hangtartományt képes érzékelni. A hallott hangok *nyomáसरánya*, ami még nem károsítja a fület, hozzávetőlegesen egymilliárd. Mivel a teljesítmény a *nyomás négyzetével* arányos, így a teljesítmények aránya hozzávetőlegesen 1 és egymilliárd négyzete közé esik. Az egymilliárd négyzetének tízes alapú logaritmus 18 (egymilliárd négyzete $(10^9)^2 = 10^{18}$, $\log_{10} 10^{18} = 18$), ezért a decibel skálán az értékek leggyakrabban 0 és 180 dB közé esnek.

FELADATOK

1. K1

Mikor érezzük nagyobbak a hangerősségváltozást, ha az 60 dB-ről 65 dB-re, vagy 90 dB-ről 95 dB-re változik? A fülünk az összehasonlításnál azt érzékeli, hogy az eredeti hangerő hányszorosára nőtt.

2. K1

Emberi fül számára hallható-e a nulla dB hangteljesítmény?

3. K1

Hány dB-lel nő a hangteljesítmény, ha a duplájára nő?

4. K1

Létezik-e (-1) dB hangteljesítmény?

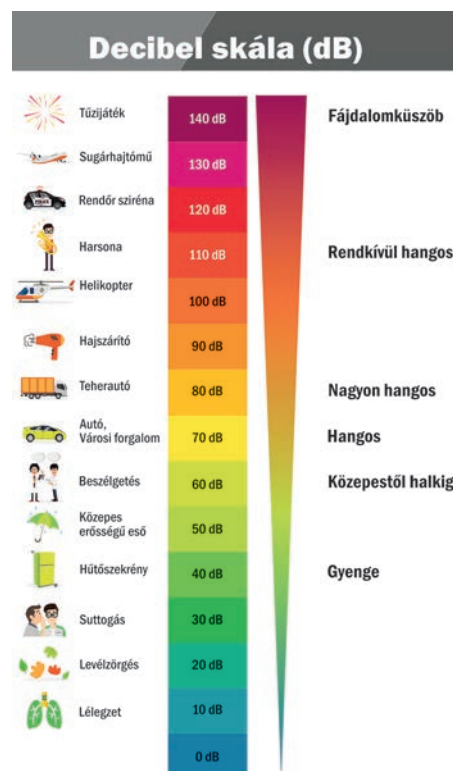
DECIBEL SKÁLA ÉRTÉKEI

A fülünket nagyon megterheli a nagyon erős hanghatás, különösen ha hosszabb ideig vagyunk kitéve erős zajnak.

Jó, ha tudjuk:

- 40 dB feletti tartós hanghatás esetén tanulási, és koncentrációs nehézségek jelentkezhetnek;
- 60 dB felett: hosszabb ideig tartó zajhatás esetén halláskárosodás jelentkezhet;
- 65 dB felett: hosszabb ideig tartó zajhatás esetén 20%-kal nő a szív- és érrendszeri megbetegedések kockázata;
- 85 dB a károsodást okozó tartomány kezdete, különösen nagy zajjal járó munkahelyek esetében;
- 120 dB felett: már rövid ideig tartó hatás esetén is halláskárosodás jelentkezhet.

Mindenkinek fontos, hogy vigyázzon a hallószervére, ezért nagyon fontos, ha nagy zajjal járó tevékenységet végzünk, vagy tudjuk előre, hogy nagy zajhatásnak leszünk kitéve, akkor használjuk védőfelszerelést.



OLDATOK pH ÉRTÉKE

Egy másik fontos példa a logaritmus skála használatára a víz pH értéke. A **pH** (latinul *potentia hydrogeni, hidrogénion-kitevő*) egy adott oldat **kémhatását** (savasságát vagy lúgosságát) jellemzi.

A vízben a vízmolekulák is kölcsönhatásba lépnek egymással. Ilyenkor az egyik vízmolekula hidrogéniont ad át egy másik vízmolekulának és az így létrejövő oxóniumion koncentrációja fogja meghatározni a víz pH-értékét.

A semleges kémhatású vízben a keletkező és lebomló oxóniumionok egyensúlyi állapotot hoznak létre, 25 °C-on 10⁵ Pa nyomáson az oxóniumionok koncentrációja $10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ stabilan.

Híg vizes oldatokban 25 °C-on és 10⁵ Pa nyomáson a pH egyenlő az oxóniumion-koncentráció ($\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$ -ben vett érték) tízes alapú logaritmusának ellentettjével. Mivel $-(\log_{10} 10^{-7}) = -(-7) = 7$, ez azt jelenti, hogy semleges kémhatás esetén a víz pH-ja 7.

Savas közegben (például a gyomorsav, az üres gyomorban, evés előtt) megnő az oxóniumionok moláris koncentrációja, akár $0,1 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$ is lehet.

Mivel $-(\log_{10} 0,1) = -(\log_{10} 10^{-1}) = -(-1) = 1$, ezért a savas közegnek a pH-ja 1. Tehát savas közegben a pH értéke csökken a semlegeshez képest.

Lúgos közegben (például az oltott mész, kalcium-hidroxid, Ca(OH)₂) pontosan fordított a helyzet. A lúgos oldatban az oxóniumionok koncentrációja csökken, akár $10^{-12} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$ is lehet.

Mivel $-(\log_{10} 10^{-12}) = -(-12) = 12$, ezért ennek a lúgos közegnek a pH-ja 12.

Bármely anyag koncentrációjának mérőszáma nulla és egy közé esik. Az ilyen számok 10-es alapú logaritmusai mindig negatív. A (–1)-gyel való szorzás azért van, hogy ne használjunk negatív számokat. Ennek a következménye az, hogy minél nagyobb a folyadék pH-ja annál kisebb benne az oxóniumion koncentrációja. A vizes oldatok pH-ja a 0–14 tartományba esik.

FELADATOK

1. K1 Hogyan változik a vizes oldat pH-ja, ha ezerszeresére nő benne az oxóniumionok koncentrációja?

2. K1 Az emberi vér enyhén lúgos közegnek számít 7,4-es pH-val. Mennyi a vérben az oxóniumionok koncentrációja?



FELADATOK

1. K1

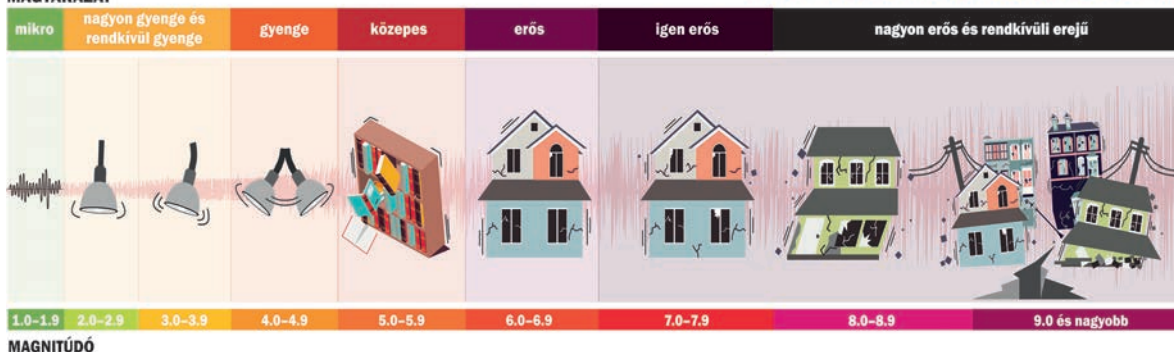


Charles Francis Richter
(1900–1985)

A földrengések erősségét (magnitúdóját) a logaritmikus **Richter-skálán** mérik. Ezt úgy állapítják meg, hogy a földrengéstől 100 km-es távolságban megnézik a szeizmográf (a földrengések erősségének mérésre használt műszer) mutatójának kilengését. Ha a kilengés például $10^4 \mu\text{m}$ (mikrométer), akkor a földrengés a Richter-skálán 4-es erősségű, ha a kilengés mértéke $10^2 \mu\text{m}$, akkor a földrengés 2-es erősségű. Általában a skála a 100 km-es távolságban, mikrométerben mért maximális amplitúdó logaritmusát jelzi.

- A Richter-skálán 8-as erősségű földrengés hányszor akkora kilengést okoz a szeizmográfban, mint a 4-es erősségű földrengés?
- Milyen erősségű az a földrengés, ami a rengés centrumától 100 km-re 5 mm-es kilengést okoz?

MAGYARÁZAT



FÖLDRENGÉS MAGNITÚDÓJA ÉS EREJE

2. K1

A Richter-skáláról leírtaknál kicsit pontosabb definíciót adunk. Itt is a szeizmográf által mért legnagyobb kitérést (amplitúdó) használjuk, de nem csak a rengéstől 100 km-re, hanem 600 km-ig bárhol használhatjuk. A feladat kitűzése előtt ismerkedjünk meg az úgynevezett lokális magnitúdó (ML) definíciójával.

$ML = \log_{10} A + 2,56 \log_{10} D - 1,67$, ahol A a mért amplitúdó mikrométerben, D az epicentrum és a regisztrálás távolsága km-ben. (Ez az összefüggés kb. 600 km távolságig használható.)

- Mekkora amplitúdójú hullámokat rajzol a szeizmográf egy 7-es erősségű földrengés esetén a rengés epicentrumától 100 km-re?
- Mekkora amplitúdójú hullámokat rajzol a szeizmográf egy 7-es erősségű földrengés esetén a rengés epicentrumától 500 km-re?

3. K1

Projektfeladat

Keressetek további példákat logaritmikus skálák használatára! Próbáljátok azok használatát osztálytársaitok számára is közérthető módon elmagyarázni!

15. EXPONENCIÁLIS NÖVEKEDÉS A TERMÉSZETBEN ÉS A TÁRSADALOMBAN

Emelt szint

Ha egy mennyiség időbeli változását vizsgáljuk, és azt tapasztaljuk, hogy egységnyi idő elteltével mindig ugyanennyival nő, akkor azt lineárisan növekedőnek mondjuk. Ha ábrázoljuk ezt a mennyiséget az idő függvényében, akkor egy egyenest kapunk, aminek a meredeksége éppen az adott mennyiség egységnyi időre vetített növekedése.

Ha egy másik mennyiség időbeli változását vizsgáljuk, és azt tapasztaljuk, hogy egységnyi idő elteltével mindig ugyanannyi-szorosára nő, akkor exponenciálisan növekedőnek mondjuk. Ha ábrázoljuk ezt a mennyiséget az idő függvényében, akkor egy exponenciális függvénygörbét kapunk, aminek az adott mennyiség az alapja.

1. példa

Baktériumok szaporodása ideális körülmények között

Az osztódással szaporodó baktériumok száma – rövid alkalmazkodási periódus után, és mindaddig, amíg ezt a környezet lehetővé teszi – kétóránként megkétszereződik, azaz exponenciális növekedést mutat. (Ha a baktériumok száma elér egy magas szintet, akkor bekövetkezik az úgynevezett telítődési szakasz. A környezeti erőforrások végeessége miatt, ez mindenképpen bekövetkezik. Mi most a folyamatnak azt a szakaszát vizsgáljuk, amikor még az exponenciális növekedés a jellemző.)

Egy 1 milliliteres laboratóriumi mintában a kutatók egy adott időpontban körülbelül 100 millió baktériumot számoltak, két óra múlva 200 milliót.

- Írj fel egy olyan függvényt, amely a mérés kezdetétől eltelt idő függvényében megadja a baktériumok számát!
- Hány baktérium lesz ebben a tenyészetben az első mérés után 3 órával?
- Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés előtt 3 órával?
- Mennyi idő alatt nő duplájára a baktériumok száma a mintában?

Megoldás

- Mivel tudjuk, hogy a baktériumok száma exponenciális növekedést mutat, a keresett függvény egy exponenciális függvény lesz, jelöljük ezt $N(t)$ -vel. (A függvény a baktériumok számát adja meg az eltelt t idő múlva.) A szöveg alapján $N(0) = 10^8$ db, $N(2) = 2 \cdot 10^8$ db. A keresett exponenciális függvény kitevőjében szerepelni fog a t . Mi legyen az alap?

Első lehetőség:

Az $\frac{N(1)}{N(0)}$ -t vesszük alapnak. Ilyenkor $N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{N(1)}{N(0)}\right)^t$ alakú lesz. A gyakorlatban az $\frac{N(1)}{N(0)}$

mennyiséget q -val jelöljük, ekkor $N(t) = N(0) \cdot q^t$. A későbbiekben erre is látunk példát, elsősorban gazdasági és pénzügyi számításoknál.

Második lehetőség:

Az alapot egy konkrét számnak választjuk. Mi elég jól ismerjük az $f(x) = 2^x$ függvényt. Ebből kiindulva minden exponenciális függvényt megkaphatunk az eddig tanult függvény-transzformációk segítségével. $N(0)$ -val szoroznunk kell, hogy megkapjuk a kezdeti értéket. Mivel minden exponenciális növekedés más ütemben történik – ezt is figyelembe vesszük –, ezért a kitevőben lévő t -t is megszorozzuk egy konstanssal (ezt rendszerint egy görög betűvel, egészen pontosan λ -val szokás jelölni).

Ebben az esetben az exponenciális növekedés általános képlete, ha a mennyiséget darabszámban (N) mérjük és t -vel jelöljük a megfigyelés kezdete óta eltelt időt:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{\lambda t}.$$

Képletünkben N_0 jelenti a megfigyelt mennyiség kezdeti értékét. A λ a folyamatra jellemző állandó. Pontosabb jelentését a későbbi feladatokban tisztázzuk.

Az egyes gyakorlati problémáknál a szokásoknak megfelelő képlettel fogunk dolgozni.

Nézzük a számítást!

Most induljunk ki az $N(t) = N_0 \cdot 2^{\lambda t}$ képletünkéből. A szöveg alapján $N_0 = 10^8$ db.

Az időt mérjük órában, akkor $N(2) = 2 \cdot 10^8 = 10^8 \cdot 2^{2\lambda}$.

Ebből az egyenlőségből λ kiszámítható:

$$2 \cdot 10^8 = 10^8 \cdot 2^{2\lambda} \quad / : 10^8$$

$$2 = 2^{2\lambda}$$

Vesszük mindkét oldal logaritmusát: $1 = 2 \cdot \lambda$,

$$\text{ahonnan } \lambda = \frac{1}{2}.$$

A baktériumok száma a mintában „ t ” idő eltelte után $N(t) = 10^8 \cdot 2^{\frac{1}{2}t}$.

$$b) N(3) = 10^8 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot 3} = 10^8 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 282\,842\,712 \text{ db, vagyis kb. 280 millió.}$$

$$c) N(-3) = 10^8 \cdot 2^{\frac{1}{2}(-3)} = 10^8 \cdot 2^{\frac{(-3)}{2}} = 35\,355\,339 \text{ db, vagyis kb. 35 millió.}$$

d) Jelöljük x -szel a duplázódáshoz szükséges időt. Az $N(t) = N_0 \cdot 2^{\lambda t}$ összefüggést $t + x$ időpontra felírva

$$2 \cdot N(t) = N_0 \cdot 2^{\lambda(t+x)}$$

$$2 \cdot N_0 \cdot 2^{\lambda t} = N_0 \cdot 2^{\lambda(t+x)} / : N_0$$

$$2 \cdot 2^{\lambda t} = 2^{\lambda t} \cdot 2^{\lambda x} \quad / : 2^{\lambda t}$$

$$2 = 2^{\lambda x},$$

$$\text{amelyből } x = \frac{1}{\lambda}.$$

Ez azt jelenti, hogy a képletben szereplő λ reciprokanak fontos jelentése van. *Megmutatja, hogy az általunk vizsgált mennyiség mennyi idő alatt duplázódik meg.* A duplázási idő teljesen független attól, hogy mikor kezdjük vizsgálni a jelenséget.

Láthatjuk, hogy a most kapott eredmény összhangban van az „a” feladat eredményével.

2. példa

Több ezer éves hindu feladat a következő:

Egy tavirózsatelep felülete mindennap a kétszeresére nő, így 20 nap alatt teljesen benövi a tó felszínét.

a) Hány nap alatt borítaná be a tavirózsa a nyolcadrészig a tavat?

b) Határozzuk meg, hogy a tavirózsa az eltelt napok függvényében a tó felszínének mekkora részét borítja be!

c) Hány nap alatt borítaná be 8 tavirózsa telep egyszerre növekedve a tavat?



Megoldás

- 19 nap alatt a felét, 18 nap alatt a tő negyedét, tehát 17 nap alatt a tő nyolcadát borítaná be a tavirózsa.
- Ha x az eltelt napok számát jelöli, akkor a tavirózsa által lefedett terület arányát az $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $f(x) = 2^{x-20}$, $x \leq 20$ függvény írja le.
- Az előző megoldáshoz hasonló gondolatmenettel számolva, szintén 17 nap alatt.

3. példa

Általában egy ország gazdasága békeidőben exponenciális növekedésnek indul. A bruttó hazai termék (GDP) változása mindenhol a társadalmi érdeklődés középpontjában áll.

A GDP az egy országban egy év alatt előállított végső felhasználásra szánt termékek és szolgáltatások összességének értéke. Ez egy nagyon leegyszerűsített meghatározás, a közgazdaságtan többféle módon közelíti meg a fogalmat. Például az inflációtól is meg kell tisztítani az adatokat. Általában az egy főre jutó GDP-adatokat szokás közzétenni, mert így könnyű összehasonlítani az egyes országok teljesítményét.

Magyarországon az egy főre jutó GDP 1995-ben 6800 euró volt. A 2008-as nagy gazdasági világválság előtti időszakban 2007-ig 10 400 euróra emelkedett.

- Exponenciális növekedést feltételezve, hány százalékkal nőtt évente az egy főre jutó GDP 1995 és 2007 között?
- Modellünk alapján számítva mennyi volt az egy főre jutó nemzeti össztermék 2005-ben?
- A gazdasági válságok idején mindig visszaesik ennek a mutatónak az értéke is. A 2008-as nagy gazdasági világválság nálunk is erősen érzékeltette hatását. Mennyi lett volna az egy főre jutó GDP érték 2015-ben, ha továbbra is megmaradt volna ez a növekedés?

Megoldás

- A gazdasági növekedés esetén q -val jelöljük azt az értéket, ahányszorosára nő évente a GDP. A kezdeti 0. évben a GDP értéke $G(0)$, az n -edik évben pedig legyen $G(n)$.

Az összefüggés $G(n) = G(0) \cdot q^n$ alakú, ahol $G(0) = 6800$ euró, $G(12) = 10\,400$ euró.

Behelyettesítve:

$$10\,400 = 6800 \cdot q^{12}$$

$$1,52941 = q^{12},$$

amelyből $q = 1,036$.

Ez az jelenti, hogy évente az egy főre jutó GDP ebben a 12 évben átlagosan 1,036 szorosára nőtt. Ez 3,6%-os növekedésnek felel meg.

- $G(10) = 6800 \cdot 1,036^{10} = 9685$

Modellünk szerint 2005-ben 9685 euró volt az egy főre jutó GDP. A valóságban 9900 euró volt ez az érték, de ez még nem ront modellünk használhatóságán.

- $G(20) = 6800 \cdot 1,036^{20} = 13\,794$ euró. A valóságban ez az érték csak 11 000 euró volt, a 2008-as válság miatt az addigi növekedési ütem nem volt tartható.

4. példa



(Érettségi feladat alapján, közép szint, 2006.)

A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításakor használják a

következő tapasztalati képletet: $E = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000 - G}{6090}}$. A képletben az E a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó bruttó hazai terméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt?

b) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?

Megoldás

a) Helyettesítsük be a megadott képletbe a $G = 1090$ értéket:

$$E = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000 - 1090}{6090}} \approx 75,5 - 5 \cdot 10^{0,8062} \approx 75,5 - 5 \cdot 6,4 = 43,5.$$

(Számolás közben 4 tizedesjegyre kerekített értékekkel számoltunk.)

A várható élettartam 2005-ben 43,5 év volt a vizsgált országban.

b) 2020-ra G új értéke $G = 1090 \cdot 3 = 3270$. Ezt behelyettesítve E képletébe:

$$E = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000 - 3270}{6090}} \approx 75,5 - 5 \cdot 10^{0,4483} \approx 61,5.$$

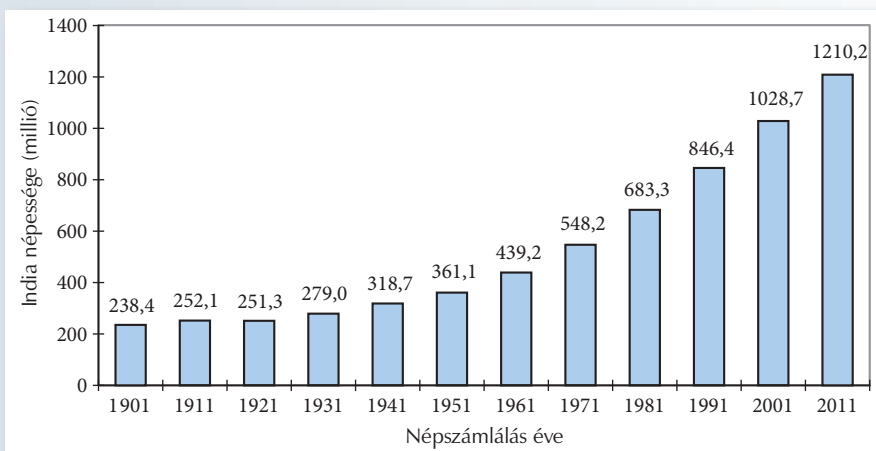
$$61,5 - 43,5 = 18.$$

A várható élettartam 2020-ra 18 évvel nőhet a vizsgált országban.

5. példa

Az országok népessége exponenciálisan nő, ha az életkörülmények nagyjából azonosak maradnak. Példaként nézzük meg India népességének alakulását 1901 óta.

Az 1928-as gazdasági válság utáni időszakot jól modellezhetjük exponenciális növekedéssel. Tekintsük az 1931-es évet kiindulóévnek és az 1971-es év adatát vegyük ismertnek, majd számítsuk ki modellünk alapján egy tetszőlegesen választott évben India lakosságát!



A népességnövekedést az $N(t) = N_0 \cdot 2^{\lambda t}$ összefüggéssel modellezzük, melyből kiszámítható az is, hogy hány évente duplázódik meg a lakosság létszáma. Számításaink megkönnyítésére számoljunk millió fő egységben. Így $N_0 = 279$ (1931-es adat), $N(40) = 548,2$ (1971-es adat).

Az exponenciális összefüggés alapján

$$548,2 = 279 \cdot 2^{\lambda \cdot 40}$$

$$1,964 = 2^{\lambda \cdot 40}$$

Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát:

$$\log_{10}(1,964) = \log_{10}(2^{\lambda \cdot 40})$$

$$0,2933 = 40 \cdot \lambda \cdot \log_{10} 2,$$

ahonnan $\lambda = 0,0244$.

A kapott függvény: $N(t) = 279 \cdot 2^{0,0244 \cdot t}$. (Itt t az 1931-től eltelt időt jelenti években.)

$\frac{1}{\lambda} \approx 41$, ez azt jelenti, hogy kb. 40 évente megduplázódott India lakossága.

Mivel $0,0244 \approx \frac{1}{41}$, ezért

$$N(t) = 279 \cdot 2^{0,0244 \cdot t} = 279 \cdot 2^{\frac{t}{41}}.$$

Ebből az exponenciális összefüggésből azonnal leolvasható, hogy mennyi időnként duplázódik meg India lakossága.

Nézzük meg 2011-ben India lakossága mennyivel tért el a modellünk által kapott értéktől!

Az 1931-es 0. évhez viszonyítva a lakosság létszáma 2011-ben a modell alapján:

$$N(80) = 279 \cdot 2^{80 \cdot 0,0244} \approx 1079.$$

A modellünk 2011-re 1079 millió lakost jósolna, amit a valóság az életkörülmények rohamos javulása miatt jóval meghaladott a maga 1210 milliójával.

A meglévő adatokra próbáltunk egy exponenciális görbét illeszteni. Mi a kezdeti értéknek az 1931-es évet vettük és az 1971-es évben is pontosan a valóságnak megfelelő értéket vette fel a függvény. Ehhez képest a többi értéket csak kisebb eltéréssel kapjuk meg. Érdekes és fontos feladat a tapasztalati értékeket minél jobban megközelítő elméleti függvényt megtalálni.

Elég jó mutató, ha az elméleti és gyakorlati értékek közti különbségek négyzetének az összegét vizsgáljuk. Minél kisebb ez az összeg, annál jobb a közelítő függvény.

Miért van szükség elméleti függvényre? Ha előre szeretnénk jelezni, hogy mi lesz a jövőben, akkor minél jobb közelítő függvényre van szükség.

6. példa

Gergő nagyszülei elhatározták, hogy támogatják unokájuk lakásvásárlását, ezért Gergő születésekor 2 millió forintot lekötöttek, évi 8%-os kamatra. A lakásvásárláskor majd Gergőnek 10 millió forint alaptőkével kell rendelkeznie a lakásvásárlási hitel felvételéhez. Ha Gergő csak a nagyszülők által lekötött pénzt fordítja majd az alaptőkére, akkor hány éves korában veheti meg lakását?

Megoldás

Az alaptőke a következő szabály szerint növekszik:

Az első év végén: $2\,000\,000 \cdot 1,08 = 2\,160\,000$ Ft lesz.

A második év végén: $2\,000\,000 \cdot 1,08 \cdot 1,08 = 2\,332\,800$ Ft lesz.



Keressük azt az n pozitív egész számot, amelyre a tőke eléri a 10 000 000 Ft-ot.

Az n -edik év végén: $2\,000\,000 \cdot 1,08^n \geq 10\,000\,000$.

Rendezve: $1,08^n \geq 5$.

Vegyük az egyenlőtlenség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát. Ez megtehető, mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív. Mivel a 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, így

$$\lg 1,08^n \geq \lg 5;$$

$n \cdot \lg 1,08 \geq \lg 5$; mivel $\lg 1,08 > 0$, ezért

$$n \geq \frac{\lg 5}{\lg 1,08} \approx 20,9.$$

Tehát Gergőnek 21 éves korábban lesz 10 millió Ft-ja a nagyszülők segítségével.

FELADATOK

1. E1

Keressetek további példákat a természetben és a gazdaságban, ahol exponenciális növekedést tapasztalunk!

2. E1

(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2020.)

Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a

$$B(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L}{B_0} - 1\right) \cdot 0,75^t}$$

formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő, napokban kifejezve ($0 \leq t < 30$), L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban ($0 < B_0 < L$). Egy nagyvárosban $L = 1,5$ millió, $B_0 = 1000$.

a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal?

b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint?

3. E1

Míg Kelet-Európa nagy részén, így Magyarországon is a népesség csökkenése a jellemző, a Föld népességére vonatkozóan évi 1,48%-os növekedés tapasztalható. Egy 2001-es felmérés szerint 6,2 milliárd ember élt 2000-ben a Földön. Változatlan szaporodási ütemet feltételezve mikorra érheti el a Föld lakossága a 10 milliárdot?

4. E1

Projektfeladat:

Keressetek olyan adatsorokat, amelyekre exponenciális függvény illeszthető! Keressetek minél jobb közelítést adó függvényeket.

(A 2020-as koronavírus-járvány adatai elég hosszú időn keresztül mutattak exponenciális növekedést.)

16. EXPONENCIÁLISAN CSÖKKENŐ MENNYISÉGEK

Az előző leckében az exponenciálisan növekvő mennyiségekkel foglalkoztunk. A természetben és a társadalomban ugyanúgy jelen vannak az exponenciálisan csökkenő mennyiségek is. Ez azt jelenti, hogy egy-egy idő alatt mindig ugyanannyiad részére csökken a vizsgált mennyiség.

Így az előző lecke első megközelítése alapján $\frac{N(1)}{N(0)} = q$ értéke egynél kisebb lesz. Ezért, ha $0 < q < 1$, akkor exponenciálisan csökkenő mennyiségről beszélünk.

Definíció

Ha egy mennyiség változását az $N(t) = N(0) \cdot q^t$ ($1 > q > 0$) képlettel írhatjuk le, akkor exponenciálisan csökkenő mennyiségről beszélünk.

Ez nem lett sokkal jobb megközelítésünkben mivel csökkenésről van szó, az $f(x) = 2^{-x}$ függvényből indulhatunk ki.

$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\lambda t}$, ahol N_0 a kezdeti érték, λ pedig a folyamatra jellemző állandó, aminek a reciproka a felezési idő lesz, amit T -vel szokás jelölni. A felezési idő megmutatja, hogy bárhonnán indulva mennyi idő alatt feleződik meg az adott mennyiség. Ez után a képletünk $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ alakban is írható. Az exponenciális függvények ábrázolásánál láttuk, hogy az ilyen típusú függvények szigorúan monoton csökkenők.

1. példa

Radioaktivitás:

Egy adott kémiai elem atomjai között lehetnek különböző tömegszámú atomfajták, melyeknek a legtöbb fizikai és kémiai tulajdonsága megegyezik. Ezeket *izotópoknak* nevezzük. Nem mindegyik stabil. Amelyek elbomlanak, azokat nevezzük radioaktív izotópoknak. Ezek a rájuk jellemző valószínűséggel bomlanak kisebb tömegű részecskékre. Ennek következménye, hogy egy adott anyagmennyiségben a radioaktív izotópok száma csökken.

Példaképpen tekintsünk egy olyan radioaktív izotópot, amelynek egy hét alatt a négyötöde lebomlik. Így egy hét után a kezdeti mennyiség egyötödére csökken az átalakulásra váró magok száma. Egy újabb hét múlva ennek is csak az egyötöde, azaz a kezdeti mennyiség egy huszonötöde marad. És így tovább.

Hányad részére csökken az átalakulásra váró atommagok száma öt hét alatt?

Megoldás

Mivel minden héten ötödére csökken, ezért $\left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125}$ -öd részre csökken.

2. példa

A radioaktív anyagok bomlását az $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi tömeget, m_0 a kezdeti tömeget, t az eltelt időt, T pedig az anyag felezési idejét jelöli.

Két óra alatt hányadrészére csökken a 19,7 perc felezési idejű radioaktív bizmutizotóp tömege? A választ egészekre kerekítve adjuk meg.

Megoldás

Az $\frac{m_0}{m}$ értékét keressük, ezért rendezzük át az eredeti egyenletet:

$$m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}};$$

$$1 = \frac{m_0}{m} \cdot 2^{-\frac{t}{T}};$$

$$2^{\frac{t}{T}} = \frac{m_0}{m}.$$

Az eltelt idő: $t = 2$ óra, a felezési idő: $T = 19,7$ perc. Behelyettesítve:

$$\frac{m_0}{m} = 2^{\frac{120}{19,7}} \approx 68,17.$$

A bizmutizotóp tömege 2 óra alatt ≈ 68 -ad részére csökken.

3. példa

Radiokarbonos kormeghatározás:

A levegőben lévő széndioxid-molekulák (CO_2) nagy része a stabil ^{12}C -ből áll. (Az ilyen szénatomok atommagját hat proton és hat neutron alkotja.) Kis mértékben a kozmikus háttérsugárzás hatására létrejövő ^{14}C (ezeknek a radiokarbon szénatomoknak az atommagjában hat proton és nyolc neutron van) radioaktív, tehát idővel elbomló izotóp is megtalálható benne. A kétfajta szénizotóp aránya $\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} = 1,17 \cdot 10^{-12}$. Ez az

arány Földünkön évezredek óta igen stabilan állandó. Az anyagcsere folyamán a szén beépül a növényekbe és más élőlényekbe is (pl. az emberi csontba), mivel szervezetünk ugyanazon anyag különböző tömegszámú izotópjait nem tudja megkülönböztetni. Emiatt a radioaktív és nem radioaktív szénatomok aránya állandó az élő emberi és állati szervezetekben. Ha az anyagcsere folyamata leáll, akkor ez a beépülés megszűnik és innentől kezdve a ^{14}C aránya csökken az elhalt szervezetben. Mivel a ^{14}C felezési ideje 5730 ± 40 év, ezért hosszú idő alatt (tíz felezési idő) lesz kimutathatatlanul kicsi a mennyisége. Kb. 60 000 év alatt csökken az elbomló részecskék száma olyan kicsire, hogy annak meghatározása már a gyakorlatban lehetetlen. A 40 éves eltérés miatt a radioaktív kormeghatározás pontosságára is következtethetünk. Ez nagyon kicsi ahhoz képest, hogy egy lelet korát elhelyezzük az elmúlt 60 000 év távlatában.

Feladat: Hány éves lehet az az emberi koponya, aminek vizsgálata során a benne lévő szénizotópok arányát $\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} = 2 \cdot 10^{-13}$ -nek találták?

Megoldás

A mintában az elhalálozás pillanatában lévő ^{14}C tömege legyen m_0 , és t idő elteltével $m(t)$. A T jelöli a felezési időt, ami most 5730 év.

Először a megmaradt és az eredetileg meglévő radioaktív izotópok arányát határozzuk meg:

$$\frac{m(t)}{m_0} = \frac{2 \cdot 10^{-13}}{1,17 \cdot 10^{-12}} = 0,17094.$$

Az $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ összefüggésbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$0,17094 = 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Mindkét oldal tizes alapú logaritmusát véve

$$t \approx 14\,600 \text{ év.}$$

A lelet kb. 14 600 éves lehet.

4. példa

Egy tórendszer körüli üdülőhelyet azzal reklámoztak, hogy egy óriási hőlégballon tartózkodott folyamatosan a tórendszer felett. A reklámballonba 3500 m^3 gázt töltöttek. A gázvesztesség, melyet tekintsünk állandónak, 1 hét alatt a mindenkori gázmennyiség 1,8%-a.

- Mennyi ideig tud a ballon a levegőben maradni, ha 75% alatti gázmennyiség esetén már süllyedni kezd?
- Mikorra fogyna el a gáz fele?

Megoldás

Ha a gázvesztesség egy hét alatt 1,8%, akkor a hét végére maradó gázmennyiség 98,2%-ra csökken.

- Az első hét végére a gázmennyiség 98,2%-a, azaz $0,982$ része marad. A második hét végére a gázmennyiség $0,982^2$ része marad, és így tovább. Tehát keressük a $0,982^n = 0,75$ egyenlet megoldását.

$$0,982^n = 0,75. \text{ Az előző példákban láttuk alapján:}$$

$$n \cdot \lg 0,982 = \lg 0,75;$$

$$n \approx 15,84 \text{ (hét).}$$

Tehát a hőlégballon körülbelül 111 napig marad a levegőben.

- A megmaradó gázmennyiségre felírható a következő egyenlet:

$$0,982^x = 0,5;$$

$$x = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,982} \approx 38,16.$$

A gázmennyiség fele 38,16 hét alatt fogyna el.



5. példa

Magyarország népessége a KSH adatai szerint 2000-ben 10,222 millió fő, míg 2001-ben 10,2 millió fő volt. Ha feltesszük, hogy a lakosság számának csökkenése állandó arányú (nem befolyásolják aktuális társadalmi és gazdasági folyamatok), akkor

- 2000 után hány év elteltével csökken 10 millió fő alá a népesség, és
- várhatóan hány fő lesz a népesség 2030-ban?

Megoldás

a) A csökkenés mértéke 2001-ben $q = \frac{10\,200}{10\,222} \approx 0,997\,848$ volt. A $10\,222 \cdot q^n = 10\,000$ egyenletből

$$q^n = \frac{10\,000}{10\,222} \rightarrow n = \frac{\lg \frac{10\,000}{10\,222}}{\lg q} \approx 10,19; \text{ vagyis várhatóan a 11. évben csökken 10 millió fő alá a népesség.}$$

b) $10\,222 \cdot q^{30} \approx 9582$ (ezer fő), vagyis kicsit több mint 9,5 millió a modell szerint várható népességszám 2030-ban.

(Nézz utána az interneten, mi a valódi 2011-es érték, és mekkora most Magyarország népessége!)

PROJEKTFELADATOK

1. K1

Keressetek további példákat exponenciálisan csökkenő mennyiségekre!

2. K1

Soroljatok fel minél több elemet, aminek van radioaktív izotópja?

3. K1

Nézzetek utána, hogyan lehet 60 000 évnél jóval régebbi anyagok korát meghatározni?

PÉNZÜGYI ALAPFOGALMAK (Olvasmány)

Az előző leckében láttunk néhány kamatszámítási feladatot; a nehezebb témakörökkel, mint például a járadékszámítás, jövőre találkozunk. Ebben az olvasmányban a mindennapok néhány pénzügyi fogalmát részletezzük.

MUNKABÉR

A munkabért a munkáltató fizeti a munkavállalónak az elvégzett munka után. A teljes összeget azonban a munkavállaló általában nem kapja kézhez, mert abból a munkáltató különböző jogcímenek levon bizonyos tételeket. A munkabért ezért a köznyelvben bruttó, a levonások után kézhez kapott pénzösszeget pedig nettó bérként említjük.

A bruttó bér az alapbér mellett egyéb juttatásokat tartalmazhat: pótlékokat, ügyeleti díjakat, jutalmakat stb. Nem számítanak bele a bruttó bérbe a természetbeni juttatások és a költségtérítések (pl. útiköltség-térítés, céges eszközök használata).

1. példa

Középszintű érettségi vizsgafeladat volt 2013-ban az személyi jövedelemadó (szja) és a munkabér számítása egy korábban érvényben lévő rendszer szerint. A feladat így szólt:

A munkavállaló **nettó** munkabérét a **bruttó** béréből számítják ki levonások és jóváírások alkalmazásával. Kovács úr **bruttó** bére 2010 áprilisában 200 000 forint volt.

A 2010-ben érvényes szabályok alapján különböző járulékokra ennek a bruttó bérnek összesen 17%-át vonták le.

Ezenfelül a bruttó bérből személyi jövedelemadót is levontak, ez a bruttó bér 127%-ának a 17%-a volt. A levonások után megmaradó összeghez hozzáadtak 15 100 forintot adójóváírásként. Az így kapott érték volt Kovács úr **nettó** bére az adott hónapban.

- a) Számítsa ki, hogy Kovács úr **bruttó** bérének hány százaléka volt a **nettó** bére az adott hónapban!
- Szabó úr **nettó** bére 2010 áprilisában 173 015 forint volt. Szabó úr fizetésénél a levonásokat ugyanazzal az eljárással számították ki, mint Kovács úr esetében, de ebben a hónapban Szabó úr csak 5980 forint adójóváírást kapott.
- b) Hány forint volt Szabó úr **bruttó** bére az adott hónapban?

Megoldás

- a) Kovács úr nettó bére: $200\,000 - (200\,000 \cdot 0,17) - (200\,000 \cdot 1,27 \cdot 0,17) + 15\,100 = 137\,920$ Ft, bruttó bérének kb. a 69%-a ($137\,920 / 200\,000 = 0,6896$).
- b) $x - (x \cdot 0,17) - (x \cdot 1,27 \cdot 0,17) + 5980 = 173\,015$. Az egyenletből kiszámítható, hogy Szabó úr bruttó bére kb. 272 000 Ft volt.

ADÓ

Az adó általában magánszemélyek vagy cégek kötelező anyagi hozzájárulása a közszükségletek fedezéséhez például az államnak vagy az önkormányzatnak. A járulékoktól, illetékektől az különbözteti meg, hogy az adóért az adófizető semmilyen ellenszolgáltatásra nem jogosult.

Az adónak többféle funkciója van:

1. Az állami, önkormányzati kiadások (honvédelem, államigazgatás, közúthálózat, oktatás stb.) fedezése.
2. A piaci szereplők befolyásolása kedvezményes vagy magasabb adóval. (Az alkoholokra, illetve dohánytermékekre kirótt jövedéki adó célja az egyenlő versenyfeltételek, a feketekereskedelem visszaszorítása.
3. A jövedelmek újraelosztása. Az állam a magasabb jövedelmű egyénektől, cégektől beszedett magasabb adóbevételt a szociális juttatásokon (álláskeresői járadék, családi pótlék stb.) keresztül csoportosítja át a társadalom egyéb szereplőire felé.

Lényegesen leegyszerűsítve a legjelentősebb magyarországi adófajták és mértékük 2021-ben az alábbiak:

1. Általános forgalmi adó (áfa)

Az áfa általános kulcsa jelenleg 27%, de vannak kedvezményes áfakulcsú termékek is. Egy termék vagy szolgáltatás nettó ára az áfa nélküli ára, bruttó ára az áfával növelt nettó ár.

2. Személyi jövedelemadó (szja)

Magyarországon jelenleg ún. egykulcsos szja-rendszer van életben, ami azt jelenti, hogy minden jövedelem után 15% adót kell fizetni. (Egy másik, az ún. progresszív adórendszerben a magasabb jövedelműek jövedelmének egy része nagyobb adókulccsal adózik, mint az alacsonyabb jövedelműek jövedelme.) A személyi jövedelemadó összege jelenleg különböző alapon (pl. eltartott gyerekek száma) és mértékben csökkenthető kedvezményekkel.

3. Társasági adó

Nagyon leegyszerűsítve: az országban tevékenykedő cégek nyereségük 9%-át kötelesek adóként befizetni.

2. példa

(Áfa számítása) A táblázat sorai-
ban rendre két-két érték adott, a hi-
ányzó adatok a fentiek alapján köny-
nyen kiszámíthatók:

Megnevezés	Nettó érték (Ft)	Áfakulcs (%)	Áfa értéke (Ft)	Bruttó érték (Ft)
„A” termék	20 000	27		
„B” termék	15 000		4050	
„C” termék		18	1440	
„D” termék			2160	14 160
„E” termék	6 000			6 300
„F” termék		5		4 200

Megoldás

Áfa értéke = bruttó érték – nettó érték = nettó érték · áfakulcs / 100.

Áfakulcs = (áfa összege / nettó ár) · 100.

Bruttó érték = nettó érték + áfa értéke = nettó érték · (1 + áfakulcs / 100).

Nettó érték = bruttó érték – áfa értéke = bruttó érték / (1 + áfakulcs / 100).

A fentek alapján a hiányzó eredmények (soronként, forintban):

„A”: 5400; 25 400.

„B”: 27; 19 050.

„C”: 8000; 9440.

„D”: 12 000; 18.

„E”: 5; 300.

„F”: 4000; 200.

HITEL

A hitel egy pénzügyi művelet, melynek két változata ismert.

1. A hitelező lemond az áru szolgáltatás azonnali megfizetéséről.

2. A hitelező pénzt ad az adósnak, aki a tartozást a megállapodás alapján fizeti vissza.

Pénzbeli hitelt általában bankok nyújtanak magánszemélyek vagy cégek részére. A hiteleknek több fajtája van (bianszó hitel, személyi hitel, záloghitel, jelzáloghitel stb.). Az adós pénzügyi helyzetétől függ, hogy milyen biztosítékot vár a bank.

A hitel nyújtásáért cserében az adós különböző díjakat és kamatot fizet a banknak. A hitel törlesztése általában részletekben történik. Magyarországon (az egyes hitelek jobb összehasonlíthatósága miatt) a banknak minden hitel esetében közzé kell tennie az ún. teljes hiteldíjmutatót (THM), amelyből az derül ki, hogy a kamat és a hitelhez kapcsolódó költségelemek mekkora arányúak a tőkéhez képest.

A bankok a reklámajánlataikban szereplő THM meghatározásánál 5 000 000 Ft-os hitelösszeggel és 20 éves futamidővel számolnak.

KÖZELÍTŐ ÉRTÉKEK (Olvasmány)

Hajlamosak vagyunk azt hinni, hogy a matematika tudománya – természeténél fogva – pontos számokkal, pontos értékekkel dolgozik. Ez egyáltalán nincs így. A közelítő értékek használata természetes dolog, csak néhány példát említünk:

1. Mért abszolút pontosan általában nem lehet. A legtöbb mérés eredménye közelítő érték, így általában a számítások végrehajtását igénylő gyakorlati feladatok alapadatai is azok.

2. A számolások során gyakran használunk közelítő értékeket. Például az $\frac{1}{3} + \sqrt{2}$ összeg kiszámításakor mindkét tag helyett azok közelítő értékeivel számolunk.

3. A mai elektronikus korban sűrűn alkalmazzuk a számológépeket. A számológép sokszor szükség-szerűen közelítő értékekkel dolgozik, és (általában) kerekített értéket jelez ki.

9. osztályban már foglalkoztunk a számítások pontosságával, a közelítő értékek általános használatával. Megemlíttük a kerekítési szabályt (hogyan kerekítsünk; mikor lehet, és mikor nem érdemes kerekíteni), egyszerű hibaszámításokat végeztünk, kitértünk a számológépek célszerű használatára, valamint külön olvasmányban foglalkoztunk a számológépek számábrázolásával. Olyan fogalmakkal találkoztunk, mint hiba, helyes számjegy, értékes számjegy.

Idén a közelítő értékkel és a hibaszámítással kapcsolatban további példákat elemzünk.

1. példa

Egy téglalap két oldala $a = 23,8$ egység és $b = 8,9$ egység. Mekkora a téglalap kerülete és területe?

Megoldás

A kerület $K = 2(a + b) = 65,4$ egység; a terület $T = ab = 211,82$ területegység. Egyszerű tankönyvi feladatról van szó, az adatok és a válasz pontosnak tekinthető.

2. példa

Egy iskolában úgy dönt a vezetés, hogy a tornatermet leparkettázzák. A gondnok megmérte a téglalap alakú tornaterem oldalait, és dm-es pontossággal az $a = 23,8$ m és $b = 8,9$ m értékeket kapta. Mekkora a tornaterem kerülete és területe? (Azaz: mekkora felületet kell parkettázni, és milyen hosszú a padló szélén körben futó szegélyléc?)

Megoldás

A számadatok az első példához képest nem változtak, $K = 65,4$ m és $T = 211,82$ m² adódik. Vegyük figyelembe, hogy a mérés dm-es pontosságú volt, azaz az utolsó számjegyek kerekítettek. Ekkor a és b közelítő értékek, $23,75 \leq a < 23,85$ és $8,85 \leq b < 8,95$.

A minimális értékekkel számolva

$$K_{\min} = 2 \cdot (23,75 + 8,85) = 65,2 \text{ (m)} \text{ és } T_{\min} = 23,75 \cdot 8,85 = 210,1875 \text{ (m}^2\text{)};$$

a maximális értékekkel számolva

$$K_{\max} = 2 \cdot (23,85 + 8,95) = 65,6 \text{ (m)} \text{ és } T_{\max} = 23,85 \cdot 8,95 = 213,4575 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Tehát azt mondhatjuk, hogy $65,2 \text{ m} \leq K < 65,6 \text{ m}$ és $210,1875 \text{ m}^2 \leq T < 213,4575 \text{ m}^2$.

Ha feltételezzük, hogy a parkettázási munkák során nem keletkezik veszteség (ez egyébként csaknem elképzelhetetlen), még akkor is kockázatos lenne $65,4$ m szegélylécet és 212 m² parkettát vásárolni. A közelítő értékek alkalmazása miatt előfordulhat, hogy egyik anyag mennyisége sem lesz elegendő.

Ha tehát nem „tankönyvi”, hanem gyakorlati, életközeli feladatról van szó, akkor bizony számolni kell a közelítő értékek alkalmazásából adódó hibákkal.

Ha m egy x szám **közelítő értéke**, akkor ezt az $m \approx x$ módon jelöljük.

Ha az x számot m -mel közelítjük, akkor a közelítés **abszolút hibája** az x -nek az m -től való **eltérése**.

Ez az $x - m$ és $m - x$ különbségek közös abszolút értéke: $|x - m| = |m - x|$. (A számegyenesen ez a szakasz az x és m pontok távolsága.) A hiba tehát a közelítő érték és a pontos érték eltérése; pl. $1,165$ -nek $1,17$ -től és $1,16$ -tól való eltérése is $0,005$.

A **relatív hiba** az abszolút hiba és az x szám abszolút értékének a hányadosa: $\left| \frac{m - x}{x} \right|$. Általában %-ban adjuk meg. (Ha nem jelezzük, hogy melyik hibafajtáról van szó, hanem egyszerűen csak hibáról beszélünk, akkor az abszolút hibára gondolunk.)

Megjegyzés

Sajnos a legtöbb feladatban a hibát nem ismerjük, mert a mérendő (pontos) x mennyiség nem ismert. Amit itt hibának nevezünk, az tulajdonképpen az ún. *hibakorlát*. Ennél a tényleges hiba nagyobb nem lehet.

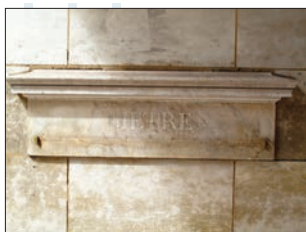
ÉRDEKESSÉGEK

A hibakorlát megadása

A hibakorlát a hiba értékének egy felső korlátja. A második példában az $a = 23,8$ m közelítést alkalmaztuk. A kerekítés miatt $23,75 \text{ m} \leq a < 23,85 \text{ m}$, vagyis $a \in [23,75 \text{ m}; 23,85 \text{ m}]$; a hibakorlát ekkor $0,05 \text{ m}$. (Az $a = 23,8 \text{ m}$ a $0,1 \text{ m}$ hosszú intervallum „közepe”, ezért bármennyi is az a oldal tényleges értéke, biztos, hogy a hiba legfeljebb az intervallum hosszának a fele.)

Tizedre kerekített értéknél a hibakorlát $0,05$; századra kerekített értéknél $0,005$ stb.

Egy másik jelölés $a = 23,8 \pm 0,05 \text{ m}$ formájú. Itt a hibakorlát $0,05 \text{ m}$, és a zacskós vagy dobozos élelmiszer-ipari termékeken leginkább ezzel az alakkal találkozunk. Például: egy zacskóban lévő anyagmennyiség $400 \pm 5 \text{ gr}$. (A másik gyakori jelölés, a „kb. 400 gr ”, nagyvonalúan eltekint a hibakorlát feltüntetésétől.)



Az állandó hőmérsékleten őrzött etalon méterrúd a franciaországi Sèvres-ben

A Párizs melletti Sèvres-ben őrzött etalon méterrúd a saját mérőeszközeinkkel mérjük, és a hosszát $100,4 \text{ cm}$ -nek találjuk. Ekkor az $x = 100 \text{ cm}$ pontos értéket az $m = 100,4 \text{ cm}$ értékkel közelítjük. A mérés abszolút hibája $100,4 - 100 = 0,4 \text{ (cm)}$; a re-

$$\text{latív hiba} \left| \frac{100,4 - 100}{100} \right| = 4 \cdot 10^{-3}, \text{ azaz } 0,4\%.$$

A relatív hiba a mérés, a közelítés „relatív” pontosságára utal. Tegyük fel, hogy egy híd hosszát fél méteres (abszolút) hibával határozzuk meg. Ez a mérési pontatlanság elfogadhatatlan, és igen súlyos a tévedés, ha egy patakon átívelő, $2,5$ méteres fahídról van szó; de egy 2 km hosszú viadukt esetében tűrhető ez a hiba. (Az első esetben a relatív hiba

$$\frac{0,5}{2,5} = 0,2, \text{ azaz } 20\%; \text{ a második esetben } \frac{0,5}{2000} = 2,5 \cdot 10^{-4}, \text{ azaz } 0,25 \text{ ezrelék.})$$

3. példa

Melyik pontosabb: a $c = 3,2$ vagy a $c = 3,20$ kerekített érték?

Megoldás

Az első esetben a hibakorlát $0,05$, a második esetben $0,005$. Ez utóbbi érték tízszer pontosabb. Látható, hogy a kerekítésbeli utolsó 0 értékes jegy, van funkciója; tehát nem hagyható el.

Jelöljük a hibakorlátot ε -nal ($\varepsilon > 0$). Azt mondjuk, hogy az m szám az ε hibakorláton belül (azaz ε pontossággal) közelíti meg az x számot, ha a közelítés során elkövetett hiba nem nagyobb az ε hibakorlátnál, azaz $|m - x| \leq \varepsilon$.

Az egyenlőtlenség különböző alakokba írható:

$$-\varepsilon \leq m - x \leq \varepsilon, \text{ vagyis}$$

$$x - \varepsilon \leq m \leq x + \varepsilon.$$

Minthogy $|x - m| = |m - x|$ miatt m és x szerepe felcserélhető, azt is írhatjuk, hogy

$$m - \varepsilon \leq x \leq m + \varepsilon.$$

(Szemléletesen: a számegyenesen az m pont az $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ intervallumban, vagy az x pont az $[m - \varepsilon, m + \varepsilon]$ intervallumban van.)

A π közelítése

Ha – mint általában matematikaórán – két tizedesjegy pontossággal közelítjük a π -t, akkor annyit tudunk, hogy 0,005 pontossággal 3,14-dal egyenlő. Azaz $|\pi - 3,14| \leq 0,005$, innen $3,14 - 0,005 \leq \pi \leq 3,14 + 0,005$, azaz $3,135 \leq \pi \leq 3,145$.

Hasonlóan látható be, hogy egyre több, véges számú közelítő érték (a megfelelő hibakorlátokkal együtt) általában növeli a pontosságot, de továbbra sem határozza meg egyértelműen a közelített számot.

4. példa

Arkhimédész a körbe írt szabályos sokszögek területével közelítve π értékére a $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ egyenlőtlenség-rendszert kapta. Mennyire volt pontos a közelítése?

Megoldás

Arkhimédész szerint $\pi \in \left[\frac{223}{71}, \frac{22}{7}\right]$, vagyis $\pi \in \left[\frac{1561}{497}, \frac{1562}{497}\right]$. Legyen π értéke az intervallum felezőpontja, ekkor a hibakorlát az intervallum hosszának a fele. Azaz Arkhimédész közelítése: $\pi \approx \frac{3123}{994} \approx 3,141851107$, és a hibakorlát $\frac{1}{994} \approx 1,006 \cdot 10^{-3}$.

A mai tíz jegyre pontos érték: $\pi \approx 3,141592654$, a görög tudós által elkövetett hiba $\approx 2,58453 \cdot 10^{-4}$.

Megjegyzés

Általában is így van: a $0 < c < x < d$ egyenlőtlenségpár azt jelenti, hogy c és d számtani közepe, $\frac{c+d}{2}$, az $\varepsilon = \frac{d-c}{2}$ hibahatáron belül megközelíti x -et.

Arkhimédész volt az ókor legnagyobb hatású, alkotó matematikusa és fizikusa. A szicíliai görög városban, Szirakuzában élt. Több nevezetes eredmény fűződik a nevéhez. A π közelítése mellett foglalkozott téreometriával (megállapította például, hogy az egyenlő oldalú henger, a bele írható gömb és a hengerbe írható kúp térfogatainak aránya $3 : 2 : 1$), kiszámította a parabolaszemek területét, speciális görbéket elemzett (arkhimédészi spirális). Mechanikai jellegű munkáiban vizsgálta a síkidomok súlypontjait, a folyadékok és gázok egyensúlyát, de az ő nevéhez fűződik a differenciál-csigasor feltalálása is.

Amikor Kr. e. 213-ban a római seregek megtámadták Szirakuzát, Arkhimédész sikeresen támogatta tállalmányaival a védelmet, így a város évekig ellenállt az ostromnak.



Arkhimédész
(Kr. e. 287–212)

A HIBÁK ÖRÖKLŐDÉSE (Műveletek és hibaterjedés)

A 2. példa alapján látható, hogy összeadás és kivonás során a hibakorlátok összeadódnak; ha pedig a közelítő értéket a (pozitív) c számmal szorozzuk, a hibakorlát c -szeresre változik.

Néhány észrevételt tehetünk:

- Ha több azonos hibakorláttal rendelkező számot adunk össze, akkor a hibakorlát az eredeti többszöröse lesz. Ez persze nem azt jelenti, hogy a *hiba* is többszörös lesz: a számok egy részében „lefelé”, egy részében „felfelé” kerekítünk, így a kerekítési hibák többnyire kompenzálják egymást.

- A fentiekből következik, hogy *lényeges a kerekítés, illetve a műveletvégzés sorrendje*. Összeg kerekített értéke és kerekített tagok összege különbözhet. Például: $1,3 + 2,4$ egészekre kerekített értéke 4, míg egészekre kerekítés után az összeg $1 + 2 = 3$.

- Ha a két összeadandó nem azonos pontosságú, akkor a kevésbé pontos szám határozza meg az összeg hibakorlátját. Például: $a = 3,56$ és $b = 111,2$ kerekített értékek összege $a + b = 114,76$, a hibakorlát $0,005 + 0,05 = 0,055$, a közrefogó intervallum hossza ennek kétszerese: $0,11$.

$114,705 \leq a + b < 114,815$; az összeg lényegében b pontatlanságát „örizte meg”, az első tizedesjegyben lehet eltérés.

Szorzás és osztás esetén a hibakorlátra nem tudunk hasonlóan „szép” képletet felállítani. Sokszor a konkrét feladattól függ, hogy milyen pontossággal dolgozunk.

Nagyszámú műveletvégzés során a hibák kellemetlenül megnőhetnek. Csökkentésükre különböző eljárások ismertek, az alábbiakban erre mutatunk egy példát.

5. példa

Határozzuk meg 3 tizedesjegy pontossággal számolva $\frac{1}{\sqrt{2,01} - \sqrt{2}}$ értékét!

Megoldás

Első megoldás

$$\sqrt{2,01} \approx 1,418; \sqrt{2} \approx 1,414; \sqrt{2,01} - \sqrt{2} \approx 0,004; \frac{1}{\sqrt{2,01} - \sqrt{2}} \approx \frac{1}{0,004} = 250.$$

Második megoldás

A számológép alapján $\frac{1}{\sqrt{2,01} - \sqrt{2}} \approx 283,1958$.

Nyilván a számológép eredménye pontosabb (hiszen a számolás során több értékes jegyet őrzött meg). Miért ilyen nagy az első megoldás hibája?

$\sqrt{2,01}$ és $\sqrt{2}$ közelítő értékei egyaránt négy értékes jegyet tartalmaznak. A két szám különbsége kicsi, a kivonás után kapott 0,004-ben már csak egyetlen értékes jegy szerepel. $\sqrt{2}$ relatív hibakorlátja $\frac{0,0005}{1,414} \approx 0,035\%$, $\sqrt{2,01}$ relatív hibakorlátja szintén ennyi. $\sqrt{2,01} - \sqrt{2}$ hibakorlátja 0,001, relatív hibakorlátja $\frac{0,001}{0,004} \approx 25\%$, ami rendkívül megnőtt. A kivonás ebből a szempontból igen kellemetlen műveletnek bizonyult, érdemes a kifejezést átalakítanunk.

Harmadik megoldás

A tört nevezőjét gyöktelenítjük: $\frac{1}{\sqrt{2,01} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}}{(\sqrt{2,01} - \sqrt{2})(\sqrt{2,01} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}}{0,01}$. Most $\sqrt{2,01} + \sqrt{2}$ hibakorlátja 10^{-3} , tehát három értékes jegyet tartalmaz; de a 0,01 már *pontos érték*. $100(\sqrt{2,01} + \sqrt{2}) \approx 100 \cdot 2,832 = 283,2$.

Ez az eredmény már elfogadható pontosságú.

Amikor közelítő értékeket alkalmazunk, akkor a pontos számadatok helyett valójában *szám-
közökkel* dolgozunk (közelítő érték $\pm$ hibakorlát). A pontos számok, egyenletek helyett
egyenlőtlenségekkel, egyenlőtlenség-rendszerekkel számolunk, és az eredmény is számköz lesz.

A gyakorlatban a közelítés másik nehézségét az jelenti, hogy előre adott (vagy megállapí-
tható), hogy legfeljebb mekkora hibát szabad elkövetnünk. Ha egy feladatban előírt pontosságú
végeredményt kívánnak meg, akkor visszafelé kellene számolnunk, de ez igen nehéz. Általá-
ban úgy járunk el, hogy a megoldás során több tizedesjegyet veszünk figyelembe (ezek az ún.
tartalék jegyek), és a végeredményt a megfelelő pontosságra kerekítjük. Ekkor legfeljebb azt
kockáztatjuk, hogy egy-két tizedesjegyet feleslegesen cipeltünk magunkkal.

Fogalmak

közelítő érték;
(abszolút) hiba;
relatív hiba;
hibakorlát;
relatív hibakorlát.



II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

Mint korábban írtuk, a gazdasági élet fejlődése szükségessé tette a megtermelt javak számszerű ellenőrzését, nyilvántartását. Az így kialakult „számírás” persze nem mindig jelentett „számot”, és nem mindig annak „írását”. A történelem népei különféle módon kódolták az adatokat. Ismerünk csomókkal ellátott zsinórokat (például a latin-amerikai indián népeknél), behasogatott végű bambuszbót (afrikai bennszülöttek eszköze), s a mai napig gyakori régészeti lelet a rováspálca vagy rovásbot, amit közvetlen magyar őseink is használtak.

A termelés növekedése, az árucseré erősödése miatt egyre nagyobb elemszámú halmazokat kellett dokumentálni, s ezek számlálásához az adatok többszöri átcsoportosítására volt szükség. Az így kialakult számrendszerek alapszáma eltért az egyes népeknél.

A képen a londoni Big Ben óratorony látható. Az óráinkon a 60-as és a 12-es számrendszert használjuk.

A MATEMATIKAI JELÖLÉSRENDSZER KIALAKULÁSA (Olvasmány)

A kéz- és lábujjak természetes számolóeszközök, így igen gyakori volt az ötös, tízes és húszas számrendszer kialakulása. A tizenkettes számrendszerbeli számok nagy előnye, hogy maradék nélkül oszthatók több részre. Több nyelvben is külön fogalom jelöli a „tucat” mennyiséget, s az időméréssel kapcsolatban is fennmaradtak a számrendszer emlékei. (Egy év 12 hónapból áll, a nappal és az éjszaka 12 órából.) Az angolszász mértékegységek egy része ma is 12-es számrendszer alapú.

Szintén az időméréssel kapcsolatos az ókori eredetű 60-as számrendszer, a babiloniak találmánya. Tőlük ered az óra és perc felosztása, valamint a szögmérés rendszere is.

Őseink valószínűleg a hetes számrendszert használták, de a hetes szám több ókori nép kultúrájában is kitüntetett szerepet játszott. (A hébereknél a teljességet jelképezte, de például a Bibliában is többször találkozunk ezzel a számmal.)

A számjegyek kialakulásának gyakorlati oka van: lehetőleg minél egyszerűbben, áttekinthetőbben kellett ábrázolni a számadatokat. Kezdetben a legtöbb nép más-más számjegyeket használt (elsősorban olyanokat, amelyek valamilyen módon a saját írásukkal voltak kapcsolatban). A számfogalom absztrakt volta miatt azonban nem okozott nehézséget, hogy szükség esetén vagy praktikus okokból a szomszéd népek számírását használják.

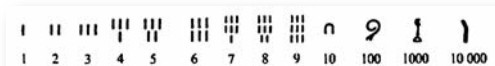
Az egyes számírások kialakulását, fejlődését áttekinteni most nincs lehetőségünk. Az alábbiakban csak egy-egy jellemző példát ragadtunk ki a hatalmas anyagból.

Egyiptomban az egyes számjelek – a képirásuknak megfelelően – konkrét tárgyak stilizált ábráiból álltak. Az ókori görögök ún. **alfabetikus számírást** alkalmaztak: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, ..., $\theta = 9$, $\iota = 10$, $\kappa = 20$, $\lambda = 30$ stb. jelentéssel.

A római számírás elve **hieroglifikus** volt. A jegyek az 5-ös és 10-es számrendszer keveredését mutatják, a számok írásánál az összeadási és kivonási elvet alkalmazták. A római számokkal még ma is találkozunk régi könyvekben, épületek falain; használjuk például az évszázadok jelölésekor stb.

A római számokkal igen nehézkes volt a számolás, még a középkorban is „egyetemi szintű feladatnak” bizonyult az alkalmazásuk. A gyakorlatban különböző számolóeszközökkel dolgoztak, közülük a legnevesebb az abakusz volt. A manuális számolótáblák különböző fajtáit egészen a középkor végéig rendszeresen használták Európában, de például Oroszországban, Kínában és Japánban is. Az elektronikus zsebszámológépek megjelenése előtt hasonlóan elterjedt számolási segédeszköz volt a ma már csaknem ismeretlen logarléc; feltalálójának William Oughtred (1575–1660) angol matematikust tartják.

Az V–VI. század körül alakult ki Indiában a **helyiértékes számírás**, amely minden jelnek alaki- és helyiértéket is tulajdonít. Alkalmazása megkönnyítette a számtani műveletek elvégzését, egyszerűsége és nagyfokú használhatósága szinte forradalmasította a számírást. „Ez a nagy jelentőségű és zseniális módszer olyan egyszerűnek tűnik, hogy emiatt fel sem tudjuk fogni igazán a nagyszerűségét” – írta Laplace (1749–1827), a nagy francia matematikus.



Ókori egyiptomi számrendszer



Ókori sumér ékírás agyagtáblába vésve





Albrecht Dürer: Melankólia I. (1514)



„A bűvös négyzet”

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

A helyiértékes számírás elve már korábban is megjelent Mezopotámiában, de az arabok a hindu számírást vették át, s rajtuk keresztül egész Európában elterjedtek az „arab” számjegyek. 976-ból származik a legrégebb európai kézirat, melyben arab számjegyek szerepelnek; de a mai számírás csak a XV–XVI. században vált általánossá Európában.

A tízes számrendszerbeli arab számjegyek alkalmazása és a helyiértékes számírás elve mára lényegében már az egész világon elterjedt. „Egyeduralmát” csak a számítógépekben alkalmazott 2-es és 16-os számrendszer mérsékli.

A számítógépek konstrukciója természetes módon igényli a 2-es számrendszer alkalmazását. A legkisebb áramköri egységek, az ún. flip-flopok kétféle értéket vehetnek fel attól függően, hogy áram alatt vannak, vagy sem; s ez alapján feleltethetők meg a két értéknek a 0 és 1 számjegyek.

Az egyes műveleti jelek és szimbólumok hasonlóan hosszú folyamat eredményeképpen alakultak ki. Nagy előrelépést jelentett például, amikor az ismeretlen mennyiségeket betűkkel kezdték jelölni (ma úgy mondanánk: elnevezték a változókat, az ismeretleneket), vagy amikor a ma „szöveges feladat”-nak nevezett problémákat sikerült egyenletek alakjában, szimbólumokkal felírni.

Egy példa: az alpműveletek jelölésére meglepően későn, a XVI. században terjedt el az összeadás, kivonás és zárójel szimbóluma; a szorzás és osztás pedig még egy századdal későbbi fejlemény. (De például az abszolút érték mai módon történő jelölésére csak 1841-ben került először sor.)

17. A MARADÉKOS OSZTÁS, AZ OSZTHATÓSÁG FOGALMA, TULAJDONSÁGAI

Az egész számok körében az alpműveletek közül az összeadás, kivonás, szorzás elvégezhető, azaz a műveletvégzés eredménye is egész szám lesz.

Az osztás ilyen értelemben kivezet az egész számok halmazából, azaz két egész szám hányadosa nem feltétlenül egész szám.

1. példa

18-ban a 7 nincs meg maradék nélkül, a hányados 2, a maradék 4.

1-ben a 13 nincs meg maradék nélkül, a hányados 0, a maradék 1.

99-ben a 15 nincs meg maradék nélkül, a hányados 6, a maradék 9.

24-ben a 6 megvan maradék nélkül, a hányados 4, a maradék 0. (Ekkor azt mondjuk, hogy a 24 osztható 6-tal.)

A MARADÉKOS OSZTÁS

Definíció

Bármely a természetes számhoz és b pozitív egész számhoz található olyan nemnegatív q és r egész szám, amelyekre $a = bq + r$, ahol $0 \leq r < b$. A q számot hányadosnak, az r számot maradéknak nevezzük.

2. példa

Az előző példa osztásaira:

$$\begin{array}{llll} 18 = 7 \cdot 2 + 4; & a = 18; & b = 7; & q = 2; \quad r = 4; \\ 1 = 13 \cdot 0 + 1; & a = 1; & b = 13; & q = 0; \quad r = 1; \\ 99 = 15 \cdot 6 + 9; & a = 99; & b = 15; & q = 6; \quad r = 9; \\ 24 = 6 \cdot 4; & a = 24; & b = 6; & q = 4; \quad r = 0. \end{array}$$

Bizonyítható, hogy a maradékos osztásnál az a és b számok egyértelműen meghatározzák a q hányadost és az r maradékot.

A bizonyítás gondolatmenetét szemléltetjük egy konkrét példán.

$$18 = 7 \cdot 2 + 4.$$

Tekintsük az osztó egész számú többszöröseit: $0; 7; 14; 21; \dots$

Ezek a számok természetesen egymástól különböznek, növekvő sorrendbe rendezettek. Ha a 18 megtalálható lenne a sorozatban, akkor egyértelmű lenne a hányados, a maradék pedig 0.

Mivel a 18 nincs a sorozatban, így két felsorolt szám közé esik: $14 = 7 \cdot 2 < 18 < 21 = 7 \cdot 3$, azaz pontosan egy helyre sorolható be. Tehát a hányados egyértelműen meghatározott, de ezáltal a maradék is, $r = 18 - 7 \cdot 2 = 4$.

AZ OSZTHATÓSÁG FOGALMA

Definíció

Tekintsük a maradékos osztáskor azt az esetet, amikor a maradék, vagyis $r = 0$. Ez alapján megfogalmazhatjuk az **oszthatóság** definícióját:

Ha az a és b természetes számokhoz található olyan q természetes szám, melyekre $a = b \cdot q$, akkor azt mondjuk, hogy „ a osztható b -vel” vagy „ b osztója a -nak”. (Egy másik kiolvasási lehetőség: „ a többszöröse b -nek.”) Így jelöljük: $b \mid a$.

Amennyiben b nem osztója a -nak, vagyis az $a = bq + r$ -ben $r \neq 0$, akkor azt így jelöljük: $b \nmid a$.

3. példa

$20 \mid 140$, mert $140 = 20 \cdot 7$, és a 7 természetes szám.

$3 \mid 2007$, mert $2007 = 3 \cdot 669$, és a 669 természetes szám.

$5 \mid 0$, mert $0 = 5 \cdot 0$, és a 0 természetes szám.

$0 \nmid 5$ nem teljesül, mert nincs olyan q természetes szám, amelyre $5 = 0 \cdot q$ lenne. (Jelölés: $0 \nmid 5$.)

Megjegyzés

A számelméletben az oszthatóság nagyon fontos fogalom, a maradékos osztás nélkül is bevezethető. Mi most a természetes számok körében vezettük be a fogalmat, de az egész számok halmazán is ugyanez a definíció (a felsőbb matematika így is használja). A maradékos osztás során nem engedjük meg a $b = 0$ esetet (0-val nem osztunk), de az oszthatóság definíciójából $0|0$ speciálisan következik.

Hangsúlyozzuk tehát, hogy az „oszthatóság” vagy az „osztója”, illetve az „osztás” nem ugyanazt jelenti! Az előbbi egy reláció (kapcsolat) az egész számok között, az utóbbi egy művelet a valós számok körében. A fenti példában a $0|0$ oszthatóság igaz, hiszen van olyan q természetes szám, amelyre $q \cdot 0 = 0$; de $0 : 0$ értelmetlen, a 0-val való osztást nem értelmezzük.)

AZ OSZTHATÓSÁG DEFINÍCIÓJÁBÓL KÖVETKEZŐ TULAJDONSÁGOK

1. Az nyilvánvaló, hogy **bármely természetes szám osztható 1-gyel és önmagával.** (Ezeket a szám nem valódi osztóinak is szokták nevezni.) Az is világos, hogy 0-nak minden pozitív természetes szám osztója.

Jelöléseinkkel: $a|a$ (az oszthatóság reflexív tulajdonsága), $1|a$ és $a|0$.

$$7|7, \text{ mert } 7 = 7 \cdot 1;$$

$$1|8, \text{ mert } 8 = 1 \cdot 8;$$

$$13|0, \text{ mert } 0 = 13 \cdot 0.$$

2. Ha a osztója b -nek, akkor a osztója b minden többszörösének.

Ha $a|b$, akkor $a|bc$ (c természetes szám).

Mivel $5|55$, ezért $5|165 = 55 \cdot 3$.

Mivel $7|21$, ezért $7|252 = 21 \cdot 12$.

3. Ha a osztója egy b számnak, és b szám osztója egy c számnak, akkor a osztója a c számnak is (az oszthatóság tranzitív tulajdonsága).

Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$.

Mivel $4|12$ és $12|60$, ezért $4|60$.

Mivel $3|33$ és $33|264$, ezért $3|264$.

4. Ha a osztója b és c számoknak, akkor a osztója a két szám összegének, illetve különbségének.

Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|(b + c)$ és $a|(b - c)$, ha $b > c$.

Mivel $6|12$ és $6|30$, ezért $6|(12 + 30)$, azaz $6|42$.

Mivel $5|75$ és $5|15$, ezért $5|(75 + 15)$, azaz $5|90$.

Mivel $5|75$ és $5|15$, ezért $5|(75 - 15)$, azaz $5|60$.

5. Ha a osztója egy kéttagú összegnek, valamint a osztója az összeg egyik tagjának, akkor a osztója az összeg másik tagjának is.

Ha $a|(b+c)$ és $a|b$, akkor $a|c$.

17. A MARADÉKOS OSZTÁS, AZ OSZTHATÓSÁG FOGALMA, ...

$20 = 8 + 12$. Mivel $4 \mid 20$ és $4 \mid 8$, ezért $4 \mid 12$.
Mivel $13 \mid 91$ és $13 \mid 65$, ezért $13 \mid (91 - 65)$, azaz $13 \mid 26$.

6. Ha a osztója egy számnak, de a nem osztója egy másik számnak, akkor a nem osztója sem a két szám összegének, sem a két szám különbségének.

Ha $a \mid b$ és $a \nmid c$, akkor $a \nmid (b + c)$ és $a \nmid (b - c)$, ahol $b > c$.

Mivel $2 \mid 14$ és $2 \nmid 13$, ezért $2 \nmid (14 + 13)$, azaz $2 \nmid 27$.

7. Pozitív számok körében igaz, hogy ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $a = b$ (az oszthatóság antiszimmetrikus tulajdonsága).

A felsorolt tulajdonságok egyszerűen bizonyíthatók a definícióból. Példaként nézzünk egyet, melyet feladatmegoldásokban gyakran alkalmazhatunk.

4. példa

4. Bizonyítsuk be, ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid (b + c)$ és $a \mid (b - c)$, ha $b > c$.

Megoldás

Bizonyítás:

A feltételekből következik:

$a \mid b$ miatt létezik olyan k egész szám, melyre $b = a \cdot k$.

$a \mid c$ miatt létezik olyan l egész szám, melyre $c = a \cdot l$.

Nézzük az összeget: $b + c = ak + al = a(k + l)$, ezért $a \mid (b + c)$, mert $(k + l)$ természetes szám.

A különbségre: $b - c = ak - al = a(k - l)$, ezért $a \mid (b - c)$, mert $(k - l)$ természetes szám.

5. példa

Egy építési vállalkozó téglalap alakú területet burkol 1 m x 1 m-es betonlapokkal. Milyen méretű téglalapokat fedhet le, ha pontosan 140 darab betonlapot használ fel? (A terület minden oldala legalább 4 méter.)

Megoldás

Ha a téglalap oldalai a és b méter, akkor $ab = 140$ (m²), vagyis a 140 osztópárjait keressük. A lehetőségek: (1, 140), (2, 70), (4, 35), (5, 28), (7, 20), (10, 14). A megfelelő téglalapok méretei 4 m x 35 m, 5 m x 28 m, 7 m x 20 m és 10 m x 14 m.

Megjegyzés

Az oszthatóságot természetes számokra értelmeztük, de a definíció változatlan formában alkalmazható egész számokra is: ha a, b, c egész számok, akkor $a \mid b$, ha van olyan c szám,

Fogalmak

alfabetikus számírás;
hieroglifikus számírás;
helyiértékes számírás;
maradékos osztás;
oszthatóság.

II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

amelyre $b = ac$. Ebben az értelemben $6 \mid (-12)$ például teljesül. A fenti 1–7. tulajdonságok is érvényben maradnak, esetleg kisebb kiegészítéssel. Például

1. esetében -1 -gyel is osztható minden egész szám;

7. $a \mid b$ és $b \mid a$ esetén $a = b$ vagy $a = -b$.

A 4. és 6. tulajdonság esetén pedig nincs szükség a $b > c$ feltételre.

FELADATOK

1. K1

Írjuk fel az $(a : b)$ osztásokat $a = b \cdot q + r$ alakban, ahol $0 \leq r < b$!

a) $a = 88$; $b = 23$;

b) $a = 100$; $b = 7$;

c) $a = 2008$; $b = 103$.

2. K1

Mely állítások igazak? Indokoljunk!

a) $12 \mid 240$;

b) $103 \mid 103$;

c) $0 \mid 15$;

d) $30 \mid 0$;

e) $4 \mid 4^{111}$.

3. K1

Induljunk ki a következő igaz feltételekből: $3 \mid 4086$ és $3 \mid 101010$. A számolások elvégzése nélkül állapítsuk meg, hogy helyesek-e az alábbi következtetések!

a) $3 \mid 101010 \cdot 4086$;

c) $4086 \mid (101010 + 3)$;

b) $3 \mid (101010 - 4086)$;

d) $3 \mid 101010^{4086}$.

4.

Legyenek a és b pozitív egész számok, valamint $a + b = 120$. Helyesek-e az alábbi következtetések? (A feladatban szereplő összes betű pozitív egész számot jelöl.)

K2 a) Ha $4 \mid a$, akkor $4 \mid b$.

E1 d) Ha $k \mid (120 - a)$, akkor $k \mid (120 - b)$.

K2 b) Ha $c \mid 120$, akkor $c \mid (a + b)$.

E1 e) Mivel $3 \mid 120$, ezért $3 \mid a$.

K2 c) Ha $d \mid 120$, akkor $d \mid a$ vagy $d \mid b$.

E1 f) Ha $10 \mid a$, akkor $10 \mid b$.

5. K2

Az 1, 2, 3, ..., 100 számokat feloszthatjuk-e három csoportra úgy, hogy mindegyik csoportban ugyanannyi legyen a számok összege?

6. K2

Játék

a) Anna és Béla felváltva ad hozzá 1-et, 2-t, 3-at vagy 4-et ahhoz a természetes számhoz, ahol éppen a játék tart. (0-ról kezdenek.) Az a játékos nyer, aki eléri a 31-et. A kezdő Anna tud-e úgy játszani, hogy biztosan nyerjen?

b) A játék egy másik változatában 2-vel, 3-mal vagy 4-gyel szorozzák azt a természetes számot, ahol éppen a játék tart. (1-ről kezdenek.) Az a játékos nyer, aki eléri a 310-et vagy egy nagyobb számot. Most melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 305–316.



18. OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

Az általános iskolában már megismertedtünk a fontosabb oszthatósági szabályokkal. Ebben a leckében rövid előkészítés után bizonyítjuk ezeket és kibővítjük az ismereteinket.

1. példa

$3 \nmid 14$, mert nincs olyan egész szám, melyet 3-mal szorozva 14-et kapnánk. A maradékos osztás alapján $14 = 3 \cdot 4 + 2$, azaz a 14 (osztási) maradéka 3-mal osztva 2. (Úgy is mondhatjuk, hogy 14-nek 3-mal való osztási maradéka 2, vagy rövidebben „14-nek a 3-as maradéka 2”.)

$15 = 3 \cdot 5$, azaz $3 \mid 15$, és így 15-nek a 3-as maradéka 0. Általában is igaz, hogy ha $b \mid a$, akkor a -nak b -vel való osztási maradéka 0.

Mivel a 14-nél 1-gyel nagyobb szám osztható 3-mal, azt is mondhatjuk, hogy „14-nek a 3-as maradéka -1 ”. (Ekkor a $14 = 3 \cdot 5 - 1$ összefüggésre gondolunk.) A maradékos osztást korábban nemnegatív maradékokkal végeztük el, de a későbbi feladatmegoldásokat megkönnyítheti, ha a fenti értelemben negatív maradékokat is megengedünk.

További példák:

$23 = 4 \cdot 5 + 3$, így 23-nak a 4-es maradéka 3. Mivel $23 = 4 \cdot 6 - 1$, így azt is mondhatjuk, hogy 23-nak a 4-es maradéka -1 .

A 30-nak a 8-as maradéka 6, vagy másképpen a 8-as maradéka -2 .

A 100-nak a 15-ös maradéka 10, vagy másképpen a 15-ös maradéka -5 .

2. példa

a) Van-e olyan természetes szám, amely 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva is 2 maradékot ad?

b) Van-e olyan természetes szám, amely 4-gyel osztva 3, 5-tel osztva 4 és 6-tal osztva 5 maradékot ad?

Megoldás

a) Van ilyen szám, például a $4 \cdot 5 \cdot 6 + 2 = 122$. (A megfelelő számok $60k + 2$ alakúak, ahol k természetes szám.)

b) Észrevehetjük, hogy a keresett számok 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva is -1 maradékot adnak. Egy ilyen szám például $4 \cdot 5 \cdot 6 - 1 = 119$. (A megfelelő számok $60k - 1$ alakúak, ahol k pozitív egész szám.)

Ismert, hogy minden természetes szám felírható „helyiértékes”, azaz 10 hatványai szerint összeg alakban:

3. példa

$$538 = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

$$100\,694 = 1 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

$$0 = 0 \cdot 10^0.$$

II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

Vizsgáljuk meg, milyen oszthatósági szabályokat kapunk az előző gondolatmenet alapján!

4. példa

$$8536 = (8 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10) + 6.$$

A zárójelben szereplő tagok mindegyike osztható 10-zel, ezért a szám 10-zel való oszthatósága csak az egyesek helyén álló szám 10-zel való oszthatóságától függ. Egyetlen egyjegyű szám van, ami osztható 10-zel, a 0.

Tehát $10 \nmid 8536$.

Egy (tízes számrendszerbeli) természetes szám pontosan akkor **osztható 10-zel**, ha az egyesek helyiértékén 0 áll.

5. példa

Az előző felbontásból az is látható, hogy a zárójelben levő összeg minden tagja osztható 2-vel és 5-tel is, hiszen a szám számjegyeit 2-vel, illetve 5-tel osztható számmal szorozzuk.

Tehát az egyesek helyén álló számból állapítható meg a 2-vel, illetve 5-tel való oszthatóság is. Gondolatmenetünkben nem használtuk fel a konkrét számot, hasonló gondolatmenettel tetszőleges számra igazolható a kapott összefüggés.

Egy (tízes számrendszerbeli) természetes szám pontosan akkor **osztható 2-vel**, ha az egyesek helyiértékén 0, 2, 4, 6 vagy 8 áll, vagyis ha az utolsó számjegy osztható 2-vel.

Egy (tízes számrendszerbeli) természetes szám pontosan akkor **osztható 5-tel**, ha az egyesek helyiértékén 0 vagy 5 áll, azaz ha az utolsó számjegy osztható 5-tel.



Pierre Fermat
(1601–1665)

Tudod-e?

Pierre Fermat francia matematikus 1637 táján azt állította, hogy az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek (x, y, z, n pozitív egészek) $n > 2$ esetén nincs megoldása. Egy könyv margójára írta e nevezetes sorokat: „én erre egy csodálatos bizonyítást találtam, de a lap széle túl keskeny ahhoz, hogy elférjen rajta”. A legkiválóbb matematikusok évszázadokon keresztül eredménytelenül próbálkoztak a sejtés bizonyításával. Végül 1995-ben Andrew Wiles angol matematikus sikerrel járt, igazolta a „Nagy Fermat-tételt”. A rendkívül hosszú és bonyolult bizonyítás a matematika egyik csúcsteljesítménye.



Andrew Wiles
(1953–)

6. példa

$$108\,272 = 1082 \cdot 100 + 72.$$

Mivel a szorzat osztható 100-zal, akkor osztható 4-gyel és 25-tel is, így a szám 100-zal, 4-gyel és 25-tel való oszthatósága az utolsó két számjegyből alkotott kétjegyű számtól függ.

Mivel gondolatmenetünkben nem használtuk fel a konkrét számot, hasonló gondolatmenettel tetszőleges számra igazolható a kapott összefüggés.

Egy (tízes számrendszerbeli) természetes szám pontosan akkor **osztható 100-zal, 4-gyel, 25-tel**, ha az utolsó két számjegyből alkotott (kétjegyű) szám osztható 100-zal, 4-gyel, 25-tel.

Megjegyzés

Az utolsó két számjegyből nem mindig kapunk kétjegyű számot: a 00, 04, 08 végződészek oszthatók 4-gyel (például 500, 504, 508 esetén). Ugyanígy értendő a következő általánosítás is.

Előző oszthatósági tételeink **általánosíthatók**:

Egy (tízes számrendszerbeli) természetes szám pontosan akkor osztható **10^n -nel, 2^n -nel, 5^n -nel**, ha az utolsó n számjegyből alkotott szám osztható 10^n -nel, 2^n -nel, 5^n -nel, ahol n pozitív egész szám.

Vizsgáljuk meg a 10 hatványainak 3-as, illetve 9-es maradékát!

1-nek a 3-as maradéka: 1, mert $1 = 0 \cdot 3 + 1$; 9-es maradéka: 1, mert $1 = 0 \cdot 9 + 1$.
 10-nek a 3-as maradéka: 1, mert $10 = 3 \cdot 3 + 1$; 9-es maradéka: 1, mert $10 = 1 \cdot 9 + 1$.
 100-nak a 3-as maradéka: 1, mert $100 = 33 \cdot 3 + 1$; 9-es maradéka: 1, mert $100 = 11 \cdot 9 + 1$.
 1000-nek a 3-as maradéka: 1, mert $1000 = 333 \cdot 3 + 1$; 9-es maradéka: 1, mert $1000 = 111 \cdot 9 + 1$.
 ...

Használjuk fel észrevételeinket!

7. példa

$$\begin{aligned} 238\,716 &= 2 \cdot 100\,000 + 3 \cdot 10\,000 + 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = \\ &= 2(99\,999 + 1) + 3(9999 + 1) + 8(999 + 1) + 7(99 + 1) + 1(9 + 1) + 6. \end{aligned}$$

A zárójel felbontása után csoportosítsuk a tagokat:

$$(2 \cdot 99\,999 + 3 \cdot 9999 + 8 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 1 \cdot 9) + (2 + 3 + 8 + 7 + 1 + 6).$$

Az első zárójelben levő összeg osztható 9-cel és 3-mal, mert minden tag osztható 9-cel, illetve 3-mal.

Tehát a szám 9-cel, illetve 3-mal való oszthatósága a második zárójelben levő számok összegétől függ. Itt minden eredeti számjegy egyszeresét vettük, így ez pontosan a számjegyek összegével egyenlő. Ezek alapján:

Egy tízes számrendszerbeli egész szám pontosan akkor **osztható 9-cel, illetve 3-mal**, ha a szám számjegyeinek összege osztható 9-cel, illetve 3-mal.

II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

Vizsgáljuk meg a 10 hatványainak 11-es maradékait!

1	11-es maradéka: 1
10	11-es maradéka: -1
100	11-es maradéka: 1
1000	11-es maradéka: -1
10 000	11-es maradéka: 1
100 000	11-es maradéka: -1, és így tovább.

A felismert szabályosság alapján (ezt most nem bizonyítjuk) egy szám 11-gyel való oszthatóságát úgy vizsgálhatjuk, hogy megnézzük a számjegyei váltakozó előjelű összegét. Ha ez az összeg osztható 11-gyel, akkor maga a szám is, illetve ha az összeg nem osztható 11-gyel, akkor a szám sem.

A 11-es maradék megegyezik a váltakozó előjelű összeg 11-es maradékával.

8. példa

$11 \mid 5\,039\,529$, mert $11 \mid (9 - 2 + 5 - 9 + 3 - 0 + 5)$, azaz $11 \mid 11$. ($5\,039\,529 = 458\,139 \cdot 11$)
 $11 \nmid 60\,475$, mert $11 \nmid (5 - 7 + 4 - 0 + 6)$, azaz $11 \nmid 8$.

A megismert oszthatósági szabályok nem csak annak eldöntésére hasznosak, hogy egy szám osztója-e egy másik számnak. Ha nem teljesül az oszthatósági feltétel, akkor a maradékok is megállapíthatók.

9. példa

$11 \nmid 23\,436$, mert $11 \nmid (6 - 3 + 4 - 3 + 2)$, azaz $11 \nmid 6$, **az osztási maradék: 6**.
 $9 \nmid 6\,204\,892$, mert $9 \nmid (6 + 2 + 0 + 4 + 8 + 9 + 2)$, azaz $9 \nmid 31$. $31 = 3 \cdot 9 + 4$, **az osztási maradék: 4**.

10. példa

Játék

A bergengóciai Sárkánynak 100 feje van, a Királyfinak pedig olyan Varázskardja, amellyel egy csapásra 8, 9 vagy 10 fejét tudja levágni a Sárkánynak. Sajnos az első esetben a Sárkánynak 14 új feje nő ki, a másodikban 6, a harmadik esetben pedig 13. Ha a Sárkány összes feje lehullott, nem nő ki több. Hogyan tudja legyőzni a Királyfi a Sárkányt?

Megoldás

A fejek számának változása rendre $+6$ ($8 \rightarrow 14$), -3 ($9 \rightarrow 6$) vagy $+3$ ($10 \rightarrow 13$). Észrevehetjük, hogy a változás 3-mal mindig osztható, azaz a sárkány fejeinek száma 3-mal osztva mindig ugyanannyi maradékot ad. 100-nak a 3-as maradéka 1, így a Királyfi akkor tud győzni, ha az utolsó suhintás előtt a sárkánynak éppen 10 feje van. (A 8 vagy 9 fej nem lehetséges.)

A Királyfi a sárkányfejeket úgy csökkentheti 90-nel, ha 30 darab 9 fejes vágást tesz. (Az utolsó ilyen vágás előtt a sárkánynak 13 feje volt; ekkor a királyfi levág 9-et, és a 6 új fejjel a sárkány 10 fejű lesz.) Ekkor pedig már csak egyetlen, 10 fejes suhintást kell végezni.

Fogalmak
oszthatósági
szabályok;
osztási maradék.

A tökéletes számok

Az ókori görögök „tökéletes” számként tisztelték azokat a pozitív egészeket, amelyek megegyeznek a náluk kisebb (pozitív) osztóiuk összegével. Ilyen szám például a 6 ($= 1 + 2 + 3$) és a 28 ($= 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). Az ókorban még két tökéletes számot ismertek, a 496-ot és a 8128-at; míg az ötödik 33 550 336-ot csak a XV. században fedezte fel Johannes Müller Regiomontanus (1436–1476) német természettudós.

Már Eukleidész könyvében (több mint 2000 évvel ezelőtt!) megtalálható egy tétel, mely szerint ha $2^k - 1$ prímszám, akkor $2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ tökéletes szám. A tétel segítségével napjainkig folyik a tökéletes számok keresése. Persze az így kapott számok mind párosak; érdekes és máig megoldatlan probléma, hogy vajon létezik-e páratlan tökéletes szám. (Nézz utána az interneten, hogy jelenleg hány tökéletes számot ismerünk!)

FELADATOK

1. K1

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

- a) Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel.
- b) Ha egy szám osztható 9-cel, akkor osztható 3-mal.
- c) Minden olyan szám, amely osztható 2-vel és 3-mal, osztható 6-tal is.
- d) Ha egy szám osztható 6-tal és 2-vel, akkor osztható 12-vel.
- e) Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható 24-gyel.

2. K1

Döntsük el, hogy az alábbi számok közül melyik osztható 4-gyel; 9-cel; 12-vel; 36-tal; 30-cal!
12 564; 7 245 540; 21 113; 5 675 345.

3. K2

Fogalmazzunk meg szabályt a 6-tal, illetve 12-vel való oszthatóságra!

4. K2

Milyen számjegyet írhatunk az ismeretlen betű helyére, hogy $\overline{124513x4}$ osztható legyen
a) 3-mal; b) 4-gyel; c) 6-tal; d) 9-cel; e) 12-vel?

5. E1

Bizonyítsuk be, hogy $10^n - 1$ minden n természetes szám esetén osztható 9-cel!

6. K2

Igazoljuk, hogy három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal!

7. E1

Minimum hány darab egymást követő természetes számot kell összeszoroznunk ahhoz, hogy bármelyik természetes számtól indulva a szorzat osztható legyen 12-vel? Indokoljuk a választ!

8. E1

Határozzuk meg az n pozitív egész szám értékét úgy, hogy az alábbi törtek értéke pozitív egész szám legyen!

$$\frac{n}{3}, \quad \frac{n+2}{3}, \quad \frac{5n-3}{3}, \quad \frac{n-1}{4}, \quad \frac{2n-3}{5}, \quad \frac{n^2-1}{9}.$$

9. E1

Az 1, 2, 3, ..., n számokat milyen n esetén oszthatjuk két csoportra úgy, hogy mindkét részben ugyanannyi legyen a számok összege?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.:
319–343.



19. PRÍMSZÁMOK, A SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE

Az általános iskolában már megismerkedtünk a prímszámokkal és az összetett számokkal. Ebben a leckében megmutatjuk, hogy a prímszámok az összetett számok „építőkövei”: az összetett számok prímszámok szorzataként állnak elő.

1. példa

Igaz-e a következő állítás?

„Egy 100-nál nagyobb egész számnak több pozitív osztója van, mint egy 50-nél kisebb pozitív számnak.”
Első ránézésre talán igaznak tűnhet az állítás, de ellenpéldával cáfolni tudjuk.

A 48 osztóit keressük meg úgy, hogy vegyük sorban a pozitív egész számokat, ha találtunk egy osztóját, akkor nevezzük párjának azt a számot, ahányszor megvan benne.

Az 1 osztója 48-nak, párja a 48. A 2 osztója, párja a 24.

A 3 osztója, párja a 16. A 4 osztója, párja a 12.

Az 5 nem osztója. A 6 osztója, párja a 8.

A 7 nem osztója.

További osztói nem lehetnek, hiszen akkor a megtalált párok nagyobbika lehetne csak a következő osztó. Tehát a 48-nak 10 osztója van.

Nézzük most például a 169-et!

Az 1 osztója, párja a 169.

A 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 nem osztója.

A 13 osztója, „párja” a 13.

Az előzőek alapján minden osztóját megtaláltuk, így a 169-nek 3 osztója van.

Tehát nem a szám nagyságától függ a pozitív osztóinak száma.

Sok esetben szükségünk lehet egy szám osztóinak, osztói számának meghatározására. Vizsgáljuk a pozitív egész számokat aszerint, hogy hány pozitív osztójuk van!

Mivel az 1 minden pozitív egész számnak osztója, így legalább egy osztója minden pozitív egész számnak van.

Mely számoknak lehet csak az 1 az osztója? Mivel minden szám osztható 1-gyel és önmagával, így legalább két osztója minden számnak van, kivéve az 1-et.

Egyetlen pozitív osztója csak az 1-nek van.

Következő lehetőség, amikor a számnak **pontosan két** (különböző) osztója van.

Definíció

Prímszámok:

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két (különböző) pozitív egész osztójuk van, **prímszámoknak** nevezzük.

Mivel 1-gyel és önmagával minden pozitív egész szám osztható, azt is mondhatjuk, hogy egy 1-nél nagyobb pozitív egész szám akkor prímszám, ha csak 1-gyel és önmagával osztható.

Az 1-től és a prímszámoktól különböző összes többi pozitív egész számot összetett számnak nevezzük. (Tehát az összetett számoknak legalább 3 különböző pozitív egész osztója van.)

Jegyezzük meg: **az 1 se nem prímszám, se nem összetett szám!**

2. példa

Viszonylag könnyen megadhatjuk a kisebb prímszámokat: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 stb. A nagyobb prímekeket ún. prímszám táblázatokban találhatjuk meg, ezekhez manapság már könnyen hozzáférhetünk. (Érdekes az interneten is hasonló táblázatokat böngészni.)

Nilvánvaló a kérdés: mekkora a legnagyobb prímszám? Összeszámoltuk a prímszámokat 4000-ig:

1-től 500-ig:	95 db	500-tól 1000-ig:	73 db
1000-től 1500-ig:	71 db	1500-tól 2000-ig:	64 db
2000-től 2500-ig:	64 db	2500-tól 3000-ig:	66 db
3000-től 3500-ig:	56 db	3500-tól 4000-ig:	61 db

Mint látható, nem jelenthetjük ki, hogy a számok növekedtével egyre kevesebb prímszám van közöttük, bár ahogy növekednek a számok, nyilván egyre több osztó jöhet szóba.



Eratosthenész

Hogyan kereshetünk prímszámokat? Erre az ókori alexandriai Eratosthenész (Kr. e. 200 körül) a következő módszert javasolta a prímszámok megtalálására (az eljárást 100-ig mutatjuk be):

Írjuk le 100-ig a pozitív egész számokat.

Az 1 nem prímszám.

A következő számnak, a 2-nek nincs 1-től és önmagától különböző osztója, így a 2 prímszám, karikázzuk be.

Húzzuk ki a megtalált prímszám minden többszörösét, hiszen ezek nem prímszámok.

A következő nem kihúzott számmal hajtsuk végre az előző két lépést.

Folytassuk ezt az eljárást, amíg el nem jutunk a 100-ig. A bekarikázott számok a 100-nál kisebb prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,

37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 (Érdekességgéppen megjegyezhetjük, hogy 25 darab van belőlük.).

Ezt a módszert **eratosthenészi szitának** nevezik.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Feladat önálló feldolgozásra

A 100-nál kisebb prímszámok meghatározásakor 100 helyett elegendő csak 11-ig (pontosabban 7-ig) eljutni az algoritmus végrehajtása során. Mit gondolsz, miért?

A számelmélet egyik fontos tétele a következő:

Tétel

Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. (Úgy mutatjuk meg az állítás igazságát, hogy bebizonyítjuk: az állítás tagadása ellentmondásra vezet.)

Az állítás tagadása: Véges sok prímszám van, azaz van egy legnagyobb prímszám.

Jelöljük a prímszámokat $p_1, p_2, \dots, p_n$ -nel, és összes prímszám szorzatánál 1-gyel nagyobb számot Q -val: $Q = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1$.

II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

A Q számnak nyilván egyetlen prímszám sem osztója amiatt, hogy a szorzathoz 1-et adtunk. (Bármely prímmel osztva Q -nak 1 a maradéka.) Ezért Q vagy prímszám, vagy van olyan prímszám osztója, mely nem szerepelt a szorzat tényezői között. Bármelyik is igaz, így mindenképpen létezik egy eddig nem szerepeltetett új prímszám. Ez pedig ellentmond annak, hogy az összes prímszámot szoroztuk össze. Ebből következik, hogy a prímszámok száma végtelen.

Nem gondolnánk, de ez a szép bizonyítás is több mint kétezer éves; kb. 2300 évvel ezelőtt jegyezte le Eukleidész. Az ókori görög matematikusok szívesen és rendkívül hatékonyan alkalmazták az indirekt bizonyításokat. (Így igazolták például a Pitagorasz-tétel megfordítását is.)

3. példa

Bontsuk fel prímszámok szorzatára a 60-at!

$$60 = 2 \cdot 30; 30 = 3 \cdot 10; 10 = 2 \cdot 5, \text{ tehát } 60 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5.$$

Nézzünk egy másik felbontást:

$$60 = 4 \cdot 15; 4 = 2 \cdot 2 \text{ és } 15 = 3 \cdot 5, \text{ tehát } 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$$60 = 3 \cdot 20; 20 = 5 \cdot 4; 4 = 2 \cdot 2, \text{ tehát } 60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2.$$

Mind a három esetben ugyanazokhoz a prímszámokhoz jutottunk.

Felmerül a kérdés: Létezhet-e többféle prímfelbontása egy összetett számnak? Erre ad választ a **számelmélet alaptétele**.

Tétel

A számelmélet alaptétele: Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára. A felbontás a prímszámok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

4. példa

Bontsuk fel a 12 600-at prímszámok szorzatára!

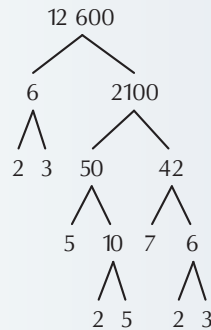
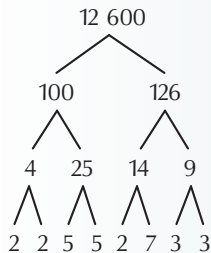
12 600		2
6300		2
3150		2
1575		3
525		3
175		5
35		5
7		7
1		

$$\text{Tehát } 12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Próbálkozzunk más felbontással! Például:

12 600	5	12 600	3
2520	3	4200	3
840	2	1400	2
420	5	700	2
84	3	350	2
28	7	175	5
4	2	35	5
2	2	7	7
1		1	

Más módon is próbálkozhatunk, például :



Mindegyik esetben a $12\ 600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ végeredményt kaptuk, bármilyen sorrendben vettük a következő prímosztót; sőt akkor is, ha a felbontást összetett számok szorzatával kezdtük. Látható a prímszámok építőkocka-tulajdonsága: ha például 7 osztója 12 600-nak, és $12\ 600 = 100 \cdot 126$, akkor a 7-nek valamelyik tényezőt osztania kell. (A 100 és a 126 prímtényező felbontásában pontosan a 12 600 prímtényezői szerepelnek.)

Az előzőekből következik a **prímszámok néhány fontos tulajdonsága**:

1. Ha egy prímszám osztója egy szorzatnak, akkor legalább az egyik tényezőnek is biztosan osztója.
2. A négyzetszámok prímfelbontásában minden, a felbontásban szereplő prímszám páros sokszor fordul elő.
3. Minden összetett szám egyértelműen írható fel $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ alakban, ahol $p_1, p_2, \dots, p_n$ különböző prímszámok, $k_1, k_2, \dots, k_n$ pozitív egész számok.

5. példa

Hány pozitív osztója van a 17 640-nek?

Ha az osztópárok megkeresésével foglalkozunk hozzá a kérdés megválaszolásához, akkor hosszadalmas számolás várna ránk. Bontsuk fel a számot prímtényező szorzatára! $17\ 640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

A prímfelbontás alapján 17 640 bármely osztójának prímfelbontásában csak 2, 3, 5, 7 prímszámok fordulhatnak elő. A 2 legfeljebb 3. hatványon, a 3 legfeljebb 2. hatványon, az 5 legfeljebb 1. hatványon, végül a 7 legfeljebb 2. hatványon.

Tehát 17 640 bármelyik osztóját fel lehet írni a következő alakban:

$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, ahol $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 2$, $0 \leq c \leq 1$, $0 \leq d \leq 2$, és a, b, c, d természetes számok.

II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

Az a kitevőt 4-féleképpen, a b -t 3-féleképpen, a c -t 2-féleképpen, a d -t 3-féleképpen választhatjuk ki. Tehát egy osztó előállítására $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ különböző lehetőségünk van, azaz a 17 640-nek összesen 72 pozitív osztója van. (Az $a = b = c = d = 0$ kitevőkre az 1 osztót kapjuk.)

Emelt szint

Fogalmak, név

prímszám;
összetett szám;
Eratoszthenész;
eratoszthenészi szita;
számelmélet.

Általánosítva az előzőeket:

Bizonyítható, hogy ha az A pozitív egész szám prímfelbontása: $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$, ahol a p_k számok különböző prímszámok ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), a kitevők pozitív egész számok, akkor az **A pozitív osztóinak száma:**

$$d(A) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdot \dots \cdot (a_n + 1).$$

(A $d(n)$ jelöli az n pozitív egész szám pozitív osztóinak számát.)

FELADATOK

1. K1

Az alábbi számok közül melyik összetett szám?

3; 7; 9; 143; 479; 247; 357; 833; 957; 2007; 2009.

2. K2

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

- a) Ha egy természetes szám prímszám, akkor a nála 3-mal nagyobb szám összetett szám.
- b) Minden páros négyzetszám osztható 4-gyel.
- c) Nincs olyan háromjegyű prímszám, amely számjegyeinek szorzata 6.
- d) Minden összetett számnak páros sok pozitív osztója van.
- e) Ha egy egész szám előállítható három egymás utáni pozitív egész szám összegeként, akkor összetett szám.
- f) Van olyan kétjegyű pozitív egész szám, amely nem állítható elő prímszámok összegeként.

3. E1

Fel lehet-e két csoportra osztani a 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számokat úgy, hogy minden számot felhasználunk, és a csoportokban lévő számok szorzata egyenlő legyen?

4. K1

Bontsuk fel prímszámok szorzatára az alábbi számokat!

168; 768; 2008; 4500; 2592; 13 464; 14 625; 33 075.

5. K1

Határozzuk meg a következő számok prímtenyezős felbontásának segítségével, melyik osztható

a) 9-cel; b) 4-gyel; c) 125-tel!

$2^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 11$; $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$.

6. K2

Írjuk fel az alábbi számok pozitív osztóit!

a) 75; b) 72; c) 150; d) 726; e) 121; f) 225.

7. E1

Határozzuk meg az alábbi számok pozitív osztóinak a számát!

675; 3024; 288; 686; 243; 1225;

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $11^2 \cdot 13^3 \cdot 19$.

8. E1

Mely természetes számoknak van páratlan sok osztója?

9.

Mely n természetes szám esetén lesz az alábbi törtek értéke egész szám?

K2 a) $\frac{7}{n-2}$;

K2 b) $\frac{12}{n+3}$;

E1 c) $\frac{2n-4}{n+3}$;

E1 d) $\frac{n^2-2}{n+3}$.

10.

Mutassuk meg, hogy a 496 és a 8128 valóban tökéletes számok!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 365–371; 372–389; 398–406; 407–414; 415–417; 454–470.

20. LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ, EUKLIDESZI ALGORITMUS, LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

Definiáltuk már egy egész szám osztóit. Vizsgálatunkat kiterjeszthetjük kettő vagy több szám közös osztóinak megkeresésére.

1. példa

Keressük meg 2520 és 1320 közös osztóit!

Megoldás

Érdemes a számok prímfelbontásából kiindulni:

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{és} \quad 1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Látható, hogy a közös prímtényezők, illetve prímszámok: $2^3, 3, 5$. Ezért a két szám közös osztója például a $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Ennél nagyobb közös osztó nem lehet, mivel a felsoroltakon kívül nincs más közös prímszám, illetve nem fordul elő prímszám ennél magasabb hatványon mind a két számban.

A legnagyobb közös osztóra bevezetjük a következő jelölést: $(2520; 1320) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

A legnagyobb közös osztó bármelyik osztója egyúttal a két szám közös osztója is. Felsorolhatjuk a társosztókat: 1, 120, 2, 60, 3, 40, 4, 30, 5, 24, 6, 20, 8, 15, 10, 12. Ezek a két szám közös osztói.

A **legnagyobb közös osztó** előállítható a következő módon:

A számok prímfelbontása után a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb közös hatványon összeszorozzuk. Jelölése: $(a; b)$. (Néha kiírjuk a rövidítést is: lanko $(a; b)$.)

A mutatott eljárás lehetőséget ad akár több szám legnagyobb közös osztójának meghatározására is.

Ha két vagy több szám legnagyobb közös osztója 1, akkor a számokat **relatív prímeknek** nevezzük.

Például 2 és 3, vagy 8 és 17 relatív prímek: $(2; 3) = 1$, lanko $(8; 17) = 1$.

II. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

2. példa

Keressük meg a következő tört legegyszerűbb alakját: $\frac{261\,360}{155\,232}$!

Megoldás

A számláló prímfelbontása: $261\,360 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^2$.

A nevező prímfelbontása: $155\,232 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Inko $(261\,360; 155\,232) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$, tehát ezzel a számmal egyszerűsíthetünk.

$$\frac{261\,360}{155\,232} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 7^2} = \frac{165}{98}.$$

(Kiegészítő anyag.) Eukleidész, a Kr. e. 300 körül élő görög matematikus mutatott eljárást két szám legnagyobb közös osztójának meghatározására. Módszerét **euklideszi algoritmusnak** nevezzük. A 3. példán mutatjuk be az algoritmust:

3. példa

Keressük meg 242 és 66 legnagyobb közös osztóját!

Megoldás

Jelöljük 242 és 66 legnagyobb közös osztóját d -vel!

A maradékos osztás alapján $242 = 66 \cdot 3 + 44$. Ha $d \mid 242$ és $d \mid 66$, akkor $d \mid 44$ is teljesül (mert $44 = 242 - 66 \cdot 3$). Vagyis 66 és 44 legnagyobb közös osztóját keressük.

$66 = 44 \cdot 1 + 22$. Ha $d \mid 66$ és $d \mid 44$, akkor $d \mid 22$ is teljesül: $d = (44; 22)$.

$44 = 22 \cdot 2 + 0$, ezért $d = (44; 22) = 22$ a legnagyobb közös osztó.

A legnagyobb közös osztóhoz hasonlóan a legkisebb közös többszöröst is meghatározhatjuk.

4. példa

Egy út mentén az út egyik oldalán 24 méterenként fák, másik oldalán 42 méterenként villanyoszlopok állnak. Az egyik helyen egymással szemben látunk egy fát és egy villanyoszlopot. Hány méterrel odébb fordulhat ez újra elő?

Megoldás

Olyan számot kell keresnünk, amely többszöröse a 24-nek is és a 42-nek is.

$$24 = 2^3 \cdot 3; \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

A keresett szám osztható kell, hogy legyen 24-gyel és 42-vel is, tehát prímfelbontásában szerepelnie kell: 2^3 -nak, 3-nak és 7-nek is.

A legkisebb ilyen szám a $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$. Tehát 168 méterenként áll szemben fa és villanyoszlop.

Feladatunkban két szám legkisebb közös többszörösét kerestük meg. Ennek jelölésére bevezetjük a következőt: $[24; 42] = 168$.



A **legkisebb közös többszörös** előállítható a következő módon:

A számok prímfelbontása után minden prímtényezőből az előforduló legnagyobb hatványúakat szorozzuk össze. Jelölése: $[a; b]$. (Néha kiírjuk a rövidítést: lkkt $(a; b)$.)

Fogalmak

legnagyobb közös osztó;
relatív prím;
euklideszi algoritmus;
legkisebb közös többszörös.

A mutatott eljárás lehetőséget ad (akár) több szám legkisebb közös többszörösének meghatározására is.

5. példa

Ha $a = 2^3 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 3^2$, $c = 3 \cdot 5^3$, $d = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, akkor
 $[a; b; c; d] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.

FELADATOK

1. K1

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

- a) Két számnak végtelen sok közös többszöröse van.
- b) Két szám közös pozitív osztói között van legkisebb.
- c) Két szám közös többszörösei között van legnagyobb.
- d) Két szám legkisebb többszöröse nagyobb, mint a megadott két szám közül a nagyobb.

2. K1

Határozzuk meg a megadott számok legnagyobb közös osztóját (lnko) és legkisebb közös többszörösét (lkkt)!

- a) 72; 108;
- b) 375; 1800;
- c) 5544; 42 075;
- d) 2250; 468; 2100;
- e) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$;
- f) $2^3 \cdot 3 \cdot 17^3 \cdot 23$; $2^3 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 29$.

3. K1

Keressük meg az alábbi számpárok, illetve számhármak legkisebb közös többszörösét (lkkt)!

- a) 54; 150;
- b) 360; 168;
- c) 864; 7875;
- d) 125; 875; 2625;
- e) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$; $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$;
- f) $2 \cdot 3^3 \cdot 13^3 \cdot 17$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17^2$.

4. K1

Egyszerűsítsük az alábbi törteteket!

- a) $\frac{450}{620}$;
- b) $\frac{1750}{2625}$;
- c) $\frac{1080}{756}$.

5. K2

Három testvér közül Anna kétnaponta rendszeresen jógázik, Bea 3 naponként úszik, Cili pedig 5 naponként fut.

- a) Hányszor fordulhat elő egy 30 napos hónapban, hogy mindhárman ugyanazon a napon végzik a sporttevékenységüket?
- b) Hányszor lehet olyan nap a hónapban, amikor pontosan ketten sportolnak közülük?

6. E2

Melyik az a két szám, melyre igazak az alábbiak?

- a) lnko $(x; y) = 6$ és $x \cdot y = 2520$;
- b) lnko $(x; y) = 18$ és $x + y = 576$;
- c) lnko $(x; y) = 12$ és lkkt $(x; y) = 1260$.

7. K2

Egy villamos egyik végállomásáról két különböző irányba indítanak villamosokat. Az I. villamost 12 percenként indítják, a II. villamost 15 percenként. Reggel 7 órakor egyszerre indul a két különböző irányba villamos.

- Mikor indítják a villamosokat legközelebb egyszerre?
- Reggel 7 óra után és délután 5 óra előtt hányszor indítják egyszerre a két villamost?

8. E1

Milyen a értéknél teljesülnek a következő feltételek?

Inko (21; a) $\neq$ 1 és Inko (a; 15) $\neq$ 1, de
Inko (15; 21; a) = 1.

9. E1

Melyik az a két szám, melyek legkisebb közös többszöröse (lkkt) 17-tel nagyobb, mint a legnagyobb közös osztójuk (lnko)?



10. K2

Bergengócia egyik ügynöke új titkosítást talált ki az üzenetek számára. Ennek az a lényege, hogy a kódolás során az üzenetet 12 betűből álló csoportokra osztják, és minden ilyen csoportban az alábbi táblázat szerint megváltoztatják a betűk sorrendjét.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	4	6	2	1	3	9	7	8	11	12	10

(Tehát az 1. betű az 5. helyére kerül, a 2. a 4. helyére és így tovább.)

Az ügynök próbaképpen kódolva elküldi a TITKOSJELSZÓ üzenetet a szomszédos baráti országba. Igen ám, de a főnöke – biztos, ami biztos – a már kódolt üzenetet még egyszer kódolja; sőt a titkosszolgálat főnöke is elvégez egy harmadik kódolást, hogy „minél jobban keveredjenek a betűk”. Mi történik? (Lehetséges-e, hogy valahány kódolás után az eredeti üzenetet kapjuk vissza?)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 418–419; 421–423; 438; 442–443; 444–451.

KIFEJEZÉSEK, POLINOMOK OSZTHATÓSÁGA (Olvasmány)

Korábban említettük, hogy az egész számok körében is definiálhatjuk az oszthatóságot: ha a, b, c egész számok, akkor $a \mid b$, ha van olyan c egész szám, amelyre $b = ac$. Formálisan kiterjeszthetjük a definíciót egész együtthatós polinomokra is:

Ha P, Q, R egész együtthatós polinomok, akkor $P \mid Q$, ha van olyan R polinom, amelyre $Q = PR$.

Például az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ nevezetes azonosság alapján mondhatjuk, hogy $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$, hiszen az $(a - b)$ polinomra $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Ugyanígy $(a - b) \mid (a^2 - b^2)$ is igaz.

Az azonosság minden a és b (valós) számra teljesül. Észrevehetjük, hogy mivel egész együtthatós polinomokat vizsgálunk, ha a és b helyébe egész számokat írunk, akkor az $(a + b)$, $(a - b)$ és $(a^2 - b^2)$ tényezők mindegyike egész számot vesz fel értékül. A helyettesítési értékekkel már egész számok közötti oszthatóságot kapunk, például:

$a = 3, b = 2: (3 + 2) \mid (3^2 - 2^2)$ vagy $(3 - 2) \mid (3^2 - 2^2)$;

$a = 7, b = 3: (7 + 3) \mid (7^2 - 3^2)$ vagy $(7 - 3) \mid (7^2 - 3^2)$;

$a = 4, b = 5: (4 + 5) \mid (4^2 - 5^2)$ vagy $(4 - 5) \mid (4^2 - 5^2)$.

Az egész együttthatós polinomok oszthatóságának hátterében tehát az egész számok oszthatósága áll.

1. példa

Bizonyítsuk be az alábbi oszthatóságokat!

a) $(a + 3) \mid (a^2 - a - 12)$;

b) $(b - 2c) \mid (b^2 - 4bc + 4c^2)$;

c) $(x - 2) \mid (x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$.

Megoldás

a) Az $a^2 - a - 12$ kifejezést szorzattá alakíthatjuk (például a gyöktényezős alak segítségével):

$a^2 - a - 12 = (a + 3)(a - 4)$. Ezzel az oszthatóságot is igazoltuk.

b) $b^2 - 4bc + 4c^2 = (b - 2c)^2$ (teljes négyzet).

c) Megpróbáljuk $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$ -et előállítani $(x - 2)(ax^2 + bx + c)$ alakban, ahol a, b, c egész számok. (Ez kell az oszthatóság teljesüléséhez.)

$(x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + x^2(-2a + b) + x(-2b + c) - 2c$. Az

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \equiv ax^3 + x^2(-2a + b) + x(-2b + c) - 2c$

azonosságból, az együttthatók egyeztetése után rendre $a = 1, b = -3, c = 2$ adódik.

Így $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)(x^2 - 3x + 2)$, s ezzel a c) állítást is igazoltuk.

2. példa

A konkrét számértékek kiszámolása nélkül döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül!

a) $17 \mid (2021^3 - 2004^3)$;

b) $37 \mid 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 36^3$;

c) $57 \mid (11^6 - 7^3)$.

Megoldás

a) Az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosság alapján $(a - b) \mid (a^3 - b^3)$. Az állítás igaz, hiszen $2021 - 2004 = 17$, és ez osztója a jobb oldalon álló számnak.

b) Az $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ azonosság alapján $(a + b) \mid (a^3 + b^3)$.

A párosítás módszerét alkalmazzuk. Az $(1^3 + 36^3) + (2^3 + 35^3) + \dots + (18^3 + 19^3)$ összegben az azonosság miatt a párok rendre oszthatók $(1 + 36), (2 + 35), \dots, (18 + 19)$ -cel, azaz 37-tel, és így a teljes összeg is osztható 37-tel.

c) $11^6 - 7^3 = (11^2)^3 - 7^3 = 121^3 - 7^3$, s ez osztható $121 - 7 = 114$ -gyel. Viszont akkor ennek felével, 57-tel is osztható.

Mindhárom állítás igaz.

FELADATOK

1. E1

Mutassuk meg, hogy $n + 4$ sosem osztja $n^2 + 8n + 15$ -öt, ha n természetes szám!

2. E1

Mi lehet az $A = 35x + 57$ és $B = 45x + 76$ kifejezések legnagyobb közös osztója, ha x egész szám?

3. E1

Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c változók bármely egész értéke esetén teljesül az $(a + b + c) \mid (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)$ oszthatóság!

4. E1

A $K = x^2 - 14x + 48$ kifejezésben x helyébe egész számokat helyettesítünk. Észrevehetjük, hogy az $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ értékekre mindig összetett számot kapunk: $K(0) = 48, K(1) = 35, K(-1) = 63, K(2) = 24, K(-2) = 80, K(3) = 15, K(-3) = 99$. stb. Mit állíthatunk a polinom helyettesítési értékeiről? Mindig összetett számot kapunk, vagy kaphatunk prímszámot is? Véges számú vagy végtelen sok prímet kaphatunk?

21. SZÁMRENDSZEREK



Amikor sok tárgyat akarunk megszámlálni, célszerű egy összeszámlálási rendszert kialakítani. Ezt megtehetjük úgy is, ha a megszámlolandó tárgyakat csoportokba soroljuk, például hatos csoportokba rendezzük. Ha sok ilyen csoportunk alakul ki, akkor célszerű a csoportokat is csoportokba alakítani, kézenfekvő ismét hatosával rendezni azokat. Ezt az eljárásorozatot addig folytatjuk, amíg lehet.

Amikor a kialakult csoportok számát fel szeretnénk jegyezni, akkor hat különböző jelle (számjegyre) van szükségünk. Ezek: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Az előző eljárás lényegében egy maradékos osztássorozat, többször egymás után elvégezve.

1. példa

Írjuk fel a 485-öt hatos számrendszerben!

Megoldás

$485 = 80 \cdot 6 + 5$, kialakult 80 „hatos” csoport, és maradt 5 egyes.

$80 = 13 \cdot 6 + 2$, kialakult 13 „hatszor hatos” csoport, és maradt 2 hatos.

$13 = 2 \cdot 6 + 1$, keletkezett 2 „hatszor hatszor hatos” csoport, és maradt 1 „hatszor hatos” csoport.

$2 = 0 \cdot 6 + 2$, keletkezett 0 „hatszor hatszor hatszor hatos” csoport, és kimaradt 2 „hatszor hatszor hatos” csoport.

A maradékul kapott számok segítségével – jelentésük alapján – adjuk meg a keresett alakot:

$485 = 2125_6$, ahol az alsó indexben jelöltük a csoportosítás alapszámát.

Ezzel az összeszámlálással és az eredmény felírásával a hatos számrendszer lényegét figyelhetjük meg: $2125_6 = 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0$.

Pontosan ez a csoportosítás bármely alapú számrendszer lényege. A tízes számrendszerben hasonlóan értelmezzük a helyiértékes írásmódot: $2357 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$. Az már a szokásokon múlik, hogy a tízes számrendszer alapszámát nem szoktuk jelölni, hiszen általában ezt használjuk.

2. példa

Határozzuk meg az 101101_2 szám tízes számrendszerbeli alakját!

Megoldás

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45.$$

Vizsgáljunk meg néhány oszthatósági szabályt, módosulnak-e, amikor nem tízes alapú számrendszerben számolunk!

3. példa

Emelt szint

Mi lehet a 2-vel való oszthatóság szabálya különböző számrendszerekben?

Megoldás

Ha a számrendszer alapszáma páros szám, akkor az egyesek helyiértékén kívül minden más helyiérték osztható 2-vel, tehát az oszthatóság az utolsó számjegytől függ.

$2 \nmid 30213_4$, mert $2 \nmid (3 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1)$, de $2 \nmid 3 \cdot 4^0$.

$2 \mid 4316_8$, mert $2 \mid (4 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1)$, és $2 \mid 6 \cdot 8^0$.

Ha a számrendszer alapszáma páratlan szám, akkor minden egyes helyiérték is páratlan. Tehát a 2-vel való oszthatóság attól függ, hogy hány páratlan számot összegzünk.

$2 \mid 3241_5$, mert két páratlan számot adunk össze ($3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^0$), és ezek összege páros.

$2 \nmid 103465_7$, mert $2 \nmid (1 \cdot 7^5 + 3 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^0)$.

Egy páratlan alapszámú számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható 2-vel, ha a páratlan számjegyek száma páros.

4. példa

Mi lehet a nyolcas számrendszerben a 7-tel való oszthatóság szabálya?

Megoldás

Hasonlóan gondolkodhatunk, mint azt a tízes számrendszerben a 9-cel történő oszthatóságnál már láttuk.

8, valamint 8 minden hatványa 7-tel osztva 1-et ad maradékul. Ha elhagyjuk a 7-tel osztható tagokat – melyek nem befolyásolják az oszthatóságot –, akkor a számjegyek összege marad meg. Pontosán akkor teljesül az oszthatóság, ha a számjegyek összege osztható 7-tel.

$7 \mid 1146342_8$, mert 7 osztja $(8^6 - 1) + (8^5 - 1) + 4 \cdot (8^4 - 1) + 6 \cdot (8^3 - 1) + 3 \cdot (8^2 - 1) + 4 \cdot (8^1 - 1) + 2 \cdot (8^0 - 1) + (1 + 1 + 4 + 6 + 3 + 4 + 2)$.

Hasonló okoskodással beláthatjuk:

Tetszőleges alapú számrendszerben az alapszámnál 1-gyel kisebb számmal való oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha a számjegyek összege osztható az alapszámnál 1-gyel kisebb számmal.

5. példa

Mi lehet a számrendszer x alapszáma ($x \geq 2$), ha a 601_x számot 10_x -val osztva a hányados 60_x , a maradék 1_x ?

Megoldás

Első ránézésre azt látjuk, hogy tízes számrendszerben ez a feltétel teljesül. Vizsgáljuk meg kicsit alaposabban a kérdést!

A számrendszer alapszáma legalább 7, mert van 6-os számjegy. Mivel 1 a maradék, ezért az 1-gyel kisebb szám osztható 10_x -val.

$$(601_x - 1) : 10_x = 60_x.$$

Írjuk fel az osztást helyiértékes alakban:

$$(6 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 - 1) = (6 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0) \cdot (1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0), \text{ rövidebben: } 6x^2 = 6x \cdot x.$$

Azonossághoz jutottunk, tehát az állítás bármely számrendszerben igaz, ha a számrendszer alapszáma legalább 7.

Fogalmak
számrendszer;
alapszám;
Neumann.

FELADATOK

1. K1

Írjuk át 2-es számrendszerbe az alábbi számokat!
35; 79; 127; 257; 1000.

2. K1

Írjuk fel tízes számrendszerben az alábbi számokat!
 10101_2 ; 10110_2 ; 111111_2 ; 100000_2 .

3. E1

Írjuk át az alábbi tízes számrendszerbeli számokat a megadott alapszámú számrendszerbe!

- a) 47-et 7-es alapú számrendszerbe; c) 6457-et 2-es számrendszerbe;
b) 129-et 4-es alapú számrendszerbe; d) 529-et 8-as számrendszerbe.

4. E1

Írjuk át a következő számokat tízes számrendszerbe!
 45321_6 ; 100011101_2 ; 505_9 ; 43012_7 ; 1201_{12} .

5. E1

Melyik számrendszerben lehet $807 = 3423_x$?

6. E2

Írjuk fel az alábbi számokat 3-as számrendszerben!
 6507_9 ; 4204_6 ; 110101_2 .

7. E2

Végezzük el a következő műveleteket!

$$\begin{array}{r} 10011_2 \\ + 1101_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3243_5 \\ + 441_5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 23112_4 \\ 1031_4 \\ + 3311_4 \\ \hline \end{array}$$

8. E1

Határozzuk meg az x értékét, ha $1220_3 = 63_x$.

9. E2

Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!

- a) 4532_6 osztható 5-tel; c) 23011_8 osztható 7-tel;
b) 12121_4 osztható 3-mal; d) 210111_3 osztható 2-vel.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 520–525; 527–538; 540–555.



Neumann János
(1903–1957)

A XX. század egyik legnagyobb matematikusa. A számítógépek működési alapelveinek kidolgozásakor („Neumann-elv”) ő javasolta például a kettes számrendszer alkalmazását.

