

# BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA

Hajós, György

---

# BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA

Hajós, György

Publication date 1999

Szerzői jog © 1999 Hajós György jogutódjai, Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest

a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja,

kétszeres Kossuth-díjas egyetemi tanár

Bírálok:

VARGA OTTÓ

egyetemi tanár

a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja

GALLAI TIBOR

egyetemi tanár

a matematikai tudományok kandidátusa

VARGA TAMÁS

egyetemi adjunktus

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt. [www.ntk.hu](http://www.ntk.hu)

---



---

# Tartalom

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| ELŐSZÓ .....                                                  | v   |
| AZ OLVASÓHOZ .....                                            | v   |
| a könyv olvasása előtt .....                                  | v   |
| 1. ELEMI GEOMETRIA .....                                      | 1   |
| ALAPFOGALMAK .....                                            | 1   |
| 1. § Tételek .....                                            | 1   |
| 2. § Mozgás és hosszúság .....                                | 3   |
| 3. § Szög .....                                               | 9   |
| 4. § Sokszög és poliéder .....                                | 14  |
| 5. § Kör és gömb .....                                        | 21  |
| 6. § Egybevágóság és szimmetria .....                         | 30  |
| 2. A SÍK ELEMI GEOMETRIÁJA .....                              | 42  |
| 7. § Egyszerű szimmetrikus alakzatok .....                    | 42  |
| 8. § Speciális háromszögek .....                              | 44  |
| 9. § összefüggések a háromszög oldalai és szögei között ..... | 48  |
| 10. § Pont és egyenes távolsága .....                         | 54  |
| 11. § Egybevágóság .....                                      | 55  |
| 12. § Párhuzamos egyenesek .....                              | 61  |
| 13. § Sokszögek szögei .....                                  | 69  |
| 14. § Speciális négyszögek .....                              | 72  |
| 15. § Kör .....                                               | 83  |
| 16. § Középponti és kerületi szögek .....                     | 96  |
| 17. § Hasonlóság .....                                        | 104 |
| 18. § Arányos távolságok a háromszögnél és a körnél .....     | 118 |
| 19. § Szabályos sokszög, a kör kerülete .....                 | 123 |
| 20. § Terület .....                                           | 133 |
| 21. § A háromszög-geometria elemei .....                      | 149 |
| 22. § Szerkesztés .....                                       | 157 |
| 3. A TÉR ELEMI GEOMETRIÁJA .....                              | 171 |
| 23. § Párhuzamos tételek .....                                | 171 |
| 24. § Tételek hajlásszöge .....                               | 178 |
| 25. § Tételek távolsága .....                                 | 193 |
| 26. § Poliéder .....                                          | 197 |
| 27. § Térfogat és felszín .....                               | 208 |
| 28. § Henger és kúp .....                                     | 229 |
| 29. § Gömb .....                                              | 236 |
| 4. ANALITIKUS GEOMETRIA .....                                 | 253 |
| AZ ANALITIKUS GEOMETRIA SEGÉDESZKÖZEI .....                   | 253 |
| 30. § Vektor .....                                            | 253 |
| 31. § Szögfüggvények .....                                    | 262 |
| 32. § Vektorok szorzása .....                                 | 270 |
| 33. § A gömbháromszögtan elemei .....                         | 285 |
| 34. § Koordináta-rendszer .....                               | 296 |
| 35. § Súlypont .....                                          | 308 |
| 36. § Távolság, terület, térfogat .....                       | 322 |
| 5. A SÍK ANALITIKUS GEOMETRIÁJA .....                         | 337 |
| 37. § Egyenes .....                                           | 337 |
| 38. § Kör .....                                               | 351 |
| 39. § Inverzió .....                                          | 359 |
| 40. § Hatványvonal és körsor .....                            | 370 |
| 41. § Kúpszeletek .....                                       | 385 |
| 42. § A kúpszeletek fokális tulajdonságai .....               | 418 |
| 43. § Az egyes kúpszeletfajták tulajdonságai .....            | 436 |
| 44. § Ideális tételek .....                                   | 453 |
| 45. § Kettősviszony .....                                     | 465 |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 46. § Másodrendű görbék .....                    | 475 |
| 47. § A másodrendű görbék osztályozása .....     | 496 |
| 48. § Kúpszeletek meghatározása öt adattal ..... | 508 |
| 6. A TÉR ANALITIKUS GEOMETRIÁJA .....            | 523 |
| 49. § Sík és egyenes .....                       | 523 |
| 50. § Másodrendű felületek .....                 | 527 |
| 51. § A másodrendű felületek osztályozása .....  | 553 |
| 52. § A másodfokú alakok osztályozása .....      | 585 |

---

# ELŐSZÓ

Ez a könyv azon előadásaimnak az anyagát tartalmazza, amelyeket „Bevezetés a geometriába” címmel a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen az első éves hallgatók számára évek óta tartottam. Felöleli a könyv ennek a tárgynak a tantervben előírt teljes anyagát, emellett azonban olyan kiegészítések is szerepelnek benne, amelyek az előadási anyagon túlnyúlnak, és részben a könnyebb érthetőséget, részben a logikai teljességet, részben pedig az anyag elmélyítését és a további tájékozódást szolgálják.

Eredeti tervem az volt, hogy a könyv anyagát könnyebb, és nehezebb feladatokkal egészítsem ki. Erről a tervről lemondtam, mert nem akartam régóta készülő könyvem megjelenését még tovább elodáztatni.

A könyvet olyan olvasóknak szántam, akik a középiskolai geometriai anyagot már ismerik. Igaz ugyan, hogy a módszeres tárgyalás a legelemibb ismeretekre is kiterjed, viszont a tudományosabb felépítés mégiscsak azt eredményezi, hogy a könyv nem alkalmas a geometria első megismerésére. Felhasznál a könyv a matematika más fejezeteibe vágó ismereteket is. Ezek az algebra elemeire és az analízis alapfogalmaira vonatkoznak. Hogy pontosabban melyek az ilyen felhasznált ismeretek, az a megfelelő helyeken szerepel majd.

A könyv megírásánál arra törekedtem, hogy a szabotosság és a szemléletesség szempontjai egyaránt érvényesüljenek. Egyszerűbb és rövidebb okoskodások keresése, valamint az anyag tagolása útján arra törekedtem, hogy a szabotosság, a terjengősségre csábító kifogástalanság az áttekinthetőséget ne zavarja. A szabotosság megkívánta kiegészítéseket ezért sok helyen kellően elkülönítettem a tárgyalástól. Feladatommak tartottam, hogy a szemléletesség ürügyén kínáló hiányos okoskodásokat elkerüljem, illetőleg szabotossá egészítsem ki. Amennyire csak a szabotosság sérelme nélkül megtehettem, igyekeztem mindig a szemléletesebb utat választani. A szemléletesség fokozására hivatott a bőséges ábraanyag. Gondot fordítottam ezért az ábrák megválasztására és megtervezésükre is.

Kedves kötelességem, hogy köszönetet mondjak mindazoknak, akik hozzásegítettek ahhoz, hogy a könyv jobb és szebb legyen. Köszönetet mondok *Varga Ottó* egyetemi tanárnak, az MTA levelező tagjának, valamint *Gallai Tibor* egyetemi tanárnak és *Varga Tamás* egyetemi adjunktusnak, a könyv lektorainak, továbbá *Heppes Aladárnak*, a Matematikai Kutató Intézet tudományos munkatársának, akik a könyv kéziratát gondosan áttanulmányozták, és hasznos tanácsaikkal támogattak. Köszönettel tartozom *Molnár József* egyetemi adjunktusnak az ábrák gondos és szép megrajzolásáért.

Megköszönöm tanszékem munkatársainak. *Bognár Mátyás*, *Kis Ottó*, *Molnár József* adjunktusoknak, *Molnár Ferenc*, *Pálmay Lóránt*, *Strohmajer János* tanársegédeknek. *Szabados József* demonstrátornak, valamint *Böröczky Károlynak*, hogy a kézirat technikai előkészítésében és a kefelevonatok olvasásában nagy segítségemre voltak. *Somogyi Endrénének*, a Matematikai Kutató Intézet munkatársának rendkívül gondos gépírói munkájáért tartozom köszönettel.

Köszönet illeti a *Tankönyvkiadó Vállalat* és az *Állami Nyomda* dolgozóit készségükért és jó munkájukért, amellyel hozzásegítettek ahhoz, hogy a könyv jobb és szebb legyen.

Budapest, 1959. december 31.

Hajós György

## AZ OLVASÓHOZ

### a könyv olvasása előtt

E könyv az elemi és az analitikus geometriát tárgyalja. Ezen a két részen belül több fejezet szerepel, s ezek paragrafusokra tagozódnak. Az egyes paragrafusok szakaszokra oszlanak, amelyeket a paragrafus sorszámától ponttal elkülönített számozással jelzünk. A könnyebb kezelhetőség érdekében

minden oldal alján ott áll a folyó szakasz számozása. Minden tételt bizonyítás követ, és a bizonyítás végét gondolatjel jelzi.

A szakaszokba foglalt anyagot *megjegyzésekkel* kísérjük. E megjegyzések apró betűs szedéssel az egyes szakaszok után állnak. Ezeket két csoportba soroltuk. Az **A** jelű megjegyzések minden olvasó érdeklődésére számot tartanak. Ezek a megjegyzések a szakaszban tárgyalt anyag jobb megértését szolgálják, az anyaggal kapcsolatos feladatokról szólnak, a leggyakrabban előforduló félreértésekre és hibákra hívják fel a figyelmet, az oktatásra vonatkozó észrevételeket adnak elő, a tárgyalt anyag alkalmazásaira, praktikus vonatkozásaira utalnak, és végül történeti megjegyzéseket tartalmaznak.

A **B** jelű megjegyzések áttanulmányozása már több terhet ró az olvasóra. Azoknak szántuk ezeket, akik az anyag tudományos elmélyítésére és kiegészítésére is törekcszenek. Ezek a megjegyzések az anyag felépítésének belső kapcsolatairól szólnak, a tárgyalt anyag nehezebben követhető logikai lezárását, szabatosság megkövetelte kiegészítését tartalmazzák, a lehetséges különféle tárgyalásmódokra utalnak s azok egybevetésével foglalkoznak, sokszor az elért eredmények általánosításait is tárgyalják, vagy rámutatnak arra, hogy a tárgyalt anyag továbbépítésével a matematika milyen fejezetei foglalkoznak. Ezek közül a megjegyzések közül megcsillagoztuk, **B\*** jellel jelöltük azokat, amelyeknek követése különösebben nehéz.

Ha egy szakasz után több A vagy B jelű megjegyzés áll, akkor a megjegyzés betűjelét sorszám is követi.

A könyv szerkezete a könyv többféle használatát teszi lehetővé, és ki-ki a magának legmegfelelőbb módot választhatja.

Az *átlagolvasó*, a könyvet használó diákok nagy többsége jól teszi, ha — legalábbis első olvasáskor — kihagyja a B jelű megjegyzéseket. Elhagyhatja az apró betűvel szedett szakaszokat is, mert ezeknek tárgya kevésbé fontos. és elhagyásuk a maradó anyag megértését nem zavarja. Ilyenformán elég, ha csak a nagy betűvel szedett részeket és az A jelű megjegyzéseket olvassa.

*Aki nem győzi* ezt a leegyszerűsített munkát sem, és mégis képet akar alkotni az anyag egészéről, az további könnyítés céljából elsősorban azoknak a tételeknek a bizonyítását hagyhatja el, amelyeknek helyessége a szemlélet alapján közvetlenül is belátható. További könnyítést jelent, ha a szövevényesebb, hosszabb lélegzetű bizonyításokat csak átfutja, bár ezzel lemond a teljes anyag igazi elsajátításáról.

*Minden olvasó* számára hangsúlyoznunk kell, hogy mit sem ér a könyv tanulmányozása, ha ennek eredményeként nem állnak tisztán az olvasó előtt a tárgyalt fogalmak és tételek, s ha ezek birtokában nem tud feladatokat megoldani. Feladatok megoldását mindenkinek a legmelegebben ajánljuk, mert ellenőrzik a tudást, elvezetnek a tudás hasznosításához, és önálló gondolkodásra serkentenek.

*Akinek a képessége megengedi*, hogy a könyv olvasásában örömet lelje, az törekedjék — talán ismételt olvasás alkalmával — a könyv egészének áttanulmányozására. Ne szegje kedvét, ha a B jelű megjegyzések között egyik-másik megemészthetetlennek bizonyul. Sokszor nem a bennük közölt gondolatok okozzák a nehézséget, hanem annak belátása, hogy ilyen közlésre miért van egyáltalában szükség. Inkább tanácsoljuk a nehéznek bizonyuló megjegyzések átugrását, mintsem azt, hogy valaki a félig-meddig való megértést tudásnak könyvelje el. Ez a szempont vezetett, amikor megcsillagoztuk a legnehezebbnek vélt megjegyzéseket.

*Aki tudományos ambícióval* olvassa ezt a könyvet, az sajátítsa el maradéktalanul a könyv egészét. Tudományos munkát csak szilárd alapra lehet építeni, és a könyv egészének célja az, hogy a geometria tanulmányozásához szilárd alapot nyújtson.

---

# 1. fejezet - ELEMI GEOMETRIA

## ALAPFOGALMAK

Ebben a bevezető fejezetben csak előkészítjük a geometria tárgyalását. Bevezetjük azokat a fogalmakat, amelyekről a tárgyalás megkezdésekor szó lesz, valamint megemlítjük azokat a tényeket, amelyekre a tárgyalást majd építjük. Helyenként rámutatunk ugyan arra is, hogy megállapításaink egyikének-másikának helyessége hogyan következik logikai úton a többiéből, azonban az ilyen vizsgálatot feladatunknak nem tekintjük. Ebben a fejezetben csak az a célunk, hogy a valóságból absztrakcióval származó, szemlélettel alátámasztott alapot adjunk a további tárgyaláshoz, s hogy a legalapvetőbb elnevezésekkel megismerkedjünk.

### 1.§ Térelemek

Ebben a paragrafusban a pont, egyenes és sík bevezetésével foglalkozunk és alapvető tulajdonságaikat ismerjük meg.

**1.1** A *tér* fogalmához a tapasztalásból absztrakció útján jutunk. Az anyagi tárgyak a térben helyezkednek el. Terünk minden irányban határtalanul kiterjedt. A nyugvó tárgyak a térnek egy részét foglalják el. Ha elvonatkozunk a tárgyak fizikai jellemzőitől (anyagától, színétől stb.), és csak az általuk elfoglalt térrész alakját tekintjük, akkor eljutunk a mértani *test* fogalmához. Ha olyan tárgyakat gondolunk el, amelyek a valóságban nem is léteznek, pl. egy végtelenbe nyúló oszlopot, akkor is tekinthetjük alakjukat, az általuk szolgáltatott mértani testet. A tér feldarabolásakor mértani testek keletkeznek.

A testeket *felületek* határolják. Véges kiterjedésű testeket zárt felületek határolnak. A felületek darabjait is felületnek mondjuk, így pl. az asztal lapja is felület. A felületekről képet adhatunk vékony lemezzel, hártáival is. A felületnek nincs vastagsága.

Ha egy felületet feldarabolunk, a darabokat *vonalak* határolják. Véges kiterjedésű felületdarabokat zárt vonalak határolnak. E vonalak darabjait is vonalnak nevezzük, így pl. az asztalnak egy éle is vonal. A vonalakról képet adhatunk vékony dróttal, fonállal is. A vonalnak sem vastagsága, sem szélessége nincs. Ha egy vonalat feldarabolunk, a darabokat *pontok* határolják. A pontokról képet adhat a tű hegye vagy egy igen kis kiterjedésű tárgy is. A pontnak semmilyen kiterjedése sincs.

Az *egyenes* mindkét irányban végtelenbe nyúló vonal, amely mindenütt olyan, mint a kifeszített húr, a fénysugár útja homogén közegben, az anyagi pont pályája, ha külső erőhatás nélkül, pusztán tehetetlenségének hatására mozog, vagy mint a merev test helyben maradó pontjainak összessége, ha két pontját rögzítjük, és a testet forgatjuk.

A *sík* minden irányban végtelenbe nyúló felület, amely mindenütt olyan, mint a simára gyalult deszka, a nyugvó víz felszíne, vagy két csatlakozó egyenes rúd között kifeszített hártá. A sík feldarabolásakor *síkidomok* keletkeznek.

**A1** A bevezetett fogalmakat nem definiáltuk, csak képet adtunk róluk, s rámutattunk, hogy absztrakció révén a valóságból keletkeznek. Nem lesz szükségünk arra, hogy pontosan körülírjuk, mit nevezünk testnek és síkidomnak, valamint felületnek és vonalnak. Az egyenes és a sík fogalomalkotásával viszont részletesen foglalkozunk a következőkben. Ez a szakasz a rendszeres tárgyalást csak előkészítette.

**A2** A geometria első tudományos rendszerezője a görög Euklides volt (i. e. 325 körül). *Elemek* című munkája mind a mai napig a geometria tárgyalásának alapjául szolgál. Ma már tudjuk, hogy rendszere korábbi munkákra is támaszkodik.

A *geometria* (mértan) a tér pontjaiból álló *alakzatokkal* (ponthalmaz, idom) foglalkozik. Ilyen alakzatok a *térelemek*: a pont, az egyenes és a sík, sőt maga a teljes tér is. Beszélünk *lineáris*, *síkbeli* és *térbeli* alakzatokról aszerint, hogy az alakzat pontjai egy egyenesen vannak, egy síkban helyezkednek el, vagy pedig csak annyit állapítunk meg, hogy a tér pontjai. A *térgeometria* (tér-

mértan, sztereometria) a térbeli alakzatokkal, a *síkgeometria* (síkmértan, planimetria) pedig egy sík alakzataival foglalkozik. Az alakzatok közé soroljuk sokszor az *üres* alakzatot is, amelynek egyetlenegy pontja sincs. Sem az üres alakzatot, sem pedig a teljes teret, illetőleg a síkgeometriában a teljes síkot nem mondjuk *valódi* alakzatnak.

Két alakzat *közös része* (metszet) a két alakzat közös pontjaiból áll. Két alakzat *egyesítését* azok a pontok alkotják, amelyeket a két alakzatnak legalább az egyike tartalmaz. Szó lehet természetesen kettőnél több alakzat közös részéről és egyesítéséről is.

A pontokat nagybetűkkel, az egyeneseket kisbetűkkel, a síkokat nagybetűkkel vagy görög betűkkel szokás jelölni.

Ha két térelem egyike tartalmazza a másikat, azt mondjuk, hogy a két térelem *illeszkedik* egymáshoz. Egy egyeneshez illeszkedő pontokat *kollinearisanak*, egy síkhoz illeszkedő pontokat és egyeneseket *komplanarisoknak* (egysíkú) mondunk.

Térelemek illeszkedésére vonatkozóan a következő megállapításokat tehetjük:

**I.** *Két ponthoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.*

**II.** *Ha három pont nincs egy egyenesen, akkor egy és csak egy sík illeszkedik hozzájuk.*

**III.** *Ha egy sík tartalmazza egy egyenes két pontját, akkor tartalmazza a teljes egyenest is.*

Az  $A, B$  pontok által meghatározott egyenest  $AB$  egyenesnek, az  $A, B, C$  pontok által meghatározott síkot  $ABC$  síknak mondjuk. Ezeknél a megnevezéseknél közömbös az, hogy a szereplő pontokat milyen sorrendben adjuk meg.

Két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van, mert különben a két egyenes I. szerint azonos volna. Ha egy egyenes nem illeszkedik egy síkhoz, akkor legfeljebb egy közös pontjuk van, hiszen különben III. szerint illeszkedniük kellene.

**A1** Ha egy állításban „egy és csak egy” áll, ez azt jelenti, hogy van egy, s hogy több nincs. A köznapi nyelv „egyetlenegy” kifejezése ugyanezt fejezi ki (ha a mondat szerkezete nem tagadó). Így pl. I. azt mondja ki, hogy két ponthoz egyetlenegy egyenes illeszkedik, azaz egyrészt van olyan egyenes, amely két adott ponthoz illeszkedik, másrészt viszont nincs több ilyen egyenes.

**A2** A bevezetett szakkifejezések után sokszor említjük zárójelben a használatos egyéb megnevezéseket. Így említjük a szakkifejezés teljes alakját, ha az csak félreértés lehetősége esetén használatos, szokásos rövidítéseit, a ritkábban használt, vagy ma már alig használt megnevezéseket, s ezek között sokszor idegen, többnyire latin vagy görög eredetű szakkifejezéseket is. Ez utóbbiak ismerete megkönnyíti az idegen nyelvű szakirodalom megértését is.

**A3** Ha két alakzatról van szó, akkor eleve két különböző alakzatra gondolunk. Ugyanez áll akkor is, ha kettő helyett nagyobb természetes számot mondunk. Felesleges lett volna ezért pl. I.-ben két pont helyett két különböző pontról szólni.

Előfordul majd, hogy több alakzatról beszélünk, és megengedjük, hogy közöttük azonosak is legyenek. Ilyenkor ezt a tényt a szövegezésben is kifejezésre juttatjuk, és pl. három nem feltétlenül különböző pontról szólnunk.

**A4** Néhány szokásos jelölés:  $A \cap B$  az  $A, B$  alakzatok közös részét,  $A \cup B$  pedig az egyesítésüket jelöli;  $A \supset B$  és  $B \subset A$  egyaránt azt mondja ki, hogy az  $A$  alakzat tartalmazza a  $B$  alakzatot, hogy tehát  $B$  az  $A$  alakzathoz tartozik; azt, hogy a  $P$  pont a pontokból álló  $A$  alakzat eleme, azaz  $P$  az  $A$  alakzathoz tartozik,  $P \in A$  módon is jelölhetjük.

A térelemekkel kapcsolatos és kevésbé általános jelölések: a kerek zárójel a metszetet, a szögletes zárójel pedig az összekötő alakzatot, tehát pl.  $(ab)$  az  $a, b$  egyenesek metszéspontját,  $[ABC]$  pedig az  $A, B, C$  pontok által meghatározott síkot jelöli;  $- \cdot -$  az illeszkedés jele.

**B1** Megállapításainkat a szemléletre hivatkozva mondhattuk ki. Tapasztaljuk a helyességüket, bizonyítani azonban nem kívánjuk. Bizonyításuk már csak azért sem sikerülhet, mert a bennük

szereplő fogalmakat nem definiáltuk. Azokat az állításokat, amelyeket nem bizonyítunk, s amelyekre okoskodásainkat építjük, *axiómáknak* nevezzük. Az általunk kimondott axiómák a valóságot tükröző egyszerű megállapítások. Az axiómák bizonyos mértékig pótolják a bennük szereplő fogalmak definícióját. Mi is mondhatjuk, hogy pontnak, egyenesnek, síknak olyan alakzatokat nevezünk, amelyekre a már kimondott és a továbbiakban kimondandó axiómáink teljesülnek. E fogalmak teljes szemléletes tartalmát azonban még akárhány axiómával sem lehet megragadni.

**B2** Azt mondtuk, hogy minden alakzat pontokból áll, tehát a pontot választottuk a geometria felépítéséhez alapelemül. Ez nem az egyedül lehetséges módszer, bár szemléletünk számára ez a legkönnyebb. .

**1.3** Az egyenest egy pont két *félegyenesre* bontja fel. Ez a pont mindkét félegyenes *kezdőpontja* (végpont), és egyben a két félegyenes egyetlen közös pontja.  $AB$  félegyenesnek mondjuk az  $AB$  egyenes  $A$  kezdőpontú félegyenesei közül azt, amelyik a  $B$  pontot tartalmazza. Eszerint az  $AB$  félegyenes különbözik a  $BA$  félegyenestől. Néha megteesszük, hogy az ábrán az  $A$  kezdőpontú félegyenes mellé odairjuk a  $B$  pont jelét, de  $e$  pont helyét nem jelezzük, mert csak az a célunk, hogy az  $AB$  félegyenesről beszélhessünk, és ezért közömbös az, hogy a  $B$  pont hol helyezkedik el.

Az egyenest bármely két pontja két félegyenesre és egy *szakaszra* (egyenesszakasz, intervallum) bontja fel. A két pont a szakasz két *végpontja*. Az  $A, B$  végpontú szakaszt  $AB$  szakasznak mondjuk, de  $BA$  szakasznak is mondhatjuk. Ez a szakasz az  $AB$  félegyenes és a  $BA$  félegyenes közös részeként is származtatható, s mindkét félegyenesnek *kezdőszakasza*. Az  $AB$  szakaszt néha  $\overline{AB}$  jelöli.

A síkot egy egyenes két *félsíkra* vágja. Ez az egyenes a két félsík közös része. A teret egy sík két *féltérre* vágja. Ez a sík a két féltér közös része.

A félegyenes kezdőpontját, a szakasz végpontjait, a félsíkot meghatározó egyenesnek s a féltér meghatározó síknak a pontjait közös néven *határpontoknak* nevezzük. Az egyenesnek, a síknak és a térnek nincs határpontja. A már említett alakzatainknak az olyan pontjait, amelyek nem határpontok, *belső pontoknak* nevezzük. Egy szakasz belső pontjai azok, amelyeket a végpontok közrefognak, amelyeken a szakasz áthalad. Az egyenesről, félegyenesről vagy szakaszból azt mondjuk, hogy alakzatainknak valamelyikét metszi (döfi), ha egyetlen közös pontjuk van, és ez nem határpontja a két alakzat egyikének sem. Ezt az egyetlen közös pontot *metszéspontnak* (döféspont) nevezzük.

A most bevezetett fogalmakra érvényesek a következő megállapítások:

**IV.** Egy pont a rajta áthaladó egyenest két félegyenesre bontja fel. Az egyenes  $e$  ponton áthaladó szakaszának a végpontjai más-más félegyeneshez tartoznak. Az egyenes minden más szakaszát az egyik félegyenes tartalmazza.

**V.** Egy egyenes a rajta átfektetett síkot két félsíkra bontja fel. Az egyenest metsző síkbeli szakasznak a végpontjai más-más félsíkhöz tartoznak. A sík minden más szakaszát legalább az egyik félsík tartalmazza.

**VI.** Egy sík a teret két féltérre bontja fel. A síkot metsző szakasz végpontjai más-más féltérhez tartoznak. Minden más szakaszt legalább az egyik féltér tartalmaz.

Megállapításaink pl. az utolsó esetben burkoltan azt is kimondják, hogy a két féltér egy-egy belső pontját összekötő szakasz metszi a közös határsíkot, hiszen különben a szakasz egy féltérben volna, és ezért ez a végpontjaira is állna. Mondhatjuk tehát, hogy a szóban forgó síkot egy szakasz akkor és csak akkor metszi, ha a két végpontja más-más féltér belső pontja. Hasonlót mondhatunk természetesen a IV. és V. megállapítás esetében is.

Az V. és VI. megállapítás megszövegezésénél arra az esetre is gondoltunk, amikor a szakasz a közös határegyenesen, illetőleg határsíkon van. Az ilyen szakaszt is tartalmazza a két félsík vagy féltér egyike, sőt ezt a kettő közül bármelyik megteszi.

## 2. § Mozgás és hosszúság

Azokat az alapvető fogalmakat és tényeket tárgyaljuk, amelyek a mozgással és a hosszúságméréssel kapcsolatosak.

**2.1** Ha egy alakzat *mozog*, akkor pontjai új helyzetbe kerülnek, de lehetnek közöttük helyben maradó pontok is. Mozgás közben az alakzat *alakja* nem változik meg. Szó lehet az egész tér, azaz a tér valamennyi pontjának együttes mozgásáról is. Egy alakzat mozgását mindig kiegészíthetjük az egész tér mozgásával. Úgy gondolhatjuk tehát, hogy egy alakzat mozgásakor a mozgó tér viszi az alakzatot új helyzetébe. Nem gondolunk arra, hogy a mozgás során a mozgó alakzat pontjai milyen helyzeteket foglalnak el, hanem csak arra, hogy a mozgás révén milyen kezdő helyzetből milyen véghelyzetbe jutottak.

Lehetséges, hogy a mozgás egy alakzat pontjainak helyzetét megváltoztatja, de az alakzat egésze a mozgás után is ugyanazt a helyet foglalja el. Ez a helyzet pl., ha a mozgatott alakzat a teljes tér.

Minden mozgáshoz tartozik egy ellentétes mozgás, amelyik az elmozgatott alakzatot eredeti helyzetébe viszi vissza. Ha az elmozgatott alakzatot tovább mozgatjuk, akkor az eredeti alakzathoz jutunk. Mondhatjuk tehát, hogy két mozgás egymásutánja egyetlen mozgást ad. Kivétel nélkül igaz ez, mert az el nem mozgatást, a helybenhagyást is a mozgások közé soroljuk.

A mozgásra vonatkozóan a szemléletre hivatkozva a következő megállapításokat tesszük;

**VII.** *A mozgás két pont összekötő szakaszát a két elmozgatott pont összekötő szakaszába, az egyenest egyenesbe és a síkot síkba viszi.*

**VIII.** *Egy és csak egy olyan térmozgás van, amely egy adott félsíkot és ennek határán adott félegyenes megadott helyzetbe, egy adott félsíkba és annak határán adott félegyenesbe visz át.*

A második megállapítás azt is kimondja, hogy ha a térmozgás nem változtatja meg egy félsík és egy ennek határán elhelyezkedő félegyenes helyzetét, akkor nem változtatja meg a tér egyetlen pontját sem.

**B** Aki tudja, hogy a térgeometria felépíthető úgy, hogy előzetesen csak a sík (térben való) mozgatásáról van szó, az kérdezheti, miért vezettük be mi itt, az alapfogalmak ismertetése során nyomban a térmozgást. Ennek az elhatározásnak az az oka, hogy a sík és a tér mozgatásának szemléleti alátámasztása között nem igen tehetünk különbséget. Módszerünk előnye, hogy amikor az egyiket már szerepeltetjük, nem keli tettetnünk, hogy a másikat még nem ismerjük.

További előnyt jelent az, hogy módszerünk révén ebben az előkészítő fejezetben párhuzamot látunk a síkra és a térre vonatkozó alapismeretek között. Itt elsősorban a 6. §-ra és azon belül különösképpen a 6.5 szakaszra gondolunk.

**2.2** Két szakasz akkor *egyenlő*, ha van olyan mozgás, amelyik az egyiket a másikba viszi. Ha két szakasz nem egyenlő, akkor az a nagyobb, amelyik tartalmaz a másikkal egyenlő szakaszt.

Ha egy szakaszt *hosszegységnek* választunk, akkor a szakaszokat pozitív valós számokkal mérhetjük. A hosszegység hossza 1. Egyenlő szakaszok *hossza* egyenlő, és nagyobb szakasz hossza nagyobb. A szakaszok hosszát általában kisbetűvel jelöljük.

Két pont összekötő szakaszának hossza a két pont *távolsága*, az  $AB$  szakasz hosszát  $AB$  vagy  $\overline{AB}$  is jelölheti. Mondjuk, hogy egy pontnak önmagától való távolsága 0, és ennek megfelelően egyetlen pontot *nullszakasznak* is mondhatunk.

A hosszmérésről szólnak a következő megállapítások;

**IX.** *Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza.*

**X.** *Ha a hosszegység adott, akkor bármely  $A$  kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan  $B$  pont található, amelyre nézve az  $AB$  távolság egy adott pozitív valós szám.*

Az első megállapítás akkor is helyes, ha benne nem két, hanem véges sok szakaszra való felbontás szerepel.



Ha a hosszegységet megváltoztatjuk, minden szakasz hossza ugyanannyiszorosra változik. Azt mondjuk, hogy egy szakasz egy másik szakasz  $n$ -szerese, másik két szakasz összege vagy különbsége, ha a szakaszok hosszai között ilyen kapcsolat áll fenn. Erre az ad jogot, hogy az ilyen kijelentés helyessége nem függ a hosszegység megválasztásától. Szó lehet hasonló indokolással arról, hogy pl. két szakasz szorzata vagy hányadosa másik két szakasz szorzatával vagy hányadosával egyenlő. Nem mondhatunk azonban hasonlót, ha pl. két szakasz hosszának szorzata egy harmadik szakasznak a hossza.

**A1** A gyakorlati életben a hosszúság megadásakor a választott hosszegységet is jelezni kell (pl. 5 cm, 60 km). A hossz egység megváltoztatásakor a hosszúság mérőszáma is megváltozik. Ezt a tényt szögezzük le, amikor kimondjuk, hogy a hosszúság nem pusztán szám, hanem *hosszúság dimenziójú* mennyiség. Geometriai feladatoknál szokás viszont az, hogy a hosszegységet eleve adottnak gondoljuk, és a hosszúságok megadásánál nem is jelezzük.

**A2** Szerepeltettük a valós számokat, és feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a valós számok aritmetikáját. Támaszkodunk majd az első- és másodfokú egyenletek megoldásának ismeretére is.

**B1** Eddig tíz, római számokkal jelölt axiómát mondtunk ki. Ezek az axiómák a tapasztalaton alapulnak, a valóságból absztrakcióval származnak. Absztrakció szükséges már ahhoz is, hogy pontról, egyenesről és síkról beszélhessünk. További absztrakciót jelent, hogy a geometria tárgyalásában abszolút igaznak tekintjük azt, amit a tapasztalat csak bizonyos korlátok között támaszt alá. Ilyen tény pl. az is, hogy a merev test elmozgatása után pontjainak távolságai nem változnak meg. Lehetséges, hogy bővebb tapasztalat ezt meg fogja cáfolni. Az axiómáinkra épülő geometria ezek szerint a tapasztalaton alapszik, de nem az egyedül lehetséges ilyen geometria.

**B2** Megtehetnők, hogy a továbbiakban a tapasztalatra többet nem hivatkozunk, a szemléletre nem támaszkodunk, hanem római számokkal jelzett axiómáinkból kiindulva mindent logikai úton vezetünk le. Így a teljes geometriát fel lehetne építeni, ha a már kimondott axiómákhoz még egy további axiómát csatolunk, amelyet majd később mondunk ki (lásd 12.2).

Ha így járnánk el, tárgyalásunk *axiomatikus* volna. Nem választhatjuk ezt az utat, mert nagyon hosszadalmas és nehézkes. A legtöbb gondot talán az okozná, hogy még a szemléletes kifejezőmódokat is el kellene kerülnünk, illetőleg minden ilyen kifejezés jelentését definiálnunk kellene. A kezdő értetlenül állna az ilyen tárgyalás sok bonyodalma előtt. Mi ismételt hivatkozni fogunk a szemléletre, és nem fogjuk minden esetben külön hangsúlyozni ezt a körülményt. Ha mégis felsoroltunk tárgyalásunkban axiómákat, ezt csak azért tettük, hogy rámutathassunk az axiomatikus tárgyalás mibenlétére.

Felsorolt axiómáinkat több szempontból kifogásolni lehet. Meg lehetne követelni, hogy az egyes axiómák állításának még egy része se legyen a többiből levezethető. Kifogásolni lehet, hogy axiómáink szerepeltetik a valós számokat, pedig a geometria a valós számok szerepeltetése nélkül is felépíthető. Kifogásolni lehetne, hogy axiómáink a tartalmazás fogalmára, tehát a halmazelmélet elemeinek ismeretére épülnek, pedig ezek az alapfogalmak is axiomatikusán részletezhetők volnának. E szempontok figyelembevétele az axiomatikus tárgyalást még nehezebbé tenné. Aki annak a ténynek a bizonyítását is elvárja, hogy a geometria axiómáiból nem lehet ellentmondásra következtetni, az olyan követelményt támaszt, amelyet — legalábbis ma — nem tud teljesíteni senki sem.

A geometria axiomatikus megalapozására elsőnek Euklides törekedett. Mai értelemben vett első szabatos megvalósítója D. Hilbert (1862—1943, göttingai egyetemi tanár).

**B3\*** Néhány megjegyzést teszünk az olyan olvasó számára, aki ismeri a geometria szokásos axiomatikus megalapozását, és a mi axiómáinkat egybe akarja vetni a szokásos axiómákkal.

a) Az egybevetés érdekében először is leszögezzük, hogy hogyan értendők axiómáink akkor, ha axiomatikus tisztaságra törekszünk.

Első három axiómánk egy pontoknak nevezett elemekből álló, térnek mondott halmazról kimondja, hogy vannak olyan nem üres, a pontoktól és egymástól különböző, egyeneseknek és síkoknak nevezett részhalmazai, amelyek az egymást tartalmazás tekintetében rendelkeznek az I—III. axiómákban kimondott tulajdonságokkal.

Az egyenes, a sík és a tér kettévágásáról szóló axiómáink kimondják, hogy van egy olyan elválasztásnak mondott reláció, amely egy egyenes egy pontja és más két pontja között állhat fenn, s amely rendelkezik a IV—VI. axiómákban kimondott tulajdonságokkal. Így pl. IV. szerint az  $e$  egyenes  $P$  pontja egyértelműen két nem üres osztályba sorolja  $e$  többi pontját;  $P$  csak olyan pontokat választ el az  $e$  egyenesen, amelyek más-más osztályhoz tartoznak; ha viszont  $P$  nem választja el  $e$ -nek két  $P$ -től nem feltétlenül különböző pontját, akkor ez a két pont, valamint az ezeket elválasztó pontok mindannyian egy  $P$ -vel kibővített osztályhoz tartoznak. Hasonlót mondhatunk V. és VI. esetében is.

A mozgatról szóló két axiómánk kimondja, hogy van egy olyan transzformációcsoport, amelynek elemeit elmozgatásoknak nevezzük, s amelyek rendelkeznek a VII., VIII. axiómákban kimondott tulajdonságokkal. Eszerint a csoport elemei egyeneshez egyenest, síkhoz síkot rendelnek, az elválasztás relációját megtartják, és a csoportnak egyetlenegy olyan eleme van, amely a VIII.-ban említett alakzathoz egy megadott ugyanilyen alakzatot rendel.

A mérésről szóló axiómáink azokra az osztályokra vonatkoznak, amelyeket az elmozgatással egymásba átvihető pontpárok alkotnak. Két axiómánk kimondja, hogy ezeknek a pontpárosztályoknak mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy pozitív valós szám, amelyet az osztályba tartozó pontpárok távolságának mondunk, s amely rendelkezik a IX., X. axiómákban kimondott tulajdonságokkal. Eszerint egy pontnak két általa elválasztott ponttól való távolságát összeadva ez utóbbiak távolságát kapjuk meg, továbbá egy egyenesen az  $A, B$  pontokhoz egyetlenegy olyan pont található, amelyet  $A$  nem választ el a  $B$  ponttól, s amelynek  $A$ -tól való távolsága egy önkényesen megadott pozitív valós szám.

b) Az általunk megadott axiómák rendszere a szokásos axiómarendszerekkel ekvivalens. Ismeretes ugyanis, hogy axiómáink állítása levezethető a szokásos axiómarendszerekből, és ellenőrizhető, hogy a szokásos axiómák levezethetők a mi axiómáinkból. Ez utóbbi levezetést illetően megemlítiük, hogy az illeszkedési axiómák I—III. és VI. axiómáinkból adódnak, a rendezési axiómák a IV. és V., az egybevágósági axiómák a VII—X. axiómáinkból következnek, és X. axiómánk a folytonossági axióma teljesülését is biztosítja.

Az említett levezetés során csak az egybevágósági axiómák levezetése jelenthet problémát. Ezért erre a részletre vonatkozólag' néhány megjegyzést teszünk. A szakasz és a szög- tartomány bevezetése után ezek körében egybevágónak (vagy egyenlőnek) az elmozgatással egymásra fektethetőket mondjuk. Az így definiált egybevágóság reflexív, szimmetrikus és tranzitív, hiszen az elmozgatások csoportot alkotnak. Egy félegyenes két kezdőszakasza nem lehet egymással egybevágó; ezt X. axiómánk kimondja, de ez IX. axiómáinkból is levezethető. Több gondot okoz annak bizonyítása, hogy ha az  $OB_1$  félegyenes kettévágja a konvex  $AOB$  tartományát, akkor az  $AOB, AOB_1$  szögek nem lehetnek egybevágók. Ezt a bizonyítást vázlatosan közöljük.

Ha az említett szögek egybevágók, tehát  $AOB$  elmozgatással  $AOB_1$ -re helyezhető, akkor ez az elmozgatás az  $OA$  szarát csak az  $OB_1$  szarra fektetheti, mert ha helybenhagyná, akkor ellentmondásba jutnánk a VIII. axiómával. Ugyanez az elmozgatás az  $OB_1$  félegyenest olyan  $OA_1$  félegyenesbe viszi át, amely az  $AOB_1$  belsejében halad. A félegyenesek helyzetét megadó  $A_1, B_1$  pontokat az  $AB$  szakaszon vesszük fel. E szakasz tetszőleges  $P$  pontja egy  $OP$  félegyenest határoz meg. Ezt az imént említett elmozgatás kétszeri alkalmazása az  $OP_1$  helyzetbe viszi át. Ilyen módon  $P$ -hez az  $AB$  szakasz egy  $P_1$  pontját rendeltük hozzá. Ez a hozzárendelés  $A$ -hoz  $A_1$ -et,  $B$ -hez  $B_1$ -et rendeli és az elválasztás relációját megtartja. Tekintsük azoknak a  $P$  pontoknak a halmazát, amelyekre  $AP < AP_1$  teljesül. Ez a halmaz tartalmazza az  $A$  pontot (sőt az  $AA_1$  szakaszt is), a  $B$  pontot azonban nem. A X. axiómára támaszkodva megállapíthatjuk, hogy van egy olyan maximális  $AC$  szakasz, amelynek minden belső pontja az említett halmazhoz tartozik. A  $C$ -hez rendelt  $C_1$  pont nem lehet az  $AC$  szakasz belső pontja, mert akkor a kétszeri elmozgatás az  $A, C_1, C$  sorrendet nem tartaná meg. Nem lehet azonban  $C_1$  az  $AC$  szakasz meghosszabbításán sem, mert akkor a  $CC_1$  szakasz is az imént említett halmazhoz tartoznék, és  $AC$  nem volna maximális. Ezek szerint  $C$  és  $C_1$  azonos pontok, és a kétszeri elmozgatás az  $AC$  félegyenest, valamint az  $AC$  egyenes által határolt félsíkokat nem mozgatja el. Ez ellentmond VIII. axiómáinknak, hiszen a  $B$  pont nem marad helyben, s ez az ellentmondás eredeti állításunkat bizonyítja.

c) Az axiomatica jobbnak tartja az olyan axiómarendszert, amely kevesebbet mond ki és kevesebb előismeretre támaszkodik. Ebből a szempontból a mi axiómarendszerünk határozottan rossznak

mondandó, hiszen axiómáink sok feleslegeset is kimondanak, és a valós számok ismeretét szükségtelenül feltételezik. Még csak az sem igaz, hogy axiómáink egyike sem hagyható el, mert bizonyítani lehet, hogy IV. axiómánk állítása levezethető a IX. és X. axiómáinkból.

Axiómáink megválasztásakor nem is törekedtünk azonban a most mondott szempontok érvényesítésére. Az a cél vezetett bennünket, hogy a kezdő axiómarendszert lásson, de az ennél könnyebben emészthető legyen.

B4\* Axiómarendszerünknek egy kevesebbet kimondó módosítását említjük meg. Eredeti IX. és X. axiómánkat a következőkkel pótolhatjuk:

Az elmozgatással egymásba átvihető *rendezett* pontpárok osztályairól, az ezekhez az osztályokhoz rendelt pozitív számokról szólnak. A rendezett  $P, Q$  pontpárhoz rendelt számot  $PQ$ -val jelöljük. A módosított IX. és X. axióma szerint ez a hozzárendelés megvalósítható úgy, hogy ha  $B$  elválasztja egy egyenesen az  $A, C$  pontokat, akkor  $AB+BC = AC$ , ha pedig egy  $p$  pozitív valós számot önkényesen megadunk, akkor az  $AB$  félegyenesen egyetlenegy olyan pont van, amelyre  $AP = p$ .

Megmutatjuk, hogy ezekből a módosított axiómákból valóban következnek eredeti axiómáink állításai. Ehhez  $PQ = QP$  bizonyítására van szükség. Tegyük fel tehát, hogy pl.  $PQ < QP$ . Az új X. axióma szerint a  $QP$  félegyenes egy  $P_1$  pontjára  $PQ = QP_1$ . Ez a  $P_1$  pont a  $PQ$  szakasz belső pontja, mert  $P$  által  $Q$ -tól elválasztott  $P'$  pontra új X. axiómánk szerint  $QP' = QP + PP' > QP > PQ$ . Ezek szerint van olyan elmozgatás, amely a  $P$  pontot  $Q$ -ba, a  $Q$  pontot pedig a  $P, Q$  pontokat elválasztó  $P_1$ -be viszi. Minthogy az elmozgatás az elválasztás relációját megtartja, az említett elmozgatás a  $P_1$  pontot a  $Q, P_1$  pontokat elválasztó  $Q_1$  pontba viszi. Ennek az elmozgatásnak kétszeri alkalmazása a  $P, Q$  pontokat a  $P_1, Q_1$  pontokba viszi át, így tehát  $PQ = P_1Q_1$ . Ennek ellentmond, hogy IX. axiómánk szerint

$$PQ = PP_1 + P_1Q > P_1Q = P_1Q_1 + Q_1Q > P_1Q_1.$$

Ez az ellentmondás az eredeti  $PQ = QP$  állítást bizonyítja.

**2.3 Irányított szakaszhoz** jutunk, ha egy szakasz végpontjainak sorrendjét is megadjuk, azaz megmondjuk, melyik a *kezdőpontja* és melyik a *végpontja*. Ha az irányított szakaszt  $AB$  jelöli, akkor  $A$  a kezdőpontja. Ha egy pont ezen a szakaszon  $A$ -ból  $B$ -be jut, akkor ennek a szakasznak az irányában mozog.

Minden félegyenes *irányt* szab meg. Az irányított  $AB$  szakasz iránya megegyezik az  $AB$  félegyenesével. Egy egyenesen elhelyezkedő két félegyenes iránya akkor és csak akkor egyező, ha az egyik tartalmazza a másikat. Egy egyenesen kétféle irány adható meg, ezek egymással ellentétes irányok. *Irányított egyenest* adunk meg, ha az egyenest és ezen egy irányt is megadunk. A megadott irányt *pozitívnak*, az ellentétes irányt pedig *negatívnak* mondjuk.

Irányított egyenesen megadott irányított szakasznak *előjeles hosszúságot* tulajdoníthatunk. így nevezzük a szakasz hosszúságát, ha pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, hogy iránya pozitív-e vagy negatív.

Egy egyenes két irányított szakaszát egyenlőnek mondjuk, ha előjeles hosszuk egyenlő. Egy egyenes irányított szakaszairól szólva azt mondjuk, hogy egy szakasz egy másiknak  $n$ -szerese, másik kettőnek összege vagy különbsége, hogy továbbá két szakasz szorzata vagy hányadosa az egyenes (vagy egy másik egyenes) két szakaszának szorzatával vagy hányadosával egyenlő, ha előjeles hosszuk között ilyen kapcsolat áll fenn. Az ilyen kijelentések helyessége nem függ a hosszegység megválasztásától, de nem függ az egyenesek irányításának mikéntjétől sem. A szorzatot és hányadost illetően hozzátesszük ehhez, hogy nem függ az egyenes irányításától az eredmény előjele sem.

Akárhogy helyezkednek el egy egyenesen az (egymástól nem feltétlenül különböző)  $A, B, C$  pontok, mindig fennáll az irányított szakaszokra kimondott

$$AB+BC = AC$$

összefüggés. Az 1. ábra eseteinek vizsgálatával ellenőrizhetjük e kijelentés helyességét.



1

Az egyenest elmozgathatjuk úgy, hogy újból ugyanezt a helyet foglalja el, a mozgás az irányokat ne változtassa meg, és megadott  $A$  pontja előírt  $B$  pontjába kerüljön. Ezt a mozgást az egyenes (önmagában való) *eltolásának* (tranzláció) nevezzük.

Ha az egyenes  $A_1, A_2$  pontjai az egyenes eltolásakor a  $B_1, B_2$  pontokba jutnak, akkor az  $A_1B_1$  és  $A_2B_2$  irányított szakaszok egyenlők. Irányított egyenes eltolásakor ezeknek a szakaszoknak a közös előjeles hossza az eltolás mértéke. Eltolások egymás utáni alkalmazása az egyenes egyetlen eltolását adja, s ennek előjeles mértéke az alkalmazott eltolások mértékeinek összege. Az eredmény nem függ attól, hogy az eltolásokat milyen sorrendben hajtottuk végre.

A Vigyázzunk arra, hogy ha irányított szakaszokról van szó, akkor  $AB$  és  $BA$  mást jelent, hiszen  $AB = -BA$ .

## 2.4 Egyes speciális mozgásfajtákat említünk.

A tér *eltolása* (tranzláció) nem változtatja meg egy félsík helyzetét, és ennek határegyenesét önmagában tolja el. Nem változik meg ilyenkor azoknak a feltetereknek a helyzete, amelyeket az elcsúsztatott félsík síkja határol, és az elcsúsztatott félsíkot síkká kiegészítő félsík helyzete sem. A tér eltolását egyértelműen jellemezzük, ha megadjuk az elcsúsztatott félsíkot és azt, hogy határegyenesé hogyan tolódik el.

A tér *elforgatásakor* (tengely körüli elforgatás, rotáció) egy egyenes pontjai helyben maradnak. Ez az egyenes a *forgástengely*. Egy ilyen forgást egyértelműen jellemezzük, ha megadjuk tengelyét és azt, hogy egy a tengely által határolt félsík milyen helyzetbe jut.

Ha a térnek egy pont körüli elforgatásairól beszélünk, mindazokra a térmozgásokra gondolunk, amelyek ennek a pontnak, a *forgáscentrumnak* a helyzetét nem változtatják meg. Ilyen mozgáshoz jutunk, ha a teret olyan tengely körül forgatjuk el, amely a forgáscentrumon áthalad.

Ha a teret úgy mozgatjuk el, hogy egy féltér ne változtassa meg a helyzetét, akkor ez a féltér határsíkjára is áll. A határsíknak ezt a mozgását *síkmozgásnak* nevezzük. Ilyen mozgáshoz jutunk, ha a síkot folyamatosan úgy mozgatjuk, hogy a mozgás során mindig ugyanazt a helyet foglalja el, hogy tehát a sík önmagában mozogjon. Egy síkmozgás jellemzéséhez elég megadni, hogy a sík egy félegyenesé milyen helyzetbe jut. Hangsúlyoznunk kell, hogy a síkot a térben mozgatva úgy is önmagára fektethetjük, hogy a sík önmagában mozogva, tehát síkmozgással ezt a helyzetet nem érheti el.

A sík *eltolása* (tranzláció) olyan síkmozgás, amelynél egy egyenes nem változtatja meg helyzetét. A sík eltolása ezt az egyenest önmagában tolja el. Az elcsúsztatott egyenes által határolt félsíkok a sík eltolása során helyben maradnak. A sík eltolását azzal jellemezhetjük, hogy megadjuk az elcsúsztatott egyenest és azt, hogy ez az egyenes hogyan tolódik el.

A sík *elforgatása* (pont körüli elforgatás, rotáció) olyan síkmozgás, amelynél egy pont helyben marad. Ez a pont a *forgás középpontja* (forgáscentrum). Ezt a mozgást a középpontnak és egy ebből kiinduló félegyenes kezdő és vég helyzetének megadásával jellemezhetjük.

Az ebben a szakaszban említett mozgásfajták mindegyikéről megállapíthatjuk, hogy az ellentétes mozgás, valamint két mozgás egymás utáni alkalmazásával keletkező mozgás is ugyanolyan fajtájú. Ezt a kijelentést úgy értjük, hogy pl. egy megadott tengely körüli két elforgatás egymásutánja ugyanazon tengely körüli elforgatást szolgáltat. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy definícióink az el nem mozgatót is hozzásorolták az eddig említett mozgásfajták mindegyikéhez. Egymásutánjukról szóló iménti kijelentésünk különben nem is volna helyes.

Megemlítjük még, hogy a tér eltolásainak és tengely körüli elforgatásainak egymásutánja minden térmozgáshoz elvezet, s hogy a sík eltolásainak és elforgatásainak egymásutánja minden síkmozgást megad.

**B1** Már leszögeztük álláspontunkat, hogy ebben az első fejezetben a szemlélet által alátámasztott tényeket ismertettünk, és nem törekszünk arra, hogy helyességükre axiómáinkból kiindulva logikai úton következtessünk. Nem foglalkozunk az ebben a szakaszban előadottaknak bizonyításával sem. Megemlítjük viszont, hogy csak olyan tényeket soroltunk fel, amelyeknek bizonyítása a későbbi fejezetek anyagának felhasználása nélkül is lehetséges (vö. 6.5 B4).

**B2** A tárgyalt mozgásfajtákkal kapcsolatban nem említettünk néhány olyan tény, amelyeknek a bizonyításánál a könyv későbbi fejezeteinek ismeretére volna szükség. Nem szólhattunk ezért arról, hogy a sík és tér eltolásánál csak egyetlen egyenes tolik-e el önmagában, hogy a tér eltolásánál csak egyetlen félsíkpár marad-e helyben, hogy eltolások egymásutánja akkor is eltolást ad-e, ha nem ugyanannak a félsíknak az elcsúsztatásával származtathatók. Különbséget kell tennünk hasonló okokból a tér tengely körüli elforgatása és a sík forgásakor az ehhez a síkhoz tapasztott tér mozgása között.

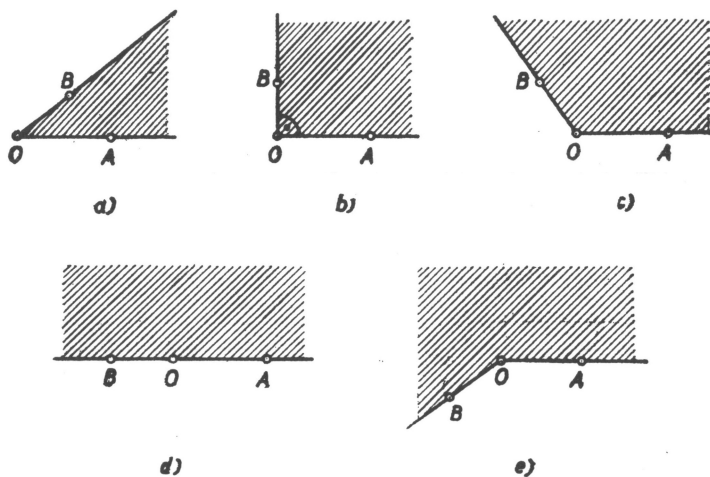
### 3. § Szög

A szögekkel, mérésükkel és a szögek közötti legegyszerűbb kapcsolatokkal foglalkozunk.

**3.1** Egy pontból kiinduló két félegyenes a síkot két részre bontja. Egy-egy ilyen részt *szögnek* vagy *szögtartománynak* nevezünk (2. ábra). A félegyenesek a szög *szárai*, közös kezdőpontjuk a szög *csúcsa* (szögpont). A szárok helyett sokszor csak kezdőszakaszaikat szerepeltetjük. A szögtartományt a szárok együttese, a *szögvonál* (szög) határolja. A szögvonál az általa határolt két szögtartomány közös része.

Ha egy szögnek csak a szárait adjuk meg (és ezek nem alkotnak egyetlen egyenest), akkor az általuk határolt két szög kisebbikére gondolunk (tehát arra, amelyik nem tartalmazza a szárok meghosszabbítását). Ha a nagyobbik szögről van szó, akkor ezt a körülményt valamilyen módon jelezni kell.

A szögeket görög kisbetűvel jelöljük. A szög jele  $\sphericalangle$ . Az  $OA$ ,  $OB$  száarakkal megadott szöget  $AOB\sphericalangle$  jelöli, de  $BOA\sphericalangle$  is jelölheti. Ha csak egy  $O$  csúcsú szögre gondolhatunk, akkor az  $O\sphericalangle$  jelöléssel is megelégedhetünk. Ábrában a szögbe rajzolt, a szárat összekötő ívvel (kettős ívvel stb.) jelölhetjük a szögeket, és betűjelüket a szög szárai közé írjuk.



2

**B** A szögtartomány definíciójával kapcsolatban megemlítjük, hogy egy szögvonalból kiindulva hogyan juthatunk el az általa határolt két szögtartományhoz. Ha a két szár egyetlen egyenest alkot, akkor a két szögtartomány az egyenes által határolt két félsíkkal azonos. Ha a két szár nincs egy egyenesen, akkor a száregyenesek mindegyike egyetlen olyan félsíkot határol, amely tartalmazza a másik szarat. Az így kapott két félsík közös része a keresett két szögtartomány egyike. Ha ezt a szögtartományt a teljes síkból elhagyjuk, akkor a szögvonálunk által határolt másik szögtartományhoz jutunk.

**3.2** Két szög akkor *egyenlő*, ha mozgással fedésbe hozhatók. Két nem egyenlő szög közül az a nagyobb, amelyik tartalmaz azonos csúcsú s a másikkal egyenlő szöget.

Ha egy szöget egységül választunk, akkor a szögeket mérhetjük. A *szögmérték* pozitív valós szám. Egyenlő szögek mértéke egyenlő, és nagyobb szög mértéke nagyobb. Ha egy szöget csúcsából induló félegyenessel két szögre bontunk, akkor e két szög mértékének összege az eredeti szög mértékét adja. Ez akkor is igaz, ha egy szöget nem két, hanem véges sok szögbe bontunk fel. Ha két közös csúcsú szög egyike tartalmazza a másikat, akkor az elsőnek a mértéke a nagyobb. A szögek mértékei között mindazok a számok előfordulnak, amelyek valamely szög mértékénél kisebbek.

A szög jele a szög mértékét is jelöli. Egyenlő szögeket sokszor jelölünk ugyanazzal a betűvel és rajzban is ugyanolyan módon (ívvel, kettős ívvel stb.).

Egy szöget egy másik szög  $n$ -szerésének, másik két szög összegének vagy különbségének mondunk, ha mértékeik között ilyen kapcsolat van. Az ilyen kijelentések helyessége nem függ attól, hogy a szögmérés egységét hogyan választjuk meg.

Az *egyenesszög* szárai egy egyenest alkotnak. Az egyenesszög felét *derékszögnek* nevezzük. Az egyenesszög tartománya tehát félsík (a derékszögre pedig síknegyed). A derékszögnél kisebb szögeket *hegyesszögnek*, a derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szögeket *tompaszögnek* mondjuk. A hegyesszög, derékszög, tompaszög és egyenesszög közös néven *konvex* (domború) szögek. Az egyenesszögnél nagyobb szögeket *konkáv* (homorú) szögeknek nevezzük (vö. A1). Mint határesetet bevezetjük a *nullszöget*, melynél a két szár egybeesik, és a szögtartomány szerepét ez az egyetlen szár játssza, valamint a *teljesszöget*, melynél a két szár egybeesik, és a szögtartomány a teljes sík.

A derékszög szárait azt mondjuk, hogy egyik a másikra *merőleges* (*ortogonális*, normális). A merőlegesség jele  $\perp$ . Ábrán a derékszöget azzal is jelezhetjük, hogy a szöget jelölő íven belül egy pontot helyezünk el. A derékszög (rectus) jelölésére az  $R$  betűt is használják.

A szögmérés egységéül közönségesen az egyenesszög 180-ad részét, a *fokot* ( $1^\circ$ ) választjuk, a fok hatvanad része egy *perc* ( $1'$ ), és ennek hatvanad része egy *másodperc* ( $1''$ ). Eszerint a teljesszög  $360^\circ$ , az egyenesszög  $180^\circ$  és a derékszög  $90^\circ$ .

**A1** Helyteleníteni kell, ha valaki a konkáv szöget „domború szög”-nek mondja. Ez a szokás szerencsére már kiveszőben van. Aki elfogadja ezt a helytelen megnevezést, ilyeneket kénytelen mondani: „a szögtartomány akkor domború, ha a szög nem domború” (vö. 4.6) és „egy sokszögtartomány akkor domború, ha nincs domború szöge” (vö. 4.7).

**A2** A fokmérték a babiloni hatvanas számrendszer emlékét őrzi. Újabban ismételt kísérlet történt arra, hogy a szögmérésnél 100-as váltószámra térjenek át. A derékszög századrésze egy *újfok* ( $1^\circ$ ), ennek századrésze egy *újperc* ( $1'$ ), és ez utóbbinak századrésze egy *újmásodperc* ( $1''$ ). E mértékek általánosabban nem terjedtek el.

**3.3** Nemcsak közvetlenül lehet a szögmérés egységét megadni, hanem azáltal is, hogy megadjuk valamelyik szögnek a mértékét. így vezetjük be az *ívmértéket* azáltal, hogy az egyenesszög mértékéül egy  $\pi$ -vel jelölt valós számot választunk. E szám közelítő értéke 3,14159. Pontos értékét csak később szabjuk majd meg (lásd 19.4).

A szögek mérésére egyaránt használjuk a fokmértéket és az ívmértéket. Ez a két mérték is arányos egymással. A leggyakrabban előforduló szögek ívmértéke:

$$360^\circ = 2\pi, \quad 180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

Ha fokmértékről ívmértékre térünk át, akkor az

$$n^\circ = n \frac{\pi}{180}, \quad n' = n \frac{\pi}{10800}, \quad n'' = n \frac{\pi}{648000}$$

összefüggéseket használhatjuk. Az itt szereplő törtek közelítő értéke

$$1^\circ = 0,0174533, \quad 1' = 0,0002909 \quad 1'' = 0,0000048.$$

*Radiánnak* nevezik azt a szöget, amelynek ívmértéke 1, Ennek fokmértéke közelítőleg

$$1 = 57^\circ 17' 44,6'' = 57,29578^\circ.$$

A Az ívmérték bevezetése alapján megállapíthatjuk, hogy az ívmérték dimenzió nélküli puszta szám. Az ívmérték számadata után a mértékegység, a radián jelzését elhagyjuk. Semmi zavar nem származik abból, hogy egy szög fokmértékét és ívmértékét egyenlőnek mondjuk és írjuk.

**B1** Az ívmérték használatának sok előnye van. Legnagyobb hasznát az analízis látja, de tapasztaljuk majd, hogy a geometrián belül is vannak előnyei (lásd 19.8 és 29.8).

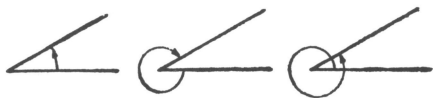
**B2** Kifogásolhatja valaki, hogy az ívmértéket bevezettük és a  $\pi$  számot szerepeltettük, mielőtt a körről és a körív méréséről szó lett volna (vö. 19.8). Azt válaszolhatjuk erre, hogy a  $\pi$  szám bevezetéséhez nincsen geometriára szükség, hiszen az analízis számos lehetőséget nyújt erre. Példaként megemlíthetjük,

hogy  $\pi$  a legkisebb olyan pozitív szám, amelyre a  $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \dots$  sor összege 0. Ez a válasz azt is mutatja, hogy az ívmértéket akkor is bevezethetnők, ha a 12.2-ben kimondandó axiómát nem mondanák ki, és ezért a  $\pi$  szám szokott geometriai definíciójához el sem juthatnánk. Ebben az esetben az ívmérték elnevezést mindenesetre kritika tárgyává tehetnők.

**3.4** A síkban kétféle irányban forgathatunk el egy félegyeneset kezdőpontja körül. Ez a két *forgásirány* egymással ellentétes.

Ha a síkban egy forgásirányt adunk meg, ezt *pozitívnak* és az ellentétes forgásirányt *negatívnak* mondván, akkor a síkot *irányítottnak* nevezzük. Ha a síkra egyik oldaláról nézünk, akkor azt a forgásirányt szokás pozitívnak választani, amelyik arról az oldalról nézve az óramutató forgásával ellentétes. A sík irányítását úgy is felfoghatjuk tehát, mint annak megadását, hogy a síkot melyik oldalról nézzük.

Ha a síkban egy félegyenes kezdőpontja körül forogva egy kezdő helyzetből egy véghelyzetbe jut, *forgásszöget* ír le. A forgó szár kezdő és véghelyzetét a forgásszög *kezdőszárának* és *végzőszárának* mondjuk. A forgásszög megadásánál annak megadására van szükség, hogy a forgó félegyenes milyen szögtartományokat, milyen irányú forgással és hányszorososan sűröl. Ábrán a forgás- szöget úgy jelezzük, hogy a szárak közé nyíllal irányított ívet rajzolunk, amely a forgó szár mozgását mutatja (3. ábra).



3

Ha egy forgásszög úgy keletkezik, hogy a forgó szár egyetlen szögtartományt sűröl, és közben forgásirányát nem változtatja meg, akkor ezt a forgásszöget megadhatjuk azáltal, hogy megadjuk a szögtartományt, és a szögtartomány szárainak a sorrendjét is megszabjuk. Ilyenkor *irányított szögtartományról* beszélünk. Ha irányított szögtartományról van szó, akkor az  $\angle AOB$  jelölés azt is mutatja, hogy  $OA$  a kezdőszár és  $OB$  a végzőszár.

Irányított síkban a forgásszöghöz *előjeles mértéket* rendelünk. Ezt a mértéket megkapjuk, ha a forgó szár által sűrölt szögtartományok előjeles mértékeit összeadjuk. Itt az előjeles mérték azt jelenti, hogy a szögtartomány mértékét pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, hogy a forgó szár a szögtartományt pozitív vagy negatív irányban forogva sűrölje-e. Ha a szögegység adva van, minden valós számhoz tartozik olyan forgásszög, amelynek ez a szám az előjeles mértéke.

Két forgásszög akkor egyenlő, ha előjeles mértékeik egyenlők. A forgásszög egy másikkal az  $n$ -szerese, másik kettőnek az összege vagy különbsége, ha előjeles mértékeik között ilyen kapcsolat van.

E kijelentések helyessége sem a szögegység megválasztásától, sem a sík irányításának mikéntjétől nem függ.

Ha a síkot egy pont körül elforgatjuk, akkor a pontból kiinduló minden félegyenes ugyanakkora forgásszöget ír le. Ez a forgásszög méri a sík elforgatását, ha nemcsak azt tekintjük, hogy az elforgatás milyen kezdőhelyzetből milyen véghelyzetbe visz, hanem arra is tekintettel vagyunk, hogy a sík milyen irányban forgott és pontjai az elforgatás során milyen helyzeteket foglaltak el.

A síknak egy pont körüli, egymást követő elforgatásai egyetlen elforgatást adnak. Itt az esetleg bekövetkező ellentétes elforgatásokat úgy tekinthetjük, hogy megsemmisítik egymást. Az eredő elforgatást mérő forgásszög az egymás után alkalmazott elforgatásokat mérő forgásszögeknek az összege. Nem függ az eredmény attól, hogy az elforgatásokat milyen sorrendben hajtjuk végre. Mondhatjuk, hogy egymáshoz csatlakozó forgásszögek egyetlen forgásszöget adnak, és ez a csatlakozó forgásszögeknek az összege.

**A** A forgásirány, sőt általában az irány szó helyett az „értelem” szót is használták, de ma már egyre kevésbé használják. Ez a magyartalan szóhasználat helytelen fordítás eredménye volt.

**B** Nem kell a forgásszög értelmezésénél olyan forgatásra szorítkoznunk, amelyik mindig ugyanolyan irányú. Megengedhetjük azt is, hogy a forgatás során véges sok irányváltás következzen be. Ha ezt az álláspontot fogadjuk el, akkor az ebben a szakaszban előadottak változatlanul helyesek maradnak, sőt feleslegessé válik az, amit az utolsó bekezdésben az ellentétes elforgatások megsemmisítéséről mondtunk. Egyedül azt jegyezzük meg, hogy rajzban mindig csak irányt nem váltó forgást jelölünk.

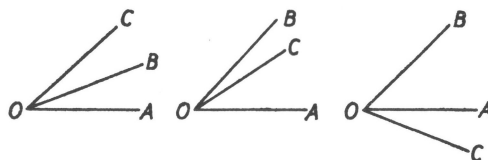
**3.5** Ha két közös kezdőpontú (egymástól nem feltétlenül különböző) félegyeneset adunk meg, és ezek sorrendjét is megszabjuk, *irányított szöget* adtunk meg. Egy irányított szöghöz hozzárendeljük mindazokat a forgásszögeket, amelyeknek kezdőszára és végszára rendre az irányított szög első és második szárával azonos. Mind e szögek mértékei egymástól a teljesszög egész számú többszöröseiben különböznek. Ezek a forgásszögek mindannyian mértékei az irányított szögnek. Irányított síkban az irányított szög előjeles mértékei közül rendszeren a  $180^\circ$ -nál nem nagyobb abszolút értékűt szoktuk szerepeltetni.

Az irányított szögeket ugyanúgy jelöljük, mint a szögtartományokat, de szükség esetén hozzátesszük a szövegben, hogy irányított szögekről van szó. Irányított szögekről szólva  $\angle AOB$  azt az irányított szöget jelenti, amelyiknek  $OA$  az első szára és  $OB$  a második. Rajzban szokásos az, hogy nyílazott ívvel jelezzük az irányított szöghöz tartozó forgásszögek egyikét.

Akárhogyan helyezkednek el a síkban az (egymástól nem feltétlenül különböző)  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  félegyenesek, az irányított szögekre mindig fennáll az

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$$

összefüggés. Ennek a kijelentésnek pontosabb értelme az, hogy a bal oldali szögek egy-egy mértékét összeadva mindig a jobb oldali szögnek valamelyik mértékét kapjuk. Kijelentésünk helyességét a 4. ábrán bemutatott elhelyezkedéseknél ellenőrizhetjük.



4

Ha a sík elforgatásánál csak a kezdő és véghelyzetre vagyunk tekintettel, és a forgás során elfoglalt helyzetekről nincs szó, akkor az elforgatást irányított szöggel mérjük. Ezt a szöget a forgáscentrumból induló félegyenes elfordulása szolgáltatja.

Ha két egymást metsző irányított egyenes sorrendje is adva van, akkor beszélhetünk irányított szögekről, hiszen a metszéspontból pozitív irányban induló félegyenesek irányított szöget adnak meg.



Ha két egymást metsző, de nem irányított egyenes sorrendjét is megadjuk, akkor beszélhetünk *irányított hajlásszögekről*. A két egyenes irányítása irányított szögeket ad, amelyeknek a mértékei egymástól az egyenlőség egész számú többszöröseiben különböznek. Azoknak a metszéspont körüli elforgatásoknak a szögeihez jutottunk, amelyek az első egyenest a másodikkra fektetik. Ezek a forgásszögek mindannyian mértékei az irányított hajlásszögnek. Az irányított hajlásszögek egyenlőségéből természetesen a hajlásszögek egyenlősége is következik, fordítva azonban nem. Irányított síkban az irányított hajlásszög előjeles mértékei közül rendesen azt használjuk, amelyiknek az abszolút értéke  $90^\circ$ -nál nem nagyobb.

**B1** Annak, aki ismeri az algebrai kongruencia fogalmát, megjegyezhetjük, hogy az irányított szög és az irányított hajlásszög mértéke nem egyetlen érték, hanem  $360^\circ$ , illetve  $180^\circ$  modulusra vonatkozó maradékosztály, s hogy a rájuk vonatkozó egyenletek ilyen modulusú kongruenciák.

**B2** Ha az itt tárgyalt szögek mértékeire felírt egyenlőségekkel dolgozunk, ügyelni kell arra, hogy ezeket az egyenlőségeket szabad egész számmal szorozni, de osztani nem szabad. Ennek okára az előző megjegyzés világít rá. Ha irányított szögekre felírt egyenlőséget osztunk 2-vel, akkor az eredmény már csak  $180^\circ$  modulusra vonatkozó kongruenciának fogható fel;

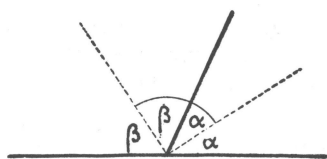
**3.6 Pótszögeknek** (complementum) mondunk két szöget, ha összegük  $90^\circ$ . *Kiegészítő szögek* (supplementum) azok, amelyeknek összege  $180^\circ$ . Ezeket a megnevezéseket többnyire szögtartományokra használjuk, de alkalmazhatjuk forgásszögekre is.

*Mellékszögeknek* mondunk két szögtartományt, ha együttesen egy félsíkot alkotnak. Így tehát a mellékszögek kiegészítő szögek. Egy-egy száruk egybeesik, és a másik kettő egy egyenest alkot.

Két közös kezdőpontú félegyenes által határolt két szögtartomány összege teljesszög. E kettő kisebbike a két félegyenes *hajlásszöge* (szög). Egymást egyenessé kiegészítő félegyenesek hajlásszöge egyenlőség. Ugyanígy beszélhetünk közös ponton áthaladó irányított egyenesek hajlásszögéről is. Ez a közös pontból kiinduló, az egyeneseken pozitív irányban haladó félegyenesek hajlásszögét jelenti.

*Csúcshögeknek* mondunk két konvex szögtartományt, ha száraik páronként egymás meghosszabbításai, ha tehát páronként egy-egy egyenest alkotnak. A csúcshögek egyenlők, mert ugyanannak a szögnek mellékszögei.

Egy szögtartomány *szögfelezője* az a csúcából induló félegyenes, amelyik a szöget két egyenlő szögre vágja. A szögfelezőt tartalmazó egyenest *szögfelező egyenesnek* (szögfelező) mondjuk. Mellékszögek szögfelezői derékszöget alkotnak, hiszen szögüket két olyan szög összege adja, amelyek kétszeresének összege  $180^\circ$  (lásd 5. ábra).



5

Két metsző egyenes a síkot négy szögtartományra bontja. Ezek páronként egymás mellékszögei vagy csúcshögei. A négy szög közül a kisebbeket a két egyenes *hajlásszögeinek* (szög) mondjuk. Ha a négy szög egyike derékszög, akkor mindegyik derékszög. Ilyenkor a hajlásszög derékszög, és a két egyenes *merőleges* egymásra.

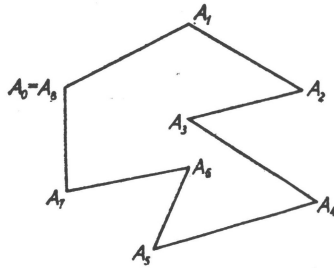
A szóban forgó négy szög közül két-két csúcshög szögfelezője egy-egy egyenest alkot, mind a négynek szögfelezője pedig két merőleges egyenest. Ezt a két egyenest a metsző egyenesek *szögfelező egyeneseseinek* (szögfelező) mondjuk.

Itt említjük meg, hogy ha két olyan alakzatról beszélünk, amelyeknek a hajlásszögéről szó lehet, akkor a *ferde* szó azt jelöli, hogy a hajlásszög nem  $0$  és nem  $90^\circ$ , a *merőleges* szó pedig mindig azt, hogy a hajlásszög  $90^\circ$ .

## 4. § Sokszög és poliéder

Egyenesszakaszokból összerakott vonalakkal, ilyen vonalak által határolt síkidomokkal és ilyen síkidomok által határolt testekkel ismerkedünk meg.

**4.1** Egymáshoz csatlakozó  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  szakaszok egy  $A_0A_1A_2, \dots, A_n$  *töröttvonalat* (poligon) alkotnak. Ha az  $A_0, A_n$  pontok azonosak, a töröttvonal *zárt* (6. ábra), az ellenkező esetben pedig *nyílt*. A nyílt töröttvonalak közé soroljuk az  $n = 1$  esetben adódó egyenesszakaszt is. Az  $A_0, A_n$  pontok a nyílt töröttvonal *végpontjai*. Azok a pontok, ahol a töröttvonal szakaszai az előírás szerint csatlakoznak, a töröttvonal *töréspontjai*. A töröttvonalat alkotó szakaszokat néha a töröttvonal *oldalainak* mondjuk.



6

A töröttvonal *hossza* a töröttvonalat alkotó szakaszok hosszának az összege. A töröttvonal minden töréspontjához egy-egy *törésszög* tartozik. Ennek szarait a töréspontban egymáshoz csatlakozó két szakasznak az egyike és a másiknak a törésponton túli meghosszabbítása szolgáltatja.

*Irányított töröttvonalhoz* jutunk, ha a töröttvonal szakaszait egymáshoz csatlakozó módon irányítjuk. Minden töröttvonalat kétféleképpen irányíthatunk. Irányított töröttvonal megadásakor a végpontokat és töréspontokat az irányításnak megfelelő sorrendben adjuk meg. Az irányított nyílt töröttvonal *kezdőpontja* és *végpontja* ebben a sorrendben az első és az utolsó helyen áll. Irányított zárt töröttvonalnál a töréspontok felsorolását bármelyiküknél elkezdhetjük, mert az irányítás csak ciklikus sorrendet szab meg.

Síkbeli irányított töröttvonal minden töréspontjához egy-egy *irányítón törésszög* tartozik. Ennek első szarát a töréspontba érkező szakasznak a törésponton túli meghosszabbítása, második szarát pedig a töréspontból induló szakasz szolgáltatja.

A A beszéd egyértelműségét csorbítja, aki töröttvonal helyett törtvonalat mond, hiszen ez utóbbi az osztás egyik műveleti jelének elfogadott neve.

**4.2** Ha egy zárt töröttvonal szakaszainak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincsenek közös pontjai, akkor *sokszögvonalnak* (egyszerű sokszög, sokszög, poligon) nevezzük. A szakaszok a sokszög *oldalai*, csatlakozási pontjaik a sokszög *csúcsai* (szögpont). Ha két csatlakozó szakasz egyenesszöget alkot, egyetlen oldalnak tekintjük, és csatlakozási pontjukat nem számítjuk a sokszög csúcsai közé.

A sokszögvonalnak ugyanannyi oldala van, mint ahány csúcsa, és ez a szám legalább 3. Az *n-szögvonalnak* ( $n$ -szög)  $n$  oldala és  $n$  csúcsa van. Beszélhetünk tehát *háromszögvonalról* (háromszög), *négyszögvonalról* (négyszög) stb.

Egy sokszögvonalat azáltal adunk meg, hogy csúcsait valamilyen ciklikus sorrendben felsoroljuk.

Minden csúcsban a sokszögvonal két oldala találkozik, és minden oldal két csúcsot köt össze. A csúcsokat összekötő többi szakaszt *átlónak* (diagonális) nevezzük.

Az oldalakat (oldalszakasz) és az átlókat (átlószakasz) tartalmazó egyeneseket *oldalegyenesnek* és *átlóegyenest* nevezzük. Néha oldalnak és átlónak mondjuk az oldalszakaszok és átlószakaszok hosszát is (oldalhossz és átlóhossz).

Többnyire síkbeli sokszögvonalak szerepelnek, s ezért a síkbeli jelzőt általában elhagyjuk. Ha nem ez a helyzet, akkor hangsúlyozzuk, hogy *térbeli* sokszögre (torz sokszög) is gondolunk.

Előfordul, hogy a sokszögvonalak közé sorolják a *hurkolt sokszögeket*, vagyis az olyan síkbeli zárt töröttvonalakat, amelyeknek szakaszai között egymást metszők is vannak. Néha célszerű megengedni, hogy a sokszögvonal csatlakozó szakaszai egyenesszöget is alkothassanak, hogy tehát pl. háromszöggé *elfajuló* négyszögről is szó lehessen.

A térbeli sokszögekre használt torz jelző onnan ered, hogy ezek a sokszögek csavarással (torzió) állíthatók elő a síkbeli sokszögvonalakból.

**4.3** A sokszögvonal a síkot két részre bontja fel (lásd B1). Az egyik rész a sokszögvonalon belül, a másik azon kívül helyezkedik el. A sokszögvonal a két síkrész közös pontjaiból áll. A belső síkrészt *sokszögnek* (sokszögtartomány, egyszerű sokszögtartomány, egyszerű sokszög, poligon) mondjuk. A határoló sokszögvonal hossza a sokszögtartomány *kerülete*.

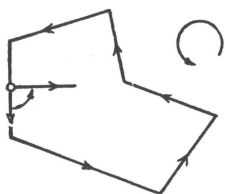
A határoló sokszögvonal oldalait és csúcsait a sokszögtartomány oldalainak és csúcsainak is mondjuk. Hasonlóan beszélünk a sokszögtartomány oldalegyeneseiről, átlóiról és átlóegyeneseiről. Egy átló *belső átló*, ha a sokszögtartomány tartalmazza, és csak a végpontjai vannak a határoló sokszögvonalon.

Ha egy szakasz a határoló sokszögvonal két pontját köti össze, és a sokszög belsejében halad, akkor a sokszöget két sokszögre bontja fel. Ezek határát az említett szakasz, valamint a sokszögvonalnak a szakaszvégpontokat összekötő egy-egy része alkotja.

Ha egy csúcsban találkozó két oldalt a csúcsból induló két félegyenessé egészítünk ki, akkor egy szögvonalhoz és általa határolt két szögtartományhoz jutunk. Közülük az a sokszögtartomány *szöge*, amelyik tartalmazza a sokszögtartománynak a csúcs közelében elhelyezkedő pontjait (lásd B2).

A sokszögtartományokat szögek száma szerint osztályozzuk. Az *n-szögnek* (*n-szögtartomány*) *n* szöge, oldala és csúcsa van. Beszélhetünk tehát *háromszögről* (háromszöglemez, háromszögtartomány), *négyszögről* (négyszöglemez, négyszögtartomány), stb. A háromszög jele  $\Delta$ .

Ha a sokszögvonalat irányítjuk, az általa határolt sokszögtartományt is *irányítottnak* mondjuk. Irányított síkban megadott irányított sokszögtartomány esetében megtehetjük, hogy valamelyik oldal belső pontjában az oldal irányával  $+90^\circ$  szöget alkotó félegyenest veszünk fel (7. ábra). A sokszögtartomány vagy tartalmazza mindezeknek a félegyeneseknek kezdőszakaszát, vagy pedig nem tartalmazza egyiket sem. E két esetnek megfelelően a sokszögtartomány irányítását *pozitívnak* vagy *negatívnak* mondjuk, illetőleg *pozitív* vagy *negatív körüljárású* sokszögről beszélünk.



7

A sokszögtartományt és az irányított sokszögtartományt ugyanúgy adjuk meg, mint határukat. Elterjedt szokás, hogy a sokszögtartomány csúcsait pozitív körüljárás sorrendjében adják meg akkor is, ha nincs irányított sokszögről szó.

**A1** Igen ritkán származik zavar abból, ha beszédünkben nem teszünk különbséget a sokszögvonal és az általa határolt sokszögtartomány között. Ezért mindkettőre a sokszög szót szokás használni. Mi is ehhez a szokáshoz igazodunk ebben a könyvben, hacsak nem kell félreértés lehetőségével számolnunk.

**A2** Ha a síkot a szokott módon irányítjuk, a sokszög irányítása aszerint pozitív vagy negatív, amint a határon az irányításnak megfelelően járva körül a sokszögtartomány a bal oldalon vagy a jobb oldalon helyezkedik el.

**B1** Kijelentettük, hogy a sokszögvonal a síkot két részre bontja fel. Kifejtjük, hogy ez szabatosabban mit jelent.

A sokszög vonal a síknak a sokszög vonalhoz nem tartozó pontjait két osztályba sorolja, amelyek rendelkeznek a következő három tulajdonsággal: 1. ha egy szakasz két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, akkor van a sokszög vonallal közös pontja, 2. a sokszög vonal minden pontján áthalad olyan szakasz, amely a sokszög vonal más pontját nem tartalmazza, és két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, 3. ugyanannak az osztálynak két pontja összeköthető olyan törött vonallal, amelynek nincs közös pontja a sokszög vonallal.

Ha mind a két pontosztályt kiegészítjük a sokszög vonal pontjaival, a sokszög vonal által meghatározott két síkrészhez jutunk. Egyikük nem tartalmaz teljes egyenest, sőt félegyenest sem. Erről azt mondjuk, hogy a sokszög vonalon belül van.

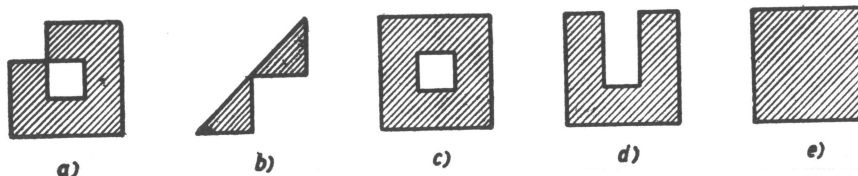
Megemlítjük, hogy a síknak egyenes és szög vonal által, valamint a térnek sík által való felbontásakor is olyan részek keletkeznek, amelyek rendelkeznek az itt felsorolt három tulajdonsággal.

**B2** A sokszög szögének definícióját a következőképpen egészítjük ki és tesszük szabatossá: Két csatlakozó oldal egy szög vonalat szolgáltat, amely a síkot két szögtartományra bontja, sokszögtartományunkat pedig sokszögtartományokra vágja, de az is lehet, hogy épségben hagyja. Ilyen módon egyetlen olyan sokszögtartományhoz jutunk, amelynek csúcsai között szög vonalunk csúcsa is szerepel. Ezt a sokszögtartományt az említett két szögtartomány az egyike tartalmazza, s ez a szögtartomány adja sokszögünk szögét.

Szigorú tárgyalás során azt is bizonyítani kellene, hogy a sokszög egy oldalán nyugvó két szög ugyanarról az oldalról támaszkodik a sokszög oldalra, pontosabban azt, hogy azok a konvex szögtartományok, amelyeket a mondott két szög tartalmaz, s amelyeknek egyik szára a szóban forgó sokszög oldalt tartalmazza, az oldalegyenes által határolt ugyanabban a félsíkban vannak.

**4.4** Ha a sokszög vonallal határolt sokszögtartományok közül véges sokat egyesítünk, általánosabb értelemben vett *sokszöghöz* (sokszögtartomány, poligon) jutunk (8. ábra). Azt is mondhatjuk, hogy a sokszögtartomány a síknak véges sok szakasz által határolt, egyenest nem tartalmazó része, megengedve, hogy ez a síkrész egymással össze nem függő darabokból is állhasson.

Véges sok sokszög egyesítése révén mindig sokszöghöz jutunk. Közös belső ponttal rendelkező véges sok sokszög közös része általában sokszög. Ugyanezt a sokszög és félsík, valamint a sokszög és szögtartomány közös részéről is elmondhatjuk. A sokszöget határoló szakaszok bármelyik pontjából kiindul a sokszög belsejében haladó szakasz, és kiindul a sokszögön kívül haladó szakasz is.



8

A sokszöget határoló szakaszok közül azokat, amelyek esetleg egymáshoz csatlakozva egy egyenesen helyezkednek el, egyetlen szakasszá egyesítjük. A sokszögtartomány *csúcsai* azok a pontok, amelyeket legalább két ilyen határoló szakasz tartalmaz. A határoló szakaszok mindegyikén két vagy több csúcs helyezkedik el, és ezek egy vagy több egymáshoz csatlakozó szakaszt határolnak. Ezek a szakaszok a sokszögtartomány *oldalai*. Minden csúcsban páros sok oldal találkozik.

A sokszögtartomány *összefüggő*, ha bármely két pontja összeköthető a sokszögtartományhoz tartozó törött vonallal. Minden össze nem függő sokszögtartomány véges sok olyan összefüggő sokszögtartományból áll, amelyeknek páronként nincsen közös pontjuk. A sokszögtartomány *közönséges*, ha összefüggő és minden csúcsban két-két oldal találkozik. Közönséges sokszögtartomány szögeiről ugyanúgy beszélhetünk, ahogyan ezt az előző szakaszban tettük (lásd 4.3 B2).

Egy sokszögtartomány *egyszeresen összefüggő*, ha a sokszögtartományhoz tartozó minden olyan törött vonal felbontja, amely határpontokat köt össze, és más határponton nem halad át. Az összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő sokszögtartományt *többszörösen összefüggőnek* mondjuk.

Egy sokszögtartomány *egyszerű*, ha közönséges és egyszeresen összefüggő. Az előző szakasz ezekről szólt. Minden sokszögtartomány előállítható véges sok olyan egyszerű sokszögtartomány egyesítéseként, amelyeknek páronként csak határpontjaik lehetnek közösek.

Minden sokszög határa egy vagy több olyan sokszögvonalból áll, amelyeknek nincsenek közös szakaszaik. Közönséges sokszög esetében közös pontjaik sincsenek. Egyszerű sokszög határa egyetlen sokszögvonal.

A Nagyon ritkán fordul elő, hogy az egyszerű sokszögeken kívül más sokszögek is szerepeljenek. Ezért az egyszerű jelzőt többnyire elhagyjuk. Ha másfajta sokszögekre is gondolunk, akkor ezt külön hangsúlyozzuk.

**B** Ha a sokszögtartományt mint a sík véges sok szakasz által határolt, egyenest nem tartalmazó részét akarjuk definiálni, akkor előbb tisztázni kell, hogy egy síkbeli alakzatról és általa tartalmazott véges sok szakaszcsoportról mikor mondjuk, hogy ezek a szakaszok az alakzatot határolják. Ez azt jelenti, hogy ha a síknak a szakaszokhoz nem tartozó pontjait két osztályba soroljuk, mégpedig az egyik osztályba az alakzathoz tartozó, a másikba az ahhoz nem tartozó pontokat soroljuk, akkor ez a két osztály rendelkezik a 4.3 B1-ben említett első két tulajdonsággal, ha bennük szakasz helyett töröttvonalat mondunk. Megemlítjük, hogy a sokszögtartomány egy egyenesből csak véges sok pontot és szakaszt tartalmazhat. Az ilyen pontok és az ilyen szakaszok végpontjai a tartományt határoló szakaszokon vannak.

**4.5** Az olyan térrészt, amelyet véges sok sokszögtartomány határol, s amely teljes egyenest nem tartalmaz, *poliédernek* (poliédertest) nevezzük (lásd B1). A határoló sokszögtartományok együttesen *poliéder felületet* (zárt poliéderfelület, poliéder) alkotnak.

Véges sok poliéder egyesítése mindig poliédert ad. Közös belső ponttal rendelkező véges sok poliéder közös része általában poliéder. Ugyanezt a poliéder és egy féltér közös részéről is elmondhatjuk. A poliédert határoló sokszögek bármely pontjából kiindul a poliéder belsejében haladó szakasz, és kiindul a poliéderen kívül haladó szakasz is.

A határoló sokszögtartományok síkjai a poliéder *lapsíkjai*. Ha a határoló sokszögtartományok között vannak egy lapsíkban elhelyezkedők és szakasz mentén csatlakozók, akkor ezeket egyetlen sokszögtartománnyá egyesítjük. Feltehetjük azt is, hogy ezek a sokszögtartományok mindannyian összefüggők. A poliéder *csúcsai* azok a pontok, amelyeket legalább három olyan határoló sokszögtartomány tartalmaz, amelyeknek síkjai nem haladnak át ugyanazon az egyenesen.

Azok a pontok, amelyeket legalább két határoló sokszögtartomány tartalmaz, a poliéder *élegyenesein* elhelyezkedő szakaszokat alkotnak. Minden ilyen szakaszon két vagy több csúcs helyezkedik el, és ezek egy vagy több egymáshoz csatlakozó szakaszt határoznak. Ez utóbbi szakaszok a poliéder *élei*.

A poliédert határoló sokszögtartományok határa élekből áll, tartalmazhatnak azonban ezek a sokszögtartományok további éleket is. Lehetséges, hogy ezek az élek a sokszögtartományt több sokszögtartományra bontják fel (lásd B2). Az élek által tovább fel nem bontható határoló sokszögtartományok a poliéder *lapjai*.

Megállapíthatjuk, hogy a poliédert lapjai, lapjait élei és éleit csúcsai határolják. Minden él legalább két lap határán van rajta, és minden csúcsban legalább három él találkozik. Minden poliédernek legalább négy lapja és legalább négy csúcsa van.

A poliéder csúcsait összekötő szakaszok vagy élek, vagy pedig *átlók* (diagonális). Ez utóbbiak között szerepelnek a lapok átlói, a *lapátlók*, s a többit *testátlónak* mondjuk. Egy testátló *belső* átló, ha a poliédertest tartalmazza, és csak a végpontjai vannak a poliéder felületén.

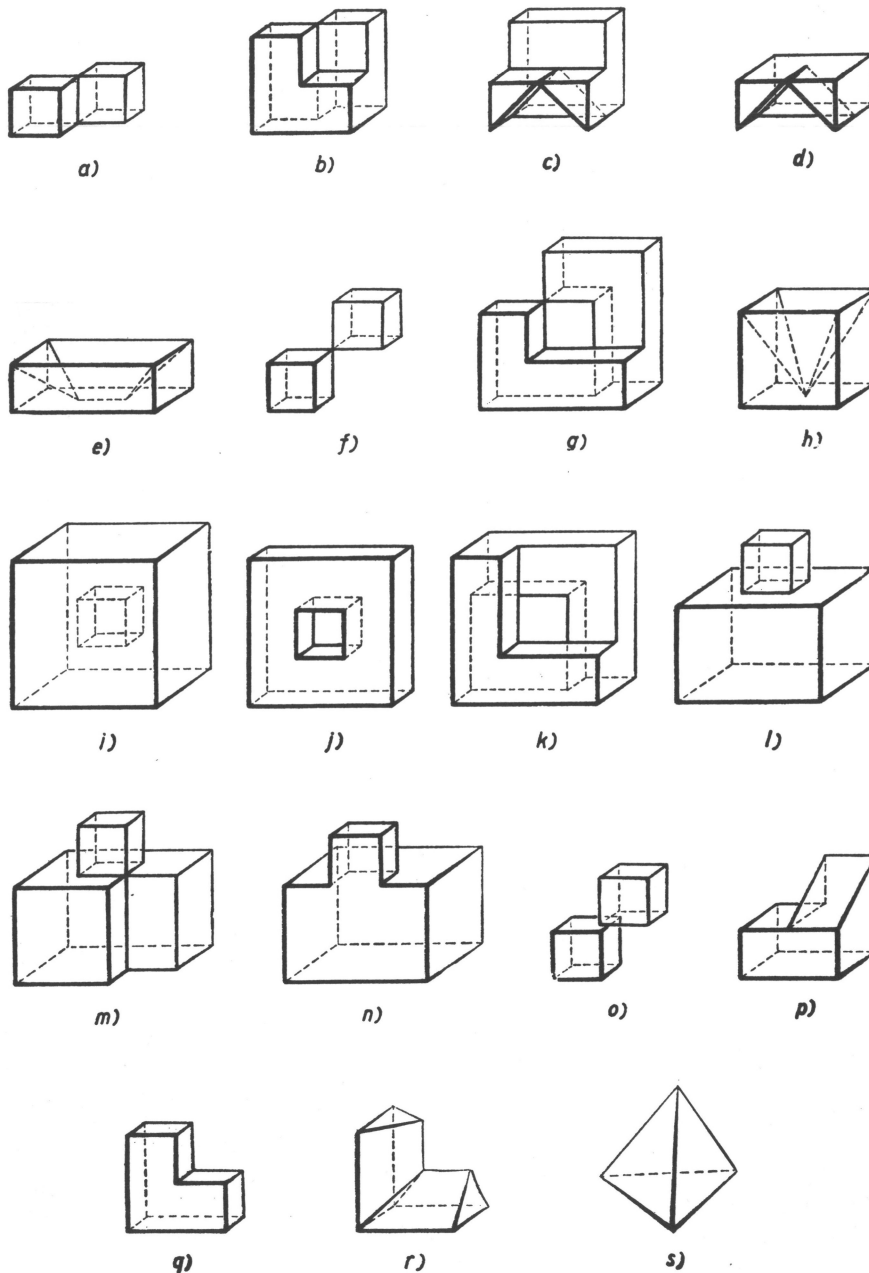
A poliéder *összefüggő*, ha a poliédertest bármely pontjától bármely pontjához eljuthatunk általa tartalmazott törött vonalon. Minden össze nem függő poliéder véges sok olyan összefüggő poliédertől áll, amelyeknek páronként nincsen közös pontjuk.

A poliéder *közönséges*, ha összefüggő, és minden csúcsánál az azt tartalmazó lapok egyetlen ciklust alkotnak. Ez azt jelenti, hogy az ebből a csúcsból kiinduló éleknek van egy ciklikus sorrendje, ebben a sorrendben bármely két egymásra következő él egy lap határvonalán egymással szomszédos (lásd B3),

és az így adódó lapok között minden olyan lap előfordul, amely tartalmazza a szóban forgó csúcsot. Ez a tulajdonság azt is magában foglalja, hogy minden élt két lap tartalmaz.

A poliéderfelület *összefüggő*, ha a poliéderfelület bármely két pontját összeköthetjük a poliéderfelülethez tartozó töröttvonalal. A poliéderfelület *egyszeresen összefüggő*, ha összefüggő és minden a poliéderfelületen elhelyezkedő sokszögvonal részekre bontja fel. A poliéderfelület *többszörösen összefüggő*, ha összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő.

A poliéder *egyszerű*, ha közönséges, felülete egyszeresen összefüggő, és minden lapja egyszerű sokszög, tehát lapjai is egyszeresen összefüggők. Egyszerű poliéder bármely lapjától bármely lapjához eljuthatunk páronként élben csatlakozó lapokon át haladva. Az egyszerű poliéder élhálózata is összefüggő, azaz bármely két csúcsa összeköthető élekből álló töröttvonalal. Minden poliéder előállítható véges sok olyan egyszerű poliéder egyesítéseként, amelyeknek páronként csak felületükhöz tartozó pontjaik lehetnek közösnek.



Ha egy közönséges poliéder felületét véges sok sokszögvonallal részekre bontjuk, a keletkező részeket *nyílt* (határolt) *poliéderfelületnek* nevezzük. Ha egyszerű poliéder felületét bontjuk fel egyetlen sokszögvonallal, akkor *egyszerű* nyílt poliéderfelületek keletkeznek.

A 9. ábra poliéderei mindannyian összefüggők. Az a) — e) poliédereknek van olyan élük, amelyet kettőnél több lap tartalmaz. Az a) — h) poliédereknek van olyan csúcsuk, hogy az azt tartalmazó lapok nem alkotnak egyetlen ciklust. Az i) — s) poliéderek közönségesek.

Az i) poliéder felülete nem összefüggő. A j), k) poliéderek felülete többszörösen összefüggő, de közülük csak a j) poliédernek van többszörösen összefüggő lapja. Az l), m) poliéderek felülete egyszeresen összefüggő, de nem minden lapjuk egyszerű sokszög. Az n) — s) poliéderek egyszerűek.

Az n), o) poliédereken van két olyan lap, amelyek két élben, illetőleg két csúcsban találkoznak. A p) poliéderen van két olyan él, amelyek egy egyenesen egymáshoz csatlakoznak. A q) — s) poliédereken az eddig említett rendellenességek egyike sem következik be.

Megemlítjük, hogy a q) és r) poliéderek nem konvexek, de közülük csak a q) poliédernek van konkáv lapja, s hogy az s) poliéder konvex (lásd 4.6).

**B1** A poliéderek definiálásakor véges sok sokszögtartomány által határolt térrészről beszéltünk. Ez szabatosan a következőt jelenti (vö. 4.4 B):

Egy térbeli alakzatról és általa tartalmazott véges sok sokszögtartományról akkor mondjuk, hogy az alakzatot ezek a sokszögtartományok határolják, ha az a két osztály, amelyeknek egyikét az alakzatnak a sokszögtartományokhoz nem tartozó pontjai, másikat az alakzathoz nem tartozó pontok alkotják, rendelkezik a következő két tulajdonsággal: 1. ha egy szakasz két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, akkor van a sokszögtartományokkal közös pontja, 2. a sokszögtartományok minden pontján áthalad olyan töröttvonal, amely a sokszögtartományok más pontját nem tartalmazza, és két különböző osztályhoz tartozó pontot köt össze.

Az így definiált térbeli alakzat akkor poliéder, ha nem tartalmaz egyenest. Megemlítjük, hogy a poliéder egy egyenesből csak véges sok pontot és szakaszt tartalmazhat. Az ilyen pontok és az ilyen szakaszok végpontjai a poliédert határoló sokszögtartományokon, a poliéder felületén vannak. Megemlíthetjük azt is, hogy a poliéder egy síkból csak véges sok pontot, (esetleg egymáshoz csatlakozó) szakaszt és sokszögtartományt tartalmazhat. Az ilyen pontok, szakaszok, valamint az ilyen sokszögtartományokat határoló sokszögvonalak a poliéder felületén vannak.

**B2** A poliéder élei által határolt, a poliédert határoló sokszögtartományok úgy is tartalmazhatnak éleket, hogy a sokszögtartomány nem bontható fel ilyen élek által. Ezt a 9d és 9e ábra mutatja. Az is lehetséges, hogy a poliéder lapja tartalmaz a lap határvonalához nem tartozó csúcsot, amelyből a laphoz tartozó él nem indul ki, amint ezt a 9h ábrán láthatjuk.

**B3** A közönséges poliéderek definíciójánál beszéltünk arról, hogy egy lap határvonalán két él szomszédos-e. Ezt pontosabban a következőképpen értjük: egy sokszög két oldala akkor szomszédos, ha egy csúcsban találkoznak, s ha a síkot az általuk meghatározott szögvonal mentén felvágva a sokszögből olyan részsokszög is keletkezik, amely tartalmazza a szóban forgó oldalakat, de nem tartalmaz más olyan oldalt, amely a mondott két oldal közös pontjába fut.

A 9m ábra poliédere példa arra, hogy a most adott kiegészítésre szükség van. Ha minden poliéderlap közönséges sokszög, akkor viszont felesleges ez a kiegészítés, mert egy csúcsban találkozó két oldal mindig szomszédos a most mondott szigorúbb értelemben is.

**4.6** Egy alakzat *konvex*, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza. Ha ez az alakzat nem minden pontpárjára áll, akkor az alakzat nem konvex. Nem konvex alakzatokra néha a *konkáv* jelzőt használjuk.

Konvex alakzatokra az eddig tárgyaltak közül a következő példákat említhetjük: pont, egyenes, félegyenes, szakasz, sík, félsík, egyenesszőgnél nem nagyobb (konvex!) szögtartomány, háromszög, tér, féltér.

Konvex alakzatok közös része is konvex alakzat, hiszen a közös rész két pontjának az összekötő szakaszát a konvex alakzatok mindegyike tartalmazza. Ha egy konvex alakzatnak és egy egyenesnek több közös pontja van, akkor közös részük vagy egy szakasz (esetleg egyik vagy mindkét végpontja nélkül), vagy félegyenes (esetleg kezdőpontja nélkül), vagy pedig a teljes egyenes. Az így kapott szakaszok és félegyenesek határpontjai a konvex alakzat *határát* alkotják. Két határpont összekötő szakaszának vagy csak ez a két pontja tartozik a határhoz, vagy pedig minden pontja a határon van.

Megállapításaink egyaránt vonatkoznak a lineáris, a síkbeli és a térbeli konvex alakzatokra. A konvex lineáris alakzat csak pont, szakasz, félegyenes vagy maga az egyenes lehet.

A *konvex síkidom* olyan síkbeli konvex alakzat, amely nincs egy egyenesen. Minden konvex síkidom tartalmaz sokszögtartományt. Ha a konvex síkidom nem tartalmaz félegyeneset, akkor határát *konvex zárt görbének* mondjuk.

A *konvex test* olyan térbeli konvex alakzat, amely nincs egy síkban. Minden konvex test tartalmaz poliédert. Ha a konvex test nem tartalmaz félegyeneset, akkor határát *konvex zárt felületnek* mondjuk.

Bármelyik csoportba tartozik is a konvex alakzat, elmondhatjuk, hogy ha egy a határához nem tartozó pontját az egyenesnek, síknak, illetőleg térnek egy hozzá nem tartozó pontjával összekötjük, akkor olyan szakaszhoz jutunk, amelynek egyetlen egy pontja van a konvex alakzat határán.

Egy adott alakzat *konvex burka* az a konvex alakzat, amely tartalmazza az adott alakzatot, és amelyet az adott alakzatot tartalmazó minden konvex alakzat tartalmaz. Minden alakzatnak egyetlenegy konvex burka van. Minden konvex alakzat saját magának a konvex burka. Ha több alakzat konvex burkáról beszélünk, az alakzatok egyesítésének a konvex burkára gondolunk. Ez az alakzatok konvex burkainak a konvex burkával azonos.

