OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

11–12

Gyűjtemény a

Matematika

emelt szintű oktatásához

Mahler Attila ▪ Orosz Gyula

Gyűjtemény a Matematika emelt szintű oktatásához 11–12.

OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2022. március 23-tól 2027. augusztus 31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/386-7/2022. számú határozattal.

A gyűjtemény megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet alapján készült – 2020. 01. 31. után kiadott Kerettantervre épülő 9–12. évfolyam Matematika tantárgy kerettantervének.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők: Kónya István

Tananyagfejlesztők: Mahler Attila, Orosz Gyula

Kerettantervi szakértő: dr. Csapodi Csaba

Lektor: dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön

Szerkesztette: Csajági Sándor

Szakábra: Szalóki Dezső

Illusztráció: Urmai László

Fedélterv: Slezák Ilona terve alapján összeállította Bánáti János

Tipográfia: Bajtai Zoltán

Fotó: ©Shutterstock képügynökség; © CULTiRiS / Bridgeman Art Library, AKG-Images, SCIENCE PHOTO LIBRARY, INTERFOTO / Sammlung Rauch, INTERFOTO; © akg-images / Science Source; ©Hungart-2022

A könyvben felhasználtuk Dr. Gerőcs László, Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Számadó László, Szászné dr. Simon Judit Matematika 11-12. tankönyv c. művét. Raktári szám: NT-17512.

© Oktatási Hivatal, 2022

ISBN 978-963-436-283-8

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu
A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök • Raktári szám: OH-MAT1112BE
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton, Fazekas Julianna
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné, Mikes Vivien, dr. Valaczka Bence • Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 53,56 (A/5) ív • Tömeg: 1040 gramm • 1. kiadás, 2022
Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

magyar nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001 számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült.
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TARTALOM

Fontosabb jelölések 6
A tankönyv használatáról 7

I. ALGEBRA 8

1. Elsőfokú paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek 8
2. Elsőfokú egyenletrendszerek 11
3. Hatványozás 14
4. Gyökvonás, törtkitevőjű hatványozás 19
5. Racionális és irracionális számok 24
6. Másodfokú paraméteres kifejezések 27
7. Másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenletrendszerek 32
8. Abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek 37
9. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek 39
   Megmaradó sebesség (Olvasmány) 42
10. Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális kifejezések 44
11. Logaritmus 48
12. Nevezetes középértékek 52
13. Egyenlőtlenségek 55
14. Speciális egyenletmegoldási módszerek 59
15. Többismeretlenes egyenletek 62
    Válogatás az emelt szintű érettségi vizsga feladataiból 64

II. FÜGGVÉNYEK 67

16. Függvények, függvénytranszformációk 67
17. Függvények elemi vizsgálata 72
18. Trigonometrikus függvények 81
19. Műveletek függvényekkel, inverz függvények, összetett függvények 89
20. Szélsőérték keresése 92

III. SZÁMELMÉLET 95

21. Prímszámok, a számelmélet alaptétele, a prímszámok néhány tulajdonsága 95
22. Osztók száma, négyzetszámok 98
23. Diofantoszi problémák, számrendszerek 101
24. Polinomok oszthatósága (Kiegészítő anyag) 106
    Érdekes számok (Olvasmány) 108

IV. GEOMETRIA 110

25. Síkbeli egybevágóság 110
26. A párhuzamos szelők tétele 116
27. Háromszögek 120
28. A szögfelezők osztásarányáról 123
    El tud-e menekülni a nyúl? (Olvasmány) 124
29. Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel 125
    Rózsaablakok (Olvasmány) 128
30. A kerületi és középponti szögek tétele 131
31. Mértani középpel megfogalmazható tételek 134
32. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek 136
33. Területszámítás 140
    Egy feladat – több megoldás (Olvasmány) 143
34. Felszín- és térfogatszámítás 145

35. Vegyes térgeometriai feladatok 150
Analóg feladatok síkban és térben (Olvasmány) 154
36. Geometriai egyenlőtlenségek a síkban 157
A fagnano-feladat (Olvasmány) 161

V. VEKTOROK, TRIGONOMETRIA 162

37. Vektorok, skaláris szorzat, vektoriális szorzat 162
38. Addíciós tételek 168
39. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek 173
40. Geometriai, gyakorlati alkalmazások 179

VI. KOORDINÁTA-GEOMETRIA 182

41. Szakasz tetszőleges arányú osztópontjának koordinátái,
a háromszög súlypontjának koordinátái 182
A tetraéder súlypontja (Olvasmány) 186
A beírt kör középpontjának koordinátái (Olvasmány) 187
42. Az egyenes egyenletei 188
43. Pont és egyenes távolsága (Két párhuzamos egyenes távolsága) 196
44. A kör egyenlete 197
45. Kör és egyenes, két kör kölcsönös helyzete 201
46. Parabola, a parabola egyenlete, parabola és egyenes kölcsönös helyzete 206
Kúpszeletek (Olvasmány) 210
47. Egyéb ponthalmazok a koordináta-rendszerben 214
Egy feladat – Több megoldás (Olvasmány) 217

VII. KOMBINATORIKA, GRÁFOK, GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK 220

48. Összeszámlálási feladatok 220
49. A binomiális tétel 226
Ismétléses kombináció (Olvasmány) 230
50. Gráfok 233
Teljes indukció (Olvasmány) 242
51. Végtelen halmazok 248
52. Állítások, tételek, bizonyítások 255
Alkalmazások (Olvasmány) 261

VIII. SOROZATOK 267

53. Rekurzív sorozatok, összegképletek 267
54. Sorozatok jellemzése 273
55. Kamatszámítás és egyéb alkalmazások 280
56. Sorozat határértéke 285
57. Műveletek konvergens sorozatokkal 292
58. Monoton és korlátos sorozatok, alkalmazások 298

IX. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 304

59. Függvények folytonossága 304
60. Műveletek folytonos függvényekkel 308
61. Függvény határértéke egy pontban 310
62. Függvény határértéke a végtelenben 315
63. A derivált fogalmának előkészítése 317
64. A derivált 318
65. Összeg, különbség deriváltja 321
66. Szorzat, hányados deriváltja 322
67. Az x^a függvény deriváltja (Kiegészítő anyag) 325

68. A trigonometrikus függvények deriváltja . . . 327
69. Az összetett függvények deriváltja . . . 328
70. Deriválható függvények menetének vizsgálata . . . 330
71. Konvexitás, második derivált és ezek kapcsolata . . . 333
72. Szélsőérték feladatok megoldása deriválással . . . 334
73. Deriválással megoldható vegyes feladatok . . . 336
Válogatás az emelt szintű érettségi vizsga feladataiból . . . 338

X. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 339

74. Függvénygörbe alatti terület . . . 339
75. A határozott integrál fogalma és tulajdonságai . . . 343
76. Newton–Leibniz-tétel, határozatlan integrál . . . 346
77. Néhány függvény határozatlan integrálja, területszámítás . . . 349
78. Függvénygörbék közti terület . . . 354
79. Néhány integrálási módszer (Kiegészítő anyag) . . . 358
80. Az integrálszámítás alkalmazásai (Kiegészítő anyag) . . . 362
Válogatás az emelt szintű érettségi vizsga feladataiból . . . 367

XI. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS 368

81. Statisztikai alapismeretek . . . 368
82. Statisztikai mutatók . . . 375
83. A szóródás mérőszámai . . . 378
84. Valószínűségszámítási ismeretek . . . 382
85. Feltételes valószínűség . . . 386
86. Független események . . . 390
87. A valószínűségi változó . . . 395
88. A valószínűségi változó jellemzői I. Várható érték . . . 400
A valószínűségi változó jellemzői II. Szórás (Olvasmány) . . . 405
A nagy számok törvénye (Olvasmány) . . . 406
Biztonsági intervallum meghatározása (Olvasmány) . . . 407
89. Geometriai valószínűség . . . 409

Tárgymutató . . . 413
Forrásjegyzék . . . 416

FONTOSABB JELÖLÉSEK

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae vagy $\overline{Ae}$

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A B csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a C pont található: $ABC\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: α, β, γ, …

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

A derékszög jele: $\llcorner$

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC_{\triangle} \cong A'B'C'_{\triangle}$

Hasonlóság: $\sim$; $ABC_{\triangle} \sim A'B'C'_{\triangle}$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Az A pontba mutató helyvektor: $\underline{a}$ vagy $\overrightarrow{A}$

A v vektor: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$ vagy $\vec{v}$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az N pozitív egész szám osztóinak száma: $d(N)$; $d(5) = 2$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$

$\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív és a negatív egész számok halmaza:

$\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$ $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív és a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív és a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in$, $\notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq$, $\subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Nem részhalmaza a halmaznak: $\not\subset$; $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^+$

Halmazok uniója, metszete: $\cup\cap$; $A \cup B$, $A \cap B$

Halmazok különbsége: \; $A \setminus B$

Üres halmaz: $\varnothing$, $\{\}$

Az A halmaz komplementere: $\overline{A}$

Az A halmaz elemszáma: $|A|$; $|\{0; 1; 2\}| = 3$

Végtelen: ∞; $|\mathbf{N}| = \infty$

Az x szám abszolútértéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az f függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

D_f, R_f

Az f függvény hozzárendelési szabálya:

$f: x \mapsto f(x)$; $f: x \mapsto 2x + 3$

$f(x) = y$; $f(x) = 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen:

$f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

Az f függvény inverze: f^{-1}

Az f függvény deriváltja: f'; $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$

n faktoriális: $n!$; $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Az X sokaság átlaga: $\overline{X}$

Az összegzés jele: $\sum$; $\sum_{i=1}^{8} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_8$

Permutációk: P_n; $P_n = n!$, $P_4 = 4! = 24$

Ismétléses permutációk: $P_n^{k,l,m}$, $(k + l + m \leq n)$;

$$P_n^{k,l,m} = \frac{n!}{k! \cdot l! \cdot m!};\quad P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

Variációk: V_n^k; $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$;

$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Ismétléses variációk: $\overline{V}_n^k(i)$; $\overline{V}_n^k(i) = n^k$; $\overline{V}_5^3(i) = 5^3 = 125$

Kombinációk: C_n^k vagy $\binom{n}{k}$;

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!};\quad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Binomiális együttható: $\binom{n}{k}$; $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Állítások tagadása (negációja): $\neg$

Állítások diszjunkciója, konjunkciója: $\vee$, $\wedge$

Állítások implikációja, ekvivalenciája: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ vagy $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Univerzális kvantor (minden …) $\forall$

Egzisztenciális kvantor (létezik …) $\exists$

A TANKÖNYV HASZNÁLATÁRÓL

A tankönyv a 11. és 12. évfolyamon az **emelt szintű matematika érettségire** készít fel. Célja (az érettségire való felkészítés mellett), hogy felkészítse és alkalmassá tegye a diákokat a főiskolai és egyetemi matematika tananyag befogadására. A könyvet nagy tapasztalattal és gyakorlattal rendelkező középiskolai matematika tanárok állították össze. Ez a biztosítéka a tartalom kellően kidolgozott magyarázatainak, a befogadáshoz elengedhetetlenül szükséges és megfelelő számú gyakorlatnak.

A tankönyvben szereplő témakörök megértéséhez szükséges a középszintű tananyag elemi szintű ismerete, annak készség szintű alkalmazni tudása. A tankönyv a NAT 2020 és a hozzá kapcsolódó matematika kerettanterv szellemében íródott. Az emelt szintű érettségi vizsga részletes vizsgakövetelményeinek megfelelő többlet tananyagot dolgozták fel a szerzők, úgy hogy a 2. oldalon említett kerettantervek szerint tanulók, akik már elsajátították az ott említett tananyagtartalmakat, folytathassák tanulmányaikat e könyvben szereplő emelt szintű matematika tananyag megértésével. A tankönyv használható a gimnáziumokban és technikumokban **bármelyik 11. és 12. évfolyamos középiskolai tankönyv tanulása után is**.

A témakörök feldolgozása csak akkor lehetséges, ha a tanulók a középszintű tananyagot már elsajátították az adott témában. Ezért a tankönyv használata előtt a kiadó a következő könyvek használatát ajánlja:
a 11. évfolyamon a Matematika 11. (OH-MAT11TB) vagy a Matematika 11. (OH-MAT11TA),
míg a 12. évfolyamon a Matematika 12. (OH-MAT12TB) vagy a Matematika 12. (OH-MAT12TA) tankönyveket.

Az egyes témakörök feldolgozását igyekeztünk egy-egy gyakorlati kérdés felvetésével indítani. Ezt követően a kérdéses témakör elméleti kidolgozása következik több-kevesebb leckébe sűrítve (függően a témakör terjedelmétől).

Minden leckében igyekeztünk több kidolgozott példát bemutatni, hogy az alkalmazandó definíciók, tételek, ötletek, átalakítások elvégzésével minél hamarabb a készség szintjére emelkedjen a diákokban a kérdéses elméleti anyag megértése, befogadása és annak gyakorlati alkalmazása. Az egyes leckék végén a gyakorlásra szánt feladatok kidolgozását mindenképpen javasoljuk, mert ez által még jobban elmélyül a vizsgált tananyag.

A gyakorolni vágyók számára a leckék végén további gyakorló feladatokat is ajánlunk, melyeket a MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény családból jelöltünk ki.

A fejezetnyitó oldalakon néhány híres festményt, érdekes képet láthatunk, amelyek térábrázolásukban is különlegesek.

HARMONICIS LIB. V. 181

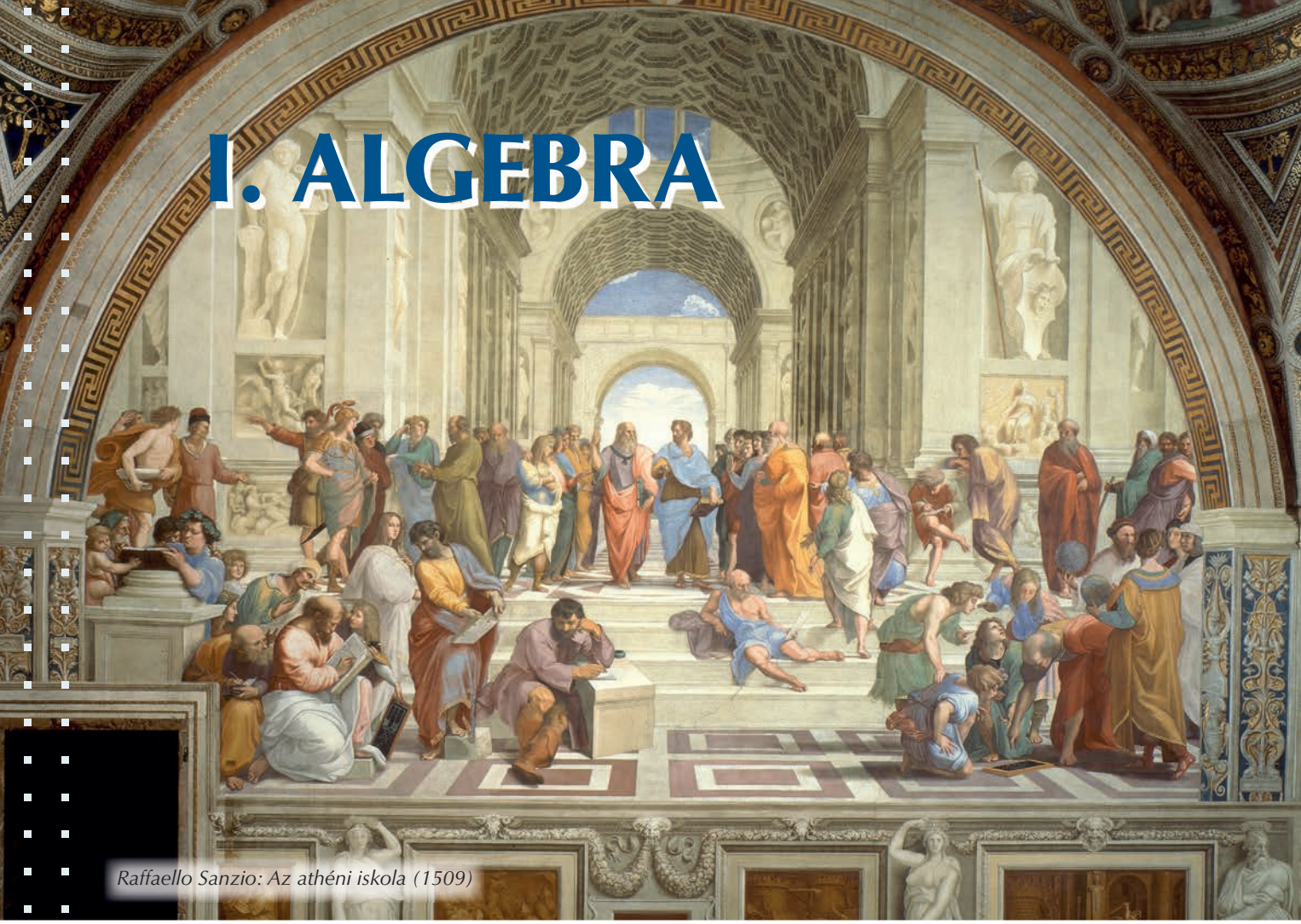
Johannes Kepler (1571–1630)
német matematikus, csillagász és optikus
Harmonice Mundi (Világok harmóniája) (1619) című
tanulmányában a poliéderekkel is foglakozott.

A felkészüléshez ajánlott példatárak:

Dr. Gerőcs László–Orosz Gyula–Paróczay József–Szászné Dr. Simon Judit:
16125/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.
16126/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

Czapáry Endre–Czapáry Endréné–Csete Lajos–Hegyi Györgyné–Iványiné Harró Ágota–Morvai Éva–Reiman István:
16127/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III., Geometriai feladatok gyűjteménye

I. ALGEBRA



Raffaello Sanzio: Az athéni iskola (1509)

1. ELSŐFOKÚ PARAMÉTERES EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

A paramétert tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása lényegesen nehezebb, mint a paramétert nem tartalmazóké. Az alábbiakban áttekintjük a leggyakoribb feladattípusokat és megoldási módszereket.

Ha az egyenlet nem tartalmaz **paramétert**, akkor a megoldása a **mérlegelv** segítségével történhet. Tekintsük például az

$5x - 5 = 2x + 31$

egyenletet. Ezt ekvivalens átalakításokkal

$3x = 36$

alakra hozhatjuk, majd az egyenlet mindkét oldalát 3-mal osztva, megkapjuk az eredményt: $x = 12$.

Ha az egyenlet paramétert tartalmaz, akkor megoldása általában bonyolultabb.

Legyen például a már átalakított paraméteres egyenlet alakja

$Ax = B$, ahol az A és B paraméterek valós számokat jelölnek.

Itt most az A-val való osztást közvetlenül nem végezhetjük el, hiszen lehetséges, hogy $A = 0$. **Esetszétválasztást** kell végeznünk.

I. eset: Ha $A \neq 0$.

Ekkor A-val oszthatunk, a megoldás $x = \frac{B}{A}$.

II. eset: Ha $A = 0$.

Ekkor az egyenlet bal oldala 0. Két lehetőség van:

II. *a)* eset: Ha $B = 0$, akkor az egyenlet, x-től függetlenül, $0 = 0$ alakú. Az egyenletnek minden x valós szám a megoldása.

II. *b)* eset: Ha $B \neq 0$, akkor az egyenlet ellentmondó: a bal oldal zérus, a jobb oldal pedig nem. Ebben az esetben nincs megoldás.

Az eddigieket összefoglalhatjuk:

A és B értékei:	$A \neq 0$	$A = 0$ és $B = 0$	$A = 0$ és $B \neq 0$
Megoldás:	$x = \frac{B}{A}$	minden x valós szám	nincs megoldás

A **paraméteres (betűegyütthatós) egyenleteket** a paraméterek *minden lehetséges értékére* meg kell vizsgálni. Meg kell tehát állapítani, hogy a paraméterek értékétől függően mikor létezik megoldása az egyenletnek; mi a megoldás; és általában azt is, hogy hány megoldás van.

1. példa Oldjuk meg és vizsgáljuk a $2 + a(2x - 1) = a^2x$ egyenletet!

Megoldás Ekvivalens átalakítások után az egyenlet

$2 + 2ax - a = a^2x \quad \Leftrightarrow \quad 2 - a = a(a - 2)x$

alakra hozható. Ha a jobb oldalon x együtthatói konkrét (nemzérus) számok lennének, akkor osztással folytatnánk, $\frac{2-a}{a(a-2)} = x$ módon. De mivel a megoldást a paraméterek minden lehetséges értékére kell előállítanunk, meg kell vizsgálnunk azokat az eseteket, ha az együtthatók értéke 0. Tehát a értékétől függően három esetet különböztethetünk meg.

I. eset: Ha $a = 0$. Ellentmondásra jutunk ($2 = 0 \cdot x$), ekkor az egyenletnek nincs megoldása.

II. eset: Ha $a = 2$. A $0 = 0 \cdot x$ egyenletnek minden x valós szám a megoldása.

III. eset: Ha $a \neq 0$ és $a \neq 2$, akkor az egyenlet egyetlen megoldása $x = \frac{2-a}{a(a-2)} = -\frac{1}{a}$.

2. példa Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a

(1) $\frac{p^2x - 15}{5p - 3px} = 1$ egyenletnek

a) csak pozitív gyökei legyenek;

b) legyenek pozitív gyökei!

Megoldás Az *a)* és *b)* kérdés különbözik: a *b)* esetben a negatív gyökök is megengedettek, ha léteznek pozitív gyökök.

Először meghatározzuk az egyenlet gyökeit (ezek függhetnek p-től), majd vizsgáljuk ezeknek az előjelét. A nevező nem lehet zérus, ezért kikötés, hogy $p \neq 0$ és $x \neq \frac{5}{3}$. Az egyenlet mindkét oldalát $(5p - 3px)$-szel szorozzuk, majd px-et kiemelünk, és szorzattá alakítjuk az elsőfokú kifejezést:

(2) $p^2x - 15 = 5p - 3px \quad \Leftrightarrow \quad p^2x + 3px = 5p + 15 \quad \Leftrightarrow \quad$ (3) $px(p + 3) = 5(p + 3)$.

Esetszétválasztást végzünk, ismét meg kell vizsgálnunk azokat az eseteket, amikor x együtthatói közül valamelyik 0-val egyenlő.

I. eset: Ha $p + 3 = 0$, azaz $p = -3$. Ekkor a (3) egyenlet $0 \cdot x = 0$ alakú, ennek minden megengedett x valós szám a megoldása.

II. eset: Ha $p = 0$, akkor a (3) egyenletnek nem lenne megoldása ($0 \cdot x = 15$), de a kikötés miatt ez az eset nem lehetséges. ($p = 0$-ra nem létezik az (1) egyenlet.)

III. eset: Ha $p \neq 0$ és $p \neq -3$, akkor $p(p + 3)$-mal osztunk, az egyetlen megoldás $x = \frac{5}{p}$. Az x-re vonatkozó kikötés miatt $\frac{5}{p} \neq \frac{5}{3}$, azaz a $p \neq 3$ feltétel adódik.

a) Az egyenletnek az I. esetben nemcsak pozitív gyökei vannak, így $p = -3$ nem lehetséges. A III. esetben $x > 0$, ha $p > 0$, de $p \neq 3$.

Eredmény: az egyenletnek (csak) pozitív gyökei vannak, ha $p > 0$ és $p \neq 3$.

b) Az I. eset megfelelő (vannak pozitív gyökök), ezért $p > 0$ vagy $p = -3$, de $p \neq 3$ a megoldás.

Megjegyzés
Az eredményt érdemes táblázatban is megadni, így jobban áttekinthető.

p értékei	$p < 0,\ p \neq -3$	$p = -3$	$p = 0$ nem lehetséges	$0 < p,\ p \neq 3$	$p = 3$ nem lehetséges
x értékei	$x = \frac{5}{p}$	végtelen sok megoldás van: $x \in \mathbf{R},\ x \neq \frac{5}{3}$		$x = \frac{5}{p}$	
x előjele	$x < 0$	$x < 0,\ x > 0$ vagy $x = 0$		$x > 0$	

3. példa Egy-egy edényben kezdetben a, illetve b liter víz van ($a,\ b > 0$). Az első edénybe percenként $\frac{b}{a}$ liter, a másodikba percenként 4 liter víz folyik be.

a) Hány perc múlva lesz a második edényben kétszer annyi víz, mint az elsőben?
b) Hány perc múlva lesz a két edényben ugyanannyi víz?

Megoldás *a)* Tegyük fel, hogy t perc múlva lesz a második edényben kétszer annyi víz, mint az elsőben. Ekkor $2 \cdot \left(a + \frac{b}{a}t\right) = b + 4t \quad (a \neq 0)$. Az egyenletet átalakítjuk:

$$2 \cdot \left(a + \frac{b}{a}t\right) = b + 4t \quad \Leftrightarrow \quad t\left(\frac{2b}{a} - 4\right) = b - 2a \quad \Leftrightarrow \quad 2t(b - 2a) = a(b - 2a).$$

I. Ha $b = 2a$, akkor a második edényben mindig kétszer annyi víz van, mint az elsőben.

II. Ha $b \neq 2a$, akkor $t = \frac{a}{2}$ (perc).

b) Ha a keresett idő t (perc), akkor $a + \frac{b}{a}t = b + 4t$. Innen

$$t\left(\frac{b}{a} - 4\right) = b - a \quad \Leftrightarrow \quad t(b - 4a) = a(b - a).$$

I. Ha $b = 4a$, akkor $0 \cdot t = 3a^2$ ellentmondást kapunk. Ekkor nincs megoldás.

II. Ha $b \neq 4a$, akkor $t = \frac{a(b-a)}{b-4a}$. Ez csak $t \geq 0$ esetben megoldás. Mivel $a > 0$, a $(b - a)$ és $(b - 4a)$ tényezőknek azonos előjelűeknek kell lenniük. Ez akkor teljesül, ha $b > 4a$, vagy ha $b < a$.

Eredmény: Ha $b > 4a$ vagy $b < a$, akkor $t = \frac{a(b-a)}{b-4a}$ idő múlva lesz a két edényben ugyanannyi víz.

(Az *a)* és *b)* megoldás során feltételeztük, hogy az edényekbe belefér a befolyt víz.)

FELADATOK

1. E1 Oldjuk meg, és vizsgáljuk az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $ax + b - \frac{3x + 2ab}{3} = \frac{1}{2}$; *b)* $\frac{x + a}{a - x} - \frac{2a - x}{a + x} = \frac{a}{a^2 - x^2}$ (a, b valós paraméterek).

2. E1 Hogyan függ az a, b, c valós paraméterektől az alábbi egyenletek gyökeinek előjele?

a) $2ax - 5 = x + a$; *b)* $\frac{b + x}{3} - 2 = \frac{x - 3}{b}$; *c)* $3 - c = \frac{4 - c}{x - 1}$.

3. E2 Az m paraméter milyen egész értéke esetén nagyobb 3-nál az $\frac{5 + mx}{2x - m} = 2$ egyenlet megoldása?

4. E1 Ha t tyúk n nap alatt d darab tojást tojik, akkor:
a) Hány tojást tojik x tyúk 10 nap alatt?
b) Hány nap alatt tojik y tyúk z tojást?
c) Hány tyúk tojik z tojást u nap alatt?
(Feltételezzük, hogy a tyúkok „tojáshozama” állandó.)

5. E2 Oldjuk meg az $(a^2 - 1)x \geq a + 1$ paraméteres egyenlőtlenséget!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1081–1084.

2. ELSŐFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

Ebben a leckében áttekintjük a többismeretlenes és paraméteres lineáris egyenletrendszerek megoldási módjait.

A többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldására általában a behelyettesítő módszert, illetve az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazhatjuk.

1. példa Oldjuk meg az alábbi háromismeretlenes egyenletrendszert!

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \ 2x + 3y - 4z = -4 \\ (2)\ \ 3x + y + z = 8 \\ (3)\ \ x - y + 2z = 5 \end{array}\right\}$$

Megoldás

Első megoldás (behelyettesítő módszer):

Például a (3) egyenletből kifejezzük x-et:

(3) $x = y - 2z + 5$.

Az így kapott kifejezést az első két egyenletbe helyettesítve, az eredetinél egyszerűbb kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk.

(1)' $2(y - 2z + 5) + 3y - 4z = -4 \quad \Leftrightarrow \quad 5y - 8z = -14$,

(2)' $3(y - 2z + 5) + y + z = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 4y - 5z = -7$.

Ezután (2)'-ből kifejezzük például y-t, és ezt (1)'-be helyettesítjük: $y = \frac{5z - 7}{4}$, így az $5 \cdot \frac{5z - 7}{4} - 8z = -14$ egyismeretlenes egyenletet kapjuk. Ennek megoldása $z = 3$; ezt visszahelyettesítve $y = \frac{5 \cdot 3 - 7}{4} = 2$, és $x = 2 - 2 \cdot 3 + 5 = 1$ adódik. Az egyenletrendszer megoldása tehát $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Ellenőrzés:

(1) $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -4$;

(2) $3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 8$;

(3) $1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 5$ valóban.

Második megoldás (egyenlő együtthatók módszere):

Ha a (3) egyenletet 2-vel szorozzuk, és (1)-ből kivonjuk, akkor x kiesik:

(1) $-$ 2·(3): $\quad 5y - 8z = -14$.

Egy másik egyenletet kaphatunk y-ra és z-re, ha például (3)-at 3-mal szorozzuk, és (2)-ből vonjuk ki:

(2) $-$ 3 · (3): $\quad 4y - 5z = -7$.

A két új egyenlettel egy kétismeretlenes egyenletrendszerhez jutottunk.

Most szabaduljunk meg például az y-tól. Az újonnan kapott egyenletek közül az elsőt 4-gyel, a másodikat pedig (-5)-tel szorozzuk:

$20y - 32z = -56$,

$-20y + 25z = 35$.

A két egyenlet összeadása után $-7z = -21$, azaz $z = 3$. Ezt az értéket visszahelyettesítve rendre megkapjuk az $y = 2$, $x = 1$ megoldásokat.

Soha ne felejtsük el az **ellenőrzést**! A gyököknek az eredeti egyenletekbe történő visszahelyettesítése hozzátartozik a korrekt megoldáshoz.

Helyhiány miatt mi a későbbiekben már általában csak utalunk az ellenőrzésre.

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán (a valós paraméter)!

$$\left.\begin{aligned}(a-2)x+5y&=5\\ x+(a+2)y&=5\end{aligned}\right\}$$

Megoldás A második egyenletből kifejezzük x-et, és ezt az első egyenletbe helyettesítjük:

$x=5-(a+2)y \;\Rightarrow\; (a-2)\big(5-(a+2)y\big)+5y=5 \;\Leftrightarrow\; 9y-a^2y=15-5a \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (3+a)(3-a)y=5\cdot(3-a)$.

Az osztás előtt ismét meg kell vizsgálnunk azokat az eseteket, amikor y együtthatói nullával egyenlők.

I. eset: Ha $a=3$, akkor az egyenlet $0\cdot y=0$ alakú, tehát minden y valós szám megoldás. Az eredeti egyenletrendszer mindkét egyenlete $x+5y=5$ alakú; valójában tehát egy egyenletünk van, két ismeretlennel. A végtelen sok megoldást megadhatjuk egy paraméter segítségével: legyen $y=t$, s ekkor $x=5-5t$, ahol t tetszőleges valós szám. (Az egyenletnek tehát végtelen sok megoldása van, de nem *minden* számpár a megoldása.)

II. eset: Ha $a=-3$, akkor a $0\cdot y=30$ egyenlet ellentmondásra vezet. Nincs megoldás.

III. eset: Ha $a\neq\pm3$, akkor $y=\frac{5}{a+3}$. Visszahelyettesítés után $x=5-(a+2)\cdot\frac{5}{a+3}=\frac{5}{a+3}$ adódik; ekkor tehát az egyenletrendszernek egy (egyértelmű) megoldása van.

Összefoglalva:

a értékei	$a=3$	$a=-3$	$a\neq\pm3$
$(x;\,y)$ megoldás	$(x;\,y)=(5-5t,\,t),\ t\in\mathbf{R}$	nincs megoldás	$(x;\,y)=\left(\frac{5}{a+3};\frac{5}{a+3}\right)$

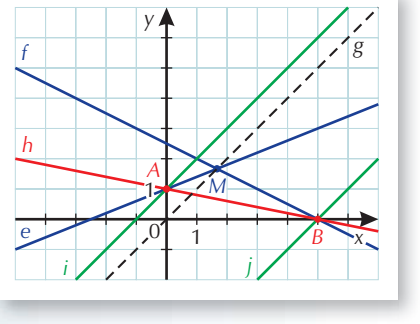
Grafikus szemléltetés

Az $ax+by=c$ kétismeretlenes egyenlet megoldásai rendezett számpárok. Az **$(x;\,y)$ gyökök** a derékszögű koordináta-rendszerben **egy egyenes pontjainak feleltethetők meg**, ha a és b egyszerre nem 0. A két egyenletből álló egyenletrendszereket általában grafikusan is megoldhatjuk. Mindkét egyenlet grafikonját ugyanabban a koordináta-rendszerben ábrázoljuk, és a két „görbe” közös pontjainak koordinátái lesznek a megoldások.

Az

$$\left.\begin{aligned}(a-2)x+5y&=5\\ x+(a+2)y&=5\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer első egyenlete az $A(0;\,1)$, a második pedig a $B(5;\,0)$ pontokon áthaladó egyeneseket jelöli ki. (Például az első egyenletben ha $x=0$, akkor $y=1$, függetlenül a értékétől.) Az ábrán feltüntettük az $a=0$ paraméterértékhez tartozó e: $-2x+5y=5$ és f: $x+2y=5$ egyenletű egyeneseket. Ezek $M\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$ metszéspontja – mint a többi megoldás is – rajta van a g: $y=x$ egyenletű egyenesen.



A h: $x+5y=5$ egyenes az $a=3$ értékhez tartozik. Ekkor az A és B ponton átmenő két egyenes egybeesik, végtelen sok megoldás van, és ezek éppen a h egyenes pontjai.

Végül jelöltük az $a=-3$ értékhez tartozó i: $-x+y=1$ és j: $x-y=5$ egyenletű egyeneseket. Ezek párhuzamosak, nincs metszéspontjuk; az egyenletrendszernek ekkor nincs megoldása.

Megjegyzés

Az $(x;\,y)=\left(\frac{5}{a+3};\frac{5}{a+3}\right)$ gyökrendszer a $(0;\,0)$ kivételével a g: $y=x$ egyenes összes pontját előállítja. Ennek az az oka, hogy az A ponton átmenő egyenesek közül hiányzik az $x=0$, a B ponton átmenők közül pedig az $y=0$ egyenletű. Ezek semmilyen a paraméterre sem állnak elő az eredeti egyenletrendszerben.

A fenti analitikus megoldásból és a grafikus szemléltetésből is látható, hogy a kétismeretlenes, két egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek a valós számok halmazán vagy nincs megoldása, vagy egyetlen megoldása van, vagy végtelen sok megoldása van. (Ezt részletesebben is megvizsgáljuk a 42. leckében.)

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} a+b-3c&=17\\ a-3b+c&=-23\\ -3a+b+c&=-3 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás Néha speciális megoldási módszereket is alkalmazhatunk. Most észrevehetjük, hogy az egyenletrendszer ciklikusan szimmetrikus, mert mindig más-más változó együtthatója -3. Ezért ha összeadjuk az egyenleteket, szimmetrikus egyenletet kapunk:

$-a-b-c=-9$.

Innen $a+b+c=9$, és ezt az összefüggést rendre összevetve az eredeti egyenletekkel, $c=-2$, $b=8$ és $a=3$ adódik. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk az $(a, b, c)=(3, 8, -2)$ megoldás helyességéről.

4. példa **(Lewis Carroll 1882-es feladatgyűjteményéből származik a következő feladat.)**[1]

Egy pohár limonádé, 3 szendvics és 7 sütemény 1 shilling 2 pennybe kerül; míg egy pohár limonádé, 4 szendvics és 10 sütemény 1 shilling 5 pennybe. (1 shilling = 12 penny.) Határozzuk meg

a) egy pohár limonádé, egy szendvics és egy sütemény, illetve

b) 2 pohár limonádé, 3 szendvics és 5 sütemény

együttes árát!

Megoldás Jelölje 1 pohár limonádé, 1 szendvics és 1 sütemény árát pennyben x, y, z. Ekkor

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad x+3y+7z=14\\ &(2)\quad x+4y+10z=17 \end{aligned}\right\}$$

a felírható egyenletrendszer. A három ismeretlenhez csak két egyenletünk van, így x, y, z értékét látszólag nem tudjuk meghatározni. Most azonban nem külön-külön keressük az ismeretlenek értékét, hanem az *a)* feladatban $x+y+z$, a *b)* feladatban pedig $2x+3y+5z$ értéke a kérdés.

Próbáljuk meg például x-et és y-t z-vel kifejezni! A (2) egyenletből (1)-et kivonva $y+3z=3 \Leftrightarrow y=3-3z$. Ezt (2)-be helyettesítjük: $x+4(3-3z)+10z=17 \Leftrightarrow x=5+2z$.

Most már a válaszunk csak z-től függ.

a) $x+y+z=5+2z+3-3z+z=8$ (penny).

b) $2x+3y+5z=2(5+2z)+3(3-3z)+5z=19$ (penny).

Tehát „szerencsénk” volt az együtthatókkal, a változók kiestek, az eredmény nem függ z-től.

Megjegyzések

1. **Általában** $Ax+By+Cz$ akkor határozható meg, ha $A(5+2z)+B(3-3z)+Cz$ konstans, vagyis a kifejezésben z együtthatója eltűnik: $2A-3B+C=0$. Ez a feltétel az *a)* és a *b)* alfeladatban is teljesült. (Az *a)*-ban $(A, B, C)=(1, 1, 1)$, a *b)*-ben $(A, B, C)=(2, 3, 5)$ volt.)

2. Ha további feltétel, hogy a változók csak természetes számok lehetnek (eddig erről nem volt szó), akkor tovább vizsgálható (x, y, z)-re az egyenletrendszer. Egy konkrét példa: mennyibe kerül(het) 2 pohár limonádé, 2 szendvics és 1 sütemény?

A megoldás: $2x+2y+z=2(5+2z)+2(3-3z)+z=-z+16$. A válasz tehát a sütemény z árától függ, és legfeljebb 15 penny lehet.

FELADATOK

1. E1 Négy természetes számról a következőket tudjuk.

I. Az első három szám összege 20.

II. A második számnak, a harmadik kétszeresének és a negyedik négyszeresének az összege 26.

III. Az első szám 1-gyel nagyobb a negyedik szám háromszorosánál.

a) Mik lehetnek a számok?

b) Mik lehetnek a számok, ha még azt is tudjuk, hogy az első és a negyedik szám összege prímszám?

1 Lewis Carrol könyve magyar nyelven is elérhető: Gubancmese. Typotex, 2011.

2. E2 Oldjuk meg és vizsgáljuk az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán (x, y, z ismeretlenek, a, b valós paraméterek)!

a) $\left.\begin{aligned} ax + y &= a \\ 2ax + ay &= 4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 11 \\ 3x - 2y &= 15 \\ bx + 3y &= 2 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= -1 \\ 0{,}5x - 5y &= 6 \\ -3x + 4yz &= -2 \end{aligned}\right\}$

3. E2 Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszer $(x; y)$ megoldására $x > 0$ és $y > 1$ teljesüljön!

$$\left.\begin{aligned} (p-1)x + y &= -1 \\ 2x - 3y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

4. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a rendezett valós számnégyesek halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \frac{6}{u} - \frac{1}{\sqrt{x-3}} + |3y| &= -4 \\ \frac{1}{\sqrt{4x-12}} - \frac{3}{u} &= 2 \\ \frac{2}{\sqrt{x-3}} - 4 &= 2 \cdot |y| \\ 4z^2 - \frac{3}{\sqrt{x-3}} &= -5 \end{aligned}\right\}$$

5. V *Sir Isaac Newton* (1643–1727), a nagy angol fizikus és matematikus algebra tankönyvet is írt. Egyik szórakoztató feladata az alábbi.

Három legelőn egyformán gazdagon és gyorsan nő a fű. Az egyik mező területe $3\frac{1}{3}$, a másiké 10, a harmadiké pedig 24 hektár. Az elsőt 12 tehén lelegeli 4 hét alatt, a másodikat 21 tehén 9 hét alatt. Hány tehén legeli le a harmadik legelőt 18 hét alatt?

6. E1 Mi a **hiba** az alábbi megoldásban?
Számítsuk ki $x + y$ értékét, ha x, y valós számok, és

$$\left.\begin{aligned} xy &= x + y + 5 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

„Megoldás": A második egyenletből $(x + y)^2 - 2xy = 5$. Alkalmazzuk az $a = x + y$ helyettesítést, ekkor

$$\left.\begin{aligned} xy &= a + 5 \\ a^2 - 2xy &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Innen $a^2 - 2(a + 5) = 5 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 15 = 0$. $a_1 = 5$, $a_2 = -3$, és ezek $x + y$ lehetséges értékei is.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1039–1080, 1085–1102.

3. HATVÁNYOZÁS

A szorzás műveletének többszöri alkalmazásával jutunk el a **pozitív egész kitevőjű hatványozás** fogalmához. Az ismételt szorzást bármilyen számmal el tudjuk végezni, így a^n ($n \in \mathbf{N}^+$) definíciójában az a alap tetszőleges valós szám lehet. Ha még előírjuk az $a^1 = a$ összefüggést is, akkor felírhatók a pozitív egész kitevőjű hatványozás **azonosságai** ($a \in \mathbf{R}$, $n, m \in \mathbf{N}^+$):

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(n > m, a \neq 0)$;

3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

4. $(ab)^n = a^n b^n$;

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$.

(Az azonosságok a definíció segítségével közvetlenül igazolhatók.)

A hatványozást a permanencia-elv figyelembevételével **kiterjeszthetjük egész kitevőkre** is.

A **permanencia-elv** alapján egy művelet kiterjesztésekor elvárjuk, hogy a korábban megismert azonosságok a kiterjesztés után is érvényben maradjanak.

a^0 definiálásához egyszerűen eljuthatunk az 1. azonosság segítségével. Helyettesítsünk n helyébe 0-t, ekkor az azonosságból $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$, tehát $a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$ $(a \neq 0)$. Ez alapján csak az $a^0 = 1$ lehetőség fogadható el. Megmutatható, hogy ez a definíció „értelmes”, azaz a többi azonosság, valamint a **hatványozás monotonitása** is érvényben marad.

A negatív egész kitevőjű hatványozás definiálása érdekében helyettesítsünk n helyébe $(-m)$-et az 1. azonosságban. Ekkor $a^{-m} \cdot a^m = a^{-m+m} = a^0 = 1$, tehát a lehetséges definíció $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $(a \neq 0)$ alakú. Most is igazolható, hogy a^{-m} fenti definíciójával továbbra is érvényben maradnak az 1–5. azonosságok.

Az egész kitevőjű hatványozással kapcsolatban még két észrevételt teszünk. Az egyik, hogy a 2. azonosság $n > m$ feltételére nincs szükség (ez eredetileg azért kellett, hogy $(n - m) \in \mathbf{N}^+$ teljesüljön). A másik észrevétel az a alappal kapcsolatos: hangsúlyozzuk, hogy ha a kitevő 0 vagy negatív egész szám, akkor csak $a \neq 0$ esetén érvényesek az azonosságok.

Emelt szintű érettségi vizsgakövetelmény az egész kitevőjű **hatványozás azonosságainak a bizonyítása**. Ezeket általában úgy végezzük el, hogy a negatív egész kitevőről áttérünk pozitív egész kitevőkre, és az igazolandó azonosságot visszavezetjük ebben a számkörben lévő állításra, azonosságra.

A bizonyítások nem nehezek, de eléggé munkaigényesek, mert többféle lehetséges esetet kell megvizsgálni. Például az 1. azonosság igazolásakor n és m közül lehet az egyik vagy mindkettő negatív egész; vagy a 2. azonosságnál külön bizonyítandó az a lehetőség, amikor n és m pozitív egészek, de $n < m$ és így tovább.

Két példát mutatunk negatív egész kitevők esetén.

1. példa Igazoljuk a 2. azonosságot negatív egész kitevőkre: $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, ha $x, y \in \mathbf{Z}^-$, és $a \neq 0$!

Megoldás Alkalmazzuk az $n = -x$ és $m = -y$ helyettesítést! Ekkor $n, m \in \mathbf{Z}^+$.

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{a^m}{1} = a^{m-n}$. Ha most $m \geq n$, akkor készen vagyunk: $a^{m-n} = a^{-y+x} = a^{x-y}$.

Ha viszont $m < n$, akkor $(m - n)$ negatív: $a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^{-x+y}} = a^{x-y}$.

Ezzel az azonosságot beláttuk. Felhasználtuk a negatív egész kitevős hatvány definícióját, valamint a pozitív egész kitevőkre vonatkozó azonosságot.

2. példa Igazoljuk negatív egész kitevőkre a 3. azonosságot: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, ha $x, y \in \mathbf{Z}^-$, és $a \neq 0$!

Megoldás Az $n = -x$ és $m = -y$ helyettesítéssel

$(a^x)^y = (a^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{n \cdot m}}} = a^{n \cdot m} = a^{-x \cdot (-y)} = a^{x \cdot y}$. Az azonosságot beláttuk.

A többi azonosság is hasonló technikával igazolható.

A továbbiakban a hatványozás alkalmazására mutatunk példákat.

3. példa Tekintsük a $K = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2022}$ szorzatot.

a) Elvégezve a műveleteket, becsüljük meg, kb. hány jegyű szám lesz K?

b) Mi K utolsó számjegye?

Megoldás Az 1. azonosság miatt $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2022} = 2^{1+2+\ldots+2022}$. Az egész számok összegét 1-től 2022-ig Gauss módszerével, a számok párosításával határozhatjuk meg:

$1 + 2 + \ldots + 2022 = \frac{1 + 2022}{2} \cdot 2022 = 2\,045\,253$. Tehát $K = 2^{2\,045\,253}$.

a) Ekkora számot közvetlenül nem írhatunk be a számológépbe, ügyesebb módszert kell találni. Tudjuk, hogy $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, ez alapján $2^{2\,045\,253} = 2^3 \cdot 2^{2\,045\,250} = 8 \cdot (2^{10})^{204\,525} \approx 8 \cdot (10^3)^{204\,525} = 8 \cdot 10^{613\,575}$. A szám tehát – ezzel a becsléssel – kb. 613 576 jegyű.

(Ha már ismerjük a logaritmus műveletét, a jegyek pontos számát is megadhatjuk. $\lg K = \lg 2^{2\,045\,253} = 2\,045\,253 \cdot \lg 2 = 615\,682{,}5$. Ez azt jelenti, hogy $10^{615\,682} < K < 10^{615\,683}$; és ebből következik, hogy K éppen 615 683 jegyű.)

b) Készítsünk táblázatot a 2-hatványok végződéséről!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2^n végződése	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	…

Észrevehetjük, hogy az utolsó számjegyek periodikusan ismétlődnek. Ennek az az oka, hogy a sorozat bármely tagja csak az őt megelőző tagtól függ (annak 2-szerese); tehát ha egyszer ismétlődés lép fel, akkor az ismétlődés „öröklődik".

A periódus hossza 4. Mivel 2 045 253 maradéka 4-gyel osztva 1, így K végződése megegyezik 2^1 utolsó számjegyével, azaz 2.

4. példa Mivel egyenlő $\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)^{-4} : \left(1+\frac{c^{-1}+d^{-1}}{c^{-1}-d^{-1}}\right)^{-3}$, ha $a = \frac{3}{8}$, $b = 0{,}75$, $c = -3{,}5$ és $d = 0{,}7$?

Megoldás Az azonnali helyettesítés bonyolult, és esetleg pontatlan számolásokhoz vezetne, ezért előbb egyszerűbb alakra hozzuk a kifejezést.

Az osztandó egyszerűsítésekor alkalmazhatjuk a definíciót, de azt is észrevehetjük, hogy a számlálóban nevezetes azonosság szerepel: $\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right) = \frac{(a^{-1}+b^{-1})(a^{-1}-b^{-1})}{a^{-1}+b^{-1}} = a^{-1}-b^{-1}$. Ezután a definícióból $a^{-1}-b^{-1} = \frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ következik, de helyettesíthetünk is: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{8}{3}-\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

Az osztandó tehát $\left(\frac{4}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$.

Az osztót is átalakítjuk: $\left(1+\frac{c^{-1}+d^{-1}}{c^{-1}-d^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{2c^{-1}}{c^{-1}-d^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}\right)^{-3} = \left(\frac{\frac{2}{c}}{\frac{d-c}{cd}}\right)^{-3} = \left(\frac{2d}{d-c}\right)^{-3} =$

$= \left(\frac{d-c}{2d}\right)^3$. Helyettesítés után kapjuk, hogy $\left(\frac{0{,}7-(-3{,}5)}{2\cdot 0{,}7}\right)^3 = 3^3$.

Eredmény: a hányados értéke $\left(\frac{3}{4}\right)^4 : 3^3 = \frac{3}{256}$.

A **nevezetes szorzatok és szorzattá alakítások** leggyakrabban használt azonosságai:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$;

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.

Felírhatjuk a 3. hatványokra vonatkozó azonosságokat is:

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

(Gyakran hasznos az $(a+b)^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3$, illetve $(a-b)^3 = a^3-3ab(a-b)-b^3$ alakok ismerete is.)

Az azonosságok a műveletek elvégzésével egyszerűen igazolhatók.

További, hasonló szerkezetű nevezetes azonosságokat is megfogalmazhatunk.

5. példa Bizonyítsuk be, hogy $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ minden a, b valós számra ($n \in \mathbf{N}^+$).

Megoldás Az $a \cdot a^{n-1}$ és $(-b) \cdot b^{n-1}$ tagokból megkapjuk $(a^n - b^n)$-t. Meg kell mutatnunk, hogy a szorzat kifejtésében a további tagok kiesnek.

A szorzás elvégzése után, az összevonások előtt olyan összeget kapunk, amelynek minden tagja n-edfokú lesz. Vizsgáljuk meg a tetszőleges $a^k \cdot b^{n-k}$ tag előállítását ($1 \le k \le n-1$).

Az $a^k \cdot b^{n-k}$ tagot kétféleképpen kaphatjuk meg: az $a \cdot a^{k-1} \cdot b^{n-k}$ szorzatból, illetve a $(-b) \cdot a^k \cdot b^{n-k-1}$ szorzatból. De ezek előjele ellentétes, összegük zérus. Ez éppen azt jelenti, hogy az $a^k \cdot b^{n-k}$ tag kiesik; és mivel ez tetszőleges $1 \le k \le n-1$ esetén elmondható, valóban csak az $a^n - b^n$ tagok maradnak meg.

Most tegyük fel, hogy n páratlan, és helyettesítsünk b helyére $(-b)$-t:

$a^n - (-b)^n = \big(a-(-b)\big)\big(a^{n-1} + a^{n-2}\cdot(-b) + a^{n-3}\cdot(-b)^2 + \ldots + a\cdot(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}\big)$, azaz

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 - \ldots - a\cdot b^{n-2} + b^{n-1})$ adódik.

A „közbülső” $a^k \cdot b^{n-k}$ tagok ($1 \le k \le n-1$) most is kiesnek, és megkapjuk az $a \cdot a^{n-1} = a^n$ és $b \cdot b^{n-1} = b^n$ tagot is. Vagyis újabb azonosságot kaptunk, páratlan n esetén az $a^n + b^n$ összeg is szorzattá alakítható. Páros n esetén viszont az $a^n + b^n$ összeget – a fenti gondolatmenettel – nem sikerül szorzattá alakítani.

Összefoglalva:
Két újabb azonosságot fogalmazhatunk meg két n-edik hatvány különbségére, valamint páratlan kitevőjű összegére. Ezek a következők (a, b tetszőleges valós számok):

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, ha $n \in \mathbf{N}^+$;

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 - \ldots - a\cdot b^{n-2} + b^{n-1})$, ha $n \in \mathbf{N}^+$, n páratlan.

Természetesen, az $n = 3$ helyettesítéssel a korábban felírt $a^3 \pm b^3$ azonosságokat kapjuk vissza.

6. példa (oszthatósági alkalmazások)

a) Mutassuk meg, hogy $4^{105} + 3^{105}$ osztható 91-gyel!

b) Adjuk meg $4^{105} - 3^{105}$ valamely kétjegyű osztóját!

c) Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $9 | (11^n + 7^n)$!

Megoldás *a)* $4^{105} + 3^{105} = (4^3)^{35} + (3^3)^{35} = 64^{35} + 27^{35}$, és a fenti második azonosság értelmében $64^{35} + 27^{35} = (64+27)(64^{34} - 64^{33}\cdot 27 + 64^{32}\cdot 27^2 - \ldots - 64\cdot 27^{33} + 27^{34})$. Ez a szorzat valóban osztható $64 + 27 = 91$-gyel.

b) $4^{105} - 3^{105} = (4^3)^{35} - (3^3)^{35} = 64^{35} - 27^{35}$, és a fenti első azonosság értelmében
$64^{35} - 27^{35} = (64-27)(64^{34} + 64^{33}\cdot 27 + 64^{32}\cdot 27^2 + \ldots + 64\cdot 27^{33} + 27^{34})$.
$64 - 27 = 37$; ez a szorzat tehát osztható a kétjegyű 37 számmal.

c) Ha n páratlan, akkor $(11+7) | (11^n + 7^n)$; ha pedig $18 | (11^n + 7^n)$, akkor $9 | (11^n + 7^n)$ is igaz.

Általában is megfogalmazhatjuk, hogy ha a, b egész számok, n pozitív egész szám, akkor $a - b$ osztja az $a^n - b^n$ különbséget. Ha pedig n páratlan, akkor $a + b$ osztja az $a^n + b^n$ összeget.

7. példa Egy érdekes rejtvényszerű feladat a következő: „Írjuk fel a négy darab 2-esből álló lehető legnagyobb számot, anélkül, hogy bármilyen matematikai műveleti jelet alkalmaznánk.” Természetesen a kitűző a hatványozásra gondol, és olyan számokra, mint például 222^2 vagy 22^{22}.

Állapítsuk meg az összes lehetőséget, és rendezzük nagyság szerint növekvő sorozatba az így kapott számokat úgy, hogy számológépet ne használjunk! (Becsléseknél jól használható a $2^{10} \approx 10^3$ közelítés.)

Megoldás A lehetséges számok: $A = 2222$, $B = 222^2$, $C = 22^{22}$, $D = 22^{2^2}$, $E = 2^{222}$, $F = 2^{22^2}$, $G = 2^{2^{22}}$, $H = 2^{2^{2^2}}$. Fontos ismernünk azt a konvenciót, hogy a hatvány hatványát – hacsak nem használunk zárójelet –

megállapodás alapján „kívülről befelé” haladva végezzük el. (Tehát például $2^{3^4} = 2^{(3^4)}$.) Ez alapján F, G és H felírható 2 hatványaként.

$F = 2^{22^2} = 2^{(22^2)} = 2^{484}$.

$2^{22} = 2^2 \cdot (2^{10})^2 \approx 4 \cdot (10^3)^2 = 4 \cdot 10^6$, így $G \approx 2^{4 \cdot 10^6}$.

$2^2 = 4$, $2^4 = 16$, így $H = 2^{16}$.

A hatványozás monotonitása miatt $H < E < F < G$ következik.

$D = 22^4 = 2^4 \cdot 11^4 = 2^4 \cdot 121^2$, ami ugyan kisebb, mint $2^4 \cdot 128^2 = 2^4 \cdot (2^7)^2 = 2^{18}$, de „nem sokkal”. Így $H < D < E$ a besorolás. (Precízebben azt mondhatnánk, hogy $H = 2^4 \cdot 64^2 < 2^4 \cdot 121^2 = D$.)

Hasonlóan $C = 22^{22} = 2^{22} \cdot 11^{22} = 2^{22} \cdot 121^{11} < 2^{22} \cdot 128^{11} = 2^{22} \cdot (2^7)^{11} = 2^{99}$, így $H < D < C < E < F < G$ az eddigi lánc.

$A < B$ „látszik” (B ötjegyű szám), végül $B = 222^2 < 256^2 = (2^8)^2 = H$, így az eredmény:

$A < B < H < D < C < E < F < G$.

Megjegyzés

A legnagyobb szám, G már igazi számóriás: több mint 1 200 000 számjegyből áll. (Ellenőrizd!)

FELADATOK

1. E1 Számológép használata nélkül döntsük el, melyik szám a nagyobb, A vagy B, ha:

a) $A = \frac{3^{2012}+1}{3^{2013}+1}$, $B = \frac{3^{2013}+1}{3^{2014}+1}$; *b)* $A = 99^{104}$, $B = 9999^{52}$; *c)* $A = 127^{23}$, $B = 513^{18}$!

2. E2 Bizonyítsuk be, hogy a 444…4888…89 alakú szám négyzetszám! (A szám n darab 4-est és $(n-1)$ darab 8-ast tartalmaz, $n \in \mathbf{N}^+$.)

3. E1 A hatványozás egyik alkalmazási területe a kis és nagy számokkal való műveletvégzés. Az alábbi feladat megoldásakor igyekezzünk a számok **normálalakját** használni.

Arthur C. Clarke brit író az *Isten kilencmilliárd neve* c. novellájában tibeti szerzetesek elhatározzák, hogy kinyomtatják isten minden elképzelhető elnevezését. Egy A4-es papírlapra 12 pontos betűmérettel kb. 50 sor fér ki. Tegyük fel, hogy a szerzetesek nagyobb betűmérettel, esztétikusabban nyomtatnak, s így egy A4-es oldalra 30 név kerülhet.

a) Hány A4-es papírlapra volna szükségük a kilencmilliárd név kinyomtatásához?

b) Becsüljük meg, hány hektár felületet fedne be ennyi egymás mellé helyezett papírlap!

c) Becsüljük meg, hány m^3 térfogatú ennyi papírlap!

d) Becsüljük meg, hány tonna tömegű ennyi papírlap!

(Egy csomag A4 méretű papírlap éppen 5 cm vastag, 500 darab papírt tartalmaz, a címkéjén lévő 80 g/m^2 feliratból pedig következtethetünk a tömegére. Megmérhetjük a papír oldalait, de felhasználhatjuk azt a tényt is, hogy egy A0-s lap felülete éppen 1 m^2.)

A Potala palota
(Tibet, Kínai Népköztársaság)

4. E1 Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $a^5 - b^5$; *b)* $a^5 + b^5$; *c)* $a^4 + 4b^4$; *d)* $a^3 - 3a^2 + 3a - 2$; *e)* $2x^{14} - 4x^8 + 2x^2$; *f)* $x^8 - 3x^2 - 2$; *g)* $x^8 + x^4 + 1$; *h)* $1 - 32y^5$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 816–843.

4. GYÖKVONÁS, TÖRTKITEVŐJŰ HATVÁNYOZÁS

Az n-edik gyökvonás definícióját a hatványozás segítségével fogalmazhatjuk meg. Problémát jelent, hogy a **definíció** különbözik páros és páratlan gyökkitevőre, ezért esetszétválasztást kell végeznünk.

Ha az n páros, azaz $n = 2k$ alakú ($k \in \mathbf{N}^+$):

$\sqrt[2k]{a} = b$, ha $a \geq 0$, és $b \geq 0$, és $b^{2k} = a$.

(Kiolvasva: egy a nemnegatív szám $(2k)$-adik gyöke az a b nemnegatív szám, amelynek $(2k)$-adik hatványa egyenlő a-val.)

Ha az n páratlan, azaz $n = 2k + 1$ alakú ($k \in \mathbf{N}^+$):

$\sqrt[2k+1]{a} = b$, ha $b^{2k+1} = a$.

Páratlan gyököt tetszőleges valós számból (negatívból is) vonhatunk. Ha tehát egyszerűen csak az n-edik gyökvonásról beszélünk, akkor ez mindig a fenti feltételek figyelembevételével történik.

A **gyökvonás** jól ismert **azonosságai** a következők:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;

3. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

5. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

(Az alaphalmazra és a kitevőkre vonatkozó megkötéseket mindig szem előtt kell tartani: n és k 1-nél nagyobb természetes számok; ha n vagy k páros, a és b nemnegatív valós számok; a 2. azonosság miatt b nem nulla; m egész szám; végül ha $a = 0$, akkor m pozitív egész szám.)

1. példa Bizonyítsuk be a gyökvonás azonosságait!

Megoldás Az azonosságok **bizonyítását** a hatványozás segítségével végezhetjük.

1. Mindkét oldalt n-edik hatványra emeljük, és felhasználjuk a hatványozás ismert azonosságait.

A bal oldal $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$. A jobb oldal szintén ennyi: $(\sqrt[n]{ab})^n = a \cdot b$. A két oldal n-edik hatványai egyenlők, de ebből még nem következik, hogy az alapok is egyenlők, előjelben még különbözhetnek. (Például $x^2 = 3^2$-ből nem következik, hogy $x = 3$; mert $x = -3$ is lehetséges.)

Ha azonban n páros, akkor az azonosság mindkét oldala nemnegatív; míg ha n páratlan, akkor mindkét oldal azonos előjelű. Így most már igazoltuk az azonosságot.

A 2. azonosság hasonlóan bizonyítható.

3. Esetszétválasztást végzünk m szerint.

Ha m pozitív egész szám, akkor $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ db}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ db}} = (\sqrt[n]{a})^m$ (a gyökvonást tényezőnként végezhetjük).

Ha $m = 0$ (és $a \neq 0$), akkor mindkét oldal egyenlő 1-gyel.

Ha m negatív egész szám, akkor helyettesítsük $(-z)$-vel! Ekkor z pozitív egész szám, és így

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{-z}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a^z}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^z}} = \dfrac{1}{(\sqrt[n]{a})^z} = (\sqrt[n]{a})^{-z} = (\sqrt[n]{a})^m$, tehát igaz az azonosság.

A bizonyítás során felhasználtuk a pozitív egész m-ekre imént belátott összefüggést, mely szerint a hatványozás és a gyökvonás sorrendje felcserélhető.

4. Mindkét oldalt n-edik, majd k-adik (azaz $(n \cdot k)$-adik) hatványra emelve az $a = a$ azonossághoz jutunk. Ismét meggondolhatjuk, hogy a két oldal előjele megegyezik; így beláttuk a 4. azonosságot is.

5. Hasonlóan mindkét oldalt $n \cdot k$-adik hatványra emelve azonossághoz jutunk.

A továbbiakban a gyökvonások alkalmazására mutatunk néhány példát.

2. példa Igaz-e, hogy $z = \sqrt{20 - 6\sqrt{11}} - \sqrt{20 + 6\sqrt{11}}$ egész szám?

Megoldás

Első megoldás:

Elegendő megmutatni, hogy z^2 egy egész szám négyzete.

$z^2 = (\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} - \sqrt{20 + 6\sqrt{11}})^2 = 20 - 6\sqrt{11} + 20 + 6\sqrt{11} - 2\sqrt{20 - 6\sqrt{11}}\sqrt{20 + 6\sqrt{11}} =$

$= 40 - 2\sqrt{20^2 - 36 \cdot 11} = 40 - 2 \cdot \sqrt{4} = 36$. Mivel $z < 0$ (a kivonandó nagyobb, mint a kisebbítendő), ezért $z = -6$, ami egész szám.

Második megoldás:

Észrevehetjük, hogy $20 - 6\sqrt{11}$ és $20 + 6\sqrt{11}$ teljes négyzetek: $20 - 6\sqrt{11} = (3 - \sqrt{11})^2$ és $20 + 6\sqrt{11} =$

$= (3 + \sqrt{11})^2$. Ezért $z = \sqrt{(3 - \sqrt{11})^2} - \sqrt{(3 + \sqrt{11})^2} = |3 - \sqrt{11}| - |3 + \sqrt{11}| = \sqrt{11} - 3 - (3 + \sqrt{11}) = -6$.

Megjegyzés

Az irracionális teljes négyzeteket nehéz felismerni, ezért célszerű őket alkalmas helyettesítéssel racionális kifejezéssé alakítani. Például $y = \sqrt{11}$ helyettesítéssel $20 - 6\sqrt{11} = y^2 + 9 - 6y$, és ekkor az $(y - 3)^2$ teljes négyzet már könnyebben felismerhető.

3. példa Határozzuk meg $\sqrt{32{,}54} - \sqrt{32{,}53}$ reciprokát

a) a négyjegyű függvénytáblázat segítségével négy értékes jegy pontossággal;

b) zsebszámológép segítségével három tizedes jegy pontossággal!

Megoldás

a) A négyjegyű függvénytáblázat szerint $\sqrt{32{,}54} \approx 5{,}704$ és $\sqrt{32{,}53} \approx 5{,}704$. Négy értékes jegy pontossággal $\sqrt{32{,}54} - \sqrt{32{,}53} \approx 5{,}704 - 5{,}704 = 0$, ennek a számnak *egyáltalán nincs reciproka*.

b) Ha a számológéppel számolva a nevezőben 3 tizedes jegyet őrzünk meg, akkor sem tudjuk végrehajtani az osztást.

Ha eggyel több tizedesjeggyel dolgozunk, akkor $\sqrt{32{,}54} - \sqrt{32{,}53} \approx 5{,}7044 - 5{,}7035 = 0{,}0009$, ennek reciproka $\frac{10\,000}{9} \approx 1111{,}111$. Ha gyanút fogunk, és öt tizedes jegyet őrizünk meg, akkor $\frac{1}{\sqrt{32{,}54} - \sqrt{32{,}53}} \approx$

$\approx \frac{1}{5{,}70438 - 5{,}70351} = \frac{1}{0{,}00087}$, ami $\approx 1149{,}425$. Ez bizony jelentős eltérés. Ha egyre több tizedes jegyet hagyunk meg a nevező kiszámításakor, akkor a reciprok értéke várhatóan egyre pontosabb lesz. Ha a számológép 9 tizedesjegyét megőrizzük, akkor eredményül $\frac{1}{\sqrt{32{,}54} - \sqrt{32{,}53}} \approx \frac{1}{5{,}704384279 - 5{,}703507693} =$

$= \frac{1}{0{,}000876586} \approx 1140{,}789381$ adódik; míg ha magával a géppel végeztetjük el a műveletet, akkor $\frac{1}{\sqrt{32{,}54} - \sqrt{32{,}53}} \approx 1140{,}789198$. (Ez utóbbi két érték azért különbözik, mert a gép által kijelzett 9. tizedes jegy kerekített, és ő a memóriájában a kerekítés nélküli, pontosabb értékkel dolgozik.)

Sajnos, a gépi 1140,789 eredmény önmagában még nem garantálja a megoldást; nem lehetünk biztosak abban, hogy az érték pontos 3 tizedes jegyre. Mit tehetünk?

A megoldás: gyöktelenítsük a nevezőt!

$$\frac{1}{\sqrt{32{,}54} - \sqrt{32{,}53}} \cdot \frac{\sqrt{32{,}54} + \sqrt{32{,}53}}{\sqrt{32{,}54} + \sqrt{32{,}53}} = \frac{\sqrt{32{,}54} + \sqrt{32{,}53}}{0{,}01} = 100 \cdot (\sqrt{32{,}54} + \sqrt{32{,}53}).$$

Most a $\sqrt{32{,}54} + \sqrt{32{,}53} \approx 11{,}40789197$ összegben csak legfeljebb az utolsó tizedes jegy kerekített, ezért $100 \cdot (\sqrt{32{,}54} + \sqrt{32{,}53}) \approx 1140{,}789$ már biztosan tudható, hogy 3 tizedes jegyre pontos érték.

4. példa Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a $\sqrt[3]{2^5 \cdot \sqrt[4]{3^3 \cdot \sqrt[5]{5^2}}}$ kifejezést!

Megoldás

Első megoldás:

Belülről kifelé haladunk, a gyökjel alá bevitel módszerét alkalmazzuk.

$\sqrt[3]{2^5 \cdot \sqrt[4]{3^3 \cdot \sqrt[5]{5^2}}} = \sqrt[3]{2^5 \cdot \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{15} \cdot 5^2}}} = \sqrt[3]{2^5 \cdot \sqrt[20]{3^{15} \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\sqrt[20]{2^{100} \cdot 3^{15} \cdot 5^2}} = \sqrt[60]{2^{100} \cdot 3^{15} \cdot 5^2}$.

Második megoldás:
Először „kívülről befelé” haladva alkalmazzuk a gyökvonás azonosságait.
$\sqrt[3]{2^5 \cdot \sqrt[4]{3^3 \cdot \sqrt[5]{5^2}}} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^3 \cdot \sqrt[5]{5^2}}} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[12]{3^3 \cdot \sqrt[5]{5^2}} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{\sqrt[5]{5^2}} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[60]{5^2}$.
Ezután közös gyökkitevő alá viszünk:
$\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[60]{5^2} = \sqrt[60]{2^{100}} \cdot \sqrt[60]{3^{15}} \cdot \sqrt[60]{5^2} = \sqrt[60]{2^{100} \cdot 3^{15} \cdot 5^2}$.

A **törtkitevőjű hatványozás** az egész kitevőjű hatványozás kiterjesztése a kitevő bővebb halmazára. A permanencia-elv miatt $a^{\frac{n}{k}}$ értékét ($a \in \mathbf{R}^+$; $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}^+$) úgy kell értelmeznünk, hogy a hatványozásnak az egész kitevőkre vonatkozó azonosságai, valamint a monotonitási tulajdonságok is érvényben maradjanak.

Például a 3. azonosság esetén (hatvány hatványa) teljesülnie kell, hogy $\left(a^{\frac{n}{k}}\right)^k = a^n$, s innen szükségképpen $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$. Tehát $a^{\frac{n}{k}}$ definíciója – a permanencia-elv miatt – ha egyáltalán lehetséges, akkor csak a fenti alakú lehet.

Természetes gondolat, hogy a törtkitevőjű hatványozás eredménye csak a kitevő értékétől függjön, az alakjától ne. (Például meg kell követelnünk, hogy $4^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{6}{4}}$ teljesüljön; idegen kifejezéssel ezt reprezentáció-függetlenségnek nevezik.) Ez esetben viszont nem engedhetjük meg a negatív alapot: $(-4)^{\frac{3}{2}} \neq (-4)^{\frac{6}{4}}$, ugyanis $(-4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-4)^3}$ értelmetlen, míg $(-4)^{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^6} = 8$.

A gyökvonás 3. azonossága szerint a gyökvonás és hatványozás sorrendje felcserélhető. Negatív alap esetén ez sem mindig teljesülne: $(-2)^{\frac{4}{2}} = \sqrt{(-2)^4} = 4$, míg $\left(\sqrt{-2}\right)^4$ nem lenne értelmezhető.

Általában a 0 alapot sem engedhetjük meg, hiszen a kitevő 0 és negatív szám is lehet.

Végül említsük meg, hogy minden egész szám egyúttal racionális szám is, teljesülnie kell tehát az $a^n = a^{\frac{n}{1}} = a^{\frac{2n}{2}}$ stb. egyenlőségeknek. Megállapodás alapján az 1 gyökkitevőt nem szükséges értelmeznünk, mert $a^{\frac{n}{1}} = a^n$ egész kitevőjű hatvány, kezelése nem okoz problémát.

Megmutatható, hogy az $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$ definíció az $a > 0$; $k \in \mathbf{Z}^+$, $n \in \mathbf{Z}$, $k > 1$ megkötésekkel már megfelelő. Vagyis érvényesül a permanencia-elv, teljesülnek a gyökvonás azonosságai, a definíció a kitevő tört alakjától független. Bebizonyítjuk az egyik azonosságot (a többi hasonlóan mutatható meg), s igazoljuk a reprezentáció-függetlenséget is.

5. példa

a) Bizonyítsuk be a reprezentáció-függetlenséget!
b) Bizonyítsuk be, hogy az $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ azonosság érvényben marad törtkitevőjű hatványok esetén is!

Megoldás

a) Meg kell mutatnunk, hogy ha $\frac{k}{l} = \frac{m}{n}$, akkor $a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}}$, ahol $a > 0$, és k és m egész számok, l és n pozitív egész számok.

A $\frac{k}{l} = \frac{m}{n}$ feltételből $kn = lm$ következik. Tudjuk, hogy $\left(\sqrt[l]{a^k}\right)^l = a^k$; mindkét oldalt n-edik hatványra emelve $\left(\sqrt[l]{a^k}\right)^{ln} = a^{kn}$ adódik. Hasonlóan kapjuk az $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$ egyenlőség l-edik hatványából, hogy $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{ln} = a^{ml}$. Mivel $a^{kn} = a^{ml}$, ebből $\left(\sqrt[l]{a^k}\right)^{ln} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{ln}$, illetve gyökvonás után $\sqrt[l]{a^k} = \sqrt[n]{a^m}$ következik. Készen vagyunk: $a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}}$ valóban.

b) Bizonyítandó, hogy $a^{\frac{k}{l}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k}{l}+\frac{m}{n}} = a^{\frac{kn+ml}{ln}}$, ahol $a > 0$, és k és m egész számok, l és n pozitív egész számok.

$a^{\frac{k}{l}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{kn}{ln}} \cdot a^{\frac{ml}{nl}} = \sqrt[ln]{a^{kn}} \cdot \sqrt[ln]{a^{ml}} = \sqrt[ln]{a^{kn+ml}} = a^{\frac{kn+ml}{ln}}$; az állítást beláttuk. (Közben felhasználtuk az *a)* pontban igazolt reprezentáció-függetlenséget is.)

6. példa

Ábrázoljuk a $[-1{,}5;\ 1{,}5]$ intervallumon, azonos koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

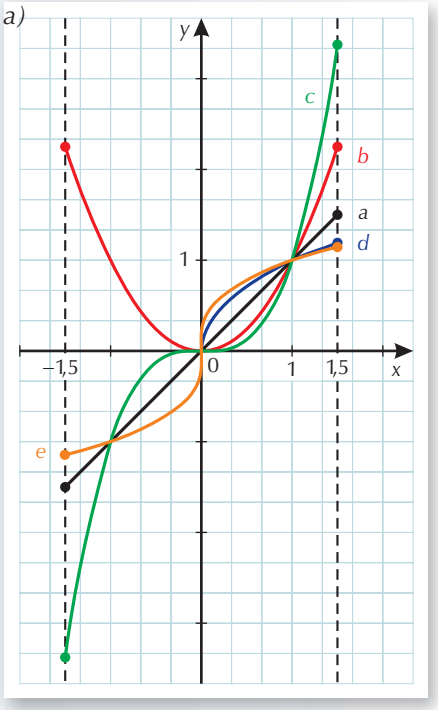
a) $a(x) = x$; $b(x) = x^2$; $c(x) = x^3$; $d(x) = \sqrt{x}$; $e(x) = \sqrt[3]{x}$.

b) $a(x) = x$; $b(x) = x^{\frac{1}{3}}$; $c(x) = x^{\frac{2}{3}}$; $d(x) = x^{\frac{4}{3}}$; $e(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

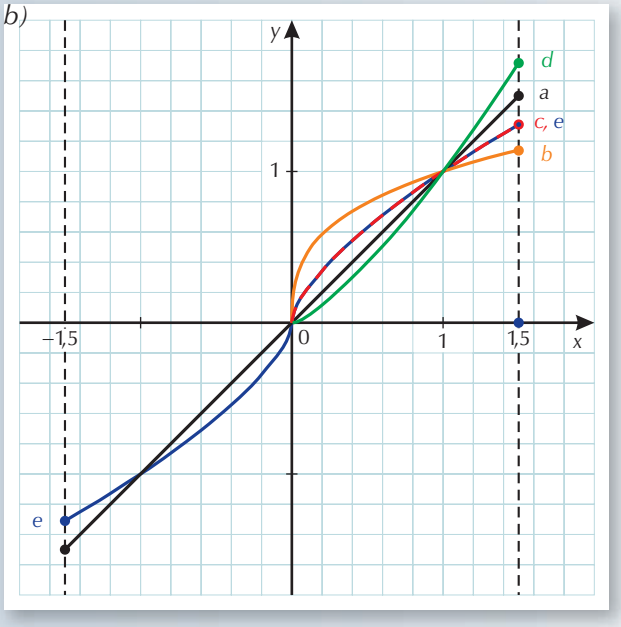
Megoldás *a)* A lehető legbővebb alaphalmazon ábrázolunk, a $d(x)$ függvény esetében $0 \le x \le 1{,}5$ az értelmezési tartomány. Az ábráról leolvasható az egyes függvények közötti nagyságrendi viszony.

b) A $b(x)$, $c(x)$ és $d(x)$ függvények esetében $x \ge 0$ az értelmezési tartomány. A definícióból következik, hogy a nagyságrendi relációk $x < 1$ és $x > 1$ esetén megfordulnak. Az is látható, hogy csak a pozitív számokra teljesül az $x^{\frac{2}{3}} \equiv \sqrt[3]{x^2}$ azonosság (nem-pozitív számokra $c(x)$-et nem értelmezzük).

a)

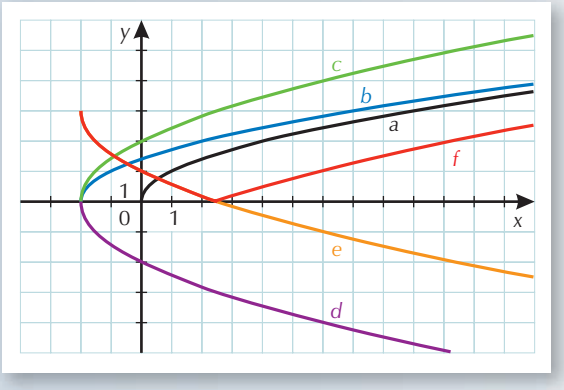


b)



7. példa Ábrázoljuk a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x) = |3 - \sqrt{2x+4}\,|$ függvényt, és határozzuk meg az x és y tengelymetszeteket!

Megoldás A négyzetgyök alatti kifejezést átalakítjuk, majd transzformációs lépésekkel először az abszolútértéken belüli kifejezést ábrázoljuk.



$3 - \sqrt{2x+4} = -\sqrt{2(x+2)} + 3$, és a transzformációs lépések:

$a(x) = \sqrt{x}$;

$b(x) = \sqrt{x+2}$, (a grafikonját eltoljuk a $(-2; 0)$ vektorral);

$c(x) = \sqrt{2(x+2)}$, (b grafikonjára alkalmazunk egy $\frac{1}{2}$ arányú, az $x = -2$ egyenletű egyenesre vonatkozó merőleges affinitást);

$d(x) = -\sqrt{2(x+2)}$, (tengelyes tükrözés az x tengelyre);

$e(x) = -\sqrt{2(x+2)} + 3$, (eltolás a $(0; 3)$ vektorral).

Ezután az $f(x) = |e(x)|$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az $e(x)$ függvényértékeinek „pontonként” vesszük az abszolútértékét: ha $e(x) \ge 0$, akkor $f(x) = e(x)$; különben $f(x) = -e(x)$. (Ezeket a pontokat tükrözzük az x tengelyre.)

Az $y = |3 - \sqrt{2x+4}\,|$ egyenletből $x = 0$, illetve $y = 0$ helyettesítéssel számíthatjuk ki az y és x tengelymetszeteket.

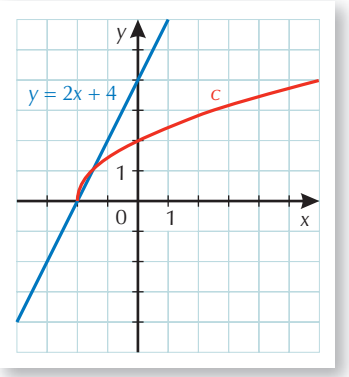
Ha $x = 0$, akkor $y = |3 - \sqrt{4}\,| = 1$, az y tengelymetszet $(0; 1)$.

Ha pedig $y = 0$, akkor $0 = |3 - \sqrt{2x+4}\,|$, s innen $x = 2{,}5$. Az x tengelymetszet $(2{,}5; 0)$.

Megjegyzések

A c függvény ábrázolásakor a függvény változója helyett a függvény értékét is transzformálhattuk volna. $\sqrt{2(x+2)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x+2}$ alapján b-ből egy $\sqrt{2}$ arányú, az x tengelyre vonatkozó merőleges affinitás állítja elő c-t.

Az utolsó lépésben az összetett függvény ábrázolási módszerét alkalmaztuk, az $e(x)$ belső függvényre vonatkoztattuk a külső abszolútérték-függvényt. Ez a módszer máskor is megkönnyítheti az ábrázolást, például az $x \mapsto 2x+4$ belső függvényre alkalmazva az $x \mapsto \sqrt{x}$ külső függvényt, rögtön c-t kapjuk.



FELADATOK

1. E1 Melyik nagyobb, A vagy B, ha

a) $A = \sqrt{20} - \sqrt{19}$ és $B = \sqrt{23} - \sqrt{22}$;

b) $A = \sqrt{20} + \sqrt{19}$ és $B = \sqrt{21} + \sqrt{18}$;

c) $A = \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{19}$ és $B = \sqrt[3]{23} - \sqrt[3]{22}$;

d) $A = \left(\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{8}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} + \sqrt{2x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}$ és $B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{x+1+2\sqrt{x}} - \sqrt{9+4\sqrt{2}}$;

E2 *e)* $A = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$ és

$B = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$?

2. E1 Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőit:

a) $\frac{a}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$; *b)* $\frac{b}{\sqrt{7+\sqrt{3}}-\sqrt{2}}$; **V** *c)* $\frac{c}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$; *d)* $\frac{d}{\sqrt[3]{x}+1}$!

3. E1 Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket, és határozzuk meg az x és y tengelymetszeteket!

$a(x) = \left|-2\cdot\sqrt[3]{x-3}+1\right|$; $b(x) = 3\cdot(x-2)^{\frac{2}{3}} - 1$; $c(x) = \frac{1}{2}\cdot(5-x)^{\frac{3}{2}} + 2$.

Milyen geometriai transzformációkat hajtottunk végre az egyes lépések során?

4. E1 Mi a **hiba** az alábbi átalakításokban?

a) $\sqrt{33+10\sqrt{8}} - \sqrt{17-6\sqrt{8}} = \sqrt{(\sqrt{8}+5)^2} - \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} = \sqrt{8}+5-(\sqrt{8}-3) = 8$.

b) $\sqrt{8x^2}\cdot\sqrt{2}\,x = \sqrt{8x^2}\cdot\sqrt{2x^2} = \sqrt{16x^4} = 4x^2$.

c) „Bebizonyítjuk”, hogy $4 = 5$. A kiindulási egyenlettel azonos átalakításokat végzünk, majd teljes négyzetté alakítunk:

$16 - 36 = 25 - 45 \quad\Leftrightarrow\quad 16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow$

$4^2 - 2\cdot 4\cdot\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(4-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(5-\frac{9}{2}\right)^2$.

Ezután mindkét oldalból gyököt vonva készen is vagyunk: $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 4 = 5$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 844–941.

5. RACIONÁLIS ÉS IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy a **racionális számok** halmaza zárt a négy alapműveletre: racionális számok összege, különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám (persze 0-val nem osztunk). Azt is megtanultuk, hogy a racionális számok tizedestört-alakja vagy véges, vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört. (És minden ilyen tizedes törtnek van közönséges tört alakja, tehát racionális szám.)

Ez utóbbi állítás az $\frac{a}{b}$ racionális szám osztási algoritmusából következik. Az osztási eljárás vagy véget ér (ekkor a tizedes tört véges), vagy – mivel a és b egész számok – az osztási maradék előbb-utóbb megismétlődik. (Legkésőbb a b-edik lépésben.) A maradék ismétlődése miatt pedig a hányados számjegyei is periodikusak lesznek.

1. példa Írjuk fel az $x = 3{,}8\overline{12}$ végtelen, szakaszos tizedes törtet közönséges tört alakban!

Megoldás Az ismétlődő periódus 2 hosszú, ezért 10^2-nal szorzunk: $100x = 381{,}2\overline{12}$. Ebből kivonás után $99x = 377{,}4$ adódik, így $x = \frac{377{,}4}{99} = \frac{3774}{990}\left(= \frac{629}{165}\right)$.

Kérdés, hogy tudunk-e hasonló állításokat megfogalmazni az **irracionális számokról**?

Tétel

Ha egy x valós szám tizedestört-alakja végtelen, nem szakaszos tizedes tört, akkor x irracionális szám.

Bizonyítás Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy x racionális. Ekkor azonban tizedestört-alakja vagy véges, vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört lenne. Ellentmondásra jutottunk, x tehát nem lehet racionális szám.

Mivel a véges, vagy a végtelen, de szakaszos tizedes törteket fel tudjuk írni közönséges tört alakban, két egész szám hányadosaként, ezért megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.

Tétel

Egy x valós szám akkor és csak akkor **irracionális**, ha tizedestört-alakja végtelen, nem szakaszos tizedes tört.

Ezen észrevétel alapján könnyen megadhatunk irracionális számokat. Például a 0,656556555655556… tizedes tört (amelyben a 6-osok után mindig eggyel több 5-ös szerepel) biztosan irracionális, hiszen nem lehet periodikus. (Bármilyen hosszú periódust tételeznénk fel, a szomszédos 5-ösök száma előbb-utóbb ennél nagyobb lesz, és ez elrontja a periodicitást.)

Más úton is konstruálhatunk irracionális számokat.

Tétel

$\sqrt{2}$ irracionális szám.

Bizonyítás Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám. Ekkor $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ alakba írható, ahol a, b pozitív egész számok, és azt is feltehetjük, hogy relatív prímek. (Azaz a tört nem egyszerűsíthető.)

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2b^2 = a^2.$$

Az utolsó egyenlet bal oldalán páros szám áll, így a^2 és a is páros szám. Ha a páros, akkor a^2 osztható 4-gyel is. Az egyenlet jobb oldalán tehát 4-gyel osztható szám áll, így szükségképpen a bal oldalnak is oszthatónak kell lennie 4-gyel. Ha $2b^2$ osztható 4-gyel, akkor b^2 és b is páros szám.

Ellentmondásra jutottunk, hiszen ekkor a és b nem relatív prímek. Ez azt jelenti, hogy a feltevésünk hamis volt, tehát $\sqrt{2}$ valóban irracionális szám.

Más bizonyítási lehetőségek:

A bizonyítást többféleképpen is befejezhetjük.

Egyik másik lehetőség, ha a legutóbbi $2b^2 = a^2$ egyenlet két oldalát a 3-mal való oszthatóság szempontjából vizsgáljuk meg. Ha b 3-mal osztva 0 maradékot ad, akkor a bal oldal maradéka 0, és így a jobb oldalnak – tehát a-nak is – oszthatónak kell lennie 3-mal. Ellentmondást kapunk, mert ekkor a és b nem relatív prímek, mindkettő 3 többszöröse.

Ha pedig b 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot ad, akkor b^2 maradéka 1, a bal oldal maradéka 2, tehát a jobb oldal maradékának is 2-nek kell lenni. Ez lehetetlen: négyzetszám 3-mal osztva nem adhat 2 maradékot.

Végül egy harmadik módszer, ha észrevesszük, hogy a $2b^2 = a^2$ egyenlet bal oldalán 2-nek páratlan, míg a jobb oldalon páros kitevőjű hatványa áll. Ekkor a számelmélet alaptételével kerülünk ellentmondásba.

Általánosítás: Hasonló módon igazolható, hogy minden olyan $\sqrt{n}$ alakú szám is irracionális, ahol az n pozitív egész szám nem négyzetszám.

2. példa (racionális és irracionális számok közötti műveletek)

Jelöljön a racionális és x irracionális számot. Döntsük el, hogy az alábbi számok közül melyik racionális, melyik irracionális! *a)* $a + x$; *b)* $a - x$; *c)* ax; *d)* $\frac{a}{x}$; *e)* $\frac{x}{a}$.

Megoldás

a) $a + x$ irracionális. Ha ugyanis $a + x = b$ racionális szám lenne, akkor az $x = b - a$ ellentmondásra jutnánk. ($b - a$ racionális, s ez ellentmond annak, hogy x irracionális.)

b) $a - x$ irracionális, hasonlóan az *a)* részben mondottakhoz.

c) Ha $a = 0$, akkor a szorzat nulla, tehát racionális. Ha $a \neq 0$, akkor ax irracionális. Ha ugyanis $ax = b$ racionális szám lenne, akkor az $x = \frac{b}{a}$ ellentmondást kapnánk. $\left(\frac{b}{a}\right.$ racionális.$\left.\right)$

d) Ha $a = 0$, akkor a hányados nulla, tehát racionális. Ha $a \neq 0$, akkor $\frac{a}{x}$ irracionális. Ha ugyanis $\frac{a}{x} = b \neq 0$ racionális szám lenne, akkor az $x = \frac{a}{b}$ ellentmondásra jutnánk. $\left(\frac{a}{b}\right.$ racionális.$\left.\right)$

e) $\frac{x}{a}$ irracionális, hasonlóan a *d)* rész második felében mondottakhoz.

(Egy másik lehetséges megoldásként először megmutatjuk, hogy ha x irracionális, akkor $\frac{1}{x}$ is az. Ha ugyanis $\frac{1}{x} = b$ racionális lenne, akkor $x = \frac{1}{b}$ is, ami ellentmondás. Ezután pedig hivatkozhatunk arra, hogy $\frac{x}{a}$ az $\frac{a}{x}$ reciproka.)

Megállapíthatjuk: Egy irracionális és egy nem zérus racionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa mindig irracionális szám.

3. példa (irracionális számok közötti műveletek)

Mutassuk meg, hogy két irracionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa racionális és irracionális szám is lehet!

Megoldás

Elegendő egy-egy példát adnunk a lehetséges esetekre. ($\mathbf{Q}^*$-gal az irracionális számok halmazát jelöljük.)

Két irracionális szám összege lehet racionális és lehet irracionális is (például $x = 5\sqrt{2}$ és $y = 3\sqrt{2}$ választással $x + (-x) \in \mathbf{Q}$ és $x + y \in \mathbf{Q}^*$).

Kivonáskor a helyzet hasonló: $x - x \in \mathbf{Q}$ és $x - y \in \mathbf{Q}^*$.

Szorzás és osztás esetén $xy \in \mathbf{Q}$ és $\frac{x}{y} \in \mathbf{Q}$ racionális számok, míg például $z = 5\sqrt{6}$ választással, mint könnyen megmutatható, $zx \in \mathbf{Q}^*$ és $\frac{z}{x} \in \mathbf{Q}^*$ irracionális.

Megállapíthatjuk tehát, hogy két irracionális számmal végzett művelet eredménye lehet irracionális vagy racionális szám is.

4. példa Az alábbi feladatokat először önállóan próbáljuk megoldani, és csak azután nézzük meg a közölt megoldásokat.

Racionális vagy irracionális számok az alábbiak?

a) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$; *b)* $\frac{1}{\sqrt{10}+2\sqrt{6}}$; *c)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; *d)* $\sqrt[3]{5}$; *e)* $\sqrt[3]{6}-\sqrt{2}$; *f)* $\frac{1}{\pi}$; *g)* $\log_2 3$.

Megoldás Mindegyik szám irracionális.

a) Gyöktelenítsük a törtet: $\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}$ irracionális, mert $\sqrt{7}\in\mathbf{Q}^*$, $\sqrt{7}+2\in\mathbf{Q}^*$ és $\frac{1}{3}(\sqrt{7}+2)\in\mathbf{Q}^*$.

(Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha arra hivatkozunk, hogy a számláló racionális, míg a nevező irracionális szám.)

b) Indirekt bizonyítunk, először a nevezőt vizsgáljuk meg. Tegyük fel, hogy $\sqrt{10}+2\sqrt{6}=r$ racionális szám. Négyzetre emelünk és átalakítunk:

$$\sqrt{10}+2\sqrt{6}=r \quad\Rightarrow\quad 34+4\sqrt{60}=r^2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{60}=\frac{r^2-34}{4},$$

s ez ellentmondás: a jobb oldalon racionális, a bal oldalon pedig irracionális szám áll. (Egy lépéssel korábban is megállhattunk volna.)

c) Indirekt okoskodással:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=r \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}+\sqrt{3}=r-\sqrt{5} \quad\Rightarrow$$

$$5+2\sqrt{6}=r^2+5-2r\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{6}+r\sqrt{5}=\frac{r^2}{2}.$$

Újból négyzetre emelünk: $\Rightarrow\quad 6+5r^2+2r\sqrt{30}=\frac{r^4}{4}$, s itt már ellentmondás van: a bal oldal irracionális.

d) Ha $\sqrt[3]{5}$ valamely $\frac{a}{b}$ alakú racionális szám lenne ($a, b\in\mathbf{Z}^+$), ellentmondást kapnánk.

$$\sqrt[3]{5}=\frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad 5=\frac{a^3}{b^3} \quad\Rightarrow\quad 5b^3=a^3.$$

A két oldalon lévő egész számok nem lehetnek egyenlők: a bal oldal prímtényezős felbontásában 5 kitevője $3k+1$ alakú, míg a jobb oldalon $3m$ alakú (k, m természetes számok).

e) $\sqrt[3]{6}-\sqrt{2}=r \quad\Rightarrow\quad \sqrt[3]{6}=r+\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad 6=r^3+3\sqrt{2}\,r^2+6r+2\sqrt{2} \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad -r^3-6r+6=\sqrt{2}(3r^2+2)$.

Ellentmondást kaptunk: a jobb oldalon irracionális szám áll.

f) Ha $\frac{1}{\pi}$ racionális lenne, akkor a reciproka is; de π-ről tudjuk, hogy irracionális. Ezért $\frac{1}{\pi}$ is az. (És általában tetszőleges irracionális szám reciproka is irracionális, mint fentebb már láttuk.)

g) Indirekt feltesszük, hogy $\log_2 3=\frac{a}{b}$ alakú ($a, b\in\mathbf{Z}^+$). Mindkét oldalt 2-es alapra, majd a b-edik hatványra emelve

$$\log_2 3=\frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad 3=2^{\frac{a}{b}} \quad\Rightarrow\quad 3^b=2^a.$$

De 3 és 2 semmilyen pozitív hatványa nem lehet egyenlő, így ellentmondásra jutottunk.

Johann Heinrich Lambert

A XVIII. században sikerült bebizonyítania *Johann Heinrich Lambert* (1728–1777) svájci származású német, majd később *Adrien Marie Legendre* (1752–1833) francia matematikusoknak, hogy a π irracionális szám.

Laczkovich Miklós (1948–) magyar matematikus Lambert bizonyítását felhasználva egyszerűbb bizonyítást adott.

FELADATOK

1. E1 Adjuk meg a következő végtelen tizedes törteket közönséges tört alakban!
$a = 1,\overline{2}$; $b = 2,5\overline{67}$; $c = 3,87\overline{654}$; $d = 4,\overline{9}$.
(Felülvonással az ismétlődő számjegycsoportokat jelöljük.)

2. E2 Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pozitív egész szám négyzetgyöke racionális szám, akkor n szükségképpen egy egész számnak a négyzete!

3. E2 Adottak az a, b, c valós számok úgy, hogy az $(a + b)$ összeg irracionális, $(b + c)$ racionális és $(a + c)$ irracionális. Racionális vagy irracionális számok az alábbiak:
a) $2a + 3b + 5c$; *b)* $2a + 3b + 4c$; *c)* a, b, c?

4. V Vannak-e olyan a, b irracionális számok, amelyekre a^b racionális?

5. E1 Mi a **hiba** az alábbi megoldásban?
Feladat: Van-e a racionális számpárok halmazán megoldása a
$(2\sqrt{5} - 3)x - (3\sqrt{5} + 4)y = 8\sqrt{5} + 5$ egyenletnek?
„Megoldás”: Tegyük fel, hogy van racionális számpár megoldása az egyenletnek. Ekkor átalakítás után a $\sqrt{5}\,(2x - 3y - 8) = 3x + 4y + 5$ egyenletet kapjuk. Itt a bal oldalon irracionális, míg a jobb oldalon racionális szám áll. Ellentmondást kaptunk – az egyenletnek tehát nincs megoldása.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 742–815.

6. MÁSODFOKÚ PARAMÉTERES KIFEJEZÉSEK

Emelt szintű követelmény a másodfokú egyenlet **megoldóképletének** a levezetése.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet bal oldalát teljes négyzetté alakítjuk:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Ha a $D = b^2 - 4ac$ kifejezés – az egyenlet diszkriminánsa – negatív, akkor a bal oldal a nemzérus a főegyüttható és egy pozitív szám szorzata, ami nem lehet nulla. Ekkor tehát az egyenletnek nincs valós megoldása.

Ha $D \geq 0$, akkor szorzattá alakítunk:

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right).$$

Mivel $a \neq 0$, a szorzat csak akkor lehet nulla, ha $x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$ vagy $x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$. D-t visszahelyettesítve, és a két gyököt összevont alakban felírva megkapjuk a

másodfokú egyenlet megoldóképletét: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ahol $a \neq 0$ és $b^2 - 4ac \geq 0$).

A két gyök ismeretében felírhatjuk a másodfokú egyenlet (vagy kifejezés) **gyöktényezős alakját**:

$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek – halmazelméleti értelemben – egyetlen gyöke van. Ekkor a másodfokú kifejezés teljes négyzet, és a gyöktényezős alak két megegyező gyöktényezőből áll. Ezt – algebrai értelemben – gyakran úgy jelezzük, hogy az egyenletnek két, egyenlő gyökéről (vagy egy darab kétszeres gyökéről) beszélünk. Természetesen magasabbfokú egyenletek esetében is gyakran fellépnek a többszörös gyökök.

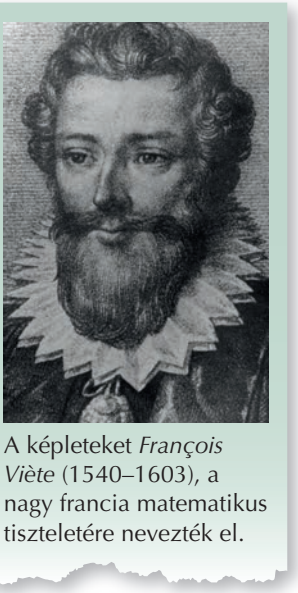
Az **együtthatók** és a **gyökök** összege, illetve szorzata között egyszerű összefüggést igazolhatunk.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

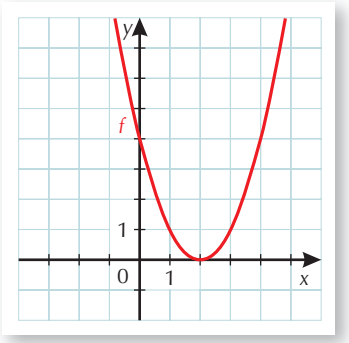
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Tehát ha az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) másodfokú egyenletnek van két (esetleg egyenlő) gyöke, akkor érvényesek az ún. **Viète-formulák**: a két gyök összege $-\frac{b}{a}$ és szorzata $\frac{c}{a}$. (Az összefüggést könnyen igazolhattuk volna a gyöktényezős alak segítségével is.)

A fenti tételek alkalmazására a továbbiakban néhány példát elemzünk.



A képleteket *François Viète* (1540–1603), a nagy francia matematikus tiszteletére nevezték el.



Megjegyzés

Hangsúlyozzuk, hogy ha az egyenletben szereplő másodfokú kifejezés teljes négyzet, akkor a gyökökre vonatkozó jelenlegi szóhasználat **nem egységes**. Például az $f(x) = (x-2)^2 = 0$ egyenlet esetében:

- halmazelméleti értelemben egyetlen gyök van: a gyökök halmaza {2};
- az $y = f(x)$ függvénygörbe egyetlen pontban, az $x = 2$ helyen érinti az x tengelyt;
- $f(x)$ gyöktényezős alakja két tényezőből áll: $(x-2)(x-2)$;
- algebrai értelemben tehát két, egyenlő gyöke van az egyenletnek;
- és a Viète-formulák is így értendők: a két gyök összege $2 + 2 = 4$, szorzatuk $2 \cdot 2 = 4$.

A matematikafeladatokban különböző szóhasználattal találkozunk. Olvashatunk az egyenlet
- „egy vagy egyetlen gyökéről”;
- „egy darab, kétszeres gyökéről”;
- „két egyenlő vagy egybeeső gyökéről”.

Bármelyik formával találkozunk, tudnunk kell, hogy a feladat kitűzője ezt a fenti értelemben alkalmazta.

1. példa Adott az $f(x) = x^2 - x(p+2) + 4$ másodfokú kifejezés. Adjuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy

a) az $f(x) = 0$ egyenletnek egy gyöke (azaz két egyenlő gyöke) legyen;
b) az $f(x) = 0$ egyenletnek gyöke legyen az 1;
c) az $f(x)$ kifejezés minden x-re pozitív értéket vegyen fel;
d) az $f(x) = 0$ egyenletben a gyökök összege 4,5 legyen;
e) az $f(x) = 0$ egyenletben a gyökök különböző előjelűek legyenek;
f) az $f(x) = 0$ egyenletben a gyökök négyzetösszege 17 legyen;
g) A valós számok halmazán értelmezett f függvény szélsőértékét az $x = 3$ helyen vegyen fel!

Megoldás Az egyes feladatokra általában többféle megoldás is adható, most igyekeztünk egyszerűbbeket választani.

a) Egyetlen gyököt kapunk, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla. $D = b^2 - 4ac = (p+2)^2 - 16 = p^2 + 4p - 12$. Ez akkor zérus, ha $p_1 = -6$ vagy $p_2 = 2$. (Dolgozhatunk teljes négyzetté alakítással is.)

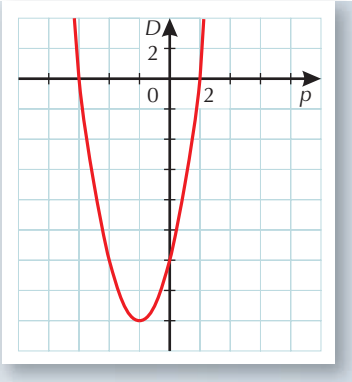
b) $f(1) = 0$, innen $1^2 - 1 \cdot (p+2) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 3$.

c) Az f függvény képe felfelé nyitott parabola, amely akkor vesz fel minden x-re pozitív értéket, ha az $f(x) = 0$ egyenletnek nincs gyöke, azaz a diszkriminánsa negatív. A $p^2 + 4p - 12 < 0$ egyenlőtlenség megoldása $-6 < p < 2$. (Most is alkalmazhatjuk pl. a teljes négyzetté alakítás módszerét.)

d) Legegyszerűbb a Viète-formulák alkalmazása: az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletben $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, ez esetben $x_1 + x_2 = p + 2 = 4{,}5$, ha $p = 2{,}5$.

Azonban a Viète-formulákat csak akkor használhatjuk, ha *tudjuk*, hogy van megoldás. Ezért vagy visszahelyettesítjük $p = 2{,}5$ értékét az eredeti egyenletbe, vagy általában is megállapítjuk, milyen p-re nemnegatív a diszkrimináns.

$D = p^2 + 4p - 12 \geq 0$, ha $p \leq -6$ vagy $2 \leq p$ *(ábra)*. A $p = 2{,}5$ a feltételnek megfelel, ekkor tehát valóban 4,5 a gyökök összege. (Ellenőrzésképpen érdemes elvégezni a helyettesítést.)



e) Nincs megoldás. Ha vannak gyökök, akkor szorzatuk $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 4$, tehát csak azonos előjelűek lehetnek.

f) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = (p+2)^2 - 2 \cdot 4 =$

$= p^2 + 4p - 4$. A $p^2 + 4p - 4 = 17$ egyenletből $p_1 = 3$ és $p_2 = -7$.
Most is ellenőriznünk kell, hogy *léteznek-e* gyökök. Mindkét p értékre $D \geq 0$ teljesül, tehát a kapott értékek megfelelők.
(A fenti megoldásnál lényegesen bonyolultabb lett volna x_1 és x_2 irracionális értékeinek négyzetösszegével számolni.)

g) A teljes négyzetté alakításból adódik, hogy az f függvény szélsőértékhelye $x = -\frac{b}{2a}$. Érdemes megjegyeznünk! (Ha a főegyüttható pozitív, akkor ez minimumhely; ha pedig negatív, akkor maximumhely.)
A $-\frac{b}{2a} = \frac{p+2}{2} = 3$ egyenletből $p = 4$ következik.

Megjegyzés

Az *f)* feladatban az ún. **szimmetrikus polinomok tételét** alkalmaztuk, a kétváltozós $x_1^2 + x_2^2$ szimmetrikus polinomra. (Polinomoknak a többtagú algebrai egész kifejezéseket nevezzük. Az n-edfokú, egyváltozós polinom általános alakja $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, ahol x a változó (határozatlan), a_i-k az együtthatók ($a_n \neq 0$). Többváltozós polinom fokszáma a legmagasabb fokú tag fokszámával egyezik meg, a tagok fokszáma pedig megegyezik a benne szereplő változók hatványkitevőinek az összegével. Egy $f(x_1; x_2)$ kétváltozós polinom szimmetrikus, ha $f(x_1; x_2) = f(x_2; x_1)$, azaz x_1 és x_2 szerepcseréje esetén a polinom nem változik.) A tétel szerint minden szimmetrikus kétváltozós $f(x_1; x_2)$ polinom egyértelműen írható fel az elemi kétváltozós szimmetrikus polinomok (azaz $f_1 = x_1 + x_2$ és $f_2 = x_1x_2$) polinomjaként. Mivel pedig a Viète-formulák alapján az elemi szimmetrikus polinomok kifejezhetők a másodfokú egyenlet együtthatóival, így a gyökök szimmetrikus kifejezéseit mindig felírhatjuk az együtthatók segítségével.

Például a $\frac{2x_1^2x_2 + 2x_2^2x_1}{3 - x_1x_2}$ szimmetrikus kifejezés az elemi szimmetrikus polinomokkal és a másodfokú egyenlet együtthatóival felírva:

$$\frac{2x_1x_2(x_1 + x_2)}{3 - x_1x_2} = \frac{2f_2f_1}{3 - f_2} = \frac{2 \cdot \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{3 - \frac{c}{a}} = \frac{\frac{-2bc}{a^2}}{\frac{3a-c}{a}} = -\frac{2bc}{a(3a-c)}.$$

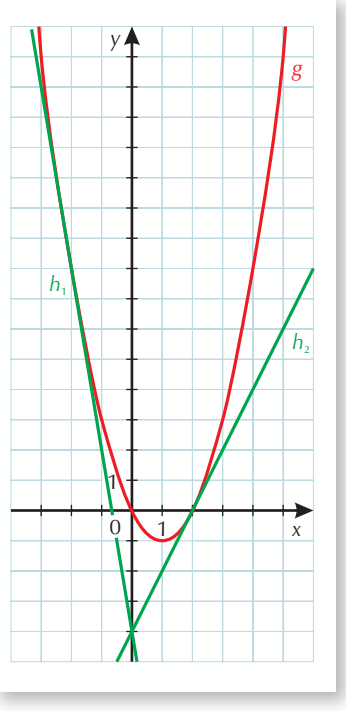
A szimmetrikus polinomok tétele a feladatmegoldásokban gyakran alkalmazható.

Grafikus szemléltetés

Korábban említettük, hogy a grafikus szemléltetés jelentősen megkönnyítheti a paraméteres feladatok megoldását. Például az *a)* feladattal kapcsolatban vizsgáljuk meg, hogyan függ a p paramétertől az $x^2 - x(p+2) + 4 = 0$ egyenlet gyökeinek a száma. Először alakítsuk át az egyenletet:

$x^2 - x(p+2) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = px - 4$.

Ábrázoljuk a bal oldalon lévő $g(x) = x^2 - 2x$ és a jobb oldalon lévő $h(x) = px - 4$ függvényeket! g grafikonja felfelé nyitott parabola, míg h képe a $(0; -4)$ ponton átmenő, p meredekségű egyenesek halmaza.



Az ábrán azt a két határhelyzetet szemléltettük, amikor a h_1 és h_2 egyenes érinti a g parabolát ($p_1 = -6$, $p_2 = 2$ esetek). Ekkor az egyenletnek egy megoldása van. Az ábráról könnyen leolvasható, hogy $p < p_1$ vagy $p > p_2$ esetekben két megoldás van (az egyenes metszi a parabolát), míg $p_1 < p < p_2$ esetén nincs megoldás.

Megjegyzés

A grafikus ábrázolóprogramok (például a GeoGebra) nagy segítséget nyújtanak a szemléltetésben, és így a feladatmegoldásban is.

2. példa Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + xy + y^2 = 0$ egyenletnek csak az $(x; y) = (0; 0)$ egyetlen megoldása van!

Megoldás Ha az egyik változó nulla, akkor a másiknak is nullának kell lenni, s ez valóban megoldás. A továbbiakban feltesszük, hogy $x, y \neq 0$, és több (nem mind lényegesen különböző) megoldási módszert is bemutatunk

Első megoldás: Ha $x = y$, akkor az egyenlet $3x^2 = 0$ alakú lesz, amiből $x = y = 0$ következik. Tegyük fel, hogy $x > y$, és szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $x - y > 0$-val!

$x^2 + xy + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - y^3 = 0.$

Ellentmondást kaptunk: $x^3 - y^3$ pozitív, így $(x; y) = (0; 0)$ az egyetlen megoldás.

Második megoldás:

Ha x és y azonos előjelű, akkor az $x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy > 0$, míg ha x és y ellentétes előjelű, akkor az $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy > 0$ átalakítás vezet célhoz.

Harmadik megoldás:

Teljes négyzetté alakítunk. $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$, és ez a kifejezés valóban nem lehet zérus, ha $x, y \neq 0$.

Negyedik megoldás:

Úgy tekintünk az egyenletre, mintha x lenne az ismeretlen és y a paraméter. Az egyenlet diszkriminánsa $D = y^2 - 4y^2 < 0$, tehát valóban nincs megoldás. (x^2 együtthatója pozitív, így a kifejezés minden megengedett x-re pozitív értéket vesz fel.)

Általánosítás:

Az eddigi megoldásokból látszik, hogy ha $x, y \neq 0$, akkor $x^2 + xy + y^2$ pozitív. Ezt az egyszerű állítást még kétféleképpen bebizonyítjuk.

A negyedik módszer *paraméterezéses eljárása* más esetekben is nagyon jól használható (lásd például a 6. kitűzött feladatot). Ekkor a $K = x^2 + xy + y^2$ kifejezés értékkészletének vizsgálata helyett az $x^2 + xy + y^2 = p$ paraméteres egyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Világos, hogy K pontosan olyan p értékeket vehet fel, amilyen p-re megoldható a $K = p$ egyenlet.

$x^2 + xy + y^2 = p \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + xy + y^2 - p = 0.$

Ha x-et tekintjük ismeretlennek, pontosan akkor van megoldás, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív:

$D \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 4(y^2 - p) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3y^2 + 4p \geq 0.$

Az eredményből következik, hogy $p \geq 0$ (különben a bal oldal negatív lenne), és $p \neq 0$ (különben $y = 0$ lenne).

A **második módszer** *becslést* alkalmaz. A $K = x^2 + xy + y^2$ kifejezés csak akkor lehetne negatív, ha x és y különböző előjelű. Legyen például $x > 0$ és $y < 0$, és alkalmazzuk a $z = -y$ helyettesítést; ekkor $z > 0$ és $K = x^2 - xz + z^2$. Az xz tagot „felülről” (az $x^2 + z^2$ összeget „alulról”) becsülhetjük: $xz \leq \frac{x^2 + z^2}{2}$. (Ez a becslés következik az $(x + z)^2 \geq 0$ teljes négyzetből, vagy az x és z számokra felírt mértani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenségből, amit majd a 12. leckében bizonyítunk.)

Készen vagyunk: $K = x^2 + z^2 - xz \geq 2xz - xz = xz > 0$.

A **törtes egyenletek** gyakran visszavezethetők első- vagy másodfokú egyenlet megoldására.

3. példa Oldjuk meg az $\frac{x+3}{x-1} = \frac{2x-3}{ax+1}$ egyenletet, ha $a = 1; 2; 3; 1{,}5$!

Megoldás Kikötés: $x - 1 \neq 0$, $ax + 1 \neq 0$.

Szorzunk a nevezők szorzatával:

$(x+3)(ax+1) = (x-1)(2x-3) \Leftrightarrow x^2(a-2) + x(3a-4) = 0 \Leftrightarrow x\big(x(a-2) + 3a - 4\big) = 0.$

Az egyenletnek $x = 0$ mindig gyöke.

Ha $a = 1$, akkor $-x - 1 = 0$, innen $x = -1$, de ez a megoldás nem felel meg a kikötésnek.

Ha $a = 2$, akkor nem kapunk új megoldást.

Ha $a = 3$, akkor $x + 5 = 0$, innen $x = -5$. Ebben az esetben két megoldás van.

Ha $a = 1{,}5$, akkor $-0{,}5x + 0{,}5 = 0$, innen $x = 1$, de ez szintén hamis gyök. (Most az első tört nevezője lenne 0.)

4. példa Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a rendezett valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 16x^2 - 6xy - y^2 &= 0 \\ 4x^2 + 3xy + 2x + y^2 + 5y + 8 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás

Első megoldás:

Mindkét egyenlet másodfokú. Megpróbálunk az első – egyszerűbb – egyenletben x és y között kapcsolatot találni. Szorzattá alakítunk a csoportosítás módszerével: a $-6xy$ tagot $-8xy + 2xy$ összegeként írjuk fel.

$16x^2 - 6xy - y^2 = 16x^2 - 8xy + 2xy - y^2 = 8x(2x - y) + y(2x - y) = (2x - y)(8x + y)$.

A szorzat akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

I. eset: $2x - y = 0$, azaz $y = 2x$.

Ekkor a második egyenlet $4x^2 + 3x \cdot 2x + 2x + (2x)^2 + 5 \cdot 2x + 8 = 0$, amely rendezés után $7x^2 + 6x + 4 = 0$ alakra redukálható. Ennek diszkriminánsa negatív, tehát nem kapunk megoldást.

II. eset: $8x + y = 0$, azaz $y = -8x$.

Ekkor a második egyenlet $4x^2 + 3x \cdot (-8x) + 2x + (-8x)^2 + 5 \cdot (-8x) + 8 = 0$, rendezés után

$22x^2 - 19x + 4 = 0$ alakú. Ennek két gyöke van: $x_1 = \frac{1}{2}$ (ekkor $y_1 = -4$) és $x_2 = \frac{4}{11}$ $\left(\text{ekkor } y_2 = -\frac{32}{11}\right)$.

Ellenőrizhetjük, hogy mindkét számpár megoldása az egyenletrendszernek.

Második megoldás (vázlat):

A szorzattá alakítás általában nem könnyű, megvalósításához nagy gyakorlat szükséges. A hasonló típusú feladatokban hatékonyan alkalmazható a következő módszer.

Az első ún. *homogén egyenlet*, minden tagja másodfokú. Ekkor érdemes például y^2-tel osztani az egyenletet. (Könnyen ellenőrizhető, hogy $y = 0$ semmilyen x értékre nem gyöke az egyenletrendszernek.)

Az így kapott $16\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$ egyenlet $\left(\frac{x}{y}\right)$-ban másodfokú, a két gyök $\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}$ és $\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{8}$.

Sikerült elsőfokú kapcsolatot találnunk x és y között, megkaptuk az előző megoldás $y = 2x$ és $y = -8x$ két esetét. Innen a megoldás hasonlóan folytatható. (Alkalmazhattuk volna a 2. példa negyedik megoldásának paraméterezéses eljárását is.)

5. példa *a)* Írjunk fel olyan ötödfokú egyenletet, amelynek gyökei {1, 2, 3, 4, 5}!

b) Hány ilyen egyenlet van?

c) Hány hetedfokú egyenlet van, amelynek egyszeres gyökei 1, 2, 3, 4, 5, és más gyöke nincs?

Megoldás

a) Például az $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$ ilyen egyenlet.

b) Minden $a(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$ egyenlet megfelelő, ahol $a \neq 0$ tetszőleges valós szám. A keresett egyenletekből tehát végtelen sok van. (Az is látható, hogy csak ezek az egyenletek lesznek megfelelők.)

c) Úgy „gyárthatunk" ilyen egyenleteket, hogy a fenti ötödfokú gyöktényezős alakot olyan $g(x)$ másodfokú polinommal szorozzuk meg, amelynek nincsen gyöke, azaz amelyre a $g(x) = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív. Például $(x^2 + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 0$ megfelelő egyenlet, és a képzés módjából következik, hogy végtelen sok megfelelő hetedfokú egyenlet van.

FELADATOK

Ha külön nem jelezzük, az alábbi egyenletek, egyenletrendszerek megoldását a valós számok lehető legbővebb részhalmazán keressük meg.

1. E2 Hogyan függ a p valós paramétertől az alábbi egyenletek gyökeinek a száma?

a) $(p^2 - 1)x^2 + (p + 1)x = 2p + 2$; *b)* $|x^2 - 7x + 10| = p^2$; *c)* $|x^2 - 7x + 10| = x + p$.

2. E2 Oldjuk meg a következő egyenletet: $\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{p}{x^2 + 2x} + \frac{1}{2x - x^2} = 0$. ($p \in \mathbf{R}$ paraméter.)

3. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{aligned} x^2y + y^2x &= 2 \\ xy + 3x + 3y &= 7 \end{aligned}\right\}$ *b)* $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 2{,}25 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{513}{16} \end{aligned}\right\}$

4. E2 Legyen $f(x) = x^2 + 2x(1 - p) + 2p - 3$. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy
a) az $f(x) = 0$ egyenletnek két különböző pozitív gyöke legyen;
b) az $f(x) = 0$ egyenlet két gyöke egymás ellentettje legyen;
c) az $f(x) = 0$ egyik gyöke a $[-2; 3]$ intervallumban legyen, a másik azon kívül;
d) $f(x)$ minimuma $y = -4$ legyen!

5. E2 Határozzuk meg az alábbi függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát:

$$a(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x^2+5x-6)}{(x^2-9)}}; \qquad b(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x-2} + x - 1}\,.$$

6. E2 Határozzuk meg az alábbi, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvények értékkészletét! (Próbáljunk több megoldást adni.)

$$a(x) = x + \frac{1}{x}; \qquad b(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}; \qquad c(x) = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

7. E2 Hogyan függ az a, b valós paramétertől az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a száma?

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ x^2 + y^2 &= b \end{aligned}\right\}$$

8. E1 Mi a **hiba** az alábbi megoldásban?
Feladat: Határozzuk meg x és y arányát, ha adott az alábbi egyenletrendszer: $\left.\begin{aligned} x^2 - 6xy + 2y^2 &= -3 \\ 2x^2 + 3xy - 7y^2 &= -2 \end{aligned}\right\}$

„**Megoldás**”:
Homogén egyenletet kapunk, ha az első egyenlet -2-szeresét és a második egyenlet 3-szorosát összeadjuk: ekkor $4x^2 + 21xy - 25y^2 = 0$. Oszthatunk y^2-tel: $\frac{4x^2}{y^2} + \frac{21x}{y} - 25 = 0$. ($y = x = 0$ nem lehetséges.)

Az egyenlet másodfokú az $\frac{x}{y}$ változóban. Gyökei $\frac{x}{y} = 1$ vagy $\frac{x}{y} = -\frac{25}{4}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így $\frac{x}{y}$ mindkét értéke helyes.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1274–1296, 1466–1489.

7. MÁSODFOKÚRA VISSZAVEZETHETŐ EGYENLETEK, EGYENLETRENDSZEREK

A harmadfokú és a negyedfokú egyenletek gyökei kifejezhetők az együtthatók segítségével, de ehhez általában bonyolult módszerekre van szükség. Sajnos az ötöd- és magasabbfokú egyenletek megoldására általánosan alkalmazható megoldóképlet nincs (és nem is adható).

A híres milánói természettudósról, *Girolamo Cardano*ról (1501–1576) nevezték el a harmadfokú egyenlet megoldóképletét, a Cardano-formulát. Az ötöd-és magasabbfokú egyenletekkel kapcsolatos nevezetes eredmények pedig leginkább *Evariste Galois* (1811–1832) francia és *Niels Henrik Abel* (1802–1829) norvég matematikusok nevéhez köthetők. Munkásságukról, eredményeikről és életükről sok érdekességet olvashatunk az interneten.

Girolamo Cardano

Evariste Galois

Niels Henrik Abel

A magasabbfokú egyenletek egy részét – különböző módszereket alkalmazva – középiskolai szinten is megoldhatjuk. Az alábbiakban erre mutatunk néhány példát.

Gyakori eljárás a **helyettesítés módszere**. Ekkor a magasabbfokú egyenleteket alkalmas helyettesítéssel alacsonyabb fokszámú egyenletekre vezetjük vissza.

A helyettesítés több területen, általánosan is alkalmazható: a gyökös, exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenletek megoldásánál is látunk majd példákat.

1. példa (szimmetrikus egyenlet)

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$ egyenletet!

Megoldás Mivel az $x = 0$ nem megoldás, mindkét oldalt osztjuk x^2-tel, és az egyenletet átalakítjuk:

$$6x^2 - 13x + 12 - \frac{13}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

A $z = x + \frac{1}{x}$ helyettesítést alkalmazzuk, ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. A $6(z^2 - 2) - 13z + 12 = 0$ egyenlet megoldásai $z_1 = 0$ és $z_2 = \frac{13}{6}$.

Visszahelyettesítés után z_1 nem ad megoldást, míg az $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$ egyenletből $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = \frac{3}{2}$. Ezek tehát az egyenlet megoldásai, amiről ellenőrzéssel is meggyőződhetünk.

Megjegyzés

A megfelelő tagok együtthatói szimmetrikus sorozatot alkotnak (6, −13, 12, −13, 6). Megmutatható, hogy az ilyen ún. *szimmetrikus egyenleteknek* ha gyöke x_0, akkor gyöke $\frac{1}{x_0}$ is. Ezért hasonló feladatokban a *reciprok egyenlet* elnevezéssel is találkozhatunk.

2. példa Az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket alkalmas helyettesítéssel vezessük vissza másodfokú egyenletekre, egyenlőtlenségekre!

a) $\sqrt{x-3} = 2x - 7$; *c)* $\sqrt[6]{x-2} + \sqrt[3]{8x-16} = 21$; *e)* $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2) \geq 12$;

b) $2x^8 - 5x^4 + 3 \geq 0$; *d)* $(x^2 + 6x)^2 - 63 = (x+3)^2$ *f)* $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 82$.

Megoldás *a)* $a = \sqrt{x-3}$ helyettesítéssel $a = 2a^2 - 1$ a kapott egyenlet. (Ne felejtsük el: $a \geq 0$.)

b) $b = x^4$ helyettesítéssel $2b^2 - 5b + 3 \geq 0$ a megoldandó egyenlőtlenség.

c) $\sqrt[3]{8x-16} = 2 \cdot \sqrt[3]{x-2}$, így $c = \sqrt[6]{x-2}$ helyettesítéssel $c + 2c^2 = 21$.

d) **Első megoldás**: $d = (x+3)^2$ helyettesítéssel $(d-9)^2 - 63 = d$.

Második megoldás: Mindkét oldalból 1-et kivonva szorzattá alakítunk:

$(x^2 + 6x)^2 - 64 = (x+3)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x - 8) = (x+4)(x+2)[= (x^2 + 6x + 8)]$, s ekkor $x^2 + 6x + 8$ kiemelhető: $(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x - 8 - 1) = 0$.

e) **Első megoldás**: $(x-3)(x+2)(x-2)(x+1) = (x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2)$, így az $e = x^2 - x - 6$ helyettesítéssel $e(e+4) \geq 12$.

Második megoldás: Szimmetrikusan helyettesítünk. A négy tényező „átlaga” $x - 0{,}5$, így a $z = x - 0{,}5$ helyettesítéssel $(z - 2{,}5)(z - 1{,}5)(z + 1{,}5)(z + 2{,}5) \geq 12 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2 - 2{,}5^2)(z^2 - 1{,}5^2) \geq 12$, s ez már z^2-ben másodfokú egyenlőtlenség.

f) $f = x + 4$ helyettesítéssel $(f-1)^4 + (f+1)^4 = 82$. A műveleteket elvégezve a páratlan fokú tagok kiesnek: $2f^4 + 12f^2 + 2 = 82$, s így f^2-ben másodfokú egyenletet kapunk.

Magasabbfokú egyenletek megoldására egy másik jól használható módszer az **egyenlet fokszámának fokozatos csökkentése**. Ennek lényege: ha találunk egy x_0 gyököt, akkor az $(x - x_0)$ gyöktényezővel osztva az egyenlet megoldását 1-gyel kisebb fokszámú egyenlettel folytathatjuk.

3. példa Oldjuk meg az $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ egyenletet!

Megoldás Észrevehetjük, hogy az $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ polinom együtthatóinak összege $1 - 1 - 2 + 2 = 0$. Ebből következik, hogy $f(1) = 0$, azaz $x_1 = 1$ gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek.

Osszuk el $f(x)$-et az $(x-1)$ gyöktényezővel! (Ennek során olyan polinomot keresünk, melyet $(x-1)$-gyel szorozva $f(x)$-et kapjuk meg.)

$$(x^3-x^2-2x+2):(x-1)=x^2-2$$
$$\underline{-(x^3-x^2)}$$
$$-2x+2$$
$$\underline{-(-2x+2)}$$
$$0$$

Így $f(x)=(x-1)(x^2-2)$, és az $x^2-2=0$ egyenletet már könnyű megoldanunk: $x_2=\sqrt{2}$ és $x_3=-\sqrt{2}$.

(A polinomok osztása a hagyományos osztás algoritmusát követi. A legmagasabb fokú tagokat vizsgálva $(x^3-x^2-2x+2):(x-1)\approx x^2$, visszaszorzás után $x^2(x-1)=x^3-x^2$, ezeket a tagokat az osztandóból tehát már megkaptuk. A még hiányzó $(x^3-x^2-2x+2)-(x^3-x^2)$ különbséggel folytatjuk az osztást, ez $-2x+2$. Ebben pedig az osztó megvan -2-szer, maradék nélkül.)

Megjegyzések

1. Ha az $f(x)$ polinomnak x_0 gyöke, akkor $f(x)$ maradék nélkül osztható az $(x-x_0)$ polinommal. Legyen ugyanis a hányadospolinom $h(x)$, és az osztási maradék r (ami most konstans). Ekkor az $f(x)=(x-x_0)h(x)+r$ osztásban x helyére x_0-t helyettesítve $f(x_0)=(x_0-x_0)h(x)+r$ adódik, és ha x_0 gyök $(f(x_0)=0)$, akkor szükségképpen $r=0$.

Ha pedig x_0 nem gyök, akkor $r=f(x_0)$; azaz az osztási maradék megegyezik az x_0 helyen vett helyettesítési értékkel.

2. Hogyan „találhatunk” egy gyököt? Milyen helyettesítéseket érdemes kipróbálni?

A racionális együtthatós egyenletet a nevezők legkisebb közös többszörösével szorozva egész együtthatós egyenlethez jutunk. Az egész együtthatós egyenletek racionális gyökeire vonatkozik a következő nevezetes tétel.

Legyenek az $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ egyenlet együtthatói egész számok $(a_n,\ a_0\neq 0)$. Ha egy $\frac{u}{v}$ racionális szám (ahol $(u;\ v)=1$) gyöke az egyenletnek, akkor $u|a_0$ és $v|a_n$.

(Speciálisan: Ha $a_n=1$ esetén van racionális gyöke az egész együtthatós egyenletnek, akkor ez a gyök egész szám, és a konstans a_0 tag osztója.)

3. Az egyenlet bal oldalát csoportosítással és kiemeléssel is szorzattá alakíthattuk volna, $f(x)=x^2(x-1)-2(x-1)$ alapján.

4. A szorzattá alakítás végrehajtható az együtthatók egyeztetésével is. Az $x^3-x^2-2x+2=(x-1)(ax^2+bx+c)$ egyenlőség jobb oldala $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$, és innen az $(a;\ b;\ c)=(1;\ 0;\ -2)$ együtthatók adódnak.

4. példa Hogyan függ a p paraméter értékétől az $x^4+2p\cdot x^2+p+1=0$ egyenlet gyökeinek a száma?

Megoldás Az $y=x^2$ helyettesítéssel $(y\geq 0)$ az y-ban másodfokú $y^2+2p\cdot y+p+1=0$ paraméteres egyenletet kapjuk. A valós gyökök létezésének szükséges feltétele, hogy a másodfokú kifejezés diszkriminánsa ne legyen negatív: $D=4p^2-4p-4\geq 0$, ha $p\leq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vagy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq p$. Továbbá a helyettesítésből adódó $y\geq 0$ feltételnek is teljesülnie kell, amit legegyszerűbben a Viète-formulák segítségével állapíthatunk meg: $y_1+y_2=-2p$, és $y_1\cdot y_2=p+1$.

I. Két pozitív gyököt akkor kaphatunk y-ra, ha $-2p>0$ és $p+1>0$, vagyis $-1<p<0$.

A két feltételt egybevetve $-1<p\leq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ekkor x-re négy gyököt kapunk: $\pm\sqrt{y_1}$ és $\pm\sqrt{y_2}$. De ha $p=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (azaz $D=0$), akkor $y_1=y_2$ egybeesnek, és így csak két különböző gyököt kapunk x-re.

II. Egy pozitív és egy negatív gyököt akkor kaphatunk y-ra, ha a gyökök szorzata negatív. Innen $p+1<0$, vagyis $p<-1$.

A $D\geq 0$ feltétellel egybevetve $p<-1$. Ekkor x-re két gyököt kapunk: ha $y_1>0$ a pozitív gyök, $x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}$.

III. Végül ha $y=0$, akkor $p=-1$. Ekkor az $x^4+2p\cdot x^2+p+1=0$ egyenlet $x^2(x^2-2)$ alakú lesz; egyik gyöke $x_1=0$, a másik két gyök $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$.

Az x-re kapott eredményeket egy táblázatban foglalhatjuk össze.

p értéke	$p < -1$	$p = -1$	$-1 < p < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$p = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$y^2 + 2p \cdot y + p + 1 = 0$ gyökei y-ban	1 pozitív és 1 negatív gyök	1 pozitív és 1 zérus gyök	2 pozitív gyök	2 egyforma pozitív gyök
$x^4 + 2p \cdot x^2 + p + 1 = 0$ gyökeinek száma	2 gyök	3 gyök	4 gyök	2-2 egyforma gyök

5. példa Oldjuk meg az alábbi magasabbfokú egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} x^2y + xy^2 &= 20 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{4} \end{aligned}\right\}$ *b)* $\left.\begin{aligned} xy^2 - x^2y &= 324 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{36} \end{aligned}\right\}$ *c)* $\left.\begin{aligned} x^3 &= 5x + y \\ y^3 &= x + 5y \end{aligned}\right\}$

Megoldás *a)* Az egyenletrendszer szimmetrikus (ha a megoldás x és y értékeit felcseréljük, egyik egyenlőség sem változik), ilyenkor helyettesítéssel egyszerűbb egyenletrendszert kaphatunk. A bal oldalak szorzattá alakíthatók: $x^2y + xy^2 = xy(x+y)$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$. Alkalmazhatjuk az $a = x + y$, $b = xy$ helyettesítést, ekkor az új egyenletrendszer

$$\left.\begin{aligned} ab &= 20 \\ \frac{a}{b} &= \frac{5}{4} \end{aligned}\right\}.$$

A második egyenlet már elsőfokúvá alakítható. Innen kifejezzük az egyik változót, pl. $a = \frac{5}{4}b$; ezt behelyettesítve az első egyenletbe b-re másodfokú egyenletet kapunk. Ennek gyökei $b_{1,2} = \pm 4$, a megfelelő a értékek $a_{1,2} = \pm 5$. Végül az

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ xy &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= -5 \\ xy &= -4 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerek megoldásai: $(x; y) = (1; 4)$, $(4; 1)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}; \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$ és $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$.

b) Hasonlóan járunk el. Legyen $a = y - x$, $b = xy$ a helyettesítés, ekkor

$$\left.\begin{aligned} ab &= 324 \\ \frac{a}{b} &= \frac{1}{36} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása $b = \pm 108$ és $a = \pm 3$. Az

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 3 \\ xy &= 108 \end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned} y - x &= -3 \\ xy &= -108 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerek megoldásai $(x; y) = (9; 12)$, $(-12; -9)$. (A második egyenletrendszernek nincs megoldása.)

c) Észrevehetjük, hogy az $y = x^3 - 5x$, valamint az $x = y^3 - 5y$ egyenleteket kielégítő pontok halmaza szimmetrikus az $y = x$ egyenesre: ha $(x; y) = (u; v)$ megoldás, akkor $(x; y) = (v; u)$ is az. Ezért megpróbálhatjuk az $y = x$ egyenesen lévő metszéspontokat megkeresni.

Az $y = x$ helyettesítés után $x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) = 0$, innen három megoldást kapunk: $(x; y) = (0; 0)$, $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$ és $(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$.

Kérdés, hogy vannak-e még más megoldások is.

Ha összeadjuk és kivonjuk az

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= 5x + y \\ y^3 &= 5y + x \end{aligned}\right\}$$

két egyenletét, kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 6(x+y) \\ x^3 - y^3 &= 4(x-y) \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenleteket pedig szorzattá alakíthatjuk:

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 6) &= 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 4) &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Látható, hogy négy eset lehetséges, attól függően, hogy a két egyenlet első vagy második tényezője nulla. Ha $x - y = 0$ (két eset), akkor a fenti három megoldást már megkaptuk.

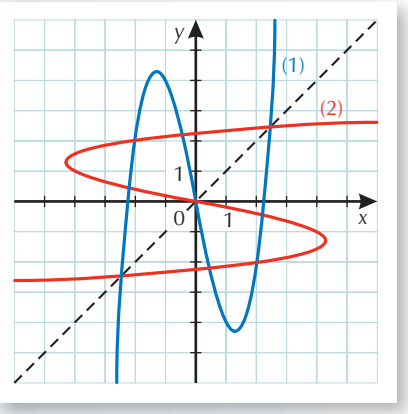
3. eset: Ha $x^2 + xy + y^2 - 4 = 0$ és $x + y = 0$, akkor $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x; y) = (2; -2)$ vagy $(-2; 2)$.

4. eset: Ha $x^2+xy+y^2-4=0$ és $x^2-xy+y^2-6=0$, akkor a két egyenlet különbségéből $xy=-1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{x}$. Visszahelyettesítünk valamelyik egyenletbe: $x^2+\frac{1}{x^2}=5 \Leftrightarrow x^4-5x^2+1=0$. Az egyenlet pl. $a=x^2$ helyettesítéssel másodfokú, gyökei $a_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, és így az eredeti egyenletrendszer további megoldásai:

$$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}};-\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{21}}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}};\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{21}}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}};-\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{21}}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}};\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{21}}}\right).$$

Összesen 9 megoldás van, ezek a két görbe metszéspontjaiként állnak elő.



FELADATOK

Ha külön nem jelezzük, az alábbi feladatok megoldását a valós számok lehető legbővebb részhalmazán keressük meg.

1. E1 A $6x^3-7x^2-16x+m=0$ egyenlet egyik gyöke 2. Határozzuk meg az m paraméter és a másik két gyök értékét!

2. E1 Fejezzük be a lecke 2. példájában szereplő *a)–f)* feladatok megoldásait!

3. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

a) $x^4-5x^3-2x^2-5x+1\le 0$;

b) $x^4-5x^3-2x^2+5x+1=0$;

c) $x^4-5x^3+5x-1=0$;

d) $x^2-4x+3+\frac{1}{2x^2-8x+7}=1$;

e) $(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)+24\ge 0$.

4. E2 Oldjuk meg az alábbi magasabbfokú egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}&=2\\ y^2-x^2&=16x^2y^2\end{aligned}\right\}$ *b)* $\left.\begin{aligned}x+y&=6\\ x^4+y^4&=34xy\end{aligned}\right\}$ *c)* $\left.\begin{aligned}2x-y&=2+xy\\ 2x^2y&=15+xy^2\end{aligned}\right\}$ *d)* $\left.\begin{aligned}x+y&=5z\\ x^2+y^2&=13z\\ x^3+y^3&=35z\end{aligned}\right\}$

5. V Bizonyítsuk be a 3. példa 2. megjegyzésében kimondott nevezetes tételt az egész együtthatós polinom racionális gyökeiről!

6. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egyenlet fokszámának fokozatos csökkentésével!

a) $x^3+2x^2-2x-4=0$;

b) $2x^3-x^2+2x-1=0$;

c) $6x^4-x^3-14x^2+2x+4=0$.

7. E2 *René Descartes* (1596–1650) francia filozófus, matematikus és fizikus az alábbi egyenlet gyökeit többszöri csoportosítás után, szorzattá alakítás segítségével határozta meg. Próbálkozzunk meg mi is a szorzattá alakítással!
A feladat: $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1490–1521.

8. ABSZOLÚTÉRTÉKES EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Az abszolút értéket tartalmazó egyenleteket, egyenlőtlenségeket általában az **abszolútérték-függvény kiküszöbölésével** oldjuk meg. A definíció segítségével elágaztatunk: $|x| = x$, ha $x \geq 0$; míg $|x| = -x$, ha $x < 0$.

Ez a módszer természetesen akkor is alkalmazható, ha az átalakítandó egyenlet több abszolút értékes kifejezésből áll, csak ekkor bonyolultabb az esetszétválasztás.

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet, illetve egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $|x + 3| + 0{,}5|x - 4| = -x + 2{,}5$; *b)* $|x + 3| + 0{,}5|x - 4| < -x + 2{,}5$.

Megoldás *a)* $|x + 3| = x + 3$, ha $x + 3 \geq 0$, azaz $x \geq -3$; egyébként $|x + 3| = -(x + 3)$. Hasonlóan $|x - 4| = x - 4$, ha $x - 4 \geq 0$, azaz $x \geq 4$; egyébként $|x - 4| = -(x - 4)$.

A két elágaztatás miatt most négy esetet kellene vizsgálni, de észrevehetjük, hogy az $x < -3$ és $x \geq 4$ esetek egyszerre nem fordulhatnak elő. Egyszerűbb tehát, ha x értéke szerint végezzük az esetszétválasztást, mert ekkor csak három esetet kell vizsgálni. (Ha több abszolút értéket tartalmaz az egyenlet, akkor ez az eljárás látványosan egyszerűbb.)

I. eset: Ha $x \leq -3$, akkor $|x + 3| = -(x + 3)$ és $|x - 4| = -(x - 4)$. Az $f(x) = |x + 3| + 0{,}5|x - 4|$ függvény $-(x + 3) - 0{,}5(x - 4) = -1{,}5x - 1$ alakba írható. Így kiküszöböltük az abszolút értéket.

II. eset: Ha $-3 < x \leq 4$, akkor $|x + 3| = x + 3$ és $|x - 4| = -(x - 4)$. Ekkor $f(x) = x + 3 - 0{,}5(x - 4) = 0{,}5x + 5$.

III. eset: Ha $4 < x$, akkor $|x + 3| = x + 3$ és $|x - 4| = x - 4$. $f(x) = x + 3 + 0{,}5(x - 4) = 1{,}5x + 1$.

Az $f(x)$ abszolútértékes függvényt három lineáris részre bontottuk. Az $f(x) = -x + 2{,}5$ egyenletet mindhárom tartományon megoldjuk.

I. eset: Ha $x \leq -3$, akkor $f(x) = -1{,}5x - 1$. Innen a megoldandó egyenlet $-1{,}5x - 1 = -x + 2{,}5$ alakú, s ennek megoldása $x_1 = -7$. Ez megfelel az $x \leq -3$ feltételnek.

II. eset: Ha $-3 < x \leq 4$, akkor az egyenlet $0{,}5x + 5 = -x + 2{,}5$. Ennek megoldása $x_2 = -\frac{5}{3}$, ami megfelel a $-3 < x \leq 4$ feltételnek.

III. eset: Ha $4 < x$, akkor az $1{,}5x + 1 = -x + 2{,}5$ egyenlet megoldása $x_3 = \frac{3}{5}$. Erre nem teljesül a $4 < x$ feltétel, ez hamis gyök.

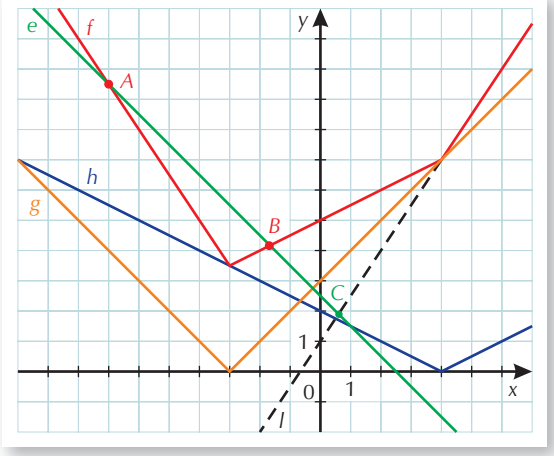
Eredmény: $x_1 = -7$ vagy $x_2 = -\frac{5}{3}$ a két gyök, aminek helyességéről az ellenőrzéssel is meggyőződhetünk.

Az algebrai megoldásunkat jól szemlélteti a **grafikus ábrázolás**.

Az f függvény három lineáris részből tevődik össze, képe két félegyenes és egy szakasz. Az e: $y = -x + 2{,}5$ függvény képe egyenes. Mivel $e(-7) = 9{,}5$ és $e\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{6}$, az e függvénygörbe f-et az $A(-7;\ 9{,}5)$ és $B\left(-\frac{5}{3}; \frac{25}{6}\right)$ pontokban metszi *(ábra)*.

Az f függvény ábrázolását más módon is megtehetjük. Legyen $g(x) = |x + 3|$ és $h(x) = 0{,}5|x - 4|$, ekkor $f(x) = g(x) + h(x)$, azaz az f függvényt a g és h **függvények összegeként** is előállíthatjuk. Az ábráról leolvashatók az egyes függvények tulajdonságai:

Ha $x \leq 4$, akkor $g + h$ képe $-1{,}5$ meredekségű félegyenes (hiszen g meredeksége -1, h meredeksége pedig $-0{,}5$ volt, és a meredekségek összeadódnak). $g(-3) = 0$, így $f(-3) = h(-3)$, azaz az összegfüggvény -3 helyen felvett értéke megegyezik a h függvény -3-nál felvett értékével. A -3 és 4 közötti x-ekre $g + h$ képe $1 + (-0{,}5) = 0{,}5$ meredekségű szakasz, és $f(4) = g(4)$. Végül ha $x > 4$, akkor $g + h$ képe $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ meredekségű félegyenes.



Az ábrán még bejelöltük a C pontot, ami a hamis gyök grafikus megjelenését mutatja. Ez az e: $y = -x + 2{,}5$ és l: $y = 1{,}5x + 1$ egyenesek metszéspontjaként áll elő, de a valódi gyököket adó intervallumon kívül.

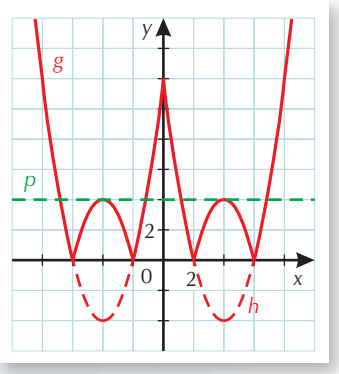
b) Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a grafikonról egyszerűen leolvasható: $-7 < x < -\frac{5}{3}$.

2. példa Hogyan függ a p paramétertől az $\left|x^2 - 8|x| + 12\right| = p$ egyenlet megoldásainak a száma?

Megoldás Az abszolútérték-függvény kiküszöbölése többszörös esetszétválasztást jelent, ez az eljárás most elég bonyolultnak tűnik. Érdemes ábrázolnunk az $f(x) = \left|x^2 - 8|x| + 12\right|$ függvény grafikonját.

Az összetett függvény ábrázolási módszerét alkalmazzuk. Legyen a belső függvény $g(x) = x^2 - 8|x| + 12$, ekkor a külső az abszolútérték-függvény: $f(x) = |g(x)|$.

Észrevehetjük, hogy g páros függvény ($g(z) = g(-z)$ minden valós z-re), ezért grafikonja az y tengelyre tükrös. Elegendő tehát $x \geq 0$ esetén ábrázolnunk g-t, majd az így kapott „fél” képét az y tengelyre tükröznünk.



Ha $x \geq 0$, akkor $h(x) = x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$ képe felfelé nyitott parabola a 2 és 6 zérushelyekkel. Ezt kell tükröznünk az y tengelyre, hogy megkapjuk g-t; majd $f(x) = |g(x)|$ miatt azokat az értékeket, ahol g negatív, az x tengelyre tükrözzük. A kapott függvény képe jellegzetes.

g minimuma az $x = \pm 4$ helyeken van, és értéke $g(4) = -4$; az y tengelymetszete pedig $g(0) = 12$. Az ábrázolás után már könnyen meg tudjuk válaszolni a feladat kérdését, az $f(x) = p$ egyenlet megoldásainak a számát. (Ehhez az f függvény grafikonjának és az $y = p$ egyenesnek a metszéspontjait kell összeszámolnunk.) Az eredményeket összefoglalhatjuk egy táblázatban:

p értéke	$p < 0$	$p = 0$	$0 < p < 4$	$p = 4$	$4 < p < 12$	$p = 12$	$12 < p$
$f(x)$ gyökeinek száma	0 gyök	4 gyök	8 gyök	6 gyök	4 gyök	3 gyök	2 gyök

3. példa **(Próbaérettségi vizsga alapján, 2015.)**

Két kerékpáros csapat többnapos túrán vesz részt. Reggel 9 órakor az első csapat az A, a második a B tájékozódási ponttól indul, s mindkettő ugyanazon az úton, azonos irányban haladva induláskor a C pont felé tart. Az előre kijelölt túraútvonalon az A-tól B-ig tartó útszakasz hossza 20 km, majd B-ből továbbhaladva további 30 km után következik a C tájékozódási pont. A csapatok egyenletes sebességgel haladnak. Az első csapat átlagsebessége 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másodiké 14 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Mennyi idő múlva lesz az első csapat kétszer olyan távol a C ponttól, mint a második?

(A C pontnál egyik csapat sem áll meg, hanem továbbkerekeznek.)

Megoldás Az abszolútérték segítségével elkerülhetjük az esetszétválasztást. (A felírható egyenlet attól függ, hogyan helyezkednek el a csapatok az A, B, C pontokhoz képest.)

Az első csapat t óra alatt $20t$ kilométert tesz meg, távolságuk a C ponttól $|50 - 20t|$. A második csapat C ponttól vett távolsága $|30 - 14t|$, innen $|50 - 20t| = 2|30 - 14t|$.

Ezután a típusmegoldás, hogy három esetet vizsgálunk t értéke és az abszolútértékek argumentumainak előjele alapján. A másik (most gyorsabb) lehetőség, hogy megoldjuk az $50 - 20t = \pm 2(30 - 14t)$ egyenleteket, és a kapott gyököket ellenőrizzük.

Ha $50 - 20t = 2(30 - 14t)$, akkor $t = 1{,}25$ óra; ha pedig

$50 - 20t = 2(30 - 14t)$, akkor $t = \frac{55}{24} \approx 2{,}29$ óra.

Ellenőrzés:

Ha $t = 1{,}25$ óra, akkor az első csapat megtett útja $20 \cdot 1{,}25 = 25$ km, ekkor C-től is 25 km-re vannak. A második csapat megtett útja $14 \cdot 1{,}25 = 17{,}5$ km, ők C-től ekkor 12,5 km-re vannak. Ez a megoldás megfelel a feltételeknek.

Ha $t = \frac{55}{24}$ óra, akkor az első csapat megtett útja $20 \cdot \frac{55}{24} = \frac{275}{6}$ km, ekkor C-től $\frac{25}{6}$ km-re vannak. A második csapat megtett útja ekkor $14 \cdot \frac{55}{24} = \frac{385}{12}$ km. Ez több, mint 30 km, ők C-n már túlhaladtak $\frac{25}{12}$ km-rel. De ez a megoldás is megfelelő: az első csapat kétszer távolabb van a C ponttól.

FELADATOK

1. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket (p valós paraméter)!

a) $|2x-7|-|x+8|-0{,}5x-10 \le 0$;
b) $|2x-7|-|x+8| = x+p$;
c) $|2x-7|-|x+10|-|x+3| = -x$;
d) $|2x-7|-|x+10|-|x+3| > 20$;
e) $\left|\sqrt{x-3}-6\right| = p$.

2. E1 Ábrázoljuk a következő függvényeket! (Az értelmezési tartomány a valós számok lehető legbővebb részhalmaza.)

$a(x) = \Big|\Big|\big||x|-1\big|-1\Big|-1\Big|$; $b(x) = \Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|$; $c(x) = \sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}$.

3. E2 Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x;\,y)$ pontokat, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbi feltételek!

a) $|x-2| = |y+3|$;
b) $|2x+3y| = 30$;
c) $2|x|+3|y| = 30$;
d) $(|x|-2)(|y|+3) < 0$.

4. E2 Adott három pont a számegyenesen: $A(4;\,0)$, $B(1;\,0)$ és $C(-3;\,0)$. Adjuk meg a számegyenes azon $P(x;\,0)$ pontjait, amelyekre

a) $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} = 20$;
b) $\overline{PA}+\overline{PB}-\overline{PC} = 20$.

5. E1 Egy pontszerű test kezdetben a koordinátarendszer $(-16;\,0)$ pontjában van. Ezután a test két egységnyi egyenletes sebességgel halad az x tengely pozitív irányába. Mekkora a test távolsága t idő múlva

a) az origótól;
b) a $(12;\,0)$ ponttól;
c) a $(b;\,0)$ ponttól?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1570–1602.

9. GYÖKÖS EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Gyökös egyenleteket és egyenlőtlenségeket általában hatványozással oldunk meg, így próbálunk megszabadulni a gyököktől, és polinom egyenletre áttérni. Előfordulhat például, hogy az egyenlet több négyzetgyököt tartalmaz – ekkor, ha szükséges, többszöri négyzetre emeléssel próbálkozhatunk.

Az egyenletek négyzetre emelése nem ekvivalens átalakítás. Az $A = B$ egyenlet négyzetre emelésével kapott $A^2 = B^2$ egyenlet az eredeti egyenlet gyökein kívül az $A = -B$ egyenlet gyökeit is tartalmazza. ($A = B \Rightarrow A^2 = B^2$, de fordítva nem igaz.) Az ilyen ún. **következmény egyenleteknél** fellépő hamis gyököket **ellenőrzéssel** szűrhetjük ki.

A hamis gyök elkerülésére a másik lehetőség az egyenlet **alaphalmazának** megfelelő leszűkítése. $A^2 = B^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |A| = |B|$, de ha például A, $B \ge 0$, akkor a négyzetre emelés már ekvivalens átalakítás: $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$, ha A, B nemnegatív.

Az egyenlőtlenségek megoldásakor eredményül általában intervallumot, azaz a valós számok valamely végtelen elemszámú részhalmazát kapjuk. Az így kapott gyökök helyességét legtöbbször nem tudjuk ellenőrizni (hiszen végtelen sok van), tehát törekednünk kell arra, hogy az átalakítások során ekvivalens műveleteket végezzünk.

Azt se felejtsük el, hogy a négyzetre emelés , azaz az $x \mapsto x^2$ függvény a valós számok halmazán nem monoton. (Azaz pl. $-3 < 2$, de $(-3)^2 > 2^2$.) A négyzetre emelés előtt tehát érdemes megvizsgálni a két oldal előjelét, és esetleg esetszétválasztást végezni az előjelek alapján. (Hiszen ha $0 \le a$, b, akkor $a \le b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \le b^2$.)

1. példa Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$.

Megoldás Érdemes először az egyenlet értelmezési tartományát meghatározni. (Kiderülhet, hogy nincs is megoldás; vagy esetleg olyan alaphalmazra szűkülhet a feladat, amelyen már egyszerűbb a megoldás.) Kikötések: $2x+1 \ge 0$, $x-3 \ge 0$ és $x \ge 0$. Ezek metszete $x \ge 3$, az egyenletnek ekkor van értelme.

Mindkét oldalt négyzetre emeljük és átalakítjuk úgy, hogy a következő négyzetre emeléskor megszabaduljunk a gyöktől:

$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=4x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=x+2.$

Újból négyzetre emelünk:

$4(2x+1)(x-3)=(x+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2-24x-16=0.$

Ennek az egyenletnek a gyökei $x_1=4$ és $x_2=-\frac{4}{7}$. Az utóbbi hamis, mert az alaphalmazon kívül van. $x_1=4$ valódi gyök, amit az ellenőrzés igazol: $\sqrt{2\cdot 4+1}+\sqrt{4-3}=2\sqrt{4}$ valóban.

Megjegyzés

Az első négyzetre emeléskor mindkét oldal biztosan nemnegatív volt, de a másodiknál elvileg nem. Ezért kötelező volt ellenőrizni. Ha a második négyzetre emelés előtt az $x+2\geq 0$, azaz $x\geq -2$ (egyébként nem szűkítő) kikötést tesszük, akkor a négyzetre emelés már ekvivalens művelet. (Akkor is az, ha az $x\geq 3$ feltételből következően hivatkozunk arra, hogy a jobb oldalon biztosan pozitív szám áll.) Ekkor elvileg nincs szükség az ellenőrzésre; az $x_1=4$ gyök valódi, hacsak nem követtünk el számolási hibát.

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$\sqrt{x+4}<-3x+2.$

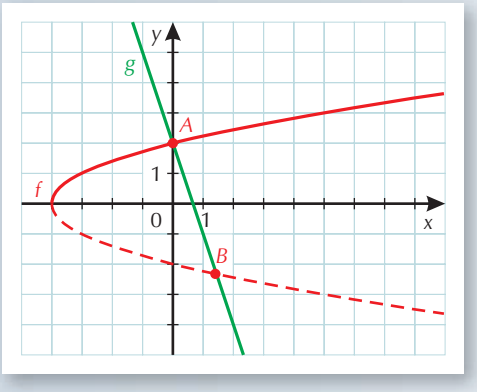
Megoldás

Első megoldás:

A gyök alatt nem állhat negatív szám, ezért $x\geq -4$. A jobb oldalon egy gyökös kifejezésnél nagyobb szám áll, így a $-3x+2>0$ feltételnek is teljesülnie kell. Innen $x<\frac{2}{3}$, az értelmezési tartomány leszűkül: $x\in\left[-4;\frac{2}{3}\right[$. Mivel mindkét oldal nemnegatív, szabad négyzetre emelnünk.

$\sqrt{x+4}<-3x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x+4<9x^2-12x+4 \quad \Leftrightarrow \quad 0<9x^2-13x \quad \Leftrightarrow \quad 0<x(9x-13).$

Az egyenlőtlenség megoldása $x<0$ vagy $\frac{13}{9}<x$. Ez utóbbi nem felel meg a kikötéseknek, tehát az eredmény: $-4\leq x<0$. (**Másképpen** azt is mondhattuk volna, hogy az $x<\frac{2}{3}$ feltétel miatt a $9x-13$ tényező negatív, ezért a másik tényezőnek, x-nek, szintén negatívnak kell lennie.)



Második megoldás:

Már többször említettük, hogy a grafikus szemléltetés megkönnyítheti a megoldást.

Ha ábrázoljuk az $f(x)=\sqrt{x+4}$ és $g(x)=-3x+2$ függvényeket, akkor a grafikonról leolvasható, hogy az $A(0;2)$ pontban metszik egymást, és $f(x)<g(x)$ a $-4\leq x<0$ intervallumon teljesül.

Ha a metszéspont esetleg kevésbé „szép” szám, és nem olvasható le könnyen, akkor is egyszerűen járhatunk el. A függvényeket ábrázoljuk, majd megoldjuk az $f(x)=g(x)$ *egyenletet*. (Ezt lényegesen könnyebb megoldani, mint az eredeti *egyenlőtlenséget*.) A két megoldás, $x_1=0$ és $x_2=\frac{13}{9}$ közül kiválasztjuk a valódi metszéspont $x_1=0$ koordinátáját, és leolvassuk a megfelelő $-4\leq x<0$ intervallumot.

(A B hamis gyök a $g(x)$ és $h(x)=-\sqrt{x+4}$ függvénygörbék metszéspontja.)

Harmadik megoldás (vázlat):

Alkalmazhatunk helyettesítést. $a=\sqrt{x+4}$ helyettesítéssel az $a<-3a^2+14$ másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldanunk, az $a\geq 0$ feltétel mellett.

Az alaphalmaz vagy az értékkészlet meghatározása gyakran megkönnyíti az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását.

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $\sqrt{x-13}-\sqrt{12-x}=2$;
b) $\sqrt{x-13}+\sqrt{x-15}>\sqrt{2}$;
c) $\sqrt{x+13}=-x-15$;
d) $\sqrt{4+\sqrt{x-1}}<1$;
e) $\sqrt{4+\sqrt{x-1}}\le 2$;
f) $\sqrt{3x-12}+\sqrt{4-x}<6-x$;
g) $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-1}>2$;
h) $1+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x+1}$.

Megoldás

a) Négyzetgyök alatt nem állhat negatív szám, ezért feltétel, hogy $x\ge 13$ és $x\le 12$. Ellentmondást kaptunk, az egyenletnek nincs megoldása.

b) Kikötés: $x\ge 15$. Ekkor a bal oldalon $\sqrt{x-13}\ge\sqrt{2}$, tehát a bal oldal minimuma $\sqrt{2}$. Minden $x>15$ valós szám megoldás. (Ha $x=15$, akkor a két oldal egyenlő.)

c) Az értékkészletet vizsgáljuk. A jobb oldal nemnegatív kell, hogy legyen:
$-x-15\ge 0 \Leftrightarrow x\le -15$. Ekkor azonban negatív szám állna a gyök alatt, tehát nincs megoldás.

d) A külső gyök alatt legalább 4 áll, így a bal oldal legalább 2. Nincs megoldás.

e) A bal oldal legalább 2, így $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ az egyetlen megoldás.

f) Az alaphalmaz $3x-12\ge 0$ és $4-x\ge 0$ miatt $x=4$. Ekkor a $0<2$ igaz egyenlőtlenséget kapjuk, tehát $x=4$ (az egyetlen) megoldás.

g) $x^2+5\ge 5$, ezért $\sqrt{x^2+5}\ge\sqrt{5}>2$. Az egyenlőtlenség minden olyan valós számra teljesül, amelyre értelmezve van: $x^2-1\ge 0$, azaz $x\ge 1$ vagy $x\le -1$.

h) A bal oldal értéke legalább 2, így a jobb oldalon $x\ge 1$.
Ekkor viszont $x^2+1>x+1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x+1}$, a bal oldal biztosan nagyobb: nincs megoldás.

4. példa Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{8+x}=\sqrt[3]{16}$ $(x\in\mathbf{R})$!

Megoldás A köbre emeléskor az $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ azonosságot alkalmazzuk. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$8-x+8+x+3\sqrt[3]{8-x}\cdot\sqrt[3]{8+x}\cdot\left(\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{8+x}\right)=16.$$

Tegyük fel, hogy x megoldás, ekkor a zárójelen belüli kifejezés értéke a feladat állítása szerint éppen $\sqrt[3]{16}$. Innen

$$3\sqrt[3]{(8-x)(8+x)}\cdot\sqrt[3]{16}=0 \Leftrightarrow (8-x)(8+x)=0.$$

Két gyököt kaptunk: $x_1=8$ és $x_2=-8$. Ha tehát vannak gyökök, akkor csak ezek lehetnek.

Ellenőrzés: ha $x=8$, akkor a bal oldal $\sqrt[3]{16}$; ha pedig $x=-8$, akkor szintén teljesül az egyenlőség. Mindkét megoldás helyes.

FELADATOK

1. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $\sqrt{3x-2}=2x-8$;
b) $\sqrt{3x-2}\ge 2x-8$;
c) $2\sqrt{2x+9}<0{,}5x+4$;
d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}=7$;
e) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$;
f) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}\ge\sqrt{2x+7}$;
g) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

2. E2 Hogyan függ a p valós paramétertől az alábbi egyenletek valós gyökeinek a száma?

a) $3\sqrt{x+4}=x+p$;
b) $\sqrt{|x-3|}=px$.

3. E1 Mi a **hiba** a következő megoldásban?

Feladat: Oldjuk meg a $\sqrt[3]{x-10}-\sqrt[3]{4x}=2$ egyenletet!

„Megoldás”:

Az $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ azonosságot alkalmazzuk. Az egyenletet köbre emelve és átalakítva

$$x-10-4x-3\sqrt[3]{x-10}\cdot\sqrt[3]{4x}\left(\sqrt[3]{x-10}-\sqrt[3]{4x}\right)=8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-10}\cdot\sqrt[3]{4x}\cdot\left(\sqrt[3]{x-10}-\sqrt[3]{4x}\right)=-6-x$$

adódik. Az eredeti egyenletet alapján $\sqrt[3]{x-10}-\sqrt[3]{4x}$ helyébe 2-t helyettesítünk, ekkor $\sqrt[3]{x-10}\cdot\sqrt[3]{4x}\cdot 2=-6-x$. Újból köbre emelünk és átrendezzük az egyenletet:
$(x-10)\cdot 4x\cdot 8=(-6-x)^3 \quad\Rightarrow\quad x^3+50x^2-212x+216=0$.
Az $x_1=2$ gyök, szorzattá alakítunk: $(x-2)(x^2+52x-108)=0$.
A másodfokú egyenlet két gyöke $x_2=2$ és $x_3=-54$.
A köbre emelés kölcsönösen egyértelmű művelet, az átalakításaink ekvivalensek voltak.
Az eredmény tehát: $x_{1,2}=2$ (kétszeres gyök) és $x_3=-54$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1522–1569.

MEGMARADÓ SEBESSÉG (Olvasmány)[2]

Egy érdekes közlekedési helyzet a következő.

Tegyük fel, hogy egy kertvárosi övezetben egy I. jelöléssel ellátott autó a megengedett 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad, amikor megelőzi őt egy II. jelöléssel ellátott autó a megengedettnél nagyobb, 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Az autók elé az úttestre kigurul egy labda, ezért mindkét autó sofőrje egyszerre kezd el fékezni, éppen akkor, amikor egymás mellett haladnak. A lassabb autó megáll a labda előtt. Mekkora „megmaradó” sebességgel halad ugyanitt a gyorsabb autó? (Feltételezhetjük, hogy a két autónak ugyanolyan erős fékei vannak.)

A kérdés tehát arra vonatkozik, hogy ha a szabályosan haladó autó még éppen meg tud állni, ott a gyorsabban, szabálytalanul haladó autó mekkora sebességgel ütné el (nevezzük ezt megmaradó sebességnek) az útra kiguruló labdát. Józan ésszel a sebességek különbségét, 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-t tippelnénk megmaradó sebességnek; nézzük meg, hogy a számítások alátámasztják-e ezt a becslést.

Az egyenletesen lassuló mozgást leíró egyenleteket tanultuk fizikaórán, a sebesség és az út időfüggése az alábbi:

(1) $v=v_0-at$,

(2) $s=v_0t-\frac{a}{2}t^2$.

Itt v a t idő eltelte utáni sebességet jelöli, s a megtett út, v_0 a jármű kezdősebessége, $a>0$ pedig a lassulása. Az (1) egyenlet addig áll fenn, amíg az autó meg nem áll, azaz $v=0$ lesz. Ekkor $0=v_0-at \;\Leftrightarrow\; t=\frac{v_0}{a}$, ez az autó megállásáig eltelt idő.

Kiszámíthatjuk azt is, mekkora utat tesz meg ezalatt a jármű. (2)-ből a $t=\frac{v_0}{a}$ helyettesítéssel $s=v_0\frac{v_0}{a}-\frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{a}\right)^2$, azaz (3) $s=\frac{v_0^2}{2a}$ adódik. Ez tehát a fékezés alatt megtett út, az autó **fékútja**. Most már a v_0 és a kezdőértékekből meghatározhatjuk a fékutat.

A feladat adott út megtétele utáni sebességre kérdez rá, a válaszhoz még meg kell határoznunk, hogyan függ a sebesség a megtett úttól. Ehhez (1)-ből kifejezzük t-t és (2)-be helyettesítjük. (1)-ből $t=\frac{v_0-v}{a}$, ezt (2)-be írva $s=v_0\frac{v_0-v}{a}-\frac{a}{2}\left(\frac{v_0-v}{a}\right)^2$, ahonnan – némi számolás után – $s=\frac{v_0^2-v^2}{2a}$, vagy másképpen (4) $v=\sqrt{v_0^2-2as}$ adódik a sebesség útfüggésére. Ez az összefüggés írja le, hogyan változik az autó sebessége a fékezés során.

A fékezési lassulás függ például az útviszonyoktól vagy a fékek állapotától, egy átlagos értéke $a=5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Érdemes méterben és másodpercben számolni, ekkor 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 8{,}33\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}\approx 13{,}89\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ az átváltások.

2 Az olvasmányhoz felhasználtuk a következő írást: Csapodi Csaba: Az igazi különbség a 30-as és az 50-es sebesség között (www.index.hu)

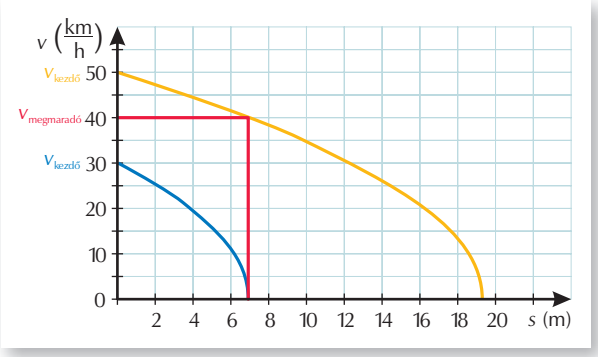
Az adatokkal a 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó I. autó fékútja (3)-ból $s = \frac{8{,}33^2}{2 \cdot 5} = 6{,}94$ m. Ekkora út megtétele után az 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó II. autó megmaradó sebessége (4)-ből $v = \sqrt{13{,}89^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6{,}94} = 11{,}11$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, azaz kb. 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

AZ EREDMÉNY ÉRTELMEZÉSE

Hát nem ennyit tippeltünk, az eredeti 20 km/h becslésünknek kb. a kétszeresét kaptuk. Mi lehet ennek az oka?

Ábrázoljuk a két autó sebességét az út függvényében!

(4) megfelelő helyettesítésével az I. autónál $v = \sqrt{8{,}33^2 - 10s}$, a II. autónál $v = \sqrt{13{,}89^2 - 10s}$ a két függvény képének az egyenlete (a sebességet $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ban kapjuk). Kiszámolhatjuk II. fékútját is, $s = \frac{13{,}89^2}{2 \cdot 5} = 19{,}3$ m. (Az ábrán a sebességet a szemléletesebb $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban tüntettük fel.)



A grafikonon két négyzetgyökfüggvény görbéje van, ezek egyik érdekes tulajdonságát tükrözik a számítások: *a lassuló autó a féktáv elején kevesebbet veszít a sebességéből, mint a féktáv végén.*

A grafikon a gyorshajtás veszélyeire is felhívja a figyelmet. Igaz, hogy a II. autó „csak" 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel lépi túl a sebességhatárt; viszont amikor a szabályosan közlekedő autó már meg tudott állni (!), a gyorshajtó még mindig 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad (ami még mindig több mint a megengedett). Ekkora sebességgel pedig veszélyes egy esetleges ütközés.

A levezetésben átlagos lassulási értékkel számoltunk. Vajon mennyire módosul a kapott eredmény, ha ettől eltérő a fékezési lassulás?

Ha pl. mindkét autónak erős a fékje, számolhatunk $a = 9$ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ értékkel. Ekkor I. fékútja $\frac{8{,}33^2}{2 \cdot 9} = 3{,}85$ m, II. megmaradó sebessége $\sqrt{13{,}89^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3{,}85} = 11{,}12$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, vagyis kb. annyi, amennyi $a = 5$ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ esetén volt. Lehetséges, hogy a megmaradó sebesség nem függ a lassulástól?

Ha az a paraméterrel és a v_0, w_0 kezdősebességekkel számolunk, akkor I. fékútja $s = \frac{v_0^2}{2a}$, ekkora út után pedig II. megmaradó sebessége $\sqrt{w_0^2 - 2a\frac{v_0^2}{2a}} = \sqrt{w_0^2 - v_0^2}$. Ez csakugyan független a lassulás mértékétől, csupán a kezdősebességekre jellemző érték.

A MODELL FINOMÍTÁSA

A fenti levezetésben feltételeztük, hogy a sofőrök rögtön elkezdenek fékezni, amint meglátják a labdát. A valóságban számolni kell a reakcióidővel (az észleléstől a tényleges fékezés megkezdéséig eltelt idő), ez legyen kb. 1,2 másodperc mindkét sofőr esetében. Hogyan változik ekkor a helyzet?

Az I. autó az 1,2 másodperc alatt megtesz $1{,}2 \cdot 8{,}33 \approx 10$ métert, és ehhez adódik a fent kiszámolt 6,94 m. Az I. autó **féktávolsága** tehát kb. 16,9 m, ekkora úton tud megállni az esemény észlelése után. Kérdés, mekkora a másik autó sebessége, amikor szintén ekkora utat tett meg?

A II. autó az 1,2 másodperc reakcióidő alatt megtesz $1{,}2 \cdot 13{,}89 \approx 16{,}7$ métert – ami nagyjából ugyanannyi, mint az I. autó teljes féktávolsága…

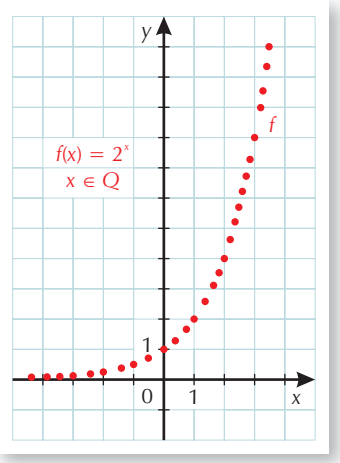
Váratlan eredményt kaptunk: *a gyorsabban haladó autó vezetője lényegében még el sem kezd fékezni ott, ahol a lassabban haladó autó már meg is állt.*

Ez a példa is jól mutatja a gyorshajtás veszélyeit.

10. IRRACIONÁLIS KITEVŐJŰ HATVÁNY, EXPONENCIÁLIS KIFEJEZÉSEK

A pozitív alapú, racionális kitevőjű hatvány értelmezése után – értelemszerűen – megpróbálkozunk az irracionális kitevőjű hatvány értelmezésével.

Az f: $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$, ún. exponenciális függvényt a racionális helyeken értelmezzük, ezért képe diszkrét, különálló pontokból áll. (A valós számok nevezetes tulajdonsága, hogy minden intervallumukban található racionális és irracionális szám is. Ezért az f függvény képének pontjai tetszőlegesen sűrűn helyezkednek el, de a görbét nem lehet egy vonallal megrajzolni.)



Az irracionális kitevőjű hatványt úgy kellene értelmezni, hogy az irracionális és racionális helyeken felvett függvényértékek együtt megőrizzék az f függvény monotonitási tulajdonságát a valós számok teljes halmazán. (Ebben az esetben f szigorúan monoton növekvő.) A keresett függvényt jelöljük g-vel, ez tehát a valós számokon értelmezett, 2-es alapú exponenciális függvény: g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2^x$. A kiterjesztést pedig úgy próbáljuk megvalósítani, hogy a g függvény is szigorúan monoton növekvő legyen, azaz megköveteljük a következőt:

Ha a p, r racionális számok „közrefogják” a q irracionális számot, akkor a 2^q függvényérték szintén 2^p és 2^r közé essen. Formulával: ha $p, r \in \mathbf{Q}$, $q \in \mathbf{Q}^*$, és $p < q < r$, akkor $2^p < 2^q < 2^r$ is teljesüljön.

Milyen értéket tulajdonítsunk pl. $g(\sqrt{5})$-nek?

$\sqrt{5}$ kétoldalról tetszőlegesen megközelíthető racionális számokkal, például a tizedestört-alakja alapján.

$2 < \sqrt{5} < 3$

$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$

$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$ és így tovább.

Célszerűnek látszik $2^{\sqrt{5}}$ hasonló közelítése:

$2^2 < 2^{\sqrt{5}} < 2^3$

$2^{2,2} < 2^{\sqrt{5}} < 2^{2,3}$

$2^{2,23} < 2^{\sqrt{5}} < 2^{2,24}$

$2^{2,236} < 2^{\sqrt{5}} < 2^{2,237}$ stb.

Bebizonyítható, hogy az alsó és felső közelítő értékek különbsége tetszőlegesen kicsivé válik, így a két sorozat egyetlen számot fog közre. Ezt a számot tekintjük $g(\sqrt{5}) = 2^{\sqrt{5}}$-nek.

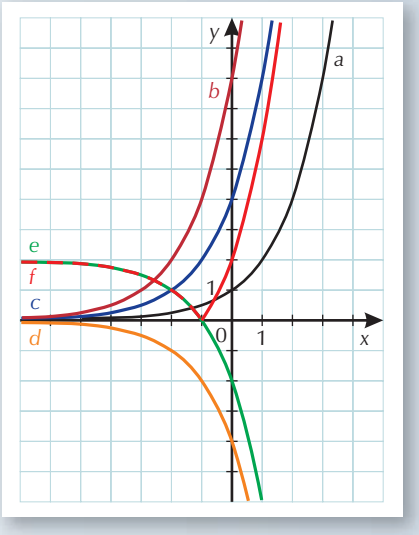
Hasonlóan értelmezhetjük 2^α-t bármely α irracionális helyen, a közrefogó racionális számsorozatok segítségével. Így megadtuk az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2^x$ valós kitevőjű exponenciális függvényt is.

Hasonlóan definiálhatunk a 2 helyett tetszőleges $a > 0$ alapú exponenciális függvényt, ahol az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ha $1 < a$, és szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$. (Ha $a = 1$, akkor a konstans $x \mapsto 1$ függvényt kapjuk.)

Magasabb matematikai eszközökkel az is igazolható, hogy a racionális kitevőjű hatványozás azonosságai a valós kitevőjű kiterjesztés esetén is érvényben maradnak. A fenti kiterjesztés tehát megfelel a permanencia-elvnek.

A továbbiakban néhány összetett feladatot oldunk meg az exponenciális függvények témaköréből. A leggyakoribb megoldási módszerek: azonos alapra vagy azonos kitevőre hozás; a monotonitási tulajdonságok alkalmazása; és gyakori eljárás, amikor helyettesítéssel első- vagy másodfokú kifejezésre vezetjük vissza a feladatot.

1. példa Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az $f(x)=\left|-\frac{1}{2}\cdot 2^{x+3}+2\right|$ függvényt a valós számok halmazán, és állapítsuk meg a tengelymetszeteit!



Megoldás Az $a(x)=2^x$, $b(x)=2^{x+3}$, $c(x)=\frac{1}{2}\cdot 2^{x+3}$, $d(x)=-\frac{1}{2}\cdot 2^{x+3}$, $e(x)=-\frac{1}{2}\cdot 2^{x+3}+2$, $f(x)=\left|-\frac{1}{2}\cdot 2^{x+3}+2\right|$ függvénygörbék az ábrán láthatók.

Az egyes geometriai transzformációk a következők: az a alapfüggvényből egy $(-3;\,0)$ vektorú eltolással kapjuk b-t; $d(x)=-\frac{1}{2}b(x)$, így az x tengelyre merőleges, $-\frac{1}{2}$ arányú affinitás (vagy egy $\frac{1}{2}$ arányú affinitás és egy tengelyes tükrözés szorzata) állítja elő d-t; $e(x)=d(x)+2$, azaz d-t a $(0;\,2)$ vektorral eltolva kapjuk e-t; végül $f(x)=|e(x)|$ miatt e negatív értékeit tükrözzük az x tengelyre.

A tengelymetszetek meghatározása: $f(0)=\left|-\frac{1}{2}\cdot 2^3+2\right|=|-2|=2$ az y tengelymetszet.

Az $f(x)=\left|-\frac{1}{2}\cdot 2^{x+3}+2\right|=0$ egyenletből $\frac{1}{2}\cdot 2^{x+3}=2 \Leftrightarrow 2^{x+3}=2^2 \Leftrightarrow x=-1$, mert az exponenciális függvény szigorúan monoton.

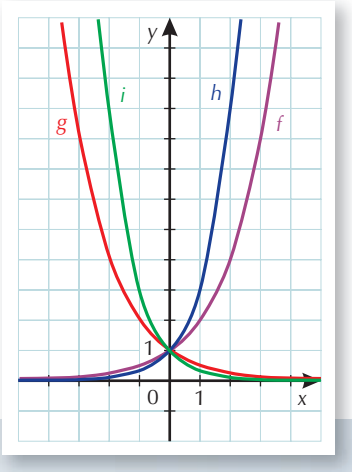
2. példa Határozzuk meg a $g(x)=\sqrt{3^x-6\cdot 3^{-x}-1}$ függvény lehető legbővebb értelmezési tartományát!

Megoldás Tipikus megoldási módszer a helyettesítés. Legyen $a=3^x$, ekkor $a-\frac{6}{a}-1\geq 0$ a megoldandó egyenlőtlenség. $a>0$, így az egyenlőtlenség $a^2-a-6\geq 0$ alakban írható. A másodfokú egyenlet két gyöke $a_1=-2$ és $a_2=3$, az egyenlőtlenség megoldása $a\leq -2$ vagy $3\leq a$. Az első egyenlőtlenség sosem teljesül; a második akkor igaz, ha $3^1\leq 3^x$, azaz $1\leq x$, mert a 3-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növő.

A g függvény legbővebb értelmezési tartománya tehát $1\leq x$.

Megjegyzés

Az utolsó lépésben nem elég a szigorú monotonitásra hivatkozni (a szigorúan monoton növekedés helyett), mert ha az alap 1-nél kisebb, a relációs jel megfordul. (Például $0{,}5^2<0{,}5^x \Leftrightarrow 2>x$.) A következő ábráról leolvashatók az exponenciális függvények fontosabb monotonitási-, nagyságviszonyi- és szimmetriatulajdonságai. ($f(x)=2^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x)=3^x$, $i(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ az ábrázolt függvények.)



Az **exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket** az előző példában alkalmazott helyettesítéssel gyakran visszavezethetjük első- vagy másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldására.

3. példa Oldjuk meg az alábbi feladatokat! (x valós szám.)

a) $5^{x+2}-5^x=7\cdot 5^{x+1}-11$; *b)* $5^{x+2}-5^x\leq 7\cdot 5^{x+1}-11$; *c)* $5^{2x}-3\cdot 5^x=4\cdot 5^{x+1}+50$.

Megoldás

a) Legyen $a=5^x$, ekkor $5^2\cdot a-a=7\cdot 5\cdot a-11$ a megoldandó egyenlet. Innen $a=1 \Leftrightarrow 5^x=5^0 \Leftrightarrow x=0$, az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt.

b) Hasonló helyettesítéssel $5^2 \cdot a - a \leq 7 \cdot 5 \cdot a - 11$, innen $a \geq 1$. Az $x \mapsto 5^x$ függvény szigorúan monoton nő, így $5^x \geq 5^0 \Leftrightarrow x \geq 0$ a megoldás.

c) Alkalmazzuk a $b = 5^x$ helyettesítést! $b^2 - 3b = 20b + 50 \Leftrightarrow b^2 - 23b - 50 = 0$. Az egyenlet gyökei $b_1 = 25$ és $b_2 = -2$. Az utóbbi hamis gyök ($5^x > 0$), az elsőből $x = 2$ adódik.

4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet, illetve egyenlőtlenséget a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $5 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x = 2 \cdot 25^x$; *b)* $5 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x > 2 \cdot 25^x$.

Megoldás *a)* Az $a = 2^x$, $b = 5^x$ helyettesítéssel homogén másodfokú egyenletet kapunk, amit pl. b^2-tel oszthatunk, hiszen $a, b > 0$.

(Érdemes megjegyeznünk a **helyettesítéses módszert**: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, és hasonlóan $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$. Ha tehát $a = 2^x$, akkor $4^x = a^2$. Ezt a trükköt bonyolultabb alapok esetén is gyakran alkalmazhatjuk.)

$$5 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x = 2 \cdot 25^x \Leftrightarrow 5a^2 + 3ab = 2b^2 \Leftrightarrow 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{b}\right) - 2 = 0.$$

Az utolsó egyenlet gyökei $\frac{a}{b} = -1$ és $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. Visszahelyettesítünk:

$\frac{a}{b} = \frac{2^x}{5^x} = \left(\frac{2}{5}\right)^x = -1$ nem lehetséges, míg ha $\frac{a}{b} = \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^1$, akkor $x = 1$. (Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt.)

b) A b^2-tel való osztás nem változtatja meg a relációs jel irányát.

$5\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{b}\right) - 2 > 0$, ha $\frac{a}{b} < -1$ vagy $\frac{2}{5} < \frac{a}{b}$. Az első egyenlőtlenség soha nem teljesül; a másodikból $\frac{2}{5} < \left(\frac{2}{5}\right)^x \Leftrightarrow 1 > x$, hiszen a $\frac{2}{5}$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton *csökkenő*.

Végezetül két példát nézünk az **exponenciális egyenletrendszerek** megoldására. (Ezekben legalább az egyik egyenlet exponenciális.)

5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} 2^{x+y-1} &= 8 \\ 3^x - 5 \cdot 3^y &= 12 \end{aligned}\right\}$ *b)* $\left.\begin{aligned} 4^x - 3 \cdot 5^y &= 1 \\ 2 \cdot 4^x + 5^{y+1} &= 13 \end{aligned}\right\}$

Megoldás

a) Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, így az első egyenletből $x + y - 1 = 3 \Leftrightarrow x + y = 4$. Sikerült egy elsőfokú egyenletre áttérnünk, helyettesítsünk a második egyenletbe $x = 4 - y$-t! Ekkor $c = 3^y$ helyettesítéssel $3^{4-y} - 5 \cdot 3^y = 12 \Leftrightarrow \frac{81}{c} - 5c = 12 \Leftrightarrow 5c^2 + 12c - 81 = 0$. A $c_1 = -5{,}4$ nem lehetséges, ha $c_2 = 3$, akkor pedig $y = 1$, és visszahelyettesítés után $x = 3$.

b) Az $a = 4^x$, $b = 5^y$ helyettesítést alkalmazva lineáris egyenletrendszert kapunk: $\left.\begin{aligned} a - 3b &= 1 \\ 2a + 5b &= 13 \end{aligned}\right\}$. Ha például kivonjuk a második egyenletből az első 2-szeresét, akkor $11b = 11$, azaz $b = 1$; majd innen $a = 4$ adódik. Visszahelyettesítés után kapjuk a megoldást: $(x; y) = (1; 0)$.

Benjamin Franklin végrendelete

Ki ne hallott volna arról a tengernyi mennyiségű búzaszemről, melyet állítólag a sakk feltalálója kért magának jutalmul a sakk feltalálásáért! Ez a hatalmas szám az egység állandó kétszerezésével jött létre. A feltaláló ugyanis a sakktábla első kockájáért 1, a második kockájáért 2 és így tovább egészen a 64. kockáig minden kockáért kétszer annyi búzaszemet kért, mint az előzőért.

A számok azonban meglepő gyorsasággal növekednek még sokkal kisebb arányú növelés mellett is, mint az állandó kétszerezés. Az 5%-os kamatra elhelyezett tőke évenként az előző évi összeg 1,05-szörösére emelkedik. Ez még nem is olyan jelentős növekedés. Egy bizonyos idő elteltével azonban jókorára nőhet ez a tőke. Ezzel magyarázható a végrendeletileg hosszú időre hagyományozott tőkék meglepő felduzzadása. Előfordulhat az, hogy a végrendelkező csak egy csekély összeget hagy hátra és végrendeletében mégis hatalmas összegek sorsa felől dönt. Így rendelkezett Benjámin *Franklin,* a híres amerikai államférfi is, akinek végrendeletét *„Benjámin Franklin különböző munkáinak gyűjteménye"* c. könyvben tették közzé. Az alábbiakban kivonatot közlünk ebből a végrendeletből:

„Ezer fontsterlinget Boston lakosságára hagyok. Ha ezt az ezer fontot a lakosság megkapta, adja át azt a város legkiválóbb polgárainak, akik tartoznak azt évi 5%-os kamat mellett fiatal mestereknek kölcsönadni. (Abban az időben Amerikában még nem voltak hitelintézetek.) Így ez az összeg száz év múlva 131 000 fontsterlingre fog felnövekedni. Az a kívánságom, hogy akkor ebből az összegből 100 000 fontsterlingen építsenek jóléti intézményeket, a maradék 31 000 fontsterlinget pedig ismét száz esztendeig kamatoztassák. A második évszázad elteltével ez az összeg 4 061 000 fontsterlingre fog emelkedni, amelyből 1 060 000 fontot a bostoni lakosság, 3 000 000 fontot pedig Massachusetts állam képviselőtestületének rendelkezésére bocsátok. Tervezgetésemet nem merem tovább folytatni."

(Forrás: *Perelman: Szórakoztató algebra,* Gondolat, 1975)

Vajon jól számolt Franklin? Ellenőrizd!

FELADATOK

Ha külön nem jelezzük, az alábbi egyenletek, egyenletrendszerek megoldását a valós számok lehető legbővebb részhalmazán keressük meg.

1. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $3^x + 3^{x+1} > 4^x + 4^{x+1}$;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-5} \le 9$;

c) $(2x-3)^{x^2-5x+4} = 1$;

d) $26 \cdot 5^{\sqrt{x+1}} - 5^{2\sqrt{x+1}+1} = 5$;

E2 *e)* $(3-2\sqrt{2})^x + (3+2\sqrt{2})^x = 34$.

2. E2 Oldjuk meg a következő paraméteres egyenleteket! (p valós paraméter.)

a) $2^x + 2^{-x} = p$;

b) $2^{x+p} - 2^{x+1} = 16 \quad (p > 0)$.

3. E1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} 6 \cdot 3^x - 7 \cdot 2^y &= 40 \\ 5 \cdot 2^y - 2 \cdot 3^x &= -8 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 0,2^{2x-y+1} &= 1 \\ 2^y - 6 \cdot 2^x &= 80 \end{aligned}\right\}$

4. E2 Oldjuk meg és vizsgáljuk a következő egyenletet! (p valós paraméter.)

$(p-1) \cdot 10^x + p \cdot 10^{-x} - 2p = 0$.

5. V Bizonyítsuk be, hogy az $5^x - 2^y = 1$ egyenletnek a természetes számpárok halmazán egyetlen megoldása van!

6. E1 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Oldjuk meg az $x^{x-3} = 1$ egyenleteket!

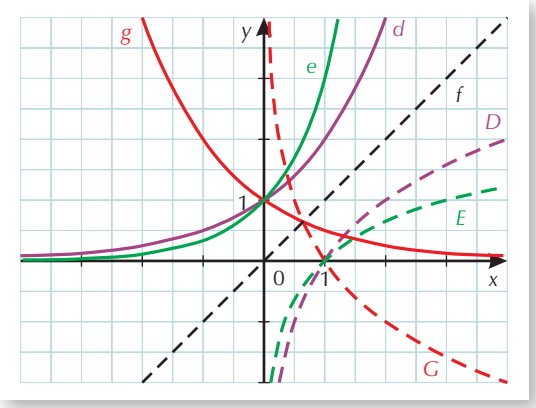
„Megoldás": Kikötés: $x > 0$. $x = 3$ megfelelő, több megoldás pedig nem lehet, mert az $x \mapsto x^{x-3}$ exponenciális függvény szigorúan monoton, az alapjától függően vagy nő, vagy csökken.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1603–1631.

11. LOGARITMUS

A hatványozás nem kommutatív művelet: $a^c \neq c^a$. Az $a^c = b$ egyenlet megoldásakor a c kitevőt tehát új művelet, a **logaritmus** alkalmazásával kereshetjük meg. (A hatványozás eredménye b, az a alapot pedig gyökvonással kapjuk meg.) A $c = \log_a b$ definíciót $a^{\log_a b} = b$ módon is megadhatjuk ($a, b > 0$, $a \neq 1$).

A definícióból következik, hogy az a alapú exponenciális és az a alapú logaritmus függvény egymás inverze. Az $x > 0$, $x \mapsto \log_a x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ha $a > 1$; míg $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő ($a = 1$ esetén nem értelmezzük). Az ábrán az egyes függvények közötti nagyságrendi és monotonitási kapcsolatot láthatjuk.



Az ábrázolt függvények:
$d(x) = 2^x$, $e(x) = 3^x$, $g(x) = 0{,}5^x$, és az inverzeik: $D(x) = \log_2 x$, $E(x) = \log_3 x$ és $G(x) = \log_{0,5} x$. Feltüntettük viszonyításként az $f(x) = x$ függvény egyenesét is, amelyre az inverz függvénygörbék szimmetrikusak.

A logaritmus tanult **azonosságai** a következők ($a, b, c, x > 0$; $a, x \neq 1$):

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$;

2. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$;

3. $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, $(k \in \mathbf{R})$;

4. $\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}$.

Megjegyzések

Megállapodás alapján ha a logaritmus argumentumában szorzat szerepel, akkor nem kötelező kitenni a zárójelet. Főleg régebbi kiadványokban szerepel a $\log_a bc$ alak, ekkor jelentése $\log_a (bc)$. (Persze, ha a feladat félreérthető, mindig célszerű a zárójelek használata.) Ha a függvény számszorosát jelöljük, akkor a szorzót a logaritmus elé írjuk. d-szer $\log_a b$ jelölése tehát $d \cdot \log_a b$, míg $\log_a b \cdot d = \log_a (b \cdot d)$.

Az első két azonosság logaritmusok összegeként és különbségeként írja fel a szorzat, illetve hányados logaritmusát; a harmadik a hatvány (vagy gyökvonás) logaritmusának azonossága; míg a negyedik azonosság segítségével tetszőleges x alapú logaritmusra térhetünk át.

Speciális logaritmusokkal is találkozunk: lg x a tízes, míg ln x a természetes alapú (e alapú, e közelítőleg 2,71) logaritmus jelölése.

Az **azonosságok bizonyítása** általában a hatványozás segítségével történik.

1. $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_a c} = c$ és $a^{\log_a bc} = bc$, ezért a bc szorzatot kétféleképpen felírva: $a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a bc} \Leftrightarrow a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a bc}$. Az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért a kitevők egyenlőek: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$.
2. A bizonyítás hasonlóan történik, ezúttal a $\frac{b}{c}$ hányadost írjuk fel kétféleképpen.
3. $a^{\log_a b} = b$, így $b^k = a^{\log_a b^k}$. Másképpen $b^k = (a^{\log_a b})^k = a^{k \cdot \log_a b}$. Ha b^k kétféle felírását összevetjük, a bizonyítandó azonosságot kapjuk. (Természetesen ismét hivatkoznunk kell az exponenciális függvény monotonitására.)
4. Vegyük az $a^{\log_a b} = b$ egyenlet mindkét oldalának x alapú logaritmusát! $\log_x (a^{\log_a b}) = \log_x b \Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_x a = \log_x b \Leftrightarrow \log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}$. (Felhasználtuk a 3. azonosságot.)

Megjegyzés

Az azonosságok természetesen mindkét irányban alkalmazhatók, de a feladatmegoldások során szűkíthetik vagy bővíthetik az egyes kifejezések értelmezési tartományát.

Például egy egyenletben $2\cdot\log_a b$ helyett írhatunk $\log_a b^2$-et, hiszen $b > 0$ adott volt; de ezzel az átalakítással a kifejezés alaphalmaza tágult, hiszen $\log_a b^2$ negatív b számokra is értelmes. (Az esetlegesen emiatt kapott hamis gyököt ki kell szűrni ellenőrzéssel vagy az alaphalmaz szűkítésével.) Fordítva: $\log_a b^2$ helyett nem írhatunk $2\cdot\log_a b$-t, mert az eredeti kifejezéssel ellentétben a negatív b értékek most már nem engedhetők meg, és így gyököt veszíthetünk.

A helyes átalakítás $\log_a b^2 = 2\cdot\log_a |b|$.

1. példa Közelítő értékek alkalmazása nélkül számítsuk ki az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\log_{\sqrt{3}} 8\cdot\log_4 81$; *b)* $3^{\log_4 5} - 3^{\log_5 4} + 4^{\log_5 3} - 5^{\log_4 3}$.

Megoldás

a) Áttérünk tetszőleges a alapú logaritmusra, és a következő trükkös átalakítást (a számlálók cseréjét) hajtjuk végre:

$$\log_{\sqrt{3}} 8\cdot\log_4 81 = \frac{\log_a 8}{\log_a \sqrt{3}}\cdot\frac{\log_a 81}{\log_a 4} = \frac{\log_a 81}{\log_a \sqrt{3}}\cdot\frac{\log_a 8}{\log_a 4} = \log_{\sqrt{3}} 81\cdot\log_4 8.$$

Mivel $\sqrt{3}^8 = 81$ és $4^{\frac{3}{2}} = 8$, a szorzat értéke $8\cdot\frac{3}{2} = 12$.

Persze „trükközés” nélkül is célt érünk. **Másképpen:**

$$\frac{\log_a 8}{\log_a \sqrt{3}}\cdot\frac{\log_a 81}{\log_a 4} = \frac{\log_a 2^3}{\log_a \sqrt{3}}\cdot\frac{\log_a \sqrt{3}^8}{\log_a 2^2} = \frac{3\log_a 2}{\log_a \sqrt{3}}\cdot\frac{8\log_a \sqrt{3}}{2\log_a 2} = \frac{3\cdot 8}{2} = 12.$$

b) Előzetesen igazoljuk, hogy $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ tetszőleges a, b, c pozitív számokra ($b \neq 1$)!

Mindkét oldal b alapú logaritmusát véve $\log_b(a^{\log_b c}) = \log_b(c^{\log_b a}) \Leftrightarrow \log_b c\cdot\log_b a = \log_b a\cdot\log_b c$, tehát a segédállítás valóban igaz. Ez alapján a kifejezés értéke

$3^{\log_4 5} - 3^{\log_5 4} + 4^{\log_5 3} - 5^{\log_4 3} = 5^{\log_4 3} - 4^{\log_5 3} + 4^{\log_5 3} - 5^{\log_4 3} = 0$.

Természetesen nem mindig ilyen „szépek” az eredmények; a megoldást általában a logaritmus művelete állítja elő.

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet, egyenlőtlenséget!

a) $\lg(x+6) - \lg\sqrt{2x-3} = 2 - \lg 25$; *b)* $\lg(x+6) - \lg\sqrt{2x-3} > 2 - \lg 25$.

Megoldás

Kikötés: $x + 6 > 0$ és $2x - 3 > 0$, azaz $x > 1{,}5$. A logaritmus azonosságait alkalmazzuk.

a) $\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = \lg 100 - \lg 25 = \lg 4 \Leftrightarrow x + 6 = 4\sqrt{2x-3}$. Négyzetre emelés után az $x^2 - 20x + 84 = 0$ egyenletet kapjuk, ennek gyökei $x_1 = 6$ és $x_2 = 14$. Mindkét gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

b) Az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$\lg\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} > \lg 4 \Leftrightarrow \frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} > 4 \Leftrightarrow x + 6 > 4\sqrt{2x-3}.$$

Az $x > 1{,}5$ feltétel miatt mindkét oldal pozitív, a relációs jel megmarad a négyzetre emelés után:

$(x+6)^2 > 16(2x-3) \Leftrightarrow x^2 - 20x + 84 > 0$.

Az egyenlőtlenség megoldása (összevetve a feltétellel) $1{,}5 < x < 6$ vagy $14 < x$.

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletet, egyenlőtlenséget!

a) $2\cdot\log_{0,5} x + 2\cdot\log_x 0{,}5 = 5$; *b)* $2\cdot\log_{0,5} x + 2\cdot\log_x 0{,}5 < 5$.

Megoldás

a) $x > 0$, $x \neq 1$. Áttérünk 0,5 alapú logaritmusra.

$$2\cdot\log_{0,5} x + 2\cdot\log_x 0{,}5 = 5 \Leftrightarrow 2\cdot\log_{0,5} x + 2\cdot\frac{\log_{0,5} 0{,}5}{\log_{0,5} x} = 5 \Leftrightarrow 2\cdot\log_{0,5} x + \frac{2}{\log_{0,5} x} = 5.$$

Az $a = \log_{0,5} x$ helyettesítéssel másodfokú egyenletet kapunk:

$2a + \frac{2}{a} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 - 5a + 2 = 0.$

A két gyök $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Visszahelyettesítünk: $\log_{0,5} x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{4}$ és $\log_{0,5} x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Kihasználtuk az exponenciális függvény szigorú monotonitását.)

b) Az egyenlőtlenség megoldása nehezebb, az azonos átalakítások után kapott $2a + \frac{2}{a} < 5$ egyenlőtlenséget el kell ágaztatni.

I. Ha $a < 0$, akkor az egyenlőtlenség mindig teljesül. $\log_{0,5} x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$, mert a 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő.

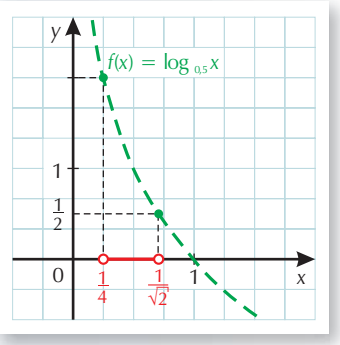
II. Ha $a > 0$, akkor szorzunk a-val, és a relációs jel iránya nem változik.