TUDÁSPRÓBA (Tananyagon kívüli, nem kötelező rész)

Az alábbi feladatok a II. fejezet témaköréhez sorolhatók, alkalmasak a gyakorlásra, és megoldásukkal azt is ellenőrizheted, hogy a nehezebb gondolatmenetekből mennyit tudtál elsajátítani. A feladatok végeredménye egy-egy természetes szám.

1. Két prímszám különbsége 87. Hány pozitív osztója van a két prímszám összegének?
2. Mennyi azon háromjegyű számok összege, amelyek 4-gyel osztva 1-et adnak maradékkal?
3. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek 504-szerese négyzetszám?
4. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek harmadannyi átlója van, mint az oldalak számának a négyzete?
5. Legkevesebb hány négyzet alakú járólappal lehet hézagmentesen kirakni egy 936 cm x 1365 cm-es téglalap alakú helységet? (A járólap oldalai egész cm hosszúak.)
6. Hány olyan háromszög van, melynek az oldalai természetes számok, és az oldalak szorzata 60? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőeknek.)
7. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely 9-cel osztható és csak a 7 és 8 számjegyeket tartalmazza?
8. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amely felírható két egymás utáni páratlan szám összegeként?
9. Hány 0-ra végződik az $1 \cdot 10^1 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot \dots \cdot 21 \cdot 10^{21}$ szorzat?
10. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amely 3-mal osztva 2, 4-gyel osztva pedig 1 maradékot ad?

Érdekesség

Láttuk, hogy végtelen sok prímszám van. Vajon az ott vizsgált $Q_n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ kifejezés mikor prímszám, ill. mikor összetett szám? Az alábbiakban felsoroljuk $n = 11$ -ig Q_n prímtenyezős felbontásait.

$$Q_1 = 2 + 1 = 3; \quad Q_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7; \quad Q_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31; \quad Q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211;$$

$$Q_5 = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 + 1 = 2311 \text{ (eddig prímekeket kaptunk);}$$

$$Q_6 = 30\,031 = 59 \cdot 509; \quad Q_7 = 510\,511 = 19 \cdot 97 \cdot 277; \quad Q_8 = 9\,699\,691 = 347 \cdot 27\,953;$$

$$Q_9 = 223\,092\,871 = 317 \cdot 703\,763; \quad Q_{10} = 6\,469\,693\,231 = 331 \cdot 571 \cdot 34\,231;$$

$$Q_{11} = 200\,560\,490\,131 \text{ (prím).}$$

Látható, hogy $Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}$ is p_n -nél nagyobb prímszámok szorzataként áll elő. Azt is észrevehetjük, hogy Q_n nem állítja elő az összes prímet, pl. 5, 11, 13, 17, 19 stb. hiányzik.

III. VEKTOROK

Az egybevágósági transzformációk tárgyalása közben az eltolás vizsgálata vetette fel, hogy az irányított szakaszok segítségével új fogalmat alkossunk. Így vezettük be a vektor fogalmát.

A vektor fogalmát azonban nem csak az eltolásnál hasznosíthatjuk, számos példát láttunk a fizikában is a használatára. (Például: elmozdulás, sebesség, gyorsulás, erő, ...)

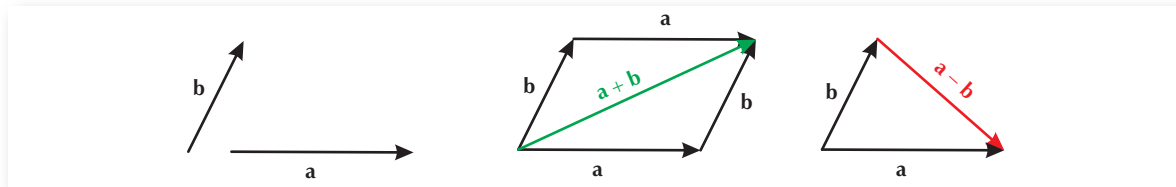
A matematikában a vektor a XIX–XX. századtól vált általánosan használt elnevezéssé.

A vektorfogalom a matematika több területén jól alkalmazható. Segítségével sok kérdés megfogalmazása és tisztázása is könnyebbé válik. Bizonyításokban, feladatok megoldásában a vektorokkal végzett műveletek szinte nélkülözhetetlen segédeszközök. Segítségükkel sok geometria feladatot alakíthatunk át egyszerű számolási példává.

Korábban definiáltuk a vektorok összegét, két vektor különbségét. Most továbblépünk.

22. VEKTOR SZORZÁSA SZÁMMAL

Korábban megismerkedtünk a vektorokkal (olyan mennyiségek, melyeknek iránya és nagysága van), és definiáltuk vektorok körében az összeadást és a kivonást.



Ebben a leckében új művelettel ismerkedünk meg.

1. példa

Egy vonat az egyenes pályán $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ egyenletes sebességgel halad. Jelölje $\mathbf{v}$ az egy másodperc alatt megtett elmozdulását, ekkor (méterben számolva) $|\mathbf{v}| = 15$. Mi lesz az elmozdulása 2, 3, 4 másodperc alatt?

Mivel a pálya egyenes, az elmozdulás-vektorok $\mathbf{v} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v}$, és ezek nagysága rendre $2 \cdot 15$, $3 \cdot 15$, $4 \cdot 15$ (méter). A valós számok analógiájára, az ismételt összeadást célszerűnek tűnik most is szorzással jelölni. Ekkor az elmozdulás-vektorokat $2\mathbf{v}$, $3\mathbf{v}$, $4\mathbf{v}$ alakban írhatnánk, és nagyságukra teljesül, hogy $|2\mathbf{v}| = 2|\mathbf{v}|$ stb., amit elvárunk.

Hogyan definiálhatnánk ekkor a $(-1) \cdot \mathbf{v}$ vektort? Ha a valós számokkal kapcsolatos analógiát megtartjuk, akkor $\mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, innen $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ adódik. (Tehát egy vektor -1 -szerese megegyezik a vektor ellentettjével.)

Definíció

Legyen adott az $\mathbf{a}$ vektor és egy λ valós szám.

- Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{a}$ vektor és a λ szám szorzata az $\mathbf{a}$ vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ és $\lambda > 0$ esetén iránya az $\mathbf{a}$ vektor irányával megegyező; $\lambda < 0$ esetén iránya az $\mathbf{a}$ vektor irányával ellentétes; $\lambda = 0$ esetén $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$, így iránya tetszőleges.
- Ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, akkor $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A szám és a vektor két különböző fogalom. Ezt a különbségséget hangsúlyozni is szoktuk.

Elterjedt szokás az, hogy amikor vektorok és számok együtt szerepelnek, akkor a számot skalármennyiségnek, röviden skalárnak nevezzük. Ezzel a szóhasználattal azt mondjuk, hogy az előzőekben vektornak skalárral való szorzását definiáltuk.

Az is elterjedt szokás, hogy amikor vektort skalárral szorzunk, akkor a vektort latin betűvel, a számot görög betűvel jelöljük. (Természetes, hogy a szokásokhoz nem kell mindig ragaszkodnunk.)

Ellenőrizhetjük, hogy a definíció teljesíti a korábbi elvárásunkat: $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ teljesül.

Vektorok számmal történő szorzására fennállnak az alábbi azonosságok:

- $\alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$; b) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$; c) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.

III. VEKTOROK

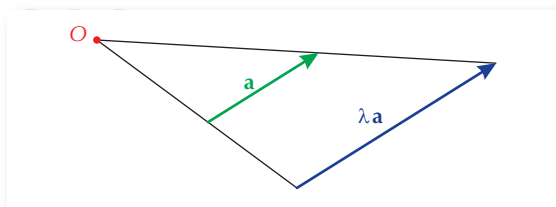
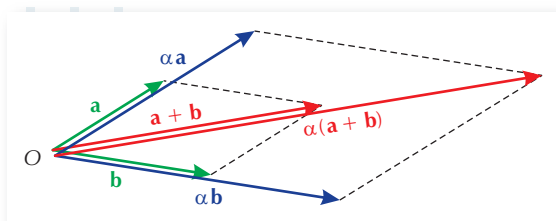
Az első azonosság szerint, ha két számmal akarunk egy vektort szorozni, akkor lehet először az egyikkel, majd az így kapott szorzatot a másik számmal szorozni; de ugyanazt kapjuk, ha előbb a két számot szorozzuk össze, és azután a szorzattal szorozzuk a vektort. A második azonosság szavakban azt jelenti, hogy mindegy, hogy a számokat előbb összeadjuk, és azután szorozzuk meg vele a vektort, vagy külön-külön szorzunk a két számmal, és azután adjuk össze a kapott vektorokat.

Mindkét tulajdonság a vektor skalárral történő szorzásának a definíciójából adódik.

Emelt szint

Példaként igazoljuk az a) azonosságot!

Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}$ nem nullvektor (ha nullvektor, akkor az állítás nyilvánvaló). Az egyenlőség mindkét oldalán $\mathbf{a}$ irányú vagy $\mathbf{a}$ -val ellentétes irányú vektor van. A jobb oldali vektor hossza az $\mathbf{a}$ vektor hosszának $|\alpha\beta|$ -szorosa, a bal oldali vektor hossza a $\beta\mathbf{a}$ vektor hosszának $|\alpha|$ -szorosa. Minthogy a $\beta\mathbf{a}$ vektor hossza az $\mathbf{a}$ vektor hosszának $|\beta|$ -szorosa, ezért a bal oldali vektor hossza is az $\mathbf{a}$ vektor hosszának $|\alpha\beta|$ -szorosa. Ha $\alpha \cdot \beta < 0$, akkor mindkét oldalon $\mathbf{a}$ -val ellentétes, ha $\alpha \cdot \beta > 0$, akkor mindkét oldalon $\mathbf{a}$ -val megegyező irányú vektor áll. Az egyenlet két oldalán levő vektor hossza és iránya megegyezik, így az azonosság teljesül.



A c) tulajdonság szerint, ha vektorok összegét egy számmal szorozzuk, akkor ugyanazt kapjuk, mintha a vektorokat külön-külön megszoroztuk volna a számmal és utána végeztünk volna összeadást. Ezt az ábrán látható középpontos hasonlóság segítségével láthatjuk be.

(A b) és c) tulajdonság alakja hasonlít a számoknál látott disztributív tulajdonsághoz. A b) tulajdonságból azonban nem következik a c) tulajdonság, hiszen ezekben a vektorok és a számok szerepe felcserélődött. Mivel vektor és szám két különböző fogalom, a b) után a c) tulajdonságot külön kell megvizsgálnunk.)

Két párhuzamos vektorhoz, amelyek közül egyik sem nullvektor, mindig található olyan középpontos hasonlóság, amelyik az egyik vektort a másikba viszi át. Tehát:

két párhuzamos vektor közül az egyik a másik számszorosa-ként írható fel. A számtényező egyértelműen meghatározott.

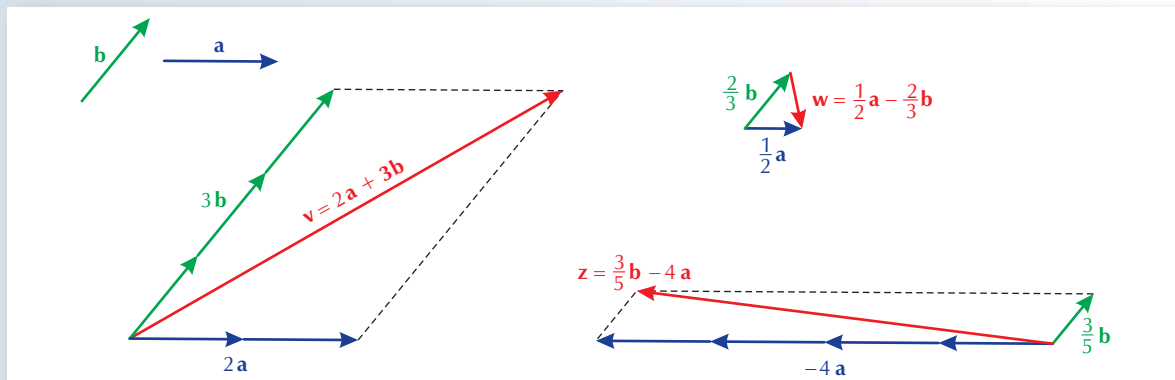
2. példa

Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokhoz szerkesszük meg a $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ vektorokat!

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}; \mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}; \mathbf{z} = \frac{3}{5}\mathbf{b} - 4\mathbf{a}.$$

(Egy szakasz racionális arányú részét hasonlóság segítségével szerkeszthetjük meg. Hogyan?)

Megoldás



3. példa

Adott az $\mathbf{a}$ vektor ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$). Hogyan adhatjuk meg az $\mathbf{a}$ -val párhuzamos, azonos irányú, egységnyi hosszúságú vektort?

Megoldás

Ezt a vektort az „ $\mathbf{a}$ ” irányú egységvektornak nevezzük, és $\mathbf{a}_0$ -val jelöljük ($|\mathbf{a}_0| = 1$).

Mivel az $\mathbf{a}$ abszolút értéke az $|\mathbf{a}|$ szám, ezért ha ezzel a számmal szorozzuk $\mathbf{a}_0$ -t, akkor az $\mathbf{a}$ vektort kapjuk vissza:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}_0.$$

Az egyenlőséget az $|\mathbf{a}|$ nemzérus számmal osztva megkapjuk az $\mathbf{a}$ vektor irányába eső $\mathbf{a}_0$ egységvektort:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Legyen $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Vizsgáljuk meg, hogy milyen vektorok állnak elő $\alpha \mathbf{a}$ alakban!

A skalárral való szorzás definíciójánál láttuk, hogy $\alpha \mathbf{a}$ párhuzamos lesz az $\mathbf{a}$ vektorral.

Vajon megfordítva igaz az állítás? Belátjuk, hogy igaz.

Tétel

Ha adott az $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) és a vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor, akkor a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektorból skalárral való szorzással előállítható.

Bizonyítás

Állításunk azonnal adódik, ha a $\mathbf{v}$ nullvektor, ekkor $\mathbf{v} = 0\mathbf{a}$. Más esetben legyen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamos és azonos irányú két vektor. Ekkor a belőlük előállított két egységvektor azonos:

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Ebből a $|\mathbf{v}|$ számmal történő szorzással kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektornak számszorosa.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamos és ellentétes irányú két vektor, akkor hasonló gondolattal kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = -\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}. \quad (\text{Mindkét esetben felhasználtuk, hogy } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.)$$

Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

Fogalmak
skalár;
egységvektor.

Vektorok szorzása számmal

Az azonosságok „érdekessége”, hogy az azonos módon jelölt műveleteket különböző objektumok között hajtjuk végre: a szorzást két skalár, illetve egy skalár és egy vektor között; míg az összeadást két skalár, illetve két vektor között.

FELADATOK

1. K1

Az adott $\mathbf{a}$ vektorhoz szerkesszük meg az alábbi vektorokat!

K1 a) $2\mathbf{a}, -3\mathbf{a}, \frac{3}{4}\mathbf{a}$; **K2** b) $-\frac{5}{7}\mathbf{a}, \sqrt{2}\mathbf{a}$.

2. K2

Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorhoz szerkesszük meg az alábbi vektorokat!

a) $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$;

b) $3\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{4}$;

c) $\frac{1}{2}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$;

d) $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \sqrt{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.



3. K2

Legyenek A, B, C, D és E tetszőleges pontok. Milyen λ -ra igaz, hogy

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \lambda(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA})?$$

4. K2

Egy pontszerű test sebessége észak-déli irányban mozogva 2, kelet-nyugati irányban 3 egység. A test időegységenként a következő irányokba mozog: É, É, K, É, É, K, D, K, D, D, Ny, Ny, Ny, Ny, Ny, É, Ny. Milyen messzire kerül a kezdeti helyzetétől a 17 időegység elteltével?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2317, 2318.

Emelt szint

23. AZ EGYÉRTELMŰ VEKTORFELBONTÁS TÉTELE

1. példa

Egy 60 méter széles folyón átkelünk egy csónakkal. A folyó átlagos sebessége $f = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (úgy tekinthetjük, hogy ez a folyó teljes keresztmetszetén állandó), a csónakkal pedig $c = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel tudunk haladni. Milyen irányban célszerű evezni ahhoz, hogy

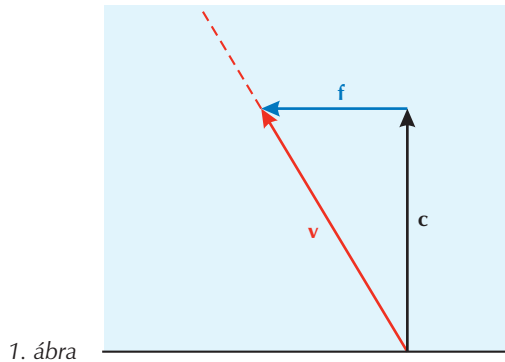
- a legrövidebb idő alatt;
- a legrövidebb úton

érjünk át a túlsó partra?

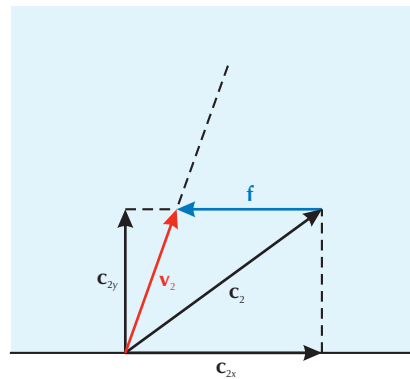
Megoldás

- a) A folyópartra merőleges irányban kell evezni. Ekkor a csónak (**c**) és a folyó (**f**) sebességvektora összeadódik, $\mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{f}$ a haladás sebességvektora (1. ábra). A tulsó part elérési idejét csak $|\mathbf{c}|$ befolyásolja, ebben az esetben a 60 métert $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel $\frac{0,06}{5} = 0,012$ óra, azaz kb. 43 másodperc alatt tesszük meg.

$$(|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \text{ a megtett út } 5,8 \cdot 0,012 \approx 70 \text{ méter.})$$



1. ábra



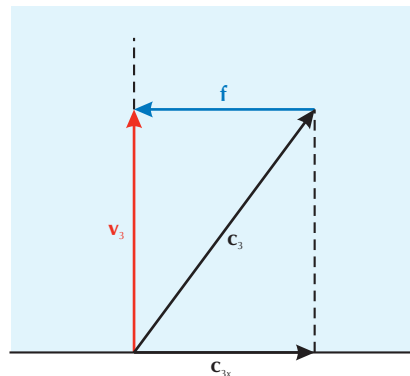
2. ábra

A haladási irány sebességvektora mindig **c** és **f** összegeként áll elő. (Úgy is fogalmazhatunk, hogy **v** felbontható a **c** és **f** összetevőkre, komponensekre.) Ha egy másik evezési irányt választunk (2. ábra), akkor a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{c}_2 + \mathbf{f}$ sebességvektor partra merőleges összetevője kisebb lesz, tovább tart az átkelés.

Bontsuk fel a $\mathbf{c}_2$ vektort a parttal párhuzamos, illetve arra merőleges összetevőkre! A felbontás $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{2x} + \mathbf{c}_{2y}$; ebből pedig látható, hogy az átkelési idő a csónak partra merőleges $\mathbf{c}_{2y}$ komponensétől függ.

- b) A legrövidebb utat (60 méter) akkor kapjuk, ha $\mathbf{v}_3$ a partra merőleges.

Ekkor $\mathbf{v}_3 = \mathbf{c}_3 + \mathbf{f}$ a felbontás, $|\mathbf{v}_3| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ az átkelési sebesség, és $\frac{0,06}{4} = 0,015$ óra, azaz 54 másodperc az átkelés ideje. (A célszerű evezési irányt a 3, 4, 5 oldalhosszúságú derékszögű háromszög hegyesszögei határozzák meg.)



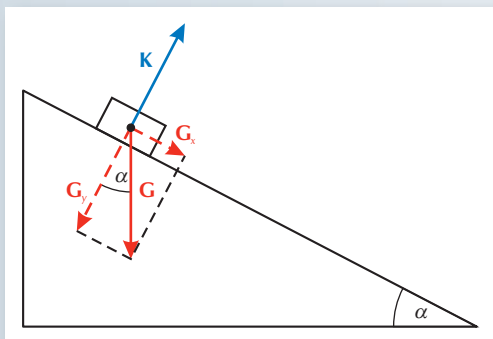
3. ábra

2. példa

Tipikus fizikai alkalmazás a lejtőn lévő test mozgásának a leírása.

Egy $\alpha = 30^\circ$ -os hajlásszögű lejtőre helyezett m tömegű testre a $\mathbf{G}$ nehézségi erő és a lejtő által kifejtett $\mathbf{K}$ nyomóerő hat. (A súrlódástól eltekintünk.) Mekkora a testre ható erők eredője (összege)?

Megoldás



Mivel a test a lejtőn mozog, a nehézségi erőt felbontjuk a lejtővel párhuzamos $\mathbf{G}_x$ és a lejtőre merőleges $\mathbf{G}_y$ összetevőkre (ábra).

$\mathbf{G}_y$ és $\mathbf{K}$ egyensúlyt tart ($\mathbf{G}_y = -\mathbf{K}$), a testre ható erők eredője $\mathbf{G}_x$, ez a komponens határozza meg a test gyorsulását. $\mathbf{G}_y$ és $\mathbf{G}$ bezárt szöge α (merőleges szárú hegyesszögek), ezért az $\alpha = 30^\circ$ -os „félszabályos” derékszögű háromszög tulajdonsága miatt $\mathbf{G}_x = \frac{\mathbf{G}}{2}$. A testre ható nehézségi

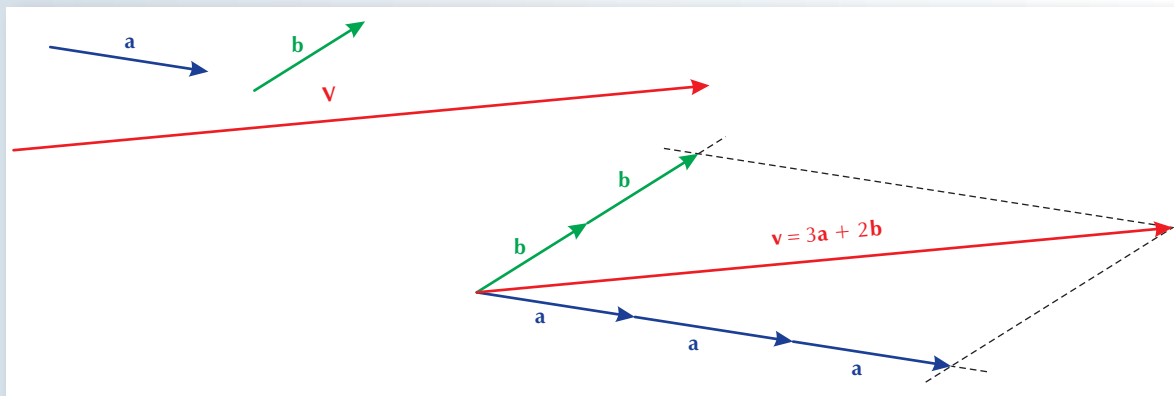
erő nagysága mg , így $|\mathbf{G}_x| = \frac{mg}{2}$, vagyis a test gyorsulása $\frac{g}{2}$.

Vektorokat kettő vagy több összetevő összegére sokféleképpen fel lehet bontani. A gyakorlatban általában adott irányú összetevőket keresünk – kérdés, hogy ezekkel hogyan valósítható meg a felbontás.

3. példa

Adottak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok és a velük egysíkú $\mathbf{v}$ vektor. (Abból, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok, már következik, hogy nincs közöttük $\mathbf{0}$.) A $\mathbf{v}$ vektor felbontható-e az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre?

Az ábrán az ott megadott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, valamint $\mathbf{v}$ vektorokkal ezt megtettük. (A vektorokat közös kezdőpontba toltuk, és $\mathbf{v}$ kezdő- és végpontjából párhuzamosakat húztunk $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel.) A $\mathbf{v}$ vektort felbontottuk $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevők összegére: $\mathbf{v} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.



Más esetben is megtehetjük ezt? Az ábrán látott módon $\mathbf{v}$ végpontjából párhuzamosakat húzunk $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel, így mindig szerkeszthetünk paralelogrammát, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos. A velük egysíkú $\mathbf{v}$ vektor mindig felírható $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ alakban, és ilyen alakban csak egyféleképpen írható fel. (A szerkesztés során kapott paralelogramma egyértelmű.)

A felbontás egyértelműségét indirekt úton is bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy kétféle felbontás létezik:

$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}$ és $\mathbf{v} = \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}$. Vegyük ezek különbségét:

$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{a} + (\beta_1 - \beta_2)\mathbf{b}$, amelyből $(\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{a} = (\beta_2 - \beta_1)\mathbf{b}$.

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos vektorok. Kiindulásunknál azonban feltétel volt, hogy nem párhuzamosak. Tehát kétféle felbontás nem lehetséges.

Megjegyzés

Fontos feltétel, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamosak. Ellenkező esetben a fenti módon csak a velük párhuzamos vektorok állíthatók elő, a sík más vektorai nem.

Tétel

Az egyértelmű vektorfelbontás tétele:

Ha adottak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamos vektorok, akkor bármely, velük egysíkú $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felbontható az adott vektorokkal párhuzamos összetevőkre, azaz egyértelműen felírható

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$$

alakban, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$, és $\beta \in \mathbf{R}$.

Szokásos elnevezések a $\mathbf{v}$ vektor előző felbontásánál:

az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat **bázisvektoroknak** (a két vektort együtt **bázisnak** vagy **bázisrendszernek**),

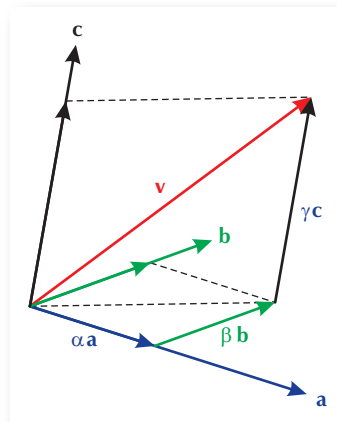
az $\alpha\mathbf{a}$ és $\beta\mathbf{b}$ vektorokat **komponenseknek**,

az $(\alpha; \beta)$ számpárt pedig a $\mathbf{v}$ vektor ($\mathbf{a}; \mathbf{b}$) rendszerre vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük. (Az elnevezésből már sejthetjük, hogy a vektorok felbontását a derékszögű koordinátarendszerben is megvizsgáljuk. A gyakorlatban kiemelt fontosságú a vektorok merőleges összetevőkre való felbontása, erről a következő fejezetben részletesen lesz szó.)

Gondolhatunk arra, hogy egy vektor felbontását általánosabban nézzük. Lehetséges, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v}$ vektorok nem egysíkúak. Ebben az esetben az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ bázisvektoron kívül egy harmadik, velük nem egysíkú $\mathbf{c}$ bázisvektorra is szükség van. Bebizonyítható, hogy ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem egysíkú vektorok, akkor a térben bármely $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felbontható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokkal párhuzamos összetevők összegére: azaz

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c},$$

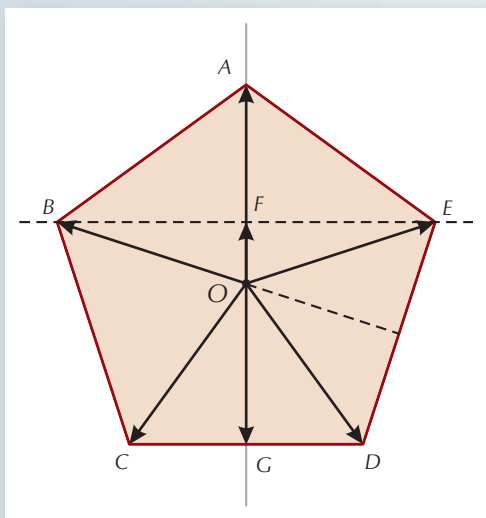
ahol $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázisvektorok, és $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ és $\gamma \in \mathbf{R}$.



4. példa

Mennyi az ABCDE szabályos ötszög középpontjából a csúcsokba vezető vektorok összege?

Megoldás



Az ötszög szimmetriatulajdonságai miatt

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \mathbf{0}$$

a sejtésünk (O a középpont). Ennek igazolására válasszuk ki például az AO szimmetriatengelyt, és bontsuk fel a vektorokat AO -val párhuzamos, illetve AO -ra merőleges összetevőkre. A merőleges összetevők páronként egymás ellentettjei, összegük $\mathbf{0}$; így az ábra szerinti $\vec{OA} + 2\vec{OF} + 2\vec{OG}$ összegről kell belátni, hogy nullvektor.

Ez nem tűnik egyszerű feladatnak, de annyit biztosan megállapíthatunk, hogy az összegvektor párhuzamos AO -val.

Viszont kezdetben kiválaszthatjuk a BO szimmetriatengelyt is, és hasonlóan megmutathatjuk, hogy a vektorok eredője párhuzamos BO -val. Ezzel már igazoltuk az állítást: olyan vektor, ami párhuzamos AO -val és BO -val, csak a nullvektor lehet.

(Egy elemi geometriai tételt is kaptunk, mely szerint a szabályos ötszögben $OA + 2OF = 2OG$.)

Fogalmak

bázisvektor;
komponens;
vektor koordinátái.

Megjegyzés

A gondolatmenetből következik, hogy az állítás tetszőleges páratlan oldalszámú szabályos sokszögre is igaz. (A feladatra egy másik bizonyítást is adunk a vektorok forgatásának tárgyalásakor.)

FELADATOK

1. K1

Egy csónakot két kötéllel, egyenlő erővel húzunk. A kötelek egymással 60° -os szöget zárnak be. Mekkora a kötelekben ható erő, ha az eredő erő 200 N ?

2. K2

Egy 6 kg tömegű lámpa függ az egymástól 12 m távolságra lévő póznák között kifeszített kötél felező pontjában. A lámpa belógása 13 cm . Mekkora erők keletkeznek a kótélben?

3. E1

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak. Határozzuk meg α és β értékét!

a) $7\mathbf{a} + 9\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a} + (2\beta + 1)\mathbf{b}$;

b) $(2\beta + \alpha - 3)\mathbf{a} - (\beta - \alpha)\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

4. K2

Az $ABCD$ paralelogrammában a CD oldal C -hez közelebbi negyedelő pontja E , az AD oldal felezőpontja F , a BC oldal B -hez közelebbi harmadoló pontja H . Írjuk fel az $\vec{AD} = \mathbf{a}$ és $\vec{AB} = \mathbf{b}$ vektorok segítségével a $\vec{CF}$, $\vec{HE}$, $\vec{EF}$, $\vec{FH}$ vektorokat!

5. K2

Az O középpontú $ABCDEF$ szabályos hatszögben $\vec{OA} = \mathbf{a}$ és $\vec{OB} = \mathbf{b}$. Fejezzük ki $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel a C csúcsból a többi csúcsba mutató öt vektort!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2319–2322.

24. VEKTOROK A KOORDINÁTASÍKON, HELYVEKTOROK

Vegyünk fel egy koordináta-rendszert. Jelölje az origóból az $(1; 0)$ pontba mutató vektort $\mathbf{i}$, az origóból a $(0; 1)$ pontba mutató vektort $\mathbf{j}$.

Ha a koordináta-rendszerben bázisvektoroknak az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ vektorokat, valamint vonatkoztatási pontnak az origót tekintjük, akkor ebben a koordináta-rendszerben vektorokkal is dolgozhatunk.

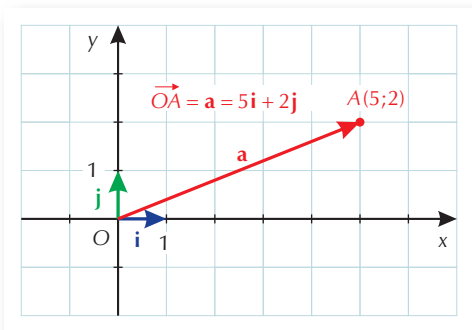
Ha az origó kezdőpontból kiindulva veszünk fel egy (az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok síkjában) megadott $\mathbf{a}$ vektort, akkor annak végpontja már egyértelműen meghatározott. Megtehetjük, hogy a pontokat egy adott pontból kiinduló vektorokkal határozzuk meg. Ehhez az origót kell rögzítenünk. Az origó szokásos jele: O .

Az origóból induló egy-egy vektorral egy-egy pontot kölcsönösen egyértelműen tudunk meghatározni. Az origó kezdőpontú vektorokat **helyvektoroknak** nevezzük. (Ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy a vektor kezdőpontja nem rögzített, akkor **szabadvektorról** beszélünk.)

Például ha a koordinátesíken felvesszük az $A(5; 2)$ pontba mutató $\mathbf{a}$ helyvektort, ez az $\vec{OA} = \mathbf{a}$ helyvektor egyértelműen felbontható $\mathbf{i}$ -vel és $\mathbf{j}$ -vel párhuzamos összetevők összegére:

$$\vec{OA} = \mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Emiatt az $(5; 2)$ számpárt az $\vec{OA}$ helyvektor koordinátáinak is nevezzük, szokásos írásmódja: $\mathbf{a}(5; 2)$ vagy $\mathbf{a} = (5; 2)$, ha a szövegkörnyezetből kiderül, hogy vektort jelölünk.



1. példa

Adott két vektor, $\mathbf{a}(2; -3)$ és $\mathbf{b}(-5; 1)$. Határozzuk meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$ és $2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ vektorok koordinátáit!

Megoldás

$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ az előbbiek szerint.

Ezért $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (2 - 5)\mathbf{i} + (-3 + 1)\mathbf{j} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

$3\mathbf{a} = 3(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$.

$2\mathbf{a} - 5\mathbf{b} = 2(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) - 5(-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) + (25\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = 29\mathbf{i} - 11\mathbf{j}$.

Láthatjuk – és általánosan is hasonlóan bizonyítható –, hogy:

Két vektor összegének koordinátái az összetevő vektorok megfelelő koordinátáinak összegei, **vektor számszorosának koordinátái** a megfelelő koordináták számszorosai.

2. példa

Az ABC háromszöget csúcsainak $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektoraival adjuk meg. Írjuk fel oldalainak vektorait!

Megoldás

A kivonás műveletéből azonnal adódik:

$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}; \vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}; \vec{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

3. példa

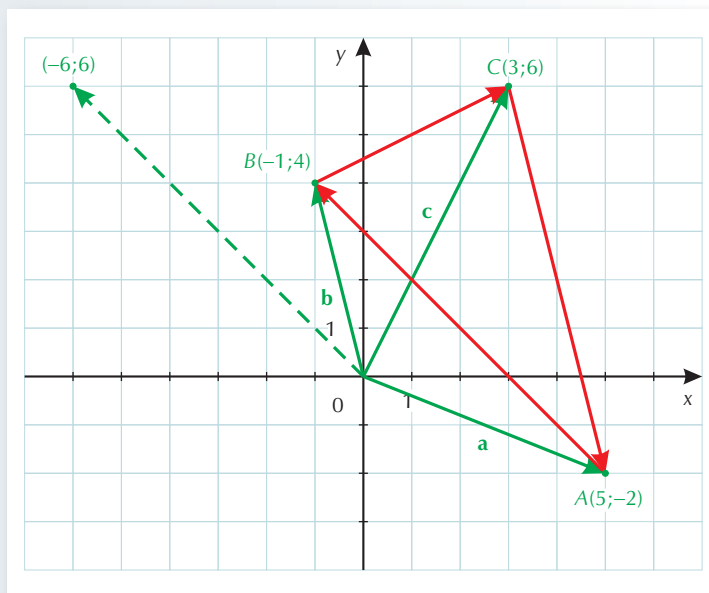
Az ABC háromszöget csúcsainak koordinátaival adjuk meg. Írjuk fel oldalvektorainak a koordinátáit! Legyen $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$ és $C(3; 6)$.

Megoldás

$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = -1\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \text{ tehát } \vec{AB}(-6; 6);$$

$$\vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - (-1\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \text{ tehát } \vec{BC}(4; 2);$$

$$\vec{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \text{ tehát } \vec{CA}(2; -8).$$



Megjegyzés

Az $\vec{AB}$ vektort (hasonlóan a $\vec{BC}$, illetve $\vec{CA}$ vektorokat) irányított szakasszal adjuk meg. Az azonos irányú és nagyságú irányított szakaszok egyenlők, mind ugyanazt a vektort reprezentálják.

Az $\vec{AB}(-6; 6)$ irányított szakasz a tetszőleges kezdőpontú, $-6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ bázisvektorokkal megadható, egymással egyenlő irányított szakaszokat jellemzi. Ha ezeket az irányított szakaszokat eltoljuk úgy, hogy kezdőpontjuk az origóba kerüljön, akkor a végpontjuk a $(-6; 6)$ pont lesz. Mondhatjuk tehát, hogy az irányított szakaszok közül a helyvektor egy nevezetes reprezentáns.

Fogalmak
helyvektor;
szabadvektor.

FELADATOK

1. K1

Határozzuk meg az ABC háromszög oldalvektorainak a koordinátáit, ha $A(2; 3)$, $B(-2; 2)$ és $C(0; 6)$!

2. K1

Nagyítsuk az előző feladat háromszögét háromszorosára az origóból! Mik lesznek a keletkező háromszög csúcsainak és oldalvektorainak a koordinátái? Mik lesznek az új koordináták a $-0,5$ arányú kicsinyítés esetén?

3. K2

Adottak az $\mathbf{a}(-2; 4)$, $\mathbf{b}(5; 1)$, $\mathbf{c}(-9; 7)$, $\mathbf{d}(6; -1)$ vektorok.

a) Határozzuk meg a $3\mathbf{a} - \mathbf{c}$, $\mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$, $2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ vektorok koordinátáit!

b) Bontsuk fel a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorokat $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos összetevőkre!

4. K2

Az ABC háromszöget (lásd 1. feladat)

a) tükrözzük az x tengelyre;

b) tükrözzük az origóra;

Rajzoljuk le és adjuk meg a képpontok koordinátáit! Írjuk fel a képháromszögek csúcsainak koordinátáit!

c) tükrözzük a $(4; 2)$ pontra;

d) toljuk el a $\mathbf{v}(-5; 1)$ vektorral!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2404, 2408, 2414–2417.

25. FELEZŐPONT, OSZTÓPONT

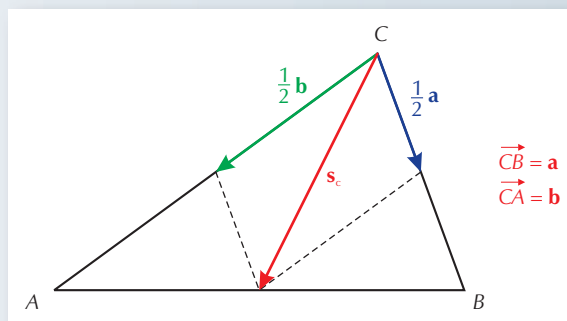
1. példa

Bontsuk fel a háromszög egy súlyvonalvektorát a kezdőpontjából kiinduló két oldallal párhuzamos összetevőkre!

Megoldás

A felbontást az ábrán végeztük el. A súlyvonal végpontjából párhuzamosakat húztunk a háromszög két oldalával. Minthogy ezek a párhuzamosak a háromszög középvonalai, ezért a keletkezett paralelogramma megfelelő oldalvektorai $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ és $\frac{1}{2}\mathbf{b}$. Tehát

$$\mathbf{s}_c = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$


Hasonlóan bizonyítható, hogy **adott pontból egy szakasz két végpontjába mutató vektorok számtani közepe a szakasz felezőpontjába mutató vektor.**

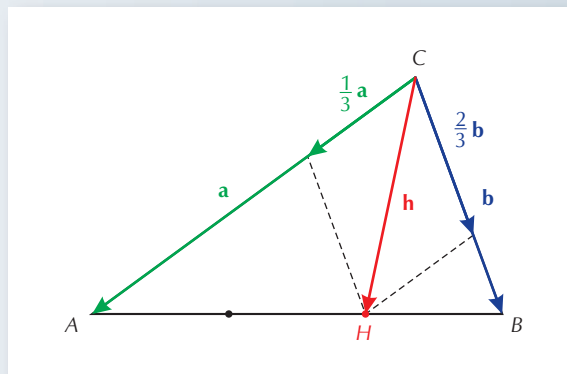
2. példa

A háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal valamelyik harmadolópontjába mutató vektort bontsuk fel a kezdőpontjából kiinduló két oldalvektorral párhuzamos összetevőkre!

Megoldás

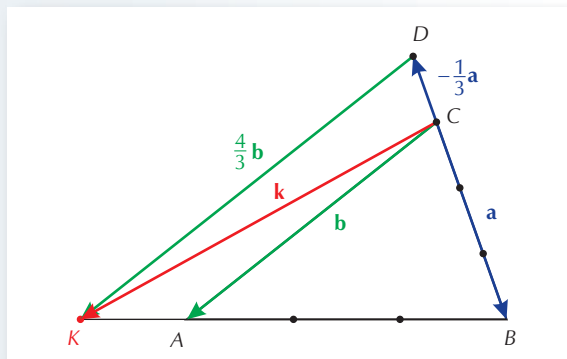
A felbontást az előbbieket szerint végeztük el az ábrán. Eredményünk a hasonló háromszögek alapján:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}.$$



3. példa

Az ábrán az ABC háromszög BA oldalát az A ponton túl $\frac{1}{3}$ -ával meghosszabbítottuk (K pont). Bontsuk fel a $\overrightarrow{CK} = \mathbf{k}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre! ($\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$.)



Megoldás

A BC oldalt C -n túl $\frac{1}{3}$ -ával meghosszabbítjuk, így kapjuk a D pontot.

Az ábrából leolvasható, hogy $\mathbf{k} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK}$.

$ABC\triangle \sim KBD\triangle$ (megegyezik két oldal aránya és a közbezárt szög), ezért $DK \parallel CA$. Ebből következik, hogy $DK = \frac{4}{3}CA$.

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{3}\mathbf{a} \text{ és } \overrightarrow{DK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{4}{3}\mathbf{b}, \text{ így } \mathbf{k} = -\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{4}{3}\mathbf{b}.$$

Ezt az eredményt egyszerűbben is megkaphatjuk. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\mathbf{k} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} = \mathbf{b} + \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\mathbf{a} = -\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{4}{3}\mathbf{b}.$$

Emelt szint

Az előző példák sugallják az általánosítást. Egy szakasznak a felezőpontján, harmadolópontján kívül kereshetjük az $m : n$ arányban osztó pontjának a helyvektorát is.

4. példa

Hogyan kaphatjuk meg annak a P pontnak a helyvektorát, amely a végpontjainak helyvektorával megadott AB szakaszt $AP : PB = m : n$ arányban osztja két részre?

Megoldás

Első megoldás

Az ábrán az AB szakasz két végpontjának helyvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. A szakaszt $m : n$ arányban osztó P pont helyvektora legyen $\mathbf{p}$.

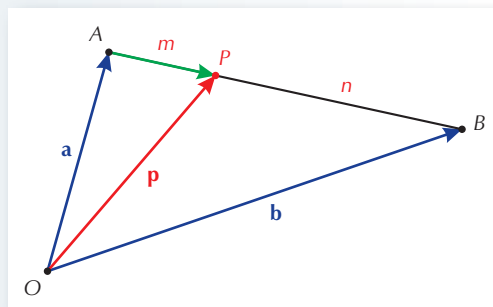
Tekintsük a szakaszok arányát:

$AP : PB = m : n$, ekkor AP az AB szakasz $\frac{m}{m+n}$ -ed része:

$$AP = \frac{AB}{m+n} \cdot m.$$

Ahhoz hasonlóan, amit a felezőpont helyvektorának meghatározásánál láttunk:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}; \quad \overrightarrow{AP} = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a})m}{m+n}.$$



A P pont $\mathbf{p}$ helyvektorát összegként írjuk fel:

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a})m}{m+n}; \quad \mathbf{p} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m+n}. \quad \left(\mathbf{p} = \frac{n}{m+n} \cdot \mathbf{a} + \frac{m}{m+n} \cdot \mathbf{b} \right)$$

Második megoldás

Tekintsük a szakaszok arányát:

$AP : PB = m : n$. Ebből következik, hogy $n \cdot AP = m \cdot PB$. Ez azt is jelenti, hogy $n \cdot \overrightarrow{AP} = m \cdot \overrightarrow{PB}$, mivel egyirányúak a vektorok.

Két pont közötti vektor egyenlő a végpontba mutató helyvektor és a kezdőpontba mutató helyvektor különbségével, így $n \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}) = m \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{p})$. Elvégezve a szorzást, $n\mathbf{p} - n\mathbf{a} = m\mathbf{b} - m\mathbf{p}$. Egy oldalra rendezzük az ismeretlen $\mathbf{p}$ vektor számszorosságait, a többi vektort pedig a másik oldalra átvisszük, ekkor $\mathbf{p}(n + m) = n \cdot \mathbf{a} + m \cdot \mathbf{b}$. Most osztunk az $[(n + m) \neq 0]$ számmal, és így azt kapjuk:

$$\mathbf{p} = \frac{n \cdot \mathbf{a} + m \cdot \mathbf{b}}{(n + m)}.$$

Ezt nevezzük magunk között „**kancsal szorzási szabály**”-nak. Azért kancsal, mert az A ponthoz van közelebb az m rész, mégis a B -be mutató helyvektor van m -mel szorozva, míg a B ponthoz közeli n rész az A helyvektor együtthatója.

A képlet visszaadja a korábban a felezőpontra kapott összefüggést is. Felezőpontnál az arány $1 : 1$, ezért $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.

5. példa

Bizonyítsuk be, hogy a négyszög szemközti oldalfelező pontjait összekötő szakaszok (a négyszög középvonalai) felezik egymást!

Megoldás

A feladat szövege nem említ vektort, de hasznos, ha felvesszünk egy tetszőleges O vonatkoztatási pontot (origót), és a négyszög A, B, C, D csúcsait az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ helyvektorokkal adjuk meg. Ekkor az oldalak F_1, F_2, F_3, F_4 felezőpontjainak helyvektorai:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}; \quad \mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}; \quad \mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}; \quad \mathbf{f}_4 = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{a}}{2}.$$

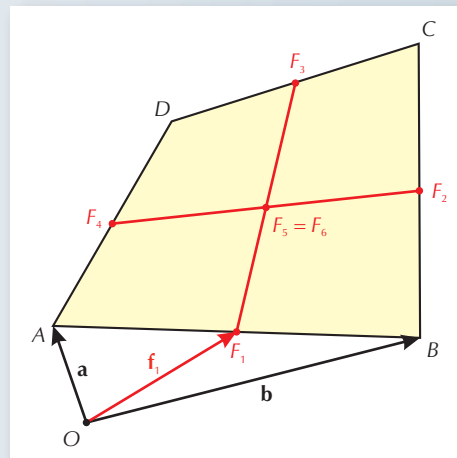
Az F_1F_3 középvonal F_5 felezőpontjának helyvektora:

$$\mathbf{f}_5 = \frac{\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_3}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4};$$

az F_2F_4 középvonal F_6 felezőpontjának helyvektora:

$$\mathbf{f}_6 = \frac{\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_4}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}.$$

A két középvonal felezőpontjába ugyanaz a helyvektor mutat, tehát a két középvonal valóban felezi egymást, $F_5 = F_6$.



Megjegyzés

A megoldás során nem használtuk ki, hogy a négy pont egy sík négy általános helyzetű pontja, ezért a bizonyítás akkor is érvényes, ha három, vagy akár mind a négy pont egy egyenesen van, sőt a tetraéder négy

csúcsa által meghatározott négyszögre, azaz 2-2 kitérő élének felezőpontjaira is jó. (Szokás a térbeli négyszöget torz négyszögnek is nevezni.)

FELADATOK

1. K2

Bizonyítsuk be, hogy ha $\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{PB} + \vec{PD}$, akkor az AB és CD szakaszok valamely O pontra szimmetrikus helyzetűek!

2. K2

Írjuk fel az AB szakasz B -hez közelebbi

a) negyedelőpontjába;

b) $2 : 7$ arányú osztópontjába

mutató helyvektort az A és B pontokba mutató helyvektorok segítségével!

3. K2

Hosszabbítsuk meg az AB szakaszt A -n túl

a) a felével;

b) a $\frac{2}{3}$ -ával;

c) az $\frac{5}{13}$ -ával!

Írjuk fel az ide mutató helyvektort az A és B pontokba mutató helyvektorok segítségével!

4. K2

Adottak az $A(-4; 8)$ és $B(14; -1)$ pontok. Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának, illetve harmadoló pontjainak koordinátáit!

5. E1

Írjuk fel az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezőjének a BC oldallal való metszéspontjába mutató vektort az $\vec{AB}$ és $\vec{AC}$ vektorok segítségével!

6. E2

Az O középpontú körben vegyünk fel két egymásra merőleges húrt, ezek végpontjai A, B , illetve C, D , metszéspontjuk M . Bizonyítsuk be, hogy

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OM}!$$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2352–2355, 2364, 2365.



26. HÁROMSZÖG SÚLYPONTJÁBA MUTATÓ VEKTOR

A felezőpontba és a harmadolópontra mutató vektorok jól alkalmazhatók egyes feladattípusok körében. Könnyen igazolhatjuk a következő állítást is.

1. példa

A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

Ezt a tételt a 9. osztályban elemi módszerekkel már bizonyítottuk.

Megoldás

Az ábrán az ABC háromszög AB oldalának felezőpontját F -fel, a CF súlyvonal F -hez közelebb eső harmadolópontját S -sel jelöltük. Egy tetszőleges O pontból az A, B, C, F, S pontokba mutató vektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \mathbf{s}$. Az előző fejezet 2. és 3. példája alapján:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

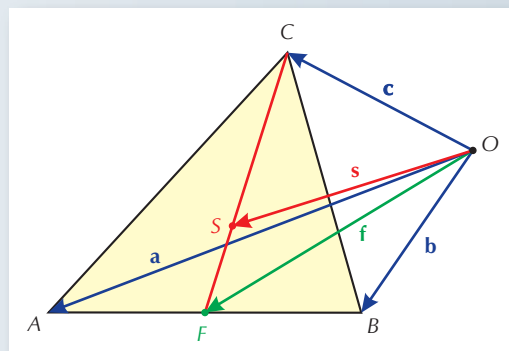
$$\mathbf{s} = \frac{2}{3}\mathbf{f} + \frac{1}{3}\mathbf{c}.$$

Az utóbbi, az első egyenletet figyelembe véve:

$$\mathbf{s} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) + \frac{1}{3}\mathbf{c} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Egy másik súlyvonalnak az oldalhoz közelebb eső harmadolópontjához úgy juthatunk el, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok szerepét felcseréljük. Ez a csere az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektorösszeget nem változtatja meg, s így eredményünk ugyanaz az $\mathbf{s}$ vektor. Eszerint a súlyvonalakon ugyanaz a pont az oldalhoz közelebbi harmadolópont, a súlyvonalak tehát egy pontban metszik egymást.

Az S pontba mutató vektor a tér egy tetszőlegesen kiválasztott O pontjából: $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$.



Megjegyzés

A bizonyítás során nem használtuk fel, hogy O az ABC háromszög síkjában van.

Tétel

A tér tetszőleges pontjából a **háromszög súlypontjába mutató vektor** a csúcsokba mutató vektorok számtani közepe.

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$, $\mathbf{c}(c_1; c_2)$ vektorok esetén a súlypontba mutató vektor

$$\mathbf{s}\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

A vektorok segítségével a tisztán geometriai bizonyítások helyett gyakran algebrai módszerekkel is dolgozhatunk. A formális, számolós gondolatmenetek gyakran egyszerűbbé teszik a megoldásokat.

FELADATOK

1. K2

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontjából a háromszög csúcaiba mutató vektorok összege **0**!

2. K2

Az ABC háromszög két csúcsa $A(-5; 2)$ és $B(1; 11)$. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit, ha a háromszög súlypontja a) az origó; b) az $S(1; 9)$ pont!

3. E1

Az ABC háromszög súlypontja S , a tőle különböző tetszőleges XYZ háromszögé pedig Q . Bizonyítsuk be, hogy $\vec{AX} + \vec{BY} + \vec{CZ} = 3\vec{SQ}$!

4. E1

Az ABC háromszög AB , BC , CA oldalán jelöljük ki rendre a P , Q , R pontokat úgy, hogy

a) $AP = 2PB$, $BQ = 2QC$ és $CR = 2RA$;

b) $AP = \alpha PB$, $BQ = \alpha QC$ és $CR = \alpha RA$ fennálljon!

Bizonyítsuk be, hogy az ABC és PQR háromszögeknek közös a súlypontja!

5. E2

Az ABC háromszög súlypontja legyen S , az XYZ háromszögé pedig Q . Az AX , BY , CZ szakaszok felezőpontjai legyenek rendre U , V és W . Bizonyítsuk be, hogy ha R az UVW háromszög súlypontja, akkor R felezi az SQ szakaszt!

6. E2

A háromszög köré írt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok **a**, **b**, **c**. Bizonyítsuk be, hogy ugyaninnen a magasságpontba mutató vektor **a** + **b** + **c**!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2335, 2336.

27. VEKTOR ELFORGATÁSA $\pm 90^\circ$ -KAL

1. példa

Vegyük fel a koordináta-rendszerben a következő helyvektorokat:

a(3; 5), **b**(-1; 4), **c**(2; -3), **d**(-4; -5).

Forgassuk el az origó körül a vektorokat

a) $+90^\circ$ -kal;

b) -90° -kal!

Határozzuk meg a keletkezett vektorok koordinátáit!

Megoldás

A $+90^\circ$ -kal elforgatott vektorok:

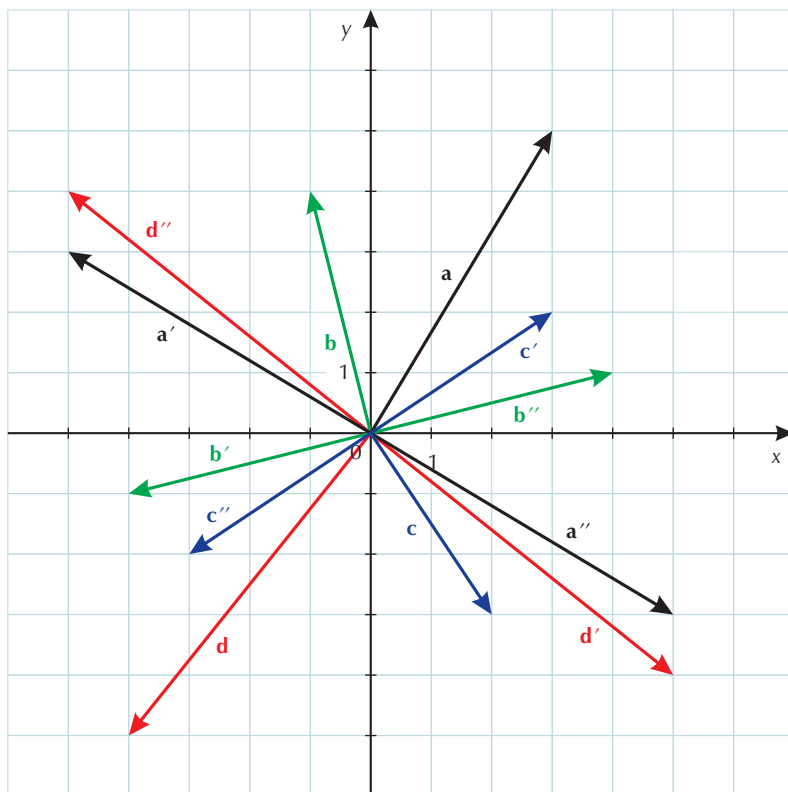
a'(-5; 3), **b'**(-4; -1), **c'**(3; 2), **d'**(5; -4).

A -90° -kal elforgatott vektorok:

a''(5; -3), **b''**(4; 1), **c''**(-3; -2), **d''**(-5; 4).

Végeredmények a 101. oldali Tudáspróba feladataihoz

1. 4
2. 123 525
3. 14
4. 9
5. 840
6. 2
7. 77 778
8. 225
9. 357
10. 75



Mint látjuk, a két koordináta felcserélődött, és $+90^\circ$ -os forgatásnál a felcserélés utáni első, -90° -os forgatásnál a második koordináta változott (-1) -szeresére.

Általánosan is igazolhatjuk ezt az észrevételt.

Egy $\mathbf{a}$ vektor koordinátáit jelöljük a_1 -gyel és a_2 -vel. Az összetevő vektorok $a_1\mathbf{i}$ és $a_2\mathbf{j}$, azaz $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. Forgassuk el a vektort összetevőivel együtt pozitív irányban 90° -kal! Az $\mathbf{a}$ elforgatottját $\mathbf{a}'$ -vel jelöljük az ábrán. Az $a_1\mathbf{i}$ elforgatottja $a_1\mathbf{j}$, az $a_2\mathbf{j}$ elforgatottja pedig $-a_2\mathbf{i}$. Így

$$\mathbf{a}' = -a_2\mathbf{i} + a_1\mathbf{j}.$$

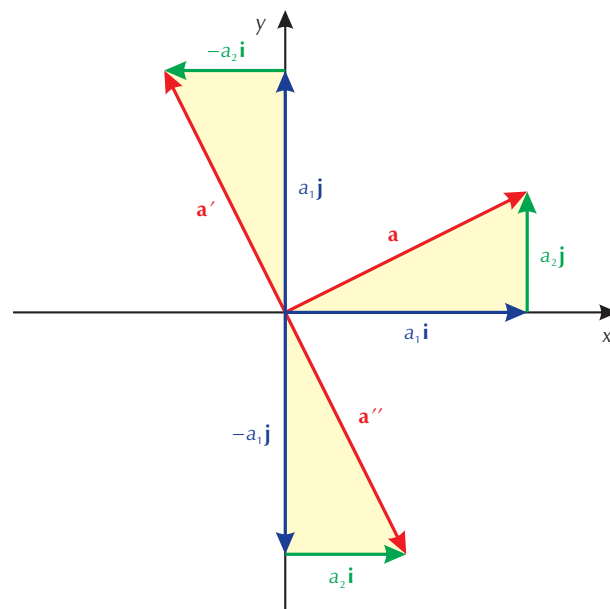
A pozitív irányban 90° -kal elforgatott vektor koordinátái tehát $-a_2$ és a_1 .

Az $\mathbf{a}$ -nak negatív irányú 90° -os elforgatottja $\mathbf{a}''$ ellentettje, az $\mathbf{a}'' = -\mathbf{a}'$ vektor. Ennek koordinátái

$$(a_2; -a_1).$$

Jegyezzük meg tehát, hogy:

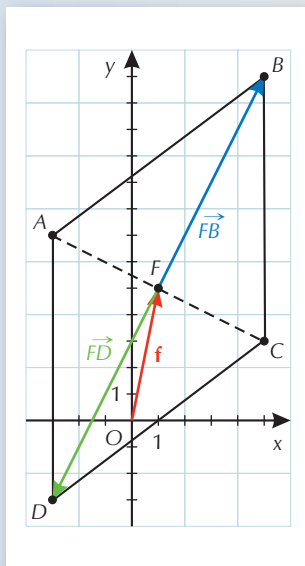
Bármely vektor koordinátáinak ismeretében úgy írhatjuk fel a rá merőleges és vele egyenlő hosszú vektor koordinátáit, hogy az adott koordinátákat felcseréljük, és az egyik előjelét megváltoztatjuk.



2. példa

Egy rombusz hosszabbik átlója kétszerese a rövidebbik átlónak. A rövidebbik átló végpontjainak koordinátái $A(-3; 7)$ és $C(5; 3)$. Határozzuk meg a másik két csúc koordinátáit!

Megoldás



A rombusz átlói merőlegesek egymásra, és felezik egymást. Ezért ha az AC átló F felezőpontjából AC-re merőleges és vele egyenlő hosszú vektorokat mérünk fel, akkor eljutunk a B , illetve a D pontig.

Így a számítás a következő:

A megfelelő pontba mutató helyvektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{f}$ jelöli.

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} = \frac{(-3; 7) + (5; 3)}{2} = (1; 5) \text{ az AC szakasz felezőpontja.}$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (5; 3) - (-3; 7) = (8; -4).$$

Ennek $\pm 90^\circ$ -os elforgatottja

$$\overrightarrow{FB} = (4; 8) \text{ és } \overrightarrow{FD} = (-4; -8).$$

Mivel $\overrightarrow{FB} = \mathbf{b} - \mathbf{f}$, így $\mathbf{b} = \overrightarrow{FB} + \mathbf{f}$, és hasonlóan $\mathbf{d} = \overrightarrow{FD} + \mathbf{f}$. A hiányzó két csúcsot megkapjuk tehát, ha az F pontba mutató helyvektorhoz hozzáadjuk az $\overrightarrow{FB}$, illetve $\overrightarrow{FD}$ vektorokat.

$$\mathbf{b} = (4; 8) + (1; 5) = (5; 13) \text{ és } \mathbf{d} = (-4; -8) + (1; 5) = (-3; -3).$$

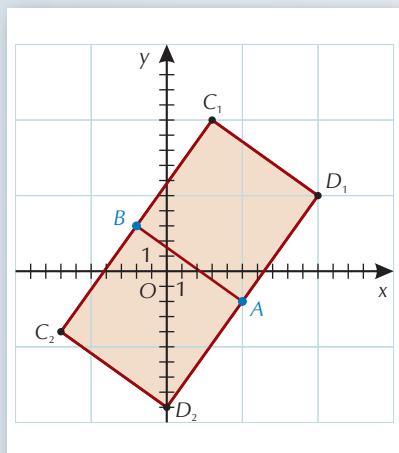
Azt kapjuk, hogy $B(5; 13)$ és $D(-3; -3)$, mivel a pontok koordinátái megegyeznek az oda mutató helyvektorok koordinátaival.

Emelt szint

3. példa

Egy négyzet két szomszédos csúcsába mutató helyvektorok: $\mathbf{a}(5; -2)$, $\mathbf{b}(-2; 3)$. Írjuk fel a négyzet másik két csúcsába mutató helyvektorok koordinátáit!

Megoldás



A négyzet oldalai merőlegesek egymásra, ezért $\overrightarrow{AB}$ vektor 90° -os elforgatottja egyenlő az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokkal. Melyik irányba kell elforgatni a vektort? Ha nincs különös oka valamelyik iránynak, akkor mindkét irányú elforgatás megoldást ad. Nézzük, hogyan számoljunk!

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-7; 5).$$

A $\pm 90^\circ$ -kal elforgatott vektorok (ábra):

$$\overrightarrow{AB}^{90^\circ} = \overrightarrow{BC}_1 = \overrightarrow{AD}_1 = (5; 7) \text{ és } \overrightarrow{AB}^{90^\circ} = \overrightarrow{BC}_2 = \overrightarrow{AD}_2 = (-5; -7).$$

A C_1 , C_2 , illetve D_1 , D_2 pontokba mutató helyvektorokat megkapjuk, ha az oldalvektorhoz hozzáadjuk a kezdőpont helyvektorát.

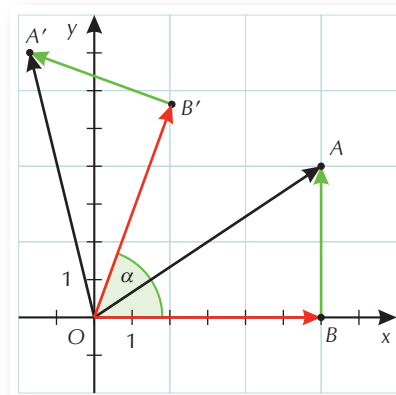
$$\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{BC}_1 + \mathbf{b} = (3; 10) \text{ és } \mathbf{d}_1 = \overrightarrow{AD}_1 + \mathbf{a} = (10; 5);$$

$$\mathbf{c}_2 = \overrightarrow{BC}_2 + \mathbf{b} = (-7; -4) \text{ és } \mathbf{d}_2 = \overrightarrow{AD}_2 + \mathbf{a} = (0; -9).$$

Természetesen az origó körül nemcsak $\pm 90^\circ$ -kal forgathatunk el egy vektort. Az ábrán az $\vec{OA}$ egy α szögű elforgatottja, $\vec{OA'}$ látható. A forgatás tulajdonságaiból következik, hogy adott helyvektort elforgathatunk úgy, hogy a bázisvektoraik elforgatottjait adjuk össze. Azaz ha $\mathbf{v}^\alpha$ jelöli egy vektor α szögű elforgatottját, akkor formálisan: $\vec{OA'}^\alpha = (\vec{OB} + \vec{BA'})^\alpha = \vec{OB}^\alpha + \vec{BA'}^\alpha = \vec{OB'} + \vec{B'A'} = \vec{OA'}$.

(Az „összegvektor elforgatottja egyenlő a komponensek elforgatottjainak összegével” szemléletes összefüggés kettőnél több komponens esetén is igaz.)

A bázisvektorok α szögű elforgatottját később majd a szögfüggvények segítségével határozzuk meg.



4. példa

Emelt szint

Bizonyítsuk be, hogy páratlan oldalszámú szabályos sokszög középpontjából a csúcsokba vezető vektorok összege nullvektor!

Megoldás

Az állítás igazolására korábban már láttunk egy módszert, most egy másik bizonyítást adunk.

Legyen az n -szög középpontja O , csúcsai $A_1, A_2, \dots, A_n$, ekkor két szomszédos csúcsba mutató vektor bezárt szöge $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$. Legyen $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \mathbf{v}$, és forgassuk el az egyenlet két oldalán lévő vektorokat α -val! A bal oldalon tagonként forgathatunk: $\vec{OA_1}^\alpha = \vec{OA_2}$, $\vec{OA_2}^\alpha = \vec{OA_3}$, $\dots$, $\vec{OA_n}^\alpha = \vec{OA_1}$, vagyis a bal oldal a forgatás során nem változott. A jobb oldalon $\mathbf{v}^\alpha$ adódik, innen $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\alpha$. Ha pedig egy vektor $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ szögű elforgatottja önmaga, akkor az a vektor csak a nullvektor lehet: $\mathbf{v} = 0$.

FELADATOK

1. K1 Egy négyzet két szomszédos csúcsa $A(1; 4)$, $B(5; 2)$. Számítsuk ki a CD oldal felezőpontjának koordinátáit!
2. K2 Egy négyzet egyik csúcspontjának koordinátái $A(8; -2)$, átlóinak metszéspontja $G(\frac{27}{4}; 3)$. Számítsuk ki a többi csúcspont koordinátáit!
3. K2 Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának végpontjai $A(-3; -1)$ és $B(5; 3)$. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának koordinátáit!
4. E1 Az $ABCD$ téglalap hosszabb AB oldala háromszorosa a rövidebbnek. A rövidebb oldal végpontjainak koordinátái $B(-3; -2)$ és $C(4; 1)$. Számítsuk ki a többi csúcspont koordinátáit!
5. E2 Egy szabályos háromszög két csúcsa $A(5; 3\sqrt{3})$, $B(2; 0)$. Határozzuk meg a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2417, 2421.

IV. TRIGONOMETRIA

A trigonometria a geometriának az a fejezete, amely elsődlegesen háromszögekkel kapcsolatos feladatok megoldásában segít, szögekkel történő számítások (ún. szögfüggvények) használatával. A trigonometrikus módszerek más alakzatokkal kapcsolatos problémák tárgyalására is alkalmasak, példaként említhetjük a sokszögek és körök geometriáját, a térgeometriai szögszámításokat vagy a gömbháromszögek elméletét.

28. HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

A trigonometria mai formájának kialakulása hosszú fejlődés eredménye.

Az ókori keleti kultúrák (Egyiptom, Mezopotámia) fejlett csillagászati ismeretekkel rendelkeztek. Tudományuk elsősorban praktikus jellegű volt, a tudósok a mindennapok munkáihoz kerestek „segédeszközöket”. Az égitestek járásának megfigyelése lehetővé tette a naptárak készítését, ezek a mezőgazdasági munkák szempontjából igen fontosak voltak. Nemcsak az egyes munkálatokat – vetés, betakarítás – ütemezhették, hanem például előre megjósolhatók voltak a Nílus áradásai is. Hasonló mindennapos csillagászati alkalmazás volt például a napóra vagy a földrajzi helymeghatározás. A szög mérés, a szögszámítás fejlődése tette lehetővé a nagy épületek (templomok, piramisok) építését és a hajózásban a navigációt.

Az ókori görögök sok mindent átvettek a mezopotámiai csillagászati tudományból. A trigonometriát módszeresen, elvi szinten feldolgozó első írásmű is görög eredetű: Kr. u. 150 körül keletkezett Ptolemaiosz híres műve, az „Almagest” (Nagy gyűjtemény). Ebben található egy hűrtáblázat, amely az egységnyi sugarú körben adott középponti szögekhez tartozó húrok hosszát tartalmazza.

Ptolemaiosz Klaudiosz alexandriai görög csillagász, matematikus és geográfus. „Almagest” (Nagy gyűjtemény) c. műve az ókori csillagászati eredmények teljes összefoglalása. Geográfiai munkájában gömbi koordinátákat használt, a Föld pontjait szélességi és hosszúsági fokok segítségével határozta meg. Az ő nevéhez kötjük az ókori geocentrikus világrendszer megfogalmazását. Nagyon szép matematikai tétel is őrzi a nevét: a húr-négyszög átlóinak a szorzata egyenlő a négyszög szemközti oldalai szorzatának az összegével.



Ptolemaiosz Klaudiosz (150 körül)

A trigonometria később is folyamatosan fejlődött. A görög tudomány hanyatlása után a hindu, majd az arab csillagászok finomítottak a módszerein, a késő középkortól pedig az európai matematikusok készítették egyre pontosabb szögfüggvénytáblázatokat. Az állandó fejlődésnek gyakorlati okai voltak: a csillagászat mellett a mindennapi életben egyre újabb és újabb területen alkalmaztak trigonometriai módszereket. Ezek közül néhány: távolságok, magasságok és irányok meghatározása; közműépítés, geodézia, építészet; kereskedelem, hajózás, térképészet.

A trigonometria jelentősége manapság is igen nagy. A fentiekén túl alapvető fontosságú a geometria egyes részterületein, a természettudományok, valamint a műszaki gyakorlat számos ágában.

Nevek
Ptolemaiosz
Klaudiosz.

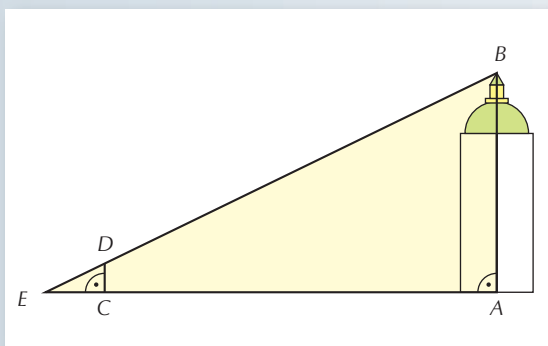
A budapesti Belvárosból északi irányban sétáló turisták egyik kedvelt látogatási célpontja a Szent István Bazilika, a város legmagasabb temploma. A lenyűgöző épület méretei impozánsak, ezeket megismerhetjük a különböző leírásokból és tájékoztató anyagokból. Azonban a külföldi turista az ismertetőkhöz nem mindig jut hozzá. Ezek hiányában hogyan becsülheti meg a Bazilika magasságát?

Pontos mérés a gyakorlatban nehezen valósítható meg, de elfogadható becslés többféleképpen is adható.

1. példa

Határozzuk meg a Szent István Bazilika magasságát! Alkalmazhatjuk a híres ókori görög matematikus, Thalész mérési eljárását. (Korábban már említettük, hogy a tudósnak a hasonlóság alkalmazásával hogyan sikerült elkápráztatnia Amaszisz fáraót és főpapjait.)

Megoldás



Jelölje a Bazilika csúcsát B , a csúcs merőleges vetületét a földön A . Tőle távolabb, mérhető távolságra függőlegesen felállítunk egy CD hosszúságú pálcát (a földön lévő végét jelölje C), s megkeressük az AC egyenesen azt az E pontot, amelyre E, D, B egy egyenesbe esik.

Az ábrán láthatjuk a mérési modellt, s leolvasható az eljárás lényege is. Az ECD és EAB derékszögű háromszögek hasonlóak, mert szögeik megegyeznek. A megfelelő oldalak arányát felírva $\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{CE}$, s innen $AB = AE \cdot \frac{CD}{CE}$. Vagyis az ismert hosszúságú vagy mérhető AE, CD, CE szakaszok segítségével AB , a kupola magassága meghatározható.

Természetesen a méréssel csak hozzávetőleges magasságértékeket kaphatunk. A gyakorlatban nem tudunk hozzáférni a kupola A alapjához, így újabb közelítésekre van szükség. Kényelmetlen az E pont meghatározása (a szemünknek egy vonalba kell kerülnie B -vel és D -vel); a DC pálcát nem könnyű pontosan függőleges helyzetbe állítani; az A, C és E pontok nem feltétlenül esnek pontosan egy egyenesre (még az sem biztos, hogy a talaj vízszintes, azaz AE merőleges AB -re). A pontosság növelése érdekében érdemesnek tűnik az AE távolságot minél nagyobbak választani, de ennek térbeli korlátai vannak. Az eljárással mégis elég jó becslést adhatunk a Bazilika magasságára, s a mérőeszközök finomításával a mérés pontosabbá tehető.

2. példa

Határozzuk meg a Bazilika magasságát, ha lehetőségünk van szögek mérésére!

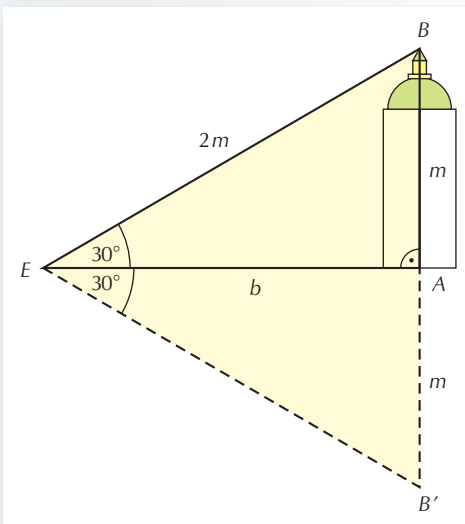
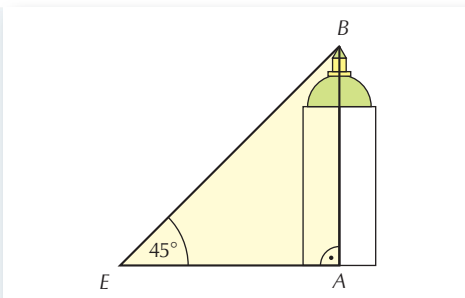
Megoldás

Ha lehetőségünk van szögek mérésére, akkor két egyszerű módszer a következő.

Az első esetben az A ponttól távolodva olyan E pontot keresünk, amelyre $\angle AEB = 45^\circ$. Ekkor $\angle ABE = 45^\circ$ ezért az EAB háromszög egyenlő szárú. Mivel $AB = AE$, így AE mérésével egyúttal megkapjuk az AB magasságot is.

A második esetben az $\angle AEB$ szöget 30° -nak választhatjuk. Ha B -t az EA egyenesre tükrözzük, az így kapott BEB' háromszögben $EB = EB'$ és $\angle BEB' = 60^\circ$, azaz BEB' szabályos háromszög.

Ekkor EAB egy szabályos háromszögnek a fele: $EB = 2AB$. Vezessük be az $AB = m, EB = 2m, EA = b$ jelöléseket, s írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $(2m)^2 = b^2 + m^2$, innen $3m^2 = b^2$, $m = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Készen vagyunk: az $EA = b$ távolság mérése után m számítható.



Egy szabályos háromszög felét kapjuk akkor is, ha az E -nél lévő szöget 60° -nak választjuk. A háromszög speciális tulajdonságát felhasználva (az átfogó kétszerese a rövidebb befogónak) a mérés hasonlóan végezhető.

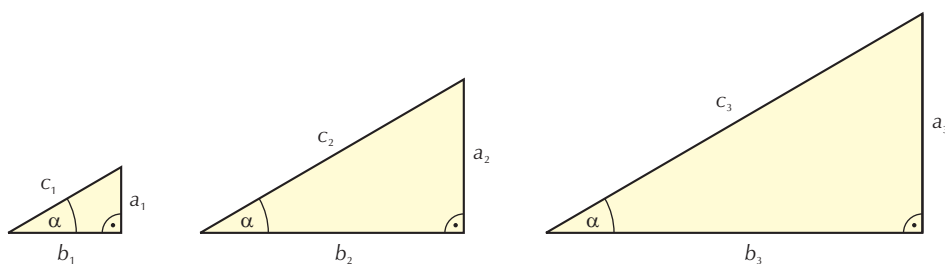
Felvetődik a kérdés: A mérést vajon csak a 45° -os, 30° -os vagy 60° -os derékszögű háromszögek segítségével végezhetjük el?

3. példa

Egy turista úgy találta, hogy a Bazilika alapjától 120 lépést haladva, a kupola 40° -os emelkedési szögben látszik. Milyen magas lehet a torony?

Megoldás

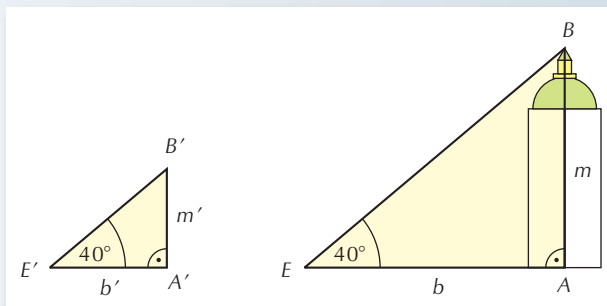
Azok a derékszögű háromszögek, melyeknek egyik hegyesszögük ugyanakkora, hasonlóak. (Szögeik megegyeznek.)



Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, így az ábrán látható, α hegyesszögű derékszögű háromszögekre teljesül, hogy

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} \text{ stb.}$$

Tekintsük most a turista által kapott EAB derékszögű háromszöget, ebben $\angle AEB = 40^\circ$, $EA = b = 120$ lépés, és az $AB = m$ magasságot keressük. A 40° -os derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy elegendő egyetlen olyan 40° -os $E'A'B'$ derékszögű háromszöget szerkesztenünk, melynek ismertek (mérhetőek) az oldalai: ezután már meghatározhatjuk m értékét.



Ekkor ugyanis az $E'A'B'$ és EAB hasonló háromszögekben megegyezik a befogók aránya, ezért $\frac{m}{b} = \frac{m'}{b'}$.

Kifejezzük m -et: $m = b \cdot \frac{m'}{b'}$, s mivel m' , b' és b ismert, m számolható.

Szögmérő segítségével megrajzolhatunk tehát egy 40° -os derékszögű háromszöget. Lemérjük az m' és b' befogók hosszát, kiszámoljuk ezek arányát, s az arányt 120-szal szorozva megkapjuk a Bazilika hozzávetőleges magasságát.

A konkrét esetben egy A/4-es papírlapon válasszuk $E'A'$ hosszát például 20 cm-nek. A szerkesztés után $A'B'$ hosszára – vonalzóval mérve – 16,8 cm adódik.

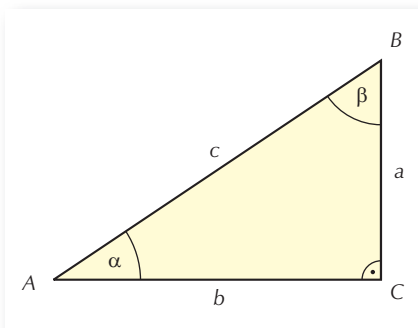
Azt kapjuk, hogy a torony magassága $120 \cdot \frac{16,8}{20} = 100,8 \approx 101$ (lépés).

A turista tehát megbecsülheti a torony magasságát, ha ismeri a lépéseinek hozzávetőleges hosszát.

A SZÖGFÜGGVÉNYEK BEVEZETÉSE

Magasságokat és távolságokat – aránypárok segítségével – korábban is meghatároztunk. A méréseket az tette lehetővé, hogy a hasonló derékszögű háromszögek megfelelő oldalainak arányai megegyeznek.

Az előző, 3. példában szögmérést is végeztünk, s adott hegyesszöggel rendelkező, hasonló derékszögű háromszögeket vizsgáltunk. A magasság meghatározása során szükségünk volt a 40° -os derékszögű háromszögekben a befogók arányának ismeretére. Ha a gyakorlatban elég pontosan tudunk szöget mérni – márpedig tudunk –, akkor hasonló típusú mérések egész sorát végezhetjük el. A szögmérés eredménye a 40°



helyett persze bármilyen hegyesszög lehet, ezért érdemes előre meghatározni a különböző szögekhez tartozó befogók arányát. Az általunk körzővel, vonalzóval és szögmérővel végzett „házi” szerkesztés elég kényelmetlen (lassú és csak „házi” pontosságú) volt, szerencsére ezt nem kell minden hegyesszögre végrehajtanunk. Az elmúlt évezredekben matematikusok generációi egyre nagyobb pontossággal határozták meg az adott hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszögek oldalainak arányát. A különböző típusú arányokra más-más elnevezéseket vezettek be, s az eredményeket táblázatokba foglalták.

Az ABC derékszögű háromszögben jelöljük hagyományos módon az oldalakat és a szögeket. Az A, B, C csúcsokkal szemközt legyenek rendre az a, b, c oldalak; s a csúcsoknál lévő szögek jelölése legyen α , β és γ (γ értéke most 90°).

Definíció

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög **szinuszának** nevezzük a szöggel szemkötti befogó és az átfogó hosszának hányadosát. Jelölése: $\sin \alpha$.

Az ábráról leolvashatjuk, hogy $\sin \alpha = \frac{a}{c}$. A definíció alapján hasonlóan határozhatjuk meg a B csúcsnál lévő szög szinuszt is: $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

Definíció

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög **koszinuszának** nevezzük a szög melletti befogó és az átfogó hosszának hányadosát. Jelölése: $\cos \alpha$.

A definíciót képlettel is felírhatjuk: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Ehhez hasonlóan: $\cos \beta = \frac{a}{c}$.

Definíció

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög **tangensének** nevezzük a szöggel szemkötti befogó és a szög melletti befogó hosszának hányadosát. Jelölése: $\operatorname{tg} \alpha$.

Az ábrán $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$. Hasonlóan $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$.

A $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ értékek csak α nagyságától függenek (nem függenek attól, hogy mekkorák az α hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszög oldalai), ezeket a továbbiakban összefoglalva α szögfüggvényeinek nevezzük. Az elnevezés arra utal, hogy értelmezhetők olyan függvények, amelyek az α hegyesszöghöz rendre a $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ értékeket rendelik.

A definíciók segítségével könnyen igazolhatjuk a szögfüggvények néhány egyszerű tulajdonságát.¹ Például ha α és β hegyesszög, akkor

$$0 < \sin \alpha < 1, 0 < \cos \alpha < 1;$$

$$0 < \operatorname{tg} \alpha \text{ a szögfüggvény tetszőlegesen nagy értéket felvehet;}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

ha pedig $\alpha < \beta$, akkor $\sin \alpha < \sin \beta$, $\cos \alpha > \cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$.

Régebbi könyvekben találkozhatunk a *kotangens* (ctg), a *szekáns* ($\sec$) és a *koszekáns* (cosec) függvényekkel is. Definícióik: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$, $\sec \alpha = \frac{c}{b}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$. Ezeket a függvényeket ritkán vagy egyáltalán nem használjuk. Nincs is rájuk szükség: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ és $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.

A szögfüggvények tulajdonságaival, alkalmazási lehetőségeivel a matematika külön területe, a *trigonometria* foglalkozik.

Az egyes szögekhez tartozó szögfüggvények értékeit megtalálhatjuk a négyjegyű függvénytáblázatokban. A szögfüggvénytáblázatok használata nem egyszerű, érdemes elolvasnunk az erre vonatkozó használati utasításokat.

Az elektronika fejlődésével ma már egyre inkább a zsebszámológépeket használjuk, ha szögfüggvényértékeket számolunk. Ezzel kapcsolatban fontos, hogy ismerjük a gépünket. Tudnunk kell, mikor számol fokokban, mikor radiánban; előbb a szöget kell-e beírni, s utána a szögfüggvényt, vagy fordítva; a visszakeresésnél – amikor adott a szögfüggvény értéke, s a szöget keressük – a különböző gépek különböző jelöléseket használnak stb. (*A radián ismerete emelt szintű követelmény.*)

4. példa

Határozzuk meg függvénytáblázat, illetve zsebszámológép segítségével az

a) $52,5^\circ$; b) $64^\circ 8'$; c) 1 radián; d) 0,2 radián

szögekhez tartozó szögfüggvényértékeket!

Megoldás

A függvénytáblázat és a kalkulátor is legtöbbször közelítő értéket értékeket ad eredményül. Most – ahol lehetséges, mintaképpen – kiírjuk az összes értékes jegyet, amit egy zsebszámológéppel kaphatunk. Erre általában nincs szükség; ha a feladat másképpen nem rendelkezik, elegendő egy-két (a szögfüggvény értékeknél esetleg négy) tizedesjegy pontosságú számolás.

¹ A tulajdonságok bizonyítását a lecke végén feladatként tűzzük ki.

IV. TRIGONOMETRIA

A számológéppel kapott eredmények:

	szög (α)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
a)	$52,5^\circ$	0,793353340	0,608761429	1,303225373
b)	$64^\circ 8'$	0,899811748	0,436278373	2,062471586
c)	1 radián	0,841470985	0,540302306	1,557407725
d)	0,2 radián	0,198669331	0,980066578	0,202710036

Ha a számológépünk nem tud radiánban vagy percben számolni (bár ez nem túl valószínű), akkor az adatokat átváltjuk: $64^\circ 8' = 64^\circ + \left(\frac{8}{60}\right)^\circ = 64,13333333^\circ$; vagy $1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57,29577951^\circ$ és így $0,2 \text{ radián} = 11,45915590^\circ$.

A négyjegyű függvénytáblázatban található értékek:

	szög (α)	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
a)	$52,5^\circ$	0,7934	0,6088	1,303
b)	$64^\circ 8'$	0,8998	0,4363	2,063
c)	1 radián	0,8415	0,5402	1,558
d)	0,2 radián	0,1988	0,9800	0,2028

A függvénytáblázat percnyi pontossággal tartalmazza a szögeket. $52,5^\circ = 52^\circ 30'$; $1 \text{ radián} = 57,29577951^\circ \approx 57^\circ 18'$ és $0,2 \text{ radián} = 11,45915590^\circ \approx 11^\circ 28'$.

Az értékek négy jegy pontosságúak (az utolsó kiírt számjegy kerekített), az átváltások miatt a táblázat utolsó két sorának eredményei pontatlanabbak.

Megjegyzés

Hogy adott szögfüggvényértékhez milyen szög tartozik, ennek „visszakeresése” a függvénytáblázatban egyértelmű: adott cellához kell megkeresnünk a megfelelő hegyesszöget.

A számológépeken külön billentyű jelöli a visszakeresés inverz függvényét, például $\langle \sin^{-1} \rangle$ vagy $\langle \arcsin \rangle$. (Ezek az $y = \sin x$ összefüggésből az x hegyesszöget határozzák meg, y ismeretében.) Általában azt is beállíthatjuk a gépen, hogy fokban vagy radiánban kapjuk meg az eredményt, de ennek hiányában természetesen átválthatjuk az értéket.

5. példa

Térjünk vissza a 3. példa feladatához!

A turista az EAB háromszögben ismeri az AE befogó hosszát és a $BEA \sphericalangle = 40^\circ$ értékét, s meghatározandó az AB befogó hossza.

Megoldás

Jelenlegi ismereteinkkel már nincs szükségünk a 3. példában alkalmazott, hasonló háromszög szerkesztésén alapuló módszerre. A szögfüggvények felhasználásával azt mondhatjuk, hogy $\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{AB}{AE}$, s innen $AB = AE \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$. A turistának elegendő tehát táblázat vagy számológép segítségével meghatároznia $\operatorname{tg} 40^\circ$

értékét, a Bazilika magasságát ebből már egyetlen szorzás segítségével megkaphatja. Mivel, két tizedesjegy pontossággal, $\operatorname{tg} 40^\circ = 0,84$, így $AE \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 120 \cdot 0,84 \approx 100,7$, a keresett magasság kb. 101 lépés.²

Látható, hogy a hasonló feladatokban milyen óriási segítséget jelenthet a szögfüggvények ismerete, alkalmazása. Trigonometriai módszerekkel a geometria más területén is találkozunk majd.

A szögfüggvények értékei nagy pontossággal adottak, így a magasság- és távolságmeghatározási feladatokban a valódi nehézséget a szögek precíz mérése jelenti. A gyakorlatban a teodolit nevű mérőeszközzel vízszintes és függőleges irányban is igen pontosan mérhető a szögelfordulás. Néha a városokban is látni geodétákat, amint ezzel a háromlábú eszközzel dolgoznak, de a mérőeszközt leggyakrabban az út-, híd- és vasútépítésekénél, valamint a térképészeti szintező munkáknál alkalmazzák.

Mérés teodolittal



Fogalmak
szinusz;
koszinusz;
tangens;
szögfüggvények;
trigonometria.

FELADATOK

1. K1 Határozzuk meg α szögfüggvényértékeit a függvénytáblázat segítségével, ha
a) $\alpha = 80^\circ$; b) $\alpha = 71^\circ$; c) $\alpha = 62,3^\circ$; d) $\alpha = 50^\circ 14'$; **E1** e) $\alpha = 0,37$ radián!

2. K1 Határozzuk meg α szögfüggvényértékeit zsebszámológép segítségével, ha
a) $\alpha = 11^\circ 9'$; **E1** b) $\alpha = \frac{\pi}{7}$ radián!

3. K1 Melyik az az α hegyesszög, amelyre
a) $\sin \alpha = 0,2$; b) $\cos \alpha = 0,33$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 4,78$?

4. K2 A definíciók segítségével igazoljuk a szögfüggvények alábbi egyszerű tulajdonságait!
Ha α hegyesszög, akkor
a) $0 < \sin \alpha < 1$, $0 < \cos \alpha < 1$; c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
b) $0 < \operatorname{tg} \alpha$ a szögfüggvény tetszőlegesen nagy értéket felvehet;

5. K2 A definíciók segítségével igazoljuk a szögfüggvények alábbi tulajdonságait!
Ha α és α' hegyesszögek és $\alpha < \alpha'$, akkor
a) $\sin \alpha < \sin \alpha'$; b) $\cos \alpha > \cos \alpha'$; c) $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \alpha'$.

6. K1 Egy templomtorony a talajszintről nézve 50 méter távolságból 24° -os szögben látszik. Milyen magas a torony?

7. K1 Egy kilencemeletes lakóház emeleti szintjei átlagosan 3 méter magasak. Mekkora látószög alatt látszik 100 méter távolságból az épület? (Az épület tízszintes, a földszint is 3 méter magas.)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2456–2464, 2465–2484.

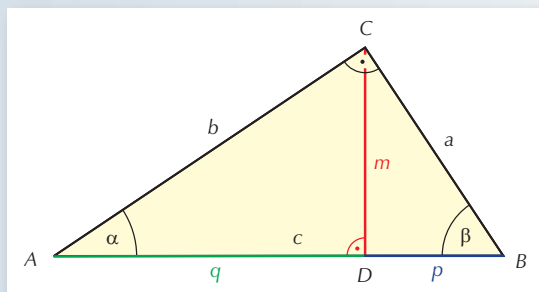
² A kupola tényleges magassága 96 méter.

29. DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK ADATAINAK MEGHATÁROZÁSA

Ha az ABC derékszögű háromszög oldalai közül kettő hossza ismert, akkor a harmadik meghatározható Pitagorasz tétele segítségével. Az oldalak hosszát a magasságtétel vagy a befogótétel segítségével akkor is kiszámíthatjuk, ha a befogók helyett azok átfogóra eső merőleges vetülete adott hosszúságú. (A magasságtétel és a befogótétel emelt szintű tananyag, de az ABC , ACD , CBD hasonló háromszögek segítségével elkerülhető a használatuk.)

A szögfüggvények ismerete lehetőséget ad arra, hogy meghatározzuk a derékszögű háromszög szögeit is. Sőt, ha kezdetben a háromszög egyetlen oldala (vagy valamelyik befogó vetülete), továbbá egyik hegyesszöge adott, már akkor is meghatározható a háromszög többi jellemzője.

1. példa



Az ABC derékszögű háromszögben jelöljük hagyományos módon az oldalak hosszát és a szögeket. (Az A , B , C csúcsokhoz tartozó szögek és oldalak rendre α , β , γ , illetve a , b , c .)

Jelölje továbbá a C csúcsból az AB átfogóra bocsátott CD magasság hosszát m , az a és b oldalak átfogóra eső vetületeinek hosszát pedig p és q .

Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit és oldalait egy tizedesjegy pontossággal, ha

a) $a = 6$ cm, $c = 11$ cm;

b) $a = 10$ cm, $m = 8$ cm;

c) $q = 9$ m,

$p = 6$ m;

e) $\alpha = 24^\circ$, $m = 12$ dm!

d) $a = 10$ egység, $q = 12$ egység;

Megoldás

Általában a részfeladatokra többféle megoldás adható, például a három oldal ismeretében a szögeket mind a háromféle szögfüggvénnyel kiszámolhatjuk. Most megelégszünk egyetlen megoldással, a többi lehetőséget érdemes gyakorlásképpen megkeresni. (A közelítő értékek miatt a számolás során egy tartalék tizedesjeggyel dolgozunk.)

a) $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{11}$, innen $\alpha \approx 33,1^\circ$; $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 56,9^\circ$.

A Pitagorasz-tételből

$b^2 = c^2 - a^2$, $b = \sqrt{11^2 - 6^2} \approx 9,2$ cm. Eredmény:

a	b	c	α	β
6 cm	9,2 cm	11 cm	$33,1^\circ$	$56,9^\circ$

b) $\sin \beta = \frac{m}{a} = \frac{8}{10}$, innen $\beta \approx 53,1^\circ$; $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 36,9^\circ$. $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$, ebből $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta \approx 13,3$ cm.

$\cos \beta = \frac{a}{c}$, innen $c = \frac{a}{\cos \beta} \approx 16,7$ cm. Eredmény:

a	b	c	α	β
10 cm	13,3 cm	16,7 cm	$36,9^\circ$	$53,1^\circ$

29. DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK ADATAINAK MEGHATÁROZÁSA

c) $c = p + q = 15$ m. Alkalmazzuk például a magasságtételt: $m = \sqrt{p \cdot q} \approx 7,35$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{q} \approx 0,82$,
innen $\alpha \approx 39,2^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 50,8^\circ$. Mivel $\cos \alpha = \frac{q}{b}$, így $b = \frac{q}{\cos \alpha} \approx 11,6$ m; és $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ miatt
 $a = c \cdot \sin \alpha \approx 9,5$ m.

a	b	c	α	β
9,5 m	11,6 m	15 m	$39,2^\circ$	$50,8^\circ$

d) A befogótételből $p(p + q) = a^2$, azaz $p^2 + 12p - 100 = 0$. A másodfokú egyenlet pozitív megoldása
 $p \approx 5,66$ (a negatív $p \approx -17,66$ nem lehetséges). Így $c = p + q \approx 17,7$ (egység), $\sin \alpha = \frac{a}{c} \approx \frac{10}{17,66}$ miatt
 $\alpha \approx 34,5^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 55,5^\circ$. Végül $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, innen $b = c \cdot \cos \alpha \approx 14,6$ (egység).

a	b	c	α	β
10 egység	14,6 egység	17,7 egység	$34,5^\circ$	$55,5^\circ$

e) $\beta = 90^\circ - \alpha = 66^\circ$; $\sin \alpha = \frac{m}{b}$, innen $b = \frac{m}{\sin \alpha} \approx 29,5$ dm; $\sin \beta = \frac{m}{a}$ miatt $a = \frac{m}{\sin \beta} \approx 13,1$ dm;
végül a $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ összefüggésből $c = \frac{b}{\cos \alpha} \approx 32,3$ dm.

a	b	c	α	β
13,1 dm	29,5 dm	32,3 dm	24°	66°

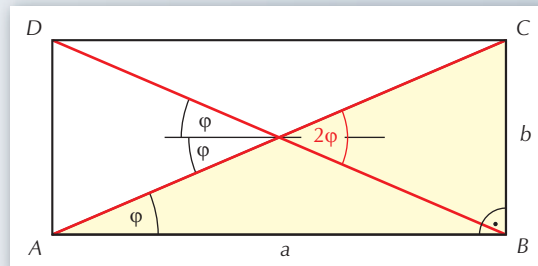
Ebben a példában a derékszögű háromszöget „készen kaptuk”, a legtöbbször viszont nincs ilyen szerencsénk. Ekkor a feladat szövege alapján nekünk kell a megfelelő derékszögű háromszöget felismernünk.

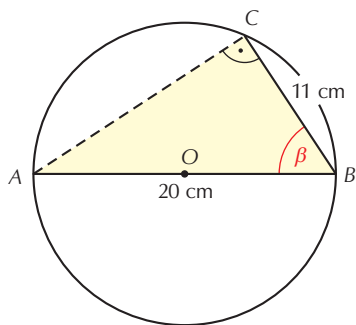
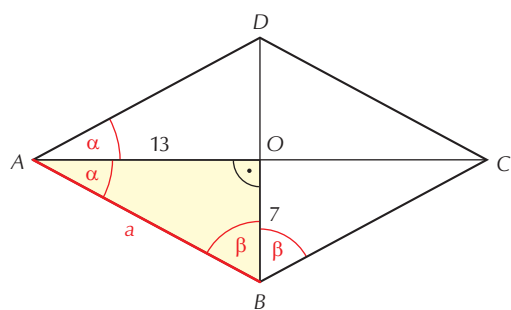
2. példa

- Az ABCD téglalap oldalainak hossza 28 cm és 12 cm. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?
- Az ABCD rombusz átlói $AC = 26$ és $BD = 14$ egység hosszúak. Mekkora a rombusz oldalai és szögei?
- Mekkora szöget zár be egy kör közös kezdőpontú 20 cm-es átmérője és 11 cm-es húrja?

Megoldás

a) Legyen $AB = a = 28$ cm és $BC = b = 12$ cm. A téglalap szimmetriatulajdonságai miatt az AC és BD átlók hajlásszöge kétszerese a CAB szögnek. Ez utóbbit φ -vel jelölve az ABC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{BA} = \frac{b}{a} = \frac{12}{28}$, innen $\varphi \approx 23,2^\circ$. Az átlók hajlásszöge $2\varphi \approx 46,4^\circ$.





b) Jelöljük az átlók metszéspontját O -val, az OAB szöget α -val, az OBA szöget β -val, az AB oldal hosszát a -val. A rombusz az átlói egyenesére tengelyesen tükrös alakzat, így átlói négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják. Az AOB derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{7}{13}$, innen $\alpha \approx 28,3^\circ$. β pótszöge α -nak, ezért $\beta = 90^\circ - \alpha = 61,7^\circ$. A rombusz szögei: $\angle DAB = \angle DCB = 2\alpha = 56,6^\circ$ és $\angle ABC = \angle ADC = 2\beta = 123,4^\circ$. Az oldalak hosszát a Pitagorasz-tételből határozhatjuk meg: $a^2 = 13^2 + 7^2$, innen $a \approx 14,76$.

c) Thalész tétele miatt az O középpontú kör AB átmérőjének és BC húrjának végpontjai derékszögű háromszöget határoznak meg, ahol $\angle BCA = 90^\circ$. Jelölje a B csúcsnál lévő szöget β , ekkor $\cos \beta = \frac{BC}{BA} = \frac{11}{20}$, innen $\beta \approx 56,6^\circ$ a keresett szög.

3. példa

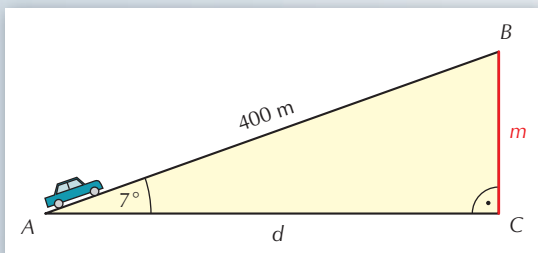
a) Egy fa árnyéka éppen 19 méter hosszú, amikor az árnyék végpontját és a fa tetejét összekötő egyenes 25° -os szöget zár be a talajjal. Milyen magas a fa?

b) Az A és B pontok közötti egyenletesen emelkedő, egyenes útszakasz 400 méter hosszú, emelkedési szöge 7° . Milyen hosszú a térkép alapján kiszámított AC távolság, és hány métert emelkedik az útszakasz? (A térképen az AB szakasz AC vetülete jelenik meg.)



Megoldás

a) Jelölje a fa magasságát m . Mivel $\frac{m}{19} = \operatorname{tg} 25^\circ$, így $m = 19 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \approx 8,86$. A fa kb. 9 méter magas.



b) A feladat modellezhető az ABC derékszögű háromszöggel. $AB = 400$ m az útszakasz hossza, $BC = m$ az emelkedési magasság, és $AC = d$ az emelkedő (vagy lejtő) vetületének hossza (ez jelenik meg arányosan a térképen) $\sin 7^\circ = \frac{m}{400}$, ezért $m = 400 \cdot \sin 7^\circ \approx 48,7$ méter az emelkedés; és $\cos 7^\circ = \frac{d}{400}$, így $d = 400 \cdot \cos 7^\circ \approx 397,0$ méter.

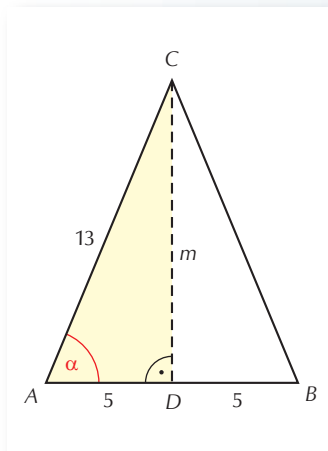
29. DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK ADATAINAK MEGHATÁROZÁSA

Az utolsó két példában a megfelelő derékszögű háromszög előállításához egy-egy alkalmas segédvonalat húztunk be.

4. példa

Az ABC háromszög egyenlő szárú, $AC = BC = 13$ dm és $AB = 10$ dm. Mekkora a háromszög szögei és területe?

Megoldás



Az A csúcsnál lévő szöget jelölje α , a C csúcsból húzható magasság talp-pontja pedig legyen D . CD egyenese a háromszög szimmetriatengelye, így $AD = DB = 5$ dm.

Az ADC derékszögű háromszögben $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, így $\alpha \approx 67,4^\circ$. A háromszög szögei: $CAB \sphericalangle = CBA \sphericalangle \approx 67,4^\circ$ és $ACB \sphericalangle \approx (180^\circ - 2 \cdot 67,4^\circ) \approx 45,2^\circ$.

A $DC = m$ magasság hosszát szintén az ADC derékszögű háromszög segítségével határozhatjuk meg, a Pitagorasz-tételt vagy a szögfüggvények definícióját felhasználva. Mivel $\sin \alpha = \frac{m}{13}$, így $m = 13 \cdot \sin 67,4^\circ \approx 12,0$ (dm),

a háromszög területe pedig $t \approx \frac{10 \cdot 12}{2} \approx 60,0$ dm².

(Ha a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk, akkor látható, hogy $m = 12$ dm és $t = 60$ dm² pontos értékek.)

5. példa

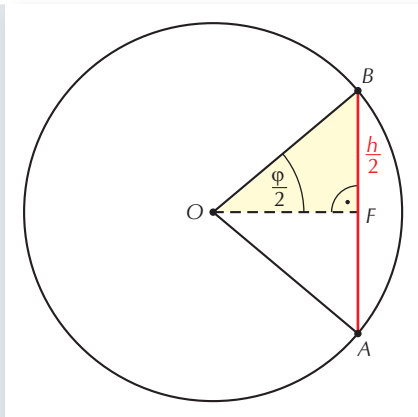
Milyen hosszú a 20 cm sugarú kör 80°-os középponti szögéhez tartozó húr?

Megoldás

Jelöljük a kör középpontját O -val, sugarát r -rel, az AB húr hosszát h -val, a BOA középponti szöget φ -vel.

AOB egyenlő szárú háromszög, mert $AO = OB = r$. Ekkor az AOB szög felezője az AB húrt az F felezőpontjában metszi, OFB és OFA egybevágó derékszögű háromszögek.

Az OFB derékszögű háromszögben $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{h}{2r}$, innen $h = 2 \cdot 20 \cdot \sin 40^\circ \approx 25,7$ cm a keresett húr hossza.



Idézet

Amikor I. Ptolemaiosz megkérdezte Eukleidészről, hogy a geometria megtanulásának nincs-e rövidebb és kevésbé fárasztó módja, mint amit az „Elemek” mutatnak, a tudós így válaszolt: „A geometriához nem vezet királyi út.” (Kr. e. 300 körül)

FELADATOK

1.

Az ABC derékszögű háromszögben ($\gamma = 90^\circ$) az ábrán látható jelöléseket alkalmazzuk.

Mekkorák a háromszög szögei és oldalai, ha

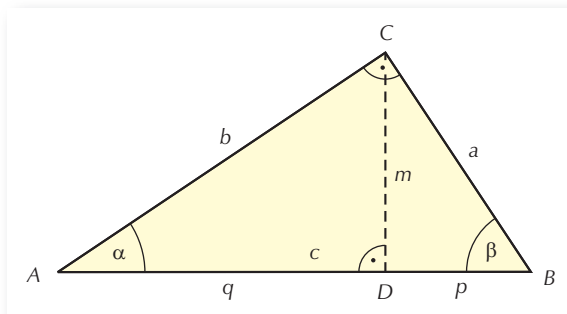
K1 a) $a = 8$ cm, $b = 15$ cm;

K1 b) $\alpha = 25^\circ$, $a = 10$ cm;

K1 c) $\beta = 55^\circ$, $q = 7$ cm;

K1 d) $a = 13$ cm, $p = 5$ cm;

K2 e) $c = 10$ cm, $m = 4$ cm?



2. K1

Egy ketrész egyenlő szárú háromszög alakú, melynek szárai 15 m hosszúak, a szárak által bezárt szög 52° . Mekkora a ketrész alapja és területe?

3. K2

Az $ABCD$ deltoidban AC szimmetriatengely, az AD oldal kétszer olyan hosszú, mint a DC oldal, és $DAB \sphericalangle = 54^\circ$. Mekkora a deltoid oldalai és szögei, ha $BD = 10$ egység?

4. K2

Adott az O középpontú, $r = 20$ egység sugarú kör. Mennyivel hosszabb a kör 100° -os középponti szögéhez tartozó íve, mint a középponti szöghöz tartozó húrja?

5. K1

Szerkesszük meg azt a hegyessöget, melynek

a) szinusza 0,2;

b) koszinusza $\frac{5}{13}$;

c) tangense $\sqrt{5}$!

6. K1

Az alábbiakban pitagoraszsi számhármások két tagját adjuk meg. Határozzuk meg a harmadik tagot és a számhármások által meghatározott derékszögű háromszögek legkisebb szögét! (Az $a < b < c$ pozitív egész számokat pitagoraszsi számhármásnak nevezzük, ha van olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai a , b , c hosszúak.)

a) $a = 3$, $b = 4$;

b) $a = 5$, $c = 13$;

c) $b = 24$, $c = 25$;

d) $a = 6$, $c = 10$.

7. K2

Ptolemai sz. Kr. u. 150 körül úgy találta, hogy az egységsugarú kör 1° -os középponti szögéhez tartozó húrja $\frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3}$ hosszúságú. (A kissé furcsa számalknak az az oka, hogy a tudós eredetileg 60-as számrendszerben adta meg a számot.) Mennyire volt pontos a közelítés? Nem lett volna helyesebb az utolsó tag esetében a $\frac{49}{60^3}$, vagy az $\frac{51}{60^3}$ törttel számolniuk a görögöknek?

8. K2

Az ABC derékszögű háromszögben ($\gamma = 90^\circ$) $AC = 12$, $BC = 16$ egység. Milyen hosszú a B csúcsból húzható szögfelező?

9. E1

Az $r = 12$ cm sugarú körbe írt húrtrapéz párhuzamos oldalainak hossza $AB = 20$ cm és $CD = 10$ cm. Mekkora a trapéz szárai és szögei?

10. K2

Milyen hosszú a Ráktérítő? (A Földet tekintsük $R = 6370$ km sugarú gömbnek.)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2485–2511.

30. ÖSSZEFÜGGÉSEK A HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI KÖZÖTT

NÉHÁNY HEGYESSZÖG PONTOS SZÖGFÜGGVÉNYÉRTÉKE

A szögfüggvényértékek meghatározásakor általában zsebszámológépet vagy függvénytáblázatot használunk, így módon szinte mindig közelítő számértéket kapunk. A függvénytáblázat négy jegy pontosságú számot ad eredményül, a jelenleg forgalomban lévő zsebszámológépek 8-10 jegy pontossággal dolgoznak.

Például a függvénytáblázat szerint $\sin 40^\circ = 0,6428$. Mivel ez kerekített érték, csak abban lehetünk biztosak, hogy $0,64275 \leq \sin 40^\circ < 0,64285$.

Számológéppel $\sin 40^\circ = 0,642787610$, ez az érték pontosabb: $0,6427876095 \leq \sin 40^\circ < 0,6427876105$. Természetesen a feladatmegoldások során általában elegendő a kevesebb jeggyel történő számítás.

Előfordulhat, hogy valamely szögfüggvényérték „szép” szám. Például a függvénytáblázatból $\sin 30^\circ = 0,5000$, ugyanez számológéppel $\sin 30^\circ = 0,5$. Ez vajon azt jelenti, hogy $\sin 30^\circ$ értéke *pontosan* 0,5?

Ebben egyelőre nem lehetünk biztosak, hiszen a számológép is kerekített értékeket ír ki.

Vannak azonban olyan hegyesszögek, amelyek szögfüggvényértékeit pontosan meghatározhatjuk. Ilyen „nevezetes szög” például a 45° és a 60° ; továbbá azt is megmutathatjuk, hogy a 30° szögfüggvényei is pontosan megadhatók, azaz például $\sin 30^\circ = 0,5$ is pontos érték.

1. példa

Vegyünk fel egy ABC egyenlő szárú derékszögű háromszöget. Ebben $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$, a befogók hossza egyenlő: $CA = CB = a$. Célunk a 45° szögfüggvényeinek meghatározása.

Megoldás

Ehhez kifejezzük az AB átfogó hosszát.

Jelöljük az AB átfogó hosszát c -vel. A Pitagorasz-tételből $c^2 = a^2 + a^2$, azaz $c^2 = 2a^2$, s innen $c = \sqrt{2}a$. (Ezzel az eredménnyel már korábban is találkoztunk, érdemes megjegyeznünk. Az A , C és B pontok tekinthetők egy négyzet három csúcsának; az eredményünk szerint az a oldalú négyzet átlója $\sqrt{2}a$ hosszúságú.)

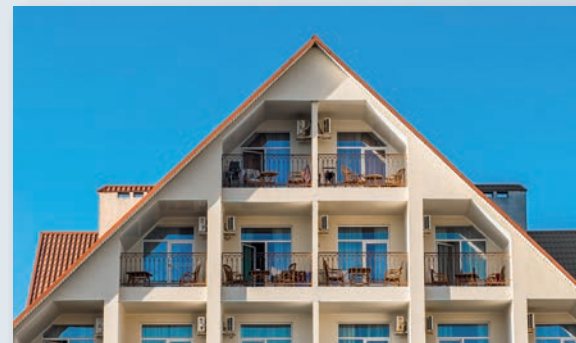
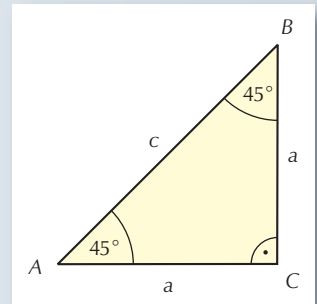
Felírjuk $\angle CAB = 45^\circ$ szögfüggvényeit:

$$\sin 45^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$

Célunkat elértük, megkaptuk a 45° szögfüggvényeinek pontos értékét.



IV. TRIGONOMETRIA

A 45° valóban „nevezetes szög”: egyrészt $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ (a $\sin \alpha = \cos \alpha$ egyenlőség más hegyesszögre nem teljesül), másrészt $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

A $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ értéket $\frac{\sqrt{2}}{2}$ alakba is írhatjuk, ha a törtet $\sqrt{2}$ -vel bővítjük.

2. példa

Az ABC derékszögű háromszögben legyen $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$, s ekkor $\angle CBA = 60^\circ$. Határozzuk meg 60° és 30° szögfüggvényeit!

Megoldás

Jelöljük az oldalak hosszát a szokásos $AC = b$, $CB = a$, $AB = c$ módon!

Már korábban is láttuk (28. lecke 2. példája), hogy ha a háromszög B csúcsát az AC oldalegyenesre tükrözzük, akkor az így kapott ABB' háromszög szabályos, oldalai egyenlők: $c = 2a$.

Pitagorasz tételével az AC befogó hosszát is meghatároztuk már: $b^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$ miatt $b = \sqrt{3}a$.

(Jegyezzük meg: a fél szabályos háromszög rövidebbik befogója fele, hosszabbik befogója pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szere az átfogójának.)

Most már felírhatjuk $\angle CAB = 30^\circ$ szögfüggvényeit:

$$\sin 30^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

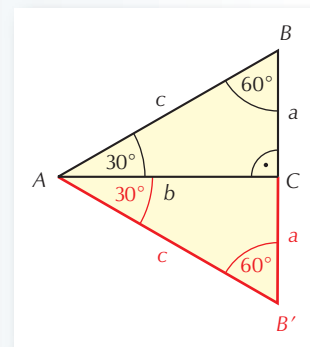
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hasonlóan $\angle CBA = 60^\circ$ szögfüggvényei:

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}.$$



Az eredményeket foglaljuk táblázatba:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

30. ÖSSZEFÜGGÉSEK A HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI KÖZÖTT

Ezekkel a nevezetes szögfüggvényértékekkel a későbbiek során is gyakran találkozunk. Érdemes megjegyezni őket, hiszen alkalmazásukkal pontosabban számolhatunk, mint a táblázatbeli közelítő értékekkel.

PÓTSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

Az ABC derékszögű háromszögben jelöljük hagyományos módon az oldalak hosszát és a szögek nagyságát.

A hegyesszögekre vonatkozó szögfüggvény-definíciók szerint:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Ugyanezeket az arányokat a β szög segítségével is felírhatjuk:

$$\frac{a}{c} = \cos \beta, \quad \frac{b}{c} = \sin \beta, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.$$

Az arányokra felírt kétféle kifejezés megegyezik:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta.$$

α és β egymás pótszögei, összegük 90° . Így az egyenlőségeket

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$$

alakban is írhatjuk. A fenti megfontolások tetszőleges derékszögű háromszög esetén igazak, tehát bármely α hegyesszög esetén érvényesek.

A pótszögek szögfüggvényei közötti összefüggések segítségével különböző szögfüggvényekről azonosakra térhetünk át (például szinuszról koszinuszra).

A pótszögek szögfüggvényei közötti kapcsolatokra már korábban is láttunk példát. A nevezetes szögek esetében például $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ adódott; vagy a függvénytáblázat használatakor is észrevehettük az összefüggéseket.

3. példa

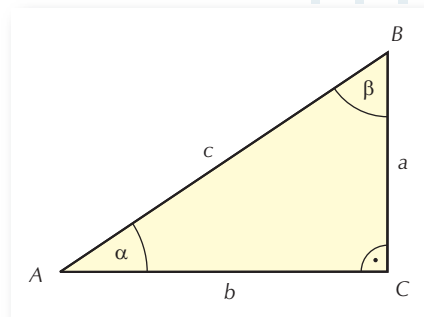
Rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket! A megoldáshoz ne használjunk se számológépet, se függvénytáblázatot, azaz a feladatot a konkrét A, B, C, D, E, F értékek meghatározása nélkül oldjuk meg!

$$A = \sin 70^\circ, \quad B = \sin 60^\circ, \quad C = \cos 40^\circ, \quad D = \cos 10^\circ, \quad E = \operatorname{tg} 55^\circ, \quad F = \operatorname{tg} 65^\circ.$$

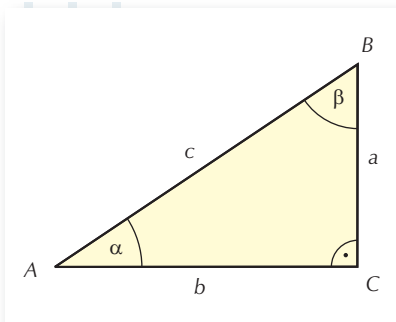
Megoldás

Ha $0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$, akkor $\sin \alpha < \sin \beta$, $\cos \alpha > \cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$. Így az $A > B$, $C < D$ és $E < F$ egyenlőtlenségek közvetlenül adódnak. A pótszögekre vonatkozó azonosságok segítségével azonos szögfüggvényekre térünk át: $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$, $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$.

Innen $\sin 50^\circ < \sin 60^\circ < \sin 70^\circ < \sin 80^\circ$ miatt $C < B < A < D$. Végül $\sin 80^\circ < 1$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, ezért $D < E$. A sorrend: $C < B < A < D < E < F$.



A TRIGONOMETRIA ALAPÖSSZEFÜGGÉSE



Az ABC derékszögű háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt: $a^2 + b^2 = c^2$. (A hagyományos jelöléseket alkalmazzuk: c az átfogó, az a oldallal szemben van az A csúcs és az α szög stb.)

Mindkét oldalt c^2 -tel osztva $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Ha most elvégezzük az $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ és $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ helyettesítéseket, azt kapjuk, hogy $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

Megállapodás szerint a szögfüggvények hatványait zárójel nélküli alakban használjuk: $(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$, $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$, $(\operatorname{tg} \alpha)^3 = \operatorname{tg}^3 \alpha$. Ezzel a jelöléssel felírhatjuk azt a trigonometriai alapösszefüggést, amelyet pitagorasz-i azonosságnak nevezünk.

Bármely α hegyesszögre fennáll a **pitagorasz-i azonosság**: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Az összefüggés segítségével egy szög szinuszána ismeretében kiszámítható a szög koszinusza, és fordítva.

4. példa

Az ABC derékszögű háromszögben $\gamma = 90^\circ$, $\sin \alpha = 0,4$. Határozzuk meg $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ pontos értékeit!

Megoldások

Első megoldás

Mivel α értékét sem számológéppel, sem a függvénytáblázat segítségével nem tudjuk pontosan meghatározni, így a pitagorasz-i összefüggést használjuk fel.

A $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ egyenletből $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. Hegyesszögek esetén $0 < \sin \alpha, \cos \alpha < 1$, ezért $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,16} = \sqrt{0,84} = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

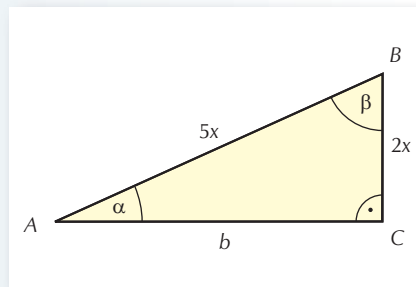
$$\text{Továbbá } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Második megoldás

A derékszögű háromszögben az α szöggel szemkölti befogó és az átfogó hosszának aránya 0,4. A hagyományos jelöléseket alkalmazva $\frac{a}{c} = \frac{2}{5}$, ezért legyen $a = 2x$ és $c = 5x$.

A Pitagorasz-tételből $b^2 = 25x^2 - 4x^2 = 21x^2$, s innen $b = \sqrt{21}x$. A keresett szögfüggvények:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{21}x}{5x} = \frac{\sqrt{21}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{\sqrt{21}x} = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$



Megjegyzés

Az összes olyan derékszögű háromszög, amelyben $\sin \alpha = 0,4$, hasonló, és szögeik egyenlők. Ezért a $BC = 2x$ és $AB = 5x$ oldalú derékszögű háromszög helyett vizsgálhattuk volna például a $BC = 2$ és $AB = 5$ egység oldalú háromszöget is.

Fogalom
pitagorasz
azonosság.

FELADATOK

1. K1 A pitagoraszai azonosság felhasználásával határozzuk meg az α hegyesszög többi szögfüggvényének a pontos értékét, ha

a) $\sin \alpha = 0,6$; b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 5$!

2. K1 Oldjuk meg az előző a)–c) feladatokat, de most a pitagoraszai összefüggés felhasználása nélkül!

3. E1 Az ABC háromszögben $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $AC = 10$ egység. Milyen hosszú a B csúcsból húzható szögfelező? (Pontos értéket adjunk meg!)

4. E1 Az előző feladat alapján határozzuk meg 15° pontos szögfüggvényértékeit!

5. E1 Határozzuk meg $22,5^\circ$ pontos szögfüggvényértékeit!

6. E1 Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α hegyesszög esetén érvényesek az alábbi azonosságok!

a) $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$; b) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$; c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2512–2517, 2679–2695, 2696–2701.



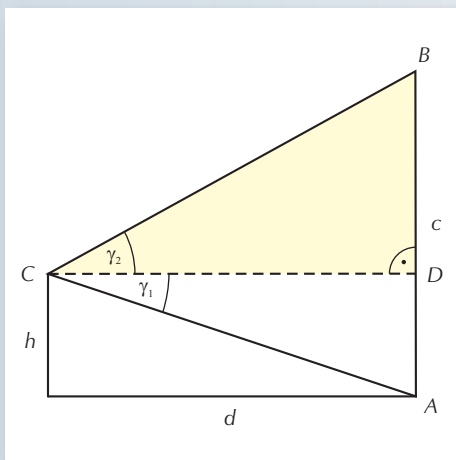
31. HÁROMSZÖGEK ADATAINAK MEGHATÁROZÁSA

Ebben a leckében általános háromszögek jellemző adatait számítjuk ki szögfüggvények segítségével. Az oldalak, szögek, terület nagysága és a nevezetes vonalak hossza általában akkor határozható meg, ha a háromszögben három független adatot ismerünk.

1. példa

Egy lakóház 8 méter magasan lévő ablakából az 52 méter távolságra lévő gyárkéményt 43° -os szögben látjuk. Milyen magas a kémény?

Megoldás



Jelölje a kémény csúcsát B , a csúcs merőleges vetületét a földön A , helyzetünket C . Az ABC háromszögben a kémény magassága $AB = c$ a keresett mennyiség, ismert még az ábra szerinti $h = 8$ méter és $d = 52$ méter távolság, valamint $\angle ACB = \gamma = 43^\circ$.

A C pontból merőlegest bocsátunk AB -re, ennek talppontját jelölje D . Mivel $CD = d$ és $AD = h$ hosszú, az ADC háromszögben ismert három adat: $\angle CDA (= 90^\circ)$, AD és CD . Jelölje az ACD szöget γ_1 , a DCB szöget γ_2 .

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{DA}{DC} = \frac{h}{d} = \frac{8}{52}, \text{ innen } \gamma_1 \approx 8,7^\circ \text{ és } \gamma_2 = \gamma - \gamma_1 \approx 34,3^\circ.$$

A CDB háromszögben is ismerünk három adatot: $\angle CDB (= 90^\circ)$, γ_2 és CD . $\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{DB}{DC} = \frac{c-h}{d}$, innen $c-h = d \operatorname{tg} \gamma_2$, azaz

$$c = h + d \operatorname{tg} \gamma_2 = 8 + 52 \cdot \operatorname{tg} 34,3^\circ \approx 43,47.$$

A kémény magassága kb. 43,5 méter.

Megjegyzés

A feladat modellje szerint az ABC háromszög egyik oldalának hosszát határoztuk meg. Gyakran használható és hatékony módszert alkalmaztunk: behúztunk egy segédvonalat, a CD magasságot. A magasság-vonal két derékszögű részháromszögre bontotta az eredeti háromszöget, s ezekben már alkalmazhattuk a szögfüggvény-összefüggéseket.

A vízszintes felett mért szöget **emelkedési szögnek**, a vízszintes alatt mért szöget **lehajlási szögnek** (vagy **depressziószögnek**) nevezzük. (Például az ábrán γ_1 lehajlási, γ_2 emelkedési szög.)

2. példa

Egy község vezetősége úgy döntött, hogy az állatok számára legalább egyhektáros legelőt jelölnek ki. A község határában erre a célra kiszemeltek egy háromszög alakú területet. A terület két oldala 140 m és 230 m hosszú, a két oldal bezárt szöge 40° . Mekkora a leendő legelő területe?

Megoldás

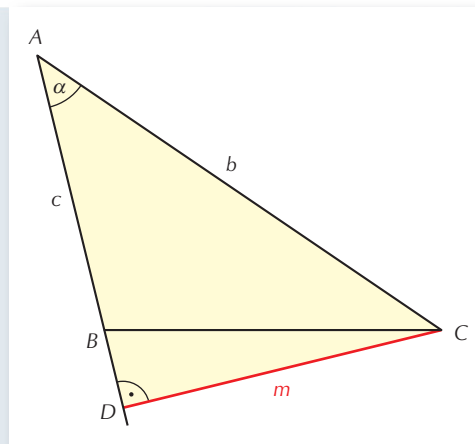
A kijelölt területet az ABC háromszöggel modellezhetjük. Legyen $AB = c = 140$ m, $AC = b = 230$ m, s ekkor $BAC \sphericalangle = \alpha = 40^\circ$.

Húzzunk be egy segédvonalat, például a CD magasságot, s ennek hosszát jelöljük m -mel. Az ADC derékszögű háromszögben ismert három független adat: $DAC \sphericalangle$, $ADC \sphericalangle$ és AC , így a háromszög többi jellemzőjét is meghatározhatjuk.