**4.7** A sokszögek és a poliéderek közül a konvex sokszögek és a konvex poliéderek játsszák a legfontosabb szerepet.

Minden *konvex sokszög* egyszerű. Egy közöséges sokszög akkor és csak akkor konvex, ha minden szöge konvex. Konvex sokszög szögeinek mellékszögeit a sokszög *külső szögeinek* nevezzük, és ezekkel szembeállítva a szögeit *belső szögeknek* is mondjuk.

Egy közöséges sokszög akkor és csak akkor konvex, ha minden oldala az azt tartalmazó oldalegyenesnek és a sokszögnek a közös része, ha tehát egyetlen oldal meghosszabbításán sincs a sokszöghöz tartozó pont. A konvex sokszög azoknak az oldalegyenesek határolta fésíkoknak a közös része, amelyek tartalmazzák a konvex sokszöget.

A konvex sokszög átlói mindannyian belső átlók. Ha egy pont a konvex sokszögön kívül helyezkedik el, akkor található hozzá olyan egyenes, amely ezt a pontot a konvex sokszögtől elválasztja, és olyan is, amely rajta áthalad, és a konvex sokszöget nem éri. A konvex sokszög csúcsán át fektethető olyan egyenes, amelynek a konvex sokszöggel további közös pontja nincs.

Egy síkban, de nem egy egyenesen elhelyezkedő véges sok pont konvex burka konvex sokszög. Ennek a csúcsai mind szerepelnek a véges sok pont között. Minden konvex sokszög a saját csúcsainak a konvex burka.

Konkáv sokszög konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek minden csúcsa csúcsa a konkáv sokszögnek is. Konkáv sokszög konvex burka egyben a konkáv sokszög csúcsainak is konvex burka.

A sík véges sok pontjának a konvex burkához szemléletesen eljutunk, ha egy fonalat feszítünk köréjük. Ugyanígy juthatunk el egy konkáv sokszög konvex burkához is.

**4.8** Minden *konvex poliéder* egyszerű. A konvex poliéder lapjai is konvex sokszögek.

Egy összefüggő poliéder akkor és csak akkor konvex, ha minden lapja az azt tartalmazó lapsíknak és a poliédernek a közös része, ha tehát egyetlen lapnak a síkjában sincs a poliéderhez tartozó s a laphoz nem tartozó pont. A konvex poliéder azoknak a lapsíkok határolta féltereknek a közös része, amelyek tartalmazzák a konvex poliédert.



A konvex poliéder testátlói mindannyian belső átlók. A konvex poliéderen kívül elhelyezkedő ponthoz vagy egyeneshez található olyan sík, amely ezt a konvex poliédertől elválasztja, és olyan is, amely áthalad rajta és a konvex poliédert nem éri. A konvex poliéder csúcsán és élén át lehet olyan síkot fektetni, amelynek a konvex poliéderrel további közös pontja nincs.

Véges sok, nem egy síkban elhelyezkedő pont konvex burka konvex poliéder. Ennek minden csúcsa szerepel a véges sok pont között. Minden konvex poliéder a saját csúcsainak a konvex burka.

Konkáv poliéder konvex burka olyan konvex poliéder, amelynek minden csúcsa a konkáv poliédernek is csúcsa. Konkáv poliéder konvex burka egyben a konkáv poliéder csúcsainak a konvex burka is.

A A tér véges sok pontjának a konvex burkához szemléletesen eljutunk, ha rugalmas hárttyát feszítünk köréjük. Ugyanígy szemléltethetjük egy konkáv poliéder konvex burkát is.

## 5. § Kör és gömb

A geometriában a kör és a gömb különlegesen fontos szerepet játszik. Itt csak az a célunk, hogy megismerkedjünk ezekkel az alakzatokkal, részletes tárgyalásukra majd később kerül sor. Az alapfogalmakat tárgyaló első fejezetben belül itt ismerkedünk meg utoljára újabb alakzatokkal. Ezt az alkalmat használjuk fel arra, hogy néhány olyan fogalmat és kifejezőmódot tisztázzunk, amelyek az alakzatokkal kapcsolatosak.

**5.1** Ha olyan tulajdonságot adunk meg, amellyel pontok rendelkezhetnek, akkor beszélhetünk az ilyen tulajdonságú pontok összességéről, halmazáról vagy *mértani helyéről*. Ennek az alakzatnak minden pontja rendelkezik a megadott tulajdonsággal, más pont azonban nem. Mondjuk, hogy a mértani helyet ezek a pontok alkotják.

A *kör* (körvonal) a sík olyan pontjainak mértani helye, amelyek a sík egy megadott pontjától megadott (0-tól különböző) távolságra vannak. A kör *középpontja* (centrum) az a pont, amelyiktől a kör pontjai ugyanakkora távolságra vannak. A kör *sugara* (rádiusz) ez a közös távolság, de ugyanígy nevezzük azokat a szakaszokat is, amelyek a középpontot a körvonal pontjaival összekötik.

A *gömb* (gömbfelület, szféra) a tér olyan pontjainak mértani helye, amelyek egy megadott ponttól megadott (0-tól különböző) távolságra vannak. A gömb *középpontja* (centrum) az a pont, amelyiktől a gömb pontjai egyenlő távolságra vannak. A gömb *sugara* (rádiusz) ez a közös távolság, de ugyanígy nevezzük azokat a szakaszokat is, amelyek a középpontot a gömbfelület pontjaival összekötik.

A kört is, meg a gömböt is egyértelműen meghatározza a középpontjuk és a sugaruk vagy pedig a középpontjuk és egy pontjuk. Ha a sugár hosszegységnyi, akkor *egységkörhöz* és *egységgömbhöz* jutunk.

A sík egy pontja a körvonalon *belül* vagy *kívül* van aszerint, amint a kör középpontjától mért távolsága a sugárnál kisebb vagy annál nagyobb. A körvonalon belül elhelyezkedő pontok a körvonal pontjaival együtt a körvonal által határolt *körlemez*t (körlap, körtartomány, kör) alkotják.

Egy pont a gömbfelületen *belül* vagy *kívül* van aszerint, amint a gömbközepptől a sugárnál kisebb vagy annál nagyobb távolságra van. A gömbfelületen belül elhelyezkedő pontok a gömbfelület pontjaival együtt a gömbfelület által határolt *gömbtestet* (tömör gömb, gömb) alkotják.

**A1** A mértani hely megnevezés általánosan elfogadott. Minden esetben megtehetjük azonban, hogy helyette pontok összességéről vagy ponthalmazról beszélünk.

Semmitmondó az olyan kijelentés, hogy pl. a kör mértani hely. Minden alakzat felfogható mértani helyként, hiszen mondani lehet: az alakzat azoknak a pontoknak mértani helye, amelyek az alakzathoz tartoznak.

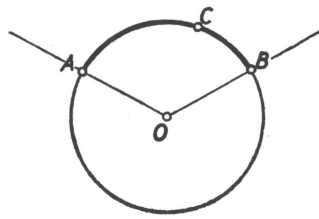
**A2** Csak nagyon ritkán származhatik zavar abból, hogy a körlemez is körnek, valamint a gömbtestet is gömbnek mondjuk. Ezt természetesen csak olyankor tesszük, amikor félreértés veszélyével nem kell számolnunk. Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy nem a körlemezről vagy a gömbtestről van szó, akkor körvonalat vagy gömbfelületet mondhatunk.

**A3** A kör és a gömb definiálásakor megköveteltük, hogy a megadott sugár 0-tól különböző legyen. Ha sugárként nulltávolságot is megadhatnánk, akkor a kör és a gömb definíciója egyaránt pontot is szolgáltatna.

**5.2** Ha egy szakasz két végpontjának egyike a körön belül, másika a körön kívül helyezkedik el, akkor ez a szakasz metszi a kört, a szakasznak van a körvonalhoz tartozó pontja.

A körvonalat két pontja két *körívre* (ív) bontja fel. E két körív közös része a köríveket határoló két pont, a körívek két közös *végpontja*.

Az  $A, B$  végpontú körívet  $\widehat{AB}$  vagy  $AB$  jelöli, ha nyilvánvaló, hogy az ilyen végpontú körívek melyikéről van szó. Ha félreértés lehetséges, akkor megadjuk a körív egy közbenső pontját is, és pl.  $ACB$  körívről beszélünk (10. ábra).



10

Ha a kör síkjában elhelyezkedő körív végpontjainak egyike a körön belül, másika a körön kívül helyezkedik el, akkor ez a körív metszi a kört, a körívnek és a körvonalnak van közös pontja.

**B1** Azt mondtuk, hogy a körvonalat két pontja két körívre bontja fel. Ezekhez úgy jutunk, hogy a két ponthoz vezető sugarak által meghatározott két szögtartományt és a körvonalnak ezekkel a szögtartományokkal közös részeit tekintjük.

**B2** A körön belül és kívül elhelyezkedő pontokat összekötő szakasszal és körívvel kapcsolatban csak közös pont létezéséről szóltunk. Azért nem mondtuk ki azt is, hogy csak egy közös pont van, mert ezt a ténnyt a kör részletes tárgyalása során majd bebizonyítjuk.

Szólhattunk volna a gömbön belül és kívül elhelyezkedő pontokat összekötő szakaszoknak és köríveknek a gömbbel alkotott metszéspontjáról is. Ezt sem tettük, mert ezzel majd a gömb részletes tárgyalása során foglalkozunk.

Kör és szakasz, valamint kör és körív metszésére vonatkozó kijelentésünk bizonyítása viszont nem illenék bele a következő fejezetek keretébe. Ha mi ezt a római számokkal jelzett axiómáinkra támaszkodva bizonyítani akarnók, akkor az egyenes folytonosságára kellene építenünk, és ezért X. axiómánk közvetítésével azt kellene kihasználnunk, hogy a valós számok között nincsen hézag.

A szóban forgó kijelentést *köraxiómának* mondják. A geometria java része felépíthető úgy, hogy X. axiómánk helyett csak a köraxiómát, valamint azt mondjuk ki, hogy ha  $h$  egy szakasz hossza, akkor bármely  $A$  kezdőpontú félegyenesen egyetlenegy olyan  $B$  pont található, amelynek  $A$ -tól mért távolsága  $h$ -val egyenlő.

Ennek a könyvnek a tárgyalása is javarészt ilyen módon a köraxiómára épül. Ezzel kapcsolatban megemlíjtük, hogy ha X. axiómánk szövegében „egy és csak egy” helyett „legfeljebb egy” áll, akkor olyan kijelentéshez jutunk, amely könnyen bizonyítható IX. axiómánkra, valamint arra hivatkozva, hogy minden szakasznak van hossza. Ugyanígy azt is bizonyíthatnók, amit *Archimedes-féle axiómának* szokás nevezni, hogy ti. két adott szakasz egyikének mindig van olyan egész számú többszöröse, amely a másiknál nagyobb.

Felhívjuk a figyelmet minden olyan részletre, amelynek az alátámasztásához X. axiómáinkra is szükség van, amely tehát a folytonosságból a köraxiómánál többet használ fel. Ilyen volt eddig az, hogy minden valós szögmértékhez található szög, és mindaz, amit a konvex alakzatok határával kapcsolatban

4.6-ban mondtunk. Ennek következménye, hogy a köraxióma hatáskörén túlnyúlunk, valahányszor általában konvex síkidomokról vagy konvex testekről szólnak, és határuk tulajdonságaira is építünk. Az ilyen részleteknél ezt a körülményt újból nem is hangsúlyozzuk.

Az elmondottak bőven indokolják, hogy a köraxióma szakaszokról szóló kijelentése miért szerepelt itt, jöllehet 4.6-nak a konvex síkidomok határáról szóló részlete azt magában foglalja.

**5.3** Ebben és a következő szakaszban az alakzatokkal kapcsolatos néhány fogalmat és kifejezést tisztázunk. Ez a szakasz az alakzatok bizonyos fajtájáról, a tartományokról szól.

a) Legyen adva valamilyen  $F$  alakzat, amelyet a következőkben *fundamentális alakzatnak* nevezünk.  $F$  szerepét ebben a könyvben a tér, sík, egyenes, poliéderfelület, sokszögvonala, konvex zárt felület vagy konvex zárt görbe játssza. Bebizonyítjuk majd, hogy a gömbfelület és a körvonal az utóbb említett két alakzattípushoz tartozik. A felsorolásban ezért nem említettük ezeket.

Ha egy konvex poliéder az  $F$  alakzat  $A$  pontját a belsejében tartalmazza, akkor azt mondjuk, hogy  $F$ -nek a konvex poliéder belsejében elhelyezkedő pontjai az  $A$  pont *környezetét* alkotják (az  $F$  fundamentális alakzatban).

Tekintsük az  $F$  fundamentális alakzatban elhelyezkedő  $T$  alakzatot és a  $T$  által tartalmazott (esetleg üres)  $H$  alakzatot. Azt mondjuk, hogy  $T$  *tartomány* és  $H$  a *határa* (az  $F$  fundamentális alakzatban), ha a következő feltételek teljesülnek:

1.  $T$  minden  $H$ -hoz nem tartozó pontjának van olyan környezete, amely csak  $T$ -hez tartozó, de  $H$ -hoz nem tartozó pontokból áll.
2.  $H$  bármely pontjának bármely környezete tartalmaz  $T$ -hez nem tartozó pontot, valamint  $T$ -hez tartozó, de  $H$ -hoz nem tartozó pontot is.
3.  $F$  minden  $T$ -hez nem tartozó pontjának van olyan környezete, amely  $T$  egyetlen pontját sem tartalmazza.

Mint ahogy a  $H$  határ üres alakzat is lehet, maga az  $F$  fundamentális alakzat is tartomány. Minden más esetben a  $T$  tartományból újabb tartományhoz jutunk, ha  $F$ -ből  $T$ -nek  $H$ -hoz nem tartozó pontjait elhagyjuk. Ezt *kiegészítő* (komplementer) tartománynak nevezzük, s ennek határa változatlanul ugyanaz a  $H$  alakzat. Ezt az észrevétel támasztja alá, hogy a fenti három követelményben  $T$ -nek  $H$ -hoz nem tartozó pontjai, valamint  $F$ -nek  $T$ -hez nem tartozó pontjai szimmetrikus szerepet játszanak. *Térbeli, síkbeli, lineáris és gömbi* (szférikus) tartomány az olyan, amelynél a fundamentális alakzat rendre a tér, sík, egyenes vagy gömbfelület. A térbeli tartomány határát *felületének* (határfelület, peremfelület), síkbeli tartományét pedig *peremének* (határvonal, határgörbe) mondjuk. Ezeknek a határalakzatoknak a megnevezésére a felszín és kerület szavakat nem használjuk, mert velük majd más fogalmakat jelölünk.

Az eddig megismert alakzatok mindannyian tartományok, mégpedig a már említett fundamentális alakzatok valamelyikében. Térbeli tartomány a tér, féltér, poliéder, gömbtest és általában a konvex test. Egy sík által határolt két féltér egymás kiegészítő tartománya. Síkbeli tartomány a sík, félsík, szögtartomány, sokszögtartomány, körlemez és általában a konvex síkidom. A síknak egy egyenes által határolt két félsíkja, valamint ugyanaz által a szög vonala által határolt két szögtartománya egymás kiegészítője. Lineáris tartomány az egyenes, a félegyenes és az egyenesszakasz. A gömbi tartományok közül eddig csak maga a teljes gömbfelület szerepelt. A körvonalon mint fundamentális alakzaton elhelyezkedő tartományok közül a teljes körvonalat, valamint a körívet említhetjük. Egy körnek két közös végpontú köríve egymás kiegészítő tartománya.

Az említett tartományok mindegyikénél megmondtuk, hogy mi a határa. Ellenőrizhetjük, hogy ez a most adott általános definícióval összhangban van. Ezt az ellenőrzést megkönnyíti, hogy a környezet, ha a fundamentális alakzat sík, a pontot tartalmazó nyílt konvex sokszöget, ha pedig egyenes, akkor a pontot tartalmazó nyílt szakaszt jelent.

b) Egy tartomány pontjai kétfélék: a határhoz tartozó *határpontok* és a határhoz nem tartozó *belső pontok*. A fundamentális alakzatnak a tartományhoz nem tartozó pontjait a tartomány *külső pontjainak* is mondjuk, bár ezek a tartománynak nem pontjai.

A belső pontok egyesítése a tartomány *belsejét*, külső pontjainak egyesítése a tartomány *külsejét* adja. Eszerint maga a tartomány a tartomány belsejéből és határából, a kiegészítő tartomány pedig a tartomány külsejéből és határából áll. A tartomány definíciója alapján kimondhatjuk, hogy a térbeli tartomány belseje a tartomány által tartalmazott poliéderek belsejének az egyesítése, külseje pedig a kiegészítő tartomány által tartalmazott poliéderek belsejének az egyesítése. Síkbeli és lineáris tartományról hasonlóan mondhatunk, csak poliéder helyett sokszögtartományt, illetve szakaszt kell mondanunk.

Definíciónk szerint a határ is a tartományhoz tartozik. Ezt úgy mondjuk, hogy mi a *zárt* tartományokat definiáltuk. Ha egy tartományból a határát elhagyjuk, *nyílt* tartományhoz jutunk. Ha nem mondjuk, hogy zárt vagy nyílt tartományról van-e szó, mindig a zárt tartományra gondolunk. Egy tartomány belseje és külseje egyaránt nyílt tartomány. Maga a fundamentális alakzat mint tartomány egyszerre nyílt is és zárt is.

Ha azt mondjuk, hogy egy alakzat a *tartományban van*, vagy hogy a tartományhoz tartozik, ez azt jelenti, hogy ezt az alakzatot a zárt tartomány tartalmazza. Ezzel szemben akkor mondjuk, hogy egy alakzat a *tartomány belsejében van*, vagy hogy a tartomány belsejéhez tartozik, ha ezt az alakzatot a tartomány belseje tartalmazza. Eszerint pl. a konvex sokszög átlói a sokszögben vannak, de nincsenek a sokszög belsejében, hiszen végpontjaik határpontok. Egy tartományról akkor mondjuk, hogy egy másik *tartomány belsejében halad*, vagy hogy egy másik tartomány belsejében terül el, ha a szóban forgó tartomány belsejét a másik tartomány belseje tartalmazza. Ez csak akkor következhetik be, ha a szóban forgó tartomány egésze is a másik tartományban van. Eszerint pl. egy sokszög csúcsait összekötő szakaszok közül azok a belső átlók, amelyek a sokszög belsejében haladnak.

A következőkben arról szólnak, hogy tartományokból hogyan juthatunk újabb tartományokhoz.

Ha ismeretes a fundamentális alakzat, és tudjuk, hogy egy zárt tartomány mely pontokból áll, akkor ezek mindegyikéről már eldönthető, hogy belső pont-e vagy határpont. Ez attól függ, hogy van-e a pontnak a tartományban elhelyezkedő környezete, vagy nincs. Eszerint a zárt tartomány egyértelműen meghatározza a határát. Ugyanezt a nyílt tartományról is elmondhatjuk, hiszen határa a kiegészítő zárt tartomány határával azonos.

Ha ugyanabban a fundamentális alakzatban két tartomány van adva, akkor ezek *egyesítése* is tartomány. Ennek határát az imént mondottak alapján már meghatározhatjuk. Ez a határ a két egyesített tartomány határának egyesítésével nyert alakzatban van, de azzal nem feltétlenül azonos. Így pl. egy közös oldalon nyugvó két háromszög egyesítése olyan négyszög lehet, amelynek a volt közös oldal már nem oldala.

Többnyire olyan tartományok egyesítése szerepel, amelyek ugyanahhoz a fundamentális alakzathoz tartoznak, és közös pontjuk van ugyan, de közös belső pontjuk nincs. Közös pontjaikat tehát a két egyesített tartomány határának mindegyike tartalmazza. Ilyenkor tartományok *egymáshoz illesztéséről*, összerakásáról beszélünk. Az előbb pl. arról volt szó, hogy két háromszög egymáshoz illesztésével négyszöget kaphatunk.

Ha ugyanabban a fundamentális alakzatban közös belső ponttal rendelkező két tartomány van adva, akkor belsejüknek a közös része nyílt tartomány. Tudjuk, hogy ez a határát már meghatározza. Az így kapott zárt tartományt az eredetileg megadott két tartomány *közös tartományának* nevezzük. Ennek a közös résznek a határa a két tartomány határának egyesítésével nyert alakzatnak része, de azzal nem feltétlenül azonos. Lehet azonos is, mint pl. egymást nem metsző egyenesek által határolt két félsík esetében. Két tartomány közös részéhez úgy is eljuthatunk, hogy kiegészítő tartományait egyesítésének a kiegészítő tartományát képezzük.

Szó lehet két tartomány közös részeként adódó tartományról néha olyankor is, ha fundamentális alakzataik különbözők. Ilyen közös részről akkor beszélhetünk, ha a két tartománynak van közös belső pontja, és új fundamentális alakzatul a két eredeti fundamentális alakzat közös részét választjuk. A szóban forgó tartományhoz úgy jutunk, hogy a közös belső pontokhoz csatoljuk az új fundamentális alakzatnak azokat a pontjait – ha vannak ilyenek –, amelyek maguk nem közös belső pontok, de minden környezetük tartalmaz közös belső pontot. Így juthatunk pl. a gömbtest síkmetszeteiként körlemezhez és a gömbfelület síkmetszeteiként körvonalhoz. Ide illik a körív 5.2 B 1-ben adott definíciója is.

Ha ugyanabban a fundamentális alakzatban két olyan tartomány van megadva, amelyek egyike a másikat tartalmazza, de a két tartomány nem azonos, akkor szó lehet a nagyobbik tartománynak és a kisebbik kiegészítő tartományának közös részéről. Azt mondjuk, hogy ehhez jutunk, ha a nagyobbik tartományból a kisebbiket *elvesszük*, elhagyjuk vagy kivágjuk. Ha ezt a maradéktartományt az elvett tartományhoz illesztjük, az eredeti, nagyobbik tartományhoz jutunk.

A most ismertetett eljárásokat ismételten is alkalmazhatjuk. Beszélhetünk ezért *véges sok tartomány* egyesítéséről, összeillesztéséről, közös részéről és elvételéről. Hangsúlyozzuk, hogy mindig zárt tartományokkal dolgozunk, és zárt tartományokhoz jutunk.

d) Már szó volt arról, hogy a tartomány egyértelműen meghatározza a határát. A határ viszont nem határozza meg egyértelműen a tartományt. Nemcsak a kiegészítő tartománynak ugyanaz a határa, hanem az is lehetséges, hogy három ugyanabban a fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartománynak közös a határa. Ez a körülmény óvatosságra int akkor, amikor tartományokat határuk megadásával akarunk jellemezni, vagy amikor kettévágásról akarunk szólni.

Ha az  $F$  fundamentális alakzatban a  $H$  alakzat csak az egymást kiegészítő  $T_1, T_2$  tartományoknak a határa, akkor azt mondjuk, hogy  $H$  az  $F$  alakzatot *kettévágja*, erre a két tartományra *bontja fel*. Így bontja fel pl. az egyenes a síkot és a sík a teret.

Ha  $H$  az  $F$  fundamentális alakzatot a  $T_1, T_2$  tartományokra bontja fel, és  $F$  valamely  $T$  tartományának vannak ezekkel közös belső pontjai, akkor szó lehet  $T$  és  $T_1$ , valamint  $T$  és  $T_2$  közös tartományáról. Ezek egyesítése a teljes  $T$  tartományt adja. Ilyenkor azt mondjuk, hogy ( $F$  kettévágásakor)  $H$  a  $T$  tartományt erre a két tartományra bontja fel. így vágja ketté pl. a sokszögtartományt a belsején áthaladó egyenes.

Hasonlót mondhatunk, ha nem  $F$ , hanem az általa tartalmazott  $F_1$  fundamentális alakzat  $T$  tartományáról van szó. Ilyenkor azonban  $T$  és  $T_1$ , valamint  $T$  és  $T_2$  közös tartományának az egyesítése nem mindig adja a teljes  $T$  tartományt. Csak ha ez bekövetkezik, akkor mondjuk, hogy ( $F$  kettévágásakor)  $H$  a  $T$  tartományt az adódó két tartományra bontja fel. Így vágja ketté a konvex sokszöget kettévágó egyenes a határoló sokszögvonalat is. Nem mondhatunk azonban hasonlót a konkáv sokszöget kettévágó oldalegyenesről.

Nincs szükség ilyen óvatosságra, ha nem szólunk arról, hogy  $H$  az  $F$  fundamentális alakzatot mely tartományokra vagy hány tartományra bontja fel, hanem csak arról, hogy felbontja-e, hogy tehát  $H$  határa-e  $F$  valamely tartományának. Így pl. a poliéderfelület egyszeres összefüggőségének 4.5-ben adott definíciója nem kívánja meg, hogy meggyőződjünk, kettévágásról van-e szó.

**B\*** Rámutatunk arra, hogy ennek a szakasznak a kijelentései hogyan bizonyíthatók. Ezt azért tesszük, mert a szokásostól eltérő okoskodásokra is szükség van.

a) Először azt bizonyítjuk, hogy *ha az  $A$  pont a  $P$  poliéder belsejében van, akkor  $P$  tartalmaz olyan konvex  $P_1$  poliédert, amely az  $A$  pontot a belsejében tartalmazza.*

Ilyen  $P_1$  poliéderhez a következőképpen juthatunk: tekintsük  $P$  csúcsait, valamint az  $A$  pontot nem tartalmazó élegegyeneseit és lapsíkjaikat. A csúcsokon és a tekintetbe vett élegegyeneseken át fektessünk egy-egy olyan síkot, amely az  $A$  pontot nem tartalmazza. Mindezek a síkok, valamint a tekintetbe vett lapsíkok egy-egy olyan félteret határolnak, amely tartalmazza az  $A$  pontot. Állítjuk, hogy mindezeknek a féltereknek, valamint  $P$  konvex burkának a közös része egy kívánt tulajdonságú  $P_1$  poliéder.

$P_1$  származtatásából nyomban következik ugyanis, hogy  $P$ , valóban poliéder, hogy konvex, s hogy  $A$  a belsejében van. Az is következik, hogy  $P_1$  nem tartalmazza a belsejében  $P$  egyetlen csúcsát sem.  $P$  éleinek sincs pontjuk  $P_1$  belsejében; vagy azért, mert az él a közös részt szolgáltató félterek valamelyikének a határán van, vagy pedig azért, mert az él  $P_1$  belsejéhez nem tartozó csúcsokat köt össze, és egyenesének egy  $P_1$  belsejéhez tartozó pontját, ti. az  $A$  pontot nem tartalmazza. Nincs  $P_1$  belsejéhez tartozó pontjuk  $P$  lapjainak sem; vagy azért, mert a lap a közös részt szolgáltató félterek valamelyikének a határán van, vagy pedig azért, mert a lap élekből álló határvonalának nincs  $P_1$  belsejéhez tartozó pontja, és a lap a síkjának egy  $P_1$  belsejéhez tartozó pontját, ti. az  $A$  pontot nem tartalmazza. Minthogy  $P$  felületének ezek szerint nincs  $P_1$  belsejéhez tartozó pontja, viszont  $P$

tartalmazza a  $P_1$  belsejéhez tartozó  $A$  pontot, azért kell, hogy  $P$  tartalmazza a teljes  $P_1$  poliédert.  $P_1$  valóban rendelkezik tehát a megkívánt tulajdonságokkal.

Megemlítjük, hogy  $P_1$  származtatásakor elég lett volna csak féltereikről szólnunk.  $P$  konvex burkát a közös rész képzésekor csak azért szerepeltettük, hogy okoskodásunk logikai szerkezete egyszerűbb legyen.

*b) Térbeli eredményünkhöz hasonlóan most azt bizonyítjuk, hogy ha az  $A$  pont a  $P$  sokszög belsejében van, akkor  $P$  tartalmaz olyan konvex  $P_1$  sokszöget, amelynek  $A$  ugyancsak belső pontja.*

Ilyen  $P_1$  sokszöghöz a következőképpen jutunk:  $P$  csúcsain át az  $A$  ponton át nem haladó egyeneseket fektetünk. Ezek az egyenesek, valamint  $P$ -nek az  $A$  pontot nem tartalmazó oldalegyenesei egy-egy az  $A$  pontot tartalmazó félsíkot határolnak. Mindezeknek a félsíkoknak, valamint  $P$  konvex burkának a közös része egy kívánt tulajdonságú  $P_1$  sokszög.

$P_1$  származtatásából következik, hogy valóban sokszög, hogy konvex, s hogy  $A$  a belsejében van.  $P$  csúcsai nincsenek  $P_1$  belsejében, hiszen mindegyik egy-egy  $P_1$ -et tartalmazó félsík határán van.  $P$  oldalainak sincs pontjuk  $P_1$  belsejében; vagy azért, mert az oldal a közös részt adó félsíkok valamelyikének a határán van, vagy pedig azért, mert az oldal  $P_1$  belsejéhez nem tartozó csúcsokat köt össze, és egyenesének egy  $P_1$  belsejéhez tartozó pontját, ti. az  $A$  pontot nem tartalmazza. Minthogy  $P$  határának nincs  $P_1$  belsejéhez tartozó pontja, viszont  $P$  tartalmazza a  $P_1$  belsejéhez tartozó  $A$  pontot, azért kell, hogy  $P$  tartalmazza a teljes  $P_1$  sokszöget.  $P_1$  valóban rendelkezik tehát az előírt tulajdonságokkal.

*c) Rátérünk most annak bizonyítására, hogy az eddig megismert alakzatok valóban tartományok, s hogy amit határuknak mondtunk, az valóban a határuk. Azt kell ellenőriznünk, hogy a tartomány és a határ definíciójának három követelménye teljesül.*

*Poliéder:* Belső pontjaira *a)* szerint 1. teljesül. Minthogy minden határponton áthalad olyan töröttvonal, amelyet a határpont a poliéder belsejében haladó és a poliéderen kívül haladó szakaszra bont, a határpontokra 2. teljesül. A külső pontokra 3. teljesül, mert a külső pontot belsejében tartalmazó konvex poliédertől a vizsgált poliéder külseje poliédert vág ki, és ez *a)* szerint tartalmaz olyan konvex poliédert, amely a szóban forgó külső pontot a belsejében tartalmazza.

Mielőtt a poligon tárgyalására térnénk, rá kell mutatnunk arra, hogy ha a fundamentális alakzat sík, akkor a környezet valóban, mint már említettük, alponthoz tartozó konvex sokszög belsejét jelenti. Ez azért igaz, mert egyrészt a konvex poliéder belső pontján áthaladó síknak a poliéderhez tartozó pontjai sokszöget alkotnak, másrészt bármely síkbeli konvex sokszög így származtatható, hiszen a sokszögnek és ezt belső pontban döfő szakasznak a konvex burka megfelelő poliédert ad.

*Sokszög:* A poliéderről mondottakat elismételhetjük azzal a különbséggel, hogy *a)* helyett *b)*-re hivatkozunk.

*Konvex síkidom:* Egy belső ponton át két olyan szakaszt fektethetünk, amelyek a síkidomban vannak. Ezek konvex burka olyan sokszög, amely biztosítja, hogy 1. teljesül. Minden határponton áthalad olyan szakasz, amelyet a határpont a síkidomon belül és rajta kívül haladó szakaszra bont fel. Ebből következik hogy 2. is teljesül. Ha  $P$  a síkidomon kívül van, akkor egy  $Q$  belső ponttal összekötve a határvonalat  $A$ -ban metsző szakaszt kapunk. A  $Q$  ponton áthaladó és a  $PQ$  egyenestől különböző egyenesen olyan  $Q_1Q_2$  szakaszt vehetünk fel, amelyet a síkidom tartalmaz, s amely áthalad a  $Q$  ponton. A  $Q_1A$ ,  $Q_2A$  szakaszok meghosszabbításai olyan  $A$  csúcsú konvex szögtartományt határolnak, amely a  $P$  pontot a belsejében tartalmazza, s amelynek nincs a síkidom belsejéhez tartozó pontja. Ez abból következik, hogy a szögtartomány minden pontja egy olyan szakasz meghosszabbításán van, amely a  $Q_1Q_2$  szakasz egy pontjából az  $A$  ponthoz vezet. Minthogy a szóban forgó szögtartomány is konvex síkidom, az 1. teljesüléséről mondottak értelmében a  $P$  pontot belsejében a tartalmazó konvex sokszöget tartalmaz. Ebből következik, hogy konvex síkidomunkra 3. is teljesül.

*Konvex test:* A konvex síkidomról mondottakhoz hasonlóan okoskodhatunk. Eltérés ott mutatkozik, hogy 1. igazolásakor két szakasz helyett három nem egysíkú szakaszcsoportról kell beszélni, s hogy 3. igazolásakor a  $Q$  ponton áthaladó  $Q_1Q_2$  szakasz helyett a  $Q$  pontot belsejében tartalmazó  $Q_1Q_2Q_3$ -

et kell bevezetni. Ennek a háromszögnek az oldalain és az  $A$  ponton át fektetett síkok egy-egy a  $P$  pontot belsejében tartalmazó féltérrel határolnak. Ennek a három féltérnek a közös része játssza most azt a szerepet, amit a konvex síkidom esetében egy szögtartomány játszott. Ennek a közös résznek minden pontja ugyanis egy olyan szakasz meghosszabbításán van, amely a  $Q_1Q_2Q_3$  egy pontjából az  $A$  ponthoz vezet, s ezért az említett közös rész egyetlen pontja sincs konvex testünknek a belsejében.

Nem kell külön szólnunk a féltérrel, mert az is konvex test, valamint a félsíkról és konvex szögtartományról, mert ezek konvex síkidomok. Még kevésbé kell szólnunk a térről és a síkról, valamint a gömbfelületről, a körvonalról és az egyenesről, mert maga a fundamentális alakzat mindig olyan tartomány, amelynek nincs határpontja. A gömbtestről és a körlemezről azért nem szoltunk, mert majd látjuk, hogy ezek is konvex alakzatok. A konkáv szögtartománynál elég arra hivatkoznunk, hogy az egy konvex szögtartomány kiegészítő tartománya.

Lineáris alakzatok vizsgálatáról jogosan mondhatjuk, hogy egy pontnak a környezete a pontot tartalmazó nyílt szakaszt jelent, mert konvex poliéder belsején áthaladó egyenesnek a poliéder belsejéhez tartozó pontjai nyílt szakaszt alkotnak, és így minden nyílt szakasz származtatható. Ilyen módon a félegyenes és a szakasz tartományjellege közvetlenül belátható.

Egyedül a körív maradt ki a már bevezetett alakzatok közül. Ezt a hiányt rövidesen pótoljuk (lásd f).

d) Egy rögzített fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartományokból újabb tartományokhoz vezető eljárások közül itt csak az egyesítéssel kapott tartományról szoltunk, mert a többi eljárás (az egymáshoz illesztés, a közös rész képzése és az elvétel) az egyesítésre vezethető vissza.

Jelölje tehát  $T$  az  $F$  fundamentális alakzatban elhelyezkedő zárt  $T_1 T_2$  tartományok egyesítését.  $T$ -nek azok a pontjai, amelyeknek nincs  $T$  által tartalmazott környezetük az esetleg üres  $H$  alakzatot alkotják. Azt kell belátnunk, hogy  $T$  és  $H$  rendelkezik a tartomány és a határ definíciójában szereplő három követelménnyel. Az 1. követelmény  $H$  megválasztása miatt teljesül. A 2. követelmény egyik része azért teljesül, mert  $H$  pontjának környezete  $H$  megválasztása miatt tartalmaz  $T$ -hez nem tartozó pontot.  $H$  minden pontja a  $T_1 T_2$  tartományok valamelyikének a határán van, hiszen e tartományok belső pontjai szükségképpen belső pontjai  $T$ -nek is. Ebből következik, hogy  $H$  pontjának környezete tartalmaz  $T_1$  vagy  $T_2$  belsejéhez tartozó pontot, tehát  $T$  belsejéhez tartozó pontot is. Eszerint a 2. követelmény másik része is teljesül. Minden  $T$ -hez nem tartozó pont a  $T_1 T_2$  tartományok mindegyikének külső pontja, van tehát  $T_1$  pontjait nem tartalmazó, valamint  $T_2$  pontjait nem tartalmazó környezete. E két környezetet szolgáltató konvex poliéder közös része ugyancsak konvex poliéder, s az általa szolgáltatott környezet 3. teljesülését biztosítja.

e) Különböző fundamentális alakzatokban elhelyezkedő tartományok közös részének képzéséről szoltunk most. Tárgyalásunk felöleli azt a már elintézett esetet is, amikor a két fundamentális alakzat azonos.

Tekintsük az  $F_1, F_2$  fundamentális alakzatokban elhelyezkedő  $T_1 T_2$  tartományokat. Jelölje  $B_1$  és  $B_2$  belsejét. Az  $F_1, F_2$  alakzatok közös pontjai az  $F$  alakzatot, a  $B_1 B_2$  alakzatokéi pedig a  $B^*$  alakzatot szolgáltatók. Feltesszük, hogy  $B^*$  nem üres, tehát  $F$  sem üres, ugyanis csak ebben az esetben beszélünk a  $T_1 T_2$  tartományok közös részéről.  $T$ -vel jelöljük  $F$  pontjai közül azoknak az összességét, amelyeknek az  $F$  fundamentális alakzathoz tartozó minden környezete tartalmaz  $B^*$ -hoz tartozó pontot is.  $B$ -vel jelöljük  $T$  pontjai közül azoknak az összességét, amelyeknek az  $F$  fundamentális tartományban van  $T$  által tartalmazott környezetük. Állítjuk, hogy  $T$  zárt tartomány, melynek  $B$  a belseje. Ezt a tartományt mondjuk a  $T_1 T_2$  tartományok közös részének.

A bizonyítást két megjegyzéssel készítjük elő. Először azt bizonyítjuk, hogy  $B^*$  minden pontja  $B$ -hez tartozik. Évégett meggondoljuk, hogy  $B^*$  bármely pontja egy-egy olyan konvex poliéder belsejében van, amelynek belsejében  $F_1$ -nek csak  $B_1$ -hez tartozó pontjai, illetőleg  $F_2$ -nek csak  $B_2$ -hez tartozó pontjai vannak. A két poliéder közös részében ezért  $F$ -nek csak olyan pontjai lehetnek, amelyeket  $B_1$  és  $B_2$  mindegyike tartalmaz, amelyek tehát  $B^*$ -hoz és egyben a  $B^*$ -ot tartalmazó  $T$ -hez tartoznak. Ez  $B$  megválasztása miatt azt jelenti, hogy  $B^*$  kiszemelt pontja valóban  $B$ -ben van.

Második előkészítő megjegyzésünk, hogy ha  $F$  valamely pontjának egy környezete nem tartalmaz  $B^*$ -hoz tartozó pontot, akkor nem tartalmaz  $T$ -hez tartozót sem. Ez  $T$  megválasztására való tekintettel azt jelenti, hogy ha egy poliéder belseje nem tartalmaz  $B^*$ -hoz tartozó pontot, akkor e poliéder minden

belső pontjának van  $B^*$  pontjait nem tartalmazó környezete. Nyilvánvaló, hogy ez igaz, hiszen maga a szóban forgó poliéder ilyen környezetet szab meg.

Rátérünk most állításunk bizonyítására. Azt kell igazolnunk, hogy  $T$  és  $B$  eleget tesz annak a három követelménynek, amelyet egy tartománynak és belsejének teljesítenie kell. Az 1. követelmény  $B$  megválasztása miatt teljesül. Tekintsük  $T$  valamely  $B$ -hez nem tartozó pontjának egy környezetét. Ez a környezet  $T$  megválasztása miatt tartalmaz  $B^*$ -hoz tartozó pontot, első előkészítő megjegyzésünk szerint tartalmaz tehát  $B$ -hez tartozót is. A szóban forgó környezetnek  $B$  megválasztása miatt kell azonban  $T$ -hez nem tartozó pontot is tartalmaznia, mert különben  $B$ -hez tartozó pont környezetéről volna szó. Ezek szerint 2. is teljesül. A  $T$ -hez nem tartozó pontoknak  $T$  megválasztása miatt van  $B^*$  pontjait nem tartalmazó környezetük, második előkészítő megjegyzésünk szerint van tehát  $T$  pontjait nem tartalmazó környezetük, s ez azt jelenti, hogy 3. is teljesül.

t) Hangsúlyozzuk hogy különbséget kell tenni a  $T_1$   $T_2$  tartományok közös pontjaiból álló  $T^*$  alakzat (közös rész, metszet), valamint a közös részükként definiált  $T$  tartomány (közös tartomány, metszettartomány) között. A kettő különbözik pl. akkor, ha egy háromszögvonalnak és egyik szögének mint szögtartománynak a közös részéről van szó.  $T^*$  mindig tartalmazza a  $T$  tartományt, hiszen  $T$  valamely pontjának minden környezete tartalmazza  $T_1$  és  $T_2$  közös belső pontját, és ezért  $T$  pontja nem lehet sem  $T_1$ -nek, sem  $T_2$ -nek külső pontja, tehát  $T^*$ -hoz tartozik. e)-ből kiolvasható, hogy  $T^*$  csak akkor azonos  $T$ -vel, ha  $T^*$  minden pontjának minden környezetében van  $T_1$ -nek és  $T_2$ -nek közös belső pontja. Ez a helyzet pl. akkor, ha egy körvonalnak és két sugara által meghatározott szögtartománynak a közös részét képezzük, tehát a körív származtatásakor.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy  $B^*$  és  $B$  nem mindig azonos. Példát kapunk erre, ha egy félsíknak és egy olyan háromszögvonalnak a közös részét képezzük, amelynek egyik csúcsa a félsík határán, másik két csúcsa a félsík belsejében helyezkedik el.  $B^*$  és  $B$  csak akkor azonos, ha  $T^*$  minden  $B^*$ -hoz nem tartozó pontjának minden környezetében van  $F$ -nek olyan pontja, amely nem tartozik  $T$ -hez. Ezt  $B$  definíciójára való tekintettel, valamint azért mondhattuk, mert  $B$  pontjai  $T$ -hez, tehát egyben  $T^*$ -hoz is tartoznak. Azt is megállapíthatjuk, hogy ha a mondott feltétel teljesül, akkor  $T$  határát azok a pontjai alkotják, amelyek a  $T_1$ ,  $T_2$  tartományok határának egyesítéséhez tartoznak. A szóban forgó feltétel teljesül pl. akkor, ha ugyanabban a fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartományokról van szó, valamint a körív származtatásakor. Miután már az imént beláttuk, hogy a körív is tartomány, most igazoltuk, hogy határát valóban az a két pont alkotja, amelyeket végpontjainak mondtunk.

Megjegyezzük, hogy metszettartománynak mást is mondhattunk volna. Ha pl.  $T^*$ -nak olyan pontjait tekintjük, amelyeknek  $F$ -ben van  $T^*$ -hoz tartozó környezetük, akkor egy nyílt tartományhoz jutunk, amely  $T$ -vel nem feltétlenül azonos zárt tartományhoz vezet.

A fundamentális alakzatra vonatkozólag semmiféle megszorítást nem tettünk. Felöleli tárgyalásunk ezért még azt az esetet is, amikor a fundamentális alakzat egyetlen pont. Ezen a fundamentális alakzaton magát a pontot is tartománynak kell mondanunk. Ilyen metszettartomány pl. két szakasz metszéspontja is.

g) A tartomány belsejére vonatkozó néhány észrevétellel foglalkozunk.

Először is azt említjük, hogy ugyanazon a fundamentális alakzaton belül egy  $T_1$  tartomány akkor és csak akkor tartalmaz egy  $T_2$  tartományt, ha  $T_1$  belseje tartalmazza  $T_2$  belsejét. Ha ugyanis  $T_2$  a  $T_1$ -ben van, akkor  $T_2$  belső pontja nem lehet  $T_1$  határán, hiszen ez esetben nem volna  $T_1$  által tartalmazott környezete, tehát  $T_2$  által tartalmazott sem. Ha viszont  $T_2$  belseje  $T_1$  belsejében van, akkor  $T_2$  határpontja nem lehet  $T_1$  külső pontja, hiszen ez esetben volna olyan környezete, amely nem tartalmazza  $T_1$  pontjait, tehát  $T_2$  egyetlen belső pontját sem.

Egy térbeli tartomány belseje által tartalmazott nyílt poliéderek egyesítése a térbeli tartomány belsejével azonos, hiszen a belső pontokra vonatkozó 1. követelményünkéből adódik, hogy ez még konvex poliéderekre is igaz. Az előző bekezdés alapján kimondhatjuk tehát, hogy a térbeli tartomány által tartalmazott poliéderek belsejének az egyesítése ugyancsak a térbeli tartomány belsejét adja.

Egy  $P$  konvex poliéder belső pontját tartalmazza olyan konvex poliéder, amely  $P$  belsejében van. Ilyen konvex poliéderhez jutunk, ha a pontot  $P$  csúcsaival összekötő szakaszokon egy-egy belső pontot



választunk, és ezek konvex burkát képezzük. Ebből következik, hogy egy térbeli tartomány belsejéhez jutunk akkor is, ha a térbeli tartomány belsejében elhelyezkedő zárt poliédereket egyesítjük.

A térbeli tartományról most mondottakat természetesen síkbeli tartományokra is elismételhetjük, ha poliéder helyett mindenütt sokszöget mondunk.

*h) A kettévágásról mondottakhoz fűzünk néhány kiegészítést.*

Ha fundamentális alakzatul három közös kezdőpontú félegyenesből álló alakzatot választunk, akkor megállapíthatjuk, hogy a közös kezdőpont a fundamentális alakzat kettőnél több tartományának a határa. Csak megemlítjük, hogy akkor is megadható – bár jóval bonyolultabban – ilyen példa, ha fundamentális alakzatul a síkot választjuk.

Nem lép fel ilyen bonyodalom akkor, ha az  $F$  fundamentális alakzat olyan  $T$  tartományának  $H$  határából indulunk ki, amelynek a belseje és a külseje is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két pontja összeköthető általa tartalmazott töröttvonallal. Elég ehhez belátnunk, hogy ha az  $AB$  szakasznak nincs  $H$ -val közös pontja, akkor  $H$  nem lehet olyan tartomány határa, amelyhez  $A$  hozzátartozik, de  $B$  nem. Ebből a töröttvonallal való összeköthetőség alapján következik ugyanis, hogy  $T$  belső pontjai és külső pontjai egyaránt csak egy-egy  $H$  határu tartományban lehetnek, hogy tehát a  $T$  tartományon és kiegészítő tartományán kívül más  $H$  határu tartomány nincs.

Az  $AB$  szakaszra vonatkozó állításunk bizonyítása végett tegyük fel, hogy a  $H$  határu  $T_1$  tartomány csak az  $A$  pontot tartalmazza, a  $B$  pontot pedig nem. A  $X$ . axiómákra támaszkodva megállapíthatjuk, hogy  $AB$  tartalmaz egy olyan maximális  $AC$  szakaszt, amelynek minden belső pontja belsejében van. A  $C$  pont nem lehet  $T_1$  belsejében, hiszen akkor egy környezete is  $T_1$ -hez tartoznék, és  $AC$  nem volna maximális.  $C$  nem tartozhatik azonban  $T_1$  külsejéhez sem, mert akkor  $C$  egy környezete is  $T_1$  külsejéhez tartoznék, tehát  $AC$  belseje tartalmazna belsejéhez nem tartozó pontot. Ezek szerint  $C$  csak  $T_1$  határához tartozhatik, s ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy az  $AB$  szakasznak nincs határához tartozó pontja. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy  $H$  valóban kettévágja a fundamentális alakzatot. Jogosan mondhattuk tehát, hogy pl. az egyenes kettévágja a síkot és a sík a teret.

Bebizonyítjuk még azt az állításunkat, hogy ha  $H$  az  $F$  fundamentális alakzatot a  $T_1, T_2$  tartományokra vágja ketté, akkor  $F$  valamely  $T$  tartományának  $T_1$ -gyel és  $T_2$ -vel alkotott közös tartományát egyesítve a  $T$  tartományt kapjuk meg. Tegyük fel, hogy  $T$  egy  $P$  pontja nem tartozik a két tartomány egyikéhez sem. Van akkor  $P$ -nek olyan környezete, amelynek nincs közös pontja az egyik közös tartománnyal, és olyan is, amelynek nincs közös pontja a másikkal. E két környezet  $K_P$  közös része  $P$ -nek olyan környezete, amelynek  $T$  belsejéhez tartozó pontjai nem tartoznak sem  $T_1$ , sem  $T_2$  belsejéhez. Minthogy  $P$  a  $T$  tartománynak pontja,  $K_P$  tartalmaz  $T$  belsejéhez tartozó  $A$  pontot és ennek  $T$  belsejéhez tartozó  $K_A$  környezetét. Az imént mondottak miatt  $A$  sem  $T_1$ , sem  $T_2$  belsejéhez nem tartozhatik, tehát közös  $H$  határukon van. A határpontok tulajdonsága folytán a  $K_A$  környezet tartalmaz tehát  $T_1$  belsejéhez tartozó pontot, és így  $K_P$  mégiscsak tartalmaz  $T$  és  $T_1$  belsejéhez egyaránt hozzátartozó pontot. Ez az ellentmondás eredeti állításunkat bizonyítja.

**5.4** Mi csak olyan alakzatokkal foglalkozunk ebben a könyvben, amelyet pontosan meghatározunk. Ezek az alakzatok mindannyian valamely megadott fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartományok lesznek. Néha célszerűnek bizonyul mégis, hogy mondanivalónkat ne korlátozzuk az alakzatoknak valamilyen szűkebb körére, hanem tetszőleges alakzatokról szóljunk. Tetszőleges alakzatokból indultunk ki 4.6-ban is. Az alábbiakban tetszőleges alakzatokkal kapcsolatos néhány elnevezésről szólunk.

Egy alakzat akkor *korlátos*, ha van azt tartalmazó konvex poliéder. Síkbeli alakzatok esetében konvex poliéder helyett konvex sokszöget, lineáris alakzatok esetében pedig szakaszt mondhatunk. Nem korlátos alakzatra azt is mondjuk, hogy végtelenbe nyúlik.

Egy alakzat akkor *poligonálisan összefüggő*, ha bármely két pontja összeköthető az alakzathoz tartozó töröttvonallal. Minden konvex alakzat poligonálisan összefüggő.

A *síkidom* és a *test* (téridom) szavakat rendszeren korlátos síkbeli, illetőleg térbeli tartományok megjelölésére, sőt többnyire poligonálisan összefüggő tartományokra használjuk. Előfordul azonban,

hogy ezeket a megnevezéseket használjuk, és nem mondjuk meg, milyen alakzatokra vonatkozik a tárgyalás. Ilyenkor a síkidom tetszőleges síkbeli alakzatot, a test pedig tetszőleges térbeli alakzatot jelent. Ha azonban konvex síkidomról vagy konvex testről van szó, akkor 4.6 definíciójához igazodunk.

Bármely síkidom vagy test *belső pontjainak* azokat a pontokat nevezzük, amelyeknek van a síkidomhoz tartozó síkbeli környezetük, illetőleg a testhez tartozó térbeli környezetük. A belső pontok egyesítése a síkidom, illetőleg test *belseje*. Különbséget teszünk tehát a síkidom vagy a test által tartalmazott, valamint a belsejükben elhelyezkedő alakzatok között (vö.5.3b).

**B1** A korlátosság definíciójával kapcsolatban megemlítjük, hogy a definícióban zárt konvex poliéder helyett egyaránt mondhatunk nyílt konvex poliédert, zárt poliédert vagy nyílt poliédert. Ennek alátámasztására elég megemlítenünk, hogy minden poliéder a konvex burkában van, amely konvex poliéder, s hogy minden konvex poliéderhez található egy ezt belsejében tartalmazó konvex poliéder. Ez utóbbihoz pl. úgy juthatunk, hogy az adott konvex poliéder minden élének mindegyik meghosszabbításán egy-egy pontot veszünk fel, és ezeknek a pontoknak a konvex burkát képezzük.

Beláthatjuk ilyen módon, hogy egy síkidom akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó zárt konvex sokszög, nyílt konvex sokszög, zárt sokszög vagy nyílt sokszög. Elég ehhez arra hivatkoznunk, hogy nyílt konvex poliéder síkmetszete nyílt konvex sokszög, s hogy bármely sokszöghöz található azt tartalmazó konvex poliéder, hiszen a sokszögnek és ezt belső pontban dőő szakasznak a konvex burka ilyen.

**B2** Ezen a helyen még nem bizonyíthatjuk be, hogy minden poliéderhez található általa tartalmazott és azt tartalmazó gömb, s hogy e gömbök középpontjával a poliéder bármely belső pontja kijelölhető. Erre majd csak a térgeometria tárgyalásakor kerülhet sor (lásd -29.2B2).

Ebből következik majd, hogy egy alakzat akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó gömbtest, s hogy egy síkbeli alakzat akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó körlemez.

Az is következik majd a most említettekől, hogy az előző szakasz tárgyalása mit sem változik, ha a környezetet mint a pontot tartalmazó nyílt (vagy zárt) gömbnek a fundamentális alakzattal alkotott közös részét definiáljuk, tehát  $r$  sugarú környezetről beszélünk.

Ha a most mondottakat választottuk volna a környezet és a korlátosság definíciójául, akkor poliéderekre alapozott tárgyalásunkban máris igazolt több egyszerű tényt nem tudnánk itt bizonyítani. Arra kényszerültünk volna ezért, hogy a rendszeres tárgyalást az általunk itt elintéztettekkel később duzzasszuk meg.

**B3** Könnyű belátni, hogy a korlátos konvex síkidomok és testek külseje poligonálisan összefüggő. Ha ugyanis  $B$  egy belső pont.  $K_1$  és  $K_2$  pedig külső pontok, akkor a  $BK_1$ ,  $BK_2$  szakaszok meghosszabbításai metszik a konvex síkidomot a belsejében tartalmazó sokszöget, illetőleg a konvex testet a belsejében tartalmazó poliédert. A meghosszabbítások mentén, valamint a tartalmazó sokszög, illetőleg poliéder határán haladva a  $K_1$ ,  $K_2$  pontokat összekötő, csak külső pontokat tartalmazó töröttvonalat kapunk.

Minthogy a konvex alakzatok is poligonálisan összefüggők, 5.3 Bh) alapján kimondhatjuk, hogy minden konvex zárt görbe kettévágja a síkot, és minden konvex zárt felület kettévágja a teret.

## 6. § Egybevágóság és szimmetria

Az alapfogalmakat tárgyaló első fejezetnek ebben az utolsó paragrafusában geometriai transzformációkkal, az egybevágósággal, annak egyes fajtáival és az alakzatoknak ezekkel kapcsolatos tulajdonságaival foglalkozunk.

**6.1** Ha minden ponthoz vagy valamely ponthalmaz minden pontjához hozzárendelünk egy-egy pontot, *transzformációt* (ponttranszformáció, leképezés) definiáltunk. Ilyen transzformáció pl. a tér elmozgatása is. Ha egy ponthoz (tárgypont) a transzformáció egy pontot (képpont) rendel, azt mondjuk, hogy ezek megfelelő (homológ) pontok. Egy alakzathoz (tárgy) az alakzat pontjaihoz tartozó

képpontokból álló alakzatot (kép) rendeljük hozzá. Az alakzat transzformálása erre a képalakzatra való áttérést jelenti.

Szó lehet arról, hogy egy transzformáció végrehajtása után egy újabb transzformációt alkalmazunk. Ilyen módon két transzformáció egymásutánja egyetlen transzformációt eredményez. Ha egy transzformáció más-más tárgyponthoz más-más képpontot rendel, akkor *közönségesnek* mondjuk. Az ilyen transzformációnál beszélhetünk az ellentétes (inverz) transzformációról, arról, amelyik a képpontokhoz rendeli a tárgypontokat. Ellentétes transzformációk egymásutánja azonosságot ad, amely minden ponthoz ugyanazt a pontot rendeli.

A sík vagy a tér transzformációja *efajuló* ha a teljes sík képe lineáris alakzat, illetőleg a teljes tér képe síkbeli alakzat.

Azt mondjuk, hogy egy transzformáció megtart egy tulajdonságot, ha az ilyen tulajdonságú alakzatokhoz ugyanilyen tulajdonságú alakzatokat rendel. így pl. minden mozgás távolságtartó, egyenestartó és síktartó.

**B1** Mi itt csak ponttranszformációkról, azaz olyan transzformációkról szoltunk, amelyek pontokhoz pontokat rendelnek. Szerepelnek másfajta transzformációk is (vö. 46.5 B1).

**B2** Egy transzformáció Jellemzéséhez lényegesen hozzátartozik annak a közlése, hogy a tárgypontok összessége milyen alakzat, vagyis hogy a transzformációt milyen ponthalmazon definiáljuk. Ez a ponthalmaz a legtöbbször a sík vagy a tér, de a sík és a tér transzformációin kívül szó lehet tetszőleges ponthalmazon definiált transzformációról is. Nem szükséges az, hogy a képpontok összessége a tárgypontok összességével azonos legyen. Ha két transzformáció egymásutánjáról beszélünk, akkor ehhez szükséges, hogy az első transzformáció minden képpontja szerepeljen a második transzformáció tárgypontjai között.

Egy alakzat transzformációjáról beszélhetünk akkor is, ha magán ezen az alakzaton definiálunk egy transzformációt, valamint akkor is, ha egy az alakzatot tartalmazó ponthalmazon definiált transzformációt adunk meg, hiszen ez utóbbi is hozzárendel a szóban forgó alakzathoz egy képet. Többször az utóbb említett esettel van dolgunk, mégpedig a teljes sík vagy a teljes tér transzformációjából indulunk ki. A mozgásnál is ez volt a helyzet. Ha csak egy alakzaton definiáljuk a transzformációt, akkor sokszor gondot okoz az, hogy hogyan terjesszük ezt ki a sík vagy a tér transzformációjává.

**B3** A transzformációknak egy halmaza akkor alkot *csoportot*, ha a halmaz minden transzformációjához tartozik ellentétes transzformáció, és ez is a halmazhoz tartozik, ha továbbá beszélhetünk a halmaz bármely két transzformációjának az egymásutánja által szolgáltatott transzformációról, és mindezek ugyancsak a halmazhoz tartoznak.

A tér mozgásai csoportot alkotnak. A 2.4-ben említett mozgásfajták mindegyike ugyancsak transzformációcsoportot szolgáltat.

A csoport algebrai fogalom. Az algebrában azt is külön megkövetelik, hogy a csoportművelet asszociatív legyen. Mi erről a követelésről nem szoltunk, mert transzformációk körében ez eleve teljesül: egy első és egy második transzformáció egymásutánját, majd egy harmadik transzformációt alkalmazva nyilvánvalóan ugyanahhoz az eredményhez jutunk, mintha az első transzformáció után alkalmazzuk a második és harmadik transzformáció egymásutánját.

Egy csoport elemeiből alakuló csoportot a csoport *alcsoportjának* mondjuk. Nyomban belátható, hogy egy transzformációcsoportnak olyan elemei, amelyek egy bizonyos tulajdonságot megtartanak, alcsoportot alkotnak. Így adódik pl., hogy a 2.4-ben említett mozgásfajták mindegyike a mozgáscsoport egy-egy alcsoportját szolgáltatja, hiszen ezeket a mozgásfajtákat az a tulajdonság jellemzi, hogy bizonyos alakzatok helyzete nem változik meg.

Egy transzformációcsoport *kommutatív*, ha bármely két elemére áll, hogy egymásutánjuk változatlanul ugyanazt a transzformációt szolgáltatja akkor is, ha sorrendjüket felcseréljük. Az egyenes eltolásai, valamint a sík egy pont körüli elforgatásai kommutatív csoportot alkotnak.

**B4** A sík és a tér el nem fajuló transzformációi közül nevezetes szerepet játszanak a *félegyenestartó* transzformációk. Ilyen transzformáció az elmozgatás is. Az itt következőkben e félegyenestartó transzformációk tulajdonságaival foglalkozunk. Hangsúlyozzuk, hogy csak olyan el nem fajuló transzformációkról beszélünk, amelyek a teljes síkon vagy a teljes térben vannak értelmezve, és minden félegyeneshez egy-egy teljes félegyenest rendelnek.

Bebizonyítjuk, hogy transzformációink *közönségesek*. Abból indulunk ki, hogy bármely félegyenestartó transzformáció kollineáris pontokhoz kollineáris pontokat rendel, hiszen három kollineáris ponthoz található egy ezeket tartalmazó félegyenes. Ebből következik, hogy ha a nem kollineáris  $A, B, C$  pontok képe három egymástól különböző kollineáris pont, akkor egyenesük tartalmazza az  $AB, AC, BC$  egyenesek pontjainak, valamint minden két ilyen ponttal kollineáris pontnak, tehát az  $ABC$  sík valamennyi pontjának a képét. Ehhez hasonlóan megállapíthatjuk, hogy ha a nem komplanáris  $A, B, C, D$  pontok képe négy egymástól különböző komplanáris pont, akkor ezeknek a síkja tartalmazza az  $A, B, C, D$  pontok által meghatározott egyenesek pontjainak, az általuk meghatározott síkok pontjainak, sőt a tér összes pontjainak a képét. Ezek szerint el nem fajuló félegyenestartó transzformáció esetében nincs ilyen ponthármas, illetőleg, pontnégyes.

Bizonyításunk során felhasználjuk azt is, hogy a félegyenestartás miatt bármely félegyenesen van olyan pont, amelynek a képe megadott véges sok pont képének egyikével sem azonos. Feltesszük, hogy egy el nem fajuló félegyenestartó transzformáció az  $A, A_1$  pontokhoz ugyanazt a pontot rendeli, s ebből ellentmondást vezetünk le. A síkbeli esetben úgy vesszük fel a  $B$  pontot, hogy  $A, A_1, B$  ne legyenek egy egyenesen, s hogy  $A$  és  $B$  képe ne legyen azonos, továbbá úgy vesszük fel a  $C$  pontot a  $BA_1$  félegyenesen, hogy  $A, B$  és  $C$  képe más-más pont legyen. A térbeli esetben úgy vesszük fel a  $B, C$  pontokat, hogy  $A, A_1, B, C$  ne legyenek egy síkban, s hogy  $A, B, C$  képe három különböző pont legyen, továbbá úgy vesszük fel a  $CA_1$  félegyenesen a  $D$  pontot, hogy  $A, B, C$  és  $D$  képe más-más pont legyen. Könnyen belátható, hogy az így kapott  $A, B, C$  ponthármas, illetőleg  $A, B, C, D$  pontnégyes rendelkezik a fentebb említett tulajdonságokkal, tehát ellentmond annak, hogy el nem fajuló leképezésről van szó.

Transzformációink *egyenestartók*. Az egyenest ugyanis egyetlen közös ponttal rendelkező két félegyenesre bonthatjuk fel, a félegyenestartás és a közönségesség miatt tehát az egyenes képe is két ilyen félegyenesből áll. Ezek a félegyenesek azonban csak egyetlen egyenest alkothatnak, mert az egyenes képének nem lehet három nem kollineáris pontja.

Okoskodásunk azt is mutatja, hogy a félegyenes kezdőpontjának a képe a képfélegyenes kezdőpontja. Ebből viszont nyomban adódik, hogy transzformációink inverzei is ilyen félegyenestartó transzformációk. Ha ugyanis az  $A_1$  pontok az  $A, B$  pontok inverzei, akkor az  $A_1 B_1$  félegyenes az  $AB$  félegyenes képe.

Transzformációink *szakasztartók*, azaz szakaszhoz szakaszt rendelnek, hiszen a szakasz az egyetlen olyan több pontból álló alakzat, amely két félegyenes közös részeként állítható elő. A kezdőponttartás miatt a képszakasz végpontjai a tárgyszakasz végpontjainak a képei. Ez utóbbi tényt is kifejezésre juttatjuk, azt mondjuk, hogy transzformációink az összekötő szakaszokat megtartják.

Transzformációink *síktartók* is. Az összekötő szakaszok megtartásából következik ugyanis hogy háromszög vonal képe háromszög vonal. A sík viszont azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeken át egy adott háromszögvonalat két pontban érő egyenes húzható.

Az eddig megállapított tulajdonságokból következik, hogy az el nem fajuló félegyenestartó transzformációk mindazokat az alakzatokat megtartják, amelyek a félegyenes, az összekötő szakasz, az egyenes és a sík segítségével definiálhatók. Eszerint transzformációink megtartják a félsíkot, szögvonalat, szögtartományt, a töröttvonalat, sokszögvonalat, sokszögtartományt, és ha a tér transzformációjáról van szó, akkor a félteret, poliéderfelületet és poliédertestet is. Ebből következik, hogy egy tartomány képe a fundamentális alakzat képén elhelyezkedő tartomány, s hogy a határ képe a képtartomány határa.

Az elmondottak alkalmazhatók az elmozgatásra is. Elég lett volna ezért, ha 2.1-ben a VII. axióma csak a félegyenesekről szól. Megemlítjük, hogy a későbbi tárgyalás során ezeknek a félegyenestartó leképezéseknek még további tulajdonságaival is megismerkedünk majd (lásd 12.1 B, 12.5 B2, 14.2 B2, 17.2 B4, 23.1 B2, 30.7 B, 46.9 B3), s hogy több olyan transzformációfajtról lesz majd szó, amelyekre eredményeink alkalmazhatók lesznek (lásd 6.3 B2, 11.1 B2, 17.4 B, 43.1 B1, 46.9 B3).

**6.2** A távolságtartó leképezést *egybevágóságnak* (kongruencia) nevesük. Az egybevágóság különböző pontokhoz különböző pontokat rendel, hiszen különben a leképezés nem volna távolságtartó. Ebből következik, hogy az egybevágóságnak van inverze, és ez is egybevágóság.

Két (nem feltétlenül különböző) alakzat *egybevágó* (kongruens), ha van olyan egybevágóság, amely az egyiket a másikba viszi át. Két alakzat tehát akkor egybevágó, ha pontjaik úgy feleltethetők meg egymásnak, hogy az egyik alakzat tetszőleges két pontjának távolsága megegyezik a másik alakzat megfelelő két pontjának a távolságával. Ha egy alakzat egy másikkal egybevágó, akkor ez utóbbi is egybevágó az elsővel, hiszen az egybevágóság inverze is egybevágóság. Két alakzat többféleképpen is egybevágó lehet egymással, hiszen lehetséges, hogy több olyan egybevágóság van, amely egy alakzathoz ugyanazt az alakzatot rendeli.

Minden mozgás egybevágóság, hiszen távolságtartó. A mozgatással fedésbe hozható alakzatok tehát egybevágók. Egybevágóság természetesen az azonosság is.

Az egybevágóság jele  $\cong$ . Ha egybevágó alakzatokat pontokkal adunk meg, akkor az egymásnak megfelelő pontokat ugyanannyiadik helyen szokás szerepeltetni. így pl.  $A_1B_1C_1\Delta \cong A_2B_2C_2\Delta$  azt is kimondja, hogy ennél az egybevágóságnál az  $A_1, B_1, C_1$  csúcsoknak rendre az  $A_2, B_2, C_2$  csúcsok felelnek meg.

**A** Az egybevágóság definíciójában csak a távolságok egyenlőségéről szoltunk, és a szögekről nem. Ez felesleges lett volna, hiszen a távolságtartásból a szögtartásra már következtetni lehet (lásd 11.1).

Mindenképpen helytelen azt mondani, hogy két alakzat akkor egybevágó, ha megfelelő oldalaik és szögeik egyenlők, hiszen ez a definíció pl. a kör esetében értelmét veszti.

**B1** A geometria axiomatikus megalapozásakor, ellentétben az imént mondottakkal, szokásos az a definíció, hogy két háromszög akkor egybevágó ha megfelelő oldalaik és szögeik egyenlők. Ez ott átmenetileg indokolt.

**B2** Egy alakzat akkor egybevágó egy másikkal, ha van olyan, az első alakzaton definiált, távolságtartó leképezés, amely az első alakzathoz képként a másikat rendeli. Két síkbeli vagy térbeli alakzat mindenesetre egybevágó akkor, ha van olyan, a síkon vagy a térben definiált, távolságtartó leképezés, amely az egyik alakzathoz képként a másikat rendeli. Korántsem nyilvánvaló azonban az, hogy egybevágó síkbeli vagy térbeli alakzatokhoz található-e a síknak, illetőleg a térnek olyan egybevágósága, amely az egyik alakzathoz képként a másikat rendeli (vö. 6.1 B2). A későbbi fejezetekben bebizonyítjuk majd, hogy ez igaz (lásd 11.1 B3 és 26.4 B2).

Ha két alakzatot adunk meg, és egybevágóságukat akarjuk bizonyítani, akkor mindig a síknak vagy a térnek olyan egybevágóságát késsük, amely az alakzatokat egymáshoz rendeli. Nagyon körülményes volna, ha nem így járnánk el, hanem az egyik alakzaton definiált transzformációt keresnénk. Ez az út is járható azonban akkor, ha véges sok pontból álló alakzatokról van szó.

**B3** Könnyen belátható, hogy a tér egybevágóságai csoportot alkotnak, s hogy a mozgáscsoport alcsoportja ennek a csoportnak. Nyilvánvaló az is, hogy a sík egybevágóságai csoportot alkotnak, és ez alcsoportként tartalmazza a síkmozgások csoportját.

**6.3** Ebben a szakaszban speciális egybevágóságfajtákról lesz szó. Ezeket közös néven *tükrözésnek* (szimmetria) nevezzük. A tükrözés által hozzárendelt *képet tükröképnek* (szimmetrikus társ) mondjuk. A tükrözések mindegyik említendő fajtájára áll az, hogy minden pont saját tükröképének a tükröképe. Egy alakzatról és tükröképéről szólva mondhatjuk tehát, hogy azok egymás tükröképei (szimmetrikusak).

A *P* pontra vonatkozó *tükrözés* (centrális szimmetria) csak a *P* ponthoz, a *szimmetriacentrumhoz* rendeli önmagát, más *A* ponthoz a *PA* egyenesnek azt az *A*-tól különböző pontját rendeli, amelyre  $PA = PA_1$ . A *P* pontot tartalmazó síkon belül ez a tükrözés a *P* pont körüli  $180^\circ$ -os elforgatást jelent. Következik ebből a tényből, hogy szimmetrikus szakaszok egyenlők, s hogy egyenes tükröképe egyenes. Szó lehet természetesen egy egyenesen belül is az egyenes egy pontjára vonatkozó tükrözésről.

Az  $e$  egyenesre vonatkozó tükrözés (tengelyszimmetria, axiális szimmetria) csak az  $e$  egyenes, a szimmetriatengely (tükörtengely) pontjait rendeli önmagukhoz. Sokszor szimmetriatengelyként az  $e$  egyenesnek csak egy szakaszát vagy egy félegyenesét adjuk meg, és azt mondjuk, hogy arra tükrözzünk. A szimmetriatengelyt tartalmazó síkok önmaguk tükörképei. Egy ilyen sík pontjai tükörképeikbe jutnak, ha a síkot a szimmetriatengely körül átforgatjuk úgy, hogy a tengely által határolt félsíkok helyet cseréljenek. Elforgathatjuk a szimmetriatengely körül az egész teret is úgy, hogy a tér minden pontja tükörképébe jusson (vö. 6.5 B4). Belátható így, hogy szimmetrikus szakaszok egyenlők, s hogy egyenes tükörképe egyenes.

Az  $S$  síkra vonatkozó tükrözés (síkszimmetria, planáris szimmetria) olyan távolságtartó leképezés, amely az  $S$  szimmetriasík (tükörsík) pontjait helyben hagyja, és az  $S$  sík által határolt féltereket felcseréli.

A síkon belül végrehajtott, pontra vagy egyenesre vonatkozó tükrözések, valamint a tér egyenesre vonatkozó tükrözése elmozgatással valósítható meg. Ezért már itt megállapíthatjuk, hogy ezek a tükrözések szögtartók.

A síkra vonatkozó tükrözésről szemléletes képet ad a síktükör fényvisszaverése. Innen ered az, hogy a szimmetriát tükrözésnek is mondjuk. Ha tükrözésről beszélünk anélkül, hogy a tükrözésfaját megadnók, akkor térben síkra vonatkozó, síkban pedig egyenesre vonatkozó tükrözésre gondolunk.

**B1** A síkra vonatkozó tükrözést illetően csak definíciót mondtunk ki, de nem láttuk be, hogy valóban van ilyen leképezés. Ezt a következőképpen láthatjuk be: Tükrözzük a teret az  $S$  sík egy  $P$  pontjára vonatkozólag, majd forgassuk el az  $S$  síkot a  $P$  pont körül  $180^\circ$ -kal, és a forgó síkhoz tapasztva mozgassuk el az egész teret is. E két transzformáció egymásutánja valóban azt eredményezi, hogy az  $S$  sík pontjai helyben maradnak, hiszen ezeket kétszer tükröztük a  $P$  pontra vonatkozólag, s hogy az  $S$  sík által határolt félterek helyet cserélnek, hiszen az első tükrözés ezt eredményezte, s az ezt követő elmozgatás ezen a helyzeten nem változtatott. A kapott transzformáció távolságtartó és egyenestartó is, hiszen az egymás után alkalmazott transzformációk ilyenek voltak. Beláttuk tehát, hogy van olyan transzformáció, amelyet kerestünk.

Ha felhasználjuk azt, hogy egy félsík két különböző pontja nem lehet a félsík határegyenesének minden pontjától ugyanakkora távolságra (lásd 7.3), akkor azt is beláthatjuk, hogy csak egyetlenegy olyan transzformáció van, amelyet az  $S$  síkra vonatkozó tükrözésnek mondhatunk. Az ellenkező esetben volna ugyanis két olyan pont az  $S$  által határolt egyik féltéren belül, amelyek  $S$  minden egyes pontjától ugyanakkora távolságra vannak. Ha ezen a két ponton és a másik féltér egy belső pontján át síkot fektetünk, akkor a két pontot tartalmazó olyan félsíkhöz jutunk, amelynek határegyenesét  $S$  tartalmazza. A két pont feltételezett tulajdonsága valóban ellentmond tehát annak a ténynek, amelyre hivatkoztunk.

Okoskodásunk azt is mutatja, hogy a síknak a sík egy egyenesére vonatkozó tükrözése az egyetlen olyan távolságtartó leképezés, amely az egyenes pontjait helyben hagyja, és az egyenes által határolt félsíkokat egymásba viszi át.

**B2** Egyes tükrözésekről már megállapítottuk, hogy szögtartók. Minden tükrözésre kimondhatjuk ezt majd, ha már tudjuk, hogy minden távolságtartó leképezés egyben szögtartó is (lásd 11.1).

Minden tükrözésfajtaról megállapíthattuk, hogy távolságtartó és egyenestartó. Ebből már könnyen következik, hogy szakasztartó, mégpedig két pont összekötő szakaszához a két képpont összekötő szakaszát rendeli, s hogy félegyenesstartó is. A tükrözések rendelkeznek ezért mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyekről 6.1 B4 szólt.

**6.4** Lehetséges, hogy valamilyen tükrözés egy alakzathoz önmagát rendeli. Ekkor ezt az alakzatot *szimmetrikusnak* (tükrös) mondjuk, és az alakzatnak ezt a tulajdonságát *szimmetriának* (tükrösség) nevezzük. Egy alakzat lehet tehát centrálisán szimmetrikus (centrális), tengelyszimmetrikus vagy síkszimmetrikus.

*Forgásszimmetrikusnak* akkor mondunk egy alakzatot, ha van olyan elforgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át. Ez az elforgatás történhetik egy egyenes (szimmetriatengely, forgástengely) körül,

síkbeli alakzatoknál pedig egy pont (szimmetriacentrum, forgáscentrum) körül. Természetesen csak olyan elforgatásokra gondolunk itt, amelyek valóban megváltoztatják a pontok helyzetét.

Egy tengelyre vagy centrumra vonatkozó forgásszimmetria  $n$ -edrendű, ha az alakzat elforgatással  $n$ -féleképpen hozható önmagával azonos helyzetbe. Az elforgatások összeszámlálásánál csak azt tekintjük, hogy az elforgatás milyen kezdőhelyzetből milyen véghelyzetbe visz, és itt az el nem forgatást is számításba vesszük. Nyilvánvaló, hogy  $n$ -edrendű forgásszimmetria esetén az azonos helyzetbe hozó elforgatások szögei a teljes szög  $n$ -edrészének egész számú többszörösei. A másodrendű forgásszimmetria centrális szimmetriát, illetőleg axiális szimmetriát jelent. Ezért csak  $n \geq 3$  esetben szokás  $n$ -edrendű forgásszimmetriáról beszélni. Ilyenkor mindig megadjuk a forgásszimmetria rendszámát, vagy hangsúlyozzuk, hogy véges rendű forgásszimmetriáról van szó. Ha a forgásszimmetria rendszáma páros, akkor az alakzat egyben centráliszimmetrikus is, mégpedig a forgásszimmetria és a centrális szimmetria centruma azonos.

A forgásszimmetria akkor *teljes*, ha az alakzat helyzetét semmilyen, a forgástengely, illetőleg a forgáscentrum körüli elforgatás sem változtatja meg. Ha forgásszimmetriáról van szó, és nem említjük, hogy az véges rendű, akkor mindig teljes forgásszimmetriára gondolunk. Ilyenkor a síkbeli alakzatot *körszimmetrikusnak*, a térbeli alakzatot *hengerszimmetrikusnak* is mondjuk. A *forgástest* megnevezést a hengerszimmetrikus testekre használjuk.

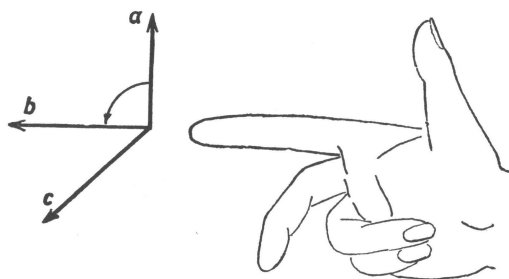
Egy térbeli alakzat *gömbszimmetrikus*, ha nem változtatja meg a helyzetét, akárhogyan forgatjuk is el a teret egy pont (szimmetriacentrum) körül.

A Zavart okozhat, ha valaki a térbeli alakzatok teljes forgásszimmetriájára, tehát a hengerszimmetriára a tengelyszimmetria megnevezést használja. Ezt a megnevezést ugyanis már másra foglaltuk le.

**6.5** Síkbeli transzformációnál megvizsgálhatjuk, hogy ha a transzformáció az  $ABC\Delta$  csúcsaihoz rendre az  $A'B'C'\Delta$  csúcsait rendeli, akkor e két háromszög megegyező vagy ellentétes körüljárású-e. Azt mondjuk, hogy a transzformáció az *orientációt* megtartja, illetőleg megváltoztatja, ha minden esetben megegyező, illetőleg minden esetben ellentétes körüljárású háromszögek szerepelnek.

A síkmozgás és így a pontra vonatkozó tükrözés is megtartja az orientációt, viszont a sík egyenesre vonatkozó tükrözése megváltoztatja.

Ha az  $a, b, c$  félegyenesek egy pontból indulnak ki, és nincsenek egy síkban, megvizsgálhatjuk, hogy az a  $180^\circ$ -nál kisebb elforgatás, amelyik az  $a$  félegyeneset a  $b$  helyzetbe viszi,  $c$  irányából nézve pozitív-e, azaz az óramutató járásával ellentétes-e. Ha igen, akkor az  $a, b, c$  félegyenesek ebben a sorrendben *jobbrendszer*t (jobbsodrású rendszer) alkotnak (11. ábra), ha pedig nem, akkor *balrendszer*t (balsodrású rendszer). Ez az elnevezés onnan ered, hogy jobb kezünk első három ujjja jobbrendszer-t alkot, amikor ezzel a három ujjal fogunk meg egy tárgyat, viszont bal kezünk első három ujjja balrendszer-t alkot ilyenkor.



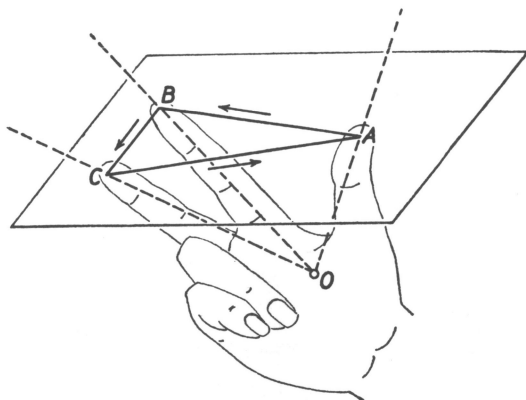
11

Minden térbeli transzformációnál megvizsgálhatjuk, hogy ha a transzformáció az  $O, A, B, C$  pontokhoz rendre az  $O', A', B', C'$  pontokat rendeli, és e pontnégyeseknek egyike sincs egy síkban, akkor az  $OA, OB, OC$  félegyenesek rendszerének jellege megegyezik-e az  $O'A', O'B', O'C'$  félegyenesek rendszerének jellegével. Azt mondjuk, hogy a transzformáció az *orientációt* megtartja, illetőleg

megváltoztatja, ha minden esetben megegyező jellegű, illetőleg minden esetben ellentétes jellegű rendszerek szerepelnek.

A tér elmozgatásai és közöttük az egyenesre vonatkozó tükrözés is megtartja az orientációt, a pontra és a síkra vonatkozó tükrözés viszont megváltoztatja.

A A jobbrendszer definícióját így is szövegezzük: Az  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  félegyenések jobbrendszert alkotnak, ha az  $ABC\Delta$  körüljárása a félegyenések irányából nézve pozitív (12. ábra). Ebből az is könnyen belátható, hogy ha  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jobbrendszert alkotó félegyenések, akkor ez a ciklikus cserével adódó  $b$ ,  $c$ ,  $a$  és  $c$ ,  $a$ ,  $b$  rendszerekre is áll, viszont ciklikus sorrendjük megváltoztatásakor a jobbrendszer balrendszerbe megy át.



12

**B1** Ha nem a mi tapasztalati terünkről van szó, akkor külön meg kell adni, hogy mit mondunk jobbrendszernek, és mit mondunk balrendszernek, ha ilyenekről egyáltalában beszélni akarunk. Ekkor a teret *orientáltnak* (irányított) mondjuk. Tapasztalati terünk már eleve orientált.

Egy síkot akkor mondunk *orientáltnak*, ha az általa határolt féltrekről megmondjuk, hogy melyiket tekintjük pozitívnak, és melyiket negatívnak. Orientált térben az orientált síkot úgy irányítjuk, hogy ha a sík  $OA$ ,  $OB$  félegyenesei  $180^\circ$ -nál kisebb pozitív irányított szöget alkotnak, akkor a pozitív féltrebe mutató  $OC$  félegyenessel együtt jobbrendszert alkossanak. Orientált térben, és így a tapasztalati térben sem teszünk tehát különbséget irányított és orientált sík között. Nem teszünk különbséget akkor sem, ha térbe be nem ágyazott síkról van szó, ha tehát csak a síkgeometriával foglalkozunk.

Egy síkbeli egyenest *orientáltnak* mondunk, ha az általa határolt félsíkokról megmondjuk, hogy melyik a pozitív, és melyik a negatív. Irányított síkban az orientált egyenest úgy irányítjuk, hogy  $+90^\circ$ -os elforgatás után a pozitív félsíkba vezessen. Irányított síkban tehát nem teszünk különbséget irányított és orientált egyenes között.

**B2** Az orientáció fogalmának megismerése lehetővé teszi, hogy itt az egybevágóságok és az elmozgatások viszonyát tisztázzuk.

Felhasználjuk azt, hogy sem a félsíknak, sem a féltrenek nincs két olyan pontja, amelyektől a határegyenes, illetőleg a határsík minden egyes pontja ugyanakkora távolságra van. Ezt már 6.3 B 1-ben kimondtuk, mégpedig 7.3-ra támaszkodva.

a) A tér egybevágóságai között egyetlenegy olyan van, amely egy adott féltrehez, ennek határán megadott félsíkhöz és ez utóbbinak a határán megadott félegyeneshöz ugyanilyen viszonylagos elhelyezkedésű adott félteret, félsíkot és félegyenest rendel.

Ha csak a félsíkról és félegyenetről beszélünk, akkor VIII. szerint van (mégpedig egyetlenegy) térmozgás, amely megfelelő leképezést létesít. Ha ez a térmozgás az adott félteret nem viszi az előírt helyzetbe, hanem a kiegészítő féltre képezi le, akkor az elmozgatást követően a féltér határsíkjára tükrözve jutunk egy feltételeinket kielégítő egybevágósághoz. Ilyen egybevágóság tehát mindig található.



Azt kell még belátnunk, hogy csak egy ilyen egybevágóság van, vagyis azt, hogy a feltételeinket kielégítő egybevágóságok ugyanazt a pontot nem vihetik két különböző helyzetbe. Az adott félegyenes pontjaira ez így van, hiszen ezek a pontok a távolságtartás miatt a képfélegyenesnek csak a megfelelő pontjába juthatnak. Ugyanezt elmondhatjuk az adott félegyenes kiegészítő félegyeneséről, tehát az adott félsík teljes határegyeneséről is. A félsíkról szóló, fentebb idézett tényre hivatkozva megállapíthatjuk tehát, hogy az adott félsík pontjai is csak egyféle helyzetbe juthatnak. Ugyanezt elmondhatjuk a kiegészítő félsíkról, tehát az adott féltér teljes határsíkjáról is. A féltérről szóló, fentebb ugyancsak idézett tényre hivatkozva kimondhatjuk akkor, hogy az adott féltér és a kiegészítő féltér minden pontja, vagyis a teljes tér valamennyi pontja szintén csak egyféle helyzetbe juthat.

Lényegesen egyszerűbben láthatjuk be, hogy *a sík egybevágóságai között egyetlenegy olyan van, amely egy adott félsíkhöz és ennek határán megadott félegyeneshez ugyanilyen viszonylagos elhelyezkedésű adott félsíkot és félegyeneset rendel.* Minthogy a sík térbeli mozgatása ilyen egybevágóságot szolgáltat, csak azt kell igazolni, hogy csak egy ilyen egybevágóság van, ez pedig a térre vonatkozó állításunk bizonyításából közvetlenül kiolvasható. A kétféleség itt azáltal áll elő, hogy a sík térbeli elmozgatása síkbeli elmozgatás-e vagy sem.

*b) A tér minden egybevágósága vagy elmozgatás, vagy pedig előállítható elmozgatást követő, síkra vonatkozó tükrözéssel.* Ez következik abból, hogy az egybevágóságot a) szerint jellemezhetjük egy féltér, félsík és félegyenes kezdő- és véghelyzetének megadásával, s hogy ezeket az alakzatokat elmozgatással és ezt követő esetleges tükrözéssel az előírt véghelyzetbe juttathatjuk el. Azt is láttuk ott, hogy a két lehetőség közül mindig csak az egyik vezet célhoz: vagy elmozgatással érhetünk célt, vagy pedig elmozgatást követő tükrözéssel.

*A sík minden egybevágósága vagy síkmozgás, vagy pedig előállítható síkmozgást követő, egyenesre vonatkozó tükrözéssel.* Minthogy a sík egybevágóságát a) szerint egy félsík és ennek a határán elhelyezkedő félegyenes kezdő- és véghelyzetének megadásával jellemezhetjük, állításunk következik abból, hogy a félegyenes síkmozgással az előírt véghelyzetbe juttathatjuk, és ha a félsík nem jutott ezáltal az előírt véghelyzetébe, akkor a határ egyenesre vonatkozó tükrözéssel ezt is elérhetjük.

Ha a most bizonyítottakat az inverz egybevágóságra alkalmazzuk, belátjuk, hogy az elmozgatást követő tükrözés helyett mindkét esetben az elmozgatást megelőző tükrözésről is szólhattunk volna. Minden esetben szabadon előírhatjuk azt is, hogy esetleges tükrözéskor melyik síkra vagy melyik egyenesre tükrözzünk, hiszen az okoskodásban szereplő féltér, illetőleg félsík kezdőhelyzete szabadon választható meg.

*c) A tér egybevágósága akkor és csak akkor térmozgás, ha az orientációt megtartja; a tér minden más egybevágósága megváltoztatja az orientációt.* Ennek belátása végett elég b) első kijelentésére hivatkoznunk, valamint arra, hogy a tér elmozgatása az orientációt megtartja, a síkra vonatkozó tükrözés pedig megváltoztatja.

*A sík egybevágósága akkor és csak akkor síkmozgás, ha a sík orientációját megtartja; a sík minden más egybevágósága megváltoztatja a sík orientációját.* Az előző eredményünkhöz hasonlóan ez is nyomban adódik b) második megállapításából, valamint abból, hogy a síkmozgás a sík orientációját megtartja, az egyenesre vonatkozó tükrözés pedig megváltoztatja.

Ezek szerint a tér és a sík egybevágóságainak csoportján belül a mozgáscsoportnak nevezett alcsoportot azok az egybevágóságok alkotják, amelyek az orientációt megtartják. Ennek az alcsoportnak megvan az a sajátja, hogy bármely két nem az alcsoporthoz tartozó egybevágóság egymásutánja az alcsoporthoz tartozó egybevágóság, azaz mozgás. Ez nyomban belátható, ha a második egybevágóság előállítását azzal a tükrözéssel kezdjük, amellyel az elsőét befejeztük.

**B3** Ha az orientáció megtartásának és megváltoztatásának fogalmát úgy akarjuk bevezetni, hogy ez a bevezetés ne támaszkodjék a szemléletre, hanem csak axiómáinkra épüljön, akkor körülményesebben kell eljárni. Ilyen módon szabatosabbá válik az is, amit a 3. §-ban a síkbeli irányításról és annak kétféleségéről mondtunk.

*a) A tér nem komplanáris  $A, B, C, D$  pontjaihoz hozzárendeljük az  $AB$  félegyeneset, az  $AB$  egyenes által határolt, a  $C$  pontot tartalmazó félsíkot, valamint az  $ABC$  sík által határolt, a  $D$  pontot tartalmazó*

félteret. A tér két ilyen rendezett pontnégyeséről azt mondjuk, hogy az orientációjuk megegyezik, ha van olyan elmozgatás, amelyik az egyik pontnégyeshez rendelt alakzatokat a másikhoz rendeltékbe viszi át.

A sík nem kollineáris  $A, B, C$  pontjaihoz hozzárendeljük az  $AB$  félegyenest, valamint az  $AB$  egyenes által határolt a  $C$  pontot tartalmazó félsíkot. A sík két ilyen rendezett ponthármasáról azt mondjuk, hogy az orientációjuk megegyezik, ha van olyan síkmozgás, amely az egyik ponthármashoz rendelt alakzatokat a másikhoz rendelt alakzatokba viszi át.

Definícióból következik, hogy az orientáció megegyezése reflexív, szimmetrikus és tranzitív reláció, amely tehát a tér rendezett pontnégyeseit és a sík rendezett ponthármasait osztályokba sorolja. B2b)-ből kiolvasható, hogy mind a két esetben két osztály van. Az *orientáció* az ugyanabba az osztályba sorolt pontcsoportok közös tulajdonsága.

Az is kiolvasható B2b)-ből, hogy a pontcsoport térbeli, illetőleg síkbeli elmozgatása az orientációt meghagyja, viszont a tér síkra vonatkozó és a sík egyenesre vonatkozó tükrözése megváltoztatja. Ezek szerint a tér egyenesre vonatkozó és a sík pontra vonatkozó tükrözése is meghagyja a pontcsoport orientációját, viszont a tér pontra vonatkozó tükrözése megváltoztatja azt, hiszen ez utóbbi síkra vonatkozó tükrözés és elmozgatás egymásutánjaként állítható elő (vö. 6.3 BI).

*b) Bizonyítjuk, hogy ha az  $A, B, C, D$  nem komplanáris pontnégyesben két szomszédos pontot felcserélünk, akkor az orientáció megváltozik.*

Ha a  $B, A, C, D$  pontnégyesre térünk át, akkor a pontokhoz rendelt félsík és féltér változatlan marad, viszont a hozzárendelt félegyenes az  $AB$  szakasz  $F$  felezőpontjára vonatkozó tükröképébe megy át. A három alakzat ugyanígy módosul, ha a teret először az  $F$  pontra, azután pedig az  $AB$  egyenesre tükrözzük. Az orientáció ezért valóban megváltozik, mert a pontra vonatkozó tükrözés megváltoztatja, az egyenesre vonatkozó tükrözés pedig változatlanul hagyja.

Amikor az  $A, B, C, D$  pontnégyesről az  $A, C, B, D$  pontnégyesre térünk át, a pontokhoz rendelt féltér nem változik meg, de a félegyenesről és a félsíkról ezt nem mondhatjuk el. A három alakzat úgy módosul, mintha a teret először a  $BAC$  szögfelező egyenesére, majd az  $ABC$  síkra tükröztük volna. Minthogy az első tükrözés a pontnégyes orientációját meghagyja, a második pedig megváltoztatja, az orientáció végeredményben valóban megváltozik.

Utolsó esetként az  $A, B, C, D$  pontnégyesről az  $A, B, D, C$  pontnégyesre való áttérést vizsgáljuk. Ekkor a pontokhoz rendelt félegyenes megmarad, viszont a félsík és a féltér megváltozik. A félsíkot az előírt helyzetbe juttathatjuk azáltal, hogy a teret az  $AB$  egyenes körül elforgatjuk. Ha ezt követően az  $ABD$  síkra tükrözzük, akkor a féltér is az előírt helyzetbe jut (lásd B4d). Az orientáció most is megváltozott, mert az elforgatás meghagyta, a tükrözés pedig megváltoztatta.

Bebizonyított állításunkból következik, hogy ha a nem komplanáris  $A, B, C, D$  pontokat permutáljuk, orientációjuk megmarad vagy megváltozik aszerint, hogy a permutáció inverziószáma páros-e vagy páratlan. A kétféle orientációnak megfelelően azt mondjuk, hogy a  $DA, DB, DC$  félegyenesek rendszerének jellege kétféle lehet. Igaz tehát, hogy a félegyenesek ciklikus permutációja a rendszer jellegét meghagyja, a többi permutáció pedig megváltoztatja.

*c) Bizonyítjuk, hogy ha a sík nem kollineáris  $A, B, C$  ponthármasában két szomszédos pontot felcserélünk, akkor az orientáció megváltozik.*

Ha a  $B, A, C$  ponthármasra térünk át, akkor a pontokhoz rendelt félsík változatlan marad, viszont a hozzájuk rendelt félegyenes az  $AB$  szakasz  $F$  felezőpontjára vonatkozó tükröképébe megy át. Ez a két alakzat ugyanígy változik meg, ha a síkot először az  $F$  pontra, azután pedig az  $AB$  egyenesre tükrözzük. Mivel az első tükrözés az orientációt meghagyja, a második pedig megváltoztatja, az orientáció végeredményben megváltozik.

Ha az  $A, B, C$  ponthármasról az  $A, C, B$  ponthármasra térünk át, akkor a pontokhoz rendelt félegyenes és félsík megváltozik, mégpedig mind a kettő a  $BAC$  szögfelező egyenesére vonatkozó tükröképébe megy át. Ez a tükrözés az orientációt valóban megváltoztatja.

Bebizonyított állításunkból következik, hogy ha a nem kollineáris  $A, B, C$  pontokat permutáljuk, akkor orientációjuk megmarad vagy megváltozik aszerint, amint a permutáció ciklikus vagy sem. Eszerint a pontok ciklusának megadása, vagy ha egy háromszög csúcsairól van szó, a háromszög körüljárása az orientációt megszabja.

**B4\*** Az alapfogalmakat tárgyaló első fejezet lezárásakor néhány megjegyzést teszünk azok számára, akik tárgyalásunkat a geometriai axiómatika szemüvegén át figyelik. A szokásos felépítéshez viszonyítva lényeges eltérést jelent tárgyalásunkban az, hogy mi már itt szerepeltettük a térmozgásokat. Ennek indokáról 2.1 B-ben már szóltunk. Felmerülhet azonban az a kétely, hogy mi a térmozgásokkal kapcsolatosan a VIII. axióma kimondásán túlmenően olyan tényeket is ismertettünk ebben a szemléletre építő fejezetben, amelyeknek szigorú igazolása az általunk később, a térgeometria tárgyalása során bizonyítandó tételeket igényli. Ennek az esetleg vélt logikai zavarnak az elhárítása érdekében az alábbi megjegyzéseket tesszük.

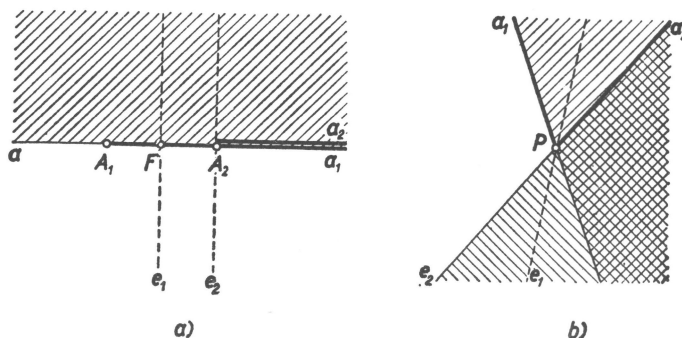
a) Ha az  $e$  egyenes egy síkot az  $S_1, S_2$  félsíkokra bont, akkor VIII. axiómánk szerint van olyan térmozgás, amelyik az  $e$  egyenes pontjait változtatlanul hagyja, és az  $S_1$  félsíkot  $S_2$  helyzetbe viszi. Minthogy ez a térmozgás  $S_1$  kiegészítő félsíkját  $S_2$  kiegészítő félsíkjába kell, hogy vigye, kimondhatjuk, hogy a tekintett térmozgás kétszer egymás után alkalmazva el nem mozdítást eredményez, azaz ez a térmozgás saját magának inverze. Ha tehát egy  $A_1$  pontot a térmozgás  $A_2$  helyzetbe visz, akkor az  $A_1A_2$  szakaszt  $A_2A_1$  helyzetbe viszi, és ennek következtében az  $A_1A_2$  szakasz felezőpontját változtatlanul hagyja.

Nem lehetséges azonban az, hogy az  $e$  egyenesen kívüli  $P$  pont helyben maradjon. Ebben az esetben ugyanis térmozgásunk nem változtatná meg sem az  $e$  egyenes pontjainak, sem pedig a  $P$  pontot tartalmazó,  $e$  által határolt félsíknak a helyzetét. Ez ellentmondana VIII. axiómánknak, hiszen  $e$  szerint az axióma szerint csak egy térmozgás rendelkezhetik a mondott tulajdonságokkal, viszont az el nem mozgás is rendelkezik ezekkel.

Az elmondottakból következik, hogy a homológ  $A_1, A_2$  pontok összekötő szakaszának felezőpontja az  $e$  egyenesen van, hogy tehát ez a térmozgás az  $e$  egyenesen átfektetett síkok helyzetét nem változtatja meg, viszont  $e$  által határolt félsíkjaikat felcseréli. Beláttuk ilyen módon annak az átforgatásnak a létezését, amelyikről 6.3-ban szóltunk.

b) Beláttuk azt is, hogy az  $e$  egyenesre vonatkozó tükrözés felcseréli azokat a féltereket, amelyeket egy az  $e$  egyenest tartalmazó sík határol. Ebből következik, hogy ha a teret egymást követően egy sík két egyenesére tükrözzük, akkor a sík által határolt félterek nem változtatják meg helyzetüket. A síkmozgás 2.4-ben adott definíciója értelmében következik tehát, hogy ha a síkot egymást követően két egyenesére tükrözzük, akkor síkmozgáshoz jutunk.

Ha egy eltolás az  $a$  egyenes  $A_1A_2$  félegyenesét  $A_1$  kezdőpontú helyzetbe viszi, akkor a félegyenesnek ezt az eltolását azáltal is megvalósíthatjuk, hogy először az  $A_1A_2$  szakasz  $F$  felezőpontjára, majd az  $A_2$  pontra tükrözzük. Ebből következik, hogy a térnek az az eltolása, amelyik egy az  $a$  egyenes által határolt félsík helyzetét nem változtatja meg, és az  $A_1A_2$  félegyenesét a mondott helyzetbe viszi, ugyancsak helyettesíthető két egyenesre vonatkozó tükrözés egymásutánjával, és pedig azokra az egyenesekre vonatkozó tükrözésekkel, amelyek a helyben maradó síkban vannak, és az  $a$  egyenest az  $F, A_2$  pontokban merőlegesen metszik (13a ábra).



Támaszkodtunk itt arra, hogy ha a síkot egy egyenesére tükrözzük, akkor a síknak ezt az egyenest merőlegesen metsző egyenesei, és az ilyen egyenesek által határolt felsíkjai helyben maradnak.

A tükrözések egymásutánjára vonatkozó fenti megállapításunkra hivatkozva beláttuk ilyen módon, hogy a tér eltolásakor az elcsúsztatott felsík síkja síkmozgással önmagában tolódik el, és az általa határolt félterek helyzete nem változik meg, s hogy a sík eltolása a helyben maradó egyenest önmagában tolja el, és az általa határolt felsíkokat helyben hagyja. Igazoltuk tehát 2.4-nek az eltolással kapcsolatos, bizonyításra szoruló állításait.

A sík elforgatását is megvalósíthatjuk két tükrözés egymásutánjával. Ha egy a  $P$  forgáscentrumból kiinduló félegyenes kezdő és véghelyzete van adva, akkor először e félegyenesek szögének szögfelező egyenesére, majd a véghelyzetet tartalmazó egyenesre tükrözzük (13b ábra). Támaszkodunk itt arra, hogy a szögfelezőre tükrözve a szög egyik szára a másikba jut, s hogy egy egyenes helyben marad, ha önmagára tükrözzük. Az egymást követő tükrözések ezért valóban egy kívánt tulajdonságú síkmozgást szolgáltatnak. Ugyanarra a két tükörtengelyre tükrözve azt a térmozgást is megkapjuk, amelyik forgósíkhöz tapasztott tér mozgását jelenti. Látjuk ilyen módon, hogy a sík elforgatása síkmozgás abban az értelemben, ahogyan 2.4 a síkmozgást definiálta.

c) Beláttuk már, hogy egy síknak egy pont körüli elforgatását megvalósíthatjuk azáltal, hogy a teret egymást követően két tengely körül forgatjuk el (mégpedig ezekre a tengelyekre tükrözzük). A tér tengelyek körüli elforgatásaival elérhetjük azt is, hogy egy adott  $S_1$  felsík, amely az  $O_1A_1$  félegyeneset a határán tartalmazza, megadott  $S_2$  helyzetbe jusson, mégpedig  $O_1A_1$  az  $S_2$  határán megadott  $O_2A_2$  félegyeneset fedje. Ezt elérhetjük pl. úgy, hogy először az  $O_1O_2$  szakasz egy felezőmerőlegesére tükrözzünk, ami által  $O_1A_1$  az  $O_1A'_1$  helyzetbe jut, ezt követően az  $O_1A'_1A_2$  sík elforgatása révén elérjük, hogy  $O_1A'_1$  az előírt  $O_2A_2$  helyzetbe kerüljön, végül pedig az  $O_2A_2$  tengely körül elforgatva az előbb már kétszer is elmozgatott  $S_1$  felsík a megadott  $S_2$  felsíkot fedje. A mondott három lépés egyike-másika természetesen esetleg el is hagyható. Igazoltuk ilyen módon, hogy 2.4-nek a térmozgások eltolásokból és elforgatásokból való felépítésére vonatkozó kijelentése helyes, sőt azt is, hogy ebben a kijelentésben az eltolásokról nem is kellett volna szólnunk.

d) Tekintsük az  $e$  egyenes által határolt, nem komplanáris  $S_1, S_2$  felsíkokat, valamint az ezeknek a síkjai által határolt, mindkét felsíkot tartalmazó  $T_1, T_2$  féltereket. Bebizonyítjuk, hogy van olyan sík, amely tartalmazza az  $e$  egyenest, s amelyre vonatkozólag az  $S_1, S_2$  felsíkok, valamint a  $T_1, T_2$  félterek egymás tükörképei.