$2a + \frac{2}{a} < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 - 5a + 2 < 0.$

Az $f(a) = 2a^2 - 5a + 2$ függvény képe felfelé nyitott parabola, két zérushelye, mint fentebb kiszámoltuk, $a_1 = 2$ és $a_2 = \frac{1}{2}$.

$f(a) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < a < 2$. Visszahelyettesítve $\frac{1}{2} < \log_{0,5} x < 2$, majd mindhárom oldalt $\frac{1}{2}$ alapra felemelve $\frac{1}{\sqrt{2}} > x > \frac{1}{4}$. (Mint az ábrán is látható, a relációs jel megfordul, mert az alap 1-nél kisebb.)

A teljes megoldás a két halmaz egyesítése: $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $1 < x$.



4. példa Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} xy &= 500 \\ x^{\lg y + 1} &= 125 \end{aligned}\right\}$$

Megoldás $x, y > 0$. Mindkét egyenletnek vegyük a tízes alapú logaritmusát:

$$\left.\begin{aligned} \lg xy &= \lg 500 \\ \lg(x^{\lg y + 1}) &= \lg 125 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \lg x + \lg y &= 2 + \lg 5 \\ (\lg y + 1)\lg x &= 3 \lg 5 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kifejezzük pl. $\lg x$-et: $\lg x = 2 + \lg 5 - \lg y$, és behelyettesítjük a második egyenletbe:

$(\lg y + 1)(2 + \lg 5 - \lg y) = 3 \lg 5 \quad \Leftrightarrow \quad \lg^2 y - (1 + \lg 5)\lg y + 2 \lg 5 - 2 = 0.$

$a = \lg y$ helyettesítéssel az $a^2 - (1 + \lg 5)a + 2 \lg 5 - 2 = 0$ egyenlet két gyöke $a_1 = 2$ és $a_2 = \lg 5 - 1 = \lg 0{,}5$. Visszahelyettesítünk:

$\lg y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 100$ és $\lg y = \lg 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = 0{,}5$, a logaritmusfüggvény monotonitása miatt.

A megfelelő x értékek visszahelyettesítéssel számolhatók:

$\lg x_1 = 2 + \lg 5 - 2 = \lg 5$, innen $x_1 = 5$ és $\lg x_2 = 2 + \lg 5 - \lg 0{,}5 = 3$, s innen $x_2 = 1000$.

Eredmény: $(x; y) = (5; 100)$ vagy $(1000; 0{,}5)$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a gyökök helyességéről.

5. példa Tekintsük a $K = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{2022}$ szorzatot.

a) Elvégezve a műveleteket, hány jegyű szám lesz K? *b)* Mi K utolsó számjegye?

Megoldás A hatványozás azonossága miatt $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^{2022} = 3^{1 + 2 + \ldots + 2022}$. Az egész számok összegét 1-től 2022-ig Gauss módszerével, a számok párosításával határozhatjuk meg:

$1 + 2 + \ldots + 2022 = \frac{1 + 2022}{2} \cdot 2022 = 2\,045\,253$. Tehát $K = 3^{2\,045\,253}$.

a) Ekkora számot közvetlenül nem írhatunk be a számológépbe, ügyesebb módszert kell találni. Vegyük K 10-es alapú logaritmusát!

$\lg K = \lg 3^{2\,045\,253} = 2\,045\,253 \cdot \lg 3 \approx 975\,833{,}68$. Ez azt jelenti, hogy $10^{975\,833} < K < 10^{975\,834}$; és ebből következik, hogy K éppen 975 834 jegyű.

b) Készítsünk táblázatot a 3-hatványok végződéséről!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
3^n végződése	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	…

Észrevehetjük, hogy az utolsó számjegyek periodikusan ismétlődnek. Ennek az az oka, hogy a sorozat bármely tagja csak az őt megelőző tagtól függ (annak 3-szorosa); tehát ha egyszer ismétlődés lép fel, akkor az „öröklődik".
A periódus hossza 4. Mivel 2 045 253 maradéka 4-gyel osztva 1, így K végződése megegyezik 3^1 utolsó számjegyével, azaz 3.

FELADATOK

1. E1 Fejezzük ki a és b segítségével $\log_{30} 80$-at, ha $\lg 2 = a$ és $\lg 3 = b$!

2. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet, illetve egyenlőtlenséget!

a) $\lg x^3 - \frac{12}{\lg x} = 5$; *b)* $\lg x^3 - \frac{12}{\lg x} > 5$.

3. E2 Oldjuk meg és vizsgáljuk a $\log_3(9^x + 2p^3) = x$ egyenletet! (p valós paraméter.)

4. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket ($x, y > 0$):

a) $\left.\begin{aligned} x^2 &= y^x \\ y &= x^x \end{aligned}\right\}$ *b)* $\left.\begin{aligned} x^{x+y} - y^{12} &= 0 \\ y^{x+y} - x^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$

5. E2 Anna és Béla az alábbi hibakereséses feladatot elemzik.
„Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Feladat: Oldjuk meg az $\lg x^2 + \lg (x+4)^2 = 2\lg 3$ egyenletet!
„Megoldás": Azonosságok alkalmazásával $2\lg x + 2\lg (x+4) = 2\lg 3 \Leftrightarrow \lg (x(x+4)) = \lg 3$ adódik, s ebből a logaritmus függvény kölcsönös egyértelműsége miatt $x(x+4) = 3$. Az $x_1 = -2 + \sqrt{7}$ és $x_2 = -2 - \sqrt{7}$ gyökök visszahelyettesítésekor mindkét esetben a bal oldal értéke $0{,}9542 \approx 2\lg 3$, tehát a gyökök jók."

a) Anna állítja, hogy közelítő értékekkel nem lehet ellenőrzést végezni. Szerinte így csak azt kaptuk meg, hogy a gyökök „körülbelül" jók, ami az eredmény helyessége szempontjából semmit sem jelent. A korrekt ellenőrzéshez az $x_1 = -2 + \sqrt{7}$ és $x_2 = -2 - \sqrt{7}$ pontos értékeket kell visszahelyettesíteni.
Végezzük el a helyes ellenőrzést!
(Anna még azt is hozzátette, hogy ha az ellenőrzés ennyire számolásigényes, akkor célszerű minden lépésben ekvivalens átalakítást végezni, és záró megjegyzésként erre hivatkozni.)

b) Béla szerint azonban más hiba is van. Mire gondolhatott?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1632–1719.

12. NEVEZETES KÖZÉPÉRTÉKEK

Először a számtani és mértani közép fogalmával ismerkedünk meg. Két pozitív mennyiség, a és b mértani közepe $G(a, b) = \sqrt{ab}$ és számtani közepe $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$. (A jelölések az idegen elnevezésekre utalnak. A mértani közepet nevezik geometriai középnek, a számtanit pedig aritmetikai középnek is.)

Példák segítségével további középértékeket is definiálhatunk.

1. példa Egy jármű adott nagyságú útszakaszt először v_1, majd ugyanakkora útszakaszt v_2 egyenletes sebességgel tett meg. Mekkora az egész útra vonatkoztatott átlagsebessége?

Megoldás Az átlagsebesség az összes út és a teljes idő hányadosa. Ha az útszakasz hossza s, akkor az összes út $2s$, a teljes idő pedig $t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$. Az átlagsebesség $\overline{v} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$, amit $\overline{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$ alakban is írhatunk. Ezt az „átlagot” a v_1 és v_2 mennyiségek **harmonikus közepének** nevezzük. Jele: $H(v_1, v_2)$.

2. példa Egy négyzet oldala a cm, egy másik négyzet oldala b cm. A két négyzetet egy-egy x cm oldalú négyzettel helyettesítjük úgy, hogy ezek területösszege egyezzen meg az eredeti két négyzet területének összegével. Mekkora az így kapott „átlagos területű” négyzet x oldala?

Megoldás A területek egyenlőségéből $a^2 + b^2 = 2x^2$, s innen $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ (cm). Ezt az „átlagot” az a és b (pozitív) mennyiségek **négyzetes közepének** (idegen szóval kvadratikus közepének) nevezzük. Jelölése: $Q(a, b)$.

Az általunk definiált középértékeket **hatványközepeknek** is nevezik. A *közép (középérték)* elnevezés arra utal, hogy ha $0 < a < b$, akkor a és b hatványközepei a és b közé esnek. (Lásd az alábbi tétel bizonyítását.)

3. példa Legyen $a = 2$ és $b = 8$ egység. Határozzuk meg a és b fent ismertetett hatványközepeit!

Megoldás Mivel a és b pozitív, kiszámolhatjuk az egyes hatványközepeket.

$H(2, 8) = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8}{2 + 8} = 3{,}2$ (egység).

$G(2, 8) = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (egység).

$A(2, 8) = \frac{2 + 8}{2} = 5$ (egység).

$Q(2, 8) = \sqrt{\frac{2^2 + 8^2}{2}} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ (egység).

A $H(2, 8) < G(2, 8) < A(2, 8) < Q(2, 8)$ egyenlőtlenségláncot kaptuk. Bebizonyítjuk, hogy az egyes hatványközepek közötti nagyságviszony általában is teljesül.

Tétel

Tetszőleges a, b pozitív számokra igaz, hogy:

Ha $0 < a \leq b$, akkor $a \leq H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq Q(a, b) \leq b$. Egyenlőség mindenütt csak az $a = b$ esetben állhat fenn.

Bizonyítás

Az átalakítások során felhasználjuk, hogy a és b pozitív (a relációs jelek iránya változatlan marad).

$a \le \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \Leftrightarrow \quad a \le \dfrac{2ab}{a+b} \quad \Leftrightarrow \quad a(a+b) \le 2ab \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \le ab \quad \Leftrightarrow \quad a \le b$, s ez teljesül.

$\dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad 4ab \le (a+b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le a^2+b^2-2ab \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le (a-b)^2$, ami igaz.

$\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4ab \le (a+b)^2$, s ezt az előbb már igazoltuk.

$\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \le \dfrac{a^2+b^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2+2ab \le 2(a^2+b^2) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le a^2+b^2-2ab$,

és már ezt is igazoltuk.

$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \le b \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a^2+b^2}{2} \le b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \le b^2$, ami szintén mindig teljesül.

Valamennyi egyenlőtlenségben $a = b$ esetén van egyenlőség; ezzel a tételt igazoltuk.

(A bizonyításokban az eredeti állításból indultunk ki, és minden lépésben ekvivalens átalakítást végeztünk. Így a kapott végső állítás az eredetit is igazolja.)

Megjegyzések

1. Az egyenlőtlenséglánc két széle azt mutatja, hogy a nevezetes közepek valóban középértékek: ha $a < b$, akkor a hatványközepek a és b közé esnek.

2. Ha az a és b mennyiségeknek van mértékegységük, akkor a hatványközepeik is ugyanolyan mértékegységűek.

3. Bár mindegyik hatványközép valamilyen átlag, magát az 'átlag' szót a számtani középre szoktuk használni.

4. Alkalmanként negatív számokra is értelmezhetők a közepek. (Néha az 'átlag' és a 'számtani közép' fogalmát éppen az alapján különböztetik meg, hogy az átlag negatív is lehet.) A hatványközepek definíciójában azért követeljük meg a pozitív a, b tagokat, hogy a műveletek mindig elvégezhetők legyenek.

5. (Kiegészítő anyag) További hatványközepek is definiálhatók. Az a és b pozitív számok **köbös hatványközepe** $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}$, **negyedik hatványközepe** $\sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}}$ és így tovább. Bebizonyítható, hogy a hatványközepek monoton növekednek: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \le \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}} \le \sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}} \le \ldots$, és bármelyik egyenlőség csak az $a = b$ esetben állhat fenn.

6. A hatványközepek kettőnél több tagra is felírhatók. (Lásd a következő példát.)

4. példa

a) Egy üzem termelése az első évben 20%-kal, a második évben az előző évi termelés 10%-ával, végül a harmadik évben a megelőző évi termelés 30%-ával növekedett. Hány százalékos volt az éves átlagos növekedés?

b) Három gömb sugara $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 2$ cm és $R_3 = 3$ cm. Mekkora az átlagos térfogatú gömb sugara?

Megoldás

a) Ha az üzem termelése a „nulladik évben" T, akkor a harmadik év végén $T \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}3$. Ha az átlagos növekedés mértéke q, akkor $T \cdot q^3 = T \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}3$. Innen $q = \sqrt[3]{1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}3} = \sqrt[3]{1{,}716} \approx$ $\approx 1{,}197$ az átlagos növekedés mértéke, azaz 19,7%-os az éves átlagos növekedés.

b) A gömbök össztérfogata $\dfrac{4\pi}{3}(R_1^3+R_2^3+R_3^3)$. Ha az átlagos térfogatú gömb sugara R, akkor

$\dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi}{3}\dfrac{(R_1^3+R_2^3+R_3^3)}{3}$, és innen $R = \sqrt[3]{\dfrac{R_1^3+R_2^3+R_3^3}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1^3+2^3+3^3}{3}} = \sqrt[3]{12} \approx 2{,}29$ (cm). Ekkora az átlagos térfogatú gömb sugara.

A példákhoz hasonlóan megadhatjuk az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok hatványközepeit. Bebizonyítható, hogy az egyes hatványközepek közötti reláció megmarad:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, azaz a tagok mind egyenlőek. Továbbá ekkor is igaz, hogy a középértékek a legkisebb és legnagyobb szám közé esnek.

A nevezetes közepeknek több geometriai és algebrai alkalmazása van.

5. példa Bizonyítsuk be a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával, hogy:

a) A 20 cm kerületű téglalapok közül a négyzet területe a maximális.
b) Az azonos területű téglalapok közül a négyzet kerülete a minimális.
c) Ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk akkor maximális, ha egyenlőek.
d) Ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk annál nagyobb, minél kisebb az eltérésük.
e) Az azonos kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb.
Legyenek a_1, a_2, ..., a_n pozitív számok.
f) Legalább mekkora az $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}$ összeg?

Megoldás *a)* A feladatot általános esetben oldjuk meg. Legyen a téglalap kerülete k (adott), oldalai a és b. Ekkor az $a+b=\frac{k}{2}$ feltétel mellett keressük $t=ab$ maximumát. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján a pozitív a, b számokra $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$, innen $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, azaz $t\le\left(\frac{k}{4}\right)^2=\frac{k^2}{16}$. A terület tehát legfeljebb $\frac{k^2}{16}$ nagyságú lehet; ennyi a maximuma. A maximális értéket, azaz az egyenlőséget az $a=b$ esetben kapjuk, vagyis amikor a téglalap négyzet.
A konkrét számpéldával $a=b=5$ cm esetén $t_{max}=25$ cm^2, és ez a kerület négyzetének a 16-od része: $\frac{20^2}{16}=25$.

b) Ez az előző feladat ún. duálisa, a nevezetes egyenlőtlenségek mindig párban lépnek fel. Mivel $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$, így ha $(a+b)$ állandó, akkor ab-nek maximuma van; míg ha ab állandó, akkor $(a+b)$-nek minimuma.

c) Az állítás lényegében megegyezik az *a)* feladattal, a geometriai megfeleltetés nélkül.

d) Az állítás az $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ azonosságból következik. Mivel az $(a+b)$ kisebbítendő állandó, ab annál nagyobb, minél kisebb az $(a-b)^2$ kivonandó, azaz minél kisebb $|a-b|$.

e) A Héron-képletet alkalmazzuk, mely szerint a háromszög területe $t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol a, b, c a háromszög oldalai, $s=\frac{a+b+c}{2}$ a félkerülete. Felírjuk a pozitív $(s-a)$, $(s-b)$ és $(s-c)$ mennyiségekre a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget: $\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\ge\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$.
A bal oldal számlálója $3s-2s=s$, tehát állandó. Köbre emelünk, és a jobb oldalon előállítjuk a háromszög területét:
$\left(\frac{s}{3}\right)^3\ge(s-a)(s-b)(s-c)\quad\Leftrightarrow\quad s\cdot\left(\frac{s}{3}\right)^3\ge s(s-a)(s-b)(s-c)=t^2\quad\Leftrightarrow\quad\frac{s^2}{\sqrt{27}}\ge t$.
A bal oldal állandó, így a területnek maximuma van; s ezt akkor éri el, ha $(s-a)=(s-b)=(s-c)$, azaz a háromszög szabályos.

f) Felírjuk n tagra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:
$\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}}{n}\ge\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}}=1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\ge n$. A keresett minimum tehát n, és ez akkor érhető el, ha $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\ldots=\frac{a_n}{a_1}$, azaz $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Megjegyzés
Az *a)* feladat nagymértékben általánosítható. Bebizonyítható, hogy az állandó kerületű n-szögek közül a szabályos n-szög területe a legnagyobb. Ebből pedig – nehezebb matematikai eszközök felhasználásával – az is következik, hogy az állandó kerületű síkidomok közül a kör területe a maximális.

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki az $a=5$, $b=10$, $c=15$ számok nevezetes közepeinek értékeit!

2. E1 Egy egyenes folyóparton 600 méter hosszú kötéllel téglalap alakú területet akarunk bekeríteni. Milyen hosszúnak válasszuk a téglalap három oldalát, hogy a területe a lehető legnagyobb legyen? (A negyedik oldal a folyópart.)

3. E1 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Feladat: A folyón két irányban, az A és B megállók között közlekedő hajó átlagsebessége az egyik irányban 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik irányban 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mennyi a hajó teljes (oda-vissza) útra vonatkoztatott átlagsebessége?
„Megoldás": Az átlagsebesség $\frac{10+6}{2} = 8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4. E2 Határozzuk meg az $\frac{a+2c}{bc} + \frac{b+2a}{ac} + \frac{c+2a}{ab}$ kifejezés értékkészletét, ha $a+b+c=300$ és a, b, c
a) pozitív egész számok; *b)* pozitív számok.

5. E1 *a)* A c átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a kerülete?
b) Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek legkisebb az átfogója?

6. E2 Az alábbi feladatokban határozzuk meg az F feltétel mellett a K kifejezés jelzett szélsőértékét! (a, b pozitív számok.) Milyen a és b értékekre veszi fel K a szélsőértékét?
a) F: $2a+3b=12$, $K=ab$ maximuma;
b) F: $a+b=12$, $K=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ minimuma;
c) F: $\frac{a^2+4b^2}{2}=60$, $K=ab$ maximuma;
d) F: $a+b=12$, $K=a^2b$ maximuma;
e) F: $a^2b^3=108$, $K=a+b$ minimuma.

7. E2 A monda szerint Dido, Türosz királyának lánya feleségül ment a nagybátyjához, Acerbászhoz, akit aztán vagyona miatt megöltek. Dido ekkor Acerbász kincseivel Afrika partjaira menekült. Az itteni uralkodótól azt kérte, hogy akkora földterületet vásárolhasson a tengerpart mentén, amekkorát egy marhabőrrel be tud keríteni. A kapott bőrt vékony csíkokra vágta, összecsomózta, s így jókora területet körbekeríthetett. Ő lett azután Karthágó megalapítója.
Legfeljebb mekkora nagyságú területet keríthetett be Dido, ha L hosszú bőrdarabja volt?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1772–1801.

13. EGYENLŐTLENSÉGEK

Ebben a leckében bebizonyítjuk a nevezetes **reciprok-egyenlőtlenséget**, azonos egyenlőtlenségeket vizsgálunk, kifejezések értékkészletét határozzuk meg és a hatványközepek alkalmazására mutatunk példákat. Végül törtes egyenlőtlenségeket és egyenlőtlenség-rendszereket oldunk meg.

1. példa Igazoljuk az ún. reciprok-egyenlőtlenséget, mely szerint ha $a>0$, akkor $a+\frac{1}{a}\geq 2$! (Kiolvasva: bármely pozitív szám és reciprokának az összege legalább 2.)

Megoldás **Első megoldás:**
Alkalmazzunk paraméterezést! Megvizsgáljuk, hogy az $a+\frac{1}{a}=p$ egyenletnek milyen p paraméter értékre van megoldása, és ha $p\geq 2$ minden a-ra, akkor az állítást igazoltuk. Ekvivalens átalakításokkal:

$$a+\frac{1}{a}=p \quad\Leftrightarrow\quad a^2+1=pa \quad\Leftrightarrow\quad a^2-pa+1=0.$$

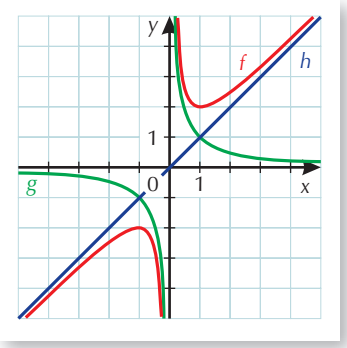
Ez utóbbi egyenletnek akkor van gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív. Innen
$D=p^2-4\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad |p|\geq 2.$

Mivel $a>0$, p nem lehet negatív, tehát kapjuk, hogy $p\geq 2$. Valóban: $a+\frac{1}{a}$ legalább 2, ha $a>0$.

(A bizonyítás során kicsit többet láttunk be. Azt is megkaptuk eredményül, hogy ha $a<0$, akkor $a+\frac{1}{a}\leq -2$.)

Második megoldás:
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk a pozitív a és $\frac{1}{a}$ tagokra.

$\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}$, innen $a + \frac{1}{a} \geq 2$ közvetlenül adódik. Egyenlőség csak az $a = \frac{1}{a} = 1$ esetben lehet.



Megjegyzés

Az első megoldásban az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény értékkészletét határoztuk meg. Ábrázoljuk a $g(x) = \frac{1}{x}$ és $h(x) = x$ függvényeket, valamint az $f(x) = h(x) + g(x)$ függvényt!

$f(x)$ néhány jellemzője:
- az origóra tükrös páratlan függvény, azaz minden $x \in D_f$ esetén $f(x) = -f(-x)$;
- emiatt a pozitív és negatív helyi szélsőértékhelyek is szimmetrikusak (ezek a kiszámolt $x = 1$ és $x = -1$ értékek);
- a szélsőértékhelyek egybeesnek a $g(x) = h(x)$ helyekkel, vagyis ahol a g és h függvények egyenlők.

2. példa

a) Igazoljuk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c$!
b) Igazoljuk az $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ azonos egyenlőtlenséget!

Megoldás

a) Egy $A \equiv B$ azonosságot a következő egyszerű módszerekkel igazolhatunk:
- $A \equiv B \Leftrightarrow A - B \equiv 0$, vagyis az $A - B$ kifejezésről kell kimutatni, hogy azonosan nulla;
- $A \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots \equiv B$, vagyis az egyik kifejezést azonosan átalakítjuk, amíg a másikat kapjuk;
- végül azt is megtehetjük, hogy mindkét kifejezést addig alakítjuk át, míg egy harmadik kifejezéssel nem lesznek azonosan egyenlőek: ha $A \equiv C$ és $B \equiv C$, akkor $A \equiv B$.

(Két kifejezés **azonosan egyenlő**, ha a változók bármely megengedett értéke esetén a helyettesítési értékeik megegyeznek.)

A példában ekvivalens lépésekkel négyzetösszeggé alakítunk:
$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$.
Ez utóbbi egyenlet $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ alakban írható; és valóban, a négyzetösszegek csak $a = b = c$ esetén adhatnak nullát eredményül.

b) Az azonos egyenlőtlenségek megoldására hasonló módszereket alkalmazhatunk. Az *a)* és a *b)* példa a feltételes azonosságok és az azonos egyenlőtlenségek kapcsolatát mutatja, hiszen most ugyanazokat az átalakításokat kell elvégeznünk:
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, ami csakugyan mindig teljesül.

3. példa

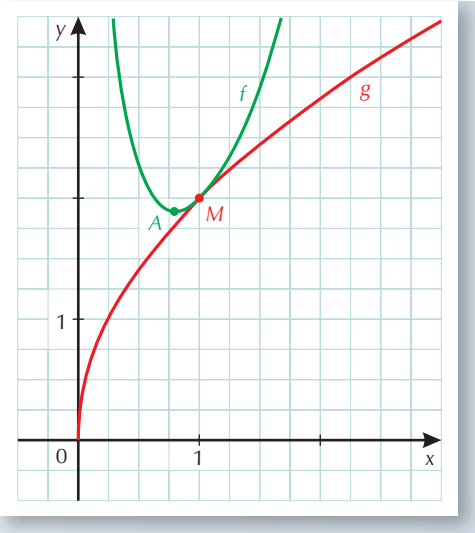
Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ függvény minimumát, ha $x > 0$!

Megoldás

A feladatot megoldhatnánk paraméterezéssel is, de most a hatványközepek módszerét alkalmazzuk.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség egyszerű felírása az x^2 és $\frac{1}{x}$ tagokra most nem vezet eredményre. $\frac{x^2+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x}$; így $f(x)$-et megbecsülhetjük alulról. De a függvénnyel való becslés nem alkalmas a minimum meghatározására: ha $f(x) \geq g(x)$, ebből még nem következik, hogy $f(x)$ olyan x_0 helyen minimális, amikor $f(x_0) = g(x_0)$. Elképzelhető, hogy valamilyen x_1 értékre bár $f(x_1) > g(x_1)$, de $f(x_1) < f(x_0)$. Éppen ilyen helyzetet látunk az ábrán: az f és g függvények az M metszéspontban egyenlők,

de f minimuma (amit A-val jelöltünk) nem esik egybe az egyenlőséghellyel. (Az ábrán a vizsgálandó $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ és $g(x) = 2\sqrt{x}$ függvények képe látható.)



Arra van tehát szükség, hogy $x^2 + \frac{1}{x}$ értékét ne függvénnyel, hanem konstanssal becsüljük meg alulról. Ehhez az $\frac{1}{x}$ tagot két részre bontjuk, és három tagra írjuk fel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{4x^2}},$$

azaz $x^2 + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Ebből az alakból már leolvasható a $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ lehetséges minimum érték.

A minimum helyét akkor kaphatjuk meg, ha a nevezetes egyenlőtlenségben egyenlő tagok szerepelnek, azaz $x^2 = \frac{1}{2x}$, vagyis $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Ez az érték – az A-val jelölt minimumpont x koordinátája – valóban kisebb, mint az M metszéspont $x = 1$ koordinátája.

A **törtes egyenlőtlenségek** vizsgálata gyakran vezet egyenlőtlenség-rendszer megoldására.

4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x+3}{x-5} \geq 0$; *b)* $\frac{2x+3}{x-5} < 1$; *c)* $\frac{6x}{3x-2} \leq \frac{7+2x}{x-3}$.

Megoldás *a)* $2x + 3 \geq 0$, ha $x \geq -1{,}5$; $x - 5 > 0$, ha $x > 5$. A tört nemnegatív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű, vagy a számláló 0. Innen a megoldás: $x > 5$ vagy $x \leq -1{,}5$.

b) **Első megoldás:** Esetszétválasztást végzünk a nevező előjele alapján.

Ha $x > 5$, akkor szorzás után $2x + 3 < x - 5$ a megoldandó egyenlőtlenség. (Úgy is fogalmazhatunk, hogy az $\left.\begin{matrix} x > 5 \\ 2x+3 < x-5 \end{matrix}\right\}$ egyenlőtlenség-rendszert kell megoldanunk.) A második egyenlőtlenségből $x < -8$, innen tehát nem kapunk megoldást.

Ha $x < 5$, akkor szorzás után a relációs jel megfordul, és $2x + 3 > x - 5$, azaz $x > -8$ adódik. A $]-\infty; 5[$ és $]-8; \infty[$ intervallumok metszete $]-8; 5[$.

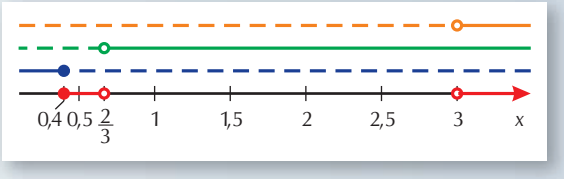
Második megoldás (vázlat): Átalakításokkal visszavezetjük az *a)* példa megoldására.

$\frac{2x+3}{x-5} < \frac{x-5}{x-5} \Leftrightarrow \frac{x+8}{x-5} < 0$, s ezután a számláló és a nevező előjelvizsgálatával célt érünk.

c) Közös nevezőre hozunk és egy oldalra rendezünk:

$$\frac{6x(x-3)}{(3x-2)(x-3)} \leq \frac{(7+2x)(3x-2)}{(x-3)(3x-2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-35x+14}{(3x-2)(x-3)} \leq 0.$$

Akkor lesz a tört értéke negatív, ha a benne szereplő három elsőfokú tényezőből pontosan 1 vagy 3 negatív. A tényezők előjelvizsgálata:



I. $-35x + 14 \geq 0$, ha $x \leq 0{,}4$;

II. $3x - 2 > 0$, ha $x > \frac{2}{3}$;

III. $x - 3 > 0$, ha $x > 3$.

Az ábrán szaggatottal jelöltük azokat az intervallumokat, ahol a tényezők negatívok.

Az ábráról a megoldás leolvasható: $0{,}4 \leq x < \frac{2}{3}$ vagy $3 < x$.

(Egyúttal megoldottuk a $\left.\begin{matrix} -35x+14 \geq 0 \\ (3x-2)(x-3) < 0 \end{matrix}\right\}$ és $\left.\begin{matrix} -35x+14 \leq 0 \\ (3x-2)(x-3) > 0 \end{matrix}\right\}$ egyenlőtlenség-rendszereket is.)

5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{2x^2+3x+10}{x^2-8x+7}<0.$$

Megoldás Megoldandók a $\left.\begin{matrix}2x^2+3x+10>0\\ x^2-8x+7<0\end{matrix}\right\}$, illetve $\left.\begin{matrix}2x^2+3x+10<0\\ x^2-8x+7>0\end{matrix}\right\}$ másodfokú egyenlőtlenségrendszerek (ezekben a másodfokú egyenlőtlenség mellett további elsőfokú vagy másodfokú egyenlőtlenségek szerepelnek). Most is érdemes a számlálót és a nevezőt szorzattá alakítanunk.

Az $x^2-8x+7=0$ egyenlet két gyöke 1 és 7, így a nevező $(x-1)(x-7)$ alakú. A számláló diszkriminánsa viszont negatív, ezért $2x^2+3x+10$ mindig pozitív. A tört előjelét a nevező előjele dönti el; az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a nevező negatív, azaz $1<x<7$.

FELADATOK

1. E2 Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy minden megfelelő valós x-re teljesüljenek az alábbi egyenlőtlenségek!

a) $(p^2-9)x\geq p+3$; *b)* $(p-3)x^2-(p+2)x+p+5>0$; *c)* $\sqrt{-x+p}\geq x+2$.

2. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $12\sin^2 x+\sin x+6\cos^2 x-8\geq 0$; *b)* $1{,}5\cdot 2^{x+1}+2^{-x}\geq 4$.

3. E2 Igazoljuk az alábbi azonos egyenlőtlenségeket ($a, b, c>0$)!

a) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$; *c)* $a^4+b^4\geq a^3b+ab^3$;

b) $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geq a+b+c$; *d)* $1+2a^4\geq a^2+2a^3$.

4. E2 Határozzuk meg az alábbi kifejezések szélsőértékeit, ha $x>0$!

a) $x+\frac{4}{x}$; *b)* $\frac{x^2-4x+7}{x}$; *c)* $2x+\frac{1}{x^2}$; *d)* $x^3+\frac{3}{x}$.

5. E2 Határozzuk meg az alábbi, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvények értékkészletét!

$a(x)=\sin x+\cos x$; $b(x)=\sin x\cdot\cos x$; $c(x)=2\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x$, ha $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$;

$d(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$; $e(x)=\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x$; $f(x)=|-2\log_2 x+4|$, ha $x\in[0{,}5;8]$.

6. E2 Legyen $a, b, c>0$.

a) Ha $a+2b+3c=60$, akkor mennyi a^2bc maximuma?

b) Ha $ab^2c^3=600$, akkor mennyi $2a+3b+c$ minimuma?

7. E1 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Határozzuk meg xy értékét, ha $x+y=1$ és $x^3+y^3=-2$!

„Megoldás": $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)$, így $-2=1-3xy$, és innen $xy=-\frac{11}{3}$.

(Az általános kérdés: milyen p paraméter esetén oldható meg az $\left.\begin{matrix}x+y=1\\ x^3+y^3=p\end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer?)

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1466–1489.

14. SPECIÁLIS EGYENLETMEGOLDÁSI MÓDSZEREK

Az egyenletek, egyenlőtlenségek speciális megoldási eljárásaira már korábban is láttunk példákat. Ebben a leckében rendszerezzük és áttekintjük a különböző módszereket. (Természetesen a példák nagy része több módszerrel is megoldható.) Célszerű először a feladatok önálló megoldásával megpróbálkozni, és csak azután ellenőrizni az eredményeket. (Az 1. példában a valós számokon értelmezett trigonometrikus függvények is szerepelnek.)

1. példa (az **alaphalmaz** és az **értékkészlet** vizsgálata)

Oldjuk meg az alábbi a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $\sqrt{x-4}+\log_2(3-x)=2$;

b) $\sqrt{2x-6}+|x-2|=1$;

c) $\sqrt{4+\sqrt{x}}=\cos x+1$;

d) $\sin x\cdot\sin(5x)=1+\cos^2 x$.

Megoldás

Útmutatások, megoldások:

a) A négyzetgyök és a logaritmus argumentuma miatt feltétel, hogy $x\geq 4$ és $x<3$. Az ellentmondás miatt az egyenletnek nincs megoldása.

b) Az $x\geq 3$ kikötés miatt $|x-2|\geq 1$, tehát a bal oldal értéke legalább 1. Ez csak úgy lehet egyenlő a jobb oldallal, ha $x=3$.

c) A bal oldal értéke a külső gyök miatt legalább 2, míg a jobb oldal legfeljebb 2. (Emlékeztetőül: $\sin x$, $\cos x\in[-1;1]$.) Megoldást kapunk, ha $x=0$.

d) A bal oldalon két olyan szám szorzata áll, amelyek abszolút értéke 1-nél nem nagyobb; míg a jobb oldal értéke legalább 1. Csak akkor lehet egyenlőség, ha $\sin x=\sin 5x=1$ és $\cos x=0$, vagy ha $\sin x=\sin 5x=-1$ és $\cos x=0$. Az első esetben $x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ megoldásokat kapjuk; a másodikban pedig az $x_2=-\frac{\pi}{2}+2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$ értékeket. (Egyben is leírhatjuk: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.)

Megjegyzés

Az egyenletekből könnyen konstruálhatunk egyenlőtlenségeket. Például:

az *a)* feladatbeli ellentmondás miatt a $\sqrt{x-4}+\log_2(3-x)>2$ egyenlőtlenségnek sincs megoldása;

b)-ben $\sqrt{2x-6}+|x-2|\leq 1$ megoldása $x=3$;

c)-ben $\sqrt{4+\sqrt{x}}>\cos x+1$ minden $x>0$ valós számra teljesül és így tovább.

A következő példákban **függvénytani vizsgálatokat** végzünk: monotonitás, korlátosság, az értékkészlet vizsgálata. Most is javasoljuk az önálló feladatmegoldást.

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $\sqrt{x-4}+\log_2(x-5)=6$;

b) $2^{x-3}=-x+23$;

c) $3^x+4^x=25$;

d) $3^x+4^x=5^x$.

Megoldás

a) A bal oldalon két szigorúan monoton növő függvény áll. Észrevehetjük, hogy $x=13$ gyök; és több megoldás nem lehetséges, hiszen a jobb oldal konstans.

b) $x=7$ megoldás. Más gyök nincs, mert a bal oldalon szigorúan monoton növekvő, míg a jobb oldalon szigorúan monoton csökkenő függvény áll.

c) $x=2$ megfelel. Több megoldás nincs, mert a bal oldalon szigorúan monoton növekvő, míg a jobb oldalon konstans függvény áll.

d) $x=2$ most is gyök. Mivel mindkét oldalon növekvő függvény áll (és így lehetne még megoldás), átalakítjuk az egyenletet.

$3^x+4^x=5^x \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$, és ez az alak mutatja, hogy több megoldás nincs: a bal oldal szigorúan monoton csökkenő, míg a jobb oldal konstans.

3. példa **(szorzattá alakítás)**

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenletrendszert!

a) $x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$; *b)* $3 \cdot 8^x + 12^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$; *c)* $\left.\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 - 9 &= 0 \\ x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y &= 3 \end{aligned}\right\}$

Megoldás

a) Az utolsó három tag teljes négyzet (−1)-szerese, így szorzattá alakíthatunk:
$x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = x^4 - 4(x-1)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x - 2)$.
Az első tényező nem lehet nulla, a második zérushelyei $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

b) Az $a = 2^x$ és $b = 3^x$ helyettesítéssel a $3a^3 + a^2b + ab^2 - 2b^3 = 0$ homogén egyenlethez jutunk. Osztunk például $b^3 \neq 0$-val: $3\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) - 2 = 0$. Az egyszerűség kedvéért új változót vezetünk be: $z = \frac{a}{b}$ helyettesítéssel $3z^3 + z^2 + z - 2 = 0$. Alkalmas csoportosítással szorzattá alakíthatunk:

$3z^3 + z^2 + z - 2 = 3z^3 - 2z^2 + 3z^2 - 2z + 3z - 2 = z^2(3z-2) + z(3z-2) + (3z-2) =$
$= (3z-2)(z^2 + z + 1)$.

A $(3z-2)(z^2 + z + 1) = 0$ egyenletnek $z = \frac{2}{3}$ az egyetlen gyöke. Visszahelyettesítés után

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$, az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt.

Minden lépés ekvivalens átalakítás volt.

c) A második egyenlettel egyelőre nem sokat tudunk kezdeni, de az első szorzattá alakítható:
$0 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 9 = (2x + y)^2 - 3^2 = (2x + y + 3)(2x + y - 3)$.
Az egyik tényezőnek nullának kell lenni, ezért esetszétválasztást végzünk. Kifejezzük például y-t, és a második egyenletbe helyettesítjük.
I. eset: Ha $2x + y + 3 = 0$, azaz $y = -2x - 3$. Ekkor a második egyenlet
$x^2 - 2x(-2x-3) + 3(-2x-3)^2 - 4x + 5(-2x-3) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 17x^2 + 28x + 9 = 0$ alakú. Ennek két gyöke $x_{1,2} = \frac{-28 \pm \sqrt{172}}{34} = \frac{-14 \pm \sqrt{43}}{17}$, $x_1 \approx -0{,}4377$ és $x_2 \approx -1{,}2093$. A megfelelő y értékek $y_1 \approx -2{,}1244$ és $y_2 \approx -0{,}5815$.
II. eset: Ha $2x + y - 3 = 0$, azaz $y = -2x + 3$. Ekkor a második egyenlet
$x^2 - 2x(-2x+3) + 3(-2x+3)^2 - 4x + 5(-2x+3) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 17x^2 - 56x + 39 = 0$.
Ennek két gyöke $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{39}{17}$; megfelelő y értékek $y_1 = 1$ és $y_2 = -\frac{27}{17}$.

Az átalakításaink ekvivalensek voltak.

4. példa **(vegyes módszerek)**

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

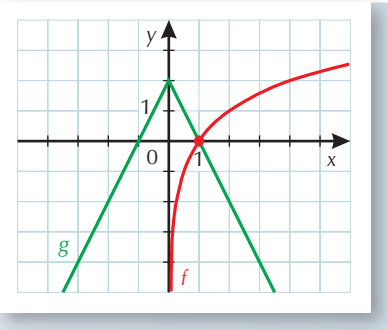
a) $x^7 - x^6 + x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$; *b)* $-2|x| + 2 = \log_2 x$; *c)* $0{,}5x = 2^x$; *d)* $x^4 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$.

Megoldás

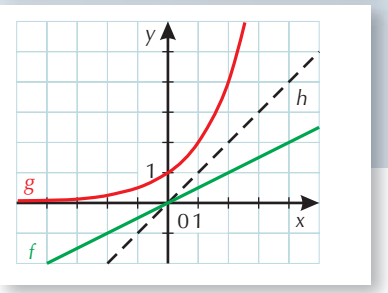
a) **(konstrukció és lehetetlenség)** Észrevehetjük, hogy $x = 1$ gyök. Kiemeljük az $(x-1)$ gyöktényezőt: $x^7 - x^6 + x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^6 + x^2 + 2)$. Látható, hogy ez utóbbi tényező sosem lehet nulla (az első két tagja nemnegatív), így több megoldás nem lehet.
Szorzattá is alakíthatunk csoportosítással:
$x^7 - x^6 + x^3 - x^2 + 2x - 2 = x^6(x-1) + x^2(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x^6 + x^2 + 2)$.

Ebben a megoldásban gyakran alkalmazott módszert követtünk: találtunk egy gyököt, és megmutattuk, hogy több megoldás nincs.
Ebbe a típusba sorolható a külön megoldástípusként is tárgyalható **grafikus megoldás alkalmazása** (ilyen a következő két feladat).
Amikor a két függvénygörbének egy metszéspontja van (például egy előírt intervallumon belül), akkor általában a következő módon járunk el:
– Leolvassuk a két görbe metszéspontját. (Persze ez csak a szemmértéktől függő, közelítő érték.)
– Behelyettesítéssel igazoljuk, hogy a leolvasott érték valóban gyök.
– Bizonyítjuk, hogy több megoldás nincs.

b) **(grafikus megoldás)** Az $f(x) = -2|x| + 2$ és $g(x) = \log_2 x$ függvények ábrázolásakor megsejtjük, hogy az $x = 1$ helyen van az egyetlen metszéspont.
Ez valóban metszéspont: $f(1) = g(1) = 0$.
Több metszéspont nincs, mert $x \leq 0$ esetén a g függvény nem értelmezett, míg ha $x > 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő, míg g növekvő.



c) Az $f(x) = 0{,}5x$ és $g(x) = 2^x$ függvények ábrázolásakor megsejtjük, hogy nincs megoldás. Indoklásul például mondhatjuk, hogy ha $x > 0$, akkor a 2-es alapú exponenciális függvény „gyorsabban nő", mint f; vagy a $h(x) = x$ egyenes elválasztja a két görbét egymástól.



d) **Négyzetösszeggé alakítunk**: $x^4 - 3x^2 + 2x + 5 = x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 2)^2 + (x + 1)^2$. Két négyzet összege csak akkor lehetne nulla, ha mindkét tag nulla. Ez most nem teljesül, tehát nincs megoldás.

Természetesen további megoldási módszerek is lehetségesek: becslések, azonosságok vagy egyenlőtlenségek (például hatványközepek) felhasználása, alaphalmaz speciális leszűkítése és így tovább. Ezek általában egy-egy feladattípushoz köthető eljárások, felismerésükhöz és alkalmazásukhoz ötletesség kell. A problémamegoldó képesség a gyakorlattal fejleszthető.

FELADATOK

1. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{2x-1} + 4x^2 + 12x = 7$;
b) $\sqrt{-x-3} + |x-2| = 0{,}5^x - 4$;
c) $2\sin^2 x + 3\cos x = 6$;
d) $\sqrt{x-8} + 2^{x-3} = 30$;
e) $\sqrt{x-5} \cdot 2^{9-x} + \sqrt{7-x} + x^2 = 2x + 8$.

2. E2 Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\operatorname{ctg} x + \cos x - \operatorname{ctg} x \cdot \cos x = 1$;
b) $xyz + 2xy - yz - 2x = 0$.

3. E2 Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $xy + 2x - y = 8$;
b) $2xy + 10x - y = 5$;
c) $2x^2 + 3xy - 4x - 5y = -2$;
d) $xyz + xy + yz + xz + x + y + z = 11$.

4. E1 Az alábbi feladat a magyar származású, híres matematikus, *Pólya György* (1887–1985) egyik feladata. „Valaki öt órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, azután megfordult, és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 mérföldet tett meg óránként. Mekkora utat járt be?"

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája. Tankönyvkiadó, 1970.)

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1299, 1325, 1326, 1408–1413, 1418–1420, 1428, 1439–1440, 1507–1510.
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2832–2835, 2842–2845, 2866–2875.

15. TÖBBISMERETLENES EGYENLETEK

A több ismeretlent tartalmazó egyenletek megoldása általában speciális megoldási módszereket igényel. Alább ilyen egyenletekből állítottunk össze egy feladatsort, túlnyomórészt a korábbi érettségi-felvételi feladatok közül válogattunk. A példasort gyakorlásképpen, egyéni feldolgozásra szánjuk. Az önálló feladatmegoldás során, ha szükséges, a rövid útmutatás elolvasható. A feladatok végeredményét a lecke végén közöljük.

1. példa Oldjuk meg az $x+\frac{1}{x}=2\cos y$ egyenletet!

Megoldás

Első megoldás:

A két oldal értékkészletét hasonlítjuk össze.

A reciprok-egyenlőtlenségből következően $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$, míg $|2\cos y|\leq 2$. Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha:

I. eset: $x+\frac{1}{x}=2$ és $2\cos y=2$; vagy

II. eset: $x+\frac{1}{x}=-2$ és $2\cos y=-2$.

(Látható, hogy az **eredeti egyenlet két egyenletté** vált szét.)

I. $x=1$ és $\cos y=1$, azaz a megoldások $(x;y)=(1;2k\pi)$, ahol k tetszőleges egész szám.

II. $x=-1$ és $\cos y=-1$; a megoldások $(x;y)=(-1;\pi+2m\pi)$, m tetszőleges egész szám.

Az átalakítások ekvivalensek voltak.

Második megoldás:

Szorzunk $x\neq 0$-val: $x^2-2x\cos y+1=0$. Az x-ben másodfokú egyenletben cos y-t paraméternek tekintjük. Akkor lehet megoldás, ha a diszkrimináns nemnegatív: $D=4\cos^2 y-4\geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 y\geq 1$. Mivel $-1\leq\cos y\leq 1$, csak akkor lehet megoldás, ha $\cos^2 y=1$, azaz $\cos y=\pm 1$. Ekkor $x^2\pm 2x+1$ teljes négyzet, a gyökök pedig az előző megoldáshoz hasonlóan adhatók meg.

2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $2x^2+y^2+z^2-2xz-6x+2y+10=0$;

b) $2x^2+y^2+z^2-2xz-6x+2y+9=0$, ha x, y, z egész számok.

Megoldás

a) A tagokat csoportosítjuk:

$x^2-6x+9+x^2+z^2-2xz+y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(x-z)^2+(y+1)^2=0$;

négyzetek összege pedig csak úgy lehet nulla, ha a tagok külön-külön nullával egyenlők.

Eredmény: $x=3$, $z\,(=x)=3$, $y=-1$.

b) Most a négyzetösszeg nem zérus: $(x-3)^2+(x-z)^2+(y+1)^2=1$. Viszont speciális az alaphalmaz, az egész számok halmazán az egyes tagok is (nemnegatív) egészek. Összegük csak úgy lehet 1, ha két tag értéke 0, egy pedig 1. A lehetőségek:

1. eset: $|x-3|=1$. Ekkor $(x, z, y)=(4, 4, -1)$ vagy $(2, 2, -1)$.

2. eset: $|x-z|=1$. Ekkor $(x, z, y)=(3, 4, -1)$ vagy $(3, 2, -1)$.

3. eset: $|y+1|=1$. Ekkor $(x, z, y)=(3, 3, 0)$ vagy $(3, 3, -2)$.

FELADATSOR

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenletrendszereket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

1. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2-y^2$.

2. $\left.\begin{aligned}x+y+z&=4\\2xy&=z^2+16\end{aligned}\right\}$

3. $y^4+20x^2-8xy^2-16x+16=0$.

4. $x^2+y^4+1=x+y^2+xy^2$.

5. $x+\frac{4}{x}=4\sin y$.

6. $x^2 + 4x \cdot \cos(xy) + 4 = 0$.

7. $\log_2\left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)}\right) = \frac{2}{y^2 - 4y + 6}$.

8. Mekkorák a szögei annak a háromszögnek, amelynek a területe $t = \frac{a^2 + b^2}{4}$? (a és b a háromszög két oldalának a hossza.)

RÖVID ÚTMUTATÁS, SEGÍTSÉG

1. Észrevehetjük, hogy a külső négyzetgyökök alatt teljes négyzetek szerepelnek; majd összevethetjük a két oldal értékkészletét.

2. $t_1 = x$ és $t_2 = y$ gyöke a $t^2 + (z-4)t + \frac{z^2+16}{2} = 0$ egyenletnek (Viète-formulák); vizsgálandó az egyenlet diszkriminánsa.

3. Alakítsunk négyzetösszeggé!

4. Tekintsük y-t paraméternek, és vizsgáljuk meg az egyenlet diszkriminánsát!

5. Érdemes összehasonlítani a két oldal értékkészletét. (Persze áttérhetünk másodfokú paraméteres egyenletre is.)

6. Ismét a másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsát vizsgáljuk meg.

7. Többszörös értékkészlet-vizsgálattal érhetünk célt. (A logaritmus argumentuma; a jobb oldal nevezője; a teljes bal oldal, illetve jobb oldal értékkészlete.)

8. Például a trigonometrikus területképlet alkalmazásával vegyes paraméteres másodfokú egyenletet kapunk.

EREDMÉNYEK

1. $1 \le x \le 2$, és $y = 0$.

2. $(x, y, z) = (4, 4, -4)$.

3. $(x; y) = (2; \sqrt{8})$ vagy $(x; y) = (2; -\sqrt{8})$.

4. $(x; y) = (1; 1)$ vagy $(x; y) = (1; -1)$.

5. $x_1 = 2,\ y_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$; $\quad x_2 = -2,\ y_2 = \frac{3\pi}{2} + m \cdot 2\pi,\ m \in \mathbf{Z}$.

6. $(x, y) = (-2, -k \cdot \pi)$ vagy $(x, y) = \left(2, \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi\right);\ k, m \in \mathbf{Z}$.

7. $x = k \cdot \frac{\pi}{2},\ y = 2;\ k \in \mathbf{Z}$.

8. $\gamma = 90°,\ \alpha = \beta = 45°$.

FELADATOK

Oldjuk meg az alábbi feladatokat a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

1. E2 $\left.\begin{aligned} xy &= 1 \\ x + y - \cos^2 z &= -2 \end{aligned}\right\}$

2. E1 $(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) = 6$.

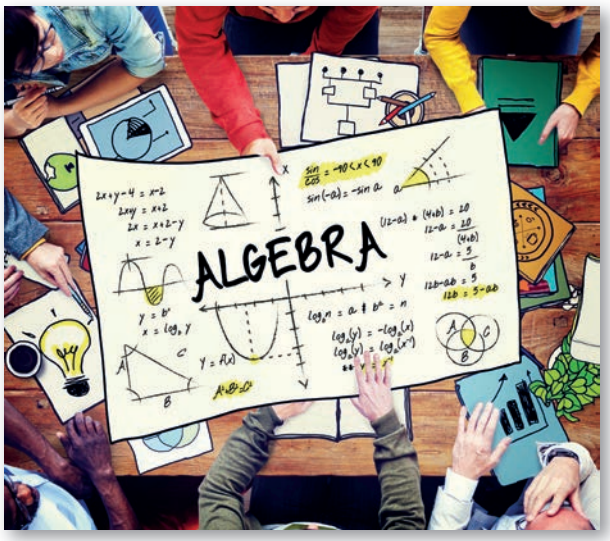
3. E1 $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{1+y^2}$.

4. E2 $4\sin^2 x - 4\cos x \cdot \sin y - 5 = 0$.

5. E2 $1 - 2x - x^2 = \operatorname{tg}^2(x+y) + \operatorname{ctg}^2(x+y)$.

6. E2 $3^x + 3^{-x} = 2\cos^2\frac{x^2+3y}{6}$.

7. E2 $20x + \frac{5}{x} + 36y^2 - 12y - 19 = 0$; ha $x, y > 0$.



VÁLOGATÁS AZ EMELT SZINTŰ ÉRETTSÉGI VIZSGA FELADATAIBÓL

1. E1 **(2018.)** Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson. Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat!

2. E1 **(2019.)** Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk egy adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a d: $[5; 20] \to \mathbf{R}$, $d(x) = -0{,}25x^2 + 20x + 40$ függvény adja meg, ahol x a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves?

b) Hány dm^2-rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter?

3. E1 **(2016.)** A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$, a II. osztályút 650 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$, a III. osztályút pedig 450 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte. Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

4. E1 **(2021.)** Van egy részvénycsomagunk, amely 6600 Ft-os és 4800 Ft-os névértékű részvényeket tartalmaz. A részvényeink névértékének összege 131 400 Ft. Ha a 4800 Ft-os névértékű részvényeink harmadát 6600 Ft-osra cserélnénk, akkor a névértékek összege 140 400 Ft-ra növekedne.

a) Hány darab részvényünk van az egyes fajtákból?

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk is. Az egyiknél 500 000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450 000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik.

b) Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?

5. E1 **(2020.)** Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a

$$B(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L}{B_0} - 1\right) \cdot 0{,}75^t}$$

formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve ($0 \le t < 30$), L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban ($0 < B_0 < L$). Egy nagyvárosban $L = 1{,}5$ millió, $B_0 = 1000$.

a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal?

b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint?

6. E2 **(2019.)** A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \ge 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos!

c) Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot!

(A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú „szó” létezik.)

7. E2

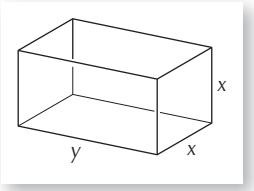
(2016.) Egy város kézilabdacsapatának vezetői a bajnoki mérkőzések jegybevételét szeretnék növelni. A korábbi évek adatai azt mutatják, hogy 1500 Ft-os jegyár esetén átlagosan 1000-en vásárolnak jegyet. Az adatokból az is kiderül, hogy ahányszor 5 Ft-tal csökkentik a jegy árát, átlagosan annyiszor 10 fővel többen váltanak jegyet az adott mérkőzésre; ha a jegyárat növelik, akkor pedig ahányszor 5 Ft-tal nő a jegy ára, átlagosan annyiszor 10 fővel csökken a jegyet vásárló nézők száma. (A jegy ára forintban kifejezve 0-ra vagy 5-re végződhet.)

a) Mutassa meg, hogy ha a jelenlegi jegyár 1500 forint, akkor a fenti modell szerint a jegyárak bármilyen összegű növelése esetén csökkenni fog az összbevétel!

b) A modell szerint mekkora lehet a jegyárakból származó legnagyobb bevétel egy mérkőzésen, és mennyit kell fizetni ebben az esetben egy jegyért?

8. E2

(2018.) Négyzetes oszlop alakú üveg akváriumot vettünk. A választott akvárium felülről nyitott, négyzetlapjai függőleges síkúak *(az ábra szerint)*, és pontosan 288 liter víz fér bele. Azt szeretnénk tudni, hogy a belső üvegfelületek káros algásodása szempontjából kedvező volt-e a választásunk. Számítsa ki, hogy – a megadott feltételek mellett – hány deciméter hosszúak a lehető legkisebb belső felületű akvárium (belső) élei!



9. E2

(2018.) Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$-os egységáron kínálná a barackot?

b) Igazolja, hogy ha egész nap x $\left(\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}\right)$ az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat: $y = -\frac{1}{5}x + 200$ $(0 < x < 1000)$.

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.)

10. E2

(2018.) Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti.

Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket. Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt", azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).

A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.

A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?

b) Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?

11. E2 **(2016.)** A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x)=\frac{1}{20}\left(x^2-1800x+950\,000\right)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban ($x>0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v-502\,200+\frac{265\,050\,000}{v}$ kg lesz! ($v>0$)

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \le v \le 1100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a **legnagyobb**, és melyik esetén a **legkisebb** az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

II. FÜGGVÉNYEK

16. FÜGGVÉNYEK, FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK

Tanulmányaink során minden évben találkoztunk a függvényekkel, hiszen a matematika egyik lényeges területe ez a témakör. A függvényfogalom kialakítását a természettudomány hozta magával, mert nagyon fontossá vált a változó mennyiségekkel való foglalkozás. A változó fogalmát *René Descartes* (1596–1650), a függvény kifejezést pedig *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) használta először. Az akkori függvényfogalom még nagyon távol állt a maitól. Mi lényegében mai eszközökkel *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805–1859) megfogalmazását használjuk.

Definíció

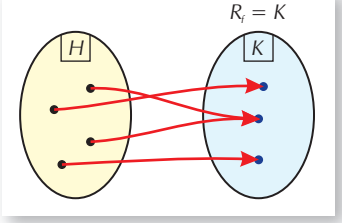
Függvény

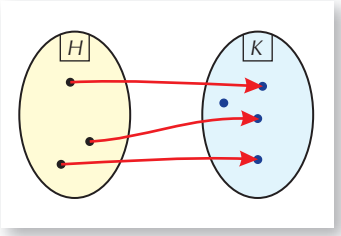
Adott két nem üres halmaz, H és K. Ha a H halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a K halmaznak egy-egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

A H halmaz a **függvény értelmezési tartománya**. Az f függvény értelmezési tartományának jelölése: D_f. A függvény értelmezési tartománya és a hozzárendelési szabálya határozza meg azokat az értékeket, amelyeket a függvény felvesz. Ezek halmaza a **függvény értékkészlete**. Az f függvény értékkészlete: R_f. (Természetesen $R_f \subseteq K$).

A függvények megadásának szokásos alakja: $f: H \to K$, $x \mapsto f(x)$, vagyis az f függvény a H halmaz minden x eleméhez a K halmazbeli $f(x)$-et rendeli.

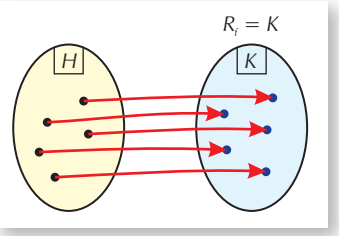
Az f függvény **szürjektív**, ha az R_f értékkészlet azonos a K képhalmazzal: $R_f = K$. A K halmaz minden y eleméhez létezik x elem a H-ban, hogy x képe éppen y *(lásd ábra)*.





Az f függvény **injektív**, ha a H értelmezési tartomány különböző elemeihez a K képhalmaz különböző elemeit rendeli. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$ *(lásd bal oldali ábra)*. Az ábrán olyan függvényt látunk, ami injektív, de nem szürjektív.

Az f függvény **bijektív**, ha szürjektív és injektív is *(lásd jobb oldali ábra)*.



Definíció

Két függvény egyenlősége

Az f és a g függvényt akkor tekintjük egyenlőnek, ha értelmezési tartományuk egyenlő, és az értelmezési tartomány ugyanazon eleméhez a képhalmaz ugyanazon elemét rendelik.

Függvény leszűkítése

Legyen $f\colon H_1 \to K,\ x \mapsto f(x)$. Ekkor a $g\colon H_2 \to K,\ x \mapsto g(x)$ függvényt az f függvény H_2-re való leszűkítésének nevezzük, ha $H_2 \subset H_1$ és minden $x \in H_2$ esetén $g(x) = f(x)$.

Függvény kiterjesztése

Az $f\colon H_1 \to K,\ x \mapsto f(x)$ függvénynek a $h\colon H_2 \to K,\ x \mapsto h(x)$ függvény egy kiterjesztése, ha $H_1 \subset H_2$, és minden $x \in H_1$ esetén $f(x) = h(x)$, továbbá a tágabb H_2 értelmezési tartományon is ugyanazt az $f(x)$ hozzárendelési szabályt alkalmazzuk.

Ez azt jelenti, hogy a h függvény H_1-re való leszűkítése az f függvény.

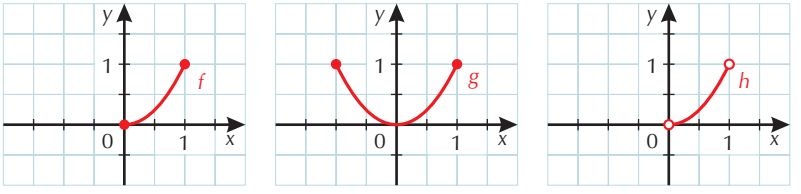
Ha a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete számhalmaz, akkor a függvény szemléltethető koordináta-rendszerben.

A szokásos módon megadott f függvény esetén az $(x; f(x))$ pontok halmaza adja a függvény grafikonját.

Láthattuk, hogy a függvény értelmezési tartománya és hozzárendelési szabálya a függvény értékkészletét is meghatározza, ezért a függvények definiálásakor gyakran az értékkészletet (vagy egy annál bővebb képhalmazt) nem is adjuk meg.

1. példa Legyen az $f\colon [0; 1] \to [0; 1],\ x \mapsto x^2$ függvény $[-1; 1]$ intervallumra történő kiterjesztése g, a $]0; 1[$ intervallumra történő leszűkítése pedig h. Rajzoljuk le mindhárom függvény grafikonját!

Megoldás A függvények grafikonja az *ábrán* látható.



2. példa Adjuk meg az $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 3x^2 - 10x + 9$ függvény minimumát!

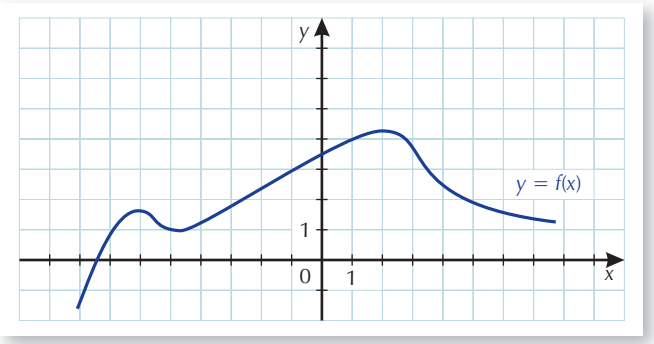
Megoldás A valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvényt jól ismerjük, annak meg tudjuk határozni a minimumát. Ezért f-et terjesszük ki erre a halmazra, legyen $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 3x^2 - 10x + 9$. A hozzárendelési szabály képletét teljes négyzetté alakítva: $3x^2 - 10x + 9 = 3 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$. Tudjuk, hogy ennek a függvénynek a grafikonja egy felfelé nyíló parabola. A parabola csúcspontja $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$, ezért a g függvény minimumhelye az $x = \frac{5}{3}$, amely viszont nem eleme az f értelmezési tartományának. A parabola helyzetéből és állásából tudjuk, hogy a függvény $x < \frac{5}{3}$ esetén szigorúan monoton csökkenő, míg $x > \frac{5}{3}$ esetén szigorúan monoton

növekedő, ezért az f függvénynek csakis az $x = 1$ vagy $x = 2$ helyen lehet minimuma. Ezt pedig behelyettesítéssel eldönthetjük: $f(1) = 2$ és $f(2) = 1$, tehát 1 az f függvény minimuma, amelyet az $x = 2$ helyen vesz fel.

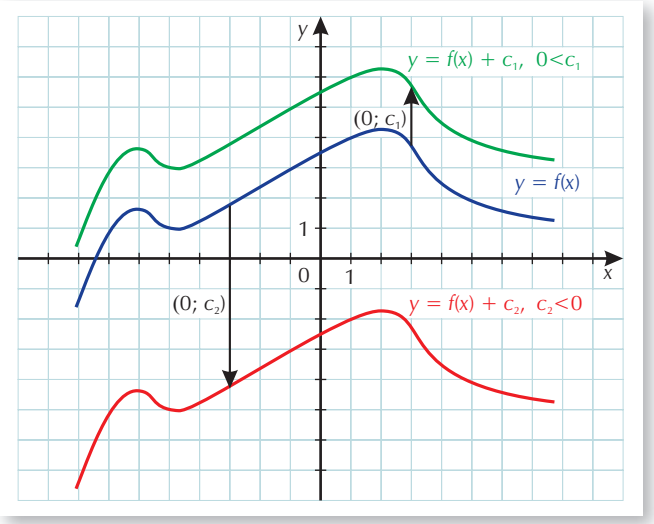
Az előző években néhány függvény grafikus képével már megismerkedtünk. Most áttekintjük a függvénytranszformációkat és ezek hatását a függvény grafikonjára.

A FÜGGVÉNYÉRTÉK TRANSZFORMÁCIÓI

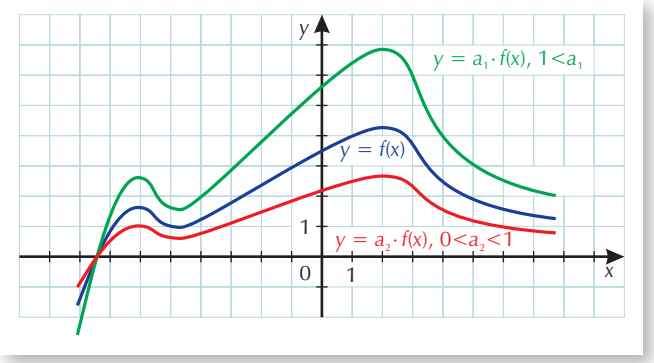
Legyen a vizsgált függvényünk az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x)$. Tudjuk, hogy az $f(x)$ az f függvény x helyen vett helyettesítési értéke, az $y = f(x)$ pedig a függvény grafikonjának egyenlete. Tegyük fel, hogy a függvény grafikus képe az ábrán látható görbe.



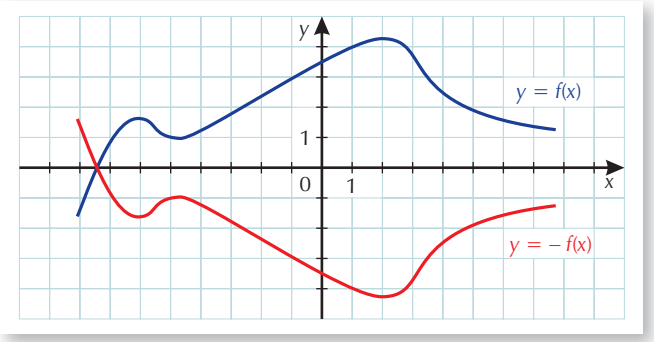
a) Ha az $f(x)$ függvényértékhez egy c konstanst adunk, akkor a függvény grafikus képe eltolódik a $(0; c)$ vektorral. $c > 0$ esetén az y tengely mentén pozitív irányba (fölfelé) toljuk el c-vel, $c < 0$ esetén az y tengely mentén negatív irányba (lefelé) toljuk el $|c|$-kel a függvény képét, ahogyan ezt az ábra is mutatja.



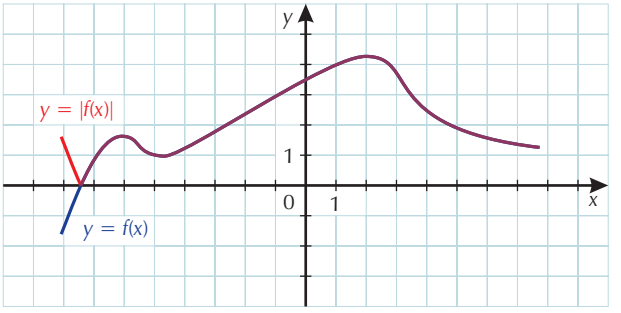
b) Ha az $f(x)$ függvényértékeket egy a pozitív konstanssal szorozzuk, akkor a függvény grafikonja az y tengely mentén $1 < a$ esetén a-szorosára nyúlik, $0 < a < 1$ esetén a-szorosára összenyomódik úgy, hogy minden pontjának y koordinátája az a-szorosára változik *(lásd ábra)*. Ezt a transzformációt az x tengelyre merőleges, a arányú affinitásnak nevezzük.



c) Ha az $f(x)$ függvényértékek ellentettjét vesszük, akkor a függvény grafikonja az x tengelyre tükröződik *(lásd ábra)*. Ennek segítségével már nem csak pozitív, hanem tetszőleges valós számmal való szorzást meg tudunk jeleníteni a grafikonon.

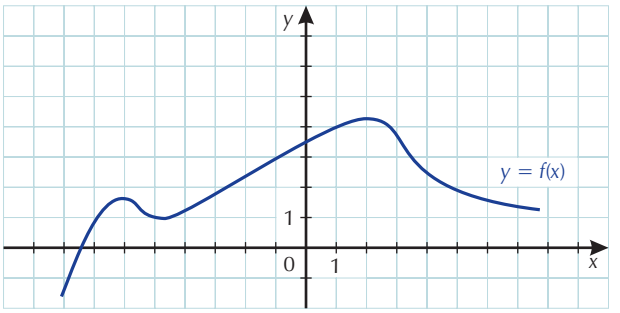


d) Szintén levezethető az előbbiekből, de külön is megemlítjük, hogy ha az $f(x)$ függvényérték abszolút értékét vesszük, akkor a nemnegatív függvényértékek pontjai helyben maradnak, a negatív függvényértékek pontjait (mivel a függvényértékek ellentettre váltanak), pedig tükrözzük az x tengelyre *(lásd ábra)*.

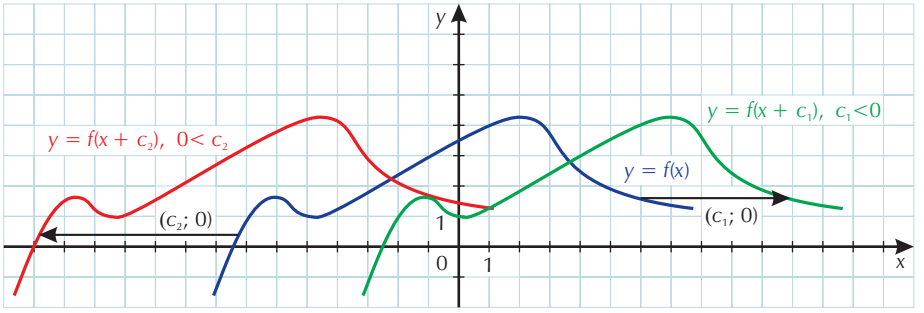


A FÜGGVÉNYVÁLTOZÓ TRANSZFORMÁCIÓI

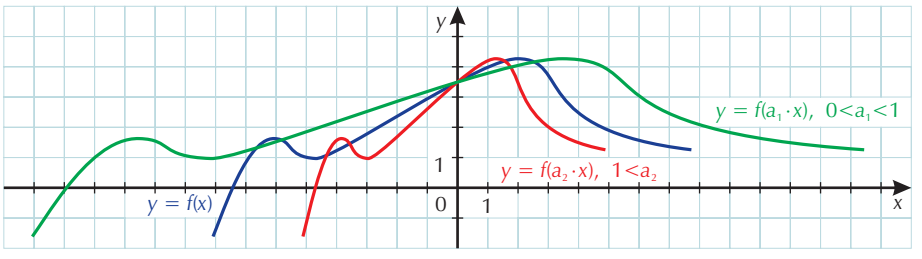
Legyen most is a vizsgált függvényünk az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x)$ *(lásd ábra)*.



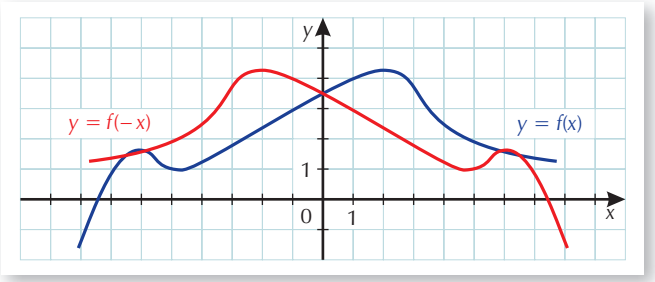
a) Ha az $f(x)$ függvény x változójához egy c konstanst adunk, akkor a függvény grafikus képe eltolódik a $(c; 0)$ vektorral. $c < 0$ esetén az x tengely mentén jobbra toljuk el $|c|$-kel, $c > 0$ esetén az x tengely mentén balra toljuk el c-vel a függvény képét, ahogyan ezt az alábbi ábra is mutatja.



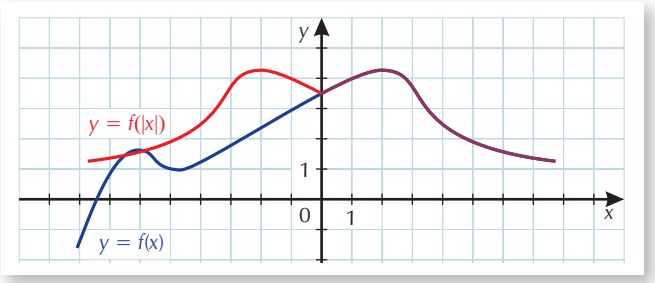
b) Ha az $f(x)$ függvény x változóját egy a pozitív konstanssal szorozzuk, akkor a függvény grafikonja az x tengely mentén $1 < a$ esetén $\frac{1}{a}$-szorosára összenyomódik, $0 < a < 1$ esetén $\frac{1}{a}$-szorosára nyúlik úgy, hogy minden pontjának x koordinátája az $\frac{1}{a}$-szorosára változik *(lásd ábra)*. Ezt a transzformációt az y tengelyre merőleges, $\frac{1}{a}$ arányú affinitásnak nevezzük.



c) Ha az $f(x)$ függvény x változójának ellentettjét vesszük, akkor a függvény grafikonja az y tengelyre tükröződik *(lásd ábra)*. Ugyanígy itt is az ellentett és a pozitív számmal való szorzás ismerete lehetővé teszi, hogy tetszőleges valós számmal szorozzuk a függvény x változóját.



d) Ha az $f(x)$ függvény x változóját abszolút értékbe tesszük, akkor a nemnegatív x értékekhez tartozó pontok helyben maradnak, és mivel a negatív x értékekhez ugyanazt rendeljük, mint az abszolút értékéhez, ezért a negatív x-ekhez tartozó részt töröljük és helyette a nemnegatív x értékekhez tartozó grafikon részt tükrözzük az y tengelyre *(lásd ábra)*.



Egy függvénnyel természetesen egymás után több különböző transzformáció is végrehajtható. Ez látható a következő példákban.

3. példa Ábrázoljuk az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$ függvényt!

Megoldás Ennek a függvénynek a grafikonja a legegyszerűbb másodfokú függvény képéből – az úgynevezett normálparabolából – transzformációkkal állítható elő *(lásd ábra)*. Nézzük sorban ezeket:

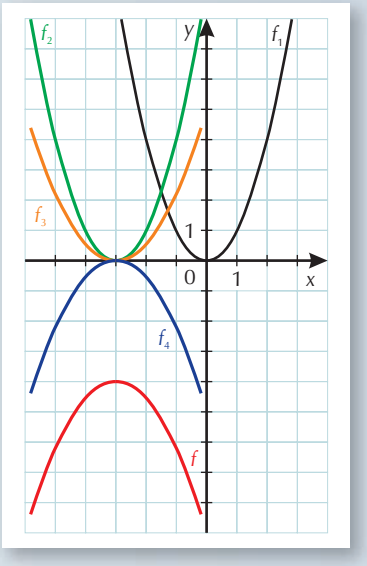
$f_1\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$.

$f_2\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x+3)^2$, a változóhoz 3-at adtunk, ezért f_1 grafikonját eltoltuk a $(-3; 0)$ vektorral.

$f_3\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x+3)^2$, a függvényértéket $\frac{1}{2}$-del szoroztuk, ezért az f_2 grafikon minden pontjának y koordinátáját megfeleztük.

$f_4\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{2}(x+3)^2$, a függvényérték ellentettjét vettük, ezért f_3 grafikonját tükröztük az x tengelyre.

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$, a függvényértékhez -4-et adtunk, ezért f_4 grafikonját eltoltuk a $(0; -4)$ vektorral.



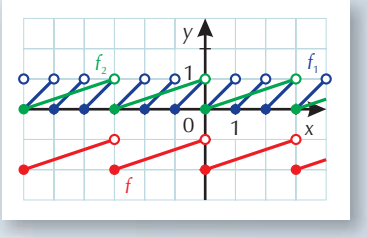
4. példa Ábrázoljuk az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \left\{\frac{1}{3}x\right\} - 2$ függvényt! (Ahol $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli: $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelenti, azaz az x-nél nem nagyobb, legnagyobb egész számot.)

Megoldás Ez a függvény két függvénytranszformációval állítható elő a törtrész-függvényből *(lásd ábra)*.

$f_1\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \{x\}$.

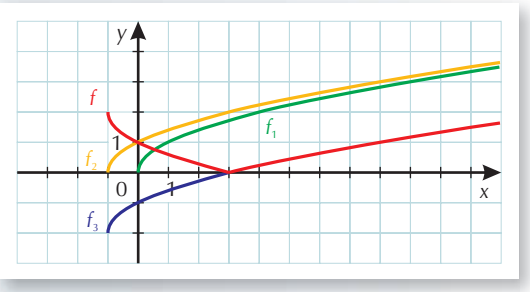
$f_2\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \left\{\frac{1}{3}x\right\}$, a változót $\frac{1}{3}$-dal szoroztuk, ezért az f_1 grafikon minden pontjának x koordinátáját megszoroztuk 3-mal.

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \left\{\frac{1}{3}x\right\} - 2$, a függvényértékhez -2-t adtunk, ezért f_2 grafikonját eltoltuk a $(0; -2)$ vektorral.



5. példa Ábrázoljuk az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto |\sqrt{x+1} - 2|$ függvényt!

Megoldás Ez a függvény három transzformációval előállítható az alaphelyzetű négyzetgyökfüggvényből *(lásd ábra)*.



$f_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

$f_2: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$, a változóhoz 1-et hozzáadtunk, ezért f_1 grafikonját eltoltuk a $(-1; 0)$ vektorral.

$f_3: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1} - 2$, a függvényértékhez -2-t hozzáadtunk, ezért f_2 grafikonját eltoltuk a $(0; -2)$ vektorral.

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto |\sqrt{x+1} - 2|$, a függvényérték abszolút értékét vettük, ezért a nemnegatív függvényértékek pontjai helyben maradtak, a negatív függvényértékek pontjait pedig tükröztük az x tengelyre.

FELADATOK

1. E1 Rajzoljuk le az f és a g függvény grafikonját, ha az

a) $f:]0; 1[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$;

b) $f: [1; 2] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$;

c) $f: [1; 2[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto |x - 1|$;

d) $f: [1; 2[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto \{x\}$

függvény $[0; 2]$-ra történő kiterjesztése g.

2. E1 Rajzoljuk le az f és a h függvény grafikonját, ha az

a) $f: [0; 2] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 1$;

b) $f:]-1; 1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x - 2$;

c) $f:]-2; 2[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto |x + 1| + |x - 1|$;

d) $f: [-1; 2[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto [x]$

függvény $[0; 1]$-ra történő leszűkítése h.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 742–763, 785–786.

17. FÜGGVÉNYEK ELEMI VIZSGÁLATA

A függvények tulajdonságait felhasználva számos kérdés kezelése könnyebbé válik. Nagyon fontos az előző években tanult fogalmak felelevenítése, kiegészítése. Ebben a leckében áttekintjük a legfontosabb függvénytulajdonságokat.

A továbbiakban olyan függvényekkel foglalkozunk, melyek valós számokhoz valós számokat rendelnek. Az ettől eltérő eseteket jelölni fogjuk.

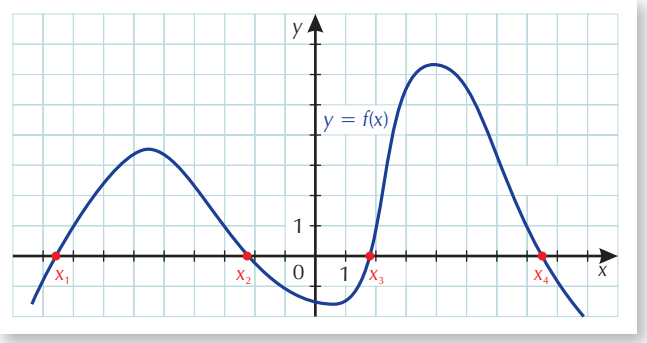
Definíció

Zérushely

Az f függvény **zérushely**ének nevezzük az értelmezési tartományának azon értékeit, amelyeknél $f(x) = 0$.

Az ábrán látható f függvény grafikonja mutatja, hogy x_1, x_2, x_3 és x_4 zérushelyek, mert

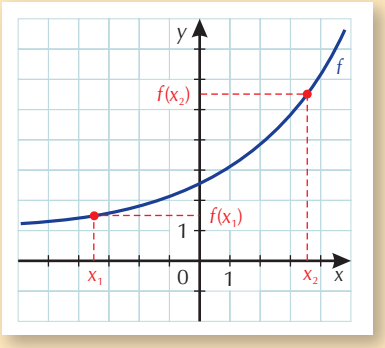
$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$.



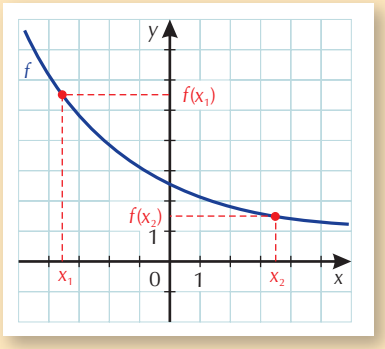
Definíció

Monotonitás

Az f függvényt az értelmezési tartományának egy intervallumán **szigorúan monoton növekedő**nek mondjuk, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ értékeire az $f(x_1) < f(x_2)$ teljesül *(lásd jobb oldali ábra)*.

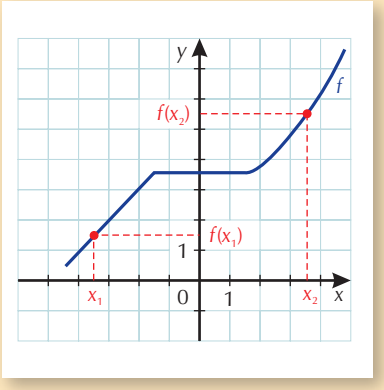


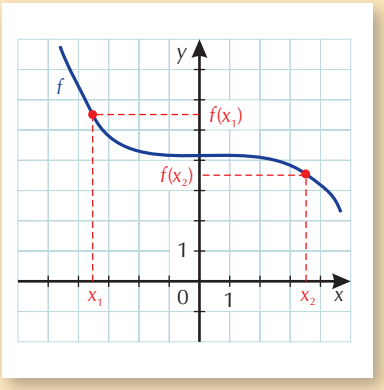
Az f függvényt az értelmezési tartományának egy intervallumán **szigorúan monoton csökkenő**nek mondjuk, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ értékeire az $f(x_1) > f(x_2)$ teljesül *(lásd bal oldali ábra)*.



Az f függvényt az értelmezési tartományának egy intervallumán **monoton növekedő**nek mondjuk, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ értékeire az $f(x_1) \leq f(x_2)$ teljesül *(lásd jobb oldali ábra)*.

Az f függvényt az értelmezési tartományának egy intervallumán **monoton csökkenő**nek mondjuk, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ értékeire az $f(x_1) \geq f(x_2)$ teljesül *(lásd bal oldali ábra)*.



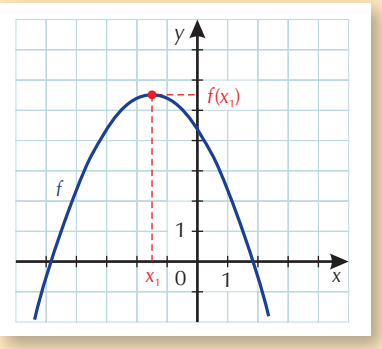


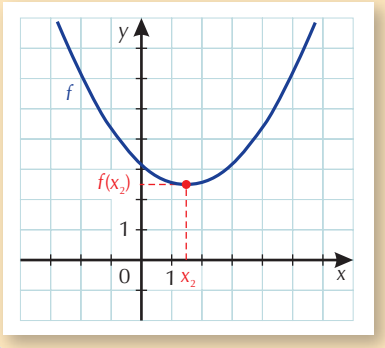
Definíció

Szélsőérték helyek, szélsőértékek

Az f függvénynek (abszolút vagy globális) maximuma van az x_1 helyen, ha az $f(x_1)$ értéknél sehol sem vesz fel nagyobb értéket a függvény. Az x_1-et ekkor a függvény **maximum helyé**nek, az $f(x_1)$-et pedig a függvény **maximum érték**ének nevezzük *(lásd jobb oldali ábra)*.

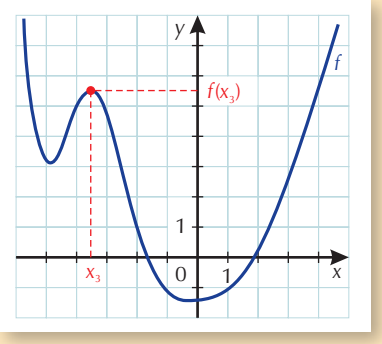
Az f függvénynek minimuma van az x_2 helyen, ha az $f(x_2)$ értéknél sehol sem vesz fel kisebb értéket a függvény. Az x_2-t ekkor a függvény **minimum helyé**nek, az $f(x_2)$-t pedig a függvény **minimum érték**ének nevezzük *(lásd bal oldali ábra)*.





Beszélünk helyi (lokális) szélsőérték helyekről, szélsőértékekről is.

Definíció

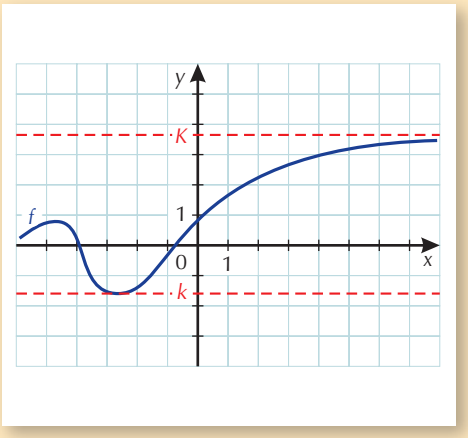


Az f függvénynek helyi maximuma van az x_3 helyen, ha létezik a függvény értelmezési tartományában olyan $]a; b[$ intervallum, hogy $x_3 \in]a; b[$ esetén az $f(x_3)$ értéknél sehol sem vesz fel nagyobb értéket a függvény. Az x_3-at ekkor a függvény **helyi maximum hely**ének, az $f(x_3)$-at pedig a függvény **helyi maximum érték**ének nevezzük *(lásd ábra)*.

Ennek mintájára megfogalmazható a **helyi minimum hely** és a **helyi minimum érték** meghatározása is.

Az ábrán is látható, hogy a helyi maximum nem feltétlen (abszolút) maximuma a függvénynek.

Definíció



Korlátosság

Az f függvény **felülről korlátos**, ha létezik olyan K szám, hogy az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) \leq K$. Ezt a K számot a függvény egy **felső korlát**jának nevezzük. (Ha f felülről korlátos, akkor végtelen sok felső korlátja van, hiszen ha K felső korlát, akkor minden $K' > K$ is az.)

Az f függvény **alulról korlátos**, ha létezik olyan k szám, hogy az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) \geq k$. Ezt a k számot a függvény egy **alsó korlát**jának nevezzük. (Ha f alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van, hiszen ha k alsó korlát, akkor minden $k' < k$ is az.)

Az f függvény **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

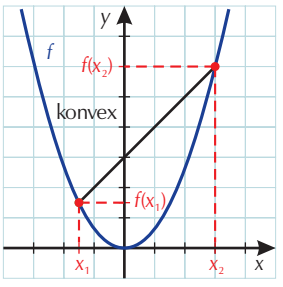
Bebizonyítható, hogy ha egy függvény korlátos, akkor mindig létezik legkisebb felső korlátja és legnagyobb alsó korlátja. Ezek nem feltétlenül szélsőértékek, amint az a legkisebb felső korlát esetében az ábrán is látható.

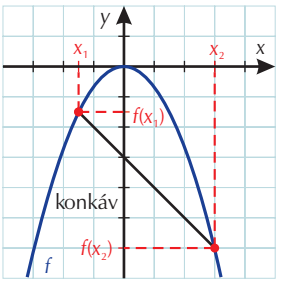
Definíció

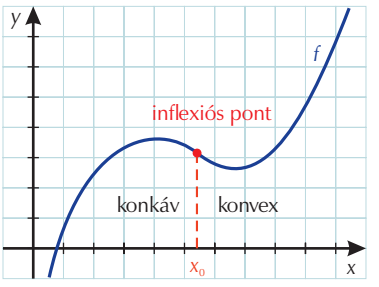
Konvexitás

Az f függvényt az értelmezési tartományának egy intervallumán **konvex**nek (illetve **konkáv**nak) nevezzük, ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ értékeinél az $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ pontokat összekötő szelőszakasz a függvénygrafikon fölött (illetve alatt) halad.

Azt a helyet, ahol a függvény konvexitást vált, a függvény **inflexiós pont**jának nevezzük.







A függvények konvexitásának vizsgálata a monotonitás ismeretében még informatívabbá teheti a jellemzést. Ha például egy szigorúan monoton növekedő függvény konvex, az azt jelenti, hogy egyre gyorsabb ütemben növekszik. Ha viszont konkáv, akkor a függvény növekedő, de növekedés üteme folyamatosan csökken.

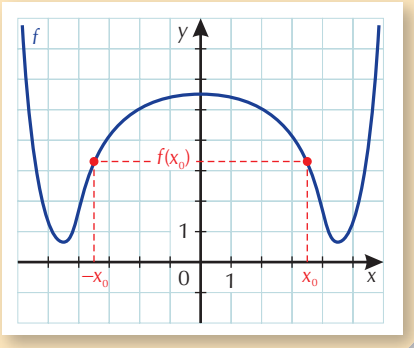
A függvények konvexitásának vizsgálatával majd a Differenciálszámítás fejezetben foglalkozunk részletesebben.

Definíció

Paritás

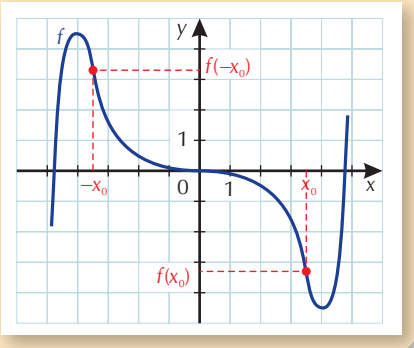
Az f függvény **páros**, ha az értelmezési tartomány bármely x_0 eleme esetén a $-x_0$ is eleme az értelmezési tartománynak és $f(x_0) = f(-x_0)$.

Páros függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre *(lásd ábra)*.



Az f függvény **páratlan**, ha az értelmezési tartomány bármely x_0 eleme esetén a $-x_0$ is eleme az értelmezési tartománynak és $f(x_0) = -f(-x_0)$.

Páratlan függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra *(lásd ábra)*.

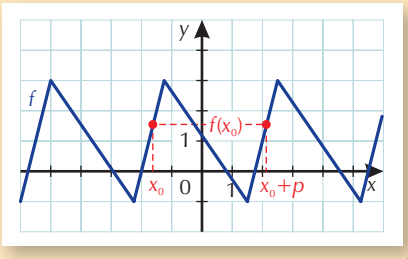


Definíció

Periodikusság

Az f függvény **periodikus**, ha létezik olyan p pozitív szám, amelyre, ha x_0 eleme az értelmezési tartománynak, akkor az $x_0 + p$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá minden x_0 esetén $f(x_0) = f(x_0 + p)$ *(lásd ábra)*.

Ha létezik legkisebb az ilyen p számok között, akkor ezt a függvény **periódus**ának (vagy másképpen alapperiódusának) mondjuk.

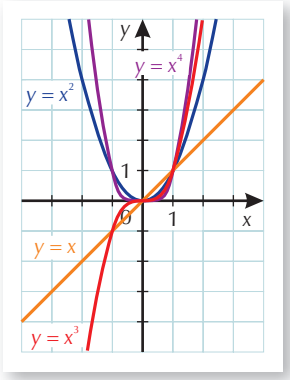


Nézzük meg az imént összegyűjtött függvényvizsgálati szempontokat néhány függvénytípuson.

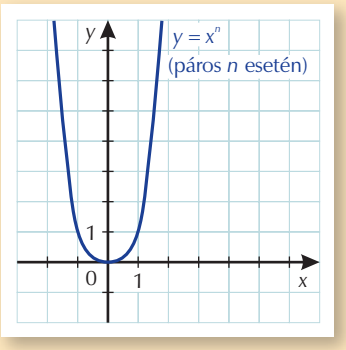
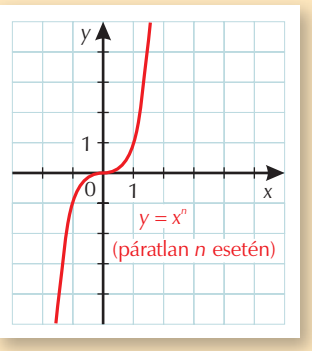
HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

Hatványfüggvényekkel már korábban is találkoztunk, jól ismerjük közülük az x^2 függvényt. Most nézzük meg általánosan, tetszőleges pozitív egész kitevő esetén az x^n függvényt!

$n = 1$ esetén ez lineáris függvény, melynek jellemzéstől most eltekintünk.



Az $f: x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) függvény jellemzése:

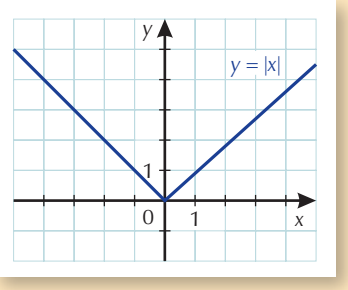
	n páros	n páratlan ($n \geq 3$)
		
1.	$D_f = \mathbf{R}$	
2.	$R_f = [0; \infty[$	$R_f = \mathbf{R}$
3.	Zérushelye $x = 0$.	
4.	Szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty; 0]$ intervallumon és szigorúan monoton növekedő a $[0; \infty[$ intervallumon.	Szigorúan monoton növekedő.
5.	Maximuma nincs. Minimumhelye $x = 0$, minimum értéke 0.	Szélsőértéke nincs.
6.	Felülről nem korlátos, alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja 0.	Felülről és alulról sem korlátos.
7.	Konvex.	Konkáv a $]-\infty; 0]$ intervallumon és konvex a $[0; \infty[$ intervallumon.
8.	Páros függvény.	Páratlan függvény.
9.	Nem periodikus.	

Megjegyzés

Innen ered a páros, páratlan függvénytulajdonság elnevezés, hiszen a páros kitevőjű hatványfüggvények mind párosak, a páratlan kitevőjűek pedig páratlanok.

AZ ABSZOLÚTÉRTÉK-FÜGGVÉNY

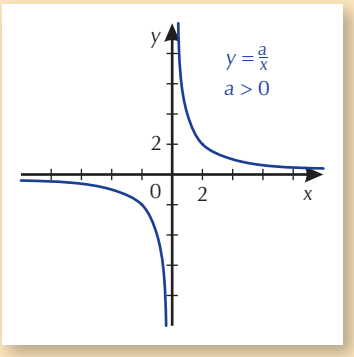
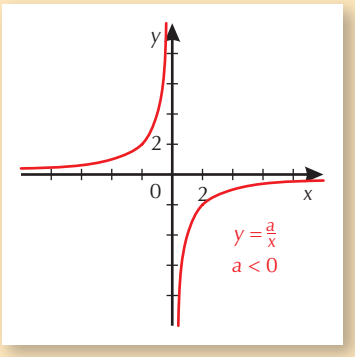
Az $f: x \mapsto |x|$ függvény jellemzése:



1. $D_f = \mathbf{R}$
2. $R_f = [0; \infty[$
3. Zérushelye: $x = 0$.
4. Szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty; 0]$ intervallumon és szigorúan monoton növekedő a $[0; \infty[$ intervallumon.
5. Maximuma nincs.
   Minimumhelye $x = 0$, minimum értéke 0.
6. Felülről nem korlátos, alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja 0.
7. Nem konvex és nem is konkáv.
8. Páros függvény.
9. Nem periodikus.

TÖRTFÜGGVÉNY

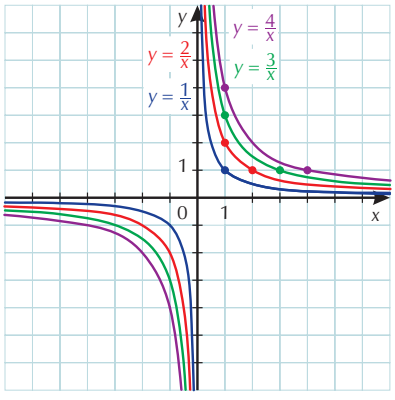
Az $f: x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbf{R})$ függvény jellemzése:

	$a > 0$ esetén	$a < 0$ esetén
		
1.	$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$	
2.	$R_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$	
3.	Zérushelye nincs.	
4.	Szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty; 0[$ intervallumon és a $]0; \infty[$ intervallumon is.	Szigorúan monoton növekedő a $]-\infty; 0[$ intervallumon és a $]0; \infty[$ intervallumon is.
5.	Szélsőértéke nincs.	
6.	Felülről és alulról sem korlátos.	
7.	Konkáv a $]-\infty; 0[$ intervallumon és konvex a $]0; \infty[$ intervallumon.	Konvex a $]-\infty; 0[$ intervallumon és konkáv a $]0; \infty[$ intervallumon.
8.	Páratlan függvény.	
9.	Nem periodikus.	

Megjegyzés

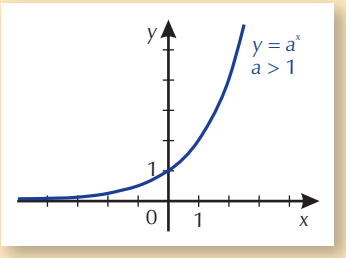
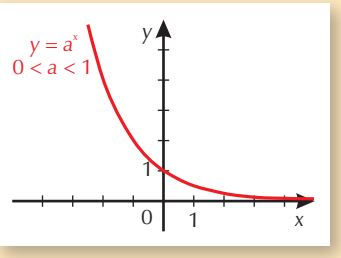
$a = 0$ esetén a konstans 0 függvényt kapjuk, ennek jellemzésétől eltekintünk.

Érdemes megvizsgálni, hogy azonos előjelű, de különböző a értékek esetén hogyan változik a függvény. Ezért felrajzoltuk egy közös koordináta-rendszerben az $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x}$ és $\frac{4}{x}$ függvényeket.



AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

Az $f: x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ függvény jellemzése:

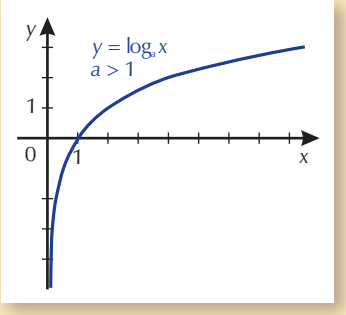
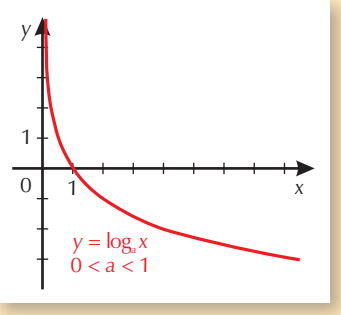
	$a > 1$ esetén	$0 < a < 1$ esetén
		
1.	$D_f = \mathbf{R}$	
2.	$R_f =]0; \infty[$	
3.	Zérushelye nincs.	
4.	Szigorúan monoton növekedő.	Szigorúan monoton csökkenő.
5.	Szélsőértéke nincs.	
6.	Felülről nem korlátos, alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja 0.	
7.	Konvex.	Konvex.
8.	Nem páros, nem páratlan.	
9.	Nem periodikus.	

Megjegyzés
$a = 1$ esetén a konstans 1 függvényt kapjuk, ennek jellemzésétől eltekintünk.

A LOGARITMUSFÜGGVÉNY

A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze, amely csak $a \neq 1$ esetben létezik.

Az $f: x \mapsto \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ függvény jellemzése:

	$a > 1$ esetén	$0 < a < 1$ esetén
		
1.	$D_f =]0; \infty[$	
2.	$R_f = \mathbf{R}$	
3.	Zérushelye $x = 1$.	
4.	Szigorúan monoton növekedő.	Szigorúan monoton csökkenő.
5.	Szélsőértéke nincs.	
6.	Felülről és alulról sem korlátos.	

7.	Konkáv.	Konvex.
8.	Nem páros, nem páratlan.	
9.	Nem periodikus.	

1. példa Vizsgáljuk meg a Dirichlet-függvényt periodikusság szempontjából! A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Megoldás Ha x_0 és p racionális számok ($p > 0$), akkor $x_0 + p$ is racionális szám, vagyis $f(x_0) = f(x_0 + p) = 1$.

Ha x_0 irracionális szám és p racionális szám ($p > 0$), akkor $x_0 + p$ is irracionális szám, vagyis $f(x_0) = f(x_0 + p) = 0$.

Ezen függvény esetén bármely pozitív racionális szám lehetne a definícióban szereplő p. Mivel a pozitív racionális számok között nincs legkisebb, ezért a Dirichlet-függvénynél nem beszélhetünk periódusról, bár a függvény periodikus. (Ezért hangsúlyoztuk a meghatározásnál, hogy ha van legkisebb p, azt nevezzük a függvény periódusának.)

A következő példákban a függvénytulajdonságokat egyenletek megoldása során alkalmazzuk.

2. példa Oldjuk meg az $a^2 + \frac{1}{a^2} + a^4 + \frac{1}{a^4} = 3$ egyenletet!

Megoldás Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés miatt érdemes az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ hozzárendelésű függvényre gondolnunk. Az egyenletünkben $a \neq 0$, de minden további a esetén $a^2 > 0$, $a^4 > 0$. Vagyis elegendő az f függvényt a pozitív valós számokon vizsgálnunk. Ekkor az $f(x) \geq 2$, hiszen tudjuk, hogy egy pozitív valós szám és a reciprokának összege nem lehet 2-nél kisebb. Ezek szerint f értékkészlete: $[2; \infty[$.

Most már látható, hogy az egyenlet bal oldala: $f(a^2) + f(a^4) \geq 4$, vagyis nem lehet egyenlő 3-mal.

Az egyenletnek nincs valós megoldása.

3. példa Tudjuk, hogy az $\sqrt{x^4 + 3x^2 + 10x + \sqrt{x} + 15} = 19$ egyenletnek az $x = 4$ gyöke. (Behelyettesítéssel erről meggyőződhetünk.) Oldjuk meg az egyenletet!

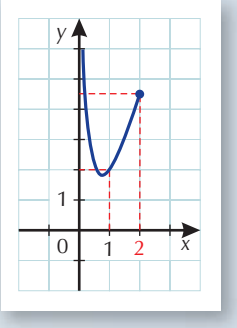
Megoldás Nézzük az $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 10x + \sqrt{x} + 15}$ hozzárendelésű függvényt. A függvény legbővebb értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza. A függvény grafikonjáról alig tudunk valamit, de a hozzárendelési szabályában szereplő műveletek miatt megállapíthatjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekedő az értelmezési tartományán.

Tudjuk, hogy $f(4) = 19$. A függvény szigorú monoton növekedése miatt a $0 \leq x < 4$ esetén $f(x) < 19$, a $4 < x$ esetén pedig $f(x) > 19$ lesz.

Vagyis az egyenlet egyedüli megoldása az $x = 4$.

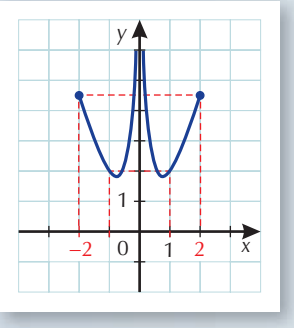
4. példa Az $f(x) = \frac{x^4 + |x|}{x^2}$ hozzárendelésű függvényről egy grafikus számológép a $]0; 2]$-on az jobb oldali ábrán látható képet készítette.

Rajzoljuk meg a függvény képét a $[-2; 0[$-on is!



Megoldás

Nézzük a függvény helyettesítési értékét a $-x$ helyen:



$$f(-x)=\frac{(-x)^4+|-x|}{(-x)^2}=\frac{x^4+|x|}{x^2}.$$

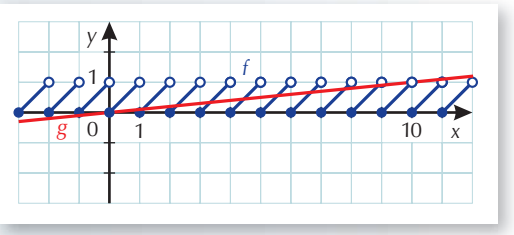
Vagyis az f függvény az általunk vizsgált $[-2;\,0[\,\cup\,]0;\,2\,]$ értelmezési tartományon páros. Ha a megadott görbét az y tengelyre tükrözzük, akkor a kívánt képet kapjuk *(lásd bal oldali ábra)*.

5. példa

Hány megoldása van az $\{x\}=\frac{x}{10}$ egyenletnek?

Megoldás

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a törtrész-függvényt: $f(x)=\{x\}$, és az elsőfokú függvényt:



$g(x)=\frac{x}{10}$ *(lásd ábra)*.

Tudjuk, hogy f korlátos függvény: $0\le f(x)<1$.

Tudjuk, hogy g szigorúan monoton növekedő, továbbá $g(0)=0$, $g(10)=1$.

Vagyis az összes közös pont a $[0;\,10[$-on található, itt találhatjuk az egyenlet gyökeit.

Az f periodikus is, a periódusának hossza 1.

Egy-egy megoldást a következő, egység hosszúságú intervallumokon találunk:
$[0;\,1[$, $[1;\,2[$, …, $[8;\,9[$.

Vagyis az egyenletnek 9 megoldása van.

FELADATOK

1. E1 Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x^4+\frac{1}{x^4}+x^6+\frac{1}{x^6}=6.$$

2. E1 Tudjuk, hogy a következő egyenleteknek az $x=9$ gyöke. Adjuk meg az egyenletek összes megoldását!

a) $\sqrt{x^4+3x^2+85}=83$; *b)* $\sqrt[4]{x^2+\sqrt{x}+172}=4$.

3. E1 Hány valós megoldása van az $\{x\}=\frac{x}{1000}$ egyenletnek?

4. E1 Periodikusak-e a következő hozzárendeléssel megadott függvények?

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2\{x\}-1$; *b)* $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2[x]-1$.

5. E1 Legyen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2x^2-1$ és $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x^4+x^2$. Igazoljuk, hogy $f+g$ és fg is páros!

6. E2 Határozzuk meg a függvények minimumhelyét és minimumát, ha

a) $a:x\mapsto x^3-5x^2+8x-4$, és $x\ge 3$;

b) $b:x\mapsto x^3-3x^2+x+1$, és $x\ge 3$;

c) $c:x\mapsto x^3-7x^2+17x-12$, és $x\ge 3$;

d) $d:x\mapsto x+\frac{4}{x^2}$, és $-4\le x\le 3$, $x\ne 0$!

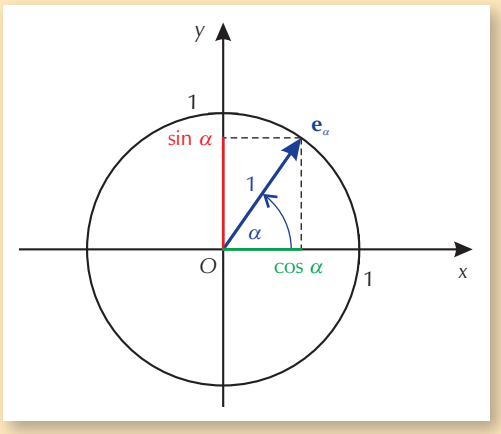
Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 791–817.

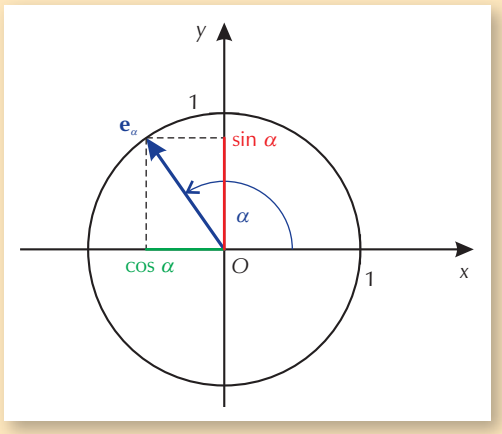
18. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

A hegyesszögeknél megismert szögfüggvények értelmezését az alábbiak szerint kiterjesztettük a valós számok halmazára.

Definíció

sin α = az x tengely pozitív felével α szöget bezáró egységvektor ($\mathbf{e}_\alpha$) második koordinátája.
cos α = az x tengely pozitív felével α szöget bezáró egységvektor ($\mathbf{e}_\alpha$) első koordinátája.
Összefoglalva: $\mathbf{e}_\alpha = (\cos\alpha; \sin\alpha)$.

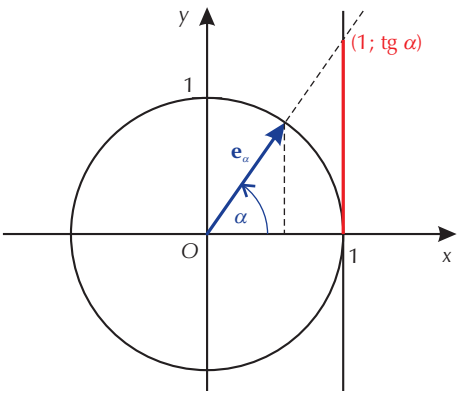


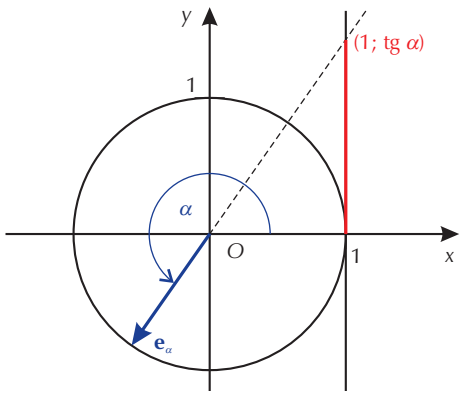


Definíció

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ha $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Az elforgatott egységvektor ismeretében a tg α értéke is megjeleníthető az egységkörös ábrán: az $\mathbf{e}_\alpha$-ra illeszkedő egyenes és az $x = 1$ egyenes metszéspontjának y koordinátája.

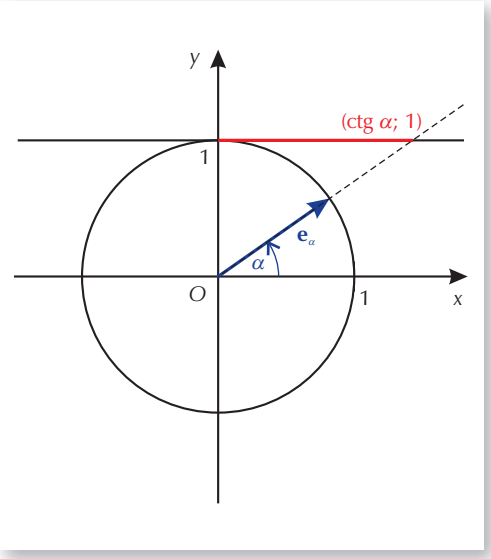


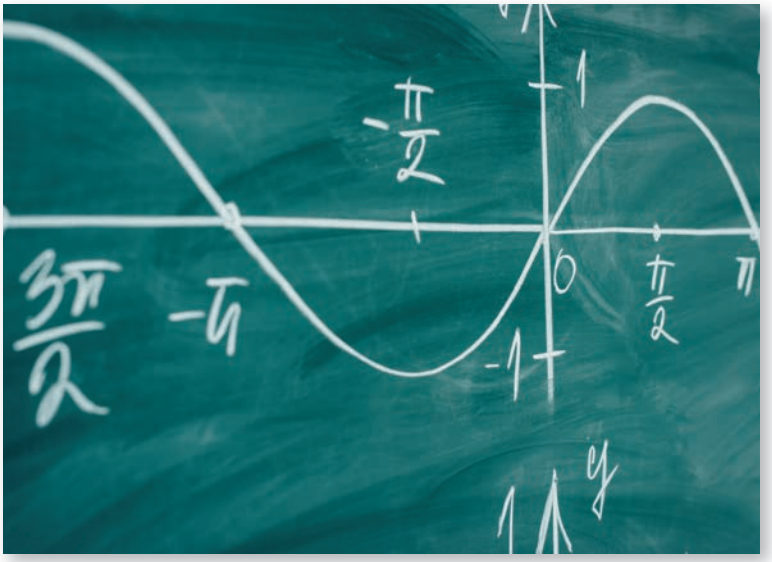


Definíció

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ha $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

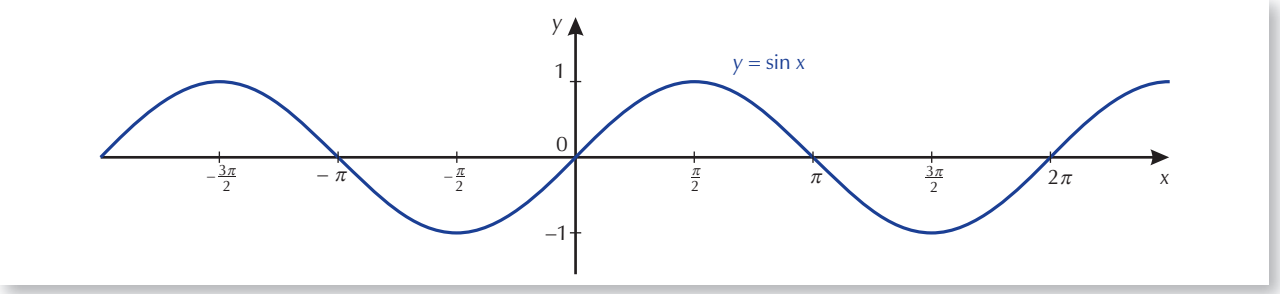
Hasonlóképpen a ctg α értéke is megjeleníthető az egységkörös ábrán: az $\mathbf{e}_\alpha$-ra illeszkedő egyenes és az $y = 1$ egyenes metszéspontjának x koordinátája.





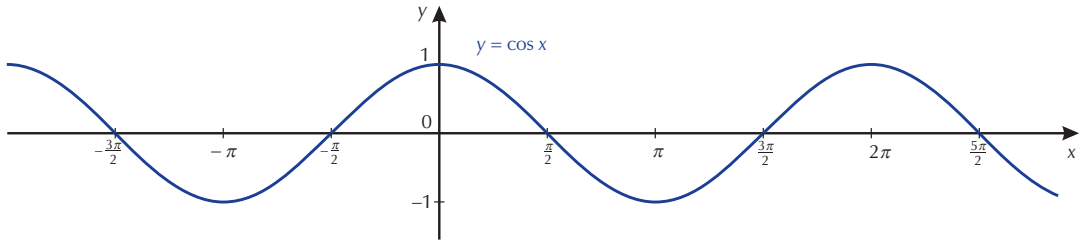
A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

Ezek alapján ábrázolhatjuk a valós számokon értelmezett trigonometrikus függvényeket.



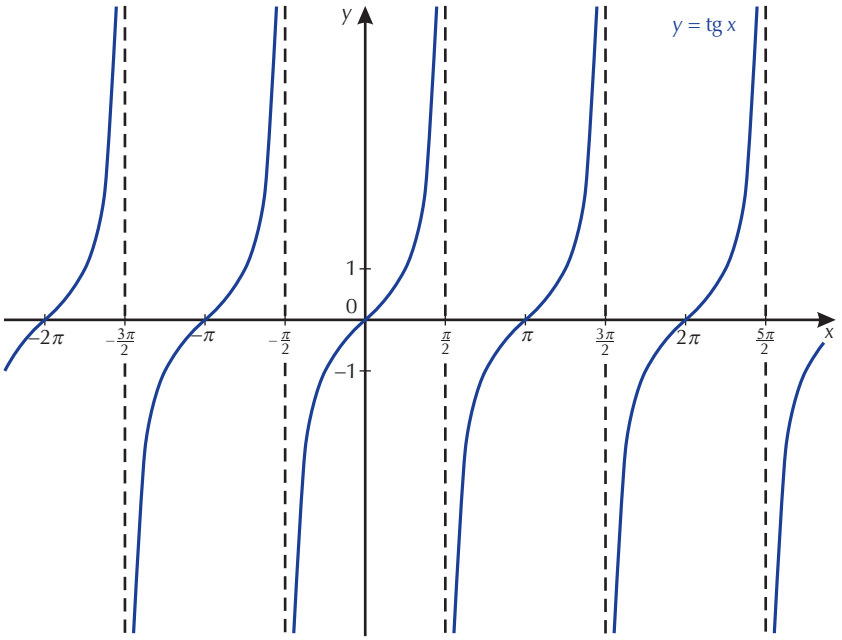
A $f: x \mapsto \sin x$ függvény jellemzése:

1. $D_f = \mathbf{R}$
2. $R_f = [-1; 1]$
3. Zérushelyek: $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
4. Szigorúan monoton növekedő a $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ intervallumon, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
5. Maximumhelyei $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, maximum értéke 1.
   Minimumhelyei $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, minimum értéke -1.
6. Korlátos, legkisebb felső korlátja 1, legnagyobb alsó korlátja -1.
7. Konkáv a $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ intervallumon és konvex a $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$ intervallumon, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
8. Páratlan függvény.
9. Periodikus, periódusa 2π.



A $f: x \mapsto \cos x$ függvény jellemzése:

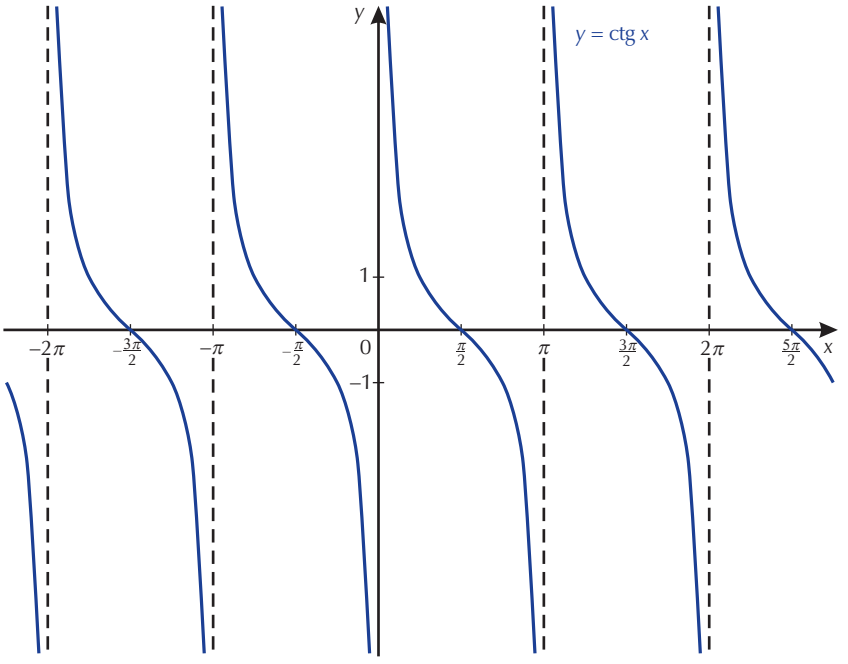
1. $D_f = \mathbf{R}$
2. $R_f = [-1; 1]$
3. Zérushelyek: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
4. Szigorúan monoton növekedő a $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő a $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ intervallumon, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
5. Maximumhelyei $x = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, maximum értéke 1. Minimumhelyei $x = \pi + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, minimum értéke -1.
6. Korlátos, legkisebb felső korlátja 1, legnagyobb alsó korlátja -1.
7. Konkáv a $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ intervallumon és konvex a $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ intervallumon, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
8. Páros függvény.
9. Periodikus, periódusa 2π.



A $f: x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény jellemzése:

1. $D_f = \{x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
2. $R_f = \mathbf{R}$
3. Zérushelyek: $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
4. Szigorúan monoton növekedő a $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ intervallumon, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
5. A függvénynek se maximuma, se minimuma nincsen.
6. Alulról és felülről sem korlátos.

7. Konkáv a $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\,0+k\pi\right]$ intervallumon és konvex a $\left[0+k\pi;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ intervallumon, ahol $k\in\mathbf{Z}$.
8. Páratlan függvény.
9. Periodikus, periódusa π.



A $f\colon x\mapsto \operatorname{ctg} x$ függvény jellemzése:
1. $D_f=\{x\in\mathbf{R},\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$
2. $R_f=\mathbf{R}$
3. Zérushelyek: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$.
4. Szigorúan monoton csökkenő a $]0+k\pi;\,\pi+k\pi[$ intervallumon, ahol $k\in\mathbf{Z}$.
5. A függvénynek se maximuma, se minimuma nincsen.
6. Alulról és felülről sem korlátos.
7. Konkáv a $\left]0+k\pi;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ intervallumon és konvex a $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi;\,\pi+k\pi\right[$ intervallumon, ahol $k\in\mathbf{Z}$.
8. Páratlan függvény.
9. Periodikus, periódusa π.

ÖSSZETETT TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

A megismert trigonometrikus alapfüggvények, valamint a függvénytranszformációk segítségével összetett függvényeket is ábrázolhatunk, jellemezhetünk.

1. példa Ábrázoljuk rendre közös koordinátarendszerben a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket! Fogalmazzunk meg a függvénytranszformációk alapján geometriai kapcsolatot az egymás utáni függvények grafikonjai között!

$f_1\colon x\mapsto \cos x\quad f_2\colon x\mapsto \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\quad f_3\colon x\mapsto \frac{3}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$f_4\colon x\mapsto -\frac{3}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$f\colon x\mapsto 3-\frac{3}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

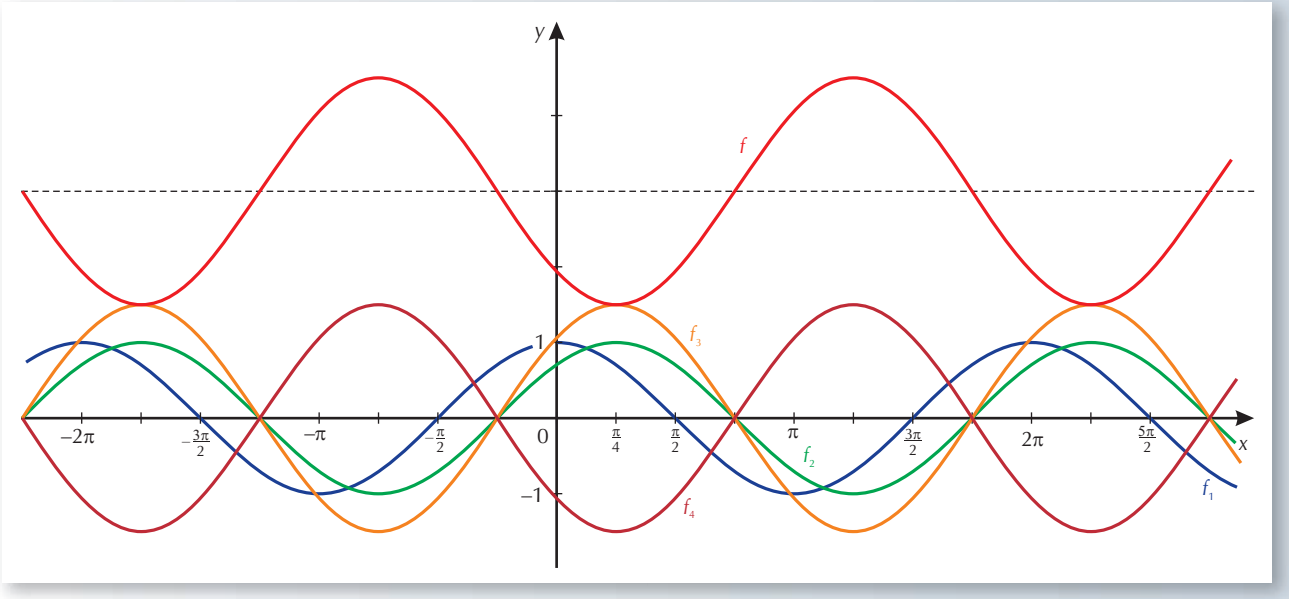
Megoldás Alkalmazzuk a tanult függvénytranszformációkat.

Az f_2 grafikonja az f_1 grafikonjából a $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ vektorral történő eltolással kapható.

Az f_3 grafikonja az f_2 grafikonjából az y tengellyel párhuzamos, $\frac{3}{2}$-szeres nyújtással származik.

Az f_4 grafikonja az f_3 grafikonjából az x tengelyre vonatkozó tükrözéssel nyerhető.

Az f grafikonját az f_4 grafikonjából a $(0; 3)$ vektorral történő eltolással kapható.



Megjegyzés

Mint látható, a lépések egymásutánjával az $f: x \mapsto 3 - \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ grafikonját kaptuk meg.

Összetett függvényeket célszerű az előző megoldásban mutatott egyszerű transzformációk egymás utáni alkalmazásával ábrázolni. Ilyenkor először a változó transzformációkat érdemes végrehajtani, és csak utána az értéktranszformációkat.

2. példa Ábrázoljuk és jellemezzük a valós számok halmazán értelmezett $f: x \mapsto 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ függvényt!

Megoldás A függvényt függvénytranszformációk segítségével ábrázoljuk.

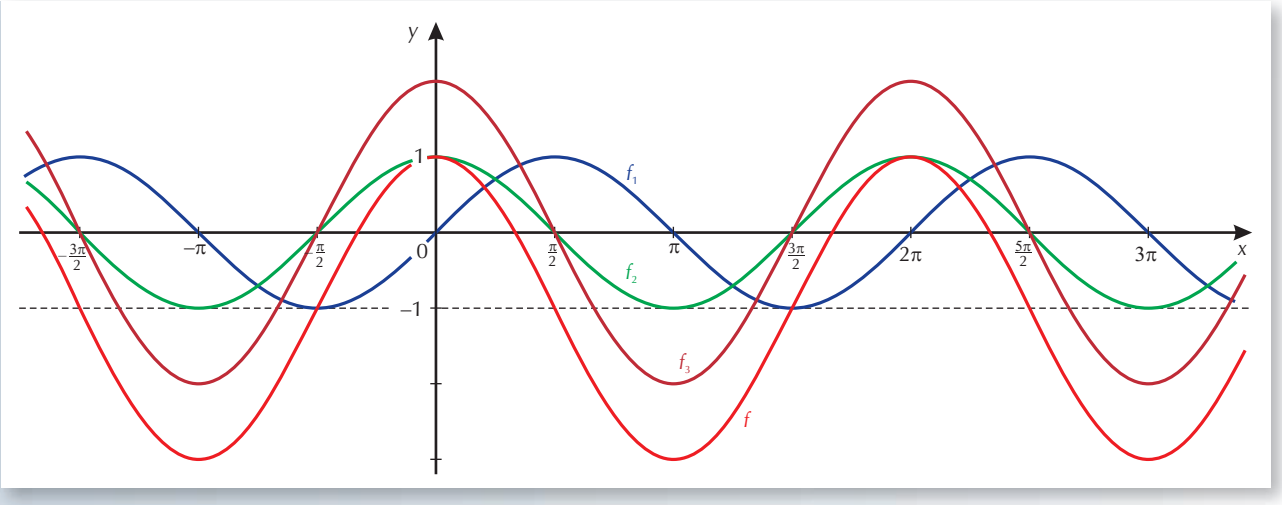
Az f függvény grafikonját a sin x függvény grafikonjából a következő lépésekkel kaphatjuk meg:

$f_1: x \mapsto \sin x$.

$f_2: x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Az előző függvény grafikonjának eltolásával rajzolhatjuk meg grafikonját, az eltolás vektora: $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

$f_3: x \mapsto 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Az f_2 grafikonjából y tengely menti kétszeres nyújtással ábrázolható.

$f: x \mapsto 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$. Az f_3 grafikonjának eltolásával rajzolható meg, az eltolás vektora $(0; -1)$



Az f függvény jellemzése:

A függvény *értelmezési tartománya:* $D_f = \mathbf{R}$.

Értékkészlete: $R_f = [-3; 1]$.
Ezt leolvashatjuk az ábráról is, de az elvégzett transzformációk alapján is meggondolható. Kezdetben a sin x értékkészlete $[-1; 1]$, az első (x tengellyel párhuzamos) eltolás ezen nem változtat, az (y tengely menti) kétszeres nyújtás után $[-2; 2]$-re változik, végül pedig az (y tengellyel párhuzamos) eltolás után $[-3; 1]$ lesz.

Zérushely: a grafikon alapján nem olvasható le pontosan, de számolással megállapítható:
$2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1=0;\qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2};\qquad x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$

Monotonitás: A függvény szigorúan monoton csökkenő: $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$ intervallumon ($k \in \mathbf{Z}$).
A függvény szigorúan monoton növekedő: $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$ intervallumon ($k \in \mathbf{Z}$).
Ezt is meggondolhatjuk az ábrázolástól függetlenül, az elvégzett transzformációk alapján. A sin x alapfüggvény monotonitási viszonyait ismerjük, az első eltolás $-\frac{\pi}{2}$-vel „elcsúsztatja" ezeket az intervallumokat, a másik két transzformáció pedig nem befolyásolja.

Szélsőértékek: maximuma 1, ezt az $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken veszi fel;
minimuma –3, ezt az $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken veszi fel.

Korlátosság: korlátos, legkisebb felső korlátja 1, legnagyobb alsó korlátja -3.

Konvexitás: A függvény konkáv a $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ intervallumon ($k \in \mathbf{Z}$).
A függvény konvex a $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ intervallumon ($k \in \mathbf{Z}$).

Paritása: páros függvény, mivel $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)$, és a többi transzformáció nem változtat a paritáson. $\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.\right)$

Periodicitása: periodikus, periódusa 2π.

3. példa Ábrázoljuk az $f: x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ függvényt a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

Megoldás Alakítsuk át a transzformációs lépések megkeresése miatt a hozzárendelési szabályt:

$f: x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right].$

A lépésenkénti ábrázoláshoz a függvények:

$f_1(x)=\operatorname{tg} x;\quad f_2(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right);\quad f_3(x)=\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];\quad f_4(x)=-\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];\quad f: x \mapsto -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

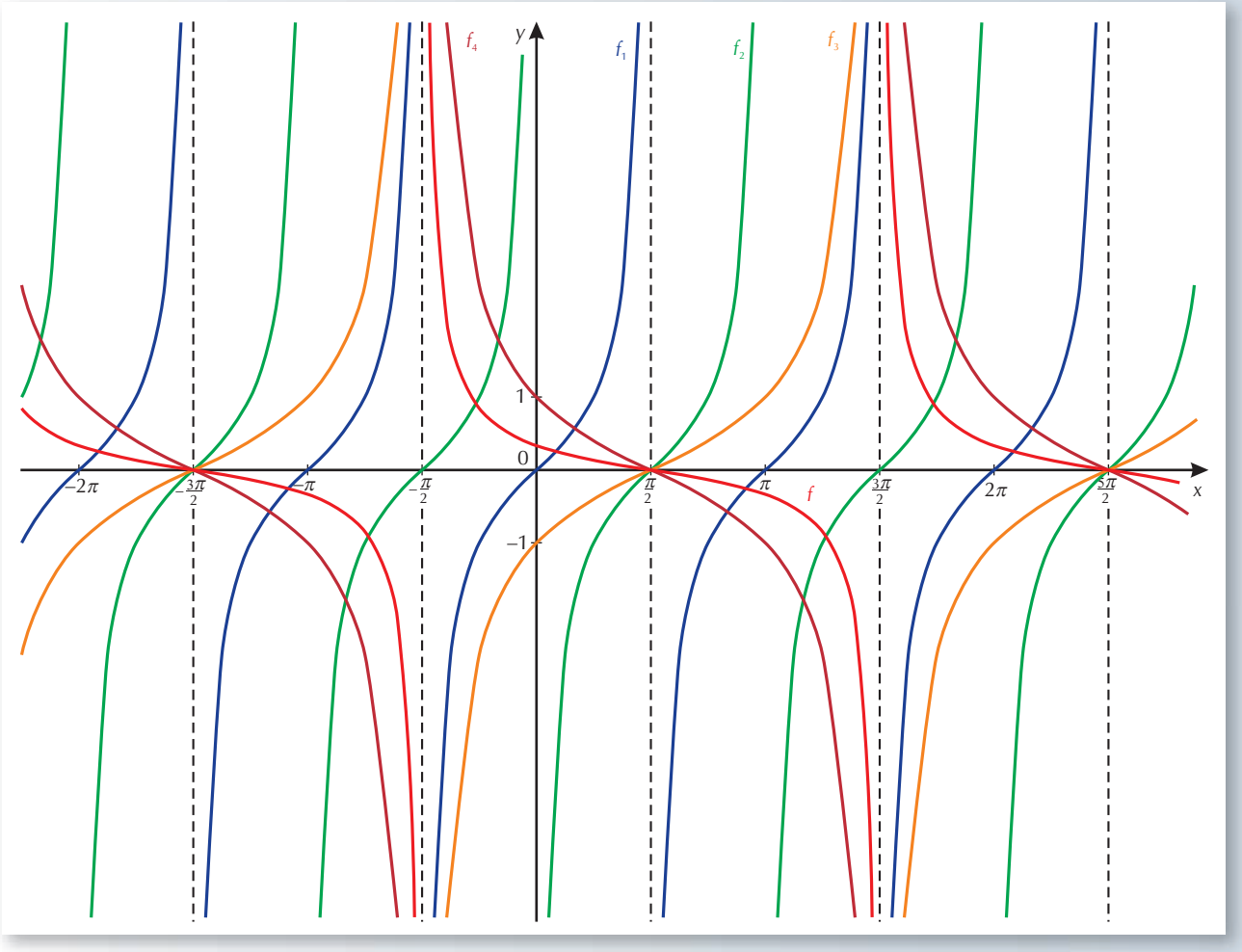
A geometriai transzformációk:

f_2 grafikonja f_1 grafikonjából a $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ vektorral való eltolással kapható meg.

f_3 grafikonja f_2 grafikonjából az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre merőleges 2-szeres nyújtással rajzolható meg.

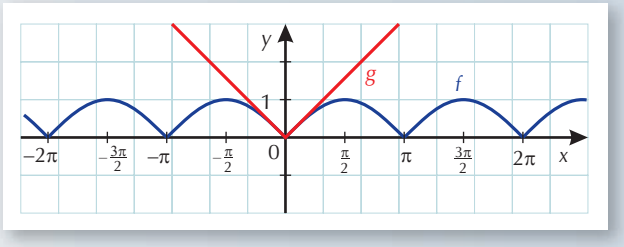
f_4 grafikonja f_3 grafikonjából az x tengelyre vonatkozó tükrözéssel kapható.

Az f függvény grafikonja az f_4 grafikonjából az x tengelyre merőleges $\frac{1}{3}$-szoros zsugorítással ábrázolható.

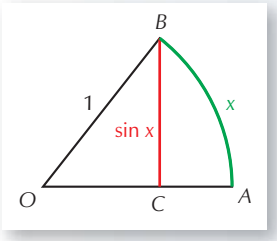


4. példa Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |\sin x|$ és $g(x) = |x|$ függvényeket! Hány megoldása van a $|\sin x| = |x|$ egyenletnek?

Megoldás A függvények grafikonja az ábrán látható.



Mivel $f(0) = g(0) = 0$, ezért az $x = 0$ nyilván megoldása az egyenletnek. Mivel mindkét függvény páros, ezért elegendő megvizsgálni a pozitív x-eket. Mivel az f függvény periodikus és korlátos, ezért tovább szűkíthető a vizsgálandó intervallum: $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. A bal oldali ábra mutatja, hogy ezen az intervallumon $\sin x < x$.



Vagyis nincs további megoldása a vizsgált egyenletnek.

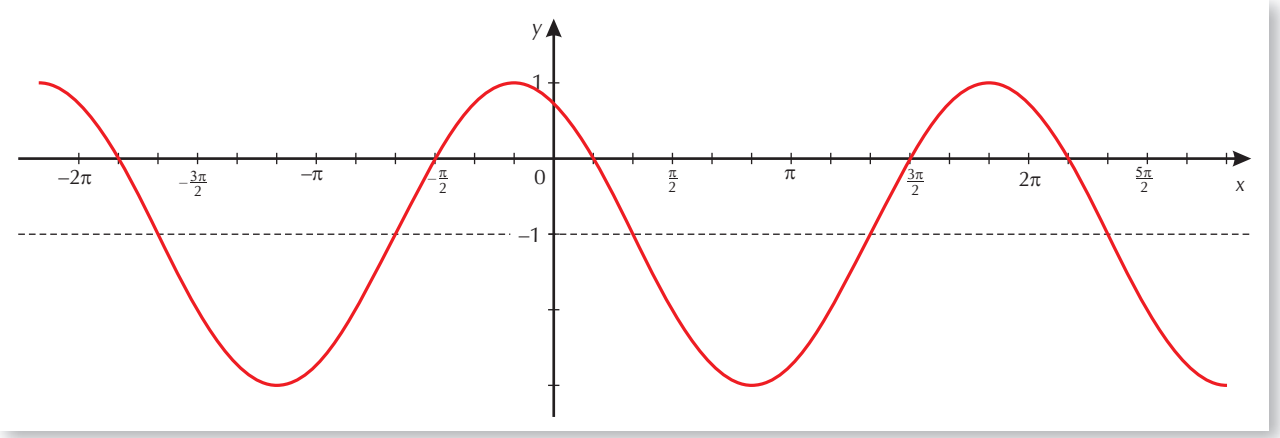
FELADATOK

1. E1 Válasszuk ki, hogy az alábbi hozzárendelési szabályok közül melyik írja le az itt látható függvénygrafikont!

$f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1,$

$g(x) = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1,$

$h(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$



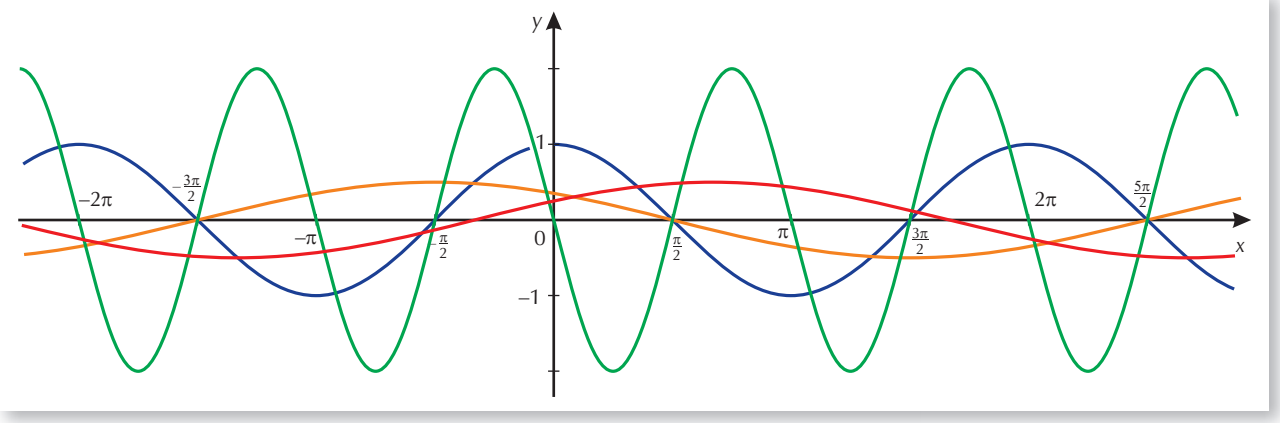
2. E1 Válasszuk ki, hogy az ábrán látható grafikonokhoz melyik hozzárendelés tartozik!

a) $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$

b) $g(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right);$

c) $h(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right);$

d) $k(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right).$



3. E1 Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi, valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

b) $g(x) = -\frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

c) $h(x) = 2 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

4. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!
$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = \pi$

5. E2 Hány valós megoldása van az $x = 8\pi \cdot \sin x$ egyenletnek?

6. E1 Periodikusak-e a következő hozzárendeléssel megadott függvények?
a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin^2 x$;
b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1 + \cos^2 x$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2741–2776.

19. MŰVELETEK FÜGGVÉNYEKKEL, INVERZ FÜGGVÉNYEK, ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK

A valós számoknál megszokott alapműveleteket értelmezhetjük a függvények körében is.

Definíció

Az f és g két adott függvény összegének nevezzük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya az f és g értelmezési tartományának metszete, hozzárendelési szabálya pedig az értelmezési tartomány bármely x_0 eleme esetén $x_0 \mapsto f(x_0) + g(x_0)$.

Hasonlóképpen:

$f - g$ esetén $x_0 \mapsto f(x_0) - g(x_0)$

$f \cdot g$ esetén $x_0 \mapsto f(x_0) \cdot g(x_0)$

$\frac{f}{g}$ esetén $x_0 \mapsto \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, ha $g(x_0) \neq 0$

Jelölése:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ha $g(x) \neq 0$.

1. példa Vázlatosan ábrázoljuk az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x$ és a $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin x$ függvények szorzatát!

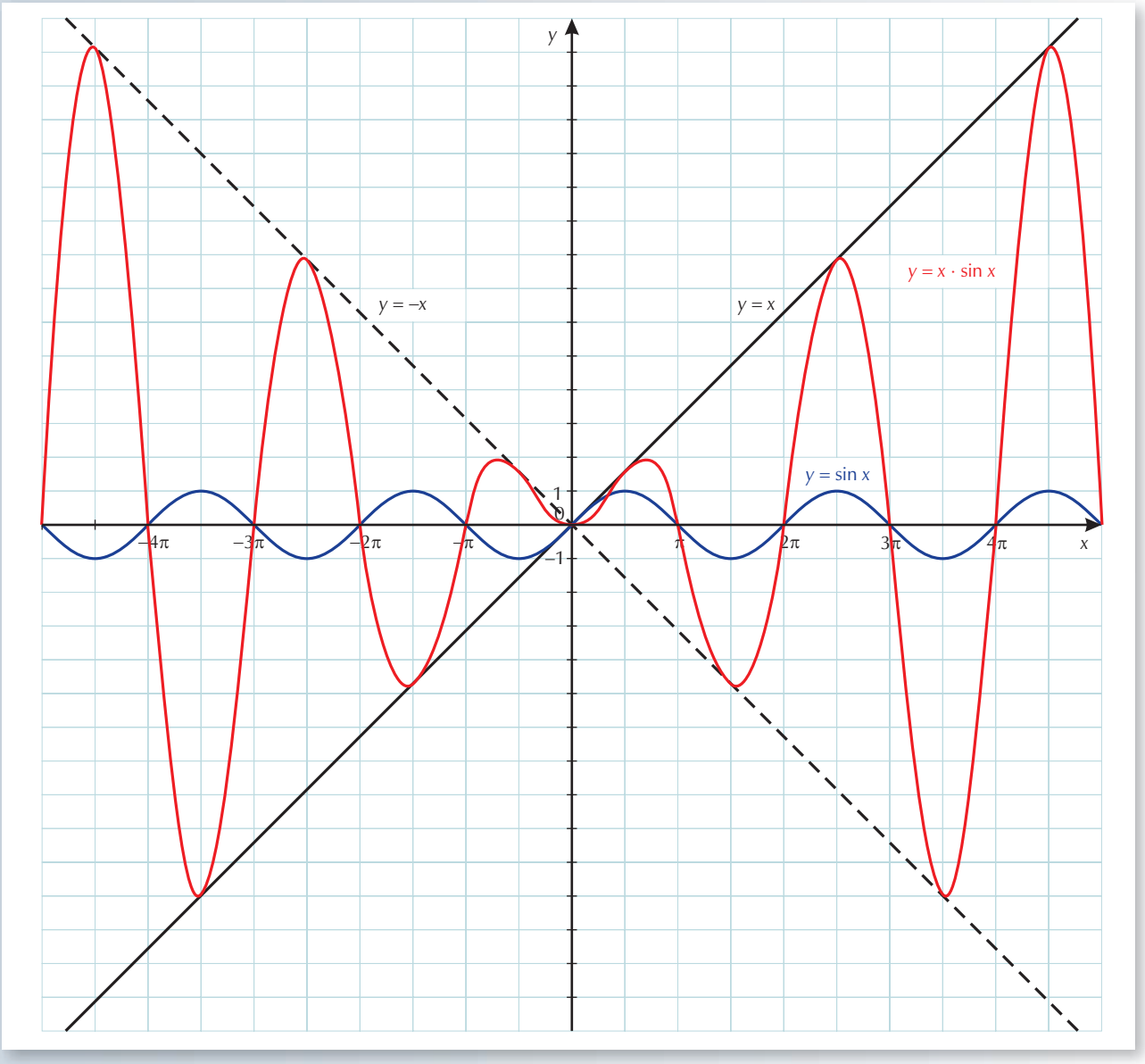
Megoldás A fenti definíció miatt $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot \sin x$.

Ha a keresett függvényt az f-hez viszonyítjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az f függvényt minden esetben egy $-1 \leq c \leq 1$ számmal szorozzuk, tehát az x és $-x$ függvények grafikonja határolja.

Ha viszont g-hez, akkor egyrészt azt tapasztaljuk, hogy a zérushelyek nem változnak, másrészt ($x \geq 0$ esetén) egyre nagyobb számmal szorozzuk a g-t, tehát a „dombocskák” (megegyező előjellel) egyre nagyobbak lesznek.

Végül vizsgáljuk meg, mi történik negatív x értékek esetén. Mivel f és g is páratlan függvény, ezért $f(-x) = -f(x)$ és $g(-x) = -g(x)$, így $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, tehát a keresett függvény páros.

Ezek alapján már vázlatosan ábrázolhatjuk, amelyet számítógépes programmal ellenőrizhetünk is:



A matematikában sokszor kell visszafele gondolkodnunk, amikor nem pusztán kiszámoljuk az eredményt, hanem arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen bemenet esetén jöhetett ki egy adott eredmény.

2. példa A kereskedelmi forgalomban lévő termékeket Áfa (általános forgalmi adó) terheli. A termék nettó ára, amennyi a kereskedő tényleges bevétele az eladásból. A nettó ár 27%-a az áfa, amellyel növelt összeg az eladási ár.

a) Mennyiért árulják azt a pólót, amelynek a nettó ára 2200 Ft?

b) Mennyi lesz a kereskedő bevétele, ha az eladási ár 4000 Ft?

Megoldás *a)* Az eladási ár a nettó ár 1,27-szerese, tehát $2200 \cdot 1{,}27 = 2794$ Ft lesz az eladási ár.

b) Most visszafele kell gondolkoznunk. Ha a nettó árat 1,27-dal kell megszorozni, hogy megkapjuk az eladási árat, akkor visszafele éppen 1,27-dal kell osztani, tehát $\frac{4000}{1{,}27} \approx 3150$ Ft a nettó ár.

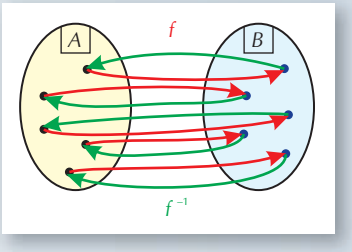
Ezzel az egyszerű példával jutottunk el egy nagyon fontos fogalom definiáláshoz.

Definíció

Inverz függvény
Ha az f függvény bijektív, akkor azt az f^{-1} függvényt nevezzük az inverzének, melynek értelmezési tartománya f értékkészletével egyezik meg, és amelyre $f^{-1}(y) = x$ pontosan akkor, ha $f(x) = y$.

Minden bijektív függvénynek van inverze.

3. példa Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Legyen továbbá $f: A \to B$, $x \mapsto 2x$. Adjuk meg az f függvény inverzét.



Megoldás Az f függvény hozzárendelésének irányát kell megfordítanunk *(lásd ábra)*.

Az f esetén: $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, 4 \mapsto 8$.

Az f^{-1} esetén: $0 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 6 \mapsto 3, 8 \mapsto 4$.

Vagyis $f^{-1}: B \to A$, $x \mapsto \frac{1}{2}x$.

4. példa Adjuk meg az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{3x+1}{2}$ függvény inverzét!

Megoldás Az f függvény hozzárendelési szabálya három műveletet foglal magában

$$x \xrightarrow{\cdot 3} 3x \xrightarrow{+1} 3x+1 \xrightarrow{:2} \frac{3x+1}{2}$$

Ezt a műveletsort kell elvégeznünk „visszafelé”:

$$x \xleftarrow[:3]{} 3x \xleftarrow[-1]{} 3x+1 \xleftarrow[\cdot 2]{} \frac{3x+1}{2}$$

Ebből leolvasható, hogy $f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{2x-1}{3}$.

5. példa Adjuk meg az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$ függvény egy olyan leszűkítését, amelynek létezik inverze! Adjuk meg az inverz függvényét is!

Megoldás Az f képe egy felfele nyíló parabola, tehát az f függvény nem bijektív, így nincs inverze. Egy olyan leszűkítését keressük, amely bijektív. Mivel $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, ezért a parabola csúcsának első koordinátája $x = 1$. Tehát az f értelmezési tartományát bármely olyan intervallumra leszűkíthetjük, amelynek az 1 nem belső pontja, például $[1; \infty[$.

Ezen az intervallumon vizsgálva: $x \xrightarrow{-1} x-1 \xrightarrow{()^2} (x-1)^2 \xrightarrow{-1} (x-1)^2 - 1$.

Visszafelé: $x \xleftarrow[+1]{} x-1 = |x-1| \xleftarrow[\sqrt{\ }]{} (x-1)^2 \xleftarrow[+1]{} (x-1)^2 - 1$.

Tehát $f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1} + 1$.

(A $]-\infty; 1]$ intervallumon $f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -\sqrt{x+1} + 1$ az inverze.)

Sok esetben megkönnyíti a munkánkat, ezért fontos a következő definíció.

Definíció

Összetett függvény
Legyen $g: A \to B$, $x \mapsto g(x)$ és $f: C \to D$, $x \mapsto f(x)$ két adott függvény, úgy hogy $R_g \subseteq C$. Az $f \circ g: A \to D$, $x \mapsto f(g(x))$ függvényt összetett függvénynek nevezzük.

Ezt az egymás utáni alkalmazást szokták a két függvény kompozíciójának is nevezni. A definícióban szereplő f a külső, g a belső függvény.

6. példa Vegyük a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett következő két függvényt: $f: x \mapsto \sqrt{x}$ és $g: x \mapsto x^4 - 1$. Adjuk meg az összetett függvények képleteit!

Megoldás Alkalmazzuk a definícióban megfogalmazottakat:

$(f \circ g)(x) = f(x^4 - 1) = \sqrt{x^4 - 1}$. ($x \geq 1$, hogy teljesüljön a definícióban szereplő feltétel, miszerint a g értékkészlete részhalmaza kell legyen az f értelmezési tartományának.)

$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 1 = x^2 - 1$.

7. példa Adjunk meg két olyan függvényt, amelyeknek a kompozíciójaként előállítható a h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ függvény.

Megoldás Tudjuk, hogy $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$. Nézzük a valós számok halmazán értelmezett $f: x \mapsto x^3$ és $g: x \mapsto 2x - 1$ függvényeket. Ekkor $f \circ g = h$.

FELADATOK

1. E1 Vázlatosan ábrázoljuk a következő függvényeket!

a) $f + g$, ahol $f: x \mapsto x$ és $g: x \mapsto \frac{1}{x}$.

b) $\frac{f}{g}$, ahol $f: x \mapsto x$ és $g: x \mapsto x^2 + 1$

2. E1 Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. Legyen továbbá $f: A \to B$, $x \mapsto 3x$. Adjuk meg az f függvény inverzét!

3. E1 Adjuk meg a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $f: \mapsto x^2$ függvény inverzét!

4. E1 Adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ függvény inverzét!

5. E1 Vegyük a valós számok halmazán értelmezett f és g függvényt. Adjuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvényeket!

a) $f: x \mapsto x^2$ és $g: x \mapsto 2x - 1$; *b)* $f: x \mapsto \sin x$ és $g: x \mapsto x^2 - 1$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 764–784, 787–790.

20. SZÉLSŐÉRTÉK KERESÉSE

Függvények segítségével sok esetben könnyen megválaszolhatók a szélsőértékekkel kapcsolatos kérdések. Most olyan kérdésekre keressük a választ, amelyek esetén másodfokú függvényt kell vizsgálnunk. (További függvények szélsőértékeivel majd a Differenciálszámítás fejezetben foglalkozunk.)

Tudjuk, hogy az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek (a, b, c tetszőleges valós együtthatók, de $a \neq 0$) minimuma van, ha $a > 0$, maximuma van, ha $a < 0$. A következő algebrai átalakítással a szélsőértékhelyet is meghatározhatjuk:

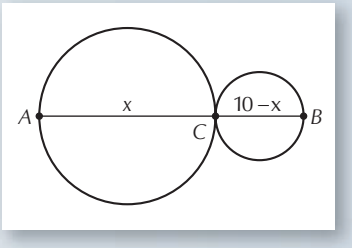
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Amiből a függvénytranszformációknál tanultak alapján leolvasható a keresett szélsőértékhely: $x = -\frac{b}{2a}$.

Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ **másodfokú függvény** (a, b, c tetszőleges valós együtthatók, de $a \neq 0$) szélsőértékhelye: $x = -\frac{b}{2a}$.

Ha $a > 0$, akkor ez minimumhely. Ha $a < 0$, akkor ez maximumhely.

1. példa Egy 10 cm-es szakaszt két részre vágunk, majd a két rész mint egy-egy átmérő fölé kört rajzolunk. Milyen hosszú szakaszok esetén lesz a körök területösszege minimális? Mekkora ez a minimális területösszeg?



Megoldás Legyen az $AB = 10$ cm-es szakasz osztópontja C. Tekintsük az AC szakasz hosszát ismeretlennek: $AC = x$ (ahol $0 < x < 10$), ekkor $CB = 10 - x$ *(lásd ábra)*.

Az AC átmérőjű kör területe: $t_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \pi$.

A CB átmérőjű kör területe: $t_2(x) = \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 \cdot \pi$.

Az a területfüggvény, amely megmutatja, hogy a két kör területösszege hogyan függ az x változótól:

$$T(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \pi + \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{x^2}{4} \cdot \pi + \frac{100 - 20x + x^2}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}(x^2 - 10x + 50).$$

A függvény minimumhelyének keresésekor a $\frac{\pi}{2}$ szorzótényezőnek nincs jelentősége. Amely x érték esetén minimális lesz az $x^2 - 10x + 50$, ugyanannál lesz minimális a $\frac{\pi}{2}$-szöröse is. A területfüggvény helyett vizsgáljuk az $f(x) = x^2 - 10x + 50$ (ahol $0 < x < 10$) függvényt. f másodfokú függvény, a négyzetes tagjának együtthatója pozitív, ezért valóban minimuma van. Tudjuk, hogy

$$x_{\text{minimum}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2 \cdot 1} = 5.$$

Ekkor $T(5) = \frac{\pi}{2}(5^2 - 10 \cdot 5 + 50) = \frac{25\pi}{2}$.

A két kör területösszege akkor lesz minimális, ha a 10 cm-es szakaszt felezzük, ekkor $\frac{25\pi}{2}$ a területösszeg.

Megjegyzés
A feladat a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség segítségével is megoldható.

2. példa Egy függőlegesen felfelé hajított test kezdősebessége $v_0 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Határozzuk meg, hogy mennyi ideig emelkedik ez a test! Mekkora magasságot ér el a fölfelé haladáskor?

Megoldás Fizikából tudjuk, hogy a test valóságos útja a v_0 kezdősebességgel felfelé haladó test útjából és a szabadesés miatti elmozdulás összegéből fog adódni:

$$s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

A g gravitációs gyorsulást kerekítve vegyük $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-nek. Vagyis:

$s = 80t - 5t^2$, ahol t a függvény változója. Az emelkedés magassága a t másodfokú függvénye. Vizsgáljuk meg tehát az

$s(t) = -5t^2 + 80t$

függvénynek a maximumát.

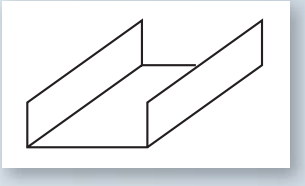
A másodfokú tag együtthatója negatív, így valóban maximuma lesz a függvénynek.

Mivel $t_{\text{maximum}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2 \cdot (-5)} = 8$, ezért $s(8) = -5 \cdot 8^2 + 80 \cdot 8 = 320$.

A példában szereplő test 8 másodpercig emelkedik, és az emelkedés maximuma 320 méter.

3. példa A 12 cm × 12 cm-es négyzet alakú kartonpapírból úgy készítjük el egy téglatest alakú doboz vázát, hogy az egyik oldalával párhuzamosan a két szélét ugyanakkora szélességben felhajtjuk merőlegesen *(lásd ábra)*.

Mekkora legyen a felhajtott részek szélessége, ha a lehető legnagyobb „térfogatú" dobozt szeretnénk kialakítani?

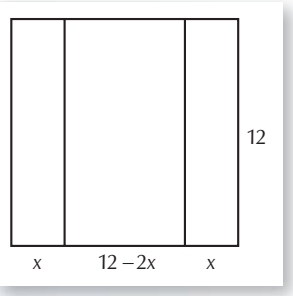


Megoldás Legyen a felhajtott rész szélessége cm-ben mérve x *(lásd ábra)*. Számítsuk ki a doboz térfogatát x függvényében:

$V(x) = 12x(12 - 2x) = -24x^2 + 144x$, ahol a feladat szövegéből adódik, hogy $0 < x < 6$.

Mivel a másodfokú tag együtthatója negatív, ezért maximuma lesz a függvénynek. Ekkor $x_{\text{maximum}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{144}{2 \cdot (-24)} = 3$.

Vagyis 3 cm széles részeket kell felhajtanunk, hogy maximális térfogatú dobozt alakítsunk ki.



Megjegyzés
A feladat a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével is megoldható.

FELADATOK

1. E1 Hogyan válasszuk meg a 60 cm-es kerületű téglalap oldalainak hosszát, hogy területe maximális legyen?

2. E1 Az olyan derékszögű háromszögek közül, amelyekben a befogók hosszának összege 18 cm, melyiknek legnagyobb a területe?

3. E1 Hogyan kell felbontani a 100-at két összeadandóra úgy, hogy a két rész négyzetösszege minimális legyen?

4. E1 Egy 12 cm-es szakaszt két részre vágunk, majd mindkét rész mint átmérő fölé kört rajzolunk. Mikor lesz a két kör *a)* kerületének; *b)* területének összege minimális?

5. E1 Egy 10 cm × 20 cm-es téglalap csúcsaitól azonos körüljárási irányban minden oldalra ugyanolyan hosszúságú szakaszokat mérünk fel. Hogyan lesz az így kapott pontok összekötésével keletkezett négyszög területe minimális?

6. E2 Egy egyenes fal mellett 32 m hosszú kerítéssel szeretnénk egy téglalap alakú részt bekeríteni három oldalról (a negyedik oldal a fal lesz). Mekkorának válasszuk a téglalap méreteit, hogy a területe maximális legyen?

7. E2 Egy olyan trapézt rajzolunk, amelyben az egyik párhuzamos oldal 2 cm hosszú, a másik párhuzamos oldal és a hozzájuk tartozó magasság pedig együtt 9 cm hosszú. Milyen méretekkel rajzoljuk a trapézt, ha azt szeretnénk, hogy a területe maximális legyen?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1260–1310.

III. SZÁMELMÉLET

21. PRÍMSZÁMOK, A SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE, A PRÍMSZÁMOK NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

Eddigi tanulmányaink során megismerkedtünk a prímszámokkal, az összetett számokkal. Nézzünk meg néhány nagyon fontos prímszámokkal kapcsolatos tételt és a bizonyításukat!

Tétel

Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás Indirekt bizonyítást alkalmazunk: tegyük fel, hogy véges sok prímszám van.

Jelöljük a prímszámokat p_1, p_2, …, p_n-nel és az összes prímszám szorzatánál 1-gyel nagyobb számot Q-val: $Q = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1$.

Ha Q prímszám, akkor a felsoroltakon kívül is létezik prímszám.

Ha Q összetett szám, akkor viszont van olyan prímszám osztója, amely nem szerepelt a felsorolásban, hiszen a felsoroltak egyike sem lehet osztója (mivel bármelyikkel osztva 1 maradékot ad).

Mindkét esetben létezik olyan prímszám, amely nem szerepelt a felsorolásban, ez ellentmond az alapfeltevésnek miszerint az összes prímszámot felsoroltuk. Tehát végtelen sok prímszám van.

Tétel

A számelmélet alaptétele: Bármely 1-nél nagyobb egész szám (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára.

Bizonyítás Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a tétel két állítást tartalmaz: egyrészt, hogy a kérdéses szám *felbontható* prímszámok szorzatára, másrészt pedig, hogy ez a felbontás lényegében *egyértelmű*.

1. Bármely 1-nél nagyobb egész szám felbontható prímszámok szorzatára.

A 2 és a 3 (mivel prím) saját magának egytényezős felbontása. $4 = 2^2$, az 5 prímszám, $6 = 2 \cdot 3$, a 7 prímszám, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$ … Lépjünk tovább egyesével az egész számokon haladva. Ha prímszámhoz érkezünk, akkor az saját magának egytényezős felbontása. Ha összetett számhoz érkezünk, akkor annak véve egy felbontását olyan kéttényezős szorzatot kapunk, melynek mindkét tényezője kisebb a kérdéses számnál. Így mindkét tényezőbe beírva a már korábban szereplő prímtényezős felbontását, megkapjuk az adott összetett szám egy felbontását prímtényezőkre.

2. Bármely 1-nél nagyobb egész szám prímtényezős felbontása lényegében egyértelmű.

Ennek bizonyítást indirekt módon végezzük. Tegyük fel, hogy az N prímszámnak van két különböző prímfelbontása:

$N = p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s$

ahol a p és q számok nem feltétlenül különböző prímszámok. (Ha valamelyik oldalon valamely prímszám valamilyen hatványon szerepelne, akkor azt itt szorzat alakban írtuk ki.) Ha a bal oldalon van olyan p prím, amelyik egyenlő valamely jobb oldali q prímmel, akkor ezzel eloszthatjuk az egyenlet két oldalát. Ezt addig végezzük, amíg már az egyenlet két oldalán különböző prímek szerepelhetnek csak:

$p_i p_j \ldots p_k = q_r q_t \ldots q_s$.

A bal oldali p_i prímszám osztója a bal oldalnak, így a jobb oldalnak is osztója kell, hogy legyen. De a jobb oldalon a p_i prím már nem szerepel, így a jobb oldalnak ez a prím nem lehet osztója. Így ellentmondásra jutottunk, vagyis indirekt feltevésünk helytelen volt, tehát a prímtényezős felbontás (a prímtényezők sorrendjétől eltekintve) valóban egyértelmű.

Ha egy szám prímtényezős felbontását akarjuk elkészíteni, akkor sorra keressük a kérdéses szám prímosztóit. A 2-vel, 3-mal, 5-tel való oszthatóságot ránézésre könnyen ellenőrizhetjük, De hogyan járjunk el, ha egy nagyobb számot kell vizsgálnunk ilyen szempontból? Meddig kell keresnünk a szám prímosztóit? Erről szól a következő tétel.

Tétel

Az N összetett szám legkisebb prímosztója nem lehet nagyobb a szám négyzetgyökénél, azaz ha N legkisebb prímosztója p, akkor $p \leq \sqrt{N}$.

Bizonyítás Ismét indirekt bizonyítunk.Tegyük fel ugyanis , hogy az N összetett szám legkisebb p prímosztójára $p > \sqrt{N}$. Ekkor az $\frac{N}{p} = d$ hányados értéke nyilván kisebb $\sqrt{N}$-nél. Ez a d hányados ugyancsak osztója N-nek. Ha d prímszám, akkor $d < p$, ami ellentmond annak, hogy p a legkisebb prímosztó. Ha pedig d összetett szám, akkor van nála kisebb prímosztója, ami természetesen N-nek is osztója, és e prímosztó ugyancsak kisebb p-nél. Ellentmondásra jutottunk, így valóban igaz a tétel állítása.

Ezek szerint, ha egy N természetes számnak $\sqrt{N}$-ig nem találunk prímosztóját, akkor N biztosan prímszám.

1. példa Vizsgáljuk meg, hogy 2027 prímszám vagy sem!

Megoldás Mivel $\sqrt{2027} \approx 45{,}02$, ezért elegendő 43-ig keresnünk prímosztót. A prímszámok 43-ig: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy 2027 ezen prímek egyikével sem osztható, így 2027 prímszám.

Érdemes megvizsgálni, hogy két szomszédos prímszám között mekkora „hézagok” lehetnek. Mivel a 2 az egyetlen páros prímszám, ezért pl. a 2 és a 3 közötti hézag 1. Az összes többi prímszám páratlan, így két szomszédos prímszám között a különbség legalább 2 kell, hogy legyen. Külön érdekességet jelentenek a prímszámok között az olyan prímek, amelyek között a különbség 2.

Definíció

Ha a $p < q$ prímekre $p + 2 = q$, akkor e prímeket **ikerprímeknek** nevezzük.

Ikerprímek pl. az 5, 7; 11, 13; 17, 19; 41, 43; 2027, 2029; … stb. Az még máig eldöntetlen kérdés, hogy az ikerprím-párok száma vajon véges vagy végtelen.

2. példa Igazoljuk, hogy ha $p > 3$, $q > 3$ ikerprímek, akkor összegük osztható 12-vel!

Megoldás Ha a p és q 3-nál nagyobb prímek ikerprímek, akkor közöttük egy szám van. Ez a szám biztosan páros. De ez a szám 3-mal is osztható, hiszen három egymást követő szám közül valamelyik biztosan osztható 3-mal, de ez sem a p, sem a q nem lehet, hiszen ők 3-nál nagyobb prímek. Ezek szerint a p és q közötti szám osztható 2-vel és 3-mal is. Mivel a 2 és a 3 relatív prímek, így ez a szám osztható 6-tal. Ekkor

$p = 6k - 1$, $q = 6k + 1$, tehát valóban $p + q = 12k$, ahol $k \in \mathbf{Z}^+$.

Azt láttuk, hogy vannak egymáshoz elég közeli prímszámok. Ugyanakkor az is igaz, hogy két szomszédos prímszám között akármilyen nagy távolságok is lehetnek. Másként fogalmazva: bármilyen nagy N természetes számhoz megadható N db egymást követő természetes szám, melyek közül mindegyik összetett.

Tekintsük az alábbi számokat:

$(N+1)! + 2$

$(N+1)! + 3$

$(N+1)! + 4$

$\vdots$

$(N+1)! + N + 1$

Itt N db egymást követő természetes számot soroltunk fel. Mivel

$(N+1)! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N \cdot (N+1)$,

ezért az első szám osztható 2-vel, a második szám osztható 3-mal, a harmadik osztható 4-gyel, és így tovább; az utolsó osztható $(N + 1)$-gyel. Ezek szerint a felsorolt N db szám egyike sem lehet prímszám, mindegyik összetett. Ez tehát azt jelenti, hogy két szomszédos prímszám között bármilyen nagy „hézag” lehet.

Ez utóbbi eredmény, valamint az ikerprímek léte még inkább érzékelteti velünk, hogy a prímszámok menynyire össze-vissza, minden szabályosságot nélkülözve követik egymást a természetes számok között.

3. példa Igazoljuk, hogy ha $p > 3$ prímszám, akkor $p^2 - 1$ osztható 24-gyel!

Megoldás Egy szám pontosan akkor osztható 24-gyel, ha osztható 8-cal és 3-mal is.

Először a 8-cal való oszthatóságot igazoljuk.

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Mivel $p > 3$ prímszám, ezért $p - 1$ és $p + 1$ is páros számok. Ez a két szám a páros számok sorozatában szomszédos szám, így közülük valamelyik nem csak 2-vel, de 4-gyel is osztható. Ha viszont egy 2-vel és egy 4-gyel osztható számot összeszorzunk, akkor a szorzat biztosan osztható 8-cal.

A 3-mal való oszthatósághoz azt gondoljuk meg, hogy a $p - 1$, p, $p + 1$ három egymást követő szám. Közülük valamelyik biztosan osztható 3-mal. De ez a p nem lehet, hiszen p 3-nál nagyobb prím. Ezek szerint vagy a $p - 1$, vagy a $p + 1$ osztható 3-mal, így $p^2 - 1$ is osztható 3-mal. Ezzel megmutattuk, hogy ha $p > 3$ prímszám, akkor $p^2 - 1$ osztható 24-gyel.

4. példa Van-e olyan p prímszám, amelyre a $\frac{p^2 + 17}{p - 1}$ tört értéke is prímszám?

Megoldás Alakítsuk át a megadott törtet az alábbi módon:

$$\frac{p^2 + 17}{p-1} = \frac{p^2 - 1 + 18}{p-1} = \frac{p^2 - 1}{p-1} + \frac{18}{p-1} = p + 1 + \frac{18}{p-1}.$$

Ez akkor és csak akkor lesz egész szám, ha $p - 1$ a 18-nak osztója. 18 pozitív osztói: 1, 2, 3, 6, 9 és 18, így p lehetséges értékei: $p = 2$, 3, 4, 7, 10 és 19. De ezek közül csak a 2, 3, 7 és a 19 jöhet szóba, hiszen a többi nem prímszám.

Ha $p = 2$, akkor $\frac{p^2 + 17}{p - 1} = \frac{4 + 17}{1} = 21$, ami nem prímszám.

Ha $p = 3$, akkor $\frac{p^2 + 17}{p - 1} = \frac{9 + 17}{2} = 13$, ami prímszám.

Ha $p = 7$, akkor a kifejezés értéke $\frac{49+17}{6} = 11$, ez ugyancsak prímszám.

Ha $p = 19$, akkor a kifejezés értéke $\frac{19^2+17}{18} = 21$, ez nem prímszám.

Tehát két olyan p prímszám van, amelyre a $\frac{p^2+17}{p-1}$ tört értéke ugyancsak prímszám: $p_1 = 3$ és $p_2 = 7$.

5. példa Egy háromszög mindhárom oldalának cm-ben vett mértéke prímszám. A háromszög kerülete 84 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás Legyenek a háromszög oldalai $p \le q \le r$. A feltételek szerint

$p + q + r = 84$.

Ha három prímszám összege páros, akkor vagy mindhárom páros, azaz 2; vagy pontosan egy páros van közöttük, azaz a legkisebb 2. Tehát csak $p = 2$ lehetséges. Ekkor

$q + r = 82$.

A háromszög-egyenlőtlenség miatt bármely két oldal különbsége kisebb mint a háromszög harmadik oldala, így $r - q < 2$. Ez csak úgy lehetséges, ha $q = r$. Ekkor

$2q = 82$, ahonnan $q = r = 41$.

A 41 valóban prímszám. Így a háromszög oldalai: 2, 41, 41.

FELADATOK

1. E1 Döntsük el, hogy a 697, illetve az 1879 prímszámok-e!

2. E1 Van-e olyan prímszám, melyre $p^2 + 8$ is prímszám?

3. E2 Nevezzük „hármasiker-prímeknek” az olyan p, q, r prímhármasokat, melyekre $p + 2 = q$ és $q + 2 = r$. Igazoljuk, hogy a 3, 5, 7 prímhármason kívül nem léteznek hármasiker-prímek!

4. E2 Legyen p olyan prímszám, melyre a $p^2 + p + 1$ és $p^2 - p + 1$ is prímszám. Igazoljuk, hogy ekkor az $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ szám vagy prímszám, vagy négyzetszám!

5. E2 Mely prímszámokra teljesül, hogy négyszeresükhöz 1-et hozzáadva egy köbszámot kapunk?

6. E2 Legyen $p > 5$ prímszám. Igazoljuk, hogy $p^4 - 1$ osztható 240-nel!

7. E2 Mely p, q prímszámokra teljesül, hogy $p^q + q^p$ is prímszám?

8. E2 Három négyzet oldalai prímszámok. A két kisebb négyzet kerületének összege egyenlő a legnagyobb négyzet kerületével. A két nagyobb területének különbsége egyenlő a legkisebb területének 12-szeresével. Mekkorák a négyzetek oldalai?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 371–374, 376, 379, 394, 416, 417.

22. OSZTÓK SZÁMA, NÉGYZETSZÁMOK

Gyakran lehet szükségünk egy N természetes szám pozitív osztóinak a számára. Jelöljük az N pozitív egész szám osztóinak a számát $d(N)$-nel.

Tétel

Ha az N pozitív egész szám prímtényezős alakja

$N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \dots p_r^{k_r}$, akkor $d(N) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \cdot \dots \cdot (k_r + 1)$.

Tehát az N szám osztóinak a számát úgy kapjuk meg a prímtényezős felbontásból, hogy az abban szereplő prímhatványok hatványkitevőinek mindegyikét 1-gyel megnöveljük, majd az így kapott számokat összeszorozzuk.

Bizonyítás E tétel igazolásához gondoljuk meg a következőket. Egy q pozitív egész szám akkor és csak akkor osztója N-nek, ha q prímtényezős felbontása

$q = p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3} \ldots p_r^{s_r}$,

ahol minden s hatványkitevőre $0 \le s_i \le k_i$. Mivel s_1 a 0, 1, 2, 3, …, k_1 értékeket, s_2 a 0, 1, 2, 3, …, k_2 értékeket veheti fel egymástól függetlenül, és így tovább, a q osztó prímtényezős alakja lehetőségeinek a száma, vagyis N osztóinak a száma valóban

$d(N) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_r + 1)$.

1. példa Hány pozitív osztója van a 2520-nak?

Megoldás Először végezzük el 2520 prímtényezős felbontását:

$2520 = 10 \cdot 252 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 126 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Ezek szerint 2520 pozitív osztóinak a száma: $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 48$.

2. példa Melyek azok a 100-nál kisebb N természetes számok, melyekre $d(N) = 5$?

Megoldás Ha $d(N) = 5$, akkor az N szám prímtényezős alakja: $N = p^4$ lehet csak, ahol p egy prímszám. Ezek szerint azt kell megvizsgálnunk, hány db 100-nál kisebb negyedik hatvány van. $2^4 = 16$, $3^4 = 81$, de $5^4 = 625 > 100$. Tehát két olyan 100-nál kisebb természetes szám van, melynek pontosan 5 db osztója van: 16 és 81.

3. példa Egy N természetes számra $d(N) = 9$. Igazoljuk, hogy N nem lehet osztható 30-cal!

Megoldás Ha $d(N) = 9$, akkor az N prímtényezős alakja

$N = p^8$, vagy $N = p^2 q^2$,

ahol p és q különböző prímek. Ezek szerint az N számnak legfeljebb két különböző prímosztója lehet csak. Mivel $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ezért ha egy szám osztható 30-cal, akkor annak legalább három prímosztójának kell lennie. De mint láttuk N-nek legfeljebb két prímosztója lehet, így valóban, ha $d(N) = 9$, akkor N nem lehet 30-cal osztható.

Vajon melyek azok a számok, melyek pozitív osztóinak a száma páros, és melyek azok, amelyek pozitív osztóinak a száma páratlan? Vizsgáljuk meg közelebbről egy természetes szám négyzetének prímtényezős alakját. Ha

$N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_r^{k_r}$, akkor

$N^2 = (p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_r^{k_r})^2 = p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} p_3^{2k_3} \ldots p_r^{2k_r}$.

Azt látjuk tehát, hogy egy egynél nagyobb természetes szám akkor és csak akkor négyzetszám, ha prímtényezős alakjában minden prím hatványkitevője páros.

Ha egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden kitevőhöz 1-et hozzáadunk, akkor csupa páratlan számot kapunk, így ezeket összeszorozva az eredmény biztosan páratlan lesz.

Ha egy nem négyzetszámot vizsgálunk, akkor van legalább egy hatványkitevő a prímtényezős felbontásában, amelyik páratlan. Így a hatványkitevőket eggyel növelve és a kapott számokat összeszorozva lesz legalább egy páros szám, vagyis a szorzat páros lesz. Arra jutottunk tehát, hogy

a négyzetszámoknak és csakis a négyzetszámoknak van páratlan számú pozitív osztójuk.

Ebből az is következik, hogy ha egy négyzetszám osztható egy prímszámmal, akkor e prím négyzetével is oszthatónak kell lennie.

Az előbbi gondolatmenetből az is következik, hogy ha egy természetes szám k-adik hatvány, akkor annak prímtényezős alakjában minden prím hatványkitevőjének k-val oszthatónak kell lennie.

Érdemes a négyzetszámokat más szempontból is megvizsgálni; nevezetesen a szám végződésének szempontjából. Vizsgáljuk meg, hogy az 1-re, 2-re, 3-ra, …, 9-re vagy 0-ra végződő számok négyzetének mi lesz, mi lehet az utolsó számjegye. Ezt foglaltuk össze az alábbi táblázatban.

n	n^2
…1	…1
…2	…4
…3	…9
…4	…6
…5	…5
…6	…6
…7	…9
…8	…4
…9	…1
…0	…0

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy 2-re, 3-ra, 7-re és 8-ra nem végződhet négyzetszám.

4. példa Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel a 4200-at megszorozva
a) négyzetszámot kapunk?
b) köbszámot kapunk?

Megoldás Először készítsük el a 4200 prímtényezős felbontását.
$4200 = 42 \cdot 100 = 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.
a) Olyan szorzót kell választanunk, amellyel 4200-at megszorozva a szorzat prímtényezős alakjában minden prím hatványkitevője páros. Így a szorzóban egy 2-esnek, egy 3-asnak és egy 7-esnek kell szerepelnie, vagyis a keresett szám: $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.
b) Most olyan szorzót kell választani, amellyel a 4200-at megszorozva a szorzat prímtényezős alakjában minden hatványkitevő 3-mal osztható. Így ez esetben a szorzóban szerepelnie kell 3^2-nak, 5-nek és 7^2-nak. Tehát ez esetben a keresett szorzó: $3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 2205$.

5. példa Igazoljuk, hogy a $2^{2022} + 3^{2023} + 4^{2024} + 5^{2025}$ összeg nem lehet négyzetszám!

Megoldás Keressük meg a 2, 3, 4, 5 számok hatványainak végződését.
2 hatványainak utolsó számjegye rendre 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, … stb. Azt látjuk, hogy e végződések négyesével periodikusan ismétlődnek: ha a kitevő $4k+1$ alakú, akkor az utolsó számjegy 2, ha $4k+2$ alakú, akkor az utolsó számjegy 4, ha $4k+3$ alakú, akkor a végződés 8, végül, ha a kitevő 4-gyel osztható, akkor a hatvány végződése 6.
3 hatványvégződései ugyancsak négyesével ismétlődnek: ha a kitevő $4k+1$ alakú, akkor az utolsó számjegy 3, ha $4k+2$ alakú, akkor az utolsó számjegy 9, ha $4k+3$ alakú, akkor a végződés 7, végül, ha a kitevő 4-gyel osztható, akkor a hatvány végződése 1.
4 hatványainak utolsó számjegye rendre 4, 6, 4, 6, … stb.: Ha a kitevő páratlan, akkor az utolsó jegy 4, ha pedig a kitevő páros, akkor az utolsó számjegy 6.
5-nek minden hatványa 5-re végződik.
Ezek szerint a megadott összeg utolsó számjegye:
$2^{2022} + 3^{2023} + 4^{2024} + 5^{2025} = \ldots4 + \ldots7 + \ldots6 + \ldots5 = \ldots2$.
Mivel 2-re – mint láttuk – nem végződhet négyzetszám, ezért az összeg valóban nem lehet négyzetszám.

6. példa Két pozitív egész szám összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának összege 80. Melyik ez a két szám?

Megoldás Legyen a két szám n és k. A feltételek szerint

$$n + k + n - k + nk + \frac{n}{k} = 80, \qquad \text{azaz} \qquad 2n + nk + \frac{n}{k} = 80.$$

$$2kn + nk^2 + n = 80k, \qquad \text{vagyis} \qquad n(2k + k^2 + 1) = 80k.$$

Észrevehetjük, hogy a zárójelben teljes négyzet szerepel:
$n(k+1)^2 = 80k$.

Azt látjuk, hogy $(k+1)^2$ osztója $80k$-nak. Mivel k és $k+1$ (két szomszédos egész szám) relatív prímek, ezért k és $(k+1)^2$ is relatív prímek. Ebből az következik, hogy $(k+1)^2$ osztója 80-nak. Tehát 80 négyzetszám osztóit kell keresnünk. Ezek: 1, 4, 16. De $k \neq 0$ miatt az 1 nem jöhet szóba.

Ha $(k+1)^2 = 4$, akkor $k = 1$, ezzel $n = 20$.

Ha $(k+1)^2 = 16$, akkor $k = 3$, ezzel $n = 15$.

Tehát a feladat feltételeinek két számpár felel meg:

$k = 1, n = 20$ vagy $k = 3, n = 15$.

FELADATOK

1. E1 Legyenek $A = p^3 \cdot q \cdot r^4 \cdot t$ és $B = p^2 \cdot r^2 \cdot t^2 \cdot s$, ahol p, q, r, s, t prímszámok. Hány pozitív osztója van
a) $A \cdot B$-nek?
b) $A^3 \cdot B^2$-nek ?

2. E1 Az $A = 2^{3+x} \cdot 3^2 \cdot 5^{x+1} \cdot 7$ számnak 144 pozitív osztója van. Hány pozitív osztója van $6A$-nak?

3. E2 Legyen k pozitív egész szám. Határozzuk meg az $A = k^3 + k^2 - 30k$ természetes számot úgy, hogy annak pontosan 8 pozitív osztója legyen!

4. E2 Igazoljuk, hogy ha az N természetes számra $d(d(N)) = 3$, akkor N nem lehet osztható 42-vel!

5. E2 Keressük meg az összes $\overline{aabb}$ alakú négyzetszámot!

6. E2 Mivel egyenlő $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$, ha tudjuk, hogy négyzetszám?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 413, 414, 458–460, 464–469.

23. DIOFANTOSZI PROBLÉMÁK, SZÁMRENDSZEREK

DIOFANTOSZI PROBLÉMÁK

Gyakran találkozhatunk olyan problémákkal, amelyeknek a megoldásához vezető egyenletben több ismeretlen is szerepel, de a probléma jellegéből adódik, hogy a megoldások csak egész számok, esetleg csak pozitív egész számok lehetnek. Az ilyen típusú egyenleteket a Kr. u. III. sz.-ban élt görög matematikusról, Diophantoszról nevezték el, mivel ő igen sokat foglalkozott ezzel az egyenlettípussal, és több eredmény is fűződik a nevéhez az ilyen egyenletekkel kapcsolatban.

Az egyik legegyszerűbb diofantoszi (vagy másképpen diofantikus) egyenletek az ún. lineáris kétismeretlenes egyenletek. Ezek alakja: $ax + by = c$, ahol a, b és c egész számok, és keressük ennek x, y megoldásait az egész számok halmazán. Könnyen igazolható, hogy az egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha a és b legnagyobb közös osztója osztója c-nek: $(a, b) \mid c$. Az egyenlet megoldásához általában az egyenlet két oldalán szereplő kifejezések összehasonlításával, egyszerű oszthatósági megfontolásokkal jutunk el.

1. példa Egy toll 5 euróba, egy jegyzettömb 3 euróba kerül. Kati vásárolt néhány tollat és jegyzettömböt, és összesen 42 eurót fizetett. Hány tollat és hány jegyzettömböt vett Kati?

Megoldás Ha a tollak száma t, a jegyzettömbök száma j, akkor az alábbi egyenletet kell megoldanunk a pozitív egész számok halmazán:

$5t + 3j = 42$.

Az egyenlet jobb oldala osztható 3-mal. (Természetesen egyéb számokkal is osztható, pl. 6-tal és 7-tel is, de azért a 3-mal való oszthatóság az érdekes számunkra, mert a bal oldal egyik tagja, $3j$ is osztható 3-mal.) Ezért

a bal oldalnak is 3-mal oszthatónak kell lennie, így $5t$, azaz t is osztható 3-mal: $t = 3k$. Ezzel az egyenlet így írható:

$15k + 3j = 42$, azaz $5k + j = 14$.

Nyilván $k < 3$, ellenkező esetben az egyenlet bal oldala már nagyobb lenne a jobb oldalnál. Tehát $k = 1$ vagy $k = 2$.

Ha $k = 1$, akkor $j = 9$ és $t = 3k = 3$.

Ha $k = 2$, akkor $j = 4$ és $t = 6$.

Kati tehát vagy 3 tollat és 9 jegyzettömböt, vagy pedig 6 tollat és 4 jegyzettömböt vásárolt, amit az ellenőrzés is igazol.

2. példa Egy 90 km hosszú pályán egy kerékpáros állandó sebességgel haladva valamikor elhaladt egy kilométerkő mellett, melyre az $\overline{AB}$ kétjegyű szám volt írva. Egy óra múlva a $\overline{BA}$ kilométerkő mellett haladt el, majd újabb egy óra elteltével célba ért. Mennyi idő alatt tette meg a 90 km-t?

Megoldás A feltételek szerint az $\overline{AB}$ és $\overline{BA}$ közötti távolságnak egyenlőnek kell lennie a $\overline{BA}$ és 90 km közötti távolsággal.

$\overline{BA} - \overline{AB} = 90 - \overline{BA}$, azaz

$10B + A - 10A - B = 90 - 10B - A$, tehát

$19B - 8A = 90$.

Most vizsgáljuk meg közelebbről az egyenlet két oldalát. A jobb oldal páros, így a bal oldalnak is párosnak kell lennie. Mivel a bal oldal második tagja ($8A$) páros, ezért $19B$-nek, vagyis B-nek is párosnak kell lennie. De B nem lehet 4-gyel is osztható, hiszen ekkor a bal oldal osztható lenne 4-gyel, de a jobb oldal nem osztható 4-gyel. Ezek szerint B értéke csak 2 vagy 6 lehet. De $B = 2$ esetén az egyenlet bal oldalának értéke legfeljebb 38 lenne, így csak $B = 6$ lehetséges. Ekkor

$114 - 8A = 90$, ahonnan $A = 3$.

Tehát az egyes kilométerköveken szereplő számok: 36 és 63. Ezek szerint a kerékpáros egy óra alatt $63 - 36 = 27$ km-t tett meg, így sebessége 27 km/h, vagyis a 90 km távot $\frac{90}{27} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ óra alatt, vagyis 3 óra 20 perc alatt tette meg.

Egy példán keresztül nézzük meg az általános kétismeretlenes lineáris diofantoszi egyenlet megoldási módszerét!

3. példa Oldjuk meg a $20x + 11y = 87$ diofantoszi egyenletet!

Megoldás Mivel $(20; 11) = 1$ osztója 87-nek, így az egyenletnek van megoldása.

Fejezzük ki az egyenletből y-t és (maradékos osztás segítségével) válasszuk le azt a részt, amely biztosan egész.

$$y = \frac{87 - 20x}{11} = \frac{7 \cdot 11 + 10 - (1 \cdot 11 + 9)x}{11} = 7 - x + \frac{10 - 9x}{11}$$

Ahhoz, hogy y egész legyen, a $\frac{10 - 9x}{11}$ törtnek is egésznek kell lennie, ezt jelöljük a-val, átalakítva $10 - 9x = 11a$. Így egy újabb diofantoszi egyenletet kaptunk, de kisebb abszolút értékű együtthatókkal. Erre újra elvégezzük az előző eljárást.

$$x = \frac{10 - 11a}{9} = \frac{1 \cdot 9 + 1 - (1 \cdot 9 + 2)a}{9} = 1 - a + \frac{1 - 2a}{9}$$

Az így kapott törtnek is egésznek kell lennie, ezt b-vel jelölve: $1 - 2a = 9b$, amiből $a = \frac{1 - 9b}{2} = -4b + \frac{1 - b}{2}$.

Ezt a törtet c-vel jelölve: $1 - b = 2c$, amiből $b = 1 - 2c$. Ez már nem tartalmaz törtet, tehát bármely c egész szám választása esetén b is egész lesz, így „visszafejthető” a megoldás, ha x-et és y-t is kifejezzük c-vel.

$b = 1 - 2c$

$$a = \frac{1 - 9b}{2} = \frac{1 - 9(1 - 2c)}{2} = 9c - 4$$

$$x = \frac{10 - 11a}{9} = \frac{10 - 11(9c - 4)}{9} = 6 - 11c$$

$$y = \frac{87 - 20x}{11} = \frac{87 - 20(6 - 11c)}{11} = 20c - 3$$

Ekkor bármely c egész szám választása esetén x és y is egész lesz, amely számpár megoldása az eredeti egyenletnek. (Az egyenletnek tehát végtelen sok megoldása van.) Például $c = 0$ választása esetén $x = 6$ és $y = -3$, amelyre $20 \cdot 6 + 11 \cdot (-3) = 120 - 33 = 87$ valóban.

Ez az eljárás mindig véget ér, mert az újabb diofantoszi egyenletekben egyre kisebb abszolút értékű együtthatók szerepelnek, tehát valamikor el fogjuk érni, hogy az egyik együttható 1 vagy -1 legyen, és utána már nem marad tört. Ezzel az eljárással az összes megoldást megkapjuk.

Gyakran találkozunk olyan diofantikus egyenlettel, melyben az ismeretlenek szorzata is szerepel. Az ilyen típusúak közül az egyik legegyszerűbb általános alakja: $xy + ax + by = c$, ahol a, b és c egész számok. Az ilyen egyenletek megoldásához általában a bal oldali kifejezés szorzattá alakításával juthatunk el.

4. példa

„Egyiptomi tört"-nek nevezzük az olyan törteket, amelyek számlálója 1.

Bontsuk fel két egyiptomi tört összegére az $\frac{1}{p}$ törtet, ahol p egy prímszám!

Megoldás

Az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ egyenletet kell megoldanunk a pozitív egész számok halmazán. Szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel.

$py + px = xy$, azaz $xy - px - py = 0$.

A bal oldalt könnyen egy szorzat és egy négyzetszám különbségére alakíthatjuk:

$(x - p)(y - p) - p^2 = 0$, vagyis $(x - p)(y - p) = p^2$.

Ha x és y egész számok, akkor $x - p$ és $y - p$ is egészek, így p^2-t kell két pozitív egész szám szorzatára bontanunk. Ezt csak hatféleképpen tehetjük meg:

$p^2 = p \cdot p = 1 \cdot p^2 = p^2 \cdot 1 = (-p) \cdot (-p) = (-1) \cdot (-p^2) = (-p^2) \cdot (-1)$.

A negatív tényezőkre való felbontást nem vizsgáljuk, ugyanis ekkor x-re vagy y-ra 0 vagy negatív egész adódna.

Ha $x - p = p$ és $y - p = p$, akkor $x = y = 2p$.

Ha $x - p = 1$ és $y - p = p^2$, akkor $x = p + 1$ és $y = p^2 + p$.

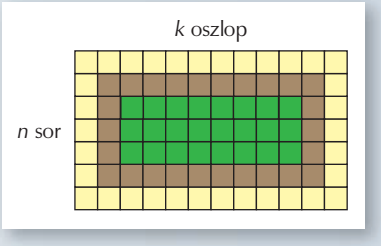
Ha $x - p = p^2$ és $y - p = 1$, akkor $x = p^2 + p$ és $y = p + 1$.

Valóban

$$\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p} \quad \text{és} \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{p+1}{p(p+1)} = \frac{1}{p}.$$

5. példa

Egy egységnyi négyzetekből álló négyzetrács n sorból és k oszlopból áll. A négyzetrács szélével érintkező négyzetek számáról (az ábrán sárga), a négyzetrács szélével érintkező négyzetekkel érintkező négyzetek számáról (az ábrán barna), és a négyzetrács belsejében levő négyzetek számáról (az ábrán zöld) azt tudjuk, hogy a sárga és zöld négyzetek számának számtani közepe egyenlő a barna négyzetek számával. Hány sorból és hány oszlopból áll a négyzetrács?



Megoldás

A sárga négyzetek S száma: $S = 2k + 2n - 4$.

A barna négyzetek B száma: $B = 2(k - 2) + 2(n - 2) - 4$.

A zöld négyzetek Z száma: $Z = (k - 4)(n - 4)$. ($k, n > 4$, ugyanis legbelül is kell lennie legalább egy négyzetnek.)

A feladat feltételei szerint $\frac{S + Z}{2} = B$, azaz $S + Z = 2B$.

$2k + 2n - 4 + (k - 4)(n - 4) = 4(k - 2) + 4(n - 2) - 8$,

$2k + 2n - 4 + kn - 4k - 4n + 16 = 4k + 4n - 24$,

$kn - 6k - 6n + 36 = 0$.

Most alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát: $k(n - 6) - 6 \cdot (n - 6) = 0$, azaz $(n - 6)(k - 6) = 0$.

A kapott egyenlet csak akkor teljesül, ha $n = 6$ és $k \geq 5$ tetszőleges, vagy $k = 6$ és $n \geq 5$ tetszőleges.

Az egyik legrégebbi diofantoszi egyenlet az $x^2 + y^2 = z^2$. Itt tehát keressük azokat a pozitív egész számokat, melyekre teljesül a pitagoraszi összefüggés.

Ha valamely x_0, y_0, z_0 pozitív egész számok megoldásai az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletnek, akkor nyilván a kx_0, ky_0, kz_0 is megoldások bármely pozitív egész k-ra. Ugyanis ekkor a

$(kx_0)^2 + (ky_0)^2 = (kz_0)^2$ egyenletből $k^2x_0^2 + k^2y_0^2 = k^2z_0^2$, ahonnan $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$.

Ha tehát találunk egy megoldást, akkor ezzel végtelen sok megoldása adódik az egyenletnek. Ezért érthető, hogy elsősorban azok a megoldások érdekesek, amelynek x, y, z tagjai relatív prímek. Az ilyen megoldásokat az egyenlet **alapmegoldásainak** nevezzük. Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet néhány alapmegoldása:

x_0	3	5	7	8	9	11	12	13	16
y_0	4	12	24	15	40	60	35	84	63
z_0	5	13	25	17	41	61	37	85	65

Most megmutatjuk, hogy ha valamely n és k ($n > k$) pozitív egészekre

$x = n^2 - k^2$, $y = 2nk$, $z = n^2 + k^2$,

akkor az így képzett x, y, z számhármas megoldása az egyenletnek. Ekkor ugyanis

$(n^2 - k^2)^2 + (2nk)^2 = n^4 + k^4 - 2n^2k^2 + 4n^2k^2 = n^4 + k^4 + 2n^2k^2 = (n^2 + k^2)^2$,

tehát valóban $x^2 + y^2 = z^2$. Igazolható az is, hogy az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet minden alapmegoldásának a tagjai a fenti alakban előállíthatók. (Minden olyan esetben alapmegoldást kapunk, amikor n és k relatív prímek és különböző paritásúak.)

6. példa Legyen x_0, y_0, z_0 az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet egy megoldása. Igazoljuk hogy ekkor x_0, y_0, z_0 valamelyike osztható 5-tel!

Megoldás Legyenek n és k olyan pozitív egészek, melyek egyike sem osztható 5-tel. Vizsgáljuk meg, hogy az 5-tel nem osztható négyzetszámok milyen maradékot adhatnak 5-tel osztva. Ha valamely m egész szám nem osztható 5-tel, akkor valamely r egész számra

$m = 5r + 1$, $m = 5r + 2$, $m = 5r + 3$ vagy $m = 5r + 4$.

Ezek négyzete

$m^2 = 25r^2 + 10r + 1$, $m^2 = 25r^2 + 20r + 4$,

$m^2 = 25r^2 + 30r + 9$ vagy $m^2 = 25r^2 + 40r + 16$.

Azt látjuk, hogy bármely (5-tel nem osztható) négyzetszám 5-tel osztva 1 vagy 4 maradékot adhat csak.

Ha az $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$ bal oldalának egyik tagja osztható 5-tel, akkor készen vagyunk. Ha a bal oldali két tag 5-tel osztva különböző maradékot ad, akkor ezek csak 1 és 4 lehetnek, így a jobb oldal és ezzel z_0 is osztható 5-tel. Ha a bal oldali két tag ugyanazt a maradékot adja (tehát mindkettő 1-et, vagy mindkettő 4-et), akkor a jobb oldal 5-tel osztva 2 vagy 3 maradékot adna, de mint láttuk ez négyzetszám esetén nem lehetséges.

Érdekes története van az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek, ahol $n > 2$ pozitív egész szám. *Pierre de Fermat* (1601–1665) francia jogász vizsgálta ezt az egyenletet, és feljegyzése szerint talált egy bizonyítást arra, hogy ennek az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében. A bizonyítást azonban nem írta le, s az azóta eltelt több mint 300 év alatt számtalan tudós próbálkozott a sejtés bizonyításával, hasztalan. Végül 1995-ben *Andrew Wiles* amerikai matematikusnak sikerült bebizonyítania Fermat sejtését. A bizonyítás azonban olyan hosszú és bonyolult, és olyan mély matematikai eszközöket vesz igénybe, melyek bizonyára nem állhattak annak idején Fermat rendelkezésére. A tételt, mely szerint az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében, azóta Fermat–Wiles tételnek (vagy nagy Fermat-tételnek) nevezik.

Andrew Wiles

SZÁMRENDSZEREK

A maradékos osztással a számrendszerek közti átváltásnál is találkozhattunk, emlékeztetőül tekintsük át mindkét irányú átváltást.

7. példa Határozzuk meg az 2103_4 szám tízes számrendszerbeli alakját!

Megoldás $2103_4 = 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 128 + 16 + 0 + 3 = 147$

8. példa Írjuk fel a 2400-at ötös számrendszerben!

Megoldás

$$\begin{aligned} 2400 &= 480 \cdot 5 + \mathbf{0} \\ 480 &= 96 \cdot 5 + \mathbf{0} \\ 96 &= 19 \cdot 5 + \mathbf{1} \\ 19 &= 3 \cdot 5 + \mathbf{4} \\ 3 &= 0 \cdot 5 + \mathbf{3} \end{aligned}$$

A kapott maradékokat visszafele kiolvasva megkapjuk a keresett számot: $2400 = 34100_5$

Az átváltások után vizsgáljuk meg az összeadást és kivonást a tízestől eltérő alapszámú számrendszerekben. Mindent ugyanúgy csinálunk, mint a tízes számrendszerben megszokott írásbeli összeadásnál és kivonásnál, csak az átviteleket, nem tízesével „csoportosítjuk", hanem a számrendszer alapszámával.