$\sin \alpha = \frac{m}{b}$, innen $m = b \sin \alpha$. A háromszög területe

$$t = \frac{cm}{2} = \frac{cb \sin \alpha}{2} = \frac{140 \cdot 230 \cdot \sin 40^\circ}{2} \approx 10\,348,9.$$

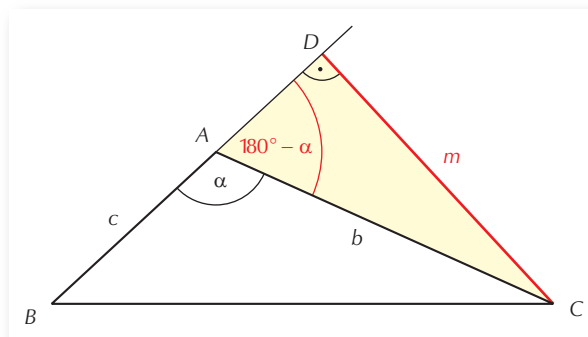
A legelő területe $\approx 10\,350$ m², tehát nagyobb, mint 1 hektár. (Nézz utána, hány m² 1 ár és 1 hektár!)



Ha egy háromszög két oldala b és c hosszúságú, a közbezárt hegyesszög pedig α , akkor $t = \frac{bc \sin \alpha}{2}$.

A fontos összefüggés neve **trigonometrikus területképlet**.

A képletet – egyelőre – csak akkor használhatjuk, ha α hegyesszög. Ha α tompaszög, akkor a CD magasságvonala a háromszögon kívül halad. Ekkor $CAD \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$; $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{m}{b}$, és $m = b \sin(180^\circ - \alpha)$. Ha tehát $\alpha > 90^\circ$, akkor a területképlet $t = \frac{bc \sin(180^\circ - \alpha)}{2}$ alakú.



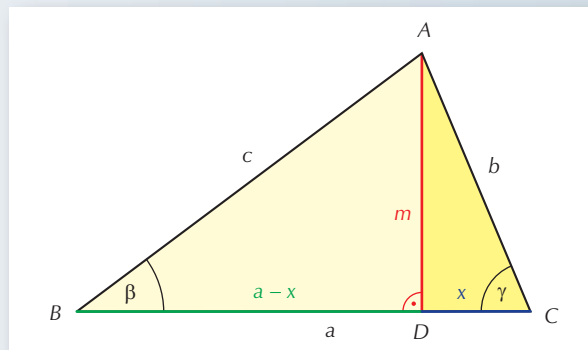
3. példa

Egy formatervezett asztallap háromszög alakú, oldalélei 130 cm, 200 cm és 210 cm hosszúak. Mekkora a csúcsoknál lévő szögek, és mekkora az asztallap felszíne?

Megoldás

Az ABC háromszög alakú asztallap éleinek hossza $AB = c = 200$ cm, $AC = b = 130$ cm és $BC = a = 210$ cm. Jelöljük a szögeket hagyományos módon α , β , γ -val, és húzzuk be az $AD = m$ magasságot!

A magasság behúzásával az ABC háromszöget két derékszögű háromszögre bontottuk. (A D pont a BC oldal belső pontja, mert a legnagyobb szög α , s így β és γ is hegyesszög.) Ha bevezetjük a $DC = x$ jelölést, akkor $BD = a - x$. A két ismeretlen, x és m meghatározásához felírjuk a BDA és CDA háromszögekben a Pitagorasz-tételt:





$$(1) (a - x)^2 + m^2 = c^2;$$

$$(2) x^2 + m^2 = b^2.$$

Küszöböljük ki m^2 -et: $c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2$.

$$\text{A négyzetre emelést elvégezve } c^2 - a^2 - x^2 + 2ax = b^2 - x^2, \text{ s innen}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

A számadatokat behelyettesítve $x = 50$. Ekkor $BD = a - x = 160$, és $m = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{130^2 - 50^2} = 120$.

Az asztallap területe $t = \frac{am}{2} = \frac{210 \cdot 120}{2} = 12\,600 \text{ (cm}^2\text{)},$ azaz $1,26 \text{ m}^2$.

A szögeket a megfelelő derékszögű háromszögekből kapjuk, valamelyik szögfüggvénnyel. Például $\sin \beta = \frac{m}{c} = \frac{120}{200}$, innen $\beta \approx 36,9^\circ$; $\cos \gamma = \frac{x}{b} = \frac{50}{130}$, innen $\gamma \approx 67,4^\circ$; végül $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 75,7^\circ$.

(Másik megoldási út, hogy először a szögeket határozzuk meg, majd ezek ismeretében alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet.)

Egy érdekességet vehetünk észre.

Az m magasságot kifejezhetjük β -val és γ -val is. Mivel $\sin \beta = \frac{m}{c}$, innen $m = c \cdot \sin \beta$; és $\sin \gamma = \frac{m}{b}$ -ből $m = b \cdot \sin \gamma$. A két kifejezés egyenlő: $c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma$, s ezt az egyenletet írhatjuk $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ alakba is.

Az összefüggés szerint egy háromszögben két oldal hosszának aránya megegyezik a velük szemkölti szögek szinuszaival. Ezt **szinusztétel**nek nevezzük.

Az összefüggést – egyelőre – csak akkor alkalmazhatjuk, ha β és γ hegyesszög. Ha például β tompaszög, akkor $\sin(180^\circ - \beta) = \frac{m}{c}$, s innen $m = c \sin(180^\circ - \beta)$. Ekkor az összefüggés $\frac{b}{c} = \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin \gamma}$ alakú.

Az oldalak szimmetrikus szerepe miatt $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ is teljesül.

4. példa

Adott az ABC háromszög három oldala: $AB = c = 20$, $AC = b = 13$ és $BC = a = 21$ egység. Határozzuk meg az A csúsból húzható magasság, szögfelező és súlyvonal hosszát!

Megoldás

Az A csúsból húzható magasság, szögfelező és súlyvonal hosszát jelöljük $AD = m$, $AE = f$ és $AF = s$ módon! Először – a 3. példához hasonló módszerrel – a háromszög AD magasságának a hosszát számítjuk ki. Az ABD és ADC háromszögekben felírt Pitagorasz-tételek eredményeként kapjuk, hogy $AD = m = 12$, és $CD = x = 5$ egység. (A részletes számításokat mellőzzük, a két példa számadatai – egy tízes szorzót figyelembe véve – lényegében megegyeznek.)

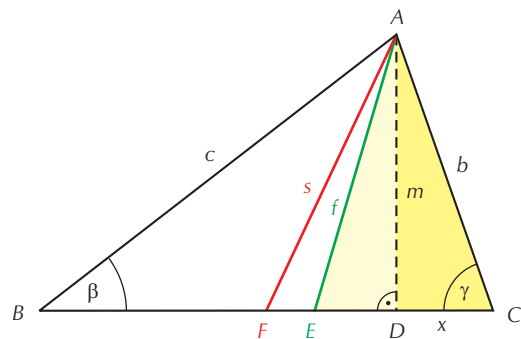
Hasonlóan meghatározhatjuk a szögeket is a megfelelő derékszögű háromszögekből: $\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{BD} = \frac{12}{16}$, innen $\beta \approx 36,9^\circ$;

$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{x} = \frac{12}{5}$, innen $\gamma \approx 67,4^\circ$; és $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 75,7^\circ$.

Az $AE = f$ szögfelező hosszát az ADE derékszögű háromszögből határozzuk meg. $EAD \sphericalangle = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \gamma) \approx 15,3^\circ$, így

$\cos EAD \sphericalangle = \frac{m}{f}$, s innen $f = \frac{m}{\cos EAD \sphericalangle} = \frac{12}{\cos 15,3^\circ} \approx 12,44$ (egység).

Az $AF = s$ súlyvonal hossza az ADF derékszögű háromszögben felírt Pitagorasz-tétellel számítható. Mivel F a BC oldal felezőpontja, $DF = \frac{a}{2} - x$, s így $s^2 = m^2 + DF^2 = 12^2 + 5,5^2$. A súlyvonal hossza $s \approx 13,20$ egység.



Megjegyzés

A szögfelezőtétel következménye, hogy $CE = \frac{ab}{b+c}$, s ebből $ED = CE - CD = \frac{ab}{b+c} - x$. Vagyis az AE szögfelező hosszát az ADE derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel is meghatározhatjuk, s így elkerülhető $EAD \sphericalangle$ felhasználása, azaz a szögfüggvények alkalmazása.

Tetszőleges háromszögben igaz, hogy $m \leq f \leq s$. Ha $b \neq c$, akkor az EDA háromszögben f -fel, az FDA háromszögben pedig s -sel szemben van a legnagyobb szög. Az ábránk tehát általános érvényű.

Emelt szint

5. példa

Az ABC hegyesszögű háromszögben ismert a BC oldal és a $BAC \sphericalangle$. Mekkora a háromszög köré írt körének a sugara?

Megoldás

Jelölje a BC oldal hosszát a , a BAC szöget α , a háromszög köré írt kör középpontját O és a sugarának hosszát R !

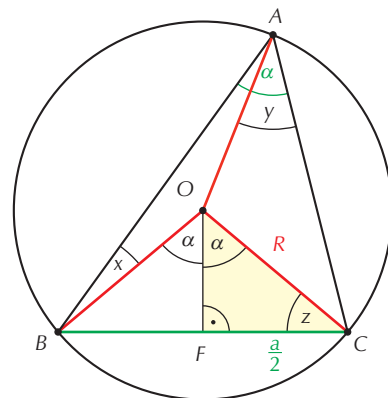
BOC , COA és AOB egyenlő szárú háromszögek, mert $BO = CO = AO = R$. Vezessük be az ábra szerinti $OAB \sphericalangle = OBA \sphericalangle = x$, $OAC \sphericalangle = OCA \sphericalangle = y$ és $OCB \sphericalangle = OBC \sphericalangle = z$ jelöléseket!

Ekkor az ABC háromszög belső szögeinek összege $2x + 2y + 2z = 180^\circ$, a BOC háromszögben pedig $BOC \sphericalangle + 2z = 180^\circ$, ezért $BOC \sphericalangle = 2\alpha$.

Ha F jelöli a BC oldal felezőpontját, akkor a BC húr OF felezőmerőlegese egyúttal a BOC szöget is felezi. $FC = \frac{a}{2}$, így a COF

derékszögű háromszögben $\sin \alpha = \frac{CF}{CO} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$. Innen a körül-

írt kör sugara kifejezhető: $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$.



Megjegyzés

Ennek a nevezetes összefüggésnek több érdekessége is van.

Egyrészt mitől is függ a sugár hossza? Az oldalak és szögek szimmetrikus szerepe miatt nyilván

$R = \frac{b}{2 \sin \beta}$ és $R = \frac{c}{2 \sin \gamma}$ is teljesül. (Hegyszögű háromszögben O mindig belső pont.)

Másrészt azt is észrevehetjük, hogy a sugár hossza csak két adattól függ. Márpedig az a oldal és az α szög nem határozza meg egyértelműen az ABC háromszöget, ehhez három adat kellene. Vagyis ha a BC oldalt és az O pontot rögzítjük, akkor a BOC szög és a BAC szög $= \alpha$ sem változik, ha az A csúcs úgy mozog a köríven, hogy O a háromszög belső pontja marad.

Végezetül megjegyezzük, hogy a levezetésben kihasználtuk, hogy α hegyesszög. Ha α tompaszög, akkor az O pont a háromszögön kívülre kerül, s az ábra – valamint az összefüggés igazolása – lényegesen megváltozik. Erről részletesebb anyag található a 10. évfolyam 55. *Kerületi és középponti szögek (emelt szint)* leckéjében. (Ott igazoltuk a kerületi és középponti szögekre a BOC szög $= 2BAC$ összefüggést, ennek felhasználásával a megoldás lényegesen egyszerűbb.)

Fogalmak

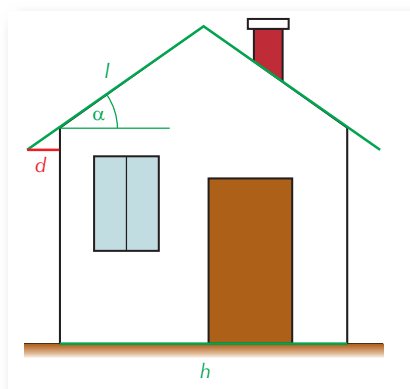
emelkedési szög;
lehajlási szög
(depressziószög);
trigonometrikus
területképlet.

FELADATOK

1. K2

Az ábra szerinti épület homlokzata $h = 8$ méter széles. A tetőszereket $l = 6$ méter hosszú gerendákból építik. Mekkora lesz az eresz d szélessége, ha a tetőgerenda vízszintessel bezárt α szöge

- 40° ;
- 46° ?
- Mekkora legyen a α szög az építők, ha a tervekben $d = 30$ cm széles eresz szerepel, és nem akarnak levágni a gerendákból?



2. K2

Egy 6 méter magas épület tetejéről a 140 méter távolságra lévő templomtornyot 12° -os szögben látjuk. Milyen magas a torony? Mekkora emelkedési szögben látszik az épület tövéből?

3. K2

Határozzuk meg a paralelogramma alakú szántóföld területét, ha

- két szomszédos oldala 220 méter és 240 méter hosszú, és az oldalak bezárt szöge 72° ;
- két szomszédos oldala 220 méter és 240 méter hosszú, és az oldalak bezárt szöge 108° ;
- két átlója 220 méter és 240 méter hosszú, és az átlók bezárt szöge 72° !

4. K1

Az egyenes országúttól $h = 40$ méterre elhelyezkedő megfigyelőtől az országúton lévő A és B útjelző táblák 55 méter, illetve 72 méter távolságban vannak. Mekkora lehet a táblák AB távolsága?

5. K2

Egy dombon egyenes országút halad át. Az út A pontjából 4° -os emelkedőn érjük el a domb O tetejét, majd 7° -os lejtő vezet az út B pontjába. Az A és B pontok azonos tengerszint feletti magasságban vannak. Milyen magas hozzájuk képest a domb, ha A és B távolsága légvonalban – felülnézetből – 420 méter? (Felülnézetből A , O és B egy egyenesbe esik.)

6. K2

Mekkora az ABC háromszög c oldala, ha $a = 10$ cm, $\gamma = 50^\circ$ és

- $\beta = 60^\circ$;
- $\beta = 25^\circ$?

7. K2

Az ABC háromszög három oldala $a = 28$ cm, $b = 26$ cm és $c = 30$ cm.

K2 a) Milyen hosszú a C csúcsból kiinduló magasság, szögfelező és súlyvonal? Mekkora a háromszög szögei?

E1 b) Határozzuk meg a háromszög körülírt és beírt körének a sugarát!

8. K2

Az ABC háromszögben $AB = 12$ dm, $AC = 14$ dm, $\angle BAC = 36^\circ$. Milyen hosszú az A csúcsból húzható szögfelező? (Segítség: Irjuk fel az ABC háromszög területét két részháromszög területének az összegeként!)

9. K2

Az ABC háromszög A csúcsnál lévő szöge 80° , területe 60 cm². Mekkora a háromszög oldalai, ha a háromszög

a) derékszögű;

b) egyenlő szárú?

10. K2

$R = 20$ cm sugarú, kör alakú kartonpapírból kivágjuk a lehető legnagyobb oldalú szabályos tízszöget. Milyen hosszúak a tízszög oldalai, és hány százalék lesz a papírhulladék?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2518–2613.

32. SÍKBELI ÉS TÉRBELI SZÁMÍTÁSOK SZÖGFÜGGVÉNYEK SEGÍTSÉGÉVEL (Alkalmazások)

Ebben a leckében a szögfüggvények alkalmazására mutatunk példákat. A korábbi fejezetekben is láttunk távolságmérési, helymeghatározási és területszámítási feladatokat, ezek a trigonometria legősibb alkalmazásai.

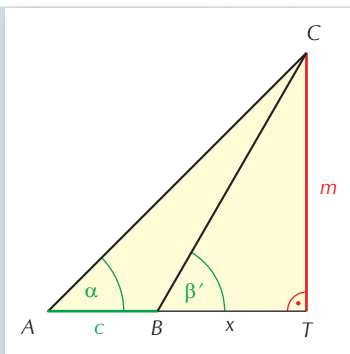
1. példa

Anna és Béla az országút bal oldalán a távolban egy templomtornyot vettek észre. Úgy döntöttek, megpróbálják meghatározni, körülbelül milyen távol lehetnek a templomtól. Első lépésként megmérték, hogy a torony az országúthoz képest mekkora szögben látszik. Gondolatban összekötötték saját helyzetüket és a torony alját egy egyenesre, s ennek az egyenesnek az országúttal bezárt szögére közelítőleg 45° -ot kaptak. Az egyenes úton továbbhaladtak 300 lépést, s ekkor 60° -os szöget mértek. Hány lépés távolságra voltak a toronytól az első, illetve a második méréskor? Milyen messze volt a torony az országúttól?

Megoldás

A két mérési helyet jelöljük A -val és B -vel, a torony helyzetét C -vel, továbbá C merőleges vetületét az AB egyenesre T -vel!

Ekkor az ABC háromszög A csúcsánál lévő szög $\alpha = 45^\circ$, a B -nél lévő külső szög $\beta' = 60^\circ$, $AB = c = 300$ lépés; és keressük a $CA = b$, $CB = a$, $CT = m$ távolságokat.



Legyen $BT = x$, ekkor a BTC és ATC derékszögű háromszögekben

$$(1) \operatorname{tg} \beta' = \frac{m}{x};$$

$$(2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{x + c}.$$

$$\text{Mindkét egyenletből } m\text{-et kifejezve } x \cdot \operatorname{tg} \beta' = (x + c) \cdot \operatorname{tg} \alpha, \text{ s innen } x = \frac{c \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \alpha}.$$

A konkrét számadatokat behelyettesítve $x \approx 409,8$, azaz $x \approx 410$ lépés.

Ezután visszahelyettesítünk, (1)-ből $m = x \cdot \operatorname{tg} \beta' \approx 709,8$, vagyis a torony az országúttól kb. 710 lépésnyire volt.

Az a és b távolságok szintén a megfelelő derékszögű háromszögekből számíthatók:

$$(3) \sin \alpha = \frac{m}{b}, \text{ innen } b = \frac{m}{\sin \alpha} \approx \frac{709,8}{\sin 45^\circ} \approx 1003,8;$$

$$(4) \sin \beta' = \frac{m}{a}, \text{ innen } a = \frac{m}{\sin \beta'} \approx \frac{709,8}{\sin 60^\circ} \approx 819,6.$$

Anna és Béla az első méréskor kb. 1004, a második méréskor kb. 820 lépésre voltak a toronytól.

2. példa

Anna és Béla – az előző sikeres távolságmérésen fellelkesülve – most egy másik templomtorony magasságát próbálják meghatározni. Jelenlegi helyzetükből nézve a földfelszínhez képest a torony 15° -os emelkedési szögben látszik. Sajnos a templomhoz már nem tudnak közelebb kerülni, ezért 50 métert távolodnak, s új helyzetükből a torony csúcsát 10° -os emelkedési szögben látják. (A torony alja és a két mérési pont egy egyenesbe esik.) Megállapíthatják-e ennyi adatból a templom magasságát?

Megoldás

Jelölje a templomtorony csúcsát C , alapját T , az első és második mérési helyet B , illetve A . Észrevehetjük, hogy az előző példa térbeli megfelelőjét kaptuk (ehhez hasonlóan választottuk a betűzést), az adatok: $\alpha = 10^\circ$, $\beta' = 15^\circ$, $AB = c = 50$ méter, s meghatározandó $CT = m$.

Az előző példa megoldási útját követjük. $x = \frac{c \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \alpha}$, $m = x \cdot \operatorname{tg} \beta' = \frac{c \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \alpha}$, innen $m \approx 25,78$, azaz a templomtorony kb. 26 méter magas.

3. példa

Anna és Béla újabb méréshez készülnek, de most az eddigieknél nehezebb helyzetben vannak. Az AB víztorony helyzetükből, a C pontból 18° -os emelkedési szögben látszik (A a torony alapja, B a csúcsa). Sajnos az AC egyenesen sem a toronyhoz közeledni, sem tőle távolodni nem tudnak. Így C -ből az AC egyenesre merőlegesen 50 méter távolságra mennek el, és ebből a D pontból a tornyot 14° -os emelkedési szögben látják.

Milyen magas a víztorony?

Megoldás

Vezessük be az ábra szerinti jelöléseket: $CD = a = 50$ méter, $\angle BCA = \alpha = 18^\circ$, $\angle BDA = \beta = 14^\circ$, s legyen $AB = m$, $AD = b$, $AC = c$.

A három ismeretlen (m , b , c) között kell kapcsolatot találnunk, ehhez három egyenletre van szükségünk.

A CAB derékszögű háromszögből $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{c}$, innen

$$(1) c = \frac{m}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Hasonlóan a DAB háromszögből

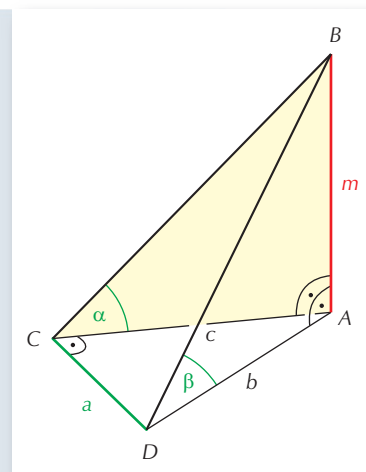
$$(2) b = \frac{m}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Végül felírhatjuk az ACD háromszögben a Pitagorasz-tételt:

$$(3) a^2 + c^2 = b^2.$$

Ez utóbbi egyenletbe (1)-et és (2)-t behelyettesítve az $a^2 + \frac{m^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{m^2}{\operatorname{tg}^2 \beta}$ egyenletet kapjuk, ahonnan m

kifejezhető: $a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = m^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)$, s így $m = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}}$. A szám-
adatokkal $m \approx 19,44$, azaz a víztorony magassága kb. 19 méter.



Megjegyzés

Persze Anna és Béla ügyesebben is eljárhat. Könnyebb a dolguk, ha a BDA emelkedési szög helyett meg tudják mérni például a $CDA = \gamma$ szöget. Ekkor a DCA derékszögű háromszögben $c = a \cdot \operatorname{tg} \gamma$ közvetlenül számolható, majd a CAB háromszögben $m = c \cdot \operatorname{tg} \alpha$ hasonlóan adódik. Így az eredmény $m = a \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

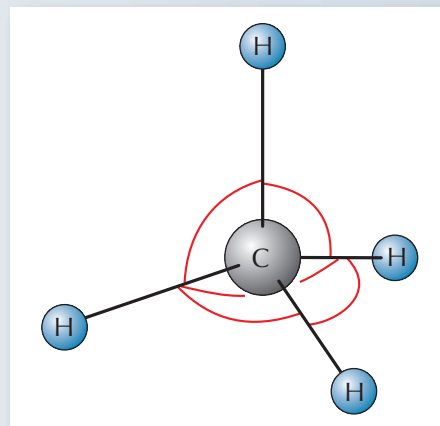
4. példa

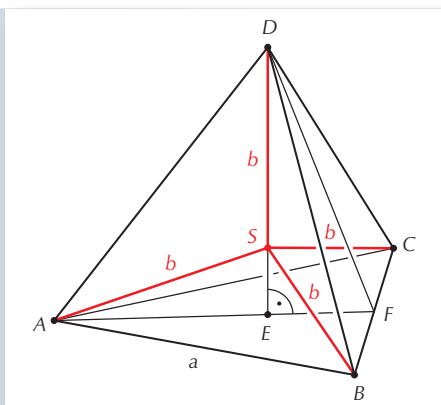
A metán térbeli molekuláris CH_4 modelljében a centrális helyzetű szénatomhoz a négy hidrogénatom úgy csatlakozik, hogy bármely két CH ág ugyanakkora szöget zár be egymással. Mekkora ez a szög?

Megoldás

A molekula modelljét elképzelhetjük úgy, hogy az $ABCD$ szabályos tetraéder csúsaiba helyezzük a hidrogénatomokat, és S középpontjába (súlypontjába) a szénatomot. (Az $ABCD$ tetraéder szabályos, ha élei egyenlők.)

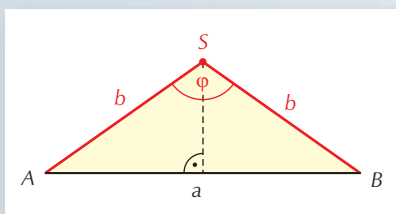
Jelölje a tetraéder oldalának hosszát a , az $AS = BS = CS = DS$ távolságokat b , az ABC háromszög súlypontját E , a BC él felezőpontját F . E egyrészt az AF súlyvonal F -hez közelebbi harmadolópontja, másrészt a tetraéder testmagasságának a talppontja, azaz D , S , E egy egyenesbe esik, és DE merőleges AE -re, valamint az ABC síkra is.





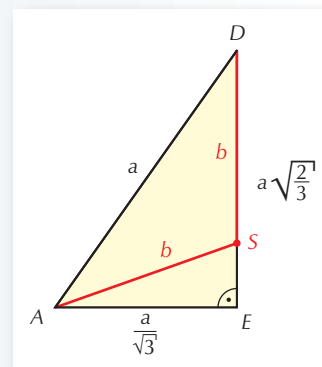
$$AS^2 = ES^2 + AE^2, \text{ azaz } b^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{2}{3}} - b\right)^2.$$

Innen $b^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 \frac{2}{3} + b^2 - 2ab\sqrt{\frac{2}{3}}$, s némi átalakítás után $b = a\sqrt{\frac{3}{8}}$ adódik.



A keresett $ASB \sphericalangle$ meghatározásához kapcsolatot keresünk a háromszög oldalai, azaz a és b között. AF az ABC szabályos háromszög súlyvonala, így $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Az AE szakasz ennek kétharmada: $AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Az ED testmagasság az AED háromszögben felírt Pitagorasz-tételből határozható meg: $AD^2 = AE^2 + ED^2$, azaz $ED = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Érdemes külön kirajzolnunk az AED háromszöget.

Mivel $ES = ED - SD = a\sqrt{\frac{2}{3}} - b$, az AES háromszögben felírható Pitagorasz-tételből megkapjuk, hogyan függ b az a éltől.



Utolsó lépésként a keresett $ASB \sphericalangle = \varphi$ szöveget határozzuk meg. Az ABS egyenlő szárú háromszöget az S csúcs szögfelezője két derékszögű részháromszögre bontja.

$$\text{Innen } \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b} = \frac{a}{2a\sqrt{\frac{3}{8}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\varphi}{2} \approx 54,74^\circ, \varphi \approx 109,5^\circ.$$

Megjegyzés

Észrevehetjük, hogy $\frac{DS}{DE} = \frac{3}{4}$, azaz S a DE testmagasság negyedelőpontja.

5. példa

Mekkora szöget zárnak be a szabályos tetraéder oldalélei és oldallapjai az alaplapja síkjával?

Megoldás

Használhatjuk a 4. példa ábrájának a jelöléseit és eredményeit. Az AD oldalél alaplappal bezárt szögét úgy kapjuk meg, hogy az AD egyenest merőlegesen levetítjük az ABC alapsíkra, s AD és vetületének bezárt szöge a keresett szög. (Szimmetriakok miatt a többi él is ugyanekkora szöget zár be az alaplappal.) AD vetülete AE ,

a keresett $DAE \sphericalangle$ a DAE derékszögű háromszögből határozható meg. $\text{tg}(DAE \sphericalangle) = \frac{DE}{AE} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$, innen

$DAE \sphericalangle \approx 54,7^\circ$ az alaplap és oldaléllek hajlásszöge.

A BCD és ABC síkok hajlásszöge az F pontnál áll elő. F -ből mindkét síkban merőlegest állítunk a BC metszésvonalra, s ezen FD és FA egyenesek bezárt szöge a két sík hajlásszöge. (A szimmetriaviszonyok miatt a

többi lap is ugyanekkora szöget zár be az alaplappal.) Az FED derékszögű háromszögből $\operatorname{tg}(EFD \sphericalangle) = \frac{DE}{EF} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2}$, innen $EFD \sphericalangle \approx 70,5^\circ$ az alaplappal és oldallapok hajlásszöge.

6. példa

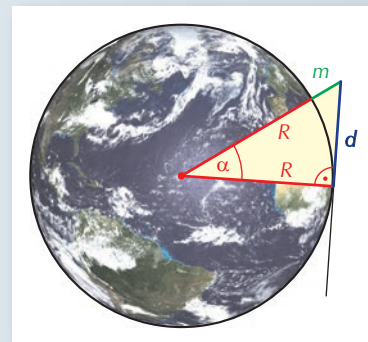
Egy tengeri világítótorony 30 m magas. Kedvező látási viszonyok között mekkora távolságból észlelhetik a hajók a jelzőfényt? (A Földet tekintjük $R = 6370$ km sugarú gömbnek.)

Megoldás

Jelöljük a torony magasságát m -mel, azt a távolságot pedig, ahonnan még éppen látni lehet a tornyot, jelöljük d -vel.

A Pitagorasz-tételből $(R + m)^2 - R^2 = d^2$, innen $d = \sqrt{2Rm + m^2} \approx 19,55$. A jelzőfényt tehát 19,55 km távolságból észlelhetik leghamarabb a hajók.

(A Föld felszínén mért távolság jó közelítéssel megegyezik d -vel, az egyszerűbb számoláshoz nincs szükségünk a szögfüggvényekre.)



HOGYAN HATÁROZTA MEG SHERLOCK HOLMES AZ ELPUSZTULT SZILFA ÁRNYÉKÁNAK HOSSZÁT? (Olvasmány)

A. C. Doyle: A *Musgrave-szertartás* című novellájában Sherlock Holmes elásott kincs után nyomozott a szilfájáról híres Musgrave-birtokon. A régi térkép és leírás szerint az ősrégi fa árnyékától kellett elindulni, adott szabályok szerint haladva. De kiderült, hogy az öreg szilfába tíz évvel ezelőtt belecsapott a villám, és ezért ki kellett vágni. Holmes azonban így is sikerrel érdeklődött a birtok gazdájánál:

- „– Azt már aligha lehet megmondani, milyen magas lehetett az a szilfa – mondtam.
- Máris meg tudom mondani. Hatvannégy láb magas volt.
- Honnan tudja? – kérdeztem meglepődve.
- A házitanítóm mindig magasságot számított velem, hogy megtanuljam a trigonometriát.

Kamaszkoromban kiszámítottam minden fa és minden épület magasságát.”

És végül maga a mérés:

„Ami a szilfa árnyékát illeti, nyilván az árnyék vége számított, nem a töve, mert akkor a fa tövét adták volna meg a kiindulópontnak. Ki kellett számítanom, hova esne a szilfa árnyéka abban a pillanatban, amikor a nap a tölgy fölött lesz. [...]”

Fogtam egy hosszú horgászbót, hat láb hosszú volt, és kimentem barátommal a szilfa helyére. A nap éppen elérte a tölgyfa tetejét. Letűztem a bót, megjelöltem az árnyék irányát, és megmértem a hosszát. Kilencc láb volt.

Most már egyszerű volt a számítás. Ha a hat láb hosszú bot árnyéka kilenc láb, akkor a hatvannégy láb magas fa árnyéka kilencvenhat láb, és a kettő iránya természetesen egybeesik.”³

A frappáns elbeszélésből ezután megtudhatjuk, hogy hol vannak az elrejtett értékek, és hogy miből is áll valójában a kincs.

³ Arthur Conan Doyle: *Sherlock Holmes emlékiratai*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1976.

FELADATOK

1. K1

Egy csavar menetének középátmérője 5,1 mm, menetemelkedése egy fordulat alatt 1 mm. Mekkora a menetemelkedés szöge?

2. K1

Tekintsük azt a pontot a Föld-Nap szakasz felezőmerőlegesén, amelyből 1 másodperc nagyságú szögben látszik a szakasz! Csillagászati mértékegység az 1 parszek, ami ennek a pontnak és a Föld-Nap szakasznak a távolsága. Hány kilométer 1 parszek?
(A Föld–Nap középtávolság kb. 149,6 millió km.)

3. K1

Egy 90 cm-es fonálon lengő pontszerű test két szélső helyzete közötti távolság 20 cm. Mekkora szöget zár be a fonálinga a két szélső helyzet között?

4. K1

Milyen magas hegy tetején áll az a 28 m magas kilátótorony, amelynek alját $13,2^\circ$ -os, tetejét $13,6^\circ$ -os emelkedési szög alatt látni?

5. K1

Egy körív alakú híd görbületi sugara 200 méter, nyílásmagassága 20 méter. Mekkora a két hídpillér távolsága, és milyen hosszú a körív? (A görbületi sugár a körívet tartalmazó kör sugara.)

6. K2

Egy kilátó aljáról a vele éppen szemközt álló, széles és lapos épület homlokzata 38° -os (vízszintes) látószögben látszik. Felmegyünk a kilátó 25 méter magas tetejére. Innen mekkora szögben látjuk az épület homlokzatát? A kilátó és az épület távolsága 60 méter.

7. K1

Adott két pont az O kezdőpontú koordinátasíkon: $A(-5; 8)$ és $B(11; 4)$.

- Mekkora szöget zár be az x tengellyel az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ vektor egyenese?
- Mekkora szöget zár be az x tengellyel a $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektor?
- Mekkora az AOB szög?

8. K1

Egyenlő szárú trapéz alakú földterület alapja 320 m, szárai 210 m hosszúak. Az alap és a szárok bezárt szöge 75° . Hány hektár a terület nagysága?

9. E1

Egy futballdzésen a játékosok a pályán olyan e egyenes mentén állnak föl, mely az alapvonalra merőlegesen áll, de nem metszi az AB gólvonalat. A játékosoknak a kapuhoz közeledve egy kedvező P pontot kell megtalálniuk, ahonnan az üres kapura kell ráúgniuk a labdát. Melyik P ponthoz tartozó α „lövőszög” a lehető legnagyobb? Jelölje C az e egyenes és az AB alapvonal metszéspontját. Mekkora α , ha $AC = d = 5$ m, és a kapu $AB = h = 7,32$ m széles?

10. E1

Két egyenes gúla testmagassága egyaránt 10 cm. Az egyik gúla alapja egységsugarú körbe írt négyzet, a másiké egységsugarú körbe írt szabályos hatszög. Melyik gúla oldaléle zár be nagyobb szöget az alaplappal? Melyik gúla oldallapja zár be nagyobb szöget az alaplappal? Mekkora a különbségek?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2614–2695.

33. TOMPASZÖGŰ HÁROMSZÖGEK

Ebben a leckében kiterjesztjük a szögfüggvényeket. Eddig derékszögű és hegyesszögű háromszögek alkotóelemeit számítottuk ki (oldalak, szögek), most megvizsgáljuk, hogyan tudnánk tompaszögű háromszögek alkotórészeit meghatározni. Ehhez definiáljuk a derékszög és a tompaszög szögfüggvényeit.

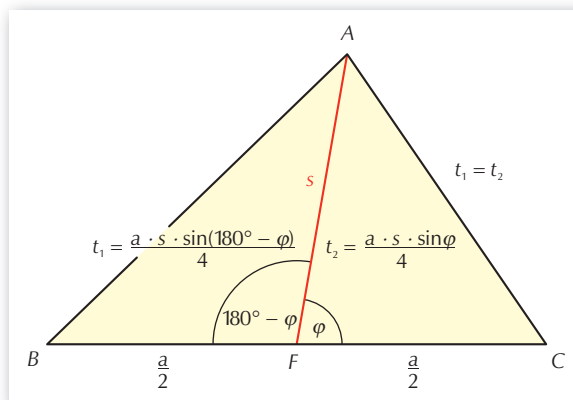
TOMPASZÖG ÉS DERÉKSZÖG SZINUSZA

A $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ értékeket korábban derékszögű háromszögek segítségével, hegyesszögekre definiáltuk. A háromszög területképlete γ hegyesszög esetén a szokásos jelölésekkel a területképlet $t = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, tompaszögű γ esetén pedig

$t = \frac{ab \sin(180^\circ - \gamma)}{2}$ alakú. Természetes gondolatnak tűnik a $\sin \gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$ tompaszögű kiterjesztés, hiszen ekkor a képlet egységes alakú lesz.

(Az ábrán az s súlyvonal felezi az ABC háromszög területét.

$t_1 = t_2$, azaz $\frac{a \cdot s \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{4} = \frac{a \cdot s \cdot \sin \varphi}{4}$.)



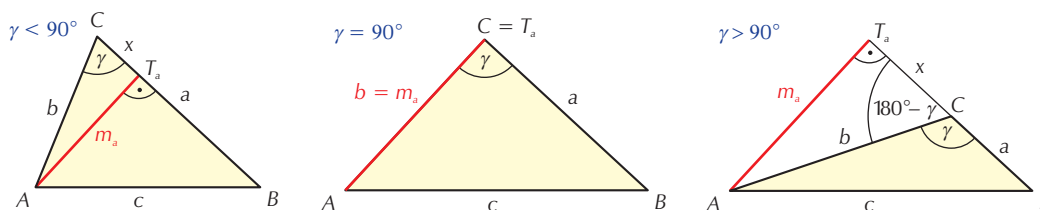
Ha pedig $\gamma = 90^\circ$, akkor a képletből $t = \frac{ab \sin 90^\circ}{2}$; a derékszögű háromszög területe $t = \frac{ab}{2}$, így a $\sin 90^\circ = 1$ kiterjesztés tűnik kézenfekvőnek. (Ekkor $\sin 90^\circ = \sin(180^\circ - 90^\circ)$ is teljesül.)

A számológépünk is ennek megfelelően „számol”. Közelítő értékekkel pl. $\sin 40^\circ = 0,6428 = \sin 140^\circ$, $\sin 125^\circ = 0,8192 = \sin 55^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$ stb.

A következő fejezetben tetszőleges forgásszög (tetszőleges nagyságú, előjeles szög) szögfüggvényeit definiáljuk majd. Most csak azt mutatjuk meg, hogy a tompaszögű kiterjesztéssel a korábban látott geometriai tételek érvényben maradnak.

Tétel

Tetszőleges háromszögben érvényes a **trigonometrikus területképlet**: $t = \frac{ab \sin \gamma}{2}$.



IV. TRIGONOMETRIA

Az AT_aC_Δ -ben,

ha γ hegyesszög $m_a = b \sin \gamma$;

ha γ derékszög $m_a = b = b \sin 90^\circ$;

ha γ tompaszög $m_a = b \sin (180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma$.

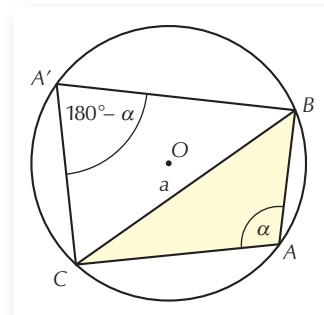
Tehát mindhárom esetben $t = \frac{am_a}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$.

Tétel

Tetszőleges háromszögben érvényes a háromszög oldala, a szemközti szöge és a körülírt körének sugara közti összefüggés: $a = 2R \sin \alpha$.

Bizonyítás

- A hegyesszög esetén korábban már beláttuk.
- Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor az a oldal a háromszög körülírt körének az átmérője, vagyis $2R$ lesz. Mivel $\sin 90^\circ = 1$, ezért a tétel érvényes marad.
- Tompaszög esetén vegyünk egy A' pontot a körülírt kör A -t nem tartalmazó BC ívén. Mivel $ABA'C$ húrnégyszög, ezért az $A'CB_\Delta$ -ben az A' -nél lévő $180^\circ - \alpha$ szög hegyesszög, így $a = 2R \sin (180^\circ - \alpha)$.
Tehát a $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$ miatt $a = 2R \sin \alpha$ ekkor is igaz.



Végül megmutatjuk, hogy a szinusz-tétel is minden háromszögre igaz (rögtön három oldalra és szögre mondjuk ki).

Szinusztétel

$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$. (A szokásos jelöléseket használva.)

Bármely háromszögben az oldalak hosszának aránya megegyezik az oldalakkal szemközti szögek szinuszainak arányával.

Bizonyítás

A háromszög oldalait kifejezhetjük a körülírt kör sugarával: $a : b : c = 2R \sin \alpha : 2R \sin \beta : 2R \sin \gamma = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$. Az állítást tetszőleges háromszögre igazoltuk.

Megjegyzés

Feladatmegoldások során általában csak két oldal arányára alkalmazzuk a tételt.

1. példa

Egy háromszögben $a = 5$, $\alpha = 67^\circ$, $\beta = 106^\circ$. Mekkora a b oldal?

Megoldás

A szinusz-tételből: $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \approx \frac{5 \cdot 0,9613}{0,9205} \approx 5,22$.

2. példa

Egy háromszögben $a = 5$, $\alpha = 67^\circ$, $b = 5,22$. Mekkora a β szög?

Megoldás

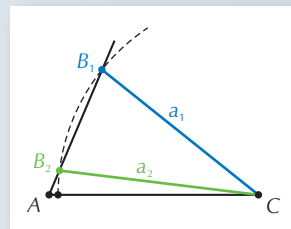
A szinuszételből: $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \approx \frac{5,22 \cdot 0,9205}{5} \approx 0,961$.

Számológép vagy függvénytáblázat segítségével visszakeresve jó közelítéssel: $\beta \approx 74^\circ$ -ot kapunk.

Ha egy háromszögben egy szögnek csak a szinuszát ismerjük, akkor mindig két eset lehetséges, a szög vagy hegyesszög, vagy az ezt kiegészítő tompaszög. Hogy valóban létezik-e a háromszög, azt az $a \leq b \leq c \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \leq \gamma$ összefüggés segítségével dönthetjük el. Ami azt jelenti, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szögnek kell lennie!

A helyes megoldás tehát: $\beta \approx 74^\circ$ vagy $\beta \approx 106^\circ$.

Mindkét esetben $a < b$ és $\alpha < \beta$ teljesül. (Azért kaptunk két megoldást, mert a háromszögben két oldal és a kisebbik oldallal szemkötti szög volt megadva.)



3. példa

Egy háromszögben $a = 5$, $b = 5,22$, $\beta = 106^\circ$. Mekkora az α szög?

Megoldás

A szinuszételből: $\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b} \approx \frac{5 \cdot 0,9613}{5,22} \approx 0,9208$.

Ebből $\alpha \approx 67^\circ$ vagy $\alpha \approx 113^\circ$ -ot kapunk.

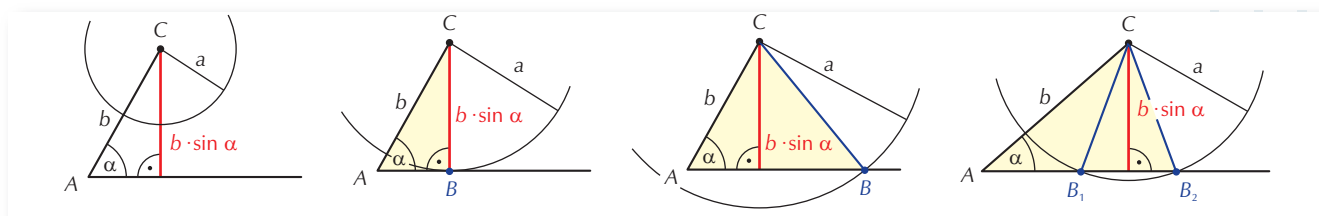
Lehet, mégsem figyeltünk eléggé: ha $\alpha \approx 113^\circ$, akkor két tompaszöge van a háromszögnek!

Az egyetlen helyes megoldása: $\alpha \approx 67^\circ$.

Gondoljuk végig, milyen összefüggés van a 2. és 3. példa eredményei és a háromszögek egybevágóságának alapesetei közt!

A 2. példában két oldal és a rövidebb oldallal szemkötti szög adott. Nem véletlen, hogy ilyen egybevágósági alapeset nincs! Ezen adatok nem határozzák meg egyértelműen a háromszöget.

A 3. példában a két oldal és a hosszabbik oldallal szemkötti szög már egyértelműen meghatározza a háromszöget. Visszagondolva a szerkesztési feladatokra, a 2. példához hasonló esetben, azaz ha adott a , b és $\alpha < 90^\circ$, akkor 0, 1 vagy 2 megoldást kaphatunk. Most már elvégezhetjük ennek a szerkesztésnek a pontos elemzését (adott a , α és b):



IV. TRIGONOMETRIA

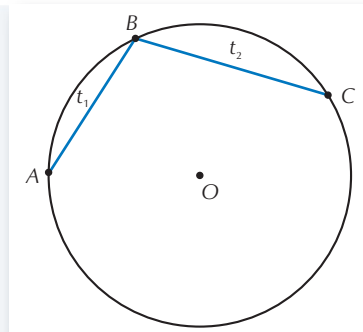
A szerkesztésnél felvesszük először a $CA = b$ oldalt, a B pont számára két vonalunk lesz: a C középpontú a sugarú kör és a CA -ra az A -nál mért α szög szögszára.

- Nincs megoldás, ha $a < b \cdot \sin \alpha$.
- Egy megoldás van, ha $a = b \cdot \sin \alpha$ vagy $a \geq b$.
- Két megoldás van, ha $b \cdot \sin \alpha < a < b$.

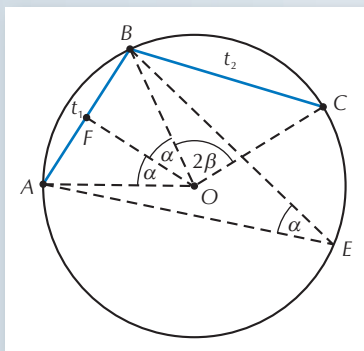
4. példa

Egy 30 méter átmérőjű, kör alakú medence szélén egymáshoz csatlakozó egyenes kötelekkel – az ábrán látható módon – két részt elkerítették kisgyerekek számára. A kötelek hossza $AB = 16$ méter és $BC = 20$ méter.

- Mekkora a két pancsolómedence t_1 és t_2 területe?
- Mekkora az AC távolság?



Megoldás



a) Az AB húr által határolt körszelet t_1 területét megkapjuk, ha az AOB körcikk területéből kivonjuk az AOB háromszög területét. Ezért először az AB húrhoz tartozó 2α középponti szöget számítjuk ki.

Az AB húrhoz tartozó kerületi szög fele a középponti szögnek: $\angle AEB = \alpha$. Jelölje a kör sugarát r , ekkor a tanult tétel szerint $AB = 2r \cdot \sin \alpha$. Innen $\sin \alpha = \frac{AB}{2r} = \frac{16}{30}$, $\alpha \approx 32,2^\circ$ (α hegyesszög), $2\alpha \approx 64,4^\circ$. (Ugyanezt az eredményt kapjuk az AOF derékszögű háromszögből is, ahol F az AB húr felezőpontja.)

Az AOB körcikk területe $r^2 \pi \cdot \frac{64,4^\circ}{360^\circ} \approx 126,4 \text{ m}^2$. Az AOB háromszög területe

– például a trigonometrikus területképlettel – $\frac{r^2 \cdot \sin 64,4^\circ}{2} \approx 101,5 \text{ m}^2$. A kisebbik

körszelet területe tehát $t_1 \approx 126,4 - 101,5 = 24,9 \text{ m}^2$.

Hasonlóan járunk el a BC húr esetében is. A középponti szög felére $\sin \beta = \frac{BC}{2r} = \frac{20}{30}$, innen $\beta \approx 41,8^\circ$

(β hegyesszög), és $2\beta \approx 83,6^\circ$. $t_2 = r^2 \pi \cdot \frac{83,6^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2 \cdot \sin 83,6^\circ}{2} \approx 52,3 \text{ m}^2$.

b) Ismerjük az ABC háromszög két oldalát és egy szögét is: $\angle ABC = 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta = 106^\circ$. Sajnos a két oldal és a közbezárt szög ismeretében – eddigi tudásunkkal – nem tudjuk meghatározni a háromszög harmadik oldalát, nem tudjuk felírni a szinusztételt. (Hasonló esetben a koszinusztételt használjuk, ezzel a következő leckeiben foglalkozunk.)

$\angle AOC = 2\alpha + 2\beta = 148^\circ$. Az AOC háromszögben is két oldalt és a közbezárt szöget ismerjük, de észrevehetjük, hogy ez a háromszög egyenlő szárú ($AO = OC = r$), és így kiszámíthatjuk az alapon fekvő szögeit:

$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180^\circ - 148^\circ}{2} = 16^\circ$. Most már alkalmazhatjuk például a szinusz

tételt az AOC háromszögben: $\frac{AC}{\sin 148^\circ} = \frac{r}{\sin 16^\circ}$.

$AC = \frac{r \cdot \sin 148^\circ}{\sin 16^\circ} \approx 28,8$ méter a keresett távolság.

Fogalmak
szinusztétel;
trigonometrikus
területképlet.

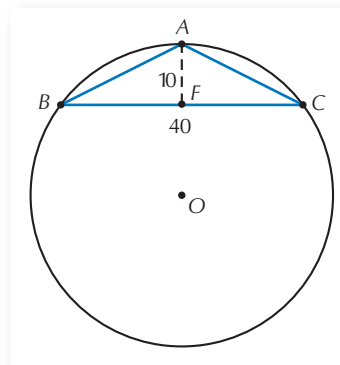
FELADATOK

1. K1 Határozzuk meg a 2. példa háromszögének harmadik oldalát!

2. K2 A 3. példa utáni szerkesztési feladat elemzését végezzük el $\alpha = 90^\circ$ és $\alpha > 90^\circ$ esetén!

Vagyis egy háromszögben $a > b$ és $\alpha = 90^\circ$ (illetve $\alpha > 90^\circ$). Szerkesszük meg a háromszöget!

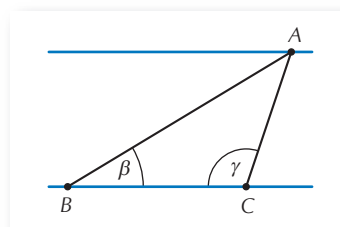
3. K2 A 4. példában szereplő kör alakú medencét az ABC egyenlő szárú háromszög alakú kötézzel négy részre osztották fel úgy, hogy $BC = 40$ méter és az A pont távolsága BC -től 10 méter. Számítsuk ki a medence átmérőjét és a négy területrészt nagyságát!



4. K2 Egy tipikus távolságmérési eljárás látható az ábrán.

Egy folyó túlságtján kijelölünk egy A pontot, az innső partján pedig a B és C (hozzáférhető) pontokat. Megmérjük a β és γ szögeket, valamint a BC távolságot. Hogyan határozhatjuk meg ezekből az adatokból a folyó szélességét és például az AB távolságot?

(Konkrét adatok: $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 110^\circ$, $BC = 40$ méter.)



5. K1 Egy északi irányba tartó hajó útjához képest 50° -os szögben, 200 km-re fekszik egy sziget. A szigeten 160 km távolságból érzékelik a tengeri járműveket. Mennyit kell még északi irányban haladnia a hajónak, hogy érzékeljék a szigeten?

6. K2 Egy háromszög három csúcsa $A(-10; 8)$, $B(5; 4)$ és $C(0; 0)$.

a) Mekkora szöget zárnak be a háromszög oldalai a koordinátengelyekkel?

b) Igazoljuk, hogy a háromszög tompaszögű!

c) A C csúcsból húzott szögfelező az AB oldalt D -ben metszi. Adjuk meg D koordinátáit, és számítsuk ki az ACD szöget!

7. K2 András a következő házi feladatot kapta.

„Egy háromszög két szomszédos oldala $AB = 10$ cm és $AC = 8$ cm hosszú. A háromszög területe 20 cm². Milyen hosszú a BC oldal?”

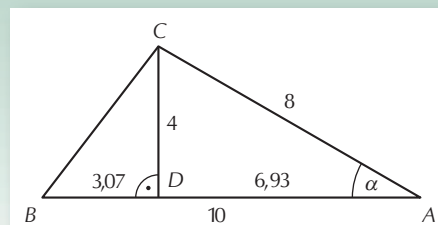
A területképletből $\frac{10 \cdot 8 \cdot \sin \alpha}{2} = 20$ felírása után András

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$ -et, azaz $\alpha = 30^\circ$ -ot kapott. Az ACD fél szabályos

háromszögben $CD = 4$ cm, $AD = 4\sqrt{3} \approx 6,93$ cm és így

$BD \approx 3,07$ cm. Ezután a BDC háromszögben felírt Pitagorasz-tétel már megadja AC hosszát.

Anna szerint azonban a megoldás bonyolultabb. Mire gondolhatott?



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2937–2945, 2949–2955.

34. A KOSZINUSZTÉTEL. A TOMPASZÖG KOSZINUSZA

A szinusz-tétel után a leckében megismerkedünk a koszinusz-tétellel is. Ha adott egy háromszög szögei és oldalai közül három független adat, akkor ezzel a két tétellel már meghatározhatjuk a többi hiányzó adatát.

1. példa

Egy háromszög alakú telek oldalai 130 m, 140 m és 150 m. Mekkora a telek területe?

Megoldás

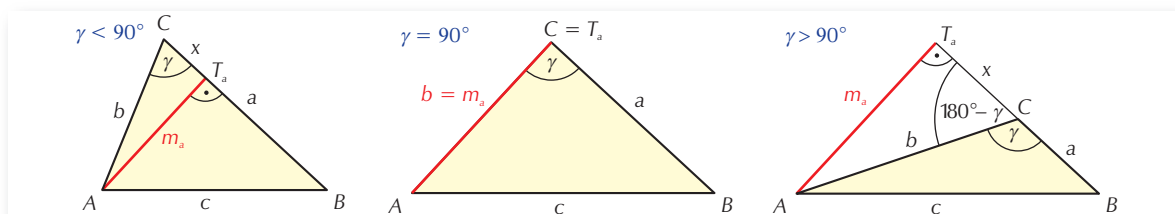
A szinusz-tételt közvetlenül most nem használhatjuk, mert a háromszög egyetlen szögét sem ismerjük. Egy lehetőség a Héron-képlet alkalmazása, de ezt nem mindenki ismeri. További segítségre van szükségünk.

Ha a háromszög három oldalát vagy két oldalát és az oldalak bezárt szögét ismerjük, akkor a szinusz-tétellel nagyon bonyolult az ismeretlen oldalak és szögek meghatározása. A koszinusz-tétellel ezeket közvetlenül kiszámíthatjuk.

Koszinusz-tétel

Bármely háromszögben $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$. (A szokásos jelöléseket használva.)
A szimmetrikus összefüggések: $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos \alpha$ és $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \beta$.

A tételt először γ hegyesszög esetén bizonyítjuk (első ábra).



Az AT_aC és AT_aB derékszögű háromszögekben felírt Pitagorasz-tételekből

$$\left. \begin{aligned} m_a^2 &= b^2 - x^2 \\ m_a^2 &= c^2 - (a - x)^2 \end{aligned} \right\} \text{ a jobb oldalak egyenlők: } c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2.$$

Átalakítások után $c^2 = (a - x)^2 + b^2 - x^2 = a^2 + b^2 - 2ax$, s mivel $x = b \cdot \cos \gamma$, készen vagyunk: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$.

Tompaszögű háromszög esetén (harmadik ábra) $BT_a = a + x$, a második egyenlet $m_a^2 = c^2 - (a + x)^2$ lesz, a jobb oldalak egyenlőségéből pedig $c^2 - (a + x)^2 = b^2 - x^2$ adódik. Az átalakítások után $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$, s mivel most $x = b \cdot \cos(180^\circ - \gamma)$, a tétel $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ - \gamma)$ alakú.

Ha a trigonometrikus területképlethez vagy a szinusztételhez hasonlóan egységes formájú koszinusztételt szeretnénk (tehát olyat, ami tompaszögű háromszögre is igaz), akkor a két eredmény utolsó tagjait kell összehasonlítani. A $-2ab \cdot \cos \gamma = 2ab \cdot \cos(180^\circ - \gamma)$ egyenlőség csak akkor teljesülhet minden $0 < \gamma < 180^\circ$ esetén, ha $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma$.

Ily módon tehát tompaszög koszinuszát is értelmezhetjük.

Ha γ tompaszög, akkor $\sin \gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$ és $\cos \gamma = -\cos(180^\circ - \gamma)$.

Hogyan tudnánk derékszög koszinuszát értelmezni?

Ha $\gamma = 90^\circ$, akkor a koszinusztétel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90^\circ$ alakú, míg a Pitagorasz-tételből $c^2 = a^2 + b^2$. Így a $\cos 90^\circ = 0$ kiterjesztés tűnik kézenfekvőnek, és ekkor $\cos 90^\circ = -\cos(180^\circ - 90^\circ)$ is teljesül. (A második ábrán $x = b \cdot \cos 90^\circ = 0$ ennek megfelelően.)

Megjegyzés

A Pitagorasz-tétel a koszinusztétel 90° -hoz tartozó speciális esetének is tekinthető.

A kiterjesztés „jóságát” megerősíti a pitagorasz-i összefüggés, hiszen derékszög és tompaszög esetén is érvényben marad: $\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1 + 0 = 1$, illetve γ tompaszögre $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = \sin^2(180^\circ - \gamma) + (-\cos(180^\circ - \gamma))^2 = 1$. (Az utóbbi egyenletben már hegyesszögek szerepelnek.) És végül a számológépünk is hasonlóan „számol”: közelítő értékekkel pl. $\cos 50^\circ = 0,6428 = -\cos 130^\circ$, $\cos 110^\circ = -0,3420 = -\cos 70^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$ stb.

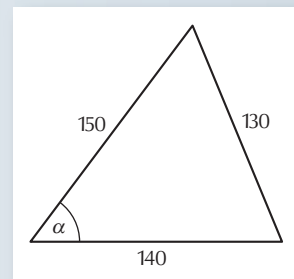
A $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ összefüggés felhasználásával táblázatba foglalhatjuk az eredményeinket. A szögfüggvények értékei derékszög és tompaszög esetén:

	$\alpha = 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
$\sin \alpha$	1	$\sin(180^\circ - \alpha)$
$\cos \alpha$	0	$-\cos(180^\circ - \alpha)$
$\operatorname{tg} \alpha$	nem értelmezzük	$-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$

Térjünk vissza az 1. példa megoldásához!

A koszinusztétellel kiszámíthatjuk a háromszög egyik szögét, majd a trigonometrikus területképletet alkalmazzuk. Például a két leghosszabb oldal bezárt szögét α -val jelölve: $130^2 = 140^2 + 150^2 - 2 \cdot 140 \cdot 150 \cdot \cos \alpha$, innen $2 \cdot 140 \cdot 150 \cdot \cos \alpha = 140^2 + 150^2 - 130^2$, $\cos \alpha = \frac{140^2 + 150^2 - 130^2}{2 \cdot 140 \cdot 150} = 0,6$.

Innen $\alpha \approx 53,13^\circ$, és a háromszög területe $t = \frac{140 \cdot 150 \cdot \sin 53,13^\circ}{2} \approx 8400 \text{ (m}^2\text{)}$.
(Igazolható, hogy a kapott eredmény pontos érték.)



2. példa

Számítsuk ki az előző lecke 4. példájában (medencék felosztása kötelekkel) kért AB távolságot a koszinusztétel segítségével!

Megoldás

A példában kiszámítottuk az $AB = 16$ m és $BC = 20$ m oldalak bezárt szögét, $\angle ABC = 106^\circ$ volt. A koszinusztételből $AC^2 = 16^2 + 20^2 - 1 \cdot 16 \cdot 20 \cdot \cos 106^\circ \approx 832,4$, így $AC \approx 28,9$ m. A kerekítési pontatlanságtól eltekintve (természetesen) ugyanazt az eredményt kaptuk.

3. példa

Az ABC_Δ -ben $a = 5$, $b = 4$ és $\gamma = 57^\circ$. Mekkora a c oldal és az α és β szög?

Megoldás

Mivel két oldal és a köztük lévő szög adott, először a koszinusztételt alkalmazhatjuk:

$$c^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 57^\circ \approx 41 - 40 \cdot 0,5446 \approx 19,214, \text{ ebből } c \approx 4,38.$$

Most már ismerünk 2 oldalt és az egyikkel szemkötti szöveget, ezért szinusztétellel is folytathatjuk, de maradhatunk a koszinusztételnél is.

Mi alapján döntsünk? Mindkét tétellel dolgozhatunk, mindkettő esetén az egyik ismeretlen szög szögfüggvényét kapjuk, abból kell meghatározni a szöveget. A korábbi példákból is látszik, hogy a háromszög egy szögének szinusa önmagában nem határozza meg a szöveget, míg koszinusza igen.

Használjuk a koszinusztételt! Csakhogy nehezebb vele számolni. Jobb lenne a szinusztétellel! Megoldható, hogy számunkra előnyös módon használjuk? Válaszoljunk a következő kérdésekre:

- Hány tompaszög lehet egy háromszögben?
- Melyik oldallal szemben lehet tompaszög?
- Tudva, hogy a szög tompa- vagy hegyesszög, a szinusa egyértelműen meghatározza a szöveget?

Ezekből látszik, hogy használhatjuk a szinusztételt és a hibázást is kizárhatjuk, ha nem a leghosszabb oldallal szemkötti szöveget akarjuk vele meghatározni. Ekkor csak a hegyesszögű megoldás lehet jó. Így folytatjuk a megoldást. Mivel a leghosszabb oldal az a , b -re és c -re írjuk fel a tételt, melyből:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c} \approx \frac{4 \cdot 0,8387}{4,38} \approx 0,7659, \quad \beta \approx 50^\circ, \quad \alpha = 180^\circ - (50^\circ + 57^\circ) = 73^\circ.$$

Tehát a háromszögben $c \approx 4,38$; $\alpha \approx 73^\circ$ és $\beta \approx 50^\circ$.

4. példa

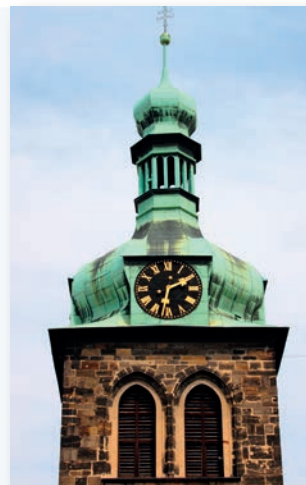
A nyilvános tereken, épületeken vagy a templomtornyokon elhelyezett toronyórák mutatói meglepően nagyok lehetnek.

- (próbaérettségi feladat, 2015.) Egy templom nagyméretű toronyóráján a kismutató 56 cm, a nagymutató 92 cm hosszú. Mekkora a mutatók végpontjainak a távolsága 6 óra 10 perckor?
- Milyen hosszúak annak a toronyórának a mutatói, amelyek végpontjainak távolsága 3 órakor 30 cm, 8 órakor 36 cm?

Emelt szint

Megoldás

- A nagymutató 1 óra alatt 360° -ot fordul el, 10 perc alatt 60° -ot, így ekkora szöget zár be a számlap 12-es függőleges pozíciójával. Ugyanígy



a kismutató óránként $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ -ot fordul, így 10 perc alatt $\frac{30^\circ}{6} = 5^\circ$ -ot haladt 6 óra óta. A két mutató bezárt szöge $180^\circ - 60^\circ + 5^\circ = 125^\circ$.

Ha d jelöli a keresett távolságot, akkor a koszinusztételből $d^2 = 92^2 + 56^2 - 2 \cdot 92 \cdot 56 \cdot \cos 125^\circ$, innen $d \approx 132,3$ cm a mutatók végpontjainak távolsága.

b) A mutatók bezárt szöge 3 órakor 90° , 8 órakor 120° . Ha a és b jelöli a mutatók hosszát cm-ben, akkor a Pitagorasz-tételből $a^2 + b^2 = 30^2$, a koszinusztételből $a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 120^\circ = 36^2$ következik.

A két egyenlet különbségéből $-2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 120^\circ = 36^2 - 30^2$, átalakítva $a \cdot b = 396$ következik.

Visszahelyettesítjük $b = \frac{396}{a}$ -t az első egyenletbe: $a^2 + \left(\frac{396}{a}\right)^2 = 30^2 \Rightarrow a^4 - 900a^2 + 156\,816 = 0$.

Ez az egyenlet (a^2)-ben másodfokú, gyökei 663,7 és 236,3.

A pozitív gyököket megőrizve $a_1 \approx 25,8$ cm és $a_2 \approx 15,4$ cm. Ha a jelöli a kismutatót, akkor $a \approx 15,4$ cm és $b \approx 25,8$ cm a mutatók hossza. (Az egyenletrendszer szimmetrikus volt az (a, b) változókra.)

Fogalom
koszinusztétel.

FELADATOK

1. K1

Oldjuk meg az előző lecke 5. feladatát (északi irányba tartó hajó) a koszinusztétel segítségével!

2. K1

Egy vasútállomásról kiinduló két egyenes vasúti nyomvonal bezárt szöge 70° . Az állomásról egyszerre indul mindkét nyomvonalon egy-egy szerelvény, átlagsebességük $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $28 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mekkora lesz a két szerelvény távolsága 2,5 óra múlva?

3. K2

Az ABC háromszög két oldala $AB = 12$ cm és $AC = 14$ cm hosszú, területe 42 cm^2 . Milyen hosszú lehet az A csúcshoz tartozó súlyvonal?

4. K2

Az $ABCD$ négyszögben $AB = 24$ cm, $BC = 16$ cm, $CD = 14$ cm, $AD = 12$ cm, $BAD \sphericalangle = 42^\circ$. Mekkora a négyszög átlói és szögei?

5. K2

Adottak az $A(10; 3)$, $B(-1; 6)$, $C(-3; -3)$ pontok, és jelölje O az origót.

- Jelölje S a háromszög súlypontját. Mekkora szöget zár be az x tengellyel az $\overrightarrow{OS}$ vektor egyenese?
- Mekkora szöget zár be az x tengellyel a $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektor egyenese? ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ az adott pontba mutató helyvektorok.)
- Számítsuk ki az ABC háromszög területét a trigonometrikus területképlettel, illetve annak felhasználása nélkül!
- Számítsuk ki az ACB szöget a koszinusztétel segítségével, illetve annak felhasználása nélkül!

6. K2

András a következő házi feladatot kapta.

„Egy deltoid két szomszédos oldala $AB = 18$ cm és $BC = 24$ cm hosszú. Milyen hosszú a deltoid AC átlója, ha területe 216 cm^2 ?”

András szerint a megoldás könnyű. Az AC átló egyenese szimmetriatengely, ami a területet felezi. Az ABC háromszögben felírhatjuk a trigonometrikus területképletet, ebből éppen $ABC \sphericalangle = 30^\circ$ adódik. Ezután az ABC háromszögben felírt koszinusztétel már megadja AC hosszát. Anna szerint azonban a megoldás nem ilyen egyszerű. Mire gondolhatott?

IV. TRIGONOMETRIA

7. E1

Egy húrnégyszög négy oldalának hossza sorban 11, 14, 15 és 16 egység.

- Mekkora a két legrövidebb oldal által bezárt szög?
- Számítsuk ki a négyszög köré írt kör sugarának hosszát!

8. E1

Az $ABCD$ trapéz alakú földterület ($AB \parallel CD$) oldalainak hossza $AB = 230$ m, $BC = 120$ m, $CD = 100$ m és $DA = 50$ m. A tulajdonos a BD egyenes kerítéssel két részre osztja a földterületet. Milyen hosszú a kerítés, és mekkora a két rész területe?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2976–2987, 3005–3017.



35. A SZINUSZ- ÉS KOSZINUSZTÉTEL ALKALMAZÁSA

A leckében gyakoroljuk a területképlet alkalmazását, a szinusz- és a koszinusztétel használatát, és pár szerkesztésen alapuló egyszerűbb megoldást is láthatunk.

EKG-görbe

1. példa

Az ABC háromszög oldalainak hossza $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 5$ egység.

- Milyen hosszú a BC oldal felezőmerőlegesének a háromszögbe eső szakasza?
- Milyen hosszú az A csúsból húzott szögfelező?

Megoldás

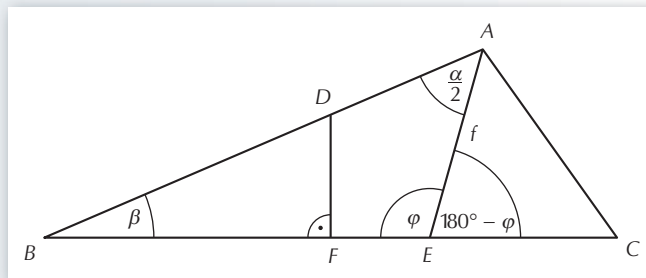
- Jelölje a BC oldal felezőpontját F , és a felező merőleges metssze az AB oldalt a D pontban. Egy megoldási lehetőség, ha először kiszámoljuk $\angle CBA = \beta$ -t, majd a BFD derékszögű háromszögben meghatározzuk FD -t.

A hagyományos jelöléseket alkalmazva az ABC háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta,$$

innen $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = 0,9125$, és $\beta \approx 24,1^\circ$. A BFD háromszögben $\tan \beta = \frac{DF}{BF}$, ebből

$DF = BF \cdot \tan \beta$. Mivel $BF = 6$ cm, így $DF = 6 \cdot \tan 24,1^\circ \approx 2,69$ cm a keresett szakasz hossza.



b) **Első megoldás:** Jelölje az AE szögfelező hosszát f (ábra). Először meghatározzuk az ABC háromszögben α -t, ebből $\frac{\alpha}{2}$ -t, majd felhasználva az a) feladatban kiszámolt β -t, a BEA háromszögben alkalmazzuk a szinuszételt. (Ismerünk egy oldalt és két (három) szöget.)

$$\text{A koszinusztételből } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \text{ innen } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = -0,19,$$

$$\alpha \approx 101,0^\circ, \frac{\alpha}{2} \approx 50,5^\circ. \text{ } BEA\angle = \varphi = 105,4^\circ.$$

$$\text{Most már felírhatjuk a szinuszételt: } \frac{f}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \varphi}, \text{ azaz } f = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \varphi} \approx 4,24 \text{ cm.}$$

Második megoldás: A szögfelező-tétel szerint $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC} = \frac{2}{1}$, így $BE = 8$ cm. A szögfelező hosszát β felhasználásával egy lépésben kiszámíthatjuk az ABE háromszögben felírt koszinusztétellel: $f^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 24,1^\circ \approx 17,95$, s innen $f \approx 4,24$ cm.

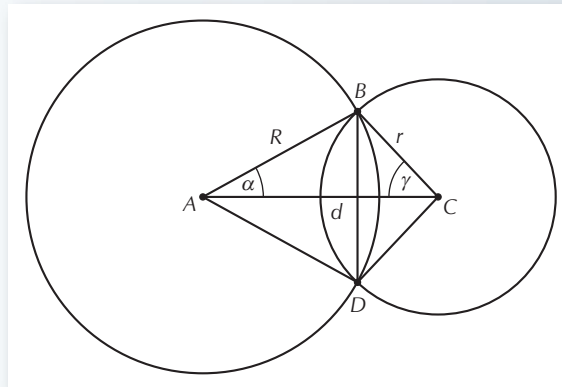
Vannak **további megoldási lehetőségek** is. Például β -t és α -t sem kell felhasználnunk, ha a BEA és CEA háromszögekben a φ és $(180^\circ - \varphi)$ szögekkel írunk fel két koszinusztételt. Ekkor két egyenletet kapunk két ismeretlennel (φ, f), amiket már meghatározhatunk. (Persze ekkor felhasználjuk a szögfelező-tételt, mert BE és EC hosszát ismernünk kell.)

2. példa

Két öntözőberendezés távolsága 8 m, hatósugaruk 6 m, illetve 4 m. (Ekkora sugarú kör alakú területet tudnak megöntözni.) Együttes működés esetén mekkora területet öntöz meg legalább az egyik berendezés?

Megoldás

A feladat matematikai modellje szerint két metsző körből álló alakzat területét kell meghatároznunk, ezt pedig legegyszerűbben úgy tehetjük meg, hogy a két kör területének összegéből kivonjuk a kétszer számolt közös rész területét. Először a körcikkek $BAD\angle$ és $BCD\angle$ középponti szögeit számítjuk ki.



IV. TRIGONOMETRIA

Az ábra szerinti jelöléseket használjuk. A BAC háromszögben a koszinusztételből:

$$r^2 = d^2 + R^2 - 2dR \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2dR} = \frac{8^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{84}{96}, \alpha \approx 29,0^\circ.$$

A BAD körcikk középponti szöge $2\alpha = 58^\circ$, területe $\frac{58}{360} \cdot R^2 \pi \approx 18,22 \text{ m}^2$. A BAD háromszög területe $\frac{R^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2} \approx 15,26 \text{ m}^2$. Az A középpontú kör BD húrhoz tartozó (kisebbik) körszeletének a területe $18,22 - 15,26 = 2,96 \text{ m}^2$.

Hasonlóan számíthatjuk ki a C középpontú kör BD húrhoz tartozó (kisebbik) körszeletének a területét. A koszinusztételből $\cos \gamma = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2dr} = \frac{44}{64}$, innen $\gamma \approx 46,6^\circ$, $2\gamma \approx 93,2^\circ$. A CBD körcikk területe $\frac{93,2}{360} \cdot r^2 \pi \approx 13,0 \text{ m}^2$, a CBD háromszög területe $\frac{r^2 \cdot \sin(2\gamma)}{2} \approx 8,0 \text{ m}^2$, és a C középpontú kör BD húrhoz tartozó (kisebbik) körszeletének a területe $13,0 - 8,0 = 5 \text{ m}^2$.

Legalább az egyik berendezés (négyzetméterben számolva) $36\pi + 16\pi - 5$, azaz kb. $158,5 \text{ m}^2$ területet öntöz.

3. példa

- a) Igazoljuk a függvénytáblázatban található, háromszögek területére vonatkozó $t = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ összefüggést! (Az oldalakat és a szögeket a szokásos módon jelöljük.)
- b) Igazoljuk, hogy bármely háromszögben $t = \frac{abc}{4R}$! (R a háromszög köré írt körének a sugara.)

Megoldás

- a) $t = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 b \sin \gamma}{2a}$, ebből a $\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ helyettesítéssel valóban $t = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ adódik.
- b) A trigonometrikus területképlet $t = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, ebből $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$ helyettesítéssel kapjuk az állítást.

Megjegyzés

Összefüggést találtunk a háromszög területe és körülírt körének sugara között. A képlet jól használható, érdemes megjegyeznünk!

4. példa

Egy háromszög területe $t = 84$, két oldala $a = 13$, illetve $b = 14$. Mekkora a körülírt és a beírt kör sugara?

Megoldás

$$t = \frac{ab \sin \gamma}{2} \text{ből: } \sin \gamma = \frac{2t}{ab} = \frac{2 \cdot 84}{13 \cdot 14} = \frac{84}{13 \cdot 7} = \frac{12}{13},$$

a pitagoraszsi összefüggésből: $\cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \gamma = \frac{25}{169}$ és innen $|\cos \gamma| = \frac{5}{13}$. Miként dönthető el, hogy a két lehetséges érték közül melyik lehet jó, vagy esetleg mindkettővel tovább kell számolnunk?

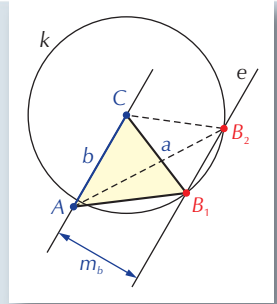
Egyik lehetőség, hogy mindkettővel számolunk, és ha valamelyik érték nem lehetséges, előbb-utóbb ellentmondást kapunk.

Egy másik lehetőség annak vizsgálata, hogy a b , m_b , a adatokból hogyan lehet háromszöget szerkeszteni ($m_b = 12$, mert $t = 84$).

$m_b = 12$ miatt a B pont az AC egyenestől 12 távolságra van, azaz az AC -vel párhuzamos, tőle 12 távolságra lévő e egyenesen.

Az $a = BC = 13$ jelentése alapján a B pont 13 távolságra van C -től, tehát egy C középpontú 13 sugarú körön van.

A B pont az e egyenesre és a k körre is illeszkedik, ezért ezek metszéspontja. Két megoldás lesz, tehát mindkét esettel számolnunk kell.



$$a) \cos \alpha = \frac{5}{13}, \text{ így } c^2 = 13^2 + 14^2 - 2 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \frac{5}{13} = 169 + 196 - 2 \cdot 14 \cdot 5 = 225;$$

$$c = 15, \quad t = \frac{abc}{4R} \text{ből } R = \frac{abc}{4t} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{13 \cdot 15}{4 \cdot 6} = \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{65}{8};$$

$$t = rs \text{ből } r = \frac{2t}{2s} = \frac{2 \cdot 84}{13 + 14 + 15} = \frac{2 \cdot 84}{42} = 4.$$

Tehát a körülírt kör sugara $\frac{65}{8}$, a beírt köré 4.

b) eset: $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Az a) esethez hasonlóan számolhatunk. Az eredmény:

$$c = \sqrt{505}, \quad R = \frac{13\sqrt{505}}{24} \approx 12,2, \quad r \approx 3,4.$$

5. példa

Egy háromszög két oldala 6, illetve 9 egység hosszú, az általuk bezárt szög 77° . Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal?

Megoldás

Első megoldás

$a = 6$, $b = 9$, $\gamma = 77^\circ$. Két oldal és a közbezárt szög adott: a koszinusztételt alkalmazzuk.

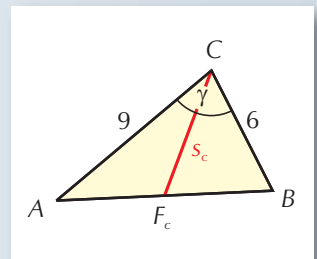
$$c^2 \approx 36 + 81 - 108 \cdot 0,225 \approx 92,7, \quad c \approx 9,63.$$

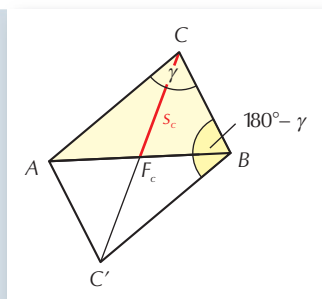
Határozzuk meg még egy szögét a háromszögnek! Mivel c a leghosszabb oldal, mindig, hogy α -t vagy β -t számítjuk ki, mindkettő hegyesszög. A szinuszételből

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c} \approx \frac{6 \cdot 0,9744}{9,63} \approx 0,6071. \text{ Ebből, mivel } \alpha \text{ hegyesszög,}$$

$$\cos^2 \alpha \approx 1 - 0,3686 = 0,6314, \quad \cos \alpha \approx 0,7946.$$

$$\text{Az } ACF_\Delta \text{-ben: } s_c^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos \alpha \approx 81 + 23,18 - 86,67 \cdot 0,7946 \approx 35,31; \quad s_c \approx 5,94.$$





Második megoldás

(Hogyan szerkesztenénk meg a háromszöget?)

Tükrözzünk az AB oldal F_c felezőpontjára, $C \rightarrow C'$. $AC'BC$ paralelogramma, így $C'BC \sphericalangle = 180^\circ - 77^\circ = 103^\circ$, $CC' = 2s_c$.

CBC'_Δ -ben felírjuk a koszinusztételt:

$$(2s_c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \gamma),$$

$$(2s_c)^2 \approx 36 + 81 - 108 \cdot (-0,225) \approx 141,3, \quad 2s_c \approx 11,89, \quad s_c \approx 5,94.$$

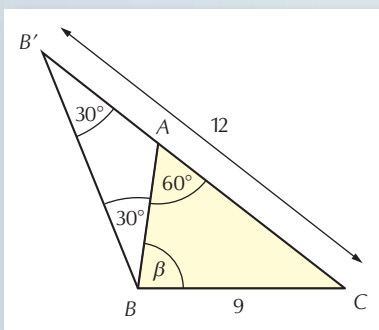
Megjegyzés

Az $AB = c$ oldalhossz meghatározása után egy másik megoldási lehetőség annak a tételnek az alkalmazása, amely szerint bármely paralelogrammában az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegevel: $2a^2 + 2b^2 = c^2 + (2s_c)^2$. (Az állítás az ACB és ACC' háromszögekben felírt, γ és $(180^\circ - \gamma)$ szögeket tartalmazó koszinusztételek összevetéséből adódik.) A tétel bizonyítása a 8. kitűzött feladat.

6. példa

Adott a háromszög egyik oldala, az adott oldallal szemkötti szöge, valamint a másik két oldal hosszának összege. Mekkora a háromszög oldalai és szögei? Adatok: $a = 9$, $\alpha = 60^\circ$, $b + c = 12$.

Megoldás



Első megoldás

$c = 12 - b$. Írjuk fel a koszinusztételt az a oldalra!

$$81 = b^2 + (12 - b)^2 - 2b(12 - b) \cdot 0,5,$$

$$3b^2 - 36b + 63 = 0, \quad b^2 - 12b + 21 = 0, \quad D = 144 - 84 = 60,$$

$$b_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 6 \pm \sqrt{15}.$$

Elég $b = 6 + \sqrt{15}$ -tel számolni, mivel $b_1 + b_2 = 12$ és $b + c = 12$, ezért b_1 és b_2 lesz a háromszög kiszámítandó két oldala. Mivel b a leghosszabb oldal, c -re és a -ra írjuk fel a szinusztételt, amiből

$$\sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a} = \frac{(6 - \sqrt{15}) \frac{\sqrt{3}}{2}}{9} \approx 0,2047, \quad \gamma \approx 11,81^\circ, \quad \beta \approx 108,19^\circ.$$

Második megoldás

Ha a háromszög CA oldalának meghosszabbítására rámérjük az AB szakaszt, akkor az ABB' egyenlő szárú háromszöget kapjuk. Ennek felhasználásával egy egyszerűbb megoldást adhatunk.

$$\frac{\sin(30^\circ + \beta)}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{9} \text{-ből előbb } \beta \text{-t, majd } \frac{\sin \beta}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{9} \text{-ből } b \text{-t számítjuk ki.}$$

Megjegyzés

A szerkesztési ismeretekkel sok feladat megoldását megkönnyíthetjük. (Előfordulhat, hogy nincs is más eszközünk a megoldáshoz.)

Ha a kiindulási adatokból meg tudunk valamit szerkeszteni, akkor azt ki is tudjuk számolni. Fordítva ez nem igaz! Erre jó példa a *déloszi probléma*, mely a kocka térfogatának duplázását tűzte ki. Ehhez a $\sqrt[3]{2}$ -t kellene megszerkeszteni. Euklideszi szerkesztéssel csak azokban az esetekben szerkeszthető, amikor a gyökök kitevő 2 hatvány. Bővebben olvashatunk a témáról az interneten.

7. példa

Ha ismerjük két tereptárgy távolságát, akkor pusztán szögek mérésével bármely másik két objektum távolságát meghatározhatjuk, úgy, hogy azoknak még csak a közelébe sem kell mennünk. Legyen $AB = a = 1600$ m. $BAD \sphericalangle = \alpha = 72^\circ$, $BAC \sphericalangle = \varepsilon = 64^\circ$, $ABC \sphericalangle = \beta = 80^\circ$ és $ABD \sphericalangle = \omega = 68^\circ$. Határozzuk meg a CD távolságot!

Megoldás

Meghatározhatjuk az ABC háromszög oldalait. $ACB \sphericalangle = \varphi = 36^\circ$, így az ábra alapján felírhatjuk a szinusztételt:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}, \quad \frac{e}{1600} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 36^\circ}, \quad e = 2680,7.$$

Meghatározhatjuk az ABD háromszög oldalait. $ADB \sphericalangle = \delta = 36^\circ$, így a szinusztétel alapján:

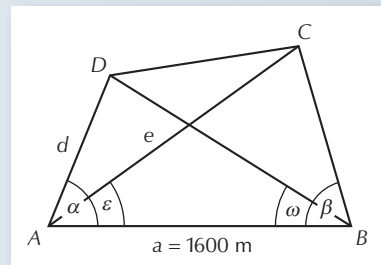
$$\frac{d}{a} = \frac{\sin \omega}{\sin \delta}, \quad \frac{d}{1600} = \frac{\sin 68^\circ}{\sin 40^\circ}, \quad d = 2307,9.$$

Végül az ACD háromszögben a koszinusztételt felírva:

$$c^2 = e^2 + d^2 - 2 \cdot e \cdot d \cdot \cos(\alpha - \varepsilon) = 2680,7^2 + 2307,9^2 - 2 \cdot 2680,7 \cdot 2307,9 \cdot \cos 8^\circ = 259\,398,6.$$

$$c = 509,3 \text{ m.}$$

Tehát csak az AB távolság ismeretében és az A és B pontokban történő szögmérésekkel meg tudtuk határozni két távoli pont távolságát.



8. példa

Igazoljuk, hogy bármely háromszög szögeire érvényes a

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

összefüggés!

Megoldás

Az egyenlőség a koszinusztételre emlékeztet. Tudjuk, hogy $a = 2R \cdot \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$ és $c = 2R \cdot \sin \gamma$. Behelyettesítve a koszinusztételbe kapjuk az igazolandó egyenletet.

$$\text{A koszinusztételből: } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Behelyettesítünk: } (2R \cdot \sin \alpha)^2 = (2R \cdot \sin \beta)^2 + (2R \cdot \sin \gamma)^2 - 2 \cdot (2R \cdot \sin \beta) \cdot (2R \cdot \sin \gamma) \cdot \cos \alpha, \text{ azaz}$$

$$4R^2 \cdot \sin^2 \alpha = 4R^2 \cdot \sin^2 \beta + 4R^2 \cdot \sin^2 \gamma - 2 \cdot 2R \cdot \sin \beta \cdot 2R \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha.$$

Ha most osztunk $4R^2$ -tel, a bizonyítandó állítást kapjuk.

(Hasonló szimmetrikus állítást β és γ esetében is megfogalmazhatunk.)

FELADATOK

1. K1

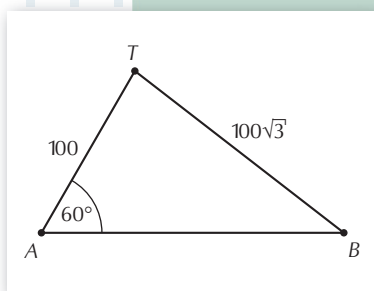
Az ABC szabályos háromszög A csúcsát B -re, B csúcsát C -re, C csúcsát A -ra tükrözzük, így az $A'B'C'$ háromszöget kapjuk. Mennyi az $A'B'C'$ és ABC háromszögek területének aránya? (Próbáljuk szögfüggvények segítségével és szögfüggvények nélkül is megoldani a feladatot!)

2. E1

Igazoljuk, hogy bármely háromszögben $t = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$! (R a háromszög körülírt körének a sugara.)

3. K2

Sík terepen az A és B pontok közötti távolság kiszámításához a következő adatokat ismerjük: Az A ponttól 100 méterre álló gyárkémény az A pontból 45° -os, a B pontból 30° -os emelkedési szögben látszik. Az A pontot a kémény aljával összekötő egyenes 60° -os szöget zár be az AB egyenessel. Mekkora az AB távolság? Mi lehet a **hiba** az alábbi levezetésben?



„Megoldás” (hibás):

Ha a kémény magassága PT , ahol T az alapsíkon van, akkor ATP egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $PT = 100$ méter magas a kémény. Mivel BTA egy szabályos háromszög fele, $BT = 100\sqrt{3}$ méter.

Az ATB háromszögben $AB = x$ bevezetésével felírjuk a koszinusztételt:

$$(100\sqrt{3})^2 = 100^2 + x^2 - 2 \cdot 100 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow x - 100 \cdot x - 20\,000 = 0 \Leftrightarrow$$

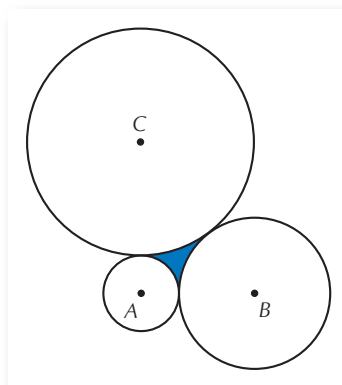
$$\Leftrightarrow x_1 = 200 \text{ vagy } x_2 = -100.$$

Az oldalhossz negatív nem lehet, így $AB = 200$ méter.

4. E1

Mekkora az A , B és C középpontú körök által közrezárt terület, ha a körök sugarai

- a) 1 cm, 2 cm, 3 cm;
- b) 2 cm, 3 cm, 4 cm?



5. K2

Egy konvex négyszög átlói e és f , bezárt szögük φ . Igazoljuk, hogy területe $t = \frac{ef \sin \varphi}{2}$!

6. K2

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok 120° -os szöget zárnak be egymással, $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor hosszát!

7. E2

Mit állíthatunk arról a háromszögről, amelyben az oldalak hosszára $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2$ teljesül?

8. E1

Bizonyítsuk be az 5. példa megjegyzésében szereplő paralelogramma-tételt: bármely paralelogrammában az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. (A megjegyzésben segítség is található.)

9. E2

Egy húrnégyszög oldalai adott körüljárási irányban rendre 39, 52, 25, 60 egység hosszúak. Mekkora a négyszög szögei és átlói?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 218–231. oldal.

Garamvölgyi Aladár levele a Tisza áradásáról

– Engedelmelem fel fogom az egész levelet olvasni. Tehát: „Kedves bátyám. A Tisza árja gyorsan emelkedik. Tokajból vett tudósítások szerint még mindig növekedő áradástól tarthatunk. Ha még két lábnira nő, a füzesi töltést éppen a zsilipnél át fogja hágni, ha ugyan a zsilip addig kiállja, miután már eddig is inognak a levert cölöpök. A mi vidékünkre ez beláthatatlan baj lenne, mert a Nagykunság felől a túlparton erős védgátak vannak emelve, s így a Tisza arra nem önthetvén ki, olyan helyeket fog árjával meglátogatni, amik még sohasem láttak árvizet: mint ezt már több helyen bámulva tapasztalják. Ha pedig e gáton áttör a víz, bátyám szérűskertjéig meg nem áll; még egy láb emelkedéssel a juhaklokat is felveszi, s két lábnyi áradással a szobákban van. Azért jó lesz elővigyázati rendszabályokhoz nyúlni. Szerencsére a szérűskert erős fecskerakással van kerítve, s a ház előtti kőkerítés is kiállja a próbát, három láb magas trágyarakás körös-körül visszatartja az árvizet. Efelől rögtön intézkedni tanácsos, mert ez a mi védgátunk nagyon rosszul bízta. A kapukat trágyatöltéssel eltorlaszolni akkor is elég idő lesz, amikor már híre fut a gátszakadásnak. Kérem efelől a szomszéd urat is rögtön tudósítani, mert az ő kastélya éppen hetedfél lábbal fekszik mélyebben, mint a bátyám laka, s neki sokkal több oka van az önvédelemre.”

Doktor Grisák azt válaszolta erre a levélre, hogy az lehetetlen.

– De ide van írva, kérem alássan – bizonyítá a kasznár, végigsimítva tenyerével a levelet. – Itt van.

– Elhiszem, hogy ott van; de azért lehet nem igaz.

– Micsoda? Hogy Aladár úrfi ne mondana igazat? – szörnyedt fel Kampós uram. – Ah, tekintetes úr, akkor nem tetszik őt ismerni.

– Én nem mondom, hogy készakarva ír valótlanságokat, de csalódhatik, mint minden ember. Hiszen hol van ide a Tisza?

– Hat mérföldnyire. Igen, de a tenger meg száz mérföldnyire van, azért mégis megmondja Aladár úrfi, hány lábbal fekszik a mi tornyunk gombja magasabban a tenger színénél. Aladár úrfi kitanult mérnök, kérem alássan. Első hónapban ezernyolcszáz forint fizetést kínáltak neki a Tisza-szabályozásnál; ha ő azt mondja, hogy árvíz lesz a falunkban, hát akkor az lesz; mert Aladár úrfi azt érti.

Doktor Grisák egyszerre mérnökké lett rosszkedvében.

– Én is értem. Én is tudom, mi az a nivellálás. Nálunk Csehországban is vannak árvizek.

Kampós uram rettenetesen sértve érezte erre a szóra nemzeti büszkeségét.

– Csehországban árvizek? Micsoda árvizek? Egy kis patak megdagad, ha nagy zápor esett, s elhordja a kis hidacskákat; másnap megint helyére megy. Mi az egy magyarországi árvízhez képest! Azt tessék megnézni, mikor minálunk árvíz van! Tenger az, amin gályázni lehet. Aztán akkor tessék beszélni csehországi árvizekről.

(Jókai Mór: Az új földesúr, XII: A közös baj)



Emelt szint

V. FORGÁSSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

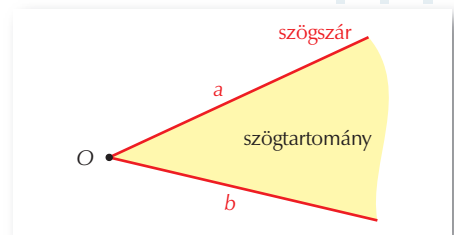
Ebben a fejezetben elsősorban a szögfüggvények általánosításával foglalkozunk. Nem csak a 0° és 180° közé eső szögekre értelmezzük a szögfüggvényeket, hanem tetszőleges nagyságú szögre. Ezekkel a hozzárendelésekkel újabb érdekes függvényeket kapunk, amelyekkel az élet minden területén találkozhatunk. Lényegében minden ismétlődő (periodikus) mozgás leírására ezeket, vagy az ezek összegeként megkapható függvényeket használjuk.

36. A SZÖGFÜGGVÉNYEK ÁLTALÁNOSÍTÁSA

A hegyesszögek és tompaszögek szögfüggvényeivel már megismerkedtünk, szeretnénk ezt a definíciót kiterjeszteni tetszőleges nagyságú szögre.

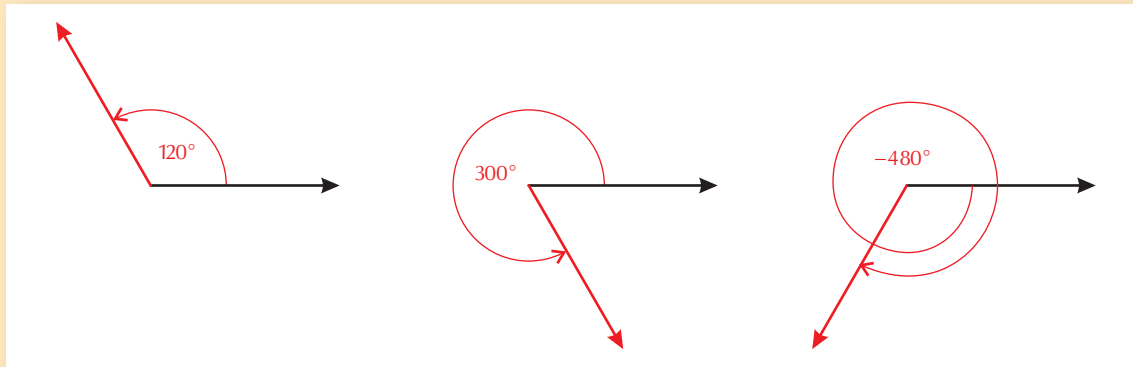
Visszatekintés: A szögtartomány két közös kezdőpontú félegyenes által határolt síkrész. A közös kezdőpontot („O”) a szög csúcsának, a két félegyenes a szög szárainak, az általuk határolt síkrészt szögtartománynak nevezzük.

A szögfüggvények általánosítása érdekében bevezetünk egy másik szögfogalmat.

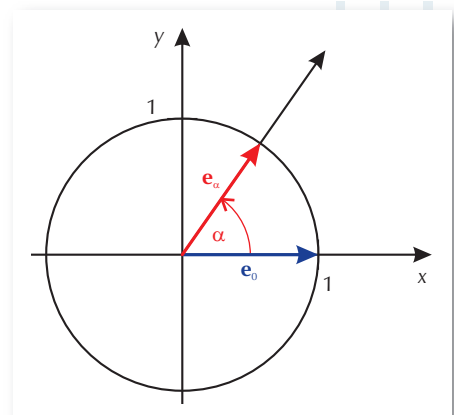


Definíció

A forgásszög: adott a síkon egy félegyenes, ez lesz a szög egyik szára. Ezt a félegyenes a kezdőpontja körül elforgatjuk egy α irányított szöggel. (**Pozitív irány** az óramutató járásával ellentétes irány.) A félegyenes által sűrt síkrész lesz a szögtartomány, és az elforgatott félegyenes lesz a másik szögcsőr. A forgásszög nagysága negatív és 360° -nál nagyobb is lehet, ilyen esetben a félegyenes többször is sűrolhatja ugyanazt a síkrészt.



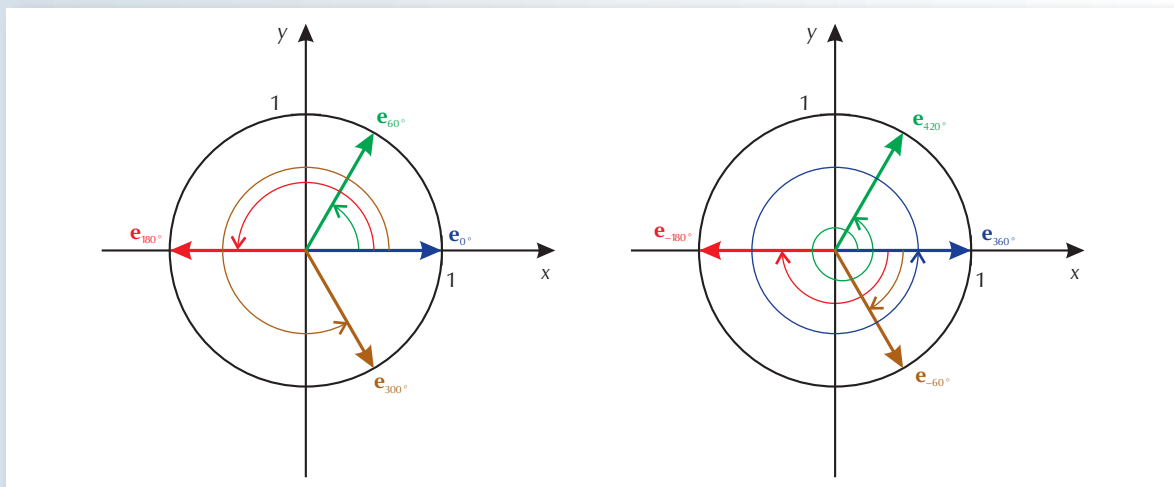
Az új definíciónkat az α szögű egységnyi hosszú helyvektor ($\mathbf{e}_\alpha$) segítségével fogalmazzuk meg. Koordináta-rendszerünkben az $\mathbf{i}(1; 0)$ bázisvektort az origó körül α irányított szöggel elforgatva kapjuk az $\mathbf{e}_\alpha$ egységvektort. Az α szögű egységvektor végpontja mindig az origó középpontú egységsugarú körön van. Ez azt jelenti, hogy az általunk vizsgált szög egyik szára mindig az x tengely pozitív fele, a másik szára pedig az α szögű egységvektor meghosszabbítása.



1. példa

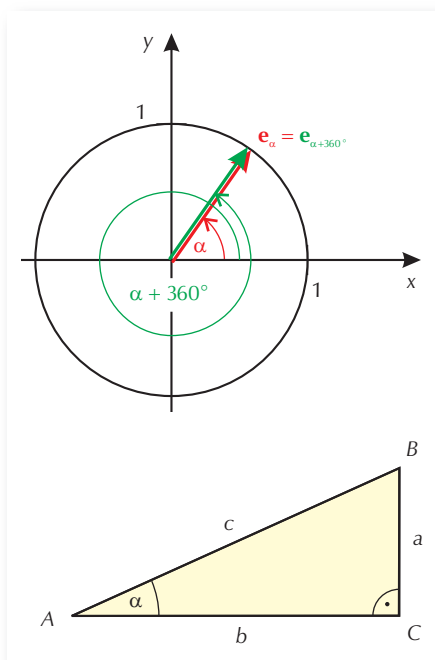
Rajzoljuk meg a következő forgásszögekhez tartozó egységvektorokat!
 0° , 60° , 180° , 300° , 420° , 360° , -60° , -180° .

Megoldás



A rajzon is látható, hogy bizonyos forgásszögekhez ugyanaz a vektor tartozik. Például:

$$\mathbf{e}_{60^\circ} = \mathbf{e}_{420^\circ}, \mathbf{e}_{180^\circ} = \mathbf{e}_{-180^\circ}, \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{360^\circ}, \mathbf{e}_{-60^\circ} = \mathbf{e}_{300^\circ}.$$



Tetszőleges α szögre igaz, hogy ha megnöveljük a szög nagyságát 360° -kal, akkor a hozzá tartozó egységvektor nem változik.

$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{\alpha + k \cdot 360^\circ}$ itt a k tetszőleges egész számot jelenthet, hiszen a 360° -ot akárhányszor hozzáadhatjuk vagy kivonhatjuk.

Visszatekintés: Tetszőleges α hegyesszög szögfüggvényeit a következő módon definiáltuk.

Az α -szöget tartalmazó derékszögű háromszögben

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$, azaz $\sin \alpha = a$ szöggel szembeni befogó és az átfogó hányadosa,

$\cos \alpha = \frac{b}{c}$, azaz $\cos \alpha = b$ szög melletti befogó és az átfogó hányadosa,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, azaz $\operatorname{tg} \alpha = a$ szöggel szembeni befogó és a szög melletti befogó hányadosa.ő

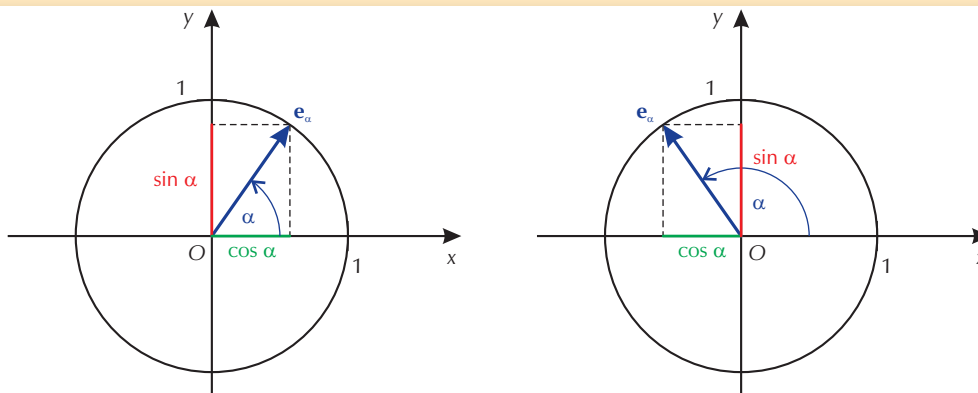
Tetszőleges α szög szögfüggvényeit az α -szögű egységvektor segítségével definiáljuk.

Definíció

$\sin \alpha =$ az x tengely pozitív felével α szöget bezáró egységvektor ($\mathbf{e}_\alpha$) második koordinátája.

$\cos \alpha =$ az x tengely pozitív felével α szöget bezáró egységvektor ($\mathbf{e}_\alpha$) első koordinátája.

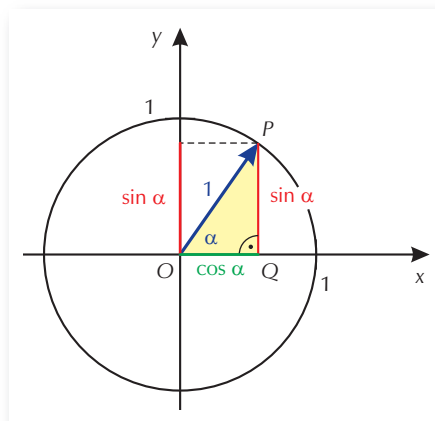
Összefoglalva: $\mathbf{e}_\alpha = (\cos \alpha; \sin \alpha)$.



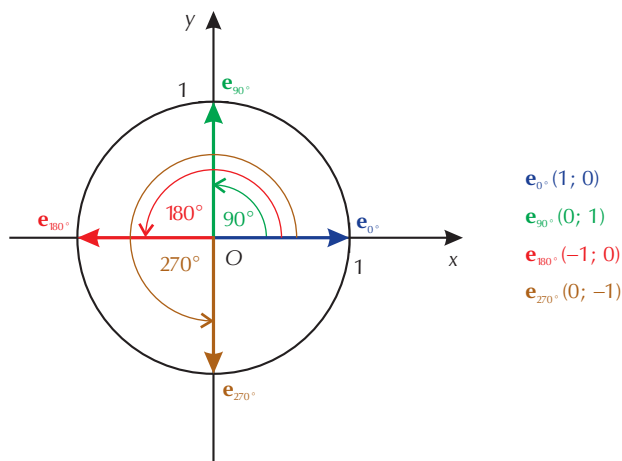
Az ábrákon látható derékszögű háromszögben az átfogó egységnyi hosszúságú, a szögfüggvény értékeket pedig távolságokkal (szakaszok hosszával) szemléltethetjük.

$$\text{Így } \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{1} = \sin \alpha \text{ és } \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{1} = \cos \alpha.$$

Látható, hogy az új definíció a hegyesszögek és tompaszögek esetén ugyanazt az eredményt adja, mint eddig.



A korábbi definíció kiterjesztése alapján határozzuk meg a 0° , 90° , 180° és a 270° szögfüggvényeit:



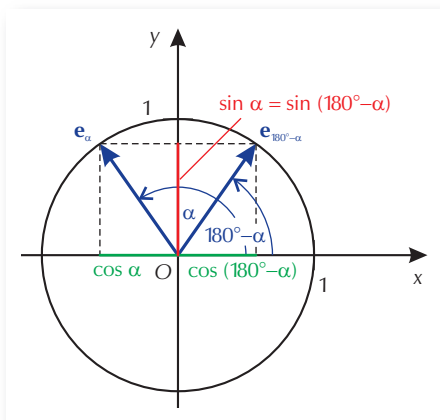
$e_{0^\circ}(1; 0)$, ez azt jelenti, hogy $\cos 0^\circ = 1$ és $\sin 0^\circ = 0$.

$e_{90^\circ}(0; 1)$, ez azt jelenti, hogy $\cos 90^\circ = 0$ és $\sin 90^\circ = 1$ (összhangban a korábbi megállapításainkkal).

$e_{180^\circ}(-1; 0)$, ez azt jelenti, hogy $\cos 180^\circ = -1$ és $\sin 180^\circ = 0$.

$e_{270^\circ}(0; -1)$, ez azt jelenti, hogy $\cos 270^\circ = 0$ és $\sin 270^\circ = -1$.

Mivel $\mathbf{e}_\alpha(\cos \alpha, \sin \alpha)$ és $|\mathbf{e}_\alpha| = 1$, így $1 = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$, azaz $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. A **pitagoraszsi azonosság** tehát továbbra is érvényben marad. Továbbá teljesül, hogy $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$.



Tetszőleges szög szögfüggvényeit visszavezetjük a hegyesszögek szögfüggvényeire.

Ha az α szögű egységvektor a második síknegyedbe esik, akkor tükrözzük az y tengelyre.

A tükrözés miatt a kapott vektor $\mathbf{e}_{180^\circ - \alpha}$. Tehát $\mathbf{e}_\alpha$ és $\mathbf{e}_{180^\circ - \alpha}$ második koordinátája megegyezik, és $\mathbf{e}_{180^\circ - \alpha}$ első koordinátája -1 -szerese $\mathbf{e}_\alpha$ első koordinátájának.

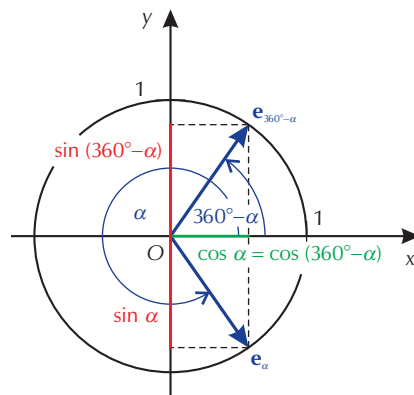
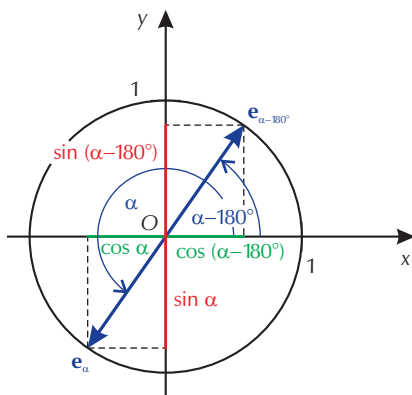
Közvetlenül adódó összefüggések:

I. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ (mellékszögek szögfüggvényei, ezeket korábban már láttuk).

Hasonlóan határozhatók meg a harmadik és a negyedik síknegyedbe eső egységvektorok esetén is a szögfüggvények.

II. $\sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin \alpha$, $\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$.

III. $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.



Az eddigiek alapján elmondhatjuk, hogy tetszőleges szög szögfüggvényeit meghatározhatjuk, ha ismerjük a hegyesszögek szögfüggvényeit.

2. példa

A most megismert összefüggések felhasználásával határozzuk meg a következő szögek szögfüggvényeit! Keressünk olyan hegyesszögeket, amelyeknek szögfüggvényei megegyeznek az adott szögek szögfüggvényeivel!

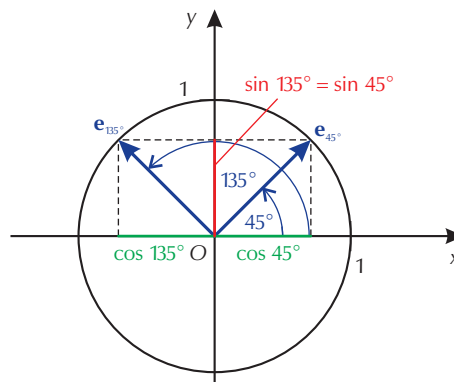
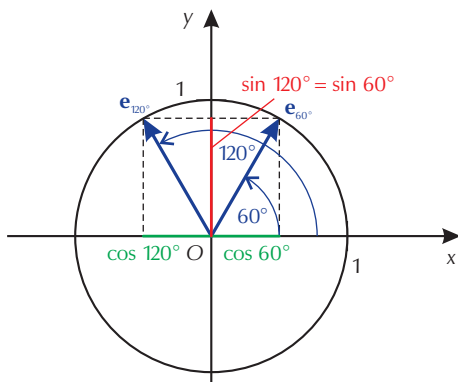
$$\alpha = 120^\circ, 135^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 315^\circ.$$

Megoldás

Az I. összefüggés szerint:

$$\cos 120^\circ = -\cos (180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -0,5; \quad \cos 135^\circ = -\cos (180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

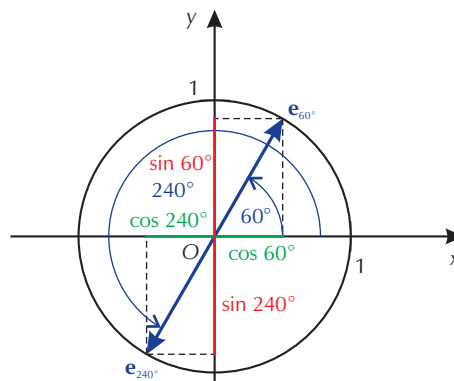
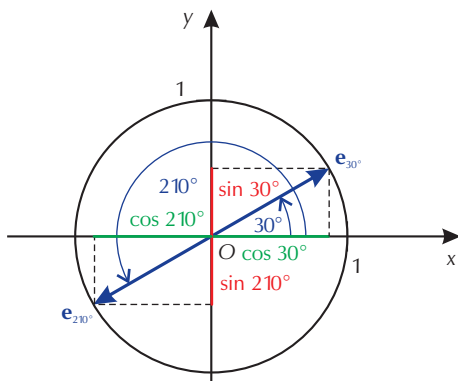
$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



A II. összefüggés szerint:

$$\cos 210^\circ = -\cos (210^\circ - 180^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 240^\circ = -\cos (240^\circ - 180^\circ) = -\cos 60^\circ = -0,5;$$

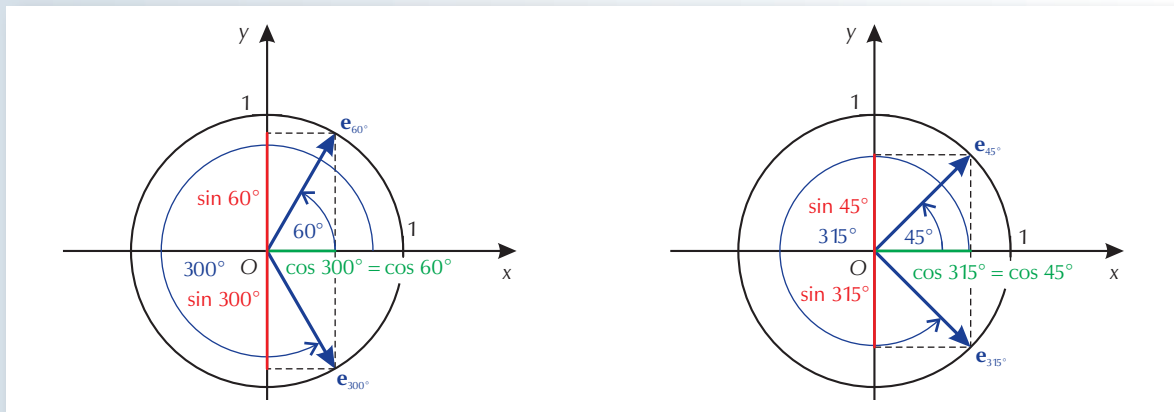
$$\sin 210^\circ = -\sin (210^\circ - 180^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5; \quad \sin 240^\circ = -\sin (240^\circ - 180^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



A III. összefüggés szerint:

$$\cos 300^\circ = \cos (360^\circ - 300^\circ) = \cos 60^\circ = 0,5; \quad \cos 315^\circ = \cos (360^\circ - 315^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 300^\circ = -\sin (360^\circ - 300^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin 315^\circ = -\sin (360^\circ - 315^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



A szögek szögfüggvényeit megkaphatjuk számológépek segítségével. Használat előtt mindig ellenőrizzük, hogy a gépünk fokban számoljon!

3. példa

Határozzuk meg $\sin 2022^\circ$ -ot!

Megoldás

Először keressük meg azt a 0° és 360° közé eső szöget, aminek a szinusza megegyezik a 2022° szinuszával! Tudjuk, hogy $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{\alpha + k \cdot 360^\circ}$. Ha a két egységvektor megegyezik, akkor a megfelelő szögfüggvények is meg fognak egyezni. Ez azt jelenti, hogy

$$\sin \alpha = \sin (\alpha + k \cdot 360^\circ). \text{ Mivel } 2022^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 222^\circ, \text{ ezért}$$

$$\sin 2022^\circ = \sin (5 \cdot 360^\circ + 222^\circ) = \sin 222^\circ.$$

$$\text{Ez a szög a harmadik síknegyedbe esik, így } \sin 222^\circ = -\sin (222^\circ - 180^\circ) = -\sin 42^\circ \approx -0,6691.$$

Ez az érték természetesen nem pontos. A trigonometrikus függvények értékeit általában négy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. Legalább ekkora pontosságra szükség van, ha azt akarjuk, hogy a szögek szinuszának ismeretében magát a szöget percnyi pontossággal tudjuk kiszámítani.

Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy egy szög szinuszának ismeretében nem tudjuk egyértelműen megmondani, melyik szögről van szó. Ha egy szög szinuszát ismerjük, az csak azt jelenti, hogy a neki megfelelő egységvektor második koordinátáját ismerjük. Ezután még végtelen sok lehetőség van a szög megadására.

Pihenő

Egy teológiai vagy irodalmi vita hevében egy pohár bort lötytyintenek egy uraság szemébe. A sértett szemrebbenés nélkül így vág vissza: „Ez csak egy kitérő, uram, várom az érvét.” (A replika hőse, egy bizonyos Henderson doktor, 1787 táján hunyt el Oxfordban, e találó szavakon kívül nem hagyott ránk más emléket: szép és elégséges ez a halhatatlanság.)

Borges: A sértés művészete (részlet)

4. példa

Keressük meg az összes olyan forgásszöget, aminek a szinusza 0,5!

Máshogyan fogalmazva: Oldjuk meg a $\sin x = 0,5$ egyenletet, ha x tetszőleges (forgás)szög!

Megoldás

Tehát ismerjük a szöghöz rendelt egységvektor második koordinátáját.

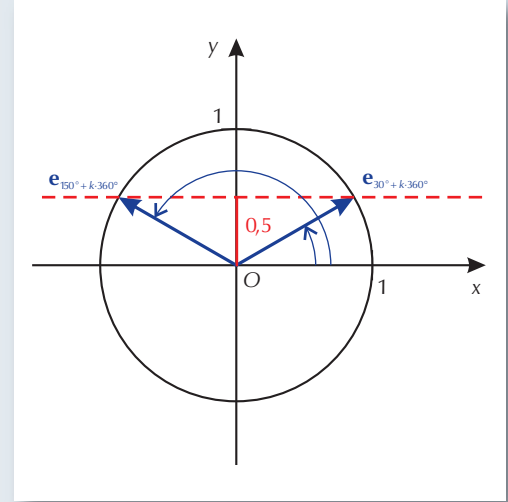
Az y tengelyen megjelölhetjük ezt az értéket, és ha ide húzunk egy vízszintes vonalat, akkor ez kimetszi azon egységvektorok végpontját az egységkörből, amelyek nekünk megfelelnek.

Számológépünk alkalmas arra, hogy egyetlen helyes szöget megadjon nekünk eredményül. (A szögfüggvények inverzeit eltérő módon jelölik a gépek.)

Jelen esetben a számológép kijelzőjén a 30° jelenik meg. Ha a 30° -hoz akárhánszor 360° -ot adunk, ugyanezt az egységvektort kapjuk, tehát ezek a szögek mind megoldások lesznek.

A másik megfelelő vektor az y tengelyre vonatkozó tükörkép, tehát $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ is jó. Ehhez szintén akárhánszor hozzáadhatunk (vagy kivonhatunk) 360° -ot.

Így $x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$, illetve $x_2 = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$ lesz az összes megoldás, ahol k és n tetszőleges egész számot jelenthetnek (röviden $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z}$).



5. példa

Keressük meg az összes olyan szöget, aminek a koszinusza $-\frac{\sqrt{3}}{2}$!

Másképpen: Oldjuk meg a $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletet, ha x tetszőleges (forgás)szög!

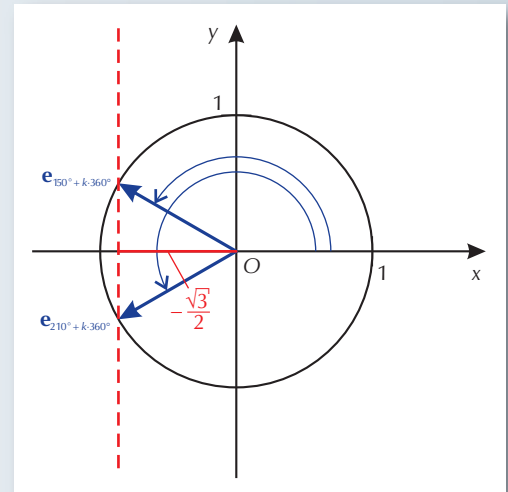
Megoldás

Most a keresett szöghöz rendelt egységvektor első koordinátáját ismerjük. Ha ezt az értéket megjelöljük az x tengelyen, és ide egy függőleges egyenest húzunk, akkor ez kimetszi az egységkörből azoknak az egységvektoroknak a végpontjait, amelyek megfelelnek. Számológépünk segítségével megkapjuk az $x = 150^\circ$ -ot. Mivel az ennek a szögnek megfelelő egységvektor x tengelyre vonatkozó tükörképe is jó, ezért $x = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$ is megoldás. Ezek után már felírhatjuk a „két-szer” végtelen sok megoldást.

$$x_1 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ;$$

$$x_2 = 210^\circ + n \cdot 360^\circ, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z} \text{ és } n \in \mathbb{Z}.$$

A számológép a végtelen sok megoldásból csak egyet ad meg. Az összes többi nekünk kell meghatározni az egységkör segítségével.



A $\operatorname{tg} \alpha$ ÉS $\operatorname{ctg} \alpha$ ÁLTALÁNOSÍTÁSA

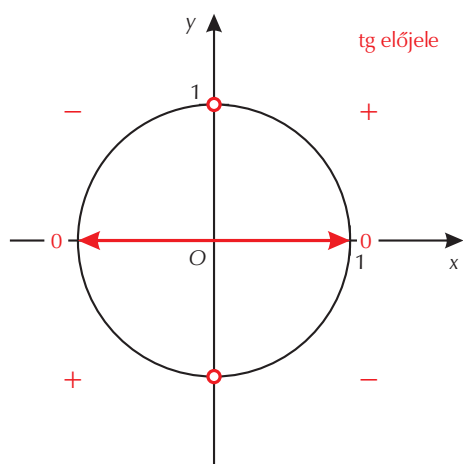
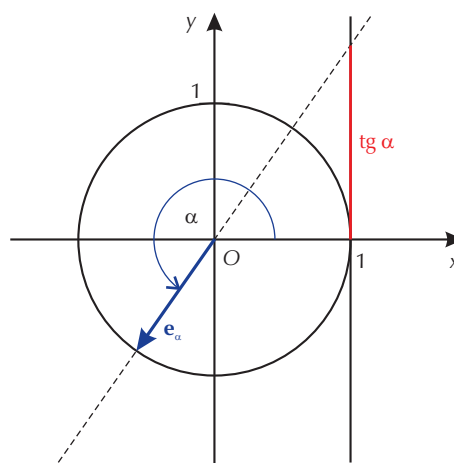
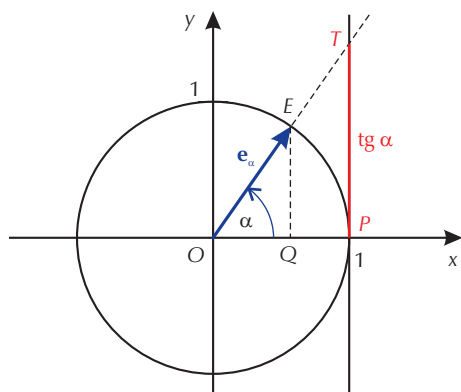
A $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ az eredeti definíció következménye, ami tökéletesen megfelel, de ki kell kötnünk, hogy $\cos \alpha \neq 0$.

Definíció

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ ha } \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Az egységkör $P(1; 0)$ pontjába húzott érintőjét szokás „tangens tengelynek” is nevezni, amelyen a pozitív irány az y tengelyével megegyező.

Húzzunk egy egyenest, ami tartalmazza az $\mathbf{e}_\alpha$ egységvektort! Ez az egyenes metszi ki a $\operatorname{tg} \alpha$ értékét az $x = 1$ egyenesből. (A szögfüggvény értéket előjeles távolsággal szemléltethetjük.)



Az ábrán az $OEQ\Delta \sim OTP\Delta$, tehát $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{TP}{1} = \operatorname{tg} \alpha$.

Az előjeleket vizsgálva láthatjuk, hogy az első és harmadik síknegyedben a $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ ugyanolyan előjelű, tehát a hányadosuk pozitív. A második és negyedik síknegyedben pedig a két érték ellentétes előjelű, tehát a hányadosuk negatív.

Van két olyan egységvektorunk, amelyek párhuzamosak a tangens tengellyel. Ezek természetesen pontosan azoknak a szögeknek felelnek meg, ahol a $\operatorname{tg} \alpha$ nincs értelmezve. Eddigi ismereteink alapján $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + 360^\circ)$,

$$\text{de } \operatorname{tg} (\alpha + 180^\circ) = \frac{\sin(\alpha + 180^\circ)}{\cos(\alpha + 180^\circ)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \text{ is igaz.}$$

Ez azt jelenti, hogy a tangens szögfüggvény értékei nemcsak 360° -onként, hanem 180° -onként is ismétlődnek. A tangensfüggvény periódusa 180° .

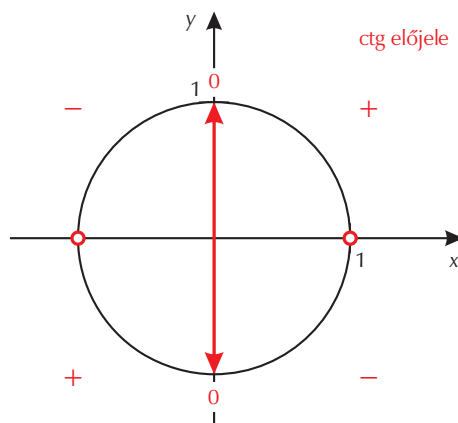
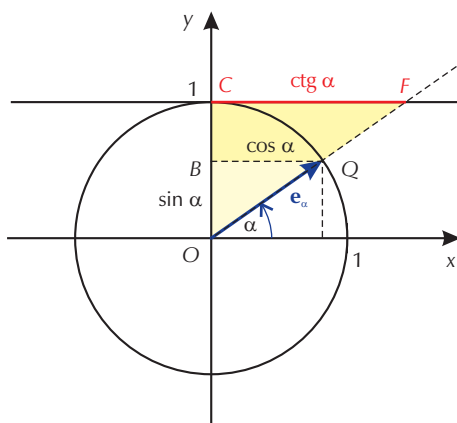
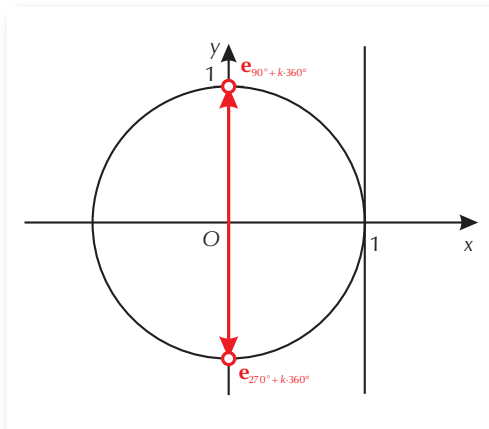
Definiálhatjuk a régebben használatos $\text{ctg } \alpha$ (kotangens) függvényt is:

Definíció

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ ha } \alpha \neq 0^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

A kikötésben szereplő szögek esetén a nevezőben 0 lenne, márpedig ezt nem engedhetjük meg.

A ctg tengely az egységkörhöz a $(0; 1)$ pontba húzott érintő lesz, amit a tangens tengelyhez hasonló módon igazolhatunk.



Fogalmak
egységkör;
egységvektor;
forgásszög.