Azért tesszük ezt, hogy teljessé tegyük 6.5 B3b) okoskodását. Állításunkból 6.5 B2a) és 6.5 B2b) alapján következik ugyanis, hogy az az egybevágóság, amelyik  $e$  pontjait változtatlanul hagyja, az  $S_1, T_1$  alakzatokat pedig  $S_2, T_2$  helyzetbe juttatja, a tér elmozgatásával nem valósítható meg. Ha tehát  $e$  körül úgy forgatjuk el a teret, hogy az  $S_1$  az  $S_2$  helyzetbe jusson, akkor valóban tükrözni kell még  $S_2$  síkjára, ha  $T_1$ -et is a  $T_2$  helyzetbe akarjuk juttatni.

Egyszerű volna a bizonyítás, ha lapszögről és ennek szögfelezősíkjáról szó lehetne. Nem hivatkozhatunk azonban a térgeometria későbbi tárgyalásának eredményeire. Hivatkozunk viszont, immár harmadszor (vö. 6.3 B1, 6.5 B2), a közvetlenül következő paragrafus egy megállapítására, mégpedig itt abban a többlet mondó formában is, hogy ha két pont ugyanakkora távolságra van egy egyenes két pontjának egyikétől és másiktól, akkor a két pont ugyanakkora távolságra van az egyenes minden egyes pontjától is. Igaz ugyan, hogy ezt 7.3-ban csak egy sík pontjaira mondjuk ki, jogosan alkalmazhatjuk mégis a tér pontjaira, hiszen az egyenesünk által határolt két felsíkot az egyenes körüli elforgatással egy síkba vihetjük.

Hangsúlyozzuk, hogy bevezető fejezetünk akkor sem igényelne többet a későbbiekből, ha axiómáinkból kiindulva minden állítását szigorúan bizonyítanák. A 7.3-ra vonatkozó háromszori hivatkozás megbontja ugyan ezt a rendet, viszont lényegesen hozzájárul a bevezető fejezet kerekedségéhez.

A bizonyításra térve egy  $P_1$  pontot veszünk fel az  $S_1$  felsík belsejében. Ha  $S_1$ -et  $e$  körül elforgatva  $S_2$  helyzetbe visszük, akkor  $P_1$  az  $S_2$  felsík  $P_2$  pontjába jut. A  $P_1P_2$  szakasz  $F$  felezőpontja nincs az

$e$  egyenesen, hiszen akkor  $S_1$  és  $S_2$  komplanáris volna. Tekintsük az  $e$  egyenesen és az  $F$  ponton átfektetett  $S$  síkot. A  $P_1, P_2$  pontokról tudjuk, hogy  $F$ -től és  $e$  minden egyes pontjától ugyanakkora távolságra vannak. Ugyanakkora távolságra van akkor ez a két pont az előrebocsátottak szerint az  $e$  egyenes  $A, B$  pontjai által meghatározott  $ABF$  háromszög vonal minden pontjától, és ugyanilyen indokolással az  $S$  sík minden pontjától is, hiszen mindezek a pontokon át húzható olyan egyenes, amely az  $ABF$  háromszög vonalat két pontban metszi.

Az  $S$  síkra vonatkozó tükrözés a  $P_1$  pontot a  $P_2$  helyzetbe viszi, hiszen egy féltéren belül nincs két különböző, a határsík minden pontjától ugyanakkora távolságra elhelyezkedő pont. Ezt 7.3-ra hivatkozva 6.3 B1-ben megállapítottuk már. Az  $S$  síkra vonatkozó tükrözés ezek szerint megfelel a követelményeinknek, mert a  $P_1$  pontot tartalmazó  $S_1$  félsíkot a  $P_2$  pontot tartalmazó  $S_2$  félsíkba, és az  $F$  pontot tartalmazó  $T_1$  féltérrel az  $F$  pontot ugyancsak tartalmazó  $T_2$  féltérbe viszi át.

**B5** Annak ellenére, hogy mi a térmozgásokat is szerepeltettük már, arra törekszünk majd, hogy erre a többletre ne építsünk. Úgy gondoljuk, mintha a VIII. axiómánkat is csak a következő, kevesebbet mondó alakban mondtuk volna ki: *A sík egy és csak egyféleképpen mozgatható el úgy a térben, hogy egy a síkban megadott félsík és ennek határán megadott félegyenes előírt helyzetbe, egy adott félsíkba és annak határán adott félegyenesbe jusson.* Nem akarunk támaszkodni a bevezető fejezet olyan kijelentéseire sem, amelyek alátámasztásakor az eredeti VIII. axióma többletét is felhasználtuk.

Ennek az elhatározásnak következménye, hogy a térgeometria elemeinek tárgyalásánál a megszokott okoskodásokat szerepeltetjük és hogy VIII. axiómánk teljes állítását annak szűkebb alakjából kiindulva újból bizonyítjuk majd (lásd 24.8). Kísérő megjegyzéseinkben viszont rámutatunk majd arra, hogy a térgeometria elemeinek a tárgyalása során hogyan lehet hasznosítani azt a többletet, amit ennek a fejezetnek a tárgyalása nyújt (lásd 24.8 B4).

E kettősségnek a befogadását az indokolja, hogy egyrészt meg akarjuk őrizni a kevesebbre támaszkodó, Euklides visszanyúló, hagyományos tárgyalást, másrészt viszont elfogadjuk és értékeljük a 2.1 B-ben hangsúlyozott pedagógiai szempontokat.

---

## 2. fejezet - A SÍK ELEMI GEOMETRIÁJA

Ebben a fejezetben már hozzákezdünk a geometria rendszeres felépítéséhez: az első fejezet által megadott alapokra támaszkodva minden állításunkat bizonyítani fogjuk. Előszóval alkalmazunk szemléletesen is jól követhető okoskodásokat, bizonyítunk szemléletesen könnyen belátható tényeket, de pusztán a szemléletre hivatkozva nem közlünk már ismereteket.

Tárgyunk ebben a fejezetben a sík geometriája, síkbeli alakzatok vizsgálata lesz. Csak az *elemi geometria* (szintetikus geometria) módszerével dolgozunk, s ez azt jelenti, hogy közvetlenül geometriai alapismereteinkre és a geometriai alakzatok kapcsolataira építve okoskodunk. Más az *analitikus geometria* módszere, amely az alakzatokat mennyiségi kapcsolatokkal jellemzi, és a geometriai ismeretekhez az ilyen mennyiségi kapcsolatok vizsgálatának a közvetítésével jut el. Az analitikus geometriával mi a könyv második felében foglalkozunk. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a két módszer között éles határvonalat vonni aligha lehet, s hogy egyes alakzatok mértékét az elemi geometria is bevezeti, és ezekkel a mértékekkel számolva okoskodik is.

Minthogy ebben a fejezetben csak síkgeometriával foglalkozunk, nem hangsúlyozzuk minden esetben, hogy kijelentéseink csak a síkra, egy sík alakzataira vonatkoznak.

### 7. § Egyszerű szimmetrikus alakzatok

Egyszerű tengelyszimmetrikus síkbeli alakzatokkal foglalkozunk, s ezekből alapvető tényeket olvasunk ki.

**7.1 Tétel.** *Egy a szimmetriatengelyt metsző egyenes akkor és csak akkor tükörképe önmagának, ha a szimmetriatengelyt merőlegesen metszi.*

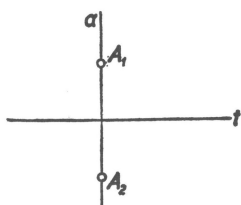
*Bizonyítás.* a) Ha egy egyenes merőlegesen metszi a tengelyt, akkor önmagának tükörképe, mert a tükrözés a tengely pontjait helybenhagyja, és a derékszöget derékszögbe viszi át, a metszéspontban pedig a tengelyre csak egy merőleges állítható.

b) Ha egy egyenes metszi a tengelyt és önmagának tükörképe, akkor merőleges a tengelyre, mert ez esetben a metszéspontban keletkező mellékszögek egymás tükörképei, tehát egyenlők, és tudjuk, hogy ha két mellékszög egyenlő, akkor azok derékszögek. —

**Tétel.** *Egy pontból egy egyenesre egy és csak egy merőleges egyenes bocsátható.*

*Bizonyítás.* Ha a pont rajta van az egyenesen, akkor állításunk nyilván igaz.

Ha az  $A_1$  pont nincs a  $t$  egyenesen (14. ábra), tükrözzük  $A_1$ -et  $t$ -re. A kapott  $A_2$  pont bizonyosan rajta van a keresett merőlegesben, mert a keresett merőleges önmagának tükörképe. A keresett merőleges tehát csak az  $A_1A_2$  egyenes lehet. Ez az egyenes viszont meg is felel, mert két különböző félsíkban levő pontot köt össze, s így metszi a tengelyt, továbbá tükörképe az  $A_2A_1$  egyenes, vagyis önmaga, tehát merőleges a tengelyre. —



14

Ha a  $t$  egyenes adva van, a sík minden  $P$  pontja egyértelműen meghatározza a  $P$ -ből  $t$ -re bocsátott merőleges egyenest és ennek  $t$ -vel alkotott  $T$  metszéspontját. Ha  $P$ -ből  $t$ -re bocsátott merőleget mondunk, akkor vagy a  $PT$  egyenesre (merőleges egyenes), vagy a  $PT$  szakaszra (merőleges szakasz) gondolunk.

A  $T$  pontot a merőleges *talppontjának* s a  $P$  pont (merőleges) *vetületének* mondjuk. A  $PT$  egyenes a  $P$  pont (merőleges) *vetítőegyenese*. A  $PT$  szakasz hossza a  $P$  pont *távolsága* a  $t$  egyenestől.

Egy egyenesre való (merőleges) *vetítés* az a ponttranszformáció, amelyik minden  $P$  ponthoz az egyenesre vetett (merőleges)  $T$  vetületét rendeli. Egy alakzat *vetülete* az alakzat pontjainak a vetületéből áll.

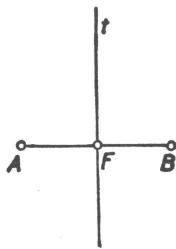
**7.2** Azt az egyenest, mely egy szakasz felezőpontján áthalad, s arra merőleges, a szakasz *felezőmerőlegesének* nevezzük.

**Tétel.** Egy a szimmetriatengelyt metsző szakasz akkor és csak akkor tükörképe önmagának, ha a szimmetriatengely a szakasz felezőmerőleges.

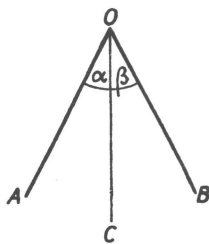
E tételben csak a felezés az új, a merőlegességet már fentebbi tételünk is tartalmazza.

*Bizonyítás.* a) Ha  $F$  az  $AB$  szakasz felezőpontja és  $t$  a felezőmerőleges (15. ábra), akkor az  $FA$  szakasz tükörképe a merőlegesség miatt az  $FB$  félegyenesen van,  $FA = FB$  miatt tehát  $A$ -nak a tükörképe  $B$ . Ezért az  $AB$  szakasz önmagának a tükörképe.

b) Ha  $AB$  szimmetrikus és a tengelyt  $F$  pontban metszi, akkor a szimmetria miatt  $AB$  merőleges a tengelyre és  $FA = FB$ . —



15



16

**Tétel.** Egy szög akkor és csak akkor tükörképe önmagának, ha a szimmetriatengely a szögfelezője.

E tételben akár egyenesszög is szerepelhet, azonban ez esetben már ismert eredményt mond ki.

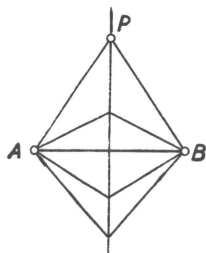
*Bizonyítás.* a) Az  $\angle AOB$ -et  $OC$  szögfelezője körül átforgatva (16. ábra)  $\angle AOC = \angle BOC$  miatt az  $OA$  és  $OB$  szarak helyet cserélnek.

b) Ha  $\angle AOB$  szimmetrikus az  $OC$  tengelyre, a szimmetria miatt  $\angle AOC = \angle BOC$ . —

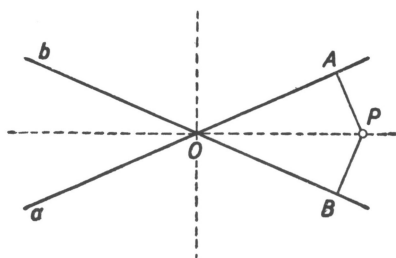
**7.3 Tétel.** *A sík azon pontjainak mértani helye, amelyek a sík két pontjától egyenlő távolságra vannak, a két pont összekötő szakaszának felezőmerőlegese.*

*Bizonyítás.* a) A felezőmerőleges bármely  $P$  pontjára  $PA = PB$  (17. ábra), mert e szakaszok a felezőmerőlegesre vonatkozólag egymás tükörképei.

b) Ha egy  $P$  pontra  $PA = PB$ , az a felezőmerőlegesén van. Ha ugyanis az  $APB$ -et felezőjére tükrözzük, akkor  $PA = PB$  miatt  $A$  és  $B$  helyet cserél, tehát az  $AB$  távolság önmagát fedi. Ezért a  $P$  ponton áthaladó szimmetriatengely (a szögfelező)  $AB$ -nek felezőmerőlegese. —



17



18

A bizonyított tétel kimondja, hogy ha két pont egy egyenes valamennyi pontjától ugyanakkora távolságra van, akkor ez az egyenes elválasztja azt a két pontot, kimondja tehát azt is, hogy egy félsík két pontja nem lehet a határegyenes minden pontjától ugyanakkora távolságra.

**Tétel.** *A sík azon pontjainak mértani helyét, amelyeknek a sík két egymást metsző egyenesétől való távolsága egyenlő, ennek az egyenespárnak két szögfelező egyenese alkotja.*

*Bizonyítás.* a) Ha  $P$  egy szögfelezőn van és az  $a, b$  egyenesektől való távolságai  $PA$  és  $PB$  (18. ábra), akkor e szögfelezőre tükrözve  $a$  és  $b$  helyet cserél, e tükrözés tehát  $PA$ -t  $b$ -re merőleges és  $b$ -hez vezető szakaszba, azaz  $PB$ -be viszi. Ezért  $PA = PB$ .

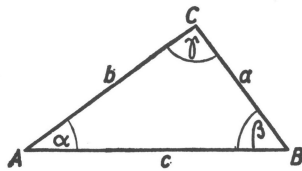
b) Ha egy  $P$  pontnak  $a$ -tól és  $b$ -től való távolsága egyenlő,  $PA = PB$ , akkor az  $APB$ -et tükrözzük e szög szögfelezőjére. E tükrözésnél a  $PA$  és  $PB$  szár helyet cserél,  $PA = PB$  miatt  $A$  és  $B$  is helyet cserél, a merőlegesség miatt az  $a$  és  $b$  egyenes is helyet cserél, ezeknek  $O$  metszéspontja tehát helyben marad, és a  $POA$  a  $POB$ -et fedi. E szögek tehát egyenlők. —

## 8. § Speciális háromszögek

A háromszögek fajtáival ismerkedünk meg, majd részletesen foglalkozunk az olyanokkal, amelyeknek oldalai és szögei között egyenlők is vannak.

**8.1** A háromszög csúcsait jelölő nagybetűket, oldalait jelölő kisbetűket, szögeit jelölő görög betűket rendszeren úgy választjuk meg, hogy egy csúcsot, e csúcsnál levő szöget, s e csúccsal szemközti oldalt megfelelő betűk jelöljenek (19. ábra). Egyenlő oldalakat és csúcsokat egyforma betűkkel is jelölhetünk.





19

Egy háromszög *hegyesszögű*, ha mindegyik szöge hegyesszög; *derékszögű*, ha egyik szöge derékszög; *tompaszögű*, ha egyik szöge tompaszög (20a—c ábrák). Minden háromszög konvex.

Derékszögű háromszög esetében a derékszöget közrefogó oldalakat *befogóknak*, a derékszöggel szemközti oldalt *átfogónak* nevezzük.

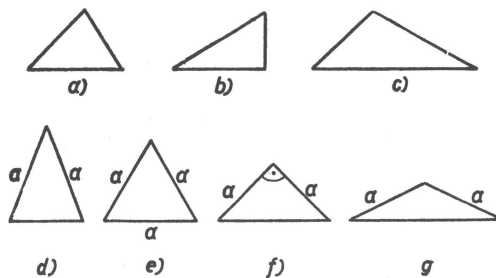
Egy háromszög *egyenlő szárú*, ha van két egyenlő oldala (20d—g ábrák). Ezt a két egyenlő oldalt *száraknak*, a harmadik oldalt *alapnak* nevezzük. A szárak által bezárt szöget *szárszögnek*, az alapon nyugvókat *alapszögnek* mondjuk. Ha az egyenlőszárú háromszög *csúcsáról* beszélünk, a háromszögnek arra a csúcsára gondolunk, melyben a két szár találkozik.

Egy háromszög *szabályos* vagy *egyenlő oldalú*, ha mindhárom oldala egyenlő (20e ábra).

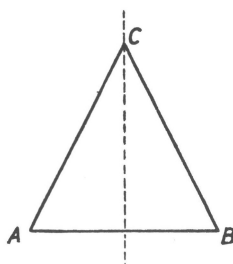
Néha a háromszögek közé soroljuk az *elfajuló* (degenerált) háromszögeket, vagyis egy egyenes három pontjának a konvex burkát is. Azt is megengedhetjük, hogy a pontok között azonosak legyenek. Két-két pont összekötő szakasza az elfajuló háromszög egy-egy oldala. Mindig külön hangsúlyozzuk, ha ilyen elfajult háromszögekre is gondolunk.

**A** Helytelen azt mondani, hogy egy háromszög vagy egyenlő oldalú, vagy egyenlő szárú, vagy egyéb (általános) háromszög, hiszen az egyenlő oldalú háromszög is egyenlő szárú (vö. 14.1 A2).

**B** Egy háromszögben nem lehet két derékszög, mert akkor a harmadik csúcsból a szemközti oldalra két merőleges volna bocsátható. Még kevésbé lehet egy derékszöge és egy tompaszöge, vagy két tompaszöge, mert akkor a tompaszögek szárainak beljebb forgatásával olyan háromszög állna elő, amelynek két derékszöge van. Ezek szerint derékszögű és tompaszögű háromszög másik két szöge hegyesszög.



20



**8.2 Tétel.** *Egy háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha két szöge egyenlő.*

*Bizonyítás.* a) Ha az  $ABC\Delta$  egyenlő szárú és csúcsa  $C$ , akkor a háromszöget a csúcsnál levő szög felezőjére tükrözzük (21. ábra). E tükrözésnél a csúcsnál levő szög szárai helyet cserélnek, továbbá  $CA = CB$  miatt  $A$  és  $B$  is helyet cserél. Ezért a  $BAC\text{-}x$  fedi az  $ABC\text{-}x$ -et, s így az alapon nyugvó két szög egyenlő.

b) Ha egy háromszögben két szög egyenlő,  $BAC\text{-}x = ABC\text{-}x$ , akkor a háromszöget  $AB$  felezőmerőlegesére tükrözzük. A szögek egyenlősége miatt ekkor az  $AC$  félegyenes és a  $BC$  félegyenes helyet cserél, s így  $C$  metszéspontjuk helyben marad, tehát  $CA$  és  $CB$  egymás tükörképei és egyenlők.

Ez az okoskodás mutatja, hogy az egyenlő szárú háromszög tengelyszimmetrikus. Egy tengelyszimmetrikus háromszög viszont nyilván egyenlő szárú, hiszen két oldala szükségképpen egyenlő. Az egyenlő szárú háromszöget ezért *szimmetrikus háromszögnek* is nevezhetjük. Azt is mutatja az előző bizonyítás, hogy az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye áthalad annak csúcsán, felezi a szárszöget, és merőlegesen felezi az alapot.

**Tétel.** *Ha egy egyenlő szárú háromszög síkjában levő egyenes rendelkezik a következő tulajdonságok valamelyikével:*

- a) áthalad a csúcson és merőleges az alapra,
  - b) áthalad a csúcson és felezi az alapot,
  - c) áthalad a csúcson és felezi a szárszöget,
  - d) merőlegesen felezi az alapot,
- akkor rendelkezik a másik három tulajdonsággal is.

*Bizonyítás.* Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye rendelkezik a felsorolt tulajdonságok mindegyikével. Minthogy pedig e tulajdonságok mindegyike egyértelműen meghatároz egy egyenest, ez az egyenes csak a szimmetriatengely lehet. —

**Tétel.** *Ha egy háromszög valamelyik csúcsán olyan egyenes halad át, amelyik rendelkezik kettővel a következő három tulajdonság közül:*

- a) merőleges a szemközti oldalra,
- b) felezi a szemközti oldalt,
- c) felezi a csúcsnál levő szöget,

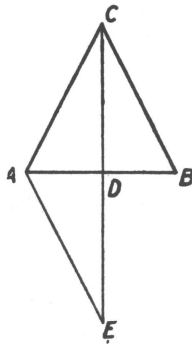
akkor a háromszög egyenlő szárú, s ennek ez az egyenes szimmetriatengelye.

*Bizonyítás.* ab) Ha  $CD$  felezőmerőlegese  $AB$ -nek, akkor  $A$  és  $B$  szimmetrikus a  $CD$  egyenesre, és ezért szimmetrikus az  $ACB\Delta$  is.

ac) Ha  $CD$  merőleges  $AB$ -re és felezi a  $C$ -nél levő szöget, akkor a háromszöget  $CD$ -re tükrözzük. E tükrözésnél a  $CA$  és  $CB$  félegyenesek helyet cserélnek, s a merőlegesség miatt az  $AB$  egyenes helyben marad. A tükrözött háromszöget tehát ugyanazok az egyenesek határolják, ezért ez az eredetivel azonos.

be) Ha  $D$  felezi az  $AB$  szakaszt és  $CD$  az  $ACB\text{-}x$ -et, akkor a  $BCD\Delta$ -et a  $D$  pontra tükrözzük és egy  $AED\Delta$ -et kapunk (22. ábra). A tükrözés miatt a  $C, D, E$  pontok egy egyenesen vannak, és

$\angle ACE = \angle AEC$ , mert mindkettő egyenlő a  $\angle BCD$ -gel. Szakaszunk első tétele szerint tehát  $AC = AE$ . Minthogy pedig a tükrözés miatt  $AE = BC$ , azért  $AC = BC$  is áll. —



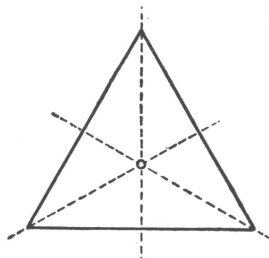
22

**A1** Egy tétel mindig azt állítja, hogy bizonyos feltétel vagy feltételek teljesülése esetén valamilyen tény fennáll. Sokszor e tény fennállásából s esetleg a feltételek közül egyeseknek teljesüléséből arra lehet következtetni, hogy a többi feltétel is teljesül. Az ilyen állítást az eredeti tétel megfordításának nevezzük. Egy tételnek többféle megfordítása is lehet, amire utolsó előtti tételünk mutat példát. Nincs is minden tételnek megfordítása. Mi sokszor igyekszünk majd a tételek megfordítására is rámutatni.

**A2** E szakasz második tételét – később bevezetendő elnevezéseket használva – így is szövegezzük: egyenlő szárú háromszögnek csúcsából vont magassága, súlyvonala, szögfelezője s a szemközti oldal felezőmerőlegese egybeesik. Ha egy háromszögben ezek közül kettő egybeesik, akkor utolsó tételünk szerint mindannyian egybeesnek, és a háromszög egyenlő szárú.

**8.3** A szabályos háromszög háromféleképpen is felfogható egyenlő szárú háromszöggént, mert bármely két oldala egyenlő. Teljesülnek tehát rá az előző szakaszban az egyenlő szárú háromszögről mondottak. Ezért áll az, hogy egy háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha mindhárom szöge egyenlő.

A szabályos háromszögnek három szimmetriatengelye van, ezek a szögek szögfelezői s egyben az oldalak felezőmerőlegesei (23. ábra). További szimmetriatengely nem is lehetséges, hiszen mindegyiknek feleznie kell a háromszög egy-egy szögét. A szimmetriából következik, hogy a három szimmetriatengely közül bármelyik a másik kettőhöz ugyanakkora szöggel hajlik s azokat ugyanabban a pontban metszi. E pontot a szabályos háromszög *középpontjának* nevezzük. Minthogy a szimmetriatengelyek a középpontnál hat egyenlő szöget alkotnak, ezek mindegyike  $60^\circ$ . A szimmetriából következőleg a középpont a háromszög bármely két csúcsától egyenlő távolságra van. Ha tehát a szabályos háromszöget középpontja körül  $120^\circ$ -kal elforgatjuk, az önmagát fedi. A szabályos háromszög eszerint forgásszimmetrikus is, s e forgásszimmetria rendje 3.



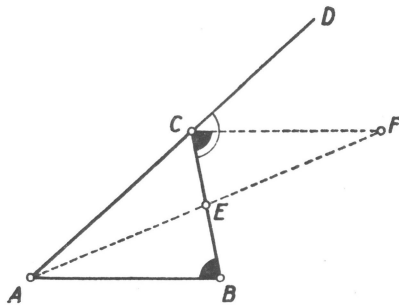
23

Megemlítjük még az *egyenlő szárú derékszögű háromszöget* (20f ábra). Ez egyenlő szárú s szárai merőlegesek, egyben derékszögű, s befogói egyenlők.

A Látjuk, hogy az egyenlő szárú s az egyenlő oldalú háromszög definiálásánál lehetne csak szögekről beszélni: az egyik olyan háromszög, amelyben két szög egyenlő, s a másik olyan, amelyben három szög egyenlő. Ezért helytelenítendő az elterjedt szólás: „a háromszögeket osztályozhatjuk szögeik szerint és oldalaik szerint”, helyes viszont a legnagyobb szög szerinti és a szimmetriák szerinti osztályozásról beszélni. Az elterjedt „egyenlő szárú” és „egyenlő oldalú” kifejezések helyett is helyesebb volna csak szimmetrikus és szabályos háromszögekről szólni.

## 9. § összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

Célunk elsősorban annak a szemléletesen közvetlenül belátható ténynek, hogy „két pont között legrövidebb az egyenes út”, még elemibbnek mondható tényekre való visszavezetése. Érdekes, hogy ezekről az elemibbnek mondható tényektől kevésbé magától értetődő állításokon át vezet az út a mondott cél felé.



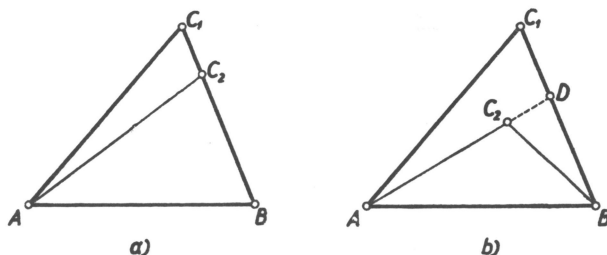
24

**9.1 Tétel.** *A háromszög külső szöge nagyobb, mint egy nem mellette fekvő belső szög.*

*Bizonyítás.* Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy az  $ABC\Delta$ -nek  $C$ -nél levő külső szöge nagyobb mint  $B$ -nél fekvő belső szöge, hosszabbítsuk meg az  $AC$  oldalt a  $C$  ponton túl (24. ábra). Ha  $E$  a  $BC$  oldal felezőpontja, az  $ABE\Delta$ -et az  $E$  pontra tükrözve az  $FCE\Delta$ -et kapjuk. Minthogy  $F$  a  $BCD\angle$  szögtartományában van,  $BCF\angle < BCD\angle$ . A  $180^\circ$ -os elforgatással létesített tükrözés következtében azonban  $BCF\angle = ABC\angle$ , így tehát valóban  $ABC\angle < BCD\angle$ . —

Tételünk más alakban azt mondja, hogy egy háromszögben két szög összege  $180^\circ$ -nál kisebb, hiszen  $\beta < \pi - \gamma$  és  $\beta + \gamma < \pi$  jelentése azonos. Ebből (vö. 8.1 B) következik az, hogy derékszögű és tompaszögű háromszögben a másik két szög hegyesszög.

**Tétel.** *Ha két háromszögnek egy oldala közös, s az egyik háromszög a másikat tartalmazza, akkor a közös oldallal szemben a tartalmazó háromszögben kisebb szög van, mint a tartalmazottban.*



25

b) Ha  $C_2$  az  $ABC_1\Delta$  belsejében van, jelölje  $D$  az  $AC_2$  félegyenes és a  $BC_1$  oldal metszéspontját (25b ábra). Minthogy  $a)$  szerint egyrészt  $AC_1B \angle < ADB \angle$ , másrészt  $ADB \angle < AC_2B \angle$ , azért  $AC_1B \angle < AC_2B \angle$  valóban teljesül. —

**B2** Az első tétel bizonyításában kihasználtuk azt, hogy  $F$  a  $BCD\alpha$  szögtartományában van. Ezt bizonyítjuk is:

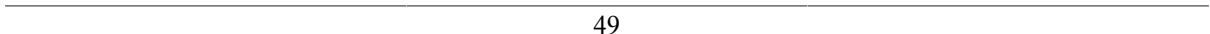
Szinte tudálékosnak tűnik, hogy az  $F$  pont helyzetére hosszasan következtettünk, s nem egyszerűen csak megállapítottuk a rajz alapján, hogy hol van. Tiszta okoskodásnál ügyelni kell arra, hogy ne támaszkodjunk a rajzra. Az egyik veszély ilyenkor, hogy ha többféle helyzetről van szó, az okoskodó csak a rajzban bemutatott helyzetre gondol. A másik veszély az, hogy a rajz pontatlansága annyira megváltoztatja a viszonyokat, hogy az okoskodó hamis kijelentést vél helyesnek. Ezek ellen a veszélyek ellen pontos rajzzal, valamint úgy védekezhetünk, hogy az ábra készítésénél mindenféle lehetséges helyzetre gondolunk.

a) vagy a két oldal is és a két szög is egyenlő,

b) vagy a két oldal közül s a két szög közül a nagyobbak egymással szemben helyezkednek el.

**Bizonyítás.** a) Ha a háromszög két oldala egyenlő, a háromszög egyenlő szárú, és az alapon nyugvó szögek is egyenlők. Ekkor tehát a tételben említett első lehetőség következik be.

c) Minthogy a háromszög két oldala vagy egyenlő, vagy pedig az egyik a másiknál nagyobb, ezért a tételünkben említett két lehetőség közül az egyik mindig bekövetkezik. —

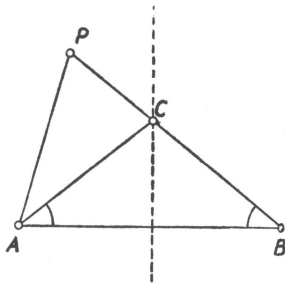


Tételünkéből következik, hogy derékszögű háromszögben az átfogó, tompaszögű háromszögben pedig a tompaszöggel szemközti oldal a legnagyobb.

**Tétel.** Az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese olyan két félsíkra vágja a síkot, amelyek közül az  $A$  pontot tartalmazó félsíknak belső pontjai az  $A$  ponthoz, a  $B$  pontot tartalmazóéi a  $B$  ponthoz vannak közelebb.

E tétel kiegészíti azt az ismeretünket, hogy magának a felezőmerőlegesnek pontjai  $A$ -tól és  $B$ -től egyenlő távolságra vannak (7.3).

*Bizonyítás.* Feltesszük, hogy a  $P$  pont nincs az  $AB$  egyenesen, hisz ilyen pontokra a tétel állítása nyilvánvaló. Ha például  $P$  az  $A$  pontot tartalmazó félsík belső pontja, akkor  $PB$  metszi a felezőmerőlegest egy  $C$  pontban (27. ábra). Minthogy  $C$  a felezőmerőlegesen van, az  $ABC\Delta$  egyenlő szárú és  $CAB\angle = CBA\angle$ . Mivel  $AC$  a  $PAB\angle$  belsejében halad,  $CAB\angle < PAB\angle$ . Ezek szerint az  $ABP\Delta$ -ben  $PBA\angle < PAB\angle$ , s akkor a szemközti oldalakra  $PA < PB$ . —



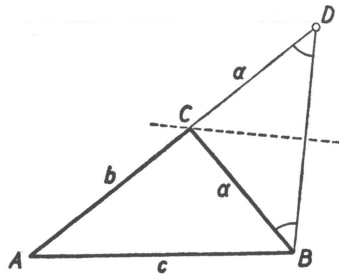
**A** Az utolsó bizonyításban csak avval az esettel foglalkoztunk, midőn  $P$  az  $A$  pontot tartalmazó félsíkban van. Nyilván ugyanígy bizonyíthatunk volna a másik félsík belső pontjaira a  $PB < PA$  egyenlőtlenséget. Nincs szükség azonban arra, hogy a bizonyítást ez utóbbi esetre elismételjük. Hiszen lényegtelen az, hogy melyik pontot jelöljük  $A$ -val, s melyiket  $B$ -vel. Amit az egyikre bizonyítottunk, az tehát a másikra is igaz. Általában, ha egy tétel feltevései semmi megkülönböztetést nem tartalmaznak bizonyos, a tételben szereplő elemekre vonatkozóan, akkor a tétel állítása sem tehet megkülönböztetést közöttük, s ezért az, amit az egyik elemre beláttunk, az analógia alapján a többire is igaz. Ilyenkor a feltevésekben és a tételben mutatkozó (logikai) szimmetriáról beszélünk.

A mondottak tételünk esetében még világosabbá válnak, ha meggondoljuk, hogy tételünket így is szövegezhettük volna: „Egy szakasz felezőmerőlegese két félsíkra vágja a síkot. A két félsík valamelyikének belső pontjai a szakasz végpontjai közül ahhoz vannak közelebb, amelyik ugyanabban a félsíkban van.” Ez esetben a bizonyítás így indulhatott volna: Legyen  $P$  az egyik félsíkban, s jelöljük a szakasznak ugyanezen félsíkba eső végpontját  $A$ -val, a másikat  $B$ -vel.

**9.3 Tétel.** Egy háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

A szemlélet szerint ez a tétel nem szorul bizonyításra. Mi mégis bizonyítjuk, vagy ha tetszik, kimutatjuk, hogy az, aki az eddigi, szemléletre támaszkodó megállapításainkat elfogadta, ezt a tételt már nem tagadhatja.

*Bizonyítás.* Ha azt akarjuk az  $ABC\Delta$ -re bizonyítani, hogy  $AC + CB > AB$ , akkor hosszabbítsuk meg az  $AC$  oldalt s mérjük fel a meghosszabításra a  $CD = CB$  távolságot (28. ábra). Minthogy a  $BCD\Delta$  egyenlő szárú,  $CBD\angle = CDB\angle$ . Minthogy  $BC$  az  $ABD\angle$  belsejében van,  $ABD\angle > CBD\angle$ . Így tehát  $ABD\angle > ADB\angle$  és az  $ABD\Delta$  szemben fekvő oldalaira  $AD > AB$ , ami  $AD = CA + CB$  miatt állításunk helyességét jelenti. —



28

**Tétel.** Egy háromszög két oldalának különbsége kisebb a harmadik oldalnál.

*Bizonyítás.* Ha az állítás nem teljesülne, akkor a háromszög oldalaira pl.  $a - b \geq c$  teljesülne. Ez azonban  $a \geq b + c$  helyességét mondaná ki ellentmondásban az előző tétellel. —

Az ebben a szakaszban bizonyított két egyenlőtlenséget *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük. A következő tétel kimondja, milyen módosítással érvényesek a háromszög-egyenlőtlenségek, ha elfajuló háromszögekről is szó van.

**Tétel.** Három (nem feltétlenül különböző) pont három távolsága közül egyik sem lehet a másik kettő összegénél nagyobb, sem pedig a másik kettő különbségénél kisebb.

*Bizonyítás.* Elég az összegre vonatkozó állítást bizonyítani, mert a másik állítás más formában ugyanazt mondja ki, miként ezt az előző bizonyításban is láttuk.

Az összegre vonatkozó állítás helyes, ha a három pont nincs egy egyenesen, mert akkor e szakasz első tétele szerint a három távolság bármelyike határozottan kisebb a másik kettő összegénél. Helyes az állítás akkor is, ha egy egyenes három (nem feltétlenül különböző) pontja szerepel, hiszen a szélső pontok távolsága a másik kettő összegével egyenlő, szélső pontnak közrefogott ponttól való távolsága pedig már a szélső pontok távolságánál is kisebb, nemhogy a másik két távolság összegénél nagyobb lehetne. —

A bizonyításból kiolvashatjuk, hogy a szóban forgó három távolság valamelyike csak akkor lehet a másik kettő összegével egyenlő, ha e kettő egymást meghosszabbítva egyetlen szakaszt alkot. Hasonlóképpen csak akkor lehet az egyik távolság a másik kettőnek a különbsége, ha a különbség képzésekor egy szakasz hosszából egy általa tartalmazott szakasz hosszát vontuk le.

**B1** Ha két szám különbségéről beszélünk, ezt kétféleképpen érthetjük. Vagy levonjuk az egyik számot a másiktól, és nem törődünk azzal, hogy az eredmény milyen előjelű, vagy pedig előírjuk, hogy két különböző szám közül a nagyobbikból kell a kisebbiket levonni, hogy tehát az előjeles különbség abszolút értékét kell venni. A köznap nyelvhasználat az utóbbi jelentést fogadja el. Utolsó két tételünk állítása és bizonyítása helyes, akár az egyik, akár a másik jelentésre gondolunk. Mondhatjuk tehát pl. azt is, hogy a háromszög egyik oldala a másik kettő különbségének abszolút értékénél kisebb.

**B2** Bár hajlandók volnánk ennek a szakasznak első tételét nyilvánvaló helyessége miatt axiómaként is elfogadni, kimutattuk mégis, hogy erre nincs szükség, hogy e tétel állítása korábbi axiómáink logikai következménye.

Talán túlzásnak tűnik, hogy még az axiómák megválasztásában is takarékoskodunk, még a legnyilvánvalóbb állítások körében is vizsgálódunk, melyik következménye a többinek. E törekvés azonban a matematika történetében igen nagy szerepet játszott, s a matematikát mélységhez, gazdagodáshoz, sok tekintetben egyszerűsödéshez és jobb áttekinthetőséghez, sőt szélesebb körű alkalmazási lehetőségekhez is segítette. Az a gondolat, amelyet e paragrafusban eddig követtünk, pontosan Euklides gondolatsora. A szemléletesen nyilvánvalóknak még nyilvánvalóbbakra való logikai visszavezetése azért is hasznos, mert egyrészt rámutathat a szemlélet tévedéseire, másrészt alkalmat ad annak megvizsgálására, hogy fogalomalkotásaink fedik-e azt a szemléletes tartalmat, amelyet fedni szándékoznak.

**9.4 Tétel.** Ha a töröttvonalnak van 0-tól különböző törésszöge, akkor végpontjainak távolságánál hosszabb.

Ha a töröttvonalnak nincs törésszöge, akkor egyetlen szakasz. Ha minden törésszöge nullszög, akkor egy szakasz feldarabolásával keletkezik. A tétel ezeket a nem valójában „törött” vonalakat kizárta, hiszen hosszuk a végpontok távolságával egyenlő. A tétel alapján kimondhatjuk, hogy a töröttvonal hossza nem lehet a végpontok távolságánál kisebb, s hogy a sokszög bármely oldala kisebb a többi oldal összegénél.

*Bizonyítás.* Szorítkozhatunk az olyan töröttvonalakra, amelyeknek van töréspontja és minden törésponthoz 0-tól különböző törésszög tartozik. A bizonyítást a törésvonalat alkotó szakaszok számára vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

a) Ha a töröttvonal két szakaszból áll, akkor a töröttvonal hossza az előző szakasz szerint a végpontok távolságánál kisebb nem lehet. Ugyanakkora sem lehet, mert akkor a két szakasz egymást meghosszabbítva egyetlen szakaszt alkotna, márpedig feltettük, hogy a törésszög nem 0.

b) Kimutatjuk, hogy ha az állítás legfeljebb  $n$  szakaszból álló töröttvonalakra helyes, akkor ez az  $n + 1$  szakaszból állókra is áll. Tekintsük evégből az  $n + 1$  szakaszból álló  $AC_1C_2 \dots C_n B$  töröttvonalat

(29. ábra). Ennek első két szakaszára, az  $AC_1C_2$  töröttvonalra a) szerint

$$AC_1 + C_1C_2 > AC_2.$$

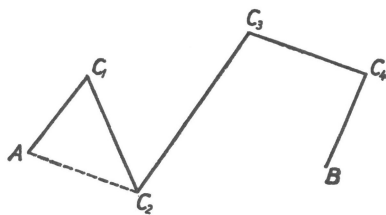
Ha az  $AC_1C_2$  töröttvonalat az  $AC_2$  szakasszal helyettesítjük, a kevesebb szakaszból összetett  $AC_2 \dots C_n B$  töröttvonalhoz jutunk. Feltetésünk szerint erre a tétel állítása teljesül, azaz

$$AC_2 + C_2 \dots C_n \geq AB.$$

Ha itt az első tag helyébe az előző egyenlőtlenség alapján nagyobbat írunk, akkor az

$$AC_1 + C_1C_2 + C_2 \dots C_n > AB$$

eredményhez jutunk. Ez azt mondja ki, hogy a bizonyítandó állítás az  $AC_1C_2 \dots C_n B$  töröttvonalra is teljesül. —



29

**A** Bizonyításunk teljes indukciót alkalmazott. Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy egy állítás  $k, k+1, \dots$  számok mindegyikére teljesül, a következőképpen járhatunk el: Először bizonyítjuk, hogy az állítás  $k$ -ra teljesül, ezután pedig azt, hogy ha  $n \geq k$  és az állítás teljesül a  $k, k+1, \dots, n$  számok mindegyikére, akkor  $(n+1)$ -re is teljesül. Ezt a következtetési módot nevezzük teljes indukciónak.

**B** Tételünk bizonyítását másként is elmondhatjuk. Két ilyen lehetőséget említünk.

Mondhatjuk, hogy egy töröttvonal hosszát csökkentjük, ha első két szakaszát egyetlen szakasszal pótoljuk. Ezáltal kevesebb szakaszból összetett töröttvonalhoz jutunk. Ezt a csökkentést mindaddig folytathatjuk, amíg a végpontokat összekötő szakaszhoz el nem jutottunk. Ezért ez utóbbi rövidebb, mint az eredeti töröttvonal.



A bizonyítást a következő alakban is előadhatjuk: Tegyük fel, hogy a tétel hamis, hogy tehát vannak a tétel állítását ki nem elégítő töröttvonalak. Van akkor ezek között olyan, amelyet minimális számú szakasz alkot. Ha egy ilyen töröttvonal első két szakaszát egyetlen szakasszal pótoljuk, akkor kevesebb szakaszból álló és rövidebb, tehát a tétel állítását ki nem elégítő töröttvonalhoz jutunk. Ez ellentmond azonban a minimális szám megválasztásának, s ez az ellentmondás a tétel helyességét bizonyítja.

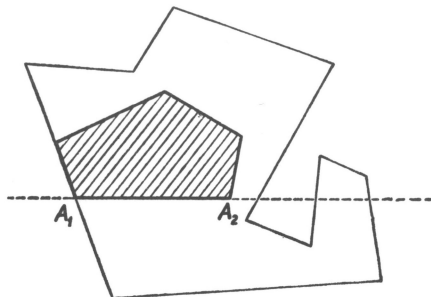
Minden indukciós okoskodás előadható ilyen változatokban. Burkolt teljes indukciót alkalmaz a következő tétel bizonyítása is.

**9.5 Tétel.** *Ha egy konvex sokszöget egy másik egyszerű sokszög tartalmaz, akkor az utóbbi kerülete a nagyobb.*

Megengedjük, hogy a konvex sokszög oldalai egészben vagy részben a másik sokszög határvonalán legyenek. Pusztán azt kötjük ki, hogy a két sokszög ne legyen azonos. A másik sokszög konkáv is lehet.

*Bizonyítás.* A belső  $A$  sokszögnek van olyan  $A_1A_2$  oldala, amelyet a külső  $B$  sokszög határa nem tartalmaz (30. ábra). Az  $A_1A_2$  oldalegyenes a  $B$  sokszöget darabokra vágja. Tekintsük azt a  $B_1$  darabot, amelyik tartalmazza az  $A$  sokszöget. Van ilyen darab, hiszen az oldalegyenes a konvex  $A$  sokszöget nem metszi, fíi határa úgy áll elő fíi határából, hogy egy vagy több töröttvonalat a végpontjait összekötő szakasszal pótolunk. Ebből 9.4 szerint következik, hogy  $B_1$  kerülete  $B$  kerületénél kisebb.

Minden tartalmazó sokszöghöz találhatunk tehát kisebb kerületű és az  $A$  sokszögnek több oldalát a határán tartalmazó sokszöget. Az így kapott sokszöghöz újból találhatunk még kisebb kerületű és még több oldalt a határán tartalmazó sokszöget. Ezt addig folytathatjuk, amíg csak az  $A$  sokszög minden oldala nem lesz rajta a határon, amíg tehát  $B$ -ből kiindulva sorozatos kerületcsökkentéssel magához  $A$ -hoz el nem jutunk. Ezért  $B$  kerülete  $A$  kerületénél nagyobb. —



30

**B** Tételünkben szerepelt az a megszorítás, hogy a tartalmazó sokszög egyszerű. Bizonyításunk ezt a megszorítást kihasználta, amikor arról szólt, hogy  $B_1$  határa hogyan keletkezik  $B$  határából. Bebizonyítjuk itt, hogy a tétel ilyen megszorítás nélkül is helyes.

Ehhez először az előző szakasz tárgyához csatlakozva megemlítjük, hogy ha egy sokszögnek több oldala helyezkedik el ugyanazon az egyenesen, akkor ezeknek az oldalaknak az összege a többi oldal összegénél kisebb. A többi oldalból ugyanis olyan töröttvonalak alakulnak, amelyeknek a végpontjai a szóban forgó egyenesen helyezkednek el, valamint esetleg olyan sokszögvonalak is, amelyeknek nincs oldaluk ezen az egyenesen. Ha az utóbbiakat elhagyjuk, a töröttvonalakat pedig a végpontjaikat összekötő szakaszokkal pótoljuk, akkor a hosszúságot csökkentve olyan szakaszokhoz jutunk, amelyek az egyenesen elhelyezkedő oldalakat lefedik. Ezeknek az oldalaknak az összege tehát az imént kapott szakaszok összegével egyenlő vagy még kisebb.

Ez után az előkészítés után a tételünkre adott bizonyítást majdnem változatlanul elismételhetjük úgy, hogy a tartalmazó sokszögről semmit se tételezzünk fel. Csak annyit kell megállapítanunk, hogy amikor  $B$  határáról  $B_1$  határára térünk át, akkor a levágott sokszögeknek csak olyan oldalait

vezetjük be új oldalként, amelyek a levágó egyenesen helyezkednek el. Az új oldalak összege tehát az előrebecsítettak szerint kisebb, mint az elhagyott oldalaké.

## 10. § Pont és egyenes távolsága

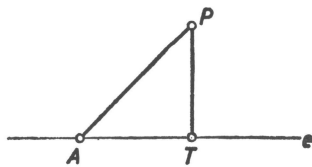
Már tudjuk, hogy pont és egyenes távolságának a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszát nevezzük. Egy-két évvel kapcsolatos tényt ismerünk meg.

**10.1 Tétel.** *Egy pontból egy rajta át nem haladó egyenes pontjaihoz vezető szakaszok közül legrövidebb az egyenesre merőleges szakasz.*

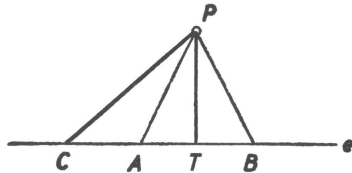
Más szóval: minden a pontból az egyeneshez ferdén húzott szakasznak a hossza nagyobb, mint a pontnak az egyenestől való távolsága.

*Bizonyítás.* Legyen  $PT$  merőleges  $e$ -re és az  $A$  pont  $e$ -nek  $T$ -től különböző pontja (31. ábra). A  $\triangle PTA$   $T$ -nél derékszögű, s ezért a  $PA$  átfogó a  $PT$  befogónál hosszabb. —

**B** Általában két alakzat távolságának nevezzük egy-egy pontjuk távolságát akkor, ha egymástól ennél kisebb távolságra levő pontjaik nincsenek. Tételünk bizonyítja, hogy amit pont és egyenes távolságának nevezünk, az ebben az értelemben is távolság.



31



32

**10.2 Tétel.** *Ha egy pontból egy rajta át nem haladó egyeneshez két szakaszt húzunk, akkor*

vagy egyenlők a szakaszok, továbbá az egyenessel alkotott hajlásszögek és végpontjaiknak a pontból húzott merőleges talppontjától való távolságai is egyenlők,

vagy különbözők a szakaszok, a hosszabbik hajlásszöge kisebb, és a hosszabbiknak végpontja van a talpponttól messzebb.

Tételünk az előző tételt magában foglalja.

*Bizonyítás.* a) Ha a  $P$ -ből húzott merőleges talppontja  $T$ , és két szakasz végpontjára  $TA = TB$  (32. ábra), akkor a  $PT$  egyenesre vonatkozó szimmetria folytán  $PA = PB$  és  $\angle PAT = \angle PBT$ .

b) Ha a két végpontra  $TC > TA$ , akkor feltehetjük, hogy  $T$ -nek ugyanazon az oldalán helyezkednek el, mert különben  $PT$ -re vonatkozó tükrözés vezetne el ehhez a helyzethez. Ha  $C$  a  $TA$  félegyenesen van, akkor a  $\triangle PTA$  derékszögű volta miatt a  $\angle TAP$  hegyes, és így a  $\angle PAC$  tompa. Ebből következik, hogy a  $\triangle PAC$ -ben  $PC > PA$ . A külső szög tétele szerint  $\angle PCA < \angle PAT$ .

c) Két a  $P$  pontból egyenesünkhöz húzott szakasz végpontja vagy egyenlő távolságra van a  $T$  talpponttól, vagy pedig e távolságok egyike a másiknál nagyobb. Ezért vagy a) kijelentéseinek, vagy pedig b) kijelentéseinek teljesülniök kell. —

Tételünk egyszerű következménye, hogy ha egy szakasz belső pontjait egy rögzített ponttal összekötjük, mindegyik adódó szakasz kisebb a végpontokhoz vezető szakaszok hosszabbikánál.

## 11. § Egybevágóság

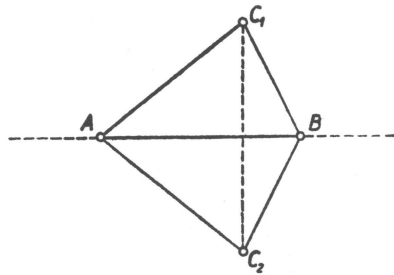
Az egybevágósággal, azaz távolságtartó leképezéssel 6.2-ben ismerkedtünk meg. Itt olyan feltételeket ismerünk meg, amelyekből két háromszög és általánosabban két sokszög egybevágósága következik. Targyalásunk egyaránt vonatkozik ugyanannak a síknak, vagy két különböző síknak két sokszögére.

Ha két sokszög egybevágóságát vizsgáljuk, többnyire feltesszük, hogy csúcsaikat és oldalait már egymáshoz rendeltük olyan módon, hogy a megfelelő oldalak megfelelő csúcsokat kötnék össze. Amint 6.2-ben már említettük, a vizsgált sokszögek csúcsainak felsorolása már mutatja azt, hogy melyek a megfelelőek. Az egybevágóságot azáltal bizonyítjuk majd, hogy a sokszögeket elmozgatással fedésbe hozzuk, mégpedig úgy, hogy a megfelelő alkatrészek fedjék egymást.

**11.1 Tétel.** *Két háromszög egybevágó, ha oldalaik páronként egyenlők.*

A tétel akkor is helyes, ha elfajuló háromszögek is szerepelnek. Az alábbi bizonyítás erre az esetre is érvényes.

*Bizonyítás.* Helyezzük el a síkban a két háromszöget úgy, hogy két-két megfelelő csúcs ugyanazokba az  $A, B$  pontokba jusson, s hogy a  $C_1, C_2$  pontok a háromszögek harmadik csúcsai ne legyenek ugyanannak az  $AB$  egyenes által határolt félsíknak a belsejében (33. ábra). Csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor a két háromszöget nem hoztuk máris fedésbe, amikor tehát a  $C_1, C_2$  pontok különbözők.



33

Minthogy az  $A, B$  pontok mindegyike egyenlő távolságra van  $C_1$ -től és  $C_2$ -től, a  $C_1C_2$  szakasz felezőmerőlegese áthalad ezeken a pontokon, tehát az  $AB$  egyenessel azonos. Eszerint a  $C_1, C_2$  pontok erre az egyenesre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Ha tehát az  $ABC_1\Delta$ -et az  $AB$  egyenesre tükrözzük, akkor fedí az  $ABC_2\Delta$ -et. —

Bizonyításunk mutatja, hogy ha két háromszög oldalai páronként egyenlők, akkor a háromszögek síkbeli vagy esetleg térbeli elmozgatással fedésbe hozhatók. Ez a megállapítás elfajuló háromszögekre is vonatkozik.

**Tétel.** *Minden egybevágóság szögtartó.*

Tételünk azt is kimondja, hogy egybevágó háromszögek megfelelő szögei egyenlők.

*Bizonyítás.* Ha az egybevágóság az  $A_1, B_1, C_1$  pontokhoz az  $A_2, B_2, C_2$  pontokat rendeli, akkor az  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$  (esetleg elfajuló) háromszögek megfelelő oldalai egyenlők, hiszen az egybevágóság távolságtartó. Ebből viszont következik, mint éppen láttuk, hogy ez a két háromszög elmozgatással fedésbe hozható. Igaz tehát, hogy  $A_1B_1C_1 \simeq A_2B_2C_2$ . —

**Tétel.** Két sokszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik és átlóik egyenlők.

Háromszögekre e tételt az imént mondtuk ki. Megjegyezzük, hogy több oldalú sokszögekre a tétel feleslegesen sokat kíván, mert az egybevágóság már kevesebből is következik.

*Bizonyítás.* Szakaszunk első tétele szerint három-három megfelelő s nem kollineáris csúcs két egybevágó háromszöget határoz meg. Fekteszük egymásra a két sokszöget úgy, hogy két ilyen egybevágó háromszög egymást fedje  $(ABC\Delta)$  és tegyük fel, hogy két további megfelelő csúcs,  $D_1$  és  $D_2$ , mégsem fedi egymást. Minthogy  $A$ ,  $B$  és  $C$  ugyanakkora távolságra van  $D_1$ -től és  $D_2$ -től, mind a három pont a  $D_1D_2$  szakasz felezőmerőlegesén kell, hogy legyen. Minthogy ez lehetetlen, mert nem kollineáris pontokról van szó, azért minden megfelelő csúcspár fedi egymást, és a két sokszög egybevágó. —

Tételünknek speciális eseteként kiemeljük, hogy a síkban egy pont helyzete egyértelműen meghatározott, ha egy háromszög három csúcsától mért távolságát ismerjük.

Sokszögek egybevágóságának megállapítására a következő tétel is alkalmas.

**Tétel.** Két egyszerű, sokszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik és szögeik egyenlők.

A tétel háromszögeknél is feleslegesen sokat kíván, hiszen háromszögeknél elég az oldalak egyenlőségét tudni. Más sokszögeknél sincs szükség minden oldal és szög egyenlőségének megállapítására.

*Bizonyításként* elég megfontolnunk, hogy ha úgy helyezzük egymásra a két sokszöget, hogy két-két megfelelő és egymáshoz csatlakozó oldaluk egymást fedje, akkor az oldalak és szögek egyenlősége alapján szomszédról szomszédra menve következik, hogy valamennyi csúcs fedi egymást. —

A Azt az eljárást, mikor a bizonyítandó állítás tagadásából lehetetlenségre következtetünk, s ezzel az állítás helyességét igazoljuk, *indirekt bizonyításnak* (lehetetlenségre következtetés, deductio ad absurdum) nevezzük. Az ilyen okoskodást szükségképpen csak torz ábrával kísérhetjük, hiszen olyat akarnánk ábrázolni, ami nincs. E szakasz harmadik tételének a bizonyítását is csak szándékkal torz ábrával kísérhetnők.

**B1** Az első tételt semmitmondónak hiheti valaki a következő indokolással: „két alakzat egybevágó, ha megfelelő távolságaik egyenlők; egy háromszögben csak három távolság van s így, ha ezek két háromszögben páronként egyenlők, akkor magából az egybevágóság fogalmából következik e háromszögek egybevágósága, és bizonyításra szükség nincs”. Igaza volna az okoskodónak, ha három pontból álló alakzatról volna szó. Akár háromszög vonalra, akár háromszög lemezre gondolunk, hibás az okoskodás, és a hiba az egybevágóság fogalmának félreértésén alapul. Két alakzat egybevágó, ha az egyiknek minden egyes pontjához úgy rendelhető hozzá a másiknak egy-egy pontja, és valamennyi pontjához annak valamennyi pontja, hogy az egyik alakzat bármely két pontjának távolsága a másik alakzat megfelelő pontjainak távolságával egyenlő (vö. 6.2 B2). Tételünk bizonyítása a háromszögek egymásra fektetése útján ilyen hozzárendelést szolgáltatott, s ezzel az egybevágóságot bizonyította. Az előadott okoskodás hibás lépése az a kijelentés volt, hogy „egy háromszögben csak három távolság van”, az egybevágóság értelmezésében viszont a háromszög bármely két pontjának távolsága szerepel, pl. két oldal felezőpontjának távolsága is.

**B2** A második tétellel kapcsolatosan teszünk néhány kiegészítő megjegyzést.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy minden egybevágóság szögtartó, de ez többféleképpen érthető. Érthető elsősorban úgy, hogy azt mondja ki, amit a bizonyításban igazoltunk, hogy ti. az  $A_1, B_1, C_1$  tárgyponatok  $A_2, B_2, C_2$  képeire  $A_1B_1C_1 \propto A_2B_2C_2$ .

Ebből a tulajdonságból már következik, hogy minden egybevágóság félegeyenestartó, hiszen a  $C$  pont akkor és csak akkor van az  $AB$  félegeyenes belsejében, ha  $BAC \propto 0$ . Minden egybevágóság rendelkezik tehát mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyekről 6.1 B4 szólt. Ezeket kiegészíthetjük

azzal, hogy a szakasz képe a távolságtartás miatt ugyanakkora szakasz, s hogy a szögvonala és a szögtartomány esetében második tételünk szerint a képekhez is ugyanakkora szögek tartoznak. Az utóbbi kijelentés helyessége közvetlenül csak a konvex szögtartományokra adódik, de ebből már következik, hogy a kijelentés a kiegészítő tartományokra, tehát a konkáv szögtartományokra is helyes. Ezek szerint az egybevágóság szögtartó a szögvonala és a szögtartományok tekintetében is.

Megemlítjük végül, hogy a második tétel szövegében szándékkal áll csak egybevágóság, nem pedig a sík egybevágósága, vagy síkbeli alakzatok egybevágósága. A tétel ugyanis mindenfajta egybevágóságra érvényes, a sík és a tér egybevágóságaira, valamint a síkbeli és a térbeli alakzatokon definiált egybevágóságra egyaránt (vö. 6.2 B1). A tételre adott bizonyításunk mindezt bizonyítja, hiszen az állítás minden esetben háromszögek szögeinek egyenlőségéről szól.

**B3** E szakasz tételeinek néhány nevezetes következményét említjük meg.

a) *Minden tükrözés szögtartó*, hiszen minden tükrözésfajta egybevágóság. Hangsúlyozzuk, hogy ez a megállapítás a térbeli tükrözésre is vonatkozik (vö. 6.3 B2), sőt a teljes sík és a teljes tér egybevágóságairól szólva szakaszunk második tételének éppen ez a lényeges mondanivalója, hiszen tükrözéssel és elmozgatással minden egybevágóság előállítható (lásd 6.5 B2).

b) *Egybevágó síkbeli alakzatok mozgással fedésbe hozhatók*. Itt nemcsak síkmozgásra, hanem a sík térbeli mozgására is gondolunk. Mivel az elmozgatással fedésbe hozható alakzatok egybevágók, azt is állítjuk, hogy két alakzat akkor és csak akkor egybevágó, ha elmozgatással fedésbe hozhatók. Bizonyításként elég a harmadik tételünk bizonyítására hivatkozni. Ez a bizonyítás szó szerint alkalmazható itt is, ha az alakzatok nem lineárisak. Ha viszont lineáris alakzatról van szó, akkor az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok helyett elég csak két pontról beszélni; ha ugyanis a megfelelő  $D_1, D_2$  pontok nem fednék egymást, akkor arra a lehetetlen következtetésre jutnánk, hogy a  $D_1 D_2$  egyenesnek két pontja van ugyanakkora távolságra a  $D_1, D_2$  pontoktól, pedig a  $D_1 D_2$  szakasz felezőpontja az egyetlen ilyen pont.

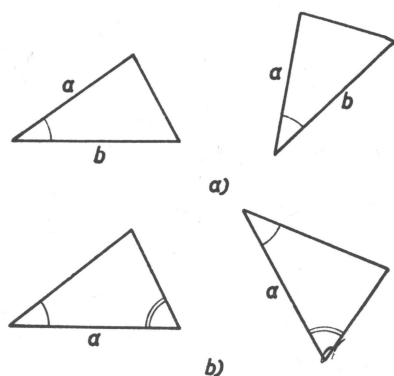
c) *Két egybevágó síkbeli alakzathoz található a síknak olyan egybevágósága, amely a két alakzatot egymáshoz rendeli*. Állítjuk tehát, hogy egy síkbeli alakzaton definiált egybevágóság kiterjeszthető a teljes síkon definiált egybevágósággá (vö. 6.2 B2). Az állítás nyomban következik az előzőből, hiszen a sík elmozgatása a teljes síkot is távolságtartóan képezi le.

**11.2 Tétel.** *Két háromszög egybevágó, ha*

a) *két oldal s az általuk közrefogott szög egyenlő vagy*

b) *egy oldal s a rajta nyugvó két szög*

a két háromszögben páronként egyenlő (34.ábra).



*Bizonyítás.* a) Ha két oldal s az általuk közrefogott szög egyenlő, akkor e két szöget úgy helyezhetjük egymásra, hogy a megfelelő szárak fedjék egymást. Minthogy az e szárakon levő háromszögdalok

egyenlők, e mozgatás a háromszögek valamennyi csúcsát, s így magukat a háromszögeket is fedésbe hozza.

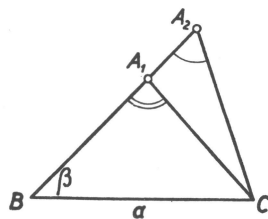
b) Ha egy oldal  $s$  a rajta nyugvó két szög egyenlő, akkor a két háromszöget úgy helyezhetjük egymásra, hogy az egyenlő oldalak egymást fedjék, mégpedig megfelelő végpontjaik kerüljenek egymásra, továbbá, hogy mindkét háromszög ugyanabban a közös oldalegyenes által határolt félsíkban legyen. A szögek egyenlősége miatt ez az elmozgatás a két szög másik szarait is egymásra helyezi. A két háromszöget tehát az új helyzetben ugyanazok az egyenesek határolják, s ezért a háromszögek fedik egymást. —

**Tétel.** Két háromszög egybevágó, ha bennük egy oldal, a szemközti szög és egy az oldalon nyugvó szög páronként egyenlő.

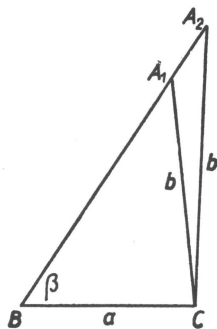
Ez a tétel az előzőnek b) részével együtt kimondja, hogy: két háromszög egybevágó, ha bennük egy oldal és két ehhez képest ugyanúgy elhelyezkedő szög páronként egyenlő.

*Bizonyítás.* Helyezzük egymásra a két háromszögnek egyenlő oldalakon nyugvó szögeit, s fedjék egymást az egyenlő oldalak is (35. ábra). Tegyük fel, hogy a háromszögek nem fedik egymást, tehát  $A_1$  és  $A_2$  nem azonos. E feltevésből ellentmondásra következtetünk. A két háromszögnek  $A_1$ -nél és  $A_2$ -nél levő szögeit tekintjük, amelyek a feltevés szerint egyenlők. Ámde az egyik külső szöge, a másik meg nem mellette fekvő belső szöge ugyanannak a háromszögnek, ezért egyenlők nem lehetnek. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy  $A_1$  és  $A_2$  azonos, s így a két háromszög egybevágó. —

A A második tétel közvetlenül adódik az elsőből, ha a háromszög szögeinek összegére vonatkozó tételt használhatjuk (lásd 13.1).



35



36

**11.3 Tétel.** Két háromszög egybevágó, ha két oldaluk, s ezek közül a nagyobbikkal szemben fekvő szögük páronként egyenlő.

*Bizonyítás.* Helyezzük egymásra a két rövidebb oldalt, s a rajtuk nyugvó egyenlő szögeket (36. ábra).

Ha a háromszögek harmadik csúcsai nem azonosak, és pl.  $BA_1 < BA_2$ , akkor  $CA_1$  az  $A_2BC\Delta$  belsejében

halad, s ezért a 10. § utolsó megjegyzése szerint kisebb a  $CB$  és  $\angle A_2$  oldalak nagybikánál, tehát  $\angle A_2$ -nél. A kapott  $\angle A_1 < \angle A_2$  egyenlőtlenség azonban nem teljesülhet, hiszen ezek a feltevés szerint egyenlő szakaszok. Ezért  $\angle A_1$  és  $\angle A_2$  azonos, s a háromszögek egybevágók. —

Megjegyezzük, hogy nem következik két háromszög egybevágósága abból, hogy két oldaluk s közülük a kisebbekkel szemközi szögek egyenlők. Erre a 32. ábrán  $\triangle ACP$  és  $\triangle BCP$  szolgáltat példát.

**11.4** Egy háromszög három oldala és három szöge a háromszögnek hat adata. E paragrafus előző tételeinek többsége azt mondja ki, hogy két háromszög egybevágó, ha e hat adat közül bizonyos három-három megfelelő adat egyenlő. Egybefoglalhatjuk tételeinket a következőképpen: Két háromszög egybevágósága következik abból, hogy három oldaluk és három szögük közül három-három megfelelő adat egyenlő, kivéve azt a két esetet, amikor két oldal s a kisebbikkel szemközi szög egyenlő, s amikor a három szög egyenlő. Az állítás utóbbi részét példával csak később támaszthatjuk majd alá (hasonló háromszögek).

Egy derékszögű háromszög három oldala és két szöge e háromszögnek öt adata. A mondottakat derékszögű háromszögre alkalmazva a következőt állíthatjuk: Két derékszögű háromszög egybevágósága következik abból, hogy három oldaluk és két hegyesszögük közül két-két megfelelő adat egyenlő, kivéve azt az esetet, amikor a két hegyesszög egyenlő. Gondoljuk meg ugyanis, hogy a legnagyobbik oldallal szemközi szöget mindig ismerjük.

Egy egyenlő szárú háromszög szára, alapja, szárszöge és alapján nyugvó szöge e háromszögnek négy adata. Erre az esetre a következőt mondhatjuk ki: Két egyenlő szárú háromszög egybevágósága következik abból, hogy száruk, alapjuk, szárszögük és alapjukon nyugvó szögük közül két-két megfelelő adat egyenlő, kivéve azt az esetet, amikor két szögadat egyezik. Gondoljuk meg ugyanis, hogy a szár megadása két oldal ismeretét, az alapon nyugvó szög pedig két szög ismeretét jelenti. Ha viszont az alap és a szárszög egyezik meg, akkor egyenlő szárú háromszögeinket szimmetriatengelyeikkel derékszögű háromszögekre vágjuk, és ezeknek az egybevágóságából következtethetünk az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságára, hiszen az alapok és szárszögek fele a derékszögű háromszögek befogóját és szögét adja.

Megemlítjük végül azt a következményt, hogy két szabályos háromszög egybevágó, ha oldaluk egyenlő, és hogy két egyenlő szárú derékszögű háromszög egybevágó, ha befogójuk vagy átfogójuk egyenlő.

**A** Egybevágósági tételeinket korábbi tárgyalásunkban is bőven alkalmazhattuk volna már, mi azonban szívesebben dolgozunk geometriai átalakításokkal (eltolással, forgatással, szimmetriával) a következőkben is.

Ha olyankor is az egybevágósági tételekkel dolgoznánk, amikor az egybevágóság pl szimmetria révén közvetlenül is belátható, a tárgyalást feleslegesen gépiessé, formálissá tennők, s az igazi geometriai tartalmat valamelyest elrejtjenők. Az ilyen formalizmust sokszor a kényelem szüli, gépiessége csábít, de igazi tudásunknak némileg torz külsőt ad.

Más a helyzet az axiomatikus vizsgálatoknál. Ott az egybevágósági tételek mindaddig nélkülözhetetlenek lehetnek, amíg az axiomatikus felépítés az imént említett geometriai átalakításokhoz el nem jutott.

**B1** Ha mindenféle háromszöget tekintünk, megállapíthatjuk, hogy alakjuk ismeretéhez három független valós számadat, pl. két oldal s az általuk közrefogott szög ismeretére van szükség. E ténny úgy szokás kifejezni, hogy „a háromszögek három paraméteresen végtelen sokaságot alkotnak”, vagy hogy „háromszorosan végtelen sok háromszög van”.

Adatokat függetleneknek akkor mondunk, ha nincs olyan összefüggés, amelyet ezeknek az adatoknak teljesíteniük kell. A háromszög alakjára vonatkozó bármilyen adat egy egyenlet fennállását jelenti a háromszöget meghatározó három adat között. Általában igaz az, hogy  $n$  számra vonatkozó  $n$  független egyenlet együttes teljesülése esetén az  $n$  szám csak véges sokféle értéket vehet fel,  $n-1$  független egyenlet együttes teljesülése esetén viszont az  $n$  szám még végtelenül sokféle értéket vehet fel.

Messzire vezetne, ha szabatosan körülírnók, hogy az „általában” szó itt mit jelent. Megelégszünk ezért ilyen laza szövegezéssel. Bővebb magyarázat nélkül hangsúlyozzuk azt a lényeges körülményt is, hogy csak olyan adatokra gondolunk, amelyek keveset változnak, ha az általuk jellemzett alakzat keveset változik.

A mondottakból következik, hogy egy háromszögre vonatkozó három független adat ismeretében általában tudjuk, hogy a háromszög alakja csak véges sokféle lehet; ezt röviden így szokták kifejezni: „a háromszöget három adat meghatározza”. Viszont két adat ismeretében általában tudjuk, hogy a háromszög alakja még végtelen sokféle lehet; röviden: „a háromszöget két adata nem határozza meg”.

Hasonló okoskodás szerint s hasonlóan laza szövegezéssel: a derékszögű s az egyenlőszárú háromszög alakjának ismeretéhez 2 adat szükséges és elegendő, viszont a szabályos, s az egyenlő szárú derékszögű háromszöget 1 adat határozza meg. Egy négyszög alakját 5 adat szabja meg.

Más a helyzet, ha nemcsak a sokszög alakját, hanem alakját és elhelyezkedését is figyelembe vesszük. Egy sík háromszögei 6, derékszögű és egyenlő szárú háromszögei 5, szabályos és egyenlő szárú derékszögű háromszögei 4, négyszögei 8 paraméteres sokaságot alkotnak. A tér háromszögei 9 paraméteres sokaságot alkotnak. Szabatosan ismét meg sem szövegezve állításunkat elmondhatjuk, hogy pl. egy síkbeli háromszög helyzetének ismeretéhez 6, térbeli háromszög helyzetének ismeretéhez 9 adatra van szükség. Vigyázni kell azonban a most mondottak alkalmazásánál, hogy egy kikötés hány „adatot” jelent, mert szövegezésünkben mindig számadatra gondoltunk. Így pl egy csúcs megadása a térben 3 adatot jelent, mert egy térbeli pont helyzetét pl. azáltal jellemezhetjük, hogy három síktól való távolságát adjuk meg; egy oldalegyenes ismerete 3 adatot jelent; ha tudjuk, hogy egy csúcs egy megadott egyenesen, illetve egy megadott síkon van, ez 2, illetve 1 adatot jelent.

**B2** Egybevágósági tételeinket így is fogalmazhatjuk: Ha van egyáltalában olyan háromszög, amelynek bizonyos három adata a megadott értékekkel egyenlő, akkor csak egyféle alakú van. Nem mondják ki tehát e tételek, hogy a három adat szabadon megválasztható, s mindig található megfelelő háromszög. Ez nem is igaz. Ha három oldal van adva, ezekre a háromszög-egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük. Ha egy oldal és két szög van adva, akkor ezek összege  $180^\circ$ -nál kisebb kell hogy legyen, azonban még e feltétel teljesülése mellett sem igazolható egyelőre a háromszög létezése. Ha két oldal és az általuk közrefogott szög vagy a nagyobbikkal szemben levő szög van adva, akkor csak annak a természetes kikötésnek kell teljesülnie, hogy az adott szög  $180^\circ$ -nál kisebb legyen. Állításainkat azáltal igazolhatjuk, hogy a háromszöget a megfelelő adatokból megszerkesztjük. Ezekkel a szerkesztésekkel később foglalkozunk (lásd 22.3).

**11.5** Egybevágósági tételeinkhez szorosan kapcsolódik, és azokat bizonyos mértékben kiegészíti a következő két tétel.

**Tétel.** *Ha két háromszögben két-két oldal egyenlő, akkor*

vagy mindkét háromszögben ugyanakkora a két oldal által közrefogott szög, és ugyanakkora a harmadik oldal is,

vagy pedig az egyik háromszögben nagyobb a két oldal által közrefogott szög, és nagyobb a harmadik oldal is.

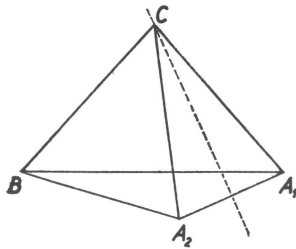
E tétel magában foglalja a három oldalról, és, a két oldalról s általuk közrefogott szögről szóló egybevágósági tételt. A tételt így is szövegezzük: két oldal szögét változtatva a szemközti oldal is változik, a kettő egyszerre növekszik vagy csökken.

*Bizonyítás.* a) Ha a két egyenlő oldal egyenlő szögeket fog közre, akkor 11.2 első tétele szerint a harmadik oldal is egyenlő. Ekkor tehát a tételünkben először említett eset következik be.

b) Ha a két oldal által közrefogott szög az egyik háromszögben nagyobb, mint a másikban, akkor helyezzük egymásra a két háromszöget úgy, hogy egyik egyenlő oldalpárjuk egybeessen, s a nagyobbik közrefogott szög lefedje a kisebbiket (37. ábra). A különbségükként adódó szög szögfelező egyenese ekkor a kisebbik szögön kívül halad. Ez azt jelenti, hogy az  $A_2, B$  pontok  $A_1A_2$  felezőmerőlegesének ugyanazon az oldalán vannak. 9.2 utolsó tétele szerint tehát  $BA_1 > BA_2$ , azaz a tételünkben másodiknak említett eset következik be.



c) A páronként egyenlő oldalak által közrefogott szögek vagy egyenlők, vagy pedig az egyik másiknál nagyobb. Ezért a tételben említett esetek valamelyike mindig bekövetkezik. —



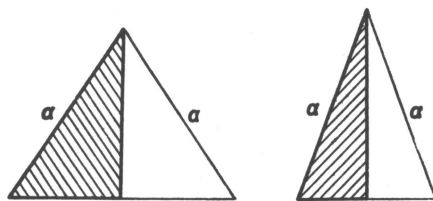
37

**Tétel.** Ha két derékszögű háromszög átfogója egyenlő és e háromszögeknek egy-egy hegyesszögét tekintjük, akkor

vagy mindkét háromszögben ugyanakkora e két szög s az ezekkel szemközi két befogó,

vagy ugyanabban a háromszögben van a két szög közül s a velük szemközi befogók közül a nagyobbik.

*Bizonyítás.* Tükrözzük mind a két derékszögű háromszöget arra a befogóra, amelyik a tekintett hegyesszöget határolja (38. ábra). Így két egyenlő szárú háromszöghöz jutunk, amelyeknek szárai egyenlők. E háromszögek szárszöge az eredetileg tekintett hegyesszög kétszerese, alapjuk pedig a tételben szereplő befogó kétszerese. Az előző tétel így éppen állításunk helyességét bizonyítja. —



38

Tételünkéből következik, hogy a tételben szereplő hegyesszögek melletti befogókra hasonlót mondhattunk volna ki, mint a szemköztiekre, azzal az eltéréssel, hogy a nagyobbik hegyesszög mellett a kisebbik befogó van.

Ha ugyanis a derékszögű háromszög átfogója változatlan marad, de egyik hegyesszöge csökken, akkor a másik növekszik, mert ha nem növekednék, akkor az új háromszög elférne a régiben, s ezért 9.1 második tétele szerint nem lehetne derékszögű.

Ez a kiegészítés azt is mutatja, hogy ha egy derékszögű háromszög átfogóját nem változtatjuk, és egyik befogóját növeljük, akkor a másik befogó csökken.

A Nem célszerű az első tételt túlzottan lerövidítve így szövegezni: „nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van és fordítva”, hiszen 9.2 első tétele is ugyanígy szólhatna.

## 12. § Párhuzamos egyenesek

Egy a szemlélettel alátámasztott újabb megállapítás, axióma bevezetése után a párhuzamos egyenesekre vonatkozó alapvető tényeket tárgyaljuk. Tételeink helyessége javarészt közvetlenül belátható a szemlélet alapján.

**Tétel.** Van olyan egyenes, amely egy megadott ponton áthalad s egy a ponton át nem haladó, megadott egyenessel párhuzamos.

b) Minthogy  $e$  áthalad az  $A$  ponton, tükörképeikre is áll, hogy  $f$  áthalad a  $P$  ponton. Tegyük fel, hogy az  $e, f$  egyeneseknek van közös pontjuk. Ha  $C$  ilyen közös pont, akkor  $C$ -nek  $B$ -re vonatkozó  $D$  tükörképe rajta van az  $e$  egyenesen, hiszen  $C$  rajta van az  $f$  egyenesen. Eszerint  $e$  tartalmazza a  $C, D$  pontokat, amelyek egymásnak  $B$ -re vonatkozó tükörképei. Ezért  $e$ -nek át kell haladnia a  $B$  ponton is, jóllehet megállapítottuk, hogy  $B$  nincs az  $e$  egyenesen. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy az  $e, f$  egyeneseknek nincs közös pontjuk, hogy tehát párhuzamosak, hiszen egy síkban vannak. —

Kiemeljük a bizonyításból, hogy ha egy egyenest egy rajta kívül elhelyezkedő pontra vonatkozólag tükrözünk, akkor párhuzamos egyeneshez jutunk.

**12.2** Kimutattuk, hogy egy egyeneshez bármely külső ponton át lehel párhuzamost húzni. A szemlélet alapján úgy tűnik, hogy csak egyet lehet, azonban ezt eddigi megállapításainkra támaszkodva logikai úton bizonyítani nem lehet. Ezért ezt a megállapítást, mint további okoskodásainknak egyik pillérét, hangsúlyozottan kiemeljük:

Egy ponton át tehát egy és csak egy olyan egyenes halad, amely egy a ponton át nem haladó egyenessel párhuzamos. Előző tételünk már kimondta, hogy legalább egy párhuzamos van. Axiómánk azt hangsúlyozza, hogy nincs több.

**B2** Választhattunk volna más tényt is új axiómaként való kimondásra: Erre minden olyan megállapítás alkalmas, amely szemléletesen közvetlenül belátható egyszerű tényt fejez ki, s amelyből eddigi

axiómáinkat is felhasználva pusztán logikai úton következtetni lehet a párhuzamossági axiómánkban leszögezett tényre. Maga Euklides a következő axiómát mondta ki: „Ha egy egyenes másik kettőt úgy metsz, hogy a metsző egyenes ugyanazon oldalán belül keletkező két szög összege a derékszög kétszeresénél kisebb, akkor a két egyenes határtalanul meghosszabbítva azon az oldalon találkozik, amelyik oldalon az a két szög van, amelyeknek összege két derékszögnél kisebb.” Párhuzamossági axiómaként könyvünk ezutáni részeinek szinte bármely tétele helytállhatna. A legnyilvánvalóbbak közül a következőket említjük: a háromszög szögeinek összege  $180^\circ$ ; vannak olyan háromszögek, amelyeknek szögei páronként megegyeznek, s amelyek nem egybevágók; bármely három ponton áthalad vagy egy egyenes, vagy egy kör; egy szögtartomány belsejének bármely pontján át lehet olyan egyenest húzni, amely a szög szárait metszi; ha egy háromszöget egy egyenesnek támasztva csúsztatunk, harmadik csúcsa is egyenesen mozog; van tetszőlegesen nagy területű háromszög. Bármily magától értetődő is e kijelentések egyikének vagy másikának helyessége, valamelyiknek axiómaként való kimondására szükség van.

**B3** A párhuzamossági axiómát elsőnek Euklides mondta ki. Fent idézett szövege *Elemek* c. művének ötödik posztulátuma (későbbi, de ugyancsak igen régi Euklides-szövegekben tizenegyedik axiómája). Már e műből is kitűnik, hogy Euklides megkísérelte ezt az axiómát a többiből levezetni. Több mint két évezreden át hiába iparkodtak a matematikusok, hogy ezt megtegyék. Munkájuk eredménye legfeljebb az volt, hogy a párhuzamossági axiómát egy másikkal pótolták.

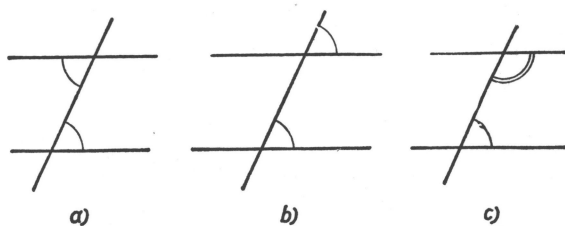
**B4** A 18. században felmerült az a gondolat, hogy talán a párhuzamossági axióma tagadását is ki lehetne mondani új axiómaként, s erre is lehetne egy geometriai tárgyalást felépíteni. Nehéz feladat ez, mert a szemlélettel ellentétesnek látszó állításokkal dolgozik. A cél az lett volna, hogy ebben a tárgyalásban ellentmondásra bukkanjanak, s ezúton igazolják, hogy a párhuzamossági axióma mégis csak következménye a többinek. A magyar Bolyai János (1802—1860, hadmérnök) és az orosz N. I. Lobacsevszkij (1793—1856, a kazáni egyetem tanára) voltak az elsők, akik egymástól függetlenül s szinte egy időben (1823—26. években) ilyen nem-euklideszi geometriát felépítettek, és arra a gondolatra jutottak, hogy abban nincs ellentmondás. Ez a geometria jóval bonyolultabb, mint a párhuzamossági axiómát elfogadó *euklideszi geometria*. Azt, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle *hiperbolikus geometriában* ellentmondásra nem is lehet jutni, kifogástalanul elsőnek F. Klein (1849—1925, a göttingai egyetem tanára) bizonyította be 1871-ben. Ez az eredmény szabatosabban azt jelenti, hogy a hiperbolikus geometriában sincs ellentmondás, ha az euklidesziben nincs (vö. 2.2 B2). Mi a párhuzamossági axióma elfogadásával becsuktuk a kaput, amely Bolyai János „új más világa” felé nyílik.

**B5** Csak a tapasztalat döntheti el azt, hogy valóságos terünkben az euklideszi geometria-e a helyes. Erre pl. a háromszög szögeinek pontos megméréseével lehetne felelni, meg kell azonban vizsgálni azt is, hogy azok a vonalak, amelyekhez 1.1 útmutatása szerint jutunk, kielégítik-e korábbi axiómáink követelményeit (vö. 2.2 B1). Méréseink azonban nem tökéletesen pontosak, és csak azt mutatják, hogy a valóságban az euklideszi geometria vagy szigorúan érvényes, vagy pedig nem érvényes, de a valóságot olyan jól megközelíti, hogy pontatlanságát fogyatékos méréseinkkel észlelni nem tudjuk. Ezért a gyakorlatban az euklideszi geometria mindenképpen megfelel, és pl. a mérnököt a mondott kétféleség nem is érdekli.

Amit a mérésekről mondtunk, természetesen csak a földi méretekre vonatkozik. Megvan a lehetőség annak, hogy valamikor pontosabb eszközökkel és nagyobb méretekben olyan mérést lehessen végezni, amely már cáfolja az euklideszi geometriát. Meg kell itt említeni, hogy az általános relativitáselmélet szerint az euklideszi geometria nem fedi teljesen a valóságot, viszont a hiperbolikus geometria sem teszi meg ezt. A valóság egyre pontosabb leírásához itt is egyre finomabb eszközökre van szükség.

**12.3** Ha két egyenest egy harmadikkal metszünk, a két metszéspontnál összesen nyolc szög keletkezik. Ha ezek közül két más-más metszéspontnál elhelyezkedő szöget ismerünk, akkor valamennyit ismerjük (vö. 3.6). Elég ezért, ha a következő tételben nem mind a nyolc szögről, hanem közülük csak kettőről szólnunk.

**Tétel.** *Ha két egyenest egy harmadikkal metszünk: és a keletkező nyolc szög közül két olyat szemelünk ki, amelyek más-más metszéspontnál, a metsző egyenes más-más oldalán és a metszett egyenesek között helyezkednek el, akkor a metszett egyenesek párhuzamosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy a két kiszemelt szög egyenlő legyen (40a ábra).*



40

*Bizonyítás.* a) Már 12.1-ben kimondtuk a feltétel elégségességét, vagyis azt, hogy ha a kiszemelt szögek egyenlők, akkor a metszett egyenesek párhuzamosak.

b) A párhuzamossági axiómából a feltétel szükségességére következtetünk, tehát arra, hogy ha párhuzamos egyeneseket metszettünk, akkor a kiszemelt szögek egyenlők. Ha ugyanis nem egyenlők, akkor a metszett egyenesek egyikét a metszéspont körül elforgathatjuk úgy, hogy a szóban forgó szögek egyenlőkké váljanak. a) szerint ekkor párhuzamos egyenesekhez jutottunk. Mivel egy ponton át csak egy párhuzamos fektethető, nem lehetett párhuzamos az az egyenes, amelyet elforgattunk. Ha tehát párhuzamos egyenesekből indultunk ki, akkor ez az eset nem következhetik be, azaz a kiszemelt szögeknek egyenlőknek kell lenniük. —

Kiemeljük tételünknek azt a speciális esetét, amely szerint két egyenes párhuzamos, ha mindkettő merőleges ugyanarra a harmadik egyenesre.

Újabb szükséges és elégséges feltételekhez jutunk, ha a tételben kiszemelt szögek egyike helyett ennek csúcsszögét vagy mellékszögét szerepeltetjük (40b — c ábra). A metszett egyenesek párhuzamosságának szükséges és elégséges feltétele tehát annak a két szögnek az egyenlősége, amelyek más-más metszéspontnál, a metsző egyenes azonos oldalán úgy helyezkednek el, hogy egyikük a metszett egyenesek között van, a másik meg nincs. Hasonlóképpen szükséges és elégséges feltétel az, hogy azok a szögek, amelyek a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán és a metszett egyenesek között vannak, kiegészítő szögek legyenek (vö. 12.2 B2).

**A** Ahelyett, hogy az  $E$  esemény akkor és csak akkor következik be, ha az  $F$  esemény bekövetkezik, azt is mondhatjuk, hogy  $F$  bekövetkezése  $E$  bekövetkezésének szükséges és elégséges feltétele. Mondhatjuk ugyanis, hogy  $F$  bekövetkezése szükséges ahhoz, hogy  $E$  bekövetkezzék, és azt is, hogy  $F$  bekövetkezése elégséges ahhoz, hogy ebből  $E$  bekövetkezésére következtethessünk.

Egy feltétel lehet szükséges, de nem elégséges. Így pl.  $AB > AC$  csak szükséges feltétele annak, hogy az  $\triangle ABC$ -nek  $C$ -nél derékszöge legyen. Ez utóbbi esemény „csak akkor” következhetik be, ha az első is teljesül.

Egy feltétel lehet elégséges, de nem szükséges. Így pl. két háromszög egybevágósága csak elégséges feltétele annak, hogy a háromszögek kerületei egyenlők legyenek. Ez utóbbi esemény mindenesetre bekövetkezik „akkor”, ha az első teljesül.

**B** Beszéltünk arról, hogy két egyenes átmetszésekor a keletkező szögek valamelyike az egyenesek között van. Ez pontosabban azt jelenti, hogy az egyik metszéspontnál elhelyezkedő szög határvonala tartalmazza a másik metszéspontot is.

**12.4** A következőkben a párhuzamossági axióma nevezetes következményeivel foglalkozunk.

**Tétel.** Ha a síkban egy egyenes két párhuzamos egyenes egyikét metszi, akkor metszi a másikat is.

Ez a tétel más fogalmazásban azt mondja ki, hogy ha egy egyenes két párhuzamos egyenes egyikével párhuzamos, akkor párhuzamos a másikkal is, hacsak nem azonos azzal.

*Bizonyítás.* Ha a tétel állítása hamis volna, ha tehát egy egyenes metszené az egyik párhuzamost, de a másikat nem, akkor volna a síkban két egymást metsző egyenesünk és egy harmadik, amelyiket

egyikük sem metsz. Ez azonban lehetetlen, mert két egyenesünk metszéspontján át a párhuzamossági axióma szerint csak egy olyan egyenes halad, amely a harmadik egyenest nem metszi. —

Kimondhatjuk tételünk alapján, hogy ha akárhány egymással párhuzamos egyenest adunk meg a síkban, akkor a sík minden további egyenese vagy metszi mindegyiket, vagy párhuzamos mindegyikükkel. Az is közvetlenül adódik a tételből, hogy ha a sík két egyenese párhuzamos ugyanazzal az egyenessel, akkor ez a két egyenes is párhuzamos egymással, s hogy egy egyenes nem lehet két egymást metsző egyenes mindegyikével párhuzamos, hanem kell, hogy legalább az egyiküket messe.

Két (nem feltétlenül különböző) egyenest *egyező állásúnak* mondunk, ha párhuzamosak vagy azonosak. Tételünk alapján kimondhatjuk, hogy ha  $a$  és  $b$  valamint  $b$  és  $c$  egyező állású egyenesek, akkor  $a$  és  $c$  is egyező állású. Egyező állású egyenesek szakaszait is egyező állásúnak mondjuk.

**A** Előfordul, hogy a párhuzamos szót annak jelölésére is használják, amit mi egyező állásúnak mondtunk, hogy tehát azonos egyeneseket is párhuzamosaknak mondanak. Ez a szokás zavart okozhat, hacsak nem szerepel az eredeti értelemben vett párhuzamosság jelölésére megkülönböztetésül mindig az, hogy párhuzamos és különböző. Ebben a könyvben a párhuzamos szó már eleve különbözőt is jelent.

**B** Utolsó állításunk kimondja, hogy az egyenesek állásának egyezése *transzitiv* reláció. Ez a reláció *reflexív* is (azaz: minden egyenes önmagával egyező állású), és *szimmetrikus* is (azaz: ha egy egyenes állása egy másikéval egyező, akkor ezé a másiké is egyező az elsőével). Ez a három tulajdonság biztosítja azt, hogy ez a reláció *osztályokat* létesít, vagyis hogy a sík egyenesei osztályokba sorolhatók úgy, hogy két (nem feltétlenül különböző) egyenes akkor és csak akkor egyező állású, ha ugyanabba az osztályba tartoznak. Az *állás* egy osztály egyenesének a közös tulajdonsága. Egy állást azáltal adhatunk meg, hogy a megfelelő egyenesosztály egy egyenesét megadjuk, de megadhatjuk egy ilyen egyenes szakasza vagy félegyenesét is.

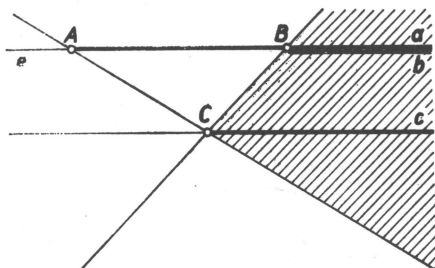
**12.5** Egy egyenesen elhelyezkedő félegyenesek irányáról már szó volt. Két párhuzamos félegyenest *egyező irányúnak* mondunk, ha kezdőpontjaik egyenese a két félegyenest nem választja el. Ha elválasztja, akkor a két félegyenes *ellentétes irányú*. Ebből máris következik, hogy ha egy félegyenest egy pontra tükrözzünk, akkor ellentétes irányú félegyeneshez jutunk.

Két párhuzamos félegyenes iránya vagy egyező, vagy pedig ellentétes, hiszen kezdőpontjaik egyenese a síkot két félsíkra vágja, és a két félegyenes vagy ugyanabban a félsíkban, vagy pedig más-más félsíkban van. Azt is látjuk, hogy egy megadott pontból egyetlenegy olyan félegyenes indul, amely egy megadott félegyenessel egyező irányú.

**Tétel.** Ha a sík egy félegyenesét két másik félegyenes mindegyikével egyező irányú, akkor ez a két félegyenes egymással egyező irányú.

Ha egy egyenesen elhelyezkedő félegyenesekről van szó, akkor már tudjuk, hogy az állítás helyes.

*Bizonyítás.* a) Először azt bizonyítjuk, hogy ha az  $e$  egyenes  $A, B$  pontjaiból kiinduló  $a, b$  félegyenesei egyező irányúak és pl.  $a$  tartalmazza a  $b$  félegyenest, akkor az  $e$  egyenessel párhuzamos  $c$  félegyenes vagy egyirányú  $a$ -val is és  $b$ -vel is, vagy pedig egyikkel sem (41. ábra).



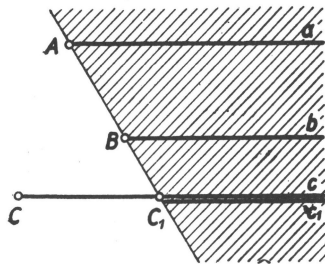
Tekintsük evégből az  $AC$  egyenes által határolt, az  $a$  félegyenest tartalmazó félsíkot, valamint a  $BC$  egyenes által határolt, a  $b$  félegyenest tartalmazó félsíkot. E félsíkok közös része egy  $C$  csúcsú szögtartomány, amely az  $A$  pontot nem tartalmazza, mert  $A$  az egyik félsíkon kívül helyezkedik el. Szögtartományunk határát tehát a  $CA$  félegyenest meghosszabbítása, valamint a  $CB$  félegyenest alkotja.

Minthogy  $c$  egyenese  $e$ -vel párhuzamos, nem választja el az  $A, B$  pontokat, ezért elválasztja az imént említett két félegyenest, és kettévágja az általuk határolt szögtartományt. Ez azt jelenti, hogy  $c$  vagy benne van ebben a szögtartományban, tehát a szerepeltetett két félsíkban is, azaz egyirányú  $a$ -val is és  $b$ -vel is, vagy pedig  $c$  az így elhelyezkedő félegyenest meghosszabbítása, s akkor nem tartozik egyik félsíkhhoz sem, tehát  $a$ -val is, meg  $b$ -vel is ellentétes irányú.

b) Ha a tételben szereplő félegyenések egy egyenesen vannak, akkor a tétel ismert tényt mond ki. Ha közülük csak kettő van egy egyenesen, akkor a tétel helyessége közvetlenül adódik a)-ból. Azt az esetet kell tehát csak vizsgálnunk, amikor a három félegyenest három párhuzamos egyenesen helyezkedik el.

Tekintsük az  $A, B, C$  kezdőpontú  $a, b, c$  félegyenéseket, amelyekről tudjuk, hogy  $a$  és  $b$ , valamint  $b$  és  $c$  egymással egyező irányú (42. ábra). Minthogy  $a$  és  $b$  egy irányú, az  $AB$  egyenes által határolt félsíkok egyike mindkettőt tartalmazza. Ez a félsík  $c$  egyeneséből is levág egy félegyenest, hiszen az előző

szakasz szerint  $AB$  metszi  $c$  egyenesét is. Eszerint  $c_1$  egyirányú  $a$ -val is és  $b$ -vel is. A már elintéztet esetre hivatkozva következik ebből, hogy  $b$  és  $c$  egyirányúsága miatt  $c$  és  $c_1$  is egyező irányú, tehát  $a$  és  $c_1$  egyirányúsága miatt  $a$  és  $c$  is egyező irányú. —



42

A most bizonyított tétel lehetővé teszi, hogy párhuzamos irányított egyenesek irányának egyezésétől vagy ellentétességéről szó lehessen, hiszen pozitív irányú félegyeneseik irányának egyezése vagy ellentétessége nem függ attól, hogy a félegyenéseket hogyan választottuk meg. Hasonlóképpen szó lehet párhuzamos irányított szakaszokról is arról, hogy irányuk egyező-e vagy ellentétes.

Félegyenésekről, irányított egyenesekről és irányított szakaszokról egyaránt elmondhatjuk, hogy irányuk csak akkor lehet egyező, ha állásuk is megegyezik, és hogy állásuk egyezése esetén irányuk még kétféle lehet.

**B1** Az irány egyezéséről hasonlóan mondhatunk, mint amit 12.4 B-ben az állás egyezéséről mondtunk. Ehhez meg kell jegyeznünk, hogy azonos félegyenéseket egyező irányúaknak mondunk. Az irány egyezése is reflexív, szimmetrikus és tranzitív reláció, amely a sík félegyenesein belül osztályokat létesít. Az *irány* egy osztály félegyeneseinek a közös tulajdonsága. Egy irányt azáltal adhatunk meg, hogy a megfelelő félegyenest megadjuk, de megadhatjuk megfelelő irányított egyenes vagy irányított szakasz által is.

**B2** A sík el nem fajuló félegyenestartó leképezéseiről 12.1 B és az irányok egyezésének definíciója alapján kimondhatjuk, hogy az irányok egyezését megtartják, hogy tehát az egyenesállások, valamint az irányok körén belül is leképezést létesítenek. Beszélhetünk tehát pl. arról, hogy egy síkmozgás egy adott irányt milyen irányba visz át.

**B3** Talán feleslegesen bonyolultnak tartja az olvasó az irány bevezetését, mert arra gondol, egyszerűbb volna azokat a félegyenéseket mondani egyező irányúaknak, amelyek eltolással egymásba vihetők át.

Ez a definíció azonban csak akkor állja meg a helyét, ha már kimondása előtt tudjuk, hogy az eltolások csoportot alkotnak. Ezt valóban be is bizonyítjuk a következő szakaszban, de éppen az irány fogalmára támaszkodva. Felmerülhet ezért az a gondolat, hogy másként kellene ezt a tényt bizonyítani, mégpedig 14.4 módszerével. Ott az eltolást azzal jellemezzük, hogy minden pont ugyanakkora távolságra mozdul el és ugyanabban az irányban. Ez a módszer tehát megint csak akkor használható, ha az irány fogalmát előzetesen már tisztáztuk.

**12.6** A sík eltolásainak azokat a síkmozgásokat neveztük, amelyeknél a síknak egy egyenes  $e$  önmagában mozog. Közéjük soroltuk a helyben hagyást, az  $e$  el nem tolást is.

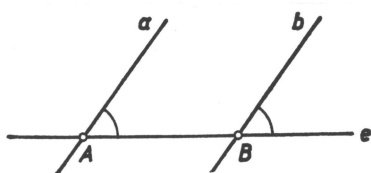
**Tétel.** A sík egyenesei akkor és csak akkor vihetők át eltolással egymásba, ha egyező állásúak.

Állítjuk tehát, hogy egy egyenes eltolható megadott, vele egyező állású helyzetbe, s hogy minden eltolás egyező állású egyenesbe viszi, azaz vagy helyben hagyja, vagy párhuzamos helyzetbe juttatja.

*Bizonyítás.* a) Azt bizonyítjuk, hogy ha a síkot az  $e$  egyenes mentén eltoljuk, akkor bármely  $a$  egyenes önmagával egyező állású  $b$  helyzetbe jut.

Ha  $a$  és  $e$  egyező állásúak, akkor ez a belőlük eltolással keletkező  $b$  és  $e$  egyenesekre is áll, hiszen azonos egyenesek azonos egyenesekbe és közös pont nélküliek közös pont nélküliekbe jutnak. Ebből az előző szakasz szerint következik, hogy  $a$  és  $b$  is egyező állású.

Ha  $a$  metszi az  $e$  egyenest az  $A$  pontban, és az eltolás az  $A$  pontot  $B$ -be viszi, akkor  $B$  a  $b$  egyenesen van (43. ábra). Minthogy az eltolás a szögek nagyságát nem változtatja meg, az  $a$ ,  $e$  egyenesek által alkotott szögek rendre ugyanakkorak, mint a  $b$ ,  $e$  egyenesek által alkotott szögek. Két ilyen szög egyenlőségéből az előző szakasz szerint következik az, hogy  $a$  és  $b$  párhuzamosak, tehát egyező állásúak is.



43

b) Azt kell bizonyítanunk, hogy az  $a$  egyenest eltolással átvihetjük egy megadott,  $a$ -val egyező állású  $b$  egyenesbe. Legyen  $A$  és  $B$   $e$  két egyenes egy-egy pontja. Toljuk el az  $a$  egyenest az  $AB$  egyenes mentén úgy, hogy  $A$  a  $B$  helyzetbe jusson.

A kapott egyenes a) szerint  $a$ -val egyező állású, kell tehát hogy  $b$ -vel azonos legyen, hiszen tartalmazza a  $b$  egyenes egy pontját, a  $B$  pontot. —

Valamivel többet bizonyítottunk annál, mint amit a tétel kimondott. Bebizonyítottuk, hogy egy  $a$  egyenest eltolással egy megadott,  $a$ -val egyező állású  $b$  helyzetbe vihetünk úgy, hogy  $a$ -nak adott  $A$  pontja  $b$ -nek adott  $B$  pontját fedje.

**Tétel.** A sík félegyenesei akkor és csak akkor vihetők át egymásba eltolással ha egyező irányúak.

*Bizonyítás.* a) Először csak azt látjuk be, hogy ha két félegyenes egymással megegyező irányú, akkor a sík eltolása ezeket újból egymással megegyező irányú félegyenesekbe viszi. Ez az irány egyezőségének definíciójából közvetlenül adódik, mert az eltolás nem változtat sem azon a tényen, hogy egy félegyenes a másikat tartalmazza, sem azon, hogy két félegyenes kezdőpontjaik összekötő egyenesének ugyanazon az oldalán van.

b) Azt bizonyítjuk, hogy az eltolás a félegyenesek irányát nem változtatja meg. Elég ezt az adott irányú félegyenesek egyikére igazolni, hiszen ebből az előző bekezdés alapján következik, hogy az állítás mindre is áll.

Toljuk el a síkot az  $e$  egyenes mentén. Az  $e$  egyenesen elhelyezkedő félegyenesekről tudjuk, hogy ez az eltolás az irányukat nem változtatja meg. Nem változik meg azoknak a félegyeneseknek az iránya sem, amelyeknek csak a kezdőpontja van az  $e$  egyenesen, hiszen az  $e$  egyenes által határolt félélsíkok az eltolás során helyben maradnak. Ezzel már be is fejeztük állításunk igazolását, hiszen  $e$  egy pontjából kiindulva tetszőlegesen megadott irányú félegyenes húzható.

c) Azt kell még bizonyítanunk, hogy ha két egy irányú félegyeneset adunk meg, akkor az egyiket eltolással a másikba vihetjük át. Toljuk el evégből a síkot a félegyenesek kezdőpontjait összekötő egyenes mentén úgy, hogy az egyik félegyenes kezdőpontja a másik kezdőpontjába jusson. Ez az eltolás b) szerint nem változtatta meg a félegyenes irányát, és ezért új helyzete csak a másik megadott félegyenes lehet, hiszen egy pontból csak egy ilyen irányú félegyenes indul ki. —

**Tétel** *A sík két eltolásának egymásutánja a sík egy eltolását adja.*

Ha a két eltolás azonos egyenes mentén történt, akkor már 2.4-ben kimondott tényről van szó.