9. példa Végezzük ez az alábbi műveleteket!

a) $201_3 + 112_3$
b) $2154_6 + 314_6$
c) $3210_4 - 211_4$

Megoldás *a)* Az összeadást jobbról balra haladva végezzük el. Az *egyesek* helyiértékén $1 + 2 = 3$, de az már eggyel nagyobb helyiértékre való, ezért ide 0-t írunk és keletkezik 1 átvitel. A *hármasok* helyiértékén $1 + 0 + 1 = 2$, itt nem keletkezik átvitel. A *kilencesek* helyiértékén $2 + 1 = 3$, tehát 0-t írunk és keletkezik 1 átvitel, amelyet a következő helyiértékre írunk.

$$\begin{array}{r} 201_3 \\ +\ 112_3 \\ \hline 1020_3 \\ {\scriptstyle +1\ +1} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 2154_6 \\ +\ 314_6 \\ \hline 2512_6 \\ {\scriptstyle +1+1} \end{array}$$

c) Megint jobbról balra haladunk. Az *egyesek* helyiértékén a $0 - 1$ nem végezhető el, ezért a kisebbítendőt kiegészítjük a következő helyiértéken egy 1-essel, de ne felejtsük el, hogy négyes számrendszerben dolgozunk: $10_4 - 1_4 = 4 - 1 = 3$. A kiegészítés miatt keletkezett egy átvitel, amelyet a következő kivonandóhoz hozzáadunk, így $1 - (1 + 1) = 1 - 2$ művelet keletkezik, ahol hasonlóképpen járhatunk el, mint az előbb: $11_4 - 2_4 = 5 - 2 = 3$. És így tovább, amíg a végére nem érünk.

$$\begin{array}{r} 3210_4 \\ -\ 211_4 \\ \hline 2333_4 \\ {\scriptstyle +1+1+1} \end{array}$$

FELADATOK

1. E1 Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az alábbi egyenleteket!
a) $5x + 7y = 70$; *b)* $3x + 8y = 39$; *c)* $4x + 13y = 120$.

2. E1 Van-e olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, melyre $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2012$?

3. E1 Egy 60 km hosszú kör alakú kerékpár pályán egy biciklista állandó sebességgel halad. A 0 kilométerkőtől indult és egy óra múlva haladt el az $\overline{AB}$ km-kő mellett. Egy újabb óra múlva a $\overline{BA}$ km-kő mellett haladt el ($B < A$). Mekkora a kerékpáros sebessége?

4. E1 Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az alábbi egyenleteket!
a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{11}$; *b)* $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{5}$; *c)* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{7}$.

5. E2 Egy háromszög a, b, c oldalainak mérőszámai egész számok és c prímszám. Az a és b oldalakhoz tartozó magasságok összege egyenlő a c oldalhoz tartozó magassággal. Mekkorák a háromszög oldalai?

6. E2 Nagyapám 2012-ben annyi idős volt, mint születési éve számjegyei négyzetének összege. Hány éves volt a nagyapám 2012-ben?

7. E2 Végezzük el a következő műveleteket!
a) $111000_2 + 1101_2$ *b)* $4431_5 + 1023_5 + 333_5$ *c)* $5631_8 - 347_8$

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 490, 491, 501, 506, 507, 512, 513, 515, 516, 533.

24. POLINOMOK OSZTHATÓSÁGA (Kiegészítő anyag)

Vizsgáljunk egész együtthatós polinomokat! A szorzattá alakítások során például a következő azonosságot ismertük meg: $x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$.

Ha x helyére egész számokat helyettesítünk, akkor az azonosság alapján az alapok összege, illetve különbsége mindig osztója a második hatványok különbségének.

Például $x = 10$ esetén: $(10 + 7) = 17 | (10^2 - 7^2) = 51$, illetve $(10 - 7) = 3 | (10^2 - 7^2) = 51$.

Általánosítsuk megfigyelésünket!

Jelöljenek $a(x)$ és $b(x)$ egész együtthatós polinomokat.

A $b(x)$ polinomot az $a(x)$ **polinom osztójának** nevezzük, ha található olyan $q(x)$ egész együtthatós polinom, melyre $b(x) \cdot q(x) = a(x)$ teljesül. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ekkor az $a(x)$ polinom osztható a $b(x)$ polinommal.

Megjegyzés

Az $a(x)$ polinom fokszáma nem lehet kisebb, mint a $b(x)$, illetve a $q(x)$ fokszáma.

A $b(x)$ polinom és a $q(x)$ polinom fokszámának összege megegyezik az $a(x)$ polinom fokszámával.

Oszthatóságot értelmezhetünk tágabb értelemben is, például valós együtthatós polinomok, illetve többváltozós polinomok esetén is.

Például:

$(x - 4) | (x^2 + x - 20)$, mert $x^2 + x - 20 = (x - 4)(x + 5)$;

$(x - 3) | (x^2 + 7x - 30)$, mert $x^2 + 7x - 30 = (x - 3)(x + 10)$;

$(x^2 + x + 1) | (x^3 + 7x^2 + 7x + 6)$, mert $x^3 + 7x^2 + 7x + 6 = (x^2 + x + 1)(x + 6)$.

Polinomok oszthatóságának értelmezése után egyéb oszthatósági szabályokat is találhatunk.

A leggyakrabban használt azonosságok:

(1) $(a - b) | (a^n - b^n)$, $n \in \mathbf{N}^+$;

(2) $(a + b) | (a^{2n+1} + b^{2n+1})$, $n \in \mathbf{N}$;

(3) $(a + b) | (a^{2n} - b^{2n})$, $n \in \mathbf{N}^+$.

Azonosságaink bizonyíthatók, példaként nézzük az (1)-t.
Tekintsük a következő egész együtthatós polinomot:

$a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}$.

Szorozzuk meg a polinomot $(a - b)$-vel. A szorzat első sorában az a-val, a másodikban a $(-b)$-vel szorzott tagokat tüntettük fel. Jól látható, hogy a második és harmadik sorban levő tagok között két tag kivételével minden tag az ellentettjével együtt szerepel.

$$(a - b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}) =$$
$$= a^nb^0 + a^{n-1}b^1 + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + a^{n-k+1}b^{k-1} + \ldots + a^2b^{n-2} + a^1b^{n-1} -$$
$$- a^{n-1}b^1 - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \ldots - a^{n-k}b^k - \ldots - a^2b^{n-2} - a^1b^{n-1} - a^0b^n =$$
$$= a^nb^0 - a^0b^n = a^n - b^n.$$

Tehát találtunk az $(a - b)$ polinomhoz olyan egész együtthatós polinomot, amellyel összeszorozva a szorzat az $a^n - b^n$ polinom.
A további két azonosság bizonyítása teljesen hasonlóan történhet.

1. példa Bizonyítsuk be, hogy $77 | (10^{2022} - 23^{1011})$!

Megoldás $10^{2022} - 23^{1011} = (10^2)^{1011} - 23^{1011} = 100^{1011} - 23^{1011}$.
Az (1) azonosság alapján:
$100 - 23 = 77$, így $77 | (100^{1011} - 23^{1011})$, azaz $77 | (10^{2022} - 23^{1011})$.

2. példa Bizonyítsuk be, hogy $37 | (1 + 2^{19} + 3^{19} + 4^{19} + \ldots + 36^{19})$!

Megoldás Mivel 36 tagú összeg áll a jobb oldalon, ezért csoportosíthatjuk a tagokat párosával:
$1 + 2^{19} + 3^{19} + 4^{19} + \ldots + 36^{19} = (1 + 36^{19}) + (2^{19} + 35^{19}) + \ldots + (18^{19} + 19^{19})$.
A zárójelben szereplő összegek a (2) azonosság alapján oszthatók az alapok összegével, vagyis 37-tel, így az összeg is osztható 37-tel.

Végül nyilván felmerül a kérdés: hogyan dönthetjük el egy polinomról, hogy osztható egy másik polinommal, ha nem egyszerű a szorzattá alakítás? A választ úgy is megkaphatjuk, hogy a két polinomot elosztjuk egymással. Az osztásnál hasonlóan dolgozunk, mint az egész számok maradékos osztásánál.

3. példa Végezzük el a következő osztást: $(x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 9x - 20) : (x - 4)$!

Megoldás

$(x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 9x - 20) = x^3(x - 4) + 2x^3 - 9x^2 + 9x - 20$ $\Rightarrow$ a hányados első tagja: x^3.
$2x^3 - 9x^2 + 9x - 20 = 2x^2(x - 4) - x^2 + 9x - 20$ $\Rightarrow$ a hányados második tagja: $2x^2$.
$-x^2 + 9x - 20 = -x(x - 4) + 5x - 20$ $\Rightarrow$ a hányados harmadik tagja: $-x$.
$5x - 20 = 5(x - 4) + 0$ $\Rightarrow$ a hányados negyedik tagja: 5.
Az utolsó „részosztás” maradéka 0, ami azt jelenti, hogy $(x - 4) | (x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 9x - 20)$.
$(x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 9x - 20) = (x - 4)(x^3 + 2x^2 - x + 5)$.

Láthattuk, hogy a maradékos osztás nagyon hasonlóan zajlik az egész számok, illetve a polinomok körében. Nem ez az egyetlen hasonlóság, így fel lehet építeni a polinomok számelméletét is. Például az egész számoknál megismert Euklideszi algoritmussal meg lehet keresni két polinom legnagyobb közös osztóját.

Sophie Germain francia matematikusnőtől származik az alábbi tétel:
$a^4 + 4$ összetett szám, ha $a \neq 1$ egész szám.
A bizonyítás elve az $a^4 + 4 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$ szorzattá alakítás, ezután már csak azt kell megvizsgálni, lehet-e 1 vagy -1 a két tényező.
Nézz utána az interneten, ki volt Sophie Germain!
(A tételt $a^4 + 4b^4$ általánosabb alakban is megfogalmazhatjuk, ha a, b egész szám.)

FELADATOK

1. E1 Igazoljuk a leckében szereplő azonosságokat a bemutatott bizonyítás alapján!
a) $(a+b)|(a^{2n+1}+b^{2n+1})$, $n \in \mathbf{N}$; *b)* $(a+b)|(a^{2n}-b^{2n})$, $n \in \mathbf{N}^+$.

2. E1 Igazoljuk az állításokat!
a) $11|(17^{20}-6^{20})$; *b)* $23|(17^{13}+6^{13})$; *c)* $23|(17^{2024}-6^{2024})$.

3. E1 Bizonyítsuk be a következő oszthatóságokat!
a) $(a+5)|(a^2-2a-35)$;
b) $(y-8)|(y^2+7y-120)$;
c) $(b-3c)|(b^2-2bc-3c^2)$.

4. E2 Igaz-e az állítás?
$7|(3^{2n+2}-2^{n+1})$, $n \in \mathbf{N}^+$.

5. E2 Figyeljük meg a következő állításokat! Írjuk fel a következő három hasonló állítást! Fogalmazzuk meg az állításokat általánosan, és igazoljuk az előző megfogalmazásunkat!
$1^3=1^2-0^2$; $2^3=3^2-1^2$; $3^3=6^2-2^2$; $4^3=10^2-6^2$; $5^3=15^2-10^2$.

ÉRDEKES SZÁMOK (Olvasmány)

Tán kicsit meglepő lehet a cím: ugyan mitől lehet egy szám érdekes? De ha valaki elmélyed a természetes számok világában, minél jobban megismeri azok tulajdonságait, összefüggéseit, annál inkább felfedezheti, hogy sok-sok természetes szám rendelkezik különleges tulajdonsággal. Vegyük pl. ezt a számot: 1089. Mitől érdekes? Azért, mert az egyedüli olyan négyjegyű szám, amely négyzetszám, s amelyet, ha „fordítva” írunk le, ugyancsak négyzetszámot kapunk: $1089 = 33^2$, $9801 = 99^2$. Vagy: miért érdekes a következő szám: 11 311? Azért, mert ez az egyetlen olyan szám, melynek, ha leírjuk egymás után a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal való osztási maradékait, ugyanezt a számot kapjuk vissza. Látjuk tehát, hogy sokfajta szempontból vizsgálva a természetes számokat, különböző érdekességet fedezhetünk fel közöttük.

Most ezek közül mutatunk néhányat.

Abban talán sokan egyetértenek, hogy a legérdekesebb számok a prímszámok. A 21. leckében már láthattuk, milyen szabálytalanul követik egymást a természetes számok között. Láttuk, hogy két szomszédos prím között elég sokszor (talán végtelen sokszor) lesz a különbség 2, ugyanakkor bármilyen nagy is lehet ez a különbség. Ha mindehhez a Bertrand–Csebisev-tételt is hozzátesszük, amely szerint bármely 1-nél nagyobb szám és a kétszerese között mindig található prímszám, akkor már teljes lesz a „káosz” a prímszámok körül. Ennek a „rendezetlenségnek” is köszönhető a prímszámok legfontosabb gyakorlati alkalmazása: nélkülözhetetlen szerepet töltenek be a mindennapi életben nagyon fontos titkosításban (pl. bankkártya adatok). A titkosításhoz egy olyan számításra van szükség, amelyet könnyű elvégezni, de nagyon nehéz (szinte lehetetlen) visszafejteni, hiszen ez teszi lehetővé, hogy gyorsan elvégezhető legyen a titkosítás, de ne lehessen feltörni. Egy ilyen eljárás az RSA-kódolás, amelynek hátterében az áll, hogy egy kellően nagy számot – jelenlegi tudásunk szerint – olyan sokáig tart prímtényezőkre bontani, hogy nem is érdemes megpróbálni, míg a prímek ismeretében, azok szorzatát hamar meg tudjuk határozni.

Egy másik igen érdekes számcsoport a tökéletes számok csoportja. Már az ókorban is felfigyeltek arra, hogy vannak olyan számok, amelyeknek összeadva a náluk kisebb (pozitív) osztóit, ez az összeg egyenlő a kiindulási számmal. Ebben a természet olyan tökéletes harmóniáját vélték felfedezni, hogy az ilyen számokat elnevezték tökéletes számoknak.

A **tökéletes számok** olyan természetes számok, amelyek egyenlők a náluk kisebb pozitív osztóiknak összegével.

A legkisebb tökéletes szám a 6. Hiszen a nála kisebb osztói: 1, 2, 3, és
$1+2+3=6$.
A második legkisebb tökéletes szám a 28. A nála kisebb osztói: 1, 2, 4, 7, 14, és
$1+2+4+7+14=28$.

A harmadik tökéletes szám a 496, a negyedik: 8128. Ezt a négy tökéletes számot már az ókorban is ismerték, s persze lázasan keresték az ötödiket. Kb. 1600 évnek kellett eltelnie, míg egy nagyszerű természettudós *Johannes Müller Regiomontanus* (1436–1476) felfedezte az ötödik tökéletes számot: ez a 33 550 336. Gondoljunk bele; az 1400-as évek közepén ül a tudós a szobájában, előtte papír, penna, tintatartó, és megtalálja az ötödik tökéletes számot, amely 33 milliós nagyságrendű szám. Ugye egyetértünk abban, hogy ez nem kis teljesítmény? Még akkor sem, ha Regiomontanus vélhetően ismerhette *Eukleidész* eredményét, mely szerint, ha $2^k - 1 = p$ prímszám, akkor $2^{k-1}(2^k - 1)$ biztosan tökéletes szám. Így Regiomontanusnak nem volt más dolga, „csak" keresni a $2^k - 1$ alakú prímszámokat. Később *Euler* azt is megmutatta, hogy Eukleidész állításának megfordítása is igaz, vagyis minden páros tökéletes szám ilyen alakú. De mi a helyzet a páratlan tökéletes számokkal? Nos az a helyzet, hogy nem tudjuk. Eddig a világon senki sem talált páratlan tökéletes számot, de azt sem sikerült bebizonyítani, hogy nem létezik.

Az eddig ismert legnagyobb tökéletes számot 2018 decemberében találták meg, ez az 51. ismert tökéletes szám:

$2^{82\,589\,932} \cdot (2^{82\,589\,933} - 1)$,

ami egyben azt is jelenti, hogy a zárójelben található szám az eddig ismert legnagyobb prímszám (24 862 048 jegyű).

A tökéletes számokhoz hasonló érdekességet mutatnak az ún. barátságos számok. Állítólag egyszer Pitagorasz egy barátjával beszélgetve két tanítványáról így mesélt: „Olyan jó barátok ők, mint a 220 és a 284." Mit is értett ez alatt? Ha összeadjuk a 220 nála kisebb osztóit, eredményül 284-et kapunk. Ha pedig összeadjuk a 284 nála kisebb osztóit, eredményül 220-at kapunk. Az ilyen számpárok tagjait nevezzük **barátságos számoknak**. Felsorolunk néhány barátságos számpárt, s mellettük annak felfedezőjét:

1184; 1210 (*Paganini*), 17 296; 18 416 (*Fermat*), 9 363 584; 9 437 056 (*Descartes*).

Az alábbi számsor az egymilliónál kisebb barátságos számpárokat tartalmazza.

(220; 284)	(1184; 1210)	(2620; 2924)	(5020; 5564)	(6232; 6368)
(10 744; 10 856)	(12 285; 14 595)	(17 296; 18 416)	(66 928; 66 992)	(67 095; 71 145)
(63 020; 76 084)	(69 615; 87 633)	(79 750; 88 730)	(122 368; 123 152)	(100 485; 124 155)
(122 265; 139 815)	(141 664; 153 176)	(142 310; 168 730)	(171 856; 176 336)	(176 272; 180 848)
(196 724; 202 444)	(185 368; 203 432)	(280 540; 365 084)	(308 620; 389 924)	(356 408; 399 592)
(319 550; 430 402)	(437 456; 455 344)	(469 028; 486 178)	(503 056; 514 736)	(522 405; 525 915)
(643 336; 652 664)	(600 392; 669 688)	(609 928; 686 072)	(624 184; 691 256)	(635 624; 712 216)
(667 964; 783 556)	(726 104; 796 696)	(802 725; 863 835)	(879 712; 901 424)	(898 216; 980 984).

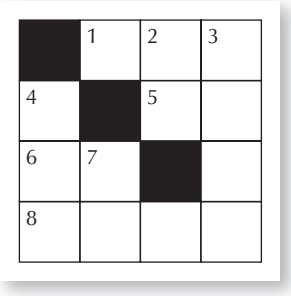
Könnyen megfigyelhetjük, hogy egy barátságos számpár mindkét tagja egyszerre vagy páros, vagy páratlan. Máig sem tudjuk, vajon léteznek-e olyan barátságos számpárok, melyek egyik tagja páros, a másik pedig páratlan.

A tökéletes számokon, barátságos számokon kívül még számtalan sok érdekes számfajta létezik a természetes számok világában (Fibonacci-számok, főnix-számok, palindrom számok, stb.); attól függően, hogy éppen milyen szempontból vizsgáljuk a számokat. Aki megismerkedik velük (könnyen megkereshetjük őket az interneten), az újabb és újabb különlegességeket ismerhet meg a természetes számok világában.

Pihentetőül fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt!

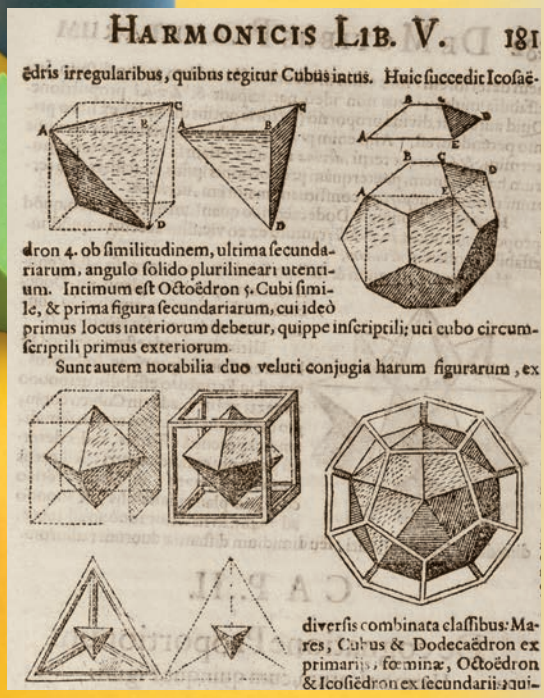
vízsz.: **1.** 200-nál kisebb négyzetszám.
5. prímszám, mely számjegyeinek összege négyzetszám
6. hatodik hatvány
8. palindrom-szám (visszafelé olvasva ugyanaz a szám)

függ.: **2**. prímszám
3. 2000-nél kisebb köbszám
4. számjegyeinek szorzata négyzetszám
7. $[d(d(d(1800))) + 4]^2$



(A megoldást a 187. oldalon találhatjuk.)

IV. GEOMETRIA

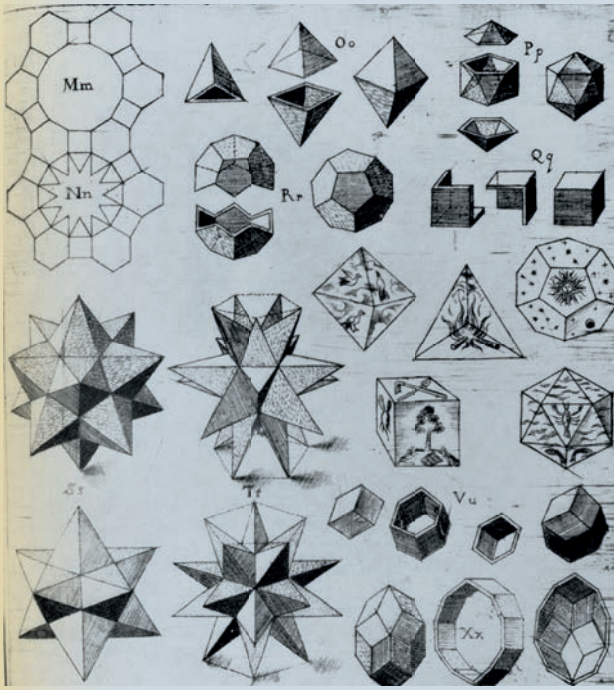

HARMONICIS LIB. V. 181

ēdris irregularibus, quibus tegitur Cubus intus. Huic ſuccedit Icoſaē-

dron 4. ob ſimilitudinem, ultima ſecundariarum, angulo ſolido plurilineari utentium. Intimum eſt Octoēdron 5. Cubi ſimile, & prima figura ſecundariarum, cui ideò primus locus interiorum debetur, quippe inſcriptili; uti cubo circumſcriptili primus exteriorum.

Sunt autem notabilia duo veluti conjugia harum figurarum, ex

diverſis combinata claſſibus: Mares, Cubus & Dodecaēdron ex primariis; fœminæ, Octoēdron & Icoſiēdron ex ſecundariis; qui-



Johannes Kepler (1571–1630) német matematikus, csillagász és optikus Harmonice Mundi (Világok harmóniája) *(1619) című tanulmányában a poliéderekkel is foglakozott.*

Ebben a fejezetben néhány kiegészítést teszünk, és az elemi geometriában kiemelkedő fontosságú állításokat gyűjtjük össze Ezeket a tételeket az előző években már használhattuk, most a bizonyításokkal együtt elevenítjük fel őket.

25. SÍKBELI EGYBEVÁGÓSÁG

A síkbeli egybevágóság a síknak önmagára való távolságtartó, kölcsönösen egyértelmű leképezése. (Egybevágóság helyett mondunk egybevágósági leképezést vagy egybevágósági transzformációt is.)

Két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át.

Ebből következik, hogy ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek egybevágók (az A képe A', a B képe B', a C képe C'), akkor $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ és $CA = C'A'$.

Bizonyítás nélkül elfogadjuk a következő tételeket.

1. Az egybevágóság egyenestartó transzformáció.

Vagyis bármely három, egy egyenesre illeszkedő pont képe is egy egyenesre illeszkedik.

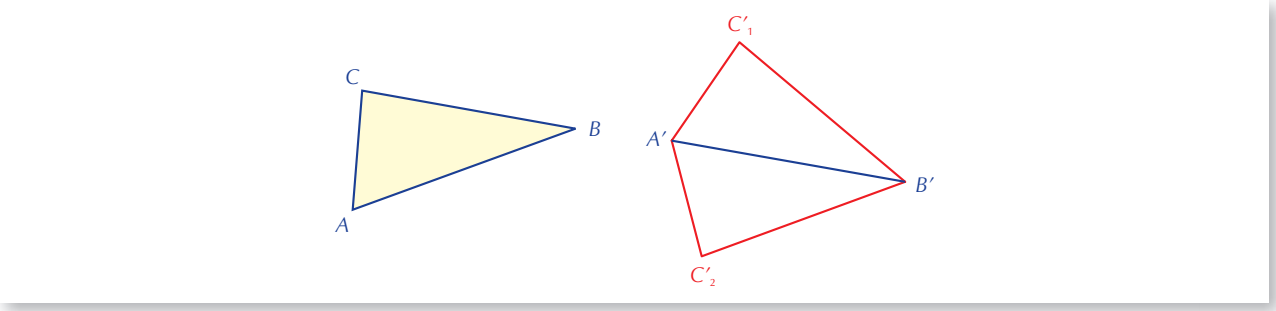
2. Az egybevágóság szögtartó transzformáció.

3. Ha ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybevágók, akkor a síknak pontosan egy egybevágósága létezik, amely az A, B, C ponthármast az A', B', C' ponthármasba viszi át.

Megjegyzés

Egy adott transzformáció több lépésben, többféleképpen is végrehajtható (például egy adott pont körüli forgatás előállítható több egymás utáni forgatással is). Azonban ha az ABC háromszög képe az $A'B'C'$ háromszög, akkor ez a leképezés egyetlen transzformációt határoz meg (csak kezdeti és végállapot van), és ekkor a sík minden pontjának egyértelmű a képe.

Egy adott ABC háromszög és egy adott $A'B'$ szakasz esetén ($AB = A'B'$) kétféle $A'B'C'$ háromszöget tudunk szerkeszteni, amely egybevágó ABC-vel *(ábra)*.



Az $A'B'C_1'$ körüljárása megegyezik az ABC körüljárásával, az $A'B'C_2'$ körüljárása pedig ellentétes az ABC körüljárásával. Ehhez kapcsolódó a következő két tétel.

4. Egy egybevágósági transzformáció vagy minden háromszög körüljárását megtartja, vagy mindegyikét megfordítja.

Ezért beszélhetünk körüljárástartó (irányítástartó) és körüljárásváltó (irányításváltó) egybevágósági transzformációkról.

5. Az $AB = A'B'$ síkbeli szakaszokhoz két olyan síkbeli egybevágóság van, amely az AB szakaszt az $A'B'$ szakaszba transzformálja. Van egy irányítástartó és van egy irányításváltó.

Ha az egybevágósági transzformáció valamely ponthoz önmagát rendeli, akkor az a pont **fixpont**. Belátható, hogy két fixpontot összekötő egyenes minden pontja fixpont. Az ilyen egyenes neve **tengely**.

Legyen t_1 egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe, t_2 pedig egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az $A'B'C'$ háromszöget az $A''B''C''$ háromszögbe transzformálja.

Röviden ezt így jelöljük: $t_1(ABC) = A'B'C'$, $t_2(A'B'C') = A''B''C''$.

A két transzformáció **szorzata (egymásutánja)** is egybevágósági transzformáció, amely az ABC háromszöget közvetlenül az $A''B''C''$ háromszögbe viszi. Ezt így jelöljük:

$t_2 \cdot t_1(ABC) = A''B''C''$.

Ekkor először hajtjuk végre a t_1 transzformációt, majd utána a t_2-t.

Általában $t_2 \cdot t_1(ABC)$ és $t_1 \cdot t_2(ABC)$ nem azonos.

Az egybevágósági transzformációk szorzása nem kommutatív.

Azt az egybevágóságot, amely az $A'B'C'$ háromszöget az ABC háromszögbe transzformálja, a t_1 inverzének nevezzük. Jele: t_1^{-1}.

A $t_1^{-1} \cdot t_1$ transzformációt **identitás**nak nevezzük. Az identitás a sík minden pontját fixen hagyja (minden pontjához önmagát rendeli).

A harmadik tételből azonnal következik, hogy ha egy egybevágóságnak van három, nem egy egyenesre illeszkedő fixpontja, akkor az identitás.

Több tényezőre is értelmezhető a transzformációk szorzása. Az ábrán három egybevágósági transzformációt látunk:

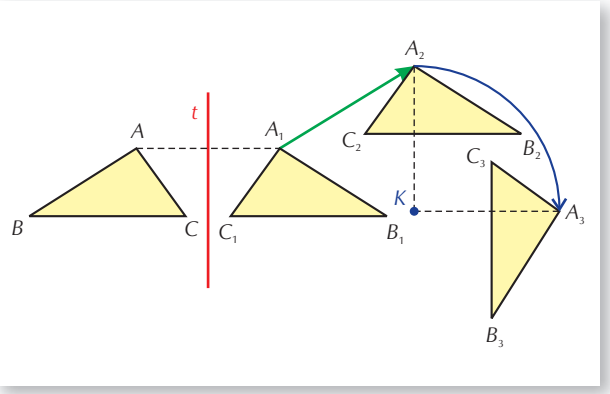
$t_1(ABC) = A_1B_1C_1$, $t_2(A_1B_1C_1) = A_2B_2C_2$,

$t_3(A_2B_2C_2) = A_3B_3C_3$.

Mondhatjuk, hogy $t_3 \cdot t_2 \cdot t_1(ABC) = A_3B_3C_3$.

Igazolható, hogy a **transzformációk szorzása asszociatív**, azaz $t_3 \cdot (t_2 \cdot t_1) = (t_3 \cdot t_2) \cdot t_1$.

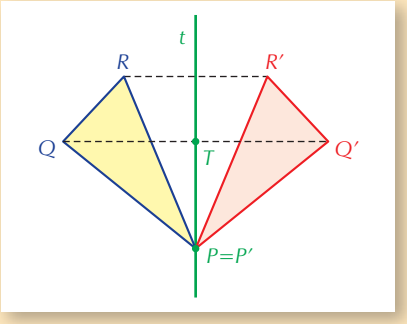
A $t \cdot t$ szorzatot t^2 jelöléssel is írhatjuk.



Irányítástartó transzformációk szorzata irányítástartó. Páros sok irányításváltó transzformáció szorzata irányítástartó, páratlan sok irányításváltóé pedig irányításváltó transzformáció lesz.

Foglaljuk össze a leggyakrabban használt egybevágósági transzformációkat!

Definíció



Tengelyes tükrözés esetén megadjuk a sík egy t egyenesét. Ezt az egyenest a tükrözés tengelyének nevezzük.

Ha egy P pont illeszkedik a t tengelyre, akkor a képe önmaga lesz, azaz a tengely pontonként fix.

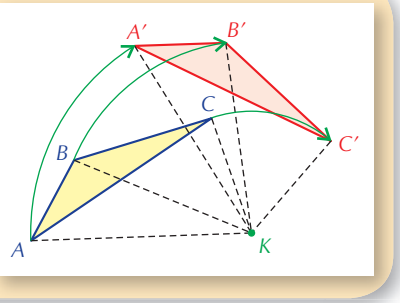
Ha egy Q pont nem illeszkedik t-re, akkor a Q pontból merőlegest állítunk a tengelyre, a merőleges talppontja legyen a T pont. A QT egyenesre a T pontból, a Q-val ellentétes irányban felmérjük a QT szakaszt. Az így kapott Q' pont lesz a Q képe *(ábra)*.

Definíció

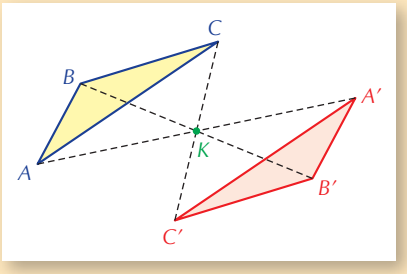
Pont körüli forgatás esetén megadjuk a sík egy K pontját, valamint nagyságával és irányával megadjuk az elforgatás szögét is.

A K pont képe önmaga.

Ha egy A pont nem esik egybe a K ponttal, akkor az A pont képe az az A' pont lesz, amelyre $KA = KA'$ és az AKA' szög nagysága és iránya az elforgatás szögével egyezik meg *(ábra)*.



Definíció



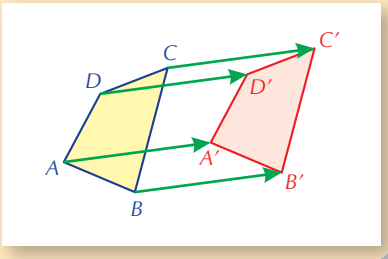
Középpontos tükrözés esetén megadjuk a sík egy K pontját, ez a tükrözés „középpontja”.

A K pont képe önmaga.

Ha egy A pont nem esik egybe a K ponttal, akkor az A pont képe az az A' pont lesz, amelyre $KA = KA'$, és az AA' szakaszon a K pont felezőpont *(ábra)*. A középpontos tükrözés azonos a pont körüli 180°-os (vagy −180°-os) forgatással.

Definíció

Eltoláshoz megadunk egy **v** vektort. (A vektorokat egy irányított szakasszal szemléltetjük.) A **v** vektorral megadott eltolásnál bármely A ponthoz az A kezdőpontú $\mathbf{v} = \overrightarrow{AA'}$ vektor A' végpontját rendeljük *(ábra)*.



Az egybevágósági transzformációk legfontosabb **tulajdonságai**:
távolságtartók, egyenestartók (egyenes képe egyenes), szögtartók.

A tengelyes tükrözés az alakzatok körüljárási irányát megfordítja. A pont körüli forgatás, a középpontos tükrözés és az eltolás az alakzatok körüljárási irányát megtartja.

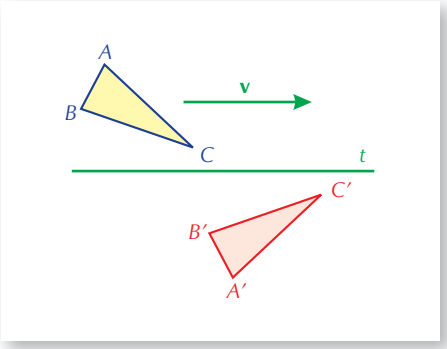
Vizsgáljuk meg a fixpontok száma alapján az egybevágósági transzformációkat!

1. eset: Egy egybevágósági transzformációnak van legalább három, nem egy egyenesre illeszkedő fixpontja. Egyetlen ilyen transzformáció van, és ez az **identitás**.
Következményként megállapíthatjuk, hogy amennyiben egy egybevágósági transzformációnak van legalább három, nem egy egyenesre illeszkedő fixpontja, akkor minden pont fix.

2. eset: Egy egybevágósági transzformációnak van két (de nincs három, nem egy egyenesre illeszkedő) fixpontja. A további fixpontjai (ha vannak) ezen két fixpontra illeszkedő egyenesen találhatók. Igazolható, hogy az eredeti két fixpontra illeszkedő egyenes által meghatározott **tengelyes tükrözés** az egyedüli megfelelő transzformáció.

3. eset: A szemlélet alapján könnyen elfogadható, hogy az egy fixpontú egybevágósági transzformáció csak a **pont körüli forgatás** lehet. A bizonyítástól most is eltekintünk.

4. eset: Fixpont nélküli egybevágósági transzformációként eddig csak az **eltolás**t ismertük meg. Bizonyítható, hogy kétféle ilyen transzformáció létezik. A másik transzformáció egy ***v*** vektorral történő eltolás és a vektorral párhuzamos t tengelyű tükrözés szorzata *(ábra)*, ennek **csúsztatva tükrözés** a neve.



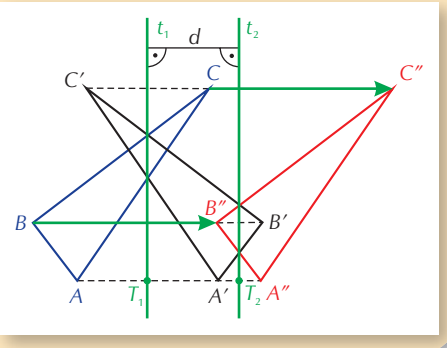
Öt egybevágósági transzformációt kaptunk. (Igazolható, hogy egybevágósági transzformációk bármely szorzata ezek valamelyikével egyenlő.) A **középpontos tükrözés**t nem szerepeltettük a felsorolásban, hiszen az nem más, mint a pont körüli 180°-os forgatás.

Az egybevágósági transzformációkat csak tengelyes tükrözések szorzatával is elő lehet állítani. Már az előző években megismerkedhettünk a következő tételekkel.

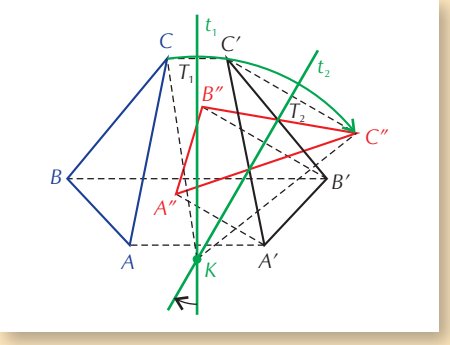
Tétel

Az egymástól $d > 0$ távolságra fekvő párhuzamos tengelyekre való tükrözések szorzata olyan eltolás, amelynek iránya merőleges a tengelyekre, az első tengelytől a második felé mutat, nagysága pedig $2d$ *(ábra)*.

Minden eltolás előállítható két párhuzamos tengelyű tengelyes tükrözés szorzataként.



Tétel



Az egymást K pontban metsző tengelyekre való tükrözések szorzata olyan elforgatás, amelynek középpontja K, a forgatás irányított szöge pedig az első tengelytől a második felé mutató szög kétszeresével egyenlő *(ábra)*.

Minden elforgatás előállítható két metsző tengelyre történő tükrözés szorzataként.

Igazolható a következő tétel is.

Tétel

Minden síkbeli egybevágóság előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként.

Ezek alapján az egybevágóságokat a következő módon is osztályozhatjuk.

Irányításváltó egybevágóságok

– **Tengelyes tükrözés**

– **Csúsztatva tükrözés**: három tengelyre való tükrözés szorzata.

Irányítástartó egybevágóságok

– **Eltolás**: két párhuzamos tengelyre való tükrözés szorzata.

– **Elforgatás**: két metsző tengelyre való tükrözés szorzata.

Természetesen az **identitás** is irányítástartó.

HASONLÓSÁG

Az egybevágóság után a síkbeli (térbeli) hasonlósági transzformációval foglalkoztunk.

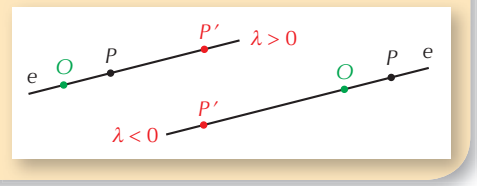
Definíció

Középpontos hasonlóság: Adott egy O pont és egy λ ($\lambda \neq 0$) valós szám. A sík egy tetszőleges P pontjához a következő módon rendeljük a képét:

ha $P = O$, akkor a P pont képe önmaga;

ha $P \neq O$, akkor a P pont képe legyen az OP egyenesnek az a P' pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$.

Ha $\lambda > 0$, akkor a P' pont az OP félegyenesen van; míg ha $\lambda < 0$, akkor a P' és P pontok az O ponttól ellentétes irányban vannak. (Ekkor O „elválasztja” P-t és P'-t.)



Definíció

A **hasonlóság (hasonlósági transzformáció)** a síknak önmagára való aránytartó, kölcsönösen egyértelmű leképezése.

Bizonyítható, hogy minden hasonlóság egy középpontos hasonlóság és egy egybevágóság (valamilyen sorrendben történő) szorzata. Két alakzatot hasonlónak mondunk, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi.

Megállapítottuk a hasonlósági transzformáció fontosabb jellemzőit, **tulajdonságait**:
- Aránytartó (egy szakasz képe és az eredeti szakasz hosszának az aránya $|\lambda|$, ahol λ a hasonlósági transzformáció aránya);
- egyenestartó;
- szögtartó.
- Hasonló síkidomok területének aránya $\frac{t'}{t} = \lambda^2$, hasonló testek térfogatának aránya $\frac{V'}{V} = |\lambda|^3$.

Formai hasonlóságot mutatnak az egybevágó és hasonló háromszögekre megállapított **kritériumok** (elégséges feltételek) is:

Két háromszög egybevágó, ha egyenlő
- 3 oldaluk;
- 2 oldaluk és a közbezárt szög;
- 2 oldaluk és a nagyobbikkal szemközti szög;
- 1 oldal és a rajta fekvő két szög.

Két háromszög hasonló, ha egyenlő
- 3 (megfelelő) oldaluk aránya;
- 2 oldaluk aránya és a közbezárt szög;
- 2 oldaluk aránya és a nagyobbikkal szemközti szög;
- 2 szögük.

Sokszögek egybevágóságára és hasonlóságára is megfogalmazhatunk formailag hasonló elégséges feltételeket:

Két sokszög egybevágó, ha egyenlők
- megfelelő oldalaik és szögeik;
- megfelelő oldalaik és átlóik.

Két sokszög hasonló, ha egyenlők
- megfelelő szögeik, valamint megfelelő oldalaik aránya;
- megfelelő oldalaik és átlóik aránya.

FELADATOK

1. E1 Az a és b egy metsző egyenespár. Tükrözzük a sík egy tetszőleges pontját a-ra, majd a tükörképét b-re, aztán újra b-re, végül a-ra! Mutassuk meg, hogy így visszajutunk az eredeti pontba!

2. E1 Az a és b egy metsző egyenespár. Tükrözzük a sík egy tetszőleges pontját a-ra, majd a tükörképét b-re, és így tovább újra a-ra, aztán b-re! Az így kapott pont az eredeti pontnak a két egyenes metszéspontjára vett középpontos tükörképe lesz. Mekkora a két egyenes hajlásszöge?

3. E2 Szerkesszünk négyzetet, amelynek két szemközti csúcsa egy adott egyenesre, a másik két csúcsa pedig egy-egy másik adott egyenesre illeszkedik!

4. E1 Szerkesszünk trapézt, ha adott a két párhuzamos oldal összege, továbbá az egyik szárának a hossza és a száraknak az alappal bezárt szöge!

5. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2018.)**
Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.)

6. E1 Adott két egybevágó, egyező körüljárású paralelogramma, amelyeknek a megfelelő oldalpárjaik nem párhuzamosak. Szerkesszünk pontot, amely körül az egyik paralelogramma a másikba forgatható!

7. E2 Szerkesszünk négyszöget, ha adottak előírt sorrendben az oldalai és az egyik középvonala!

8. E1 Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC = 25$ cm, $BC = 14$ cm. Milyen hosszú szakaszokra osztják egymást a háromszög magasságai?

9. E1 A 10 cm oldalú szabályos háromszögbe négyzetet írtunk úgy, hogy csúcsai a háromszög oldalain vannak. Mekkora a négyzet oldala?

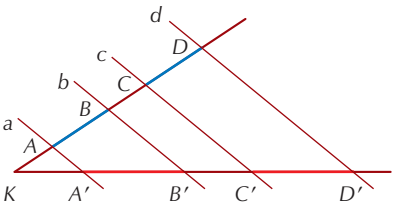
10. E2 Az $ABCD$ trapéz ($AB \parallel CD$) oldalainak hossza $AB = 60$ cm, $BC = 70$ cm, $CD = 40$ cm, $AD = 80$ cm. Az átlók M metszéspontján át párhuzamost húzunk az alapokkal, ez a szárakat az E és G pontban metszi. Számítsuk ki az EM és MG szakaszok hosszát!

11. E2 Az ABC háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húztunk, amik a háromszög területét hat részre osztották. A három keletkezett részháromszög területe x, y és z. Adjuk meg az ABC háromszög területét!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 302–509.

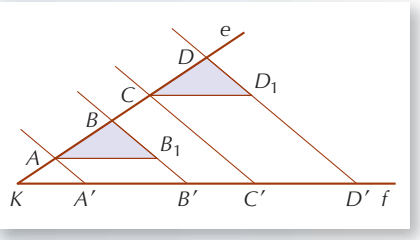
26. A PÁRHUZAMOS SZELŐK TÉTELE

Az ábrán látható a, b, c, d egyenesek párhuzamosak. Ezek az egyenesek metszik a K csúcsú szög két szárát. A párhuzamos szelők szögtartományba eső AA', BB' stb. darabját szelőszakasznak mondjuk.



1. példa Igazoljuk, hogy ha egy szög egyik szárán egyenlő hosszúságú szakaszokat veszünk fel, és azok végpontjaira a másik szárat is metsző párhuzamos egyeneseket illesztünk, akkor a párhuzamos egyenesek által a másik szárból kimetszett szakaszok hossza is egyenlő.

Megoldás Az ábra jelöléseivel: Tudjuk, hogy AA', BB', CC', DD' párhuzamos szakaszok, továbbá $AB = CD$.



Az A ponton át az f félegyenessel húzott párhuzamos egyenes B_1-ben metszi a BB'-t, a C ponton át az f félegyenessel húzott párhuzamos egyenes D_1-ben metszi a DD'-t.

Az ABB_1 és a CDD_1 háromszögekben az AB és a CD oldalak egyenlő hosszúak, a rajtuk lévő szögek páronként egyenlők, mert egyállású szögek, ezért a két háromszög egybevágó. Vagyis $AB_1 = CD_1$.

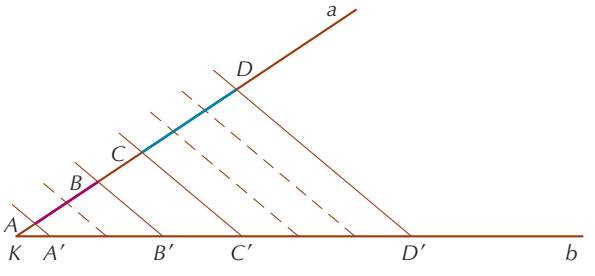
Az $AB_1B'A'$ és a $CD_1D'C'$ négyszögek paralelogrammák, mert szemközti oldalaik párhuzamosak. Ha paralelogrammák, akkor a szemközti oldalaik egyenlők, vagyis $AB_1 = A'B'$, $CD_1 = C'D'$.

Mivel $AB_1 = CD_1$, ezért $A'B' = C'D'$, amit bizonyítani szerettünk volna.

Az előzőeket továbbgondolva vizsgáljunk meg egy olyan esetet is, amikor a szög száraira nem egyenlő hosszúságú szakaszokat mérünk.

2. példa Egy szög egyik szárára mérjünk fel olyan AB és CD szakaszokat, amelyekre $AB:CD = 2:3$. Illesszünk az A, B, C és D pontokra a másik szárat is metsző párhuzamos egyeneseket. Határozzuk meg a párhuzamos egyenesek által a másik szárból kimetszett szakaszok hosszának arányát!

Megoldás Használjuk az ábra jelöléseit! Tudjuk, hogy AA', BB', CC', DD' párhuzamos szakaszok, továbbá $AB:CD = 2:3$.



Az AB szakaszt felezzük meg, a CD szakaszt pedig osszuk fel három egyenlő részre. Így öt egyenlő hosszúságú szakaszt kaptunk. Az osztópontokra is illesszünk az előzőkkel párhuzamos egyeneseket. Az előzőekben bebizonyított állításunk miatt ezek a párhuzamos egyenesek a szög másik száráról is öt egyenlő hosszúságú szakaszt vágnak ki. Ezért $A'B':C'D' = 2:3$.

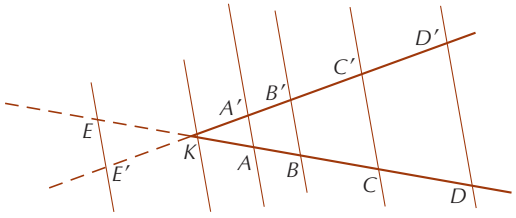
Az előzőekhez hasonló gondolatmenettel bizonyítható lenne az állítás tetszőleges racionális aránynál is. Az is bizonyítható, hogy ha az egyik szárra felmért szakaszok hosszának aránya irracionális, akkor a másik száron kapott megfelelő szakaszok hosszai is ugyanolyan arányúak.

Összesítve a megállapításainkat tétel formájában fogalmazzuk meg. Ezt a tételt a **párhuzamos szelők tételének** nevezzük.

Tétel

Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával.

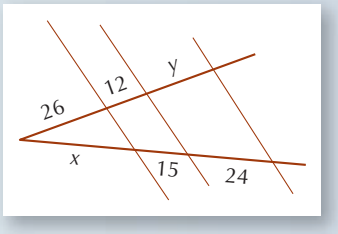
A tételben a párhuzamos egyenesek sorrendje lényegtelen, és a szög szárainak meghosszabbítását is metszhetik. Az arányok felírása így nagyon sokféle lehet.



Pl.: $AB:CD = A'B':C'D'$, $AB:BD = A'B':B'D'$, $AC:BD = A'C':B'D'$, $KB:CD = K'B':C'D'$, $EC:AD = E'C':A'D'$, …

3. példa

A szög szárait párhuzamos egyenesekkel metszettük. A megadott adatokkal számítsuk ki az x, y szakaszok hosszúságát!



Megoldás

A párhuzamos szelők tétele alapján:

$\frac{x}{15} = \frac{26}{12}$, amiből $x = \frac{15 \cdot 26}{12} = 32{,}5$.

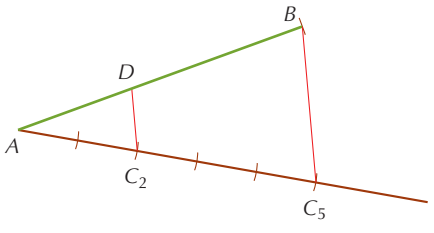
$\frac{y}{12} = \frac{24}{15}$, amiből $y = \frac{12 \cdot 24}{15} = 19{,}2$.

4. példa

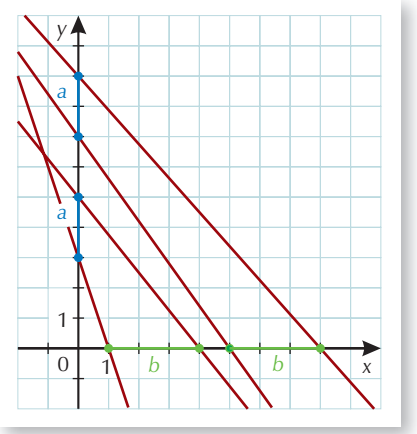
Egy AB szakaszt szerkesztéssel osszunk fel 2 : 3 arányban!

Megoldás

Húzzunk az A pontból kiindulva egy tetszőleges félegyenest. Erre a félegyenesre szintén A-ból indulva mérjünk fel ötször egy tetszőleges szakaszt. Az ötödiknek felmért szakasz C_5 végpontját kössük össze B-vel. C_5B-vel húzzunk párhuzamost C_2 ponton át. Ez az egyenes az AB szakaszt a megfelelő D pontban fogja metszeni.



A szerkesztés helyességét a párhuzamos szelők tétele biztosítja.

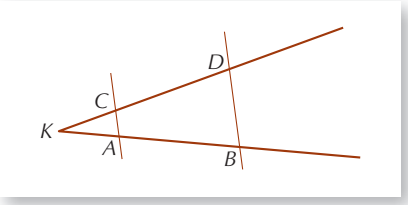


Igaz-e a párhuzamos szelők tételének megfordítása? Ha egy szög két szárát metsző egyenesek egyenlő arányú szakaszokat metszenek ki a szög két szárából, akkor az egyenesek párhuzamosak?

Nagyon körültekintően kell eljárnunk: az ábrán látható, hogy a kapott egyenesek nem párhuzamosak. A párhuzamos szelők tételének megfordítása tehát általános esetben nem igaz. A tétel egy **speciális esetének a megfordítását** a következő alakban fogalmazzuk meg (a bizonyítástól most eltekintünk).

Tétel

Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyek hosszának aránya mindkét száron egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.

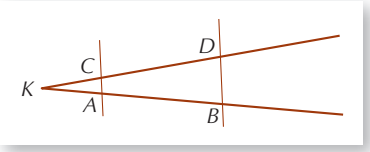


Az ábra jelöléseivel: Ha $\frac{KA}{KB} = \frac{KC}{KD}$, akkor $AC \parallel BD$.

Eddig nem foglalkoztunk a szög szárai közé eső szakaszokkal. Van-e összefüggés a szög szárait metsző párhuzamos egyenesek szárak közé eső szakaszai és a szárakon keletkezett szakaszok között? Erre a kérdésre is bizonyítás nélkül egy tétellel adunk választ. Ez a **párhuzamos szelőszakaszok tétele**.

Tétel

Egy szög szárait metsző párhuzamos egyenesekből a szárak által kimetszett szakaszok hosszának aránya megegyezik a párhuzamos egyenesek által az egyes szárakból kimetszett, a szög csúcsától mért szakaszhosszak arányával.



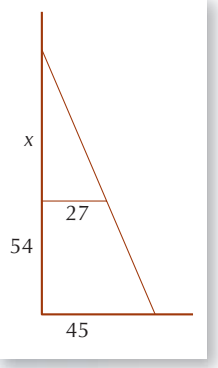
Az ábra jelöléseivel: $\frac{AC}{BD} = \frac{KA}{KB}$, illetve $\frac{AC}{BD} = \frac{KC}{KD}$.

5. példa Vízszintes talajon egy gerendát döntöttünk egy függőleges falhoz. A gerenda alja 45 cm-re, a gerenda 54 cm magasságban lévő pontja pedig 27 cm-re van a faltól. Milyen magasan támaszkodik a gerenda a falhoz?

Megoldás A szöveg alapján készítsünk rajzot!

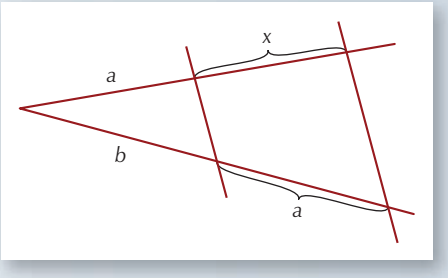
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján: $\frac{x}{x+54} = \frac{27}{45}$, amiből $x = 81$.

Vagyis a gerenda (81 + 54 =) 135 cm magasan támaszkodik a falhoz.



6. példa Szerkesszük meg az a és b szakaszok ismeretében az $\frac{a^2}{b}$ hosszúságú szakaszt!

Megoldás Egy tetszőleges szög két szárára a megfelelő módon (ahogyan az ábrán látjuk) felmérjük az adott szakaszokat. A párhuzamos szelők tételét használva az x a keresett szakasz lesz.

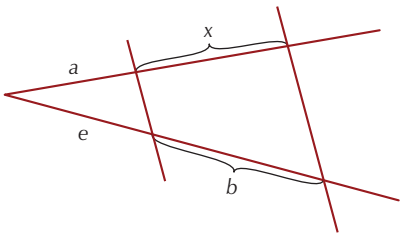


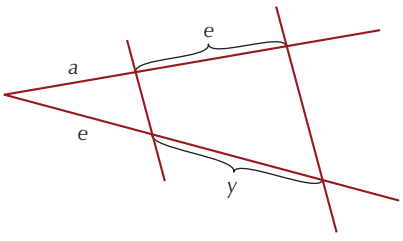
Mivel $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$, ezért $x = \frac{a^2}{b}$.

A párhuzamos szelők tétele segítségével az a és b szakaszok ismeretében megszerkeszthetjük a szakaszok szorzatát, hányadosát, reciprokát és négyzetét is, ami szintén egy-egy szakasz lesz. Azonban az eredmény függ attól, hogy mekkora az egység. Ha pl. valamilyen egységben mérve $a = 1$ és $b = 2$, akkor számértékileg $ab = 2$ (vagyis az eredményszakasz hossza megegyezik b-vel); míg ha pl. ugyanarra a két szakaszra $a = 10$ és $b = 20$, akkor $ab = 200$ (ami már a b szakasz 10-szerese). Ezeknél a feladatoknál tehát meg kell adni az egységszakasz hosszát is (ekkor az eredmény már egyértelmű).

7. példa Szerkesszük meg az a és b szakaszok, valamint az egységszakasz ismeretében az ab, illetve az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ hosszúságú szakaszokat!

Megoldás Legyen e az egységszakasz ($e = 1$), és egy tetszőleges szög száraira az ábrákon látható módon mérjük fel a szakaszokat!





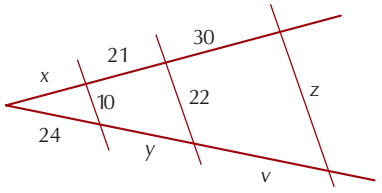
Az első esetben $\frac{x}{b} = \frac{a}{e}$, innen $x = \frac{ab}{e} = ab$.

A második ábrán $\frac{y}{e} = \frac{e}{a}$, innen $y = \frac{1}{a}$. Hasonlóan megszerkesztjük $\frac{1}{b}$-t, majd $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ két szakasz összegzését jelenti.

FELADATOK

1. E1 Szerkesszük meg az AB szakasznak azt a pontját, amely a szakaszt 1 : 5 arányban osztja!

2. E1 Az ábrán látható szögszárakat három párhuzamos egyenessel metszettük. Az adatok ismeretében számoljuk ki az x, y, z és v szakaszok hosszát!



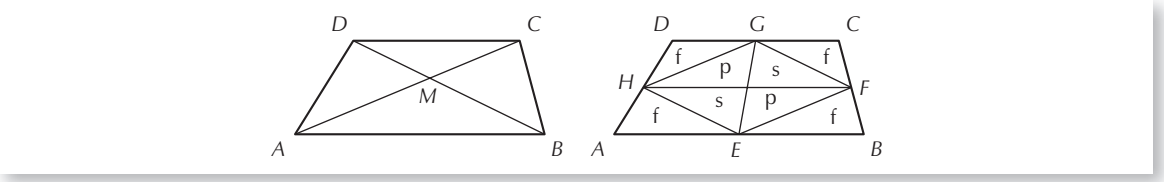
3. E2 Szerkesszünk a szabályos háromszög magasságával egyenlő hosszú szakaszt, ha adott a háromszög kerülete!

4. E2 Szerkesszük meg az a, b és c szakaszok ismeretében a

$a)$ $\frac{bc}{a}$; $b)$ $\frac{a}{b^2}$; $c)$ $\frac{a}{b}$; $d)$ b^2

hosszúságú szakaszt!

5. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2010.)** Egy 90 m^2 területű, trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is az évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként. Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az ABM háromszögbe sárga virágokat, a DMC háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.



a) A tavaszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek be?

Ősszel a másik ábra alapján tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az E, F, G és H pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

b) Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?

6. E2 Az ABC derékszögű háromszög BC befogójára kifelé megrajzoljuk a $BCDE$ négyzetet. A BC és AE egyenesek metszéspontja legyen P. Adjuk meg a CP szakasz hosszát a derékszögű háromszög befogóinak ismeretében!

7. E2 Az AB szakaszon vegyünk fel egy C pontot. Az AB szakasz ugyanazon oldalára megrajzoljuk az $ACDE$ és a $BCGH$ négyzetet. A DC egyenest a BE egyenes a P pontban, az AH egyenes pedig a Q pontban metszi. Adjuk meg AC és BC hosszának ismeretében a CQ és a CP szakasz hosszát!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 1038, 1053, 1085, 1087, 1109, 1116, 1131.

27. HÁROMSZÖGEK

A korábbi években bizonyítottuk a háromszög oldalfelező merőlegeseire és szögfelezőire vonatkozó következő tételeket.

Tétel

A háromszög három oldalának felezőmerőlegese egy pontban metszi egymást.

Az akkori bizonyításból az is kiderült, hogy ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom csúcsától, ezért ez a pont a *háromszög köré írt kör*ének középpontja.

Tudjuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszögnél az átfogó felezőpontjában, tompaszögű háromszög esetén pedig a háromszögön kívül található.

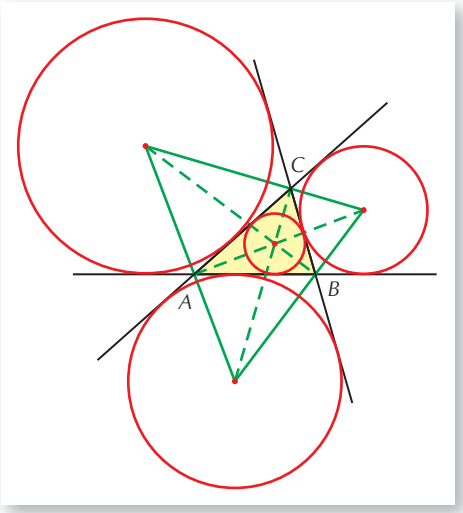
Tétel

A háromszög három belső szögfelezője egy pontban metszi egymást.

A bizonyítás során kiderült, hogy a metszéspont mindhárom oldaltól azonos távolságra található, vagyis van olyan kör, amelynek mindhárom oldal az érintője. Ezt a kört a *háromszög beírt körének* nevezzük.

Tétel

A háromszög két külső szögfelezője és a harmadik csúcsnál lévő belső szögfelezője egy pontban metszi egymást.



A bizonyítást ugyanúgy végezhetjük el, mint a három belső szögfelezőre vonatkozót. A tételben szereplő metszéspontnak a háromszög két oldalának meghosszabbításától és a harmadik oldalától mért távolsága egyenlő. Vagyis további három olyan kör van, amelynek a háromszög mindhárom oldalegyenese az érintője. Ezeket a köröket a *háromszög hozzáírt körei*nek nevezzük *(ábra)*.

Ismerjük a magasság és a magasságvonal fogalmát. Tudjuk, hogy a magasságvonal, a magasság és annak hossza nem azonos fogalom. Gyakran csak magasságról beszélünk, de rendszerint a szövegkörnyezet teszi egyértelművé, hogy melyik jelentésre gondolunk.

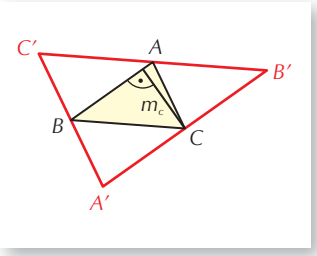
A háromszög magasságvonala a csúcsból a szemközti oldalegyenesre állított merőleges. A háromszögnek három magasságvonala van.

Tétel

A háromszög három magasságvonala egy pontban, a magasságpontban metszi egymást.

Bizonyítás

Az ABC háromszög mindhárom csúcsán keresztül húzzunk egy-egy egyenest, amely a szemközti oldalegyenessel párhuzamos *(ábra)*. Az így rajzolt három egyenes az $A'B'C'$ háromszöget alkotja.



A párhuzamos egyenesek miatt $ABA'C$ és $ABCB'$ paralelogramma, vagyis $AB = CA'$, illetve $AB = B'C$. Ebből következik, hogy C felezőpontja az $A'B'$ szakasznak. $m_c \perp AB$ $AB \parallel A'B'$ miatt; $m_c \perp A'B'$ is teljesül, vagyis az eredeti háromszög m_c magassága az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező merőlegese lesz. Hasonlóan látjuk be a további magasságok esetén is, hogy azok is oldalfelező merőlegesek az $A'B'C'$ háromszögben.

Vagyis az ABC háromszög magasságvonalai egyben az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező merőlegesei. Ezekről tudjuk, hogy egy pontban metszik egymást, ezért az ABC háromszög magasságvonalai is egy pontban, a **magasságpontban** metszik egymást**.**

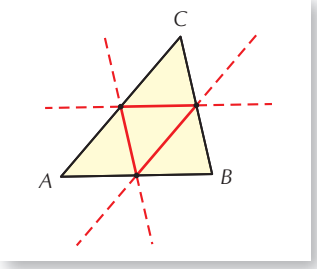
Hegyesszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszög belsejében van.

A derékszögű háromszögnél a három magasság közül kettő egybeesik a befogókkal, ezért a derékszögnél lévő csúcs lesz a magasságpont.

A tompaszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszögön kívülre esik.

A háromszögben **középvonal**nak nevezzük a két oldal felezőpontját összekötő szakaszt *(ábra)*.

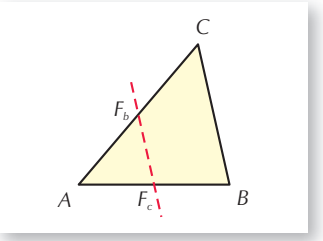
Sokszor a felezőpontokra illeszkedő egyenest is középvonalnak nevezzük.



Tétel

A háromszög középvonala párhuzamos a vele szemközti oldallal és fele olyan hosszú, mint ez az oldal.

Bizonyítás Az A-nál lévő belső szög szárait az F_bF_c középvonal és a BC egyenes úgy metszi el, hogy $\frac{AB}{AF_c} = \frac{AC}{AF_b} = 2$. A keletkezett arányok egyenlősége miatt a metsző egyenesek, az F_bF_c középvonal és BC párhuzamosak. Mivel pedig a fenti arány 2, a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint $BC = 2F_bF_c$.



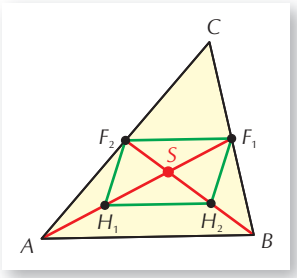
Súlyvonalnak nevezzük a háromszög csúcspontját a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt.

A csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő egyenest is szoktuk súlyvonalnak nevezni.

Tétel

A háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást. Ezt a pontot súlypontnak nevezzük. A súlypont a súlyvonalakat 2:1 arányban osztja két részre úgy, hogy a hosszabb szakasz indul a csúcstól.

Bizonyítás Használjuk az ábra jelöléseit! Az ABC háromszögben megrajzoltunk két súlyvonalat. F_1F_2 a háromszög egyik középvonala, ezért F_1F_2 párhuzamos AB-vel, és $AB = 2 \cdot F_1F_2$.



Az ABS háromszögben a H_1H_2 szakaszt középvonalnak rajzoltuk, ezért H_1H_2 párhuzamos AB-vel, és $AB = 2H_1H_2$.

Ezekből következik, hogy $F_1F_2 = H_1H_2$, és F_1F_2 párhuzamos H_1H_2 -vel, vagyis a $H_1H_2F_1F_2$ négyszög paralelogramma. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért $H_1S = SF_1$. A H_1-et AS felezőpontjaként vettük fel, így $AH_1 = H_1S = SF_1$.

A következő arányt kaptuk: $AS : SF_1 = 2 : 1$. Hasonlóképpen $BS : SF_2 = 2 : 1$.

Ez azt jelenti, hogy a súlyvonalak metszéspontja a súlyvonalak harmadolópontjában van. Ez az arány bármelyik két súlyvonalra fennáll, azaz a harmadik súlyvonalnak is át kell haladnia ezen a ponton. Ez a pont **a háromszög súlypontja**.

FELADATOK

1. E1 Az M magasságpontú ABC háromszögben az AB oldal felezőpontja F, a köré írt kör középpontja pedig O. Igazoljuk, hogy az OF szakasz hossza pontosan az MC szakasz felével egyenlő!

2. E1 Adott egy rombusz. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek a négy csúcsától egyenlő távolságban haladnak!

3. E2 Igazoljuk, hogy $A_bA_c = b + c$, ahol b és c a háromszög oldalai a szokásos jelölés szerint, A_b a b oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja az a oldalegyenessel, A_c pedig a c oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja az a oldalegyenessel!

4. E2 Igazoljuk, hogy $C_aC_0 = a$, ahol a a háromszög oldalának hossza a szokásos jelölés szerint, C_a az a oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja a c oldallal, C_0 pedig a c oldal és a beírt kör érintési pontja!

5. E2 Az ABC nem egyenlő szárú háromszögben M a magasságpont, O a köré írt kör középpontja, F pedig az AB oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy az $OFMC$ trapéz párhuzamos oldalainak összege 15 cm. Mekkora a trapéz hosszabb alapja?

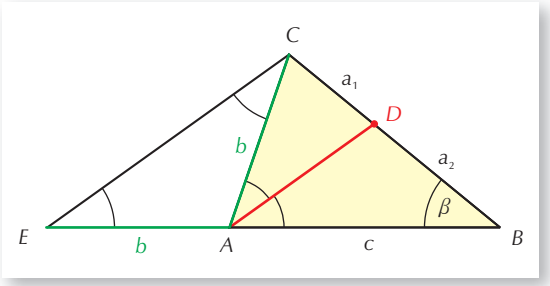
6. E2 Igazoljuk, hogy a háromszög oldalait felező pontok által meghatározott háromszögnek és a magasságok talppontjai által meghatározott háromszögnek ugyanaz a köré írt köre!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 510–530, 554–603.

28. A SZÖGFELEZŐK OSZTÁSARÁNYÁRÓL

Vizsgáljuk meg, hogy a háromszög belső szögfelezője mekkora részekre osztja a szemközti oldalt!

Az ABC háromszög α szögének szögfelezője a szemközti oldalt a D pontban metszi, így az a oldalt egy a_1 és egy a_2 hosszúságú darabra vágja. Az AC oldalt rámásoljuk a háromszögön kívül az AB oldal egyenesére *(ábra)*. Így kapjuk az E pontot.



Az ACE háromszög egyenlő szárú, ezért $AEC\sphericalangle = ACE\sphericalangle$. E két szög összege az ACE háromszög A-nál lévő külső szögével, vagyis α-val egyenlő, azaz $AEC\sphericalangle = ACE\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Mivel az AD szögfelező, ezért $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. EC és AD párhuzamosak, mert $BAD\sphericalangle = BEC\sphericalangle$ egyállású szögek (vagy $BAD\sphericalangle = ECA\sphericalangle$ váltószögek). A párhuzamos szelők tétele alapján ekkor a megfelelő szakaszok aránya megegyezik: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c}{b}$.

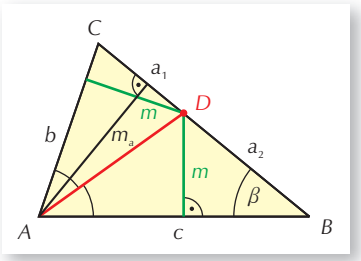
Ezzel bebizonyítottuk a háromszög belső szögfelezőjének osztásarányáról szóló tételt. (Nem bizonyítjuk, de igaz az állítás megfordítása is: ha $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c}{b}$, akkor AD szögfelező.)

Tétel

(Szögfelezőtétel) Bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a másik két oldal hosszának arányában osztja két részre.

A háromszög szögfelezőjének osztásarányáról szóló tételt bizonyíthatjuk hasonlósággal is, de most egy területszámításon alapuló bizonyítást adunk.

Az ABC háromszög α szögének szögfelezője a szemközti oldalt az előzőekhez hasonlóan egy D pontban metszi. Mivel D illeszkedik a szögfelezőre, ezért D az AB és az AC oldalegyenesektől egyenlő távolságra van. Ez a távolság az ábrán m.

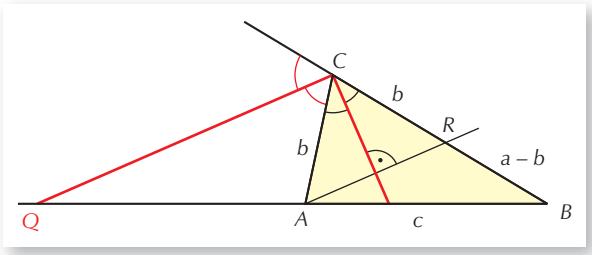


Írjuk fel kétféleképpen az ADC és az ABD háromszögek területének kétszeresét:

$b \cdot m = a_1 \cdot m_a$,

$c \cdot m = a_2 \cdot m_a$.

A második egyenletet az elsővel elosztva kapjuk, hogy $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c}{b}$. Az állítást igazoltuk.



A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a másik két oldal hosszának arányában osztja két részre. Ennek ismeretében felmerül a kérdés, hogy a külső szögfelező milyen pontban metszheti a szemközti oldalegyenest?

Vegyük fel az ABC háromszöget és a C csúcsnál lévő külső szögfelezőjét *(ábra)*. Ez a szögfelező a szemközti oldal egyenesét a Q pontban metszi. (Természetesen $AC \neq BC$, hogy legyen metszéspont.)

Az A pontra illeszkedő, CQ egyenessel párhuzamos egyenes a BC-t R pontban metszi. Tudjuk, hogy az egy csúcshoz tartozó külső és belső szögfelező merőleges egymásra. A C csúcsból induló belső szögfelező ezért merőleges CQ-ra, és így az AR egyenesre is. Vagyis az RAC háromszög egyenlő szárú, mivel szögfelezője merőleges a szemközti oldalra, azaz $AC = RC = b$.

A QBC szögtartományt elmetszettük a QC és AR párhuzamos egyenesekkel, így alkalmazhatjuk a párhuzamos szelők tételét. Ez alapján $\frac{QA}{QB} = \frac{CR}{CB} = \frac{b}{a}$.

Vagyis a külső szögfelezőre is találtunk arányt (ami formailag hasonlít a belső szögfelező osztásarányára).

Tétel

Ha a háromszög egyik oldalának egyenesét a szemközti csúcsból induló külső szög szögfelezőjével metsszük, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból induló két oldal hosszának aránya.

Látható, hogy ha a fenti megfogalmazásban a **külső szög szögfelezőjét** a **belső szög szögfelezőjére** cseréljük, akkor a háromszög belső szögfelezőjének osztásarányáról szóló tételt kapjuk.

FELADATOK

1. E1 Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelező a szemközti oldalt D, a külső szögfelező pedig az E pontban metszi. Tudjuk, hogy a B csúcsnál nagyobb szög van, mint a C csúcsnál. Fejezzük ki a háromszög oldalhosszainak segítségével a CD, DB, BE szakaszok hosszát!

2. E2 Az ABC háromszögben az oldalhosszak: $a < b < c$. Fejezzük ki a legnagyobb belső szög belső és külső szögfelező szakaszának négyzetösszegét az oldalhosszakkal!

3. E2 A 12, 13, 14 oldalhosszakkal megadott háromszögben a leghosszabb oldalhoz tartozó súlyvonalat mekkora darabokra vágja a legkisebb szög szögfelezője?

4. E1 Egy háromszögben a BC oldalhoz tartozó szögfelező BD és CD részekre osztja a BC oldalt. A BD hosszáról tudjuk, hogy a BC hosszának a 40%-a, CD hossza 7,2 cm, és $AC - AB = 5$. Mekkorák a háromszög oldalai?

5. E1 Az ABC háromszögben $AB = 10$ cm, $AC = BC = 14$ cm. A CF szögfelezőt az M magasságpont, az S súlypont, a beírt kör K középpontja és a köré írt kör O középpontja öt szakaszra osztja. Mekkorák ezek a szakaszok?

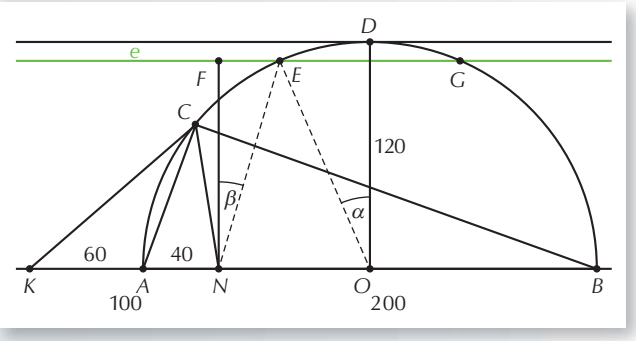
Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 1132–1139, 1379–1385.

EL TUD-E MENEKÜLNI A NYÚL? (Olvasmány)

Példa Az egyenes úton egymástól s távolságra egy kutya és egy nyúl ül. Az úttal párhuzamosan h távolságra húzódik egy erdő. A nyúl sebessége sík terepen v, a kutyáé $1{,}5v$, de az erdőben már a nyúl a gyorsabb. Vajon a nyúl el tud menekülni? (Milyen irányba fusson a menekülő nyúl?)

A modellezés során feltehetjük, hogy a kutya és a nyúl egyszerre pillantják meg egymást, egyszerre kezdenek el futni, és egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek. (Konkrét számadatok: $s = 100$ m, $h = 110$ m, $v = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.)

Megoldás Az ábrán K a kutya, N a nyúl kezdeti helyzetét jelzi. A nyúlnak kézenfekvő gondolat megpróbálkozni a legrövidebb úttal, azaz a KN útra merőlegesen elindulni. 110 métert kell megtennie ahhoz, hogy az erdőt elérje (az ábrán F pont), ezalatt a kutyának $KF = \sqrt{110^2 + 100^2} \approx 148{,}7$ méter utat kell haladnia. De amíg a nyúl 110 métert tesz meg, azalatt a kutya 165 métert tud megtenni (sebessége 1,5-szerese a nyúl sebességének), és mivel $165 > 148{,}7$, ebben az irányban a nyúl nem tud elmenekülni.



A nyúlnak tehát a 90°-os szögnél nagyobb, tompaszögű iránnyal kell megpróbálkoznia.

A nyúl tetszőlegesen sok irányt választhat, próbáljuk általában is meghatározni a találkozási pontokat.

Ha az úton egymás felé futnának, olyan A pontban találkoznának, amelyre $\frac{KA}{AN} = \frac{3}{2}$, azaz $KA = 60$ m, $AN = 40$ m. Ha pedig az úton a nyúl távolodik a kutyától, akkor a B találkozási pontra $\frac{KB}{NB} = \frac{100 + NB}{NB} = \frac{3}{2}$, innen $NB = 200$ m. A lehetséges találkozási pontok halmazából ismerjük tehát az A és B pontokat.

Ha most egy tetszőleges C találkozási pontot tekintünk *(ábra)*, észrevehetjük, hogy $\frac{CK}{CN} = \frac{AK}{AN} = \frac{3}{2}$, vagyis a KNC háromszögben CA belső szögfelező. Ugyanígy $\frac{CK}{CN} = \frac{BK}{BN} = \frac{3}{2}$, ezért CB a KNC háromszög külső szögfelezője. Mivel a háromszög adott csúcsú belső és külső szögfelezői merőlegesek egymásra, azt kaptuk, hogy $ACB\sphericalangle = 90°$, azaz C rajta van az AB átmérőjű Thalész-körön.

Érdekes eredményt kaptunk: ebben a modellben a lehetséges találkozási pontok halmaza a fenti Thalész-kör. (Igazolható, hogy a kör minden pontja megfelel, azaz lehet találkozási hely.)

A kör O középpontja az AB szakasz felezőpontja, sugara $\frac{AN + NB}{2} = OD = 120$ méter. Ha az erdő határa $OD = 120$ méternél messzebb lenne az úttól, akkor a nyúl már nem tud elmenekülni. A $h = 110$ méter esetén a nyúlnak az EG szakaszt kell megcéloznia az erdőszélen.

(Könnyen kiszámolhatjuk az ábrán jelölt fontosabb adatokat is. $\cos\alpha = \frac{110}{120}$, innen $\alpha \approx 23{,}6°$; $EG = 2 \cdot 120 \cdot \sin\alpha \approx 95{,}9$ m; $FE \approx 32$ m; $\operatorname{tg}\beta = \frac{32}{110}$, innen $\beta \approx 16{,}2°$. Hasonlóan számolva $FNG\sphericalangle \approx 49{,}3°$.)

Megjegyzés

A sebesség- és távolságértékeket az egyszerűbb számolás miatt választottuk, de természetesen más sebességértékekre is hasonló eredményt kapunk. Az elemi geometria nagyon sok egyszerűen megfogalmazható, szép tételt ismer. A fenti probléma eredményeképpen talált körvonal az ún. Apollóniosz-kör.

Az ezzel kapcsolatos tétel: Ha adott K és N pont a síkon, akkor azon C pontok halmaza, amelyekre $\frac{CK}{CN}$ állandó érték ($\neq 1$), egy kör.

Apollóniosz (Kr. e. 260?–170?) görög csillagász és matematikus volt, az egyik legnagyobb geométer. Fő műve a 8 kötetes „Konika (Kúpszeletek)”, ebből 7 kötet maradt fenn. Elveszett művei közül töredékeiben ismeretes az „Érintkezési pontok” című. Ebben szerepelnek azok a nevezetes Apollóniosz-féle körérintési feladatok, melyekben három adott körhöz érintőkör szerkesztendő, ha megengedjük, hogy az adott körök helyett egyenes vagy pont is szerepelhessen.

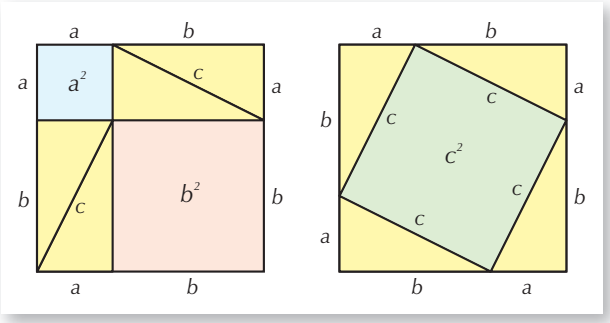
Forrás: Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, 1974

29. PITAGORASZ-TÉTEL, THALÉSZ-TÉTEL

A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel, valamint ezeknek a tételeknek a megfordítása nagyon fontos szerepet játszik az elemi geometriában. Eddig is használtuk ezeket az állításokat, most megnézzük mind a négy állítás egy-egy bizonyítását.

Tétel

Pitagorasz-tétel: Derékszögű háromszögben a két befogó hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével. A szokásos jelölésekkel: $a^2 + b^2 = c^2$, ahol a és b a befogók, c pedig az átfogó hossza.



Bizonyítás

A tétel egyik legismertebb átdarabolásos bizonyítása leolvasható az ábráról.

Tétel

A **Pitagorasz-tétel megfordítása:** Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldalhosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. (Amely oldalhosszaknak a négyzetösszegét vettük, az a két oldal a két befogó.)

Bizonyítás

Gondolkodjunk indirekt módon! Tegyük fel, hogy igaz az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés, de az a, b, c oldalhosszúságú háromszög nem derékszögű.

Az a és a b befogójú derékszögű háromszögnek legyen d az átfogója. Ekkor a feltevés szerint $d \neq c$. Erre a derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tétel szerint: $a^2 + b^2 = d^2$, azaz $a^2 + b^2 \neq c^2$. Ez azonban ellentmond a feltevésünknek.

A feltételezésünk nem igaz, vagyis az a, b, c oldalhosszúságú háromszög derékszögű.

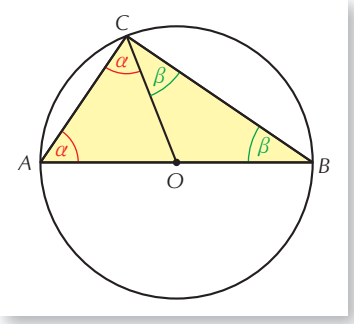
Az eddigiekhez kapcsolódik két fontos állítás, amelyeket bizonyítás nélkül közlünk:
Ha $a^2 + b^2 > c^2$, akkor a háromszög c oldallal szemközti γ szöge hegyesszög.
Ha $a^2 + b^2 < c^2$, akkor a háromszög c oldallal szemközti γ szöge tompaszög.

Tétel

Thalész-tétel: Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal bármely ezektől eltérő pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk. A derékszögű háromszög átfogója a kör átmérője lesz.

Bizonyítás

Az O középpontú kör AB átmérőjére rajzolt megfelelő ABC háromszögben a szögek jelölését az ábra mutatja. Az A-nál és a B-nél a szokott módon α és β található.



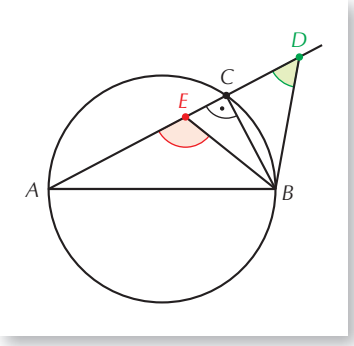
Az OC sugár megrajzolásával két egyenlő szárú háromszöget kapunk. Tudjuk, hogy $AO = BO = CO$, hiszen ezek a kör sugarai.

Mivel az AOC háromszög egyenlő szárú, ezért ebben a háromszögben C-nél is α van.

Mivel a BOC háromszög egyenlő szárú, ezért ebben a háromszögben C-nél is β van.

Az ABC háromszögben a belső szögek összege: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$, azaz $\alpha + \beta = 90°$.

Az $\alpha + \beta$ éppen az ABC háromszög C-nél lévő szöge. Ezzel igazoltuk, hogy a háromszög valóban derékszögű, és AB az átfogója.



Könnyen belátható a Thalész-tétel felhasználásával, hogy ha egy kör AB átmérőjének végpontjait összekötjük a kör egy külső D pontjával, akkor a pontnál hegyesszöget kapunk. Ha a kör egy belső E pontjával kötjük össze az átmérő végpontjait, akkor pedig a pontnál tompaszög lesz.

Az ábrán például $ADB\sphericalangle < 90°$, $ACB\sphericalangle = 90°$, $AEB\sphericalangle > 90°$.

A **Thalész-tétel megfordítása** is bizonyítható ezen állítások felhasználásával.

Tétel

Ha egy AB szakasz valamely C pontból derékszögben látszik, akkor ez a pont illeszkedik az AB átmérőjű körvonalra.

Bizonyítás

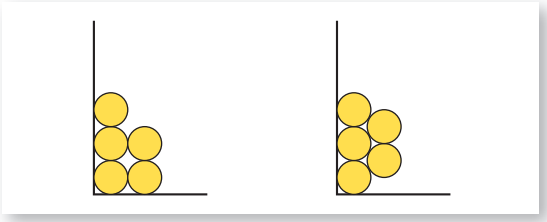
Az AB szakaszra mint átmérőre rajzolt körön belüli pontokból az AB szakasz derékszögnél nagyobb, körön kívüli pontokból pedig derékszögnél kisebb szög alatt látszik. Vagyis olyan C pont, amelyből az AB szakasz derékszögben látszik, csak az AB átmérőjű körön lehet.

FELADATOK

1. E1 Egy téglatest oldalainak hossza n, $n + 1$, $n(n + 1)$, ahol n egész szám. Igazoljuk, hogy a téglatest testátlójának hossza is egész szám!

2. E2 Az a, b, c, d, e növekedő sorrendben felsorolt, öt egymást követő egész szám. Egy téglatest éleinek mérőszáma: a, b, c. Milyen értékek esetén fordulhat elő, hogy a téglatest testátlója egy olyan derékszögű háromszög átogója lesz, amelynek két befogója d és e?

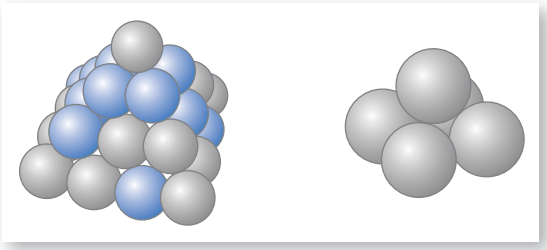
3. E2 Egy 36 cm-szer 40 cm-es tepsiben 2 cm-es sugarú pogácsákat szeretnénk megsütni. Az ábrán látható elrendezések közül melyik esetben fér több pogácsa a tepsibe?



4. E1 Egy h hosszúságú húr a rá merőleges átmérőből egy a hosszúságú (a sugárnál kisebb) darabot vág le. Mekkora a kör sugara?

5. E1 Két egybevágó kör érinti egymást. Húzzunk érintőt az egyik kör középpontjából a másik körhöz! Az így kapott érintési pontból is húzzunk érintőt a másik körhöz. Adjuk meg ennek az érintőszakasznak a hosszát a sugár segítségével!

6. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2020.)**
Egy társasjátékban a játékosok egyforma méretű golyókból több rétegű piramist építenek *(ábra)*. A kétrétegű piramis 5 golyóból áll. Az alsó réteget alkotó 4 golyót egy vízszintes síklapon helyezzük el úgy, hogy az egymás melletti golyók érintsék egymást, középpontjaik pedig egy négyzet csúcsai legyenek. A golyók sugara 1 cm.
Számítsa ki a kétrétegű piramis magasságát!



7. E2 Egy 12 cm sugarú körből egy 8 cm magasságú körszeletet levágtunk, és beleírtuk a lehető legnagyobb kört. Mekkora annak a két körnek a sugara, amely érinti a körszelet körívét és a határoló egyenes szakaszát, valamint a beírt kis kört is?

8. E2 Adott két körlemez, melyeknek nincs közös pontja. A körök középpontjait összekötő szakasz, mint átmérő fölé rajzolt kör a két közös külső érintőt két-két pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy ezen négy pont által meghatározott négyszög átlói a körök közös belső érintői! (KöMaL B. 4468.)

9. E2 Igazoljuk, hogy egy különböző oldalhosszúságú háromszögben a három oldalfelező pont és egy magasságtalppont húrtrapézt határoz meg!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 531–553, 1330–1455.

Pitagorasz szobra Számosz szigetén (Görögország)

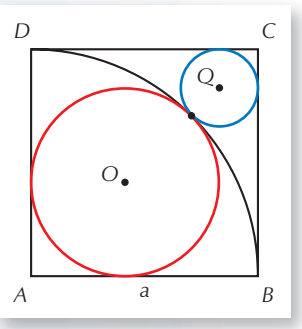
RÓZSAABLAKOK (Olvasmány)

Az építészetben gyakran használt díszítőelemek a különböző érintkező körívekből álló ablaktáblák. Az egyházi épületek hagyományos díszítőeleme például a rózsaablak.

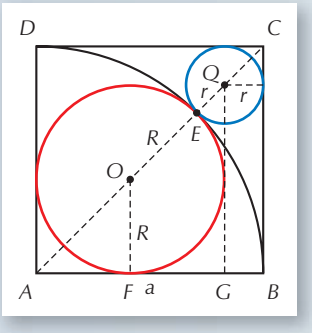
Ebben az olvasmányban kiszámítjuk néhány egyszerűbb díszítőelem-típus köríveinek a sugarát. A megoldáshoz elegendő a Pitagorasz-tétel, bár a bonyolultabb feladatoknál a tételt többször is fel kell írnunk.

Fontos felhasznált ismeret, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontjába húzott sugárra; valamint hogy ha két kör érinti egymást, akkor a középpontjaikat összekötő egyenes (az ún. centrális) átmegy az érintési ponton. A megoldások során mindig ki kell használnunk ezeket az érintési feltételeket.

1. példa Az $ABCD$ négyzet alakú ablaktáblába először az A középpontú, BD negyedkör alakú ablakkeretet szerkesztik meg, majd egy-egy további kör alakú díszítőelemet is beépítenek. (Ezek az ábrán látható módon érintkeznek az eredeti kerettel és a negyedkörrel is.) Mekkora az O és Q középpontú díszítő körök sugara, ha $AB = a$?



Megoldás Az ábra hasonlóság erejéig meghatározott, így várhatóan $AB = a$-tól lineárisan függ a beírt körök sugara.



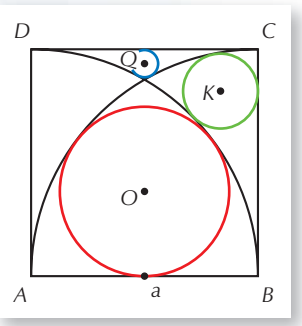
Legyen F és G az O, illetve Q merőleges vetülete AB-n. Jelölje R és r az O, illetve Q középpontú körök sugarát, ekkor $OF = R$. Az AC átló az ábra szimmetriatengelye, ezért a két kör a BD körív és az AC átló E metszéspontjában érinti egymást és a BD körívet.

Mivel A, O, E, Q, C egy egyenesen van és $OE = R$, így $AO = a - R$; valamint $EQ = r$ és $AQ = a + r$.

AFO egyenlő szárú derékszögű háromszög (AC szimmetriatengely). Innen $a - R = \sqrt{2}\,R$, azaz $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2}-1)$.

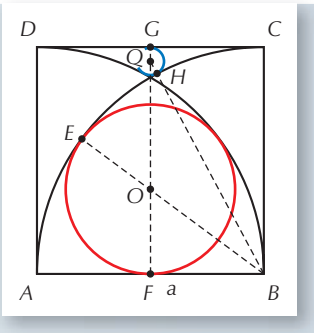
Hasonlóan az AGQ egyenlő szárú derékszögű háromszögben $a + r = \sqrt{2}\,GQ$, és mivel $GQ = a - r$, így $a + r = \sqrt{2}\,(a - r)$. (Itt használtuk ki, hogy a Q középpontú kör érinti a négyzet oldalait.) Az egyenletből $r = \dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}+1}$, vagy a nevező gyöktelenítése után $r = a(3 - 2\sqrt{2})$.

2. példa Az $ABCD$ négyzet alakú ablaktáblába megszerkesztik az A középpontú BD és B középpontú AC negyedkör alakú ablakkereteket, majd három további kör alakú díszítőelemet is beépítenek. (Ezek az ábrán látható módon érintkeznek az eredeti kerettel és a két negyedkörrel is.) Mekkora az ábrán látható O, Q és K középpontú díszítő körök sugara? ($AB = a$.)



Megoldás Először az O és Q középpontú körök sugarait állapítjuk meg.

Legyen az AB oldal felezőpontja F, a CD oldal felezőpontja G, valamint E és H az ábrán jelölt érintési pontok. Ekkor $OF = R$ és $QG = r$ a keresett sugarak. $BO = BE - R = a - R$, így a BFO derékszögű háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt: $(a-R)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + R^2$. Némi számolás után $R = \frac{5a}{8}$ adódik.



Az érintési feltételek miatt $FQ = a - r$ és $BQ = a + r$. A BFQ derékszögű háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt: $(a+r)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-r)^2$, amiből $r = \frac{a}{16}$.

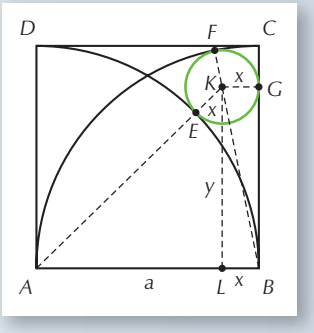
Nehezebb a helyzetünk, ha a K középpontú kör sugara a kérdés.

Az ábra szerint jelölje E, F és G a K középpontú kör és a három alakzat érintkezési pontját és x a keresett sugarat. Az A, E, K, illetve B, K, F pontok egy egyenesbe esnek, ezért $AK = a + x$, $BK = a - x$ és $KG = x$. Legyen L a K merőleges vetülete AB-n, ekkor $LB = x$ és $AL = a - x$. A KL szakasz ismeretlen hosszát jelölje y, ekkor az ALK és BLK derékszögű háromszögekben felírhatunk egy-egy Pitagorasz-tételt:

$$\left.\begin{aligned}(a-x)^2 + y^2 &= (a+x)^2\\ x^2 + y^2 &= (a-x)^2\end{aligned}\right\}$$

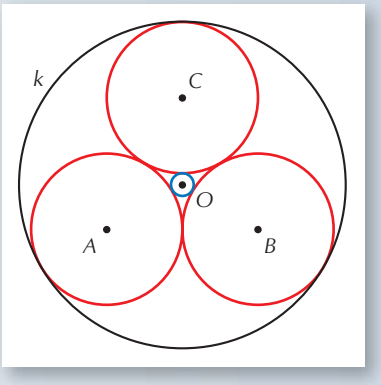
Ha az egyenleteket kivonjuk egymásból, akkor y^2 kiesik.

Eredmény: $x = \frac{a}{6}$.

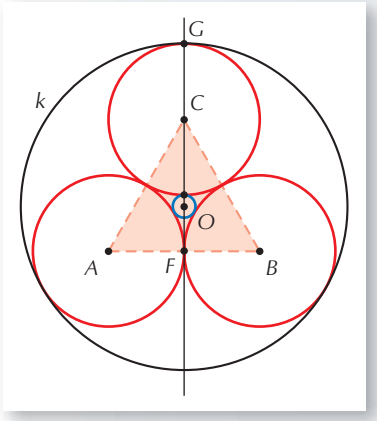


Más típusú érintkező körökről szól a következő feladat.

3. példa Egy a sugarú k körbe három egyenlő sugarú, A, B, C középpontú érintkező kört szerkesztünk úgy, hogy ezek egymást és a k kört is érintik. Mekkora a körök sugara? Mekkora annak az O középpontú kis körnek a sugara, amely mindhárom kört kívülről érinti *(ábra)*?



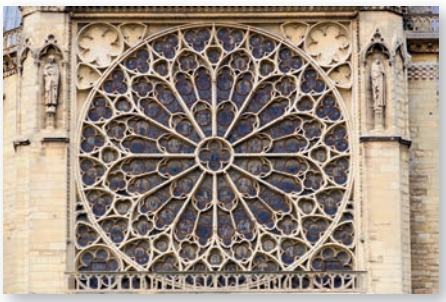
Megoldás Jelölje az A, B, C középpontú körök sugarát R, az O középpontú kis kör sugarát r. ABC szabályos háromszög, és mivel az ábránk forgásszimmetrikus, O az ABC háromszögnek és k-nak is a középpontja. A CO egyenes az ábra tükörtengelye is, az AB szakaszt F-ben metszi, k-t pedig olyan G pontban, ami egyúttal a C középpontú körrel vett érintési pont.



Az ABC háromszög oldala $2R$, a CF magassága $\sqrt{3}\,R$, és mivel CF súlyvonal is, $CO = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,R$. Azt már kihasználtuk, hogy az A, B, C középpontú körök érintik egymást. A k kör érintési feltétele, hogy $OG = OC + R$ teljesüljön.

$a = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,R + R$, innen $R = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = a(2\sqrt{3}-3)$.

Az O középpontú kis kör akkor érinti a C középpontú kört, ha $r = a - 2R$. Innen $r = a - 2a(2\sqrt{3}-3) = a(7-4\sqrt{3})$.



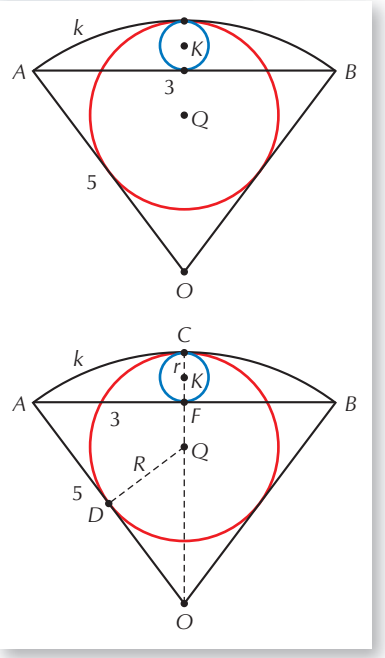
Megjegyzés

Természetesen a gondolatmenettel a fordított irányú feladatok is megoldhatók, tehát amikor három egyenlő sugarú, egymást kölcsönösen érintő kör köré egy mindhármat érintő kört szerkesztünk; vagy adott kör köré szerkesztünk három egyenlő sugarú, egymást és az adott kört is érintő kört.

4. példa

a) Az 5 egység sugarú O középpontú k körben az $AB = 6$ egység hosszú húr kijelöli a kisebb OAB körcikket. A körcikkbe a Q középpontú, R sugarú kört szerkesztjük úgy, hogy érintse a körcikket határoló (rövidebb) AB ívet és az OA, OB határoló sugarakat is. Számítsuk ki R értékét!

b) Az AB húrhoz tartozó (kisebbik) körszeletbe írt, lehető legnagyobb kör középpontja K, sugara r. Számítsuk ki r értékét is!



Megoldás

a) A körcikk és körszelet szimmetriatengelye átmegy az AB húr F felezőpontján, és olyan C pontban metszi az AB körívet, amelyben a két beírt kör érinti k-t. AFO derékszögű háromszög, $AF = 3$, $AO = 5$, így $OF = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Ha a Q pontból OA-ra bocsátott merőleges D-ben metszi OA-t, akkor ODQ derékszögű háromszög, és hasonló OFA-hoz. (O-nál lévő szögük közös.) Mivel $OQ = 5 - R$ (érintési feltétel), így $\frac{R}{5-R} = \frac{3}{5}$. Eredményül $R = \frac{15}{8}$ egység adódik.

Megjegyzés

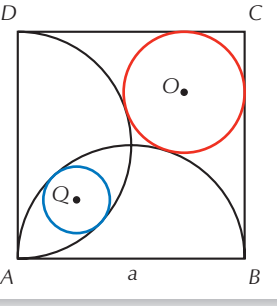
Hasonlóság alkalmazásával belátható, hogy ha k sugara a és $AB = \frac{3}{5}a$, akkor $R = \frac{3}{8}a$.

b) A körcikkbe írható maximális sugarú érintőkör K középpontja az OC szimmetriatengelyre esik. A kör átmérője CF, és mivel $OF = 4$, így $r = \frac{5 - OF}{2} = \frac{1}{2}$ egység.

FELADATOK

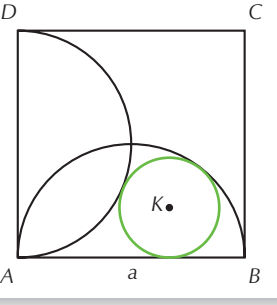
1. E1

Az $ABCD$ négyzet alakú ablaktáblába az AB és AD oldalakra befelé félkör alakú ablakkeretet építenek, majd megszerkesztik az O és Q középpontú érintőköröket *(ábra)*. Az O középpontú kör érinti a két félkört és a négyzet két oldalát, a Q középpontú kör pedig a két félkörívet úgy, hogy sugara a lehető legnagyobb legyen. Mekkora az ábrán látható O és Q középpontú díszítő körök sugara, ha $AB = a$?

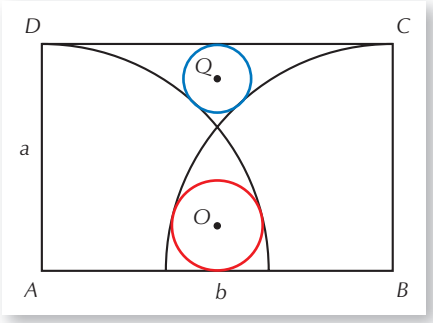


2. E1

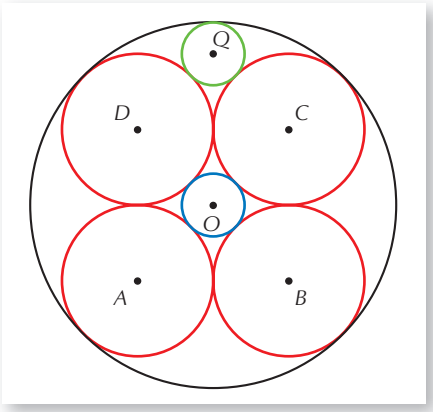
Mekkora az ábrán látható K középpontú díszítő kör sugara, ha a négyzet oldala $AB = a$?



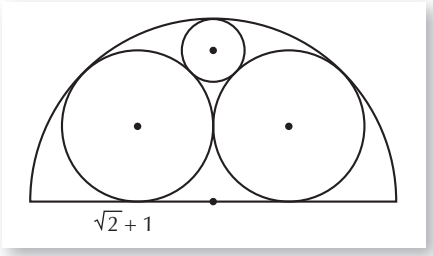
3. E2 A 2. példa ablaktáblájának BC keretét meghosszabbítjuk $AB = b$ hosszúságúra. ($AD = a$ marad.) Számítsuk ki b értékét, ha az így kapott $ABCD$ téglalapba beírt O és Q középpontú díszítő körök sugara éppen egyenlő!



4. E2 Egy O középpontú, a sugarú k körbe érintőköröket szerkesztünk az ábrán látható módon:
– A, B, C, D középponttal egyenlő sugarú, k-t és 2-2 szomszédos kört érintő köröket;
– O középponttal a fenti négy kört érintő kis kört;
– Q középponttal pedig k-t és a fenti négy kör közül kettőt érintő kört. (Ilyenből is négy van.)
Mekkora az érintőkörök sugara?



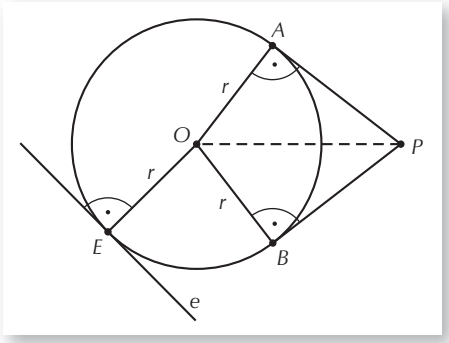
5. E2 **(Próbaérettségi feladat alapján, emelt szint, 2004.)** Egy $r_1 = \sqrt{2}+1$ sugarú félkörbe először két azonos, r_2 sugarú kört írunk, amelyek érintik egymást, majd egy r_3 sugarú kört úgy, hogy az érintse az r_2 sugarú köröket és az r_1 sugarú körívet is *(ábra)*.
Határozza meg r_2 értékét! Mekkora r_3 értéke?



30. A KERÜLETI ÉS KÖZÉPPONTI SZÖGEK TÉTELE

A kör geometriájában több fontos tétellel találkoztunk már, ilyenek például az érintővel kapcsolatos állítások.
1. A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
2. Adott külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.

Az O középpontú kör E pontjába húzott érintőt jelöljük e-vel, a külső P pontból húzott érintők érintési pontjait pedig A-val és B-vel *(ábra)*.



Az 1. állítás következik abból, hogy a kör és annak e érintője tengelyesen szimmetrikus helyzetű az OE egyenesre. (Egy másik bizonyítás a következő: ha az E pontban merőlegest állítunk az OE sugárra, akkor a kör érintőjét kapjuk, mert az O középpontnak ettől való távolsága éppen r. Bármely más, E-re illeszkedő egyenestől az O pont távolsága r-nél kisebb, így az ilyen egyenes belemetsz a körbe.)

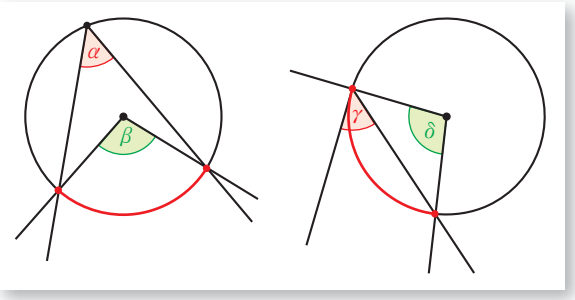
A 2. állítás bizonyításához vegyük észre, hogy a POA és POB háromszögek egybevágók: PO és r hosszú oldaluk, valamint a hosszabbik oldallal szemközti szögük egyenlő. Ebből pedig következik, hogy harmadik oldaluk is egyenlő hosszú: $PA = PB$.

A lecke további részében a körgeometria másik témakörével, a kerületi és középponti szögekkel foglalkozunk.

A **kör kerületi szögé**nek nevezzük azokat a konvex szögeket, amelyek csúcsa a kör kerületére illeszkedik, két száruk pedig egy-egy húrt tartalmaz. Azokat a szögeket, amelyeknek egyik szára egy húrt tartalmaz, a másik pedig egy érintőre illeszkedik, **érintőszárú kerületi szögek**nek nevezzük. Az ábrán α kerületi szög, γ érintőszárú

kerületi szög. A β és a δ szögeket **középponti szögek**nek nevezzük. Ezek csúcsa a kör középpontjában van, száruk két sugárra illeszkedik.

A kerületi szög (illetve a középponti szög) két szára között található a körnek egy íve. Azt mondjuk, hogy a kerületi szög (illetve a középponti szög) ehhez az ívhez tartozik, vagy ezen az íven nyugszik. Láthatóan ugyanahhoz a körívhez végtelen sok kerületi szög, de csak egy középponti szög tartozik.



A következő tétel az egy körben az azonos köríven nyugvó középponti és kerületi szögek közötti kapcsolatot fogalmazza meg.

Tétel

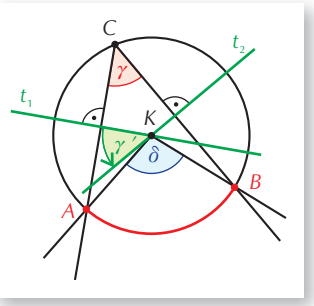
(A kerületi és középponti szögek tétele) Egy körben az azonos íven nyugvó kerületi szögek az ugyanezen az íven nyugvó középponti szög felével egyenlők.

Bizonyítás Az AB ívhez tartozó egyik kerületi szög az $ACB\sphericalangle = \gamma$. Megrajzoltuk az AC húr t_1 felezőmerőlegesét, amelyre illeszkedik a kör K középpontja, és a BC húr t_2 felezőmerőlegesét is, amelyre szintén illeszkedik a kör K középpontja *(ábra)*. Vagyis a két egyenes metszi egymást a K pontban. A két egyenes által meghatározott γ' szög egyenlő a γ szöggel (merőleges szárú szögek).

Tudjuk, hogy két metsző egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzata olyan pont körüli forgatás lesz, amelynek középpontja a két tengely metszéspontja, a forgatás szögének nagysága a két tengely szögének kétszeresével egyenlő, a forgatás iránya az első tengelytől a második felé mutat.

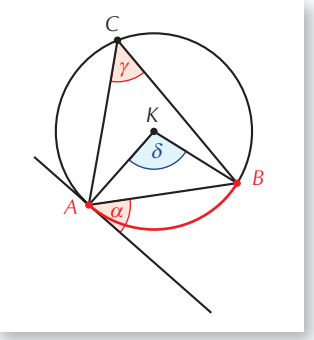
Az A pont tengelyes tükörképe t_1-re C, a C pont tengelyes tükörképe t_2-re B. A felidézett tétel szerint a K pont körüli 2γ szögű forgatás is az A pontot a B-be transzformálja. (Az ábrán ellenőrizhető, hogy a szögek iránya is megfelelő.) Vagyis: $\delta = 2\gamma' = 2\gamma$.

Tetszőleges kerületi szögre megmutattuk az állítás helyességét. (A tétel érintőszárú kerületi szögekre is érvényes, lásd 3. megjegyzés.)



Megjegyzések

1. A fenti tételt az egybevágósági transzformáció tulajdonságainak felhasználásával így is mondhatjuk: Azonos sugárhosszúságú körökben az azonos hosszúságú íveken nyugvó kerületi szögek az ugyanilyen hosszúságú íveken nyugvó középponti szögek felével egyenlők.
2. A középponti és kerületi szögek közötti megállapításunk tartalmazza a Thalész-tételt is. Ebben az esetben a kerületi szög 90°, a középponti szög pedig 180°.
3. (Az ábrán α az AB húrhoz tartozó érintőszárú kerületi szög.) Az érintőszárú kerületi szögek is a középponti szög felével egyenlők. A KAB háromszögben $KAB\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$, s mivel az A pontbeli érintő merőleges a KA sugárra, így $\alpha = \frac{\delta}{2} = \gamma$.



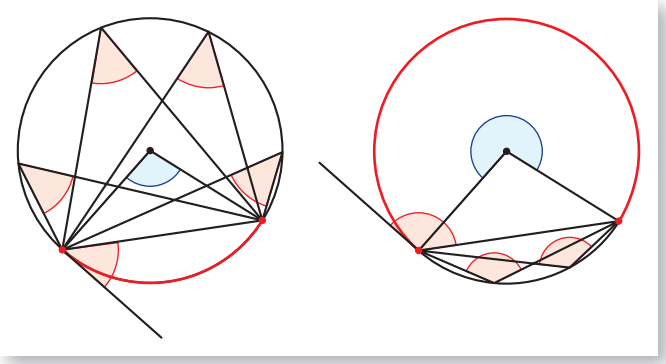
Egy körben egy adott körívhez tartozó valamennyi kerületi szögre vonatkozik a középponti és kerületi szögek tétele, ezért valamennyi kerületi szög egyenlő a középponti szög felével. Így megfogalmazható a **kerületi szögek tétele**.

Tétel

Egy körben az ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek egyenlők *(ábra)*.

Ezek után a következő kérdés fogalmazható meg: Mi azon pontok halmaza a síkon, amelyekből egy adott szakasz adott szögben látszik?

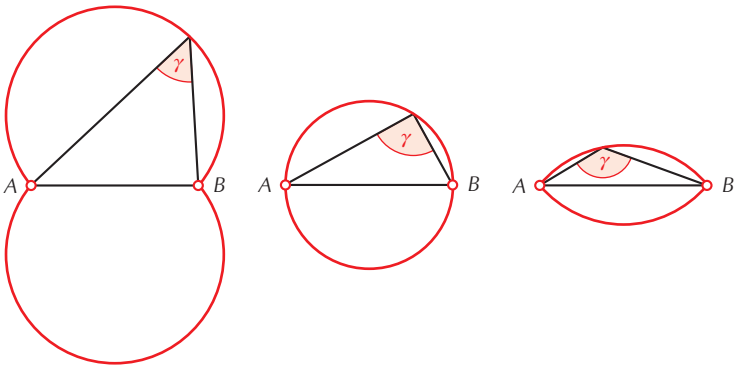
Az előző tétel alapján tudjuk, hogy a keresett ponthalmaznak tartalmaznia kell a körívet, és a körív tükörképét is az adott szakaszra. Belátható, hogy további megfelelő pontok nincsenek a síkon. Megállapításainkat egy tétel formájában fogalmazzuk meg. (A bizonyítást feladatként tűzzük ki.)



Tétel

Két szimmetrikus körív lesz azon pontok halmaza a síkon, amelyekből egy adott AB szakasz adott γ szögben látszik ($0° < \gamma < 180°$). Az adott szakasz a két szimmetrikus körív közös húrja. Nem tartoznak a ponthalmazhoz a húr végpontjai.

A tételben meghatározott ponthalmazt az AB szakasz γ szögű **látószögkörív**ének (vagy **látókör**ének, **látókörív**ének) nevezzük *(ábra)*.



$\gamma < 90°$ $\gamma = 90°$ $\gamma > 90°$

FELADATOK

1. E1 Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, az oldalhoz tartozó magassága és az oldallal szemközti szöge!

2. V Az $ABCD$ húrnégyszögben az ABC szabályos háromszög. Igazoljuk, hogy a D csúcsból induló átló hossza egyenlő a D csúcsból induló két oldal összegével!

3. E2 Szerkesszük meg a négyszöget, ha adott két szomszédos oldalának és két átlójának a hossza, továbbá a két adott oldal által bezárt szöggel szemközti szöge!

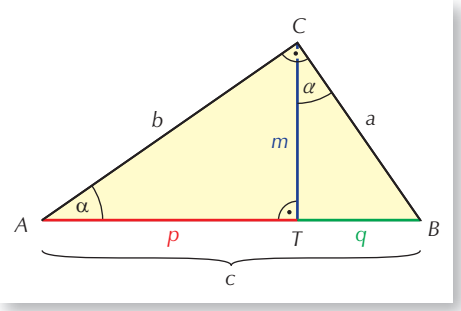
4. E1 Szabályos hétszögben mekkora szöget zárhat be két, azonos csúcsból induló átló?

5. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2007.)** Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsoló berendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsoló berendezés körbe forgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora területű részét öntözi a locsoló berendezés, és ez hány százaléka a telek területének?

6. E2 Adott egy AB szakasz α szögű látóköríve. Bizonyítsuk be, hogy a körívén kívüli pontokból α-nál kisebb, körívén belüli pontokból pedig α-nál nagyobb szögben látszik a szakasz!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 883–972.

31. MÉRTANI KÖZÉPPEL MEGFOGALMAZHATÓ TÉTELEK



Az egybevágósági transzformációk után megismerkedtünk a középpontos hasonlósággal és a hasonlósággal. A derékszögű háromszögekre alkalmazva az itt szerzett tudást két jól használható tételt bizonyíthatunk, aztán a körhöz húzott érintők és szelők között keresünk kapcsolatot.

Az ábrán látható három derékszögű háromszög hasonló, hiszen a kisebb derékszögű háromszögek egy-egy hegyesszöge megegyezik a nagy derékszögű háromszög egyik hegyesszögével. Így:

$$ABC_{\triangle} \overset{(1)}{\sim} ACT_{\triangle} \overset{(2)}{\sim} CBT_{\triangle}.$$

(1): $ABC_{\triangle} \sim ACT_{\triangle}$.
Mivel a háromszögek hasonlók, ezért a megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő.
$\frac{AC}{AB} = \frac{AT}{AC}$, azaz $\frac{b}{c} = \frac{p}{b}$.
Ezt $b^2 = pc$ vagy $b = \sqrt{pc}$ alakban is írhatjuk.
Ugyanígy gondolkodva az $ABC_{\triangle} \sim CBT_{\triangle}$ észrevétel az $a^2 = qc$ összefüggést adja.
Ezek alapján megfogalmazható a **befogótétel.**

Tétel

Derékszögű háromszögben a befogó négyzete egyenlő ugyanezen befogó átfogóra eső merőleges vetületének és az átfogónak a szorzatával.

Ugyanezt az összefüggést mértani közép kapcsolattal is elmondhatjuk.

Tétel

Derékszögű háromszögben a befogó mértani középe az átfogónak és ugyanezen befogónak az átfogóra eső merőleges vetületének.

(2): $CBT_{\triangle} \sim ACT_{\triangle}$.
Mivel a háromszögek hasonlók, ezért a megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő.
$\frac{CT}{TB} = \frac{AT}{CT}$, azaz $\frac{m}{p} = \frac{q}{m}$.
Ezt $m^2 = pq$, vagy $m = \sqrt{pq}$ alakban is írhatjuk.
Ez az összefüggés a derékszögű háromszögek **magasságtétele.**

Tétel

Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság négyzete egyenlő a befogók átfogóra eső merőleges vetületének szorzatával.

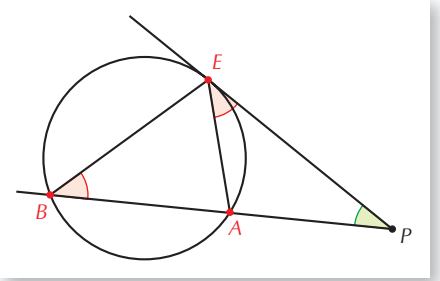
Ez is elmondható mértani közép kapcsolattal.

Tétel

Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek.

A következőkben a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok között keresünk kapcsolatot. Húzzunk egy körhöz egy külső P pontból érintőt és egy szelőt *(ábra)*!

A PE szakaszt **érintőszakasz**nak, a PA és a PB szakaszokat pedig **szelőszakaszok**nak nevezzük.



A PAE háromszögben és a PEB háromszögben a P csúcsnál lévő szög közös.

A kör AE ívéhez tartozó kerületi szög az $ABE\sphericalangle$, ugyanehhez az ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög az $AEP\sphericalangle$. Ezért $ABE\sphericalangle = AEP\sphericalangle$.

Mivel a PAE és a PEB háromszögben két-két szög egyenlő, ezért ezek a háromszögek hasonlók.

A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő:

$\frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PE}$, azaz $PE^2 = PA \cdot PB$.

A kapott állítást, a körhöz húzott **érintő- és szelőszakaszok tételé**t szöveggel is megfogalmazzuk.

Tétel

(Nem érettségi tananyag)

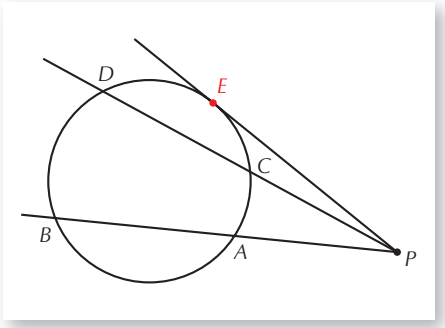
A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakasz mértani közepe a külső pontból húzott bármely szelőre illeszkedő két szelőszakasz hosszának.

A P ponton áthaladó összes szelőre igaz az előző tétel *(ábra)*.

$PE^2 = PA \cdot PB$ és $PE^2 = PC \cdot PD$.

Vagyis: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Az így kapott eredményt újabb tételként fogalmazzuk meg.



Tétel

(Nem érettségi tananyag)

Egy körhöz egy külső pontból húzott szelőkön a szelőszakaszok hosszainak szorzata állandó.

A körhöz csak határ- vagy külső pontból húzhatunk érintőt, ezért az érintőszakasz és a szelőszakaszok közötti összefüggésnek belső pont esetén nincs megfelelője. Az előző tételben megfogalmazottakhoz hasonló összefüggést azonban kereshetünk.

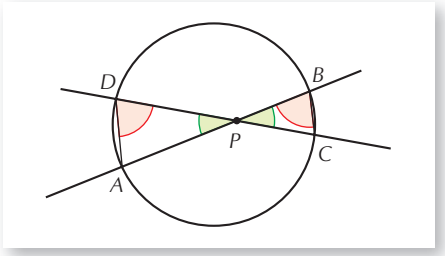
Tétel

(Nem érettségi tananyag)

A kör egy adott belső pontjára illeszkedő szelőkön a szelőszakaszok hosszainak szorzata állandó.

Bizonyítás

Igazolandó, hogy $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ *(ábra)*.



Az ADP háromszögben és a CBP háromszögben a P csúcsnál lévő szögek egyenlők, mert csúcsszögek.

A kör AC ívéhez tartozó kerületi szög az $ADC\sphericalangle$ és az $ABC\sphericalangle$, ezért $ADC\sphericalangle = ABC\sphericalangle$.

Mivel az ADP és a CBP háromszögben két-két szög egyenlő, ezért ezek a háromszögek hasonlók.

A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő:

$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, amiből a bizonyítandó állítást kapjuk: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

FELADATOK

1. E1 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 10 és 24. A derékszögű csúcsra illeszkedő egyenessel két derékszögű háromszögre vágjuk az eredeti háromszöget. Adjuk meg az így kapott két háromszög oldalainak hosszát!

2. E1 Az előző feladatban szereplő két kis derékszögű háromszög egy-egy hegyesszögének szögfelezője metszi az eredeti háromszög átfogóját. Mekkora a két metszéspont távolsága?

3. E1 Egy derékszögű háromszög derékszögének szögfelezője az átfogót 4 : 5 arányban osztja. Milyen arányban vágja ketté a magasság az átfogót?

4. E1 Egy derékszögű háromszög derékszögű csúcsához tartozó magassága az átfogót 36 : 49 arányban osztja. Milyen arányban vágja ketté a derékszög szögfelezője az átfogót?

5. E2 Egy papírból kivágott háromszög oldalainak hossza 8 cm, 10 cm és 12 cm. A közös csúcsból induló hajtásvonal mentén a legrövidebb oldalt ráhajtjuk a leghosszabb oldalra. Ekkor a papírlapnak lesz kétrétegű és egyrétegű része. Igazoljuk, hogy az egyrétegű rész egyenlő szárú háromszög alakú!

6. E2 Milyen arányú részekre osztja az a, b, c oldalú háromszög egyik szögfelezőjét egy másik szögfelezője?

7. E1 **(Próbaérettségi feladat alapján, emelt szint, 2015.)** Az O középpontú kör sugara $r = 5$ cm. Felveszünk egy körön kívüli P pontot úgy, hogy $OP = 13$ cm, és a P ponton át húzott e egyenessel elmetsszük a kört. A P-hez közelebbi metszéspontot jelölje A, a P-től távolabbit B. Mekkora az O pont és az e egyenes távolsága, ha $PA = 10$ cm?

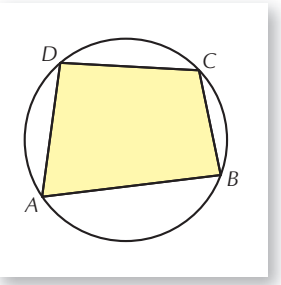
8. E1 Van-e **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Az O középpontú körön kívüli P pontból meghúzzuk a PAB és PCD szelőket. $PA = 2$ cm, $AB = 7$ cm, $PC = 3$ cm. Számítsuk ki a CD szakasz hosszát! Mekkora a kör sugara, ha $PO = 5$ cm?

„Megoldás”: A szelőszakaszok tétele alapján $PA \cdot PB = PC \cdot PD \Leftrightarrow PD = \frac{PA \cdot PB}{PC} = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6$. Innen $CD = 6 - 3 = 3$ (cm). Ugyanakkor $(PO - r)(PO + r) = 18 \Leftrightarrow PO^2 - r^2 = 18 \Leftrightarrow r = \sqrt{7}$ (cm).

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 1132–1139, 1379–1385, 1237–1251.

32. HÚRNÉGYSZÖGEK, ÉRINTŐNÉGYSZÖGEK

Tudjuk, hogy minden háromszögnek van köré írt köre. Vagyis minden háromszög minden oldala lehet egy körnek egy-egy húrja. Ugyanez nem mondható el minden négyszögről.



Húrnégyszögeknek nevezzük azokat a négyszögeket, amelynek oldalai ugyanazon kör húrjai *(ábra)*.

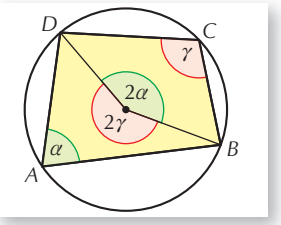
Tétel

Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor a szemközti szögeinek összege 180°.

Bizonyítás Két szemközti csúcshoz húzzuk meg a kör sugarait *(ábra)*.

Ezzel láthatóvá tesszük az A csúcsnál lévő α és a C csúcsnál lévő γ kerületi szögekhez tartozó 2α, illetve 2γ középponti szöget. Ezen középponti szögek összege 360°, vagyis $2\alpha + 2\gamma = 360°$.

Ebből a bizonyítandó állítást kapjuk: $\alpha + \gamma = 180°$.



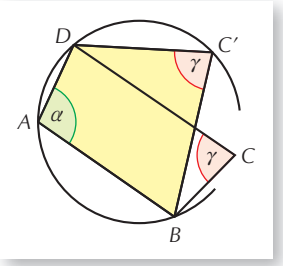
A húrnégyszögek tételének megfordítása is igazolható.

Tétel

Ha egy négyszögben a szemközti szögek összege 180°, akkor a négyszög húrnégyszög.

Bizonyítás Az ábrán *(lásd következő oldal)* látható $ABCD$ négyszögről azt tudjuk, hogy $\alpha + \gamma = 180°$. A négyszög három csúcspontja (például A, B és D) illeszkedik egy körre. Még nem tudjuk, hogy erre a körre a C csúcs illeszkedik-e, ezért nem rajzoltuk meg a teljes kört.

A megrajzolt körívről választunk egy C' pontot, amelyre $ABC'D$ húrnégyszög lesz. A húrnégyszögek tétele szerint a C'-nél lévő szög $180° - \alpha$, azaz γ, ami azt jelenti, hogy a BD szakasz a C' pontból γ látószögben látszik. Mivel tudjuk, hogy egy adott szakasz adott szög alatt két szimmetrikus körív pontjaiból látszik, továbbá a C'-nél γ szög van, ezért a C-nek is illeszkednie kell a két szimmetrikus körív egyikére. Csak azon a körön lehet C, amelyet az A, B, D pontok határoznak meg, mert ha a másikon lenne, akkor az $ABCD$ négyszög konkáv lenne, ami lehetetlen.



Így $ABCD$ valóban húrnégyszög.

A húrnégyszögek tétele és a megfordítása egy mondatban így hangzik:

Tétel

Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szögének összege 180°.

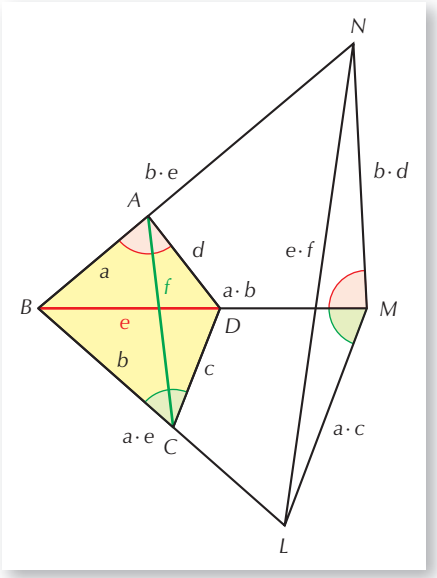
A következő egyenlőtlenséget konvex négyszögekre fogalmazzuk meg. A bizonyításból kiderül, hogy pontosan húrnégyszögek esetén lesz egyenlőség.

Tétel

(Nem érettségi tananyag)

A konvex négyszögek átlóinak szorzata nem lehet nagyobb, mint a szemközti oldalhosszak szorzatának összege.

Az $ABCD$ négyszögben a szokásos módon jelölve legyenek az oldalak a, b, c, d, az átlók pedig e, f *(az ábra szerint)*. A BA, BD és BC meghosszabbításán vegyük fel az N, M és L pontokat úgy, hogy $BN = be$, $BM = ab$, $BL = ae$ teljesüljön.



$ABC_\triangle \sim LBN_\triangle$, mert $\frac{AB}{CB} = \frac{LB}{NB} = \frac{a}{b}$, valamint a B csúcsnál lévő szögük közös. Mivel $AC = f$ és a hasonlóság aránya e, ezért $LN = ef$.

$ABD_\triangle \sim MBN_\triangle$, mert $\frac{AB}{DB} = \frac{MB}{NB} = \frac{a}{e}$, valamint a B csúcsnál lévő szögük közös. Mivel $AD = d$, és a hasonlóság aránya b, ezért $MN = bd$.

$CBD_\triangle \sim MBL_\triangle$, mert $\frac{CB}{DB} = \frac{MB}{LB} = \frac{b}{e}$, valamint a B csúcsnál lévő szögük közös. Mivel $CD = c$, és a hasonlóság aránya a, ezért $ML = ac$.

Az LMN háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség egy érdekes összefüggést ad az $ABCD$ négyszög oldalainak és átlóinak hosszára:

$LM + MN \geq LN$, azaz $ac + bd \geq ef$.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $NML\sphericalangle = 180°$, hiszen ekkor a három pont egy egyenesre illeszkedik.

Vizsgáljuk meg, hogy az egyenlőség milyen négyszög esetén teljesül!

Mivel $ABD_\triangle \sim MBN_\triangle$, ezért $NMB\sphericalangle = DAB\sphericalangle$.

Mivel $CBD_\triangle \sim MBL_\triangle$, ezért $LMB\sphericalangle = DCB\sphericalangle$.

Mivel $NML\sphericalangle = NMB\sphericalangle + LMB\sphericalangle$, ezért az $NML\sphericalangle = 180°$ teljesülése esetén az $ABCD$ négyszögben két szemközti szög összege 180° lesz, vagyis $ABCD$ húrnégyszög.

A gondolatmenetünk fordítva is végigvihető, vagyis az $ABCD$ húrnégyszög esetén $NML\sphericalangle = 180°$.

Vagyis beláttuk a következő két állítást is:

Tétel

(Nem érettségi tananyag)

A húrnégyszögek átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével.

Ezt a tételt **Ptolemaiosz-tétel**nek nevezzük.

Igaz a Ptolemaiosz tétel megfordítása is:

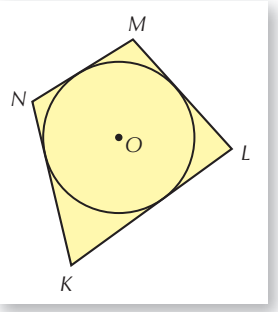
Tétel

(Nem érettségi tananyag)
Ha egy négyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével, akkor az húrnégyszög.

Tudjuk, hogy minden háromszögnek van beírt köre, vagyis minden háromszög minden oldala lehet egy körnek egy-egy érintője. Ugyanez nem mondható el minden négyszögről.

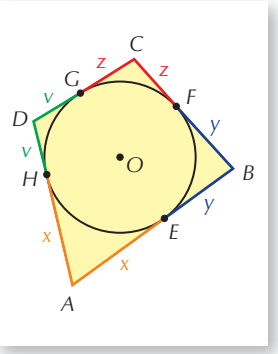
Érintőnégyszögeknek nevezzük azokat a négyszögeket, amelyeknek minden oldala ugyanazon körnek egy-egy érintője.

Az ábrán egy érintőnégyszöget látunk.



Tétel

Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor két-két szemközti oldala hosszának összege egyenlő.



Bizonyítás Tudjuk, hogy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Az ábrán az egyenlő hosszúságú szakaszokat bejelöltük.

$AB = x + y$, $BC = y + z$, $CD = z + v$, $DA = v + x$.

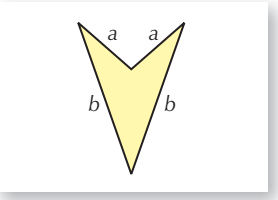
Vagyis $AB + CD = x + y + z + v$,

$BC + DA = x + y + z + v$.

Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

A tétel megfordításánál körültekintőnek kell lennünk. Az ábrán látható négyszög két-két szemközti oldalhosszának összege egyenlő, de a négyszög nem érintőnégyszög.

A megfordítás tehát csak konvex négyszögekre, a következő megfogalmazásban igaz.

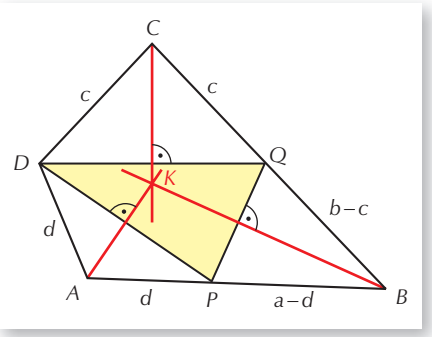


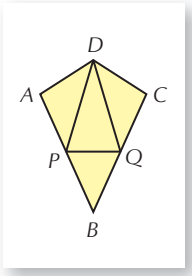
Tétel

Ha egy konvex négyszögben a két-két szemközti oldal hosszának összege egyenlő, akkor a négyszög érintőnégyszög.

Bizonyítás Legyen az $ABCD$ konvex négyszögben $a + c = b + d$ $(a > d,\ b > c)$, vagyis $a - d = b - c$ *(ábra)*. Ekkor felvehetjük az ábra szerinti P és Q pontokat úgy, hogy $AD = AP$, $BP = BQ$ és $CQ = CD$ legyen.

Mivel az APD, CQD és BPQ háromszögek egyenlő szárúak, ezért az A, C és B csúcsaikból induló szögfelezők merőlegesek a DP, DQ valamint PQ alapokra, és felezik is azokat. Ezek az egyenesek így a PQD háromszögben oldalfelező merőlegesek lesznek, tehát egy pontban metszik egymást. Legyen ez a pont a K. Ezek az egyenesek az eredeti négyszögben szögfelezők voltak, és a szögfelező tulajdonsága alapján K

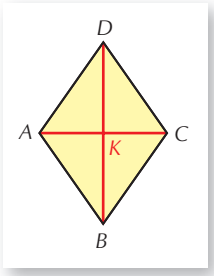




az AB és AD, CD és BC, valamint az AB és BC oldalaktól egyenlő távol van. Ez a K egy olyan körnek a középpontja, amely mind a négy oldalt érinti, vagyis az eredeti négyszög érintőnégyszög.

A fenti bizonyítást az $ABCD$ deltoidra is tudjuk alkalmazni, ha megfelelően betűzzük az ábrát *(bal oldali ábra)*.

Az $ABCD$ rombusz esetén P és Q nem vehető fel, de könnyen megmutatható, hogy az átlók K metszéspontja minden oldaltól ugyanakkora távolságra van *(jobb oldali ábra)*.



Az érintőnégyszögek tétele és a tétel megfordítása egy mondatban így fogalmazható meg:

Tétel

Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha két-két szemközti oldala hosszának összege egyenlő.

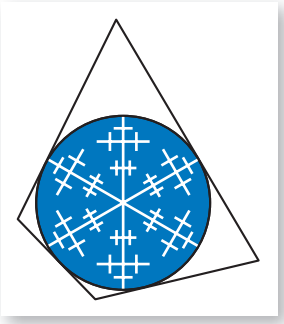
FELADATOK

1. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2006.)** Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya 7 : 6 : 8. Mekkorák a húrnégyszög szögei?

2. E1 Igazoljuk, hogy a háromszögek magasságpontjának az oldalegyenesekre vett tengelyes tükörképei illeszkednek a háromszög köré írt körére!

3. E1 Igazoljuk, hogy a háromszögek magasságpontjának az oldalak felezőpontjára vett középpontos tükörképei illeszkednek a háromszög köré írt körére!

4. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2018.)**
A gyerekek díszeket készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm. Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza?



5. E2 Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben illeszkednek egy egyenesre. Tudjuk, hogy $AB = BC$. Az AD átmérőjű kört az AD-re B-ben merőleges egyenes a P és a Q pontban metszi. A BD átmérőjű kört a BD-re C-ben merőleges egyenes a K és az L pontban metszi.
a) Igazoljuk, hogy a $PKLQ$ négyszög húrnégyszög, és köré írt körének középpontja B!
b) Határozzuk meg a $PKQ\sphericalangle$ nagyságát!

6. E1 Alkalmazzuk a Ptolemaiosz-tételt téglalapra! Milyen közismert tételhez jutunk így?

7. E1 Az ABC szabályos háromszög körülírt körének AB ívén felveszünk egy tetszőleges P pontot. Alkalmazzuk a Ptolemaiosz-tételt az $APBC$ négyszögre! Milyen érdekes eredményt kapunk?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 973–1016.

A ptolemaioszi világtérkép (Badajoz, Spanyolország)

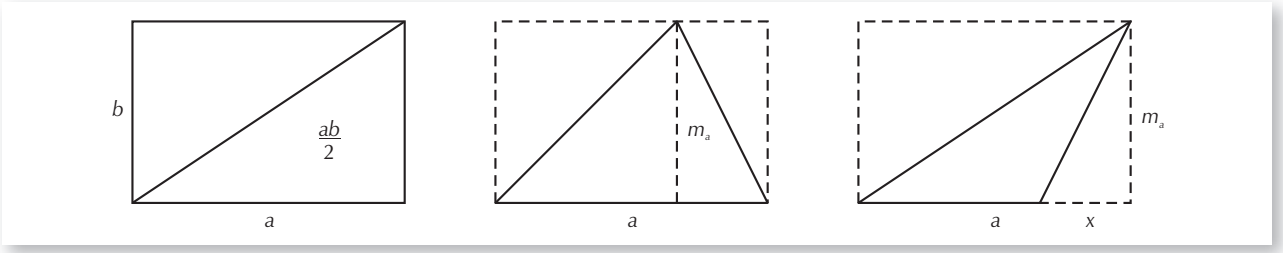
33. TERÜLETSZÁMÍTÁS

A síkbeli alakzatok területét a következő lépésekkel határozhatjuk meg:

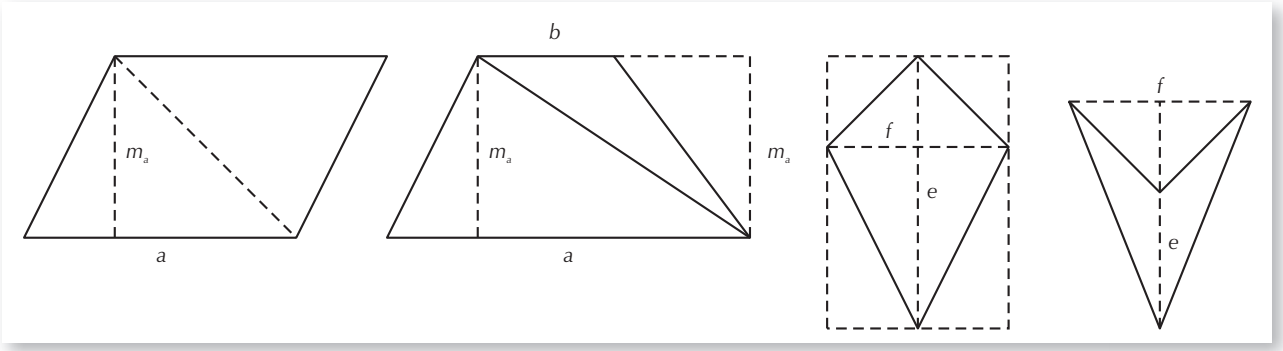
1. Az egységnégyzet segítségével megmutatjuk, hogy az a és b oldalú téglalap területe ab. (Speciálisan az a oldalú négyzet területe a^2.)

2. A téglalapot átlója két egybevágó derékszögű háromszögre osztja, ezért az a, b befogójú derékszögű háromszög területe $\frac{ab}{2}$.

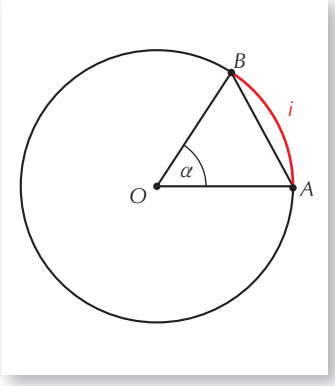
3. A derékszögű háromszög segítségével már tetszőleges háromszög területe meghatározható. Ha az a oldalhoz tartozó m_a magasság a háromszögön belül van, akkor a $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$ képlet egybevágó háromszögek átdarabolásával igazolható *(ábra)*. Ha pedig a háromszögön kívül halad a magasság, akkor $t = \frac{(a+x) \cdot m_a}{2} - \frac{x \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}$ szintén.



4. A speciális négyszögeket vagy felbontjuk két részháromszögre, vagy ismert területű négyszögre egészítjük ki. Így a paralelogramma területe $a \cdot m_a$, a trapéz területe $\frac{(a+b) \cdot m_a}{2}$, a deltoid területe $\frac{e \cdot f}{2}$, míg a rombusz területét mindkét módszerrel meghatározhatjuk. (A bizonyítások az ábrákról leolvashatók.)



5. Tetszőleges sokszöget (például néhány átlója behúzásával) háromszögekre bonthatunk, ezek területösszege megadja a sokszög területét. Speciálisan a szabályos sokszögek területét meghatározhatjuk a szögfüggvények segítségével is *(1. példa)*.



6. A görbe vonalú alakzatok közül a kör és részeinek területével foglalkoztunk. Az r sugarú kör kerülete $2r\pi$, területe $r^2\pi$. Az ábrán látható, α középponti szögű AOB körcikk ívhossza $i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2r\pi$, területe $t = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2\pi$. (Az ívhossz és a terület is arányos a középponti szöggel.) Az AB húr és az i ív által határolt körszelet területe a körcikk és az AOB háromszög területének különbségével egyenlő.

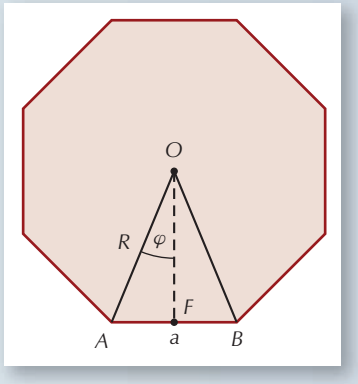
A szögeket mérhetjük **radiánban** (ívmérték) is, ennek definíciója $\alpha_r = \frac{i}{r}$. (α_r jelenti a szög radiánban kifejezett értékét.) A radián mindig mértékegység nélküli, valós szám; megmutatja, hogy a szöghöz tartozó körív hossza hányszorosa a sugár hosszának. (Az egység sugarú körben 1 radián szöghöz éppen 1 hosszú ív tartozik.)

Mivel a teljes szögre $i = 2r\pi$, így $360^\circ = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi$ radián. A fok-radián átváltás ezután egyenes arányossággal számolható, például $180^\circ = \pi$ radián, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radián, $-300^\circ = -\frac{5\pi}{6}$ radián stb. A trigonometrikus függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek értelmezési tartománya általában a valós számok halmaza, radiánban számolt forgásszögeken vizsgáljuk őket.

Radiánban kifejezve a körcikk ívhossza $i = r \cdot \alpha_r$, területe $t = \frac{i \cdot r}{2} = \frac{r^2 \cdot \alpha_r}{2}$.

1. példa Adjuk meg az a oldalú szabályos n-szög beírható és körülírható körének a sugarát és a sokszög területét!

Megoldás A sokszög AB oldala az O középpontból $AOB\sphericalangle = \frac{360^\circ}{n}$ nagyságú középponti szögben látszik. Ha F az AB szakasz felezőpontja, akkor a sokszög köré írt kör sugara $R = AO$, a beírt kör sugara $r = OF$, és $AOF\sphericalangle = \varphi = \frac{180^\circ}{n}$. A sugarak és az a oldal hossza közötti kapcsolat: $\sin\varphi = \frac{a}{2R}$, innen $R = \frac{a}{2\sin\varphi}$ és $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2r}$, azaz $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\varphi}$.



A szabályos n-szög területe az ABO háromszög területének n-szerese:

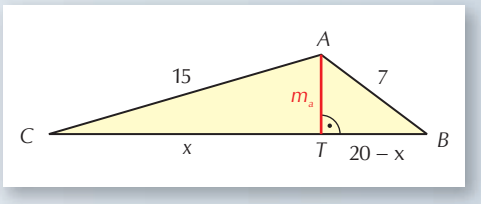
$t = \frac{a \cdot r}{2} \cdot n = \frac{a^2}{4\operatorname{tg}\varphi} \cdot n$.

A HÁROMSZÖG TOVÁBBI TERÜLETKÉPLETEI

2. példa Számítsuk ki az $a = 20$, $b = 15$, $c = 7$ oldalhosszúságokkal megadott háromszög területét!

Megoldás Ismerjük a háromszögnek azt a területképletét, amely szerint bármely oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának fele adja a háromszög területét. Feladatunkban mindhárom oldal hosszát ismerjük, de egyik magasság hosszát sem tudjuk. Ahhoz, hogy kiszámíthassuk a területet, először valamelyik oldalhoz tartozó magasságot kell meghatároznunk.

Jelöljük az a oldalhoz tartozó magasságot a szokásos módon m_a-val *(ábra)*. A vizsgált háromszögben az a oldal a leghosszabb, ezért a magasság T talppontja az oldalszakaszra esik. A T pont két részre vágja az oldalt, legyen az egyik szakasz x, a másik $20 - x$ hosszúságú. Az így kapott két derékszögű háromszögre (*ABT*-re és *ACT*-re) felírjuk a Pitagorasz-tételt:



$$\left.\begin{aligned} m_a^2 + x^2 &= 225 \\ m_a^2 + (20 - x)^2 &= 49 \end{aligned}\right\}$$

Az így kapott kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszer megoldásához vegyük a második és az első egyenlet különbségét: $400 - 40x = -176$. Ebből: $x = 14{,}4$.

Az m_a magasságot az első egyenletből számítjuk ki: $m_a = \sqrt{225 - 14{,}4^2} = 4{,}2$.

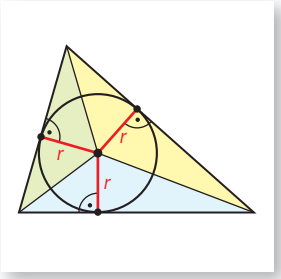
Vagyis: $t = \frac{20 \cdot 4{,}2}{2} = 42$. A megadott háromszög területe pontosan 42.

A fenti utat követve általánosan is kiszámolhatnánk az a, b, c oldalhosszúságú háromszög területét. A három paraméterrel hosszadalmas lenne a számolás, ezért ettől most eltekintünk, csak az eredményt ismertetjük.

A háromszög területe:

$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Ezt a területképletet **Héron-képlet**nek nevezzük.



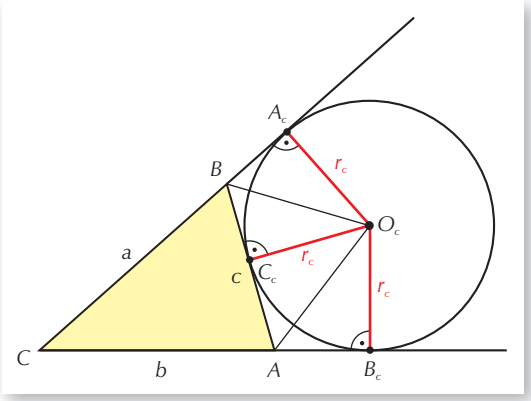
A példánkban szereplő háromszög oldalainak hossza és a terület mérőszáma is egész szám volt. Az ilyen háromszögeket Héron-féle háromszögeknek nevezzük.

Ha a háromszög beírt körének középpontját összekötjük a csúcsokkal, akkor az eredeti háromszöget három kisebb háromszögre bontottuk *(ábra)*. A három kis háromszög területének összege az eredeti háromszög területével egyenlő.

$$t = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = rs,$$

ahol r a beírt kör sugara, s pedig a háromszög kerületének a fele.

A háromszög területe a beírt kör sugarával kifejezve:
$t = rs$.



Ehhez hasonló területképleteket a háromszög hozzáírt köreinek sugarával is megadhatunk.

Tudjuk, hogy a körhöz egy külső pontból húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $CA_c = CB_c$. Ezek a szakaszok az ABC háromszög kerületének felével egyenlők, mert $AB_c = AC_c$ és $BC_c = BA_c$ *(ábra)*.

Igaz a területek között a következő összefüggés is:

$t_{ABC} = t_{CB_cO_cA_c} - t_{ABA_cO_cB_c}$.

A $CB_cO_cA_c$ derékszögű deltoid területe: sr_c, ahol r_c a c oldalhoz írt kör sugara.

Az $ABA_cO_cB_c$ ötszöget a C_cO_c két derékszögű deltoidra vágja. Vagyis az $ABA_cO_cB_c$ ötszög területe az ABO_c háromszög területének kétszerese: cr_c.

Ezeket felhasználva: $t_{ABC} = sr_c - cr_c = r_c(s-c)$.

Vagyis a háromszög területe kiszámítható a következő képletekkel:

$$t = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c),$$

ahol r_a az a oldalhoz, r_b a b oldalhoz, r_c a c oldalhoz írt kör sugara.

A háromszög területe a hozzáírt körök sugarával kifejezve:
$t = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$.

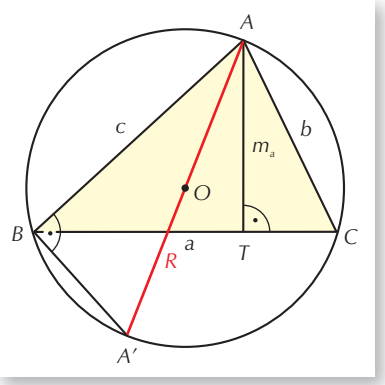
Nézzük az ABC háromszöget a köré írható körével *(ábra)*. A kör O középpontjára tükrözve az A csúcsot kapjuk az A' pontot, T pedig legyen az A-ból húzott magasság talppontja.

$ATC_\triangle \sim ABA'_\triangle$, mivel $ABA' \sphericalangle = ATC \sphericalangle = 90°$, továbbá $ACB \sphericalangle$ és $AA'B \sphericalangle$ azonos ívhez tartozó kerületi szögek, ezért egyenlők.

Vagyis: $\frac{m_a}{b} = \frac{c}{2R}$, azaz $m_a = \frac{bc}{2R}$, ahol R a háromszög köré írt körének a sugara.

A területképletből: $m_a = \frac{2t}{a}$.

E két összefüggésből kapjuk: $\frac{2t}{a} = \frac{bc}{2R}$, innét $t = \frac{abc}{4R}$.



A háromszög területe a körülírt kör sugarával kifejezve:

$t = \frac{abc}{4R}$.

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki az $a = 50$, $b = 41$, $c = 39$ oldalhosszúságokkal megadott háromszög területét!

2. E2 Számítsuk ki az $ABCD$ konvex négyszög területét, ha $AB = 40$, $BC = 14$, $CD = 30$, $AD = 40$ és az A csúcsnál lévő szög 60°-os!

3. E1 Az egységsugarú körbe szabályos tizenhatszöget írtunk. Mekkora a területe?

4. E2 Egy háromszög beírt körének sugara 4, a hozzáírt köreinek sugara pedig 6, 20 és 30. Mekkora a háromszög területe?

5. E2 Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszög beírt körének és a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara együtt olyan hosszú, mint az átfogóhoz hozzáírt kör sugara!

6. E1 Számítsuk ki az $a = 20$, $b = 15$, $c = 7$ oldalhosszúságokkal megadott háromszög beírt és köré írt körének sugarát!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 1456–1581.

EGY FELADAT – TÖBB MEGOLDÁS (Olvasmány)

Az alábbi egyszerű területszámításos feladatra több megoldást is adunk. Igyekszünk megvilágítani, milyen sokszínű módszereket alkalmazhatunk a geometriában.

1. példa Legyen a 60 cm^2 területű ABC háromszög BC oldalának felezőpontja D, az AD szakasz felezőpontja E. A BE egyenes az AC oldalt F-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AEF háromszög területe 5 egység!

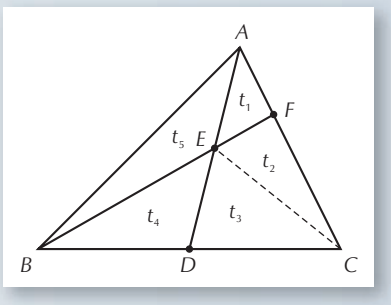
Megjegyzés

A feladat nyílt végű átfogalmazása nehezebb („Mennyi az AEF háromszög területe?”). Valójában az AF és FC szakaszok aránya a kérdés; a nyílt végű feladat megoldása esetleg annyival nehezebb, hogy ezt az értéket még meg kell sejteni. (Például a negyedik megoldásban láthatjuk, hogy a jó sejtés milyen sokat segíthet.)

Megoldás

Első megoldás (területek)

A CE segédvonallal öt részháromszögre bontjuk az ABC háromszöget, ezek területeit jelöljük t_1, t_2, t_3, t_4, t_5-tel (ábra).



AD súlyvonal az ABC háromszögben, így $t_1 + t_2 + t_3 = t_4 + t_5$. ED a BCE háromszögben is súlyvonal, így $t_3 = t_4$. BE a BDA háromszögben súlyvonal, ezért $t_4 = t_5$. (Most már megkaptuk, hogy $t_3 = t_4 = t_5 = 15$ cm^2, $t_1 + t_2 = 15$ cm^2.)

Az azonos magasságú háromszögek területe arányos az alapjukkal. Észrevehetjük, hogy a $\frac{BD}{DC} = x$ osztásarány (a mi esetünkben most $x = 1$) több részháromszög területét is meghatározza: $\frac{T_{BDA}}{T_{DCA}} = x$, $\frac{T_{BDE}}{T_{DCE}} = x$, és így a két egyenlet különbségére is teljesül az arány: $\frac{T_{BEA}}{T_{CEA}} = x$. (Indokolhatunk azonos alaphoz tartozó magasságokkal is: ha az AD egyenesre B-ből, illetve C-ből állított merőlegesek aránya x, akkor ebből következnek a fenti x területarányok.)

Mindkét gondolatmenetet alkalmazhatjuk az AC oldal $\frac{AF}{FC}$ osztásarányára is. Mivel $\frac{T_{AEB}}{T_{CEB}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, ezért $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2}$, és így $t_1 = 5\ \text{cm}^2$.

Az állítást igazoltuk.

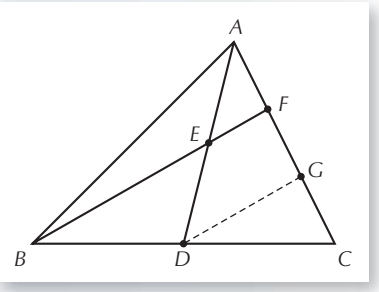
Megjegyzések

Mellékeredményként megkaptuk a negyedik területrész nagyságát is, $T_{DCFE} = t_2 + t_3 = 25\ \text{cm}^2$.

A további megoldásokban az $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ arányt igazoljuk, ebből már könnyen meghatározható t_1.

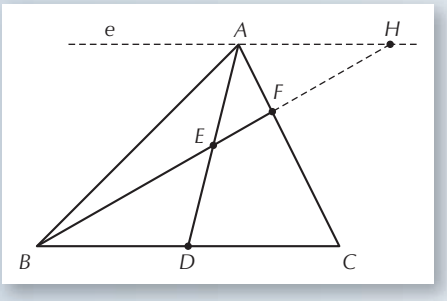
Második megoldás (egybevágóság, középvonalak)

Húzzunk a BF szakasszal párhuzamost a D ponton keresztül, és az AC oldallal vett metszéspontját jelöljük G-vel *(ábra)*.



Ekkor a BCF háromszögben DG középvonal (párhuzamos BF-fel és átmegy a D oldalfelező ponton), tehát $FG = GC$. Ugyanakkor az ADG háromszögben EF is középvonal, emiatt $AF = FG$; vagyis F az AC oldal A-hoz közelebbi harmadoló pontja.

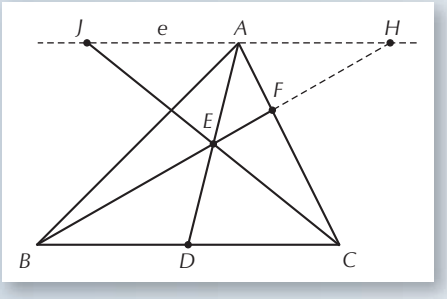
$\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$, ebből pedig már következik az állítás.



Harmadik megoldás (hasonlóság)

Húzzunk az A csúcson keresztül a BC oldallal párhuzamosan egy e egyenest; a BF egyenes és e metszéspontját jelölje H. BDE és HAE egybevágó háromszögek (megfelelő szögeik váltó-, illetve csúcsszögek, és $DE = EA$). Ha a BC oldal hosszát a-val jelöljük, akkor $BD = AH = \frac{1}{2}a$.

Tekintsük most a BCF és HAF háromszögeket. Ezek hasonlók (megfelelő szögeik váltó-, illetve csúcsszögek), a hasonlóság aránya $\frac{AH}{BC} = \frac{1}{2}$. Ebből viszont az következik, hogy a megfelelő oldalaik aránya is ugyanennyi, tehát $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ szintén.



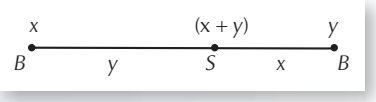
Negyedik megoldás (visszavezetés nevezetes vonalakra)

Jelöljük J-vel az e egyenes és CE metszéspontját; JEA háromszög egybevágó a CED háromszöggel, tehát $JA = \frac{1}{2}a$.

A JCH háromszögben CA súlyvonal ($JA = AH$), és HE is súlyvonal ($CE = EJ$). A súlyvonalak egymást kölcsönösen harmadolják, tehát a JHC háromszögben az F súlypont a CA szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontja.

Ötödik megoldás (súlypontszerkesztési tétel)

Ebben a megoldásban azt használjuk ki, hogy véges, súlyozott pontrendszer súlypontja egyértelmű, és a súlypontszerkesztési tétel segítségével, a súlyok számának redukálásával meghatározható.



A súlypontszerkesztési tétel kimondja, hogy ha egy A pontban x, egy B pontban pedig y nagyságú súly (tömeg) van, akkor a két súly helyettesíthető az AB szakasz S *súlypontjába helyezett egyetlen* $(x + y)$ súllyal. Az S súlypont helyzetére $\frac{AS}{SB} = \frac{y}{x}$ teljesül.

Helyezzünk az ABC háromszög csúcsaiba súlyokat úgy, hogy az így kapott súlyozott pontrendszernek E legyen a súlypontja!

A B és C csúcsokba egyforma nagyságú súlyokat kell helyeznünk. (Ezzel elérjük, hogy a $\{B, C\}$ rendszer súlypontja D-be kerül, és így a $\{B, C, A\}$ rendszer súlypontja rajta lesz az AD egyenesen.) A kezdősúly nagysága szabadon választható, mert a pontrendszer súlypontjának nem változik meg a helye, ha a súlyokat ugyanazzal a (nem zérus) számmal szorozzuk. Helyezzünk például B-be és C-be egységnyi súlyokat. Ekkor ezek

helyettesíthetők D-ben egy 2 nagyságú súllyal; s ha a rendszer súlypontja E, akkor A-ba is 2 nagyságú súlyt kell tennünk. (Ugyanis DA felezőpontja E.)

A rendszer súlypontja tehát akkor E, ha az A, B, C csúcsokba rendre 2, 1, 1 nagyságú súlyok kerülnek. Most határozzuk meg másképpen is a súlypont helyzetét!

Az A és C súlyok helyettesíthetők egy 3 nagyságú súllyal, amit F-be kell helyeznünk (csak ekkor kerülhet a súlypont a BF egyenesre), így $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ szükségképpen. (Az A-ba és C-be helyezett súlyokkal fordítottan arányos az „erőkar”.)

Készen vagyunk, a kérdéses arányt igazoltuk.

Hatodik megoldás (vektorok)

Vegyük fel a koordinátarendszer kezdőpontját B-ben, és legyen $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$.

Mivel F az AC szakasz pontja, a vektorok osztásarány-tétele miatt $\overrightarrow{BF} = x \cdot \mathbf{c} + (1 - x) \cdot \mathbf{a}$ (ahol az x skalár egyelőre ismeretlen, $\frac{AF}{FC} = \frac{x}{1-x}$). Másrészt a $\overrightarrow{BF}$ vektort $\overrightarrow{BE}$ számszorosaként is felírhatjuk:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \frac{\mathbf{c}}{2} + \frac{\overrightarrow{DA}}{2} = \frac{\mathbf{c}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}}{2} = \frac{\mathbf{c}}{2} + \frac{\mathbf{a} - \frac{\mathbf{c}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{c}}{4}.$$

Így $\overrightarrow{BF} = y \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{c}}{4}\right)$ (ahol az y szorzó egyelőre szintén ismeretlen).

$\overrightarrow{BF}$ kétféle felírásából $x \cdot \mathbf{c} + (1 - x) \cdot \mathbf{a} = y \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{c}}{4}\right)$. Ez tetszőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{c}$-re csak akkor teljesülhet, ha az együtthatók páronként megegyeznek: $1 - x = \frac{y}{2}$ és $x = \frac{y}{4}$.

Az egyenletrendszer megoldása $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$; tehát $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$.

Menelaosz (100 körül) görög csillagász és matematikus volt. „Szphaerika” című munkája a gömbháromszögekkel foglalkozik, ebben található a róla elnevezett tétel.
Forrás: Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, 1974

Megjegyzés

Természetesen további megoldások is adhatók. Alkalmazhatnánk például az elemi geometria egyik nevezetes tételét, a Menelaosz-tételt, de a fentiekből már látszik a matematika sokszínűsége.

Nézz utána az interneten, hogyan is szól Menelaosz tétele!

34. FELSZÍN- ÉS TÉRFOGATSZÁMÍTÁS

Korábban már megismerkedtünk az egyszerűbb testek felszín- és térfogatképleteivel. A forgástestek felszínét és térfogatát elegánsan meghatározhatjuk az analízis eszközeivel, erre az integrálszámítás fejezetben több példát is mutatunk. Ebben a leckében bebizonyítjuk a csonkagúlára és a csonkakúpra vonatkozó képleteket, és néhány összetett felszín- és térfogatszámítási problémát elemzünk.

1. példa

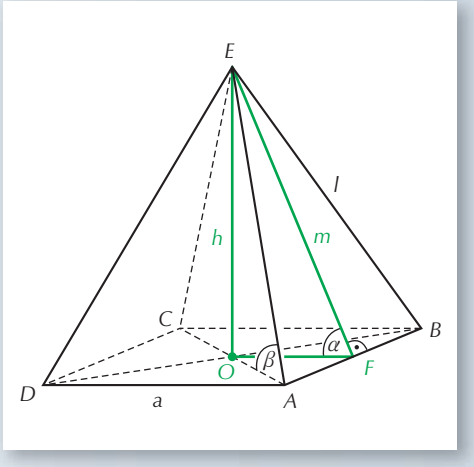
Az $ABCD$ négyzet alapú, E csúcsú szabályos gúla oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be. Az alapélek hossza a. Határozzuk meg

a) a gúla térfogatát és felszínét!

b) a gúlába és a gúla köré írt gömbök sugarát!

c) az oldalélek és az alaplap, valamint két szomszédos oldallap hajlásszögét!

(Emlékeztető: a szabályos gúla alaplapja szabályos sokszög, és az oldalélei egyenlők.)

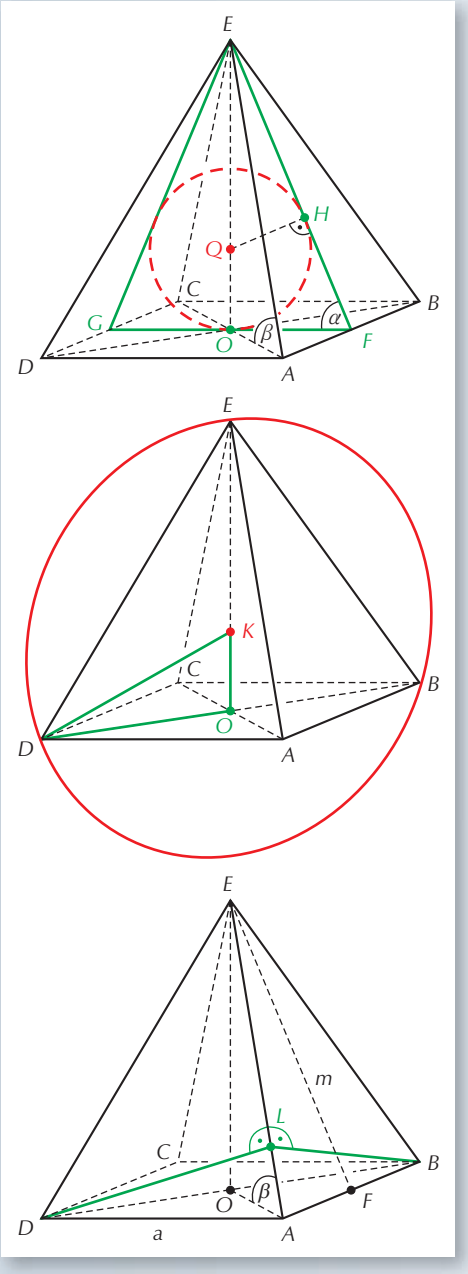


Megoldás

a) Jelölje az AC és BD négyzetátlók metszéspontját O, ekkor $EO = h$ a testmagasság. Jelöljük F-fel az AB él felezőpontját, így $FE = m$ az ABE lap magassága, és $OFE\sphericalangle = \alpha = 60°$ az alaplap és az oldallapok bezárt szöge *(ábra)*.

Az OFE derékszögű háromszögből $h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, a gúla térfogata $V = \frac{a^2 h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

Ugyaninnen $m = \frac{a}{2 \cdot \cos 60^\circ} = a$ a lapmagasság, így a gúla felszíne $A = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{2} = 3a^2$.



b) A gúla beírt gömbje az oldallapokat azok lapmagasságain, míg az alaplapot a négyzet középpontjában érinti. Legyen a CD él felezőpontja G, a gúlának egy alaplapra merőleges síkmetszete a GFE háromszög. A beírt gömb Q középpontja az EO tengelyen van, ezért a GFE sík egy olyan főkört metsz ki a gömbből, ami egyúttal a GFE háromszög beírt köre.

A GFE háromszög beírt körének r sugarát többféleképpen is meghatározhatjuk. Alkalmazhatjuk az $r = \frac{t}{s}$ képletet vagy dolgozhatunk hasonlósággal (ha a kör az EF oldalt H-ban érinti, akkor az EHQ és EOF háromszögek hasonlók). Most egyszerű trigonometriai megoldást adunk.

A GFE háromszögben FQ szögfelező, így $QFO\sphericalangle = 30°$, és $r = OQ = OF \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{3}}$.

A gúla köré írt gömb középpontja legyen K. Ekkor K az OE magasságon olyan pont, amelyre $KA = KB = KC = KD = KE$. A körülírt gömbből például a BDE sík metsz ki egy főkört, így a gúla köré írt gömb R sugara megegyezik a BDE háromszög körülírt körének a sugarával. A DOK derékszögű háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt: $KD^2 = KO^2 + OD^2$, azaz $R^2 = (h - R)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$. Innen a $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ helyettesítéssel $0 = \frac{3a^2}{4} - 2R\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{a^2}{2}$ adódik. Ebből a körülírt gömb sugara: $R = \frac{5}{4\sqrt{3}}a$.

c) A gúla forgásszimmetrikus, ezért az oldalélek az alaplappal ugyanakkora szöget zárnak be. Az EA oldalél alaplappal alkotott β szögét egyszerűen meghatározhatjuk az EAO derékszögű háromszögből: $\operatorname{tg} \beta = \frac{EO}{OA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, innen $\beta \approx 50{,}77°$.

Két szomszédos oldallap γ hajlásszöge előáll, ha például a D és B csúcsokból merőlegeseket állítunk az AE élre. Ekkor a merőlegesek talppontja közös, jelöljük L-lel; ekkor $DLB\sphericalangle = \gamma$, miközben $DL = LB$.

BL a BAE háromszög AE oldalához tartozó magassága. Az AE oldal l hosszát meghatározhatjuk az AOE derékszögű háromszögből: $l^2 = AO^2 + OE^2$, s innen $l^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\right)^2$, $l = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Az ABE háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk: $\frac{a \cdot m}{2} = \frac{l \cdot BL}{2}$, így $BL = \frac{a \cdot m}{l} = \frac{a \cdot a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$. Végül a DLB háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$BD^2 = DL^2 + LB^2 - 2 \cdot DL \cdot LB \cdot \cos\gamma$. Innen

$$\cos\gamma = \frac{DL^2 + LB^2 - BD^2}{2 \cdot DL \cdot LB} = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}a\right)^2 - (\sqrt{2}\,a)^2}{2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}a\right)^2} = -\frac{1}{4},\ \gamma \approx 104{,}48°.$$

Megjegyzések

1. A beírt gömb sugarát más módszerrel is meghatározhatjuk. Kössük össze a Q középpontot a gúla csúcsaival, ekkor a gúlát öt részgúlára bontottuk fel. Ha az alaplap és oldallapok területe t_1, t_2, … , t_5, akkor az $ABCDE$ gúla térfogatát az öt részgúla térfogatának összegeként is felírhatjuk: $V = \frac{t_1 \cdot r}{3} + \frac{t_2 \cdot r}{3} + \ldots + \frac{t_5 \cdot r}{3} = (t_1 + t_2 + \ldots + t_5) \cdot \frac{r}{3} = \frac{A \cdot r}{3}$, ahol A a gúla felszíne. (Felhasználtuk, hogy Q távolsága minden oldallaptól r.) Innen $r = \frac{3V}{A}$.

Gondolatmenetünk tetszőleges poliéderre alkalmazható (ha létezik a beírt gömb), így a következő érdekes eredményt kapjuk:

Ha egy poliédernek van **beírt gömb**je, akkor ennek a sugara $r = \frac{3V}{A}$.

2. Az ABE háromszög $ABCD$ síkra eső merőleges vetülete az ABO háromszög. A két háromszög AB alapja ugyanaz, az alaphoz tartozó magasságaik aránya $\frac{FO}{FE} = \cos\alpha$. Így területeik aránya is $\frac{T_{ABO}}{T_{ABE}} = \cos\alpha$, és mivel $\alpha = 60°$, $\frac{T_{ABO}}{T_{ABE}} = \frac{1}{2}$. A négy oldallap vetülete éppen lefedi az alaplapot, ezért az alaplap területe éppen fele a palást területének.

A területek arányára vonatkozó ún. **vetületi tétel** tetszőleges sokszögre is igaz.

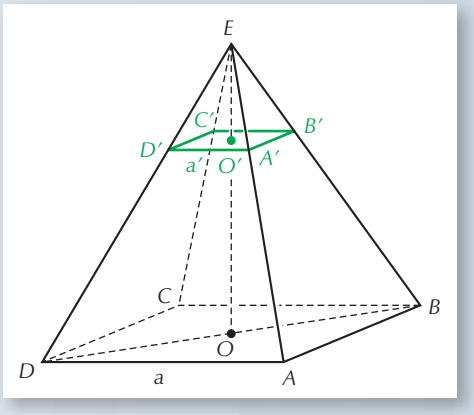
Legyen két sík, σ és Σ hajlásszöge φ (ahol $0° \le \varphi \le 90°$); egy Σ síkbeli alakzat területe T_Σ, az alakzat σ síkon lévő merőleges vetületének területe T_σ. Ekkor a két terület aránya $\frac{T_\sigma}{T_\Sigma} = \cos\varphi$.

A bizonyítást sokszögekre a feladatok között kitűzzük. A főbb segítő lépések a következők:

1. Először az állítást háromszögekre kell igazolni. A Σ síkbeli ABC háromszög köré olyan téglalapot írunk, amelynek oldalai a két sík metszésvonalával párhuzamosak, illetve merőlegesek rá. Ezután az ABC háromszög területét a bennfoglaló téglalap és a kiegészítő derékszögű háromszögek területének különbségeként írjuk fel.
2. Második lépésben az állítást sokszögekre bizonyíthatjuk. (Minden sokszög felbontható háromszögekre.)
3. Végül az analízis eszközeivel az is megmutatható, hogy a tétel görbe vonalú alakzatok területére is teljesül.

2. példa

Az előző példában szereplő gúlát elmetsszük az alaplappal párhuzamos, attól $\frac{1}{\sqrt{3}}a$ távolságra haladó síkkal. A metsző sík a gúlából az $A'B'C'D'$ négyzetet metszi ki *(ábra)*. Mekkora az $ABCDA'B'C'D'$ csonkagúla térfogata?

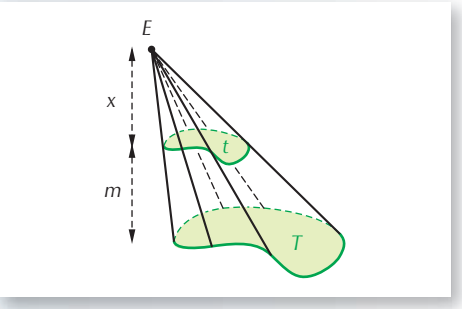


Megoldás

Az $EABCD$ és $EA'B'C'D'$ gúlák középpontosan hasonlók, a hasonlóság centruma E. A hasonlóság (nagyítás) aránya $\lambda = \frac{DA}{D'A'} = \frac{a}{a'}$ vagy $\lambda = \frac{EO}{EO'} = \frac{m}{m'}$ alakban is felírható. (Itt O' az $A'B'C'D'$ négyzet középpontja.) Az $OO' = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ adatból $\frac{OO'}{OE} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2}{3}$; tehát $\frac{EO'}{EO} = \frac{1}{3}$, és így $\lambda = 3$. Jelölje V az eredeti és V' a lemetszett gúla térfogatát. A hasonló testek térfogataira vonatkozó összefüggés alapján $\frac{V}{V'} = \lambda^3 = 27$, így az $ABCDA'B'C'D'$ csonkagúla térfogata $\frac{26}{27}V = \frac{26}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a^3 = \frac{13\sqrt{3}}{81}a^3$.

A Hafré-piramis (Gíza, Egyiptom)

3. példa A fenti eljárás segítségével levezethetjük a **csonkagúla** és a **csonkakúp térfogatképleteit** is.



Megoldás Tekintsünk egy $(m + x)$ magasságú kúpszerű testet, amelyből az alaplappal párhuzamos síkkal egy m magasságú csonkakúpot metszünk ki. (Ekkor az ábrán E csúccsal jelölt kiegészítő kúp magassága x.) Jelölje továbbá T és t a csonkakúp alap- és fedőlapjának a területét.

A csonkakúp térfogatát a két kúp térfogatának a különbségeként írhatjuk fel:

$$V_{cs} = \frac{T(m+x)}{3} - \frac{tx}{3} = \frac{Tm + x(T-t)}{3}.$$

A két kúp középpontosan hasonló, a hasonlóság centruma E. A hasonló síkidomok területére vonatkozó összefüggés alapján $\frac{T}{t} = \frac{(m+x)^2}{x^2}$, s ebből $x = \frac{m\cdot\sqrt{t}}{\sqrt{T}-\sqrt{t}}$. Ezt beírjuk a csonkakúp térfogatára vonatkozó fenti egyenletbe: $V_{cs} = \frac{Tm + \frac{m\cdot\sqrt{t}}{\sqrt{T}-\sqrt{t}}(T-t)}{3} = \frac{Tm + m\cdot\sqrt{t}(\sqrt{T}+\sqrt{t})}{3} = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t)$. (Felhasználtuk, hogy $T - t = (\sqrt{T}+\sqrt{t})(\sqrt{T}-\sqrt{t})$.)

A meggondolásaink minden kúpszerű testre érvényesek, így a csonkagúlára és speciálisan az egyenes csonka körkúpra is. Ha ez utóbbiban az alapkör és a fedőkör sugara R és r, akkor térfogata

$$V_{cs} = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t) = \frac{m}{3}(R^2\pi + \sqrt{R^2\pi\cdot r^2\pi} + r^2\pi) = \frac{m\cdot\pi}{3}(R^2 + R\cdot r + r^2)$$ alakban is írható.

Tétel

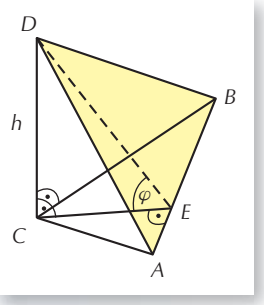
A **csonkagúla** és a **csonkakúp** térfogata $V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{T\cdot t} + t)$, ahol T az alaplap, t a fedőlap területe, valamint m a test magassága. Az **egyenes csonka körkúp** térfogata $V = \frac{m\cdot\pi}{3}(R^2 + R\cdot r + r^2)$.

4. példa Az ABC háromszög oldalai $CA = 30$, $CB = 40$ és $AB = 50$ egység hosszúak. A C pontban merőlegest állítunk a háromszög síkjára, ezen az egyenesen legyen D egy futópont. Hogyan függ a $CD = h$ magasságtól

a) az ABC és ABD lapok hajlásszöge?

b) az ABD lap területe?

c) Mekkora az ABD szög, ha $h = 20$, 40, illetve 60 egység?



Megoldás A CD egyenes merőleges az ABC síkra, így merőleges annak minden egyenesére is. A CD-n átmenő, AB-re merőleges sík az AB szakaszt metssze az E pontban *(ábra)*. Mivel AB merőleges a CED síkra, így AB merőleges a CE és DE egyenesekre is.

Emlékeztető (a síkra merőleges egyenes tétele): Az e egyenes akkor és csak akkor merőleges egy síkra, ha merőleges annak két metsző egyenesére.

ABC derékszögű háromszög, mert $30^2 + 40^2 = 50^2$. Az AB átfogóhoz tartozó CE magasságot a kétszeres terület kétféle felírásából számolhatjuk ki: $CE\cdot AB = AC\cdot CB$, innen $CE = \frac{AC\cdot CB}{AB} = \frac{30\cdot 40}{50} = 24$ (egység).

a) Az ABC és ABD lapok φ hajlásszöge, valamint a h magasság közti kapcsolat a CED derékszögű háromszög adataiként adható meg: $h\cdot \operatorname{ctg}\varphi = CE$, azaz $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{24}{h}$.

b) Az ABD lap területét legegyszerűbben a vetületi tétellel számíthatjuk ki:

$T_{ABD} = \frac{T_{ABC}}{\cos\varphi} = \frac{600}{\frac{24}{\sqrt{24^2+h^2}}} = 25\cdot\sqrt{24^2+h^2}$ területegység. (Ugyanezt kapjuk az $\frac{AB\cdot ED}{2}$ hányadosból is.)

c) Az $ADB\sphericalangle$ meghatározásához kiszámítjuk az AD és BD oldalak hosszát.

$AD = \sqrt{AC^2+h^2} = \sqrt{900+h^2}$, $BD = \sqrt{BC^2+h^2} = \sqrt{1600+h^2}$. Felírjuk az ABD háromszögben a koszinusztételt: $\cos ADB\sphericalangle = \frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2\cdot AD\cdot BD} = \frac{h^2}{\sqrt{900+h^2}\cdot\sqrt{1600+h^2}}$.

A konkrét h és $ADB\sphericalangle$ értékeket az alábbi táblázatban soroljuk fel. Látható, hogy a h magasság növekedtével az $ADB\sphericalangle$ csökken.

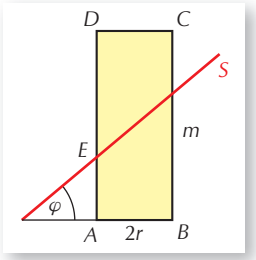
(Ha a feladat több értéket is kérdez, akkor érdemes az Excel programot használni.)

h (egység)	20	40	60
cos $ADB\sphericalangle$	0,248	0,566	0,744
$ADB\sphericalangle$	75,6°	55,5°	41,9°

FELADATOK

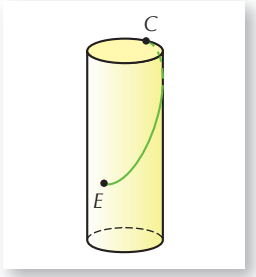
1. E1 Miért **nem igaz** az alábbi állítás?
„Ha egy e egyenes merőleges az a és b egyenesekre, akkor merőleges a és b síkjára is.”

2. E2 Egyenes körhenger alapkörének sugara $r = 10$ cm, magassága $m = 50$ cm. A hengert elmetszettük az alaplap síkjával $\varphi = 40°$-os szöget bezáró S síkkal úgy, hogy a metsző sík a hengert két egyenlő térfogatú részre osztja. (Az ábrán a henger $ABCD$ tengelymetszetét, valamint a rajz síkjára merőleges S metszésvonalát tüntettük fel.)



a) Mekkora az ábrán látható E pont és a henger alaplapjának a távolsága?

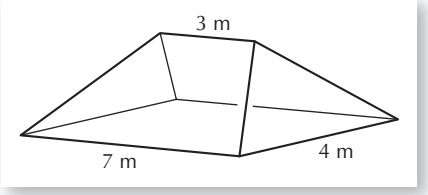
b) A henger felületén, a lehető legrövidebb (görbe) vonallal összekötjük E-t és C-t. Milyen hosszú az összekötő vonal?



3. E1 Igazoljuk a szabályos csonkakúp felszínére vonatkozó $A = R^2\pi + r^2\pi + a\pi(R+r)$ képletet! (R az alapkör, r a fedőkör sugara, a csonkakúp alkotóinak hossza pedig a egység.)

4. E1 **(Egykori egyetemi felvételi feladat)** Egy négyoldalú szabályos csonkagúla alapéleinek hossza 10, az oldalélek az alaplappal 60°-os szöget zárnak be. A csonkagúla testátlója merőleges az egyik oldalélre. Mekkora a csonkagúla térfogata?

5. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2020.)** A ház cseréptetője elöregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.



Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserepezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz?

6. E2 Igazoljuk, hogy bármely tetraéderben $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_d}$, ahol r a beírt gömb sugara, m_a, m_b, m_c, m_d pedig a megfelelő testmagasságok.

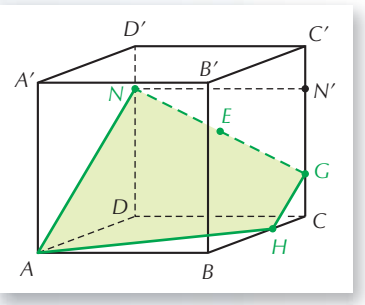
7. E2 Bizonyítsuk be sokszögekre a leckében említett vetületi tételt!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 1585–1903, 1971–2161.

35. VEGYES TÉRGEOMETRIAI FELADATOK

1. példa Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában az AA', BB', CC', DD' élek merőlegesek az $ABCD$ alaplapra. A kocka éleinek hossza 4 egység. Jelölje E a $CDD'C'$ lap középpontját, és N a DD' él azon belső pontját, amelyre $D'N = 1$. Számítsuk ki az A, E, N pontokon áthaladó S sík, valamint a kocka közös részét alkotó síkidom kerületét!

Megoldás Az NE és CC' egyenesek metszéspontját jelöljük G-vel *(ábra)*. Az S metsző sík az $ADD'A'$ lapot az AN, a $CDD'C'$ lapot pedig az NG szakaszban metszi.



Az $ADD'A'$ és $BCC'B'$ lapok párhuzamosak, ezért az S síkkal vett metszésvonalaik is párhuzamosak. Az S sík tehát a BC élt olyan H pontban metszi, amelyre GH és NA párhuzamosak. Végül A és H a metsző síknak, valamint a kocka alaplapja síkjának is pontjai, ezért AH az alaplap és S metszésvonala.

Az $AHGN$ négyszög trapéz, oldalhosszúságait a Pitagorasz-tétel segítségével számolhatjuk ki. Az ADN derékszögű háromszögből

$AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{25} = 5$ (cm).

$D'N$ és GC tükrös helyzetűek az E pontra, ezért $GC = 1$ cm. Jelölje N' az N pont CC' élre eső merőleges vetületét; ekkor $N'G = 2$ cm és az $NN'G$ derékszögű háromszögből $NG = \sqrt{NN'^2 + N'G^2} = \sqrt{20}$ (cm).

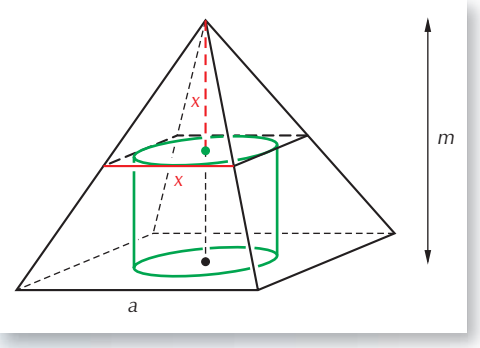
A HCG és ADN derékszögű háromszögek hasonlók (oldalaik párhuzamosak), így $\frac{HC}{CG} = \frac{AD}{DN} = \frac{4}{3}$, s innen $HC = \frac{4}{3}$. $HG = \sqrt{HC^2 + CG^2} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$, és az ABH derékszögű háromszögből $AH = \sqrt{AB^2 + BH^2} = \frac{\sqrt{208}}{3}$.

A trapéz kerülete $k = 5 + \sqrt{20} + \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{208}}{3} \approx 15{,}95$ (cm).

2. példa Egy négyoldalú szabályos gúlába közös tengelyű forgáshengert helyezünk el úgy, hogy a henger alaplapja a gúla alaplapján van, és a fedőlapja érinti gúla oldallapjait. A gúla a alapéle és m magassága egyaránt 6 cm.

a) Legfeljebb mekkora lehet a henger palástjának a területe?

b) Legfeljebb mekkora lehet a henger térfogata?



Megoldás *a)* A henger fedőlapjának a síkja az eredeti gúlából egy vele hasonló gúlát metsz le. Ha ennek a magassága x (ahol $0 < x < 6$), akkor az alapéle szintén x hosszú, ami egyúttal a henger fedőköre átmérőjének a hossza is. A henger magassága $6 - x$.

A henger fedőkörének kerülete πx, palástja $P = \pi x(6 - x)$. P másodfokú kifejezése x-nek, a maximumát többféleképpen is meghatározhatjuk. Például: alkalmazhatjuk a $z = x - 3$ szimmetrikus helyettesítést; teljes négyzetté alakíthatunk; felírhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget; felhasználhatjuk az $ax^2 + bx + c$ kifejezés szélsőértékhelyére vonatkozó $x_{szé} = -\frac{b}{2a}$ ismeretet; de a gyöktényezős alakból

a két zérushely átlagaként a szélsőértékhely egyszerűbben is számítható. Most alakítsunk teljes négyzetté: $P = \pi x(6 - x) = \pi\big(9 - (x - 3)^2\big)$. Ebből leolvasható, hogy a palást területe $x = 3$ esetén veszi fel a maximális értéket, ami $P_{max} = 9\pi \approx 28{,}3$ (cm^2). A henger magassága tehát a gúla magasságának a fele.

b) A henger térfogata $V = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi(6 - x) = \frac{\pi}{4}x^2(6 - x)$. A maximum meghatározásához a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk. Ehhez átalakítjuk a kifejezést: $V = \frac{\pi}{8}x^2(12 - 2x)$, és a $V' = x^2(12 - 2x)$ szorzatot maximáljuk. (Ha V' maximális, akkor V is az.)

Az x, x, $12 - 2x$ pozitív számok mértani közepe $\sqrt[3]{x \cdot x \cdot (12 - 2x)}$, számtani közepe $\frac{x + x + (12 - x)}{3}$, így $\sqrt[3]{x \cdot x \cdot (12 - 2x)} \le \frac{x + x + (12 - 2x)}{3}$, azaz $\sqrt[3]{V'} \le 4$. Innen $V' \le 64 \Rightarrow V \le \frac{\pi}{8} \cdot 64 = 8\pi$ (cm^3). A térfogat akkor lesz maximális, ha a hatványközép-egyenlőtlenségben a tagok egyenlőek, azaz ha $x = 12 - 2x$. Ekkor $x = 4$ (cm); a henger magassága tehát a gúla magasságának a harmada.

A szabályos négyoldalú gúla negyedrendű forgásszimmetriával rendelkező test (azaz a tengelye körüli $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$-os forgatás önmagába viszi), és a $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$-os forgatás miatt tengelyesen tükrös alakzat is. (Az n-edrendű forgásszimmetria teljesül minden szabályos n oldalú gúlára ($n \ge 3$), a tengelyes szimmetria pedig minden páros oldalú szabályos gúlára.) A szabályos $2n$ oldalú gúlák alkalmasan választott síkra is szimmetrikusak: a forgástengelyen átmenő síkok közül ilyenek azok, amelyek két szemközti csúcson, illetve amelyek két szemközti alapél felezőpontjain mennek át.

Az e és f kitérő egyenesek hajlásszögét megkaphatjuk, ha az egyeneseket önmagukkal párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy metsszék egymást. Az így kapott e' és f' metsző egyenesek szöge lesz a kitérő egyenesek hajlásszöge.

Ha az e és f egyenesekre egy-egy síkot fektetünk úgy, hogy ezek párhuzamosak legyenek, akkor a két sík távolsága egyúttal megadja a két egyenes távolságát is. (A két sík helyzete egyértelmű.) A feladatmegoldásokban segíthet, ha két sík távolságát egy pont és egy sík távolságának meghatározására vezetjük vissza.

A következő példában a fenti egybevágósági transzformációk (forgatás, tükrözés, eltolás) térbeli alkalmazásait gyakoroljuk.

3. példa Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben az AA', BB', CC', DD' élek merőlegesek az $ABCD$ alaplapra. Az élek hossza $AB = 10$, $AD = 6$, $AA' = 4$ egység.

a) Vegyünk fel egy E pontot az $A'B'$ élen úgy, hogy az $AE + EC'$ távolságösszeg minimális legyen! (Egy interpretáció: hogyan tudunk a téglatest felületén A-ból C'-be, az $A'B'$ él érintésével a lehető legrövidebb úton eljutni?)

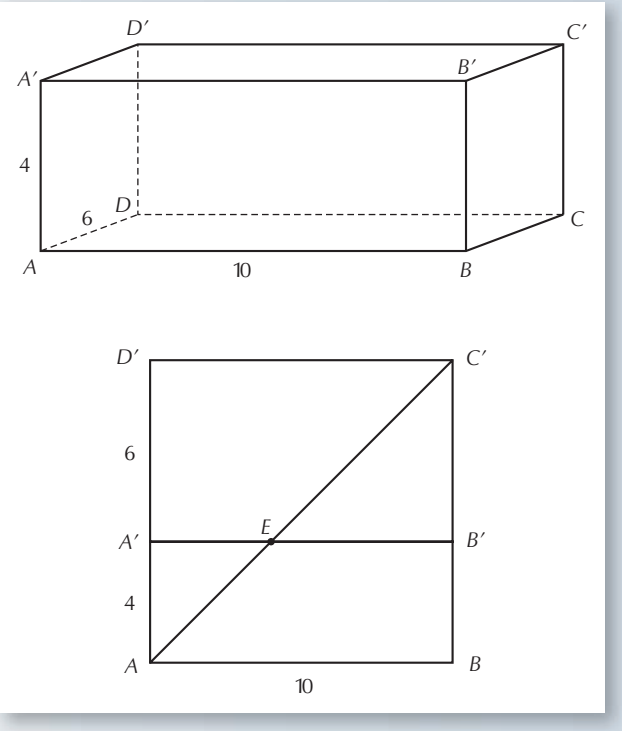
b) Vegyünk fel egy F pontot a $C'D'$ élen úgy, hogy az $AF + FB$ távolságösszeg minimális legyen!

Számítsuk ki az alábbi kitérő egyenesek szögét és távolságát!

c) AB, $B'C'$;

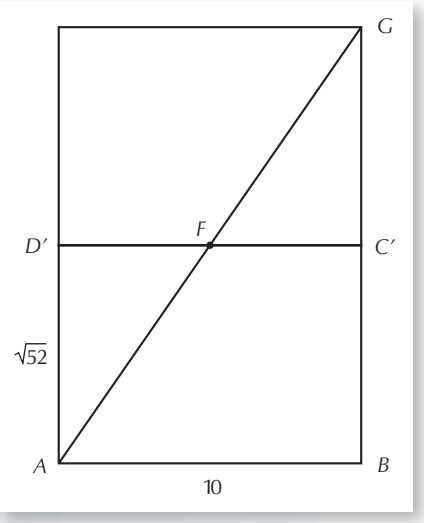
d) AB, $A'C'$;

e) AB, $A'C$.



Megoldás *a)* Terítsük ki a téglatest $ABB'A'$ és $A'B'C'D'$ lapját egy síkba! (Másképpen fogalmazva: az $A'B'$ egyenes körül elforgatjuk az $A'B'C'D'$ lapot úgy, hogy az $ABB'A'$ lappal egy síkba kerüljön.) A kiterítés során az AE és EC' szakaszok hossza nem változik, így egy ismert síkbeli feladatot kaptunk. A minimális összeg akkor lép fel, ha a kiterítés után A, E és C' egy egyenesbe esik. $ABC'D'$ négyzet, így $A'E = 4$ egység és $AE + EC' = AC' = \sqrt{2} \cdot 10$ egység.

b) Mivel A, B, C' és D' egy síkban vannak, az előző eljárást ismét alkalmazhatjuk. Ha B tükörképe a $C'D'$ egyenesre G, akkor az AG egyenes éppen $C'D'$ felezőpontjában metszi ki F-et. (A minimális összeg $2AF = 2 \cdot \sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2} = 2 \cdot \sqrt{77}$ egység.)



c) AB és $B'C'$ merőlegesek; távolságuk az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ síkok távolsága, azaz 4 egység.

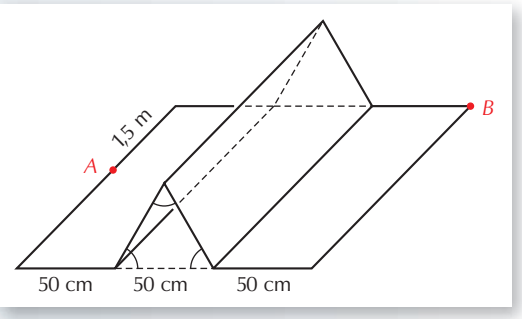
d) AB és $A'C'$ távolsága szintén 4 egység. Jelölje a keresett szöget α! Ha például $A'C'$-t eltoljuk AC-be, akkor $BAC\sphericalangle = \alpha$. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$, innen $\alpha \approx 31°$.

e) Ha AB és $A'C$ szöge β, akkor például $CA'B'\sphericalangle = \beta$ (AB-t eltoljuk $A'B'$-be). $\operatorname{tg}\beta = \frac{B'C}{B'A'} = \frac{\sqrt{6^2+4^2}}{10} = \frac{\sqrt{52}}{10}$, innen $\beta \approx 35{,}8°$. A két kitérő él távolsága megegyezik AB és az $A'B'C$ sík távolságával. A $BCC'B'$ lapra merőleges oldalnézetből AB képe B, az $A'B'C$ sík képe CB' – vagyis a keresett távolság a BCB' háromszög B-hez tartozó m magasságaként áll elő. A BCB' háromszög kétszeres területét kétféleképpen is felírhatjuk: $BC \cdot BB' = CB' \cdot m$. Ebből $m = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{24}{\sqrt{52}} \approx 3{,}33$ egység.

4. példa **(Matematika Határok Nélkül verseny, 2002–2003.)** Egy csiga A-ból B-be szeretne eljutni a legrövidebb úton. Az útja során kénytelen megmászni egy fekvő helyzetű, háromszög alapú hasáb formájú üvegházat. (Az adatok leolvashatók az ábráról.)

a) Számítsuk ki a csiga minimális útjának a hosszát!

b) Milyen irányban kell elindulnia?



Megoldás *a)* Az üvegház mint hasáb alapja szabályos háromszög, oldalai 50 cm hosszúak. Az AB térbeli útvonal akkor a legrövidebb, ha „az üvegház síkbeli kiterítésekor” az útvonal alakja $A'B'$ egyenes szakasz lesz. Az $A'B'$ szakasznak az üvegház alaplapjával párhuzamos vetülete 2 m, a rá merőleges vetülete 1,5 m hosszú. Pitagorasz tételéből $AB = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5$, vagyis a csiga minimális hosszúságú útvonala 2,5 m hosszú.

b) Ha az útvonal és az üvegház háromszög alaplapjának bezárt szöge φ, akkor $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1{,}5}{2}$, és innen $\varphi \approx 36{,}9°$. (Ez az irány tehát A-ból abba a pontba mutat, amely 50 cm-rel van B-n túl.)

Megjegyzés

A megoldás során kihasználtuk, hogy az üvegház mint hasáb alapja szabályos háromszög, de természetesen tetszőleges háromszög alap esetén is hasonló a gondolatmenet.

FELADATOK

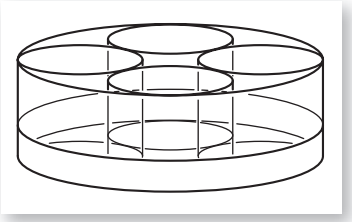
1. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2019.)** Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk egy adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a d: $[5; 20] \to \mathbb{R}$, $d(x) = -0{,}25x^2 + 20x + 40$ függvény adja meg, ahol x a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves?

b) Hány dm^2-rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter?

2. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2017.)** Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is. A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm. Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő?



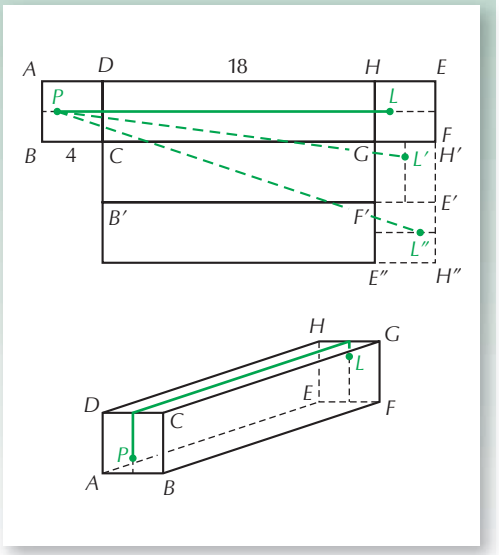
3. E2 Az egységsugarú gömb köré olyan kúpot írunk, amelynek teljes felszíne kétszerese a gömb felszínének. Mekkora a kúp térfogata?

4. E1 Három, egymást is érintő R sugarú gömb fekszik az egyenes asztallapon. Mekkora a sugara annak az asztalon lévő negyedik gömbnek, amelyik mindhárom gömböt érinti?

5. E2 Téglalap alakú kartonlemezből a sarkokon levő kis négyzetek kivágásával a lehető legnagyobb térfogatú nyitott doboz hálóját akarjuk elkészíteni. Mekkora legyen az eltávolítandó négyzetek x oldala, ha a kartonpapír két oldala a és b hosszúságú?

6. E2 *a)* Bizonyítsuk be, hogy egy tetraédert mindig lehet paralelogrammában metszeni!
b) Igaz-e, hogy egy tetraédert mindig lehet rombuszban metszeni?

7. E2 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Feladat: Az $ABCDEFGH$ téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza 4 cm, 4 cm, 18 cm. Az egyik négyzetlapon egy légy, a másikon egy pók ül. A légy oldalaktól vett távolságai 2, 1, 2, 3 cm (vagyis egy középvonal 1:3 arányú osztópontjában van), míg a pók a légyhez képest a test középpontjára szimmetrikusan helyezkedik el. Milyen irányban induljon a pók a légy felé, hogy a lehető legrövidebb úton elérje? (A pók csak a téglatest felületén mozoghat.)
„Megoldás”: Ha kiterítjük a téglatest hálózatát, ezen a minimális hosszúságú PL útvonal egyenes szakasz. Rögzítsük például a pók P helyzetét, ekkor az ábrán látható különböző kiterítéseken a légy helyzete L, L', L'' stb. A legrövidebb útvonal hossza $PL = 22$ cm; Pitagorasz tételéből pedig adódik, hogy a többi lehetséges út ennél hosszabb. (Például $PL' = \sqrt{23^2 + 3^2} = \sqrt{538}$ (cm), s ez nagyobb, mint 22 cm.)



Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 1904–1970, 2162–2281.

ANALÓG FELADATOK SÍKBAN ÉS TÉRBEN (Olvasmány)

Tanulmányaink során a síkbeli és térbeli analógiával már többször találkoztunk. (Az **analógia** köznapi értelemben hasonlóságot, megegyezést, párhuzamosságot jelent; például **párhuzamos gondolatok** vagy **hasonló eljárások** értelemben.) Ilyenkor néha síkbeli problémát általánosítottunk a térben, vagy valamilyen módszert, matematikai eszközt nemcsak a síkban, hanem a térben is használtunk. Az analógia alkalmazására felsorolunk néhány példát az eddigi gyakorlatunkból:

1. A kör és a gömb **definíciója**. (Azon P pontok halmaza, amelyek egy adott O ponttól megadott távolságra vannak – a síkban és a térben.)

2. **Síkbeli és térbeli Pitagorasz-tétel.** (Ha egy téglalap két szomszédos oldala a és b, akkor átlója $\sqrt{a^2+b^2}$ hosszúságú; ha pedig egy téglatest három egy csúcsból kiinduló éle a, b és c, akkor testátlója $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ hosszúságú.)

3. A 11. osztályban megmutattuk, hogy tetszőleges origó esetén a háromszög súlypontjába mutató vektor $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$. Hasonló állítás igaz a térben: bármely tetraéder esetében a súlypontba mutató vektor $\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Itt jellemzően az **eszköz** (a vektorok alkalmazása) megegyező. Analóg **tételeket** is megfogalmazhatunk: a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át és kölcsönösen harmadolják egymást, míg a tetraéder súlyvonalai szintén egy ponton mennek át, és negyedelik egymást. (A súlypontra további analóg tételeket is igazoltunk.)

4. Analóg **módszert** alkalmaztunk az előző leckében, mikor igazoltuk, hogy ha egy tetraédernek van beírt gömbje, akkor ennek sugara $R=\frac{3\cdot V}{A}$. (Az analóg síkbeli tétel a háromszög beírt körére vonatkozott: $r=\frac{t}{s}$.) A módszer a kisebb részekre bontás, és a térfogatok, illetve területek egyenlőségének felírása volt.

5. Egy érdekesség az ún. síkbeli izoperimetrikus tétel, mely szerint az adott kerületű alakzatok közül a kör területe a legnagyobb. A híres tétel térbeli megfelelője: adott felszínű alakzatok közül a gömb térfogata a legnagyobb. (Egyik tételt sem bizonyítjuk.)

HOGYAN ALKALMAZHATJUK AZ ANALÓGIA MÓDSZERÉT A FELADATMEGOLDÁSOKBAN?

Először is észre kell vennünk a lehetőséget. Vagyis adott síkbeli feladat esetén érdemes elgondolkodnunk, tudnánk-e általánosítani a térben; adott térbeli feladat esetén pedig próbáljunk visszaemlékezni, találkoztunk-e már hasonló feladattal a síkban.

Tudatosan kereshetünk már korábban alkalmazott eszközt, módszert, eljárást – hátha az adott feladatban is tudjuk alkalmazni.

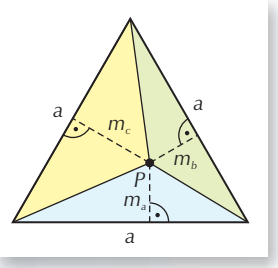
Végül megemlítjük, hogy nem kell „megijedni” az általánosításoktól. (Gyakran már az is segít, ha az analóg állítást sikerül megfogalmaznunk. Egy bizonyítást nyilván megkönnyít, ha tudjuk, hogy mit is kellene igazolnunk.)

Az alábbi példákban párhuzamos megoldásokra törekszünk, a síkbeli és térbeli módszerek analógiáját emeljük ki.

1. példa

a) (síkbeli feladat): Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög belsejében felvett tetszőleges P pontra igaz, hogy a háromszög oldalaitól mért távolságainak összege állandó!

b) (térbeli analóg feladat): Mutassuk meg, hogy a szabályos tetraéder belsejében felvett tetszőleges P pontra igaz, hogy a tetraéder lapjaitól mért távolságainak összege állandó!



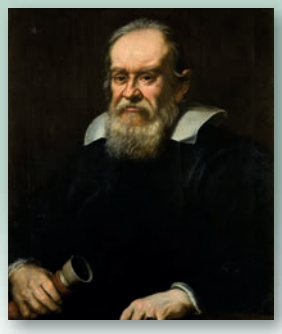
Megoldás

a) Kössük össze P-t az adott szabályos háromszög csúcsaival, ekkor három részháromszöget kapunk. Ezek területösszege megegyezik az eredeti háromszög területével, ami állandó érték. Ha a háromszög oldala a, és P távolsága az oldalaktól

m_a, m_b, m_c, akkor $t = \frac{a \cdot m_a}{2} + \frac{a \cdot m_b}{2} + \frac{a \cdot m_c}{2} = \frac{a}{2}(m_a + m_b + m_c)$, s mivel a állandó, így $m_a + m_b + m_c$ szintén állandó (az összeg éppen a szabályos háromszög magassága).

A szakirodalomban *Viviani-tételként* is emlegetett összefüggés már régóta ismert. Az elnevezés *Vincenzo Viviani* (1622–1703) olasz matematikus, Torricelli és Galilei tanítványa nevét őrzi.

Galileo Galilei (1564–1642) itáliai fizikus, csillagász, matematikus, a korszak legnagyobb természettudósa volt. Ő vezette be a kísérlet és a megfigyelés új módszerét a tudományos vizsgálatokban. Matematikai munkásságának nagy részét a pápai per alatt, házi őrizetben írta.



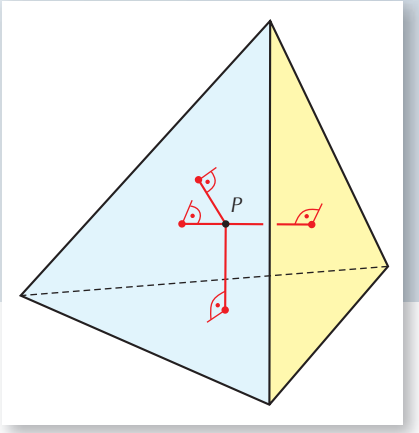
Galileo Galilei

b) Kössük össze P-t a tetraéder csúcsaival, ekkor négy résztetraédert kapunk. Ezek térfogatösszege megegyezik az eredeti tetraéder térfogatával, ami állandó érték. Ha a tetraéder oldallapjainak területe T, és P távolsága a lapoktól m_a, m_b, m_c, m_d, akkor

$$V = \frac{T \cdot m_a}{3} + \frac{T \cdot m_b}{3} + \frac{T \cdot m_c}{3} + \frac{T \cdot m_d}{3} = \frac{T}{3}(m_a + m_b + m_c + m_d),$$

s mivel T állandó, így

$m_a + m_b + m_c + m_d$ szintén állandó.



Megjegyzés

A bizonyításokból látszik, hogy P határpont is lehet. A kérdéses összeg nagyságát is megkaptuk: ez egyenlő a háromszög magasságával, illetve a tetraéder testmagasságával.

2. példa

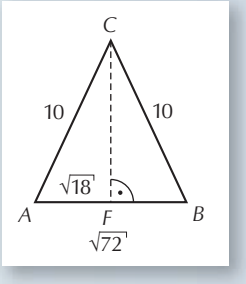
a) (síkbeli feladat): Egy derékszögű háromszög két befogója $a = 6$ és $b = 8$ egység hosszú. Mekkora az átfogóhoz tartozó magassága?

b) (térbeli feladat): Az $ABCD$ tetraéder D csúcsból kiinduló élei páronként merőlegesek egymásra, hosszuk $DA = DB = 6$ és $DC = 8$ egység. Mekkora az ABC laphoz tartozó magasság?

Megoldás

a) Az átfogó hossza Pitagorasz tételéből $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$ egység. A terület kétféle felírásából a keresett m_c számolható: $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$, innen $m_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ egység.

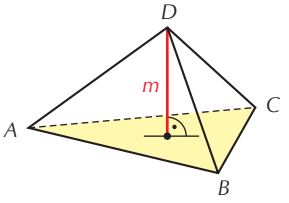
b) Pitagorasz tételéből az ABC háromszög oldalai $CA = CB = 10$ és $AB = \sqrt{72}$ egység. Meghatározzuk az ABC egyenlő szárú háromszög területét, ehhez behúzzuk a CF magasságot, ami az AB oldalt felezi.

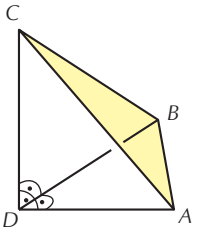


$FB = \frac{\sqrt{72}}{2} = \sqrt{18}$, a BFC derékszögű háromszögben

$FC = \sqrt{10^2 - (\sqrt{18})^2} = \sqrt{82}$.

$T_{ABC} = \frac{\sqrt{72} \cdot \sqrt{82}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{41}}{2} = 6 \cdot \sqrt{41}$ területegység.





Az $ABCD$ tetraéder térfogatát kétféleképpen írhatjuk fel. Egyrészt $V = \frac{T_{ABC} \cdot m}{3}$ (itt m a keresett testmagasság). Másrészt a tetraéder felfogható az ADB alapú, DC magasságú gúlának is, így

$$V = \frac{T_{ABD} \cdot CD}{3} = \frac{DA \cdot DB}{2} \cdot \frac{DC}{3} = \frac{DA \cdot DB \cdot DC}{6}.$$

A két térfogat egyenlő:

$\frac{T_{ABC} \cdot m}{3} = \frac{DA \cdot DB \cdot DC}{6}$, azaz $\frac{6 \cdot \sqrt{41} \cdot m}{3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{6}$, s innen $m = \frac{24}{\sqrt{41}} \approx 3{,}75$ (egység).

3. példa

a) (síkbeli feladat): Egy háromszög két oldala $a = 9$ és $b = 12$ egység hosszú. Legalább mekkora a háromszög köré írt kör R sugara?

b) (térbeli feladat): Egy tetraéder alaplapjának három oldala $a = 9$, $b = 12$ és $c = 15$ egység. Legalább mekkora a tetraéder köré írt gömb R sugara?

Megoldás

a) A körülírt körben a b oldal egy húr, tehát $2R \geq b$, azaz $R \geq \frac{b}{2} = 6$ egység. A háromszög köré írt kör sugara tehát legalább 6 egység hosszú. ($R = 6$ akkor teljesül, ha a b oldal a körülírt kör átmérője. Ekkor a háromszög Thalész tétele miatt derékszögű, és a c oldal hossza $\sqrt{12^2 - 9^2} = \sqrt{63}$ egység.)

b) Az alaplap köré írt kör a tetraéder köré írt gömb egy síkmetszeteként áll elő. Mivel $a^2 + b^2 = c^2$, az a, b, c oldalú háromszög derékszögű, és a körülírt körének r sugara az átfogó fele: $r = 7{,}5$ egység. A síkmetszetként kapott kör r sugara nem lehet nagyobb a gömb R sugaránál, azaz $R \geq r = 7{,}5$ egység. A tetraéder köré írt gömb sugara tehát legalább 7,5 egység hosszú. ($R = 7{,}5$ akkor teljesül, ha az alaplap körülírt köre gömbi főkör, azaz ha a tetraéder magassága 7,5.)

FELADATOK

1. E1 Bizonyítsuk be vektorok alkalmazásával az olvasmányban említett tételeket:

a) Az $ABCD$ tetraéder súlypontjába mutató vektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$.

b) A tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át, és a súlyvonalak kölcsönösen negyedelik egymást.

2. E1 Fogalmazzuk meg a Thalész-tétel egy lehetséges térbeli analógját, majd bizonyítsuk is be!

3. E1 Korábban megfogalmaztuk a körhöz húzott szelőszakaszok síkbeli tételét:
„Egy külső pontból adott körhöz húzott érintőszakasz mértani közepe a körhöz húzott szelőszakaszoknak.”
Fogalmazzuk meg a tétel egy lehetséges térbeli általánosítását! Igaz az így kapott tétel?

4. E1

a) (síkbeli feladat): Egy háromszög két oldala $a = 9$ és $b = 12$ egység hosszú. Legfeljebb mekkora a háromszög területe?

b) (térbeli feladat) Egy tetraéder D csúcsból kiinduló élei $a = 10$, $b = 12$ és $c = 15$ egység hosszúak. Legfeljebb mekkora a tetraéder térfogata?

5. E2 A skaláris szorzat segítségével bizonyíthatjuk az ún. paralelogramma-tételt: „Bármely paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlóinak négyzetösszegével."
Igazoljuk az analóg térbeli tételt: Bármely paralelepipedon oldaléleinek négyzetösszege egyenlő a testátlóinak négyzetösszegével.

6. E2 *a)* (síkbeli feladat): Egy háromszög oldalai $a = 9$, $b = 12$ és $c = 15$ egység hosszúak. Határozzuk meg annak a c oldalra írt félkörnek az r sugarát, amely érinti az a és b oldalt!
b) (térbeli feladat): Egy háromszög alapú szabályos gúla alapélei $a = 10$, oldalélei $b = 13$ egység hosszúak. Határozzuk meg annak az alaplapra írt félgömbnek az R sugarát, amely érinti a gúla oldallapjait!

7. E2 *a)* (síkbeli feladat): Mutassuk meg, hogy bármely háromszögben $\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}$! (A jelölés a hagyományos: r a beírt kör sugara, m_a, m_b, m_c pedig a megfelelő magasságok.)
b) (térbeli feladat): Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a lehetséges térbeli analóg feladatot!

36. GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉGEK A SÍKBAN

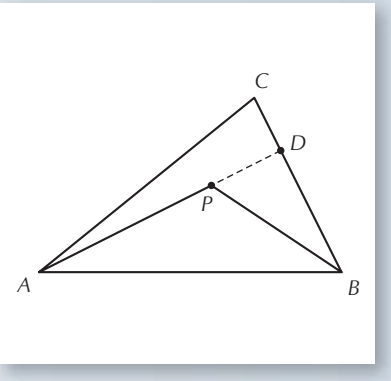
Geometriai egyenlőtlenségekkel lépten-nyomon találkozunk. Nagyon egyszerű példa a háromszög-egyenlőtlenség, amely a háromszög oldalaira ad feltételt. Előfordul, hogy a mértani hely tulajdonság egyúttal egyenlőtlenséget is meghatároz, ilyen például a körív pontjai, valamint a körön belüli, illetve kívüli pontok kapcsolata. Vagy említhetjük a látókörívet: a köríven (köríveken) kívüli pontokból az adott szakasz látószöge kisebb.

Közismert feladat is vezethet szélsőérték keresésére. Például egy kör adott belső pontján át húrokat húzunk: milyen értékeket vehet fel a húrok hossza? Vagy adott egy háromszög két oldala – kérdés, milyen bezárt szög esetén lesz a háromszög területe maximális. És persze az is lehetséges, hogy a könnyen megfogalmazott feladat túl nehéznek bizonyul (az előző példában keressük például a beírt kör sugarának a maximumát)...

A feladatokat csoportosíthatjuk tematikusan (az előző leckében például foglalkoztunk térgeometriai szélsőértékekkel), összehasonlíthatjuk alakzatok alkotórészeit (híres problémakör az ún. izoperimetrikus tétel: adott kerületű alakzatok közül melyik területe a legnagyobb) és így tovább.

Már ebből a felsorolásból is látszik, milyen mély a témakör. Ebben a leckében most csak néhány típuspéldát elemzünk.

1. példa Egyszerű feladat annak igazolása, hogy ha P az ABC háromszög egy belső pontja, akkor az ABP háromszög kerülete kisebb, mint az ABC háromszög kerülete.



Megoldás Igazolni kell az $AP + PB < AC + CB$ egyenlőtlenséget.

Kézenfekvő gondolat az $AP < AC$ és $BP < BC$ becslés, de ez általában nem teljesül: könnyű olyan ábrát rajzolni, amikor $AP > AC$ vagy $BP > BC$.

Ha az AP egyenes D-ben metszi BC-t, akkor kétszer is alkalmazhatjuk a háromszög-egyenlőtlenséget: $PD + DB > PB$ és $AC + CD > AD$. Ez alapján: $AP + PB < AP + PD + DB = AD + DB < AC + CD + DB = AC + CB$, és ezt kellett igazolni.

2. példa Derékszögű háromszögben adott az $AB = c$ átfogó. A C csúcs mely helyzetében lesz maximális a háromszög területe?

Megoldás

Első megoldás

A C csúcs az AB átmérőjű Thalész-körön mozoghat. Az AB alaphoz tartozó magasság (és így a terület is) akkor a lehető legnagyobb, ha C az AB körív felezőpontjában van. Ekkor a háromszög egyenlő szárú, és (maximális) területe $\frac{c \cdot \frac{c}{2}}{2} = \frac{c^2}{4}$.

Második megoldás

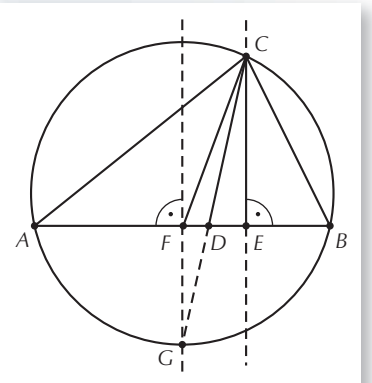
a^2+b^2 állandó ($=c^2$), ezen feltétel mellett keressük $t=\frac{ab}{2}$ maximumát. A mértani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt $\sqrt{ab}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow ab\le\frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow t\le\frac{c^2}{4}$. A terület maximális értéke tehát $\frac{c^2}{4}$, és ezt az $a=b$ esetben veszi fel.

(Alkalmazhattuk volna az a^2 és b^2 számokra a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenséget is.)

3. példa Ha az ABC háromszög nem egyenlőszárú (pl. $AC>BC$), akkor a nevezetes vonalak tulajdonságai miatt könnyen igazolható, hogy $m_c<f_c<s_c$.

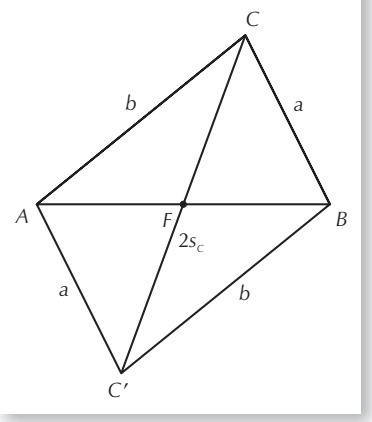
Például az ábrán az $s_c=CF$ súlyvonal nagyobb, mint az $f_c=CD$ szögfelező, hiszen $FDC\sphericalangle$ tompaszög. (Az f_c szögfelező az AB ív G felezőpontjában metszi a körülírt kört.) De milyen kapcsolatban van például a súlyvonal a közrefogó oldalakkal?

Bizonyítsuk be, hogy a súlyvonal kisebb, mint a közrefogó oldalak számtani közepe!



Megoldás $s_c<\frac{a+b}{2}$ igazolásához tükrözzük a C csúcsot az AB oldal F felezőpontjára!

Az így kapott $AC'BC$ négyszög paralelogramma (átlói felezik egymást), $AC'=a$ és $CC'=2s_c$. Az $AC'C$ háromszögben felírjuk a háromszög-egyenlőtlenséget: $a+b>2s_c$, és innen már következik az állítás.



Megjegyzés

Másik megoldást kapunk, ha a súlyvonalat kifejezzük az oldalakkal. A koszinusztételből vagy a skaláris szorzás segítségével

$4s_c^2=2a^2+2b^2-c^2$.

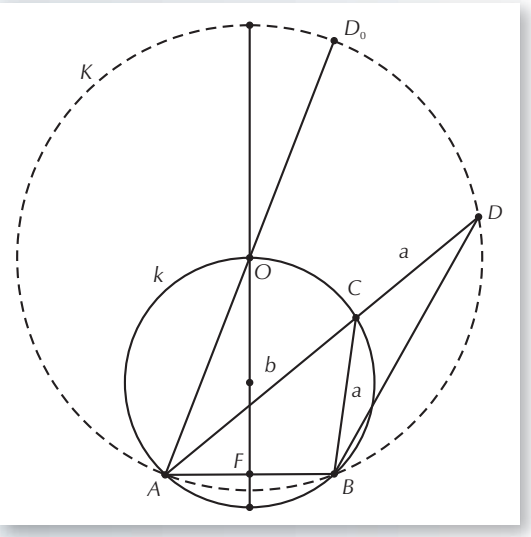
Helyettesítsük be a $4s_c^2<(a+b)^2$ igazolandó állítást, és végezzünk ekvivalens lépéseket:

$2a^2+2b^2-c^2<(a+b)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab<c^2 \Leftrightarrow |a-b|<c$,

ez pedig a háromszög-egyenlőtlenség egyik alakja.

A szögfelező és a közrefogó oldalak közötti hatványközép-kapcsolatot feladatként tűzzük ki, a magasság pedig a közrefogó oldalak mindenféle középértékénél kisebb – hiszen az oldal hossza nem esik a két közrefogó oldal hossza közé.

4. példa Adott egy háromszögben az $AB=c$ oldal és az α szög. A C csúcs mely helyzetében lesz maximális a háromszög kerülete?



Megoldás Mivel c adott, így $a+b$ maximalizálása a feladat. A C csúcs az AB szakasz α szögű k látókörén futópont. Néhány próbálkozás után azt sejthetük, hogy az $AC=BC$ egyenlő szárú helyzetben lesz maximális a kerület. Hogyan tudnánk bizonyítani a sejtést?

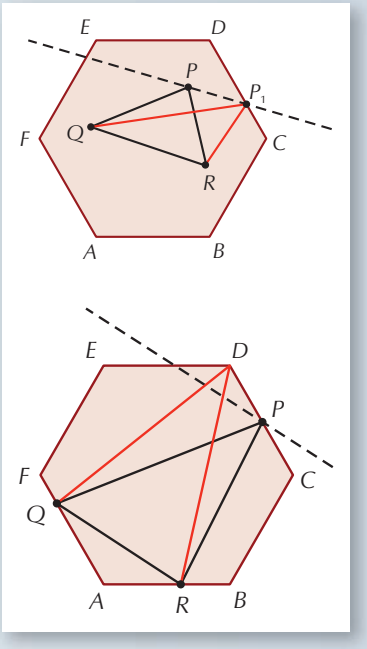
Az $(a+b)$ összeget előállíthatjuk például úgy, hogy az AC szakasz C-n túli meghosszabbítására felmérjük $BC=a$-t. Az így kapott D pont és az $AD=a+b$ szakasz hossza C mozgatásával változik, de észrevehetjük, hogy $ADB\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}$ állandó

érték. (A BCD egyenlő szárú háromszög C csúcsnál lévő α külső szögének a fele.) D tehát rajta van az AB szakasz $\frac{\alpha}{2}$ szögű K látókörén.

Ebben a K körben keressük a maximális hosszú AD húrt, ezt pedig akkor kapjuk, ha AD átmérő. K-ban az AB szakaszhoz tartozó kerületi szög $\frac{\alpha}{2}$, ezért a középponti szög α, és a K kör O középpontjára $AOB\sphericalangle = \alpha$. Vagyis O rajta van a k körön, ebből az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki, és egyúttal a keresett C pontot is megkaptuk: $C \equiv O$.

A háromszög kerülete legfeljebb $\frac{c}{\sin\frac{\alpha}{2}} + c$ nagyságú lehet.

5. példa Legyen P, Q és R az $ABCDEF$ szabályos hatszög belsejének vagy határvonalának három pontja. A pontok mely helyzetében lesz a PQR háromszög területe maximális?



Megoldás Megpróbáljuk úgy mozgatni a pontokat, hogy előállítsuk a maximális területet.

(1) Első észrevétel, hogy ha a háromszög valamelyik csúcsa (pl. P) nincs a hatszög határán, akkor elmozgathatjuk úgy, hogy a határra kerüljön, miközben a PQR háromszög területe nem változik. Ugyanis ha P-n keresztül párhuzamost húzunk QR-rel, ezen egyenes és a hatszög határvonalának metszéspontja olyan P_1 pontot jelöl ki, amelyre a PQR és P_1QR háromszögek területe megegyezik. (Ugyanakkora a QR alap és a hozzá tartozó magasság.)

Emiatt elegendő olyan PQR háromszögeket vizsgálnunk, amelyek csúcsai a hatszög határvonalán vannak.

(2) Ha a háromszög valamelyik csúcsa (pl. P) nincs a hatszög valamely csúcsában, akkor elmozgathatjuk úgy, hogy az egyik csúcsba kerüljön, miközben a PQR háromszög területe nem csökken. Legyen a P pont például a CD szakasz belsejében *(ábra)*. Ha CD és QR párhuzamos, akkor P-t a C vagy a D csúcsba elmozgatva a PQR háromszög területe nem változik. Ha viszont CD és QR nem párhuzamos, akkor a C és D pontok közül valamelyik távolsága nagyobb a QR egyenestől, mint P távolsága. (Az ábrán ez a D pont.) Ha tehát P-t D-be mozgatjuk, akkor a PQR háromszög területe nő.

Emiatt elegendő olyan PQR háromszögeket vizsgálnunk, amelyek csúcsai a hatszög csúcsaiból kerülnek ki.

A csúcsokat kiválasztva háromféle háromszöget kaphatunk.

Az ABC típus területe a hatszög területének hatoda. (A hatszöget felbonthatjuk hat egybevágó szabályos háromszögre, ezek közül két felet tartalmaz ABC.)

Az ABD típus területe a hatszög területének harmada (két szabályos részháromszögre darabolható), míg az ACE típus területe a hatszög területének a fele.

Ezen ponthármas-típus esetén kapunk tehát maximális területet.

Megjegyzés

Az (1) és (2) gondolat általános, tetszőleges konvex sokszögbe írt háromszög esetén alkalmazható: a maximális területű háromszög csúcsait elegendő a sokszög csúcsai között keresnünk. (Természetesen lehetséges, hogy más háromszög is ugyanakkora, maximális területet ad.)

6. példa Egy klasszikus izoperimetrikus tétel a következő:

Bizonyítsuk be, hogy adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb!

Megoldás Egy „tiszta” algebrai megoldásban a Héron-féle területképletet használhatjuk fel.

Bármely háromszögben az $s-a$, $s-b$, $s-c$ mennyiségek pozitívak a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Erre a három számra felírjuk a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenségeket:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \le \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}.$$

Ekvivalens átalakításokat végzünk:

$$(s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{s}{3}\right)^3 \Leftrightarrow s(s-a)(s-b)(s-c) \le s\left(\frac{s}{3}\right)^3 \Leftrightarrow t^2 \le \frac{s^4}{3^3} \Leftrightarrow t \le \frac{s^2}{\sqrt{27}}.$$

A jobb oldal konstans, ez lehet tehát a terület maximuma. Az egyenlőség az $s - a = s - b = s - c$ esetben léphet fel, azaz amikor a háromszög oldalai egyenlők.

Megjegyzés

Egyúttal a duális feladatot is igazoltuk, mely szerint adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb.

FELADATOK

1. E1 Az egybevágósági transzformációkat eredményesen alkalmazhatjuk az alábbi feladatok megoldásában.

a) Adott az e egyenes és egyik partján az A és B pont. Keressünk olyan C pontot az e egyenesen, amelyre $AC + CB$ a lehető legrövidebb! Mennyi $AC + CB$ minimuma?

Konkrét adatokkal: $\overline{Ae} = 100$, $\overline{Be} = 40$, az A és B pontok egyenesre vetített merőleges vetületeinek a távolsága pedig 120 egység.

(A feladat közismert, népszerű megfogalmazása például a következő: Piroska (az A pontból) elsétál a nagymamájához (B) úgy, hogy közben az (egyenes partú) folyóból vizet visz neki. Melyik C pontba megy a folyóhoz, ha a legrövidebb úton halad?)

b) Adott az e és f párhuzamos egyenespár és a különböző külső félsíkokban az A és B pont. Keressük meg a minimális hosszúságú töröttvonalat A és B között úgy, hogy az egyenesek között csak merőlegest húzhatunk! Milyen hosszú a legrövidebb töröttvonal?

Konkrét adatokkal: $\overline{Ae} = 100$, $\overline{Bf} = 40$, $\overline{ef} = 30$, az A és B pontok e egyenesre vetített merőleges vetületeinek a távolsága pedig 120 egység.

(Népszerű megfogalmazásban: Piroska úgy jut el a legrövidebb útvonalon a nagymamához, hogy az e és f partú folyón merőlegesen evez át.)

c) Egy hegyesszögű szögtartomány e és f félegyenesei között adott az A pont. Szerkesszünk olyan minimális hosszúságú ABC töröttvonalat, amelyre B az e, C az f félegyenes pontja!

(Másképpen: Piroska úgy tér vissza a kiindulási helyére (A-ba), hogy közben az e és f folyópartokat is érinti.)

2. E2 Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának felezőpontja F. Az AB és AC oldalak fölé kifelé négyzeteket szerkesztünk, ezek középpontjai O és Q. Melyik nagyobb, FO vagy FQ, ha $AB > AC$?

3. E2 Az O középpontú, r sugarú kör P belső pontjára $OP = d$ ($d < r$). Milyen határok között változhat a P-n átmenő húrok hossza?

4. E2 Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a szögfelező kisebb, mint a közrefogó oldalak harmonikus közepe: $f_a < \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$!

(Segítség: először mutassuk meg, hogy a szögfelező hossza $f_a = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$!)

5. E1 Egy konvex négyszög oldalai a, b, c, d, átlói e és f. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög t területére

a) $2t \le ab + cd$; *b)* $2t \le ac + bd$; *c)* $2t \le ef$; *d)* $t \le \dfrac{a+c}{2} \cdot \dfrac{b+d}{2}$!

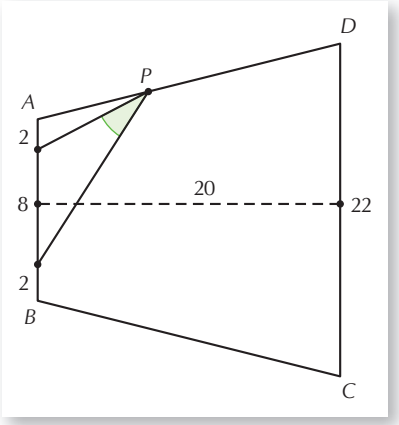
6. E2 Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\beta < \gamma$, akkor $f_b > f_c$!

7.

E1 *a)* Az $ABCD$ konvex négyszög síkjának mely P pontjára lesz $PA + PB + PC + PD$ összeg a lehető legkisebb?

E2 *b)* Kísérletezz! Ha $ABCD$ konkáv négyszög, akkor vajon melyik a fenti tulajdonságú P pont a síkban?

8. E2 Az ábrán egy *ABCD* trapéz alakú előadóterem felülnézeti képe látható. Az *EF* színpad hossza 8 m, $AF = EB = 2$ m, a terem hossza 20 m, $CD = 22$ m. Az *AD* oldal mely *P* pontjából látszik a lehető legnagyobb szögben az *EF* színpad? Számítsuk ki ezt az *AP* távolságot!



Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 137-144, 155-168, 762, 923-926, 944, 1251.

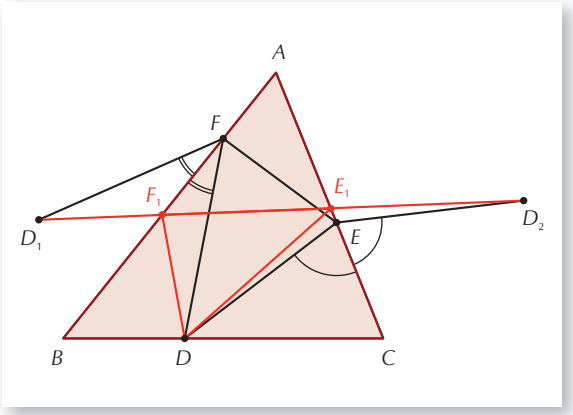
A FAGNANO-FELADAT (Olvasmány)

I. F. Fagnano XVIII. századi olasz matematikustól származik az alábbi nevezetes szélsőérték-feladat:

Adott hegyesszögű *ABC* háromszögbe melyik a beírható legkisebb kerületű háromszög? (A beírt *DEF* háromszög három csúcsa az *ABC* háromszög három oldalán van.)

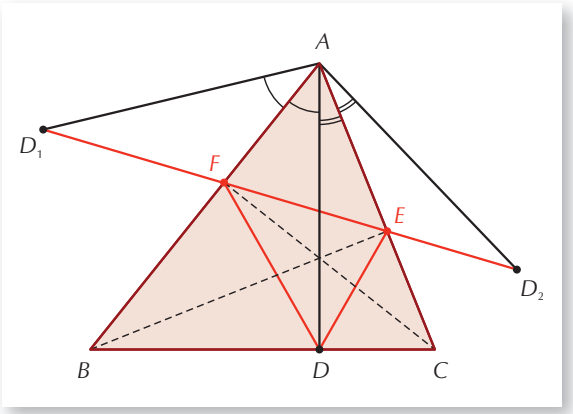
A feladatra még berlini diák korában elegáns megoldást talált *Fejér Lipót* (1880–1959), a későbbi neves matematikusunk. A kiinduló ötlete az volt, hogy a *BC* oldalon vegyük fel a *D* csúcsot, és először ehhez a rögzített *D*-hez keressük meg az *E* és *F* pontok optimális helyzetét *(ábra)*.

Tükrözzük *D*-t az *AB* és *AC* oldalakra, így kapjuk a D_1 és D_2 pontokat. $DF = D_1F$ és $DE = D_2E$ miatt $DE + EF + FD = D_2E + EF + FD_1$ a minimalizálandó összeg. Észrevehetjük, hogy rögzített *D* esetén a D_1 és D_2 pontok helyzete is állandó, így az adott kezdő- és végpontú D_1FED_2 töröttvonal hosszát kell minimalizálnunk. Ez akkor a lehető legrövidebb, ha a négy pont egy egyenesbe esik. Adott *D* esetén tehát az ábrán látható DE_1F_1 háromszög kerülete lesz a legkisebb.



A második lépésben *D* legkedvezőbb helyzetét keressük meg. A tengelyes tükrözés miatt $AD_1 = AD$ és $AD_2 = AD$, tehát AD_1D_2 egyenlőszárú háromszög. Az *A* csúcsnál lévő szöge pedig – szintén a tükrözés miatt – állandó érték: $D_1AD_2 \sphericalangle = 2\alpha$. Márpedig az állandó szárszögű egyenlőszárú háromszög alapja akkor lesz a legrövidebb, ha szárai a lehető legrövidebbek – vagyis azt kaptuk, hogy az *AD* távolságot kell minimalizálni.

D ezért az *A* csúcsból húzott magasság talppontja (ami belső pont, mivel *ABC* hegyesszögű). Megmutatható, hogy a *D* tükrözésével kapott *E* és *F* pontok is hasonló tulajdonságúak, így a feladat megoldása: *DEF* az *ABC* háromszög ún. talpponti háromszöge.



Ottlik Géza: Félbeszakadt beszélgetés Réz Pállal

Érdemes megkeresned az interneten Ottlik Géza nagyon szép, meleg hangú megemlékezését egykori tanáráról, Fejér Lipótról.

V. VEKTOROK, TRIGONOMETRIA

37. VEKTOROK, SKALÁRIS SZORZAT, VEKTORIÁLIS SZORZAT

Vektorokkal sík és térgeometriai, koordinátageometriai tanulmányaink során már találkoztunk. Néhány fontos összefüggés átismétlésével, illetve új összefüggések keresésével foglalkozunk a következőkben.

MŰVELETEK VEKTOROKKAL

Értelmeztük vektorok összegét, különbségét, vektor szorzását valós számmal, tekintsük át ezeknek a műveleteknek a tulajdonságait.

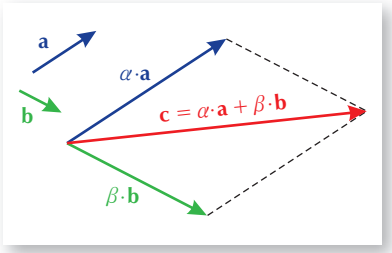
A vektorösszeadás tulajdonságai:
kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Vektorok számmal történő szorzásának tulajdonságai:
asszociatív: $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
disztributív: $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ és $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
(ahol α és β valós számokat jelölnek.)

Vektorok lineáris kombinációja

Tétel

Az egyértelmű vektorfelbontás tétele:
Ha egy síkban adott két, nem párhuzamos **a** és **b** vektor (egyik sem nullvektor), akkor a sík bármely **c** vektora egyértelműen állítható elő az **a** és **b** vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan α, β valós számok, hogy $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.



Bizonyítás

Tekintsük az **a, b, c** vektorokat, toljuk el őket közös kezdőpontból kiinduló helyzetbe. A **c** végpontján át húzzunk párhuzamosokat **a**, illetve **b** vektorokkal, míg ezek metszik a vektorok által meghatározott egyeneseket. A közös metszéspontból ezen metszéspontokig mutató vektorok **a** és **b** valós számszorosai, tehát $\alpha\mathbf{a}$ és $\beta\mathbf{b}$ alakban írhatók fel. Ezek összege a „paralelogramma szabály" szerint a **c** vektor: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{c}$, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

A felbontás egyértelműségének belátását indirekt módon igazoljuk.

Tegyük fel, hogy létezik olyan α_1 és β_1 valós szám, melyre $\alpha_1 \neq \alpha$ vagy $\beta_1 \neq \beta$ és
$\alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} = \mathbf{c}$ teljesül. Ekkor
$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b}$, és
$(\alpha - \alpha_1)\mathbf{a} = (\beta_1 - \beta)\mathbf{b}$.

Mivel **a** és **b** nem párhuzamosak, ezért $(\alpha - \alpha_1) = 0$ és $(\beta - \beta_1) = 0$. Így azonban $\alpha = \alpha_1$ és $\beta = \beta_1$, ami ellentmond az indirekt állításnak.

Következmények:

- Ha három vektorra felírható az $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$ egyenlet, ahol α, β, γ nem mind nulla, akkor ezek a vektorok egy síkban fekszenek.
- Ha **a**, **b**, **c** nem ugyanazon síkkal párhuzamos vektorok, akkor az előző egyenlet csak $\alpha = \beta = \gamma = 0$ esetén teljesül.

VEKTOROK SKALÁRIS SZORZATA

A fizikában felmerült igény miatt szükség van két vektorból egy harmadik mennyiség előállítására. A származtatás tulajdonságait vizsgálva az algebrai szorzás egyes tulajdonságai igaznak bizonyulnak. Ezért célszerű az eljárást a vektorok közötti szorzásnak értelmezni. A két lényegesen különböző származtatás miatt megkülönböztetünk kétfajta szorzást vektorok között: a *skaláris szorzást,* illetve a *vektoriális szorzást*. A skaláris szorzat például a fizikában a munka kiszámításánál, míg a vektoriális szorzat a forgatónyomatékkal kapcsolatban jelenik meg.

Definíció

Két egymással φ szöget bezáró **a** és **b** vektor skaláris szorzatán az
$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$
valós számot értjük, ahol $0° \leq \varphi \leq 180°$ a két vektor által bezárt szög, $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$ az **a** és **b** vektorok hossza.

A skaláris szorzás tulajdonságai:
kommutatív: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$
disztributív: $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$
továbbá igaz, hogy: $\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})$, ahol α valós szám.

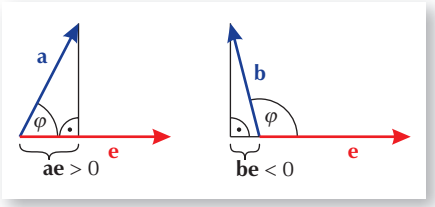
Érdemes azt is megjegyezni, hogy nem asszociatív, hiszen $(\mathbf{ab})\mathbf{c}$ egy **c**-vel párhuzamos vektor, míg $\mathbf{a}(\mathbf{bc})$ egy **a**-val párhuzamos vektor, tehát általános esetben nem egyenlők.

Tétel

A skaláris szorzat akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Bizonyítás Ha merőlegesek a vektorok, akkor a bezárt szög $\varphi = 90°$, tehát $\cos 90° = 0$, vagyis a szorzat egyik tényezője és így a szorzat is 0.

Ha $\mathbf{ab} = 0$, akkor a szorzat egyik tényezője 0. Ha $\cos\varphi = 0$, akkor $\varphi = 90°$ (mert $0° \le \varphi \le 180°$). Ha $\cos\varphi \neq 0$, akkor valamelyik vektor nullvektor, amelyet minden vektorra merőlegesnek tekintünk.



A skaláris szorzat geometriai jelentése (a skalárvetület fogalma)

Ha a skaláris szorzat egyik vektora az **e** egységvektor, akkor az **ae** szorzat az **a** vektornak az egységvektor egyenesén levő előjeles vetületét adja. Azt mondjuk, hogy **ae** az **a** vektor **e** vektorra eső skalárvetülete.

A bizonyítás a definícióból közvetlenül adódik.

Egy vektornak önmagával vett skaláris szorzata

Tekintsük az $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2$ szorzatot. A definíció szerint $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$, mivel $\cos 0° = 1$.

Ebből és a már megismert tulajdonságokból nyilvánvalóak a következő fontos azonosságok:

$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$

$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$

$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$.

Megjegyzés

A skaláris szorzat esetén csak kéttényezős szorzatot értelmezünk, mivel az eredmény egy valós szám, nem pedig egy vektor, mint a tényezők. Ezért nincs értelmezve a vektor magasabb fokú hatványa, valamint a vektorral való osztás sem.

A skaláris szorzás segítségével nagyon könnyen bebizonyíthatjuk a már ismert koszinusztételt.

Tétel

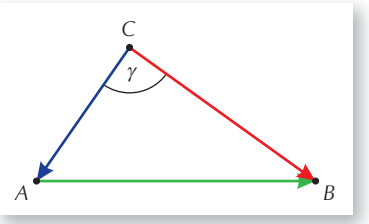
Koszinusztétel: bármely háromszögben $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ (a szokásos jelöléseket használva).

Bizonyítás Tetszőleges háromszögben $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, amely összefüggést négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Tudjuk, hogy egy vektor önmagával vett skaláris szorzata a hosszának a négyzete:

$\overrightarrow{AB}^2 = c^2$, $\overrightarrow{CB}^2 = a^2$ és $\overrightarrow{CA}^2 = b^2$. Továbbá a skaláris szorzat definíciója miatt $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = ab \cdot \cos\gamma$. Ezeket a kapott egyenletbe behelyettesítve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.



Nézzük meg a skaláris szorzás egy geometriai alkalmazását:

1. példa Az ABC háromszög síkjában melyik P pontra lesz a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg minimális?

Megoldás Legyen a háromszög súlypontja S és $\overrightarrow{SP} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$. Ekkor

$PA^2 + PB^2 + PC^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{c})^2 = 3\mathbf{p}^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{p}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Mivel $\overrightarrow{SS} = \overrightarrow{0} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) : 3$, ezért $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3\mathbf{p}^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$.

Ez az összeg akkor minimális, ha $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy a P pont az ABC háromszög súlypontja.

Két síkbeli vektor skaláris szorzata koordinátákkal kifejezve

Vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogyan határozhatjuk meg két, koordinátáival megadott vektor skaláris szorzatát.

Tétel

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektorok skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összege:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Bizonyítás

Legyen e két vektor
$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}$.
Ezek skaláris szorzata:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j})(b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}) = a_1 b_1 \cdot \mathbf{i}^2 + a_1 b_2 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_2 b_1 \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_2 b_2 \cdot \mathbf{j}^2$.
Mivel az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok merőlegesek egymásra, ezért skaláris szorzatuk 0, továbbá, bármely $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, tehát $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$. Így azt kaptuk: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

A skaláris szorzat segítségével meghatározhatjuk két vektor hajlásszögét.

2. példa

Számítsuk ki az $\mathbf{a}(5; 4)$ és $\mathbf{b}(-2; 2)$ vektorok hajlásszögét!

Megoldás

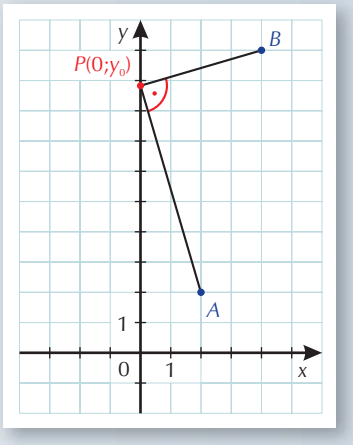
Írjuk fel a skaláris szorzatukat kétféleképpen.
Egyrészt a definíció szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi = \sqrt{5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \cdot \cos\varphi = \sqrt{41 \cdot 8} \cdot \cos\varphi$.
Másrészt a koordinátás felírás szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = -2$.
Ezek egyenlők, így $\cos\varphi = \frac{-2}{\sqrt{41 \cdot 8}} \approx -0{,}1104$, tehát $\varphi \approx 96{,}3°$.

3. példa

Határozzuk meg az y tengelynek azt a P pontját, melyből az $A(2; 2)$ és $B(4; 10)$ pontokat összekötő szakasz derékszögben látszik!

Megoldás

Legyen a keresett pont $P(0; y_0)$. Írjuk fel a $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorokat, majd vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz ezek skaláris szorzata 0.



$\overrightarrow{PA}(2; 2 - y_0)$, $\overrightarrow{PB}(4; 10 - y_0)$.
$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 8 + (2 - y_0)(10 - y_0) = 0$, azaz
$y_0^2 - 12y_0 + 28 = 0$.
$(y_0)_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 112}}{2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{2}$.
Tehát két olyan pontja van az y tengelynek, amelyből az AB szakasz derékszögben látszik: $P_1(0; 6 + 2\sqrt{2})$; $P_2(0; 6 - 2\sqrt{2})$.

Megjegyzés
A Thalész-tétel miatt az AB szakasz mint átmérő fölé írt kör kimetszi ezeket a pontokat az y tengelyből.

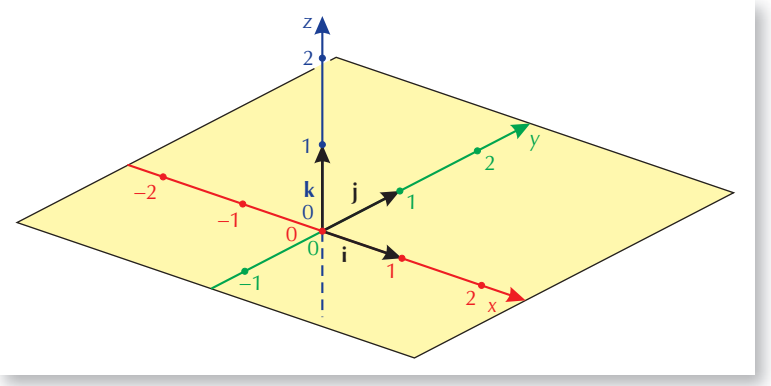
4. példa

$\mathbf{ab} = 12$ az általuk bezárt szögre: $\cos\varphi = 0{,}6$. Határozzuk meg a $\mathbf{b}$ vektort, ha $\mathbf{a}(3; 1)$!

Megoldás

Legyen $\mathbf{b}(x; y)$. Az $\mathbf{a}$ abszolút értéke $\sqrt{10}$, a $\mathbf{b}$ vektoré $\sqrt{x^2 + y^2}$. Írjuk fel a skaláris szorzatukat kétféleképpen:
(1) $\mathbf{ab} = 3x + y = 12$;
(2) $\mathbf{ab} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot 0{,}6 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 40$.
Az egyenletrendszer megoldása:
$x_1 = 2$, $y_1 = 6$; $x_2 = 5{,}2$, $y_2 = -3{,}6$.
Tehát a $\mathbf{b}_1(2; 6)$, illetve $\mathbf{b}_2(5{,}2; -3{,}6)$ vektorok a megoldások.

A skaláris szorzás térbeli vektorokkal



Síkbeli koordináta-rendszerben már vizsgáltuk a problémát, ezért most nézzük térben.

Legyenek a tengelyek x, y, z, a bázisvektorok rendre $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorok.

Először ezek egymással való szorzatát vizsgáljuk:

$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$ és $\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0$ az előzőek alapján.

Ha egy vektort a bázisvektorok egyikével skalárisan szorzunk, akkor a tengelyen levő előjeles vetületet (skalárvetületet) kapjuk.

Ha $\mathbf{r}(x; y; z)$, akkor $\mathbf{ri} = x$, $\mathbf{rj} = y$, $\mathbf{rk} = z$.

Ezeket úgy is megkaphatjuk, ha $\mathbf{r}$-et az egységvektorokkal skalárisan szorozzuk.

$\mathbf{ri} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\mathbf{i} = x\mathbf{i}^2 + y\mathbf{ji} + z\mathbf{ki} = x$;

$\mathbf{rj} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\mathbf{j} = x\mathbf{ji} + y\mathbf{j}^2 + z\mathbf{jk} = y$;

$\mathbf{rk} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\mathbf{k} = x\mathbf{ki} + y\mathbf{kj} + z\mathbf{k}^2 = z$.

Legyenek $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ és $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ vektorok. Ekkor

$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,

ahol felhasználtuk az $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$ és $\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0$ összefüggéseket.

Megjegyzés

Az előzőek alapján az $\mathbf{r}(x; y; z)$ vektor önmagával való skaláris szorzata:

$\mathbf{rr} = \mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ezért az $\mathbf{r}$ vektor hossza: $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Két vektor szöge

Mivel $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \cdot \cos\varphi$, így $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2|}$, ahol $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$.

5. példa

a) Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ vektorral egyirányú $\mathbf{a}_e$ egységvektort!

b) Határozzuk meg a $\mathbf{v}(3; 1; 9)$ vektor skalárvetületét az $\mathbf{a}(2; -1; 4)$ vektoron!

Megoldás

a) $\mathbf{a}_e = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

b) $\mathbf{v}_a = \dfrac{\mathbf{va}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 9 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \dfrac{41}{\sqrt{21}} = \dfrac{41\sqrt{21}}{21} \approx 8{,}95$.

6. példa

Mekkora szöget zárnak be egymással az $\mathbf{a}(2; 3; 1)$ és $\mathbf{b}(-4; 4; 5)$ vektorok?

Megoldás

$\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \dfrac{-8 + 12 + 5}{\sqrt{4 + 9 + 1} \cdot \sqrt{16 + 16 + 25}} = \dfrac{9}{\sqrt{798}} \approx 0{,}3186$, $\varphi \approx 71{,}4°$.

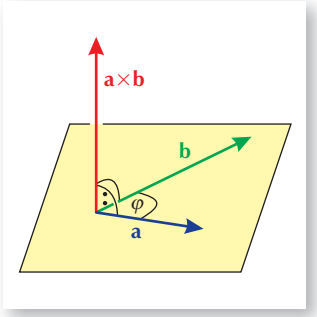
VEKTOROK VEKTORIÁLIS SZORZATA (Kiegészítő anyag)

Definíció

Két egymással φ szöget bezáró $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor vektoriális szorzatának nevezzük azt a vektort, amelynek hossza $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, és iránya merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra úgy, hogy a vektoriális szorzat vektorával szembenézve az $\mathbf{a}$ vektor 180°-nál kisebb pozitív irányú forgással átvihető legyen a $\mathbf{b}$ vektorral egyező irányba.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatát így jelöljük: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ($\mathbf{a}$ kereszt $\mathbf{b}$).

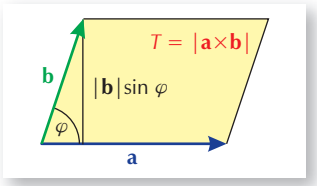
Az így definiált vektoriális szorzatra az **a**, **b**, **a** × **b** vektorok **„jobbrendszert”** (jobbsodrású rendszert) alkotnak, ahol **a** × **b** merőleges **a**-ra és merőleges **b**-re is *(lásd ábra)*.



Ha **i** és **j** az (*xy*) síkbeli derékszögű koordináta-rendszer két bázisvektora, akkor **i** x **j** vektor merőleges az (*xy*) síkra és **i** valamint **j** vektorokkal jobbrendszert alkot, ezt a vektort szokás **k** bázisvektornak nevezni az (*xyz*) koordináta-rendszerben.

Ha az **a** és **b** vektorok egy síkban vannak, akkor a vektoriális szorzatuk abszolút értékét szemléletessé tehetjük a következő módon.

Mivel az $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\varphi$ számérték megadja az **a** és **b** közös kezdőpontú vektorok által meghatározott paralelogramma területét, ezért az **a** × **b** vektoriális szorzatot az **a** és **b** vektorok által kifeszített paralelogramma **területvektorának** is szokás nevezni *(lásd ábra)*.



A skaláris szorzatot szokás **belső szorzatnak**, míg a vektoriális szorzatot **külső szorzatnak** is nevezni.

A vektoriális szorzat nyilván nem kommutatív, mert **a** × **b** és **b** × **a** ellentétes irányú vektorok.

Igazak az alábbi tulajdonságok:

Ha *p* valós szám, akkor $p(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (p\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(p\mathbf{b})$.

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$,

$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{a} + \mathbf{c}\times\mathbf{a}$, azaz disztributív a vektoriális szorzás az összeadásra.

Mint láttuk kettőnél több vektornak nem értelmezett a skaláris szorzata, azonban a vektoriális szorzás értelmezhető, de nem asszociatív tulajdonságú.

Nézzük például bázisvektorok esetén: $(\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j} = \mathbf{0}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

FELADATOK

1. E1 Az *ABCDEF* szabályos hatszög oldalai *a* hosszúságúak. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$. Számítsuk ki az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ skaláris szorzat értékét!

2. E1 Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéderben a kitérő élek merőlegesek egymásra!

3. E1 Merőlegesek-e egymásra az alábbi vektorok?
a) **a**(2; 3) és **b**(12,6; −8,4);
b) **c**(7; −4) és **d**(4; 5);
c) **p**(2; 1; −3) és **r**(4; −1; 10).

4. E1 Határozzuk meg *p* értékét úgy, hogy a vektorok merőlegesek legyenek!
a) **a**(−4; 9) és **b**(*p*; 1);
b) **c**(2; 4; −3) és **d**(5; *p*; 1).

5. E1 Határozzuk meg a **v**(4; 1) vektor, $y - 2x = 4$ egyenesre eső merőleges vetületének hosszát!

6. E1 Adottak az *A*(3; 5) *B*(4; 14) és *C*(10; 2) pontok. Hogyan válasszuk meg a *p* valós számot, hogy $\overrightarrow{AC}$ és az $\overrightarrow{AB} - p\cdot\overrightarrow{AC}$ vektorok merőlegesek legyenek?

7. E1 Adott két pont: *A*(2; 2), *B*(10; 6). Határozzuk meg az *x* tengely összes olyan pontját, melyből az *AB* szakasz derékszögben látszik!

8. E2 Adott két pont: *A*(2; 8), *B*(4; *p*). Határozzuk meg a *p* paraméter értékét úgy, hogy az *y* tengelynek csak 1 olyan pontja legyen, melyből az *AB* szakasz derékszögben látszik!

9. E2 Adjunk meg olyan **v** vektort, amely az **a**(5; 2) és **b**(4; −3) vektorok által bezárt szög szögfelezőjével párhuzamos!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2425–2455.

38. ADDÍCIÓS TÉTELEK

Eddigi tanulmányainkban vizsgáltuk már adott szög különböző szögfüggvényei közötti kapcsolatot, illetve néhány speciális összefüggést különböző szögek szögfüggvényei között. A leglényegesebbek összegyűjtve itt találhatóak (feltéve, hogy a szögfüggvények értelmezettek):

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

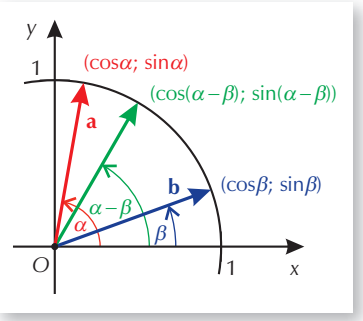
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Most azt vizsgáljuk, hogy ha ismertek az α és β szögek szögfüggvényértékei, azaz $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, akkor meg lehet-e állapítani ezekből a két szög összegének, illetve különbségének szögfüggvényértékeit: **sin($\alpha \pm \beta$)**-t és **cos($\alpha \pm \beta$)**-t.

1. Tekintettel arra, hogy definíció szerint a forgásszögek szögfüggvényei az adott szögben elforgatott egységvektor végpontjának koordinátái, vektorok skaláris szorzatában pedig a szög koszinusza szerepel, ezért először vizsgáljuk a **cos($\alpha - \beta$)**-t.

Legyen a tetszőleges α irányszöggel elforgatott egységvektor **a**, a tetszőleges β irányszöggel elforgatott egységvektor **b**.



Így

a(cos α; sin α), míg

b(cos β; sin β).

Írjuk fel az **a** és **b** skaláris szorzatát kétféleképpen. A definíció szerinti felíráshoz szükséges a két vektor által bezárt szög, amely vagy $(\alpha - \beta + 2k\pi)$, vagy $(\beta - \alpha + 2k\pi)$ alkalmas $k \in \mathbf{Z}$ választásával (mivel α és β tetszőleges forgásszögek, viszont két vektor közbezárt szögén 0° és 180° közötti szöget értünk). Ezek közül bármelyik szög koszinusza megegyezik $\cos(\alpha - \beta)$-val, hiszen

$\cos(\alpha - \beta + 2k\pi) = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta - \alpha + 2k\pi)$.

Tehát a skaláris szorzat felírásánál választhatjuk a $\cos(\alpha - \beta)$-t.

A skaláris szorzat

– a definíció szerint: $\mathbf{ab} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$;

– a vektorok koordinátáival: $\mathbf{ab} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

A bal oldalak azonossága alapján a

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

összefüggéshez jutottunk.

2. Mivel az előző bizonyításban α, illetve β tetszőleges szögek voltak, ezért β helyére $-\beta$-t írva is igaz az összefüggés, vagyis

$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$.

Tudjuk, hogy $\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha + \beta)$, $\cos(-\beta) = \cos\beta$, valamint $\sin(-\beta) = -\sin\beta$. Ezeket behelyettesítve

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

összefüggéshez jutunk.

3. Felmerül az a kérdés, hogy az eddigi tételeket felhasználva hogyan lehet a további szögfüggvényekre összefüggéseket találni.

Tudjuk, hogy $\sin\varphi = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, ezért

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta =$$

$$= \mathbf{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}.$$

4. A $\sin(\alpha + \beta)$ összegalakjának megállapításához, használjuk ismét azt az ötletet, hogy β helyére $-\beta$-t írhatunk, így

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

5. Mivel $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, ha $\cos\varphi \neq 0$, ezért az előző összefüggéseket felhasználva:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Felmerül a kérdés, hogy nyerhetünk-e olyan alakú kifejezést, amelyben tangens szögfüggvény szerepel? Osszuk el a tört számlálóját és nevezőjét is a $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ szorzattal, feltéve, hogy $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq 0$:

$$\mathbf{tg\,(\alpha-\beta)}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\mathbf{\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}}.$$

6. Végezetül felhasználva, hogy $\operatorname{tg}(-\varphi)=-\operatorname{tg}\varphi$:

$\mathbf{tg\,(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}}$ összefüggéshez jutunk.

Összegezve a hat addíciós (összegzési) tételt

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, ahol $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, ahol $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Megjegyzések

1. Két szög összegének és különbségének kotangensét is kifejezhetjük a két szög kotangensének segítségével:

   $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$, illetve $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$, ha

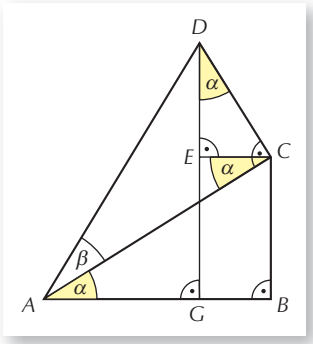
   $\alpha+\beta\neq k\pi$, $\alpha\neq k\pi$, $\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

2. Érdekességként megmutatjuk – hegyesszögekre –, az addíciós tételek egy másik lehetséges bizonyítását:
   Az ABC derékszögű háromszög AC átfogójára vegyük fel az ACD derékszögű háromszöget az ábrának megfelelően. Legyen G a D-ből az AB-re állított merőleges talppontja, E pedig a C-ből a DG-re állított merőleges talppontja. Ekkor az ábrán jelzett α szögek egyenlők, mert merőleges szárú hegyesszögek.

   $$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DG}{AD}=\frac{DE+EG}{AD}=\frac{DE+BC}{AD}=\frac{DE}{AD}+\frac{BC}{AD}=$$

   $$=\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}+\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}=\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}+\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta.$$

   Gyakorlásra javasoljuk a $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ összefüggés igazolását az ábra alapján.



KÉTSZERES SZÖG, FÉLSZÖG SZÖGFÜGGVÉNYEI

Az előbbiekben megismert összefüggések felhasználásával újabbakat nyerhetünk. Néhány olyan, gyakran előforduló összefüggést határozunk most meg, ami a feladatmegoldásokat segítheti.

Egy szög kétszeresének szögfüggvényei

Az összegben β szög helyett α-t írva kapjuk:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$ $\qquad$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2}.$

További, gyakran előforduló összefüggések, amelyeket hasonló ötletek alapján igazolhatunk:
$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = 3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$,
$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$,
$\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Megjegyzés (kiegészítő anyag)
Bizonyítható a többszörös szögfüggvényekre:

$$\sin(n\alpha) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\cos^k\alpha\cdot\sin^{n-k}\alpha\cdot\sin\left(\frac{1}{2}(n-k)\pi\right),$$

$$\cos(n\alpha) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\cos^k\alpha\cdot\sin^{n-k}\alpha\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(n-k)\pi\right).$$

Egy szög felének szögfüggvényei

Gondolhatunk arra, hogy $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$, így

$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, valamint ismert, hogy $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$, így

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ és $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$,

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, illetve $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

A négyzetgyök előtti $\pm$ jel természetesen úgy értendő, hogy a megfelelőt kell választanunk, attól függően, hogy az $\frac{\alpha}{2}$ szög melyik síknegyedbe esik. Ezért a helyes előjel megállapítása külön figyelmet kíván!

Megjegyzés

A $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ azonosságból indulva könnyen igazolható: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

1. példa Határozzuk meg a 75°-os és a 15°-os szögek pontos szögfüggvényértékeit!

Megoldás

Mivel a 75° és a 15° felírható két nevezetes szög összegeként, illetve különbségeként, ezért alkalmazhatjuk az addíciós tételeket $\alpha = 45°$ és $\beta = 30°$ értékekkel.

$$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cdot\cos 30° + \cos 45°\cdot\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cdot\cos 30° - \sin 45°\cdot\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45°+30°) = \frac{\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}30°}{1-\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{9+2\sqrt{3}+3}{6} = 2+\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(Ez utóbbit a $\dfrac{\sin 75°}{\cos 75°}$ összefüggésből is megkaphatjuk.)

$\sin 15° = \sin(45°-30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, vagy $\sin 15° = \cos(90°-15°) = \cos 75°$,

$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, az előzőek alapján.

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45°-30°) = \frac{\operatorname{tg}45° - \operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}.$$

A 15° szögfüggvényeit másképpen is kiszámíthatjuk. Mivel a 15° egy nevezetes szög fele, ezért használhatjuk a félszög szögfüggvényeire vonatkozó képleteket. Például a sin 15°-ra (tudván, hogy az értéke pozitív):

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Igazoljuk, hogy a sin 15°-ra kapott két érték megegyezik:

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$\sqrt{6}-\sqrt{2} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, mivel mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk:

$6-2\sqrt{12}+2 = 4(2-\sqrt{3})$,

$8-4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3}$.

Mivel azonosságot kaptunk és ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állítás igaz.

A 15° további szögfüggvényeire is javasoljuk a második megoldás elvégzését, valamint a kapott eredmények összevetését az első megoldásban kapottakkal.

2. példa Igazoljuk, hogy minden α-ra igaz: $\frac{1-\sin 2\alpha}{2} = \sin^2(45^\circ-\alpha)$!

Megoldás Az addíciós tételeket felhasználva alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\sin^2(45^\circ-\alpha) = (\sin 45^\circ\cdot\cos\alpha - \cos 45^\circ\cdot\sin\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = \frac{1}{2}\cdot(1-\sin 2\alpha) = \frac{1-\sin 2\alpha}{2}.$$

Megjegyzés

A $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ és a $\sin\alpha = \cos(90^\circ-\alpha)$ összefüggéseket felhasználva is igazolható az állítás.

3. példa Igazoljuk, hogy minden olyan x valós szám esetén, amelyekre a kifejezések értelmezve vannak, fennállnak a következő egyenlőségek.

a) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$. *b)* $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\cdot\sin 2x = 2$.

Megoldás *a)* Mindkét oldali kifejezés értelmezési tartománya: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Az addíciós tételek alapján:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Megjegyzés

Felhasználva a $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ azonosságot:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

b) Az értelmezési tartomány: $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Az ismert összefüggések alapján átírva:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 2\sin^2 x+2\cos^2 x = 2(\sin^2 x+\cos^2 x) = 2\cdot 1 = 2.$$

4. példa Bizonyítsuk be, hogy $8\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ$!

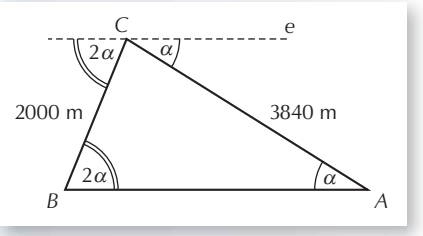
Megoldás A $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ összefüggésből $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$, ha $\alpha \neq k\cdot 180^\circ$, $k\in\mathbf{Z}$.

$$8\cdot\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ = 8\cdot\frac{\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{2\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 80^\circ}{2\sin 40^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = \operatorname{tg} 80^\circ.$$

5. példa A hegytetőről két ellentétes irányú, nyílegyenes lesiklópályán lehet lefelé síelni. Az egyik pálya pontosan 2000 m hosszú, a másik pedig 3840 m. A pályák alsó pontja ugyanazon tengerszint feletti magasságon helyezkedik el. A rövidebb pálya depressziószöge (a vízszintes alá hajló szöge) kétszer akkora, mint a hosszabbé. Mekkorák ezek a szögek?

Két síelő elindul a két pályán lefelé. Mindkettőjüknek van egy kis hatótávolságú telefonja, amin keresztül öt kilométeren belül tudnak kommunikálni. Tudnak-e beszélni egymással a pálya alsó pontjára érve?

Megoldás A rövidebb pálya végpontja legyen a B, a hosszabb végpontja A, a hegy csúcsa pedig legyen a C pont.



Az ABC háromszögben $\beta = 2\alpha$.

A szinusztételt felírva

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2000}{3840}$, vagyis $\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2000}{3840}$

$\sin 2\alpha = 1{,}92 \cdot \sin\alpha$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1{,}92 \cdot \sin\alpha$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 1{,}92 \cdot \sin\alpha = 0$

$\sin\alpha \cdot (2\cos\alpha - 1{,}92) = 0$

$\sin\alpha = 0$ vagy $(2\cos\alpha - 1{,}92) = 0$

$\alpha = 0° + k \cdot 180°$, háromszögben ez nem ad megoldást,

vagy $\cos\alpha = 0{,}96 \Rightarrow \alpha \approx \pm 16{,}26° + k \cdot 360°$, háromszögben $\alpha \approx 16{,}26°$.

Tehát a háromszög szögei $\alpha \approx 16{,}26°$, $\beta \approx 32{,}52°$, $\gamma \approx 131{,}22°$.

Az AB távolságot a koszinusztétel segítségével számíthatjuk ki:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$c^2 = 2000^2 + 3840^2 - 2 \cdot 2000 \cdot 3840 \cdot \cos 131{,}22°$

$c = 5372{,}8$ m.

Tehát ha pontos a hatótávolságra megadott öt kilométer, akkor nem tudnak beszélni egymással a pálya alsó pontjára érve.

FELADATOK

1. E1 Legyen $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Számológép használata nélkül számítsuk ki $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ pontos értékét!

2. E1 Legyen $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$. Számológép használata nélkül számítsuk ki $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ pontos értékét!

3. E1 Igazoljuk, hogy minden valós x, y szám esetén igaz az egyenlőség:
$\sin(x-y)\cdot\cos(x+y) = \sin x \cdot \cos x - \sin y \cdot \cos y$!

4. E2 Az ABC háromszögben $\beta = 2\alpha$. Számítsuk ki α értékét, ha
a) $a = 5$ cm, $b = 8$ cm;
b) $a = 8$ cm, $c = 5$ cm;
c) $b = 8$ cm, $c = 5$ cm!

5. E2 Legyen $0° \le \alpha \le 360°$. Határozzuk meg a kifejezés értelmezési tartományát: $\sqrt{\cos 2\alpha - 3\cos\alpha}$!

6. E2 Számológép használata nélkül igazoljuk, hogy $4 \cdot \cos 36° \cdot \cos 72° = 1$!

7. E2 Számológép használata nélkül igazoljuk, hogy $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = 0{,}125$!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3101–3172.

39. TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ *b)* $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$

Megoldás

a) $x_1+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad x_2+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$k\in\mathbf{Z}$ $\quad k\in\mathbf{Z}$

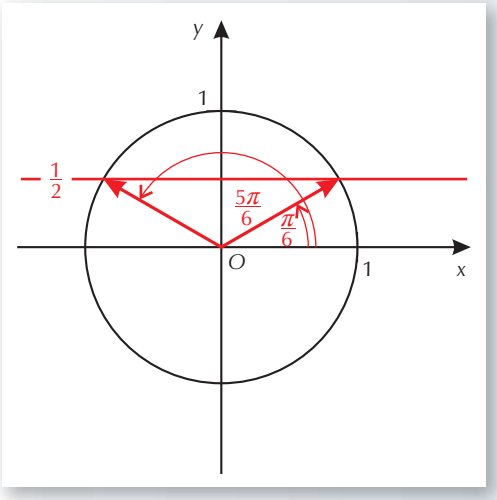
b) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

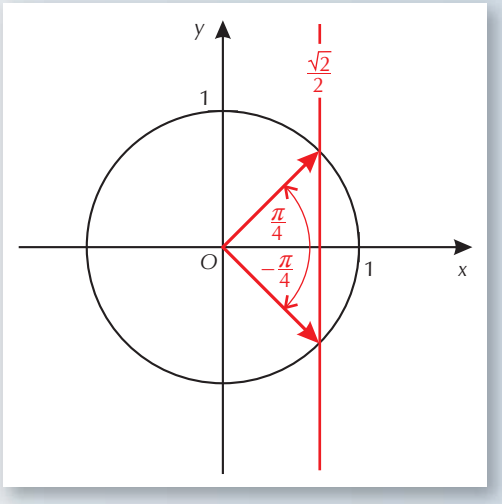
$3x_1-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $\quad 3x_2-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$3x_1=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ $\quad 3x_2=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$ $\quad x_2=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$

$k\in\mathbf{Z}$ $\quad k\in\mathbf{Z}$





2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$ *b)* $2\sin^2 x+5\cos x=5$

Megoldás *a)* Az egyenlet $\sin x$-ben másodfokú, megoldóképlettel megkapjuk, hogy

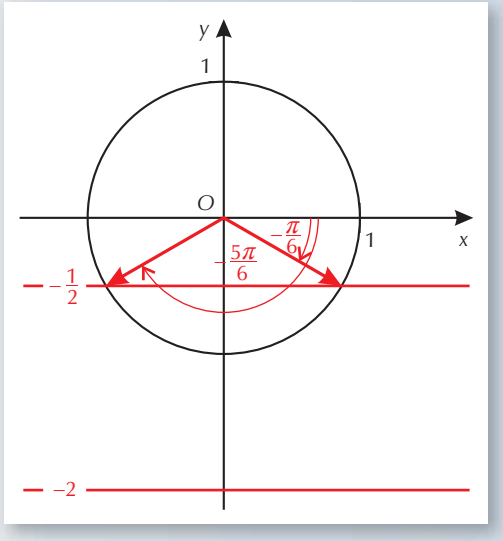
$\sin x=-2$ vagy $\sin x=-\frac{1}{2}$.

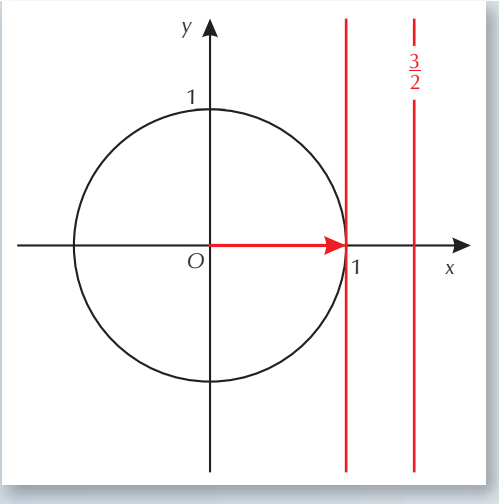
A $\sin x=-2$ egyenletnek nincs megoldása, mert minden x valós szám esetén $\sin x\geq -1$.

A $\sin x=-\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai:

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad x_2=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$k\in\mathbf{Z}$ $\quad k\in\mathbf{Z}$





b) Felhasználva a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot:
$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x = 5$, rendezve
$2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$.

Ez $\cos x$-ben másodfokú, amiből $\cos x = 1$ vagy $\cos x = \frac{3}{2}$.

A $\cos x = 1$ egyenlet megoldásai: $x = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

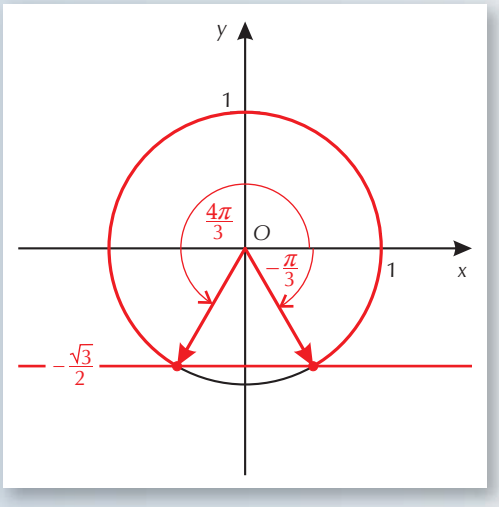
A $\cos x = \frac{3}{2}$ egyenletnek nincs megoldása, mert minden x valós szám esetén $\cos x \leq 1$.

3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

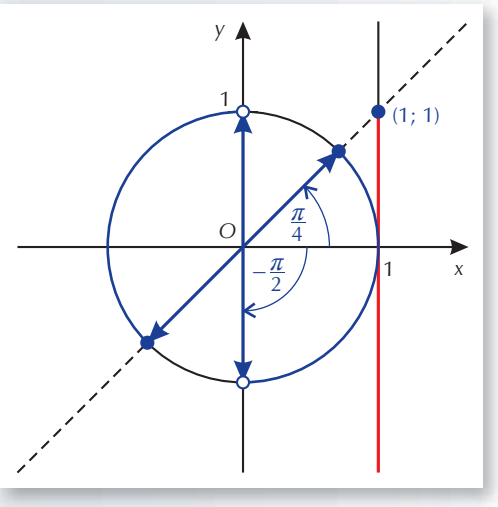
a) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *b)* $\operatorname{tg} x \leq 1$

Megoldás Az alábbi ábrákról leolvasható az egyenlőtlenségek megoldása:

a) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.



b) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.



Egyenletek megoldása során, gyakran törekszünk arra, hogy átalakításokkal az egyik oldal szorzat alakú legyen, a másik oldal pedig 0. Ekkor általában már könnyű feladat a gyökök meghatározása. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy trigonometrikus kifejezéseket mikor lehet hasonló módon átalakítani.

Először próbáljuk szorzattá alakítani két szög szinuszának összegét.
Az addíciós összefüggések alapján:
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$, valamint $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.
Adjuk össze a két egyenletet:
$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$.
Hasonlóképpen járhatunk el két szög szinuszának különbsége esetén is. Ekkor az eredeti két egyenletet vonjuk ki egymásból:
$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Sikerült előállítani a szorzat alakot. Más alakban is felírhatjuk, ha bevezetjük az $\alpha+\beta=x$ és az $\alpha-\beta=y$ jelölést. Ekkor $\alpha=\frac{x+y}{2}$ és $\beta=\frac{x-y}{2}$, amit behelyettesítve:

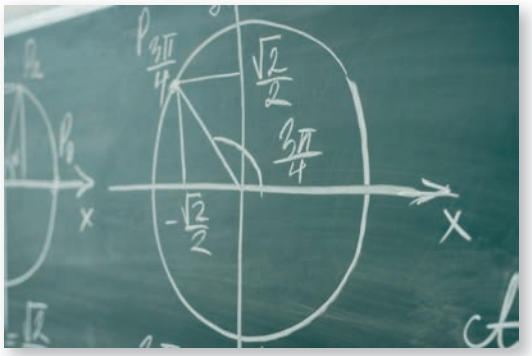
$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}.$$

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel belátható:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}.$$



4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{(\sqrt{3}+1)\sin x}{2}$,

b) $\sin 2x-\sin x=\cos x-1$.

Megoldás

a) Az addíciós tételek alapján:

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{(\sqrt{3}+1)\sin x}{2},$$

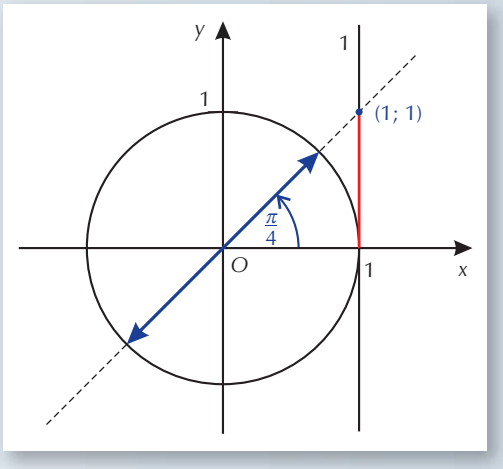
$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}\sin x+\sin x,$$

$$\cos x=\sin x,$$

$$1=\operatorname{tg} x,$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

A megoldás során felhasználtuk a (cos *x*)-szel való osztásnál, hogy nincs olyan valós szám, amelynek szinusza és koszinusza is 0.



b) Átrendezve: $\sin 2x+1=\sin x+\cos x$, amiből a $\sin 2x$ átírásával és az $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ azonosság felhasználásával:

$$2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x=\cos x+\sin x,$$

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin x+\cos x,$$

$$(\sin x+\cos x)^2-(\sin x+\cos x)=0,$$

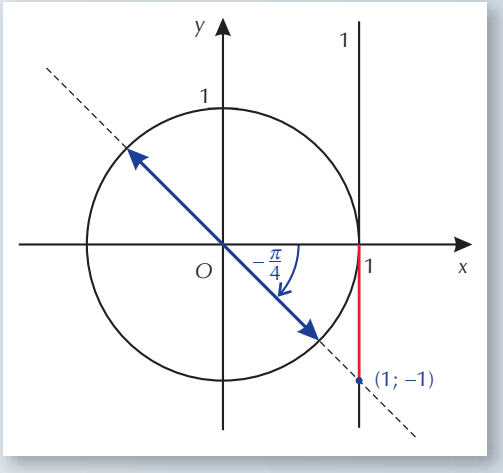
$$(\sin x+\cos x)\cdot(\sin x+\cos x-1)=0,$$

$$\sin x+\cos x=0 \quad\Rightarrow\quad \sin x=-\cos x, \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg} x=-1,$$

ha $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$,

vagy

$\sin x+\cos x=1$ ennek az egyenletnek a megoldásához visszatérünk a *2. példa b)* részében!



Nézzünk néhány trükkös példát!

5. példa Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) $\sin x+\cos x=1$.

c) $a\sin x+b\cos x=c$, ahol a, b, c valós paraméterek.

d) $\lg(\cos^2 x)=\lg\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\lg\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Megoldás *a)* Az értelmezési tartomány: $\frac{\pi}{3}\pm x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $x\neq\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Az addíciós képlet alapján:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}x}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}x}=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$ ha $\operatorname{tg}x$ értelmezve van, azaz $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,

$$\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}+\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{2\sqrt{3}(1+\operatorname{tg}^2x)}{1-3\operatorname{tg}^2x}=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$6+6\operatorname{tg}^2x=-2+6\operatorname{tg}^2x,$$

$$6=-2.$$

Azt kaptuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása. Nem követtünk-e el valahol hibát? Nem, de **csak akkor használhatjuk az addíciós képletet, ha** $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Még meg kell vizsgálni, hogy ebben az esetben teljesül-e az egyenlőség!

Ekkor

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ teljesül, így az egyenlet megoldása: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ahogy az előző példában láttuk, az addíciós tételek alkalmazása szűkítette az értelmezési tartományt, ezzel pedig gyököt veszíthetünk.

b) Mivel $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ezért ha elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{2}$-vel, akkor olyan alakot kapunk, amelyben alkalmazhatjuk az addíciós tételeket.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

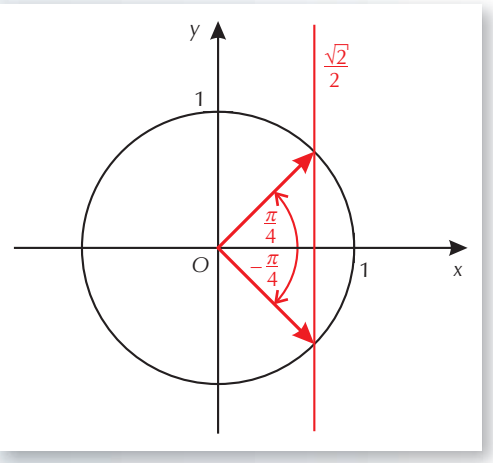
$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ alakban is írható.

Az addíciós tétel értelmében:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow$$

$$x_1-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi;\qquad x_2-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi;$$

$$\Rightarrow\quad x_1=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.\qquad x_2=k2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$



c) Először is felmerül a kérdés, hogy a paraméterek mely értékeinél van megoldása az egyenletnek.

Az előző feladatban az együtthatók négyzetének összege 2 volt, és $\sqrt{2}$-vel osztva tudtunk tovább lépni.

Ezért osszuk el mindkét oldalt $\sqrt{a^2+b^2}$-tel, (ha $a\neq0$ és $b\neq0$, különben vagy $\sin x=c$, illetve $\cos x=c$ típusú alapegyenlet vagy ellentmondás, vagy azonosság az egyenlet).

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Mivel $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, ezért minden esetben létezik olyan φ szög, melyre $\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Tehát az egyenlet:

$\sin\varphi\cdot\sin x+\cos\varphi\cdot\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\cos(\varphi-x)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

alakban írható. Ebből látható, hogy a megoldhatóság feltétele: $-1\le\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1$.

Ekkor az egyenlet már $\cos x=c$ típusú alapegyenlet, amelynek megoldása nem okoz nehézséget.

d) Az értelmezési tartomány:

$$\left.\begin{array}{r}\cos^2 x>0\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\cos x\neq 0\\ 0+2k\pi<\frac{\pi}{2}-x<\pi+2k\pi\\ 0+2k\pi<\frac{\pi}{2}+x<\pi+2k\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

A logaritmus azonosságai és monotonitása alapján:

$\lg(\cos^2 x)=\lg\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]$,

$\cos^2 x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Az addíciós tételek alapján ($\sin\frac{\pi}{2}=1$, és $\cos\frac{\pi}{2}=0$ felhasználásával)

$\cos^2 x=(1\cdot\cos x-0\cdot\sin x)\cdot(1\cdot\cos x+0\cdot\sin x)$,

$\cos^2 x=\cos x\cdot\cos x$ azonossághoz jutunk.

Az eredeti egyenletnek tehát az értelmezési tartomány minden eleme megoldása.

6. példa Mely valós p paraméter esetén van valós megoldása az egyenletnek?

$p^2=2\cos^2 x-\sin^4 x$.

Megoldás $p^2=2\cos^2 x-\sin^4 x\quad\Rightarrow\quad p^2=2(1-\sin^2 x)-\sin^4 x$.

Legyen $y=\sin^2 x$, ekkor az egyenlet:

$p^2=2-2y-y^2$,

$y^2+2y+p^2-2=0$.

Akkor van gyöke, ha $D=12-4p^2\ge 0$, vagyis ha $-\sqrt{3}\le p\le\sqrt{3}$, ekkor az egyenlet gyökei:

$y_1=-1-\sqrt{3-p^2}$, $y_2=-1+\sqrt{3-p^2}$.

Mivel $0\le\sin^2 x\le 1$, ezért

$0\le-1-\sqrt{3-p^2}\le 1$ kellene, de ez nyilván nem teljesül.

A másik esetben pedig $0\le-1+\sqrt{3-p^2}\le 1$,

$1\le\sqrt{3-p^2}\le 2$, mivel mindhárom kifejezés nemnegatív, így négyzetre emelhetünk,

$1\le 3-p^2\le 4$,

$2\ge p^2\ge 1$.

Az utolsó egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-\sqrt{2}\le p\le-1$, vagy $1\le p\le\sqrt{2}$. Ezek az intervallumok megfelelnek a $-\sqrt{3}\le p\le\sqrt{3}$ feltételnek is.

Példákon keresztül figyeljük meg a tanultak alkalmazását egyenlőtlenségek megoldásában.

7. példa Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\cos 2x+\cos x\ge 0$;

b) $|\sin x+\cos x|\le 1$;

c) $\sin^2 x+\sin x\cos x\ge 1$.

Megoldás

a) Az addíciós összefüggések alapján:

$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x \geq 0$, majd $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosságot felhasználva

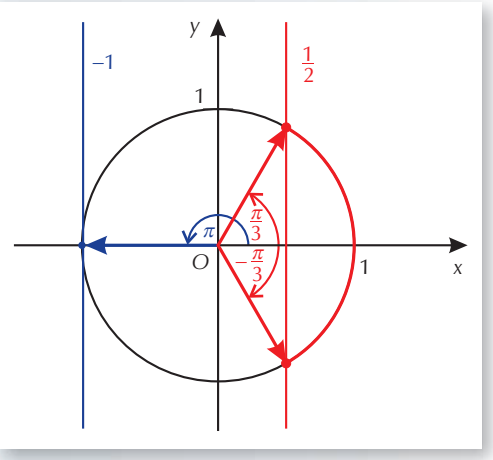
$2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$.

Az egyenlőség teljesül, ha $\cos x = -1$, illetve $\cos x = \frac{1}{2}$.

Az egyenlőtlenség, ha $\cos x \leq -1$, vagy $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Az egyenlőtlenség megoldása:

$x = \pi + 2k\pi$, vagy $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



b) Az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$-1 \leq \sin x + \cos x \leq 1$.

Osszunk az együtthatók négyzetösszegének négyzetgyökével, vagyis $\sqrt{2}$-vel:

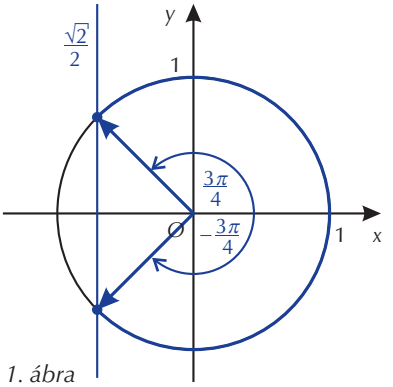
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

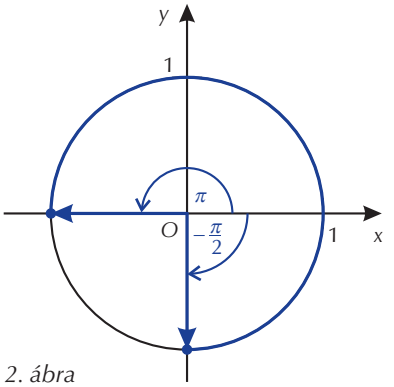
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A bal oldali egyenlőtlenség teljesül, ha

$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ *(lásd 1. ábra)*, azaz $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ *(lásd 2. ábra)*.



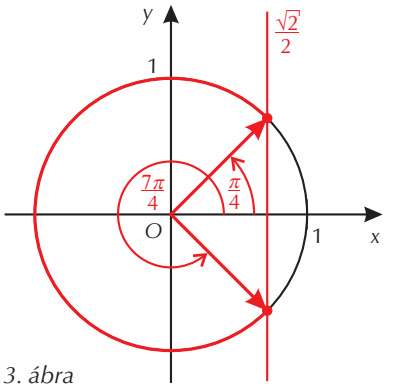
1. ábra



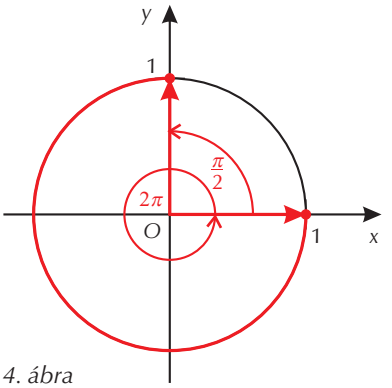
2. ábra

A jobb oldali egyenlőtlenség teljesül, ha

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ *(lásd 3. ábra)*, azaz $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ *(lásd 4. ábra)*.



3. ábra



4. ábra

Összevetve az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

c) $1-\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x\geq 1$,

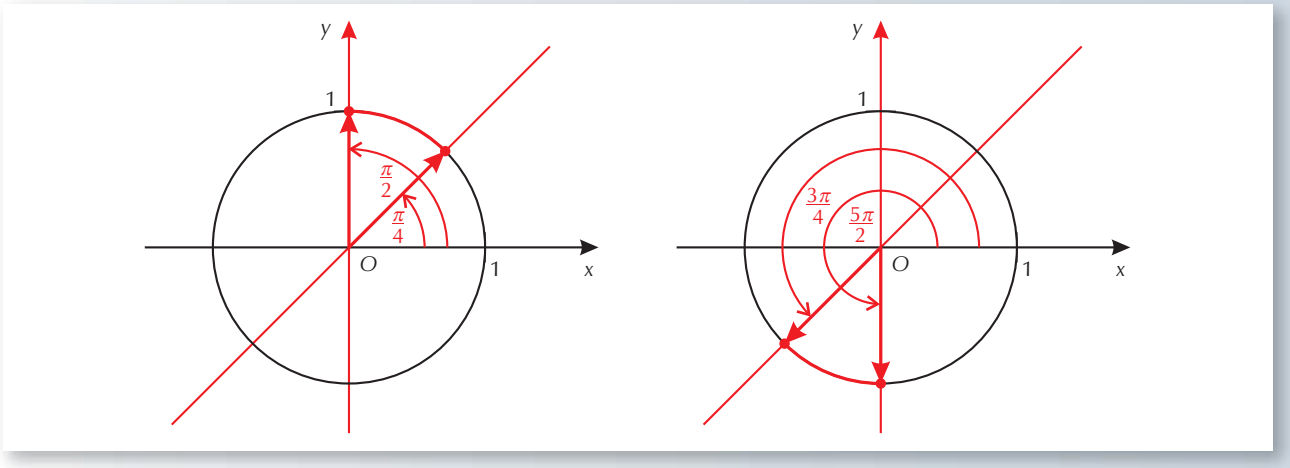
$\cos x(\sin x-\cos x)\geq 0$.

Az egyenlőtlenség teljesül, ha bármely tényező 0, vagy a tényezők azonos előjelűek.

$\cos x\geq 0$ és $\sin x\geq\cos x$, ha $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ vagy

$\cos x\leq 0$ és $\sin x\leq\cos x$, ha $\frac{5\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Összevonva: $\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.



FELADATOK

1. E2 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

E1 a) $\sin 2x=\sin x$;

b) $(3-\sin 6x)\cdot(1+\sin 2x)=8$;

c) $4-3\sin x=2\cos x$;

d) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=x^2-4x+6$;

e) $\sin^6 x+\cos^6 x=\sin 2x+1$;

f) $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

g) $5\sin 2x+3\sin x=\operatorname{tg} x$.

2. E2 Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\sin 2x\geq\cos x$;

b) $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x\leq 1$;

c) $2\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}+\sqrt{1-\cos x}\geq 0$;

d) $4\sin^3 x-2\sin x\leq\cos 2x$.

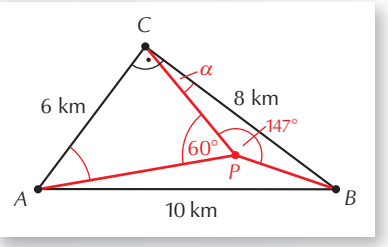
Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 2813–2824., 2876–2893., 3228-3331., 3350-3392.

40. GEOMETRIAI, GYAKORLATI ALKALMAZÁSOK

Az addíciós tételek alkalmazására nézzünk néhány geometriai, gyakorlati példát.

1. példa A sík talajon lévő *A*, *B*, *C* tanyák egymástól való távolságai $AC=6$ km, $BC=8$ km, $BA=10$ km. A gazdák megállapodtak, hogy közösen fúrnak egy kutat. A legkedvezőbb a sík azon *P* pontja volt, amely az *ABC* háromszög olyan belső pontja, amelyből az *AC* 60°-os, a *CB* 147°-os szögben látszik. Milyen messze van a kút a *C* tanyától?

Megoldás Mivel $6^2 + 8^2 = 10^2$ ezért a Pitagorasz tétel megfordítása miatt az ABC háromszög derékszögű, derékszöge a C csúcsnál van.



Jelöljük a PCB szöget α-val, ekkor a PBC szög $33° - \alpha$, a CAP szög $\alpha + 30°$.

Írjunk fel PCB háromszögben és PCA háromszögben egy-egy szinusztételt:

(1) $\frac{PC}{8} = \frac{\sin(33° - \alpha)}{\sin 147°}$, (2) $\frac{PC}{6} = \frac{\sin(30° + \alpha)}{\sin 60°}$.

Rendezésekkel, az addíciós tételek felhasználásával:

$$\frac{8 \cdot \sin(33° - \alpha)}{\sin 147°} = \frac{6 \cdot \sin(30° + \alpha)}{\sin 60°},$$

$$\sin(33° - \alpha) = \frac{6 \cdot \sin 147°}{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right),$$

$$\sin 33° \cdot \cos\alpha - \cos 33° \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}\sin 33°}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Osszuk el mindkét oldalt ($\sin 33° \cdot \cos\alpha$)-val ($\sin 33° \neq 0$ és $\cos\alpha$ sem lehet 0).

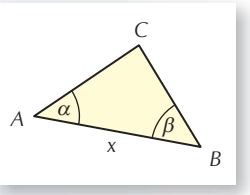
$1 - \operatorname{ctg} 33° \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)$, rendezve $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4 - \sqrt{3}}{4 \cdot \operatorname{ctg} 33° + 3} \approx 0{,}2476$, $\alpha \approx 13{,}9°$.

Ennek felhasználásával: $PC \approx \frac{8 \cdot \sin 19{,}1°}{\sin 147°} \approx 4{,}8$.

A keresett PC távolság $\approx 4{,}8$ km.

2. példa Rögzítsünk a síkon két pontot, A-t és B-t, legyen a távolságuk x egység. Határozzuk meg a sík C pontjának távolságát A-tól és B-től, ha a CAB szög α, az ABC szög β! (C ne illeszkedjen az AB egyenesére.) (Háromszögelésnek is nevezett probléma.)

Megoldás A szinusz tételt felhasználva:



$$\frac{AC}{x} = \frac{\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)} \Leftrightarrow AC = \frac{x \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Hasonló módon: $BC = \frac{x \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

3. példa Az ABC háromszög szögeire fennáll: $2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Mutassuk meg, hogy ekkor a háromszög egyenlő szárú!

Megoldás Ismert összefüggés: $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$, ezért behelyettesítve az egyenlőség jobb oldala:

$$2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $\cos(\beta + \gamma) - \cos(\beta - \gamma) = -2\sin\beta \cdot \sin\gamma$, ezért az eredeti egyenlőség

$\cos(\beta + \gamma) - \cos(\beta - \gamma) = -2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ alakú lesz.

Mivel háromszögről van szó ezért $\cos(\beta + \gamma) = -\cos\alpha$, és tudjuk, hogy $\cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$, ezért

$-\cos\alpha - \cos(\beta - \gamma) = -1 - \cos\alpha$, tehát

$\cos(\beta - \gamma) = 1 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 0$, tehát a háromszög egyenlő szárú, hiszen $\beta = \gamma$.

4. példa Mennyi a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ kifejezés maximális értéke?

Megoldás A feladatra többféle megoldás adható. Néhányat csak vázolunk, érdemes ezeket is részletesen végiggondolni.

Első megoldás: Addíciós tételt használunk, a 39. lecke 2. *c)* példájában alkalmazott módszert követve. A $3\sin x + 4\cos x = k$ egyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk (ekkor k maximuma a kérdés). Mivel $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, így van olyan φ szög, amelyre $\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{k}{5} \Leftrightarrow \cos(\varphi - x) = \frac{k}{5}$, ebből pedig már következik, hogy k legfeljebb 5 lehet. (Ekkor $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, $x = \varphi \approx 36{,}87°$.)

Második megoldás: Az egyenlet négyzetre emelésével próbálkozunk. A $k^2 = k^2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ helyettesítést alkalmazva kiesik a konstans tag; majd $\cos^2 x$-szel osztva tg x-ben másodfokú lesz az egyenlet.

$3\sin x + 4\cos x = k \quad \Rightarrow \quad 9\sin^2 x + 24\sin x^2 \cdot \cos x + 16\cos^2 x = k^2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (k^2 - 9)\sin^2 x - 24\sin x^2 \cdot \cos x + (k^2 - 16)\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k^2 - 9)\mathrm{tg}^2 x - 24\,\mathrm{tg}\,x + (k^2 - 16) = 0.$

Ennek akkor lehet megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$0 \le D = 24^2 - 4 \cdot (k^2 - 9)(k^2 - 16) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le k^2(25 - k^2) \quad \Leftrightarrow \quad |k| \le 5.$

k legnagyobb értéke tehát 5 lehet. (Ekkor $0 = 16\,\mathrm{tg}^2 x - 24\,\mathrm{tg}\,x + 9 = (4\,\mathrm{tg}\,x - 3)^2$, s innen $\mathrm{tg}\,x = \frac{3}{4}$ megoldást ad.) Az osztás miatt a $\cos^2 x = 0$ esetet külön meg kell vizsgálni: ilyenkor $\cos x = 0$ és $\sin x = 1$ (vagy -1), tehát a kifejezés értéke 3 (vagy -3). Így valóban 5 a maximum.

Néhány további megoldási lehetőség **(útmutatások)**:
- Felírhatjuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget.
- Alkalmazhatjuk a skaláris szorzást pl. az $\mathbf{u}(3; 4)$ és $\mathbf{v}(\sin x, \cos x)$ vektorokra.
- Az $a = \cos x$, $b = \sin x$ helyettesítéssel vizsgálandó a $3b + 2a = k$ egyenlet a $b^2 + a^2 = 1$ feltétel mellett. Az (a, b) koordináta-rendszerben ez éppen azt jelenti, hogy az egységsugarú körhöz kell adott irányú érintőt húznunk.
- Végül az addíciós tételek segítségével $\sin x$ és $\cos x$ is kifejezhető $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ segítségével.

FELADATOK

1. E2 Két turista a budapesti Hősök terén található obeliszket fényképezi. Vízszintes talajon az egyik 20 méterre, a másik 126 méterre van az oszlop talpától és ez utóbbi 45°-kal kisebb emelkedési szögben látja, mint a másik turista. Meg lehet-e határozni ezekből az adatokból, hogy milyen magas az emlékmű?

2. E2 A sznúkert olyan biliárdasztalon játsszák, amely 178 cm széles és 356 cm hosszú. Az egyik golyó pozíciójából a rövidebb oldal 60°-os szögben, a hosszabb 150°-os szögben látszik. Milyen messze van ez a golyó a hozzá legközelebbi lyukhoz? (A biliárdasztalon a sarkokban és a hosszabb oldalak közepén van egy-egy lyuk.)

3. E2 Az ABC háromszög köré írt körének sugara 24 egység hosszú, A csúcsánál levő szöge 60°-os. Mekkora a háromszög másik két szöge, ha $AC : AB = 1 : 3$?

4. E2 Az 5 cm sugarú, K középpontú k_1 kört kívülről érinti az O középpontú 3 cm sugarú k_2 kör. A KO egyenes k_1-et E-ben és A-ban, k_2-t E-ben és D-ben metszi. Forgassuk el a KO egyenest az E pont körül 15°-kal! Az elforgatott egyenes k_1-et B-ben, k_2-t C-ben metszi.
a) Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög derékszögű!
b) Mekkora a háromszög területe?
c) Mekkora szöggel kellene a KO egyenest elforgatni, hogy a legnagyobb területű ABC háromszöget kapjuk?

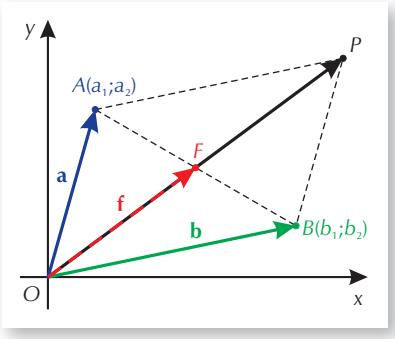
Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3173–3189., 3438–3461.

VI. KOORDINÁTA-GEOMETRIA

41. SZAKASZ TETSZŐLEGES ARÁNYÚ OSZTÓPONTJÁNAK KOORDINÁTÁI, A HÁROMSZÖG SÚLYPONTJÁNAK KOORDINÁTÁI

Koordinátáival adott vektorok összegének, különbségének, valamint számszorosának koordinátáit már meghatároztuk. Most ezek segítségével egy adott *AB* szakasz felezőpontjának, majd tetszőleges osztópontjának a koordinátáit fogjuk meghatározni. Végül a tanultakat alkalmazva megadjuk egy háromszög súlypontjának a koordinátáit.

FELEZŐPONT KOORDINÁTÁI



Mutasson a koordináta-rendszer *A* pontjába az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, *B* pontjába pedig a $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ helyvektor. Határozzuk meg az *AB* szakasz *F* felezőpontjának a koordinátáit!

Először az *F* pontba mutató helyvektort írjuk fel az **a** és **b** vektorok segítségével.

Az **a** és **b** vektorok által kifeszített paralelogramma átlóvektora:

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az *F* pontba mutató **f** helyvektorra igaz, hogy

$$\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

Így az F pont koordinátái:

$F\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

Ez alapján érvényes a következő tétel.

Tétel

Szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepe.

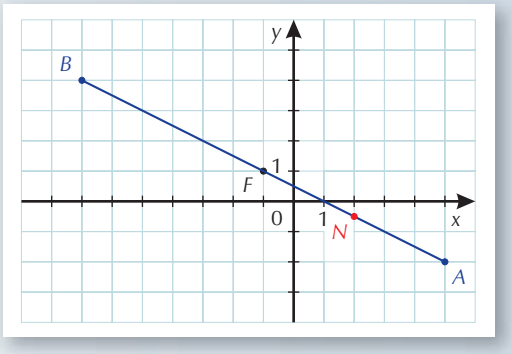
1. példa Tükrözzük az $A(-2; 6)$ pontot a $P(3; 11)$ pontra, és adjuk meg az A' tükörkép koordinátáit!

Megoldás Ha az A' pont koordinátái $A'(x, y)$, akkor a most ismertetett tétel alapján

$\frac{-2+x}{2} = 3$ és $\frac{6+y}{2} = 11$.

Innen az A' tükörkép koordinátái: $A'(8; 16)$.

2. példa Számítsuk ki az $A(5; -2)$, $B(-7; 4)$ pontok által meghatározott szakasz A-hoz közelebbi negyedelőpontjának a koordinátáit!

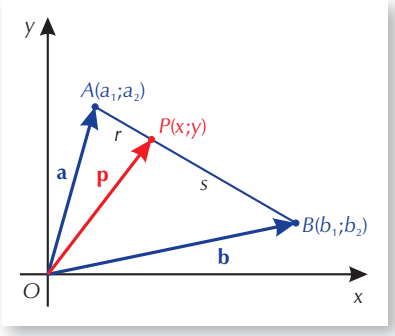


Megoldás Először számítsuk ki az AB szakasz F felezőpontjának a koordinátáit. A keresett N negyedelőpont az AF szakasz felezőpontja.

Az F pont koordinátái: $F(-1; 1)$. A BF szakasz felezőpontja pedig $N(2; -0{,}5)$.

A felezőpont koordinátáinak meghatározása után most foglalkozzunk az AB szakasz tetszőleges arányú osztópontja koordinátáinak meghatározásával.

SZAKASZ TETSZŐLEGES ARÁNYÚ OSZTÓPONTJÁNAK KOORDINÁTÁI



Legyenek az AB szakasz végpontjai $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$. Határozzuk meg az AB szakasznak azt a P pontját, melyre $\frac{AP}{PB} = \frac{r}{s}$, ahol r és s pozitív valós számok.

Először a P pontba mutató $\mathbf{p}$ helyvektort fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok segítségével.

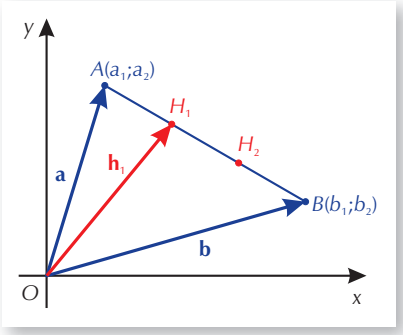
$\mathbf{p} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{b} + \overrightarrow{BP}$.

A $\overrightarrow{BP}$ vektor a $\overrightarrow{BA}$ vektornak az $\frac{s}{s+r}$-ed része. Mivel $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, ezért

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} + \frac{s}{s+r}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \frac{(s+r)\cdot\mathbf{b} + s\cdot\mathbf{a} - s\cdot\mathbf{b}}{s+r} = \frac{s\cdot\mathbf{b} + r\cdot\mathbf{b} + s\cdot\mathbf{a} - s\cdot\mathbf{b}}{s+r} = \frac{s\cdot\mathbf{a} + r\cdot\mathbf{b}}{s+r}.$$

Ezek szerint a P pont koordinátái:

$P\left(\frac{s\cdot a_1 + r\cdot b_1}{s+r}; \frac{s\cdot a_2 + r\cdot b_2}{s+r}\right)$.



Ha alkalmazzuk a kapott eredményt az $r=1$, $s=2$, valamint az $r=2$, $s=1$ esetekre, akkor megkapjuk az AB szakasz A ponthoz közelebbi H_1, valamint a B ponthoz közelebbi H_2 harmadolópontjainak a koordinátáit:

$$H_1\left(\frac{2a_1+b_1}{3};\frac{2a_2+b_2}{3}\right),$$

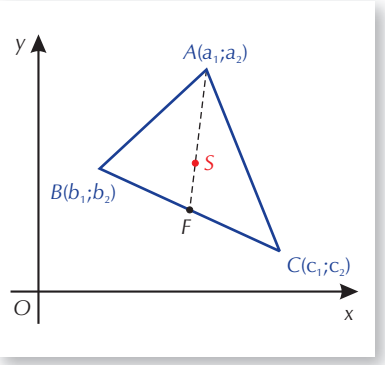
$$H_2\left(\frac{a_1+2b_1}{3};\frac{a_2+2b_2}{3}\right).$$

A HÁROMSZÖG SÚLYPONTJÁNAK KOORDINÁTÁI

Tétel

A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcspontok megfelelő koordinátáinak a számtani közepe

$$S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$



Bizonyítás A háromszög súlypontja bármely súlyvonalon a csúcstól távolabbi harmadolópont. Így a felezőpont és a harmadolópont koordinátáinak ismeretében már könnyen meghatározhatjuk a háromszög súlypontjának a koordinátáit.

Legyenek a háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$. Ekkor a BC szakasz F felezőpontjának a koordinátái: $F\left(\frac{b_1+c_1}{2};\frac{b_2+c_2}{2}\right)$.

Mivel S az AF súlyvonalon az F-hez közelebbi harmadolópont, ezért a súlypont x_S és y_S koordinátáira felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$x_S=\frac{a_1+2\cdot\frac{b_1+c_1}{2}}{3}=\frac{a_1+b_1+c_1}{3} \quad \text{és} \quad y_S=\frac{a_2+2\cdot\frac{b_2+c_2}{2}+}{3}=\frac{a_2+b_2+c_2}{3}.$$

3. példa Az AB szakasz egyik végpontja $A(-8;4)$. A szakasz egy P pontjának koordinátái $P(3;1)$. Erre a P pontra $\frac{PA}{PB}=\frac{2}{5}$. Számítsuk ki a szakasz B végpontjának a koordinátáit!

Megoldás Az AB szakasz $2:5$ arányú P osztópontjának koordinátáira felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

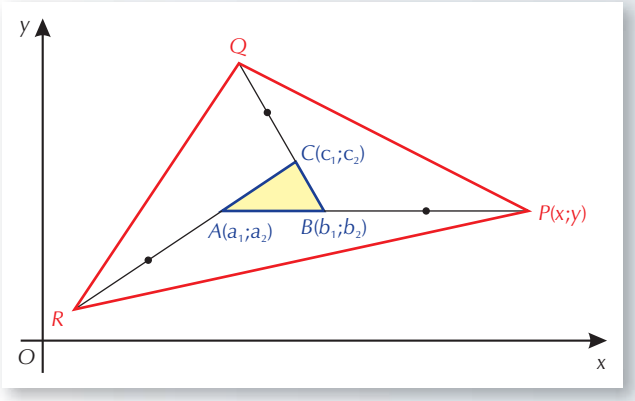
$$\frac{5\cdot(-8)+2x}{7}=3, \quad \text{azaz} \quad -40+2x=21, \quad \text{ahonnan} \quad x=30{,}5,$$

$$\frac{5\cdot 4+2y}{7}=1, \quad \text{azaz} \quad 20+2y=7, \quad \text{ahonnan} \quad y=-6{,}5.$$

Tehát a szakasz másik végpontjának a koordinátái: $B(30{,}5;-6{,}5)$.

4. példa Egy ABC háromszög minden oldalát a háromszorosára hosszabbítottuk: AB-t B-n túl, BC-t C-n túl, CA-t A-n túl. Így jutottunk a PQR háromszöghöz. Igazoljuk, hogy a PQR háromszög súlypontja azonos az ABC háromszög súlypontjával.

Megoldás Helyezzük el a háromszöget egy koordináta-rendszerben, és készítsünk egy vázlatos ábrát. Legyenek a háromszög csúcspontjai: $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$, valamint a P pont koordinátái x és y.



Az AP szakasznak a B pont az A-hoz közelebbi harmadolópontja, így felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$\frac{2a_1 + x}{3} = b_1 \quad \text{és} \quad \frac{2a_2 + y}{3} = b_2,$$

ahonnan a P pont koordinátái:

$P(3b_1 - 2a_1; 3b_2 - 2a_2)$.

Hasonlóképpen kapjuk a Q és az R pontok koordinátáit is:

$Q(3c_1 - 2b_1; 3c_2 - 2b_2)$, $R(3a_1 - 2c_1; 3a_2 - 2c_2)$.

A PQR háromszög S súlypontjának koordinátái

$$x_S = \frac{3b_1 - 2a_1 + 3c_1 - 2b_1 + 3a_1 - 2c_1}{3} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$$

és

$$y_S = \frac{3b_2 - 2a_2 + 3c_2 - 2b_2 + 3a_2 - 2c_2}{3} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$

Ezek pedig éppen az ABC háromszög súlypontjának koordinátáival azonosak.

FELADATOK

1. E1 Adott négy pont: $A(-6; 3)$, $B(b_1; -2)$, $C(5; 7)$, $D(8; d_2)$. Határozzuk meg b_1 és d_2 értékét úgy, hogy $ABCD$ (ilyen körüljárási iránnyal) paralelogramma legyen!

2. E1 Az AB szakasz egyik végpontja $A(-4; 2)$. A szakasz B végpontja illeszkedik az x tengelyre, az AB szakasz A-hoz közelebbi negyedelőpontja pedig illeszkedik az y tengelyre. Számítsuk ki a B pont koordinátáit!

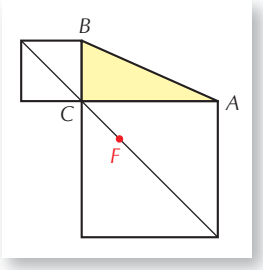
3. E1 Az $ABCD$ téglalap AB oldalának A-hoz, BC oldalának B-hez, CD oldalának C-hez, DA oldalának D-hez közelebbi negyedelőpontjai rendre P, Q, R, T. Igazoljuk, hogy a $PQRT$ négyszög paralelogramma, és szimmetriacentruma megegyezik az $ABCD$ téglalap szimmetriacentrumával!

4. E1 Az $ABCD$ paralelogramma egyik csúcsa $A(4; -2)$. Szomszédos csúcsa $B(10; 0)$. A C csúcs az y tengelyre, a D csúcs az x tengelyre illeszkedik. Határozza meg a C és D csúcsok koordinátáit!

5. E1 Adott a koordináta-rendszerben 5 db rácspont (olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész szám). Igazoljuk, hogy található közöttük 2 olyan pont, melyek által meghatározott szakasz felezőpontja is rácspont!

6. E1 Igazoljuk, hogy a kocka egy-egy megfelelő éle, lapátlója és testátlója olyan háromszöget határoznak meg, melynek van két merőleges súlyvonala!

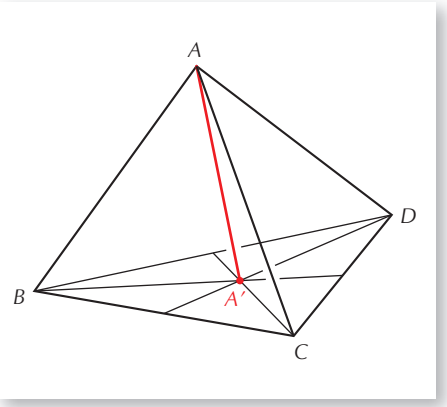
7. E2 Az ABC derékszögű háromszög befogóira egy-egy négyzetet emeltünk, majd e négyzetek egy-egy csúcsát összekötöttük az ábrán látható módon; legyen az így keletkezett összekötő szakasz felezőpontja F. Igazoljuk, hogy az $ABCF$ négyszög húrnégyszög!



Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 3473, 3478, 3479, 3481, 3482, 3486, 3487, 3492, 3496.

A TETRAÉDER SÚLYPONTJA (Olvasmány)

A tetraéder egy csúcsát és a szemközti lap súlypontját összekötő szakaszt a **tetraéder súlyvonalának** nevezzük.

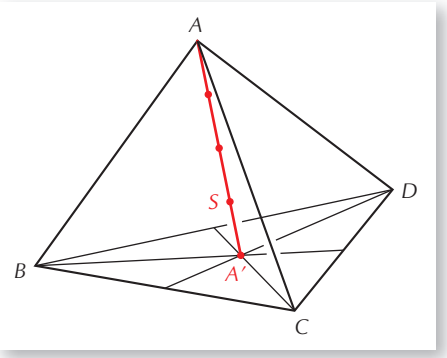


A tetraédernek négy súlyvonala van. Az ábra az *ABCD* tetraéder *A* csúcsához tartozó súlyvonalát mutatja.

Megmutatjuk, hogy:

A tetraéder súlyvonalai a laphoz közelebb eső negyedelőpontjukban metszik egymást.

Az ábrán *A′*-vel jelöltük a *BCD* háromszög súlypontját és *S*-sel az *AA′* súlyvonalnak az *A′*-höz közelebb levő negyedelőpontját. A tetszőlegesen felvett térbeli koordináta-rendszer origójából, *O*-ból az *A*, *B*, *C*, *D*, *A′*, *S* pontokba vezető helyvektorok legyenek **a**, **b**, **c**, **d**, **a′**, **s**.



A már bizonyítottak alapján

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}),$$

$$\mathbf{s} = \frac{3}{4}\mathbf{a}' + \frac{1}{4}\mathbf{a},$$

azaz

$$\mathbf{s} = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})\right] + \frac{1}{4}\mathbf{a} = \frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) + \frac{1}{4}\mathbf{a} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}).$$

Szimmetria okokból ugyanez az **s** vektor vezet *O*-ból a tetraéder bármelyik súlyvonalának laphoz közelebb eső negyedelőpontjába, s így állításunk igaz.

A tetraéder négy súlyvonalának közös metszéspontját a **tetraéder súlypontjának** nevezzük.

FELADATOK

1. E1 Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összege 0!

2. E1 Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder súlypontja egybeesik a tetraéder súlypontjával!

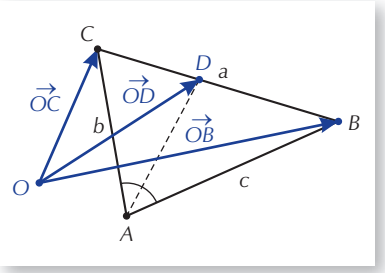
3. E2 Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontja felezi a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszokat!

Tetraéder alakú kilátó, Bottrop, Németország

A BEÍRT KÖR KÖZÉPPONTJÁNAK KOORDINÁTÁI (Olvasmány)

A 28. leckében bizonyítottuk a szögfelezőtételt, amely kimondja, hogy a háromszög belső szögfelezői a szemközti oldalt a közrefogó oldalak arányában osztják.

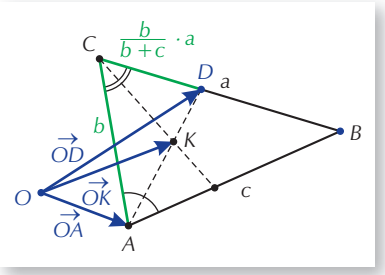
Ez a tétel lehetővé teszi, hogy a szögfelezők egyenletének felírása nélkül kiszámítsuk a beírt kör középpontjának a koordinátáit. A háromszög csúcsait A, B és C; a csúcsokkal szemközti oldalak hosszát a, b és c jelöli.



Tekintsük az ABC háromszög A-ból induló szögfelezőjét, messe ez a szemközti BC oldalt D-ben. Mivel $CD : DB = b : c$, ezért az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés szerint egy tetszőleges O pontból a D-be mutató helyvektor

$$\overrightarrow{OD} = \frac{b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{b + c}.$$

A C-ből induló szögfelező az ADC háromszögben is szögfelező, és a C-ből induló szögfelező az A-ból induló szögfelezőt a beírt kör K középpontjában metszi. Így kiszámíthatjuk a K pontba mutató helyvektort. Itt a két közrefogó oldal hossza $AC = b$ és az ABC háromszögben felírt szögfelezőtétel miatt $CD = \frac{b}{b+c} \cdot a$, tehát $DK : KA = \frac{b}{(b+c)} \cdot a : b$.



$$\overrightarrow{OK} = \frac{b \cdot \overrightarrow{OD} + \frac{ab}{b+c}\overrightarrow{OA}}{b + \frac{ab}{b+c}} = \frac{b}{b} \cdot \frac{(b+c)\overrightarrow{OD} + a \cdot \overrightarrow{OA}}{a+b+c}.$$

Most a D-be mutató helyvektort behelyettesítve:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(b+c)\overrightarrow{OD} + a \cdot \overrightarrow{OA}}{a+b+c} = \frac{a \cdot \overrightarrow{OA} + (b+c) \cdot \frac{b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{b+c}}{a+b+c} = \frac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

Ezzel meghatároztuk a beírt kör középpontjába mutató helyvektort.

1. példa Számítsuk ki az $A(0;\ 0)$, $B(12;\ 0)$ és $C(0;\ -5)$ háromszög beírt köre középpontjának koordinátáit!

Megoldás A háromszög derékszögű, oldalainak hossza a = 13, b = 5, c = 12. A fenti képlet szerint $\overrightarrow{OK} = \frac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{a+b+c}$, ezért mindkét koordinátára külön-külön ezt kell kiszámolni.

$$x_O = \frac{a \cdot x_a + b \cdot x_b + c \cdot x_c}{a+b+c} = \frac{13 \cdot 0 + 5 \cdot 12 + 12 \cdot 0}{13+5+12} = \frac{60}{30} = 2,$$

és hasonlóan

$$y_O = \frac{a \cdot y_a + b \cdot y_b + c \cdot y_c}{a+b+c} = \frac{13 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 12 \cdot (-5)}{13+5+12} = \frac{-60}{30} = -2.$$

Tehát a háromszög beírt köre középpontjának koordinátái $K(2;\ -2)$.

A 109. oldalon lévő rejtvény megoldása:

■	[1] 1	[2] 2	[3] 1
[4] 3	■	[5] 9	7
[6] 6	[7] 4	■	2
[8] 8	9	9	8

42. AZ EGYENES EGYENLETEI

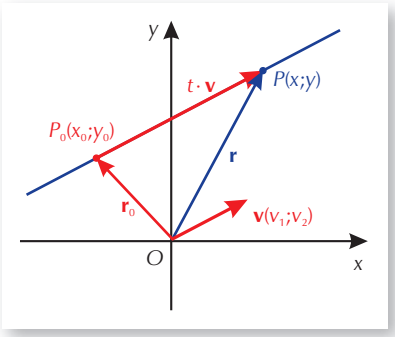
Legyen adott a síkbeli koordináta-rendszerben egy geometriai alakzat (ponthalmaz). Egy legfeljebb kétismeretlenes egyenletről akkor mondjuk, hogy az alakzat egyenlete, ha az alakzat bármely $P(x; y)$ pontjának a megfelelő koordinátáit az egyenletbe helyettesítve igaz egyenlőséget kapunk, de bármely, az alakzatra nem illeszkedő pont koordinátái nem elégítik ki az egyenletet. A továbbiakban néhány alakzat (egyenes, kör, parabola) egyenleteit fogjuk meghatározni.

Egy egyenest többféleképpen is megadhatunk a koordináta-rendszerben.
1. Megadhatjuk egy pontjával és egy olyan vektorral, amely az egyenessel párhuzamos.
2. Megadhatjuk egy pontjával és egy olyan vektorral, mely az egyenesre merőleges.
3. Megadhatjuk egy pontjával és a meredekségével (ha létezik).
4. Megadhatjuk két pontjával.

1. ADOTT $P_0(x_0; y_0)$ PONTON ÁTMENŐ, ADOTT $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ IRÁNYVEKTORÚ EGYENES EGYENLETE

Definíció

Egy egyenes egy **irányvektora** olyan nullvektortól különböző vektor, mely az egyenessel párhuzamos.



Legyen adott az egyenesnek egy $P_0(x_0; y_0)$ pontja és egy $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektora. Ekkor az egyenes tetszőleges $P(x; y)$ pontjához eljuthatunk, ha a P_0 pontba mutató $\mathbf{r}_0$ helyvektorhoz hozzáadjuk a $\mathbf{v}$ vektornak valamilyen számszorosát: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v}$, ahol t egy megfelelő valós szám.

Az egyenes bármely pontjához tartozik egy t érték, és bármely t értékhez tartozik az egyenesnek egy pontja. Ha a t minden valós értéket felvesz, akkor így az egyenes minden pontjához eljutunk. Mondhatnánk úgy is, hogy **egy** $P(x; y)$ **pont akkor és csak akkor van rajta az egyenesen, ha a** P **pontba mutató r helyvektor felírható** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v}$ alakban.

(Szokás ezt az egyenletet az egyenes paraméteres vektoregyenletének nevezni. Az elnevezés érthető, hiszen az egyenes egyes pontjaihoz egy t valós paraméter segítségével jutunk el.)

Írjuk ki a kapott vektoregyenletet az $\mathbf{r}$ vektor x és y koordinátáira.

$x = x_0 + t \cdot v_1$,

$y = y_0 + t \cdot v_2$.

Most szeretnénk kiküszöbölni a t paramétert, és közvetlen kapcsolatot keresni x és y között. Ez lesz ugyanis az a kétismeretlenes egyenlet, mely az egyeneshez tartozik. Ennek érdekében szorozzuk meg az első egyenletet v_2-vel, a másodikat pedig $-v_1$-gyel.

$v_2 \cdot x = v_2 \cdot x_0 + t \cdot v_2 \cdot v_1$,

$-v_1 \cdot y = -v_1 \cdot y_0 - t \cdot v_1 \cdot v_2$.

A két egyenletet összeadva megkapjuk az adott ponton átmenő, adott irányvektorú egyenes egyenletét:

$$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0.$$

A kapott egyenlet jobb oldalán – a P_0 pont és a $\mathbf{v}$ irányvektor ismeretében – egy konkrét szám szerepel. Ezt figyelembe véve elmondhatjuk, hogy:

Minden egyenes egyenlete legfeljebb kétismeretlenes elsőfokú egyenlet, és minden kétismeretlenes elsőfokú egyenlet (melyben x és y együtthatója egyszerre nem lehet 0) egy egyenes egyenlete. Ha az egyenletben az x együtthatója 0, akkor egy x tengellyel párhuzamos; ha pedig az y együtthatója 0, akkor az y tengellyel párhuzamos egyenes egyenletét kapjuk. (Ha x és y együtthatója is 0, akkor a $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ egyenlettel állunk szemben; ez azonban számunkra érdektelen, hiszen $c = 0$ esetben a sík bármely pontja megfelelő lenne, ha pedig $c \neq 0$, akkor nincs megoldása az egyenletnek.)

1. példa Egy egyenes áthalad a $P(4; -5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 3y = 11$ egyenessel. Írjuk fel az egyenes egyenletét, és számítsuk ki az egyenes és a koordinátatengelyek alkotta háromszög területét!

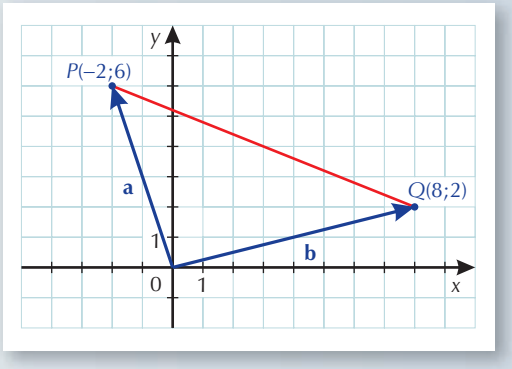
Megoldás A megadott egyenes egyenletéből kiolvashatjuk annak egy irányvektorát: $\mathbf{v}(-3; 4)$. Mivel a keresett egyenes a megadott egyenessel párhuzamos, ezért ez a vektor a keresett egyenesnek is irányvektora. Tehát a keresett egyenes egyenlete:

$4x + 3y = 4 \cdot 4 - (-3)(-5)$, azaz $4x + 3y = 1$.

Az egyenes ott metszi az x tengelyt, ahol $y = 0$, és ott metszi az y tengelyt, ahol $x = 0$. Ezek szerint a tengelyekkel való metszéspontok: $x = \frac{1}{4}$ és $y = \frac{1}{3}$. A tengelyekkel alkotott háromszög egy olyan derékszögű háromszög melynek befogói $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3}$, tehát az egyenes és a koordinátatengelyek alkotta háromszög T területe:

$$T = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{24} \text{ területegység.}$$

2. példa Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha áthalad a $P(-2; 6)$ és $Q(8; 2)$ pontokon!



Megoldás Az egyenes egyenletének felírásához szükségünk van az egyenes egy irányvektorára. Ezt a P pontba mutató **a** és a Q pontba mutató **b** helyvektorok különbségeként kaphatjuk meg. Ezek szerint a keresett egyenes egy irányvektora $(-10; 4)$, vagy az egyszerűbb $(5; -2)$.

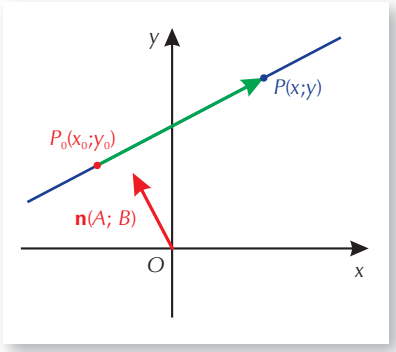
Ezek után kiválaszthatjuk a megadott pontok bármelyikét (pl. a P pontot), amivel az egyenes egyenlete:

$-2x - 5y = (-2)(-2) - 5 \cdot 6$, azaz $2x + 5y = 26$.

2. ADOTT $P_0(x_0; y_0)$ PONTON ÁTMENŐ, ADOTT $\mathbf{n}(A; B)$ NORMÁLVEKTORÚ EGYENES EGYENLETE

Definíció

Egy egyenes egy **normálvektora** olyan nullvektortól különböző vektor, mely az egyenesre merőleges.



Legyen adott az egyenes egy $P_0(x_0; y_0)$ pontja és egy $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektora. Egy $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van rajta az egyenesen, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az **n** vektorra, ami azt jelenti, hogy az **n** vektor és a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor skaláris szorzata 0.

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

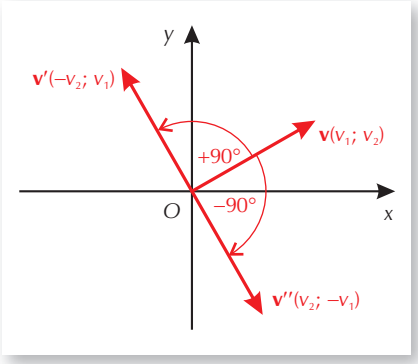
A $\overrightarrow{P_0P}$ vektor koordinátái: $\overrightarrow{P_0P}(x - x_0; y - y_0)$. Ezek szerint

$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0)$, azaz

$A \cdot x - A \cdot x_0 + B \cdot y - B \cdot y_0 = 0$. Innen átrendezéssel kapjuk az adott ponton átmenő, adott normálvektorú egyenes egyenletét:

$$A \cdot x + B \cdot y = A \cdot x_0 + B \cdot y_0.$$

Érdemes azt is meggondolni, hogy mi a kapcsolat az egyenes egyenletének irányvektoros és normálvektoros alakja között. Ha ismerjük egy egyenes egy irányvektorát, akkor annak a 90°-os (vagy −90°-os) elforgatottja az egyenes egy normálvektora lesz. Ez a forgatás pedig nagyon könnyen elvégezhető a koordináták ismeretében.

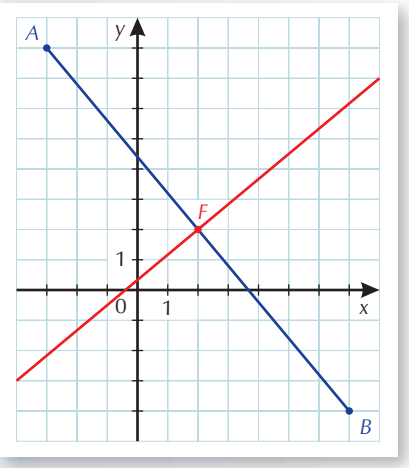


Ha egy vektor koordinátáit felcseréljük és az egyiket az ellentettjére változtatjuk, akkor az eredeti vektor 90°-os vagy −90°-os elforgatottját kapjuk.

A $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ vektor +90°-os elforgatottja $\mathbf{v}'(-v_2; v_1)$,
−90°-os elforgatottja $\mathbf{v}''(v_2; -v_1)$.

Ezt felhasználva az egyenes egyenletének irányvektoros alakjából is megkaphatjuk a normálvektoros alakot. Ha $(A; B)$ normálvektora az egyenesnek, akkor a 90°-os elforgatottja, a $(-B; A)$ irányvektora. Ezt behelyettesítve az irányvektoros alakba, éppen a fenti alakot kapjuk.

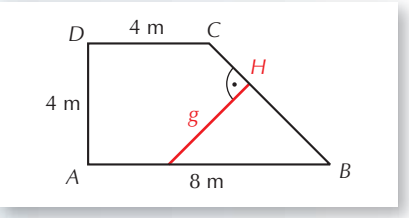
3. példa Írjuk fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, ha $A(-3; 8)$, $B(7; -4)$!



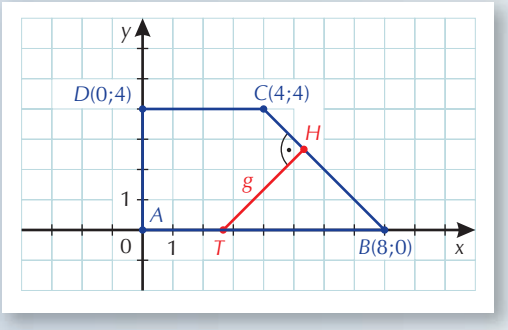
Megoldás Az AB szakasz F felezőpontja $F(2; 2)$; az AB szakasz egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}(10; -12)$ vektor, vagy az egyszerűbb $(5; -6)$. Ez a vektor a felezőmerőlegesnek egy normálvektora. Így a felezőmerőleges egyenlete:

$$5x - 6y = 5 \cdot 2 + (-6) \cdot 2, \quad \text{azaz} \quad 5x - 6y = -2.$$

4. példa Egy tetőszerkezetet látunk az ábrán. A szakemberek szerint a tető ferde részét úgy kell kitámasztani egy g hosszúságú gerendával, hogy a ferde tető C csúcshoz közelebbi H harmadolópontjában a ferde tetőre merőlegesen helyezkedjen el. Milyen hosszú a gerenda?



Megoldás Helyezzük el az ábrát egy jól választott koordinátarendszerben, ahol az A pont az origóba kerül, és a tengelyeken egy egység 1 méternek felel meg. A H pont a BC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja, tehát a H pont koordinátái:



$$x_H = \frac{2 \cdot 4 + 8}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{és} \quad y_H = \frac{2 \cdot 4 + 0}{3} = \frac{8}{3}.$$

A gerenda egyenesének normálvektora a $\overrightarrow{CB}(4; -4)$, vagy az egyszerűbb $(1; -1)$.

Ezek szerint a gerenda egyenesének egyenlete normálvektoros alakban: $x - y = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$.

Ez az egyenes az x tengelyt az $y = 0$ helyen metszi, tehát a gerenda T talppontjának koordinátái $T\left(\frac{8}{3}; 0\right)$. A gerenda hosszát most már könnyen meghatározhatjuk két pont távolságképletének segítségével.

$$g = HT = \sqrt{\left(\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \approx 3{,}77 \text{ m}.$$

3. ADOTT $P_0(x_0; y_0)$ PONTON ÁTMENŐ, ADOTT m MEREDEKSÉGŰ EGYENES EGYENLETE

Definíció

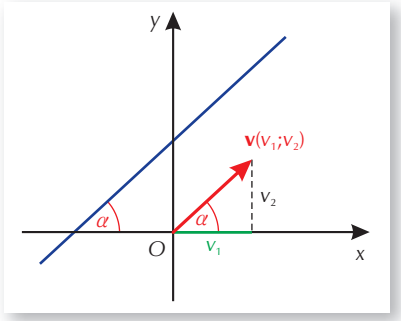
Ha egy egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, (ahol v_1 nem 0), akkor az egyenes m **meredeksége** $m = \frac{v_2}{v_1}$.

Az egyenes m meredekségének egy fontos geometriai tartalma könnyen kiolvasható az ábrából.

Ha az egyenes az x tengely pozitív felével α irányszöget zár be, akkor – egy irányvektorát tekintve –

$m = \frac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg} \alpha$.

Érdemes azt is kiemelni, hogy amíg irány- és normálvektora végtelen sok van egy egyenesnek, addig meredeksége csak egy lehet.



Az y tengellyel párhuzamos egyeneseknek nincs meredekségük. Az ilyen egyenesek egyenlete azonban könnyedén felírható, hiszen $x = c$ alakú, ahol $c \in \mathbf{R}$ konstans, az egyenes x tengelymetszete.

Induljunk ki az egyenes irányvektorral felírt egyenletéből.

$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0$.

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $v_1 \neq 0$-val. Azt kapjuk, hogy $\frac{v_2}{v_1}x - y = \frac{v_2}{v_1}x_0 - y_0$.

Mivel $\frac{v_2}{v_1} = m$ az egyenes meredeksége, így $mx - y = mx_0 - y_0$. Ezt kicsit átrendezve kapjuk a $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenletének szokásos alakját:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

4. ADOTT $P_0(x_0; y_0)$ ÉS $P_1(x_1; y_1)$ PONTON ÁTMENŐ EGYENES EGYENLETE

Legyen adott az egyenes $P_0(x_0; y_0)$ és $P_1(x_1; y_1)$ pontja. Ekkor a két adott pont segítségével könnyen megadhatjuk az egyenes egy irányvektorát, hiszen $\overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ megfelelő vektor. Tehát a $\mathbf{v}(x_1 - x_0; y_1 - y_0)$ irányvektor és (például) a $P_0(x_0; y_0)$ pont segítségével az irányvektoros alakot használva felírhatjuk az egyenes egyenletét.

$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y = (y_1 - y_0)x_0 - (x_1 - x_0)y_0$, rendezve:

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0).$$

PÁRHUZAMOSSÁG ÉS MERŐLEGESSÉG FELTÉTELE

Két egyenes akkor és csak akkor **párhuzamos**, ha az irányvektoraik párhuzamosak. Ha tehát az egyik egyenesnek egy irányvektora $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, a másik egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}^*(v_1^*; v_2^*)$, akkor (az y tengellyel nem párhuzamos egyenesek esetén) a párhuzamosság feltétele

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2^*}{v_1^*}$, $(v_1 \neq 0$ és $v_1^* \neq 0)$ azaz $m = m^*$,

ahol m és m^* az egyik, illetve a másik egyenes meredeksége.

Két egyenes akkor és csak akkor **merőleges** egymásra, ha az irányvektoraik is merőlegesek egymásra. Ez akkor és csak akkor lehet, ha az irányvektoraik skaláris szorzata 0. Ha tehát az egyik egyenesnek egy irányvektora $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, a másik egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}^*(v_1^*; v_2^*)$, akkor a merőlegesség feltétele

$v_1 \cdot v_1^* + v_2 \cdot v_2^* = 0$, azaz (a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenesek esetén) $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{v_1^*}{v_2^*}$.

Ez azt jelenti, hogy a két egyenes m és m^* meredekségére: $m = -\frac{1}{m^*}$, vagyis $m \cdot m^* = -1$.

Megjegyzés

Normálvektorokkal is hasonlóképpen vizsgálható két egyenes kölcsönös helyzete: két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha normálvektoraik párhuzamosak. Illetve két egyenes akkor és csak akkor merőleges, ha normálvektoraik merőlegesek, azaz a skaláris szorzatuk 0.

5. példa Adottak a $3x-7y=14$ és $2x+ky=-5$ egyenesek. Határozzuk meg a k paraméter értékét úgy, hogy

a) a két egyenes párhuzamos legyen,

b) a két egyenes merőleges legyen egymásra!

Megoldás Az első egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(7;\,3)$, így az egyenes m meredeksége $m=\frac{3}{7}$. A második egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}^*(-k;\,2)$, tehát ennek az egyenesnek m^* meredeksége: $m^*=-\frac{2}{k}$. (A $k=0$ egyik esetben sem ad megoldást.)

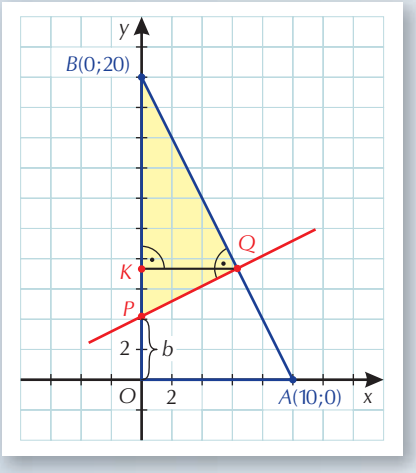
a) A párhuzamosság feltétele: $m=m^*$. Tehát $\frac{3}{7}=-\frac{2}{k}$, ahonnan $k=-\frac{14}{3}$.

b) A merőlegesség feltétele: $m\cdot m^*=-1$. Tehát

$\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{2}{k}\right)=-1$, ahonnan $k=\frac{6}{7}$.

6. példa Egy derékszögű háromszög derékszögű csúcsa az origóban van, az átfogójának végpontjai $A(10;\,0)$, $B(0;\,20)$. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely merőleges az átfogóra és felezi a háromszög területét!

Megoldás Mivel $\overrightarrow{BA}(10;-20)$, azért az AB egyenes meredeksége $m=-2$. Ebből következik, hogy a rá merőleges egyenesek meredeksége $m^*=\frac{1}{2}$. Ezek segítségével felírható az AB egyenes egyenlete: $y=-2x+20$ és a keresett egyenes egyenlete: $y=\frac{1}{2}x+b$.



Az ábra betűzése szerinti BPQ háromszög területe az ABC háromszög területének a fele:

$T_{ABC}=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{10\cdot 20}{2}=100$, így $T_{BPQ}=\frac{BP\cdot KQ}{2}=50$.

A BP szakasz hossza $20-b$, mivel a P pont második koordinátája b, ami a PQ egyenes és az y tengely metszéspontjaként kiszámolható.

A KQ szakasz hossza a két egyenes metszéspontjának első koordinátája.

$-2x+20=\frac{1}{2}x+b$, ahonnan $x=\frac{2\cdot(20-b)}{5}$.

Ezzel a BPQ háromszög területe:

$T_{BPQ}=\frac{(20-b)(20-b)}{5}=50$, azaz $(20-b)^2=250$,

$|20-b|=5\sqrt{10}$, ahonnan $b_1=20-5\sqrt{10}$, $b_2=20+5\sqrt{10}$.

Mivel $b<20$, ezért csak $b=20-5\sqrt{10}$ lehetséges.

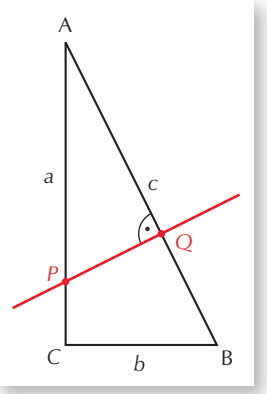
Tehát a háromszög területét felező, az átfogóra merőleges egyenes egyenlete:

$y=\frac{1}{2}x+20-5\sqrt{10}$.

Megjegyzés

Vajon, ha adott egy derékszögű háromszög, hogyan lehet megszerkeszteni az átfogóra merőleges és a területet felező egyenest? Tekintsük az ábrát! Az APQ és ABC háromszögek nyilván hasonlók, hiszen mindkettő derékszögű és az A csúcsnál közös szögük van. Mivel e két háromszög területének aránya $1:2$, ezért a hasonlóság aránya $1:\sqrt{2}$. Így a megfelelő oldalakra:

$\frac{AP}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ahonnan $AP=\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{c\sqrt{2}}{2}$.



A c átfogó ismeretében a $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ szakaszt meg tudjuk szerkeszteni. Ezt felmérjük A-ból az AC oldalra, így megkapjuk P-t. P-ből az átfogóra állított merőleges egyenes lesz a keresett területet felező egyenes.

EGYENESEK HAJLÁSSZÖGE

Az egyenest meghatározó adatok segítségével nemcsak a párhuzamosságot és merőlegességet vizsgálhatjuk, hanem meghatározhatjuk két tetszőleges egyenes hajlásszögét is.

7. példa Határozzuk meg az e: $2x + 3y = 5$ és f: $4x - y = 2$ egyenesek hajlásszögét!

Megoldás Az egyenletekből leolvashatjuk az egyenesek egy-egy normálvektorát:
$\mathbf{n}_e(2; 3)$, illetve $\mathbf{n}_f(4; -1)$.

Az egyenesek hajlásszöge megegyezik a két normálvektor által bezárt szöggel, amit a skaláris szorzat segítségével ki tudunk számolni.

Definíció szerint: $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_f = |\mathbf{n}_e| \cdot |\mathbf{n}_f| \cdot \cos\varphi = \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot \cos\varphi = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos\varphi$.

Koordinátás felírással: $\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_f = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 5$.

Ezek egyenlőségéből: $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \approx 0{,}3363$, tehát $\varphi \approx 70{,}35°$.

Természetesen az irányvektorokkal is ugyanígy dolgozhattunk volna.

ELSŐFOKÚ KÉTISMERETLENES EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMA (Olvasmány)

A koordinátageometriában tanultak alapján az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer vizsgálatával kapcsolatos, a korábban tett észrevételeket teljesebbé tehetjük. Az

(1) $a_1 x + b_1 y = c_1$
(2) $a_2 x + b_2 y = c_2$

kétismeretlenes elsőfokú egyenletek (nem feltétlenül különböző) egyenesek egyenletei, ha a_1 és b_1, illetve a_2 és b_2 közül legalább az egyik nem nulla. A két egyenlet egy egyenletrendszert alkot.

Ha a két egyenlet ugyanannak az egyenesnek az egyenlete, akkor az egyenes minden pontjának koordinátái kielégítik mindkét egyenletet, tehát az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ha a fenti egyenletrendszer egyenletei különböző egyenesek egyenletei, akkor az egyenletrendszernek 0 vagy 1 megoldása van aszerint, hogy az egyenesek párhuzamosak vagy metszők.

Az egyenletrendszer megoldása nélkül, az együtthatók segítségével is megállapíthatjuk, hogy melyik eset áll fenn.

1. Az (1) és (2) akkor és csak akkor két párhuzamos egyenes egyenlete, ha a normálvektoraik – $(a_1; b_1)$ és $(a_2; b_2)$ – párhuzamosak, tehát ha van olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre

$a_2 = \lambda a_1$ és $b_2 = \lambda b_1$.

1A. Végtelen sok megoldás pontosan akkor van, ha a két egyenlet által meghatározott egyenesek egybeesnek. Ez akkor lehetséges, ha az egyenesek párhuzamosak és a két egyenletet ugyanazok a számpárok elégítik ki. A fenti feltétel miatt $a_2 = \lambda a_1$ és $b_2 = \lambda b_1$, továbbá ekkor $a_1 x + b_1 y = c_1$ és $\lambda a_1 x + \lambda b_1 y = c_2$ pontosan ugyanakkor teljesül, tehát $c_2 = \lambda c_1$.

Akkor és csak akkor van végtelen sok megoldás, ha van olyan $\lambda \neq 0$ szám, amelyre $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$ és $c_2 = \lambda c_1$.

Például a

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 39 \\ 6x + 15y &= 117 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer esetén a $\lambda = 3$ megfelelő, és az egyenletrendszernek valóban végtelen sok megoldása van, mert tetszőleges x-hez pontosan egy olyan y létezik, amelyik kielégíti (1)-et és ugyanez a számpár kielégíti (2)-t is, hiszen a két egyenlet egymás többszöröse.

1B. Akkor és csak akkor nem lesz megoldása az egyenletrendszernek, ha a két egyenes párhuzamos, de nem esnek egybe. Az előző eset eredményeit felhasználva ez pontosan akkor teljesül, ha $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$ és $c_2 \neq \lambda c_1$.

Például a

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 6x + 15y &= 117 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer esetén valóban nem lesz megoldás, hiszen (továbbra is $\lambda = 3$ mellett) bármilyen $(x_0; y_0)$ számpárt, ami kielégíti az (1)-t, a (2)-be beírva a bal oldalon 30-at kapnánk, ami miatt nem lehet az egyenletrendszer megoldása.

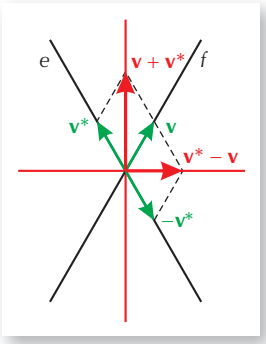
2. Végül pedig pontosan akkor lesz egy megoldás, ha a két egyenes metsző, tehát nem párhuzamosak, azaz nem létezik olyan $\lambda \neq 0$, amelyre $a_2 = \lambda a_1$ és $b_2 = \lambda b_1$.

Például a

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ 6x + 15y &= 117 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer esetén egy megoldás lesz, mert nincs olyan λ, amelyre $6 = 3\lambda$ és $15 = 2\lambda$ egyenletek egyszerre teljesülnek. És valóban az egyenletrendszer egyetlen megoldása az $x = -3$, $y = 9$ számpár.

KÉT EGYENES SZÖGFELEZŐ-EGYENESEINEK EGYENLETE (Kiegészítő anyag)



Két metsző egyenes szögfelező egyenesei egyenletének meghatározásakor a fő gondot ezek irányvektorának (vagy normálvektorának) meghatározása okozza. Ehhez gondoljuk meg a következőket: ha sikerül az eredeti egyenesek egy-egy olyan irányvektorát megadnunk, melyek abszolút értéke egyenlő, akkor ezen irányvektorok összege, illetve különbsége éppen az egyenesek szögfelezőinek irányába mutatnak. Ez egyszerűen következik abból a tényből, hogy a rombusz átlói egyben szögfelezők, és merőlegesek egymásra. Legyen az e egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}$, az f egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}^*$. Ha $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}^*|$, akkor $\mathbf{v} + \mathbf{v}^*$ az egyik, a $\mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ pedig a másik szögfelező irányába mutat *(lásd ábra)*.

Azt, hogy a megadott egyenesek irányvektorai egyenlő hosszúak legyenek, úgy érhetjük el, hogy az egyenes egyenletéből kiolvasott irányvektort elosztjuk annak abszolút értékével. Ekkor egy ugyanolyan irányba mutató egységvektort kapunk. Ha a $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ vektorral párhuzamos egységvektort $\mathbf{v}_e$-vel jelöljük, akkor

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Ezek után, képezve az e és f egyenesek egységnyi irányvektorait, ezek összege, illetve különbsége lesz a szögfelező egyenesek egy-egy irányvektora.

8. példa Írjuk fel az $x - y = 4$ és az $x + 7y = -4$ egyenletű egyenesek szögfelező egyeneseinek egyenletét!

Megoldás Először meghatározzuk az egyenesek M metszéspontjának a koordinátáit. A két egyenletet kivonva egymásból $8y = -8$, azaz $y = -1$; ezzel $x = 3$. Tehát az egyenesek metszéspontja $M(3; -1)$. Az egyenesek egy-egy irányvektora: $\mathbf{v}(1; 1)$, $\mathbf{v}^*(-7; 1)$. Ezek hossza:

$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, illetve $|\mathbf{v}^*| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

tehát a megfelelő egységvektorok:

$$\mathbf{v}_e\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \mathbf{v}_e^*\left(\frac{-7}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{5\sqrt{2}}\right).$$

A két egységvektor összegének koordinátái:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7}{5\sqrt{2}} = -\frac{2}{5\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{6}{5\sqrt{2}},$$

tehát az egyik szögfelező egy irányvektora:

$\left(-\frac{2}{5\sqrt{2}}; \frac{6}{5\sqrt{2}}\right)$, vagy az egyszerűbb $(-1; 3)$.

A két egységvektor különbségének koordinátái:

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{12}{5\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{4}{5\sqrt{2}}$,

tehát a másik szögfelező egy irányvektora:

$\left(\frac{12}{5\sqrt{2}};\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)$, vagy az egyszerűbb (3; 1).

Az e és f egyenes M metszéspontjával a szögfelezők egyenlete:

$3x+y=8$ és $x-3y=6$.

Érdemes megjegyezni, hogy mivel a két szögfelező merőleges egymásra, ezért az egyik szögfelező irányvektorának 90°-os elforgatottjaként megkapjuk a másik szögfelező egy irányvektorát. Ezt felhasználva a második számolás helyett egyszerűbben is megkaphattuk volna az egyik irányvektort.

FELADATOK

1. E1 Egy egyenes az x tengelyt az $(a; 0)$ pontban, az y tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Igazoljuk, hogy ennek az egyenesnek az egyenlete $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$! (Ezt az alakot az egyenes egyenletének tengelymetszetes alakjának nevezzük.)

2. E1 Egy térképhez rögzített koordináta-rendszerben, ahol az egység mindkét tengelyen 160 m, két tanya koordinátái $A(-2; 3)$, $B(6; 1)$. Az országút a térképen az x tengelynek felel meg. Milyen messze van az egyes tanyáktól az országúton az M buszmegálló, ha az mindkét tanyától egyenlő távolságra van?

3. E1 Egy egyenlő szárú háromszög alapjának két végpontja $A(-3; 3)$, $B(5; 7)$. A háromszög súlypontja az x tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a háromszög területét!

4. E1 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-3; 3)$, $B(3; 9)$, $C(6; 0)$. Számítsuk ki a háromszög köré írható kör középpontjának a koordinátáit!

5. E1 Egy háromszög két csúcspontja $A(3; 1)$, $B(5; 9)$. A háromszög magasságpontja $M(0; 6)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit!

6. E1 Egy háromszög két csúcspontja $A(4; -2)$, $B(10; -2)$. A harmadik csúcs illeszkedik az $y = x$ egyenesre. Határozzuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit úgy, hogy a háromszög területét az x tengely felezze!

7. E1 A $(p+1)x+py=p$ és a $(2p+1)x+(p+1)y=3p-1$ $(p \neq -1)$ egyenesek merőlegesek egymásra. Számítsuk ki a két egyenes metszéspontjának koordinátáit!

8. E2 Az $ABCD$ négyzet csúcspontjai pozitív körüljárási irányúak. A négyzet belsejében felvettünk egy tetszőleges P pontot. A P pont A körüli +90°-os elforgatottja E, a B körüli −90°-os elforgatottja F. Bizonyítsa be, hogy az EF egyenes felezi a négyzet területét!

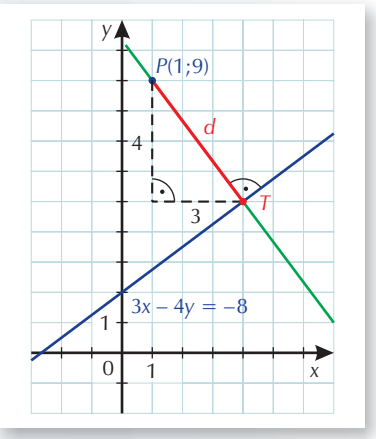
9. E2 Egy háromszög csúcspontjai $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 6)$. Írjuk föl annak az egyenesnek az egyenletét, mely áthalad a $P(1; 0)$ ponton és felezi a háromszög területét!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 3548, 3560, 3565, 3568, 3577, 3580, 3583, 3586, 3615, 3625, 3653.

43. PONT ÉS EGYENES TÁVOLSÁGA
(Két párhuzamos egyenes távolsága)

1. példa Határozzuk meg a $P(1; 9)$ pontnak a $3x - 4y = -8$ egyenestől való távolságát!

Megoldás Az ábrán a P pontból merőlegest bocsátottunk az adott egyenesre. E két egyenes metszéspontját T-vel jelöltük. Az így megszerkesztett PT szakasz hossza a keresett d távolság.



Felírjuk a P ponton átmenő $3x - 4y = -8$ egyenesre merőleges egyenes egyenletét. Az adott egyenes normálvektora lehet a $(3; -4)$ vektor. Ez irányvektora a PT egyenesnek. Így a PT egyenes egy normálvektora $(4; 3)$, és az egyenes egyenlete

$4x + 3y = 31$.

A T koordinátáit a

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y &= -8 \\ 4x + 3y &= 31 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja: $T(4; 5)$.

$\overrightarrow{PT} = (3; -4)$; a két pont távolsága tehát

$d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Az adott pont és egyenes távolsága 5 egység.

Pont és egyenes távolságának meghatározását az előbbi feladatban visszavezettük két pont távolságának meghatározására. Ez utóbbi a Pitagorasz-tétel segítségével történt.

2. példa Határozzuk meg a $3x - 4y = -8$ egyenletű egyenesnek a $3x - 4y = 12$ egyenletű egyenestől vett távolságát!

Megoldás

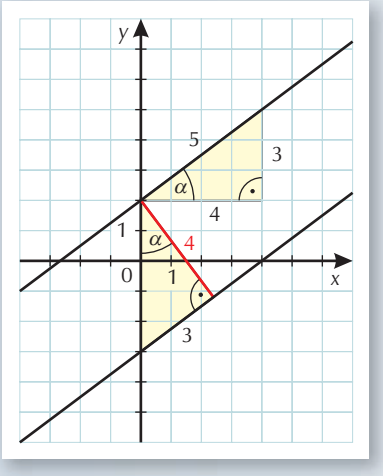
Első megoldás

Vegyük észre, hogy a két egyenes párhuzamos. Olvassuk le a $3x - 4y = -8$ egyenes egy pontját, például $P(0; 2)$. Ennek a pontnak a $3x - 4y = 12$ egyenestől való távolságát kell megadni, mert párhuzamos egyenesek esetén az egyik egyenes minden pontja ugyanakkora távolságra van a másik egyenestől, és ez a párhuzamos egyenesek távolsága.

(Ha két egyenes nem párhuzamos, akkor metszik egymást, és a távolságuk nulla.)

A P-n átmenő, és a megadott egyenesekre merőleges egyenes egyenlete: $4x + 3y = 6$. Ennek metszéspontja a $3x - 4y = 12$ egyenessel $M(2{,}4; -1{,}2)$. Az MP távolság:

$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{(0 - 2{,}4)^2 + (2 - (-1{,}2))^2} = \sqrt{5{,}76 + 10{,}24} = 4$.



Második megoldás

Az egyenesek iránytangense $m = \frac{3}{4}$. Ez alapján megszerkeszthetjük az ábrán látható 3; 4; 5 egység oldalú derékszögű háromszöget. Az első egyenes tengelymetszete a $(0; 2)$ pont, a másodiké a $(0; -3)$ pont. A kettő távolsága 5 egység. A $(0; 2)$ ponton átmenő, az egyenesekre merőleges egyenes metszi ki a $3x - 4y = 12$ egyenesből a két egyenes távolságát megadó szakaszt. Ennek a merőleges egyenesnek az y tengellyel bezárt szöge megegyezik az eredeti egyenesek irányszögével (mert merőleges szárú hegyesszögek). Az ábráról leolvasható, hogy $\cos\alpha = \frac{d}{5} = \frac{4}{5}$, ahonnan

$d = 4$.

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki az $d(A; e)$, $d(B; f)$ és $d(e; f)$ távolságokat, ha $A(11; -4)$, $B(-3; 1)$, $e: 3x - 2y = 2$, $f: 3x - 2y = 10$!

2. E1 Milyen hosszúak az $A(-2; 4)$, $B(2; -2)$, $C(7; 2)$ háromszög magasságai? Határozzuk meg a háromszög néhány további nevezetes adatát is (oldalak, súlyvonal, szögfelező hossza, szögek nagysága)!

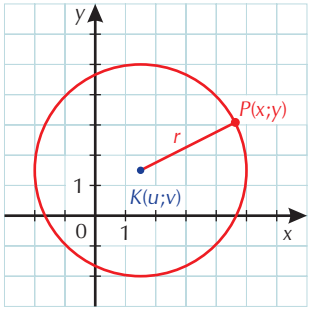
3. E1 Számítsuk ki a $12x - 5y = 1$ és a $12x - 5y = -12$ egyenesek távolságát!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 3758, 3759, 3761–3767.

44. A KÖR EGYENLETE

A $K(u; v)$ KÖZÉPPONTÚ, r SUGARÚ KÖR EGYENLETE

Egy kört, annak helyzetét egyértelműen meghatározhatjuk, ha megadjuk a középpontjának a helyét és megadjuk a sugarát. Legyen a kör középpontja $K(u; v)$, sugara pedig r ($r > 0$).



Tétel

A $K(u; v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:
$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

Bizonyítás Egy $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van rajta a köríven, ha a K középponttól vett távolsága éppen r. Ezek szerint

$\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = r$,

amely egyenletet négyzetre emelhetünk, hiszen mindkét oldal pozitív, így azt kapjuk, hogy $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

A KÖR ÉS A KÉTISMERETLENES MÁSODFOKÚ EGYENLET

A kör egyenlete tehát egy kétismeretlenes másodfokú egyenlet. Korábban azt láttuk, hogy minden $ax + by = c$ alakú kétismeretlenes egyenlet, ahol a és b közül legalább az egyik nem 0, egy egyenes egyenlete. Vajon igaz-e, hogy minden kétismeretlenes másodfokú egyenlet kör egyenlete?

A kétismeretlenes másodfokú egyenletek általános alakja:

$ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$.

Ha elvégezzük a kör egyenletében szereplő négyzetre emeléseket, a következőt kapjuk:

$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$.

Ebből kiolvasható, hogy az x^2 és az y^2 együtthatóinak egyenlőnek kell lennie ($a = b$), továbbá nem szerepelhet az egyenletben xy-os tag ($e = 0$). Vajon, ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor biztosan kör egyenletét kapjuk?

Tekintsük az alábbi két egyenletet:

a) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$,

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$.

Ahhoz, hogy eldöntsük, az adott egyenlet kör egyenlete-e vagy sem, át kell alakítanunk az egyenletet. Ehhez az x-es és y-os tagokat teljes négyzetté alakítjuk.

a) esetben

$(x+3)^2-9+(y-4)^2-16+9=0$, azaz $(x+3)^2+(y-4)^2=16$.

Ez valóban egy kör egyenlete, melynek középpontja $K(-3;\,4)$, sugara $r=4$.

b) esetben

$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+15=0$, azaz $(x-2)^2+(y+3)^2=-2$.

A kapott egyenlet bal oldalán egy nemnegatív szám szerepel, míg a jobb oldal negatív. Ez nyilván lehetetlen, vagyis az eredeti egyenlet nem lehet kör egyenlete.

Összefoglalva a tapasztaltakat, elmondhatjuk:

Egy kétismeretlenes másodfokú egyenlet akkor és csak akkor kör egyenlete, ha a négyzetes tagok együtthatói egyenlők, nem szerepel benne xy-os tag, és teljes négyzetté kiegészítés után az egyenletet

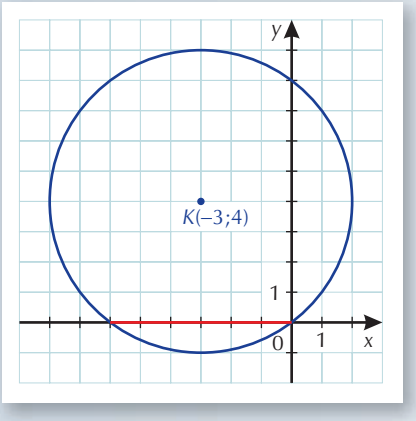
$(x-u)^2+(y-v)^2=k$

alakra hozva $k>0$.

1. példa Egy kör középpontja $K(-3;\,4)$, sugara $r=5$. Mekkora húrt metsz ki e kör az x tengelyből?

Megoldás

A kör egyenlete: $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. A kör ott metszi az x tengelyt, ahol $y=0$.



Ekkor

$(x+3)^2+16=25$, azaz $(x+3)^2=9$.

Innen

$x+3=3$ vagy $x+3=-3$, vagyis $x_1=0$, $x_2=-6$.

Tehát a megadott kör az x tengelyből egy 6 egység hosszúságú húrt metsz ki.

2. példa Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $P(2;\,1)$ ponton és érinti a koordinátatengelyeket!

Megoldás

Ha egy kör érinti a koordinátatengelyeket és áthalad a $P(2;\,1)$ ponton (azaz a kör középpontja az I. síknegyedbe esik), akkor középpontjának koordinátái egyenlők a kör sugarával: $u=v=r$. Ekkor a kör egyenlete

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$.

A P pont koordinátái kielégítik ezt az egyenletet, tehát

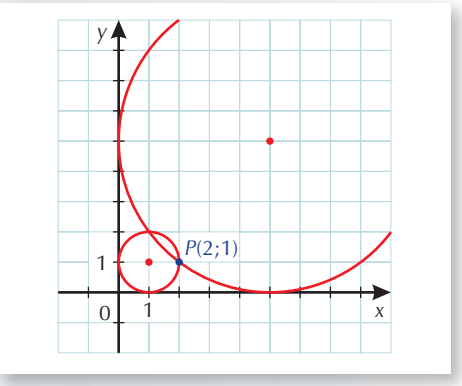
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$, azaz

$4+r^2-4r+1+r^2-2r=r^2$,

$r^2-6r+5=0$,

$r_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\dfrac{6\pm4}{2}$,

$r_1=1$, $r_2=5$.



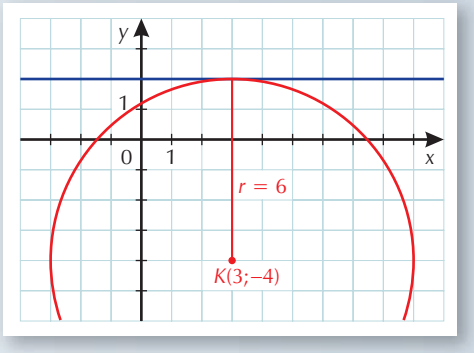
Tehát két olyan kör van, mely megfelel a feltételeknek:
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ és
$(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

3. példa Az $x^2+y^2-6x+8y+k=0$ egyenletben határozzuk meg a k paraméter értékét úgy, hogy
a) az egyenlet ne legyen kör egyenlete;
b) az egyenlet olyan kör egyenlete legyen, mely érinti az $y=2$ egyenest!

Megoldás Alakítsuk át a megadott egyenletet:
$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+k=0$, vagyis
$(x-3)^2+(y+4)^2=25-k$.

a) A kapott egyenlet akkor nem lesz kör egyenlete, ha $25-k\le 0$, azaz $k\ge 25$.

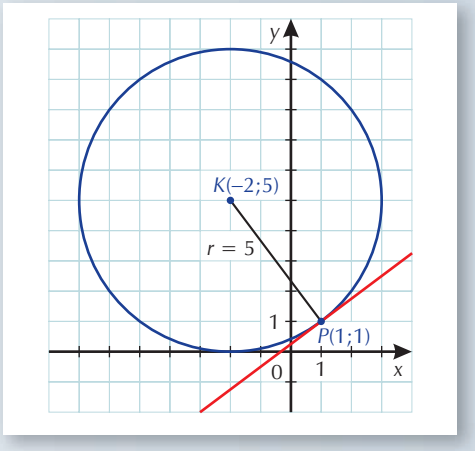
b) A kör sugara $r=\sqrt{25-k}$. A kör középpontja $K(3;-4)$. Ha a kör érinti az $y=2$ egyenest, akkor sugarának 6-nak kell lennie.
$\sqrt{25-k}=6$, azaz $25-k=36$, ahonnan $k=-11$.



4. példa Az $x^2+y^2+4x-10y+4=0$ egyenletű kör egy pontja $P(1;1)$. Írjuk fel a kör e P pontbeli érintőjének egyenletét!

Megoldás A kör egyenletét átalakítva azt kapjuk, hogy $(x+2)^2+(y-5)^2=25$.
Tehát a kör középpontja $K(-2;5)$, sugara $r=5$.

Az érintő merőleges a KP sugárra, ezért a $\overrightarrow{KP}(3;-4)$ vektor az érintőnek egy normálvektora. Ezek szerint a P pontra illeszkedő érintő egyenlete:
$3x-4y=3\cdot 1-4\cdot 1$
$3x-4y=-1$.



5. példa **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2017.)**
Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzolóprogram segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0;0)$, $B(30;0)$, $C(30;48)$, $D(0;48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.
a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét!

A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $x^2+y^2-36x-48y+819=0$ alakban adta meg.
b) Számítsa ki, hány százaléka a dísztér területe a park területének!

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18;24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.
c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát!

Megoldás *a)* A kör középpontja a téglalap átlóinak a felezőpontja: $K(15; 24)$.
A sugara $KA = \sqrt{15^2 + 24^2} = \sqrt{801}$. Tehát a kör egyenlete $(x-15)^2 + (y-24)^2 = 801$.

b) A díszteret alkotó kör egyenlete átalakítva: $(x-18)^2 + (y-24)^2 = 81 = 9^2$, tehát a kör sugara 9 egység, területe $9^2\pi$ ($\approx 254{,}5$) területegység. A park területe $30 \cdot 48$ ($= 1440$) területegység. A dísztér ennek a $\frac{254{,}5}{1440} \approx 0{,}177$-része, tehát körülbelül a 17,7%-a.

c) A sétaút egyenesének egy irányvektora a $\overrightarrow{PC} = (12; 24)$ vagy az egyszerűbb $\mathbf{v}(1; 2)$.
Ebből és a P (vagy a C) pont koordinátáiból felírható az egyenes egyenlete:
$2x - y = 2 \cdot 18 - 1 \cdot 24 = 12$.
Az egyenletbe $y = 0$-t helyettesítve kapjuk, hogy a sétaút egyenese a park határának AB oldalegyenesét az $M(6; 0)$ pontban metszi. A sétaút parkbeli szakaszának hossza tehát $CM = \sqrt{24^2 + 48^2} = \sqrt{2880} \approx 53{,}7$ egység, ami a valóságban 537 méter.

FELADATOK

1. E1 Egy kör egy átmérőjének két végpontja $A(-6; 4)$, $B(4; -2)$. Írjuk fel a kör egyenletét!

2. E1 Egy kör illeszkedik a $P(-1; 2)$ pontra és érinti a koordinátatengelyeket. Határozzuk meg a kör egyenletét!

3. E1 Az $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ és $x^2 + y^2 + 4x + 8y + p = 0$ egyenletű körök kívülről érintik egymást. Határozzuk meg a p paraméter értékét!

4. E1 Egy kör áthalad a $P(-2; 4)$ és $Q(4; 0)$ pontokon, középpontja az x tengelyen van. Írjuk fel a kör egyenletét!

5. E1 Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 - 8x - 8y + a = 0$ egyenletű kör origóból húzott érintői 60°-os szöget zárjanak be egymással!

6. E2 Hány db olyan pozitív egész k szám van, melyre az $x^2 + y^2 - kx - 4kx + 256 = 0$ egyenletű körnek nincs közös pontja az x tengellyel, de van közös pontja az y tengellyel?

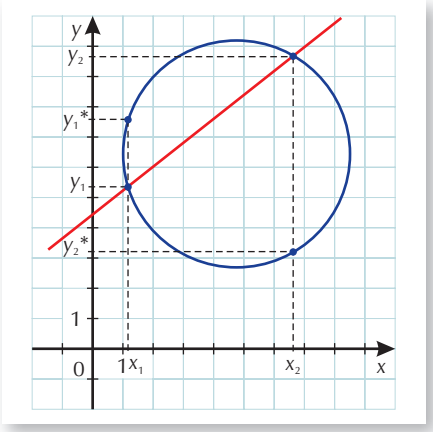
7. E2 Az $x^2 + y^2 - 4x - 8y + a = 0$ egyenletű kör háromszor olyan hosszú húrt metsz ki az y tengelyből, mint az x tengelyből. Milyen hosszúak e húrok?

8. E2 Egy háromszög két csúcspontja $A(0; 2)$, $B(-2; 0)$. A harmadik csúcs az $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ egyenletű körön van. Határozzuk meg a harmadik csúcs koordinátáit úgy, hogy a háromszög területe maximális legyen!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 3829, 3830, 3831, 3834, 3839, 3843, 3845, 3847, 3858, 3864, 3879, 3884, 3887.

45. KÖR ÉS EGYENES, KÉT KÖR KÖLCSÖNÖS HELYZETE

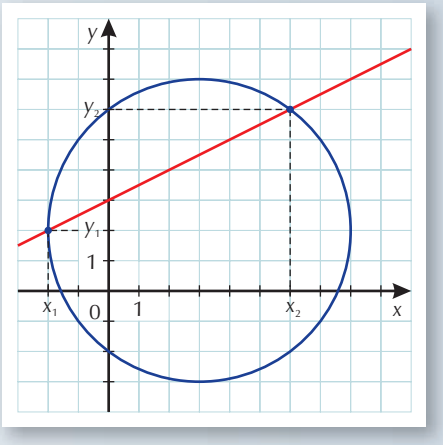
KÖR ÉS EGYENES METSZÉSPONTJAINAK KISZÁMÍTÁSA



Egy körnek és egy egyenesnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet. Ezek kiszámításához egy olyan kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk, melynél az egyik egyenletben mindkét ismeretlen legfeljebb elsőfokú, a kör egyenletben pedig mindkét ismeretlen másodfokon is szerepel. Célszerű az egyenes egyenletéből kifejezni valamelyik ismeretlent, majd ezt behelyettesíteni a másodfokú egyenletbe. Ez által egy egyismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk, melynek – diszkriminánsától függően – 0, 1 vagy 2 megoldása lesz, összhangban azzal, hogy a körnek és az egyenesnek 0, 1 vagy 2 közös pontja van. A másodfokú egyenletet megoldjuk, majd a kapott megoldásokat visszahelyettesítjük az elsőfokú egyenletbe. Miért fontos, hogy ha az egyik ismeretlent már megkaptuk az egyenletrendszernek, annak (azoknak) értékét az egyenes egyenletébe helyettesítsük vissza? Ha ugyanis a másodfokú egyenlet megoldásai pl. x_1, x_2, és ezt a kör egyenletébe helyettesítenénk vissza, akkor y-ra olyan y^* értékeket is kapnánk, melyekre pl. a $P(x_1;\ y_1^*)$ koordinátájú pont nem közös pontja a két alakzatnak, hiszen a körnek két olyan pontja is lehet, melynek első koordinátája x_1. Ezt szemlélteti az ábra.

1. példa Milyen hosszú az $x - 2y = -6$ egyenletű egyenesnek az $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ egyenletű körbe eső darabja?

Megoldás



Az egyenes egyenletéből $x = 2y - 6$; ezt a kör egyenletébe helyettesítve azt kapjuk, hogy:

$(2y - 6)^2 + y^2 - 6(2y - 6) - 4y - 12 = 0$, azaz

$4y^2 - 24y + 36 + y^2 - 12y + 36 - 4y - 12 = 0$,

$5y^2 - 40y + 60 = 0$, vagyis $y^2 - 8y + 12 = 0$.

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai adják a metszéspontok második koordinátáit.

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}, \qquad y_1 = 2, \quad y_2 = 6.$$

Helyettesítsük vissza a kapott gyököket az egyenes egyenletébe:

$x_1 = 2y_1 - 6 = -2$, $\qquad x_2 = 2y_2 - 6 = 6$.

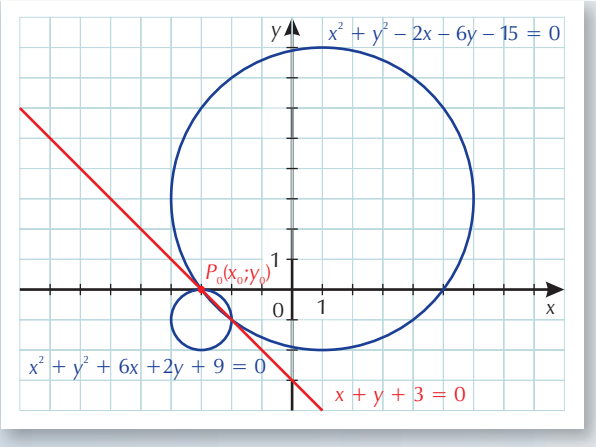
Tehát a kör és az egyenes metszéspontjai: $M_1(-2;\ 2)$, $M_2(6;\ 6)$. A két pont távolsága: $M_1M_2 = \sqrt{(6+2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{80}$.

KÉT KÖR METSZÉSPONTJAINAK KISZÁMÍTÁSA

Két különböző körnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet. Ezek kiszámításához egy olyan kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk, melyben mindkét egyenlet mindkét ismeretlenben másodfokú. Ezért ez esetben nem járhatunk el hagyományosan úgy, hogy az egyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, majd a kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe. Most egy másik módszert kell alkalmaznunk. Ezt mutatjuk be a 2. példában.

2. példa Számítsuk ki az $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ és $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$ egyenletű körök metszéspontjainak a koordinátáit!

Megoldás Ha a két kör egyik metszéspontjának koordinátái $P_0(x_0;\ y_0)$, akkor e pont kielégíti mindkét kör egyenletét: $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 6y_0 - 15 = 0$ és $x_0^2 + y_0^2 + 6x_0 + 2y_0 + 9 = 0$.



Vonjuk ki az egyik egyenletből a másikat (pl. a másodikból az elsőt); azt kapjuk, hogy

$8x_0 + 8y_0 + 24 = 0$, azaz $x_0 + y_0 + 3 = 0$.

A P_0 pont koordinátái tehát kielégítik az $x + y + 3 = 0$ egyenes egyenletét. Nyilván ugyanez elmondható a két kör másik metszéspontjára is. Ezek szerint, ha vesszük a két kör egyenletének különbségét, akkor egy olyan egyenes egyenletét kapjuk, mely áthalad a két kör metszéspontjain. Így, ha két körnek van metszéspontja, akkor ennek kiszámítását visszavezettük egy kör és egy egyenes metszéspontjainak kiszámítására.

Az egyenes egyenletéből $y = -x - 3$. Helyettesítsük ezt az egyik (pl. az első) kör egyenletébe:

$x^2 + (-x - 3)^2 - 2x - 6(-x - 3) - 15 = 0$,

$x^2 + x^2 + 6x + 9 - 2x + 6x + 18 - 15 = 0$,

$2x^2 + 10x + 12 = 0$, azaz $x^2 + 5x + 6 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$, $x_1 = -3$, $x_2 = -2$.

Helyettesítsük a kapott értékeket az $y = -x - 3$ egyenletbe; kapjuk: $y_1 = 0$, $y_2 = -1$. Tehát a két kör metszéspontjainak a koordinátái: $M_1(-3; 0)$, $M_2(-2; -1)$. A kapott pontok koordinátáit a megfelelő kör egyenletébe helyettesítve meggyőződhetünk arról, hogy e pontok valóban rajta vannak mindkét körön.

Ha adott két kör az egyenletével, és a két körnek van (1 vagy 2) közös pontja, akkor a két kör egyenletének különbsége olyan elsőfokú kétismeretlenes egyenlet (vagyis olyan egyenes egyenlete), mely áthalad a körök közös pontján vagy pontjain. Így a két kör közös pontjainak a kiszámítását visszavezethetjük egy kör és egy egyenes közös pontjainak kiszámítására.

Ha a két kör érinti egymást, akkor egyenleteik különbségéből adódó kétismeretlenes elsőfokú egyenlet a két kör érintési pontján áthaladó közös érintő egyenlete.

Érdemes meggondolni azt az esetet is, amikor a két körnek nincs közös pontja, hiszen az egyenleteik különbségéből ekkor is egy kétismeretlenes elsőfokú egyenlet, tehát egy egyenes egyenlete adódik. Kimutatható, hogy ez egy olyan egyenes, mely merőleges a két kör középpontjain átmenő egyenesre és egyik körrel sincs közös pontja. Szokás a két kör egyenletének különbségéből adódó egyenest a két kör **hatványvonalának** nevezni. Fontos tulajdonsága ennek az egyenesnek, bármely olyan pontjából, ahonnan érintőt lehet húzni a körökhöz, a két körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.

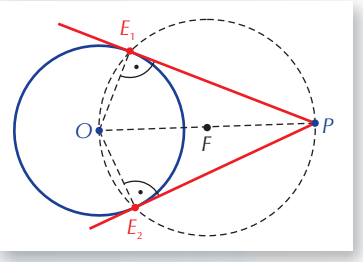
A KÖRHÖZ EGY KÜLSŐ PONTBÓL HÚZOTT ÉRINTŐK EGYENLETEI (Kiegészítő anyag)

Egy külső P pontból a körhöz húzott érintők egyenleteit többféleképpen meghatározhatjuk.

1. módszer

3. példa Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körhöz a $P(7; 1)$ pontból húzott érintők egyenletét!

Megoldás Idézzük fel az elemi geometriában tanultakat: hogyan lehet megszerkeszteni egy körhöz egy külső pontból húzható érintőket.



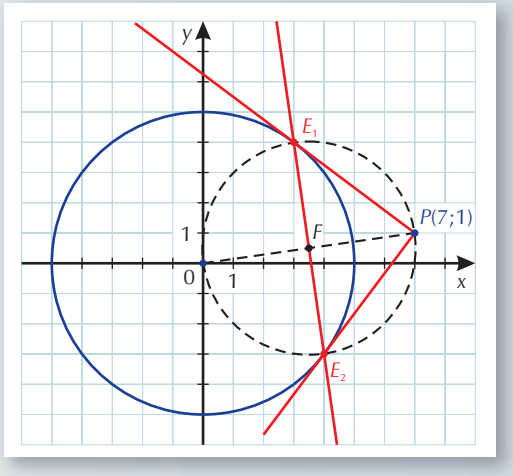
Kössük össze a külső P pontot a kör O középpontjával, majd szerkesszük meg e PO szakaszra mint átmérőre rajzolt kört. Thalész tétele alapján a PO szakasz e kör minden pontjából (kivéve természetesen O-t és P-t) derékszögben látszik. Ezek szerint a Thalész-kör és az eredeti kör E_1 és E_2 metszéspontjaira $OE_1P\sphericalangle = OE_2P\sphericalangle = 90°$, ami egyben azt jelenti, hogy az eredeti kör OE_1 sugara merőleges a PE_1 egyenesre, OE_2 sugara pedig a PE_2 egyenesre. Tehát a P pontból húzható érintők érintési pontjai E_1 és E_2, így a PE_1 és PE_2 egyenesek lesznek a keresett érintők.

A megadott kör középpontja az O origó. A PO szakasz F felezőpontja $F\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$. Az OF szakasz hossza, vagyis az OP szakasz Thalész-körének r sugara: $r = OF = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ezek szerint az OP szakasz Thalész-körének egyenlete:

$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$, rendezve

$x^2+y^2-7x-y=0$.



A P pontból húzható érintők érintési pontjai tehát az alábbi két kör metszéspontjai

$x^2+y^2-25=0$ és $x^2+y^2-7x-y=0$.

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat:

$7x+y-25=0$, azaz $y=25-7x$. (Ez a hatványvonal egyenlete.)

Helyettesítsük ezt vissza valamelyik (pl. az első) kör egyenletébe:

$x^2+(25-7x)^2-25=0$, vagyis

$x^2+625+49x^2-350x-25=0$,

$50x^2-350x+600=0$, tehát $x^2-7x+12=0$.

$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm1}{2}$, $x_1=3$, $x_2=4$.

A megfelelő y értékeket az egyenes egyenletébe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg:

$y_1=25-7x_1=4$, $y_2=25-7x_2=-3$.

Tehát a P pontból húzható érintők érintési pontjai: $E_1(3;4)$ és $E_2(4;-3)$.

Ezek után már csak a PE_1 és PE_2 egyenesek egyenletét kell felírnunk. A PE_1 egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{PE_1}(-4;3)$, tehát a PE_1 érintő egyenlete:

$3x+4y=9+16$, azaz $3x+4y=25$.

A PE_2 egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{PE_2}(-3;-4)$, tehát a PE_2 érintő egyenlete:

$-4x+3y=-16-9$, azaz $4x-3y=25$.

2. módszer

4. példa Írjuk fel az $x^2+y^2-4x-8y+16=0$ egyenletű kör origóból húzható érintőinek egyenletét, és adjuk meg az érintési pontok koordinátáit!

Megoldás Minden, az origón átmenő egyenes egyenlete $y=mx$ alakú, ahol m az egyenes iránytangense (kivéve természetesen az y tengelyt, melynek egyenlete $x=0$). Ha keressük a megadott kör és az egyenes közös pontjait, akkor az $y=mx$ helyettesítéssel az

$x^2+m^2x^2-4x-8mx+16=0$, azaz $(m^2+1)x^2-(4+8m)x+16=0$

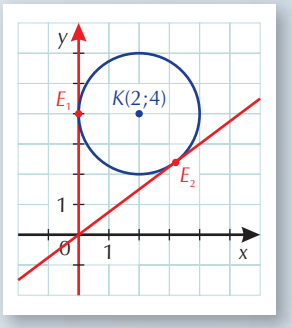
paraméteres másodfokú egyenletet kellene megoldanunk (hiszen $m^2+1\neq0$). De azt akarjuk, hogy az egyenes érintő legyen, vagyis az egyenesnek és a körnek csak egy közös pontja legyen. Ez viszont azt jelenti, hogy a kapott másodfokú egyenletnek csak egy megoldása lehet. Ez akkor és csak akkor következik be, ha az egyenlet diszkriminánsa 0.

$D=(4+8m)^2-64(m^2+1)=0$,

$16+64m^2+64m-64m^2-64=0$,

$64m=48$, ahonnan $m=\frac{3}{4}$.

Tehát a megadott körnek az origóból húzható (egyik) érintője: $y=\frac{3}{4}x$.



Első látásra meglepő, hogy csak egy m értéket kaptunk, hiszen egy külső pontból minden esetben két érintő húzható egy körhöz. Ennek magyarázatát megkapjuk, ha ábrázoljuk a kört. A kör egyenletét átalakítva azt kapjuk, hogy

$(x-2)^2+(y-4)^2=4$,

tehát a kör középpontja és sugara $K(2;4)$, $r=2$. Ez éppen azt jelenti, hogy a kör origóból húzott másik érintője az y tengely ($x=0$), melynek nincs meredeksége.

Az érintési pontokat most már könnyen meghatározhatjuk. Az egyik érintési pont (a kör középpontjának és sugarának ismeretében) nyilván $E_1(0;4)$.

A másik érintési pontot az alábbi egyenlet megoldása adja:

$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2-4x-8\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)+16=0$, azaz

$x^2+\frac{9}{16}x^2-4x-6x+16=0$,

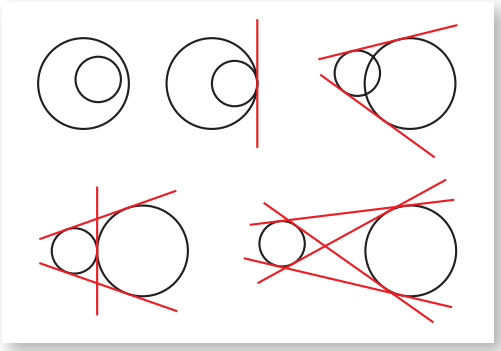
$\frac{25}{16}x^2-10x+16=0$, vagyis $\left(\frac{5}{4}x-4\right)^2=0$,

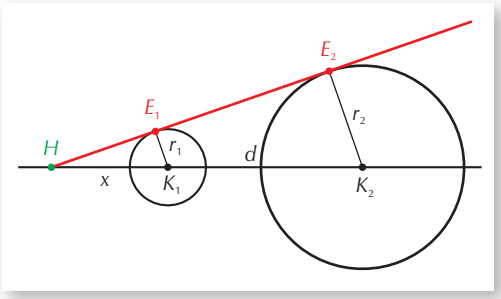
$\frac{5}{4}x-4=0$, ahonnan $x=\frac{16}{5}$ és ezzel $y=\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{5}=\frac{12}{5}$.

Tehát a másik érintési pont: $E_2\left(\frac{16}{5};\frac{12}{5}\right)$.

KÉT KÖR KÖZÖS ÉRINTŐINEK EGYENLETE (Kiegészítő anyag)

Két kör közös érintőinek egyenletét többféle módszerrel is meghatározhatjuk.





1. módszer: A körök egyenletéből kiolvasva a középpontok koordinátáit, azok távolságát, valamint a sugarakat, könnyen megállapíthatjuk, hogy van-e olyan közös érintő, mely párhuzamos az y tengellyel. Ha ilyen nincs, akkor az érintők egyenlete $y=mx+b$ alakú egyenes. Ezt mindkét kör egyenletébe helyettesítve egy-egy x-ben másodfokú, kétparaméteres (m és b) egyenletet kapunk. Mivel az egyenes mindkét kört érinti, ezért mindkét egyenletnek csak egy megoldása lehet, vagyis mindkét egyenlet diszkriminánsának 0-nak kell lennie. Így kapunk m és b ismeretlenekkel egy kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszert, melyek megoldásai adják a keresett egyeneseket. A közös érintők száma lehet 0, 1, 2, 3 vagy 4 *(lásd ábra)*.

2. módszer: A körök egyenletéből kiolvasva a középpontokat, azok távolságát, valamint a sugarakat, először kiszámítjuk a körök hasonlósági pontját (vagy pontjait). A közös külső érintők áthaladnak a külső, a közös belső érintők pedig a belső hasonlósági ponton. A külső H hasonlósági pontot például a következőképpen határozhatjuk meg.

A HK_1E_1 és HK_2E_2 háromszögek nyilván hasonlóak, hiszen mindkettő derékszögű, és a H csúcsnál közös szögük van. Ezek szerint – a H pont és a kisebb kör K_1 középpontjának távolságát x-szel, a két középpont távolságát d-vel jelölve –

$\frac{x}{r_1}=\frac{x+d}{r_2}$, azaz $r_2x=r_1x+r_1d$, ahonnan $x=\frac{r_1d}{r_2-r_1}$.

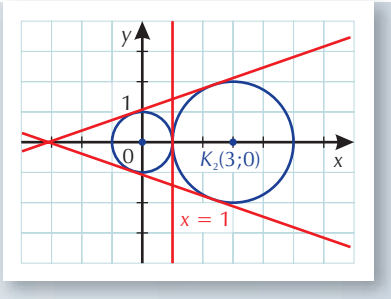
Hasonlóképpen kaphatjuk meg a közös belső érintők (ha vannak) metszéspontját, ami a körök másik hasonlósági pontja. (Itt feltételeztük, hogy a körök sugarai különbözők. Ellenkező esetben ugyanis a közös külső érintők a K_1K_2 egyenessel párhuzamos egyenesek, könnyen meghatározhatók, a közös belső érintők (ha vannak) pedig áthaladnak a K_1K_2 szakasz felezőpontján.)

Miután megkaptuk a körök hasonlósági pontjait, már csak ebből a pontból valamelyik körhöz húzott érintőt kell felírnunk; ez biztosan érintője lesz a másik körnek is. Ezzel a módszerrel a közös érintők egyenletének felírását visszavezettük egy körhöz egy külső pontból húzott érintő egyenletének kiszámítására.

5. példa Írjuk fel az $x^2+y^2=1$ és $x^2+y^2-6x+5=0$ egyenletű körök közös érintőinek az egyenletét!

Megoldás A körök középpontjai és sugarai $K_1(0;0)$, $r_1=1$, illetve az $(x-3)^2+y^2=4$ alakból leolvasva $K_2(3;0)$, $r_2=2$. A két kör tehát érinti egymást az $E(1;0)$ pontban.

A két körnek 3 közös érintője van. Az egyik párhuzamos az y tengellyel, ez a $E(1;0)$ ponton átmenő, y tengellyel párhuzamos egyenes, amelynek egyenlete: $x=1$.



Legyen egy közös külső érintő egyenlete $y = mx + b$. Ha egy ilyen egyenesnek bármelyik körrel csak egy közös pontja van, akkor az $y = mx + b$ kifejezést mindkét kör egyenletébe helyettesítve olyan másodfokú egyenletet kapunk, melynek csak egy megoldása van, azaz diszkriminánsának 0-nak kell lennie.

Az első körrel

$x^2 + (mx + b)^2 = 1$, azaz $x^2 + m^2x^2 + 2mbx + b^2 - 1 = 0$,

$x^2(m^2 + 1) + 2mbx + b^2 - 1 = 0$.

Ennek diszkriminánsára

$4m^2b^2 - 4(m^2 + 1)(b^2 - 1) = 0$, ahonnan $b^2 - m^2 = 1$ azaz $b^2 = m^2 + 1$.

A második körrel

$x^2 + (mx + b)^2 - 6x + 5 = 0$, azaz $x^2 + m^2x^2 + 2mbx + b^2 - 6x + 5 = 0$.

$x^2(m^2 + 1) + (2mb - 6)x + b^2 + 5 = 0$.

Ennek diszkriminánsára

$(2mb - 6)^2 - 4(m^2 + 1)(b^2 + 5) = 0$, ahonnan $5m^2 + b^2 + 6mb - 4 = 0$.

Helyettesítsük be ez utóbbi egyenletbe az előbb b^2-re kapott értéket:

$6m^2 + 6mb - 3 = 0$, vagyis

$2m^2 + 2m\sqrt{m^2 + 1} - 1 = 0$ vagy $2m^2 - 2m\sqrt{m^2 + 1} - 1 = 0$,

$\pm 2m\sqrt{m^2 + 1} = 1 - 2m^2$.

Mindkét oldalt négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$4m^2(m^2 + 1) = 4m^4 - 4m^2 + 1$, $8m^2 = 1$, ahonnan $m_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Ezzel pedig $b_{1,2} = \pm\frac{3}{\sqrt{8}}$. Ha $m > 0$, akkor $b > 0$, ha pedig $m < 0$, akkor $b < 0$ *(lásd ábra)*. Tehát a megadott két kör közös külső érintőinek egyenlete: $y = \frac{1}{\sqrt{8}}x + \frac{3}{\sqrt{8}}$ és $y = -\frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{3}{\sqrt{8}}$.

FELADATOK

1. E1 Az országút egyenlete egy térképen $x + 2y = 7$. Az $A(3; 7)$ pontban van egy regionális rádióadó, melynek adását az adó 5 km-es körzetében lehet fogni. Az országút hány km-es szakaszán fogható az adás, ha a koordinátatengelyeken az egység 1 km ?

2. E1 Adott két pont $A(-1; 6)$, $B(-5; 2)$. Az $x^2 + y^2 - 10x - 20y + a = 0$ egyenletű kör felezi az AB szakaszt. Számítsuk ki az AB egyenes és a kör másik metszéspontjának a koordinátáit!

3. E2 Az $y + 2x = 1$ egyenesnek mely pontjából húzható két egymásra merőleges érintő az $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ egyenletű körhöz?

4. E2 Az $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$ egyenletű kör érinti az $x + y = a$ egyenest. Számítsuk ki az a paramétert!

5. E1 Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 40$, $BC = 20$. Az AB oldalra mint átmérőre félkört rajzoltunk a téglalap belseje felé. E félkör a téglalap átlóit a P és Q pontokban metszi. Számítsuk ki az $ABPQ$ négyszög területét!

6. E2 Bizonyítsuk be, hogy ha két kör egyenletét kivonjuk egymásból, akkor olyan egyenes egyenletét kapjuk, mely a két kör középpontjain átmenő egyenesre merőleges!

7. E1 Egy háromszög egyik csúcspontja $A(5; -1)$, súlypontja $S\left(\frac{7}{3}; 1\right)$. A háromszög köré írható körének egyenlete $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. Számítsuk ki a háromszög hiányzó csúcspontjainak a koordinátáit!

8. V Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ és $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 36 = 0$ egyenletű körök közös külső érintőinek egyenletét!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 3919, 3921, 3922, 3928, 3938, 3943, 3956, 3960, 3976, 3980, 3987, 3991, 4004.

46. PARABOLA, A PARABOLA EGYENLETE, PARABOLA ÉS EGYENES KÖLCSÖNÖS HELYZETE

Mielőtt hozzákezdünk a parabola egyenletének megalkotásához, előtte elevenítsük fel, milyen ponthalmazt nevezünk parabolának.