FELADATOK

1. E1 Csupán a hegyesszögek szögfüggvényeinek ismeretében határozzuk meg a következő szögek összes szögfüggvényét!

$$\alpha = 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 2015^\circ, -480^\circ.$$

2. E1 Keressük meg az összes olyan szöget, amelyekre

$$\begin{array}{llll} a) \sin \alpha = -1; & b) \sin \alpha = 0,9342; & c) \cos \alpha = 0,5; & d) \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ e) \text{tg } \alpha = -1; & f) \text{tg } \alpha = 5; & g) \text{ctg } \alpha = -3! \end{array}$$

3. E1 Határozzuk meg x többi szögfüggvényét, ha

$$\begin{array}{llll} a) \sin x = 0,3; & b) \cos x = 0,4; & c) \text{tg } x = 2; & d) \text{ctg } x = 3! \end{array}$$

4. E1 Melyek azok a 0° és 360° közé eső szögek, amelyekre igaz, hogy

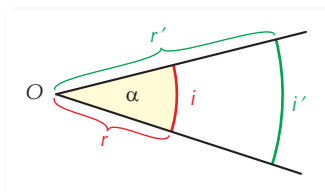
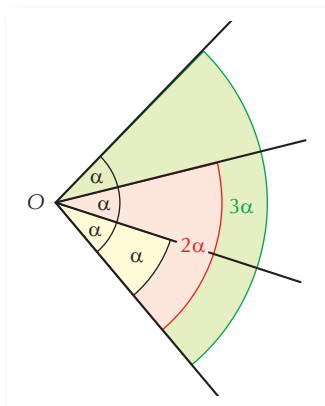
$$\begin{array}{ll} a) \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}; & b) \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \end{array}$$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2721–2740.

37. SZÖGFÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA

SZÁMOLÁS ÍVMÉRTÉKKEL (Ismétlés)



Tetszőleges α szög szögfüggvényeit definiáltuk az előző leckében. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy megvizsgáljuk azt a hozzárendelést, amely tetszőleges szöghöz hozzárendeli annak szinuszt. Korábban a geometriai alkalmazásokban a szögeket fokokban mértük, azonban a kör éppen 360 részre való felosztása elég önkényes, inkább csak a hagyomány miatt maradt fenn. A szögfüggvények értelmezési tartományát, a szögeket általában ívmértékben (radiánban) adjuk meg. (Ezt az is indokolja, hogy a vizsgált függvényeink értelmezési tartománya általában a valós számok halmaza, vagy annak egy részhalmaza, és a radián mértékegység nélküli valós szám.)

A 9. osztályban már megismerkedtünk a radián fogalmával, amikor a szögeket az egység sugarú körben a hozzájuk tartozó körívek hosszával mértük. (A fogalom bevezetését az tette lehetővé, hogy bármely két kör hasonló, és a körök ívének hossza egyenesen arányos a hozzájuk tartozó középponti szöggel.)

Ha az r sugarú körben a körívnek a szögtartományba eső részét jelöljük i -vel, az ívhez tartozó középponti szöget α -val, akkor az α szög nagyságát kifejezhetjük az $\alpha = \frac{i}{r}$ hányadossal is. Ez az α szög radiánban kifejezett értéke. (Jelölés: rad.)

A két hosszúság hányadosának nincs mértékegysége; ez egy viszony-szám, ami megmutatja, hogy a körív hossza hányszorosa a sugar hosszának. (A körök hasonlósága miatt a hányados nem függ az r megválasztásától, azaz $r = 1$ választással a körív hossza éppen a szög radiánban vett értékével egyezik meg.)

Az egység sugarú kör kerülete 2π , így $360^\circ = 2\pi$ radián (vagy $180^\circ = \pi$ radián). A szög és ívhossz egyenes arányossága alapján tetszőleges forgásszögeket átválthatunk fokról radiánra és fordítva.

Néhány példa (a szögek radiánban vett mértékét gyakran π többszöröseként adjuk meg):

fok	90°	60°	45°	72°	120°	270°	540°	-144°	-200°	2021°
radián	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$-\frac{4\pi}{5}$	$\approx -3,49$	$\approx 35,27$

Természetesen a táblázatba írhattunk volna közelítő értékeket is, pl. $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ vagy $-\frac{4\pi}{5} \approx -2,5132$.

A számolás egyszerű, például $\frac{72^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi}$, innen $x = \frac{72^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$ (rad); vagy $y = \frac{2021^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \approx 35,27$.

1. példa

Hány fok az 1 radián?

Megoldás

1 radián = $\frac{1}{\pi} \cdot 180^\circ \approx 57,296^\circ$. Egy radián azt a szöget jelenti, ahol a körív és a sugár hossza megegyezik, ez kicsivel kevesebb, mint 60° .



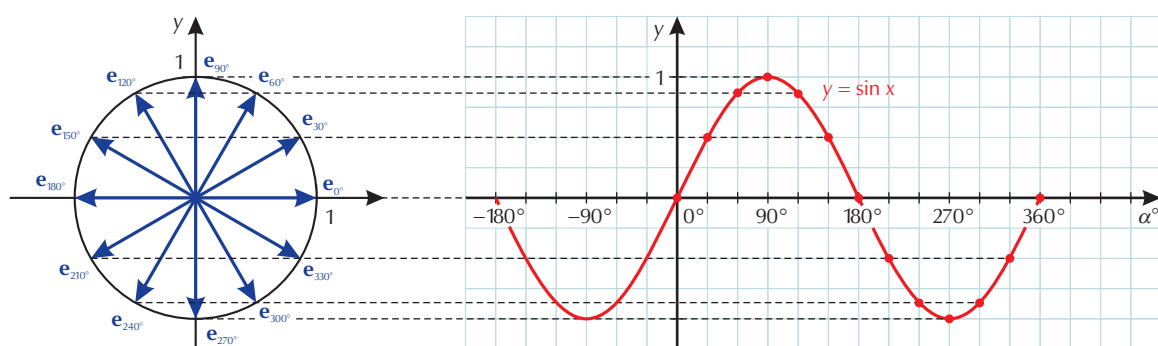
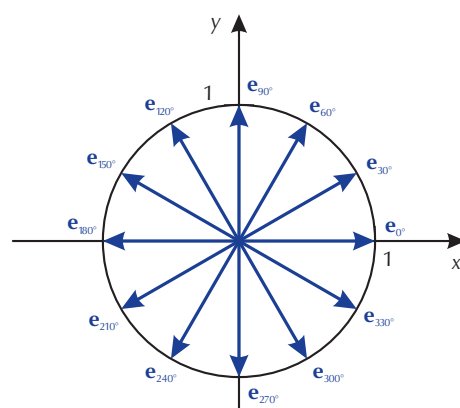
A sin x FÜGGVÉNY

Tekintsük az $f(x) = \sin(x)$ függvényt! Egy szög szinusa a szöghöz, mint forgásszöghöz tartozó egységvektor második koordinátája. A definíció alapján tetszőleges helyeken kiszámíthatjuk a függvényértékeket, de az ábrázoláshoz használhatjuk például a GeoGebra szoftvert is.

A fenti függvény grafikonját szinuszgörbének nevezzük.

Néhány értéket egy táblázatban is megadtunk. A szögek értékét azért írtuk ki fokokban is, hogy jobban tudjuk érzékelni annak nagyságát.

x°	-180°	-150°	-120°	-90°	-60°	360°
x radián	$-\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	-0,5	-0,8660	-1	-0,8660	0



V. FORGÁSSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

Az egységkörben láttuk, hogy $\sin x = \sin(x + 360^\circ)$. Ez azt jelenti, hogy a függvénygörbe 0° és 360° közé eső részének $\pm 360^\circ$ -kal történő eltolásaival teljes egészében megkapható a függvénygörbe egy újabb periódusnyi grafikonja.

Ezt a fontos tulajdonságot definícióként is megfogalmazzuk.

Definíció

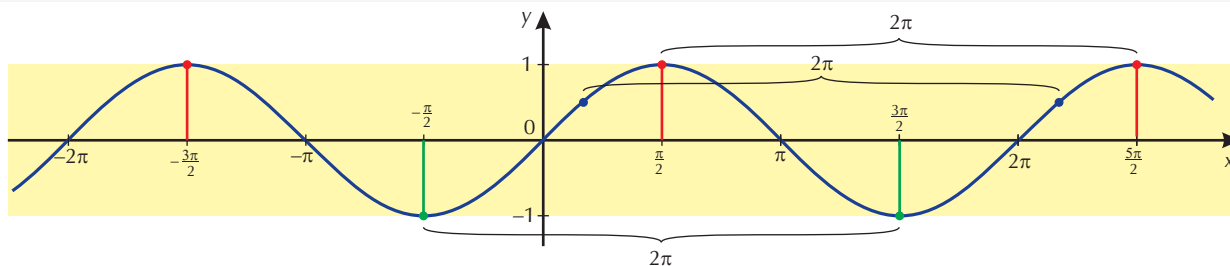
Ha egy f függvény esetén létezik olyan $a > 0$ szám, amire minden $x \in D_f$ esetén

- $(x + a) \in D_f$, és
- $f(x) = f(x + a)$,

akkor a függvényt **periodikusnak** nevezzük. A legkisebb alkalmas $a > 0$ számot, ha létezik, a függvény **periódusának** (más szóhasználatul alaperiódusnak) nevezzük.

A $\sin x$ függvény periódusa ezek szerint 360° , vagy ha az értelmezési tartománynak a valós számokat tekintjük, akkor 2π .

A kapott függvény sok érdekes tulajdonsággal rendelkezik az eddig tanult függvényekhez képest. A függvény képe például egy „két egység szélességű” sávban helyezkedik el.



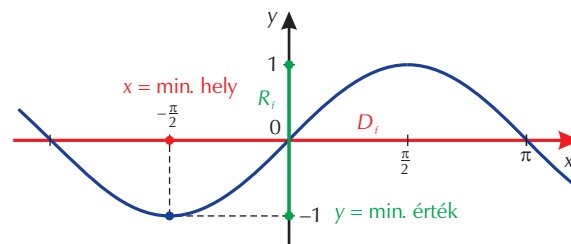
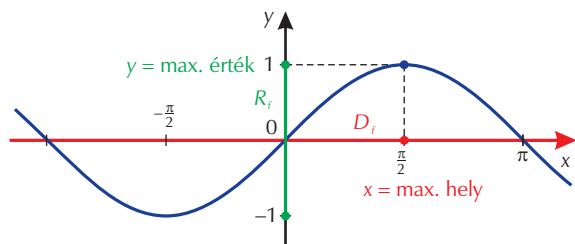
A következőkben a függvény szélsőértékeiről lesz szó.

Definíció

A legnagyobb felvett függvényértéket a **függvény maximumának** („maximum értékének”) nevezzük. A matematika formanyelvét használva: az M számot az f függvény maximumának nevezzük, ha $M \in R_f$ (R_f az f függvény értékkészlete.), és minden $y \in R_f$ esetén $y \leq M$.

M a függvény maximum értéke. Azt az $x \in D_f$ értéket, ahol a függvény felveszi a maximumértéket, **maximumhelynek** nevezzük. Természetesen lehet, hogy több ilyen x is van, ebben az esetben maximumhelyekről beszélünk.

Hasonlóan definiálhatjuk a függvény minimumát is.



Definíció

A legkisebb függvény értéket a **függvény minimumának** („minimum értékének”) nevezzük. A matematika formanyelvét használva: az m számot az f függvény minimumának nevezzük, ha $m \in R_f$ és minden $y \in R_f$ esetén $y \geq m$.

Az m a függvény minimum értéke. Azt az $x \in D_f$ értéket, ahol a függvény felveszi a minimumértéket, **minimumhelynek** nevezzük. Természetesen lehet, hogy több ilyen x is van, ebben az esetben minimumhelyekről beszélünk.

A szinusz (egyszerűbben $\sin$) függvény maximuma 1, amit végtelen sok helyen felvesz a függvény, tehát végtelen sok maximumhelye van. Ezt egyszerűen így is írhatjuk: max. érték = 1, max. hely: $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (k tetszőleges egész számot jelenthet).

A függvény minimuma -1 , amit szintén végtelen sokszor felvesz a függvény, tehát végtelen sok minimumhelye van. Vagyis min. érték: -1 , min. hely: $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A függvény minimumát és maximumát közös néven **szélsőértéknek** nevezzük. Két szélsőérték között a szinusz függvény vagy szigorúan monoton nő (minimumhelytől a maximumhelyig), vagy szigorúan monoton csökken (a maximumhelytől a minimumhelyig).

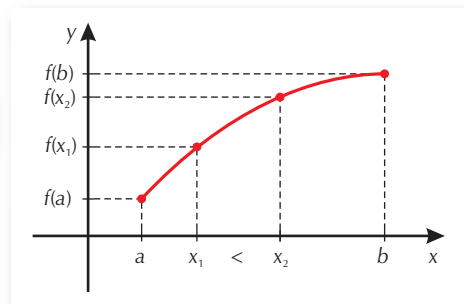
Definíció

Azt mondjuk, hogy az f függvény **szigorúan monoton nő** az $[a; b] \subseteq D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in [a; b]$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$.

Megjegyzés

Ez azt jelenti, hogy ha növeljük x értékét, akkor a függvényérték is nő.

Ennek éppen fordítottja a szigorúan monoton csökkenés.



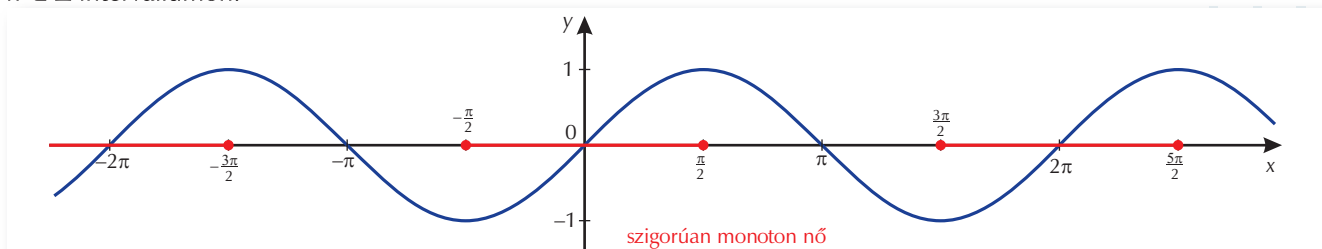
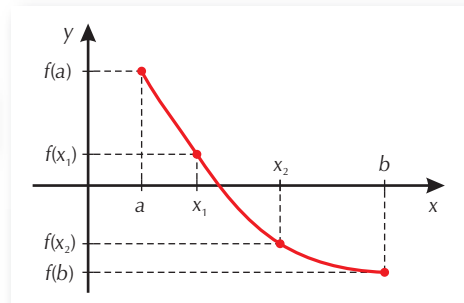
Definíció

Azt mondjuk, hogy az f függvény **szigorúan monoton csökken** az $[a; b] \subseteq D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in [a; b]$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$.

A szinusz függvény szigorúan monoton nő a $[-90^\circ; 90^\circ]$, a $[270^\circ; 450^\circ]$ stb. intervallumokon, pontosan kifejezve minden

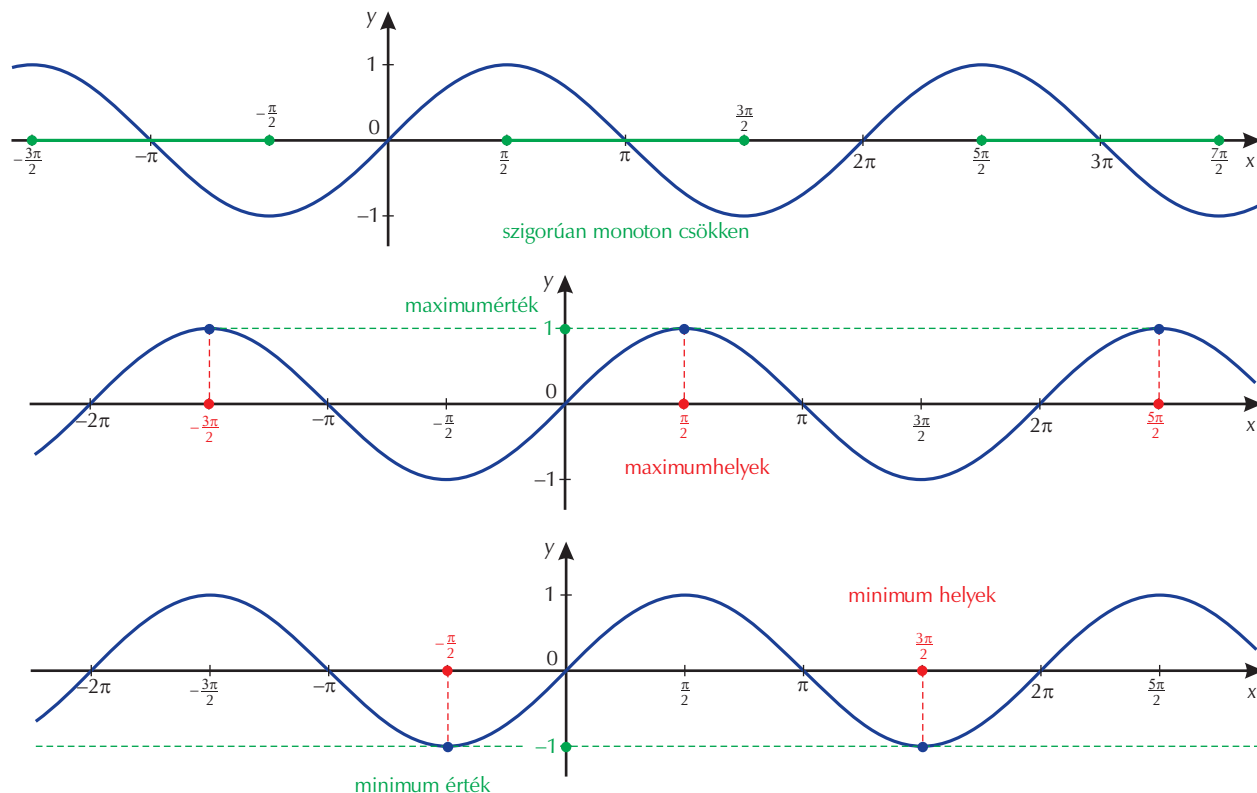
$$I_n = [-90^\circ + n \cdot 360^\circ; 90^\circ + n \cdot 360^\circ] = \left[-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi\right],$$

$n \in \mathbb{Z}$ intervallumon.



V. FORGÁSSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

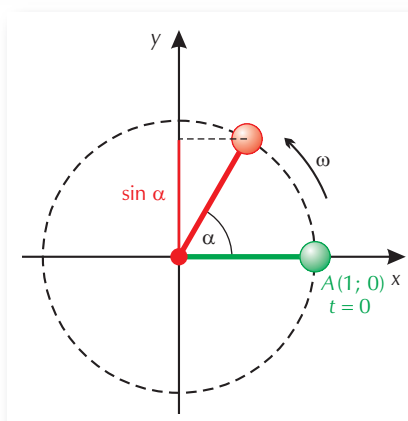
Szigorúan monoton csökken a $[90^\circ; 270^\circ]$, a $[450^\circ; 540^\circ]$ stb. intervallumokon, pontosan kifejezve minden $I_k = [90^\circ + k \cdot 360^\circ; 270^\circ + k \cdot 360^\circ] = \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ intervallumon.



Ezeket a tulajdonságokat a grafikont szemlélve olvastuk le. Természetesen a tulajdonságok precíz bizonyítása is lehetséges.

Ugyanezt a szögfüggvényt (grafikont) kapjuk, ha egy körpályán állandó sebességgel mozgó test helyzetének második koordinátáját ábrázoljuk az idő függvényében. A $t = 0$ sec időpillanatban legyen a test az $A(1; 0)$ pontban. A periódusidő (egy körülfordulás ideje) pedig legyen 2π sec.

A szinuszfüggvényt is tudjuk transzformálni az eddig tanult módszerekkel.



2. példa

Ábrázoljuk a következő függvényeket!

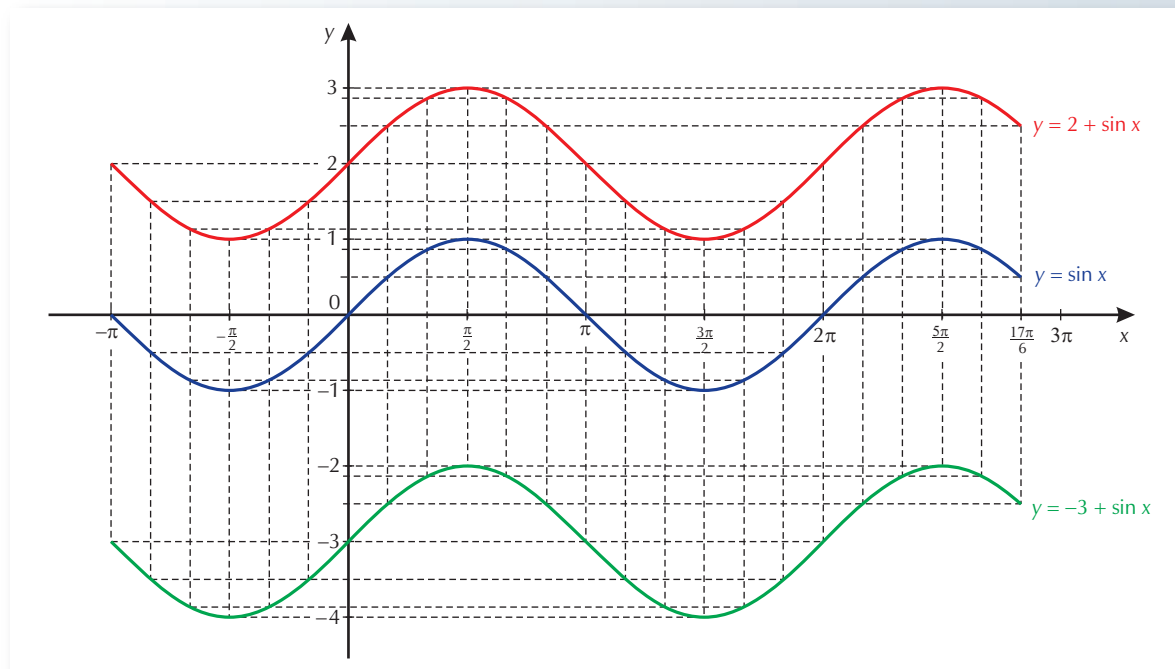
$$f(x) = 2 + \sin x; \quad g(x) = -3 + \sin x.$$

(Alkalmazhatjuk a korábbi ismereteinket a függvénytranszformációkról, de szükség esetén használhatjuk a számológépet (lehetőleg nagyszámú függvényértéket meghatározva) vagy például a Geogebra programot is.)

Megoldás

Az f függvény képét úgy kaptuk, hogy a szinusz függvény képét az y tengely mentén eltoltuk pozitív irányba 2 egységgel (felfelé).

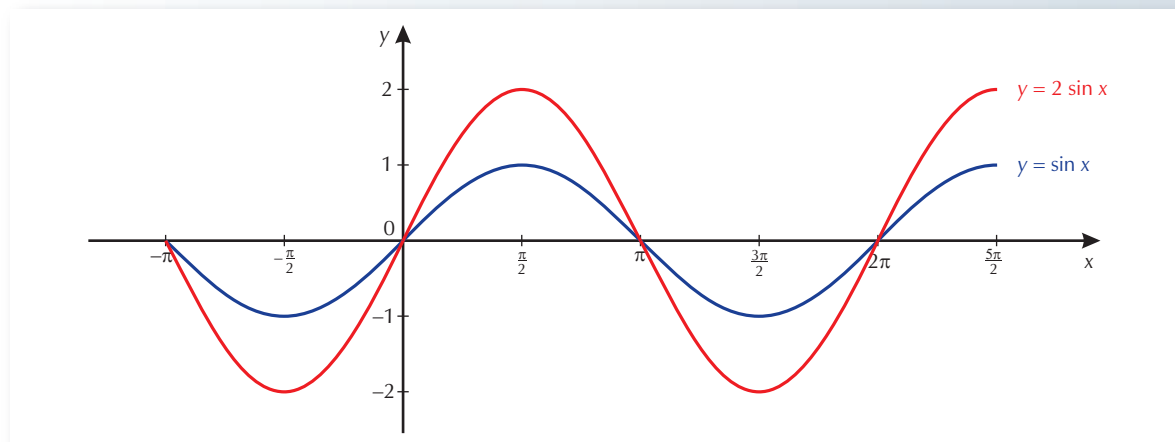
Az g függvény képét úgy kaptuk, hogy a szinusz függvény képét az y tengely mentén eltoltuk negatív irányba 3 egységgel (lefelé).

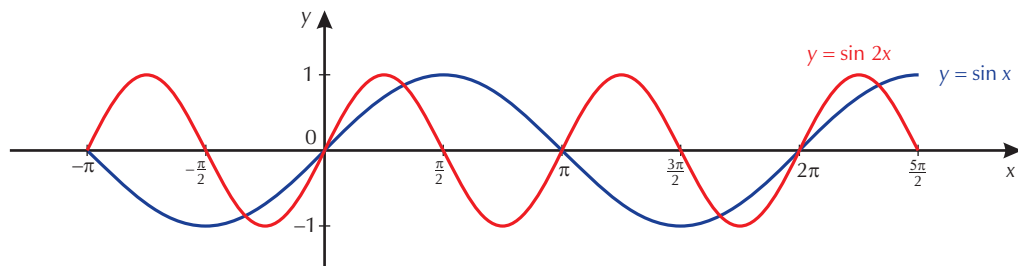


3. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sin x$ és a $g(x) = \sin(2x)$ függvényeket! ($f(x)$ -nél a függvényértéket, $g(x)$ -nél a függvény változót transzformáljuk. Szükség esetén most is alkalmazhatunk segédeszközöket, táblázatot vagy segédprogramot.)

Megoldás





Megfigyelhetjük a két függvény közötti lényeges eltéréseket.

Az f függvény esetében minden függvényértéket megkétszereztünk, ami az ábrázolás szempontjából azt jelenti, hogy minden pont második koordinátája a kétszeresére nőtt. Így a grafikonon minden pontnak az x tengelytől mért távolsága lett kétszer akkora, mint eredetileg volt.

A g függvényénél pedig a grafikon pontjainak az y tengelytől mért távolsága lett feleakkora, mint eredetileg volt.

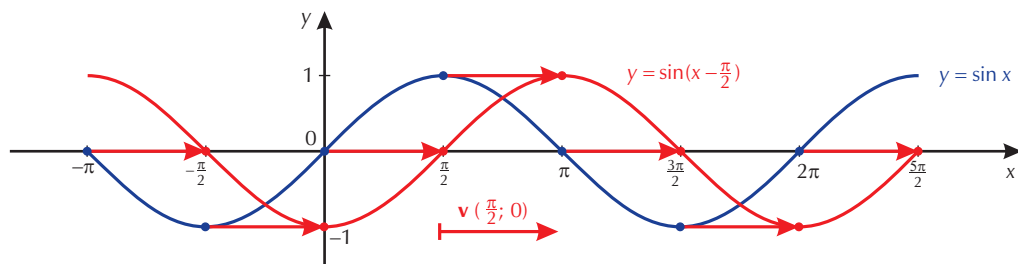
(Egy adott A helyen a $\sin x$ függvény a $\sin A$ értéket veszi fel. Hol fogja felvenni a $\sin A$ értéket a $\sin(2x)$ függvény? Ott, ahol $2x = A$, azaz az $x = \frac{A}{2}$ helyen. Ezzel az $A \rightarrow \frac{A}{2}$ kapcsolattal indokolhatjuk általában is, hogy az $f(x)$ függvénygörbéből az y tengelyre merőleges, $\frac{1}{2}$ arányú affinitással kapjuk az $f(2x)$ görbét.)

A $\cos x$ FÜGGVÉNY

4. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ függvényt! (Hagyományos módon táblázatot készíthetünk a függvényértékekről vagy függvényábrázoló segédprogramot is használhatunk.)

Megoldás

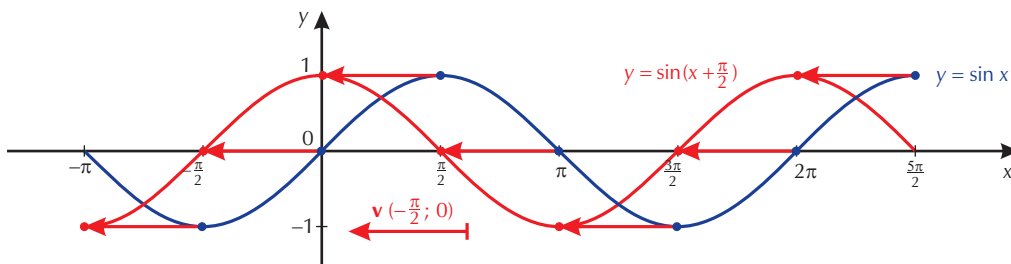


A grafikont tanulmányozva észrevehetjük, hogy a függvénygörbét az eredeti szinuszfüggvény grafikonjának az x tengely pozitív irányába, $\frac{\pi}{2}$ -vel történő eltolásával kaptuk meg.

5. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ és a $g(x) = \cos x$ függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben!

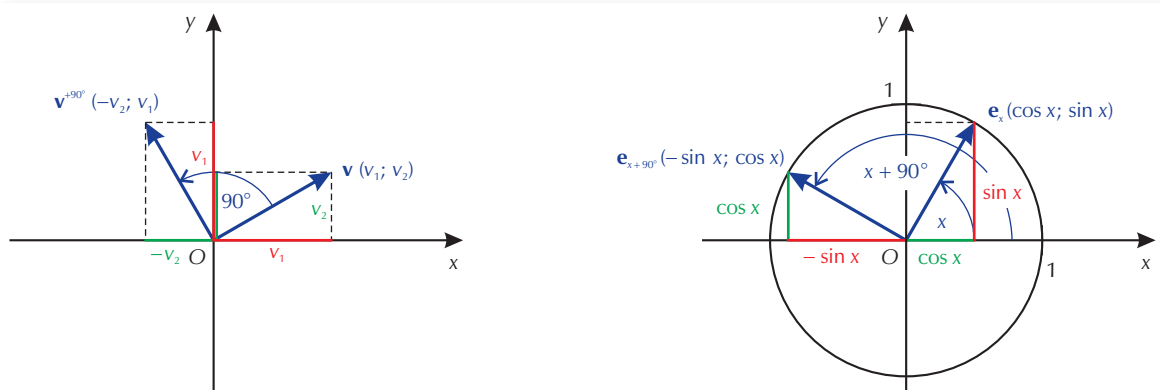
Megoldás



A görbék ábrázolása alapján úgy tűnik, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvény ugyanaz. Ez azt jelenti, hogy a koszinusz függvény grafikonját a szinusz függvény grafikonjának x tengely mentén történő $-\frac{\pi}{2}$ -vel való eltolásával megkaphatjuk.

Ezt a megállapítást (egyelőre csak sejtés) vizsgáljuk meg a szögfüggvények definíciójának segítségével.

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; ez alapján az x szögű egységvektor első koordinátája megegyezik az $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ szögű egységvektor második koordinátájával.



A vektoroknál már megtanultuk, hogy a vektorok $+90^\circ$ -os elforgatásakor az eredeti vektor első koordinátájából lesz az elforgatott vektor második koordinátája.

Ha $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, akkor $\mathbf{v}_{+90^\circ}(-v_2; v_1)$. Tehát ha $\mathbf{e}_x(\cos x; \sin x)$, akkor $\mathbf{e}_{x+90^\circ}(-\sin x; \cos x)$.

Az egységvektorokat felhasználva a koszinusz ($\cos$) függvény ábrázolása hasonlóan történik, mint a szinusz függvényé.

Az $x \mapsto \cos x$ függvény jellemzésénél láthatjuk, hogy hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint az $x \mapsto \sin x$ függvény.

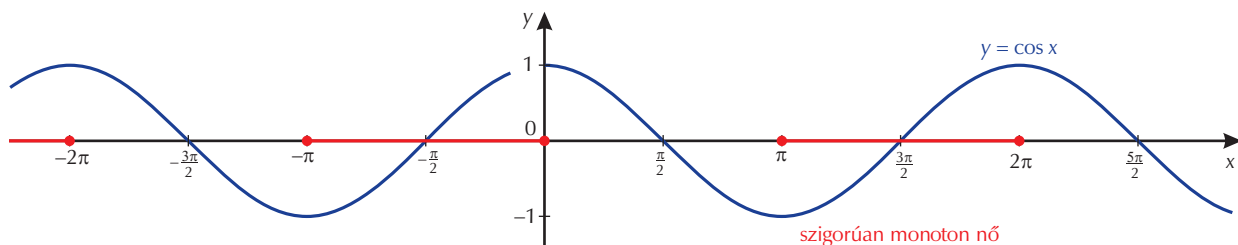
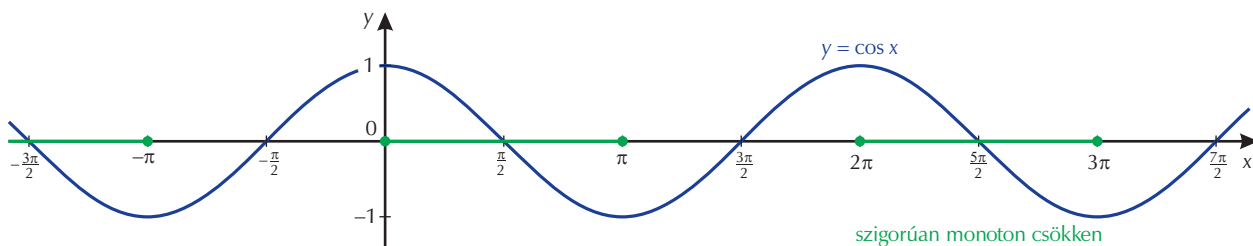
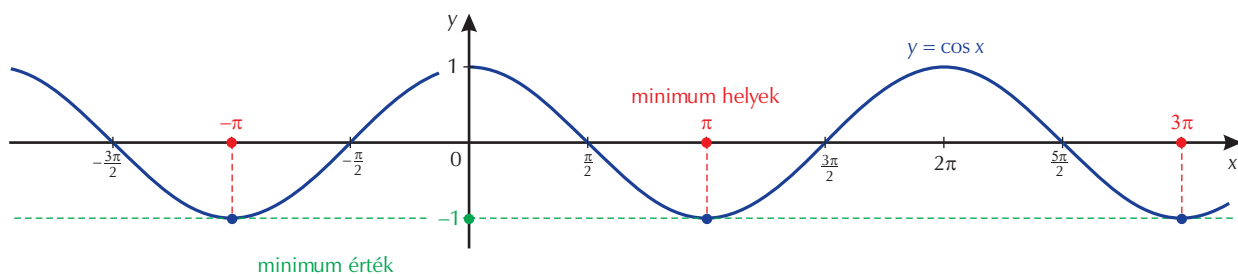
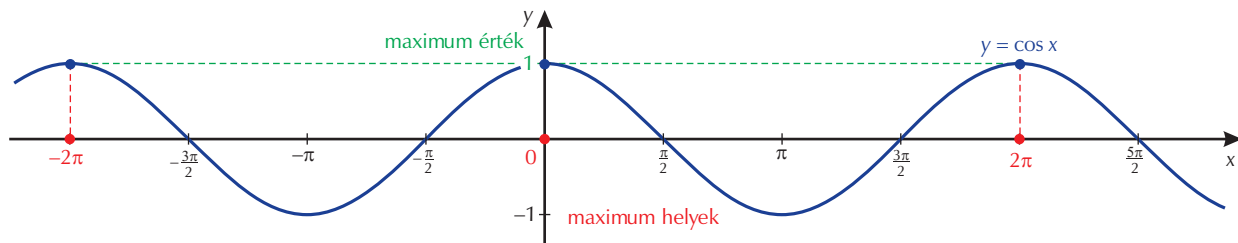
A függvény maximumának értéke 1, a maximumhelyek pedig az $x = k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

A függvény minimumának értéke -1 , a minimumhelyek pedig az $x = \pi + n \cdot 2\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

V. FORGÁSSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

A függvény szigorúan monoton csökkenő minden $I_l = [l \cdot 2\pi; \pi + l \cdot 2\pi]$ intervallumon, ahol $l \in \mathbb{Z}$.

A függvény szigorúan monoton növekedő minden $I_m = [\pi + m \cdot 2\pi; 2\pi + m \cdot 2\pi]$ intervallumon, ahol $m \in \mathbb{Z}$.



Végezetül megállapíthatjuk, hogy a szinusz függvény **páratlan** (minden x -re $\sin x = -\sin(-x)$), a koszinusz pedig **páros** függvény ($\cos x = \cos(-x)$).

Humor

Anukája kérdezi az okos kisfiút a legelső tanítási nap után:

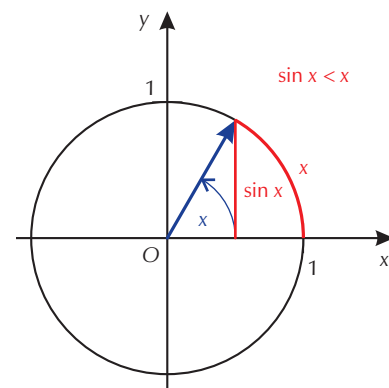
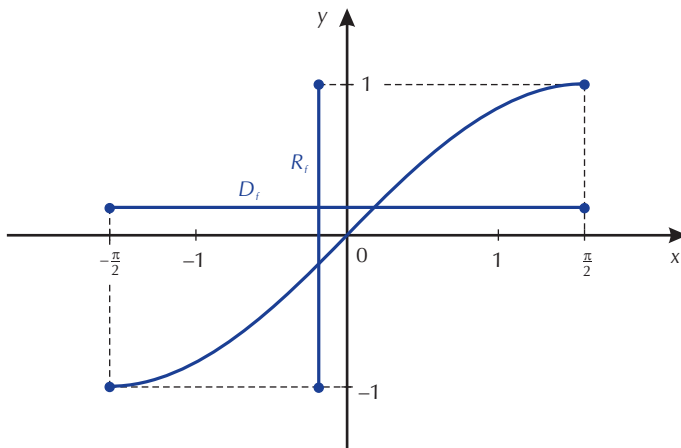
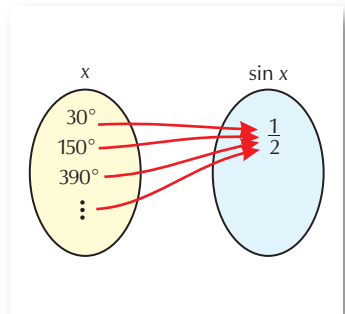
– Na, hogy tetszik az iskola?

– Disznóság az egész! – fakad ki a gyerek. – Mi csináljuk meg a feladatokat, és a tanító néni kap érte fizetést!

A $\sin x$ ÉS A $\cos x$ FÜGGVÉNYEK INVERZEI (Olvasmány)

Az $f(x) = \sin x$ függvény nem invertálható, hiszen minden függvényértéket végtelen sokszor felvesz. Az igaz, hogy minden szöghöz csak egy szinusztörték tartozik, de a $\sin x$ ismeretében nem tudjuk egyértelműen megmondani, hogy az érték melyik szöghöz tartozik.

A függvények invertálhatóságáról tanultak alapján a függvény értelmezési tartományát le kell szűkítenünk egy olyan intervallumra, ahol a hozzárendelés már kölcsönösen egyértelmű lesz. Erre több lehetőségünk van. Az előbbieken meghatározott intervallumok (ahol a függvény szigorúan monoton) bármelyike jó lenne. A legcélszerűbb az lenne, ha a gyakorlatban is jól használható függvényt kapnánk. Például a hegyesszögeket szeretnénk megkapni szinuszuk ismeretében.



Az igényeinknek legjobban a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum felel meg. Ezen az intervallumon a függvény szigorúan monoton növekszik, tehát minden függvényértéket pontosan egyszer vesz fel. Most már invertálható függvényt kaptunk.

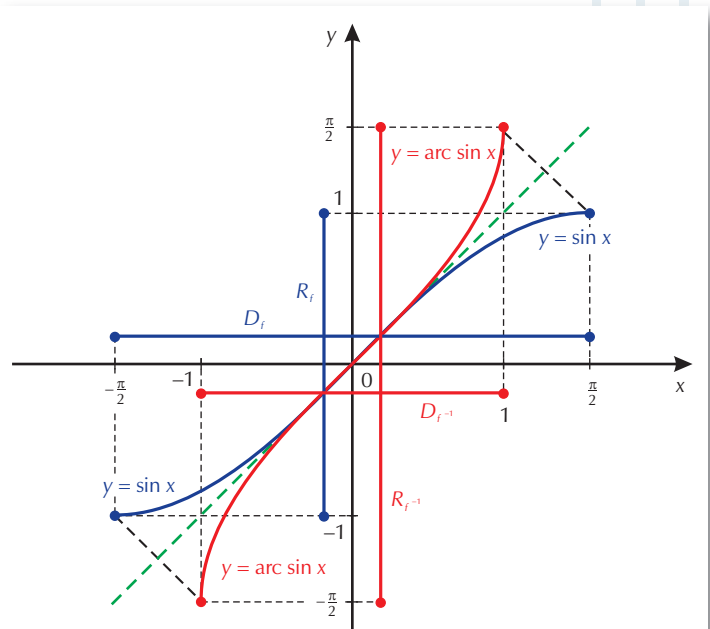
Új függvényünk a $g: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1], x \mapsto \sin x$.

Az inverz függvény $g^{-1}: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], x \mapsto \arcsin x$.

A szinuszt függvény inverzét arkusz szinuszt x -nek mondjuk, és $\arcsin x$ -nek írjuk.

Mielőtt megrajzoljuk az $\arcsin x$ függvény képét, előbb ismerkedjünk meg a szinuszt függvény egy egyszerű tulajdonságával!

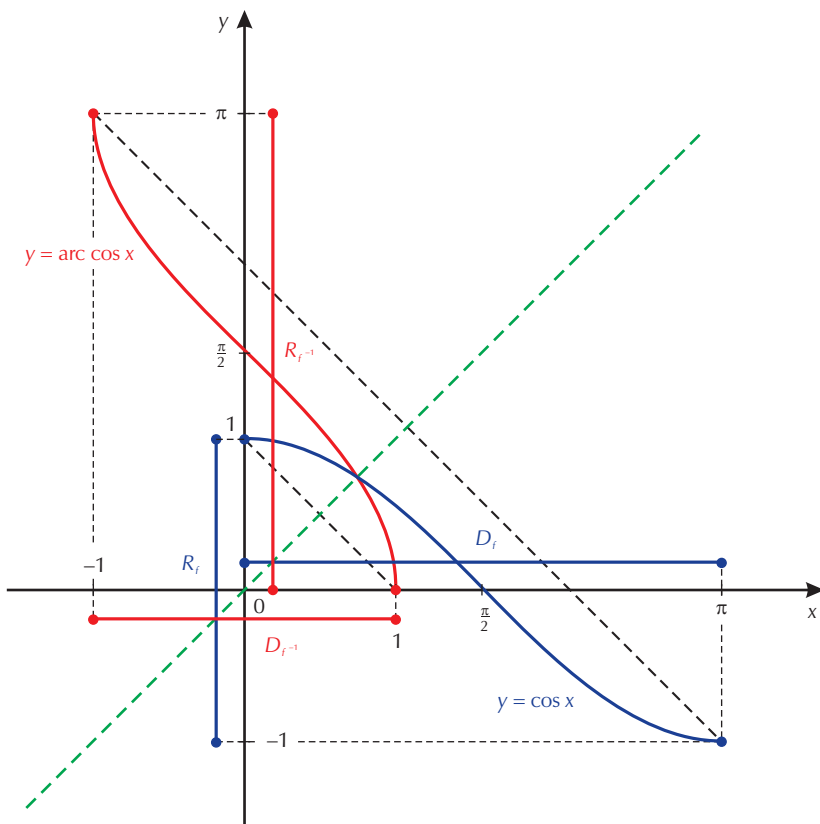
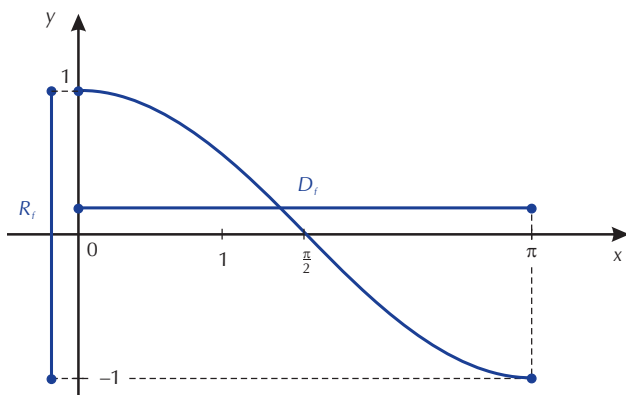
Állítás: $\sin x < x$, ha $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Az indokláshoz térjünk vissza a $\sin x$ definíciójához. A radián definí-



ciójánál megállapítottuk, hogy a szög szárai közé rajzolt körív hossza megegyezik a szög nagyságával, ha a kör sugara egységségi.

A $\sin x$ értéke a pont második koordinátája, ami biztosan kisebb, mint a hozzá tartozó körív hossza, ez pedig éppen x -szel egyenlő. Az állítás tehát igaz.

Mivel a $\sin$ függvény grafikonja tükrös az origóra, most már megrajzolhatjuk függvényeink képét. Az előbbi tulajdonság azt jelenti, hogy a $\sin$ függvény görbéje az $x \mapsto x$ függvény görbéje (egyenes) alatt van a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban.



Az inverz függvény képét az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözéssel kaphatjuk meg.

Számológépünk is ezt a függvényt használja. Ha a gépen a szögeket fokokban számítjuk, akkor a függvény a $[-1; 1]$ és a $[-90^\circ; 90^\circ]$ intervallum között létesít kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.

Hasonlóan járhatunk el a koszinusz függvény inverzének a meghatározása-kor is. Ha a koszinusz függvény értelmezési tartományát akarjuk leszűkíteni úgy, hogy a hegyesszögeket is tartalmazza és kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést kapjunk, akkor a $[0; \pi]$ intervallumot kell választanunk. Itt a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Tekintsük tehát az $f: [0; \pi] \rightarrow [-1; 1], x \mapsto \cos x$ függvényt!

Az inverz függvény $f^{-1}: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], x \mapsto \arccos x$.

Az inverz függvényt arkusz koszinusz x -nek olvassuk, és $\arccos x$ -nek írjuk.

Ha a gépen a szögeket fokokban számítjuk, akkor az $\arccos x$ függvény kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a $[0^\circ; 180^\circ]$ és a $[-1; 1]$ intervallum között.

Fogalmak

$\sin x$ függvény;
 $\cos x$ függvény;
 $\operatorname{tg} x$ függvény;
 $\operatorname{ctg} x$ függvény;
 trigonometrikus
 függvények
 inverze.

A $\operatorname{tg} x$ ÉS A $\operatorname{ctg} x$ FÜGGVÉNY

A $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ definíció alapján $\operatorname{tg} x$ nem értelmezett, ha $\cos x = 0$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény ('tangensfüggvény') értelmezési tartományából ezeket az értékeket ki kell zárunk.

6. példa

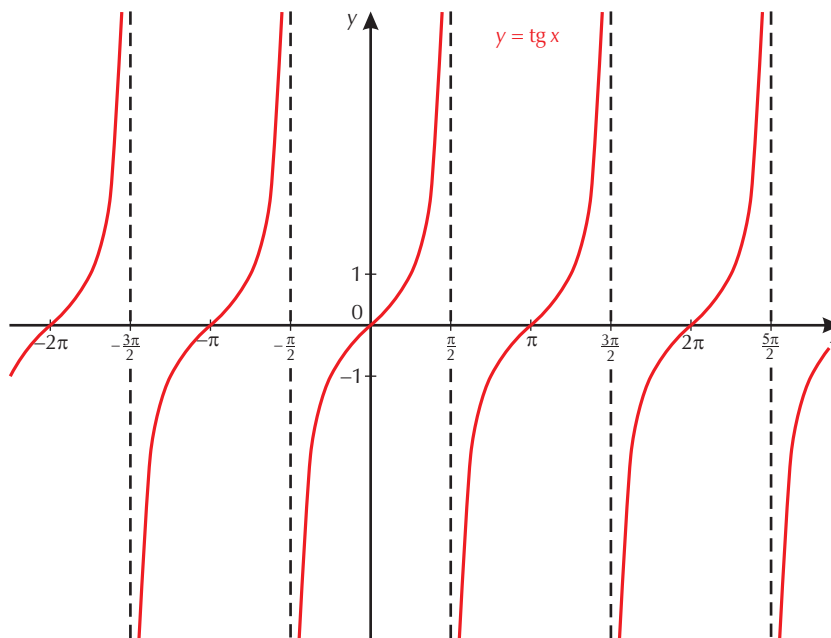
Ábrázoljuk és jellemezzük az $f: \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvényt!

Megoldás

A függvény grafikonja a definíció alapján, két függvény hányadosaként rajzolható meg, vagy segítségül hívhatjuk a Geogebra programot is. (A függvénygörbe pontos alakja a differenciálszámítás segítségével állapítható meg.)

A függvény jellemzése:

1. $D_f = \left\{ x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$.
2. $R_f = \mathbf{R}$.
3. A függvény periodikus, periódusa π .
4. A függvénynek se minimuma, se maximuma sincs.
5. A függvény páratlan függvény, mert $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$.
6. Szigorúan monoton nő a $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right]$ intervallumon, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
7. Zérushelye $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.



A $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ definíció alapján $\operatorname{ctg} x$ nem értelmezett, ha $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Az $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ függvény ('kotangensfüggvény') értelmezési tartományából ezeket az értékeket ki kell zárunk.

7. példa

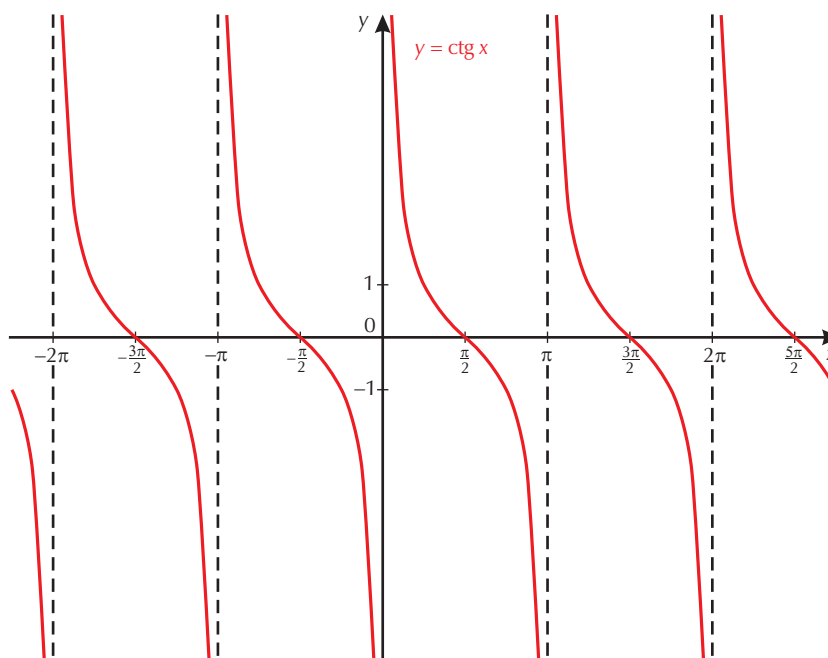
Ábrázoljuk és jellemezzük az $f: \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \operatorname{ctg} x$ függvényt!

Megoldás

A függvény grafikonja a definíció alapján, két függvény hányadosaként rajzolható meg, vagy segítségül hívhatjuk a Geogebra programot is. (A függvénygörbe pontos alakja a differenciálszámítás segítségével állapítható meg.)

A függvény jellemzése:

1. $D_f = \{x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
2. $R_f = \mathbf{R}$.
3. A függvény periodikus, periódusa π .
4. A függvénynek se minimuma, se maximuma sincs.
5. A függvény páratlan függvény, mert $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(-x)$.
6. Szigorúan monoton csökken a $]k\pi; (k+1)\pi[$ intervallumon, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
7. Zérushelye $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.



SZÖGFÜGGVÉNYEK A GYAKORLATBAN (Olvasmány)

A fizika több területén találkozhatunk forgásszögek szögfüggvényeivel.

Például ha egy rugóra testet erősítünk, majd elengedjük, akkor a test **harmonikus rezgőmozgást** végez. Észrevehetjük, hogy ugyanilyen mozgás jellemzi az egyenletes körmozgást végző test vetületét is, ez megkönnyíti a mozgás leírását. Legyen a $t = 0$ időpillanatban egyensúlyi helyzetben a test, ω a körpályán haladó test szögsebessége (ami egyúttal a rezgőmozgás körfrekvenciája); ekkor ha a körmozgást pl. az y tengelyre vetítjük, a rezgőmozgást végző test kitérése $y = A \sin(\omega t)$ alakban adható meg. (A sebessége és a gyorsulása is periodikus: $v_y = A\omega \cos(\omega t)$ és $a_y = -A\omega^2 \sin(\omega t)$. Az ωt fázisszöget radiánban számoljuk.)

A rugalmas közegekben létrehozott deformáció a térben továbbterjed, ez a **mechanikai hullám** jelensége. A harmonikus hullámok időben és térben is periodikusan terjednek, a hullámforrástól adott távolságra lévő részecske kitérése az idő függvényében $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, ahol A az amplitúdó, ω a hullám körfrekvenciája és φ a kezdőfázis. (Ha a hullámforrástól x távolságra vizsgáljuk a részecske mozgását (azaz figyelembe vesszük a térbeli periodicitást), akkor a kitérése bonyolultabb képlettel adható meg: $y = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$, ahol c a hullám terjedési sebessége. A szinuszfüggvény argumentuma, a fázisszög mértékegység nélküli valós szám, radiánban mérjük.)

Speciális hullámokkal foglalkozik a **hangtan**.

Végül mindennapi jelenségünk a **váltakozó áram** vagy **váltóáram**. Ha – bizonyos feltételek mellett – mágneses mezőben egy téglalap alakú keretet forgatunk állandó ω szögsebességgel, akkor a keretben szinuszosan változó feszültséget kapunk, melynek értéke t idő függvényében $U = U_0 \sin(\omega t)$. Nálunk $U = 325 \text{ V} \cdot \sin(314t)$ az elektromos hálózati szabványfeszültség, voltban mérve.

Megjegyzés

A 325 V a csúcshőfeszültség, a frekvencia $f = 50 \text{ Hz}$, így a körfrekvencia $\omega = 2\pi \cdot f = 314 \text{ Hz}$. A feszültség effektív („átlagos”) értéke 230 V .

FELADATOK

1. E1

Írjuk át radiánba a következő szögeket!

$$\alpha = 75^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 300^\circ, 1080^\circ, 32^\circ.$$

2. E1

Írjuk át fokba a következő szögeket!

$$\beta = \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 0,3\pi, 0,324\pi, 1,5.$$

3. E1

Ábrázoljuk a következő függvényeket, majd határozzuk meg, hogy milyen transzformációval juthatunk el az alapfüggvény grafikonjából a végeredményhez! Jellemezzük a függvényeket! Jellemezzük a $h(x)$ és a $k(x)$ feladatban kapott függvényt szélsőérték és monotonitás szempontjából! Keressük meg a függvény zérushelyeit!

$$a) f(x) = 3\sin x, g(x) = -3\sin x, h(x) = 1 - 3\sin x;$$

$$b) l(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), j(x) = \cos 2x, i(x) = 2\cos 2x, k(x) = 2 - 2\cos 2x.$$

4. E1

Ábrázoljuk a valós számok legbővebb részhalmazán az $f: x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény grafikonjából kiindulva az alábbi függvényeket!

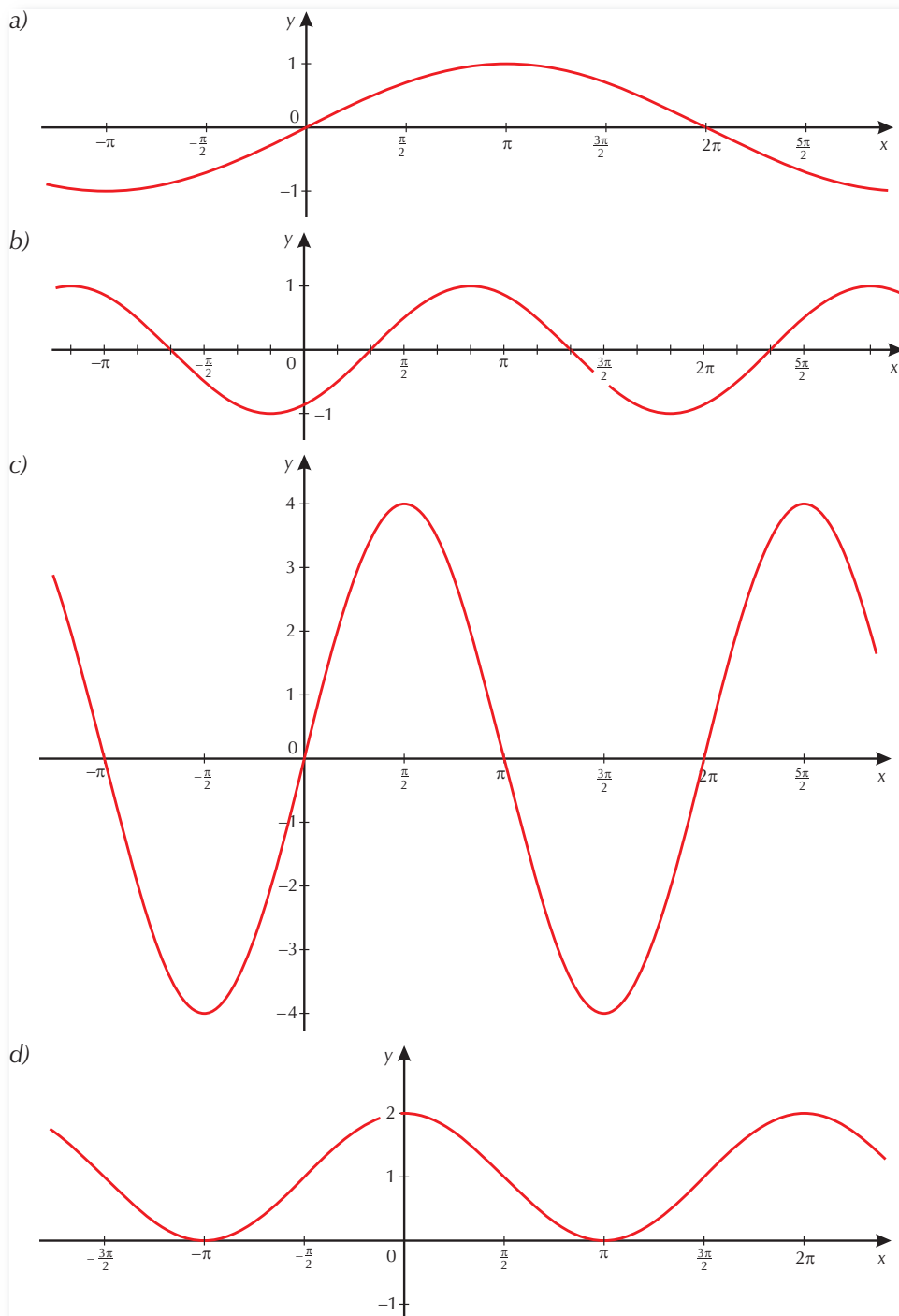
$$g: x \mapsto \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$h: x \mapsto \operatorname{tg} x - 2;$$

$$k: x \mapsto \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

5. E1

Az alábbi ábrákon a $\sin x$ és $\cos x$ függvények transzformációinak grafikonjai láthatók. Adjuk meg a függvények hozzárendelési szabályát!



6. E1

Ábrázoljuk a harmonikus rezgőmozgást végző test $y = A \sin(\omega t)$ kitérését, valamint a sebességét és gyorsulását is egy-egy grafikonon, szabadon választott (pozitív) A és ω értékekkel!

Hogyan módosul a három grafikon, ha a rezgés körfrekvenciája a 2-szeresére nő, illetve az $\frac{1}{3}$ részére csökken?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2741–2776

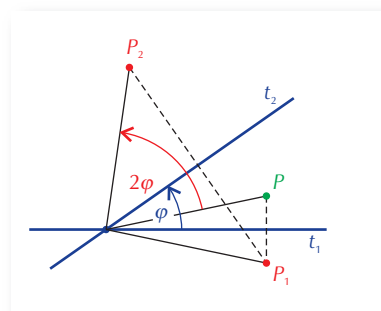
38. TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK 1.

Bevezetésként ismételjünk át néhány geometriai összefüggést!

- Ha két, egymást az O pontban metsző, egymással φ irányított szöget bezáró egyenesre egymás után tükrözzünk, ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha az O körül 2φ szöggel forgatnánk. (Lényeges, hogy φ irányítása az első tengely felől a második felé mutasson.)
- Ha az $(a; b)$ pontot tükrözzük
 - az x tengelyre, akkor az $(a; -b)$;
 - az y tengelyre, akkor a $(-a; b)$;
 - az $x = y$ egyenesre, akkor pedig a $(b; a)$

pontot kapjuk.

A fenti három összefüggésből következik néhány tétel.

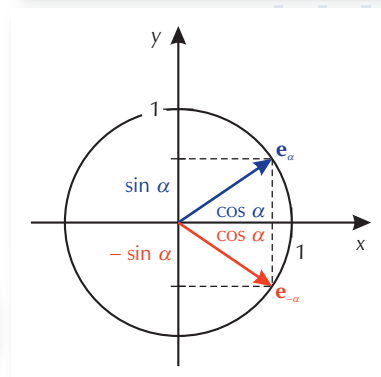


A $(-\alpha)$ SZÖG SZÖGFÜGGVÉNYEI

A $(-\alpha)$ hajlásszögű egységvektor $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$. Ezt az α hajlásszögű $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ egységvektornak az x tengelyre tükrözésével kapjuk, tehát egyenlő a $(\cos \alpha; -\sin \alpha)$ vektorral. Mivel egy vektor csak egyféleképpen írható fel a koordináta-rendszerben, a következő összefüggéseket kapjuk:

Ellentett szögek szögfüggvényei:

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ és $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, ezekből pedig $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ és $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.



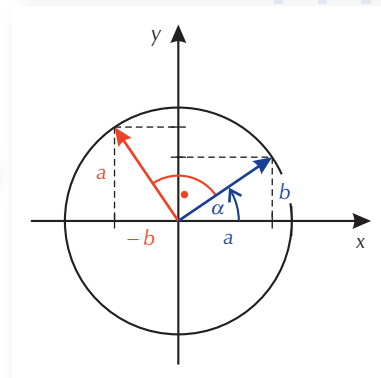
A 90° -KAL ELFORGATOTT VEKTOR KOORDINÁTÁI

Tétel

Ha az $(a; b)$ vektort $+90^\circ$ -kal elforgatjuk, a $(-b; a)$ vektort kapjuk.

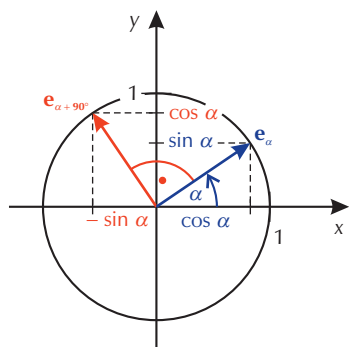
Bizonyítás

A tételt korábban már bizonyítottuk az $\mathbf{i}(1; 0)$ és $\mathbf{j}(0; 1)$ bázisvektorok segítségével. Jelöljük például $\mathbf{v}^\alpha$ módon a $\mathbf{v}$ vektor α szögű elforgatottját! Ekkor $\mathbf{i}_{90^\circ} = \mathbf{j}$ és $\mathbf{j}_{90^\circ} = -\mathbf{i}$, és így $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})_{90^\circ} = a\mathbf{i}_{90^\circ} + b\mathbf{j}_{90^\circ} = a\mathbf{j} + b \cdot (-\mathbf{i}) = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$, ami az állítás bizonyítása.



Megjegyzés

Egy másik lehetőség, ha a $+90^\circ$ -os forgatást az x tengelyre, majd az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel állítjuk elő. A két egyenes bezárt szöge 45° , a két tükrözés helyettesíthető egy $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ -os forgatással. Így $(a; b)$ -ből előbb $(a; -b)$ -t, majd abból a $(-b; a)$ -t kapunk.

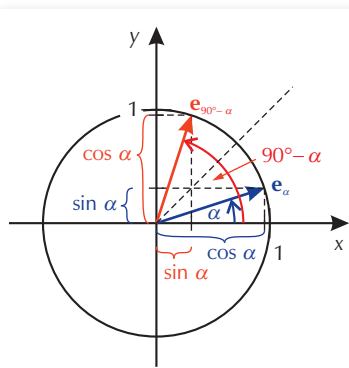


AZ $(\alpha + 90^\circ)$ -OS SZÖG SZÖGFÜGGVÉNYEI

Az $(\alpha + 90^\circ)$ szögű egységvektor $(\cos(\alpha + 90^\circ); \sin(\alpha + 90^\circ))$. Ez megegyezik az α hajlásszögű egységvektor 90° -os elforgatottjával, mely a $(-\sin \alpha; \cos \alpha)$ vektor. Ezért igazak a következő **összefüggések**:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 90^\circ) &= -\sin \alpha; \\ \sin(\alpha + 90^\circ) &= \cos \alpha;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ezekből: } \operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) &= -\operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ) &= -\operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$



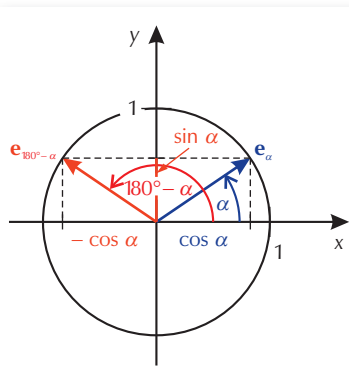
PÓTSZÖG, AZAZ $(90^\circ - \alpha)$ SZÖGFÜGGVÉNYEI

α -ból $(90^\circ - \alpha)$ -t két lépésben kaphatunk: előbb az α hajlásszögű egységvektort tükrözve az x tengelyre kapjuk a $-\alpha$ szögűt, majd azt 90° -kal elforgatva kapjuk a $(90^\circ - \alpha)$ hajlásszögűt. A tükrözés után a $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ vektorból $(\cos \alpha; -\sin \alpha)$ lesz; majd ezt 90° -kal elforgatva a $(\sin \alpha; \cos \alpha)$ vektor.

A pótszögekre vonatkozó összefüggések:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ezekből: } \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$



A KIEGÉSZÍTŐ SZÖG, AZAZ $(180^\circ - \alpha)$ SZÖGFÜGGVÉNYEI

α -ból $(180^\circ - \alpha)$ -t két lépésben kaphatunk: előbb az α hajlásszögű egységvektort tükrözve az x tengelyre kapjuk a $-\alpha$ szögűt, majd azt 180° -kal elforgatva (középpontosan tükrözve) kapjuk a $(180^\circ - \alpha)$ hajlásszögűt. A tükrözés után a $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ vektorból $(\cos \alpha; -\sin \alpha)$ lesz; majd ezt 180° -kal elforgatva a $(-\cos \alpha; \sin \alpha)$ vektor.

Kiegészítő szögek esetén:

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha; \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ezekből: } \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

A $(180^\circ + \alpha)$ SZÖGFÜGGVÉNYEI

Az x , majd az y tengelyre tükrözés:

$$(\cos(180^\circ + \alpha); \sin(180^\circ + \alpha)) = (-\cos \alpha; -\sin \alpha).$$

Így a következő **összefüggéseket** kapjuk:

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha;$$

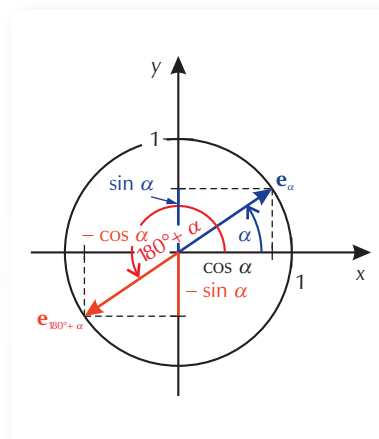
$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\text{ezekből: } \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Megjegyzés

A tangensre és kotangensre felírt összefüggéseknél az értelmezési tartományokat mindig figyelembe kell venni!



ALAPEGYENLETEK (SZÖGEK VISSZAKERESÉSE)

A szögeket fokban mérve jobban „érezzük”, mint radiánban (szemléletesebbek), ezért célszerű a számításokat fokban végezni, majd szükség esetén az eredményt radiánban (valós számként) megadni.

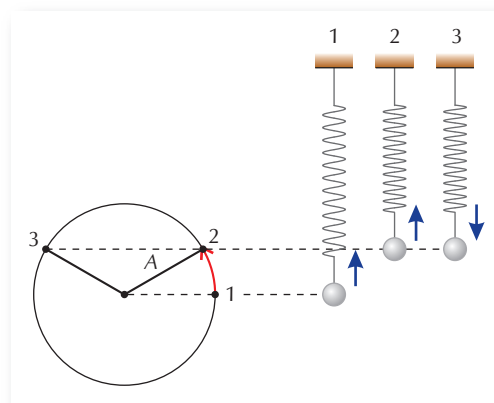
A szögek visszakeresésénél mindig legyünk figyelemmel az értelmezési tartományra!

Az ábrán a harmonikus rezgőmozgást végző test egyensúlyi helyzet-től mért kitérését az egyenletes körmozgást végző test mozgásának vetületével szemléltetjük. A kitérés $y = A \sin \alpha$ alakú (α az időtől függ, az A amplitúdó a szemléltető kör sugara). Az 1. helyzetben a test egyensúlyi helyzetben van, $\alpha = 0$ miatt $y = A \sin 0^\circ = 0$ a kitérés.

Vajon mely α szög esetén lesz a rezgő test kitérése éppen $\frac{A}{2}$, azaz a maximális kitérés fele?

Az ábrán a 2. és 3. helyzet a megfelelő. Az $A \sin \alpha = \frac{A}{2}$ egyenletből $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, vagyis azt a szöget keressük, amelynek szinusza $\frac{1}{2}$. A számológépünk eredményül $\alpha = 30^\circ$ -ot ír ki, de tudjuk, hogy van még egy tompaszögű megoldás is, $\alpha_2 = 150^\circ$. De azt is tudjuk, hogy (ideális esetben) a rezgő test tetszőlegesen sokáig mozog; tehát további megoldások is vannak, amiket a forgásszögek segítségével adhatunk meg.

Ebben a leckében áttekintjük a fentihez hasonló, egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldását, a forgásszögek halmazán.



$$\sin \alpha = c$$

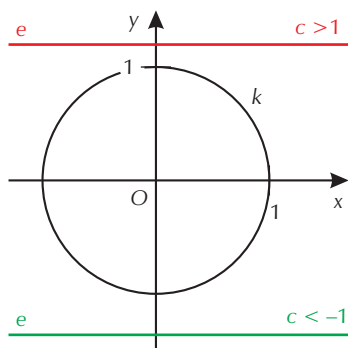
Ha tudjuk a szögfüggvények definícióit, akkor megfogalmazhatjuk az egyenletet másképpen is:

Adjuk meg azokat az α szögeket, amelyekhez tartozó egységvektorok második koordinátája c -vel egyenlő! Tehát a keresett egységvektorra két feltétel van.

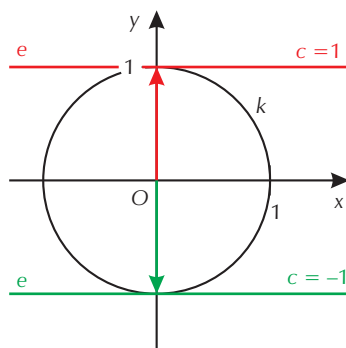
Egyszerű egységnyi, tehát végpontja az origó körüli 1 sugarú körön van.

Másrészt második koordinátája c , azaz végpontjának az $y = c$ egyenesen kell lenni.

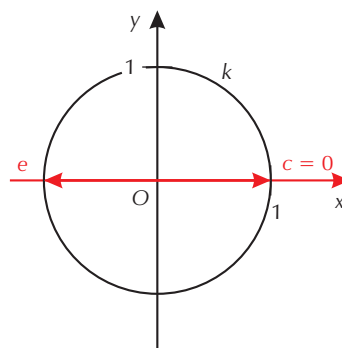
A helyvektor végpontjának mindkét feltételt egyszerre kell teljesítenie. Rajzoljunk!



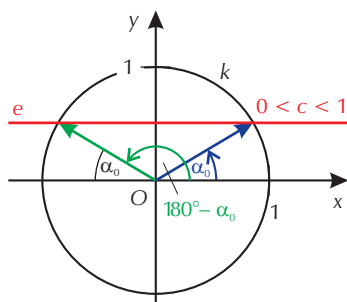
1. ábra



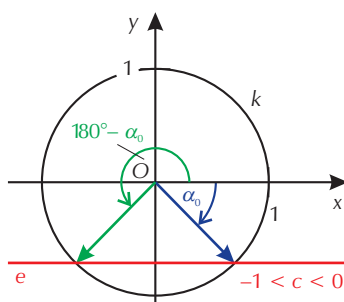
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Hét eset van ezek a megfelelő ábrán láthatók:

1/a. Ha $c > 1$ vagy

1/b. ha $c < -1$, akkor az egységkörnek (k) és az $y = c$ egyenesnek (e) nincs metszéspontja, nincs megoldás (1. ábra).

2/a. Ha $c = 1$ vagy

2/b. ha $c = -1$, akkor k és e érinti egymást, egy megoldás van;

$c = 1$ esetén függőlegesen fölfelé, $c = -1$ esetén lefelé áll az egységvektor (2. ábra).

3. Ha $c = 0$, akkor két vízszintes egységvektort kapunk (3. ábra).

4. Ha $0 < c < 1$, akkor a koordináta-rendszer első és második negyedében lesz egy-egy megoldás (4. ábra).

5. Ha $-1 < c < 0$, akkor a harmadik és negyedik negyedben lesz egy-egy megoldás (5. ábra).

Most rendeljük a vektorokhoz a megfelelő szögeket!

Fontos: Minden szöghöz pontosan egy egységvektor tartozik, de minden egységvektorhoz végtelen sok szög! Egy egységvektorhoz tartozó két szög közt mindig a 360° egész számú többszöröse ($k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$) a különbség.

– Az 1/a. és 1/b. esetben nincs megoldás.

– A 2/a. esetben $\alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

– A 2/b. esetben $\alpha = -90^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. (Vagy: $\alpha = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.)

– A 3. esetben $\alpha = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$ vagy $180^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ez az eredmény egyszerűbben is felírható: $\alpha = k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

- a 4. esetben táblázatból vagy géppel visszakeresve kapunk egy α_0 szöget.

α_0 az első negyedben lévő vektornak az x tengely pozitív felével bezárt szöge. ($\alpha_0 = \arcsin c$, de az inverz függvény jelölése nem egységes a számológépeken: az arcsin mellett gyakori a $\sin^{-1}$ jelölés vagy az INV segédbillentyű.)

A másik vektort az elsőnek az y tengelyre tükrözésével kapjuk, mivel a végpontjukat meghatározó két vonal (az egységkör és az $y = c$ egyenes) is tükrös a tengelyre. Ezért α_0 a másik vektor és az x tengely negatív ága közti szög is. Így ehhez a vektorhoz tartozik a $(180^\circ - \alpha_0)$ szög (4. ábra).

A két vektorhoz tartozó összes szög a megoldás:

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ \quad \text{és} \quad \alpha = (180^\circ - \alpha_0) + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

- az 5. eset a 4. esettől technikailag nem különbözik, formálisan azonos eredményt kapunk. Ha géppel oldjuk meg az $\alpha_0 = \arcsin c$ visszakeresést, α_0 negatív lesz. (Függvénytáblázat alkalmazása esetén lásd a 2. megjegyzést!)

1. megjegyzés

Egy vektorhoz tartozó összes szög megadásakor a vektorhoz tartozó tetszőleges szögből kiindulhatunk.

Például, ha egy vektornak szöge a 77° , akkor szöge a 437° is, így a $77^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$ ugyanazt a megoldáshalmazt jelenti, mint a $437^\circ + l \cdot 360^\circ$, $l \in \mathbf{Z}$.

Hiszen egy tetszőleges k esetén az első felírásból kapott szöget kapjuk, ha a másodikba $l = (k - 1)$ -et helyettesítünk.

2. megjegyzés

Táblázat segítségével csak az 1. negyedbe eső szöget kereshetünk vissza.

Ezért – ha nincs számológépünk – negatív szinuszos függvényérték esetén ($c < 0$, 5 eset) az ellentett pozitív függvényértékkel oldjuk meg az egyenletet, és az eredmény ellentettje adja az „igazi” eredményt. Egy konkrét példa: legyen $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$. Ekkor megoldjuk a $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ egyenletet, amire a táblázat alapján

$\alpha = \arcsin \frac{1}{3} = 19,5^\circ$ adódik. Az eredeti egyenlet megoldása $\alpha_0 \approx -19,5^\circ$, a másik megfelelő egységvektor szöge pedig $180^\circ - (-19,5^\circ) \approx 199,5^\circ$, mint fentebb már láttuk.

Hasonlóan megvizsgáljuk a $\cos x$, $\tan x$ negatív szögfüggvényérték esetét is.

1. példa

A $\sin \alpha = 0,2345$ egyenletet oldjuk meg a valós számok halmazán!

Megoldás

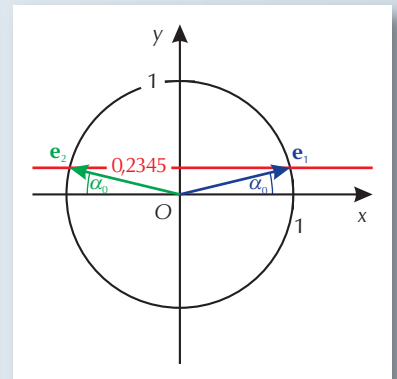
Függvénytáblázatból, vagy géppel azt kapjuk, hogy az $\alpha_0 \approx 13,56^\circ$ közelítő megoldása az egyenletnek, ennyi tehát az 1. negyedben lévő egységvektornak az x tengely pozitív felével bezárt szöge. A másik egységvektornak az x tengely pozitív felével bezárt szöge: $180^\circ - 13,56^\circ \approx 166,44^\circ$. Most már tudjuk, hogy az ábra vektorai: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{13,56^\circ}$ és $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{166,44^\circ}$.

A feladat megoldása:

$$\alpha_1 \approx 13,56^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{és} \quad \alpha_2 \approx 166,44^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

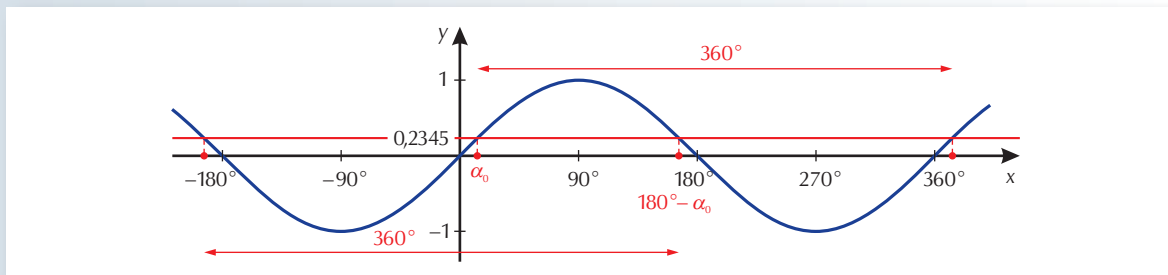
$$\text{Radiánban: } \alpha_1 \approx 0,2367 + k \cdot 2\pi \quad \text{és} \quad \alpha_2 \approx 2,9049 + k \cdot 2\pi.$$

A feladatkitűzés miatt a megoldást a valós számok halmazán radiánban kellett megadnunk.



V. FORGÁSSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

Az egyenletmegoldást grafikusán is szemléltethetjük. Természetesen ekkor csak erősen pontatlanul kapjuk a megoldásokat. Ábrázoljuk a $\sin \alpha$ függvény grafikonját és az $y = 0,2345$ egyenest, ezek metszéspontjainak első koordinátái a megoldások.



$$\cos \alpha = c$$

Szükségünk van a $\cos \alpha = c$ típusú egyenletek megoldására is. A bevezető példánál maradva, ha például a harmonikus rezgőmozgást végző test kezdetben a „felső” (maximális kitérésű) helyzetében van, akkor a mozgását az $y = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos(\omega t)$ függvény írja le az idő függvényében.

Adjuk meg azokat a szögeket, amelyekhez tartozó egységvektorok első koordinátája c -vel egyenlő!

$A c < -1$, $c = -1$, $c = 0$, $c = 1$ és $c > 1$ esetek hasonlóan vizsgálhatók az egység sugarú körben, mint a $\sin \alpha = c$ esetben.

Ha $-1 < c < 0$ vagy $0 < c < 1$, akkor a megoldás: $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ$ és $\alpha = -\alpha_0 + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

A 2. megjegyzést (függvénytáblázatban csak az első síknegyedbeli szögek kereshetők vissza) figyelembe véve most is „ügyeskednünk” kell. Negatív koszinusz függvényérték esetén ismét az ellentett pozitív értékkel oldjuk meg az egyenletet (lásd a következő példát).

2. példa

Oldjuk meg a $\cos x = -0,3$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

A feladat a megoldását a valós számok halmazán, tehát radiánban kell megadnunk (ami mértékegység nélküli valós szám). A $\cos \alpha = -0,3$ egyenletet először fokokban számolva oldjuk meg:

$$\alpha_0 \approx 107,46^\circ \quad (\alpha \approx \pm 107,46^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}).$$

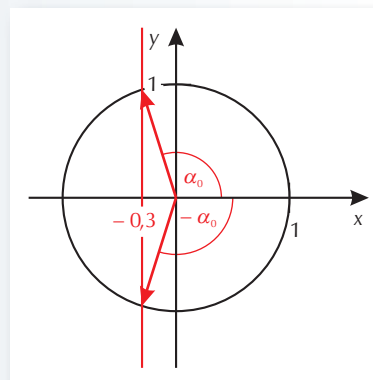
Ezután az eredményt átszámoljuk radiánba:

$$x_0 \approx 107,46 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1,8755, \text{ így az eredmény:}$$

$$x_1 \approx 1,8755 + k \cdot 2\pi, \quad \text{és}$$

$$x_2 \approx -1,8755 + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Az érettségi vizsgán radiánban várják a valós megoldást. (Természetesen azt is megtehetjük, hogy x_0 -t eleve radiánban számoljuk ki a gépünkkel, így gyorsabban célt is érünk.)



Ha a szög visszakereséséhez függvénytáblázatot használunk (**2. megjegyzés**), akkor a következőképpen járhatunk el.

A $\cos \alpha = 0,3$ egyenletből $\alpha = \arccos 0,3 \approx 72,5^\circ$ adódik. Ekkor az eredeti egyenlet (egyik) megoldása $\alpha_0 \approx 107,5^\circ$, s innen már a leírt módon folytathatjuk.

$$\operatorname{tg} \alpha = c$$

Végül áttekintjük a tangens függvényhez kapcsolódó alapegyenlet megoldását is.

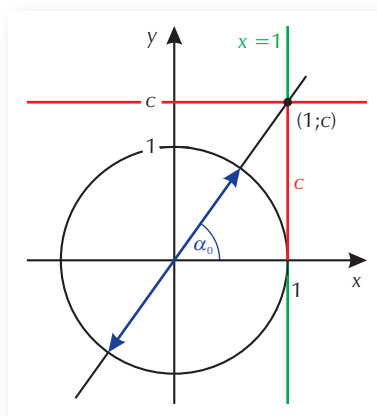
Adjuk meg azokat a szögeket, amelyekhez tartozó egységvektorok egyenese az $x = 1$ egyenest olyan pontban metszi, amelynek második koordinátája c !

Az egységvektor egyenest az origó és az $(1; c)$ pont meghatározza. Ennek az egyenesnek az $x = 1$ egyenletű egyenessel való metszéspontjának második koordinátája c . A két megoldásvektorhoz tartozó szögek közti különbség $k \cdot 180^\circ$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

A szög visszakeresését különböző billentyűkkel jelölhetik a számológépek: $\arctan$ vagy arctg , $\tan^{-1}$ vagy az INV segédbillentyűvel, most az arctg jelölést használjuk. (A tangens függvény inverze az arkusztangens függvény.)

$$\alpha_0 = \arctg c. \text{ Eredmény: } \alpha = \alpha_0 + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ha táblázatot használunk a visszakeresésre, negatív függvényérték esetén ($c < 0$) a 3. példában látott módon járunk el.



A $\operatorname{ctg} \alpha = c$ típusú egyenlet megoldását visszavezethetjük a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{c}$ egyenlet megoldására, ha $c \neq 0$:

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{c}. \text{ Ha } c = 0, \text{ akkor } \alpha_0 = 90^\circ, \text{ és } \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. megjegyzés

A számológépeken általában nincs is ctg gomb (sem az inverze), helyette – a fentieknek megfelelő módon – a tg billentyűt használhatjuk.

3. példa

Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x = -1$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

A keresett egységvektor egyenese átmegy az $(1; -1)$ ponton, így fokokban számolva $\alpha_0 = 135^\circ$ megoldás.

$$\text{Az összes ilyen szög: } \alpha = 135^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ebből a $\operatorname{tg} x = -1$ megoldása a valós számhalmazon:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ha α_0 -t géppel az $\alpha_0 = \arctg \frac{1}{C}$ -vel határozzuk meg, akkor $\alpha_0 = -45^\circ$ -ot kapunk, és az összes ilyen szöget $\alpha = -45^\circ + l \cdot 180^\circ$, $l \in \mathbb{Z}$ alakban kapnánk.

A két eredmény különbözik. Hibáztunk valahol? Az 1. megjegyzés alapján erre is válaszolhatunk.

4. példa

Oldjuk meg a $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Az egyenlet a valós számok halmazán áll fenn, így

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Egy ábrán rajzoljuk be a lehetséges egységvektorokat:

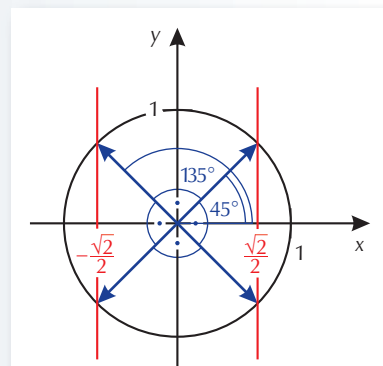
$$\alpha_0 = +45^\circ \text{ vagy } \alpha_0 = +135^\circ.$$

Észrevehető, hogy a négy vektor 90 fokonként követi egymást, így $\alpha = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tehát a valós megoldások:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Mint korábban is írtuk, aki kellően gyakorlott, már rögtön radiánban számolhat.)



Fogalmak

trigonometrikus
alapegyenletek;
trigonometrikus
alapegyenlőt-
lenségek.

FELADATOK

1. E1

A koordináta-rendszer tengelyei irányába mutató egységvektorokhoz ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$) rendeljük hozzá a nekik megfelelő összes szöget, illetve azok szögfüggvényértékeit!

2. E1

A koordináta-rendszer negyedéibe írjuk be, hogy az abban a negyedben lévő egységvektor szögeinek szögfüggvényértékei milyen előjelűek!

3. E1

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\tg x = 1$;

b) $\tg \alpha = 3$;

c) $\ctg x = -\sqrt{3}$;

d) $\ctg \alpha = 0,3333$;

e) $\sin \alpha = 0$;

f) $\sin x = 3$;

g) $\cos x = 1$;

h) $\cos \alpha = 0,3333$.

x valós számot, α fokban mért szöget jelent.

4. E1

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2 \sin x + 3 \cos x = 6$;

c) $\sin^2 x = 0,25$;

b) $2 \tg x + 2 \ctg x = 3$;

d) $4 \sin^2 x + 4 \cos x - 5 = 0$.

5. E1

Szögei alapján milyen tulajdonságú az a háromszög, amelyben $\sin(2\alpha) = \sin(2\beta)$?
András szerint a megoldás könnyű, $2\alpha = 2\beta$ miatt a háromszög biztosan egyenlő szárú.
Anna szerint azonban a megoldás nem ilyen egyszerű. Mire gondolhatott?

6. E1

Egy részecske harmonikus rezgőmozgást végez $f = 2 \text{ s}^{-1}$ frekvenciával (azaz másodpercenként két teljes rezgést végez) és 6 cm amplitúdóval. Ekkor a körfrekvenciája $\omega = 2\pi f \approx 12,57 \text{ s}^{-1}$.

a) Igazoljuk, hogy a rezgőmozgás periódusideje $T = 0,5 \text{ s}$, a részecske maximális sebessége pedig (amivel áthalad az egyensúlyi helyzeten) $v_{\max} \approx 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$!

b) Ha a mozgás kezdőfázisa $\varphi = 0$ (azaz a $t = 0$ időpillanatban a kitérése 0), akkor a részecske kitérésének és sebességének időfüggése $y = 0,06 \cdot \sin(12,57t) \text{ m}$ és $v = 0,75 \cdot \cos(12,57t) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ alakú. Számítsuk ki azokat az időpillanatokat, amikor a részecske kitérése 4 cm, illetve amikor a sebessége $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$! (Radiánban számoljunk!)

7. E1

Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett, $f: x \mapsto \sin^2 x - 4\sin x$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény értékkészletét!

8. E2

Próbáljuk meghatározni az $f: x \mapsto \sin x \cdot \cos x$ és $g: x \mapsto \sin x + \cos x$ hozzárendelési szabállyal megadott függvények értékkészletét ($x \in \mathbf{R}$)! (Segítség: Először az első síknegyedben keressük meg a függvények maximumát. Alkalmazhatjuk például a mértani, számtani és négyzetes közepek közötti összefüggéseket.)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2777–2780, 2876–2880.

39. TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK 2.

Ebben a leckében bonyolultabb trigonometrikus egyenleteket oldunk meg. Az egyenletben két (esetleg különböző) szögfüggvény jelenik meg, és speciális megoldási módszereket is megvizsgálunk.

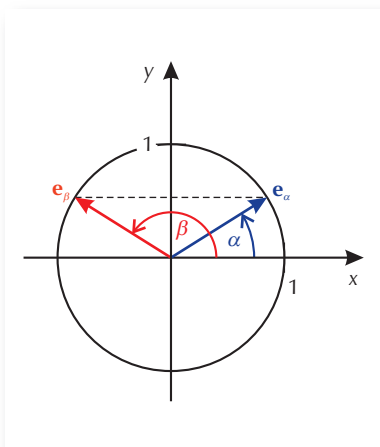
A $\sin \alpha = \sin \beta$ ÉS $\sin \alpha = \cos \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK MEGOLDÁSA

A $\sin \alpha = c$ típusú egyenletek megoldása után természetes gondolatnak tűnik a $\sin \alpha = \sin \beta$ típusú egyenletek vizsgálata. (Ilyen problémára vezet például két azonos amplitúdójú, különböző kezdőfázisú harmonikus rezgés vizsgálata. Ha kitérésük az idő függvényében $A \sin \alpha$, ill. $A \sin \beta$ alakú, akkor a fenti típusú egyenlet megoldása adja meg az azonos kitérés időpontjait.)

Konvex szögek körében (pl. háromszögek szögeit vizsgálva) nincs nehéz dolgunk.

Például a $\sin(2\alpha - 27^\circ) = \sin(\alpha + 27^\circ)$ egyenlet két esetben teljesülhet:

- ha az argumentumok egyenlők, azaz $2\alpha - 27^\circ = \alpha + 27^\circ$;
- vagy ha egymás kiegészítő szögei: $(2\alpha - 27^\circ) + (\alpha + 27^\circ) = 180^\circ$.



Az első esetben $\alpha = 54^\circ$ (valóban: $\sin 81^\circ = \sin 81^\circ$), a második esetben $\alpha = 60^\circ$. (Itt is ellenőrizzük: $\sin 93^\circ = \sin 87^\circ$.)

Forgásszögek esetében azonban bonyolultabb a helyzet, hiszen egységvektorok második koordinátája a fentiektől különböző esetekben is lehet egyenlő. (Például az 54° vagy az $(54^\circ + 360^\circ)$ szögek szinusza megegyezik.)

Keressünk általános módszert a $\sin \alpha = \sin \beta$ típusú egyenletek megoldására!

Vagyis: Az α és β hajlásszögű egységvektor második koordinátája egyenlő. Milyen összefüggés van α és β között?

Két eset lehetséges: vagy a két egységvektor egybeesik, vagy egymás tükörképei az y tengelyre. Előbbi esetben szögeik közt $k \cdot 360^\circ$ a különbség, a másodikban szögeik összege $180^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Eredmény: $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ$ vagy $\alpha + \beta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$. (Egy másik felírási lehetőség: $\alpha = \beta + k \cdot 360^\circ$ vagy $\alpha = 180^\circ - \beta + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.)

1. példa

Oldjuk meg a $\sin(2\alpha - 27^\circ) = \sin(\alpha + 27^\circ)$ egyenletet!

Megoldás

I. $(2\alpha - 27^\circ) - (\alpha + 27^\circ) = \alpha - 54^\circ$, így $\alpha - 54^\circ = k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow \alpha = 54^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.

II. $(2\alpha - 27^\circ) + (\alpha + 27^\circ) = 3\alpha$, így $3\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ + k \cdot 120^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.

Eredmény: $\alpha = 54^\circ + k \cdot 360^\circ$ vagy $\alpha = 60^\circ + k \cdot 120^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.

Megjegyzés

Az utolsó egyenletben mindkét oldalt osztottuk 3-mal. Ne felejtjük el, hogy a periódust is osztani kell!

A $\sin \alpha = -\sin \beta$ típusú egyenletekre is alkalmazható a megoldási módszerünk. $-\sin \beta = \sin(-\beta)$, így $\sin \alpha = \sin(-\beta)$ módon az egyenlet visszavezethető az eredeti típusra.

Mit tehetünk, ha $\sin \alpha = \cos \beta$?

Ezt az esetet például a $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$ összefüggés alapján visszavezethetjük az előző esetre.

2. példa

Oldjuk meg a $\sin(2\alpha - 27^\circ) = \cos(-\alpha + 63^\circ)$ egyenletet!

Megoldás

Az egyenlet visszavezethető a $\cos(-\alpha + 63^\circ) = \sin(90^\circ - (-\alpha + 63^\circ)) = \sin(\alpha + 27^\circ)$ összefüggés alapján az előző példára.

A $\cos \alpha = \cos \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK

Ez a típus egyrészt az előzőek alapján visszavezethető a $\sin \alpha = \sin \beta$ alakú egyenlet megoldására.

Másrészt önmagában is megoldható az egyenlet, hiszen az α és β hajlásszögű egységvektor első koordinátája egyenlő. Milyen összefüggés van α és β között?

Két eset lehet: a két egységvektor vagy egybeesik, vagy egymás tükörképei az x tengelyre. Előbbi esetben a szögek közti különbség $k \cdot 360^\circ$, a másodikban szögek összege $k \cdot 360^\circ$.

Eredmény: $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ$ vagy $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$. (Másképpen: $\alpha = \beta + k \cdot 360^\circ$ vagy $\alpha = -\beta + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.)

3. példa

Oldjuk meg a $\cos(2\alpha - 27^\circ) = \cos(-\alpha + 63^\circ)$ egyenletet!

Megoldás

$(2\alpha - 27^\circ) - (-\alpha + 63^\circ) = 3\alpha - 90^\circ$, így $3\alpha - 90^\circ = k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ + k \cdot 120^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$ vagy

$(2\alpha - 27^\circ) + (-\alpha + 63^\circ) = \alpha + 36^\circ$, így $\alpha + 36^\circ = k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow \alpha = -36^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.

Eredmény: $\alpha = 30^\circ + k \cdot 120^\circ$ vagy $\alpha = -36^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.

A $\cos \alpha = -\cos \beta$ típusú egyenletekre is alkalmazható a megoldási módszerünk. $-\cos \beta = \cos(180^\circ - \beta)$, így $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta)$ módon az egyenlet visszavezethető az eredeti típusra.

A $\tan \alpha = \tan \beta$ ÉS $\tan \alpha = \cot \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK MEGOLDÁSA

$\tan \alpha = \tan \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = k \cdot 180^\circ$.

Vagyis: Az α és β hajlásszögű egységvektor egyenese egybeesik. Milyen összefüggés van α és β között?

Két eset lehet: a két egységvektor vagy egybeesik, vagy ellentétes irányúak. Ez úgy lehetséges, ha szögek közt a különbség $k \cdot 180^\circ$.

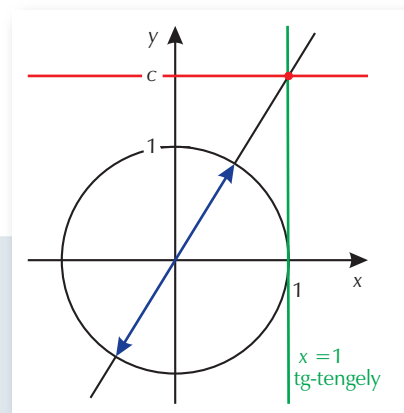
4. példa

Oldjuk meg a $\tan(2\alpha - 27^\circ) = \tan(-\alpha + 27^\circ)$ egyenletet!

Megoldás

$(2\alpha - 27^\circ) - (-\alpha + 27^\circ) = 3\alpha - 54^\circ$, így $3\alpha - 54^\circ = k \cdot 180^\circ$.

Eredmény: $\alpha = 18^\circ + k \cdot 60^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.



A $\tan \alpha = \cot \beta$ típusú egyenleteket pedig a $\cot \beta = \tan(90^\circ - \beta)$ összefüggés alapján visszavezetjük a $\tan \alpha = \tan \beta$ esetre.

SZORZATTÁ ALAKÍTÁSSAL MEGOLDHATÓ EGYENLETEK

5. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
 $\operatorname{tg} x - 2 \sin x = 0.$

Megoldás

Feltétel: $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\operatorname{tg} x - 2 \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2 \right) = 0, \text{ ahonnan}$$

$\sin x = 0$ vagy $\cos x = 0,5$.

Eredmény: $x_1 = k \cdot \pi$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!
 $\cos^6 x = \cos^4 x.$

Megoldás

$$0 = \cos^4 x (\cos^2 x - 1) = \cos^4 x (-\sin^2 x). \text{ Innen}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{vagy} \quad \sin x = 0.$$

A megoldásokat összevonhatjuk, eredmény: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!
 $4 \sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1) \cos x + \sqrt{3} = 4.$

Megoldás

Jobb oldalra rendezve és áttérve $\cos x$ -re:

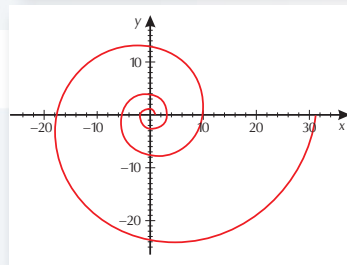
$$0 = 4(1 - \sin^2 x) - 2\sqrt{3} \cos x + 2 \cos x - \sqrt{3} =$$

$$= 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cos x + 2 \cos x - \sqrt{3} = 2 \cos x (2 \cos x - \sqrt{3}) + (2 \cos x - \sqrt{3});$$

$$0 = (2 \cos x + 1)(2 \cos x - \sqrt{3});$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Eredmény: $x_1 = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ vagy $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



A logaritmus spirális pontjainak koordinátái: $x = 1,2^t \cdot \cos(t)$ és $y = 1,2^t \cdot \sin(t)$, ahol $t \in [0; 6\pi]$

Megjegyzés

A $\cos x = u$ helyettesítéssel egy másodfokú egyenlethez jutunk, aminek megoldása szintén megadja $\cos x$ lehetséges értékeit.

A 7. példában „ha lehet, egy szög egyfajta szögfüggvénye (pl. csak $\sin x$ vagy csak $\cos x$) szerepeljen az egyenletben” elvet használtuk. Ezt a későbbiekben is alkalmazzuk.

MÁSODFOKÚRA VEZETŐ EGYENLETEK**8. példa**

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$ egyenletet!

Megoldás

Feltétel: $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1.$$

$$\text{Eredmény: } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

9. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Megoldás

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0;$$

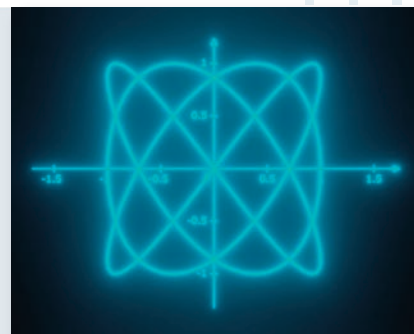
$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \quad y = \cos x \text{ helyettesítéssel:}$$

$$2y^2 + y - 1 = 0, \quad D = 9, \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -1.$$

Visszahelyettesítve

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos x = -1.$$

$$\text{Eredmény: } x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Lissajous-görbe. Rezgések kompozíciója

10. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

Megoldás

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8};$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{16} \quad \text{és} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (u = \sin^2 x, v = \cos^2 x).$$

Azaz két szám szorzata $\frac{3}{16}$ és összege 1. A két szám így $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{4}$.

Szimmetriaokok miatt is igaz, de ha az u -val és v -vel felírt egyenletrendszerből kapott másodfokú egyenletet megoldjuk, akkor is kiderül, hogy két egyenletrendszert kell felírunk:

$$a) \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ \cos^2 x = \frac{3}{4} \end{cases}; \quad b) \begin{cases} \sin^2 x = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Itt csak az első oldjuk meg, az is több alapesetre válik szét:

$$a) \text{ eset: } \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ \cos^2 x = \frac{3}{4} \end{cases}, \text{ amiből } \begin{cases} |\sin x| = \frac{1}{2} \\ |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ ez négyféleképpen lehetséges:}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Egy egységkörben ábrázolva a megfelelő vektorokat, kapjuk:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{és} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A b) esetet is figyelembe véve a feladat megoldása:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Fogalmak
trigonometrikus
egyenletek.

FELADATOK

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

1. E2

$$a) \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{x}{3}\right); \quad b) \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{x}{3}\right); \quad c) \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{x}{3}\right).$$

2. E1

$$a) \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{x}{3}\right); \quad b) \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{x}{3}\right).$$

3. E1

$$a) 2 \cos x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x; \quad b) -2 \sin x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x; \quad c) 2 \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x.$$

4. E1

$$a) \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2; \quad b) \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 3.$$

5. E1 Határozzuk meg az $f(x) = \cos^2 x - \cos x + 2$ függvény értékkészletét ($x \in \mathbb{R}$)!

6. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!
a) $\sin \alpha - \cos \alpha = 1$; b) $2 \sin x \cos x = 1$.

7. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!
a) $\sin(2\alpha - 10^\circ) = -0,3$; b) $\cos(50^\circ - \alpha) = 0,4$; c) $\operatorname{tg}(3\alpha + 36^\circ) = 2,5$.

8. E1 Két részecske harmonikus rezgőmozgást végez $\omega = 18 \text{ s}^{-1}$ körfrekvenciával és 5 cm amplitúdóval. Különböző a kezdőfázisuk, így a kitérésük időfüggése $y = 0,05 \cdot \sin(18t)$ és $y = 0,05 \cdot \sin\left(18t + \frac{\pi}{3}\right)$. Számítsuk ki azokat az időpillanatokot, amikor
a) a két részecske kitérése egyenlő;
b) a részecskék kitérése éppen ellentettjei egymásnak;
c) a részecskék sebessége egyenlő!
(Radiánban számoljunk!)

9. E2 Az alábbi két ikerfeladat egyikének **hibás** az eredménye. Mi lehet a hiba?

a) Mennyi $3 \cdot \sin x \cdot \cos x$ értéke, ha $\sin x + \cos x = 1,5$?

„Megoldás”: $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, így
 $3 \cdot \sin x \cdot \cos x = 3 \cdot \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}$. Eredmény: $3 \cdot \sin x \cdot \cos x = 3 \cdot \frac{1,5^2 - 1}{2} = \frac{15}{8}$.

b) Mennyi $2(\sin x + \cos x)$ értéke, ha $\sin x \cdot \cos x = 0,4$?

„Megoldás”: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1,8 \Leftrightarrow |\sin x + \cos x| = \sqrt{1,8} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{1,8} \text{ vagy } -2\sqrt{1,8}$.

Hol a hiba?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2789–2804, 2805–2812, 2813–2818, 3283–3284, 3232–3234.



40. TRIGONOMETRIKUS EGYENLŐTLENSÉGEK

Ebben a leckében az egyszerűbb trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldását tekintjük át.

1. példa

(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2020.)

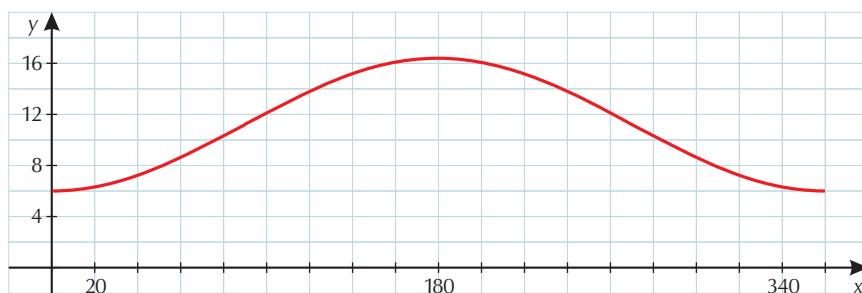
Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5,2 \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11,2,$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \leq n \leq 365$, $n \in \mathbf{N}$).

Az alábbi ábra a $g: [1; 365] \rightarrow \mathbf{R}$; $g(x) = -5,2 \cos\left(\frac{x+8}{58}\right) + 11,2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f -nek egy folytonos kiterjesztése.)



Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyek 12 óránál hosszabb!

Megoldás

Az $f(n) > 12$ (ehhez pedig a $g(x) > 12$) egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

A g függvényt a valós számokon értelmezzük (radián!), ezért először ezen a halmazon megoldjuk a $g(x) = 12$ egyenletet. Egyszerűség kedvéért az $\alpha = \frac{x+8}{58}$ helyettesítést alkalmazzuk.

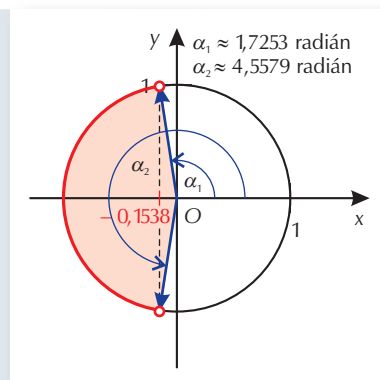
$-5,2 \cos \alpha + 11,2 = 12 \Leftrightarrow \cos \alpha \approx -0,1538$, innen $\alpha_1 \approx 1,7253$. A második alapg megoldás $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 \approx 4,5579$. Az α -khoz tartozó x értékek $\alpha = \frac{x+8}{58}$ alapján $x = 58\alpha - 8$, így $x_1 \approx 92,07$ és $x_2 \approx 256,37$.

A g függvény ábrájáról leolvashatjuk a monotonitási tulajdonságokat. Ez alapján az $f(n) > 12$ egyenlőtlenség megoldásai azok az n -ek, amelyekre $93 \leq n \leq 256$. A 12 óránál hosszabb nappalok száma tehát $256 - 92 = 164$, mint ahogy a feladat állította.

Megjegyzés

A feladat háttérében a $-5,2 \cos \alpha + 11,2 > 12$, azaz a $\cos \alpha < -0,1538$ egyenlőtlenség megoldása áll. Az egység sugarú körön szemléltethetjük a megoldást adó megfelelő ívet, mely szerint $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$.

Az egyenlőtlenség megoldásában segített, hogy az $f(n)$ függvény a koszinusz függvénynek közelítőleg egy periódusát tartalmazta: $\frac{365}{58} \approx 6,25$, ami kb. egyenlő 2π -vel. Lényegesen nehezebb a feladatunk, ha a trigonometrikus egyenlőtlenségeket forgásszögekre oldjuk meg, hiszen ekkor végtelen sok megfelelő intervallum lehetséges.



A továbbiakban ilyen egyenlőtlenségeket oldunk meg (tehát amelyek alaphalmaza a tetszőleges értéket felvevő forgásszögek halmaza).

2. példa

Oldjuk meg a $\sin \alpha > -0,5$ egyenlőtlenséget!

Vagyis: Adjuk meg azokat a szögeket, amelyekhez tartozó egységvektorok második koordinátája nagyobb $-0,5$ -nél!

Megoldás

Jelöljük a koordináta-rendszer azon pontjait, melyeknek 2. koordinátája nagyobb mint $-0,5$! A határoló $y = -0,5$ egyenes pontjai nem jók, ezért szaggatottan rajzoljuk, a fölötté lévő félsík minden pontja megfelel, ezeket besatírozzuk. Megrajzoljuk az egységkört is.

A feltételnek megfelelő vektorok végpontjai a satírozott részben és az egységkörön vannak, kijelöljük ezeket a pontokat. A körív végpontjai nem jók, ezt üres karikával jelöljük. Rajzoljuk be a két végpontba mutató egységvektort is! Az egyik a 210° -os, a másik a 330° -os szöghöz tartozik. Szokásos jelölésük: e_{210° és e_{330° .

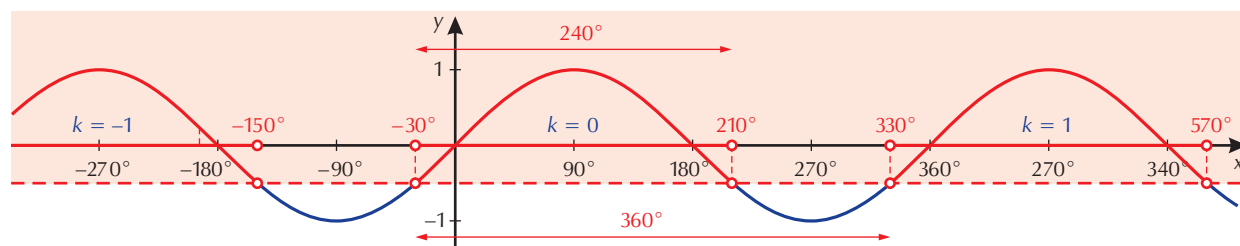
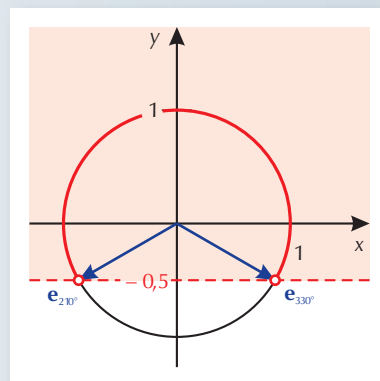
Ha pozitív irányban forgatunk egy egységvektort, akkor végpontja áthalad a feladat szempontjából megfelelő és rossz pontokon is.

Ezek alapján a megoldás, azaz az összes megfelelő szögintervallum:

$$-30^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 210^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Az intervallumokat másképp is megadhatjuk, például $330^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 570^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ is megfelel.)

Nézzük meg, hogy grafikusán ez mit jelent:



A továbbiakban már kevésbé részletezzük a feladatok megoldását.

3. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget!
 $\operatorname{tg} \alpha > -2$.

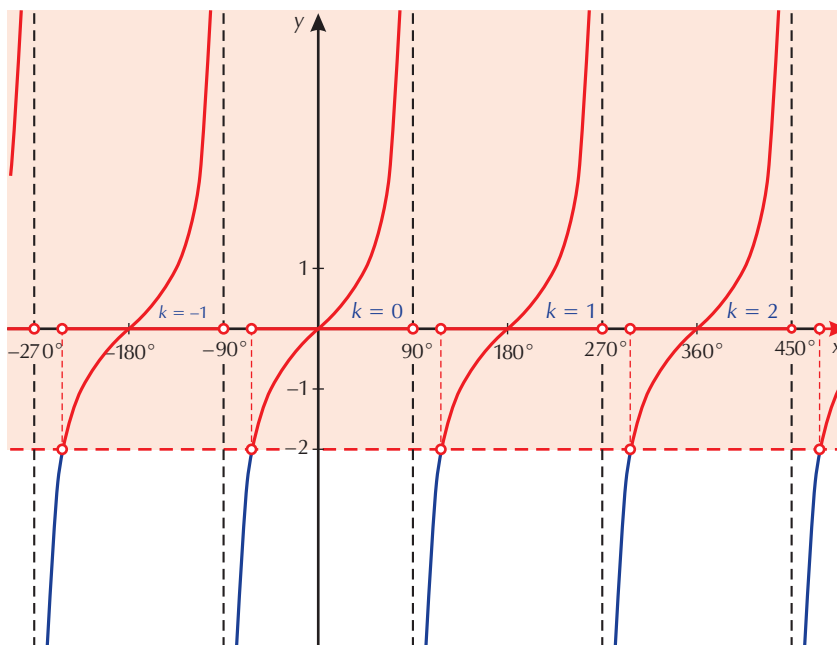
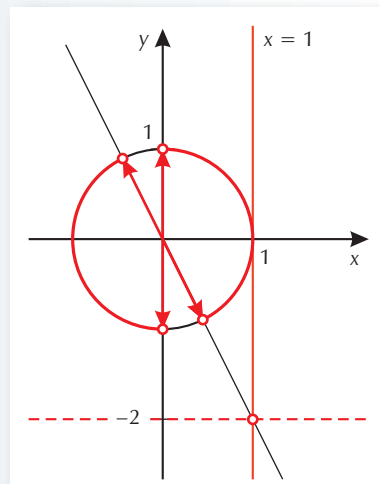
Megoldás

A $\operatorname{tg} \alpha = -2$ esetén gépünk $\alpha_0 \approx -63,43^\circ$ eredményt ad. Az $x = 1$ egyenesen kiemeltük a (-2) -nél nagyobb második koordinátájú pontokat. A megoldáshoz tartozó szögek egységvektorának egyenese itt metszi az $x = 1$ egyenletű egyenest. Az ábra kiemelt íveihez tartozó szögintervallumok adják a megoldást:

$$-63,43^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Észrevehetjük, hogy a 180° -os periódussal az ábrán látható mindkét körívet megadtuk.

Grafikusan ezt az alábbi ábrán láthatjuk:



4. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget!
 $\cos \alpha > -0,5$.

Megoldás

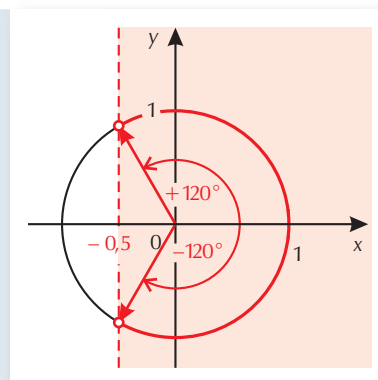
Az ábrán látható kiemelt íven lehetnek a megoldásnak megfelelő egységvektorok végpontjai.

Pozitív forgásirányban a megfelelő szögintervallum az $\mathbf{e}_{-120^\circ}$ vektornál kezdődik és az $\mathbf{e}_{120^\circ}$ -ban végződik.

$$-120^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < (-120^\circ + 240^\circ) + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Eredmény: } -120^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 120^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Az eredményt felírhattuk volna pl. $240^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 480^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$ alakban is.



5. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \leq 0.$$

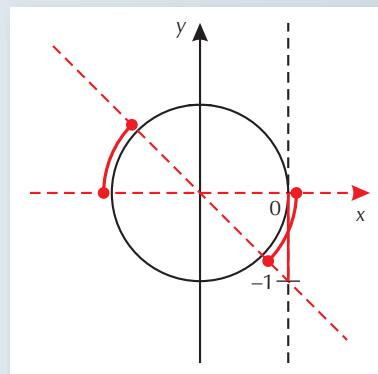
Megoldás

$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) \leq 0$ csak úgy lehet, ha egyik tényező nempozitív, a másik nemnegatív. Mivel a 2. tényező nagyobb, a következő egyenlőtlenségrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x + 1 \geq 0 \end{cases}, \text{ azaz } -1 \leq \operatorname{tg} x \leq 0. \text{ Az ábráról leolvasható a megoldás:}$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

(A kapott értékek benne vannak az egyenlet alaphalmazában.)



6. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2} \leq 0.$$

Megoldás

Vezessük be az $u = \sin x$ jelölést. Az $f(u) = u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}$ függvényt kapjuk, a megoldóképlet segítségével a gyökök az 1 és az $\frac{1}{2}$. Mivel a függvény képe „mosolygós” parabola, a két gyök közt vesz fel negatív értékeket; az $f(u) \leq 0$ egyenlőtlenség megoldása $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$. Visszaírva u helyére a $\sin x$ -et, a megoldandó egyenlőtlenségrendszer: $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$.

A jobb oldal mindig teljesül. A feladat megoldása: $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

7. példa

Az ABC háromszögben $a = 6$ egység, $b = 10$ egység.

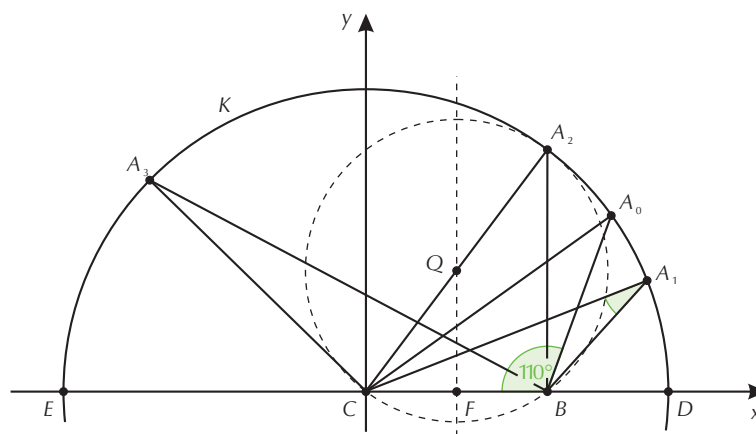
a) Milyen határok között változhat α , ha $\beta > 110^\circ$?

b) Milyen határok között változhat α , ha $\beta < 110^\circ$?

Megoldás

Mivel $a < b$, így $\alpha < \beta$.

a) A szinusztétel szerint $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$, így $\sin \alpha = \frac{a}{b} \sin \beta \approx 0,5638$, ha $\beta = 110^\circ$. Ha β nő, akkor $\sin \beta$ csökken ($\beta < 180^\circ$), tehát $\sin \alpha < 0,5638$. Az egyenlőtlenség közelítő megoldása $\alpha < 34,32^\circ$ vagy $\alpha > 145,68^\circ$, de ez utóbbi az $\alpha < \beta$ feltétel miatt nem lehetséges.



Az ábrán a C középpontú, $b = 10$ egység sugarú K félkör látható, ennek A_0 pontjára $\angle CBA_0 = 110^\circ$ (azaz $\angle CA_0B = 34,32^\circ$). Ha most a háromszög A csúcsát a köríven D felé mozgatjuk (pl. A_1 helyzet), akkor α tetszőlegesen kis értéket felvehet (α csökken), így az eredmény: $0^\circ < \alpha < 34,32^\circ$.

b) Használjuk például a Geogebra programot! Ha $\beta < 110^\circ$, akkor – a programmal az A pontot A_0 felől E pont felé mozgatva a köríven – úgy tűnik, hogy egy ideig α nő, majd E felé közeledve ismét csökken, és tetszőlegesen kis értékeket is felvehet (A_2 helyzet). Hogyan tudjuk a maximális α -hoz tartozó A_3 pontot meghatározni?

Ha $\angle CA_3B$ maximális, akkor a C, A_3, B pontokon áthaladó k kör belülről érinti K -t. Ugyanis k a CB szakasz egy látóköre, és K -nak az A_3 ponton kívül minden más pontja a látókörön kívüli pont; ezekből pedig a CB szakasz kisebb szögben látszik, mint a látókör A_3 pontjából.

A Thalész-tétel miatt $\angle CBA_3 = 90^\circ$, $\sin \angle CA_3B = \frac{6}{10}$, $\angle CA_3B \approx 36,87^\circ$.

Eredmény: $0^\circ < \alpha < 36,87^\circ$.

8. példa

Az ABC háromszögben $a = 6$ egység, $b = 10$ egység. Milyen határok között változhat a c oldal hossza, ha $\gamma < 110^\circ$?

Megoldás

A koszinusztételből $c^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos \gamma = 136 - 120 \cdot \cos \gamma$. Ha $0^\circ < \gamma < 110^\circ$, akkor $1 > \cos \gamma > -0,3420$ (az intervallumon a $\cos x$ függvény csökkenő). Így c^2 legnagyobb értéke kb. $136 - 120 \cdot (-0,3420) = 177,04$, legkisebb értéke pedig $136 - 120 = 16$ -nál nagyobb.

Eredmény: $4 < c < \sqrt{177,04} \approx 13,31$.

($c > 4$ a háromszög-egyenlőtlenségből is adódik.)

Tehát a c oldal hossza nagyobb, mint 4 egység és legfeljebb 13,31 egység.

Fogalmak
trigonometrikus
egyenlőtlenségek.

FELADATOK

1. E1

Egy általános négyszög alakú teret szeretnénk leaszfaltozni. A tér négy oldala 40 m, 36 m, 52 m és 32 m, valamelyik körüljárási irányban. Az első két oldal által bezárt szög 100° -os. Mekkora a tér területe? Hány m^3 aszfaltra van szükség, ha legalább 10 cm vastagon szeretnénk aszfaltozni?

2. E1

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\sin x \geq 0,6$;

c) $\cos x \leq 0,3$;

e) $\operatorname{tg} x \leq 2,8$.

b) $\sin x < -0,6$;

d) $\cos x > 0,3$;

3. E2

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\sin(2x - 40^\circ) < 0,7$;

c) $\cos(30^\circ - 2x) > 0,2$;

b) $\sin(x + 50^\circ) \geq -0,5$;

d) $\cos(3x - 150^\circ) \geq 0,6$.

4. E1

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket!

a) $\sin^2 x > 0,25$;

b) $\cos^2 x < 1$

c) $|\operatorname{tg}(2x)| \geq 1$.

5. E2

Az ABC háromszög két oldala $AB = 12$ cm és $AC = 14$ cm hosszú, területe pedig kisebb mint 42 cm^2 . Milyen hosszú lehet a BC oldal, illetve az A csúcshoz tartozó súlyvonal?

6. E2

Egy részecske harmonikus rezgőmozgást végez, kitérésének és sebességének időfüggése $y = 0,06 \sin(12,57t)$ m és $v = 0,75 \cos(12,57t) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ alakú. Számítsuk ki azokat az időintervallumokat, amikor a részecske kitérése legalább 4 cm, illetve amikor a sebessége legfeljebb $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$! (Radiánban számoljunk!)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III: 2876–2893, 3350–3392.

VI. KOORDINÁTA- GEOMETRIA

A koordinátageometriában geometriai fogalmaknak, alakzatoknak (például pont, egyenes, kör, parabola) algebrai fogalmakat (számpár, egyenlet, függvény) feleltetünk meg. A geometriai feladatok megoldása során algebrai eszközöket használunk és a megoldást végül újra a geometria nyelvén adjuk meg. Ponthalmazok meghatározásához a pontokat nem körzővel, vonalzóval szerkesztjük meg, hanem koordinátáikat egyenletrendezéssel határozzuk meg.

A koordinátageometria a matematikának viszonylag új területe, kezdeteit és kialakulását általában Descartes (1596–1650) francia matematikus nevéhez kötik. Ő tette meg a döntő lépést: a koordináták segítségével görbéket ábrázolt a koordináta-rendszerben, és tulajdonságaikat algebrai módszerekkel tanulmányozta. (A képen az Antonio Gaudí által tervezett barcelonai Batlló-ház látható.)

41. ISMERKEDÉS A KOORDINÁTAGEOMETRIÁVAL

Hogyan tudunk geometriai objektumokat (pontokat, ponthalmazokat, alakzatokat) megadni és tanulmányozni a koordináta-rendszerben? Ehhez egyrészt felhasználhatjuk a már meglévő ismereteinket (például korábban foglalkoztunk függvénygörbékkel vagy vektorokkal a koordináta-rendszerben), másrészt új fogalmakat és módszereket kell bevezetnünk. A tartalmi leírásban az egyszerűbb alakzatok felől a bonyolultabbak felé haladunk, pont – egyenes – kör sorrendben.

A korábbi években az egyes függvénygörbéket egyenletekkel adtuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben. Például az $y = 2x + 3$, az $y = x^2$ vagy az $y = |x|$ rendre a valós számok halmazán értelmezett lineáris, másodfokú, illetve abszolútérték-függvény képeinek az egyenlete.

Definíció

A koordináta-geometriában olyan egyenleteket alkalmazunk, amelyeket pontosan az alakzat pontjainak koordinátái tesznek igazzá. Az ilyen összefüggést az **alakzat egyenletének** nevezzük.

Ha az alakzat tetszőleges pontjának koordinátáit behelyettesítjük az adott egyenletbe, akkor igaz egyenlőséget kapunk. Ha pedig egy pont koordinátáit beírjuk az egyenletbe, és igaz egyenlőséget kapunk, biztosak lehetünk abban, hogy a pont az alakzathoz tartozik (rajta van).

Logikus, hogy ha egy pont két alakzat egyenletét is igazzá teszi, akkor az azt jelenti, hogy mindkét alakzatra illeszkedik, tehát nem lehet más, mint a két alakzat közös pontja (metszéspontja, érintési pontja). Ebből következik, hogy a metszéspont koordinátái egy egyenletrendszer megoldásai.

A koordináta-geometriában az is gyakran előfordul, hogy a számolásaink eredménye nem egy szám vagy egy geometriai objektum lesz – mint korábban megszoktuk –, hanem egyenlet. Ez kezdetben szokatlan lehet.

A témakörben az eddigi ismereteinkből a vektorokat és a velük végzett műveleteket, valamint az egyenletrendszerek megoldását fogjuk használni. Ebben a leckében rögtön szükségünk lesz mindarra, amit eddig tanultunk a vektorokról és a velük végzett műveleteikről.