*Bizonyítás.* Minthogy síkmozgásokról van szó, és a síkmozgást egy félegyenes kezdő és vég helyzete egyértelműen meghatározza, ezért csak azt kell belátnunk, hogy egy félegyeneset a kétszeri eltolás olyan helyzetbe visz, amelybe egyetlen eltolással is átvihető. Az előző tétel szerint a félegyenes iránya a kétszeri eltolásnál változatlan marad, és így kívánt tulajdonságú eltolás is van. —

**B1** Utolsó tételünk alapján kimondhatjuk, hogy a sík eltolásai csoportot alkotnak. Ez a tranzlációs csoport a síkmozgások csoportjának alcsoportja. Azok a síkmozgások alkotják, amelyek iránytartók.

**B2** Általánosságban mondhatjuk, hogy két egybevágó síkbeli alakzat *állása* megegyező, ha a két alakzat átvihető eltolással egymásba. Hasonló ez a kijelentés ahhoz, hogy a mozgás az alakot nem változtatja meg.

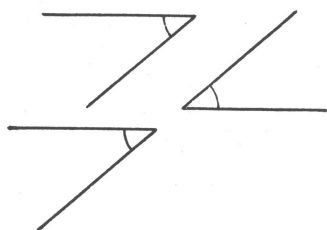
Az állás szót a most bevezetett értelemben félegyenesekre és szakaszokra nem használjuk, mert ha ezek állásáról beszélünk, akkor az ezeket tartalmazó egyenes állására gondolunk, tehát nemcsak az egyező irányú, hanem az ellentétes irányú félegyeneseket is egyező állásúaknak mondjuk.

**12.7 Tétel.** *Ha két konvex szög szárai páronként egyező vagy páronként ellentétes irányúak, akkor a két szög egyenlő.*

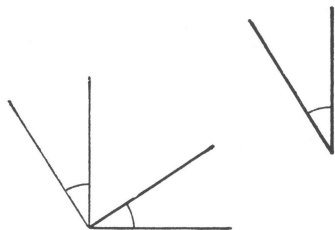
A szögeket az első esetben *egy állású szögeknek*, a másodikban pedig *váltószögeknek* mondjuk. Ilyen szögek már 12.3-ban is szerepeltek. Tételünk kimondja, hogy az egy állású szögek is, a váltószögek is egyenlők (44. ábra).

*Bizonyítás.* Elegendő az egy állású szögekkel foglalkoznunk, mert váltószögek esetében az egyik szög csúcsszöge egy állású a másik szöggel. Egy állású szögek viszont egyenlők, mert az az eltolás, amelyik az egyik szög csúcsát a másikéba viszi, a szög szárait is a másik szög száaira fekteti, hiszen az eltolás a szárok irányát nem változtatja meg. —

Tételünk szerint a konvex szög nagysága csak a szárok irányától függ, és a csúcs megválasztásától független. Beszélhetünk ezért irányok szögéről. Szó lehet ilyen indokolással irányok irányított szögéről is. Az irányokat természetesen félegyenesekkel vagy irányított szakaszokkal is megadhatjuk. Egyező irányú félegyenesek és irányított szakaszok hajlásszöge nullszög.







45

A bizonyított tétel alapján kimondhatjuk, hogy egyenesek és szakaszok hajlásszöge csak az állásuktól függ. Párhuzamos egyenesekről és szakaszokról azt mondjuk, hogy hajlásszögük nullszög.

Megállapíthatjuk, hogy ha két konvex szög szárainak egyik párja egy irányú, másik párja pedig ellentétes irányú, akkor ezek kiegészítő szögek. Az ilyen szögeket társszögeknek mondjuk.

Ha két konvex szög szárai páronként párhuzamosak, akkor csak annyit állíthatunk, hogy vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek. Derékszögek esetében természetesen egyszerre egyenlők és kiegészítő szögek is. Két párhuzamos szárú hegyesszög egyenlő, mert kiegészítő szögek nem lehetnek. Így azt is kimondhatjuk, hogy páronként párhuzamos egyenesek hajlásszöge egyenlő.

**Tétel.** *Ha a síkban két konvex szög szárai egymásra páronként merőlegesek, s az egyik szög száraiból a másik szög szárai ugyanolyan irányú  $90^\circ$ -os elforgatással keletkeznek, akkor a két szög egyenlő (45. ábra).*

*Bizonyításként* elég arra gondolni, hogy ha az egyik szöget csúcsa körül  $90^\circ$ -kal elforgatjuk, az előző tétel értelmében a másikkal egyenlő szöget kapunk. —

A tétel közvetlen következménye, hogy ha két konvex szög szárai páronként merőlegesek, de az egyik száraiból a másik szárai ellentétes irányú  $90^\circ$ -os elforgatásokkal keletkeznek, akkor ezek kiegészítő szögek. Ha tehát két konvex szög száraiból csak azt tudjuk, hogy páronként merőlegesek, akkor csak annyit állíthatunk, hogy a szögek vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek. Páronként merőleges szárú hegyesszögek viszont egyenlők, mert kiegészítő szögek nem lehetnek. Ha tehát két metsző egyenespár egymásra páronként merőleges egyenesekből áll, akkor hajlásszögük egyenlő.

**B1** Az utolsó tételnél általánosabbat kapunk, ha  $90^\circ$  helyett tetszőleges szöget szerepeltetünk. A bizonyítás ugyanilyen változtatással szintén helyes marad. A derékszög esetét csak jó alkalmazhatósága miatt szokás kiemelni.

**B2** E szakasz minden állítását kimondhatjuk irányított szögtartományokra is. Ezt úgy értjük, hogy mindenütt a kezdőszárak irányát is és a végszárak irányát is egymással vetjük egybe. Ha irányított szögtartományokról szólva egy állású szögekről, váltószögekről vagy merőleges szárú szögekről beszélünk, ezt mindig így értjük. Okoskodásaink változatlanul helytállóak maradnak ebben a gondolatkörben is.

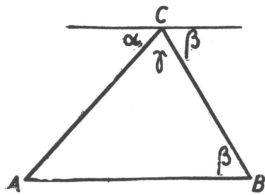
## 13. § Sokszögek szögei

Célunk a háromszög szögeinek összegére, s általában a sokszögek szögeinek összegére vonatkozó szabályok levezetése.

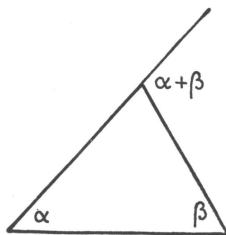
**13.1 Tétel.** *A háromszög szögeinek összege  $180^\circ$ .*

*Bizonyítás.* Húzzunk az  $ABC$  csúcsán át párhuzamosat az  $AB$  oldallal (46. ábra). A  $CA$  és  $CB$  félegyenesek három részre osztják a  $C$ -nél előálló egyenesszöget. E részek egyike a háromszög szöge, a másik kettő pedig váltószögek egyenlősége miatt a háromszög másik két szögével egyenlő. —

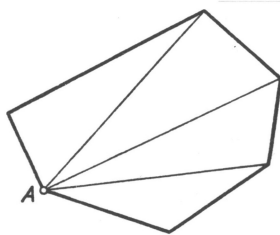
A tételből azonnal következik, hogy egy derékszögű háromszög hegyesszögei pótshögek. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög hegyesszögei tehát  $45^\circ$ -osak. A szabályos háromszög szögei  $60^\circ$ -osak, mert egyenlők.



46



47



48

**Tétel.** *A háromszögnek egy külső szöge a nem mellette fekvő belső szögek összegével egyenlő (47. ábra).*

Tételünk 9.1 első tételét magában foglalja.

*Bizonyításként* megjegyezzük, hogy a külső szög melletti belső szög a külső szöget is és a másik két belső szög összegét is  $180^\circ$ -ra egészíti ki. —

**B** Már harmadszor látjuk be, hogy derékszögű és tompaszögű háromszög másik két szöge hegyesszög (vö. 8.1 B és 9.1).

**13.2 Tétel.** *Konvex  $n$ -szög szögeinek összege  $(n-2)\pi$ .*

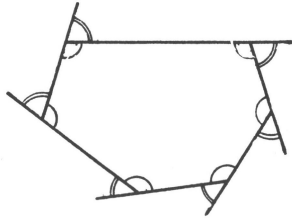
E tételt az  $n = 3$  esetben már ismerjük.

*Bizonyítás.* Kössük össze a konvex sokszögnek egy  $A$  csúcsát a többi csúccsal (48. ábra). A két szomszédos csúccsal  $A$ -t oldalak kötik össze, a többi  $n-3$  csúccsal átlók. Ezek az átlók egygyel több, tehát  $n-2$  háromszögre darabolják a sokszöget, hiszen egyetlen átló már két részre darabol. A keletkező  $n-2$  háromszög mindegyikében  $n$  a szögek összege. A sokszög szögei mindezekből a szögekből tevődnek össze. Ezért a sokszög szögeinek összege  $(n-2)\pi$ . —

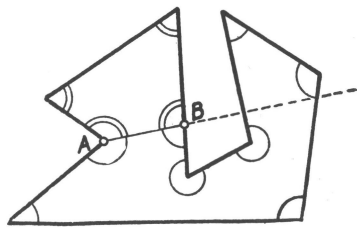
**Tétel.** *Konvex sokszög külső szögeinek összege  $360^\circ$ .*

*Bizonyítás.* Minthogy minden külső szög kiegészítő szöge egy belső szögnek, azért valamennyi belső és külső szög összege  $\pi$ -nek annyszorosa, ahány csúcs van (49. ábra). A külső szögek összegét

megkapjuk, ha a kapott  $n\pi$  értékből a belső szögek összegét levonjuk. Az előző tétel szerint tehát a külső szögek összege:  $n\pi - n - 2\pi = 2\pi = 360^\circ$ . —



49



50

### 13.3 Tétel. $n$ -szög szögeinek összege $(n-2)\pi$

Az előző pontban e tételt konvex sokszögekre már bizonyítottuk. A hangsúly most a konkáv sokszögeken van. Kiemeljük a tételnek azt a speciális esetét, hogy négyszög szögeinek összege  $360^\circ$ .

*Bizonyítás.* A tételt a sokszög konkáv szögeinek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha ez a szám 0, akkor tételünk helyes, mert konvex sokszögről van szó. Elég tehát azt bizonyítanunk, hogy ha egy konkáv sokszöget tekintünk, és feltesszük, hogy a tétel a kevesebb konkáv szöggel rendelkezőkre teljesül, akkor teljesül a tekintett konkáv sokszögre is.

Legyen  $A$  a tekintett konkáv  $n$ -szög egyik konkáv szögének a csúcsa. Bontsuk fel ezt a konkáv szöget egy  $A$  kezdőpontú félegyenessel két konvex szögre. Ezt a félegyenest úgy választjuk meg, hogy ne haladjon át sokszögünk egyik csúcsán sem. Ez lehetséges, mert ez a megkötés csak véges sok félegyenes választását tiltja, hiszen a sokszögnek véges sok csúcsa van. Minthogy a választott félegyenes egésze nem lehet a sokszög belsejében, kell, hogy a sokszög valahány oldalát messe. E véges sok metszéspont közül legyen  $B$  az, amelyik  $A$ -hoz legközelebb van. Az  $AB$  szakasz tehát a

sokszög belsejében halad, és azt két sokszögre, egy  $n_1$  oldalú és egy  $n_2$  oldalú sokszögre bontja fel (50. ábra).

Ha összeszámláljuk ennek a két sokszögnek a csúcsait, akkor ebben a számlálásban eredeti sokszögünk minden csúcsa szerepel, mégpedig  $A$  kivételével mindegyik egyszer,  $A$  maga kétszer. Szerepel ezenkívül a  $B$  pont is, mégpedig kétszer. Az  $A, B, B$  számlálási többlet miatt tehát

$$n_1 + n_2 = n + 3.$$

A két részsokszög mindegyikének kevesebb a konkáv szöge, mint az eredetinek volt, hiszen az  $A$  csúcsú konkáv szög egyikben sem szerepel. Indukciós feltevésünk szerint ezért a részsokszögek szögeinek összege  $(n_1-2)\pi$  és  $(n_2-2)\pi$ . Mindezek a szögek együttesen az eredeti sokszög szögeit, valamint  $B$ -nél egy egyenesszöget szolgáltatnak. Ebből következik, hogy eredeti sokszögünk szögeinek összege

$$(n_1-2)\pi + (n_2-2)\pi - \pi = (n_1 + n_2 - 5)\pi = n - 2\pi. \quad \text{—}$$

## 14. § Speciális négyszögek

A legegyszerűbb négyszögfajtákkal foglalkozunk. Ezeket valamilyen szimmetria, meghatározó adataik közötti egyenlőség, vagy oldalaiknak párhuzamossága jellemzi.

**14.1** Ha egy négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos, *parallelogrammának* nevezzük. A parallelogramma felfogható két sáv közös részeként.

Ha egy négyszög szögei mind egyenlők, *téglalapnak* (derékszögű parallelogramma, téglány) nevezzük. Mivel a szögösszeg  $360^\circ$ , a téglalap minden, szöge derékszög. Ebből következik 12.3 alapján, hogy a szemközti oldalak párhuzamosak, hogy tehát a téglalap is parallelogramma. A téglalap felfogható két egymást merőlegesen metsző, azaz merőleges határvonalú síksáv közös részeként. Ha egy parallelogramma nem derékszögű, azaz nem téglalap, akkor *ferdeszögűnek* mondjuk.

Ha egy négyszög oldalai mind egyenlők, *rombusznak* nevezzük. Belátjuk majd (a következő szakaszban), hogy a rombusz is parallelogramma.

Ha egy négyszögnek az oldalai is és a szögei is egyenlők, *négyzetnek* nevezzük. A négyzet tehát szintén parallelogramma, mégpedig olyan, amelyik téglalap is és rombusz is. A négyzetre is áll az, hogy szögei derékszögek.

Ha egy négyszögnek van két párhuzamos oldala, *trapéznek* nevezzük. E két párhuzamos oldal a trapéz két *alapja* (alpvonal és fedővonal), a másik kettő a két *szára*. A trapéz párhuzamos oldalegyeneseinek távolsága a trapéz *magassága*. Ez az elnevezés a parallelogrammákra is vonatkozik, hiszen azoknak is vannak párhuzamos oldalai, sőt bármelyik oldaluk alapnak tekinthető.

Ha egy négyszög két-két szomszédos szöge egyenlő, *szimmetrikus trapéznek* (egyenlő szárú trapéz, húrtrapéz) nevezzük. A szögek egyenlőségéből, valamint abból, hogy a szögösszeg  $360^\circ$ , következik ugyanis, hogy a négyszögnek van két-két szomszédos kiegészítő szöge, és ebből 12.3 alapján az, hogy van két párhuzamos oldala, tehát valóban trapézzel van szó. Azt is belátjuk majd (14.9-ben), hogy az ilyen trapéz szimmetrikus, s hogy szárai egyenlők.

Ha egy négyszögnek két-két szomszédos oldala egyenlő, *deltoidnak* mondjuk.

**A1** Az olyan ferdeszögű parallelogrammára, amelynek az oldalai nem mind egyenlők, amely tehát nem rombusz, használatos a *romboid* megjelölés. Ennek a szónak a használata ellen szól, hogy nincs szükség rá, hogy továbbá nemzetközileg el nem terjedt megjelölés, sőt van olyan nyelv, amely ezzel a szóval egészen mást jelöl.

Itt említjük, hogy régebben a „trapezoid” megnevezést is használták az olyan négyszögre, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai.

Örvendetesnek kell mondani, hogy az ebben a megjegyzésben említett elnevezések kiveszőben vannak, mert bevezetésük felesleges teher. Mi ezeket a megnevezéseket szándékkal kerüljük.

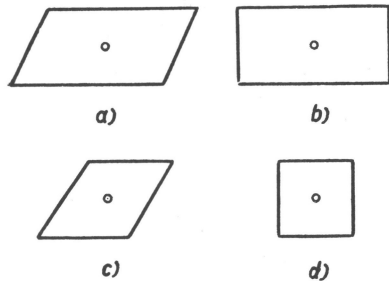
**A2** Helytelen azt mondani, hogy egy parallelogramma vagy négyzet, vagy rombusz vagy téglalap, vagy egyéb (általános) parallelogramma. Hiszen a definíció szerint pl. a négyzet egyben rombusz is, s egyben téglalap is. Definícióink célszerű, mert mindaz, amit pl. téglalapokról mondunk, négyzetekre is áll (vö. 8.1 A és 14.8 A).

**B** Sokszor jelent gondot a matematika felépítésében a definíciók megválasztása. Ez nem azt tükrözi, mintha a definiálás mikéntjétől függenének a tények, hiszen a geometria tényeit a valóságból merítjük. A definíciók a tényekre vonatkozó szóhasználatunkat szabályozzák. Ügyes szóhasználattal világosabban fejezzük ki a tényeket, és egyszerűbbé válik a mondanivalónk, ügyetlen szóhasználat mellett viszont sok kivétel és sok esetszétválasztás szerepel.

Definícióink fogalmakat is teremtenek. Fontos, hogy e fogalmak a valóságból merített és a mindennapi szóhasználatban sokszor pontosan ki nem alakult fogalmakat fedjék, s egyben szabatosan körülhatárolják. E szabatos körülhatárolás mikéntje az, amely a mondott értelemben ügyes vagy ügyetlen lehet.

Rá akartunk mutatni arra, hogy a definíciók megválasztása figyelmet érdemel. A jó definíciók tudományunk előrehaladását is szolgálják.

**14.2** A megismert négyszögfajták közül elsőnek a paralelogramma tulajdonságaival foglalkozunk (51. ábra).



51

**Tétel.** Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha:

- a) két-két szembenfekvő oldala párhuzamos,
- b) két-két szembenfekvő oldala egyenlő,
- c) két-két szembenfekvő szöge egyenlő,
- d) két szembenfekvő oldala párhuzamos ,és egyenlő,
- e) a két átlója felezi egymást,
- f) a négyszög egy pontra nézve szimmetrikus.

Hat szükséges és elégséges feltételt adtunk meg arra, hogy egy négyszög paralelogramma legyen. Ha tehát egy négyszög e feltételek valamelyikét kielégíti, akkor kielégíti a többit is. Az a) feltétel kimondása a paralelogramma definíciójának megismétlése. Szokás dolga csak, hogy a paralelogrammát éppen ezzel a feltétellel definiáltuk.

*Bizonyítás.* Először a feltételek szükségességét látjuk be. Ha  $O$  egy átló felezőpontja s a paralelogrammát  $O$ -ra tükrözzük, akkor a szemközti oldalegyenesek helyett cserélnek, hiszen két párhuzamos egyenes szimmetrikusan helyezkedik el egy összekötő szakaszuk felezőpontjára. E tükrözés tehát önmagába viszi át a paralelogrammát. A paralelogramma szimmetriájából viszont következik, hogy a szemközti oldalak és szögek egyenlők, és hogy az átlók mindegyike szimmetrikus az  $O$  pontra, hogy tehát  $O$  a közös felezőpontjuk. Ilyen módon valamennyi feltétel szükségességét beláttuk.

A feltételek elégségességét egyenként kell megvizsgálnunk. A feltételeket a következő rendben vesszük sorra:

a) csak a definíció megismétlése.

f)-ből következik a), hiszen pontra szimmetrikus egyenesek párhuzamosak.

e) teljesülése esetén a négyszög csúcsai az átlók metszéspontjára páronként szimmetrikusak, és így f) teljesül.

d) teljesülése szintén biztosítja a centrálszimmetriát. Ha ugyanis a négyszöget egyik átlójának felezőpontjára tükrözzük, akkor ezen átló végpontjaiból kiinduló s az egyenlő oldalakat tartalmazó félegyenesek a váltószögek egyenlősége miatt helyet cserélnek. Az oldalak egyenlőségéből következik akkor, hogy a négyszög másik két csúcsa is szimmetrikusan helyezkedik el.

c)-nek következménye, hogy a négyszög szomszédos szögei kiegészítő szögek, hiszen kétszereseik összege a négyszög szögeinek összegével,  $360^\circ$ -kal egyenlő. Ebből pedig 12.3 alapján következik, hogy a) teljesül.

b) esetében egy átlót meghúzva egybevágó háromszögeket kapunk, mert mindhárom oldaluk páronként egyenlő. Ebből pedig következik, hogy e háromszögek szögei egyenlők, hogy tehát c) teljesül.

Feltételeink mindegyikéből, a többi esetleges közvetítésével, az a) feltétel teljesülésére következtettünk. Kimutattuk tehát, hogy feltételeink elégségesek is. —

Kiemeljük a bizonyításból, hogy a paralelogramma szomszédos szögei kiegészítő szögek, hogy a paralelogrammát egy átlója két egybevágó háromszögre bontja, s hogy az átlók metszéspontja a paralelogramma szimmetriacentruma vagy *középpontja* (centrum).

A b) feltétel elégségességéből következik, hogy a rombusz is paralelogramma, amint ezt 14.1-ben már kimondtuk.

Megállapíthatjuk, hogy a paralelogramma alakját két csatlakozó oldala és az általuk bezárt szög egyértelműen megszabja.

Tételünk alapján azt is kimondhatjuk, hogy ha két párhuzamos egyenest párhuzamosokkal metszünk, akkor a két egyenesből kimetszett, egymásnak megfelelő szakaszok egyenlők. Ez akkor is igaz, ha irányított szakaszokról van szó. A megfeleltetést úgy értjük itt, hogy egymásnak megfelelő szakaszok végpontjai (és kezdőpontjai) ugyanazon a metsző egyenesen vannak, és ha irányítjuk a két párhuzamos egyenest, akkor természetesen egyező irányt választunk rajtuk pozitív irányul. Ez utóbbi megállapodást mindig elfogadjuk, ha párhuzamos irányított szakaszokra vonatkozó egyenlőséget mondunk ki.

**B1** A paralelogrammának nincs további szimmetriacentruma (vö. 19.2 B1). Ez abból következik, hogy csúcs tükörképe egy szimmetriacentrumra vonatkozólag csak csúcs lehet. A szimmetriacentrum ezért a közös felezőpontja két olyan szakasznak, amelyek csúcsokat kötnek össze. Márpedig az átlók közös felezőpontján kívül nincs más ilyen tulajdonságú pont.

**B2** A paralelogramma szemközti oldalainak az egyenlőségéből következik, hogy a sík és a tér el nem fajuló félegyenestartó leképezései (vö. 6.1 B4) az egyező állású és egyenlő szakaszok egyenlőségét is megtartják. Ha ugyanis az egyenlő szakaszok párhuzamos egyeneseken helyezkednek el, akkor egy paralelogramma két szemközti oldalát adják, és paralelogramma képe 12.1 B szerint ugyancsak paralelogramma. Ha ugyanannak az egyenesnek két egyenlő szakaszáról van szó, akkor egy párhuzamos egyenes velük egyenlő szakaszának a közvetítésével adódik állításunk helyessége.

**14.3** Ebben és a következő szakaszban a paralelogramma megismert tulajdonságainak nevezetes következményeivel foglalkozunk.

Két párhuzamos egyenest összekötő párhuzamos szakaszok egyenlők, mert egy paralelogramma szemközti oldalai. Áll ez a párhuzamosokra merőleges szakaszokra is. E szakaszok közös hosszát a két párhuzamos egyenes *távolságának*, a párhuzamosok által határolt sáv *szélességének* nevezzük.

Két párhuzamos egyenes távolsága megadja tehát, hogy bármelyiküknek bármelyik pontja a másik egyenestől mekkora távolságra van. Azt is megállapíthatjuk, hogy a nem merőleges összekötő szakaszok hossza ennél a távolságnál nagyobb.

Két párhuzamos egyenes között húzhatunk olyan harmadik párhuzamos egyenest, amely mindkét előbbtől ugyanakkora távolságra van. Ezt a két párhuzamos egyenes *középpárhuzamosának*, a párhuzamosok által határolt sáv *középvonalának* nevezzük.

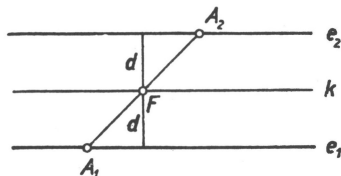
**Tétel.** *Két párhuzamos egyenest összekötő szakaszok felezőpontjai a középpárhuzamosokon vannak.*

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy a párhuzamos  $e_1$  és  $e_2$  egyenesek szimmetrikusan helyezkednek el egy  $A_1A_2$  összekötő távolságuk  $F$  felezőpontjára vonatkozólag (52. ábra). Az  $F$  ponton áthaladó  $e_1$ -gyel

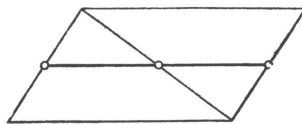
és  $e_2$ -vel párhuzamos  $k$  egyenesnek  $F$ -re vonatkozó tükörképe önmaga. A szimmetria miatt  $k$  és  $e_1$ , távolsága egyenlő  $k$  és  $e_2$  távolságával,  $k$  tehát a középpárhuzamos és  $F$  a középpárhuzamoson van. —

Kimondhatjuk azt is, hogy a középpárhuzamos a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyek a párhuzamosok összekötő szakaszait felezik, valamint azoknak, amelyek a párhuzamosoktól egyenlő távolságra vannak.

A parallelogramma szemközti oldalainak felezőpontját összekötő szakaszt a parallelogramma *középvonalának* nevezzük.



52



53

**Tétel.** *A parallelogramma középvonala*

- a) párhuzamos és egyenlő két parallelogrammaoldallal,
- b) áthalad a parallelogramma középpontján, és ez a felezőpontja.

*Bizonyítás.* a) Az előző tétel szerint a középvonal egyenese a nem felezett parallelogrammaoldalak középpárhuzamosa (53. ábra). Ezért párhuzamos azokkal. A középvonal a parallelogrammát két parallelogrammára bontja, mert ezeknek szemközti oldalai párhuzamosak. Ezért a középvonal egyenlő a nem felezett oldalakkal.

b) A középvonal az előző tétel értelmében áthalad az átlók felezőpontján, a parallelogramma középpontján. Minthogy ez a szimmetriacentrum, felezi a középvonalat. —

Kiemeljük tételünknek azt az alkalmazását, hogy ha a parallelogramma egyik oldalának felezőpontján át párhuzamost húzunk a másik két oldallal, akkor ez felezi a szemközti oldalt is.

Egy háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög *középvonalának* nevezzük.

**Tétel.** *A háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett háromszögoldallal és fele olyan hosszú.*

*Bizonyítás.* Ha a háromszöget és középvonalát ennek egyik végpontjára tükrözzük, az 53. ábrához jutunk. Az előző tétel szerint tehát a háromszög középvonala is párhuzamos a nem felezett oldallal. Ugyancsak e tétel szerint a háromszög középvonala fele a keletkezett parallelogramma középvonalának, ez pedig a nem felezett háromszögoldallal egyenlő. —

Kiemeljük tételünknek azt az alkalmazását, hogy ha a háromszög egyik oldalának felezőpontján át párhuzamost húzunk egy másik oldallal, akkor ez felezi a harmadik oldalt.

**14.4** A parallelogrammáról mondottak szoros kapcsolatban állnak az eltolásokkal.

**Tétel.** *Ha a síkot egy egyenese mentén eltoljuk, minden pont ugyanabban az irányban  $s$*

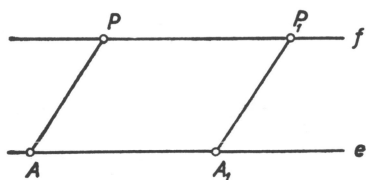
ugyanakkora távolságra mozdul el.

*Bizonyítás.* Először azt látjuk be, hogy ha a síkot az  $e$  egyenes mentén eltoljuk, akkor az  $e$ -vel párhuzamos  $f$  egyenesnek bármely  $P$  pontja az eltolás után is az  $f$  egyenesen van. Evégből  $P$ -ből  $e$ -hez vezető  $PA$  szakaszt húzunk (54. ábra). Az eltolás  $e$  szakaszt  $P_1A_1$  helyzetbe viszi és  $A_1$  az  $e$  egyenesen van. Minthogy az eltolás nem változtatja meg a szakaszok hosszát és állását,  $PA$  és  $P_1A_1$  egyenlő és párhuzamos. Így  $PA A_1 P_1$  paralelogramma és  $P P_1 \parallel A A_1$ , s ezért a  $P P_1$  egyenes csak  $f$  lehet.

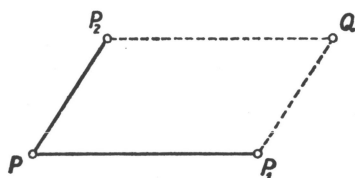
Következik az elmondottakból az is, hogy a  $P P_1$  és  $A A_1$  félegyenes iránya megegyezik, és hogy  $P P_1 = A A_1$ . A sík minden pontja az  $A A_1$  irányban mozdul tehát el, és ugyanakkora távolságra jut, hisz ezt  $e$  pontjairól már tudjuk. —

E tétel alapján kimondhatjuk, hogy ha a sík minden pontját ugyanabban az irányban és ugyanakkora távolságra visszük, akkor a teljes sík eltolásához jutunk. Beszélhetünk ezek szerint a sík eltolásának irányáról és távolságáról. Egy eltolást jellemeztünk, ha irányát és távolságát megadtuk, vagy pedig egy  $A$  pontról megmondtuk, mely  $B$  pontba kerül. Beszélhetünk tehát az  $AB$  eltolásról.

Beláttuk, hogy ha a síkot egy egyenes mentén eltoljuk, akkor a vele párhuzamos egyenesek is helyben maradnak. Az eltolás felfogható  $e$  párhuzamosok mentén végzett eltolásnak is.



54



55

**Tétel.** Ha a síkban egymást követően két eltolást alkalmazunk, akkor a véghelyzet nem függ attól, hogy a két eltolást milyen sorrendben hajtjuk végre.

Azt már tudjuk (12.6), hogy mindkét véghelyzetbe egyetlen eltolás is elvezet. Ha ugyanazon egyenes menti eltolásokról van szó, akkor tételünk már ismert tényt mond ki.

*Bizonyítás.* Vigye a  $P$  pontot az egyik eltolás  $P_1$ -be, s a másik  $P_2$ -be. Feltehetjük, hogy ez a három pont nincs egy egyenesen, mert különben az egyenesük mentén végzett két eltolásról van szó. Egészítsük ki a  $P P_1 P_2$ -et  $P P_1 Q P_2$  paralelogrammává (55. ábra). Tudjuk, hogy egyrészt  $P P_1$  és  $P_2 Q$ , másrészt  $P P_2$  és  $P_1 Q$  egy irányú és párhuzamos. Ezért a  $P P_2$  eltolás a  $P_1$  pontot, s a  $P P_1$  eltolás a  $P_2$  pontot ugyanabba a  $Q$  pontba viszi. —

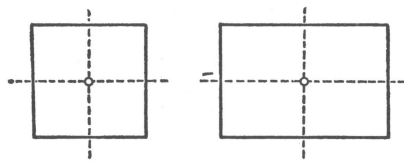
**B** Utolsó tételünk azt mondja ki, hogy a sík eltolásai kommutatív csoportot alkotnak (vö. 6.1 B3).

**14.5** A speciális paralelogrammák közül elsőnek a derékszögű paralelogrammával, a téglalappal foglalkozunk. Először is megállapítjuk, hogy ha egy négyszögnek három szöge derékszög, akkor az téglalap, hiszen a negyedik szög is csak derékszög lehet a  $360^\circ$ -os szögösszeg miatt. Ha

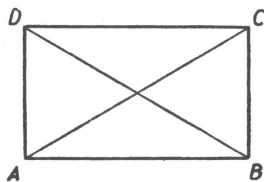


egy paralelogrammának egyik szöge derékszög, akkor az téglalap, mert szomszédos szögei a derékszög kiegészítő szögei, szemközti szöge pedig azzal egyenlő, tehát mindannyian derékszögek. Ha egy paralelogrammának két szomszédos szöge egyenlő, akkor az téglalap, mert az egymással egyenlő kiegészítő szögek derékszögek. A téglalap alakját két csatlakozó oldal hossza egyértelműen megszabja.

Egy téglalap nemcsak középpontjára, hanem középvonalaira vonatkozólag is szimmetrikus, hiszen a középvonala két oldalt merőlegesen felez (56. ábra). A téglalapot egy átlója két egybevágó derékszögű háromszögre bontja.



56



57

**Tétel.** Egy paralelogramma akkor és csak akkor téglalap, ha átlói egyenlők.

*Bizonyítás.* a) Egy téglalap átlói a középvonalra vonatkozó szimmetria miatt egyenlők.

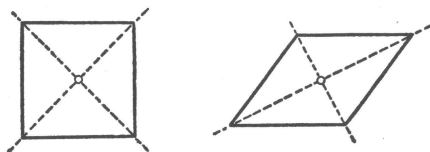
b) Ha az  $ABCD$  paralelogramma átlói egyenlők, akkor e két átló egybevágó  $ABC$ ,  $ABD$  háromszögeket szolgáltat (57. ábra), mert oldalaik páronként egyenlők. Ezért a paralelogramma  $A$ -nál és  $B$ -nél levő szöge egyenlő, s így ezek derékszögek, hiszen tudjuk, hogy a paralelogramma szomszédos szögei kiegészítő szögek. —

Tételünk alapján (14.2-re hivatkozva) kimondhatjuk, hogy egy négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha átlói egyenlők és felezik egymást.

**14.6** A rombusz tulajdonságai eltérők a téglalapétól, de azokkal bizonyos mértékig párhuzamba állíthatók.

Ha egy paralelogrammának két szomszédos oldala egyenlő, az rombusz, mert a szemközti oldalak ezekkel egyenlők. A rombusz alakját oldalhossza és egy szöge egyértelműen megszabja.

A rombuszt egy átlója két egybevágó egyenlő szárú háromszögre vágja szét, amelyeknek az átló a közös alapja. Ebből következik, hogy az átlók a rombusz szögeit felezik. A rombusz nemcsak középpontjára, hanem átlójára vonatkozólag is szimmetrikus (58. ábra).



58

A szimmetria következménye, hogy a rombusz két-két párhuzamos oldalegyenesének a távolsága ugyanakkora. Minden rombusz előállítható tehát két egyenlő szélességű sáv közös részeként.

**Tétel.** Egy paralelogramma akkor és csak akkor rombusz, ha átlói egymásra merőlegesek.

*Bizonyítás.* a) Ha a rombuszt egyik átlójára tükrözzük, másik átlója önmagát fedi, ezért merőleges az elsőre.

b) Ha egy paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, akkor merőlegesen felezik egymást. Ha tehát az ilyen paralelogrammát egyik átlójára tükrözzük, akkor a másik átló helyben marad, és két-két szomszédos oldal helyet cserél. Szomszédos oldalak egyenlőségéből következik azonban, hogy a paralelogramma rombusz. —

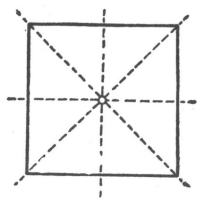
Tételünk alapján (14.2-re hivatkozva) kimondhatjuk, hogy egy négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha átlói egymást merőlegesen felezik. Azt is megállapíthatjuk, hogy a rombuszt két átlója négy egybevágó derékszögű háromszögre bontja fel.

**14.7** Minthogy a négyzet téglalap is és rombusz is, a négyzetre az előző két szakasz valamennyi megállapítása teljesül. Minden négyzet előállítható két ugyanolyan széles, egymást merőlegesen metsző sáv közös részeként. A négyzet alakját az oldalhossza egyértelműen megszabja. *Egység-négyzet* az olyan, amelynek az oldalai hosszegységyiek.

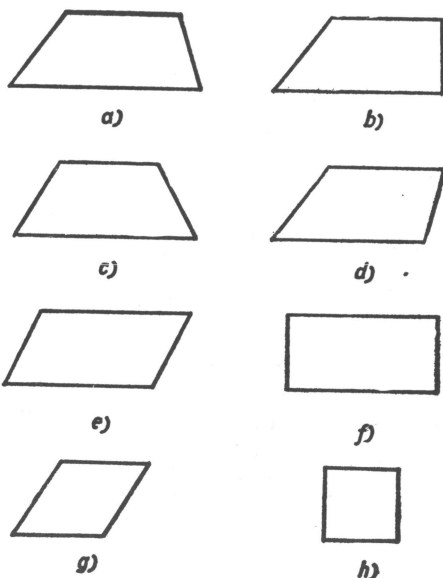
Ha egy paralelogramma két szomszédos oldala egyenlő s egymásra merőleges, akkor az négyzet. Egy paralelogramma akkor és csak akkor négyzet, ha átlói egymásra merőlegesek és egyenlők. Egy négyszög akkor és csak akkor négyzet, ha átlói egyenlők, s egymást merőlegesen felezik.

A négyzet középpontjára, középvonalaira és átlóira is szimmetrikus (59. ábra). Ha a négyzetet középpontja körül  $90^\circ$ -kal elforgatjuk, önmagát fedi, hiszen átlóira ez igaz. A négyzet tehát forgásszimmetrikus, és e forgásszimmetria rendje 4.

A négyzetet egy átló két, két átló négy, két átló és két középvonal pedig nyolc egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja fel. Az átlók a négyzet szögeit felezik.



59



**14.8** A trapéz tárgyalására térve először is megemlítjük, hogy a paralelogramma is trapéz, hiszen van két párhuzamos oldala, sőt bármely két szemközti oldalát a trapéz alapjaiul választhatjuk. A 60. ábra trapézokat ábrázol.

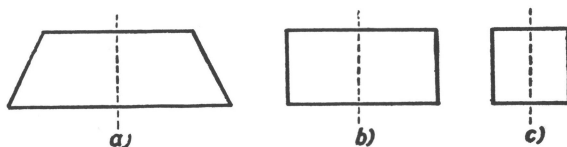
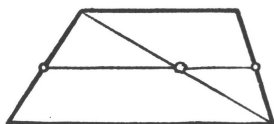
Megemlítjük, hogy szokták derékszögűnek mondani az olyan trapézt, amelynek van az alapokra merőleges szára. Az alapok párhuzamosságából 12.3 szerint következik, hogy egy-egy száron kiegészítő szögek nyugszanak. A szárak felezőpontjait összekötő szakaszt a trapéz *középvonalának* nevezzük.

**Tétel.** *A trapéz középvonala párhuzamos a trapéz alapjaival, és hossza azokénak számtani közepe.*

Két szám számtani közepének összegük felét nevezzük. A tétel paralelogrammákra vonatkozó speciális esetét már ismerjük.

*Bizonyítás.* A középvonal párhuzamossága a középpárhuzamos tételéből következik (14.3). Hosszára vonatkozó állításunk belátása végett húzzuk meg a trapéz egyik átlóját (61. ábra). Ez a középvonalat két részre vágja, s e részek a szétvágással keletkezett háromszögeknek a középvonalai. Így e részek a párhuzamos oldalak felével egyenlők, s összegük a párhuzamos oldalak összegének fele. —

Tételünk következményei közül kiemeljük azt, hogy ha a trapéz egyik szárának a felezőpontján át párhuzamost húzunk az alapokkal, akkor ez a másik szárát is felezi.



A Ha valaki kérdi, mi célja annak, hogy mi a paralelogrammákat is besoroljuk a trapézok közé, így felelhetünk: Ha egy ábrán okoskodunk, s valamelyik négyszögről megállapítjuk, hogy két szemközti oldala párhuzamos, akkor mi azt mondjuk, hogy a négyszög trapéz, s a trapézokra vonatkozó tételek valamelyikét alkalmazva okoskodhatunk tovább. Más szóhasználat mellett szabatosan csak azt mondhatnók az ábra négyszögéről, hogy vagy trapéz, vagy paralelogramma, s ezután e két esetet szétválasztva egy a trapézokra és egy a paralelogrammákra vonatkozó tételt alkalmazva juthatnánk olyan eredményekhez, amelyek mindkét esetben ugyanazt állítják. Az ilyen időt rabló s áttekintést zavaró kerülő utak a mi szóhasználatunk mellett elmaradnak.

**14.9** A trapézok között a szimmetrikus trapéz játssza a legfontosabb szerepet (62. ábra). Ha egy trapéz egyik alapján két egyenlő szög nyugszik, akkor a másik két szög is egyenlő, mert ezek az előbbieknél kiegészítő szögei, ilyenkor tehát szimmetrikus trapézzról van szó.

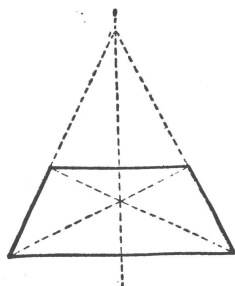
**Tétel.** *A szimmetrikus trapéz valóban szimmetrikus idom, szárai és átlói egymással egyenlők, szimmetriatengelye*

a) merőlegesen felezi a párhuzamos oldalakat,

b) áthalad az átlók metszéspontján,

c) áthalad a szárak metszéspontján.

Az utolsó kijelentés csak úgy értendő, hogy ha a szárak metszik egymást, akkor a metszéspont a szimmetriatengelyen van (63. ábra). Ez a tétel indokolja az „egyenlő szárú” elnevezést.



63

*Bizonyítás.* Tükrözzük a szimmetrikus trapézt egyik alapjának felezőmerőlegesére. Az ezen nyugvó szögek egyenlősége miatt a két szár egyenese helyet cserél, és a merőlegesség miatt a két alap egyenese helyben marad. Így a tükörképet is ugyanazok az egyenesek határolják, azaz trapézunk saját magának a tükörképe.

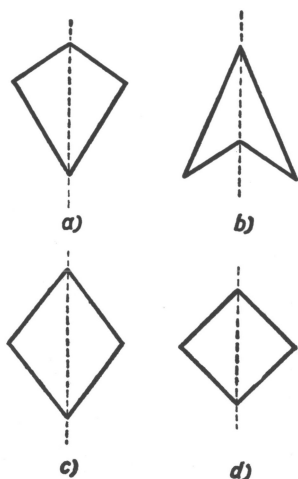
A szimmetriából adódik, hogy a szárak és az átlók szimmetrikusan helyezkednek el, az alapok pedig önmaguk tükörképei. Innen valamennyi állításunk következik. —

A Megemlítjük, hogy ha egy négyszögnek két szemközti oldala párhuzamos, s a másik kettő egyenlő, akkor a négyszög nem kell, hogy szimmetrikus trapéz legyen, mert lehet ferdeszögű parallelogramma is. Helytelen azért, ha valaki a szimmetrikus trapézt mint olyan trapézt definiálja, amelynek szárai egyenlők. Ez a definíció gyakorlatilag akkor sem volna jól használható, ha a parallelogrammákat nem sorolnák a trapézok közé. Arra kényszerítene ugyanis, amire 14.8 A is utal, hogy két oldal egyenlőségén kívül a párhuzamos oldalak hosszának különbözőségét is bizonyítsuk, amikor a szimmetrikus trapézokra érvényes tételt akarunk valamilyen négyszögre alkalmazni. Mutatja ez, hogy helyesebb a szimmetrikus trapéz elnevezés, mint az elterjedt egyenlő szárú trapéz (vö. 8.3 A). Ez utóbbinál határozottan találóbb volna az is, ha „egyenlő szögű” trapéznak neveznők.

Egy négyszög szimmetrikus trapéz, ha van olyan szimmetriatengelye, amelyik oldalait metszi. Ezt a definíciót rövidíti le a szimmetrikus trapéz megnevezés. A metszésre vonatkozó kikötést nem lehet elhagyni, mert különben a definíció a rombuszokat is felölelné. Ha egy trapézzal megállapítjuk, hogy szimmetrikus, mindig az említett szimmetriafajtára gondolunk.

Talál a húrtrapéz elnevezés, mert azokról a trapézokról van szó, amelyek egyben húrnégyszögek is (vö. 16.4).

**14.10** A deltoid definíciója is mutatja, hogy a szimmetrikus trapézzal állítható párhuzamba. Megjegyezzük, hogy nem minden deltoid konvex, s hogy minden rombusz is deltoid. A 64. ábra deltoidokat mutat be.



64

Az az átló, amelyiknek a végpontjaiban egyenlő oldalak találkoznak, a deltoidot két egybevágó háromszögre bontja fel, hiszen ezeknek az oldalai páronként egyenlők. Ez az átló felezi tehát az egyenlő oldalak által bezárt szögeket, és a deltoid szimmetrikus erre az átlóra vonatkozólag. A szimmetriából következik, hogy a szimmetriatengely által nem felezett szögek egymással egyenlők.

**Tétel.** Egy négyszög akkor és csak akkor deltoid, ha egyik átlója merőlegesen felezi a másikat.

*Bizonyítás.* a) A deltoid szimmetriájából következik, hogy szimmetriatengelye merőlegesen felezi a másik átlót.

b) Ha egy négyszög egyik átlója merőlegesen felezi a másikat, akkor ez utóbbinak a végpontjai

az elsőre vonatkozólag szimmetrikusan helyezkednek el. Ebből következik, hogy két-két oldal is egymás tükörképe, tehát ezek egyenlők. —

**14.11** Az ebben a paragrafusban tárgyalt négyszögfajták körében a következő szimmetriákat tapasztaltuk: A szimmetrikus trapéz és a deltoid tengelyszimmetrikus; az előbbinek a szimmetriatengelye oldalfelező merőleges, az utóbbié átló. A paralelogramma centrálisán szimmetrikus a középpontjára vonatkozólag. A téglalapnak és a rombusznak mindig van két szimmetriatengelye is; az előbbinek a szimmetriatengelyei a középvonalak, az utóbbié az átlók. A négyzet centrálisán szimmetrikus és négy szimmetriatengelye van: a két középvonal és a két átló, ezenkívül a négyzet negyedrendű forgásszimmetriát is mutat.

Ezeket a négyszögfajtákat definiálhattuk volna azáltal, hogy rendelkeznek a most említett szimmetriákkal. A paralelogrammára vonatkozólag 14.2-ben már bizonyítottuk ezt. A szimmetrikus trapézt és a téglalapot illetően elég arra hivatkoznunk, hogy ha egy szimmetriatengely egy oldalt felez, akkor az ezen nyugvó szögek a szimmetria miatt egyenlők. A deltoid és a rombusz esetében viszont arra hivatkozhatunk, hogy ha egy szimmetriatengely áthalad egy csúcson, akkor ott egyenlő oldalak találkoznak. A négyzetről nem kell külön szólnunk, hiszen a négyzet szimmetriáival rendelkező négyszög kell, hogy téglalap és egyben rombusz is legyen.

A négyzet rendelkezik mindazokkal a szimmetriákkal, amelyeket egyáltalában említhetünk. Egyetlen négyszög sem rendelkezik olyan szimmetriával, amellyel a négyzet nem rendelkezik. A centrális szimmetriát illetően már 14.2 B1 rámutatott, hogy egynél több szimmetriacentrum nem lehet. Egy négyszög szimmetriatengelye sem lehet más, mint átlóegyenese vagy oldalfelezőpontok összekötő egyenese. Ez következik abból, hogy oldalt metsző szimmetriatengely csak merőlegesen felelheti azt. Végül a forgásszimmetriák közül is csak a negyedrendű jöhet szóba, mert a négyszögnek négy csúcsa van.

A szimmetrikus négyszögfajták mindegyikéhez eljuthatunk tükrözéssel. Ha egy háromszöget egyik oldalának felezőpontjára tükröztünk, akkor a két háromszög egyesítése paralelogrammát ad. Ha

ezt derékszögű háromszöggel és átfogójának felezőpontjával, vagy egyenlő szárú háromszöggel és alapjának felezőpontjával, vagy pedig egyenlő szárú derékszögű háromszöggel és átfogójának felezőpontjával tesszük, akkor rendre téglalaphoz, rombuszhoz és négyzethez jutunk. Ha egy háromszöget egyik oldalára tükrözzük, akkor deltoidhoz, ha pedig egy derékszögű trapézt merőleges szárára tükrözzük, akkor szimmetrikus trapézhoz jutunk. E származtatások azt is mutatják, hogy valóban vannak olyan négyszögek, amilyenekről ebben a paragrafusban szó volt.

**BI\*** A következőkben azt akarjuk belátni, hogy mi minden olyan négyszögfajttával foglalkoztunk, amelyet szimmetriaviszonyaival lehet jellemezni.

Abból indulunk ki, hogy ha egy síkidomnak van két szimmetriatengelye, akkor az egyiknek a másikra vonatkozó tükröképe is szimmetriatengely. Ez abból következik, hogy a tükrözés egyenestartó, szögtartó és távolságtartó, következésképp szimmetriatengely-tartó is. Nyilvánvaló az is, hogy a tükrözéssel kapott szimmetriatengely akkor és csak akkor halad át csúcson, ha a tükrözött tengely is ilyen.

Ha figyelembe vesszük, hogy egy négyszögnek csak két-két egyenmű, ti. csúcson áthaladó vagy át nem haladó, szimmetriatengelye lehet, hogy továbbá két különböző fajtájú szimmetriatengely nem lehet egymásra merőleges, akkor kimondhatjuk már, hogy ha egy négyszögnek van két szimmetriatengelye, akkor van két egyenmű és egymást merőlegesen metsző szimmetriatengelye, s hogy ha van egy szimmetriatengelye, de még egy ugyanilyen nemű nincs, akkor semmilyen más sincs.

Két egymásra merőleges szimmetriatengely létezéséből már következik a metszéspontjukra vonatkozó centrális szimmetria, hiszen e két tükrözés egymásutánja síkmozgást ad (vö. 6.5 B4b), és ez a síkmozgás a szimmetriatengelyeket a metszéspontjukra vonatkozólag tükrözi. Hasonlóképpen látható be, hogy ha egy négyszögnek négy szimmetriatengelye van, akkor negyedrendű forgásszimmetria is fennáll, hiszen a tengelynégyes bármelyik tengelyre szimmetrikus, ezért a tengelyek a síkot  $45^\circ$ -os szögtartományokra bontják fel, és  $45^\circ$ -os szögben hajló egyenesekre vonatkozó tükrözéseknek az egymásutánja  $90^\circ$ -os elforgatást ad.

Nincs olyan centráliszimmetrikus idom, amelynek egyetlen egy szimmetriatengelye van. Ha volna ilyen, akkor először is azt állapíthatnók meg, hogy a szimmetriatengelynek át kell haladnia a szimmetriacentrumon, hiszen különben a szimmetriacentrumra tükrözve egy második szimmetriatengely adódnék. Ebből következik azonban, hogy a síkidomnak a szimmetriacentrumban a szimmetriatengelyre emelt merőlegesre vonatkozólag is szimmetrikusnak kellene lennie. Ha ugyanis a síkot egy pontra, majd egy ezen áthaladó egyenesre vonatkozólag tükrözzük, akkor a pontban az egyenesre emelt merőlegesre vonatkozó tükrözéshez jutunk, hiszen a síknak olyan térbeli elmozgatásáról van szó mind a két esetben, amely az egyenest pontjára tükrözi, és az egyenes által határolt fűlsíkokat helyben hagyja.

Az elmondottakból következik, hogy egy négyszög szimmetriaviszonyait illetően csak azok a lehetőségek állnak fenn, amelyeket mi a tárgyalt négyszögfajtáknál tapasztaltunk. Minthogy ezek a szimmetriaviszonyok a négyszögfajták definíciójául is szolgálhatnak, elmondhatjuk, hogy mi ebben a paragrafusban minden lehetséges szimmetrikus négyszögfajttával foglalkoztunk.

**B2** Ha egy alakzat van adva, vizsgálhatjuk, melyek azok az egybevágóságok, amelyek ezt az alakzatot nem változtatják meg. Ezek az alakzattartó egybevágóságok egy csoportot, az egybevágóságok csoportjának alcsoportját alkotják.

Az előző megjegyzésben azt vizsgáltuk meg igazában, hogy ha négyszögről van szó, akkor milyen csoportok adódhatnak. Meg kell ehhez jegyeznünk, hogy a négyszöget helyben hagyó (azonosságtól különböző) eltolás nyilván nincs.

Ha nem korlátozzuk az ilyen vizsgálatot a négyszögre, jóval több lehetőség adódik. Még bonyolultabbak a viszonyok, ha térbeli alakzatról van szó. Ezek azok a vizsgálatok, amelyekre a *matematikai kristálytan* felépül. A viszonyok elbonyolódása miatt mi nem foglalkozunk a továbbiakban ilyen vizsgálatokkal.

## 15. § Kör

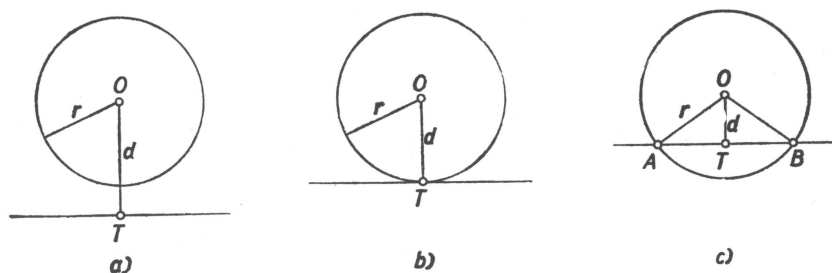
A kört már 5.1-ben megismertük. Itt a körre vonatkozó alapvető tudnivalókat tárgyaljuk. Részletesen vizsgáljuk a kör és az egyenes, valamint két kör viszonylagos elhelyezkedéseit.

Felhasználjuk mindazt, amit a körrel az 5.1—2 szakaszokban elmondtunk. A szóhasználatot illetően felhívjuk a figyelmet az 5.1 A2 megjegyzésre.

**15.1** A kör definíciójából nyomban következik, hogy a kör középpontjára és a középponton áthaladó minden egyenesre vonatkozólag szimmetrikus. A kör ezenkívül teljes forgásszimmetriát is mutat, azaz körszimmetrikus. Mindez a körlemezre is áll.

**Tétel.** *A síkban egy egyenesnek  $s$  egy körnek 0, 1 vagy 2 közös pontja van aszerint, amint a középpontnak az egyenestől való távolsága a kör sugaránál nagyobb, azzal egyenlő, vagy annál kisebb.*

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy a kör  $O$  középpontjából az egyeneshez húzott szakaszok közül az  $OT = d$  merőleges a legrövidebb (65. ábra). Ebből következik, hogy ha  $d > r$ , akkor  $O$  az egyenes minden pontjától  $r$ -nél nagyobb távolságra van, az egyenes tehát a körön kívül van, és közös pontjuk nincs. Ugyanígy az is adódik, hogy ha  $d = r$ , akkor  $T$  a körön van, és az egyenes többi pontja a körön kívül helyezkedik el, azaz  $T$  az egyetlen közös pont.



65

Ha viszont  $d < r$ , akkor az  $O$ -ból vont merőleges talppontja a körön belül van. E talppont két félegyenesre osztja egyenesünket, s ezek mindegyike ki kell, hogy lépjen a körlemezéből, azaz kell, hogy messe a körvonalat (lásd B1). A körnek és az egyenesnek van tehát két közös pontja,  $A$  és  $B$ . Több közös pont nincs, hiszen 10.2 szerint az  $AB$  szakasz belső pontjai a körön belül, az  $AB$  szakasz meghosszabbításain elhelyezkedők pedig a körön kívül vannak. —

Ha egy egyenesnek két közös pontja van a körrel, *szelőnek* mondjuk, és a két közös pontot *metéspontnak* nevezzük. A két közös pont összekötő szakasza a kör *húrja*. Bizonyításunk azt mutatja, hogy a húr a körön belül halad, meghosszabbításai pedig a körön kívül haladnak.

Mindhogy belső pontot csak a szelők tartalmaznak, egy belső ponton áthaladó egyenes bizonyosan szelő, tartalmazza tehát a kör egy húrját. Ebből következik, hogy belső pontból kiinduló félegyenesnek, valamint belső és külső pontot összekötő szakasznak egyetlenegy pontja van a körvonalon (vö. 5.2 B2), hogy továbbá két belső pont összekötő szakasza a kör belsejében van, a körlemez bármely két pontjának összekötő szakasza pedig a körlemezben halad. Beláttuk ilyen módon, hogy a körlemez konvex síkidom, melyet a körvonal határol.

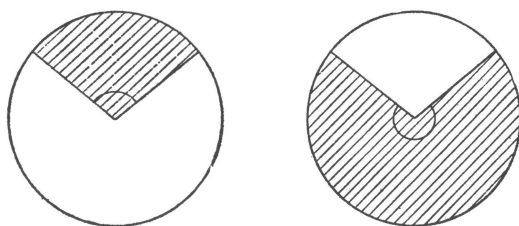
A középponton áthaladó húr *átmérőnek* (diaméter) nevezzük, de átmérőnek mondjuk e húrok közös hosszát is. Egy átmérő végpontjai (diametrálisan) *átellenes* pontok. A középpont minden átmérőt felez, az átmérő a sugár kétszerese. Az átmérőktől különböző húrok az átmérőnél rövidebbek, mert ha az  $O$  középpontú kör  $AB$  húrja nem átmérő, akkor az  $\triangle AOB$ -ből  $AB < OA + OB$  adódik. Az átmérők tehát a leghosszabb húrok.

*Középponti szögnek* mondunk egy szögtartományt, ha csúcsa a kör középpontja. Minden középponti szög a körnek egy ívét tartalmazza, és minden körívhez tartozik ilyen középponti szög. Egymáshoz

csatlakozó köríveken nyugvó középponti szögek összegül a két ív együttesén nyugvó középponti szöget adják. Egy kör ugyanakkora középponti szögekhez tartozó ívei egybevágók, hiszen a középpont körül elforgatva fedésbe hozhatók.  $180^\circ$ -os középponti szöghöz *félkör* (félkörív) tartozik. Két áttelnes pont a kört két félkörre bontja fel, amelyek a pontokat összekötő átmérőre vonatkozólag szimmetrikusan helyezkednek el.

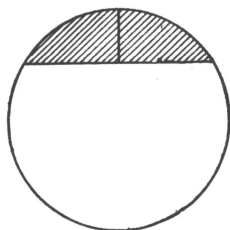
Egy húr végpontjaihoz vezető sugarak két középponti szöget határolnak. A húrhoz tartozónak e két szög kisebbikét mondjuk, ha ti. nem egyenlők, azaz nem átmérőről van szó. A húrhoz tartozó középponti szög nagysága mindig egyértelműen meghatározott, hiszen átmérő esetében két  $180^\circ$ -os szögtartományhoz jutunk.

A körlemeznek és egy középponti szög tartományának a közös részét *körcikknek* (körsektor) mondjuk (66. ábra). A körcikket egy körív és ennek a végpontjaihoz vezető két sugár határolja. A körcikk alakját a szöge és a kör sugara egyértelműen meghatározza. Egy átmérő a körlemez két *félkörre* (félkörlemez),  $180^\circ$ -os körcikkre bontja fel. A teljes körlemez  $360^\circ$ -os körcikknek is tekinthetjük.



66

Minden húr két *körseleltre* (körsegitmentum) bontja fel a körlemez. Ezek a körlemeznek és a húr egyenesé által határolt félsíkoknak a közös részei. E körseleteket a húr, valamint azok a körívek határolják, amelyekre a húr végpontjai a körívet felbontják. A félkör nemcsak körcikk, hanem egyben körselet is. A körselet a határoló húrra merőleges átmérőből egy szakaszt tartalmaz. Ezt a szakaszt és ennek hosszát a körselet *magasságának* mondjuk (67. ábra). Egy körselet alakját a magassága és a kör sugara egyértelműen meghatározza.



67

**B1** Felhasználtuk, hogy a kör egy belső pontjából kiinduló félegyenesnek van közös pontja a körrel. Ezt az 5.2-ben kimondott köraxióma alapján bizonyítjuk be. Tekintsünk egy az  $O$  középpontú,  $r$  sugarú kör  $B$  belső pontjából kiinduló félegyenesét. Válasszunk ezen egy olyan  $K$  pontot, amelyre  $BK > OB + r$ . Ez a  $K$  pont a körön kívül van, mert a háromszög-egyenlőtlenség szerint  $OK \geq BK - OB > r$ . A köraxióma szakaszokra vonatkozó állítása értelmében igaz tehát, hogy a körnek van közös pontja a  $BK$  szakasszal, azaz az ezt tartalmazó félegyenessel is.

**B2** A körvonal egyértelműen meghatározza a középpontot, tehát a sugarat is. Ez következik abból, hogy a középpont a leghosszabb húrok közös felezőpontja.

Azt is beláttuk ilyen módon, hogy a körnek egyetlen egy középpontja van. Ez a kijelentés nem semmitmondó, mert számolni kell azzal a lehetőséggel is, hogy két különböző középpont körül egy-egy olyan kört lehet írni, amelyek azonosak egymással.



**B3** Általában egy alakzat *átmérőjének* nevezzük az alakzat két pontjának távolságát, ha nincs az alakzatnak két egymástól ennél nagyobb távolságra levő pontja. Mondhatjuk tehát, hogy a kör átmérője a szónak ebben az általánosabb értelmében is átmérője a körlemeznek és a körvonalnak is.

**B4** A kör és a sokszög viszonylagos elhelyezkedésére vonatkozó egyszerű tényeket bizonyítottunk.

Elsőnek azt említjük, hogy a kör bármely belső pontjához található egy ezt a pontot a belsejében tartalmazó és a kör által tartalmazott sokszög, hiszen ez minden konvex síkidomra igaz (lásd 5.3 Be).

*Van olyan sokszög, amely egy megadott körlemez tartalmaz.* Ha ugyanis két átmérőre mindegyik meghosszabbításuknak egy-egy pontjában merőleget állítunk, akkor a kapott négy egyenes a kört tartalmazó sokszöget, éspedig paralelogrammát határol, hiszen ez négy a kört tartalmazó fűlsíknak a közös része.

*Egy sokszög bármely belső pontja körül elhelyezhető olyan körlemez, amelyet a sokszög tartalmaz.* Elég ezt konvex sokszögekre bizonyítanunk, minthogy a sokszög tartalmaz olyan konvex sokszöget, amely az adott  $B$  belső pontot tartalmazza (lásd 5.3 Bb). Konvex sokszögnél viszont úgy juthatunk kívánt tulajdonságú körhöz, hogy  $B$ -nek az oldalegyenesektől való távolságait tekintjük, és ezek legkisebbikével mint sugárral  $B$  körül kört írunk. Ez a kör valóban megfelel, hiszen nincs belső pontja az oldalegyeneseken, tehát a konvex sokszög határvonalán sem, s ezért nem lehet pontja a konvex sokszögn kívül.

*A sík bármely pontja körül elhelyezhető olyan körlemez, amely egy adott sokszöget tartalmaz.* Ilyen körhöz jutunk, ha az adott  $P$  pontnak a sokszög csúcsaitól való távolságait tekintjük, és ezek legnagyobbikával mint sugárral  $P$  körül kört írunk. Ez a kör valóban megfelel, mert a körlemez konvexitása folytán tartalmazza a sokszög csúcsainak konvex burkát, tehát magát a sokszöget is.

Az itt bizonyítottakból következik, hogy 5.3-nak a síkbeli tartományokra vonatkozó tárgyalásában a környezetet konvex sokszög helyett körlemezzel is definiálhattuk volna, s hogy egy síkidom akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó körlemez (vö. 5.4 B2). Beláttuk tehát azt is, hogy a kör 5.4 definíciója szerint is korlátos síkidom.

**15.2** Ha egy egyenesnek csak egy közös pontja van a körrel, az egyenest *érintőnek* (érintőegyenes), s a pontot *érintési pontnak* nevezzük. Már láttuk az előző szakaszban, hogy az érintő többi pontja a körön kívül van (65b ábra).

**Tétel.** *A kör bármely pontjában egyetlenegy érintő húzható a körhöz, s ez merőleges a ponthoz vezető sugárra.*

*Bizonyítás.* Ha a pontban merőleget állítunk az oda vezető sugárra, a kör érintőjét kapjuk, mert a középpontnak ettől való távolsága a sugár. A ponton áthaladó más egyenes nem érintője a körnek, mert a ponthoz vezető sugár egy ilyen egyenesre nem merőleges, így a középpontnak ilyen egyenestől való távolsága a sugárnál kisebb, s a körnek az ilyen egyenessel két közös pontja van. —

Tételünkben nyomban következik, hogy a körhöz lehet megadott állású érintőt húzni, mégpedig kettőt. Két párhuzamos érintő a kört átellenes pontokban érinti. Azt is látjuk, hogy a kört az érintő által határolt fűlsíkok egyike tartalmazza.

Ha a kör egy pontján át az érintőtől különböző egyenest fektetünk, akkor az érintőnek ezzel az egyenessel alkotott hajlásszögét az egyenes és a kör által ebben a pontban alkotott szögnek is mondjuk. Ha két körnek van közös pontja, de ebben a pontban vont érintőjük nem azonos, akkor érintőik hajlásszögét a két kör által ebben a pontban alkotott szögnek mondjuk.

Egy szelő a kört mindkét metszéspontjában ugyanakkora szögben metszi. Ez következik abból, hogy a középpontból az egyenesre bocsátott merőlegesre vonatkozólag a kör is és az egyenes is szimmetrikus, s ez a szimmetria a két hajlásszögre is vonatkozik. Beszélhetünk ezért a kör és egy szelő hajlásszögéről anélkül, hogy megmondanók, melyik metszéspontban alkotott szögről van szó.

**A1** Mi csak a kör érintőjét definiáltuk. Ezt a definíciót nem alkalmazhatjuk bármely görbére.

A kör érintőit a következőképpen is jellemezhetjük: a körlemez határának van az érintőegyenesekhez tartozó pontja, és az érintőegyenes által határolt egyik fűlsík tartalmazza a teljes körlemez. Ha egy

egyenes egy síkbeli tartományhoz viszonyítva így helyezkedik el, a tartomány *támaszegyenesének* mondjuk. A támaszegyenesen természetesen nem lehet a tartománynak belső pontja, hiszen a felsík nem tartalmazza határpontjának környezetét. Eszerint a kör érintői egyben a kör támaszegyenesei is, és a körnek nincs más támaszegyenes. A háromszöglemez esetében pl. az oldal egyenesek és a külső szögeket felező egyenesek is támaszegyenesek; a felsík határvonala egyben támaszegyenes is.

**A2** Semmiképpen sem helyes, ha valaki a kör érintőjéről azt mondja, hogy az a kört két „végtelen közeli” pontban metszi. Nem fogadható el az ilyen kijelentés azzal az indoklással sem, hogy lerövidítése egy határhelyzetről szóló hosszabb kijelentésnek (vö. B1), mert értelmetlenné rövidít. Nincs semmi értelme két „végtelen közeli” pontnak, hiszen két pont csak véges távolban lehet. A geometria történeti kialakulása során használtak ilyen kifejezéseket.

Önmagában tekintve értelmetlen az a kijelentés is, hogy az érintőnek és a körnek „két egybeeső” közös pontja van, hiszen ha egybeesnek, akkor nincs két közös pont, hanem csak egy. Van azonban olyan geometriai tárgyalásmód, ahol a mondott kijelentésnek, megfelelő előkészítés után, értelmet szokás tulajdonítani.

**B1** A kör érintőjét a szelő *határhelyzeteként* szokás definiálni. E szerint a definíció szerint a szelő érintővé válik, ha egyik metszéspontja változatlan marad, s a másik közeledik ehhez, valamint akkor is, ha a szelő mindkét metszéspontja változtatja a helyzetét, és a körnek ugyanahhoz a pontjához közeledik. Mi ezt itt csak megemlítjük, de nem magyarázzuk. Ennek az volna az előfeltétele, hogy tisztázzuk, mikor mondjuk egy mozgó egyenesről vagy az egyeneseknek egy sorozatáról, hogy egy bizonyos egyeneshez közeledik. Nem tesszük ezt, mert a mi tárgyalásunkban felesleges kerülőt jelentene, s mert ez a kerülő nem illenék könyvünk elemi jellegéhez.

A könyv elemi jellegét illetően megemlítjük, hogy a könyv egésze során sehol nem definiálunk geometriai alakzatot határhelyzetként. Ez a *differenciálgeometria* jellegzetes módszere (vö. 19.7 B3). Aki alakzatot határhelyzetként vezet be, egyértelműen megszabhatja bár, hogy melyik alakzatról van szó, de nem ad olyan konstruktív, azaz véges sok lépésben követhető eljárást, amely az alakzathoz (az alakzat pontjaihoz) elvezet.

Mi sehol nem dolgozunk ebben a könyvben olyan alakzattal, amelyet konstruktíve nem definiáltunk. Ez az állásfoglalás nemcsak újonnan bevezetett alakzatok definiálására vonatkozó megszorítás, hanem azt is jelenti, hogy sehol sem beszélünk pl. „elég közeli” pontokról, csak ha azt is megmondjuk, hogy az „elég” mit jelent. A sokszög szögét sem definiáltuk mondva, hogy az két csatlakozó oldal által meghatározott olyan szögtartomány, amely a sokszög elég közeli pontjait tartalmazza, hanem konstruktív utasítást adtunk ennek a szögtartománynak a megkeresésére (lásd 4.3 B2). Állásfoglalásunk nem a pusztá egzisztenciát biztosító és a pusztá egzisztenciára épülő okoskodások elítéléséből fakad, hanem abból, hogy a szigorúságból mit sem engedve egyszerűsége törekszünk.

Hangsúlyozzuk, hogy az itt mondottak nemcsak a módszert kötik meg, hanem könyvünk anyagát is korlátozzák.

**B2** Ezt az alkalmat ragadjuk meg annak tisztázására, hogy ebben a könyvben határátlépet mennyiben használunk. Szerepelnek ugyanis a könyvben aritmetikai és geometriai határátlépek egyaránt. Az előző megjegyzésben csak azt szögeztük le, hogy alakzatok definiálására geometriai határátlépet nem használunk.

Aritmetikai határátlépet mindenképpen használunk kell, ha egyszer olyan geometriai mértékekről is szó lesz, amelyek csak aritmetikai határátléppel definiálhatók, hiszen transzcendens számarányokhoz is elvezetnek. Ilyen mértékek lesznek majd az ívhossz, a terület, a térfogat és a felszín. Az elemi geometria tárgyalása során ezekkel az infinitézimális fogalomalkotásokkal is foglalkozunk, hiszen hozzátartoznak a legegyszerűbb geometriai alakzatok jellemzéséhez, és a geometria elemeinek a tárgyalása során valóban mindig szerepelnek. Aritmetikai határátlépre lett volna szükség már a szögmérés bevezetésénél is, ha bevezetését axiómáinkra alapoztuk volna, sőt a hosszúság tárgyalásánál is, ha nem követeltük volna meg már axiómáinkban a hosszúság létezését.

Az említett infinitézimális fogalmak tárgyalásánál a valós számok folytonosságát kell kiaknázunk. Az ilyen részleteknél valós számhalmazok alsó és felső határával, valamint valós számsorozatok

határértékével dolgozunk majd, és felhasználjuk az ezekre a fogalmakra vonatkozó alapvető tudnivalókat. Ezeket az analízis elemei között szokás tárgyalni.

Többször is felhasználjuk majd azt a tényt, hogy a természetes számok reciprokai 0-hoz tartanak, hogy tehát 0 az egyetlen olyan nem negatív szám, amely minden természetes szám reciprokánál kisebb, vagy ami ezzel egyenértékű, hogy minden valós számhoz található nála nagyobb természetes szám. Erre nemcsak az említett infinitézimális fogalmak tárgyalásánál kerül sor, hanem minden olyan részletnél is, amely bizonyos mértékek arányosságáról szól (vö. 17.2 B3).

Geometriai határátmenet használatára nincs feltétlenül szükségünk. Mégis beszélünk majd az imént említett infinitézimális fogalmak tárgyalása során arról, hogy bizonyos alakzatoknak egy sorozata közeledik (tart, konvergál) egy alakzathoz. Tesszük ezt azért, hogy ezáltal egyszerűsítsük mondanivalónkat. Minden ilyen esetben természetesen szigorúan megszabjuk, hogy a közeledés mit jelent.

Határátmenettel fogalmakból más fogalmakhoz és tételekből más tételekhez lehet sokszor eljutni. Az ilyen *határesetek* szigorú geometriai tárgyalásban csak akkor kaphatnak helyet, ha ezt a geometriai határátmenet kellő tisztázása előzi meg, s ha a kijelentésben esetleg szereplő mértékeket, valós számokat illetően vizsgálat tárgyát képezi az is, hogy ezek a geometriai határátmenet során a megfelelő határértékekhez tartanak-e.

Rávilágítottunk arra, hogy tárgyalásunk során határátmenetre is szükségünk van, s hogy határátmenet bekapcsolása révén a tárgyalás helyenként egyszerűsödik. Leszögezzük azonban, hogy ahol ezek a szempontok nem szólnak a határátmenet szerepeltetése mellett, ott kerüljük az ilyen okoskodást, és határátmeneteket feleslegesen nem vizsgálunk.

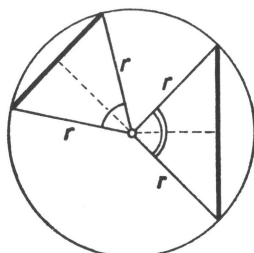
A szemlélet sokszor könnyen megragadja a geometriai határátmenetet, és természetesnek fogadja a határátmeneten alapuló okoskodást. A határesetek szem előtt tartása szigorú előkészítés nélkül is jó heurisztikus eszköz lehet. Említést teszünk ezért néha mi is magyarázó megjegyzéseink között az ilyen kapcsolatokról anélkül, hogy a szigorú indokolás részleteibe bocsátkoznánk.

**15.3 Tétel.** *Ha egy kör két húrját tekintjük, akkor*

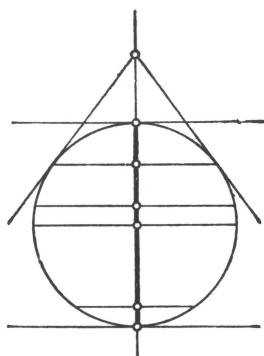
- a) vagy egyenlők a húrok, a hozzájuk tartozó középponti szögek és a körközépponttól való távolságaik,
- b) vagy pedig az egyik húr nagyobb, ehhez nagyobb középponti szög tartozik és ez a húr van közelebb a kör középpontjához.

Tételünket két egyenlő sugarú kör húrjaira is kimondhattuk volna. Magában foglalja a tétel azt a már ismert tényt, hogy az átmérők a leghosszabb húrok. Megjegyezzük, hogy ha foglalkoztunk volna már a körív mérésével, és tudnók, hogy nagyobb középponti szöghöz hosszabb ív tartozik, akkor tételünkben a középponti szögek helyett a húrokhoz tartozó íveket is szerepeltethettük volna (vö. 19.8 B2).

*Bizonyítás.* Tekintsük azokat az egyenlő szárú háromszögeket, amelyeket a két húr és a végpontjaikhoz vezető sugarak határolnak (68. ábra). A sugarak egyenlősége miatt alkalmazható 11.5 első tétele, és így éppen tételünknek a húrokra és a középponti szögekre vonatkozó állítása adódik. Ha egyenlő szárú háromszögeinket szimmetriatengelyükkel derékszögű háromszögekre bontjuk, akkor ezekből 11.5 második tételéhez fűzött kiegészítés alapján kiolvashatjuk, hogy tételünknek a középpont és a húr távolságáról (apotéma) szóló kijelentései is helyesek. —



68



69

**Tétel.** A kör átmérője minden rá merőleges húr felezőpontját tartalmazza, meghosszabbításai tartalmazzák az ilyen húr végpontjaiban vont érintők metszéspontját, végpontjai pedig a húrokkal párhuzamos érintők érintési pontjai (69. ábra).

A tétel utolsó állítását az előző szakasz is kimondta már. Az érintők metszéspontjára vonatkozó kijelentés csak úgy értendő, hogy ha az érintők metszik egymást, akkor metszéspontjuk az átmérő egyenesén van. Erre a figyelmeztetésre azért van szükség, mert a merőleges húr átmérő is lehet.

*Bizonyítás.* Tükrözzük a síkot az átmérőre. Ez a tükrözés nem változtatja meg a kör, valamint az átmérőre merőleges egyenesek helyzetét. Ezért a merőleges érintők érintési pontja helyben marad, a merőleges hurok végpontjai viszont, valamint e végpontokban vont érintők is helyet cserélnek. A helycsere következtében helyben marad tehát a húrok felezőpontja és a végpontokban vont érintők metszéspontja is. Tételünk valamennyi állítása következik tehát abból, hogy a tükrözésnél helyben maradó pontok a szimmetriatengelyen vannak, s hogy a hurok belső pontjai a körön belül, érintők metszéspontja pedig a körön kívül van. —

Tételünk következményei közül kiemeljük azt, hogy a középpontból a húrba bocsátott merőleges felezi a húr, s hogy a húr felezőpontjában emelt merőleges áthalad a középponton. Mindkét esetben hozzátehetjük, hogy a merőleges felezi a húrhoz tartozó középponti szöget, s hogy a húrhoz tartozó körívet két egyenlő (egybevágó) ívre vágja.

Tételünk alapján azt is kimondhatjuk, hogy ha merőlegesen vetítjük a körvonalat vagy a körlemezt egy a középponton áthaladó egyenesre, akkor a vetület a kör átmérője.

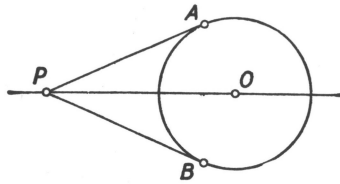
**15.4** Ha egy pont a körön kívül van, akkor két körérintő halad át rajta (lásd B).

**Tétel.** Egy a körön kívül levő pontból a körhöz vont két érintőn  $e$  pont az érintési pontokkal együtt két egyenlő szakaszt határoz meg.

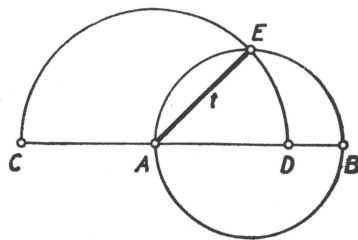
Egy külső pontból húzott érintőn a pont  $s$  az érintési pont által határolt szakaszt ugyancsak *érintőnek* (érintőszakasz) mondják. Tételünk második része tehát röviden így szól: Egy pontból a körhöz húzott érintők egyenlők.

*Bizonyítás.* Tükrözzük a  $P$  pontból vont  $PA$  érintőszakaszt a  $PO$  egyenesre, ahol  $O$  a kör középpontja (70. ábra). Minthogy a kör szimmetrikusan helyezkedik el erre az egyenesre vonatkozólag,  $PA$  tükröképe is érintőszakasz. Ez tehát a másik  $PB$  érintőszakasszal azonos, és szimmetrikus szakaszok egyenlők. —

A bizonyítás azt is mutatja, hogy  $PO$  felezi az érintők szögét.



70



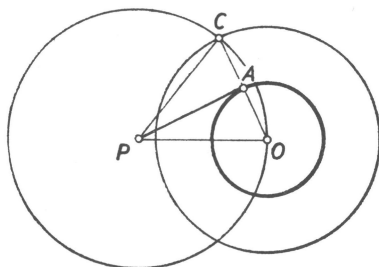
71

**B** A köraxiómára támaszkodva bizonyítani akarjuk, hogy külső pontból két érintő vonható a körhöz.

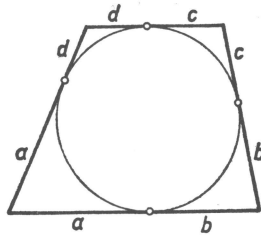
a) Előkészítésképpen azt bizonyítjuk, hogy *ha megadunk egy a kör átmérőjénél kisebb távolságot, akkor található a körnek ilyen hosszúságú húrja*. Tekintsük az  $AB$  átmérőjű kört, és írjunk  $A$  körül a megadott  $t$  távolsággal mint sugárral kört (71. ábra). Ez a kör az  $AB$  egyenest a  $C, D$  pontokban metszi, s e pontok egyike  $t < AB$  miatt az  $AB$  átmérőjű körön belül, a másik meg azon kívül helyezkedik el. A rajzolt kör  $CD$  félkörének a köraxióma körívekre vonatkozó állítása szerint van körünkkel  $E$  közös pontja. Az  $AE = t$  húr állításunk helyességét mutatja.

b) Bizonyítjuk most, hogy *külső pontból vonható érintő a körhöz*. Tekintsük az  $O$  középpontú,  $r$  sugarú kört és a külső  $P$  pontot (72. ábra). A  $P$  középpontú,  $PO$  sugarú körben találhatunk  $OC = 2r$  húrt, hiszen ez a távolság  $r < PO$  miatt az átmérőnél kisebb, tehát a) a húr létezését biztosítja. Az  $OC$  húr  $PA$  felezőmerőlegese érinti körünket, mert merőleges az  $OA = r$  sugarra.

c) Bizonyítjuk végül, hogy *külső pontból két és csak két érintő vonható*. A már talált  $PA$  érintő a  $PO$  egyenesre tükrözve, mint láttuk, második érintőt ad. További érintő nincs, mert a  $POA$  derékszögű háromszög alakját a  $PO$  átfogó és az  $OA = r$  befogó egyértelműen meghatározza, és ilyen alakú háromszög csak kétféleképpen illeszthető a  $PO$  szakaszhoz, ti. a  $PO$  egyenes egyik és másik oldaláról.



72



73

**15.5 Érintősokszögek** (kör köré írt sokszög) azokat a sokszögeket nevezzük, amelyeknek minden oldala egy kört érint. Azt is mondjuk, hogy az ilyen sokszögbe kör írható, vagy hogy van *beírt körük*. Minden érintősokszög konvex, hiszen csak konvex szögek lehetnek. Eszerint csak konvex sokszögeknek lehet beírt körük, de nem minden konvex sokszög ilyen. Hangsúlyozzuk, hogy a beírt kör érintési pontjai az érintősokszög oldalain vannak, és nem azok meghosszabbításán.

Mi most az *érintőnégyyszöggel* foglalkozunk.

**Tétel.** Egy érintőnégyyszög két-két szemközti oldalának összege egyenlő.

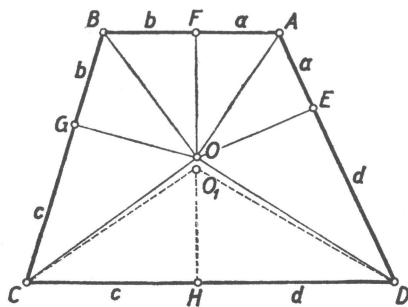
*Bizonyítás.* Az érintőnégyyszög oldalait az érintési pontok két-két szakaszra bontják (73. ábra). Szomszédos oldalak szomszédos darabjai az előző tétel szerint ugyanakkorák. Így a szemközti oldalpárok négy-négy ugyanakkora szakaszból tevődnek össze. —

E tételből következik, hogy a paralelogrammák közül csak a rombuszok érintőnégyyszögek.

**Tétel.** Ha egy konvex négyszög két-két szemközti oldalának összege egyenlő, akkor az érintőnégyyszög.

Konkáv négyszögekre nem teljesül az állítás. Ezt a konkáv deltoid példája mutatja.

*Bizonyítás.* Legyen  $AB$  a feltételt kielégítő  $ABCD$  konvex négyszög legrövidebb oldala (74. ábra). Az  $A^\star$  és  $B^\star$  szögfelezői egy  $O$  pontban metszik egymást, mert az  $AB$  oldallal bezárt szögek összege  $180^\circ$ -nál kisebb, hiszen ez az összeg az  $A^\star$  és  $B^\star$  összegének fele, s ez utóbbi a négyszög szögösszege,  $360^\circ$ -nál kisebb. Az  $O$  pontnak a  $DA$ ,  $AB$ ,  $BC$  egyenesekre vetett vetületét rendre  $E$ ,  $F$ ,  $G$  jelöli.



74

Az  $F$  pont az  $AB$  szakaszon van, mert  $\angle A^\star$  és  $\angle B^\star$  hegyesszög, hiszen a konvexitás miatt ezeknek kétszerese is konvex.

Az  $OA$  és  $OB$  szögfelezőkre vonatkozó szimmetriából következik, hogy  $OE = OF = OG$ , valamint, hogy  $AE = AF$  és  $BG = BF$ . Mivel  $AB$  a négyszög legrövidebb oldala, következik megállapításunkból, hogy  $E$  és  $G$  rajta van a  $DA$  és  $BC$  oldalon. Feltevésünk szerint  $AB + CD = BC + DA$ , s ezért a mondottakból  $CG + DE = CD$  következik. Van tehát a  $CD$  oldalon olyan  $H$  pont, amelyre  $CH = CG$  és  $DH = DE$ .

A  $H$  pontban merőlegest emelünk a  $CD$  egyenesre, s erre felmérjük (a  $CD$  által határolt, s az  $O$  pontot tartalmazó félsíkban haladva) az  $OE = OG$  szakaszokkal egyenlő  $HO_1$  szakaszt.

Belátjuk, hogy  $O$  és  $O_1$  azonos. A befogók páronkénti egyenlőségéből következik, hogy  $OCG\Delta \cong O_1HC\Delta$  és  $ODE\Delta \cong O_1DH\Delta$ , tehát  $OC = O_1C$  és  $OD = O_1D$ , és az oldalak egyenlősége miatt  $CDO\Delta \cong CDO_1\Delta$ . Ebből valóban következik, hogy  $O$  és  $O_1$  azonos, hiszen a  $CDO\Delta$  csak egyféleképpen illeszthető a  $CD$  szakaszhoz a  $CD$  egyenesnek ugyanarról az oldaláról.

Az imént említett derékszögű háromszögek egybevágóságából  $OG = O_1H$  azaz  $OG = OH$  következik.

Beláttuk tehát, hogy ha az  $O = O_1$  pont körül  $OE = OF = OG = OH$  sugárral kört írunk, akkor ezt négyszögünk valamennyi oldala érinti. —

**A** Ha azt akarjuk kimutatni, hogy kétféle eljárással ugyanahhoz a ponthoz jutunk, célszerű szándékosan torzított rajzzal kísélni az okoskodást, amelyen a kétféle eljárás különböző pontokhoz vezet. Az okoskodás ezután mintegy a rajz rossz voltát bizonyítja. Az ilyen eljárás az indirekt bizonyítással rokon. Maga az okoskodás nem teszi fel, hogy az állítás hamis, csak a rajz. A 74. ábra így készült.

**B1** Ha egy sokszögről tudjuk, hogy érintősokszög, akkor könnyen eljuthatunk beírt körének középpontjához. Tudjuk ugyanis, hogy ha egy kör két szögben csatlakozó szakaszt érint, akkor középpontja a szögfelezőn van. Ebből következik, hogy az érintősokszög beírt körének középpontja a sokszög szögeit felező egyenesek metszéspontja, sugara pedig ennek a metszéspontnak az oldalegyenesektől való távolsága. Észrevételünk azt is mutatja, hogy egy sokszögnek egynél több beírt köre nem lehet.

**B2** Szakaszunk első tételét könnyen általánosíthatjuk páros oldalszámú érintősokszögekre: ha egy páros oldalszámú érintősokszög oldalai közül minden másodikat összeadunk, ugyanahhoz az eredményhez jutunk, mintha a kihagyott oldalakat adtuk volna össze. Ezt ugyanúgy igazolhatjuk, mint az eredeti tételt.

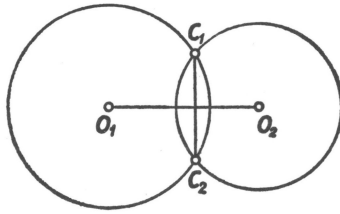
Szakaszunk második tételét azonban már nem általánosíthatjuk páros oldalszámú érintősokszögekre. Már konvex hatszögekre sem igaz, hogy van beírt körük, ha három nem szomszédos oldal összege a másik három oldal összegével egyenlő.

**15.6** Két kör viszonylagos elhelyezkedéseit vizsgáljuk. Két kör *koncentrikus*, ha középpontjuk közös. Két kör középpontjának összekötő szakaszát és ennek hosszát a két kör *centrálisának* mondjuk.

**Tétel.** *Két körnek csak legfeljebb két közös pontja lehet.*

Kimondhattuk volna azt is, hogy a kört három pontja már egyértelműen meghatározza. Két pontra ez nem áll, hiszen összekötő szakaszuk felezőmerőlegesének bármely pontja körül írhatunk olyan kört, amelyik áthalad a két ponton.

*Bizonyítás.* Csak nem koncentrikus körökét kell vizsgálnunk, mert koncentrikus köröknek nincs közös pontjuk, hiszen egy pont körül csak egyetlenegy olyan kör írható amely áthalad egy megadott ponton. Tekintsük a  $C_1, C_2$  pontokon áthaladó,  $O_1, O_2$  középpontú köröket (75. ábra). A távolságok egyenlősége miatt az  $O_1, O_2$  pontok a  $C_1C_2$  szakasz felezőmerőlegesén vannak. Mivel  $O_1$  és  $O_2$  nem azonos, kimondhatjuk, hogy a  $C_1, C_2$  pontok az  $O_1O_2$  egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan helyezkednek el. Ebből következik, hogy a két körnek harmadik közös pontja nincs, hiszen a  $C_1$  ponton áthaladó,  $O_1, O_2$  középpontú köröknek további közös pontja, mint éppen beláttuk, csak  $C_1$ -nek az  $O_1, O_2$  centrálisra vonatkozó tükörképe lehet. —



75

Ha két körnek két közös pontja van, azt mondjuk, hogy metszik egymást, és a két közös pontot *metszéspontnak* nevezzük. Ha két körnek csak egy közös pontja van, azt mondjuk, hogy érintik egymást, és egyetlen közös pontjukat *érintési pontnak* nevezzük.

Két kör a középpontjukon áthaladó egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan helyezkedik el, és metsző körök esetében a fenti bizonyítás szerint ez a metszéspontokra is áll. Ebből következik, hogy metsző körök egymást a két metszéspontban ugyanakkora szögben metszik, s ezért szó lehet egymást metsző körök hajlásszögéről, hogy továbbá érintkező körök érintési pontja a centrálisuk egyenesén van. Ez utóbbi tényből az is adódik, hogy érintkező köröknek az érintési pontban közös az érintőjük, hiszen érintőik ugyanarra az egyenesre merőlegesek.

**Tétel.** Az  $r_1, r_2$  sugarú,  $c$  centrális körök viszonylagos elhelyezkedését illetően a következő esetek lehetségesek:

- $c > r_1 + r_2$ , és a két kör egymáson kívül helyezkedik el, azaz minden pontjuk a másikon kívül van,
- $c = r_1 + r_2$ , és a két kör kívülről érinti egymást, azaz érintik egymást, s az érintési ponttól különböző pontjaik a másik körön kívül helyezkednek el,
- $|r_1 - r_2| < c < r_1 + r_2$ , a két kör metszi egymást, s mindegyik körnek van a másikon belül és kívül is pontja,
- $c = |r_1 - r_2|$ , a kisebbik sugarú kör belülről érinti a másikat, azaz érinti, s az érintési ponttól különböző pontjai a másik körön belül vannak, a nagyobbik sugarú körnek az érintési ponttól különböző pontjai viszont a másik körön kívül helyezkednek el,
- $c < |r_1 - r_2|$ , kisebbik sugarú kör a másikon belül helyezkedik el, azaz minden pontja a másikon belül van, a nagyobbik sugarú kör pontjai viszont a másikon kívül helyezkednek el.

Hangsúlyozzuk, hogy az utolsó eset a koncentrikus körök esetét is magában foglalja. Ha nem feltétlenül különböző körökről szoltunk volna, akkor hatodik lehetőségként a két kör azonosságát is meg kellett volna említenünk.

Tételünk kimondja, hogy két kör viszonylagos elhelyezkedését tekintve mindig a felsorolt lehetőségek valamelyike teljesül. Ha  $c$  kielégíti a megadott feltételek valamelyikét, akkor a körök a megfelelő módon helyezkednek el. Ha viszont tudjuk, hogy a körök melyik lehetőség szerint helyezkednek el, akkor ebből következik, hogy a  $c$ -re vonatkozó megfelelő feltétel teljesül.

**Bizonyítás.** A körök  $O_1, O_2$  középpontjait tartalmazó egyenes a körök  $A_1B_1, A_2B_2$  átmérőit tartalmazza. E két szakasz nem azonos, mert akkor a két kör is azonos volna. A két átmérő viszonylagos elhelyezkedését illetően tehát a következő esetek lehetségesek (76. ábra):

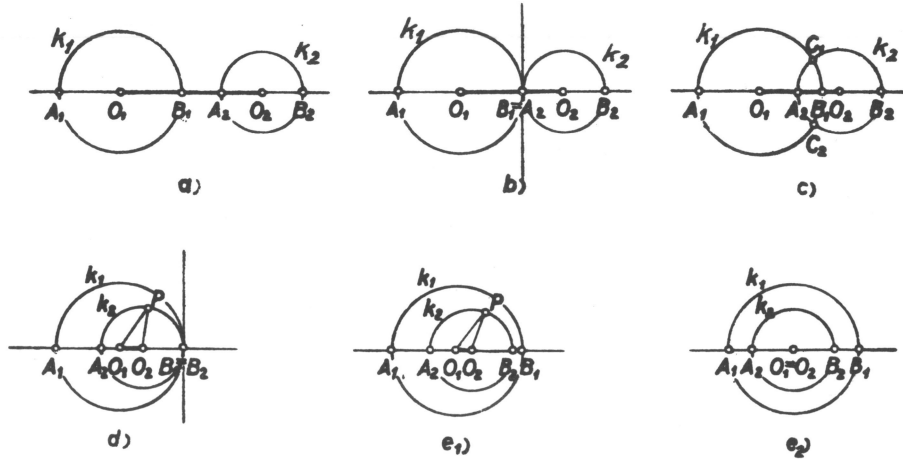
- Az  $A_1B_1, A_2B_2$  átmérőknek nincs közös pontjuk.



Ekkor az  $O_1O_2$  centrális által tartalmazott  $O_1B_1$  és  $A_2O_2$  sugaraknak még a végpontjuk sem közös, s ezért  $c > r_1 + r_2$ . A körök pontjai a másik körön kívül vannak, hiszen ez az  $O_1O_2$  egyenesre vetett vetületeikre is áll.

b) Az  $A_1B_1, A_2B_2$  átmérők a  $B_1 = A_2$  pontban csatlakoznak egymáshoz.

Ez a pont az  $O_1O_2$  centrális két sugárra bontja fel, s ezért  $c = r_1 + r_2$ . A köröknek a  $B_1 = A_2$  ponttól különböző pontja a másik körön kívül van, hiszen ez az egyenesre vetett vetületére is áll. Eszerint  $B_1 = A_2$  a két kör egyetlen közös pontja.



76

c) Az  $A_1B_1, A_2B_2$  átmérők részben fedik egymást.

Az átmérők mindegyikére áll most, hogy egyik végpontja a másik körön belül, másik végpontja pedig azon kívül van. Ebből következik, hogy az átmérők által meghatározott félköröknek van közös pontjuk a másik körrel, hogy tehát köreink metszik egymást. A  $C_1$  metszéspont nincs az egyenesen, hiszen az  $A_1, B_1, A_2, B_2$  pontok egyike sem közös pont. Az  $O_1O_2C_1\Delta$ -ből a háromszög-egyenlőtlenségek alapján következik tehát, hogy  $|r_1 - r_2| < c < r_1 + r_2$ .

d) Az  $A_1B_1, A_2B_2$  átmérők egyike tartalmazza a másikat, és egyik végpontjuk közös.

Legyen  $B_1 = B_2$  a közös végpont, és tartalmazza a  $k_1$  kör  $A_1B_1$  átmérője a  $k_2$  kör  $A_2B_2$  átmérőjét, legyen tehát  $r_1 > r_2$ . Ezen egyenlőtlenség következtében  $O_2$  az  $O_1B_1$  sugár belső pontja, s azt  $O_1O_2 = c$  és  $O_2B_2 = r_2$  szakaszokra bontja fel. Így tehát  $c = r_1 - r_2 = |r_1 - r_2|$ . A  $k_2$  kör bármely  $P$  pontjára az (esetleg elfajuló)  $O_1O_2P\Delta$ -re alkalmazott háromszög-egyenlőtlenség szerint  $O_1P \leq c + r_2 = r_1$ . Itt egyenlőség csak akkor áll, ha  $O_1P$  tartalmazza az  $O_2$  pontot, ha tehát  $P$  a  $B_1 = B_2$  ponttal azonos. A  $k_2$  kör minden más pontja ezek szerint  $k_1$  belsejében van, és  $B_1 = B_2$  a két kör egyetlen közös pontja. Azt is beláttuk ilyen módon, hogy  $k_2$  minden belső pontja  $k_1$  belsejében van, hogy tehát  $k_1$  pontjai a  $k_2$  körön kívül helyezkednek el.

e) Az  $A_1B_1, A_2B_2$  átmérők egyikének belseje tartalmazza a másikat.

Legyen a  $k_2$  kör  $A_2B_2$  átmérője a  $k_1$  kör  $A_1B_1$  átmérőjének a belsejében, legyen tehát  $r_1 > r_2$ . Ha az  $O_1O_2$  szakaszt az  $O_2$  ponton túl  $r_2$  távolsággal meghosszabbítjuk, akkor az  $A_2, B_2$  pontok egyikéhez jutunk. Minthogy ez  $k_1$  belsejében van, beláttuk, hogy  $c + r_2 < r_1$ , azaz  $c < r_1 - r_2 = |r_1 - r_2|$  is teljesül. A  $k_2$  kör bármely  $P$  pontjára az (esetleg elfajuló)  $O_1O_2P\Delta$ -ből  $O_1P \leq c + r_2 < r_1$  adódik. Ezért a teljes  $k_2$  körlemez  $k_1$  belsejében van, és  $k_1$  pontjai a  $k_2$  körön kívül helyezkednek el. —

A most bizonyított tételből következik, hogy ha három (nem feltétlenül különböző) hosszúság legnagyobbika a másik kettő összegénél kisebb, akkor van olyan háromszög, amelynek az oldalai ekkorák.

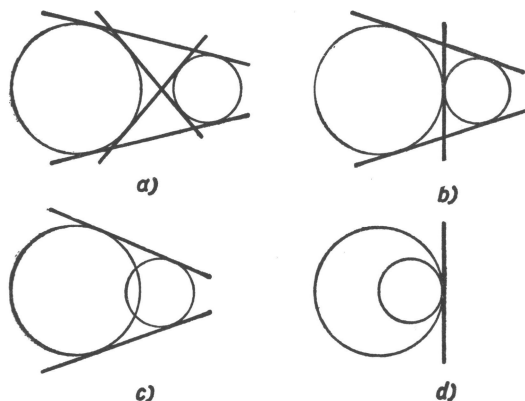
**B** Egymást metsző körök esetében a metszéspontok a körök egyikét két ívre bontják. Bizonyítjuk, hogy e körívek egyike a másik körön belül, másika pedig azon kívül halad.

Evégből először azt állapítjuk meg, hogy 11.5 első tétele a következőképpen is kimondható: Ha az  $O_2$  középpontú  $A_2B_2$  félkört tekintjük, és  $O_1$  az  $O_2A_2$  félegyenesnek belső pontja, ha továbbá a  $P$  pont a félkörön  $A_2$ -től  $B_2$  felé halad, akkor az  $O_1P$  távolság állandóan növekszik.

Ebből következik, hogy a 76c ábra  $C_1A_2C_2$  ívének belső pontjai közelebb vannak  $O_1$ -hez, mint a  $C_1, C_2$  pontok, tehát az  $O_1$  középpontú körön belül helyezkednek el, viszont a  $C_1B_2C_2$  ív belső pontjai a körön kívül vannak.

A bizonyított állításból következik, hogy a kör egy belső pontját egy külső ponttal összekötő körívnek egyetlenegy közös pontja van a körrel (vö. 5.2 B2).

**15.7** Két kör közös érintőit vizsgáljuk (77. ábra). Minthogy a kör érintőjének az érintési pontja a körön, minden más pontja a körön kívül van, azért két körnek nincs közös érintője, ha az egyik a másik belsejében van.



77

Ha egy egyenes két kört érint s azokat nem választja el, akkor az egyenest e körök *külső érintőjének* nevezzük. Ha viszont a közös érintő a köröket elválasztja, akkor az egyenest a körök *belső érintőjének* mondjuk. Ha a két körnek van közös belső pontja, belső érintőjük nem lehet metsző egyenest érintő körök középpontjai (7.3 második tétele szerint) az egyenesek szögfelezőin vannak. Ha két ilyen középpont ugyanazon a szögfelező egyenesen van, akkor a két metsző egyenes mindegyike külső, vagy mindegyike belső érintő. Ha viszont a két középpont más-más szögfelező egyenesen van, akkor a két metsző egyenes egyike külső, másika belső érintő.

Két párhuzamos egyenest érintő körök középpontjai a középpárhuzamoson vannak. Két ilyen körnek a két párhuzamos mindegyike külső érintője.

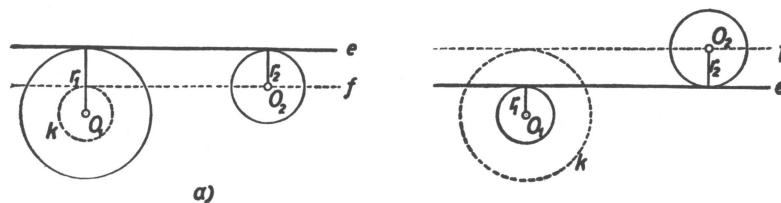
- Tétel.** a) Ha két körlemez egyike sem tartalmazza a másikat, akkor a köröknek két külső érintőjük van.  
b) Ha két körlemeznek nincs közös pontja, akkor a köröknek két belső érintőjük van.

A tétel egyrészt az egymáson kívül elhelyezkedő, egymást kívülről érintő és az egymást metsző körök külső érintőiről, másrészt az egymáson kívül elhelyezkedő körök belső érintőiről szól. Ha a körök egymást kívülről, illetve belülről érintik, akkor érintési pontjukban vont közös érintőjük nyilván az egyetlen belső, illetve külső érintőjük.

*Bizonyítás.* A tétel kimondását megelőző megállapításainkból mindkét esetben következik, hogy ha több külső vagy több belső érintő van, akkor ezek közül bármely kettő szimmetrikus a körök centrálisára. Ezért kettőnél több külső és kettőnél több belső érintő nem lehet.

Két kör együttese a centrálisra vonatkozólag szimmetrikus alakzat. Ezért bármely közös érintőjüknek a centrálisra vonatkozó tükörképe is ugyanolyan fajtájú közös érintő. Minthogy pedig a centrális maga nem közös érintő, s a centrálisra merőleges, kívánt fajtájú közös érintő sem az a), sem a b) esetben nincs, azért egy a feltételeket kielégítő közös érintő nem helyezkedhetik el szimmetrikusan a centrálisra vonatkozólag. Így tehát a vizsgált esetekben nem lehet csak egyetlenegy kívánt fajtájú érintő.

Állításunk bizonyításához csak az hiányzik, hogy belássuk, van egyáltalában ilyen közös érintő. Ezt a két esetben külön-külön igazoljuk. A körök középpontját  $O_1$  és  $O_2$ , sugaraikat  $r_1$  és  $r_2$  jelöli (78. ábra).



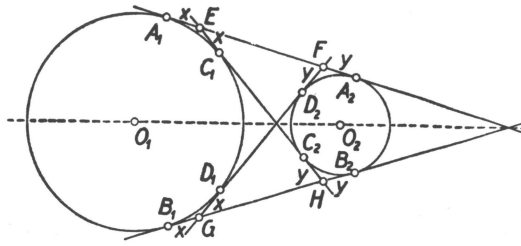
78

a) Ha  $r_1 = r_2$ , akkor a centrálissal párhuzamos és tőle sugárnyi távolságra levő egyenes közös külső érintő. Ha  $r_1 > r_2$ , akkor  $O_1$  körül  $r_1 - r_2$  sugárral  $k$  kört írunk. Mivel a két körlemez egyike sem tartalmazza a másikat,  $O_1O_2 > r_1 - r_2$ , azaz  $O_2$  a  $k$  körön kívül van. Van tehát  $O_2$ -n áthaladó és  $k$ -t érintő  $f$  egyenes, s ettől az  $O_1$  pont  $r_1 - r_2$  távolságra van. Az  $f$  egyenest rá merőleges irányban és  $O_1$ -gyel ellentétes oldalra  $r_2$  távolságra toljuk el. Így a körök közös külső  $e$  érintőjét kapjuk, mert az  $O_1$  és  $O_2$  pont  $e$ -nek ugyanazon az oldalán van, s  $e$ -től mért távolságaik  $r_1$  és  $r_2$ .

b)  $O_1$  körül  $r_1 + r_2$  sugárral  $K$  kört írunk. Mivel a két körlemeznek nincs közös pontja,  $O_1O_2 > r_1 + r_2$ , azaz  $O_2$  a  $K$  körön kívül van. Van tehát  $O_2$ -n áthaladó és  $K$ -t érintő  $f$  egyenes, s ettől az  $O_1$  pont  $r_1 + r_2$  távolságra van. Az  $f$  egyenest rá merőleges irányban  $r_2$  távolságra toljuk el  $O_1$  felé. Így a körök közös belső  $e$  érintőjét kapjuk, mert  $e$  elválasztja az  $O_1$  és  $O_2$  pontokat, s távolsága e pontokról  $r_1$  és  $r_2$ .