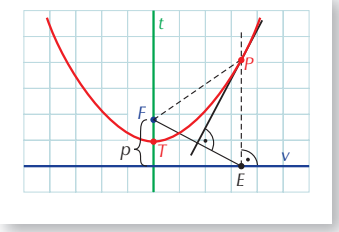
Definíció

A sík azon pontjainak a halmazát, melyek a sík egy v egyenesétől és a sík egy, az egyenesre nem illeszkedő F pontjától egyenlő távolságra vannak, **parabolának** nevezzük.

Vagy másképpen fogalmazva:

Adott v egyenest érintő és az egyenesre nem illeszkedő F ponton áthaladó körök középpontjainak a halmaza: **parabola**.

Az F pontot a parabola **fókuszpontjának**, a v egyenest a parabola **vezéregyenesének** nevezzük. Az F-ből a v egyenesre állított t merőleges egyenes a parabola **szimmetriatengelye**. A fókuszpontból a vezéregyenesre állított merőleges szakasz T felezőpontja a definíció szerint pontja a parabolának; e pontot a parabola **tengelypontjának** nevezzük.



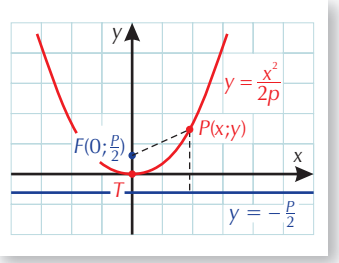
Vajon hogyan juthatunk el a parabola többi pontjához?

Állítsunk a vezéregyenes egy tetszőleges E pontjában merőlegest a vezéregyenesre, majd szerkesszük meg az FE szakasz felezőmerőlegesét. A két egyenes metszéspontja legyen P. Mivel P rajta van a felezőmerőlegesen, ezért $PF = PE$. De a PE szakasz az éppen a P pontnak a vezéregyenestől való távolsága, ezért az így kapott P pont biztosan rajta van a parabolán. Mivel a vezéregyenes bármely pontjából kiindulhattunk volna, így a parabola bármely pontját megszerkeszthetjük.

Hogy a parabola mennyire „sovány” vagy „kövér”, az attól függ, hogy a fókuszpontja milyen távol van a vezéregyenestől. Ezt a mennyiséget – a fókuszpont és a vezéregyenes $p > 0$ távolságát – a parabola **paraméterének** nevezzük, amely fontos szerepet játszik a parabola algebrai leírásában.

A PARABOLA EGYENLETE

Helyezzük el a p paraméterű, felfelé nyíló parabolát egy koordináta-rendszerben úgy, hogy T tengelypontja az origóban legyen, tengelye az y tengely legyen. Az olyan parabolát, amelynek tengelypontja az origó tengelyponti parabolának nevezzük.



Tétel

A p paraméterű, y tengelyű, tengelyponti, felfelé nyíló parabola egyenlete:

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

Bizonyítás A fókuszpont koordinátái $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, a vezéregyenes egyenlete: $y = -\frac{p}{2}$.

Egy $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van rajta a parabolán, ha F-től ugyanakkora távolságra van, mint v-től, vagyis

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}.$$

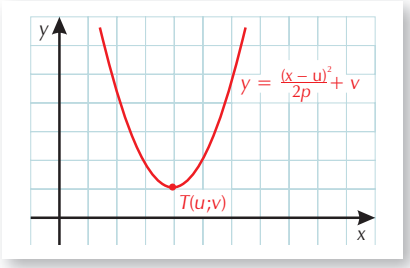
Emeljük négyzetre a kapott egyenlet két oldalát, és végezzük el a megfelelő átalakításokat.

$$x^2 + y^2 + \frac{p^2}{4} - py = y^2 + \frac{p^2}{4} + py, \quad \text{vagyis} \quad 2py = x^2, \quad \text{ahonnan } y = \frac{x^2}{2p}.$$

Hasonlóképpen kapjuk az y tengelyű, tengelyponti, lefelé nyíló parabola egyenletét. Ekkor a fókuszpont koordinátái $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, a vezéregyenes egyenlete: $y = \frac{p}{2}$.

A p paraméterű, y tengelyű, tengelyponti, lefelé nyíló parabola egyenlete:
$y = -\frac{x^2}{2p}$.

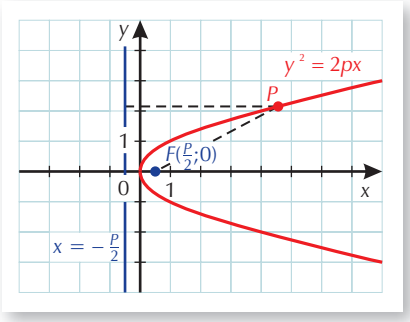
Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha az $y = \frac{x^2}{2p}$ parabolát eltoljuk az $(u; v)$ vektorral. Ekkor T tengelypontja a $T(u; v)$ pontba kerül. A parabola definíciója alapján belátható, hogy:



A p paraméterű, y tengelyű, $T(u; v)$ tengelypontú, felfelé nyíló parabola egyenlete $y = \frac{(x-u)^2}{2p} + v$.

Lefele nyíló esetben: $y = -\frac{(x-u)^2}{2p} + v$.

Szintén a definíció alapján határozható meg annak a parabolának az egyenlete, amelynek tengelypontja az origó, tengelye az x tengely, paramétere p *(lásd ábra)*.



A p paraméterű, x tengelyű, tengelyponti parabola egyenlete:
$y^2 = 2px$ vagy $y^2 = -2px$
attól függően, hogy a parabola jobbra nyíló vagy balra nyíló.

1. példa Egy parabola tengelypontja $T(-6; 2)$, vezéregyenese az x tengely. Adjuk meg a parabola fókuszpontjának a koordinátáit és írjuk fel a parabola egyenletét!

Megoldás A tengelypont és a vezéregyenes távolsága 2 egység, így a parabola paramétere 4. A parabola fókuszpontja a T tengelypont fölött van a paraméter felével, így a fókuszpont koordinátái $F(-6; 4)$. A parabola egyenlete: $y = \frac{(x+6)^2}{8} + 2$.

2. példa Számítsuk ki az $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$ parabola paraméterét, tengelypontját és fókuszpontját!

Megoldás Hozzuk az egyenletet $y = \frac{(x-u)^2}{2p} + v$ alakra.

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3 = \frac{1}{4}[x^2 - 4x + 12] = \frac{1}{4}[(x-2)^2 + 8] = \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2} + 2.$$

Ezek szerint a parabola paramétere $p = 2$, tengelypontja $T(2; 2)$, fókuszpontja pedig $F(2; 3)$.

PARABOLA ÉS EGYENES KÖLCSÖNÖS HELYZETE

Mint láttuk, az x vagy y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenlete olyan kétismeretlenes egyenlet, melyben az egyik ismeretlen az első fokon, a másik ismeretlen pedig másodfokon szerepel. Ezek szerint egy parabola és egy egyenes metszéspontjainak kiszámításakor egy olyan egyenletrendszert kell megoldanunk, ami egy ilyen egyenletből és az egyenes elsőfokú egyenletéből áll. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, hogy az egyenes egyenletéből kifejezzük valamelyik ismeretlent, és azt behelyettesítjük a parabola egyenletébe. Ekkor egy egyismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk. Ennek megoldását (megoldásait) az egyenes egyenletébe

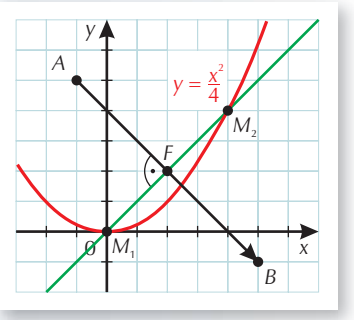
visszahelyettesítve megkapjuk a keresett közös pontokat. Természetesen a másodfokú egyenletnek lehet 0, 1 vagy 2 megoldása, összhangban azzal, hogy egy parabolának és egy egyenesnek lehet 0, 1 vagy 2 közös pontja.

3. példa Milyen távol vannak egymástól az $y = \frac{x^2}{4}$ parabolának azok a pontjai, melyek az $A(-1; 5)$ és $B(5; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak?

Megoldás Az A és B pontoktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőlegese, tehát először ezt kell felírnunk. Az AB szakasz felezőpontja $F(2; 2)$. A felezőmerőleges normálvektora az $AB(6; -6)$, vagy az egyszerűbb $(1; -1)$, így AB felezőmerőlegesének egyenlete: $x - y = 0$, azaz $x = y$. Ezt a parabola egyenletébe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{x^2}{4} \quad \text{azaz} \quad x^2 - 4x = 0, \quad \text{tehát} \quad x(x-4) = 0.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Tehát az AB szakasz felezőmerőlegesének és a parabolának a közös pontjai: $M_1(0; 0)$, $M_2(4; 4)$. E két pont távolsága: $M_1M_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.



A parabola érintője

A kör érintőjét így definiáltuk: olyan egyenes, melynek a körrel egy közös pontja van. Ugyanezt a parabola esetében már nem mondhatjuk, hiszen pl. a parabola tengelyének és minden a tengellyel párhuzamos egyenesnek egy közös pontja van a parabolával, de ezeket az egyeneseket – érthető módon – nem akarjuk érintőnek nevezni. Ha azonban azt is megkívánjuk, hogy az egyenes, amelynek a parabolával egy közös pontja van, ne legyen párhuzamos a tengellyel, akkor már eljutunk a kívánt érintőkhöz.

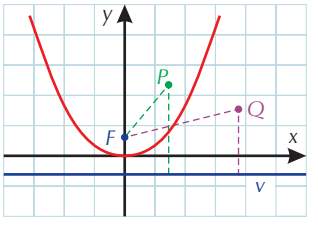
Definíció

A parabola érintője olyan egyenes, melynek a parabolával egy közös pontja van és nem párhuzamos a parabola tengelyével.

Ismeretes a parabola érintőjének egy másik meghatározása is, ehhez azonban szükségünk van két új fogalomra:

Ha egy P pont fókusztól mért távolsága kisebb, mint a vezéregyenestől mért távolsága, akkor e P pont a parabola belső pontja. Ha valamely Q pont fókusztól mért távolsága nagyobb, mint a vezéregyenestől mért távolsága, akkor e Q pont a parabola külső pontja.

A parabola érintője olyan egyenes, melynek a parabolával egy közös pontja van, és ezen kívül minden pontja külső pont.



Belátható, hogy e két definíció ekvivalens egymással.

Most nézzük meg egy konkrét példán keresztül, hogyan határozzuk meg a parabola érintőjének egyenletét.

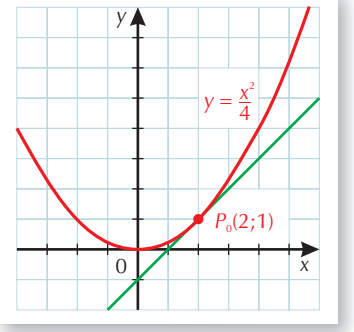
4. példa Határozzuk meg $y = \frac{x^2}{4}$ parabola érintőjét a $P_0(2; 1)$ pontban!

Megoldás Először írjuk fel az összes P_0 ponton átmenő (y tengellyel nem párhuzamos) egyenes egyenletét. Minden ilyen egyenes $y = mx + b$ alakban írható. Ha egy egyenes áthalad a P_0 ponton, akkor koordinátái kielégítik ezt az egyenletet, azaz

$1 = 2m + b$, ahonnan $b = 1 - 2m$.

Ezek szerint a P_0 ponton áthaladó összes egyenes (mely nem párhuzamos az y tengellyel) egyenlete:

$y = mx + 1 - 2m$.



Ha keressük egy ilyen egyenes és az $y = \frac{x^2}{4}$ egyenletű parabola közös pontjait, akkor az egyenleteikből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Mivel mindkét egyenlet y-ra rendezett alakban áll, ezért írhatjuk:

$\frac{x^2}{4} = mx + 1 - 2m$, azaz $x^2 = 4mx + 4 - 8m$,

$x^2 - 4mx - 4 + 8m = 0$.

A kapott másodfokú egyenlet gyökei adják tehát a P_0 ponton átmenő egyenes és a parabola közös pontjainak első koordinátáját. Mivel azt akarjuk, hogy az egyenes érintő legyen, tehát csak egy közös pontja legyen a parabolával, ezért szükséges, hogy ennek az egyenletnek csak egy megoldása legyen. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha diszkriminánsa 0.

$D = 16m^2 - 4(-4 + 8m) = 0$, azaz $m^2 - 2m + 1 = 0$.

Nem véletlen (sőt szükségszerű), hogy a diszkrimináns = 0 egyenlet az m meredekségre nézve olyan másodfokú egyenlethez vezetett, mely teljes négyzet, vagyis amelynek diszkriminánsa ugyancsak 0:

$(m-1)^2 = 0$,

ellenkező esetben ugyanis a parabolának egy adott pontjában két érintője is lehetne. A kapott egyenletből

$m - 1 = 0$, ahonnan az érintő m meredeksége $m = 1$.

Ezt visszahelyettesítve a P_0 ponton átmenő összes egyenes egyenletét leíró egyenletbe kapjuk az érintő egyenletét:

$y = x - 1$.

FELADATOK

1. E1 Egy y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola tengelypontja $T(1; -2)$. A parabola áthalad az $A(0; 3)$ ponton. Írjuk fel a parabola egyenletét!

2. E1 Határozzuk meg annak a parabolának a tengelypontját és fókuszpontját, mely illeszkedik az alábbi pontokra: $A(0; -3)$, $B(1; 5)$, $C(-1; -7)$!

3. E2 Írjuk fel az $y = \frac{x^2}{4}$ parabola az $y - 2x = 2$ egyenletű egyenesre merőleges érintőjének egyenletét!

4. E2 Egy háromszög két csúcsa $A(4; 1)$, $B(8; 5)$. A háromszög harmadik csúcsa illeszkedik az $y = -x^2 + 9$ egyenletű parabola x tengely fölötti részére. Határozza meg a harmadik csúcs koordinátáit úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!

5. E2 Egy parabola két pontja A és B. Ezek merőleges vetülete a vezéregyenesen A^* és B^*. Igazolja, hogy a fókuszponton átmenő, AB-re merőleges egyenes felezi az A^*B^* szakaszt!

6. E1 Kössük össze az $y = \frac{x^2}{2p}$ parabola minden pontját a tengelyponttal. Mi lesz az így keletkező szakaszok felezőpontjainak a halmaza?

7. E1 Tükrözzük az $y = \frac{x^2}{2p}$ parabola fókoszpontját a parabola minden pontjára! Mi lesz az így kapott pontok halmaza?

8. E2 Adott az $y = \frac{x^2}{2p}$ parabola. Bizonyítsuk be, hogy a vezéregyenes $\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ pontjából a parabolához húzott érintők merőlegesek egymásra!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: 4013, 4016–4018, 4020, 4054, 4059, 4063, 4071, 4077, 4079, 4091, 4093, 4117, 4130.

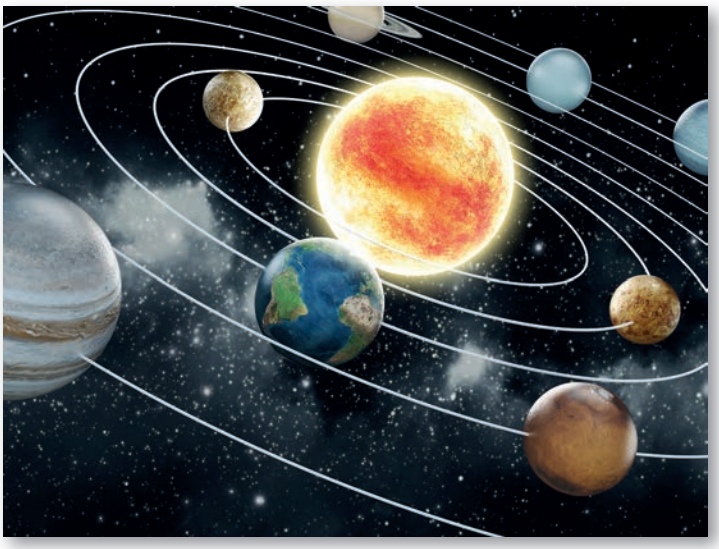
KÚPSZELETEK (Olvasmány)

Tycho Brahe (1546–1601) vagyonos dán főnemes megszállottan figyelte a csillagok mozgását. Több herceg is támogatta, így megszerkesztette az akkori világ legpontosabb (és legdrágább) csillagászati műszereit. Munkája során folyamatosan rögzítette az észlelhető csillagokkal kapcsolatos összes megfigyelését (térbeli és időbeli azonosítás, mozgás- és pályajellemzők).

Johannes Kepler

Johannes Kepler (1571–1630) német fizikus és csillagász munkáiban még keveredett a középkori és a modern szemlélet, műveiben éppúgy megtalálható a miszticizmus és az asztrológia, mint a modern természettudományos gondolkodás. Csak kedvtelésből foglalkozott matematikával, de gyakorlati írásaiban (például A boroshordók geometriája) korát messze megelőzve a modern analízis módszereit alkalmazta.

Tycho Brahe



Johannes Kepler, a nagy német természettudós (aki igen szerény körülmények között élt) *Tycho Brahe* halála után megörökölte annak óriási mennyiségű, pontos mérési eredményét. Az adatok alapján megpróbálkozott a Mars pályájának matematikai leírásával, feltételezve, hogy a bolygó körmozgást végez, vagy a mozgása körök kombinációjaként áll elő. (*Arkhimédész* [Kr. e. 287–212] óta elfogadott tény volt, hogy a bolygók csak a legtökéletesebb szimmetrikus alakzaton, körpályán keringhetnek. A mozgás lehet persze körök összekombinálása is: például egy bolygó körmozgást végez, a bolygó körpályája körül kering egy hold, szintén körpályán.) Úgy tudjuk, Kepler évekig tartó, tizennégy fáradságos és időigényes próbálkozása lett eredménytelen, míg végül forradalmi gondolata támadt – elvetette a körpálya lehetőségét. Vakmerőségének meg is lett a jutalma: sikerült kimutatnia, hogy a Mars (és a többi bolygó) változó sebességgel mozog olyan ellipszispályán, amelynek egyik fókuszában a Nap van. Továbblépve pedig megfogalmazta a csillagászat alapvető törvényét, a fizikaóráról jól ismert Kepler-törvényeket.

De mi is az az ellipszis?

AZ ELLIPSZIS

Az O középpontú, r sugarú kört olyan P pontok halmaza alkotja az S síkban, amelyekre az OP távolság éppen r. $k = \{P \in S \,|\, OP = r\}$ tehát a k kör pontjainak halmazát jelenti. A p parabola pontjainak halmazát pedig a $p = \{P \in S \,|\, PF = d(P; v)\}$ egyenlettel adhatjuk meg, ahol az F fókuszt és a v vezéregyenest rögzítettük.

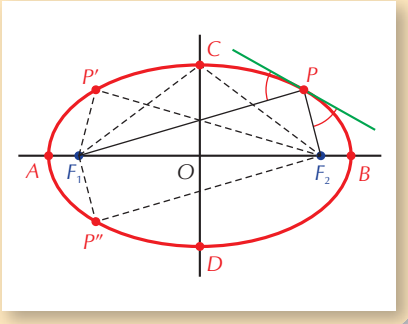
További nevezetes síkbeli ponthalmazokhoz jutunk, ha az O ponttól való távolság helyett két előre rögzített ponttól, F_1-től és F_2-től való távolságra adunk meg algebrai feltételeket.

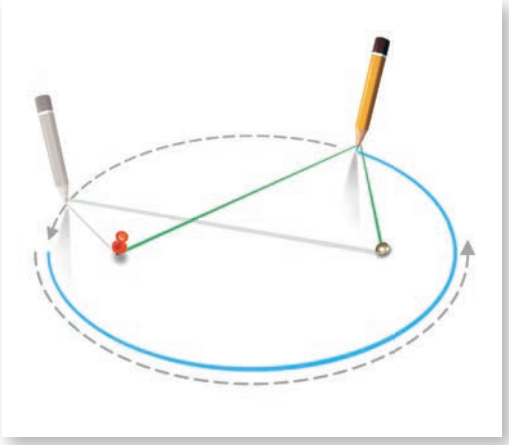
Definíció

Az **ellipszis** azon síkbeli pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy két adott ponttól mért távolságuk összege állandó és ez az állandó nagyobb, mint a két adott pont távolsága.

A két adott pontot **fókuszpontnak** nevezzük.

Ha az állandó értékét $2a$-val jelöljük, akkor a definíciót formálisan is felírhatjuk. P pontosan akkor pontja az e ellipszisnek, ha $PF_1 + PF_2 = 2a$, azaz $e = \{P \in S \,|\, PF_1 + PF_2 = 2a\}$. (Természetesen $a > 0$, és a háromszög-egyenlőtlenség miatt $PF_1 + PF_2 \geq F_1F_2$ adódik. Mivel nem szeretnénk megengedni, hogy P az F_1F_2 szakasz pontja legyen, a $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$, azaz $2a > F_1F_2$ megkötést tesszük.)





Vannak ellipszisívek rajzolását segítő vonalzók, de ellipszist már az óvodások is rajzolgatnak. Ha két rajzszöget leszúrunk egy papírlapra, és a távolságuknál hosszabb cérnaszálat kötünk hozzájuk, akkor a cérnaszálakat egy ceruzával kifeszítve ellipszist rajzolhatunk. (Miért? Gondoljuk meg!) A módszert már az ókori rómaiak is használták, amikor kötelek kifeszítésével tervezték meg a boltívek alakját.

A definícióból következik, hogy az ellipszisnek van két tükörtengelye: az F_1F_2 egyenes, valamint az F_1F_2 szakasz felezőmerőlegese. (Az O felezőpont egyúttal szimmetria középpont is.) Ha a fenti ábra szerinti A (vagy B) pontot tekintjük, akkor a definíciót alkalmazva az $AF_1 + AF_2 = 2a$ összefüggésből

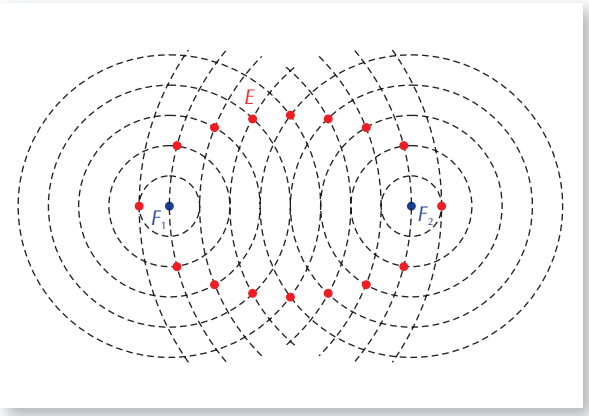
$AF_1 + AF_2 = AF_1 + (AF_1 + F_1F_2) = AF_1 + (F_2B + F_1F_2) = AB = 2a$,

azaz $AO = OB = a$ (ezért szerepel $2a$ a definícióban).

Az AB szakaszt az ellipszis **nagytengelyének**, a CD szakaszt pedig a **kistengelyének** nevezzük. Szokásos jelölések: $CD = 2b$, azaz $OC = OD = b$, a kistengely fele; valamint $OF_1 = OF_2 = c$, a fókuszpontok és az ellipszis középpontjának távolsága.

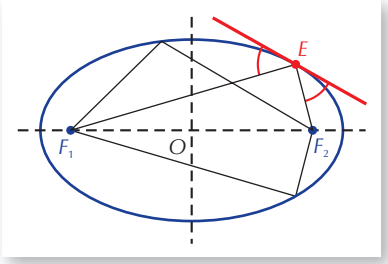
Érdekes kapcsolat fedezhető fel az ellipszis a, b, c jellemzői között. A fenti ábra szerinti C (vagy D) pontra felírva a definíciót, a $CF_1 + CF_2 = 2a$ összefüggésből $CF_1 = a$ adódik. Így az F_1OC derékszögű háromszögben felírhatjuk Pitagorasz tételét: $F_1O^2 + OC^2 = F_1C^2$, azaz $c^2 + b^2 = a^2$. Ha tehát az a, b, c jellemzői közül valamely kettőt ismerjük, akkor a harmadik kiszámítható.

Ahogy a parabolának, úgy az ellipszisnek is tetszőlegesen sok, de csak véges sok pontját tudjuk megszerkeszteni. Az ábrán látható módon az F_1 és F_2 középpontú koncentrikus körök megfelelő metszéspontjai az ellipszis pontjait adják. (Az ábrán $F_1F_2 = 2c = 8$ egység, $2a = 10$ egység, és például az E pontra $F_1E = 4$ egység, $EF_2 = 6$ egység. E valóban az ellipszis pontja: $F_1E + EF_2 = 2a$.)



Az ellipszis néhány érdekes tulajdonsága már régóta ismert.

Ha például egy ellipszis alakú teremben az F_1 fókuszpontba hangforrást helyezünk, akkor az innen kiinduló és a terem faláról visszaverődő hullámok az F_2 pontban találkoznak. (Könnyen igazolható, hogy ez matematikailag a következőt jelenti: ha E a visszaverődési pont, akkor az F_1E és F_2E szakaszok ugyanakkora szöget zárnak be azzal az érintővel, amit az E pontban húzunk az ellipszishez. Az érintő bármely más E' pontjára $F_1E' + F_2E' > F_1E + F_2E$, s ez éppen a fenti feltételhez vezet. Ezzel kapcsolatos az 1. kitűzött feladat.) Több építészeti emlékünk is van (templomrészek, kápolnák), amelyek ezt a tulajdonságot használják fel. Ezekben adott helyen (F_1) elhangzó beszéd jól hallható egy másik, távoli helyen (F_2), és csak ott hallható. (Régi mondákban is találkozhatunk a királylány és lovagjának történetével. Az ellipszis alakú terem két fókuszában suttogó szerelmesek beszélgetését nem tudják



megakadályozni a marcona katonák, akik például az ellipszis középpontja körül elhelyezkedve őrködnek.)

A Nap körüli bolygók ellipszispályája csak kissé tér el a körtől. Az adott $2a$ nagytengelyű ellipszis és a $2a$ átmérőjű kör kapcsolatát szemléletesen úgy képzelhetjük el, hogy ha a két fókusz távolsága nullához „közelít”, akkor az ellipszis egyre inkább kör alakot vesz fel. (Ekkor c egyre kisebb, s adott a esetén $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ pedig a-hoz közelít. A Föld pályájára például a $\frac{c}{a}$ arány 0,017.)

Végül megadjuk – bizonyítás nélkül – annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek középpontja az origó, tengelyei egybeesnek a koordináta-rendszer tengelyeivel, és nagytengelye az x tengelyre illeszkedik. Ha az ellipszis nagytengelye $2a$, kistengelye pedig $2b$, akkor az egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Más jellegű görbéhez jutunk, ha „kissé” módosítunk az ellipszis definícióján. Milyen ponthalmazt határozhat meg a $PF_1 - PF_2 = 2a$ összefüggés? Az rögtön látszik, hogy ha meg akarjuk őrizni a korábbi szimmetriát, akkor a $|PF_1 - PF_2| = 2a$ egyenletet érdemes vizsgálnunk.

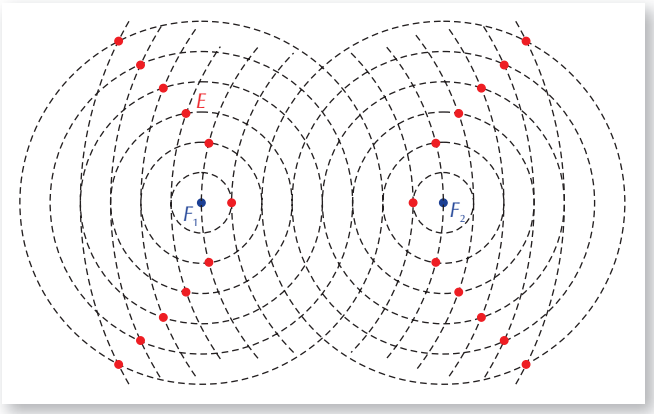
A HIPERBOLA

Definíció

A **hiperbola** azon síkbeli pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy két adott ponttól vett távolságkülönbségük abszolút értéke állandó, s ez az állandó kisebb, mint a két adott pont távolsága.

A két adott pontot **fókuszpontnak** nevezzük.

Ha az állandó értékét $2a$-val, az adott pontokat F_1-gyel és F_2-vel jelöljük, akkor az S síkú h hiperbola definíciója formálisan: $h = \{P \in S;\ |PF_1 - PF_2| = 2a\}$. (Feltételek: $a > 0$ és $2a < F_1F_2$.)



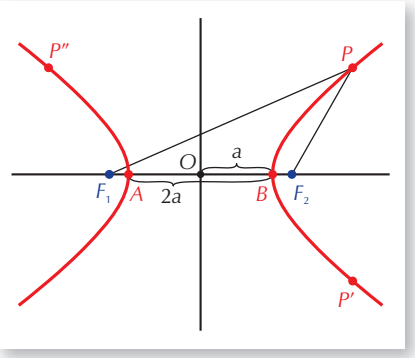
A hiperbolát az ellipszishez analóg módon tárgyalhatjuk. Most is igaz, hogy a definíció alapján a hiperbolagörbe tetszőleges, de csak véges sok pontját megszerkeszthetjük.

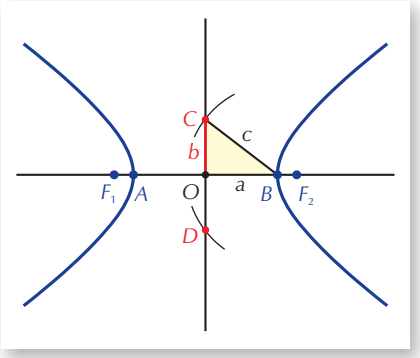
(Az ábrán olyan hiperbola pontjai láthatók – egységben mérve –, amelyekre $2a = 6$, és $F_1F_2 = 8$. Az E pontra például $EF_1 = 3$ és $EF_2 = 9$, s erre $|EF_1 - EF_2| = 2a$ teljesül.)

A definícióból következik, hogy a hiperbolának két tükörtengelye van: az F_1F_2 egyenes, valamint az F_1F_2 szakasz felezőmerőlegese. (Az O felezőpont egyúttal szimmetria középpont is.)

Az ellipszis nagytengelyéhez hasonlóan definiálhatjuk a hiperbola ún. **valós tengelyét**. Ha az ábra szerinti A (vagy B) pontot tekintjük, akkor a definíciót alkalmazva az $|AF_1 - AF_2|$ összefüggésből $AF_2 - AF_1 = AF_2 - F_2B = AB = 2a$, azaz $AO = OB = a$. Az AB szakaszt a hiperbola valós tengelyének nevezzük. Az F_1, F_2 pontok a fókuszok, az $OF_1 = OF_2$ szakasz hosszát – a fókuszpontok és a szimmetriacentrum távolságát – c-vel jelöljük, mint az ellipszis esetében.

Az ellipszis kistengelyének megfelelő szakaszt is definiálhatunk.





Az ábra szerinti CD szakaszt a hiperbola **képzetes tengelyének** nevezzük. (Az elnevezés arra utal, hogy az F_1F_2 szakasz felezőmerőlegesén a hiperbolának nincs pontja.) Legyen $BC = c$, a képzetes tengely $2b$ hossza az OBC derékszögű háromszögből, Pitagorasz tételével határozható meg: $2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$. (Vigyázat: a képlet alakilag nem egyezik meg az ellipszisnél látott összefüggéssel!)

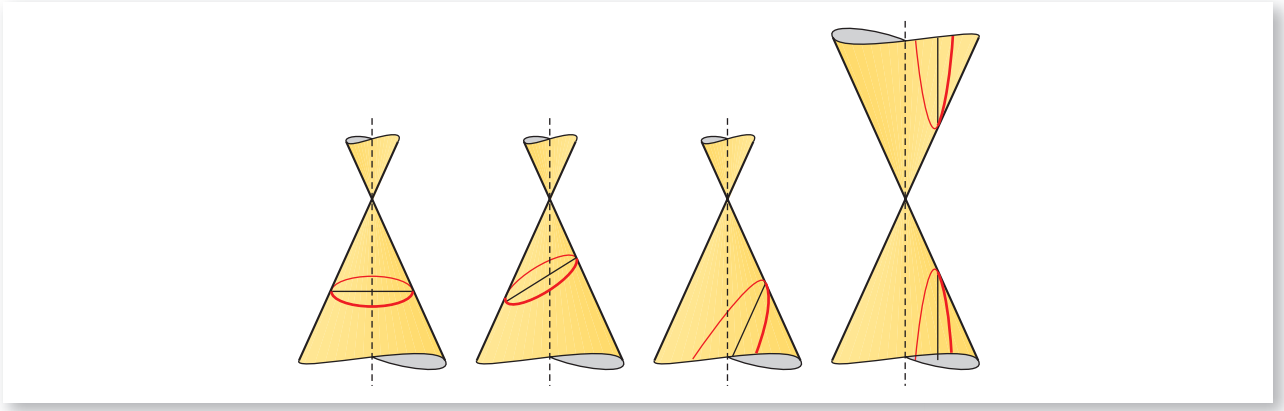
A hiperbola elnevezéssel már korábban is találkoztunk, az $f(x) = \frac{1}{x}$ alakú, illetve az ezek transzformációiból kapott függvénygörbéket neveztük így. A korábbi szóhasználatunk szerint ha tehát két mennyiség, x és y fordítottan arányos, akkor az $y = g(x)$ hozzárendelés grafikonjának pontjai egy hiperbolán helyezkednek el; mint ahogy hiperbola a $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ elsőfokú törtkifejezés képe is ($c \neq 0$). Bebizonyítható, hogy ezek a görbék valóban hiperbolák, azaz van két olyan pont, F_1 és F_2, amelyekre $|PF_1 - PF_2| =$ állandó, ha P a görbe pontja. (Ezzel kapcsolatos a 3. kitűzött feladat.)

Bizonyítás nélkül megadjuk annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek középpontja az origó, valós tengelye egybeesik az x tengellyel, a valós tengelye $2a$, képzetes tengelye pedig $2b$ hosszú:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

KÚPSZELETEK

Tanulmányaink során néhány nevezetes görbét (kör, parabola, ellipszis, hiperbola) síkgeometriai és koordinátageometriai úton is megadtunk. (Az S síkú parabola esetében például $\{P \in S;\ PF = d(P; v)\}$, ahol F a fókusz, v a vezéregyenes, P a parabola tetszőleges pontja; illetve $y = ax^2 + bx + c$, ahol $a \neq 0$ két lehetséges definíció.) A matematika egyik szép eredménye, hogy ezek a görbék térgeometriai úton is definiálhatók.



A kört, parabolát, ellipszist és hiperbolát közös néven **kúpszeleteknek** nevezzük. Ha egy forgástengely körül olyan egyenest forgatunk, amely metszi a tengelyt, akkor az egyenes egy forgáskúp palástját írja le a térben. (Minden egyenes a kúp egy-egy alkotója.) Megmutatható, hogy ha a forgáskúp palástját olyan síkkal metsszük, amelyik nem megy át a kúp csúcsán, akkor a négy nevezetes görbe valamelyikét kapjuk.

Pontosabban:

– ha a metsző sík merőleges a forgáskúp tengelyére, akkor a síkmetszet kör;
– ha a metsző sík nem merőleges a tengelyre, de minden alkotót metsz, akkor a síkmetszet ellipszis;
– ha a metsző sík pontosan egy alkotóval párhuzamos, akkor a síkmetszet parabola;
– ha a metsző sík két alkotóval párhuzamos, akkor a síkmetszet hiperbola.

A görbék kúpszelet-tulajdonságai már régóta ismertek. A kúpszeletek elnevezése is az ókori görög matematikusoktól származik, akik különböző problémák elemzésekor találkoztak ezekkel a görbékkel.

Érdemes megjegyeznünk, hogy a kúpszeletek vizsgálata a matematika több ágát, például – meglepő módon – az algebrát is, jelentős eredményekkel gazdagította.

FELADATOK

1. V Egy papírlapra megrajzolták egy ellipszis két fókuszát, F_1 és F_2-t, valamint egy e érintőjét. Szerkesszük meg az E érintési pontot, majd az ellipszis néhány további pontját!

2. V Tekintsük az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kört, és alkalmazzunk például 0,5 arányú zsugorítást (merőleges affinitást) az x tengelyre. Mutassuk meg, hogy a kapott görbe ellipszis! (Ezt úgy szokták mondani, hogy „a kör affin képe ellipszis”.)

3. V Bizonyítsuk be, hogy a korábban megismert $f(x) = \frac{1}{x}$ egyenletű függvénygörbe valóban hiperbola!

4. V Igaz-e, hogy az ellipszis kistengelye mindig kisebb, mint a nagytengelye?

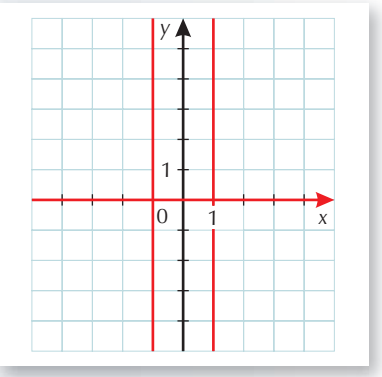
5. V A festők gyakran ábrázolják két körívvel a Holdat. Helyesen? (Vajon a képen két körív látható?)

47. EGYÉB PONTHALMAZOK A KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

Az eddigi fejezetekben alakzatokkal, azok egyenleteivel és mindezek gyakorlati alkalmazásaival foglalkoztunk. A mostani leckében különböző algebrai feltételekkel megadott ponthalmazokkal, azok ábrázolásával, szemléltetésével foglalkozunk.

1. példa Szemléltessük a sík azon $P(x; y)$ pontjait, melyekre $y(x^2 - 1) = 0$!

Megoldás Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Ezek szerint vagy $y = 0$, vagy $x^2 - 1 = 0$, ahonnan $x = \pm 1$. A keresett ponthalmaz tehát egyrészt az x tengely, másrészt az $x = 1$ és $x = -1$ egyenesek.



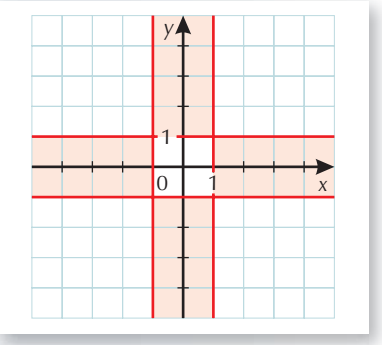
2. példa Ábrázoljuk a sík azon $P(x; y)$ pontjait, melyekre $(|x| - 1)(|y| - 1) \le 0$!

Megoldás Egy szorzat akkor negatív, ha tényezői különböző előjelűek. Ezek szerint két esetet kell vizsgálnunk.

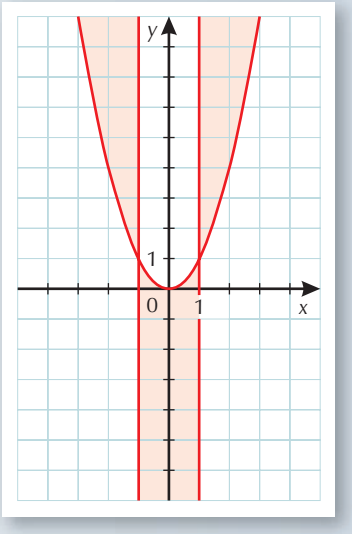
1. $|x| - 1 \ge 0$ és $|y| - 1 \le 0$, vagy
2. $|x| - 1 \le 0$ és $|y| - 1 \ge 0$.

1. esetben $|x| \ge 1$ és $|y| \le 1$.
2. esetben $|x| \le 1$ és $|y| \ge 1$.

A keresett ponthalmazt az ábrán szemléltettük.



3. példa Szemléltessük a sík azon $P(x; y)$ pontjait, melyekre $(y - x^2)(|x| - 1) \geq 0$.



Megoldás Most a szorzat mindkét tényezője azonos előjelű kell, hogy legyen. Tehát

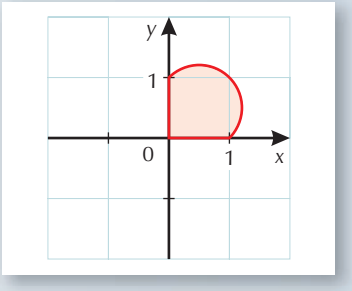
1. $y - x^2 \geq 0$ és $|x| - 1 \geq 0$, azaz $y \geq x^2$ és $|x| \geq 1$,

vagy

2. $y - x^2 \leq 0$ és $|x| - 1 \leq 0$, azaz $y \leq x^2$ és $|x| \leq 1$.

A két esetnek megfelelő pontokat – vagyis az eredeti feltételnek eleget tevő pontok halmazát – az ábrán szemléltettük.

4. példa Szemléltessük a sík azon $P(x; y)$ pontjait, melyekre $x^2 + y^2 - |x| - |y| \leq 0$.

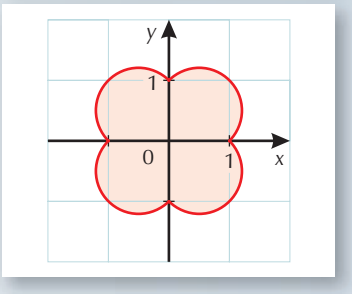


Megoldás Most négy esetet kell vizsgálnunk, aszerint, hogy x és $y \geq 0$ vagy ≤ 0.

1. Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$ (tehát ha az első síknegyed pontjait nézzük), akkor

$x^2 + y^2 - x - y \leq 0$, azaz $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$.

Ez egy olyan kör, melynek középpontja $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, sugara $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ekkor a keresett ponthalmaz a felső ábrán látható.



Hasonlóképpen kapjuk a másik három esetben is a keresett pontokat.
Az eredeti feltételnek megfelelő pontokat az alsó ábrán szemléltettük.

5. példa Határozza meg a sík azon $P_0(x_0; y_0)$ pontjainak a halmazát, melyekre teljesül, hogy az

$x^2 + 2(x_0 + y_0)x + 2x_0y_0 + y_0^2 + y_0 = 0$

(x-ben másodfokú) egyenletnek legfeljebb egy, az

$x^2 + 2x_0x + x_0^2 + |x_0| + y_0 - 4 = 0$

(x-ben másodfokú) egyenletnek pedig legalább egy valós megoldása van!

Megoldás Ha a $x^2 + 2(x_0 + y_0)x + 2x_0y_0 + y_0^2 + y_0 = 0$ másodfokú egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, akkor ennek az egyenletnek a diszkriminánsa legfeljebb 0; $D \leq 0$, azaz

$4(x_0 + y_0)^2 - 4(2x_0y_0 + y_0^2 + y_0) \leq 0$,

$x_0^2 + y_0^2 + 2x_0y_0 - 2x_0y_0 - y_0^2 - y_0 \leq 0$, ahonnan $y_0 \geq x_0^2$.

Az $x^2 + 2x_0x + x_0^2 + |x_0| + y_0 - 4 = 0$ másodfokú egyenletnek legalább egy valós gyöke van, így ennek a diszkriminánsa legalább 0; $D \geq 0$, azaz

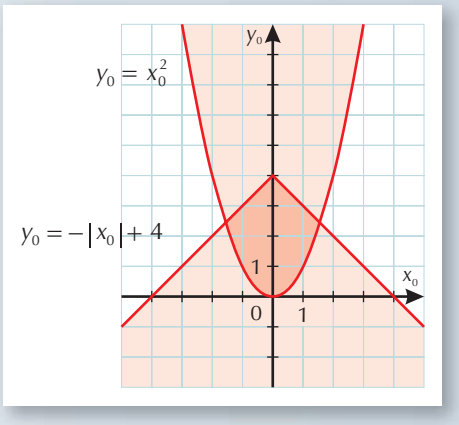
$4x_0^2 - 4(x_0^2 + |x_0| + y_0 - 4) \geq 0$,

$x_0^2 - x_0^2 - |x_0| - y_0 + 4 \geq 0$, vagyis $y_0 \leq -|x_0| + 4$.

Ezek szerint keressük a sík azon $P_0(x_0; y_0)$ pontjainak a halmazát, melyekre

$y_0 \geq x_0^2$ és $y_0 \leq -|x_0| + 4$.

E két feltételnek eleget tevő pontokat az ábrán szemléltettük.



FELADATOK

1. E1 Szemléltessük a sík azon $P(x, y)$ pontjainak a halmazát, melyekre $|x|+|y|\le 1$!

2. E1 Szemléltessük a sík azon $P(x, y)$ pontjainak a halmazát, melyekre $\frac{2x-y-1}{x-2y+1}\le 0$!

3. E1 Szemléltessük a sík azon $P(x, y)$ pontjainak a halmazát, melyekre $\sqrt{x^2+y^2+2xy-4x-4y+4}\ge 2$!

4. E1 Szemléltessük a sík azon $P(x, y)$ pontjainak a halmazát, melyekre $\frac{x^2+y^2}{|x+y|}\le 1$!

5. E2 Szemléltessük a sík azon $P(x, y)$ pontjainak a halmazát, melyekre $x^3-4x-|x|y\le y$!

6. E2 Szemléltessük a sík azon $P(x; y)$ pontjainak a halmazát, melyekre $x^4\le 9y^2$ és $y^4\le 9x^2$!

7. E2 Szemléltessük a sík azon $P(x; y)$ pontjainak a halmazát, melyekre $3^{x^2-1}\le\left(\frac{1}{3}\right)^y$ és $2^{\sqrt{x^2-2x+1}}\le 4^y$!

8. E2 Adja meg a sík azon $P(x; y)$ pontjainak, amelyekre $(x^2+y^2-2y-2)^2\le 4x^2$.

9. E2 Adott két ponthalmaz a koordinátasíkon: $A=\{P(x; y)\mid y-x^2+6=0\}$ és $B=\{P(x; y)\mid x^2-y^2=0\}$. Határozzuk meg az alábbi ponthalmazokat (lehetőleg egyenletük megadásával):
a) $A\cap B$; *b)* $A\cup B$; *c)* $A\setminus B$; *d)* legalább az egyik halmaz pontjai;
e) legfeljebb az egyik halmaz pontjai; *f)* pontosan az egyik halmaz pontjai.

10. E2 Határozzuk meg a K kifejezés értékkészletét, ha az F feltétel teljesül:
a) $K=y-2x$; F: $x^2+y^2-4y-12=0$.
b) $K=2x+3y$; F: $x^2+4y^2-4=0$.
Hogyan szemléltethetjük, értelmezhetjük a koordinátasíkon a feladatokat?

Idézet

„… egy matematikai feladattal éppoly jól el lehet szórakozni, mint egy keresztrejtvénnyel,…
az erőteljes szellemi munka ugyanolyan jó dolog, mint egy erős teniszjátszma. Ha valaki egyszer megízleli a matematika örömét, nem fogja egykönnyen elfelejteni."

Pólya György

EGY FELADAT – TÖBB MEGOLDÁS (Olvasmány)

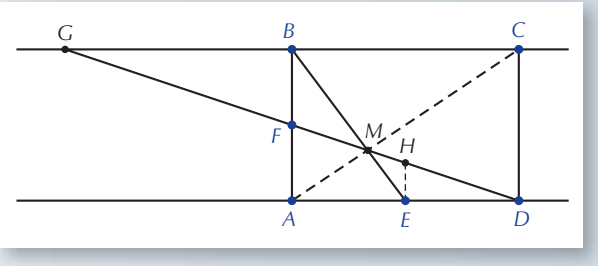
A geometriai feladatmegoldó repertoárunk tovább bővült: az egybevágóság és a hasonlóság mellett vektorokat, trigonometriai és algebrai módszereket is alkalmazhatunk. A továbbiakban egy feladat sokféle megoldási lehetőségével szemléltetjük a változatos módszereket. (Egyes megoldásokat csak röviden vázolunk.)

Példa Az $ABCD$ téglalap AD oldalának felezőpontja E, AB oldalának felezőpontja F. A DF és BE egyenesek metszéspontja az M pont. Bizonyítsuk be, hogy az M pont rajta van az AC átlón!

Megoldás

Első megoldás (hasonlóság)

Jelölje G az FD és BC egyenesek metszéspontját. Ekkor az EMD és BMG háromszögek hasonlók, mert szögeik megegyeznek. A hasonlósági arány 2 ($BG = AD = 2ED$), így $2ME = MB$. Metssze az AM egyenes a BC oldalt a C' pontban. (Igazolnunk kell, hogy C és C' megegyezik.) $BC'M$ és EAM hasonló háromszögek, szintén 2 hasonlósági aránnyal (hiszen $BM = 2ME$); így $BC' = 2AE = BC$, vagyis $C \equiv C'$.



Eljárhatunk fordítva is. AC és EB olyan M' pontban metszik egymást, amelyre $BM' = 2M'E$, az AEM' és CBM' háromszögek hasonlósága miatt.

Tehát A, M és C pontosan akkor esik egy egyenesbe, ha $M \equiv M'$, azaz $BM = 2ME$.

A további megoldásokban elegendő tehát a BM:ME = 2:1 arányt igazolnunk.

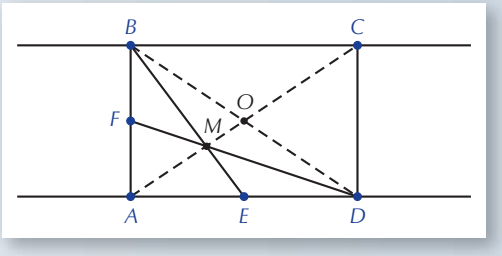
Felvehettük volna kezdetben a BE és CD egyenesek metszéspontját is (FD és BC metszéspontja helyett), hasonló gondolatmenetet alkalmazva.

Egy másik lehetőség, hogy E-ből párhuzamost húzunk AB-vel, s jelöljük H-val ennek a DF szakasszal vett metszéspontját. Ekkor EH az ADF háromszög középvonala, tehát $AF = 2EH$. Az EHM és BFM háromszögek hasonlók (szögeik megegyeznek), a hasonlóság aránya $\frac{BF}{HE} = \frac{2}{1}$. Tehát $BM = 2ME$; s innen az előző bizonyításhoz hasonlóan végezhetünk.

Természetesen most is **megtehettük volna**, hogy kezdéskor F-ből húzunk AD-vel párhuzamost.

Második megoldás (egybevágóság)

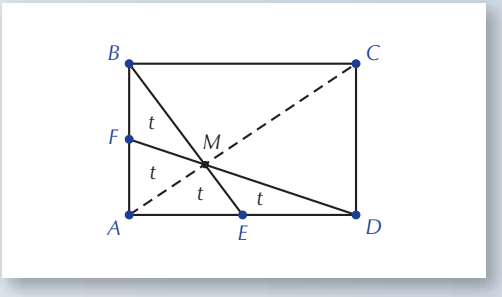
Az ADB háromszögben BE és DF súlyvonalak, M súlypont, tehát AM a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal egyenese. Jelölje O a BD átló felezőpontját (ez a téglalap átlóinak metszéspontja), ekkor AO a harmadik súlyvonal, tehát A, M, O egy egyenesre esnek. Mivel ezen az egyenesen van C is, így A, M, C valóban egy egyenesre esik.



Harmadik megoldás (területek egyenlősége)

A BFM és AFM háromszögek területe megegyezik (jelöljük t-vel), mert BF és FA alapjaik hossza egyenlő, és az M-ből húzott magasságuk közös. $T_{AEB} = T_{ADF}$, mert mindkettő a téglalap területének negyede. A közös $AEMF$ négyszöget elhagyva a maradék területek is megegyeznek: $T_{BFM} = T_{MED}$ $(= t)$. Végül $T_{AEM} = T_{EDM}$ $(= t)$ is teljesül, mert $AE = ED$ és az M-ből húzott magasság közös a két háromszögben.

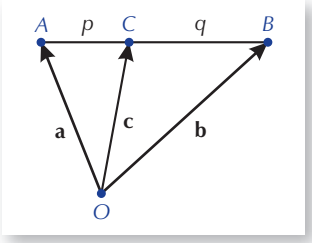
Készen vagyunk: $T_{BMA} = 2T_{EMA}$, és mivel a két háromszög A-ból húzott magassága közös, $BM = 2ME$ szükségképpen.



A területszámítás segítségével további összefüggéseket is felfedezhetünk az ábrán. (Például $T_{BCM} = T_{DCM} = 4t$ stb.)

Elegáns bizonyítás adható a vektorok segítségével.

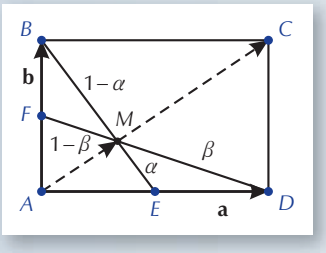
A vektorok osztásarány-tételének tanult alakját kissé módosítjuk. Emlékeztetőül: ha az AB szakaszt a C pont úgy osztja két részre, hogy $\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q}$, akkor a C pontba mutató helyvektor $\overrightarrow{OC} = \frac{q \cdot \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{OB}}{p+q}$, vagy rövidebben $\mathbf{c} = \frac{q \cdot \mathbf{a} + p \cdot \mathbf{b}}{p+q}$ módon adható meg. (Ez az összefüggés tetszőleges O kezdőpontra igaz.)



Észrevehetjük, hogy a képletben nem p és q konkrét értéke, hanem csak az *arányuk* számít: például $\frac{p}{q} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ stb. esetén egyaránt $\mathbf{c} = \frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$. Ezt kihasználva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok $\frac{q}{p+q}$, illetve $\frac{p}{p+q}$ együtthatóit jelölhetjük például α-val és $(1-\alpha)$-val is (hiszen összegük 1). Ekkor az osztásarány-tétel $\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{b}$ alakú lesz, ahol belső C pont esetén $0 < \alpha < 1$.

Negyedik megoldás (vektorok)

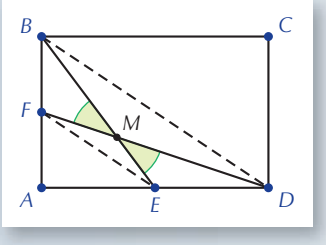
Vegyük fel az origót A-ban, s legyen $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Mivel M az EB szakasz valamilyen $\alpha : (1-\alpha)$ arányú osztópontja, felírható, hogy $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{B} + (1-\alpha)\vec{E} = \alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{a}}{2}$. Hasonlóan ha a DF szakaszt $\beta : (1-\beta)$ arányban osztja M, akkor $\overrightarrow{AM} = \beta\frac{\mathbf{b}}{2} + (1-\beta)\mathbf{a}$ alakban írható. A kétféle felírásnak meg kell egyezni:



$\alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{a}}{2} = \beta\frac{\mathbf{b}}{2} + (1-\beta)\mathbf{a}$. Tudjuk, hogy a vektorok felbontása egyértelmű (most $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a bázisvektorok), ezért $\alpha = \frac{\beta}{2}$ és $\frac{1-\alpha}{2} = 1-\beta$ szükségképpen teljesül.

Az egyenletrendszer megoldása $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$. Ez egyrészt azt jelenti, hogy $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$, azaz $MB = 2ME$ és $\frac{\beta}{1-\beta}$, azaz $MD = 2MF$. Másrészt az $\overrightarrow{AM} = \beta\frac{\mathbf{b}}{2} + (1-\beta)\mathbf{a}$ egyenletből $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ adódik. Mivel $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b} = 3\overrightarrow{AM}$, így M valóban rajta van az AC átlón (az A-hoz közelebbi harmadoló pont).

Néhány olyan gondolatmenet következik, amelyben trigonometrikus összefüggéseket alkalmazhatunk.



Ötödik megoldás (trigonometriai módszerek)

Korábban láttuk, hogy az AEB és ADF háromszögek területe egyenlő (a téglalap területének negyede), így a mindkettőben közös $AEMF$ részt elhagyva, $T_{DEM} = T_{FMB}$ is teljesül. A trigonometrikus területképletből

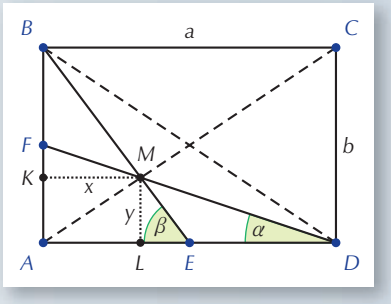
$$\frac{BM \cdot MF \cdot \sin FMB\sphericalangle}{2} = \frac{EM \cdot MD \cdot \sin EMD\sphericalangle}{2},$$

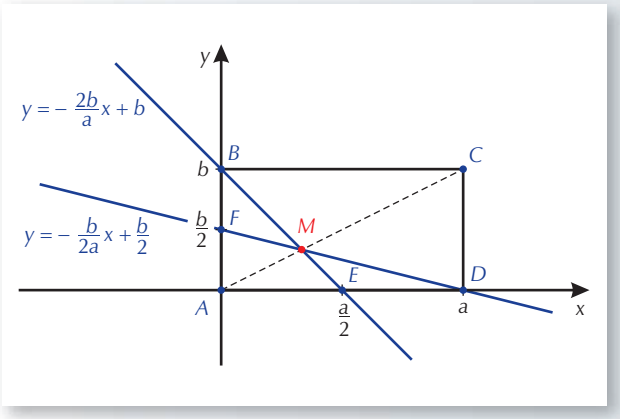
innen a csúcsszögek egyenlősége miatt $BM \cdot MF = DM \cdot ME$. Ebből egyrészt a DF és EB szakaszok azonos osztásaránya következik: $\frac{BM}{ME} = \frac{DM}{MF}$; másrészt az FEM és DBM háromszögek hasonlósága (megegyezik két-két oldaluk aránya, és a közbezárt szögük). Az arányossági tényező $\frac{DB}{EF} = 2$, hiszen EF középvonal az ADB háromszögben. Ebből pedig már következik a $\frac{BM}{ME} = 2$ osztásarány, amiből a korábbi megoldásokban látott módon fejezhetjük be a bizonyítást.

Egy másik befejezési lehetőség, ha a $\frac{BM}{ME} = \frac{DM}{MF}$ egyenlő arányok segítségével az $AEMF$ és $CBMD$ négyszögek hasonlóságát vesszük észre: az M középpontú, -2 arányú középpontos nagyítás az $AEMF$ négyszöget $CBMD$-be viszi, így – mivel A pont képe a C pont – M valóban az AC szakaszon van.

Ha kezdetben behúzzuk az *EF* és *BD* segédszakaszokat, az *EDBF* trapéz elemzésével is **röviden célt érünk**. (*FEM* és *DBM* háromszögek hasonlók, és a trapéz átlói a hasonlósági aránnyal megegyező arányban osztják egymást).

Egy **további trigonometriai jellegű megoldás** lehet, amikor merőlegeseket bocsátunk az *M* pontból az *AB*, illetve *AD* oldalakra; az így kapott szakaszok hossza legyen $KM = x$ és $LM = y$. Jelölje továbbá az ábra szerint α és β a *DF*, illetve *EB* szakaszok *AD*-vel bezárt szögét, valamint *a* és *b* a téglalap két oldalának a hosszát. Az ábra alapján több – nem független – trigonometrikus összefüggést is felírhatunk, például: $\operatorname{tg}\beta = \frac{2b}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2a}$; vagy az *ELM* és *MKB* derékszögű háromszögekben $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{\frac{a}{2} - x}$ és $\operatorname{tg}\beta = \frac{b-y}{x}$; vagy a *DLM* és *MKF* derékszögű háromszögekben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{a-x}$ és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{2} - y}{x}$. Egy javasolt megoldási út: az egyenletekből *x* és *y* kifejezhető, eredményül $x = \frac{a}{3}$ és $y = \frac{b}{3}$ adódik. Ekkor $\frac{ML}{LA} = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ $(= \operatorname{tg} CADB\sphericalangle) = \frac{CD}{DA}$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy *M* az *AC* szakaszon van.





Hatodik megoldás (koordinátageometria)

Az ábrát a derékszögű koordináta-rendszerben helyezzük el úgy, hogy az *AD* egyenes az *x*, az *AB* egyenes pedig az *y* tengelyre illeszkedjen. A *DF* egyenes tengelymetszete $\frac{b}{2}$, meredeksége $-\frac{b}{2a}$, így egyenlete $y = -\frac{b}{2a}x + \frac{b}{2}$. Az *EB* egyenes egyenlete hasonlóan $y = -\frac{2b}{a}x + b$. A két egyenletből kiszámítható a két egyenes metszéspontja.

Az egyenletrendszer megoldása $(x;\ y) = \left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}\right)$, s ezek az *M* pont koordinátái. A megoldást többféleképpen is befejezhetjük, például:

– *AM* és *AC* meredeksége egyaránt $\frac{b}{a}$, így valóban egy egyenesen van a három pont;

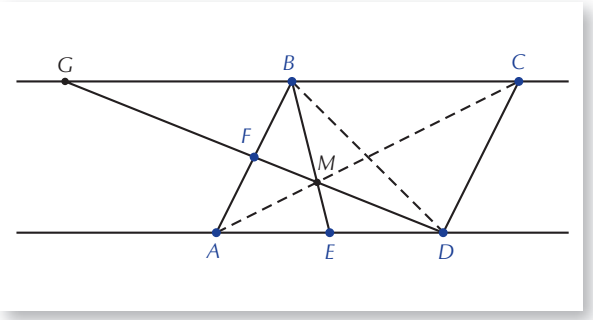
– vagy az *AC* egyenes egyenlete $y = \frac{b}{a}x$, és ha ebbe behelyettesítjük az *M* pont koordinátáit, az egyenlőség teljesülni fog. (Azaz *M* rajta van az *AC* egyenesen.)

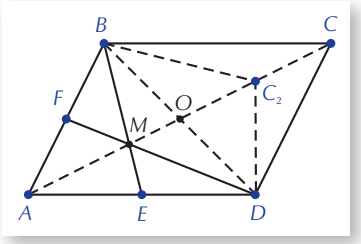
Általánosítási lehetőségek

Több szép megoldást adtunk a feladatra, de ne elégedjünk meg ennyivel!

Az utolsó megoldásokban kihasználtuk, hogy a téglalap szögei 90°-osak, de ha az első megoldást elemezzük, akkor észrevehetjük, hogy csak az *AD* és *BC* oldalak párhuzamosságát, valamint egyenlő hosszúságukat használtuk ki.

Ez éppen a paralelogramma definíciója, azaz **általánosíthatunk:** a feladat állítása paralelogrammára is teljesül (téglalap helyett).





Ha pedig a második, egybevágósági megoldást vizsgáljuk, ott azt láthatjuk, hogy elegendő, ha a *C* csúcs a (tetszőlegesen felvett) *ADB* háromszög *AO* súlyvonalán mozog. Azaz az állítás igaz minden olyan négyszögre is, amelynek ***BD* átlóját az *AC* átló felezi**.

Végül **speciális helyzeteket** is vizsgálhatunk. Például ez utóbbi esetben ha $BA = AD$, akkor *ADCB* deltoid (a *BD* átlót az *AC* átló merőlegesen felezi). Az állítás igaz tehát a deltoidokra is.

VII. KOMBINATORIKA, GRÁFOK, GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

Maurits Cornelis Escher (1898–1972) holland művész általában lehetetlen építményeket, vagy olyan kapcsolódó geometriai formákat ábrázolt, melyek fokozatosan teljesen más alakot öltenek

48. ÖSSZESZÁMLÁLÁSI FELADATOK

Az összeszámolási feladatokban általában elemeket (egyformákat vagy különbözőket) kiválasztunk, sorba rendezünk, csoportosítunk, illetve ezen eljárások lehetséges számát határozzuk meg. A leggyakoribb összeszámolási modellekkel már találkoztunk, ezek: a permutációk, a variációk és a kombinációk. Az alábbiakban igazoljuk az egyes modellekhez tartozó formulákat, és példaképpen néhány összetett feladatot oldunk meg.

PERMUTÁCIÓK

Adott n ($n \in \mathbf{N}$) különböző elem egy sorrendjét az elemek egy **ismétlés nélküli permutációjának** nevezzük.

Tétel

n különböző elem összes **permutációjának** száma $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Jelölés: $P_n = n!$.

Bizonyítás Az elemek permutációinak, azaz sorrendjeinek a száma a **szorzási szabály** segítségével egyszerűen meghatározható. (Emlékeztető: Ha az A objektumot m-féleképpen, egy másik független B objektumot n-féleképpen lehet kiválasztani, akkor a *szorzási szabály* alapján az (A, B) pár kiválasztása („A és B") $m \cdot n$-féleképpen lehetséges.) A sorrendben első elemet n-féleképpen választhatjuk ki, a második elemet már csak $(n-1)$-féleképpen (az első helyre kiválasztott elem itt már nem szerepelhet). Hasonlóan a harmadikat $(n-2)$-féleképpen választhatjuk ki, … , az utolsó előttit 2-féleképpen, végül az utolsót egyféleképpen. Az elsőnek kiválasztott elemhez a maradék $(n-1)$-ből bármelyiket választhatjuk, az első választásától függetlenül: tehát az *első és második* elem kiválasztása $n(n-1)$-féleképpen történhet. ('és' kötőszó – szorzási szabály.) A harmadik elem hozzávételével $n(n-1)(n-2)$-féle, …, végül az utolsó kiválasztásával összesen $n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$-féle sorrendet kaphatunk.

Előfordulhat, hogy a permutálandó elemek között egyformák is vannak. A következő példában az így kapott **ismétléses permutációk** számát határozzuk meg.

1. példa Hányféleképpen képezhetünk hétjegyű számokat az alábbi számjegyekből, ha minden számjegyet fel kell használnunk?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5;
b) 1, 2, 3, 3, 5, 5, 5;
c) 0, 2, 3, 3, 5, 5, 5.

Megoldás *a)* A 7 elem között 3 egyforma van. Ha mind a 7 elem különbözne, 7! = 5040-féle permutációt kapnánk. Most azonban kevesebb a lehetséges sorrendek száma, mert az 5-ösök nem különböznek egymástól.

Jelöljük az egyforma elemeket 5_a, 5_b, $5_c = a$, b, c-vel, ekkor egy lehetséges sorrend például $b24ca31$. Ilyen (ismétlés nélküli) permutációból van 7! számú. Viszont ezek közül nem különböznek egymástól azok, amelyek csak az a, b, c elemek egymás közötti sorrendjében térnek el: $b24ca31 \equiv b24ac31 \equiv c24ba31 \equiv c24ab31 \equiv$ $\equiv a24cb31 \equiv a24bc31$. Ezt az ismétlés nélküli permutációk mindegyikére elmondhatjuk; tehát a 7! számú sorrendet osztani kell annyival, ahányféleképpen az a, b, c elemeket egymás között cserélgethetjük, hiszen ezek a cserék nem adnak különböző sorrendet. A 3 elem permutációinak száma 3!, így az 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5 számok összes permutációja $\frac{7!}{3!} = 840$.

b) Tegyük fel, hogy a két 3-as különbözik: 3_a, $3_b = a$, b. Ekkor 1, 2, a, b, 5, 5, 5 összes permutációinak a száma az *a)* feladat alapján $\frac{7!}{3!}$. De a két 3-as nem különbözik; például a $55b2a15$ és $55a2b15$ sorrendek megegyeznek, és hasonlóan minden sorrendet kétszer számoltunk a $\frac{7!}{3!}$ képlettel. (Azért 2-szer, mert a és b egymás között 2! = 2-féleképpen permutálható.) Az 1, 2, 3, 3, 5, 5, 5 számok összes sorrendje tehát $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$.

Gondolatmenetünk általánosítható. Ugyanígy igazolható, hogy ha az n számú elem között k egyforma van ($k \leq n$), akkor az összes permutáció száma $\frac{n!}{k!}$ (hiszen az egyforma elemek egymás közötti permutálása nem ad különböző sorrendeket).

Tétel

Ismétléses permutáció

Ha adott n olyan elem, amelyek között k_1, k_2, …, k_m ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m \leq n$) számú azonos elem fordul elő, és képezzük az adott n elem egy sorrendjét, akkor **ismétléses permutációról** beszélünk.

Ezek száma: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$.

c) A 0 nem szerepelhet az első helyen, mert akkor a szám nem lenne hétjegyű.

Első megoldás:

Ha minden számjegy különbözne, akkor 6·6! számot képezhetnénk. De ezt az eredményt az egyforma 3-asok miatt osztani kell 2!-sal, az 5-ösök miatt pedig 3!-sal, így $\frac{6 \cdot 6!}{2! \cdot 3!} = 360$ megfelelő hétjegyű szám van.

Második megoldás (komplementer módszer):

Az összes 7-hosszú sorozat számából kivonjuk a „rosszakat”, azaz azokat az eseteket, amikor a 0 áll az első helyen. „Összes − rossz = jó”: $\frac{7!}{2! \cdot 3!} - \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6!}{2! \cdot 3!} - \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 6!}{2! \cdot 3!} = 360$.

Rejtvény

Egy játékprogram kiírja egy adott karaktersorozat betűinek összes permutációját, másodpercenként tízet. Mennyi ideig tart 20 karakter összes permutációjának kiírása? *(Megoldás a 240. oldalon.)*

VARIÁCIÓK

Emlékezhetünk, hogy ha az n számú különböző elemből úgy választunk ki k darabot, hogy a kiválasztás sorrendje is számít, akkor egy ilyen kiválasztást az n elem k-ad osztályú **ismétlés nélküli variációjának** neveztük.

Tétel

Az n elem összes k-ad osztályú **ismétlés nélküli variációjának** száma $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Jelölés: $V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Bizonyítás A sorba helyezett elemek közül az első n-féle lehet, a második $(n-1)$-féle (mert egy elemet már felhasználtunk), a harmadik $(n-2)$-féle, …, végül a k. elem $(n-k+1)$-féle. Az elsőnek kiválasztott elemhez a maradék $(n-1)$-ből bármelyiket választhatjuk másodiknak, az első választásától függetlenül; ez $n(n-1)$ lehetőséget jelent. A harmadik kiválasztott elem a maradék $(n-2)$-ből bármelyik lehet, az első három elem kiválasztása tehát $n(n-1)(n-2)$-féle módon történhet és így tovább. A szorzási szabály miatt összesen $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$-féle sorrendet kapunk.

Ha a kiválasztott elemek között lehetséges az ismétlődés, azaz egy-egy elem többször is szerepelhet, akkor az n számú különböző elem k-ad osztályú **ismétléses variációjáról** beszélünk.

Tétel

Az n elem összes k-ad osztályú **ismétléses variációjának** száma n^k. Jelölés: $V_n^{k,i} = n^k$.

Bizonyítás Az első elem n-féle lehet, a második szintén n-féle, …, és az utolsó k. elem is n-féle lehet (hiszen lehetséges az elemek ismétlődése). Innen a szorzási szabály miatt $V_n^{k,i} = n\cdot n\cdot\ldots\cdot n = n^k$.

2. példa Feldobunk egymás után négyszer egy dobókockát. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy

a) a négy dobás különböző;

b) a négy dobásban szerepel az 5-ös (esetleg többször is)?

Megoldás *a)* Az első dobás 6-féle lehet, a második csak 5-féle (nem lehet ugyanaz, mint az első dobás eredménye), a harmadik 4-féle és a negyedik 3-féle. A szorzási szabály miatt az eredmény $6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$.

b) **Első megoldás (esetszétválasztás):** Megvizsgáljuk, hogy hányadik dobásra születik az első 5-ös.

I. Ha az első dobás 5-ös, a következő három bármi lehet. Ilyen lehetőség 6^3 van.

II. Ha az első dobás nem 5-ös, akkor 5-féle lehet. Ha a második dobás 5-ös, akkor az utolsó két dobás bármi lehet: $5\cdot6^2$ lehetőség.

III. Ha a harmadik dobás lesz először 5-ös, akkor az első két dobás 5-5-féle, az utolsó 6-féle lehet: $5^2\cdot6$ lehetőség.

IV. Végül ha negyediknek dobjuk meg az (egyetlen) 5-öst, akkor az első három dobás nem 5-ös: ez 5^3-féleképpen fordulhat elő.

Az I–IV. esetek kizárják egymást („*vagy* az I., *vagy* a II., *vagy* a III., *vagy* a IV. esetek lehetségesek"), így az összeadási szabály miatt $6^3 + 5\cdot6^2 + 5^2\cdot6 + 5^3 = 671$ a lehetőségek száma.

Második megoldás (komplementer módszer): Az összes dobássorozatból kihagyjuk azokat, amelyekben nem szerepel 5-ös.

Összesen 6^4 dobássorozat van; a rosszak száma 5^4 (ekkor csak az 5-ösön kívüli dobások szerepelhetnek). Eredmény: $6^4 - 5^4 = 671$.

Megjegyzések

A két eredmény egyenlőségét a $6^4 - 5^4 = (6-5)(6^3 + 5\cdot6^2 + 5^2\cdot6 + 5^3)$ algebrai azonosság is mutatja.

Az ismétlés nélküli permutációk és variációk száma a legtöbb **zsebszámológépen** az <nPr> billentyű segítségével számolható ki. Például V_8^5 kiszámolási módja 8 <nPr> 5; vagy – mivel $V_8^8 = P_8$ – a 8! kiszámítása 8 <nPr> 8 módon lehetséges.

KOMBINÁCIÓK

Emlékeztető: Ha n különböző elemből kiválasztunk k (különböző) darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje közömbös, akkor az n elem egy k-ad osztályú **ismétlés nélküli kombinációját** kapjuk.

Tétel

n különböző elem összes k-ad osztályú **ismétlés nélküli kombinációjának** száma $\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

Jelölés: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Bizonyítás Ha a kiválasztott elemek sorrendje számítana, akkor a k-ad osztályú variációk számát kapnánk: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$. De bármely kiválasztott k elemet permutálva ugyanazt a kombinációt kapjuk, hiszen most az elemek sorrendje nem lényeges. A variációk számát el kell tehát osztanunk annyival, ahányféleképpen a k elemet permutálhatjuk, azaz $k!$-sal. Eredmény: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Megjegyzések

A definícióból és a fenti eredményből közvetlenül adódik több érdekes összefüggés. Például az $\binom{n}{k}$ számok szimmetria-tulajdonsága: $C_n^k = C_n^{n-k}$, azaz $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (hiszen ha n elemből kiválasztunk egy k elemű részhalmazt, azzal a maradék $n-k$ elemet is kiválasztottuk). Vagy ilyen a variációk és a kombinációk közötti kapcsolatot megadó $k!\cdot C_n^k = V_n^k$ formula. A kombinációk számát általában az <nCr> billentyűvel határozhatjuk meg: például $C_5^2 = \binom{5}{2} = 5$ <nCr> 2.

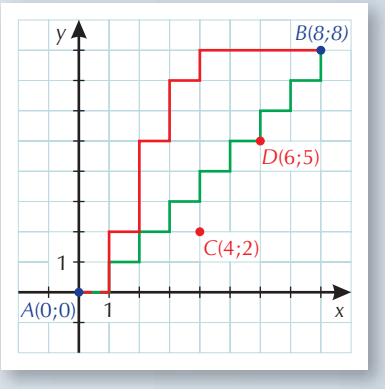
Az ismétléses kombinációt definiálni nem nehéz, de a kiszámítása bonyolult feladat. Később kiegészítő anyagként, külön olvasmány keretében foglalkozunk a struktúrával.

3. példa A koordináta-rendszer $A(0;0)$ pontjából a $B(8;8)$ pontjába kívánunk eljutni, a rácsvonalak mentén, egységnyi lépésekkel haladva. (Minden lépésben közelednünk kell B-hez.)

a) Hányféle úton tehetjük ezt meg?

b) Hányféle út van, ha a $C(4;2)$ pontot érintenünk kell?

c) És akkor hányféle út lehetséges, ha a $C(4;2)$ és $D(6;5)$ pontokat tilos érintenünk?



Megoldás *a)* Minden lépésben „jobbra” vagy „felfelé” haladunk egy-egy egységnyi útszakaszt. Összesen 16 lépést kell tennünk, 8-at jobbra és 8-at felfelé. Ha kiválasztjuk, hogy a 16 lépésből melyik 8 történjen például jobbra, akkor a teljes útvonalat megadjuk. Minden ilyen kiválasztáshoz tartozik egy (és pontosan egy) megfelelő útvonal. A 16 lépésből 8-at pedig $\binom{16}{8} = 12\,870$-féleképpen választhatunk ki (hiszen nem lényeges, hogy a 8 útszakaszt milyen sorrendben jelöljük ki).

Másképpen: Az útvonalat megadhatjuk a lépések irányát jelző 8 darab J és 8 darab F betűk valamilyen sorozatával. Például a JFJFJFJFJFJFJFJF betűsorozat az ábrán látható „cikk-cakk” (zöld) utat kódolja, a JFFJFFFJFFJFJJJ sorozat pedig a másik (piros) útvonalat. Minden ilyen kód kölcsönösen egyértelműen azonosítja az AB utat; tehát pontosan annyi AB útvonal van, ahány sorozatot készíthetünk 8 darab J és 8 darab F betűből. Ezek száma pedig, az ismétléses permutáció formuláját alkalmazva, $\frac{16!}{8!\cdot 8!} = 12\,870$.

b) El kell mennünk *A*-ból *C*-be, *és C*-ből *B*-be. Az *AC* útvonalak száma $\binom{6}{4}$ $\left(\text{vagy } \binom{6}{2}\right)$, a *CB* utak száma $\binom{10}{4}$.

Bármelyik *AC* úthoz bármelyik *CB* út párosítható; a szorzási szabály miatt a megfelelő *ACB* útvonalak száma $\binom{6}{2}\cdot\binom{10}{4} = 3150$.

c) A **logikai szita-formulát** alkalmazzuk. (Az elnevezés a megoldás során többször számolt esetek „kiszitálására" utal.) Először az összes *AB* útból kivonjuk a *C*-n, illetve a *D*-n átmenő utakat; de ekkor kétszer vontuk ki azokat, amelyek a *C és D* pontokon is áthaladtak. Ezek számát tehát egyszer hozzá kell adni az összeghez.

A hagyományos jelöléssel: $AB = \binom{16}{8}$; $ACB = \binom{6}{2}\cdot\binom{10}{4}$; $ADB = \binom{11}{5}\cdot\binom{5}{2}$; $ACDB = \binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}$. Az eredmény: $\binom{16}{8} - \binom{6}{2}\cdot\binom{10}{4} - \binom{11}{5}\cdot\binom{5}{2} + \binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2} = 12\,870 - 3150 - 4620 + 1500 = 6600$.

A LOGIKAI SZITA-FORMULA

Egy típusfeladat következik a logikai szita-formula alkalmazására.

4. példa 2000 és 8000 között (a határokat is beleszámítva) hány olyan egész szám van, ami osztható 3-mal, 4-gyel vagy 5-tel?

Megoldás **Első megoldás:** ([*x*] az *x* szám egészrészét jelenti.) 2000 és 8000 között a 3-mal osztható számok $\left[\frac{6001}{3}\right] = 2000$-en vannak;

a 4-gyel oszthatók száma $\frac{6000}{4} + 1 = 1501$ (a 2000-en kívül éppen 1500 darab további számnégyes van az intervallumban);

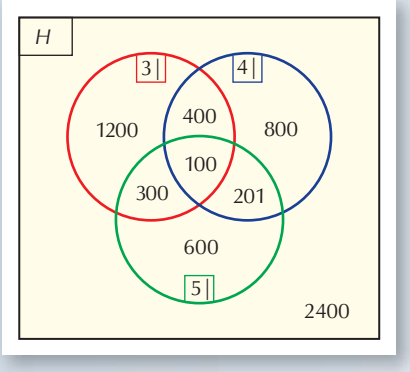
az 5-tel oszthatók száma $\frac{6000}{5} + 1 = 1201$;

a 3-mal és 4-gyel, azaz 12-vel oszthatók száma $\left[\frac{6001}{12}\right] = 500$;

a 3-mal és 5-tel, azaz 15-tel oszthatók száma $\left[\frac{6001}{15}\right] = 400$;

a 4-gyel és 5-tel, azaz a 20-szal oszthatók száma $\frac{6000}{20} + 1 = 301$;

a 3-mal, 4-gyel és 5-tel, azaz a 60-nal oszthatók száma $\left[\frac{6001}{60}\right] = 100$.



A fentiek alapján elkészíthetjük az alábbi halmazábrát, amelyen az egyes tartományok elemszámait tüntetjük fel. (A kitöltés során „belülről kifelé" haladunk, azaz a három halmaz közös részével kezdjük. Ezután a két-két halmazhoz tartozó metszetek elemszáma tölthető ki; majd az egy-egy halmazhoz tartozó részhalmazok elemszáma; végül a három halmaz egyesítésének komplementere. A *H* alaphalmaz – a 2000 és 8000 közötti egész számok – elemszáma 6001.)

3-mal, 4-gyel és 5-tel osztható halmazok uniójának az elemszáma a kérdés. Ezt egyszerű összegzéssel megállapíthatjuk:

$100 + 400 + 300 + 201 + 1200 + 800 + 600 = 3601$.

Második megoldás (szita-formula):

Jelöljük a 2000 és 8000 közötti 3-mal, 4-gyel, illetve 5-tel osztható számok halmazát rendre *A*, *B*, *C*-vel, meghatározandó $|A \cup B \cup C|$. Az $|A|+|B|+|C|$ összegben az $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$ elemeit kétszer számoltuk, így az összegből egyszer kivonjuk őket: $|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|$. Már csak a középső $A \cap B \cap C$ részhalmaz elemszámával van probléma: az egyes halmazoknál háromszor hozzáadtuk, míg a kétszeres metszeteknél háromszor kivontuk az elemeit – azaz egyszer sem számoltuk. Adjuk tehát hozzá az összeghez, s megkapjuk a keresett elemszámot:

$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|$.

Az így felírt összefüggés a háromváltozós szita-formula.
A konkrét értékekkel
$|A \cup B \cup C| = 2000 + 1501 + 1201 - 500 - 400 - 301 + 100 = 3601$.

Megjegyzés
Melyik megoldás a „szebb”?
Az első megoldás valamivel több munkával jár, viszont a halmazábra elkészítése után egyéb kérdésekre is válaszolhatunk. Például: hány olyan szám van 2000 és 8000 között, amely a 3, 4 és 5 számok közül pontosan kettővel osztható; vagy amelyre igaz, hogy ha osztható 3-mal, akkor osztható 4-gyel is stb.
A második megoldás elegáns, de jegyezzük meg, hogy csak akkor használható, ha már tudjuk, hogy van megoldás. (Ezzel kapcsolatos a 6. kitűzött feladat.)

Végül nézzünk egy gyakorlati problémát!

5. példa Hányféle sorrendben végezhet egy verseny három résztvevője, ha (esetleg hármas) holtverseny is lehetséges közöttük?

Megoldás Esetszétválasztást végzünk a holtversenyek száma és pozíciója alapján.
– Ha nincs holtverseny, akkor a három résztvevő $3! = 6$-féle sorrendben végezhet.
– 2 versenyző holtversenye vagy az 1-2., vagy a 2-3. helyen lehetséges. Mindkét esetben a harmadik versenyző 3-féle lehet, így az esetek száma $2 \cdot 3 = 6$.
– 3 versenyző holtversenye 1-féleképpen lehetséges.
Összesen $6 + 6 + 1 = 13$-féle sorrendben végezhetnek a versenyzők.

Megjegyzés
Hasonló feladat megoldása négy résztvevővel jóval nehezebb, ez a 7. kitűzött feladat.

FELADATOK

1. E1 Hányféleképpen képezhetünk számokat az alábbi számjegyekből, ha minden számjegyet fel kell használnunk?
a) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3; *b)* 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3.

2. E1 A 2. példában szereplő dobókockát ismét feldobjuk négyszer. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy a négy dobásban szerepel
a) az 5-ös vagy a 6-os; *b)* az 5-ös és a 6-os; *c)* a 4-es, az 5-ös és a 6-os?

3. E2 Egy postás egyforma szórólapokat oszt szét 4 különböző postaládába. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha
a) 9 lapot oszt szét;
b) 9 lapot oszt szét úgy, hogy minden ládába kerüljön szórólap;
c) 9 lapot oszt szét úgy, hogy az elsőben és a másodikban legyen szórólap;
d) 9 lapot oszt szét úgy, hogy az elsőben vagy a másodikban legyen szórólap.

4. E2 Az előző feladatbeli postás most 9 különböző szórólapot oszt szét. Hányféleképpen teheti ezt meg
a) úgy, hogy az első és a második ládában legyen szórólap;
b) úgy, hogy az elsőben vagy a másodikban legyen szórólap?

5. V Hány négyjegyű természetes szám van, amelyik
a) 3-mal osztható és tartalmaz 6-os számjegyet;
b) 3-mal osztható vagy tartalmaz 6-os számjegyet?

6. E1 Mi a **hiba** a következő feladat megoldásában?
Feladat: Egy osztályban franciául 10-en, angolul 20-an, németül 25-en tanulnak. Franciául és angolul 5, angolul és németül 6, németül és franciául 8, végül mindhárom nyelven 2 diák tanul. Hányan tanulják a három nyelv valamelyikét?
„Megoldás": Jelölje F, A, N rendre a francia, angol és német nyelven tanulók halmazát. A logikai szita-formulát alkalmazzuk: $|F \cup A \cup N| = |F| + |A| + |N| - |F \cap A| - |F \cap N| - |A \cap N| + |F \cap A \cap N| =$ $= 10 + 20 + 25 - 5 - 8 - 6 + 2 = 38$. Ennyien tanulják a három nyelv valamelyikét.

7. E2 Hányféle sorrendben végezhet egy verseny négy résztvevője, ha (esetleg többszörös) holtverseny is lehetséges közöttük?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 220–342.

49. A BINOMIÁLIS TÉTEL

Korábban megismertük az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ nevezetes azonosságokat. Esetleg előkerültek a harmadik hatványokra vonatkozó összefüggések is: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ és $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Ezek az azonosságok a hatványozások (azaz az ismételt szorzások) elvégzésével egyszerűen igazolhatók.

Ebben a leckében egy példát nézünk a binomiális együtthatók alkalmazására, majd a leckében a kéttagúak hatványozására vonatkozó képleteket általánosítjuk. Meghatározzuk az $(a + b)^n$ és $(a - b)^n$ általános hatványok összegalakját, valamint a kombinációk alkalmazására mutatunk további példákat.

A binomiális együtthatók a legváltozatosabb feladatokban megjelenhetnek.

1. példa **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2019.)**

a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

(Mértani sorozat esetén az $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{3} = \binom{n}{2}^2$, számtani sorozatra pedig az $\binom{n}{4} + \binom{n}{6} = 2\binom{n}{5}$ összefüggés teljesül.)

Megoldás *a)* (Indirekt bizonyítunk: az állítás tagadásáról mutatjuk meg, hogy ellentmondásra vezet.) Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik a kívánt sorozat, azaz $\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{3} = \binom{n}{2}^2$. Kifejtjük a binomiális együtthatókat, majd egyszerűsítünk: $n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{n-2}{6} = \frac{n-1}{4} \Rightarrow 4n - 8 = 6n - 6 \Rightarrow n = -1$. (Egyszerűsíthettünk $n^2 \cdot (n-1)$-gyel, mert $n > 2$.) Ellentmondást kaptunk (hiszen feltettük, hogy $n \geq 3$), így a három együttható valóban nem lehet egy mértani sorozat három szomszédos tagja.

b) Ismét kifejtjük az együtthatókat: $\binom{n}{4} + \binom{n}{6} = 2\binom{n}{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720} = 2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}.$$

Mivel $n \geq 6$, oszthatunk $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{720}$-szal: $30 + (n-4)(n-5) = 12 \cdot (n-4) \Leftrightarrow n^2 - 21n + 98 = 0$.

A másodfokú egyenletnek két gyöke van, $n_1 = 7$ vagy $n_2 = 12$.

Ellenőrizhetjük, hogy mindkét megoldás megfelelő.

2. példa Határozzuk meg az $(a+b)^n$ és $(a-b)^n$ hatványok összegalakját, és ez alapján írjuk fel $(a+b)^5$ és $(a-b)^5$ kifejtett alakját!

Megoldás Az $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\ldots(a+b)$ szorzat kifejtésekor ($n \in \mathbf{N}^+$) mindegyik tényezőből vagy az a, vagy a b változót választjuk ki. Mivel n tényező van, a szorzások elvégzése és az egynemű tagok összevonása után minden tag n-ed fokú lesz, $a^k b^{n-k}$ alakban ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Mik lesznek ezeknek a tagoknak az együtthatói?

Az a^n tagból 1-et kapunk, hiszen ekkor minden tényezőből az a változót választjuk ki, és ez csak egyféleképpen lehetséges.

Az $a^{n-1}b$ tag úgy keletkezik, hogy az n tényező egyikéből a b-t, az összes többiből az a-t választjuk ki. Ezt $\binom{n}{1}$-féleképpen tehetjük meg, mert a b kiválasztása egyúttal az a változók kiválasztását is kijelöli. Az $a^{n-1}b$ tag együtthatója ezért $\binom{n}{1}$. (Természetesen akkor is ezt az együtthatót kapjuk, ha azt az $(n-1)$ számú tényezőt választjuk ki, amelyikből az a változó szerepel a szorzatban: $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$.)

Az $a^{n-2}b^2$ tag esetében az n tényező közül 2-ből kell a b-s szorzót kiválasztanunk; ez $\binom{n}{2}$-féleképpen lehetséges. Hasonlóan $a^{n-3}b^3$ esetén a kiválasztást $\binom{n}{3}$-féleképpen tehetjük meg; és általában az $a^k b^{n-k}$ tag együtthatója ugyanezzel a gondolatmenettel $\binom{n}{n-k}$ lesz. Mivel $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, az a^n és b^n tagok együtthatóit $\binom{n}{0}$-val és $\binom{n}{n}$-nel is jelölhetjük.

Ekkor szép szimmetrikus alakban mondhatjuk ki a bebizonyított **binomiális tételt**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Az elnevezés a kéttagúak ('binomok') hatványára utal; mint ahogy a $C_n^k = \binom{n}{k}$ számokat is e tétel alapján nevezzük **binomiális együtthatóknak**.

Folytassuk a példafeladat megoldását! A tétel alapján

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4 b + \binom{5}{2}a^3 b^2 + \binom{5}{3}a^2 b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

$(a-b)^5$ értékét az $(a+(-b))^5$ kifejtésével kaphatjuk meg:

$$(a+(-b))^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4(-b) + \binom{5}{2}a^3(-b)^2 + \binom{5}{3}a^2(-b)^3 + \binom{5}{4}a(-b)^4 + (-b)^5.$$ Látható, hogy azon tagok kapnak mínusz előjelet, amelyekben $(-b)$ páratlan kitevőn szerepel. Tehát:

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Ez alapján pedig

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}b^n.$$

3. példa Határozzuk meg $(2a+3b)^6$ és $(2a-3b)^6$ kifejtett alakját!

Megoldás

$$(2a+3b)^6 = (2a)^6 + \binom{6}{1}(2a)^5(3b) + \binom{6}{2}(2a)^4(3b)^2 + \binom{6}{3}(2a)^3(3b)^3 + \binom{6}{4}(2a)^2(3b)^4 + \binom{6}{5}(2a)(3b)^5 + (3b)^6 =$$

$$= 64a^6 + 576a^5 b + 2160a^4 b^2 + 4320a^3 b^3 + 4860a^2 b^4 + 2916ab^5 + 729b^6.$$

A $(2a-3b)^6 = (2a+(-3b))^6$ helyettesítésből látható, hogy az együtthatók abszolút értékei nem változnak; és azok a tagok váltanak előjelet, amelyekben a b változó páratlan kitevőn szerepel. Ez alapján

$(2a-3b)^6 = 64a^6 - 576a^5 b + 2160a^4 b^2 - 4320a^3 b^3 + 4860a^2 b^4 - 2916ab^5 + 729b^6$.

A Pascal-háromszög

0. sor → 1
1. sor → 1 1
2. sor → 1 2 1
3. sor → 1 3 3 1
4. sor → 1 4 6 4 1
5. sor → 1 5 10 10 5 1
6. sor → 1 6 15 20 15 6 1
7. sor → 1 7 21 35 35 21 7 1
8. sor → 1 8 28 56 70 56 28 8 1
…

A táblázat sorait és a sorokban lévő elemeket is – az ábrán jelzett módon – 0-tól sorszámozzuk. Minden sort 1-essel kezdünk és zárunk, a közbülső elemek pedig az átlósan felettük lévő két elem összegeként állnak elő. Például a 4. sorban: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$.

Pascal a binomiális együtthatók tanulmányozása közben vizsgálta ezt a háromszöget. Hogy mi köze a háromszög elemeinek a binomiális együtthatókhoz? Bebizonyítjuk a következőt:

Blaise Pascal

A nevezetes, háromszög alakú számtáblázatot *Blaise Pascal* (1623–1662), a nagy francia matematikus, fizikus és filozófus tiszteletére **Pascal-háromszögnek** nevezték el.

Tétel

A Pascal-háromszögben az n-edik sor k-adik eleme az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható.

Bizonyítás A táblázat első néhány sorában egyszerű numerikus számolással igazolhatjuk az állítást. Például a 3. sorban $1 = \binom{3}{0}$, $3 = \binom{3}{1}$, $3 = \binom{3}{2}$ és $1 = \binom{3}{3}$. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ez a tulajdonság a képzési szabály alkalmazásakor tovább „öröklődik”.

Tegyük fel, hogy az n-edik sorban két szomszédos elem, a k-adik és a $(k + 1)$-edik értéke $\binom{n}{k}$ és $\binom{n}{k+1}$. Az összegükből képezzük az $(n + 1)$-edik sor $(k + 1)$-edik elemét; vagyis azt kellene igazolnunk, hogy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ teljesül, minden $k \leq n$ természetes számra.

$\binom{n+1}{k+1}$-féleképpen választhatunk ki $(n + 1)$ különböző elemből $(k + 1)$ darabot, ha a kiválasztott elemek sorrendje közömbös. (Ez az együttható szerepel az öröklődést biztosító egyenlet jobb oldalán.) Ezt a kiválasztást másképpen is megtehetjük: esetszétválasztást végzünk az $(n + 1)$-edik elem helyzete alapján.

Ha az $(n + 1)$-edik elem a kiválasztott $(k + 1)$ darab között van, akkor az első n elemből már csak k darabot kell kiválasztanunk, s ezt $\binom{n}{k}$-féleképpen tehetjük meg. (Megkaptuk a bal oldal első tagját.)

Ha pedig az $(n + 1)$-edik elem nincs a kiválasztott $(k + 1)$ darab között, akkor az első n elemből kell a $(k + 1)$ darabot kiválasztanunk, és erre $\binom{n}{k+1}$ lehetőségünk van. (Azaz előállt a bal oldal második tagja.)

Mivel az $(n + 1)$-edik elem vagy a kiválasztott $(k + 1)$ darab között van, vagy nem, az összeadási szabály miatt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, s ezt akartuk igazolni.

Az öröklődés tehát fennáll, a Pascal-háromszög elemei valóban a megfelelő binomiális együtthatók.

Megjegyzés

Javasoljuk az összefüggés algebrai számolással történő igazolását is. A tanulságos számolás során az

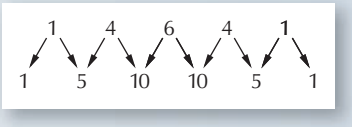
$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \text{ vagy az } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

alakot is használhatjuk.

4. példa A Pascal-háromszögnek több érdekes tulajdonsága is van. Észrevehetjük például, hogy az egyes sorokban lévő számok összege rendre 1, 2, 4, 8, 16, 32 stb. Vajon általában is igaz ez az észrevétel?

Megoldás Bebizonyítjuk, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában az elemek összege 2^n.

Első megoldás: A Pascal-háromszög képzési szabálya alapján egy-egy sor minden tagja a felette lévő két elem összegével egyenlő. Az n. sor tagjainak összeadásakor észrevehetjük, hogy az összeg megegyezik az $(n-1)$. sor tagjai összegének kétszeresével (beszámítva az első és utolsó helyen álló 1-eseket). Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a sorok összegére vonatkozó kettőhatvány-tulajdonság öröklődik.



(Az ábrán a 4. és 5. sor elemeivel szemléltetjük az állítást. Látható, hogy az 5. sor összegzésekor a 4. sor minden elemét kétszer számoltuk az összegben.)

Második megoldás: A binomiális tételt alkalmazzuk, kifejtjük az $(1+1)^n$ hatványt:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

De a jobb oldali összegben éppen a Pascal-háromszög n-edik sorában lévő elemek szerepelnek; vagyis ezek összege valóban $(1+1)^n = 2^n$.

Egy másik lehetséges észrevétel, hogy a sorokban lévő számok váltakozó előjelű összege rendre 0. A váltakozó előjelű összeg meghatározását a feladatok között tűztük ki.

5. példa Bizonyítsuk be, hogy $5^n - 4n - 1$ minden pozitív egész n szám esetén osztható 16-tal!

Megoldás Többféle megoldás lehetséges, mi most a binomiális tételt alkalmazzuk. Eszerint

$$5^n = (4+1)^n = 4^n + \binom{n}{1}\cdot 4^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot 4^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 4^2 + \binom{n}{n-1}\cdot 4 + 1\,.$$

Észrevehetjük, hogy az utolsó két tag kivételével minden tag osztható $4^2 = 16$-tal. Így az utolsó két tag összegét, $(4n+1)$-et kivonva valóban 16-tal osztható számot kapunk: $16 \mid 5^n - 4n - 1$.

(Az oszthatóság $n = 0$-ra is teljesül.)

6. példa Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak? ($n \in \mathbf{N}$.)

Megoldás **Első megoldás (kódolás):**

Az üres halmaznak 1 részhalmaza van (önmaga), az 1 elemű halmaznak 2 darab, a 2 eleműeknek 4, a 3 eleműeknek 8. (Például $H = \{a, b, c\}$ részhalmazai: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$,$\{c\}$, $\{a, b\}$,$\{a, c\}$, $\{b, c\}$,$\{a, b, c\}$.) Azt sejthetjük, hogy az n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n. ($n \in \mathbf{N}$.)

Az n elemű halmaz minden részhalmazához egy-egy kódot rendelünk a következőképpen. Adott sorrendben felsoroljuk a halmaz elemeit, és ha a soron következő elem hozzátartozik a részhalmazhoz, akkor ezt egy 1-essel jelöljük, míg ha nem, akkor 0-val. Ekkor mindig egy n hosszú, 0-kat és 1-eseket tartalmazó kódot kapunk, ami egyértelműen azonosítja a részhalmazt. (Például a fenti H halmaz esetében az (1, 0, 1) sorozat az $\{a, c\}$ részhalmaz kódja, a (0, 0, 0) az üres halmazé, az (1, 1, 1) a H halmazé.)

Mivel minden lehetséges kódhoz is pontosan egy részhalmaz tartozik, így a halmaznak annyi részhalmaza van, ahány n hosszú 0-1 sorozat készíthető. A sorozat első eleme 2-féle lehet, a második elem szintén, …, és az utolsó is 2-féle értéket vehet fel. A szorzási szabály miatt a megfelelő kódok száma 2^n; tehát ennyi részhalmaza lehet egy n elemű halmaznak.

Tétel

Egy n elemű halmaz **részhalmazainak** a **száma** 2^n ($n \in \mathbf{N}$).

Más típusú megoldást adhatunk a binomiális együtthatók segítségével.

Második megoldás:

A 0 elemű részhalmazok száma $1 = \binom{n}{0}$, az 1 eleműek száma $\binom{n}{1}$, a 2 eleműeké $\binom{n}{2}$, általában a k elemű részhalmazok száma $\binom{n}{k}$, hiszen n elemből kell k darabot kiválasztani úgy, hogy az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Az összes részhalmaz száma tehát $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$. Ez éppen a Pascal-háromszög n-edik sorában lévő elemek összege, amiről már megmutattuk, hogy értéke 2^n. Ezzel beláttuk, hogy ennyi a részhalmazok száma is.

FELADATOK

1. E1 A $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, aminek
a) eleme az 1 és a 2, de nem eleme a 3; *b)* eleme az 1 vagy a 2; *c)* eleme az 1, a 2 vagy a 3?

2. E1 Legyen H egy n elemű halmaz ($n \in \mathbf{N}$).
a) Határozzuk meg H páros elemszámú részhalmazainak a számát!
b) Határozzuk meg H páratlan elemszámú részhalmazainak a számát!
c) Igaz-e, hogy H páros és páratlan elemszámú részhalmazainak a száma mindig megegyezik?

3. E1 Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában az elemek váltakozó előjelű összege 0!

4. E2 Bizonyítsuk be, hogy $5^n - (3n + 2) \cdot 2^{n-1}$ minden pozitív egész n szám esetén osztható 9-cel!

5. E2 Mennyi az $(x^5 + x^3 + 1)^7$ kifejtésében
a) x^5 együtthatója; *c)* x^7 együtthatója;
b) x^6 együtthatója; *d)* x^8 együtthatója?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 199–219, 343–345.

ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓ (Olvasmány)

A kombináció definíciójából az ismétléses kombináció fogalma természetes módon következik. Ha n-féle különböző elemből kiválasztunk k számút úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy-egy elemet *többször is választhatunk*, akkor az n elem egy k-ad osztályú **ismétléses kombinációját** kapjuk. k és n természetes számok, de (éppúgy, mint az ismétléses variáció esetében) $k > n$ is lehetséges.

1. példa *a)* Kétfajta fagylaltból hányféleképpen lehet egy háromgombócos fagylaltkelyhet összeállítani? (A gombócok sorrendje közömbös, mivel széles kehelyben kapjuk.)
b) És ha háromfajta fagylaltból állítjuk össze a háromgombócos fagylaltot?

Megoldás *a)* Ha a és b jelöli a fagylaltféleségeket, akkor a következő lehetőségek vannak:
a, a, a; a, a, b; a, b, b; b, b, b. Eredmény: 4.
b) Jelölje c a harmadik fajta gombócot.
– Ha mind a három gombóc ugyanolyan fajtájú, akkor 3 lehetőség van;
– ha pontosan kétféle típust használunk fel ((a, b); (a, c) vagy (b, c)), akkor az *a)* feladat alapján $2 \cdot 3 = 6$ lehetőség adódik (pl. az (a, b) pár esetén a, a, b; a, b, b);
– ha pedig mind a három fajtát felhasználjuk, akkor 1-féle fagylalt állítható össze.
Eredmény: $3 + 6 + 1 = 10$.

Az n elem egy k-ad osztályú ismétléses kombinációját ideiglenesen jelöljük $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$-val, hasonlóan a binomiális együtthatókhoz. (Ez a jelölés nem általánosan elterjedt.) A példában az *a)* feladatban $\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right]$, a *b)* részben $\left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}\right]$ értékét határoztuk meg. Kérdés, hogy tudunk-e általános képletet megadni $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$ értékére?

Először kis k-kat, $\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right]$ és $\left[\begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix}\right]$ értékeit vizsgáljuk.

2. példa Írjuk fel a binomiális együtthatók segítségével *a)* $\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right]$; *b)* $\left[\begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix}\right]$ értékeit! (Azaz n különböző elemből válasszunk ki 2-t, illetve 3-at úgy, hogy a kiválasztott elemek ismétlődhetnek.)

Megoldás *a)* Az első példa alapján két esetet vizsgálunk.

Ha a két kiválasztott elem egyforma, akkor $n = \binom{n}{1}$-féle kiválasztás lehetséges; míg ha különböznek, akkor (ismétlés nélküli kombinációról lévén szó) $\binom{n}{2}$-féle. Eredmény: $\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right] = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$. Mivel a Pascal-háromszög képzési szabálya szerint $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$, az eredmény $\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right] = \binom{n+1}{2}$ alakban is írható.

b) Ha a három kiválasztott elem egyforma, akkor $\binom{n}{1}$-féle kiválasztás lehetséges. Ha kétféle elemből választunk ki 3-at (pl. a, a, b módon), akkor $n(n-1) = 2 \cdot \binom{n}{2}$ lehetőség adódik. Ha pedig háromféle elemet használunk fel, akkor ezt $\binom{n}{3}$-féleképpen tehetjük meg. Az $\binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} =$ $= \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+2}{3}$ átalakítással $\left[\begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix}\right] = \binom{n+2}{3}$.

A fentiek alapján esetleg megsejthető az $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \binom{n+k-1}{k}$ összefüggés, de k értékének növekedtével egyre bonyolultabbá válik a számolás. A továbbiakban három példa segítségével egy-egy lehetséges bizonyítást mutatunk.

3. példa **(Első módszer)** Hányféleképpen rendezhetünk sorba 7 darab piros és 3 darab kék, egyforma méretű golyót, ha két kék golyó nem kerülhet egymás mellé? (Az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg.)

Megoldás Ha először letesszük a 3 kék golyót, akkor a szomszédsági feltétel miatt mindenféleképpen kell közéjük egy-egy pirosat is tenni. A maradék 5 piros golyó a kékek által meghatározott 4 helyre (a kék golyók közötti két helyre, illetve eléjük és mögéjük) $\left[\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}\right]$-féleképpen helyezhető el. (Hiszen a 4 helyből választunk ki 5-öt úgy, hogy egy-egy helyet többször is választhatunk.)

A sorrendek számát úgy is meghatározhatjuk, ha először a piros golyókat helyezzük le. A 7 piros golyó 8 közt határoz meg, és ezekből kell 3-at kiválasztani a kék golyók számára. Most egy-egy közt csak egyszer választhatunk, különben a kék golyók egymás mellé kerülnének. Így a kiválasztások száma $\binom{8}{3}$; tehát $\left[\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}\right] = \binom{8}{3}$.

Ha p piros és k kék golyót rendezünk, akkor a két módszerrel a $\left[\begin{matrix} k+1 \\ p-k+1 \end{matrix}\right] = \binom{p+1}{k}$ egyenlőséget kapjuk, ami $x = k+1$ és $y = p-k+1$ helyettesítéssel $\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right] = \binom{x+y-1}{x-1} = \binom{x+y-1}{y}$ alakú, és ezt akartuk bizonyítani.

4. példa **(Második módszer)** Hányféleképpen választhatunk ki az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból 4-et, ha a kiválasztott számok sorrendje közömbös, és egy-egy számot többször is kiválaszthatunk?

Megoldás Rendezzük a kiválasztott számjegyeket monoton növekvő sorrendbe, így négyjegyű számokat kapunk. A legkisebb szám 1111, a legnagyobb 6666, és ezen számok darabszáma, $\left[\begin{matrix}6\\4\end{matrix}\right]$ meghatározása a feladat.

A következő kódolást végezzük: a fenti számok második számjegyéhez +1-et, a harmadikhoz +2-t és a negyedikhez +3-at adunk hozzá. Az 1111-ből így 1234, a 6666-ból 6789, és például a 2246-ból 2369 lesz. A kódolás után olyan négyjegyű számokat kapunk, amelyekben a számjegyek 1-től 9-ig terjedhetnek, és már nem ismétlődhetnek. Az 1, 2, … , 9 számjegyekből 4-et ismétlődés nélkül $\binom{9}{4}$-féleképpen választhatunk ki; és ez a feladat megoldása is, hiszen bármelyik megfelelő kódból egyértelműen meghatározható az eredeti szám. (Például ha a kód 1457, az eredeti szám 1334 volt.) A kölcsönösen egyértelmű kódolással igazoltuk tehát, hogy $\left[\begin{matrix}6\\4\end{matrix}\right]=\binom{9}{4}$, és a gondolatmenet általánosítható $\left[\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right]$-ra is.

5. példa **(Harmadik módszer)** Hányféleképpen lehet 5 fajta gombócból egy négygombócos fagylaltkelyhet összeállítani? (A gombócok sorrendje közömbös a fagylaltkehelyben.)

Megoldás Az $\left[\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right]$ ismétléses kombinációk számát kell meghatároznunk.

Jelölje *a*, *b*, *c*, *d*, *e* az ötféle fagylaltot. Minden összeállításnak megfeleltetünk egy 0-1 sorozatot a következőképpen: minden fagylaltfajtához annyi 1-est rendelünk, ahány gombócot tartalmaz belőle az összeállítás; az egyes fajtákat pedig 0-val választjuk el egymástól. Néhány példa erre a kódolásra:

aabd → 11010010;
bcde → 01010101;
bdde → 01001101;
bccc → 01011100.

A 0-1 számsorozat akkor kezdődik 0-val, ha az *a* típusból nem választunk; akkor végződik 0-val, ha az *e* fagylaltból nem választunk; ha pedig valamelyik közbülső típusból nem választunk gombócot, akkor a megfelelő helyen két 0 szerepel egymás mellett.

A kódokban mindig 4 darab 1-es és 4 darab 0 szerepel (hiszen a négy 0 határozza meg az 5-féle gombóchoz tartozó közöket). Az is könnyen látható, hogy a kódolás kölcsönösen egyértelmű: minden kód pontosan egy lehetséges összeállítást határoz meg, és bármely négygombócos fagylaltnak egyértelmű kódja van.

A feladat tehát a 4 darab 0-t és 4 darab 1-est tartalmazó sorozatok számának a meghatározása, ami $\binom{8}{4}$, s ezzel igazoltuk is az $\left[\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right]=\binom{8}{4}$ összefüggést. A meggondolásaink általánosíthatók: ha *n* fajta gombócból *k*-gombócos fagylaltot állítunk össze, akkor ezt $\left[\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right]=\binom{n+k-1}{k}$-féleképpen tehetjük meg. (A kódsorozat $n+k-1$ hosszú, és *k* darab 1-est tartalmaz.)

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 179–198.

50. GRÁFOK

ÚJ FOGALMAK BEVEZETÉSE

Már elsajátítottuk a gráfelmélet alapjait, megismerkedtünk a gráf definíciójával, valamint a gráfok elemi összetevőivel, a *pont (csúcs)* és *él* fogalmával.

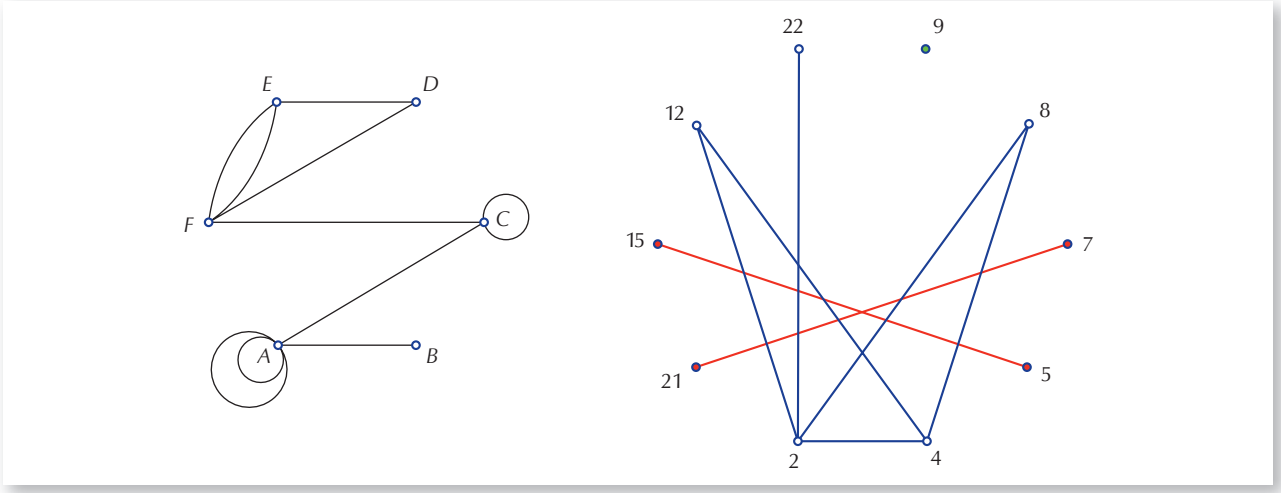
(Ismétlés: Objektumokat és közöttük lévő kapcsolatokat jól szemléltethetünk grafikus módon. Ekkor az ábrán az egyes objektumokat pontokkal (csúcsokkal), a közöttük lévő, általában kölcsönös kapcsolatot pedig a megfelelő pontokat összekötő vonalakkal, az élekkel ábrázoljuk. *Gráfnak* nevezzük a pontokból és az őket összekötő vonalakból álló alakzatot.)

A gráf pontjainak fontos jellemzője a pont *foka* vagy *fokszáma,* ez a pontból kiinduló élek száma.

Megismerkedtünk továbbá a gráfok modellalkotó szerepével és különböző szemléltetési lehetőségeivel is (ábra, felsorolás, táblázat).

Bevezetünk néhány új fogalmat, amik segítségével könnyebben jellemezhetjük az egyes gráftípusokat.

Az első ábrán az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* települések közötti betonút-hálózatot szemléltetjük, a második ábrán pedig a számokat reprezentáló két pontot akkor kötöttünk össze egy éllel, ha az egyik szám a másiknak valódi osztója.



Az első gráfban *C*-ből olyan él is kiindul, aminek a végpontja is *C* (hasonló a helyzet *A*-val is), az *E* és *F* helységek között pedig két aszfaltutat is megépítettek. Ezeknek a speciális éleknek külön elnevezése van.

Definíció

A **hurokél** kezdő és végpontja megegyezik; **többszörös él** esetén pedig a gráf két pontját egynél több él köti össze.

Az olyan gráfot, amelyben sem hurokél, sem többszörös él nincs, **egyszerű gráf**nak nevezzük.

Többszörös él tehát 2-nél több is lehet két pont között, és hurokél is lehet többszörös. (Erre példa *A*, amelynek két hurokéle van.)

Az első nem egyszerű gráf, az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* pontok foka (fokszáma) rendre 6, 1, 4, 2, 3, 4. (A hurokélnek két „vége” van, ezért 2-vel növeli a fokszámot.)

A második gráf egyszerű. Ha adott pont fokszámát *f*-fel jelöljük, akkor $f(2) = 4$, $f(4) = 3$ stb. Egy érdekesség $f(9) = 0$, a nulladfokú pontot másképpen **izolált pont**nak is nevezzük.

A gráfok pontosabb jellemzésére érdemes néhány új fogalmat bevezetnünk.

Definíció

Útnak nevezzük egymáshoz csatlakozó élek olyan sorozatát, amelyek egyetlen ponton sem mennek át egynél többször.

Egy gráf **összefüggő**, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk valamilyen úton.

Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a maximális összefüggő részeit **komponenseknek** nevezzük. (A komponensek a gráf „lehető legbővebb” összefüggő részgráfjai.)

Az első gráf összefüggő, bármely két pontja között van út (azaz bármely két település között van aszfaltút). Például C és D között egy (gráfelméleti) út $C - F - D$ és $C - F - E - D$ is.

A második gráf nem összefüggő, négy komponensből áll, ezeket külön színnel jelöltük: {2, 4, 8, 12, 22}, {5, 15}, {7, 21}, {9}. (Az izolált pontot is komponensnek tekintjük.)

Két fontos gráfelméleti fogalmat említünk még meg.

Definíció

Körnek nevezzük a kezdőpontjába visszavezető utat. (A hurokél is kör.)
A **fa (fagráf)** pedig olyan összefüggő gráf, amelyik nem tartalmaz kört.

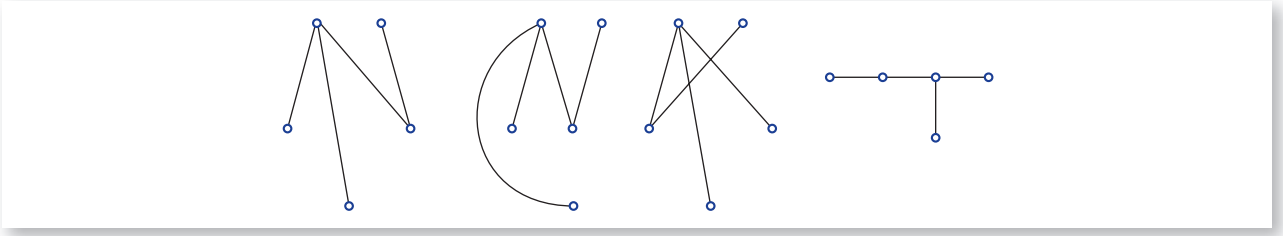
Az első gráfban 3 élből álló (úgy is mondjuk: három él hosszúságú) gráfelméleti kör $D - E - F - D$, de a kétszeres él miatt $E - F - E$ is 2 hosszúságú körnek számít, sőt a hurokél miatt $C - C$-t is 1 hosszúságú körnek tekintjük.

A második gráfban egy kör például $2 - 4 - 8 - 2$ vagy $2 - 8 - 4 - 12 - 2$.

Egyik gráf sem (gráfelméleti) fa. A fákkal – fontos szerepük miatt – később külön foglalkozunk.

MIKOR TEKINTÜNK AZONOSNAK KÉT GRÁFOT?

A gráfokkal elsősorban adott objektumok közötti kapcsolatokat szemléltetünk. A gráfmodellben ennek megfelelően általában azt vizsgáljuk, hogy adott gráf mely pontjait kötöttük össze éllel (azaz mely pontok között van kapcsolat). Ebben az értelemben az ábrán lévő gráfok *nem különböznek* egymástól, mindegyik azonos kapcsolatokat szemléltet.



Például két pontot szakasz helyett görbe vonallal is összeköthetünk, ez nem jelent elvi különbséget (a kapcsolat így is, úgy is kapcsolat marad); és az sem számít, hogy az élek metszik egymást, ha a metszéspontjukat nem tekintjük a gráf pontjának. Mindegyik gráf pontjait megbetűzhetjük A, B, C, D, E-vel úgy, hogy pl. A legyen a harmadfokú pont, B a másodfokú, és C legyen még B-vel összekötve. (A maradék két D és E pont szerepe szimmetrikus.) Ekkor pedig mindegyik gráfban pontosan ugyanazokat a pontokat kötöttük össze éllel.

Persze nem szívesen mondanánk, hogy ezek a gráfok egyenlők („ugyanazok"), ezért új fogalmat vezetünk be, a gráfok **izomorfiáját**.

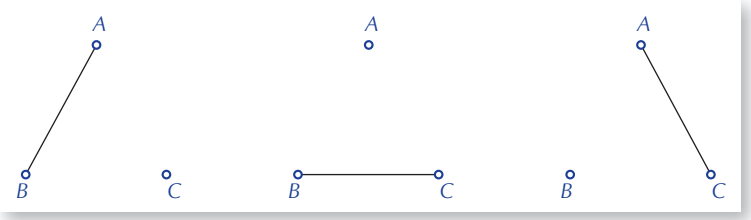
Definíció

Két gráfot **izomorfnak** nevezünk, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy az egyik gráf bármely két kiválasztott pontja között akkor és csak akkor van él, ha a másik gráf két megfelelő pontját is összekötöttük.

A fenti gráfok tehát izomorfak.

Megjegyzés

Más a helyzet akkor, ha a gráf pontjait megkülönböztetjük. Ha például tudjuk, hogy három személy (A, B, C) között összesen egy ismeretség van, akkor nem mindegy, hogy a három személy közül melyik kettő ismeri egymást. Így az ismeretségi gráf háromféle lehet, és ezek különböznek egymástól.



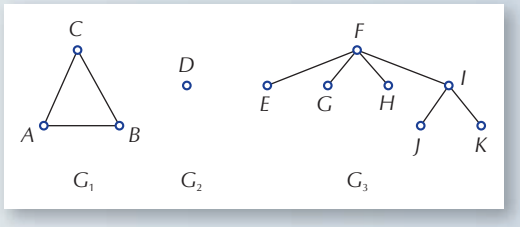
Az új fogalmak megkönnyítik a gráfok jellemzését, a feladatmegoldás során egyszerűbben hivatkozhatunk e tulajdonságokra.

1. példa A G gráf csúcsainak halmaza $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$. A gráf éleit felsorolással adjuk meg: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{E, F\}$, $\{F, G\}$, $\{F, H\}$, $\{F, I\}$, $\{I, J\}$, $\{I, K\}$.

a) Szemléltessük más módokon a gráfot!

b) Jellemezzük a gráfot!

Megoldás *a)* Az egyik leggyakoribb szemléltetési lehetőség az ábrán látható „rajzos” megadás.



Egy másik módszer a táblázattal történő megadás. Ebben felsoroljuk a gráf csúcsait, és pl. az A sora és B oszlopa találkozásához 1-et írunk, ha a két pont össze van kötve éllel; ha nincs köztük él, akkor írhatunk 0-t, vagy üresen is hagyhatjuk a cellát.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A		1	1								
B	1		1								
C	1	1									
D											
E						1					
F					1		1	1	1		
G						1					
H						1					
I						1				1	1
J									1		
K									1		

A táblázattal történő megadás alkalmas hurokélek és többszörös élek szemléltetésére is. Az utóbbiakban például az 1 helyett a többszörös él számával megegyező elemet szerepeltetünk a táblázat megfelelő mezőjében. (Irányított gráfok esetén is használhatjuk.)

b) A gráfnak 11 pontja és 9 éle van. Az egyes csúcsok fokszámai rendre 2, 2, 2, 0, 1, 4, 1, 1, 3, 1, 1. A gráf egyszerű, mert sem hurokél, sem többszörös él nem szerepel benne.

Az adott G gráf nem összefüggő, hiszen például A és D vagy A és E között nincs út. Három komponensből áll, ezeket a részgráfokat G_1, G_2, G_3-mal jelöltük az ábrán.

A G_1 komponensben egy A és B közötti út például A–C–B vagy maga az A–B él is.

A G_2 komponens egy izolált pontból áll.

A G_3 komponens is összefüggő (a komponens definíciója ezt megköveteli), de itt bármely két pont között csak egyetlen út van. Például G és K között G–F–I–K.

A G_1 komponens három élből álló kör, a G_3 komponens pedig hat élű fa.

2. példa *a)* Megrajzoltuk egy szabályos n-szög oldalait és átlóit. Hány szakaszt húztunk be?

b) Hány 5 pontú, 3 élű egyszerű gráf van, ha a gráf pontjait megkülönböztetjük?

c) Az 5 pontú, megkülönböztetett csúcsú gráfok közül melyikből van több: amelyiknek 3 éle van, vagy amelyiknek 7?

Megoldás A kapott alakzatot tekinthetjük egy n pontú egyszerű gráfnak is, amelyben minden pontot minden ponttal összekötöttünk, és az élek száma a kérdés.

Első megoldás: A gráf bármely két pontját pontosan egy él köti össze. Minden pontból $(n-1)$ számú él húzható, ez $n(n-1)$ élt jelent. De ekkor minden élt kétszer számoltunk, a két végpontjánál; ezért az összes él száma $\frac{n(n-1)}{2}$.

Második megoldás: Mindegyik élt egyértelműen megadhatjuk a két végpontjával. Annyi éle van tehát a gráfnak, ahányféleképpen ki tudunk választani az n pontjából 2-t. A pontpár kiválasztásakor a pontok sorrendje közömbös, így az élek száma $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

További megoldások is adhatók a Gauss-módszerrel (az egyes csúcsokból kiinduló, egyszeresen számolt szakaszok számának összege $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1$), vagy például a rekurziók alkalmazásával.

A fenti speciális gráfra gyakran hivatkozunk (lásd pl. a *b)* feladat), érdemes ezért külön elnevezést bevezetnünk.

Definíció

Ha egy gráf bármely pontjából bármely pontjába pontosan egy él vezet, akkor **teljes gráfnak** nevezzük
Másképpen: a teljes gráf olyan egyszerű gráf, amelynek bármely két pontja között van él.

Például teljes gráfot kapunk, ha a gráfmodellt alkalmazzuk egy olyan társaságra, amelyben mindenki mindenkit ismer. (Azaz egy szabályos sokszög oldalait és átlóit behúzzuk, mint a példában.)

b) Az 5 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{5\cdot 4}{2}=10$, ezekből kell 3-at kiválasztanunk. Mivel a gráf pontjait megkülönböztetjük, az élek is különböznek, így a lehetőségek száma $\binom{10}{3}=120$.

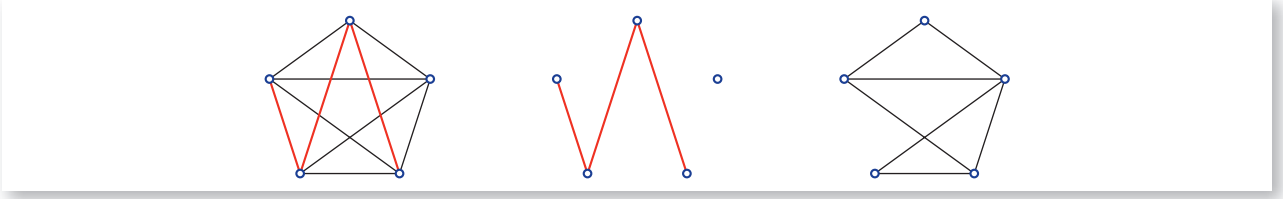
c) Az előző gondolatmenetet alkalmazva 10 élből kell 7-et kiválasztanunk. A lehetőségek száma $\binom{10}{3}=120$, vagyis az 5 pontú, 3 élű és 7 élű gráfokból ugyanannyi van.

Hogy ugyanannyi van a 3 és 7 élű gráfokból, azt a lehetőségek konkrét kiszámolása nélkül is megállapíthattuk volna, ha ismerjük a **komplementer** (vagy kiegészítő) **gráf** fogalmát.

Definíció

Egy G egyszerű gráf $\overline{G}$ komplementer gráfját kapjuk, ha
– a két gráf pontjai ugyanazok;
– és $\overline{G}$ bármely két pontja között pontosan akkor van él, ha G-ben nincs.

Az ábrán egy gráf és a komplementer gráfja látható (elöl a teljes gráf).



A példára visszatérve észrevehetjük, hogy a feladatban vizsgált 5 pontú, 3 élű gráfokat párosíthatjuk a 7 élű komplementer gráfjaikkal. A párosítás kölcsönösen egyértelmű, ezért a két fajta gráfból ugyanannyi van. (A gondolatmenetünk általános érvényű.)

3. példa Bizonyítsuk be a **fokszámtételt**, mely szerint bármely gráfban a fokszámok összege megegyezik az élek számának a kétszeresével.

Bizonyítás Mivel minden élnek két vége van, a fokszámok összegzésekor az élek számának a kétszeresét kapjuk. Ez az észrevétel hurokélek és többszörös élek esetén is érvényes, így a fokszámtétel minden gráfra igaz.

Megjegyzés
A tételből következik, hogy bármely gráfban a fokszámok összege páros, illetve hogy bármely gráfban a páratlan fokú pontok száma is páros.

A fokszámtétel szükséges feltételt ad egy gráf létezésére, de a feltétel nem elégséges. A fokszámok pedig általában nem határozzák meg egyértelműen a gráfot.

4. példa *a)* Van-e olyan 10 pontú egyszerű gráf, amelyben az egyes pontok fokszáma 9, 8, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 0?

b) Hány olyan 10 pontú egyszerű gráf van, amelyben az egyes pontok fokszáma 8, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 0? (Az izomorf gráfokat nem tekintjük különbözőknek.)

c) Van-e olyan 10 pontú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka különböző?

Megoldás *a)* A fokszámtétel teljesül (a fokszámok összege páros), de nincs ilyen gráf. Ugyanis a kilencedfokú pontot az összes többi ponttal össze kell kötnünk – emiatt a gráfban nem lehet nulladfokú (izolált) pont.

b) A fokszámok összege 28, a gráfban – ha létezik – 14 él van. A nyolcadfokú pontot az izolált pont kivételével az összes többivel összekötjük *(1. ábra)*, így a két elsőfokú pontból további él nem indul ki. Hagyjuk el ezt a négy pontot és a belőlük kiinduló éleket a gráfból! Ekkor a *2. ábrán* látható 6 pontú, $14 - 8 = 6$ élű gráfot kapjuk, elegendő ezt vizsgálni a továbbiakban.

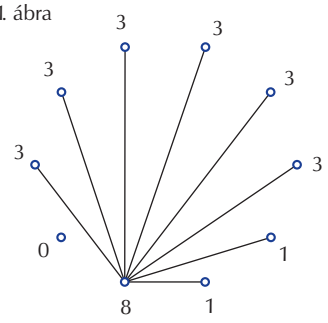
Ha összekötünk két pontot, akkor a gráf felépítését kétféleképpen folytathatjuk.

Az egyik lehetőség, hogy mindkét pontot egy harmadikkal kötjük össze *(3. ábra)*. Ekkor a befejezés egyértelmű: két (gráfelméleti) háromszöget kapunk.

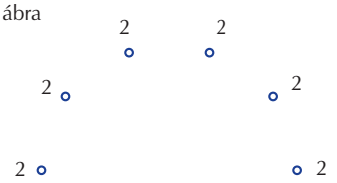
A másik lehetőség, hogy a két pontot egy-egy további ponttal kötjük össze *(4. ábra)*. Ezekből 1-1 él indul még ki, de nem köthetjük össze őket, mert akkor két darab másodfokú pont maradna, ami nem lehetséges. Ugyanazzal az ötödik ponttal sem köthetők össze (egy másodfokú pont maradna), így a befejezés innen egyértelmű.

Eredmény: két megfelelő gráf van.

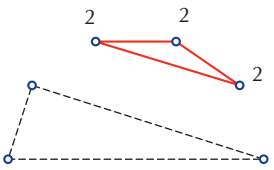
1. ábra



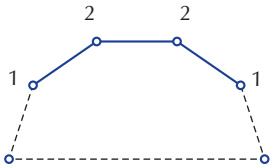
2. ábra



3. ábra



4. ábra



c) Tízféle lehetséges fokszám van: 9, 8, 7, … , 0. De – mint fentebb láttuk – nulladfokú és kilencedfokú pont egyszerre nem lehet a gráfban. A fokszámok lehetséges értékeire így csak 9 lehetőség marad, tehát a skatulyaelv miatt nem lehet mindegyik fokszám különböző.

A gondolatmenetünk **általánosítható**. Az n pontú egyszerű gráfban $n - 1$, $n - 2$, …, 1, 0 a lehetséges fokszámok, de egyszerre $n - 1$ és 0 nem fordulhat elő fokszámként a gráfban ($n \geq 2$). A skatulyaelv miatt igaz tehát a következő:

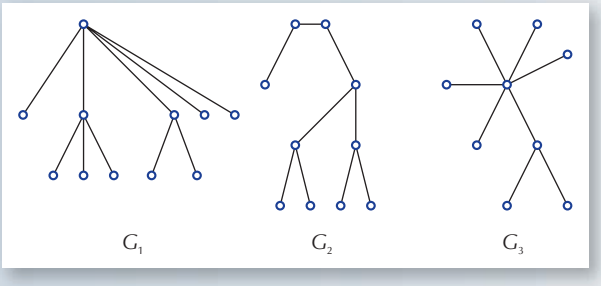
Tétel

Bármely egyszerű, legalább kétpontú gráfban létezik két azonos fokszámú pont.

A tételt „társaságokra” is megfogalmazhatjuk: bármely legalább kétfős társaságban van két olyan személy, akinek a társaságban ugyanannyi ismerőse van. (Az ismeretség kölcsönös.)

5. példa Mit állíthatunk egy n pontú fa éleinek a számáról?

Megoldás Az ábrán három fa látható, csúcsik száma rendre 11, 10 és 9, míg az élek száma 10, 9 és 8.

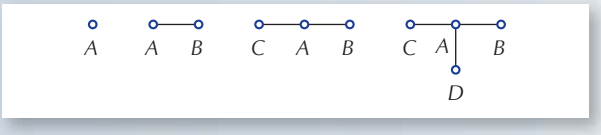


A fa definíció szerint összefüggő. Ha egy n pontú gráfban egyetlen él sincs, akkor n számú komponensből áll. Hány él behúzásával tudjuk összefüggővé tenni a gráfot?

Ha most egy éllel két pontot összekötünk, akkor a komponensek számát 1-gyel csökkentjük, azaz $(n-1)$ komponens keletkezik. A második lépésben akár két másik izolált pontot kötünk össze, akár a meglévő két összekötött pont valamelyikét kötjük össze egy harmadik, még izolált ponttal, a komponensek száma ismét 1-gyel csökken. Az eljárást tovább folytathatjuk: minden lépésben egy-egy komponenst kötünk össze egy újabb éllel, s így a komponensek darabszáma minden lépésben 1-gyel csökken. Kezdetben n komponensből állt a gráf, míg az összefüggő gráf egyetlen komponensből áll; ezért $(n-1)$ lépésre biztosan szükségünk van. Az n pontú összefüggő gráf tehát legalább $(n-1)$ élt tartalmaz.

A példában szereplő három fagráf éleinek száma alapján sejthető, hogy az n pontú fa pontosan $(n-1)$ élt tartalmaz. Próbáljunk felépíteni pontjai és élei segítségével egy adott n pontú fát! (Érdemes az alábbi algoritmus lépéseit konkrét példán, esetleg valamelyik fenti fára ellenőrizni.)

Vegyük a gráf egy tetszőleges A pontját. Mivel a fagráf összefüggő, így biztosan találunk olyan B pontot, amivel A össze van kötve a gráfban, így kapjuk az A–B részgráfot. Ezután további pontot keresünk a gráfban, amellyel A vagy B valamelyike össze van kötve. Legyen a következő pont C, az összekötés után kapott részgráf C–A–B. Az eljárást folytatjuk: találunk olyan D pontot, amellyel a C–A–B részgráf valamelyik pontja össze van kötve, mondjuk az A; így kapjuk az ábrán látható gráfot és így tovább.



Minden lépésben újabb ponttal és újabb éllel bővítjük a részgráfunkat. Mivel n pontú a gráf, az eljárás $(n-1)$ lépés után véget ér, azaz a gráfot $(n-1)$ éllel összefüggővé tettük. Kérdés, hogy az eljárással valóban fagráfot kaptunk-e? Azaz meg kell még vizsgálni, hogy lehet-e kör a gráfban (hiszen ekkor nem lenne fa), illetve hogy az adott gráf minden élét megkaptuk-e az algoritmus során.

A gráf felépítésének módjából következik, hogy az így konstruált gráfban nem lehet kör, hiszen bármely két pontja között egyetlen út vezet. Azt is könnyen igazolhatjuk, hogy a fa minden élét megkaptuk. Tegyük fel ugyanis, hogy az $\{A, B, C, \ldots, D\}$ részgráfot egy E ponttal bővítjük, mondjuk a D–E él behúzásával. Azt állítjuk, hogy E nem lehet összekötve az $\{A, B, C, \ldots, D\}$ részgráf semelyik további pontjával. Valóban: ha pl. létezne még egy további (általunk fel nem vett) E–B él, akkor az E–B–…–D–E út záródna, kört kapnánk; azaz a gráf nem lehetne fa. A bővítés során tehát semelyik pontból nem húzható további él a már meglévő részgráfhoz; ebből pedig következik, hogy az adott gráf minden élét megkaptuk.

Bebizonyítható, hogy a fenti eljárás általában is végrehajtható. Kimondhatjuk tehát:

Tétel

Az n pontú **fa éleinek száma** $n-1$. (Az egyetlen pontból álló gráf is fa.)

6. példa A fentiekből következik az összefüggő gráfok, illetve **fák** néhány **tulajdonsága**.

Indokoljuk meg, miért igazak az alábbiak:

1. Egy fa bármely két pontját pontosan egy út köti össze.

2. Ha egy fa valamely élét elhagyjuk, akkor a kapott gráf nem lesz összefüggő. (Az élek végpontjait nem hagyjuk el.)

3. Ha egy fa legalább kétpontú, akkor van elsőfokú pontja.

4. Ha egy n pontú összefüggő gráfban n-nél kevesebb él van, akkor a gráf tartalmaz elsőfokú pontot.

Megoldás A tulajdonságok elég szemléletesek, csak rövid indoklásokat adunk.

1. Bármely két pont között van egy út, mert a fa összefüggő gráf; több út pedig nem lehet, mert akkor kör keletkezne.

2. Ha az AB élt elhagyjuk, akkor A és B különböző komponensekhez tartozik. (Nincs közöttük út.)

3. Az algoritmus során az első lépésben kapott A–B részgráfnak van két elsőfokú pontja. A további bővítések során az elsőfokú pontok száma nem csökkenhet. (Azaz a fának legalább két elsőfokú pontja is van.)

Egy másik indoklás a fokszámtétel segítségével lehetséges. Az $(n-1)$ élnek $2(n-1)$ vége van, azaz ennyi a fokszámok összege. Ha a gráfban minden pont foka legalább 2 lenne, akkor a fokszámok összegének is legalább $2n$-nek kellene lenni, s ez ellentmondás.

4. Ez az állítás a 3. tulajdonság következménye.

7. példa Az előző feladat alapján fogalmazzunk meg a (gráfeméleti) körre is néhány állítást!

Megoldás Bizonyítás nélkül felsorolunk néhány lehetséges állítást. Az állítások az összefüggő gráfok, illetve a fák fenti tulajdonságai segítségével könnyen igazolhatók.

1. Ha egy gráf két pontja között több út is megadható, akkor a gráfban van kör.

2. Ha egy összefüggő gráf tartalmaz kört, és a kör egy tetszőleges élét elhagyjuk, akkor a gráf összefüggő marad.

3. Ha egy fa valamely két pontja között nincs él, akkor ezt az élt behúzva a gráfban kör keletkezik.

4. Ha egy gráfban minden pont fokszáma legalább kettő, akkor a gráfban van kör.

5. Ha egy n pontú gráf éleinek száma legalább n, akkor a gráfban van kör.

8. példa Hány különböző kört határoznak meg az 5 pontú teljes gráf élei?

Megoldás A köröket a hosszuk, azaz a bennük szereplő élek száma alapján számoljuk össze.

1 és 2 hosszú kör nincs a gráfban. (Ezek lennének a hurokélek, illetve a többszörös élek.)

A 3 hosszú körök száma $\binom{5}{3} = 10$, mert bármely három pont pontosan egy kört határoz meg.

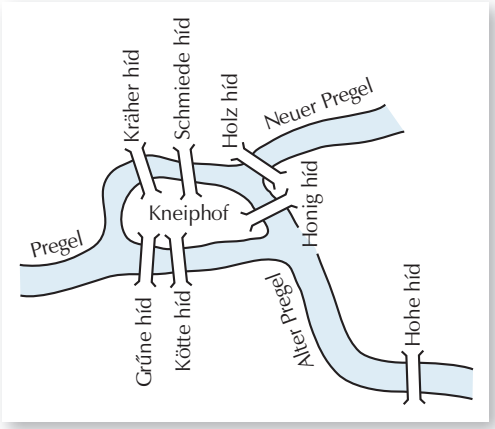
A gráfban 4 pontot $\binom{5}{4}$-féleképpen választhatunk ki. Az A–B–C–D $\equiv$ A–D–C–B körök megegyeznek, de A–C–B–D és A–C–D–B különbözők, és egymástól is különböznek. A 4 hosszú körök száma $\binom{5}{4} \cdot 3 = 15$.

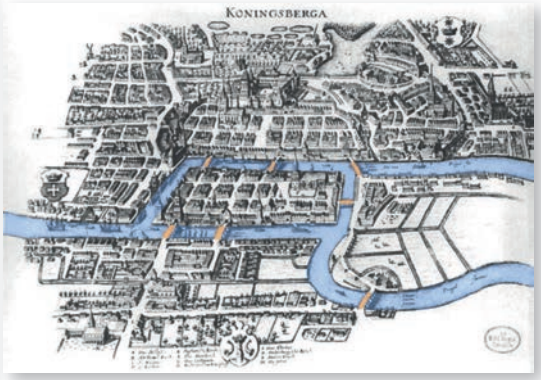
Végül az 5 hosszú körök számát határozzuk meg. Az A, B, C, D, E csúcsokat 5!-féleképpen rendezhetjük sorba. A ciklikus szimmetria miatt egy-egy kört 5 sorrend is meghatároz: A–B–C–D–E $\equiv$ B–C–D–E–A stb. Rögzítsük tehát az A csúcsot, így megszakítjuk a kört; hozzá képest a B, C, D, E pontok már csak 4!-féle sorrendet adnak. A kétféle körüljárási irány miatt még most is kétszer számoltunk minden kört: A–B–C–D–E $\equiv$ $\equiv$ A–E–D–C–B. Az 5 hosszú körök számát tehát $\frac{4!}{2} = 12$.

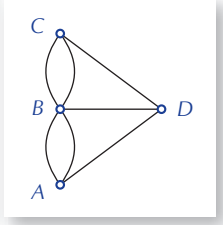
Eredmény: a körök száma $10 + 15 + 12 = 37$.

GRÁFOK BEJÁRÁSA

1735-ből való az első „igazi” gráfelméleti feladat, a königsbergi hidak problémája. A kérdés és a megoldása ma már közismert, röviden vázoljuk a történetét. A várost (ma: Kalinyingrád) a Pregel folyó négy részre osztotta, a városrészeket hét híd kötötte össze. A lakók tették fel a kérdést: lehet-e olyan sétát tenni a városban, amelynek során mindegyik hídon pontosan egyszer kelnek át, majd visszatérnek a kiindulási helyzetükbe?







A feladat gráfelméleti jellegű. A gráfmodellben a pontoknak az egyes városrészeket, az éleknek pedig az őket összekötő hidakat feleltetjük meg *(ábra)*.

Szemléletes gráfelméleti fogalom a ***séta*** és a ***körséta***.

Definíció

A **séta** a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek egy sorozata; a **körséta** pedig olyan séta, amelynek a kezdőpontja és a végpontja megegyezik.

Megjegyzések

A (gráfelméleti) *út* speciális séta, hiszen a sétában többször szerepelhet ugyanaz a pont vagy él is.

A séta fogalma nemcsak egyszerű gráfokra használható (például a königsbergi gráf sem egyszerű gráf). A sétában szerepelhet hurokél is és természetesen a többszörös élek bármelyike.

Egyszerű gráf esetén a sétát megadhatjuk a megfelelő pontsorozattal is (hiszen a megadott pontokat pontosan egy él köti össze).

Az új fogalmakkal a königsbergi hidak problémája a matematika nyelvén a következő: létezik-e olyan körséta a gráfban, amely minden élen pontosan egyszer halad át?

1735-ben Euler svájci matematikus, a szentpétervári akadémia akkori tagja megmutatta, hogy a kívánt séta lehetetlen. Ugyanis ha a gráf bejárása során valamelyik élen át egy közbülső pontba érkezünk, akkor egy másik élen keresztül el is kell hagynunk azt a pontot. Ha a bejárás lehetséges, akkor emiatt minden pont fokszáma páros kell, hogy legyen. (Ez igaz a kiindulási pontra is, mert azt elhagyjuk, majd oda vissza is kell térnünk.) A város gráfjában négy páratlan fokú pont is van, ezért a hidak nem járhatók be a kívánt módon.

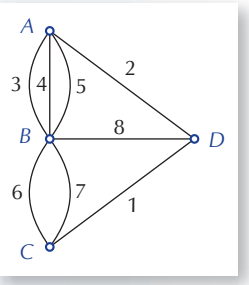
Megjegyzés

A fenti, fokszámokra vonatkozó szükséges feltétel igaz nem egyszerű gráfokra is (ilyen volt a város gráfja is). Az is igazolható, hogy összefüggő gráfokra a feltétel elégséges is. Erre vonatkozik a következő példa.

9. példa Be lehet-e húzni a königsbergi hidak gráfjában egy további élt úgy, hogy legyen a gráfban minden élen pontosan egyszer áthaladó séta? (Most nem követeljük meg, hogy a séta kezdő- és végpontja megegyezzen.)

Megoldás A gráf *A*, *B*, *C*, *D* pontjainak fokszáma rendre 3, 5, 3, 3. Ha egy élt (nem hurokélt) behúzunk, akkor a gráfban két páros és két páratlan fokszámú pont lesz. A fenti megjegyzés szerint ekkor már lehetséges a bejárás, vagyis *tetszőleges él* (nem hurokél) behúzásával célt érünk.

Példaképpen az *A* és *B* pontok között húzunk be egy további élt. Ekkor *C* és *D* páratlan fokú pont marad; az egyik lesz a kezdőpontja, a másik pedig a végpontja a sétának. Az ábrán megadtunk egy lehetséges sétát.



Megjegyzés

A fokszámokra vonatkozó bejárási feltétel elégséges, de nem automatikus, a bejáráskor vigyáznunk kell. Ha például az 1, 2, 3, 4, 5 élek után a 8-at választjuk, akkor zsákutcába jutunk, nem tudjuk folytatni a bejárást.

A gráfok bejárásával kapcsolatban több érdekes kérdés is felvethető. Összefüggő gráf esetén nyilván mindig van az összes ponton áthaladó séta és körséta, de bizonyos megszorításokkal jóval nehezebb feladatot kapunk. Például ha az éleken csak egyszer haladhatunk át, akkor adott gráf esetén van-e olyan út vagy kör, amelyik a gráf minden pontján áthalad?

Ezekkel és hasonló kérdésekkel a felsőbb matematika foglalkozik.

A 221. oldalon lévő rejtvény **megoldása**: $2{,}4 \cdot 10^{17}$ sec ≈ 7,7 milliárd év.

FELADATOK

1. E1

a) Hány három pontú, két élű gráf van? (Az izomorf gráfokat nem tekintjük különbözőknek.)
b) És hány számozott csúcsú, három pontú, két élű gráf van?
c) Oldjuk meg az előző két feladatot négy pontú, három élű gráfokra is!

2. E2

Öt különböző tömegű tárgyat szeretnénk tömegük szerint növekvő sorba rendezni. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, amellyel a két serpenyőben lévő egy-egy tárgy tömegét hasonlíthatjuk össze.
a) Mennyi az a minimális számú mérés, amellyel sikerülhet a rendezés, ha „szerencsénk van”?
b) Fordítva: ha rendszertelenül, stratégia nélkül hasonlítjuk össze az egyes tárgyakat, akkor előfordulhat, hogy több mérést is feleslegesen végzünk el. Mennyi az a maximális számú mérés, amelyet „balszerencsés módon” végrehajtva, még nem állapítható meg a tárgyak tömeg szerinti sorrendje? (Persze bármely két tárgyat legfeljebb egyszer hasonlítunk össze.)
c) Legkevesebb hány mérésre van szükség ahhoz, hogy biztosan sorba rendezhessük a tárgyakat (még akkor is, ha nincs szerencsénk)? Adjunk meg egy eredményes mérési eljárást!

3. E2

a) Egy városban 9 sportklub működik. Egy rendezvényen találkozik hét vendég, akik mindegyike 4 különböző klubnak a tagja. Igaz-e, hogy biztosan van olyan klub, amelynek legalább négy vendég a tagja?
b) Egy gráf pontjai az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ és $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ halmazok elemei. Minden B-beli csúcsot pontosan 4 darab A-beli csúccsal kötöttünk össze, a gráfban további élek nincsenek. Igaz-e, hogy A-ban van negyedfokú pont?
c) Egy 9 elemű H halmaznak kiválasztjuk hét darab 4 elemű részhalmazát. Igaz-e, hogy van olyan H-beli elem, amelyik legalább négy részhalmaznak eleme?

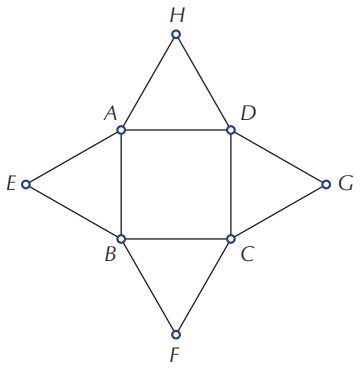
4. E2

Az alábbi feladatokat az emelt szintű érettségi vizsgák feladatai közül válogattuk.
I. (2015.) „Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.” Igaz vagy hamis az állítás?

II. (2015.) Egy kilenctagú társaságban kézfogással köszöntik egymást az emberek. Eddig 4 kézfogás történt. Hány különböző módon történhetett ez meg, ha senki sem fogott kezet egynél többször, és a kézfogások sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

III. (2016.) Az A, B, C, D, E, F, G, H pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az A csúcsból indul ki!

IV. (2020.) Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.
a) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban?
b) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!



V. (2020.) Egy n pontú teljes gráf egyik élét pirosra színeztük ($n \geq 3$). Ezután a többi él közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott élnek és a pirosra színezett élnek van közös csúcsa, a B esemény pedig az, hogy nincs közös csúcsuk. Ha az A és a B esemény egyenlő valószínűségű, akkor hány pontja van a gráfnak?

VII. (2017.) Egy tízpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három kiválasztott él a gráfnak egy körét alkotja!

VIII. (2015.) Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei!

5. E2 Hat ember találkozott egy összejövetelen, többen kezet fogtak egymással. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük három ember úgy, hogy vagy mindannyian kezet fogtak egymással, vagy egyikük sem fogott kezet a másik két emberrel!
(A feladat gráfelméleti átfogalmazása: Bizonyítsuk be, hogy bármely 6 pontú, egyszerű gráfban kiválasztható három csúcs úgy, hogy közülük vagy mindegyik pont össze van kötve a másik kettővel, vagy semelyik két pont között nincs él!)

6. V Mutassuk meg, hogy 6 irracionális szám közül mindig kiválasztható három olyan, amelyek közül bármely kettő összege irracionális! Igaz-e az állítás 5 irracionális számra?

7. V Bizonyítsuk be, hogy bármely egyszerű G gráfra igaz, hogy G vagy $\overline{G}$ összefüggő!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 373–482, 526–561.

TELJES INDUKCIÓ (Olvasmány)

A természettudományokban gyakran találkozunk azzal a jelenséggel, amikor a tudósok egyedi kísérletekből következtetnek az általános törvényszerűségekre. Ez a következtetési mód az *indukció*. A tudósok sokszor tévednek; ekkor finomítják vagy elvetik az eredeti hipotézisüket. Néha azonban megerősítő, majd ellenőrző kísérletek alapján kiderül, hogy a következtetésük helyes. Ekkor a megismerési folyamat következő lépése megvizsgálni, hogy mik a tétel következményei, és hogyan hasznosíthatók az eredmények.

A matematikában a megerősítő példák általában nem bizonyító erejűek, legfeljebb csak az indukciós sejtés igazságát valószínűsítik. Hogyan tudjuk eldönteni, hogy egy konkrét sejtés helyes-e? Van-e olyan módszer a matematikában, amellyel **bizonyíthatjuk** az egyedi esetekre tapasztalt törvényszerűségekből levont általános érvényű tétel igazságát?

Ilyen módszerek léteznek, az egyik bizonyítási eljárással, a *teljes indukció* elvével meg is ismerkedünk. (Néha nevezik *matematikai indukció*nak is.)

Teljes indukcióval olyan állításokat bizonyíthatunk, amelyek pozitív egész számokra érvényesek. A **teljes indukció elve** a következő:

> Egy állítás minden n pozitív egész számra érvényes, ha
> (1) az állítás teljesül $n = 1$-re, illetve a legkisebb olyan n-re, amire az állítás értelmezhető;
> (2) és abból a feltevésből, hogy a k pozitív egész számra igaz az állítás, belátható, hogy $k + 1$-re is igaz.

A fentiekből következik, hogy az állítás adott kezdőszámtól minden pozitív egész számra igaz, mert a kezdőszámból kiindulva minden pozitív egészhez eljuthatunk rákövetkező egész számokon keresztül.

Az elvet szemléltethetjük egy „végtelen magas” lépcsővel. Milyen feltételek esetén tudunk minden egyes lépcsőfokra fellépni? (Nyilván a fokokra lépést egyesével nem ellenőrizhetjük, hiszen végtelen sok lépcsőfok van – annyi, ahány pozitív egész szám.)

Az első feltétel az, hogy rá tudjunk lépni az első lépcsőfokra; ezt biztosítja (1).

A második feltétel pedig a továbblépés lehetősége: azaz ha már ráléptünk valamelyik lépcsőfokra, mondjuk a k-adikra, akkor rá tudjunk lépni a következőre, a $(k + 1)$-edik fokra is. Ezt a (2) feltétel biztosítja.

Ebből a két feltételből már következik, hogy bármelyik lépcsőfokra eljuthatunk. (1) miatt ráléphetünk az első lépcsőfokra; (2) miatt az elsőről a másodikra léphetünk; ismét (2) miatt a másodikról a harmadikra; (2) miatt a harmadikról a negyedikre és így tovább. A teljes indukció elve éppen azt mondja ki, hogy a két feltétel teljesülése esetén előbb-utóbb mindegyik lépcsőfokra fellépünk.

1. példa A teljes indukció elvét bizonyítási módszerként alkalmazzák a matematikában. Korábban már mi is alkalmaztuk az indukciós gondolatmenetet, például akkor, amikor megmutattuk, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában az elemek összege 2^n.

Itt az állítás láthatóan igaz volt a kezdeti sorokra, tehát az első sorban az elemek összege 2^1. És mivel észrevettük, hogy a rákövetkező sorban az elemek összege kétszerese az előző sor összegének, ebből következtettünk a $(k + 1)$-edik sorbeli 2^{k+1} összegre. A kettőhatvány-tulajdonság „öröklődésének" igazolása valójában a teljes indukció burkolt alkalmazása volt.

A következő példában részletezzük a teljes indukciós bizonyítás lépéseit.

2. példa Bizonyítsuk be, hogy $4^n - 3n - 1$ minden pozitív egész n szám esetén osztható 9-cel!

Megoldás 1. lépés: megnézzük, hogy $n = 1$-re igaz-e az állítás.

Ha $n = 1$, akkor $4^n - 3n - 1 = 4^1 - 3 \cdot 1 - 1 = 0$, s ez valóban osztható 9-cel. Az állítás tehát $n = 1$-re igaz.

2. lépés:

a) Feltesszük, hogy az állítás $n = k$-ra igaz, azaz: $9 \mid (4^k - 3k - 1)$.

(Ezt nevezzük *indukciós feltevés*nek.)

b) Megvizsgáljuk, hogy $n = k$-ról $n = (k + 1)$-re „öröklődik-e" az állítás. Azaz ha az állítás igaz $n = k$-ra, ebből következik-e, hogy igaz $n = (k + 1)$-re is?

A $4^n - 3n - 1$ kifejezés $n = (k + 1)$-re $4^{k+1} - 3(k + 1) - 1$ alakú. A célállítás $9 \mid (4^{k+1} - 3(k + 1) - 1)$, ezt kell igazolnunk. Felhasználjuk az indukciós feltevést, ennek érdekében az igazolandó állításban szereplő kifejezést átalakítjuk:

$4^{k+1} - 3(k + 1) - 1 = 4 \cdot 4^k - 3k - 4 = 4 \cdot (4^k - 3k - 1) + 9k$.

A kifejezés első tagja az indukciós feltevés alapján osztható 9-cel; a második tag, $9k$ szintén osztható 9-cel; tehát $9 \mid (4 \cdot (4^k - 3k - 1) + 9k)$.

Készen vagyunk: a teljes indukció elve alapján $9 \mid (4^n - 3n - 1)$ minden pozitív egész n számra érvényes. (Sőt láthatóan $n = 0$ esetén is teljesül az oszthatóság.)

Megjegyzések

1. Az indukciós feltevést a bizonyításban fel kell használnunk, különben a bizonyítás nem a teljes indukció elvén alapszik. Ezért ennek megfelelően alakítottuk át a célállítást.

2. Az indukciós feltevés $9 \mid (4^k - 3k - 1)$ és a bizonyítandó állítás $9 \mid (4^n - 3n - 1)$ alakilag megegyeznek. A teljes indukció alkalmazásakor éppen az az óriási segítség, hogy nem közvetlenül magát az állítást igazoljuk, hanem annak egy „öröklődött" alakját: $9 \mid (4^n - 3n - 1)$ *helyett* elegendő $9 \mid (4^{k+1} - 3(k + 1) - 1)$ teljesülése, *ha* $9 \mid (4^k - 3k - 1)$ már teljesült.

3. A bizonyítás során eljárhatunk másképpen is. Ha $A = 4^k - 3k - 1$ és $B = 4 \cdot 4^k - 3k - 4$, akkor a $9 \mid A \Rightarrow 9 \mid B$ következményt kell igazolnunk. Ehhez elegendő belátni, hogy például $9 \mid (B - A)$, azaz $9 \mid (3 \cdot 4^k - 3) \Leftrightarrow 9 \mid (3 \cdot (4^k - 1)) \Leftrightarrow 3 \mid (4^k - 1)$. Ez pedig nyilván igaz, mert 4^k maradéka 3-mal osztva 1.

4. Nem kötelező a teljes indukció alkalmazása. Más jellegű bizonyítás adható például a binomiális tétel felhasználásával.

3. példa Igazoljuk, hogy $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ minden n pozitív egész számra.

Megoldás A teljes indukció elvét alkalmazzuk.

1. Az állítás $n = 1$-re igaz: $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6}$.

2. *a)* Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$-ra igaz, azaz $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

2. *b)* Kérdés, hogy az állítás $n = (k + 1)$-re is igaz-e? Azaz $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$ teljesül-e?

Bizonyítanunk kell tehát, hogy $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. A bal oldalon az indukciós feltevés miatt $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, így a bizonyítandó állítás $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ alakú. Szorzunk 6-tal, osztunk $(k+1)$-gyel, bizonyítandó: $k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3)$. A szorzások elvégzése után a $2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$ azonosságot kapjuk, így az eredeti állítást igazoltuk.

Megjegyzés

Az összegzés eredményét, az $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ zárt alakot „készen kaptuk". Ez nincs mindig így, gyakran nekünk kell megsejteni a célállításokat. Hogyan lehet rájönni például erre a formulára?

Már a XIII. századi kínai könyvekben, Jang Huj és Csu Si-csie matematikusok műveiben is megtalálható az első n természetes szám négyzetének az összegét meghatározó eljárás. A négyzetszámoknak négyzeteket feleltettek meg, és a területek összegzését egy ügyes geometriai konstrukcióval oldották meg. (Ez tehát egy „rajzos bizonyítás" volt.)

Egy másik lehetőség alapja a következő megfigyelés.

$\frac{1^2}{1} = 1 = \frac{3}{3}$, $\frac{1^2+2^2}{1+2} = \frac{5}{3}$, $\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$, $\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1+2+3+4} = \frac{30}{10} = \frac{9}{3}$ stb.

A fentiek alapján az $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n} = \frac{2n+1}{3}$ összefüggés sejthető meg, ami átalakítva

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (1+2+\ldots+n)\cdot\frac{2n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}$, és ez éppen a kívánt alak.

4. példa Mennyi az első 100 páratlan pozitív egész szám összege?

Megoldás Használhatnánk a párbaállítás módszerét, de most teljes indukciót alkalmazunk. Először megsejtjük a bizonyítandó állítást.

$1 + 3 = 4$; $1 + 3 + 5 = 9$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$; $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. A sejtés: az első n páratlan szám összege n^2. Ez formailag az $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ egyenlőség bizonyítását jelenti.

1. Az állítás $n = 1$-re igaz: $1 = 1^2$. (Itt most 1-et egytagú összegnek tekintettük.)

2. *a)* Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$-ra igaz: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$.

2. *b)* Igazolandó, hogy ekkor az állítás öröklődik $n = (k+1)$-re, azaz

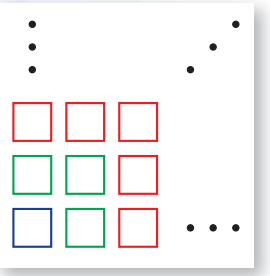
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2.$$

A bal oldalon az első k darab tag helyére beírjuk az indukciós feltevést. A bizonyítandó állítás ekkor:

$k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$.

Ez pedig azonosság, tehát az állítást beláttuk.

Az első n páratlan szám összege n^2; az első 100 páratlan (pozitív egész) szám összege 100^2.



Megjegyzés

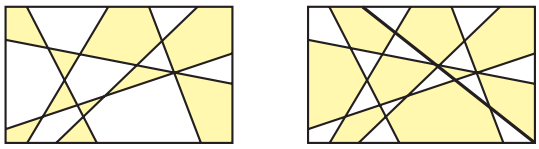
Az ábrán egy rajzos bizonyítás látható, az ókori matematikusok „receptje" alapján.

5. példa Egy füzetlapot egyenesek berajzolásával sokszögekre bontottunk. Bizonyítsuk be, hogy a füzetlap mindig kifesthető két színnel úgy, hogy minden sokszöglap egyszínű legyen, és a közös határral rendelkező sokszögek különböző színűek legyenek *(ábra)*!

Megoldás Az egyenesek számára vonatkozó teljes indukciót alkalmazhatunk.

$n = 1$ egyenes esetén az állítás nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy $n = k$ egyenest felvéve létezik megfelelő színezés (indukciós feltevés). Ekkor az $n = (k+1)$-edik egyenest felvéve is megfelelő színezéshez jutunk, ha ennek egyik félsíkjában minden tartomány színét megcseréljük. (Így sem az egyenes két félsíkjában, sem az egyenes vonalában nem lesznek azonos színű szomszédos tartományok.)



Az öröklődést és így az állítást is bizonyítottuk.

A TELJES INDUKCIÓ TOVÁBBI ALKALMAZÁSAI

A teljes indukció elvét más esetekben is alkalmazhatjuk. Előfordulhat, hogy az állítás minden természetes számra, azaz $n = 0$-ra is igaz. (Ilyen volt a 2. példa is.) Ekkor az első lépésben $n = 0$-ra igazoljuk az állítást, majd ezután mutatjuk meg az $n = k \rightarrow n = k + 1$ öröklődést.

Egy másik lehetőség, hogy a pozitív egész számok valamely szűkebb részhalmazára igaz csak az állítás. Hogyan bizonyítsunk, ha például ez a részhalmaz $A = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, vagy $C = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$?

Az A esetben az első lépésben $n = 5$-re igazoljuk az állítást, majd $n = k$-ról $n = (k + 1)$-re lépünk tovább. A B esetben a pozitív páros számok közül először $n = 2$-re mutatjuk meg az állítás teljesülését, ezután $n = k$-ról $n = (k + 2)$-re léphetünk. Végül a C esetben $n = 1$-re bizonyítunk, és a $k \rightarrow k + 3$ öröklődést igazoljuk.

Nehezebb feladatok esetén az is előfordulhat, hogy az öröklődés bizonyításához több korábbi feltevésre is szükség van. Például ha az állításokat A_1, A_2, A_3, … módon jelöljük, előfordulhat, hogy A_{k+1} igazolásához szükséges A_k és A_{k-1} érvényességének az ismerete is. Ilyenkor két kezdőállításról, A_1-ről és A_2-ről is meg kell mutatni, hogy teljesül. (Sőt még az is előfordulhat, hogy A_{k+1} igazolásához feltesszük az összes korábbi A_1, A_2, … , A_k állítás érvényességét.)

6. példa Igaz-e, hogy 10 minden pozitív egész kitevőjű hatványa előáll két pozitív négyzetszám összegeként?

Megoldás $10 = 1^2 + 3^2$ és $100 = 6^2 + 8^2$. Megmutatjuk, hogy ha 10^k felírható két pozitív négyzetszám összegeként, akkor 10^{k+2} is.

Legyen $10^k = a^2 + b^2$ (k, a, b pozitív egészek). Ekkor

$10^{k+2} = 10^2 \cdot 10^k = 10^2 \cdot (a^2 + b^2) = 10^2a^2 + 10^2b^2 = (10a)^2 + (10b)^2$.

Ezzel az öröklődést bebizonyítottuk k-ról $(k + 2)$-re.

Készen vagyunk. Láttuk, hogy 10^n felírható $n = 1$-re és $n = 2$-re is két pozitív négyzetszám összegeként; s igazoltuk, hogy ha 10^k felírható, akkor 10^{k+2} is. A teljes indukció elve miatt ebből már következik, hogy 10^n minden pozitív n-re előállítható két pozitív négyzetszám összegeként.

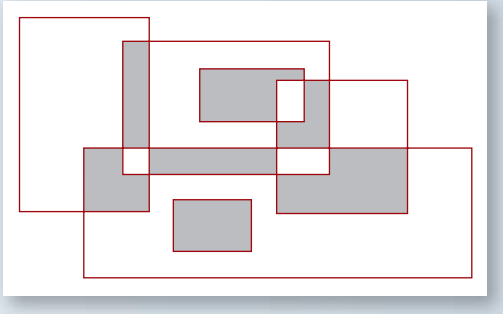
AMIKOR NEM HASZNÁLHATUNK TELJES INDUKCIÓT

A teljes indukció bizonyos feladattípusok esetén nagyon erős módszer, de óvatosan kell alkalmaznunk, mert nem mindig használható. Néhány példát mutatunk az alkalmazás „veszélyeire”.

7. példa (Megpróbáljuk az 5. példát általánosítani téglalapokra.)

Néhány téglalap a síkot tartományokra bontja. (Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a téglalapok oldalai párhuzamosak.) Igaz-e, hogy a tartományokat kifesthetjük két színnel úgy, hogy a közös határvonallal rendelkező tartományok különböző színűek legyenek? (Minden tartomány teljes egészében egyszínű.)

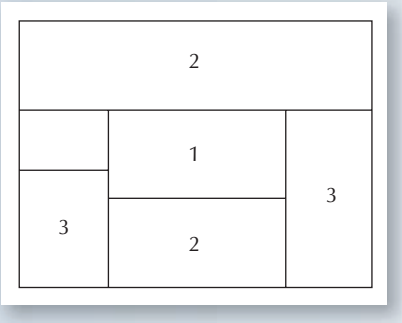
Az ábra egy megfelelő színezést mutat.



Megoldás Az egyenesek esetén adott gondolatmenetet látszólag megismételhetjük.

Egy téglalap esetén van jó színezés. ($n = 1$ eset.)

Tegyük fel, hogy n számú téglalap esetén már van egy jó színezésünk. Ekkor az $(n + 1)$-edik téglalap felvételekor, például a belsejében, minden tartomány színét az ellenkezőjére változtatjuk. Így ha volt egy jó színezésünk n téglalapra, akkor lesz $(n + 1)$-re is, vagyis igazoltuk az $n \to (n + 1)$ öröklődést. A válaszunk tehát igenlő.



Ez a megoldás azonban **nem jó,** nem veszi figyelembe a téglalap sajátosságait.

Az ábrán látható, hogy az 1. és 2. szín felhasználása után szükségünk van egy 3. színre is, mert a 3. téglalap két korábbi, különböző színű téglalapnak is szomszédja. (Ha a téglalap csúcsait és éleit egy gráf pontjainak és éleinek fogjuk fel, akkor a harmadfokú pont esetében mindig fennáll ez a helyzet.)

Sőt az ábra azt mutatja, hogy ennél a konstrukciónál még három szín sem elegendő, az utolsó tartomány színezéséhez szükségünk van egy negyedik színre.

Megjegyzés

Szép és mély matematikai tétel, hogy 4 színnel viszont már minden térkép megfelelően színezhető.

8. példa Igaz-e, hogy $3 \mid (2^n + 3^n + 5^n)$, ha n természetes szám? Alkalmazzunk teljes indukciót!

„Megoldás” Az állítás $n = 0$-ra teljesül: $3 \mid (2^0 + 3^0 + 5^0)$, azaz $3 \mid 3$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, azaz $3 \mid (2^k + 3^k + 5^k)$. Ekkor igazolnunk kell, hogy az állítás igaz $n = k + 1$-re is, azaz $3 \mid (2^{k+1} + 3^{k+1} + 5^{k+1})$.

A célállítást átalakítjuk: $2^{k+1} + 3^{k+1} + 5^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k + 5 \cdot 5^k = 2 \cdot (2^k + 3^k + 5^k) + 3^k + 3 \cdot 5^k$. Az indukciós feltevés miatt mindhárom tag osztható 3-mal, ezzel beláttuk az öröklődést.

Az állítás tehát minden természetes számra igaz.

De a bizonyítás **biztosan nem jó,** például $n = 2$-re $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, és ez nem osztható 3-mal. Megtalálod a hibát?

(Az indukciós feltevés csak $k = 0$-ra osztható 3-mal, míg a céllállításban a 3^k tag csak $k > 0$-ra.)

A 8. kitűzött feladat is egy hibás bizonyításról szól.

FELADATOK

1. E1 Adjunk teljes indukciós bizonyítást arra a tételre, hogy az n elemű halmaznak 2^n számú részhalmaza van!

2. E1 $A\ 16 \mid (5^n - 4n - 1)$ $(n \in \mathbf{N})$ állítást korábban már igazoltuk a binomiális tétel segítségével. Bizonyítsuk be az állítást a teljes indukció elvének felhasználásával is!

3. E1 Mennyi $N = 23^2 + 24^2 + 25^2 + \ldots + 91^2$? Mennyi $K = 23^2 + 24^2 + 25^2 + \ldots + n^2$?

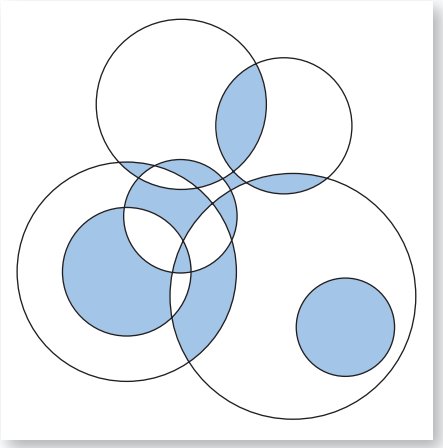
4. E1 Milyen n természetes számra teljesül, hogy $2^n > n^2$?

5. E1 Igazoljuk, hogy $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$! ($n$ pozitív egész szám)

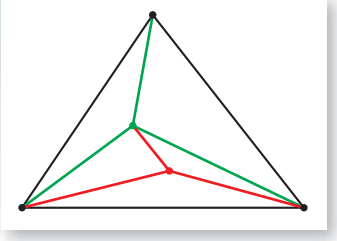
6. E1 Számítsuk ki a $K = 12^3 + 14^3 + 16^3 + \ldots + 44^3$ összeg értékét!

7. V Bizonyítsuk be, hogy síkbeli konkáv n-szög belső szögeinek összege is $(n - 2) \cdot 180°$!

8. E2 A síkon adott n számú kör, amik a síkot olyan tartományokra bontják, amelyeket körívek határolnak. Bizonyítsuk be, hogy a tartományokat kifesthetjük két színnel úgy, hogy a közös határvonallal rendelkező tartományok különböző színűek legyenek! (Minden tartomány teljes egészében egyszínű.)



9. E1 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Feladat: Bontsunk fel egy háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy bárhogyan kiválasztva három pontot a felbontást adó háromszögek csúcsai közül, azok ne essenek egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy a felbontásban szereplő kis háromszögek száma páratlan.
„Megoldás": Tegyük fel, hogy a háromszög belsejében felvett n darab pont h_n darab kis háromszögre bontja fel az adott háromszöget (n pozitív egész szám). Indukciós gondolatmenettel igazoljuk, hogy h_n páratlan.
Egy pontot a háromszög csúcsaival összekötve három kisebb háromszöget kapunk, tehát $h_1 = 3$ (ez páratlan).
Minden következő pont valamelyik már meglévő háromszög belsejébe kerül. Az új pontot a bennfoglaló háromszög csúcsaival összekötve a háromszögek száma 2-vel nő, így ha h_n páratlan volt, akkor h_{n+1} is páratlan marad.
Ezzel az állítást igazoltuk.



10. E1 Az alábbi feladatokat az emelt szintű érettségi vizsgák feladatai közül válogattuk.
I. (2017.) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!

II. (2017.) A pozitív páratlan számokat „háromszög" alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll *(lásd az ábrát is)*.
Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege n^3 ($n \in \mathbf{Z}^+$).

1	3	7	13	21
5	9	15	23	
11	17	25		
19	27			
29				

III. (2019.) Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
…										…

A fehér, illetve szürke színű „L alakú" sávokban lévő számok összege:
$L_1 = 1$,
$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8$,
$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$, ...
Igazolja, hogy $L_n = n^3$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 96–132.

51. VÉGTELEN HALMAZOK

$A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{-6, -5, -4, -3, \ldots\}$, $C = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, $D = \{17, 21, 25, 29, \ldots\}$, $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbf{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $[0; 1]$, egy egyenes vagy egy körlemez pontjai *végtelen elemszámú* (vagy másképpen *végtelen*) halmazt határoznak meg. (A a nemnegatív páros számok, C a pozitív négyzetszámok halmaza, D elemei pedig 4-gyel osztva 1 maradékot adnak.)

Korábban láttuk, hogy a végtelen halmazok összehasonlításakor feltett bizonyos kérdéseknek („Melyik halmaznak van több eleme?", „Melyik halmaz elemszáma a nagyobb?") *nincs értelme*. Mondhatjuk-e vajon, hogy $\mathbf{N} \subset B$, és B-nek 6-tal több eleme van, mint a természetes számok halmazának? Hiszen a táblázatban látható megfeleltetés alapján éppenséggel úgy is tűnhet, hogy $\mathbf{N}$ elemszáma „nagyobb" 4-gyel.

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
B					-6	-5	-4	-3	-2	…

(Az $\mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ és B halmazok elemei között létesítettünk *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést*. Persze más hozzárendeléssel a 4 helyett egyéb elemszám-eltéréseket is „kimutathatnánk".)

Véges halmaz elemszámát mindig meghatározhatjuk a hagyományos megszámolással. Van azonban egy másik lehetőség is. Legyen például $H_1 = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ és $H_2 = \{a, b, c, d\}$. Ha tudjuk, hogy H_1 négy elemű halmaz, akkor H_2 elemszámát úgy is meghatározhatjuk, hogy H_1 és H_2 elemei között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesítünk, például a táblázatban jelölt módon.

H_1	h_1	h_2	h_3	h_4
H_2	a	b	c	d
	1	2	3	4

Ha pedig találtunk ilyen hozzárendelést, és $|H_1| = 4$, akkor ebből $|H_2| = 4$ is következik.

A halmazok elemei közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés bonyolultabb eljárásnak tűnik, mint az egyszerű megszámolás, de végtelen halmazok körében a számolást nem alkalmazhatjuk. A párba állítást viszont véges és végtelen halmazok körében is végrehajthatjuk. Néhány példa:

– Egy (sok résztvevős) tánciskolában a számolás helyett egyszerűbb párkereséssel eldönteni, hogy mindenkinek van-e párja.
– Hogy csata előtt egy huszárcsapatból hiányzik-e valaki, legegyszerűbben úgy dönthető el, hogy a vitézek lóra pattannak.
– Végül maga a számolás is tekinthető az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmaz elemeivel történő párba állításnak.

A végtelen elemszámú halmazok jellemzésére (az elemszám fogalom általánosítására) bevezetjük a **számosság** fogalmát.

Végtelen halmazok esetén akkor mondjuk, hogy két halmaz **számossága** megegyezik, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést tudunk létesíteni.

(A számosság definíciójára később még visszatérünk.)

1. példa Bizonyítsuk be, hogy a lecke elején megadott A, B, C, D, $\mathbf{N}$ és $\mathbf{Z}$ halmazok számossága egyenlő!

Megoldás Megmutatjuk, hogy megadható például $\mathbf{N}$ és a többi halmaz között kölcsönösen egyértelmű leképezés. Legyen $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, ekkor ilyen leképezés például:

ha $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, akkor $a \in A$ esetén $a \leftrightarrow n = \frac{a}{2}$ (vagy $n \leftrightarrow 2n$);

ha $B = \{-6, -5, -4, -3, \ldots\}$, akkor $b \in B$ esetén $b \leftrightarrow n = b + 6$ (vagy $n \leftrightarrow n - 6$);

ha $C = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, akkor $c \in C$ esetén $c \leftrightarrow n = \sqrt{c} - 1$ (vagy $n \leftrightarrow (n + 1)^2$);

ha $D = \{17, 21, 25, 29, \ldots\}$, akkor $d \in D$ esetén $d \leftrightarrow n = \frac{d - 17}{4}$ (vagy $n \leftrightarrow 4n + 17$).

Végül **N** és **Z** között egy megfelelő hozzárendelést mutat az alábbi táblázat.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
Z	0	−1	1	−2	2	−3	3	−4	4	…

(A hozzárendelést képlettel is megadhatjuk. Például ha $n \in \mathbf{N}$ páros, akkor $z = \frac{n}{2}$; míg ha n páratlan, akkor $z = -\frac{n+1}{2}$, ahol $z \in \mathbf{Z}$.)

A leképezések kölcsönösen egyértelműek. Például a C halmaz esetén $c = (n+1)^2$-ből $n = \sqrt{c} - 1$ következik ($c > 0$).

Az A, B, C, D és **Z** halmazok számossága tehát megegyezik **N** számosságával. Ebből pedig már következik, hogy A és B, A és C, … , D és **Z** halmazok számossága is megegyezik. Ezt igazolhatjuk közvetlen megfeleltetéssel is páronként két-két halmazra. Például A és B elemeit $a = 2n$ és $b = n - 6$ miatt egyszerűen $a = 2(b + 6)$ módon feleltethetjük meg egymásnak (kölcsönösen egyértelműen), és a többi halmazpárra is hasonlóan járhatunk el.

Tehát valóban, az A, B, C, D, **N** és **Z** halmazok számossága egyenlő.

Mivel **N** elemei sorozatba rendezhetők, ezt a számosságot *megszámlálhatóan végtelen*nek nevezzük.

Definíció

Egy H halmazt **megszámlálhatóan végtelen számosságúnak** (vagy röviden **megszámlálhatóan végtelennek**) nevezünk, ha H és **N** elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Az 1. példában éppen azt mutattuk meg, hogy A, B, C, D, **Z** megszámlálhatóan végtelen halmazok.

A példák alapján megfogalmazhatunk néhány tulajdonságot.

Tulajdonságok:

Ha a H_1 és H_2, valamint H_2 és H_3 halmazok elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, akkor H_1 és H_3 elemei között is létesíthető kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Ha H megszámlálhatóan végtelen halmaz, akkor:
– elemei sorozatba rendezhetők;
– véges sok elemét elvéve vagy véges sok elemet hozzáadva továbbra is megszámlálhatóan végtelen marad.

Halmazműveletekkel is megfogalmazhatunk állításokat.

Ha H és L megszámlálhatóan végtelen halmazok, akkor
– $H \cup L$ is megszámlálhatóan végtelen;
– $H \cap L$ és $H \setminus L$ vagy megszámlálhatóan végtelen, vagy véges.

Ha H megszámlálhatóan végtelen és K véges halmaz, akkor
– $H \cup K$, $H \setminus K$ is megszámlálhatóan végtelen;
– $H \cap K$ pedig véges halmaz.

(A véges és a megszámlálhatóan végtelen halmazokat röviden *megszámlálható halmazoknak* is nevezzük. A fentiek alapján tehát megszámlálható halmazok uniója, metszete és különbsége is megszámlálható.)

Az állítások eléggé szemléletesek, legnehezebbnek talán a $H \cup L$ megszámlálhatóságára vonatkozó állítás tűnik. Ennek igazolása sem nehéz: ha $H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots\}$ és $L = \{l_1, l_2, l_3, \ldots\}$ közös elem nélküli megszámlálhatóan végtelen halmazok, akkor $H \cup L$ sorozatba rendezését elvégezhetjük például az alábbi módon:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$H \cup L$	h_1	l_1	h_2	l_2	h_3	l_3	h_4	l_4	h_5	…

Ha pedig $H \cap L \neq \emptyset$, akkor $H \cup L$ „számolásakor” egyszer számoljuk a közös elemeket.

(A gondolatmenetből az is következik, hogy 2-nél több, véges számú megszámlálhatóan végtelen halmaz egyesítése is megszámlálhatóan végtelen.)

Megemlíthetünk egy érdekes **következményt**.

Ha H megszámlálhatóan végtelen halmaz, $L \subset H$ és $|L| = \infty$ (azaz L elemszáma végtelen), akkor
– L is megszámlálhatóan végtelen halmaz;
– H, valamint valódi részhalmaza, L elemei között létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés.

(Szavakban: megszámlálhatóan végtelen halmaz végtelen részhalmaza is megszámlálhatóan végtelen.)

Megjegyzések

1. Találkozhatunk olyan szakirodalommal is, ahol a pozitív egész számok halmazát tekintik a természetes számok halmazának. A fenti észrevételek alapján nincs elvi jelentősége, hogy egy H halmaz elemeire vonatkozó kölcsönösen egyértelmű leképezést az $\mathbf{N}$ vagy $\mathbf{Z}^+$ halmazokkal végezzük. Ha kényelmes, dolgozhatunk a pozitív egész számokkal is, vagy a természetes számok bármely végtelen részhalmazával.

2. Az azonos számosságú halmazokat röviden *(számosság szerint) ekvivalens* halmazoknak is nevezik, és a $\sim$ szimbólummal jelölik. Például a fenti példában $A \sim B \sim C \sim D \sim \mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$.

Sokféle végtelen halmaz létezik. A racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza vajon megszámlálhatóan végtelen vagy sem? A racionális számok halmaza *mindenütt sűrű* (bármely két eleme között van egy további); úgy tűnik, hogy e tulajdonságuk miatt a racionális számok halmaza már nem rendezhető sorozatba. Ezért igen meglepő az alábbi tétel.

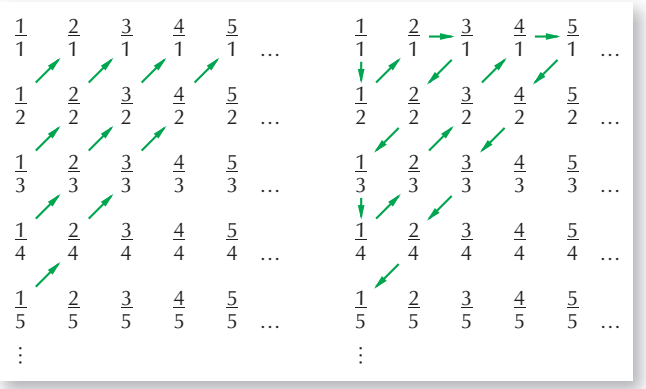
Tétel

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás Először a pozitív racionális számok és a természetes számok halmaza között létesítünk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Az első táblázatban az $\frac{a}{b}$ alakú törteket soroltuk fel (a, b pozitív egészek) úgy, hogy az első sorba az 1 nevezőjű, a második sorba a 2 nevezőjű, a harmadik sorba a 3 nevezőjű törtek kerültek és így tovább.

Az ún. Cantor-féle módszert alkalmazva nyilakkal jelöltük a bejárási sorrendet:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \ldots \text{ stb.}$$



A sorozatba rendezésből következik, hogy az $\frac{a}{b}$ alakú törtek száma (ahol a, b pozitív egészek) megszámlálhatóan végtelen, hiszen a felsorolás sorrendjében a természetes számok és a törtek között kölcsönösen egyértelmű leképezést adtunk meg. Ekkor azonban a pozitív racionális számok is megszámlálhatóan végtelen sokan vannak, hiszen az előző felsorolásból csak ki kell hagynunk az egyszerűsíthető törteket: $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \ldots$ stb.

Georg Ferdinand Cantor

Ezek az ismeretek jórészt *Georg Ferdinand Cantor* (1845–1918) német matematikus munkásságának köszönhetők. Ő volt a halmazelmélet, általában a modern matematika egyik megalapozója.

A negatív racionális számok halmaza szintén megszámlálhatóan végtelen, mert csak előjelben tér el az előző halmaztól. Mivel pedig $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \{0\}$, azaz a racionális számok halmaza három megszámlálható halmaz egyesítése, így a racionális számok halmaza is megszámlálhatóan végtelen: $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$.

Másképpen is eljárhatunk. A második táblázatban a jól használható átlós bejárást váltakozó irányban alkalmaztuk, s a törtek közül már eleve kihagytuk az egyszerűsíthetőket.

Egy harmadik lehetőséget, a „négyzetes bejárást” a kitűzött feladatok között ismertetünk.

Meglepő módon tehát a racionális számok is megszámlálhatók, mint az eddig elemzett példáinkban szereplő halmazok. Felvetődik a kérdés: van-e egyáltalán nem megszámlálhatóan végtelen halmaz?

Ezzel a matematika, ezen belül a halmazelmélet igen nehéz területéhez érkeztünk. A kérdésre igenlő a válasz, erre lejjebb mutatunk is példát. Nem megszámlálhatóan végtelen halmaz például az irracionális számok vagy a valós számok halmaza, illetve ezek $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$, $\mathbf{Q}^{+*}$ stb. részhalmazai; vagy a szakasz, egyenes, körív, körlemez, sokszögek stb. pontjainak halmaza.

A SZÁMOSSÁG FOGALMA

Legyenek G és H végtelen halmazok. Tudjuk, hogy ha elemeik között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, akkor **számosságuk egyenlő**: $G \sim H$.

Megjegyzés

Tegyük fel, hogy G és H között nem létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ekkor elvileg három eset lehetséges:

1. Az egyik halmaznak, pl. G-nek van olyan G^* részhalmaza, ami kölcsönösen egyértelműen leképezhető H-ra, , de a H halmaznak nincs ilyen részhalmaza. $G^* \subseteq G$, $G^* \sim H$, de fordítva nem igaz.

2. G-nek is létezik G^*, H-nak is létezik H^* részhalmaza, amelyek kölcsönösen egyértelműen leképezhetők H-ra, illetve G-re: $G^* \subseteq G$, $G^* \sim H$, $H^* \subseteq H$, $H^* \sim G$.

3. G-nek nincs H-ra, H-nak nincs G-re kölcsönösen egyértelműen leképezhető részhalmaza.

Bebizonyítható (mi nem tesszük meg), hogy

– a 2. esetben G és H között is létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés, azaz ekkor $G \sim H$ is fennáll (vagyis a 2. eset ellentmondáshoz vezet); valamint

– a 3. eset sem fordulhat elő.

Az 1. esetben ($G^* \subseteq G$, $G^* \sim H$, de G és H nem ekvivalensek) azt mondjuk, hogy G **számossága nagyobb**, mint H számossága.

A 3. eset hiányából pedig a fentiek figyelembevételével az következik, hogy *bármely két (végtelen) halmaz számossága összehasonlítható.*

Könnyen igazolható, hogy bármely végtelen halmaznak van megszámlálható részhalmaza, tehát a végtelen halmazok körében a megszámlálhatóan végtelen számosság a „legszűkebb", a „legkisebb" számosság.

Végül egy igen mély matematikai tételt említünk meg. A végtelen halmazok számosságainak vizsgálatakor bebizonyították, hogy körükben is végtelen sok számosság létezik, és bármely számosságnál van nagyobb.

A számosság precíz definícióját a felsőbb matematikában adják meg. Az alábbiakban összefoglaljuk, amit a számosság fogalmáról, tulajdonságairól a középiskolában használunk.

A számosság az elemszám fogalmának általánosítása.

Véges halmazok számossága megegyezik az elemszámukkal.

Végtelen halmazok számossága egyenlő, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk.

Bármely két halmaz számosságát összehasonlíthatjuk. A „legszűkebb" vagy legkisebb végtelen számosság a **megszámlálhatóan végtelen**.

Nem megszámlálhatóan végtelen (kontinuum számosságú) halmaz például $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}^*$, $[a, b]$ vagy egy szakasz pontjainak halmaza.

(Megjegyezzük, hogy egyes könyvekben a számosságot csak végtelen halmazokra értelmezik. Mivel egyenlő elemszámú véges halmazok elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, a számosság fogalma kiterjeszthető a véges halmazokra is.)

Kiegészítő anyag

Egy konkrét, végtelen elemszámú halmazról bebizonyítjuk, hogy nem megszámlálhatóan végtelen számosságú.

Tétel

A $]0; 1[$ halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az intervallumba tartozó $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ számok megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. Ekkor tizedestört alakban írva a számok felsorolhatók:

(Itt x_{ij} jelenti az a_i szám tizedesvessző utáni j-edik számjegyét.)

$$a_1 = 0, x_{11}\ x_{12}\ x_{13} \ldots x_{1n} \ldots$$
$$a_2 = 0, x_{21}\ x_{22}\ x_{23} \ldots x_{2n} \ldots$$
$$a_3 = 0, x_{31}\ x_{32}\ x_{33} \ldots x_{3n} \ldots$$
$$\ldots$$
$$a_n = 0, x_{n1}\ x_{n2}\ x_{n3} \ldots x_{nn} \ldots$$
$$\ldots$$

Ezután megmutatjuk, hogy van olyan b szám, amely a fenti táblázatban nincs felsorolva. Legyen b tizedestört alakja $b = 0, y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n \ldots$, és b-t úgy konstruáljuk meg, hogy i-edik számjegye, y_i különbözzön az a_i szám i-edik számjegyétől, x_{ii}-től. Világos, hogy ezt minden i-re megtehetjük: $y_1 \neq x_{11}$, $y_2 \neq x_{22}$, $y_3 \neq x_{33}$ stb. mindig megoldható, és az is látszik, hogy b különbözik minden a_i számtól ($i \in \mathbf{N}^+$).

A felsorolásnál esetleg problémát jelenthet, hogy egyes racionális számok tizedestört alakja nem egyértelmű. (Például $0{,}24 = 0{,}23999\ldots$) Ezen úgy segítünk, hogy megállapodunk a véges alak használatában, például $0{,}24 = 0{,}24000\ldots$ módon. Viszont b előállításakor is ügyelnünk kell erre a kettősségre: b nem végződhet végtelen sok 9-esre, y_i értékeit ennek megfelelően kell megadnunk.

Egy konstrukció lehet például a következő:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_{ii} \neq 1, \\ 2, & \text{ha } x_{ii} = 1. \end{cases}$$

Készen vagyunk: abból a feltevésből, hogy a]0; 1[intervallum számai felsorolhatók, ellentmondásra jutottunk. Nem létezik tehát a pozitív egész számok halmaza és]0; 1[között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, azaz]0; 1[nem megszámlálhatóan végtelen halmaz.

Mivel a „legszűkebb" végtelen halmaz a pozitív egész (vagy ezzel ekvivalens) számok halmaza, a]0; 1[intervallum számossága nagyobb, mint $\mathbf{Z}^+$ számossága.

Ebből következik, hogy a valós számok részhalmaza sem megszámlálhatóan végtelen (]0; 1[$\subset \mathbf{R}$), és az irracionális számok $\mathbf{Q}^*$ halmaza sem az. ($\mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^* = \mathbf{R}$ miatt ha $\mathbf{Q}^*$ megszámlálható lenne, akkor $\mathbf{R}$ is megszámlálható lenne.)

2. példa Egy számítógépes játékban menekülő tengeralattjárót kell elfogni. A tengeralattjáró a $t = 0$ időpillanatban a derékszögű koordináta-rendszer origójából indul, és egy másodperc alatt az x tengely valamelyik rácspontjába ér. (Sebességvektora tehát $\mathbf{v}(a; 0)$, ahol a pozitív egész szám.) A tengeralattjáró sebessége állandó, haladás közben végig rejtve marad az üldözők előtt. Az üldözők minden másodperc végén valamely rácspontot ellenőrizhetik: ha a tengeralattjáró éppen ott van, akkor elfogják.

a) Van-e olyan stratégia, amellyel (előbb-utóbb) biztosan megtalálható a tengeralattjáró?

b) Az előző feladatot most annyiban nehezítjük, hogy a tengeralattjáró az x tengely negatív irányában is elindulhat. (Sebességvektora $\mathbf{v}(-a; 0)$ is lehet.) Ekkor vajon elfogható a tengeralattjáró?

Megoldás *a)* A tengeralattjáró látszólag nem fogható el, hiszen nem ismerjük a sebességét, ami végtelen sokféle lehet. De ez a végtelen *megszámlálható*.

Először feltesszük, hogy a tengeralattjáró sebessége 1. Az első másodperc végén az (1; 0) pontot ellenőrizzük.

Ha nem lett meg a tengeralattjáró, akkor a második másodpercben feltesszük, hogy sebessége 2. Ekkor 2 másodperc alatt $2 \cdot 2 = 4$ egység utat tett meg, tehát a (4; 0) rácspontban kell lennie; ott próbáljuk meg elkapni.

Ha most sem lett meg a tengeralattjáró, akkor tovább folytatjuk az eljárást: a t-edik másodpercben feltesszük, hogy sebessége t, és a $(t^2, 0)$ rácsponttal próbálkozunk. Világos, hogy ha a jármű sebessége v, akkor a v-edik másodpercben, a $(v^2; 0)$ rácspontban elkapható.

b) Egy lehetséges stratégia, hogy az előző megoldás alapján a sebességek szerint haladunk, s mindegyik sebességértékhez mindkét irányt kipróbáljuk. Az alábbi táblázat mutatja a stratégiát.

idő (mp)	1	2	3	4	5	6	7	stb.
feltett sebesség	+1	−1	+2	−2	+3	−3	+4	
rácspont	(1; 0)	(−2; 0)	(6; 0)	(−8; 0)	(15; 0)	(−18; 0)	(28; 0)	

Rendre feltesszük, hogy a tengeralattjáró sebessége 1, −1, 2, −2, 3, −3 stb. Ekkor például a $2t$-edik másodpercben a $-t$ sebességfeltevéssel élünk, és a $(-2t^2, 0)$ rácsponttal próbálkozunk. Előbb-utóbb minden lehetséges kezdősebességet kipróbálunk, tehát a tengeralattjárót biztosan megtaláljuk.

Ha például a tengeralattjáró sebessége $+v$, akkor ezt a $t = (2v - 1)$-edik másodpercben ellenőrizzük. A közben megtett út $v \cdot (2v - 1)$, az x tengely ezen pontjában keresünk.

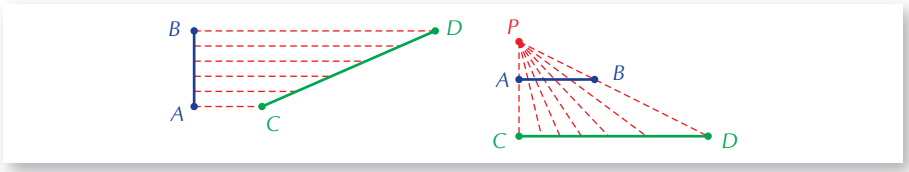
Megjegyzések

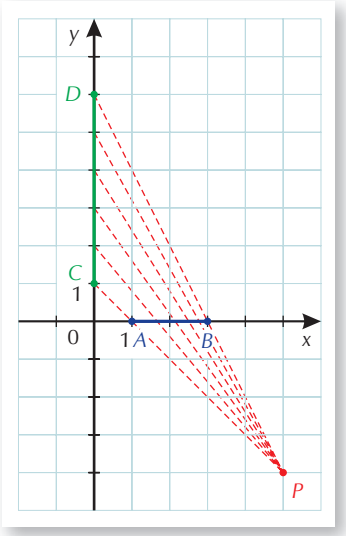
1. A két lehetséges irány helyett véges sok irányra is ugyanígy megoldható a feladat. (Például az x vagy y tengely valamelyik irányába lehet menekülni.)

2. Az is világos, hogy megengedhető a 0 sebesség is (tehát amikor a tengeralattjáró nem mozdul). Az ellenőrzés a (0; 0) ponttal kezdődik, majd hasonlóan sorba vehetjük a lehetséges sebességeket.

PONTHALMAZOK, ALAKZATOK LEKÉPEZÉSE

Kölcsönösen egyértelmű leképezést ponthalmazok között is létesíthetünk.

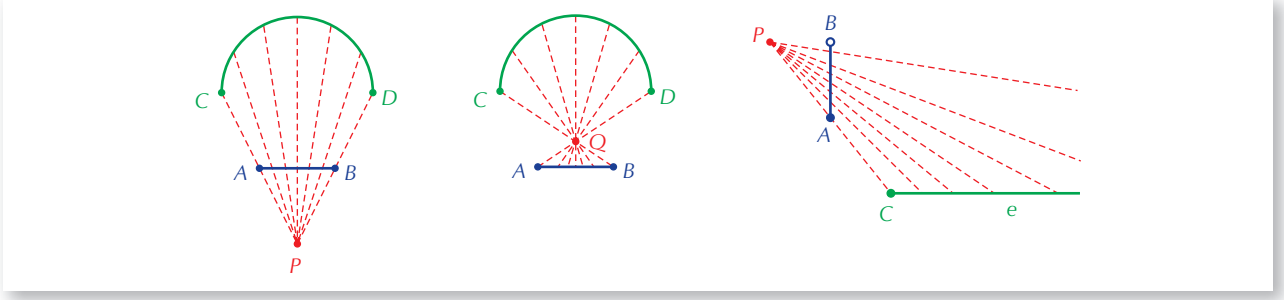




Az első ábrán a 2 hosszúságú AB szakaszt párhuzamos, a másodikon a P pontból ún. centrális vetítéssel, kölcsönösen egyértelműen képezzük le az 5 hosszú CD szakaszra. (Vagyis a két szakaszon „ugyanannyi" pont van.)

A leképezést algebrai formában is megadhatjuk. A harmadik ábrán az AB és CD szakaszokat a koordináta-rendszer tengelyein helyeztük el: $AB = [1; 3]$ és $CD = [1; 6]$. Az $a \in AB$ és $c \in CD$ számok közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $c \leftrightarrow \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}$ lehet. (A P pont az AC: $y = -x + 1$ és BD: $y = -2x + 6$ egyenesek $(5; -4)$ metszéspontja.)

A következő ábrán az AB szakasz és a CD körív pontjai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés látható (vetítés a P vagy Q pontból), míg az utolsó ábrán azt láthatjuk, hogy az AB félig nyílt szakasz és a C kezdőpontú e félegyenes pontjai is megfeleltethetők egymásnak.



Hasonló transzformációkkal már korábban is találkoztunk. Például ha két sokszög középpontosan hasonló, egyik a másikba átvihető vetítéssel; vagy szép példa két különböző sugarú, közös pont nélküli körlemez egymásra képezése a külső vagy belső hasonlósági pontjaik segítségével.

A félig zárt szakasz és félegyenes megfeleltetése érdekes problémát vet fel. Vajon egy zárt és egy félig zárt szakasz pontjai között létesíthetünk kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést?

3. példa Mutassuk meg, hogy az $A = [0; 1]$ és $B =]0; 1]$ intervallumok pontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak!