A derékszögű koordináta-rendszerben minden $P(x; y)$ pontnak pontosan egy helyvektor felel meg (az, amelyik az O origóból a P pontba mutat). Ezt a helyvektort jelölhetjük $\overrightarrow{OP}$ vagy $\mathbf{p}$ módon, a vektor koordinátáira pedig használhatjuk az $\overrightarrow{OP}(x; y)$ vagy $\overrightarrow{OP} = (x; y)$ jelölést is, ha nem okoz félreértést. A pontok és helyvektoraik közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt a pontokkal végzett geometriai transzformációkat a vektorműveletek segítségével is végrehajthatjuk.

1. példa

Adottak az $A(1; 5)$, $B(-3; -7)$ és $C(3; -3)$ pontok a koordináta-síkon. Mik lesznek az A pont képeinek koordinátái, ha

- először tengelyesen tükrözzük az x tengelyre, majd a kapott képpontot tükrözzük az y tengelyre;
- tükrözzük B -re;
- eltoljuk a $\overrightarrow{BC}$ vektorral?

Forgassuk el a BC szakaszt $+90^\circ$ -kal az origó körül!

- Mik lesznek az így kapott $B'C'$ szakasz végpontjainak koordinátái?

Hasonló feladatok:

- Végrehajtunk egy A középpontú, $\lambda = 3$ arányú nagyítást. Mik lesznek a C pont képeinek koordinátái?
- Mik lesznek egy A középpontú, $\lambda = -\frac{1}{4}$ arányú kicsinyítés után a B pont képeinek koordinátái?

Megoldás

- a) Az első tükrözés után az $A_1(1; -5)$, majd a második után az $A_2(-1; -5)$ pontokat kapjuk. (A két transzformáció egymás utáni végrehajtása (szorzata) az origóra történő középpontos tükrözést adta.)
- b) Ha a képpont A_3 , akkor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA_3}$. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-3; -7) - (1; 5) = (-4; -12)$, így $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} = (-3; -7) + (-4; -12) = (-7; -19)$. Ezek az A_3 koordinátái.
Másképpen: alkalmazhatjuk a szakasz osztópontjába mutató vektorra tanult számolási módszert, az osztásarány-tételt. Most B az AA_3 szakasz felezőpontja, így $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}_3}{2}$, ebből $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{b} - \mathbf{a} = 2 \cdot (-3; -7) - (1; 5) = (-7; -19)$.
- c) Ha a képpont A_4 , akkor $\overrightarrow{AA_4} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (3; -3) - (-3; -7) = (6; 4)$, így $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (1; 5) + (6; 4) = (7; 9)$. Ezek az A_4 koordinátái.
- d) $B(-3; -7)$ origó körüli $+90^\circ$ -os elforgatottja $B_1(7; -3)$, $C(3; -3)$ elforgatottja $C_1(3; 3)$. A forgatás során szakasz képe szakasz lesz, így BC képe a B_1C_1 szakasz.
- e) Ha a C pont képe C_2 , akkor $\overrightarrow{AC_2} = 3\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (3; -3) - (1; 5) = (2; -8)$, így $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AC} = (1; 5) + 3 \cdot (2; -8) = (7; -19)$.
Másképpen: C az AC_2 szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontja, így az osztásarány-tétel szerint $\mathbf{c} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{c}_2}{3}$, ebből $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{c} - 2\mathbf{a} = 3 \cdot (3; -3) - 2 \cdot (1; 5) = (7; -19)$.
- f) Ha a B pont képe B_2 , akkor $\overrightarrow{AB_2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB} = (-4; -12)$, így $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (1; 5) + (1; 3) = (2; 8)$.
Másképpen: A az AB_2 szakasz B_2 -höz közelebbi ötödlő pontja, így az osztásarány-tétel szerint $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b} + 4\mathbf{b}_2}{5}$, ebből $\mathbf{b}_2 = \frac{5\mathbf{a} - \mathbf{b}}{4} = \frac{5 \cdot (1; 5) - (-3; -7)}{4} = (2; 8)$.

Megjegyzés

A kitűzött feladatok között felsoroltunk még néhány egyszerű transzformációt.

2. példa

Határozzuk meg a paralelogramma negyedik csúcspontjának koordinátáit, ha három csúcsa: $A(1; 5)$, $B(-3; -7)$, $C(3; -3)$!

Megoldás

Az ábrán megrajzoltuk az ABC háromszöget. A paralelogramma negyedik csúcspontját úgy kapjuk, hogy a háromszög valamelyik csúcspontját tükrözzük a szemközti oldal felezőpontjára. Feladatunknak tehát három megoldása van. Jelölje A_1 , B_1 , C_1 rendre a BC , AC és AB oldalak felezőpontját. Az A_1 koordinátái:

$$\frac{-3+3}{2} = 0, \quad \frac{-7-3}{2} = -5.$$

A tükrözés miatt az AD szakasz felezőpontja A_1 . Így ha D koordinátáit x -szel, illetve y -nal jelöljük, akkor az

$$\frac{x+1}{2} = 0 \quad \text{és az} \quad \frac{y+5}{2} = -5$$

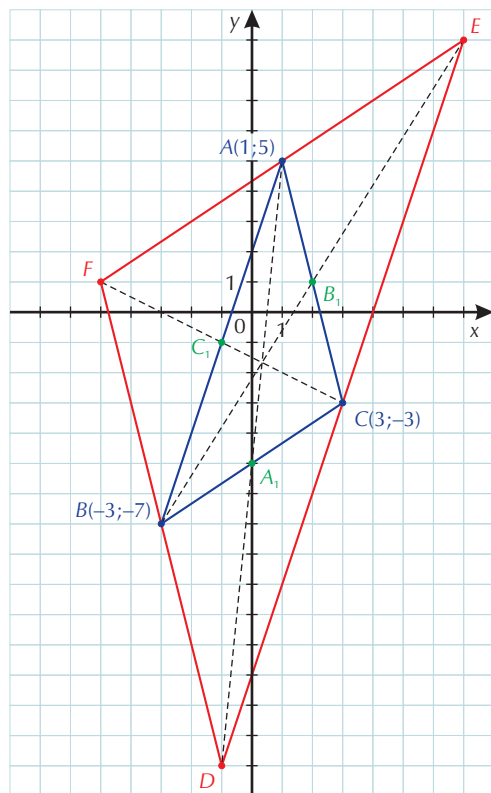
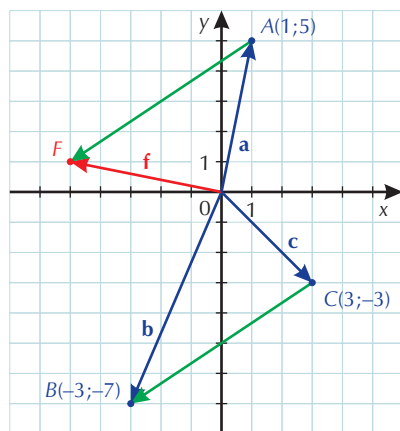
egyenleteket kapjuk. Innen

$$x = -1, y = -15.$$

Az egyik paralelogramma hiányzó csúcsa: $D(-1; -15)$.

Hasonló számolással kapjuk, hogy $B_1(2; 1)$ és $E(7; 9)$, illetve $C_1(-1; -1)$ és $F(-5; 1)$ (ábra).

Más úton is meghatározhatjuk a paralelogramma hiányzó csúspontjának koordinátáit. Mivel a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, az F ponthoz úgy is eljuthatunk, hogy az A pontot eltoljuk a leendő paralelogramma szemközti oldalának, a CB oldalnak megfelelő $\vec{CB}$ vektorral.



A szereplő pontokhoz vezető helyvektorokat a megfelelő kisbetűvel jelöljük:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} + \vec{CB}, \quad \text{de} \quad \vec{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

Tehát $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

$\mathbf{f}$ koordinátái tehát:

$$f_1 = 1 - 3 - 3 = -5,$$

$$f_2 = 5 - 7 + 3 = 1.$$

3. példa

Igaz-e, hogy az előző példa ABC és DEF háromszögeinek súlypontja megegyezik?

Megoldás

Az állítás igaz, ennek bizonyítására több módszerünk is van.

Legegyszerűbb a súlypont koordinátáira tanult összefüggést alkalmazni. Az ABC háromszög súlypontjába

mutató helyvektor $\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{(1; 5) + (-3; -7) + (3; -3)}{3} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$, a DEF háromszög súlypontjába

mutató helyvektor $\mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}}{3} = \frac{(-1; -15) + (7; 9) + (-5; 1)}{3} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. A két helyvektor megegyezik, tehát a két súlypont egybeesik.

Egy másik bizonyítási lehetőség, ha kihasználjuk, hogy a súlypont 1:2 arányban osztja a súlyvonalat. Például az ABC háromszögben AA_1 súlyvonal, így a súlypont helyvektora

$$\mathbf{s}_1 = \frac{2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}}{3} = \frac{2 \cdot (0; -5) + (1; 5)}{3} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right),$$

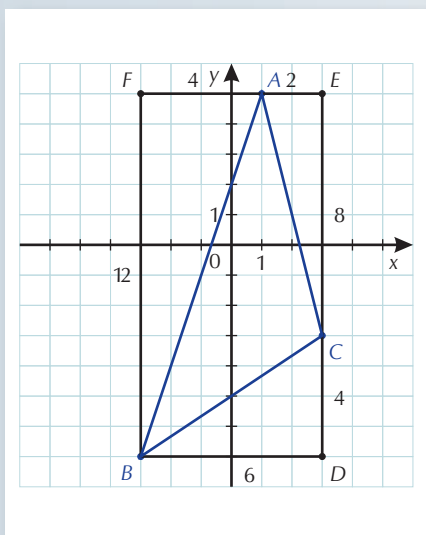
és ugyanezt a vektort kapjuk a DEF háromszög valamelyik súlyvonala esetében is.

A fenti gondolat hasonlósággal is megfogalmazható (ha pl. $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot alkalmazunk S_1 -ből, akkor A képe A_1), de elegendő a háromszög nevezetes vonalai tulajdonságainak az ismerete is. Például az $AA_1 = AD$ egyenese súlyvonal az ABC és a DEF háromszögben is. Hasonlót állíthatunk a $BB_1 = BE$ és $CC_1 = CF$ egyenesekről is – márpedig a súlyvonalak egy pontban, a háromszög súlypontjában metszik egymást.

4. példa

Számítsuk ki az előző példa ABC háromszögének a kerületét és a területét!

Megoldás



Az AB szakasz hosszát az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszaként (abszolútértékeként) számíthatjuk ki. $\overrightarrow{AB} = (-4; -12)$, így $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} = \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2} = \sqrt{160}$. Hasonlóan $\overrightarrow{BC} = (6; 4)$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ és $|\overrightarrow{AC}| = |(3; -3)| = \sqrt{18}$.

(A vektor hossza természetesen nem függ az irányától, $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160}$ szintén.)

Az ABC háromszög kerülete $\sqrt{160} + \sqrt{52} + \sqrt{18} \approx 24,1$ (egység).

A területet többféleképpen is kiszámíthatjuk. A három oldal ismeretében például meghatározhatjuk a háromszög egyik szögét és alkalmazhatjuk a trigonometrikus területképletet, vagy alkalmazhatjuk a Héron-képletet is. Egy természetes (elemi) megoldást kapunk, ha a háromszöget az ábra szerint körbe vesszük a $BDEF$ téglalappal. A téglalap területe $6 \cdot 12 = 72$ (területegység), ebből a BDC , CEA , AFB derékszögű háromszögek területét levonva megkapjuk az ABC háromszög területét. Eredmény:

$$72 - \left(\frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 12}{2}\right) = 28 \text{ (területegység).}$$

A vektor vagy szakasz hosszára kapott eredményt általános alakban, pontokra is megfogalmazhatjuk:

Az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ **pontok távolsága** $\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

5. példa

Fogalmazzuk meg vektorok segítségével, mi annak a feltétele, hogy három pont egy egyenesen legyen! Igazoljuk, hogy az $A(1; 5)$, $B(-3; -7)$, $C(2; 8)$ pontok egy egyenesen vannak!

Megoldás

A középpontos hasonlóság tulajdonságából következik, hogy az A , B és C pontok pontosan akkor esnek egy egyenesre, ha $\overrightarrow{AC}$ az $\overrightarrow{AB}$ vektor nemzérus számszorosa. A számadatokkal $\overrightarrow{AC} = \mathbf{g} - \mathbf{a} = (2; 8) - (1; 5) = (1; 3)$, $\overrightarrow{AB} = (-4; -12)$. Mivel $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AC}$, a feltétel teljesül, a három pont egy egyenesen van.

(Természetesen más „szereposztással” is dolgozhattunk volna, például $\overrightarrow{BC} = \mathbf{g} - \mathbf{b} = (2; 8) - (-3; -7) = (5; 15)$, és ezért a $\overrightarrow{BC}$ vektor is nemzérus számszorosa $\overrightarrow{AB}$ -nek vagy $\overrightarrow{AC}$ -nek.)

Másképpen:

Felhasználhatjuk a vektor vagy szakasz hosszára kapott eredményt is. A három pont egy egyenesen van, ha az általuk meghatározott három szakasz közül valamelyik kettő hosszának összege éppen a harmadik hosszával egyenlő.

Ebben az esetben $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$, azaz $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ a feltétel.

Fogalmak
vektor hossza;
két pont távolsága.

FELADATOK

1.

Adottak az $A(-12; 6)$ és $B(18; 24)$ pontok a koordinátasíkon. Mik lesznek a pontok képének koordinátái, ha tengelyesen tükrözzük őket

K1 a) az $y = 10$ egyenletű egyenesre;

K1 b) az $x = 8$ egyenletű egyenesre;

K1 c) az $y = x$ egyenletű egyenesre?

Mik lesznek a pontok képének koordinátái, ha

K1 d) merőlegesen vetítünk az x tengelyre;

E1 e) végrehajtunk egy $m = 0,5$ arányú zsugorítást (merőleges affinitást) az x tengelyre;

E1 f) végrehajtunk egy $m = 0,5$ arányú zsugorítást (merőleges affinitást) az y tengelyre?

2. K1

A $(8; 11)$, $(12; 5)$ pontok által meghatározott szakaszt mindkét irányban meghosszabbítjuk a kétszeresével. Határozzuk meg a végpontok koordinátáit!

3. K1

Egy paralelogramma középpontja $K(-2; -4)$, két szomszédos csúcsa $A(1; 3)$, $B(0; -9)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

4. K1

Egy háromszög oldalfelező pontjai az $A_1(5; 1)$, $B_1(1; 7)$, $C_1(-3; -4)$ pontok. Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit!

5. K1

Egy háromszög két csúcsa az $A(-2; -3)$ és a $B(1; 8)$ pont. A háromszög súlypontja az $S(4; 1)$ pont. Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit!

6. K2

Igaz-e, hogy az $A(0; 0)$, $B(3; 1)$, $C(1; 7)$ csúcsokkal rendelkező háromszög derékszögű?

7. K2

Egy négyzet két szomszédos csúcsa $A(71; 23)$ és $B(-19; -7)$. Mik lehetnek a másik két csúcs koordinátái?

8. K2

Az ABC háromszög két csúcsa $A(3; -10)$, $B(-16; 2)$, és tudjuk, hogy a C csúcs rajta van az x tengelyen. Határozzuk meg C koordinátáit,

- a) ha az ABC háromszög derékszögű, és $\angle ACB = 90^\circ$;
- b) ha az ABC háromszög egyenlőszárú, és AB az alapja;
- c) ha az ABC háromszög súlypontja az y tengelyen van!

9. K2

Az ABC háromszög csúcsai $A(-3; 3)$, $B(-1; -2)$, $C(3; -5)$. Számítsuk ki a C csúcsból húzható súlyvonal és szögfelező hosszát!

10. K2

Egy trapéz alakú földterület négy csúcsa egy térképen $A(-3; -3)$, $B(5; -3)$, $C(3; 7)$ és $D(0; 7)$. A térképen 1 egység a valóságban 20 méter. Mekkora a földterület kerülete és területe?

11.

Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Egy háromszög $A(2; u)$, $B(4; v)$ és $C(w; 9)$ csúcsai rácspontok (tehát u, v, w egész számok). A csúcsok koordinátáit egymás mellé írva olyan hatjegyű számot kapunk, amelyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel. Határozzuk meg a hiányzó koordinátákat úgy, hogy a háromszög súlypontja is rácspont legyen!

„Megoldás”: Az u, v, w koordináták értéke valamilyen sorrendben 2, 4, 9. A súlypont pontosan akkor lesz rácspont, ha az első koordináták összege osztható 3-mal és a második koordináták összege is osztható 3-mal. Így két lehetőség adódik: $(u, v, w) = (2, 4, 9)$ vagy $(4, 2, 9)$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3462–3477, 3483–3485.

42. AZ EGYENES KOORDINÁTAGEOMETRIÁJA

A 9. osztályban a szemlélet alapján, bizonyítás nélkül elfogadtuk, hogy az $f: x \mapsto mx + b$ függvény képe az y tengellyel nem párhuzamos egyenes. (Ebben a fejezetben, ha külön nem jelöljük egy függvény értelmezési tartományát, akkor mindig a valós számok lehető legbővebb részhalmazára gondolunk. Esetünkben ez maga a valós számok halmaza.) A hozzárendelést az ábrázoláshoz $y = mx + b$ alakra írtuk át (ez a függvény grafikonjának egyenlete), és ebből számoltuk ki az egyenes pontjainak y koordinátáit.

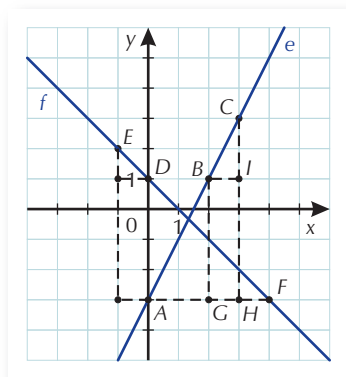
(Emlékeztető: egy alakzat egyenlete pontosan azokra az $(x; y)$ koordinátájú pontokra teljesül, amelyek az alakzathoz tartoznak.)

Például az $e: y = 2x - 3$ egyenes néhány pontja: $(-10; -23)$, $(6,5; 10)$, $(\frac{3}{4}; -\frac{3}{2})$, de nincsenek rajta az a egyenesen a következő pontok (mivel koordinátáikat behelyettesítve nem teljesül az egyenlőség): $(-10; 20)$, $(0; 2,5)$, $(7,5; 11,5)$. Hasonlóan a $f: y = -x + 1$ egyenes néhány pontja $(-5; 6)$, $(-1,5; 2,5)$, $(3; -2)$, $(\frac{5}{8}; \frac{3}{8})$; míg nincsenek a b egyenesen például a $(-5; 5)$, $(0; 0)$, $(10; -8)$ pontok.

Az $y = mx + b$ egyenletben szereplő m és b paramétereknek szemléletes jelentést adhatunk. A b tengelymetszet megadja, melyik pontban metszi az egyenes az y tengelyt. Az $x = 0$ helyettesítéssel ugyanis $y = b$ adódik az egyenletből, ezért $(0; b)$ az egyenes egy pontja – éppen az a pontja, ahol metszi az y tengelyt. Az m meredekség pedig az egyenes irányára jellemző. Számértéke megadja, hogy ha az egyenes egy adott pontjának x koordinátáját 1-gyel növeljük, akkor y koordinátáját m -mel kell változtatni, hogy az így kapott pont is rajta legyen az egyenesen. (Ha $(x; y)$ az egyenes egy pontja, akkor $(x + 1; y + m)$ is az egyenesen van.)

Másként fogalmazva a meredekség az y koordináták különbségének és az x koordináták különbségének hányadosa. Ha például az $e: y = 2x - 3$ egyenes pontjai $A(0; -3)$, $B(2; 1)$ és $C(3; 3)$, akkor az A és B pontokat tekintve a meredekség $\frac{1 - (-3)}{2 - 0} = 2$, az A és C pontokat tekintve $\frac{3 - (-3)}{3 - 0} = 2$. (Természetesen azonos értékeket kaptunk, mert az AGB , AHC , BIC derékszögű háromszögek hasonlóak.)

Bevezetünk egy később jól használható fogalmat.



Emelt szint

Definíció

Bármely, az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektort az egyenes egy **irányvektorának** nevezzük. Jele: $\mathbf{v}$ vagy $\overrightarrow{AB}$

A definícióból következik, hogy egy irányvektor nemzérus számszorosa is irányvektor, tehát egy egyenesnek végtelen sok irányvektora van.

Az új fogalommal egyszerűbben számolhatunk meredekséget. Például $\overrightarrow{AB}$ az a egyenes egy irányvektora, koordinátákkal felírva $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (2; 1) - (0; -3) = (2; 4)$. Az irányvektor koordinátái éppen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ helyvektorok megfelelő koordinátáinak különbségei, így az AB egyenes meredeksége $\overrightarrow{AB}$ koordinátáinak hányadosa, azaz $\frac{4}{2} = 2$. (A meredekségre használhatjuk az m_{AB} jelölést.)

Az egyenes egy másik irányvektora $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (3; 3) - (2; 1) = (1; 2)$, így $m_{BC} = 2$.

A $b: y = -x + 1$ egyenes esetén a $D(0; 1)$, $E(-1; 2)$, $F(4; -3)$ pontokat jelöltük az ábrán. A meredekséget a fenti módon számolhatjuk: $\overrightarrow{DE} = \mathbf{e} - \mathbf{d} = (-1; 2) - (0; 1) = (-1; 1)$, innen $m_{DE} = -1$. Vagy $\overrightarrow{DF} = \mathbf{f} - \mathbf{d} = (4; -3) - (0; 1) = (4; -4)$, és $m_{DF} = -1$ szintén.

Észrevehetjük, hogy adott egyenes esetén a meredekség nem függ attól, hogy melyik irányvektort választjuk: ha $\mathbf{v}(x; y)$ egy irányvektor, akkor $\lambda \mathbf{v} = (\lambda x; \lambda y)$ is irányvektor ($\lambda \neq 0$), és a vektorok meredeksége megegyezik: $\frac{y}{x} = \frac{\lambda y}{\lambda x}$, ha $x \neq 0$. (Az $x = 0$ esetet majd külön megvizsgáljuk.)

Ennyi előkészület után most már levezethetjük az egyenes $y = mx + b$ egyenletét. Az egyenest meghatározza egy pontja és az iránya (vagy két pontja), és a meredekség az egyenes irányára jellemző.

1. példa

- Az f egyenes két pontja $A(-3; -1)$ és $B(2; 14)$. Határozzuk meg f egyenletét!
- Az e egyenes meredeksége m , egy pontja $A(x_0; y_0)$. Határozzuk meg e egyenletét!

Megoldás

a) Először az egyenes meredekségét határozzuk meg: $m_f = m_{AB} = \frac{14 - (-1)}{2 - (-3)} = 3$.

Ha most az f egyenest $y = 3x + b$ alakban keressük, akkor pl. az A pont koordinátáit behelyettesítve b meghatározható. $-1 = 3 \cdot (-3) + b$, innen $b = 8$. Az f egyenes egyenlete $y = 3x + 8$. (Természetesen akkor is ezt az eredményt kapjuk, ha B koordinátáit helyettesítjük be az egyenletbe.)

b) Egy tetszőleges, A -tól különböző $P(x; y)$ pont pontosan akkor van rajta az egyenesen, ha AP meredeksége m . $\overrightarrow{AP} = \mathbf{p} - \mathbf{a} = (x; y) - (x_0; y_0) = (x - x_0; y - y_0)$, így $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ (ahol $x \neq x_0$); vagy átalakítás után $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Tehát az egyenes $P(x; y)$ pontjainak koordinátái között kapcsolatot találtunk (x_0, y_0, m konstans), az **adott ponton átmenő, adott meredekségű egyenes egyenlete** e: $y - y_0 = m(x - x_0)$. (Ez átalakítható az $y = mx + b$ alakra.)

Az a) feladatban az A pontot behelyettesítve f : $y + 1 = 3(x + 3)$ adódik. Az egyenletet átírhatjuk az „ismerős” $y = 3x + 8$ alakba, ez az egyenes **iránytényező alakja** (iránytényező = meredekség).

Elnevezések: A megadott $A(x_0; y_0)$ pontot az egyenes **adott pontjának** nevezzük, míg az egyenes tetszőleges $P(x; y)$ pontjára – mivel az bármely pontja lehet az egyenesnek – azt mondjuk, hogy az egyenes **futó pontja**.

Az eddigi példák alapján észrevehetjük, hogy **az egyenes egyenlete legfeljebb kétszeresetlen elsőfokú egyenlet**, azaz $ax + by = c$ alakra hozható, ahol az a és b együtthatók közül legalább az egyik nem nulla. (Az eddigi példákban $b \neq 0$ volt.) Például az $y = \frac{1}{3}x - 2$ egyenlet 3-mal való szorzás és átrendezés után $x - 3y = 6$ alakba írható; az $y = 2$ egyenletet pedig úgy értjük, hogy az egyenesen lévő pontok másik, x koordinátája tetszőleges értéket vehet fel.

Kérdés, hogy a gondolatmenet megfordítható-e, azaz van-e olyan egyenes, amelynek egyenlete $Ax + By = C$ (A, B, C tetszőleges számok, A és B közül legalább az egyik nem nulla).

A konkrét példa előtt egy észrevétel:

Ha egy egyenes egyenletét egy nullától különböző számmal megszorozzuk, akkor az így kapott egyenlet ugyanannak az egyenesnek az egyenlete, hiszen ugyanazoknak a pontoknak a koordinátái elégitik ki mindkét egyenletet.

2. példa

Van-e olyan egyenes, amelynek az egyenlete $2x - 3y = 5$?

Megoldás

Az egyenletet átalakítjuk: $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. Korábban megállapítottuk, hogy ez egy $\frac{2}{3}$ meredekségű, $(0; -\frac{5}{3})$ tengelymetszetű egyenes egyenlete, ezért a válaszuk igenlő: létezik a $2x - 3y = 5$ egyenletű egyenes.

EGYENESEK OSZTÁLYOZÁSA

A példa után megvizsgáljuk az $Ax + By = C$ egyenletet, az egyenes egyenletének általános alakját (A és B közül legalább az egyik nem nulla).

I. eset: Ha $A \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor átalakítások után $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$ az irányítványozós alak. Az egyenes negatív vagy pozitív meredekségű $-\frac{A}{B}$ előjelétől függően, átmegy a $(0; \frac{C}{B})$ ponton (y tengelymetszet).

II. eset: Ha $A = 0$ és $B \neq 0$, akkor $y = \frac{C}{B}$, ami az x tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete. (Meredeksége 0, átmegy a $(0; \frac{C}{B})$ ponton, és tetszőleges x -re $(x; \frac{C}{B})$ az egyenes pontja.)

III. eset: Ha $A \neq 0$ és $B = 0$, akkor $x = \frac{C}{A}$, ami az y tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete. (Irányvektora van, például $(0; 1)$, de **meredeksége nincs** az egyenesnek; átmegy a $(\frac{C}{A}; 0)$ ponton, és tetszőleges y -ra $(\frac{C}{A}; y)$ az egyenes pontja.)

Jegyezzük meg: az $x =$ konstans típusú (y tengellyel párhuzamos) egyeneseknek nincs meredeksége, tehát nincs irányítványozós alakja sem. Ha bizonyos tulajdonságokkal rendelkező egyenesek keresése a feladat, akkor ennek a speciális egyenes típusnak a létezését mindig külön meg kell vizsgálni.

Megjegyzés (a lineáris függvény és az egyenes kapcsolata)

Lineáris függvénynek általában azokat a hozzárendeléseket tekintik, amelyek képe egyenes. Ilyen például az $x \mapsto ax + b$ hozzárendelés, ennek képe $a = 0$ esetén is egyenes. A szóhasználat azonban nem egységes, lineáris függvénynek nevezzük az elsőfokú hozzárendeléseket is, ekkor $a = 0$ esetén $x \mapsto b$ nullad-fokú hozzárendelés (tehát nem lineáris). Az igaz, hogy lineáris függvény képe egyenes (bármelyik fenti értelmezéssel), de fordítva nem igaz: van olyan egyenes, ami nem lineáris függvény képe. (Ilyen az $x = x_0$ egyenletű egyenes, ez egyetlen függvénynek sem lehet a képe.)

ÖSSZEFOGLALÁS

Összefoglaljuk a lecke fontosabb tudnivalóit.

Az **irányvektor** az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor.

$y - y_0 = m(x - x_0)$ az **adott** $(x_0; y_0)$ **ponton átmenő, adott meredekségű egyenes egyenlete** (ez az egyenes irányítványozós alakja).

Az m **meredekségű, b tengelymetszetű** egyenes egyenlete $y = mx + b$. (Az m másik elnevezése **irányítványozó**.)

Az egyenes egyenlete **legfeljebb kétismeretlenes elsőfokú egyenlet**.

Az **y tengellyel párhuzamos, $x = x_0$ egyenletű** egyeneseknek **nincs meredekségük** (és nincs irányítványozós alakja).

A továbbiakban az egyenes egyenletének felírását gyakoroljuk.

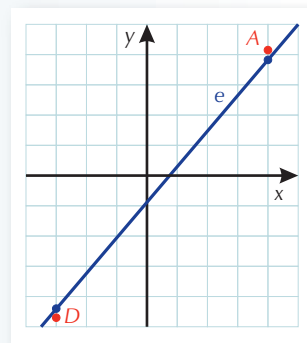
3. példa

Adott az $e: 3x - 2y = 12$ egyenletű egyenes.

- Adjuk meg az egyenes három irányvektorát, a meredekségét és egyenletének iránytényezős alakját!
- Az $A(100; 145)$, $B(200; 294)$, $C(-50; -81)$, $D(-75; -119)$ pontok közül melyik van rajta az e egyenesen?
- Számítsuk ki, mely pontokban metszi az egyenes az x , illetve az y tengelyt!

Megoldás

- Átalakítások után kapjuk az egyenes iránytényezős alakját: $y = \frac{3}{2}x - 6$. Az egyenes bármely két pontja közötti vektor irányvektor, de eljárástunk másképp is. A meredekség szemléletes jelentése miatt egy irányvektor $(1; \frac{3}{2})$, és így ennek bármely nemzérus szám-szorosa megfelel. Például $(2; 3)$, $(100; 150)$, $(-200; -300)$ stb.
- A B és C rajta van az e egyenesen, mert koordinátáik kielégítik az egyenes egyenletét: $294 = \frac{3}{2} \cdot 200 - 6$ és $-81 = \frac{3}{2} \cdot (-50) - 6$. Az A pont esetén $\frac{3}{2} \cdot 100 - 6 = 144 \neq 145$ (az A az e egyenes „felett” van), a D esetében $\frac{3}{2} \cdot (-75) - 6 = -118,5 \neq -119$, D az e egyenes „alatt” van.
- Az x tengely egyenesének egyenlete $y = 0$, ezzel a helyettesítéssel kapjuk meg az x tengelymetszetet, ami $(4; 0)$. Hasonlóan az y tengelymetszet az $x = 0$ helyettesítéssel $(0; -6)$.



Megjegyzés

Az a) feladat eredményét **általánosíthatjuk**.

Ha az $ax + by = c$ egyenesnek létezik meredeksége (azaz $b \neq 0$), akkor $m = -\frac{a}{b}$, és egy irányvektora

$(1; -\frac{a}{b})$ vagy pl. $(b; -a)$. De észrevehetjük, hogy ha $b = 0$ (azaz az egyenes párhuzamos az y tengellyel), a $(b; -a) = (0; -a)$ vektor ekkor is egy irányvektor.

Mondhatjuk tehát:

az $ax + by = c$ egyenesnek $\mathbf{v}(b; -a)$ egy irányvektora.

4. példa

Az ABC háromszög csúcsai $A(2; 6)$, $B(-3; -1)$, $C(7; -1)$. Határozzuk meg a háromszög s_a és s_b súlyvonalainak, valamint az AB , illetve a BC oldallal párhuzamos középvonalainak az egyenletét!

Megoldás

Ha D a BC oldal felezőpontja, akkor $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = (2; -1)$. $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = (0; -7)$, ez az s_a súlyvonal egy irányvektora, ami az y tengellyel párhuzamos. Az s_a súlyvonal egyenesének meredeksége tehát nincs, egyenlete $s_a: x = 2$.

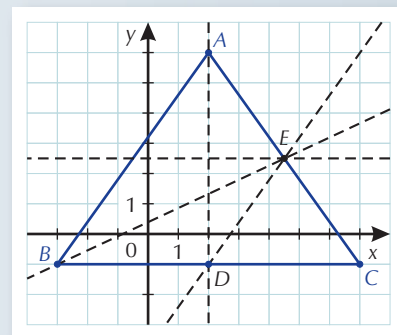
(Az ábra felvételekor észrevehetjük, hogy BC párhuzamos az x tengellyel, vagy hogy ABC egyenlő szárú háromszög: $AB = AC$. Ezek az észrevételek megkönnyíthetik a megoldást.)

Az AC oldal felezőpontja $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} = \left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$. $\overrightarrow{BE} = \mathbf{e} - \mathbf{b} = \left(\frac{15}{2}; \frac{7}{2}\right)$ az s_b egy irányvektora, így meredeksége $\frac{7}{15}$, egyenlete $s_b: y + 1 = \frac{7}{15}(x + 3)$.

$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (5; 7)$, $m_{BA} = \frac{7}{5}$, és az AB oldallal párhuzamos k_c középvonalnak is ennyi a meredeksége.

A középvonal átmegy az E ponton, egyenlete $k_b: y - \frac{5}{2} = \frac{7}{5}\left(x - \frac{9}{2}\right)$.

A BC oldallal párhuzamos k_a középvonal is átmegy az E ponton, és mivel BC párhuzamos az x tengellyel, egyenlete $k_a: y = \frac{5}{2}$.



5. példa

Igazoljuk, hogy az $A(-3; 11)$, $B(1; 3)$ és $C(8; -11)$ pontok egy egyenesen vannak!

Megoldás

Hasonló példát már az előző leckében is láttunk (a három pont egy egyenesen van, ha például $\overrightarrow{AB}$ számszorosa $\overrightarrow{AC}$), most az új fogalmakat és megoldási módszereket használjuk.

Első megoldás

Megmutatjuk, hogy a C pont rajta van az AB egyenesen.

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (4; -8)$, $m_{AB} = -2$, az AB egyenes egyenlete $y - 11 = -2(x + 3)$. A C pont koordinátái kielégítik az egyenletet ($-11 - 11 = -2 \cdot (8 + 3)$), így valóban rajta van az AB egyenesen.

Második megoldás

Megmutatjuk, hogy AB és AC meredeksége megegyezik. (Ez elegendő, mert az A ponton keresztül adott meredekséggel csak egy egyenes húzható.)

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (11; -22)$, $m_{AC} = -2$. Az előbb láttuk, hogy $m_{AB} = -2$ szintén, így készen vagyunk: A, B, C valóban egy egyenesen van.

Fogalmak

alakzat egyenlete;
irányvektor;
meredekség
(iránytényező);
tengelymetszet;
futópont;
adott pont;
egyenes
egyenletének
iránytényező
alakja.

FELADATOK

1. K1

Írjuk fel az egyenes meredekségét, ha egy irányvektora

- a) $(1; 3)$, b) $(9; -2)$, c) $(2; 0)$, d) $(0; -1)$!

2. K1

Írjuk fel az alábbi egyenesek egy irányvektorát, meredekségét és egyenletének irányítványozós alakját! Számítsuk ki azt is, mely pontokban metszi az egyenes az x , illetve az y tengelyt!

a: $x + 2y = 10$, b: $2x - y = 6$, c: $-3x + 2y = -8$.

A fentiek közül mely egyeneseken van rajta az a $A(4,4; 2,8)$, a $B(5; 2,5)$, a $C(2; -2)$, a $D(6; 6)$ és az $E(8; 3)$ pont?

3. K1

Adott az $A(3; 6)$ és a $B(-5; 1)$ pont. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik

- a) átmegy A -n, és irányvektora $\mathbf{v}(2; 3)$;
b) átmegy B -n, és meredeksége 2;
c) átmegy A -n és B -n!

4. K2

Egy háromszög oldalainak felezőpontjai az $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(1; -2)$ pontok. Írjuk fel az oldalak egyenletét!

5. K2

Írjuk fel az ABC háromszög oldalainak, súlyvonalainak és középvonalainak az egyenletét, ha $A(1; -7)$, $B(5; 9)$, $C(13; -17)$!

6. K2

Írjuk fel az előző lecke 10. feladatában szereplő földterület oldalegyeneseinek az egyenletét!

7. E1

Két pontszerű test mozgását a koordináta-rendszerben modellezhetjük. A modell szerint az egyik test az $A(0; 5)$ pontból indul, és időegységenként 2 egységet halad az y tengely pozitív irányába; míg a másik test az origóból indul, és időegységenként 3 egységet halad az x tengely pozitív irányába.

- a) Milyen távol lesz egymástól a két test 8 időegység múlva?
b) Egy bizonyos idő múlva a két pontszerű test helyzetét összekötő egyenes meredeksége éppen -1 . Mennyi idő telt el az indulás óta?

Ajánlott feladatok

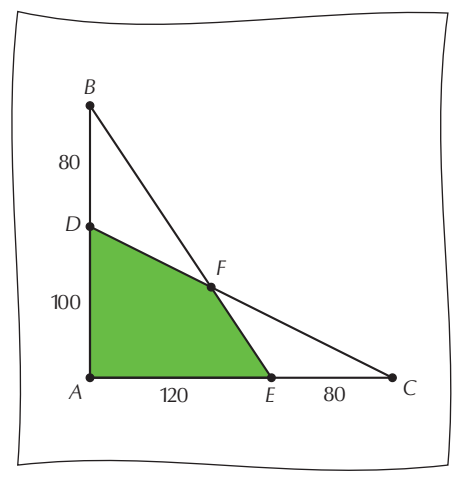
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 3539–3543, 3546–3556.



43. KÉT EGYENES METSZÉSPONTJA

A térképészvázlaton egy $AEFD$ földterület rajza látható. ($AB = 180$ méter, $AC = 200$ méter, és a BE és CD egyenes utak jelölik ki $AEFD$ -t.) A tulajdonosnak az az ötlete támad, hogy a telek területét és kerületét további mérések nélkül, koordinátageometriai módszerekkel számolja ki. Ehhez egy olyan koordináta-rendszerben modellezi a földterületet, ahol AC illeszkedik az x , AB pedig az y tengelyre. A BE és CD egyenesek egyenletét könnyen fel is írja, azonban a kerület és a terület meghatározásához szükség lenne a két egyenes F metszéspontjának koordinátáira is.

Az eddigi leckék alapján meg tudjuk adni adott pontokon átmenő, illetve adott ponton átmenő, adott irányú egyenesek egyenletét. Természetes módon adódik a kérdés: hogyan tudjuk meghatározni két egyenes metszéspontját?



1. példa

Határozzuk meg a $2x + 5y = 39$ és $3x + 2y = 9$ egyenletű egyenesek metszéspontját!

Megoldás

Megállapíthatjuk, hogy mivel a metszéspont mindkét egyenesen rajta van, ezért koordinátái mindkét egyenes egyenletét kielégítik. Nincs más dolgunk tehát, mint megoldani az egyenesek egyenletéből álló kétsismeretlenes lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 39, \\ 3x + 2y = 9. \end{cases}$$

Az egyenlő együtthatók módszerével dolgozunk, hogy munkánk során ne nehezítsük a dolgunkat törtekkel, zárójelekkel.

Szorozzuk az első egyenlet mindkét oldalát 3-mal, a második egyenlet mindkét oldalát 2-vel, így az x -es tag együtthatója mindkét egyenletben 6 lesz.

$$\begin{cases} 6x + 15y = 117, \\ 6x + 4y = 18. \end{cases}$$

A felső egyenletből kivonva az alsót azt kapjuk, hogy

$$11y = 99, \text{ ahonnan } y = 9.$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve $x = -3$ adódik. A $(-3; 9)$ pont mindkét egyenletet kielégíti, tehát valóban a két egyenes metszéspontja.

Két egyenes metszéspontjának koordinátáit úgy határozzuk meg, hogy a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk.

2. példa

Számítsuk ki a lecke elején vizsgált $AEFD$ földterület kerületét és területét!

Megoldás

Először az EB és DC egyenesek egyenletét írjuk fel, majd meghatározzuk az egyenesek F metszéspontját. (Méterben számolunk.) Az EB egyenes meredeksége $-\frac{180}{120} = -\frac{3}{2}$, y tengelymetszete 180, így egyenlete $y = -\frac{3}{2}x + 180$. Hasonlóan DC egyenlete $y = -\frac{1}{2}x + 100$. Az

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 180 \\ y = -\frac{1}{2}x + 100 \end{cases}$$

egyenletrendszer egyenleteinek jobb oldala egyenlő: $-\frac{3}{2}x + 180 = -\frac{1}{2}x + 100 \Leftrightarrow x = 80$, amiből visszahelyettesítés után $y = 60$ adódik.

Az $F(80; 60)$ koordináták segítségével $T_{AEF} = \frac{120 \cdot 60}{2} = 3600 \text{ m}^2$, $T_{ADF} = \frac{100 \cdot 80}{2} = 4000 \text{ m}^2$, így $AEFD$ területe 7600 m^2 .

$DF = \sqrt{80^2 + 40^2} \approx 89 \text{ m}$, $EF = \sqrt{40^2 + 60^2} \approx 72 \text{ m}$, így a telek kerülete kb. $100 + 120 + 89 + 72 = 381$ méter.

Fogalom
metszéspont
meghatározása.

FELADATOK

1. K1

Számítsuk ki az egyenesek metszéspontjának koordinátáit, ha egyenletük

- a) $3x - y = 7$, $2x + 5y = 2$;
- b) $3x + 5y - 2 = 0$, $y = 2x - 1$;
- c) $2x - y = 5$, $y = 2x + 7$;
- d) $3x - 2y = 1$, $6x = 4y + 2$!

2. K1

Írjuk fel a $P(-1; 7)$ pontot a $2x + 5y = 2$ és $3x - 2y = 5$ egyenletű egyenesek metszéspontjával összekötő egyenes egyenletét!

3. K2

Állapítsuk meg, hogy van-e közös pontja az alábbi három egyenesnek:

- a) $2x + 5y = 3$, $6x + 15y = 1$, $x - y = 5$;
- b) $2x - 5y = -12$, $x + 3y = 5$, $2x - y = -4$!

4. K2

Egy földterület négy oldalát egy térképen a következő egyenesek jelölik ki:

- a) az y tengely, az $y = x + 4$, az $y = 2x$ és az $x = 2$ egyenletű egyenesek;
- b) az x és y tengely, valamint az $y = x + 8$ és a $2x + y = 20$ egyenletű egyenesek. A térképen 1 egység a valóságban 10 méter. Mekkora a földterületek kerülete és területe?



5.

Egyenes vonalban, egyenletes sebességgel haladó kamion helyzetét egy koordináta-rendszerben pontszerű testként modellezhetjük. A test áthalad az $A(16; 19)$, majd a $B(8; 13)$ pontokon.

K2 a) Melyik pontokban metszi a test pályája a koordinátatengelyeket?

E1 b) Az AB távolságot 50 másodperc alatt tette meg a test. B -t elhagyva mennyi ideig tart, míg eléri az x tengelyt?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3610–3613, 3619, 3630, 3635, 3636, 3637.

44. PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES EGYENESEK

A szerkesztési vagy számolási feladatokban gyakran van szükség adott ponton átmenő, adott egyenessel párhuzamos vagy rá merőleges egyenes megszerkesztésére, megadására. A gyakori használat miatt külön leckeiben foglalkozunk a párhuzamos és merőleges egyenesek témakörével. Ha jól begyakoroljuk a kapcsolódó számolási eljárásokat, akkor a párhuzamos vagy merőleges egyenesek megadása nagy segítség, egyfajta biztos építőköve lesz az összetett feladatok megoldása során.

1. példa

Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $x + 2y = 5$ és $3x - 2y = -1$. A metszéspontjukkal szemközti csúcs: $A(6; 4)$. Határozzuk meg a paralelogramma hiányzó csúcspontjainak koordinátáit!

Megoldás

Az ábrán megrajzoltuk az egyenletükkel megadott egyeneseket (kék színnel), az adott A pontot és a szóban forgó paralelogramma másik két oldalegyenesét (zöld színnel), C -vel jelöltük a két adott oldalegyenes metszéspontját. Először ennek koordinátáit számítjuk ki. A C pont két koordinátája az

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása:

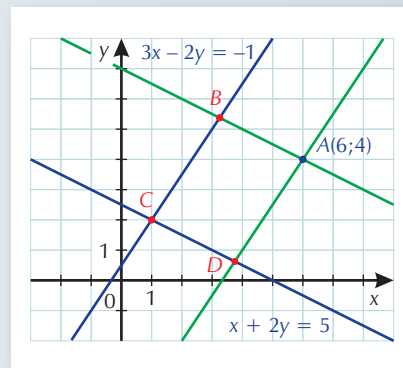
$$x = 1, y = 2.$$

A paralelogramma A -val szemközti csúcsa tehát a $C(1; 2)$ pont.

Az ábrán B -vel jelölt csúcspont az A ponton átmenő és az $x + 2y = 5$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenesnek a $3x - 2y = -1$ egyenletű egyenessel való metszéspontja. Az $x + 2y = 5$ egyenletű egyenes egy irányvektora $(-2; 1)$, meredeksége $-\frac{1}{2}$, ami az AB oldal egyenesének a meredeksége is. A $-\frac{1}{2}$ me-

redékségű és az $A(6; 4)$ ponton átmenő egyenes egyenlete $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 6)$, vagy törtmentes formában $x + 2y = 14$.

A mondottak alapján a B pont a $3x - 2y = -1$ és $x + 2y = 14$ egyenesek közös pontja. Meg kell határoznunk tehát a



$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldását. Így jutunk a $B(3,25; 5,375)$ ponthoz.

Hasonlóan kapjuk az ábrán D -vel jelölt csúcspontot: a $3x - 2y = -1$ egyenletű egyenes meredeksége $\frac{3}{2}$; az AD egyenes ezzel párhuzamos, és átmegy A -n, így egyenlete $y - 4 = \frac{3}{2}(x - 6)$, azaz:

$$3x - 2y = 10.$$

Ezután a

$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásából adódik a $D(3,75; 0,625)$ pont.

A paralelogramma csúcspontjai tehát az $A(6; 4)$, $B(3,25; 5,375)$, $C(1; 2)$, $D(3,75; 0,625)$ pontok.

A feladat megoldása közben többször is felírtuk **adott ponton átmenő, adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét**. Azt használtuk fel, hogy egy egyenes irányvektora bármely vele párhuzamos egyenesnek is irányvektora. (Vagy párhuzamos egyenesek meredeksége egyenlő, ha létezik.) Ez azt jelenti, hogy párhuzamos egyenesek $Ax + By = C_1$ és $Ax + By = C_2$ egyenlete csak a jobb oldali konstans tagban különbözik. Ezt pedig úgy határozhatjuk meg, hogy annak a pontnak a koordinátáit helyettesítjük a bal oldali kifejezésbe, amelyiken az egyenesnek át kell mennie. (Például az A ponton átmenő, $x + 2y = 5$ egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete egy lépésben felírható: $x + 2y = 6 + 2 \cdot 4$.)

Általánosan annyit mondhatunk **két egyenes párhuzamosságáról**:

Két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. (Vagy meredekségük egyenlő, ha létezik.)

Legyen $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ és $\mathbf{v}'(v'_1; v'_2)$ a két vizsgált egyenes irányvektora. Ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{v}'$ párhuzamos vektorok, és egyikük sem $\mathbf{0}$, akkor van olyan $\lambda \neq 0$ szám, hogy

$$\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v}.$$

Így a koordináták között a

$$v'_1 = \lambda v_1,$$

$$v'_2 = \lambda v_2$$

egyenletek érvényesek. Ez azt jelenti, hogy az egyik irányvektor koordinátái a másik irányvektor koordinátáinak λ -szorosai. Ha $v_1 \neq 0$, akkor $v'_1 \neq 0$, és az előbbi egyenletek helyett írhatjuk a

$$\frac{v'_2}{v'_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

egyenletet.

Megfordítva, ha $v_1 \neq 0$, $v'_1 \neq 0$ és

$$\frac{v'_2}{v'_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

akkor a két egyenes párhuzamos.

Már tanultuk, hogy az egyenes meredeksége $m = \frac{v_2}{v_1}$.

Egyenesek párhuzamosságának feltétele:

Két, a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha irányvektoraik megfelelő koordinátáinak hányadosa egyenlő.

Ezzel ekvivalens állítás, hogy akkor és csak akkor párhuzamos két olyan egyenes, melyeknek van meredekségük, ha meredekségeik egyenlők.

2. példa

Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó egyenesének egyenlete $y = -2x + 4$. A háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsának abszcisszája (x koordinátája) 5. Határozzuk meg a csúcspontok koordinátáit!

Megoldás

Mivel az origó nem illeszkedik a megadott egyenesre, így a hiányzó csúcspontok az $y = -2x + 4$ egyenletű egyenes pontjai. Az ábrán A -val jelöltük azt a csúcspontot, amelyiknek abszcisszája 5. Az egyenes egyenletének segítségével meghatározható az A pont ordinátája:

$$y = -2 \cdot 5 + 4 = -6, \text{ tehát } A(5; -6).$$

Az ábrából nyilvánvalóan leolvasható, hogy a háromszög A csúcsánál levő szöge nem derékszög. Minthogy O nincs rajta az adott befogón, ezért O -nál sem lehet derékszög. A hiányzó B derékszögű csúcspontot az origón átmenő és az $y = -2x + 4$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes metszi ki az adott befogóból. A $2x + y = 4$ egyenletű egyenes egy irányvektora $(-1; 2)$, a rá merőleges OB egyenes egy irányvektora ennek 90° -os elforgatottja, azaz $(2; 1)$, és a meredeksége $\frac{1}{2}$.

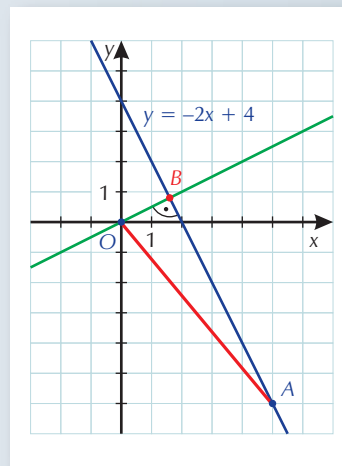
Az OB egyenes átmegy az origón, egyenlete $y = \frac{1}{2}x$ vagy $x - 2y = 0$.

A szóban forgó egyenesek metszéspontjának, a B pontnak a koordinátái az

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai: $x = \frac{8}{5} = 1,6$; $y = 0,8$.

A keresett háromszög csúcspontjai tehát az $O(0; 0)$, $A(5; -6)$ és $B(1,6; 0,8)$.



Most az $Ax + By = C_1$ adott egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletét kellett felírni. Észrevehetjük, hogy ennek során x és y együtthatóját felcseréltük, és az egyik előjelét megváltoztattuk: $-Bx + Ay = C_2$. Ez felelt meg annak, hogy az eredeti irányvektorra merőleges irányvektort írtunk fel. C_2 értékét pedig ismét úgy határoztuk meg, hogy annak a pontnak a koordinátáit helyettesítettük a bal oldali kifejezésbe, amelyiken az egyenesnek át kellett mennie. (Ez most a $(0; 0)$ pont volt.)

Például a $2x + 3y = 4$ egyenletű egyenesre merőleges egyenes egyenletének bal oldala lehet $3x - 2y$. Ha a merőleges egyenes a $P(3; 4)$ ponton megy át, akkor $3x - 2y = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Két egyenes tehát akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha irányvektoraik merőlegesek az elforgatás szögtartó volta miatt.

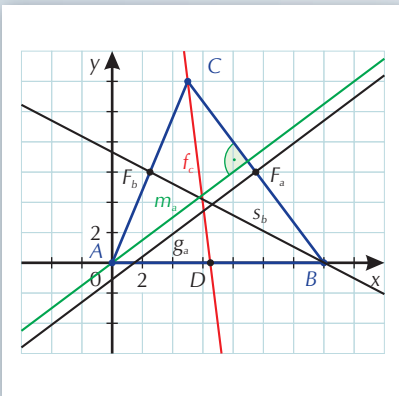
Ha az a és b egyenes $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ irányvektorai merőlegesek egymásra, akkor koordinátáikra igaz, hogy $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ és $\mathbf{w}(-\lambda v_2; \lambda v_1)$, ahol $\lambda \neq 0$. Tegyük fel, hogy a nem párhuzamos egyik tengellyel sem, azaz $v_1 \neq 0$ és $v_2 \neq 0$, ekkor a rá merőleges b egyenes sem lesz párhuzamos egyik tengellyel sem. Az egyenesek meredekségei léteznek: $m_a = \frac{v_2}{v_1}$ és $m_b = -\frac{\lambda v_1}{\lambda v_2} = -\frac{1}{m_a}$, amiből $m_a \cdot m_b = -1$.

Akkor és csak akkor merőleges két olyan egyenes, melyeknek van meredekségük, ha meredekségeik szorzata -1 , vagyis $m_a \cdot m_b = -1$.

3. példa

Adott az $A(0; 0)$, $B(14; 0)$, $C(5; 12)$ csúcsú háromszög. Határozzuk meg a háromszög A csúcsból húzott magasságvonalának, B -ből húzott súlyvonalának és C -ből húzott szögfelezőjének az egyenletét! Határozzuk meg a BC oldal felezőmerőlegesét is!

Megoldás



A párhuzamos és merőleges egyenesekről tanultakat alkalmazzuk.

$\vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (-9; 12)$, $m_{BC} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$, így az A csúcsból húzott **m_a magasságvonal** meredeksége $\frac{3}{4}$. Átmegy az $A(0; 0)$ ponton, így egyenlete $m_a: y = \frac{3}{4}x$.

Az AC oldal F_b felezőpontjára $\mathbf{f}_b = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} = (\frac{5}{2}; 6)$. $\vec{BF_b} = \mathbf{f}_b - \mathbf{b} = (-\frac{23}{2}; 6)$, ez a B csúcsból húzott **s_b súlyvonal** egyenesének irányvektora. Meredeksége $-\frac{12}{23}$, egyenlete (B -t helyettesítve) $s_b: y = -\frac{12}{23}(x - 14)$. (Vagy átalakítva $s_b: 12x + 23y = 168$.)

A **C -ből húzott szögfelező** az AB oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

$|\vec{BC}| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = 15$, $AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, így ha a szögfelező a D pontban metszi AB -t, akkor $\frac{AD}{DB} = \frac{13}{15}$. $AD = \frac{13}{13+15} \cdot 14 = \frac{13}{2}$, tehát $D(\frac{13}{2}; 0)$. $\vec{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = (\frac{3}{2}; -12)$, $m_{CD} = -8$, így a szögfelező egyenlete $f_c: y = -8(x - \frac{13}{2})$, azaz $f_c: y = -8x + 52$.

A **BC oldal felező merőlegesét** jelölje g_a . Mivel g_a és m_a párhuzamos, ezért g_a meredeksége is $\frac{3}{4}$; valamint g_a átmegy a BC oldal F_a felezőpontján, ami $F_a(\frac{19}{2}; 6)$. Innen $g_a: y - 6 = \frac{3}{4}(x - \frac{19}{2})$, ami iránytényezőz alakban $g_a: y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}$.

4. példa

Határozzuk meg az előbbi ABC háromszögben a súlypont és a magasságpont, valamint a beírt és a körülírt kör középpontjának a koordinátáit!

Megoldás

Ahol lehetséges, igyekszünk többféle megoldást adni.

A **súlypontot** megkaphatjuk például két súlyvonal metszéspontjaként. s_b : $12x + 23y = 168$ már ismert, az AF_a súlyvonal egyenlete pedig s_a : $y = \frac{12}{19}x$. A súlypontot így a

$$\left. \begin{aligned} 12x + 23y &= 168 \\ y &= \frac{12}{19}x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja.

Egy másik (gyorsabban célt érő) módszer a súlypont koordinátáira tanult képlet alkalmazása. Ez alapján a súlypont $s = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \left(\frac{19}{3}; 4\right)$. (Ellenőrizhetjük, hogy a koordinátpár valóban megoldása az egyenletrendszernek.)

A **magasságpont** két magasságvonal metszéspontja. Mivel AB maga az x tengely, m_c az y tengellyel párhuzamos (nincs meredeksége), egyenlete m_c : $x = 5$. Az

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x \\ x &= 5 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása $M\left(5; \frac{15}{4}\right)$, ez a magasságpont.

A **beírt kör K középpontját** többféleképpen is meghatározzuk.

Első megoldás (vázlat): K két szögfelező metszéspontja. Az egyik szögfelező egyenlete már ismert, f_c : $y = -8x + 52$. Ha az A csúsból húzott f_a szögfelező a BC oldalt az E pontban metszi, akkor a szögfelező osztásarány-tétele miatt $\overrightarrow{AE} = \frac{13\mathbf{b} + 14\mathbf{c}}{27}$ (mert 13 és 14 a közrefogó oldalak hossza). Ez – vagy még egyszerűbben $13\mathbf{b} + 14\mathbf{c}$ – a szögfelező egy irányvektora; innen számolhatunk meredekséget és felírhatjuk f_a egyenletét. Végül f_c és f_a metszéspontja adja meg a keresett K pontot.

Második megoldás: Az előző számolásigényes megoldásnál gyorsabban célt érünk, ha a háromszög $r = \frac{t}{s}$ területképletét használjuk. (A beírt kör sugara r , a háromszög területe t , félkerülete s .)
 $t = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84$, $s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$, $r = \frac{84}{21} = 4$. K és AB távolsága tehát 4, így a beírt kör középpontja rajta van az $y = 4$ egyenletű egyenesen. Az

$$\left. \begin{aligned} y &= -8x + 52 \\ y &= 4 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása $K(6; 4)$, ez a beírt kör középpontja.

A **körülírt kör O középpontja** két oldalfelező merőleges metszéspontja. g_a : $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}$ már ismert, AB felező merőlegese pedig g_c : $x = 7$. Az

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8} \\ x = 7 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása $O\left(7; \frac{33}{8}\right)$, ez a körülírt kör középpontja.

Egy másik lehetőség az $R = \frac{abc}{4t}$ területképlet alkalmazása (R a körülírt kör sugara). Ez alapján $R = \frac{15 \cdot 13 \cdot 14}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$. Ha F_c az AB oldal felezőpontja, akkor az AF_cO derékszögű háromszögben $AF_c = 7$, $AO = \frac{65}{8}$, így Pitagorasz tételéből az OF_c koordináta számolható: $OF_c = \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - 7^2} = 4,125$.

Végül eljárhatunk úgy is, hogy az O pont y koordinátáját paraméternek tekintjük. Mivel O az $x = 7$ egyenesen van, koordinátáira $O(7; y)$ teljesül, és az $OA = OC$ feltételből $\sqrt{7^2 + y^2} = \sqrt{(7-5)^2 + (y-12)^2}$. Négyzetre emelés után y^2 kiesik, az elsőfokú egyenletnek egy megoldása lesz.

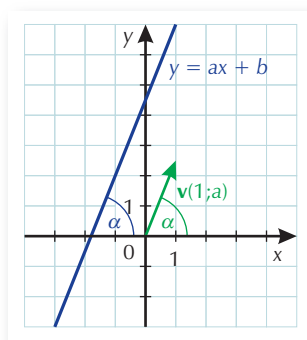
Megjegyzés

A háromszög-geometria nagyon sok elemi tételt ismer, de háromszögekkel kapcsolatos feladatok megoldásában trigonometriai módszereket is alkalmazhatunk. Mivel az ABC háromszög három oldalát ismerjük, a szinusz- és a koszinusztétellel kiszámolhatjuk a szögeit és a nevezetes szakaszok hosszát.

Tavaly kiegészítő anyagként említettük az **Euler-egyeses tételét**, mely szerint bármely háromszög körülírt körének középpontja, a súlypontja és a magasságpontja egy egyenesen van. Emlékszel még, milyen sorrendben helyezkedtek el ezek a pontok, és milyen arányban osztotta a középső pont két részre a szakaszt?

Ellenőrizd, hogy a most kapott $O\left(7; \frac{33}{8}\right)$, $S\left(\frac{19}{3}; 4\right)$ és $M\left(5; \frac{15}{4}\right)$ pontokra valóban teljesülnek a feltételek!

IRÁNSZÖG, IRÁNYTANGENS



Az egyenesnek az x tengely pozitív irányával bezárt szögét az egyenes **irányszögének** nevezzük. Korábban láttuk, hogy az $y = mx + b$ egyenletű egyenes irányvektorának választhatjuk pl. a $\mathbf{v}(1; m)$ vektort. Mivel az egyenes iránya nem függ b -től, az irányszöget várhatóan m vagy $\mathbf{v}$ segítségével megadhatjuk.

Ha a $\mathbf{v}$ vektor irányszögét α -val jelöljük, akkor a vele párhuzamos egységvektor az $\mathbf{e}_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$ vektor. Minthogy az egyenes nem párhuzamos az y tengellyel, így $\alpha \neq 90^\circ$ és mivel $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, $\cos \alpha \neq 0$. Tudjuk, hogy két párhuzamos vektor megfelelő koordinátáinak hányadosa egyenlő. Így

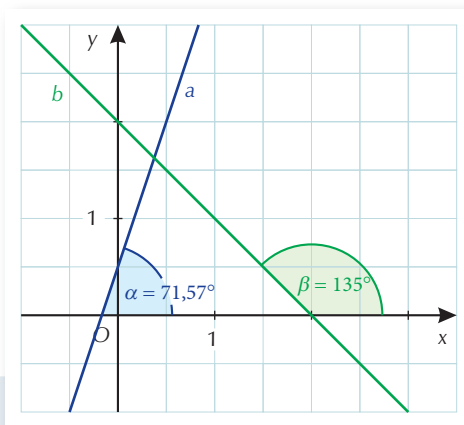
$$\frac{a}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

vagyis

$$a = \operatorname{tg} \alpha.$$

Az a érték tehát az egyeneshez tartozó irányvektor irányszögének a tangense. Ezt nevezzük az egyenes meredekségének: $a = \operatorname{tg} \alpha$. A koordináta-geometriában az egyenes meredekségét általában m -mel jelölik, ezért $m = \operatorname{tg} \alpha$. Az m értéket az egyenes **iránytangensének** vagy **iránytényezőjének** nevezzük.

Például az a : $y = 3x + 1$ egyenes és az $y = 3x$ egyenes irányszöge megegyezik, ez a szög $\operatorname{tg} \alpha = 3$ miatt kb. $71,57^\circ$. A b : $y = -x + 2$ egyenes irányszögére $\operatorname{tg} \beta = -1$, innen $\beta = 135^\circ$.



5. példa

Számítsuk ki a 3. példában szereplő ABC háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát!

Megoldás

A három oldal hosszának ismeretében alkalmazhatnánk például a koszinusztételt is, de most az egyenesek irányszögével dolgozunk. $m_{AC} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, innen $\alpha \approx 67,38^\circ$; $m_{BC} = -\frac{4}{3}$, innen β külső szöge $\beta' \approx 126,87^\circ$. $\beta' = \alpha + \gamma$ miatt $\gamma = \beta' - \alpha \approx 59,49^\circ$.

SZERKESZTÉS VAGY PARAMÉTEREZÉS? (Olvasmány)

Egyre gazdagabb a geometriai feladatmegoldó eszköztárunk. Az elemi geometriai eszközök mellett eddig is használhattunk trigonometriát vagy vektorokat, most pedig új segédeszközeink is vannak, a koordináta-geometriai módszerek. Ezen belül a koordináta-geometriai feladatok jó része geometriai vagy algebrai szemléletmóddal is megoldható: az első esetben a szerkesztési lépéseket követjük, a második esetben általában paramétereket veszünk fel. Nézzünk néhány példát a 41. leckéből!

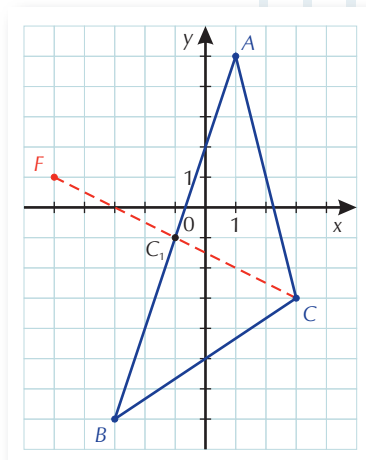
1. (2. példa) Határozzuk meg a paralelogramma negyedik csúcspontjának koordinátáit, ha három csúcsa: $A(1; 5)$, $B(-3; -7)$, $C(3; -3)$!

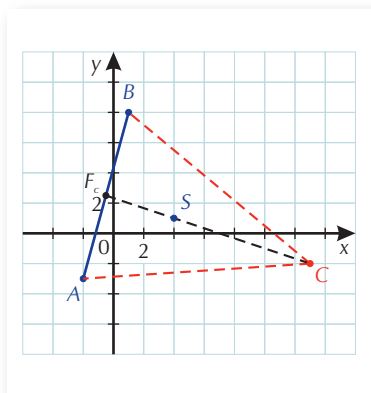
A leckében a szerkesztés menetét követtük: meghatároztuk az AB oldal C_1 felezőpontját, majd C -t tükrözve C_1 -re, megkaptuk F -et, a negyedik csúcspot. (Több megoldás volt.)

Az algebrai szemléletmóddal paraméterezzük az $F(x; y)$ csúcspot (x és y az ismeretlenek). Paralelogrammára $\vec{CA} = \vec{BF}$, azaz $(-2; 8) = (x + 3; y + 7)$. Ez a vektor-egyenlet pedig helyettesíthető két skalár egyenlettel, amiből x és y meghatározható: $-2 = x + 3$; $8 = y + 7$.

2. (5. kitűzött feladat) Egy háromszög két csúcsa az $A(-2; -3)$ és a $B(1; 8)$ pont. A háromszög súlypontja az $S(4; 1)$ pont. Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit!

Ha a szerkesztés menetét követjük, akkor például kiszámítjuk az AB oldal F_c felezőpontját, majd ebből a pontból $\lambda = 3$ arányú középpontos nagyítással S képe C lesz.





Az algebrai út a következő: legyen $C(x; y)$ a keresett pont. Ekkor $s = \frac{a+b+c}{3}$, innen $c = 3s - a - b$, ami koordinátákkal $(x; y) = 3 \cdot (4; 1) - (-2; -3) - (1; 8)$. Az egyenletből x és y számolható.

3. (8.b) kitűzött feladat) Az ABC háromszög két csúcsa $A(3; -10)$, $B(-16; 2)$, és tudjuk, hogy a C csúcs rajta van az x tengelyen. Határozzuk meg C koordinátáit, ha az ABC háromszög egyenlőszárú, és AB az alapja!

A geometriai módszer alapján az AB felező merőlegese metszi ki C -t az x tengelyből.

Az algebrai módszer alapján legyen $C(x; 0)$, és a $CA = CB$ egyenletet kell megoldanunk: $\sqrt{(3-x)^2 + (-10)^2} = \sqrt{(-16-x)^2 + 2^2}$.

Végül a 3. példa ebből a leckéből:

4. Az $A(0; 0)$, $B(14; 0)$, $C(5; 12)$ csúcsú háromszög O körülírt körének középpontját meghatároztuk szerkesztési lépésekkel (oldalfélező merőlegesek metszéspontja) és paraméterezéssel is. Ekkor $O(7; y)$ volt a paraméterezés, és az $OA = OC$ feltételből számítottuk ki y -t.

Fogalmak

párhuzamosság
feltételei;
merőlegesség
feltételei;
irányszög;
iránytangens.

Adódik a kérdés: melyik a „jobb” módszer, melyiket érdemes választani?

Általános választ sajnos nem adhatunk. Néha rövidebb a paraméterezéssel, algebrai megoldás, de előfordulhat, hogy nehéz számolásra vezet. A szerkesztési lépések követése pedig általában célhoz vezet, de gyakran hosszadalmasabb így a megoldás. És hát ízlés dolga, hogy melyik megoldási út a szimpatikusabb.

Egyre több geometriai megoldási módszert ismerünk, az összetett feladatok esetében érdemes tudatosan, előre tervezve megválasztani a megoldási utat.

FELADATOK

1. K1

Írjuk fel az e és az f egyenes egyenletét, ha átmennek a $(8; -2)$ ponton, és e párhuzamos az $x - 3y = 8$ egyenletű egyenessel, f pedig merőleges rá!

2. K1

Keressünk az alábbi egyenesek között egymással párhuzamos és egymásra merőleges egyeneseket, ha egyenleteik:

$$2x - 7y = 16; \quad 4x - 14y + 5 = 0; \quad 7x + 2y - 3 = 0; \quad 5x + y = 12; \quad 2x - 10y = 7!$$

3. K1

Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az

a) $2x + 3y = 7$,

$6x + py = 8$;

b) $y = 0,5x + 2$,

$y = px + 3$;

c) $5x + 7y = 8$,

$3px + 8y = 9$

egyenletű egyenesek párhuzamosak legyenek egymással! Oldjuk meg a feladatokat akkor is, ha az egyenesek merőlegesek!



4. K2

Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete $2x - y = -4$, $3x + y = 11$. Szimmetriaközéppontja a $(2; 1)$ pont. Számítsuk ki a csúcspontok koordinátáit!

5. K2

Egy háromszög két csúcspontja $A(-8; 2)$, $B(1; 7)$, magasságpontja $M(1; -2)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit!

6. K2

Számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit, ha egyik oldalegyenesének egyenlete $7x - 12y = 59$, a másik két oldalhoz tartozó magasságvonal egyenlete $7x - 5y = 14$ és $5x + 12y = 1$!

7. K2

A háromszög egyik csúcspontja az $A(1; 2)$ pont, két magasságvonalának egyenlete $2x - 3y + 1 = 0$ és $x + y = 0$. Számítsuk ki a hiányzó csúcspontok koordinátáit!

8. K2

Egy téglalap két szomszédos csúcspontja: $A(5; 3)$, $B(7; 7)$. Az AB -vel szemközti oldal egyenesének egy pontja $P(-2; 9)$. Határozzuk meg a téglalap hiányzó csúcspontjait!

9. K2

Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Adottak a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(2; 2)$ és $B(5; 6)$ pontok. Az x tengely mely P pontjára lesz az APB háromszög területe 15 egység?

„Megoldás”: Jelölje C és D az A , illetve B pont merőleges vetületét az x tengelyen (ábra).

Ha a P pont egybeesik D -vel, akkor a DPB háromszög területe

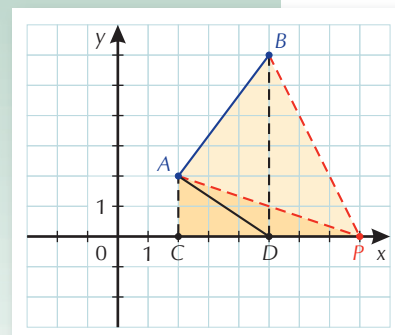
$T_{CDBA} - T_{CDA} = \frac{2+6}{2} \cdot 3 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 9$ egység. Az AB alaphoz tartozó magasságot tehát növelni kell, így P a D ponttól az x tengely pozitív irányába esik.

Legyen $D(x; 0)$. Ekkor $T_{APB} = T_{CDBA} + T_{DPB} - T_{CPA}$ azaz

$$15 = 12 + \frac{(x-5) \cdot 6}{2} - \frac{(x-2) \cdot 2}{2}.$$

Az egyenlet megoldása $x = 8$.

Eredmény: A $P(8; 0)$ pont esetén $T_{APB} = 15$ egység.



Ajánlott feladatok

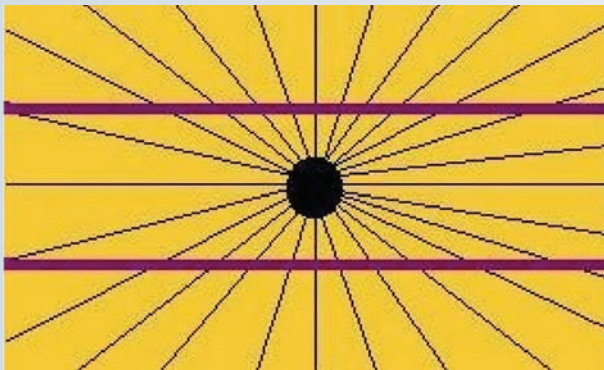
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3669, 3670, 3673–3676, 3679, 3682, 3707.



GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK ÉS KOORDINÁTÁK (Olvasmány)

Ebben az olvasmányban arra a kérdésre keresünk választ, hogy a pontok koordinátái és az egyenesek egyenletei hogyan változnak meg az egyszerűbb geometriai transzformációk során.

Feladatok



Vajon egyenes a két lila vonal?

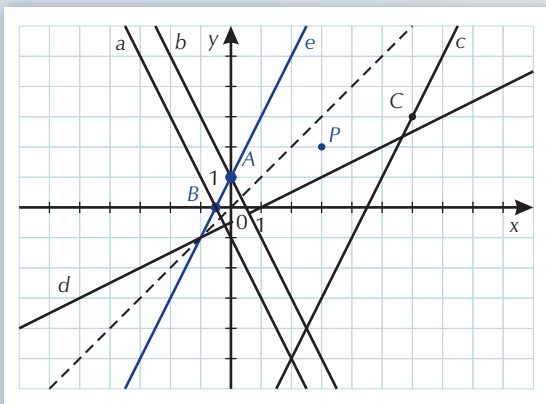
Adott az $e: y = 2x + 1$ egyenletű egyenes. Hajtsuk végre az alábbi transzformációkat, s adjuk meg az egyenes képeinek az egyenletét!

- Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
- tengelyes tükrözés az y tengelyre;
- középpontos tükrözés a $P(3; 2)$ pontra;
- tengelyes tükrözés az $y = x$ egyenletű egyenesre.
- Eltolás a $\mathbf{v}(1; 2)$ vektorral;
- eltolás a $\mathbf{v}(-2; -5)$ vektorral;
- forgatás az origó körül -90° -kal;
- forgatás az origó körül 90° -kal.
- $\lambda = 0,5$ arányú kicsinyítés a $P(3; 2)$ pontból;
- $\lambda = -2$ arányú nagyítás a $P(3; 2)$ pontból;
- $\lambda = 0,5$ arányú zsugorítás (merőleges affinitás) az x tengelyre;
- $\lambda = 0,5$ arányú zsugorítás (merőleges affinitás) az y tengelyre.

Megoldások

A fenti transzformációk során egyenes képe mindig egyenes marad. Tehát azt mindig megtehetjük, hogy az egyenes két tetszőleges pontját transzformáljuk, s ekkor a képpontokat összekötő egyenesek adják a megoldást. Ilyen célból érdemes például az $A(0; 1)$ és $B(-0,5; 0)$ tengelymetszetek képét meghatározni.

Egy másik lehetőség, amikor a képegynes meredekségét állapítjuk meg; ekkor elég egyetlen pontot transzformálnunk. (Adott pont és irány már meghatározza az egyenest.) Észrevehetjük például, hogy a középpontos tükrözés, az eltolás és a középpontos hasonlóság során a képegynesek párhuzamosak maradnak az eredeti e egyenessel, esetleg a képegynes maga az e egyenes.



a) Az egyenes meredeksége ellentettjére változik, az x tengelymetszete megmarad, az y tengelymetszete az x tengelyre tükröződik. Az új egyenes egyenlete $a: y = -2x - 1$.

b) Az egyenes meredeksége ellentettjére változik, az y tengelymetszete megmarad.
 $b: y = -2x + 1$.

c) Az egyenes meredeksége megmarad, az $A(0; 1)$ pont képe pedig olyan C pont, amelyre P az AC szakasz felezőpontja. Ezért $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \mathbf{p}$, azaz $\mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{a} = (2 \cdot 3 - 0; 2 \cdot 2 - 1) = (6; 3)$.

A c egyenes egyenlete $c: y - 3 = 2(x - 6)$.

d) A keresett egyenes az $e(x) = 2x + 1$ függvény inverzének a képe. A változók felcsereléséből $x = 2y + 1$, és innen $y = 0,5x - 0,5$ adódik.

e) Mivel $\mathbf{v}(1; 2)$ az e egyenes egy irányvektora, képe önmaga marad.

f) Ha az eltolás során A pont képe F , akkor $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \mathbf{v} = (0; 1) + (-2; -5) = (-2; -4)$. Ezért $f: y + 4 = 2(x + 2)$, azaz $f: y = 2x$.

g) Az A pont képe $G(1; 0)$, és mivel a képegys merőleges az eredeti egyenesre, meredeksége $-0,5$. Ezért $g: y = -0,5(x - 1)$.

h) Az A pont képe $H(-1; 0)$, a meredekség $-0,5$, így $h: y = -0,5(x + 1)$.

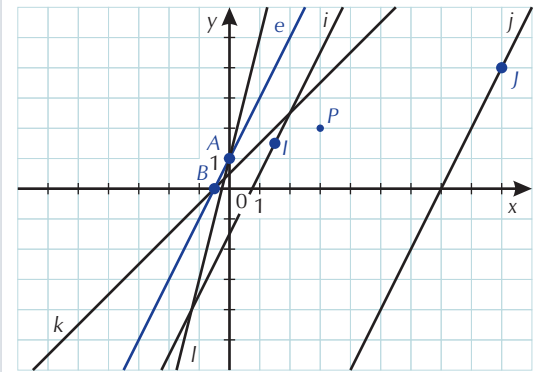
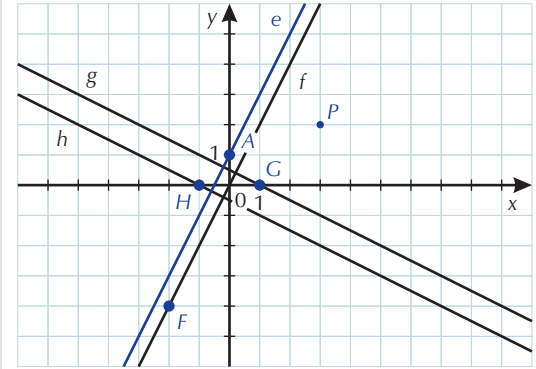
i) Az A pont képe az AP szakasz I felezőpontja lesz.

$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{p}}{2} = \left(\frac{0+3}{2}; \frac{1+2}{2}\right) = (1,5; 1,5)$. A meredekség nem változik, $i: y - 1,5 = 2(x - 1,5)$, azaz $y = 2x - 1,5$ a keresett egyenes egyenlete.

j) Ha az A pont képe J , akkor P az AJ szakasz A -hoz közelebbi harmadolópontja. A tanult összefüggés szerint $\mathbf{p} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{j}}{3}$, s innen $\mathbf{j} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{a} = (3 \cdot 3 - 2 \cdot 0; 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = (9; 4)$. Az egyenes egyenlete $j: y - 4 = 2(x - 9)$, azaz $y = 2x - 14$.

k) Az egyenes k affin képe átmegy a fix $B(-0,5; 0)$ ponton, míg az affinitás miatt a meredekség a felére változik. $k: y = x + 0,5$.

l) A meredekség a kétszeresére változik, a fix pont $A(0; 1)$ marad: $y - 1 = 4x$.



FELADATOK

1. K2 Végezzük el az előző a) – l) transzformációkat az ABC háromszöggel, ha $A(-5; -2)$, $B(1; 6)$ és $C(6; 2)$! Határozzuk meg az így kapott háromszögek csúcsait és területét!

2. K2 Végezzük el az előző a) – l) transzformációkat az $e: y = -3x + 2$ egyenletű egyenessel és a $P(-3; -1)$ ponttal is, és határozzuk meg az e egyenes képeinek egyenletét!

Tudod-e?

Ne lépjen ide be senki, aki ageometretosz (aki, a geometriát nem ismeri)!

A hagyomány szerint ez volt Platón (Kr. e. 429–347) filozófiai iskolájának, az Akadémiának a kapufelirata. A görög filozófus az Akadémosz liget közelében lévő iskolában filozófiát és matematikát tanított. A geometria ismeretének fontosságát más írásaiban is hangsúlyozta (például Az állam című művében). A Platón által alapított filozófiai intézmény több mint kilencszáz éven át állt fenn.

45. A KÖR KOORDINÁTAGEOMETRIÁJA

Az előzőekben az egyenes egyenletével foglalkoztunk. Bármely egyeneshez megadhatunk olyan egyenletet, amelyet azoknak és csak azoknak a pontoknak a koordinátái elégítenek ki, mely pontok az egyenesen vannak. Ezért neveztük ezt az egyenletet az egyenes egyenletének. Hasonlóképpen egy adott körnek (körvonalnak) az egyenletéről beszélünk, ha ezt az egyenletet a kör pontjainak koordinátái kielégítik, azoknak a pontoknak a koordinátái viszont, amelyek nincsenek a körön, nem elégítik ki.

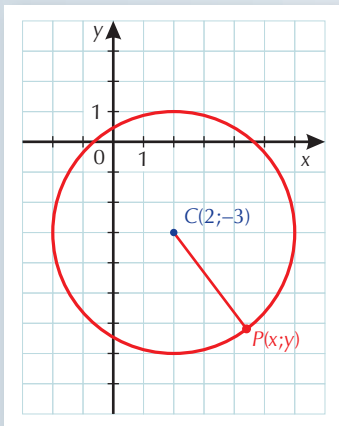
A síkban a kört a középpontja és a sugara meghatározza.

Nézzünk először egy konkrét példát.

1. példa

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, melynek középpontja a $C(2; -3)$ pont, és sugara 4 egység!

Megoldás



Ha $P(x; y)$ befutja a körvonalat, akkor bármely helyzetében a $C(2; -3)$ ponttól 4 egységnyi távolságra van. Ha P a kör belsejében van, akkor $PC < 4$; ha a körön kívül, akkor $PC > 4$. Ebből és a távolságképletből adódik, hogy a $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van a mondott körön, ha koordinátái kielégítik a

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = 4$$

egyenletet.

Ez ekvivalens az

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2 = 16$$

egyenlettel, hiszen két pozitív szám akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha négyzeteik egyenlők.

Tehát a $C(2; -3)$ középpontú, $r = 4$ sugarú kör egyenlete:

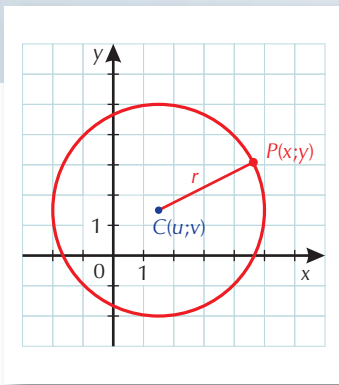
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Az $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 < 16$ egyenlőtlenség

a kör belső pontjainak koordinátáira, az

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 16 \text{ egyenlőtlenség}$$

a körön kívül levő pontok koordinátáira teljesül, mert két pozitív szám négyzetei közül a nagyobbiknak a négyzete nagyobb. Így például a $(0; -1)$ pont belső pont, a $(-5; 2)$ pont külső pont.



Hasonlóan kaphatjuk meg általánosan a $C(u; v)$ középpontú, r sugarú kör egyenletét.

Tudjuk, hogy a kör azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a középponttól sugáryi távolságra vannak. Legyen továbbá a kör tetszőleges pontja P , amelynek koordinátái legyenek $P(x; y)$. A kör pontjaira tehát

$$|\overrightarrow{CP}| = r, \text{ azaz } \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = r.$$

Mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emelhetünk, ez nem változtatja meg, hogy mely pontok elégítik ki az összefüggést.

Tétel

Az $(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete**:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$

Speciálisan az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

2. példa

Írjuk fel az AB szakasz Thalész-körének egyenletét, ha $A(3; -4)$, $B(7; 9)$!

Megoldás

A kör egyenletét fel tudjuk írni, ha ismerjük a középpontját és a sugarát. A kör középpontja az AB átmérő C felezőpontja: $C(5; 2,5)$. A kör sugara az AC szakasz hossza: $r = \sqrt{4 + 42,25} = \sqrt{46,25}$. Így a keresett kör egyenlete:

$$(x - 5)^2 + (y - 2,5)^2 = 46,25.$$

3. példa

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik átmegy a $P(8; 1)$ ponton, és érinti a koordinátatengelyeket!

Megoldás

Először a kör középpontját és sugarát határozzuk meg. A megadott adatokból következik, hogy a kör $C(u; v)$ középpontja az első síknegyedben van, és koordinátái egyenlők a sugárral: $u = v = r$.

Ezek szerint a keresett kör egyenlete

$$(x - u)^2 + (y - u)^2 = u^2 \text{ alakú.}$$

Ezen a körön rajta van a $(8; 1)$ pont, s így koordinátái kielégítik az egyenletet:

$$(8 - u)^2 + (1 - u)^2 = u^2.$$

Ebből

$$64 - 16u + u^2 + 1 - 2u + u^2 = u^2,$$

$$u^2 - 18u + 65 = 0,$$

$$u_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81 - 65} = \begin{cases} u_1 = 13, \\ u_2 = 5. \end{cases}$$

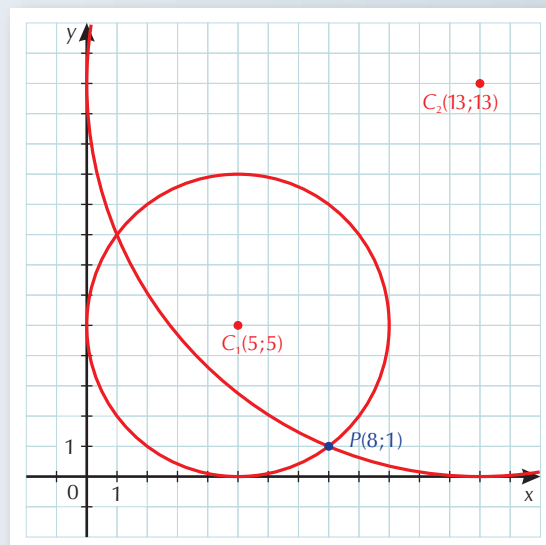
A feladatnak tehát két megoldása lehet: az $(5; 5)$ középpontú, 5 egység sugarú és a $(13; 13)$ középpontú, 13 egység sugarú kör.

E körök egyenlete

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25,$$

$$(x - 13)^2 + (y - 13)^2 = 169.$$

Ellenőrizhetjük, hogy e két kör eleget tesz a feladat feltételeinek. A két megoldás az ábrán látható.



4. példa

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik átmegy az $A(2; -1)$ és $B(4; 5)$ ponton, és középpontja rajta van az $x - 3y = -2$ egyenletű egyenesen!

Megoldás

Első megoldás (vázlat): Tudjuk, hogy a kör bármely húrjának felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. Így a keresett kör $C(u; v)$ középpontját az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az adott egyenesből. Az AC szakasz pedig a kör sugara. Az elmondottak módot adnak a középpont és a sugár meghatározására, de itt mi most más utat fogunk követni.

Második megoldás: Minthogy A és B rajta van a körön, koordinátái kielégítik a kör egyenletét:

$$(2 - u)^2 + (-1 - v)^2 = r^2, \quad (1)$$

$$(4 - u)^2 + (5 - v)^2 = r^2. \quad (2)$$

A kör középpontja az adott egyenesen van, tehát a középpont koordinátái kielégítik az adott egyenes egyenletét:

$$u - 3v = -2. \quad (3)$$

Az u , v és r meghatározásához az (1), (2), (3) egyenletekből álló egyenletrendszert oldjuk meg. Mivel az (1), (2) egyenletek jobb oldala megegyezik, ezért a bal oldalak is egyenlők.

$$(2 - u)^2 + (-1 - v)^2 = (4 - u)^2 + (5 - v)^2,$$

$$4 - 4u + u^2 + 1 + 2v + v^2 = 16 - 8u + u^2 + 25 - 10v + v^2.$$

Azaz

$$4u + 12v = 36,$$

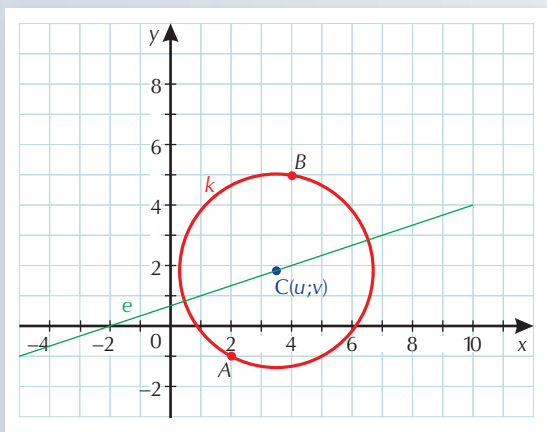
$$u + 3v = 9. \quad (4)$$

(3) és (4) összeadásával

$$2u = 7,$$

$$u = \frac{7}{2}, \quad \text{és így} \quad v = \frac{11}{6}.$$

Tehát $C\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{6}\right)$ a kör középpontja.



A kapott értékeket (2)-be helyettesítve:

$$r^2 = \frac{1}{4} + \frac{361}{36} = \frac{370}{36} = \frac{185}{18}.$$

Így a kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{6}\right)^2 = \frac{185}{18}.$$

Megjegyzés

Ha a két pont az adott egyenesre szimmetrikusan helyezkedik el, akkor végtelen sok megoldás van.

A KÖR ÉS A KÉTISMERETLENES MÁSODFOKÚ EGYENLET

Emelt szint

5. példa

Határozzuk meg azoknak a P pontoknak a halmazát a síkon, amelyekre $\frac{PA}{PB} = 2$, és $A(1; 0)$, $B(4; 0)$!

Megoldás

A $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor pontja a keresett halmaznak, ha x és y kielégítik a

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}} = 2$$

egyenletet. Minthogy B nyilvánvalóan nem pontja a halmaznak, így az egyenletet csak a $(4; 0)$ számpártól különböző számpárok halmazában vizsgáljuk. E halmazban a nevező pozitív; ha szorzunk vele, akkor ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Ezzel ekvivalens az

$$(x-1)^2 + y^2 = 4((x-4)^2 + y^2)$$

egyenlet. A két oldalon a kijelölt műveleteket elvégezve és rendezve a

$$3x^2 - 30x + 3y^2 + 63 = 0$$

egyenlethez jutunk. 3-mal osztva az egyenlet mindkét oldalát:

$$x^2 - 10x + y^2 + 21 = 0.$$

A keresett pontok halmazának az egyenlete egy kétismeretlenes másodfokú egyenlet. Ez teljes négyzetté való kiegészítéssel

$$(x-5)^2 + y^2 = 25 - 21 \text{ alakra hozható, azaz}$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 4.$$

Erről tudjuk, hogy egy kör egyenlete, amelynek középpontja a $C(5; 0)$ pont, és a sugara $r = 2$.

A feladat megoldásából látszik, hogy az

$$x^2 - 10x + y^2 + 21 = 0, \text{ vagy a}$$

$$3x^2 - 30x + 3y^2 + 63 = 0$$

kétismeretlenes másodfokú egyenletek kör egyenletei.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen egyenlet lehet kör egyenlete!

A kör egyenlete mindig ekvivalens egy $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ alakú egyenlettel. Ez írható

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$$

alakban is. Nyilván ugyanannak a körnek az egyenletét kapjuk, ha az utóbbi egyenlet mindkét oldalát egy $A \neq 0$ számmal megszorozzuk:

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Aux - 2Avy + Au^2 + Av^2 - Ar^2 = 0. \text{ Itt } (Au^2 + Av^2 - Ar^2) \text{ egyetlen szám.}$$

Az egyszerűség kedvéért az együtthatókat és a konstans egy-egy betűvel jelöljük:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

Az egyenletről leolvashatjuk az alábbi **fontos tulajdonságot**:

A kétismeretlenes másodfokú egyenlet csak akkor lehet **kör egyenlete**, ha az x^2 és y^2 tagok együtt-hatója egyenlő, és az egyenletben nem szerepel xy -os tag. (A feltétel csak szükséges.)

Például az

$$x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 7y + 11 = 0,$$

$$x^2 - y^2 + 8x - 12y + 3 = 0$$

egyenletek egyike sem lehet kör egyenlete, mert a mondott feltételek közül valamelyik nem teljesül.

Az $5x^2 + 5y^2 + 7x - 3y + 4 = 0$

egyenlet az előbbi számolás mintájára

$$(x + 0,7)^2 + (y - 0,3)^2 = -0,22$$

alakban írható. Ezt egyetlen $(x; y)$ számpár sem elégítheti ki, hiszen a bal oldalon nemnegatív szám, a jobb oldalon negatív szám van. A felírt egyenlet tehát *nem* kör egyenlete.

Hasonlóképpen azonnal látható, hogy az

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \text{és az} \quad x^2 + y^2 = 0$$

kétismeretlenes másodfokú egyenletek sem körök egyenletei, hiszen az első egyetlenny $(x; y)$ számpár sem elégíti ki, a másodikat pedig csak a $(0; 0)$ számpár.

Az utóbbi két példában teljesülnek a mondott feltételek, az egyenletek mégsem körök egyenletei. Ez azt jelenti, hogy a mondott feltételek csak **szükséges, de nem elégséges** feltételei annak, hogy a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kör egyenlete legyen. (**Elégséges feltélt** akkor kapunk a kör egyenletére, ha az $(x - u)^2 + (y - v)^2 = c$ átalakítás után $c > 0$ adódik.)

Fogalmak

kétismeretlenes
másodfokú
egyenlet
általános alakja;
a kör egyenlete.

FELADATOK

1. K1

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek C a középpontja és r a sugara:

- a) $C(-2; 4)$, $r = 6$; c) $C(-1,71; -0,64)$, $r = 0,25$;
b) $C(0; 2)$, $r = 9$; d) $C(-\sqrt{3}; \sqrt{2})$, $r = 2\sqrt{2}$!

2. K1

Milyen összefüggés van a pontok koordinátái között, ha a $C(4; -2)$ középpontú, $r = 7$ sugarú

- a) körön;
b) kör belsejében;
c) körön kívül;
d) kör belsejében vagy a határán vannak?

3. K1

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a $(7; -2)$ pont, és

- a) átmegy a $(0; 0)$ ponton;
b) átmegy a $(9; 11)$ ponton;
c) érinti az x tengelyt;
d) érinti az y tengelyt!

4. K1

Egy kör egyik átmérőjének végpontjai:

- a) $(2; 2)$, $(6; -4)$;
b) $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$, $(\frac{4}{3}; -3)$.

Írjuk fel a kör egyenletét!

5. K2

Induljunk ki az $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ egyenletű körből, és

- a) tükrözzük az x tengelyre; d) forgassuk el az origó körül $+90^\circ$ -kal;
b) tükrözzük az origóra; e) nagyítsuk középpontjából 3-szorosára;
c) toljuk el a $(2; -3)$ vektorral; f) kicsinyítsük az origóból felére!

Írjuk fel az így kapott körök egyenletét!

6. K2

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely a $(-4; 2)$ ponton megy keresztül, és mindkét tengelyt érinti!

7. K1

Döntsük el a következő kétismeretlenes másodfokú egyenletekről, hogy kör egyenletei-e! Ahol van értelme, ott határozzuk meg a kör középpontját és sugarát:

a) $x^2 + y^2 - 25 = 0$;

b) $2x^2 + 2y^2 = 9$;

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$;

d) $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$;

e) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$;

f) $4x^2 + 4y^2 - 20y - 75 = 0$;

g) $x^2 + 2y^2 - 8x - 1 = 0$;

h) $x^2 - y^2 - 8x + 2y = 0$;

i) $xy - 4 = 0$;

j) $x^2 + y^2 + 1 = 0$!

8. K2

Az a paraméter milyen értékei mellett lesz az $x^2 + y^2 - 8x + 12y + a = 0$ egyenlet kör egyenlete?

9. E1

Mi azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek az $(1; 2)$ ponttól

a) háromszor akkora;

b) kétszer akkora;

c) ugyanakkora távolságra vannak, mint az $(1; 8)$ ponttól?

10. E1

Mi azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekre teljesül, hogy a $(2; 3)$ és $(4; 1)$ pontoktól vett távolságuk négyzetének összege 28 egység?



Ajánlott feladatok

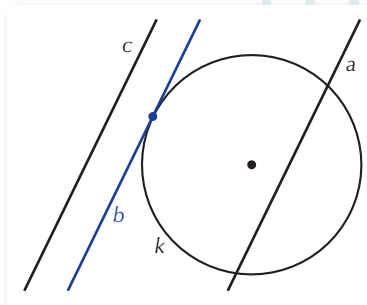
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3822–3829, 3834–3837, 3839, 3863, 3865, 3867, 3879, 3881.

46. EGYENES ÉS KÖR KÖLCSÖNÖS HELYZETE

Emelt szint

Egyenes és kör kölcsönös helyzete háromféle lehet: az egyenes metszheti, érintheti vagy elkerülheti a kört. (Az ábrán ilyen helyzetű a k kör és rendre az a , b , c egyenes.)

Amikor két alakzat metszéspontját határozzuk meg, akkor olyan pontokat keresünk, amelyek mindkét alakzathoz hozzátartoznak. Egyenes és kör közös pontjait is az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg. A kör egyenlete másodfokú, így a felírható másodfokú egyenletrendszer megoldásainak száma $(0, 1, 2)$ egyúttal az egyenes és kör közös pontjainak a számát, azaz az alakzatok kölcsönös helyzetét is jellemzi.



1. példa

Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ egyenletű kör és a $4x - 3y + 2 = 0$ egyenletű egyenes metszéspontjainak koordinátáit!

Megoldás

Átírhatjuk a kör egyenletét $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 + 1 + 4 = 25 = 5^2$ alakba, így látjuk, hogy létező körről van szó. A középpont $(1; 2)$, a sugár $r=5$. A metszéspont kielégíti az egyenes és a kör egyenletét is, tehát nem lehet más mint a két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása. Fejezzük ki az egyenes elsőfokú egyenletéből például x -et: $x = \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}$.

Most ezt helyettesítsük a kör egyenletébe:

$$\left(\frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

A zárójeleket felbontva azt kapjuk, hogy

$$\frac{9}{16}y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{9}{4} + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0, \text{ 16-tal végigszorozva, összevonva és rendezve}$$

$$25y^2 - 100y - 300 = 0.$$

Megoldva a másodfokú egyenletet $y_1 = -2; y_2 = 6$. Az egyenes egyenletébe helyettesítve $x_1 = -2; x_2 = 4$. A két metszéspont tehát $P_1(-2; -2)$ és $P_2(4; 6)$.

Egyenes és kör metszéspontjainak meghatározásakor olyan kétismeretlenes egyenletrendszert oldunk meg, melyben az egyik egyenlet elsőfokú, a másik másodfokú. A megoldás módja, hogy **az elsőfokú egyenletből** az egyik ismeretlent **kifejezzük, és a másodfokú egyenletbe behelyettesítjük**, így az már másodfokú egyismeretlenes egyenlet lesz. Végeredményben másodfokú egyenletet oldunk meg, így a megoldások száma 2, 1 vagy 0. Ez összhangban van a lecke elején felelevenített korábbi geometriai ismereteinkkel.

2. példa

Határozzuk meg az $x^2 + (y-2)^2 = 100$ egyenletű kör és a $3x + 4y = 58$ egyenletű egyenes metszéspontjainak koordinátáit!

Megoldás

Az

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + (y-2)^2 = 100 \\ 3x + 4y = 58 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásához kifejezzük a második egyenletből x -et, és visszahelyettesítjük az első egyenletbe: $x = \frac{58-4y}{3}$, így $\left(\frac{58-4y}{3}\right)^2 + (y-2)^2 = 100$. Szorzunk 9-cel és az egyenletet rendezzük: $3364 - 464y + 16y^2 + 9y^2 - 36y + 36 = 900 \Leftrightarrow 25y^2 - 500y + 2500 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 20y + 100 = 0 \Leftrightarrow (y-10)^2 = 0$.

Az egyenletrendszernek egy megoldása van: $y = 10$ és – visszahelyettesítés után – $x = 6$ adódik. Tehát az egyenes érinti a kört, és az érintési pont $(6; 10)$.

3. példa

A -2 meredekségű egyenesek közül melyek metszik és melyek érintik az $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ egyenletű kört?

Megoldás

A -2 meredeksű egyenesek egyenlete $y = -2x + b$ alakba írható. Azt kell megállapítanunk, hogy b milyen értéke esetén van az $y = -2x + b$ egyenesnek és az adott körnek 2, illetve 1 közös pontja.

Nézzük ismét az

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0 \\ y = -2x + b \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldását:

$$x^2 + (-2x + b)^2 - 2x - 15 = 0.$$

Innen az

$$5x^2 + (-4b - 2)x + b^2 - 15 = 0$$

paraméteres másodfokú egyenlethez jutunk. A megoldások száma a diszkriminánsból függ. Két megoldás van, ha

$$(-4b - 2)^2 - 20(b^2 - 15) > 0, \text{ azaz}$$

$$-4b^2 + 16b + 304 > 0,$$

$$-b^2 + 4b + 76 > 0.$$

Egy megoldás van, ha

$$-b^2 + 4b + 76 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai

$$b_{1,2} = 2 \pm \sqrt{80}.$$

Tehát, ha $b = 2 - \sqrt{80}$, illetve $b = 2 + \sqrt{80}$, akkor az egyenes érinti a kört. Tudjuk, hogy a

$$b \mapsto -b^2 + 4b + 76$$

függvény a zérushelyek között pozitív, a zérushelyeken kívül negatív értékeket vesz fel, mivel a négyzetes tag együttthatója negatív.

A körnek és az egyenesnek két metszéspontja van, ha $2 - \sqrt{80} < b < 2 + \sqrt{80}$.

A -2 iránytangensű egyenesek közül tehát azok érintik az adott kört, amelyek az y tengelyt a $(0; 2 - \sqrt{80})$, illetve a $(0; 2 + \sqrt{80})$ pontban metszik. E két pont között haladó -2 iránytangensű egyenesek pedig metszik az adott kört.

ADOTT PONTBAN HÚZOTT ÉS ADOTT IRÁNYÚ ÉRINTŐK MEGHATÁROZÁSA

4. példa

Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$ egyenletű kör $P_0(1; 2)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét!

Megoldás

Fejben ellenőrizhetjük, hogy a P_0 pont valóban a körön van. Az érintő egyenletének felírásához az irányvektorát kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. A kör középpontjából az érintési pontba mutató vektor 90° -os elforgatottja tehát az érintő egy irányvektora.

A kör középpontjának koordinátái a kör egyenletéből kiszámíthatók. Az

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0 \text{ egyenlet}$$

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

alakban is írható. Innen a kör C középpontja $C(-3; -1)$, így $\overrightarrow{CP_0}(4; 3)$, ennek 90° -os elforgatottja pedig $(-3; 4)$. Ez az érintő egy irányvektora, a meredeksége tehát $-\frac{4}{3}$, egyenlete $y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1)$.

Általánosan igaz, hogy az érintő merőleges az érintési pontban húzható sugárra, ezért a kör középpontjából az érintési pontba mutató vektor 90° -os elforgatottja az érintő egyik irányvektora. Az érintő egyenes felírásához az irányvektoron kívül csak a megadott körpontra van szükség.

5. példa

Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ egyenletű kör $3x - 4y = 0$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!

Megoldás

Első megoldás

Ha egy egyenes párhuzamos a $3x - 4y = 0$ egyenessel, akkor az egyenlete $3x - 4y = c$ alakú. Ha az egyenes érinti a megadott kört, akkor az egyenletrendszernek egy megoldása van. Helyettesítsük az egyenes egyenletéből kifejezett y értékét a kör egyenletébe!

$$y = \frac{3x - c}{4}, \text{ ahonnan } x^2 + \left(\frac{3x - c}{4}\right)^2 - 6x + 2\left(\frac{3x - c}{4}\right) - 15 = 0.$$

Keressük tehát azokat a c értékeket, amelyekre ennek a másodfokú egyenletnek csak egy megoldása van. Ehhez először felbontjuk a zárójeleket, és 16-tal való szorzás után összevonunk.

$$25x^2 - (6c + 72)x + c^2 - 8c - 240 = 0.$$

Egy másodfokú egyenletnek akkor van egy valós gyöke, ha a diszkriminánsa nulla.

$$D = (6c - 72)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (c^2 - 8c - 240) = 0, \text{ innen}$$

$$9c^2 + 216c + 1296 - 25c^2 + 200c + 6000 = 0.$$

$$\text{Rendezve és 16-tal osztva } c^2 - 26c - 456 = 0.$$

A megoldóképletbe helyettesítve $c_1 = 38$ és $c_2 = -12$ adódik.

Az adott egyenessel párhuzamos érintők tehát $3x - 4y = 38$ és $3x - 4y = -12$.

Második megoldás

Mivel az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra, meghatározhatjuk az érintési pontokat. A kör egyenlete átírható $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ alakba, ahonnan a kör középpontja a $C(3; -1)$ pont.

A $3x - 4y = 0$ egyenes meredeksége $\frac{3}{4}$, a rá merőleges f egyenesé $-\frac{4}{3}$, és ha f a kör középpontján megy

át, akkor egyenlete $f: y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$. Innen $y = 3 - \frac{4}{3}x$. Ezt behelyettesítve a kör egyen-

letébe és megoldva $x_1 = 6$ és $x_2 = 0$ adódik, amelyekhez $y_1 = -5$ és $y_2 = 3$ tartozik.

Az érintési pontok $E_1(6; -5)$ és $E_2(0; 3)$. A két érintő egyenlete tehát:

$$3x - 4y = 18 + 20 = 38 \quad \text{és} \quad 3x - 4y = -12.$$

Megjegyzés

Az első megoldásban a paraméterezést, a másodikban a szerkesztés követését alkalmaztuk.

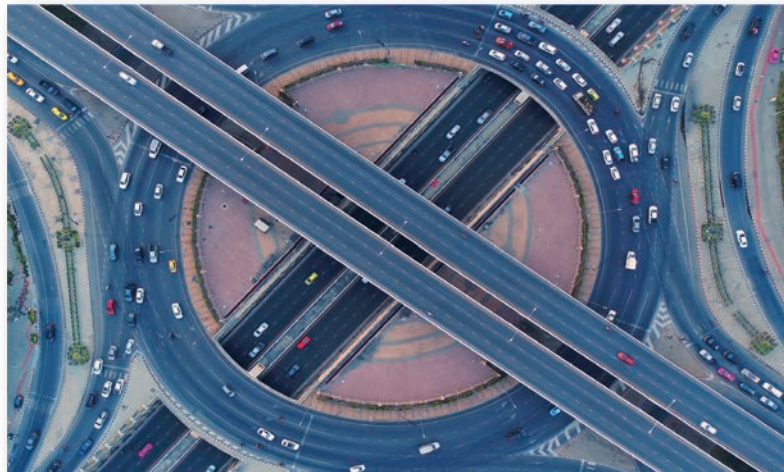
Fogalmak
metszéspon-
t; érintési pont;
érintők egyenlete.

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki annak a húrnak a hosszát, amelyet az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör metsz ki az $y - 7x = -25$ egyenletű egyenesből!
2. E1 Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$ egyenletű körben az $(1; 3)$ ponton átmenő legrövidebb húr egyenesének egyenletét és a húr hosszát!
3. E1 Határozzuk meg azokat a pontokat, melyek a $2x - y = 1$ egyenletű egyenesre illeszkednek, és a $(3; -4)$ ponttól 6 egységnyi távolságra vannak!
4. E1 Az a paraméter milyen értékei mellett lesz az $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ egyenletű körnek és az $y = 2x + a$ egyenletű egyenesnek 2; 1; illetve 0 közös pontja!
5. E1 Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör -3 abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők egyenletét!
6. E1 A P pont erő hatására az $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$ egyenletű körön mozog. Amikor P a $(-2; 7)$ pontba érkezik, az erő hatása megszűnik. Írjuk fel további pályájának egyenletét!
7. E1 Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör $4x - 2y = 7$ egyenletű egyenessel párhuzamos és rá merőleges érintőinek az egyenletét!
8. E1 Egy kör egyenlete: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$. Írjuk fel a $2x - 3y = 1$ egyenletű egyenessel párhuzamos, illetve arra merőleges érintőinek egyenletét!
9. E1 Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $y = mx + 4$ egyenletű egyenes érintse az $x^2 + y^2 - 4x = 0$ egyenletű kört!
10. E1 Az $x + 2y = c$ egyenletű egyenes érinti az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kört. Mekkora területű háromszöget zár be az egyenes a koordinátatengelyekkel?
11. E1 Egy P pont az $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$ egyenletű körön mozog. Pályájának mely pontjában lesz legközelebb, illetve legtávolabb a $Q(8; 13)$ ponttól?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.
3918–3922, 3925, 3926, 3928,
3938, 3943, 3946–3949.

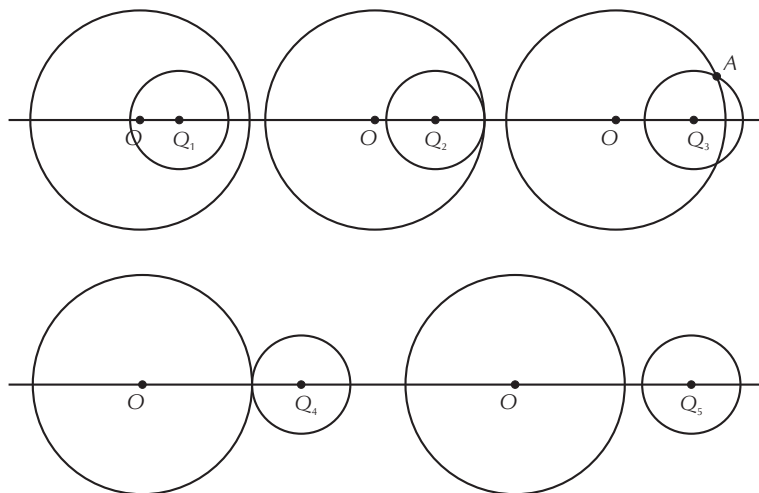


Emelt szint

47. KÉT KÖR KÖLCSÖNÖS HELYZETE, ÉRINTKEZŐ KÖRÖK

Két (különböző sugarú) kör kölcsönös helyzete ötféle lehet:

1. egyik kör tartalmazza a másikat;
2. egyik kör belülről érinti a másikat;
3. metszik egymást;
4. kívülről érintik egymást;
5. elkerülük egymást (a körlemeznek sincs közös pontjuk).



Az ábrán az ötféle helyzet látható. Legyen $R > r$ a körök sugara; O a nagyobbik, $Q_1, \dots, Q_5$ a kisebbik kör középpontja; végül a körök középpontjainak távolsága $OQ_1 = d_1$, $OQ_2 = d_2$ stb. A körök középpontját összekötő egyenes átmegy az érintkezési ponton, ha létezik, ezért a körök helyzetét algebrai formában is megfogalmazhatjuk.

1. $d_1 + r < R$, azaz $d_1 < R - r$.
2. $d_2 + r = R$, azaz $d_2 = R - r$.
3. $d_3 + r > R$ és $R + r > d_3$, azaz $R - r < d_3 < R + r$. (Az OQ_3A háromszögben a háromszög-egyenlőtlenséget az R és d_3 oldalakra is fel kell írni, mert mindkettő lehet a leghosszabb oldal.)
4. $d_4 = R + r$.
5. $d_5 > R + r$.

Két kör egyenletének ismeretében meghatározhatjuk a középpontjukat és a sugarukat, valamint kiszámíthatjuk a középpontjaik távolságát is. Ezekből az adatokból – a fentiek alapján – már jellemezhetjük a körök kölcsönös helyzetét is.

1. példa

Számítsa ki a következő egyenletekkel megadott körök metszéspontjainak koordinátáit!

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 1 \quad \text{és}$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1.$$

Megoldás

Tudjuk, hogy a kör egyenlete olyan kétismeretlenes másodfokú egyenlet, amelyben x^2 és y^2 együtthatója egyenlő. Így ha kifejtjük (felbontjuk a zárójeleket), és kivonjuk a két egyenletet egymásból, mindkét másodfokú tag ki fog esni, és egy elsőfokú összefüggést kapunk.

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 1 \text{ és}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 1.$$

Ha kivonjuk az alsó egyenletet a felsőből, azt kapjuk, hogy

$$-2x + 2y + 6 = 0, \quad \text{ahonnan} \quad y = x - 3.$$

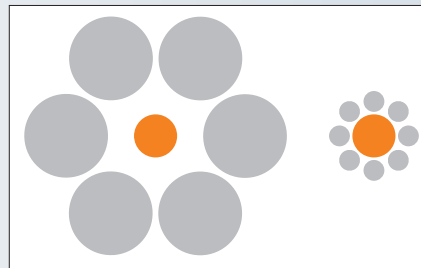
Ezt például a második kör egyenletébe helyettesítve

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 6x + 9 = 1.$$

Rendezve és a megoldóképletet alkalmazva:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad \text{ahonnan} \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 0.$$

A két metszéspont tehát $M_1(2; -1)$ és $M_2(3; 0)$.



Melyik narancsszínű kör a nagyobb?

Másodfokú egyenletrendszer megoldásakor célszerű arra törekedni, hogy a másodfokú tagok kiküszöbölésével elsőfokú összefüggést kapjunk. Onnan az egyik ismeretlent kifejezve, és az egyszerűbb másodfokú egyenletbe helyettesítve próbálkozhatunk az egyenlet megoldásával, majd az elsőfokú egyenletből határozzuk meg a másik ismeretlent.

2. példa

Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a $(3; 4)$ pontban érinti, és érinti az abszcisszatengelyt is!

Megoldás

Az adott kör az origó középpontú, $r = 5$ sugarú kör, melynek a $P(3; 4)$ pont valóban pontja. Most idézzünk fel egy fontos geometria tételt a 9. osztályból (említettük a bevezetőben is).

Ha két kör érinti egymást, akkor a két kör középpontjai és az érintési pont egy egyenesen vannak.

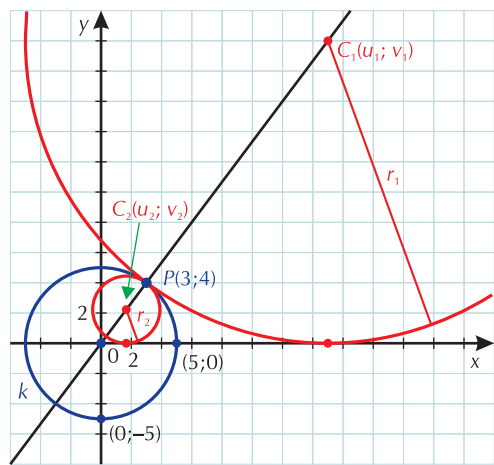
Minden olyan kör középpontja, mely a $k: x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a $(3, 4)$ pontban érinti, rajta van a k kör középpontját és az érintési pontot összekötő egyenesen, amelynek egyenlete $y = \frac{4}{3}x$. A keresett kör

középpontjának $C(u; v)$ koordinátáira igaz tehát, hogy $v = \frac{4}{3}u$.

Nem szabad megfeledkezni arról, hogy kívülről és belülről is érintheti a keresett kör a megadottat.

Mivel a $P(3; 4)$ pont az első síknegyedben van, ezért a keresett kör is az x tengely pozitív felén érint. Ha egy kör érinti az x tengelyt, akkor a középpontja második koordinátájának abszolút értéke megegyezik a sugarával. (Mivel az első síknegyedben vagyunk, $v = r$.)

Először a kívülről érintő kört határozzuk meg.



Az ábráról leolvasható, hogy $u^2 + v^2 = (5 + r)^2$. Fejezzük ki most u -t és v -t r -rel, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{3}{4}r\right)^2 + r^2 = (5 + r)^2 = r^2 + 10r + 25.$$

Rendezve és megoldva a másodfokú egyenletet $r_1 = v_1 = 20$, $r_2 = -\frac{20}{9}$ adódik. Az r_2 értelmetlen, a $v_1 = \frac{4}{3}u_1$ egyenletből pedig $u_1 = 15$. A kívülről érintő kör egyenlete tehát:

$$(x - 15)^2 + (y - 20)^2 = 20^2 = 400.$$

Hasonlóan számolható ki az adott kört belülről érintő kör egyenlete is. Itt a kiinduló egyenletek: $v_1 = \frac{4}{3}u_1$ és $u^2 + v^2 = (5 - r)^2$.

Az egyenletrendszer megoldása után $r_1 = -20$, $r_2 = v_2 = \frac{20}{9}$. Most csak r_2 -nek van értelme, $u_2 = \frac{5}{3}$.

A belülről érintő kör egyenlete tehát: $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{20}{9}\right)^2 = \left(\frac{20}{9}\right)^2$.

FELADATOK

1. E1

Határozzuk meg az alábbi körök középpontjait és sugarait! Milyen helyzetűek egymáshoz képest a körök?

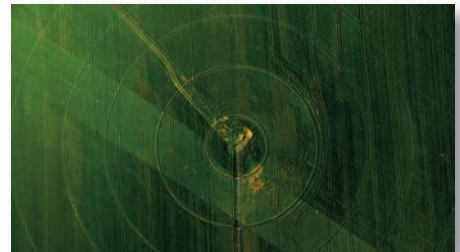
- $x^2 + y^2 = 25$ és $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$;
- $x^2 + y^2 = 25$ és $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$;
- $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ és $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$.

2. E1

Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$ egyenletű kör azon pontjait, amelyek az $(5; -1)$ ponttól 5 egységnyi távolságra vannak!

3. E1

Írjuk fel azoknak a 8 egység sugarú köröknek az egyenletét, melyek az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a $(-3; -4)$ pontban érintik!



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3980–3982, 3986, 3987, 4003.

Idézet

„A filozófia abban a roppant könyvben van megírva, mely szüntelenül nyitva áll a szemünk előtt (tehát az univerzum), de nem érthető meg, ha előtte nem tanulmányozzuk a nyelvet, s nem ismerjük a betűket, amelyen íródott. E könyv nyelve a matematika, a betűi pedig háromszögek, körök és más geometriai alakzatok.”

Galileo Galilei (1564–1642): *A Természet könyve*

48. PONTALMAZOK A KOORDINÁTASÍKON (Egyenlet, egyenlőtlenség, mértani hely)

Kiegészítő anyag

A korábbi leckékben megismerkedtünk a pont, egyenes és kör koordináta geometriájával. Megtanultuk, hogyan alkalmazhatunk vektorokat, s hogyan adhatjuk meg az egyenesek és körök egyenletét a koordinátasíkon.

Az *alakzat egyenlete* fontos fogalom. Emlékeztetőül: egy $P(x, y)$ pont pontosan akkor van rajta az adott alakzaton, ha (x, y) koordinátái kielégítik az alakzat egyenletét. Ha például $e: 2x - y = 0$ az e egyenes egyenlete, akkor a $P(3; 6)$ pont rajta van az egyenesen, mert koordinátáit behelyettesítve az egyenletébe teljesül: $2 \cdot 3 - 6 = 0$. Ugyanakkor a $P(3; 7)$ pont már nincs rajta az egyenesen, mert $2 \cdot 3 - 7 \neq 0$.

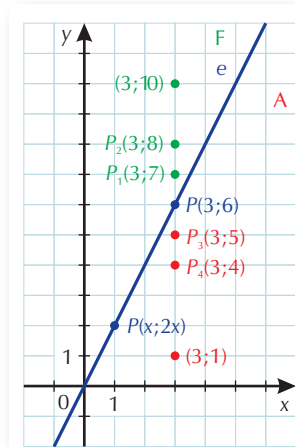
Ebben a leckében további alakzatok egyenletét, algebrai leírását határozzuk meg, s különféle módszereket, eljárásokat mutatunk pontthalmazok megadására.

Az $e: 2x - y = 0$ egyenes képe az origón áthaladó, 2 meredekségű egyenes. Láthatjuk, hogy míg a $P(3; 6)$ pont rajta van az egyenesen, addig a $P_1(3; 7)$, $P_2(3; 8)$ stb. pontok az egyenes „fölött” helyezkednek el, és a $P_3(3; 5)$, $P_4(3; 4)$ stb. pontok pedig az egyenes „alatt”. Általában is igaz minden x -re, hogy $P(x; 2x)$ az egyenes pontja, hiszen ez éppen azt jelenti, hogy P koordinátáira teljesül az $y = 2x$ egyenlet.

Hogyan jellemezhetjük az egyenes feletti pontokat? Ezen pontok y koordinátája nagyobb, mint az x koordináta 2-szerese: $y > 2x$. Ez az egyenlőtlenség minden, az egyenes feletti pontra teljesül. Hasonló megfontolások alapján az egyenes alatti pontokra az $y < 2x$ összefüggés érvényes.

Azt mondhatjuk, hogy az $y > 2x$ egyenlőtlenség az e egyenes feletti F nyílt félsíkot határozza meg, hiszen a koordináták közötti összefüggés pontosan az e egyenes feletti pontokra teljesül. (Az e egyenes, a félsík határa nem tartozik F -hez.) Az egyenes alatti A nyílt félsíkot megadó egyenlőtlenség pedig $A: y < 2x$ alakú. (Vagy 0 -ra redukált alakban $A: y - 2x < 0$.) Pontthalmazokat tehát nemcsak egyenlettel, hanem egyenlőtlenséggel is megadhatunk.

A felismert összefüggés lehetővé teszi, hogy megállapítsuk az e egyenes és a koordináta-rendszer bármely pontja közötti kapcsolatot – a pont és az egyenes ábrázolása nélkül. Például a $B(1010; 2021)$ pont az e egyenes felett van, mert az y koordinátája nagyobb, mint az x koordináta 2-szerese: $2021 > 2 \cdot 1010$. A $C(123; 240)$ pont pedig az e egyenes alatti félsíkban van, mert $240 < 2 \cdot 123$. Írhatjuk tehát: $B \in F$, $C \in A$.



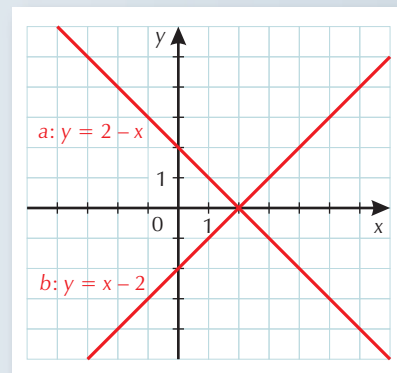
1. példa

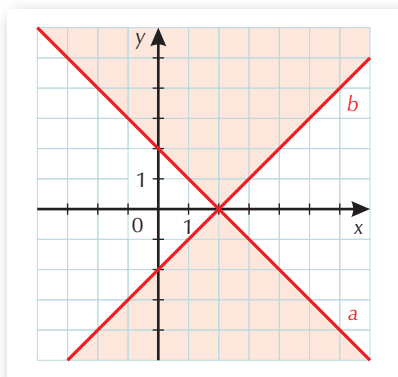
Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak:

- a) $A: y^2 - x^2 + 4x - 4 = 0$; c) $C: x > 2$ és $y < -1$;
b) $B: y^2 - x^2 + 4x - 4 \geq 0$; d) $D: x > 2$ vagy $y < -1$!

Megoldás

a) Észrevehetjük, hogy az egyenletben teljes négyzet szerepel: $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Az egyenletet átalakítjuk: $y^2 - (x - 2)^2 = 0$, és a két négyzet különbsége szorzattá alakítható: $(y + x - 2)(y - x + 2) = 0$. Egy szorzat pontosan akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Innen vagy a: $y + x - 2 = 0$, vagy b: $y - x + 2 = 0$ teljesül. Az a és b egy-egy egyenes egyenlete, a keresett pontthalmaz tehát két metsző egyenes uniója.





b) Szorzattá alakítás után $(y + x - 2)(y - x + 2) \geq 0$ csak akkor teljesülhet, ha a két tényező azonos előjelű, vagy valamelyik (akár mind a kettő) 0.

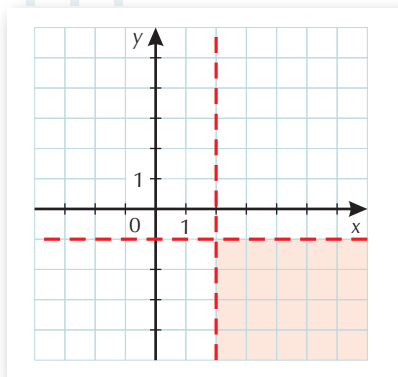
$y + x - 2 \geq 0$ az a egyenes feletti pontokat jelenti, míg $y - x + 2 \geq 0$ a b egyenes felettieket. Ekkor tehát a két egyenes feletti síkrészt kapjuk, valamint a határoló félegyeneseket.

Ha pedig az $y + x - 2 \leq 0$ és $y - x + 2 \leq 0$ esetet vizsgáljuk, innen az a tartomány adódik, amely mindkét egyenes alatt van. A határoló félegyenesek pontjai ekkor is a keresett ponthalmazhoz tartoznak.

Más megoldási lehetőség (útmutatás)

Az $y^2 = (x - 2)^2$ egyenletből gyököt vonva $|y| = |x - 2|$ adódik, ami átírva az $y = |x - 2|$ és $y = -|x - 2|$ egyenletekkel helyettesíthető. Ezek képe a két „V betűs” alak, már könnyen ábrázolható.

Ha pedig $y^2 \geq (x - 2)^2$, akkor $|y| \geq |x - 2|$, s az abszolút értékeket kiküszöbölve $y \geq |x - 2|$, illetve $y \leq -|x - 2|$ egyenlőtlenségeket kapjuk.



c) Ebben a példában a C ponthalmazt utasítással (egy egyenlőtlenségrendszerrel) adtuk meg. $x > 2$ az $x = 2$ egyenestől „jobbra”, az x tengely pozitív irányába eső félsíkot jelenti; $y < -1$ pedig az $y = -1$ egyenes „alatti” félsíkot. A két egyenlőtlenségnek egyszerre kell teljesülnie, így a C alakzat egy síknegyed. (A határegyenesek nem tartoznak a C ponthalmazhoz.)