A bizonyításban kihasznált szimmetriából következik, hogy a két belső és a két külső érintő egymást csak a centrális egyenesén metszheti. Ez a külső érintők esetében nem feltétlenül következik be, hiszen két párhuzamos egyenes két kör közös külső érintője lehet.

**15.8** Két egymáson kívül elhelyezkedő körnek négy közös érintője van. Ezek metszéspontjai és érintési pontjai több egyenlő távolságot határoznak meg. Két kör közös *érintőjének* (érintőszakasz) nevezik egy közös érintőegyenest érintési pontjainak összekötő szakaszát is.



79

**Tétel.** a) Bármelyik belső és külső érintő metszéspontjából a legközelebbi érintési pontokhoz vezető szakaszok mind egyenlők.

b) A külső érintők hossza a külső érintők által a belső érintőkből kimetszett távolsággal egyenlő.

c) A belső érintők hossza a belső érintők által a külső érintőkből kimetszett távolsággal egyenlő.

A79. ábra jelöléseivel a) állítása  $EA_1 = EC_1 = FA_2 = FD_2 = GB_1 = GD_1 = HB_2 = HC_2$ , b) állítása  $A_1A_2 = B_1B_2 = EH = FG$ , c) állítása pedig  $C_1C_2 = D_1D_2 = EF = GH$ .

*Bizonyítás.* a) A centrálisra vonatkozó szimmetria és 15.4 értelmében  $EA_1 = EC_1 = GB_1 = GD_1 = x$  és  $FA_2 = FD_2 = HB_2 = HC_2 = y$ . Csak  $x = y$  bizonyítása szükséges. Ugyancsak a szimmetria miatt  $A_1A_2 = B_1B_2 = k$  és  $C_1C_2 = D_1D_2 = b$ . Az  $E$  pontból a második körhöz s az  $F$  pontból az első körhöz vont egyenlő érintők hossza:

$$k - x = b + x, \quad k - y = b + y.$$

E két egyenletből valóban  $x = y = \frac{1}{2}(k - b)$  adódik.

b)  $EH = FG = b + x + y = k$ .

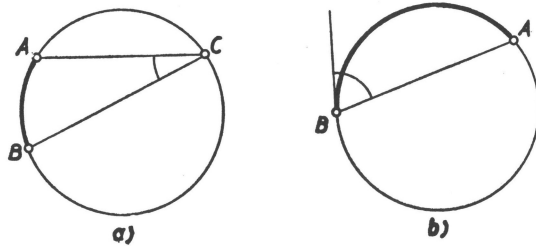
c)  $EF = GH = k - x - y = b$ . —

## 16. § Középponti és kerületi szögek

A kör sugarai, húrjai és érintői által alkotott szögeket vizsgáljuk. A középponti szöggel már 15.1-ben megismerkedtünk.

**16.1** A kör két közös végpontú húrja által alkotott konvex szöget *kerületi szögnek* nevezzük. Az  $AC$ ,  $BC$  húrok által alkotott  $ACB$  kerületi szögről (80a ábra) azt mondjuk, hogy a szögtartományban levő, tehát a  $C$  pontot nem tartalmazó  $AB$  köríven nyugszik.

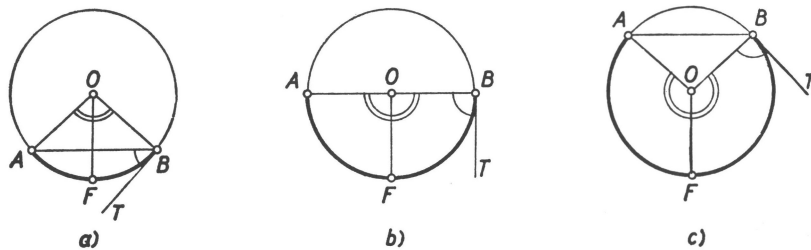
Kerületi szögnek mondjuk azt a konvex szöget is, amelyet egy húr és ennek egyik végpontjából induló, a kört érintő félegyenes alkot. Az ilyen szögről is mondjuk, hogy azon a köríven nyugszik, amely a húr végpontjait köti össze, s amelyet a szögtartomány tartalmaz (80b ábra).



80

**Tétel.** A kerületi szög kétszerese egyenlő az ugyanazon az íven nyugvó középponti szöggel.

*Bizonyítás.* a) Az állítást először a húr és érintő alkotta kerületi szögekre bizonyítjuk (81. ábra). Tekintsük az  $AB$  íven nyugvó  $ABT$  kerületi szöget. Felezzé az  $OF$  sugár az ugyanezen az íven nyugvó  $AOB$  középponti szöget. Azt kell bizonyítanunk, hogy az  $ABT$  és  $FOB$  egyenlő. Ezek merőleges szárú konvex szögek, tehát vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek. Egyenlőségükre abból következtethetünk, hogy nem lehet az egyikük hegyes, a másik meg nem. Ez valóban így van, mert az  $ABT$ -re és az  $FOB$ -re is áll, hogy akkor és csak akkor hegyes, ha az  $AFB$  körív a félkörnél kisebb.

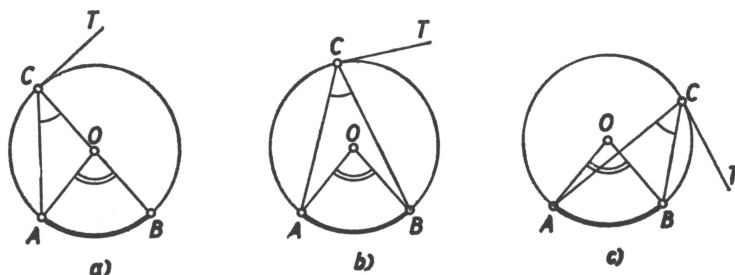


81

b) Tekintsük most a húrok által alkotott  $ACB$  kerületi szöget (82. ábra). Húzzuk meg a  $C$  pontban a kört érintő  $CT$  félegyenest olyan irányban, hogy az  $ACT$  kerületi szög az  $ABC$  íven nyugodjék. Minthogy  $B$  az  $ACT$  tartományában van,

$$ACB = ACT - BCT.$$

A jobb oldalon álló szögek a) szerint feleakkorák, mint az  $ABC$  íven, illetőleg a  $BC$  íven nyugvó középponti szög. Ebből következik, hogy a bal oldali szög feleakkora, mint e két szög különbsége, azaz az  $AB$  íven nyugvó középponti szög. —



82

Tételünk azt is kimondja, hogy minden félkörön nyugvó, vagyis átmérőn nyugvó kerületi szög derékszög.

**Tétel.** Egy kör egybevágó körívein egyenlő kerületi szögek nyugszanak.

Ezzel azt is kimondtuk, hogy az ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek egyenlők. Ha már foglalkoztunk volna a körív mérésével, akkor egybevágó ívek helyett egyenlő íveket is mondhatnánk.

*Bizonyításként* elég arra hivatkoznunk, hogy egybevágó ívekhez egyenlő középponti szögek tartoznak.

**B1** Szakaszunk mindkét tétele változatlanul helyes marad, ha megfelelően irányított szögtartományokra mondjuk ki.

a) Az első tétel esetében természetesen úgy értjük ezt, hogy az egymáshoz tartozó kerületi és középponti szögeket olyan módon irányítjuk, hogy kezdőszáraik és végszáraik is a körvonalon találkozzanak.

Eleg az állítást húr és érintő alkotta kerületi szögre igazolni, mert ebből ugyanúgy következtethetünk tovább, mint ahogyan bizonyításunk b) részében eljártunk.

Ha a húr az érintőre merőleges (81b ábra), akkor helyes az állítás, hiszen az  $\angle ABT$  és  $\angle AOF$  ebben az esetben egy állású irányított szögtartományok.

Ha az  $\angle ABT$  nem derékszög (81a és 81c ábra), akkor forgassuk el  $90^\circ$ -kal olyan irányban, hogy a  $BT$  szár az  $OB$  félegyenest irányába jusson. Minthogy az  $\angle ABT$  és  $\angle FOB$  merőleges szárú, a mondott elforgatás a  $BA$  szárát az  $OF$  egyenessel párhuzamos helyzetbe viszi. Nem lehetséges azonban, hogy az  $OF$  félegyenessel ellentétes irányba jusson, mert akkor az (irányítatlan)  $\angle ABT$  az  $\angle FOB$  kiegészítő szöge volna, márpedig tudjuk, hogy ezek egyenlők és nem derékszögek. Kell tehát, hogy az  $\angle ABT$  az elforgatás után az  $\angle FOB$ -gel egy állású helyzetbe jusson, vagyis hogy ezek az irányított szögtartományok egyenlők legyenek. Ezért a  $\angle 2ABT = \angle AOB$  összefüggés az irányított szögtartományokra is fennáll.

b) Második tételünk esetében is természetes az, hogy ha irányított szögtartományokról szólnak, akkor megköveteljük, hogy az egybevágó körívek olyan végpontjai helyezkedjenek el a kezdőszáron (és a végszáron is), amelyek egymást fedik akkor, ha a két körívet a síkban elforgatva egymásra fektetjük.

Állításunk helyessége következik abból, hogy az egymásba elforgatható ívekhez egyenlő irányított középponti szögtartományok tartoznak, és ezekről a)-ban már beláttuk, hogy a hozzájuk tartozó irányított kerületi szögtartományoknak a kétszeresei.

**B2** A középponti és a kerületi szögeket irányított szögekként is tekinthetjük. Nem beszélhetünk azonban ilyenkor arról, hogy a szögek melyik köríven nyugszanak, hanem csak arról a rendezett (azaz sorrendben megadott) pontpárról, ahol a szögek első és második szára a körlemez elhagyja. Egybevágó ívek helyett most a kör középpontja körüli elforgatással fedésbe hozható rendezett pontpárokat kell tehát mondanunk. Ha szakaszunk két tételét rendezett pontpáron nyugvó irányított szögekre mondjuk ki, akkor az első tétel helyes marad, a második azonban nem.

a) Az irányított szögekre kimondott első tétel helyességét a következőképpen látjuk be: Az irányított kerületi szög mértékei között szerepel annak az irányított konvex szögtartománynak a mértéke is, amelyiknek kezdő és végszára az irányított kerületi szög első és második szárával azonos. Ehhez az irányított kerületi szögtartományhoz B1 szerint egy kétszer akkora irányított középponti szögtartomány tartozik. Ez utóbbinak a mértéke szerepel annak az irányított középponti szögnek a mértékei között, amelyikről a bizonyítandó tétel szól, hiszen szárai sorrendre nézve is azonosak.

Ezek szerint helyes az állítás, mert a benne szereplő irányított szögeknek vannak olyan mértékei, amelyekre az állítás teljesül, s ebből következik, hogy a  $360^\circ$ -os modulusra vonatkozó kongruencia minden más mértékre is fennáll.

Megjegyezhetjük, hogy az első tétel sem volna helyes irányított szögek körében, ha nem a kerületi szög kétszereséről, hanem a középponti szög feléről szólna. Ez abból következik, hogy az imént bizonyított kongruenciát nem oszthatjuk 2-vel (vö. 3.5 B2).

b) A második tétel már nem szolgáltat  $360^\circ$  modulusra vonatkozó helyes kongruenciát, ha irányított szögekre mondjuk ki. Ha a tétel a kerületi szögek kétszeresének egyenlőségét mondaná ki, akkor

irányított szögek körében is helyes volna, hiszen ezek a kétszeresek a) szerint a megfelelő és egybevágó irányított középponti szögek mértékei. Az így kapott  $360^\circ$ -os modulusra vonatkozó kongruenciát nem szabad azonban 2-vel egyszerűsíteni (vö. 3.5 B2). A 88. ábrán meg is győződhetünk arról, hogy az irányított  $\angle BAD$  és  $\angle BCD$  nem egyenlő.

Helyes eredményhez jutunk azonban a 2-vel való egyszerűsítés révén akkor, ha a kapott összefüggést  $180^\circ$  modulusra vonatkozó kongruenciának tekintjük. Az algebrának arra a tételére kell csak hivatkoznunk, hogy a kongruenciát szabad egy (0-tól különböző) számmal osztanunk, ha a modulus is elosztjuk ezzel a számmal. A kapott kongruenciát úgy értelmezhetjük, hogy az nem irányított szögekről, hanem e szögek száregyeneseinek irányított hajlásszögéről szól, hiszen ilyen szögek egyenlősége éppen  $180^\circ$  modulusú kongruenciát jelent.

Okoskodásunk a következő eredményhez vezetett el: Ha  $A$  és  $B$  a kör két rögzített pontja, és  $P$  a kör tetszőleges pontja, akkor a  $PA$ ,  $PB$  egyenesek irányított hajlásszöge nem függ  $P$  megválasztásától. Más szóval ez azt jelenti, hogy  $P$  helyzetétől függetlenül mindig ugyanolyan irányban és ugyanakkora szöggel kell a  $PA$  egyenest  $P$  körül elforgatni, hogy a  $PB$  egyenest fedje. A  $P$  pont egybe is eshetik az  $A$ ,  $B$  pontok valamelyikével, s akkor az összekötő egyenes szerepét az érintő játssza.

Utolsó eredményünkhöz egyszerűbben is eljuthattunk volna (lásd B3). Célunk azonban itt az volt, hogy rámutassunk arra, hogyan módosulnak ennek a szakasznak a tételei, ha a különféle szögfajtákra akarjuk azokat kimondani.

**B3** Szakaszunk tételeinek néhány átszövegezését és általánosítását tárgyaljuk.

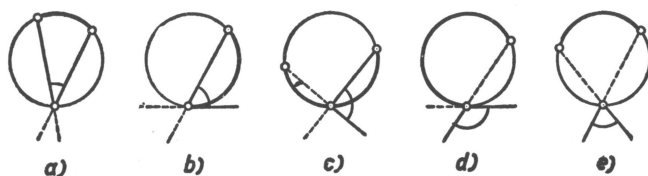
a) Első tételünket a következőképpen szövegezzük: Ha egy a körön mozgó  $P$  pont az  $AB$  ívet bejárva  $A$ -ból  $B$ -be jut, továbbá  $O$  a középpont és  $C$  a körnek egy az  $AB$  ívhez nem tartozó rögzített pontja, akkor  $P$  mozgása során a  $CP$  egyenes feleakkora szöggel fordul el, mint az  $OP$  egyenes. Megengedhetjük azt is, hogy  $C$  az  $AB$  ív valamelyik végpontja legyen, de akkor a forgó  $CP$  egyenes kezdőhelyzetét vagy véghelyzetét az érintő adja.

Ezt az eredményt így is kimondhatjuk: Ha a  $P$  pont a kör rögzített  $C$  pontjából kiindulva állandó szögsebességgel bejárja a kört és végül ismét  $C$ -be jut, akkor a  $CP$  egyenes is állandó, de feleakkora szögsebességgel forog. E forgó egyenes kezdő és véghelyzete a  $C$ -ben vont érintő.

Ez megint más alakban a következőképpen mondható ki: Ha a kör  $C$  pontján áthaladó egyenes  $C$  körül állandó szögsebességgel forog, akkor ennek az egyenesnek a körrel alkotott második metszéspontja ugyancsak állandó, de kétszer akkora szögsebességgel halad a körön. A második metszéspont helyett itt maga a  $C$  pont veendő akkor, amikor a forgó egyenes a kört érinti.

Ha nem szögsebességről, hanem elfordulásról beszélünk, akkor utolsó eredményünk a következőt adja (83. ábra): Ha egy konvex szögtartomány csúcsa a körön van, és azt a körívet tekintjük, amelyik ennek a szögtartománynak, valamint csúcsszöge tartományának egyesítésében van, akkor az ehhez az ívhez tartozó középponti szög kétszer akkora, mint az eredeti konvex szög. Ez szakaszunk első tételének általánosítása. Tartalmilag újat azonban csak a 83c ábra esete nyújt.

b) Ha a körön állandó szögsebességgel keringő  $P$  pontot a kör két pontjával, a  $C_1, C_2$  pontokkal kötjük össze, akkor a) második bekezdése alapján tudjuk, hogy a  $C_1P$  és  $C_2P$  egyenesek állandó és egyenlő szögsebességgel forognak. Itt is az érintő veendő akkor, amikor azonos pontokat kellene összekötnünk. Hozzátehetjük, hogy a két forgó egyenes egy irányban forog, hiszen ha ellentétes irányban forognának, akkor közben párhuzamossá is válnának, márpedig mindig van metszéspontjuk.



Ha tehát a kör  $C_1, C_2, P$  pontjai által meghatározott  $C_1P, C_2P$  egyeneseket a  $C_1, C_2$  pontok körül ugyanabban az irányban és ugyanakkora szögsebességgel forgatjuk, azaz úgy mozgatjuk, hogy közben az irányított hajlásszögük ne változzék meg, akkor a metszéspontjuk a kört írja le. Ha ez a metszéspont a  $C_1, C_2$  pontok valamelyikével azonos, akkor a két egyenes egyike ott érinti a kört.

Ezek szerint a kör  $C_1, C_2, P$  pontjai által meghatározott  $C_1P, C_2P$  egyenesek irányított hajlásszöge akkor és csak akkor egyenlő  $C_1Q, C_2Q$  egyenesek irányított hajlásszögével, ha  $Q$  is a körön van. Itt is megengedhetjük, hogy  $P$  vagy  $Q$  a  $C_1, C_2$  pontok valamelyikével azonos legyen, ha azonos körpontok összekötő egyenesének az érintőt tekintjük.

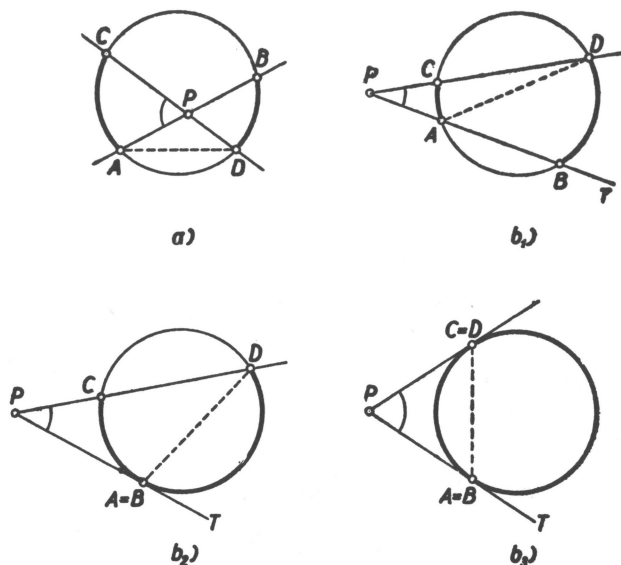
Utolsó eredményünk egyik fele B2b) végeredményét ismétli meg, a másik fele már 16.3 és 16.4 tárgykörébe vág.

Felesleges talán hangsúlyoznunk, hogy ebben a megjegyzésben csak egyszerűbb szövegezés és könnyebb áttekintés kedvéért beszéltünk szögsebességről. Mindezt elmondhattuk volna úgy is, hogy csak elforgatásokról szólnunk.

**16.2 Tétel.** a) Ha egy konvex szög csúcsa a körön belül van, akkor ez a szög egyenlő azon két középponti szög összegének a jelével, amelyeknek egyike a szög szárait összekötő, másika pedig a csúcsszög szárait összekötő körívhez tartozik.

b) Ha egy konvex szög csúcsa a körön kívül van, és mindkét szára metszi vagy érinti a kört, akkor ez a szög egyenlő ahhoz a két ívhez tartozó középponti szög különbségének a felével, amelyek a szög szárait összekötő két körívhez tartoznak.

*Bizonyítás.* A lehetséges eseteket a 84. ábra mutatja be. Ennek az ábrának a jelöléseit használjuk. Az ábrán bemutatott esetek mindegyikében az  $AC$  és  $BD$  ívekhez tartozó középponti szögekről van szó.



a) Ha  $P$  a körön belül van, akkor a vizsgált  $\angle P$  az  $\triangle ADP$  külső szöge, tehát

$$\angle P = \angle BAD + \angle ADC.$$



A jobb oldali kerületi szögek a  $BD$ ,  $AC$  íveken nyugszanak, s ezért összegük az íveken nyugvó középponti szögek összegének felével egyenlő.

b) Ha  $P$  a körön kívül van, akkor a  $\angle TAD$  az  $\angle ADP$  külső szöge, tehát

$$\angle P = \angle TAD - \angle ADP.$$

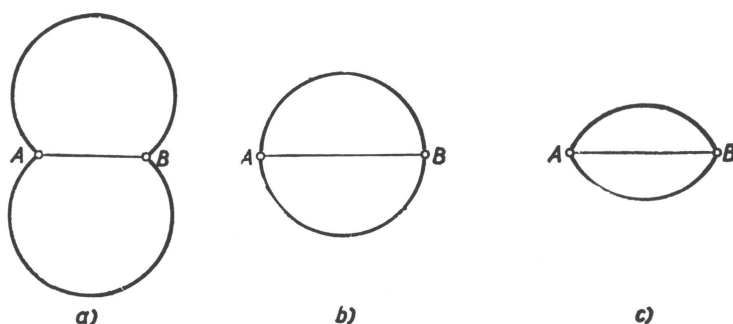
A jobb oldali szögek a  $BD$  és az  $AC$  íven nyugvó kerületi szögek, ezért különbségük az ívekhez tartozó középponti szögek különbségének felével egyenlő. —

A b) eset bizonyítása azt is mutatja, hogy a különbség képzésekor az az ív adja a kivonandót, amelyik a  $P$  pontból nézve konvex, vagyis az az ív, amelyet a  $P$  pont és az ív végpontjai által meghatározott háromszög tartalmaz.

**B** Ha ennek a szakasznak a tételét egybevetjük azzal, amit 16.1 B3-ban bizonyítottunk, és a 83. ábrán mutattunk be, akkor a következő általánosításhoz jutunk: Ha két csúcshöz tartományát tekintjük, és egy kör úgy helyezkedik el, hogy van közös pontja a tartománypár által tartalmazott egyenesek mindegyikével, akkor a csúcshöz kétszerese egyenlő azoknak a középponti szögeknek az algebrai összegével, amelyek a tartománypár által tartalmazott körívekhez tartoznak; az algebrai összeg itt azt jelenti, hogy negatív előjellel kell venni az olyan ívhez tartozó középponti szöget, amely a szögek csúcából nézve konvex.

**16.3** Ha a  $P$  pont az  $AB$  szakasznak nem végpontja, akkor a konvex  $\angle APB$ -ről mondjuk, hogy az  $AB$  szakasz a  $P$  pontból ekkora szögben látható. Ezt a szöget *látószögnek* mondjuk.

**Tétel.** A sík azon pontjainak a mértani helye, amelyekből egy szakasz megadott ( $0^\circ$  és  $180^\circ$  közötti) szögben látható, a szakasz végpontjait összekötő, a szakaszra vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő két körív belseje (85. ábra).



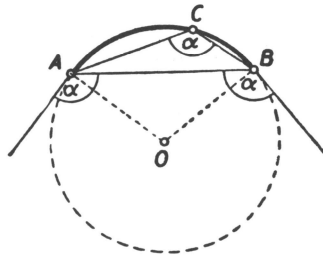
85

Azért mondtuk, hogy a mértani hely a körívek belseje, mert a két végpont nem tartozik a mértani helyhez, hiszen nem is lehet szó arról, hogy a szakasz mekkora szögben látható a végpontjaiból. A tétel csak  $0^\circ$  és  $180^\circ$  közötti látószögekről szól, hiszen a  $180^\circ$ -os látószögű pontok mértani helye a szakasz belseje, a  $0^\circ$ -os látószögűeké pedig a szakaszt meghosszabbító két félegyenes belseje.

**Bizonyítás.** A szakasz egyenesére nézve szimmetrikusan elhelyezkedő pontokból ugyanakkora szögben látható a szakasz, hiszen a tükrözés a szögeket nem változtatja meg. Ezért elég a keresett mértani helynek csak a szakasz egyenesére által határolt egyik félsíkban levő részét vizsgálni.

a) Tekintsük az  $AB$  szakaszt, és szemeljük ki az  $AB$  egyenes által határolt egyik félsíkot. A ki nem szemelt félsíkban olyan  $A$  kezdőpontú és  $B$  kezdőpontú félegyeneset veszünk fel, amelyek az  $AB$  szakasszal a megadott  $\alpha$  szöget zárják be (86. ábra). A felvett félegyenesekre  $A$ -ban és  $B$ -ben merőleget állítunk. Ezek  $\alpha < 180^\circ$  miatt nem merőlegesek  $AB$ -re, következésképpen metszik  $AB$  felezőmerőlegesét, mégpedig a szimmetria miatt ugyanabban az  $O$  pontban.  $O$  körül az  $A$ ,  $B$  pontokon áthaladó kört írunk, és ennek a körnek a kiszemelt félsíkban elhelyezkedő  $AB$  ívét tekintjük. Az  $AB$  szakasz  $\alpha$  szögben látható az  $AB$  ív bármely belső  $C$  pontjából, mert az  $\angle ACB$ , valamint az imént

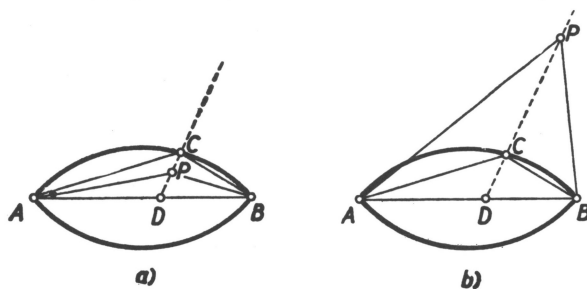
felmért  $\alpha$  szögek mindannyian ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek, ti. a rajzolt körnek a ki nem szemelt fűlsíkban elhelyezkedő íven nyugszanak.



86

b) Be kell még látnunk, hogy ha a kiszemelt fűlsík  $P$  pontja nincs a kapott  $AB$  íven, akkor az  $AB$  szakasz  $P$ -ből  $\alpha$ -tól különböző szűgben látható. Feltehetjük, hogy  $P$  nincs az  $AB$  egyenesen, hiszen ott a látószűg csak  $0^\circ$  vagy  $180^\circ$  lehet.

Az  $AB$  szakaszon belül egy  $D$  pontot választunk (87. ábra). A  $DP$  fűlegyenes az  $AB$  kűrűvet egy  $C$  pontban metszi, és  $C$  az  $AB$  ívnek belső pontja, hiszen  $P$  nincs az  $AB$  egyenesen. Az  $ABC$  és  $ABP$  hűromszűgek egymástól kűlűnbűzűk, és az egyik tartalmazza a másikat.



87

Ha  $P$  az  $AB$  ív által határolt kűrszeleten belül van ha tehát  $P$  a  $DC$  szakasz belső pontja, akkor az  $ABC\Delta$  tartalmazza az  $ABP\Delta$ -et, és ezért 9.1 műsodik tètele szerint  $APB\text{-}\alpha > ACB\text{-}\alpha = \alpha$ . Ha viszont  $P$  a kűrszeleten kűlűl van, ha tehát  $P$  a  $DC$  szakasz meghosszabbításán helyezkedik el, akkor az  $ABP\Delta$  tartalmazza az  $ABC\Delta$ -et, és ezért  $APB\text{-}\alpha < ACB\text{-}\alpha = \alpha$ . Ezek szerint az  $AB$  szakasz a vizsgált  $P$  pontok mindegyikébűl  $\alpha$ -tól kűlűnbűzű szűgben látható. —

A tétel állításán tűlmenűen azt is bebizonyítottuk, hogy a tételben szereplű kű két kűrűv által határolt sűkidomon belül a látószűg nagyobb, azon kűlűl viszont kisebb, mint az adott szűg.

**Tétel** (Thales<sup>\*1</sup> tètele). *A sűk azon pontjainak műrtani helye, amelyekbűl egy megadott szakasz derűkszűgben látható, a szakaszhoz mint átműrűhűz tartozű kűr, elhagyva belűle a szakasz vűgpontjait.*

A szakasz vűgpontjait ki kell zárni, mert ott látószűgrűl nem beszélhetűnk. A szakaszhoz mint átműrűhűz tartozű kűrt tételűnkre való hűvatozűással *Thales-kűrűnek* nevezzűk (85b ábra). A tétel egyik felét műr 16.1-ben kimondtuk, amikor megállapítottuk, hogy az átműrűn nyugvű kűrűleti szűg derűkszűg.

*Bizonyítás.* A tétel az elűzű tétel speciális eseteként adűdik. Ha  $\alpha = 90^\circ$ , akkor az elűzű bizonyításban szereplű  $O$  pont az  $AB$  szakasz felezűpontja. Ezért az ott szereplű kűrűvek fűlkűrűk, amelyek egyűttesen az  $AB$  átműrűjű kűrt alkotják. —

<sup>1\*</sup> A gűrűg Thales i. e. 624—548 élt. Ő a legrűgűbb ismert nevű matematikus.

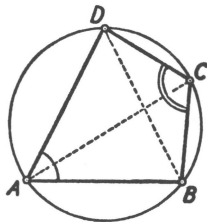
Az előző tételnél mondottakra hivatkozva azt is megállapíthatjuk, hogy az átmérő a kör belső pontjaiból tompa- (vagy  $180^\circ$ -os) szögben látható, a külső pontokból pedig hegyesszögben.

Tételünk alapján kimondhatjuk, hogy két adott ponton áthaladó és egymásra merőleges egyenesek metszéspontjának mértani helye a két pont összekötő szakasza fölé mint átmérő fölé írt kör. Azt is kimondhatjuk, hogy ha az  $A$  pontból a  $B$  ponton áthaladó egyenesekre merőlegest bocsátunk, akkor a talppontok mértani helye az  $AB$  átmérőjű kör. Hangsúlyozzuk, hogy Thales tételének ezeknél az átfogalmazásainál nincs szükség a szakasz végpontjainak a kizárására.

A Thales tételére adott bizonyításunk korántsem a legegyszerűbb. A tétel tartalmilag szinte azonos 14.5 tételével, és azt jóval egyszerűbben bizonyítottuk. A mi tárgyalásunk e szakasz két tételének a kapcsolatát domborította ki.

**16.4** Azokat az egyszerű sokszögeket, amelyeknek minden csúcsa egy körön van, amelyeknek tehát minden oldala a körnek húrja, *húrsokszögeknek* (körbe írt sokszög) nevezzük. Azt is mondjuk, hogy az ilyen sokszögek köré kör írható, vagy hogy van *körülírt körük*. Minden húrsokszög konvex, hiszen nem lehet pontja egyik oldal meghosszabbításán sem. Így tehát csak konvex sokszögeknek lehet körülírt körük.

Mi most a *húrnégyszögekkel* foglalkozunk (88. ábra).



88

**Tétel.** Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szöge kiegészítő szög.

Minthogy a négyszög szögösszege  $360^\circ$ , következik, hogy ha két szemközti szöge kiegészítő szög, akkor a másik két szöge is az. A tételt így is szövegezhettük: egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szögének összege egyenlő. Ez a megfogalmazás tételünket 15.5 tételével állítja párhuzamba.

*Bizonyítás.* a) Egy húrnégyszög két szemközti szöge a körnek olyan két ívén nyugszik, amelyeknek az együttese a teljes körvonal, azaz középponti szögeik összege  $360^\circ$ . Ezért a szemközti szögek összege feleakkora. Ez a megadott feltétel szükségességét bizonyítja.

b) Ha az  $ABCD$  négyszögben  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ , akkor az előző szakasz értelmében  $A$  azon a köríven van, amelynek a belseje a  $BD$  egyenes által határolt egyik félsíkban az olyan pontok mértani helye, ahonnan a  $BD$  távolság  $\angle A$  alatt látható. E körívet teljes körre kiegészítő körív belső pontjaiból a  $BD$  távolság  $a$ ) szerint az  $\angle A$  kiegészítő szöge alatt látható. E kiegészítő körív belseje az előző szakasz szerint a másik félsík ilyen tulajdonságú pontjainak a mértani helye. Ezért  $C$  ezen a kiegészítő köríven van, és a teljes kör az  $ABCD$  négyszög valamennyi csúcsát tartalmazza. Beláttuk tehát, hogy a tételben megadott feltétel elégséges is. —

Tételünk alapján megállapíthatjuk, hogy a paralelogrammák közül csak a téglalapok, a trapézok közül pedig csak a szimmetrikus trapézok húrnégyszögek.

**B1** Ha az  $ABCD$  négyszög húrnégyszög, akkor  $\angle ACB = \angle ADB$ , mert ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. Ez a feltétel a konvex négyszögek körében elégséges is, mert ha a feltétel teljesül, akkor az  $A, B, C, D$  pontok az előző szakasz szerint egy köríven vannak. Azt azonban nem mondhatjuk

ki, hogy feltételünk minden négyszögre, tehát a konkáv négyszögek körében is elégséges, ugyanis konkáv négyszög nem lehet húrnégyszög, pedig a feltétel ezekre is teljesülhet. Ezt belátjuk, ha a  $CD$  szakasz felezőmerőlegesén a szakasz által el nem választott  $A, B$  pontokat veszünk fel, és az  $ABCD$  konkáv négyszöget tekintjük.

**B2** Egy sokszögnek egynél több körülírt köre nem lehet, hiszen a sokszögnek legalább három csúcsa van, két körnek pedig 15.6 szerint kettőnél több közös pontja nem lehet.

## 17. § Hasonlóság

A köznapi nagyítás és kicsinyítés szemlélete vezet el a hasonlóság fogalmának megalkotásához. Hasonló alakzatok alapvető tulajdonságait tárgyaljuk.

**17.1** *Hasonlóságnak* nevezünk egy ponttranszformációt, ha bármely két pont képének a távolsága a pontok távolságával osztva mindig ugyanazt a (0-tól különböző) hányadost adja. Azt a pozitív számot, amely megmondja, hogy a képtávolságok a megfelelő tárgytávolságoknak hány-szorosa, a hasonlóság *arányának* nevezzük. Ha az arányszám 1-nél nagyobb, nagyítással, ha 1-nél kisebb, kicsinyítéssel állunk szemben. Ha az arányszám 1, akkor a hasonlóság egybevágóság.

A hasonlóság értelmezéséből nyomban következik, hogy minden hasonlóságnak van inverz transzformációja, hogy ez is hasonlóság, és hogy ez utóbbinak az aránya az eredeti hasonlóság arányának a reciproka. Nyomban belátható az is, hogy ha egymást követően két hasonlóságot alkalmazunk, akkor olyan hasonlósághoz jutunk, amelynek az aránya a két alkalmazott hasonlóság arányának a szorzata.

Két képtávolság aránya mindig megegyezik a hasonlóság által hozzájuk rendelt tárgytávolságok arányával. Ha ugyanis a tárgytávolságok és a megfelelő képtávolságok hossza  $a_1, b_1$  és  $a_2, b_2$ , akkor a hasonlóság szerint a  $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$ , s ebből az aránypárból a beltagok felcserélésével  $a_2 : b_2 = a_1 : b_1$  adódik. Ezt a tulajdonságot akár a hasonlóság definiálására is felhasználhatjuk. Röviden azt mondhatjuk tehát, hogy a hasonlóság aránytartó (ti. a távolságok arányát megtartó) leképezés.

Két alakzat *hasonló*, ha van olyan hasonlóság, amely az egyikhez a másikat rendeli. A hasonlóság jele  $\sim$ . Ha a hasonló alakzatokat pontjaikkal adjuk meg, akkor szokás szerint az egymásnak megfelelő pontokat ugyanannyiadik helyre írjuk. Az  $A_1B_1C_1\Delta \sim A_2B_2C_2\Delta$  írásmód azt is jelzi tehát, hogy pl.  $A_1$  és  $A_2$  egymásnak megfelelő pontok.

A fentebb mondottakból következik, hogy ha egy alakzat hasonló egy másikhoz, akkor ez utóbbi is hasonló az elsőhöz, valamint hogy ha két alakzat mindegyike hasonló egy harmadikhoz, akkor ez a két alakzat is hasonló egymáshoz. Ez utóbbi kijelentés azt is kimondja, hogy ha egy alakzat két egybevágó alakzat egyikéhez hasonló, akkor hasonló a másikhoz is.

**A1** A hasonlóság definíciójában mi csak a távolságok arányáról szoltunk, a szögek egyenlőségéről nem. Ez felesleges lett volna, mert a szögek egyenlősége már következik a távolságarányok egyezéséből (lásd 17.4).

**A2** Ismételten dolgozunk e könyvben *aránypárokkal*. Az  $a:b$  arány eredetileg az  $\frac{a}{b}$  hányadost,  $a:b = c:d$  aránypár a két hányados egyenlőségét jelenti. Elsősorban későbbi fejezetek érdekében már itt leszögezzük, hogy az aránypár fogalmát általánosítva használjuk, és pl.  $3:0 = 2:0$ ,  $3:2 = 0:0$ ,  $3\text{ cm} : 2\text{ cm} = 3:2$ ,  $3\text{ cm} : 2\text{ cm} = 90^\circ : 60^\circ$  aránypárokat is helyesnek mondjuk.

Az  $a:b = c:d$  aránypár ebben az általánosabb értelemben azt jelenti, hogy vagy van olyan  $x$  szám, amelyre  $a = xb$  és  $c = xd$ , vagy pedig van olyan  $y$  szám, amelyre  $b = ya$  és  $d = yc$ . Csak azért kellett itt két lehetőségről beszélni, mert az is lehet, hogy az egyik oldalon minden tag 0. A definícióból következik,

hogy ha  $a : b = c : d$ , akkor  $c : d = a : b$  (oldalak felcserélése) és  $b : a = d : c$  (a tagok felcserélése mind a két oldalon). Azt is megállapíthatjuk, hogy ha  $a : b = c : x$  és  $a : b = c : y$ , ha továbbá  $a$  nem 0 (nem 0 mértékű), akkor  $x = y$  (következtetés a negyedik tagok egyenlőségére).

Ha az aránypár egyik oldalán álló mennyiségek a jobb oldalon állókkal arányba állíthatók, ha tehát mind a két oldalon ugyanolyan mennyiségfajta szerepel, akkor az  $a : b = c : d$  aránypárból következtethetünk arra is, hogy  $a : c = b : d$  (beltagok felcserélése) és  $d : b = c : a$  (kültagok felcserélése).

Ha az aránypár két oldalán olyan mennyiségek állanak, amelyeket egymással összesorozhatunk, akkor kimondhatjuk, hogy az aránypár akkor és csak akkor helyes, ha a kültagok szorzata a beltagok szorzatával egyenlő. Ilyenkor tehát  $a : b = c : d$ , valamint  $ad = bc$  egyszerre helyes vagy helytelen.

Az  $a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n$  írásmód azt jelenti, hogy a két oldal bármely két-két megfelelő tagja aránypárt alkot. Ha a két oldalon egynemű mennyiségek állanak, és az egyik oldalon álló tagoknak nem mindegyike 0 (illetve 0 mértékű), akkor van olyan szám, amellyel ezeket megszorozva a másik oldalon álló tagokat kapjuk meg. A későbbiekben főként hármasarányok egyenlősége szerepel majd.

**B1** Felhívjuk a figyelmet, hogy e paragrafus tárgyalása javarészt betű szerint vonatkozik a térbeli alakzatokra is. Külön felhívjuk a figyelmet ott, ahol ez nincs így.

**B2** A hasonlóság egy alakzaton definiált leképezés (vö. 6.1 B2). Két síkbeli vagy térbeli alakzat mindenestre hasonló akkor, ha van olyan, a teljes síkon vagy térben definiált hasonlóság, amely az egyik alakzathoz a másikat rendeli. Nem magától értetődő azonban, hogy hasonló síkbeli vagy térbeli alakzatokhoz található-e a síknak, illetve a térnek ilyen hasonlósága. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez így van (lásd 17.2 B).

**B3** Megállapíthatjuk, hogy a sík és a tér hasonlóságai csoportot alkotnak. Ez a csoport alcsoportként tartalmazza az egybevágóságok csoportját.

**B4** Megemlítjük, hogy körülményesebben ugyan, de tárgyalni lehetne nem lineáris alakzatok hasonlóságát anélkül, hogy arányok szerepeljenek, sőt mindennemű számolás nélkül is. Azt mondhatnók ugyanis, hogy (ha nem lineáris alakzatokról van szó) hasonlóságnak a szögtartó ponttranszformációt nevezzük, mégpedig elég, ha ezt abban a legkevesebbet mondó alakban értjük, amelyből 11.1 B2 kiindult (vö. 17.5 B2). Eszerint a sík és a tér hasonlósága olyan ponttranszformáció, amely az egyeneseket egyenesekbe viszi át és a metsző egyenesek szögét nem változtatja meg.

**17.2** A hasonlóság tárgyalását az itt következő tételekre alapozzuk majd.

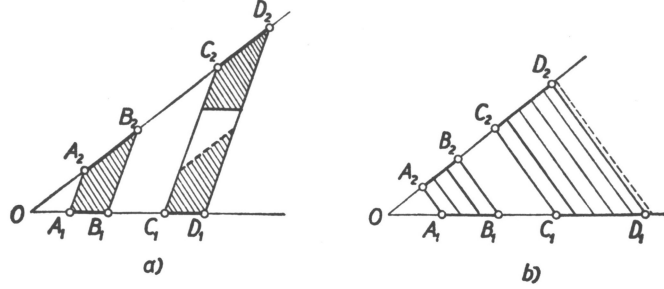
**Tétel** (párhuzamos szelők tétele). *Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.*

A tétel a szög csúcsától a metszéspontokig terjedő és a metszéspontokat összekötő szakaszokra egyaránt vonatkozik. Az állítás akkor is helyes, ha nem egy szög szárairól, hanem párhuzamos egyenesekről van szó, hiszen ott maguk, a megfelelő szakaszok is egyenlők.

*Bizonyítás.* a) Először azt igazoljuk, hogy az egyik szár két egyenlő szakaszának a másik száron is két egyenlő szakasz felel meg. Legyen  $A_1B_1 = C_1D_1$  (89a ábra), bizonyítandó pedig az  $A_2B_2 = C_2D_2$  egyenlőség. Toljuk el az  $A_1B_1B_2A_2$  síkidomot az  $OA_1$  szár mentén úgy, hogy  $A_1B_1$  fedje a vele egyenlő  $C_1D_1$  távolságot. Az elmozgatott  $A_1A_2, B_1B_2$  szakaszok a párhuzamosság miatt a  $C_1C_2, D_1D_2$  egyenesekre kerülnek. Toljuk el újból a síkidomot, mégpedig a  $C_1C_2$  egyenes mentén úgy, hogy a már előbb is elmozgatott  $A_2$  pont végül a  $C_2$  helyzetbe jusson. Eközben a már előbb is elmozgatott  $B_2$  pont a  $D_1D_2$  egyenesen mozog. Mivel  $A_2B_2$  állása az eltolások során nem változik meg,  $A_2B_2$  végül a  $C_2D_2$  helyzetbe jut. E távolságok tehát valóban egyenlők.

b) Az általános esettel foglalkozunk. Legyen  $n$  tetszőleges természetes szám. Osszuk fel az  $A_1B_1$  távolságot  $n$  egyenlő részre (89b ábra), és mérjük fel e részt a  $C_1$  pontból kiindulva a  $C_1D_1$  távolságra annyszor, ahányszor csak lehet. Ha e felmérés  $k$ -szor lehetséges, akkor

$$k = \frac{A_1B_1}{n} \leq C_1D_1 < (k+1) \frac{A_1B_1}{n}.$$



89

A felmért részek végpontjain át párhuzamosokat húzunk a párhuzamos szelőkkel. Minden résznek a) szerint a másik száron is egyenlő szakaszok felelnek meg, s ezért

$$k = \frac{A_2B_2}{n} \leq C_2D_2 < (k+1) \frac{A_2B_2}{n}.$$

Egyenlőtlenségeinket  $A_1B_1$ -gyel, illetve  $A_2B_2$  osztva azt kapjuk, hogy a  $C_1D_1 / A_1B_1$  és  $C_2D_2 / A_2B_2$  számok egyike sem kisebb  $\frac{k}{n}$ -nél, viszont mindegyikük kisebb, mint  $\frac{k+1}{n}$ . A két közrefogott szám különbsége kisebb tehát, mint a két közrefogó számé, azaz

$$\left| \frac{C_1D_1}{A_1B_1} - \frac{C_2D_2}{A_2B_2} \right| < \frac{1}{n}.$$

Mint hogy az  $n$  természetes számot önkényesen választottuk meg, kimondhatjuk, hogy a bal oldali érték minden természetes szám reciprokanál kisebb. Ebből következik, hogy a bal oldali érték 0, hiszen 0 az egyetlen olyan nem negatív szám, amely minden természetes szám reciprokanál kisebb. Beláttuk ilyen módon, hogy a  $C_1D_1 : A_1B_1 = C_2D_2 : A_2B_2$  aránypár helyes. —

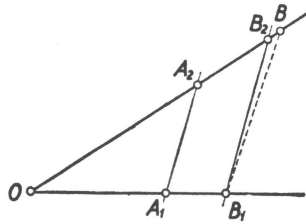
Nemcsak ugyanannak a szárnak a szakaszait állíthatjuk arányba, hanem a két szár egy-egy megfelelő szakaszát is, és kimondhatjuk, hogy a párhuzamosok által kimetszett megfelelő szakaszpárok aránya minden ilyen szakaszpárra ugyanakkora. Ez a bizonyított aránypárból adódik, ha abban a beltagokat felcseréljük.

A következő tétel a most bizonyított tétel megfordítása.

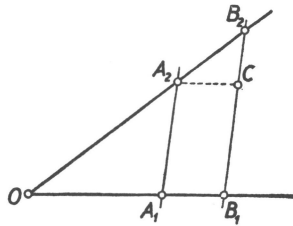
**Tétel.** Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek az aránya mind a két száron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos.

A tétel a szelők által a két szárból lemetsett szeletekről, vagyis a szög csúcsától a szelők metszéspontjaiig terjedő szakaszokról szól. Az előző tétellel együtt azt mondja ki tételünk a 90. ábra jelöléseivel, hogy  $A_1A_2$  és  $B_1B_2$  akkor és csak akkor párhuzamos, ha  $OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2$  teljesül. Kimondhattuk volna azt is, hogy a párhuzamosságnak szükséges és elégséges feltétele az, hogy az

egyik szelő által levágott szeleteknek az aránya megegyezze a másik szelő által levágottakéval, hogy tehát  $OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2$ , hiszen ez az aránypár az előbbiből a beltagok felcserélésével adódik.



90



91

*Bizonyítás.* Feltesszük hogy  $OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2$ . A  $B_1$  ponton át  $A_1A_2$ -vel párhuzamosat húzunk. Ez az  $OA_2$  szárt a  $B$  pontban metszi. Bizonyítanunk kell, hogy  $B$  és  $B_2$  azonos. A 90. ábra torzítva szemlélteti az okoskodást.

Mint hogy  $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ , az előző tétel szerint  $OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB$ . Ha ezt összevetjük a  $B_2$ -re vonatkozó aránypárral, akkor  $OB = OB_2$  adódik. Ezért  $B = B_2$  és  $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ . —

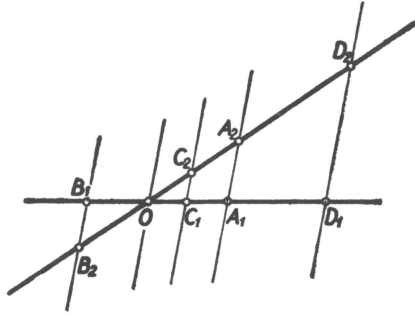
**Tétel.** Egy szög szárait metsző párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosok által az egyes szárakból lemetszett szeletek arányával.

E tételnek már a kimondása is feltételezi e szakasz első tételének az ismeretét, hiszen a párhuzamos szakaszok aránya csak úgy lehet mindkét szár szeleteinek az arányával egyező, ha ezek egymással is egyenlők.

*Bizonyítás.* A 91. ábra párhuzamos  $A_1A_2$  és  $B_1B_2$  szelőjét tekintjük. Az  $A_2$  ponton át az  $OA_1$  szárral húzott párhuzamos a  $B_1B_2$  szelőt  $C$  pontban metszi. Alkalmazzuk e szakasz első tételét az  $OB_2B_1$ -re s a párhuzamos  $A_2C$ ,  $OB_1$  szelőkre. Így  $OA_2 : OB_2 = B_1C : B_1B_2$  adódik. Mint hogy pedig az oldalak párhuzamossága miatt  $A_1A_2CB_1$  paralelogramma, tehát  $B_1C = A_1A_2$ , azért  $OA_2 : OB_2 = A_1A_2 : B_1B_2$  is teljesül. —

**B1** Az első tétel bizonyítása jóval rövidebb volna, ha csak racionális arányú (kommenzurábilis, összemérhető) szakaszokkal foglalkoznánk. Ez esetben nem is lenne szükség egyenlőtlenség szerepeltetésére.

**B2** Ennek a szakasznak valamennyi állítása helyes akkor is, ha nem a szög szárairól, hanem száregyeneseiről, tehát két egymást metsző egyenesről van szó. Bizonyításaink is változatlanul helytállóak maradnak. Egyedül az első tétel bizonyításában szereplő négyszöget illetően tartjuk megemlítenedőnek azt, hogy ha nem szögvonalról van szó, akkor ez a négyszög hurkolt is lehet (92. ábra).



92

Helyesek maradnak az állításaink akkor is, ha ezeket megfelelően irányított szakaszokra mondjuk ki. Ezt úgy értjük, hogy a száregyeneseken elhelyezkedő, egymásnak megfelelő szakaszok kezdőpontjaiul (és végpontjaiul) ugyanannak a szelőnek a metszéspontjait választjuk, s hogy a szelők szakaszainak kezdőpontját (és végpontját) ugyanazon a száregyenesen vesszük fel, és a párhuzamos szelők mindegyikén természetesen ugyanazt az irányt választjuk pozitív irányul. Indokolásul elég megemlítenünk egyrészt azt, hogy ha az egyik száregyenes irányított  $A_1B_1, C_1D_1$  szakaszai egyirányúak vagy ellentétes irányúak, akkor ugyanezt mondhatjuk a másik száregyenes megfelelő szakaszairól is, másrészt azt, hogy ha az egyik száregyenes irányított  $OA_1, OB_1$  szeletei egyező vagy ellentétes irányúak, akkor ugyanezt mondhatjuk a másik száregyenes megfelelő  $OA_2, OB_2$  szakaszairól, valamint az  $A_1A_2, B_1B_2$  szelőszakaszokról is.

**B3** A szakasz első tétele bizonyításának b) részében egy gondolatmenetet alkalmaztunk, amelyet különféle geometriai beöltöztetésben több ízben alkalmazunk majd (lásd 19.8, 20.2, 20.8, 27.2, 29.8). A cél mindenütt az lesz, hogy bizonyos mennyiségek arányosságát kimutassuk.

Rámutatunk itt arra, hogy a geometriai beöltöztetéstől megfosztva hogyan szól ez a gondolatmenet, hogy tehát milyen segédétel volna szükséges ahhoz, hogy ne kelljen ezt a gondolatmenetet különféle beöltöztetésben újból és újból elvégezni.

Egy intervallumfüggvényt tekintünk, azaz (egy számtartományon belül) minden  $X = (x_1, x_2)$  számközhöz hozzárendelünk egy-egy  $y(X)$  értéket. Egy ilyen intervallumfüggvény additív, ha bármely két egymáshoz csatlakozó, együttesen az  $X$  intervallumot szolgáltatató  $X_1$  és  $X_2$  intervallumra  $y(X_1) + y(X_2) = y(X)$ . Egy intervallumfüggvény pozitív, ha minden intervallumhoz pozitív értéket rendel. Ha egy intervallumfüggvény pozitív és additív, akkor monoton is, azaz valamely  $X_1$  intervallumot tartalmazó minden más intervallumra  $y(X_1) < y(X_2)$ . Ennek bizonyítása végett az intervallumot az egymáshoz csatlakozó  $I_1, X_1, I_2$  intervallumokra bontjuk fel, megengedve azt is, hogy az  $I_1, I_2$  intervallumok egyike nullintervallum legyen. Az additivitásból ilyenformán  $y(X_2) = y(I_1) + y(X_1) + y(I_2)$  adódik, ahol az  $y(I_1), y(I_2)$  értékek egyike 0 lehet. A pozitivitásból következik tehát, hogy  $y(X_2) > y(X_1)$  valóban teljesül.

*Ha egy pozitív és additív intervallumfüggvény egyenlő intervallumokhoz egyenlő értékeket rendel, akkor két intervallumhoz rendelt érték aránya a két intervallum hosszának arányával egyenlő.*

Az állítás szerint van tehát olyan  $c$  állandó, hogy az  $X = (x_1, x_2)$  intervallumhoz rendelt érték  $y(X) = c(x_2 - x_1)$ .



Bizonyítás céljából tekintsük az  $A = (a_1, a_2)$  és  $B = (b_1, b_2)$  intervallumokat. Válasszunk egy  $n$  természetes számot, és bontsuk fel az  $A$  intervallumot  $n$  egyenlő,  $\frac{a_2 - a_1}{n}$  hosszúságú részintervallumra.

Vágjunk le ezekkel egyenlő részintervallumokat a  $B$  intervallumból is, mégpedig a  $b_1$  értéktől elindulva sorozatosan annyszor, ahányszor csak lehet. Ha ez  $k$ -szor lehetséges, akkor egyrészt igaz az, hogy  $B$  tartalmaz egy  $k$  egyenlő részintervallumból összetett intervallumot, másrészt pedig, hogy egy  $k+1$  egyenlő részintervallumból összetett intervallum valódi részként tartalmazza a  $B$  intervallumot. Ezek szerint

$$k \frac{a_2 - a_1}{n} \leq b_2 - b_1 < (k+1) \frac{a_2 - a_1}{n}.$$

Mint hogy az egyenlő részintervallumokhoz egyenlő értékek tartoznak, ez az érték az additivitás miatt

csak  $\frac{1}{n} \gamma(A)$  lehet. Az additivitást újból kihasználva, a fentebb mondottak szerint igaz tehát, hogy  $B$

tartalmaz egy olyan intervallumot, amelyhez az  $\frac{1}{n} \gamma(A)$  érték  $k$ -szorososa van hozzárendelve, és hogy  $B$

valódi része egy olyan intervallumnak, amelyhez ugyanannak az értéknek a  $(k+1)$ -szerese tartozik. A pozitivitásból és additivitásból következő monotonitás alapján adódik tehát, hogy

$$k \frac{\gamma(A)}{n} \leq \gamma(B) < (k+1) \frac{\gamma(A)}{n}.$$

Ha egyenlőtlenségeinket a pozitív  $a_2 - a_1$  és  $\gamma(A)$  értékekkel osztjuk, azt kapjuk, hogy  $\frac{k}{n}$  és  $\frac{k+1}{n}$  közrefogja a

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, \quad \frac{\gamma(B)}{\gamma(A)}$$

értékek mindegyikét, megengedve, hogy  $\frac{k}{n}$ -nel egyenlők is lehessenek. Ebből következik, hogy a

felírt két érték különbsége a közrefogó értékek különbségénél,  $\frac{1}{n}$ -nél kisebb. Ezt a megállapítást a nem negatív különbségre, vagy ha tetszik, a különbség abszolút értékére tettük. Mivel a nem negatív

különbség  $\frac{1}{n}$ -nél kisebb, és  $n$  akármelyik természetes számot jelentheti, azért a különbség csak 0 lehet. Támaszkodtunk itt arra, hogy pozitív szám nem lehet minden természetes szám reciprokanál kisebb, hiszen van olyan egész szám, amely egy adott pozitív szám reciprokanál nagyobb. Beláttuk ilyen módon, hogy a felírt két érték egyenlő, és ez segédállításunk helyességét mondja ki.

Segédállításunk birtokában jóval egyszerűbb e szakasz első tételének a bizonyítása. Az egyik szár szakaszaihoz hozzárendeljük a másik szár megfelelő szakaszainak a hosszát. Ez az intervallumfüggvény nyilvánvalóan pozitív és additív. A bizonyítás a) részében kimutattuk azt is, hogy egyenlő szakaszokhoz egyenlő értékeket rendel. A segédállítás alapján máris következik ebből a bizonyítandó állítás.

Segédállításunk más szövegezéssel azt mondja ki, hogy ha minden szakaszhoz egy-egy számot rendelünk, mégpedig 1. mindig pozitív számot, 2. egyenlő szakaszokhoz egyenlő számokat, 3. egymáshoz csatlakozó szakaszokhoz olyan számokat, amelyeknek az összege a két szakasz együtteséhez rendelt számmal egyenlő, akkor a hozzárendelt szám csak a szakasz hosszának állandószorosa lehet. Ha tehát azt is megköveteljük, hogy 4. az egységszakaszhoz rendelt szám

1 legyen, akkor a hozzárendelt szám csak maga a hossz lehet. E megállapítás síkbeli és térbeli megfelelőjével majd találkozni fogunk (lásd 20.1 és 27.1).

**B4** Az előző megjegyzés segédételét nyomban felhasználjuk annak bizonyítására, hogy a sík és a tér el nem fajuló félegyenestartó leképezései (vö. 6.1B4) az egyező állású szakaszok arányát megtartják. 14.2 B2 szerint elég, ha ezt egy egyenes szakaszainak az arányára bizonyítjuk csak. Tekintsük ezért egy egyenes intervallumait, és rendeljük hozzájuk a képük hosszát. Ez az intervallumfüggvény pozitív és additív, továbbá 14.2 B2 szerint egyenlő intervallumokhoz egyenlő értékeket rendel. Igaz tehát, hogy a képszakaszok hosszának az aránya megegyezik a tárgyszakaszokéval.

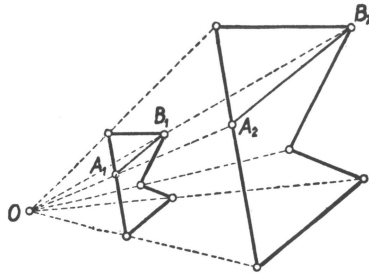
**17.3** Az előző szakasz előkészítése után a hasonlóság tárgyalásába kezdünk.

**Tétel.** Ha egy alakzat minden egyes  $P_1$  pontjához azt a  $P_2$  pontot rendeljük hozzá, amelyik a rögzített  $O$  pontból induló  $OP_1$  félegyenesen van, s amelyikre  $OP_2 = \lambda OP_1$ , ahol  $\lambda$  egy rögzített pozitív szám, akkor az így hozzárendelt pontok az eredetihez hasonló alakzatot alkotnak.

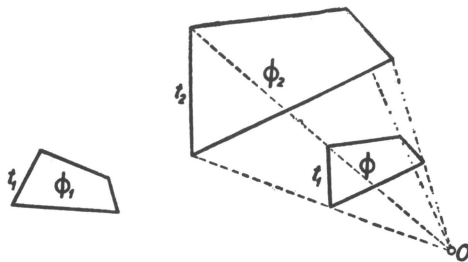
Tételünk az egy pontból való kinagyításról és az egy pontra való összehúzásról szól. Az alakzat, amelyre a tételben leírt műveletet alkalmazzuk, tetszőleges lehet. Lehet a teljes sík vagy akár az egész tér is. A tétel számunkra azért is fontos, mert biztosítja, hogy van szabadon megválasztott arányú hasonlóság, hogy minden alakzathoz található hasonló alakzat, mégpedig szabadon előírt aránnyal.

*Bizonyítás.* Ha az egyik alakzat  $A_1$  és  $B_1$  pontjának a másik alakzat  $A_2$  és  $B_2$  pontja felel meg (93. ábra), akkor e pontok megválasztásából következőleg  $OA_2 : OA_1 = OB_2 : OB_1$ . Ha tehát az  $OA_1, OB_1$  egyenesek nem azonosak, akkor az előző pont második tétele szerint  $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ , harmadik tétele szerint pedig  $A_2B_2 : A_1B_1 = \lambda$ .

Ha viszont  $OA_1$  és  $OB_1$  azonos egyenesek, akkor az  $A_1B_1$  távolság az  $OA_1$  és  $OB_1$  távolságok különbsége vagy összege. Az  $A_2, B_2$  pontok megválasztása folytán az  $A_2B_2$  távolság is összege, illetve különbsége az  $OA_2$  és  $OB_2$  távolságoknak, azaz az  $OA_1, OB_1$  távolságok  $\lambda$ -szorosainak. Ezért  $A_2B_2$  az  $A_1B_1$  távolság  $\lambda$ -szorosa.



93



94

Igazoltuk, hogy az új alakzat bármely két pontjának távolsága az eredeti alakzat megfelelő pontjai távolságának  $\lambda$ -szorosa. A két alakzat így hasonló, s a hasonlóság arányszáma  $\lambda$ . —

Tételünk speciális helyzetű hasonló alakzatokról szól. A bizonyítás azt is mutatja, hogy az alakzatok megfelelő szakaszai párhuzamosak, sőt azt is, hogy ha a megfelelő szakaszokat úgy irányítjuk, hogy kezdőpontjaik megfelelő pontok legyenek, akkor irányuk is megegyező. Megállapíthatjuk tehát, hogy az alakzatok megfelelő szögei egy állásúak és így egyenlők.

**B** Bizonyítjuk, hogy két hasonló síkbeli alakzathoz található a síknak olyan hasonlósága, amely ezt a két alakzatot egymáshoz rendeli. Más szóval: két síkbeli alakzat hasonlósága kiterjeszthető síkjuk (vagy síkjaik) hasonlóságává (vö. 6.1 B2). Hasonlót mondhatunk két térbeli alakzatról is, de ennek helyességét majd csak később láthatjuk be (lásd 26.4 B2).

Az állítás bizonyítása céljából tekintsük a hasonló síkbeli  $\Phi_1, \Phi_2$  alakzatokat (94. ábra), s legyen  $\ell_1$  és  $\ell_2$  egy-egy megfelelő távolságuk. Egy tetszőleges  $O$  pontot választunk, és  $\Phi_2$ -ből utolsó tételünk előírása szerint olyan hozzá hasonló  $\Phi$  alakzatot készítünk, amelyben  $\ell_2$ -nek  $\ell_1$  távolság felel meg.  $\Phi_1$  és  $\Phi$  egybevágók, mert hasonlóak, és egy-egy megfelelő távolságuk egyenlő, azaz hasonlóságuk aránya 1. Ez az egybevágóság 11.1 B3c) szerint kiterjeszthető a sík egybevágó leképezésévé. Ha a síknak ezt az egybevágó leképezését követően a  $\Phi$  alakzatot szolgáltató hasonlóság inverzét alkalmazzuk, akkor a sík kívánt tulajdonságú hasonlóságához jutunk.

**17.4 Tétel.** Minden hasonlóság szögtartó.

Ha tehát az  $A_1, B_1, C_1$  pontokhoz a hasonlóság az  $A_2, B_2, C_2$  pontokat rendeli, akkor  $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $\Phi_1$  és  $\Phi_2$  két hasonló alakzat, s legyen  $\ell_1$  és  $\ell_2$  egy-egy megfelelő távolságuk. Tetszőlegesen választott  $O$  pontból kiindulva készítsünk az előző szakasz eljárásával olyan  $\Phi_2$ -höz hasonló  $\Phi$  alakzatot, amelyben  $\ell_2$ -nek  $\ell_1$ -gyel egyenlő távolság felel meg (94. ábra).

$\Phi_1$  és  $\Phi$  egybevágó, mert egyrészt hasonlóak, hiszen mindkettő hasonló  $\Phi_2$ -höz, másrészt egy-egy megfelelő távolságuk egyenlősége miatt hasonlóságuk arányszáma 1. Így tehát  $\Phi_1$  és  $\Phi$  megfelelő szögei egyenlők. Viszont  $\Phi$  és  $\Phi_2$  megfelelő szögei is egyenlők, miként ezt az előző szakaszban megállapítottuk. Ezek szerint  $\Phi_1$  és  $\Phi_2$  megfelelő szögei is egyenlők. —

A tételből következik, hogy kollineáris pontoknak ugyanilyen pontok felelnek meg, tehát a hasonlóság egyenestartó.

**B** Tételünk csak a szögtartásról szólt, rámutathatunk azonban arra, hogy ebből a hasonlóság számos további tulajdonsága is következik.

Elsőnek azt említjük, hogy a hasonlóság közösleges félegyenestartó leképezés. A szögtartásból következik ugyanis, hogy ha az  $A, B$  pontok képei  $A_1$  és  $B_1$  akkor az  $A_1B_1$  félegyenes tartalmazza az  $AB$  félegyenes képét. Az inverz hasonlóságra hivatkozva azt is kimondhatjuk, hogy az  $AB$  félegyenes képe tartalmazza az  $A_1B_1$  félegyenest. Eszerint az  $AB$  félegyenes képe az  $A_1B_1$  félegyenessel azonos.

Következik ebből, hogy a hasonlóság rendelkezik mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyeket az el nem fajuló félegyenestartó leképezésekről már megállapítottunk (vö. 6.1B4). Azt is kimondhatjuk tehát, hogy a hasonlóság nemcsak az eredeti értelemben szögtartó, hanem a 11.1 B2-ben említett további két értelemben is.

**17.5 Tétel.** *Két háromszög hasonló, ha*

- a) oldalaik aránya egyenlő,
- b) két-két oldaluk aránya s az ezek által közrefogott szögük egyenlő,
- c) két-két oldaluk aránya és e két-két oldal közül a nagyobbakkal szemközt levő szögük egyenlő,
- d) két-két szögük páronként egyenlő.

**Tétel.** *Két egyszerű sokszög hasonló, ha*

- a) megfelelő oldalaik és átlóik aránya egyenlő,
- b) megfelelő oldalaik aránya egyenlő, s megfelelő szögeik páronként egyenlők.

Mindkét tételcsoport a 11.1—11.3 szakaszokban tárgyalt egybevágósági tételeknek felel meg. A kimondott feltételekről már tudjuk, hogy a hasonlóságnak szükséges feltételei. A tételek e feltételek elégségességét mondják ki.

*Bizonyítás.* Valamennyi feltételtől megállapíthatjuk, hogy csak távolságok arányának egyezését és szögek egyenlőségét szerepelteti, hogy továbbá bármelyikük az alakzatok egybevágóságához is elégséges abban az esetben, ha az arányított távolságok egyenlők, az első tétel d) esetében pedig akkor, ha két megfelelő oldal is egyenlő. A tételeinkben szereplő feltételek elégségességét e tulajdonságaik alapján egyszerre bizonyítjuk.

Legyen  $\Phi_1$  és  $\Phi_2$  két sokszög, amelyekre feltételeinknek valamelyike áll. Legyen  $\ell_1$  és  $\ell_2$  egy-egy olyan oldaluk, amelyeknek arányát a feltétel szerepelteti, az első tétel d) feltételének esetében pedig egy-egy megfelelő oldaluk. Legyen továbbá  $\Phi$  olyan  $\Phi_2$ -höz hasonló alakzat, melyben  $\ell_2$ -nek  $\ell_1$ -gyel egyenlő távolság felel meg.

A vizsgált feltétel  $\Phi_1$ -re és  $\Phi$ -re is teljesül, mert  $\Phi_2$ -ről  $\Phi$ -re való áttérés a szögeket nem változtatta meg, s minden távolság hosszát ugyanannyiszorosára változtatta. Minthogy ezen túlmenőleg az arányított oldalak is egyenlők, illetve két megfelelő oldal egyenlő, azért az előrebocsátottak szerint  $\Phi_1$  és  $\Phi$  egybevágó. Ezért a  $\Phi$ -hez hasonló  $\Phi_2$  alakzat  $\Phi_1$ -hez is hasonló. —

**B1** Az első tétel a) feltételével kapcsolatban 11.1 B1-hez hasonlót mondhatunk. Téved, aki két háromszög hasonlósága definíciójának azt gondolja, hogy oldalaik aránya egyezik. A hasonlóság definíciója bármely két-két megfelelő pont távolságának arányáról szól.

**B2** Bizonyítjuk, hogy *ha egy alakzat nem lineáris, és egy rajta definiált transzformáció szögtartó, akkor ez a transzformáció hasonlóság*. A szögtartóságot itt abban a legkevesebbet kívánó alakban értjük, amelyet Í.4 is használt, hozzáértjük azonban a szögtartósághoz azt is, hogy különböző pontok képei különbözők, hogy tehát lehet valóban minden tárgyszög képszögéről beszélni.

Nem volna helyes az állítás, ha lineáris alakzatokra mondanók ki. Példát ad erre egy szakasz két végpontja és felezőpontja, ha a végpontokhoz önmagukat, a felezőponthoz pedig a szakasz egy másik belső pontját rendeljük.

Állításunk bizonyítása végett először is azt jegyezzük meg, hogy a szóban forgó alakzat bármely három nem kollineáris pontja, valamint ezek képei hasonló háromszögeket szolgáltatnak, hiszen szögeik a szögtartás miatt egyenlők, és már két szög egyenlősége is biztosítja a hasonlóságot.

Legyen most már  $A_1, B_1, C_1$  az alakzat három nem kollineáris pontja továbbá  $P_1$  és  $Q_1$  két tetszőleges pontja, amelyek az előbbi háromtól nem feltétlenül különböznek. E pontok képpontjait  $A_2, B_2, C_2, P_2$  és  $Q_2$  jelöli.

A  $P_1Q_1$  egyenes nem tartalmazhatja az  $A_1, B_1, C_1$  pontok mindegyikét, hiszen ezek nem kollineárisak. Legyen pl.  $A_1$  egy ilyen pont. Nem tartalmazhatja a  $B_1, C_1$  pontokat az  $A_1Q_1$  egyenes sem. Legyen pl.  $B_1$  az  $A_1Q_1$  egyenesen kívül. Az  $A_1P_1Q_1, A_2P_2Q_2$  háromszögek, valamint az  $A_1B_1Q_1, A_2B_2Q_2$  háromszögek hasonlóságából  $P_2Q_2 : P_1Q_1 = A_2Q_2 : A_1Q_1 = A_2B_2 : A_1B_1$  adódik. Ezek szerint alakzataink bármely két megfelelő távolságának aránya megegyezik a hasonló  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$  háromszögek oldalarányával. A vizsgált transzformáció tehát valóban aránytartó, azaz hasonlóság.

**17.6 Tétel.** *Hasonló sokszögek területének aránya megegyezik bármely megfelelő oldalpárjuk arányával.*

Mondhattuk volna, hogy a kerületarány a hasonlóság arányával egyenlő.

*Bizonyítás.* A hasonlóság arányszámával szorozva az egyik sokszög oldalait, a másik sokszög oldalait kapjuk meg. Ezért e számmal szorozva az egyik sokszög oldalainak összegét, a másik sokszög oldalainak összege adódik. —

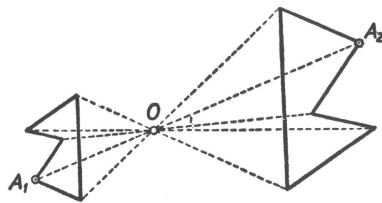
**Tétel.** *Hasonló alakzatok két-két megfelelő távolságának szorzatával képezett arány a hasonlóság arányának négyzetével, három-három megfelelő távolság szorzatával képezett arány pedig a hasonlóság arányának köbével egyenlő.*

Szólhattunk volna háromnál több megfelelő távolság szorzatáról is, a két- és háromtényezős esetet csak a gyakorabb alkalmazás miatt emeltük ki.

*Bizonyítás.* Megfelelő távolságpárok szorzatának hányadosa két-két megfelelő távolság hányadosának szorzata, s ezért a hasonlóság arányszámának négyzetével egyenlő. Három-három megfelelő távolság szorzatának hányadosa hasonlóképpen három olyan tört szorzata, amelyeknek mindegyike a hasonlóság arányát adja. —

**17.7** Két hasonló alakzat *párhuzamos helyzetű* (párhuzamosan hasonló, homotétikus), ha megfelelő szakaszaik állása megegyezik. Az olyan hasonlóságot, amely párhuzamos helyzetű alakzatokat rendel egymáshoz, *párhuzamos hasonlóságnak* (homotécia) nevezzük.

Az azonosság, az eltolás és a pontra vonatkozó tükrözés is párhuzamos helyzetű hasonlóság. Ilyen hasonlóságot tárgyalt 17.3 tétele, továbbá ilyen hasonlósághoz jutunk akkor is, ha az ott szerkesztett képalakzatot még tükrözzük az  $O$  pontra (95. ábra). Ez utóbbi képhez természetesen közvetlenül is eljuthatunk, ha a tárgyalakzat  $A_1$  pontjához azt az  $A_2$  pontot rendeljük, amely az  $OA_1$  félegyenes meghosszabbításán van, és amelyre  $OA_2 = \lambda OA_1$ .



95

Párhuzamos hasonlóságnál a hasonlóság *előjeles arányáról* is beszélünk. Ehhez úgy jutunk, hogy a hasonlóság arányát pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, amint a megfelelő és egymásnak megfelelően irányított szakaszok egyirányúak vagy nem. Az azonosság előjeles aránya 1, a pontra vonatkozó tükrözésé  $-1$ , a 17.3-ban tárgyalt hasonlóságé  $\lambda$ , az abból tükrözéssel adódóé  $-\lambda$ . Megállapíthatjuk ebből, hogy a párhuzamos hasonlóság előjeles aránya tetszőleges 0-tól különböző valós szám lehet. Nyilvánvaló az, hogy párhuzamos hasonlóságok egymásutánja szintén párhuzamos hasonlóság, és hogy ilyenkor a hasonlóságok előjeles arányai összeszoródnak.

**Tétel.** Egyetlenegy olyan párhuzamos hasonlóság van, amely két egyező állású irányított szakasz egyikét a másikba viszi.

Beszélhetünk volna irányítatlan szakaszokról is, ha előírjuk, hogy melyik végpont melyik végpontba jusson.

*Bizonyítás.* a) Legyenek  $A_1B_1$  és  $A_2B_2$  a megadott egyező állású szakaszok. Alkalmazzuk tetszőleges  $O$  pontból kiindulva 17.3 eljárását, mégpedig  $\lambda = A_2B_2 : A_1B_1$  aránnyal. Ha ezt követően esetleg még tükrözzük az  $O$  pontra, akkor elérhetjük, hogy  $A_1B_1$  az  $A_2B_2$  szakasszal egyenlővé és vele egyirányúvá váljék. Újabb eltolással elérhetjük tehát azt is, hogy az előírt  $A_2B_2$  helyzetbe jusson. Sorozatosan alkalmazott transzformációink párhuzamos hasonlóságok voltak, tehát olyan párhuzamos hasonlósághoz vezettek, amely az  $A_1B_1$  irányított szakaszt a megadott  $A_2B_2$  helyzetbe viszi.

b) Még azt kell belátnunk, hogy csak egy kívánt tulajdonságú párhuzamos hasonlóság van. Ha ez nem így volna, akkor az egyik után a másik inverzét alkalmazva olyan párhuzamos hasonlósághoz jutnánk, amely az  $A_1, B_1$  pontokat helyben hagyja, de nem azonosság. Ha azonban az  $A_1, B_1$  pontok helyben maradnak, akkor a hasonlóság aránya 1, és ennek következménye, hogy az  $A_1B_1$  egyenes minden pontja helyben marad. Ha pedig egy az  $A_1B_1$  egyenesen kívüli  $P$  pontot tekintünk, akkor is megállapíthatjuk, hogy  $P$ -nek helyben kell maradnia. Ez abból következik, hogy az  $A_1P, B_1P$  egyenesek önmaguknak a képei, hiszen képeiknek velük egyező állásúaknak kell lenniük, és át kell haladniuk a helyben maradó  $A_1, B_1$  pontokon. Ezek szerint minden pont helyben marad, azaz a vizsgált transzformáció csak azonosság lehet. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy csak egy kívánt tulajdonságú párhuzamos hasonlóság van. —

Ha két hasonló alakzat esetében van olyan  $O$  pont, amely bármely megfelelő pontpárral együtt egy egyenesen van, akkor az  $O$  pontot *hasonlósági centrumnak* nevezzük, és *centrális hasonlóságról* beszélünk.

Ilyen centrális hasonlóság az azonosság, a pontra vonatkozó tükrözés, valamint a 17.3- ban tárgyalt és az abból  $O$ -ra tükrözve adódó hasonlóság is.

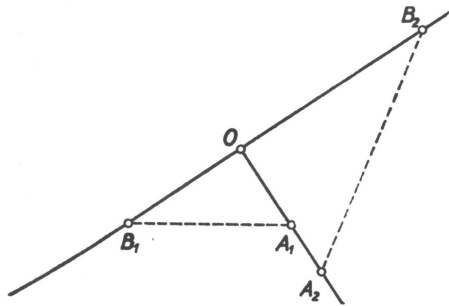
**Tétel.** Minden centrális hasonlóság párhuzamos is.

*Bizonyítás.* a) Először azt bizonyítjuk, hogy a hasonlóság centruma önmagának a képe. Evégből egy az  $O$  centrumon áthaladó egyenest és ezen egy az  $O$  pontot tartalmazó szakaszt veszünk fel. Mivel a hasonlóság centrális, szakaszunk képe ugyanezen az egyenesen van, kell tehát, hogy ez az egyenes  $O$  képét is tartalmazza. Minthogy az  $O$  ponton áthaladó egyenest önkényesen vettük fel,  $O$  képeinek rajta kell lennie az  $O$  ponton áthaladó egyenesek mindegyikén. Ez a kép ezért csak az  $O$  pont lehet.

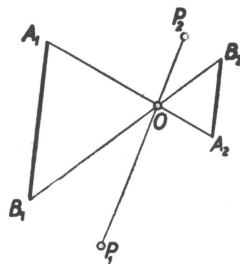
b) Igazoljuk, hogy az irányított szakaszokkal képezett  $OA_2 : OA_1$  arány értéke nem függ attól, hogy melyik megfelelő,  $O$ -tól különböző  $A_1, A_2$  pontpárt választjuk. A centrális hasonlóság miatt egy egyenes szakaszairól van itt szó. Az nyilvánvaló, hogy a felírt arány a hasonlóság arányát adja, hiszen  $O$  saját magának a képe. Csak azt kell belátnunk, hogy az arány előjele is ugyanaz minden pontpárra. Elég tehát azt bizonyítanunk, hogy ha pl.  $OA_2 : OA_1$  pozitív, akkor egy másik megfelelő  $B_1, B_2$  pontpárral képezett  $OB_2 : OB_1$  nem lehet negatív. Ha ez volna a helyzet, akkor mindezek a pontok nem lehetnek egy egyenesen, hiszen az elfajult  $OA_1B_1$  és  $OA_2B_2$  háromszögek a hasonlóság miatt hasonlóak, ha tehát  $O$  nem választja el az  $A_1, A_2$  pontokat, a  $B_1, B_2$  pontokat sem választhatja el. Ha viszont  $A_1$  és  $A_2$  nincs a  $B_1B_2$  egyenesen (96. ábra), akkor az  $A_1OB_1$  és  $A_2OB_2$  szögek az

arányok előjelére vonatkozó feltevés miatt mellékszögek, és ezért az  $O$  ponton át nem halad olyan egyenes, amely az  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  szakaszok mindegyikét metszi. Ámde ezek megfelelő szakaszok, s így megfelelő belső pontjaiknak az  $O$  ponttal együtt egy egyenesen kell lenniök. Ez ellentmond az előző megállapításnak, s ez az ellentmondás állításunk helyességét bizonyítja.

c) Tételünk helyessége most már egyszerűen következik abból, hogy megfelelő  $P_1, P_2$  pontok által meghatározott irányított szakaszokra  $OP_2 = \lambda OP_1$  közös  $\lambda$  értékkel minden esetben teljesül. Ha  $\lambda$  pozitív, akkor 17.3 hozzárendelésével állunk tehát szemben, s arról tudjuk, hogy párhuzamos helyzetű hasonlóságot ad. Ha viszont  $\lambda$  negatív, akkor még tükrözni kell az  $O$  pontra, s ez a tükrözés a párhuzamosságon nem változtat. —



96



97

**Tétel.** Ha egy párhuzamos hasonlóság nem eltolás, akkor centrális.

Nyilvánvaló, hogy az eltolást ki kellett itt zárni, mert (hacsak nem egy lineáris alakzatot tolunk el saját egyenese mentén, és nem azonosságról van szó) eltolás esetében hasonlósági centrum nincs.

*Bizonyítás.* Legyen  $A_1$  olyan pont, amely a párhuzamos hasonlóság által szolgáltatott képével,  $A_2$ -vel nem esik egybe. Legyen  $B_1$  egy nem az  $A_1A_2$  egyenesen levő pont, és  $B_1$ -nek képe  $B_2$  (97. ábra). Az  $A_1B_1$  és  $A_2B_2$  szakaszok párhuzamosak, mert megfelelő szakaszok és nincsenek egy egyenesen. E két szakasz nem lehet egyenlő s egyben egy irányú is, mert akkor eltolást határoznának meg. Ezért az  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  egyenesek nem párhuzamosak, s egymást egy  $O$  pontban metszik.

Az  $A_1A_2$  egyenesnek képe önmaga, mert kell, hogy a kép  $A_2$ -n áthaladjon s állása  $A_1A_2$ -ével megegyezzek. Ugyanígy  $B_1B_2$  is önmagának a képe. Így az  $O$  pont képe önmaga, mert képének az  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  egyenesek mindegyikén rajta kell lennie.

Jelentsé  $P_1$  az első alakzat tetszőleges,  $O$ -tól különböző pontját. Az  $O P_1$  egyenes képe önmaga, mert a kép is áthalad az  $O$  ponton és állása  $O P_1$ -ével egyezik. Ezért  $P_1$  képe,  $P_2$  is ezen az egyenesen van. A vizsgált hasonlóság ezek szerint valóban centrális, hiszen  $O$  minden megfelelő pontpárral együtt egyenesen van. —

**B1** Ennek a szakasznak a tárgyalása a térbeli hasonlóságra csak akkor válik majd alkalmazhatóvá, ha a térgeometria egyes elemi tényeit már megismertük. Itt a párhuzamosság, állás és irány térbeli tisztázására gondolunk (lásd 23.2). Ezzel a fönntartással kell fogadni mindazt, amit ebben a paragrafusban térbeli alakzatok párhuzamos hasonlóságáról még mondani fogunk.

**B2** *A sík minden párhuzamos hasonlósága megtartja az orientációt.* Nyilvánvaló ez, ha pozitív arányú centrális hasonlóságról van szó, hiszen ott minden irány változatlan marad. Minthogy a negatív arányú párhuzamos helyzetű hasonlóságokhoz a pozitív arányúakból orientációt tartó tükrözéssel jutottunk el, azért az orientációt a negatív arányúak is megtartják. Minthogy végül az eltolás is megtartja az orientációt, azért ez az állítás valóban minden párhuzamos hasonlóságra teljesül.

A tér párhuzamos hasonlóságaira nem mondhatjuk ki ugyanezt. A pozitív arányúakra az orientációtartás a síkbeli eset mintájára látható be (ha majd a térbeli irány fogalmával megismerkedtünk), viszont a negatív arányúakhoz vezető, pontra vonatkozó tükrözés megváltoztatja az orientációt.

A hasonlóságokat osztályozni lehet aszerint, hogy megtartják-e az orientációt vagy sem. Van orientációt megváltoztató hasonlóság a síkban is és a térben is. Erre a legegyszerűbb példát a sík egyenesre vonatkozó tükrözése és a tér pontra vagy síkra vonatkozó tükrözése, tehát az orientációt megváltoztató egybevágóságok adják. Az orientációt megtartó hasonlóságok csoportot alkotnak.

Itt említjük, hogy a köznap nyelv két testre akkor mondja, hogy „alakjuk” megegyezik, ha orientációtartó hasonlósággal keletkeznek egymásból (vö. 2.1).

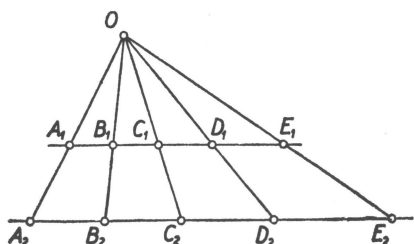
**B3** Nyilvánvaló, hogy a párhuzamos hasonlóságok csoportot alkotnak. A centrális hasonlóságokra ez nem áll, hiszen két centrális hasonlóság egymásutánja eltolást is szolgáltathat.

**B4** Azt mondhatja valaki, hogy „minden párhuzamos hasonlóság centrális, csak hogy, ha eltolásról van szó, akkor a centrum a végtelenben van”. Mi az ilyen beszédet csak alapos előkészítés után fogadjuk majd el a könyv második felében.

**17.8** A következőkben párhuzamos helyzetű hasonló alakzatokról szóló tételek szerepelnek.

**Tétel.** *Ha két párhuzamos egyenest egy hozzájuk nem tartozó ponton áthaladó egyenesekkel metszünk, akkor az egyik párhuzamosból kimetszett szakaszok aránya megegyezik a másik párhuzamos megfelelő szakaszainak az arányával.*

**Bizonyítás.** A metsző egyenesek közös  $O$  pontját centrumul választjuk, és olyan centrális hasonlóságot alkalmazunk, amelyik az egyik párhuzamos valamely  $A_1$  pontját a másik párhuzamos megfelelő  $A_2$  pontjába viszi (98. ábra). Ez a hasonlóság a metsző egyeneseket helyben hagyja, az első párhuzamost pedig a másodikba viszi át, hiszen a centrális hasonlóság az egyenesek állását nem változtatja meg. Ezek szerint az első párhuzamos metszéspontjaihoz a hasonlóság a második párhuzamos megfelelő metszéspontjait rendeli, és ez a hasonlóság tételünk helyességét mondja ki. —





**Tétel.** Ha két sokszög megfelelő oldalainak és átlóinak az állása páronként egyező, akkor a két sokszög hasonló.

Azt eleve tudjuk, hogy csak párhuzamos helyzetű hasonlóságról lehet szó. Tételünk azt is kimondja, hogy párhuzamos oldalú háromszögek hasonlóak. Ha nem háromszögekről van szó, akkor nem elég csak az oldalak párhuzamosságát követelni meg. Erre két különböző oldalarányú, párhuzamosan elhelyezett téglalap is példát ad.

*Bizonyítás.* Alkalmazzunk az egyik sokszögre olyan párhuzamos hasonlóságot, amely ennek egy  $A_1B_1$  oldalát a másik sokszög megfelelő  $A_2B_2$  oldalára fekteti, mégpedig az oldal végpontjait is a megfelelő végpontokba juttatja. Ha belátjuk, hogy ez a hasonlóság az első sokszög minden csúcsát a második sokszög megfelelő csúcsába viszi át, akkor bebizonyítottuk, hogy tételünk helyes.

Ez nyomban belátható minden olyan  $C_1$  csúcsra, amely nincs az  $A_1B_1$  egyenesen, hiszen az  $A_1C_1$  és  $B_1C_1$  szakaszok képeinek a velük párhuzamos  $A_2C_2$  és  $B_2C_2$  egyeneseken kell elhelyezkedniük, és ezért  $C_1$  képe csak ezeknek az egyeneseknek a metszéspontja, azaz a  $C_1$ -nek megfelelő  $C_2$  csúcs lehet.

Ebből az is következik, hogy ha a  $D_1$  csúcs az  $A_1C_1$  egyenesen van, akkor is igaz, hogy  $D_1$  a megfelelő csúcsba jut. Ha ugyanis  $C_1$  nem ilyen csúcs, akkor már tudjuk, hogy az  $A_1C_1$  szakasz az előírt helyzetbe jut. Minthogy  $D_1$  nincs az  $A_1C_1$  egyenesen, alkalmazhatjuk állításunknak már bizonyított részét ezekre a pontokra, tudjuk tehát, hogy  $D_1$  a neki megfelelő csúcsba jut.

Ezek szerint a készített sokszög valóban azonos a második megadott sokszöggel. —

Tételünk alapján azt is kimondhatjuk, hogy a sík két sokszöge hasonló, ha megfelelő oldalaik és átlóik páronként merőlegesek egymásra. Ha ugyanis az egyiket  $90^\circ$ -kal elforgatjuk, akármelyik pont körül és akármelyik irányban, akkor már alkalmazhatóvá válik a most bizonyított tétel. Kimondhatjuk tehát, hogy a sík két háromszöge hasonló, ha oldalaik merőlegesek egymásra.

**B1** Az utolsó bizonyítás lényegesen kihasználta azt, hogy a sokszög csúcsai nincsenek mind egy egyenesen, hiszen ezt használtuk ki, amikor a bizonyítás utolsó részében egy az  $A_1B_1$  egyeneshez nem illeszkedő  $C_1$  csúcsot vettünk fel. Nem is volna helyes a tétel, ha pl. elfajuló háromszögekre akarnók kimondani.

**B2** Utolsó tételünket poliéderekre is kimondhattuk volna, sőt bizonyítása is változtatás nélkül alkalmazható ebben az esetben (azonban 17.7 B1 fenntartása ide is vonatkozik). Nem mondhatunk viszont hasonlót a második tételnek arról az átfogalmazásáról, amely az oldalak és átlók merőlegességéről szólt. Megemlítjük, hogy ez az átfogalmazás akkor sem volna helyes, ha két nem párhuzamos síkban elhelyezkedő sokszögre mondanók ki.

## 17.9 Két kör hasonlóságával akarunk itt foglalkozni.

Először is megállapítjuk, hogy a hasonlóság körhöz kört rendel, mégpedig középpontjukat is egymáshoz rendeli. Ez a távolságok arányának megtartásából nyomban belátható.

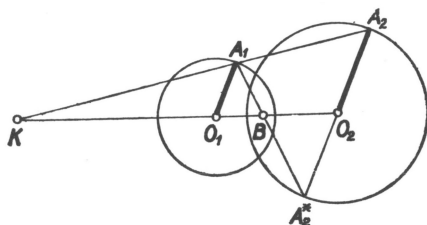
Bármely két kör hasonló, mert az olyan hasonlóság, amelyik az egyik kör középpontjához a másik kör középpontját (és síkjához annak síkját) rendeli, s amelyiknek arányszáma a körök sugarainak hányadosa, az az egyik kört a másikba viszi át.

Két párhuzamos helyzetű hasonló alakzat esetében tudjuk, hogy vagy eltolással, vagy centrális hasonlósággal származnak egymásból. Ha tehát nem eltolással származnak egymásból, akkor

beszélhetünk a két alakzat hasonlósági centrumáról. A hasonlósági centrumot *külsőnek* vagy *belsőnek* mondjuk aszerint, amint pozitív vagy negatív arányú centrális hasonlóság szolgáltatta.

Ha két párhuzamos helyzetű hasonló alakzat centrálisán szimmetrikus, akkor kétféleképpen is felfoghatók egymás párhuzamos helyzetű hasonló képének. Ehhez a két leképezéshez úgy jutunk, hogy egyszer az eredeti párhuzamos hasonlóságot, másodszor pedig azt a leképezést tekintjük, amelyikhez eljutunk, ha az először tekintett párhuzamos hasonlóságot követően még tükrözzük a képalakzat szimmetriacentrumára. Párhuzamosan hasonló és egymásból nem eltolással származó centráliszimmetrikus alakzatok esetében ezek szerint két hasonlósági centrumot találhatunk. Ezekhez a centrumokhoz tartozó előjeles hasonlósági arányok ellentétes előjelűek (de egyenlő abszolút értékűek), hiszen a szimmetriacentrumra vonatkozó tükrözés megváltoztatta a szakaszok irányát. Ilyenkor tehát az egyik hasonlósági centrum külső, a másik pedig belső.

Bármely két kör felfogható kétféleképpen is egymás párhuzamosan hasonló képének, hiszen bármely két párhuzamos sugár a köröket egymáshoz rendelő párhuzamos hasonlóságot határoz meg, márpedig egy irányú és ellentétes irányú sugarakból is ki lehet indulni. Ha a két kör sugara egyenlő, akkor az egy irányú sugarakból kiindulva eltoláshoz jutunk, ilyenkor tehát csak belső hasonlósági centrum van. Különböző sugarú köröknek viszont van belső és van külső hasonlósági centrumuk (99. ábra).



99

Ha két körnek van két külső érintője, s ezeknek van metszéspontjuk, illetve ha két körnek van két belső érintője, akkor az egynemű érintők metszéspontja a körök külső, illetve belső hasonlósági centruma (vö. 77. ábra). A centrális hasonlóság ugyanis a hasonlósági centrumból az egyik körhöz vont érintőt önmagába viszi át, s így kell hogy ez az egyenes a másik kört is érintse. Hozzátehetjük ehhez, hogy az egyenes a két kört más-más oldalról vagy ugyanarról az oldalról érinti aszerint, amint a centrális hasonlóság az egyenes által határolt félsíkokat felcseréli vagy nem, aszerint tehát, amint a centrális hasonlóság aránya negatív vagy pozitív.

Érintkező körök érintési pontja egyben hasonlósági centrumuk is, mégpedig kívülről érintkezőké belső, belülről érintkezőké pedig külső hasonlósági centrum. Ez nyomban belátható, ha az érintési ponthoz vezető sugarakat és az ezek által meghatározott párhuzamos hasonlóságot tekintjük.

**B** Körök hasonlósági centrumait ismerve egyszerűbben bizonyíthatjuk volna 15.7 tételét. Elegendő lett volna a hasonlósági centrumból az egyik körhöz vont érintőket vizsgálni.

## 18. § Arányos távolságok a háromszögnél és a körnél

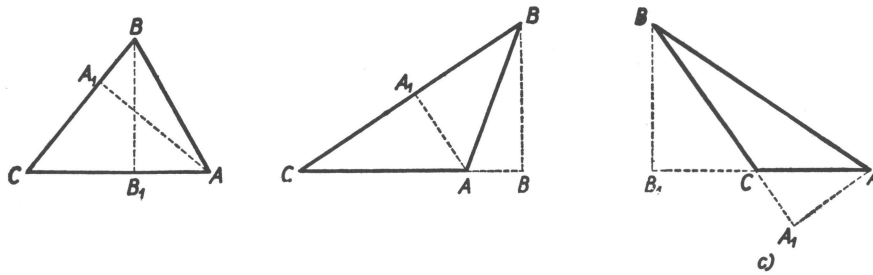
A háromszöggel, különösen a derékszögű háromszöggel, valamint a körrel kapcsolatban szerepelnek olyan távolságok, amelyekről belátható, hogy aránypárt alkotnak. Ebben a paragrafusban ilyen távolságokkal foglalkozunk.

**18.1** A háromszögnek egy csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges szakaszt a háromszög *magasságának* (magasságszakasz, magasságvonal) nevezzük, mely az illető oldalhoz mint *alaphoz* tartozik. Ha derékszögű háromszög magasságáról beszélünk, akkor az átfogóhoz tartozó magasságra gondolunk, ugyanis a derékszögű háromszög egyik befogójához magasságként a másik befogó tartozik. Magasságnak mondjuk a magasságszakasz hosszát is.

**Tétel.** Ha a háromszög egy oldalát a hozzá tartozó magassággal megszorozzuk, akkor az oldal megválasztásától függetlenül mindig ugyanazt az eredményt kapjuk.

Ha az  $a, b, c$  oldalakhoz  $m_a, m_b, m_c$  magasságok tartoznak, akkor  $am_a = bm_b = cm_c$ .

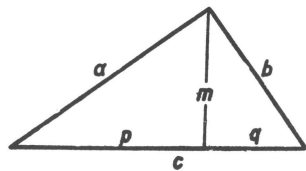
*Bizonyítás.* Elég csak az  $am_a = bm_b$  egyenlőséget bizonyítanunk. Az  $ABC\Delta$ -et és annak  $AA_1$  és  $BB_1$  magasságait tekintjük (100. ábra).  $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ , mert merőleges szárú hegyesszögek. Ezért a  $CAA_1\Delta$  és  $CB B_1\Delta$  hasonló, hiszen derékszögük s egy-egy hegyesszögük egyenlő. A hasonlóság miatt  $CA : CB = AA_1 : BB_1$  azaz  $b : a = m_a : m_b$ , ami éppen a bizonyítandó egyenlőséget adja. —



100

**B** A tétel bizonyítására segédeszközü a területszámítás kínálkozik, a területszámítás szabatos megalapozása viszont éppen erre a tételre támaszkodik (vö. 20.4 B).

**18.2** A derékszögű háromszög magassága az átfogót két darabra bontja. Ezek a befogóknak az átfogóra vetett vetületei. Szokás szerint az  $a$  és  $b$  befogó vetületét  $p$  és  $q$  jelöli (101. ábra).



101

**Tétel (magasságtétel).** A derékszögű háromszög magassága a befogók átfogóra vetett vetületeinek a mértani középárányosa.

Két pozitív szám mértani középárányosa e két szám szorzatának pozitív négyzetgyökét jelenti. A tétel állítása szokott jelöléssel  $m^2 = pq$ .

*Bizonyítás.* A derékszögű háromszöget magassága két hasonló háromszögre bontja, mert hegyesszögeik merőleges szárú szögek. E hasonlóság alapján  $p : m = m : q$ , tehát  $m^2 = pq$ . —

**Tétel (befogótétel).** A derékszögű háromszög befogója mértani középárányosa az átfogónak s a befogó átfogóra vetett vetületének.

A tétel állítása szokott jelöléssel  $a^2 = cp$  és  $b^2 = cq$ .

*Bizonyítás.* A derékszögű háromszög magassága által levágott háromszögek az eredeti háromszöghöz hasonlóak, mert egy-egy hegyesszögük közös. Az eredeti háromszög és pl. az  $a$  befogóra támaszkodó kisebb háromszög hasonlósága alapján  $a : c = p : a$ , azaz  $a^2 = cp$ . —

**Tétel** (Pythagoras<sup>2\*</sup> tétele). *A derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő.*

*Bizonyítás.* Az előző tétel szerint, szokott jelöléssel,  $a^2 = cp$  és  $b^2 = cq$ . Ezek összegezésével  $a^2 + b^2 = c(p + q) = c^2$ . —

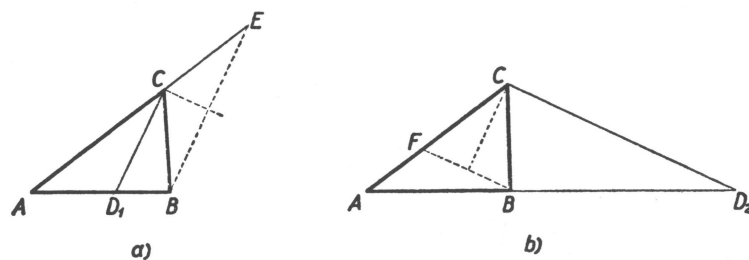
**B** Ennek a szakasznak a tételei megfordíthatók: ha egy háromszög  $c$  oldalát a hozzá tartozó  $m$  magasság  $p, q$  szakaszokra bontja, mégpedig  $p$  az  $a$  oldal és  $q$  a  $b$  oldal vetülete, ha továbbá ezekre három tételünk valamelyikének az állítása teljesül, akkor a háromszög derékszögű.

A magasságtétel esetében ez abból következik, hogy ha egy derékszögű háromszögből indulunk ki, és oly módon térünk át nem derékszögű háromszögre, hogy  $a$  és  $p$  rögzítése mellett a  $q$  szakaszt megváltoztatjuk, akkor  $m^2 = pq$  már nem teljesül. Hasonlóan járhatunk el a befogótétel esetében is, de ott azt mondjuk, hogy  $a$  és  $p$  rögzítése mellett a  $c$  oldalt változtatjuk meg, és ennek következtében  $a^2 = cp$  már nem lesz érvényes. Végül a Pythagoras-tétel esetében  $a, b$  oldalakat tartjuk változatlanul, de az általuk közrefogott szöget változtatjuk. Ekkor 11.5 szerint  $c$  hossza megváltozik, és ezért  $a^2 + b^2 = c^2$  már nem teljesül.

**18.3** A háromszög szögének felezőegyenését a háromszög (belső) szögfelezőjének, külső szögének felezőegyenését pedig a háromszög külső szögfelezőjének mondjuk. Sokszor ugyanígy nevezzük ezeknek a szögfelező egyeneseknek ama szakaszait is, amelyek a felezett szög csúcsát a szemközti oldallal kötik össze (szögfelezőszakasz, szögfelezővonal), valamint ezeknek a szakaszoknak a hosszát is.

**Tétel.** *Ha a háromszög egyik oldalának az egyenesét a szemközti csúcsból induló (belső vagy külső) szögfelezővel metsszük, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból ezekhez a végpontokhoz vezető oldalak.*

A 102. ábra jelöléseivel a  $CD_1$  belső és a  $CD_2$  külső szögfelezőre  $AD_1 : D_1B = AD_2 : D_2B = CA : CB$ . A külső szögfelezőre vonatkozó állítás csak arra az esetre vonatkozik, amikor e szögfelező metszi a szemközti oldalt, amikor tehát a felezett szög nem egyenlő szárú háromszög szárszöge.



102

*Bizonyítás.* a) Az állítást először a  $CD_1$  belső szögfelezőre bizonyítjuk. Az  $AC$  oldalt a  $CE = CB$  távolsággal meghosszabbítjuk.  $CD_1$  merőleges a  $BCE$  felezőjére, mert ezek mellékszögek felezői.  $EB$  is merőleges a  $BCE$  felezőjére, mert a  $BCE$  egyenlő szárú. Ezért  $CD_1 \parallel EB$ , és a párhuzamos szelők tétele alapján  $AD_1 : D_1B = AC : CE$ . Ez  $CE = CB$  miatt a bizonyítandó állítással azonos.

b) Az állítást most a  $CD_2$  külső szögfelezőre bizonyítjuk. Ha  $CA = CB$ , akkor a szögfelező a szemközti oldalt nem metszi, s ezért ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk. Legyen pl.  $CA > CB$ . A  $CA$  oldal

<sup>2\*</sup> Pythagoras görög matematikus és filozófus i. e. 550 körül élt.

$F$  pontjára legyen  $CF = CB$ . A  $CD_2$  és  $FB$  egyenesek párhuzamosak, mert mindkettő merőleges az  $ACB$  felezőjére. A  $BAC$  szarainak megfelelő szakaszaira tehát  $AD_2 : D_2B = AC : CF$ , s ez  $CF = CB$  miatt éppen a bizonyítandó állítás. —

**18.4 Tétel.** Azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságainak aránya adott, 1-től különböző pozitív szám, egy kör (Apollonios<sup>3\*</sup>-féle kör).

Az  $A$  és  $B$  ponthoz s a  $\lambda$  számhoz tartozó Apollonios-féle kör  $P$  pontjaira  $PA : PB = \lambda$ . Ha  $\lambda = 1$ , akkor mértani helyként  $AB$  felezőmerőlegese adódik.

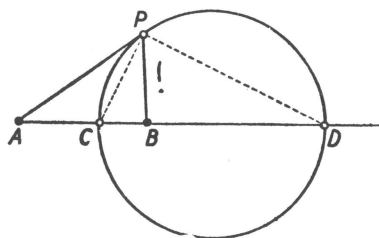
*Bizonyítás.* a) Legyen  $P$  egy olyan pont, amely nincs az  $AB$  egyenesen, s amelyre  $PA : PB = \lambda$ . Feltehetjük, hogy  $PA > PB$ , azaz  $\lambda > 1$ . A  $PAB$ -nek  $P$ -ből induló belső szögfelezője az  $AB$  oldalt  $C$  pontban metszi,  $P$ -ből induló külső szögfelezője pedig  $\lambda > 1$  miatt az előző tétel értelmében  $AB$ -nek  $B$ -ből induló meghosszabbítását metszi egy  $D$  pontban (103. ábra). A  $C$  és  $D$  pont az előző tétel értelmében a keresett mértani helyhez tartozik. Minthogy a szögfelezők egymásra merőlegesek, a  $P$  pont a  $CD$  távolság Thales-körén van.