Megoldás Az A intervallumban „1-gyel több" pont van. A problémát úgy orvosoljuk, hogy megadunk egy (végtelen elemszámú) sorozatot B-ben (ami természetesen nem veszi fel a 0-t), legyen például ez a $b_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ sorozat. Ezt kipótoljuk az A-beli 0-val, kapjuk az $a_n = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ sorozatot. Ezután az $a_n \in A$ és $b_n \in B$ sorozatok azonos indexű tagjait megfeleltetjük egymásnak:

a_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	…
b_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	…

A sorozatban nem szereplő számok mindkét intervallumban benne vannak, így egymásnak megfeleltethetők. Az eljárással tehát A és B minden pontját sikerült kölcsönösen egyértelműen leképezni.

Azt is láthatjuk, hogy a módszer akkor is alkalmazható, ha 1-nél több, véges sok pontban különbözik a két intervallum. (Legfeljebb 1-nél több elemmel pótoljuk ki az egyik sorozatot.)

Így most már például egy szakasz és egy egyenes pontjait is megfeleltethetjük egymásnak: a szakaszt felbontjuk két szakaszra, az egyenest két félegyenesre, és a két-két rész között létesítünk leképezést.

További érdekes kérdések is felvethetők (például: egy szakasz és egy négyzetlap pontjai között van-e kölcsönösen egyértelmű leképezés), de ezek a nehéz problémák túlmutatnak a középiskolás tananyagon.

FELADATOK

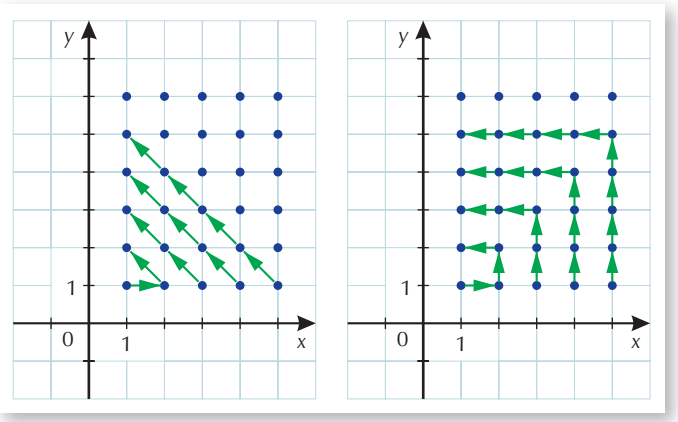
1. E1 Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az alábbi három állítás!
Ha A és B megszámlálhatóan végtelen számhalmazok, akkor
a) elemeik nagyság szerint növekvő sorozatba rendezhetők;
b) elemeik között van legkisebb vagy legnagyobb;
c) ha A valódi részhalmaza B-nek, akkor B számossága nagyobb.

2. E2 A lecke 2. példájában leírt számítógépes tengeralattjárós játékot nehezítjük.
A jármű az x tengely pozitív irányában halad, sebessége $\mathbf{v}(a; 0)$, ahol a pozitív egész szám. Most azonban nem tudjuk, hogy honnan indul: a $t = 0$ időpillanatban az x tengely bármely rácspontjában lehet. A tengeralattjáró sebessége állandó, haladás közben végig rejtve marad az üldözők előtt. Az üldözők minden időegységben valamely rácspontot ellenőrizhetik: ha a tengeralattjáró éppen ott van, akkor elfogják.
a) Van-e olyan stratégia, amellyel (előbb-utóbb) biztosan megtalálható a tengeralattjáró?
b) Egy további lehetséges nehezítés, ha a tengeralattjáró az x tengely negatív irányában is elindulhat (ismeretlen kezdőhelyről), vagy akár helyben is maradhat. (Sebességvektora tehát $\mathbf{v}(a; 0)$, ahol $a \in \mathbf{Z}$.) Ekkor vajon elfogható a tengeralattjáró?
c) Kérdezzünk tovább!

3. V A tengeralattjárós játékban a jármű a $t = 0$ időpillanatban a derékszögű koordináta-rendszer origójából indul, és egységnyi idő alatt az első síknegyed valamelyik rácspontjába ér. (Sebességvektora tehát $\mathbf{v}(a; b)$, ahol a és b pozitív egész számok.) A tengeralattjáró sebessége állandó, haladás közben végig rejtve marad az üldözők előtt. Az üldözők minden időegységben valamely rácspontot ellenőrizhetik: ha a tengeralattjáró éppen ott van, akkor elfogják.
a) Van-e olyan stratégia, amellyel (előbb-utóbb) biztosan megtalálható a tengeralattjáró?
b) Az előző feladatot most annyiban nehezítjük, hogy a tengeralattjáró a harmadik síknegyed felé is elindulhat. (Sebességvektora $\mathbf{v}(-a; -b)$ is lehet.) Ekkor vajon elfogható a tengeralattjáró?
c) És el lehet-e fogni akkor a tengeralattjárót, ha kezdéskor bármely síknegyed irányában elindulhat? (Azaz $\mathbf{v}(a; b)$ sebességvektorában a és b nemzérus egész számok.)

4. E2 Az $\frac{x}{y}$ alakú racionális számok ($x, y \in \mathbf{Z}^+$) a derékszögű koordináta-rendszerben úgy szemléltethetők, hogy az $\frac{x}{y}$ törtszámnak megfeleltetjük az $(x; y)$ pontot. A leckében igazoltuk, hogy ezen törtek – és ez alapján az első síknegyed rácspontjai is – sorozatba rendezhetők.

Az első ábrán az átlós bejárással számláljuk meg a rácspontokat, a bejárási sorrend (1; 1), (2; 1), (1; 2), (3; 1), (2; 2), (1; 3), (4; 1) stb.
A második ábrán a rácspontok ún. négyzetes bejárását szemléltettük. Ekkor a rácspontok sorrendje (1; 1), (2; 1), (2; 2), (1; 2), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (2; 3), (1; 3), (4; 1) és így tovább. Az egyes bejárásokban
a) melyik rácspont szerepel a 2012. helyen?
b) hányadik lépésben soroljuk fel például a (13; 15) rácspontot?



5.V A $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$ végtelen sok halmaz mindegyike megszámlálhatóan végtelen. Igazoljuk, hogy a halmazok egyesítése is megszámlálhatóan végtelen halmaz!

6. E2 Adjunk meg egy kölcsönösen egyértelmű leképezést az $A = [2; 5]$ és $B = [0; 12[\setminus \left\{2; 3; \frac{1}{8}; \frac{15}{16}; \frac{28}{29}\right\}$ halmazok között!

7. E2 Létesítsünk kölcsönösen egyértelmű leképezést
a) a $]0; 1[$ és $]0; \infty[$;
b) a $]0; 1[$ és $]-\infty; \infty[$
intervallumok pontjai között!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 261–269.

52. ÁLLÍTÁSOK, TÉTELEK, BIZONYÍTÁSOK

A **matematikai tételek** általában „ha A, akkor B" szerkezetűek. Itt az A állítás a feltétel (idegen szóval premissza), a B pedig a következmény (konklúzió). A jelölés történhet $A \Rightarrow B$ vagy $A \to B$ módon, a könyvek ebben a tekintetben nem egységesek.

Az $A \Rightarrow B$ kapcsolatot többféleképpen is kiolvashatjuk, például „A-ból következik B", „ha A igaz, akkor B is" vagy „A-nak *következménye* B". (Természetesen A és B összetett állítás is lehet.)

A tételben szereplő állítások viszonyát jellemezhetjük a **szükséges** vagy **elégséges feltétel** fogalmával is: A *elégséges feltétele* B-nek, vagy B *szükséges feltétele* A-nak. Ha az $A \Rightarrow B$ következmény mellett ennek megfordítása is igaz, azaz $B \Rightarrow A$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy A *szükséges és elégséges feltétele* B-nek. A kapcsolatot $A \Leftrightarrow B$ módon jelöljük, és többféleképpen is kiolvashatjuk: „A akkor és csak akkor teljesül, amikor B" vagy „A pontosan akkor teljesül, amikor B". Ekkor A-t és B-t *ekvivalens állítások*nak is nevezzük.

1. példa A síkbeli négyszögek körében tekintsük a következő nyolc állítást.

A_1: A négyszög szemközti oldalai egyenlők.
A_2: A négyszög szemközti oldalai párhuzamosak.
A_3: A négyszög szemközti szögei egyenlők.
A_4: A négyszög szomszédos szögei 180°-ra egészítik ki egymást.
A_5: A négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást.
A_6: A négyszög középpontosan szimmetrikus.
A_7: A négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú.
B: A négyszög paralelogramma.

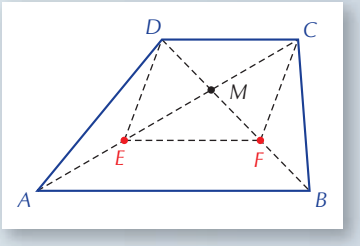
Megmutatható, hogy $A_i \Rightarrow B$ mindegyik A_i állításra igaz ($i = 1, 2, \dots, 7$), valamint az is bizonyítható, hogy az $A_i \Rightarrow A_j$ következmények is teljesülnek ($i \neq j$). Így $A_1, A_2, \dots, A_7$ ekvivalens állítások, és $A_i \Leftrightarrow B$ is szükséges és elégséges feltételek.

A paralelogramma definíciója az A_1–A_7 állítások közül tehát bármelyik lehet.

Az ekvivalens állítások, megfordítható tételek láthatóan fontos szerepet játszanak a matematikában. Hiszen az ekvivalencia ismeretében a feladatmegoldás során elegendő $A_1, A_2, \dots, A_7$ bármelyikének, pl. A_1-nek a bizonyítása: ekkor a négyszög paralelogramma, és ha paralelogramma, akkor a többi $A_2, A_3, \dots, A_7$ tulajdonsággal is rendelkezik.

2. példa Az $ABCD$ trapézban a párhuzamos oldalak aránya $AB : CD = 2 : 1$. Jelölje M az átlók metszéspontját, E és F pedig az AM, illetve BM szakaszok felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $EDC\sphericalangle = EFC\sphericalangle$!

Megoldás ABM és CDM háromszögek hasonlók, mert szögeik megegyeznek (váltószögek és csúcsszögek). A hasonlóság aránya $AB : CD = 2 : 1$, így $BM = 2MD$ és $AM = 2MC$. Mivel E és F felezőpontok, $FM = MD$ és $EM = MC$. Az $EFCD$ négyszög paralelogramma, mert átlói felezik egymást; s mert paralelogramma, szemközti szögei egyenlők: $EDC\sphericalangle = EFC\sphericalangle$.



A bizonyítást **másképpen** is befejezhetjük. Például EF az ABM háromszög középvonala, ezért AB-vel párhuzamos és fele olyan hosszú. Így EF és DC párhuzamos és egyenlő hosszú oldalak, ezért $EFCD$ paralelogramma stb.

A matematikai állítások és tételek egy részében feltétlenül szerepelnie kell (akár kimondva, akár kimondatlanul) a *'minden'* (jelölése: $\forall$) vagy a *'létezik'* (jelölés: $\exists$) **kvantor** valamelyikének. Például az $A_1 \Rightarrow B$ tétel (vagy összetett állítás) is úgy értendő, hogy „*Minden* olyan négyszög, melynek szemközti oldalai egyenlők, paralelogramma." Az ilyen típusú **állítások tagadására** egyik lehetőség a „Nem igaz az, hogy …" kezdőformula betoldása. A másik lehetőség formálisan a kvantorok cseréjére épül: „Létezik olyan négyszög, melynek szemközti oldalai egyenlők, és nem paralelogramma." Ez a tagadási módszer tartalmilag gazdagabb, mert az állítások szerkezetét jobban megvilágítja.

3. példa Fogalmazzuk meg az alábbi állítások tagadását, és döntsük el, hogy az állítás igaz, vagy a tagadása!

a) Van 21-gyel osztható prímszám.
b) Pozitív szám reciproka kisebb vagy egyenlő, mint maga a szám.
c) Létezik olyan 21-re végződő, legalább háromjegyű egész szám, ami 21-gyel osztható.
d) Ha egy négyszög deltoid és trapéz, akkor rombusz is.

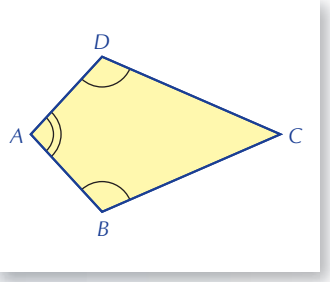
Megoldás 2-2 „van olyan" és „minden" típusú állítást adtunk meg, mindkét típusból az egyik igaz, a másik pedig hamis.

a) Az állítás *hamis*. Ha egy szám osztható 21-gyel, akkor osztható 3-mal és 7-tel is, tehát nem lehet prímszám. (1-en és önmagán kívül más pozitív osztója is van.)
Az állítás tagadása: „Nincs 21-gyel osztható prímszám.", vagy „A prímszámok 21-gyel nem oszthatók."

b) Az állítás *hamis*, például 0,5 ellenpélda.
Az állítás tagadása: „Van olyan pozitív szám, melynek reciproka nagyobb, mint maga a szám."
Helytelen tagadás például a „Pozitív szám reciproka nagyobb, mint maga a szám.".

c) Az állítás *igaz*. 21-gyel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha osztható 3-mal és 7-tel. Ilyen szám például a 2121: a számjegyek összege osztható 3-mal és $21 \cdot 100 + 21$ osztható 7-tel is.
Az állítás egyszerű tagadása: „Nincs olyan 21-re végződő, legalább háromjegyű egész szám, ami 21-gyel osztható." Kissé igényesebben: „A 21-re végződő, legalább háromjegyű egész számok nem oszthatók 21-gyel." Vagy: „Ha egy legalább háromjegyű egész szám 21-re végződik, akkor nem osztható 21-gyel."

d) Az állítás *igaz*. Bizonyítás:
Legyen az $ABCD$ deltoidban $AB = AD$ és $BC = BD$, valamint a trapéz tulajdonság miatt AB párhuzamos CD-vel. Ekkor $D\sphericalangle + A\sphericalangle = 180°$, s mivel a négyszög belső szögeinek összege 360°, $B\sphericalangle + C\sphericalangle = 180°$ szintén. $D\sphericalangle = B\sphericalangle$ (deltoid), így $C\sphericalangle = A\sphericalangle$ is teljesül.
$ABCD$ tehát paralelogramma, mert szemközti szögei egyenlők. A paralelogramma szemközti oldalainak egyenlőségéből adódik, hogy $ABCD$ oldalai egyenlők, tehát $ABCD$ rombusz.
Az állítás tagadása: „Van olyan négyszög, ami deltoid és trapéz is, de nem rombusz."



Megjegyzések

(Egy A állítás tagadását $\overline{A}$ módon jelöljük.)

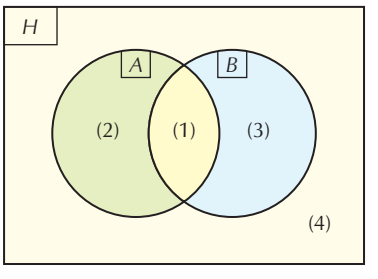
$\forall A$ tagadása $\exists \overline{A}$, míg $\exists A$ tagadása $\forall \overline{A}$ módon történhet. A négy lehetséges esetben (ilyenek voltak az *a)–d)* feladatok) más-más bizonyítási módszert követtünk. Ahhoz hogy belássuk,

a) a $\exists A$ típusú állítás hamis, akkor *bizonyítanunk kell* $\forall \overline{A}$-t;
b) $\forall A$ hamis, akkor elegendő egyetlen $\exists \overline{A}$ *ellenpélda*;
c) $\exists A$ igaz, elegendő egyetlen *példa*;
d) $\forall A$ igaz, akkor ezt *bizonyítanunk kell*.

4. példa **(összetett állítások tagadása)** Gyakori összetett állítások „*A* vagy *B*", illetve „*A* és *B*" típusúak. Hogyan tagadjuk ezeket?

Megoldás Hívjuk segítségül a halmazelméletet!

Legyen adott a H alaphalmaz, valamint két halmaz, A és B. Venn-diagramjukon (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat (részhalmazokat), például (3) jelenti a $B \setminus A$ részhalmazt.



Korábban meghatároztuk, hogy a logikai kötőszókat tartalmazó megfogalmazások mely részhalmazok elemeire vonatkoznak. Például az „*x* eleme *A*-nak *vagy x* eleme *B*-nek” meghatározás az $A \cup B$ részhalmazra vonatkozik (ennek *x* elemeire teljesül), tehát az (1), (2) és (3) tartományokat határozza meg. (Ugyanezt adja eredményül az „*x* eleme *legalább az egyik halmaznak*” megfogalmazás is.) Hasonlóan az „*x* eleme *A*-nak *és x* eleme *B*-nek” meghatározás az $A \cap B$ részhalmaz elemeire teljesül, tehát az (1) tartományt határozza meg.

Ha az $A \cup B$, illetve $A \cap B$ részhalmazok H alaphalmazra vonatkozó komplementereit vizsgáljuk, akkor a nevezetes De Morgan-azonosságokat kapjuk.

De Morgan-azonosságok a halmazelméletben:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(Az azonosságok a Venn-diagramon szereplő tartományok segítségével könnyen igazolhatók. Az 1. egyenlet bal oldalán (4) áll, a jobb oldalon $\overline{A}$ a (3) és (4), $\overline{B}$ a (2) és (4) egyesítése, és ezek metszete valóban (4). Hasonlóan 2. bal oldalán (2), (3) és (4) uniója áll, a jobb oldalon pedig (3), (4) valamint (2), (4) uniója. A két oldal valóban egyenlő.)

Már korábban is láttuk, hogy a halmazelmélet és a matematikai logika szoros kapcsolatban áll egymással. Az *A* állításban szereplő matematikai objektumokat halmazba sorolhatjuk, ekkor az *A* halmazba éppen azok az objektumok tartoznak, amelyekre az *A* állítás igaz (a tulajdonság teljesül). Ugyanígy járhatunk el *B*-vel is. Így az „*x* eleme *A*-nak *vagy x* eleme *B*-nek”, vagyis az $A \vee B$ (’*A* vagy *B*’) logikai állítás akkor igaz, ha legalább az egyik állítás igaz. Az $A \wedge B$ (’*A* és *B*’) logikai állítás pedig akkor igaz, ha mindkét állítás igaz.

A fentiek alapján adódik a két összetett állítás tagadása (ezeket szintén de Morgan-azonosságoknak nevezzük).

1. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;
2. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Vagyis formálisan „*A* vagy *B*” tagadása „nem *A* és nem *B*” (másképpen „sem *A*, sem *B*”), „*A* és *B*” tagadása „nem *A* vagy nem *B*” alakú. (Ezeket a köznyelvben nem mindig használjuk hasonló módon, mint a matematikában.)

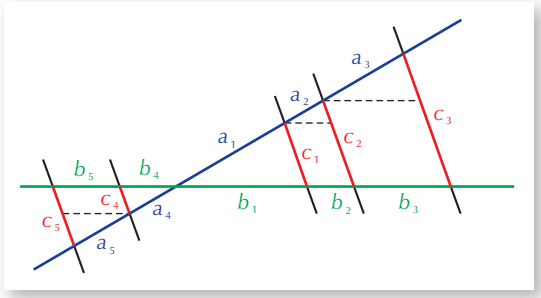
A középiskolai tanulmányaink során már megismertük a **leggyakoribb bizonyítási típusok**at. Ezek a *direkt* és *indirekt bizonyítás*, a *skatulyaelv*, az *invariáns módszer*, a *szita-formula*, a *teljes indukció* stb. Ezen típusokra bőven találunk példát a tankönyvek megfelelő fejezeteiben.

A matematikakönyvekben – ebben a könyvben is – leggyakoribb módszer a **direkt bizonyítás** alkalmazása. Ennek során az $A \Rightarrow B$ tételt úgy bizonyítjuk, hogy az *A* feltételből kiindulva, tartalmilag helyes következményállításokkal előállítjuk a *B* következményt: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$. A legtöbb bizonyítás direkt módon történik, ilyen volt például a lecke elején a 2. példa bizonyítása is.

Előfordul, hogy a *B* célállítást ekvivalens módon átfogalmazzuk: $B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow D$, és ekkor elegendő az esetleg egyszerűbb *D* igazolása: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow D$-ből már következik *B*.

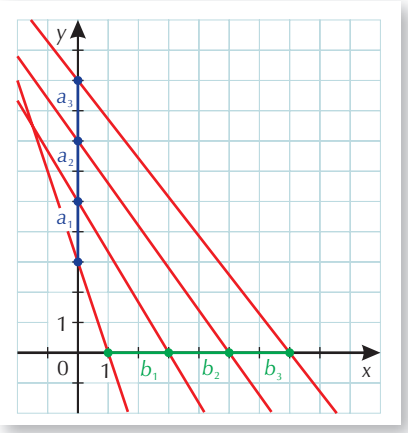
Ha az $A \Rightarrow B$ tételt ekvivalens lépések során bizonyítjuk be: $A \Leftrightarrow B_1 \Leftrightarrow B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B_n \Leftrightarrow B$, akkor *A* és *B* ekvivalens állítások, az $A \Rightarrow B$ **tétel megfordítása** is igaz: $A \Leftrightarrow B$. Az 1. és 2. példánál már jeleztük az ekvivalens tételek fontosságát.

A geometriai tételek közül például a Pitagorasz-tétel vagy a húrnégyszögek tételének a megfordítása is igaz, míg – mint korábban láttuk – a Thalész-tétel, illetve az érintőnégyszögek tételének a megfordítása problémás, kimondásuk pontos fogalmazást igényel.



Hasonlóan nevezetes tétel a párhuzamos szelők tétele, amely szerint ha egy szögtartományt párhuzamos egyenesekkel metszünk, a keletkezett megfelelő szakaszok aránya megegyezik.

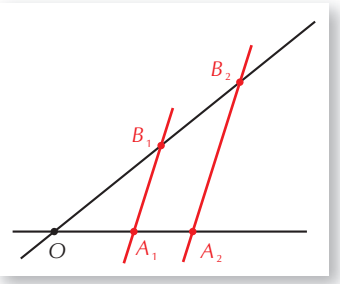
Az ábrán a $c_1, c_2, \ldots, c_5$ párhuzamosakat behúzva, a tétel szerint $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_5}{b_5}$ vagy $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_1 + a_2} = \frac{c_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{c_4}{a_4} = \frac{c_5}{a_4 + a_5}$, vagy felírhatjuk akár a $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2 - c_1}{a_2} = \frac{c_3 - c_2}{a_3} = \frac{c_4}{a_4} = \frac{c_5 - c_4}{a_5}$ összefüggést is. (Az aránypárok egyenlősége a megfelelő hasonló háromszögek segítségével könnyen igazolható.)



A *tétel megfordítása* azonban – ebben a formában – *nem igaz*.

Az ábrán látható derékszögű koordináta-rendszerben úgy vettünk fel négy egyenest, hogy az egyes szögszárakon, azaz a tengelyeken kimetszett szakaszok aránya megegyezik (sőt még egyenlőek is a szakaszok): $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ teljesül. Mégis nyilvánvalóan nem párhuzamosak az egyenesek, meredekségük rendre $-3, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, -\frac{9}{7}$.

Az általános tétel megfordítása tehát nem igaz; csak annak a speciális esetnek a megfordítása igaz, amikor a szögszárak metszéspontjától számítjuk a „megfelelő szakaszokat". Azaz az ábrán látható egyenesekre $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2}$ egyenlőségből következik A_1B_1 és A_2B_2 párhuzamossága. (A tételt és megfordítását korábban részletesen vizsgáltuk a *4. Geometria* fejezetben.)



Az **indirekt bizonyításokat** már az ókori görögök is hatékonyan alkalmazták. Klasszikusan szép bizonyításaik fennmaradtak az utókorra, ilyenek például a prímszámok számára, vagy a $\sqrt{2}$ irracionalitására vonatkozó tételek. Az indirekt bizonyításokat mi is hangsúlyozottan jelöltük, így igazoltuk például a Pitagorasz-tétel megfordítását.

Tekintsünk két ellentmondó állítást, pl. A-t és $\overline{A}$-t. (Ellentmondó állítások esetén pontosan az egyikük igaz, és a másik hamis.) Az A állítás igazságáról kétféleképpen győződhetünk meg.

Az egyik lehetőség, amikor igaz feltételből kiindulva, helyes átalakításokkal belátjuk, hogy A igaz; ez a fentebb leírt direkt bizonyítás.

A másik lehetőség az *indirekt bizonyítás*, amikor azt mutatjuk meg – helyes következtetéseket alkalmazva –, hogy $\overline{A}$-ből hamis állítás következik. Ebből már adódik A igazsága.

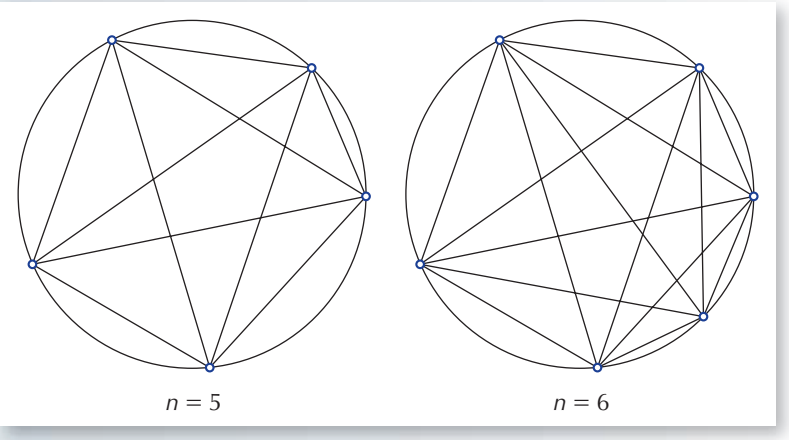
(A $C \Rightarrow D$ következményt vizsgálva az állításokról megállapítható, hogy
– ha C igaz, akkor D szintén igaz;
– míg ha D hamis, akkor szükségképpen C is hamis.
Hamis állítás igaz állításból nem következhet.)

A bizonyításokat általában megelőzi a **sejtés**, aminek eredményeképpen megfogalmazzuk a bizonyítandó állítást. (Például egy teljes indukciós bizonyítást csak akkor alkalmazhatunk, ha már megsejtettük a célállítást.) De a sejtéseket körültekintően kell megfogalmaznunk, nehogy tévútra jussunk. Erre példa a következő cseles feladat.

5. példa Egy körlemezt határoló körvonalon sorban felveszünk 1, 2, 3, 4 pontot, és a pontokat egyenes szakaszokkal összekötjük egymással. Az így kapott húrok a körlemezt rendre 1, 2, 4, 8 részre osztják. Ez alapján van-e sejtésünk, hogy 5, illetve 6 pont esetén legfeljebb hány részre osztják a szakaszok a körlemezt?

„Megoldás" A legtöbb tartományt akkor kaphatjuk, ha a szakaszok közül semelyik három nem megy át egy ponton. Az 1, 2, 4, 8 sorozat alapján azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy n pont esetén 2^{n-1} a tartományok száma. Az 5. ponthoz tartozó szakaszok behúzása után 16 tartományt kapunk *(ábra)*, ami megerősíti a feltevésünket: 6 pont esetén – a sejtésünk szerint – $2^5 = 32$ a keletkezett tartományok maximális száma.

Sajnos a sejtés **hibás,** már $n = 6$ pontra sem teljesül: a második ábrán csak 31 tartomány van.



Megjegyzés

Legegyszerűbben az Euler-féle poliéder-tétel segítségével számolhatjuk meg n pont esetén a tartományokat. Erről a következő olvasmányban lesz szó, ott adunk útmutatást a megoldáshoz.

KÖVETKEZTETÉSI SZABÁLYOK (Kiegészítő anyag)

A leggyakrabban használt következtetési szabályokat már az ókori görög filozófusok és matematikusok is ismerték, alkalmazták és formálisan is leírták. Ezek könnyen megérthetők, többségüket a mindennapi életben is természetes módon használjuk. Néhányat felsorolunk közülük, a kitűzött feladatok között szerepel a példák keresése.

Leválasztási szabály (modus ponens)

A szabály állításokkal megfogalmazva a következő: $\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ A \end{matrix}\right\} \Rightarrow B.$

Jelentése (kiolvasása): ha A-ból következik B, és A igaz, akkor B is igaz.

Írhatjuk más módon is, például: $\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ A \text{ igaz} \end{matrix}\right\} \Rightarrow B \text{ igaz.}$

Hipotetikus szillogizmus

A hipotetikus szillogizmust a *leválasztási szabály* „bonyolításával” kapjuk:

$\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ A \end{matrix}\right\} \Rightarrow C.$ (Vagy másképp: $\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, vagy más módon: $\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ A \text{ igaz} \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \text{ igaz}.$)

Jelentése: Ha tudjuk, hogy A-ból következik B, és B-ből következik C, valamint A igaz: akkor C is igaz.

Reductio ad absurdum

A *reductio ad absurdum* szabályát is természetesnek érezzük:

$\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ A \Rightarrow \overline{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{A}$. Más alakok: $\left.\begin{matrix} \overline{A} \Rightarrow B \\ \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A$, vagy $\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ A \Rightarrow \overline{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \text{ hamis}.$

Jelentése: Ha egy A állításból következik B, valamint B ellentéte is (ellentmondás!), akkor az A állítás nem lehet igaz. (Hát persze: ha A igaz lenne, ellentmondásra jutnánk.)

Már láttuk korábban az **indirekt bizonyítást**.

Ennek módszere is ugyanígy, a kapott ellentmondásból von le következtetéseket:

$\left.\begin{matrix} \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \\ B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A$ vagy egy másik alak: $\left.\begin{matrix} A = h \Rightarrow B = h \\ B \text{ igaz} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \text{ igaz}.$

Kiolvasása: Ha A hamis, akkor B is hamis. De B igaz (ellentmondás!), ezért A-nak is igaznak kell lennie.

Az *indirekt bizonyítás* és a *reductio ad absurdum* „rokonok”, más-más megfogalmazással. Indirekt bizonyítást akkor alkalmazunk, ha be akarjuk látni, hogy A teljesül (például mert megsejtettük, hogy A igaz). Ekkor indirekt módon feltesszük, hogy A nem igaz, és a kapott ellentmondással igazoljuk A helyességét.

Kontrapozíció

Az indirekt bizonyítás újabb „rokona” a kontrapozíció következtetési szabálya:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$.

A rokonságra legjobban a kontrapozíció $\left.\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ \overline{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{A}$ alakjával mutathatunk rá.

Jelentés: Tudjuk, hogy az A állításból következik B. Ekkor ha B nem igaz, akkor A sem lehet igaz. (Világos: ha A igaz lenne, akkor B is igaz lenne, s ellentmondást kapnánk.)

A gyakorlatban, érveléskor lépten-nyomon használjuk ezeket a következtetési szabályokat. Ha megnézzük például egy „bírósági” bűnügyi film tárgyalását, a jogászok vagy ügyvédek mondatainak nagy része nem más, mint a modus ponens, a hipotetikus szillogizmus vagy éppen a kontrapozíció szabályainak alkalmazása.

FELADATOK

1. E1 Hogyan tagadjuk az (A és B), illetve az (A vagy B) típusú állításokat?

Egy konkrét példa: A kétjegyű természetes számok közül a H halmazba azok tartoznak, amelyek oszthatók

a) 2-vel és 3-mal;

b) 2-vel vagy 3-mal.

Mely kétjegyű természetes számok tartoznak a $\overline{H}$ kiegészítő halmazba a két esetben?

2. E1 Az alábbiakban felsorolunk néhány $A \Rightarrow B$ típusú állítást. Állapítsuk meg, hogy az egyes esetekben igazak-e az állítások; mi az A és B állítások kapcsolata (szükséges és elégséges feltételek); fogalmazzuk meg az állítások megfordításait, és döntsük el, hogy igazak vagy hamisak! Ha valamely állítás megfordítása nem teljesül, akkor módosítsuk úgy (lehetőleg minél egyszerűbben) a feltételeket, hogy a megfordítás is igaz legyen!

Az állítások:

a) Ha $a = b$, akkor $a^2 = b^2$. ($a, b \in \mathbf{R}$.)

b) Ha $a = b$, akkor $a^3 = b^3$. ($a, b \in \mathbf{R}$.)

c) Ha $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, akkor $a = b$. ($a, b \in \mathbf{R}$.)

d) Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|(b + c)$. (a, b, c egész számok.)

e) Ha $a|(b + c)$ és $a|c$, akkor $a|b$. (a, b, c egész számok.)

f) Ha egy egész szám osztható 24-gyel, akkor osztható 4-gyel és 6-tal is.

g) Ha az $x^2 + bx + c = 0$ egyenletnek két különböző előjelű gyöke van, akkor $c < 0$.

h) Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenletnek $x = 1$ gyöke, akkor $a + b + c = 0$.

i) Ha egy háromszög derékszögű, akkor két szögének különbsége egyenlő a harmadik szöggel.

j) Ha egy háromszög derékszögű, akkor egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak.

k) Ha egy háromszögben $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$, akkor a háromszög derékszögű.

l) Ha egy háromszög tompaszögű, akkor $c^2 > a^2 + b^2$. (c a legnagyobb oldal.)

m) Ha a, b, c egy háromszög oldalai, akkor $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) > 0$.

n) Ha $\gamma = 60°$, akkor $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = c^2$. ($a, b, c$ egy háromszög oldalai, γ a c oldallal szemközti szög.)

o) Ha $\gamma = 30°$, akkor a háromszög területe $t = \frac{ab}{4}$.

p) Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$.

3. E1 **(feladat önálló feldolgozásra)** Keressünk példákat, egyszerű feladatokat, amelyekben a leggyakoribb következtetési szabályokat alkalmazzuk!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 25–50, 91–95, 133–144.

Eddigi tanulmányaink során megszoktuk, hogy a tanult tételek általában felfedezőjükről van elnevezve, s e felfedezők általában férfiak. Pedig több kiváló női matematikust is ismer a tudománytörténet.

Alexandriai Hüpatia
(370–415)

Valószínűleg a legelső nő a matematika tudományában. Diophantosz számelméleti kutatásait folytatta, valamint Appoloniusz geometriájával is sokat foglalkozott. Athénban tanult filozófiát, matematikát és csillagászatot, majd visszatérve Alexandriába a platonikus iskola tanára, majd vezetője lett. Messze földről jártak hozzá előadásait, tiszta, logikus és közérthető okfejtéseit hallgatni. Ugyanakkor – a leírások szerint – rendkívüli szépség is volt, így egyre növekedett irigyeinek tábora. Alexandriában akkoriban komoly vallási ellentétek voltak az ókeresztények és a platonisták között. Egy alkalommal hazafelé tartva vallási ellenfelei elfogták, egy templomba hurcolták, és szó szerint agyonverték. Így hunyt el 45 éves korában az első tudós nő.

ALKALMAZÁSOK (Olvasmány)

A „gondolkodási módszerek” témakör (halmazelmélet, kombinatorika, logika, gráfelmélet) sok lehetséges alkalmazása közül néhány példát mutatunk.

1. példa Nyolc teherautóval 50 darab kőtömböt szeretnénk elszállítani. A kövek tömege rendre 145 kg, 146 kg, ..., 194 kg, egy teherautó teherbírása pedig 1060 kg. Felpakolhatjuk-e úgy a köveket a nyolc teherautóra, hogy egy fordulóval el tudjuk szállítani őket?

Megoldás I. gondolat: A kövek össztömege $145 + 146 + \ldots + 194 = 8475$ kg, az összes teherautó teherbírása $8 \cdot 1060 = 8480$ kg. Mivel ez több, mint a kövek teljes tömege, úgy tűnik, hogy a kövek egy fordulóval elszállíthatók.

II. gondolat: Egyáltalán nem biztos, hogy a gyakorlatban, kb. egyenletesen szétosztva felpakolhatók a kövek. $6 \cdot 8 < 50$, így a skatulyaelv miatt lesz olyan teherautó, melyre legalább 7 követ rakunk fel. A legkisebb 7 kő tömege $145 + 146 + \ldots + 151 = 1036$ kg, s ez kisebb, mint egy teherautó teherbírása. Úgy tűnik (még mindig), hogy az egyfordulós szállítás lehetséges.

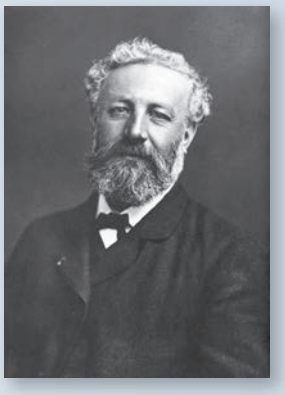
III. gondolat: A $6 \cdot 8 < 50$ skatulyaelv következménye szigorúbb: vagy két teherautóra kell 7-7 követ felpakolni, vagy van olyan teherautó, amelyre (legalább) 8 kő kerül.

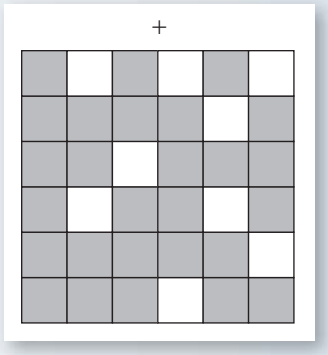
Az első esetben a 14 legkisebb kő tömege $145 + 146 + \ldots + 158 = 2121$ kg. Ennek fele 1060,5 kg, vagyis az egyik teherautóra legalább 1061 kg-nyi követ kellene felrakni. Ez a pakolási mód tehát nem lehetséges.

A második esetben a legkisebb 8 kő tömege $145 + 146 + \ldots + 152 = 1188$ kg, ami több, mint egy teherautó teherbírása. Ez az eset sem valósítható meg.

A kövek tehát nem szállíthatók el egyetlen fordulóval.

2. példa *Jules Verne*: *Sándor Mátyás* című könyvében több magyar vonatkozás is található. A regényben két kalandor, Zirone és Sárkány elfognak egy titkosított üzenetet vivő postagalambot. Az üzenet dekódolásához egy ún. rostélyra (sifrírozó rács) volt szükség, amelyet a szélhámosok végül is megszereztek. Ez a rostély egy 6 × 6-os kartonpapírból állt, amelynek 9 mezőjét az ábrán látható módon kivágták.





Ezt a részben lyukas táblázatot kellett először a jelölt oldalával felfelé az írásra helyezni, majd rendre háromszor negyedfordulattal elforgatni, pl. az óramutató járása szerint. A négy ráhelyezéskor kilátszódó betűket összeolvasva adódott az üzenet.

Érdekes kérdés, hogy vajon hány 6 x 6-os méretű, 9 lyukú megfelelő rács készíthető? (Ettől függ, hogy menynyire könnyű véletlenül, próbálkozással megfejteni a titkosírást.) A rácstól természetesen megköveteljük, hogy bármely szöveg egyértelműen dekódolható legyen a segítségével. (Olyan rács tehát nem készíthető, amelyet körbeforgatva a szöveg valamely betűje többször is megjelenik a dekódolásban. Például nem vághatjuk ki a két fölső sarokmezőt, mert ekkor az első és második ráhelyezésnél is kiolvasnánk a jobb fölső betűt.)

Megjegyzés

A kódolás – dekódolás 9 megfelelő lyuk esetén kölcsönösen egyértelmű lesz, mert a négy ráhelyezés után a szöveg minden betűjét kiolvassuk ($9 \cdot 4 = 36 = 6 \cdot 6$).

Megoldás A rács bal felső 3 × 3-as részét az ábrán látható módon 1, 2, 3, … , 9-cel sorszámoztuk.

A forgatás során az 1-es sarokmező a három másik sarokra kerül (ezeket is 1-essel jelöltük). A rács készítésekor e négy mezőből pontosan egyet kell kivágnunk, s ez bármelyik lehet: ez 4 lehetőség. A 2-es cella három további elforgatottját szintén jelöltük az ábrán. Ebből a négy mezőből ismét csak az egyiket lehet (kell) kivágnunk, így újabb 4 lehetőséghez jutunk. Hasonló a helyzet a többi jelölt cellával is, így a 6 × 6-os megfelelő rácsok száma $4^9 = 262\,144$.

Hát ez elég sok, ez a titkosírás „puszta kézzel” gyakorlatilag megfejthetetlen. Sárkány és cimborája is csak úgy boldogult, hogy az eredeti rostélyt megkaparintották és lemásolták.

(Érdemes elolvasni a regényt, ott a konkrét üzenet és megfejtése is megtalálható.)

+

1	2	3			1
4	5	6			2
7	8	9			3
3					
2					
1			3	2	1

Általánosítás

Hasonló megfontolásokból adódik, hogy a $2n \times 2n$-es, n^2 számú kivágást tartalmazó rácsok száma 4^{n^2}.

Egy tipikus matematikán belüli alkalmazás következik.

3. példa A négyjegyű természetes számok között hány olyan van, ami

a) páros **vagy** van benne 3-as számjegy;

b) páros **és** van benne 3-as számjegy?

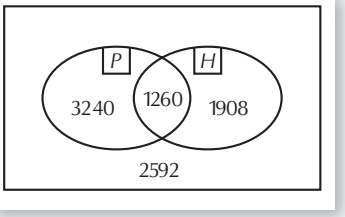
Megoldás A négyjegyű számokon belül jelölje P a páros számok halmazát, H pedig azon számok halmazát, amelyek tartalmazzák a 3-as számjegyet! A feladat a $|P \cup H|$, illetve $|P \cap H|$ elemszámokat kérdezi. Többféle megoldás lehetséges (például végezhetünk esetszétválasztást a 3-as számjegyek száma alapján), most a komplementer módszert, illetve a de Morgan-azonosságokat alkalmazzuk.

a) Ez utóbbi alapján a komplementer halmazra $\overline{P \cup H} = \overline{P} \cap \overline{H}$ teljesül. A páratlan és 3-ast sem tartalmazó négyjegyű számok száma $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$, mert az utolsó, legkisebb helyiérték csak 1, 5, 7, 9 lehet. Összesen 9000 négyjegyű szám van, így $|P \cup H| = 9000 - |\overline{P} \cap \overline{H}| = 9000 - 2592 = 6408$.

b) Legegyszerűbb talán, ha a páros számok közül kihagyjuk azokat, amelyekben nincs 3-as számjegy: $P \cap H = P \setminus (P \cap \overline{H})$. A négyjegyű páros számok száma $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$; ha nincs bennük 3-as számjegy, akkor számuk $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 5 = 3240$. Eredmény: $|P \cap H| = 4500 - 3240 = 1260$.

Megjegyzés

Kiszámolhatjuk a hiányzó $H \setminus P$ tartomány elemszámát is:
$|H \setminus P| = |H \cup P| - |P| = 6408 - 4500 = 1908$.



4. példa (egy bűvészmutatvány)

Ezt a nevezetes mutatványt *William Fitch Cheney* (bűvész matematikus) fejlesztette ki 1950-ben, 52 lapos kártyacsomagra. A kártyatrükköt később más matematikusok és bűvészek is továbbfejlesztették. A mutatvány kétszemélyes, a Bűvész és a Társa egyenrangú szereplők.

Az alapfeladat a következő:

A Bűvész elhagyja a színpadot, egy néző pedig választ öt lapot a csomagból. A Társ ezek közül egyet kiválaszt, a többi négyet borítékba teszi. Amikor a Bűvészt behívják és megkapja a borítékot a kártyákkal, rövid gondolkodás után megmondja, melyik lap maradt a Társnál (azaz melyik a Néző által választott ötödik lap).

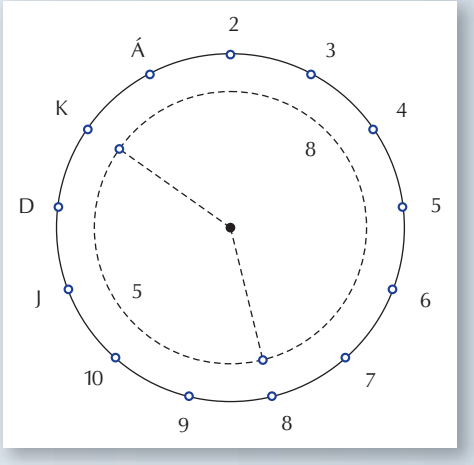
Vajon hogyan „működik” a mutatvány?

Megoldás

A borítékban maradt négy lap segítségével, valamilyen módon, kódolni kell az ötödik lapot. Első észrevétel lehet, hogy 5 lap esetén mindig van két egyforma színű lap (skatulyaelv), így ha az egyiket kiválasztja a Társ 5. lapnak, akkor a másik ennek a színét megadja. (Konkrét példa: {♣5, ♦8, ♦K, ♥2, ♠J} kártyalapok esetén különveszi a ♦8 és ♦K-t, és az egyik lesz az ötödik lap.)

A maradék három lapnak 3! = 6-féle sorrendje lehetséges. (Itt látszik a boríték szerepe: a bele tett kártyalapok sorrendje megmarad.) Ha a Bűvész és a Társa előre megállapodnak a lapok „erősorrendjében", akkor a három lappal 1-től 6-ig tudnak egy számot kódolni. Kérdés, hogy ez elég-e, azaz – a konkrét példában – kódolható-e a ♦8 vagy a ♦K valamilyen módon?

Egy adott színből, pl. a ♦-ból 13 darab van egy csomagban. Ha most az azonos színű, sorba rendezett figurákat ciklikusan, egy kör mentén képzeljük el *(ábra)*, akkor bármely két figura között két „távolságot" állapíthatunk meg: a 8 és K távolsága 5, a K és 8 távolsága 8.



A két távolság összege mindig 13, és ez a kulcsészrevétel: eszerint nem lehet mindkét távolság 6-nál nagyobb. (7 + 7 = 14 > 13.)

Ezzel az ötlettel már lehetséges a kódolás. A ♦8 és a ♦K távolsága 5, tehát a Társ a ♦K-t választja 5. lapnak. A borítékban maradt négy lap közül pl. színével felfelé, legfelülre a ♦8 kerül (ez megadja a ♦ színt, valamint azt, hogy a 8-hoz képest kell továbbhaladni a körben), és már csak az a feladat, hogy a maradék három lappal az 5-ös számot kódoljuk.

Megállapodhatunk abban, hogy például a bridzs lapok „erősorrendjét" választjuk, ez ♣, ♦, ♥, ♠. (Vagyis minden ♦ erősebb minden ♣-nél stb; a lapok sorrendje ♣2, … ♣Á, ♦2, …, ♦Á, ♥2, … , ♥Á, ♠2, … ♠Á.) A maradék három lapunk sorrendben {♣5, ♥2, ♠J}, ez felel meg az 123 (első) permutációnak. A permutációk további sorrendje 132, 213, 231, 312, 321. Nekünk most az ötödik permutáció kell, ez 312, azaz {♠J, ♣5, ♥2}.

Készen vagyunk. A társ a borítékba ebben a sorrendben a {♠J, ♣5, ♥2, ♦8} lapokat teszi. A Bűvész a ♦8 legfelső lap miatt megtudja, hogy az ötödik lap színe ♦. A {♠J, ♣5, ♥2} lapok ötödik permutációja miatt a másik információ, hogy a keresett figura a 8 + 5 = 13. a ciklusban – ez pedig a király.

Az ötödik lap tehát a ♦K.

Egy példa a kódolásra:

A {♣5, ♣7, ♥2, ♥D, ♠Á} lapok esetén kódolhatjuk a ♣7-est {♥2, ♠Á, ♥D, ♣5} módon. (A felső lap ♣, ez a színt adja; a {♥2, ♠Á, ♥D} pedig a lapok 132 sorrendje miatt a 2. permutáció, és 5 + 2 = 7 a keresett figura.)

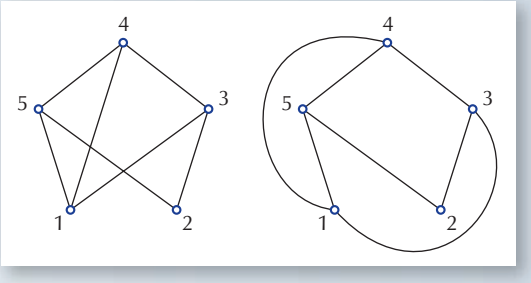
Lehetséges a ♥2 kódolása is, {♣7, ♣5, ♠Á, ♥D} módon.

Egy példa a dekódolásra:

{♠8, ♦10, ♣J, ♠J} esetén a keresett szín ♠; a {♠8, ♦10, ♣J} lapsorrend a 6. permutációt adja; „J + 6 = 4", így az ötödik lap a ♠4.

5. példa

A poliéderek (sokszöglapokkal határolt testek) és a gráfok közötti kapcsolatot az ún. *síkba rajzolható gráfok* segítségével vizsgálhatjuk.



Egy gráf síkba rajzolható, ha van olyan vele izomorf gráf, amelynek a csúcsai a sík pontjai, és az élei nem metszik egymást. Például az ábrán látható gráf síkba rajzolható, mint a mellette lévő, vele izomorf gráf mutatja.

A síkba rajzolható gráfok a síkot tartományokra osztják. Összefüggő gráfok esetén a tartományok, élek és csúcsok számára nagyon szép összefüggést ad az Euler-féle formula: „csúcs + lap = él + 2", vagy betűkkel: $C + L = É + 2$. (A csúcs (= pont) és a lap (= tartomány) elnevezés már a poliéderekre utal.) Például a fenti gráf $L = 4$ tartományra osztja a síkot (ide soroljuk a nem korlátos tartományt is), $C = 5$ pontú, éleinek száma $É = 7$, és valóban: 5 + 4 = 7 + 2.

Megjegyzés

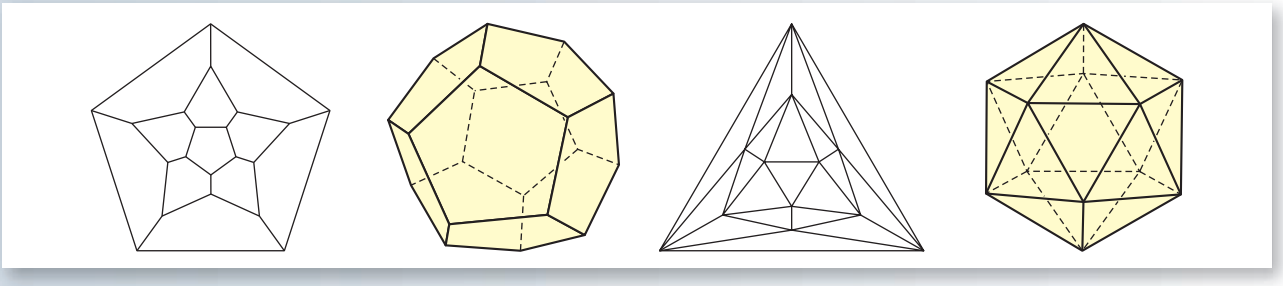
Megadjuk a bizonyítás vázlatát, ebben élről-élre haladva felépítjük az összefüggő gráfot.

Az egyetlen pontból álló gráfra teljesül a tétel: 1 + 1 = 0 + 2.

Ezután sorra felvesszük az új éleket. Mindegyik lépésben az új él vagy régi csúcsot újjal köt össze (ekkor a csúcsok és élek száma eggyel nő: $C' = C + 1$, $É' = É + 1$), vagy két már meglévő csúcsot köt össze (ekkor a tartományok száma és az élek száma is nő eggyel: $L' = L + 1$, $É' = É + 1$). Mindkét esetben az $L' + C' = É' + 2$ összefüggés továbbra is érvényben marad.

Mivel a gráfokat a fenti lépések sorozatával építhetjük fel, ez az indukciós lépés biztosítja, hogy a tétel állítása teljesül. (A tétel igaz hurokélek vagy többszörös élek esetén is.)

A konvex poliéderek síkba rajzolt modelljei is gráfot alkotnak. (Az egyes csúcsok közötti kapcsolat nem változik, ha például a poliéder egyik lapját megnöveljük, és a többi csúcsot centrálisan rávetítjük. Így olyan ábrát kapunk, amelyen az élek nem metszik egymást.) Például a 12 darab ötszöglapból és a 20 darab háromszöglapból álló szabályos testek, a dodekaéder és az ikozaéder ún. Schlegel-diagramja:

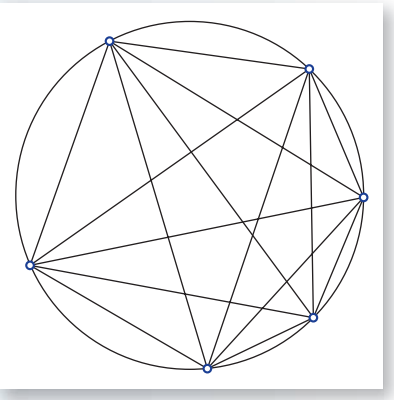


Láthatjuk, hogy az Euler-tétel ezekre a poliédereket szimbolizáló ábrákra is teljesül. (Ekkor nem a végtelen síkbeli tartományt számítjuk a lapok közé, hanem a legalsó lapot, amelyre a csúcsokat vetítettük.) Az első testre $(C, L, É) = (20, 12, 30)$, a másodikra $(C, L, É) = (12, 20, 30)$.

6. példa Az előző lecke 5. példáját általánosítjuk.

Egy körlemezt határoló köríven felveszünk n pontot, és a pontokat egyenes szakaszokkal összekötjük egymással. Az így kapott húrok legfeljebb hány részre osztják a körlemezt?

Megoldás Maximális számú tartományt akkor kapunk, ha a húrok közül semelyik három nem megy át egy ponton.



Az így kapott síkba rajzolható gráfban a köríven lévő n pontot összekötő szakaszoknak $\binom{n}{4}$ metszéspontja van. (Két átló metszéspontját négy pont határozza meg.) A gráf pontjainak száma tehát $n + \binom{n}{4}$.

A kerületi pontokból $n + 1$, a belső pontokból 4 él indul ki, így az élek száma $\dfrac{n \cdot (n+1) + 4 \cdot \binom{n}{4}}{2}$. (2-vel azért osztunk, mert minden élt kétszer számoltunk, a két végpontjánál.)

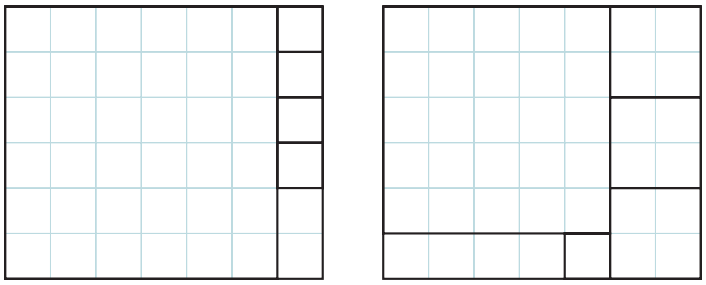
Jelöljük a tartományok számát T-vel, ekkor Euler tétele alapján $n + \binom{n}{4} + T = \dfrac{n \cdot (n+1) + 4 \cdot \binom{n}{4}}{2} + 2$. Az egyenlet rendezése után $T = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 2$ adódik. Ha most a végtelen síktartományt nem számoljuk, készen vagyunk: a körlemez tartományainak száma $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$.

(A képlet $n = 5$-re eredményül 16-ot ad, míg $n = 6$-ra valóban csak 31-et.)

FELADATOK

1. E1 Egy 6 × 7-es téglalapból vágjunk ki 5 darab négyzetet úgy, hogy a kivágott négyzetek összterülete maximális legyen.

Pisti ún. „mohó algoritmust” használ, amikor mindig a lehető legnagyobb területű négyzetet vágja ki. Az eljárás most nagyon jónak tűnik: 1 darab 6 × 6-os és 4 darab 1 × 1-es négyzet kivágása 40 területegység, így csak 2 egység a „veszteség”.



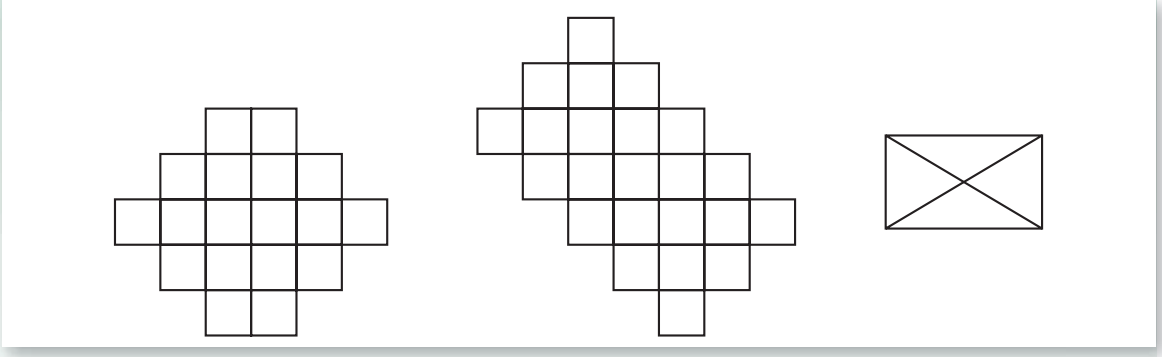
Az eljárás jóságát csak megerősíti, hogy ha Pisti 5 × 5-ös négyzettel kezd, a további három 2 × 2-es és egy 1 × 1-es négyzet kivágásával összességében kisebb az összterület. Vajon jó Pisti megoldása? Indokoljuk meg!

2. E2

Jókai: Az új földesúr című regényében az egyik szereplő, Pajtayné Corinna öt levelet írt öt régebbi ismerősének. Straff, a bécsi titkosrendőrség alkalmazottja azonban bosszúból összekeverte a leveleket úgy, hogy mindegyik levél más borítékba került, egyik sem az eredeti címzetthez. Hányféleképpen lehet ezt a cserét végrehajtani?
Érdemes először kisebb elemszámra, 3-ra vagy 4-re kiszámolni a lehetőségeket.
(És érdemes elolvasni a regényt is. Kissé régi nyelvezetű, de nagyon tanulságos.)

3. E1

A nemzetközi hírű Afrika-kutató, a Budapesten született *Torday Emil* (1875–1931) 1895-ben került Belgiumba, ahol a British Museum megbízásából antropológiai és nyelvészeti kutatómunkát végzett. Az alábbi esetleírás egy matematikatörténeti könyvben szerepel.
Érdekes, hogy ez a gráfelméleti probléma Afrikában is felmerült. Torday Emil magyar utazó a század elején a kongói busongo törzsnél találkozott vele. Megkérték, hogy homokba rajzoljon adott ábrákat úgy, hogy közben ne emelje fel az ujját, és egy vonalat se húzzon meg kétszer. Például:



Torday így ír az esetről: „A gyerekek rajzoltak, és azonnal megkértek bizonyos lehetetlen dolgokra; nagy volt az örömük, mikor látták, hogy a fehér embernek ez nem sikerül.”
(Forrás: Filep László: A tudományok királynője, Typotex, 1997)
Melyik ábrák nem rajzolhatók meg a kívánt módon?

4. V

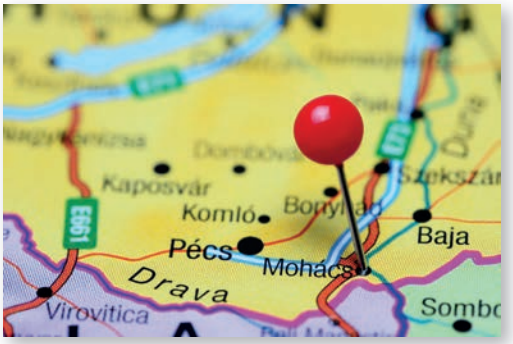
a) A Cheney-mutatvány alapján határozd meg, mely lapokat és milyen sorrendben kell a borítékba helyezni! A lapok:
{♣8, ♦10, ♥6, ♥J, ♠9}; {♣2, ♣4, ♣D, ♦9, ♦D}; {♣2, ♣7, ♣8, ♣J, ♣Á}.
b) A négy borítékban lévő lap alapján állapítsd meg, mi lehet az ötödik lap!
A lapok: {♥6, ♣8, ♦10, ♥J}; {♣4, ♣2, ♣D, ♦8};{♣2, ♦2, ♥2, ♠2}.
c) Lehet-e olyan lapnégyes a borítékban, amihez nem találunk megfelelő ötödik lapot?

5. E2

Az alábbi feladatokat az emelt szintű érettségi vizsga színezéses feladatai közül válogattuk.

I. (2021.) A térképrészleten Tolna megye és négy megyeszomszédja látható. Az öt megyét legfeljebb négy színnel színezzük ki (piros, sárga, kék és zöld).

Hányféleképpen színezhető helyesen ez a térképrészlet? (Két színezés különböző, ha van legalább egy megye, melynek a két színezésben más a színe.)



II. (2021.) Az *ABCD* konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk?

III. (2015.) Az *ABCDE* konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen. Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)

A mai Kalinyingrád egyik hídja

VIII. SOROZATOK

Fraktál, felfedezője Benoît B. Mandelbrot (1924–2010) lengyel származású francia-amerikai matematikus

53. REKURZÍV SOROZATOK, ÖSSZEGKÉPLETEK

A matematika szinte minden részterületén alkalmaznak sorozatokat. Modern kutatási terület például a káoszelmélet, vagy a képen látható fraktálok vizsgálata is.

A **sorozatok jelölésére** többféle módszer terjedt el. Általában (a), $\{a\}$ vagy (a_n), $\{a_n\}$ jelöli azt a sorozatot, amelynek tagjai a_1, a_2, a_3, … stb. A tagok indexelésére többnyire az n, k, i, j betűket szoktuk használni, amit néha a sorozatra való hivatkozáskor is hangsúlyozunk: $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^+}$ tehát magát a teljes sorozatot jelöli.

Az indexek a továbbiakban értelemszerűen pozitív egész vagy természetes számokat jelentenek, attól függően, hogy a sorozatok kezdőtagját 1-től vagy – ritkábban, kényelmi szempontok miatt – 0-tól indexeljük.

EXPLICIT ÉS REKURZÍV ALAKOK

A sorozat **explicit megadása** azt jelenti, hogy az általános n-edik tagot olyan képlettel adjuk meg, amely csak n-től függ (tehát nem függ a sorozat korábbi tagjaitól).

Például $a_n = 3(n + 1)$, $n \geq 1$ a 6, 9, 12, 15, … számtani sorozat explicit alakja.

A **rekurzív formula** olyan egyértelmű utasítás, amellyel a sorozat tagjait a korábbi tagok segítségével fejezzük ki. Ekkor a sorozat bizonyos számú kezdőtagját előre meg kell adni, hiszen csak így tudjuk a soron következő tagokat meghatározni.

Az előző példa rekurzív megadása: $a_n = a_{n-1} + 3$ $(n \geq 2)$ és $a_1 = 6$; vagy az ezzel egyenértékű $a_{n+1} = a_n + 3$ $(n \geq 1)$ és $a_1 = 6$.

A számítógépek pillanatok alatt meghatározzák a rekurzív sorozatok magas sorszámú tagjait. Az explicit alak segítségével azonban a sorozat algebrailag és analitikailag is könnyen jellemezhetővé, kezelhetővé válik. Ezért általában a rekurzív sorozatok explicit alakjának meghatározása a célunk; ezt nevezzük a **rekurzió feloldásának (megoldásának)**. A fordított irányú – explicitből rekurzív – átírásra ritkábban van szükség.

A sorozatokat jellemezhetjük attól függően, hogy a rekurzív összefüggésben melyik a sorozat legkorábbi tagja (vagyis *hányadrendű* a rekurzió), található-e konstans tag stb.

1. példa Példák rekurzív sorozatokra:

a) $a_n = a_{n-1} + d$ $(n \geq 2)$, $a_1 = c$, ahol c, d állandó. Ez a **számtani sorozat** rekurzív alakja; az ismert explicit formula $a_n = c + (n-1)d$, $(n \geq 1)$. Természetesen az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képlet ugyanezt jelenti: az n-edik tagot úgy kapjuk meg, hogy az első taghoz $(n-1)$-szer hozzáadjuk a sorozat differenciáját (különbségét).

b) $b_n = qb_{n-1}$ $(n \geq 2)$, $b_1 = c$ (c, $q \neq 0$ állandók). Ez a **mértani sorozat**; explicit alakja $b_n = cq^{n-1}$ $(n \geq 1)$. Az indoklás itt is hasonló: az n-edik tagot úgy kapjuk meg, hogy az első tagot $(n-1)$-szer szorozzuk a sorozat kvóciensével (hányadosával).

c) $c_n = nc_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $c_0 = 1$. Az elsőrendű rekurzió megoldása $c_n = n!$ $(n \geq 0)$ a $0! = 1$ megállapodással.

d) Másodrendű rekurzió a nevezetes Fibonacci-sorozat: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$, $f_1 = f_2 = 1$.

e) $d_n = d_{n-1}^2$ elsőrendű, $e_n = \frac{1}{e_{n-2}}$ másodrendű, $g_n = g_{n-1} \cdot g_{n-2} + g_{n-4}$ pedig negyedrendű rekurziós összefüggések.

A középkor nagy itáliai matematikusa, *Leonardo Pisano* (1175?–1250), ismertebb nevén Fibonacci a következő feladatot vizsgálta:

„Hány pár nyúl származik egy évben egyetlen pártól, ha minden pár havonta egy új párt szül, minden új pár kéthónapos korától kezdve válik tenyészképessé, és közben egyetlen nyúl sem pusztul el?"

Ha f_i jelenti az i-edik hónaphoz tartozó leszármazott nyúlpárokat, akkor bebizonyítható, hogy a fenti $\{f_n\}$ sorozat 12. tagja adja meg a keresett értéket. $f_1 = f_2 = 1$ (az első hónapban született nyúlpár), de $f_3 = 2$, mert az első hónapban született nyúlpárnak már lesznek utódai és így tovább.

A következő példában különböző rendű rekurziók ugyanazt a sorozatot határozzák meg.

2. példa Tekintsük a páros számok 2, 4, 6, 8, … sorozatát. Ennek egy rekurzív megadása lehet a „klasszikus" $a_n = a_{n-1} + 2$ $(n \geq 2)$, $a_1 = 2$ képlet.

A sorozatot felírhatjuk másodrendű rekurzióval is: $a_n = a_{n-2} + 4$ $(n \geq 3)$, ekkor két kezdőtagot kell megadnunk: $a_1 = 2$ és $a_2 = 4$. A sorozat harmadrendű (és hasonló gondolatmenettel tetszőleges rendű) rekurzióval is megadható: $a_n = a_{n-3} + 6$ $(n \geq 4)$, s a kezdeti értékek $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$.

Egy **másik gondolatmenet** a következő:

Az $\{a_n\}$ számtani sorozatban bármely közbülső elem a két szomszédos tag számtani közepe (átlaga). Így $n \geq 2$ esetén $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, vagyis $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$; innen indexeltolással $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 3)$. Ezzel a módszerrel egy másodrendű rekurziót kaptunk, amelynek két kezdőtagját kell megadnunk: $a_1 = 2$ és $a_2 = 4$. (Helyes az $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$ felírás is.)

Negyedrendű rekurzióhoz jutunk például a számtani sorozat szimmetrikus tulajdonságát kihasználó $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{5}$ összefüggés felhasználásával: $a_{n+2} = -a_{n+1} + 4a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 3)$, és $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a sorozatok **rekurzív alakja nem egyértelmű**.

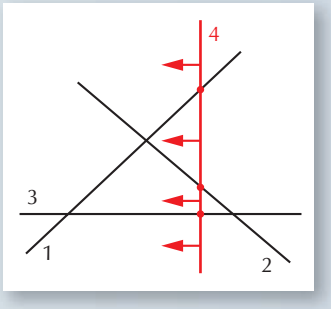
A továbbiakban a rekurziók alkalmazására nézünk néhány példát.

3. példa Egy egyenes a síkot két részre osztja, 2 egyenes legfeljebb 4 részre, 3 egyenes legfeljebb 7 részre. A legtöbb síkbeli tartományt akkor kapjuk, ha semelyik két egyenes nem párhuzamos, és semelyik három egyenes nem megy át egy ponton.

Legfeljebb hány tartományra osztja *a)* 10; *b)* n darab egyenes a síkot? $(n \in \mathbf{N}^+)$

Megoldás A negyedik egyenes megfelelő felvételekor 11, az ötödik behúzásakor 16 tartományt kapunk. Foglaljuk táblázatba az eredményeket!

egyenesek száma	1	2	3	4	5
tartományok száma	2	4	7	11	16
növekedés:		+2	+3	+4	+5



Úgy tűnik, hogy minden újabb egyenes felvételekor eggyel nagyobb az újonnan keletkezett tartományok száma. Hogyan tudnánk igazolni ezt a sejtést?

A negyedik egyenes felvételekor 3 metszéspont keletkezett: az új egyenes a korábban felvett három egyenes mindegyikét metszi, hiszen közülük semelyik kettő sem párhuzamos, és az új egyenes nem megy át korábbi egyenesek metszéspontján. A 3 metszéspont 2 szakaszra és 2 félegyenesre osztja a negyedik egyenest, és ezen részek mindegyikéhez egy-egy új tartományt rendelhetünk (az ábrán ezeket nyilak jelzik). Vagyis a negyedik egyenes felvételekor a síkrészek száma 4-gyel nőtt. Hasonlóan az ötödik egyenes behúzásakor 4 metszéspont, és ezért 5 új tartomány keletkezik. A gondolatmenet n darab egyenesre is általánosítható: ennek felvételekor $(n-1)+1=n$ az újonnan keletkezett tartományok száma.

Jelölje e_n az n egyenes behúzásával létrejövő tartományok maximális számát! (Ezt ugye akkor kapjuk, ha semelyik két egyenes nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.) Az előző észrevétel alapján egyszerű rekurziós összefüggést írhatunk fel: $e_n = e_{n-1} + n$, ha $n \geq 2$. Meg kell még adni egy kezdőtagot: $e_1 = 2$, hiszen egy egyenes két részre osztja a síkot.

a) Az e_{10} meghatározásához egyszerű „lépegetéssel" is eljuthatunk.

$e_6 = e_5 + 6 = 16 + 6 = 22$; $e_7 = e_6 + 7 = 29$; $e_8 = e_7 + 8 = 37$; $e_9 = e_8 + 9 = 46$;

$e_{10} = e_9 + 10 = 56$.

(Néhány soros számítógépes programmal nagyobb indexű tagok is gyorsan meghatározhatók.)

b) Az általános e_n tag explicit meghatározásához írjuk fel rendre az első n tag rekurzív képletét:

$e_1 = 2$,

$e_2 = e_1 + 2$,

$e_3 = e_2 + 3$,

…

$e_i = e_{i-1} + i$,

…

$e_n = e_{n-1} + n$.

Ha az egyenleteket összeadjuk, észrevehetjük, hogy a mindkét oldalon szereplő e_1, e_2, e_3, …, e_{n-1} tagok kiesnek. Kapjuk, hogy $e_n = 2 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$

$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$. Ez a sorozat explicit alakja.

Ellenőrzésképpen visszahelyettesíthetjük például $n = 10$-et: $e_{10} = \frac{10^2+10+2}{2} = 56$ valóban.

4. példa Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$, $(n \geq 2, a_1 = 1)$ sorozat explicit alakját!

Megoldás Néhány kezdőtagot érdemes behelyettesítenünk. Az $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = 2$ értékek alapján az $a_n = \sqrt{n}$ összefüggést sejthetjük meg. Teljes indukcióval bizonyítunk: feltesszük, hogy $a_k = \sqrt{k}$, s kérdés, hogy $a_{k+1} = \sqrt{k+1}$ teljesül-e. A rekurziós összefüggés és az indukciós feltevés alapján $a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k^2} =$

$= \sqrt{1 + \sqrt{k}^2} = \sqrt{1+k}$, vagyis sejtésünk igaz. A sorozat explicit képlete: $a_n = \sqrt{n}$.

Megjegyzés

Érdemes a sorozatot más pozitív egész kezdőérték esetén is megvizsgálni.

ÖSSZEGKÉPLETEK

Gyakran van szükségünk arra, hogy sorozatok tagjait összegezzük. Az első n pozitív egész szám összege például $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, mint az Gauss párosításos módszerével könnyen igazolható. Korábban megadtuk már az első n pozitív páratlan szám, valamint az első n négyzetszám összegét is zárt alakban (ezeket a teljes indukció módszerével igazoltuk). A 3. példában pedig e_n explicit alakjához kellett összegeznünk a sorozat tagjait.

A számtani sorozat összegképletét is legegyszerűbben a Gauss-módszerrel adhatjuk meg.

Tétel

A számtani sorozat első n tagjának összege $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d]\cdot n}{2}$. $(n \in \mathbf{N}^+)$

Bizonyítás Alkalmazzuk tehát a párba állítás módszerét. Jelölje S_n a keresett összeget, és írjuk az összeg alá a fordított sorrendben felírt összeget is!

$S_n =$	a_1	+	a_2	+	…	+	a_i	+	…	a_{n-1}	+	a_n
$S_n =$	a_n	+	a_{n-1}	+	…	+	a_{n-i+1}	+	…	a_2	+	a_1

A számtani sorozat szomszédos tagjainak a különbsége állandó, emiatt az egymás alatti tagok összege is ugyanannyi. (Ha a differenciát d-vel jelöljük, akkor $a_j + a_k = a_j + d + a_k - d = a_{j+1} + a_{k-1}$. Az összeg tehát nem változik, mert amennyivel a felső tagot növeljük a táblázatban, ugyanannyival csökkentjük az alsót.)

Az n darab számpár összege $n \cdot (a_1 + a_n)$, így $2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$, s innen $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$. Az összeget kifejezhetjük d-vel és az első taggal is az $a_n = a_1 + (n-1)d$ explicit alakból, így az állítást igazoltuk.

Tétel

A mértani sorozat első n tagjának összege $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, ha $q \neq 1$; ha pedig $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot a_1$. $(n \in \mathbf{N}^+)$

Bizonyítás A sorozat n-edik tagja: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Az

(1) $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1}$

összeget szorozzuk meg q-val! A kapott

(2) $qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$

összegnek $(n-1)$ darab tagja közös (1)-gyel, így képezzük a (2) − (1) különbséget:

$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \quad \Leftrightarrow \quad S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$.

A q paramétertől függően esetszétválasztást végzünk.

1. Ha $q \neq 1$, akkor $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ a keresett összegképlet. (Írhatjuk $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ alakban is.)

2. Ha $q = 1$, akkor $\{a_n\}$ minden tagja egyenlő: $S_n = n \cdot a_1$.

Az állítást igazoltuk.

A Σ (SZUMMA) JELÖLÉS, SZÁMOLÁSI SZABÁLYOK

Sorozatok tagjainak összegzésekor egyszerűbbé, hatékonyabbá teszi munkánkat a Σ (szumma) szimbólum használata. Az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ összeget röviden így jelöljük: $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Itt a Σ jel alá írt betű (a példában i) az a_i változó indexét (sorszámát) jelöli, valamint azt is ide írjuk, hogy mi a kezdőérték; a Σ jel fölé pedig az index végső, utoljára felvett értéke kerül. Természetesen hasonló módon nemcsak sorozatok, hanem kifejezések

is összegezhetők. $\sum_{i=1}^{n} f_i$ jelentheti az $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ kifejezések összegét, vagy $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ az f függvény helyettesítési értékeinek $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ összegét.

A felsőbb matematikában és a természettudományokban szinte nélkülözhetetlen ennek a tömör jelölésnek a használata. Nemcsak azért, mert rövidíti, gyorsítja a munkánkat, hanem – mint alább látjuk majd – a Σ műveleti szimbólum tulajdonságait felhasználva sok esetben a formális számolás is egyszerűbbé válik.

Megjegyzés

Akik tudnak programozni, észrevehetik, hogy a legtöbb programnyelvben a fenti szummázást technikailag egy ciklussal valósíthatjuk meg. Ha a megértést könnyíti, akkor a $\sum_{i=1}^{n} f_i$ végrehajtásakor nyugodtan gondolhatunk egy összegzést végző, számlálásos ciklusra.

Példák

a) A $4 + 7 + 10 + 13 + \ldots + 52$ összegben az $a_n = 3n + 1$ számtani sorozat 17 szomszédos tagja szerepel. Az összeget megadhatjuk így is: $\sum_{i=1}^{17} a_i$ vagy $\sum_{i=1}^{17} (3i + 1)$.

b) Az $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$ sorozat explicit alakja $b_n = \frac{1}{n+4}$. Az első tíz tag összege $\sum_{j=1}^{10} b_j = \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{j+4}$, az első n tag összege például $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+4}$ módon írható fel.

c) $5^3 + 6^3 + 7^3 + \ldots + 22^3 = \sum_{i=5}^{22} i^3$, de helyes például a $\sum_{i=1}^{18} (i+4)^3$ felírás is.

d) Egy $\{a_n\}$ sorozat, és az első k, $k + 1$, … tagjából képezett S_k, S_{k+1}, … összegek között a következő kapcsolat áll fenn: $S_{k+1} = a_{k+1} + S_k$. Az összefüggést néha nevezik *ekvivalencia-tételnek* is. A Σ jelölés alkalmazásával: $S_{k+1} = a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i$.

Alább felsoroljuk a „szummázás” néhány tulajdonságát, amelyekkel jelentősen egyszerűsödnek a számolások, levezetések. Az állítások könnyen igazolhatók a definíció segítségével, az ismételt összeadások formális kiírásával. (Egy ideig egyébként is érdemes kiírni az összegzésben szereplő tagokat, amíg a jelölés túl absztrakt.)

Számolási szabályok:

1. $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$ (c = konstans); ez az ismételt összeadás szabálya.

2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$ (azaz a konstans szorzó kiemelhető a Σ jel elé).

3. $\sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=j+1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i$ (itt $k > j$).

Ez utóbbi szabály „meg is fordítható”: $\sum_{i=j+1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{j} a_i$, (ha $k > j$).

4. $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$.

5. példa

Bizonyítsuk be a Σ jelölés és számolási szabályainak alkalmazásával, hogy az első n páratlan szám összege n^2!

Megoldás

Az n-edik páratlan szám $p_n = 2n - 1$. Így $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 =$

$= 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n = n^2$ valóban.

Megjegyzés
A $\sum$ jelölés segítségével hasonló egyszerűséggel számíthatjuk ki tetszőleges számtani sorozat első n tagjának az összegét is.

A sakkjáték eredete

A sakkjáték eredetéről szép történetet jegyzett le a perzsa *Ibn Khallikán* a XIII. században. Eszerint az uralkodót annyira elbűvölte a játék szépsége, hogy maga elé hívatta a játék feltalálóját, és megkérdezte, milyen jutalmat kíván találmányáért. A „szerény" brahman azt kérte, hogy tegyenek a tábla első mezőjére egy szem búzát, a másodikra két szemet, a harmadikra négyet, a negyedikre nyolcat és így tovább; s jutalmul ezen búzaszemeket kapja. A kérését azonban még az uralkodó sem tudta teljesíteni. Miért?
(Egy ellenőrzött mérés alapján 300 szem búza tömege 11,4 grammnak adódott.)

FELADATOK

1. E1 A $\sum$ jelölés számolási szabályait felhasználva igazoljuk, hogy az alábbi átalakítások helyesek:

a) $\sum_{i=0}^{12} i(i-1) = \sum_{i=2}^{12} i(i-1)$;

b) $\sum_{i=0}^{12} i(i-1) = \sum_{i=1}^{11} i(i+1)$;

c) $\sum_{k=5}^{16} (2k-1) = \sum_{k=2}^{13} (2k+5)$;

d) $\sum_{i=1}^{21} (2i-1) + \sum_{k=1}^{21} (2k+3) = \sum_{i=1}^{21} (4i+2)$;

e) $\sum_{i=3}^{12} (2i-1) + \sum_{i=8}^{17} (i-3) + \sum_{i=-2}^{7} (4-i) = \sum_{i=3}^{12} (2i-1) + \sum_{i=3}^{12} (i+2) + \sum_{i=3}^{12} (9-i) = \sum_{i=3}^{12} (2i+10)$.

2. E1 Négy szám összege 8, szorzata −15, a négy szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a sorozat?

3. E1 Egy $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának az összege bármely n természetes számra $2n^2 - 3n$. Mutassuk meg, hogy $\{a_n\}$ számtani sorozat, és határozzuk meg az n-edik tagját!

4. E1 Egy sakkversenyen hét diák vett részt, mindenki játszott mindenkivel. Mérkőzésenként a győztes 1 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékos fél-fél pontot. Hány pontja volt a diákoknak a körmérkőzés végén, ha a rangsor alapján felírt pontok éppen számtani sorozatot alkottak?

5. E2 Az 1, 2, ... , n számtani sorozat első n tagjából kivettünk egy számot, így a maradék tagok átlaga $\frac{556}{11}$ lett. Melyik számot vettük ki és mennyi n értéke?

6. E1 Mi a **hiba** a következő megoldásban?
Feladat: Egy n-szög belső szögei olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 120°, és különbsége 5°. Hány oldalú a sokszög? (Egyetemi felvételi feladat volt.)
„Megoldás": Az n-szög szögei rendre 120°, 125°, 130°, …, 120° + $(n-1)\cdot 5°$. Ezek összege megegyezik a belső szögek összegével: $\frac{120° + 115° + n\cdot 5°}{2}\cdot n = (n-2)\cdot 180°$. Innen – a mértékegységeket elhagyva – az $n^2 - 25n + 144 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásai $n_1 = 9$ és $n_2 = 16$. A sokszög tehát 9 vagy 16 oldalú lehet.

7. E2 A 2-es számrendszerbeli $111\ldots1_2$ szám 2022 jegyű. Hány jegyű ez a szám a tízes számrendszerben?

8. E1 Három szám egy mértani sorozat három egymás utáni eleme. A számok összege 26, négyzeteik összege 364. Melyik ez a három szám?

9. E1 Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha az elsőhöz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a kapott három szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a három szám?

10. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2006.)** Egy (a_n) számsorozatról a következőket tudjuk:
– a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$,
– az a_1, a_2 és $a_3 - 9a_1$ ebben a sorrendben egy számtani sorozat 3 egymást követő tagja;
– az (a_n) első öt tagjának összege 682.
Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja?

11. E1 Egy háromszög $a \leq b \leq c$ oldalai mértani sorozatot alkotnak. Milyen értékeket vehet fel a sorozat $q = \frac{b}{a}$ hányadosa?

12. E2 Egy $\{g_n\}$ sorozat explicit alakja $g_n = an^2 + bn + c$. (a, b, c valós konstansok.)
a) Hány $\{g_n\}$ sorozat van, amelyre $g_1 = 1$ és $g_2 = 2$?
b) Hány $\{g_n\}$ sorozat van, amelyre $g_1 = 1$, $g_2 = 2$ és $g_3 = 5$?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 998–1046.

54. SOROZATOK JELLEMZÉSE

A lecke első részében néhány gyakorlófeladatot oldunk meg a rekurzív sorozatok témaköréből: explicit alakot határozunk meg, összegzéseket végzünk, és gyakoroljuk a Σ jel használatát. A lecke második felében a sorozatok értékkészletét és monotonitási tulajdonságait vizsgáljuk.

1. példa Tekintsük az $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $n \geq 2$; $a_1 = 2$ rekurzív sorozatot!
a) A sorozat mely tagjai oszthatók 3-mal?
b) Adjuk meg a sorozat explicit alakját!

Megoldás *a)* A sorozat tagjainak 3-mal való osztási maradékai (2, 0, 2, 0, …) periodikusan ismétlődnek. (Ennek az az oka, hogy mindegyik maradék csak az őt közvetlenül megelőző tag maradékától függ.) Így a sorozat páros indexű tagjai – és csak azok – oszthatók 3-mal.

b) A sorozat első néhány tagja $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$ stb. Az explicit alakot többféleképpen is előállíthatjuk.

Első megoldás (teljes indukció): Észrevehetjük, hogy mindegyik tag eggyel nagyobb egy kettőhatványnál, így az $a_n = 2^{n-1} + 1$, $n \geq 1$ explicit alakot sejthetjük meg. Az indukciós feltevés $a_k = 2^{k-1} + 1$, ebből kell belátnunk, hogy $a_{k+1} = 2^k + 1$, ez pedig az $a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 1$ átalakításból már következik. A képlet $n = 1$-re is érvényes. ($2^{n-1} + 1$ ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, mint $(-1)^{n-1} + 1$, tehát ebből is látszik, hogy a sorozat páros indexű tagjai oszthatók 3-mal.)

Második megoldás (fokozatos helyettesítés): A sorozat tagjait rendre kifejezzük a_1-gyel.
$a_2 = 2a_1 - 1$;
$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot (2a_1 - 1) - 1 = 2^2a_1 - 2 - 1$;
$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot (2^2a_1 - 2 - 1) - 1 = 2^3a_1 - 2^2 - 2 - 1$;
$a_5 = 2a_4 - 1 = 2 \cdot (2^3a_1 - 2^2 - 2 - 1) - 1 = 2^4a_1 - 2^3 - 2^2 - 2 - 1$ és így tovább.
A képzési szabály könnyen felismerhető; az indukciós gondolatból következik, hogy
$a_n = 2^{n-1}a_1 - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \ldots - 2 - 1$.
$2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1$ nem más, mint a $b_n = 2^{n-1}$ mértani sorozat első $(n-1)$ tagjának az összege. Ennek értéke $\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$, és mivel $a_1 = 2$, így $a_n = 2^{n-1} \cdot 2 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} + 1$.

Harmadik megoldás (a különbségsorozat módszere): Definiáljuk a (d_n) különbségsorozatot $d_n = a_n - a_{n-1}$ módon! ($n \geq 2$.) Ekkor a szomszédos tagok különbsége $d_2 = a_2 - a_1 = 1$; $d_3 = a_3 - a_2 = 2$; $d_4 = a_4 - a_3 = 4$ stb. Úgy tűnik, hogy (d_n) mértani sorozat, s ez igazolható is a rekurzív alak segítségével: $d_n = a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - 1 - (2a_{n-2} - 1) = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) = 2d_{n-1}$ ($n \geq 3$). Valóban: a különbségsorozat bármely tagja az előző tag 2-szerese, $d_n = 2^{n-2}$, $n \geq 2$.

Az n-edik a_n tagot ismételt összeadásokból kaphatjuk meg: $a_2 = a_1 + d_2$; $a_3 = a_2 + d_3 = a_1 + d_2 + d_3$; általában $a_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i$. Ennek összege pedig $a_n = 2 + \sum_{i=2}^{n} 2^{i-2} = 2 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 1$.

2. példa Határozzuk meg az $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 100 \cdot 101$ összeget!

Megoldás Néhány kezdőértéket kiszámolhatunk (hátha észreveszünk valamilyen szabályosságot, és akkor a sejtést teljes indukcióval igazolhatjuk):

$S_1 = 1 \cdot 2 = 2$, $S_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$, $S_3 = S_2 + 3 \cdot 4 = 20$, $S_4 = S_3 + 4 \cdot 5 = 40$ stb.

Ezekből a kezdőértékekből nem nagyon sejthető meg az összegképlet, így más utat keresünk. Valójában az $i(i+1)$ szorzatot kell összegeznünk az $i = 1, 2, \ldots, 100$ értékekre; vagyis a $\sum_{i=1}^{100} i(i+1)$ összeget kell meghatároznunk. Az ismert átalakításokkal $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, így $\sum_{i=1}^{100} i(i+1) = \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{3} = 343\,400$.

3. példa Oldjuk meg az $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2012}{2013}$ egyenletet ($n \in \mathbf{Z}^+$)!

Megoldás Próbálgatással nyilván nem érünk célt (elég nagy n számig kellene eljutni), a közös nevezőre hozás is túlságosan bonyolultnak tűnik. Egy számítógépes program futtatásával sem kereshetjük meg a megoldást; ha a nevezőben többjegyű számok szorzata szerepel, akkor a közelítő értékekkel való számolás miatt a gépek már nem adnak pontos értéket.

Egyik lehetőség ismét a teljes indukció alkalmazása lehet, de ehhez – néhány kezdőérték kiszámolása után – meg kell sejteni a bal oldal összegét. Most egy másik eljárást, az ún. *parciális törtek módszerét* követjük. Ennek során az $\frac{1}{i(i+1)}$ általános tagot megpróbáljuk $\frac{A}{i} + \frac{B}{i+1}$ alakban felírni, ahol A, B konstansok. Ekkor

$\frac{A}{i} + \frac{B}{i+1} = \frac{A(i+1) + Bi}{i(i+1)} = \frac{i(A+B) + A}{i(i+1)}$, és az $\frac{i(A+B)+A}{i(i+1)} \equiv \frac{1}{i(i+1)}$

azonosság csak akkor teljesülhet minden i-re, ha $A + B = 0$ és $A = 1$. Ennek az egyszerű „egyenletrendszernek” $A = 1$, $B = -1$ a megoldása, tehát minden i-re $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$.

A bal oldal átalakítható: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Észrevehetjük, hogy a közbülső tagok kiesnek, csak az összeg eleje és vége marad meg: $\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

tehát a bal oldal, és az így kapott egyszerű $\frac{n}{n+1} = \frac{2012}{2013}$ egyenlet megoldása $n = 2012$.

4. példa Korábban teljes indukcióval bizonyítottuk a $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ összefüggést, ehhez azonban szükségünk volt a célkifejezés, az összegképlet ismeretére. Felvetődik a kérdés: hogyan lehet kitalálni (megsejteni) egy ilyen formulát?

Megoldás Az ókori görögöktől származik a következő módszer.

Rendre meghatározták a

$H_1 = \frac{1^2}{1} = 1$, $H_2 = \frac{1^2 + 2^2}{1+2} = \frac{5}{3}$, $H_3 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{1+2+3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$, $H_4 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{1+2+3+4} = \frac{30}{10} = 3$, …

hányadosokat, ez alapján pedig megfogalmazták a $H_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{2n+1}{3}$ sejtést. Ezt átalakítva a négyzetszámok

összegére már adódik az ismert formula: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n+1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A hatványösszegek meghatározására általánosan használható eljárás is adható.

5. példa Határozzuk meg a $\sum_{i=1}^{n} i^3$ hatványösszeget teljes indukció alkalmazása nélkül!

Megoldás $(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$. Helyettesítsük ebbe az egyenletbe rendre az $i = 0, 1, 2, \dots, n$ értékeket! Kapjuk:

$1^4 = 0^4 + 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 1,$

$2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1,$

$\dots$

$(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1,$

$\dots$

$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$

Az egyenleteket összeadjuk, a mindkét oldalon szereplő tagokat elhagyjuk, és a kapott egyenletet átalakítjuk:

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^4 = \sum_{i=0}^{n} i^4 + 4\sum_{i=0}^{n} i^3 + 6\sum_{i=0}^{n} i^2 + 4\sum_{i=0}^{n} i + n + 1,$$

$$(n+1)^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + n + 1,$$

$$(n+1)^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1.$$

Innen $4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n - 1 =$

$= (n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] = (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2$, és így megkaptuk a

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ zárt alakot.

Meghatározhatjuk a negyedik hatványok $\sum_{i=1}^{n} i^4$ összegét is, ekkor az $(i+1)^5 = i^5 + 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$ egyenleteket összegezzük $i = 0, 1, 2, \dots, n$-re. Látható, hogy a negyedik hatványok összegét a harmadik, második és első hatványok összegének segítségével adhatjuk meg. Hasonlóan számítható ki az ötödik hatványok $\sum_{i=1}^{n} i^5$ összege, ehhez fel kell használnunk a negyedik hatványok összegét és így tovább.

EGY SZÁMELMÉLETI ÉRDEKESSÉG (Kiegészítő anyag)

Írjuk egymás mellé egy m pozitív egész szám pozitív osztóit, az egyes osztók alá pedig rendre az ő pozitív osztóinak számát! Az alábbi táblázatban ily módon például az $m = 12$, az $m = 60$ és az $m = 100$ számok osztóit tüntettük fel.

1	2	3	4	6	**12**						
1	2	2	3	4	6						
1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	**60**
1	2	2	3	2	4	4	6	4	6	8	12
1	2	4	5	10	20	25	50	**100**			
1	2	3	2	4	6	3	6	9			

Egy érdekes észrevételt tehetünk: $(1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6)^2 = 18^2 = 324$, és $1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = 324$ szintén. Hasonlóan $m = 60$-ra: $(1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 4 + 6 + 4 + 6 + 8 + 12)^2 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 2^3 + 4^3 + 4^3 + 6^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + 12^3 = 2916$, és az összefüggés a 100 osztóira is teljesül:

$(1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 + 3^3 + 6^3 + 9^3 = 1296.$

Joseph Liouville (1809–1882) francia matematikusnak sikerült bebizonyítania, hogy a fenti összefüggés minden m pozitív egész szám osztóira fennáll.

Ha m prímhatvány, azaz $m = p^{n-1}$, ahol p prím, akkor m osztói $1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}$; az osztók osztóinak száma rendre $1, 2, 3, \ldots, n$; és Liouville tétele szerint $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$. Speciális esetként tehát visszakaptuk a köbszámok összegére vonatkozó, korábban levezetett formulát: $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

MONOTONITÁS, KORLÁTOSSÁG

A sorozatok a pozitív egész számok halmazán (ritkábban a természetes számok halmazán) értelmezett függvények. Célszerű ezért a sorozatok olyan tulajdonságait is megvizsgálni, amelyekkel a függvényeket jellemezzük. Az egyik ilyen tulajdonság a monotonitás.

Emlékeztetőül: az f függvény az $[a, b]$ intervallumon monoton nő, ha minden $[a, b]$ intervallumbeli x_1 és x_2 számokra, ahol $x_1 < x_2$, szükségképpen teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Hasonlóan adhatók meg a monoton csökkenés (fogyás), illetve a szigorúan monoton növekedés és csökkenés definíciói is. A függvénytani definíciókat természetes módon fogalmazhatjuk meg a sorozatokra.

Definíciók

Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat
– **monoton növekvő**, ha $a_n \leq a_{n+1}$, minden n pozitív egész számra;
– **monoton csökkenő**, ha $a_n \geq a_{n+1}$, minden n pozitív egész számra;
– **szigorúan monoton növekvő**, ha $a_n < a_{n+1}$, minden n pozitív egész számra;
– **szigorúan monoton csökkenő**, ha $a_n > a_{n+1}$, minden n pozitív egész számra.

Példák

1. A **számtani sorozat** monotonitása a differenciától függ. Ha a differencia pozitív, a sorozat szigorúan monoton növekvő; míg ha a differencia negatív, akkor szigorúan monoton csökkenő. Ha a differencia 0, akkor a sorozat állandó (minden tagja egyenlő), monoton növekvő és monoton csökkenő is.

2. A **mértani sorozat** „bármilyen” lehet. Például az $1, 2, 4, 8, \ldots$ sorozat szigorúan monoton növekvő, a $-1, -3, -9, -27, \ldots$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, míg az $1, -4, 16, -64, \ldots$ sorozat nem monoton növekvő és nem monoton csökkenő.

3. Az $a_n = a_{n-1} + 5n - 9$ $(n \geq 2)$ sorozat bármely a_1 kezdőtag esetén szigorúan monoton nő, hiszen a különbségsorozata $d_n = a_n - a_{n-1} = 5n - 9$ $(n \geq 2)$ mindig pozitív.

Általában is elmondhatjuk bármely sorozatra, hogy ha a különbségsorozat minden tagja pozitív, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő. (A számtani sorozatban a különbségsorozat konstans, éppen a sorozat differenciája.)

4. Az $a_n = a_{n-1} + n - 5$ $(n \geq 2, a_1 = 1)$ sorozat néhány kezdőtagja: $1, -2, -4, -5, -5, -4, -2, 1, 5, \ldots$ A sorozat nem monoton növekvő, például $a_2 - a_1 = -2 - 1 = -3$, tehát $a_2 < a_1$. Nem is monoton csökkenő, hiszen például $a_6 > a_5$. Azt sejthetjük, hogy a 6. tagtól kezdve szigorúan növekvő lesz a sorozat. Ennek igazolása: $a_n - a_{n-1} = n - 5 > 0$, ha $n \geq 6$.

5. $a_n = 2a_{n-1} - 6$ $(n \geq 2)$ sorozat monotonitása az a_1 kezdőtagtól függ: ha $a_1 > 6$, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő; ha $a_1 < 6$, akkor szigorúan monoton csökkenő; míg ha $a_1 = 6$, akkor a $\{6\}$ konstans sorozatot kapjuk, ami monoton növekvő és monoton csökkenő is.

Egy másik függvénytani fogalom a sorozatok értékkészletére vonatkozik. A *korlátossággal* azt jellemezzük, hogy a sorozat tagjai mekkora értéket vehetnek fel.

Definíciók

Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat
– **felülről korlátos**, ha van olyan K valós szám, hogy a sorozat minden tagjára $a_n \leq K$;
– **alulról korlátos**, ha van olyan A valós szám, hogy a sorozat minden elemére $A \leq a_n$.
Ha egy sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátos**nak nevezzük.

Nézzünk néhány **példát**:

Példák

1. A szigorúan monoton növekvő $a_n = a_{n-1} + d$ $(n \geq 2,\ d > 0)$ **számtani sorozat** alulról korlátos. Egy alsó korlátja a_1, de alsó korlát minden a_1-nél kisebb szám is. (a_1 a legnagyobb alsó korlát.) Ugyanakkor azt állítjuk, hogy a sorozat felülről nem korlátos: akármilyen nagy K számot is adunk meg, „egy idő múlva", azaz valamely indextől kezdve a sorozatnak lesz K-nál nagyobb tagja.

Indoklásképpen felírhatjuk a sorozat explicit alakját: $a_n = a_1 + (n-1)d$. Ez akkor nagyobb tetszőleges, adott K-nál, ha $a_1 + (n-1)d > K$, azaz $n > \frac{K - a_1}{d} + 1$; és ilyen n nyilván létezik. (Amikor a pozitív d számmal osztottunk, a relációs jel nem fordult meg.)

Ha az $\{a_n\}$ számtani sorozat különbsége negatív, akkor a sorozat felülről korlátos; bármilyen $K \geq a_1$ megfelelő felső korlát. (A legkisebb felső korlát a_1.)

Ha pedig a számtani sorozat konstans, akkor a sorozat alulról és felülről is korlátos. (A sorozat értékkészlete 1 elemű halmaz.)

2. A **mértani sorozatok** a korlátosság szempontjából sem viselkednek egységesen.

Például a $q = -2$ kvóciensű $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$ sorozat alulról és felülről sem korlátos; míg a $q = 2$ kvóciensű sorozat vagy alulról vagy felülről korlátos, az első tag előjelétől függően. (Például $1, 2, 4, 8, \ldots$ legnagyobb alsó korlátja 1; a $-1, -2, -4, -8, \ldots$ sorozat legkisebb felső korlátja pedig -1.)

Meg tudunk adni korlátos mértani sorozatokat is: az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ vagy az $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ sorozatok minden tagja például a $[-1; 1]$ intervallumban van.

3. Az $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ sorozat alulról és felülről is korlátos. A sorozat n-edik tagja $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$; ebből következik, hogy felső korlát lehet például az 1 (ez a legkisebb felső korlát), és a legnagyobb alsó korlát az $\frac{1}{2}$. (A sorozat szigorúan monoton nő, mert egyre kisebb számokat vonunk ki 1-ből.)

4. Az $s_1 = 1,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4},\ s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \ldots$ sorozat szintén korlátos, alsó korlát lehet például az 1. Észrevehetjük, hogy $s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ teljesül, így felső korlát lehet például a 2.

Megjegyzések

1. A korlátosság fogalmát számhalmazokra is definiálhatjuk. Például egy H halmaz felülről korlátos, ha van olyan K valós szám, hogy a H halmaz bármely x elemére $x \leq K$.

2. Ha K egy felső korlát, akkor minden $K' > K$ is felső korlát; hasonlóan ha A alsó korlát, akkor minden $A' < A$ is az.

3. Több példában megadtuk a legnagyobb alsó, illetve a legkisebb felső korlát értékét. Korlátos sorozatok és valós számhalmazok esetén ezek mindig léteznek; ez a valós számok egy jellemző tulajdonsága.

Véges halmazok maximuma mindig a halmaz eleme, hiszen véges sok szám között mindig van maximális. Végtelen halmazok vagy sorozatok esetén ez nem szükségképpen igaz, például az $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ sorozatnak nincs maximuma. A felső korlátok közül azonban mindig van legkisebb: véges halmaz esetén ez biztosan a halmaz valamelyik eleme, míg végtelen halmaz esetén előfordulhat, hogy halmazon kívüli elem. Ilyen a fenti sorozat legkisebb felső korlátja, az 1 is.

Hasonló igaz a legnagyobb alsó korlátra.

4. Érdemes külön is megfogalmaznunk, hogy egy sorozat mikor nem monoton növekvő, vagy mikor nem korlátos felülről. (Néhány tagadó definíciót az ajánlott feladatok között tűzünk ki.)

5. Ha egy sorozat szigorúan monoton növekvő, akkor monoton növekvő is, és hasonlót állíthatunk a monoton csökkenő sorozatokra is. A szigorú monotonitás tehát „szigorúbb" feltétel, mint az egyszerű monotonitás.

A sorozatok **monotonitása** és **korlátossága között** egyszerű összefüggéseket állapíthatunk meg. A definíciókból közvetlenül adódik, hogy ha egy sorozat monoton nő (illetve csökken), akkor alulról (illetve felülről) korlátos. A tétel megfordítása nem igaz: például az $1, -1, 1, -1, \ldots$ sorozat korlátos, de nem monoton.

Azt is láttuk a fenti példákon, hogy a szigorúan monoton növekedés ellenére még lehet felülről korlátos egy sorozat (ilyen volt a 4. példában szereplő $\{s_n\}$ sorozat). A határértékszámításban fontos szerepet játszanak a monoton és korlátos sorozatok, de a későbbi leckékben látni fogjuk, hogy ezen tulajdonságok megállapítása gyakran igen nehéz.

Végezetül egy nevezetes problémát oldunk meg.

6. példa Korlátos-e a $h_n = h_{n-1} + \frac{1}{n}$ $(n \geq 2,\ h_1 = 1)$ sorozat?

Megoldás **Első megoldás:** A sorozat n-edik tagja $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$, az ún. harmonikus sor. (Az összegben szereplő közbülső tagok a két szomszédos tag harmonikus közepei.) A sorozat szigorúan monoton növekvő, de n növekedtével csökken a tagok közötti különbség.

Először az $r_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$ részösszeget becsüljük meg alulról. Ha a nevezőkben mindenhová $2n$-et írunk, akkor a törtek értéke csökken, ha $n \geq 2$:

$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$, azaz $\frac{1}{2} < r_n$. (A bal oldalon éppen n darab törtet adunk össze.)

Ezután a $\{h_n\}$ sorozatot is megbecsülhetjük, rendre 1, 2, 4, 8, … tagját véve az összegnek.

$r_1 = \frac{1}{2}$; $r_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$; $r_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$; $r_8 = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$ és így tovább. Vizsgáljuk az $n = 2^m$ alakú részsorozatait $\{h_n\}$-nek! (Egy adott sorozat részsorozatát kapjuk, ha az eredeti sorozatból elhagyunk tagokat úgy, hogy még mindig sorozat maradjon.) Ekkor

$$h_n = 1 + r_1 + r_2 + r_4 + r_8 + \ldots + r_{2^{m-1}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = (m+1)\cdot\frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy $\{h_n\}$ nem korlátos: m növelésével $(m+1)\cdot\frac{1}{2}$ tetszőleges K-nál nagyobbá válik.

Második megoldás: A $\{h_n\}$ sorozat tagjait alulról becsüljük meg, ha a nevezőket növeljük. Az egyjegyű nevezők helyett 10-et írunk, a kétjegyű nevezők helyett 100-at, a háromjegyűek helyett 1000-et és így tovább.

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} > \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$,

$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{99} > \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$,

$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{999} > \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{1000} = \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$ stb.

Mivel a $\frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \ldots$ részletösszegek tetszőlegesen nagy értéket felvehetnek, ezért a $\{h_n\}$ sorozat is tetszőlegesen nagy lehet, vagyis $\{h_n\}$ nem korlátos.

FELADATOK

1. E1 A $\{b_n\}$ sorozat rekurzív alakja $b_n = b_{n-1} + 2n - 17$, ha $n \geq 2$, és $b_1 = 3$.
a) Határozzuk meg az explicit alak segítségével b_{20} értékét!
b) Mennyi a sorozat első 20 tagjának az összege?

2. E2 A $\{c_n\}$ sorozat rekurzív alakja $c_n = c_{n-1} + n^2 - 17n + 2$, ha $n \geq 2$, és $c_1 = 1$.
a) Határozzuk meg az explicit alak segítségével c_{20} értékét!
b) Mennyi a sorozat első 20 tagjának az összege?

3. E2 Határozzuk meg az alábbi összegek pontos értékét:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2022}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{2022}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{3}{2022}\right) + \ldots + \left(\frac{2011}{2022}\right)$;

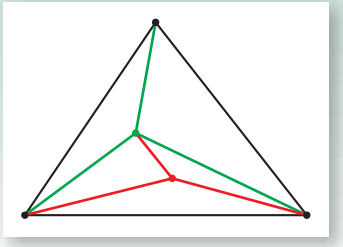
b) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \ldots + 1\cdot n + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 + \ldots + 2\cdot n + \ldots + (n-2)\cdot(n-1) + (n-2)\cdot n + (n-1)\cdot n$.

4. E2 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Bontsunk fel egy háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy bárhogyan kiválasztva három pontot a felbontást adó háromszögek csúcsai közül, azok ne essenek egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy a felbontásban szereplő kis háromszögek száma páratlan.

„Megoldás": Tegyük fel, hogy a háromszög belsejében felvett n darab pont h_n darab kis háromszögre bontja fel az adott háromszöget (n pozitív egész szám). Egy pontot a háromszög csúcsaival összekötve három kisebb háromszöget kapunk, tehát $h_1 = 3$. Minden következő pont valamelyik már meglévő háromszög belsejébe kerül. Az új pontot a bennfoglaló háromszög csúcsaival összekötve a háromszögek száma kettővel nő, így a $h_n = h_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$) rekurzív sorozat tagjai adják meg a lehetséges háromszögek számát. $\{h_n\}$ számtani sorozat, explicit megoldása $h_n = 2n + 1$; és ez az érték valóban mindig páratlan.



5. E2 Adjunk explicit és rekurzív formulát az alábbi sorozatok n-edik tagjaira! ($n \in \mathbf{N}^+$)

a) 7, 77, 777, … , $\underbrace{77\ldots7}_{n\text{-szer}}$, …;

b) 7, 37, 377, … $\underbrace{37\ldots7}_{n\text{-szer}}$, …;

c) 7, 37, 337, …, $\underbrace{33\ldots7}_{n\text{-szer}}$;

d) 12, 1122, 111222, … , $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-szer}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{-szer}}$.

e) A *c)* sorozat néhány kezdőtagját ellenőrizve észrevehetjük, hogy prímszámokat kapunk. Lehet-e a sorozat minden tagja prím?

6. E1 Egy végtelen számsorozatban bármely 3 szomszédos tag összege 2. A sorozat 10. tagja 3, a 200. tag 8. Adjuk meg a sorozat rekurzív képletét! Mi a sorozat 333. tagja?

7. E1 Fogalmazzuk meg, mit jelent, ha az $\{a_n\}$ sorozat

a) nem szigorúan monoton csökkenő;
b) nem monoton növekvő;
c) nem korlátos alulról;
d) nem korlátos!

8. E1 Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) Ha egy sorozat monoton növekvő, akkor bármely részsorozata is monoton növekvő.
b) Van olyan sorozat, amely nem monoton növekvő, de van szigorúan monoton növekvő részsorozata.
c) Van olyan sorozat, amelyben a páros indexű tagok monoton nőnek, a páratlan indexű tagok monoton csökkennek, és a sorozat korlátos.
d) Ha $a_n < b_n$ minden n-re, és $\{a_n\}$ nem korlátos sorozat, akkor $\{b_n\}$ sem korlátos.
e) Ha $a_n < b_n$ minden n-re, és $\{a_n\}$ felülről nem korlátos sorozat, akkor $\{b_n\}$ sem korlátos.
f) Ha $\{a_n\}$ nem korlátos sorozat, akkor $\{ca_n\}$ sem korlátos ($c \in \mathbf{R}^+$).
g) Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ nem korlátos sorozatok, akkor az $\{a_n + b_n\}$ sorozat sem korlátos.

9. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2008.)** Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:
$\{a_n\}$, ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;
$\{b_n\}$, ahol $b_n = |n - 23| - |n - 10|$;
$\{c_n\}$, ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)^2$.
Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából!
Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1047–1055, 1142–1148.

55. KAMATSZÁMÍTÁS ÉS EGYÉB ALKALMAZÁSOK

A sorozatok alkalmazásának egyik tipikus területét jelentik a kamatszámítási feladatok. A gazdasági életben és a hétköznapokban napi rendszerességgel találkozunk ilyen feladatokkal, ezért fontos, hogy legalább az egyszerűbb kamatszámítási problémák megoldási módszereit ismerjük.

1. példa 1 000 000 Ft kölcsönt vettünk fel, 10 éves futamidőre, évi 12%-os kamatra. Mekkora lesz az adósságunk 10 év múlva, ha a bank

a) „egyszerű kamatot" számol;
b) kamatos kamattal számol évenkénti tőkésítéssel;
c) kamatos kamattal számol félévenkénti tőkésítéssel;
d) kamatos kamattal számol havi tőkésítéssel?

Megoldás *a)* „Egyszerű kamat" esetén a kamattartozásunk nem kamatozik. Minden évben az alapösszeg $q = \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 1{,}12$-szorosa a kamattal növelt tartozásunk, azaz az alapösszegen felül még 120 000 Ft tartozásunk lesz. 10 év után a tartozásunk $1\,000\,000 + 10 \cdot 120\,000 = 2{,}2$ millió Ft.

b) Kamatos kamat esetén minden év végén az alaptőke és a közben felgyülemlett kamatok is kamatoznak. Ha az alaptőke A, akkor az első év után $A \cdot q$, a második után $A \cdot q^2$, … , a tizedik év után $A \cdot q^{10}$ az adósságunk összege. A konkrét számadatokkal ez $A \cdot q^{10} = 10^6 \cdot 1{,}12^{10} \approx 3\,105\,850$ Ft.

c) Félévenkénti tőkésítés esetén a 12%-os kamatos kamat felét számolják el minden félév végén. Az ily módon kapott tartozás $10^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{100}\right)^{2 \cdot 10} = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{20} \approx 3\,207\,135$ Ft.

d) Hasonlóan számolható havi tőkésítéssel a tartozás:
$10^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{100}\right)^{12 \cdot 10} = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{120} \approx 3\,300\,385$ Ft.

(Napi tőkésítés esetén a bankok általában 360 napos munkaévvel számolnak.)

2. példa 1 000 000 Ft kölcsönt vettünk fel évi 12%-os éves jóváírású (kamatos) kamatra. Minden év végén fix összegű törlesztőrészletet fizetünk, ezután a továbbiakban már csak a csökkentett tartozásunk kamatozik.

a) Mennyi a törlesztőrészlet és mekkora a teljes visszafizetett összeg, ha a futamidő 10 év?
b) Foglaljuk táblázatba és ábrázoljuk grafikonon is, hogy az egyes években mekkora összeget fordítunk kamatfizetésre, illetve az adósság törlesztésére!
c) Hogyan változik a törlesztőrészlet, és mekkora a teljes visszafizetett összeg, ha a futamidő 20 év?

Megoldás *a)* Legyen $A = 10^6$, $q = 1{,}12$ és a törlesztőrészletet jelöljük T-vel! Az első év végén a tartozásunk Aq-ra nő, amely az év végi törlesztés után T-vel csökken. Az első év végére, azaz a második év elején tehát $Aq - T$ a fennálló tartozás.

A második év végére ez az összeg kamatozik, tehát a tartozás nagysága $(Aq - T)q$, melyet ismét az év végi törlesztőrészlettel csökkentünk. Így a második év végére (a harmadik év elejére) fennálló tartozás $(Aq - T)q - T$.

Ez a harmadik év végére $((Aq - T)q - T)q - T$-re módosul, és így tovább. Általában ha x_n jelenti az n-edik év végén lévő tartozást, akkor az $x_{n+1} = q \cdot x_n - T$ rekurziót írhatjuk fel, az $x_0 = A$ kezdeti feltétellel. Ebben a konkrét feladatban – az $x_{10} = 0$ feltétel mellett – T értékét keressük.

Az előző lecke 1. példájában az elsőrendű rekurziók megoldására több módszert is mutattunk, alkalmazzuk most a kézenfekvő fokozatos helyettesítést!

$x_1 = Aq - T$;
$x_2 = q \cdot x_1 - T = (Aq - T)q - T = Aq^2 - Tq - T$;
$x_3 = q \cdot x_2 - T = q(Aq^2 - Tq - T) - T = Aq^3 - Tq^2 - Tq - T$;
…

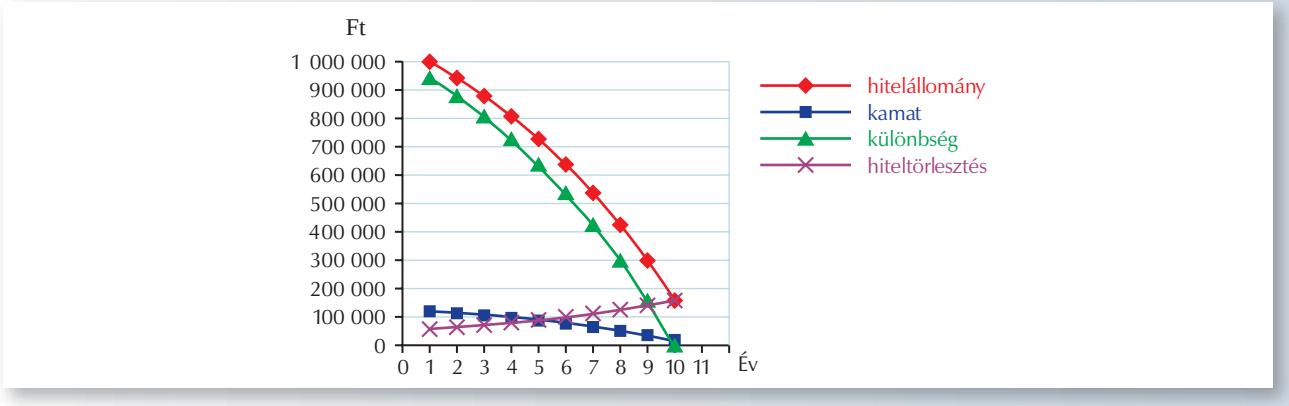
A képzési szabályt felismerve (amit teljes indukcióval igazolhatunk is) adódik, hogy
$x_n = Aq^n - Tq^{n-1} - Tq^{n-2} - \ldots - Tq - T = Aq^n - T(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)$, amit a mértani sorozat összegképletének a segítségével tovább alakíthatunk: $x_n = Aq^n - T \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Mivel $x_{10} = 0$, innen $Aq^{10} - T \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = 0$, és $T = Aq^{10} \cdot \frac{q-1}{q^{10}-1}$. Az $A = 10^6$ és $q = 1{,}12$ értékekkel $T = 176\,984{,}2$ (Ft).

Az évi törlesztőrészlet tehát $T \approx 176\,985$ Ft, a teljes visszafizetett összeg 1 769 850 Ft.

Az alábbi Excel-táblázatban 10 évre lebontva felsoroltuk az adatokat. A tanulságos grafikon azt mutatja, hogy a kamatos kamatozás miatt mennyire lassú a hiteltörlesztés.

év	hitelállomány	kamat	összeg	törlesztés	különbség	hiteltörlesztés
1	1 000 000	120 000	1 120 000	176 985	943 015	56 985
2	943 015	113 162	1 056 177	176 985	879 192	63 823
3	879 192	105 503	984 695	176 985	807 710	71 482
4	807 710	96 925	904 635	176 985	727 650	80 060
5	727 650	87 318	814 968	176 985	637 983	89 667
6	637 983	76 558	714 541	176 985	537 556	100 427
7	537 556	64 507	602 063	176 985	425 078	112 478
8	425 078	51 009	476 087	176 985	299 102	125 976
9	299 102	35 892	334 994	176 985	158 009	141 093
10	158 009	18 961	176 970	176 985	−15	158 024



c) Ha a futamidő 20 év, akkor $T = Aq^{20} \cdot \frac{q-1}{q^{20}-1} \approx 133\,880$ Ft a törlesztőrészlet, és a teljes visszafizetett összeg ennek 20-szorosa, azaz 2 677 600 Ft.

3. példa Takarékoskodjunk! 1 000 000 Ft összeget elhelyeztünk a bankban, éves 10%-os kamatra. Ezután a második évtől kezdve minden év elején beteszünk további 300 000 Ft-ot, szintén éves 10%-os kamatozással.

a) Mennyi pénz gyűlik össze a 8. év végére? Mennyi az eddigi teljes befizetésünk? (A feltételek változatlanok.)

b) Hány év alatt sikerülne 7 000 000 Ft-ot összegyűjtenünk? Összesen mekkora az addig befizetett összeg?

Megoldás Alkalmazzuk az $A = 10^6$, $q = 1{,}1$, $B = 300\,000$ jelöléseket! (Forintban számolunk.)

Az első év végén $x_1 = Aq$ a felgyülemlett összeg. A második év végén $x_2 = q(x_1 + B) = Aq^2 + Bq$, a harmadik év végén $x_3 = q(x_2 + B) = Aq^3 + Bq^2 + Bq$, általában az n-edik év végén $x_n = Aq^n + Bq^{n-1} + Bq^{n-2} + \ldots + Bq$ a banki betét nagysága. A mértani sorozat összegképletét alkalmazva

$$x_n = Aq^n + B \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} - B = Aq^n + B \cdot \frac{q^n - q}{q-1}.$$

(A mértani sorozat összegét $(Bq^{n-1} + Bq^{n-2} + \ldots + Bq) + B - B = B \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} - B$ módon határoztuk meg. Másképpen is eljárhatunk Bq kiemelésével:

$$Bq(q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1) = Bq \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q-1}.)$$

a) A 8. év végére összegyűlt összeg $x_8 = 10^6 \cdot 1{,}1^8 + 300\,000 \cdot \frac{1{,}1^8 - 1{,}1}{1{,}1 - 1} \approx 5\,274\,355$ (Ft). Az eddigi teljes befizetés $A + 7B = 3{,}1$ millió Ft.

b) Most $x_n = 7 \cdot 10^6$ ismert, és n értékét keressük. A kifejezést átalakítjuk:

$$x_n(q-1) = Aq^n(q-1) + B(q^n - q) \quad \Rightarrow \quad x_n(q-1) + Bq = q^n(A(q-1) + B),$$

s innen $q^n = \frac{x_n(q-1) + Bq}{(A(q-1) + B)}$.

$$n = \log_q \frac{x_n(q-1) + Bq}{(A(q-1) + B)} = \frac{\lg \frac{x_n(q-1) + Bq}{(A(q-1) + B)}}{\lg q} = \frac{\lg 2{,}575}{\lg 1{,}1} \approx 9{,}9.$$

Tehát a 7 000 000 Ft-os érték a 10. évben gyűlik össze.

A teljes befizetés 10 év alatt $A + 9B = 3{,}7$ millió Ft, a 10. év végére összegyűlt teljes, kamatozott összeg

$$x_{10} = 10^6 \cdot 1{,}1^{10} + 300\,000 \cdot \frac{1{,}1^{10} - 1}{1{,}1 - 1} \approx 7\,374\,970 \text{ Ft}.$$

NÉHÁNY REKURZÍV ÖSSZEFÜGGÉS (Kiegészítő anyag)

A rekurzív sorozatok további alkalmazásaira mutatunk példákat.

4. példa *a)* Adjuk meg az $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $(n \geq 1, a_0 = 1)$ rekurzív sorozat explicit alakját!

b) Írjuk fel a sorozat első n elemének összegét n függvényeként!

Megoldás *a)* A sorozat néhány kezdőtagja: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 19$, $a_3 = 65$. A lineáris rekurziók feloldására korábban többféle, általánosan is használható eljárást mutattunk, de egyes esetekben speciális módszereket is alkalmazhatunk. Az

$a_0 = 1,$
$a_1 = 3a_0 + 2,$
$a_2 = 3a_1 + 2^2,$
…
$a_{n-1} = 3a_{n-2} + 2^{n-1},$
$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$

egyenletek összeadása előtt azonos együtthatókat állítunk elő mindkét oldalon. Az n. (utolsó előtti) egyenletet megszorozzuk 3-mal; az $(n-1)$-dik egyenletet 3^2-, az $(n-2)$-ediket 3^3-, … , végül az első egyenletet 3^n-nel. Az egyenleteket összeadva az $a_n = 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 2^2 \cdot 3^{n-2} + \ldots + 2^{n-1} \cdot 3 + 2^n$ összeget kapjuk.

Ezt az összeget tekinthetjük egy 3^n kezdőtagú és $\frac{2}{3}$ kvóciensű mértani sorozat összegének is, ekkor az összegzés a hagyományos képlettel történhet. Egy ügyes észrevétellel azonban egy lépésben célt érünk: a $(3-2)$-es tényezővel bővítve a jobb oldal két azonos kitevőjű hatvány különbsége lesz. Eredmény: $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ $(n \geq 0)$.

b) Az első n elem összege $S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}(3^{i+1} - 2^{i+1}) = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2}$.

Megjegyzés

A rekurzív sorozatokat gyakran 0-tól kezdik indexelni, de ez nem okoz problémát. Egyszerű indexeltolással kaphatjuk meg az 1-től indexelt alakokat. Ha tehát $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $(n \geq 2, a_1 = 1)$ alakú a rekurzió (a tagok $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 19$, $a_4 = 65$), akkor az explicit alak $a_n = 3^n - 2^n$ $(n \geq 0)$.

5. példa Adjuk meg az $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ $(n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 1)$ rekurzív sorozat explicit alakját!

Megoldás A sorozat néhány kezdőtagja 0, 1, 1, 7, 13, 55, 133.

Egy megoldási ötlet lehet először olyan *mértani sorozatot* keresni, amely kielégíti a rekurzív összefüggést. Legyen ez a sorozat $b_0 \cdot q^n$ alakú; ekkor a $b_0 \cdot q^{n+2} = b_0 \cdot q^{n+1} + 6 \cdot b_0 \cdot q^n$ egyenlet megoldását keressük.

Mivel $b_0 \neq 0$ és $q \neq 0$, átalakítás után a $q^2 - q - 6 = 0$ ún. *karakterisztikus egyenletet* kapjuk. Ennek két gyöke van: $q_1 = -2$ és $q_2 = 3$. Ez azt jelenti, hogy az $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ összefüggést a $b_0 q_1^n = b_0 \cdot (-2)^n$ és a $c_0 q_2^n = c_0 \cdot 3^n$ mértani sorozatok is kielégítik, ahol b_0 és c_0 tetszőleges konstansok.

Valóban: $c_0 \cdot 3^{n+2} = c_0 \cdot 3^{n+1} + 6c_0 \cdot 3^n$, mert $9c_0 = 3c_0 + 6c_0$, és hasonló igaz a -2 kvóciensű mértani sorozatokra is: $b_0 \cdot (-2)^{n+2} = b_0 \cdot (-2)^{n+1} + 6b_0 \cdot (-2)^n$, mert $4b_0 = -2b_0 + 6b_0$.

Külön-külön persze sem b_0, sem c_0 nem adható meg úgy, hogy a 0, 1, 1, 7, … sorozatot megkapjuk, de észrevehetjük, hogy *a két sorozat összege* is kielégíti a rekurziót: ha $a_n = b_0 \cdot (-2)^n + c_0 \cdot 3^n$, akkor a

$b_0 \cdot (-2)^{n+2} = b_0 \cdot (-2)^{n+1} + 6b_0 \cdot (-2)^n$,

$c_0 \cdot 3^{n+2} = c_0 \cdot 3^{n+1} + 6c_0 \cdot 3^n$

egyenletek összeadásából éppen az $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ összefüggést kapjuk.

Keressük tehát $a_n = b_0 \cdot (-2)^n + c_0 \cdot 3^n$ alakban a rekurzió megoldását. Az $a_0 = 0$ és $a_1 = 1$ kezdeti értékeket behelyettesítjük: az $a_0 = 0$ feltételből (1) $b_0 + c_0 = 0$, az $a_1 = 1$ feltétel miatt (2) $-2b_0 + 3c_0 = 1$. Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $b_0 = -\frac{1}{5}$, $c_0 = \frac{1}{5}$; tehát a sorozat explicit alakja

$$a_n = -\frac{1}{5} \cdot (-2)^n + \frac{1}{5} \cdot 3^n.$$

Ellenőrzünk: az $n = 0, 1, 2, 3, 4$ értékeket behelyettesítve rendre a várt $a_n = 0, 1, 1, 7, 13$ értékeket kapjuk.

Hasonlóan járhatunk el a fenti típusú másodrendű rekurziók feloldásakor minden olyan esetben, amikor a karakterisztikus egyenletnek két (különböző) valós gyöke van.

Megjegyzés

Miért éppen mértani sorozatok összegeként kerestük a megoldást? Elképzelhető, hogy más úton is eljuthatunk ehhez az eredményhez (gondoljunk csak arra, hogy a sorozatok rekurzív alakja sem egyértelmű), azonban ez a módszer a gyakorlatban mindig célhoz vezet, tehát általánosan alkalmazható. (Külön problémát jelent, ha a karakterisztikus egyenletnek 1 vagy 0 valós gyöke van.)

6. példa

Állítsuk elő a nevezetes Fibonacci-sorozat explicit alakját!

Megoldás

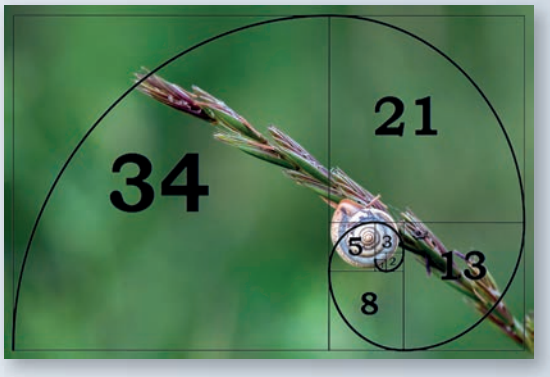
Mint korábban láttuk, a Fibonacci-sorozat rekurzív alakja $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$, ahol $f_1 = f_2 = 1$.

Az előző példában követett gondolatmenetet alkalmazzuk, a megoldást megpróbáljuk mértani sorozatok összegeként előállítani.

A karakterisztikus egyenlet $q^2 - q - 1 = 0$, ennek két gyöke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. A rekurzió megoldását $f_n = b_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_0\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ alakban keressük. A kezdeti feltételek alapján

ha $n = 1$, akkor $f_1 = 1 = b_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_0\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, míg

ha $n = 2$, akkor $f_2 = 2 = b_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_0\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$.



Némi számolás után az

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \cdot (b_0 + c_0) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (b_0 - c_0) \\ 1 &= \frac{3}{2} \cdot (b_0 + c_0) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (b_0 - c_0) \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldására $(b_0, c_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ adódik, amit helyettesítéssel ellenőrizhetünk. Készen vagyunk:

$$f_n = b_0\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_0\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

a Fibonacci-sorozat explicit alakja.

(Első ránézésre még az is hihetetlen, hogy ez a képlet minden n pozitív egész számra egész értéket ad eredményül, de az $n = 1, 2, 3, \ldots$ helyettesítések eredménye valóban $f_1, f_2, f_3, \ldots$)

FELADATOK

1. E1 Hat éven át minden év elején elhelyezünk a bankban ugyanakkora összeget p%-os kamatláb mellett, majd a hatodik év letelte után még további négy éven át kamatoztatjuk. Mekkora összeget tettünk be évenként, ha pénzünk a tizedik év végére S forintra növekedett?

2. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2007.)**
Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1 000 000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy a forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg.)

b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen a kedvezőbb? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

3. E2 Váratlanul 2,5 millió forint örökséghez jutottunk. Év elején elhelyezzük a bankban 10%-os éves kamatra úgy, hogy a következő években, minden év elején 400 000 Ft életjáradékot kapunk addig, amíg a bankban lévő összeg 400 000 Ft alá nem csökken.

a) Hány évig kapjuk az életjáradékot?

b) Mekkora legyen az életjáradék (400 000 Ft helyett), ha azt szeretnénk, hogy 20 évig fedezze a kezdőtőke?

4. E1 A páros számokat beírjuk a következő háromszög alakú táblázatba:

2
4 6
8 10 12
14 16 18 20 …

Számítsuk ki a 21. sorban álló számok összegét! Melyik szám áll a 21. sor közepén?

5. E2 Lehetnek-e a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{5}$ ugyanannak a számtani sorozatnak – nem szükségképpen egymás melletti – tagjai?

6. E2 *a)* Legfeljebb hány részre osztja n körvonal a síkot?

b) Legfeljebb hány részre osztja a síkot n párhuzamos helyzetű téglalap?

7. E2 A következő feladatokban állítsunk fel rekurzív összefüggéseket! (A véges rekurziókat egyszerű helyettesítéssel is megoldhatjuk.)

a) Hányféleképpen lehet 15 eurót 1 és 2 eurós érmékkel kifizetni, ha az érmék sorrendjét is figyelembe vesszük?

b) Hányféleképpen lehet egy 15 szintes lépcső tetejére felmenni, ha egyszerre egy vagy két lépcsőfokot léphetünk?

c) Hányféleképpen lehet (2×1)-es dominókkal lefedni egy (2×15)-ös táblázatot? (A dominók nem fedik egymást és nem lógnak ki a tábláról.)

d) Hányféleképpen lehet egy 15 személyes padra fiúkat és lányokat leültetni úgy, hogy lány lány mellé ne ülhessen?

e) Hány éle van az n pontú teljes gráfnak?

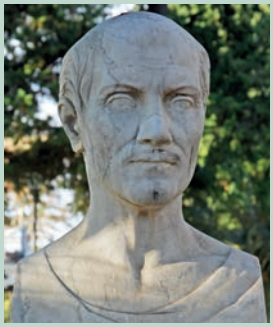
f) Hány háromszöget határoz meg n darab általános helyzetű pont a síkon? (A pontok közül semelyik három nincs egy egyenesen.)

g) Hányféleképpen lehet egy 15 szintes lépcső tetejére felmenni, ha egyszerre egy, kettő vagy három lépcsőfokot léphetünk?

8. V Adjuk meg az $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n + 1$ $(n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 1)$ rekurzív sorozat explicit alakját!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1056–1106, 1107–1141.

56. SOROZAT HATÁRÉRTÉKE



Arkhimédész

A *határérték* a matematikai analízis alapvető fogalma. Határértékszámítással kapcsolatos problémák már az ókortól felvetődtek, ezek közül néhánnyal a korábbi tanulmányaink során is találkozhattunk. Ide sorolhatjuk például

– a filozófus *Zénón* (Kr. e. 450 körül) híres paradoxonait (a legismertebb talán Akhilleusz és a teknős versenyfutása);
– *Arkhimédész* (Kr. e. 287–212) közelítő eljárását a kör kerületének meghatározására;
– vagy *Cavalieri* (1598–1647) olasz matematikus térfogatszámítási módszerét.

A tetszőlegesen kicsiny és végtelen nagy mennyiségekkel kapcsolatos számolási nehézségek a természettudósok számára sokáig megoldhatatlannak bizonyultak. Végül a mozgás, a mennyiségek változásának matematikai leírását kutatva *Newton* (1643–1727) és *Leibniz* (1646–1716) megalapozta a differenciál- és integrálszámítás elméletét. Az ő munkásságuk egységbe foglalta és értelmezte az addigi intuitív eredményeket, felfedezéseik új kutatási területeket nyitottak meg, és megalapozták az analízis további fejlődését. (A középiskolában is foglalkozunk az analízis néhány témakörével: a sorozatok és függvények határértéke, függvények folytonossága, differenciál- és integrálszámítás, és egy kevés a differenciálegyenletekből – fizika vagy matematika órán.) A modern matematika elképzelhetetlen az analízis módszerei nélkül, és a természettudományok és az alkalmazott tudományok is rendszeresen használják az analízis eszközeit.

Cavalieri

Határértékkel kapcsolatos fogalmakat – ösztönös módon – már korábban is használtunk. A függvények vizsgálatakor ilyeneket mondtunk:

„Az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény értékei 'nagy' x-ekre egyre közelebb vannak a 0-hoz."

„Az $y=2^x$ függvény 0-hoz 'közelít' (felülről), ha x 'tart a mínusz végtelenhez'."

„Az $x \mapsto |x|$ függvény a 'végtelenben végtelenhez tart'."

Sorozatok esetén is akadnak „megérzéseink":

Az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sorozat „0-hoz tart". (El nem éri, de egyre közelebb kerül hozzá.)

Az $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ és $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ sorozatok „1-hez tartanak".

Az $\{n \cdot 0{,}000001\}$ sorozat a „végtelenhez tart". (Adott mennyiséget „elég sokszor" összeadva, az összeg tetszőlegesen nagy lehet.)

Ezek az intuitív megfogalmazások természetesen helyesek: mindannyian tudjuk, hogy *körülbelül* mire gondol a használójuk. Ebben a leckében pontosítjuk a meghatározásokat és matematikai tartalmukat, és igyekszünk precízen megadni a határérték fogalmát.

1. példa Mely esetben mondanánk, hogy az alábbi sorozatok „tartanak valamihez", illetve hogy „van határértékük"?

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;
b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$;
c) $0, 0, 0, 0, \ldots$;
d) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$;
e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;
f) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$;
g) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{5}, \ldots$;
h) $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \ldots$;
i) $2, 3, 2, 3, \ldots$;
j) $1, 2, 3, 4, \ldots$;
k) $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots$;
l) $\frac{1}{10^6}, \frac{2}{10^6}, \frac{3}{10^6}, \frac{4}{10^6}, \ldots$.

Megoldás

a) Úgy érezzük, az $a_n=\frac{1}{n}$ sorozat 0-hoz tart. Más számokhoz is „folyamatosan közelít" (például a -1-hez), de a 0-t *tetszőlegesen* megközelíti. (Az n-edik lépésben $\frac{1}{n}$ távolságra.)

b) A $b_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ sorozat hasonlóan viselkedik $\{a_n\}$-hez, csak a 0-t két oldalról közelíti. Azt várjuk a leendő definíciónktól, hogy ennek a sorozatnak is 0 legyen a határértéke.

c) Vajon a konstans $c_n = 0$ sorozat *tart* 0-hoz? Fogadjuk el, hogy igen. (Furcsa lenne, ha azt mondanánk, ennek a sorozatnak nem 0 a határértéke.)

d) A páros indexű tagok felülről tartanak 0-hoz, a páratlan indexű tagok pedig 0-k. Ez a sorozat is 0-hoz tart.

e) Úgy sejtjük, az $e_n = \frac{n}{n+1}$ sorozat 1-hez tart. Ezt az indokolhatja, hogy a tagok tetszőlegesen közel kerülnek az 1-hez; az n-edik tag például $\frac{1}{n+1}$ távolságra.

f) Hasonló a helyzet az $f_n = \frac{n+1}{n}$ sorozattal: szigorúan monoton csökkenő módon, felülről tart az 1-hez.

g)–h) A $\{g_n\}$ sorozat a konstans $\{1\}$ és $\{e_n\}$ sorozatok, míg a $\{h_n\}$ sorozat az $\{e_n\}$ és $\{f_n\}$ sorozatok „összefésüléséből" keletkezett. Mindkettőtől elvárjuk, hogy az 1 legyen a határértékük (a $\{h_n\}$ sorozat kétoldalról tart 1-hez).

i) Az $\{i_n\}$ sorozat „oszcillál" a 2 és 3 között, mindkét értéket végtelen sokszor felveszi. Vajon megengedjük, hogy egy sorozatnak több határértéke legyen? Nos, inkább ne: ha a sorozat „tart" valamihez, akkor ne tartson egyszerre több számhoz. Olyan definíciót célszerű megfogalmaznunk, amely szerint az $\{i_n\}$ sorozatnak nincs határértéke.

j) A $j_n = n$ sorozatnak nincs határértéke. (A sorozat a „végtelenbe" vagy a „végtelenhez tart".)

k) Úgy gondoljuk, a $\{k_n\}$ sorozatnak sincs határértéke: végtelen sokszor felveszi a 0-t, de a páros indexű tagok tetszőlegesen nagyok lehetnek.

l) Az $l_n = \frac{n}{10^6}$ sorozatnak nincs határértéke. Már az ókori görögök is tudták, hogy kellően sokszor összeadva egy adott számot $\left(\text{ez most } \frac{1}{10^6}\right)$, az összeg tetszőlegesen nagy lehet.

A DEFINÍCIÓ MEGFOGALMAZÁSA

Mikor mondhatjuk tehát, hogy egy $\{a_n\}$ sorozat A-hoz tart? (A valós szám.)

1. Nem elég annyit megkövetelni, hogy $\{a_n\}$ tagjai egyre jobban közelítsék meg A-t. (Erre jó példa a fenti a) sorozat: a szigorúan monoton csökkenő tagok minden negatív számot egyre jobban megközelítenek.) Ennél több kell: az $\{a_n\}$ sorozat tagjainak *tetszőlegesen* meg kell közelíteniük az A számot.

A tetszőleges közelítést precízen megadhatjuk a *környezet* fogalmával. Az A szám ε sugarú környezete (ahol $\varepsilon > 0$) az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ nyílt intervallum. (A környezet sugarát hagyományos módon az ε betűvel jelöljük.) Ha tehát az $\{a_n\}$ sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik A-t, akkor bármely pozitív ε esetén „egy idő után" az A szám ε sugarú környezetébe esnek: $a_n \in]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$.

2. A határérték létezéséhez nem elég megkövetelni, hogy A tetszőleges környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja legyen. (Ellenpéldák az $\{i_n\}$ és $\{k_n\}$ sorozatok. Például ez utóbbiban a 0 tetszőleges környezetében végtelen sok tagja van a sorozatnak, de a 0 mégsem határérték.) Arra van szükség, hogy „egy idő után", azaz bizonyos indextől kezdve a sorozat *minden tagja* A tetszőleges környezetén belül legyen. (Erre a bizonyos indexre bevezetjük a *küszöbindex* fogalmát.)

A fenti feltételeket szem előtt tartva definiálhatjuk a határérték fogalmát. (Rögtön több megfogalmazást is adunk.)

Definíció

Első megfogalmazás:

Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat határértéke A, ha tetszőleges pozitív ε-hoz megadható olyan n_0 küszöbindex, hogy a sorozat minden n_0-nál nagyobb indexű tagja az A szám ε sugarú környezetébe esik.

(Ha tehát *bármilyen* ε-hoz *van ilyen* n_0, akkor a sorozat határértéke A.)

Az $a_n \in]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ tartalmazást, vagyis hogy a_n az A ε sugarú környezetébe esik, többféleképpen is megadhatjuk: $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, $|a_n - A| < \varepsilon$ vagy $|A - a_n| < \varepsilon$ ugyanazt jelentik. (Az utóbbi két egyenlőtlenséget úgy is kiolvashatjuk, hogy a_n és A eltérése kisebb, mint ε.) Egyes számítások során célszerűbb lesz majd ezeket az alakokat használnunk.

Definíció

Második megfogalmazás:

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke A, ha bármely pozitív ε-hoz van olyan n_0 küszöbindex, hogy a sorozat minden n_0-nál nagyobb indexű tagjára $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.

Ha egy bizonyos indextől kezdve a sorozat minden tagja A valamely környezetébe esik, akkor ebből az következik, hogy a környezeten kívül a sorozatnak véges sok tagja van. Ez alapján megfogalmazhatunk egy szemléletes definíciót is.

Definíció

Harmadik megfogalmazás („környezetes tulajdonság”):
Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke A, ha A bármely környezetén kívül az $\{a_n\}$ sorozatnak (csak) véges sok tagja van.

Jelölések, elnevezések:
Ha az $\{a_n\}$ sorozat határértéke A, ezt jelölhetjük $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ vagy $a_n \to A$ módon. (A ’lim’ a limes (’határ’) szó rövidítése.) Ekkor azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *konvergens* (’összetartó’); míg ha egy sorozatnak nincs határértéke, akkor *divergens* (’széttartó’). Például az 1. példa a) részében sejtésünk $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, az e)-ben $\frac{n}{n+1} \to 1$, míg $\lim\limits_{n\to\infty} i_n$ nem létezik.

(Gyakran elhagyják az $n \to \infty$ (’n tart a végtelenbe’) jelzést, ha ez nem okoz félreértést.)

A DEFINÍCIÓK ALKALMAZÁSA

Próbáljuk igazolni az 1. példa néhány sejtését!

a) A feladatban $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a sejtésünk. A definíció szerint azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy bizonyos indextől kezdve a sorozat tagjai ε-nál közelebb kerülnek a 0-hoz.

Ha például $\varepsilon = 0{,}1$, akkor megfelelő küszöbindex $n_0 = 10$. Ha ugyanis $n > n_0$ ($n \in \mathbf{Z}^+$), akkor $\frac{1}{n}$ közelebb van a 0-hoz ε-nál. Hasonlóan, ha például $\varepsilon = 10^{-6}$, akkor $n_0 = 10^6$-nak választható: a sorozat ennél nagyobb indexű tagjai mind benne vannak a 0-nak $\varepsilon = 10^{-6}$ sugarú környezetében. (Látható, hogy ε csökkentésével, azaz a környezet szűkítésével a sorozat egyre nagyobb indexű tagjaira teljesül, hogy a 0-nak ε sugarú környezetébe esnek; mint ahogy az is látható, hogy ha adott ε-ra találunk egy n_0 küszöbindexet, akkor minden n_0-nál nagyobb n érték megfelelő küszöbindexnek.)

Általában is mondhatjuk, hogy $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ megfelelő küszöbindex; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tetszőleges pozitív ε esetén azt kell megmutatnunk, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$, azaz $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ minden, elég nagy n értékre teljesül (második megfogalmazás). Mivel $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, és $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ha $\frac{1}{\varepsilon} < n$, a sejtésünk igaz: minden $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb indexre teljesül, hogy $\frac{1}{n} \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$. $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, azaz $\frac{1}{\varepsilon}$ egészrésze tehát megfelelő; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) A $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ váltakozó előjelű sorozattal hasonlóan járhatunk el: $|b_n - 0| = |b_n| = \frac{1}{n}$, tehát az a) feladat eredménye alapján ez a sorozat is 0-hoz tart.

c) Nyilvánvalónak tűnik, de a $c_n = 0$ sorozatra is ellenőriznünk kell, megfelelő-e a definíciónk. Tetszőleges (pozitív) ε-ra $|c_n - 0| < \varepsilon$ a sorozat minden tagjára teljesül, $c_n \to 0$.

e)–f) Az $\frac{n}{n+1} \to 1$ sejtés bizonyításához igazolni kell, hogy $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ egy bizonyos index után minden n-re teljesül. $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, és $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, ha $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$. Tetszőleges (pozitív) ε-hoz megadható tehát alkalmas küszöbindex, ezért a definíció értelmében $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.

Hasonlóan járhatunk el az $\{f_n\}$ sorozat esetében is.

d)–g)–h) Ezek a sorozatok két, azonos határértékű sorozat „összefésüléséből” állíthatók elő, és határértékük megegyezik a részsorozatok határértékével. Általában is megmutatható, hogy ha $a_n \to A$ és $b_n \to A$, akkor az a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, … sorozat határértéke szintén A. Alkalmazzuk ugyanis a harmadik megfogalmazást: eszerint A tetszőleges környezetén kívül az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatoknak csak véges sok tagja van. Ekkor viszont az a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, … sorozatnak is legfeljebb véges sok tagja van A adott környezetén kívül – ez pedig éppen azt jelenti, hogy a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, … $\to A$.

i)–j)–k)–l) Sejtésünk szerint ezek divergens sorozatok.

Az *i)* sorozatnak esetleg 2,5 lehetne a határértéke, vagy 2, illetve 3, hiszen ezeket az értékeket végtelen sokszor veszi fel értékként. Hogyan mutathatjuk meg, hogy például a 2 nem lehet határérték?

A határérték definíciójából következően elegendő *egyetlen* (alkalmasan választott) pozitív ε-t megadni, amelyre a $]2 - \varepsilon,\ 2 + \varepsilon[$ intervallumon kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van. Bármilyen $\varepsilon < 1$ megfelel; legyen például $\varepsilon = 0{,}7$. (i_n)-nek nem határértéke 2, mert az $]1{,}3;\ 2{,}7[$ intervallumon kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van.

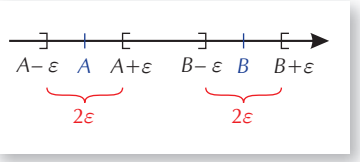
Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy (i_n)-nek nem határértéke 3, és (k_n)-nek nem határértéke a 0. A divergencia igazolását segíti a *határérték egyértelműségére* vonatkozó tétel is, amelyet alább általánosan is bizonyítunk.

Tétel

Konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van.

Bizonyítás

Indirekt módon tegyük fel, hogy egy $\{a_n\}$ sorozatnak két határértéke van: $a_n \to A$ és $a_n \to B$, $A \neq B$. Válasszunk ekkor $\frac{|A - B|}{2}$-nél kisebb ε-t! A definíció szerint egy bizonyos n_0 indextől kezdve $\{a_n\}$ minden tagjának egyszerre kellene az $]A - \varepsilon,\ A + \varepsilon[$ és $]B - \varepsilon,\ B + \varepsilon[$ intervallumokban lennie. De ez lehetetlen, hiszen az intervallumoknak nincs közös pontja. Kezdeti feltevésünk hamis volt; ha tehát létezik határérték, akkor az egyértelmű.



A *j)* és *l)* sorozatok nem korlátosak, így nem lehetnek konvergensek sem: bármilyen intervallumon kívül végtelen sok tagja van a sorozatoknak.

A korlátosság és konvergencia kapcsolatát fogalmazhatjuk meg a következő tétellel.

Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás

Ha $a_n \to A$, akkor megadunk egy intervallumot, amely $\{a_n\}$ minden tagját tartalmazza.

Ha $a_n \to A$, akkor tetszőleges pozitív ε-ra az $]A - \varepsilon,\ A + \varepsilon[$ intervallumon kívül véges sok tagja van $\{a_n\}$-nek. Az intervallumon kívüli tagok közül legyen m a legkisebb és M a legnagyobb, esetleg $m = M$ is lehetséges. (Véges sok szám között mindig van legkisebb és legnagyobb.) Jelölje x az m és $A - \varepsilon$ közül a kisebbiket (ha egyenlőek, akkor bármelyiket), és y az M és $A + \varepsilon$ közül a nagyobbikat. (Itt is: ha $M = A + \varepsilon$, akkor $y = M = A + \varepsilon$.) Megfelelő az $[x;\ y]$ (esetleg elfajuló) intervallum: mivel az $]A - \varepsilon,\ A + \varepsilon[$ halmazon kívüli tagok mind benne vannak az $[m,\ M]$ intervallumban, $[x;\ y]$ a sorozat összes elemét tartalmazza.

(Megadhattuk volna egyszerűen az $]A - \varepsilon,\ A + \varepsilon[\cup [m,\ M]$ halmazt is.)

A sorozat tehát korlátos: $x \leq a_n \leq y$ minden n-re.

Megjegyzések

1. A tételt kimondhatjuk például a következő alakban is: Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

2. A **tétel megfordítása** („Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens.”) **nem igaz**. Egy lehetséges ellenpélda az (i_n) sorozat: 2, 3, 2, 3, …

3. A kontrapozíció következtetési szabályából egyszerűen következik, hogy **ha egy sorozat nem korlátos, akkor nem konvergens**.

Az állítást másképpen is megfogalmazhatjuk: egy sorozat konvergenciájának a korlátosság szükséges, de nem elégséges feltétele.

KONVERGENS SOROZATOK TULAJDONSÁGAI

Az *a)–l)* sorozatok határértékével kapcsolatban bizonyos elvárásokat fogalmaztunk meg. Az adott definíció (illetve két átfogalmazása) ezeknek megfelel, tehát a határérték nehéz fogalmát matematikai alakban sikerült jellemeznünk. A definícióból közvetlenül következik a konvergens sorozatok határértékének néhány egyszerű tulajdonsága. Egyiket-másikat már érintettük a fenti *a)–l)* elemzéskor, most egybegyűjtjük őket.

Néhány **tulajdonság**:

1. A konvergencia globális jellemző („$n \to \infty$”), nem függ a sorozat néhány kezdeti értékétől.
Konvergens sorozat határértéke nem változik meg, ha a sorozat véges sok tagját elhagyjuk vagy megváltoztatjuk.

2. Konvergens sorozat index szerinti eltoltjának a határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

Például ha $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ és $b_n = \frac{1}{n+5}$ ennek egy eltolt sorozata, akkor $b_n \to 0$ szintén teljesül. (Hát persze: az $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ és $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$ sorozatok határértéke nyilvánvalóan megegyezik, de hivatkozhatunk akár az 1. pontra is.)

3. Fentebb láttuk, hogy ha $a_n \to A$ és $b_n \to A$, akkor a két sorozat összefésüléséből kapott a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, … sorozat határértéke szintén A.
(A két sorozatot más „szabály” szerint is összefésülhetjük.)

4. Bizonyos értelemben az összefésülés megfordítása is igaz:
Konvergens sorozat bármely részsorozatának a határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.
Egyszerűen indokolhatunk: tegyük fel, hogy $a_n \to A$ és $\{b_n\}$ egy részsorozata $\{a_n\}$-nek. Ekkor a definíció szerint A tetszőleges környezetén kívül csak véges sok tagja van $\{a_n\}$-nek – de akkor ez igaz a $\{b_n\}$ részsorozatra is, tehát $\{b_n\}$ határértéke szintén A.

Például $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ miatt $b_n = \frac{1}{2n}$ szintén nullához tart, hiszen $\{b_n\}$ részsorozata $\{a_n\}$-nek.

A határértékek nagyságviszonyával kapcsolatban természetes módon adódik az alábbi két észrevétel.

5. Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, valamint $a_n \le b_n$ minden n-re, akkor $A \le B$.

6. A fenti tulajdonság nagyon fontos következménye a **közrefogási elv**:
Ha $a_n \le b_n \le c_n$ minden n-re, és $a_n \to A$, $c_n \to A$, akkor a közrefogott $\{b_n\}$ sorozatnak is A-hoz kell tartania: $b_n \to A$.

Legyen például $a_n = 0$, $c_n = \frac{1}{n}$; ekkor $a_n \to 0$ és $c_n \to 0$. Fentebb láttuk, hogy a $b_n = \frac{1}{2n}$ részsorozat szintén 0-hoz tart. Mivel most az $a_n \le b_n \le c_n$ feltétel minden n-re teljesül, a közrefogási elvből is következik, hogy $b_n = \frac{1}{2n} \to 0$.

Megjegyzések

Az állítás $a_n < b_n < c_n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) feltételekkel is kimondható: ha $a_n \to A$ és $c_n \to A$, akkor $b_n \to A$, mint az előző példában láttuk.

A matematikai zsargonban a közrefogási elvet „**rendőrelvnek**” is nevezik. Az elnevezés szemléletes háttere: ha az $\{a_n\}$ és $\{c_n\}$ „rendőrök” az őrszobára tartanak, akkor a közrefogott $\{b_n\}$ személy (a gyanúsított) is szükségképpen oda tart.

7. Az $\{i_n\}$: 2, 3, 2, 3, … sorozat nem konvergens, de két olyan szám is van (a 2 és a 3), amelyek tetszőleges környezetében végtelen sok tagja van a sorozatoknak. Ezeket a kitüntetett értékeket *torlódási pont*nak nevezzük.

Definíció

Egy tetszőleges $\{a_n\}$ sorozat **torlódási pontja** T, ha T bármely környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

A határérték is torlódási pont, hiszen teljesül rá a definíció, de láttuk, hogy fordítva nem igaz: a torlódási pont nem szükségképpen határérték. (A határérték annyival több, hogy tetszőleges környezetében *nemcsak végtelen sok elemnek* kell lenni, hanem egy küszöbindextől kezdve a sorozat *minden elemének*.)

Tételként is megfogalmazzuk a határérték és a torlódási pont kapcsolatát.

Tétel

Ha $a_n \to A$, akkor A torlódási pont. (A tétel megfordítása nem igaz.)
Konvergens sorozatnak egy torlódási pontja van. (Ez a határérték.)

2. példa Vizsgáljuk meg konvergencia szempontból az alábbi sorozatokat! Ha a sorozat konvergens, adjunk meg egy $\varepsilon = 0{,}01$ értékhez tartozó küszöbindexet!

a) $a_n = \frac{n}{n+4}$;

b) $b_n = \frac{n}{n^2+4}$;

c) $c_n = \frac{n}{n^3+4}$;

d) $d_n = \frac{n^2+4}{n}$.

Megoldás *a)* Néhány kezdőtagot kiszámítunk: $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{3}{7}$, $a_4 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ stb. Észrevehetjük, hogy a sorozat tagjai egyre jobban megközelítik az 1-et: $a_n = 1 - \frac{4}{n+4}$, így az a sejtésünk, hogy $a_n \to 1$. Meg kell tehát mutatnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $|a_n - 1| < \varepsilon$ egy bizonyos n_0 küszöbindextől kezdve minden $n > n_0$ esetén teljesül. Átalakításokat végzünk:

$\left|\frac{n}{n+4} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{-4}{n+4}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{n+4} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} - 4 < n$. Készen vagyunk: tetszőleges pozitív ε-ra a $\left(\frac{4}{\varepsilon} - 4\right)$-nél nagyobb indexű tagok mind benne vannak az 1-nek ε sugarú környezetében.

$\varepsilon = 0{,}01$ esetén $\frac{4}{\varepsilon} - 4 = 396$, tehát $n_0 = 396$ (és minden nagyobb egész szám) megfelelő küszöbindex: ha $n > n_0$, akkor $|a_n - 1| < 0{,}01$.

b) Az $\frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{13}, \frac{4}{20}, \frac{5}{29}, \frac{6}{40}$ kezdőtagok alapján a $b_n \to 0$ sejtést fogalmazhatjuk meg. Igazolandó, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $|b_n - 0| < \varepsilon$ egy n_0 küszöbindextől kezdve minden n-re teljesül.

$\left|\frac{n}{n^2+4} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{n^2+4} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon n^2 - n + 4\varepsilon > 0$.

$\varepsilon n^2 - n + 4\varepsilon$ pozitív főegyütthatójú másodfokú kifejezés, képe felfelé nyitott parabola. Ha ennek nincs zérushelye, akkor minden n-re igaz, hogy $\varepsilon n^2 - n + 4\varepsilon > 0$. Ha vannak – esetleg egyenlő – zérushelyei, akkor ezek a megoldóképletből $n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ alakúak. Ha most a nagyobbik $n_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 16\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ gyököt választjuk, akkor igaz lesz, hogy minden $n > n_2$ esetén $\varepsilon n^2 - n + 4\varepsilon > 0$; ezzel tehát igazoltuk, hogy $b_n \to 0$. (Persze n_2 nem biztos, hogy egész szám.)

$\varepsilon = 0{,}01$ esetén $n_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 16\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \approx 99{,}96$. Ebből következik, hogy $n_0 = 99$ megfelelő küszöbindex.

Másképpen:

A másodfokú paraméteres egyenlőtlenség vizsgálata nem könnyű. Egyszerűbben járhatunk el, ha kihasználjuk, hogy *nem szükséges a legkisebb* küszöbindexet megadni.

Az $\frac{n}{n^2+4} < \varepsilon$ egyenlőtlenségben $\frac{n}{n^2+4}$-et felülről megbecsüljük: $\frac{n}{n^2+4} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. (A nevezőt csökkentettük, így a tört értéke nőtt.) Ha tehát $\frac{1}{n} < \varepsilon$ teljesül, akkor szükségképpen $\frac{n}{n^2+4} < \varepsilon$ is igaz lesz. $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n$. Lényegesen kevesebb számolással célt értünk: $\frac{1}{\varepsilon} < n$ esetén $b_n = \frac{n}{n^2+4} \in]-\varepsilon; \varepsilon[$.

Ha $\varepsilon = 0{,}01$, akkor $\frac{1}{0{,}01} < n$, azaz $100 < n$ adódik. A becslés útján kapott küszöbindex $n_0 = 100$.

c) A $c_n \to 0$ sejtés igazolása még bonyolultabbnak tűnik.

$\left|\frac{n}{n^3+4} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{n^3+4} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon n^3 - n + 4\varepsilon > 0$; de harmadfokú egyenlőtlenséget középiskolai matematikai eszközökkel általában nem tudunk megoldani. Ismét becslést alkalmazhatunk:

$\frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$; azaz ha $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, akkor $\frac{n}{n^3+4} < \varepsilon$ is teljesül. $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$-ből $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$ következik, s ezzel igazoltuk, hogy $c_n \to 0$, és egy alkalmas küszöbindex $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$. $\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right.$ egészrésze.$\left.\right)$

A konkrét $\varepsilon = 0{,}01$ értékből $n_0 = 10$ adódik. Ellenőrizzünk:

$c_{10} = \frac{10}{1004} < 0{,}01$, $c_{11} = \frac{11}{1335} \approx 8{,}24 \cdot 10^{-3} < 0{,}01$ stb.

d) A $d_n = \frac{n^2+4}{n}$ sorozat nem korlátos, így nem is lehet konvergens: $d_n = \frac{n^2+4}{n} > \frac{n^2}{n} = n$. (Mivel $d_n = \frac{1}{b_n}$ és b_n tetszőlegesen kis pozitív értékeket felvesz, ezért a reciproka d_n tetszőlegesen nagy lehet.)

Látható, hogy a határérték meghatározása viszonylag egyszerű kifejezések esetén sem mindig könnyű feladat. A definíció nehézkes alkalmazása helyett gyakran hatékonyabban is eljárhatunk. Az egyik lehetőség, ami a határértékszámítást megkönnyíti, a sorozat határértéke és a műveletek közötti kapcsolat felhasználása. (Erről a következő leckében lesz szó.) Egy másik lehetőség, amikor az előző példa végén összegyűjtött tulajdonságokat alkalmazzuk.

2. megoldás *b)*-re: $b_n = \frac{n}{n^2+4} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, tehát az $y_n = \frac{1}{n}$ konvergens sorozat minden tagja nagyobb a megfelelő b_n tagoknál. (Idegen kifejezéssel $\{y_n\}$ *majorálja* $\{b_n\}$-t, vagy $\{b_n\}$ *minoráns sorozata* $\{y_n\}$-nek.) Mivel b_n pozitív tagú sorozat és $y_n \to 0$, így szükségképpen $b_n \to 0$.

Hivatkozhatunk a közrefogási elvre is: az $x_n = 0$ és $y_n = \frac{1}{n}$ sorozatok közrefogják $\{b_n\}$-t, és mivel $x_n \to 0$ és $y_n \to 0$, így $b_n \to 0$ is teljesül.

2. megoldás *c)*-re: $c_n = \frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. A majoráns $\frac{1}{n^2}$ sorozat szintén 0-hoz tart, hiszen az $y_n = \frac{1}{n}$ egy részsorozata, így a közrefogási elv miatt $c_n \to 0$. (Vagy alkalmazhatjuk az $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ becslést is, ami minden 1-nél nagyobb n-re igaz.)

Egy kultúrtörténeti érdekesség

„Matematikus körökben" úgy tartják, hogy a közrefogási elv eredeti szemléletes elnevezése, a *„csendőr-szabály" Kürschák József* (1864–1933) matematikustól származik. Kürschák középiskolai és műegyetemi tanár, országos hírű pedagógus, az MTA rendes tagja volt.
1945 után megszüntették a rossz emlékű csendőrséget, így néhány évtized alatt a konvergáló sorozatokra vonatkozó *csendőr-szabály* elnevezés is *rendőrelvvé* változott.

Kürschák József

FELADATOK

1. E1 Jellemezzük a számtani sorozatokat a konvergencia szempontjából! (Lehet-e egy számtani sorozat konvergens, illetve divergens?)

2. E1 Elemezzük konvergencia szempontjából az $a_n = 2a_{n-1} - 4$ rekurzióval megadott sorozatokat ($n \geq 2$)! A kezdeti feltételek:
a) $a_1 = 3$; *b)* $a_1 = 4$; *c)* $a_1 = 5$.

3. E2 Van-e olyan sorozat, amelynek
a) 3, *b)* 100, **V** *c)* végtelen sok
torlódási pontja van?
d) És ha még további feltételként a sorozat korlátosságát is megköveteljük?

4. E1 *a)* Legyenek $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens sorozatok, és $a_n < b_n$ minden n-re. Igaz-e, hogy ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$? Igaz-e az állítás megfordítása?
b) Legyenek $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ konvergens sorozatok. Igaz-e, hogy a $\{c \cdot a_n\}$, $\{a_n + b_n\}$ és $\{a_n \cdot b_n\}$ sorozatok korlátosak? ($c \in \mathbf{R}$.)
Igaz-e az állítások megfordítása?

5. E1 Vizsgáljuk meg konvergencia szempontból az alábbi sorozatokat! Ha a sorozat konvergens, adjunk meg egy $\varepsilon = 0{,}01$ értékhez tartozó küszöbindexet!

a) $a_n = \frac{2n-3}{5n+1}$; *b)* $b_n = \frac{n+10^6}{n-10^6}$; *c)* $c_n = \frac{n^2+3}{100n+10^6}$.

6. E2 Legyen $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$, ahol $b_n \neq 0$ semmilyen n-re. Jellemezzük konvergencia szempontjából az $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ sorozatot!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1149–1157.

57. MŰVELETEK KONVERGENS SOROZATOKKAL

Láttuk, hogy a konvergencia eldöntésekor gyakran nehézkes a definíció alkalmazása. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy vajon lehet-e a konvergens sorozatok tagjaival műveleteket végezni, és ha igen, mi történik a határértékekkel? Ha tehát $a_n \to A$ és $b_n \to B$, mit állíthatunk konvergencia szempontjából a $\{c \cdot a_n\}$, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ és $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ sorozatokról ($c \in \mathbf{R}$)?

1. példa Legyen $a_n \to A$ konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor $c \cdot a_n \to c \cdot A$! ($c \in \mathbf{R}$.)

Megoldás Az állítás eléggé kézenfekvőnek tűnik („ha $\{a_n\}$ tart A-hoz, akkor $\{c \cdot a_n\}$ tart $c \cdot A$-hoz”), $c = 0$-ra nyilvánvaló. Igazolni kell, hogy tetszőleges pozitív ε-ra $|c \cdot a_n - c \cdot A| < \varepsilon$, ha n elég nagy. Becsüljük meg $c \neq 0$-ra a $|c \cdot a_n - c \cdot A|$ eltérést:

$|c \cdot a_n - c \cdot A| = |c| \cdot |a_n - A| < \varepsilon$ teljesül, ha $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ez utóbbi, megfelelő küszöbindexet választva, az $a_n \to A$ feltétel miatt nyilván igaz (a jobb oldal konstans), így $|c \cdot a_n - c \cdot A| < \varepsilon$ is teljesül. Ezzel beláttuk, hogy $c \cdot a_n \to c \cdot A$.

A többi esetben is megfogalmazhatjuk a műveletek és a határérték kapcsolatát.

Tétel

Legyenek $a_n \to A$ és $b_n \to B$ konvergens sorozatok. Ekkor:
1. $c \cdot a_n \to c \cdot A$;
2. $a_n + b_n \to A + B$;
3. $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$;
4. ha minden pozitív egész n-re $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.

Az állítások eléggé szemléletesek. Bebizonyítjuk a 2. és 3. tételt, a 4. igazolása hasonló módon történhet.

Bizonyítás **A 2. tétel bizonyítása:** (Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$.)

Igazolni kell, hogy tetszőleges, de rögzített pozitív ε-ra $|a_n + b_n - (A + B)| < \varepsilon$, ha n elég nagy. Megbecsüljük az $|a_n + b_n - (A + B)|$ eltérést: $|a_n + b_n - (A + B)| = |a_n + b_n - A - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$.

$a_n \to A$ miatt egy bizonyos n_A küszöbindextől kezdve $n > n_A$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$; míg $b_n \to B$ miatt van olyan n_B küszöbindex, hogy ha $n > n_B$, akkor $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen n_0 az n_A és n_B közül a nagyobbik (ha egyenlők, akkor valamelyikük). Ekkor minden $n > n_0$ indexre $|a_n - A| + |b_n - B| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, azaz

$|a_n + b_n - (A + B)| < \varepsilon$. Mivel tetszőleges pozitív ε-hoz találtunk küszöbindexet, így beláttuk az állítást: $a_n + b_n \to A + B$.

A 3. tétel bizonyítása: (Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$.)
Igazolni kell, hogy tetszőleges, de rögzített pozitív ε-ra $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \varepsilon$, ha n elég nagy.
$a_n \cdot b_n - A \cdot B = (a_n - A)(b_n - B) + B \cdot a_n + A \cdot b_n - 2A \cdot B = (a_n - A)(b_n - B) + B(a_n - A) + A(b_n - B)$.
Megbecsüljük az $|a_n \cdot b_n - A \cdot B|$ eltérést: $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| \le |a_n - A| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B|$.
Mivel $a_n \to A$ és $b_n \to B$, tetszőleges η pozitív szám esetén van olyan n_0 index, hogy minden $n > n_0$ esetén $|a_n - A| < \eta$ és $|b_n - B| < \eta$, azaz $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \eta^2 + |B| \cdot \eta + |A| \cdot \eta$. Legyen $\eta < 1$ (megtehetjük, hiszen η tetszőleges pozitív szám), ekkor $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \eta + |B| \cdot \eta + |A| \cdot \eta = \eta(1 + |B| + |A|)$. Ha még $\eta < \frac{\varepsilon}{1 + |B| + |A|}$ is teljesül (ilyen η-t is választhatunk, hiszen ε adott), akkor $|a_n \cdot b_n - A \cdot B| < \varepsilon$. Tetszőleges pozitív ε-hoz találtunk küszöbindexet, így igazoltuk az állítást: $a_n \cdot b_n \to A \cdot B$.

Megjegyzések

1. A hányados határértékére vonatkozó állítást a $b_n \neq 0$ feltétel enyhítésével is kimondhatjuk. Elegendő annyit megkövetelni, hogy $\{b_n\}$ csak véges sok helyen vegyen fel 0 értéket. Ekkor ezt a véges sok tagot elhagyva a sorozat határértéke nem változik meg, és így az $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ határérték már vizsgálható.

2. A tételekből már következik például a különbségekre, reciprokokra, hatványra és gyökökre vonatkozó határérték-tétel is. Például ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $2a_n - 3b_n = 2a_n + (-3b_n) \to 2A - 3B$ vagy $(a_n + 3b_n^2)^3 \to (A + 3B^2)^3$.

3. Mivel a konvergens sorozatokkal végzett műveletek során „öröklődnek" a határértékek, így egy csapásra rengeteg sorozat határértékét meghatározhatjuk. A lecke további példái megmutatják, mennyire hatékonyak a tételek.

2. példa Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \frac{2n^2 + 3}{3n^2 - 2}$; *b)* $b_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{5n^2 + 12n + 3}$; *c)* $c_n = \frac{n^4 + 3n^3 - 2}{100n^3 + 10^6 n + 1}$; *d)* $d_n = \frac{5n + 1}{n^2 - 2}$.

Megoldás *a)* $\frac{2n^2 + 3}{3n^2 - 2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (3n^2 - 2) + \frac{13}{3}}{3n^2 - 2} = \frac{2}{3} + \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{3n^2 - 2}$. Mivel $\frac{1}{3n^2 - 2} \to 0$, így $\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{3n^2 - 2} \to 0$ és $\frac{2}{3} + \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{3n^2 - 2} \to \frac{2}{3}$, tehát $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3}{3n^2 - 2} = \frac{2}{3}$. (Az, hogy $\frac{1}{3n^2 - 2} \to 0$, következik például az $\frac{1}{3n^2 - 2} < \frac{1}{n}$ becslésből, ami $n > 1$-re teljesül.)

b) A **racionális törtkifejezések** határértéke a számlálóban és nevezőben lévő legnagyobb kitevőjű tagoktól függ. (Ezek mellett a többi tag elhanyagolható.) Általánosan célravezető módszer, ha a törtet egyszerűsítjük a nevezőben lévő legmagasabb fokú taggal, ez esetben n^2-tel:

$\frac{n^2 - 3n + 2}{5n^2 + 12n + 3} = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2}}$. Itt most az 1-en és 5-ön kívül minden tag 0-hoz tart, így

$b_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{5n^2 + 12n + 3} \to \frac{1}{5}$.

(Ezzel a módszerrel természetesen az *a)* feladat is megoldható.)

c) Az előző ötletet alkalmazzuk, egyszerűsítünk n^3-nal: $\frac{n^4 + 3n^3 - 2}{100n^3 + 10^6 n + 1} = \frac{n + 3 - \frac{2}{n^3}}{100 + \frac{10^6}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$. A 0-hoz tartó tagokat elhagyva $\frac{n^4 + 3n^3 - 2}{100n^3 + 10^6 n + 1} \sim \frac{n + 3}{100}$, tehát a sorozat divergens. (Ebben a szövegkörnyezetben a ~ jellel a határértékek egyenlőségét jelöljük.)

d) A fizikában gyakran alkalmazunk közelítéseket, amik során az összefüggéseket a nagyságrendileg kisebb tagok elhanyagolásával kapjuk meg. Gyakran „fizikus módszer"-nek nevezik a következő eljárást: a számlálóban és a nevezőben az $5n$ mellett a $+1$, az n^2 mellett a -2 elhanyagolható, így $\frac{5n + 1}{n^2 - 2} \sim \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n}$, ezért $d_n \to 0$.

Óvatosan bánjunk azonban a közelítő módszerek alkalmazásával: nagy gyakorlat kell ahhoz, hogy biztosan megállapítsuk, mikor és melyik tag hanyagolható el.

A „hagyományos” módszerrel $\frac{5n+1}{n^2-2} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} \to 0$, a sorozat valóban 0-hoz tart.

A VÉGTELENBE TARTÓ SOROZATOK

Az előző leckében láttuk, hogy sem a $\{j_n\}$: 1, 2, 3, 4, …, sem a $\{k_n\}$: 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, ... sorozatok nem voltak konvergensek. Egyik sorozat sem volt korlátos: tetszőleges $K \in \mathbf{R}$ esetén mindkét sorozatnak volt K-nál nagyobb tagja. Még azt is észrevehetjük, hogy mindkét sorozatnak végtelen sok K-nál nagyobb tagja van. De a $j_n = n$ sorozatra ennél több igaz: tetszőleges K esetén, egy bizonyos indextől kezdve, a sorozat *minden* eleme nagyobb K-nál. Az ilyen jellegű sorozatok határértékének jellemzésére bevezetjük a ’végtelen’ fogalmát.

Definíció

Egy $\{a_n\}$ sorozat **végtelenbe tart**, ha tetszőleges K valós számhoz van olyan n_0 küszöbindex, hogy minden $n > n_0$ ($n \in \mathbf{Z}^+$) esetén $a_n > K$.

Jelölés: $a_n \to \infty$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Megjegyzések

A végtelen természetesen nem szám, hanem egy szimbólum, egyfajta jelölés, amely éppen a fenti tulajdonságot jelzi. Az előző lecke példái közül a végtelenbe (vagy a végtelenhez) tartottak a $j_n = n$ és az $l_n = \frac{n}{10^6}$ sorozatok, vagy a 2. példában a $d_n = \frac{n^2+4}{n}$ sorozat.

Hangsúlyozzuk, hogy a ’végtelen’ a határérték-fogalom speciális kiterjesztése. Mivel nem valós szám, a végtelenbe tartó sorozatokat továbbra is divergenseknek tekintjük.

Definiálhatjuk a ’mínusz végtelenbe tartó sorozat’ fogalmát is.

Definíció

Egy $\{a_n\}$ sorozat a **mínusz végtelenbe tart**, ha tetszőleges K valós számhoz van olyan n_0 küszöbindex, hogy minden $n > n_0$ ($n \in \mathbf{Z}^+$) esetén $a_n < K$.

Jelölés: $a_n \to -\infty$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

A VÉGTELEN ÉS A SOROZATMŰVELETEK

A ∞ szimbólum formálisan könnyen kezelhető, és kényelmesen számolhatunk is vele. Gyakran alkalmazzuk például a sorozatok határértékére vonatkozó „$\frac{c}{\infty}$”, „$0 \cdot \infty$” vagy „$\frac{\infty}{0}$” felírásokat. Ezek a jelölések természetesen a sorozatok határértékére vonatkoznak, és nem azt jelentik, hogy ∞-nel vagy 0-val osztunk (hiszen az előző nem is szám, az utóbbival pedig nem lehet osztani). Tehát ha például $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$ és $c_n \to c$, akkor vizsgálhatjuk a $\frac{c_n}{b_n}$, $a_n \cdot b_n$ vagy $\frac{b_n}{a_n}$ határértékeket (ez utóbbit csak akkor, ha a_n legfeljebb véges sok helyen zérus); és ezen határértékek típusát jelöljük, kissé pongyolán, $\frac{c}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ vagy $\frac{\infty}{0}$ módon.

Legyen A pozitív szám és $a_n \to A$, $b_n \to \infty$ és $c_n \to \infty$ típusú sorozatok. A végtelen határérték definíciójának segítségével igazolhatók az alábbi **összefüggések**:

1. $A + b_n \to \infty$, $\quad A \cdot b_n \to \infty$;
2. $a_n + b_n \to \infty$, $\quad a_n \cdot b_n \to \infty$;
3. $b_n + c_n \to \infty$, $\quad b_n \cdot c_n \to \infty$;
4. $\frac{1}{b_n} \to 0$.

Az állítások eléggé természetesek. Végtelenhez tartó sorozatok összege és szorzata is végtelenhez tart; vagy konvergens sorozat és végtelenhez tartó sorozat összege és szorzata is végtelenhez tart stb. Az $A > 0$ feltétel szükséges: ha $A < 0$, akkor például $A \cdot b_n \to -\infty$.

Ugyanakkor problémát jelentenek a $\frac{0}{0}$, $\frac{c}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $(\infty - \infty)$ stb. típusú határértékek. Ezek konvergenciájára nincs általános szabály, az (esetleg kiterjesztett) határérték létezését minden esetben külön meg kell vizsgálni.

Példák A 2. példában négy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértéket vizsgáltunk. Láttuk, hogy ezek közül

$a_n = \frac{2n^2+3}{3n^2-2} \to \frac{2}{3}$, $b_n = \frac{n^2-3n+2}{5n^2+12n+3} \to \frac{1}{5}$ és $d_n = \frac{5n+1}{n^2-2} \to 0$, azaz konvergensek.

$c_n = \frac{n^4+3n^3-2}{100n^3+10^6n+1} = \frac{n+3-\frac{2}{n^3}}{100+\frac{10^6}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \sim \frac{n+3}{100}$ miatt $\frac{\infty}{100}$ típusú, tehát a végtelenbe tart.

3. példa Adjunk meg olyan sorozatokat, amelyeknek $\frac{0}{0}$, $\frac{c}{0}$, $\frac{\infty}{\pm\infty}$, $\infty \cdot 0$, $(\infty - \infty)$ típusú határértékeik például *a)* 5-höz; *b)* $-\infty$-hez tartanak! ($c \neq 0$)

Megoldás *a)* Legyen $a_n = 5n$ és $b_n = n$. Ekkor $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{\infty}{\infty}$ és $\frac{a_n}{b_n} \to 5$, míg $\frac{\left(\frac{1}{b_n}\right)}{\left(\frac{1}{a_n}\right)} \sim \frac{0}{0}$ típusú, és szintén 5-höz tart. Hasonlóan $a_n \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \to 5$, ami pedig $\infty \cdot 0$ típusú.

Ha például $c_n = n + 5$, akkor $c_n \to \infty$, és $c_n - b_n \to 5$.

A $\frac{c}{0}$ típusú sorozatok tagjainak abszolút értéke végtelenhez tart, így 5-höz nem konvergálhatnak.

b) Legyen $a_n = n^2$ és $b_n = -n$. Ekkor $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{\infty}{-\infty}$ típusú, $\frac{\left(\frac{1}{b_n}\right)}{\left(\frac{1}{a_n}\right)} \sim \frac{0}{0}$ típusú, $a_n \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$ típusa $\infty \cdot 0$, és mindhárom sorozat $-\infty$-hez tart. Ha például $c_n = n^3$, akkor $a_n - c_n \to -\infty$; végül $\frac{1}{\left(\frac{1}{b_n}\right)} \to -\infty$, s ez $\frac{c}{0}$ típusú határérték.

4. példa Jellemezzük konvergencia szempontjából a **mértani sorozatokat**!

Megoldás A mértani sorozatok rekurzív alakja $a_n = q \cdot a_{n-1}$ ($n \geq 2$ és a_1 adott), explicit alakja $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. (Általában $a_1 = 0$-t és $q = 0$-t kizárjuk.) Esetszétválasztást végzünk q előjele és abszolút értéke alapján.

Ha $q = 1$, akkor a sorozat állandó; konvergens, határértéke a_1.

Ha $q = -1$, akkor a sorozat oszcillál, nem konvergens: $a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots$

Ha $q > 1$ és $a_1 > 0$, akkor a sorozat végtelenhez tart; míg ha $q > 1$ és $a_1 < 0$, akkor a mínusz végtelenhez.

Indoklásképpen legyen $q = 1 + h$ (ahol $h > 0$), és vizsgáljuk meg a $q^n = (1+h)^n$ kifejezést. A binomiális tétel alapján $(1+h)^n = 1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}h^{n-1} + h^n$. Elég megőriznünk az első két tagot: $1 + nh$ tetszőlegesen nagy lehet, így $q_n \to \infty$ és $a_1 \cdot q^n \to \infty$ szintén.

Hasonlóan láthatjuk be azt is, hogy $a_1 \cdot q^n \to -\infty$, ha $a_1 < 0$.

Végül ha $0 < |q| < 1$, akkor $a_n \to 0$, mert $q^n \to 0$. Ennek igazolására meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges pozitív ε-ra van olyan n_0 küszöbindex, hogy ha $n > n_0$, akkor $|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon$. Innen $n > \log_{|q|}\varepsilon$, azaz ennél az értéknél nagyobb pozitív egész számok megfelelő küszöbindexek. (Ezzel ekvivalens az $\left|\frac{1}{q}\right|^n > \frac{1}{\varepsilon}$ egyenlőtlenség, ami az előző $q > 1$ eset alapján fennáll: $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$, $\left|\frac{1}{q}\right|^n \to \infty$.)

Definíció

Az $\{a_n\}$ mértani sorozat tagjaiból képezett $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (végtelen tagú) összeget **mértani sor**nak nevezzük. A mértani sorozat első 1, 2, … tagjából képezett S_1, S_2, … összegek a (végtelen) sor **részletösszegei**.

A (végtelen) **mértani sor összegének** pedig – megállapodás szerint – a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ határértéket nevezzük, amit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ módon is jelölünk.

5. példa Az $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ mértani sorozat elemeiből képezzük az $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ mértani sort. Határozzuk meg az így kapott végtelen mértani sor összegét!

Megoldás Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ mértani sorozat összegképlete $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$, ha $q \neq 1$. Ez alapján $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$, és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, hiszen $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$.

Vagyis az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$ végtelen sok tagú összeg értéke 2.

A végtelen mértani sor összegét általában is meghatározhatjuk. Ha $|q| \geq 1$, akkor az összeg divergens (az $a_1 = 0$ esetet kizárjuk), míg ha $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$, mert $q^n \to 0$.

Tétel

Ha $|q| < 1$, akkor az $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots$ **végtelen mértani sor összege** $a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$.

6. példa Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \sqrt{n + 100} - \sqrt{n}$; *b)* $b_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 20}$; *c)* $c_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$; *d)* $d_n = \frac{6^n}{n!}$.

Megoldás *a)* A „fizikus módszer” szerint nagy n-ekre a +100 elhanyagolható, $\sqrt{n + 100} \sim \sqrt{n}$ s így $\sqrt{n + 100} - \sqrt{n} \to 0$. A precízebb indokláshoz gyöktelenítsünk a számlálóban: $\frac{\sqrt{n + 100} - \sqrt{n}}{1} =$

$= \frac{\sqrt{n + 100} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n + 100} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + 100} + \sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n + 100} + \sqrt{n}} \to 0$, hiszen a nevezőben $\sqrt{n + 100} + \sqrt{n} \to \infty$.

b) Nagy n értékekre $n^2 >> n$ (n^2 jóval nagyobb, mint n), de ha n-et elhanyagolnánk, a hibás $b_n \to 0$ eredményt kapnánk. Ehelyett alakítsunk teljes négyzetté: $\sqrt{n^2 + n} = \sqrt{(n + 0{,}5)^2 - 0{,}25}$, s ekkor már a $-0{,}25$ és $+20$ elhanyagolható. Így $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 20} \sim n + 0{,}5 - n$, tehát $b_n \to 0{,}5$.

Másképpen: A „hagyományos” gyöktelenítéssel is célt érünk. $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 20} =$

$= \frac{n^2 + n - n^2 - 20}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 20}} = \frac{n - 20}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 20}} = \frac{1 - \frac{20}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{20}{n^2}}} \to \frac{1}{2}$.

c) Korábban megmutattuk, hogy a $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ harmonikus sor nem korlátos felülről. Mivel (c_n) szigorúan monoton növekvő, így $c_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \to \infty$.

d) A kérdés úgy is megfogalmazható, hogy vajon 6^n vagy $n!$ tart „gyorsabban (jobban)” a végtelenhez? Alakítsuk át a kifejezést, és becsüljük felülről:

$d_n = \frac{6^n}{n!} = \frac{6^6}{6!} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{n} < \frac{6^6}{6!} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n-6}$, s mivel $\left(\frac{6}{7}\right)^{n-6} \to 0$, így $d_n \to 0$ szintén.

FELADATOK

1. E1 $a_n \cdot b_n \to 0$. Következik-e ebből, hogy
a) $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ is konvergens;
b) legalább az egyik sorozat konvergens;
c) legalább az egyik sorozat korlátos?

2. E1 $a_n \to 3$, $b_n \to 0$. Következik-e ebből, hogy
a) $a_n \cdot b_n$ korlátos;
b) $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$?

3. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2012.)** Igazolja, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos! Van határértéke a sorozatnak?

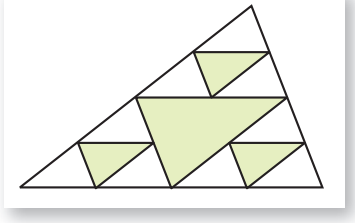
4. E1 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Feladat: Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$ sorozat határértékét!
„Megoldás”: Nagy n értékekre n^2 mellett a $+n$ és $-n$ tagok elhanyagolhatók.
$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = n - n$, így a sorozat határértéke 0.

5. E2 Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+2}{1+2+3+\ldots+n}$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2n^2+3n-2}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+7+\ldots+3n-2}{2+4+6+\ldots+2n}$.

6. E1 Határozzuk meg az alábbi végtelen mértani sorok összegét!
a) $5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\ldots$; *b)* $-3-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\ldots$; *c)* $8-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\ldots$.

7. E1 Pisti a számológépébe beütött egy pozitív számot, majd folyamatosan nyomogatta a négyzetre-emelés billentyűjét. (A billentyűt általában $(\,)^2$, $\wedge^2$ vagy x^2 módon jelzik.) Egy idő múlva elképedten vette észre, hogy a kijelzőn a 0 szám jelent meg. Hogyan lehetséges ez?

8. E2 Egy lyukasztógép kivágja egy háromszög alakú papír középháromszögét. Ezután a maradék három háromszögnek ismét kivágja a középháromszögét (ábra), majd az így kapott kilenc háromszögnek szintén kivágja a középháromszögét, és így tovább, az eljárást tetszőlegesen sokáig folytatva. „Végtelen sok” lépés végrehajtása után legfeljebb mekkora sugarú papírkört tudnánk kivágni a maradék csipkéből? (A kivágás csak valamelyik megmaradt papír részháromszögből lehetséges.)



9. E2 **(Próbaérettségi feladat alapján, emelt szint, 2007.)**
a) Határozza meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n-3}-17}$ határértéket!
b) Tekintsük az $\frac{1}{10\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 16}+\ldots$ végtelen összeget. (A második tagtól kezdve minden nevezőben az előző nevező tényezőinél 2-vel nagyobb számok szerepelnek.) Határozza meg a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ határértéket! (S_n a sor első n tagjának összegét jelöli.)

10. E1 *Zénón* (Kr. e. V. század) eleai filozófus híres paradoxona a következő.
Akhilleusz és a teknős versenyre kelnek egymással. Mivel Akhilleusz a gyorsabb, ellenfelének valamekkora távolságnyi előnyt adott. Zénón meglepő állítása szerint Akhilleusz soha nem képes megelőzni ellenfelét, függetlenül attól, hogy mennyivel gyorsabb nála. Ugyanis Akhilleusznak először el kell érnie azt a pontot, ahonnan a teknős elindult. Ezalatt ellenfele lassan ugyan, de biztosan előrehaladt valamennyit. Ezután Akhilleusznak újra el kell érnie a teknős új helyzetét; de ezalatt a teknős már ismét továbbhaladt. És így tovább: hiába éri el Akhilleusz a teknős valamely korábbi helyzetét, ellenfele azalatt már mindig továbbfutott.
Zénón szerint tehát Akhilleusz soha nem éri utol a teknőst, ha egyszer előnyt adott.
Mi lehet a probléma ezzel az „indoklással”?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1158–1174, 1179–1192.

58. MONOTON ÉS KORLÁTOS SOROZATOK, ALKALMAZÁSOK

A sorozatok egy fontos osztályát alkotják a monoton sorozatok.

Korábban láttuk, hogy ha egy sorozat monoton nő és felülről nem korlátos, akkor a végtelenbe tart. Fontos tétel igaz a monoton növekvő és felülről korlátos sorozatokra:

Tétel

Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor van határértéke.
A tétel duálisa: ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor van határértéke.
(A két tételt egyben is megfogalmazhatjuk: **ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.**)

Bizonyítás A monoton növekvő sorozatokra vonatkozó tételt bizonyítjuk; a monoton csökkenő sorozatokra a bizonyítás gondolatmenete hasonló.

Jelölje a felülről korlátos és monoton növekvő $\{a_n\}$ sorozat legkisebb felső korlátját A. Bebizonyítjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Mivel a sorozat monoton növekvő, azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges pozitív ε-ra az $]A-\varepsilon, A]$ intervallumon kívül a sorozatnak véges sok tagja van. Mivel A a *legkisebb* felső korlát, van olyan N index, hogy $a_N \in]A-\varepsilon, A]$. (Egyébként $A-\varepsilon$ kisebb felső korlát lenne.) Mivel a sorozat monoton növekvő, ezért minden $n > N$ esetén $a_n \geq a_N$, s így $a_n \in]A-\varepsilon, A]$ is teljesül. Készen vagyunk: az $]A-\varepsilon, A]$ intervallumon kívül valóban véges sok tagja van a sorozatnak, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

A sorozatok konvergenciájának vizsgálatában több neves matematikus is szép eredményeket ért el. Nevezetes tételek fűződnek például a cseh *Bernard Bolzano* (1781–1848) és a német *Karl Weierstrass* (1815–1897) nevéhez.

Bernard Bolzano

Karl Weierstrass

A jól használható tétel elégséges feltételt ad a sorozatok konvergenciájára. Előfordul, hogy a tételből következően ismeretes, hogy valamely sorozat konvergens, de a konkrét határértéket nem (vagy csak nehezen) tudjuk meghatározni.

1. példa Pisti a számológépébe beütött egy pozitív számot, majd folyamatosan nyomogatta a négyzetgyökvonás billentyűjét. Egy idő múlva észrevette, hogy a kijelzőn az 1 szám jelent meg (ami persze ezután már állandó is maradt). Hogyan lehetséges ez?

Megoldás Tegyük fel, hogy $a > 1$ a kiindulási szám. Pisti rendre a $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[8]{a}, \sqrt[16]{a}, \ldots$ számokat íratja ki, ezek pedig az $(\sqrt[n]{a})$ egy részsorozatát alkotják. Az $(\sqrt[n]{a})$ sorozat monoton csökkenő, hiszen egyre nagyobb gyököt vonunk egy 1-nél nagyobb számból. Ugyanakkor a sorozat alulról korlátos is, mert minden tagja 1-nél nagyobb, ezért az $(\sqrt[n]{a})$ sorozat konvergens.

Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{a} \to A$, és tekintsük a $(\sqrt[2n]{a})$ részsorozatot! Ennek szintén A a határértéke, míg $\sqrt[n]{a} = (\sqrt[2n]{a})^2$ is teljesül. Ha most a két oldal határértékét vizsgáljuk, akkor az $A = A^2$ egyenlőséget kapjuk, és innen $A = 0$ vagy $A = 1$ következik. Az első eset nem lehetséges, így $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Ha $a > 1$, akkor $\sqrt[n]{a} > 1$. Pisti azért kapott 1-et eredményül, mert az $(\sqrt[n]{a})$ sorozat tagjai egy idő után tetszőlegesen megközelítik az 1-et, és a számológép (típustól függetlenül) már nem tudta megkülönböztetni az $\sqrt[n]{a}$ aktuális értékét 1-től.

(Jelöljük m-mel azt a legkisebb pozitív számot, amellyel a számológép dolgozni tud. A gép akkor írta ki az 1-et, amikor $\sqrt[n]{a}$ kisebb lett, mint $1 + m$.)

Hasonlóan járunk el akkor is, ha $0 < a < 1$; ekkor $(\sqrt[n]{a})$ monoton növekvő és felülről korlátos.

Megjegyzés

A határátmenetekre vonatkozó egyenlőség felírása ($\sqrt[n]{a} = (\sqrt[2n]{a})^2 \Rightarrow A = A^2$) sikeres ötlet volt. Hangsúlyozzuk azonban, hogy *csak akkor használhatjuk, ha már tudjuk, hogy létezik a határérték*.

„Elrettentésül” nézzük a következő példát.

2. példa Az $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$ összeget többfélképpen is meghatározhatjuk.

Ha az $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \pm \ldots$ zárójelezést alkalmazzuk, $S = 0$ adódik.

Ha $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) \pm \ldots$ sorrendben adjuk össze a tagokat, akkor $S = 1$ az eredmény.

Ha pedig -1-gyel szorozzuk az egyenletet, a $-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$ összefüggésből $-S = -1 + S$, innen pedig $S = 0{,}5$.

Melyik a helyes eredmény?

Megoldás Természetesen egyik eredmény sem jó. Az S összeg nem konvergens, nincs értéke. A példa azt mutatja, hogy a konvergens sorozatok körében megszokott és megengedett műveletvégzés (sorozatok tagjainak szorzása, sorozatok összege és szorzata, a tagok átrendezése) *divergens sorozatok esetén nem hajtható végre*. A divergens sorozatokkal végzett műveletek ellentmondásra vezethetnek.

3. példa Már korábban megtanultuk, hogyan kell felírni például az $1{,}2\overline{34}$ végtelen szakaszos tizedes törtet közönséges tört alakban. Legyen $x = 1{,}2\overline{34}$; ekkor $100x = 123{,}4\overline{34}$, és a két egyenlet különbségéből $99x = 122{,}2$. Eredmény: $x = \frac{122{,}2}{99} = \frac{1222}{990}$.

Magyarázzuk meg, miért hajtható végre mindig a fenti eljárás!

Megoldás Ha az $1{,}2\overline{34}$ végtelen szakaszos tizedes tört egyre több tizedesjegyét írjuk ki, akkor a közelítő értékek sorozata monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. Konvergens sorozat tagjaival pedig megengedett a hagyományos műveletvégzés: ha x jelöli a sorozat határértékét, akkor $100x = 123{,}4\overline{34}$ és így tovább.

Alkalmazhattuk volna a végtelen mértani sor összegképletét is.

$$1{,}2\overline{34} = 1{,}2 + \frac{34}{10^3} + \frac{34}{10^5} + \frac{34}{10^7} + \ldots = 1{,}2 + \frac{34}{10^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right) = 1{,}2 + \frac{34}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} =$$

$$= 1{,}2 + \frac{34}{10 \cdot 99} = \frac{1188 + 34}{990} = \frac{1222}{990}.$$

4. példa Bizonyítsuk be, hogy az $A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ végtelen összeg konvergens!

Megoldás Az $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ részletösszeg-sorozat monoton nő, elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy A felülről korlátos, mert ekkor már következik a sor konvergenciája.

Ha a második tagtól kezdve a nevezőben i^2 helyett $i(i-1)$-et írunk, akkor az összeget növeljük. Legyen tehát $B = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$, ekkor $A < B$. B-t kiszámíthatjuk a tanult módon, parciális törtekre bontással:

mivel $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1$, így $B = 2$.

Az $A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ összeg tehát létezik, és $A < 2$.

Más megoldási lehetőségek:

Megtehetjük, hogy későbbi tagtól alkalmazzuk az $\frac{1}{i^2} < \frac{1}{(i-1)i}$ becslést. Például ha az első két tagot meghagyjuk, akkor $C = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots =$

$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$. Mivel $A < C$, így $A < \frac{7}{4}$.

Ha még későbbi tagtól becsülünk, akkor egyre kisebb felső korlátot kapunk.

Egy másik út az $\frac{1}{i^2} < \frac{1}{(i-1)(i+1)}$ becslés alkalmazása. Ekkor

$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots < D = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots$ Két részletben határozhatjuk meg D-t. Az első részletösszeg $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = \frac{1}{2}$, a második

$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{4}$, így $D = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

Tehát ezzel a módszerrel is az $A < \frac{7}{4}$ felső becslést kaptuk.

Megjegyzés

Bármilyen szűk felső becslést is alkalmazunk, az összeg pontos értékét nem kapjuk meg. Sőt, ha számítógéppel sok tagot kiíratunk, akkor az eredmény (kb. 1,6449) sem lesz „szép” szám. Erősebb analízisbeli eszközökkel megmutatható, hogy $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$. Az eredmény meglepő („Mi köze racionális számok összegének a π négyzetéhez?”), de a matematikusok több hasonló, π számszorosához tartó sort is ismernek.

A CANTOR-FÉLE TULAJDONSÁG (Kiegészítő anyag)

Definíció

Egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatának nevezzük az $[a_n, b_n]$ alakú intervallum-sorozatokat, ha minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$. (Az „egymásba skatulyázás” tehát az $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ tartalmazásra utal.)

Ilyen intervallum-sorozatok például:

$[-1; 1]\ \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\ \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right] \ldots, \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] \ldots;$

$[0; 1]\ \left[0; \frac{1}{4}\right]\ \left[0; \frac{1}{9}\right]\ \left[0; \frac{1}{16}\right] \ldots, \left[0; \frac{1}{n^2}\right] \ldots;$

$\left[1; \frac{4}{2}\right]\ \left[\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right]\ \left[\frac{11}{8}; \frac{10}{6}\right]\ \left[\frac{23}{16}; \frac{13}{8}\right] \ldots, \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}; \frac{3n+1}{2n}\right] \ldots$

A valós számok fontos jellemzője a **Cantor-axiómának** nevezett alaptulajdonság (*Georg Ferdinand Cantor* német matematikus nevével már találkoztunk korábban, a végtelen halmazok vizsgálatakor):

Minden $[a_n; b_n]$ alakú, egymásba skatulyázott zárt intervallum-sorozatnak **van közös pontja**.

Érvényes továbbá az ún. **Cantor-féle közösrész-tétel**:

Tétel

Ha az egymásba skatulyázott zárt intervallumok hossza 0-hoz tart (azaz $b_n - a_n \to 0$), akkor az intervallumoknak **egyetlen közös pontja van.**

A fenti példákban az intervallumok hossza 0-hoz tart, az intervallumok által közrefogott számok rendre 0, 0 és $\frac{3}{2}$.

A zárt intervallumokra vonatkozó megkötés szükséges: például a félig zárt intervallumokból álló $\left\{\left]0; \frac{1}{n^2}\right]\right\}$ sorozat egymásba skatulyázott, de nincs olyan szám, amelyik mindegyik intervallumban benne lenne. (Érdekességképpen jegyezzük meg, hogy az axióma közös racionális elemre már nem igaz: például a $\left\{\left[\pi; \pi + \frac{1}{n}\right]\right\}$ egymásba skatulyázott zárt intervallum-sorozat nem tartalmaz közös racionális elemet. A közös valós elem a π.)

A Cantor-axióma hatékony segédeszköznek bizonyult. Segítségével igazolható például a lecke elején ismertetett tétel is, mely szerint monoton növekvő és felülről korlátos sorozatnak van határértéke. Egy másik, geometriai alkalmazás a következő:

Jelentse t_n, illetve T_n az egység sugarú körbe, illetve kör köré írt szabályos $(n + 2)$-szög területét ($n \in \mathbf{Z}^+$). Ekkor $\{[t_n; T_n]\}$ egymásba skatulyázott zárt intervallum-sorozatot alkot, hiszen $t_n < t_{n+1} < T_{n+1} < T_n$ geometriailag igazolható. Az is bizonyítható, hogy n növekedtével $T_n - t_n \to 0$, ezért az intervallum-sorozatnak egyetlen közös pontja lesz. Ez a közös érték az egység sugarú kör területe, azaz π. (Ezt az eredményt sugallja a szemléletünk is.)