Megjegyzés

Az $x > 2$ és $y < -1$ összetett feltételt $x - 2 > 0$ és $y + 1 < 0$ alakban is megadhatjuk. Ezt azonban nem írhatjuk át $(x - 2)(y + 1) < 0$ szorzattá, mert ez az egyenlőtlenség akkor is teljesülne, ha $x - 2 < 0$ és $y + 1 > 0$ lenne. (Ennek az egyenlőtlenségnek a „megoldása” két csúcsban érintkező síknegyed lenne.)

d) A D alakzat a vagy kötőszó miatt két rész egyesítése. Egyrészt az $x > 2$ (és y tetszőleges), másrészt pedig az $y < -1$ (és x tetszőleges) egyenlőtlenségek is – csakúgy, mint az előző c) példában – egy-egy félsíkot határoznak meg. Most azonban D a két félsík uniója, egyesítése.

Már meglévő ponthalmazokból újakat képezhetünk az alaphalmaz leszűkítésével.

2. példa

Egy téglalap csúcsai $A(2; -1)$, $B(6; -1)$, $C(6; 4)$ és $D(2; 4)$. Adjuk meg

- az A kezdőpontú AC félegyenes egyenletét;
- a téglalap AC átlóját;
- a téglalap pontjainak a halmazát!

Megoldás

a) Az $\vec{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (6; 4) - (2; -1) = (4; 5)$ vektor az AC egyenes egy irányvektora. Az AC egyenes meredeksége $\frac{5}{4}$, egyenlete $y + 1 = \frac{5}{4}(x - 2)$, azaz $5x - 4y = 14$.

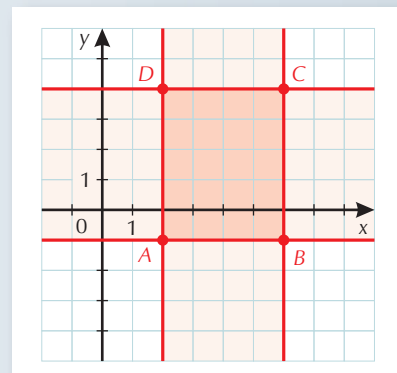
Az AC félegyenes egyenletét az AC egyenes egyenletéből kapjuk meg. Ehhez x lehetséges értékeinek halmazát megfelelő módon módosítani (szűkíteni) kell. Ekkor x legkisebb értéke 2, a keresett félegyenes egyenlete pedig $5x - 4y = 14$, és $x \geq 2$. (Azt is megtehetjük volna, hogy az $y \geq -1$ korlátozást alkalmazzuk.)

b) Az AC átlót hasonló leszűkítéssel kaphatjuk meg. Az AC szakasz megadása: $5x - 4y = 14$, $2 \leq x \leq 6$. (Azt is mondhattuk volna, hogy az AC egyenes, valamint a $2 \leq x \leq 6$ sáv közös részét írtuk fel.)

Tetszőleges szakaszt is hasonlóan adhatunk meg a koordinátasíkon.

c) A téglalap pontjai két sáv közös részeként állíthatók elő. Az egyik sáv a $2 \leq x \leq 6$, a másik pedig a $-1 \leq y \leq 4$ egyenlőtlenséggel adható meg.

(Ha csak a téglalap belső pontjait kell meghatározni, akkor a $2 < x < 6$ és $-1 < y < 4$ egyenlőtlenségrendszer a megoldás.)



3. példa

A koordináta-rendszerben az ábra szerint adottak a k_1, k_2, k_3 origó középpontú körök, sugaraik rendre 1, 2 és 5 egység. Adjuk meg az A, B, C és D pontthalmazokat – képlettel vagy utasítással –, ha:

a) az A a k_1 és k_2 közötti körgyűrű;

b) B az $x = 4$ egyenletű egyenes által határolt kisebbik körszelet;

c) C a k_3 kör lap sávja, amelyet az x tengellyel párhuzamosan az $y = 3$ és $y = 4$ egyenesek határolnak;

d) D pedig a k_3 egy olyan körcikke, amelyet az x tengellyel 45° -os szöget bezáró sugarak határolnak!

(Az egyszerűség kedvéért minden pontthalmazhoz a határa is hozzátartozik.)

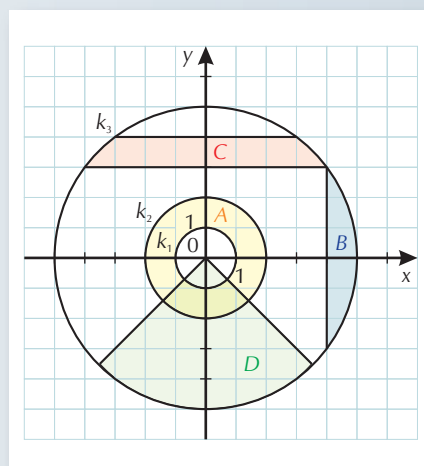
Megoldás

a) A k_2 körön olyan P pontok vannak, amelyekre $OP^2 = 2^2$, azaz $x^2 + y^2 = 4$. A k_2 körön belüli pontokra $OP^2 < 4$, vagyis $x^2 + y^2 < 4$. A k_1 kör egyenletének levezetéséből hasonlóan adódik, hogy a k_1 körön kívüli pontokra $x^2 + y^2 > 1$ teljesül. Az A gyűrűt olyan pontok alkotják, amelyek a k_1 körön kívül vannak, és a k_2 körön belül (valamint a körvonalak is a pontthalmazhoz tartoznak). Ez alapján az A alakzatot az $x^2 + y^2 \leq 4$ és $x^2 + y^2 \geq 1$ egyenlőtlenség-rendszer határozza meg.

b) A k_3 körön belüli és az $x = 4$ egyenestől „jobbra” eső pontokat keressük. B: $x^2 + y^2 \leq 25$ és $x \geq 4$.

c) Az $x^2 + y^2 \leq 25$ feltétel mellett a $3 \leq y \leq 4$ korlátozás együtt határozza meg C-t. (Ez utóbbi egyenlőtlenség-rendszer egy egység széles sávot ad meg.)

d) Legegyszerűbb talán, ha a D körcikket a k_3 kör és az $y = -|x|$ függvénygörbe alatti pontok közös részeként állítjuk elő. Ez alapján a megoldás az $x^2 + y^2 \leq 25$ és $y \leq -|x|$ egyenlőtlenség-rendszer.

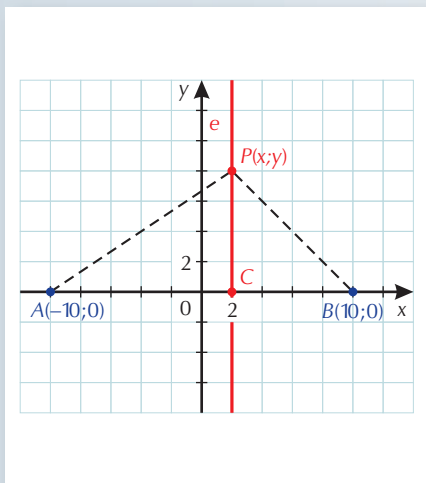


A következő két példában a ponthalmazt összetett feltétellel adjuk meg.

4. példa

A koordináta-rendszer síkjában adott az $A(-10; 0)$ és a $B(10; 0)$ pont. Határozzuk meg azon P pontok halmazát, amelyekre $PA^2 - PB^2 = 80$ egység!

Megoldás



Első megoldás

Jelölje a keresett ponthalmazt H , és x, y a P pont két koordinátáját: $P(x; y)$. Kérdés, hogy milyen kapcsolat van x és y között, ha a P pont A -tól és B -től vett távolságai négyzeteinek különbsége 80 egység.

$$PA^2 = (x - (-10))^2 + y^2, PB^2 = (x - 10)^2 + y^2, \text{ így}$$

$$PA^2 - PB^2 = (x + 10)^2 - (x - 10)^2 =$$

$$= (x^2 + 20x + 100) - (x^2 - 20x + 100) = 40x.$$

A $PA^2 - PB^2 = 80$ feltételből $40x = 80$, azaz $x = 2$ adódik.

Azt kaptuk tehát, hogy a $PA^2 - PB^2 = 80$ feltételt kielégítő P pontok x koordinátája 2 (és y koordinátája tetszőleges). Az $e: x = 2$ az x tengelyre merőleges egyenes egyenlete.

P tehát rajta van az e egyenesen, $H \subseteq e$. Az egyenes bármely pontja megfelelő lesz: a levezetésből adódik, hogy $P(2; y)$ esetén $PA^2 - PB^2 = 80$, y -tól függetlenül.

A keresett H ponthalmaz tehát az e egyenes.

Második megoldás

Elemi síkgeometriai megfontolásokkal is célt érhetünk.

Az AB szakaszon P vetülete legyen C , ekkor a PCA és PCB derékszögű háromszögekben

$$PA^2 - PB^2 = PC^2 + CA^2 - (PC^2 + CB^2) = CA^2 - CB^2. \text{ Mivel } PA^2 - PB^2 = CA^2 - CB^2 = 80 (= \text{állandó}),$$

ez azt jelenti, hogy az eredmény szempontjából nem számít a P pont helyzete, csak P -nek az AB szakaszra eső merőleges vetülete. Ha tehát az AB szakaszon meghatározzuk C helyzetét, akkor az AB -re merőleges, C -n átmenő e egyenes lesz a keresett ponthalmaz.

Legyen $CA = z$, ekkor $CB = 20 - z$, és a feltétel szerint $z^2 - (20 - z)^2 = 80$. Az egyenlet megoldása $z = 12$, így $C(2; 0)$, és $e: x = 2$ az előbb kapott eredményt adja.

5. példa

Az OAB derékszögű háromszög csúcsai $O(0; 0)$, $A(5; 0)$ és $B(0; 10)$. A háromszögbe $OCDE$ téglalapokat írunk úgy, hogy a téglalapok C, D, E csúcsai rendre a háromszög OA, AB, OB oldalaira esnek. Milyen ponthalmazt határoznak meg a beírt téglalapok középpontjai?

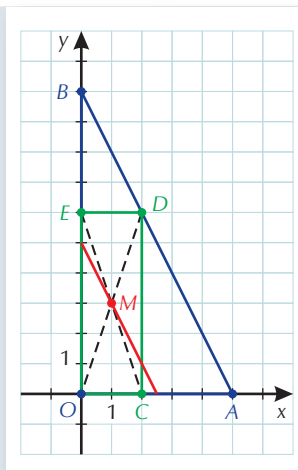
Megoldás

Az AB egyenes -2 meredekségű, tengelymetszete 10, így egyenlete $AB: y = -2x + 10$. A C csúcs az OA szakasz bármely pontja lehet, legyen $C(c; 0)$. Ekkor D koordinátái $D(c; -2c + 10)$, hiszen D rajta van az AB egyenesen. (Ne felejtjük el: $0 < c < 5$.) A téglalap M középpontja az átlók metszéspontja, vagy – még egyszerűbben – az OD szakasz felezőpontja. A felezőpont koordinátáit a tanult módon közvetlenül felír-

hatjuk: $M\left(\frac{c}{2}; -\frac{2c+10}{2}\right)$, azaz $M\left(\frac{c}{2}; -c+5\right)$. Kérdés, hogy M két koordinátája között milyen kapcsolat áll fenn.

Ha $x = \frac{c}{2}$ és $y = -c + 5$, akkor az első egyenletből $c = 2x$, és ezt a másodikba helyettesítve $y = -2x + 5$. Az M pont tehát rajta van az $y = -2x + 5$ egyenletű e egyenesen.

Az e egyenesnek persze csak a háromszögön belüli pontjai lesznek megfelelők (és belátható, hogy ezek a pontok mind elő is állnak a megadott módon). A $0 < c < 5$ feltétel miatt a $0 < x < 2,5$ egyenlőtlenségeknek teljesülniük kell. A keresett pontthalmaz tehát egy szakasz, amelyet az $y = -2x + 5$ és $0 < x < 2,5$ feltételek határoznak meg.



Megjegyzés

Az eredményt hasonlósági transzformáció segítségével is megkaphatjuk. A D pontot az O középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítés viszi M -be. Mivel D befutja az AB szakaszt, az M pont lehetséges helyzetait megkapjuk, ha O -ból a teljes AB szakaszt kicsinyítjük $\frac{1}{2}$ arányban. Az AB szakasz képe vele párhuzamos és feleakkora szakasz lesz, ami nem más, mint az OAB háromszög AB oldalával párhuzamos középvonala. (A középvonal-tulajdonság az eredeti megoldásból is kiolvasható, mert az ott kapott szakasz meredeksége is -2 , és az y tengelymetszete az OB oldal felezőpontja.)

Fogalom
pontthalmazok
a koordináta-
síkon.

FELADATOK

1. E1

Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak!

- | | |
|-----------------------------|-----------------------|
| a) $x \cdot y \geq 0$; | e) $ x + y \leq 2$; |
| b) $x^2 - 5y^2 = 0$; | f) $ x + y = 2$; |
| c) $x > 0$ és $x + y = 1$; | g) $ x + y < 2$. |
| d) $ x + y = 2$; | |

2. E1

Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak!

- | | |
|----------------------------------|--|
| a) $(x - y)(x - 1) = 0$; | e) $\frac{y - x}{y + 1} \geq 0$; |
| b) $(x - y)(x - 1) \leq 0$; | f) $ x - y = 5$; |
| c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$; | g) $\frac{x}{ x } + \frac{y}{ y } = 0$; |
| d) $\frac{x - 1}{y - 1} = 0$; | h) $ x \leq 1$ vagy $ y \leq 1$. |

3. E1

Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(5; 0)$ és $B(-5; 0)$. Határozzuk meg azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyekre

a) $PA \leq 7$ és $PB \leq 6$;

b) $PA > 7$ és $PB \leq 6$;

c) $PA > 7$ és $PB > 6$!

4.E1

Adott a koordináta-rendszerben a $(2; 3)$ középpontú, $r = 5$ sugarú k kör, valamint az $e: y = 3x$ egyenletű egyenes. A két görbe négy részre osztja a síkot. Határozzuk meg az egyes tartományokat!

5. E1

Adott a koordináta-rendszerben az $a: y = 2x$, a $b: y = -x$, és a $c: y = 5$ egyenletű egyenes. A három egyenes hét részre osztja a síkot. Határozzuk meg az egyes tartományokat!

6. E1

A koordinátasíkon az A ponthalmazt az $a: 2x - y - 3 = 0$ egyenlet, míg a B ponthalmazt a $b: x - y - 2 = 0$ egyenlet határozza meg. Adjuk meg képlettel az

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

c) $A \setminus B$;

d) $B \setminus A$

ponthalmazokat!

7. E1

Ábrázoljunk a derékszögű koordináta-rendszerben három $f(x) = c(x - 2)$ alakú függvényt (c paraméter)! Milyen sejtést fogalmazhatunk meg az egyenesek illeszkedésével kapcsolatban?

8. E1

(Érettségi feladat, 1990) Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátáira

a) $x^2 = y^2$;

b) $\sqrt{x} = \sqrt{y}$;

c) $\sin x = \sin y$!

9. E1

Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(5; 0)$ és $B(-5; 0)$. Határozzuk meg azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyekre

a) $PA^2 + PB^2 = 200$;

b) $PA^2 + PB^2 = 100$;

c) $PA^2 + PB^2 = 50$!

10. E2

Az ABC háromszög két csúcsa $A(-5; 0)$ és $B(5; 0)$, a C csúcs pedig az $e: y = 2x + 12$ egyenletű egyenesen mozog. Milyen görbét ír le eközben az ABC háromszög súlypontja?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3534–3537, 3658–3660, 3750–3754, 3787, 3819–3821, 3909–3917, 3976–3979.



A PARABOLA ÉS A MÁSODFOKÚ EGYENLET (Olvasmány)

Emelt szint

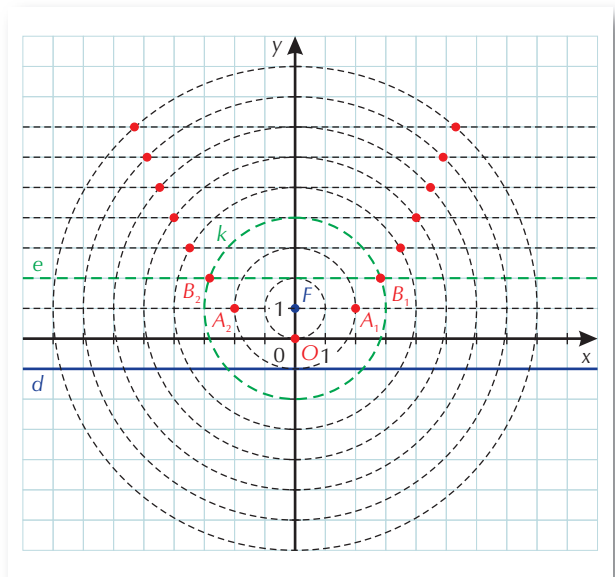
A 9. osztályban már megismerkedtünk a parabola fogalmával, a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) függvény görbét nevezük parabolának. Azt is említettük egy olvasmány keretében, hogy a parabolára síkgeometriai definíció is adható.

Definíció

Adott a síkon egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. Azon pontok halmazát nevezzük **parabolának**, amelyek egyenlő távolságra vannak a megadott egyenestől és ponttól. Az egyenest **vezéregyenesnek** (direktrixnek), a pontot **fókusznak** (fókuszpontnak), a fókusz és a vezéregyenes távolságát pedig a parabola **paraméterének** nevezzük.

Az ábrán d és F jelöli a vezéregyenes, illetve a fókuszpontot (a paraméter $\overline{FD} = 2$), és O, A_1, A_2, B_1, B_2 stb. a parabola pontjai. Képlettel is felírhatjuk a definíciót: P akkor és csak akkor pontja a parabolának, ha $\overline{PF} = \overline{Pd}$. (A leckében az $\overline{Fd}$, $\overline{PF}$, $\overline{Pd}$ jelöléssel hangsúlyozzuk, hogy távolságokról vagy szakaszok hosszáról van szó.)

Korábban megállapítottuk, hogy a parabolának tetszőlegesen sok, de csak véges sok pontját szerkeszthetjük meg körzővel és egyélű vonalzóval, de magát a parabolát nem (ugyanis az ív megrajzolására nincsen eszközünk). A pontok szerkesztésének menete az ábráról leolvasható. Például a B_1 pontra $\overline{B_1F} = \overline{B_1d} = 3$ teljesül, amit úgy kaphatunk meg, hogy húzunk egy F középpontú, 3 sugarú k kört. Ezután felvesszünk d -vel párhuzamosan, az F -et tartalmazó félsíkban egy e egyenest úgy, hogy $\overline{ed} = 3$. Végül a keresett B_1 pont k és e egyik metszéspontjaként áll elő: $k \cap e = \{B_1, B_2\}$, hiszen $\overline{B_1F} = \overline{B_1d} = 3$.



A definícióból, illetve a szerkesztés menetéből közvetlenül adódik a **parabola néhány jellemzője**:

- a ponthalmaz tengelyesen szimmetrikus;
- a tengely átmegy a fókuszponton és merőleges a vezéregyenesre.

Elnevezés: a tengely és a parabola metszéspontját a parabola **tengelypontjának** nevezzük.

Felvetődik a kérdés: Vajon jogosan nevezzük az $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) függvény képét parabolának? Azaz van-e olyan d egyenes és rajta kívül fekvő F pont, amelyektől az f függvénygörbe minden pontja ugyanakkora távolságra van?

Mielőtt a síkgeometriai és függvénytani definíció kapcsolatát megvizsgálánk, néhány általános észrevételt teszünk.

A parabolát egyértelműen meghatározza a fókusza és a vezéregyenes. Ha adott két parabola, P_1 és P_2 , az F_1 és F_2 fókuszokkal, valamint d_1 és d_2 vezéregyenesekkel (p_1 és p_2 paraméterekkel), akkor az első parabola hasonlósági transzformációval mindig átvihető a másodikba. Ugyanis egy középpontos hasonlósággal elérhető, hogy P_1 paramétere (a fókusz és a vezéregyenes távolsága) megegyezzen P_2 paraméterével; majd ezután már egybevágósággal a két parabola fedésbe hozható (hiszen egy pontot és egyenest kell ugyanolyan távolságú pont-egyenes párba transzformálni). Azaz *bármely két parabola hasonló*.

Most a levezetésben csak azokat a parabolákat vizsgáljuk, amelyek tengelye az y tengely, és csúcspontjuk az origó. Ez – a parabolák tulajdonságait tekintve – nagy megszorítást nem jelent, mert hasonlósággal a sík bármely parabolája ilyen helyzetbe hozható. Az egyszerűség kedvéért azt is feltehetjük, hogy a parabola felfelé nyitott, hiszen az ellenkező esetben egyszerű tengelyes tükrözést alkalmazhatunk.

Legyen tehát a parabola paramétere p . Ekkor a fókuszpontja $F(0; \frac{p}{2})$ (most $p > 0$) és a vezéregyenes $d: y = -\frac{p}{2}$. Tetszőleges $P(x; y)$ pont pontosan akkor van rajta a parabolán, ha $\overline{PF} = \overline{Pd}$. P és d távolsága $y + \frac{p}{2}$ (az x tengely különböző oldalán vannak), így $\sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = y + \frac{p}{2}$. Az egyenletet egyszerűbb alakra hozzuk.

A jobb oldalon pozitív szám áll, a négyzetre emelés ekvivalens művelet: $x^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (y + \frac{p}{2})^2$, azaz $x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$, s innen $y = \frac{x^2}{2p}$.

A parabola P pontjának koordinátáira tehát a fenti összefüggés teljesül, s mivel megfordítható átalakításokat végeztünk, mondhatjuk, hogy $y = \frac{x^2}{2p}$ a keresett parabola egyenlete.

Korábban az y tengelyű, origó csúcspontú parabolákat $y = ax^2$ általános alakban írtuk fel. Látható, hogy $a = \frac{1}{2p}$ megfeleltetéssel a két definíció ekvivalens. Ha a parabolát eltoljuk az (u, v) vektorral vagy tükrözzük az x tengelyre, akkor az így kapott általános eset hasonlóan vizsgálható. (A parabola paramétere nem változik meg.)

1. példa

Adjuk meg az alábbi parabolák fókuszpontját és vezéregyenesét!

a) $y = 2x^2$;

b) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Megoldás

a) $\frac{1}{2p} = 2$, így $p = \frac{1}{4}$. A parabola fókusza $F(0; \frac{p}{2}) = F(0; \frac{1}{8})$, vezéregyenes $d: y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{8}$.

b) $\frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$, azaz $p = 1$. A tengelyes tükrözés miatt $F(0; -\frac{1}{2})$ és $d: y = \frac{1}{2}$.



2. példa

Adjuk meg az alábbi parabolák fókuszpontját és vezéregyenesét!

a) $y = 2x^2 + 8x - 7$;

b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

Megoldás

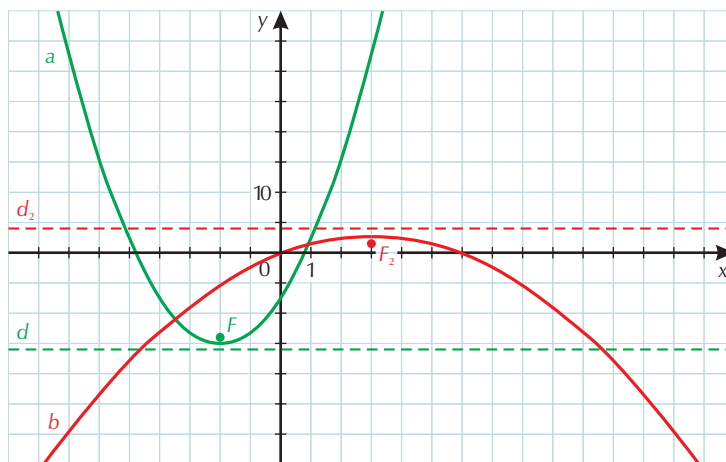
a) Teljes négyzetté alakítunk. $2x^2 + 8x - 7 = 2(x^2 + 4x - 3,5) = 2((x + 2)^2 - 7,5) = 2(x + 2)^2 - 15$.

$\frac{1}{2p} = 2$, $p = \frac{1}{4}$. Az origó tengelypontú, $p = \frac{1}{4}$ paraméterű parabolát eltoltuk a $(-2; -15)$ vektorral,

így $F(-2; -15 + \frac{1}{8}) = F(-2; -\frac{119}{8})$ és $d: y = -15 - \frac{1}{8} = -\frac{121}{8}$. (Lásd az ábrát!)

b) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x = -\frac{1}{3}(x^2 - 6x) = -\frac{1}{3}[(x - 3)^2 - 9] = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 3$. $\frac{1}{2p} = \frac{1}{3}$, innen $p = \frac{3}{2}$. Figyelembe

véve a $(3; 3)$ eltolást és a tengelyes tükrözést, $F(3; 3 - \frac{1}{3}) = F(3; \frac{8}{3})$ és $d: y = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.



3. példa

Egy felfelé nyitott, az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola fókusza $F(5; 7)$, vezéregyenesének egyenlete $d: y = 1$. Adjuk meg a parabola egyenletét!

Megoldás

A parabola paramétere $7 - 1 = 6$, tengelypontjának y koordinátája $7 - \frac{6}{2} = 4$; tehát az $y = \frac{x^2}{2p} = \frac{x^2}{12}$ parabolából az $(5; 4)$ vektorú eltolással származtatható. A parabola egyenlete $y = \frac{(x - 5)^2}{12} + 4$.

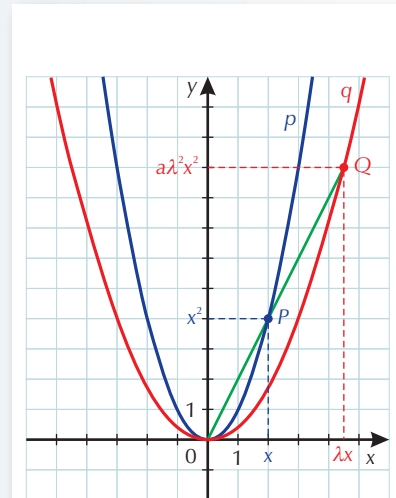
4. példa

Tekintsünk két parabolát: $p: y = x^2$ és $q: y = ax^2$, ahol $0 < a < 1$. A parabolák csúcspontja és tengelye közös. Mivel bármely két parabola hasonló, p és q középpontosan is hasonló, és a hasonlóság centruma az origó. Adjuk meg a hasonlóság arányát!

Megoldás

Legyen a p parabola tetszőleges P pontja $P(x; x^2)$, s tegyük fel, hogy a λ arányú középpontos hasonlóság viszi p -t q -ba. (λ függ az a együtthatótól.) Ekkor P hasonlósági képe $P'(\lambda x; \lambda x^2)$. A q parabola λx helyen $a(\lambda x)^2 = a\lambda^2 x^2$ értéket vesz fel, a $Q(\lambda x; a\lambda^2 x^2)$ tehát egy pontja. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy van olyan λ , amelyre $P'(\lambda x; \lambda x^2)$ és $Q(\lambda x; a\lambda^2 x^2)$ megegyezik.

Ez csak akkor lehetséges, ha $\lambda x^2 = a\lambda^2 x^2$ minden x -re, azaz $1 = a\lambda$, vagyis $\lambda = \frac{1}{a}$. Ekkor P' és Q megegyezik (minden P futópontra), tehát a két parabola valóban középpontosan hasonló.



ALKALMAZÁSOK

Parabolával – a másodfokú függvény képén kívül – szerkesztési feladatokban is találkozhatunk. A definícióból következik, hogy ha adott egy d egyenes és a rajta kívül fekvő F pont, akkor azon körök középpontjainak halmaza, amelyek átmennek F -en és érintik a d egyenest, egy parabola. Ha például olyan kört keresünk, amelyik átmegy két adott ponton és érint egy egyenest, akkor két parabola metszéspontját kell megszerkesztenünk. (Persze maga a szerkesztés elvégezhető például hasonlóság alkalmazásával.)

Matematikán kívüli alkalmazás az egyenletesen gyorsuló mozgás út-idő grafikonja: a négyzetes úttörvény miatt a hasonló mozgások képe mindig parabola. Jó közelítéssel parabolapályát ír le az elhajított test, vagy például az a távolról érkező üstökös, amelyik örökre elhagyja a Naprendszer. (Ekkor a Nap áll az üstökös-pálya fókuszában.)

A gyakorlati alkalmazások területéről korábban említettük a parabolaantennát, s idesorolhatjuk a parabolatükröt (ez található például az autók fényszóróiban), vagy az ornitológusok madárhangot befogó eszközét. (Itt – mint a 9. osztályban láttuk – a forgási paraboloidok azon tulajdonságát használjuk fel, hogy a tükör a tengellyel párhuzamosan érkező sugarakat a fókuszpontba gyűjti össze.)

Végül említsük meg, hogy a parabolagörbe származtatható a forgáskúp megfelelő síkmeteszeteiként is. Ennek akár az interneten is érdemes utánanézni (Dandelin-gömbök).

Fogalmak

parabola;
vezéregyenes;
paraméter
(paraboláé);
fókusz (paraboláé);
parabola egyenlete.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 4010–4145.

49. ALKALMAZÁSOK

Koordináta geometriai módszereket hatékonyan alkalmazhatunk a matematika egyéb területein is. A korábbi években külön leckékben tárgyaltuk az egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldásait, valamint a függvények és pontthalmazok koordinátasíkon történő ábrázolását. Ebben a leckében is ismertetünk algebrai alkalmazásokat, de elsősorban geometriai feladatokat oldunk meg a koordináta-rendszerben.

Megemlítünk néhány matematikán kívüli alkalmazást is (mozgás leírása, szélsőérték-feladatok, fizikai jellegű problémák).

1. példa

Vegyünk fel az ábra szerint három négyzetet ($ABGH$, $BCFG$, $CDEF$). Mennyi az α -val, β -val és γ -val jelölt szögek összege?

Megoldás**Első megoldás**

Észrevehetjük, hogy $\gamma = 45^\circ$, a négyzet átlója és oldala ekkora szöget zár be. Elegendő tehát $\alpha + \beta$ meghatározása.

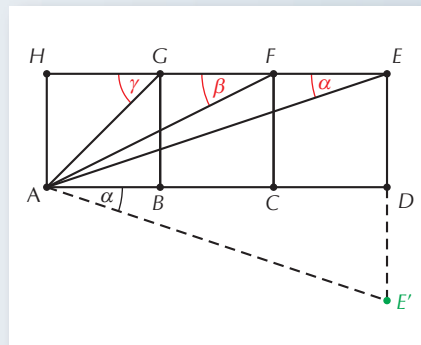
Szögfüggvényeket alkalmazva $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, innen $\alpha \approx 18,43^\circ$;

$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$, ekkor $\beta \approx 26,57^\circ$. Kapjuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma \approx 90^\circ$.

Vajon a 90° pontos érték? Nem, ebben nem lehetünk biztosak, hiszen α és β kiszámolásakor is közelítő értékeket kaptunk.

Második megoldás

Geometriai problémák elemzése esetén gyakran eredményre vezet, ha az ábrát a koordináta-rendszerben vesszük fel, és az esetleges geometriai műveleteket, transzformációkat is itt követjük nyomon. Ebben a feladatban az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a négyzetek oldala egységnyi (a szögek nem függenek az oldalhosszúságtól); az x és y tengely pedig legyen az AD , illetve AH egyenes. Ekkor $F(2; 1)$ és $E(3; 1)$ koordinátákkal dolgozhatunk.



Észrevehetjük, hogy $\angle EAD = \alpha$ és $\angle FAD = \beta$ ($\angle AEH$ és $\angle AFH$ váltószögei). Tükrözzük E -t az x tengelyre, kapjuk az $E'(3; -1)$ pontot. A tükrözés miatt $\angle E'AD = \alpha$ szintén, ezért $\angle FAE' = \beta + \alpha$, vagyis ezt a szöveget kell meghatároznunk.

$AF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $FE' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $AE' = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Az AFE' háromszögben felírjuk a koszinusztételt: $\sqrt{5}^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{10}^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{10}\cos(\alpha + \beta)$, innen $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ adódik.

Így viszont nevezetes szögfüggvényt kaptunk: $\alpha + \beta$ pontosan 45° , s $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Megjegyzés

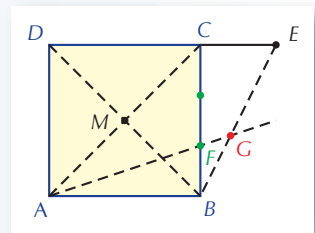
A feladatra szögfüggvények alkalmazása nélküli megoldást is adhatunk. Ha az F körüli 90° -os forgatást alkalmazunk, akkor az A pont E' -be kerül. Ezért AFE' egyenlő szárú derékszögű háromszög, s így $\angle FAE' = \beta + \alpha$ valóban 45° .

Emelt szint

2. példa

Hosszabbítsuk meg az $ABCD$ négyzet DC oldalát C -n túl a DC oldal felével, így kapjuk az E pontot; az F pont legyen a BC oldal B -hez közelebbi harmadolópontja; végül G legyen az AF és BE egyenesek metszéspontja (ld. ábra). Mutassuk meg, hogy G rajta van az $ABCD$ négyzet köré írt körén!

A feladat több lehetséges megoldása közül két koordinátageometriai mutatunk be. (Ezek csak technikailag különböznek egymástól.)



Megoldás

Első megoldás

Legyen a négyzet átlóinak metszéspontja M , oldalainak hossza a ; ekkor átlójának hossza $AC = \sqrt{2}a$ és a körülírt körének sugara $MC = \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Megmutatjuk, hogy MG is $\frac{a}{\sqrt{2}}$ hosszú.

Vegyük fel a derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontját az A pontban, az AB és AD egyenes legyen a két tengely. Ekkor az AF egyenes egyenlete $y = \frac{1}{3}x$. A BE egyenes meredeksége 2 , s átmegy a $B(a; 0)$ ponton, így egyenlete $y = 2(x - a) = 2x - 2a$. A két egyenes metszéspontja az egyenletrendszerük megoldásából adódik.

$$2x - 2a = \frac{1}{3}x, \text{ innen } x = \frac{6a}{5}, \text{ s visszahelyettesítve } y = \frac{2a}{5}.$$

A metszéspont tehát $G\left(\frac{6a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$.

Mivel M koordinátái $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, a GM távolságra $\sqrt{\left(\frac{6a}{5} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{5} - \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{100}a^2 + \frac{1}{100}a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ értéket kapjuk. Valóban: $GM = MA$.

Második megoldás

Most legyen az origó az M pontban (a koordinátatengelyek ismét párhuzamosak a négyzet oldalaival). Ekkor a négyzet köré írt kör egyenlete $k: x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$. Ezúttal azt mutatjuk meg, hogy az AF és BE egyenesek metszéspontja rajta van a k körön.

Az $A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ és $F\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{6}\right)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = \frac{1}{3}x - \frac{a}{3}$, a $B\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$ és $E\left(a; \frac{a}{2}\right)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete pedig $y = 2x - \frac{3a}{2}$.

Az egyenesek metszéspontja $G\left(\frac{7a}{10}; -\frac{a}{10}\right)$. S végül G koordinátáit behelyettesítve k egyenletébe, $\left(\frac{7a}{10}\right)^2 + \left(-\frac{a}{10}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ valóban teljesül.

3. példa

Hány megoldása van az egész számpárok halmazán az alábbi egyenlőtlenség-rendszernek?

(1) $x + 3y < 9$,

(2) $3x + 2y \geq -2$,

(3) $2x - y < 5$.

Megoldás

Legegyszerűbben úgy járhatunk el, ha a koordinátáson ábrázoljuk a három egyenlőtlenség által meghatározott ponthalmazokat, majd leolvassuk, hogy ezek közös részébe hány rácspont esik. (A rácspontok mindkét koordinátája egész szám.)

Az (1) egyenlőtlenség átrendezve $y < -\frac{x}{3} + 3$ alakú. Ez az $f: y = -\frac{x}{3} + 3$ egyenes alatti félsík pontjait jelenti.

(2) a $g: y = -\frac{3x}{2} - 1$ egyenest, valamint a felette lévő félsíkot határozza meg; míg (3) a $h: y = 2x - 5$ egyenes feletti félsíkot.

A három félsík metszete az ábrán látható háromszög alakú tartomány. Növekvő x koordináták szerint haladva, számoljuk össze a tartomány rácspontjait.

Ha $x = -2$, akkor két megfelelő rácspont van: a $(-2; 2)$ és $(-2; 3)$.

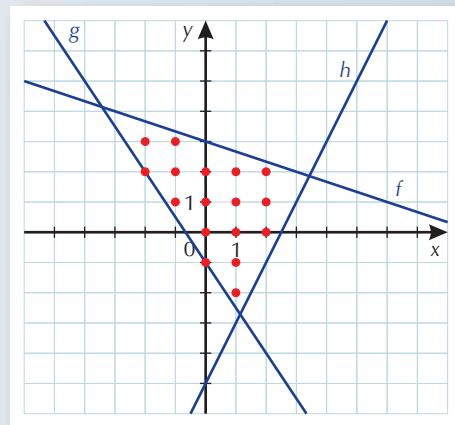
Ha $x = -1$, akkor $y \in \{1; 2; 3\}$; ez további három megoldás.

Ha $x = 0$, akkor $y \in \{-1; 0; 1; 2\}$; négy megoldás.

Ha $x = 1$, akkor $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$; öt rácspont.

Végül ha $x = 2$, akkor $y \in \{0; 1; 2\}$; innen három megoldást kapunk.

Az egyenlőtlenség-rendszernek összesen $2 + 3 + 4 + 5 + 3 = 17$ egész $(x; y)$ számpár megoldása van.



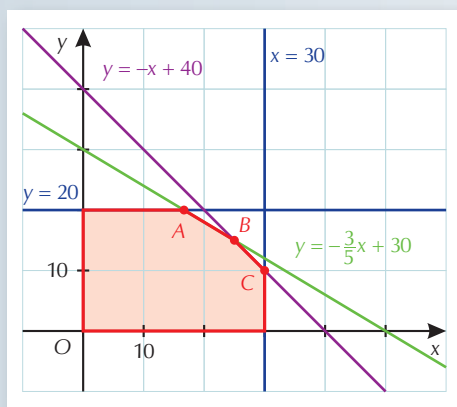
4. példa

Egy osztály egy összejövetelre szendvicset készít. Egy sajtos szendvicshöz 5 dkg kenyér, 2 dkg sajt és 1 dkg vaj szükséges, egy salámis szendvicshöz pedig 5 dkg kenyér, 1 dkg salámi és $\frac{5}{3}$ dkg vaj. (5 dkg vajat 3 szendvicssre osztanak el.) Rendelkezésre áll 2 kg kenyér, fél kg vaj, 60 dkg sajt és 20 dkg salámi. Legfeljebb hány szendvicset készíthető?

Megoldás

Jelölje x és y a sajtos, illetve salámis szendvicsek számát. Ekkor felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket, rendre a rendelkezésre álló kenyér, vaj, sajt és salámi összmenyisége alapján:

$$5x + 5y \leq 2000, \quad x + \frac{5}{3}y \leq 50, \quad 2x \leq 60, \quad y \leq 20$$



A feladat pedig $x + y$ maximumának a meghatározása (x, y természetes számok).

Az előző példa alapján a megfelelő x, y számpároknak a derékszögű koordináta-rendszerben egy-egy rácspontot feleltetünk meg. Az egyenlőtlenségeket átalakítjuk, az általuk meghatározott ponthalmazok közös része látható az ábrán. (A határoló egyeneseken lévő rácspontokat is figyelembe kell venni.)

$$y \leq -x + 40, \quad y \leq -\frac{3}{5}x + 30, \quad 0 \leq x \leq 30, \quad 0 \leq y \leq 20$$

A megfelelő egyenesek metszéspontjából kiszámíthatók a szírozott tartomány határán lévő pontok koordinátái: $A\left(\frac{50}{3}; 20\right)$, $B(25; 15)$, $C(30; 10)$.

Ha az elkészített darabok számát d -vel jelöljük, akkor az $x + y = d$ egyenletek párhuzamos egyeneseket határoznak meg. A legnagyobb d -hez tartozó egyenes éppen a B -n és C -n átmenő $x + y = 40$ egyenletű egyenes (nagyobb d -re az egyenesnek már nincs közös pontja a szírozott tartománnyal). A BC szakaszon további négy rácspont van, ezek: $(26; 14)$, $(27; 13)$, $(28; 12)$, $(29; 11)$.

A d darabszám maximális értéke tehát 40, és ez 6-féleképpen lehetséges.

5. példa

Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 25}$ kifejezés minimumát!

Megoldás

Az algebrai feladatnak geometriai jelentést tulajdoníthatunk, ha a derékszögű koordináta-rendszerben felvesszük az $A(2; -3)$, $B(8; 5)$ és $C(x; 0)$ pontokat (x paraméter). Vegyük észre, hogy ekkor $CA = \sqrt{(x-2)^2 + 9}$, $CB = \sqrt{(x-8)^2 + 25}$, x -től függő változó távolságok. Azaz a feladat átfogalmazható: az x tengely melyik $C(x; 0)$ pontjára lesz $f(x) = CA + CB$ a lehető legkisebb?

A háromszög-egyenlőtlenség miatt $CA + CB \geq AB$. Egyenlőség csak akkor léphet fel, ha C az AB szakasz pontja, s mivel AB hossza állandó, ekkor lesz $f(x)$ is a lehető legkisebb. C -t tehát megkapjuk, ha meghatározzuk az AB szakasz és az x tengely metszéspontját.

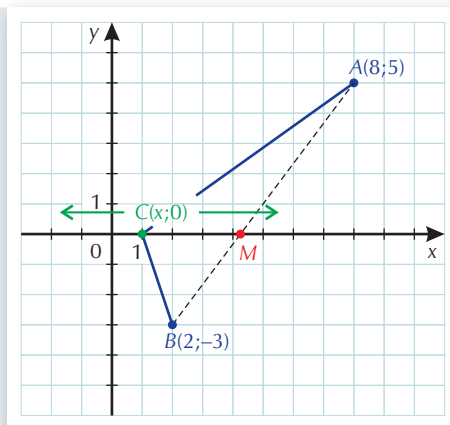
Az AB egyenes meredeksége $\frac{5 - (-3)}{8 - 2} = \frac{4}{3}$, egyenlete például A koordinátáit felhasználva $y - 5 = \frac{4}{3}(x - 8)$. Végül AB és az x tengely M metszéspontját az $y = 0$ helyettesítéssel kapjuk meg, ekkor $x = \frac{17}{4}$.

$f(x)$ tehát a $C\left(\frac{17}{4}; 0\right)$ választás mellett minimális, ekkor

$$\begin{aligned} f(4,25) &= \sqrt{(4,25 - 2)^2 + 9} + \sqrt{(4,25 - 8)^2 + 25} = \\ &= \sqrt{2,25^2 + 9} + \sqrt{3,75^2 + 25} = 10. \end{aligned}$$

(Persze kiszámolhattuk volna közvetlenül AB hosszát is:

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.)$$



6. példa

Egy észak-déli és egy kelet-nyugati irányú hajózási útvonal az O pontban metszi egymást. Egy hajó az O ponttól délre, 20 km távolságra van, és $v = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel északi irányba tart; míg egy másik hajó az O ponttól keletre van 48 km-re, és $w = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel nyugati irányban halad. Mennyi idő múlva kerülnek a hajók a legközelebb egymáshoz? (A hajók sebessége állandónak tekinthető.)

Megoldás

A két hajó egymásra merőleges úton, egyenletes sebességgel halad. Mozgásukat úgy modellezhetjük, mintha az első hajó a koordináta-rendszer $A(0; -20)$ pontjában lenne, és $v = 3$ egység sebességgel haladna az y tengely pozitív irányába; míg a második hajó a $B(48; 0)$ pontból indulna, és $w = 4$ egység sebességgel haladna az x tengelyen, az origó felé. (Ekkor a koordináta-rendszerben 1 egység 1 km-nek felel meg.)

Az első hajó t idő alatt $3t$ nagyságú utat tett meg, pozíciója $A'(0; -20 + 3t)$. A második hajó ugyanakkor a $B'(48 - 4t; 0)$ pontban van. Az A' , B' pontok helyzete és így az $A'B'$ távolság is függ az időtől: $A'B' = \sqrt{(-20 + 3t)^2 + (48 - 4t)^2}$. Kérdés, hogy milyen t értékre lesz $A'B'$ minimális.

$A'B'$ helyett elegendő $A'B'^2$ minimumát meghatározni.

$$A'B'^2 = (-20 + 3t)^2 + (48 - 4t)^2 = 25t^2 - 504t + 2704.$$

Teljes négyzetté alakítunk:

$$A'B'^2 = 25\left(t^2 - \frac{504}{25}t + \frac{2704}{25}\right) = 25\left(\left(t - \frac{252}{25}\right)^2 + \frac{4096}{625}\right) = 25\left(t - \frac{252}{25}\right)^2 + \frac{4096}{25}.$$

Ebből az alakból már leolvashatók a keresett értékek.

$A'B'^2$ (és így $A'B'$ is) akkor minimális, ha $t = \frac{252}{25} = 10,08$ óra, ekkor lesznek egymáshoz legközelebb.

Ekkor $A'B'^2 = \frac{4096}{25}$, azaz $A'B' = 12,8$ km; ez a minimális távolság.

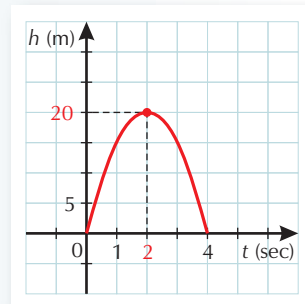
Ellenőrizzünk: ha $t = 10,08$, akkor $A'(0; 10,24)$, $B'(7,68; 0)$, és $A'B' = \sqrt{10,24^2 + 7,68^2} = 12,8$.

7. példa

Egy kavicsot $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel függőleges irányban felfelé elhajítunk. Állapítsuk meg, hogyan függ az eltelt időtől a kavics föld felszínétől mért távolsága, s ábrázoljuk a magasságot az idő függvényében! (A közegellenállást elhanyagolhatjuk, $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.)

Megoldás

A kavics magasságát az idő függvényében az egyenletesen gyorsuló mozgás $h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$ képlete írja le. Az adatokkal $h = 20t - 5t^2$, ez a $h(t)$ koordináta-rendszerben egy lefelé nyitott parabola egyenlete. Mivel $h = 5t(4 - t)$, a két zérushely $t_1 = 0$ -nál (amit szemléletünk is megerősít) és $t_2 = 4$ -nél van. (Az időt másodpercben mérjük.) A parabola könnyen ábrázolható, maximuma a gyökök átlagánál, $t = 2$ -nél van, s ekkor $h_{\max} = h(2) = 20$ (méter).



Megjegyzés

A maximális emelkedési magasság a fizikaórán megismert módszerekkel is meghatározható. A kavics pillanatnyi sebessége $v = v_0 - gt$. Ez nulla, ha $v_0 = gt$, azaz $t = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{10} = 2$ (sec). Tehát a kavics 2 másodpercig fog emelkedni, s ezalatt megtett útja $h(2) = 2v_0 - \frac{g}{2} \cdot 4 = 40 - 20 = 20$ (m).

FELADATOK

1. K2

Gödöllő és Eger távolsága 100 km. Két túrakerékpáros indul el, az első Gödöllőből Eger felé, a másik Egerből Gödöllő felé.

- Hány órákor találkoznak, ha reggel 8 órákor indultak és az első kerékpáros átlagsebessége $v_1 = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $v_2 = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Ábrázoljuk a kerékpárok mozgását az út-idő grafikonon!
- Mennyi idő múlva lesz a második kerékpáros kétszer olyan távol Hatvantól, mint az első? (A Gödöllő–Hatvan távolság 28 km.)
- Mennyi idő múlva lesz az első kerékpáros olyan messze Hatvantól, mint a második Egertől?
- Mekkora növelje az átlagsebességét az első kerékpáros, ha egy órával korábban szeretnének találkozni?

2. K2

Egy pontszerű test kezdetben a koordináta-rendszer $(-16; 0)$ pontjában van. Ezután a test két egységnyi egyenletes sebességgel halad az x tengely pozitív irányába. Mekkora a test távolsága t idő múlva

- az origótól;
- a $(12; 0)$ ponttól;
- az $(5; 6)$ ponttól?

3. E1

Egy test az A pontból a B pont felé tart, egyenes vonalú mozgást végez $v = 5$ egységnyi sebességgel. Mennyi idő múlva lesz a test minimális távolsága a C ponttól?

A test mozgását úgy modellezhetjük, hogy ha az A pontot tekintjük a koordináta-rendszer kezdőpontjának, B és C pontok legyenek $B(54; 72)$ és $C(22; 61)$.

(Adjunk legalább kétféle megoldást: olyat, amelyik algebrai számoláson alapul (szélsőérték-feladat), és olyat is, amelyik geometriai szemléletmódot alkalmaz.)

4. K2

Adott a koordináta-rendszerben két pont, $A(-3; 4)$ és $B(9; 1)$. Adjuk meg az x tengelynek azt a C pontját, amelyre $AC + CB$ minimális! Mennyi ez a minimális összeg?

5. E2

(A 48. lecke 5. példájának folytatása.)

Az OAB derékszögű háromszögben $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = 5$ cm és $OB = 10$ cm hosszú. A háromszögbe $OCDE$ téglalapokat írunk úgy, hogy a téglalap C, D, E csúcsai rendre a háromszög OA, AB, OB oldalaira esnek. A beírt téglalapok közül melyik területe a lehető legnagyobb?

6. E2

Mi a $K = 2x + y$ kifejezés értékkészlete, ha az $(x; y)$ számpárra teljesül az alábbi egyenlőtlenség-rendszer?

$$(1) x + 3y < 9,$$

$$(2) 3x + 2y \geq -2,$$

$$(3) 2x - y < 5.$$

7. E1

Mi a $K = 2x + y$ kifejezés értékkészlete, ha $x^2 + y^2 = 25$?

8. E1

A 4. példa sajtos szendvicsét 140 Ft-ért, a szalámit pedig 190 Ft-ért árulják. Feltételezzük, hogy minden szendvicset eladnak. Melyikből mennyit készítsenek ekkor, ha a lehető legnagyobb bevétel a cél?

9. E2

Adott két azonos síkú kör, középpontjaik távolsága $d = 12$ cm, sugaraik $R_1 = 10$ cm és $R_2 = 6$ cm. Határozzuk meg azon P pontok halmazát a síkban, amelyekre teljesül, hogy P -ből mindkét körhöz ugyanolyan hosszú érintőszakaszok húzhatók!

Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha a középpontok távolsága $d = 20$ cm!

10. E2

Az A és B pontok távolsága 12 cm. Hol vannak a síkban azok a P pontok, amelyekre $PA = 2PB$?

11. K2

Oldjuk meg a lecke 7. példáját, ha a kavicsot egy 10 méter magas ház tetejéről hajítjuk el, függőleges irányban felfelé!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3479–3482, 3489, 3493–3497, 3535–3537, 3563–3565, 3594–3595, 3649–3652, 3655–3657, 3661–3663, 3716, 3734, 3750–3754, 3785–3788, 3815, 3860–3861, 3887, 3897, 3909–3911, 3977–3979, 4008–4009, 4031–4033.



VII. SKALÁRIS SZORZAT

Ebben a fejezetben egy új művelettel, a vektorok skaláris szorzatával ismerkedünk meg. Ennek során két vektorhoz eredményül egy **számot** rendelünk, innen származik az elnevezés is (szám = skalár, megkülönböztetésül a vektortól). A skaláris szorzatnak több fontos alkalmazása van a fizikában, de a következő leckékben példákat mutatunk a síkgeometriai, trigonometriai és koordináta geometriai alkalmazásokra is.

50. KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA

A fizikában gyakran előfordul, hogy két vektormennyiséghez egy számot rendelünk, valamilyen értelemben a két vektor „szorzatát”. Legkorábban talán a munka kiszámítása során találkozunk ezzel a „skaláris szorzattal”, amikor az elmozdulást (vektor), valamint az erőnek (vektor) az elmozdulás irányába eső komponensét szorozzuk össze. A fizikában jelentkező igény az oka annak, hogy a vektorok között értelmezzük ezt a szorzást. (A vektorok körében többféle szorzást is definiálhatunk, a „skaláris szorzat” elnevezéssel hangsúlyozzuk, hogy a vektorok szorzásának eredménye egy szám, azaz skaláris mennyiség.)

A mechanikai munka kiszámítása:

Egyszerű esetben, ha egyenes vonalú mozgásról van szó, és egy állandó nagyságú, az elmozdulás irányába mutató erő munkáját akarjuk kiszámítani, akkor össze kell szoroznunk a megtett út hosszát és az erő nagyságát. Vigyáznunk kell, hogy a megfelelő mértékegységeket használjuk: az utat méterben, az erőt pedig newtonban mérjük.

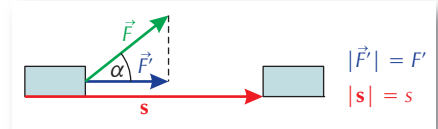
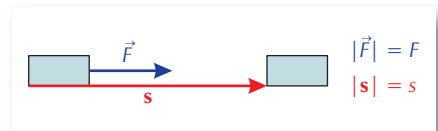
$$W = Fs.$$

Bonyolultabb a helyzet, ha az erő és az elmozdulás nem egyirányú. Ebben az esetben az utat (azaz az elmozdulásvektor nagyságát) az erőnek az elmozdulás irányába eső összetevőjével kell összeszorozni. Ha α szöget zárnak be az erő és az elmozdulás vektorokat szemléltető irányított szakaszok, akkor

$$W = F's, \text{ ahol } F' = F \cos \alpha.$$

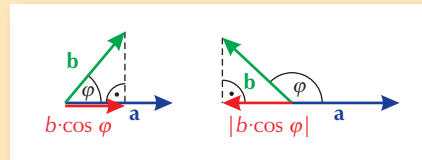
A munka kiszámítása során két vektorjellegű mennyiség segítségével számítunk ki egy skalármennyiséget.

Két vektorhoz a fenti módon tehát egy számot rendeltünk. Ebben az esetben beszélhetünk a vektorok skaláris szorzatáról. Ha egyirányúak a vektorok, akkor csak a hosszukat kellett összeszorozni. Ha ellentétes irányúak, akkor is ez a helyzet, csak a végeredmény negatív lesz. (Az elmozdulással ellentétes irányú erő munkája negatív, hiszen éppen akadályozza azt.)



A vektorok skaláris szorzatát a vektorok közé írt hagyományos szorzásjellel jelöljük.

Két vektor hajlásszögén (φ) a közös kezdőponttal felrajzolt vektorok által meghatározott két szög közül a kisebbiket (nem nagyobbat) értjük, $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.



Definíció

Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$.

Észrevehetjük, hogy az eredmény előjele $\cos \varphi$ előjelétől függ: pozitív, nulla ill. negatív, ha φ rendre hegyesszög, derékszög ill. tompaszög.

TULAJDONSÁGOK

(1) $\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a}$. (A skaláris szorzat **kommutatív**, a szorzásban a tényezők sorrendje felcserélhető.)

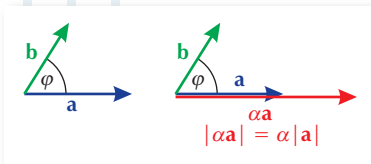
Igazolni kell, hogy $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi$.

Mivel a valós számok körében a szorzás kommutatív, ezért itt, a skaláris szorzás esetében is az.

Ha α egy valós számot jelent, akkor igaz a következő **tulajdonság**:

(2) $\alpha(\mathbf{a} \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \mathbf{b}$.

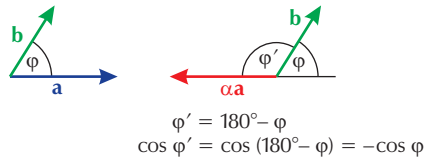
Bizonyítás



Ha $\alpha = 0$, akkor mindkét oldal nulla lesz.

Ha $\alpha > 0$, akkor mindkét oldal egyszerűen α -szorosára változik.

Ha $\alpha < 0$, akkor $\alpha \mathbf{a} \mathbf{b}$ ellentétes előjelű lesz $\mathbf{a} \mathbf{b}$ -hez képest, a másik oldalon viszont $\alpha \mathbf{a}$ lesz ellentétes irányú vektor $\mathbf{a}$ -hoz képest. Így nemcsak a két vektor nagysága változik, hanem a bezárt szögük is φ -ről $(180^\circ - \varphi)$ -re. A két oldal abszolútértéke egyenlő, és mivel $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, a két oldal előjele is megegyezik.



A vektorok összeadására és skaláris szorzatára teljesül a **disztributív** tulajdonság:

(3) $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{a} \mathbf{c}$.

Először abban a speciális esetben szemléltetjük az állítást, amikor az $\mathbf{a}$ vektor egységnyi hosszúságú, tehát $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor.

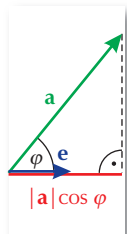
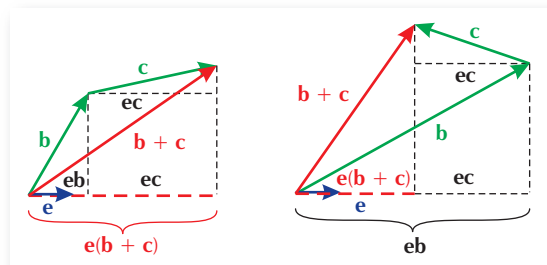
Ekkor észrevehetjük, hogy ha a skaláris szorzatban az egyik tényező egységnyi hosszúságú vektor, akkor a szorzat a másik vektor egységvektor irányába eső összetevőjének (merőleges vetületének) a hosszát adja meg.

Tehát, ha $|\mathbf{e}| = 1$, akkor

$$\mathbf{e} \mathbf{a} = 1 \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi,$$

ami éppen az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ irányába eső összetevőjének (merőleges vetületének) a hossza.

Ezek után $\mathbf{e}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{e} \mathbf{b} + \mathbf{e} \mathbf{c}$ azt jelenti, hogy a $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektornak az $\mathbf{e}$ irányú összetevője megegyezik a $\mathbf{b}$ -nek az $\mathbf{e}$ irányú összetevője plusz a $\mathbf{c}$ -nek az $\mathbf{e}$ irányú összetevőjével.



(Az ábrák szemléltetik, hogy az összetevők ellentétes irányúak is lehetnek.)

Végül ha $\mathbf{a}$ nem egységvektor, akkor legyen $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{e}$, s ekkor $(\lambda \mathbf{e})(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\lambda \mathbf{e})\mathbf{b} + (\lambda \mathbf{e})\mathbf{c}$ az igazolandó állítás. Ez azonban a (2) tulajdonság miatt az $\mathbf{e}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{eb} + \mathbf{ec}$ (már igazolt) egyenlet λ -szorosa, így az állítást beláttuk.

Megjegyzés

Észrevehetjük, hogy a skaláris szorzat definíciójában és tulajdonságaiban háromféle szorzás is szerepel, amit ugyanúgy jelölünk (két vektor, egy vektor és egy skalár, illetve két skalár szorzata). Erre fokozottan figyelniünk kell!

1. példa

Mikor lehet nulla két vektor skaláris szorzata?

Megoldás

Mivel $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$, ezért ha a három tényező bármelyike nulla, akkor a szorzat is nulla lesz.

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor a szorzat nulla lesz. Ha a φ szög 90° -os ($\cos 90^\circ = 0$), vagyis a két vektor merőleges egymásra, akkor is nulla lesz a szorzat. (Vagyis a skaláris szorzat akkor is lehet nulla, ha egyik tényező sem nullvektor.)

Fizikai példákra visszatérve, ha az erő merőleges az elmozdulásvektorra, akkor az elmozdulásirányú összetevője nulla, tehát ennek az erőnek a munkája is nulla.

Ha iskolatáskával a hátamon vízszintes úton közlekedek, akkor a gravitációs erő nem végez munkát a táskán.

Amikor a nullvektorral megismerkedtünk, akkor azt mondtuk, hogy hossza nulla, és iránya tetszőleges lehet. Tehát a nullvektor bármely vektorra merőleges (vagy bármely vektorral párhuzamos).

Ezért egységesen azt mondhatjuk, hogy:

Tétel

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a vektorok merőlegesek egymásra.

2. példa

Mit értünk egy vektor önmagával vett skaláris szorzatán?

Megoldás

$$\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2.$$

A vektor hosszának a négyzetét kaptuk.



3. példa

Hogyan változik két vektor skaláris szorzata, ha

- az egyik vektor hosszát kétszeresére növeljük?
- ha mindkét vektor hosszát háromszorosára növeljük?
- ha az egyik vektor irányát ellentétesre változtatjuk?
- ha mindkét vektor irányát ellentétesre változtatjuk?
- ha az egyik vektor hosszát háromszorosára növeljük, a másikat pedig harmadára csökkentjük?

Megoldás

A (2) tulajdonság alapján válaszolhatunk a kérdésekre.

- A skaláris szorzat is kétszeresére nő. $(2\mathbf{a})\mathbf{b} = 2(\mathbf{a}\mathbf{b})$.
- A skaláris szorzat a kilencszeresére nő. $(3\mathbf{a})(3\mathbf{b}) = 9\mathbf{a}\mathbf{b}$.
- A szorzat ellentettjére változik. $(-\mathbf{a})\mathbf{b} = -\mathbf{a}\mathbf{b}$.
- A szorzat értéke nem változik. $(-\mathbf{a})(-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{b}$.
- A szorzat értéke nem változik. $(3\mathbf{a})\left(\frac{1}{3}\mathbf{b}\right) = \mathbf{a}\mathbf{b}$.

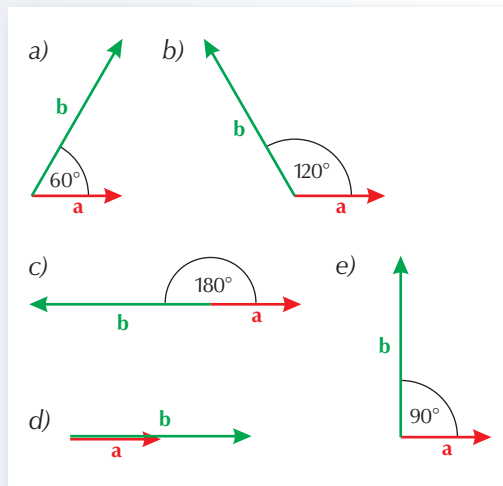
4. példa

Rajzoljuk le közös kezdőponttal a vektorokat! Számítsuk ki az $\mathbf{a}\mathbf{b}$ skaláris szorzatot, ha tudjuk, hogy

- $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\alpha = 60^\circ$;
- $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\alpha = 120^\circ$;
- $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\alpha = 180^\circ$;
- $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\alpha = 0^\circ$;
- $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\alpha = 90^\circ$!

Megoldás

- $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 4$;
- $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -4$;
- $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 4 \cdot \cos 180^\circ = -8$;
- $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 4 \cdot \cos 0^\circ = 8$;
- $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ = 0$.



5. példa

A skaláris szorzat segítségével elegáns bizonyítást adhatunk a koszinusztételre.

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$! (A szokásos jelöléseket használjuk.)

Fogalmak

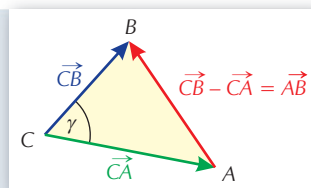
skaláris szorzat;
skaláris szorzat tulajdonságai (kommutativitás, disztributivitás);
két vektor merőlegességének szükséges és elégséges feltétele.

Megoldás

Legyen C a helyvektorok kezdőpontja. Ekkor $|\vec{CA}| = b$, $|\vec{CB}| = a$ és $|\vec{AB}| = c$.

Mivel $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$, ezért

$$c^2 = \vec{AB}^2 = (\vec{CB} - \vec{CA})^2 = \vec{CB}^2 + \vec{CA}^2 - 2 \cdot \vec{CB} \cdot \vec{CA} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



FELADATOK

1. E1

Mekkora szöget zárnak be a következő vektorok, ha tudjuk, hogy

a) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 10$ és $\mathbf{ab} = 50$;

c) $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 8$ és $\mathbf{ab} = 0$;

b) $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 8$ és $\mathbf{ab} = -48\sqrt{3}$;

d) $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 8$ és $\mathbf{ab} = -96$?

2. E1

Mikor lesz az $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 8$ hosszúságú vektorok skaláris szorzata a lehető legnagyobb? Miért? Mikor lesz a legkisebb?

3. E1

Rajzoljunk három olyan vektort, amelyek közül bármely kettőnek a skaláris szorzata megegyezik! Van-e három, nem csupa azonos hosszúságú vektor, amelyek közül bármely kettőnek a skaláris szorzata megegyezik?

4. E1

Az O középpontú ABCD négyzet oldalainak hossza 10 egység. Számítsuk ki az $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ skaláris szorzatot! Mennyi lesz az $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ skaláris szorzat eredménye? Számítsuk ki az $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, $\vec{OA} \cdot \vec{AB}$ szorzatokat is!

5. E1

Az O középpontú ABCDEF szabályos hatszögben $AB = 1$. Számítsuk ki az $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$, $\vec{AO} \cdot \vec{AB}$, $\vec{AO} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AO} \cdot \vec{AD}$, $\vec{AO} \cdot \vec{AE}$, $\vec{AO} \cdot \vec{AF}$ szorzatokat!

6. E1

Tegyük fel, hogy a nehézségi erőter az x koordinátatengelyre merőleges, az y tengely irányításával ellentétes irányú, és a koordináta-rendszerben az egység 1 méter.

Mekkora munkát végzünk, míg egy $m = 40$ kg tömegű testet egyenes szakaszok mentén

a) az $A(-3; -2)$ pontból a $B(9; 14)$ pontba viszünk (tehát az elmozdulás $\vec{AB}$);

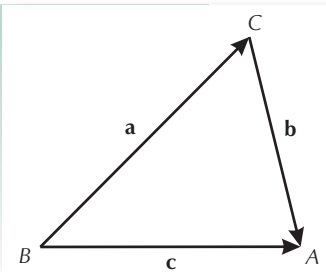
b) az $A(-3; -2)$ pontból a $B(9; 14)$ pontba viszünk a $C(2; 1)$ pont érintésével (az elmozdulás $\vec{AC}$ és $\vec{CB}$)?

7. E1

Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Bebonyítjuk a koszinusztételt.

„Megoldás”: A háromszögben az ábra szerint felvesszük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ oldalvektorokat úgy, hogy $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ legyen. Négyzetre emelés után $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ adódik, majd áttérünk az oldalakra (vektor négyzete = a vektor hosszának a négyzete): $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma$. Miért nem jött ki a tétel?



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2425–2429.

51. SKALÁRIS SZORZATTAL MEGOLDHATÓ FELADATOK A KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

Tanultuk, hogy ha $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ nem párhuzamos vektorok a síkban, akkor tetszőleges síkbeli $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen írható fel $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ alakban (x, y valós számok). Az O középpontú derékszögű koordináta-rendszerben általában az $\mathbf{i}(1; 0)$ és $\mathbf{j}(0; 1)$ bázisvektorokkal dolgozunk, ekkor az $(x; y)$ számpár kölcsönösen egyértelműen meghatározza a $\mathbf{v}$ vektort. A sík bármely P pontjához egyértelműen hozzárendelhetjük a $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ vektort, és így az $(x; y)$ rendezett számpárt is. (Ekkor x és y elnevezése a $\mathbf{v}$ helyvektor vagy a P pont koordinátái.)

Ebben a leckében kapcsolatot keresünk a koordinátáikkal megadott vektorok és a skaláris szorzatuk között.

1. példa

Igazoljuk, hogy $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$!

Megoldás

$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$, hasonlóképpen $\mathbf{j}^2 = 1$, illetve, illetve $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$.

2. példa

Írjuk fel az $\mathbf{a}(2; -1)$ és a $\mathbf{b}(0,3; 2,5)$ vektorokat az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ bázisvektorokkal!

Megoldás

$(2; -1) = 2\mathbf{i} + (-1)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ és $(0,3; 2,5) = 0,3\mathbf{i} + 2,5\mathbf{j}$.

3. példa

Számoljuk ki az előbbi két vektor skaláris szorzatát!

Megoldás

$(2; -1) \cdot (0,3; 2,5) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (0,3\mathbf{i} + 2,5\mathbf{j}) = 0,6 \mathbf{i}^2 + 5\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} - 0,3 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} - 2,5\mathbf{j}^2 = 0,6 - 2,5 = -1,9$.
A megoldás során felhasználtuk a skaláris szorzat kommutatív és a disztributív tulajdonságát.

Általánosítsunk!

Legyen $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ és $\mathbf{b} = (b_1; b_2)$.

Ekkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1\mathbf{i}^2 + a_1b_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j}^2 = a_1b_1 + a_2b_2$.

Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok Descartes-féle koordinátái (a_1, a_2) és (b_1, b_2) , akkor $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2$.
Két vektor skaláris szorzata egyenlő megfelelő koordinátáik szorzatának összegével.

A tétel alapján két vektor skaláris szorzatát nemcsak a „hagyományos” $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$ módon írhatjuk fel, hanem a koordináták segítségével közvetlenül is kiszámíthatjuk. A képletet természetesen alkalmazhatjuk az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$ esetben is.

4. példa

Adottak az A és B pontba mutató $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektorok. Számítsuk ki az $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$ skaláris szorzatokat, illetve az AB szakasz hosszát a skaláris szorzás segítségével!

Megoldás

A definícióból $\mathbf{a}^2 = a_1^2 + a_2^2$, $\mathbf{b}^2 = b_1^2 + b_2^2$ adódik. Észrevehetjük, hogy ez éppen az OA , illetve OB távolság négyzete, vagy másképpen az $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$ hosszának a négyzete. (Korábban már láttuk, hogy $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.)

Ugyanígy $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$, és $|\overrightarrow{AB}|^2 = AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$, de ez nem új eredmény.

Tehát a skaláris szorzás segítségével is levezethetjük a vektor, illetve szakasz hosszára ismert távolságképletet: $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

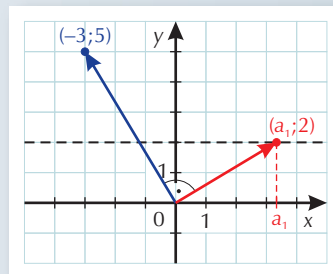
5. példa

Határozzuk meg a_1 -et úgy, hogy az $(a_1; 2)$ és $(-3; 5)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra!

Megoldás

A vektorok akkor és csak akkor merőlegesek, ha skaláris szorzatuk nulla.

$$(a_1; 2) \cdot (-3; 5) = -3a_1 + 10 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{10}{3}.$$



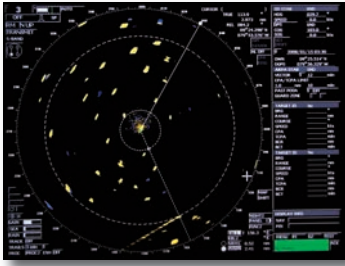
6. példa

Határozzuk meg a $(3; -4)$ és $(5; 12)$ vektorok szögét!

Megoldás

A skaláris szorzás definícióját kétféleképpen felírva a vektorok szöge meghatározható. A két vektor hossza 5, illetve 13, ezért skaláris szorzatuk $5 \cdot 13 \cdot \cos \varphi$, másrészt ugyanez a skaláris szorzat koordinátákkal számolva $(3; -4) \cdot (5; 12) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 12 = -33$. Így $-33 = 5 \cdot 13 \cdot \cos \varphi$, innen $\cos \varphi \approx -0,5077$, $\varphi \approx 120,5^\circ$.

VII. SKALÁRIS SZORZAT



A radarképernyő a megfigyelt terület hajóforgalmát mutatja

Általánosan:

Legyen $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$. Az $\mathbf{ab}$ skaláris szorzatot kétféle módon felírva kiszámíthatjuk a két vektor szögét.

$$a_1b_1 + a_2b_2 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

A γ szög innen már meghatározható.

7. példa

Egy háromszögben $A(-2; 1)$, $B(10; 6)$, $C(7; -11)$. Mekkora az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge?

Megoldás

Ha O a koordináta-rendszer origója, akkor

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (12; 5), \quad |\overrightarrow{AB}| = 13 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (9; -12), \quad |\overrightarrow{AC}| = 15.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (12; 5) \cdot (9; -12) = 108 - 60 = 48.$$

$$\text{Az előző példában levezetett összefüggés alapján } \cos \alpha = \frac{48}{13 \cdot 15}, \text{ innen}$$

$$\cos \alpha \approx 0,2462, \quad \alpha \approx 75,75^\circ.$$

Fogalmak
bázisvektorok
(alapvektorok);
skaláris szorzat
koordinátákkal.

FELADATOK

1. E1 Határozzuk meg a 7. példa háromszögének további szögeit!
2. E2 Igazoljuk, hogy térbeli vektorra $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$!
3. E1 Adottak a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(-3; 4)$ és $B(6; 1)$ pontok. A koordinátatengelyek mely P pontjára lesz $APB \angle$ derékszög?
4. E1 Mekkora szöget zár be az $y = 2x - 5$ és az $y = -x + 8$ egyenletű egyenes? (Használjuk a skaláris szorzatot!)
5. E1 Legyenek A, B, C rácspontok (azaz olyan pontok, amelyek mindkét koordinátája egész szám). Igaz-e, hogy az $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ vektorok közül bármely kettő skaláris szorzata egész számot ad eredményül?
6. E2 Adottak az $A(-3; 4; 0)$ és $B(-2; 3; 2\sqrt{3})$ pontok a térben. Mekkora A és B távolsága? Mekkora szöget zár be az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektor?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2427–2437.

52. EGYENESEK A KOORDINÁTASÍKON

A skaláris szorzat segítségével a koordinátageometriában nagyon egyszerűen kezelhetők a párhuzamos és merőleges egyenesek.

AZ EGYENES EGYENLETÉNEK NORMÁLVEKTOROS ALAKJA

Hogyan határozunk meg egy egyenest az elemi síkgeometriában?

Legegyszerűbb esetben két pontját adjuk meg. Máskor azonban csak egy pontját ismerjük, és az egyenes irányáról tudunk mondani valamit. Például hogy milyen iránnyal párhuzamos, vagy milyen irányra merőleges, esetleg egy adott iránnyal hány fokok szöget zár be az egyenes.

Koordinátageometriában az irányt megadhatjuk például egy (nem nulla hosszú) vektorral. (Ilyen volt korábban az irányvektor.) Két vektor merőlegességére egyszerű feltétel adható a skaláris szorzat segítségével.

Két vektor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk nulla.

Az egyenes egy megadott pontját jelöljük $P(x_0; y_0)$ -val, és legyen adott egy nem nulla hosszúságú, az egyenesre merőleges vektor: $\mathbf{n}(A; B)$.

Definíció

Az egyenesre merőleges, nem nulla hosszúságú vektort az egyenes **normálvektorának** nevezzük.

Az egyenes tetszőleges pontját jelölje $P(x; y)$. Akkor állíthatjuk, hogy egy $P(x; y)$ pont illeszkedik az egyenesre, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra.

Ugyanakkor a P pont biztosan nincs az egyenesen, ha $\overrightarrow{P_0P}$ nem merőleges $\mathbf{n}$ -re.

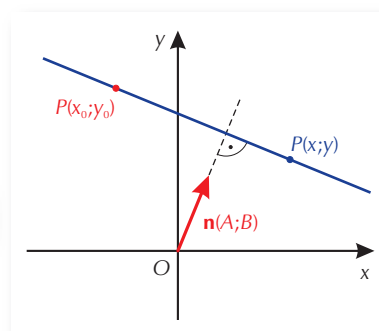
Formalizálva az illeszkedést úgy írhatjuk le, hogy

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Ezt a skaláris szorzatot koordinátákkal felírva:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0.$$

Átrendezve azt kapjuk, hogy



Definíció

$$A \cdot x + B \cdot y = A \cdot x_0 + B \cdot y_0.$$

Ez az egyenes egyenletének normálvektoros alakja.

A bal oldalon álló kifejezést a normálvektor ismeretében tudjuk felírni, míg a jobb oldal egy szám, aminek kiszámításához a normálvektor mellett a fix pont koordinátáira is szükség van.

1. példa

Adott egy egyenes $P_0(-5; 3)$ pontja és az $\mathbf{n}(4; 2)$ normálvektora. Írjuk fel az egyenletét!

Megoldás

Jelen esetben $A = 4$ és $B = 2$, valamint $x_0 = -5$ és $y_0 = 3$. A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$4x + 2y = -20 + 6,$$

$$4x + 2y = -14,$$

$$2x + y = -7.$$

Mintfogya a $4x + 2y = -14$ és $2x + y = -7$ egyenletek ekvivalensek, ezért mindkettő ugyanannak az egyenesnek az egyenlete.

2. példa

Írjuk fel a $P_1(3; -2)$, $P_2(5; 4)$, $P_3(-1; 2)$ csúcspontokkal megadott háromszög oldalfelező merőlegeseinek egyenletét!

Megoldás

Írjuk fel először a P_1P_2 oldalfelező merőlegeseinek egyenletét.

P_1P_2 oldalfelező pontja az $F(4; 1)$ pont (a megfelelő koordináták számtani közepe). Szükségünk van még egy, a keresett egyenesre merőleges normálvektorra. Például $\vec{P_1P_2} = \mathbf{n}$ éppen ilyen vektor. $\vec{P_1P_2} = \mathbf{n} = (2; 6)$, és így az egyenes egyenletének normálvektoros alakja $2x + 6y = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 14$, ami ekvivalens az $x + 3y = 7$ egyenlettel.

Teljesen hasonlóan írhatjuk fel a P_1P_3 oldalfelező merőlegeseinek egyenletét. A G felezőpont koordinátái $(1; 0)$. A $\vec{P_1P_3}$ koordinátái $(-4; 4)$. A szóban forgó felezőmerőleges normálvektorának választhatjuk tehát az ezzel párhuzamos $(-1; 1)$ vektort.

Ezek szerint P_1P_3 felezőmerőlegeseinek egyenlete:

$$-x + y = -1.$$

A H felezőpont koordinátái $(2; 3)$, $\vec{P_2P_3} = (-6; -2)$.

A felezőmerőleges normálvektora lehet tehát például a $(3; 1)$ vektor. A P_2P_3 szakasz felezőmerőlegese: $3x + y = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3$, azaz $3x + y = 9$.

3. példa

Adottak az ABC háromszög $a: y = -3x$, $b: 4x - 2y = -15$ és $c: x = 3$ egyenletű oldalegyenesei. Írjuk fel az egyenesek egy-egy normálvektorát, egy-egy irányvektorát és meredekségét!

Megoldás

Az egyenesek különböző alakjait könnyen átalakíthatjuk egymásba.

Az a egyenes meredeksége -3 , így egy irányvektora $\mathbf{v}_a(1; -3)$, egy normálvektora pedig az erre merőleges $\mathbf{n}_a(3; 1)$. Az egyenlet átrendezés után $3x + y = 0$, az együtthatókból a $(3; 1)$ normálvektor közvetlenül leolvasható.

A b egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}_b(4; -2)$, de megfelelő normálvektorok például a $(2; -1)$ vagy $(-2; 1)$ is. Egy irányvektora $\mathbf{v}_b(2; 4)$, meredeksége $\frac{4}{2} = 2$.

A c egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_c(0; 1)$, egy normálvektora $\mathbf{n}_c(1; 0)$, meredeksége nincs.

Az egyenesek irányát (irányvektor, normálvektor, meredekség) nem befolyásolja a konstans tag, például a $4x - 2y = p$ egyenes minden p -re ($p \neq -15$) párhuzamos a fenti b egyenessel. A normálvektoros alak nagy előnye, hogy az $x = c$ típusú egyeneseket is tudja kezelni (míg az ilyen, y tengellyel párhuzamos egyeneseknek nincs iránytényező alakjuk).

4. példa

Az előző feladat ABC háromszögében adjuk meg az AB és AC oldalak g_c és g_b felezőmerőlegesének és az AC oldalhoz tartozó s súlyvonalnak az egyenletét! Használjuk a normálvektoros alakot! Mekkora a háromszög γ szöge?

Megoldás

Először a háromszög csúcsait határozzuk meg. A C csúcs az a és b egyenesek metszéspontja:

$$\left. \begin{array}{l} a: y = -3x \\ b: 4x - 2y = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow C(-1,5; 4,5)$$

Hasonlóan kapjuk az $A(3; 13,5)$ és $B(3; -9)$ metszéspontokat.

Az AB oldal felezőpontja $D(3; 2,25)$, az AC oldal felezőpontja $E(0,75; 9)$. Szükségünk van még a felezőmerőlegesek irányára.

$\vec{BA} = (0; 4,5)$, ez g_c egy normálvektora. (Egyszerűbb a normálvektor $(0; 1)$ számszorosaival számolni.) A D pontot helyettesítjük, így $g_c: 0x + 1y = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2,25$, azaz $g_c: y = 2,25$.

Hasonlóan $\vec{CA} = (4,5; 9) \sim (1; 2)$, ez g_b egy normálvektora. Az E pont koordinátáit behelyettesítjük, így $g_b: x + 2y = 0,75 + 2 \cdot 9$, azaz $g_b: x + 2y = 18,75$.

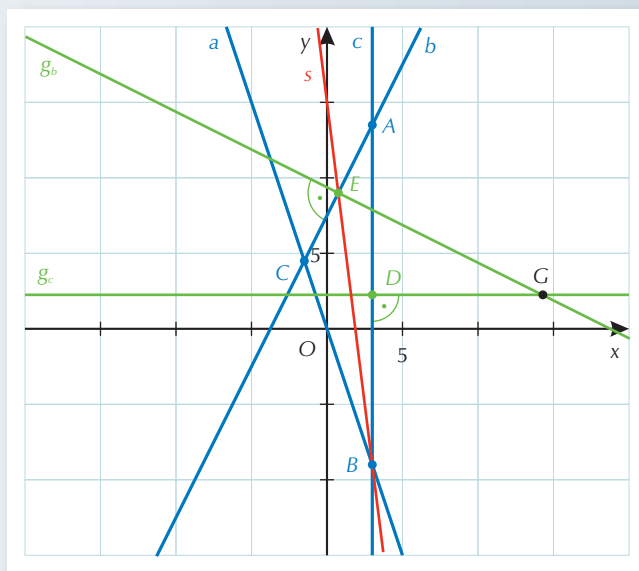
(A g_c és g_b egyenesek metszéspontja $G(14,25; 2,25)$, ez a háromszög köré írt körének a középpontja. Észrevehetjük, hogy G a háromszögön kívüli pont, az AB egyenes C -vel ellentétes félsíkjában van, így $ACB \angle$ tompaszög.)

Az s súlyvonal a B és E pontokon megy át, $\vec{BE} = (-2,25; 18)$ egy irányvektora, $(18; 2,25)$ vagy egyszerűbben $(8; 1)$ egy normálvektora.

$s: 8x + y = 8 \cdot 3 - 9 = 15$ a súlyvonal egyenlete.

A háromszög γ szöge megegyezik az a és b egyenesek normálvektorai által bezárt szöggel (vagy a kiegészítő szöggel). A szög kiszámítására a skaláris szorzást használjuk. $\mathbf{n}_a = (3; 1)$, $\mathbf{n}_b = (2; -1)$; skaláris szorzatuk $3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 5$; a normálvektorok hossza $\sqrt{10}$, illetve $\sqrt{5}$. Így a bezárt szögükre $\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}}$,

innen $\varphi = 45^\circ$. A háromszögben $\gamma = 135^\circ$.



Az egyenes normálvektoros alakja segít adott körhöz húzott érintő egyenletének a felírásában is.

5. példa

Adott a $k: x^2 + 6x + y^2 - 4y = 87$ egyenletű kör.

a) Adjuk meg a kör $x = -9$ abszcisszájú pontjaiba húzott érintők egyenletét!

b) Adjuk meg az $f: x + 2y = 10$ egyenessel párhuzamos érintők egyenletét!

Megoldás

A kör egyenletét először teljes négyzetté alakítással középponti alakra hozzuk:

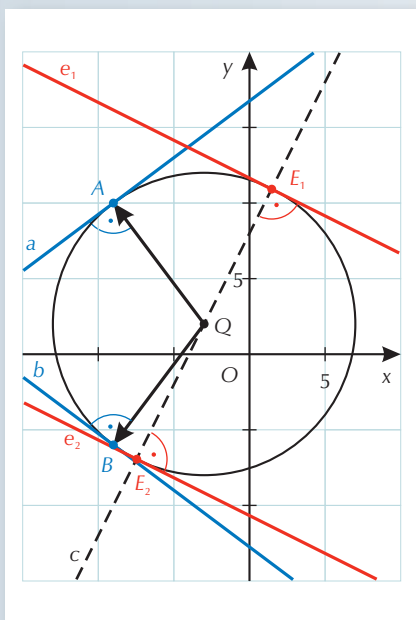
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

(A kör középpontja $Q(-3; 2)$, sugara $r = 10$.)

a) Behelyettesítéssel kapjuk, hogy a kör $x = -9$ abszcisszájú pontjai $A(-9; 10)$ és $B(-9; -6)$. $\vec{QA} = \mathbf{a} - \mathbf{q} = (-6; 8)$, ez az A pontba húzott a érintő egy normálvektora. Az egyszerűbb $\mathbf{n}_a(-3; 4)$ vektorral dolgozunk. Az érintő egyenlete: $a: -3x + 4y = -3 \cdot (-9) + 4 \cdot 10 = 67$.

Hasonlóan $\vec{QB} = \mathbf{b} - \mathbf{q} = (-6; -8)$, $\mathbf{n}_b(3; 4)$, így B -t behelyettesítve

$$b: 3x + 4y = 3 \cdot (-9) + 4 \cdot (-6) = -51.$$



b) Az f -re merőlegest húzunk Q -ból, az így kapott c egyenes kimetszi az E_1 és E_2 érintési pontokat. Ezután már csak adott irányú egyeneseket kell húznunk az E_1 és E_2 pontokon keresztül.

$\mathbf{n}_f(1; 2)$, így $\mathbf{n}_c(-2; 1)$ például. Mivel c átmegy a Q ponton, egyenlete $c: -2x + y = -2 \cdot (-3) + 2 = 8$.

A c egyenes és a kör metszéspontját az alábbi egyenletrendszerből kapjuk:

$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100 \\ -2x + y = 8 \end{cases}$$

A második egyenletből $y = 2x + 8$, ezt az első egyenletbe helyettesítve

$$(x + 3)^2 + (2x + 6)^2 = 100, \text{ innen } x_1 = -3 + 2\sqrt{5} \text{ és } x_2 = -3 - 2\sqrt{5}.$$

A metszéspontok (amelyek egyúttal e_1 és e_2 érintési pontjai) y koordinátáit a második egyenletből kiszámolva a két metszéspont

$$E_1 = (-3 + 2\sqrt{5}; 2 + 4\sqrt{5}) \text{ és } E_2 = (-3 - 2\sqrt{5}; 2 - 4\sqrt{5}).$$

Az érintők egyenlete

$$e_1: x + 2y = -3 + 2\sqrt{5} + 2(2 + 4\sqrt{5}) = 1 + 10\sqrt{5} \text{ és}$$

$$e_2: x + 2y = -3 - 2\sqrt{5} + 2(2 - 4\sqrt{5}) = 1 - 10\sqrt{5}.$$

Fogalmak

normálvektor;
az egyenes
egyenletének
normálvektoros
alakja.

FELADATOK

1. E1 Adott az $e: y = 2x + 3$ egyenletű egyenes és az $\mathbf{a}(8; 1)$ vektor. Számítsuk ki $\mathbf{a}$ -nak az e egyenes-sel párhuzamos $\mathbf{a}_p$, illetve arra merőleges $\mathbf{a}_m$ komponensét!
(Ellenőrzésképpen megadjuk az eredményt: $\mathbf{a}_p = (2; 4)$, $\mathbf{a}_m = (6; -3)$.)

2. E1 Egy háromszög három csúcsa $A(-11; 8)$, $B(3; 10)$, $C(-9; -6)$. Határozzuk meg a háromszög nevezetes vonalait és pontjait, számítsuk ki a háromszög szögeit! Ahol lehet, használjuk az egyenes egyenletének normálvektoros alakját, illetve a skaláris szorzatot!

3. E2 Az előbbi háromszög csúcsain keresztül a körülírt kört érintő egyeneseket húzunk. Írjuk fel az egyenesek egyenletét!

4. E1 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásaiban? Hogyan javíthatók a megoldások?

A feladat: A PQRS négyszög csúcsai: $P(3; -1)$, $Q(1; 3)$, $R(-6; 2)$ és $S(-5; -5)$. Döntse el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis! Válaszait indokolja, támassza alá számításokkal! (Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2006. május)

Az állítás: A PQRS négyszögben R-nél derékszög van.

„Első megoldás”: Az ábra alapján $\angle QRS = \varphi = 90^\circ$ sejthető.

$$QR = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} \approx 7,07; RS = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} \approx 7,07;$$

$$SQ = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

A koszinusztételből $SQ^2 = SR^2 + RQ^2 - 2SR \cdot RQ \cdot \cos \varphi$, innen

$$\cos \varphi \approx \frac{7,07^2 + 7,07^2 - 100}{2 \cdot 7,07 \cdot 7,07} = 0,0032.$$

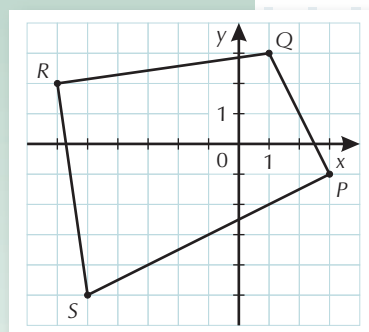
$\cos \varphi > 0$, így $\angle QRS > 90^\circ$. Az állítás hamis.

„Második megoldás”: Nagyobb pontossággal számolunk.

$$QR \approx 7,0711, RS \approx 7,0711, SQ = 10.$$

$$\text{A koszinusztételből } \cos \varphi \approx \frac{7,0711^2 + 7,0711^2 - 100}{2 \cdot 7,0711 \cdot 7,0711} = 0,000009, \text{ amely érték jó közelítéssel nulla.}$$

$\cos \varphi = 0$, így $\angle QRS = 90^\circ$. Az állítás igaz.



5. E1 Az $\mathbf{a}(3; -4)$ és $\mathbf{b}(12; y)$ vektorok merőlegesek egymásra. Milyen hosszú $\mathbf{a} + \mathbf{b}$?

6. E2 A koordinátasíkon vegyük fel az $A(-2; 6)$, $B(8; 0)$ pontokat és az $e: y = 2x - 3$ egyenest, a P pont pedig legyen az e egyenes egy futópontja. Defináljuk a $\mathbf{p}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorokat a következő módon: $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{BP}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{PA}$. A vektorok skaláris szorzatával kapcsolatban több érdekes kérdés is feltehető.

a) Milyen értékeket vehet fel a $\mathbf{pa}$ szorzat?

b) A P pont mely helyzetében lesz nulla a $\mathbf{pa}$, illetve $\mathbf{pu}$ szorzat?

c) Milyen értékeket vehet fel a $\mathbf{pu}$ szorzat?

VIII. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

A 9. és 10. osztály után idén tovább mélyítjük kombinatorikai ismereteinket.

Kombinatorikai problémákkal már a középkorban is foglalkoztak a tudósok, de a témakör igazi fejlődése a XX. századra esett. A világ összes országára kiterjedő áruforgalom, a közlekedés, áruszállítás és hírközlés hihetetlen fejlődése, az információk globális méretű áramlása szükségessé tette a logisztikai tervezést, a gazdaságossági megfontolásokkal előkészített döntéshozást. A kialakult új tudományágak – a statisztika és a valószínűség-számítás, a számítástechnika és az algoritmuselmélet, a dinamikusan fejlődő gráfelmélet vagy éppen a modern közgazdaságtan – tehetetlenek lennének a kidolgozott matematikai, szűkebben kombinatorikai módszerek alkalmazása nélkül. Nem is gondolnánk, hogy amikor a posta könyveket hoz, ezek gazdaságos csomagméreteit kombinatorikai algoritmussal állapították meg; vagy amikor a dolgozók készpénzjutalmat kapnak, a kifizetésekhez valamely címletező programot hívták segítségül. Számptalan példát sorolhatunk fel a mindennapjainkból: az iskolai órarendkészítés folyamatát; a titkosítási eljárást, amely segítségével beléphetünk az internetre; adataink számítógépes rendezését; a telefonhálózatunk működési elvét; vagy éppen a tömegközlekedési útvonalak és járatok gazdasági-logisztikai tervezését.

Ezek a kiragadott példák csak érzékeltetni próbálják a kombinatorika alkalmazásainak szerteágazó lehetőségeit.

53. ISMÉTLÉS

Ebben a leckében röviden áttekintjük a korábbi években tanult ismereteinket.

1. példa

Egy játéktábla 1-től 21-ig számozott mezőkből áll. Ezen a pályán Anna és Béla a következő játékot játsszák.

A kezdő játékos az 1, 2 vagy 3 mezők valamelyikére teheti a közös játékbábút. A második játékos 1-gyel, 2-vel vagy 3-mal nagyobb számú mezőre léphet a bábuval. Ismét az első játékos következik, ő szintén 1, 2 vagy 3 mezővel léphet előre, majd újra a második jön és így tovább. Az a játékos nyer, akinek a bábuval sikerül az utolsó, 21-es mezőre lépnie.

Egy játék a következőképpen zajlott le. Béla a 2. mezőre lépett, Anna a 3-mal nagyobb számúra, az 5-ös mezőre. Béla 2-vel lépett tovább (7-es), ezután Anna következett, 8-ra lépett. Ezután sorban a következő mezőkre léptek: Béla: 9, Anna: 11, Béla: 13, Anna: 14, Béla: 17. Itt Anna észrevette, hogy a 18, 19, 20 mezők bármelyikére lép, mindenféleképpen Béla nyer, hiszen Anna lépése után a 21-re léphet.

Hogyan játsszon Anna a következő játékban, ha most ő kezd?



Megoldás

Anna megpróbálhat „visszafelé” okoskodni, a játék végállapotából korábbi számokra visszalépve. Azt könnyű észrevenni, hogy a 20, 19 és 18 „vesztő mezők”: amelyik játékos ezekre lép, veszít, mert az ellenfele a 21-re léphet. (A játék elemzésekor persze feltételezzük, hogy az ellenfél is jó játékos, egyszerű hibát nem követ el.) A 17-es viszont – mint a példajátékban is észrevehettük – „nyerő mező”. Amelyik játékos erre lép, győzni fog; az ellenfele ezután ugyanis már csak vesztő mezőre léphet.

Anna stratégiája tehát az lehetne, hogy lehetőleg ő lépjen a 17-re. Ha ez sikerül, akkor – hibátlan játék esetén – biztosan nyerni fog. Elképzelhető azonban, hogy ezt a trükköt Béla is ismeri, és ő is arra törekszik, hogy a 17-re lépjen. A játékot tehát tovább kell elemezni.

Ha a 17 nyerő mező, akkor a 16, 15 és 14 vesztő mezők. (Ha bármelyiket kimondja Anna, akkor Béla 17-re lép, és nyer.) Észrevehetjük, hogy a 13 viszont nyerő mező: ha Anna erre lép, akkor Bélának csak a vesztő 14, 15 és 16 mezők maradnak.

Innentől már hasonlóan folytatható az okoskodás. A következő nyerő mező a 9, előtte lévő az 5, és végül nyerő mező az 1 is.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Annának tehát az 1-es mezőn kell kezdenie. Ezután Béla bármit lép, Anna az 5-re lép; majd Béla válassza után a 9-re és így tovább. Ez már *nyerő stratégia*: akárhogyan játszik Béla, a saját stratégiáját követve Anna biztosan nyer, ha nem hibázik. Az is látható, hogy a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája: ha Béla kezd, Anna csak akkor győzhet, ha Béla hibázik.

A nyerő stratégia ismeretében ez a 21-es táblás játék már nem izgalmas, nem szórakoztató. Sőt, a sikeres gondolatmenet a 21-nél hosszabb pályákra is könnyen általánosítható.

2. példa

Anna és Béla annyiban módosítják az előző játékot, hogy a bábuval most az aktuálisnál 1, 2, 3 vagy 4-gyel nagyobb számú mezőre lehet lépni, és a pálya hossza 77. Hogyan játsszon a kezdő Anna, ha az a játékos győz, aki az utolsó, 77-es mezőre lép?

Megoldás

Az előző okoskodást alkalmazzuk. A 77 nyerő mező, a 76, 75, 74, 73 vesztes mezők, a 72 ismét nyerő mező. (Ha erre lépünk, az ellenfél csak vesztes mezőre léphet.) A következő nyerő mező a 67 lesz (71, 70, 69, 68 vesztes), és most már észrevehetjük, hogy a nyerő mezők ötösével helyezkednek el. Ennek az az oka, hogy amikor Béla az X mezőről 1, 2, 3 vagy 4-et lép, Anna rendre a 4, 3, 2 vagy 1 lépéssel eléri, hogy ő az $(X + 5)$ mezőre lépjen.

A nyerő mezők száma 5-tel osztva 2 maradékot ad. Annának tehát a 2-es mezővel kell kezdenie, és Béla válasza után 7-tel folytatnia; ezután sorban a 12, 17, ... 62, 67, 72 mezőkre lép. Ekkor Béla bármit is lép, Anna tud a nyerő 77-re lépni.

Megjegyzés

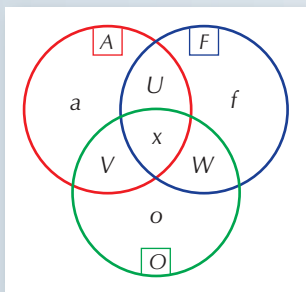
A 2. példában Annát az segítette a győzelemhez, hogy felismerte az $5k + 2$ alakú nyerő sorszámokat (k természetes szám). Úgy is fogalmazhatunk, hogy észrevette: a nyerő sorszámok maradéka a játék folyamán *invariáns* (azaz megmaradó, állandó) mennyiség.

Ez a két játék a tavaly látott *számlétra* játék átfogalmazása.

3. példa

Egy 30 fős osztályban minden diák tanulja az angol, francia és olasz nyelvek valamelyikét. Angolul 16-an, franciául 17-en, olaszul 7-en tanulnak. Tudjuk még, hogy a három nyelv közül pontosan két nyelvet összesen hat diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

Megoldás



Első megoldás

Jelölje A , F és O az angolul, franciául és olaszul tanulók halmazát, és vegyük fel a három halmaznak megfelelő Venn-diagramot.

Ha az a , f , o , U , V , W , x az ábra szerinti tartományok elemszámát jelenti, akkor a feladat feltételei szerint

$$(1) |A| = a + U + V + x = 16,$$

$$(2) |F| = f + U + W + x = 17,$$

$$(3) |O| = o + V + W + x = 7.$$

Pontosan két nyelvet 6-an tanulnak, ezért tudjuk még, hogy

$$(4) U + V + W = 6.$$

Az osztálylétszám is ismert, s mivel minden diák tanulja valamelyik nyelvet, így

$$(5) |A \cup F \cup O| = a + f + o + U + V + W + x = 30.$$

Ebből az öt egyenletből kell x -et meghatározni.

Az első három egyenlet összegéből

$$a + f + o + 2(U + V + W) + 3x = 40.$$

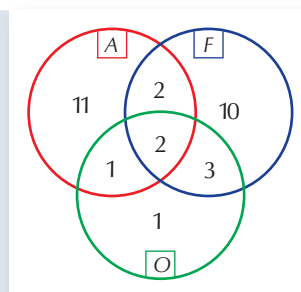
Ebből kivonjuk az ötödik egyenletet, így azt kapjuk, hogy

$$U + V + W + 2x = 10.$$

Mivel (4)-ből $U + V + W = 6$, így $6 + 2x = 10$, és innen $2x = 4$, azaz $x = 2$.

Tehát mindhárom nyelvet két diák tanulja.

Egy lehetséges megvalósítás az ábrán látható. (Itt az egyes tartományokba a megfelelő elemszámokat írtuk.)



Második megoldás

Alkalmazhatjuk a *logikai szitaformulát* is. A három halmaz elemszámainak összegéből vonjuk ki azok számát, akik pontosan két nyelvet tanulnak: $|A| + |F| + |O| - 6$. Ekkor a Venn-diagramon szereplő tartományok mindegyikét egyszer számoltuk, csak a közös részt, az $A \cap F \cap O$ tartományt adtuk össze háromszor. (Ez a részhalmaz az A , F és O halmazok esetében is szerepel az összegben.) Ha tehát az eddigi összegből kétszer kivonjuk ezt a tartományt, az osztálylétszámot kapjuk. Ezért

$$|A| + |F| + |O| - 6 - 2x = 30, \text{ azaz}$$

$$16 + 17 + 7 - 6 - 2x = 30, \text{ s innen } x = 2 \text{ adódik.}$$

Megjegyzés

Mindkét megoldásban felhasználtuk, hogy ismert volt az $U + V + W$ szimmetrikus összeg. Erre szükségünk is volt; egyszerű próbálkozással nehezen oldható meg a feladat, hiszen az egyes részhalmazok elemszáma sokféleképpen megadható.

Egy kis emlékeztető: a **logikai szitaformula** elnevezése az összeszámlálás során többször számolt esetek kivonására, „kiszitálására” utal.

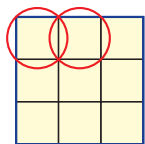
4. példa

Az egység oldalú négyzet belsejében véletlenszerűen elhelyezünk 28 darab pontot. Igaz-e, hogy mindig található a pontok között négy olyan, hogy ezek egy $\frac{1}{4}$ egység sugarú körlappal lefedhetők? (A körlap egy része kívül lehet a négyzeten.)

Megoldás

Megpróbálhatjuk sorban elhelyezni a pontokat úgy, hogy például három pontot egymáshoz közel helyezünk el, és a negyediket ezekhez hozzávéve, az $\frac{1}{4}$ egység sugarú körlappal a fedés már éppen ne sikerüljön. De a pontokat nagyon sokféleképpen felvehetjük, több pont felvétele után bonyolulttá válik a folytatás, az összes eset áttekintése elég reménytelennek tűnik.

Ha az állítás igaz, akkor valahogyan azt kellene megmutatnunk, hogy az adott pontokból 4 mindig „élég közel” van egymáshoz. Bontsuk fel ezért a négyzetet kilenc egybevágó részre, ekkor a *skatulyaelv* miatt valamelyik részben legalább 4 pontnak kell lennie. (Ha minden részbe csak 3 pont kerülne, akkor összesen csak $9 \cdot 3 = 27$ pont lenne.)



A felbontást az ábrán látható módon, párhuzamos harmadoló egyenesekkel végezzük.

Ekkor kilenc kisebb, egybevágó négyzetet kaptunk, melyek oldala $\frac{1}{3}$. Ezen négyzetek átlója $\frac{\sqrt{2}}{3}$

hosszúságú, a négyzetek köré írt kör sugara $\frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0,236$ egység.

Mivel ez az érték kisebb, mint $\frac{1}{4}$, így készen vagyunk: a skatulyaelv miatt valamelyik négyzetbe legalább 4 pont kerül, ezek pedig lefedhetők az $\frac{1}{4}$ sugarú körrel.

A **skatulyaelv** természetes gondolatot fogalmaz meg:

Ha adott n darab skatulyában n -nél több tárgyat akarunk elhelyezni, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe legalább két tárgy kerül (n pozitív egész szám).

Ha n skatulyába $k \cdot n$ -nél több tárgy kerül, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, amelyben legalább $(k + 1)$ tárgy van.

5. példa

Hány háromjegyű páros természetes szám van, amelyik tartalmazza az 1-es számjegyet?

Megoldás

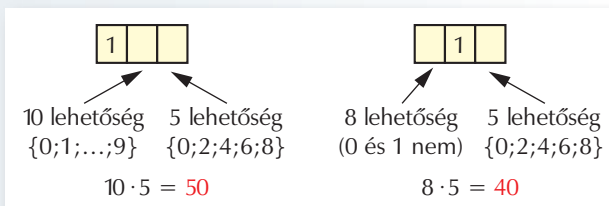
Első megoldás (esetszétválasztás)

A háromjegyű páros szám utolsó számjegye ötféle lehet: 0, 2, 4, 6, 8.

Ha az első számjegy 1-es, akkor a középső számjegy a $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$ halmazból bármi lehet. Ez 10 lehetőség, a szorzási szabály miatt ekkor $10 \cdot 5 = 50$ esetet kapunk.

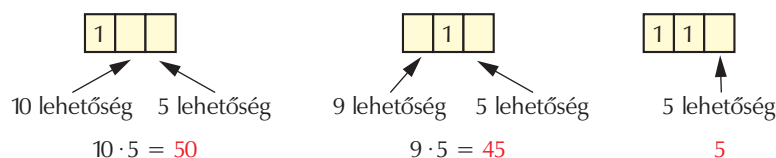
Ha az első számjegy nem 1-es, akkor a második számjegynek már 1-esnek kell lennie. Az első számjegy 8-féle lehet: 2, 3, ... vagy 9. Ekkor tehát az esetek száma $8 \cdot 5 = 40$.

Vagy 1-es az első számjegy, vagy nem. Más eset nem lehetséges, így az összeadási szabály miatt összesen $50 + 40 = 90$ darab megfelelő szám van.



Második megoldás (szitamódszer)

Ha az első számjegy 1-es (és a második bármi), akkor $10 \cdot 5 = 50$ esetet kapunk; míg ha a második számjegy 1-es (és az első számjegy tetszőleges), akkor $9 \cdot 5 = 45$ esetet. (Az első számjegy nem lehet zérus.)



Kétszer számoltuk azokat a számokat, amelyekben az első és a második számjegy is 1-es, így ezeket az $50 + 45$ összegből le kell vonni. Öt ilyen szám van: 110, 112, 114, 116, 118. Összesen tehát $50 + 45 - 5 = 90$ számot találtunk.

Harmadik megoldás (komplementer összeszámlolás)

Emlékeztető: **komplementer összeszámlálásnak** azt a módszert nevezzük, amikor a „jó esetek” számát úgy határozzuk meg, hogy az összes esetből levonjuk a „rossz eseteket”:
 „jó esetek száma = összes eset – rossz esetek száma”.

Fogalmak
 skatulyaelv;
 logikai szita;
 komplementer
 összeszámlálás;
 invariáns
 (megmaradó)
 mennyiség.

Háromjegyű páros szám $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ darab van. Ezek közül azok száma, amelyek nem tartalmaznak 1-est, $8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$. (Az első helyen nem szerepelhet 0 és 1-es, a második és harmadik helyen pedig 0 és 1-es is lehet.) Ha az összes páros számból elhagyjuk azokat, amelyek nem tartalmaznak 1-est, akkor pontosan azon páros számokat kapjuk, amelyekben van 1-es. Így $450 - 360 = 90$ a keresett számok száma.

Megjegyzés

Érdekes hasonló feladatot többjegyű számokra is megoldani, és összehasonlítani a három megoldási módszer „erejét”. (Lásd a 12. kitűzött feladatot.)

FELADATOK

1. K1

Összeadtunk 10 különböző pozitív egész számot, az összeg

a) 55;

b) 56

lett. Mely számok lehettek az összeadandók?

2. K2

Legfeljebb hány négyzetszámot adhatunk meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége se legyen 5-tel osztható?

3. K2

Béla két „ikerfeladatot” eleméz.

a) Egy osztály $\frac{4}{5}$ része angolul, $\frac{3}{5}$ része németül tanul, és legalább az egyik nyelvet mindenki tanulja. Hányan tanulják mindkét nyelvet, ha az osztálylétszám 30 fő?

b) Egy kiránduláson a résztvevők $\frac{4}{5}$ része barna hajú volt és $\frac{3}{5}$ része fiú. Hányan voltak a barna hajú fiúk, ha a kirándulásra 30-an mentek el?

Béla megoldása:

a) „A szita-formulát alkalmazzuk. Mivel $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$, így az osztály $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$ része tanulja mindkét nyelvet. (Ennyi tanulót számoltunk kétszer.) Eredmény: $30 \cdot \frac{2}{5} = 12$ fő.”

b) Ez az alfeladat lényegében megegyezik az a)-val, ezért most is 12 fő az eredmény.”

Anna szerint azonban a helyzet nem ennyire egyszerű. Mire gondolhatott?

4. K2

Egy ismert játékban öt darab 2-es szám mindegyike elé a '+' vagy a '-' jelet írhatjuk, majd az így kapott kifejezés értékét jelöljük S -sel.

- Az 1, 2, 3, ..., 10 számok közül melyik lehet S értéke?
- Változik-e a helyzet, ha megengedjük a zárójelek használatát is?
- És ha megengedjük a szorzás és osztás műveletét is?

5. K2

A $H = \{100, 102, 104, \dots, 998\}$ halmaz a háromjegyű páros számokat tartalmazza. Hány olyan eleme van H -nak, amelyek

- osztható 6-tal;
- nem osztható 7-tel;
- osztható 6-tal és 7-tel;
- osztható 6-tal vagy 7-tel;
- a 6 és 7 közül pontosan az egyik számmal osztható?

6. K1

Hány négyjegyű természetes szám készíthető a 0, 1, 2, 3 számjegyekből, ha

- minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel;
- egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

7. K2

Egy dobókockát négyszer feldobunk, a kapott számokat egymás mellé írjuk, s így egy négyjegyű számot kapunk. Hány esetben lehetséges, hogy a dobott számok között

- csupa különböző van;
- van legalább egy ismétlődő jegy;
- van legalább két darab 2-es;
- két-két egyforma, de egymástól különböző számjegy van (azaz a, a, b, b típus);
- pontosan három egyforma számjegy van;
- van két szomszédos egyforma számjegy?



8. K1

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2008.) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,

- amely öt azonos számjegyből áll;
- amelyik páros;
- amelyik 4-gyel osztható?

9. E1

(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2009.)

- Hány hatjegyű számot lehet készíteni a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek többször is felhasználhatók?
- A fenti hatjegyű számok között hány különböző számjegyekből álló, öttel osztható szám van?
- A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan hatjegyű számot képezhetünk, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik? (Legalább egy számjegy legalább kétszer fordul elő.)
- (Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2007.) Az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz?

10. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2005.) Egy rejtvenyűségban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.

Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

- Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre?

Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

- A feladat szövege alapján készítsen halmazábrát arról, hogy ki hány hibát talált meg!

11. K2

Hét kincskereső 55 darab aranypénzből álló kincset talált. Az érmék tömege rendre 306 g, 307 g, ..., 360 g. El tudják-e úgy osztani a pénzt, hogy mindenkinek legalább 2,5 kg arany jusson?

Az egyik kincskereső szerint semmi gond az osztozkodással, az érmék össztömegének hetede „jóval” nagyobb, mint 2,5 kg. Mi a véleményünk, igaz van?

12. K2

Hány tízjegyű páros természetes szám van, amelyben

- a) nincs 2-es számjegy;
- b) van 3-as számjegy;
- c) van 0;

E1 d) van 3-as és 4-es is?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 258–299, 305–313.

54. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK

1. példa

Régi televíziós vetélkedőkön és különböző rejtvenyűságokban gyakran találkoztunk az alábbihoz hasonló feladatokkal.

„Kössük össze az ábrán látható pontok mindegyikét az összes többivel! Hány összekötő egyenes keletkezik ekkor?” (Az első ábrán az adott pontok egy körívén helyezkednek el, a másodikban a négyzet csúcsaiban és az oldalain.)

Megoldás

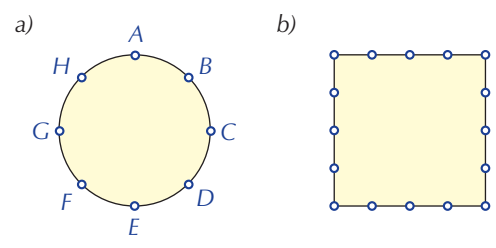
a) Az **első ábra** esetén több megoldást is adunk.

Első megoldás

Az első ábrán az A pontot összeköthetjük a B, C, ..., H pontokkal, ez 7 egyenes. Új egyenest kapunk, ha a B-t összekötjük a C, vagy D, ..., vagy H ponttal, ez további 6 egyenes. Hasonlóan folytathatjuk a C ponttal: a CD, CE, ..., CH egyenesek száma 5. (Nem vettük figyelembe a CA és CB egyeneseket, mert ezeket már az A, illetve B pont esetén számoltuk.) Ugyanígy kapjuk, hogy D-ből 4, E-ből 3, F-ből 2, végül G-ből 1 korábban nem számolt egyenes húzható. Összesen tehát $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ egyenes keletkezik.

Második megoldás

Mindegyik pontból 7 egyenes húzható, a 8 adott pont esetében ez $7 \cdot 8 = 56$ egyenest jelent. De így minden egyenest kétszer számoltunk: például az AD egyenest számoltuk egyszer A-ban, és egyszer D-ben is. Ezért az összes egyenes száma $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$.



Harmadik megoldás

Mindegyik egyenest megadhatjuk a két pontjával. Annyi egyenes keletkezik tehát, ahányféleképpen ki tudunk választani az adott 8 pontból 2-t.

Az első pontot 8-féleképpen választhatjuk ($A, B, \dots, H$), a másodikat már csak 7-féleképpen, mert ez nem lehet azonos az első ponttal. A szorzási szabály miatt így $8 \cdot 7$ pontpárt kapunk. Vegyük észre azonban, hogy a kiválasztott pontok sorrendje nem számít: például a CH pontpár ugyanazt az egyenest határozza meg, mint HC . Mivel minden párt kétszer számoltunk, a keletkezett egyenesek száma $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

(Emlékeztető: Ha az A objektumot m -féleképpen, egy másik független B objektumot n -féleképpen lehet kiválasztani, akkor a szorzási szabály alapján az (A, B) pár kiválasztása („ A és B ”) $m \cdot n$ -féleképpen lehetséges.)

Megjegyzések

Mindhárom megoldás könnyen alkalmazható akkor is, ha 8 helyett több kezdeti pont adott. (Erre vonatkozik az első kitűzött feladat.) Az persze előfordulhat, hogy az első megoldásban olyan nagy számokat kell összeadnunk, hogy érdemes már a „Gauss-módszert” alkalmaznunk.

A harmadik megoldásban „nyolc elemből választottunk ki kettőt úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje közömbös” volt, azaz egy 8 elemű halmaz 2 elemű részhalmazait kerestük. A részhalmazok a halmaz elemeinek egy-egy **(ismétlés nélküli) kombinációi**, ezek számának meghatározása a feladat.

Emlékeztetőül: nyolc elem másodosztályú kombinációi számának a jelölése $\binom{8}{2}$ (olvasd: '8 alatt a 2'), kiszámítása pedig a $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1}$ módon lehetséges.

b) A **második ábrán** problémát jelent, hogy a négyzet egy-egy oldalán több pont is van, s ezeket összekötve egyetlen egyenest kapunk. A négyzet csúcaiban 4, oldalain rendre 3 belső pont adott, így összesen $4 + 4 \cdot 3 = 16$ pont van a négyzet kerületén.

Első megoldás

Ha nem számítjuk a négyzet oldalegyeneseit, akkor a csúcsban lévő pontokat 7 másik ponttal köthetjük össze. A négy csúcs miatt így $4 \cdot 7 = 28$ egyenest kapunk.

Ha az oldalegyeneseket most sem vesszük figyelembe, akkor az oldalakon adott 3-3 belső pont mindegyike 11 másik ponttal köthető össze ($3 \cdot 3 = 9$ belső ponttal és a két szemköztes csúccsal.) Mivel 12 belső pont van, ekkor $12 \cdot 11 = 132$ egyeneshez jutunk.

De most is igaz, hogy az egyenesek mindegyikét kétszer számoltuk, hiszen azok két ponton mennek át. A $28 + 132$ összegnek emiatt a felét kell vennünk: $\frac{28 + 132}{2} = 80$. Ehhez még hozzávesszük a négyzet négy oldalegyenesét, így összesen 84 egyenest határoznak meg a pontok.

Második megoldás

A komplementer összeszámlálás módszerét alkalmazzuk.

Ha minden pontot minden ponttal összekötnénk, akkor $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$ egyenest kapnánk. De ebből le kell vonnunk azokat a „felesleges” egyeneseket, amelyeket úgy kaptunk, hogy a négyzet ugyan-

azon oldalán lévő pontokra illesztettük őket. Egy-egy négyzetoldalon 5 pont van, így a „felesleges” egyenesek száma $4 \cdot \binom{5}{2} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 40$.

A különbséghez hozzá kell adni a négy oldalegyenest (mert még egyszer sem számoltuk őket), összesen tehát $120 - 40 + 4 = 84$ a keresett egyenesek száma.

Sherlock Holmes komplementer módszere

„– Bizony, egyszer már ön is alkalmazhatná a módszeremet – felelte Holmes fejét csóválva. – Hányszor mondtam önnek, hogy csupán az összes lehetetlenséget kell kiküszöbölni, s akkor, ami marad, bármennyire valószínűtlen is, okvetlenül megfelel a valódi tényállásnak.”

Arthur Conan Doyle: Az Agra kincse

2. példa

Hány olyan háromszög van az a), illetve a b) ábrán, melynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

Megoldás

a) Az első ábra esetén:

Első megoldás

Három pont határoz meg egy háromszöget.

Az első pontot 8-, a másodikat már csak 7-, a harmadikat pedig 6-féleképpen választhatjuk ki. A szorzási szabály miatt így $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ háromszöget kapnánk. Igen ám, de a ponthármakat most is többszörösen számoltuk. Például, ha eredményül a *BFE* háromszög adódik, akkor ugyanazt a háromszöget határozna meg a *BEF*, *EBF*, *EFB*, *FBE*, *FEB* ponthármak is. A kapott eredményt ezért osztani kell a három csúcs összes lehetséges sorrendjének a számával, azaz 6-tal. Így a háromszögek száma $\frac{336}{6} = 56$.

Második megoldás

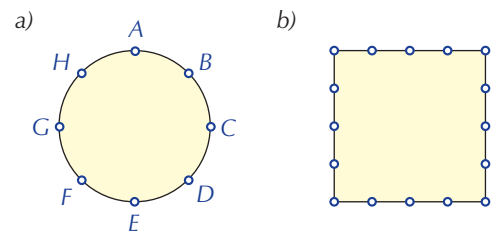
A 8 pontból 3-at választunk ki úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít. Ez 8 elem harmadosztályú kombinációinak a számát jelenti: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{8}{3} = 56$.

Megjegyzés

Három elem összes lehetséges sorrendjének a száma $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$. A kombinációk számának meghatározásakor éppen azért osztunk $3!$ -sal, mert a kiválasztott 3 pont sorrendje a feladat szempontjából lényegtelen, és a 3 pontot ennyiféleképpen rendezhetjük sorba. Ha például a 8 pontból 4-et választanánk ki,

és a kiválasztás sorrendje nem számítana, akkor ezt $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$ -féleképpen tehetnénk meg. Ha pedig n elemből k -t választunk ki úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor a kiválasztások

száma $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$.



b) Második ábra megoldása:

A 16 pontból összesen $\binom{16}{3}$ ponthármast választhatunk ki. (A pontok kiválasztásának sorrendje lényegtelen.) Ezek közül el kell hagynunk az elfajult háromszögeket, vagyis azokat, amelyek mindhárom pontja valamelyik oldalegyenesre esik. Egy-egy oldalon $\binom{5}{3}$ elfajult ponthármast van, így a keresett háromszögek száma $\binom{16}{3} - 4 \cdot \binom{5}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 4 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 520$.

3. példa

Az 52 lapos francia kártyacsomagban négy szín van (treff $\clubsuit$, káró $\diamond$, kőr $\heartsuit$, pikk $\spadesuit$), és mindegyik színből 13 lap: 2-es, 3-as, ..., 10-es, bubi (J), dáma (Q), király (K), ász (A). A póker kártyajátéknak többféle változata ismert, ezekben általában különböző, legfeljebb öt lapból álló lapkombinációkat gyűjtenek a játékosok. Ezek „erősségi” sorrendben a következők:

1 pár: két egyforma számozású (figurájú) lap, például két 7-es: $\clubsuit 7, \heartsuit 7$.

2 pár: például két 7-es és két bubi: $\diamond 7, \heartsuit 7, \spadesuit J, \clubsuit J$.

Drill: három egyforma figurájú lap, például három ász: $\heartsuit A, \spadesuit A, \clubsuit A$.

Számsor: sorrendben egymás után következő lapok, melyek színe lényegtelen.

Például: $\heartsuit 7, \spadesuit 8, \diamond 9, \heartsuit 10, \spadesuit J$.

(A pókerben ásszal is kezdődhet a számsor, ekkor az ász 1-et ér: $\heartsuit A, \heartsuit 2, \clubsuit 3, \spadesuit 4, \diamond 5$.)

Flush (szín): öt egyszínű lap, például: $\heartsuit 2, \heartsuit 8, \heartsuit 9, \heartsuit J, \heartsuit Q$.

Full: három egyforma figurájú lap és két egyforma figurájú lap, például: $\clubsuit 6, \diamond 6, \heartsuit 6, \diamond K, \spadesuit K$.

Póker: négy egyforma figurájú lap, például $\clubsuit 10, \diamond 10, \heartsuit 10, \spadesuit 10$.

Straight flush: együttes flush és számsor, például: $\clubsuit 5, \clubsuit 6, \clubsuit 7, \clubsuit 8, \clubsuit 9$.

Royal flush: 10, J, Q, K, A azonos színben.

Kezdekör öt lapot osztanak Andrásnak.

a) Hányféle lapot kaphat?

b) Hányféleképpen kaphat csupa fekete színű ($\clubsuit$ vagy $\spadesuit$) lapot?

Hányféleképpen fordulhat elő, hogy András lapjai az alábbiak közül valamelyik lapkombinációt alkotják? Azaz hány esetben kaphat például

c) pontosan 1 párt;

d) pontosan 2 párt;

e) flusht;

f) pókert?



Megoldás

a) Az 52 lapból kell – a kapott lapok sorrendjétől függetlenül – ötöt kiválasztani.

$$Ez \binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2\,598\,960\text{-féleképpen lehetséges.}$$

b) Az öt lapot most a 26 fekete színű lap közül választjuk ki: $\binom{26}{5} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{5!} = 65\,780$.

c) Az 1 pár 13-féle figurából állhat, és mindegyik esetben

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \text{-féle lehetőség van, hiszen a 4 egyforma figurájú}$$

lapból választunk ki 2-t. (Például 7-es pár esetén a lehetőségek: $\clubsuit 7, \diamond 7$; $\clubsuit 7, \heartsuit 7$; $\clubsuit 7, \spadesuit 7$; $\diamond 7, \heartsuit 7$; $\diamond 7, \spadesuit 7$; $\heartsuit 7, \spadesuit 7$.)

A maradék három lapból az első 48-féle lehet (7-es nem), legyen például ász. A második lap nem lehet 7-es és ász, így kiválasztására 44 lehetőség adódik. (Legyen például bubi.) Végül a harmadik lap 40-féle lehet, mert nem lehet sem 7-es, sem ász, sem bubi. (Tegyük fel, hogy ez a lap 3-as.) Így végül egy $\diamond 7, \spadesuit 7, \heartsuit A, \heartsuit J, \clubsuit 3$ típusú kártyakombinációhoz jutottunk.

A szorzási szabály miatt az egy pár kiválasztására $13 \cdot \binom{4}{2}$, a kö-

vetkező három lap kiválasztására pedig $48 \cdot 44 \cdot 40$ lehetőség adódott. De a $\heartsuit A, \heartsuit J, \clubsuit 3$ kártyahármas sorrendje tetszőleges lehet (megfelel például a $\heartsuit J, \clubsuit 3, \heartsuit A$ sorrend is), így még osztanunk kell a 3 elem összes

sorrendjével, $3!$ -sal. Eredmény: $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 1\,098\,240$.

d) Az egyik pár kiválasztása $13 \cdot \binom{4}{2}$ -t, a másik $12 \cdot \binom{4}{2}$ -féleképpen lehetséges. De a két pár sorrendje itt sem számít ($\diamond 7, \spadesuit 7, \clubsuit 5, \heartsuit 5$ ugyanaz a két pár, mint $\clubsuit 5, \heartsuit 5, \diamond 7, \spadesuit 7$). Ezért a két pár kiosztása

$\frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{2}$ -féle módon történhet, és hozzájuk jön még az utolsó lap, ami 44-féle lehet. (Az előző

példánál maradva, nem lehet 5-ös és 7-es.) A pókerben két pár tehát $\frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{2} \cdot 44 = 123\,552$ -féleképpen lehetséges.

e) A szín sor 4-féle színből állhat, és egy adott szín esetén a 13 lapból 5-öt választunk ki. Eredmény: $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$ -féle szín sor lehetséges. (Ebből színenként 10, összesen 40 lapkombináció egyúttal szám sor is.)

f) A póker négy egyforma lapja 13-féle lehet, és melléjük választunk egyet a maradék 48 lapból. $13 \cdot 48 = 624$, ennyiféle póker lapkombináció létezik.

(Az eredményt megfogalmazhatjuk binomiális együtthatókkal is: $\binom{13}{1} \cdot \binom{48}{1}$.)

Megjegyzés

Természetesen a vizsgált lapkombinációk a játékban egyre ritkábban valósulnak meg, és ennek megfelelően egyre „erősebbek”. A 8. kitűzött feladatban a többi kombináció előfordulási számát is meghatározhatjuk.

Egyes játékhelyzetekkel kapcsolatban nagyon sok esélyszámítás található az interneten.



4. példa

A 9. osztályban tanult nevezetes azonosság szerint $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. A feladatmegoldások során jól használható a kéttagú összegek köbére vonatkozó azonosság is: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Ezeket az azonosságokat úgy kaptuk, hogy minden tagot minden taggal megszoroztunk, majd a kifejezést rendeztük az egyik változó, például az x csökkenő hatványai szerint:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)^2(x + y) = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) = x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3 = \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

A műveletek elvégzése magasabb hatványokra egyre hosszadalmasabb lesz. Esetleg nem járhatunk el ügyesebben?