Be akarjuk látni, hogy a mértani helynek minden  $P$  pontja ugyanezen a körön van. Ehhez elég azt kimutatnunk, hogy az  $AB$  egyenes pontjai közül csak  $C$  és  $D$  tartozik a mértani helyhez. Minthogy  $\lambda > 1$ , azt kell csak igazolnunk, hogy sem az  $AB$  szakaszon, sem a  $BD$  félegyenesen nincs más, a mértani helyhez tartozó pont. Ez a tény viszont a következő két megállapításból következik:

Ha  $C$  az  $AB$  távolságon  $A$ -tól  $B$  felé mozog, akkor az  $AC : CB$  arány értéke állandóan növekszik. Ez abból következik, hogy ha  $C$  távolodik  $A$ -tól, akkor az  $AC/CB$  tört számlálója nő, nevezője pedig fogy.

Ha  $D$  a  $BD$  félegyenesen  $B$ -ből kiindulva mozog, akkor az  $AD : DB$  arány értéke állandóan csökken. Ennek igazolása végett írjuk a vizsgált értéket  $1 + AB/BD$  alakba. Ha  $D$  távolodik  $B$ -től, akkor az  $AB/BD$  tört csökken, mert számlálója állandó, nevezője pedig növekszik. Ezért a fenti állítás is helyes.

Ezek szerint  $C$  és  $D$  helyzete valóban egyértelműen meghatározott, s a keresett mértani hely minden pontja a  $CD$  szakasz Thales-körén van.

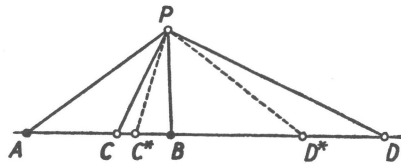


103

b) Be kell még látnunk, hogy ennek a körnek minden pontja a mértani helyhez tartozik. A  $C$  és a  $D$  pontokról tudjuk ezt. Legyen tehát  $P$  a körnek egy további pontja. Elég azt belátnunk, hogy  $PC$  és  $PD$  a  $PAB$  szögfelezői, mert akkor az előző tétel értelmében  $PA : PB = CA : CB = \lambda$ .

A bizonyítást indirekt úton végezzük. Ha állításunk nem igaz, akkor a  $PAB$  szögfelezői  $PC$  és  $PD$ -től különböző  $PC^*$  és  $PD^*$  egyenesek. Okoskodásunkat a 104. ábra torzítva kíséri.  $C$  és  $D$  megválasztása miatt  $AC : CB = AD : DB$ , az előző tétel szerint pedig  $AC^* : C^*B = AD^* : D^*B$ . Az a) rész megállapításai szerint ez csak úgy lehetséges, hogy vagy  $CD$  tartalmazza a  $C^*D^*$  távolságot, vagy  $C^*D^*$  a  $CD$  távolságot, annak megfelelően ti., hogy a második aránypárban nagyobb vagy kisebb arányok szerepelnek-e, mint az elsőben. Eszerint a  $CPD$ ,  $C^*PD^*$  szögek egyike tartalmazza a másikat. Ez azonban lehetetlen, mert mindkettő derékszög, egyrészt Thales tétele, másrészt a szögfelezők merőlegessége miatt.

<sup>3\*</sup> Apollonios görög matematikus megközelítőleg i. e. 265—170 élt, Alexandriában működött.



104

Kell tehát, hogy  $PC$  és  $PD$  szögfelező legyen, s így  $CD$  Thales-körének valóban minden pontja a mértani helyhez tartozik. —

**B** A most bizonyított tételt 40.7-ben újból bizonyítjuk majd.

**18.5 Tétel.** Ha egy ponton át szelőt húzunk a körhöz, akkor a ponttól a metszéspontokig terjedő szakaszok szorzata nem függ a szelő megválasztásától.

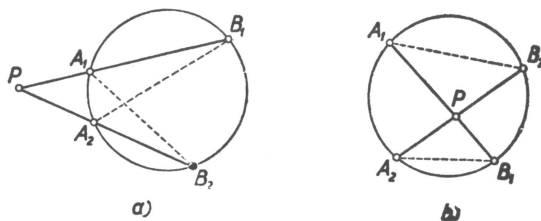
A szorzat csak a kör  $s$  a pont megválasztásától függ. Ha a szelő metszéspontjait  $A$  és  $B$  jelöli, és  $P$  a körön kívül van, akkor  $PA$  és  $PB$  egy irányú szakaszok. Ha viszont  $P$  a körön belül van,  $PA$  és  $PB$  iránya ellentétes. Ha  $P$  a körön van, akkor  $PA$  és  $PB$  egyike nulla. Kiegészíthetjük tehát tételünket azzal a megállapítással, hogy az irányított  $PA$  és  $PB$  szakasz előjeles hosszának szorzata sem függ a szelő megválasztásától.

Az előjeles távolságokkal számított  $PA \cdot PB$  szorzatot a  $P$  pont *hatványának* nevezzük. Tételünk éppen annak a lehetőségét biztosítja, hogy definiálhassuk a pont körre vonatkozó hatványát. Külső pont hatványa pozitív, belsőé negatív, a kör pontjaié pedig nulla.

*Bizonyítás.* Ha a  $P$  pont a körön van, akkor a  $PA \cdot PB$  szorzat értéke mindig nulla. Ezért csak a körön kívül s a körön belül levő pontokkal kell foglalkoznunk. Azt mutatjuk ki, hogy két szelő ugyanazt az értéket adja.

a) Legyen  $P$  a körön kívül. A 105a ábra jelöléseit használjuk. A  $PA_1B_2$  és  $PA_2B_1$  háromszögek hasonlóak, mert egyik szögük közös, és a  $PB_2A_1, PB_1A_2$  szögek ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. A hasonlóság folytán  $PA_1 : PB_2 = PA_2 : PB_1$ , és ezért  $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$ .

b) Legyen  $P$  a körön belül. A 105b ábra jelöléseit használjuk.  $PA_1B_2\Delta$  és a  $PA_2B_1\Delta$  hasonló, mert egy-egy szögük egymás csúcshoz, a  $PB_2A_1, PB_1A_2$  szögek pedig ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. Ez a hasonlóság ugyanahhoz az aránypárhoz és eredményhez vezet, mint az előbb. —

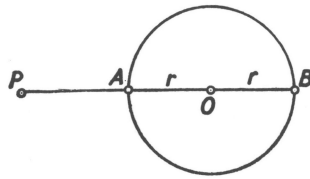


105

**Tétel.** Egy pontnak egy körre vonatkozó hatványa a pont körközponttól mért távolsága négyzetének  $s$  a sugár négyzetének különbségével egyenlő.

Ha  $PO = d$ , akkor  $P$ -nek az  $O$  középpontú,  $r$  sugarú körre vonatkozó hatványa  $d^2 - r^2$ .

*Bizonyítás.* Tekintsük a  $PO$  egyenesnek a körnek  $A$  és  $B$  metszéspontjait (106. ábra). Előjeles  $B$  távolságokkal számolva  $PO = d$ ,  $OA = -r$ ,  $OB = r$ , tehát  $PA = d - r$ ,  $PB = d + r$ , a hatvány pedig ezek szorzata, azaz  $d^2 - r^2$ . —



106

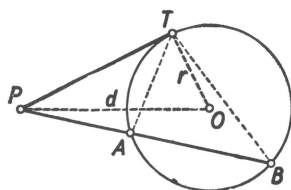
Ebből a tételből újból látható, hogy  $P$  hatványa pozitív, nulla vagy negatív aszerint, amint  $P$  a körön kívül, a körön vagy a körön belül van.

**Tétel.** Egy a körön kívül levő pontnak a körre vonatkozó hatványa a pontból a körhöz húzott érintő négyzetével egyenlő.

Ha a  $P$ -ből a körhöz húzott érintő a kört  $T$ -ben érinti, akkor  $P$ -nek hatványa  $\overline{PT^2}$ . Ez a tétel szakaszunk első tételének határeseteként fogható fel. Már a tétel kimondása is feltételezi annak ismeretét, hogy a  $P$ -ből húzható két érintő hossza egyenlő.

*Első bizonyítás.* Szakaszunk első tételének a bizonyítása most is alkalmazható (107. ábra).  $PAT\Delta$  és a  $PTB\Delta$  hasonló, mert egy szögük közös, a  $PTA$ ,  $PBT$  szögek pedig ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. E hasonlóság alapján  $PA : PT = PT : PB$  és  $PA \cdot PB = \overline{PT^2}$ . —

*Második bizonyítás.* Mivel az érintő a sugárra merőleges, a  $POT\Delta$  derékszögű. Pythagoras tétele szerint tehát  $\overline{PT^2} = d^2 - r^2$ , és ez az előző tétel szerint  $P$  hatványával egyenlő. —



107

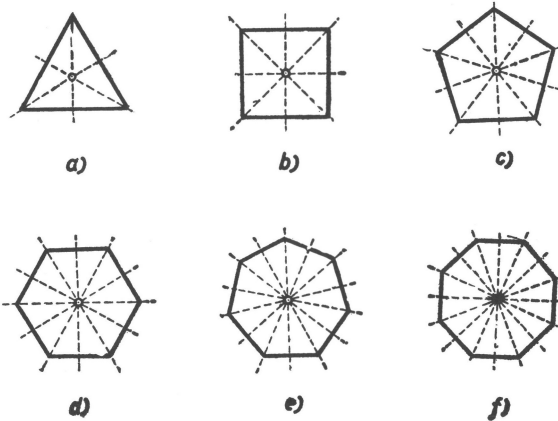
**A** A matematika jellegzetessége, hogy egy-egy tételnek több, néha sokféle bizonyítása is van. Többféle bizonyítás ismerete jól segíti az anyag összefüggéseinek meglátását. Mi olyankor szerepeltetünk több bizonyítást, amikor több egyszerű bizonyítást említhetünk, s amikor a többféle bizonyítás valamilyen tanulsággal jár. A most szerepeltetett két bizonyítás burkoltan Pythagoras tételének új bizonyítását tartalmazza.

**B** A pont körre vonatkozó hatványával és erre épülő további tényekkel és fogalomalkotásokkal az analitikus geometria keretében még részletesen foglalkozni fogunk (lásd 40. §).

## 19. § Szabályos sokszög, a kör kerülete

Szabályos háromszöggel és négyszöggel (négyzet) már találkoztunk. Most általában az  $n$ -oldalú szabályos sokszögekkel foglalkozunk. A szabályos sokszögek tanulmányozása vezet el a kör kerületének kiszámításához.

**19.1** Egy egyszerű sokszög *szabályos*, ha minden oldala és szöge ugyanakkora. Az egyenlő oldalú háromszög s a négyzet valóban szabályos ebben az értelemben. Természetesen csak legalább három oldalú szabályos sokszögekről lehet szó (108. ábra).



108

Szabályos  $n$ -szöghöz jutunk, ha a kör középpontjánál elhelyezkedő teljes szöget sugarakkal  $n$  egyenlő szögre osztjuk fel, és az így kapott középponti szögekhez tartozó húrok által határolt sokszöget tekintjük. Szabályos  $n$ -szöghöz juthatunk úgy is, hogy a teljes szöget  $n$  egyenlő szögre felosztó sugarak végpontjaiban a körhöz érintőt vonunk, és azt a sokszöget tekintjük, amelyet az érintőkből a szomszédos érintők által kimetszett szakaszok határolnak. Mindkét eljárás szabályos sokszöghöz

$$\frac{2\pi}{n}$$

vezet, mert ha a teljes ábrát a kör középpontja körül  $\frac{2\pi}{n}$  szöggel elforgatjuk, ugyanazt az ábrát kapjuk, ebből pedig következik, hogy sokszögeink oldalai és szögei egyenlők.

Míthogy az  $n$ -szög szögeinek összege  $(n-2)\pi$ , a szabályos  $n$ -szögnek egy szöge  $\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi$ . Ez a képlet  $n = 3, 4, 5, 6$  esetében rendre  $60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ$ -ot szolgáltat. Minden szabályos sokszög konvex, hiszen szögei konvexek.

Két ugyanakkora oldalú szabályos  $n$ -szög (11.1 utolsó tétele szerint) egybevágó, mert oldalai és szögeik páronként is egyenlők. Ez a megállapítás mindig helyes, akármilyen módon rendeltük is előzetesen egymáshoz a két  $n$ -szög csúcsait (természetesen szomszédhoz mindig szomszédot rendelve). Ha tehát két szabályos  $n$ -szögnek egy oldala közös, és a közös oldal egyenese a két  $n$ -szöget nem választja el, akkor a két  $n$ -szög csak azonos lehet.

Bármely két szabályos  $n$ -szög hasonló, mert szögeik egyenlők, s oldalai aránya is megegyezik (vö. 17.5).

**B** Amikor beláttuk, hogy van szabályos  $n$ -szög, akármilyen 2-nél nagyobb természetes számot jelent is  $n$ , akkor arra építettünk, hogy a teljes szöget fel lehet osztani  $n$  egyenlő részre. Ha ezt a tényt axiómáinkra támaszkodva bizonyítani akarjuk, akkor a folytonosságból a köraxiómánál többre van szükség (vö. 5.2 B2). Ha a folytonosságot csak a köraxióma alakjában használjuk ki, akkor nem lehet  $n$  minden lehetséges értékére bebizonyítani, hogy léteznek szabályos  $n$ -szögek.

$n$  bizonyos értékeire elvégezhetjük ezt a bizonyítást akkor is, ha a köraxiómánál többet nem veszünk igénybe. Az  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$  értékek ilyenek. Azokról az  $n$  értékekről van itt szó, ahány oldalú szabályos sokszöget meg lehet szerkeszteni (vö. 22.4 B2).

**19.2** A szabályos sokszögek szimmetriaviszonyaival foglalkozunk.

**Tétel.** a) A szabályos  $n$ -szög minden oldalának felezőmerőlegesére és minden szögének szögfelezőjére vonatkozólag szimmetrikus.

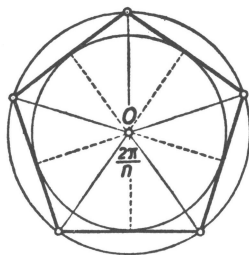
b) Ezek a szimmetriatengelyek egy közös ponton haladnak át.



A szimmetriatengelyek közös pontját a szabályos  $n$ -szög középpontjának (centrum) nevezzük.

*Bizonyítás.* a) Ha egy oldal felezőmerőlegesére tükrözzük, akkor ez az oldal és az oldalegyenes által határolt félsíkok helyben maradnak. Ha egyenlő oldalak által közrefogott szög felezőjére tükrözzük, akkor ez a két oldal helyet cserél, és a szögtartomány önmagát fedi. Mindkét tükrözésről megállapíthatjuk tehát, hogy a szabályos  $n$ -szög tükörképének van az eredetivel közös oldala, s hogy mindkettő ugyanarról az oldalról támaszkodik a közös oldalra. Az előző szakasz megállapítására hivatkozva kimondhatjuk ezért, hogy a szabályos  $n$ -szög mind a két esetben saját magának a tükörképe.

b) A szimmetriatengelyek közös pontjára vonatkozó állítás helyességét a szabályos  $n$ -szögek hasonlósága miatt elég, ha egy szabályos  $n$ -szögre látjuk be, hiszen a hasonlóság oldalfelező merőlegeshez oldalfelező merőlegest és szögfelezőhöz szögfelezőt rendel. Tekintsük evégből azt a szabályos  $n$ -szöget, amelyet az előző szakasz előírása szerint egy adott kör húraiból alakítottunk (109. ábra). A húrokról tudjuk, hogy felezőmerőlegeseik a kör középpontján haladnak át, s hogy a kör középpontja a húroktól egyenlő távolságra van. Ez utóbbi tényből következik, hogy a kör középpontja rajta van a szögfelezőkön is. —



109

**Tétel.** A szabályos  $n$ -szög a középpontjára vonatkozólag  $n$ -edrendben forgásszimmetrikus.

*Bizonyítás.* Az előző szakaszban láttuk, hogy van  $n$ -edrendű forgásszimmetrikus szabályos  $n$ -szög. Az előző bizonyítás b) részében azt is megállapítottuk, hogy ennek a forgásszimmetriának a centruma a szabályos  $n$ -szög középpontja. A szabályos  $n$ -szögek hasonlóságából következik akkor, hogy ez minden szabályos  $n$ -szögnél így van, hiszen a hasonlóság szögtartó és egyenlő szakaszokhoz egyenlő szakaszokat rendel. —

Megállapíthatjuk, hogy páros oldalszámú szabályos sokszögek a középpontjukra vonatkozólag centrálszimmetrikusak is. Akár páros, akár páratlan oldalszámú a szabályos  $n$ -szög, szakaszunk első tétele mindig  $n$  szimmetriatengelyről szól, mert a páros esetben minden oldalfelező merőleges még egy oldalt felez, és minden szögfelező még egy szöget felez, a páratlan esetben pedig minden oldalfelező merőleges egy szöget is felez.

Az  $n$ -edrendű forgásszimmetriából közvetlenül következik, de kiolvasható az előző tétel bizonyításából is, hogy a szabályos sokszög középpontja körül kör írható a szabályos sokszög köré és a szabályos sokszögbe is.

A szabályos hatszögnél két szomszédos csúcs és a középpont szabályos háromszöget ad, mert két egyenlő oldala  $60^\circ$ -os szöget fog közre. Egy körbe írt szabályos hatszög oldala tehát a kör sugarával egyenlő.

Leszögezzük végül, hogy egy szabályos sokszög alakját oldalszáma és egy távolságadata (oldala, beírt vagy körülírt körének a sugara) egyértelműen meghatározza.

**B1** A szabályos  $n$ -szögnek a talált  $n$  szimmetriatengelyen kívül nincs más szimmetriatengelye. Ez abból következik, hogy a szimmetriatengely csak merőlegesen felezve metszhet egy oldalt, s ha csúcson halad át, akkor a csúcsnál elhelyezkedő szöget feleznie kell.

A szabályos sokszög középpontján kívül nincs más olyan pont, amelyre vonatkozólag véges rendű (legalább harmadrendű) forgásszimmetria volna megállapítható. Ez abból adódik, hogy egy

ilyen forgásszimmetria centruma legalább annyi csúcstól van egyenlő távolságra, ahányadrendű a forgásszimmetria; márpedig bármely három csúcs egyértelműen meghatározza a szabályos sokszög köré írt kört, tehát csak a középponttól van egyenlő távol.

A páros oldalszámú szabályos sokszög csak a középpontjára vonatkozólag centrálisán szimmetrikus. Mindjárt általánosabban azt bizonyítjuk itt, hogy korlátos alakzatnak nem lehet két szimmetriacentruma. Ha ugyanis  $A$  és  $B$  két ilyen szimmetriacentrum volna, akkor az alakzat egy  $P_0$  pontját először  $A$ -ra, majd  $B$ -re tükrözve az alakzat egy  $P_1$  pontjához jutnánk, és az irányított  $P_0P_1$  szakasz a háromszög középvonaláról szóló tétel szerint az irányított  $AB$  szakasz kétszeresével egyenlő. Ezt az eljárást újból és újból elismételhetjük, és ezáltal a  $P_0P_1$  egyenesen az alakzathoz tartozó, egyenlő közül  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$  pontsorozathoz jutunk. Ez ellentmond annak, hogy az alakzat korlátos, bizonyítja tehát, hogy két szimmetriacentrum nem lehet.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a szabályos sokszögek körében nincs más szimmetria, mint amelyeket tárgyaltunk.

**B2** A szabályos sokszög általánosítása révén a *szabályos csillagsokszögekhez* jutunk. Ezt a sík véges sok szakasza alkotja, ha minden végpontjuk két szakasz közös végpontja, és találhatók hozzájuk olyan egybevágóság, amely a szakaszok egyikét egy tetszőlegesen előírt másikra fekteti, s amely a teljes alakzat helyét nem változtatja meg. A szabályos sokszögvonal is ilyen alakzat, de ezt nem nevezzük szabályos csillagsokszögnek. Egy szabályos sokszögnek a középponttól egyenlő (0-tól különböző) távolságra levő átlói szabályos csillagsokszöget alkotnak.

**19.3** Mielőtt a kör kerületét tárgyalnánk, a kerület fogalmával foglalkozunk. Egyelőre csak konvex síkidomok kerületéről lesz szó.

Egy síkidom által tartalmazott sokszöget a síkidom *belső* sokszögének, a síkidomot tartalmazó sokszöget a síkidom *külső* sokszögének nevezzük. Ha a síkidom sokszög, akkor egyben saját magának belső és külső sokszöge is. Az olyan egyszerű sokszöget, amelynek csúcsai egy síkbeli tartomány peremén vannak, *beírt* sokszögnek nevezzük. Egy adott sokszögbe beírt sokszögek között van maga az adott sokszög is. A beírt sokszög most adott definíciója általánosítja azt, amit a körbe írt sokszögekről már mondtunk (vö. 16.4).

Konvex síkidom beírt sokszöge konvex belső sokszög, mert oldalait a konvex síkidom tartalmazza, és oldalainak meghosszabbításán nem lehet pontja. Bármely külső sokszög kerülete bármely (más) konvex belső sokszög kerületénél nagyobb, mert a külső sokszög tartalmazza a belsőt (vö. 9.5).

Egy korlátos konvex síkidom *kerületének* a beírt sokszögek kerületének a felső határát nevezzük. Mondjuk azt is, hogy ez a konvex síkidomot határoló konvex zárt görbe kerülete (hossza). A felső határ létezését a korlátosság biztosítja, mert bármely külső sokszög kerülete a konvex belső sokszögek kerületének felső korlátja.

Konvex sokszögre az új definíció 9.5 szerint a régi kerületet adja.

Egybevágó konvex síkidomok kerülete definíciónk szerint egyenlő, hasonlóké kerületének aránya pedig a hasonlóság arányát adja.

A kerületnek felső határként való meghatározásánál *szorítkozhatunk olyan beírt sokszögekre, amelyek tartalmazzák a határoló konvex zárt görbe megadott véges sok pontját*. Ez azért lehetséges, mert az adott pontokat nem tartalmazó beírt sokszög kerületét növeljük, ha a sokszög és az adott pontok konvex burkával pótoljuk, és ez a konvex burok is beírt sokszög.

Definíciókból következik, hogy egy konvex síkidom *kerülete egyetlen külső sokszög kerületénél sem nagyobb*. Az is igaz, hogy egy konvex síkidom kerülete egyetlen konvex belső sokszög kerületénél sem kisebb, mert minden belső sokszöghöz találhatunk azt tartalmazó beírt sokszöget. Ilyet ad azoknak a pontoknak a konvex burka, amelyekben a konvex belső sokszög oldalegyenesei a konvex síkidom határát metszik, illetve elhagyják. Ezért egy konvex síkidom kerülete a *konvex belső sokszögek kerületének is felső határa*.

Egy konvex síkidom kerülete a *síkidom belsejében elhelyezkedő konvex sokszögek kerületének is felső határa*. Ugyanezt kimondhatjuk ugyanis minden konvex sokszögre, tehát a konvex belső sokszögekre is, és egy számhalmaz felső határa nem változik meg, ha egyes részhalmazainak a felső határát a számhalmazhoz csatoljuk. Konvex sokszögre valóban helyes az állítás, hiszen egy belső pontot a centrális hasonlóság centrumául választva olyan az eredetihez hasonló, annak belsejében elhelyezkedő konvex sokszöghöz juthatunk, amelynek a kerülete előírt kevéssel kisebb az eredeti sokszög kerületénél, ha ti. a hasonlóság aránya kevéssel kisebb, mint 1.

Ha egy konvex síkidom tartalmaz egy másikat, akkor *a tartalmazottnak a kerülete nem lehet a tartalmazóénál nagyobb*, hiszen a tartalmazottnak minden belső sokszöge belső sokszöge a tartalmazó síkidomnak is.

Azt mondjuk, hogy egy adott konvex síkidom által tartalmazott *konvex síkidomoknak egy sorozata tart* (konvergál) az adott síkidomhoz, ha az adott síkidom bármely belső pontját a sorozatnak csak véges sok eleme nem tartalmazza, ha tehát a pontot a sorozat valamelyik síkidomától kezdve már mindegyik tartalmazza. Azt is mondjuk, hogy ilyenkor a síkidomsorozat elemeit határoló *konvex zárt görbék sorozata tart* (konvergál) az adott konvex síkidom határvonalához.

**Tétel.** *Ha egy adott korlátos konvex síkidom által tartalmazott konvex síkidomoknak egy sorozata tart az adott síkidomhoz, akkor kerületük is tart az adott síkidom kerületéhez.*

*Bizonyítás.* Minthogy a sorozat síkidomainak kerülete nem lehet az adott síkidom kerületénél nagyobb, s minthogy ez a kerület az olyan belső sokszögek kerületének is felső határa, amelyek az adott síkidom belsejében vannak, elég azt bizonyítanunk, hogy a kerületsorozatnak nincs olyan torlódási értéke, amelyik egy az adott síkidom belsejében levő konvex  $S$  sokszög kerületénél kisebb. Ez valóban lehetetlen, mert a síkidomsorozat síkidomai konvexek, és véges soknak kivételével tartalmazzák  $S$ -nek minden csúcsát, tehát az egész  $S$  sokszöget is. —

**A1** A kezdőt meglepi a kerület definíciójának körülményessége. Egyszerűbbnek hiszi a következő definíciót: a síkidom határára helyezett, majd kifeszített fonál hosszát kerületnek nevezzük. Ez a „definíció” végtelen vékony, határtalanul hajlékony, egyáltalában nem nyúló, a valóságban nem is létező fonalat feltételez. Jó lehet ez a gyakorlatban a kerület kisebb-nagyobb pontosságú megméréseire, a kerület definiálására azonban nem alkalmas, hisze addig meg sem tudjuk mondani, mi a „nem nyúló” fonál, amíg nem tisztázzuk, mi a fonál hossza, ha nincs kifeszítve.

**A2** Igen lényeges az a megállapítás, hogy a sokszögekhez az új definíció is a régi kerületet rendeli. Egy fogalom kiterjesztésekor feltétlenül ügyelni kell arra, hogy az új fogalomalkotás ne legyen ellentétben a régivel.

**B** Az ebben a szakaszban bizonyított tételt szövegezhettük volna szűkebben, úgyhogy csak sokszögsorozatról szóljon. Ezzel kapcsolatban figyelmeztetünk arra, hogy bizonyítás nélkül nem nyilvánvaló, van-e olyan sokszögsorozat, amely egy megadott konvex síkidomhoz tart (lásd 20.6 B3). Ha ezt tudjuk, akkor a kerületet ilyen sokszögsorozat segítségével is definiálni lehet.

**19.4 Tétel.** *Két kör kerületének aránya sugaruk arányával egyenlő.*

*Bizonyítás.* A sugarak aránya a körök hasonlóságának az arányát adja. Ezért a sugarak aránya a két kör egymáshoz hasonló beírt sokszögei kerületének az arányával, tehát ezek felső határának az arányával is egyenlő. —

**Tétel.** *Az  $r$  sugarú kör kerülete  $2\pi r$ , ahol  $\pi$  egy valós számot jelöl.*

A tétel lényege, hogy a  $\pi$  szám  $r$ -től független. Tételünk ilyen  $n$  érték létezését mondja ki, tehát azt állítja, hogy a kör kerületét az átmérővel osztva minden körnél ugyanahhoz az eredményhez jutunk.

*Bizonyítás.* Az előző tételből következik, hogy ha egy kör kerületét sugarával elosztjuk, minden körnél ugyanazt a számot kapjuk. Ezt a számot  $2\pi$ -vel jelölhetjük. —

A kör kerületéről mondottak alapján  $\pi$  értékét tetszőleges pontossággal meghatározhatjuk. Közelítőleg  $\pi = 3,14159$ .

**A1**  $\pi$  a periféria (kerület) szó görög kezdőbetűje. Értékének meghatározására már az ókorban

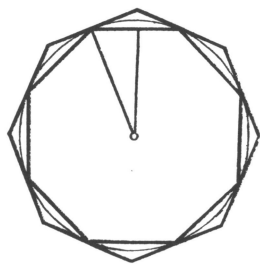
törekedtek. Az egyiptomi Rhind papirusztekercsen (i. e. 1700 körül) értékeként  $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16\dots$  szerepel. Archimedes<sup>4</sup> a beírt és körülírt szabályos sokszögek segítségével módszert dolgozott ki  $\pi$  értékének meghatározására, a szabályos 96-szögek segítségével bebizonyította, hogy értéke

$3\frac{10}{71} > 3,1408$  és  $3\frac{10}{71} > 3,1429$  között van. 35 tizedesjegyre pontos értékét Ludolf<sup>5</sup> határozta meg. Innen eredt, hogy Ludolf-féle számnak nevezték. Ma már több mint ezer jegyét határozták meg.

**A2** A  $\pi$  szám irracionális, sőt transzcendens, azaz nem gyöke egyetlen egész együtthatós algebrai egyenletnek sem. A német J. H. Lambert bizonyította be 1770-ben, hogy irracionális, és a német F. Lindemann 1882-ben, hogy transzcendens.

**19.5 Tétel.** *A körbe írt szabályos sokszögek kerülete is és a kör körül írt szabályos sokszögek kerülete is tart a kör kerületéhez, ha a sokszögek oldalszáma minden határon túl nő.*

*Bizonyítás.* Elég azt bizonyítanunk, hogy a beírt szabályos  $n$ -szög kerületét a körülírt szabályos  $n$ -szög kerületével osztva  $n$  növekedtekor 1-hez tartó hányadost kapunk. Ebből következik ugyanis, hogy ezek a kör kerületét közrefogó sokszögkerületek a kör kerületéhez tartanak. Az említett hányados a két szabályos sokszög hasonlósága miatt azzal a hányadossal egyenlő, amelyet a középpontnak a sokszögszögektől való távolságai adnak (110. ábra). Minthogy a körülírt körre vonatkozólag ez a távolság éppen a körsugár, elég már csak azt bizonyítanunk, hogy a középpontnak a beírt szabályos  $n$ -szög oldalaitól való távolsága  $n$  növekedtekor a körsugárhoz tart. Ez viszont abból következik, hogy ennek a távolságnak és a sugárnak a különbsége a háromszögegyenlőtlenség szerint kisebb, mint a beírt szabályos  $n$ -szög oldalának a fele, ez utóbbi pedig 0-hoz tart, ha  $n$  minden határon túl nő. —



110

Tételünk módot ad  $\pi$  közelítő meghatározására. A tételnek a beírt sokszögekről szóló része 19.3 tételéből is következik, hiszen a növekvő oldalszámú beírt szabályos sokszögek a körhöz tartanak (vö. B2).

**B1** Bebizonyítjuk, hogy a körbe írt szabályos  $n$ -szög oldala az oldalszám növekedtekor valóban 0-hoz tart, vagy általánosabban: hogy egy kör húrjainak hossza 0-hoz tart, ha középponti szögeik 0-hoz tartanak.

Azt kell bizonyítanunk, hogy egy adott körhöz és egy megadott távolsághoz megadható egy olyan  $\omega$  szög, hogy ha a kör egy húrjához  $\omega$ -nál kisebb középponti szög tartozik, akkor a húr hossza a megadott távolságnál kisebb. Mivel kisebb középponti szöghöz rövidebb húr tartozik, elég az  $\omega$  szöget úgy választanunk meg, hogy  $\omega$ -hoz a megadott távolságnál kisebb húr tartozzék.

Írjunk a kör egy  $A$  pontja körül kört, amelynek sugara a megadott távolságnál és a kör átmérőjénél is kisebb. A rajzolt kör 15.6 szerint metszi körünket. Ha  $B$  egy metszéspont, akkor az  $AB$  húrhoz tartozó  $\omega$  középponti szöget tekintjük. Ez a szög megfelel követelményünknek, mert a hozzá tartozó  $AB$  húr valóban kisebb a megadott távolságnál.

<sup>4</sup>\* A görög Archimedes i. e. 287—212 Szicília szigetén, Siracusában élt.

<sup>5</sup>\* Ludolf van Ceulen (ejtsd: fan kölen) holland mérnök, 1540—1610.

**B2** Hivatkoztunk arra, hogy a beírt szabályos sokszögek sorozata a körhöz tart. Itt még többet bizonyítunk: Ha egy körbe írt, a kör középpontját tartalmazó sokszögekből álló sorozat finomodó abban az értelemben, hogy a sokszögek leghosszabb oldalainak sorozata 0-hoz tart, akkor a sokszögek kerülete tart a kör kerületéhez.

Csak azt kell belátnunk, hogy sokszögsorozat a körhöz tart, azaz hogy a kör bármely belső pontját a sorozatnak legfeljebb véges sok sokszöge nem tartalmazza. Ez valóban így van, mert ha a sokszög leghosszabb oldala már olyan rövid, hogy a középpontnak ettől az oldaltól való távolsága a választott belső ponttól való távolságánál nagyobb, akkor a sokszög tartalmazza ezt a belső pontot, hiszen a rajta áthaladó sugarat a sokszög határa a belső pontnál messzebb metszi.

Az utolsó lépés arra a kikötésre támaszkodott, hogy a kör középpontja sokszögeink belsejében van. Ilyen megszorítás nélkül nyilván nem is helyes az állítás. Helyettesíthető viszont ez a megszorítás mással, pl. azzal, hogy a sorozat sokszögeinek ne legyen hegyesszögük.

**19.6** Egy módszert ismerünk meg  $\pi$  jegyeinek kiszámítására. A számítás egyszerűsítése érdekében nem egy adott sugarú körbe írt  $s$  e kör köré írt egyre több oldalú sokszögek kerületét fogjuk kiszámítani, hanem adott kerületű  $s$  egyre több oldalú szabályos sokszögek beírt és körülírt körének sugarát határozzuk meg.  $\pi$  értékéhez jutunk tehát, ha majd az adott kerületet a kiszámított sugarak határértékének kétszeresével osztjuk.

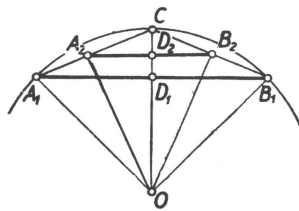
Eljárásunk alapja a következő tétel lesz:

**Tétel.** Ha  $s$  egy szabályos sokszög beírt és körülírt körének sugarát jelöli, akkor az ugyanakkora kerületű  $s$  kétannyi oldalú szabályos sokszög beírt és körülírt körének  $r_2$  és  $R_2$  sugarát a következő képletek adják:

$$r_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}, \quad R_2 = \sqrt{R_1 r_1}.$$

*Bizonyítás.* Legyen az  $O$  középpontú szabályos  $n$ -szög egy oldala  $A_1 B_1$ , s ennek felezőpontja  $D_1$  (111. ábra). A beírt és körülírt kör sugara tehát  $r_1 = OD_1$ ,  $R_1 = OA_1$ .

Az  $OD_1$  félegyenes a sokszög köré írt kört a  $C$  pontban metszi. Az  $A_1 B_1 C_1 \Delta$ -nek  $A_1 B_1$ -gyel párhuzamos középvonala  $A_2 B_2$ . Állítjuk, hogy  $A_2 B_2$  egy  $O$  középpontú, az  $n$ -szöggel egyenlő kerületű, szabályos  $2n$ -szögnek az oldala. Ez akkor igaz, ha az  $OA_2 B_2 \Delta$  egyenlő szárú,  $A_2 B_2$  fele  $A_1 B_1$ -nek, és az  $A_2 O B_2 \Delta$  fele az  $A_1 O B_1 \Delta$ -nek. Az első megállapítás az ábra  $OC$ -re vonatkozó szimmetriájából, a második  $A_2 B_2$  középvonal voltából, a harmadik pedig abból következik, hogy  $OA_2$  és  $OB_2$  felezi az  $A_1 C$  és  $B_1 C$  húrokhoz tartozó középponti szöget, mert a húrokat felezi. Ha tehát  $A_2 B_2$  felezőpontját  $D_2$  jelöli,  $r_2 = OD_2$  és  $R_2 = OA_2$ .



111

Minthogy  $A_2 B_2$  középvonal,  $D_2$  felezi a  $CD_1$  szakaszt, és így

$$r_2 = OD_2 = \frac{1}{2}OD_1 + OC = \frac{1}{2}(r_1 + R_1).$$

Az  $OA_2C$  derékszögű háromszögből viszont a befogótétel szerint

$$R_2 = OA_2 = \sqrt{OC \cdot OD_2} = \sqrt{R_1 r_2}. \quad \_$$

Ez a tétel valamely szabályos sokszög  $r_1$  és  $R_1$  értékéből kiindulva viszonylag egyszerű számítással s elég gyors közelítéssel lehetővé teszi  $\pi$  kiszámítását. Célszerű például a 2 területű négyzetből

kiindulni, amelyre  $r_1 = \frac{1}{4}$  és  $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$  (112. ábra). Ez esetben ugyanis  $\pi$  a kiszámított sugarak határértékének reciproka lesz, mert a sokszögek területének fele a sugárral osztva  $\pi$ -hez tart. A kiszámított sugarak a határértéket közrefogják, ezért mindegyik sugárpár alsó és felső becslést is ad  $\pi$  számára.

A számítás eredményét a mondott kezdés mellett 6 tizedes jegyre pontosan a következő táblázat tartalmazza:

|                  |                  |
|------------------|------------------|
| $r_1 = 0,25$     | $R_1 = 0,353553$ |
| $r_2 = 0,301777$ | $R_2 = 0,326641$ |
| $r_3 = 0,314209$ | $R_3 = 0,320365$ |
| $r_4 = 0,317287$ | $R_4 = 0,318822$ |
| $r_5 = 0,318055$ | $R_5 = 0,318438$ |
| $r_6 = 0,318246$ | $R_6 = 0,318342$ |
| $r_7 = 0,318294$ | $R_7 = 0,318318$ |
| $r_8 = 0,318306$ | $R_8 = 0,318312$ |
| $r_9 = 0,318309$ | $R_9 = 0,318310$ |

Az utolsó értékek szabályos 1024-szögekre vonatkoznak. Ezek reciproka hat jegyre pontosan 3,14160 és 3,14159.

**B1** A számítást az  $r_0 = 0$  és  $R_0 = 0,5$  értékekkel is elkezdhettük volna, így az első lépés éppen  $r_1$  és  $R_1$  fenti értékét adja. Ez a „szabályos kétszögből” való kiindulásnak felel meg.

**B2** Ha két szám viszonylag kevéssel különbözik egymástól, mértani közepük nagyon közel van számtani közepükhöz. Ezért számításunk későbbi lépéseiben az  $R$  értékeket számtani közép képzése is megadta volna.

Könnyen belátható, hogy ha valamely  $r_i, R_i$  értékpárból kiindulva számtani közepeléssel számítjuk a további értékeket, akkor határértékük  $\frac{1}{3}(r_i + 2R_i)$  lesz. Ezt az észrevételt a számítás gyors befejezésére használhatjuk fel. Ha a fenti számítást csak  $r_4$  és  $R_4$  meghatározásáig végezzük el, ezekből az értékekből máris  $\frac{1}{3}(r_4 + 2R_4) = 0,318310$ , s ebből  $\pi$  értékeként 3,14159 adódik.

**19.7** A körív hosszával akarunk foglalkozni. Előbb azonban az ívhossz fogalmával ismerkedünk meg. Csak konvex zárt görbe íveiről lesz szó.

Egy konvex zárt görbét két pontja két *konvex ívre* bont fel (lásd B1). A konvex ív lehet egyenesszakasz is.

Ha nem szakaszcól van szó, akkor a konvex ív végpontjait összekötő szakaszt az ívhez tartozó *húrnak* mondjuk. Ilyenkor ez a húr az ívvel együtt egy konvex síkidomot határol. Ha ennek a síkidomnak kerületéből a húr hosszát levonjuk, a konvex ív *ív hosszát* (hosszát) kapjuk. A szakaszhoz ívhosszként a szakasz hosszát rendeljük.

Konvex sokszög határán elhelyezkedő töröttvonalhoz definíciónk ugyanazt rendeli ívhosszként, mint amit eddig a töröttvonal hosszának nevezünk.

Megállapíthatjuk, hogy egybevágó konvex ívek hossza egyenlő, s hogy hasonlóak hosszának hányadosa a hasonlóság arányát adja.

Egy konvex ív esetében *beírt* poligonnak nevezzük az olyan nyílt töröttvonalat, amelynek végpontjai az ív végpontjai, s amelynek töréspontjai az íven vannak. Ha a konvex ív nem egyenesszakasz, akkor a beírt poligon a húrral együtt egy az ív és húr határolta síkidomba írt sokszöget határol.

**Tétel.** *Egy konvex ív hossza a beírt poligonok hosszának felső határa.*

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy nem szakaszcól van szó, hiszen arra a tétel helyessége nyilvánvaló. Az ív és húr határolta síkidom kerületének kerületek felső hataraként való előállításánál szorítkozhatunk azokra a beírt poligonokra, amelyeknek töréspontjai között az ív végpontjai is szerepelnek. Ha az ebben a kijelentésben szereplő kerületek mindegyikét a húr hosszával csökkentjük, állításunk helyességét látjuk be. —

**Tétel.** *Egy konvex zárt görbe két csatlakozó ívének ívhosszát összeadva a két ív együttesének ívhosszát kapjuk.*

A két ív együttese lehet egy ív, de lehet a teljes zárt görbe is. Ez utóbbi esetben a zárt görbe ívhossza a kerületet jelenti.

*Bizonyítás.* Ha ıveink együttesének ívhosszát felső határként származtatjuk, szorítkozhatunk olyan beírt poligonokra, amelyeknek szögponjai között, a két ív (egy vagy két) csatlakozási pontja is szerepel. A két ív hosszának összegét és az ıvek együttesének ívhosszát ezek szerint ugyanannak a számhalmaznak a felső határa adja. —

Tételünköl következik, hogy ha egy konvex ıvet vagy egy konvex zárt görbét  $n$  ıvre bontunk, akkor ezek ívhosszainak összege a teljes ívhosszat adja.

**A** Minthogy az ívhosszt hosszúságmértékkel definiáltuk, az ívhossz is hosszúságdimenziójú mennyiség.

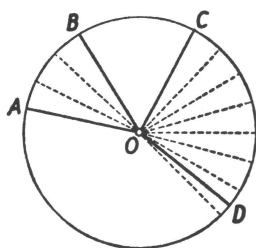
**B1** Ha megadjuk egy konvex zárt görbe két pontját, akkor az általuk határolt két konvex ívhez a következıképpen jutunk: a zárt görbe által határolt tartomány egy belsı pontjából a két ponton át fılegyeneseket húzunk, majd tekintjük az ezek által határolt két szögtartománynak a zárt görbével alkotott közös részét. Ez az eljárás annak az általánosítása, ahogyan a körıvhez jutottunk (vö. 5.2 Bl). Ha a felbontással származó két konvex ív között nincs szakasz, akkor szögtartományok helyett szerepeltethetnők azokat a fılsíkokat is, amelyeket a két pont összekötı egyenese határol.

**B2** Véges sok konvex ív egymáshoz fızésével adódó vonal ívhosszának a konvex ıvek hosszának összegét nevezzük. Ezzel a definícióval a kerület fogalmát is általánosítottuk. Ez az új definíció utolsó tételünk szerint fedi a régit. Az is nyomban megállapítható, hogy szakaszunk mindkét tétele helyes marad, ha azokat az új definíciót elfogadva véges sok konvex ıvböl összerakott görbére, mondjuk ki. Elsı tételünk alapján az ívhossz fogalmát még tovább, véges sok konvex ıvböl össze nem rakható görbıkre is általánosítani lehet. Ilyen általánosítással az analízis és a differenciálgeometria foglalkozik.

**B3** A *differenciálgeometria* általánosságban mindenféle alakzat metrikus tulajdonságával foglalkozik, és legfıbb segédeszközként az aritmetikai és a geometriai határátmenetet használja. Határátmenettel alakzatokat is definiál (vö. 15.2 Bl), és az alakzatokhoz határátmenettel rendelt mértékeket vizsgál. Módszeréböl következik, hogy erısen összefonódik az analízissel. Nagymértékben felhasználja az analízist, az analízis egyes fejezeteinek geometriai köntöst ad, és az analízist számos vizsgálati tárggyal gazdagítja.

Ebben az elemi jellegű könyvben is szerepelnek határátmenettel definiált mértékek, infinitézimális fogalmak: az ívhossz, a terület, a térfogat és a felszín (vö. 15.2 B2). Mondhatjuk, hogy ezek már a differenciálgeometriához tartoznak. Valóban a differenciálgeometria foglalkozik ezekkel a fogalmakkal teljes általánosságban. Mi megelégszünk azzal, hogy az ilyen infinitézimális fogalmakat — miként a kerületnél és az ívhossznál is tettük — az általunk részletesen vizsgált alakzatokat felölölő, egyszerű tárgyalást megengedő, szűk körben vezessük csak be.

**19.8** A körív hosszának tárgyalásánál felhasználjuk azt, hogy egy körben az egyenlő középponti szögekhez tartozó, egybevágó körívek hossza egyenlő, és hogy egymáshoz csatlakozó ívek hosszának összege az általuk alkotott teljes ív hossza. A körív jelével egyben a körív hosszát is jelöljük.



113

**Tétel.** Egy kör íveinek hossza középponti szögükkel arányos.

*Bizonyítás.* Legyen  $n$  tetszőleges természetes szám. Az  $AB$  körív középponti szögét  $n$  egyenlő részre osztjuk (113. ábra). Az így kapott szöget felmérjük a  $CD$  ív középponti szögére az  $OC$  szártól kezdve annyszor, ahányszor csak tudjuk. Ha  $k$ -szor mérhettük fel, akkor

$$k \frac{AOB}{n} \leq COD < (k+1) \frac{AOB}{n}.$$

A körívek hosszára fentebb kimondottakból következik, hogy

$$k \frac{\widehat{AB}}{n} \leq \widehat{CD} < (k+1) \frac{\widehat{AB}}{n}.$$

Egyenlőtlenségeinket  $AOB$ -gel és  $\widehat{AB}$ -vel osztva azt kapjuk, hogy a  $COD / AOB$ ,  $\widehat{CD} / \widehat{AB}$  hányadosok nem kisebbek  $\frac{k}{n}$ -nél, viszont kisebbek  $\frac{k+1}{n}$ -nél. E hányadosok különbsége tehát  $\frac{1}{n}$ -nél kisebb. Minthogy  $n$  tetszőlegesen nagy lehet, a két hányados egyenlő. —

**Tétel.** Az  $r$  sugarú kör a középponti szöghöz tartozó ívének hossza  $\alpha r$ , ha a középponti szöget ívmértékkel mérjük.

Ha a szöget fokokban adjuk meg, a képlet bonyolultabb. Ha  $\alpha = n^\circ$ , akkor az ívhossz  $\frac{n\pi r}{180}$  (vö. 3.3 B1);

*Bizonyítás.* Minthogy a körív hossza a középponti szöggel arányos, a keresett  $i$  ívhosszra

$$i : 2\pi r = \alpha : 2\pi.$$

Ebből az aránypárból  $i = \alpha r$  adódik. —

Tételünk szerint az egységsugarú körben az  $\alpha$  ívmértékű szöghöz  $\alpha$  hosszúságú ív tartozik. Megállapítottuk tehát, hogy az ívmérték annak a csúcs körül rajzolt egységsugarú körívnek a hossza, amelyik a szárakat a szögtartományon belül köti össze.



**B1** Ha egy körív végpontjainak sorrendjét is megadjuk, azaz megmondjuk, melyik a *kezdőpontja* és melyik a *végpontja*, akkor *irányított körívről* beszélünk. Ha  $\widehat{AB}$  irányított ívet jelöl, akkor  $A$  a kezdőpontja. Az irányított köríveknek irányított középponti szögtartományok felelnek meg. Irányított síkban az irányított körívekhez *előjeles ívhosszat* rendelhetünk. Ehhez úgy jutunk, hogy az ívhosszat pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, amint a megfelelő irányított középponti szögtartomány pozitív vagy negatív forgásszöget szolgáltat. Az irányított körívekkel az irányított szakaszokhoz hasonlóan számolhatunk.

Ha egymáshoz csatlakozó irányított íveket tekintünk, az is lehetséges, hogy ezek egészben vagy részben fedik egymást. Ha az így származtatott, egészben vagy részben többszörös íveket is az irányított ívekhez soroljuk, akkor elmondhatjuk, hogy bármely kör irányított íveinek az előjeles hossza tetszőleges valós érték lehet.

**B2** Már jóval korábban is megtehettük volna, hogy egy kör íveit mérjük, de nem ívhosszúságukkal, hanem azáltal, hogy egy körívet egységül választunk. Ha megállapodnánk abban, hogy egybevágó ívekhez ugyanaz a mérték tartozzék, és két csatlakozó ívből összerakott ívnek a mértéke mindig a két részív mértékének összege legyen, akkor az egységívből kiindulva minden ívhez egy-egy pozitív valós számot rendelhetnénk mértékül. Ez az eljárás végeredményben azt jelentené, hogy egy kör íveit középponti szögükkel mérnők.

Nem jártunk el így, mert a kétféle körívmérés zavarólag hatna. Ez a belátás vezetett, amikor 15.3-ban nem beszéltünk egyenlő, nagyobb és kisebb körívekről.

**B3** Tételünk bizonyításában szerepelt az, hogy egy szöget  $n$  egyenlő részre bontottunk fel, s ennek lehetőségét a köraxióma nem biztosítja. Még sincs itt szükség a köraxiómánál többre, mert a bizonyításban  $n$  szerepét  $2^n$  is játszhatja, és a szögek ismételt felezésének lehetőségét a köraxióma biztosítja.

**B4** Ha egy körívbe írt poligonok finomodó sorozatot alkotnak abban az értelemben, hogy a poligonok leghosszabb oldalainak a sorozata is 0-hoz tart, akkor a poligonok hossza a körív hosszához tart (vö. 19.5 B2).

Ennek igazolásához, 19.3 tételére és az ívhossz definíciójára hivatkozva, elég azt bizonyítanunk, hogy ha a beírt poligonokat a körív  $h$  húrával lezárjuk, akkor az ív és húr határolta  $S$  körszelethez tartó sokszögsorozathoz jutunk. Szorítkozhatunk itt azokra a poligonokra, amelyeknek valamennyi oldala  $h$ -nál rövidebb. Egy ilyen oldal a kört két ívre bontja, s ezek rövidebbike 15.3 szerint nem tartalmazhatja  $h$  végpontjait. Igaz ezért, hogy ez a poligonoldal az általa határolt körszeletek közül a kisebbiket választja el a poligon és húr határolta sokszögtől, azt tehát, amelynek a pontjai közül a poligonoldal felezőpontja van a legközelebb a kör  $O$  középpontjához. Ha mármost az  $S$  körszelet egy belső  $P$  pontját tekintjük, akkor megállapíthatjuk, hogy ha valamely beírt poligon és húr határolta sokszög a  $P$  pontot nem tartalmazza, akkor  $P$  valamelyik poligonoldal által a sokszögtől elválasztott körszeletben van, messzebb van tehát  $O$ -tól, mint a poligonoldalak valamelyikének a felezőpontja. A szóban forgó sokszögsorozatban csak véges sok ilyen sokszög lehet, hiszen a leghosszabb oldal 0-hoz tartása miatt a legközelebbi oldalfelezőpontnak  $O$ -tól mért távolsága a körsugárhoz tart, és ezért csak véges sokszor lehet az  $OP$  távolságnál kisebb. Sokszögsorozatunk tehát valóban  $S$ -hez tart.

Megemlítjük, hogy a most bizonyított állítás nemcsak körívre, hanem tetszőleges konvex ívre, sőt csatlakozó konvex ívekből összerakott nyílt (azaz két végpontot összekötő) vonalakra is teljesül, de ennek bizonyításával már nem foglalkozunk. Beírt poligonok finomodó sorozatának a segítségével ki is lehet terjeszteni az ívhossz fogalmát további görbékre. Az analízis és differenciálgeometria a 19.7 B2-ben említett módszer mellett ezt a módszert is használja.

## 20. § Terület

Először a sokszögek, majd általában a síkidomok területével foglalkozunk.

**20.1** Minden sokszöghöz rendelhetünk egy valós számot, amelyet területnek nevezünk, s amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden sokszög területe pozitív szám.
2. Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
3. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, e kettő területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.
4. Az egységnégyzet területe 1.

Az utolsó megállapítás szerint a terület ismeretéhez a hosszegység ismeretére van szükség. Ha más hosszegységet, illetve területegységet választunk, akkor minden terület osztandó az újonnan területegységül választott sokszög területével.

Ebből a megállapításból következik, hogy nem függ a területegység megválasztásától az olyan kijelentések helyessége, hogy két sokszög területe egyenlő, hogy az egyik a másiknál kisebb vagy nagyobb, vagy hogy egy sokszög területe más sokszögek területének összege, különbsége, fele, kétszerese stb.

A 3. követelmény teljesüléséből nyomban következik, hogy ugyanaz akkor is áll, ha egy sokszöget  $n$  sokszögre bontunk fel, ahol  $n$  akármelyik természetes számot jelentheti.

Ha egy sokszög egy tőle különböző másikat tartalmaz, akkor területe a tartalmazotténál nagyobb, hiszen a tartalmazott sokszög területének,  $s$  a tartalmazott sokszög elhagyása után maradó sokszög területének összegével egyenlő.

Az  $A_1A_2\cdots A_n$  sokszög területét a következőkben  $T(A_1A_2\cdots A_n)$  jelöli.

A Szemléletesen úgy juthatunk a területhez, hogy az adott alakú homogén lemez súlyát az egységnégyzet alakúéval elosztjuk.

**B1** Mi csak kijelentettük, hogy a sokszögekhez egy számot rendelhetünk, amelyet területnek nevezünk, s amelyik bizonyos feltételeket kielégít. Bár a szemlélet alátámasztja ezt, mégis szükség van annak igazolására, hogy e hozzárendelés lehetséges, és csak egyféleképpen lehetséges. Ezt rövidesen meg is tesszük (20.4 B). Tárgyalásunknak addig is meg van az értelme: azzal foglalkozunk, hogy *ha van* olyan hozzárendelés, amely négy feltételünket kielégíti, akkor a hozzárendelt értékekre vonatkozólag milyen megállapításoknak kell teljesülniük. Ha majd belátjuk, hogy egyetlenegy kívánt tulajdonságú hozzárendelés van, akkor tudjuk majd, hogy korábbi megállapításaink minden feltétel nélkül teljesülnek.

**B2** Görbe vonallal határolt síkidomok területéről itt még nem beszélünk. Erről is szó lesz (lásd 20.6).

## 20.2 Először a téglalap területével foglalkozunk.

**Tétel.** *Ha két téglalapnak egy-egy oldala egyenlő, területük aránya megegyezik az egyenlő oldalakhoz csatlakozó oldalak arányával.*

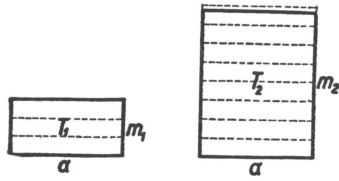
Ha a téglalap egyik oldalát *alapnak* tekintjük, akkor a csatlakozó oldalak a hozzá tartozó *magasságot* adják meg. Tételünk ezért így is fogalmazható: egyenlő alapú téglalapok területének aránya magasságuk arányával egyenlő.

*Bizonyítás.* Legyen  $n$  tetszőleges természetes szám. Osszuk fel az első téglalapnak az alapra merőleges oldalát  $n$  egyenlő részre (114. ábra). Mérjük fel e részt a második téglalap magasságát adó oldalára az egyik végponttól kezdve, ahányszor csak lehetséges. Ha ez  $k$ -szor lehetséges, akkor a magasságokra

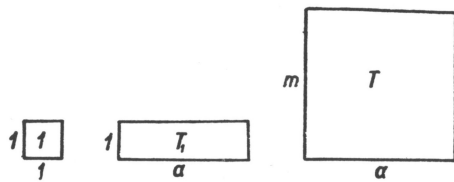
$$k \frac{m_1}{n} \leq m_2 < (k+1) \frac{m_1}{n}.$$

Az osztópontokon át a téglalapok alapjával párhuzamosakat húzunk. E párhuzamosok a téglalapokból egybevágó, téglalap alakú sávokat vágnak le, mert oldalaik páronként egyenlők. Ezért e sávok területe is egyenlő, és a téglalapok területeire

$$k \frac{T_1}{n} \leq T_2 < (k+1) \frac{T_1}{n}.$$



114



115

Egyenlőtlenségeinkből ( $m_1$ -gyel és  $T_1$ -gyel való osztás útján) következik, hogy az

$$\frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{T_2}{T_1}$$

hányadosok mindegyike kisebb  $\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)$ -nél, s nem kisebb  $\frac{k}{n}$ -nél. Ezért különbségük  $\frac{1}{n}$ -nél kisebb. Minthogy  $n$  tetszőleges természetes szám lehet, a felírt hányadosok különbsége csak 0 lehet, s így  $T_1 : T_2 = m_1 : m_2$ . —

**Tétel.** A téglalap területe két szomszédos oldal szorzatával egyenlő.

A már bevezetett szóhasználattal: a téglalap területe az alap és magasság szorzata.

*Bizonyítás.* Jelölje  $a$  és  $m$  téglalap alapját és magasságát. Tekintsük azt a téglalapot, melynek alapja  $a$  és magassága 1 (115. ábra). Ennek  $T_1$  területére az egységnégyzettel való összevetésből az előző tétel szerint  $T_1 : 1 = a : 1$ , tehát  $T_1 = a$ . Ha viszont ezt a téglalapot a vizsgált téglalappal vetjük össze, újból az előző tétel szerint  $T : T_1 = m : 1$ , tehát  $T = T_1 m = am$ . —

**A** Ha a hosszegységet megváltoztatjuk, és minden hossz mérőszáma 2-szeres vagy 3-szoros lesz, akkor a terület mérőszáma utolsó tételünk értelmében 4-szer vagy 9-szer akkora lesz. Ezt a tényt fejezzük ki azzal, hogy a terület dimenziója „hosszúság a négyzetben”. Ez az oka annak is, hogy ha a hosszegység jele cm vagy m, akkor a területegységet  $\text{cm}^2$  vagy  $\text{m}^2$  jelöli. Ez a jelölésmód a gyakorlatban nagyon előnyös, mert pl. az  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$  összefüggésből  $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$  „négyzetreemelés” keletkezik.

Az egységek megadásáról hasonló mondhatunk, mint amit 2.2 A1-ben mondtunk. A gyakorlati életben erre feltétlenül szükség van, viszont a geometriában a területegységet is eleve adottnak tekintjük, és a terület mérőszáma mellett a területegységet nem jelezzük.

Még ha nevezett mennyiségekkel is dolgozunk, azaz a mennyiség megadásába az egység jelzését beleértjük, akkor is mondhatjuk, hogy a terület két hosszúság szorzata. Ezt alátámasztja az, amit az előbb a hosszúságegységek „szorzásáról” mondtunk.

Megemlítjük végül, hogy felesleges volna azt mondani, hogy a téglalap területe két szomszédos oldal *hosszának* a szorzata, hiszen az oldal szó nemcsak szakaszt, hanem hosszúságot is jelent.

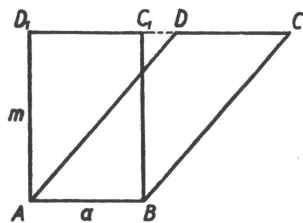
**20.3 Tétel.** *A parallelogramma területe az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatával egyenlő.*

Tételünk az előző tételt is magában foglalja. A parallelogramma *alapjául* a négy oldal bármelyikét választhatjuk. Az ehhez tartozó *magasság* a szemközti oldalnak az alap egyenesétől való távolsága.

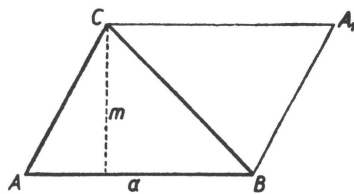
*Bizonyítás.* Tekintsük az  $ABCD$  parallelogramma mellett azt az  $ABC_1D_1$  téglalapot is, melynek alapja ugyanaz az  $AB$  szakasz, s amelynek  $C_1D_1$  oldala a  $CD$  egyenesen van (116. ábra). A pontokat úgy jelöljük, hogy a  $DC$  szakasz a  $D_1C_1$  félegyenesen legyen.

Az  $ABCD_1$  trapéz  $AD$  és  $BC_1$  két-két részre vágja. E részekre

$$T(ABCD_1) = T(ABCD) + T(ADD_1) = T(ABC_1D_1) + T(BCC_1).$$



116



117

Az  $ADD_1\Delta$  és  $BCC_1\Delta$  egybevágó, mert az  $AB$  eltolás az elsőt a másodikba viszi. Így tehát  $T(ADD_1) = T(BCC_1)$ , és egyenletünk alapján  $T(ABCD) = T(ABC_1D_1) = am$ . —

**Tétel.** *A háromszög területe az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatának felével egyenlő.*

Összhangban van ez a tétel 18.1 tételével; bármelyik oldalt választjuk is alapnak, a számított terület ugyanannyi.

*Bizonyítás.* Az  $ABC\Delta$ -et  $BC$  felezőpontjára tükrözve az eredetivel egybevágó  $A_1CB\Delta$ -et kapunk (117. ábra). E két háromszög együtt egy olyan parallelogrammát alkot, melynek  $AB$  alapja s ehhez tartozó magassága egyben az  $ABC\Delta$ -nek is alapja és magassága. Ennek az alapnak és magasságnak a szorzata ezek szerint a készített parallelogramma területét, tehát háromszögünk területének a kétszeresét adja.

Tételünköl következik, hogy egy rögzített oldalon nyugvó és adott területű háromszögek harmadik csúcsának mértani helye két olyan párhuzamos egyenes, amelynek az adott oldal egyenese a középpárhuzamosa.

**20.4** Bármely sokszög területét ki tudjuk számítani, ha előbb háromszögekre bontjuk, s e háromszögek területét összeadjuk. Ez minden sokszögnél lehetséges.

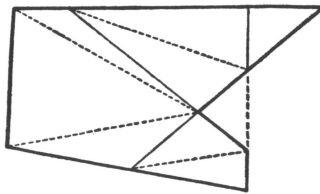
**Tétel.** Minden sokszög felbontható háromszögekre.

Bármily nyilvánvaló is ennek helyessége, bizonyítással kell meggyőződnünk arról, hogy kivétel nincs.

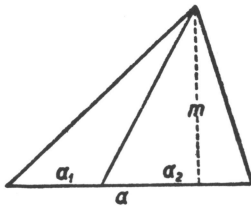
*Bizonyítás.* a) Konvex sokszögeknél elegendő egy csúcsot a többivel összekötni, s ezzel a sokszöget máris háromszögekre bontottuk.

b) Konkáv sokszögnél (akár többszörösen összefüggő sokszögnél is) valamennyi oldalegyenest meghúzva a sokszöget konvex sokszögekre daraboljuk (118. ábra), hiszen egyetlen sokszögdarabot sem metszhet annak valamelyik oldalegyenese. A kapott konvex darabokat viszont a) szerint háromszögekre darabolhatjuk tovább. —

**B\*** Beláttuk, hogy ha egy hozzárendelés 20.1 követelményeit kielégíti, akkor egy sokszöghöz azt az értéket rendeli, amelyikhez a sokszög háromszögekre való felbontása révén jutunk, mégpedig függetlenül attól, hogy a felbontást hogyan végezzük. Nincs ezért két különböző, a feltételeinket kielégítő hozzárendelés, hiszen ugyanannak a sokszögnek ugyanolyan feldarabolása csak egy értéket ad.



118



119

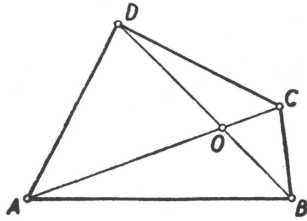
Még nem tudjuk azonban, hogy van-e olyan hozzárendelés, amely kielégíti 20.1 követelményeit. Ezt igazoljuk most. Minden sokszöghöz egy-egy számot fogunk hozzárendelni, s kimutatjuk, hogy ezekre négy feltételünk teljesül. A bizonyításhoz hosszabb gondolatsor vezet el.

a) Háromszögekhez hozzárendeljük egy oldal  $s$  a hozzá tartozó magasság szorzatának a felét. 18.1 szerint ez egyértelműen meghatározott szám.

b) Ha egy háromszöget egyik csúcsából kiinduló szakasszal két háromszögre osztunk, e két háromszöghöz rendelt szám összege az eredeti háromszöghöz rendelt számmal egyenlő, ugyanis a felosztott oldal darabjait választva alapnak e hozzárendelt számok a 119. ábra jelölésével

$$\frac{\alpha_1 m}{2}, \frac{\alpha_2 m}{2}, \text{ s ezeknek az összege valóban } \frac{\alpha m}{2}.$$

c) Ha egy konvex négyszöget egy átlóval két háromszögre vágunk, e két háromszöghöz rendelt szám összege nem függ attól, hogy a négyszög melyik átlóját választottuk. Jelölje  $O$  az  $ABCD$  konvex négyszög átlóinak metszéspontját (120. ábra). Az  $ABO\Delta$ -höz rendelt szám b) szerint az  $ABO\Delta$ -höz és a  $BCO\Delta$ -höz rendelt szám összege, és ugyanígy az  $ACD\Delta$ -höz rendelt szám a  $CDO\Delta$ -höz és a  $DAO\Delta$ -höz rendelt szám összege. Ha tehát az  $AC$  átlóból indulunk ki, akkor az  $O$  pont és a négy oldal által meghatározott négy háromszöghöz rendelt szám összegéhez jutunk. Ha ezt a megállapítást a  $BD$  átlóra alkalmazzuk, akkor ugyanehhez az eredményhez jutunk.



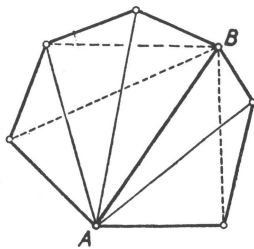
120

d) Ha egy konvex sokszöget valamelyik csúcsából kiinduló átlókkal háromszögekre osztunk, akkor e háromszögekhez rendelt számok összege nem függ attól, hogy melyik csúcsot választottuk a felosztás alapjául. Ezt az állítást az oldalszámra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Háromszögekre a tétel semmitmondó. Négyszögekre már c) tartalmazza állításunkat. Tekintsünk tehát egy  $n$ -szöget, legyen  $n > 4$ , és tegyük fel, hogy állításunk  $n$ -nél kevesebb oldalú sokszögekre helyes.

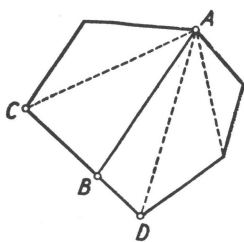
Elég azt bizonyítanunk, hogy ugyanazt az összeget kapjuk, ha két felosztásnál két nem szomszédos csúcsot választunk a felosztás alapjául. Szomszédos csúcsokhoz ugyanis  $n > 4$  miatt található olyan csúcs, amelyik ezeknek egyikével sem szomszédos, és e harmadik csúcs közvetítésével állításunk helyessége a szomszédos csúcsokra is adódik majd.

Legyen tehát az  $A$  és  $B$  pont  $n$ -szögünknek két nem szomszédos csúcsa (121. ábra). Az  $AB$  átló  $n$ -szögünket két  $n$ -nél kevesebb oldalú sokszögre bontja. Az  $A$ -ból és  $B$ -ből induló átlók olyan háromszögekre vágják az  $n$ -szöget, amelyek egyben a mondott két részsokszög feldarabolását is szolgáltatják. A két háromszögsorozat mindegyike tehát két-két háromszögcsoportra bomlik, s e csoportok páronként ugyanannak a részsokszögnek a feldarabolását adják. Indukciós feltevésünk szerint két ilyen csoport háromszögeihez hozzárendelt számok összege egyenlő. Egyenlők akkor az  $A$ -hoz és  $B$ -hez tartozó teljes háromszögsorozatokhoz rendelt számok összegei is, mert két-két, páronként egyenlő szám összegeként számíthatók ki.

e) Háromnál több oldalú konvex sokszöghöz hozzárendeljük az olyan háromszögekhez rendelt számoknak az összegét, amelyekre a sokszög valamelyik csúcsából induló átlók a sokszöget feldarabolják, d) szerint ez egyértelműen meghatározott szám.



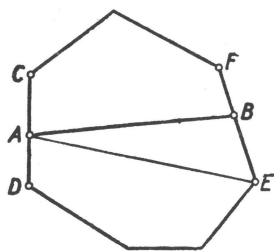
121



122

f) Ha egy konvex sokszöget egy csúcsából induló szakasszal két sokszögre vágunk, a keletkező két konvex részsokszöghöz rendelt szám összege az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő. Ha a

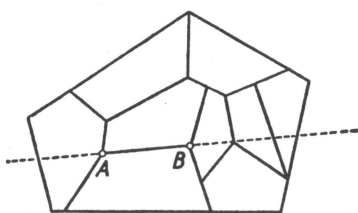
kettévágó  $AB$  szakasz átló, akkor állításunk közvetlenül adódik a hozzárendelt számoknak  $A$ -ból induló átlók segítségével való kiszámításából. Legyen tehát az  $A$  csúcsból induló  $AB$  szakasz  $B$  végpontja egy  $CD$  oldal belső pontja (122. ábra). Bontsuk fel a két részsokszög közül azokat, amelyek nem háromszögek,  $A$ -ból induló átlókkal háromszögekre. Valamennyi  $A$  csúcsú háromszöghöz rendelt szám összege  $e$ ) szerint a két részsokszöghöz rendelt szám összegével egyenlő. Ugyanezt az összeget úgy is számíthatjuk, hogy az  $ABC$ ,  $ABD$  háromszögekhez rendelt számok helyett,  $b$ )-re hivatkozva, az  $ACD\Delta$ -höz rendelt számot szerepeltetjük. Ha így teszünk, akkor a szóban forgó összeg  $e$ ) szerint az eredeti sokszöghöz rendelt számot adja, ez tehát valóban a részsokszögekhez rendelt számok összegével egyenlő.



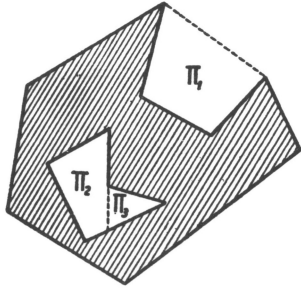
123

*g) Ha egy konvex sokszöget egy szakasszal két sokszögre vágunk, a keletkező két konvex részsokszöghöz rendelt szám összege az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő.* Elég állításunkat esetre bizonyítani, amikor a kettévágó  $AB$  szakasz végpontjai egy  $CD$  és egy  $EF$  oldal belső pontjai (123. ábra), hiszen a többi esetre vonatkozóan állításunk helyességét már  $f$ ) kimondta. Az  $E$  és  $F$  csúcsok mindegyike nem lehet a  $CD$  oldalon. Válasszuk a jelölést úgy, hogy ez  $E$ -re igaz legyen, hogy tehát  $AE$  a sokszöget szintén kettévágja. Egyszerűség kedvéért a keletkező sokszögek jelölésekor nem sorolunk fel minden csúcsot.  $f$ ) szerint a teljes sokszöghöz rendelt szám az  $ADE$  és  $ACFBE$  sokszögekhez rendelt számok összege. Az utóbbi ugyancsak  $f$ ) szerint az  $ACFB$  sokszöghöz és az  $ABE\Delta$ -höz rendelt számok összegével egyenlő. Az  $ABE\Delta$ -höz s az  $ADE$  sokszöghöz rendelt számok összege ismét csak  $f$ ) szerint az  $ADEB$  sokszöghöz rendelt számot adja. Ezek szerint a teljes sokszöghöz rendelt szám valóban az  $ADEB$  és  $ACFB$  sokszögekhez rendelt számoknak az összege.

*h) Ha egy konvex sokszöget konvex sokszögekre darabolunk fel, e darabokhoz rendelt számok összege az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő.* Állításunkat a darabok számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha csak két darab van, akkor állításunk  $g$ ) szerint helyes, mert a két darab csak egy szakasz mentén érintkezhetnek, hiszen egy ilyen közös határszakasz egyenese elválasztja egymástól a két konvex darabot. Tekintsük tehát egy konvex sokszögnek  $k$  konvex darabra való feldarabolását, és tegyük fel, hogy  $k$ -nál kevesebb darabra való feldarabolásokra állításunk igaz. Legyen  $AB$  valamelyik darabnak egy olyan oldala, amelyik nincs az eredeti sokszög határán (124. ábra). Az  $AB$  egyenessel az eredeti sokszöget s esetleg egyik-másik darabot is kettészeljük. A darabokhoz rendelt számok vizsgált összegét  $g$ ) alapján úgy számíthatjuk, hogy a kettészelt darabok helyett az ezekből keletkező két darabrészt vesszük figyelembe. Az  $AB$  egyenes által határolt mindkét félsíkban  $e$  sokszögek közül  $k$ -nál kevesebb van, mert az  $AB$  szakaszra egyik oldalról támaszkodó darabnak még része sincs az  $AB$  egyenes másik oldalán. Sokszögeink közül az egy félsíkban elhelyezkedőkhöz rendelt számok összege az indukciós feltevés szerint a félsík és az eredeti sokszög közös részéhez rendelt számmal egyenlő. A vizsgált összeg ezek szerint az eredeti sokszög két részéhez rendelt szám összegével, azaz  $g$ ) szerint az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő.



124



125

i) Ha egy sokszöget kétféleképpen vágunk szét konvex darabokra, a darabokhoz rendelt számok összege mindkét esetben ugyanannyi. Ha az eredeti sokszög konvex, állításunk h) miatt igaz. A hangsúly most a konkáv sokszögeken van, s itt még a többszörösen összefüggő sokszögekre is gondolunk. Állításunk bizonyítása végett tekintjük a sokszög konvex burkát. Azokat a sokszögeket, amelyek a konvex burokból megmaradnak, ha a sokszöget elhagyjuk,  $I_1, I_2, \dots, I_k$  konvex sokszögekre daraboljuk (125. ábra). Akárhogyan bontjuk is fel konvex darabokra az eredeti sokszöget, a darabokhoz rendelt számok összege ugyanannyi, mert ezt az összeget a  $I_1, I_2, \dots, I_k$  sokszögekhez rendelt számokkal növelve h) miatt a konvex burokhöz rendelt számot kell megkapnunk.

j) Mindenfajta sokszöghöz hozzárendeljük a sokszögből valamilyen felbontás révén keletkező konvex darabokhoz rendelt számok összegét, i) szerint ez egyértelműen meghatározott szám. Konvex sokszögekhez h) szerint ugyanazt a számot rendeltük most, mint amit korábban a) és e) azokhoz rendelt.

Miután minden sokszöghöz egy-egy egyértelműen meghatározott számot rendeltünk, be kell látnunk, hogy az így hozzárendelt számok rendelkeznek a 20.1-ben szereplő négy tulajdonsággal.

1. Minden sokszöghöz pozitív számok összegét, tehát pozitív számot rendeltünk.
2. Egybevágó sokszögeket egybevágó konvex sokszögekre s ezeket egybevágó háromszögekre darabolhatjuk. Egybevágó sokszögekhez tehát egyenlő számokat rendeltünk.
3. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk fel, s mindkettőt konvex darabokra bontjuk tovább, akkor j) szerint mindezekhez a darabokhoz rendelt számok összege egyrészt a két részsokszöghöz rendelt szám összegét, másrészt az eredeti sokszöghöz rendelt számot adja. A két részsokszöghöz rendelt szám összege eszerint a teljes sokszöghöz rendelt számmal egyenlő.
4. Az egységnégyzetet egy átlója két egységbefogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja.

E háromszögekhez a) szerint  $\frac{1}{2}$ -et, tehát az egységnégyzethez e) szerint 1-et rendeltünk.

Beláttuk tehát, hogy minden sokszöghöz tudunk 20.1 követelményeit kielégítő módon egy-egy számot rendelni, s hogy e hozzárendelés más módon nem lehetséges. Az így hozzárendelt számokat nevezzük területnek.

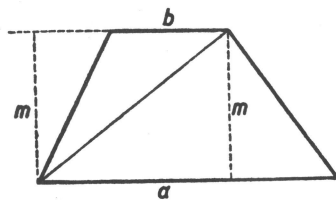
**20.5** Speciális sokszögek területének számítására vonatkozó szabályokat említünk.

**Tétel.** A trapéz területe a középvonal  $s$  a magasság szorzatával egyenlő.

A trapéz területét megkapjuk tehát, ha a párhuzamos oldalak számtani közepét (összegük felét) a magassággal megszorozzuk.

*Bizonyítás.* Egy átló a trapézt két háromszögre vágja (126. ábra). Ezek a háromszögek a trapéz alapjain nyugszanak, és ezekhez az alapokhoz tartozó magasságuk a trapéz magasságával egyenlő. Ha tehát a közös magassággal az alapok felét szorozzuk, akkor a két háromszög területét kapjuk meg, és az alapok felének összegét, vagyis összegük felét szorozva a trapéz területéhez jutunk. —





126

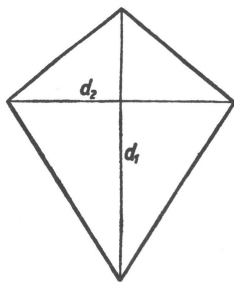
A bizonyított tétel tartalmazza a paralelogramma területére vonatkozó szabályt. Határesetként tartalmazza a háromszög területképletét is. A háromszög területére is mondhatjuk, hogy a középvonal és a magasság szorzatával egyenlő.

**Tétel.** *A deltoid területe átlói szorzatának felével egyenlő.*

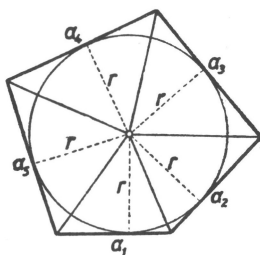
Ez a tétel természetesen a rombuszra, s így a négyzetre is vonatkozik.

*Bizonyítás.* A deltoid egyik átlója a másikat merőlegesen felezi (127. ábra). Ezért ez az átló a deltoidot két olyan háromszögre bontja, amelyeknek ehhez az átlóhoz mint alaphoz tartozó magassága a másik átlónak a fele. Egy ilyen háromszög területe tehát az átlók felének a szorzata, s a deltoid területe ennek kétszerese. —

**Tétel.** *Egy kör köré írt sokszög területe feleakkora, mint a sokszög kerületének és a kör sugarának a szorzata.*



127



128

*Bizonyítás.* A kör középpontját a sokszög csúcaival összekötve a sokszöget olyan háromszögekre bontjuk, amelyeknek alapja a sokszög egy-egy oldala, s magasságuk a kör sugara (128. ábra). Ha tehát a sugár felével az egyes oldalakat megszorozzuk, akkor az egyes háromszögek területét kapjuk meg. Ha pedig a sugár felével az oldalak összegét, a kerületet szorozzuk meg, akkor a teljes területhez jutunk. —

Vonatkozik e tétel a kör körül írt szabályos sokszögekre is, s így az  $r$  sugarú kör köré írt  $a$  oldalú

szabályos  $n$ -szög területe  $k = na$  miatt  $\frac{1}{2}nar$ .

**Tétel.** *Hasonló sokszögek területének aránya hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő.*

*Bizonyítás.* Háromszögekre 17.6 második tétele szerint a tétel állítása helyes, hiszen területük a hasonlóság által egymáshoz rendelt távolságok szorzatának a fele. Ebből következik, hogy az állítás bármely két hasonló sokszögre teljesül, hiszen ezek hasonló háromszögekre bonthatók fel. —

**20.6** Mielőtt a kör területéről szó volna, a terület fogalmának általánosításával kell foglalkoznunk, hiszen eddig csak sokszögek területe szerepelt. Itt most korlátos síkidomok területéről lesz szó.

Korlátos síkidomnak bizonyosan van külső sokszöge a korlátosság miatt. Bármely belső sokszög területe a külső sokszögek területének alsó korlátja, hiszen minden külső sokszög tartalmaz minden belső sokszöget.

A külső sokszögek területének van alsó határa, hiszen alulról korlátos, ti. pozitív számhalmazról van szó. Ez az érték egy külső sokszög területénél sem nagyobb, és egy belső sokszög területénél sem kisebb.

Beláttuk, hogy minden korlátos síkidomhoz található olyan nem negatív érték, amelynél sem kisebb területű külső sokszög, sem nagyobb területű belső sokszög nincs. Ha csak egy ilyen érték van, azt a síkidom *területének* nevezzük.

Sokszögekre az új definíció is ugyanazt adja, mint amit eddig területnek neveztünk.

Ha a külső sokszögek területének az alsó határa 0, akkor van terület, és ez is 0, hiszen minden más nem negatív értékhez található kisebb területű külső sokszög. Ilyenkor természetesen egyetlen belső sokszög sincs. A 0 területű síkidomok közé tartozik az üres alakzat is.

Ha van belső sokszög, akkor a külső sokszögek területének az alsó határa pozitív, mert bármely belső sokszög területe alsó korlát. Ilyenkor a terület létezése azt jelenti, hogy a belső sokszögek területének a felső határa a külső sokszögek területének az alsó határával egyenlő, és közös értékük a területet adja meg. Ez csak átszövegezése annak a követelésnek, amit a terület definíciója kimond.

Az elmondottakból következik, hogy ha bármely pozitív  $\varepsilon$ -hoz található egy-egy  $\varepsilon$ -nál kisebb területkülönbségű külső és belső sokszög, akkor a szóban forgó síkidomnak van területe. Ugyanígy beszélhettünk volna  $(1+\varepsilon)$ -nál kisebb területarányú külső és belső sokszögekről is.

Megállapíthatjuk azt is, hogy van terület, ha van külső és belső sokszögekből álló sokszögpároknak olyan sorozata, amelynél az egyes párokra számított területarány 1-hez tart, s hogy ilyenkor a sorozat külső sokszögeinek a területe, valamint belső sokszögeinek a területe is a szóban forgó síkidom területéhez tart. Itt 1-hez tartó területarány helyett 0-hoz tartó területkülönbségről is beszélhettünk volna, és akkor azt is megengedhetjük, hogy a belső sokszög szerepét az üres alakzat játssza.

Nyomban belátható, hogy az előző két bekezdés minden állítása változatlanul helyes akkor is, ha külső és belső sokszögek helyett területtel rendelkező, tartalmazó és tartalmazott síkidomokról beszélünk.

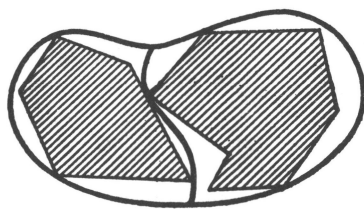
**Tétel.** *Ha egy síkidomot két olyan síkidomra bontunk fel, amelyeknek van területe, akkor van területe az eredeti síkidomnak is, és ez a két részüdm területének összegével egyenlő.*

Tételünk egyaránt vonatkozik síkidomok olyan felbontására, amelynél a két részüdmnek nincs közös pontja, valamint síkbeli tartományok olyan felbontására, amelynél a két résztartománynak nincs közös belső pontja (vö. 5.3). Tételünket kettő helyett véges sok részüdmre is kimondhattuk volna, hiszen a kettőre kimondott tétel ismételt alkalmazásának nincs akadálya.

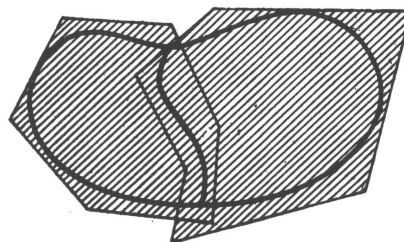
*Bizonyítás.* Jelölje  $T_1$  és  $T_2$  a két részüdm területét. Legyen  $\varepsilon$  egy tetszőleges pozitív szám. A terület fogalmából következik, hogy a részüdmokhoz olyan  $B_1, B_2$  belső sokszögek (esetleg üres alakzatok) tartoznak, amelyeknek területe rendre nagyobb, mint  $T_1 - \varepsilon$  és  $T_2 - \varepsilon$ , s hogy vannak olyan  $K_1, K_2$  külső sokszögeik, amelyeknek területe rendre kisebb, mint  $T_1 + \varepsilon$  és  $T_2 + \varepsilon$ .

$B_1$  és  $B_2$  egyesítése az eredeti síkidom (talán nem összefüggő) belső sokszögét adja (129a ábra). Ennek területe  $B_1$  és  $B_2$  területének összege, hiszen a  $B_1, B_2$  sokszögek nem borulhatnak egymásra. A készített belső sokszög területe eszerint nagyobb, mint  $T_1 + T_2 - 2\varepsilon$ .

$K_1$  és  $K_2$  egymást egészben vagy részben fedheti is. Egyesítésük az eredeti sokszög külső sokszöge (129b ábra), és területe nem nagyobb, mint  $K_1$  és  $K_2$  területének összege, tehát kisebb, mint  $T_1 + T_2 + 2\varepsilon$ .



a)



b)

129

Ezek szerint az eredeti idomnak van  $4\varepsilon$ -nál kisebb területkülönbségű belső és külső sokszöge, van tehát területe is. Ez a terület nagyobb, mint  $T_1 + T_2 - 2\varepsilon$  és kisebb, mint  $T_1 + T_2 + 2\varepsilon$ , s ezért csak  $T_1 + T_2$  lehet. —

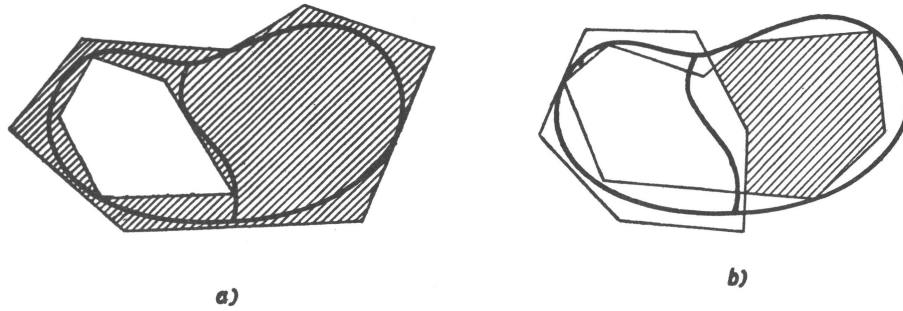
**Tétel.** Ha egy síkidomot két síkidomra bontunk fel, és az eredeti síkidomnak, valamint az egyik részidomnak van területe, akkor van területe a másik részidomnak is.

A másik részidom területe az előző tétel szerint csak a két terület különbsége lehet. Tételünk azt is kimondja tehát, hogy ha egy síkidom egy másikat tartalmaz, és mindkettőnek van területe, akkor a tartalmazott idom területe nem lehet a tartalmazó idom területénél nagyobb. A felbontást illetően ismét gondolunk mind a két, az előző tétel kimondása után részletezett esetre.

*Bizonyítás.* Okoskodásunkban sokszögekről szólunk, de megengedjük, hogy köztük üres alakzatok is szerepelhessenek.

Jelölje  $T$  az eredeti idom területét és  $T_1$  az első részidómét. Legyen  $\varepsilon$  egy tetszőleges pozitív szám. A terület fogalmából következik, hogy e két idomhoz tartozik olyan  $B$  és  $B_1$  belső sokszög, amelyeknek területe rendre nagyobb, mint  $T - \varepsilon$  és  $T_1 - \varepsilon$ , s hogy vannak olyan  $K, K_1$  külső sokszögeik, amelyeknek területe rendre kisebb, mint  $T + \varepsilon$  és  $T_1 + \varepsilon$ .

Ha  $K$ -ból a  $B^\wedge$  sokszöget elhagyjuk, a második részidóm olyan külső sokszögéhez jutunk (130a ábra), melynek területe kisebb, mint  $T - 2\varepsilon$ .



130

Ha  $B$ -ből elhagyjuk a  $B$  és  $K_1$  sokszögek közös részét, akkor a második részdíom belső sokszögéhez jutunk (130b ábra). Minthogy a  $B$ -ből elhagyott sokszög területe nem lehet  $K_1$  területénél nagyobb, az elhagyással kapott belső sokszög területe nagyobb, mint  $T - T_1 - 2\varepsilon$ . Ezek szerint a második részdíomnak van  $4\varepsilon$ -nál kisebb területkülönbségű külső és belső sokszöge, s így van területe is. —

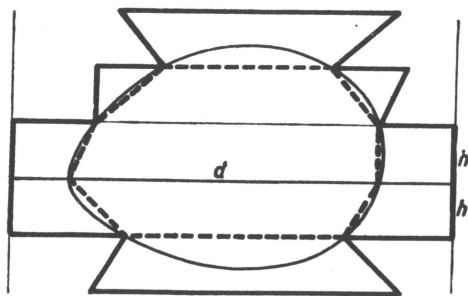
**Tétel.** *Korlátos konvex síkidomnak van területe.*

*Bizonyítás.* a) Egy korlátos konvex síkidomot tekintünk. A korlátosság miatt van olyan sáv, amely ezt a síkidomot tartalmazza. Messük el síkidomunkat a sáv határaitól merőleges, egymástól rendre  $h$  távolságra levő egyenesekkel. A keletkező véges sok párhuzamos húr közül egy leghosszabbat választunk ki. Ezt a leghosszabb húr a sáv határaiig meghosszabbítva egy  $d$  szakaszhoz jutunk (131. ábra).

Két-két szomszédos húr konvex burka trapéz, és ezeknek a trapézoknak az egyesítése egy a síkidomunkba írt  $B$  sokszög.

Tükrözzük most e trapézok mindegyikét a  $d$ -től távolabb elhelyezkedő alapjuk felezőpontjára. A tükrözött trapézok a középvonalú,  $2h$  magasságú téglalappal együtt egy  $K$  sokszöget alkotnak. Ezek szerint  $K$  és  $B$  területkülönbsége  $2dh$ .

Állítjuk, hogy  $K$  külső sokszög. Ebből nyomban következik majd, hogy konvex síkidomunknak van területe, hiszen  $h$  önkényesen választható meg, s ezért  $2dh$  kisebbé tehető bármely pozitív értéknél.



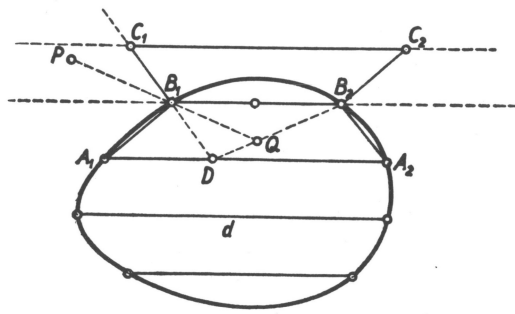
131

b) Bebizonyítjuk, hogy  $K$  valóban külső sokszög. Elég ehhez azt bizonyítanunk, hogy a tükrözött trapézokat tartalmazó,  $h$  szélességű sávokban nincs a konvex síkidomnak a tükrözött trapézok által le nem fedett pontja. A sávokhoz csak  $d$ -től távolabbi határvonalukat számítjuk hozzá.

Legyen tehát  $A_1A_2B_1B_2$  egy beírt trapéz, amely a  $B_1B_2$  alap felezőpontjára tükrözve a  $B_1B_2C_2C_1$  trapézt adta (132. ábra). Tekintsük a  $B_1B_2, C_1C_2$  egyenesek által határolt sáv olyan  $P$  pontját, amelyet a  $B_1B_2C_2C_1$  trapéz nem tartalmaz, és nincs a  $B_1B_2$  egyenesen. Azt kell bizonyítanunk, hogy  $P$

nem tartozik konvex síkidomunkhoz. Ha a  $P$  pontot a  $B_1B_2C_2C_1$  trapéztól pl. a  $B_1C_1$  szár egyenesére választja el, akkor  $P$  annak a szögtartománynak belső pontja, amelyet a  $B_1C_1$  félegyenes és  $B_1B_2$  meghosszabbítása határol.

$A_1B_1B_2$  és  $d$  szakasz konvex burka trapéz, amelyen  $A_1A_2$  az alapjaival párhuzamosan halad át. Ezért  $A_1A_2$  nem lehet e trapéz nem hosszabbik alapjánál, a  $B_1B_2$  szakasznál rövidebb. Ha tehát egy  $A_2B_2B_1D$  parallelogrammát szerkesztünk, ennek  $D$  csúcsa az  $A_1A_2$  szakaszon van. Minthogy  $A_2B_2$ -vel  $B_1C_1$  és  $B_1D$  is párhuzamos,  $D$  a  $B_1C_1$  egyenesen van, és  $P$  a  $DB_1B_2$  csúcsháromszögén belül helyezkedik el. Ezért a  $PB_1$  egyenes a  $DB_2$  szakaszt egy  $Q$  pontban metszi. Minthogy  $Q$  a konvex síkidom belsejében,  $B_1$  pedig a határán van, a  $Q$ -tól  $B_1$  által elválasztott  $P$  pont valóban külső pont. —



132

**Tétel.** Ha valamely konvex síkidom konvex belső síkidomainak egy sorozata a konvex síkidomhoz tart, akkor területük is tart annak területéhez.

Emlékeztetünk arra, hogy a tételben említett konvergenciáról 19.3-ban már szó volt.

*Bizonyítás.* A vizsgált területsorozatnak a korlátosság miatt van torlódási értéke. Ez az adott konvex síkidom területénél nagyobb nem lehet. Legyen  $B$  egy az adott konvex síkidom belsejében elhelyezkedő sokszög. Elég megmutatnunk, hogy a vizsgált területsorozatnak nincs  $B$  területénél kisebb torlódási értéke, mert ebből már következik, hogy a torlódási érték az adott síkidom területénél sem lehet kisebb (lásd B2), hogy tehát az adott síkidom területe az egyetlen torlódási érték.

A konvergáló idomsorozatban véges soknak a kivételével minden elem tartalmazza  $B$  valamennyi csúcsát, tehát ezek konvex burkát és a  $B$  sokszöget is. Ezért a területsorozat elemei véges soknak a kivételével legalább akkorák, mint  $B$  területe, tehát ennél kisebb torlódási értékük valóban nem lehet.

**A** Görbe vonallal határolt síkidomok területével elsőnek Archimedes foglalkozott. Azt a területfogalmat, amelyet e szakaszban bevezettünk, a síkidomok *Peano—Jordan-féle mértékének*\* nevezik. A területfogalom további messzemenő általánosítása Lebesgue<sup>\*6</sup> nevéhez fűződik.

**B1** A területfogalom e szakaszban adott általánosítása után megállapíthatjuk, hogy a terület a 20.1-ben sokszögekre kimondott követelményeket már csak némi módosítással elégíti ki. Az első követelmény teljesülése helyett most csak ennyit mondhatunk: ha egy síkidomnak van területe, akkor az pozitív. A második követelmény is csak akkor teljesül, ha az egybevágó idomok egyikéről tudjuk, hogy van területe. A harmadik követelmény teljesülése helyett csak e szakasz első két tételét mondhatjuk ki.

Nem semmitmondó az a megszorítás, hogy egy síkidomnak van területe. Nincs területe pl. annak a síkidomnak, amelyet egy egységnégyzetnek az egyik oldalától racionális távolságra elhelyezkedő

<sup>6\*</sup> G. Peano, 1858—1932, a torinói egyetem tanára. C. Jordán (ejtsd: zsordan), 1838—1922, a párizsi műegyetem tanára. H. Lebesgue (ejtsd: löbeg), 1875—1942, a párizsi egyetem tanára.

pontjai alkotnak. Ennél a síkidomnál a külső sokszögek területének alsó határa nyilván 1, viszont belső sokszög nincs.

**B2** Azt állítjuk, hogy *ha egy síkidomnak pozitív területe van, akkor ez a síkidom belsejében elhelyezkedő sokszögek területének a felső határa*. Sokszögekre vonatkozólag ez nyilvánvalóan helyes, és ebből következik, hogy a szóban forgó felső határ nem lehet a belső sokszögek területének felső határánál, azaz a területnél kisebb. Nem lehet azonban nagyobb sem, hiszen a síkidom belsejében elhelyezkedő sokszögek is belső sokszögek.

Eredményünkből következik, hogy *ha egy síkidomnak van területe, akkor ugyanakkora a területe a síkidom belsejének is*. Nem kellett itt megkövetelnünk, hogy a síkidom területe pozitív legyen, mert az üres alakzat területe 0. Szakaszunk második tétele alapján kimondhatjuk tehát azt is, hogy *ha egy síkidomnak van területe, akkor van területe annak az alakzatnak is, amelyet a síkidom belsejének elhagyásával kapunk, s hogy ez a terület 0*.

Ha egy síkidom területe 0, akkor az általa tartalmazott síkidomok mindegyike 0 területű, hiszen külső sokszögeik területének alsó határa csak 0 lehet. Az imént mondottak alapján kimondhatjuk tehát, hogy *ha egy síkidomnak van területe, és belőle a belsejéhez nem tartozó pontokat elhagyunk, akkor ugyanakkora területű alakzathoz jutunk*.

Okoskodásunk többek között bizonyítja, hogy a sokszögvonala, a szakasz, a körvonal és a körív területe 0, hogy továbbá a nyílt sokszög és a nyílt körlemez területe a zártakéval egyenlő. Rávilágít okoskodásunk arra is, hogy szakaszunk első két tételében miért érthettük a felbontást kétféleképpen. E két tétel kimondásakor szólhattunk volna két olyan síkidom egyesítéséről, amelyeknek nincs közös belső pontja. A tételekre adott bizonyítás akkor is követhető, ha azokat ilyen általánosabb alakban mondjuk ki.

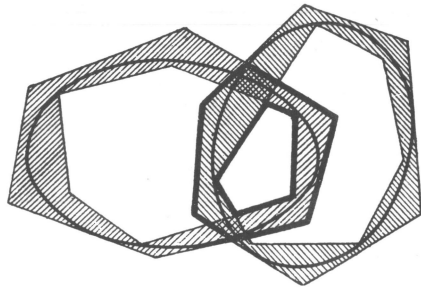
**B3** Szakaszunk utolsó tételével kapcsolatban megemlítjük, hogy azt valamivel általánosabban konvex síkidomok helyett tetszőleges (területtel rendelkező) síkidomokra is kimondhatnók és ugyanúgy bizonyíthatnók. Megelégedtünk azonban a konvex esettel, mert csak erre lesz szükségünk (lásd 27.9).

Megmutatjuk viszont, hogy *minden konvex síkidomhoz található beírt poligonoknak a konvex síkidomhoz tartó sorozata*, így tehát azt is, hogy szakaszunk utolsó tétele módját nyújt minden konvex síkidom területének konvex sokszögek területének határértékeként való meghatározására. Ha ugyanis a harmadik tételünk bizonyításában felhasznált beírt sokszög szerkesztését változtatlan állású

párhuzamosokkal és olyan  $h_1, h_2, \dots$  értékekkel ismétéljük meg, amelyeknek sorozata 0-hoz tart, akkor kívánt tulajdonságú sokszögsorozathoz jutunk. Ennek igazolására elég meggondolnunk, hogy ha a  $P$  pont a konvex síkidom belsejében van, és a  $P$  ponton át a párhuzamosokra merőleges  $AB$  húr halad, akkor a  $P$  pontot mindazok az általunk szerkesztett sokszögek tartalmazzák, amelyeknél  $h$  szerepét a  $PA$  és  $PB$  távolságoknál kisebb érték játssza.

**B4** Állítjuk, hogy *ha két síkidomnak van területe, akkor van területe a közös részüknek is*. A bizonyítás során sokszögekkel dolgozunk, de számolunk azzal, hogy ezek üres alakzatok is lehetnek. Legyen a két síkidom egy-egy  $\mathcal{E}$ -nél kisebb területkülönbséget adó külső és belső sokszöge  $K_1$  és  $B_1$ , valamint  $K_2$  és  $B_2$ . Nyilvánvaló, hogy a  $K_1, K_2$  sokszögek  $K$  közös része a két síkidom közös részének külső sokszöge, s hogy ugyanígy a  $B_1, B_2$  sokszögek  $B$  közös része a síkidomok közös részének a belső sokszöge (133. ábra). Jelölje  $D_1, D_2$  és  $D$  azokat a sokszögeket, amelyekhez úgy jutunk, hogy a  $K_1, K_2, K$  külső sokszögekből rendre a  $B_1, B_2, B$  belső sokszögeket elhagyjuk.  $K_1$  és  $K_2$  mindegyike tartalmazza tehát  $D$  minden pontját, viszont  $D$  bármely belső pontjára áll, hogy vagy  $B_1$  vagy  $B_2$  nem tartalmazza azt. Igaz ezért, hogy  $D$  belső pontjai hozzátartoznak vagy  $D_1$ -hez, vagy

$D_2$ -hez, hogy tehát  $D_1$  és  $D_2$  egyesítése tartalmazza a  $D$  sokszöget. Ebből következik, hogy  $D$  területe, azaz  $K$  és  $B$  területkülönbsége  $D_1$  és  $D_2$  területének összegénél,  $2\mathcal{E}$ -nél kisebb. Ez pedig azt jelenti, hogy síkidomaink közös részének valóban van területe.



133

A most bizonyított tényből következik, hogy ha két síkidomnak van területe, akkor *van területe az egyesítésüknek is*. Ehhez elég szakaszunk első két tételére, valamint arra hivatkoznunk, hogy ha a két síkidom közös részét az egyikből elhagyjuk, és a maradó részt a másikhoz hozzáillesztjük, akkor a két síkidom egyesítéséhez jutunk.

Megállapíthatjuk ezek után, hogy ha területtel rendelkező síkidomokból indulunk ki, akkor mindazok a műveletek, amelyekről 5.3-ban szóltunk, olyan síkidomokat adnak, amelyeknek megint csak van területük. Minthogy könyvünk egészében csak olyan korlátos síkidomokat tárgyalunk, amelyekhez korlátos konvex síkidomokból kiindulva 5.3 műveleteinek segítségével eljuthatunk, eredményünk azt jelenti, hogy ebben a könyvben csak területtel rendelkező korlátos síkidomokról van szó.

**B5** Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy általában milyen síkidomoknak van területe. Ez a vizsgálat a *mértékelmélethez* vezet, amely az analízis keretei közé illeszkedik, és a határozott integrálok tárgyalását valamint a területfogalom általánosításait is felöleli.

**B6** Aki a terület tárgyalását az ívhosszával egybeveti, felvetheti a kérdést, miért nem jártunk el ezen a két helyen hasonló módon, hiszen az ívhosszt felső határként definiáltuk, és ezért az ívhossz létezése problémát nem okozott, viszont a területnél felső határról és egy másik alsó határról is szóltunk, és csak ezek egyezése esetén mondtuk, hogy van terület. Rávilágítunk itt arra, hogy ez az ellentét nem a tárgyalás önkényéből, hanem a tárgy természetéből fakad.

Mindenféle mérték bevezetésénél igen lényeges a mérték additivitásának vizsgálata. A terület additivitását szakaszunk első két tétele tisztázza. E fontos tételek bizonyítása arra épült, hogy a terület a belső sokszögek területének felső határa és egyben a külső sokszögek területének alsó határa is. Ha e két tulajdonságnak csak az egyike lett volna felhasználható, akkor a bizonyítás nem sikerülhetett volna. Ez azt mutatja, hogy a terület definíciójának említett kettőssége szükségszerű.

Kérdés marad, nem érhetjük-e el az összhangot azáltal, hogy a kerület és az ívhossz definíciójában is egy kettősséget vezetünk be. Ezt meg lehet éppen tenni, de ez a tárgyalást feleslegesen elbonyolítja, sőt jelentős nehézségekhez is vezet. Ha csak konvex síkidomok kerületére szorítkozunk, akkor azt az egyszerű definíciót adhatnók, hogy a kerület a belső konvex sokszögek kerületének felső határa és egyben a külső konvex sokszögek kerületének alsó határa is. Ennek a definíciónak az elfogadása megkívánná azonban, hogy a két határ egyezését minden konvex síkidomra bebizonyítsuk. Ez a felesleges munka lényegesen több nehézséggel járna, mint szakaszunk harmadik tételének a bizonyítása. A nehézséget tetézi, hogy érintőről, illetőleg támaszegyenesről szólhatunk ugyan, de nem tudjuk bizonyítani, hogy a határ minden pontjához tartozik ilyen egyenes, ha egyszer tartjuk magunkat 15.2 B1 elvi álláspontjához, hogy mi ebben a könyvben alakzatokat határhelyzetként nem vezetünk be.