5. példa **Az irracionális kitevőjű hatvány értelmezése**

A Cantor-axióma segítségével értelmezhetjük az irracionális kitevőjű hatvány fogalmát is. Hogyan számíthatjuk ki például $3^{\sqrt{2}}$ értékét?

Tíz jegy pontossággal $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$. Megadhatunk egy $\sqrt{2}$-t előállító intervallum-sorozatot:

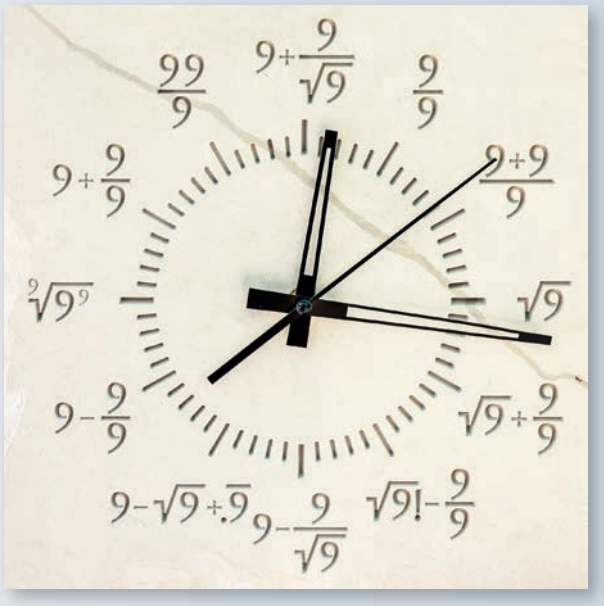
$a_1 = 1 < \sqrt{2} < 2 = b_1$;

$a_2 = 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 = b_2$;

$a_3 = 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 = b_3$;

$a_4 = 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 = b_4$; és így tovább.

Az egyre több tizedesjegyből álló $[a_n; b_n]$ intervallumok hossza 0-hoz tart: $b_n - a_n = \frac{1}{10^{n-1}} \to 0$.



Hasonlóan közelíthetjük $3^{\sqrt{2}}$ értékét:

$3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$;

$3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$;

$3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42}$;

$3^{1,414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,415}$ stb.

Az alsó és felső közelítő értékek különbsége tetszőlegesen kicsivé válik. A két sorozat közös határértéke $3^{\sqrt{2}}$, amit már tetszőleges pontossággal meghatározhatunk.

AZ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ SOROZAT (Kiegészítő anyag)

Ha adott a c konstans, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^c=1$, mert az alap 1-hez tart (bármilyen nagy is a c konstans kitevő). Ugyanakkor $\lim\limits_{n\to\infty}(1+h)^n=\infty$, ha $h>0$ (akármilyen kicsi is a h konstans). Kérdés tehát, hogy vajon az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatnak van-e véges határértéke?

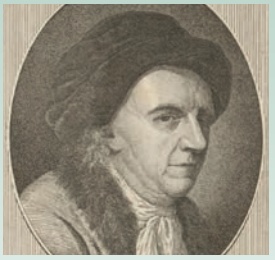
Megmutatjuk, hogy ez a nevezetes Euler-féle sorozat konvergens. (Az állítás egyáltalán nem nyilvánvaló, hiszen a hatvány alapja 1-hez, míg a kitevője a végtelenbe tart.) Az alábbiakban vázoljuk a bizonyítás gondolatmenetét.

Először igazolni kell, hogy az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton növekvő, azaz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ minden n-re. Ehhez felírjuk az $1,\ 1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{n}$ (összesen $n+1$ darab számra) a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}<\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1},$$

ahonnan

$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$, ebből pedig hatványozással megkapjuk az igazolandó egyenlőtlenséget. (A hatványközepek között nem lehet egyenlőség, hiszen az egyenlőtlenségben szereplő számok nem mind egyenlők.)



Leonhard Euler (1707–1783) nagy svájci matematikus, a matematika szinte minden területén és más tudományterületeken (fizika, technika, geográfia) is maradandót alkotott.

Ezután megmutathatjuk, hogy a sorozat felülről korlátos. Ehhez felírhatjuk az $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{n}$ összesen ($n+2$ darab számra) a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}<\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}=1.$$

Innen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$ adódik, a sorozat felülről korlátos.

Az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton nő és felülről korlátos, tehát konvergens. A sorozat határértékét e-vel jelöljük: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, ez a nevezetes Euler-féle szám a természetes alapú logaritmus alapszáma. Láttuk, hogy $e<3$; a tíz tizedesjegy pontosságú érték $e=2{,}7182818285$.

FELADATOK

1. E1 Adjuk meg az alábbi tizedestörteket közönséges tört alakban!

a) $5{,}43\overline{7}$; *b)* $-56{,}12\overline{347}$; *c)* $19{,}\overline{9}$.

2. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2013.)** Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

a) Számítsa ki a hatszög területének pontos értékét!

b) Az $ABCDEF$ hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot.
Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértéket! (Pontos értékekkel számoljon!)

3. E2 Határozzuk meg az alábbi rekurzív sorozatok határértékét!

a) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n\geq 1)$, $a_1=\sqrt{2}$;

b) $b_1=0$, $b_2=1$ és $b_{n+2}=\frac{b_n+b_{n+1}}{2}$, ha $n\geq 1$.

(Ez utóbbi feladatra próbáljunk geometriai jellegű megoldást is adni.)

4. E2 Bizonyítsuk be, hogy az $\sqrt[n]{n}$ sorozat konvergens! Mi a sorozat határértéke?

5. E1 Pisti két definíciót vizsgál.
I: Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy minden $n > n_0$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. (n_0, n pozitív egész számok.)
II: Létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra minden $n > n_0$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ (n_0, n pozitív egész számok).
Pisti szerint a két definíció megegyezik („lényegében azonos betűkkel leírható"), Anna viszont úgy gondolja, hogy nem mindegy, melyiket használjuk. Kinek van igaza?

6. E2 Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{n+8}$; *b)* $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+8}$; *c)* $c_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n}$; *d)* $d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$.

7. V Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok 0-hoz tartanak ($a > 1$ valós szám, k rögzített természetes szám)!

a) $a_n = \frac{n^k}{a^n}$; *b)* $b_n = \frac{a^n}{n!}$; *c)* $c_n = \frac{n^k}{n!}$; *d)* $d_n = \frac{n!}{n^n}$.

8. E2 *a)* Mutassuk meg, hogy az $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ($n \geq 1$) Fibonacci-szerű rekurzió az $f_1 = 1$, $f_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kezdőértékekre 0-hoz tart!

b) Ha a sorozat tagjait, a rekurzív összefüggés alapján, rendre kiíratjuk egy számítógéppel, akkor érdekes jelenséget tapasztalunk. Az egyszerű program egy futási részlete az alábbi (az előtagot 2 tizedesjegy pontossággal kiírva):

$f_{26} = -6{,}01 \cdot 10^{-6}$, $f_{27} = 3{,}61 \cdot 10^{-6}$, $f_{28} = -2{,}40 \cdot 10^{-6}$, $f_{29} = 1{,}20 \cdot 10^{-6}$,
$f_{30} = -1{,}20 \cdot 10^{-6}$, $f_{31} = 9{,}31 \cdot 10^{-10}$, $f_{32} = -1{,}20 \cdot 10^{-6}$, $f_{33} = -1{,}20 \cdot 10^{-6}$,
$f_{34} = -2{,}40 \cdot 10^{-6}$, $f_{35} = -3{,}60 \cdot 10^{-6}$, $f_{36} = -6{,}00 \cdot 10^{-6}$, $f_{37} = -9{,}60 \cdot 10^{-6}$,
$f_{38} = -1{,}56 \cdot 10^{-5}$, $f_{39} = -2{,}52 \cdot 10^{-5}$, $f_{40} = -4{,}08 \cdot 10^{-5}$, $f_{41} = -6{,}60 \cdot 10^{-5}$,
$f_{42} = -1{,}07 \cdot 10^{-4}$, $f_{43} = -1{,}73 \cdot 10^{-4}$, stb.

Úgy tűnik, hogy az elméleti eredményeknek megfelelően a 36. tagig a tagok abszolút értéke 0-hoz tart. Ez után azonban a tagok abszolút értékei váratlanul elkezdenek nőni; szó sincs semmiféle konvergenciáról. A program futása túlcsordulási hiba miatt megszakad, az utolsó kiírt eredmények:

$f_{183} = -3{,}13 \cdot 10^{25}$, $f_{184} = -5{,}07 \cdot 10^{25}$, $f_{185} = -8{,}20 \cdot 10^{25}$, $f_{186} = -1{,}33 \cdot 10^{26}$.

Mi lehet a jelenség oka?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1175–1178.

Természetes fraktálok:

IX. DIFFERENCIÁL-SZÁMÍTÁS

A Möbius-szalag kétdimenziós felület, aminek különlegessége, hogy csak egyetlen oldala és egyetlen éle van. Felfedezője August Ferdinand Möbius (1790–1868) német matematikus és csillagász

A Möbius-szalag

Pierre de Fermat

Isaac Newton

Az élet számtalan területén előfordul, hogy egy-egy kérdés megválaszolásához egy függvény valamely tulajdonságát kell vizsgálnunk. A műszaki életben, a közgazdaságtanban, a pénzügyi világban vagy a meteorológiában egyaránt előfordul, hogy például szélsőértéket kell meghatározni.

Már *Pierre de Fermat* (1601–1665) is foglalkozott azzal a kérdéssel, hogyan lehet egy függvény maximumát, minimumát meghatározni. Vizsgálataiban fontos szerepet játszottak a függvénygörbe érintői. Az ő előkészítő munkájának köszönhetően *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) kidolgozta a függvénygörbék érintőjének meghatározására vonatkozó módszerét.

Ezen a téren *Isaac Newton* (1643–1727) is fontos eredményekhez jutott, Leibniztől függetlenül.

A most következő fejezetben megismerkedünk ezen eredmények egy részével, egyszerűbb függvények menetének vizsgálatával és a szélsőérték kiszámítására használható általános módszerrel.

Gottfried Wilhelm Leibniz

59. FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

Az eddig tanult függvények egy jelentős részénél magától értetődő volt, hogy a grafikon néhány pontjának bejelölése után ezeket összeköthettük az íróeszközünk hegyének felemelése nélkül. Ilyen volt például a másodfokú függvény, a négyzetgyök függvény, az exponenciális függvény, a szinuszfüggvény.

Az egészrész-függvény és a törtrész-függvény esetén nem ezt tapasztaljuk. Ezeknél lesz olyan hely, ahol a ceruzánk hegyét fel kell emelnünk a papírlapról, amikor ezeknek a függvényeknek megrajzoljuk a grafikonját.

Ezek alapján mondtuk, hogy a másodfokú függvény például az $x = 2$ helyen (és mindenhol máshol is) folytonos, az egészrész függvény pedig az egész helyeken nem folytonos.

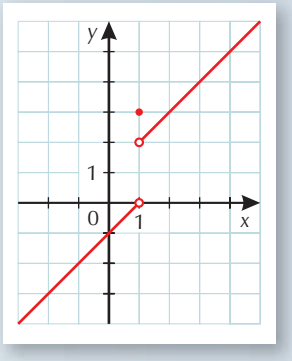
A következőkben pontosítjuk ezeket a fogalmakat.

Mit jelent, hogy egy pontban szakadása van egy függvénynek? Mit jelent, hogy egy pontban nem folytonos egy függvény? Egyszerűbb függvények esetén a grafikonon ezek ránézésre látszanak, de ezt matematikailag is le kellene írnunk.

1. példa Vizsgáljuk a valós számok halmazán értelmezett f függvényt folytonosság szempontjából az $x = 1$ helyen:

$$f: x \mapsto \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 1; \\ 3, & \text{ha } x = 1; \\ x+1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Megoldás Ha ránézünk a függvény grafikonjára *(lásd ábra)*, azonnal szembetűnik, hogy az $x = 1$ helyen nem folytonos a függvény.



Vegyünk egy olyan 1-hez tartó $\{x_n\}$ sorozatot, amelynek valamennyi elemére igaz, hogy $x_n < 1$. Ekkor a függvényértékek sorozata a 0-hoz tart.

Azaz, ha $x_n \to 1$ balról, akkor $f(x_n) \to 0$.

Vegyünk egy olyan 1-hez tartó $\{x_n\}$ sorozatot, amelynek valamennyi elemére igaz, hogy $x_n > 1$. Ekkor a függvényértékek sorozata a 2-höz tart.

Azaz, ha $x_n \to 1$ jobbról, akkor $f(x_n) \to 2$.

Ha olyan 1-hez tartó sorozatot veszünk, melyben a tagok felváltva 1-nél nagyobbak és kisebbek, akkor a függvényértékek sorozata nem is konvergens.

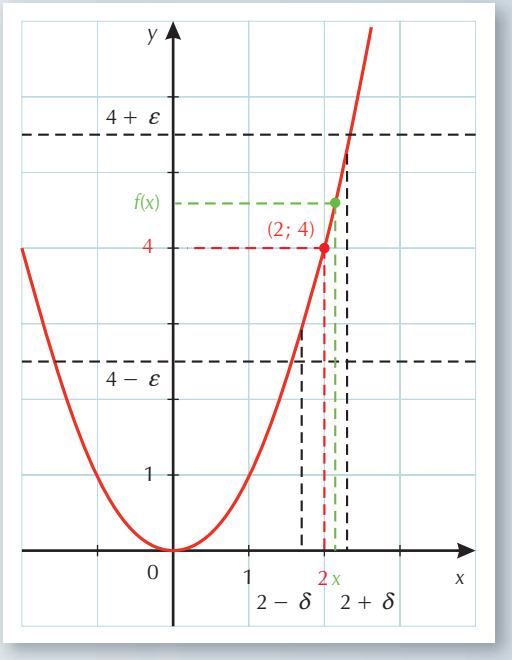
Vagyis a vizsgált helyhez konvergáló $\{x_n\}$ sorozatokhoz tartozó $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata különböző értékekhez is konvergálhat, és az is előfordulhat, hogy nem is konvergens ez a sorozat.

Mivel a nem folytonosságot pontokban tudjuk eldönteni, ezért indokolt, hogy a folytonosságot is pontokban vizsgáljuk. Egy egyszerű példában ezt is megnézzük, majd definiáljuk a folytonosságot.

2. példa A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ függvény grafikonját minden helyen folytonosnak látjuk. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent a folytonosság az $x = 2$ helyen!

Megoldás Tartson egy $\{x_n\}$ sorozat a 2-höz. Az $\{x_n\}$ sorozat tagjairól csak annyit teszünk fel, hogy a vizsgált függvény értelmezési tartományában legyenek (jelen esetben valós számok).

A megfelelő függvényértékek sorozata: $\{f(x_n)\} = \{x_n^2\}$. Ha $x_n \to 2$-höz, akkor az $\{x_n^2\}$ sorozat is konvergens és a határértéke 2^2, azaz az $f(x)$ függvény $x = 2$ helyen felvett értéke.



Vagyis akárhogyan is veszünk egy $x_n \to 2$ sorozatot, a hozzá tartozó függvényértékek sorozata a függvénynek a 2 helyen felvett értékéhez tart: $f(x_n) \to 4$.

Ettől eltérő módon is beszélhetünk a függvény $x = 2$-ben tapasztalt folytonosságáról.

A folytonosság szemléletesen azt jelenti, hogy ha „kicsit" változtatunk az x értékén, akkor a függvényérték is csak „kicsit" változik. Ennek igazolásához adjunk meg egy tetszőleges pozitív ε számot. Nézzük meg, hogy van-e a 2-nek olyan δ sugarú környezete, amire igaz, hogy minden, ebben a környezetben lévő x helyen a függvény értéke a 2-ben felvett függvényértéktől ε-nál kevesebbel tér el. Ez vizuálisan azt jelenti, hogy ezekhez az x értékekhez tartozó grafikonpontok beleesnek az $y = 4 - \varepsilon$ és az $y = 4 + \varepsilon$ egyenesek által létrehozott sávba.

Vizsgáljuk meg az $|x^2 - 2^2|$-t!

Ha $1 < x < 3$, akkor

$|x^2 - 2^2| = |x+2| \cdot |x-2| \leq 5 \cdot |x-2| < \varepsilon$, ha $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Ezért ha a δ pozitív számot 1-nél és $\frac{\varepsilon}{5}$-nél is kisebbnek választjuk, akkor a 2-nek ebbe a δ sugarú környezetébe eső minden x helyen a felvett függvényérték a 2-ben felvett függvényértéknél ε-nál kevesebbel tér el.

Az előző példában szerzett tapasztalatok alapján megfogalmazzuk a függvények folytonosságára vonatkozó definíciót.

Definíció

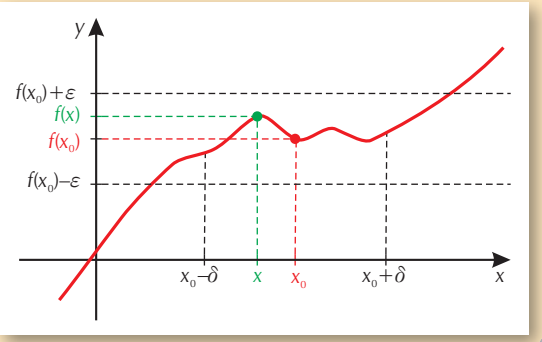
Legyen az f függvény értelmezve az x_0 valamely környezetében. **Az f függvény az x_0 pontban folytonos**, ha minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, melynek tagjai az f értelmezési tartományából vannak, és $x_n \to x_0$, teljesül, hogy $f(x_n) \to f(x_0)$.

A 2. példában leírtak alapján adható a folytonosságra egy másik definíció is.

Definíció

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 valamely környezetében. **Az f függvény az x_0 pontban folytonos**, ha bármely pozitív ε-hoz létezik olyan pozitív, ε-tól függő δ, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hétköznapi szófordulattal úgy mondhatnánk, hogy ha az x elég közel van az x_0-hoz, akkor $f(x)$ közel van $f(x_0)$-hoz.



A két definíció ekvivalens egymással, de ennek bizonyításától eltekintünk.

3. példa Folytonos-e a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3$ függvény az $x = \frac{1}{2}$ helyen?

Megoldás Legyen $\{x_n\}$ egy tetszőleges $\frac{1}{2}$-hez tartó sorozat.

A sorozatoknál tanult tételt alkalmazva, ha $x_n \to \frac{1}{2}$, akkor $x_n^3 = x_n \cdot x_n \cdot x_n \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Vagyis ha $x_n \to \frac{1}{2}$, akkor $f(x_n) = x_n^3 \to \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

A definíciónk szerint ez pontosan azt jelenti, hogy a függvény $x = \frac{1}{2}$ helyen folytonos.

Természetesen dolgozhattunk volna a másik definícióval is. Legyen adott a pozitív ε szám, és legyen x a 0 és az 1 között.

Ekkor $\left|x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right| = \left|\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}\right)\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot \left|x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}\right| < \left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot \frac{7}{4} < \varepsilon$, ha $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{4}{7}\varepsilon$.

Egy $\frac{1}{2}$-nél és $\frac{4}{7}\varepsilon$-nál is kisebb pozitív számot választhatunk δ-nak. Erre igaz lesz, hogy az $\frac{1}{2}$-nek ebben a δ sugarú környezetében lévő x-ekre $\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| < \varepsilon$.

Ez a következtetés minden pozitív ε-ra elvégezhető, hiszen a bizonyításban csak azt használtuk fel, hogy pozitív.

Tehát az $f(x) = x^3$ függvény folytonos az $x = \frac{1}{2}$ helyen.

4. példa Folytonos-e a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x$ függvény egy tetszőleges x_0-ban?

Megoldás Az eddigi tapasztalatunk szerint igen, de ezt a rendelkezésünkre álló definíció segítségével be kell bizonyítanunk. Mutassuk meg, hogy ha $x_n \to x_0$, akkor $\sin x_n \to \sin x_0$.

Nézzük az alábbi következtetéseket:

$$0 \le |\sin x_n - \sin x_0| = 2 \cdot \left|\sin \frac{x_n - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x_n + x_0}{2}\right| \le 2 \cdot \left|\sin \frac{x_n - x_0}{2}\right| \le 2 \cdot \left|\frac{x_n - x_0}{2}\right| = |x_n - x_0|.$$

A gondolatmenetünkben felhasználtuk a korábban látott addíciós tételekből levezetett összefüggést és a $|\sin x| \le |x|$ egyenlőtlenséget.

Ha $x_n \to x_0$, akkor $|x_n - x_0| \to 0$.

Használjuk a rendőr-elvet!

Mivel az egyenlőtlenség lánc mindkét végén szereplő sorozat 0-hoz tart, így $|\sin x_n - \sin x_0| \to 0$.

Ezek szerint:

$\sin x_n \to \sin x_0$.

Mivel x_0 tetszőleges volt, ezért az $f(x) = \sin x$ függvény a valós számok halmazán mindenütt folytonos.

Megmutattuk néhány közismert függvény esetén a definíció segítségével a folytonosságot. Minden eddig tanult függvényre nem hajtjuk végre a vizsgálatot, de természetesen megmutatható lenne például a $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\log_a x$, a^x, $\cos x$ függvényekről is, hogy az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.

5. példa Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az

$f:]-\infty; \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

függvényt.

Megoldás Először megmutatjuk, hogy $f(x)$ függvény az $x_0 = 0$ helyen folytonos. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy ha $x_n \to 0$, akkor $f(x_n) \to f(x_0)$, azaz $f(x_n) \to 0$ (mivel $f(x_0) = 0$).

Ez valóban igaz, hiszen $0 \le |f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n)| \le |x_n|$, és ha $x_n \to 0$, akkor a rendőr-elv alapján $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$, azaz $f(x_n) \to 0$.

Vagyis a függvény valóban folytonos az $x_0 = 0$ helyen.

Most megmutatjuk, hogy egy tetszőleges $x_0 \neq 0$ helyen a függvény nem folytonos.

I. eset: Legyen x_0 racionális szám.

Ha az $\{x_n\}$ tagjai irracionális számok, és $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n) \to 0 \neq f(x_0)$.

A folytonosság definíciója szerint ezen a helyen nem folytonos a függvény.

II. eset: Legyen x_0 irracionális szám.

Ha az $\{x_n\}$ tagjai racionális számok, és $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n) \to x_0 \neq 0 = f(x_0)$.

A folytonosság definíciója szerint ezen a helyen sem folytonos a függvény.

(Ha olyan $x_n \to x_0$ sorozatot választunk, amelynek a tagjai felváltva racionális és irracionális számok, akkor $\{f(x_n)\}$ nem is konvergens.)

Vagyis a vizsgált függvény csak az $x_0 = 0$-ban folytonos, máshol nem.

FELADATOK

1. E1 A szemlélet alapján döntsünk, hogy az $x_0 = 2$ pontban folytonos-e az $f(x)$ függvény!

a) $f(x) = x^2 + x$; *b)* $f(x) = \frac{1}{x} + 2$; *c)* $f(x) = \sqrt{2x - 3}$;

d) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$; *e)* $f(x) = \{2x\}$; *f)* $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$.

2. E1 Folytonos-e az $x = \frac{1}{2}$ helyen a valós számok halmazán értelmezett

a) $f(x) = x^4$; *b)* $f(x) = x^5$

függvény?

3. E2 Vizsgáljuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x)$ függvényeket, hogy folytonosak-e az $x = 3$ helyen:

a) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}x + 3, & \text{ha } x \le 3; \\ -2x + 8, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$ *b)* $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{x+6}{3}, & \text{ha } x \le 3; \\ -x + 6, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$

4. E2 Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy $f(x)$ függvény folytonos legyen az $x = 1$ helyen!

a) $f: x \mapsto \begin{cases} -x + a^2, & \text{ha } x \le 1; \\ 3x - 3a, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$ *b)* $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 + a^2, & \text{ha } x \le 1; \\ -x - a - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1200–1204.

60. MŰVELETEK FOLYTONOS FÜGGVÉNYEKKEL

Láttuk, hogy a definíció segítségével eldönthető egy-egy vizsgált helyen a függvények folytonossága. Gyorsítaná a vizsgálatot, ha a már ismert folytonos függvények tulajdonságát felhasználhatnánk az ezek által előállított új függvények esetén. Vajon mondhatunk-e valamit a folytonos függvények összegéről, különbségéről, szorzatáról, hányadosáról, …?

1. példa Vegyük az x_0 pontban folytonos f és g függvényeket. Igazoljuk, hogy ekkor az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban!

Megoldás Azt kell belátnunk, hogy ha $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$.

A két függvény folytonosságából tudjuk: ha $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n) \to f(x_0)$ és $g(x_n) \to g(x_0)$.

Alkalmazzuk a sorozatoknál megtanult tételt, vagyis hogy az $\{f(x_n) + g(x_n)\}$ is konvergens és a határértéke $f(x_0) + g(x_0)$. Ezzel beláttuk az állítást.

Ennek mintájára a különbségre vonatkozó állítást is igazolhatjuk. Ennek igazolását feladatként tűzzük ki.

2. példa Vegyük az x_0 pontban folytonos f és g függvényeket. Igazoljuk, hogy ekkor az $f \cdot g$ függvény is folytonos az x_0 pontban!

Megoldás A feltevés szerint mindkét függvény folytonos az x_0 pontban, ezért ha $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n) \to f(x_0)$ és $g(x_n) \to g(x_0)$.

Tekintsük a következő átalakításokat:

$$0 \le |f(x_n)g(x_n) - f(x_0)g(x_0)| = |f(x_n)g(x_n) - f(x_0)g(x_n) + f(x_0)g(x_n) - f(x_0)g(x_0)| \le$$

$$\le |f(x_n) - f(x_0)| \cdot |g(x_n)| + |g(x_n) - g(x_0)| \cdot |f(x_0)| \le |f(x_n) - f(x_0)| \cdot K + |g(x_n) - g(x_0)| \cdot |f(x_0)|.$$

Felhasználtuk, hogy x_0-ban folytonosak a függvények, így létezik olyan környezete, ahol korlátos, vagyis $g(x_n) \le K$.

Mivel $f(x_n) - f(x_0) \to 0$ és $g(x_n) - g(x_0) \to 0$, ezért a jobb oldal tart a nullához.

A rendőr-elv alkalmazásával: $f(x_n)g(x_n) - f(x_0)g(x_0) \to 0$.

Ezek szerint ha $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0)$, ami a bizonyítandó állítást jelenti.

Nem bizonyítjuk, de fontossága miatt rögzítjük, hogy ha az f és a g függvény egy x_0 pontban folytonos, és $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ függvény is folytonos az x_0 pontban.

Definíció

Intervallumon folytonos függvények

Az f függvényt egy intervallumon folytonosnak nevezzük, ha az intervallum minden pontjában folytonos.

Ha a függvény az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos, akkor egyszerűen folytonos függvényről beszélünk.

Megjegyzés

Az intervallum végpontjaiban csak az egyik oldalra alkalmazzuk a folytonossági definíciót. Így zárt intervallumnál beszélhetünk a végpontbeli folytonosságról is. Ha a bal oldali végpontban jobbról, a jobb oldali végpontban balról folytonos a függvény, akkor a zárt intervallumon is beszélhetünk folytonosságról. (Ezeknek az egyik oldali folytonosságoknak nem adtuk meg a definícióját, de a folytonosságról elmondottak alapján könnyen megfogalmazhatók ezek is.)

Zárt intervallumon folytonos függvényekre csak a szemlélet alapján, bizonyítás nélkül felsorolunk néhány fontos tételt.

Tétel

Zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

Tétel

Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit.

Tétel

Az $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény bármely két függvényértéke közé eső minden értéket felvesz ebben az intervallumban.

3. példa

Igazoljuk, hogy az $f(x) = 2\sin^2 x - 1$ függvénynek van zérushelye a $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon!

Megoldás

A megismert folytonossági tételek felhasználásával megmutatható, hogy f folytonos függvény, hiszen a sin x-ről ezt már megmutattuk.

Határozzuk meg az intervallum végpontjaiban a függvényértékeket!

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < 0.$ $\qquad$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 > 0.$

Tudjuk, hogy a $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon folytonos függvény az $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ és az $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ közé eső minden értéket felvesz ebben az intervallumban. Mivel az egyik végpontban a függvényérték negatív, a másik végpontban pedig pozitív, ezért az intervallumnak van olyan pontja, ahol a függvényérték 0.

Megjegyzés

A példában látott módszer sokszori alkalmazása elvezet minket a zérushely közelítő módszerrel történő kereséséhez.

FELADATOK

1. E1 Vegyük egy x_0 pontban folytonos f és g függvényeket! Igazoljuk, hogy ekkor az $f - g$ függvény is folytonos az x_0 pontban!

2. E1 A folytonos függvényekre megismert tételek segítségével mutassuk meg, hogy az

a) $f(x) = x^2$; *b)* $f(x) = x^3$; *c)* $f(x) = x^k$ (ahol k pozitív egész szám)

folytonos függvény a valós számok halmazán!

3. E1 A folytonos függvényekre megismert tételek segítségével mutassuk meg, hogy az

a) $f(x)=\frac{1}{x}$; *b)* $f(x)=\frac{1}{x^2}$; *c)* $f(x)=\frac{1}{x^k}$ (ahol k pozitív egész szám)

függvény az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos!

4. E1 Igazoljuk, hogy az

a) $f(x)=\cos x$; *b)* $f(x)=\sin x+\cos x$; *c)* $f(x)=\operatorname{tg} x$

függvény az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos!

5. E2 Igazoljuk, hogy az

a) $f(x)=3x^3+4x^2-9x-10$;

b) $f(x)=2x^4+9x^3+4x^2-21x-18$

függvénynek van zérushelye az [1; 2] intervallumon! Keressük meg a zérushelyet egy tizedes pontossággal!

6. E2 *a)* Korlátos-e az $f(x)=24x^3-98x^2+133x-60$ függvény a $[-1;\ 2]$ intervallumon?

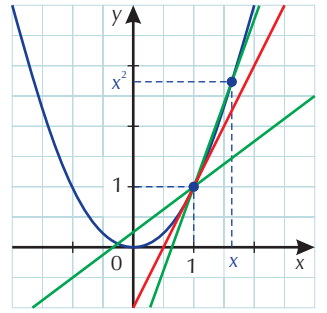
b) Van-e az $f(x)=24x^3-98x^2+133x-60$ függvénynek a $[-1;\ 2]$ intervallumon zérushelye?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1205–1208.

61. FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE EGY PONTBAN

Ha az x_0 pontban folytonos a függvény, akkor $x_n \to x_0$ esetén $f(x_n) \to f(x_0)$. Van olyan függvény, amelyre ha $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, akkor $f(x_n) \to A$, ahol $A \neq f(x_0)$. Az x_0 pontban a függvény egy rendkívüli értéket vesz fel. Vannak olyan függvények is, amelyek egy-egy pontban nincsenek értelmezve. Ilyenkor az adott hely környezetében kell vizsgálnunk a függvényeket.

1. példa Írjuk fel a $g(x)=x^2$ függvény grafikonjának (1; 1) koordinátájú pontján át húzható szelők iránytangensét!

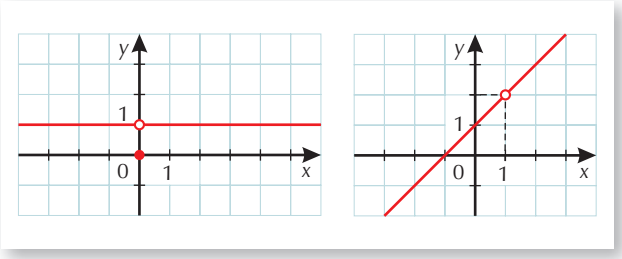


Megoldás Ha a feladat feltételeinek megfelelő szelő a g függvény grafikonját az (1, 1) rögzített ponton kívül az $(x;\ x^2)$ pontban metszi, akkor az iránytangense:

$$f(x)=\frac{x^2-1^2}{x-1}.$$

Ez a függvény csak az $x=1$ helyen nincs értelmezve, egyébként megadja a kérdéses szelő iránytangensét.

Szemléletünk alapján az $x=1$ hely azért fontos, mert ha x közeledik az 1-hez, akkor a szelők közelednek az (1; 1)-ben húzható érintőhöz *(lásd ábra)*.



A bal oldali ábra az előjel-függvény négyzetének, a $\operatorname{sgn}^2(x)$ függvény grafikonját, a jobb oldali ábra pedig az $\frac{x^2-1}{x-1}$ grafikonját mutatja. Láthatjuk, hogy az első ábrán az $x=0$ helyen a függvény értéke „nem odaillő”, a második ábrán pedig az $x=1$ helyen nincs értelmezve a függvény, az értelmezési tartomány pontjaiban azonban egyszerűsíthetünk $(x-1)$-gyel, és $(x+1)$-et, azaz lineáris hozzárendelést kapunk.

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy egyik esetben az $x=0$ helyen, a másik esetben pedig az $x=1$ helyen tudnánk olyan függvényértéket adni, hogy a függvény ezen a helyen is folytonos legyen.

Ezt az értéket a függvény határértékének nevezzük, amelyet a következőkben definiálunk is.

Definíció

Függvény határértéke egy pontban

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 valamely környezetében, kivéve ebből esetleg az x_0-t. **Az f függvénynek az x_0 pontban létezik véges határértéke, és ez A,** ha bármely olyan $\{x_n\}$ sorozatra, melynek minden tagja benne van az f értelmezési tartományában, és $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, a megfelelő függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozata A-hoz konvergál.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Ezt így olvassuk: limesz x tart x_0-hoz $f(x)$ egyenlő A.

A folytonossághoz hasonlóan most is adunk egy másik definíciót, de a két definíció ekvivalenciáját nem mutatjuk meg, csak a szemlélet alapján elfogadjuk.

Függvény határértéke egy pontban

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 valamely környezetében, kivéve ebből esetleg az x_0-t. **Az f függvénynek az x_0 pontban létezik véges határértéke, és ez A,** ha minden pozitív ε-hoz létezik olyan, ε-tól függő pozitív δ, hogy minden $x \in D_f$-re ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

A sorozatokhoz hasonlóan a függvényekkel végzett műveletek esetén is meghatározhatjuk az eredmény határértékét. Ehhez bizonyítás nélkül megfogalmazunk három állítást.

Tétel

Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, akkor

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = AB$;

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$. (Ekkor a $B \neq 0$ feltételnek is teljesülni kell, és a $g(x) \neq 0$-nak is az x_0 valamilyen környezetében.)

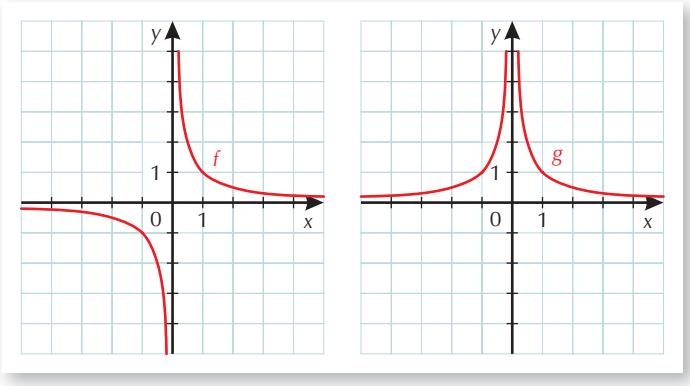
Fontos, hogy a függvénynek olyan pontban is lehet határértéke, amelyikben a függvény nincs is értelmezve. Ha pedig értelmezett az x_0 pontban, akkor a határértéket nem befolyásolja az ottani függvényérték.

Ha az f függvénynek van határértéke x_0-ban, és ez A, akkor értelmezhetjük a függvényt x_0-ban úgy, hogy folytonos legyen. Ha az $f(x_0) = A$ értéket választjuk, akkor a folytonosság bármelyik definíciója szerint készen vagyunk. Ezt az észrevételt felhasználva közvetlen kapcsolatot teremthetünk egy függvény x_0 pontbeli folytonossága és határértéke között:

Egy f függvény akkor és csak akkor folytonos az értelmezési tartomány valamely x_0 pontjában, ha az adott pontban létezik véges határértéke és ez megegyezik a függvény x_0-beli helyettesítési értékével, azaz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Az ábra bal oldalán az $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a jobb oldalán a $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ hozzárendelésű függvény grafikonját vázoltuk. Egyiknél sem tudunk olyan A számot mondani, hogy $x_n \to 0$ esetén $f(x_n) \to A$ teljesüljön.

Mégis az érzéseinkre hagyatkozva mondhatjuk, hogy a két eset között nagy a különbség. Ezt is definícióként rögzítjük.



Definíció

A végtelen, mint határérték (tágabb értelemben vett határérték)

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 valamely környezetében, kivéve ebből esetleg az x_0-t. **Az f függvénynek az x_0 pontban a határértéke** $+\infty$, ha minden $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$ esetén $f(x_n) \to +\infty$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Ezt így olvassuk: limesz x tart x_0-hoz $f(x)$ egyenlő végtelen.

Értelemszerűen a definícióban a $+\infty$ cserélhető $-\infty$-re is.

Az ekvivalens definíciót is megadjuk.

A végtelen, mint határérték (tágabb értelemben vett határérték)

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 valamely környezetében, kivéve ebből esetleg az x_0-t. **Az f függvénynek az x_0 pontban a határértéke** $+\infty$, ha minden K számhoz van olyan, K-tól függő pozitív δ, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$.

Értelemszerűen ebben a definícióban is a ∞ cserélhető $-\infty$-re, a végén pedig ekkor $f(x) < K$-t kell mondanunk.

Az ábra jobb oldalán látottakat így írjuk le: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

A következő példában egy intervallumon értelmezett függvény végpontjaiban vizsgáljuk a határértéket. A szemlélet alapján teszünk megállapításokat, de természetesen az itt említett fogalmak is definiálhatók lennének.

2. példa

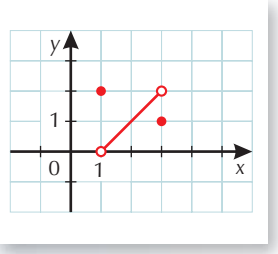
Vizsgáljuk az

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x = 1; \\ x - 1, & \text{ha } 1 < x < 3; \\ 1, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

függvény határértékét az $x = 1$ és az $x = 3$ helyen!

Megoldás

A függvény grafikonját az ábrán láthatjuk.



Ez alapján természetesnek érezzük, hogy az $x = 1$ és az $x = 3$ helyen is beszéljünk a határértékéről, pedig ezeknek a helyeknek a (kétoldali) környezetében nincs is értelmezve a függvény.

Az $x = 1$-ben ezt a határértéket 0-nak gondoljuk. Azt mondjuk, hogy a függvénynek itt a jobb oldali határértéke létezik.

Az $x = 3$-ban pedig 2-nek gondoljuk a határértéket. Azt mondjuk, hogy a függvénynek itt a bal oldali határértéke létezik.

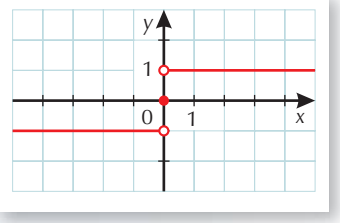
3. példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény határértékét az $x = 0$ helyen!

Megoldás

Tudjuk, hogy $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

A függvény grafikonját az ábrán látjuk.



Nem tudunk olyan A számot mondani, hogy $x_n \to 0$ esetén $f(x_n) \to A$ legyen. Vagyis az $x = 0$ helyen ennek a függvénynek nincs határértéke.

Az előző példában látottak alapján beszélhetünk az $x = 0$ helyen jobb oldali határértékről. Ez a határérték láthatóan 1.

Beszélhetünk az $x = 0$ helyen bal oldali határértékről. Ez a határérték pedig láthatóan -1.

Létezik a jobb és a bal oldali határértéke is a függvénynek ezen a helyen, de ezek különbözőek, ezért itt nincs határértéke.

Hasonlóképpen a korábbi ábrán látható $\frac{1}{x}$ függvénynek az $x = 0$ helyen vett bal oldali határértéke $-\infty$, a jobb oldali határértéke ∞. Mivel ezek nem egyeznek meg, ezért a függvénynek nincs határértéke az $x = 0$ helyen.

Az előző példákban látottak továbbgondolásával megfogalmazunk két állítást.

Ha az f függvénynek létezik a jobb és a bal oldali határértéke az x_0-ban, és mindkettő A, akkor az f-nek létezik ezen a helyen a határértéke, és ez is A.

Az állítás megfordítása is igaz:

Ha az f függvénynek létezik a határértéke az x_0-ban, és ez A, akkor az f-nek létezik ezen a helyen a jobb és a bal oldali határértéke is, és mindkettő A.

4. példa Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ függvény határértékét az

a) $x_0 = 4$;
b) $x_0 = 9$ helyen!

Megoldás

a) A folytonosságnál tanultak alapján tudjuk, hogy ez a függvény $x_0 \neq 9$ helyeken folytonos (a számláló és a nevező külön-külön folytonos, és a nevező ezeken a helyeken nem nulla). Vagyis a függvénynek az $x_0 = 4$ helyen létezik a határértéke és ez a függvény helyettesítési értéke:

$$A = f(x_0) = f(4) = \frac{\sqrt{4} - 3}{4 - 9} = \frac{1}{5}.$$

b) Ezen a helyen a függvény nincs értelmezve, de egy környezetében igen. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3}.$$

Ha $x_n \to 9$, akkor $f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_n} + 3} \to \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$.

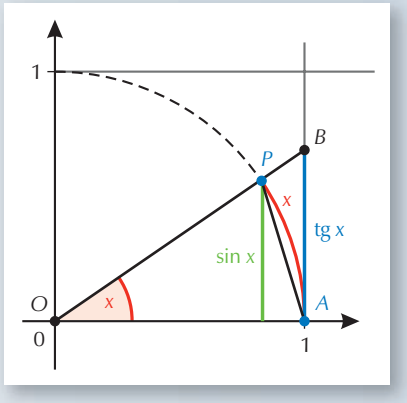
Vagyis $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{1}{6}$.

5. példa Létezik-e a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték? **(kiegészítő anyag)**

Megoldás

Mivel a szinuszfüggvény páratlan, ezért $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, ezért elég a pozitív tagokból álló x_n sorozatokat vizsgálnunk.

Határozzuk meg az ábrán látható OAP háromszög, OAP körcikk és OAB háromszög területét. $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$



$T_{OAP\triangle} = \frac{1 \cdot \sin x}{2}$, mivel $OA = 1$ és a hozzá tartozó magasság $\sin x$.

$T_{OAP\triangledown} = \frac{r^2 \cdot x}{2} = \frac{1 \cdot x}{2}$, mert $r = 1$.

$T_{OAB\triangle} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$, mivel ez egy derékszögű háromszög, amelynek ismerjük a befogóit.

Nyilván $T_{OAP\triangle} < T_{OAP\sphericalangle} < T_{OAB\triangle}$, (mivel a síkidomok tartalmazzák egymást), amiből $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, $\sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Az egyenlőtlenségláncot a $\sin x > 0$ számmal leosztva: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Ennek a reciprokát véve megfordulnak a relációs jelek: $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Legyen x_n egy 0-hoz tartó, pozitív tagokból álló sorozat. Ekkor, mivel $1 \to 1$ és $\cos x_n \to \cos 0 = 1$, így a rendőr-elv miatt $\frac{\sin x}{x}$ határértéke is 1 lesz, tehát létezik a határérték.

FELADATOK

1. E1 Vizsgáljuk az $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ függvény határértékét az értelmezési tartományának pontjaiban!

2. E1 Adjuk meg az $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ függvény határértékét az

a) $x_0 = 4$;
b) $x_0 = 2$ helyen!

3. E1 Adjuk meg a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x^3}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^3}$; *c)* $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{x^4}$; *d)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^4}$!

4. E1 Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$ függvény határértékét az

a) $x_0 = \sqrt{5}$;
b) $x_0 = 5$ helyen!

5. E1 Igazak vagy hamisak a következő állítások?

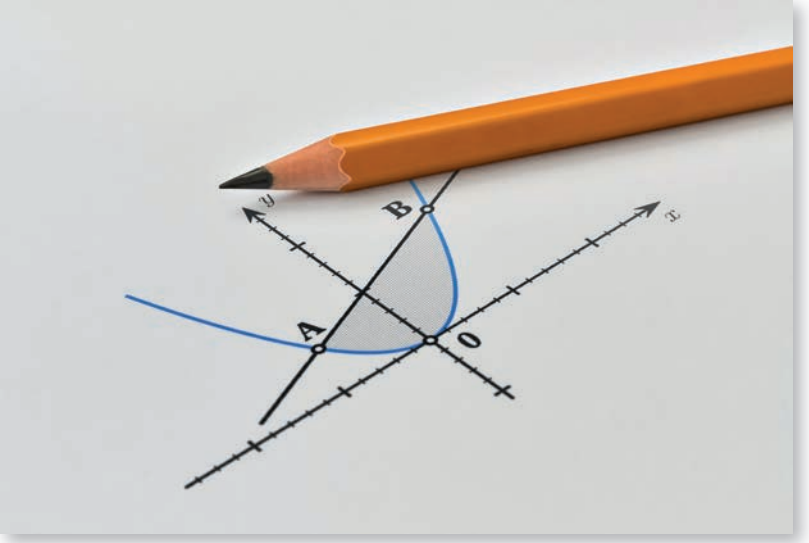
a) Ha az $f + g$ függvénynek létezik a határértéke az x_0-ban, akkor az f-nek és a g-nek is létezik;
b) Ha az f és a g függvénynek nem létezik x_0-ban a határértéke, akkor az $f + g$ függvénynek sem létezik.
c) Ha az $f \cdot g$ függvénynek létezik a határértéke az x_0-ban, akkor az f-nek és a g-nek is létezik;
d) Ha az f és a g függvénynek nem létezik x_0-ban a határértéke, akkor az $f \cdot g$ függvénynek sem létezik.

6. E2 Adjuk meg a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$!

7. E2 Adjuk meg a következő határértéket: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x + 8} - 2}{x}$!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1195–1199.



62. FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE A VÉGTELENBEN

Eddig egy x_0 pontban vizsgáltuk a függvények határértékét. Ebben a leckében azt a helyzetet vizsgáljuk, amikor az f függvény egy $[a; \infty[$ intervallumon értelmezett, és az $x_n \to \infty$ esetén az $\{f(x_n)\}$ sorozatról kellene valamit mondanunk.

Definíció

Végtelenben vett határérték

Legyen az f függvény értelmezve egy $[a; \infty[$ intervallumon. Ekkor **az *f* függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke az *A* valós szám**, ha minden $x_n \to \infty$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Ezzel ekvivalens definíció:

Végtelenben vett határérték

Legyen az f függvény értelmezve egy $[a; \infty[$ intervallumon. Ekkor **az *f* függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke *A***, ha minden pozitív ε-hoz létezik olyan, ε-tól függő K szám, hogy ha $x > K$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az előzőek alapján definiálható az f függvénynek a $-\infty$-ben vett határértéke is.

1. példa Van-e az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek határértéke a végtelenben?

Megoldás A sorozatoknál megismertek alapján mondható, hogy minden $x_n \to \infty$ esetén $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0$.

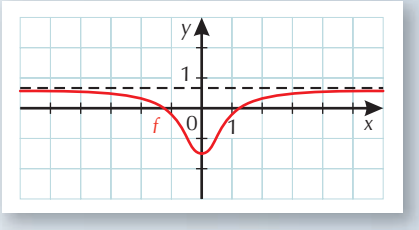
Vagyis létezik ez a határérték, és $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. példa Határozzuk meg (ha van) az $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{3x^2 + 2}$ függvénynek a végtelenben vett határértékét!

Megoldás A sorozatoknál megismert módszer segítségével alakítsuk a függvény hozzárendelési szabályát és legyen $x_n \to \infty$. Ekkor:

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2 - 3}{3x_n^2 + 2} = \frac{2 - \frac{3}{x_n^2}}{3 + \frac{2}{x_n^2}} \to \frac{2}{3}.$$

Vagyis a keresett határérték: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3}{3x^2 + 2} = \frac{2}{3}$. A függvény grafikonját kirajzoltathatjuk egy számítógépes alkalmazás segítségével:



3. példa Van-e az $f(x) = \cos x$ függvénynek határértéke a végtelenben?

Megoldás Mivel a definíció megköveteli, hogy minden végtelenbe tartó sorozat esetén teljesüljön, hogy $f(x_n)$ határértéke A legyen, ezért ha mutatunk két sorozatot, amelyek esetén különböző ez a határérték, abból következik, hogy a függvénynek nincs határértéke.

Vegyük a $\{2n\pi\}$ és $\{\pi + 2n\pi\}$ végtelenbe tartó sorozatokat!

Ekkor: $f(2n\pi) = \cos(2n\pi) = 1$,

illetve: $f(\pi + 2n\pi) = \cos(\pi + 2n\pi) = -1$.

A két sorozat határértéke különböző, tehát ennek a függvénynek nem létezik a végtelenben a határértéke.

Az $f(x)=x^2$ függvény esetén észrevehetjük, hogy $x_n \to \infty$ esetén $f(x_n) \to \infty$. Az ilyen esetekben ∞-hez **divergál**ásról beszélünk: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Szoktuk azt mondani, hogy **tart a végtelenhez**, de ez természetesen nem a hagyományos konvergenciát jelenti.

Természetesen a következő négy eset mindegyike előfordulhat:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

4. példa Létezik-e az $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x+1}$ függvénynek a $(-\infty)$-ben a határértéke?

Megoldás Legyen a negatív tagokból álló $\{x_n\}$ esetén $x_n \to -\infty$. Ekkor:

$$f(x_n)=\frac{2x_n^2-3}{x_n+1}=\frac{2x_n-\dfrac{3}{x_n}}{1+\dfrac{1}{x_n}} \to -\infty,$$

mert a számláló tart a $(-\infty)$-hez, a nevező pedig az 1-hez. Ebből következik, hogy a hányados is a $(-\infty)$-hez tart.

Vagyis a keresett határérték: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3}{x+1}=-\infty$.

FELADATOK

1. E1 Mennyi az $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ függvénynek a végtelenben vett határértéke?

2. E1 Határozzuk meg (ha van) az

a) $f(x)=\dfrac{4x^2+4x+1}{x^2+1}$; *b)* $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{3x^2+4}$

függvénynek a ∞-ben vett határértékét!

3. E1 Határozzuk meg (ha van) az

a) $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{x^2+1}$; *b)* $f(x)=\dfrac{4x^2-3x}{x^2+7}$

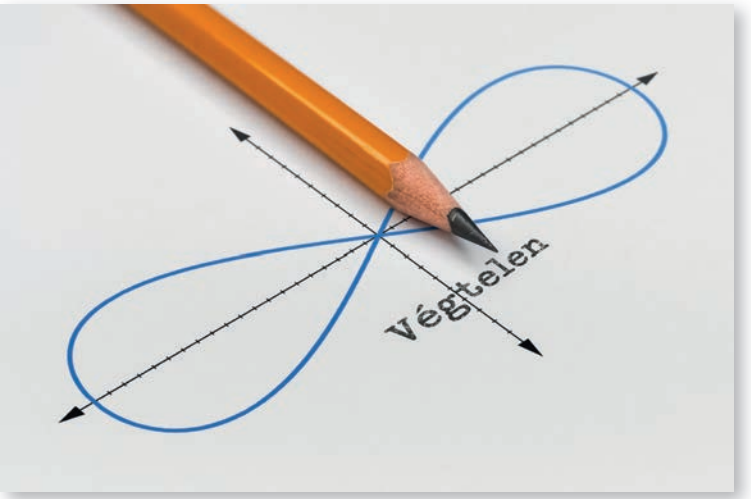
függvénynek a $(-\infty)$-ben vett határértékét!

4. E2 Igazoljuk, hogy az

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x \text{ racionális,}\\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális}\end{cases}$$

függvénynek egyetlen pontban sem létezik a határértéke. A függvényt Dirichlet-függvénynek nevezzük.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1193–1194.



63. A DERIVÁLT FOGALMÁNAK ELŐKÉSZÍTÉSE

A határérték bevezetésénél megvizsgáltuk a $g(x) = x^2$ függvény grafikonjának (1; 1) koordinátájú pontján át húzható szelők iránytangensét! Az ott szerzett tapasztalataink alapján nézzük a következő példát.

1. példa Mennyi a $g(x) = x^2$ függvény grafikonjának (2; 4) koordinátájú pontján át húzható érintő iránytangense?

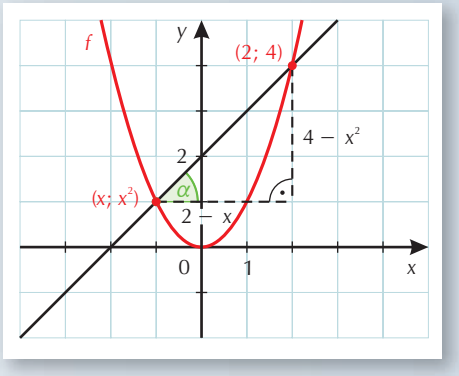
Megoldás Nézzük a (2; 4) koordinátájú ponton áthaladó szelőket! A g függvény grafikonját a rögzített (2, 4) ponton kívül az (x, x^2) pontban metsző szelő iránytangense:

$$f(x) = \frac{2^2 - x^2}{2 - x} = \frac{x^2 - 2^2}{x - 2}.$$

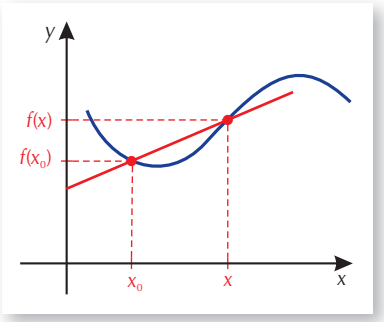
Ez a függvény csak az $x = 2$ helyen nincs értelmezve. Egyébként a kérdéses szelők iránytangensét adja.

Van-e olyan A szám, hogy ha $x_n \to 2$ (természetesen $x_n \neq 2$), akkor $f(x_n) = \frac{x_n^2 - 2^2}{x_n - 2} \to A$?

Nézzük a következő átalakítást: $\frac{x_n^2 - 2^2}{x_n - 2} = x_n + 2 \to 4$. Tehát $A = 4$.



Ezek alapján joggal mondhatjuk, hogy a (2; 4) koordinátájú pontban húzható 4 iránytangensű egyenes a parabola érintője.



Az előző példában nem volt fontos, hogy az eredeti függvény mindenütt értelmezve legyen. Csak az volt a lényeges, hogy a függvényünk értelmezési tartománya tartalmazta a vizsgált hely egy környezetét, ahogy a határérték definíciójában is.

Általánosabban is megnézzük az előzőeket. Legyen adott egy f függvény, amely x_0 egy környezetében értelmezve van. Ekkor az $(x_0; f(x_0))$ ponton áthaladó szelők iránytangense:

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, ahol $x \neq x_0$. *(Lásd ábra)*

Van-e olyan A szám, hogy ha $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, akkor

$$h(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to A?$$

Azaz: az x_0-ban nem értelmezett $h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvénynek létezik-e a határértéke az x_0 helyen?

Ha ez a határérték létezik, akkor az f grafikonjának létezik az érintője az $(x_0; f(x_0))$ pontban, és ennek az érintőnek az iránytangense a h-nak az x_0-beli határértékével egyenlő.

2. példa Vizsgáljuk meg egy leejtett kő pillanatnyi sebességét! (A közegellenállástól tekintsünk el.)

Megoldás Fizikából tudjuk, hogy a leejtett kő t_0 idő alatt $s_0 = \frac{g}{2}t_0^2$ utat tesz meg (ahol g a nehézségi gyorsulás). A kő a $t_1 - t_0$ idő alatt $(t_1 \neq t_0)$ az $s_1 - s_0$ utat teszi meg. Az ezekhez tartozó átlagsebességet fel tudjuk írni: $\frac{\frac{g}{2}t_1^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{t_1 - t_0}$.

Ha a t_0-ban nem értelmezett $v(t) = \frac{\frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{t - t_0}$ függvénynek létezik t_0-ban a határértéke, akkor ezt a határértéket a leejtett kő t_0 időbeli pillanatnyi sebességének nevezzük.

Ha ismerjük az $s(t)$ útfüggvényt, akkor a t_0 időpontban a mozgó test sebessége megadható a következő határértékkel: $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

Mindkét példában a vizsgált helyen 0 lenne a nevező, ezért a szelők iránytangenseiből, illetve az átlagsebességekből képzett sorozatokat vizsgáltuk.

Ezen sorozatok konvergenciája segítségével tudtuk megadni az érintő iránytangensét, illetve a pillanatnyi sebességet.

FELADATOK

1. E1 Mennyi az x^2 függvény grafikonjának (3; 9) koordinátájú pontján át húzható érintő iránytangense?

2. E1 Határozzuk meg az x^3 függvény grafikonjának (2; 8) és $(x; x^3)$ pontjain átmenő szelő iránytangensét!

3. E1 Mennyi az x^3 függvény grafikonjának (2; 8) koordinátájú pontján át húzható érintő iránytangense?

4. E2 *a)* Adjuk meg az x^3 függvényhez azt a lineáris függvényt, melynek grafikonja az (1; 1) koordinátájú pontban érinti a harmadfokú függvény grafikonját!

b) Igazoljuk hogy az előzőekben szereplő két függvény grafikonjának az érintési ponton kívül is van közös pontja!

5. E2 Számítsuk ki az

a) $s(t) = \frac{t^2}{3}$ (ahol t nem negatív);

b) $s(t) = \frac{t^3}{4}$ (ahol t nem negatív)

útfüggvény szerint mozgó test pillanatnyi sebességét a $t_0 = 4$ időpillanatban!

64. A DERIVÁLT

Láthattuk, hogy érintővel és pillanatnyi sebességgel kapcsolatban ugyanolyan típusú kérdéshez jutottunk. Vagyis: egy adott f függvényhez (amely az x_0 egy környezetében értelmezett) a $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ különbségi hányados (vagy differenciahányados) függvénynek létezik-e x_0-ban a határértéke? Nagyon sok egyéb gyakorlati és elméleti feladat is ehhez a kérdéshez vezet, emiatt ennek a határértéknek önálló elnevezése van.

Definíció

Differenciálhatóság, differenciálhányados

Legyen az f függvény értelmezve az x_0 egy környezetében. Azt mondjuk, hogy **az f függvény differenciálható az x_0 pontban**, ha $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték létezik és véges. Ez a határérték **a függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosa**.

Jelölése: $f'(x_0)$. (Használatos a $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$ jelölés is.)

Definíció

Intervallumon differenciálható függvények

Az f függvényt az $]a; b[$ intervallumon differenciálható függvénynek mondjuk, ha f az $]a; b[$ minden pontjában differenciálható.

Definíció

Deriváltfüggvény

Az f függvény **deriváltfüggvényének** (röviden **deriváltjának**) nevezzük azt a függvényt, amely az $]a; b[$ minden pontjához az f ezen pontbeli differenciálhányadosát rendeli.

A deriváltfüggvény jelölése: $f'(x)$. (Használatos a $\frac{df}{dx}$ jelölés is.)

Ha az f függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor az f függvény grafikonjának $(x_0; f(x_0))$ pontjában létezik az érintő, és az iránytangense $f'(x_0)$.

Ennek és az egyenes irányítényezős egyenletének segítségével felírható az érintő egyenlete.

Legyen f differenciálható az x_0 pontban. Ekkor a függvénygrafikon $(x_0; f(x_0))$ pontjába húzott érintő egyenlete:
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Az előzőekben azt feltételeztük, hogy az x_0 pontnak van bal és jobb oldali környezete. Megemlítjük (de nem foglalkozunk vele), hogy értelmezhető lenne a bal oldali, illetve jobb oldali differenciálhányados is. Ekkor lehetne zárt intervallumon vizsgálni a függvényeket. A továbbiakban mi nyílt intervallumokon vizsgálódunk. Ha nem adunk meg intervallumot, akkor a szokásos módon a lehető legbővebb intervallumra gondolunk. Sok esetben ez a $]-\infty; \infty[$ lesz.

1. példa Differenciálható-e az $f(x) = c$ függvény (ahol c egy adott valós szám)?

Megoldás Az x_0 ponthoz tartozó differenciahányados:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{x_0\}.$$

Vegyük a differenciahányados határértékét az x_0 pontban:

$$\lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Mivel x_0 az értelmezési tartomány egy tetszőleges eleme, ezért f mindenütt differenciálható. A deriváltfüggvény:
$f'(x) = 0$.

Tehát a konstans függvény deriváltja mindenhol nulla.

2. példa Differenciálható-e az $f(x) = x$ függvény?

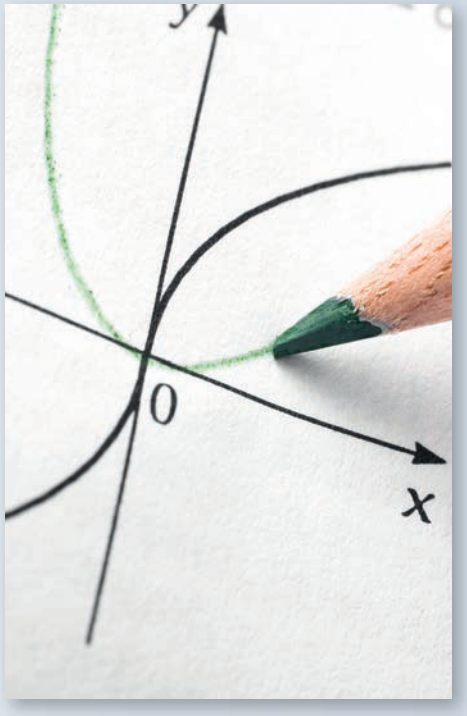
Megoldás Az x_0 ponthoz tartozó differenciahányados:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{x_0\}.$$

Vegyük a differenciahányados határértékét az x_0 pontban:

$$\lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Mivel x_0 az értelmezési tartomány egy tetszőleges eleme, ezért f mindenütt differenciálható. A deriváltfüggvény:
$f'(x) = 1$.



3. példa Differenciálható-e az $f(x) = x^2$ függvény?

Megoldás Az x_0 ponthoz tartozó differenciahányados:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = (x + x_0), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{x_0\}.$$

Vegyük a differenciahányados határértékét az x_0 pontban:

$$\lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Mivel x_0 az értelmezési tartomány egy tetszőleges eleme, ezért f mindenütt differenciálható. A deriváltfüggvény:
$f'(x) = 2x$.

4. példa Mely pontokban differenciálható az $f(x) = |x|$ függvény?

Megoldás Az 0 ponthoz tartozó differenciahányados:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x},\ x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Ez a hányados 1, ha $x > 0$; és -1, ha $x < 0$.

A differenciahányados-függvénynek a 0-ban jobb és bal oldali határértéke is van, de nem egyenlők, tehát $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ nem létezik, így az f függvény a 0-ban nem differenciálható.

Azonban minden más pontban differenciálható: $f'(x) = 1$, ha $x > 0$, valamint $f'(x) = -1$, ha $x < 0$.

Ebből a példából is látható, hogy egy függvény differenciálhtósága nem következik a folytonosságából, hiszen például az $f(x) = |x|$ függvény a 0 pontban folytonos, de nem differenciálható. A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolatát az alábbi tétel adja meg, amelyet bizonyítás nélkül közlünk.

Tétel

Ha az f függvény differenciálható x_0-ban, akkor ott folytonos is. (A folytonosság a differenciálhatóságnak szükséges feltétele.)

Ahogy láttuk, a megfordítása nem igaz, tehát a folytonosság a differenciálhatóságnak nem elégséges feltétele. Egyben megfogalmazva:

A folytonosság a differenciálhatóságnak szükséges, de nem elégséges feltétele.

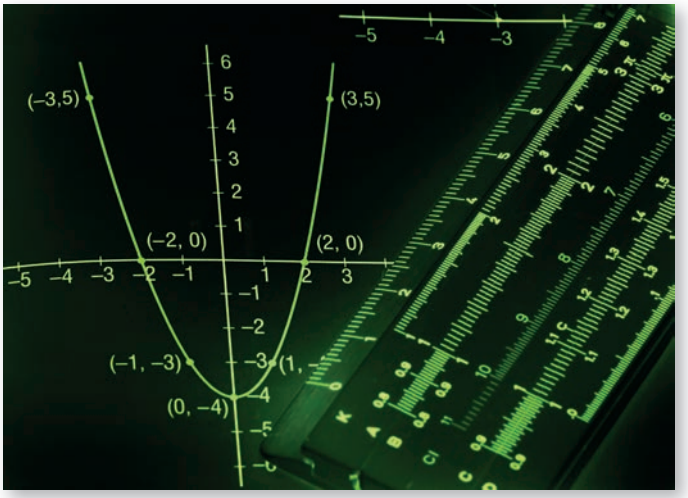
FELADATOK

1. E1 Egy rögzített x_0 pontban differenciálható-e az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
a) $f(x) = x^3$;
b) $f(x) = x^4$ függvény?

2. E1 Differenciálható-e az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{ha } x \le 0, \\ x^2 + 2x + 2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ függvény az $x_0 = 0$ pontban?

3. E1 Adjuk meg az $f\colon (R\setminus\{1\}) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ függvénynek egy olyan leszűkítését, amelyen deriválható!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1209–1214.



65. ÖSSZEG, KÜLÖNBSÉG DERIVÁLTJA

A számolásaink gyorsítása miatt fontos megvizsgálnunk, hogy mit mondhatunk összeg, különbség deriváltjáról.

A következő tételek az erre vonatkozó eredményeket foglalják össze. Minden esetben az x_0 pontbeli differenciálhatóságból indulunk ki, és feltételezzük, hogy a függvényeink értelmezettek egy, az x_0 pontot tartalmazó nyílt intervallumon.

ÖSSZEG DERIVÁLTJA

Tétel

Ha az f és a g függvények differenciálhatók az x_0 pontban, akkor $f+g$ is differenciálható x_0-ban és $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Bizonyítás

Mivel az f és a g differenciálható az x_0 pontban, ezért

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ és $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$.

Írjuk fel az $f+g$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

A levezetésben felhasználtuk a függvények összegének határértékéről szóló tételt. Ezzel az állítást igazoltuk.

1. példa

Egy versenypálya egyik kanyarjának ívét jó közelítéssel a $h(x)=x^2+x$ függvény görbéje adja. Ha a pályán (x tengellyel megegyező menetirányban) haladó autó $x=1$-nél a pálya e érintője mentén kicsúszik, akkor nekiütközik-e a $P(2;\,4)$ koordinátájú pontban álló oszlopnak? (Vegyük a számításaink során a pályát görbének, az autót pedig pontszerű testnek.)

Megoldás

Mivel $h(1)=1^2+1=2$, így az autó a $Q(1;\,2)$ pontban hagyta el a versenypályát.

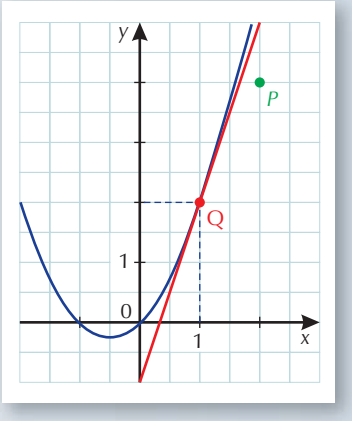
A h függvény az $f(x)=x^2$ és a $g(x)=x$ függvények összege.

Már tudjuk korábbról, hogy $f'(x)=(x^2)'=2x$, $g'(x)=(x)'=1$. Az összeg deriváltjára vonatkozó tétel szerint pedig: $h'(1)=f'(1)+g'(1)=2\cdot1+1=3$.

Vagyis a $Q(1;\,2)$ pontban a 3 meredekségű egyenes lesz az e érintő.

Ennek egyenlete $y-2=3\cdot(x-1)$, vagyis e: $y=3x-1$.

A $P(2;\,4)$ pont koordinátái nem teszik igazzá az e egyenes egyenletét, így az autó nem ütközik neki a P pontban álló oszlopnak.



KÜLÖNBSÉG DERIVÁLTJA

Tétel

Ha az f és a g függvények differenciálhatók az x_0 pontban, akkor $(f-g)$ is differenciálható x_0-ban és $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$.

Ez az állítás hasonlóképpen bizonyítható, mint az összeg deriváltjára vonatkozó tétel, ennek részletezésétől eltekintünk.

FELADATOK

1. E1 Írjuk fel a következő függvények deriváltfüggvényét!

a) $f(x) = (2x+1)+(2x^2+1)$; *b)* $f(x) = (x^2+1)+(x^3+x^2-5x-6)$.

2. E1 Írjuk fel a következő függvények deriváltfüggvényét!

a) $f(x) = (3x^2+1)-(2x^2+3x+4)$; *b)* $f(x) = (x^2+1)-(x^3+3x^2-x-1)$.

3. E2 Igaz-e, hogy ha f és g egyike sem differenciálható x_0-ban, akkor $f+g$ sem differenciálható x_0-ban?

66. SZORZAT, HÁNYADOS DERIVÁLTJA

Fontos kérdés, hogy mit mondhatunk két függvény szorzatának, illetve hányadosának deriváltjáról. A következő tételek az erre vonatkozó eredményeket adják meg. Továbbra is minden esetben az x_0 pontbeli differenciálhatóságból indulunk ki, és feltételezzük, hogy a függvényeink értelmezettek az x_0 egy környezetében (az x_0 pontot tartalmazó nyílt intervallumban).

KONSTANSSZOROS DERIVÁLTJA

Tétel

Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, c pedig egy konstans, akkor $c \cdot f$ is differenciálható x_0-ban és $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Bizonyítás Mivel az f differenciálható az x_0 pontban, ezért $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Írjuk fel a cf függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(c \cdot f)(x)-(c \cdot f)(x_0)}{x-x_0} = c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c \cdot f'(x_0)$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

SZORZAT DERIVÁLTJA

Tétel

Ha az f és a g függvények differenciálhatók az x_0 pontban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható x_0-ban és $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Bizonyítás Mivel az f és a g differenciálható az x_0 pontban, ezért

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \text{ és } \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0).$$

Írjuk fel az $f \cdot g$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x)-(f \cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) \cdot g(x))-(f(x_0) \cdot g(x_0))}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Felhasználtuk egyrészt a függvények összegének, illetve szorzatának határértékéről szóló tételt, másrészt azt, hogy mivel g differenciálható az x_0 pontban, így ott folytonos is, tehát $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Ezzel az állítást igazoltuk.

1. példa Határozzuk meg az $f(x) = x^3$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás Már tudjuk, hogy $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$. Alkalmazzuk a szorzat deriváltjára megtanult tételt:
$f'(x) = (x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$.

2. példa Határozzuk meg az $f(x) = x^n$ függvény deriváltfüggvényét (n pozitív egész szám)!

Megoldás Az eddigiek alapján tudjuk:
$(x^1)' = 1 \cdot x^0$,
$(x^2)' = 2x^1$,
$(x^3)' = 3x^2$.
Ez a néhány példa a következő sejtést adja: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
Alkalmazzunk teljes indukciót a bizonyításhoz.
A sejtésünk $n = 1$-re igaz.
Tegyük fel, hogy a sejtés n-re igaz, azaz $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
Vizsgáljuk meg $n + 1$-re és alkalmazzuk a szorzat deriváltjára tanult tételt:
$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$.
Ezzel beláttuk, hogy ha a sejtés n-re igaz, akkor igaz $(n + 1)$-re is.
És mivel a sejtésünk $n = 1$-re is igaz volt, ezzel igazoltuk, hogy $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

A kapott eredményt tételként is rögzítsük!

Tétel

Ha n pozitív egész szám, akkor az $f(x) = x^n$ függvény az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható és $f'(x) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

HÁNYADOS DERIVÁLTJA

Elsőként egy egyszerű esetre vonatkozó tételt igazolunk, majd ennek segítségével bizonyítjuk az általános esetet is.

Tétel

Ha a g függvény differenciálható az x_0 pontban és $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g}$ is differenciálható x_0-ban és $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás Mivel a g differenciálható az x_0 pontban, ezért folytonos is ott, tehát az x_0 egy alkalmas környezetében sem lesz nulla a függvényérték, továbbá $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$.

Hasonlóképpen az eddigiekhez írjuk fel az $\frac{1}{g}$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{-1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{g(x)g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{-1}{g^2(x_0)} \cdot g'(x_0).$$

Ugyanúgy felhasználva a szorzat határértékére vonatkozó tételt és g folytonosságát megkaptuk, hogy a határérték létezik, tehát $\frac{1}{g}$ differenciálható és $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Tétel

Ha f és g függvények differenciálhatók az x_0 pontban, és $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható x_0-ban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás Mivel $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$, és f-ről és $\frac{1}{g}$-ről tudjuk, hogy differenciálhatók az x_0 pontban, így szorzatuk is differenciálható. Alkalmazva a szorzat deriváltjára vonatkozó tételt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} =$$
$$= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

1. példa Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás $f'(x) = \frac{(x+1)'\cdot(x^2+1) - (x+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1\cdot(x^2+1) - (x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$.

FELADATOK

1. E1 Adjuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!
a) $f(x) = (2x+1)(2x^2+1)$; *b)* $f(x) = (x^2+1)(x^3+2x^2-3x+4)$

2. E1 Adjuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!
a) $f(x) = \frac{2x+1}{2x^2+1}$; *b)* $f(x) = \frac{x^3+2x^2-3x+4}{x^2+1}$

3. E1 Számítsuk ki az adott függvények differenciálhányadosát az $x_0 = 2$ helyen:
a) $f(x) = (x+1)(5x^2-1)$; *b)* $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$;
c) $f(x) = (x^2-1)(4x^2+3x-2)$; *d)* $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+3}$!

4. E2 Hogyan kell deriválni az fgh szorzatot?

5. E2 Adjuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!
a) $f(x) = (2x+1)(4x+3)(8x^2+1)$; *b)* $f(x) = (x+1)(x^2+3)(x^3+5)$

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1215–1220.

67. AZ x^a FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA (Kiegészítő anyag)

Nézzük az $f(x)=\frac{1}{x}$ (ahol $x \neq 0$) hozzárendeléssel adott függvényt, és vizsgáljuk meg hol differenciálható és mi a deriváltja. Alkalmazzuk az $\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$ deriválási szabályt. Ebben az esetben $g(x)=x$, tehát:

$\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}=-\frac{1}{x^2}$.

Ha az eredeti függvényünk hozzárendelési szabályát $f(x)=x^{-1}$ formában adjuk meg, akkor látható, hogy a kapott eredményünk összhangban van a hatványfüggvények deriválásánál tanultakkal, azaz az alap 1-gyel csökkentett hatványát szorozzuk a kitevővel:

$f'(x)=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-2}$, ez valóban $-\frac{1}{x^2}$-tel egyenlő.

Felvetődik a kérdés, hogy a még kisebb egész kitevők esetén is így kell-e deriválni?

Teljes indukció segítségével, és a szorzat deriváltjára tanult tétel alkalmazásával igazolhatjuk, hogy

$(x^{-n})'=-n\cdot x^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}}$, ahol $x \neq 0$, n pozitív egész szám.

1. példa Az $f(x)=\frac{6}{x}$ (ahol $x \neq 0$) függvény grafikonjához az 1, 2, 3 és 6 abszcisszájú pontjaiban érintőket rajzolunk. Mekkora területű háromszöget határoznak meg ezek az érintők a két tengellyel?

Megoldás A függvény görbéjén az 1, 2, 3 és 6 abszcisszájú pontok rendre:

$A(1;\,6)$, $B(2;\,3)$, $C(3;\,2)$, $D(6;\,1)$.

Írjuk fel ezekben a pontokban az érintő egyenletét, határozzuk meg az érintő tengelypontjait, és a tengelymetszetek (a befogók) ismeretében számítsuk ki a kérdéses derékszögű háromszög területét!

Az érintő iránytangense az adott pontbeli differenciálhányados (derivált) lesz, és tudjuk, hogy az f függvény x_0-beli deriváltja:

$f'(x_0)=\left(\frac{6}{x_0}\right)'=6\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)'=6\cdot\left(-\frac{1}{x_0^2}\right)=-\frac{6}{x_0^2}$.

Az $\left(x_0;\,\frac{6}{x_0}\right)$ pontbeli érintő egyenlete: $y-\frac{6}{x_0}=-\frac{6}{x_0^2}(x-x_0)$.

Azaz: $y=-\frac{6}{x_0^2}x+\frac{12}{x_0}$.

Ezen ismeretek birtokában kitöltjük a következő táblázatot:

	$A(1;\,6)$	$B(2;\,3)$	$C(3;\,2)$	$D(6;\,1)$
x_0	1	2	3	6
$f'(x_0)$	-6	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$
Érintő egyenlete	$y=-6x+12$	$y=-\frac{3}{2}x+6$	$y=-\frac{2}{3}x+4$	$y=-\frac{1}{6}x+2$
x tengelymetszet	2	4	6	12
y tengelymetszet	12	6	4	2
Háromszög területe	12	12	12	12

Mivel mind a négy esetben a kérdéses háromszög területe 12, így megfogalmazható egy sejtés. Ennek igazolását feladatként kitűztük.

Láthattuk tehát, hogy negatív egész kitevőre is működik a hatványfüggvényeknél tanult szabály. Nézzük meg, mi a helyzet a tört kitevővel!

2. példa Határozzuk meg az $f:\,]0;\,\infty[\,\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás Írjuk fel az $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Tehát a deriváltfüggvény: $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$.

3. példa Határozzuk meg az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás Írjuk fel az $f(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosát:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x_0}+\left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x_0}+\left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

Tehát a deriváltfüggvény: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$.

Azt tapasztaltuk, hogy ezekre a tört kitevőkre is működik a szabály. Nézzük meg általánosan az $f:]0;\infty[\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$ függvényre! Vegyük x_0 ponthoz tartozó differenciálhányadost:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n-\left(\sqrt[n]{x_0}\right)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}\right)\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-2}\cdot\left(\sqrt[n]{x_0}\right)+\ldots+\left(\sqrt[n]{x_0}\right)^{n-1}\right)}=\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt[n]{x_0}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x_0^{\frac{1}{n}-1}.$$

Felhasználtuk, hogy $\left(\sqrt[n]{x}\right)^k\to\left(\sqrt[n]{x_0}\right)^k$, ha $x\to x_0$, ami a megfelelő függvény folytonosságából következik.
A kapott eredményt tételként megfogalmazzuk.

Tétel

Az $f:]0;\infty[\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ függvény ($n>1$ egész szám) minden $x_0\in]0;\infty[$ pontban deriválható.
A deriváltfüggvénye: $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$.

(Természetesen páratlan gyökkitevő esetén az értelmezési tartomány $x\le 0$ számhalmazra is kiterjeszthető.)
Látható, hogy ebben az esetben is pontosan úgy kell deriválnunk, mint a hatványfüggvényeknél, azaz az alap 1-gyel csökkentett hatványát megszorozzuk a kitevővel.
Ez a megállapítás minden valós kitevőre is igaz. Ezt tételként megfogalmazzuk, de a bizonyításától eltekintünk.

Tétel

Az $f:]0;\infty[\to\mathbf{R}$, x^a függvény (ahol a valós szám) minden $x_0\in]0;\infty[$ pontban deriválható.
A deriváltfüggvénye: $f'(x)=(x^a)'=a\cdot x^{a-1}$.

FELADATOK

1. V Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!

a) $\frac{1}{x^{10}}$; *b)* $\frac{1}{x^{21}}$

2. V Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!
a) $\sqrt[4]{x}$; *b)* $\sqrt[5]{x}$

3. V Az $f(x)=\frac{6}{x}$ (ahol $x\neq 0$) függvény grafikonjához az $x_0>0$ abszcisszájú pontban érintőt rajzolunk. Igazoljuk, hogy az érintő és a két tengely által meghatározott derékszögű háromszög területe nem függ az x_0 értékétől!

4. V Igazoljuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény görbéjének $(x_0;\sqrt{x_0})$ pontját az x tengely $(-x_0;0)$ pontjával összekötő egyenes a görbe érintője lesz!

5. V Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!
a) $x^{\frac{5}{2}}$; *b)* $x^{\frac{3}{4}}$; *c)* $\sqrt[5]{x^3}$; *d)* $\sqrt[7]{x^8}$

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1221–1223.

68. A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJA

Vannak olyan helyzetek, amikor trigonometrikus függvények deriváltját kell használnunk, ezért ezeket is megvizsgáljuk. Például a harmonikus rezgőmozgás sebességfüggvényének meghatározásánál a sin x függvény deriváltjára van szükségünk. A fizikai kérdésekkel most nem foglalkozunk, csak a matematikai hátteret adjuk meg hozzá.

Nézzük az $f\colon x\mapsto \sin x$ függvényt, és vizsgáljuk meg a differenciálhatóságát. Legyen x_0 egy rögzített pont, ekkor a differenciálhányados:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos(x_0).$$

A levezetésben felhasználtuk az addíciós tételeket, a 61. leckében megtanult $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ határértéket, valamint a koszinuszfüggvény folytonosságát.

A kapott eredményünket tételként rögzítjük.

Tétel

A szinuszfüggvény minden pontban differenciálható. Deriváltja: $(\sin x)'=\cos x$.

Hasonlóan járhatunk el az $f\colon x\mapsto\cos x$ függvény esetén. Legyen x_0 egy rögzített, ekkor a differenciálhányados:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(-\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(-\sin\frac{x+x_0}{2}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=-\sin(x_0)$$

Most a szinuszfüggvény folytonosságát használtuk fel.

A kapott eredményünket ismét tételként rögzítjük.

Tétel

A koszinuszfüggvény minden pontban differenciálható. Deriváltja: $(\cos x)'=-\sin x$.

A tangens és a kotangens függvények deriváltját is meghatározzuk. Ezeket a szögfüggvényeket hányadosként értelmeztük, így a hányadosra vonatkozó deriválási szabály segítségével kapjuk a következő két példában a deriváltjukat.

1. példa Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbf{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. példa Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbf{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

FELADATOK

1. E1 Határozzuk meg az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény deriváltfüggvényét!

2. E1 Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ függvény deriváltfüggvényét!

3. E1 Határozzuk meg az
a) $f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x \cdot \sin x$; *b)* $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x$
függvény deriváltfüggvényét!

4. E2 Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét:
a) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$; *c)* $f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$;
b) $f(x) = \frac{3x}{\cos x}$; *d)* $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{ctg} x}$.

69. AZ ÖSSZETETT FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJA

Az eddig megismert tételek alkalmazásával megoldható a következő példa.

1. példa Határozzuk meg a $h(x) = (4x - 1)^3$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás Végezzük el a hatványozást: $h(x) = (4x - 1)^3 = 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$.
Vagyis:
$h'(x) = (64x^3 - 48x^2 + 12x - 1)' = (64x^3)' - (48x^2)' + (12x)' - 1' = 192x^2 - 96x + 12$.

A deriváltfüggvényt kis számolással, gyorsan megkaptuk. Lassabban jutnánk a célhoz, ha a hatványkitevő nagyobb lenne. Gondolhatnánk arra, hogy a kifejezés x^n, a derivált pedig nx^{n-1} alakú. Ezzel a gondolattal a következőre jutnánk:
$3 \cdot (4x - 1)^2 = 3(16x^2 - 8x + 1) = 48x^2 - 24x + 3$.
Szembetűnő, hogy a kapott eredmény nem jó, hiszen a helyes eredménynek ez csak a negyede. Az is szembetűnő, hogy az így kapott eredményt pontosan a $(4x - 1)$ deriváltjával kell szoroznunk, hogy a helyes eredményt kapjuk. A h függvény az $f(x) = x^3$ és a $g(x) = 4x - 1$ hozzárendelésű függvényekből képzett összetett

függvény: $h(x) = f(g(x))$. A látottak alapján megfogalmazzuk (bizonyítás nélkül) az összetett függvényekre vonatkozó deriválási szabályt.

Tétel

Legyen $f \circ g:]a; b[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(g(x))$, ahol g az $]a; b[$ intervallumon, az f pedig egy olyan intervallumon értelmezett, amely a g értékkészletét tartalmazza. Ha a g az $x_0 \in]a; b[$ intervallumban differenciálható, f pedig differenciálható $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ is differenciálható x_0-ban. A derivált: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Az $]a; b[$ tetszőleges nyílt intervallum lehet, így a jelölhet egy valós számot vagy a $-\infty$ szimbólumot, b pedig egy valós számot vagy a ∞ szimbólumot. A továbbiakban is e szerint használjuk az $]a; b[$ jelölést.

2. példa Határozzuk meg a $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ hozzárendelésű függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás A h függvény az $f(x) = \sqrt{x}$ és a $g(x) = x^2 + 2x + 3$ hozzárendelésű függvényekből képzett összetett függvény: $h(x) = f(g(x))$. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden feltétel teljesül, így alkalmazhatjuk az összetett függvényekre megismert deriválási szabályt:

$$h'(x) = (\sqrt{x^2 + 2x + 3})' = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 2x + 3)' = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

3. példa Határozzuk meg a $h(x) = \cos^{10} x$ hozzárendelésű függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás A h függvény most az $f(x) = x^{10}$ és a $g(x) = \cos x$ hozzárendelésű függvényekből képzett összetett függvény. Alkalmazhatjuk az összetett függvényekre megismert deriválási szabályt:

$$h'(x) = (\cos^{10} x)' = 10\cos^9 x \cdot (\cos x)' = 10\cos^9 x \cdot (-\sin x) = -10\cos^9 x \cdot \sin x.$$

4. példa Határozzuk meg a $\sin^5(3x^2 + 1)$ hozzárendelésű függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás A megadott függvény az $f(x) = x^5$, a $g(x) = \sin x$ és a $h(x) = 3x^2 + 1$ hozzárendelésű függvényekből képzett $f(g(h(x)))$ többszörösen összetett függvény. Alkalmazzuk kétszer egymás után az összetett függvényekre megismert deriválási szabályt:

$$(\sin^5(3x^2 + 1))' = 5\sin^4(3x^2 + 1) \cdot (\sin(3x^2 + 1))' = 5\sin^4(3x^2 + 1) \cdot \cos(3x^2 + 1) \cdot (3x^2 + 1)' =$$
$$= 5\sin^4(3x^2 + 1) \cdot \cos(3x^2 + 1) \cdot 6x = 30x \cdot \sin^4(3x^2 + 1) \cdot \cos(3x^2 + 1).$$

FELADATOK

1. E1 Határozzuk meg a $h(x)$ függvény deriváltfüggvényét!

a) $h(x) = (3x^2 - 2x + 3)^5$;
b) $h(x) = (2x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^4$;
c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;
d) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 2}$.

2. E1 Határozzuk meg a deriváltfüggvényt, ha

a) $h(x) = \sin^{33} x$;
b) $h(x) = \cos^{13} x$!

3. E1 Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét:

a) $\sin^3(2x + 1)$;
b) $\cos^8(7x + 1)$!

4. E2 Az $f(x) = x^3$, a $g(x) = \sin x$ és a $h(x) = \sqrt{x}$ hozzárendelésű függvények mindegyikének az egyszeri felhasználásával képezzük az összes többszörösen összetett függvényt. Adjuk meg az így kapott függvények deriváltját!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1232–1243.

70. DERIVÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK MENETÉNEK VIZSGÁLATA

A differenciálható függvények menetének vizsgálatára általános módszert mutatunk meg a következőkben. Ehhez a vizsgálathoz elengedhetetlen a derivált fogalma.

1. példa Tudjuk, hogy a $]0; 2[$ intervallumon az $f(x) = x^2$ függvény szigorúan monoton nő. Az intervallum minden pontjában képzeljük el az érintőt. Mit mondhatunk az érintők iránytangensének előjeléről?

Megoldás Tudjuk, hogy az x_0-ban az érintő iránytangense: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0$.

Ez a megadott intervallum minden pontjában pozitív szám lesz.

Ezt az észrevételt általános formában is kimondjuk.

Tétel

Ha az $]a; b[$ intervallumon differenciálható f függvény ezen az intervallumon monoton nő, akkor deriváltja az intervallum minden pontjában nemnegatív.

Bizonyítás Ha a függvény monoton nő, akkor minden pontjában olyan érintője van, aminek az irányszögére teljesül, hogy $0° \leq \alpha < 90°$, ennek tangense, azaz az adott pontbeli derivált nemnegatív.

Természetesen ennek mintájára a következő tétel is igazolható.

Tétel

Ha az $]a; b[$ intervallumon differenciálható f függvény ezen az intervallumon monoton csökkenő, akkor deriváltja az intervallum minden pontjában nempozitív.

Megjegyzés:

Fontos tudni, hogy a függvény szigorú monotonitásából sem következik egyéb állítás. Ekkor is nemnegatív, illetve nempozitív lesz a derivált. Gondoljunk az x^3 függvényre. Ez mindenütt szigorúan monoton nő, a deriváltja, a $3x^2$ pedig a 0-ban 0, egyébként pozitív.

Ugyancsak bizonyítás nélkül közöljük a következő állításokat.

Tétel

Ha az f deriváltja az $]a; b[$ intervallumon nemnegatív (illetve nempozitív), akkor az f függvény monoton növekvő (illetve monoton csökkenő).

Ha az f deriváltja az $]a; b[$ intervallumon pozitív (illetve negatív), akkor az f függvény szigorúan monoton növekvő (illetve szigorúan monoton csökkenő).

A differenciálható függvények vizsgálatakor fontos szerepe van a lokális szélsőértékhelyeknek. Ezeken a helyeken a görbéhez tartozó érintő (ha létezik) párhuzamos az x tengellyel. Ez azt jelenti, hogy itt a derivált nulla, hiszen az érintő (ha létezik) iránytangense nulla.

A derivált zérushelyeinek meghatározása elengedhetetlen egy függvény vizsgálatakor, de látnunk kell, hogy abból, hogy a deriváltnak zérushelye van, nem következik, hogy az lokális szélsőértékhely.

Tétel

Az $]a; b[$ intervallumon differenciálható f függvénynek az intervallum x_0 pontjában akkor **lehet** lokális maximuma vagy minimuma, ha ott a deriváltja nulla.

Ez a tétel a szélsőérték létezésének **szükséges feltételeként** fogalmazza meg a derivált zérushelyét. A következő tétel már **elégséges feltételt** ad a szélsőérték létezéséhez.

Tétel

Az $]a; b[$ intervallumon differenciálható f függvénynek az intervallum x_0 pontjában akkor van lokális szélsőértéke, ha x_0-ban a deriváltja nulla és az x_0 pontban a derivált előjelet vált. Amennyiben pozitívból negatívba vált, akkor az x_0-ban lokális maximuma van. A fordított esetben pedig lokális minimuma.

2. példa A derivált zérushelyének meghatározásával adjuk meg (ha van) az $f(x) = x^2$ függvény szélsőértékhelyét!

Megoldás Tudjuk, hogy $f'(x) = 2x$, és $f'(0) = 0$. Vagyis csakis a 0-nál lehet a függvénynek szélsőértéke.
Ha $x < 0$, akkor $f'(x) < 0$, azaz az $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő.
Ha $x > 0$, akkor $f'(x) > 0$, azaz az $f(x)$ szigorúan monoton növekvő.
A derivált a zérushelyen előjelet vált, így valóban szélsőértéke van ezen a helyen a függvénynek.
Az is megállapítható, hogy ez minimumhely, hiszen csökkenőből váltott át növekvőbe a függvény.
Mivel $f(0) = 0$, és a függvény sehol nem vesz fel ennél kisebb értéket, így az $x = 0$ helyen van a vizsgált függvény egész értelmezési tartományán a legkisebb függvényérték. Ez azt jelenti, hogy az $x = 0$ a függvény abszolút minimumhelye.

3. példa A derivált zérushelyének meghatározásával adjuk meg (ha van) az $f(x) = x^3$ függvény szélsőértékhelyét!

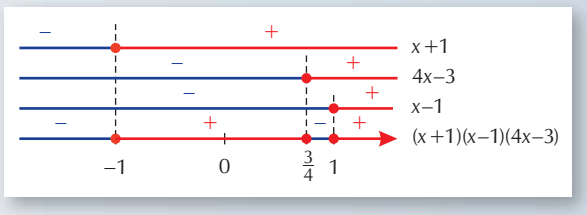
Megoldás Tudjuk, hogy $f'(x) = 3x^2$, és $f'(0) = 0$. Vagyis csakis a 0-nál lehet a függvény zérushelye.
Ha $x < 0$, akkor $f'(x) > 0$, azaz az $f(x)$ szigorúan monoton növekvő.
Ha $x > 0$, akkor $f'(x) > 0$, azaz az $f(x)$ szigorúan monoton növekvő.
A derivált a zérushely környezetében nem vált előjelet, így nincs szélsőértéke a függvénynek. Ezt a függvény grafikonjának megrajzolása után is láthatjuk.

Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ alakú függvényeket **polinomfüggvényeknek** nevezzük. Ezeket egyszerű deriválni, ezért az ilyen típusú függvények vizsgálatát is könnyen elvégezhetjük.

4. példa Vizsgáljuk az $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ hozzárendeléssel megadott függvény menetét! Vázlatosan rajzoljuk meg a függvény görbéjét!

Megoldás Vegyük a függvény deriváltját: $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$.
Tudjuk, hogy a függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla:
$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0$, azaz $x^2(4x - 3) - (4x - 3) = 0$, ahonnan $(x + 1)(x - 1)(4x - 3) = 0$.
Vagyis a derivált zérushelyei: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = 1$.

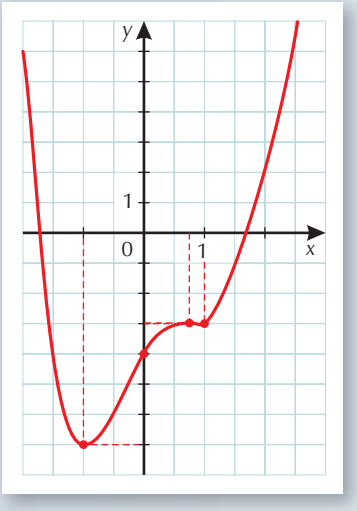
Nézzük meg, hogy ezeken a helyeken történik-e előjelváltás, vizsgáljuk meg az $(x + 1)(x - 1)(4x - 3)$ szorzat előjelét!
Az ábra mutatja, hogy mindhárom helyen előjelváltás történik.



Mivel a $]-\infty; -1[$ intervallumon a derivált negatív, ezért az f függvény itt szigorúan monoton csökkenő.
Mivel a $]-1; \frac{3}{4}[$ intervallumon a derivált pozitív, ezért az f függvény itt szigorúan monoton növekvő.
Mivel a $]\frac{3}{4}; 1[$ intervallumon a derivált negatív, ezért az f függvény itt szigorúan monoton csökkenő.
Mivel a $]1; \infty[$ intervallumon a derivált pozitív, ezért az f függvény itt szigorúan monoton növekvő.

Ezek a megállapítások segítenek a szélsőértékhelyek maximum vagy minimum voltának az eldöntésében is. A könnyebb áttekinthetőség miatt megállapításainkat érdemes táblázatban rögzíteni. A ↘ jelet a szigorú monoton csökkenésre, a ↗ jelet pedig a szigorú monoton növekvésre alkalmaztuk a táblázatban.

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;\frac{3}{4}[$	$\frac{3}{4}$	$]\frac{3}{4};1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	Lok. min. hely	↗	Lok. max. hely	↘	Lok. min. hely	↗



Meghatározzuk a szélsőértékeket is:
$f(-1)=(-1)^4-(-1)^3-2(-1)^2+3(-1)-4=1+1-2-3-4=-7$.
A többit nem részletezzük:
$f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{763}{256}\approx-2{,}98$.
$f(1)=-3$.
Az ábrázolást pontosabbá teszi és nagyon könnyű meghatározni, ezért érdemes kiszámolni a y-tengelymetszetet is: $f(0)=-4$.
Megállapítható továbbá, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Ezek alapján közelítőleg megrajzolhatjuk a függvény grafikonját *(lásd az ábrát)*.
A függvény zérushelyeire csak becslést tudunk adni. A folytonos függvényeknél tanultak felhasználásával a következő megállapítást tehetjük:
Mivel $f(-2)=6$, $f(-1)=-7$, ezért az egyik zérushely a $[-2;-1]$ intervallumban található.
Mivel $f(1)=-3$, $f(2)=2$, ezért a másik zérushely az $[1;2]$ intervallumban található.

FELADATOK

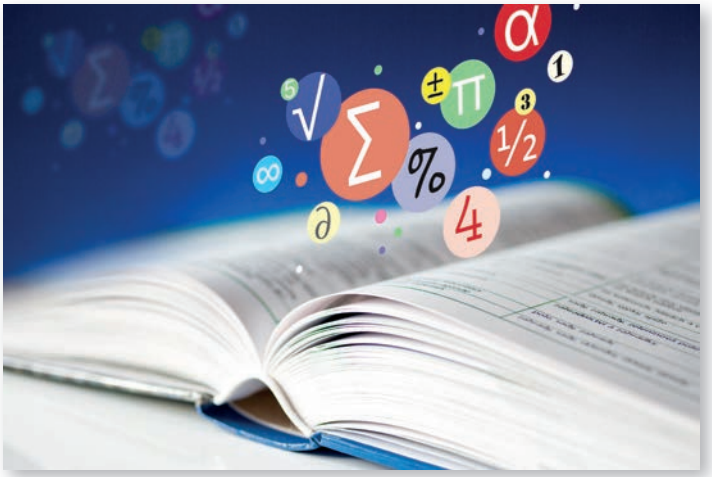
1. E1 Határozzuk meg a megadott függvények deriváltjainak zérushelyeit! Mindegyik esetben döntsük el, hogy ezeken a helyeken lokális szélsőérték van-e a függvényeknek!

a) $f(x)=\frac{4}{3}x^3-x$;
b) $f(x)=x^3+x$;
c) $f(x)=\sin x+\cos x$;
d) $f(x)=\sin x-2\cos x$;
e) $f(x)=\operatorname{tg} x$;
f) $f(x)=\operatorname{ctg} x$!

2. E1 Vizsgáljuk meg az f függvény menetét, majd vázlatosan rajzoljuk meg a függvény görbéjét!
a) $f(x)=x^4-4x^2+4$;
b) $f(x)=x^4+6x^2+9$.

3. V Ábrázoljuk az $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ hozzárendeléssel adott függvényt!

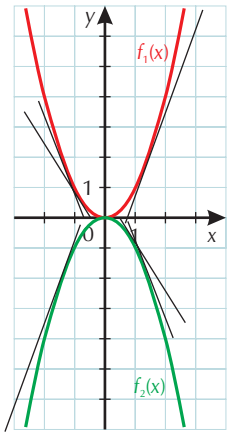
Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1311–1318.



71. KONVEXITÁS, MÁSODIK DERIVÁLT ÉS EZEK KAPCSOLATA

Az eddigi tanulmányaink során a függvényvizsgálat elemei közül kimaradt a konvexitás vizsgálata. A differenciálszámítás segítségével ezt is megtehetjük.

Tekintsük az $f_1(x) = x^2$ és az $f_2(x) = -x^2$ hozzárendeléssel megadott függvények grafikus képét. Az ábra mutatja, hogy a függvény grafikonjának bármely pontjában húzott érintő a függvény görbéje alatt (illetve fölött) van.



Definíció

Ha az f függvény az $]a; b[$ intervallumon differenciálható, és a függvény grafikonjának bármely pontjában húzott érintő a pont környezetében a grafikon alatt (illetve fölött) van, akkor a függvény az $]a; b[$ intervallumon **konvex** (illetve **konkáv**).

A monotonitásnál megszokott szóhasználathoz hasonlóan megkülönböztethetjük a konvex és a szigorúan konvex eseteket is.

Definíció

Az f-nek **inflexiós pontja** van x_0-ban, ha f differenciálható itt és ebben a pontban megváltozik a konvexitása.

Ezen tulajdonságokat a deriváltfüggvény menetéből leolvashatjuk, ugyanis, ha az f' monoton növekvő, akkor f konvex. Az f' monotonitását pedig megállapíthatjuk a deriváltjának előjeléből.

Definíció

Legyen f függvény differenciálható az x_0 pont egy környezetében. Ha az f' deriváltfüggvénynek létezik a deriváltja x_0-ban, akkor ezt az ***f* függvény x_0-beli második differenciálhányadosának (második deriváltjának)** mondjuk.

Jelölése: $f''(x)$.

A második derivált és a konvexitás kapcsolata nagyon hasonló az első derivált és a monotonitás kapcsolatához. Bizonyítások nélkül nézzük meg az ott megvizsgált tételek második deriválthoz kapcsolódó megfelelőit.

Tétel

Legyen az f kétszer differenciálható az $]a; b[$ intervallumon.

Az f függvény ezen az intervallumon akkor és csak akkor konvex (illetve konkáv), ha a második deriváltja az intervallum minden pontjában nemnegatív (nempozitív).

Ha az f második deriváltja az intervallum minden pontjában pozitív (illetve negatív), akkor az f függvény szigorúan konvex (illetve szigorúan konkáv).

Az f függvénynek az intervallum x_0 pontjában akkor lehet inflexiós pontja, ha ott az f második deriváltja nulla.

Az f függvénynek az intervallum x_0 pontjában akkor van inflexiós pontja, ha x_0-ban a második deriváltja nulla és az x_0 pontban a második derivált előjelet is vált.

A második derivált a lokális szélsőérték vizsgálatánál is segítségünkre lehet:

Tétel

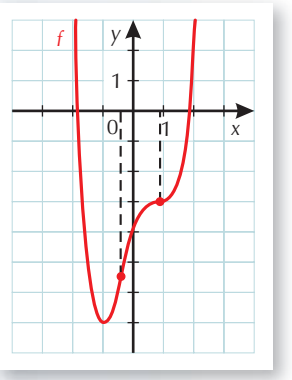
Legyen az f kétszer differenciálható az x_0-ban.

Az f függvénynek az x_0 pontjában lokális maximuma (illetve minimuma) van, ha x_0-ban a deriváltja nulla és a második deriváltja negatív (illetve pozitív).

Fontos megjegyezni, hogy a tétel megfordítása nem igaz. Például $f(x) = x^4$ függvénynek lokális minimuma van a 0-ban, és az első deriváltja ($f'(x) = 4x^3$) itt valóban 0, de a második ($f''(x) = 12x^2$) nem lesz pozitív.

1. példa Vizsgáljuk meg az előző leckében szereplő $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ függvény konvexitását!

Megoldás Azt már korábban kiszámoltuk, hogy $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$. Most meghatározzuk a második deriváltat is: $f''(x) = 12x^2 - 6x - 4$, amelynek zérushelyei $x_1 \approx -0{,}38$ és $x_2 \approx 0{,}88$. Mivel ez egy felfelé nyíló parabola az adott intervallumokon az előjelét is meg tudjuk határozni.



x	$]-\infty; x_1[$	x_1	$]x_1; x_2[$	x_2	$]x_2; \infty[$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	szig. konvex	infl. pont	szig. konkáv	infl. pont	szig. konvex

FELADATOK

1. E1 Jellemezzük konvexitás szempontjából az $f(x) = \sin x$ függvényt!

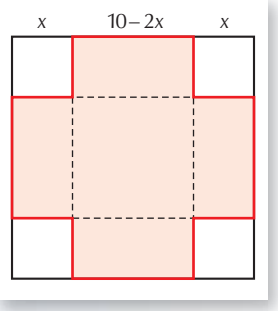
2. E1 Deriváljuk az $f(x) = \sin x$ függvényt ahányszor lehet. Mit veszünk észre?

3. E2 Ábrázoljuk vázlatosan a következő függvényeket!

a) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2}$; *b)* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

72. SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK MEGOLDÁSA DERIVÁLÁSSAL

1. példa 10 cm oldalú négyzet alakú kartonlapból szeretnénk felül nyitott dobozt készíteni. A négy sarokból egybevágó négyzetlapokat vágunk ki, majd felhajtjuk az oldallapokat. Hogyan kaphatjuk a legnagyobb térfogatú dobozt?



Megoldás A kivágott négyzetek oldalának hossza centiméterben legyen x. *(lásd ábra)* Tudjuk, hogy $x \in]0; 5[$.

Ezzel az x változóval kifejezhetjük a doboz térfogatát:

$V(x) = x(10 - 2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x$.

A $V(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla.

$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 0, \quad 3x^2 - 20x + 25 = 0$.

Megoldóképlettel: $x_1 = 5$, $x_2 = \dfrac{5}{3}$.

Az x_1 nincs benne a vizsgált intervallumban. Az x_2 esetén meg kell vizsgálnunk, hogy történik-e előjelváltás ezen a helyen. Mivel a deriváltfüggvény másodfokú, így könnyen látható, hogy megtörténik az előjelváltás. Pozitívból vált negatívba (illetve a második derivált negatív itt), ezért ezen a helyen valóban lokális maximuma van a függvénynek. Az is belátható, hogy a $]0; 5[$ intervallumon előtte végig növekvő, utána végig csökkenő, tehát itt van a függvény abszolút maximuma is.

Ha a kivágott négyzetek oldalhossza $\dfrac{5}{3}$ cm, akkor lesz a doboz térfogata maximális.

2. példa Adott körlapból mekkora középponti szögű körcikket vágjunk ki, hogy az abból készíthető kúp maximális térfogatú legyen?

Megoldás Legyen a körlap sugara R (rögzített), a kúp alapkörének sugara r, a magassága m (ezek változók). Tudjuk, hogy $R^2 = m^2 + r^2$. A kúp térfogatát leíró m változójú függvény:

$V(m) = \frac{r^2\pi m}{3} = \frac{\pi}{3}m(R^2 - m^2) = \frac{\pi}{3}(R^2 m - m^3)$, ahol $m \in]0; R[$.

Nekünk elegendő, ha az $f(m) = R^2 m - m^3$ függvényt vizsgáljuk, hiszen a konstans szorzó nem változtatja meg a szélsőérték helyét.

A derivált zérushelye: $f'(m) = -3m^2 + R^2 = 0$. A megadott intervallumon: $m = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Itt a deriváltfüggvény pozitívból negatívba vált (illetve a második derivált negatív), valóban lokális maximum van ezen a helyen. (Ez a keresett hely. Ellenőrizhető, hogy a vizsgált intervallum végpontjaiban ennél nem nagyobbak a függvényértékek.)

A keresett α szöget ívmértékben fejezhetjük ki:

$$\alpha = \frac{2r\pi}{R} = \frac{2\pi\sqrt{R^2 - \frac{1}{3}R^2}}{R} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Fokokban kifejezve: $\alpha \approx 294°$.

3. példa **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2021.)**

Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n-szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$-tel több sorsjegyet tudnak eladni ($n \in \mathbf{N}^+$). Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak. Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne!

Megoldás Tegyük fel, hogy n-szer csökkentették 10 Ft-tal az árat, ekkor az új ár $500 - 10n$ Ft (ahol $n < 50$), és a havi eladott darabszám $5000 + 10n^2$.

Az eladásból származó bevétel Ft-ban:

$(500 - 10n)(5000 + 10n^2) = -100n^3 + 5000n^2 - 50\,000n + 2\,500\,000$

Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett

$f(x) = -100x^3 + 5000x^2 - 50\,000x + 2\,500\,000$ függvényt.

Ennek deriváltfüggvénye $f(x) = -300x^2 + 10\,000x - 50\,000$, melynek zérushelyei $x_1 \approx 6{,}13$ és $x_2 \approx 27{,}21$.

A deriváltfüggvény pontosan a két gyök között pozitív, és x_2-ben pozitívból negatívba vált, ezért x_2 az f maximumhelye, x_1-ben negatívból pozitívba vált a deriváltfüggvény. (Másképpen: $f''(x_1) > 0$ és $f''(x_2) < 0$, ezért x_2 a maximumhelye.)

Mivel n értéke csak egész lehet, meg kell vizsgálni a két legközelebbi egész értéknél a bevételt:

$f(27) = 2\,826\,700 > f(28) = 2\,824\,800$.

Az adott intervallum végpontjaiban a függvényértékek ennél kisebbek, így ez valóban maximum.

Tehát a modell szerint 27-szer 10 Ft-tal, 230 Ft-ra kell csökkenteni a sorsjegy árát ahhoz, hogy az értékesítésből származó havi bevétel maximális legyen.

FELADATOK

1. E1 Bontsuk fel a 16-ot két összeadandóra úgy, hogy a tagok
a) szorzata;
b) négyzetösszege;
c) köbösszege
szélsőértéket vegyen fel!

2. E1 Egy fal mellett 100 m^2-es téglalap alakú területet szeretnénk elkeríteni. Három oldalon kell kerítést készíteni, mert a negyedik oldal maga a fal lesz. Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, hogy a kerítés hossza a legkisebb legyen?

3. E1 A ferde hajítás távolságát megadó képlet: $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, ahol v_0 az elhajított test kezdősebessége, α a kezdősebesség irányának a vízszintessel bezárt szöge ($0° < \alpha < 90°$), g a nehézségi gyorsulás. Rögzített v_0 esetén milyen α mellett lesz a hajítás távolsága a legnagyobb?

4. E2 Határozzuk meg az R sugarú gömbben elhelyezhető legnagyobb térfogatú henger méreteit!

5. E2 Egy test súlyát n-szer különbözőnek mértük, a mérési eredmények: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A valódi érték legjobb becslésének azt a számot tekintjük, amelytől a mérések eltérésének négyzetösszege a legkisebb. Mennyi a mennyiség valódi értékének legjobb becslése?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1319, 1323–1327.

73. DERIVÁLÁSSAL MEGOLDHATÓ VEGYES FELADATOK

1. példa Az r sugarú kör keresztmetszetű fatörzsből kivágott téglalap keresztmetszetű gerenda hordképessége egyenesen arányos a gerenda szélességének és a vastagsága négyzetének szorzatával. Határozzuk meg a maximális hordképességű gerenda keresztmetszetének méreteit!

Megoldás A henger átmérője $2r$, a gerenda szélessége x, a vastagsága pedig $\sqrt{4r^2 - x^2}$. Vizsgáljuk az $f(x) = x(4r^2 - x^2) = 4r^2x - x^3$ függvény viselkedését, ahol $x \in]0; 2r[$.

A deriváltja: $f'(x) = -3x^2 + 4r^2$.

A függvénynek a derivált zérushelyeinél lehet szélsőértéke:

$-3x^2 + 4r^2 = 0$.

Az értelmezési tartományba eső zérushely: $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\left]0; \frac{2r}{\sqrt{3}}\right[$ intervallumban a derivált pozitív, a $\left]\frac{2r}{\sqrt{3}}; 2r\right[$ intervallumban a derivált negatív. Vagyis az f függvénynek az $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ helyen maximuma van. (A vizsgált intervallum végpontjaiban sem nagyobbak a függvényértékek.)

A gerenda szélessége: $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, a gerenda vastagsága: $\sqrt{4r^2 - \frac{4r^2}{3}} = r\sqrt{4 - \frac{4}{3}} = r\sqrt{\frac{8}{3}}$.

2. példa Jelöljük az $f(x) = -x^2 + 6x$ hozzárendeléssel megadott függvény grafikonjának és az x tengelynek a metszéspontjait A-val és B-vel. Mekkora annak a trapéznak a területe, amelynek párhuzamos oldalegyenesei az x tengely, illetve a függvény görbéjéhez húzott érintő, a további két oldal pedig az A-ban és a B-ben húzott érintő?

Megoldás A másodfokú függvény grafikonja parabola. Ennek a parabolának az x tengellyel párhuzamos e érintőjére illeszkedik a parabola tengelypontja, azaz a $T(3; 9)$ pont. Vagyis a kérdéses trapéz magassága 9, a vízszintes érintő egyenlete: $y = 9$.

Az A és B pont második koordinátája 0, hiszen illeszkednek az x tengelyre, az első koordináta pedig 0, illetve 6. Tehát: $A(0; 0)$, $B(6; 0)$.

Az érintő iránytangensét (meredekségét) a derivált adja: $f'(x) = -2x + 6$.

Ezért az A-nál lévő meredekség: $f'(0) = 6$.

A B-nél lévő meredekség: $f'(6) = -6$.

Az érintők egyenlete: $e_1 : y = 6x$, $e_2 : y = -6x + 36$.

Az e és e_2 metszéspontja: $C\left(\frac{9}{2}; 9\right)$. Az e és e_1 metszéspontja: $D\left(\frac{3}{2}; 9\right)$.

A CD szakasz hossza: 3.

Vagyis a trapéz területe: $t = \frac{6+3}{2} \cdot 9 = \frac{81}{2}$.

AZ EXPONENCIÁLIS ÉS A LOGARITMUSFÜGGVÉNY DERIVÁLTJA (Kiegészítő anyag)

A korábban megismert függvények közül még az exponenciális és a logaritmusfüggvény deriváltját nem ismertük meg. A teljesség kedvéért ezeket is megadjuk, de a bizonyításuktól eltekintünk.

Tétel

Az a^x függvény minden pontban differenciálható és $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

Az $\log_a x$ függvény minden pontban differenciálható és $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

3. példa Határozzuk meg az e^x deriváltját!

Megoldás Alkalmazva a tételt $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$.

Megjegyzés:
Az e^x függvény deriváltfüggvénye önmaga, ez azt jelenti, hogy minden pontjában a hozzá húzott érintő meredeksége éppen a függvényérték. Ez egy nagyon nevezetes tulajdonság, mivel $f'(x) = f(x)$ egyenletnek csak az e^x függvény a megoldása folytonos függvények körében.

4. példa Határozzuk meg a $2e^x - 3e^{2x}$ deriváltját!

Megoldás $(2e^x - 3e^{2x})' = 2e^x - 6e^{2x}$.

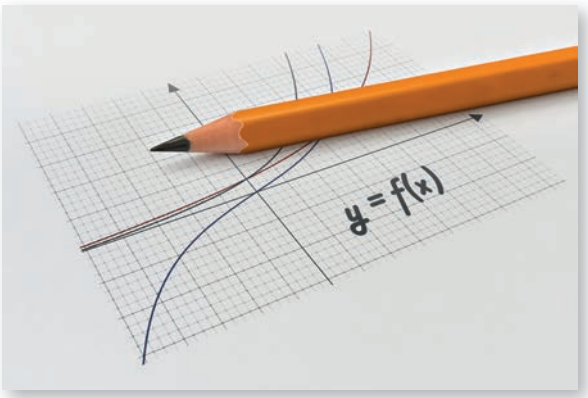
5. példa Határozzuk meg a $2 \ln x - 9 \ln 3x$ deriváltját!

Megoldás $(2 \ln x - 9 \ln 3x)' = \frac{2}{x} - 9 \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{2}{x} - \frac{9}{x} = -\frac{7}{x}$.

FELADATOK

1. E1 Írjuk fel a következő függvények érintőjének egyenletét az $x_0 = 3$-ban!
a) $x^2 - 2x - 3$; *b)* $x^2 + x + 3$.

2. E1 Az $f(x) = x^2 - 8x + 18$ hozzárendeléssel adott függvény $A(2; 6)$ és $B(5; 3)$ pontjában húzott két érintő a C pontban metszi egymást. Mekkora az ABC háromszög területe?



3. V Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!
a) $6e^x - 5e^{2x}$; *b)* $3e^{-x} - 2e^{7x}$.

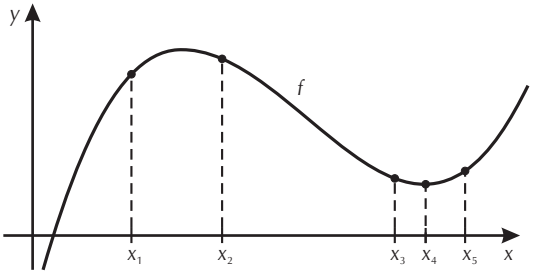
4. V Határozzuk meg a következő függvények deriváltfüggvényét!
a) $\ln(5x + 1)$; *b)* $\ln(x^2 + x + 3)$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1244–1250.

VÁLOGATÁS AZ EMELT SZINTŰ ÉRETTSÉGI VIZSGA FELADATAIBÓL

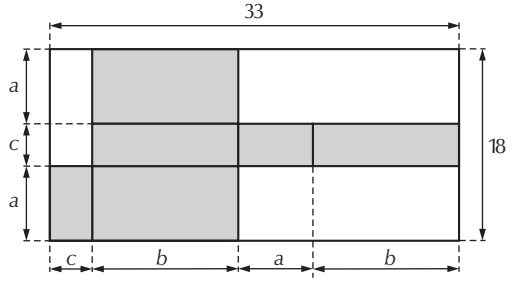
1. E1 **(2020.)** Adott két függvény: $f:]0; 130[\to \mathbf{R}$; $f(x) = 900 - 0{,}25(x - 60)^2$, illetve $g:]0; 130[\to \mathbf{R}$; $g(x) = 6{,}4x$. Adja meg a $h:]0; 130[\to \mathbf{R}$; $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (típusát, helyét és értékét)!

2. E1 **(2019.)** Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet. Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába! (Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

3. E2 **(2019.)** Egy 33 × 18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az ábra szerint választják meg. Hogyan kell megválasztani az a, b, c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



4. E2 **(2020.)** Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek). A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készíttettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

a) Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?

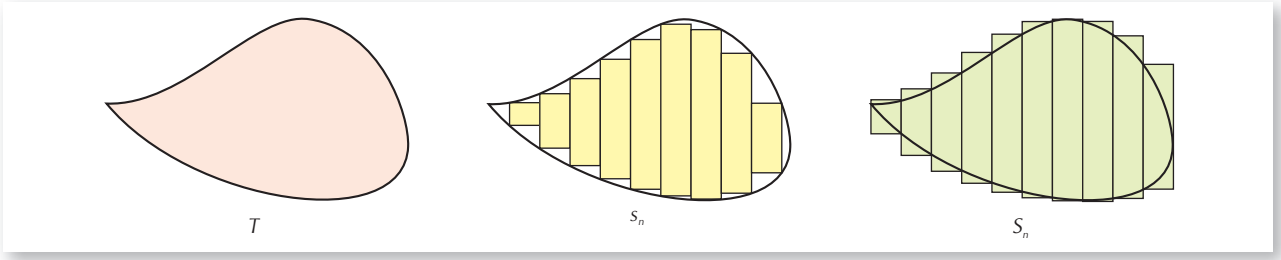
b) Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel?

X. INTEGRÁL-SZÁMÍTÁS

74. FÜGGVÉNYGÖRBE ALATTI TERÜLET

Számos matematikai, fizikai és egyéb természettudományos kérdés arra vezet bennünket, hogy fontos lenne számunkra egy adott folytonos függvénygörbe és az x tengely közötti területet meghatároznunk valamely $[a; b]$ intervallumban. De hogyan is kezdjünk hozzá?

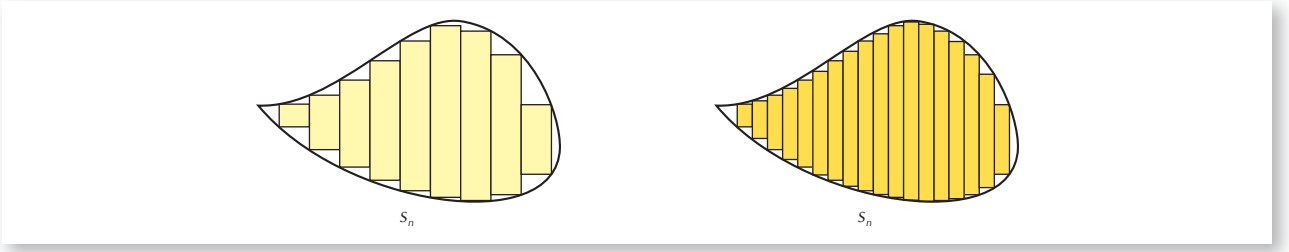
Tegyük fel, hogy egy zárt síkgörbe által közbezárt tartomány T területét szeretnénk meghatározni. Képzeljük el, hogy lefedjük a megmérendő tartományt egyenlő szélességű sávokkal, majd e sávokhoz igazodva képezzük a tartományba beírható, majd a tartomány köré írható téglalapokat *(lásd ábra)*.



Ha a beírható téglalapok területének összegét s_n-nel (kimondva: „kis s_n”), a köré írható téglalapok területének összegét S_n-nel (kimondva: „nagy s_n”) jelöljük, akkor nyilván

$s_n \leq T \leq S_n$.

Ha a felosztást finomítjuk (vagyis a sávszélességet csökkentjük, *lásd ábra*), akkor szemléletünk azt sugallja, hogy s_n növekszik, míg a S_n csökken, vagyis a keresett T területet egy szűkebb intervallumba tudjuk beszorítani. Tovább sűrítve a felosztást egyre pontosabban közelíthető T értéke, s ha netán n minden határon túli növelésével s_n és S_n határértéke megegyezik, akkor az nem lehet más, mint a keresett T terület.

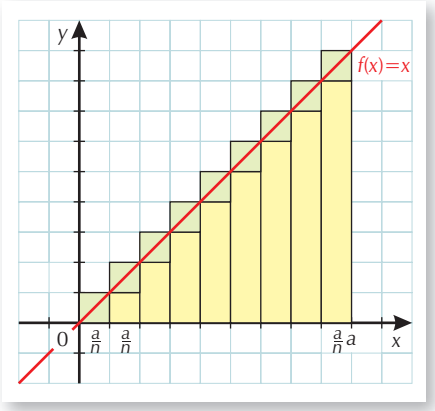


Ezt a gondolatmenetet (vagyis a terület kétoldali közelítését) felhasználva nézzük először az $f(x) = x$ függvénygörbe alatti területet a $[0; a]$ intervallumon. (Természetesen ebben a legegyszerűbb esetben e területet könnyebben is kiszámolhatnánk, hiszen egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögről van szó, melynek befogói a hosszúságúak, így a kérdéses terület $\frac{a^2}{2}$.)

AZ $f(x) = x$ FÜGGVÉNY GÖRBÉJE ÉS AZ x TENGELY KÖZÖTTI TERÜLET

Osszuk fel a $[0; a]$ intervallumot n egyenlő részre, majd képezzünk minden részintervallumon egy-egy beírt, illetve köré írt téglalapot a következő módon. A beírt téglalap „magassága” a részintervallumon felvett legkisebb, a köré írt téglalapé pedig a legnagyobb függvényérték *(lásd ábra)*. Legyen a beírt téglalapok területének összege s_n, a köré írt téglalapok területének összege pedig S_n.

Először a s_n-t határozzuk meg. Minden részintervallumra emelt téglalap egyik oldala $\frac{a}{n}$, a téglalap másik oldala pedig (mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő), a kérdéses intervallum „bal” oldali szélén felvett függvényérték.



Ezek szerint írhatjuk:

$$s_n = \frac{a}{n}\cdot 0 + \frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{2a}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{3a}{n} + \ldots + \frac{a}{n}\cdot\frac{(n-1)a}{n}.$$

$\frac{a^2}{n^2}$-t kiemelve az összeg így alakítható:

$$s_n = \frac{a^2}{n^2}\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) = \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{a^2n^2 - a^2n}{2n^2}.$$

Most számítsuk ki a köré írt téglalapok területének összegét, S_n-t. E téglalapok egyik oldala, ugyanúgy, mint a s_n esetében, $\frac{a}{n}$. A téglalapok másik oldala a kérdéses intervallum „jobb” oldali szélén felvett függvényérték. Ezek szerint

$$S_n = \frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{2a}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{3a}{n} + \ldots + \frac{a}{n}\cdot\frac{na}{n}.$$

Ismét kiemelhetünk $\frac{a^2}{n^2}$-t, így azt kapjuk:

$$s_n = \frac{a^2}{n^2}\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2n^2 + a^2n}{2n^2}.$$

A függvénygörbe és az x tengely közötti T területre nyilván igaz, hogy $s_n \le T \le S_n$.

Ha a $[0; a]$ intervallum felosztását finomítjuk, azaz n értékét növeljük, akkor szemléletünk szerint s_n növekszik, S_n csökken, így a keresett T terület egyre szűkebb intervallumba szorítható. Ha pedig n minden határon túl nő, akkor s_n, illetve S_n határértékét kapjuk. Ha kiderül, hogy e két határérték megegyezik, akkor e határérték nem lehet más, mint a keresett T terület.

A számsorozatok határértékének vizsgálatakor láttuk, hogy ha egy számsorozat olyan racionális törtfüggvény, mely számlálójának és nevezőjének a fokszáma megegyezik, akkor a kérdéses sorozat konvergens, és határértéke a legmagasabb fokú tagok együtthatóinak a hányadosa:

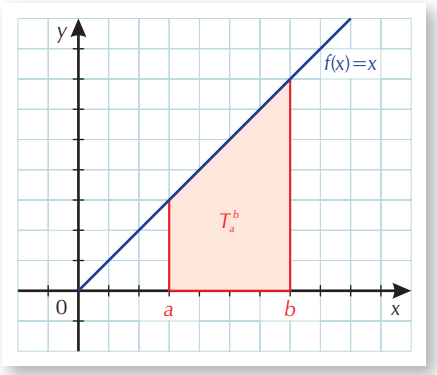
ha $a_n = \frac{b_r n^r + b_{r-1}n^{r-1} + \ldots + b_1 n + b_0}{c_r n^r + c_{r-1}n^{r-1} + \ldots + c_1 n + c_0}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{b_r}{c_r}$.

Esetünkben s_n és S_n is olyan racionális törtfüggvény, melynek számlálója és nevezője egyaránt másodfokú. Ezek szerint $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2n^2 - a^2n}{2n^2} = \frac{a^2}{2}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2n^2 + a^2n}{2n^2} = \frac{a^2}{2}$.

Mivel a két határérték megegyezik, miközben $s_n \le T \le S_n$ minden n-re, így ezt a közös határértéket rendeljük területként a vizsgált síkidomhoz. Ez természetesen megegyezik az elemi módon számolt területtel.

Így azt kaptuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = T = \frac{a^2}{2}.$$



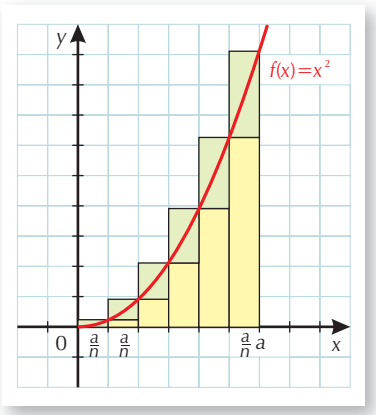
Mivel a függvénygörbe alatti terület a [0; a] intervallumon $\frac{a^2}{2}$, így a függvénygörbe alatti terület valamely [a; b] intervallumon egyenlő a [0; b] és a [0; a] intervallumokra vonatkozó területek különbségével. E területet T_a^b-vel jelölve

$$T_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Természetesen ezt a területet egyszerűbb módon is kiszámíthatjuk, hiszen egy derékszögű trapézról van szó. Ennek párhuzamos oldalai a és b, magassága $(b-a)$, tehát $T = \frac{(b+a)(b-a)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$.

AZ $f(x) = x^2$ FÜGGVÉNY GÖRBÉJE ÉS AZ x TENGELY KÖZÖTTI TERÜLET

Az előzőekben vázolt módszerrel most határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület nagyságát először a [0; a] intervallumban. Osszuk fel ismét a [0; a] intervallumot n egyenlő részre, és képezzük a vizsgált tartományba beírt és köré írt téglalapok területének s_n és S_n összegét!



A beírt téglalapok egyik oldala ismét $\frac{a}{n}$, míg a másik oldala most is a kérdéses részintervallum „bal” oldali végpontjában felvett függvényérték. Ezek szerint

$$s_n = \frac{a}{n}\cdot 0 + \frac{a}{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n}\cdot\left(3\cdot\frac{a}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{a}{n}\cdot\left((n-1)\cdot\frac{a}{n}\right)^2,$$

A jobb oldalon kiemelhetünk $\frac{a^3}{n^3}$-t, így azt kapjuk, hogy

$$s_n = \frac{a^3}{n^3}\cdot(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2).$$

Ismert, hogy az első n pozitív egész szám négyzetének összege:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Tehát az összeg így alakul: $s_n = \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Most számoljuk össze a köré írt téglalapok területének S_n összegét. A köré írt téglalapok egyik oldala $\frac{a}{n}$. Egy ilyen téglalap másik oldala a kérdéses intervallum jobb oldali végpontjában felvett függvényérték. Ezek szerint

$S_n = \frac{a}{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n}\cdot\left(3\cdot\frac{a}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{a}{n}\cdot\left(n\cdot\frac{a}{n}\right)^2$, azaz

$$S_n = \frac{a^3}{n^3}\cdot(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2),$$

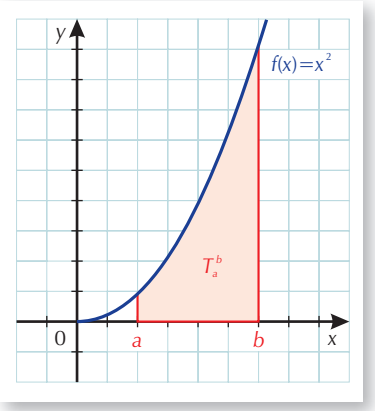
$$S_n = \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ezek után vizsgáljuk meg s_n és S_n határértékét, ha n tart végtelenhez.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

A törtkifejezés számlálója is és nevezője is harmadfokú, így ez a határérték egyenlő a legmagasabb fokú tagok együtthatóinak hányadosával. A legmagasabb fokú tag a számlálóban $2a^3n^3$, a nevezőben $6n^3$, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{2a^3}{6} = \frac{a^3}{3}.$$



Az S_n esetében ugyanez a helyzet, vagyis

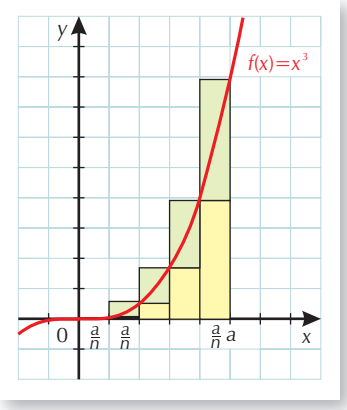
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3(n+1)n(2n+1)}{6n^3} = \frac{a^3}{3}.$$

Arra jutottunk, hogy s_n és S_n határértéke megegyezik, tehát ez a keresett T terület.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = T = \frac{a^3}{3}.$$

Ezek szerint az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület nagysága $\frac{a^3}{3}$. Ebből következik, hogy a függvénygörbe és az x tengely közötti terület az $[a; b]$ intervallumon $T_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

AZ $f(x) = x^3$ FÜGGVÉNY GÖRBÉJE ÉS AZ x TENGELY KÖZÖTTI TERÜLET



Végezetül alkalmazzuk az $f(x) = x$ és az $f(x) = x^2$ függvényeknél megismert eljárást az $f(x) = x^3$ függvényre. Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot n egyenlő részre és legyen ismét s_n és S_n a beírt, illetve a köré írt téglalapok területeinek összege.

$$s_n = \frac{a}{n}\cdot 0 + \frac{a}{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^3 + \frac{a}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{a}{n}\right)^3 + \frac{a}{n}\cdot\left(3\cdot\frac{a}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{a}{n}\cdot\left((n-1)\cdot\frac{a}{n}\right)^3,$$

$$s_n = \frac{a^4}{n^4}\cdot(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3).$$

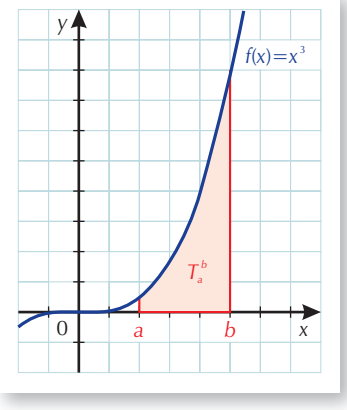
Tudván, hogy az első n pozitív egész szám harmadik hatványának összege:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{(n^2+n)^2}{4}.$$

Ezek szerint

$$s_n = \frac{a^4}{n^4}\cdot\frac{[(n-1)^2 + n - 1]^2}{4}.$$

Hasonlóképpen kapjuk S_n-t.



$$S_n = \frac{a}{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^3 + \frac{a}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{a}{n}\right)^3 + \frac{a}{n}\cdot\left(3\cdot\frac{a}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{a}{n}\cdot\left(n\cdot\frac{a}{n}\right)^3,$$

$$S_n = \frac{a^4}{n^4}\cdot(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3),$$

$$S_n = \frac{a^4}{n^4}\cdot\frac{(n^2+n)^2}{4}.$$

A s_n és a S_n esetében a számláló és a nevező fokszáma ismét megegyezik, így ezek határértéke $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^4}{4}$.

Mivel a két határérték megegyezik, ezért létezik a terület, és ezzel a közös határértékkel egyenlő. Ezek szerint az $f(x) = x^3$ függvény görbéje és az x tengely közötti terület az $[a; b]$ intervallumon $T_a^b = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$.

FELADATOK

1. E1 A beírható és köré írható téglalapok területei összegének határértékét vizsgálva számítsuk ki az $f(x) = 2x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt területet a $[0; a]$ intervallumon!

2. E1 A beírható és köré írható téglalapok területei összegének határértékét vizsgálva számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 4x$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt területet a $[0; 2]$ intervallumon! Értelmezzük a kapott eredményt!

3. E1 A beírható és köré írható téglalapok területei összegének határértékét vizsgálva számítsuk ki az $f(x) = 2x + 1$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt területet a $[2; 5]$ intervallumon!

4. E2 Tudva azt, hogy az első n pozitív egész szám negyedik hatványainak összege

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]}{30},$$

számítsuk ki az $f(x) = x^4$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt területet a $[0; a]$ intervallumon!

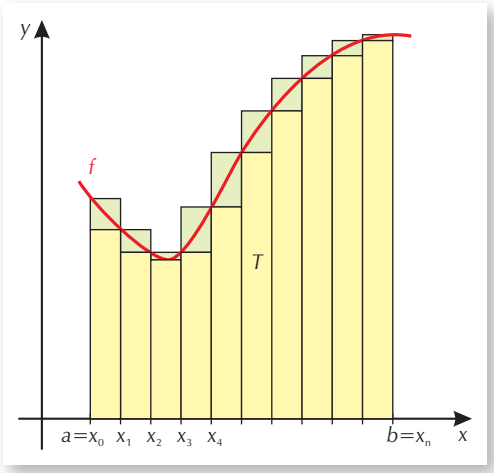
5. E2 Tudva azt, hogy az első n pozitív egész szám ötödik hatványainak összege

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2[2n(n+1)-1]}{12},$$

számítsuk ki az $f(x) = x^5$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt területet a $[0; a]$ intervallumon!

75. A HATÁROZOTT INTEGRÁL FOGALMA ÉS TULAJDONSÁGAI

Az előző fejezetben megismert kétoldali közelítő módszert alkalmazhatjuk tetszőleges, az $[a; b]$ intervallumon folytonos függvényre is. Legyen az f függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény, melyre ezen az intervallumon $f(x) \geq 0$. Célunk az f függvény görbéje, valamint az x tengely közötti tartomány T területének meghatározása az $[a; b]$ intervallumon. Korábbi példáinkban az $[a; b]$ intervallumot n egyenlő részre osztottuk. Igazolható, hogy az ott ismertetett (és az alábbiakban általánosított) gondolatmenet akkor is helytálló, ha az $[a; b]$ intervallumot n, nem feltétlenül egyenlő részre osztjuk, de olyan részekre, hogy az n db részintervallum közül a leghosszabb hossza is 0-hoz tart, ha $n \to \infty$.



Osszuk fel tehát az $[a; b]$ intervallumot n részre, melyek közül a legnagyobb hossza is 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén, és legyenek az egyes osztópontok

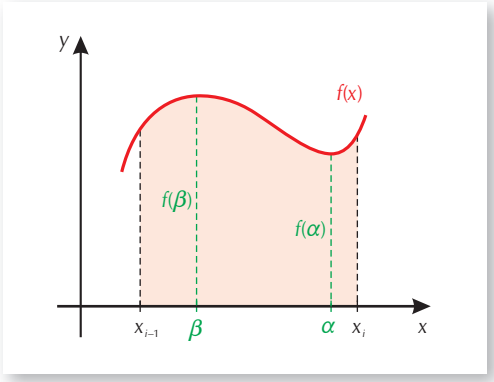
$$a = x_0 < x < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b.$$

Ezek után képezzük az egyes részintervallumok fölé a beírható és a köré írható téglalapokat, és írjuk fel ezeknek a téglalapoknak a s_n, illetve S_n összegét.

Mielőtt ezt megtesszük, gondoljuk meg a következőket. Az előző fejezetben vizsgált függvények esetében – mivel ezek a függvények a vizsgált intervallumban szigorúan monoton növekvő függvények voltak – a beírt téglalapok egyik oldala a kérdéses intervallum hossza, míg a téglalap másik oldala beírt téglalapoknál minden esetben az intervallum bal oldali végpontjában vett függvényérték, a köré írt téglalapok esetében az intervallum jobb oldali végpontjában vett függvényérték volt. Természetesen előfordulhat, hogy valamely intervallumon a függvény nem szigorúan monoton növekvő (vagy csökkenő). Az mindenesetre biztos, hogy

Bármely zárt intervallumon folytonos függvénynek van az intervallumban legkisebb és legnagyobb értéke.

Más szóval egy zárt intervallumon folytonos függvény esetében van az intervallumnak olyan α pontja, melyre $f(\alpha)$ az adott intervallumon a legkisebb függvényérték, és van olyan β pontja, melyre $f(\beta)$ az adott intervallumon a legnagyobb függvényérték. (Természetesen itt a „legkisebb” úgy értendő, hogy nála kisebb már nincs, a „legnagyobb” pedig úgy, hogy nála nagyobb már nincs.)



Az intervallum n részre osztásakor az egyes intervallumok lesznek a beírt, illetve a köré írt téglalapok egyik oldalai. Hosszuk:

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots,\ x_i - x_{i-1},\ \ldots,\ x_n - x_{n-1}.$$

Legyen az i-edik intervallumnak az a pontja, ahol legkisebb a függvényérték α_i, ahol legnagyobb a függvényérték β_i, és válasszuk a beírható téglalapok másik oldalának hosszát az α_i helyen

vett függvényértéknek, a köré írt téglalapok másik oldalát pedig a β_i helyen vett függvényértéknek. Ekkor a beírt téglalapok területének s_n összege:

$s_n = (x_1 - x_0)f(\alpha_1) + (x_2 - x_1)f(\alpha_2) + (x_3 - x_2)f(\alpha_3) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\alpha_n)$,

azaz, tömörebben leírva

$s_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\alpha_i)$. Ezt az összeget a felosztáshoz tartozó **alsó közelítő összeg**nek nevezzük.

A köré írt téglalapok területének összege

$S_n = (x_1 - x_0)f(\beta_1) + (x_2 - x_1)f(\beta_2) + (x_3 - x_2)f(\beta_3) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\beta_n)$,

azaz

$S_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\beta_i)$. Ezt az összeget a felosztáshoz tartozó **felső közelítő összeg**nek nevezzük.

Minden n-re (azaz tetszőleges felosztás esetén) $s_n \le T \le S_n$.

Ha a s_n és S_n sorozatoknak van közös határértéke, ha n tart végtelenbe és a leghosszabb részintervallum hossza tart a 0-hoz, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a; b]$ intervallumon integrálható.

Fontos kiemelni, hogy nem minden függvény integrálható. Például az alábbi Dirichlet-függvény nem az.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases} \quad x \in [0; 1].$$

Mivel minden tetszőlegesen kicsi intervallumban van racionális és irracionális szám is, így bármely felosztássorozat esetén, az f függvény minden részintervallumban felveszi minimumként a 0 és maximumként az 1 értéket. Ezért a felosztástól függetlenül $s_n = 0$ és $S_n = 1$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Bebizonyítható, hogy

Bármely $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény esetén, ha a felosztás finomításával a leghosszabb részintervallum hossza tart a 0-hoz, akkor az alsó közelítő összegek s_n sorozatának és a felső közelítő összegek S_n sorozatának mindig van határértéke, és e határértékek mindig megegyeznek. Tehát minden folytonos függvény integrálható.

Ezt a közös határértéket tekintjük az f függvény grafikonja és az x tengely közötti T terület mérőszámának az $[a; b]$ intervallumon.

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = T$.

Definíció

A közös $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ határértéket az f függvény $[a; b]$ intervallumra vonatkozó **határozott integráljának** nevezzük és így jelöljük:

$\int_a^b f(x)dx$. (Szavakban: *„határozott integrál a-tól b-ig f(x)dx"*.)

A jelölésben az $\int$-jel egy elnyújtott S betű, mely a latin summa (összeg) szó kezdőbetűjére utal. Ezt a jelet *Leibniz* (1646–1716) vezette be a XVII. sz. végén. A dx szimbólum arra utal, hogy az egyes intervallumokra eső téglalapok esetében a függvényértéket megszoroztuk a kérdéses intervallum hosszával, azaz az x változó két értékének különbségével (differenciájával). A jelölésben az „a"-t az integrál **alsó határának**, „b"-t pedig az integrál **felső határának** nevezzük.

E jelöléssel az előző leckében kiszámított területeket így írhatjuk:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \quad \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \quad \int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}.$$

Az $[a; b]$ intervallumon nemnegatív f függvény határozott integrálját a függvénygörbe és az x tengely közötti területtel azonosítottuk, és ezt felhasználva definiáltuk. A határozott integrál néhány fontos tulajdonsága.

1. Legyen c konstans. Ha az f függvény integrálható az $[a; b]$ intervallumban, akkor a $c \cdot f$ függvény is integrálható ezen az intervallumon és

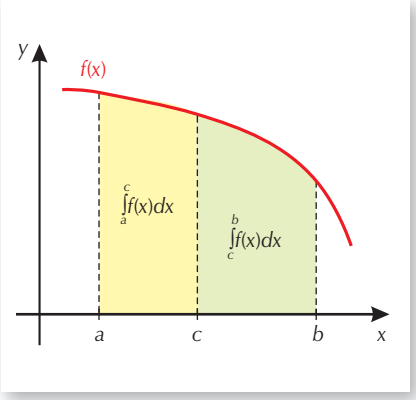
$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

E tulajdonság tehát azt mondja ki, hogy valamely c konstanssal szorzott függvény határozott integrálját megkaphatjuk, ha a függvény határozott integrálját megszorozzuk a c konstanssal.

2. Ha az $\int_a^b f(x)\,dx$ és $\int_a^b g(x)\,dx$ határozott integrálok léteznek, akkor az $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx$ határozott integrál is létezik és $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

E tulajdonság szerint két, ugyanazon a zárt intervallumon értelmezett függvény összegének (különbségének) határozott integrálja egyenlő e függvények határozott integráljának összegével (különbségével).

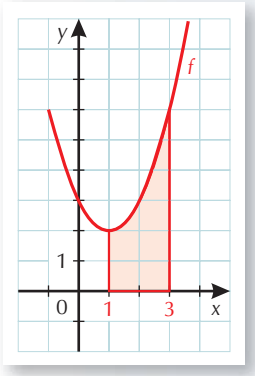
3. A határozott integrál geometriai tartalma alapján nyilvánvaló, hogy ha $c \in [a; b]$, akkor
$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. *(lásd ábra)*



4. Ugyancsak a határozott integrál geometriai jelentése alapján
$\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

1. példa Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 2x + 3$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt területet az [1; 3] intervallumon.

Megoldás Először ábrázoljuk a függvényt. $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$. A függvénygörbe tehát egy (normál) parabola, amelynek csúcspontja az (1; 2) pont.



Az alábbi határozott integrált kell kiszámítanunk: $\int_1^3 (x^2 - 2x + 3)\,dx$.

Az ismertetett szabályok szerint ez tagonként is integrálható.

$$\int_1^3 (x^2 - 2x + 3)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx - \int_1^3 2x\,dx + \int_1^3 3\,dx.$$

A három tagú összeg második tagjából – a megfelelő szabály szerint – a 2-es szorzó írható az integráljel elé, így azt kapjuk, hogy

$$\int_1^3 (x^2 - 2x + 3)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx - 2\cdot\int_1^3 x\,dx + \int_1^3 3\,dx.$$

Az első két tagot a 74. leckében kapott eredmények alapján így írhatjuk:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3},\quad \int_1^3 x\,dx = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}.$$

A harmadik tag egy olyan téglalap területe, melynek egyik oldala 2, a másik oldala pedig 3. Tehát a keresett terület: $\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} - 2\cdot\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + 2\cdot 3 = 9 - \frac{1}{3} - 8 + 6 = 6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.

Eddig olyan függvényekkel foglalkoztunk, amelyek a vizsgált $[a; b]$ intervallumban nemnegatív értékű függvények. Vajon mit mondhatunk az olyan függvények esetében, melyek a vizsgált $[a; b]$ intervallumban negatív értéket is felvesznek? Ehhez gondoljuk meg a következőket. Amikor a határozott integrál fogalmát értelmeztük, akkor a használt alsó és felső közelítő összegekben (a s_n-ben és a S_n-ben) szereplő téglalapok egyik oldala az intervallum

valamely $x_i - x_{i-1}$ részintervalluma volt, míg a másik oldal hossza az intervallum legkisebb (vagy legnagyobb) függvényértéke. Mármost, ha az $[a; b]$ intervallumban negatív értékű függvényt vizsgálunk, akkor e függvényértékek negatívok lesznek. Ebből következik, hogy ekkor a függvénygörbe és az x tengely által közbezárt terület mértéke negatív előjellel szerepel majd. Ezek szerint ha egy f folytonos függvénynek az $[a; b]$ intervallumon vannak negatív és pozitív részei is, akkor a $\int_a^b f(x)dx$-ben az x tengely „alatti" tartomány területe negatív előjellel szerepel, míg az x tengely „fölötti" tartomány területe pozitív. Természetesen:

A határozott integrál tulajdonságai negatív (nem pozitív) értékű függvényekre is igazak.

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki az $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt területet a $[2; 4]$ intervallumon!

2. E1 Adott az $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ függvény. Mekkora a függvénygörbe és az x tengely közötti terület a $[0; 3]$ intervallumon?

3. E1 Számítsuk ki az $f(x) = x^3 + 1$ függvény grafikonja, az x tengely, valamint az $x = 2$ egyenes által közbezárt tartomány területét!

4. E2 *a)* Bizonyítsuk be, hogy ha f páros függvény, akkor $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha f páratlan függvény, akkor $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1353/*a* és *b*, 1360, 1364.

76. NEWTON–LEIBNIZ-TÉTEL, HATÁROZATLAN INTEGRÁL

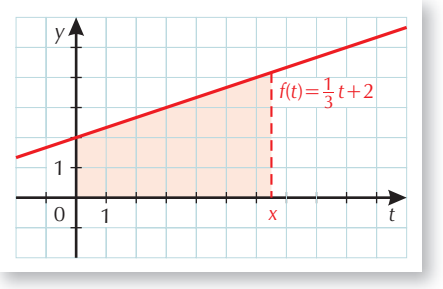
Tekintsük az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = \frac{1}{3}t + 2$ függvényt, és számítsuk ki a függvénygörbe és a t tengely közötti terület nagyságát a $[0; x]$ intervallumban, ahol $x > 0$.

A függvénygörbe és a t tengely közötti síkidom a $[0; x]$ intervallumon egy derékszögű trapéz. Ennek párhuzamos oldalai

$f(0) = 2$ és $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

A trapéz magassága pedig x. Ezek szerint a trapéz területe az x függvényében:

$$F(x) = \frac{\left(2 + \frac{1}{3}x + 2\right) \cdot x}{2} = \frac{x^2}{6} + 2x.$$



Ha most az $F(x) = \frac{x^2}{6} + 2x$ függvényben az x helyébe bármely $x > 0$ számot helyettesítünk, akkor megkapjuk a függvény grafikonja és a t tengely közötti területet a $[0; x]$ intervallumon. A megismert jelöléssel írhatjuk tehát, hogy

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{3}t + 2\right) dt = \frac{x^2}{6} + 2x.$$

Az $F(x)=\frac{x^2}{6}+2x$ függvényt az $f(t)=\frac{1}{3}t+2$ függvény **integrálfüggvényének** nevezzük. (Mivel $x>0$ esetén F a függvénygörbe és a t tengely közötti előjeles terület mérőszámát adja meg a $[0; x]$ intervallumon, ezért szokás az F függvényt **területfüggvénynek** is nevezni.)

A kapott F integrálfüggvény folytonos és differenciálható függvény és

$F'(x)=\frac{1}{3}x+2$ azaz $F'(x)=f(x)$.

Arra jutottunk, hogy – esetünkben – az integrálfüggvény differenciálható függvény, és deriváltja az x helyen megegyezik az $f(t)$ függvény x helyen vett helyettesítési értékével.

Nézzük meg ebből a szempontból a 74. leckében vizsgált $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ és $f(x)=x^3$ függvényeket. Arra jutottunk, hogy

$$\int_a^b x\,dx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2},\quad \int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3},\quad \int_a^b x^3\,dx=\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}.$$

A kapott eredményekből könnyen kiolvashatjuk az egyes függvényekhez tartozó területfüggvényeket az $a=0$ esetben:

ha $f(x)=x$, akkor $F(x)=\frac{x^2}{2}$,

ha $f(x)=x^2$, akkor $F(x)=\frac{x^3}{3}$,

ha $f(x)=x^3$, akkor $F(x)=\frac{x^4}{4}$.

E három eset vonatkozásában is hamar felfedezhetjük, hogy

ha $F(x)=\frac{x^2}{2}$, akkor $F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x=x=f(x)$,

ha $F(x)=\frac{x^3}{3}$, akkor $F'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$,

ha $F(x)=\frac{x^4}{4}$, akkor $F'(x)=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3=f(x)$.

E három esetben is azt látjuk, hogy a területfüggvény olyan függvény, melynek deriváltfüggvénye az integrálandó f függvény. Általában is kimondhatjuk:

Definíció

Ha az f függvény integrálható az $[a; b]$ intervallumon, akkor az

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

függvényt az f függvény **integrálfüggvényének** nevezzük ($x\in[a; b]$).

Mivel az integrál felső határa x, az f függvény változójaként más betűt kell használnunk, amire t a szokásos jelölés.

Tétel

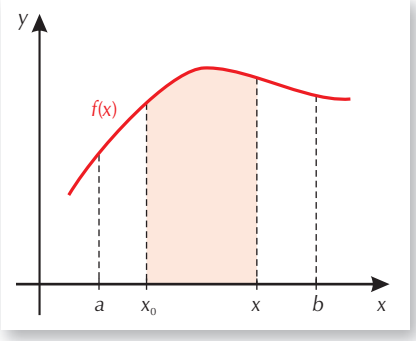
Ha f folytonos függvény az $[a; b]$ intervallumon, akkor az F integrálfüggvény differenciálható itt, és az $[a; b]$ intervallum minden x helyén $F'(x)=f(x)$.

Bizonyítás

A tétel vázlatos igazolását arra az esetre végezzük, amikor $f(x)>0$ az $[a; b]$ intervallum minden pontjában. Legyen $a<x_0<x<b$.

Ekkor az f függvény grafikonja alatti terület az $[a; x]$ intervallumon $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. A görbe alatti terület az $[a; x_0]$ intervallumon

$F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)\,dt$.



Ezek szerint

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

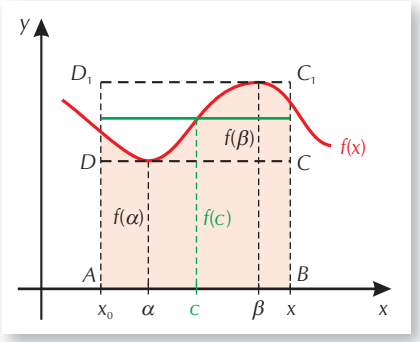
Mivel f folytonos függvény, ezért vannak olyan α és β helyek az $[x_0; x]$ intervallumban, ahol az $f(\alpha)$ függvényérték a legkisebb, az $f(\beta)$ függvényérték a legnagyobb. E függvényértékekkel képezzük az $[x_0; x]$ intevallum és az f függvény grafikonja közötti tartományba a beírt $ABCD$ és köré írt ABC_1D_1 téglalapokat *(lásd ábra)*. Ezek területe: $(x-x_0)\cdot f(\alpha)$, illetve $(x-x_0)\cdot f(\beta)$.

Nyilvánvaló, hogy $F(x)-F(x_0)$ e két terület közé esik, azaz

$(x-x_0)\cdot f(\alpha)\le F(x)-F(x_0)\le (x-x_0)\cdot f(\beta)$.

Mivel az f függvény folytonos, ezért minden $f(\alpha)$ és $f(\beta)$ közötti értéket felvesz valahol az $[x_0; x]$ intervallumon. Ezért biztosan van olyan $c\in[x_0; x]$ valós szám, melyre

$F(x)-F(x_0)=(x-x_0)\cdot f(c)$, azaz $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(c)$.



Mármost, ha $x\to x_0$, akkor $x_0\le c\le x$ miatt $c\to x_0$, így f folytonossága miatt

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(c)=f(x_0).$$

Arra jutottunk, hogy az F függvénynek az $x=x_0$ helyen van differenciálhányadosa, és ez egyenlő az f függvény $x=x_0$ helyen vett függvényértékével.

$F'(x_0)=f(x_0)$.

Definíció

A fenti tétel tehát kimondja, hogy az f folytonos függvény integrálfüggvénye az f-nek egy primitív függvénye.

Mivel egy konstans deriváltja 0, ezért, ha van az f függvénynek primitív függvénye, akkor végtelen sok van. Hiszen, ha F az f függvénynek egy primitív függvénye, akkor bármely c konstans esetén az $F+c$ függvény is primitív függvénye f-nek. Kimutatható, hogy

egy adott f függvény primitív függvényei csak egy hozzáadandó konstansban különbözhetnek egymástól.

Definíció

Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f függvény **határozatlan integráljának** nevezzük és így jelöljük:

$\int f(x)\,dx$.

(Szavakban: határozatlan integrál $f(x)\,dx$.)

Megjegyzés:
A határozatlan szó arra utal, hogy nem egy konkrét függvényt kapunk eredményül, hanem egy függvényosztályt. Ezzel szemben a határozott integrál esetében egy konkrét érték volt az eredmény.

A fenti tétel tehát kimondja, hogy az f folytonos függvény integrálfüggvénye az f-nek egy primitív függvénye. Vagyis

$\int_a^x f(t)dt=F(x)+c$, ahol c egy konstans. Határozzuk meg e konstans értékét! Ha $x=a$, akkor

$\int_a^a f(t)dt=F(a)+c=0$, ahonnan $c=-F(a)$. Ha $x=b$, akkor $\int_a^b f(t)dt=F(b)+c=F(b)-F(a)$.

Isaac Newton és *Gottfried Leibniz* egymástól függetlenül foglalkoztak ezzel a kérdéssel, és kimutatták a róluk elnevezett tételt.

Tétel

Newton–Leibniz-tétel (más néven Newton–Leibniz-formula):

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, ahol az F függvényre teljesül, hogy $F'(x) = f(x)$.

1. példa Számítsuk ki az $f(x) = x^3 + 8$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt tartomány területét a $[-2; 2]$ intervallumon!

Megoldás Az $f(x) = x^3 + 8$ függvénynek éppen -2-ben van zérushelye tehát az alábbi határozott integrált kell kiszámítanunk: $\int_{-2}^{2} (x^3 + 8)dx$. Alkalmazva a Newton–Leibniz-tételt, azt kapjuk, hogy

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 8)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2^4}{4} + 8 \cdot 2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + 8 \cdot (-2)\right] = \frac{16}{4} + 16 - \frac{16}{4} + 16 = 32 \text{ területegység.}$$

A határozott integrál kiszámításához tetszőleges primitív függvényt választhattunk volna az

$$\int (x^3 + 8)\,dx = \frac{x^4}{4} + 8x + c$$

halmazból. A legegyszerűbb választás nyilván a $c = 0$. Ha mást választanánk, természetesen ugyanez az eredmény jönne ki, hiszen a $+ c$ egyszer szerepelne pluszban és egyszer mínuszban, így a végeredményen nem változtat.

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat

a) $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x)dx$, *b)* $\int (2x^3 - x^2 + 2)dx$!

2. E1 Az $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ függvénynek melyik az a primitív függvénye, melynek grafikonja áthalad az origón?

3. E1 Az $f(x) = x^3 - 4x^2 + 11$ függvénynek melyik az a primitív függvénye, amelynek grafikonja áthalad a $P(-1; 2)$ ponton?

4. E1 Az $f(x) = 2x^2 + 1$ függvény grafikonja és az x tengely közötti terület a $[0; a]$ intervallumon $7a$ ($a > 0$). Számítsuk ki az a paraméter értékét!

5. E2 Mekkora az a paraméter értéke, ha $\int_a^{2a} x^2\,dx = 504$?

77. NÉHÁNY FÜGGVÉNY HATÁROZATLAN INTEGRÁLJA, TERÜLETSZÁMÍTÁS

Az előző leckék alapján most már könnyen meghatározhatjuk sok folytonos függvény határozatlan integrálját, és így e függvénygörbék és az x tengely közötti területet valamely $[a; b]$ intervallumra vonatkozóan. Nézzünk minderre néhány példát.

1. Legyen $f(x) = 2x^6$. Ekkor

$$\int 2x^6\,dx = \frac{2x^7}{7} + c, \text{ hiszen } \left(\frac{2x^7}{7} + c\right)' = 2 \cdot \frac{7x^6}{7} = 2x^6.$$

2. Legyen $f(x) = \sqrt{x}$, akkor

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c, \text{ hiszen } \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

3. Legyen $f(x)=\frac{2}{x^3}$. Ekkor

$$\int \frac{2}{x^3}\,dx=\int 2\cdot x^{-3}\,dx=2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+c=-\frac{1}{x^2}+c,\ \text{hiszen}\ (-x^{-2}+c)'=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}.$$

Általában: ha $f(x)=x^n$, $(n\neq -1)$, akkor

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ \text{hiszen}\ \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)'=\frac{(n+1)\cdot x^n}{n+1}=x^n.$$

4. Legyen $f(x)=\sin x$. Ekkor

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+c,\ \text{hiszen}\ (-\cos x+c)'=-(-\sin x)=\sin x.$$

5. Legyen $f(x)=\cos x$. Ekkor

$$\int \cos x\,dx=\sin x+c,\ \text{hiszen}\ (\sin x+c)'=\cos x.$$

A megismert elemi függvények határozatlan integráljai után nézzük meg a határozatlan integrál két fontos tulajdonságát, amelyeknek segítségével újabb függvényeket integrálhatunk.

Legyen $c\neq 0$ konstans. Ha az f függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a $c\cdot f$ függvénynek is van primitív függvénye és

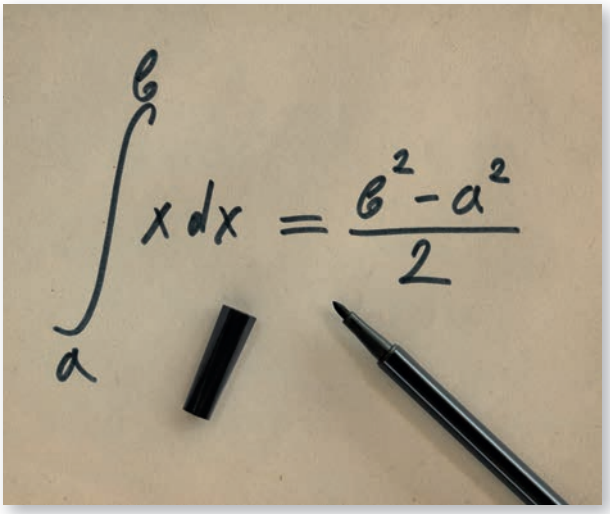
$$\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx.$$

Ha az f és g függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor $f\pm g$ függvénynek is és

$$\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$$

6. Legyen $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}+3\cdot\sqrt{x^5}}{x^2}$ $(x\neq 0)$. Az f függvény határozatlan integráljának meghatározásához először alakítsuk át a függvény kifejezését a hatványozás megfelelő azonosságainak a felhasználásával.

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}+3\cdot\sqrt{x^5}}{x^2}=\frac{x^{\frac{1}{3}}+3\cdot x^{\frac{5}{2}}}{x^2}=x^{\frac{1}{3}-2}+3\cdot x^{\frac{5}{2}-2}=x^{-\frac{5}{3}}+3\cdot x^{\frac{1}{2}}.$$



Tehát

$$\int x^{-\frac{5}{3}}+3\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx=\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx+\int 3\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{3}}\,dx+3\cdot\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+c_1+3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c_2=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{2}{3}}+3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+c_1+c_2=$$

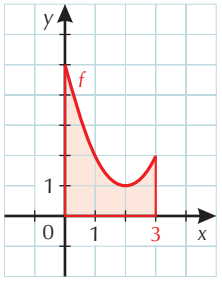
$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+2\cdot\sqrt{x^3}+c.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott függvény deriváltfüggvénye valóban f.

A fenti összefüggések alapján könnyen integrálhatunk $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ polinomfüggvényeket. Nézzünk ezekre néhány példát!

TERÜLETSZÁMÍTÁS A HATÁROZOTT INTEGRÁL SEGÍTSÉGÉVEL

1. példa Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 4x + 5$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt területet a $[0; 3]$ intervallumon.

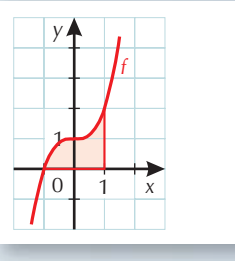


Megoldás $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Ábrázoljuk a függvény grafikonját a megadott intervallumon.

A keresett területet az alábbi határozott integrál adja meg.

$$\int_0^3 (x^2 - 4x + 5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^3 = \left(\frac{27}{3} - 18 + 15\right) - 0 = 6.$$

2. példa Mekkora az $f(x) = x^3 + 1$ függvény grafikonja és az x tengely közötti terület a $[-1; 1]$ intervallumon?



Megoldás Az f függvénynek $x = -1$-ben zérushelye van.

A keresett T terület:

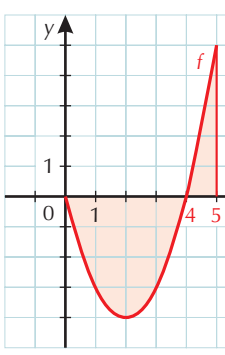
$$T = \int_{-1}^1 (x^3 + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 = 2.$$

3. példa Adott az $f(x) = x^2 - 4x$ függvény.

a) Számítsuk ki a $\int_0^5 f(x)\,dx$ határozott integrált!

b) Számítsuk ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület nagyságát a $[0; 5]$ intervallumon!

Megoldás *a)* Ábrázoljuk a megadott függvényt a $[0; 5]$ intervallumon. $f(x) = (x-2)^2 - 4$.



$$\int_0^5 (x^2 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^5 = \left(\frac{125}{3} - 50\right) - (0) = 41\frac{2}{3} - 50 = -8\frac{1}{3}.$$

Nem meglepő, hogy az eredmény negatív szám. Ugyanis a függvénygörbe egy darabja az adott intervallumon az x tengely alatt húzódik, így – mint korábban láttuk – a vizsgált tartomány x tengely alatti része a határozott integrálban negatív előjellel szerepel. Mivel ez a terület sejthetően nagyobb, mint az x tengely fölötti (pozitív) terület, ezért törvényszerűen negatív értéket kellett adnia a határozott integrálnak.

b) Ha a függvénygörbe és az x tengely közötti tartomány területére vagyunk kíváncsiak, akkor először meg kell határoznunk, hogy 0-tól meddig tart a görbe x tengely alatti területe. Ez a 0-tól különböző zérushelyig tart. Mivel a függvény zérushelyei $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, ezért először a $[0; 4]$ intervallumon kell integrálnunk a függvényt; vennünk kell a kapott – nyilván negatív – eredmény abszolút értékét, majd hozzáadni a függvény $[4; 5]$ intervallumra vonatkozó határozott integrálját. Tehát a keresett T terület:

$$T = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx\right| + \int_4^5 (x^2 - 4x)\,dx.$$

f primitív függvényét a feladat *a)* részében már meghatároztuk. Így a keresett terület:

$$T = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4\right| + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_4^5 = \left|\frac{64}{3} - 32\right| + \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{64}{3} - 32\right) = 10\frac{2}{3} - 8\frac{1}{3} - \left(-10\frac{2}{3}\right) =$$

$$= 21\frac{1}{3} - 8\frac{1}{3} = 13.$$

4. példa Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az alábbi határozott integrál értéke 0 legyen:

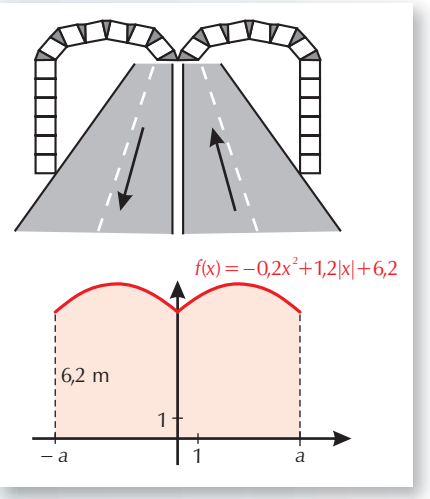
$$\int_0^a (x^2 - 5x)\,dx\,!$$

Megoldás $\int_0^a (x^2 - 5x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{5a^2}{2} - 0 = 0$, tehát

$\frac{a^3}{3} = \frac{5a^2}{2}$, azaz $2a^3 - 15a^2 = 0$, vagyis $a^2 \cdot (2a - 15) = 0$.

Innen $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

5. példa Egy svájci, 1240 m hosszú egyenes alagút bejáratának keresztmetszetét látjuk az ábrán egy koordináta-rendszerbe helyezve, ahol az egység mindkét tengelyen 1 m. Az alagút oldalfalai 6,2 m magasak. Az alagút tetejét jó közelítéssel írja le az $f(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}2|x| + 6{,}2$ függvény grafikonjának egy darabja. Egy svájci szabvány szerint egy közúti alagút szellőzőrendszerét úgy kell megtervezni, hogy 800 m^3-ként legyen egy szellőző. Hány szellőzőt kell tervezni ebbe az alagútba?



Megoldás Ki kell számítanunk az alagút légterének nagyságát. Ez az alagút keresztmetszetének és az alagút hosszának a szorzata. A keresztmetszetet úgy kaphatjuk meg ha integráljuk az $f(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}2x + 6{,}2$ függvényt a $[0; a]$ intervallumon, majd a kapott eredményt megszorozzuk 2-vel. Az a értékét a

$-0{,}2a^2 + 1{,}2a + 6{,}2 = 6{,}2$

egyenlet megoldásából kapjuk: $a = 6$.

$$\int_0^6 (-0{,}2x^2 + 1{,}2x + 6{,}2)\,dx = \left[-0{,}2 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}2 \cdot \frac{x^2}{2} + 6{,}2x\right]_0^6 =$$

$$= -0{,}2 \cdot \frac{6^3}{3} + 1{,}2 \cdot \frac{6^2}{2} + 6{,}2 \cdot 6 = -14{,}4 + 21{,}6 + 37{,}2 = 44{,}4.$$

Tehát az alagút teljes keresztmetszete: 88,8 m^2. Így az alagút légterének nagysága $1240 \cdot 88{,}8 = 110\,112$ m^3. Mivel 800 m^3-enként szükséges egy szellőztető, ezért összesen

$\frac{110\,112}{800} \approx 137{,}64$,

azaz 138 szellőztető berendezést kell tervezni.

Megjegyzés

A feladat megoldása gyakorlatilag egy páros függvény $[-a; a]$ intervallumon történő integrálását jelenti. Érdemes meggondolni a következőket.

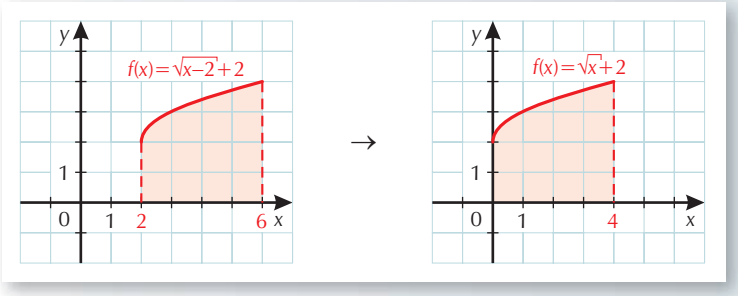
Ha f a $[-a; a]$ intervallumon folytonos páros függvény, akkor $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$.

Ha pedig f a $[-a; a]$ intervallumon folytonos páratlan függvény, akkor $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Gyakran előfordul, hogy a kérdéses függvénygörbe alatti területet nem tudjuk meghatározni, mert a megadott függvény egyetlen primitív függvényének a kiszámítására sincs módszerünk. Ekkor – sok esetben – egy ügyes függvénytranszformációt alkalmazva olyan függvényhez juthatunk, melynek primitív függvénye már könnyen meghatározható, s e transzformáció során a keresett terület nem változik. Nézzünk erre is egy példát.

6. példa (Kiegészítő anyag) Számítsuk ki az $f(x)=\sqrt{x-2}+2$ függvény görbéje és az x tengely közötti területet a $[2;\,6]$ intervallumon!

Megoldás Az alábbi határozott integrált kell kiszámítanunk: $\int_2^6(\sqrt{x-2}+2)\,dx$.



Sajnos azonban a $\sqrt{x-2}$ függvény primitív függvényének meghatározására – egyelőre – nincs módszerünk, így a következő ötlettel élhetünk: toljuk el a függvény grafikonját 2 egységgel negatív irányba az x tengellyel párhuzamosan. Ekkor az f függvény a $g(x)=\sqrt{x}+2$ függvénybe, az intervallum pedig a $[0;\,4]$ intervallumba megy át. Ezzel az eltolással a kérdéses terület nyilván nem változik.

Ezek szerint az eredeti határozott integrál helyett számolhatjuk a jóval egyszerűbb

$$\int_0^4(\sqrt{x}+2)\,dx$$

határozott integrált. Ennek egy primitív függvényét már könnyen meghatározhatjuk.

$$\int_0^4(\sqrt{x}+2)\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^4=\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+2x\right]_0^4=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{4^3}+8-0=\frac{16}{3}+8=\frac{40}{3}=13{,}333\ldots$$

FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int(x^2+\cos x)\,dx$; **V** b) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sin x\right)dx$.

2. E2 Igazoljuk az alábbi összefüggéseket!

a) $\int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx=-\operatorname{ctg}x+c$; b) $\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg}x+c$.

3. V Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int\sqrt[3]{x}\,dx$; b) $\int(x^3+\sqrt[5]{x^3})\,dx$; c) $\int\sqrt[n]{x^k}\,dx$.

4.V Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int\frac{x^3+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$; b) $\int\frac{(x+2)^2}{\sqrt[4]{x}}\,dx$; c) $\int(ax^2+bx+c)(bx+c)\,dx$.

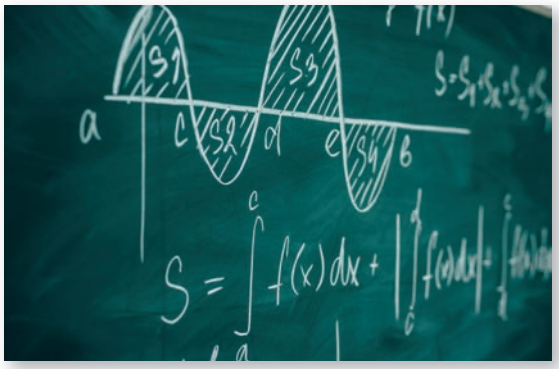
5.V Számítsuk ki az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület nagyságát a $[0;\,8]$ intervallumon!

6. E2 Legyen $f(x)=Ax+B$. Igazoljuk, hogy

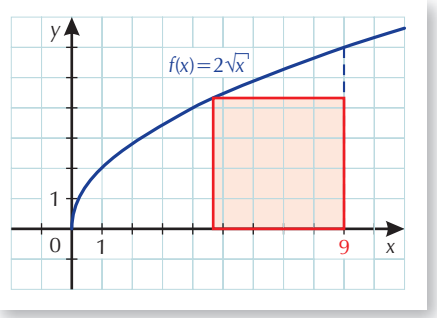
$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)!$$

7. E2 Legyen $f(x)=Ax^2+Bx+C$. Igazoljuk, hogy

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\cdot\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]!$$

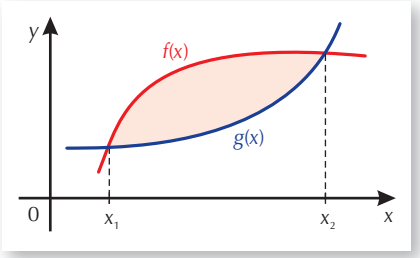


8. V Adott az $f(x) = 2\sqrt{x}$ függvény. A függvénygörbe, az x tengely és az $x = 9$ egyenes által közbezárt tartományba négyzetet írunk *(lásd a mellékelt ábrát)*. A négyzet területe hány százaléka a függvénygörbe, az $x = 9$ egyenletű egyenes és az x tengely által közbezárt területnek?



Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1329, 1331, 1333, 1335.

78. FÜGGVÉNYGÖRBÉK KÖZTI TERÜLET



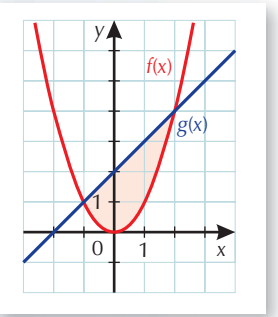
Az eddig megismert módszer nem csak arra ad lehetőséget, hogy egy folytonos függvény grafikonja és az x tengely közötti tartomány területét határozzuk meg egy adott $[a; b]$ intervallumon. Arra is használható, hogy két folytonos függvény görbéje által közbezárt terület nagyságát kiszámítsuk. Ebben a fejezetben erre mutatunk néhány példát.

Legyen $f(x) \geq g(x) \geq 0$ egy-egy folytonos függvény *(lásd a mellékelt ábrát)*, és határozzuk meg a két függvénygörbe által közbezárt terület nagyságát.

A kérdéses terület kiszámításához először meg kell határoznunk a két grafikon metszéspontjainak x koordinátáit, hiszen ezek lesznek a kiszámítandó integrálok határai. Ha az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásai x_1 és x_2, akkor a keresett T terület az $[x_1; x_2]$ intervallumon az f és a g függvénygörbék alatti területek különbsége.

$$T = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,dx.$$

1. példa Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x + 2$ függvények grafikonjai által közbezárt területet!



Megoldás Először ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két függvényt.

Az integrál határait az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásai adják.

$x^2 = x + 2$, azaz $x^2 - x - 2 = 0$.

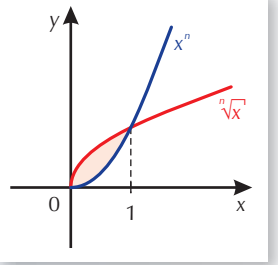
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Ezek szerint az alábbi határozott integrált kell kiszámítanunk:

$$\int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{27}{6} = 4{,}5.$$

2. példa Legyen $n > 2$ egész szám. Mekkora az $f(x) = \sqrt[n]{x}$ és $g(x) = x^n$ függvények grafikonjai által közbezárt terület ($x \geq 0$)?



Megoldás Először oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet. $\sqrt[n]{x} = x^n$ mindkét oldalt n-edik hatványra emelve

$x = x^{n^2}$, azaz $x^{n^2} - x = 0$, vagyis $x \cdot (x^{n^2-1} - 1) = 0$.

Innen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Tehát az alábbi határozott integrált kell kiszámítanunk:

$$\int_0^1 \sqrt[n]{x}\,dx - \int_0^1 x^n\,dx = \int_0^1 (\sqrt[n]{x} - x^n)\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{n}} - x^n\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{1+n}{n}}}{\frac{n+1}{n}} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[\frac{n}{n+1}\cdot\sqrt[n]{x^{1+n}} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - 0 = \frac{n-1}{n+1}.$$

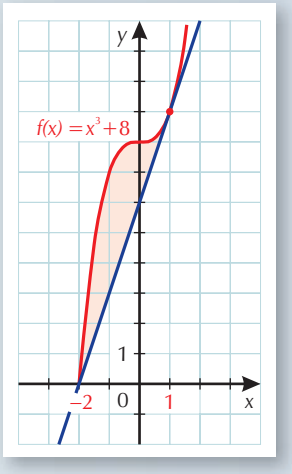
3. példa Adott az $f(x) = x^3 + 8$ függvény. Számítsuk ki az f grafikonja és annak $x = 1$ helyhez tartozó érintője által közbezárt területet!

Megoldás Az $f(x) = x^3 + 8$ függvény zérushelye $x^3 + 8 = 0$, azaz $x^3 = -8$, ahonnan $x = -2$.

Meg kell határoznunk az $x = 1$ helyhez tartozó érintőt. A függvényérték az $x = 1$ helyen $f(1) = 1 + 8 = 9$, tehát a függvénygörbe $P(1; 9)$-beli érintőjéről van szó. Az érintő meredekségét az f függvény deriváltja adja meg az $x = 1$ helyen. $f'(x) = 3x^2$, tehát az érintő m meredeksége: $m = 3$. Ezzel az érintő egyenlete:

$y - 9 = 3 \cdot (x - 1)$, azaz $y = 3x + 6$.

Észrevehetjük, hogy ennek a függvénynek ugyancsak $x = -2$-ben zérushelye van, tehát ebben a pontban metszi egymást a két grafikon. Ezek után már elkészíthetjük a szükséges ábrát.

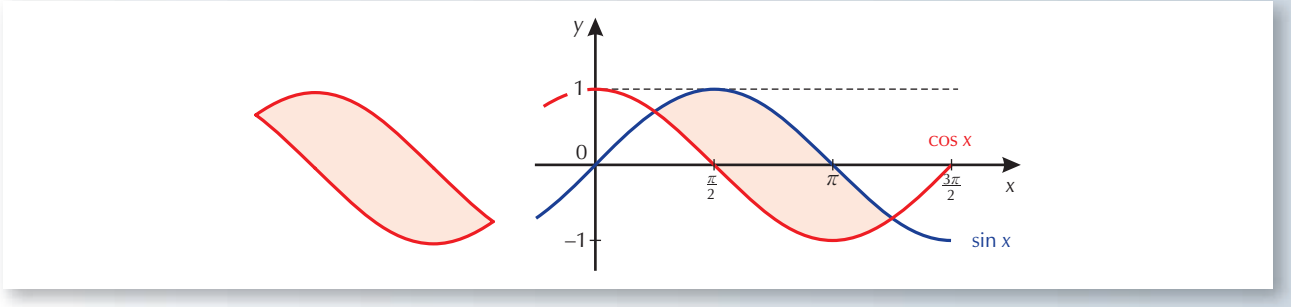


A keresett területet az alábbi módon számíthatjuk ki:

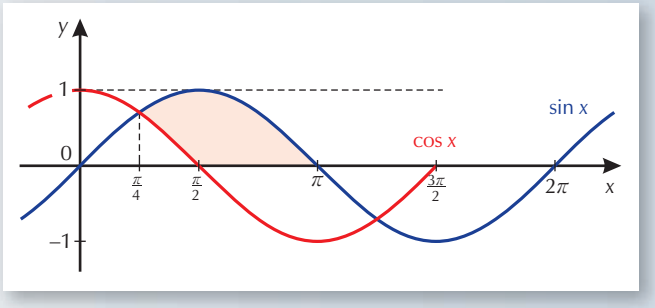
$$\int_{-2}^1 (x^3 + 8)\,dx - \int_{-2}^1 (3x + 6)\,dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4) = \frac{3}{4} - (-6) = \frac{27}{4}.$$

4. példa Az ábrán egy biztosítótársaság logóját láthatjuk. Ez a geometriai alakzat a sin x és cos x függvények görbéi közötti síkidom két szomszédos metszéspont között. Mekkora a logó területe, ha a koordinátatengelyeken az egység 3 cm?



Megoldás Az nyilvánvaló, hogy a kérdéses területet az x tengely felezi. Elegendő tehát az x tengely fölötti területet kiszámítanunk, majd a kapott eredményt megszorozni 2-vel. Mivel a sin x = cos x egyenlet megoldása $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (ahol $k \in \mathbf{Z}$, esetünkben vehetünk $k = 0$-t), ezért a keresett T területet úgy kapjuk, hogy a sin x függvény $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ intervallumra vonatkozó határozott integráljából kivonjuk a cos x függvény $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra vonatkozó határozott integrálját.



$$T=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

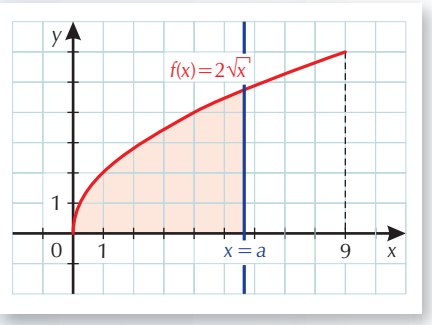
$$=\left(-\cos\pi-\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,.$$

Tehát a logó területe $2\sqrt{2}$ területegység. Mivel az egység mindkét tengelyen 3 cm, így a terület $2\sqrt{2}\cdot 9\approx 25{,}46$ (cm^2).

5. példa (Kiegészítő anyag) Adott a [0; 9] intervallumon értelmezett $f(x)=2\sqrt{x}$ függvény. Az $x=a$ egyenes felezi a függvénygörbe és az x tengely által közbezárt területet. Határozzuk meg az a paraméter értékét!

Megoldás Először számítsuk ki a függvénygörbe és az x tengely közötti területet a [0; 9] intervallumon.

$$\int_0^9 2\sqrt{x}\,dx=\int_0^9 2x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^9=\left[\frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3}\right]_0^9=\frac{4}{3}\cdot 27-(0)=36.$$



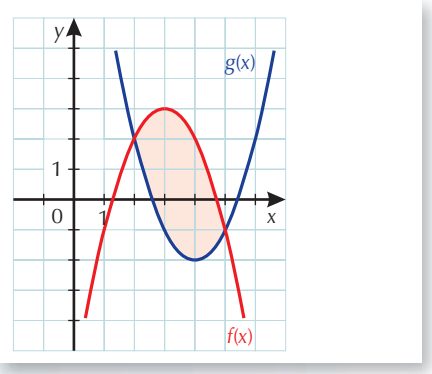
Ezek szerint írhatjuk

$$\int_0^a 2\sqrt{x}\,dx=18,\text{ tehát }\left[\frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3}\right]_0^a=18,$$

$$\frac{4}{3}\cdot\sqrt{a^3}=18,\text{ ahonnan }\sqrt{a^3}=\frac{27}{2},\text{ innen pedig }a=\frac{9}{\sqrt[3]{4}}\approx 5{,}67.$$

6. példa Számítsuk ki az $f(x)=-x^2+6x-6$ és a $g(x)=x^2-8x+14$ függvények görbéi által közbezárt területet!

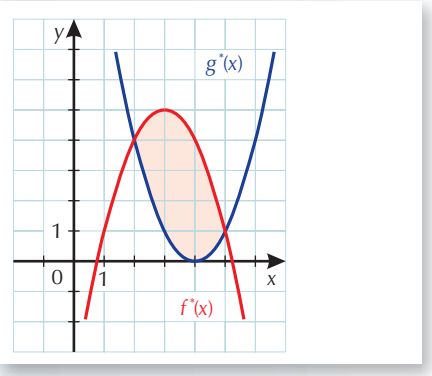
Megoldás Mindenekelőtt ábrázoljuk a két függvény grafikonját.



$f(x)=-(x-3)^2+3$, $g(x)=(x-4)^2-2$.

A keresett terület kiszámítását megnehezíti az, hogy a kérdéses tartomány egy része az x tengely alatt van, egy része pedig az x tengely fölött. Így a két görbe metszéspontjainak kiszámítása mellett várhatóan még a görbéknek az x tengellyel való metszéspontjait is ki kell számítani – ezek várhatóan irracionális számok –, majd ezek után négy különböző integrált kellene meghatároznunk irracionális határok között. Ez rendkívül hosszadalmas számolást igényelne. Ha azonban egy alkalmas függvénytranszformációt alkalmazunk, vagyis egy olyan eltolást, mely mindkét görbét átviszi az x tengely fölé, akkor elkerülhetjük ezt a kényelmetlenséget, és jóval egyszerűbb úton jutunk el a keresett területhez.

Toljuk el mindkét grafikont az y tengellyel párhuzamosan 2 egységgel pozitív irányba. Ekkor az f és g függvények az alábbi függvényekbe mennek át:



$f^*(x)=-x^2+6x-4$ és $g^*(x)=x^2-8x+16$.

Az eredeti grafikonok által közbezárt terület nyilván megegyezik az új grafikonok által közbezárt területtel. Az $f^*(x)=g^*(x)$ egyenlet megoldásai adják a két görbe közös pontjait; ezek lesznek majd az integrálok határai.

$-x^2+6x-4=x^2-8x+16$, azaz $0=x^2-7x+10$,

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2},\qquad x_1=2,\ x_2=5.$$

A keresett T területet tehát az alábbi módon kapjuk:

$$T = \int_2^5 (-x^2 + 6x - 4)\,dx - \int_2^5 (x^2 - 8x + 16)\,dx = \int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20)\,dx =$$

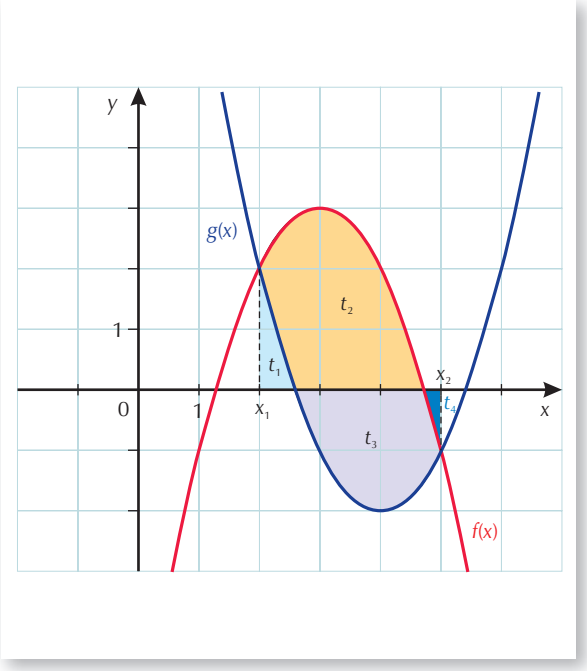
$$= \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 20x\right]_2^5 = \left(-\frac{250}{3} + 175 - 100\right) - \left(-\frac{16}{3} + 28 - 40\right) = \left(-\frac{25}{3}\right) - \left(-\frac{52}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9.$$

Megjegyzés:

Meggondolható, hogy az x tengely alatti rész igazából nem zavarta volna meg a számításunkat, hiszen valójában a különbségfüggvényt integráltuk. Ezt mindegy, hogy az eredeti vagy az új függvényekből számoltuk, hiszen $f - g = f^* - g^*$. Ez a függvény pedig végig nemnegatív az adott intervallumon, így nincs probléma az előjellel.

Kicsit részletesebben megnézve láthatjuk, hogy a t_1 terület pozitív előjellel szerepel mindkét függvény határozott integrálja esetén, tehát a kivonásnál kiesik (ahogy a nemnegatív értékű függvényeknél meg is szoktuk). A t_2 terület pozitív előjellel szerepel az f határozott integráljában, a t_3 negatív előjellel a g-ében, de ezt kivonjuk, tehát végeredményben megkapjuk $t_2 + t_3$ területet. Végül pedig a t_4 terület negatív előjellel szerepel mindkét integrálban, tehát a kivonásnál ez is kiesik. Így látható, hogy az eredeti függvények különbségének integrálásával is helyes eredményre jutottunk volna. (Ugyanígy járhattunk volna el a 4. példában is.)

Tehát f és g előjele nem befolyásolja a számolást, csak a két függvény közti reláció számít.



FELADATOK

1. E1 Számítsuk ki az $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, a $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ függvények grafikonja, valamint az x tengely és az y tengely által közbezárt tartomány területét!

2. E1 Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 8x + 12$ és a $g(x) = -x + 6$ függvények grafikonjai által közbezárt tartomány területét!

3. E1 Mekkora a területe az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja és az x tengely közötti területnek a $[0; \pi]$ intervallumon?

4. E2 Írjuk fel az $f(x) = \cos x$ függvény érintőjének egyenletét az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen! Számítsuk ki az érintő, a függvénygörbe, valamint az y tengely által határolt tartomány területét!

5. V Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{|x|}$ és a $g(x) = -x^2 + 2$ függvények grafikonjai által közbezárt tartomány területét!

6. V Egy egyenes áthalad a $P(8; 6)$ ponton. Ez az egyenes felezi az $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$ függvény grafikonja és az x tengely közötti területet a $[0; 8]$ intervallumon. Adjuk meg az egyenes egyenletét!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1365–1368, 1379, 1382, 1393.

79. NÉHÁNY INTEGRÁLÁSI MÓDSZER (Kiegészítő anyag)

Az előző leckékben polinomfüggvények és trigonometrikus függvények primitív függvényeinek meghatározásával jutottunk el a keresett határozott vagy határozatlan integrálokhoz. Egy primitív függvények meghatározása sok esetben nem olyan egyszerű feladat, mint egy differenciálható függvény deriváltjának meghatározása. Egy függvény differenciálhányadosának meghatározása – az ismert szabályok alkalmazásával – könnyen algoritmizálható. De ez nem mondható el a primitív függvények keresésére. Sok esetben különböző ötletekre, algebrai „fogásokra” van szükség, hogy megtaláljuk egy adott folytonos függvényhez a primitív függvényeit. Sőt léteznek olyan folytonos függvények is, amelyeknek biztosan létezik primitív függvénye, de még senki nem találta meg azt. Illetve olyan is, aminek bizonyíthatóan nincs algebrai formulával felírható alakja, mint például a valószínűségszámításban fontos Gauss-görbe. Ebben a leckében néhány ötlettel élve bemutatunk egy-két függvénytípust, és azok határozatlan integrálját.

AZ $f(ax + b)$ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLJA

Ha olyan összetett függvény primitív függvényét keressük, melynél a belső függvény elsőfokú, akkor a következőképpen járhatunk el. Legyen az f függvény egy primitív függvénye F, azaz $F'(x) = f(x)$. Ekkor

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c.$$

Ugyanis $\left(\frac{F(ax+b)}{a} + c\right)' = \frac{1}{a} \cdot (F(ax+b)') = \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$.

1. példa Határozzuk meg a most ismertetett módszerrel a $\int \sin 5x\,dx$ határozatlan integrált!

Megoldás Mivel most $ax + b = 5x$, így $\int \sin 5x\,dx = -\frac{\cos 5x}{5} + c$.

2. példa Mivel egyenlő $\int \sqrt{3x-5}\,dx$?

Megoldás Esetünkben $ax + b = 3x - 5$. Ezek szerint

$$\int \sqrt{3x-5}\,dx = \frac{(3x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} + c = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(3x-5)^3} + c.$$

AZ $f^n(x) \cdot f'(x)$ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLJA

Induljunk ki az összetett függvény deriválási szabályából, amely szerint $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ezért ha a $g(u) = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ függvénybe beírjuk az $f(x)$ belső függvényt, akkor ennek deriváltja

$(g(f(x)))' = \frac{(n+1) \cdot f^n(x)}{n+1} \cdot f'(x) = f^n(x) \cdot f'(x)$. Tehát

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \quad (n \neq -1).$$

Nézzünk ezen integráltípus alkalmazására is néhány példát.

3. példa Számítsuk ki az $\int \sqrt{x-2}\,dx$ határozatlan integrált!

Megoldás A $f(x)=x-2$ függvény deriváltja $f'(x)=1$. Ezek szerint az integrált írhatjuk az alábbi módon:

$\int 1\cdot(x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

Erről könnyen leolvasható, hogy

$\int f'(x)\cdot f^{\frac{1}{2}}(x)\,dx$.

Az előzőek szerint ennek határozatlan integrálja

$$\int f'(x)\cdot f^{\frac{1}{2}}(x)\,dx=\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x-2)^3}+c.$$

4. példa Számítsuk ki az $f(x)=\sqrt{2x-6}$ függvény görbéje, és az x tengely által közbezárt területet a $[3;\,11]$ intervallumon!

Megoldás A függvény értelmezési tartománya: $x\geq 3$.

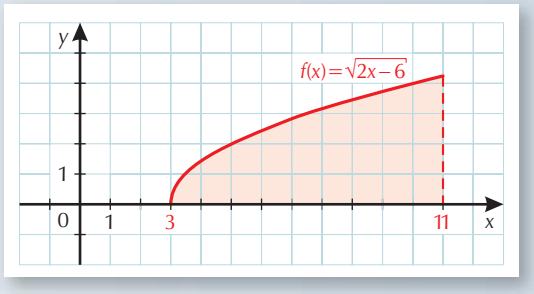
A keresett területet az alábbi határozott integrál értéke adja: $\int_3^{11}\sqrt{2x-6}\,dx$. A $h(x)=2x-6$ függvény deriváltja: $h'(x)=2$.

Ezek szerint célszerű az integrált átalakítani az alábbi módon:

$$\int_3^{11}\sqrt{2x-6}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_3^{11}2\cdot\sqrt{2x-6}\,dx.$$

A kapott alakban már felismerhetjük az éppen most vizsgált típust. A keresett terület:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_3^{11}2\cdot\sqrt{2x-6}\,dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-6)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^{11}=\left[\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x-6)^3}\right]_3^{11}=\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{16^3}\right)-0=\frac{1}{3}\cdot 64=21\frac{1}{3}.$$



5. példa Számítsuk ki a következő határozatlan integrált: $\int \sin 2x\cdot\cos^5 x\,dx$.

Megoldás $\sin 2x\cdot\cos^5 x=2\sin x\cos^6 x$. Ezzel az átalakítással

$\int \sin 2x\cos^5 x\,dx=2\cdot\int \sin x\cos^6 x\,dx$.

Mivel $(\cos x)'=-\sin x$, ezért

$$\int \sin 2x\cos^5 x\,dx=2\cdot\int \sin x\cos^6 x\,dx=-2\cdot\int -\sin x\cos^6 x\,dx=-\frac{2\cos^7 x}{7}+c.$$

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

Elevenítsük fel a szorzatfüggvényekre vonatkozó differenciálási szabályt. Ha az f és g függvények differenciálható függvények, akkor az $f\cdot g$ függvény deriváltja: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

Integráljuk most az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor – a c konstanstól eltekintve – azt kapjuk, hogy

$\int (f\cdot g)'=\int f'\cdot g+\int f\cdot g'$, azaz $f\cdot g=\int f'\cdot g+\int f\cdot g'$ vagy kicsit átrendezve

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Ha tehát olyan szorzatfüggvényt kell integrálnunk, melynek egyik tényezőjéről tudjuk, hogy mely függvénynek a deriváltja (azaz ismerjük egy primtív függvényét), akkor a másik tényező deriváltját felhasználva egy másik – sok esetben jóval egyszerűbb – integrálra vezethetjük vissza. Ezt az eljárást **parciális integrálásnak** nevezzük.

6. példa Számítsuk ki az $\int x \cdot \sin x \, dx$ határozatlan integrált!

Megoldás Legyen $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = x$. Ekkor
$f(x) = -\cos x + c$ és $g'(x) = 1$.
Ezzel a parciális integrálás formulája szerint
$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x - \int -1 \cdot \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c.$
Ellenőrzésképpen deriváljuk a kapott eredményt.
$(-x \cdot \cos x + \sin x + c)' = -\cos x + (-\sin x)(-x) + \cos x = -\cos x + x \cdot \sin x + \cos x = x \cdot \sin x.$

7. példa Számítsuk ki az $\int \sin^2 x \, dx$ határozatlan integrált!

Megoldás Írjuk a $\sin^2 x$-et $\sin x \cdot \sin x$ alakban, így a $\int \sin x \cdot \sin x \, dx$ integrált kell meghatároznunk. Legyen $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = \sin x$. Ekkor
$f(x) = -\cos x + c$ és $g'(x) = \cos x$
$\int \sin x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx =$
$= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 - \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx.$
Arra jutottunk, hogy
$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$, ahonnan
$2 \cdot \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x$, tehát
$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\cos x \cdot \sin x + x}{2} + c.$
Ellenőrzésképpen deriváljuk a kapott eredményt.
$\left(\frac{-\cos x \cdot \sin x + x}{2} + c\right)' = \frac{1}{2} \cdot (-\cos x \cdot \sin x + x)' = \frac{1}{2} \cdot (\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot (-\cos x) + 1) =$
$= \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x + 1) = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 x - 1 + \sin^2 x + 1) = \frac{2 \sin^2 x}{2} = \sin^2 x.$

8. példa Sokszor találkozhatunk olyan függvénnyel, amely a most ismertetett három módszer közül akár mindhárom módszerrel is integrálható. Nézzünk erre egy tanulságos példát.
Keressük meg az $f(x) = \sin 2x$ függvény határozatlan integrálját!

Megoldás Az **első módszer** közvetlenül alkalmazható, hiszen olyan összetett függvényről van szó, melynek belső függvénye lineáris. Így a keresett határozatlan integrál
$\int \sin 2x = -\frac{\cos 2x}{2} + c.$
A **második módszert** is alkalmazhatjuk:
$\int \sin 2x \, dx = \int 2 \sin x \cdot \cos x \, dx = 2 \int \sin x \cdot \cos x \, dx$
Legyen $\sin x = f^n(x)$ (természetesen $n = 1$); ekkor $\cos x = f'(x)$. Így a második módszer szerint
$\int \sin 2x \, dx = 2 \int \sin x \cdot \cos x \, dx = 2 \cdot \frac{\sin^2 x}{2} + c_1 = \sin^2 x + c_1$
Első ránézésre meglepő, hogy „más” eredményt kaptunk, mint az előző módszernél. Vajon ennek mi az oka? Alakítsuk át az előző módszerrel kapott eredményt:

$$-\frac{\cos 2x}{2}+c=-\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2}+c=-\frac{1-2\sin^2 x}{2}+c=\sin^2 x-\frac{1}{2}+c$$

Ha ezt összehasonlítjuk a második módszerrel kapott eredménnyel, rögtön látszik, hogy ezek csak egy konstansban különböznek egymástól, így valóban mindkét eredmény a sin 2*x* függvénynek egy-egy primitív függvénye, hiszen mindkettőnek a deriváltja sin 2*x*.