Megoldás

Az $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$ hatvány kifejtésekor minden tagot minden taggal szorzunk, így eredményül – a rendezés és összevonások előtt – nyolc tag keletkezik. Ezeket a típusuk szerint csoportosítva összesen négyféle tagot kapunk: x^3 , x^2y , xy^2 és y^3 . Mennyi lesz az egyes tagok együtthatója?

Az x^3 tagot csak egyféleképpen kaphatjuk meg, ha az $(x + y)(x + y)(x + y)$ szorzat mindegyik tényezőjéből az x -et választjuk, és ezeket szorozzuk össze. Az x^3 együtthatója tehát 1 lesz.

Az x^2y tagot úgy kaphatjuk meg, ha a három tényező közül kétszer az x -et, egyszer pedig az y -t választjuk. Ez 3-féleképpen lehetséges: az y -t vagy az első, vagy a második, vagy a harmadik tényezőtől választjuk. (Mindhárom esetben az x választása már egyértelmű.) Az x^2y együtthatóját írhatjuk $\binom{3}{1}$ alakban is, hiszen három tényezőtől egyet választunk ki, és a kiválasztás sorrendje nem számít.

Az xy^2 tag esetében hasonló a helyzet: a három tényező közül kétszer kell az y -t választanunk, s ezt $\binom{3}{2}$ -féleképpen tehetjük meg.

Végül y^3 úgy keletkezik, ha mindhárom tényezőtől az y -t választjuk, és ez csak egyféleképpen lehetséges.

Számításunk szerint $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Ha még arra is emlékszünk, hogy definíció szerint $\binom{3}{0} = 1$, akkor eredményünk szép és könnyen megjegyezhető alakban írható:

$$(x + y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3.$$

(A két szélső együttható is szemléletes jelentésű: $\binom{3}{0}$ és $\binom{3}{3}$ úgy értelmezhető, hogy a három szorzótényező közül 0-szor, illetve 3-szor választjuk az y -t.)

5. példa

Határozzuk meg az előző példa módszerével $(x + y)^4$ kifejtett alakját!

Megoldás

Az $(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$ szorzat kifejtése után ötféle tag keletkezik: x^4 , x^3y , x^2y^2 , xy^3 és y^4 .

x^4 együtthatója 1, mert minden tényezőtől az x -et kell választanunk, és ezt csak egyféleképpen tehetjük meg. (Ezt $\binom{4}{0}$ alakban is írhatjuk, és ekkor azt jelenti, hogy 0 esetben választottuk y -t.)

x^3y együtthatója $\binom{4}{1}$. A négy tényező egyikéből kell y -t választanunk, s ezt ennyiféleképpen tehetjük meg.

x^2y^2 esetén két tényezőtől választjuk az y -t, ez $\binom{4}{2}$ -féleképpen lehetséges.

Hasonlóan kapjuk, hogy xy^3 együtthatója $\binom{4}{3}$, és y^4 együtthatója $\binom{4}{4}$.

Az eredményünk tehát: $(x + y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$.

A kapott kifejezést érdemes ellenőrizni, például a „hagyományos módon”, az $(x + y)^4 = (x + y)^3(x + y)$ szorzat kifejtésével.

A $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ együtthatókra, vagy általában az $\binom{n}{k}$ értékekre új elnevezést vezetünk be.

Definíció

Az $\binom{n}{k}$ értékeket **binomiális együtthatóknak** nevezzük. (Itt k, n természetes számok, és $k \leq n$.) A binomiális együtthatók kiszámítási módját már ismerjük:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ és } \binom{n}{0} = 1.$$

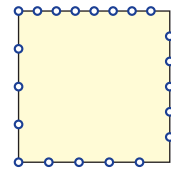
Fogalom
binomiális
együtthatók.

A binomiális együttható elnevezés arra utal, hogy ezek az értékek a kéttagú kifejezések, idegen szóval *binomok* hatványainak kifejtésében jelennek meg.

FELADATOK

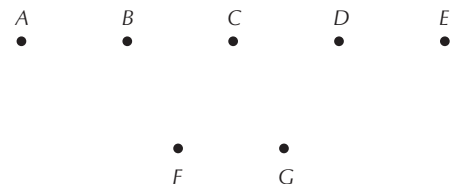
1. K2

- A lecke első példáját általánosíthatjuk például a következőképpen: Egy négyzet minden csúcsában vegyünk fel 1-1 pontot, és ezeken kívül minden négyzetoldal belsejében n - n számú pontot. Hány egyenest és háromszöget határoznak meg ekkor a felvett pontok?
- Az első példa ábráját módosítottuk. (Az oldalak belsejében rendre 3, 4, 5 ill. 7 pont van.) Hány egyenest és háromszöget határoznak meg az új ábrán lévő pontok?



2. K2

- (Érettségi feladat alapján, középszint, 2021.) Az ábrán szereplő A, B, C, D és E pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos az F és G pontokra illeszkedő egyenessel.
- Hány olyan különböző egyenes létezik, amely az ábrán lévő pontok közül legalább kettőre illeszkedik?
 - Hány olyan háromszög van, amelynek a csúcsait az ábrán szereplő 7 pont közül választjuk ki? (Két háromszöget különböztetünk meg, ha legalább az egyik csúcsukban eltérnek egymástól.)



3. K2

Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Hányféleképpen állíthatunk össze 8 versenyzőből két darab négyfős csapatot?

„**Megoldás**”: Az egyik csapat összeállítása már meghatározza a másikat. 8 személyből 4-et $\binom{8}{4} = 70$ -féleképpen választhatunk ki, mert a csapattagok sorrendje nem számít; ez az eredmény. Mi a **hiba**?

4. K2

Fogalmazzunk meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki:

a) $\binom{52}{8}$; b) $\binom{10}{2} + \binom{10}{3}$; c) $\binom{32}{5} \cdot \binom{27}{5}$; **E1** d) $\frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}}{2}$.

5. K2

Hányféleképpen oszthatunk ki az 52 lapos francia kártyacsomagból 5 lapot úgy, hogy a kihúzott lapok között

- a) legyen a treff ász;
- b) ne legyen 8-as;
- c) csak pikk legyen;
- d) mind a négy színből legyen;
- e) pontosan 2 ász, 1 király és 1 hetes legyen;
- f) legyen kőr;

E1 g) legyen kőr és treff is?

6. K2

Tekintsük az $A = \{1, 2, b, c, *, \mu\}$ hatelemű halmazt. Hány olyan részhalmaza van A -nak, amely

- a) háromelemű;
- b) legfeljebb négyelemű;
- c) legalább kételemű;
- d) tartalmazza az 1-et és a 2-t;
- e) nem tartalmazza a c -t, a $*$ -ot és a μ -t?

7. K2

Egy kisvállalkozás a beszállított alapanyagokból különféle táskákat készít. A megrendelő 50 darabot kért, és a késztermékek közül szűrőpróbaszerűen 6-ot ellenőriz. Sajnos a táskák 10%-ának valamilyen gyártási hibája van. Az ellenőrzés során hány esetben fordulhat elő, hogy a hat kiválasztott darab között pontosan

- a) 0;
- b) 1;
- c) 2;
- d) 5 selejtes termék van?

8. K2

Egy pókerjátzsma kezdetekor öt lapot osztanak Andrásnak. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy András lapjai valamelyik alábbi lapkombinációt alkotják?

Hány esetben kaphat

- a) straight flusht;
- b) számsort;
- c) drillt;
- d) fullt?

9. K2

Egy kockát háromszor feldobunk. Az eseménynek hányféle kimenetele lehetséges? (A dobások sorrendje közömbös, azaz például az 1, 2, 2 és 2, 1, 2 dobássorozatokot most azonos kimenetelnek tekintjük.)

10. K2

Ellenőrizzük $(x + y)^4$ kifejtésével, hogy a lecke 5. példájában kapott eredmény valóban helyes!

11. E1

Adjuk meg az alábbi hatványok kifejtett alakját!

- a) $(a + b)^5$;
- b) $(x + 2a)^4$.

12. E1

Határozzuk meg az $(a + b)^6$ kifejtett alakjában szereplő binomiális együtthatókat!

13. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2006.) Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

- a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak?
- b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás?
- c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 140–178, 215–257.

BINOMIÁLIS TÉTEL, PASCAL-HÁROMSZÖG (Olvasmány)

A BINOMIÁLIS TÉTEL

Az előző leckében láttuk, hogy az $(a + b)^n$ kéttagú hatványok rendezett kifejezéseiben az együtthatók az $\binom{n}{k}$ megfelelő értékei, az ún. binomiális együtthatók:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3;$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Vajon tovább folytathatjuk a sort? Az összefüggés 4-nél nagyobb kitevőkre is teljesül?

Megmutatjuk, hogy az állítás általában is igaz: $(a + b)^n$ kifejtett és rendezett alakjában az együtthatók rendre $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$, minden pozitív egész n számra.

Tétel

Binomiális tétel:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Emelt szint

Bizonyítás

A bizonyítás hasonló módon történik, mint azt az $n = 3$ és $n = 4$ konkrét esetekben megmutattuk.

Az $(a + b)^n$ kifejezés n -tényezős szorzat: $(a + b)(a + b)\dots(a + b)$. Ennek kifejtett alakjában minden tag n -ed fokú lesz. A szorzás elvégzésekor minden tényezőtől vagy az a -t, vagy a b -t választhatjuk, ezért a kapott tagokban az a és b változók kitevője attól függ, hogy hány tényezőtől választottuk az a -t, illetve a b -t. Az általános tagot vizsgálva, az $a^{n-k}b^k$ tag együttthatóját úgy kaphatjuk meg, ha az n tényezős szorzatból $n - k$ esetben az a , k esetben pedig a b tényezőt választjuk ki ($k = 0, 1, \dots, n$ lehet). Ezt éppen $\binom{n}{k}$ -féleképpen tehetjük meg: b -t az n számú tényezőtől k -szor választjuk ki úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem lényeges. (És b kiválasztása egyúttal megadja az a változó kiválasztását is: ha b -t k -szor választottuk ki, akkor az a -t szükségképpen $(n - k)$ -szor.)

Az a^n tag együttthatója 1, mert mindegyik tényezőtől az a -t választjuk, s ez egyféleképpen lehetséges.

De ez ugyanazt jelenti, mintha 0 tényezőtől választjuk ki b -t: definíció szerint $\binom{n}{0} = 1$.

Ezzel igazoltuk a binomiális tételt. Említsük még meg, hogy a tétel a semmitmondó $n = 1$ esetben is igaz:

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b.$$

1. példa

Mivel egyenlő $(x + 2y)^6$?

Megoldás

A binomiális tétel szerint

$$(x + 2y)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5(2y) + \binom{6}{2}x^4(2y)^2 + \binom{6}{3}x^3(2y)^3 + \binom{6}{4}x^2(2y)^4 + \binom{6}{5}x(2y)^5 + \binom{6}{6}(2y)^6. \text{ A megfe-}$$

lelő binomiális együttthatók értéke $\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$, $\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$, $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$, $\binom{6}{3} = 20$, ezért

$$(x + 2y)^6 = x^6 + 6x^5(2y) + 15x^4(2y)^2 + 20x^3(2y)^3 + 15x^2(2y)^4 + 6x(2y)^5 + (2y)^6 = x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6.$$

2. példa

Mivel egyenlő $(x - y)^7$?

Megoldás

A binomiális tétel szerint $(x - y)^7 = (x + (-y))^7 =$

$$\begin{aligned} &= \binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6 \cdot (-y) + \binom{7}{2}x^5 \cdot (-y)^2 + \binom{7}{3}x^4 \cdot (-y)^3 + \binom{7}{4}x^3 \cdot (-y)^4 + \binom{7}{5}x^2 \cdot (-y)^5 + \binom{7}{6}x \cdot (-y)^6 + \binom{7}{7}(-y)^7 = \\ &= x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7. \end{aligned}$$

A PASCAL-HÁROMSZÖG

Tekintsük az alábbi háromszög alakú számtáblázatot!

0. sor →								1						
1. sor →							1		1					
2. sor →						1		2		1				
3. sor →					1		3		3		1			
4. sor →				1		4		6		4		1		
5. sor →			1		5		10		10		5		1	
6. sor →		1		6		15		20		15		6		1
...								⋮						

A sorok **képzési szabálya** egyszerű. Minden sor 1-essel kezdődik és 1-essel végződik; a közbülső elemek pedig a felettük lévő két elem összegével egyenlők. (Például a 4. sorban $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$ és $4 = 3 + 1$.) A táblázat tetszőlegesen sokáig folytatható.

A binomiális együtthatók tanulmányozása közben Blaise Pascal (1623–1662) francia matematikus vizsgálta a táblázat tulajdonságait, amelyet az ő tiszteletére Pascal-háromszögnek neveztek el.

Ebben a híres táblázatban a sorokat és a sorokban levő számokat is 0-tól szokás indexelni. Például a 3. sor 0., 1., 2. és 3. elemei tehát rendre 1, 3, 3, 1.

A Pascal-háromszög néhány érdekes **tulajdonsága**:

- Az n . sor 1. eleme n , ha $n \geq 1$.
- A táblázat elemei szimmetrikusak a kezdeti 1 elemén átmenő függőleges tengelyre.
- Az elemek összege soronként 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Vajon ez a szabályosság a további sorok esetén is folytatódik?
- Adjuk most össze az egyes sorokban lévő elemeket váltakozó előjellel! A páratlan sorszámú sorokban a szimmetria miatt az összeg 0 lesz: $1 - 1 = 0$; $1 - 3 + 3 - 1 = 0$ stb. Mennyi lesz az összeg a páros sorszámú sorokban?

(A tulajdonságok igazolását az ajánlott feladatok között tűztük ki.)

További érdekes összefüggéseket fedezhetünk fel, ha összehasonlítjuk $(a + b)^n$ kifejtett alakjában a binomiális együtthatókat, valamint a Pascal-háromszög megfelelő soraiban szereplő számokat.

$(a + b)^1 = a + b$; az együtthatók: 1, 1. A Pascal-háromszög első sorát is ezek a számok alkotják.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Az 1, 2, 1 együtthatók megegyeznek a Pascal-háromszög második sorában lévő számokkal.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; az együtthatók: 1, 3, 3, 1; ezek a Pascal-háromszög harmadik sorának a számai.

Hasonlóan:

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; együtthatók: 1, 4, 6, 4, 1.

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; együtthatók: 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Ez utóbbi esetekben is a táblázat megfelelő soraiban szereplő számokat kapjuk. Úgy tűnik tehát, hogy a Pascal-háromszög n . sorában az $(a + b)^n$ kifejezés binomiális együtthatói szerepelnek. Hogyan igazolhatnánk ezt a sejtést?

Azt kell megmutatnunk, hogy az n . sor k . elemének értéke $\binom{n}{k}$. Fentebb láttuk, hogy az összefüggés igaz a kezdeti öt sorra, elegendő tehát igazolnunk, hogy a tulajdonság a későbbi sorokra öröklődik. A Pascal-háromszög képzési szabálya szerint minden sor 1-essel kezdődik és végződik, és bármely közbülső elem a felette lévő két szám összegeként áll elő. Ezért elegendő a közbülső tagokra az $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ öröklődést igazolnunk, mivel $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ automatikusan teljesül.

Definíció szerint $\binom{n}{k}$ -féleképpen választhatunk ki n különböző elemből k darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Végezzük el a kiválasztást egy konkrét elem, például az n -edik helyzete alapján is!

Ha az n . elem nincs a kiválasztott k darab között, akkor az első $n-1$ elemből kell k darabot kiválasztanunk, és ezt $\binom{n-1}{k}$ -féleképpen tehetjük meg. Ha pedig az n . elem a kiválasztott k darab között van, akkor az első $n-1$ elemből már csak $k-1$ darabot kell kiválasztanunk, ez $\binom{n-1}{k-1}$ lehetőség. Mivel az n . elem vagy a kiválasztott k darab között van, vagy nem, ebből következik, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Láttuk, hogy a Pascal-háromszög kezdeti sorai a megfelelő binomiális együtthatókból állnak, s kombinatorikai úton igazoltuk, hogy – a binomiális együtthatók közötti összefüggés miatt – ez a tulajdonság a következő sorok számaira is öröklődik. Igaz tehát a következő tétel:

Tétel

A Pascal-háromszög n . sorában az $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ számok szerepelnek.

(Az is látszik, hogy miért célszerű a sorokat és a sorokban levő számokat is 0-tól sorszámozni.)

Kis n és k értékekre a tétel segítségével is könnyen meghatározhatjuk az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatókat.

3. példa

- Mennyi $\binom{8}{3}$ és $\binom{9}{5}$ értéke?
- Írjuk fel $(x+y)^8$ kifejtett alakját!

Megoldás

Felírjuk a Pascal-háromszög 8. és 9. sorát:

6. sor →		1	6	15	20	15	6	1			
7. sor →		1	7	21	35	35	21	7	1		
8. sor →		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9. sor →		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

a) Ez alapján $\binom{8}{3} = 56$, $\binom{9}{5} = 126$.

b) $(x + y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$.

A Pascal-háromszög elemei, azaz a binomiális együtthatók között sok érdekes összefüggést vehetünk észre.

4. példa

Igaz-e, hogy $\binom{10}{4} = \binom{3}{0} \cdot \binom{7}{4} + \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} + \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2} + \binom{3}{3} \cdot \binom{7}{1}$?

Megoldás

Természetesen megtehetjük, hogy mindkét oldalon kiszámítjuk az együtthatókat és elvégezzük a műveleteket (algebrai megoldás), most azonban egy kombinatorikai megoldást adunk. Ennek során a feladathoz gyártunk egy modellt.

Tegyük fel, hogy 10 üveggolyóból 3 piros és 7 kék. Hányféleképpen választhatunk ki 4-et a golyók közül, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?

A megoldás egyrészt $\binom{10}{4}$, ami az egyenlet bal oldalán szereplő szám.

Másrészt a lehetőségeket az alapján is összeszámolhatjuk, hogy hány piros golyó van a kiválasztottak között. A piros golyók száma lehet 0, 1, 2 vagy 3, ezekhez rendre 4, 3, 2 vagy 1 kék golyót választunk. Az első esetben $\binom{3}{0} \cdot \binom{7}{4}$ lehetőség adódik, a második esetben $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3}$, a harmadikban $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2}$, végül ha 3 piros

sat választunk, akkor $\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{1}$. Eredményül ezen számok összegét kapjuk, ami éppen az egyenlet jobb oldalán szerepel.

Készen vagyunk: ugyanazt a kiválasztást kétféleképpen számláltuk össze, így eredményül is ugyanazt kell kapnunk a lehetőségek számára. (Az egyenlőség igazolásához nem kellett kiszámolnunk a binomiális együtthatók értékét.)

Fogalmak
binomiális tétel;
Pascal-háromszög.





Blaise Pascal

A binomiális tételt a XV. században már alkalmazták az arab kultúrterület tudósai, de állítólag korábban a nagy perzsa költő és matematikus, Omar Khajjám (1048–1131?) is ismerte. Európában a XVII. században jelent meg Pascalnak a binomiális együtthatókról írt munkája, ebben szerepel a Pascal-háromszög is. Végül Isaac Newtonnak (1643–1727) sikerült a tételt negatív egész és törtkitevőjű hatványokra is általánosítania.

Blaise Pascal (1623–1662) kiváló francia matematikus és fizikus. Munkássága szerteágazó: rendszerezte kora kombinatorikai ismereteit, a valószínűesszámtás egyik megalapozója volt, foglalkozott projektív geometriával és matematikai analízissel is. Sokoldalúságára jellemző, hogy a legelső működő számológépek egyikét is ő szerkesztette.

Írói és filozófiai munkássága is jelentős; gondolatainak gyűjteménye a mai napig rendszeresen megjelenik.



Sir Isaac Newton

Sir Isaac Newton (1643–1727) angol matematikus, fizikus és csillagász. Eredményei páratlanok, a legnagyobb hatású tudósok közé tartozik. Legfontosabb matematikai eredményei a differenciál- és integrálszámtás felfedezése, közelítő számtási módszerek kidolgozása, a magasabb fokú görbék vizsgálata. Természettudományos eredményei közül említjük meg a gravitációs törvényt vagy a Newton-törvényeket, amelyekkel fizikaórán minden középiskolás diák találkozik. Korának megbecsült alakja volt, és az utókor tisztelgő felirattal látta el sírkövét: „Örvendjenek a halandók, hogy az emberi nemnek ilyen és ekkora díszé akadt.”

FELADATOK

1. K2

A táblázat szerint $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ha $k \leq n$ természetes számok. Magyarázzuk meg, miért igaz ez az összefüggés!

2. E1

Mivel egyenlő $(a - b)^5$, illetve $(y - 3)^3$?

3. E1

Határozzuk meg $(a + 2b)^9$, illetve $(a - 2b)^9$ kifejtett alakját!

4. E2

Korábban észrevettük, hogy a Pascal-háromszögben az elemek összege

- az első sorban 2;
- a második sorban 4;
- a harmadik sorban 8;
- a negyedik sorban 16.

Fogalmazzunk meg egy sejtést! Mennyi lehet az n . sorban az elemek összege? Igazoljuk, hogy ez a sejtés minden sorra igaz!

5. E2

Milyen értéket kapunk, ha az egyes sorokban lévő elemeket váltakozó előjellel adjuk össze? Miért?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 199–215.

A KOMBINATORIKA LEGGYAKORIBB ÖSSZESZÁMLÁLÁSI MODELLJEI (Olvasmány)

Ötféle összeszámlálási modellt definiáltunk: ismétlés nélküli és ismétléses permutáció, ismétlés nélküli és ismétléses variáció és kombináció. Az összetett feladatokban természetesen ezek közül többet is párhuzamosan alkalmazhatunk, és olyan feladatok is vannak, amelyek külön-külön többféle modell alkalmazásával is megoldhatók.

Illusztrálásképpen álljon itt néhány korábbi példa, amit a 10. osztályos tankönyv feladatai közül válogattunk.

5. lecke 3. b) feladat

Hányféleképpen lehet egyforma méretű golyókat sorba rendezni, ha 3 piros, 4 kék és 5 zöld golyó adott?

Megoldás

Első megoldás

Kombináció alkalmazásával: a 12 rögzített helyből kiválasztunk a piros golyók számára 3-at, ezt $\binom{12}{3}$ -féleképpen tehetjük meg; majd a maradék 9 helyből 4-et a kék golyók számára, ez $\binom{9}{4}$ -féle lehetőség.

A zöld golyók helyzete már adódik, így összesen $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} = 27\,720$ sorrend van.

Második megoldás

Az ismétléses permutáció alkalmazásával 12 objektum összes sorrendjét határozzuk meg, ha 3, 4 és 5 egyforma van közöttük. Eredmény: $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} = 27\,720$.

Hasonlóan jártunk el például az **5. lecke 4. feladata** esetén is, amikor az 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2 számjegyekből 7 jegű számokat készítettünk.

4. lecke 9. feladat

Hányféleképpen olvasható ki a *DEBRECEN* szó, ha minden lépésben jobbra vagy lefelé lehet haladni?

D	E	B	R	E	C	E	N
E	B	R	E	C	E	N	
B	R	E	C	E	N		
R	E	C	E	N			
E	C	E	N				
C	E	N					
E	N						
N							

D	E	B	R	E
E	B	R	E	C
B	R	E	C	E
R	E	C	E	N

Megoldás

A második táblázatban a modell ugyanaz, mint az előző példában: a lépésirányt jelző J, J, J, J, L, L, L elemek összes sorrendje a kérdés.

Az első táblázatban először ismétléses variációt számolunk. A 7 lépés egymástól függetlenül 2 értékű lehet (jobbra vagy lefelé), így a kiolvasások száma $2^7 = 128$.

A másik lehetőség kombináció alkalmazása. Ha lefelé 0 lépést teszünk, akkor a kiolvasások száma $1 = \binom{7}{0}$; ha 1-et, akkor $\binom{7}{1}$; ha 2-t, akkor $\binom{7}{2}$ stb. Összesen $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{7}{7}$ a lehetőségek száma.

Mellékeredményként azt is igazoltuk, hogy a 7 elemű halmaznak összesen 2^7 számú részhalmaza van. (A két feladat hasonlóan modellezhető.)

D 1	E 1	B 1	R 1	E 1
E 1	B 2	R 3	E 4	C 5
B 1	R 3	E 6	C 10	E 15
R 1	E 4	C 10	E 20	N 35

És persze adhatunk más jellegű megoldásokat is. Észrevehetjük, hogy például a második táblázat bármelyik celláját vagy az eggyel fölötte, vagy az eggyel tőle balra lévő mezőről érhetjük el. Vagyis bármelyik cellába vezető utak számát megkaphatjuk, ha a fölötte és a balra mellette lévő cellákba vezető utak számát összeadjuk. A táblázat minden mezőjébe beírjuk az oda vezető utak számát (a kitöltést az első sorral és oszloppal kezdjük), így az utolsó N mezőbe kerülő szám egyúttal megadja az összes kiolvasás számát is.

5. lecke 6. d) példa

Hányféleképpen lehet 15 kártyalapból kiosztani öt személynek 3-3 kártyalapot?

Megoldás

Az eredeti megoldás kombinációk összeszámlálásával $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}$ vagy $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$ alakú.

Permutációkat vagy variációkat is számolhatunk. Az összes kártyalap 15!-féle sorrendbe helyezhető. Kapja az első 3 lapot az első játékos, a második 3-at a második játékos és így tovább. Ekkor az első 3 lap egymás közötti sorrendje közömbös; hasonlóan nem számít a sorrend a második 3 lap esetén és így tovább.

Az eredmény tehát $\frac{15!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{15!}{(3!)^5}$.

Milyen kapcsolatokat állapíthatunk meg az egyes modellek között?

Az alábbiakban néhányat felsorolunk ezek közül. Az összefüggések a modellek származtatása, a definíciók alkalmazása, illetve a fenti példák alapján könnyen igazolhatók. (A jelölések rendre: V_n^k az n elem k -ad osztályú (ismétlés nélküli) variációinak száma, C_n^k az n elem k -ad osztályú kombinációinak a száma, P_n az n elem permutációinak száma, $P_n^{a,b,c}$ pedig az ismétléses permutációk száma, ha az elemek között a, b, c megegyező van.)

$$a) V_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1);$$

$$b) V_n^n = P_n;$$

c) $C_n^k \cdot P_k = V_n^k$, azaz $\binom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$;

d) $C_n^k = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}}$, azaz $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$;

e) ha $a + b = n$, akkor $P_n^{a,b} = \frac{P_n}{P_a \cdot P_b} = \frac{n!}{a! \cdot b!}$, és $P_n^{a,b} = C_n^a = C_n^b = \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$;

f) ha $a + b + c = n$, akkor $P_n^{a,b,c} = \frac{P_n}{P_a \cdot P_b \cdot P_c} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$, és $P_n^{a,b,c} = C_n^a \cdot C_{n-a}^b = C_n^b \cdot C_{n-b}^a$, azaz

$$\frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} = \binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \binom{n}{b} \cdot \binom{n-b}{a}.$$

Manapság a legtöbb **számológépen** már van olyan billentyűkombináció, amely segítségével konkrét esetekben meghatározhatjuk az egyes modellek elemszámát. A leggyakoribb az nPr és nCr jelölés.

Az nPr szimbólumot – amely az ismétlés nélküli variációk számát jelenti – a permutációk és variációk kiszámításakor használhatjuk. Például:

$< 5 nPr 2 >$ eredménye $5 \cdot 4 = 20$;

$< 8 nPr 5 >$ eredménye $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$;

$10 \cdot 9 \cdot 8$ kiszámolási módja $< 10 nPr 3 >$;

$7!$ kiszámolási módja $< 7 nPr 7 >$.

Az nCr szimbólum segítségével a kombinációk számát határozhatjuk meg.

$< 5 nCr 2 >$ eredménye $\binom{5}{2} = 10$;

$< 5 nCr 0 >$ eredménye $\binom{5}{0} = 1$;

$\binom{8}{3}$ kiszámolási módja $< 8 nCr 3 >$.



Ajánlott feladatok

Vegyes feladatok: Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 215–257.

55. MODELLALKOTÁS GRÁFOKKAL

Gráfokkal már a 9. és 10. osztályban is találkoztunk. A következő leckékben felelevenítjük, mélyítjük és rendszerezzük ismereteinket.

1. példa

Egy vállalat év végi ünnepségén hatan kerülnek egy kör alakú asztalhoz: Anna, Bea, Csaba, Dénes, Eszter és Ferenc. Tudjuk, hogy

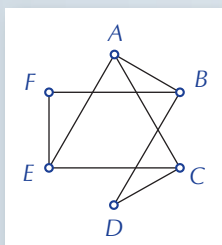
- Anna ismeri Beát, Csabát és Esztert;
- Bea ismeri még Dénest és Ferencet is;
- Csaba további ismerősei Dénes és Eszter;
- Eszter ismeri Ferencet.

Le tud-e úgy ülni a hat munkatárs az asztalhoz, hogy mindenkinek ismerős legyen a két szomszédja? (Természetesen az ismeretség kölcsönös: ha Anna ismeri Beát, akkor Bea is ismeri Annát.)

Megoldás

Első megoldás

Dénest és Ferencet csak két ismerőse van, ezért az ő szomszédjaik Bea és Csaba, illetve Bea és Eszter. Mivel Beának Dénes és Ferenc is szomszédja, így csak kettőjük között ülhet. A Csaba – Dénes – Bea – Ferenc – Eszter ötöshöz csatlakozhat Anna, ha Csaba és Eszter közé ül, hiszen mindkettőjüket ismeri. A hat munkatárs tehát leülhet a feltételeknek megfelelően.

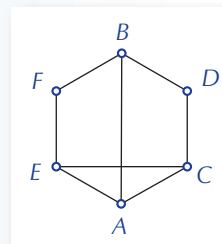


Második megoldás

Áttekinthetőbb lesz a probléma, ha feltételeket egy rajz segítségével, úgynevezett *gráffal* ábrázoljuk. Ekkor minden munkatársat egy-egy ponttal jelölünk, és ha két személy ismeri egymást, akkor a nekik megfelelő pontokat összekötjük.

A személyek „hatszöget” alkotnak, az ismeretségek pedig a hatszög „oldalainak” vagy „átlói-nak” felelnek meg. Az ábra segítségével átfogalmazhatjuk a feladatot. Például a következő kérdés is feltehető: egy hatszög csúcsait betűzhetjük-e úgy $A, B, \dots, F$ -fel, hogy – a megfelelő pontok közötti szakaszokat behúzva – megrajzolható legyen a hatszög kerületének hat oldala? (Világos, hogy ha a hatszöget megrajzolhatjuk, akkor az ültetéskor minden személy ismeri a két szomszédját.)

Hasonlóan okoskodunk, mint az előbb. A hatszögben F -nek és D -nek egyértelműen adott a két-két szomszédos csúcsa, és mivel B közös csúcs, az $E - F - B - D - C$ láncot kapjuk. Innen pedig egyetlen módon fejezhetjük be a konstrukciót, ha A -t az E és C közé tesszük (második ábra).



2. példa

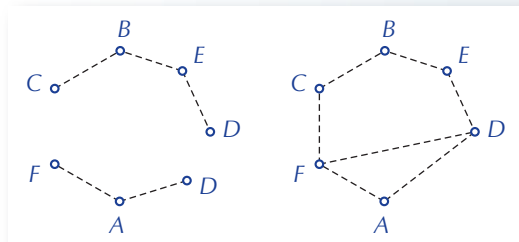
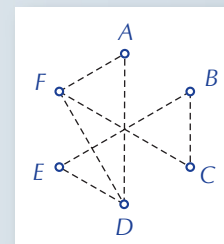
Az előző példát annyiban módosítjuk, hogy most az ültetéskor az a cél, hogy mindenki minél több új ismerőst szerezzen. Tehát lehetőleg mindenkit két olyan személy közé ültessünk, akiket még nem ismer. Megoldható ezzel a feltétellel is az ültetés?

Megoldás

Célszerű a gráfot úgy módosítani, hogy most éppen azokat a pontokat kötjük össze (például szaggatott vonallal), amelyeknél a megfelelő személyek *nem ismerik egymást*.

Ekkor a gráf megváltozott, de a feladat lényegében ugyanaz maradt: a hatszög alkalmas betűzésével kell elérnünk, hogy a hat oldal előálljon – ezúttal szaggatott vonalakkal.

Mivel B és E két-két embert nem ismer, a $C - B - E - D$ lánc egyértelműen adódik; s hasonlóan kapjuk az $F - A - D$ láncot is. (Itt A az, aki nem ismer két embert.) Az első ábra pedig már könnyen befejezhető, mivel C és F nem ismerik egymást (azaz össze vannak kötve). A kapott ülésrend: $A - F - C - B - E - D$.



3. példa

Egy utazási iroda az ország tíz városa között rendszeres buszjáratot üzemeltet. A mellékelt táblázatban feltüntettük az egyes városok közötti távolságokat kilométerben, az egyszerűség kedvéért a városokat $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ betűkkel jelölve. Ha a táblázat valamelyik cellája üres, akkor a cellának megfelelő két város között nincs buszjárat.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	–								120	50
B		–			65		55			
C			–	60					150	
D			60	–		95		40		
E		65			–		70			
F				95		–				
G		55			70		–			
H				40				–	30	
I	120		150					30	–	
J	50									–



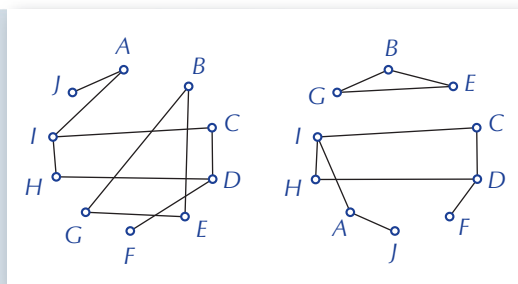
a) Vajon az utazási iroda kínálhat-e olyan körutazást, amely a tíz várost érinti? (Azaz eljuthatunk-e bármelyik városból bármelyikbe, az iroda buszjárait használva?)

b) Egy turista a D városból A -ba utazik az iroda járataival. Eközben legalább hány várost érint?

c) Hogyan lehet legolcsóbban eljutni C -ből A -ba? (Tegyük fel, hogy az útiköltség a távolsággal arányos.)

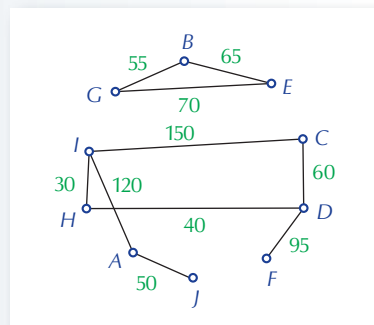
Megoldás

Ismét érdemes egyszerűsítő ábrát rajzolni. Az egyes városokat jelöljük az $A, B, \dots, J$ pontokkal, és két várost akkor kössünk össze, ha van közöttük buszjárat. Az így kapott ábrát kissé átalakítjuk, hogy az összefüggések jobban látszódnak (második ábra).



Ez az ábra sokkal jobban áttekinthető, mint a táblázat, hiszen kiemeli a lényegét: az egyes városokat, valamint a közöttük lévő kapcsolatot, a buszjáratot. Az ábra alapján az a) és b) kérdésre könnyen válaszolhatunk.

- A három B, E, G város csak egymással van összekötve, a többi várossal nem. Az iroda tehát nem tud az összes várost érintő körutazást szervezni.
- Az ábra alapján D -ből A -ba többféleképpen is eljuthatunk. Ehhez előbb az I várost kell elérnünk, ami D -ből C -n vagy H -n keresztül is lehetséges. Két „rövid” út van: $D - C - I - A$ vagy $D - H - I - A$. A turista tehát legalább két várost érint útja közben.
- Az a) és b) feladatban csak azt kellett vizsgálnunk, hogy két város között van-e összeköttetés, vagy sem. Ebből a szempontból megfelelő volt az ábránk, de a c) feladatban további információkat kell megjeleníteni. Érdemes tehát az ábrát kissé módosítanunk: az egyes városokat összekötő szakaszokra ráírjuk a két város távolságát. (A modell szempontjából most sem számít, hogy milyen alakú vagy milyen hosszú összekötő vonalat használunk; csak a vonalra írt számnak van jelentősége.) C -ből A -ba az I városon keresztül juthatunk el. Ide C -ből közvetlen járat is vezet (150 km hosszú úton), illetve egy bonyolultabb útvonalat is választhatunk D -n és H -n keresztül. Ez több szakaszból áll, s látszólag hosszabb. Ha azonban összeadjuk az útszakaszok hosszát, $60 + 40 + 30 = 130$ kilométert kapunk, és ez kevesebb, mint 150 km. A legrövidebb (és legolcsóbb) útvonal C -ből A -ba tehát a $C - D - H - I - A$ városokon át vezet, s hossza $60 + 40 + 30 + 120 = 250$ km.

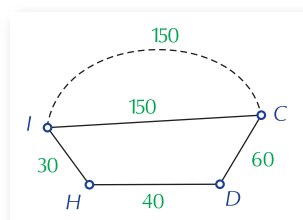


A MODELLEZÉS FOLYAMATA

A modellalkotás során megkerestük a vizsgált rendszer legfontosabb tulajdonságait, ezeket kiragadtuk és szemléltettük; ugyanakkor a kevésbé fontos jellemzőket elhanyagoltuk. Ha szükséges volt, egy-egy feladaton belül több modellt is alkalmaztunk. A 3. példában már magának a táblázatnak is információrendező és -sűrítő szerepe volt. (Az egyes útszakaszok és távolságok egész mondatokban történő felsorolása nemcsak hosszadalmasabb lett volna, de terjengőssége miatt nehezebben tudtuk volna áttekinteni, bonyolultabb lett volna benne a keresés.)

Az a) és b) feladatban a táblázat idevonatkozó, lényeges információit, a városok közötti kapcsolatokat gráffal ábrázoltuk. Ezekben a példákban a gráfmodell használhatóbb volt a táblázatnál. (Információt nem veszítettünk, a fontos jellemzők változatlanok maradtak. Például észrevehetjük, hogy a táblázat elemei a bal felső–jobb alsó átlóra szimmetrikusan helyezkednek el. Hát persze – ha a B és E városok közti út 65 km, akkor az E és B városok között is ekkora az útszakasz hossza. A szimmetria a gráfmodellben is fellelhető: ha B -t összekötjük E -vel, akkor E -t is összekötöttük B -vel.)

A c) feladatban jelentősége volt az útszakaszok hosszának. Ekkor új modellt állítottunk fel: a gráfban az útszakaszok hosszát is szerepeltettük.



Mindig érdemes elgondolkodni azon, hogy a modell mennyire valóság-hű, hogy meddig terjed az érvényességi köre. Például a $CDHI$ négyszögben $CD + DH + HI = 130$ km $<$ $CI = 150$ km. A konkrét ábrát tekintve, geometriai szempontból a háromszög-egyenlőtlenség miatt ez persze lehetetlen: bármely négyszögben $CD + DH + HI$ szükségképpen nagyobb, mint CI .

A mi modellünk esetében ez nem jelent hibát. Csak annyit állapíthatunk meg, hogy a rajzunk nem méretarányos, nem valóság-hű; és a városok közötti

utak nem lehetnek egyenes szakaszok. (De nem is mondtuk, hogy azok: a szakaszokkal csak az utak létezését jeleztük, azok típusát, egyéb jellemzőit nem.) Ekkor persze felvetődik a kérdés: ha a CI görbe vonal kerülő út, egyáltalán mi szükség van rá? Aki C -ből I -be utazik, miért választaná a rövidebb $C - D - H - I$ út helyett a hosszabbat?

Nos, ennek is lehet magyarázata. Egy lehetséges ok turisztikai jellegű: például a kerülő CI út valamilyen szép természeti jelenség vagy más nevezetes látnivaló mellett halad el.

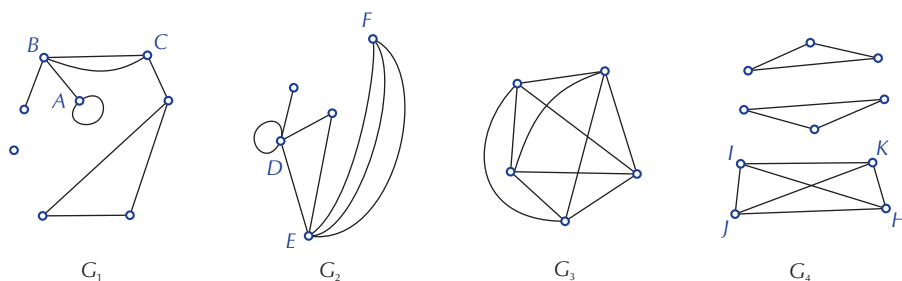
A GRÁFOK ALKOTÓELEMEI

Az első három példában az embereknek és a városoknak pontokat feleltettünk meg, és a közöttük lévő kapcsolatokat (ismerősök, illetve buszjáratok) a pontokat összekötő vonalakkal szimbolizáltuk. Az így kapott ábra könnyen áttekinthetővé vált, a lényeg kiemelése segítette a probléma áttekintését. Ez az ábrázolási mód várhatóan más esetekben is alkalmazható lesz, amikor objektumokat és közöttük lévő kapcsolatokat vizsgálunk. Ezért a modell elnevezésére külön fogalmat vezetünk be.

Definíció

Pontokból és a pontok közül egyeseket összekötő vonalakból álló alakzatot **gráfnak** nevezzük. A vonalak mindig két pontot kötnek össze (esetleg a vonalak kezdőpontja és végpontja megegyezhet), de lehetséges, hogy van olyan pont, amelyik semelyik másikkal nincs összekötve; sőt az is lehet, hogy a gráfban egyáltalán nincsen vonal. A gráfot általában G -vel jelöljük.

Példák gráfokra (G_1 , G_2 , G_3 és G_4):



Érdekes a gráf egyes alkotóelemeire is új elnevezéseket bevezetnünk, hiszen a fogalmak azonosítása, „címkézése” egyszerűsíti a gondolatmenetek leírását.

Definíció

A gráf pontjait **pontoknak** vagy **csúcsoknak** nevezzük, a pontokat összekötő vonalak a gráf **élei**.

Emelt szint

Definíció

A **hurokél** olyan él, amelynek kezdő és végpontja megegyezik. **Többszörös éleket** kapunk, ha két pont között egynél több élt húzunk be.

Amely gráfban nincs hurokél és nincsenek többszörös élek, **egyszerű gráfnak** nevezzük.

Megjegyzés

A középszintű érettségi követelmények csak az egyszerű gráfokkal kapcsolatos ismereteket tartalmazzák.

Például:

A G_1 gráfnak 8 pontja (csúcsa) és 9 éle van. Az élek között található egy hurokél (az A pontból indul és ott is végződik), valamint a B és C csúcsok között többszörös (kétszeres) élek vannak.

A G_2 gráfban is szerepel hurokél a D csúcsnál, valamint E és F között többszörös (háromszoros) éleket láthatunk. A G_2 gráfnak 5 pontja és 8 éle van.

G_3 és G_4 egyszerű gráfok, mert sem hurokélük, sem többszörös élük nincs. (G_1 és G_2 nem egyszerű gráf.) G_3 -nak 5 pontja és 10 éle van, G_4 -nek 10 pontja és 12 éle.

Definíció

A gráf egy pontjának **foka (fokszáma)** a pontból kiinduló élek száma. (A hurokélek kétszeresen számítanak.)

Például:

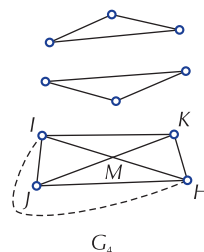
A G_1 gráfban az A pont foka 3, a B ponté 4, a C ponté 3. Ezenkívül van még a gráfban egy harmadfokú, két másodfokú, egy elsőfokú és egy nulladfokú pont.

A nulladfokú pontot **izolált pontnak** is nevezzük.

A G_2 gráfban D és E fokszáma 5, F foka 3, és található még egy másod- és egy elsőfokú csúcs.

G_4 -ben hat másodfokú és négy harmadfokú pont van. (A HI és JK élek M metszéspontja a G_4 gráfnak nem csúcsa. A HI élt behúzhatjuk úgy is, hogy a JK éllel ne legyen közös pontja; az ábrán ezt az élt szaggatott vonallal jelöltük.)

G_3 -ban minden pont foka 4.



Definíció

Ha egy gráf bármely pontjából bármely másik pontjába pontosan egy él vezet, akkor **teljes gráfnak** nevezzük.

G_3 teljes gráf, de n pontú teljes gráfot kapunk akkor is, ha behúzzuk egy szabályos n -szög oldalait és átlóit ($3 \leq n$ egész szám). A két pontból és egyetlen, őket összekötő élből álló gráf is teljes gráf; sőt annak tekintjük az egyetlen pontból álló, él nélküli gráfot is.

Zárasképpen még két elnevezést említünk meg, ezek használata megkönnyítheti a megoldások leírását.

Összefüggőnek nevezünk egy gráfot, ha élek mentén haladva, bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk.

Ilyen volt G_2 és G_3 , vagy a lecke első példájában szereplő gráf.

Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a maximális összefüggő részeit **komponenseknek** nevezzük.

Fogalmak

gráf;
pont (csúcs);
él;
hurokél;
többszörös él;
egyszerű gráf;
fok, foksám;
izolált pont;
teljes gráf;
összefüggő gráf;
komponens.

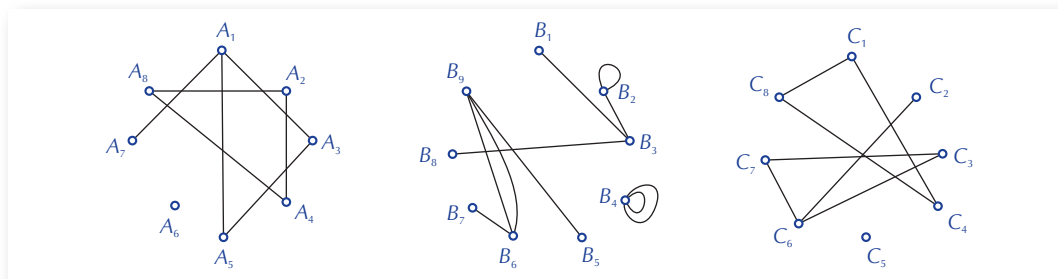
A nem összefüggő G_1 gráf 2, G_4 pedig 3 komponensből áll. Az izolált pont is egy komponens; valamint az összefüggő gráfokat is egyetlen komponensből álló gráfnak tekintjük.

A lecke 3. példájában (utazási iroda buszjáratái) szereplő gráf két komponensből állt, nem volt összefüggő. Éppen emiatt nem lehetett minden várost érintő körutazást szervezni.

FELADATOK

1. K1

Jellemezzük az alábbi gráfokat! (Határozzuk meg a csúcsok, élek számát, az egyes csúcsok fokszámát; vizsgáljuk meg, mely gráfok egyszerűek, hány komponensből állnak, van-e izolált pontjuk.)



2. K1

Az alábbi feladatokban 5 pontú gráfok éleit felsorolással adtuk meg (pl. {1; 2} az 1-es és 2-es csúcs közötti élt jelent).

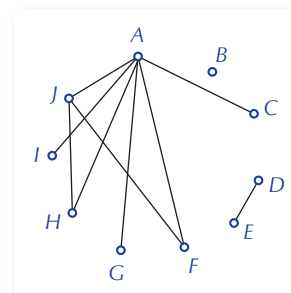
Rajzoljuk meg és jellemezzük az egyes gráfokat!

- {1; 2}, {2; 3}, {2; 4}, {2; 5}, {1; 4}, {3; 3}, {3; 4};
- {2; 2}, {2; 3}, {2; 3}, {3; 4}, {2; 5};
- {1; 2}, {1; 3}, {2; 3}, {2; 3}, {2; 2}, {4; 5}.

3. K1

Egy társaságban tíz ember találkozott. Az adott gráf pontjai jelentik az egyes személyeket, s azokat kötöttük össze élekkel, akik barátai egymásnak. (A barátság kölcsönös.)

- Kinek van a legtöbb barátja a jelenlévők között?
- Fogalmazzuk meg a „barátsági” gráf izolált pontjának jelentését!



4. K1

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2005.) Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!

5. K2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1		1		1		
2	1			1		2		1
3								
4	1	1				1		
5					1		1	
6	1	2		1				
7					1			
8		1						

Egy 8 pontú gráf csúcsait 1-től 8-ig sorszámoztuk, és a táblázatban jelöltük, hogy melyik csúcs melyikkel van összekötve. (Például az 1. sor 2. oszlopában lévő 1-es azt jelenti, hogy az 1-es és 2-es csúcsot 1 éllel kötöttük össze.)

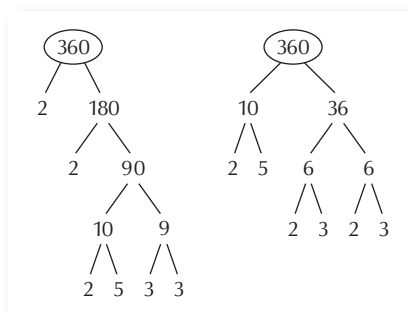
Rajzoljuk meg és jellemezzük a gráfot!

6.

Korábban több eljárást is megismertünk a pozitív egész számok prímtényezősz felbontására. Az egyik módszer az osztók segítségével olyan gráfot hoz létre, amelynek csúcsai a kiindulási szám osztói. Például a 360 két felbontása látható az ábrán.

K1 a) Adjuk meg a 360 néhány további felbontását!

K2 b) Mi a közös az egyes felbontásokban? (Hány elsőfokú pontja van a gráfnak?)



7. K2

Az alábbi táblázat néhány magyarországi nagyváros távolsági adatait jelzi kilométerben (személygépkocsi-val járható útvonalakra vonatkoztatva).

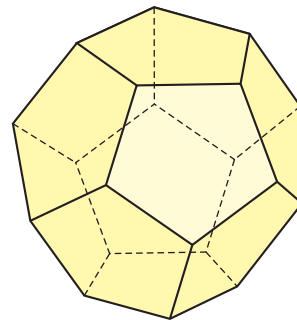
	Budapest	Békéscsaba	Győr	Nyíregyháza	Pécs	Szeged	Szolnok	Zalaegerszeg
Budapest	–	214	122	226	200	171	98	224
Békéscsaba	214	–	331	184	276	93	111	397
Győr	122	331	–	348	230	288	225	131
Nyíregyháza	226	184	348	–	418	264	183	470
Pécs	200	276	230	418	–	183	235	192
Szeged	171	93	288	264	183	–	129	328
Szolnok	98	111	225	183	235	129	–	323
Zalaegerszeg	224	397	131	470	192	328	323	–

- Keressünk a táblázat alapján olyan városokat, amelyekre igaz, hogy a közöttük lévő útvonal további (felsorolt) városon halad át! (Hogyan látszik ez a tény a táblázatban?)
- Rajzoljunk az adatok alapján olyan gráfmodellt, amely Szeged és három másik (tetszőleges) nagyváros távolsági adatait tartalmazza!

8. E2

Az ábrán egy szabályos test, a dodekaéder látható. A dodekaéder 12 darab egybevágó szabályos ötszöglapból áll, és minden csúcsában három lap csatlakozik egymáshoz.

- Bár nem látjuk a teljes dodekaédert, próbáljuk meghatározni, hogy hány csúcsa és éle lehet a testnek!
- Rajzoljuk meg a dodekaéder síkba kiterített hálózatát, és jellemezzük az így kapott gráfot!
- A dodekaéder csúcsai közötti kapcsolatok nem változnak, ha a test egyik lapjára a többi csúcsot úgy vetítjük rá, hogy az élek vetületei ne metsszék egymást. Próbáljuk megrajolni ezt az ún. *Schlegel-diagramot*! Mi jellemzi az így kapott gráfot?



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 346–350.

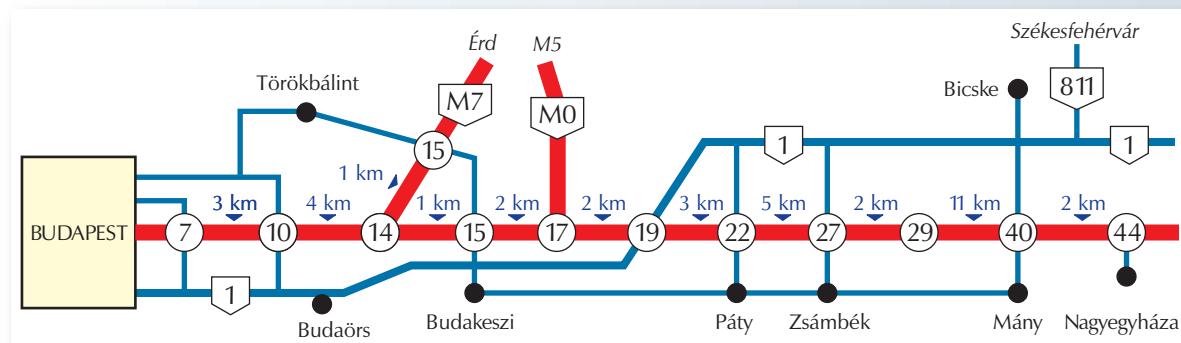
56. A GRÁFMODELL ALKALMAZÁSA

SZEMLÉLTETÉS GRÁFOKKAL

Gyakran alkalmazhatunk gráfokat adatok egyszerű, könnyen áttekinthető ábrázolására. Az alábbi példák a napi gyakorlat legkülönbözőbb területeiről származnak.

1. példa

A sematikus ábrán az M1-es autópálya Budapestről kivezető szakaszát látjuk. Hogy az útleágazások rendszere könnyen áttekinthető legyen, olyan gráfmodellt alkalmazunk, amelyben a gráf pontjainak az egyes útkereszteződések felelnek meg. (Az ábrán természetesen további információk is szerepeltethetők: a csomópontok távolsága, az utak azonosítószáma, valamint a célállomások.)



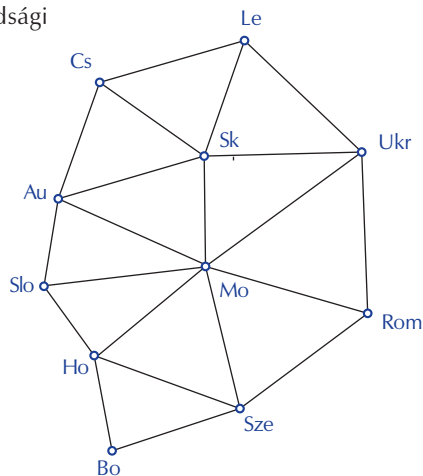
2. példa

A térképrészleten hazánk és a környező országok szerepelnek. Hogyan járunk el, ha arra keresünk választ, melyik országnak melyek a szárazföldi szomszédai? Ekkor érdemes például olyan gráfot választanunk, amelyben a gráf csúcsainak az egyes országok felelnek meg, és két csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő országoknak van közös szárazföldi határjuk. A szomszédsági kapcsolat így már könnyen leolvasható.

A modell alkalmazásakor csak az országok közötti kapcsolat volt lényeges, a kapcsolat módja – például hogy milyen hosszú a két ország közös határszakasza – nem.

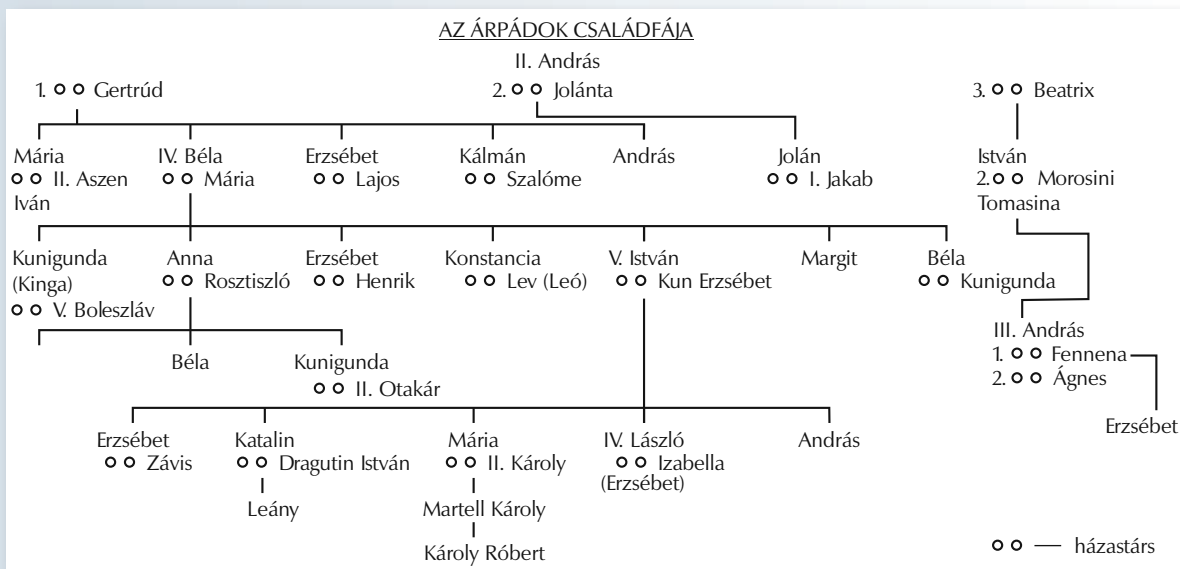


Szomszédsági gráf



3. példa

A történelemkönyvekben gyakran találkozunk ún. *családfával*, amelyen általában egy-egy híres személy leszármazottait, vagy valamely uralkodóház rokon kapcsolatban álló személyeit tüntetik fel. Az ábrán gráffal modelleztük az Árpád-ház egyik uralkodója, II. András leszármazottait*. Mik a gráf pontjai és élei?

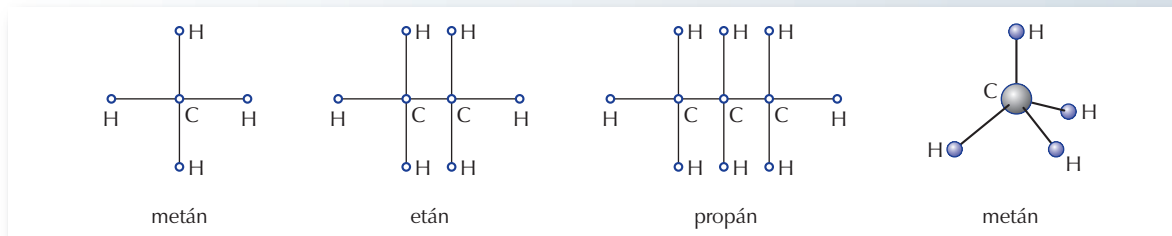


* Forrás: Pálincás Mihály: *Múltunk nagyjai*, Unió kiadó

4. példa

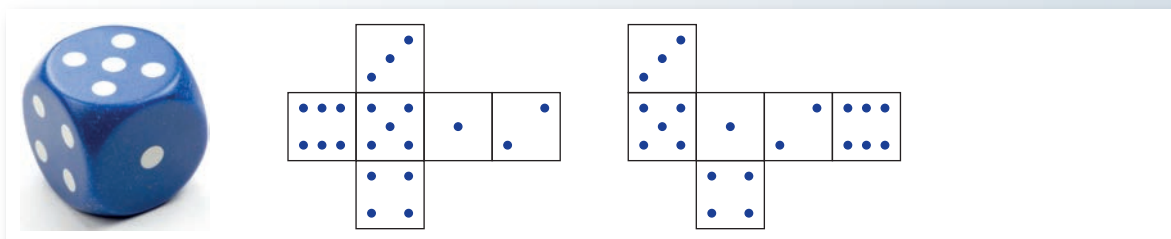
Egyszerűségük és áttekinthetőségük miatt gyakran ábrázoljuk gráfokkal az egyes molekulák szerkezetét. A paraffin molekulái n számú szénatomból és $2n + 2$ hidrogénatomból állnak, általános képletük C_nH_{2n+2} . Az ábrán az $n = 1, 2$ és 3 értékekhez tartozó molekuláris modellek láthatók. (Emlékeztetőül: a hidrogén 1, a szén 4 vegyértékű elem.)

Gráfnak tekinthető például a metán térbeli modellje is.

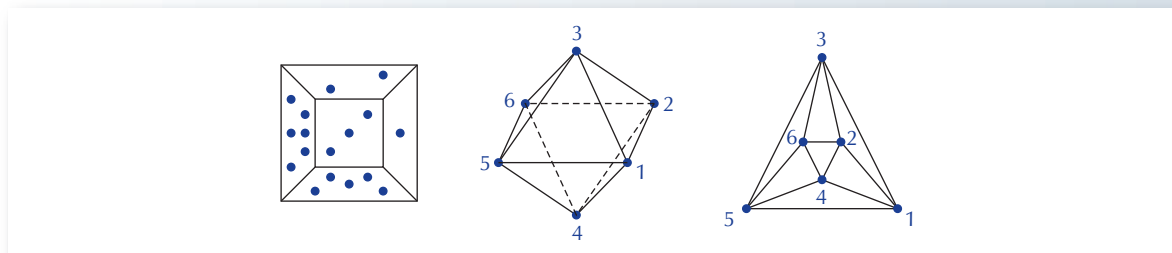


5. példa

A térbeli testek hálóját többféleképpen is megrajzolhatjuk. Az ábrán egy dobókocka két hálója látható.



Más szemléltetési módot is választhatunk. Az első ábrán a kocka alaplapjára vetítettük a lapon kívüli négy csúcst. A második (térbeli) és harmadik ábrán pedig olyan gráfot láthatunk, amelynek csúcsai a dobókocka lapjai; és két csúcst akkor kötünk össze éllel a gráfban, ha a megfelelő kockalapok élben szomszédosak.



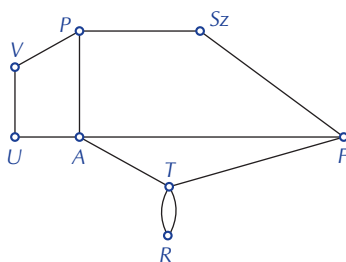
6. példa

A térképrészleten a Tihanyi-félsziget és a Balaton-felvidék egy része látható. Ábrázoljuk a terület úthálózatát gráfmodellel!

Megoldás

Egy lehetséges gráf a következő (ebben a fontosabb útvonalakat a Tihanyi-révtől (R) ábrázoltuk, Balatonfüredet egyetlen F ponttá összehúzva).

A terület egy részét ábrázoltuk, a magasabbrendű útvonalakat kiemelve. A kapott gráf nem egyszerű: például a Tihanyi-révtől Tihanyba kétszeres él vezet.



A = Aszófó,
T = Tihany,
F = Balatonfüred,
R = Tihanyi-rév,
Sz = Balatonszőlős,
P = Pécsely,
V = Vászoly,
U = Balatonudvari.

GRÁFMODELL A FELADATMEGOLDÁS SORÁN

A gráfokat nem csak szemléltetésre használhatjuk. Gyakran előfordul, hogy a gráfmodell alkalmazása a feladatmegoldást is megkönnyíti.

7. példa

Egy jégkorongversenyen nyolc csapat (A, B, C, D, E, F, G, H) mindegyike sorsolásos alapon négy ellenféllel játszik. Minden mérkőzést eldöntenek; ha a rendes játékidő alatt döntetlen végeredmény születik, akkor a csapatok a győztes gólig játszanak. Néhány mérkőzés már lejátszott, ezek eredményét mutatja a táblázat. (Pl. az első sorban 5:2 azt jelenti, hogy A legyőzte B -t, ebben az arányban.)

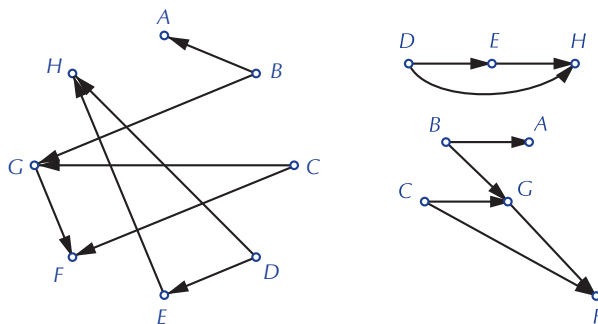
Rajzoljuk meg a verseny gráfját úgy, hogy pontok felelnek meg a csapatoknak, és két pontot akkor kötünk össze egy éllel, ha a két csapat már játszott egymással! Az élekre irányt illeszthetünk (pl. egy nyíllal), amely a győztes csapat felé mutat. (Így ún. **irányított gráfot** kapunk.)

Válaszoljuk meg a következő kérdéseket, figyelembe véve a táblázat és a gráf jellemzőit is!

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	–	5:2						
B	2:5	–					0:3	
C			–			1:2	1:4	
D				–	2:6			0:4
E				6:2	–			1:3
F			2:1			–	4:3	
G		3:0	4:1			3:4	–	
H				4:0	3:1			–

- Melyik csapat játszott a legtöbb, illetve a legkevesebb mérkőzést?
- Melyik csapatnak van a legtöbb, illetve a legkevesebb győzelme?
- Melyik csapat szerezte a legtöbb gólt? Melyik csapatnak legnagyobb a mérkőzésenként szerzett gól-átlaga?
- Az eddigi mérkőzések alapján vajon megállapítható a csapatok közötti (esetleg fennálló) egyértelmű erőssorrend? (Ekkor a jobbik csapat mindig legyőzi a gyengébbet.)
- Ha a csapatok között egyértelmű az erőssorrend, akkor hány további mérkőzéssel dönthető el, hogy melyik csapat a legjobb?
- Hány mérkőzés van még hátra? (Minden csapat négy mérkőzést játszik.)

Megoldás



- A legtöbb mérkőzést G , a legkevesebbet A játszotta eddig (3, illetve 1 mérkőzés). A gráfban G foka 3, A foka 1.
- Az F , G , H csapatok 2-2 győzelmet szereztek eddig (a gráfban ezekbe a pontokba 2-2 nyíl mutat), a B , C és D csapatok 0 győzelmet (ezekbe a pontokba nem mutat nyíl).
- A legtöbb gólt a G csapat szerezte, 10-et.
A góllátatok kiszámításához a táblázat alapján összesítjük a szerzett gólokat, és az összeget elosztjuk a mérkőzésszámmal. Az így kapott átlag az A csapatra 5, ez a legmagasabb.
- Az egyértelmű erőssorrend lehetséges, eddig nem történt „körbeverés”.
- Egyértelmű erőssorrend esetén A , F vagy H lehet a legerősebb csapat, mert ők még nem szenvedtek vereséget. Hogy hármuk közül ki a legjobb, azt két további mérkőzéssel dönthetjük el.
- Eddig 8 mérkőzés zajlott le. Minden csapat négy mérkőzést játszik, 8 csapat esetén ez $8 \cdot 4 = 32$ mérkőzést jelentene. De így minden mérkőzést kétszer számolnánk. (A dupla számolás a táblázatban is látszik: minden mérkőzés kétszer szerepel, a megfelelő két csapat sorában.) Az összes lejátszandó mérkőzés száma tehát $32 : 2 = 16$, így még $16 - 8 = 8$ mérkőzés van hátra.

Megjegyzés

Ha a döntetlen végeredmény is lehetséges, akkor ezt általában kétirányú nyíllal ábrázolják a gráfban. (Ekkor a két pontot összekötő vonal mindkét végén van nyíl.)

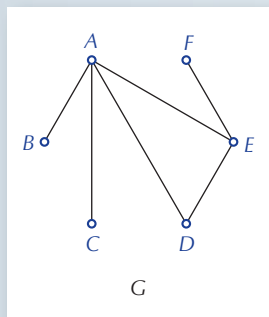
Írányított gráfot például a családfák készítésekor is alkalmazhatunk.



8. példa

Egy 6 fős társaságban az ismeretségek száma 4, 3, 2, 1, 1, 1. Szemléltessük az ismeretségeket egy gráffal! Hány megoldás lehetséges?

Megoldás

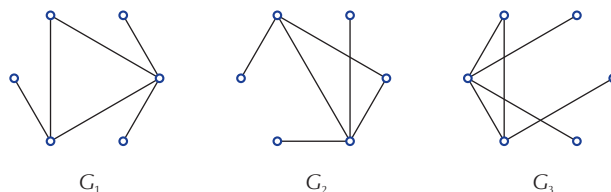


Jelölje az embereknek megfelelő pontokat rendre A, B, C, D, E, F , s tegyük fel, hogy A -nak van 4 ismerőse. A gráfban ezért összekötjük A -t B -vel, C -vel, D -vel és E -vel. Mivel a feltételek szerint F -nek is van ismerőse, kössük össze F -et például E -vel. Végül, mivel a gráfban van egy harmadfokú pont is, E -t kell összekötnünk például D -vel. Az eredmény a G gráf (ábra).

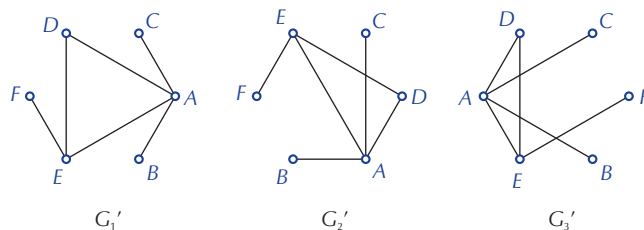
Vajon hány megoldás van?

Megtehetjük, hogy az utolsó lépésben E -t D helyett például B -vel kötjük össze; vagy korábban F -et nem E -vel, hanem például C -vel kötjük össze; vagy az első lépésben, amikor az A csúsból kiinduló éleket behúzzuk, akkor nem az F pontot hagyjuk ki, hanem B, C, D, E valamelyikét. (De az is lehet, hogy nem A -nak van 4 ismerőse, hanem például B -nek.)

Néhány lehetséges megoldás:



Azonban ezek a gráfok *nem különböznek lényegesen*. Mindegyik gráf csúcsait betűzhetjük úgy, hogy benne pontosan ugyanazok a pontok legyenek összekötve, mint G -ben:



Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így kapott G_1', G_2', G_3' gráfokban bármely két kiválasztott csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha azokat G -ben is összekötöttük.

További próbálkozással sem sikerül G -től lényegesen különböző gráfot előállítanunk.

Matematikai szempontból általában azt vizsgáljuk, hogy egy adott gráfban két pont között van-e kapcsolat, azaz a két pont össze van-e kötve. Ebben az értelemben a G_1, G_2 és G_3 gráfok *megegyeznek* G -vel, hiszen azonos kapcsolatokat fejeznek ki. Idegen szóval azt mondjuk, hogy a G, G_1, G_2 és G_3 gráfok *izomorfak*.

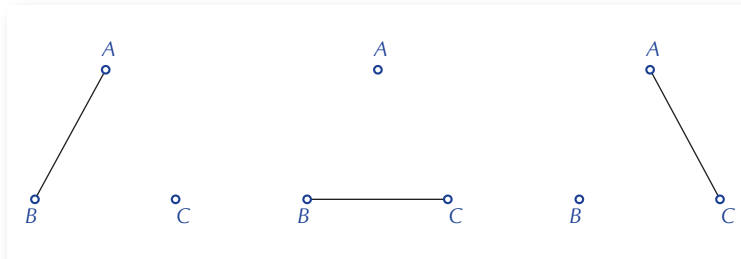
Definíció

Emelt szint

Két gráfot **izomorf**nak nevezünk, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy az egyik gráf bármely két kiválasztott pontja között akkor és csak akkor van él, ha a másik gráf két megfelelő pontját is összekötöttük.

Megjegyzés

Előfordulhat, hogy a modellalkotás során az izomorf gráfokat különbözőknek tekintjük. Ha például tudjuk, hogy három személy (A, B, C) között egy ismeretség van, akkor az ábra gráfjai izomorfak, de más modellt határoznak meg. (Nem mindegy, hogy a három személy közül melyik kettő ismeri egymást.)



9. példa

Hány 4 pontú, 3 élű egyszerű gráf van? (Az izomorf gráfokat nem tekintjük különbözőknek.)

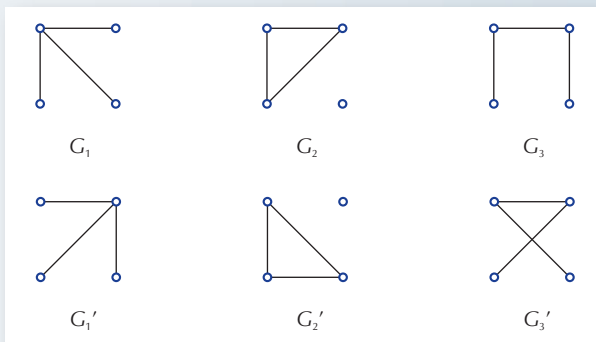
Megoldás

Az egyes pontok lehetséges fokszámai szerint számoljuk össze a gráfokat.

Ha a gráfban van harmadfokú pont, akkor a három él adott, egyetlen megfelelő G_1 gráf van.

Ha a gráfban nincs harmadfokú pont, akkor lehet három másodfokú (G_2 gráf) vagy két másodfokú pont (G_3 gráf).

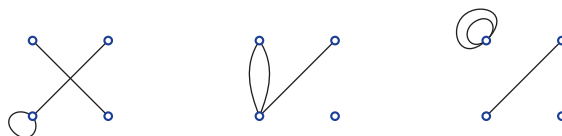
Több megoldás nincs. Például a G_1', G_2', G_3' gráfok izomorfak G_1 -gyel, G_2 -vel, illetve G_3 -mal.



Megjegyzések

Ha nem csak egyszerű gráfokat keresünk, akkor lényegesen több megoldás van, hiszen ekkor a gráfban lehetnek többszörös élek és hurokélek is. Néhány példa 4 pontú, 3 élű nem egyszerű gráfokra:

Emelt szint



Ismét hangsúlyozzuk, hogy a megoldás folyamán csak az egyes pontok közötti kapcsolatokat vizsgáltuk, magukat a pontokat nem különböztettük meg egymástól. A G_1 gráfban például mindegy volt, hogy melyik

pont harmadfokú. Előfordulhat azonban, hogy a gráf csúcsait megkülönböztetjük. Ekkor azt mondjuk, hogy a gráf csúcsai jelöltek (számozottak vagy betűzöttek). Például ilyen feladattal találkozunk, ha négy konkrét személy, A , B , C és D között áll fenn a három ismeretség. Ekkor számít, hogy a G_1 típusú gráfban melyik az a személy, akinek három ismerőse van; ilyen gráf tehát 4 darab van. G_2 típusú gráf is 4 van (a 4 személy bármelyike maradhat ismerős nélkül). Végül a G_3 típusú gráf 12-féleképpen állhat elő: a másodfokú pont-

totkat $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen választhatjuk ki (például AB), és minden esetben 2-féle további összekötés lehetséges (AC és BD , illetve AD és BC). Összesen tehát $2 \cdot 4 + 12 = 20$ megoldás van a jelölt csúcsú gráfok esetén.

(Egy másik gondolat: a teljes gráf hat éléből hármat $\binom{6}{3} = 20$ -féleképpen választhatunk ki.)

Fogalom
izomorf gráfok.

FELADATOK

1. K1

Az 1. példához hasonlóan szemléltessük a Duna-menti országokat egy gráffal! (A modellben az országoknak pontok felelnek meg; és egy országot akkor csatlakoztatunk a „Dunához”, ha a folyó érinti az országot.)

2. K1

Ábrázoljuk az 1-től 10-ig terjedő számokat olyan irányított gráffal, amelyben a gráf pontjainak az egyes számok felelnek meg, és akkor húzunk két pont között irányított élt, ha az egyik szám osztója a másiknak. (A nyíl a többszörös felé mutasson; és ne feledkezzünk meg a nem valódi osztókról sem!) Hány osztó-többszörös párt találunk? (Két különböző szám osztó-többszörös párt alkot, ha egyik szám a másiknak osztója.)

3. E1

- Hány ötpontú, háromélű egyszerű gráf van?
- Több vagy kevesebb ennél az ötpontú, háromélű, nem egyszerű gráfok száma?
- Egy ötfős társaság tagjait jelöljük A , B , C , D , E betűkkel. Hányféleképpen fordulhat elő három ismeretség a társaságban, ha egy-egy ismeretségnél az is számít, hogy melyik két személy ismeri egymást? (Tehát például az AB ismeretség nem ugyanaz, mint a CD ismeretség.)

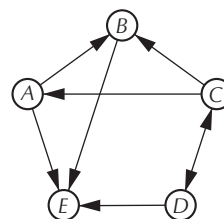
4. K1

- Lehet-e egy öttagú társaságban az embereknek rendre 4, 2, 2, 2, 0 ismerősük?
- E1**
 - Lehet-e egy ötpontú gráf pontjainak foka rendre 4, 2, 2, 2, 0?

5. K2

(Próbaérettségi feladat alapján, középszint, 2003.) Egy iskolai bajnokságban 5 csapat körmérkőzést játszik. (Mindenki mindenkivel egyszer mérkőzik meg.) Az ábra az eddig lejátszott mérkőzéseket mutatja, a nyíl mindig a győztes felé mutat. Döntetlen esetén az összekötő vonal mindkét végén nyíl van. A csapat győzelem esetén 2 pontot, döntetlen esetén 1 pontot kap, vereség esetén pedig nem kap pontot.

- Kinek hány pontja van ebben a pillanatban?
- Hány mérkőzés van még hátra?

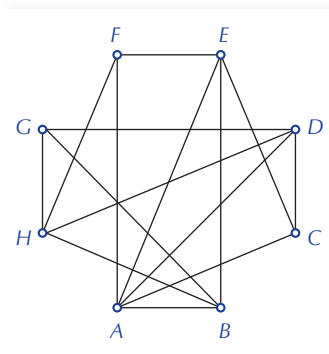


6. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2021.) Egy nyolccsapatos jégkorong-bajnokságban minden csapat minden másikkal egyszer mérkőzik meg. Az ábrán látható gráf az eddig lejátszott mérkőzéseket szemlélteti. A pontok a csapatokat jelképezik, és két pont között pontosan akkor van él, ha a két csapat már játszott egymással.

A bajnokságból 5 fordulót már megrendeztek, ám néhány mérkőzés elmaradt. (Egy fordulóban – ha nincs elmaradó mérkőzés – mindegyik csapat egy mérkőzést játszik.)

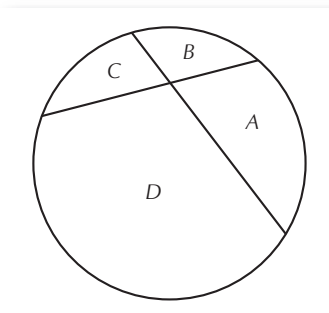
- Adja meg három olyan csapat betűjelét, melyek közül bármely kettő már lejátszotta az egymás közötti mérkőzését!
- Hány mérkőzés maradt el az első 5 fordulóban?



7. K2

Mint a leckékben láttuk, a színezési feladatok gyakran átfogalmazhatók térképszínezési, illetve gráfelméleti problémákká. Ilyen a következő feladat is.

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2021.) Az alábbi körlap négy tartományát szeretnénk egy-egy színnel kiszínezni úgy, hogy szomszédos tartományok ne legyenek azonos színűek. (Például az A-val jelölt tartomány szomszédos B-vel és D-vel, de nem szomszédos C-vel.) A színezéshez a piros, sárga, kék és zöld színek állnak rendelkezésünkre. Hányféleképpen végezhetjük el a színezést, ha legalább három színt fel kell használnunk?



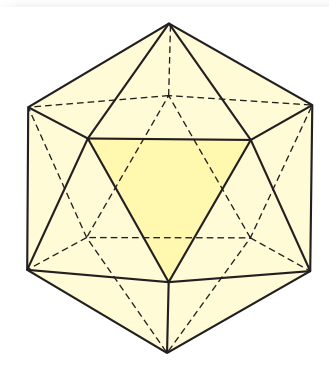
8. E2

- Hány lényegesen különböző síkba kiterített kockaháló van? (Két hálót nem tekintünk különbözőnek, ha egybevágósági transzformációval fedésbe hozhatók.)
- Egy kocka nyolc csúcsából ötöt kékre, hármat pirosra színeztünk. Van-e olyan síkba kiterített hálója a kockának, amelyben több piros pont van, mint kék?

9. E2

Az ábrán az ikozaéder képe látható. Ennek a szabályos testnek 20 darab egybevágó szabályos háromszöglapja van, és minden csúcsában öt lap találkozik.

- Hány csúcsa és éle van a testnek?
- Keressük meg az interneten, vagy rajzoljuk meg az ikozaéder síkba kiterített hálóját, és jellemezzük az így kapott gráfot!
- Keressük meg az interneten az ikozaéder Schlegel-diagramját!



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 351–372.

57. A GRÁFOK JELLEMZŐI

1. példa

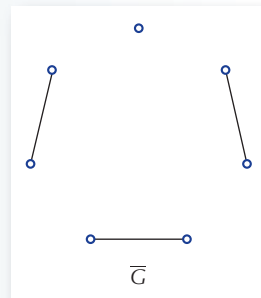
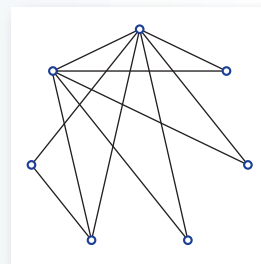
András születésnapjára hét vendég érkezett. A házigazda mindegyiküktől megkérdezte, hogy a többi vendég közül hányat ismer korábbról. (Az ismeretség kölcsönös.) Lehetséges-e, hogy a következő válaszokat kapta?

- a) 6, 5, 3, 2, 2, 2, 2;
- b) 6, 5, 4, 3, 2, 2, 0;
- c) 6, 6, 5, 4, 2, 2, 1;
- d) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5.
- e) Lehetséges-e, hogy mindenki ugyanannyi vendéget ismer? (Milyen lehetőségek vannak?)
- f) Lehetséges-e, hogy mindenki páratlan számú vendéget ismer?
- g) Lehetséges-e, hogy mindenki különböző számú vendéget ismer?
- h) Legfeljebb hány ismeretség lehet a hét vendég között?

Megoldás

- a) Egy megoldás látható az ábrán.
- b) Ez nem lehetséges, valaki rosszul számolt. Ugyanis ha az egyik vendég 6 másikat ismer, akkor *mindenkit* ismer – de ekkor nem lehet 0 ismeretséggel rendelkező vendég. (A 6 és 0 ismerős egyszerre nem fordulhat elő.)
- c) Ez az eset sem lehetséges. Ha a meghívottak közül ketten ismernek 6-6 vendéget, akkor őket mindenki más ismeri. Ezért legalább 2 ismerőse mindenkinek van, 1 ismeretséggű személy nem fordulhat elő.
- d) Gráfelméleti értelemben az a kérdés, hogy van-e olyan 7 pontú egyszerű G gráf, amelyben minden pont foka 5. Lényegesen egyszerűbbé válik a feladat, ha a G gráf helyett azt a $\overline{G}$ kiegészítő gráfot vizsgáljuk, amelyben pont fordítva járunk el: két pontot akkor kötünk össze éllel, ha a pontok G -ben nem voltak összekötve. (És ha két pontot G -ben összekötöttünk, akkor $\overline{G}$ -ben nem húzunk közöttük élt.) Ebben a $\overline{G}$ gráfban minden pont foka 1, tehát az eredeti kérdést átfogalmazhatjuk: Van-e olyan 7 pontú egyszerű $\overline{G}$ gráf, amelyben minden pont foka 1? (Ha G létezik, akkor $\overline{G}$ is.)

Azt már könnyű észrevenni, hogy ilyen $\overline{G}$ gráf nem létezik, mert három él behúzása után elakadunk (ábra). Tehát ebben az esetben is tévedett valamelyik vendég.



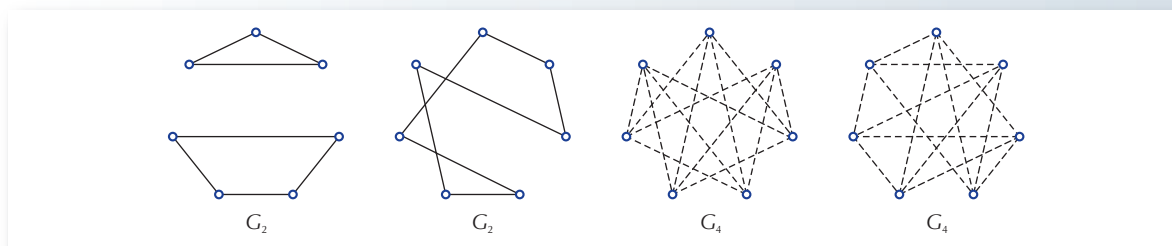
Emelt szint

Definíció

$\overline{G}$ -t a G gráf **komplementerének**, komplementer gráfjának vagy kiegészítő gráfjának nevezzük.

- e) Ha mindenki ugyanannyi vendéget ismer, akkor a gráfban minden pont fokszáma elvileg lehet 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6. A csupa 0 és 6 esetek nyilván valóban lehetségesek, ekkor senki sem ismer senkit, vagy mindenki mindenkit. Az előző d) kérdésnél láttuk, az nem lehetséges, hogy minden pont foka 5, illetve 1

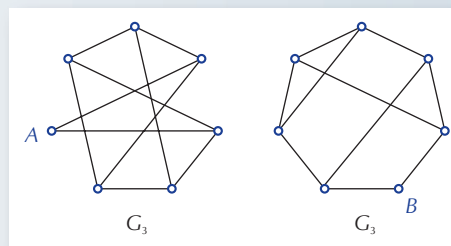
legyen. Minden pont foka 2 lehet, az ábrán két megoldás is látható. Ha pedig egy G gráfban minden pont foka 2, akkor a korábban látott $\overline{G}$ kiegészítő grájában minden pont foka 4 – vagyis csupa negyedfokú pontból is szerkeszthető gráf.



A harmadfokú pontokból álló gráfot viszont, akárhogy is próbálkozunk, nem sikerül megrajzolnunk. (Az ábrákon az A , illetve B pontok csak másodfokúak.) Mi lehet ennek az oka?

Mindkét ábrán 10 élt sikerült behúznunk, a foksámok értékei pedig rendre 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2. A foksámok összege 20, ami éppen a 10-nek, az élek számának a kétszerese. Ez nem véletlen.

Minden élnek két vége van. Amikor a foksámokat összeadtuk, minden élt kétszer számoltunk (a két végénél), ezért valóban az élek számának kétszeresét kellett kapnunk. (Ezzel a gondolattal már korábban is találkoztunk, amikor például meghatároztuk a sokszögek átlóinak a számát. De alkalmazhattuk volna a d) feladat megoldásánál is: a foksámok összegére $7 \cdot 5 = 35$ -öt kapunk, de ez nem lehetséges.)



Az indoklás során nem használtuk ki, hogy a gráf egyszerű, azaz az állítás többszörös élek és hurokélek esetén is érvényes marad. (Ezeknek az éleknek is két végpontjuk van.) Bármely gráf éleinek száma hasonló gondolatmenettel számítható ki, így megfogalmazhatjuk az ún. **fokszámtételt**:

Tétel

Bármely gráfban a **fokszámok összege** megegyezik az élek számának kétszeresével.

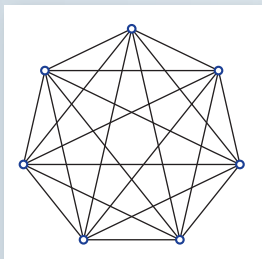
Ha tehát mindenki 3 vendéget ismerne, akkor a fokszámok összege $7 \cdot 3 = 21$ lenne. Ez nem lehetséges, hiszen 21 páratlan, így nem lehet az élek számának kétszerese. Megfogalmazhatjuk a fokszámtétel egyszerű következményét is:

Tétel

Bármely gráfban a fokszámok összege páros.

f) Indirekt okoskodunk. Ha mindenki páratlan számú vendéget ismerne, akkor a fokszámok S összege 7 páratlan szám összegeként állna elő, vagyis S páratlan lenne. Ez nem lehetséges, hiszen a fenti tételek miatt tudjuk, hogy a fokszámok összege mindig páros szám.

g) Ha mindenki különböző számú vendéget ismerne, akkor az ismerősök száma 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 lehetne csak. De láttuk az a) feladatban, hogy a 6 és a 0 ismeretségek kizárják egymást, így ez az eset nem fordulhat elő.



h) A legtöbb ismeretséget akkor kapjuk, ha mindenki mindenkit ismer. A gráfmodell lehet egy olyan hétszög, amelynek meghúztuk az összes oldalát és átlóját; ekkor teljes gráfot kapunk.

A kérdés tehát a hét pontú teljes gráf éleinek a száma. Hasonló problémával már találkoztunk, például a 54. lecke 1. a) példájában a televíziós vetélkedő egyik feladata a nyolc pontú teljes gráf éleinek számára kérdezett rá. Az ottani megoldási módszerek most is alkalmazhatók, de hivatkozhatunk a fokszámtételre is.

A gráfban minden pont foka 6, a foksámok összege $7 \cdot 6 = 42$. A fokszámtétel szerint az élek száma tehát $42 : 2 = 21$.

A gondolatmenetet általánosan is megfogalmazhatjuk:

Tétel

Az n pontú teljes gráfban az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. példa

Adjuk meg a G gráfot, ha

a) G egyszerű 5 pontú gráf, foksámok rendre 4, 2, 2, 2, 2;

b) G 3 pontú, 2 élű gráf (nem feltétlenül egyszerű).

Hány megoldás van? (Az izomorf gráfokat természetesen nem tekintjük különbözőeknek.)

Emelt szint

Megoldás

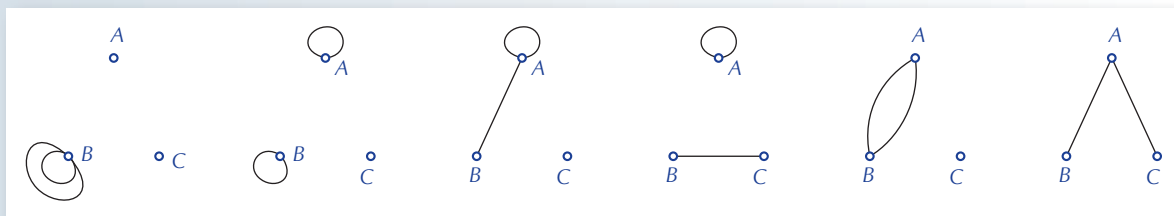
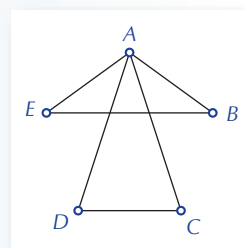
A foksámok általában nem határozzák meg egyértelműen a gráfot.

a) Az $ABCDE$ gráfban legyen A a negyedfokú pont, ezt összekötjük a B, C, D, E csúcsok mindegyikével. Ezen élektől eltekintve egyszerűbb feladathoz jutunk: a $BCDE$ részgráfban kell behúznunk két élt úgy, hogy minden pont foka 1 legyen. (Ekkor teljesülnek az eredeti feladat feltételei.) Az izomorfától eltekintve egyetlen lehetőség van, két-két csúcs összekötése.

b) A gráfban lehetnek hurokélek és többszörös élek is.

Ha a gráfban két hurokél van, akkor két lehetőség adódik: vagy mindkét hurok ugyanahhoz a ponthoz tartozik, vagy nem.

Ha a gráfban egy hurokél van, mondjuk az A pontban, akkor a másik él behúzására szintén két lehetőség van: vagy A -ból indul ki az él, vagy B -t és C -t köti össze.



Ha a gráfban egy kétszeres él van, akkor egy lehetőséget kapunk.
Végül ha a gráfban sem hurokél, sem kétszeres él nem fordul elő, akkor valamelyik pontja másodfokú, és így egy megoldás van.
Összesen tehát 6 megfelelő gráf van.

3. példa

Hány 4 pontú, egyszerű G gráf van? (Az izomorf gráfokat nem tekintjük különbözőeknek.)

Megoldás

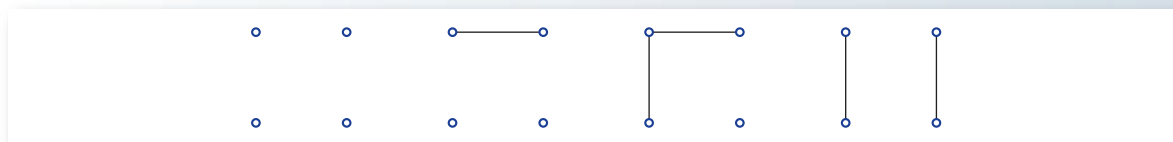
Számoljuk össze az eseteket az élek száma szerint haladva!

A 4 pontú teljes gráfnak $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ éle van. (Vagy: egy négyszög 4 oldala és 2 átlója.)

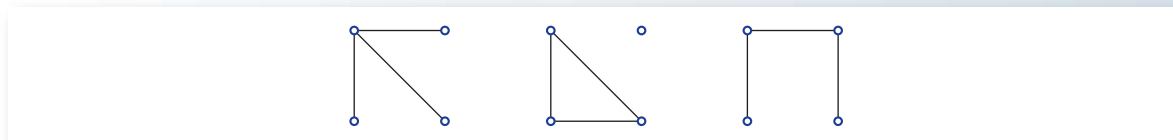
Ha a G gráfban 0 él van, akkor 1 megoldás van.

Ha a G gráfban 1 él van, akkor is 1 megoldást kapunk.

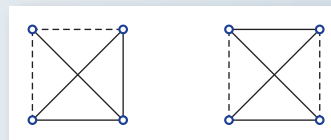
Ha G -ben 2 él van, akkor két lehetőség adódik: az éleknek van közös pontjuk, vagy nincs.



A 4 pontú, 3 élű egyszerű gráfok számát az előző lecke 9. példájában már meghatároztuk. Ha G -ben 3 él van, akkor 3 megoldást kapunk:



Ha G -ben 4 él van, akkor $\overline{G}$ -ben 2 él. (A $\overline{G}$ kiegészítő gráfot úgy kapjuk, hogy a G -ben hiányzó éleket rajzoljuk meg.) A G és $\overline{G}$ gráfok párba állíthatók, kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Pontosan annyi 4 élű gráf van tehát, mint amennyi 2 élű, azaz 2 darab.



Hasonlóan az 5 élű gráfok száma megegyezik az 1 élűekével, és a 6 élű gráfok száma ugyanannyi, mint a 0 élűek száma. (A teljes gráf kiegészítő grájában nincs él.)

Összesen tehát $1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$ darab 4 pontú, egyszerű gráf van.

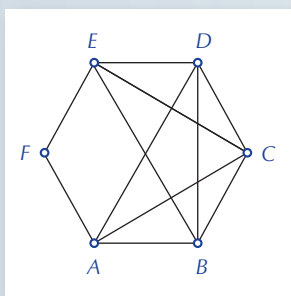
4. példa

Az $ABCDEF$ egyszerű gráf fokszámain $f(A)$, $f(B)$, ..., $f(F)$ módon jelöljük. A következőket tudjuk:

- $f(A) = f(B) = f(C) = f(D)$,
- $f(E)$ 2-vel nagyobb, mint $f(F)$,
- az élek száma 11.

Milyen értékeket vehet fel $f(F)$?

Megoldás



Jelölje $f(A)$ -t és $f(F)$ -et x , illetve y . Ekkor az A, B, C, D pontokból kiinduló élek száma $4x$, E -ből és F -ből pedig $y + 2 + y$, így a foksámok összege $4x + 2y + 2$. A foksámtétel miatt $4x + 2y + 2 = 22$, innen $2x + y = 10$. A lehetséges (y, x) számpárok: $(0, 5)$, $(2, 4)$, $(4, 3)$. (A gráf egyszerű, ezért $y \leq 5$.)

Ellenőriznünk kell még, hogy ezekre a számpárookra valóban létezik a megfelelő gráf.

$y = 4$ esetén $f(E) = 6$ lenne, ami nem lehetséges, így ez nem megoldás.

$y = 0$ szintén nem lehetséges, mert ekkor $x = 5$ lenne, és 0 és 5 fokú pont nem lehet egyszerre a gráfban.

Az $y = 2$, $x = 4$ eset lehetséges (a foksámok $4, 4, 4, 4, 4, 2$), egy megfelelő gráf látható az ábrán. Tehát $f(F)$, azaz F foksáma csak 2 lehet.

Fogalmak

kiegészítő
(komplementer)
gráf;
foksámtétel;
teljes gráf éleinek
száma.

FELADATOK

1. K1

Egy tollaslabdaversenyen a 16 játékost *kieséses rendszerben* összesorsolták. (Előre rögzítették, hogy az egyes mérkőzések győztese melyik nyertessel játszanak a második fordulóban és így tovább.)

- Készítsük el a sorsolás gráfját!
- Hány mérkőzést kell lejátszani, míg kiderül, melyik játékos a győztes?
- Hányféleképpen alakulhat a döntő párosítása?



2. K2

16 amatőr sakkjátékos ún. *kihívásos versenyt* rendez egymás között. Ekkor a játékszabályban úgy állapodnak meg, hogy a párosmérkőzések vesztese kiesik, már nem folytatja a játékot. Mivel a játékosoknak egyszerre soha nincs szabadidejük, rendszertelenül mérkőznek egymással.

- Legalább hány mérkőzést kell lejátszani ahhoz, hogy megtudják, ki a legjobb közülük? (Feltételezzük, hogy a játékosok között egyértelmű az erőssorrend, és az erősebb játékos mindig legyőzi a gyengébbet.)
- Hasonlítsuk össze a kieséses és kihívásos rendszerű versenyeket. Melyiket mikor érdemes alkalmazni? Szervezési szempontból mi az egyes rendszerek előnye?

3. K2

A labdarúgó világbajnokságokat 1978-ig a következő rendszerben bonyolították le. A részt vevő 16 csapatot először 4 darab 4-es csoportba sorsolták (például A, B, C, D), itt körmérkőzéses rendszerben meghatározták a csoportból továbbjutó első két helyezettet.

Ezután a nyolc továbbjutót két 4-es csoportba (például E és F) osztották úgy, hogy az alapszakasz csoportgyőztese és második helyezettjei azonos csoportba kerültek, és az egymás elleni eredményüket magukkal vitték. (Tehát például az E csoportba került az A és B csoportokból két-két csapat.)

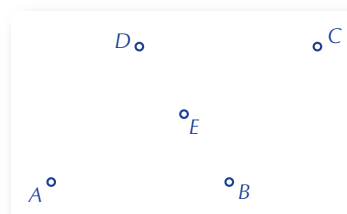
Miután az E és F csoportokban is mindenki játszott mindenkivel, az elődöntőben az E csoport 1. és az F 2. helyezettje, valamint az E 2. és az F 1. helyezettje mérkőzött meg egymással. A vesztesek játszottak a bronzéremért, a győztesek pedig a világbajnoki címért.

Hány mérkőzést játszottak a csapatok összesen, míg kiderült, melyikük a világbajnok?

4. K1

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2020.) Tekintsük az A , B , C , D és E pontokat egy gráf csúcsainak.

- Egészítse ki élekkel az ábrát úgy, hogy a kapott gráfban minden csúcs fokszáma 2 vagy 3 legyen!
- Lehet-e olyan 5 csúcsú gráfot rajzolni, amelyben minden csúcs fokszáma pontosan 3?



5. K2

Egy dobozban 2 piros, 1 sárga és 1 fehér, egyforma méretű golyó van. A négy golyót sorban kihúzzuk.

- Hányféleképpen történhet a húzás? (A piros golyókat nem különböztetjük meg.)
- Ábrázoljuk a lehetséges húzásokat gráfmodellel! (A gráf kezdőpontjából 3 él indul ki, attól függően, hogy először piros, sárga vagy fehér golyót húzunk; majd a további éleket is a húzott golyók színe alapján vesszük fel.) Hány elsőfokú pontja van az így kapott gráfnak?

6. K2

A 12. évfolyam A , B , C és D osztályai közös téli kirándulást terveznek. Az öt lehetséges helyszínről (a , b , c , d , e) mind a négy osztály szavaz. A szavazás úgy történik, hogy amelyik helyre legszívesebben kirándulna az osztály, annak 1-es „jegyet” adnak; a második és harmadik legkedveltebb helynek pedig 2-est, illetve 3-ast. (Az utolsó két helyszínt nem rangsorolják.) A szavazás eredménye látható a táblázaton.

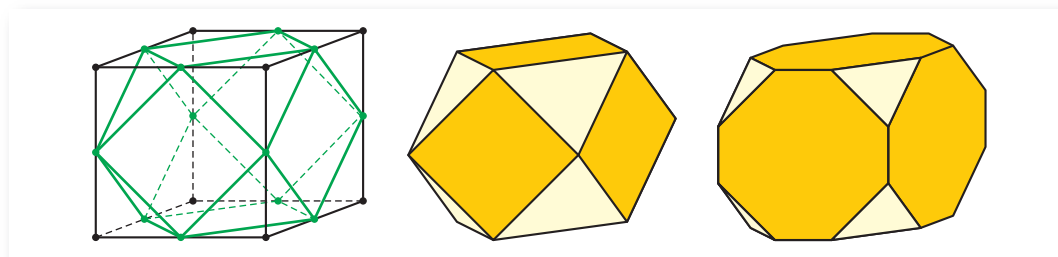
	a	b	c	d	e
A	2	1		3	
B	2		1		3
C	2			3	1
D		1	3		2

- Ábrázoljuk azt az ún. páros gráfot, amit akkor kapunk, ha az $\{A, B, C, D\}$ és az $\{a, b, c, d, e\}$ halmazok összetartozó elemeit kötjük össze egy-egy éllel!
- Az osztályok közötti találkozáson különféle érvelések hangzottak el, különféle helyszínek mellett. Mik lehetnek az érvek? Mi legyen a kirándulási helyszín?
- Felvetődött, hogy az új érvek figyelembevételével esetleg új szavazás legyen, és négy helyszínre is szavazhassanak. Többen attól tartottak, hogy esetleg akkor sem lesz döntő többsége egyik helyszínek sem. A kirándulás főszervezője viszont azt nyilatkozta, hogy ha minden osztály négy helyszínre szavaz, akkor biztosan lesz olyan helyszín, amelyiket mindegyik osztály megszavazott. Igaza volt?

7. E1

Ha egy kocka nyolc csúcsát lemetsszük a csúcsból kiinduló él felezőpontjain átmenő síkokkal, akkor egy ún. félig szabályos testet kapunk (a test neve kuboktaéder).

Egy másik lehetőség, ha az élnek a csúcsokhoz közelebbi harmadoló pontjain átmenő síkokkal metszük le a csúcsokat – az így kapott test a csonkított kocka. Hány csúcsa, éle és lapja van a két testnek? Próbáljuk megrajzolni a testek síkba kiterített hálóját is! (Ezek ún. félig szabályos arkhimédieszi testek. Érdekes böngészni az interneten, sok érdekesség található a testekről.)



8. K2

Bergengócia elnöke diákkorában mindig szerette a matematikát. Újításként azt találta ki, hogy az elavult személyi igazolvány és a személyi számok rendszere helyett minden lakos egy ún. személyi gráfot kapjon. Ez egy nyolcpontú $ABCDEFGH$ gráf lenne, melynek egyes éleit behúzzák, másokat nem, előre megállapított szabályok szerint. (Természetesen számít a gráf csúcsainak jelölése, tehát például egyélű gráf több is van: az AB , AC , ..., GH élek behúzása más-más gráfot jelöl.) A közigazgatási államtitkár nyugtalankodik, hogy kevés lesz a nyolcpontú gráf, ő a biztonság kedvéért 20 pontú gráfokat javasol. (Úgy gondolja, a számítógépes feldolgozás szempontjából lényegtelen a pontok száma.) Bergengócia lakossága 10 millió körül van. Mit javasolnánk az elnöknek?

9. E2

(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2007.) A Pécsre közlekedő vonat első osztályú fülkéjében hatan utaznak egy tudományos konferenciára. A vonat indulása után kiderül, hogy a hat ember között van kettő, aki mindenkit ismer az útítársak közül, a többiek pontosan négy-négy útítársat ismernek régebbiről. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

a) Szemléltesse gráffal az ismeretségeket!

b) Az ismerősök a fülkébe lépve kézfogással köszöntötték egymást. Hány kézfogás történt?

c) A hat útítárs két háromágyas szobában nyer elhelyezést. Hányféle szobabeosztást lehet készíteni a hat útítársnak, ha a szobák között nem teszünk különbséget?

10. K2

A bután szerkezeti képlete C_4H_{10} . Szemléltessük gráffal a bután molekuláris modelljét! (Hány megoldás van?)

11. K2

Hány pontból és élből áll a C_nH_{2n+2} paraffinmolekula szerkezeti gráfja?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 373–406.



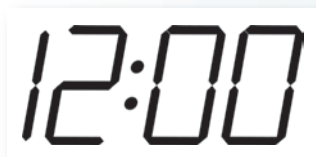
58. KOMBINATORIKAI ÉS GRÁFELMÉLETI ALKALMAZÁSOK

Kombinatorikai és gráfelméleti alkalmazásokkal a matematika több területén is találkozunk. Középiskolai tanulmányaink közül legismertebb talán a valószínűségek kombinatorikus kiszámítási módja, illetve a statisztikában a kombinatorikai módszerek alkalmazása. De egyfajta kombinatorikai alkalmazásnak tekinthető maga a gráfelmélet is, hiszen a gráfok segítségével geometriai úton szemléltethetünk kombinatorikus összefüggéseket.

A témakör matematikán kívüli alkalmazására is mutatunk néhány lehetőséget. Kombinatorikai módszerek használatára leggyakrabban a természettudományokban, az informatikában és a közgazdaságtanban találunk példákat.

Gyakorlati feladatokat a korábbi leckékben is bemutattunk, ezek feladatanyagának jelentős része alkalmazás jellegű. Ez nem véletlen: már maga a gráfmodell is legtöbbször valamilyen gyakorlati probléma szemléltetése, egyszerűsítése.

1. példa

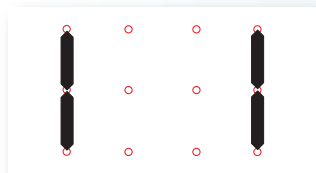


A számok digitális kijelzésére leggyakrabban egy hat pontból álló gráfot alkalmaznak. Ebben a pontok közötti hét él bármelyike a többi éltől függetlenül kigyújtható.

Ezen a módon összesen hányféle karaktert lehet megjeleníteni?



Megoldás

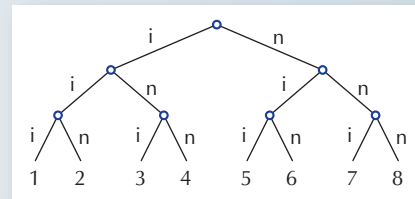


A hét él bármelyike kétféle értékű lehet: vagy világít, vagy nem. Az összes variáció száma $2^7 = 128$.

Persze, nem biztos, hogy a gyakorlatban mindegyik eset megkülönböztethető: ilyen például az ábrán látható két 1-es vagy l (kis „l”) vagy I (nagy „I”) betű.

2. példa

Tipikus kombinatorikai és gráfelméleti alkalmazás az ún. **döntési fa**. Az alábbi gráf egy barkochbajáték szemléltetése. Az egyik játékos az $\{1, 2, \dots, 8\}$ halmaz valamelyik elemére gondolt, a másik pedig megpróbálja eldöntendő kérdésekkel kitalálni a gondolt számot. A felezéses technikát alkalmazva az első kérdés lehet például: „A gondolt szám legfeljebb 4?” Ha a válasz „igen”, akkor a „legfeljebb 2” kérdéssel folytathatjuk; ha pedig a válasz „nem”, akkor a „legfeljebb 6” kérdéssel és így tovább.



Konkrét példa: Ha a gondolt szám a 3, akkor a három feltett kérdés és válasz: „a szám ≤ 4 ? (igen)”;
„ ≤ 2 ? (nem)”;
„ $= 4$? (nem)”.

A döntési fa és a 2-es számrendszer kapcsolatát szemlélteti ez a feladat.

3. példa

Egy filmművészeti „alkalmazás” következik. Az *Ég veled, barátom!* (1968, rendezte Jean Herman) című filmben két bankrablónak (Alain Delon és Charles Bronson) sikerül felvételeket szereznie a bank széfjének beállításáról. Azonban a felvételek hiányosak, a hét számjegyből csak három biztos: $\square\square 61\square\square 5$. A betörők kiszámolják, hogy mennyi időre lenne szükségük az összes lehetséges eset végigpróbálásához; majd egy hosszú ünnepi hétvégére, három napra bezáratják magukat az épületbe, és nekilátnak a próbálgatásnak...



Ha k számjegy hiányzik, akkor 10^k eset beállítására, valamint ugyanennyi nyitási próbára van szükség. Megbecsülhetjük, ehhez mennyi idő kell. $10^4 = 10\,000$ esetet kell végignézni; minden egyes alkalommal hét számbeállítást és a nyitási próbát kell elvégezni. Ha egy-egy próbálkozásra 10 másodpercet számítunk, akkor legrosszabb esetben is $10^5 \text{ (sec)} = \frac{10^5}{3600} \approx 27,8$ munkaóra van szükség. A rablók terve reálisnak mondható. (A filmben a hétjegyű nyitó kód a waterlooi csata 1815. június 18-i dátuma volt: 1861815.)

4. példa



A futball-labdákat szabályos öt- és hatszög alakú lapokból varrják úgy, hogy minden ötszöglaphoz hatszöglapok csatlakoznak, míg a hatszöglapokhoz felváltva három-három ötszög és hatszög csatlakozik. Vajon hány „lapja” van a focilabdának?

Tekinthetjük a futball-labda varrásait egy gráf éleinek, a varrások találkozásait pedig a gráf pontjainak is. Hány csúcsa és éle van ennek a gráfnak? (A számolás szempontjából nincs jelentősége, hogy a labda gömb alakú, és a varrások nem egyenes szakaszok, hanem görbék.)

Természetesen a kért mennyiségeket manuálisan, „puszta kézzel” is megszámolhatnánk, de könnyű hibázni a számolásban, s most egyébként is inkább a tanult kombinatorikai összeszámlálási módszereket alkalmazzuk. Segítségül felhasználhatjuk, hogy az ötszöglapok száma 12 (ez viszonylag könnyen meg-

számolható).

Megoldás

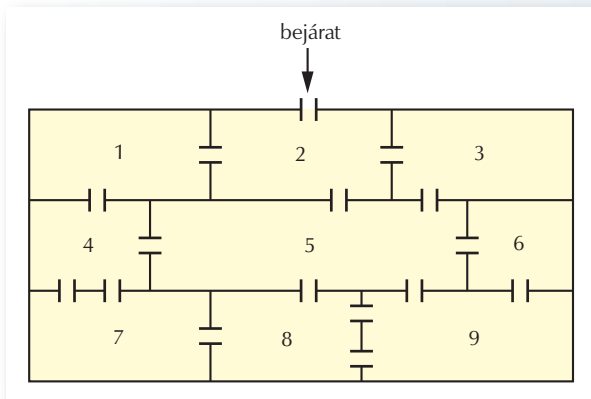
Minden ötszöglaphoz 5 hatszög csatlakozik, így $12 \cdot 5 = 60$ hatszöget kapunk. De minden hatszöget 3-szor számoltunk (hiszen mindegyikhez 3 ötszög illeszkedik), így a hatszöglapok száma $60 : 3 = 20$. A futball-labdának tehát $12 + 20 = 32$ lapja van.

Az élek számát hasonlóan határozhatjuk meg. A 12 ötszöglapot $12 \cdot 5 = 60$, a 20 hatszöget $20 \cdot 6 = 120$ él határolja, így összesen $60 + 120 = 180$ élt kapnánk. De minden élt 2-szer számoltunk (mert minden élre két lap illeszkedik), így az élek száma $180 : 2 = 90$.

Végül minden él 2 csúcsra illeszkedik, a 90 él tehát $90 \cdot 2 = 180$ csúcsot adna. De minden csúcsot 3-szor számoltunk (minden csúcsban ennyi él találkozik), így a csúcsok tényleges száma $180 : 3 = 60$.

5. példa

Régi 8. osztályos felvételi feladat volt a következő. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható.



Az uralkodó minden reggel bemegy a palotájába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a szobák között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben, és fogadja a látogatóit. Melyik a trónterem?

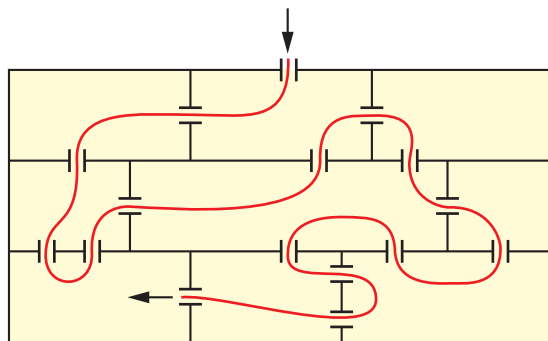
Megoldás

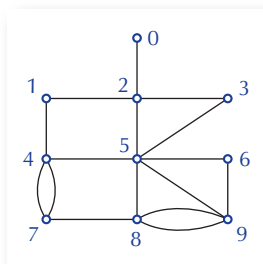
Észrevehetjük, hogy ha egy teremnek páros számú ajtaja van, akkor a séta nem végződik abban a teremben. Ugyanis ekkor minden „bejárat” ajtónak megvan a „kijárat” párja; ha a király valamelyik ajtón belép a terembe, akkor a terem el is tudja hagyni.

Az egyes termek ajtóinak száma:

terem	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ajtó	2	4	2	4	6	2	3	4	4

Egyedül a 7-es terem ajtóinak páratlan a száma, a séta csak ott végződik, csak ez lehet tehát a trónterem. Ebből még nem következik, hogy a király oda is juthat, de létezik ilyen bejárás, például:



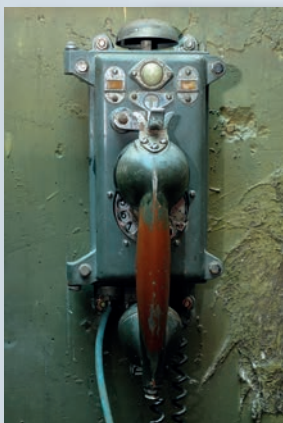


Megjegyzés

A palota bejárása tipikus gráfelméleti probléma. Ha az egyes termek a gráf pontjai, az egyes ajtók pedig a közöttük haladó éleknek felelnek meg, akkor az alaprajz a következő gráffal modellezhető (0 sorszámú ponttal jelöltük a palotán kívüli részt):

A feladat gráfelméleti megfogalmazása pedig így szólhat: bejárható-e az adott gráf élei úgy, hogy a 0 pontból indulunk, és minden élen pontosan egyszer haladunk át?

6. példa



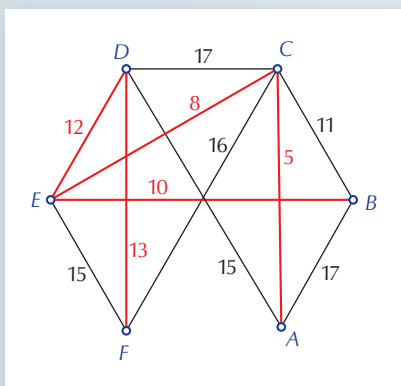
A második világháborúban a hadseregek számára rendkívül fontos volt, hogy az elosztási és szállítási feladatok költségeit minimalizálják. Komoly tervezési feladatot jelentett például, ha valamilyen termeket – élelmiszer, üzemanyag, hadászati felszerelések – több helyről több helyre kellett szállítani, különböző mennyiségekben, esetleg további megszorításokkal (időtényező, szállítási eszközök kapacitása). Új tudományág alakult ki, amely azóta is fejlődik. A gazdasági életben lépten-nyomon találkozhatunk a legkülönbözőbb logisztikai problémákkal, s ezek valamilyen formában általában a gráfelmélet közgazdaságtani alkalmazásai.

Egy nagyon egyszerű példa a következő.

Hat település között telefonhálózat lefektetését tervezik. A települések helyzetét és a közöttük lévő esetleges kabelfektetés összköltségeit az alábbi gráffal modellezhetjük, az országos hálózathoz az A település csatlakozik. (A költségek a különböző távolságok és domborzati viszonyok miatt nagyon eltérőek; eleve nem ábrázoltuk a megépíthetetlen vezetékeket.) A tervezési szempontok szerint minden települést be kell kötni a hálózatba, és a lehető leggazdaságosabban kell eljárni. Vagyis a cél az összköltség minimalizálása.

Mely telefonvonalakat fektessék le?

Megoldás



A vonalak kijelölésekor észrevehetjük, hogy a hat település összekötéséhez legalább öt szakasz lefektetésére van szükség. Az AC, CE és EB szakaszok költsége az összes él között a legalacsonyabb (5, 8 és 10 egység), ezek megvalósítását mindenféleképpen érdemes tervbe venni. A következő legalacsonyabb költségű szakaszt, BC-t viszont nem érdemes kijelölnünk, mert B és C között már van kapcsolat.

A két következő „olcsó” él, ED (12) és DF (13 egység) felvétele már megadja a keresett gráfot. Legolcsóbban tehát akkor végezhetjük el a munkát, ha ezt az öt szakaszt építjük ki; az összköltség ekkor: $5 + 8 + 10 + 12 + 13 = 48$ (egység).

Szerencsénk volt, az egyszerű feladatot viszonylag könnyen megoldhattuk. A valóságban a hasonló problémák sokkal bonyolultabbak, megoldásuk általában számítógépes segítséggel történik.

Gráfelméleti szempontból a feladat egy hatpontú, ún. **súlyozott gráf** éleinek kiválasztása volt. Az éleket úgy kellett kiválasztani, hogy a gráf összefüggő legyen (ezért volt szükség legalább öt élre), és az élek össz-súlya minimális legyen. A kapott öt él emiatt a gráf egy faváza. (Nem engedhettük meg a BC él felvételét, mert akkor a gráfban lett volna kör. A kör bármely élét elhagyva pontjai továbbra is összefüggő részgráfot alkotnak, tehát egy él felesleges a körben.)

7. példa

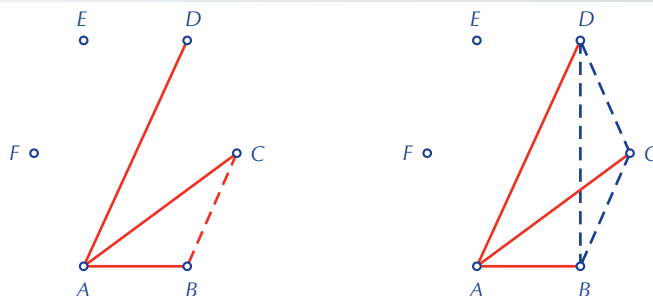
- Bizonyítsuk be, hogy egy hattagú társaságban kiválasztható 3 ember úgy, hogy vagy mind ismerik egymást, vagy egyikük sem ismeri a másikat! (Az ismeretség kölcsönös.)
- Igaz-e az állítás öttagú társaságban is?

Megoldás

- A feladat gráfelméleti jellegű, egy lehetséges átfogalmazása például a következő: Adott egy hatpontú egyszerű G gráf. Bizonyítsuk be, hogy vagy a G gráf, vagy a komplementer $\bar{G}$ gráfja tartalmaz háromszöget! (Ekkor két pontot éllel kötünk össze, ha a nekik megfelelő személyek ismerik egymást.) Egy másik átfogalmazás az élek színezésén alapul. Egy hatpontú teljes gráf minden élét kiszínezzük vagy pirosra, vagy kékre. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a gráfban van olyan háromszög, amelynek minden éle azonos színű!

A megoldást ez utóbbi alakra adjuk meg.

Az $ABCDEF$ teljes gráf A pontjából 5 él indul ki. Mivel ezeket két színnel színeztük, az egyik színből legalább 3 van közöttük; legyen ez a szín a piros. Az AB, AC, AD piros élek végpontjai ekkor kijelölik a $\{B, C, D\}$ gráfot.



Két eset lehetséges.

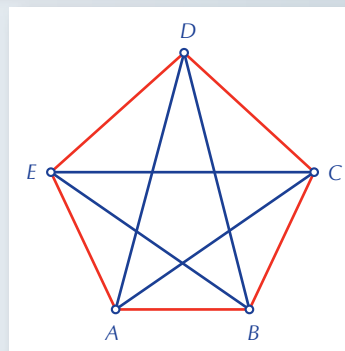
Ha a $\{B, C, D\}$ gráfban van piros él (pl. BC), akkor az ABC háromszög minden éle piros.

Ha a $\{B, C, D\}$ gráfban nincs piros él, akkor minden éle kék. Ekkor viszont a BCD háromszög minden éle kék.

Ezzel az állítást igazoltuk.

- Az állítás 5 pontra nem igaz, a színezéses modellben egy ellenpélda látható az ábrán.

(Minden pontból 2 piros és 2 kék él indul ki, ezek egy piros és egy kék (gráfelméleti) ötszöget határoznak meg.)



Fogalom
súlyozott gráf.

FELADATOK

1. K2

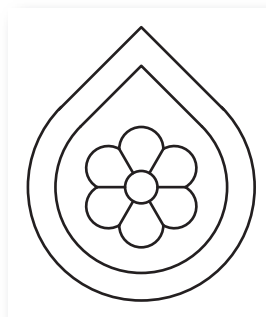
(Érettségi feladat alapján, közép szint, 2007.) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andrásen kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

- Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket!
- Hány mérkőzés van még hátra?
- Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez?

2. K2

(Érettségi feladat alapján, közép szint, 2019.) Az ábrán egy környezetvédő szervezet logójának ki nem színezett terve látható. A logó kilenc tartományát három színnel (sárga, kék és zöld) szeretnénk kiszínezni úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. (Két tartomány szomszédos, ha a határvonalainak van közös pontja. Egy-egy tartomány színezéséhez egy színt használhatunk.)

Hányféleképpen lehet a logót a feltételeknek megfelelően kiszínezni?



3. K2

Anna és Béla a következő feladaton gondolkodnak.

Feladat: Hányféleképpen állíthatunk fel egy számozott sakktáblára 4 darab világos bástyát úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

Anna gondolatmenete: Az első bástyát 64 mezőre tehetjük. A másodikat 49-re (kimarad egy sor és egy oszlop), hasonlóan a harmadikat 36, a negyediket pedig 25 mezőre.

Eredmény: $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 = 2\,822\,400$.

Béla gondolatmenete: Kiválasztunk négy sort és négy oszlopot, amik metszéspontjaiba a bástyák kerülnek. A négy sort $\binom{8}{4}$, a négy oszlopot szintén $\binom{8}{4}$ -féleképpen választhatjuk ki.

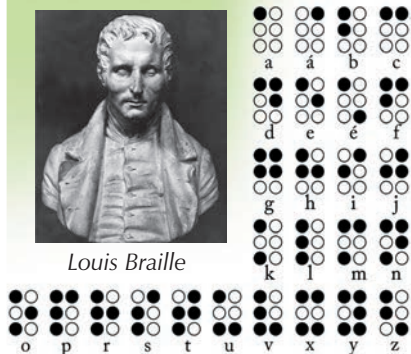
Eredmény: $\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{4} = 4900$.

A két eredmény különbözik. Mi a véleményünk a két gondolatmenetről?

4. K2



Louis Braille



1821-ben Louis Braille, a párizsi Vakok Intézetének látássérült tanára olyan dombornyomású írást fejlesztett ki, ami a vakok számára lehetővé tette az írást-olvasást. A Braille-ábécében a betűk és egyéb írásjelek 2×3 pontból álló téglalap alakban helyezkednek el. Bármelyik „rácspont” – a többitől függetlenül – lehet sima, vagy domború állapotú, s így tapintás útján különböztethetők meg az egyes téglalapfajták. Az ábrán a Braille-írás alaprendszere látható, de mind-egyik nemzet alkalmaz kis módosításokat, így minden nyelv saját Braille-írással rendelkezik.

A 2×3 -as elrendezés segítségével hány különböző jel hozható létre?

5. E1

Egy 4×4 -es rács kirakható-e

- 8 darab 5 egységnyi cénából;
- 5 darab 8 egységnyi cénából?

A cénszalakat elvágni nem lehet.

6. E1

Egy 12 dm hosszúságú drótdarabból egy 1 dm élű kocka élvázát kell elkészítenünk.

- Legfeljebb hány kockaélt tudunk elkészíteni úgy, hogy közben nem vágjuk el a drótot?
- Legkevesebb hány drótdarabból tudjuk elkészíteni a kocka élvázát? (Egy másik lehetséges kérdés: hányszor kell elvágnunk a drótot?)

7. E1

Egy téglalap alakú egyszintes lakásról a következőket tudjuk.

- Bármely két helyiség között legfeljebb egy ajtó van.
- Bármely helyiségből legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
- A lakásban összesen 12 ajtó van.
- A helyiségek téglalap alakúak.

Legalább hány helyiség van a lakásban?

8. K2

- Egy dobozban 12 golyó van, 6 piros és 6 kék. Két golyót egyszerre kihúzunk. Hány esetben lehet azonos színű és hány esetben ellentétes színű a két golyó?
- Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a golyókat visszatevéssel húzzuk ki! (Ekkor az első golyót kihúzzuk, a színét lejegyezzük, majd visszatesszük, és keverés után ismét húzunk. A két húzás eredményét hasonlítjuk össze.)
- András 6 fiúból és 6 lányból egy párt választ a sakkcsapatba. Ha véletlenszerűen választ, minek van nagyobb esélye: egyforma nemű vagy különböző nemű a páros?

Tudod-e?

Voltaire (1694–1778) (eredeti nevén François-Marie Arouet), a híres francia filozófus, regény- és drámaíró, a felvilágosodás egyik legnagyobb alakja, vagyona jelentős részét spekulációkkal szerezte.

A francia államkötvények a 18. század elején nem voltak népszerűek a lakosság körében, ezért állami lottót szerveztek a kötvényekre. A kötvénytulajdonosok lottószelvényt vásárolhattak, amik közül minden hónapban kisorsoltak egy nyertest. Voltaire barátja, Charles Marie de La Condamine matematikus észrevette, hogy a nyeremenylehetőségeket rosszul tervezték meg, és kiszámolta, hogyan lehetne nagy nyereményhez jutni. Néhány gazdagabb polgárt is rávettek, hogy finanszírozzák a sorsjegyek vásárlását, és apránként nagy mennyiségű szelvényt összegyűjtve, rendszeresen óriási nyereményhez jutottak.