Nem érdemes szót vesztegetni arra, hogy konvex ívek ívhosszáinak tárgyalásánál az említett nehézségek csak fokozódnak, sőt ott még a kettősséget tartalmazó definíció megválasztása is gondot okoz. Minden leegyszerűsödne természetesen, ha a tárgyalást a körre és íveire korlátoznók, de ez túlzottan nagy ár volna a mesterkélt összhang megteremtéséért.

Mindez arról győz meg bennünket, hogy szabatos tárgyalásban szükségszerű az az eltérés, amelyről szóltunk. Aki viszont, pl. pedagógiai okokból, a terület létezésének kérdését nem firtatja, az a területet, valamint a kerületet és az ívhosszt, egymással összhangban, beírt poligonok segítségével vezetheti be.

**20.7 Tétel.** *Hasonló idomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.*

Sokszögekre nézve a tételt már 20.5-ben kimondtuk. A tétel úgy értendő, hogy ha egy síkidomnak van területe, akkor van az ahhoz hasonló is, és területük aránya a hasonlóság arányának négyzete.

*Bizonyítás.* Az egyik idom belső és külső sokszögeihez a hasonlóság a másik idom belső és külső sokszögeit rendeli. Minthogy ezek területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ugyanez a belső és külső sokszögek területeit elválasztó értékekre, azaz síkidomaink területére is igaz. —

**Tétel.** *Az  $r$  sugarú kör területe  $\pi r^2$ .*

*Bizonyítás.* a) A körbe írt és a kör körül írt szabályos  $n$ -szög területének aránya hasonlóságuk miatt kerületeik arányának négyzetével egyenlő. Minthogy a kerületek aránya  $n$  növekedtével 1-hez tart, ugyanez területeik arányára is áll. Ebből következik, hogy a körnek van területe, s hogy a növekvő oldalszámú beírt és körülírt szabályos sokszögek területe a kör területéhez tart.

b) A körülírt szabályos sokszög területe a kerületének és a körsugár felének szorzata. Minthogy  $n$  növekedtével ez a kerület a kör kerületéhez tart, a körülírt szabályos sokszög területének határértéke, azaz a kör területe a kör kerületének és a sugár felének szorzata. —

Kiemeljük, hogy az egységsugarú kör területe  $\pi$ .

**B 19.5 B2-ben** már bebizonyítottuk, hogy ha a körbe írt, a középpontot tartalmazó sokszögek egy sorozatánál a leghosszabb oldalak 0-hoz tartanak, akkor ez a sokszögsorozat a körhöz tart. 20.6 utolsó tétele alapján kimondhatjuk tehát, hogy egy ilyen sorozat sokszögeinek területe a kör területéhez konvergál.

Ugyanehhez az eredményhez más úton is eljuthatunk. Mindjárt azt is bizonyítjuk, hogy a kör köré írt sokszögek területe is tart a kör területéhez, ha leghosszabb oldaluk hossza 0-hoz tart. Tekintsünk evégből egy a körbe írt, a középpontot tartalmazó és egy a kör köré írt sokszöget. A beírt sokszög tartalmazza azt a középpont körül írt kört, amelyik a beírt sokszög leghosszabb oldalát érinti. A körülírt sokszöget tartalmazza az a középpont körül írt kör, amelyik körünk érintőiből a körülírt sokszög leghosszabb oldalának kétszeresét metszi ki. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy a most szerkesztett körök sugara az eredeti kör sugarától kevesebbel tér el, mint a sokszögek leghosszabb oldala. Ha tehát a leghosszabb oldalak 0-hoz tartanak, akkor a sokszögeinket közrefogó körök sugara az eredeti körsugarhoz konvergál, ezért a két kör területe és az általuk közrefogott sokszögterület is tart körünk területéhez. Okoskodásunk újból bizonyította azt is, hogy a körnek van területe, ami egyébként 20.6 harmadik tétele szerint is igaz.

**20.8 Tétel.** *Egy kör körcikkeinek területe szögükkel arányos.*

*Bizonyítás.* Előrebocsátjuk, hogy a körcikknek van területe, hiszen középponti szögének felezője két konvex síkidomra bontja fel, hogy továbbá egyenlő szögekhez az egybevágóság miatt egyenlő területű körcikkek tartoznak és hogy ha egy körcikket körcikkekre vágunk fel, akkor ezek területe az eredeti körcikk területét adja összegül. Egy kör  $AB$  és  $CD$  íveihez tartozó  $AOB$  és  $COD$  körcikkek  $T(AOB)$  és  $T(COD)$  területét vizsgáljuk (113. ábra).

Az  $AOB$ -et  $n$  egyenlő részre osztjuk. A kapott szöget felmérjük a  $COD$ -re, ahányszor csak lehetséges. Ha  $k$ -szor mérhettük fel, akkor

$$k \frac{AOB}{n} \leq COD < (k+1) \frac{AOB}{n}.$$

Előrebocsátott megjegyzéseink értelmében hasonló mondhatunk a körcikkek területéről is:

$$k \frac{T(AOB)}{n} \leq T(COD) < (k+1) \frac{T(AOB)}{n}.$$



Mínt hogy  $n$  akármelyik természetes szám lehet, egyenlőtlenségeinkből a már többször alkalmazott gondolatmenettel (vö. 17.2, 19.8, 20.2)

$$\frac{COD}{AOB} = \frac{T(COD)}{T(AOB)}$$

következik. —

**Tétel.** *A körcikk területe feleakkora, mint a sugár és a határoló körív hosszának szorzata.*

Ha tehát a körcikk szöge (ívmértékkel mérve)  $\alpha$ , akkor 19.8 alapján a körcikk területe  $\frac{1}{2}r^2\alpha$ . Tételünk a félkör területképletét, közvetve tehát a kör területképletét is magában foglalja.

*Bizonyítás.* Az  $\alpha$  szögű,  $T$  területű körcikket összehasonlítjuk a  $2\pi$  szöghöz körcikként tartozó teljes körlemezrel. Az előző tétel alapján

$$T : \pi r^2 = \alpha : 2\pi,$$

$$s \text{ ebből } T = \frac{1}{2}r^2\alpha \text{ adódik. —}$$

A körszelet területe mint egy körcikk s egy háromszög területének különbsége, illetve összege számítható.

A körcikket úgy képzelhetjük, mint egy „görbealapú háromszöget”, amelynek „alapja” a körív, „magassága” a sugár. Így területének képlete könnyen megjegyezhető.

## 21. § A háromszög-geometria elemei

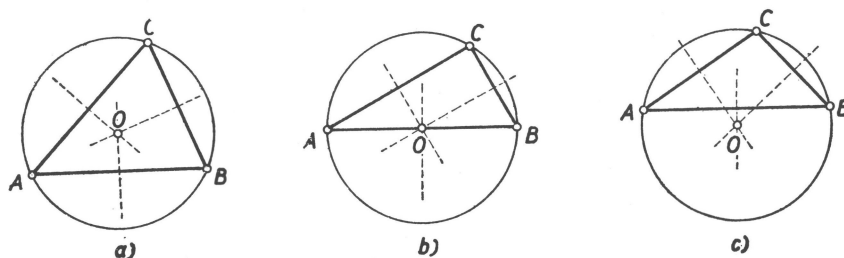
A háromszöggel kapcsolatban több érdekes tulajdonságú pontot és kört vezethetünk be. Ilyen nevezetes pontokkal és körökkel foglalkozunk.

**21.1 Tétel.** *a) Bármely háromszög köré egy és csak egy olyan kör írható, mely mindhárom csúcson áthalad.*

b) Az oldalak felezőmerőlegesei egymást a háromszög köré írt kör középpontjában metszik.

Már megállapítottuk (vö. 15.6), hogy a kört három pontja egyértelműen meghatározza. Tételünk szerint bármely három nem egyenesen levő pont egyértelműen meghatároz egy kört. Mondhatjuk tehát, hogy három pont mindig meghatároz vagy egy egyenest, vagy egy kört.

*Bizonyítás.* Az  $AB$  és  $BC$  oldal felezőmerőlegese egy  $O$  pontban metszi egymást (134. ábra), hiszen ha párhuzamosak volnának, akkor a rájuk merőleges  $AB$  és  $BC$  egyező állású lenne. Mínt hogy  $O$  rajta van  $AB$  felezőmerőlegesén,  $OA = OB$ ; mínt hogy  $O$  rajta van  $BC$  felezőmerőlegesén is,  $OB = OC$ . Ezek szerint  $OA = OC$ , és így  $O$  rajta van  $AC$  felezőmerőlegesén is. Mivel  $OA = OB = OC$ , az  $O$  körül ekkora sugárral írt kör mindhárom csúcson áthalad.

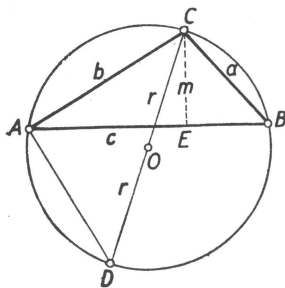


Már bebizonyítottuk, hogy az oldalak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, s hogy metszéspontjuk körül a háromszög köré kör írható. Csak azt kell még belátnunk, hogy más ilyen kör nincs. Ez viszont abból következik, hogy a kört három pontja egyértelműen meghatározza. —

**Tétel.** Az  $a, b, c$  oldalú,  $T$  területű háromszög köré írt kör sugara  $r = \frac{abc}{4T}$ .

*Bizonyítás.* Legyen az  $ABC$ -nek  $B$ -nél hegyesszöge (135. ábra). Ezért a  $C$ -ből induló magasság  $E$  talppontja a  $BA$  félegyenes belső pontja, és a hegyes  $CBE$  a félkörnél kisebb  $AC$  íven nyugvó kerületi szög.

A  $CD$  átmérő meghúzása után keletkező  $BCE, DCA$  háromszögek hasonlóak, ugyanis egyrészt derékszögűek, minthogy  $CE$  magasság, és  $CAD$  átmérőn nyugvó kerületi szög, másrészt pedig  $CBE = CDA$  mert ugyanazon az  $AC$  íven nyugvó kerületi szögek.

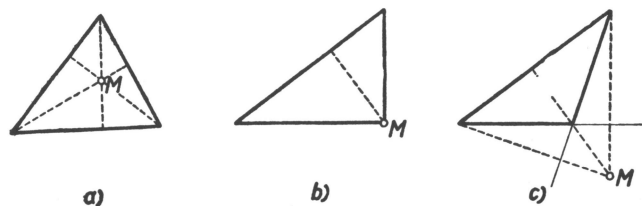


A hasonlóságból következőleg  $a : m = 2r : b$ , és így  $r = \frac{ab}{2m}$ . Ha itt az  $m = \frac{2T}{c}$  összefüggést figyelembe vesszük, akkor a tétel állításához jutunk. —

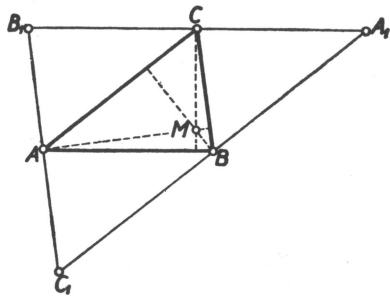
**B** Az utolsó bizonyítást megnyújtotta az a kikötés, hogy  $B$ -nél hegyesszög van. Ha viszont nem alkalmaztunk volna ilyen megszorítást, akkor külön kellene foglalkoznunk azokkal az esetekkel, amikor  $E$  a  $B$  csúccsal azonos, és amikor  $E$  az  $AB$  szakasz  $B$  ponton túli meghosszabbításán van. Ezekben az esetekben a bizonyítás csekély módosítására volna szükség. Általában előnyben szokás részesíteni az olyan tárgyalást, mely nem dolgozik esetek szétválasztásával (diszkusszió).

**21.2 Tétel.** Egy háromszög három magasságának egyenese egy ponton halad át.

E pontot a háromszög *magasságpontjának* (ortocentrum) nevezzük. A tételben a magasságszakaszokat tartalmazó egyenesekről kellett szólni, mert maguk a magasságszakaszok nem mindig haladnak át egy ponton (136. ábra).



*Bizonyítás.* Az  $ABC\Delta$  csúcsain át a szemközti oldalakkal párhuzamosokat húzva az  $A_1B_1C_1\Delta$ -et kapjuk (137. ábra). A párhuzamosság miatt  $ABA_1C$  és  $ABCB_1$  paralelogramma, és így  $A_1C = BA = CB_1$ , azaz  $C$  az  $A_1B_1$  szakasz felezőpontja. Ezért az  $ABC\Delta$ -nek  $C$ -ből vont magassága az  $A_1B_1C_1\Delta$  egyik oldalának felezőmerőlegese. Ugyanez áll akkor az  $ABC\Delta$  mindhárom magasságára. Így tehát a magasságokat tartalmazó egyenesek az előző szakasz értelmében valóban egy ponton haladnak át. —



137

Megállapíthatjuk, hogy derékszögű háromszög magasságpontja a derékszög csúcsa, hegyesszögűé a háromszögön belül, tompaszögűé pedig a háromszögön kívül van. Ehhez elég arra hivatkoznunk, hogy egy magasság talppontja az oldalnak akkor és csak akkor belső pontja, ha ezen az oldalon hegyesszögek nyugszanak.

**B** Ha egy háromszög nem derékszögű, akkor csúcsai a magasságponttal együtt ortocentrikus pontnégyest alkotnak. Ez azt jelenti, hogy közülük bármely három olyan háromszöget határoz meg, amelynek a negyedik pont a magasságpontja. Kijelentésünk csak átfogalmazása e szakasz tételének.

**21.3** A háromszög egy csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög súlyvonalának nevezzük.

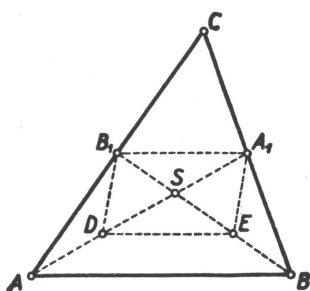
**Tétel.** a) A háromszög súlyvonalai egy ponton haladnak át.

b) E pont mindegyik súlyvonalnak (a csúcstól távolabb és az oldalhoz közelebb eső) harmadolópontja.

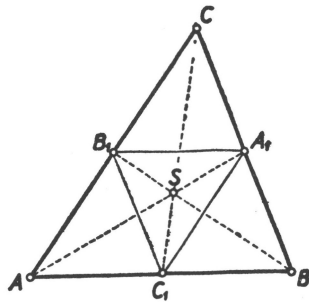
Ezt a pontot a háromszög *súlypontjának* (baricentrum) nevezzük. A súlypont nyilván mindig a háromszög belsejében van.

*Első bizonyítás.* Elég azt bizonyítani, hogy az  $AA_1$  és  $BB_1$  súlyvonalak  $S$  metszéspontja mindkét súlyvonalnak (az oldalhoz közelebb levő) harmadolópontja (138. ábra).

Legyen  $D$  és  $E$  az  $AS$  és  $BS$  szakasz felezőpontja. Minthogy  $B_1A_1$  az  $ABC\Delta$ ,  $DE$  pedig az  $ABS\Delta$  középvonala, azért mindkét távolság párhuzamos  $AB$ -vel és feleakkora. Ezért  $DEA_1B_1$  paralelogramma, és átlói felezik egymást. Következően  $A_1S = SD = \frac{1}{2}SA$  és  $B_1S = SE = \frac{1}{2}SB$ . —



138



139

*Második bizonyítás.* Ismét azt bizonyítjuk, hogy az  $AA_1$  és  $BB_1$  súlyvonalak  $S$  metszéspontja e súlyvonalakat harmadolja (138. ábra). Az  $ABS\Delta$  és  $A_1B_1S\Delta$  hasonló, mert szögeik páronként csúcsszögek, illetve váltószögek. A hasonlóság arányszáma  $\frac{1}{2}$ , mert  $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ . Így tehát  $A_1S = \frac{1}{2}AS$  és  $B_1S = \frac{1}{2}BS$ . —

*Harmadik bizonyítás.* Az  $ABC\Delta$  középvonalai olyan  $A_1B_1C_1\Delta$ -t adnak (139. ábra), melynek oldalai az eredetiével párhuzamosak és feleakkorák. Ezért a háromszög az eredetihez párhuzamosan hasonló, és e hasonlóság arányszáma  $\frac{1}{2}$ . Van tehát  $S$  hasonlósági centrum s erre  $A_1S = \frac{1}{2}AS$ ,  $B_1S = \frac{1}{2}BS$ ,  $C_1S = \frac{1}{2}CS$ . —

**A** Megemlítjük, hogy ha egy háromszög alakú homogén lemezt súlyvonalában vagy súlypontjában alátámasztunk, akkor a lemez egyensúlyban van. Az elnevezések innen erednek.

**B1** Tételünk három bizonyítása egyre több előismeretet feltételezett. Az első a hasonlóságot sem használta, a harmadik a párhuzamos hasonlóságra épített.

**B2** A háromszög köré írt kör középpontjának, a magasságpontnak s a súlypontnak viszonylagos elhelyezkedéséről később még szó lesz (lásd 35.3).

**21.4 Tétel.** a) Bármely háromszögbe egy és csak egy olyan kör írható, amely mind a három oldalt érinti.

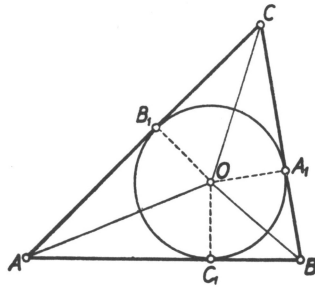
b) A háromszög szögfelezői egymást a háromszögbe írt kör középpontjában metszik.

*Bizonyítás.* A háromszög  $A$ -ból és  $B$ -ből induló szögfelezője egymást egy  $O$  pontban metszi (140. ábra), mivel az  $AB$  oldallal bezárt szögek hegyesszögek. Minthogy a szögfelező pontjai a száráktól egyenlő távolságra vannak, az  $O$ -ból a háromszögoldalakra bocsátott merőlegesekre vonatkozólag egyrészt  $OA_1 = OC_1$ , másrészt  $OC_1 = OB_1$  is teljesül. Így tehát  $OA_1 = OB_1$ .

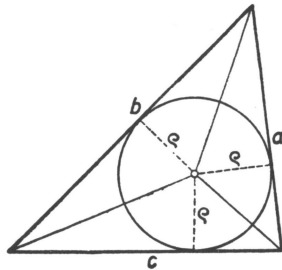
Ebből következik, hogy az  $O$  ponton az  $ACB\Delta$  felezője is áthalad, hiszen  $O$  a háromszög belsejében van. Mivel  $OA_1 = OB_1 = OC_1$ , az  $O$  körül ekkora sugárral írt kör mind a három oldalt érinti.

Már beláttuk, hogy a szögfelezők egy pontban metszik egymást, s hogy metszéspontjuk körül a háromszögbe kör írható. Csak azt kell még igazolnunk, hogy ez az egyetlen ilyen kör. Ez abból

következik, hogy a háromszögbe írt kör középpontja szükségképpen rajta van a szögfelezőkön, hiszen a háromszög belsejében és az oldalaktól egyenlő távolságra van. A beírt kör középpontja tehát csak a szögfelezők metszéspontja, és sugara csak e metszéspontnak az oldalaktól való távolsága lehet (vö. 15.5 B1). —



140



141

**Tétel.** *A  $T$  területű és  $2s$  kerületű háromszögbe írt kör sugara*

$$r = \frac{T}{s}.$$

*Bizonyítás.* Az  $a, b, c$  oldalú háromszöget a beírt kör középpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok három háromszögre bontják (141. ábra). Ezeknek alapja az eredeti háromszögnek egy-egy oldala, és mindegyikben  $r$  az ehhez tartozó magasság. Így tehát a területekre

$$T = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = sr. \quad \text{—}$$

**Tétel.** *Az  $a, b, c$  oldalú háromszögbe írt kör érintési pontjai az oldalakat  $s-a, s-b, s-c$  hosszúságú darabokra bontják, ahol  $s$  a háromszög kerületének jelét jelöli.*

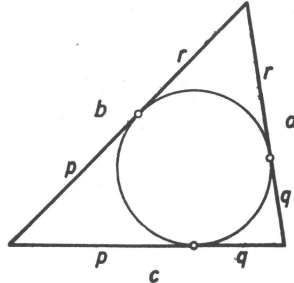
Az  $a$  oldal darabjainak hossza pl.  $s-b$  és  $s-c$ . Ezeknek összege valóban  $(s-b) + (s-c) = 2s - b - c = a$ .

Mint hogy a körhöz egy pontból vont két érintő egyenlő, a vizsgált hat távolság közül az egy csúcsba futók páronként egyenlők. Ha ezeket rendre  $p, q, r$  jelöli (142. ábra), akkor a teljes kerület  $2s = 2p + 2q + 2r$ . Innen pedig pl.  $p = s - (q + r) = s - a$ . —

**B 21.1** és e szakasz első tétele kimondja, hogy minden háromszög „húrháromszög” és egyben „érintőháromszög” is. Ezeket a megnevezéseket éppen ezért nem használjuk.

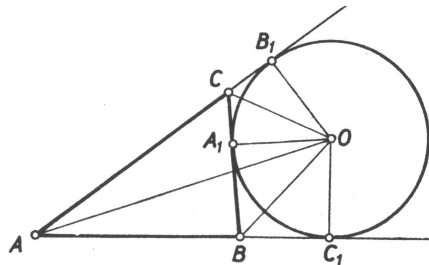
**21.5** Az olyan kört, amely a háromszög egyik oldalát és másik két oldalának meghosszabbítását érinti, a *háromszöghöz írt körnek* (hozzáírt kör, kívülről érintő kör) nevezzük. A beírt és hozzáírt köröket közös néven a *háromszöget érintő köröknek* mondjuk.

**Tétel.** A háromszög minden egyes oldalához egy-egy hozzáírt kör tartozik, amely ezt az oldalt érinti, s középpontja egy belső és két külső szög felezőjének közös pontja.



142

*Bizonyítás.* A háromszög  $BC$  oldalára támaszkodó két külső szög felezője egy  $O$  pontban metszi egymást, mert e szögfelezők a  $BC$  oldallal hegyesszöveget zárnak be (143. ábra). Ugyanebből az okból kifolyólag az  $O$ -ból  $BC$ -re bocsátott merőleges talppontja a  $BC$  oldal belső pontja. Minthogy  $O$  a szögfelezőkön van, az  $O$ -ból az oldalegyenesekre bocsátott merőlegesekre  $OA_1 = OB_1 = OC_1$ . Ebből következik, hogy  $O$  rajta van a  $BAC$ - $\alpha$  felezőjén is, mert  $O$  e szögtartomány belsejében van, és hogy az  $O$  körül  $OA_1$  sugárral írt kör mind a három oldalegyenest érinti. A  $B_1$  és  $C_1$  érintési pont az oldalak meghosszabbításán van, mert ezek  $A_1$ -nek a külső szögfelezőkre vonatkozó tükörképei. A kapott kör tehát valóban a  $BC$  oldalt érintő hozzáírt kör. Más ilyen kör nincs, hiszen középpontjának szükségképpen a szerepeltetett szögfelezőkön kell lennie. —



143

**Tétel.** A  $T$  területű,  $2s$  kerületű háromszög a oldalát érintő hozzáírt körének sugara

$$\varrho_a = \frac{T}{s-a}.$$

Hasonló képlet érvényes természetesen a  $\varrho_b$  és  $\varrho_c$  sugarakra is.

*Bizonyítás.* Az  $ABOC$  négyszöget (143. ábra) a  $BC$  oldal s az  $AO$  szakasz is két-két háromszögre vágja. Ezek területeire tehát

$$T + \frac{1}{2}a\varrho_a = \frac{1}{2}b\varrho_a + \frac{1}{2}c\varrho_a,$$

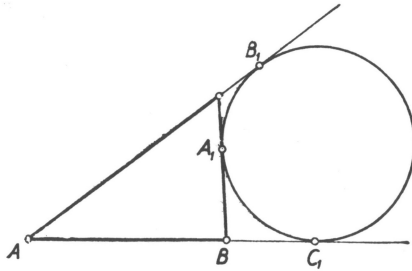
amiből

$$T = \frac{1}{2}(b+c-a) \varrho_a = (s-a) \varrho_a. \quad \text{—}$$

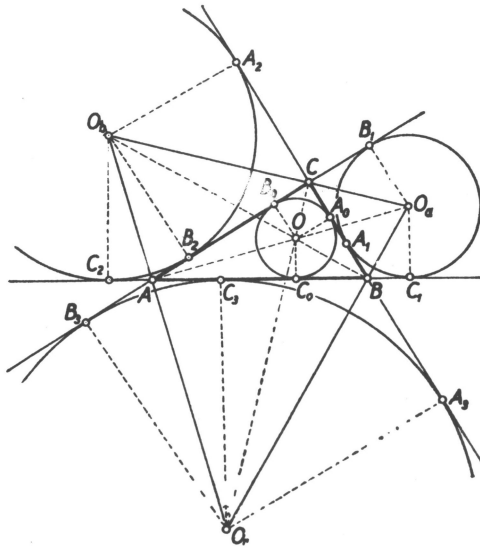
**Tétel.** A  $2s$  kerületű háromszöghöz írt kör két oldal meghosszabbítását közös végpontjától  $s$  távolságra érinti.

A 144. ábrán tehát  $AB_1 = AC_1 = s$ . Ebből azonnal adódik, hogy  $CB_1 = CA_1 = s-b$  és  $BC_1 = BA_1 = s-c$ .

*Bizonyítás.* Mivel a körhöz egy pontból vont érintők egyenlők,  $AB_1 = AC_1$ . E két távolság összege a háromszög kerületével egyenlő, mert ugyancsak az előbb említett okból  $CB_1 = CA_1$  és  $BC_1 = BA_1$ . Így tehát a szóban forgó távolságok mindegyike a kerületnek a fele. —



144



145

**B1** Ha egy háromszög beírt körét, mindhárom hozzáírt körét és ezek érintési pontjait tekintjük (145. ábra), a következőket állapíthatjuk meg:

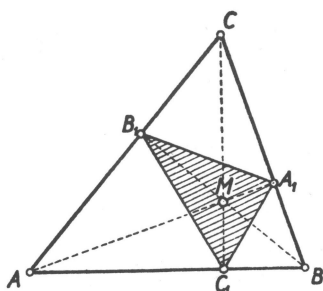
A hozzáírt körök középpontjai által alkotott  $O_a O_b O_c \Delta$ -nek a magasságpontja a beírt kör  $O$  középpontja, mert a belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra.

Egy oldalegyenesen a négy érintési pont közül kettő-kettő az oldal felezőpontjára nézve szimmetrikusan helyezkedik el, ugyanis 21.4 és 21.5 szerint pl. az  $AB$  egyenesen egyrészt  $AC_0 = BC_3 = s-a$  és  $BC_0 = AC_3 = s-b$ , másrészt  $AC_1 = BC_2 = s$  és  $AC_2 = BC_1 = s-c$ . Az is nyomban adódik így, hogy  $C_0C_1 = C_2C_3 = a$ ,  $C_0C_2 = C_1C_3 = b$ ,  $C_1C_2 = a+b$ ,  $C_0C_3 = |a-b|$ .

**B2** A háromszög mindhárom oldalegyenesét csak a beírt kör és a három hozzáírt kör érinti. Ez abból következik, hogy egy ilyen kör középpontjának rajta kell lennie, három szögfelezőn, márpedig a szögfelezők egymást négy pontban, éppen a mondott körök középpontjában metszik. Joggal neveztük tehát ezt a négy kört érintőkörnek.

**21.6** Egy hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai által meghatározott háromszöget *talpponti háromszögnek* nevezzük (146. ábra). Ez az eredeti háromszögbe írt háromszög, azaz csúcsai az eredeti háromszög más-más oldalának belső pontjai.

Egyenlő oldalszámú sokszögekről szólva akkor mondjuk, hogy az egyik a másikba van írva, vagyis hogy az egyik *beírt* és a másik *körülírt* sokszög, ha minden csúcsa a másik sokszög más-más oldalának belső pontja. Ez a szóhasználat szűkebb, mint a 19.3-ban elfogadott. Szóhasználatunk szerint a hegyesszögű háromszög talpponti háromszöge beírt háromszög.



146

**Tétel.** Egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb.

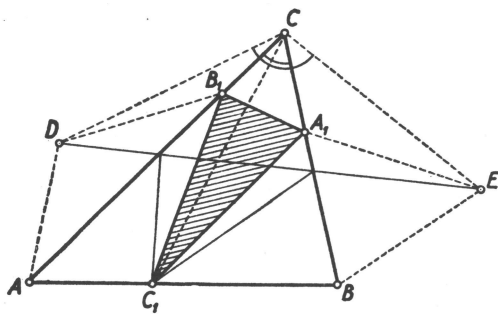
Nem volna helyes ez a tétel, ha a beírt háromszög fogalmát 19.3 szerint érintenők, hiszen egy csúcs és a belőle induló két oldal egy-egy pontja olyan háromszöget határoz meg, amelynek kerülete tetszőlegesen kicsiny lehet.

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy az  $ABC\Delta$ -be írt  $A_1B_1C_1\Delta$ -et (147. ábra). A  $C_1$  pontot az  $AC$  és  $BC$  oldalra tükrözve a  $D$  és  $E$  ponthoz jutunk. Minthogy a tükrözés révén  $C_2B_1 = DB_1$  és  $C_1A_1 = EA_1$ , azért a  $DB_1A_1E$  töröttvonal hossza az  $A_1B_1C_1\Delta$  kerületével egyenlő. Ha a  $C_1$  pontot rögzítve tartjuk, s az  $A_1$  és  $B_1$  pontot változtatjuk, akkor abban az esetben lesz a kerület a legkisebb, ha  $A_1$  és  $B_1$  rajta van a  $DE$  szakaszon, hiszen minden más esetben a  $DB_1A_1E$  töröttvonal hossza a  $BE$  távolságnál nagyobb. A  $DE$  szakasz valóban metszi is az  $AC$  és  $BC$  szakaszt, mert  $ABECD$  konvex ötszög, hiszen minden szöge konvex: három szöge az  $ABC\Delta$  hegyesszögeinek kétszerese, kettő pedig konvex szögek tükörképe.

Ha mármost a legkisebb kerületű háromszöget keressük, csak azt kell megvizsgálunk, hogy az  $AB$  oldal melyik  $C_1$  pontja adja a legkisebb  $DE$  távolságot. A különböző  $C_1$  pontokból származtatott  $DCE\Delta$ -ek hasonlóak, mert a tükrözés révén  $DCE\angle = 2ACB\angle$  és  $CD = CC_1 = CE$ , azaz e háromszögeknél egy szög s az ezt közrefogó oldalak aránya egyenlő. E háromszögek  $DE$  alapja tehát akkor lesz minimális, amikor szárúk, azaz  $CC_1$  a legkisebb. Ez viszont tudvalevően a magasság  $C_1$  talppontjára következik be, hiszen az  $ABC\Delta$  hegyesszögű, és e talppont az  $AB$  oldal belső pontja.

Egyetlen minimális kerületű beírt háromszög van tehát, és ennek  $C_1$  csúcsa egy magasság talppontja. Ugyanígy következik, hogy ennek a minimális kerületű háromszögnek másik két csúcsa is egy-egy magasság talppontja, hogy tehát a kapott háromszög éppen a talpponti háromszög. —





147

Bizonyításunkból az is kiolvasható, hogy a magasságok a talpponti háromszög szögfelezői, s hogy az eredeti háromszög oldalai a külső szögfelezők, hiszen a talpponti háromszög két-két oldalegyenese — mint láttuk — az eredeti háromszög egyik oldalára vonatkozólag szimmetrikusan helyezkedik el.

## 22. § Szerkesztés

Először a szerkesztés fogalmát tisztázzuk, majd az alapvető szerkesztésekkel foglalkozunk, és végül a szerkesztési feladatok megoldásával kapcsolatos tudnivalókról lesz szó.

**22.1** Egy síkbeli alakzatot bizonyos adatok alapján megrajzolhatunk, megszerkeszthetünk. Ehhez szükséges, hogy elegendő s ellentmondást nem tartalmazó adatok álljanak rendelkezésre, s hogy kellő eszközök birtokában legyünk.

A szerkesztés megbízhatósága a használt eszközök pontosságától s attól függ, milyen gonddal dolgozunk. Bár e tényezők a gyakorlatban igen fontosak, elméleti vizsgálatoknál feltételezzük, hogy eszközeink tökéletesen pontosak, s hogy a szerkesztést kifogástalan gondossággal végezzük. E feltételezés mellett kérdezni lehet, hogy bizonyos eszközök birtokában és pontosan megszabva, hogy ezeket az eszközöket hogyan használhatjuk, milyen szerkesztéseket tudunk elvégezni.

A legegyszerűbb eszköz a *vonalzó* és a *körző*. A legegyszerűbb lépések, amelyeket ezekkel az eszközökkel megtehetünk, a következők:

1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve megrajzolhatjuk a két ponton áthaladó egyenest.
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.
5. Egy kör és azt metsző egyenes mindkét metszéspontját megkereshetjük.
6. Két egymást metsző kör mindkét metszéspontját megkereshetjük.

Ha egy szerkesztést pusztán a felsorolt hat lépés véges sokszori alkalmazásával végzünk, akkor *euklideszi szerkesztésnek* (körzővel és vonalzóval végzett szerkesztés) nevezzük. Ha e könyvben szerkesztésről vagy szerkeszthetőségről lesz szó, mindig euklideszi szerkesztésre gondolunk.

A szerkeszthetőség kérdésénél feltesszük, hogy van tetszőlegesen hosszú vonalzónk és tetszőlegesen nagy nyílású körzőnk is.

**A1** Ha nem is szó szerint, de lényegében valóban Euklides határozta el a szerkesztés fogalmát úgy, ahogyan azt mi is tettük.

**A2** Gyakorlati szempontból igen fontos, hogy rajzeszközeink lehetőleg pontosak legyenek, s így rajzunk a kifogástalannak képzelt szerkesztést jól megközelítse. A ceruza hegyes legyen, és ha hegye elkopott, újból hegyezni kell. Keményebb grafittal pontosabban rajzolunk. A körzőnél a hegyezés

helyett élezés a célszerűbb, mert az él kevésbé kopik. A vonalzó éle egyenes legyen. Ezt vonalzóknak egymás mellé fektetésével ellenőrizhetjük. A körző tűje igen hegyes legyen, hogy ne csússzék. A körző szárai ne lötyögjenek, hogy a kör rajzolásakor a nyílás megmaradjon. A rajzlap valóban sík lapon (asztalon, rajzdeszkán) helyezkedjék el.

Lényeges az is, hogy gondosan rajzoljunk, s a gondos munkában gyakorlatra tegyünk szert. A vonalzót finoman kell a pontokhoz illeszteni. Vonal húzása közben a vonalzó nem mozoghat. Amikor a ceruzát a vonalzó mentén csúsztatjuk, a ceruza hegyének valóban a vonalzó mentén kell csúsznia. A körző használatakor a körző tűjét enyhén a papírhoz kell nyomni, hogy el ne mozduljon. Egyenesek metszéspontjának, valamint egyenes és kör metszéspontjának megjelölésekor finoman kell eljárni, különösen akkor, ha igen hegyes szögben metsző vonalakról van szó, hiszen vonalainknak szélessége is van, s a metszéspont megállapításánál ebből a szélességből eredő hibát csökkenteni kell. Pontokat úgy kell megjelölni (kis körrel, kereszttel), hogy vonalzó odaillesztésénél, körzőnyílásba vételnél, körző beszúrásánál valóban a megjelölt pontot vehessük figyelembe.

Ne feledjük, hogy a legfinomabb eszközökkel és a leggondosabb munkával is csak megközelítjük az elvben kifogástalan szerkesztést.

**B1** Előző megjegyzésünkkel szöges ellentétben áll az a mondás, hogy „a matematikus nem törődik az ábra szépségével”. E mondás azt a tényt akarja kifejezésre juttatni, hogy okoskodásunkat mintegy függetleníteni kell az ábrától. Legyen tehát a rajz lehetőleg jó, de okoskodásunk a rajz jóságára ne építsen (vö. 9.1 B2). Néha a szándékosan torz rajz jobban segíti az okoskodást (vö. 11.1 A és 15.5 A).

**B2** Az euklideszi szerkesztés definiálásánál elvonatkoztathatunk attól, hogy eszközeink mifélek. Axiomatikus tisztasággal euklideszi szerkesztésnek az olyan eljárást nevezzük, melynél az adatokból kiindulva a kívánt alakzathoz úgy jutunk el, hogy közben: 1. csak olyan pontot szerepeltetünk, amely két ismert egyenes, vagy két ismert kör, vagy pedig ismert egyenes és ismert kör metszéspontja; 2. csak olyan egyenest szerepeltetünk, amelynek két pontja ismert; 3. csak olyan kört szerepeltetünk, amelynek középpontja ismert, és sugara két ismert pontnak a távolsága.

Kiegészítendő ez az előírás azzal, hogy szerepeltethetjük a síknak két semminemű előírással meg nem kötött pontját is. Szükség van erre a kiegészítésre, mert különben el sem indulhatunk, ha pl. az a feladat, hogy „szerkesztendő egy négyzet”. A kiegészítésben csak két pontról szoltunk, mert kettőből kiindulva már tetszőlegesen sokat is meg lehet szerkeszteni, sőt az így szerkeszthető pontok végtelenül sűrűn belepik a teljes síkot.

**B3** Bár e fejezetben síkgeometriáról van csak szó, itt említjük, hogy a térgeometriában mit nevezünk euklideszi szerkesztésnek, mégpedig kétféleképpen válaszolunk erre a kérdésre. Az egyik válasz abból indul ki, hogy mi térben nem rajzolhatunk, legfeljebb csak azt tehetjük, hogy a térbeli alakzatokhoz valamilyen módon síkbeli alakzatot rendelünk, és a szerkesztést ezeken a hozzárendelt síkbeli alakzatokon végezzük el. Ilyen hozzárendelésekkel és ilyen szerkesztésekkel az *ábrázoló geometria* foglalkozik. Minthogy itt igazában síkbeli szerkesztésről van szó, a szerkesztés szabályozása semmiféle kiegészítést nem kíván.

A másik válasz nem a tényleges rajzolásra gondol, hanem az előző megjegyzés szellemében válaszol, és az ott mondottakat a következőkkel egészíti ki: 1. szerepeltethető olyan pont is, amely ismert egyenes és sík metszéspontja; 3. egy kör szerepeltetése csak akkor megengedett, ha középpontján és két pont meghatározta sugarán kívül síkját is ismerjük; 4. csak olyan sík szerepeltethető, amelynek három, nem egy egyenesbe eső pontja ismert. Megjegyezzük még, hogy engedélyeznünk kell itt a tér négy, semminemű előírással meg nem kötött, egy síkba nem eső pontjának szerepeltetését is.

Más a kérdés, ha egy gömb felületén végzett szerkesztésről van szó. Ez a kérdés a síkban felvetett kérdéssel szorosabb rokonságban van, és ugyanúgy válaszolható meg, de vonalzó és körző helyett (főköreket kijelölő) gömbi vonalzót és (gömbön rajzoló) gömbi körzőt kell mondani.

**22.2** Csak akkor érthető, hogy szerkeszthetőségről beszélünk, ha tudjuk, hogy vannak euklideszi szerkesztéssel meg nem oldható feladatok is.

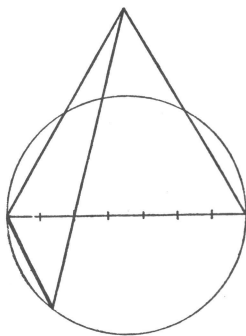
A leghíresebb ilyen szerkesztési feladatok a következők: megszerkesztendő egy olyan négyzetnek az oldala, amelynek területe egy adott kör területével egyenlő (a kör négyszögesítése, kvadrátúrája);

megszerkesztendő egy olyan kockának az éle, amelynek köbtartalma egy adott élű kocka köbtartalmának kétszerese (kocka megkettőzése, déloszi feladat); megszerkesztendő egy tetszőlegesen adott szög harmada (szögharmadolás); szerkesztendő szabályos hétszög. Nem térhetünk itt ki annak bizonyítására, hogy e feladatok euklideszi szerkesztéssel nem oldhatók meg (vö. B2).

Szerkesztéssel megoldhatóvá válhatnak az ilyen feladatok is, ha a megengedett eszközök és lépések tekintetében nem tartjuk be az euklideszi korlátozásokat.

A Alig van gyakorlati jelentősége annak, hogy egy feladat szerkesztéssel megoldható-e vagy sem. Még az elvileg pontos szerkesztés is pontatlanná válik, ha gyakorlati végrehajtását tekintjük. A gyakorlatban egy elvileg pontatlan szerkesztést is megfelelőnek mondhatunk, ha pontatlansága nem számottevő.

Az utóbb említett, csak *közelítő szerkesztések* közül megemlítjük a szabályos  $n$ -szög következő szerkesztését: A kör átmérőjét  $n$  egyenlő részre osztjuk (148. ábra); a végponttól számított második osztópontot összekötjük az átmérő fölé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsával; az összekötő egyenes és az alsó félkörív metszéspontjának az átmérő előbb említett végpontjától való távolsága a körbe írt szabályos  $n$ -szög oldalát adja (közelítőleg!). Ha ezzel az előírással szabályos hétszöget szerkesztünk, gyakorlatilag ugyanolyan megbízhatóan járunk el, mint amikor euklideszi szerkesztéssel pl. szabályos ötszöget szerkesztünk.



148

**B1** Ha valaki azt a kérdést veti fel, hogy a geometriai szerkesztések tárgyalásánál miért korlátozzuk az eszközöket és lépéseket, és miért éppen így, akkor a következőkkel felelhetünk: A szerkesztés fogalmának pontos körvonalazására van szükség ahhoz, hogy egyáltalában határozottsággal megoldottnak vagy meg nem oldottnak mondassunk egy feladatot.

A megengedett eszközök megválogatása tekintetében nem lehet döntő szempont az, hogy mely eszközök pontosak, hiszen minden eszköz többé-kevésbé pontatlan. Ha a vonalzó és a körző használatát engedjük meg akkor azt a két eszközt választottuk, amelyek a legegyszerűbbek, s amelyeknek használata egészen általános. Egyes további eszközök használatát előírásunk csak azért nem engedélyezi, mert ezáltal az előírás összetettebbé válnék, viszont a szerkesztéssel megoldható feladatok köre nem bővülne. Ilyen eszközök a fejes vonalzó és a szokott alakú háromszögvonalzók (egyenlő szárú derékszögű és  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ -os szögekkel rendelkező). Látjuk majd, hogy az ezekkel az eszközökkel megoldható alapeladatok euklideszi szerkesztéssel is megoldhatók. Más eszközök használatát előírásunk már csak azért sem engedélyezi, mert további egyszerű és általánosan használt eszközt aligha mondhatunk. A skálás vonalzó és a szögmérő volna talán említhető. Ezeknél az eszközöknél azt is elő kellene írni azonban, hogy beosztásuk milyen sűrű legyen, ami előírásunk egyszerűségét nagyon lerontaná.

A körzővel és vonalzóval megengedett lépések tekintetében nem érheti előírásunkat az a vád, hogy feleslegesen sokat enged meg. A lépések szaporítására pedig legfeljebb azt lehetne javasolni, hogy engedélyezzük a vonalzó ponthoz és körhöz, valamint két körhöz illesztését is. Ezzel kapcsolatban megint csak azt mondhatjuk, hogy a javaslat elfogadása hosszabbá tenné az előírást, viszont nem változtatna azon, hogy szerkesztéssel mi oldható meg.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az a szokásos előírás, amelyik a matematika története során kialakult, s amelyet mi is ismertettünk, nem pótolható hasonlóan egyszerű és az általánosan végzett szerkesztések körét ugyanúgy felölelő másik előírással.

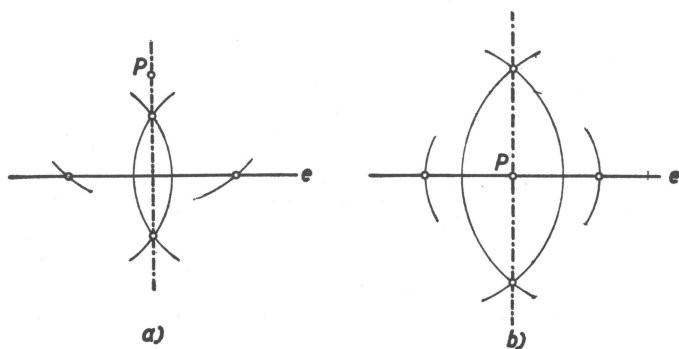
**B2** A geometriai szerkesztések elmélete nehezebb algebrai segédeszközökkel dolgozik. Ebbe a könyvbe nem is illeszthetők be ezért annak bizonyítását, hogy valamelyik feladat szerkesztéssel nem oldható meg. Csak megemlítjük, hogy a fentebb közölt négy feladat közül az első azért nem oldható meg, mert  $\pi$  transzcendens szám, a többi három pedig azért, mert számolással végzett megoldásukban köbgyökvonás is fellép.

**B3** A szerkesztések elmélete azzal is foglalkozik, hogy mely feladatok oldhatók meg, ha a szerkesztés előírásait másként szabjuk meg. Ilyen más előírás sokféle lehetséges, mi példaképpen kettőt említünk: a) csak a körző használatát engedélyezzük, tehát 2.1 felsorolásában az 1. és a 4. lépés nem szerepel (ún. Mascheroni<sup>7\*</sup>-féle szerkesztés); b) egy körvonal adva van a középpontjával együtt, és csak a vonalzó használatát engedélyezzük, tehát itt a 2., 3. és 6. lépés marad el, az 5. pedig csak az adott körre vonatkozik (Steiner-féle<sup>\*</sup> szerkesztés). A szerkesztések elméletének érdekes eredménye, hogy ezzel a két szerkesztésfajttával az euklideszi szerkesztéssel megoldható feladatok mindegyike megoldható, eltekintve attól, hogy természetesen nem szerkeszthetünk az elsővel egyenest, a másodikkal pedig kört.

### 22.3 Az alapvető szerkesztéseket tekintjük át.

Nem szorul magyarázatra az, hogy szakaszokat körzőnyílásba vétellel fel tudunk mérni egy félegyenesre, s hogy így szakaszok összegezését, kivonását és sokszorozását el tudjuk végezni. Hasonlót mondhatunk egy kör ívének adott körponttól való felmérésére, ami szögek összegezésére, kivonására és sokszorozására ad lehetőséget.

A  $P$  pontból egy rajta át nem haladó egyenesre úgy szerkeszthetünk merőleget, hogy elég nagy sugárral  $P$  körül kört írunk, majd ennek a körnek az egyenessel alkotott metszéspontjai körül egyenlő és elég nagy sugárral ismét köröket írunk, és végül e körök  $P$ -től különböző metszéspontjainak valamelyikét  $P$ -vel összekötjük (149a ábra). Ha az egyenes áthalad a  $P$  ponton, akkor ugyanez az előírás vezet a  $P$ -ben emelt merőleges megszerkesztéséhez (149b ábra), csak hogy most a másodszor választott sugárnak az elsőnél nagyobbak kell lennie. Nyomban belátható, hogy ezek a szerkesztések helyes eredményhez vezetnek. Nem okoz gondot az ebben a szakaszban említendő további egyszerű szerkesztések helyességének az indokolása sem. Ha derékszögvonalzót is használunk, akkor a merőleget természetesen egyszerű vonalzóillesztéssel is megszerkeszthetjük.

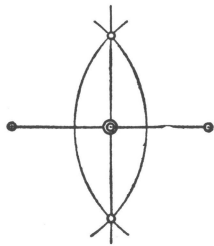


149

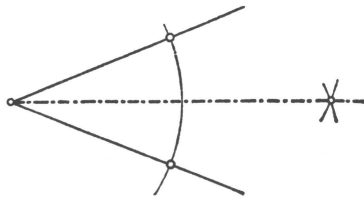
Egy szakaszt úgy felezhetünk meg, hogy végpontjai körül egyenlő sugarakkal kört írunk, és ezek összekötő egyenesével a szakaszt elmetsszük (150. ábra).

Egy szög felezőjét úgy szerkeszthetjük meg, hogy a szög csúcsa körül írt körrel a szárakat elmetsszük, majd a kapott metszéspontok körül egyenlő és elég nagy sugárral köröket írunk, és végül e köröknek (a szög csúcsától különböző) metszéspontját a csúccsal összekötjük (151. ábra).

<sup>7\*</sup> L. Mascheroni (ejtsd: maszkeróni), 1750—1800, a páduai egyetem tanára. J. Steiner, 1796—1863, svájci születésű, a berlini egyetem tanára.



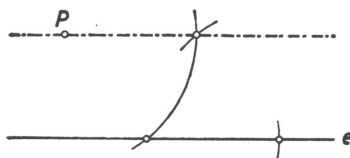
150



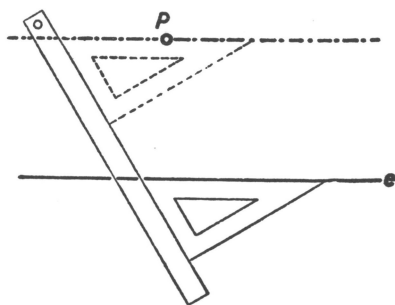
151

Három adott oldallal úgy szerkesztünk háromszöget, hogy az egyik oldalt felmérjük, ennek végpontjai körül a másik két oldallal mint sugárral kört írunk, és megrajzoljuk az egyik metszéspontjukhoz vezető sugarakat. Két adott oldalból és bezárt szögükből a háromszög egyszerű felméréssel szerkeszthető meg. Ha két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög van adva, akkor e szög egyik szárára mérjük fel a kisebbik oldalt, ennek végpontja körül a nagyobbik oldallal mint sugárral kört írunk, és megrajzoljuk ennek a körnek a másik szárral alkotott metszéspontjához vezető sugarát. Egy oldal és azon nyugvó két szög birtokában a háromszöget egyszerű felméréssel szerkeszthetjük meg. Ha egy oldal és két szög van adva, amelyeknek csak egyike nyugszik az adott oldalon, akkor először az adott szögeket  $180^\circ$ -ból levonva a harmadik szöget határozzuk meg, és így a háromszög szerkesztését az előbb említett esetre vezettük vissza. Három egyenlő oldalból indulva ki szabályos háromszöghöz jutunk, két egyenlő és merőleges oldalból pedig egyenlő szárú derékszögű háromszöghöz.

A  $P$  ponton át úgy szerkeszthetünk párhuzamost egy rajta át nem haladó  $e$  egyenessel, hogy  $P$ -ből  $e$ -re merőlegest bocsátunk, és erre  $P$ -ben merőlegest szerkesztünk. Ezt a feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy az  $e$  egyenest egy elég nagy a sugárral  $P$  körül írt körrel elmetsszük, a metszéspontból felmérjük az  $e$  egyenesre az  $a$  távolságot, ennek végpontja körül ismét  $a$  sugárral kört írunk, majd e körnek és az először rajzolt körnek (nem  $e$ -hez tartozó) metszéspontját  $P$ -vel összekötjük (152. ábra). Ha háromszögvonalzót is használunk, akkor feladatunkat a következő módon oldhatjuk meg: a háromszögvonalzó egyik élét  $e$ -re helyezzük, másik éléhez vonalzót illesztünk, majd a háromszögvonalzót addig csúsztatjuk a vonalzó mentén, amíg nem halad át a  $P$  ponton az az él, amelyik az  $e$  egyenesen volt (153. ábra).

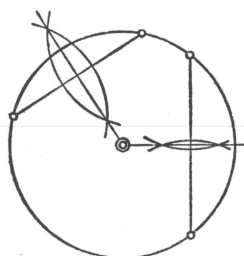


152

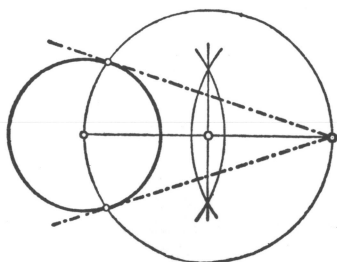


153

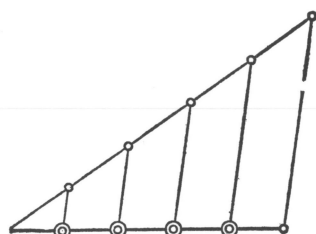
Egy adott kör középpontját két nem párhuzamos húr felezőmerőlegesének metszéspontjaként kaphatjuk meg (154. ábra). Egy külső pontból a körhöz vont érintőt euklideszi szerkesztéssel úgy kaphatjuk meg, hogy az adott pont és a körközpont összekötő szakaszát megfelezzük, e pont körül a szakasz felével mint sugárral kört írunk, és e körnek az adott körrel alkotott metszéspontját összekötjük az adott ponttal (155. ábra). Erre a szerkesztésre vezethetjük vissza két kör közös érintőjének megszerkesztését is, ha ugyanazt tesszük, amit 15.7 tételének bizonyításánál tettünk.



154



155



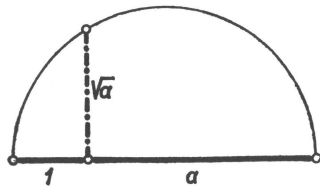
156

Ha egy szakaszok alkotta aránypár három tagja van adva, a negyedik tagot a párhuzamos szelők tétele alapján könnyen megszerkeszthetjük. Egy adott szakaszt  $n$  egyenlő részre úgy oszthatunk fel,

hogy a szakasz egyik végpontjából induló és a szakaszhoz szögben hajló félegyenesre  $n$  egyenlő szakaszt mérünk fel, az utolsónak végpontját és az adott szakasz végpontját összekötjük, majd ezzel az összekötő egyenessel párhuzamosat húzunk a felmért szakaszok mindegyikének végpontján át; ezek a párhuzamosok az adott szakaszt a keresett osztópontokban metszik (156. ábra).

Hasonló alakzatok közül a legegyszerűbb a párhuzamosan hasonló alakzatok megszerkesztése. Nem is kell ilyenkor az adott alakzat pontjainak a hasonlósági centrumtól mért távolságát ugyanannyiszoroznunk, mert egy képpontból kiindulva valamennyihez eljuthatunk párhuzamosok szerkesztésével, hacsak nincs egyetlen egyenesen az alakzat és a hasonlósági centrum is. Itt arra hivatkozunk, hogy ha egy tárgyszakasz egyenese a centrumot nem tartalmazza, akkor az egyik végpont képén át a szakasszal párhuzamosan húzott egyenes a másik végpont vetítő sugarát e végpont képében metszi.

Ha az egységszakasz és egy  $a$  hosszúságú szakasz adva van, akkor  $\sqrt{a}$  hosszúságú szakaszt úgy szerkeszthetünk, hogy egy egyenesre egymáshoz csatlakozóan felmérjük a két adott szakaszt, megszerkesztjük a két szakasz együtteséhez tartozó Thales-kört, s ezt a két szakasz közös végpontjában emelt merőlegessel elmetsszük; a metszéspont és a közös végpont távolsága  $\sqrt{a}$  (157. ábra). Hasonlóképpen járhatunk el akkor is, ha két távolság mértani középárányosát akarjuk megszerkeszteni.



157

**A1** Az adott vonalakat vastagon szokás kihúzni, a szerkesztés során bevezetett vonalakat pedig vékony vagy szaggatott vonallal. Összetettebb szerkesztésnél a kész rajzban nem hagyunk meg minden vonalat. Éppen az olyan alapvető szerkesztéseknek a segédvonalait szokás elhagyni, amilyenekről ebben a szakaszban szóltunk. A keresett vonalat többnyire (pont-vonalazott) eredményvonallal húzzuk ki, a keresett pontot pedig néha kettős karikával jelöljük meg.

**A2** Ugyanazt a feladatot többféle szerkesztéssel is megoldhatjuk. Erre már a párhuzamos szerkesztéséről szólva is példát nyújtottunk. Több szerkesztés közül előnyben részesítjük azt, amelyik kevesebb lépést igényel. Ezt nemcsak az időmegtakarítás, hanem a rajz pontosabb volta is indokolja. A legrövidebb szerkesztések megkeresése külön vizsgálat tárgya lehet. Ilyen vizsgálatnál már lényeges az, hogy milyen eszközöket és lépéseket engedünk meg azok közül, amelyek a szerkesztéssel megoldható feladatok körét nem bővítik (vö. 22.2 B1) Ezt a vonalzócsúsztatással végzett párhuzamosszerkesztés példája is mutatja.

**A3** Ha a cél a gyakorlatilag megbízható rajz, akkor semmi értelme sincs annak, hogy szabadságunkat az euklideszi korlátozásokkal megkössük. Nem vétek tehát ilyenkor pl. az, hogy körökhöz vonalzóillesztéssel szerkesztünk érintőt, vagy hogy szakaszt skálás vonalzóunkat használva osztunk egyenlő részekre. Még az sem vétek, ha a már kész rajzot valamilyen ellenőrzés alapján szemmértékkel helyesbítjük. Ez természetesen csak viszonylag kicsiny eltérések kiigazításánál lehet jogos.

A gyakorlati megbízhatóság kívánalma azonban eddig nem említett megszorításokat is jelent. Megbízhatóbb a rajz, ha a szerkesztés kevesebb lépésből áll, ha a rajz nem túlzottan nagy, de nem is igen kicsiny terjedelmű, ha igen közeli pontokat nem kötünk össze egyenessel, ha a szerkesztés során nagyon kis szöget alkotó vonalak metszéspontja nem szerepel.

**22.4** A szabályos sokszögek közül a szabályos háromszög szerkesztését már említettük. Szabályos háromszögekből szabályos hatszöget is összerakhatunk. A szabályos négyszög szerkesztése sem okoz gondot. Itt most a szabályos ötszög és tízsög szerkesztésével foglalkozunk.

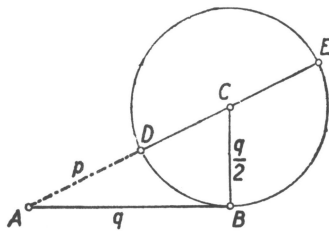
Előkészítésként az *aranymetszéssel* (sectio aurea) ismerkedünk meg. Így nevezzük egy szakasznak két szeletre vágását, ha a szeletek kisebbiké úgy aránylik a nagyobbikhoz, miként a nagyobbik a teljes szakaszhoz, ha tehát a  $p < q$  szeletekre a

$$p : q = q : (p + q)$$

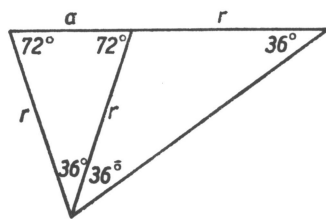
aránypár teljesül. Egy adott szakasz aranymetszése csak egyféleképpen lehetséges (ha a szeletek sorrendjét nem nézzük), hiszen adott  $p + q$  mellett  $q$  csökkentésekor  $p$  növekszik, és így a fenti aránypár beltagjainak szorzata csökken, kültagjaié viszont növekszik, azaz  $q$  megváltoztatása után az aránypár már nem teljesülhet. Minthogy egy aranymetszésből nagyítással vagy kicsinyítéssel minden szakasz aranymetszéséhez eljuthatunk, elmondhatjuk, hogy az aranymetszésnél szereplő arányok számértéke a szereplő szakaszok hosszától független.

Ha a fenti aránypárban szereplő  $q$  adott, akkor a mondottak szerint  $p$  is egyértelműen meghatározott. Ehhez a távolsághoz szerkesztéssel a következőképpen juthatunk el (158. ábra): Az  $AB = q$  szakaszra

$B$ -ben merőleget állítunk, erre felmérjük a  $BC = \frac{q}{2}$  távolságot, majd a  $C$  körül  $\frac{q}{2}$  sugárral írt kört az  $AC$  egyenessel metsszük; az így adódó,  $A$ -hoz közelebb eső  $D$  metszéspont adja a keresett  $AD = p$  távolságot. Ennek a szerkesztésnek helyessége nyomban belátható, ha kétféleképpen felírjuk az  $A$  pontnak a  $C$  középpontú körre vonatkozó hatványát. Az így adódó  $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AE}$  egyenlőség a  $q^2 = p(p + q)$  összefüggést adja, és ez az aranymetszést biztosító aránypár helyességét mondja ki. A bemutatott szerkesztés módot ad arra, hogy az aranymetszés nagyobbik szeletéből kiindulva kisebbik szeletét megszerkesszük.



158



159

**Tétel.** A szabályos tízsög oldala annak az aranymetszésnek a kisebbik szelete, amelynek a nagyobbik szelete a kör sugara.

E tétel alapján a kör sugarából kiindulva a szabályos tízsög oldalát, és így a körbe írt szabályos tízsöget is megszerkeszthetjük. A tízsög minden második csúcsát összekötve a beírt szabályos ötsöget is megkapjuk.

*Bizonyítás.* Az  $r$  sugarú körbe írt  $a$  oldalú szabályos tízsög egy oldala és a végpontjaihoz vezető sugarak alkotta háromszöget tekintjük. E háromszög szögei  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ , mert a középpontnál a teljes szög tizede helyezkedik el, és a háromszög egyenlő szárú. Hosszabbítsuk meg a háromszög



$a$  alapját  $r$  hosszúsággal, és a meghosszabbítás végpontját kössük össze a középponttal (159. ábra). Háromszögünket egy újabb egyenlő szárú háromszöggel egészítettük ki, ennek az alapján  $36^\circ$ -os szögek nyugszanak, mert a szárszögnek mellékszöge  $72^\circ$ . Megállapíthatjuk, hogy a két háromszög együttesen olyan háromszöget alkot, amelynek szögei  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ , amely tehát az eredeti háromszöghöz hasonló. E hasonlóságból az oldalak arányára

$$a : r = r : (a + r)$$

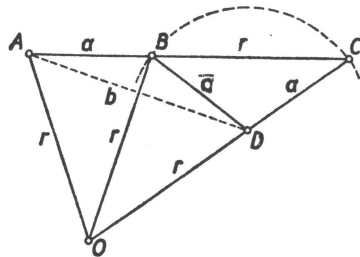
következik, és ez tételünk helyességét mondja ki. —

**Tétel.** *A kör sugarával és a körbe írt szabályos tízszög oldalával mint befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója a körbe írt szabályos ötszög oldala.*

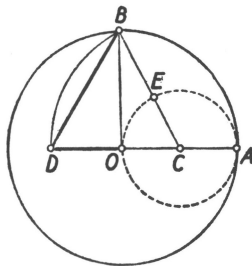
Ez a tétel is módot nyújt a körbe írt szabályos ötszög oldalának megszerkesztésére, ha egyszer a beírt szabályos tízszög oldalát már megszerkesztettük.

*Bizonyítás.* Tekintsük újból a 159. ábra két háromszögből összetett háromszögét, és tükrözzük az eredeti  $\triangle OAB$ -et  $OB$  oldalára, úgyhogy ez a kiegészítő  $\triangle OBC$ -ön belüli  $OBD$  helyzetbe jusson (160. ábra). A tükrözés folytán  $BD = a$  és  $OD = r$ . Minthogy az  $\triangle OAC$  egyenlő szárú,  $OC = a + r$  és  $DC = a$ . Az  $AD = b$  távolság az  $r$  sugarú körbe írt szabályos ötszög oldala, mert az  $OA$  és  $OD$  sugarak szöge  $72^\circ$ . Az  $A$  pontnak a  $D$  középpontú, a sugarú körre vonatkozó hatványa 18.5 első két tétele szerint

$$b^2 - a^2 = a(a + r).$$



160



161

Ebből az előző tétel alapján  $b^2 - a^2 = r^2$  adódik, és ez Pythagoras tétele szerint a bizonyítandó állítással azonos. —

A körbe írt szabályos tízszög és ötszög oldalának megszerkesztését egy ábrába tömöríthetjük. A kör merőleges  $OA$ ,  $OB$  sugaraiból indulunk ki (161. ábra). Az  $OA$  sugár  $C$  felezőpontjának  $B$ -től mért távolságát a  $CO$  félegyenesre felmérve a  $CD$  szakaszt kapjuk;  $OD$  adja a beírt szabályos tízszög,  $BD$  pedig a beírt szabályos ötszög oldalát. A szerkesztés igazolására az ebben a szakaszban elmondottak

után elég arra hivatkoznunk, hogy ha a  $C$  körül  $CO$  sugárral írt kör a  $BC$  szakaszt  $E$ -ben metszi, akkor  $EB = OD$ , mert ezek a szakaszok  $C$  körüli elforgatással egymásra fektethetők.

**A** Már korábban láthattuk, hogy  $90^\circ$  és  $60^\circ$  szerkeszthető szögek. Most megállapíthatjuk, hogy  $72^\circ$  is szerkeszthető. Szögfelezéssel, szögek sokszorozásával, valamint szögek összegének és különbségének megszerkesztésével természetesen további szögekhez is eljuthatunk. Az ebben a szakaszban megismert szerkesztés ilyen módon lehetőséget ad pl.  $3^\circ$  minden egész számú többszörösének megszerkesztésére.

**B1** Ha  $p < q$  egy aranymetszés szeletei, akkor ugyanezt mondhatjuk, a  $p$  és  $p + q$ , valamint  $p - q$ , és  $p$  távolságokról is. Ez a két állítás azt mondja ki, hogy ezeknek a távolságoknak az aránya a  $p : q$  aránnyal egyenlő. Az első állítás helyességét maga az aranymetszést definiáló aránypár mondja ki. A második viszont ugyanúgy következik abból, hogy  $p$  és  $q$  egy aranymetszés szeletei, ahogyan ez utóbbi tény belátható, ha tudjuk, hogy  $q$  és  $p + q$  egy aranymetszés szeletei.

Ezek szerint az 158. ábra szerkesztése egy szakaszból kiindulva e szakasz aranymetszésének nagyobbik szeletéhez vezet el. Első tételünk pedig úgy is szövegeezhető, hogy a sugár aranymetszésénél a nagyobbik szelet a beírt szabályos tíszög oldalát adja. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az

aranymetszés szeleteinek aránya  $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ .

Első tételünk kimondásakor szólhattunk volna pusztán erről a számarányról.

**B2** Ha szabályos  $m$ -szöget tudunk szerkeszteni, akkor nyilván szabályos  $2m$ -szöget is tudunk, hiszen ehhez szögfelezésre van csak szükség.

Ha  $m$  és  $n$  relatív prímszámok, és szabályos  $m$ -szöget, valamint  $n$ -szöget tudunk szerkeszteni, akkor tudunk szerkeszteni szabályos  $mn$ -szöget is. Ennek belátása végett arra a számelméleti tételre hivatkozunk, hogy relatív prím  $m, n$  számokhoz található  $p$  és  $q$  egész szám úgy, hogy  $p^m - q^m = 1$  teljesüljön. Ha tehát a körbe írt szabályos  $n$ -szög egy oldalához tartozó körív  $p$ -szereséből a beírt szabályos  $m$ -szög egy oldalához tartozó körív  $q$ -szorosát levonjuk, akkor a szabályos  $mn$ -szög egy oldalához tartozó körívhez jutunk.

Gauss<sup>\*8</sup> bebizonyította, hogy ha  $k$  egész szám, és  $n = 2^{2^k} + 1$  prímszám, akkor lehet szabályos  $n$ -szöget szerkeszteni. Ez a képlet a  $k = 0, 1, 2, 3$  értékekre az  $n = 3, 5, 17, 257$  értékeket adja, s ezek prímszámok. Eszerint pl. a szabályos tizenhétszög meg lehet szerkeszteni.

Gauss bebizonyította azt is, hogy csak azok a szabályos sokszögek szerkeszthetők, amelyekre ez a most elmondottakból következik. Nem szerkeszthető tehát pl. szabályos hétszög és kilencszög.

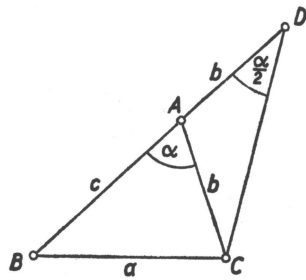
Ezek az eredmények megszovegezhetők természetesen úgy is, hogy szabályos sokszögek szerkesztése helyett arról szövelünk, milyen racionális fokmértékű szögek szerkeszthetők meg. Beszélhetnénk arról is, hogy mely szögek vezethetők be, ha a folytonosságot csak a köraxióma formájában használjuk ki.

**22.5** Összetettebb szerkesztési feladatokról legyen most szó. Le kell nyomban szögeznünk, hogy általános érvényű utasítás ilyen feladatok megoldására nincs. Csak módszereket említhetünk, csak tanácsokat adhatunk. Az egyes feladatok megoldásához egyéni leleményességre van szükség. Mi az alábbiakban egy feladat megoldásait ismertetjük.

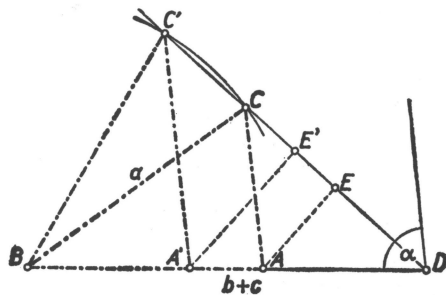
*Feladat.* Szerkesztendő háromszög, ha adva van egy oldala, a szemközti szög és a háromszög kerülete.

*Első megoldás.* Az  $ABC\Delta$   $AB = c$  oldalát meghosszabbítjuk az  $AD = AC = b$  szakasszal (162. ábra). Minthogy az  $ACD\Delta$  egyenlőszárú, a külső szög tétele szerint az  $ADC\alpha$  az  $\alpha = BAC\alpha$  felével egyenlő. Az adott  $BC = a$  oldal és az  $a + b + c$  kerület révén a  $BD = b + c$  távolság is ismeretes. A  $BCD\Delta$  megszerkeszthető tehát, mert két oldala és egy szöge ismert.

<sup>8\*</sup> K. F. Gauss, 1777-1855, a göttingai egyetem tanára.



162



163

Feladatunkat ezek szerint a következőképpen oldhatjuk meg (163. ábra): A  $BD = b + c$  szakasz  $D$  végpontjában felmérjük az  $\alpha$  szöget. Ennek szögfelezőjét a  $B$  körül  $a$  sugárral írt körrel elmetsszük. A kapott  $C$  pont adta  $DC$  szakasz felezőmerőlegese a  $BD$  szakaszt  $A$ -ban metszi, és ez meghatározza a keresett  $ABC\Delta$ -et.

Erről a háromszögről valóban beláthatjuk, hogy benne  $BC = a$ , hogy továbbá  $\angle BAC = \alpha$ , mert ez külső szöge az egyenlő szárú  $ACD\Delta$ -nek, melynek alapján  $\frac{\alpha}{2}$  nagyságú szögek nyugszanak, hogy végül  $AC = AD$  miatt háromszögünk kerülete a megadott hosszúsággal egyenlő. —

*Második megoldás.* Újból az első megoldás kezdő megfontolásaiból indulunk ki, de a szerkesztést másként végezzük. Most  $BC = a$  szakaszt mérjük fel, és a  $D$  pont helyét keressük.

Mínt hogy  $D$ -ből a  $BC$  szakasz  $\frac{\alpha}{2}$  szög alatt látható, a  $D$  pont rajta van az ilyen tulajdonságú pontok mértani helyén, s ezt a mértani helyet könnyen megszerkeszthetjük. Evégből  $BC$ -re  $B$ -ben merőlegest

állítunk (164. ábra), és az ehhez  $\frac{\alpha}{2}$  szög alatt hajló,  $B$ -ből induló egyenessel  $BC$  felezőmerőlegesét elmetsszük. A kapott  $O$  pont körül  $OB$  sugárral rajzolt kör megfelelő  $BC$  íve lesz a keresett mértani hely a  $BC$  egyenes által határolt egyik félsíkban. Ezek után az ismert  $BD = b + c$  sugárral  $B$  körül kört írunk. Ez a kör a  $BC$  körívből a keresett  $D$  pontot metszi ki. A háromszög  $A$  csúcsát  $CD$  felezőmerőlegese metszi ki a  $BD$  szakaszból.

Azt, hogy az így kapott  $ABC\Delta$  valóban megfelel, ugyanúgy láthatjuk be, mint az első megoldásnál.



Tudjuk, hogy az utóbbi kör érintési pontjaira  $\widehat{AC_1} = \widehat{AB_1} = s$  (lásd 21.5). Minthogy  $s$  adott, az  $a$  szög felmérése után ezt a hozzáírt kört megszerkeszthetjük (165. ábra). Tudjuk azt is, hogy a beírt kör érintési pontjaira  $\widehat{C_0C_1} = \widehat{B_0B_1} = \alpha$  (lásd 21.5). Minthogy  $\alpha$  is adott, a beírt kört is meg tudjuk szerkeszteni. A két kör közös belső érintője háromszögünk harmadik oldalegyenesét adja.

Megvizsgáljuk most, hogy vajon szerkesztéseink mindig végrehajthatók-e, s hogy hány megoldáshoz vezetnek.

a  $b + c$  átfogójú és  $\frac{\alpha}{2}$  szögű derékszögű háromszög e szöggel szemközti befogójánál. Kell még, hogy a szerkesztés során  $CD$  felezőmerőlegese messe a  $BD$  szakaszt. Ez akkor következik, be, ha  $B$  a felezőmerőleges által határolt, a  $C$  pontot tartalmazó félsíkban van, ha tehát  $\alpha < b + c = 2s - \alpha$ . Kell tehát, hogy az adatok között fennálljon az  $s > a$  összefüggés.

Ha a megoldások számát vizsgáljuk, megállapíthatjuk, hogy ha az először említett megkötés teljesül, akkor a rajzolt körnek és a szögfelezőnek általában két metszéspontja van. Egy van akkor, ha a kör a szögfelezőt érinti. Ha két metszéspont van, akkor a  $C$ ,  $C'$  metszéspontok a szerkesztés kétféle

folytatását írják elő. Meggyőződhetünk azonban arról, hogy a két folytatás végül is egybevágó háromszögekhez vezet. Helyezzük el evégett a már megszerkesztett  $ABC\Delta$ -et úgy, hogy  $C$  csúcsa  $B$ -be,  $A$  csúcsa a  $BD$  szakaszon  $A'$ -be kerüljön, és a háromszög a  $BD$  egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkedjék el, ahol az  $ABC\Delta$  eredetileg elhelyezkedett. A szerkesztésnek ehhez az  $A'C'B\Delta$ -höz is el kell vezetnie, mert ha ebből kiindulva készítjük el a szerkesztés alapjául szolgáló kiegészítést, de most a  $BA'$  oldalt hosszabbítjuk meg  $A'D = A'C'$  szakasszal, akkor ugyanahhoz a  $BD$  szakaszhoz, ugyanahhoz a szögfelezőhöz és ugyanahhoz a körhöz jutunk. Így tehát a kör és a szögfelező második metszéspontjának ezt a háromszöget kell szolgáltatnia. Ezek után elmondhatjuk, hogy ha egybevágó szerkesztési eredményeket nem tekintünk különbözőeknek, akkor a feladatnak egy megoldása van, feltéve, hogy egyáltalán van megoldása.

Összefoglalva a következőket állapíthatjuk meg: Az adatok között fenn kell állnia az  $a < s$

összefüggésnek, továbbá teljesülnie kell annak, hogy  $a$  ne legyen kisebb a  $b + c$  átfogójú,  $\frac{\alpha}{2}$  szögű derékszögű háromszög e szöggel szemközti befogójánál. Ha ezek a kikötések teljesülnek, akkor a feladatnak egy megoldása van.

Ugyanehhez a következtetéshez a másik két megoldás vizsgálatával is eljuthatnánk. A második megoldásban  $b + c$  nem lehet nagyobb a kör átmérőjénél, és  $CD$  felezőmerőlegese kell, hogy messe

a  $BD$  szakaszt. A harmadik megoldásban a  $B_0$  és  $C_0$  pontoknak a szárazon kell lenniük, és a két kör nem metszheti egymást. Nem bocsátkozunk annak részletes vizsgálatába, hogy e kikötések mindkét esetben a már kimondott eredményhez vezetnek.

**22.6** Összefoglaljuk, hogy szerkesztési feladatok megoldása során mit tapasztalhatunk. Tapasztalataink a megoldás keresésénél tanácsul szolgálhatnak.

A már megszerkesztve gondolt ábrából indulunk ki. Ezt az ábrát többnyire kiegészítjük, mégpedig úgy, hogy az adatok vagy az adatokból könnyen nyerhető mennyiségek közvetlenül szerepeljenek a kiegészített ábrán. A szerkesztést az ábra, illetve a célszerűen kiegészített ábra vizsgálata (*elemzés, analízis*) készíti elő. Ilyenkor geometriai kapcsolatokat és mennyiségi összefüggéseket keresünk, és vizsgáljuk, van-e az ábrának olyan része, amelynek megszerkesztése nem ütközik nehézségbe. Előfordul, hogy valamilyen *transzformációt* alkalmazunk a teljes ábrára azért, hogy könnyebben megoldható feladathoz jussunk.

Magát a *szerkesztést* a helyileg is adott alkatelemekből indítjuk el, vagy ha ilyen adat nincs — és többnyire ez az eset fordul elő —, akkor valamelyik alkatelem önkényes felvételével kezdjük meg. A megoldás sikere sokszor függ attól, hogy az ábra megrajzolását melyik alkatelem önkényes felvételével kezdjük el. A már megrajzolt ábrarész kiegészítése során sokszor határozunk meg valamely további pontot azáltal, hogy ennek a pontnak bizonyos tulajdonságait állapítjuk meg, és a pontot az ilyen tulajdonságú pontok *mértani helyeinek* közös pontjaként kapjuk meg.

Ha a szerkesztést már befejeztük, meg kell gondolnunk, hogy a szerkesztett ábra valóban rendelkezik-e a megadott adatokkal. Ez a meggondolás néha külön okoskodást (*bizonyítás*) igényel. Ha olyan szerkesztést találtunk, amely a kívánt tulajdonságú ábrához vezet, akkor a feladat megoldását befejeztük. A megoldáshoz hozzáfűzhetjük annak vizsgálatát (*diszkusszió, taglalás*), hogy a szerkesztés végrehajtásához milyen feltételek teljesülése szükséges, és hogy az adatok megválasztásának megfelelően mikor hány megoldás van. Ennél az összeszámlálásnál az egybevágó eredményeket nem tekintjük különbözőeknek. Lényeges, hogy a szerkesztés feltételei minden olyan esetben teljesüljenek, amikor van megoldása a feladatnak. Ha a talált szerkesztés feltételei nem ilyenek, akkor megoldásunk még hiányos.

Ugyanannak a feladatnak többféle megoldása is lehet. Ilyenkor a megoldások közül előnyben részesítjük azt, amelyik egyszerűbb rajzot kíván, és amelyik kevesebb előismeretre épít. Előnyben szoktuk részesíteni az olyan megoldást is, amelyik az ábra analízise és a szerkesztés helyességének bizonyítása során nem kíván számolást, vagy kevesebb számolást kíván.

A szerkesztési feladatok, éppen mert elmélyedést és egyéni leleményességet kívánnak, a geometriai tudásnak jó ellenőrzői és serkentői. Helyesen teszi a kezdő, ha tudását szerkesztési feladatok önálló

megoldásán gyakorolja és tökéletesíti. Nem helyes azonban a túlzás itt sem. Túlzássá válik a szerkesztés, amikor már az a cél, hogy egy ábrát „lehetőleg kellemetlenül megválasztott adatokból” rekonstruáljunk.

**B** Mi nem azokat a részeket soroltuk fel, amelyekre a szerkesztési feladat megoldásának tagozódnia kell, hanem csak olyan részeket említettünk, amelyek a megoldás leírásában sokszor külön súlyt kapnak. Gondolatsorok mechanikus szabdalása itt sem tesz jó szolgálatot.

Ilyen vonatkozásban először is azt említjük, hogy a diszkusszió a megoldásnak nem szerves része. A lényeges csak az, hogy a feladatot minden lehetséges esetben megoldjuk, s hogy minden megoldást megkapjunk. Hogy ez így van, arról sokszor már maga az az út meggyőző, amelyen a szerkesztéshez eljutottunk.

Az ábra analízise nem választható el mindig magától a szerkesztéstől. Ez az elválasztás sokszor az összefüggő gondolatok mesterkélt elkülönítését eredményezné.

A szerkesztés helyességének bizonyítására sincs mindig szükség. Ez többnyire önként következik a szerkesztés indokolásából. Nincs szükség a szerkesztés helyességének a bizonyítására akkor sem, ha tudjuk, hogy a feladatnak van megoldása, s ha a szerkesztés egyetlen megoldást adott.

---

## 3. fejezet - A TÉR ELEMI GEOMETRIÁJA

Ebben a fejezetben a tér geometriájával foglalkozunk, térbeli alakzatokat vizsgálunk, és pedig elemi geometriai módszerrel.

Ez a fejezet a sík elemi geometriájával foglalkozó, előző fejezetnél bonyolultabb, hiszen a síkot is felölelő térben az alakzatok változatossága nagyobb és az elhelyezkedések lehetősége többértű. Fejezetünk mégis rövidebb az előzőnél, főként azért, mert a sík tárgyalásával már előkészítettük a tér tárgyalását is. Egy másik ok az, hogy éppen az alakzatok nagyobb változatossága miatt kevesebb alakzat részletes tárgyalására törekszünk.

A két fejezet tárgyalása azért is lényegesen eltérő, mert itt a 12.2-ben kimondott párhuzamossági axiómát már kezdettől fogva használjuk.

### 23. § Párhuzamos térelemek

A térelemek viszonylagos elhelyezkedését, majd két egyenes, egy egyenes és egy sík, végül két sík párhuzamosságát tárgyaljuk.

**23.1** Két térelem viszonylagos elhelyezkedésének lehetőségeit tekintjük át.

Pont és egyenes, valamint pont és sík esetében csak azt említhetjük, hogy a pont vagy illeszkedik a másik térelemhez, vagy nem. Egymáshoz nem illeszkedő pont és egyenes egyetlen síkot határoz meg, hiszen a pont az egyenes két pontjával együtt azt az egyetlen síkot szolgáltatja, amelyik a pontot is és az egyenest is tartalmazza.

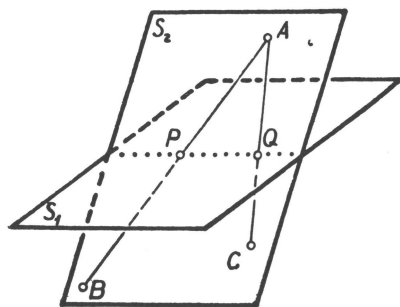
Tudjuk már, hogy két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van. Ha van közös pontjuk (metsző egyenesek), akkor egy síkot határoznak meg, hiszen metszéspontjuk és egy-egy pontjuk azt az egyetlen síkot szolgáltatja, amelyik tartalmazza a két egyenest. Ha két egyenesnek nincs közös pontja, akkor vagy egy síkban vannak, tehát párhuzamosak (vö. 12.1), vagy pedig nincsenek egy síkban, azaz *kitérők* (torz egyenesek). Két egyenes tehát lehet metsző, párhuzamos vagy kitérő.

Tudjuk, hogy ha egy egyenesnek és egy síknak egynél több közös pontja van, akkor a sík az egész egyenest tartalmazza, az egyenes és a sík illeszkedik. Ha az egyenesnek és síknak egy közös pontja van, azt mondjuk, hogy az egyenes *döfi* (metszi) a síkot, vagy hogy a sík *metszi* az egyenest, és közös pontjukat *dőféspontnak* vagy *metszéspontnak* nevezzük. Ha egy egyenesnek és egy síknak nincs közös pontja, akkor az egyenes és a sík *párhuzamos*. Egy egyenes és egy sík lehet tehát illeszkedő, metsző vagy párhuzamos.

Ha két síknak van közös pontja, azt mondjuk, hogy *metszik* egymást. Ha viszont nincs közös pontjuk, akkor a síkokat *párhuzamosaknak* mondjuk. Két sík lehet tehát metsző vagy párhuzamos.

**Tétel.** *Két egymást metsző sík közös pontjai egy egyenest alkotnak.*

*Bizonyítás.* Legyen  $P$  az  $S_1$  és  $S_2$  síkok közös pontja. Az  $S_2$  síkban a  $P$  ponton áthaladó  $AB$  szakaszt veszünk fel (166. ábra). Egyelőre csak azt akarjuk belátni, hogy  $P$  a síkoknak nem az egyetlen közös pontja. Feltehetjük tehát, hogy az  $A, B$  pontok egyike sincs  $S_1$ -ben, hogy tehát az  $S_1$  határolta félterek egyikében és másikában vannak. Az  $S_2$  síkban egy az  $AB$  egyeneshez nem illeszkedő  $C$  pontot veszünk fel. Ismét feltehetjük, hogy  $C$  nincs  $S_1$ -ben, hogy tehát pl. abban a féltérben van, amelyik a  $B$  pontot is tartalmazza. Ekkor azonban az  $AC$  szakasz metszi  $S_1$ -et egy  $Q$  pontban, és  $Q$  a két síknak  $P$ -től különböző közös pontja, hiszen az  $A, B, C$  pontok nem kollineárisak.



166

Mindenképpen van tehát a két síknak két közös pontja, s akkor e két pont összekötő egyenesét mind a két sík tartalmazza. Ezen az egyenesen kívül további közös pontjuk nem lehet, mert akkor a közös pontok között volna három nem kollineáris, és így a két sík azonos volna. —

**A** A térgeometria tárgyalása igen egyszerű, gyorsan bizonyítható tételekkel kezdődik. Itt elsősorban ennek és a következő paragrafusnak egyszerű tételeire gondolunk. Nehézzé teszi ezt a részt mégis a sok egyszerű gondolat egymáshoz kapcsolódása, valamint az a körülmény, hogy csupa szemléletesen közvetlenül belátható tényről van szó. Akinek e rész elsajátítása nehézséget okoz, inkább maradjon meg a szemléletes belátás álláspontjánál, semmint hogy az, ami önmagában nyilvánvaló, a bizonyítások meg nem emésztése folytán kolonccá váljék.

**B1** A térbeli párhuzamos egyenesekkel kapcsolatosan nem mondunk ki új párhuzamossági axiómát. A 12.2-ben kimondott síkbeli axióma azt is biztosítja, hogy ha a térben egy egyenest és egy kívül elhelyezkedő pontot adunk meg, akkor ezen a ponton át ezzel az egyenessel párhuzamosan egyetlen egyenes fektethető. Ez abból adódik, hogy az egyenes és a pont egy síkot határoz meg, ezen a síkon belül eredeti párhuzamossági axiómánk szerint csak egy párhuzamos van, más párhuzamosról pedig nem lehet szó, hiszen két egyenes csak akkor lehet párhuzamos, ha egy síkban van.

**B2** Állítjuk, hogy minden el nem fajuló félegyenestartó leképezés (vö. 6.1 B4) az egyenesek párhuzamosságát, a síkok párhuzamosságát, valamint egyenes és sík párhuzamosságát egyaránt megtartja. Ez egyszerűen abból következik, hogy két egyenes, két sík, valamint sík és egyenes képének akkor van közös pontja, ha ennek inverze hozzátartozik a két leképzett alakzathoz, ha tehát a leképzett alakzatoknak is van közös pontjuk. Ezt az okoskodást csak azzal kell kiegészítenünk, hogy két párhuzamos egyenes képe a síktartás miatt kitérő nem lehet.

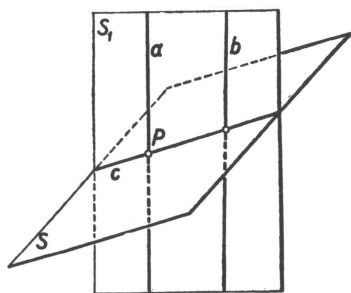
Ezek szerint a tér minden elmozgatása, tükrözése, egybevágósága és hasonlósága (háromféle értelemben is) párhuzamosságtartó.

**23.2 Tétel.** *Ha két párhuzamos egyenes egyike dőf egy síkot, akkor ezt a másik párhuzamos is dőfi.*

Tételünket úgy is szövegezhettük, hogy ha egy sík két párhuzamos egyenes egyikével párhuzamos vagy illeszkedik hozzá, akkor a másikkal is párhuzamos, vagy illeszkedik ahhoz.

*Bizonyítás.* Legyen  $a \parallel b$ , és mossa  $a$  az  $S$  síkot a  $P$  pontban (167. ábra).  $a$  és  $b$  egy  $S_1$  síkot határoz meg.  $P$  közös pontja  $S$ -nek és  $S_1$ -nek.  $S$  és  $S_1$  nem azonos, mert  $a$  metszi az  $S$  síkot. Az  $S$  és  $S_1$  síkok tehát egy  $c$  egyenesben metszik egymást, s ez tartalmazza a  $P$  pontot. A  $c$  és  $a$  egyenesek nem azonosak, mert  $c$  illeszkedik  $S$ -hez,  $a$  pedig metszi. A  $c$  egyenes az  $S_1$  síkban van és metszi  $a$ -t, metszi tehát 12.4 szerint a  $b$  egyenest is. Metszéspontjuk  $b$  és  $S$  közös pontja,  $b$  nem illeszkedik  $S$ -hez, mert akkor  $S$  és  $S_1$  azonos volna, hiszen mindkettő tartalmazná a  $b$  egyenest és a  $b$ -hez nem illeszkedő  $P$  pontot. Így tehát  $b$  az  $S$  síkot valóban metszi. —



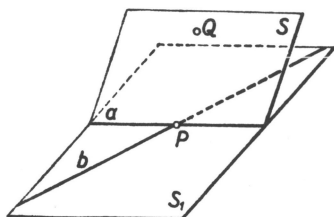


167

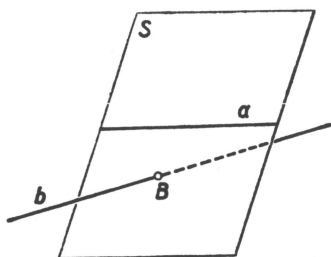
**Tétel.** Ha két egyenes olyan, hogy minden sík, amelyik az egyiket metszi, metszi a másikat is, akkor a két egyenes párhuzamos.

*Bizonyítás.* Azt kell belátnunk, hogy ha  $a$  és  $b$  ilyen tulajdonságú egyenesek, akkor sem metszők, sem kitérők nem lehetnek.

a) Ha  $a$  és  $b$  metszik egymást egy  $P$  pontban, akkor egy  $S_1$  síkot határoznak meg (168. ábra). Legyen a  $Q$  pont az  $S_1$  síkon kívül.  $Q$  és  $a$  egy  $S$  síkot határoz meg. Ez az  $S$  sík illeszkedik  $a$ -hoz, viszont metszi  $b$ -t, mert egyrészt  $P$  közös pontjuk, másrészt  $S$  nem illeszkedhetik  $b$ -hez, hiszen akkor az  $a, b$  egyenesek mindegyikét tartalmazná, és ezért  $S_1$ -gyel azonos volna, ami lehetetlen, mert  $Q$  nincs  $S_1$ -ben.



168



169

b) Ha  $a$  és  $b$  kitérő, akkor  $b$ -nek egy  $B$  pontja  $a$ -val együtt egy  $S$  síkot határoz meg (169. ábra).  $S$  illeszkedik  $a$ -hoz, viszont metszi  $b$ -t, mert egyrészt  $B$  közös pontjuk, másrészt  $S$  nem illeszkedhetik  $b$ -hez, hiszen akkor a kitérő  $a$  és  $b$  egyenesek egy síkban volnának.

Mindkét esetben találtunk olyan  $S$  síkot, amelyik azt mutatja, hogy  $a$  és  $b$  nem rendelkezik a tételben kimondott tulajdonsággal. —

**Tétel.** Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor az első kettő is párhuzamos egymással.

*Bizonyítás.* Legyen  $a \parallel c$  és  $b \parallel c$ . Minden az  $a$  egyenest metsző sík első tételünk értelmében  $c$ -t is metszi, és akkor ugyanilyen indoklással  $b$ -t is metszi. Második tételünk szerint tehát  $a \parallel b$ . —

Tételünk alapján kimondhatjuk, hogy egy egyenessel egyező állású egyenesek egymással is egyező állásúak, hogy tehát a térben is ugyanolyan joggal beszélhetünk az egyenesek *állásáról*, mint ahogyan ezt a síkban tettük.

Egyező állású félegyenesekről szólva nem kell új térbeli definíciót adnunk arra, hogy irányuk mikor egyező, vagy ellentétes, hiszen két egyező állású félegyenes egy síkban van.

**Tétel.** Egy félegyenessel egyező irányú félegyenesek egymással is egyező irányúak.

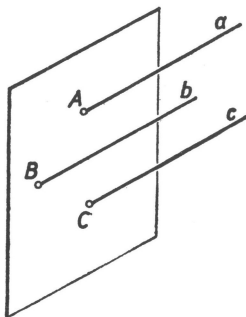
*Bizonyítás.* Ha az  $A, B$  kezdőpontú  $a, b$  félegyenesek a  $C$  kezdőpontú  $c$  félegyenessel egyező irányúak, és mindhárom félegyenes egy síkban van, akkor tételünk 12.5 szerint helyes. Feltehetjük tehát, hogy az  $ABC$  sík nem tartalmazza mindegyiket, hogy tehát szakaszunk első tétele szerint mindegyiknek az egyenesét metszi (170. ábra).

Mint hogy az  $AC$  egyenes nem választja el az egy irányú  $a, c$  félegyeneseket, nem választja el ezeket az  $ABC$  sík sem, hiszen ez a sík az  $a, c$  félegyenesek síkjából csak az  $AC$  egyenest tartalmazza. Ugyanígy kimondhatjuk, hogy az  $ABC$  sík nem választja el a  $b, c$  félegyeneseket sem. Ezek szerint az  $a, b, c$  félegyenesek mindannyian ugyanabban az  $ABC$  sík határolta féltérben vannak.

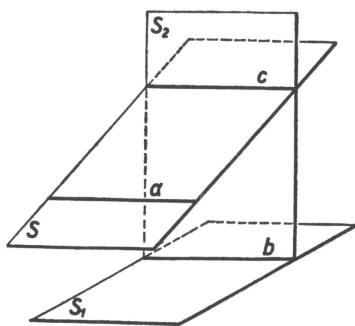
Megállapításunkból következik, hogy az  $AB$  egyenes sem választhatja el az  $a, b$  félegyeneseket, hogy tehát ezek egy irányúak. —

Tételünk alapján ugyanolyan joggal beszélhetünk térbeli félegyenesek, irányított egyenesek és irányított szakaszok *irányáról*, mint ahogyan ezt a síkban tettük.

**23.3 Tétel.** Egy egyeneshez illeszkedő sík az egyenessel párhuzamos síkot az egyenessel párhuzamos egyenesben metszi.



170



171

A tétel úgy értendő, hogy ha metszi, akkor párhuzamos egyenesben metszi.

*Bizonyítás.* Ha a szóban forgó egyenesek nem volnának párhuzamosak, metszenék egymást, hiszen egy síkban vannak. Metszéspontjuk azonban az egymással párhuzamos egyenesnek és síknak közös pontja volna. —

A bizonyított tétel alapján kimondhatjuk, hogy ha egy sík párhuzamos egy egyenessel, akkor van a síkban ezzel párhuzamos egyenes, sőt a sík minden pontján áthalad a síknak ezzel párhuzamos egyenese.

**Tétel.** Egy egyenessel párhuzamos két sík metszésvonala az egyenessel párhuzamos.

Ismét úgy értendő a tétel, hogy ha van metszésvonal, akkor ez az egyenessel párhuzamos.

*Bizonyítás.* Legyen az  $a$  egyenes az  $S_1$  és  $S_2$  síkokkal párhuzamos, és legyen  $b$  ez utóbbiak metszésvonala (171. ábra). Az  $S_2$  síknak egy  $b$ -hez nem illeszkedő pontján és az  $a$  egyenesen át  $S$  síkot fektetünk. Ez az  $S_2$  síkot az előző tétel szerint egy  $a$ -val párhuzamos  $c$  egyenesben metszi. Ugyancsak az előző tétel szerint  $c$  a  $b$  egyenessel is párhuzamos, s ezért  $a$  és  $b$  is párhuzamosak. —

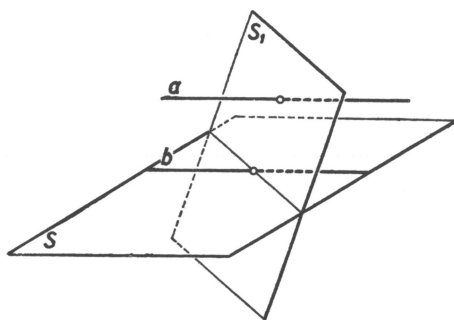
**Tétel.** Egy egyenest metsző sík az egyenessel párhuzamos síkot is metszi.

*Bizonyítás.* Ha  $a \parallel S$  és  $S_1$  metszi az  $a$  egyenest, akkor az  $S$  síkon belül egy  $a$ -val párhuzamos  $b$  egyenest veszünk fel (172. ábra). Az imént láttuk be, hogy ez lehetséges. 23.2 szerint  $S_1$  metszi a  $b$  egyenest, s ezért kell, hogy messe az  $S$  síkot is. —

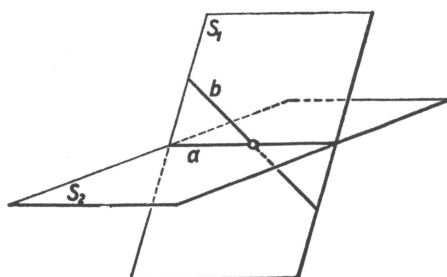
**23.4 Tétel.** Két párhuzamos sík egyikét dőfő egyenes dőfi a másikat is.

Másként szövegezve: két párhuzamos sík egyikével párhuzamos vagy hozzá illeszkedő egyenes a másik síkkal is párhuzamos, vagy illeszkedik ahhoz.

*Bizonyítás.* Ha az egyenes a másik síkot nem dőfné, akkor párhuzamos volna vele. Ekkor az első sík metszene egy egyenest, de nem metszene egy ezzel párhuzamos síkot. Ez ellentmond az előző tételnek. —



172



**Tétel.** *Ha két sík olyan, hogy minden egyenes, amelyik az egyiket dőfi, dőfi a másikat is, akkor a két sík párhuzamos.*

Ez a tétel az előzővel együtt azt mondja ki, hogy két sík akkor és csak akkor párhuzamos, ha rendelkeznek a tételben leírt tulajdonsággal.

*Bizonyítás.* Azt kell bizonyítanunk, hogy két metsző sík nem rendelkezhetik ezzel a tulajdonsággal.

Ha  $S_1$  és  $S_2$  metszik egymást az  $a$  egyenesben, akkor az  $S_1$  síkon belül az  $a$  egyenest metsző  $b$  egyenest veszünk fel (173. ábra).  $b$  metszi  $S_2$ -t, viszont nem metszi  $S_1$ -et. A két sík tehát valóban nem rendelkezik a tételben leírt tulajdonsággal. —

**Tétel.** *Ha két sík párhuzamos egy harmadikkal, akkor a két sík egymással is párhuzamos.*

Más szóval azt mondja ki ez a tétel, hogy ha két sík metszi egymást, akkor egy harmadik sík nem lehet mindkettővel párhuzamos, hanem metszenie kell a két sík valamelyikét.

*Bizonyítás.* Legyen  $S_1 \parallel S_3$  és  $S_2 \parallel S_3$ . Minden az  $S_1$  síkot dőfő egyenes dőfi  $e$  pont első tétele szerint  $S_3$ -at, és ezért dőfi  $S_2$ -t is. Így tehát az előző tétel szerint  $S_1$  és  $S_2$  is párhuzamos. —

Két egymástól nem feltétlenül különböző sík *egyező állású*, ha a két sík azonos vagy párhuzamos. Utolsó tételünk szerint egy síkkal egyező állású síkok egymással is egyező állásúak.

A Síkok párhuzamosságát, valamint állásuk egyezését illetően ugyanazt mondhatjuk a szóhasználatról, mint 12.4 A-ban.

A sík által tartalmazott egyenest sem mondjuk a síkkal párhuzamosnak. Egymással párhuzamos vagy egymáshoz illeszkedő, tehát egymást nem metsző egyenes és sík esetében mondhatjuk, hogy az egyiknek az állása párhuzamos a másikkal vagy annak állásával.

**B1** 12.4 B mintájára megállapíthatjuk, hogy az állás egyezése a tér síkjain belül osztályokat létesít, és az állás egy osztály síkjainak a közös tulajdonsága. Egy síkállást egy a megfelelő osztályhoz tartozó sík megadásával jellemezhetünk.

**B2** Miután az egyenesek és síkok állását, valamint a félegyenesek irányát a térben is bevezettük, 23.1 B2 alapján kimondhatjuk, hogy a tér közönséges félegyenestartó leképezései az egyenesállások, a síkállások, valamint az irányok körén belül is leképezést létesítenek. Beszélhetünk tehát pl. arról, hogy egy elmozgatás egy megadott irányt milyen irányba visz át.

**23.5 Tétel.** *Két párhuzamos sík egyikét metsző sík metszi a másikat is, és a két metszésvonal egymással párhuzamos.*

*Bizonyítás.* Ha a metsző sík a második síkot nem metszené, akkor párhuzamos volna vele, s akkor ez a második sík párhuzamos volna két metsző síkkal, ami az előző tétel szerint lehetetlen. A két metszésvonal párhuzamos, mert egy síkban van, s ha volna közös pontjuk, ez a párhuzamos síkok közös pontja volna. —

Tételünk egyszerű eljárást ad arra, hogy két párhuzamos sík egyikének egy megadott egyeneséből a másik síknak vele párhuzamos egyeneséhez jussunk. Áll ez akkor is, ha az utóbbi egyenes egy pontját tetszőlegesen megválasztjuk a síkban.

Nyomban következik a tételből, hogy ha két metsző síkpár két-két párhuzamos síkból áll, akkor a síkpárok metszésvonalai is párhuzamosak. Ha ugyanis a két síkpárból egy-egy egymással nem párhuzamos síkot ragadunk ki, akkor ezek metszésvonalai tételünk szerint párhuzamos az említett két metszésvonal mindegyikével.

Tételünkre támaszkodva könnyen beláthatjuk, hogy három síknak vagy van közös pontja, vagy pedig vannak párhuzamos egyenesek. Ha ugyanis a három sík egymással párhuzamos, akkor egy metsző sík mindhárom párhuzamos egyenesekben metszi; ha viszont a három sík közül kettő metszi egymást, és a síkoknak nincs közös pontjuk, akkor a metszésvonal mindhárom síkkal párhuzamos állású, tehát mindegyik tartalmaz vele párhuzamos egyeneseket.