A **harmadik módszer:** Végül az $f(x)=\sin 2x$ határozatlan integráljának megkereséséhez alkalmazhatjuk a parciális integrál módszerét is. Legyen $f'(x)=\cos x$ és $g(x)=\sin x$. Ekkor $f(x)=\sin x+c$ és $g'(x)=\cos x$. Ezekkel

$$\int \sin 2x\,dx=2\int \sin x\cdot\cos x\,dx=2\left[\sin^2 x-\int \sin x\cdot\cos x\,dx\right]=2\sin^2 x-2\int \sin x\cdot\cos x\,dx.$$

Innen átrendezve

$$4\int \sin x\cdot\cos x\,dx=2\sin^2 x+c,\qquad \text{azaz}\qquad \int 2\sin x\cdot\cos x\,dx=\sin^2 x+\frac{c}{2}.$$

FELADATOK

1. V Az $f(ax+b)$ típusú függvények integrálására vonatkozó szabályt alkalmazva számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

a) $\int \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)dx$; *b)* $\int \frac{1}{\sqrt[4]{6x+1}}\,dx$.

2. V Számítsuk ki a következő határozott integrált: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx$!

3. V Számítsuk ki a következő határozott integrált: $\int_0^{2} \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$!

4. V Határozzuk meg az *a* paraméter értékét, ha $\int_1^{a} \sqrt{4x-4}\,dx=10\frac{2}{3}$!

5. V Az $f^n(x)\cdot f'(x)$ típusú függvények integrálására vonatkozó szabályt alkalmazva számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

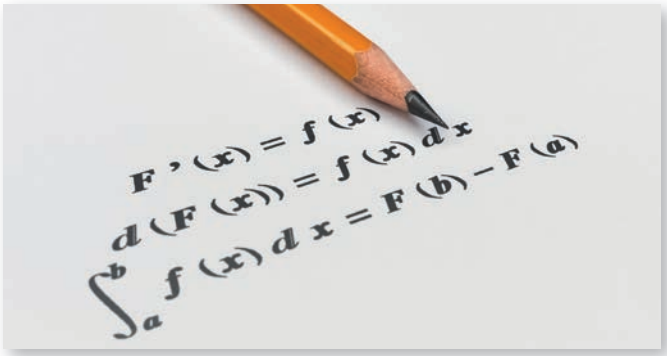
a) $\int \sin 2x\cdot\cos^3 x\,dx$; *b)* $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2+5}}\,dx$; *c)* $\int \sin^3 x\,dx$.

6. V A parciális integrálás módszerét alkalmazva adjuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját!

a) $\int 2x\cdot\cos x\,dx$; *b)* $\int 4\sin 2x\,dx$; *c)* $\int x^2\cdot\sin x\,dx$.

7. V Adott az $x\geq 0$ valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^2-2x+c$ függvény, ahol $c>1$ egész szám. Legyen *g* az a függvény, melynek grafikonja az *f* függvény grafikonjának az *y* tengellyel alkotott közös pontjára vonatkozó tükörképe. Határozzuk meg a *c* paraméter értékét úgy, hogy legyen olyan $k>0$ egész szám, melyre

$$\int_{-2}^{0} g(x)\,dx=k\cdot\int_0^{2} f(x)\,dx!$$



Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1337, 1338, 1340, 1341.

80. AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI (Kiegészítő anyag)

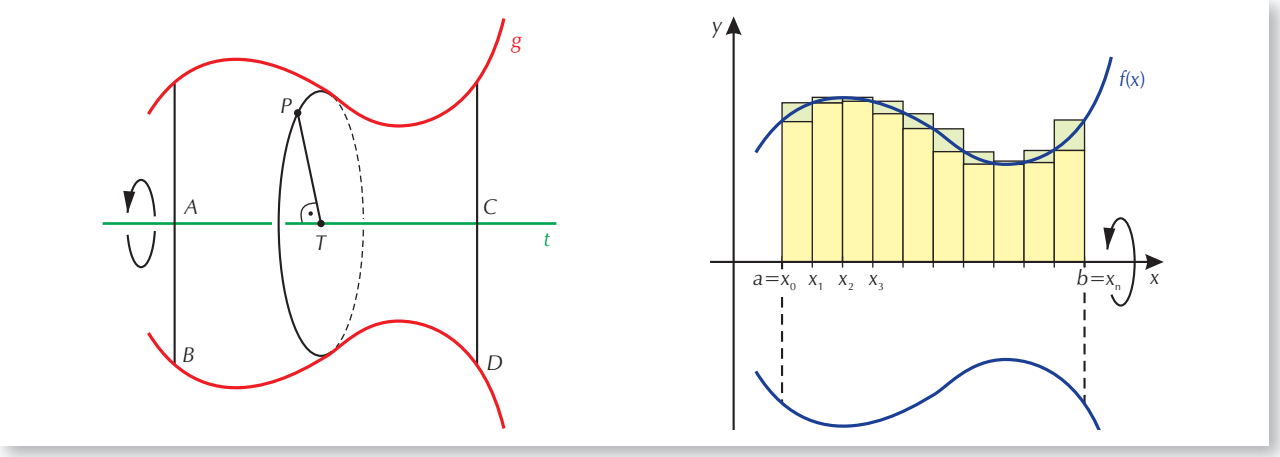
Az integrálszámítást nem csak terület kiszámítására, hanem más fontos problémák megoldására is használhatjuk. Ezekből az alkalmazásokból vizsgálunk meg néhányat ebben a leckében.

FORGÁSTEST TÉRFOGATÁNAK KISZÁMÍTÁSA

Legyen adott egy f függvény grafikonja. Ha ezt térben megforgatjuk az x tengely körül, akkor egy **forgásfelületet** kapunk. Ha mindezt egy $[a; b]$ intervallumon tesszük meg, akkor egy korlátos alakzatot, **forgástestet** kapunk. Mekkora lehet ennek a testnek a térfogata?

Használjuk azt a gondolatmenetet, amit a fejezet első leckéjében is alkalmaztunk. Osszuk fel az $[a; b]$ intervallumot n egyenlő részre; legyenek az osztópontok

$a = x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$.



Ezután írjunk minden $x_i - x_{i-1}$ intervallum és a függvénygörbe által határolt tartományba beírható és köré írható téglalapokat. Legyen az i-edik intervallumnak az a pontja, ahol legkisebb a függvényérték α_i, ahol legnagyobb a függvényérték β_i, és válasszuk a beírható téglalapok másik oldalát a α_i helyen vett függvényértéknek, a köré írt téglalapok másik oldalát pedig az β_i helyen vett függvényértéknek. Ha most mindezt körbeforgatjuk az x tengely körül, akkor a beírt és köré írt téglalapok egy-egy beírt hengerbe, illetve köré írt hengerbe mennek át. A beírt hengerek sugara $f(\alpha_i)$, a köré írt hengerek sugara $f(\beta_i)$, míg a hengerek magassága $x_i - x_{i-1}$. Ezek szerint a forgatáskor keletkező beírt hengerek térfogatának s_n összege:

$$s_n = f^2(\alpha_1)\pi(x_1 - x_0) + f^2(\alpha_2)\pi(x_2 - x_1) + \ldots + f^2(\alpha_n)\pi(x_n - x_{n-1}),$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f^2(\alpha_i)\pi(x_i - x_{i-1}).$$

A köré írt hengerek térfogatának S_n összege

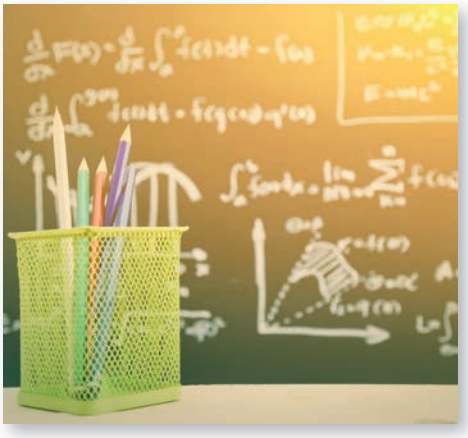
$$S_n = f^2(\beta_1)\pi(x_1 - x_0) + f^2(\beta_2)\pi(x_2 - x_1) + \ldots + f^2(\beta_n)\pi(x_n - x_{n-1}),$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f^2(\beta_i)\pi(x_i - x_{i-1}).$$

A forgástest V térfogatára (ha létezik) nyilvánvalóan $s_n \le V \le S_n$.

Ha a felosztást finomítjuk (azaz növeljük n-t), akkor szemléletünk szerint s_n növekszik, S_n csökken, vagyis a V térfogatot egyre jobban beszorítjuk két valós szám közé. Kimutatható, hogy ha a kiindulási f függvényünk folytonos, akkor $n \to \infty$ esetén s_n és S_n határértékei léteznek és megegyeznek, így ezt a közös határértéket rendeljük térfogatként a vizsgált forgástesthez.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = V.$$



Az f folytonos függvény grafikonjának az x tengely körüli körbeforgatásakor keletkező forgástest térfogata az $[a; b]$ intervallumon:

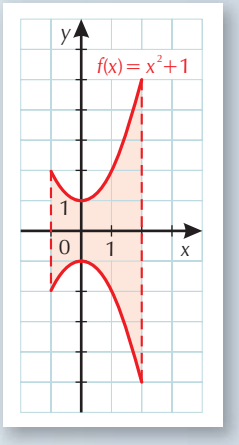
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

1. példa Forgassuk körbe az $f(x) = x^2 + 1$ függvény grafikonját a $[-1, 2]$ intervallumon, és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát!

Megoldás Az előbbiek szerint a keresett V térfogat:

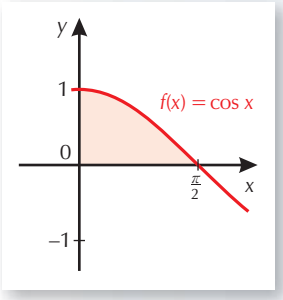
$$V = \pi \int_{-1}^{2} (x^2+1)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{2} (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right)\right] = \pi\left(\frac{206}{15} + \frac{28}{15}\right) = \frac{234\pi}{15} \approx 49.$$



2. példa Számítsuk ki az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba eső részének elforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

Megoldás Az $f(x) = \cos x$ függvénynek $\frac{\pi}{2}$-ben zérushelye van. Az alábbi integrált kell kiszámítanunk:



$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx.$$

Az $f(x) = \cos^2 x$ függvény egy primitív függvényét a parciális integrálás módszerével tudjuk meghatározni. Ha $h'(x) = \cos x$ és $g(x) = \cos x$, akkor $h(x) = \sin x + c$ és $g'(x) = -\sin x$. Tehát

$$\int \cos x \cos x\,dx = \sin x \cos x - \int -\sin^2 x\,dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cos x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx.$$

Tehát

$2\int \cos^2 x\,dx = x + \sin x \cos x$, ahonnan

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c.$$

Ezek szerint a forgástest keresett térfogata:

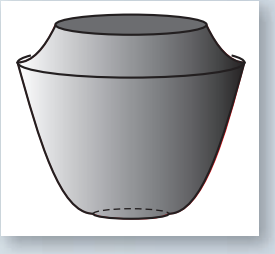
$$V = \pi\left[\frac{x + \sin x \cos x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \left(\frac{0 + \sin 0 \cos 0}{2}\right)\right].$$

$$V = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$$

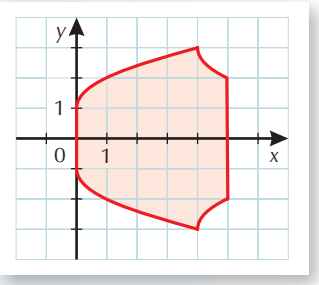
3. példa Egy kancsót látunk az ábrán, melynek ívét jó közelítéssel írja le az alábbi f függvény.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1, & \text{ha } 0 \le x \le 4, \\ -\sqrt{x-4} + 3, & \text{ha } 4 < x \le 5. \end{cases}$$

Hány liter víz fér a kancsóba, ha az egység a koordinátatengelyeken 1 dm?



Megoldás Először ábrázoljuk az f függvény grafikonját.



A kancsó térfogatát két részre bontva (0-tól 4-ig, illetve 4-től 5-ig) az alábbi határozott integrálösszeget kell kiszámítanunk:

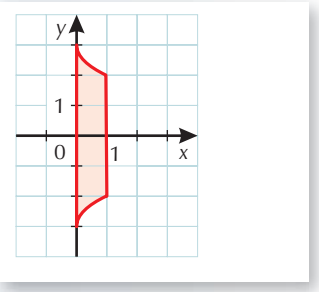
$$\pi\int_0^4(\sqrt{x}+1)^2\,dx+\pi\int_4^5(-\sqrt{x-4}+3)^2\,dx.$$

Az első integrál nem jelent gondot:

$$\pi\int_0^4(x+2\sqrt{x}+1)\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^4=\pi\left(\frac{16}{2}+\frac{4}{3}\cdot 8+4\right)-0=\frac{68}{3}\cdot\pi.$$

A második integrál már kicsit nehezebbnek látszik. Érdemes a következő ötlettel élni: toljuk el a függvény grafikonjának [4; 5] intervallumba eső darabját úgy, hogy az a [0; 1] intervallumba essen.

Az eltolás a forgatás után keletkező forgástest térfogatát nem változtatja meg. Ekkor az f függvény grafikonjának megfelelő darabja a $-\sqrt{x}+3$ függvény grafikonjába megy át, így ezt kell elforgatnunk a [0; 1] intervallumon.



$$\pi\int_0^1(-\sqrt{x}+3)^2\,dx=\pi\int_0^1(x-6\sqrt{x}+9)\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-6\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+9x\right]_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-4+9\right)-0=\frac{11}{2}\pi.$$

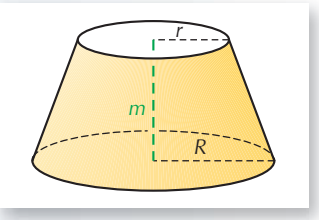
Ezek szerint a kancsó V térfogata

$$V=\left(22\frac{2}{3}+5\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{169\pi}{6}\approx 88{,}49 \text{ (térfogategység).}$$

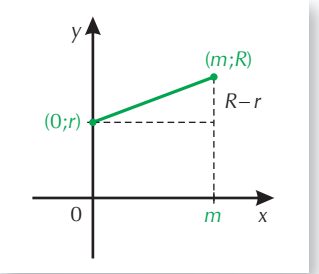
Mivel az egység mindkét koordinátatengelyen 1 dm, így egy térfogategység 1 dm^3. Ez azt jelenti, hogy a kancsóban kb. 88 liter folyadékot tárolhatunk.

4. példa Igazoljuk, hogy ha az egyenes csonkakúp alap- és fedőkörének sugara R, illetve r, magassága m, akkor a test V térfogata:

$$V_{\text{csonkakúp}}=\frac{m\pi}{3}\cdot(R^2+r^2+Rr).$$



Megoldás Helyezzük el a csonkakúp alkotóját az ábrán látható módon. Ha ezt körbeforgatjuk az x tengely körül 360°-kal, akkor éppen a keresett térfogatot kapjuk.



Az alkotó két végpontja a (0; r), illetve az (m; R) pontok. Így az alkotó egyenesének meredeksége $\frac{R-r}{m}$. Ezek szerint az alkotó egyenese az alábbi elsőfokú függvény grafikonja: $f(x)=\frac{R-r}{m}x+r$.

Ezt a függvénygrafikont kell tehát elforgatnunk az x tengely körül a [0; m] intervallumon.

$$V=\pi\int_0^m\left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^2dx=\pi\int_0^m\left(\frac{(R-r)^2}{m^2}x^2+\frac{2rx(R-r)}{m}+r^2\right)dx.$$

A primitív függvény meghatározásánál ügyeljünk arra, hogy x a változó, R, r és m pedig konkrét paraméterek, a csonkakúp adatai.

$$V=\pi\left[\frac{(R-r)^2}{m^2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{2r(R-r)}{m}\cdot\frac{x^2}{2}+r^2x\right]_0^m=\pi\left(\frac{(R-r)^2}{m^2}\cdot\frac{m^3}{3}+\frac{2r(R-r)}{m}\cdot\frac{m^2}{2}+r^2m\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{(R-r)^2m}{3}+r(R-r)m+r^2m\right).$$

Emeljünk ki a zárójelből $\frac{m}{3}$-t; azt kapjuk, hogy

$$V=\frac{m\pi}{3}((R-r)^2+3r(R-r)+3r^2)=\frac{m\pi}{3}(R^2+r^2-2Rr+3Rr-3r^2+3r^2), \text{ ahonnan}$$

$$V=\frac{m\pi}{3}(R^2+r^2+Rr), \text{ és éppen ezt akartuk belátni.}$$

5. példa Határozzuk meg az r sugarú gömb térfogatát!

Megoldás Tekintsük az $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ függvényt a $[0;\ r]$ intervallumon! Ennek a grafikonja egy negyedkör, melyet ha megforgatunk x tengely körül, akkor egy félgömböt kapunk, melynek térfogata:

$$V_{\text{félgömb}}=\pi\cdot\int_0^r (r^2-x^2)\,dx=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\pi\cdot\frac{2r^3}{3}.$$

Tehát a gömb térfogata $V_{\text{gömb}}=\frac{4}{3}r^3\pi$.

GÖRBE ÍVHOSSZÁNAK KISZÁMÍTÁSA

Az integrálszámítás segítségével egy függvénygörbe ívhosszát is meghatározhatjuk egy adott intervallumon. Ennek képletét bizonyítás nélkül közöljük.

Ha az f függvény differenciálható $[a;\ b]$ intervallumon és f' folytonos ezen az intervallumon, akkor az f függvénygörbe $[a;\ b]$ intervallum fölötti ívének hossza:

$$h=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

6. példa Határozzuk meg a $[0;\ 2]$ intervallumon értelmezett $f(x)=\sqrt{x^3}$ függvény grafikonjának ívhosszát!

Megoldás Az előbbi képlet szerint szükség lesz az f függvény deriváltjára. Mivel $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$, ezért a deriváltja $f'(x)=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}$. Ezt behelyettesítve a képletbe

$$h=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\int_0^2\frac{9}{4}\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\left[\frac{\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{8}{27}\cdot\left[\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=$$

$$=\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{11\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}-1\right)\approx 3{,}53$$

FORGÁSTEST FELSZÍNÉNEK KISZÁMÍTÁSA

A görbe ívhosszához hasonlóan egy forgástest felszínét is meghatározhatjuk. Az ehhez szükséges képletet szintén bizonyítás nélkül közöljük.

Ha az f függvény differenciálható $[a;\ b]$ intervallumon, akkor grafikonjának az x tengely körüli körbeforgatásával keletkező forgástest felszíne:

$$A=2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

7. példa Forgassuk körbe az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény grafikonját a $[0;\ 2]$ intervallumon, és számítsuk ki a keletkező forgástest felszínét!

Megoldás A fenti képlet szerint megint szükség lesz az $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ deriváltfüggvényre. Ezt behelyettesítve a felszínképletbe:

$$A = 2\pi \cdot \int_a^b \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi \cdot \int_a^b \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = 2\pi \cdot \left[\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{27}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{13\pi}{3} \approx 13{,}61.$$

Látható, hogy ebben az utóbbi két képletben szereplő integrálást egyáltalán nem biztos, hogy el tudjuk végezni. A legegyszerűbb függvények esetén is olyan integrálhoz juthatunk, amelyek kiszámításához további ismeretekre lenne szükség.

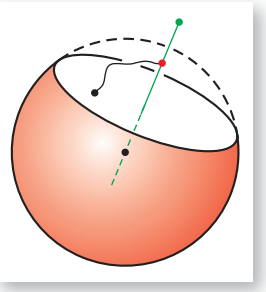
FELADATOK

1. V Forgassuk el az $f(x) = x^3 + 1$ függvény grafikonját az x tengely körül a $[-1; 1]$ intervallumban, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

2. V Az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonját körbeforgattuk az x tengely körül a $[0; \pi]$ intervallumon. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

3. V Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ függvények grafikonja, valamint az x tengely által közbezárt tartományt. Ezt körbeforgatva az x tengely körül, mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

4. V Egy alma (mely jó közelítéssel egy R sugarú gömb) felületének egyik pontjába egy hosszú tűvel kikötöttünk egy kukacot egy olyan cérnára, melynek hossza egyenlő a gömb sugarával. Az alma hány százalékát tudja elfogyasztani a kukac?



Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1394, 1396, 1406, 1415, 1418, 1419.

Miért „Newton–Leibniz-tétel”?

Egy kis tudománytörténet (olvasmány)

A tudományok fejlődésével a XVI–XVII. században egyre fontosabbá vált a végtelenül kicsiny mennyiségekkel történő számolás igénye *(infinitezimális kalkulus)*. Ennek következtében született meg a differenciál- és integrálszámítás lényege, mely elsősorban *Newton* és *Leibniz* nevéhez fűződik. A XVIII. század első éveiben nemzetközi méreteket öltő vita bontakozott ki arról, hogy vajon kié az elsőbbség, ki is fedezte fel valójában ezt a nagyon fontos tételt. A tudománytörténeti dokumentumok tanúsága szerint *Newton* már az 1665-ös évek környékén többé-kevésbé ismerte e tételt, de publikálni egyelőre nem akarta. *Leibniz* valamikor 1675 környékén jött rá a tételre, de ő is ódzkodott a publikálástól. Az akkori Királyi Természettudományos Társaság *(Royal Siciety)* közvetítésével *Leibniz* levelezésbe fogott *Newtonnal*, melyben közölte saját eredményeit, s ugyanerre kérte *Newtont* is, de *Newton* nem igazán részletezte saját eredményeit A tételt végül is *Leibniz* publikálta először 1684-ben egy maga alapította tudományos lapban. E cikknek nem volt igazán átütő sikere, mert a benne szereplő gondolatok kifejtése oly bonyolult, annyira nehézkes volt, hogy a szakma legjobbjai sem értették meg a lényegét. *Newton* az 1700-as évek elején publikálta a tételt, és ezt követően fajult el a vita az elsőbbségről, melyet a *Royal Society* végül is *Newton* javára döntött 1712-ben. Ugyanakkor a későbbiekben a tudományos világ mégis *Leibniz* (aki valószínűleg átdolgozta a tétel első leírását) fogalom- és jelölésrendszerét vette át, mert jóval áttekinthetőbb, követhetőbb volt, mint *Newtoné*.

Összegezve tehát a felfedezés elsőbbsége valószínűleg *Newtoné*, de a publikálás és a *kalkulus* tudományának, szimbólumrendszerének érthető leírása elsősorban *Leibniz* érdeme.

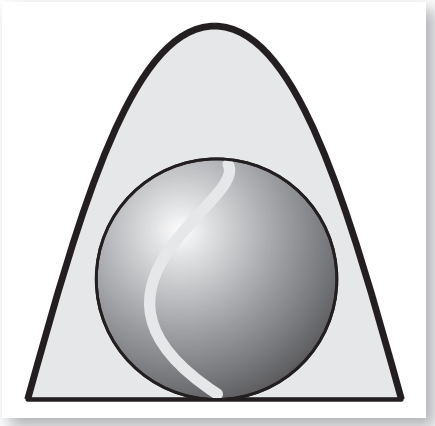
VÁLOGATÁS AZ EMELT SZINTŰ ÉRETTSÉGI VIZSGA FELADATAIBÓL

1. E1 **(2020.)** Adott az $y = -5{,}2\cos x + 11{,}2$ egyenletű görbe, valamint az $x = 0$, az $y = 0$ és az $x = 2\pi$ egyenletű egyenesek. Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

2. E1 **(2020.)** Adott két, a valós számok halmazán értelmezett függvény:
$f(x) = (x + 4)(2 - x)$
$g(x) = x + 4$
Határozza meg az f és g függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét!

3. E1 **(2017.)** Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ ($x \in \mathbf{R}$). Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)\,dx = 0$ teljesüljön!

4. E2 **(2015.)** Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték *(lásd az ábrát)*. A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 2{,}6y = 0$ Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg!

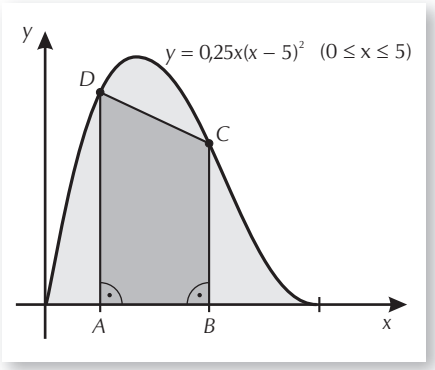


5. E2 **(2021.)** Adott az $y = 0{,}25x(x-5)^2$ $(0 \le x \le 5)$ egyenletű görbe.

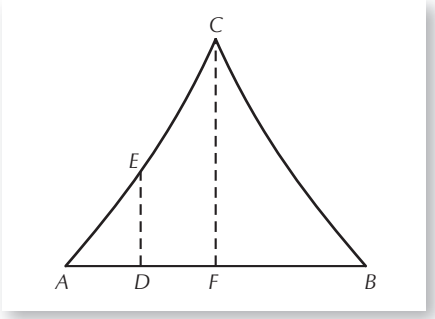
a) Igazolja, hogy az origó és az (5; 0) pont is rajta van a görbén!

Az $ABCD$ derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja az $A(1; 0)$, illetve a $B(3; 0)$ pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint. A megadott görbe és az x tengely $[0; 5]$ szakasza egy korlátos síkidomot fog közre.

b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a korlátos síkidomnak egy pontját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznak is pontja lesz?



6. E2 **(2017.)** Az ábrán egy egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el. A homlokzat szélessége $AB = 8$ méter, magassága $FC = 6$ méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig $DE = 2{,}5$ méter. Hány négyzetméter a homlokzat területe?



XI. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

81. STATISZTIKAI ALAPISMERETEK

A statisztikus munkája során bizonyos egyedek (emberek, tárgyak) meghatározott tulajdonságairól kíván tájékozódni.

Azoknak az egyedeknek az összességét, amikről információt kíván gyűjteni, **statisztikai sokaság**nak, a vizsgált tulajdonságot **ismérv**nek nevezzük. A statisztikai sokaság egyes egyedeinek az ismérvnek megfelelő tulajdonsága az **adat**.

Vannak olyan adatok, amelyeket igen egyszerű összegyűjteni. Például egyértelmű, hogy hány érmet nyertünk a legutóbbi olimpián, vagy hány ember halt meg autóbalesetben az elmúlt év során. Másrészt ha megkérdezünk egy háziasszonyt, hogy hány kiló kenyeret vett az elmúlt hónapban hetenként, nem valószínű, hogy erre pontos választ tud adni.

Az adatoknak több fajtája létezik, például vannak mérhető adatok (hossz, tömeg), számlálható adatok (egy családban a gyerekek száma, az idén szeptemberben első osztályt kezdő tanulók száma). Ha az adat szám, akkor a sokaságot *számsokaság*nak nevezzük. Statisztikai adat az egyes adatfajtáknak a számsokaságon belüli **gyakorisága**. A gyakoriság egy ismérv többszöri megfigyelésénél egy adott adat összes bekövetkezésének száma. **Relatív gyakoriságról** beszélünk, ha a gyakoriságot elosztjuk az ismérvre vonatkozó összes adat számával. Az adatfajtákból és a gyakoriságukból álló párok a sokaság **gyakorisági eloszlását** adják.

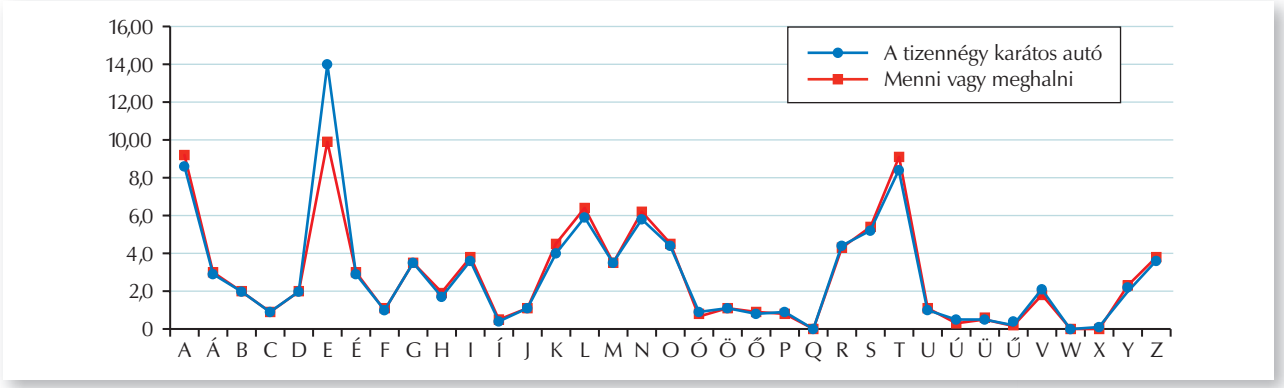
A vizsgálatba bevont sokaság mérete általában nagy, sőt a különböző adatok lehetséges száma is nagy lehet. Ilyenkor az összegyűjtött statisztikai adatokat valahogyan szemléletessé, könnyen áttekinthetővé kell tenni. Ennek egyik módja a grafikus ábrázolásuk.

A grafikus ábrázolás fő fajtái:

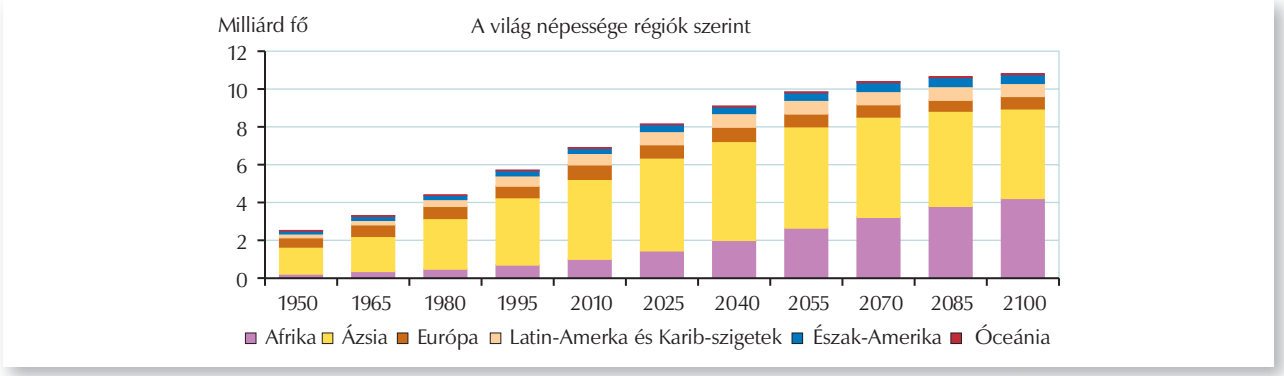
Diagram: síkmértani elemek segítségével ábrázoljuk az adatokat.

Például:

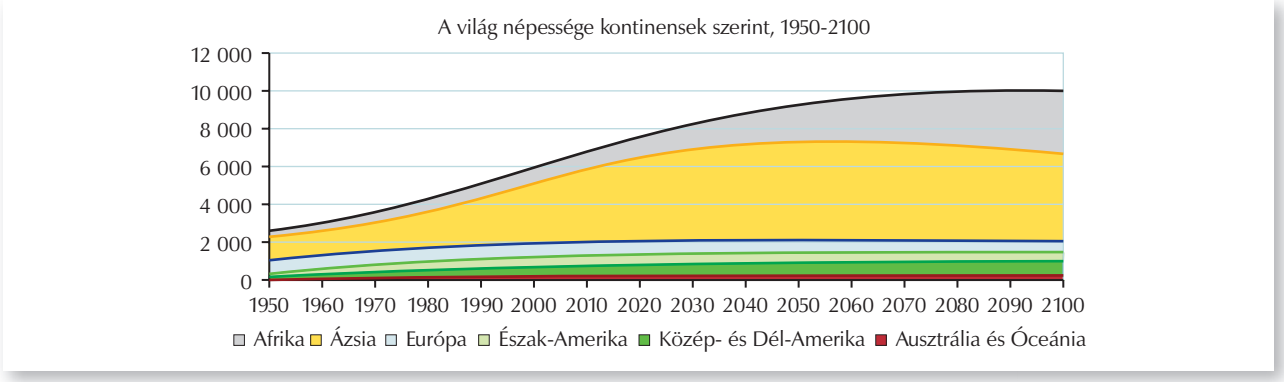
A magyar ABC betűinek százalékos gyakorisága Rejtő Jenő két regényében:



A világ népessége régiók szerint



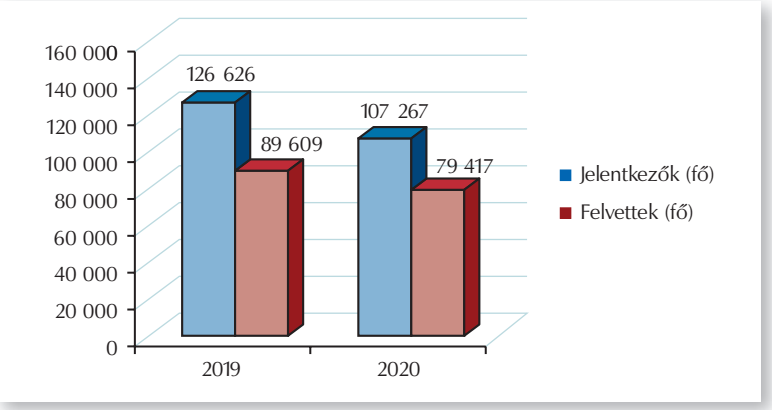
A világ népessége kontinensek szerint, 1950–2100 (2013-tól becsült adatokkal):



Sztereogram: térben elhelyezett geometriai testek a grafikus ábrázolás eszközei.

Például:

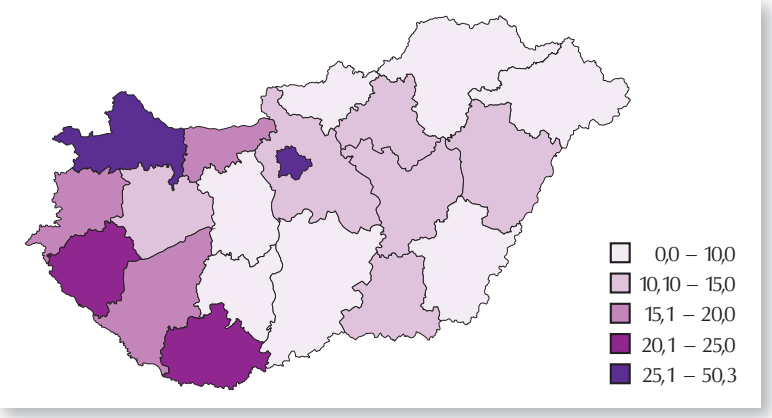
Jelentkezők és felvettek száma a magyar felsőoktatásban, 2019–2020:



Kartogram: térképen alapuló ábrázolást jelent.

Például:

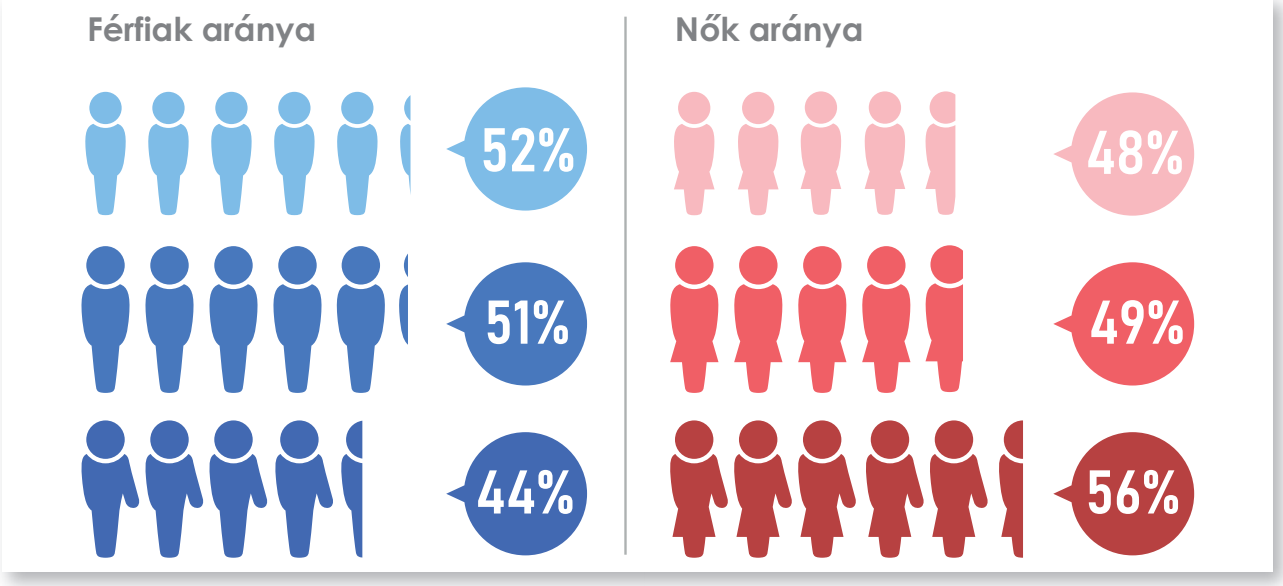
Az ezer lakosra jutó külföldi állampolgárok száma megyénként Magyarországon, 2021. január 1-jén:



Piktogram: a gyakoriságok vagy adatjellemzők képszimbólumokkal való ábrázolását jelenti.

Például:

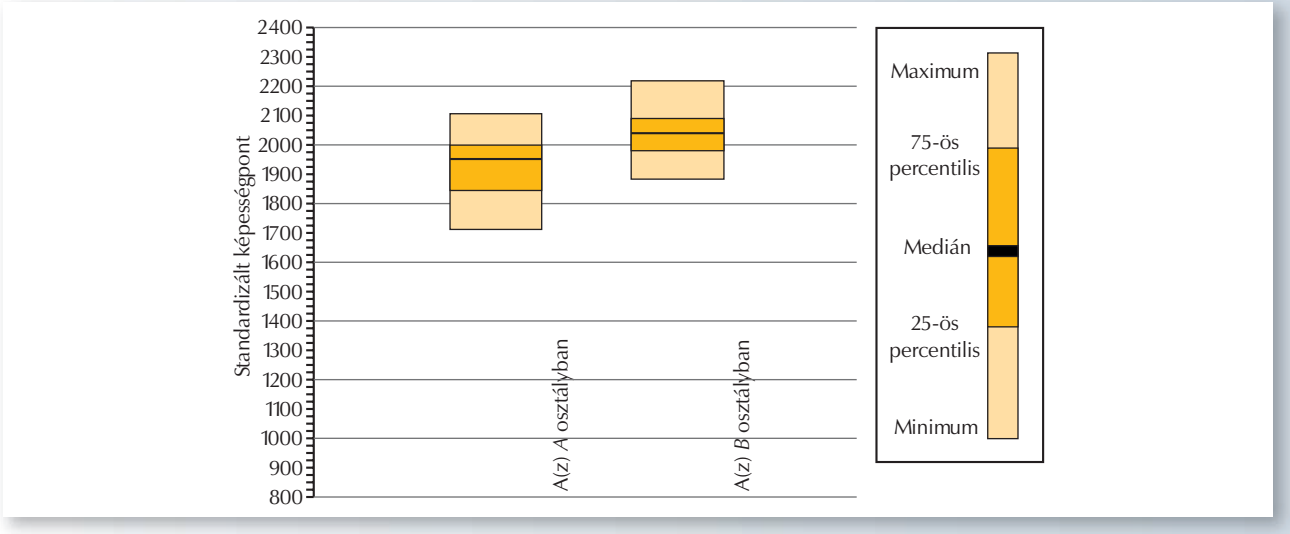
Nők és férfiak aránya három korosztályban (fentről lefelé 36, 52, 64 évesek):



A diagramok közül megismerkedtünk már az **oszlop-diagrammal**, a **vonal-diagrammal**, a **pont-diagrammal** és a **kör-diagrammal**.

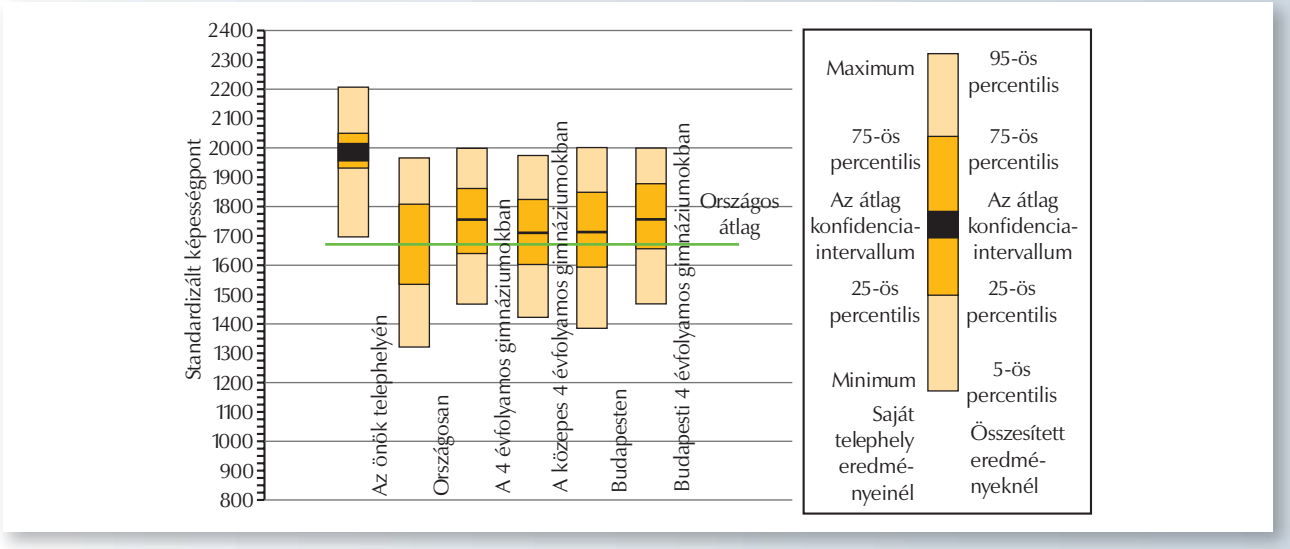
A következő példában a gyakran használt **box-plot diagramot (sodrófa-diagramot)** elemezzük.

1. példa Az országos kompetenciamérés alábbi diagramjai egy iskola *A* és *B* négyosztályos gimnáziumi osztályára vonatkoznak. Az országos átlag ebben az évben 1670 képességpont volt. Jellemezzük ez alapján a két osztály tanulóinak teljesítményét! (A megbízhatósági- (konfidencia-) intervallumról a fejezet végén található egy olvasmány.)



A tanulók képességeloszlása az Önök osztályaiban

	Minimum	25 percent.	Medián	75 percent.	Maximum
A(z) *A* osztályban	1707	1844	1952	2005	2106
A(z) *B* osztályban	1903	1987	2036	2093	2211



Megoldás (A box-plot-diagramok (sodrófa-diagramok) „függőlegesen állnak”, formájuk kissé eltér a megszokottól.)

Az első diagramon az *A* és *B* osztály teljesítményét hasonlíthatjuk össze, alatta egy táblázatban a számszerűsített eredmények (minimum-maximum, a kvartilisek és a medián) is szerepelnek. Az adott tantárgyból mindkét osztály kimagaslóan teljesített, az 1670-es országos átlagnál az *A* osztály $(1952 - 1670) = 282$, a *B* osztály $(2036 - 1670) = 366$ képességponttal ért el jobb átlagot. Az *A* osztályban nagyobb a minta terjedelme: $2106 - 1844 = 262$ képességpont, míg ugyanez a *B* osztályban $2211 - 1987 = 224$ pont. Az *A* osztályban tehát valamivel szórtabbak a képességek.

A második grafikonon az iskola 4 évfolyamos gimnáziumi osztályait (tehát az *A* és *B* osztályok egyesített adatait) hasonlíthatjuk össze a hasonló iskolatípusokban és településeken elért eredményekkel.

2. példa Egy 35 fős osztály három jelölt (A, B, C) közül szavazással választja ki a diákönkormányzati képviselőjét. A szavazáskor a három név egy sorrendjét kell leadni úgy, hogy az első helyen szerepeljen a leginkább, az utolsón pedig a legkevésbé támogatott jelölt.

A szavazás eredménye látható a táblázatban.

sorrend	A, B, C	A, C, B	B, A, C	B, C, A	C, A, B	C, B, A
darabszám	6	7	5	6	4	7

A tanulók a szavazás előtt nem állapodtak meg az értékelés módjában, ezért utólag különböző javaslatok is születtek. Sajnos ezek nem feltétlenül adnak azonos végeredményt.

1. Anna javaslata az egyszerű többség: Aki a legtöbbször szerepel az első helyen, az legyen a képviselő (tehát ő nyeri a szavazást).
2. Béla javaslata: A legtöbbször utolsó helyezettet hagyjuk ki, és a két megmaradt személyt hasonlítsuk össze: melyikük előzte meg többször a másikat.
3. Cili: Rögtön vizsgáljuk az összehasonlításokat: legyen az a nyertes, aki a szavazatok többségében megelőzte a két riválisát.
4. Dénes számszerűsítene, a 3–2–1 pontozást javasolja. Nyerjen az, aki a legtöbb pontot kapta.
5. Enikő szerint az első hely kicsit többet ér, ő a 4–2–1 pontozást javasolja.
6. Ferenc szerint viszont inkább az utolsó helyet pontozzuk alacsonyabbra, végül is a többség az utolsó helyezett személy ellen szavazna. Legyen a pontozás 3–2–0.

Ki lenne a szavazás nyertese az egyes esetekben?

Megoldás 1. Az első helyek száma A, B, C esetében rendre 13, 11, 11. Ezen értékelési módszer szerint a szavazás nyertese A.

2. Az utolsó helyek száma A, B, C esetében rendre 13, 11, 11. Ha A-t kihagyjuk, akkor a B és C párosításban B $(6 + 5 + 6 =)$ 17 esetben előzi meg C-t, C viszont $(35 - 17 =)$ 18 esetben B-t. A szavazás nyertese ekkor C.

3. A (B, C) összehasonlítás eredménye tehát 17 : 18, vagyis a többség B ellenében C-t szeretné képviselőnek. Az (A, C) összehasonlítás 18 : 17, a többség inkább A-t szeretné C-vel szemben. Azonban mielőtt A-t hirdetnénk ki nyertesnek, nézzük meg az (A, B) párosítást! Ennek eredménye 17 : 18, vagyis A-val szemben a többség inkább B-t támogatná.

A „körbeverés” miatt ezzel a módszerrel nem tudunk eredményt hirdetni.

4. Az (A, B, C) pontszámok rendre (70, 70, 70), ez teljes holtverseny.

5. Az (A, B, C) pontszámok ekkor (83, 81, 81), ez alapján a nyertes A.

6. Az (A, B, C) pontszámok ekkor (57, 59, 59), holtverseny áll fenn B és C között (de semmiképpen sem nyerhet A).

A példának több tanulsága van. Az egyik, hogy hasonló helyzetben mindig előre kell rögzíteni az értékelési módszert úgy, hogy minden lehetséges kimenetelre egyértelműen megállapítható eredményt adjon. Egy másik tanulság az adatok **manipulációs lehetőségére** hívja fel a figyelmet. Hiába egyértelműek, tényszerűek az adatok, a kiértékelésük során szubjektív tényezők lépnek fel, attól függően, hogy *melyik adatkomponenst tekintjük fontosabbnak, hangsúlyozottabbnak*.

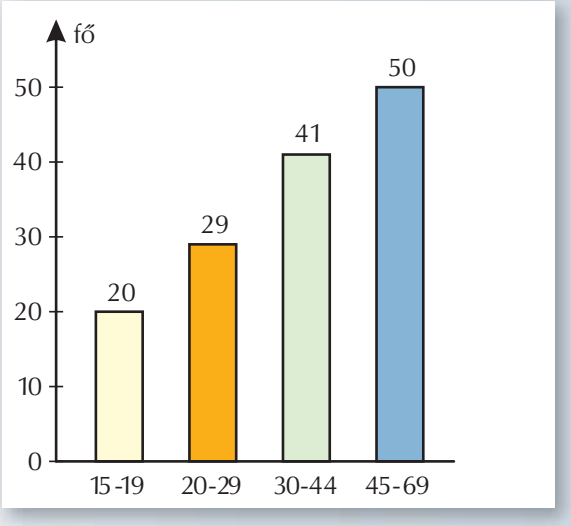
Vigyáznunk kell azonban arra is, hogy az adatok önkényes csoportosítása hamis következtetésekhez vezethet.

Erre mutatunk most egy ismert példát. (Forrás: B. Kröpfl – W. Peschek – E. Schneider – A. Schönlieb: Alkalmazott statisztika, Műszaki Könyvkiadó, 2000)

3. példa Egy rendezvényre 140 ember jött el. Az alábbi táblázat a résztvevők életkorát mutatja be nagyság szerint rendezve:

15	15	16	16	16	17	17	17	17	18
18	18	18	18	19	19	19	19	19	19
20	20	20	20	20	20	21	21	21	21
21	22	22	22	22	23	23	23	24	24
25	25	25	26	26	26	27	27	28	30
32	33	35	37	38	38	39	39	39	39
40	40	40	40	41	41	41	41	41	42
42	42	42	42	42	42	42	42	42	43
43	43	43	43	44	44	44	44	44	44
45	45	45	45	45	46	46	46	46	46
46	47	47	47	48	48	48	48	49	49
49	49	50	50	50	52	52	52	52	53
53	54	54	54	56	56	57	58	58	59
60	60	61	64	65	67	67	68	68	69

Vajon a fiatalok, a középkorúak vagy az idősek az aktívabbak, azaz melyik korosztályból mentek el többen a rendezvényre?

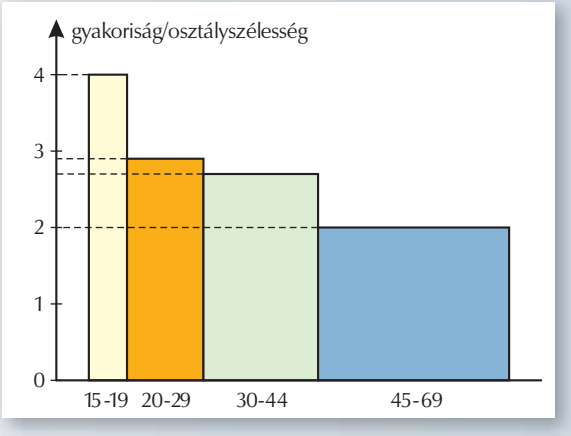


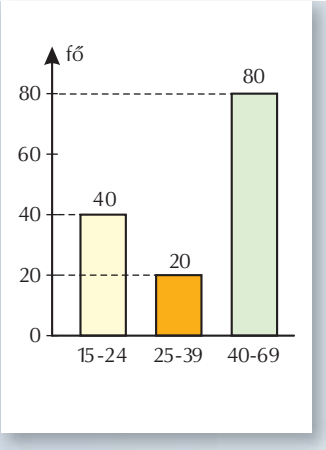
Megoldás Nem konkrét megoldást, hanem csak megoldási ötleteket adunk. Nézzük először az ábrán látható csoportosítást! (A négy korcsoportba a 15-19, 20-29, 30-44 és 45-69 év közöttiek tartoznak.)

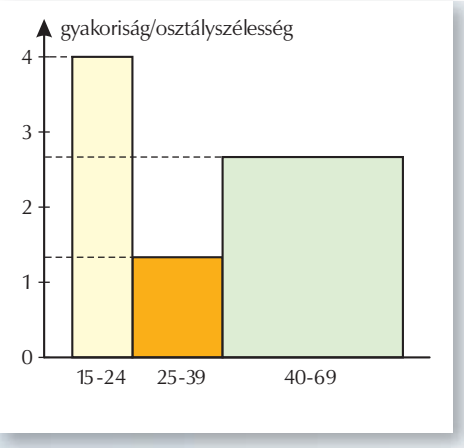
Ha fiatalnak itt a húsz év alattiakat tekintjük, akkor látszik, hogy a kor előre haladtával nő az aktivitás.

Vegyük azonban észre, hogy ekkor nem ugyanakkora korcsoport tartozik az egyes intervallumokba, ezért ne az oszlopok magassága, hanem a területe legyen arányos a résztvevők számával. (Ezt a grafikont gyakran **hisztogram**nak nevezik. Ha a sávok egyenlő szélesek, akkor ugyanazt kapjuk, mintha a magassággal arányos oszlopdiagramot rajzolunk.)

Hogy megváltozott a kép! Az eddigi korral növekvő aktivitás éppen a korral csökkenővé vált.







Önkényes volt azonban a korosztályba sorolás is. Tekintsünk egy másikat!

Most csak három csoportot nézünk (fiatal, középkorú, idős), és vegyük most fiatalnak a 24 év alattiakat, hiszen ide fog tartozni az egyetemista korosztály döntő többsége is.

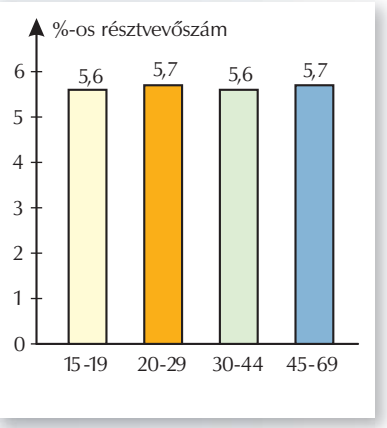
No lám, így az derül ki, hogy a középkorúak mozdulnak a legnehezebben *(bal oldali ábra)*.

A jobb oldali ábrán meghagytuk a korcsoportokat, és a gyakoriságot elosztottuk az osztályszélességgel, azaz a korcsoportba tartozó évek számával. Ekkor megváltozott a két szélső csoport aktivitásáról alkotott kép.

Nem beszéltünk arról, hogy hol tartották a rendezvényt. Iskolában? Nyugdíjas otthonban? Lakókörnyezetben? Világos, hogy mindegyik helyen más korösszetételre számíthatunk.

Tegyük fel, hogy falugyűlés volt, és ismerjük a település összetételét az egyes korcsoportok szerint.

Korcsoport	15–19	20–29	30–44	45–49
Lakosok száma	359	527	718	878
Ebből ott volt	20	30	40	50
Százalékban	5,6	5,7	5,6	5,7



A táblázat alapján kapott eredmény: az egyes csoportokat egyformán érdeklik a közügyek.

Az ilyen esetekre gondolnak sokan, amikor azt állítják, hogy a „statisztikával csalni lehet". Nem, a statisztika nem csal, csak a rosszul feltett kérdésekre, helytelen osztálybesorolásokra torzított válaszok érkezhetnek.

Nagy statisztikai sokaság egyetlen ismérv szerinti vizsgálata is nagyon költséges lehet. Az is előfordul, hogy a vizsgált egyed megsemmisül a vizsgálat során (pl. izzólámpák élettartamának vizsgálata minőségellenőrzéskor egy gyárban). Ezért néha lehetetlen, máskor pedig csak nem célszerű az egész sokaságot vizsgálni. Ekkor az egész sokaság helyett annak egy viszonylag kis részét vizsgálják meg. A kiválasztott részsokaságot **mintának** nevezzük. A minta tulajdonságai alapján próbálunk az egész sokaságra következtetni. Ez csak akkor sikerülhet, ha a mintába kerülő egyedek összességükben jól jellemzik a teljes sokaságot. A minta hibás megválasztása, a statisztikus szubjektivitása torzításokat eredményezhet. Ennek kiküszöbölésére a mintát általában véletlenszerűen választják meg. (Először a minta nagyságát állapítják meg.)

A véletlen mintavételnek két alaptípusával foglalkozunk.

Visszatevés nélküli mintavétel: ekkor a sokaság bármely n különböző egyedéből álló minta kiválasztása egyenlően valószínű.

Visszatevéses mintavétel: a húzás után a kiválasztott elemet visszateszik, és ismét a teljes sokaságból választanak véletlenszerűen.

FELADATOK

1. E1 Az iskolátokban szervezzetek közvélemény-kutatást például arról, hogy a diákok hány százaléka elégedett az iskolai diákönkormányzat munkájával! A diákok 5%-át kérdezzétek meg! Próbáljatok módszert keresni arra, hogy hogyan lehetne minél reprezentatívabb mintát kiválasztani az iskola tanulói közül! (A minta jól tükrözze vagy lehetőleg minél jobban megközelítse a teljes diákság véleményét.) Az osztályt legalább két részre osztva, a csapatok teljesen külön dolgozzanak! A kapott eredményeket összehasonlítva vitassátok meg az eredményeket!

2. E1 Visszatevéses vagy visszatevés nélküli mintavételről van szó, ha az asztalon lévő almák közül egyszerre veszünk ki egy 5 darabos mintát, amelyben megszámoljuk a kukacosokat? Ezután ebből szeretnénk következtetni az összes kukacos almák számára, ha tudjuk, hogy az asztalon 35 darab alma volt.

3. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2010.)**
Egy felmérés során megkérdeztek 640 családot a családban élő gyermekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét a jobb oldali táblázat mutatja:
(Tehát pl. a gyermektelen családoknak a száma 160, és 15 olyan család volt a megkérdezettek között, amelyben 1 fiú és 2 lány van.)

lányok száma \ fiúk száma	0	1	2	3	4	5
0	160	103	61	8	5	0
1	121	58	11	4	1	1
2	54	15	3	2	2	2
3	9	3	1	1	0	1
4	6	3	1	1	1	0
5	1	0	1	0	0	0

a) Hány fiúgyermek van összesen a megkérdezett családokban?
b) A felmérésben szereplő legalább kétgyermekes családokban mennyi a leggyakoribb leányszám?
c) A családsegítő szolgálat a megkérdezett családok közül a legalább négy gyermeket nevelőket külön támogatja. Az alábbi táblázat kitöltésével készítsen gyakorisági táblázatot a külön támogatásban részesülő családokban lévő gyermekek számáról!

gyerekszám egy családban	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság							

Hány családot és összesen hány gyermeket támogat a családsegítő szolgálat?

4. E1 „Lehetséges-e, hogy egy személygépkocsinak a 350 km hosszú útja bármely egyórányi útszakaszán ugyanakkora volt az u átlagsebessége, de a teljes útra számított v átlagsebessége ennél nagyobb volt?" Béla szerint ez lehetetlen, de Anna más véleményen van. „Csak egy jó grafikont kell rajzolni! – mondja." Melyiküknek van igaza?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1510 b, 1511c, 1512 a, b, c.

82. STATISZTIKAI MUTATÓK

Ugyancsak célszerű lehet az összegyűjtött adatokat néhány számmal jellemezni. Az ilyen számokat **statisztikai mutatók**nak nevezzük.

Két típusú statisztikai mutatóval találkoztunk, az **átlag** típusúakkal és a **szóródás** típusúakkal.

Az átlag típusú mutatóktól azt kívánjuk meg, hogy jól mutassák az adatok tipikus (jellemző) értékét, a megfigyeléseink a lehető legkevésbé térjenek el tőle.

Megköveteljük továbbá, hogy

- ha a számsokaság valamennyi tagjához ugyanazt a c értéket hozzáadjuk, akkor az átlag típusú mutatóhoz is éppen c érték adódjon hozzá,
- ha a számsokaság valamennyi tagját ugyanazzal a k számmal megszorozzuk, akkor az átlag típusú mutató is éppen k-szorosa legyen az eredetinek,
- és az átlag típusú mutató ne függjön a számsokaságon belül a számok sorrendjétől. (Ez nem jelenti azt, hogy egyszerűbb meghatározásához ne lehetne a számokat tetszőlegesen átrendezni, például növekvő sorrendbe állítani.)

Választhatjuk azt az értéket tipikusnak, amelyik a legtöbbször jött ki.

Erről már tanultunk, ez a minta leggyakoribb eleme, a **módusz**. Ha több ilyen van, akkor általában azt mondjuk, hogy a sokaságnak nincs módusza. (A fogalomhasználat nem egységes. Van olyan szakirodalom, amelyben ha több (különböző) leggyakoribb elem van, akkor ezeket a módusszok halmazának tekintik.)

Fontos, hogy nem csak számokból álló mintának lehet módusza.

A módusznak mint mutatónak előnye, hogy könnyen meghatározható. Hátránya, hogy gyakran nem használható az adathalmaz jellemzésére, például ha minden érték csak egyszer-kétszer fordul elő.

Egy számsokaság tipikus értékének választhatjuk azt a számot is, amelytől a nála kisebb számadatok tőle számított távolságainak összege megegyezik a nála nagyobb számadatok tőle számított távolságainak összegével. Ez a tulajdonsága a számtani középnek van meg, tehát hogy tőle ugyanannyira térnek el az elemek összességében negatív, mint pozitív irányban.

Ha egy statisztikai minta elemei számok, akkor az adatok **átlag**a (számtani közepe) az adatok összegének és az elemek számának a hányadosa. Képletben: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$.

Tétel

Az átlagtól mért előjeles eltérések összege 0.

Bizonyítás Legyen a számsokaság $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, és az adatok átlaga $\bar{x}$. Mivel $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}$ és $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$, ezért

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - n\bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - n\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = 0.$$

Hogyan számoljunk átlagot, ha az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ számok között több egyenlő van, ahol $m > n$?

Tegyük fel, hogy az adatok közt csak az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ elemek fordulnak elő, amelyek mind különbözőek, és gyakoriságuk rendre $f_1, f_2, \ldots f_n$. (Természetesen $m \geq n$, $f_1, f_2, \ldots f_n$ mindegyike nemnegatív és összegük m.)

A **súlyozott számtani átlagot** az $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$ képlettel számoljuk ki, ahol $x_1, x_2, \ldots x_n$ a minta lehetséges értékeit, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ a lehetséges értékek mintában való előfordulási gyakoriságát jelentik. Ezt a képletet röviden is leírhatjuk: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$.

A tipikus érték megtalálásánál a következő ötlet az lehet, hogy vegyük az eltérések abszolút értékét, és azokat adjuk össze. Ez jó jellemzőnek látszik, de mivel itt minden összeadandó nemnegatív, ezért az összeg egyre nő (legalábbis nem csökken), ha a tagok száma növekszik. A következő leckében látni fogjuk, hogy az abszolút eltérések összegének minimumát a mediánnál veszi fel a sokaság.

A mediánról már tanultunk a 9. osztályban.

Legyen a számsokaság $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Rendezzük az adatokat nem csökkenő sorrendbe! Ekkor a rendezett minta középső elemét – páros elemszámú minta esetén a két középső elem számtani közepét – a minta **medián**jának nevezzük.

Megemlítünk még néhány olyan jellemzőt, amelyet szintén használni szoktak.

A medián két egyenlő sok elemet tartalmazó osztályközre osztja a számsokaságot. Gyakran meghatározzák azonban azokat az értékeket is, amelyek négy egyenlő darabszámú számsokaságra osztják az adatokat. Ekkor a minimális érték és a medián közti osztópontot **alsó kvartilis**nek, a medián és a maximális érték közti osztópontot **felső kvartilis**nek nevezzük. (Előbbi a mediánnal kettéválasztott minta alsó felének, utóbbi a felső felének a mediánja.) Természetesen ezek csak akkor lesznek elemei a számsokaságnak, ha a minta elemszáma $4k + 2$ vagy $4k + 3$ alakú. Ha nem ez a helyzet, akkor például ugyanúgy járhatunk el, mint a medián meghatározásánál.

Értelmezik még a **kvantilis értékek**et: ha k számú osztályközt akarunk képezni, akkor ehhez $(k - 1)$ darab osztópontra van szükségünk. Ezeket az osztópontokat k-ad rendű kvantiliseknek nevezzük.

Leggyakrabban a decilis értékeket használjuk a már említetteken kívül, ekkor tíz osztályközt képezünk.

FELADATOK

1. E1 Egy 30 fős osztály két matematikadolgozatának eredményei láthatók a táblázatban.

Határozzuk meg a két dolgozatban az osztályzatok

a) móduszát, mediánját és az átlagát;

b) az alsó és a felső kvartilis értékeket!

c) Számítsuk ki a két dolgozat jegyeinek egyesítésével kapott osztályátlagot!

osztályzat	I. (db)	II. (db)
5	6	7
4	7	8
3	8	3
2	6	8
1	3	4

d) Számítsuk ki az előző osztályátlagot abban az esetben is, ha a II. dolgozat témazáró volt, ezért jegyei kétszeres súllyal számítanak!
e) Melyik dolgozat sikerült jobban? Érvelj az egyik dolgozat mellett!

2. E1 Igaz-e, hogy az alsó és felső kvartilisek mediánja megegyezik az eredeti számsokaság mediánjával?

3. E1 Határozzuk meg az előző lecke 3. példájában a mediánt, az alsó és felső kvartiliseket, és a deciliseket!

4. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2009.)**
Egy kávéforgalmazó cég kétfajta kávéból készíti a keverékeit. Ha az *A* típusú kávéból 20 kg-ot és a *B* típusúból 30 kg-ot kevernek össze, a keverék egységára kilogrammonként 1860 Ft lesz. Ha az *A* típusú kávéból 30 kg-ot, a *B* típusúból 20 kg-ot kevernek össze, akkor a keverék egységára 1740 Ft lesz.
a) Mennyi az *A*, illetve *B* típusú kávék kilogrammonkénti egységára?
b) 60 kg 2000 Ft egységárú keveréket akarnak előállítani. Hány kilogrammot keverjenek bele az *A*, illetve a *B* típusú kávéból?

5. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2015.)**
Összesen 30-an írták meg a dolgozatot. A dolgozatokat a tanár 1-től 5-ig terjedő egész osztályzatokkal értékelte. Az osztályzatok átlaga 3,4, mediánja 3,5, egyetlen módusza 4 volt. Amikor a tanár kiosztotta a dolgozatokat, a dolgozatírók közül hatan hiányoztak. A 24 kiosztott dolgozat között 7 db ötös, 5 db négyes, 6 db hármas, 4 db kettes és 2 db egyes volt.
Hányas lehetett a hat hiányzó tanuló dolgozata?

6. E1 Béla egy érdekes feladattal foglalkozik.
A **feladat:** Egy számsokaság a 17, 18, 19, … szomszédos egész számokból áll, de egy szám hiányzik a sorozatból. Mi lehet a legnagyobb szám, ha a sokaság átlaga 52,4?
Megoldás: Béla először észrevette, hogy szomszédos egész számok átlaga vagy egész szám, vagy egész szám és 0,5; és ha egy szám hiányzik a sorozatból, akkor a megmaradt számok átlaga az eredeti átlagtól legfeljebb 0,5-del tér el. (Miért?)
Ezután Béla „visszatette” az adatok közé a hiányzó számot, így a 17, 18, …, $16 + n$ számokat kapta ($n \in \mathbf{N}^+$).

Ha most a számok átlaga 52, akkor $\frac{(17+16+n)n}{2n} = 52$. Innen $n = 71$, a legnagyobb szám 87.

Ha pedig a számok átlaga 52,5, akkor $\frac{(17+16+n)n}{2n} = 52{,}5$; ebből $n = 72$, és a legnagyobb szám a 88.

Anna szerint azonban **hibás** ez a megoldás. Igaza van?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1510–1517. feladatokban is határozzuk meg a mediánt és a kvartiliseket.

83. A SZÓRÓDÁS MÉRŐSZÁMAI

TERJEDELEM, FÉLTERJEDELEM

Már tanultunk a legegyszerűbb szóródás típusú mutatóról, a **minta terjedelmé**ről. Ez a mintában előforduló legnagyobb és legkisebb szám különbsége. Hibája, hogy egy-egy kiugró érték, ami a többi számhoz viszonyítva túl nagy vagy túl kicsi, nagyon megnövelheti a minta terjedelmét, és ekkor nem jellemzi jól a mintát.

Jobban jellemzi a mintát, ha az alsó kvartilis és a felső kvartilis különbségét adjuk meg. Ezt a mutatót a minta **félterjedelmének** nevezzük.

Legyen a minta elemszáma n. Tudjuk, hogy a medián csak akkor mintaelem biztosan, ha a minta elemszáma $n = 2k + 1$ alakú, azaz páratlan (n, k pozitív egész számok). Mikor mintaelem az alsó és a felső kvartilis?

Ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$ alakú, akkor az alsó kvartilis az első $2k$ elem mediánja, azaz a k és $(k + 1)$-edik elem átlaga.

Ha $n = 4k + 2$ vagy $n = 4k + 3$ alakú, akkor az alsó kvartilis az első $2k + 1$ elem mediánja, azaz a $(k + 1)$-edik elem.

Tehát az alsó kvartilis akkor mintaelem, ha a minta elemszáma $n = 4k + 2$ vagy $n = 4k + 3$ alakú; és hasonló igaz a felső kvartilisra is.

ÁTLAGOS ABSZOLÚT ELTÉRÉS

Az előző leckében mondottak alapján megpróbáljuk meghatározni azt a számot, amelyre a sokaság elemeinek tőle számított (abszolút) távolságainak összege (vagy átlaga) a lehető legkisebb.

Definíció

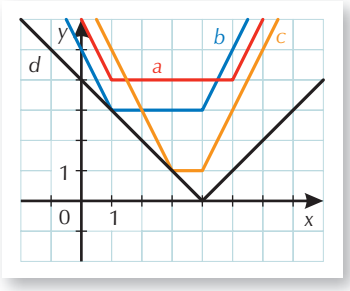
Az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ számadatok c számtól vett átlagos abszolút eltérésének a

$$d(x) = \frac{1}{n}(|x_1 - c| + |x_2 - c| + \ldots + |x_n - c|)$$

összeget nevezzük.

Mivel itt minden összeadandó nemnegatív, ezért az összeg nem csökken, ha a tagok száma növekszik. Ahhoz, hogy össze tudjunk hasonlítani két mintát, az egy mintaelemre eső eltérést kell nézni. Ezért osztjuk el az összeget a tagok számával.

Olyan számot keresünk, amelyre ez **az összeg minimális.** Ehhez idézzük fel, hogyan kell abszolútérték függvényeket grafikusan összegezni. (A minimum helyét az $\frac{1}{n}$-nel való szorzás nem befolyásolja, ezért a továbbiakban nem foglalkozunk vele.)



Gondolatmenetünket egy konkrét példán mutatjuk be, legyenek például egy hételemű sokaság nagyság szerint már rendezett elemei: 1, 1, 3, 4, 4, 4, 5. A feladat ekkor $|1 - x| + |1 - x| + |3 - x| + |4 - x| + |4 - x| + |4 - x| + |5 - x|$ minimumhelyének a meghatározása. (Természetesen vizsgálhatnánk az ezzel azonosan egyenlő $|x - 1| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 4| + |x - 4| + |x - 5|$ összeget is.)

Az összeget páronként vizsgáljuk, mindig a két „szélső” tagot összegezve négy függvényt ábrázolunk ugyanabban a koordinátarendszerben:

$a: x \mapsto |1 - x| + |5 - x|$;
$b: x \mapsto |1 - x| + |4 - x|$;
$c: x \mapsto |3 - x| + |4 - x|$;
$d: x \mapsto |4 - x|$.

Az a függvény esetén a minimumhelyek halmaza az [1; 5] intervallum, a b esetében az [1; 4], a c esetében a [3; 4], végül a d esetében $x = 4$, amit az egyöntetűség kedvért írhatunk [4; 4] alakba is. Észrevehetjük, hogy az egyes függvényeknél az intervallumok szélei megegyeznek a sokaság megfelelő elemeivel. (Ez általában is igaz: ha $x_1 \le x \le x_2$, akkor $f(x) = |x_1 - x| + |x_2 - x| = x - x_1 + x_2 - x = x_2 - x_1$, azaz állandó. Ha $x < x_1$, akkor $f(x) = x_1 - x + x_2 - x = -2x + x_1 + x_2$; ha $x_2 < x$, akkor pedig $f(x) = x - x_1 + x - x_2 = 2x - x_1 - x_2$; vagyis az $[x_1; x_2]$ intervallum szakaszát egy –2 és egy 2 meredekségű félegyenes „fogja közre”.)

Másik fontos észrevételünk, hogy a minimumhelyek halmazai tartalmazzák egymást: $[1; 5] \supseteq [1; 4] \supseteq [3; 4] \supseteq [4; 4]$. Olyan x helyet keresünk, amelyik mindegyik halmaznak eleme; egy ilyen van, $x = 4$, ami a sokaság mediánja.

Gondolatmenetünk általában is elmondható.

Ha a sokaság nagyság szerint rendezett elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n$, akkor az $x \mapsto |a_1 - x| + |a_2 - x| + \ldots + |a_n - x|$ függvény minimumhelyét a „szélső” tagok páronkénti összegzésével határozhatjuk meg. Az egyes párok minimumhelyeinek halmazai tartalmazzák egymást: $[a_1; a_n] \supseteq [a_2; a_{n-1}] \supseteq [a_3; a_{n-2}] \ldots$

Ha $n = 2k + 1$ alakú páratlan szám ($k \in \mathbf{Z}^+$), akkor az utolsó, legszűkebb intervallum egy szám, a_{k+1}, ami a sokaság középső eleme, azaz a mediánja.

Ha pedig $n = 2k$ alakú páros szám, akkor az utolsó $[a_k; a_{k+1}]$ intervallum a minimumhelyek halmaza. (Lehetséges az $a_k = a_{k+1}$ eset is.) Ekkor bármely $x \in [a_k; a_{k+1}]$ minimumhely, de ennek eleget tesz az $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ medián is.

Ezzel igazoltuk, hogy **az adatok mediántól számított átlagos abszolút eltérése a lehető legkisebb**.

Híres statisztikusok

Louis-Adolphe Bertillon

Louis-Adolphe Bertillon (1821–1883) francia orvos, antropológus, botanikus, gombabiológus, statisztikus. *Franciaország demográfiai mintázata* című, 1874-es kiadványa nevezetes statisztikai tanulmány a franciaországi népességről.

Florence Nightingale (1820–1910) angol ápolónő és statisztikus. A modern nővérképzés, valamint a betegellátás reformjának elindítója. Ő alkalmazott először statisztikai megközelítést a betegápolás hatékonyságának elemzésére, és ő tekinthető a bizonyítékokon alapuló orvoslás egyik úttörőjének.

Florence Nightingale

ÁTLAGOS NÉGYZETES ELTÉRÉS, SZÓRÁSNÉGYZET

Definíció

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számadatoknak egy x számtól vett átlagos négyzetes eltérése az $S_n^2(x) = \frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_n - x)^2}{n}$ kifejezés.

Ez az érték biztosan nemnegatív, hiszen négyzetek összegét osztottuk a pozitív n számmal. Keressük meg, milyen x-re lesz minimális ez az eltérés!

$$S_n^2(x) = \frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_n - x)^2}{n} = \frac{n \cdot x^2 - 2x(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} =$$

$$= x^2 - 2x\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} = x^2 - 2x \cdot \bar{x} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}.$$

A kifejezést tekinthetjük x-ben másodfokú függvénynek, amelynek a minimális értékét teljes négyzetté alakítással határozzuk meg.

$$S_n^2(x) = x^2 - 2x \cdot \bar{x} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} = (x - \bar{x})^2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2.$$

A függvény a minimumát akkor veszi fel, ha $x = \bar{x}$, vagyis **a minimum hely az átlag**. A minimum értéke

$$S_n^2(\bar{x}) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2.$$

Ez a kapott érték a **szórásnégyzet** (vagy variancia). A levezetés eredményét szavakkal is megfogalmazzuk.

Tétel

A szórásnégyzet egyenlő az adatok négyzeteinek átlaga és az átlag négyzete közti különbséggel.

Ennek pozitív négyzetgyöke a **szórás**, a leggyakrabban használt szóródási mutató:

$$S_n = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2}\,.$$

(Az utóbbi képlet segítségével általában egyszerűbb kiszámítani a szórást.)

1. példa Tekintsük a következő 10 elemű, 6 átlagú sokaságokat:

$A = \{6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 6\}$, $B = \{5; 5; 5; 5; 5; 7; 7; 7; 7; 7\}$, $C = \{4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8\}$. Számítsuk ki a három sokaságban az adatok átlagtól számított átlagos abszolút eltérését és szórását!

Megoldás *A*-ban mindkét mutató 0. (Általában is igaz, hogy csak az adatok egyenlősége esetén 0 ezen mutatók értéke.)

B-ben mindkét mutató 1. Ugyanis $\frac{5\cdot|5-6|+5\cdot|7-6|}{10}=\frac{10}{10}$ és $\frac{5\cdot(5-6)^2+5\cdot(7-6)^2}{10}=\frac{10}{10}$ szintén. (A szemléletünk is ezt az eredményt sugallja, hiszen minden adat 1-gyel tér el az átlagtól.)

C-ben az átlagtól számított átlagos abszolút eltérés $\frac{4\cdot2+4\cdot1+2\cdot0}{10}=1{,}2$, míg a szórás

$$\sqrt{\frac{4\cdot2^2+4\cdot1^2+2\cdot0^2}{10}}=\sqrt{2}\,.$$

Észrevehetjük, hogy az átlagos abszolút eltéréssel szemben a szórás értéke általában nagyobb. (Ennek oka a számtani és négyzetes közép között fennálló egyenlőtlenség.)

A **szórás** két fontos **tulajdonsága**:

Ha ugyanazt az *a* számot egy számsokaság valamennyi adatából levonjuk, illetve valamennyi adatához hozzáadjuk, akkor az új sokaság átlaga is *a*-val lesz kisebb, illetve nagyobb az eredeti átlagánál. Észrevehetjük, hogy ekkor az új sokaság szórásnégyzete (és így szórása is) megegyezik az eredetivel.

Ha pedig egy számsokaságban minden számot egy *k* nemzérus konstanssal megszorzunk, akkor az új átlag is *k*-szorosra változik, és az új szórás az eredeti szórás $|k|$-szerese lesz.

Csoportosított adatok esetén ugyanúgy járunk el, mint az átlag meghatározásakor: az egyes osztályok valamennyi adatát az intervallum középpontjával helyettesítjük. Ilyenkor a valódi szórás helyett annak egy közelítését kapjuk, ami általában nagyobb a valódi értéknél.

Kiegészítő anyag A középértékek és a szóródási mérőszámok értelmezésekor az volt a célunk, hogy számsokaságokat egy-két számmal jellemezni tudjunk. Az átlag és a szórás valóban ilyen számpárt alkot, ahogy azt a bizonyítás nélkül közölt következő állítás mutatja.

Legyen az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számsokaság átlaga $\bar{x}$, szórása S_n. Ekkor minden $B > 1$ szám esetén legfeljebb $\frac{n}{B^2}$ azoknak az x_i számoknak a száma, amelyeknek $\bar{x}$-tól vett abszolút eltérése legalább $B \cdot S_n$.

Ez az állítás $B = 2$, illetve $B = 3$ esetén azt jelenti, hogy a számoknak legalább a 75%-a az $]\bar{x}-2S_n, \bar{x}+2S_n[$ intervallumba, illetve 88%-a az $]\bar{x}-3S_n, \bar{x}+3S_n[$ intervallumba esik.

2. példa Az *A* sokaság elemei {1; 2; 3; 4; 5}. Számítsuk ki az adatok szórását! Hogyan változik a szórás, ha a legnagyobb elemet (5) megnöveljük rendre 1, 2, 3, 5, 10-zel?

(Számolás előtt próbáljuk megbecsülni az eredményt!)

Megoldás Nehéz pontosan becsülni, hiszen a szórás nem szemléletes fogalom. Mindenesetre az elvárható, hogy az 5-ös növelésével a szórás (az adatok szóródásának a mértéke) is növekedjen.

A számok átlaga 3, szórása $\sqrt{\frac{2\cdot2^2+2\cdot1^2}{5}}=\sqrt{2}\,.$

Ha az utolsó 5-ös elemet megnöveljük x-szel ($x > 0$), akkor az így kapott $\{1; 2; 3; 4; 5 + x\}$ sokaság átlaga $3 + \frac{x}{5}$, szórása $\sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + (5+x)^2}{5} - \left(3 + \frac{x}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{55 + 10x + x^2}{5} - \left(9 + \frac{6x}{5} + \frac{x^2}{25}\right)} = \sqrt{2 + 0{,}8x + 0{,}16x^2}$ lesz.

A szórás az egyes esetekben:

x	1	2	3	5	10
az új elem	6	7	8	10	15
szórás	$\sqrt{2{,}96} \approx 1{,}72$	$\sqrt{4{,}24} \approx 2{,}06$	$\sqrt{5{,}84} \approx 2{,}42$	$\sqrt{10} \approx 3{,}16$	$\sqrt{26} \approx 5{,}10$

FELADATOK

1. E1 Az előző lecke 30 fős osztálya újabb matematikadolgozatának eredményei láthatók a táblázatban.

osztályzat	(db)
5	7
4	6
3	10
2	6
1	1

Határozzuk meg az osztályzatok átlagát, az átlagtól számított átlagos abszolút eltérését és a szórását!

2. E1 Egyenlő-e a minta terjedelmének fele a félterjedelemmel?

3. E1 Ha a minta terjedelme nulla, akkor a félterjedelem is az. Megfordítható-e az állítás?

4. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2016.)**
Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg $\pm$ 10 dkg”. (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőség-ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak nyolc csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot.
A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

a) A mérési eredmények alapján engedélyezik-e az almák árusítását?
b) Határozza meg a nyolc mérési eredmény átlagát és szórását!

A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$, a II. osztályút 650 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$, a III. osztályút pedig 450 $\frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.
c) Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

5. E1 Tekintsük az 1, 2, 3, … n, … számtani sorozatot.
a) Mennyi a sorozat első n tagjának a szórása?
b) Számítsuk ki n értékét, ha az első n tag szórása éppen 2!

6. E2 Bizonyítsuk be a szórásnégyzet felhasználásával, hogy n darab pozitív szám számtani közepe nem lehet nagyobb, mint a számok négyzetes közepe! $\left(n \text{ szám négyzetes közepe } \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.\right)$

7. E2 Legyen adva az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számsokaság, melynek nem minden eleme egyenlő. A számsokaság átlaga $\bar{x}$, szórása S_n.

Tekintsük a $\frac{x_1 - \bar{x}}{S_n}, \frac{x_2 - \bar{x}}{S_n}, \ldots, \frac{x_n - \bar{x}}{S_n}$ sokaságot! (Ezt szokás az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számsokaság sztenderdizáltjának nevezni.) Bizonyítsuk be, hogy a sztenderdizált sokaság átlaga 0, szórása 1!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 1510–1517.

84. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI ISMERETEK

Eddigi tanulmányaink során megismerkedtünk a valószínűségszámítás **alapfogalmaival**.

Definíciók

Véletlen kísérlet: olyan kísérlet, aminek a végeredménye a véletlentől függ, vagyis olyan sok tényező befolyásolja a végeredményt, amelyek számbavétele szinte lehetetlen, vagy olyan hosszú ideig tartana, hogy az már nem érné meg számunkra.

Elemi esemény: a véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit nevezzük elemi eseményeknek.

Biztos esemény: olyan esemény, ami a kísérlet elvégzésekor mindig bekövetkezik. Jele H.

Lehetetlen esemény: ami a kísérlet elvégzésekor biztosan nem következik be. Jele: $\varnothing$.

Eseménytér: az elemi események halmaza. Ω-val jelöljük.

Esemény: az eseménytér részhalmaza.

Az eseményekkel tudunk műveleteket végezni.

Két esemény összege:

Az $A + B$ esemény akkor következik be, ha az A vagy a B esemény bekövetkezik.

Két esemény különbsége:

Az $A - B$ esemény akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik, de a B nem.

Két esemény szorzata:

Az AB esemény akkor következik be, ha az A és a B esemény is bekövetkezik.

Az A és B egymást kizáró események, ha $AB = \varnothing$, vagyis ha a két esemény egyszerre nem tud bekövetkezni.

Ellentett esemény (komplementer esemény) jele: $\overline{A}$.

Az $\overline{A}$ esemény akkor következik be, ha az A nem következik be.

Teljes eseményrendszer: Az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eseményeket teljes eseményrendszernek nevezzük, ha bármely kísérlet elvégzésekor ezek közül pontosan egy következik be, vagyis összegük a biztos esemény, és páronként kizárják egymást.

Formálisan: $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = H$, és $A_i A_j = \varnothing$, ha $i \neq j$.

A legegyszerűbb teljes eseményrendszer $A, \overline{A}$.

Tekintsük át az eseményekkel végzett műveletek néhány fontos tulajdonságát.

1. $A + B = B + A, \quad AB = BA$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A(B + C) = AB + AC, \; A + BC = (A + B)(A + C)$.
4. $A + \overline{A} = H$ és $A\overline{A} = \varnothing$.
5. *a)* $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$. *b)* $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ (de Morgan-azonosságok).

1. példa A véletlen kísérletünkben feldobunk két darab, különböző színű dobókockát. Tekintsük a következő eseményeket!

A = {a dobott számok összege kisebb, mint 6}
B = {a dobott számok összege legalább 5}
C = {a dobott számok szorzata 6}
D = {a dobott számok mindegyike kisebb 3-nál}

Határozzuk meg a következő eseményeket!

$A + B$, $A + D$, $B + D$, $B + C$,
AB, AC, AD, BC, BD, CD.
$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$.

Megoldás Az elemi eseményeket egy rendezett számpárral jellemezhetjük, az első szám mindig az egyik színű kockával dobott számot, a második tag pedig a másik színű dobókockával dobott számot jelenti.

$A + B = H$, $A + D = A$, $B + D = H$, $B + C = B$,
AB = {a dobott számok összege pontosan 5}, $AC = \{(2; 3), (3; 2)\}$, $AD = D$, $BC = C$, $BD = \emptyset$, $CD = \emptyset$.
$\overline{A}$ = {a dobott számok összege legalább 6},
$\overline{B}$ = {a dobott számok összege kevesebb, mint 5},
$\overline{C}$ = {a dobott számok szorzata nem 6},
$\overline{D}$ = {a dobott számok legalább egyike nagyobb vagy egyenlő, mint 3).

Egy kis ismétlés: Az A esemény valószínűségét $P(A)$-val jelöltük és tudjuk, hogy $0 \le P(A) \le 1$. Továbbá az egymást kizáró események összegének a valószínűsége a valószínűségek összege.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$, ha $AB = \emptyset$.

Ha n-szer elvégezzük a kísérletet, és megszámoljuk, hogy hányszor következett be az A esemény, akkor megkapjuk az A esemény abszolút gyakoriságát, $k_A(n)$-t. Ha kiszámítjuk, hogy a kísérletek hányad részében következik be az A esemény, akkor megkapjuk az A eseménynek erre a kísérletsorozatra vonatkozó relatív gyakoriságát $\left(r_A(n) = \frac{k_A(n)}{n}\text{, ha a kísérletet éppen } n\text{-szer végeztük el}\right)$.

A $P(A)$ valószínűség az a szám, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik a kísérletek számának a növelésekor. (A későbbiekben ezt részletesen megvizsgáljuk.)

Ha egy kísérlettel kapcsolatban ismerjük az elemi események számát, és feltételezhetjük, hogy azok bekövetkezésének valószínűsége megegyezik, akkor alkalmazhatjuk a **klasszikus modellt**. Bármely esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}.$$

A gyakorlatban felmerülő problémák esetén egyáltalán nem biztos, hogy az elemi események egyformán valószínűek, vagy hogy meg tudjuk számolni őket (végtelen számú elemi esemény is lehetséges). Ezekben az esetekben tehát a klasszikus modellt – és így a fenti képletet – nem alkalmazhatjuk, hanem más módon kell meghatároznunk az események valószínűségét.

2. példa Számítsuk ki az előző példában felírt A, C, $B + C$, AD, $\overline{B}$, $\overline{D}$ események valószínűségét!

Megoldás A = {a dobott számok összege kisebb, mint 6}, azaz 2, 3, 4, 5 a lehetséges összegek. Ezek előállítása rendre 1, 2, 3 illetve 4-féleképpen lehetséges (pl. $5 = 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1$), így a keresett valószínűség $P(A) = \frac{1+2+3+4}{36} = \frac{5}{18}$. (Az elemi események egyformán valószínűek.)

C = {a dobott számok szorzata 6}, a lehetséges esetek: $1 \cdot 6, 6 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 2$. $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Mivel B = {a dobott számok összege legalább 5}, $B + C = B$. Egyszerűbb $\overline{B}$ kiszámítása, ekkor a dobott számok összege legfeljebb 4. Fentebb láttuk, hogy ez $1 + 2 + 3 = 6$-féleképpen lehetséges, ezért $P(B + C) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$.

Azt is megkaptuk, hogy $P(\overline{B}) = \frac{1}{6}$.

D = {a dobott számok mindegyike kisebb 3-nál}, így $AD = D$ (hiszen ha a két szám legfeljebb 2, akkor összegük kisebb, mint 6). A lehetőségek: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2). $P(AD) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$P(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ a fentiek alapján.

3. példa *Arthur C. Clarke: Holdrengés* című regényéből való a következő idézet.

Nem volt jelentkező, de Duncan McKenzie hangja kiemelkedett az általános nevetésből.

– Van egy vicces dolog a születésnapokban. Valamikor sok fogadást nyertem ezzel különféle összejöveteleken. Ha az ember tudja, hogy egy évben háromszázhatvanöt nap van, mit gondolnak, hány emberből kell állnia ahhoz egy csoportnak, hogy kettő közülük ugyanazon a napon ünnepelje a születésnapját?

Rövid szünet után, míg a hallgatóság a kérdést mérlegelte, valaki így válaszolt:

– Hát, azt hiszem, háromszázhatvanötnek a fele. Mondjuk, száznyolcvan ember.

– Ez a nyilvánvaló válasz, és teljesen hibás. Ha huszonnégy embernél többen vannak egy csoportban, máris nagyobb az esélye ötven százaléknál. *(Kossuth Könyvkiadó, 1973)*

Hogy lehetséges ez? Vajon igaza van a szerzőnek?

Megoldás Vizsgáljuk a komplementer eseményt, vagyis számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy n ember születésnapja n különböző napra esik (366 nappal számoljunk)! Ez a valószínűség két ember esetén $\frac{365}{366}$ (a második ember az elsőtől különböző napon született), három embernél ezt szorozni kell $\frac{364}{366}$-tal (a harmadik embernek 364 „szabad” nap maradt az évből), négy embernél tovább szorozni $\frac{363}{366}$-tal és így tovább. Ha az emberek száma n, akkor annak a valószínűsége, hogy mindegyikük az év különböző napján született, $\frac{365}{366} \cdot \frac{364}{366} \cdot \frac{363}{366} \cdot \ldots \cdot \frac{367-n}{366}$.

A kapott P_n értékek alapján legegyszerűbb $1 - P_n$ értékeit egy számítógépes programmal kiíratni, ennek egy részlete az alábbi:

n	20	21	22	23	24	…	30	35	41
$1 - P_n$	0,41	0,44	0,47	0,51	0,54		0,71	0,81	0,90

Látható, hogy $n = 23$-nál „billen át” a valószínűség; ekkor 0,5-nél már nagyobb annak a valószínűsége, hogy a társaságban van két olyan ember, akik az év azonos napján születtek.

Ez a valószínűség 30 ember esetén 71%, 35 embernél pedig már 81%. Egy 35 fős, ismeretlen osztályban tehát jó eséllyel mutathat be egy „bűvészmutatványt” a tanár, amikor előre megjósolja, hogy lesz két azonos napon született tanuló az osztályban.

4. példa Anna és Béla egy egyszerű kockajátékokat játszanak.

a) Két dobókocka számozása A: 5,5,5,5,1,1; illetve B: 2,2,2,2,6,6. A játékosok kiválasztanak egy-egy kockát, majd mindketten dobnak a sajátjukkal. Az a játékos nyer, aki nagyobbat dob. A kezdő Anna az A kockát választja, mert ezen nagyobb a számok összege (átlaga). Vajon neki előnyös ez a játék?

b) Most kezdetben három dobókocka van, a számozásuk: A: 2,2,2,2,5,5; B: 4,4,4,4,1,1; C: 3,3,3,3,3,3. Béla udvariasan megengedi, hogy most is Anna válasszon először egy kockát, majd utána ő is kiválasztja a maradékból a saját kockáját. Hogyan játsszon Béla?

Megoldás *a)* A dobott számoktól függően $6 \cdot 6 = 36$ elemi esemény van. Azt kell megvizsgálni, hogy melyik számpárok esetén nyer Anna.

Akkor tud nyerni, ha az A kockával 5-öst dob, és Béla 2-est, máskor nem. A lehetőségek száma $4 \cdot 4 = 16$, vagyis a 36 lehetőségből 16 Annának, $36 - 16 = 20$ pedig Bélának kedvező.

A játék Bélának előnyös.

b) A számok összege az A, B, C kockákon egyaránt 18, de az előzőek alapján óvatosak vagyunk: nem biztos, hogy a kockák egyformán „erősek”. Vizsgáljuk meg az egyes kockapárok „küzdelmét”!

Az A és B küzdelmének 36 (egyformán valószínű) esetéből a (2; 1), (5; 4) és (5; 1) dobásokkal nyer A, ez $4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$ eset. $36 - 20 = 16$ eset kedvezőbb B-nek, az A kocka a játék szempontjából tehát „jobb”, mint a B.

Az A és C kockák esetén A-nak csak az (5; 3) dobáspár kedvező, ez $2 \cdot 6 = 12$ esetben fordul elő. $36 - 12 = 24$ eset C-nek kedvező, a C kocka tehát jobb, mint az A.

Azt várjuk, hogy a C kocka jobb, mint a B. (Hiszen az A jobb B-nél, és a C még az A-nál is jobb.) Ellenőrizzük!

A B és C kockák esetén B-nek a (4; 3) dobáspár a kedvező, ez $4 \cdot 6 = 24$ esetben fordul elő. Csak $36 - 24 = 12$ eset kedvező C-nek, a B kocka tehát jobb, mint a C.

Azt kaptuk, hogy a kockák között nincs „legjobb”, körbeverik egymást. Bármelyiket is választja Anna, az „udvarias” Béla tud nála jobbat választani, így a játék neki előnyös.

FELADATOK

1. E1 Két dobókockát feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható 6-tal?

2. E2 Öt dobókockát feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a legkisebb dobott szám a 2?

3. E1 Három dobókockát feldobva, mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata prím?

4. E2 Pisti sakktáborba szeretne menni a nyáron, de csak akkor engedik el, ha három egymás utáni sakkparti közül legalább két egymás utánit megnyer. Partnerei: Apa és Papa, mégpedig vagy Apa-Papa-Apa, vagy Papa-Apa-Papa sorrendben. Apa jobban játszik, mint Papa.
Pisti úgy okoskodik, hogy miután Apa a jobb játékos, inkább vele játszik kevesebbet, és ezért a Papa-Apa-Papa sorrendet választaná.
Igaza van Pistinek? Melyik sorrendet érdemes választania?

5. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2018.)**
Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az *A* vagy a *B* cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

6. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2017.)**
A biológiaórán egy kezdetben tízmilliós baktériumhalmaznak a környezethez való alkalmazkodását modellezik a tanulók. Egy szabályos dobókockával dobnak, és ha a dobás eredménye 1, 2 vagy 3, akkor egymillió baktérium elpusztul. Ha a dobás eredménye 4 vagy 5, akkor nem történik semmi. Ha a dobás eredménye 6, akkor újabb egymillió baktérium keletkezik. A dobást többször egymás után megismétlik. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy hét dobás után a baktériumok száma legfeljebb ötmillió lesz!

7. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2015.)**
Dani sportlövészedzésre jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

a) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot?

A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vagy pontosan két találatot ér el.

c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani!

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1524–1600.

85. FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG

A FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG FOGALMA

Az összetettebb valószínűségszámítási feladatok megoldása során nagyon hasznosnak bizonyul egy újabb fogalom bevezetése.

1. példa Mennyi a valószínűsége, hogy egy dobókockát feldobva páros számot dobtunk, ha valahonnan megtudtuk, hogy a dobott szám prím?

Megoldás A feladatban három esemény játszik szerepet. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{$a dobott szám páros$\} = \{2, 4, 6\}$, $B = \{$a dobott szám prím$\} = \{2, 3, 5\}$, $AB = \{$páros prímek$\} = \{2\}$. Az A esemény valószínűségére vagyunk kíváncsiak, ami a klasszikus modell szerint $P(A) = \frac{|A|}{|H|} = 0{,}5$, ha nem vesszük figyelembe a kapott többletinformációt. Viszont többletinformációval rendelkezünk, ami azt jelenti, hogy a kedvező esetek száma csak a páros prímekre (AB esemény) korlátozódik. Az összes esetek száma pedig a prímek (B esemény) száma. Vagyis a mi esetünkben

$P(A$ feltételezve, hogy B bekövetkezett$) = \frac{\text{páros prímek száma}}{\text{prímek száma}} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{3}$. Érdekes, hogy a többletinformáció ismeretében arra jutottunk, hogy az A esemény bekövetkezésének valószínűsége csökkent.

Mivel elég gyakran találkozunk hasonló jellegű problémákkal, ezért az egyszerűbb leírás érdekében egy új jelölést vezetünk be.

A $P(A$ feltételezve, hogy B bekövetkezett$)$ helyett $P(A\,|\,B)$-t írunk. A zárójelben az első tag azt az eseményt jelöli, aminek a valószínűségére kíváncsiak vagyunk, a függőleges vonal után pedig azt, amelyikről feltételezzük, hogy bekövetkezett.

Ha az első példát kicsit általánosabban nézzük, akkor egy jól használható definícióhoz jutunk.

$P(A\,|\,B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{\frac{|AB|}{|H|}}{\frac{|B|}{|H|}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Jelen esetben $P(A\,|\,B) = \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$.

Tegyük fel, hogy A és B ugyanazon kísérlettel kapcsolatos események. Az A esemény valószínűségére vagyunk kíváncsiak, de tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett. Ismételjük meg kísérletünket n-szer, de csak azokat az eseteket vegyük figyelembe, amelyekben B bekövetkezett. Ekkor az A relatív gyakorisága

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{\left(\frac{k_{AB}}{n}\right)}{\left(\frac{k_B}{n}\right)},$$

ahol k_{AB}, és k_B az AB és B bekövetkezésének a számát jelöli. Viszont a $\frac{\left(\frac{k_{AB}}{n}\right)}{\left(\frac{k_B}{n}\right)}$ a $\frac{P(AB)}{P(B)}$ érték körül „ingadozik”.

Így ez utóbbit tekinthetjük a feltételes valószínűség definíciójának. Mivel a nevezőben a B esemény valószínűsége szerepel, csak abban az esetben van értelme a kifejezésnek, ha ez pozitív. A most bevezetett fogalom jelölésére a $P(A\,|\,B)$ szimbólumot használjuk, és „P A feltéve B”-nek olvassuk.

Definíció

A fentiek alapján az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűségén** a

$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

mennyiséget értjük, ahol $P(B) > 0$.

Megjegyzés

Az 1. példában láthattuk, hogy a plusz információ birtokában arra jutottunk, hogy az A esemény valószínűsége csökkent. A B esemény bekövetkezése csökkentette az A esemény bekövetkezésének valószínűségét. Ha a B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A valószínűségét, akkor az A és B eseményeket függetlennek tekintjük. (Később látjuk majd, hogy a függetlenség szimmetrikus tulajdonság: ha A nem függ B-től, akkor B sem függ A-tól.)

Ha $P(A\,|\,B) = P(A)$, akkor az A és B események függetlenek.

2. példa Egy jól megkevert magyar kártyacsomagból egymás után kiveszünk két lapot.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy másodikra pirosat húzunk, ha tudjuk, hogy elsőre is pirosat húzunk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy másodikra pirosat húzunk, ha tudjuk, hogy elsőre makkot húzunk?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre makkot, másodikra pedig pirosat húzunk?

Megoldás *a)* A könnyebb áttekinthetőség kedvéért vezessünk be néhány jelölést.

$A = \{$másodikra pirosat húzunk$\}$, $B = \{$elsőre pirosat húzunk$\}$.

A feladat $P(A\,|\,B)$, amit könnyen meghatározhatunk, hiszen ha tudjuk, hogy elsőre pirosat húzunk, akkor a második húzás előtt már csak 7 piros maradt, és összesen 31 lapból választhatunk. Így

$P(A\,|\,B) = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \dfrac{7}{31}$. Ha az előző gondolatmenetet követjük, akkor

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{8\cdot 7}{32\cdot 31}}{\frac{8}{32}} = \frac{8\cdot 7}{32\cdot 31}\cdot\frac{32}{8} = \frac{7}{31}.$$

b) Legyen $C = \{$elsőre makkot húzunk$\}$.

$P(A\,|\,C) = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \dfrac{8}{31}$. Az előző feladathoz képest annyi a változás, hogy ha tudjuk, hogy elsőre makkot húzunk, akkor a második húzás előtt még mind a 8 piros a csomagban van.

$$P(A\,|\,C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{8\cdot 8}{32\cdot 31}}{\frac{8}{32}} = \frac{8\cdot 8}{32\cdot 31}\cdot\frac{32}{8} = \frac{8}{31}.$$

c) Most a CA esemény valószínűsége a kérdés. Mivel $CA = AC$, ezért az előző gondolatmenetet felhasználva:

$P(A\,|\,C) = \dfrac{P(AC)}{P(C)}$ egyenletünket szorozzuk meg $P(C)$-vel.

$P(C)\cdot P(A\,|\,C) = P(AC)$, így egy nagyon kényelmes kiszámolási lehetőséghez jutottunk.

$P(AC) = \dfrac{8}{32}\cdot\dfrac{8}{31} = \dfrac{2}{31}$.

Megjegyzés

A kapott eredmény szerint tehát ha az A és B esemény szorzatának valószínűségét szeretnénk meghatározni, akkor alkalmazhatjuk a következő képletet:

$P(AB) = P(B\,|\,A)\cdot P(A)$.

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE (Kiegészítő anyag)

3. példa Egy személygépkocsikat gyártó üzemben három műszakban állítanak elő autókat. Az egyes napszakokban nem egyenletes a termelés hatékonysága. Az első műszakban 1%, a második műszakban 0,8%, a harmadikban pedig 2% a selejt aránya. Az egy napon előállított autók 30%-át az első műszak, 40%-át a második és a maradék 30%-ot a harmadik műszak állítja elő.

a) Ha véletlenszerűen vásárolok egy autót a ma gyártottak közül, mennyi a valószínűsége, hogy az selejtes?

b) Sajnos sikerült egy selejtes autót vásárolnom. Mennyi a valószínűsége, hogy azt az első műszakban gyártották?

Megoldás

a) **Első megoldás:** Ha meghatározzuk az egy napon gyártott autók között a selejtesek arányát, akkor véletlenszerű választásunk esetén ez egyben a selejt választásának a valószínűsége lesz.

Tegyük fel, hogy n darab autót gyártanak naponta. Az első műszakban $0{,}3n$ darab autót gyártottak, ebből $0{,}3n \cdot 0{,}01 = 0{,}003n$ darab selejtes. Hasonlóan a másodikban $0{,}4n \cdot 0{,}008 = 0{,}0032n$ darabot, míg a harmadikban $0{,}3n \cdot 0{,}02 = 0{,}006n$ darab selejtet gyártanak. Így az egész napra jutó selejtek száma

$0{,}003n + 0{,}0032n + 0{,}006n = 0{,}0122n$, ami az összes legyártott személygépkocsi 1,22%-a.

$P(\text{selejtet vásároltam}) = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}01n + 0{,}4 \cdot 0{,}008n + 0{,}3 \cdot 0{,}02n}{n} = \dfrac{0{,}0122n}{n} = 0{,}0122 = 1{,}22\%$. (A valószínűséget néha megadják a szemléletes százalékos értékkel is.)

Második megoldás: Vezessük be a következő eseményeket!

$A_1 = \{$az általam vásárolt autót az első műszak gyártotta$\}$;

$A_2 = \{$az általam vásárolt autót a második műszak gyártotta$\}$;

$A_3 = \{$az általam vásárolt autót a harmadik műszak gyártotta$\}$;

$B = \{$selejtet vásároltam$\}$.

Ekkor az A_1, A_2, A_3 események teljes eseményrendszert alkotnak, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = H$. Tudjuk, hogy

$P(A_1) = 0{,}3$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(A_3) = 0{,}3$, ami azt jelenti, hogy ismerjük a teljes eseményrendszer elemeire vonatkozó valószínűségeket. A megadott adatokból kiszámíthatjuk a B eseménynek a teljes eseményrendszer elemeire vonatkozó feltételes valószínűségeit.

$P(B|A_1) = 0{,}01$, $P(B|A_2) = 0{,}008$, $P(B|A_3) = 0{,}02$.

$B = HB = (A_1 + A_2 + A_3)B = A_1B + A_2B + A_3B$. Mivel ez a három esemény páronként kizárja egymást, ezért $P(B) = P(A_1B + A_2B + A_3B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B)$. Az előző példa eredményét felhasználva kapjuk, hogy $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}008 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}0122$.

b) **Első megoldás:** Ha sikerül meghatározni az összes legyártott selejtes járműveken belül az első műszakban gyártottak arányát, ez éppen a keresett valószínűség lesz.

Tehát $P(A_1|B) = \dfrac{0{,}003n}{0{,}0122n} = \dfrac{30}{122} = \dfrac{15}{61} \approx 0{,}2459$. Körülbelül egy negyed az esélye, hogy az első műszak gyártotta az általam vásárolt selejtes járművet.

Második megoldás: A feltételes valószínűségről tanultak alapján.

$P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}01}{0{,}0122} = \dfrac{0{,}003}{0{,}0122} \approx 0{,}2459$. Az A_1B esemény valószínűségének a meghatározásánál alkalmaztuk az előzőekben megkapott formulát.

A mostani példa megoldását általánosíthatjuk.

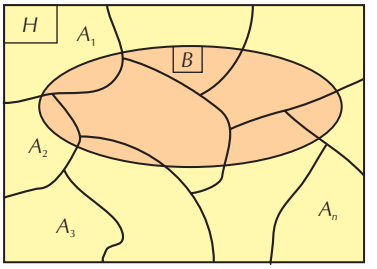
Tétel

Teljes valószínűség tétele:

Ha az A_1, A_2, A_3, …, A_n események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B esemény esetén $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$.

Ez azt jelenti, hogy ha ismerjük a $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, …, $P(A_n)$ és $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$, $P(B|A_3)$, …, $P(B|A_n)$ valószínűségeket, akkor ezek ismeretében meghatározhatjuk a B esemény valószínűségét.

Szemléltető ábránkon látható, hogy a teljes eseményrendszer elemei egyrétűen lefedik a H alaphalmazt. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a B esemény valószínűsége. A rajzon ez azt jelenti, hogy a B hányad része a H-nak. Ehhez felhasználhatjuk, hogy tudjuk, A_i hányad része H-nak, és $B \cap A_i$ hányad része A_i-nek.



Indoklás: A $P(B) = \dfrac{|B|}{|H|}$ mennyiségre vagyunk kíváncsiak. A B eseményt felbontottuk n darab egymást kizáró eseményre: A_1B, A_2B, A_3B, …, A_nB. Ennek az n darab eseménynek a valószínűségét összeadva kapjuk a B esemény valószínűségét. A feltételes valószínűségről tanultak segítségével ezeket is meghatározhatjuk.

$P(A_1B) = P(A_1)P(B|A_1) = \dfrac{|A_1|}{|H|} \cdot \dfrac{|A_1B|}{|A_1|} = \dfrac{|A_1B|}{|H|}$, ugyanígy az összes esetben.

A *b)* feladatot is általánosíthatjuk, ebben lényegében az eredeti kérdést fordítjuk meg. Vagyis feltételezzük, hogy a B esemény bekövetkezett, és kíváncsiak vagyunk, hogy az A_1 is bekövetkezett-e. Természetesen az A_1 helyett bármelyik A_i-t választhattuk volna.

Tétel

Bayes tétele:
Ha az $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B esemény esetén: $P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(A_1 B)}{P(B)} = \dfrac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B)}$, ahol $P(B) \neq 0$.

Ez azt jelenti, hogy ha ismerjük a $P(A_1), P(A_2), P(A_3), \ldots, P(A_n)$ és $P(B \mid A_1), P(B \mid A_2), P(B \mid A_3), \ldots, P(B \mid A_n)$ valószínűségeket, akkor ezek ismeretében meghatározhatjuk a $P(A_1 \mid B)$ esemény valószínűségét. ($P(B)$-t az előbb látott teljes valószínűség tételével határozhatjuk meg, ehhez kell a $P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$ valószínűségek ismerete.)

4. példa Egy jól megkevert 52 lapos francia kártyacsomagból kihúzunk egymás után két lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második lap pikk lesz?

Megoldás **Első megoldás (esetszétválasztás):** Hogy a második húzásra milyen valószínűséggel húzunk pikket, az függ attól, hogy elsőre pikket húztunk, vagy nem. Ezért célszerű az első húzás eredményét egy egyszerű teljes eseményrendszerrel jellemezni:
A = {elsőre pikket húzunk}, $\overline{A}$ = {elsőre nem pikket húzunk}. B = {másodikra pikket húzunk}.
Így már alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét.

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1}{4}.$$

Második megoldás (klaszikus modell): Feltételezhetjük, hogy bármely elemi esemény egyformán valószínű, így

$P(B) = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \dfrac{13 \cdot 12 + 39 \cdot 13}{52 \cdot 51} = \dfrac{1}{4}$. A kedvező eseteket úgy számoltuk, hogy vagy két pikket húzunk egymás után, vagy egy nem pikk és egy pikk jött ki.

Harmadik megoldás (permutációk): Ha mind az 52 lapot sorba rakjuk egymás után az összes lehetséges módon, akkor megkapjuk az 52! lehetséges permutációt. Ezekben bármelyik helyet nézzük, ott az esetek negyedrészében van pikk. Ha a lapokat kihúzzuk egymás után, akkor nyilván az egyik permutációt kapjuk meg. Feltételezhetjük, hogy ezek mindegyike egyformán valószínű, de ez azt is jelenti, hogy mindegyik helyen $\frac{1}{4}$ a pikk húzásának a valószínűsége.

Negyedik megoldás (szimmetria): A színek egyenértékűek, ezért P(2. lap pikk) = P(2. lap kőr) = P(2. lap treff) = = P(2. lap káró). Mivel összegük 1, ezek mindegyikének a valószínűsége $\frac{1}{4}$.

FELADATOK

1. E1 Egy osztályban a fiúk és lányok aránya egy a kettőhöz. A lányoknak a negyede szereti a kosárlabdát, a fiúknak pedig a fele.
a) Az osztályból véletlenszerűen kiválasztva valakit, mennyi az esélye, hogy ő szereti a kosárlabdát?
b) Az osztályból véletlenszerűen kiválasztva valakit, megtudtuk, hogy szereti a kosárlabdát. Mennyi a valószínűsége, hogy ő lány?

2. E2 Egy ország lakosságának egy ezreléke szenved egy bizonyos betegségben. Ezt a betegséget nem lehet egyszerűen felismerni, ezért egy tesztet használnak a kimutatására. Ez a teszt a betegek 99,9%-át betegnek mutatja. Sajnos viszont az egészséges emberek közül is kb. minden tízezrediket betegnek mutat a teszt.
a) Mennyi az esélye, hogy egy emberen elvégezve a tesztet, őt betegnek mutatja?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy ha valakit a teszt betegnek nyilvánít, akkor ő valóban beteg?

3. E1 Egy lövésznek két puskája van, ezek látszólag egyformák. Az egyik puskával minden lövésnél 0,9 valószínűséggel, a másikkal 0,6 valószínűséggel találja el a céltáblát. Az egyik fegyvert véletlenszerűen kiválasztja, és azzal lövéseket ad le a céltáblára.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első lövés talál?

b) Ha az első lövés talált, mennyi a valószínűsége, hogy azzal lőtt, amivel 0,9 valószínűséggel talál?

c) Ha az első lövés talált, mennyi a valószínűsége, hogy a második lövése is talál?

4. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2012.)**
Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

a) Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt.

Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!

A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, **visszatevéssel** kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!

A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.

c) Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

5. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2015.)**
Szétgurult 20 darab tojás az asztalon. Közülük 16 tojás ép maradt, de 4 tojásnak alig észrevehetően megrepedt a héja. Bori ezt nem vette észre, így visszarakosgatja a tojásokat a két tojástartóba. Először a sárga tartóba tesz tízet, majd a fehérbe a többit.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás ugyanabba a tartóba kerül?

Csenge sokszor vásárol tojásokat a sarki üzletben. Megfigyelése szerint a tojások közül átlagosan minden ötvenedik törött. (Ezt úgy tekintjük, hogy a tojások mindegyike 0,02 valószínűséggel törött.)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 10 tojást tartalmazó dobozban egynél több törött tojást talál Csenge?

Egy csomagolóüzembe két termelő szállít tojásokat: az összes tojás 60%-a származik az *A*, 40%-a a *B* termelőtől. Az *A* termelő árujának 60%-a első osztályú, 40%-a másodosztályú, a *B* termelő árujának 30%-a első osztályú és 70%-a másodosztályú. Az összes beszállított tojás közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt első osztályúnak találjuk.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az *A* termelő árujából való a kiválasztott tojás?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1653, 1658.

86. FÜGGETLEN ESEMÉNYEK

1. példa A gimnázium 11. évfolyamára 30 lány jár, akik közül 12 szőke és 10 kék szemű. A szőkék közül 8 kék szemű.

a) A 30 lányból kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy kék szemű lányt választunk?

b) A szőke lányokból választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy kék szeműt választunk?

Megoldás *a)* A valószínűség klasszikus modelljét alkalmazhatjuk.

$$P(\text{kék szemű lányt választunk}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

b) $$P(\text{kék szemű lányt választunk, ha a szőkék közül választunk}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Látható, hogy a szőke haj és a kék szem előfordulása nem független egymástól. A szőke hajú lányok között a kék szeműek választásának valószínűsége kétszer akkora, mint az egész osztályban.

Két esemény függetlensége azt jelenti, hogy az egyik esemény bekövetkezése nem teszi sem valószínűbbé, sem kevésbé valószínűvé a másik esemény bekövetkezését. (Azaz egyik esemény sem befolyásolja a másik esemény valószínűségét.)

A feltételes valószínűségről tanultak segítségével is megfogalmazhatjuk az események függetlenségét. Ha $P(A) = P(A \mid B)$, akkor az A esemény független a B-től.

Az előző példában a szőke haj kétszeresére növelte a kék szem valószínűségét.

2. példa Egy 32 lapos magyar kártyából találomra kiválasztunk egy lapot. Két eseményt figyelünk. Legyen A = {ászt választunk}, B = {pirosat választunk}. Független-e a két esemény?

Megoldás A 32 lap között 4 ász van, ez az jelenti, hogy

$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Mivel a 8 piros lap között 1 ász van, ezért

$P(A, \text{ha csak a pirosakból választunk}) = \frac{1}{8}$. Az A esemény valószínűségét nem befolyásolja a B.

$P(B) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. Mivel a csomagban összesen 4 ász van, ezért

$P(B, \text{ha csak az ászokból választunk}) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{1}{4}$. Tehát a B esemény bekövetkezését sem befolyásolja az A esemény valószínűsége.

Azt kaptuk, hogy a két esemény független.

Nézzük ezt egy kicsit általánosabban.

Legyenek az A és B események a H eseménytéren értelmezve, és az elemi események valószínűsége legyen egyenlő.

$P(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{|AB|}{|B|}$, ha az A esemény független a B-től. Vagyis az egész eseménytéren ugyanolyan arányban fordulnak elő az A esemény elemei, mint a B-hez tartozó elemek között.

Az előző egyenletet átrendezve

$\frac{|A|}{|H|} = \frac{|AB|}{|B|} \quad \Big/ \cdot \frac{|B|}{|A|}$

$\frac{|B|}{|H|} = \frac{|AB|}{|A|}$, ami azt jelenti, hogy a B is független az A-tól. Tehát ha $P(A) = P(B \mid A) \Rightarrow P(B) = P(B \mid A)$.

Ha az A esemény független a B-től, akkor a B is független az A-tól.

3. példa Két dobókockát feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható 9-cel?

Megoldás **Első megoldás (klasszikus modell):** a két dobókockát megkülönböztetve az összes elemi esemény száma $6 \cdot 6 = 36$. Feltételezhetjük, hogy ezek mindegyike egyformán valószínű, tehát alkalmazhatjuk a klasszikus modellt.

A kedvező esetek a {3; 3}, {6; 3}, {3; 6}, {6; 6}, ezek száma 4.

A = {a dobott számok szorzata osztható 9-cel}

$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Második megoldás (műveletek eseményekkel): Itt is egy egyszerű, ám annál fontosabb feltételezéssel élünk. Azt feltételezzük, hogy a két kockával dobott szám egymástól független, vagyis semmiféle hatásuk nincs egymásra.

Legyen

B = {az egyes számú kockával, 3-mal osztható számot dobok},

C = {a kettes számú kockával, 3-mal osztható számot dobok}.

Ahhoz, hogy a két kockán dobott számok szorzata osztható legyen 9-cel, mindkét dobott számnak oszthatónak kell lennie 3-mal, hiszen nincs a kockán 9-cel osztható szám.

Tehát $A = BC$, vagyis az A esemény előáll két esemény szorzataként. Azt feltételezzük, hogy a két kockával dobott szám egymástól független, vagyis semmiféle hatásuk nincs egymásra. Az így kapott független események szorzatának a valószínűsége a valószínűségek szorzata.

$$P(A) = P(BC) = P(B)P(C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

A két megoldás ugyanazt a végeredményt adja:

$$P(A) = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}.$$

Ez a látszólag aprócska megoldásbeli különbség sok haszonnal jár a későbbiekben.

Két kocka egymás utáni feldobása független egymástól, mert az egyik dobás eredménye nem befolyásolja a másik dobás eredményét.

4. példa Egy kockát feldobva két eseményt figyelünk:

A = {páros számot dobunk},

B = {3-mal osztható számot dobunk}.

Vizsgáljuk meg a két eseményt függetlenség szempontjából!

Megoldás Az A esemény független a B-től. Az A esemény valószínűsége $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ha csak annyit tudunk, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor sem változik az A esemény bekövetkezésének valószínűsége. Ha tudjuk, hogy a B bekövetkezett, ez csak annyit jelent, hogy vagy 3-ast, vagy 6-ost dobtunk. Számunkra kedvező a 6-os. Mivel mindkét elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége megegyezik, ezért $P(A) = \frac{1}{2}$ továbbra is.

A B esemény független az A-tól. A B esemény valószínűsége $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ha csak annyit tudunk, hogy az A esemény bekövetkezett, akkor sem változik a B esemény bekövetkezésének valószínűsége. Ha tudjuk, hogy az A bekövetkezett, ez csak annyit jelent, hogy 2-est, 4-est, vagy 6-ost dobtunk. Számunkra kedvező a 6-os. Mivel mindhárom elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége megegyezik, ezért $P(B) = \frac{1}{3}$ továbbra is.

Ez a példa is jól mutatja, hogy a függetlenség szimmetrikus tulajdonság.

Hogyan számítsuk ki két független esemény szorzatának a valószínűségét?

Ha A független B-től, akkor $P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Az összefüggés segítségével megadhatjuk a függetlenség formális definícióját:

Definíció

Az A és B események **függetlenek,** ha $P(A) \cdot P(B) = P(AB)$.

Honnan tudhatjuk tehát, hogy két esemény független egymástól?

1. A korábban látott összefüggések alapján megvizsgáljuk, hogy az A esemény bekövetkezése nem befolyásolja a B valószínűségét (lásd a 2. példát).
2. Ellenőrizhetjük, hogy teljesül a formális definíció.
3. A kísérlet körülményei egyértelműen biztosítják számunkra, hogy a két esemény független. (Egymás után feldobunk két pénzérmét, két dobókockát, stb.)

Emlékeztető

A gyakorlatban felmerülő problémák vizsgálatakor mindig felállítunk egy matematikai modellt. A modell segítségével meghatározzuk az adott esemény valószínűségét. A kapott eredmény helyességét csak a gyakorlat döntheti el. Ha nagyszámú kísérletet elvégezve a kapott relatív gyakoriság az általunk megjósolt valószínűség körül ingadozik, akkor helyes modellt állítottunk fel.

Klasszikus példánkban két pénzérme feldobása során az A = {egy fejet és egy írást dobunk} esemény valószínűségét határoztuk meg.

Kétféle modellt állítottunk fel.

1. Az érméket nem különböztetjük meg. Ekkor három elemi eseményt kapunk.
   A = {egy fejet és egy írást dobunk}, B = {két fejet dobunk}, C = {két írást dobunk}. Ha még azt is feltételezzük, hogy az elemi események egyformán valószínűek, akkor $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.
2. Az érméket megkülönböztetjük. Ekkor négy elemi eseményt kapunk: II, IF, FI, FF. Ha ezeket tekintjük egyformán valószínű elemi eseményeknek, akkor mindegyik valószínűsége $\frac{1}{4}$. Mivel az A esemény két elemi eseményből áll, ezért $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

A két modell közül azt fogadjuk el, amit a gyakorlat igazol. Már néhány száz kísérlet elvégzése után is látható, hogy a fej-írás dobások az összes dobás kb. felében következnek be, vagyis a 2. modell az érvényes. (Hiába tűnik egyformának a két érme, a valóságban ezek különböző tárgyak.)

Ez és az ehhez hasonló kísérletek azt mutatják, hogy ha a valóságban használható eredményeket szeretnénk kapni a problémák megoldása során, akkor a látszólag egyforma dolgokat is meg kell különböztetni. Ilyenkor feltételezhetjük, hogy az elemi események egyformán valószínűek.

5. példa Három dobókockát feldobva mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy 6-ost dobunk?

Megoldás **Első megoldás:** A megoldás során használt matematikai modellünkben megkülönböztetjük a kockákat.

Az összes eset $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

A kedvező esetek számának meghatározásakor tudnunk kell, hogy 3-féle módon dobhatunk egy 6-ost: első 6-os és a másik kettő nem; a második 6-os és a másik kettő nem; végül a harmadik 6-os és a másik kettő nem. Tehát a kedvező esetek száma: $1 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 1 = 75$.

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{75}{216}.$$

Második megoldás: Azt is feltételezhetjük, hogy az egyes dobókockák esetén a 6-os dobások valószínűsége független egymástól.

Legyen: A = {pontosan egy 6-ost dobunk},
A_1 = {az egyes számú kockával 6-ost dobunk},
A_2 = {a kettes számú kockával 6-ost dobunk},
A_3 = {a hármas számú kockával 6-ost dobunk}.

Három egymást kizáró esetben következhet be az A esemény.

$A_1\overline{A_2}\overline{A_3}$ = az első 6-os és a másik kettő nem.
$\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$ = a második 6-os és az első és a harmadik nem.
$\overline{A_1}\overline{A_2}A_3$ = a harmadik 6-os és az első kettő nem.

Mint tudjuk, egymást kizáró események összegének a valószínűsége a valószínűségek összege.

$$P(A) = P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3) = P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) =$$

$$= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}.$$

6. példa Egészítsük ki az alábbi táblázatot úgy, hogy az adatok alapján a tejivás és a veseproblémák függetlenségére következtethessünk!

	Rendszeresen tejet iszik	Ritkán vagy egyáltalán nem iszik tejet	Összesen
Semmilyen vesepanasza nincs	46		
Volt vagy van veseproblémája		46	
Összesen			200

Megoldás A rendszeres tejivók (T) és veseproblémások (V) számát jelölje x (tehát $x = |T \cap V|$). Ekkor azok száma, akik nem isznak tejet és vesepanaszuk sincs, $|\overline{T} \cap \overline{V}| = 200 - (2 \cdot 46 + x) = 108 - x$. Az így kapott adatokkal kitöltött táblázat a következő:

	Rendszeresen tejet iszik	Ritkán vagy egyáltalán nem iszik tejet	Összesen
Semmilyen vesepanasza nincs	46	$108 - x$	$154 - x$
Volt vagy van veseproblémája	x	46	$46 + x$
Összesen	$46 + x$	$154 - x$	200

A függetlenség fennállásának igazolásához bármelyik korábbi összefüggést felhasználhatjuk. Például:

– $P(T|V) = P(T)$ fennállásához teljesülnie kell, hogy $\frac{x}{46+x} = \frac{46+x}{200}$;

– $P(T|V) = P(T|\overline{V})$ fennállásához teljesülnie kell, hogy $\frac{x}{46+x} = \frac{46}{154-x}$;

– $P(TV) = P(T)P(V)$ fennállásához teljesülnie kell, hogy $\frac{x}{200} = \frac{46+x}{200} \cdot \frac{46+x}{200}$.

Bármelyik esetet választjuk, az $x^2 - 108x + 2116 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek közelítő (egész) megoldásai $x_1 \approx 82$ vagy $x_2 \approx 26$. (Mivel statisztikai jellegű feladatról van szó, „kis eltérés” még megengedett.)

FELADATOK

1. E1 Egy iskolába 600 diák jár, ebből 100-an hordanak szemüveget. A 11.c-be 30 tanuló jár, közülük pedig 5-en szemüvegesek. Véletlenszerűen kisorsolnak egy diákot, aki ingyen vehet részt az iskolai sítáborban. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott diák szemüveges, a B esemény pedig, hogy a 11. c-be jár. Mennyi az A, B, AB események valószínűsége? Függetlenek-e egymástól az A és B események? (Készítsünk halmazábrát!)

2. E1 Egy pénzérmét négyszer egymás után feldobva mennyi az esélye, hogy mindig fejet dobunk?

3. E1 A kislányok húsvéti tojásokat festenek. Mind a hárman választanak egy-egy színt az előttük lévő három lehetőségből, mindenki vagy pirosat, vagy sárgát, vagy zöldet választhat.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki piros tojást fest?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy azonos színűek lesznek a tojások?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki különböző színű tojást fest?

4. E1 Tudjuk, hogy az A és B események függetlenek. Igaz-e, hogy A és $\overline{B}$ is független egymástól?

5. E1 Két dobókockát egymás után 24-szer feldobva mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy dupla 6-ost dobunk?

6. E2 A $H = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbf{Z}^+$) alaphalmaz elemei közül véletlenszerűen választunk egyet. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott szám páros, a B pedig az, hogy a kiválasztott szám 5-tel osztható. Független-e a két esemény, ha

a) $n = 10$, *b)* $n = 11$ vagy *c)* $n = 6$ (kockadobás)?

d) A C esemény legyen az, hogy a kiválasztott szám 3-mal osztható. Mutassuk meg, hogy ha $n = 12$, akkor az A és B, valamint az A és C események függetlenek! Teljesül ekkor B és C függetlensége is?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1649–1654, 1670.

87. A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ

A gyakorlatban előforduló valószínűség-számítási feladatokban az eseményeket egyszerűen egy számmal jellemezhetjük. Ha a statisztikára gondolunk, ott is az adatokat általában egy számmal azonosítjuk. Sokszor áttekinthetőbb így az adott probléma.

Definíció

Ha egy véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleihez számokat rendelünk, akkor egy **valószínűségi változót** határozunk meg. A valószínűségi változó tehát az eseménytéren értelmezett valós értékű függvény. (Az egyes kimenetelekhez rendelt szám a bekövetkezésük valószínűsége.)

Nézzünk egy egyszerű esetet!

1. példa Egy kockát feldobva lehetséges kimenetelek lehetnek a dobott számok.

Ha változónkat a függvényeknél megszokott X-szel jelöljük, akkor a most meghatározott valószínűségi változó lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

A hozzájuk tartozó valószínűségek pedig $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$, …, $P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

A $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ felírás azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó felveszi az 1-es értéket (vagyis 1-est dobunk), $\frac{1}{6}$.

A $P(X = i) = P_i$ rövidítést használva az alábbi táblázat összefoglalja az eddigieket. Az első sorban a valószínűségi változó lehetséges értékeit tüntetjük fel, a második sorban pedig a hozzájuk tartozó valószínűségeket.

X	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(A valószínűségi változó függvény, a táblázat a függvények egyik lehetséges megadási módja.)

2. példa Két dobókockát feldobva, a valószínűségi változó jelentse a két dobott szám összegét. Határozzuk meg a változó lehetséges értékeit és az ezekhez tartozó valószínűségeket!

Megoldás Ebben az esetben is megfigyelhetjük, hogy a kísérlet elvégzése után a valószínűségi változónak pontosan az egyik lehetséges értékét kapjuk meg.

$X \in \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$. A változó lehetséges értékeihez tartozó valószínűségek meghatározásához megkülönböztetjük a két kockát. Így az összes elemi esemény száma $6 \cdot 6 = 36$. Meghatározhatjuk, hogy az egyes esetekben mennyi lesz a dobott számok összege, így megkapjuk a keresett valószínűségeket. Ezt újra egy táblázatban adjuk meg. Például: $2 = 1 + 1$ (egy előállítás), $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ (két előállítás) stb.

Ezek alapján $P(X = 2) = P_2 = \frac{1}{36}$, $P(X = 3) = P_3 = \frac{2}{36}$ és így tovább.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Az alsó sorban a valószínűségi változó lehetséges értékeihez tartozó valószínűségeket találjuk. Mivel ezek egy teljes eseményrendszer elemeihez tartozó valószínűségek, ezért összegük 1.

A lehetséges kimenetelek valószínűségeire bevezetjük az eloszlás fogalmát.

Definíció

Adott $P_1, P_2, \ldots, P_n$ számok **eloszlást** alkotnak, ha mindegyik szám pozitív és az összegük 1. (Számuk akár végtelen sok is lehet.)

Megjegyzés

Két kocka feldobása esetén többféle valószínűségi változót is bevezethetünk. Ha például a valószínűségi változó a 6-os dobások számát jelenti, akkor az előzőtől eltérő táblázatot kapunk.

X	0	1	2
P_i	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

A valószínűségi változó lehetséges értékeihez tartozó valószínűségek **egy eloszlást alkotnak**.

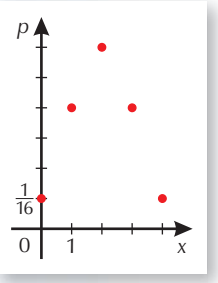
Megjegyzés

A teljes eseményrendszer elemeihez tartozó valószínűségek mindig eloszlást alkotnak.

3. példa Négy pénzérmét feldobva a valószínűségi változó jelentse a dobott fejek számát. Határozzuk meg a változó lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket!

Megoldás $X = 0, 1, 2, 3, 4$ lehetséges. A kísérlet elvégzése után a valószínűségi változó ezekből pontosan az egyik értéket veszi fel. Az érméket megkülönböztetve az összes elemi esemény száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Az $X = 0$ kimenetel $\binom{4}{0} = 1$-féle módon lehetséges, az $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ és $X = 4$ kimenetelek pedig rendre $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ és $\binom{4}{4} = 1$-féleképpen.



X	0	1	2	3	4
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

A továbbiakban néhány nevezetes eloszlással ismerkedünk meg.

BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

Az eddigi tanulmányaink során foglalkoztunk már a visszatevéses mintavétellel. Ez a gyakorlatban sokszor előforduló mintavétel éppen az egyik legfontosabb eloszláshoz vezet.

4. példa Egy véletlen kísérletben az A esemény valószínűsége p. (Például, ha A = {egy kocka feldobásakor 6-ost dobunk}, akkor $P(A) = p = \frac{1}{6}$.) Pontosan n-szer elvégezzük egymástól függetlenül a kísérletet. A valószínűségi változónk jelentse azt, hogy hányszor következett be az általunk megfigyelt A esemény.

Határozzuk meg a valószínűségi változó lehetséges értékeihez tartozó valószínűségeket!

Megoldás A változó lehetséges értékei $X = 0, 1, 2, \ldots, n$. A $P(X = k) = P_k$ valószínűségek meghatározásához felhasználjuk a független események szorzatáról tanultakat. Ha az A esemény az n kísérletből k-szor következik be, akkor $(n - k)$-szor nem következik be.

Legyen $P(A) = p$ és így $P(\overline{A}) = 1 - p$.

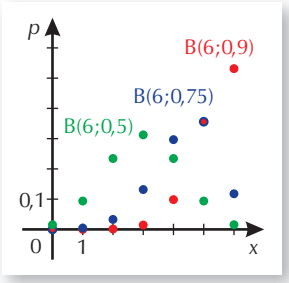
Egy konkrét sorrend bekövetkezésének a valószínűsége $P\left(\underbrace{A\,A\,\dots\,A}_{k}\underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\,\dots\,\bar{A}}_{n-k}\right) = p^k(1-p)^{n-k}$. Az A esemény $\binom{n}{k}$-féle sorrendben következhet be k-szor, mert az n „hely” közül azt a k darabot, ahová A-t írunk, $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani.

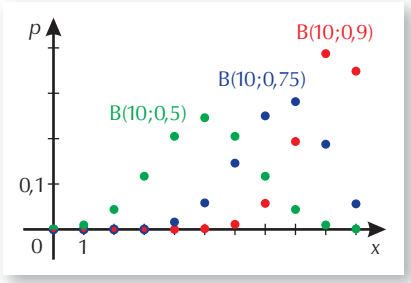
Az első n számból kiválasztunk k darabot, amely sorszámú kísérletekben bekövetkezik az A esemény, a fennmaradó $n-k$ esetben pedig nem következik be A.

Binomiális eloszlás

Annak a valószínűsége, hogy n darab független kísérlet esetén az A esemény pontosan k-szor következik be, $P_k = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, ahol $P(A) = p$. A $k = 0, 1, 2, \dots, k$ értékekre kapott számok összességét $(n; p)$ paraméterű binomiális eloszlásnak nevezzük. Jelölése: $B(n; p)$.

A 3. példában szintén egy binomiális eloszlást kaptunk $B(4; 0{,}5)$ paraméterekkel. (A grafikonokon néhány binomiális eloszlást szemléltetünk.)





HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁS

A visszatevés nélküli mintavétel esetén kapjuk ezt az eloszlást.

Hipergeometrikus eloszlás

N számú különböző tárgyból M darabot megjelölünk (selejtes, más színű, fiú vagy lány), és kiválasztunk belőlük $n \le N$ darabot. Az (X) valószínűségi változó jelentse a megjelöltek számát a kiválasztottak között. $X = 0, 1, 2, \dots, \text{Min}(M; n)$.

$P(X = k) = P_k = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Szokás egyszerűen $H(N, M, n)$-nel is jelölni a kapott eloszlást.

Indoklás: A klasszikus modellt fogjuk alkalmazni. Mivel a kiválasztásnál a sorrendre nem vagyunk tekintettel, ezért az összes eset száma $\binom{N}{n}$. A kedvező esetek számát úgy kapjuk, hogy a megjelöltekből választunk k darabot $\binom{M}{k}$-féleképpen és ettől függetlenül a maradék $(N-M)$-ből $(n-k)$ darabot, amit $\binom{N-M}{n-k}$-féle módon tehetünk meg. A képlet $k > M$ esetén is érvényben marad, hiszen megállapodás szerint $\binom{n}{k} = 0$, ha $n < k$.

Ha az N és M értékek „elég nagyok” n-hez képest, akkor a hipergeometrikus eloszlást szokás közelíteni a binomiális eloszlással úgy, hogy $p = \frac{M}{N}$. Ekkor a hiba nem lesz nagyobb $\left(\frac{M}{N}\right)^n$-nél.

GEOMETRIAI ELOSZLÁS (Kiegészítő anyag)

5. példa Egy dobókockával addig dobunk, amíg 6-ost nem dobunk. A valószínűségi változó jelentse a szükséges dobások számát. Adjuk meg az eloszlást! Bizonyítsuk be hogy a kapott valószínűségek valóban eloszlást alkotnak (azaz összegük 1 és mindegyik valószínűség pozitív)!

Megoldás $X = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, azaz a valószínűségi változó végtelen sok értéket is felvehet. Nyilván a nagy értékekhez már nagyon kicsi valószínűségek tartoznak.

$P(X = k) = P_k$ meghatározásához feltételezzük, hogy az egyes dobások eredménye független egymástól. Ez azt jelenti, hogy egymás után $(k - 1)$-szer nem dobunk 6-ost, és a végén pedig 6-ost dobunk.

$P_k = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$.

Ezzel megadtuk az eloszlást.

Adjuk össze az így kapott valószínűségeket!

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_k + \ldots = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}} = 1.$$

Egy végtelen mértani sor összegét kellett meghatározni, aminek első eleme $a_1 = \frac{1}{6}$, hányadosa $q = \frac{5}{6}$. Ez utóbbi kisebb 1-nél, tehát az összeg létezik. Az $s = \frac{a_1}{1-q}$ képlet felhasználásával kaptuk az eredményt.

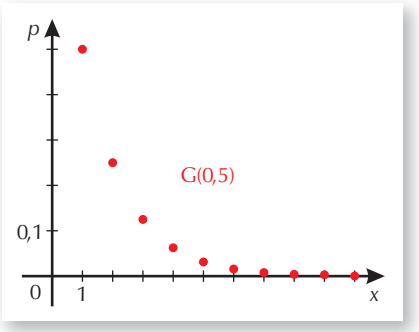
Feladatunkat könnyen általánosíthatjuk.

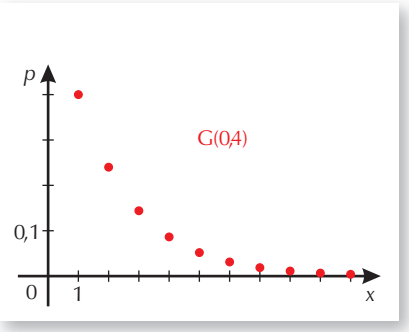
Geometriai eloszlás

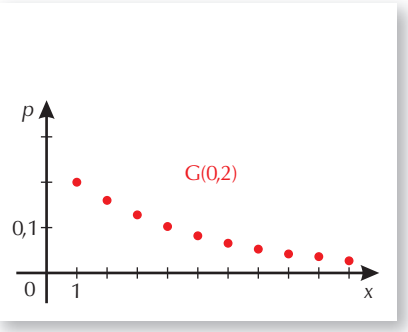
Egy véletlen kísérletben az A esemény bekövetkezésének a valószínűsége p. A kísérleteket addig végezzük, amíg A be nem következik. A valószínűségi változó jelentse a szükséges kísérletek számát. Ekkor $P(X = k) = P_k = (1 - p)^{k-1} \cdot p$, ahol k bármely pozitív egész szám lehet. Jelölés: $G(p)$.

Megjegyzés

Az egyes valószínűségek egy végtelen mértani sorozatot alkotnak. Innen kapta az eloszlás a nevét. (A grafikonokon néhány geometriai eloszlást szemléltetünk.)







FELADATOK

1. E1 *a)* Egy raktárban 1000 darab televízió van, amiből 200 darab hibás (nem lehet bekapcsolni). Kiválasztunk 5 darabot. A valószínűségi változó jelentse a kiválasztott TV-k közül a rosszak számát. Adjuk meg az eloszlást!

b) Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy visszatevéses mintavételt alkalmazunk! Öt darab TV-t választunk ki visszatevéssel. Ez azt jelenti, hogy minden egyes kiválasztásnál a kiválasztott TV $\frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$ valószínűséggel rossz. Adjuk meg az eloszlást!

c) Számítsuk ki a visszatevés nélküli és a visszatevéses mintavételű esetekben a kapott valószínűségek eltérését! Ti elfogadnátok-e ezt a közelítést?

2. E1 A véletlen kísérlet legyen az ötös lottó sorsolás (ekkor 90 számból választunk ki 5-öt.) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a kihúzott legnagyobb és legkisebb szám összege 20!

3. E1 A következő feladatokat megoldhatjuk a valószínűségi változó bevezetése nélkül is, de mindenképpen állapítsuk meg, hogy milyen eloszlásról van szó és annak mik a paraméterei!

a) Szeptemberben minden nap 0,3 valószínűséggel esik az eső. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy héten keresztül minden nap esik ebben a hónapban?

b) Egy sportlövő minden lövésnél a többi lövéstől függetlenül 0,9 valószínűséggel lő maximális tízes találatot egy lövésből. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy tizes sorozatban legalább nyolc találatot ér el?

c) Egy dobókockával hatszor dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan egy 6-ost dobunk?

d) Egy osztályba 20 lány és 10 fiú jár. Véletlenszerűen kiválasztunk egy öt fős küldöttséget. Mennyi a valószínűsége annak, hogy több fiút választottunk, mint lányt?

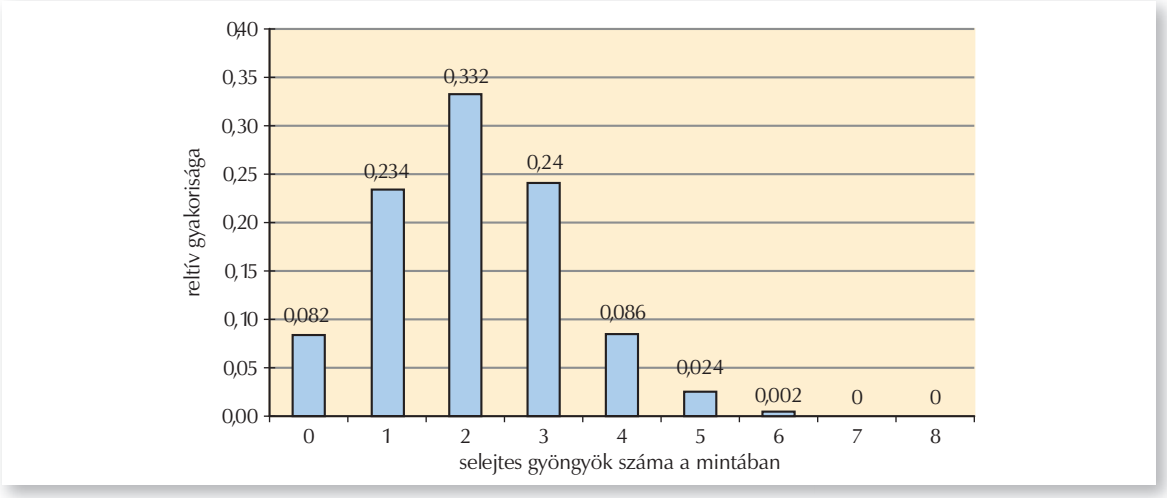
e) Egy pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem sikerül dobni. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ötnél több dobásra lesz szükség?

4. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2015.)**

Egy dobozban 40 üveggyöngy között 8 selejtes van. Egy kísérlet abból áll, hogy a 40 gyöngy közül **visszatevés nélküli mintavétellel,** véletlenszerűen kiválasztanak 10-et, és megszámolják, hogy hány selejtes van közöttük.

a) Egy tanulócsoport tagjai összesen 500 alkalommal végezték el a fent leírt kísérletet. A kísérletek befejezése után összesítették a tapasztaltakat: a 10 elemű mintákban előforduló selejtes gyöngyök számának relatív gyakoriságát oszlopdiagramon ábrázolták. A diagram segítségével válaszoljon a következő kérdésekre:

I. Mennyi volt az egy mintában előforduló legtöbb selejtes gyöngy?
II. Mennyi volt az egy mintában legtöbbször előforduló selejtszám?
III. Hány alkalommal nem volt a 10 elemű mintában egyetlen selejtes gyöngy sem?



b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kísérletet egyszer elvégezve a mintában pontosan 2 selejtes lesz! Állapítsa meg, hogy az eseménynek az 500 kísérletből kapott relatív gyakorisága hány százaléka a kiszámított valószínűségnek!

c) Egy másik kísérletben ugyanebből a 40 gyöngyből **visszatevéses mintavétellel** választunk ki 10 gyöngyöt. Ekkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában pontosan 2 selejtes gyöngy lesz?

5. E1 Bizonyítsuk be, hogy a három nevezetes eloszlás esetén a valószínűségek összege mindig 1 lesz!

6. E2 Egy raktárban 100 darab televízió van, amiből 10 hibás. Egy kereskedő 20 darabot vásárol belőlük. Ha kevesebb, mint három selejtet sikerül vásárolnia, akkor szerencsésnek mondhatja magát. Mennyi a valószínűsége, hogy szerencsésnek mondhatja magát?

7. E1 Két céllövő egymás után lő egy pálcikára a vidámparkban. A kezdő 0,4, a második 0,6 valószínűséggel találja el a célt, az előző lövésektől függetlenül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a második találja el először a célt?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1615–1667, 1670.

88. A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ JELLEMZŐI I. VÁRHATÓ ÉRTÉK

A valószínűségi változó bevezetése lehetővé teszi, hogy a statisztika és a valószínűségszámítás kapcsolatára rávilágítsunk, és megkeressük a legfontosabb statisztikai jellemzőknek a valószínűségszámítási megfelelőit.

Egy valószínűségi változó lehetséges értékei és a hozzájuk tartozó valószínűségek ismeretében számíthatjuk ki a változó jellemzőit. Egy ilyen táblázat nagyon hasonlít a statisztikából ismert táblázatra, amikor az adatfajtákat és a hozzátartozó relatív gyakoriságokat ábrázoljuk.

az X_i valószínűségi változó értékei	X_1	X_2	X_3	…	…	X_k
P_i annak valószínűsége, hogy a változó az adott értéket veszi fel	P_1	P_2	P_3	…	…	P_k

Az adathalmazoknál már láthattuk, hogy az átlag nagy szerepet játszott az adatok jellemzésében. Mi felelne meg a mi modellünkben az átlagnak? Az átlagban a számok összege szerepelt, darabszámukkal osztva. Ha csoportosítjuk az egyenlő adatokat, akkor a számok összegében minden adatnak annyiszorosa szerepel, ahányszor előfordul az adathalmazban. Tehát

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_m X_m}{n} = \frac{k_1}{n} X_1 + \frac{k_2}{n} X_2 + \ldots + \frac{k_m}{n} X_m .$$

Mivel $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, ezért $\frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} + \ldots + \frac{k_m}{n} = 1$.

A fenti képletben az egyes adatok relatív gyakoriságai szerepelnek, amiket a valószínűségnek feleltethetünk meg, az adatok pedig a valószínűségi változó lehetséges értékeit jelölik. Ez a kapcsolat lehetőséget ad arra, hogy az átlaggal analóg *várható érték* definícióját megadjuk:

Definíció

Az X valószínűségi változó **várható értéke**
$E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \ldots + p_n X_n$,
ahol a valószínűségi változó eloszlása $P(X = X_k) = p_k$.

Megjegyzések

1. Az $E(X)$ jelölés helyett az $M(X)$ jelölést is használják.
2. Lehetséges, hogy a valószínűségi változó végtelen sok értéket vehet fel, ekkor kiszámításakor egy végtelen összeget kapunk. Ebben az esetben a valószínűségi változónak csak akkor van várható értéke, ha ez az összeg véges.

1. példa Ha megnézzük az egyetlen kocka feldobásánál definiált változónkat, azt kapjuk, hogy a kockadobás várható értéke 3,5.

X	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5 .$$

A várható érték jelentése nem a legvalószínűbb esemény. Például kocka dobásnál nem azt jelenti, hogy legnagyobb valószínűséggel 3,5-et dobunk, hiszen ez lehetetlen. Hanem azt, hogy elegendően sok kísérletet végezve a kapott adatok átlaga a várható érték környékén lesz.

2. példa Ha két kocka feldobása után kíváncsiak vagyunk a dobott számok összegének a várható értékére, akkor többféle módon is megkaphatjuk azt.

1. A definíció szerint az előző leckében lévő 2. példa első táblázata alapján

$$E(X)=\frac{1}{36}\cdot 2+\frac{2}{36}\cdot 3+\frac{3}{36}\cdot 4+\frac{4}{36}\cdot 5+\frac{5}{36}\cdot 6+\frac{6}{36}\cdot 7+\frac{5}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 9+\frac{3}{36}\cdot 10+\frac{2}{36}\cdot 11+\frac{1}{36}\cdot 12=7.$$

2. A kapott eloszlás szimmetrikus. Ilyen esetekben a várható érték éppen a szimmetriaközéppont lesz, ami most a 7.

3. A várható érték egyfajta „átlagos értéket" jelent, emiatt azt várhatjuk, hogy a kockákon dobható átlagos értékek összeadódnak: $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$, ahol X az első, Y pedig a második kockán dobott számot jelenti.

A VÁRHATÓ ÉRTÉK NÉHÁNY JELLEMZŐJE

3. példa Egy dobókocka lapjaira az 1, 2, … , 6 számok háromszorosát írjuk: 3, 6, … , 18. Mennyi ekkor a dobott szám várható értéke?

Megoldás Jelöljük Z-vel a valószínűségi változót. Értékei 3, 6, … , 18, és mindegyiket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel veszi fel a függvény:

Z	3	6	9	12	15	18
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A definíció alapján a várható érték $E(Z)=\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 6+\ldots+\frac{1}{6}\cdot 18=10{,}5$.

Alakítsuk át az összeget: $\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 6+\ldots+\frac{1}{6}\cdot 18=3\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\ldots+\frac{1}{6}\cdot 6\right)$. Ez utóbbi zárójeles összegben az egy kocka feldobása esetén kapott várható értéket ismerhetjük fel. Ha az ekkor definiált valószínűségi változót X-szel jelöljük, akkor kaptuk, hogy $E(Z) = 3E(X)$. A gondolatmenet általában is igaz: ha egy X valószínűségi változó minden elemét megszorozzuk egy $c \neq 0$ számmal, szintén valószínűségi változót kapunk (ezt így jelöljük: cX), és az új cX valószínűségi változó várható értéke az eredeti várható érték c-szerese lesz: $E(cX) = cE(x)$. (A példában $Z = 3X$ volt.)

Megjegyzés
Hasonlóan igazolható az $E(a + cX) = a + cE(x)$ összefüggés is.

4. példa Egy hagyományos dobókocka lapjaira az 1, 2, … , 6 számokat, egy tetraéder alakú „dobókocka" lapjaira az 1, 2, 3, 4 számokat írjuk. (A „dobótetraéder" négy lapjának bármelyike $\frac{1}{4}$ valószínűséggel kerül alulra, a dobás eredményének ezt a számot tekintjük.) Egyszerre feldobjuk a dobókockát és a dobótetraédert. Mennyi a dobott számok összegének a várható értéke?

Megoldás A lehetséges összegek 2-től 10-ig terjednek, a 24 lehetséges kimenetel egyformán valószínű. Az alábbi táblázatból kiolvashatjuk, hogy az egyes összegek mekkora súllyal szerepelnek. (A 7-es összeg például 4-szer fordul elő.)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

A valószínűségi változót jelölje U:

U	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

A várható érték a definíció alapján

$$E(U)=\frac{1}{24}\cdot 2+\frac{2}{24}\cdot 3+\frac{3}{24}\cdot 4+\frac{4}{24}\cdot 5+\frac{4}{24}\cdot 6+\frac{4}{24}\cdot 7+\frac{3}{24}\cdot 8+\frac{2}{24}\cdot 9+\frac{1}{24}\cdot 10=\frac{144}{24}=6.$$

Másképpen is okoskodhatunk. Az X, illetve Y valószínűségi változók jelentsék a dobókockával, illetve a dobótetraéderrel dobott számot. Korábban láttuk, hogy $E(X)=3{,}5$; míg $E(Y)=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4=2{,}5$. Ha tehát a kockával átlagosan 3,5-et, a tetraéderrel pedig 2,5-et dobunk, akkor mindkettőt feldobva átlagosan $3{,}5+2{,}5=6$ a dobott számok összege.

A fenti gondolatmenetet általánosan is megfogalmazhatjuk:

Ha X és Y valószínűségi változók, akkor elemeiket összeadva ismét valószínűségi változót kapunk (jelölés: $X+Y$). Ha $E(X)$ és $E(Y)$ létezik, akkor $E(X+Y)$ is, és $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

Megjegyzés

Az X és Y valószínűségi változók elemeit összeszorozva is valószínűségi változót kapunk (jelölés: $X\cdot Y$), de $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$ csak akkor igaz, ha X és Y függetlenek.

5. példa Aladár és Béla egy pénzérmével játszanak. Aladár háromszor dobja fel egymás után az érmét. Ha sikerül két egyformát dobni egymás után, akkor ő nyer Bélától 10 Ft-ot. Ellenkező esetben Béla nyer Aladártól 40 Ft-ot. Igazságos-e a játék? Ha nem, akkor hogyan változtassunk a szabályokon, hogy igazságossá váljon?

Megoldás Észrevehetjük, hogy a játékosok csak egymástól nyerhetnek, tehát együtt összesen ugyanannyi pénzzel távoznak, mint amennyivel jöttek. Ilyenkor **zéró összegű** játékról beszélünk.

Aladár szemszögéből fogjuk vizsgálni az eseményeket. Akkor tekintjük igazságosnak a játékot, ha hosszú távon Aladár nyereménye átlagban a nulla körül ingadozik. Ez éppen azt jelenti, hogy Aladár nyereményének a várható értéke nulla. Mivel csak egymástól nyerhetnek, ezért ekkor Béla nyereményének várható értéke is nulla lesz. Tehát Béla nyereménye Aladár nyereményének a (-1)-szerese lesz, és ez igaz a nyeremények várható értékére is.

Vezessünk be egy valószínűségi változót, aminek értéke +10 lesz, ha Aladár nyer és −40, ha veszít. (A játékban döntetlen nincs.)

$$P(X=-40)=P(\text{Aladár nem nyer})=P(\text{FIF})+P(\text{IFI})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

$$P(X=10)=P(\text{Aladár nyer})=1-P(\text{Aladár nem nyer})=\frac{3}{4}.$$

Most már elkészíthetjük a táblázatunkat.

X_i	+10	−40
P_i	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X)=+10\cdot\frac{3}{4}-40\cdot\frac{1}{4}=-2{,}5.$$

Ez azt jelenti, hogy Aladár átlagban 2,5 Ft-ot veszít játékonként. A játék tehát nem igazságos.

Ha Béla nyereményét 30 Ft-ra csökkentjük, akkor $E(X)=10\cdot\frac{3}{4}-30\cdot\frac{1}{4}=0$ jön ki, és a játék igazságos lesz.

A most megismert várható érték segít a hasonló játékok elemzésében.

6. példa Ketten felváltva dobnak fel egy dobókockát. Az nyer, akinek hamarabb sikerül 6-ost dobnia. Ha a kezdő nyer, ő 20 Ft-ot kap társától; ha veszít, akkor 25 Ft-ot fizet. Elemezzük a játékot! Ha nem igazságos a játék, tegyük azzá!

Megoldás A kezdő szemszögéből nézzük az eseményeket. A valószínűségi változónk kétféle értéket vehet fel: +20 vagy −25.

Vagy elsőre, vagy harmadikra, vagy ötödikre stb. dobja a kezdő az első 6-ost és nyer. Harmadikra csak úgy nyerhet, ha az első két dobás nem 6-os volt és így tovább.

$$P(X=20)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6+\ldots+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}+\ldots=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}.$$

Eredményül egy végtelen mértani sort kapunk, aminek a kezdőtagja $a_1=\frac{1}{6}$, hányadosa $q=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$. A sor összege létezik, mert $\left|\left(\frac{5}{6}\right)^2\right|<1$.

A második játékos a második, negyedik, hatodik stb. dobás után tud nyerni, ha korábban egyszer sem dobtak 6-ost.

$$P(X=-25)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5+\ldots+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2k+1}+\ldots=\frac{\frac{5}{36}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{5}{11}.$$

($P(X=-25)=1-P(X=20)$, mert igazolható, hogy a játékban nincs döntetlen. Előbb-utóbb 1 valószínűséggel bekövetkezik a 6-os dobás.)

X_i	+20	−25
P_i	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$

$$E(X)=+20\cdot\frac{6}{11}-25\cdot\frac{5}{11}=-\frac{5}{11}.$$

Tehát a kezdő játékos nyereményének a várható értéke negatív. Az egy játékra jutó átlagos vesztesége $-\frac{5}{11}$ Ft. Szemléletesen átlagban tizenegy játékonként veszít 5 forintot.

Tegyük igazságossá a játékot! Ez azt jelenti, hogy úgy választjuk meg a nyereményeket, hogy mindkét játékos nyereményének várható értéke nulla legyen. Legyen a kezdő nyeresége u, vesztesége pedig v. Ekkor

$E(X)=u\cdot\frac{6}{11}-v\cdot\frac{5}{11}=0$, innen $\frac{u}{v}=\frac{5}{6}$. Tehát ha például a kezdő 25 Ft-ot nyer vagy 30-at veszít játékonként, akkor a játék igazságos lesz.

NEVEZETES ELOSZLÁSOK VÁRHATÓ ÉRTÉKE

Mennyi lesz egyetlen kockadobás esetén a 6-os dobások számának a várható értéke?

Erre a kérdésre nem is olyan egyszerű válaszolni. Milyen valószínűségi változónak a várható értékéről is van szó? Természetes módon adódik, hogy ha a dobás eredménye 6, akkor legyen az értéke 1, ha nem 6-os, akkor legyen 0.

X_i	1	0
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$. Azt az eredményt kaptuk, hogy egyetlen dobás esetén $\frac{1}{6}$ a várható érték. Ez azt jelenti, hogy sokszor elvégezve a kísérletet azoknak kb. az $\frac{1}{6}$ részében dobunk 6-ost. A kapott eredmény összhangban van a 6-os dobás valószínűségével.

Ezt a valószínűségi változót indikátor változónak nevezzük. Egy p valószínűségű A esemény esetén a valószínűségi változó szemléletesen azt jelenti, hogy egy kísérletben mennyi az A esemény bekövetkezésének a darabszáma. Ebben az esetben a következő táblázatot kapjuk:

X_i	1	0
p_i	p	$1-p$

$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$.

Tehát az indikátor változó várható értéke mindig p.

Mennyi lesz hat kockadobás esetén a 6-os dobások számának a várható értéke? Hat kockadobás esetét úgy is tekinthetjük, mintha az előző valószínűségi változóból hatnak az összegéről lenne szó. Viszont valószínűségi változók összegének a várható értéke a várható értékek összege.

Így $E(X) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$. Ez azt jelenti, hogy hat dobásonként átlagban egy 6-ost dobunk.

A kapott eredményt általánosíthatjuk. A binomiális eloszlásnál ha n-szer végezzük el a kísérletet és egy kísérletben az általunk figyelt esemény bekövetkezésének a valószínűsége p, akkor a valószínűségi változó várható értéke $n \cdot p$.

Eredmény:

Az (n; p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke: $E(X) = np$.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő eredményt:

A $H(N, M, n)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás várható értéke: $E(X) = \frac{M}{N} \cdot n$.

FELADATOK

1. E2 A binomiális együtthatók tulajdonságainak felhasználásával, a definíció alapján bizonyítsuk be, hogy a binomiális eloszlású valószínűségi változó ($B(n; p)$) várható értéke $E(x) = np$!

2. E2 Ketten két kockával a következő játékot játsszák.
Ha a dobott számok összege osztható 3-mal, akkor A nyer B-től 100 Ft-ot. Ha az összeg nem osztható 3-mal, akkor B nyer A-tól 50 Ft-ot. Igazságos-e a játék? Ti melyik játékos helyett szállnátok be a játékba?

3. E1 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2020.)**
Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

a) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 4 lesz?

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának n forintot ($n > 80$); ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet $(n - 80)$ forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak $2(n - 80)$ forintot.

b) Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0?

4. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2019.)**
A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni. Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve?

5. E2 Egy dobókockával addig dobunk, amíg 6-ost nem dobunk. Bizonyítsuk be, hogy a szükséges dobások számának a várható értéke 6!

6. E2 Bizonyítsuk be, hogy a p paraméterű geometriai eloszású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{p}$!

A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ JELLEMZŐI II. SZÓRÁS (Olvasmány)

Nemcsak az átlagnak, de a szórásnak is megvan a megfelelője a valószínűség-számításban. Az empirikus szórásnégyzet az adatoknak az átlagtól való eltérései négyzetének az átlaga. Ennek a négyzetgyöke a szórás.

A leíró statisztikában már láthattuk, hogy a szórásnak nagy szerepe van az adathalmazok leírásában. Ezért az empirikus szórásnégyzetre kapott

$$S^2(\bar{x}) = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

képlet alapján valószínűségi változók esetén a szórásnégyzetet a várható értéktől való eltérés négyzetének, azaz az $(X-E(X))^2$-nek a várható értékeként definiálhatjuk.

$D^2(X) = (X_1-E(X))^2\cdot p_1 + (X_2-E(X))^2\cdot p_2 + \ldots + (X_n-E(X))^2\cdot p_n$.

Az *X* valószínűségi változó szórásnégyzete:

$D^2(X) = (X_1-E(X))^2\cdot p_1 + (X_2-E(X))^2\cdot p_2 + \ldots + (X_n-E(X))^2\cdot p_n$,

ahol $p_k = p(X=X_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

A valószínűségi változó szórása a szórásnégyzet négyzetgyöke, amit $D(X)$-szel jelölünk.

A várható érték megismert tulajdonságai alapján:

$D^2(X) = E[(X-E(X))^2] = E[X^2-2X\cdot E(X)+E(X)^2] = E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E(X)^2 = E(X^2)-E(X)^2$.

Tehát $D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Ez alapján a szórásnégyzetet kiszámíthatjuk úgy, hogy az X^2 várható értékéből kivonjuk a várható érték négyzetét.

Ez már a gyakorlatban egy jól használható képlet. Ha ismerjük az eloszlást, vagyis a megfelelő táblázatot sikerült elkészíteni, akkor könnyen kiszámíthatók az értékek.

X_i	X_1	X_2	X_3	…	…	X_k
P_i	P_1	P_2	P_3	…	…	P_k

$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$,

$D^2(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 + \ldots + p_nx_n^2) - (p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n)^2$.

A szórásnégyzet tulajdonságai közül bizonyítás nélkül közöljük az alábbit:

Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor $D^2(X+Y) = D^2(X)+D^2(Y)$.

Ezt a tulajdonságot felhasználhatjuk a binomiális eloszlású valószínűségi változó szórásának meghatározására. Használjuk a korábban bevezetett változókat. Ennek eloszlása $p(X=1)=p$, $p(X=0)=1-p$, így négyzetük eloszlása $p\left(X^2=1\right)=p$, $p\left(X^2=0\right)=1-p$ ugyanez, tehát várható értékük p, négyzetük várható értéke p. Ekkor viszont szórásnégyzetük:

$D^2(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = p-p^2 = p(1-p)$.

Mivel a binomiális eloszlású valószínűségi változó n darab ilyen független indikátorváltozó összege, ezért a szórásnégyzet említett tulajdonságát felhasználva a binomiális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete: $D^2(X) = np(1-p)$; a binomiális eloszlású valószínűségi változó szórása pedig $D(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

A leíró statisztikában használt többi középértéknek is keressük meg a valószínűségszámításbeli megfelelőjét!

A módusz azt mutatta meg, hogy melyik adat szerepel a legtöbbször az adathalmazban. Ennek itt a *legnagyobb valószínűségű érték* felel meg (az az érték, amelyhez a legtöbb elemi esemény tartozik).

A medián az adatok felezője volt, tehát az adatok fele nála kisebb, az adatok fele nála nagyobb. Ennek az a k érték felel meg, melyre teljesül, hogy $P(X<k)=\frac{1}{2}$. Ha nincs ilyen érték, akkor az ezt legjobban közelítő számot tekintjük megfelelőnek. Hasonlóan az alsó és felső kvartilisnek azok az m, illetve n értékek felelnek meg, melyekre $P(X<m)=\frac{1}{4}$, illetve $P(X<n)=\frac{3}{4}$.

FELADAT

1. E1 Tíz darab pénzérmét feldobunk. A fejdobások száma legyen f, az írások száma i. A valószínűségi változó legyen $X_k = (f - i)$. Adjuk meg az eloszlást! Számítsuk ki $E(X)$-et és $D(X)$-et is! (Használjuk a $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$ összefüggést!)

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1601–1609, 1671, 1669, 1674.

A NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE (Olvasmány)

Hogyan győződhetünk meg, arról, hogy egy dobókocka szabályos, vagy sem? Mit jelent ez a kérdés? Minket jelen pillanatban nem a kocka formája érdekel, hanem az, hogy ha feldobjuk, akkor ugyanolyan valószínűséggel dobunk-e vele 1-est, 2-est, 3-ast stb. Az eddigiek során alkalmazott matematikai modellekben mindig feltételeztük, hogy ez teljesül. Mit tehetünk, ha szeretnénk meggyőződni arról, hogy a kockánk tényleg szabályos?

Például arra vagyunk kíváncsiak, tényleg $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobunk-e 6-ost. Egyetlen lehetőségünk van, a kísérletezés. A kísérletek elvégzése után meghatározhatjuk a 6-os dobások relatív gyakoriságát, ami a valószínűség körül ingadozik. Hány kísérletet kell elvégeznünk? Ez nem is olyan egyszerű kérdés. Az ilyen kérdések megválaszolása előtt el kell döntenünk, hogy milyen pontossággal vagyunk kíváncsiak az adott valószínűségre. Ez lehet 1%, vagy 0,1% stb. Ezt nekünk kell eldöntenünk. A pontosságot δ-ával szokás jelölni. A másik fontos kérdés, hogy mekkora biztonsággal vagyunk kíváncsiak erre a valószínűségre. 100%-os biztonság elérése természetesen lehetetlen. Hogy mennyit engedünk a 100%-ból, azt ε-nal szoktuk jelölni. Az is természetes, hogy minél nagyobb biztonságra törekszünk, annál nagyobb számú kísérletre lesz szükségünk.

Erre a kérdésre ad választ a nagy számok törvénye.

Ha n független kísérletből k-szor következett be az általunk vizsgált esemény, akkor a relatív gyakoriság $\frac{k}{n}$. Ha p-vel jelöljük a keresett valószínűséget, akkor bármely $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ értékhez találhatunk olyan n_0 küszöbindexet, hogy ha $n > n_0$, akkor $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right) \geq 1 - \varepsilon$.

Ez azt jelenti, hogy a relatív gyakoriság nagy pontossággal megközelíti a vizsgált esemény valószínűségét ($(1 - \varepsilon)$-nél nagyobb valószínűséggel), ha a kísérletek száma elég nagy.

Ha a sok kísérletet egymástól függetlenül végezzük el, akkor azok bekövetkezések száma a binomiális eloszlás szerint alakul. Ebben az esetben $\varepsilon = \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$.

Ezt a törvényt Jakob Bernoulli (1654–1705) svájci matematikus bizonyította először a $p = \frac{1}{2}$ esetre.

Adott pontosság és biztonság eléréséhez maximálisan szükséges kísérletszám az alábbi egyenlőtlenségből számolható: $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right) > 1 - \frac{p(1-p)}{n \cdot \delta^2}$.

A törvény csak annyit mond, hogy ha elvégezzük a megfelelő számú kísérletet, akkor teljesül az adott pontosság a megfelelő biztonsági szinten. Általában jóval kevesebb kísérlet is elegendő.

Mivel az ilyen esetekben általában nem ismerjük p értékét, ezért használjuk a $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ összefüggést. (Ez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből adódik.) Így a $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot \delta^2}$ egyenlőséghez jutunk, ami a gyakorlatban is jól használható.

Ez viszont lehetőséget ad nekünk arra, hogy megbecsüljük egy ismeretlen valószínűségű, de binomiális eloszlású (vagy annak tekinthető) esemény valószínűségét.

Próbáljuk meg a kapott egyenlőtlenség segítségével megvizsgálni, hogy mit kell tennünk ahhoz, hogy egy érméről eldöntsük: elhisszük-e, hogy szabályos; illetve állapítsuk meg, hogyan határozhatnánk meg például a fejdobás valószínűségét!

1. példa Hányszor kell feldobni egy pénzérmét, hogy 99%-os biztonsággal a fej dobásának objektív valószínűsége ne térjen el a relatív gyakoriságtól 0,01-nál jobban? Adjunk becslési módszert a fej dobásának valószínűségére a kapott eredmények alapján!

Megoldás A feladatban megfogalmazott feltétel azt jelenti, hogy annak valószínűsége, hogy a fejdobás relatív gyakorisága a fejdobás valószínűségétől legalább 0,01-dal eltér, kisebb, mint 1%, azaz 0,01. Ebben az esetben $\delta = 0{,}01$, így teljesülnie kell $\frac{1}{4n \cdot \delta^2} \leq 0{,}01$-nek, azaz $n \geq 250\,000$. Tehát ennyiszer feldobva az érmét, teljesül a feltétel. Ha csak egy dobássorozatot végzünk, akkor a fejdobások relatív gyakorisága 99%-os valószínűséggel nem tér el 0,01-nál jobban a fejdobás tényleges valószínűségétől. Tehát a fejdobás tényleges valószínűségére azokat az értékeket hisszük el, melyek az $\left[\frac{x}{n} - 0{,}01; \frac{x}{n} + 0{,}01\right]$ intervallumba fognak esni. Ez a módszer lehetőséget ad úgynevezett hipotézisvizsgálatra: a kezdeti feltételezésünk (például hogy a pénzérme szabályos, azaz a fejdobás valószínűsége 0,5), és a kapott eredmény függvényében döntjük el, hogy a hipotézist elfogadjuk vagy elvetjük.

Ha viszont pontosabb eredményt szeretnénk kapni az általunk teljesen ismeretlennek tekintett fejdobás valószínűségről, akkor a következő lehetőség kínálkozik: végezzünk sok ilyen 250 000 dobásos kísérletet, és nézzük meg, hogy ezekben mennyi a relatív gyakorisága a fejdobásnak. Mivel ez a fejdobás tényleges valószínűségétől nagy valószínűséggel nem tér el 0,01-nál jobban, ezért a kapott relatív gyakoriságokat fedjük le egy 0,02 hosszúságú intervallummal úgy, hogy minél kevesebb „lógjon ki" az adatok közül, és ennek a lefedő intervallumnak a közepét tudjuk használni a fejdobás valószínűségének becsléséhez.

Mi a hátránya ennek a módszernek? Borzasztóan sokat kell dobálni a vizsgált pénzérmével, de ez nem is olyan nagy csoda, hiszen a felhasznált becslések nagyon durvák voltak. Úgy is mondhatnánk, hogy kis harc árán csak kis győzelmet tudunk elérni ebben a küzdelemben.

Az imént vizsgált problémában egy dobássorozat esetén hipotézist állítottunk fel, melyet elfogadtunk vagy elvetettünk az eredménytől függően. Milyen módszer alkalmazható azokban az esetekben, amikor egy kísérletsorozat eredménye alapján akarunk közvetlen információt kapni egy adott valószínűségről, kezdeti feltételezések nélkül?

BIZTONSÁGI INTERVALLUM MEGHATÁROZÁSA (Olvasmány)

Népszavazáshoz gyűjtöttek aláírást egy országban, az első kontroll után (kiválogatták azokat az aláírásokat, melyek mellől valamely a hitelesítéshez szükséges adat hiányzott, illetve amelyek többször szerepeltek) maradt 410 000 aláírás. Ebből kiválasztottak 3000-et véletlenszerűen, és ezek hitelességét ellenőrizték. Azt találták, hogy ezek közül 343 nem hiteles. Mit állíthatunk a 410 000 aláírás között lévő hiteles aláírások számáról, 95%-os biztonsággal?

Ebben a példában szintén nem ismerjük a 410 000 aláírás között levő hiteles aláírások számát, tehát nem ismerjük annak a valószínűségét, hogy közülük egyet véletlenszerűen kiválasztva az hiteles lesz. Ha valaki azt mondja, hogy a hiteles aláírások száma 150 000, akkor azt elég nehezen fogjuk elhinni, hogy mi a 3000 kiválasztottból csak egytizedét húztuk a nem hitelesek közül, holott abból arányában jóval több van. Azt sem fogjuk elhinni, hogy 405 000 hiteles aláírás van, hiszen ez azt jelentené, hogy az összes aláírás kb. $\frac{1}{1000}$ része nem hiteles, míg ezzel ellentétben a kiválasztott 3000-nek $\frac{1}{10}$ része nem hiteles.

Van tehát egy alsó és egy felső határa annak, hogy milyen valószínűséget „hiszünk el" egy adott esemény bekövetkeztére; az ezek között levő számok halmazát megbízhatósági (konfidencia) intervallumnak nevezzük

Megjegyzés

Be kellene bizonyítanunk természetesen azt, hogy tényleg minden szám „hihető" valószínűséget ad a kapott szélső értékek között, tehát hogy a megfelelő („hihető") valószínűségek halmaza valóban egy intervallum. Ezt nem fogjuk külön bizonyítani, hanem a folytonossági tulajdonságokra alapozva szemléletesen elfogadjuk.

Feladatunkban tehát azt kell meghatározni, hogy mekkora a megbízhatósági intervallum az aláírások esetén, sőt, valójában csak az alsó határára vagyunk kíváncsiak (tehát hogy legalább hány hiteles aláírás van közöttük).

A megvizsgált aláírásokról feltételezzük, hogy kiválasztásuk véletlenszerű volt. Mivel a 410 000 darabhoz képest csak keveset vettünk ki hitelesítésre, ezért egy aláírás kivétele a halmazból nem lényegesen változtatta meg a nem hiteles aláírás kiválasztásának valószínűségét egy-egy lépésre vonatkoztatva. Emiatt jó közelítéssel kezelhetjük úgy a problémát, hogy minden egyes lépésben a nem hiteles aláírás választásának valószínűsége p, ahol $p = \frac{\text{nem hiteles aláírások száma}}{410\,000}$. Ekkor a közelítésünkben a kiválasztott nem hiteles aláírások számát binomiális eloszlásúnak tekinthetjük. A kiválasztott nem hiteles aláírások száma $k = 343$, a kiválasztott összes aláírás („kísérletek") száma: $n = 3000$.

A nagy számok törvényénél megismert $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot \delta^2}$ egyenlőtlenséget fogjuk használni. A vizsgálatból $n = 3000$, $k = 343$, $1 - \frac{1}{4n \cdot \delta^2} = 0{,}95$, és innen δ értéke meghatározható: $\delta \approx 0{,}041$. Tehát 95%-os biztonsággal állíthatjuk, hogy $\left|\frac{x}{n} - p\right| < 0{,}041$, azaz $\frac{x}{n} - 0{,}041 < p < \frac{x}{n} + 0{,}041$. Figyelembe véve a megadott értékeket, $0{,}073 < p < 0{,}155$, azaz a nem hiteles aláírások száma 29 930 és 63 550 közé esik. Tehát a hiteles aláírások száma legalább 346 450. A kapott eredmény természetesen 95%-os biztonsági küszöb mellett érvényes, azaz a nem hiteles aláírások aránya 95%-os megbízhatósággal 0,073 (7,3%) és 0,155 (15,5%) között van.

Nézzük meg, mi történik akkor, ha nagyobb biztonsági küszöbbel számolunk!

Állapítsuk meg a 99%-os biztonsági szinthez tartozó konfidencia intervallumot!

Ekkor $1 - \frac{1}{4n \cdot \delta^2} = 0{,}99$, innen $\delta \approx 0{,}0913$. Tehát 99%-os biztonsággal azt állíthatjuk, hogy $\left|\frac{x}{n} - p\right| < 0{,}0913$, azaz $\frac{x}{n} - 0{,}0913 < p < \frac{x}{n} + 0{,}0913$. Figyelembe véve a megadott értékeket, $0{,}023 < p < 0{,}2056$, azaz a nem hiteles aláírások száma 9430 és 84 296 közé esik. Tehát a hiteles aláírások száma nagy valószínűséggel legalább 325 704.

Látható tehát, hogy a biztonság növelésével a konfidencia-intervallum is növekszik, ami érthető is. Hiszen ha nagyobb valószínűséggel, nagyobb biztonsággal akarjuk meghatározni egy adott mennyiség értékét, akkor szélesebb tartományt kell ehhez biztosítanunk.

Az is látható, hogy ez a módszerünk meglehetősen pontatlan, hiszen a második esetben p értékére csak egy 0,1826 hosszúságú intervallumot tudtunk biztosítani. Felmerülhet a kérdés, hogy van-e más számítási eljárás, ami jobban használható, vagyis pontosabb eredményt ad?

Van, de ennek elméleti háttere bonyolultabb, mint a fent ismertetett egyszerű becslési eljárás.

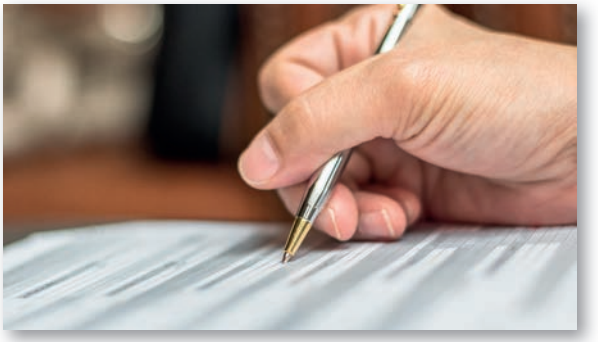
Ebben a rövid fejezetben megismertük a matematikai statisztika néhány alapvető felhasználását. Ma már ennél sokkal szélesebb körben alkalmazzák a statisztikai módszereket, és a cégek és pártok szinte minden nap felkeresik a hasonló problémák megoldására szakosodott közvéleménykutató intézeteket.

FELADATOK

1. E2 Arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy nagyvárosban a felnőtt lakosságnak kb. hány százaléka dohányzik. Ennek érdekében véletlenszerűen kérdezünk meg embereket, hogy szoktak-e cigarettázni. Lehet, hogy valakit kétszer is megkérdezünk. Hány embert kell megkérdezni, hogy legalább 0,95 valószínűséggel (95%-os biztonsággal) 2% hibakorláton belül meg tudjuk mondani ezt az arányt?

2. E2 Legalább hányszorosára kell növelni az előző feladatban a megkérdezettek számát, ha a hibakorlátot felére, tehát 1%-ra akarjuk csökkenteni?

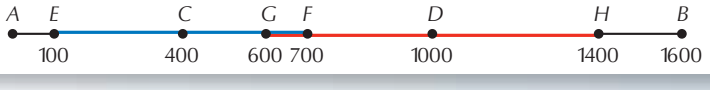
Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1678, 1681.



89. GEOMETRIAI VALÓSZÍNŰSÉG

A gyakorlatban olyan problémák is felmerülnek, amelyek megoldása során a klasszikus modell nem alkalmazható. Előfordulhat például, hogy végtelen sok elemi esemény van. Ennek egy gyakori esete, ha az összes elemi eseményt egy geometriai alakzaton tudjuk szemléltetni. Ilyenkor feltesszük, hogy annak a valószínűsége, hogy a vizsgált pont az alakzat valamely részébe esik, arányos annak geometriai mértékével (hosszúságával, területével, térfogatával).

1. példa Egy $AB = 1600$ m hosszú vezeték C és D pontjainál egy-egy ellenőrző készüléket telepítettek. ($AC = 400$ m, $AD = 1000$ m.) A vezetékben fellépő esetleges hibát a C pontnál lévő készülék 300 m, a D-nél lévő készülék 400 m távolságból tudja jelezni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az AB szakaszon fellépő, véletlenszerű hibát legalább az egyik készülék jelzi?



Megoldás A C-nél lévő készülék 600 méternyi szakaszt tud ellenőrizni (az ábrán ez az EF szakasz), a D-nél lévő 800 méternyit (GH szakasz). A két készülék távolsága 600 m, mindkettő $300 + 400 - 600 = 100$ méternyi szakaszt ellenőriz (GF). $600 + 800 - 100 = 1300$ méter szakaszt ellenőriz legalább az egyik gép, a keresett valószínűség így $\frac{1300}{1600} = \frac{13}{16}$.

2. példa Ha egy kör belsejében véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot, mennyi az esélye annak, hogy a pont közelebb van a kör középpontjához, mint a határához?

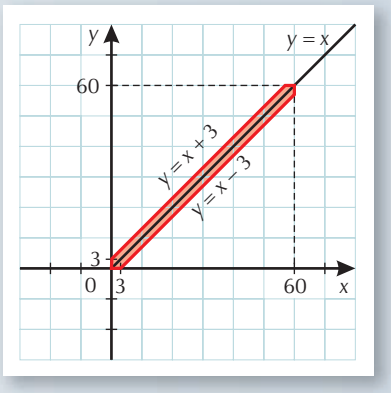
Megoldás Itt most a megfelelő valószínűség nem az intervallumok hosszának a hányadosa, hanem a megfelelő tartományok területének az aránya lesz. Ha megrajzoljuk azokat a pontokat, amelyek közelebb vannak a középponthoz, mint a körvonalhoz, akkor az eredeti körrel megegyező középpontú, fele akkora sugarú kört kapunk. Ennek a területe negyede az eredeti kör területének, tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.

A következő típusfeladatban a modellezés során feleltetünk meg az eseményeknek egy geometriai alakzatot.

3. példa Egy repülőtérre 10 és 11 óra között egy-egy véletlenszerű időpontban két repülőgép érkezik. A repülőtér 3 percenként tud fogadni gépeket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a repülőtér az egyik gépet nem tudja azonnal fogadni?

Megoldás A hasonló feladatok a geometriai valószínűségi modell alkalmazásának típusfeladatai. Kissé váratlan, hogy a megoldáshoz a geometriai valószínűség eszköztárát használjuk, de egy ügyes ötlettel átfogalmazhatjuk a feladatot a geometria nyelvére.

Az egyes számú repülő érkezési időpontját jelöljük x-szel, ekkor $0 \le x \le 60$. (Percben számolunk.) A második repülő érkezési időpontját jelöljük y-nal, $0 \le y \le 60$. Az ötlet az, hogy ekkor a derékszögű $(x; y)$ koordinátarendszer egy 60×60-as négyzetének pontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a két repülő érkezési idejének. (Például a (22; 35) pont esetén az első repülőgép 10 óra 22 perckor, a második pedig 10 óra 35 perckor érkezik.) Mivel a gépek érkezése az adott időintervallumban véletlenszerű, az eseménytér bármely $(x; y)$ pontja (azaz a repülők érkezési ideje) azonos valószínűségű.



A repülőtér akkor tudja fogadni a gépeket, ha $x - y < 3$, azaz $y < x - 3$; illetve ha $y - x < 3$, azaz $y > x + 3$. A két algebrai feltételnek az $y = x - 3$ egyenes „alatti”, illetve az $y = x + 3$ egyenes „feletti” pontok felelnek meg, amik egy-egy háromszöget jelölnek ki. A feladat szempontjából kedvező esetek (amikor a gépeket nem tudja fogadni a repülőtér) a háromszögeken kívüli pontok, ezeket a színezett sáv szemlélteti az ábrán. (Ezeket a pontokat $|x - y| \le 3$ módon is megadhatjuk.)

Bármely $(x; y)$ pont azonos valószínűséggel következik be, ezért a keresett valószínűség a satírozott rész és a négyzet területének a hányadosa. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögek befogója 57, így a kérdezett valószínűség: $p = \frac{60^2 - 57^2}{60^2} = 0{,}0975$.

FELADATOK

1. E1 Egy 500 m hosszúságú vezeték egyforma valószínűséggel hibásodik meg az egész vonal mentén. Mi a valószínűsége annak, hogy a hibát az első 100 m-en megtaláljuk?

2. E1 Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 6 m magas. A házon két darab 2 m × 1,8 m méretű ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy a labda eltalálja az egyik ablakot?

3. E1 Egy 10 cm sugarú céltáblát koncentrikus körökkel öt részre akarunk osztani úgy, hogy az egyes részek eltalálásának valószínűsége ugyanakkora legyen. (A találat helye véletlenszerű.) Hogyan válasszuk meg a körök sugarait?

4. E2 Két számot választunk véletlenszerűen a [0; 1] intervallumban.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük nagyobb, mint 1,5?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy a két szám négyzetének az összege nagyobb, mint 1?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy a kisebbik szám közelebb van a 0-hoz, mint a nagyobbik szám az 1-hez?

5. E2 Az egyenlő oldalú ABC háromszög belsejében felveszünk egy P pontot.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott ABP háromszög területe kisebb minta az ABC háromszög területének a fele?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy az ABP háromszög hegyesszögű?

6. E2 A [0; 1] intervallumon egymástól függetlenül kijelölünk két pontot. Ezek az intervallumot három részre osztják. Mennyi a valószínűsége, hogy az igy keletkező három szakaszból háromszög szerkeszthető?

7. E1 Egy két egység oldalhosszúságú négyzet belsejében véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy ez a pont közelebb van a négyzet középpontjához, mint annak valamelyik oldalához?

8. E2 **(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2011.)**
Az $ABCD$ négyzet csúcsai: $A(0; 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?

Ajánlott feladatok Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 1628, 1631, 1633, 1635, 1636.

TÁRGYMUTATÓ

A

a síkra merőleges egyenes tétele 148
abszolútérték-függvény kiküszöbölése 37
addíciós tételek 168
alaphalmaz és az értékkészlet vizsgálata (egyenletek) 59
állítások tagadása 256
alsó közelítő összeg 344
átlag 268
átlagos
– abszolút eltérés 378
– négyzetes eltérés 379
azonos
– egyenlőség (azonosság) 49
– egyenlőtlenség 55

B

Bayes tétele 389
befogótétel 134
behelyettesítő módszer (egyenletrendszer) 11
binomiális eloszlás 396
bizonyítási típusok 257
biztonsági intervallum 407

C

Cantor-axióma 301
Cantor-féle közösrész-tétel 301

CS

csonka körkúp térfogata 148
csonkagúla térfogatképlete 148
csonkakúp térfogatképlete 148
csúsztatva tükrözés 113

D

deriváltfüggvény 319
diagramok 370
differenciahányados 319
differenciálhányados (derivált) 319
direkt bizonyítás 257

E

egybevágóság 110
egyenes egyenlete 188
egyenlet fokszámának fokozatos csökkentése 33
egyenlő együtthatók módszere (egyenletrendszer) 11
egymásba skatulyázott intervallumok 300
egyszerű gráf 233
ekvivalens átalakítás 255
elégséges feltétel 255
ellenőrzés 11
ellipszis 211
eltolás 113
érintő- és szelőszakaszok tétele 135
érintőnégyszög 138
érintőnégyszögek
– tétele 139
– tételének megfordítása 139
érintőszárú kerületi szög 131
értékkészlet 67
értelmezési tartomány 67

F

fa (gráfban) 234
fa éleinek száma 238
felső közelítő összeg 344
félterjedelem (minta) 378
feltételes valószínűség 386
fokszámtétel 236
fókuszpont (parabola) 206
forgástest
– felszíne (integrálszámítás) 365
– térfogata (integrálszámítás) 363
független események 391
függvény 67
függvény
– folytonossága 306
– határértéke a végtelenben 315
– határértéke egy pontban 311
– kiterjesztése 68
– leszűkítése 68
függvénygörbe alatti terület 339
függvénygörbék közti terület 354
függvénytranszformációk 69

G

geometriai
– eloszlás 398
– valószínűség 409
görbe ívhossza (integrálszámítás) 365
grafikus megoldás 60
gyakorisági eloszlás 368
gyöktényezős alak 27
gyökvonás azonosságai 19

H

hamis gyök 37
harmonikus közép 52
háromszög
– nevezetes körei 126
– nevezetes pontjai 122
– nevezetes vonalai 121

határozatlan integrál 348
határozott
– integrál 344
– integrál tulajdonságai 344
hatványozás azonosságai 14
helyettesítés módszere (egyenlet) 33
helyi minimum hely 74
helyi maximum hely 74
Heron-féle háromszögek 142
Heron-képlet 141
hiperbola 212
hipergeometrikus eloszlás 397
húrnégyszög 136
húrnégyszögek
– tétele 136
– tételének megfordítása 136
hurokél 233

I

identitás 111
indirekt bizonyítás 258
integrálfüggvény 347
inverz függvény 91
irányítástartó egybevágóságok 114
irányításváltó egybevágóságok 114
irányvektor 188
irracionális
– kitevőjű hatvány 301
– számok 24
ismétlés nélküli
– kombinációk 223
– permutációk 220
– variációk 222
ismétléses
– kombinációk 232
– permutációk 221
– variációk 222
izomorf gráfok 234

K

kamatos kamat 280
kamatszámítás 280
kerületi
– szög 131
– szögek tétele 132
kombinációk 223
komplementer módszer 221
komponens (gráfban) 233
konvergens sorozatok 288
konvexitás 333
konvexitás (deriválással) 333
korlátos
– sorozat 276
– sorozatok 298
korlátosság 74
köbös hatványközép 53
kör
– (gráfban) 234
– egyenlete 197
következmény egyenletek 39
következtetési szabályok 259
középponti szög 132
középpontos tükrözés 112
kvantilisek 376
kvantorok 256
kvartilisek (alsó, felső) 371

L

látókör 133
logikai szita-formula 224

M

magasságtétel 134
másodfokú egyenlet megoldóképlet 27
medián 376
megszámlálhatóan végtelen halmaz 249
meredekség 191
mérleg-elv 8
mértani
– közép 52
– sor (végtelen) 296
– sor összege (végtelen) 296
mértani
– sorozat 270
– sorozat összegképlete 281
minoráns sorozat 291
módusz 375
monotonitás 15
monotonitás (deriválással) 330

N

n elemű halmaz részhalmazainak
a száma 229
nagy számok törvénye 406
negyedik hatványközép 53
négyzetes közép 382
nem megszámlálhatóan végtelen halmaz 250
nevezetes szorzatok 16
Newton és Leibniz tétele
(Newton-Leibniz-formula) 346
normálalak 18
normálvektor 189

O

osztók száma 98
összefüggő gráf 238
összeg, különbség deriváltja 321
összetett
– függvény 91
– függvény deriváltja 328

P

parabola 206
parabola egyenlete 206
paraméteres (betűegyütthatós) egyenletek 8
parciális integrálás 359
párhuzamos szelők
  – tétele 116
  – tételének megfordítása 118
paritás 75
Pascal-háromszög 228
periodikusság 75
permanencia-elv 15
Pitagorasz-
  – tétel 125
  – tétel megfordítása 126
polinom osztója 106
polinomok oszthatósága 106
polinomfüggvény 331
pont körüli forgatás 112
primitív függvény 348
Ptolemaiosz-tétel 137

R

racionális számok 250
reciprok-egyenlőtlenség 55
„rendőrelv" 289

S

séta (gráfban) 240
skaláris szorzat 163
sorozat
  – alulról korlátos 276
  – explicit megadása 267
  – felülről korlátos 276
  – határértéke 286
  – rekurzív megadása 267
statisztikai mutató 375
súlyozott számtani átlag 376

SZ

szakasz osztópontja 93
számelmélet alaptétele 95
számolási szabályok (szumma jelölés) 271
számtani
  – közép 376
  – sorozat 268
  – sorozat összegképlete 270
szélsőértékhely 73
szélsőérték
  – (deriválással) 333
  – feladatok (deriválással) 334
  – feladatok (másodfokú függvény) 92
szigorúan monoton
  – csökkenő függvény 73
  – növekedő függvény 73
szigorúan monoton
  – csökkenő sorozat 276
  – növekvő sorozat 276
szimmetrikus
  – egyenlet 33
  – polinomok 29
szórás 380
szórásnégyzet 379
szorzási szabály 220
szorzat, hányados deriváltja 322
szögfelező osztásarány-tétele 123
szumma jelölés 270
szükséges és elégséges feltétel 255
szükséges feltétel 255

T

teljes gráf 236
teljes indukció 242
teljes valószínűség tétele 387
tengelyes tükrözés 112
terjedelem (minta) 378
tétel megfordítása 257
Thalész-tétel 126
Thalész-tétel megfordítása 126
torlódási pont 289
tökéletes számok 108
tőkésítés 280
törlesztőrészlet 280
törtkitevőjű hatványozás 21
transzformációk szorzata 112

U

út (gráfban) 233

V

valószínűségi változó 395
várható érték 400
variációk 222
véges halmazok számossága 251
végtelen
  – halmazok számossága 251
  – határérték 294
végtelen mértani sor összege 296
végtelenbe tartó sorozat 294
vektoriális szorzat 166
vetületi tétel 147
vezéregyenes 206
Viete-formulák 28
visszatevéses mintavétel 374
visszatevés nélküli mintavétel 374

Z

zérushely 72

FORRÁSJEGYZÉK

47. oldal: Benjamin Franklin végrendelete (Forrás: Perelman: Szórakoztató algebra, Gondolat Kiadó, 1975.)
61. oldal: Részlet (Pólya György: A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó, 1970.)
125. oldal: Részlet (Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, 1974.)
145. oldal: Részlet (Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, 1974.)
384. oldal: Idézet Arthur C. Clarke: Holdrengés c. regényéből (Kossuth Könyvkiadó, 1973.)

KÉPJEGYZÉK

Illusztráció: Urmai László

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók:
Borító: © Shutterstock Képügynökség
7. oldal: Johannes Kepler: A Harmonices Mundi egy oldala © akg-images / Science Source
8. oldal: Raffaello Sanzio: Athéni iskola (1510, Vatican Museums and Galleries, Vatikán Város) © CULTiRiS / Bridgeman Art Library
26. oldal: Gottfried Engelmann: Johann Heinrich Lambert litográfiája (1770) © CULTiRiS / AKG-Images
28. oldal: François Viète litográfiája © CULTiRiS / SCIENCE PHOTO LIBRARY
32. oldal: Girolamo Cardano portréja (1652, Klemens Ammon), Wellcome Collections/Public domain
32. oldal: Francia Iskola: Evariste Galois portréja (19. század) © CULTiRiS / Bridgeman Art Library
32. oldal: Em. Bærentzen & Co. Lithographiske Institut: Niels Henrik Abel litográfiája (1853)/Public domain
36. oldal: Frans Hals: René Descartes portréja (1640, Louvre Museum) © CULTiRiS / AKG-Images / Erich Lessing
104. oldal: Sir Andrew Wiles (2005) CC/ C. J. Mozzochi, Princeton N.J/saját mű
110. oldal: Johannes Kepler: A Harmonices Mundi egy oldala © akg-images / Science Source
110. oldal: Johannes Kepler: A Harmonices Mundi egy oldala © CULTiRiS / INTERFOTO / Sammlung Rauch
155. oldal: Justus Sustermans: Galileo Galilei portréja (1640, National Maritime Museum, London) © CULTiRiS / AKG-Images / Rabatti – Domingie
210. oldal: Karl Barth: Johannes Kepler portréja (Rijksmuseum, Amszterdam) Public domain
210. oldal: Jeremias Falck: Tycho Brahe portréja (1644, Rijksmuseum, Amszterdam) Public domain
220. oldal: Maurits Cornelis Escher: Relativitás, 1953 © The M.C. Escher Company B.V. ©Hungart -2022
228. oldal: Gerard Edelinck: Blaise Pascal portréja, (Rijksmuseum, Amszterdam) Public domain
239. oldal középső: Königsbergi hidak. Public domain/Merian-Erben
250. oldal: Ismeretlen alkotó: Georg Cantor portréja (1910 körül) © CULTiRiS / INTERFOTO / Friedrich
260. oldal: Raffaello Sanzio: Athéni iskola részlet (1510, Vatican Museums and Galleries, Vatikán Város) © CULTiRiS / Bridgeman Art Library
261. oldal: Félix Nadar: Jules Verne portréja (1878 körül), Public domain/saját mű
265. oldal: Ismeretlen fotós: Torday Emil portréja (1911, Földrajzi Közlemények folyóirat), Arcanum Digitális Tudománytár
291. oldal: Kürschák József portréja, Országos Széchényi Könyvtár, OSZK Törzsgyűjtemény, Budapest
298. oldal bal: Josef Kriehuber: Bernard Bolzano litográfiája (1849, Wien Museum Online Sammlung) Public domain
298. oldal jobb: Ismeretlen alkotó: Karl Weierstrass portréja (Smithsonian Libraries) Public domain
302. oldal: Heinrich Pfenninger: Leonhard Euler (Rijksmuseum, Amszterdam) Public domain
304. oldal: Möbius-szalag szobor (Arlington, Virginia) flickr/Elvert Barnes Photograpy/CC BY-SA 2.0
304. oldal bal felső: Rolland Lefebvre: Pierre Fermat portréja (17. sz., Musee d'Art et d'Histoire, Narbonne, Franiaország) © CULTiRiS / Bridgeman Art Library
304 oldal bal alsó: John Smith: Sir Isaac Newton (1712, Rijksmuseum, Amszterdam, Public domain)
304. oldal jobb: E. Fiquet: Gottfried Wilhelm Leibniz portréja © CULTiRiS / INTERFOTO / Sammlung Rauch
379. oldal: Jacques et Adolphe Bertillon: Louis-Adolphe Bertillon metszete (1883 előtt), Public domain
A könyvben található további képek: ©Shutterstock Képügynökség
©Shutterstock szerkesztői képek: 5. oldal: Stef Ko, 18. oldal: Cortyn, 128. oldal jobb szélső: Serhii Khomiak, 129. oldal középső: mario confente, 139. oldal: WH_Pics, 186. oldal: Gerfried, 266. oldal: ID1974., 410. oldal: Yevhen Prozhyrko
ThinkstockPhotos: 66., 200. oldal
Full: 195. oldal