A kormányzat végül rájött a turpisságra, bíróság elé is állították a tagokat, de végül felmentették őket, és a pénzt is megtarthatták.



Voltaire (1694–1778)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 464–482, 526–561.

IX. VALÓSZÍNŰSÉG- SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Ebben a fejezetben olyan problémák megoldásával foglalkozunk, mint minőség-ellenőrzés, közvélemény-kutatás, játékok elemzése, vagy a statisztika és a valószínűség-számítás kapcsolatának a feltárása.

59. BEVEZETÉS

Eddigi tanulmányaink során megismerkedtünk a valószínűségszámítás alapfogalmaival.

Véletlen kísérlet: olyan kísérlet, aminek a kimenetelét olyan sok tényező befolyásolja, hogy azok számbavétele szinte lehetetlen, vagy olyan hosszú ideig tartana, hogy az már nem érné meg számunkra.

Elemi esemény: a véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit nevezzük elemi eseményeknek.

Biztos esemény: olyan esemény, ami a kísérlet elvégzésekor mindig bekövetkezik (például az összes elemi események halmaza). Jele H .

Lehetetlen esemény: ami a kísérlet elvégzésekor biztosan nem következik be. jele: $\emptyset$.

Eseménytér: az összes elemi esemény halmaza.

Esemény: az eseménytér részhalmaza (az ábécé nagybetűivel jelöljük).

Az eseményekkel tudunk műveleteket végezni.

Két esemény összege:

Az $A + B$ esemény akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik.

Két esemény különbsége:

Az $A - B$ esemény akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik, de a B nem.

Két esemény szorzata:

Az AB esemény akkor következik be, ha az A és a B esemény is bekövetkezik.

Komplementer esemény:

Az $\bar{A}$ esemény akkor következik be, ha az A nem következik be.

Az A esemény **valószínűsége** $P(A)$ -val jelöljük és tudjuk, hogy $0 \leq P(A) \leq 1$. Két esemény egymást kizárja, ha a két esemény egyszerre nem következhet be, azaz szorzatuk a lehetetlen esemény.

Az egymást **kizáró események** összegének a valószínűsége az egyes események valószínűségének az összege, azaz $P(A + B) = P(A) + P(B)$, ha $AB = \emptyset$.

Abszolút gyakoriság

Ha n -szer elvégezzük a kísérletet és megszámloljuk, hogy hányszor következett be az A esemény, akkor megkapjuk az A esemény abszolút gyakoriságát, $k_A(n)$ -t.

Relatív gyakoriság

Ha kiszámítjuk, hogy a kísérletek hányadrésztében következik be az A esemény, akkor megkapjuk az A eseménynek erre a kísérletsorozatra vonatkozó relatív gyakoriságát ($r_{A(n)} = \frac{k_A(n)}{n}$, ha a kísérletet éppen n -szer végeztük el).

A $P(A)$ valószínűség az a szám, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik a kísérletek számának a növekedésekor (Ez nem azt jelenti, hogy a relatív gyakoriság tart a valószínűséghez, ha a kísérletek száma nő).

Klasszikus valószínűségi mező

Ha egy kísérlettel kapcsolatban ismerjük az elemi események számát, és feltételezhetjük, hogy azok bekövetkezésének valószínűsége megegyezik, akkor alkalmazhatjuk a klasszikus modellt. Bármely esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}. P(A) = \frac{|A|}{|H|}, \text{ ahol } |A| \text{-val jelöljük az } A \text{ eseményt alkotó elemei esemé-}$$

mények, $|H|$ -val pedig az eseményteret alkotó elemi események darabszámát.

A gyakorlatban felmerülő problémák esetén egyáltalán nem biztos, hogy az elemi események egyformán valószínűek, vagy hogy meg tudjuk számolni őket.



A Tőzsde épülete
New Yorkban (Wall Street)

60. FÜGGETLEN ESEMÉNYEK

FÜGGETLEN ESEMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGE

Vizsgáljuk meg a következő esetet!

1. példa

A gimnázium 11. évfolyamára 30 lány jár, akik közül 12 szőke és 10 kék szemű. A szőkek közül 8 kék szemű.

- a) A 30 lányból kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy kék szemű lányt választunk?
b) A szőke lányokból választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy kék szeműt választunk?

Megoldás

a) Feltételezzük, hogy mindenkit egyenlő valószínűséggel választunk ki. Ezután már a klasszikus modellt alkalmazhatjuk.

$$P(\text{kék szemű lányt választunk}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

$$b) P(\text{kék szemű lányt választunk, ha a szőkek közül választunk}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Látható, hogy a szőke haj és a kék szem előfordulása nem független egymástól. A szőke hajú lányok között a kék szeműek választásának valószínűsége kétszer akkora, mint az egész osztályban.

Két esemény függetlensége azt jelenti, hogy az egyik esemény bekövetkezése nem teszi sem valószínűbbé, sem valószínűtlenebbé a másik esemény bekövetkezését. Egyik esemény sem befolyásolja a másik esemény valószínűségét.

Az előző példában a szőke haj kétszeresére növelte a kék szem valószínűségét.

2. példa

Egy 32 lapos magyar kártyából találomra kiválasztunk egy lapot. Vizsgáljuk meg a következő két esemény valószínűségét: $A = \{\text{ászt választunk}\}$, $B = \{\text{pirosat választunk}\}$! Számítsuk ki az A esemény valószínűségét abban az esetben, ha csak a pirosakból választunk, illetve a B esemény valószínűségét, ha csak az ászokból választunk! Mit tapasztalunk, hogyan változik az események valószínűsége?

Megoldás

Feltételezzük, hogy mindegyik lapot egyenlő valószínűséggel választjuk ki. A harminckét lap között négy ász van, ez az jelenti, hogy

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$



Mivel a nyolc piros lap között egy ász van, ezért $P(A, \text{ ha csak a pirosakból választunk}) = \frac{1}{8}$. Az A esemény valószínűségét nem befolyásolja a B .

$$P(B) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}. \text{ Mivel a pakliban összesen négy ász van, ezért}$$

$P(B, \text{ ha csak az ászokból választunk}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{1}{4}$. Tehát a B esemény bekövetkezését sem befolyásolja az A esemény.

Definíció

Események függetlensége klasszikus valószínűségi mezőben. Legyenek az A és B események a H eseménytérre értelmezve, az elemi események valószínűsége legyen egyenlő.

$$\text{Ha } P(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{\frac{|AB|}{|H|}}{\frac{|B|}{|H|}} = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ azaz, ha } P(AB) = P(A)P(B), \text{ akkor az } A \text{ esemény független}$$

a B -től. Vagyis az egész eseménytérre ugyanolyan arányban fordulnak elő az A esemény elemei, mint a B -hez tartozó elemek között.

3. példa

Két dobókockát feldobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható kilencel?

Megoldás

Első megoldás

A két dobókockát megkülönböztetve az összes elemi esemény száma $6 \cdot 6 = 36$. Feltételezhetjük, hogy ezek mindegyike egyformán valószínű, tehát alkalmazhatjuk a klasszikus modellt.

A kedvező esetek a $\{3;3\}$, $\{6;3\}$, $\{3;6\}$, $\{6;6\}$; ezek száma 4.

$A = \{\text{a dobott számok szorzata osztható kilencel}\}$,

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Második megoldás

Itt is egy egyszerű, ám annál fontosabb feltételezéssel élünk. Azt feltételezzük, hogy a két kockával dobott szám egymástól független, vagyis semmiféle hatásuk nincs egymásra.

Legyen

$B = \{\text{az egyes számú kockával, hárommal osztható számot dobok}\}$,

$C = \{\text{a kettes számú kockával, hárommal osztható számot dobok}\}$.

Ahhoz, hogy a két kockán dobott számok szorzata osztható legyen kilencel, mindkét dobott számnak oszthatónak kell lennie hárommal, hiszen nincs a kockán kilencel osztható szám.

Tehát $A = BC$, vagyis az A esemény előáll két esemény szorzataként.

A definícióban tett megjegyzés alapján a **független események szorzatának** valószínűsége az egyes események valószínűségének szorzata.

$$P(A) = P(BC) = P(B)P(C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

A két megoldás ugyanazt a végeredményt adja, ez is azt bizonyítja, hogy a két esemény valóban független.

Két kocka egymás utáni feldobása független egymástól, mert egyik dobás eredménye nem befolyásolja a másik dobás eredményét. Ezt az intuíciónkat erősítette meg az előző feladat.

4. példa

Egy kockát feldobva két eseményt figyelünk:

$A = \{\text{páros számot dobunk}\}$,

$B = \{\text{hárommal osztható számot dobunk}\}$.

Vizsgáljuk meg a két eseményt függetlenség szempontjából!



Megoldás

Az A esemény független a B -től. Az A esemény valószínűsége $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ha csak annyit tudok, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor sem változik az A esemény bekövetkezésének valószínűsége. Ha tudom, hogy a B bekövetkezett, ez csak annyit jelent, hogy vagy hármat, vagy hatost dobtunk. Számunkra kedvező a hatos. Mivel mindkét elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége megegyezik, ezért $P(A) = \frac{1}{2}$ továbbra is.

A B esemény független az A -tól. A B esemény valószínűsége $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ha csak annyit tudok, hogy az A esemény bekövetkezett, akkor sem változik a B esemény bekövetkezésének valószínűsége. Ha tudom, hogy az A bekövetkezett, ez csak annyit jelent, hogy kettést, négyest, vagy hatost dobtunk. Számunkra kedvező a hatos. Mivel mindhárom elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége megegyezik, ezért $P(B) = \frac{1}{3}$ továbbra is.

Ez is jól mutatja, hogy a **függetlenség szimmetrikus tulajdonság**.

Ha az A esemény független a B -től, akkor a B is független az A -tól. Ez nemcsak ebben a konkrét esetben igaz, hanem bármely két független esemény esetén.

Ha az A esemény független B -től, akkor az azt jelenti, hogy $\frac{|A|}{|H|} = \frac{|AB|}{|B|}$. Ha ezt az egyenlőséget beszorozzuk $\frac{|B|}{|A|}$ -val, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{|B|}{|H|} = \frac{|AB|}{|A|}$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy B független A -tól.

Mivel az átalakításunk ekvivalens volt, ezért a két állítás is ekvivalens.

Az előző megállapításunkból már könnyen levezethetjük a számunkra legfontosabb összefüggést klaszikus valószínűségi mező esetén.

$$\frac{|AB|}{|B|} = \frac{|A|}{|H|} \quad / \cdot \frac{|B|}{|H|}$$

$$\frac{|AB|}{|H|} = \frac{|A|}{|H|} \cdot \frac{|B|}{|H|}$$

$$P(AB) = \frac{|AB|}{|H|} = \frac{|A|}{|H|} \cdot \frac{|B|}{|H|} = P(A) \cdot P(B).$$

Egymástól **független események szorzatának a valószínűsége** a valószínűségek szorzata:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Az állítás megfordítása is igaz, mert a levezetésünkben csak ekvivalens átalakítást végeztünk. Tehát, ha két esemény szorzatának a valószínűsége a valószínűségek szorzata, akkor a két esemény független egymástól. Akár ez is lehetne a definíció.

Ellentett események tönkretehetetlenség

Tétel

Bizonyítsuk be, ha A és B független események, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is független egymástól.

Bizonyítás

A függetlenség definíciója ekvivalens azzal a tulajdonsággal, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$. Ezek alapján elég bizonyítani, $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$. Felhasználjuk a de Morgan azonosságot, az ellentett esemény valószínűségére vonatkozó tételünket, azt hogy eredetileg függetlenek az A és B események.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A)P(B)) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Éppen ezt akartuk bizonyítani.

Honnan tudhatjuk, hogy két esemény független egymástól?

- I. A definíció alapján megvizsgáljuk, hogy az A esemény bekövetkezése nem befolyásolja a B valószínűségét (lásd a 2. példát).
- II. Kiszámítjuk $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ valószínűségeket és megvizsgáljuk, hogy teljesül-e a $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ feltétel. Ha igen, akkor függetlenek az A és B események.
- III. A kísérlet körülményei egyértelműen biztosítják számunkra, hogy a két esemény független (egymás után feldobunk két pénzérmét, dobókockát stb.).
- IV. A probléma felvetése során eleve feltételezzük, hogy az általunk figyelt események függetlenek.

Ha több független esemény szorzatát vizsgáljuk, akkor is használhatjuk az előző összefüggést.

Ha az A , B és C események **függetlenek** egymástól, akkor

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

5. példa

Három dobókockát feldobva mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy hatost dobunk?

Megoldás

I.: A megoldás során használt matematikai modellünkben megkülönböztetjük a kockákat.

Az összes eset száma $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

A kedvező esetek számának meghatározásakor tudnunk kell, hogy háromféle módon lehet egy hatosunk: az első hatos a másik kettő nem, a második hatos a másik kettő nem, a harmadik hatos a másik kettő nem. Tehát kedvező esetek száma: $1 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 1 = 75$.

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{75}{216}.$$

II.: Azt is feltételezhetjük, hogy az egyes dobókockák esetén a hatos dobások valószínűsége független egymástól.

Legyen: $A = \{\text{pontosan egy hatost dobunk}\}$,

$A_1 = \{\text{az egyes számú kockával hatost dobunk}\}$,

$A_2 = \{\text{a kettes számú kockával hatost dobunk}\}$,

$A_3 = \{\text{a hármas számú kockával hatost dobunk}\}$.

Három egymást kizáró esetben következhet be az A esemény.

$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ = az első hatos és a másik kettő nem.

$\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$ = a második hatos az első és a harmadik nem.

$\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ = a harmadik hatos és az első kettő nem.

Mint tudjuk, egymást kizáró események összegének a valószínűsége a valószínűségek összege, illetve független események szorzatának valószínűsége az események valószínűségének szorzata.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{216} = 3 \cdot \frac{25}{216} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Fogalmak
független
események;
független
események
szorzata.

FELADATOK

1. K2

Iskolánkba 600 diák jár, ebből 100-an hordanak szemüveget. A 11.c-be 30 tanuló jár, köztük pedig 5-en szemüvegesek. Véletlenszerűen kisorsolnak egy diákot, aki ingyen vehet részt az iskolai sítáborban. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott diák szemüveges, a B esemény pedig, hogy a 11.c-be jár. Mennyi az A , B , AB események valószínűsége? Függetlenek-e egymástól az A és B események?

2. K2

Egy szabályos pénzérmét négyszer egymás után feldobva mennyi az esélye, hogy mindig fejet dobunk?

3. E1

Három kislány húsvéti tojásokat fest. Mind a hárman választanak egy-egy színt az előttük lévő három lehetőségből: mindenki vagy pirosat, vagy sárgát, vagy zöldet választhat.

a) Mennyi az esélye, hogy mindenki piros tojást fest?

b) Mennyi az esélye, hogy azonos színűek lesznek a tojások?

c) Mennyi az esélye, hogy mindenki különböző színű tojást fest?

4. E1

Tudjuk, hogy az A és B események függetlenek. Igaz-e, hogy A és $\bar{B}$ is független egymástól?

5. E1

Az osztályotokban véletlenszerűen kiválasztva egy diákot, két eseményt figyelünk: $A = \{\text{fiút választunk}\}$, $B = \{\text{szemüveget választunk}\}$. Függetlenek-e az események?



61. BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

1. példa

Végezzük el a következő kísérletet! Dobjunk fel öt pénzérmét. Számoljuk meg, hogy hány fejet dobtunk! Végezzük el a kísérletet ötvenszer egymás után! Az eredményeket rögzítsük egy táblázatban!

Tekintsük a következő eseményeket:

$$A_0 = \{\text{nem dobunk fejet}\}, A_1 = \{\text{egy fejet dobunk}\}, \dots, A_5 = \{\text{öt darab fejet dobunk}\}.$$

Számítsuk ki az egyes események relatív gyakoriságát! Készítsünk matematikai modellt, amely segítségével kiszámíthatjuk az események valószínűségét!

Megoldás

Feljegyezzük a lehetséges kimeneteket, a hozzájuk tartozó gyakoriságokat, relatív gyakoriságokat. Az utolsó sorba pedig az általunk felállított matematikai modell segítségével kiszámított valószínűségeket írjuk. Az eddigi tanulmányaink során megállapodtunk abban, hogy a valószínűség az a szám, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik. Ha az általunk felállított modell jól közelíti a valóságot, akkor az utolsó két sorban szereplő számok „közel” vannak egymáshoz.

Modellalkotás:

Írjuk fel $P(A_0); P(A_1); P(A_2); P(A_3); P(A_4); P(A_5)$ valószínűségeket!

Az öt darab pénzérmét megkülönböztetjük. Mindegyikkel dobhatunk fejet vagy írást. Az összes eset száma $2^5 = 32$. Mindegyik lehetséges eredményt egyformán valószínűnek tekintjük, így alkalmazhatjuk a klasszikus modellt.

Első megoldás

$$P(A_0) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

$P(A_1) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{5}{32} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$, az öt érme közül pontosan egy fej $\binom{5}{1} = 5$ -féle módon lehetséges.

$P(A_2) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{10}{32} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$, az öt érme közül kettő fej $\binom{5}{2} = 10$ -féle módon lehetséges.

$P(A_3) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{10}{32} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$, az öt érme közül három fej $\binom{5}{3} = 10$ -féle módon lehetséges.

$$P(A_4) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{5}{32} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5, \text{ négy fejet dobhatunk } \binom{5}{4} = 5\text{-féle módon.}$$

$$P(A_5) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5, \text{ mind az öt érmevel fejet dobunk.}$$

A kedvező esetek számának meghatározásánál nagy szerepet játszottak a kombinációk kiszámításánál megismert $\binom{n}{k}$ értékek. Egészen pontosan a Pascal-háromszög ötödik sorának elemeit kaptuk meg sorban.

			1			
		1	1			
	1	2	1			
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

Fejek száma, gyakoriság, i	0	1	2	3	4	5	Összeg
Abszolút gyakoriság, k_i	2	8	16	14	9	1	50
Relatív gyakoriság, r_i	$\frac{2}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$	1
$P(\text{fejek száma } i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

Második megoldás

Az egyes érmék dobásának eredménye független egymástól. Egyetlen érmén a fej és írás dobások valószínűsége is $\frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy egy öt dobásból álló kísérlet esetén minden fej-írás sorrend valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

Csak azt kell meghatároznunk, hogy az egyes eseményeket hányféle egymást kizáró dobáskombináció alkotja.

$$P(A_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \text{ az 5 dobásból egy sem lehet fej.}$$

$$P(A_1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}, \text{ mert az 5 dobásból egy lehet fej, ez } \binom{5}{1} \text{-féle dobáskombinációt jelent.}$$

$$P(A_2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}, \text{ mert az 5 dobásból kettő lehet fej, ez } \binom{5}{2} \text{-féle dobáskombinációt jelent.}$$

$$P(A_3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}, \text{ mert az 5 dobásból három lehet fej, ez } \binom{5}{3} \text{-féle dobáskombinációt jelent.}$$

$$P(A_4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}, \text{ mert az 5 dobásból négy lehet fej, ez } \binom{5}{4} \text{-féle dobáskombinációt jelent.}$$

$$P(A_5) = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \text{ mert az 5 dobásból öt lehet fej, ez } \binom{5}{5} \text{-féle dobáskombinációt jelent.}$$

Ha az általunk vizsgált eseményt egymástól független események szorzatára lehet bontani, akkor csak a valószínűségeket kell összeszorozni. Mindig figyelniünk kell a független események **lehetséges sorrendjére** is.

2. példa

Egy kiváló sportlövő 0,9 valószínűséggel lő tízest (ez a telitalálat), minden lövésnél az előző lövésektől függetlenül. A verseny egyik fordulójában három lövést kellett leadnia. Mennyi a valószínűsége, hogy nulla, egy, kettő vagy három 10-es találatot ér el?

Megoldás

Legyen $A_1 = \{\text{a lövész telitalálatot ér el az első lövésből}\}$, $\bar{A}_1 = \{\text{az első lövés nem telitalálat}\}$.

$$p = P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,9, \quad q = P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1.$$

$A = \{\text{mindhárom lövés telitalálat}\}$, három független esemény szorzatának a valószínűsége $\Rightarrow$

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p \cdot p \cdot p = p^3 = 0,729.$$

$$\begin{aligned}
 B &= \{\text{pontosán két telitalálat}\}: P(A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3) = \\
 &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \\
 &= p \cdot p \cdot q + p \cdot q \cdot p + q \cdot p \cdot p = 3 \cdot p^2 \cdot q = \binom{3}{1} \cdot p^2 \cdot q = 0,243.
 \end{aligned}$$

$C = \{\text{egy telitalálat}\}:$

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \\
 &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = p \cdot q \cdot q + q \cdot p \cdot q + q \cdot q \cdot p = 3 \cdot p \cdot q^2 = \\
 &= \binom{3}{1} \cdot p \cdot q^2 = 0,027.
 \end{aligned}$$

$D = \{\text{nincs telitalálat}\}$, háromszor egymás után ront.

$$P(D) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = q \cdot q \cdot q = q^3 = 0,001.$$

A megoldás során alkalmaztuk a függetlenség egyik fontos tulajdonságát. Ha A és B független, akkor A és B ellentettje is független.

Az A, B, C, D események közül pontosan egy következhet be, tehát páronként kizárják egymást és összegük a biztos esemény, ezért $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$.

Binomiális eloszlás: Egy véletlen kísérletben az A esemény valószínűsége p . Ha n -szer elvégezzük egymástól függetlenül a kísérletet, akkor feltehetjük a kérdést: Mennyi a valószínűsége, hogy az A esemény éppen k -szor következik be?

Ha az A esemény az n kísérletből k -szor következik be, akkor $(n - k)$ -szor nem következik be. Ha akár milyen sorrendben k -szor az A esemény és $(n - k)$ -szor az ellentettje következik be ($P(A) = p$, $P(\text{nem következik be } A) = P(\bar{A}) = 1 - p$), akkor ennek a valószínűsége $p^k(1 - p)^{n-k}$. Az n darab kísérlet során az A esemény k -szor $\binom{n}{k}$ -féle sorrendben következhet be. Így a következő összefüggést kapjuk.

Tétel

Binomiális eloszlás esetén, ha az A esemény bekövetkezésének valószínűsége p , akkor annak valószínűsége, hogy az A esemény n kísérletből pontosan k -szor következik be $\binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

Az így kapott valószínűségek kiszámításában nagy szerepe van a binomiális együtthatóknak, ezért azt mondjuk, hogy ez a kísérlet binomiális eloszlást követ.

Ilyen típusú problémákkal nagyon sokszor találkozunk. A valószínűségszámítás felhasználási területei, például a minőség-ellenőrzés, közvélemény-kutatás, játékelemzések gyakran ilyen problémákról szólnak.

Fogalom
binomiális eloszlás.

FELADATOK

1. K2

Anikó villamossal, autóbusszal vagy biciklivel szokott iskolába járni. Minden reggel $\frac{1}{3}$ valószínűséggel dönt valamelyik lehetőség mellett. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő héten pontosan háromszor megy biciklivel suliba? (Egy héten öt tanítási nap van.)

2. K2

Októberben mifelénk minden nap 0,8 valószínűséggel esik, függetlenül az addigiaktól. Egy héten, ha legalább kétszer esik, akkor nem kell locsolni a következő héten a kertben. Mennyi a valószínűsége, hogy két hét múlva nem kell locsolni, ha most október eleje van?

3. K2

Öt darab dobókockát feldobva, melyik esemény a valószínűbb: az hogy 1 darab hatost dobok, vagy az hogy 2-t?

4. K2

Egy négygyerekes családban mennyi a valószínűsége, hogy három fiú és egy lány gyermek van? Feltételezzük, hogy minden következő születendő gyermek neme az előzőtől függetlenül 0,5 valószínűséggel fiú. (A valóságban ez nem egészen így van, a részleteket a biológiaórán ismerhetjük meg.)

5. K2

A sakktábla bal alsó sarkába (A1) teszünk egy királyt. Ezután feldobunk egy érmét; ha fejet dobunk, akkor jobbra lépünk egyet, ha írást dobunk, akkor felfelé. Ha egy dobás után lelépnénk a tábláról, akkor megállunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a jobb felső sarokban (H8) állunk meg?

6. K2

Egy nagyváros felnőtt lakosai közül kb. 10% dohányzik. A városlakók közül véletlenszerűen kiválasztunk 5 személyt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy közülük a dohányzók száma rendre 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 1593, 1606.

62. STATISZTIKAI MINTAVÉTEL (Visszatevéssel vagy visszatevés nélkül)



A gyakorlati életben nagyon sokszor szeretnénk információt szerezni nagy mennyiségű dologgal kapcsolatban. Hogyan dönthetjük el, hogy a raktárban lévő egymillió termék hány százaléka selejt? Gyakran szeretnénk tudni például, hogy 8 millió szavazóból hányan szavaznának egy bizonyos politikai pártra, vagy egy ország számára fontos döntés meghozatala előtt meg szeretnénk ismerni a közvéleményt. Ehhez persze nem lehet mindenkit egyenként megkérdezni, mert ez nagyon költséges és hosszadalmas folyamat. Mit tehetünk ilyenkor?

Ezekre a problémákra nem könnyű a válasz. A matematikusok kidolgoztak egy olyan eljárást, amivel, ha nem is 100%-os biztonsággal, de elég nagy bizonyossággal választ kaphatunk a kérdéseinkre.

A megoldás kulcsa az, hogy jól válasszuk ki azt a néhány (esetleg több ezer) egyedből álló mintát, amit megvizsgálunk. Az ilyen mintát reprezentatív mintának nevezzük. A minta tanulmányozása után következtetéseket vonunk le az egész populációra nézve.

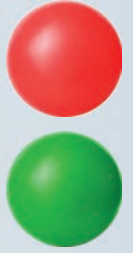
Ha bármely üzemben nagy mennyiségben gyártanak valamilyen terméket, akkor fontos, hogy az minőségileg megfeleljen az előírásoknak. Az ellenőrzés általában szűrőpróbaszerűen történik. Véletlenszerűen kiválasztanak egy terméket és megvizsgálják.

Ha a kiválasztott terméket a bevizsgálás után, a következő termék kiválasztása előtt nem tesszük vissza a többi közé, akkor **visszatevés nélküli mintavételről**, ha a terméket újra elhelyezzük a többi között, és a következő terméket így választjuk ki, akkor **visszatevésees mintavételről** beszélünk.

Egy nagyon egyszerű modellen vizsgáljuk meg, hogyan alkalmazhatjuk az általunk tanultakat. Itt most visszatevésees mintavételt alkalmazunk.

1. példa

Egy urnában 10 egyforma golyó van. Mind vagy piros, vagy zöld. Ki szeretnénk deríteni, hogy hány piros és hány zöld van, de nem tudjuk, hogy melyik színből mennyi van. Feltételezhetjük, hogy a piros golyók darabszámára mind a 11-féle lehetőség egyformán valószínű. Lehetőségünk van négy golyót visszatevéses mintavétellel megvizsgálni. (Kiveszünk egy golyót, feljegyezzük a színét, majd visszatesszük, ezt megismételjük négyszer egymás után.) Azt tapasztaljuk, hogy a négy húzásból egy volt piros és három zöld. Ez alapján mire tennénk a voksunkat, ha arra kell tippelni, hogy a 10 golyó között mennyi a piros golyók száma?



Megoldás

Mivel nem tudjuk, hogy hány piros golyó van, ezért megvizsgáljuk, mi történne, ha nulla, egy, kettő, ..., tíz piros golyó lenne az urnában.

1. Tegyük fel, hogy nincs piros a tíz között. Ez nem lehetséges, mert ekkor a kihúzott golyók között sem lehetne, pedig mi egyet kaptunk.

2. Tegyük fel, hogy egy piros van a tíz között. Ekkor minden egyes húzásnál

$$P(\text{pirosat húzunk}) = \frac{1}{10}, P(\text{nem pirosat húzunk}) = \frac{9}{10},$$

$$P(\text{a négyből egy pirosat húzunk}) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{2916}{10\,000}.$$

3. Tegyük fel, hogy két piros van a tíz között. Ekkor minden egyes húzásnál

$$P(\text{pirosat húzunk}) = \frac{2}{10}, P(\text{nem pirosat húzunk}) = \frac{8}{10},$$

$$P(\text{a négyből egy pirosat húzunk}) = \binom{4}{1} \left(\frac{2}{10}\right) \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{4096}{10\,000}.$$

4. Tegyük fel, hogy három piros van a tíz között. Ekkor minden egyes húzásnál

$$P(\text{pirosat húzunk}) = \frac{3}{10}, P(\text{nem pirosat húzunk}) = \frac{7}{10},$$

$$P(\text{a négyből egy pirosat húzunk}) = \binom{4}{1} \left(\frac{3}{10}\right) \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{4116}{10\,000}.$$

Általában, ha k darab pirosat feltételezünk:

$$P(\text{a négyből egy pirosat húzunk}) = \binom{4}{1} \left(\frac{k}{10}\right) \left(\frac{10-k}{10}\right)^3 = \frac{4k(10-k)^3}{10\,000}.$$

A lehetséges eseteket egy táblázatban összefoglaljuk.

pirosak	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\text{négyből egy piros})$	0	$\frac{2096}{10\,000}$	$\frac{4096}{10\,000}$	$\frac{4116}{10\,000}$	$\frac{3456}{10\,000}$	$\frac{2500}{10\,000}$	$\frac{1536}{10\,000}$	$\frac{756}{10\,000}$	$\frac{256}{10\,000}$	$\frac{36}{10\,000}$	0

Három piros és hét zöld golyó esetén a legnagyobb valószínűséget arra, hogy a négyes mintában egy darab piros legyen. Tehát ha más információ nem áll rendelkezésre, akkor erre tippelünk.

A most ismertetett módszert a statisztikában a **legnagyobb valószínűség elvének** nevezzük. Mi a négy próbából csak egyszer kaptunk pirosat, vagyis a piros húzásának relatív gyakorisága $\frac{1}{4}$. Ebből arra követ-

keztetünk, hogy a dobozban is kb. $\frac{1}{4}$ a piros szín gyakorisága. Ennek megfelelően a $\frac{10}{4} = 2,5$ -re kellene tippelnünk. A dobozban egész számú golyó van. Ezért a kettő és három közül a kicsit valószínűbb hármas piros golyószámra tippelünk.

Ezt a módszert elég gyakran alkalmazzák a gyakorlatban is. A mintában meghatározzuk egy tulajdonság relatív gyakoriságát, és ebből következtetünk az egész populációban ezen tulajdonság előfordulásának valószínűségére.

2. példa

A 11.a osztályba húsz fiú és tíz lány jár. Hétfőn mindig öt órájuk van. Holnap hétfő lesz, és várhatóan mind az öt órán, amikor felelnek egy diák fog felelni, akit a tanárok egymástól függetlenül, teljesen véletlenszerűen választanak ki. Mennyi az esélye annak, hogy holnap több lány fog felelni, mint fiú?

Megoldás

Ha több lány felel, mint fiú, akkor legalább három lány felel holnap. Ez három egymást kizáró esemény összege: pontosan öt lány felel, vagy pontosan négy lány felel, vagy pontosan három lány felel. Kiszámítjuk mindegyik esemény valószínűségét.

$$P(\text{bármely órán fiú felel}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$

$$P(\text{bármely órán lány felel}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$

mivel az egyes órákon a felelő személye független az előző órán történtektől.

$$P(\text{öt lány felel}) = \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

$$P(\text{négy lány és egy fiú felel}) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right), \text{ az öt órából négyet ki kell választanunk, ahol lány felel.}$$

$$P(\text{három lány és két fiú felel}) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2, \text{ az öt órából ki kell választanunk azt a hármat, ahol lány fog felelni.}$$

Mind a három esetben több lány felel, mint fiú. Mivel ezek egymást kizáró események, összegük valószínűsége a valószínűségek összege.

$$P(\text{több lány felel, mint fiú}) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 0,21.$$

A feladat megoldása során az előző leckében felírt képletet alkalmaztuk.

A feladat megoldásánál „visszatevéses mintavétellel” választották ki az öt felelőt.

Vizsgáljunk meg egy teljesen hasonló szituációt, csak most visszatevés nélküli mintavétel modelljével érünk célt.

3. példa

A 11.a osztályba 20 fiú és 10 lány jár. A történelemtanár úgy döntött, hogy öt embert feleltet, akiket véletlenszerűen választ ki a diákok közül. Mennyi a valószínűsége, hogy több lány felel, mint fiú?

Megoldás

Ha több lány felel, mint fiú, az azt jelenti, hogy legalább három lány felel ma. Ez három egymást kizáró esemény összege: pontosan öt lány felel, vagy pontosan négy lány felel, vagy pontosan három lány felel. Kiszámítjuk mindhárom esemény valószínűségét.

A klasszikus valószínűségi mezőt alkalmazzuk, tehát bármelyik öt tanuló kiválasztását egyformán valószínűnek tartjuk.

$$P(\text{öt lány felel}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}. \text{ Itt az a kedvező eset, ha mind az öt diákot a lányok}$$

közül választjuk ki.

$$P(\text{négy lány felel}) = \frac{\binom{10}{4}\binom{20}{1}}{\binom{30}{5}}. \text{ Itt az a kedvező, ha a tízből négy lányt választunk, és a húsz fiúból pedig}$$

egyét.

$$P(\text{három lány felel}) = \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}}. \text{ Itt az a kedvező, ha a tízből három lányt választunk, és a húsz fiúból}$$

pedig kettőt.

Mind a három esetben több lány felel, mint fiú. Mivel ezek egymást kizáró események, összegük valószínűsége a valószínűségek összege:

$$P(\text{több lány felel, mint fiú}) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{20}{1}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} = 19,1\%.$$

A két feladat nagyon hasonló. Csak annyi volt a különbség, hogy az első esetben visszatevéssel, a második esetben pedig visszatevés nélküli mintavétel tudta jól modellezni a történeteket. A két végeredmény is nagyon közel van egymáshoz; ez általában is így van, ha a populáció elemszáma elég nagy. **A gyakorlatban nagyon sokszor a visszatevés nélküli mintavételnél is a binomiális eloszlás képletét használják, mert könnyebb vele dolgozni, mint nagyon nagy binomiális együtthatókkal.**

4. példa

Az iskolában minden megvásárolt tombola 20% eséllyel nyer. Szeretnénk a nyerési esélyünket meg-négyszerezni. Hány tombolát vásároljunk, ha el szeretnénk érni, hogy 80%-nál nagyobb eséllyel nyerjünk legalább az egyikkel?

Megoldás

Tételezzük fel, hogy n darab tombolát vásárolunk.

$P(\text{egy tombolával nyerünk}) = 0,2$. $P(\text{egy tombolával nem nyerünk}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

$P(\text{az } n \text{ darab tombola egyike sem nyer}) = 0,8^n$. (n darab független esemény szorzata.)

$P(\text{legalább egy tombola nyer}) = 1 - P(\text{az } n \text{ tombola egyike sem nyer}) = 1 - 0,8^n$.

Azt az n értéket keressük, amelyre ez a valószínűség (legalább) $0,8$, tehát megoldandó a következő egyenlőtlenség: $1 - 0,8^n \geq 0,8$.

$$1 - 0,8^n \geq 0,8 \quad /+ 0,8^n$$

$$1 \geq 0,8^n + 0,8 \quad /- 0,8$$

$$0,2 \geq 0,8^n \quad / \lg$$

$$\lg 0,2 \geq \lg 0,8^n$$

$\lg 0,2 \geq n \lg 0,8 \quad /: \lg 0,8 < 0$, mivel negatív számmal osztunk, ezért az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

$$\frac{\lg 0,2}{\lg 0,8} \leq n, \quad 7,21 \leq n. \text{ Tehát legalább 8 darab tombolát kell vásárolnunk, hogy meg-}$$

négyszerezessük a nyerés valószínűségét.

Fogalmak

visszatevéses
mintavétel;
visszatevés nélküli
mintavétel;
legnagyobb való-
színűség
elve.

A reprezentatív mintavétel nehézségei

A lecke elején említettük, hogy a matematikai statisztika csak akkor tud helyes következtetéseket levonni a nagy elemszámú halmazokról, ha a mintavétel jól jellemzi az eredeti sokaságot. Az ilyen ún. **reprezentatív minta** kiválasztása azonban nem könnyű.

Általánosan érvényes elv, hogy a statisztikai kijelentések **csak annyira megbízhatók, mint azok az adatok, amelyeken alapulnak**. Az adatgyűjtés megtervezése, megszervezése professzionális feladat: az adatok származási helye (elsődleges vagy másodlagos statisztikai adatok), a mintavételi részsokaság kiválasztása, az adatgyűjtési módszer (mérés, kérdőív, interjú stb.) meghatározása döntő jelentőségű lehet. Ha például a magyar lakosság véleményére vagyunk kíváncsiak, akkor figyelni kell arra, hogy minden régió, minden korosztály, mindenféle iskolázottságú ember megfelelően súlyozva benne legyen a mintában. Ahhoz, hogy mindezt biztosítani tudjuk, felhasználjuk a Statisztikai Hivatal pontos adatait.

Nagy nehézséget jelentenek a **szubjektív tényezők**. Néhány kiragadott példa: nehéz az anonimitás biztosítása; az előzetes tájékoztatás (pl. a mérés céljáról) vagy az aktuális környezet (a vizsgálati szituáció) befolyásolhatja a választ; de ide sorolhatjuk az olyan eseteket is, mint amikor például egy kérdőív visszaküldési aránya csak 10%.

FELADATOK

1. K2

Feldobunk két darab pénzérmét. Egy dobókockával annyiszor dobhatunk, amennyi fejet dobtunk előtte. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy hatost dobunk?

2. K2

Egy áruház polcán 20 darab zsákbamacska található. Marcinak elárulták, hogy négyben a kedvenc állatfigurája van elrejtve. Mamájától sikerült háromnak a megvásárlását kikönyörögni. Mennyi az esélye, hogy legalább kettőben a kedvenc állatfigurája van?

3. K2

Az érettségi vizsgára készülve Imre a 25 angoltételből csak húszat tudott megtanulni. A vizsgán két tételből kell felelnie. Mennyi az esélye, hogy legalább az egyiket megtanulta?

4. K2

Egy szállítmányozási cég 5 új kamiont vásárolt. Az új gépeket egy nagy telephelyen válogatták ki az ott található 100 új járműből. A 100 jármű között tíznek a vezetőfülkéjében egy egyéves ingyen casco biztosítási szerződést rejtettek el. (Ezt egy ügyes marketingfogásnak tartják.) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kamion egy éves cascója ingyen lesz a jövő évben?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 1606–1636.

63. JÁTÉKOK ELEMZÉSE

Először vizsgáljunk meg egy egyszerű játékot.

1. példa

Két játékos, Aladár és Botond a következő játékot játssza: Feldobnak egy dobókockát. Ha a dobott szám páros, akkor Aladár fizet Botondnak 10 Ft-ot. Ha a dobott szám páratlan, akkor Botond fizet Aladárnak 10 Ft-ot. Igazságos-e ez a játék?

Elemzés

Aladár szemszögéből nézzük a játékot. Mindkettőjüknek $\frac{1}{2}$ az esélye a győzelemre. Ezek szerint hosszabb távon az esetek felében Aladár nyer 10 Ft-ot, a másik felében pedig veszít 10 Ft-ot. Hosszabb távon a nyeresége 0 Ft körül ingadozik.

Botond szemszögéből figyelve az eseményeket ugyanerre az eredményre jutunk.

En nem azt jelenti, hogy bárkinek is ajánljuk, hogy ilyen játékokat játsszon. Ha valaki kicsit is ismeri a véletlen kísérletek végeredményének sokszínűségét, az tudja, hogy a nulla körül ingadozó átlagos nyereség esetén is lehet a játéknak egy olyan pillanata, amikor sok száz Ft-os veszteségre állunk. Ebben és a hasonló játékokban mindig a tökéreősebb játékosnak van nagyobb esélye a nyerésre, mert ő nagyobb pillanatnyi veszteség esetén sem adja fel a játék folytatását.

2. példa

Két játékos, Cecil és Dani a következő játékot játssza. Feldobnak egy dobókockát. Ha a dobott szám hárommal osztható, akkor Cecil fizet Daninak 20 Ft-ot, különben Dani fizet 10 Ft-ot Cecilnek. Igazságos-e a játék?

Elemzés

Cecil szemszögéből figyeljük az eseményeket. Annak a valószínűsége, hogy Cecilnek fizetnie kell, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Annak a valószínűsége, hogy neki fizetnek, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Ez azt jelenti, hogy átlagban három játékból egyszer fizet 20 Ft-ot és kétszer kap 10 Ft-ot.



Mivel $+20 - 2 \cdot 10 = 0$, ezért hosszú távon a nyereményünk a nulla körül ingadozik. Ha Cecilnek 20 Ft-nál többet kellene fizetnie a hárommal osztható számok esetén, akkor hosszabb távon veszítené. Ha 20 Ft-nál kevesebbet fizetne, akkor hosszú távon ő nyerne, feltéve, hogy Dani továbbra is 10 Ft-ot fizetne.

3. példa

Antal, Béla és Csaba a következő játékot játsszák: Feldobnak négy darab pénzérmét. Ha több fej van, mint írás, akkor Antal nyer 10-10 Ft-ot mindkét játékostól. Ha az írások és fejek száma megegyezik, akkor Béla nyer a másik kettőtől 10-10 Ft-ot. Ha több írás van, mint fej, akkor Csaba nyer 10-10 Ft-ot a másik két játékostól. Igazságos-e a játék? Ha nem igazságos, akkor hogyan változtassunk a nyereményeken, hogy igazságos legyen?

Elemzés

A négy pénzérme feldobása $2^4 = 16$ egyformán valószínű végeredménnyel jár. Ebből ötször a fejből van több, ötször az írásból, és hatszor két fej és két írás lesz a kimenetel.

$$\text{Tehát } P(\text{Antal nyer}) = P(\text{Csaba nyer}) = \frac{5}{16}, P(\text{Béla nyer}) = \frac{6}{16}.$$

Hosszabb távon átlagban 16 menetből Antal ötöt nyer és elveszít tizenegyet.

$5 \cdot 20 - 11 \cdot 10 = -10$ Ft az egyenlege. Csaba helyzete teljesen hasonló, Ő is átlagban -10 -Ft-tal zár 16 meccsenként. Béla hatot nyer, tízet veszít, azaz $6 \cdot 20 - 10 \cdot 10 = +20$ Ft-tal zár. Ez a játék így Bélának kedvez. Hosszabb távon egy ilyen játékban igen sokat lehet nyerni.

Ha a játékot igazságossá akarjuk tenni, akkor a nyereményeket kell megváltoztatnunk. Mivel Antal és Csaba ugyanolyan valószínűséggel nyer, nekik ugyanazt az összeget fogják fizetni, legyen ez a Ft. Béla pedig kapjon b Ft-ot mindkét vesztestől.

$$\text{Antal és Csaba nyereménye 16 meccsenként átlagban } 5 \cdot 2a - 6 \cdot b - 5 \cdot a = 0 \Rightarrow 5 \cdot a - 6 \cdot b = 0.$$

$$\text{Béla nyereménye 16 meccsenként átlagban } 6 \cdot 2b - 5 \cdot a - 5 \cdot a = 0 \Rightarrow 12 \cdot b - 10 \cdot a = 0 \Rightarrow 6 \cdot b - 5 \cdot a = 0.$$

A két egyenlet megegyezik. Ezekből csak az a és b arányát határozhatjuk meg.

$$6 \cdot b - 5 \cdot a = 0 \quad / +5 \cdot a$$

$$6 \cdot b = 5 \cdot a \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{a}{b}. \text{ Az } a = 6 \text{ és } b = 5 \text{ választás pont jó, vagy az } a = 12 \text{ és } b = 10 \text{ is megfelel. Ez}$$

a megoldás jól mutatja, hogy egy kis változtatással igazságossá tehetjük a játékot.

Az igazságosságnak egy egyszerű kritériumát állítottuk fel.

Egy játékot akkor tekintünk **igazságosnak**, ha a játékosoknak az egy játékra jutó átlagos nyereménye nulla.

A következő játékot Bergengóciában, egy kaszinóban ajánlják fel minden betető vendégnek.

4. példa

Egy urnában két piros és három fekete golyó van. Kivehetünk belőle egymás után annyit, amennyit akarunk. Bármikor megállhatunk. Ha ugyanannyi pirosat vettünk ki, mint feketét, akkor jót játszottunk, de nem nyertünk és nem is veszítettünk. Ha a pirosak száma több, mint a feketéké, akkor annyiszor tíz dollárt kapunk, amennyivel több a piros, mint a fekete. Ha a fekete a több, akkor mi fizetünk ugyanúgy annyiszor

tíz dollárt, amennyivel több a fekete. Érdemes-e belemenni ebbe a játékba?

Elemzés

Maximum tíz dollárt veszthetünk, hiszen ha véletlenül először a három fekete jön ki, akkor kiveszem a maradék két pirosat és ezzel minimalizálom a veszteséget.

A játék elemzése során feltételezzük, hogy az öt golyó összes lehetséges kihúzási sorrendje egyformán valószínű.

●●●●● (–10 \$), ●●●●● (–10 \$), ●●●●● | ● (0 \$), a függőleges vonal mutatja, hogy hol állunk meg.

●● | ●●●● (0 \$), ●● | ●●●● (0 \$), ●● | ●●●● (0 \$), ebben a három esetben, ha tovább megyünk, akkor is hasonló a végeredmény. ●●●●● (–10 \$), ●●●●● | ● (0 \$), ●●●● | ●● (10 \$) hosszabb távon ugyanúgy nullszaldóra számíthatunk, talán kicsit izgalmasabb a dolog.

● | ●●●●● (10 \$), ● | ●●●●● (10 \$), ● | ●●●●● (10 \$), ● | ●●●●● (10 \$).

Tehát a stratégia a következő lehet:
 ha két feketével kezdek, akkor addig húzok, amíg ki nem húztam a két pirosat,
 ha az első fekete után pirosat húzok, azonnal megállok,
 ha pirosat húzok elsőre, azonnal megállok.

Tízféle kihúzási sorrend lehetséges. Mindegyiknek $\frac{1}{10}$ a valószínűsége. Ez azt jelenti, ha nagyon sokszor játszánánk ezt a játékot, kb. az esetek egytizedében következne be mindegyik. Ha nagyon leegyszerűsítjük az elemzést, akkor arra a következtetésre jutunk, hogy a mi taktikánkkal átlagban 10-ből négyszer nyerünk egy tízest, kétszer veszünk egy tízest és négyszer senki sem nyer. Végeredményben, átlagban 20 \$-t nyerünk 10 játékonként. Egy játékra vetítve átlagban 2 dollárt nyerünk. Ha valaki tudja, hogy mikor kell megállni, akkor a kezdetben nem túl előnyösnek tűnő játékba is érdemes belekezdeni.



FELADATOK

- 1. K2** Aladár és Béci egy pénzürmével játszanak. Aladár háromszor dobja fel egymás után az érmét. Ha sikerül egymás után két egyformát dobni, akkor ő nyer Bécitől 20 Ft-ot. Ellenkező esetben Béci nyer Aladártól 50 Ft-ot. Igazságos-e a játék?
- 2. K2** Aladár a következő játékot ajánlja fel Bécinek. Mindketten feldobnak egy dobókockát. Ha Béci legalább akkora számot dob, mint ő, akkor fizet Bécinek 5 Ft-ot. Ha azonban Aladár nagyobb számot dob, akkor ő 20 Ft-ot kap. Te belemennél-e ebbe a játékba Béci helyében?
- 3. K2** Béci is ajánl egy játékot. Ha Aladárnak sikerül egy dobókockával négy kísérletből legalább egy hatost dobni, akkor fizet neki 10 Ft-ot. Ha nem, akkor Béci kap 10 Ft-ot. Te belemennél-e a játékba Aladár helyében?
- 4. E1** Ketten felváltva dobnak fel egy dobókockát. Az nyer, akinek hamarabb sikerül 3-mal osztható számot dobnia. Ha a kezdő nyer, akkor ő 20 Ft-ot kap társától, ha veszít, akkor 25 Ft-ot fizet. Ti kezdők lennétek?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 1682, 1683.

64. MIÉRT FONTOS A VÁRHATÓ NYEREMÉNY ISMERETE?

Nem csak a játékok esetén érdemes megvizsgálni, hogy milyen eredményre számíthatunk, hanem ha belekezdünk bármilyen tevékenységbe, akkor is érdemes kicsit számolni, vagy tájékozódni a várható nyereséget illetően. Lehet ez egy pénzügyi befektetés, vagy ingatlanvásárlás, vagy szerencsejáték, esetleg maga a pályaválasztás. A legtöbb esetben, tisztában vagyunk azzal, hogy mi lehet a döntésünk következménye, de természetesen ez nem csak rajtunk múlik és nem feltétlenül egyértelműen megjósolható, hanem nagy szerepe lehet a véletlennek is. A matematika segít abban, hogy a jövőbeli reményeinket számok segítségével is kifejezhessük, például az „várható nyeremény”, „várható nyereség”, vagy „várható veszteség” formájában. Ezek a számszerűsített adatok például arra is jók, hogy összehasonlíthassuk az egyes befektetési, illetve hitelfelvételi lehetőségeket.

1. példa

Sorsjegy vásárlás: (Figyelem! 18 éves kor alatt tilos a sorsjegy vásárlás!)

Ha bármilyen sorsjegyet veszünk, tisztában kell lennünk azzal, hogy a befektetett összeg és a várható nyeremény együttesen számunkra, mint sorsjegy vásárlók összessége számára veszteséget mutat.

Az Állami Szerencsejáték Felügyelet minden sorsjegy kibocsátót arra kötelez, hogy a sorsjegyeken tüntessék fel pontosan, hogy mely nyereményekből mennyit nyomtattak, továbbá, hogy összesen hány szelvény van forgalomban. Ezen információk alapján, bárki kiszámíthatja a sorsjegy vásárlás esetén hogyan alakul az egy vásárlásra jutó átlagos nyereségünk (ez igazából veszteség lesz).

Egy sorsjegy kibocsátója a következő információkat írta a sorsjegy hátlapjára.

Egy db sorsjegy ára 300 Ft és 5 millió darabot nyomtattak belőle (lásd a táblázatot).

A sorsjegy kibocsátója, ha eladja az összes jegyet, akkor 5 milliószor 300 = 1,5 milliárd Ft bevételre számíthat. A táblázatból kiszámolható, hogy 930 millió Ft-ot fizetnek ki nyereményekre. Elvileg 570 millió Ft bevételt realizálhat a sorsjegy kibocsátója, ha sikerült minden sorsjegyet eladnia, és kifizette az összes nyereményt. Ebből fizeti a papír és nyomda költséget, a terjesztői díjat, az adót, minden egyéb költséget, és ami marad, az az ő haszna.

Ha a játékos szemszögéből vizsgáljuk a helyzetet, akkor azt látjuk, hogy az egy játékra jutó átlagos nyeremény $\frac{930 \text{ millió}}{5 \text{ millió}} = \frac{930}{5} = 186$ Ft. Ez azt jelenti, hogy játékonként átlagosan $300 - 186 = 114$ Ft veszteségre számíthatunk. Ez úgy alakul ki, hogy az 5 millióból 1 516 595 vásárló nyer valamilyen nyereményt és a többi 3 483 405 nem kap semmit. Tehát picit több mint 0,3 a valószínűsége, hogy nyerünk valamennyit. Egyszerűbben fogalmazva majdnem minden harmadik játékos visszanyeri legalább a befektetett pénzét.

Miért engedélyezi az állam a sorsjegy forgalomba hozatalát, vagy a teljesen hasonló elveken működő lotózást?

Egyszerűen azért, mert bevétele származik belőle. Pontosan szabályozza, hogy a bevétel hány százalékát kell nyereményként a játékosoknak visszaadni, továbbá mennyi adót kell ezek után befizetni.

Nyeremények 5 millió darabra (db)	Nyeremény (Ft)	Nyerési valószínűség
3	10 000 000	$\frac{3}{5 \cdot 10^6} = \frac{3}{5\,000\,000}$
5	1 000 000	$\frac{5}{5 \cdot 10^6} = \frac{1}{1\,000\,000}$
27	500 000	$\frac{27}{5 \cdot 10^6} = \frac{27}{5\,000\,000}$
50	100 000	$\frac{50}{5 \cdot 10^6} = \frac{1}{100\,000}$
500	50 000	$\frac{500}{5 \cdot 10^6} = \frac{1}{10\,000}$
1 000	6 500	$\frac{1\,000}{5 \cdot 10^6} = \frac{2}{10\,000}$
5 000	5 000	$\frac{5\,000}{5 \cdot 10^6} \approx \frac{1}{1\,000}$
10 000	2 000	$\frac{10\,000}{5 \cdot 10^6} \approx \frac{2}{1\,000}$
100 000	1 500	$\frac{100\,000}{5 \cdot 10^6} \approx \frac{2}{100}$
150 000	1 000	$\frac{150\,000}{5 \cdot 10^6} \approx \frac{3}{100}$
50 000	800	$\frac{50\,000}{5 \cdot 10^6} \approx \frac{1}{100}$
500 000	500	$\frac{500\,000}{5 \cdot 10^6} \approx \frac{1}{10}$
700 000	300	$\frac{700\,000}{5 \cdot 10^6} \approx \frac{1}{7}$

2. példa

Hogyan működik egy fogadóiroda?

Bármily meglepő ezek működésének is fontos része a valószínűségszámítás alkalmazása.

A mai világban sokan szeretnek fogadni mindenféle esemény kimenetelére. Például az amerikai elnökválasztás győztesére, bármely sportesemény végeredményére, de akár az időjárás változásra is. A fogadóirodák az ebben rejlő üzleti lehetőségeket aknázzák ki. Ez is egy komoly szakma. Nagyon pontosan kell meghatározniuk, hogy egy-egy esemény lehetséges kimenetelei milyen arányban fogadhatnak majd. Ennek ismeretében adják meg az az úgynevezett odds-okat, azokat a szorzókat, amelyek megmondják, hogy a befektetett pénzünknek hányszorosát kapjuk, ha az az esemény következik be, amire mi fogadtunk. Ezeknek az odds-oknak a meghatározásával foglalkoznak az oddsmesterek, természetesen az ő munkájukat ma már nagyban segíti a mesterséges intelligencia. Először meghatározzák az egyes események bekövetkezésének a valószínűségét. Utána nekik kell úgy kikalkulálniuk a szorzókat, hogy akármelyik eredmény következik be, a kifizetett összeg kb. ugyanannyi legyen, és némi profitot is realizáljon a fogadóiroda.

Nézzünk egy példát: egy futballmérkőzésnek háromfajta kimenetele lehetséges: győz a hazai csapat, győz a vendégcsapat, vagy döntetlen lesz. Az fogadóiroda előre eldönti, hogy a bevételnek körülbelül a 95%-át fizetik ki nyereményként, ezért a nyereség valószínűségét beszorozva az odds-szal nem egyet, hanem 0,95-öt kell kapnunk.

Eredmény	A téték eloszlása	odds	kifizetés a befolyt összeg %-ában
hazai	0,75	1,27	95,25%
vendég	0,10	9,5	95%
döntetlen	0,15	6	95%

Az odds-okat úgy számoljuk ki, hogy a 0,95-öt elosztjuk az eloszlás egyes értékeivel (lásd a táblázatban például $0,95 : 0,75 \approx 1,27$). Így mindegy, hogy melyik eredmény következik be, a fogadóiroda a fogadásokból befolyó összeg 95%-át fizeti ki nyereményként. A fennmaradó összeg az ő haszna. Az egyes fogadóirodák más-más haszonkulccsal dolgoznak, ami általában 2,5% és 20% között mozog. Ha valaki túlságosan nagy haszonnal akar dolgozni, az kisebb oddsokat kell, hogy adjon, ezért

inkább másik fogadóirodát választanak a játékosok. Így működik a piac.

Az igazságos odds esetén a befolyt összeg egésze a fogadókhoz vándorolna, ekkor a hazai győzelemre $\frac{1}{0,75} \approx 1,33$, a vendéggyőzelemre 10 és a döntetlenre pedig $\frac{1}{0,15} \approx 6,67$ lenne az odds.

A valódi odds-ok ezeknél kisebbek, ez biztosítja a fogadóiroda hasznát. $1,27 < 1,33$; $9,5 < 10$ és $6 < 6,67$.

Előfordulhat, hogy nem jól határozták meg a téték eloszlását. Ilyenkor kénytelenek változtatni az szorzókon, hogy a játékosokat abba az irányba tereljék, ahol kevesebben fogadnak a kellenénél. Példánkban, ha túl sokan fogadnak a hazai győzelemre és kevesen a döntetlenre, akkor csökkentik a hazai győzelem szorzóját és növelik a döntetlenét.

Számoljuk ki az egy játékra jutó nyeremény várható értékét 100 Ft befektetés esetén!

Ha a hazai csapatra fogadunk, akkor 0,75 valószínűséggel nyerünk 127 Ft-ot, azaz 27 Ft várható nyereségünk lesz és 0,25 valószínűséggel veszítünk 100 Ft-ot. Várhatóan $0,75 \cdot 27 - 0,25 \cdot 100 = -4,75$ Ft a nyereség, ami természetesen igazából veszteség.

Ha 100 Ft-ot teszünk a vendég győzelemre, akkor $0,1 \cdot 950 - 0,9 \cdot 100 = -5$ Ft a várható nyereség.

Ha a döntetlenre fogadunk, akkor $0,15 \cdot 600 - 0,85 \cdot 100 = -5$ Ft a várható nyereség.

Természetesen egy mérkőzést figyelembe véve nem lehet átlagot számolni, de erre úgy tekintünk, mintha sokszor fogadnánk hasonló odds-okkal megadott mérkőzésekre.

Ez azt mutatja, ha mindig csak egyetlen mérkőzésre fogadunk, akkor hosszabb távon szerény veszteséggel kell kalkulálnunk. A valóságban azonban az emberek egyszerre több dologra tippelnek, és csak akkor nyernek, ha mindegyiket eltalálják. Itt a valószínűségek összeszoródnak, hiszen általában az egyes események függetlenek. Ha ez nincs így, akkor nem lehet egyszerre fogadni rájuk. Igaz, hogy a nyereményszorzókat is összeszorozzák a végső nyeremény kiszámításához, de így is sokkal nagyobb veszteséggel kell számolni.

Például, ha egyszerre fogadunk egy 2-es és egy 3-as szorzójú mérkőzésre, akkor $\left(\frac{0,95}{2}\right) \cdot \left(\frac{0,95}{3}\right) \approx 0,15$ a valószínűsége, hogy nyerünk. Ez kevesebb mint egyhatod és csak két mérkőzést kötöttünk össze.

A valóságban nem pontosan így történik a számolás, de a lényegét tekintve erről van szó.

FELADAT

Modellezzétek egy fogadóiroda működését az osztályban! Dolgozzatok ki odds-okat egy olyan eseményre, ahol a végeredmény a véletlentől függ! Például feldobunk két dobókockát és lehet fogadni arra, hogy a dobott számok összege kisebb mint öt, vagy legalább öt, de maximum nyolc, vagy nagyobb mint nyolc. Bármely véletlen kísérlet esetén hasonlóan lehet eljárni, ha az összes eseményt három egymást kizáró esemény összegére bontjuk.

Jó játékot!



65. STATISZTIKAI JELLEMZŐK (Középértékek)

KÖZÉPÉRTÉKEK

Különösen nagy mennyiségű adat esetén az áttekintést segíti, ha valamilyen jellemzőt találunk az egész sokaságra, amivel röviden bemutathatjuk. Ez nevezhető egyfajta adattörmörítésnek. Sok száz vagy ezer adat helyett egy jellemzőt, vagy esetleg néhányat adunk csak meg.

Az adatsokaságot jellemezhetjük a **leggyakrabban előforduló elemével**, ezt **módusznak** nevezzük. (Ha több olyan szám van, ami azonos gyakorisággal fordul elő, akkor ezek a móduszok halmazát alkotják.) Ennek megadása valamit elárul a sokaságról, de ha minden elem csak egyszer-kétszer fordul elő benne, akkor a móduszok halmazának megadásával elég kevés, és viszonylag rosszul kezelhető információhoz jutunk.

Bizonyos sokaságokról valamivel többet mond a sokaság **középső értéke** (természetesen ez megkívánja, hogy az adatok rendezhetők legyenek.) Vagyis rendezzük nagyságrendi sorrendbe az adatokat, és válasszuk ki a középső elemet; ha nincs középső elem, mert páros számú adatunk van, akkor a középső kettő számtani közepét vegyük. Az így kapott számot **mediánnak** nevezzük. (Azaz ha az adathalmaz $2k + 1$ elemből áll, akkor a sorbarendezés után a $(k + 1)$ -edik elem a medián, ha pedig $2k$ elemből áll, akkor a medián a sorrendbe állított elemek közül a k -adik és $(k + 1)$ -edik elem összegének fele.) A medián már egyértelműen meghatározott, de még mindig viszonylag kevés információt hordoz a sokaságról, hiszen az elemek sorának elején és végén a mediántól nagyon különböző elemek is állhatnak.

Megjegyzés

A medián által megadott információt kiegészíti az ún. **alsó és felső kvartilis** értékének megadása. Ezek a mediánhoz hasonló középértékek, de nem a felező értéke az adathalmaznak, hanem az alsó kvartilis a negyedelő, a felső kvartilis pedig a háromnegyedelő érték (vagy alsó negyedelő, felső negyedelő). Ha az adatokról azt is szeretnénk tudni, hogy mennyire térnek el a középen lévőtől, szokás még az alsó és felső decilist használni, amelyek a sorba rendezett adatok egytizedénél, illetve kilentizedénél helyezkednek el.

A medián nem informál bennünket az adatsokaság elemeinek nagyságrendjéről. Ebből a szempontból még több információt kaphatunk a sokaságról akkor, ha minden benne szereplő számot figyelembe veszünk, tehát a **számok összegét osztjuk a darabszámukkal**. Az így kapott értéket nevezzük a **sokaság átlagának** vagy **számtani közepének**. Ez azonban megint csalóka lehet: ha van egy, a többiekhez képest nagyon nagy vagy nagyon kicsi szám a sokaságban, akkor az adatok jelentős része döntően eltérhet az átlagként kapott adattól.

A fentiekből látható, hogy a fent meghatározott középértékek más-más jellegű információt adnak a sokaságról, és noha egyik sem feltétlenül kielégítő önmagában, mégis fontos szerepük van az adatsokaság jellemzésében. Nézzünk néhány példát ezek alkalmazására!

1. példa

Egy osztályban felmérjük azt, hogy a gyerekek közül kinek mi a kedvenc itala. Milyen adattal jellemezhetjük a kapott adatsokaságot?

Megoldás

Egyértelmű, hogy ennél a feladatnál csak a módusz jöhet szóba. Ugyanis nem számszerű, és nem is rendezhető adatokból álló adathalmazról van szó, így a medián és az átlag nem létezik. A módusz megadása azt jelenti, hogy az osztályban melyik italt szeretik a legjobban.

Az olyan adatsokaságoknál, melyek kvalitatív (minőséget kifejező) és összehasonlíthatatlan adatokból állnak, a jellemzés csak a módusszal történhet.

2. példa

Egy munkahelyen összeírjuk mindenkinek az iskolai végzettségét. Arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy ez egy magasán kvalifikált emberekből álló hely-e, vagy pedig csupa alacsony iskolai végzettségű ember dolgozik itt. Milyen adattal jellemezhetjük a kapott adathalmazt?

Megoldás

Nyilvánvaló, hogy mivel nem számszerű adatokról van szó, az átlag nem számítható ki, de az adatok rendezhetőek, tehát a medián, illetve a módusz is meghatározható. A módusz megadása nem mond el semmit, hiszen lehet, hogy legtöbb a nyolc osztályt végzettek száma, de az érettségizettek, diplomások, doktorok együtt már jóval többen vannak. Alkalmasabb a medián ezen adathalmaz jellemzésére, mert itt azt tudjuk megmondani, hogy a dolgozók középvégzettsége mekkora. Ha ez alacsony, akkor itt nem túl sok magas iskolai végzettségű ember van, ha magas, akkor sokan dolgoznak itt pl. diplomával.

3. példa

Felmérjük, hogy az iskolában a tanulók melyik kerületben laknak. Milyen adattal jellemezhetjük a kapott adathalmazt?

Megoldás

A kapott adatok számok, (bár lehetnének akár betűk is a kerületek nevei, attól, hogy számjegyeket írunk le az még nem feltétlenül szám) tehát kiszámítható az átlaguk, azonban eléggé egyértelmű, hogy ez itt semmiféle információt nem ad. Nyilván nincs értelme az olyan típusú kijelentéseknek, hogy „A gyerekek iskolánkba átlagosan a 12 és feledik kerületből érkeztek.” Hasonlóan nem sok információt hordoz a medián megadása, és itt a módusz sem olyan nagyon informatív, bár ez a legalkalmasabb a sokaság jellemzésére.

4. példa

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2016.)

Szabó tanár úrnak ebben az évben összesen 11 darab középszintű matematika érettségi dolgozatot kell kijavítania. Az először kijavított kilenc dolgozat pontszáma:

35, 40, 51, 55, 62, 67, 72, 84, 92.

Az utolsó két dolgozat kijavítása után Szabó tanár úr megállapítja, hogy a 11 dolgozat pontszámának mediánja 64, átlaga 65 pont lett.

Határozza meg az utoljára kijavított két dolgozat pontszámát!

Megoldás

Az egyik dolgozat 64 pontos (mert az adatok száma páratlan). Az először kijavított kilenc dolgozat pontszámának összege 558, ehhez jön még 64 pont: 622 pont. A 11 dolgozat pontszámának összege $11 \cdot 65 = 715$.

A 11. dolgozat pontszáma tehát $(715 - 622 =) 93$ (ami megfelel, mert $93 \geq 64$, így a medián valóban 64).

FELADATOK

1. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2007.)

A 11. c osztályban a diákok olvasási szokásairól érdeklődtek. Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2. Adja meg ezt a kilenc számot!

2. K1

A 11. d osztályba 36 tanuló jár, akiknek a kétharmada lány. A lányok átlagmagassága 168 cm, a fiúké pedig 180 cm. Mennyi az osztályba járó diákok átlagmagassága?

3. K2

Egy ázsiai ország bérből és fizetésből élő dolgozóinak éves bruttó átlagfizetése 12 000 dollár. A fizetések mediánja 8000 dollár. Milyen következtetéseket vonhatunk le ennek a két statisztikai mutatónak az ismeretében?

66. STATISZTIKAI JELLEMZŐK (A középértékek jósága)

A fentiekben foglalkoztunk a leggyakoribb, az adatsokaságot jellemző fogalmakkal az átlaggal, a mediánnal és a módusszal. Természetesen az adatsokaságot bármilyen más, egyéb módon definiált középértékkel lehet jellemezni, hiszen nagyon sokféle szempont dominálhat ennek megadásában.

Felmerül viszont az a kérdés, hogy egy adott középérték mennyire jellemzi jól az adatsokaságot, mennyire nagy az egyes elemektől való eltérése. Ennek megadására újabb mérőszámot vagy mérőszámokat kell bevezetnünk.

Elsőként megadhatjuk az **adatsokaság terjedelmét**, azaz a legnagyobb és legkisebb elem különbségét. Ha ez kicsi, akkor gyakorlatilag bármelyik középérték jól jellemzi az adathalmazt, ha pedig nagy, akkor nem lehet eldönteni, hogy mi mennyi információt szolgáltat. A **terjedelem** másik nagy problémája, hogy egy-egy adatra nagyon érzékeny, tehát nagyon nagy lehet, ha van egy **kiugró adat** a többi között, amely a többihez képest nagyon nagy, vagy nagyon kicsi, holott az adatok lényegében egy szám környékén tömörülhetnek. Ezt szokták úgy kiküszöbölni pl. fizikai kísérletek eredményének kiértékelésekor, hogy a legnagyobb és legkisebb adatot kihagyják az értékelésből, azonban ez nem minden esetben tehető meg. (Természetesen ez a módszer a többi középérték esetén is javítja az értékelés jóságát.)

Vehetnénk azt is, hogy átlagosan mekkora eltérése van az adatsokaság elemeinek a megadott középértéktől, ezt nevezhetnénk átlagos eltérésnek.

Átlagos eltérésre vonatkozó összefüggés (ahol $\bar{X}$ jelöli a szóbanforgó középértéket)

$$\frac{(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_n - \bar{X})}{n}.$$

Ennek azonban van egy óriási hátránya: mivel a megadott középértéknél feltehetően vannak nagyobb és kisebb adatok is az adathalmazban, az összegben szerepelnek pozitív és negatív tagok is. Ezek viszont összességében eredményezhetnek nagyon kicsi számot, holott ők maguk abszolút értékben lehetnek nagyok. Például könnyen belátható, hogy a fenti kifejezés mindig nulla, ha $\bar{X}$ a számtani átlag, függetlenül attól, hogy mik az adathalmaz tagjai.

Ki kell tehát küszöbölni az előjelproblémát az átlagos eltérésből. Erre a legegyszerűbb módszer, ha az eltérések abszolút értékét átlagoljuk, ennek neve átlagos abszolút eltérés.

Átlagos abszolút eltérés az eltérések abszolút értékének az átlaga:

$$\frac{|x_1 - \bar{X}| + |x_2 - \bar{X}| + \dots + |x_n - \bar{X}|}{n}$$

A korábbi tanulmányaink során láthattuk, hogy ez a kifejezés a medián esetén lesz minimális. A másik módszer az előjel kiküszöbölésére a négyzetre emelés. Tehát megadhatjuk az

átlagos négyzetes eltérést, ami az eltérések négyzetének átlaga.

$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n}$$

Az átlagos négyzetes eltérést σ -val jelöljük. Az átlagos négyzetes eltérés akkor lesz minimális, ha $\bar{X}$ helyébe az átlagot helyettesítjük. Az átlagos négyzetes eltérést a számtani közép felírva empirikus szórásnégyzetnek nevezzük, a négyzetgyökét **empirikus szórásnak**, jelölése σ_n .

Felmerülhet az a kérdés, hogy ezen mérőszámok közül melyiket érdemes használni a gyakorlatban. Jó tudni, hogy az átlagtól az adatok legfeljebb 25%-a térhet el a szórás kétszeresénél jobban, legfeljebb 10–11%-a térhet el a szórás háromszorosánál jobban, és legfeljebb 5–6%-a a szórás négyszeresénél jobban. Általában a szórás négyszeresénél jobban nem térnek el az adatok az átlagtól, de az 5–6%-ot biztosan állíthatjuk bármilyen adathalmaz esetén.



P. L. Csebisev (1821–1894)

Ez az eredmény konkrét adathalmazokra vonatkoztatva az úgynevezett empirikus Csebisev-törvény, vagy az átlag körüli szórás empirikus törvénye.

P. L. Csebisev (1821–1894) kiváló orosz matematikus.

„Az elmélet és a gyakorlat kölcsönhatása hozza létre a legszebb eredményeket, s ebből a közeledésből nemcsak a gyakorlat profitál, hatására a tiszta tudomány fejlődése is fellendül: új területeket nyit meg, vagy már régen ismert dolgok új aspektusát mutatja meg.”

(Vekerdi László matematikatörténeti írásaiból 180. oldal, Magyar Tudománytörténeti Intézet, Budapest, 2014)

4. példa

Egy évfolyam diákjainak magasságát mértük fel. A következő táblázatban láthatjuk az eredményeket. Ábrázoljuk oszlopdiagramon az adatokat! Határozzuk meg az adatok móduszát, mediánját és a terjedelmét! Számítsuk ki az átlagot, az átlagos abszolút eltérést a mediántól és az átlagtól is! Állapítsuk meg az adatok empirikus szórásnégyzetét, szórást, valamint azt, hogy az adatok hány %-a tér el az átlagtól a szórás kétszeresénél jobban!

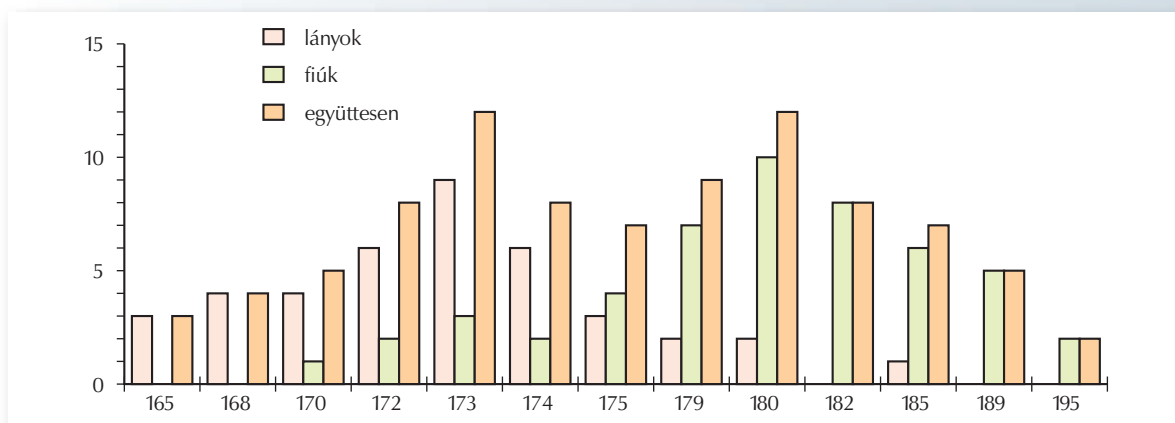
A táblázat utolsó két sorában külön ábrázoltuk a lányok és a fiúk magasságát.

Számítsuk ki külön a fiúk és a lányok magasságának átlagát! Hogyan lehet ezekből az egyesített adatsokaság jellemzőit kiszámítani? Ábrázoljuk ugyanabban a diagramban a két adatsokaságot!

A magasságokat cm-re kerekítve adtuk meg. Az adatokat már nagyság szerint sorbarendeztük és megállapítottuk az adatfajtaikat. A 90 diák esetén 13-féle magasságértéket találtunk. Az egyes adatfajtaikat x_i -vel, az adatfajtaik gyakoriságát k_i -vel, relatív gyakoriságát pedig n_i -vel jelöltük. Jelen esetben $i = 1, 2, 3, \dots, 13$ lehet.

x_i	165	168	170	172	173	174	175	179	180	182	185	189	195
k_i	3	4	5	8	12	8	7	9	12	8	7	5	2
n_i	$\frac{3}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{5}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{9}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{5}{90}$	$\frac{2}{90}$
l	3	4	4	6	9	6	3	2	2	0	1	0	0
f	0	0	1	2	3	2	4	7	10	8	6	5	2

Megoldás



Módusz: a leggyakoribb elem. Ebben az esetben két ilyen is van, ezek alkotják a móduszok halmazát, $m = \{173 \text{ cm}, 180 \text{ cm}\}$.

Medián: a középső elem. Ebben az esetben, mivel páros számú adat van, ezért a két középső elem (a 45. és 46.) átlaga. $M = \frac{175 + 175}{2} = 175 \text{ cm}$.

Terjedelem: a legnagyobb és legkisebb elem különbsége $195 - 165 = 30 \text{ cm}$.

Átlag: $\bar{x} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{13} x_{13}}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{13} x_{13}}{n} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_{13} x_{13} =$
 $= 177,14 \text{ cm}$, mivel $k_1 + k_2 + \dots + k_{13} = n = 90$ az összes adat darabszáma, és $n_i = \frac{k_i}{n}$.

A mediántól való átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{k_1 |x_1 - M| + k_2 |x_2 - M| + \dots + k_{13} |x_{13} - M|}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1 |x_1 - M| + k_2 |x_2 - M| + \dots + k_{13} |x_{13} - M|}{n} =$$

$$= n_1 |x_1 - M| + n_2 |x_2 - M| + \dots + n_{13} |x_{13} - M| \approx 5,23 \text{ cm}.$$

Az átlagtól való átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{k_1 |x_1 - \bar{x}| + k_2 |x_2 - \bar{x}| + \dots + k_{13} |x_{13} - \bar{x}|}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1 |x_1 - \bar{x}| + k_2 |x_2 - \bar{x}| + \dots + k_{13} |x_{13} - \bar{x}|}{n} =$$

$$= n_1 |x_1 - \bar{x}| + n_2 |x_2 - \bar{x}| + \dots + n_{13} |x_{13} - \bar{x}| \approx 5,41 \text{ cm}.$$

Empirikus szórásnégyzet (röviden szórásnégyzet):

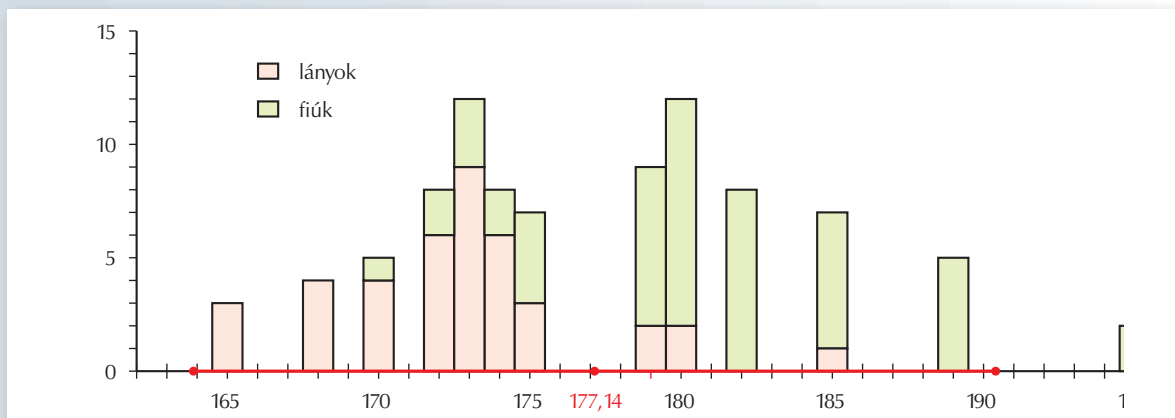
$$\sigma_n^2 = \frac{k_1(x_1 - \bar{x})^2 + k_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + k_{13}(x_{13} - \bar{x})^2}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1(x_1 - \bar{x})^2 + k_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + k_{13}(x_{13} - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_{13}(x_{13} - \bar{x})^2 \approx 44,01 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A szórásnégyzet kiszámítható úgy is, hogy az adatok négyzetének szórásából levonjuk az átlag négyzetét.

$$\sigma_n^2 = \frac{k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \dots + k_{13}x_{13}^2}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} - \bar{x}^2 \approx 44,01 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Empirikus szórás (röviden szórás): $\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2} = 6,63$.



Nézzük az $[\bar{x} - 2\sigma_n; \bar{x} + 2\sigma_n] \approx [177,14 - 2 \cdot 6,63; 177,14 + 2 \cdot 6,63] \approx [163,88; 190,4]$ intervallumon kívül eső elemek számát. Jelen esetben ez csak a két legnagyobb és a három legkisebb adat, vagyis összesen 5 adat, ami jóval belül van a 25%-on.

Számítsuk ki a fiúk és a lányok esetén külön-külön az átlagot.

$$\bar{x}_l = 172,7 \text{ cm}; \bar{x}_f = 180,7 \text{ cm}.$$

Az egyesített minta átlagát kiszámíthatjuk a két minta súlyozott átlagaként, a súlyok az egyes részekben az adatok darabszámát jelentik.

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_l + \bar{x}_f}{k_l + k_f} = \frac{172,7 + 180,7}{90} = 177,14 \text{ cm}.$$

5. példa

Egy osztályban 16 tanuló írt matematika dolgozatot. Az átlag kerekítve 3,81 lett. Senki nem kapott egyest.

- Maximum hány ötös lehetett?
- Lehetséges-e, hogy senki nem kapott ötöst?
- Tudjuk, hogy 11 négyes volt. Hogyan alakulhatott a többi jegy?
- Számítsuk ki az előző esetben kapott adatsokaságok szórását!
- Lehetséges-e, hogy a módusz 5 és a medián 4 legyen?

Megoldás

Számítsuk ki a jegyek összegét. A kerekítési szabályok miatt:

$$3,805 \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{16}}{16} < 3,815;$$

$$60,88 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{16} < 61,04.$$

A kapott két szám között csak egy egész szám van, a 61. Tehát a tizenhat szám összege 61.

a) A legtöbb ötös akkor lehetne, ha csak kettesek lennének mellette. Legyen x db ötös és $(16 - x)$ db kettes, akkor

$$5x + 2(16 - x) = 61,$$

$$5x + 32 - 2x = 61.$$

$3x = 29$, de sajnos ez nem lehetséges, mert x nem lenne egész szám. Tehát legalább két hármas, vagy egy négyes kell legyen, ekkor

$$5x + 2(15 - x) + 4 = 61,$$

$$5x + 34 - 2x = 61,$$

$$3x = 27,$$

$$x = 9.$$

Így a megoldás:

jegyek	1	2	3	4	5
darabszám	0	6	0	1	9

b) Lehetséges, hogy senki nem kapott ötöst, ehhez elegendő mutatnunk egy megfelelő adathalmazt. Például a következő megfelel:

jegyek	1	2	3	4	5
darabszám	0	0	3	13	0

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 13 = 61.$$

c) Tudjuk, hogy 11 db négyes volt. Ez azt jelenti, hogy a maradék öt jegy vagy kettes, vagy hármas, vagy ötös. Legyen x db ötös, y db hármas és z db kettes.

$$5x + 3y + 2z = 17, \text{ és tudjuk, hogy}$$

$$x + y + z = 5,$$

$x, y, z \in \mathbf{N}$. Vonjuk ki az első egyenletből a második egyenlet kétszeresét!

$$3x + y = 7.$$

Ha $x = 0$, akkor $y = 7$ lenne, ami nem lehetséges, mert mindhárom ismeretlen csak kisebb, vagy egyenlő lehet ötnél.

Ha $x = 1$, akkor $y = 4$ és $z = 0$. Ha $x = 2$, akkor $y = 1$ és $z = 2$. Ha $x = 3$ lenne, akkor az y már negatív lenne, ami nem lehetséges.

Összefoglalva:

jegyek	1	2	3	4	5
darabszám	0	0	4	11	1
darabszám	0	2	1	11	2

d) Az első esetben $\sigma^2 \approx \frac{4 \cdot (3 - 3,81)^2 + 11 \cdot (4 - 3,81)^2 + (5 - 3,81)^2}{16} \approx 0,27735$, $\sigma \approx 0,527$.

A második esetben

$$\sigma^2 \approx \frac{2 \cdot (2 - 3,81)^2 + (3 - 3,81)^2 + 11 \cdot (4 - 3,81)^2 + 2 \cdot (5 - 3,81)^2}{16} \approx 0,65235, \sigma \approx 0,808.$$

- e) Ahhoz, hogy a módusz öt legyen, legalább öt db ötösnek kell lennie. Ha a medián négy, ez azt jelenti, hogy az adatokat nagyság szerint sorba rakva a nyolcadik és a kilencedik elem is négyes. Ezek után egy lehetséges megoldás:

jegyek	1	2	3	4	5
darabszám	0	3	4	2	7

Idézet

Alapigazság, hogy ha nincs módunkban meghatározni, mi az, ami igaz, akkor azt kell követnünk, ami a legvalószínűbb. (Descartes)

6. példa

Vettünk 20 db mogyorós csokoládét, és mindnek lemértük a tömegét. A következő eredményeket kaptuk: 97,8; 98,7; 97,7; 98,5; 98,0; 99,0; 98,6; 98,0; 98,2; 100,2; 98,6; 100,5; 98,7; 98,8; 98,3; 100,1; 97,2; 99,2; 98,5; 100,4.

- Mennyi a mérések átlaga, szórása?
- A csokoládé papírján azt olvassuk, hogy a csokoládé „tömege 100 g”. Hány százalékkal tér el az átlag a névleges értéktől? Beleesik-e a névleges érték az $[a - s; a + s]$ intervallumba, ahol a az átlag, σ a szórás? A mért adatok hány százaléka esik ebbe az intervallumba?
- Nem voltunk megelégedve a mért értékekkel, ezért újabb 10 csokoládénak mértük meg a tömegét. Az újabb adatok: 101,0; 99,8; 98,8; 97,5; 100,7; 97,1; 97,6; 100,5; 100,0; 96,6. Számítsuk ki ebben az új 10 db csokoládéből álló mintában az átlagot, a szórást, illetve az $[a - s; a + s]$ intervallumba eső adatok arányát!



Megoldás

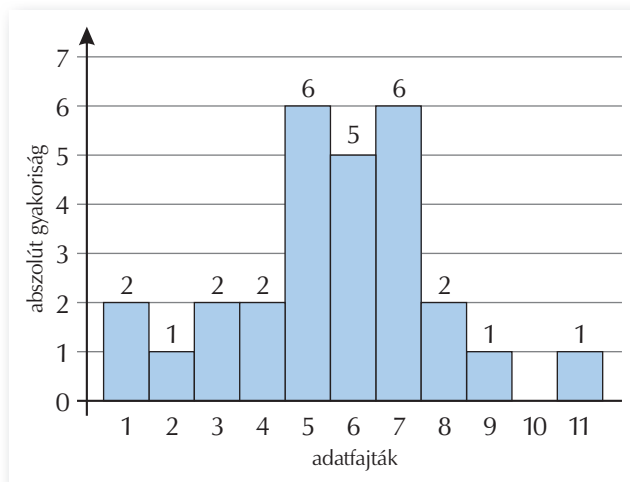
- A mérések átlaga 98,75 g, szórása 0,81 g.
- 1,25% az eltérés a névleges értéktől. A névleges érték nem esik bele az intervallumba. A $[98,0; 99,6]$ intervallumban 13 elem van, ami 65%.
- Átlag: 98,96 g, szórás 2,4 g, a $[96,6; 101,4]$ intervallumba esik mind a 10 elem, vagyis az intervallumba esők aránya 100%.

FELADATOK

1. K1 Számítsuk ki a következő adatok főbb statisztikai jellemzőit (medián, átlag, módusz, terjedelem, szórás)! 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25, 22, 12, 14.

2. K1

Határozzuk meg az alábbi oszlopdiagramon megadott adatok főbb statisztikai jellemzőit (medián, átlag, módusz, terjedelem, szórás)! A vízszintes tengelyen az adatfajtákat, a függőlegesen pedig, az abszolút gyakoriságukat ábrázoltuk.



3. E1

Egy 50 elemből álló statisztikai adatsokaság átlaga 180, szórása 8. Az adatokat kibővítjük egy 51. és egy 52. elemmel, ezek a 192 és a 200. Hogyan változik az adatsokaság átlaga és szórása?

4. K1

Iskolátokban keressetek olyan aktuális problémát, amivel kapcsolatban érdemes statisztikai adatokat gyűjteni! Egy alkalmas módszerrel ábrázoljátok az adatokat és számítsátok ki a tanult statisztikai jellemzőket!

A statisztika humora

1. Statisztikailag bizonyított: a válások 100%-a házassággal kezdődik.
2. Csak annak a statisztikának hiszek, amelyet magam hamisítottam meg. (Mark Twain)
3. Háromféleképpen lehet hazudni: igennel, nemmel és statisztikával. (Napóleon)



67. MENNYI MINDENT TUD A DOBOZ (BOX PLOT) DIAGRAM?

A statisztika nagyrészt számszerűsíthető adatok feldolgozásával foglalkozik. Most mi is ezekből indulunk ki.

Megismerkedünk egy új egyszerű, de annál hatékonyabb módszerrel, aminek segítségével szemléletesen érzékeltethetjük az adatok eloszlását.

Ehhez először az adatokat nagyság szerint sorba rendezzük, utána pedig négy egyenlő darabszámú részre osztjuk.

A négy részt elválasztó elemeket szokás kvartiliseknek (angolul: quartile) nevezni. Az angol elnevezés kezdőbetűjét használjuk a jelölésnél.

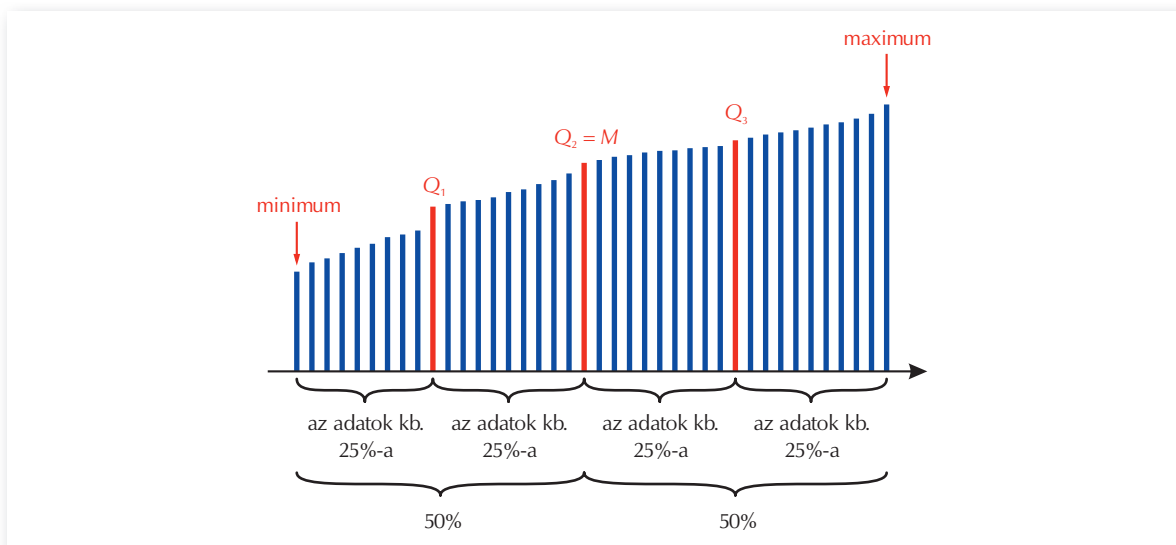
Q_0 a az adatsokaság minimuma.

Q_1 az első és második negyedek elválasztó szám, tehát az adatoknak körülbelül a 25%-a kisebb és körülbelül a 75%-a nagyobb nála. Alsó kvartilisnek hívjuk, de szokás első kvartilisnek is nevezni.

Q_2 a második és a harmadik részt választja el, vagyis az adatoknak körülbelül az 50%-a kisebb és körülbelül 50%-a nagyobb nála. Megfelezi az adatokat. Ezt már ismerjük, itt középső kvartilis a neve, de valójában ez a medián.

Q_3 a harmadik és a negyedik negyedek választja el, az adatoknak körülbelül a 75%-a kisebb és körülbelül 25%-a nagyobb nála. Felső kvartilisnek hívjuk, de szokás harmadik kvartilisnek is nevezni.

Q_4 az adathalmaz maximuma.



A gyakorlatban ezeknek a számoknak a meghatározása nem is olyan egyszerű.

$M = Q_2$ = medián: a nagyság szerint sorba rendezett adatok felénél helyezkedik el. Páratlan elemszám esetén a középső elem ($2k + 1$ db elem esetén a $k + 1$ -edik elem), páros elemszám esetén a két középső elem átlaga ($2k$ db elem esetén a k -adik és a $k + 1$ -edik elem számtani közepe).

Q_1 = alsó kvartilis: a mediánnal kettéválasztott minta első felének a mediánja. Páratlan elemszám esetén a mediánt nem vesszük figyelembe a számításnál. Páros elemszámnál pedig mivel a két középső elem között vágtuk ketté az adathalmazt, ezért tulajdonképpen a medián nincs az elemek között. (Ha a k -adik és a $k + 1$ -edik elem megegyezik, akkor ezek átlaga is ugyan az lesz, tehát úgy néz ki, mintha a medián az egyik elem lenne.)

Q_3 = felső kvartilis: a mediánnal kettéválasztott minta felső felének a mediánja. Páratlan elemszám esetén a mediánt nem vesszük figyelembe a számításnál. Páros elemszámnál pedig a mivel a két középső elem között vágtuk ketté az adathalmazt, ezért tulajdonképpen medián nincs az elemek között.

A gyakorlatban a kvartilisek kiszámítását az adatkezelő programok végzik.

Ezekben nem pontosan ugyanígy számolnak, de nagyon sok adat esetén nem kapunk lényegesen különböző eredményt (lásd a lecke utáni olvasmányt).

Itt most csak néhány elemből álló adatsokaság esetén mutatjuk be a számolás menetét.

1. példa

Határozzuk meg a következő adatsokaságok kvartiliseit!

- a) 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25.
- b) 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25, 22.
- c) 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25, 22, 12.
- d) 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25, 22, 12, 14.

Megoldás

a) Először nagyság szerint sorba rendezzük az adatokat:

9, 11, 11 | 13, 15, 16 | 17, 20, 21 | 21, 23, 25

A színes vonalakkal négy egyenlő részre osztottuk a sorba rendezett adatokat.

Mivel $12 = 2 \cdot 6$ db adatunk van, ezért a medián a hatodik és a hetedik elem átlaga

$$Q_2 = M = \frac{16 + 17}{2} = 16,5$$

Az alsó kvartilis az első hat elem mediánja, tehát a harmadik és a negyedik elem átlaga.

$$Q_1 = \frac{11 + 13}{2} = 12.$$

A felső kvartilis az utolsó hat elem mediánja, tehát a kilencedik és a tizedik elem átlaga.

$$Q_3 = \frac{21 + 21}{2} = 21.$$

Q_0 = a legkisebb elem = 9

Q_4 = a legnagyobb elem = 25

Látható, hogy a kvartilisek olyan számok, amelyek akár a számsorba is beilleszthetők (vagy éppen tagjai az adathalmaznak) és jól elválasztják az előtte és utána lévő elemeket.

9, 11, 11, Q_1 , 13, 15, 16, Q_2 , 17, 20, 21, Q_3 , 21, 23, 25

9, 11, 11, 12, 13, 15, 16, 16,5, 17, 20, 21, 21, 21, 23, 25

b) Először nagyság szerint sorba rendezzük az adatokat:

9, 11, 11 | 13, 15, 16, 17, 20, 21, 21 | 22, 23, 25

Mivel $13 = 2 \cdot 6 + 1$ db adatunk van, ezért a medián a hetedik elem, $Q_2 = M = 17$

Az alsó kvartilis az első hat elem mediánja, tehát a harmadik és a negyedik elem átlaga.

$$Q_1 = \frac{11 + 13}{2} = 12.$$

A felső kvartilis az utolsó hat elem mediánja, tehát a tizedik és a tizenegyedik elem átlaga.

$$Q_3 = \frac{21 + 22}{2} = 21,5.$$

Q_0 = a legkisebb elem = 9

Q_4 = a legnagyobb elem = 25

c) Először nagyság szerint sorba rendezzük az adatokat:

9, 11, 11, 12, 13, 15, 16 | 17, 20, 21, 21, 22, 23, 25

Mivel $14 = 2 \cdot 7$ db elemünk van, ezért a medián a hetedik és a nyolcadik elem átlaga

$$Q_2 = M = \frac{16 + 17}{2} = 16,5$$

Az alsó kvartilis az első hét elem mediánja, vagyis a negyedik elem: $Q_1 = 12$.

A felső kvartilis az utolsó hét elem mediánja, vagyis a tizenegyedik elem: $Q_3 = 21$.

$Q_0 =$ a legkisebb elem = 9

$Q_4 =$ a legnagyobb elem = 25.

d) Először nagyság szerint sorba rendezzük az adatokat:

9, 11, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 21, 22, 23, 25

Mivel $15 = 2 \cdot 7 + 1$ db elemünk van, ezért a medián a nyolcadik elem lesz:

$$Q_2 = M = 16.$$

Az alsó kvartilis az első hét elem mediánja, vagyis a negyedik elem: $Q_1 = 12$.

A felső kvartilis az utolsó hét elem mediánja, vagyis a tizenkettedik elem: $Q_3 = 21$.

$Q_0 =$ a legkisebb elem = 9

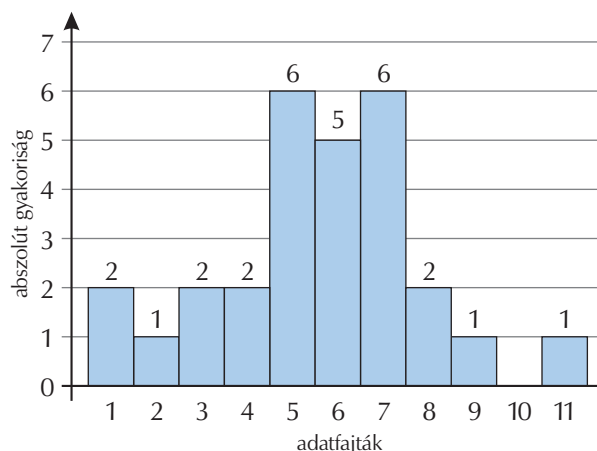
$Q_4 =$ a legnagyobb elem = 25.

Megjegyzés:

A gyakorlatban jóval több elem esetén kell meghatározni a kvartiliseket, de csak a darabszám négygyel való osztási maradéka határozza meg, hogy melyik esetre hasonlít a megoldás.

2. példa

Határozzuk meg az alábbi oszlopdiagrammal megadott adatok kvartiliseit! A vízszintes tengelyen az adatfajtákat, a függőlegesen pedig az abszolút gyakoriságukat ábrázoltuk.



Megoldás

Ha összeadjuk az egyes oszlopok magasságait, akkor megkapjuk, hogy 28 db adatunk van. Mivel a 28 négygyel osztható, ezért a megoldás az első feladat „a” részére hasonlít.

1, 1, 2, 3, 3, 4, 4 | 5, 5, 5, 5, 5, 6 | 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7 | 7, 7, 7, 8, 8, 9, 11

Leírtuk őket nagyság szerint sorba rendezve és a színes vonalakkal négy egyenlő részre osztottuk.

A medián a 14. és a 15. elem átlaga lesz. $Q_2 = M = \frac{6+6}{2} = 6$.

Az alsó kvartilis a hetedik és nyolcadik elem átlaga $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

A felső kvartilis a 21. és a 22. elem átlaga $Q_3 = \frac{7+7}{2} = 7$.

Q_0 = a legkisebb elem = 1

Q_4 = a legnagyobb elem = 11.

Ennek az öt számnak (angolul: five-number summary) a segítségével újabb hasznos statisztikai mutatókat határozhatunk meg.

$Q_4 - Q_0 = T$: a már ismert terjedelem, ami megmutatja, hogy milyen széles skálán helyezkednek el az adatok.

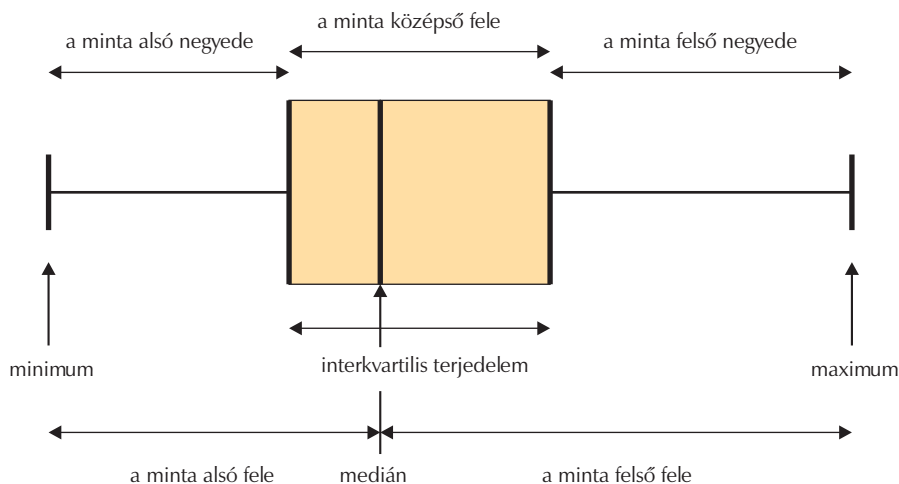
$Q_3 - Q_1 = IKV$: **interkvartilis terjedelem**, vagy félterjedelem, ami megmutatja, hogy az adatok középső fele milyen széles skálán helyezkedik el. Ez általában nem a terjedelem fele. Szokás még IQR-rel (InterQuartile Range) is jelölni.

Mindezeket a mutatókat egyetlen grafikus módszerrel meg tudjuk jeleníteni. Ezt hívjuk doboz diagramnak.

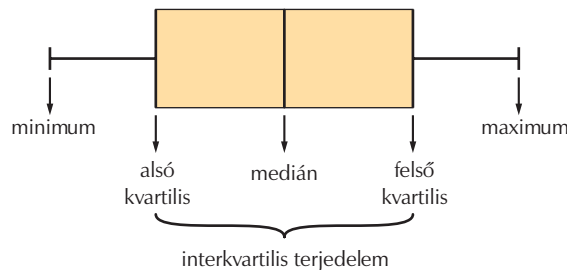
Az elnevezés nem egységes sem Magyarországon sem a nemzetközi szakirodalomban. Nálunk szokás még doboz-bajusz (angolul box and whiskers plot) diagramról, vagy csak **box-plot diagramról** beszélni. Meghonosodott még a **sodrófa diagram** elnevezés is, ami a diagram alakjára utal. Mivel ez a diagram általában nem szimmetrikus, ezért ez az elnevezés kicsit megtévesztő lehet.

Mi is az a doboz diagram?

A terjedelem, az interkvartilis terjedelem, a medián, a legkisebb és a legnagyobb érték ábrázolására szolgáló **grafikus eszköz**. Az interkvartilis terjedelmet egy dobozzal (téglalappal) szemlélteti, ebben van behúzva a medián, míg a maximum és minimum értékeket egy-egy talppal ábrázoljuk. A doboz elhelyezkedése a teljes talphoz viszonyítva, illetve a medián helyzete a dobozon belül információt ad az eloszlásról. Az ábra lehet függőleges és vízszintes elhelyezkedésű is. A diagram mellett fel szokták tüntetni, hogy hány adat felhasználásával készült.



Amint látható a doboz diagram elkészítéséhez éppen a kvartilisekre van szükség.



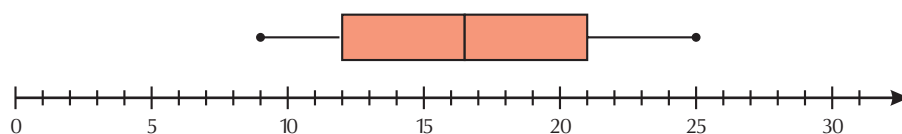
3. példa

Készítsük el az első feladat „a” részéhez tartozó doboz diagramot!

9, 11, 11 | 13, 15, 16 | 17, 20, 21 | 21, 23, 25

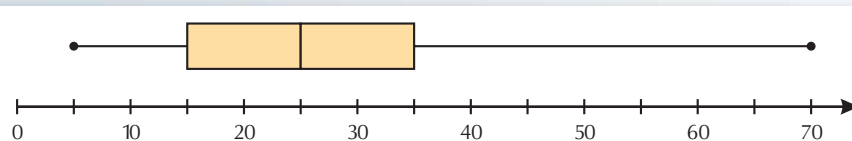
Minimum: $Q_0 = 9$, alsó kvartilis: $Q_1 = 12$, medián: $Q_2 = 16,5$, felső kvartilis: $Q_3 = 21$, maximum: $Q_4 = 25$.

A képen látható doboz diagram az adott minta adatait szemlélteti.



4. példa

Határozzuk meg az adott doboz diagram alapján az adatsokaság kvartiliseit, terjedelmét, interkvartilis terjedelmét!



Megoldás

Minimum: $Q_0 = 5$, alsó kvartilis: $Q_1 = 15$, medián: $Q_2 = 25$, felső kvartilis: $Q_3 = 35$, maximum: $Q_4 = 70$. Terjedelem: $T = Q_4 - Q_0 = 70 - 5 = 65$, Interkvartilis terjedelem $IKT = Q_3 - Q_1 = 35 - 15 = 20$.

A kiugró adatok kezelése:

A statisztikában **kiugró adat**nak (outlier) azt az adatot nevezzük, amely jelentősen eltér a többi adattól. Ilyen adat keletkezhet pl. egy mérés nagy szórása esetén, de jelezhet mérési hibát is. Esetleg elírás történt. Általános definíció nincs arra nézve, hogy mit értünk „jelentős” eltérés alatt. Egy gyakran használt megközelítés szerint azok az adatok tekinthetők kiugróknak, amelyek eltérése a felső kvartilistól a féltérjedelem 1,5-szeresénél nagyobb „felfelé”, vagy az alsó kvartilistól a féltérjedelem 1,5-szeresénél

is nagyobb mértékben tér el „lefelé”. A kiugró adatok esetén el kell dönteni, hogy figyelembe vesszük-e azokat a doboz diagram készítésénél, vagy nem. Ha nem vesszük figyelembe, akkor még mindig ábrázolhatjuk őket pontokkal a grafikonunkon. Ilyen esetekben, ha például felfelé vannak kiugró adatok, akkor a felső talpat a felső kvartilis plusz 1,5 IQR-nél húzzuk meg. A másik irányba ugyanígy szokás eljárni.

5. példa

Hogyan módosul a 4. példa doboz diagramja, ha a kiugró adatok kezelésére vonatkozó irányelveket is figyelembe vesszük?

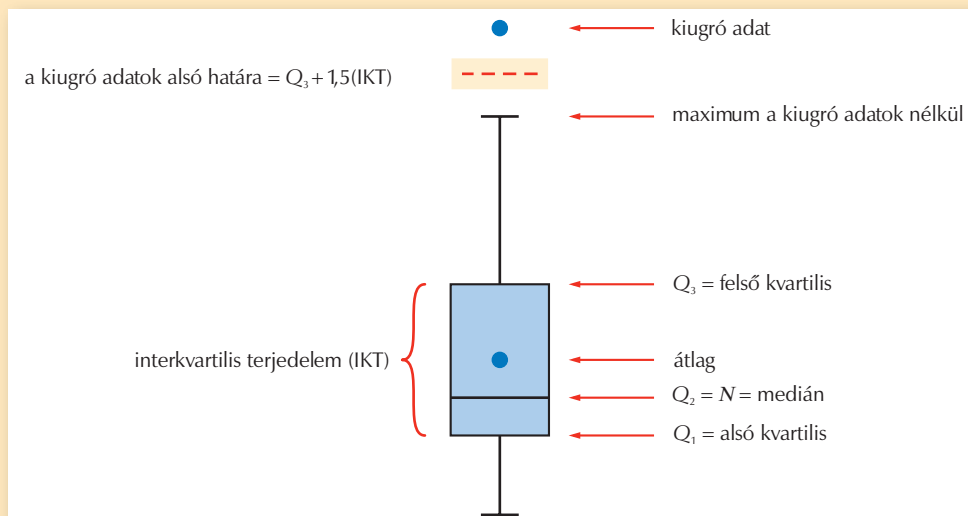
Megoldás

IKV = 20, Mivel a minimum csak tízzel kevesebb, mint az alsó kvartilis, ezért ezen nem változtatunk. A maximum viszont 35-tel nagyobb a felső kvartilisnél ami több mint az *IKV* 1,5 szerese, ezért a felső talpat $35 + 1,5 \cdot 20 = 65$ -nél húzzuk meg és az ennél nagyobb adatokat egy-egy ponttal ábrázoljuk.

Megjegyzés:

Találkozhatunk az *extrém adat* fogalmával is (extreme outlier), amivel kapcsolatban a szakirodalom általában a fenti meghatározáshoz hasonlóan fogalmaz, de a félterjedelem 3-szorosánál húzza meg a határt.

A doboz diagram készítésénél néha feltüntetjük az adatok átlagát a dobozban egy ponttal.



FELADATOK

1. K1

Az alábbi táblázat egy osztály diákjainak az egy havi zsebpénzét mutatja. Az első sor az adatfajta, a második sor pedig az abszolút gyakoriságukat.

x_i (Ft)	1000	4000	10 000	12 000	13 000	15 000	22 000	25 000
k_i (db)	1	4	5	7	4	2	1	1

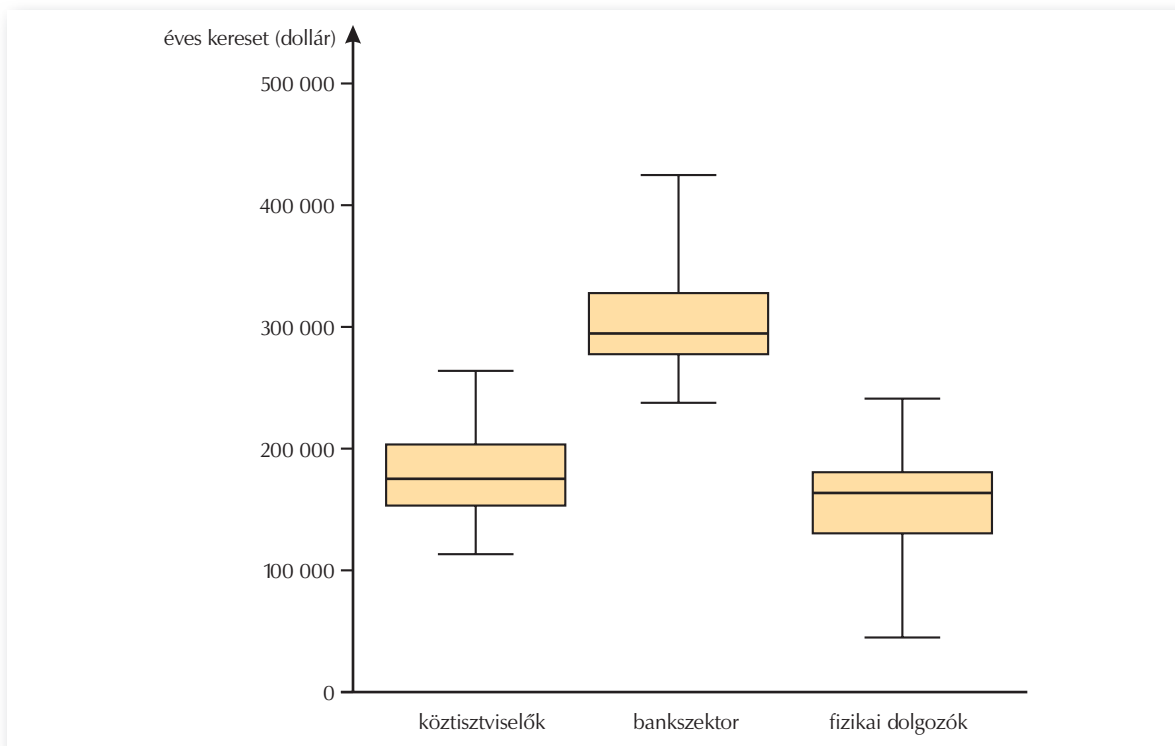
- a) Hányan járnak az osztályba?
- b) Ábrázoljuk az adatok eloszlását oszlopdiagramon!
- c) Számítsuk ki az adathalmaz kvartiliseit!
- d) Ábrázoljuk az adatokat doboz diagram segítségével!

2. K1

Készítsétek el az első példához tartozó doboz diagramokat!

3. K2

Az alábbi függőlegesen elhelyezett doboz diagramok egy ország három szektorában dolgozók éves keresetét mutatják dollárban. Az első a köztisztviselők, a második a bankszektor, a harmadik a fizikai dolgozók éves bérét ábrázolja.



- a) Melyik szektorban a legmagasabb és hol a legalacsonyabb az átlagjövedelem?
- b) Melyik szektorban tapasztalunk a medián értékénél jóval magasabb jövedelmeket?
- c) Igaz, vagy hamis?
 - I: A diagramok alapján megállapíthatjuk, hogy a fizikai dolgozóknál a maximális jövedelem nem éri el a bankszektorban elérhető minimális jövedelmet.
 - II: A közsféra mediánja kevesebb, mint a bankszektor minimuma.

4. E1

Vizsgáljátok meg iskolátok kompetenciamérés eredményeit. Könnyedén megtaláljátok például a 2019-es adatokat a következő linken:

www.kir.hu/okmfit/files/OKM_2019_Orszagos_jelentes.pdf

Az eredményeket egy kicsit átalakított dobozdiagram segítségével ábrázolják. Figyeljétek meg, milyen eszközökkel bővítik a dobozdiagram lehetőségeit, milyen plusz információkat jelenítenek meg. Például az adatok alsó és felső 5%-át levágják.

5. K2

Keressetek további dobozdiagramokat, amelyeket statisztikai adatok ábrázolására használnak!

A KVARTILISEK KISZÁMÍTÁSA KÜLÖNBÖZŐ SZÁMÍTÓGÉPES PROGRAMOK ALKALMAZÁSÁVAL (Olvasmány)

MÓDSZEREK A KVARTILISEK MEGHATÁROZÁSÁRA

A kvartilisek meghatározására diszkrét eloszlások esetén a gyakorlatban több módszer is elfogadott. Mi az alábbi definíciót használjuk (1. módszer):

- A nagyság szerint növekvő sorba rendezett adatokat a mediánál két részre osztjuk.
Ha páratlan számú adattal dolgozunk, akkor a mediánt (tehát a sorbarendezett adatok középső elemét) elhagyjuk az adatok közül. Ha páros számú adattal dolgozunk, akkor egyszerűen középen ketté választjuk az adatokat.
- Az alsó kvartilis az eredeti adathalmaz „alsó felének”, a felső kvartilis pedig a „felső felének” a mediánja.

Az ehhez hasonló 2. módszer páros elemszámú sokaság esetén az 1. módszerrel megegyező módon számol. Páratlan elemszám esetén azonban nem hagyja el a mediánt, hanem az adatok alsó felénél és felső felénél is figyelembe veszi, és az így kapott (fél-)adathalmazok mediánjaként kapja az alsó és a felső kvartilist.

A leggyakrabban használt számítógépes programok közül a GeoGebra az 1. módszerrel számol, viszont a legtöbb táblázatkezelő program (köztük az MS Excel) a fentiektől részben eltérő módon dolgozik: páratlan számú adatnál ugyanúgy számol, mint a 2. módszer, viszont páros számú adatnál attól eltérően adja meg a kvartiliseket. Nem a szóba jövő két adat átlagát, hanem azoknak az 1:3 arányú súlyozott átlagát veszi Q_1 -nél és 3:1 arányú súlyozott átlagot a Q_3 -nál. (Nevezzük ezt 3. módszernek, ezt használja tehát az MS Excel KVARTILIS és az újabb verziók KVARTILIS.TARTALMAZ függvénye.)

Az egyes módszerekkel kapott **kvartilis értékek** az első 8, 9, 10, 11, 10 000, illetve 10 001 pozitív számból álló adatsokaság esetén:

Adatok	1. módszer			2. módszer			3. módszer		
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_1	Q_2	Q_3	Q_1	Q_2	Q_3
1-8	2,5	4,5	6,5	2,5	4,5	6,5	2,75	4,5	6,25
1-9	2,5	5	7,5	3	5	7	3	5	7
1-10	3	5,5	8	3	5,5	8	3,25	5,5	7,75
1-11	3	6	9	3,5	6	8,5	3,5	6	8,5
1-10 000	2500,5	5000,5	7500,5	2500,5	5000,5	7500,5	2500,75	2500,5	7500,25
1-10 001	2500,5	5001	7501,5	2501	5001	7501	2501	5001	7501

Amint látható, ha kevés adatunk van, akkor az egyes módszerek egészen eltérő eredményekre vezethetnek. Ha az adatok száma jóval nagyobb, például több százezer, akkor ezek az eltérések már észre sem vehetők.



FOGALOMTÁR

*-gal az emelt szinten előforduló fogalmakat jelöltük.

NÉVJEGYZÉK

Arkhimédész 73
Eratoszthenész 89
Euler 234
Newton, Sir Isaac 304
Pascal, Blaise 304
Csebisev, Pafnutij Lvovics 362
Descartes 214
Lewis Carroll – eredeti nevén
Charles 51
Lutwidge Dodgson 51
Mark Twain 367
Napóleon 367
Neumann János 100
Richter, Charles Francis 58

FOGALMAK

10-es alapú logaritmus 39

A

abszolút hiba 71
adathalmaz 359
adatsokaság 359
adott pont 222
alakzat egyenlete 25
alapszám (számrendszeré) 99
alapvektor (bázisvektor) 278
alfabetikus számírás 77
átlag 359
átlagos abszolút eltérés 362
átlagos négyzetes eltérés 362

B

bázisvektor (alapvektor) 109
binomiális együtthatók 297
binomiális eloszlás 347
binomiális tétel * 299
box-plot diagramm 368
boks and whiskers
plot 371

C

$\cos x$ függvény * 185

CS

csúcs, pont (gráfban) 311

D

decibel skála 55
déloszi probléma 164

Descartes-féle koordináta-rendszer
277
doboz diagramm 371

E

„a” alapú logaritmus * 40
egyenes egyenletének
- általános alakja 223
- irányítenezős alakja * 223
- normálvektoros alakja * 279
egyértelmű vektorfelbontási tétel
109
egységkör * 176
egységvektor 105
egyszerű gráf 312
él (gráfban) 311
emelkedési szög 140
empirikus szórás 362
eratoszthenészi szita * 92
érintési pont (egyenes és kör) 246
érintők egyenlete 247
exponenciális
- exponenciális egyenlet 32
- exponenciális egyenletrendszer 36
- exponenciális egyenlőtlenség 37
- exponenciális függvény 28
euklideszi algoritmus * 94

F

fa, fagráf * 331
fagráf éleinek a száma * 331
felezőpont koordinátái (szakaszé)
113
fix pont (egyenesé) 239
fok, fokszám (gráfban) 325
fokszámtétel * 325
fókusz (paraboláé) * 259
forgásszög * 151
futó pont (egyenesé) 222
független események * 340
független események szorzata * 341
függvény
- szigorúan monoton növekvő 181
- szigorúan monoton csökkenő 181
függvénytranszformációk
- függvényérték transzformációja
182
- függvényváltozó transzformációja
183

G

gráf 311
gyökvonás, n -edik gyök 14

gyökvonás azonosságai 19

H

hatványozás azonosságai 11
helyvektor 111
hiba, hibakorlát 72
hieroglifikus számírás 77
helyiértékes számírás 77
hurokél 312

I

interkvartilis terjedelem IKV 371
invariáns (megmaradó) mennyiség
286
inverz függvény
- inverz függvények (egyszerűek)
187
irányított gráf 318
irányszög 234
iránytangens 235
irányvektor 223
irányított gráf 318
izolált pont 312
izomorfia (gráfoké) * 321

K

kétismeretlenes másodfokú
egyenlet általános alakja
és a kör egyenlete 242
két pont távolsága 218
két vektor
- merőlegességének a feltétele 273
- szöge 278
kiegészítő (komplementer) gráf
324
kiegészítő szögek szögfüggvényei *
194
kiugró adat 361
komplementer összeszámolás 289
komponens (gráfé) * 313
koszinusz 126
koszinusztétel 156
kör (gráfban) * 335
kör egyenlete (koordinátagemet-
riai) 241
közelítő érték 71
kvartilis 359

L

legkisebb közös többszörös 95
legnagyobb közös osztó 93
legnagyobb valószínűség elve 349
lehajlási szög (depressziószög) 140

logaritmus
 – logaritmus azonosságai 44
 – logaritmusfüggvény 41
 – logaritmusfüggvény tulajdonságai 42
 logaritmosos egyenlet 48
 logaritmosos egyenletrendszer 52
 logaritmosos egyenlőtlenség 53
 logikai szita 287

M

maradékos osztás 79
 medián 359
 meredekség (iránytényező) 223
 merőlegesség feltételei (két egyenesé) 227
 metszéspont (egyenes és kör) 246
 mintavétel
 – visszatevéses mintavétel 348
 – visszatevés nélküli mintavétel 348
 módusz 359

N

normálvektor 279

O

odds 357
 osztási maradék 86
 oszthatóság 79
 oszthatósági szabályok 84

Ö

összefüggő gráf * 313
 összegvektor koordinátái 111
 összetett szám 92

P

parabola (koordinátageometria) * 259

– parabola egyenlete * 260
 paraméter (paraboláé) * 259
 párhuzamosság feltételei (két egyenesé) 231
 Pascal-háromszög * 301
 permanenciaelv 25
 pitagoraszai azonosság (trigonometrikus) 172
 pont, csúcs (gráfban) 311
 pótszőgek szögfüggvényei * 137
 prímszám 88

R

racionális kitevőjű hatványozás 26
 relatív hiba, hibakorlát 71
 relatív prím 93
 Richter-skála 58

S

sin x függvény * 179
 skalár (mennyiség) 103
 skaláris szorzat 271
 – koordinátákkal 277
 – tulajdonságai 272
 (kommutativitás, disztributivitás) 272
 skatulyaelv 288
 súlyozott gráf * 335
 súlypont koordinátái 217

SZ

szabadvektor 111
 szakasz felezőpontjának koordinátái 217
 számelmélet 90
 számrendszer 98
 szinusz 126
 szinusztétel 142
 szórásnégyzet 362

szórás 362
 szögfüggvények 126

T

tangens 126
 tg x függvény * 189
 teljes gráf 312
 – éleinek száma * 328
 tengelymetszet 221
 terjedelem 361
 természetes alapú logaritmus * 40
 területképlet 141
 többszörös él 312
 trigonometrikus
 – alapegyenletek 195
 – alapegyenlőtlenségek 208
 – egyenletek 201
 – egyenletek grafikus megoldása 202
 – függvények inverze * 42, 187
 – területképlet 151
 – egyenlőtlenségek * 208
 – egyenlőtlenségek grafikus megoldása * 210

Ú, Ü

út (gráfban) * 313

V

várható érték 358
 vektor
 – hossza 218
 – koordinátái 111
 – négyzete 281
 – számszorosának koordinátái 111
 vektorok
 – különbségének koordinátái 111
 – összegének koordinátái 111
 vezéregyenes (paraboláé) * 259

FORRÁSJEGYZÉK

84. Pierre de Fermat megjegyzése Diophantosz Aritmetika c. könyvének 8. pontjához
108. Eukleidesz: A geometriához nem vezet királyi út. (Ptolemaiosz, egyiptomi király kérdésére, hogy van-e könnyebb módszer a geometria elsajátítására, mint az Elemek áttanulmányozása)
149. Arthur Conan Doyle: A Musgrave-szertartás, Sherlock Holmes emlékiratai (fordító: Katona Tamás), Kriterion Kiadó, Bukarest, 1976.
174. Pihen, Róka Sándor: A matematika humora, Tóth Könyvkereskedés és Kiadó, 1998.
239. Platón akadémia bejárata feletti felirat
252. Galileo Galilei: Assaying Master, 1623
295. Arthur Conan Doyle: Az Agra kincse, Sherlock Holmes történetei, Hermész Kiadó, 2015
306. Sir Isaac Newton sírkövén álló latin nyelv felirat
<http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/jegyzetek/eletrajzok/n.html>
364. Csebisev: Idézet, Csebisev in Vekerdi László matematikatörténeti írásából, 180. oldal, Magyar Tudománytörténeti Intézet, Budapest, 2014

KÉPJEGYZÉK

Illusztráció: Urmai László

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók:

Borító: Shutterstock Képügynökség

22. oldal: Claude Duflors: Marin Mersenne metszete (1630) © CULTiRiS / AKG-Images / British Library

51. oldal: Tim Burton: Alice Csodaszországban (2010) © CULTiRiS / INTERFOTO / NG Collection

58. oldal: Charles Francis Richter © CULTiRiS / EMILIO SEGRE VISUAL ARCHIVES / AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS / SCIENCE PHOTO LIBRARY

72. oldal: Az etalon méterrúd a franciaországi Sèvres-ben (CC4.0/Ken Eckert/saját mű)

78. oldal: Albrecht Dürer: Melankólia I. (1514) Metropolitan Museum of Art (New York) Public domain

84. oldal: Rolland Lefebvre: Pierre Fermat (17. sz., Musée d'Art et d'Histoire, Narbonne, Franciaország) © CULTiRiS / Bridgeman Art Library

84. oldal: Sir Andrew Wiles (2005) CC/ C. J. Mozzochi, Princeton N.J / saját mű

89. oldal: Eratoszthenész © CULTiRiS / INTERFOTO / Sammlung Rauch

100. oldal: Neumann János portréja (MTI-Fotóbank/INT)

123. oldal: Theodor de Bry: Ptolemaiosz Klaudiosz (1596) saját munka/CC0

306. oldal: Ismeretlen alkotó: Blaise Pascal (1818-1842 körül, Rijksmuseum, Amszterdam, Public domain)

306. oldal: John Smith: Sir Isaac Newton (1712, Rijksmuseum, Amszterdam, Public domain)

338. oldal: Louis Braille mellszobra (1852) © CULTiRiS / AKG-Images

339. oldal: Ismeretlen festő: Voltaire portréja (1730) © CULTiRiS / AKG-Images / André Held

364. oldal: Nikolayev Yaroslav Sergeyevich: Pafnuty Tchebyshev portréja (1954, State Central Artillery Museum, Szent-pétervár, Oroszország) © CULTiRiS / Bridgeman Art Library

A könyvben található további képek:

©Shutterstock Képügynökség: 8., 18., 20., 21., 22., 32., 44., 46., 56., 57., 58., 60., 62., 64., 73., 77., 82., 91., 94., 98., 102., 106., 116., 122., 129., 132., 135., 139., 142., 146., 149., 160., 168., 204., 205., 226., 228., 236., 237., 245., 249., 252., 258., 260., 261., 267., 270., 273., 278., 286., 287., 292., 296., 297., 305., 309., 311., 319., 321., 330., 332., 333., 334., 335., 336., 340., 341., 342., 344., 346., 348., 349., 350., 351., 355., 357., 360., 368., 369. oldal.

©Shutterstock szerkesztői képek: 5. és 207. oldal: Andrei Nekrassov, 20. oldal: Jacob OFC, 40. oldal: paparazza, 49. oldal: Roberto Pascual Gomez, 75. oldal: aquatarkus, 96. oldal: L.Kora, 139. oldal: Terence Toh Chin Eng, 214. oldal: Pit Stock, 340. oldal: Video Media Studio Europe

Thinkstock: 39.

Large: 73.

Full: 76., 158.