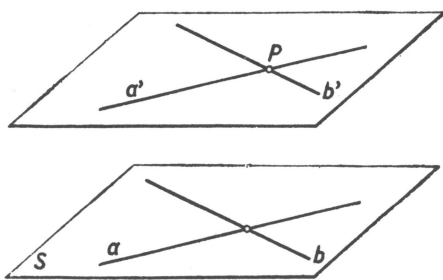
**Tétel.** *Ha két metsző egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor a metsző egyenesek síkja is párhuzamos vele.*

*Bizonyítás.* Ha a két síknak volna metszésvonala, akkor ez 23.3 első tétele miatt párhuzamos volna a metsző egyenesek mindegyikével, ami lehetetlen. —

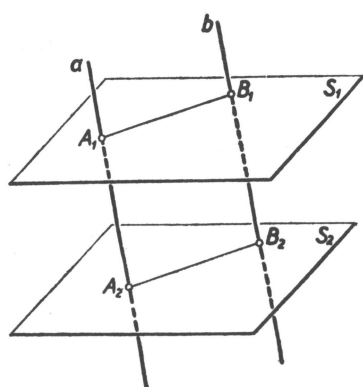
**Tétel.** *Egy síkhoz egy rajta kívül elhelyezkedő ponton át egy és csak egy párhuzamos sík fektethető.*

*Bizonyítás.* a) Nem haladhat a ponton át két párhuzamos sík, mert akkor két metsző sík mindegyike párhuzamos volna ugyanazzal a síkkal, ami 23.4 utolsó tétele szerint lehetetlen.

b) Van olyan sík, amely áthalad a  $P$  ponton és párhuzamos a  $P$  ponton át nem haladó  $S$  síkkal. Legyenek ugyanis  $a$  és  $b$  az  $S$  síkban elhelyezkedő metsző egyenesek. A  $P$  ponton át ezekkel párhuzamos  $a'$  és  $b'$  egyeneseket fektetünk (174. ábra). Az  $a'$  és  $b'$  egyenesek metszik egymást a  $P$  pontban, és 23.2 első tételének átfogalmazása szerint párhuzamosak az  $S$  síkkal. Ezért az  $a'$  és  $b'$  egyenesek által meghatározott, a  $P$  ponton áthaladó sík az előző tétel szerint  $S$ -sel párhuzamos. —



174



175

**23.6 Tétel.** *Párhuzamos síkok párhuzamos egyenesekből egyenlő szakaszokat metszenek ki.*

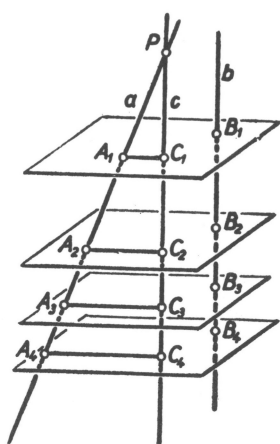
*Bizonyítás.* Legyen  $a \parallel b$  és  $S_1 \parallel S_2$ , messe továbbá az  $a$  és  $b$  egyenes az  $S_1, S_2$  síkokat  $A_1, A_2$  és  $B_1, B_2$  pontokban (175. ábra). Minthogy az  $a, b$  egyenesek síkja 23.5 első tétele szerint a párhuzamos

síkokat párhuzamos egyenesekben metszi,  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ . Ezért az  $A_1A_2B_1B_2$  négyszög parallelogramma, és így  $A_1A_2 = B_1B_2$ . —

**Tétel.** Ha két egyenest párhuzamos síkokkal metszünk, akkor az egyik egyenes szeletei úgy aránylanak egymáshoz, mint a másik egyenes megfelelő szeletei.

*Bizonyítás.* Messék a párhuzamos  $S_1, S_2, S_3, S_4$  síkok az  $a$  és  $b$  egyenest rendre az  $A_1, A_2, A_3, A_4$  és  $B_1, B_2, B_3, B_4$  pontokban (176. ábra). Azt kell bizonyítanunk, hogy  $A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4$ .

Evégből az  $a$  egyenes  $P$  pontján át  $b$ -vel párhuzamos  $c$  egyenest húzunk. Ezt a síkok a  $C_1, C_2, C_3, C_4$  pontokban metszik. Az  $a, c$  egyenesek síkja a párhuzamos síkokat párhuzamos egyenesekben metszi, és ezek az  $a, c$  egyenesek dőfspontjain haladnak át. A párhuzamos szelők tétele szerint tehát  $A_1A_2 : A_3A_4 = C_1C_2 : C_3C_4$ , ami a bizonyítandó állítással azonos, mert az előző tétel szerint  $C_1C_2 = B_1B_2$  és  $C_3C_4 = B_3B_4$ . —



176

A bizonyított tételből következik, hogy ha két párhuzamos síkot összekötő szakasz felezőpontján át a síkokkal párhuzamos síkot fektetünk, akkor ez minden összekötő szakaszt felez. Ezt a síkot a két párhuzamos sík középpárhuzamosának mondjuk.

## 24. § Tételek hajlásszöge

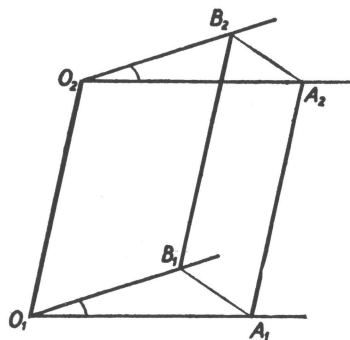
Két egyenes, illetve két sík hajlásszögével, majd sík és egyenes merőlegességével, végül sík és egyenes hajlásszögével foglalkozunk.

**24.1 Tétel.** Ha két konvex szög szárai páronként egyező irányúak, akkor a két szög egyenlő.

A síkban már bevezetett szóhasználatot elfogadva mondhatjuk, hogy a tétel szerint az egy állású szögek a térben is egyenlők.

*Bizonyítás.* A szögek párhuzamos szárait az  $O_1A_1 = O_2A_2$  és az  $O_1B_1 = O_2B_2$  távolságokat mérjük fel (177. ábra). Az  $O_1A_1A_2O_2$  és  $O_1B_1B_2O_2$  négyszögek parallelogrammák, mert két-két szemközti oldaluk párhuzamos és egyenlő. Ebből következik, hogy egyrészt  $O_1O_2$  és  $A_1A_2$ , másrészt  $O_1O_2$  és  $B_1B_2$  párhuzamos és egyenlő szakaszok. Ugyanez áll akkor az  $A_1A_2$  és  $B_1B_2$  szakaszokra is, ezért  $A_1A_2B_1B_2$

parallelogramma és  $A_1B_1 = A_2B_2$ . Ezek szerint az  $O_1A_1B_1$  és  $O_2A_2B_2$  háromszögek egybevágók, mert oldalaik páronként egyenlők. E háromszögek megfelelő szögeire tehát  $\angle O_1A_1B_1 = \angle O_2A_2B_2$ . —



177

Tételünk jogot ad arra, hogy irányok szögéről a térben is beszélhessünk.

Két egyenes *hajlásszögének* (szög) nevezzük a tér egy pontján át velük párhuzamosan húzott egyeneseknek a hajlásszögét. Tételünk szerint ez a szög nem függ attól, hogy a tér melyik pontján át húztunk párhuzamosakat, hiszen ezek mindig négy páronként ugyanakkora szöget határolnak. Definíciónk szerint az egyenesek hajlásszöge csak az állásuktól függ.

Hangsúlyozzuk, hogy kitérő egyenesek is lehetnek merőlegesek egymásra. Ha azonban egy pontból egy egyenesre bocsátott merőlegesről beszélünk, akkor az egyenest metsző merőlegesre gondolunk. Ehhez a merőlegeshez az adott pont és egyenes síkján belül juthatunk el. Ennek a merőlegesnek a talppontja az adott pontnak az adott egyenesre vetett merőleges vetülete.

**B** Ennek a paragrafusnak több szakaszához fűzünk olyan megjegyzést, amely rámutat, hogyan egyszerűsödik a tárgyalás, ha a térmozgás ismeretére is építünk.

Egyszerűbben bizonyíthatjuk szakaszunk tételét is, ha előbb a tér eltolásaira vonatkozó ismereteinket némileg kiegészítjük. Toljuk el a tér minden pontját ugyanabban az irányban és ugyanakkora távolságra. Nyilvánvaló, hogy ez a leképezés az adott iránnyal párhuzamos egyeneseket, síkokat, valamint az általuk határolt fűlsíkokat és fűltereket önmagukra képezi le. Az adott iránnyal párhuzamos síkokon belül ez a leképezés 14.4 szerint a sík eltolását adja, ebből pedig következik, hogy leképezésünk távolságtartó. Ezek szerint ez a leképezés a tér eltolásával azonos, hiszen távolságtartó, továbbá egy fűlteret és ennek határán elhelyezkedő fűlsíkot helyben hagy. Minthogy ilyen előírással a tér minden eltolásához eljuthatunk, minden eltolásra áll, hogy a tér pontjait ugyanabban az irányban és ugyanakkora távolságra viszi. Beszélhetünk tehát a tér eltolásának *irányáról* és *távolságáról*. Egy eltolást irányának és távolságának megadásával jellemezhetünk, de jellemezhetjük egyetlen pont kezdő és véghelyzetének megadásával is.

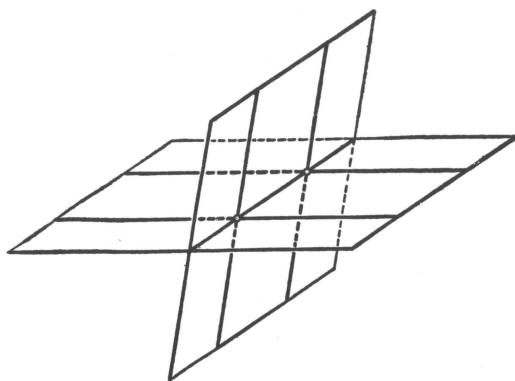
Az elmondottakból nyomban következik, hogy a tér eltolásai az egyenesek állását és irányát megtartják, s hogy az eltolások kommutatív csoportot alkotnak. 12.6 és 14.4 megállapításai tehát a térben is helyesek.

Szakaszunk tételének bizonyításaként elég ezek után arra hivatkozni, hogy az egyik szög csúcsát a másikéba átvivő eltolás az első szög szárainak az irányát nem változtatja meg, tehát ezeket a második szög száira fekteti.

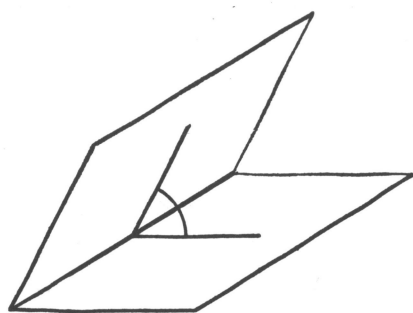
**24.2 Tétel.** *Ha két metsző sík mindegyikében merőlegest állítunk a metszésvonalra, mégpedig ugyanabban a pontban, akkor e merőlegesek hajlásszöge nem függ a metszésvonal pontjának megválasztásától.*

*Bizonyítás.* Ha a metszésvonal két pontjában mindkét síkon belül merőlegest állítunk a metszésvonalra (178. ábra), akkor párhuzamos egyenesekhez jutunk mindkét síkban. Az előző szakasz eszerint tételünk helyességét mondja ki. —

Ha két sík nem párhuzamos, *hajlásszögüknek* (szög) a metszésvonal egy pontjában a síkokon belül állított merőlegesek hajlásszögét mondjuk. A bizonyított tétel biztosítja azt, hogy ez a szög csak maguktól a síkoktól függ. Párhuzamos síkok hajlásszöge nullszög.



178



179

Síkok hajlásszöge csak az állásuktól függ, hiszen páronként egyező állású síkok metszésvonalai párhuzamosak, s ezért párhuzamosak a metszésvonataikra bennük állított merőlegesek is.

Egy egyenes által határolt két félsík a teret két részre vágja. Egy ilyen térrészt *lapszögnek* (lapszögtartomány) nevezünk. A határoló félsíkok a lapszög *lapjai*, közös határegyenesük, a lapszög *éle*. A lapszöget azzal a *szöggel* mérjük, melynek csúcsa a lapszög élén van, szárai a lapszög lapjain az élre merőlegesen helyezkednek el, szögtartománya pedig a lapszög belsejében van (179. ábra). Ez a szög az előző szakasz szerint nem függ csúcsának megválasztásától hiszen olyan szögekről van itt szó, amelyeknek szárai párhuzamosak és egy irányúak. Ha a lapszög szöge  $90^\circ$ -nál nem nagyobb, akkor ez a szög a határoló lapok síkjainak a hajlásszögét adja meg. A  $180^\circ$ -os lapszög a féltérrel azonos. A lapszögek közé sorolhatjuk  $360^\circ$ -os lapszöggé a teljes teret, valamint  $0^\circ$ -os lapszöggé a félsíkot is. Megemlítjük, hogy ha egyenlő, nagyobb vagy kisebb lapszögekről, továbbá lapszögek számszorosáról, összegéről vagy különbségéről beszélünk, akkor ezzel a lapszögek szögei között fennálló kapcsolatra utalunk.

Két közös határu félsík *hajlásszöge* (szög) az általuk határolt két lapszög szögének a kisebbike. Egymást síkká kiegészítő félsíkok hajlásszöge  $180^\circ$ .

**B1** A lapszög definíciójában a tér kettévágásáról volt szó. 3.1 B mintájára rámutatunk arra, hogy a két térrészhez hogyan juthatunk el. Nem kell foglalkoznunk azzal az esettel, amikor a felbontó félsíkok együttesen egy teljes síkot alkotnak, mert ez a sík a teret félterekre bontja fel. Minden más esetben a félsíkok síkjai egy-egy olyan félteret határolnak, amelyik tartalmazza a másik félsíkot. E két féltér közös része a keresett térrészek egyike, a másik pedig ezt a térrészt a teljes térré egészíti ki.

**B2** Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a lapszögekre vonatkozó legegyszerűbb tények bizonyítása ezen a helyen még akadályokba ütköznék. Rövidesen azonban erre is sor kerül (lásd 24.4).



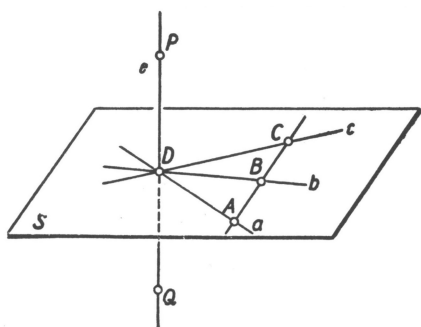
**24.3** Egy egyenes és egy sík akkor *merőleges* egymásra, ha az egyenes a sík minden egyenesére merőleges. Természetesen csak a síkot dőfő egyenesnek lehet meg ez a tulajdonsága, hiszen a síkkal párhuzamos, valamint a síkban elhelyezkedő egyenesek a sík egyenesei közül egyesekkel párhuzamosak, s így nem lehetnek merőlegesek azokra. A síkot dőfő egyenes merőlegességének kimondásához elég azt megkövetelni, hogy a síknak a dőfősponton áthaladó egyenesekre legyen merőleges, hiszen a sík minden egyenesre párhuzamos ezeknek valamelyikével.

**Tétel.** *Ha egy egyenes merőleges egy síknak két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges a síkra is.*

Másként szövegezve azt mondja ki e tétel, hogy a szóban forgó egyenes a sík minden egyenesére merőleges. Ha tételünk kimondásakor már eleve csak a síkot dőfő egyenesre szorítkozunk, akkor az előre bocsátottak alapján kimondhatjuk: Ha egy a síkot dőfő egyenes merőleges a síknak a dőfősponton áthaladó két egyenesére, akkor merőleges a síkra is.

*Bizonyítás.* a) Először azt bizonyítjuk, hogy ha az  $A, B$  pontok mindegyike ugyanolyan messze van  $P$ -től, mint  $Q$ -tól, akkor az  $AB$  egyenes minden pontja ilyen. Feltevésünk szerint az  $ABP, ABQ$  háromszögek egybevágók, hiszen oldalaik páronként egyenlők. Ebből következik, hogy ha az  $AB$  egyenes által határolt, a  $P, Q$  pontokat tartalmazó félsíkokat  $AB$  körül elforgatva egymásra fektetjük, akkor a  $P, Q$  pontok helyzete azonos lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy ennek a két pontnak az  $AB$  egyenes pontjaitól mért távolságai az elforgatás előtt is egyenlők voltak.

b) Legyen  $e$  merőleges az  $S$  sík két egymást metsző egyenesére. Kell, hogy  $e$  dőfje az  $S$  síkot, mert különben volna az  $S$  síkban  $c$ -vel párhuzamos egyenes, és ez nem lehet merőleges  $S$ -nek két egymással nem párhuzamos egyenesére. Legyen  $e$  dőfőspontja  $D$ , és legyenek a  $D$  ponton áthaladó  $a, b$  egyenesek párhuzamosak azzal a két egyenessel, amelyekről tudjuk, hogy  $e$ -re merőlegesek. Tudjuk tehát, hogy  $e$  merőleges az  $a, b$  egyenesekre, és azt kell bizonyítanunk, hogy  $e$  merőleges a  $D$  ponton áthaladó,  $S$  síkban tetszőlegesen felvett  $c$  egyenesre is, hiszen akkor  $e$  a sík minden egyenesére merőleges (180. ábra).



180

Az  $e$  egyenesen  $D$ -re nézve szimmetrikusan elhelyezkedő  $P, Q$  pontokat veszünk fel. Az  $a, b$  egyenesek minden pontja egyenlő távolságra van ezektől a pontoktól, hiszen ezek az egyenesek merőlegesen felezik a  $PQ$  szakaszt. Az  $S$  síkban olyan egyenest veszünk fel, amely az  $a, b, c$  egyeneseket egymástól különböző  $A, B, C$  pontokban metszi. Minthogy az  $A, B$  pontok ugyanolyan messze vannak  $P$ -től, mint  $Q$ -tól, a) szerint a  $C$  pont is ilyen. Ugyancsak a) szerint ilyen akkor a  $c$ , azaz  $CD$  egyenes valamennyi pontja, hiszen  $D$  is rendelkezik a mondott tulajdonsággal. Ebből azonban következik, hogy merőlegesen felezi a  $PQ$  szakaszt. —

A bizonyított tételből nyomban következik, hogy van olyan egyenes és sík, amelyek egymásra merőlegesek, mert könnyű két olyan egyenest szerkeszteni, amelyek egy adott egyenesre merőlegesek, és egymást pl. az adott egyenes egy pontjában metszik.

**B** Ha a tárgyalást a térelmozgatásokra alapozzuk, akkor ennek a szakasznak a tételéhez a következőképpen juthatunk el:

Tekintsük az  $S$  síkot és rajta kívül a  $P$  pontot. A  $P$  pont, valamint  $S$ -re vonatkozó  $Q$  tükörképe a szimmetria következtében  $S$  minden egyes pontjától egyenlő távolságra van. Ebből következik, hogy a

$P, Q$  pontokon átfektetett síkok mindegyike  $S$ -et a  $PQ$  szakasz felezőmerőlegesében metszi, hogy tehát a  $PQ$  egyenes  $S$ -re merőleges. Minthogy a síknak egy szakasz felezőmerőlegeséhez nem illeszkedő pontjai a szakasz végpontjaitól különböző távolságra vannak, azt is megállapíthatjuk, hogy  $S$  a  $P, Q$  pontoktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye. Mivel a  $PQ$  szakasz minden felezőmerőlegese ilyen pontokból áll, az  $S$  sík mindezeket a felezőmerőlegeseket tartalmazza.

A  $PQ$  egyenesről és egy pontjáról, ti. a  $PQ$  szakasz felezőpontjáról megállapítottuk, hogy az egyenesre ebben a pontjában emelt merőlegesek egy síkot alkotnak. Ugyanez igaz akkor bármely egyenesre és annak bármely pontjára, hiszen elmozgathatjuk a teret úgy, hogy egy egyenes és egy pontja tetszőlegesen előírt helyzetbe jusson.

Nyomban belátható most már a szakaszunkban kimondott tétel helyessége is. Elég ehhez azt megjegyezni, hogy ha az  $a, b$  egyenesek az  $e$  egyenest egy  $T$  pontjában merőlegesen metszik, akkor  $a$  és  $b$  síkja a  $T$ -ben  $e$ -re emelt merőlegesek síkjával azonos.

**24.4 Tétel.** *Egy egyenesre egy pontjában állított merőlegesek mindannyian egy síkban vannak. Ez az egyetlen olyan sík, amely ezt az egyenest a megadott pontban merőlegesen metszi.*

*Bizonyítás.* a) Emeljünk merőlegeseket az  $e$  egyenesre  $D$  pontjában. Legyen  $a$  és  $b$  kettő ezek közül. E két egyenes  $S$  síkja az előző szakasz szerint merőleges  $e$ -re. Legyen  $c$  egy tetszőleges egyenes a  $D$ -ben  $e$ -re emelt merőlegesek közül,  $e$  és  $c$  síkja az  $S$  síkot ugyancsak olyan egyenesben metszi, amely merőlegesen metszi az  $e$  egyenest a  $D$  pontban. Ez a metszésvonal azonos  $c$ -vel, mert egy síkban egy egyenesre egy ponton át csak egyetlen merőleges egyenes húzható. Ezek szerint  $c$  az  $S$  síkban van.

b) Ha egy sík áthalad a  $D$  ponton és merőleges  $e$ -re, akkor tartalmaz olyan egyeneseket, amelyek az  $e$  egyenest  $D$ -ben merőlegesen metszik, tartalmaz tehát az  $S$  sík által is tartalmazott egyeneseket. Ezért a szóban forgó sík  $S$ -sel azonos. —

Hozzáfűzhetjük a bizonyításhoz, hogy  $S$  minden pontján áthalad olyan egyenes, amely az  $e$  egyenest  $D$ -ben merőlegesen metszi. Tételünk alapján kimondhatjuk tehát, hogy ha egymást merőlegesen metsző egyenesek síkját az egyik egyenes körül megforgatjuk, akkor a másik egyenes az elsőre merőleges síkot ír le. Ugyanezt a tényt mondja ki az a megállapítás, hogy ha egy derékszöget egyik szára körül megforgatunk, akkor a másik szár az elsőre merőleges síkot ír le. Hasonlóképpen azt is megállapíthatjuk, hogy ha egy síkot egy egyenese körül megforgatunk, akkor a síknak egy ehhez a forgástengelyhez nem illeszkedő pontja kört ír le, ennek síkja merőleges a forgástengelyre, középpontja pedig a forgástengelyen van.

Ha egy félsíkot forgatunk el határegyenesre körül, lapszöghöz juthatunk. Miközben a félsík végigsöpri ezt a lapszöget, egy a félsíkon belül a határegyenesre emelt merőleges — mint láttuk — egy síkban mozog, mégpedig éppen olyan szöget súrol, amely 24.2 szerint lapszögünk mértékét adja meg. Ezek szerint a lapszög szögét úgy is megkaphatjuk, hogy a lapszöget egy az élére merőleges síkkal elmetsszük. Közvetlenül belátható ilyen módon, hogy ha két közös élű lapszög egyike tartalmazza a másikat, akkor az elsőnek a szöge a nagyobb, hogy továbbá a lapszög éle által határolt és a lapszög belsejében haladó félsík a lapszöget két olyan lapszögre bontja fel, amelyek szögei összegül az eredeti lapszög szögét adják, hogy végül a lapszöget egyértelműen meghatározzuk, ha megadjuk egyik lapját, a szögét, valamint megmondjuk, hogy a lapszög az adott lap síkja által határolt félterek melyikében van, vagy melyiket tartalmazza. Szó lehet tehát egy lapszöget felező félsíkról, és ennek síkjáról, a lapszög felezősíkjáról, valamint metsző síkok két (egymásra merőleges) szögfelező síkjáról is. A most mondottak alapján két közös határu félsík irányított szögéről is beszélhetünk. Ehhez a határegyenesre merőleges síkokban jutunk el, és méréséhez az ilyen sík irányítása, azaz a határegyenes körüli pozitív irányú térelforgatás ismerete szükséges.

**Tétel.** *Két ponttól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye sík. Ez a sík a két pont összekötő szakaszát felezi és merőleges rá.*

*Bizonyítás.* a) Ha a  $P$  pont az  $A, B$  pontoktól egyenlő távol van, akkor rajta van az  $AB$  szakasznak az  $ABP$  síkon belül szerkesztett felezőmerőlegesén. Rajta van tehát  $P$  az előző tétel szerint azon az  $S$  síkon, amelyiket  $AB$  felezőmerőlegesének forgatásával nyerünk, amelyik tehát az  $AB$  szakaszt merőlegesen felezi.

b) Ha a  $P$  pont nincs  $A$ -tól és  $B$ -tól egyenlő távolságra, akkor az  $AB$  szakasznak az  $APB$  síkon belül szerkesztett  $c$  felezőmerőlegesén sincs rajta. Minthogy az  $APB$  sík az  $S$  síkot  $c$ -ben metszi,  $P$  nincs az  $S$  síkon. —

A bizonyítás alapján kiegészíthetjük tételünket azzal, hogy ha  $PA < PB$ , akkor a  $P$  pont abban az  $S$  által határolt féltérben van, amelyik az  $A$  pontot is tartalmazza.

**B** Ha a tárgyalást a térelmozgatásokra alapozzuk, tehát 24.3 B tárgyalását folytatjuk, akkor ez a szakasz majdnem feleslegessé válik. Szakaszunk első tételét ugyanis már 24.3 B-ben bebizonyítottuk, sőt az ott szereplő  $P$ ,  $Q$  pontokra vonatkozólag a második tételt is. Ehhez most csak azt a kiegészítést kell fűznünk, hogy a  $PQ$  egyenesen a  $PQ$  szakasz helyett egy tetszőlegesen előírt hosszúságú, az  $S$  síkra vonatkozólag ugyancsak szimmetrikus szakaszt vehetünk fel, és ezért a második tétel egymástól tetszőlegesen távoli pontokra, tehát minden pontpárra helyes. Utolsó következtetésünk a térelmozgatások ismeretén alapszik, azon a tényen, hogy a tér elmozgatása révén bármely szakasz ráfektethető egy megadott ugyanakkora szakaszra.

Azzal kapcsolatban, amit egy félsíknak a határegyense körüli elforgatásáról mondtunk, itt mindjárt a térnek egy tengely körüli elforgatásáról szólhatunk. Kimondhatjuk tehát, hogy ha a teret egy egyenes körül elforgatjuk, akkor az egyenesre merőleges síkok az egyenes dőfspontja körül fordulnak el. A tér tengely körüli elforgatása felfogható eszerint egy pontja körül forgó síkhoz tapasztott tér elfordulásaként is. Igaz akkor, hogy a forgó síkhoz tapasztott tér meg tengely körül forog, hiszen bármely síkot és egy pontját a tér elmozgatása segítségével megadott helyzetbe vihetünk.

A tér elforgatását a tengelynek, valamint egy rá merőleges irány kezdő- és véghelyzetének a megadásával jellemezhetjük, hiszen ezek az irányok megszabják a tengelyre merőleges síkok elfordulását. Ez a két irány egy irányított szöget ad meg. Az ehhez tartozó forgásszögek a tér elforgatásának *irányát* és *szögét* szolgáltatják.

**24.5** Miután az előző két szakaszban megismerkedtünk az egymásra merőleges sík és egyenes fogalmával, majd olyan tételekkel, amelyek egy megadott egyenest merőlegesen metsző síkhoz vezetnek el, ebben a szakaszban az egymásra merőleges síkra és egyenesre vonatkozó alapvető tényekkel ismerkedünk meg.

**Tétel.** *Ha egy sík merőleges egy egyenesre, akkor merőleges bármely ezzel párhuzamos egyenesre is.*

*Bizonyítás.* A sík egyenese a két párhuzamos egyenessel egyenlő szögeket zár be. Ha tehát e szögek egyike derékszög, akkor derékszög a másik is. —

**Tétel.** *Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor merőleges bármely ezzel párhuzamos síkra is.*

*Bizonyítás.* A második sík minden egyeneséhez található 23.5 szerint olyan párhuzamos, amelyik az első síkban helyezkedik el. Minthogy pedig az első sík egyenesei merőlegesek egyenesünkre, ez a második sík egyeneseire is áll. —

A most bizonyított két tételt egybefoglalva kimondhatjuk, hogy az egyenes és a sík merőlegessége csak állásuktól függ.

**Tétel.** *Adott ponton át egy és csak egy olyan sík fektethető, amely egy adott egyenesre merőleges.*

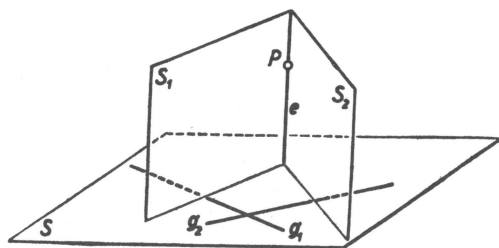
*Bizonyítás.* a) Már 24.4 első tétele kimondotta tételünk helyességét arra az esetre, amidőn az adott pont illeszkedik az adott egyeneshez.

b) Ha az adott  $P$  pont nem illeszkedik az adott  $e$  egyeneshez, akkor a  $P$  ponton át  $e$ -vel párhuzamos  $f$  egyenest fektetünk, a) szerint egyetlenegy  $f$ -re merőleges és a  $P$  pontot tartalmazó sík van. Szakaszunk első tétele szerint ez a sík  $e$ -re is merőleges, és a keresett sík csak ez az  $f$ -re merőleges sík lehet. —

**Tétel.** *Adott ponton át egy és csak egy olyan egyenes halad, amely egy adott síkra merőleges.*

*Bizonyítás.* a) Az adott  $S$  síkban egymást metsző  $\xi_1, \xi_2$  egyeneseket választunk. Az adott  $P$  ponton át ezekre merőleges  $\zeta_1, \zeta_2$  síkokat fektetünk (181. ábra). E síkok tartalmaznak (legalább) egy közös, a  $P$

ponton áthaladó  $e$  egyenest, hiszen  $P$  a két sík közös pontja. A merőlegesség definíciója szerint az  $e$  egyenes merőleges  $\mathcal{S}_1$ -re és  $\mathcal{S}_2$ -re. 24.3 tétele szerint tehát  $e$  merőleges  $S$ -re is.



181

b) A  $P$  ponton át nem haladhat két  $S$ -re merőleges egyenes, mert akkor ezeknek síkja  $S$ -et olyan egyenesben metszené, amelyre ebben a síkban  $P$ -ből két merőleges volna bocsátható. —

**Tétel.** *Két ugyanarra a síkra merőleges egyenes párhuzamos egymással.*

Első tételünkkel egybefoglalva azt mondja ki ez a tétel, hogy ha  $e$  merőleges egy síkra, akkor valamely másik egyenes akkor és csak akkor merőleges rá, ha  $c$ -vel párhuzamos.

*Bizonyítás.* Egy ponton áthaladó  $s$  a két egyenessel párhuzamos egyeneseket tekintünk. Szakaszunk első tétele szerint ezek is merőlegesek a síkunkra. Az előző tétel szerint e két egyenes tehát azonos, és ezért a tételben szereplő két egyenes párhuzamos. —

**Tétel.** *Két ugyanarra az egyenesre merőleges sík párhuzamos egymással.*

Az előző tételnél mondottak mintájára tételünket a második tétellel foglalhatjuk egybe: ha  $S$  merőleges egy egyenesre, akkor valamely másik sík akkor és csak akkor merőleges rá, ha  $S$ -sel párhuzamos.

*Bizonyítás.* Egy ponton áthaladó  $s$  a két síkkal párhuzamos síkokat tekintünk. E szakasz második tétele szerint ezek a síkok is merőlegesek egyenesünkre,  $s$  akkor a harmadik tétel szerint azonosak. Így tehát a tételben szereplő síkok párhuzamosak. —

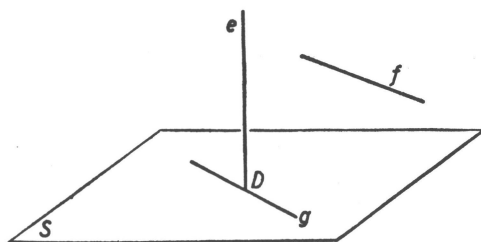
Tételeinket összefoglalva kimondhatjuk, hogy egymásra merőleges sík és egyenes állása egymást kölcsönösen és egyértelműen meghatározza.

**24.6** Ebben a szakaszban olyan tételeket tárgyalunk, amelyek a sík és egyenes merőlegességét egyenesek merőlegességével, valamint síkok merőlegességével hozzák kapcsolatba.

**Tétel.** *Legyen az  $e$  egyenes az  $S$  síkra merőleges. Valamely egyenes akkor és csak akkor merőleges az  $e$  egyenesre, ha nem dőfi az  $S$  síkot.*

*Bizonyítás.* Legyen  $f$  a szóban forgó egyenes,  $D$  pedig  $e$  és  $S$  metszéspontja (182. ábra). A  $D$  ponton át  $f$ -fel egyező állású  $g$  egyenest fektetünk.

$f$  akkor és csak akkor nem dőfi az  $S$  síkot, ha  $g$  sem dőfi, ha tehát  $g$  az  $S$  síkban van. Ez viszont akkor és csak akkor következik be, ha  $g$  és vele együtt  $f$  is merőleges az  $e$  egyenesre. —



182

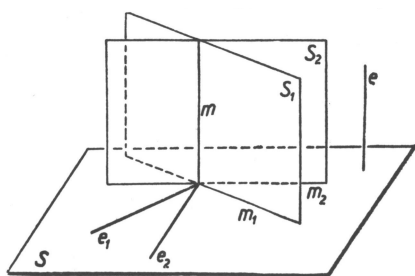
Tételünk azt is kimondja, hogy ha két egyenes egymásra merőleges, és az egyiknek valamely pontján át a másikra merőleges síkot fektetünk, akkor ez a sík tartalmazza az első egyenest. Így tehát egymásra merőleges egyenesek egyikén át a másikra merőleges síkot fektethetünk.

Tételünkéből is következik, hogy ha egy sík pontjaiból egy rá merőleges egyenesre merőlegeseket bocsátunk, akkor ezeknek a talppontja közös, ti. azonos a sík és a rá merőleges egyenes dőfspontjával. Ez a kijelentés azt is magában foglalja (az előző bekezdésben mondottakra hivatkozva), hogy ha egy egyenes pontjait merőlegesen vetítjük egy rá merőleges egyenesre, akkor egyetlen közös talpponthoz jutunk.

Utolsó megállapításunk többek között azt is kimondja, hogy ha egy síkra merőleges egyenes dőfspontjából, valamint egy további pontjából merőlegest bocsátunk a síknak ugyanarra az egyenesére, akkor ugyanaz a talppont adódik (három merőleges tétele).

**Tétel.** *Egymást metsző síkok hajlásszöge a rájuk merőleges egyenesek hajlásszögével egyenlő.*

*Bizonyítás.* Egy az  $S_1, S_2$  síkok  $m$  metszésvonalára merőleges  $S$  sík ezeket a síkokat az  $m_1, m_2$  egyenesekben metszi (183. ábra). Metszéspontjukban az  $S_1, S_2$  síkokra merőleges  $e_1, e_2$  egyeneseket állítunk. Ezek  $S$ -ben vannak, hiszen  $m$ -re is merőlegesek. Azt kell bizonyítanunk, hogy az  $m_1, m_2$  egyenesek hajlásszöge az  $e_1, e_2$  egyenesek hajlásszögével egyenlő. Ez abból következik, hogy az  $S$  síknak egymásra páronként merőleges egyeneseiről van szó. —

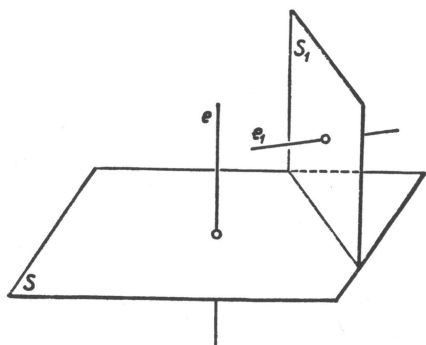


183

A most bizonyított tétel többek között azt is kimondja, hogy két sík akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a síkokra merőleges egyenesek egymásra is merőlegesek.

**Tétel.** *Legyen az  $e$  egyenes az  $S$  síkra merőleges. Valamely sík akkor és csak akkor merőleges az  $S$  síkra, ha nem metszi az  $e$  egyenest.*

*Bizonyítás.* Legyen  $S_1$  a szóban forgó sík, és  $e_1$  egy rá merőleges egyenes (184. ábra). Éppen az imént láttuk be, hogy  $S_1$  akkor és csak akkor merőleges  $S$ -re, ha  $e_1$  merőleges  $e$ -re. Ez viszont szakaszunk első tétele szerint akkor és csak akkor következik be, ha  $e$  nem dőfi az  $S_1$  síkot. —



Tételünk többek között kimondja, hogy ha az  $e$  egyenesen át síkot fektetünk, akkor  $S$ -re merőleges síkhoz jutunk, s hogy ha egymásra merőleges síkok metszésvonalának egy pontjában az egyik síkra merőlegest állítunk, akkor a másik síkban elhelyezkedő egyeneshez jutunk.

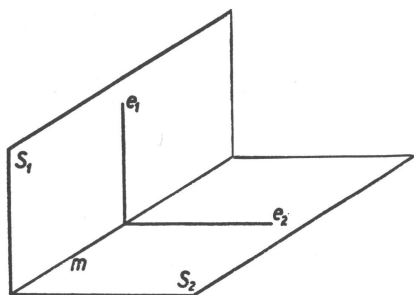
**Tétel.** *Ha egymásra merőleges síkok egyikében merőlegest állítunk a metszésvonalra, a másik síkra merőleges egyeneshez jutunk.*

*Bizonyítás.* A merőleges  $S_1, S_2$  síkok  $m$  metszésvonalára egy pontban a két síkon belül  $e_1, e_2$  merőlegeseket állítunk (185. ábra). A síkok merőlegessége miatt  $e_1$  merőleges  $e_2$ -re. Minthogy  $e_1$  az  $m$  egyenesre is merőleges, merőleges az  $S_2$  síkra is. —

**Tétel.** *Ugyanarra a síkra merőleges síkok egymást a síkra merőleges egyenesben metszik.*

A tétel csak úgy értendő, hogy ha van metszésvonal, akkor az merőleges.

*Bizonyítás.* Tekintsük az  $S$  síkra merőleges  $S_1, S_2$  síkokat és a rá ugyancsak merőleges ( $S_1$ -hez és  $S_2$ -höz nem illeszkedő)  $e$  egyenest (183. ábra). Az  $S_1, S_2$  síkok az utolsó előtti tétel szerint  $e$ -vel párhuzamosak. Metszésvonaluk tehát 23.3 szerint párhuzamos  $e$ -vel, s ezért szintén merőleges  $S$ -re. —



A most bizonyított tétel alapján kimondhatjuk, hogy ha egy sík egy egyenesen átfektetett síkok közül kettőre merőleges, akkor mindre merőleges, s hogy egy sík akkor és csak akkor merőleges egy egyenesre, ha a rajta átfektetett síkokra merőleges.

**24.7** Ebben a szakaszban az egyenes és a sík hajlásszögének bevezetése a cél, és evégből először a síkra való merőleges vetítésről lesz szó. Ehhez kapcsolódva tárgyaljuk a síkra vonatkozó tükrözést is.

Egy pontból egy síkra bocsátott merőleges egyenest a pont merőleges *vetítőegyenese*nek, dőféspontját a pont merőleges *vetületének* (projekció) nevezzük. A pontból a síkra bocsátott *merőlegesnek* (merőleges szakasz) mondjuk a pontnak és vetületének az összekötő szakaszát is, a pont vetülete ennek a merőlegesnek a *talppontja*.

Egy adott síkra való merőleges *vetítés* (projekció, projiciálás) az a ponttranszformáció, amely a tér minden pontjához az adott síkra vetett merőleges vetületét rendeli hozzá. Egy alakzat vetülete az alakzat pontjainak vetületéből áll. Az adott sík alakzata egyben a saját vetülete is. Szó van ugyan néha másfajta vetítésről is, a leggyakrabban azonban a merőleges vetítés szerepel, és ezért a merőleges jelzőt általában elhagyjuk.

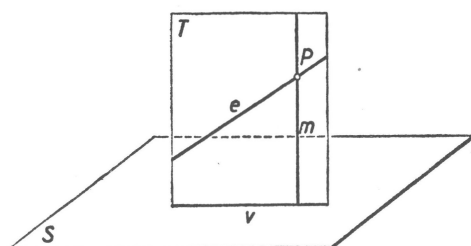
**Tétel.** *Egy adott síkra nem merőleges egyenesen át egyetlenegy olyan sík fektethető, amely merőleges az adott síkra. A két sík metszésvonala az egyenesnek az adott síkra vetett merőleges vetülete.*

A tétel csak az adott síkra nem merőleges egyenesekről szól, hiszen merőleges egyenesen átfektetett síkok mindegyike merőleges az adott síkra. Az ilyen merőleges egyenes esetében a dőféspont egyben

az egyenes merőleges vetülete. Tételünk kimondja, hogy minden más esetben az egyenes merőleges vetülete is egyenes. A tételben említett egyetlen merőleges síkot a szóban forgó egyenes (merőleges) *vetítősíkjának* mondjuk.

*Bizonyítás.* a) Tekintsük az  $S$  síkot, a rá nem merőleges  $e$  egyenest és ennek egy  $P$  pontját (186. ábra). A keresett síknak 24.6 harmadik tétele szerint tartalmaznia kell a  $P$ -ből  $S$ -re bocsátott  $m$  merőleget. A keresett sík eszerint csak az egymást  $P$  pontban metsző  $e$  és  $m$  egyenesek  $T$  síkja lehet. Ez a sík 24.6 említett tétele szerint valóban merőleges is az  $S$  síkra.

b) Bizonyítanunk kell még, hogy az  $S$ ,  $T$  síkok  $v$  metszésvonala valóban az  $e$  egyenes merőleges vetülete. Az  $m$  egyenes metszi a  $T$  síkban elhelyezkedő  $e$ ,  $v$  egyeneseket. Igaz ezért, hogy ha  $e$  két egyenes valamelyikének egy pontján át  $m$ -mel párhuzamos egyenest fektetünk, akkor ez metszi a két egyenes közül a másikat is. Minthogy az  $m$ -mel párhuzamos egyenesek  $S$ -re merőlegesek, megállapításunk azt jelenti, hogy  $e$  minden pontjának vetülete  $v$ -hez tartozik, és  $v$  minden pontja  $e$  valamelyik pontjának a vetülete. —



186

Ha egy egyenes nem merőleges egy síkra, akkor *hajlásszögük* (szög) az egyenesnek és a síkra vetett merőleges vetületének a hajlásszöge. A síkra merőleges egyenes hajlásszöge derékszög. A síkkal párhuzamos állású egyenes hajlásszöge nullszög. Az egyenes és a sík hajlásszögének ismeretében szó lehet természetesen a szakasznak, félegyenesnek vagy iránynak a síkkal alkotott hajlásszögéről is.

A *síkra vonatkozó tükrözés* minden ponthoz a pontnak a saját vetületére vonatkozó tükörképét rendeli. Megállapíthatjuk, hogy ez a tükrözés csak a sík pontjait hagyja változatlan helyzetben, és hogy a síkra merőleges egyenesen belül a dőféspontra vonatkozó tükrözést, a síkra merőleges síkon belül pedig a két sík metszésvonalára vonatkozó tükrözést jelent. Ezekből a tulajdonságokból következik, hogy minden pont a saját tükörképének a tükörképe, hogy továbbá a síkra vonatkozó tükrözés távolságtartó, azaz egybevágóság, s így szögtartó is.

Itt említjük, miután a térelemek hajlásszögét minden lehetséges esetben tisztáztuk, hogy beszélhetünk egymást metsző kör és egyenes, két kör, valamint kör és sík hajlásszögéről is. Ehhez úgy jutunk, hogy a kört a metszéspontbeli érintőjével pótoljuk. Kör és sík esetét illetően megjegyezhetjük, hogy a két metszéspontban ugyanakkora hajlásszög keletkezik. Ez arra a síkra vonatkozó szimmetriából következik, amelyik merőleges a síkra és a kör síkjára, továbbá áthalad a kör középpontján.

**B1** Definíáljuk a síkra vonatkozó tükrözést, és levezettük egyes olyan tulajdonságait is, amelyeket a bevezető fejezetből már ismerünk. Nincs erre szükség, ha a bevezető fejezet egészére, tehát a térmozgásokra is építünk. Ebben az esetben elég lett volna itt csak a tükörsíkra merőleges egyenesek és síkok tükröződéséről szólnunk.

**B2** A tér szögtartó leképezései nemcsak a metsző egyenesek szögét, hanem kitérő egyenesek szögét, síkok szögét, valamint sík és egyenes szögét is megtartják. Ez abból következik, hogy a párhuzamosság megtartása a szögtartásnak már ismert következménye, s hogy az említett szögfajtákat a párhuzamosságra támaszkodva metsző egyenesek szögével definiáltuk. Megállapításunk nemcsak az egybevágóságokra és köztük a tükrözésekre, hanem a térhasonlóságaira is vonatkozik.

**24.8** Ebben a szakaszban a térmozgásokkal foglalkozunk. Nem építünk arra, amit a térmozgásokról a bevezető fejezetben mondtunk, és ezért újból definiáljuk a tér eltolását, elforgatását és elmozgatását,

igazoljuk ezeknek a transzformációknak bizonyos tulajdonságait, így többek között azokat is, amelyek a bevezető fejezetben már említést nyertek. Eljárásunk indokolását illetően 6.5 B5-re utalunk.

a) A tér egy ponttranszformációja akkor *eltolás* (tranzláció), ha bármely két  $A, B$  ponthoz olyan  $A_1, B_1$  pontokat; rendel, hogy az  $AA_1, BB_1$  irányított szakaszok egy irányúak és egyenlők. Egy eltolást eszerint az eltolás *irányának* és *távolságának* megadásával jellemezhetünk. Az el nem mozgatót is az eltolások közé soroljuk; ennek távolsága 0, irányát pedig tetszőlegesnek tekinthetjük.

A definícióból következik, hogy a tér eltolása az eltolás irányával párhuzamos egyeneseket és síkokat önmagukban tolja el, s hogy ugyanezt e síkoknak ilyen egyenesek által határolt félsíkjaikról, valamint az ezek által a síkok által határolt félterekről és a félsíkjaik által határolt lapszögekről is elmondhatjuk.

Mint hogy bármely egyenesen átfektethetünk olyan síkot, amely az eltolás irányával párhuzamos, és ez a sík önmagában tolódik el, a sík eltolásának ismert tulajdonságaira hivatkozva azt is megállapíthatjuk, hogy a tér eltolása távolságtartó és egyenestartó, s hogy az egyenesek állását és az irányokat nem változtatja meg. 23.6 első tételére hivatkozva az is adódik, hogy az eltolás síktartó és a síkok állását megtartja. Ha két eltolás van adva, az irányukkal párhuzamos síkok eltolódásából következik, hogy két eltolás egymás utáni alkalmazása újból eltolást ad, s hogy az eredő eltolás nem függ a két összetett eltolás sorrendjének a megválasztásától.

b) A tér *elforgatása* olyan ponttranszformáció, amely az  $e$  egyenesre merőleges  $S$  síkot  $e$  dőféspontja körül forgatja el, az  $e$  egyenes által határolt félsíkok mindegyikét pedig úgy forgatja el  $e$  körül, hogy az  $S$  síkkal alkotott metszésvonala az  $S$  síkban adott elforgatás előírása szerint változzék meg. Ez az elforgatás 24.4 szerint az  $e$ -re merőleges síkok mindegyikét  $e$  dőféspontja körül forgatja el, mégpedig úgy, hogy ha ezeket a párhuzamos síkokat egymásnak megfelelő módon irányítjuk, akkor elforgatásaikat ugyanazok a szögek mérik. Az  $S$  sík szerepét ezek szerint az  $e$ -re merőleges síkok bármelyike átveheti.

A tér elforgatását *tengelyének*, *irányának* és *szögének* megadásával jellemezhetjük. Az elforgatás ugyanúgy nem határozza meg egyértelműen a forgásirányt és a szöget, mint ahogyan az irányított szög nem szabja meg egyértelműen a hozzátartozó forgásszöget (vö. 3.5). A tér elforgatásai közé sorolt el nem forgatás a forgástengelyt sem határozza meg, hiszen azt tetszőlegesnek gondolhatjuk. Az elforgatás definíciójából kiolvasható, hogy egy elforgatást egyértelműen jellemzünk, ha megadjuk a forgástengelyt és egy általa határolt félsík kezdő és elforgatott helyzetét.

Megállapíthatjuk, hogy a tér elforgatása csak a tengely pontjait hagyja változatlan helyzetben, hacsak nem el nem forgatásról van szó. Mint hogy a tengelyre merőleges síkok helyzete nem változik meg, ugyanez az ezek által a síkok által határolt félterekre is áll.

A tengelyre támaszkodó félsíkok elforgatása mutatja, hogy a tér elforgatása a tengellyel párhuzamos (és az általa tartalmazott) szakaszok hosszát nem változtatja meg. Nem változik meg a tengelyre merőleges szakaszok hossza sem, hiszen egy a tengelyre merőleges síkon belül fordulnak el, és a sík elforgatása távolságtartó. Könnyen adódik most már, hogy a tengelyhez szögben hajló szakaszok hossza sem változik meg, hiszen ezeket egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogójának tekinthetjük, amelynek egyik befogója párhuzamos a tengellyel és a másik merőleges rá; ha pedig a befogók hossza változatlan, akkor nem változik az átfogó hossza sem. A most mondottakat összefoglalva kimondhatjuk, hogy a tér elforgatása távolságtartó.

c) A tér *elmozgatásához* úgy jutunk, hogy egymást követően véges sok eltolást és elforgatást alkalmazunk. Lehetséges tehát, hogy egyetlen eltolás vagy elforgatás szerepel csak, de lehetséges az is, hogy az eltolások és elforgatások megadott sorrendjében e kétfajta művelet váltakozva, tetszőlegesen vegyítve fordul elő.

Nyomban következik az elmozgatás definíciójából, hogy két elmozgatás egymásutánja ismét elmozgatást ad. Könnyen beláthatjuk azt is, hogy egy elmozgatás ellentétes transzformációja ugyancsak elmozgatás. Ehhez az ellentétes elmozgatáshoz jutunk, ha az eredeti elmozgatást szolgáltató eltolások és elforgatások inverzeit egymás után, de az ellenkező sorrendben alkalmazzuk.

Minden elmozgatás távolságtartó, hiszen az eltolás és az elforgatás is ilyen. Eszerint minden elmozgatás egybevágóság. Ebből már következik (lásd 11.1), hogy a tér minden elmozgatása



szögtartó, egyenestartó és síktartó. Ezekből a tulajdonságokból könnyen adódik, hogy az elmozgatás a félegyenest, szakaszt, félsíkot, szögtartományt, félteret és lapszöveget ugyanilyen alakzatba viszi át, s hogy párhuzamos egyenesekhez, síkokhoz, valamint egyeneshez és síkhoz ugyancsak ilyen párhuzamos alakzatokat rendel. Beszélhetünk ezért arról, hogy valamely elmozgatás egy irányt milyen irányba visz át. A hajlásszögek definíciója alapján következik az elmondottakból, hogy a tér elmozgatása egyenesek, síkok, valamint egyenes és sík hajlásszögét sem változtatja meg. Megemlítjük, hogy az ebben a bekezdésben említett tulajdonságokkal nemcsak a tér elmozgatása, hanem minden egybevágósága is rendelkezik, hiszen az okoskodás csak a távolságtartásra épült.

Ha megadunk egy  $S$  félsíkot és határán egy  $s$  félegyenest, továbbá egy  $S_1$  félsíkot és ennek határán egy  $s_1$  félegyenest, akkor van olyan térmozgás, amely az  $S, s$  alakzatokat az  $S_1, s_1$  helyzetbe viszi. Ennek bizonyítása végett először azt az eltolást alkalmazzuk, amely  $s$  kezdőpontját  $s_1$  kezdőpontjába viszi, az  $S$  félsíkot pedig  $S'$  helyzetbe juttatja. Ezt követően elforgatjuk a teret  $S'$  és  $S_1$  síkjának közös egyenese körül úgy, hogy a már másodszor elmozgatott  $S$  félsík  $S_1$  síkjába jusson. Ezután elforgatjuk a teret az  $s_1$  kezdőpontjában  $S_1$  síkjára emelt merőleges körül, és ezáltal elérjük, hogy a már háromszor elmozgatott  $s$  félegyenes fedje  $s_1$ -et. Ezek az elmozgatások az  $S$  félsíkot vagy  $S_1$ -re fektetik, vagy pedig az ezt kiegészítő félsíkra. Az utóbbi esetben még az  $s_1$  egyenese körüli  $180^\circ$ -os elforgatást, azaz erre az egyenesre vonatkozó tükrözést alkalmazzuk. Egy eltolást követő elforgatásokkal minden helyzetben elérhető tehát, hogy az  $S, s$  alakzatok az előírt helyzetbe jussanak.

Bizonyítjuk végül, hogy csak egyetlenegy olyan elmozgatás van, amelynek lehetőségét az előző bekezdésben kimutattuk. Abból indulunk ki, hogy ha két ilyen elmozgatás egyike után a másikkal ellentétes elmozgatást alkalmazzuk, akkor az  $S, s$  alakzatokat meg nem változtató elmozgatáshoz jutunk. Elég belátnunk, hogy ez utóbbi tulajdonsággal az elmozgatások közül csak a helyben hagyás rendelkezik, mert akkor az egyik elmozgatás után a saját inverzét kellett, hogy alkalmazzuk, a két szóban forgó elmozdulás tehát azonos volt.

A bizonyítás érdekében először azt nézzük meg, hogy a tér egybevágóságai között melyek nem változtatják meg az  $S, s$  alakzatok helyzetét. Tudjuk, hogy ha  $S$  és  $s$  helyben marad, akkor  $S$  síkjának egyetlen pontja sem mozdul el. Ebből következik, hogy ha egy  $P$  pont  $P_1$  helyzetbe jut, akkor a  $P, P_1$  pontok  $S$  síkjának minden pontjától ugyanakkora távolságra vannak. Ha tehát  $P$  és  $P_1$  nem azonos, akkor  $S$  síkja merőlegesen felezi a  $PP_1$  szakaszt. Ez azt jelenti, hogy az  $S, s$  alakzatokat helyben hagyó egybevágóság az el nem mozgatáson kívül csak az  $S$  síkjára való tükrözés lehet. Ez a tükrözés valóban rendelkezik is ezzel a tulajdonsággal.

Most már csak azt kell belátnunk, hogy a síkra vonatkozó tükrözés nem elmozgatás. Ezt nyomban be is látjuk, ha tudjuk, hogy a tér eltolásai és elforgatásai, s ezért a tér elmozgatásai is megtartják a tér orientációját, viszont a síkra vonatkozó tükrözés megváltoztatja azt (vö. B1).

**B1** Okoskodásunk végén felhasználtuk azt, hogy a tér eltolása és elforgatása a tér orientációját megtartja, a síkra vonatkozó tükrözés viszont megváltoztatja. Ezek a megállapítások 6.5-ben a térelmozgatás ismeretére épültek. Megmutatjuk most, hogy okoskodásunkat hogyan lehet ilyen hivatkozás nélkül befejezni.

A térelmozgatás ebben a szakaszban megismert fogalmából indulunk ki és azt akarjuk bizonyítani, hogy a síkra vonatkozó tükrözés nem elmozgatás.

Először azt bizonyítjuk, hogy minden elmozgatás megvalósítható azáltal, hogy először egy szabadon választott ponton áthaladó tengelyek körül elforgatunk, azután pedig egyetlen eltolást alkalmazzunk. A megvalósítandó elmozgatást bizonyos sorrendben adott eltolások és elforgatások definiálták. Az ebben az előírásban előforduló elforgatások tengelyeivel a szabadon választott  $O$  ponton át párhuzamosokat húzunk. A teret először ezek körül a párhuzamosok körül forgatjuk el, mégpedig

az eredeti elforgatások iránya és szöge által adott irányban és szöggel. Azt állítjuk, hogy ezek után az elforgatások után már egyetlen eltolást kell csak alkalmazni ahhoz, hogy a szóban forgó tér elmozgatáshoz eljussunk, mégpedig azt az eltolást, amelyik az  $O$  pontot az előírt  $O_1$  véghelyzetbe viszi.

Ennek az állításnak az igazolásához elég belátnunk, hogy párhuzamos tengelyek körüli, egyező forgásirányú és szögű elforgatások az irányokat ugyanúgy változtatják meg. Ebből következik ugyanis, hogy ha térelmozgatásunk a  $P$  pontot a  $P_1$  helyzetbe viszi, akkor az irányított  $OP$  szakasz az általunk alkalmazott átalakítások során is az  $O_1P_1$  helyzetbe jut, hiszen egyrészt  $O$  az elforgatások során helyben maradt, az eltolás pedig  $O_1$  helyzetbe vitte, másrészt  $OP$  irányát a térelmozgatást definiáló eltolások nem változtatják meg, az elforgatásokról pedig bizonyítani fogjuk, hogy  $OP$  irányát ugyanúgy változtatják meg, mint az általunk alkalmazottak. Ezek szerint  $P$  kétféle véghelyzete valóban azonos.

A párhuzamos tengelyek körüli elforgatásokról szóló kijelentésünk helyességét kell még bizonyítanunk. Tudjuk, hogy ha a síkot az  $A$ ,  $B$  pontok körül ugyanolyan forgásirányban és ugyanakkora szöggel elforgatjuk, akkor az irányok ugyanúgy változnak meg. Ebből következik, hogy a  $B$  körüli elforgatáshoz úgy is eljutunk, hogy először a  $B$  pontot  $A$ -ba vivő eltolást, ezt követően az  $A$  körüli elforgatást, végül pedig az  $A$  pontot  $B$ -be vivő eltolást alkalmazzuk. Hasonlót mondhatunk ezért a térnek a párhuzamos  $a$ ,  $b$  tengelyek körüli egyező forgásirányú és szögű elforgatásairól, hiszen ezek a műveletek a tengelyekre merőleges síkokat önmagukba tolják el, illetőleg forgatják el. Igaz tehát, hogy a  $b$  tengely körüli elforgatáshoz jutunk, ha először a tengelyekre merőleges irányú, a  $b$  egyenest  $a$ -ba vivő eltolást, ezt követően az  $a$  tengely körüli elforgatást, végül pedig az imént alkalmazott eltolás inverzét alkalmazzuk. Beláttuk ilyen módon, hogy a két elforgatás az irányokat ugyanúgy változtatja meg, hiszen az eltolások ezeket nem változtatják meg.

b) Miután bebizonyítottuk, hogy egy adott elforgatáshoz a szabadon választott  $O$  ponton áthaladó tengelyek körüli elforgatásokat követő egyetlen eltolással is eljuthatunk, most azt fogjuk belátni, hogy az  $O$  ponton áthaladó tengelyek körüli elforgatások egymásutánját egyetlen ilyen tengelyű elforgatás helyettesítheti. Elég bizonyítanunk, hogy az  $O$  ponton áthaladó tengelyű elforgatások közül bármely kettőnek az egymásutánja egyetlen ilyen elforgatást ad. Ebből valóban következik majd, hogy ez a kijelentés véges sok elforgatásra is helyes, hiszen a két elforgatásról szólót ismételten alkalmazhatjuk. Elég, ha a bizonyítás során két különböző tengelyű elforgatásra gondolunk, amelyeknek egyike sem el nem forgatás.

Abból a 6.5 B4b)-ben már említett tényből indulunk ki, hogy a sík elforgatása két metsző egyenesre vonatkozó tükrözés egymás utáni végrehajtásával valósítható meg. Hozzátehetjük, hogy ha két metsző egyenest a metszéspontjuk körül ugyanakkora szöggel elforgatunk, akkor az ezekre vonatkozó tükrözések egymásutánja a szög megválasztásától függetlenül a síknak mindig ugyanahhoz az elforgatásához vezet. Itt is megállapíthatjuk, hogy ha sík helyett a teret tükrözzük egymást követően ugyanazokra az egyenesekre, akkor a tér elforgatásához, mégpedig az egyenesek metszéspontjában síkjukra emelt merőleges körüli elforgatásához jutunk. Ez itt abból következik, hogy a két tükrözés után a merőleges pontjai helyben maradnak, a tengelyek síkja metszéspontjuk körül elfordul, s ezért ugyanígy fordulnak el a merőleges egyenesen átfektetett síkok is. Ezek szerint a tér elforgatását két egyenesre vonatkozó, egymást követő tükrözés valósítja meg, a tükörtengelyek a forgástengelyt egy pontjában merőlegesen metszik, és síkjukban a metszéspontjuk körül ugyanakkora szöggel szabadon elforgathatók.

Tekintsük most a tér két elforgatását, amelyek  $e_1, e_2$  tengelye az  $O$  ponton áthalad. A tengelyek síkjára az  $O$  pontban emelt merőlegest  $m$ -mel jelöljük. Mindkét elforgatást két tükrözés egymásutánjával pótoljuk. A tükörtengelyeket úgy választjuk meg, hogy a forgástengelyt az  $O$  pontban merőlegesen messék, mégpedig előírjuk, hogy a tükörtengelyek egyike  $m$  legyen. Az első elforgatást a  $e_1, m$  egyenesekre, a másodikat pedig az  $m, e_2$  egyenesekre vonatkozó tükrözésekkel pótoljuk. A két elforgatás egymásutánja ugyanazt adja ezek szerint, mint az egymást követő,  $e_1, m, m, e_2$  egyenesekre

vonatkozó tükrözések. Ez utóbbi sorozatból elhagyhatjuk az  $m$ -re vonatkozó kétszeri tükrözést, hiszen a második éppen megsemmisíti az első hatását. Ezek szerint a két elforgatás együttesének az eredménye ugyanaz, mint az egymást  $O$ -ban metsző  $\ell_1, \ell_2$  egyenesekre vonatkozó tükrözéseké, ez az eredmény pedig, mint láttuk, a térnek egy  $O$  pontot tartalmazó tengely körüli elforgatása.

Bebizonyítottuk tehát, hogy a tér minden elmozgatása megvalósítható a szabadon választott  $O$  ponton áthaladó tengely körüli egyetlen elforgatás és ezt követő egyetlen, az  $O$  pontot az előírt  $Q_1$  helyzetbe vivő eltolás révén.

c) Könnyű most már belátni, hogy a síkra vonatkozó tükrözés nem elmozgatás. Vegyük fel az  $O$  pontot a szimmetriasíkon, tehát úgy, hogy saját  $Q_1$  tükörképével megegyezzen. Előbbi eredményünk ilyen választással azt mondja, hogy ha a síkra vonatkozó tükrözés elmozgatás, akkor egy az  $O$  ponton áthaladó tengely körüli elforgatással azonos. Ez azonban lehetetlenség, mert az elforgatás csak a tengely pontjainak a helyzetét nem változtatja meg, hacsak nem el nem forgatásról van szó, a tükrözés viszont a szimmetriasík pontjait hagyja helyben, és a többi pontot nem.

**B2** Eredeti, 2.1-ben kimondott VIII. axiómánk bizonyításával véget ért az a kettősség, amelyet 6.5 B5 vezetett be. A következő paragrafustól kezdve ez a kettősség már nem jut szóhoz. Az itt következő megjegyzések a kétféle tárgyalásmódnak, valamint bizonyos módosításainak a jellemzésével foglalkoznak. Ebben a megjegyzésben a 6.5 B5-ben kimondott, kevesebbet mondó axiómára épülő tárgyalásról lesz szó. Ebben a tárgyalásban a bevezető fejezet erősen megrövidül, viszont az erre épülő tárgyalásnak még bizonyos kiegészítésére is szükség van.

A bevezető fejezetben az eredeti VIII. axióma helyett csak 6.5 B5 gyengébb axiómájának kimondására kerülhet sor. Ennek következtében el kell hagyni a bevezető fejezetnek mindazokat a részeit, amelyek a térmozgatásra épülnek. Ilyen a teljes 2.4 szakasz, hiszen ott még a sík eltolásának és elforgatásának a definíciója is feltételezi a tér elmozgatások ismeretét. 6.2-ben a tér egybevágóságai között a térelmozgatásokat nem említhetjük. 6.3-ban nem lehetsz a tér síkra vonatkozó tükrözéséről. 6.4-ben a síkszimmetrikus alakzatok említése marad el. El kell hagyni a teljes 6.5 szakaszt, hiszen még a sík orientációjának a tárgyalását is a síkmozgás fogalmára alapoztuk, ezt viszont az előbb elhagyásra ítéltük.

A bevezető fejezet egyes elhagyásra ítélt részeit mással kell pótolni, hiszen különben még forgásirányról sem lehetne szó, és ez gátat vetne még a szög tárgyalása során is. Szükséges ezért, hogy a bevezető fejezet más definíciókkal ugyan, de mégiscsak tárgyalja a sík eltolását, elforgatását, önmagában való elmozgatását, valamint a sík irányítását. A sík itt említett transzformációi azok közül valók, amelyekről a tárgyalás alapjául szolgáló, kevesebbet mondó axióma szól. Ezek közül *eltolásnak* azokat nevezzük, amelyek egy egyenest és az általa határolt félsíkokat helyben hagyják, *elforgatásnak* pedig azokat, amelyeknél a síknak csak egyetlenegy pontja nem változtatja meg a helyzetét. Véges sok eltolás és elforgatás eredményét a sík önmagában való *elmozgatásának* mondjuk. E fogalom ismeretében a sík orientációja már ugyanúgy vezethető be, ahogyan 6.5-ben a teret illetően eljártunk. Nem térünk ki itt arra, hogy a bevezető fejezetnek a most említett fogalmakra vonatkozó megállapításait bizonyítsuk, hiszen bevezető fejezetünk sem foglalkozott rendszeresen állításainak a bizonyításával. Megemlítjük mindenesetre, hogy a síkmozgások tárgyalásánál szakaszunk térmozgásokra vonatkozó okoskodásai mintául szolgálhatnak.

A bevezető fejezet ilyen módosítása után az elemi geometria eddigi anyaga változatlanul beleillik a most vázolt tárgyalásmód keretei közé. Nem támaszkodtunk ugyanis sehol sem a bevezető fejezetnek olyan megállapításaira, amely ennek a fejezetnek most vázolt átalakítása után hiányoznának. Hangsúlyoznunk kell viszont, hogy a kevesebbet mondó axióma alapul vétele esetén a szabatos tárgyalás ennek a szakasznak teljes anyagát igényli, beleértve még a B1 megjegyzést is. Az elemi geometria eddigi anyagából csak azok a kísérő megjegyzések maradnának el, amelyek az eredeti, VIII. axiómákra épülő tárgyalás egyszerűsítéseiről szólnak.

Szükség volna azonban ezen a helyen arra, hogy most pótoljuk a bevezető fejezet megrövidítése révén előálló hiányokat. Természetesen csak azokról a hiányokról van szó, amelyeket ebben a paragrafusban eddig nem pótolunk. Most kellene tehát bevezetnünk a tér orientációjának a fogalmát,

és bizonyítanunk a bevezető fejezet rá vonatkozó kijelentéseit. A 6.5 B3 megjegyzés térre vonatkozó részeit itt kellene tehát a rendszeres tárgyalásba beiktatnunk.

Az elmondottak bőven indokolják, hogy e könyv bevezető fejezete miért ölel fel többet. Könyvünk szerkezetének ezt a megválasztását 2.1 B szempontjaival összefonódva az anyag megrövidítése is indokolja.

**B3\*** Az előző megjegyzésben tárgyalt módszer olyan módosításairól szólunk, amelyek némi egyszerűsödéssel kecsegtetnek.

Axiómaszerűen kimondhatnók a bevezető fejezetben a sík térbeli mozgatasáról szóló axióma mellett azt is, hogy a síknak egyetlen olyan önmagában való elmozgatása van, amely egy adott félegyenest megadott helyzetbe visz. Más szóval, hogy a sík térbeli mozgataiból álló csoportnak van a mondott tulajdonsággal rendelkező alcsoportja, s hogy ennek az alcsoportnak az elemeit nevezzük síkmozgásoknak. Indokolt lehetne ez az eljárás, ha csak a síkgeometria kiépítése volna a cél. A térgeometriát is felölelő tárgyalásban a sík kétféle mozgatasáról szóló kijelentések összhangjának a hiánya a mondott eljárás ellen szól. Ezt megerősíti, hogy ez az eljárás a csak a sík térbeli mozgatasán alapuló tárgyalást alig egyszerűsítene, hiszen csak a bevezető fejezet síkmozgásokat bevezető részének az alátámasztásában jelentene könnyítést.

Egy másik középutat járnánk, ha a bevezető részben az orientációt nem az elmozgatásra támaszkodva vezetnők be. Vázoljuk, hogy milyen definícióra gondolunk. A tér rendezett, nem komplanáris pontnégyeséből egy új pontnégyest kaphatunk azáltal, hogy a négy pont valamelyikét egy másikkal pótoljuk, mégpedig olyannal, amelyet a meghagyott három pont síkja az elhagyott ponttól nem választ el. A sík rendezett, nem kollineáris ponthármasaival hasonlóan járhatunk el, megkövetelve, hogy az elhagyott pontot a két meghagyottnak az egyenese ne válassza el az újonnan választott ponttól. A tér rendezett pontnégyeseiről, valamint a sík rendezett ponthármasairól azt mondjuk, hogy *orientációjuk* megmarad, illetőleg megváltozik aszerint, amint átvihetők vagy nem vihetők át egymásba véges sok olyan művelettel, amilyenekről az imént szóltunk. Az erre a definícióra épülő tárgyalás annyiban térne el a B2-ben ismertetett tárgyalásmódtól, hogy a bevezető fejezet a tér orientációját is tárgyalhatná ugyan, de arról, hogy a tér elmozgatása az orientációt megtartja, a síkra vonatkozó tükrözés megváltoztatja, csak itt lehetne szó, mégpedig természetesen csakis mindent bizonyító tárgyalás keretében. Ennek a tárgyalásnak a beiktatása nagyjából lerontaná azt az előnyt, amit a B1 megjegyzés elmaradása jelent. A megváltoztatott bevezető fejezetet illetően megjegyezhetjük, hogy alátámasztása nem volna könnyű dolog. A most vázolt eljárás ezek szerint megnehezítené a bevezető fejezetet, viszont aligha könnyítené meg a ráépülő tárgyalást.

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy több szempont szól a most ismertetett eljárások követése ellen, mint mellett.

**B4** Most arról a tárgyalásmódról szólunk, amelyik nemcsak kimondja eredeti VIII. axiómánkat, hanem azt ki is aknázza. Ez a tárgyalás teljes egészében megtalálható ebben a könyvben.

Ez a tárgyalásmód tette lehetővé, hogy a bevezető fejezet többet nyújthattott. Ezt a többletet nemcsak kimondtuk ott, hanem az alátámasztó okoskodásokat is vázoltuk. A bevezető fejezet alátámasztása ezáltal mindenesetre megnehezedett. Itt elsősorban 6.5B4-re gondolunk.

A többletmondó axióma elfogadása az elemi geometria tárgyalása során csak ebben a paragrafusban okoz eltérést, ez a paragrafus viszont gyökeresen megrövidül és leegyszerűsödik. Erre már a 24.1 B, 24.3 B, 24.4 B, 24.7 B1 megjegyzések is utaltak, az ott említett egyszerűsítéseknél azonban sokkal többet jelent az, hogy a 24.8 szakasz teljes egészében elmarad. Ebben a szakaszban ugyanis javarészt csak olyan fogalmakat vezettünk be és olyan tényeket bizonyítottunk, amelyekről a bevezető fejezetben már szó volt, és ami kevésre ez nem áll, azt meg az imént felsorolt megjegyzések intézték már el.

Az egyszerűség és rövideg ezek szerint igen erősen a tér elmozgatásán alapuló tárgyalásmód mellett szól. Ellene szól természetesen az az axiomatikus szempont, amelyik az axiómarendszer gyöngítését mindig előnyben részesíti. Talán felesleges viszont hangsúlyoznunk, hogy mi itt a térgeometria felépítési módjainak az axiomatika szempontjait is érvényesítő egybevetésével foglalkoztunk, nem

pedig az axiómatika finomítására törekedtünk. Egybevetésünk eredménye nemcsak a geometria tudományos tárgyalásának a lehetőségeit érinti, hanem még középiskolai anyagának a megválasztására is hatással lehet.

## 25. § Térelemek távolsága

Pont és sík, párhuzamos egyenes és sík, két párhuzamos sík és végül két kitérő egyenes távolságáról lesz szó.

**25.1** Pont és sík *távolságának* a pontból a síkra bocsátott merőleges hosszát, azaz a pontnak és a síkra vetett merőleges vetületének a távolságát nevezzük.

**Tétel.** *Egy pontot egy rajta át nem haladó sík pontjaival összekötő szakaszok közül a síkra merőleges szakasz a legrövidebb.*

*Bizonyítás.* A síkhoz ferdén húzott szakasz egy olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a pontból bocsátott merőleges. Ezért a ferde szakasz a merőlegesnél hosszabb. —

**Tétel.** *Ha egy pontból egy azt nem tartalmazó sík pontjaihoz két szakasz vezet, akkor*

vagy egyenlők a szakaszok, és egyenlő a síkkal alkotott hajlásszögük, valamint végpontjuknak a pont vetületétől mért távolsága is,

vagy különbözők a szakaszok, a hosszabbik hajlásszöge kisebb, és a hosszabbik végpontja van a pont vetületétől messzebb.

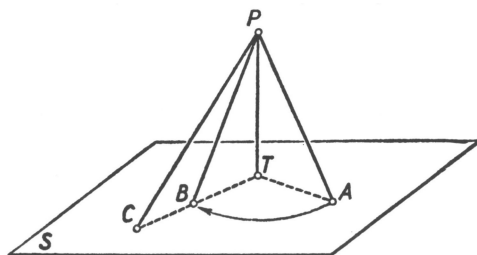
Tételünk az előző tételt is magában foglalja.

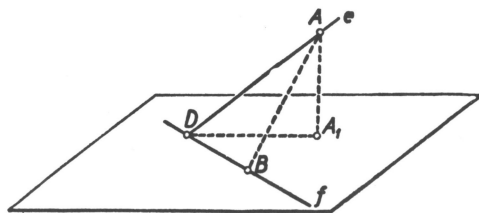
*Bizonyítás.* A merőleges egyenes körüli forgatás a szakaszok hosszát, hajlásszögüket és végpontjuknak a pont vetületétől mért távolságát nem változtatja meg. Ezért a vizsgált szakaszokat egy, a síkra merőleges síkba forgathatjuk (187. ábra). E síkon belül viszont 10.2 szerint tételünk állítása helyes. —

**Tétel.** *Két egymást metsző síktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helyét a metsző síkok két szögfelező síkja alkotja.*

*Bizonyítás.* a) Bármelyik szögfelező síkra vonatkozó szimmetria a metsző síkokat, tehát a szimmetriasík egy pontjából e síkokra bocsátott merőleges szakaszokat is egymáshoz rendeli. A szögfelező sík pontja ezért a metsző síkoktól ugyanakkora távolságra van.

b) Ha egy a metszésvonalhoz nem tartozó pontból a metsző síkokra bocsátott merőleges szakaszok egyenlők, akkor az ezek által adott szög felezőegyenlőjét tekintjük. Az erre az egyenesre vonatkozó szimmetria a merőlegeseket, tehát a metsző síkokat is egymáshoz rendeli. Ebből következik, hogy a metszésvonal, valamint a vizsgált ponton és a metszésvonalon átfektetett sík a saját tükörképe. Ez a sík ezért a metsző síkok egyikével és másikával olyan lapszögeket határol, amelyek egymás tükörképei, tehát egyenlők. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált pont a metsző síkok valamelyik szögfelező síkján helyezkedik el. —





188

**25.2** Néhány olyan tételt említünk, amely az előző szakasszal és általában a merőleges vetítéssel kapcsolatos.

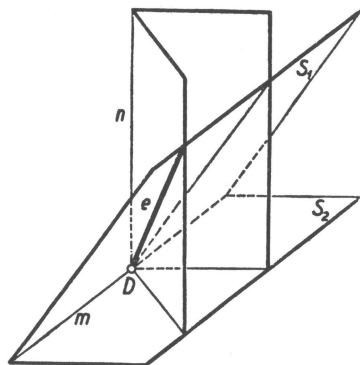
**Tétel.** Egy a síkot dőfő, a síkra nem merőleges egyenes a dőlésponton áthaladó síkbeli egyenesek közül a saját vetületével alkotja a legkisebb hajlásszöget.

*Bizonyítás.* A síkot  $D$  pontban dőfő  $e$  egyenesen egy  $A$  pontot veszünk fel, s ennek vetületét  $A_1$ -gyel jelöljük (188. ábra). A  $D$  ponton áthaladó, az egyenes vetületétől különböző, síkbeli  $f$  egyenes  $B$  pontját  $DB = DA_1$  előírásnak megfelelően választjuk meg. Az előző szakasz szerint  $AB > AA_1$ . Az  $ADA_1$  és  $ADB$  háromszögek egybevetéséből 11.5 szerint következik, hogy  $\angle ADA_1 < \angle ABD$ . Minthogy a  $B$  pontot az  $f$  egyenesen  $D$  mindkét oldalán felvehettük, a levezetett egyenlőtlenség az  $e$  és  $f$  alkotta szögek mindegyikére, s így ezek kisebbikére, hajlásszögekre is áll. —

**Tétel.** Ha egymást metsző síkok egyikében egy egyenest veszünk fel, akkor ennek a másik síkkal alkotott hajlásszöge a két sík hajlásszögénél nagyobb nem lehet, és azzal egyenlő is csak akkor, ha a metszésvonalra merőleges egyenest vettünk fel.

Metsző síkokról szól csak a tétel, mert párhuzamos síkok esetében minden előforduló hajlásszög nullszög. Nem mond ki újat a tétel, ha merőleges síkokról van szó, mert egy hajlásszög sem lehet a derékszögnél nagyobb, és a második síkra merőleges egyenes merőleges a metszésvonalra is.

*Bizonyítás.* Szorítkozhatunk egymást hegyesszögben metsző  $S_1, S_2$  síkokra és  $S_1$ -nek olyan  $e$  egyenesére, amely  $S_2$ -vel nem párhuzamos, amely tehát a síkok  $m$  metszésvonalát  $D$ -ben metszi (189. ábra). Az  $e$  egyenest  $S_2$ -re merőlegesen vetítő sík tartalmazza a  $D$ -ben  $S_2$ -re emelt  $n$  merőlegest. Ebből következik, hogy  $e$  és  $n$  hajlásszöge, valamint  $e$  és  $S_2$  hajlásszöge egymás pótszögei. Az előző tétel alapján kimondhatjuk tehát, hogy az utóbbi szög nem lehet  $n$  és  $S_1$  hajlásszögének pótszögénél nagyobb, s hogy egyenlőség is csak akkor állhat fenn, ha  $e$  és  $n$  síkja  $S_1$ -re merőleges. Ebben az esetben az  $e, n$  egyenesek síkja az  $S_1, S_2$  síkok mindegyikére, ezért  $m$ -re is merőleges, és a két síkot  $m$ -re merőleges egyenesekben metszi. Eszerint  $e$  és  $S_2$  hajlásszöge akkor maximális, ha az  $e$  egyenes  $m$ -re merőleges, és ez a maximális hajlásszög a két sík hajlásszögével egyenlő. —



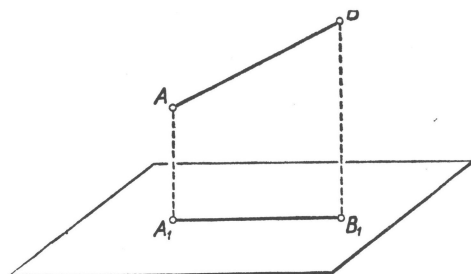
189

**Tétel.** Egy szakasz nem lehet egy síkra vetett vetületénél rövidebb, s azzal egyenlő is csak akkor, ha a szakasz állása a síkkal párhuzamos.

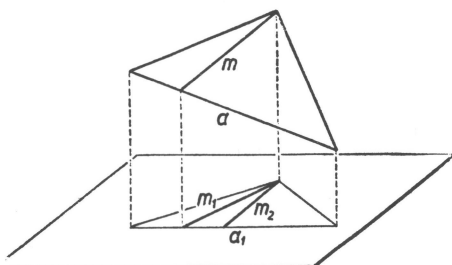
*Bizonyítás.* A szakasz végpontjainak vetítőegyenesei párhuzamosak (190. ábra). Minthogy a vetületi szakasz e párhuzamosokat merőlegesen köti össze, rövidebb az eredeti szakasznál, ha az ezekre a párhuzamosokra nem merőleges. Ha viszont merőleges, akkor vagy azonos a vetületével, vagy pedig vetületével és a síkkal is párhuzamos. —

**Tétel.** Egy sokszög területe egy síkra vetett vetületének területénél kisebb nem lehet, s azzal egyenlő is csak akkor, ha a sokszög síkja a vetületi síkkal egyező állású.

*Bizonyítás.* Minthogy a sokszöget háromszögekre bonthatjuk, s ezek vetületének egyesítése a sokszög vetületét adja, elég a tételt háromszög vetítésére bizonyítanunk.



190



191

A vetített háromszög  $a$  alapjához  $m$  magasság tartozik (191. ábra). Ezek vetületei  $a_1$  és  $m_1$ . A vetületi háromszögben az  $a_1$  alaphoz  $m_2$  magasság tartozik. Az előző tétel szerint  $a \geq a_1$  és  $m \geq m_1$ , a pont és

egyenes távolságáról tudottak szerint pedig  $m_1 \geq m_2$ . Ezekből az egyenlőtlenségekből  $\frac{1}{2}am \geq \frac{1}{2}a_1m_2$  következik. Egyenlőség csak akkor állhat, ha minden korábbi helyen egyenlőség állt, ami az előző tétel szerint csak akkor következhetik be, ha a vetületi sík  $a$  és  $m$  állásával párhuzamos, ha tehát a vetített háromszög síkjával egyező állású. Ebben az esetben  $a$  és  $m$  egyező állású  $\alpha_1$ -gyel és  $m_1$ -gyel, tehát ez utóbbiak is merőlegesek egymásra, és így  $m_1$  azonos  $m_2$ -vel. Ezért egyező síkállás esetén az egyenlőség valóban be is következik. —

**25.3** Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor 23.3 első tétele szerint a saját vetületével is párhuzamos, tehát minden pontja ugyanakkora távolságra van a síktól. Ezt a távolságot a párhuzamos egyenes és sík *távolságának* mondjuk.

Ha két sík párhuzamos, akkor minden pontjuk ugyanakkora távolságra van a másik síktól, mert a pontokból a másik síkra bocsátott merőlegesek egymással párhuzamosak, és párhuzamos síkokat párhuzamosan összekötő szakaszok egyenlők. A közös távolságot a párhuzamos síkok *távolságának* mondjuk.

Mindkét esetben igaz az, hogy a távolságnál rövidebb összekötő szakasz nincs. Ez 25.1 első tételéből közvetlenül következik.

Párhuzamos síkok összekötő szakaszainak a felezőpontjai 23.6 szerint mindannyian egy síkban vannak. Ez a sík a két párhuzamos sík merőleges összekötő szakaszait természetesen merőlegesen felezi. A két párhuzamos sík ennek a középpárhuzamos síknak bármely pontjára vonatkozóan szimmetrikusan helyezkedik el.

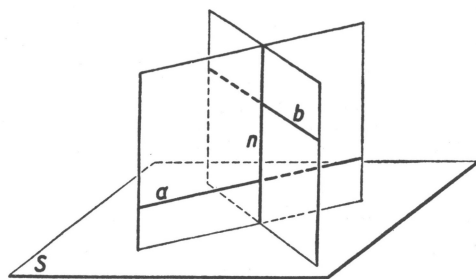
A térnek két párhuzamos sík által határolt részét *rétegnek* mondjuk. Ez a síkokat összekötő szakaszok egyesítésével keletkezik. Az imént említett felezősík a réteg *középsíkja*. A két sík távolsága a réteg *vastagsága*.

**25.4** Kitérő egyeneseket összekötő  $s$  mindkettőre merőleges szakaszt az egyenesek *normáltranzverzálisának* (normáltranzverzális-szakasz) nevezzük. Ugyanígy nevezzük sokszor a két kitérő egyenest merőlegesen metsző egyenest is (normáltranzverzális-egyenes).

**Tétel.** Két kitérő egyenesnek egyetlenegy normáltranzverzálisa van.

*Bizonyítás.* a) A kitérő  $a$  és  $b$  egyenesekkel párhuzamos  $S$  síkot veszünk fel (192. ábra). Ilyen van, mert a tér egy pontján át  $a$ -val és  $b$ -vel párhuzamosan húzott egyenesek síkja ilyen. Az  $a$ ,  $b$  egyeneseket  $S$ -re vetítő síkok nem párhuzamosak, mert az  $S$  síkot  $a$  és  $b$  vetületeiben metszik, s ezek egymással nem párhuzamosak, hiszen az egyik  $a$ -val, a másik  $b$ -vel párhuzamos. Van tehát a két vetítősíknak  $n$  metszésvonala, s ez 24.6 utolsó tétele szerint  $S$ -re, tehát  $a$ -ra és  $b$ -re is merőleges. Az  $n$  egyenesből ezek szerint  $a$  és  $b$  egy mindkettőre merőleges összekötő szakaszt metsz ki.

b) Más normáltranzverzális nincs is, mert merőlegesnek kell lennie  $a$ -ra és  $b$ -re, tehát  $S$ -re is, ezért kell, hogy  $a$  vetítősíkja és  $b$  vetítősíkja is tartalmazza, s így csak e síkok  $n$  metszésvonalán helyezkedhetik el. —

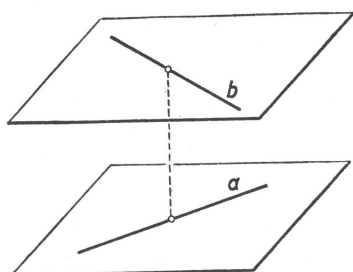


**Tétel.** Két kitérő egyenest összekötő szakaszok között a normáltranzverzális a legrövidebb.



A tétel alapján a normáltranzverzális hosszát a kitérő egyenesek *távolságának* mondjuk.

*Bizonyítás.* A normáltranzverzálisra végpontjaiban merőleges síkokat állítunk (193. ábra). E síkok párhuzamosak, és tartalmazzák egyeneseinket. A normáltranzverzális hossza e síkok távolsága. Az egyeneseket összekötő többi szakasz is összeköti e síkokat, de nem merőleges rájuk, mert az előző tétel szerint nincs más, a normáltranzverzálissal párhuzamos összekötő szakasz. Így tehát, a párhuzamos síkok távolságáról mondottak szerint, a normáltranzverzális a többi összekötő szakasznál rövidebb. —



193

**B** E paragrafusban több helyen definiáltuk egyes alakzatok távolságát. Azt is megállapíthatjuk, hogy mindezek a definíciók összhangban vannak a 10.1 B-ben mondottakkal, mert minden esetben a legrövidebb összekötő szakasz hosszáról szólnak.

## 26. § Poliéder

A poliéderekkel már 4.5-ben megismerkedtünk. Itt csak közösleges poliéderekről, sőt javarészt csak egyszerű poliéderekről lesz szó. Néhány általánosabb tétel tárgyalása után speciális poliéderekkel, a hasábról, gúláról, csomagtűről és a szabályos testekkel foglalkozunk.

**26.1** A poliéder lapjainak területét összeadva a poliéder *felületét* kapjuk. Ugyanígy számíthatjuk a nyílt poliéderfelület felszínét is.

A poliéder lapjai sokszögek, s ezek szögei a poliéder *élszögei* (szög).

Ha két lap élben találkozik, akkor az él egyenese által határolt fűlsíkokat határoznak meg. Ez a két fűlsík egy olyan lapszöget határol, amely tartalmazza a poliédernek az él közelében elhelyezkedő pontjait. Ezt a lapszöget a poliéder *lapszögének* mondjuk.

**B1** A közösleges poliéder lapszögét 4.3 B2 mintájára szabatosabban definiáljuk. Az élben találkozó lapokat először (szükség esetén) az élegyenessel elvágjuk, majd az él által is határolt darabjaikat fűlsíkokká egészítjük ki. E két fűlsík a teret két lapszögtartományra bontja. Ha e fűlsíkokkal poliéderünket elvágjuk, a kapott poliéderdarabok egyikének éle az az él, amelyikből kiindultunk. A mondott két lapszögtartomány egyike tartalmazza ezt a poliéderdarabot, és ez a lapszögtartomány adja poliéderünk lapszögét.

**B2 a)** Minden közösleges poliédernek van konvex lapszöge. Ha ugyanis a poliédert egy a csúcsain át nem haladó síkkal metsszük, akkor egy vagy több közösleges metszetsokszöghöz jutunk, és ennek konvex szöge csak konvex lapszög metszésével keletkezik. Márpedig minden közösleges sokszögnek van (legalább 3) konvex szöge, hiszen a sokszög konvex burkának a csúcsainál csak konvex szögek helyezkedhetnek el.

*b)* Egy közösleges, összefüggő felületű poliéder akkor és csak akkor konvex, ha minden lapszöge konvex. Az állítás egyik fele nyilvánvalóan helyes, hiszen konvex poliédernek nincs konkáv lapszöge. Csak azt kell bizonyítanunk, hogy ha a közösleges, összefüggő felületű  $P$  poliéder minden lapszöge konvex, akkor  $P$  konvex poliéder.

Szemeljünk ki  $P$ -nek egy olyan  $A$  pontját, amely nincs lapsíkon. Hagyjuk el  $P$  felületéből azokat a pontokat, amelyek  $A$ -ból induló, csúcson áthaladó félegyeneseken vannak. Csak véges sok pontot

hagytunk el, hiszen  $A$  nincs lapsíkon. Azt állítjuk, hogy a maradó pontok mindannyian összeköthetők  $A$ -val  $P$  által tartalmazott szakasszal.

Ha  $B$  és  $C$  egyike ilyen összeköthető pont, és ezek a pontok egy lapon vannak, továbbá az  $ABC$  síkban nincs csúcs, akkor a másik is összeköthető pont. Ez abból következik, hogy az  $ABC$  sík a  $P$  poliédert a lapszögek konvexitása miatt (egy vagy több) konvex szögű, tehát konvex sokszögben metszi, és a  $B, C$  pontpár egy ilyen, az  $A$  pontot a belsejében tartalmazó konvex sokszögnek egy oldalán van. Ilyen pontpárok közvetítésével azt kapjuk, hogy bekezdésünk első állításában az  $ABC$  síkról szóló megkötés elhagyható. Ebből az élpontok közvetítésével azt kapjuk, hogy  $B$  és  $C$  szomszédos lapokon is lehetnek, sőt  $P$  felületének összefüggősége miatt még ezt a megszorítást is elhagyhatjuk. Minthogy pedig az el nem hagyott pontok között nyilván van  $A$ -val összeköthető, ez mindegyikre teljesül.

Ebből az állításunkból következik, hogy bármely az  $A$  ponton átfektetett sík a  $P$  poliédert egyetlen konvex sokszögben metszi, hiszen, véges soknak esetleges kivételével, a határpontokat  $A$ -val összekötő szakaszok a metszetidombban vannak. Eszerint  $P$  bármely két pontja egy ilyen metszetidombon belül összeköthető,  $P$  tehát valóban konvex.

**26.2 Tétel** (Euler<sup>\*1</sup> tétele). *Ha egy egyszerű poliéder csúcsainak számát  $c$ , éleinek számát  $e$  és lapjainak számát  $l$  jelöli, akkor*

$$l + c = e + 2.$$

A kimondott tétel minden konvex poliéderre áll, hiszen minden konvex poliéder egyszerű.

*Bizonyítás.* Minden egyszerű poliéder rendelkezik a következő tulajdonságokkal:  $A$ ) minden éle két lapot határol,  $B$ ) bármely lapjától bármely lapjához eljuthatunk páronként élben csatlakozó lapokon át haladva,  $C$ ) bármely két csúcsa összeköthető élekből összetett töröttvonalal,  $D$ ) minden élekből összetett zárt töröttvonal két részre bontja a poliéder felületét. A bizonyítás során ezeket a tulajdonságokat használjuk fel.

Jobb megértés kedvéért a bizonyítást szemléletesen szövegezzük. Képzeljük, hogy poliéderünk egy égitest, élei kiemelkedő gátak, amelyek az égitest felületét medencékre osztják fel, csúcsaiban pedig őrtornyok vannak. Úgy képzeljük, hogy égitestünk felületén víz folyhatik szét, azonban csak egy medence van tele vízzel, a többi száraz.

Célunk az, hogy a víz minden medencét elöntsön. Ezért sorban felrobbantunk gátakat, egy-egy alkalommal mindig egy gát teljes egészét robbantjuk fel két őrtorony között. Takarékoskodunk a robbantással, és soha nem robbantunk olyan gátat, amelynek mindkét partját víz mossa. Nem robbantunk olyan gátat sem, amelyiknek mind a két partja száraz. Robbantásainkkal elérjük, hogy végül minden medencét ellep a víz ( $B$ ). Megvizsgáljuk, hogy a teljes poliéder elárasztásáig hány gátat robbantunk, és hány marad ép.

*a)* Minden robbantáskor egy-egy újabb medence telik meg vízzel ( $A$ ). Mivel  $l$  medence van, és eredetileg egy volt csak vizes, összesen  $l - 1$  gátat robbantunk.

*b)* Az épen maradt gátakat vizsgáljuk most. Először is megállapítjuk, hogy bármelyik toronyból bármelyik toronyba eljuthatunk ép gátakon át. Tudjuk, hogy ez lehetséges volt a robbantások megkezdése előtt ( $C$ ). Nem szűnik meg ez a lehetőség egyetlen robbantáskor sem, mert a robbantott gát az egyik oldalról egy száraz medencét határolt, melynek a határán korábban még egyetlen gátat sem robbantottunk. Ezért a robbantás után a robbantott gát végén álló két torony között marad összeköttetés, hiszen az éppen elárasztott medence határán az egyikből a másikba juthatunk. A robbantás tehát nem szakította meg az összeköttetéseket, csak kerülőket tett szükségessé.

*c)* Megállapítjuk, hogy bármelyik őrtoronyból bármelyik másikba csak egy úton juthatunk el ép gátakon át, ha közben sehol sem szabad visszafordulni. Ha ugyanis két út volna, akkor ezek ép gátakon tett körsétát tennének lehetővé. Egy ilyen körséta útvonala a medencék egyik csoportját elválasztja a medencék másik csoportjától ( $D$ ). Ha a körséta útvonala ép, akkor tehát a két medencecsoportnak egyike lehet csak vizes, ami azt jelenti, hogy a robbantásokat még nem fejeztük be.

<sup>\*1</sup> L. Euler, 1707—1783, svájci születésű, javarészt Pétervároton, a mai Leningrádban működött.

d) Most az őrtornyok egyikébe egy parancsnokot, a többibe pedig őrköt helyezünk. A parancsnok fűttyjelére minden őr elindul az egyedül lehetséges útvonalon a parancsnok felé. Rövid idő múltán, mielőtt az őrkök útjuk során őrtoronyhoz érkeznének, újabb fűttyjelre az őrkök mind megállnak.

Megállapíthatjuk, hogy egy ép gát két végéből elinduló két őr közül az egyik erre a gátra lépett, a másik nem. Ha egyik sem lépett volna erre a gátra, akkor egyikük úgy is eljuthatna a parancsnokhoz, hogy először átmegy a gáton, s aztán a másik őr útját követi. Ha mindkettő erre a gátra lépett volna, akkor egyikük úgy is eljuthatna a parancsnokhoz, hogy vár, amíg a másik hozzá érkezik, s azzal együtt megy. Minthogy azonban minden őrnek csak egy út áll rendelkezésére, a most említett két lehetőség egyike sem következhetik be.

Nemcsak az őrkök tornyait összekötő ép gátokról, hanem a parancsnoki őrtoronyhoz vezető ép gátokról is megállapíthatjuk, hogy rajtuk a második fűttyjel elhangzásakor egy őr áll. Az ilyen gátra ugyanis csak az annak végében állomásozó őr léphetett, és neki erre a gátra kellett lépnie, hiszen más úton nem juthat a parancsnokhoz.

e) Minthogy minden ép gáton egy őr áll és minden őr egy ép gáton áll, az ép gátak száma az őrkével egyenlő. Ez a szám  $c-1$ , hiszen a parancsnoki torony kivételével minden toronyban egy őr volt.

f) A robbantott és ép gátak együttes száma okoskodásunk szerint  $e = (l-1) + (c-1)$ . Ez tételünk helyességét mondja ki. —

A A bizonyítás logikai értékét a szemléletes fogalmazás nem rontotta. Ugyanezt az okoskodást szárazabban is elmondhattuk volna, de akkor nehezebben lett volna követhető.

B1 A bizonyítás az egyszerű poliéderek bizonyos tulajdonságaira támaszkodott. Van azonban e tulajdonságokkal rendelkező nem egyszerű poliéder is. Példa erre a 9. ábra m) poliédere. Bebizonyítottuk tehát, hogy tételünk az ilyen poliéderekre is érvényes.

Vannak másfajta nem egyszerű poliéderek is, amelyekre bizonyításunk ugyan közvetlenül nem alkalmazható, de tételünk állítása mégis teljesül. Ilyen poliéderek a 9. ábra b), c), d.)

c), h), j) poliéderei.

A 9. ábra nem egyszerű poliéderei közül az itt nem említettekre állításunk nem teljesül.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a poliéder egyszerűsége az Euler-féle összefüggés teljesülésének csak elégséges, de nem szükséges feltétele, s hogy az összefüggés nem teljesül minden poliéderre, sőt minden közönséges poliéderre sem.

B2 Nem használtuk ki sehol sem azt, hogy az élek egyenes szakaszok, és a lapok síklapok. A tétel ilyen megszorítás nélkül is helyes. Ha egy gömbre, vagy gömbből összenyomással és széthúzással, de szakítás és ragasztás nélkül származó felületre összefüggő és sehol meg nem szakadó vonalakat rajzolunk, ezek találkozási pontjait csúcsoknak, két-két csúcsot összekötő vonalat élnek, és az élek határolta felületdarabokat lapoknak nevezzük, akkor változatlanul helyes marad Euler tétele és annak közölt bizonyítása.

A geometriának azt a fejezetét, amely összenyomáskor és széthúzáskor meg nem változó tulajdonságokkal foglalkozik, *topológiának* nevezzük. Euler tétele ehhez a fejezethez tartozik.

**26.3 Tétel.** *A poliéder egy lapjának területe a többi lap területének összegénél kisebb.*

*Bizonyítás.* Vetítsük a poliéder többi lapját a kiszemelt lap síkjára. E vetületek együttesen beborítják a kiszemelt lapot, talán egyes részeit többszörösen is, és talán a síknak a lapon kívüli részeit is. Ez abból következik, hogy a kiszemelt lapot merőlegesen metsző egyenesekre is áll az, hogy egy egyenes nem metszheti a poliéderlapoknak csak az egyikét.

A vetületek területének összege ezek szerint legalább akkora, mint a kiszemelt lap területe. A vetített lapok területének összege 25.2 utolsó tétele folytán nagyobb tehát a kiszemelt lap területénél, hiszen a többi lap mindegyike nem lehet a kiszemelt lappal egyező állású. —

**Tétel.** Egy konvex poliédert tartalmazó egyszerű poliéder felszíne nagyobb, mint a tartalmazott konvex poliéderé.

*Bizonyítás.* 9.5 bizonyításának mintájára okoskodhatunk. A belső konvex  $A$  poliéder egy lapjának síkjával elmetsszük a tartalmazó  $B$  poliédert. A kapott poliéderdarabok egyike,  $E_1$ , tartalmazza  $A$ -t, és az előző tétel folytán  $E_1$  felszíne  $B$  felszínénél kisebb. Ezt az eljárást más lapokra folytatva egyre kisebb felszínű tartalmazó poliéderekhez jutunk, míg végül ilyen felszíncsökkentésekkel magához  $A$ -hoz el nem érkezünk. —

**B 9.5**  $B$  mintájára megemlítjük, hogy szakaszunk első tétele helyett, valamivel általánosabban, azt is kimondhatjuk, hogy egy síkban elhelyezkedő poliéderlapok területének összege a többi lap területének összegénél kisebb. A bizonyítás változatlanul helyes erre a kijelentésre is.

Második tételünk helyes akkor is, ha a tartalmazó poliéderre semmiféle megszorítást nem teszünk. Az eredeti bizonyítás ezt is bizonyítja, ha abban az előző bekezdés kijelentésére hivatkozunk.

**26.4** Poliéderek egybevágóságáról szóló tételeink kimondásakor eleve feltesszük, hogy a szóban forgó két poliéder csúcsait kölcsönösen és egyértelműen egymáshoz rendeltük, hogy tehát megfelelő csúcsokról szó lehet.

**Tétel.** Két poliéder egybevágó, ha a megfelelő csúcsok távolsága mindkét poliéderben ugyanakkora.

A tétel minden csúcspárról szól, akár él, akár lapátló vagy testátló köti össze azokat.

*Bizonyítás.* Három-három megfelelő és nem kollineáris csúcs egybevágó háromszögeket határoz meg, mert oldalai egyenlők. Helyezzük egymásra a két poliédert úgy, hogy két ilyen háromszög egymást az

$ABC$  helyzetben fedje. Feltesszük, hogy ebben a helyzetben van két megfelelő  $D_1, D_2$  csúcs, amelyek egymást nem fedik, hiszen különben a két poliéder egybevágóságát máris megállapíthatjuk.

Az  $A, B, C$  csúcsok a  $D_1D_2$  szakaszt merőlegesen felező síkban vannak, hiszen mindegyik ugyanakkora távolságra van  $D_1$ -től, mint  $D_2$ -től. Ez azt jelenti, hogy  $D_1$  és  $D_2$  szimmetrikusan helyezkedik el az  $ABC$  síkra vonatkozólag. Tükrözzük tehát a két poliéder egyikét erre a síkra. Most már négy csúcsuk fedi egymást az  $A, B, C, D$  pontokban, s ezek nincsenek egy síkban. Ha  $E_1$  és  $E_2$  a poliédereknek két megfelelő csúcsa, és ezek nem volnának azonosak, akkor a fenti megfontolás szerint az  $A, B, C, D$  pontok mindegyike az  $E_1E_2$  szakaszt merőlegesen felező síkban volna, ami lehetetlen, hiszen e négy pont nincs egy síkban. Eszerint minden megfelelő csúcspár azonos helyzetbe jutott, s a két poliéder egybevágó. —

**Tétel.** Két egyszerű poliéder egybevágó, ha megfelelő éleik, élszögeik és lapszögeik egyenlők.

A tétel kimondásakor feltettük, hogy a két poliéder élei és lapjai úgy felelnek meg egymásnak, hogy megfelelő élek végpontjai egymásnak megfelelő csúcsok, és a megfelelő lapok csúcsai is egymásnak megfelelők. Ez a megfeleltetés teszi lehetővé, hogy megfelelő élszögekről és lapszögekről szó lehet.

*Bizonyítás.* A feltevésből a lapok egybevágósága már következik. Olyan egybevágóságot alkalmazunk a két poliéder egyikére, hogy két megfelelő lap fedje egymást, s a két poliéder ugyanarról az oldalról támaszkodjék ehhez a laphoz. A lapszögek, élszögek és élek egyezése miatt szomszédról szomszédra haladva következik, hogy a két poliéder minden lapja, éle és csúcsa fedi egymást. —

**B1** Ennek a szakasznak mindkét tétele feleslegesen sokat követelt meg. Az első tétel bizonyítása is csak négy csúcstól mért távolságokról szólt, a második tétel pedig változatlanul alkalmazható pl. akkor, ha egy lap élszögeiről és az általa is határolt lapszögekről nem követünk meg semmit sem.

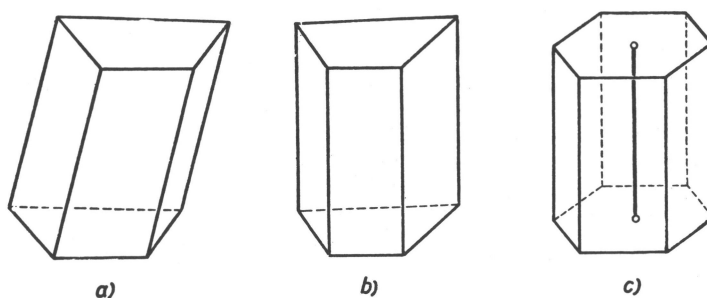
**B2** E szakasz első tételének két nevezetes következményét említjük meg.

a) Két egybevágó térbeli alakzathoz található a térnek olyan egybevágósága, amely a két alakzatot egymáshoz rendeli, azaz két alakzaton definiált egybevágóság a teljes tér egybevágóságává

terjeszthető ki. Síkbeli alakzatokra vonatkozólag már 11.1 B3b) kimondja ezt, sőt azt is, hogy van az alakzatokat egymásba vivő térbeli elmozgatás. Ha viszont nem síkbeli alakzatokról van szó, akkor az egyik alakzat nem komplanáris  $A, B, C, D$  pontjaiból kiindulva első tételünk bizonyítása mutatja, hogy állításunk helyes.

b) Két hasonló térbeli alakzathoz található a térnek olyan hasonlósága, amely ezt a két alakzatot egymáshoz rendeli, azaz alakzatokon definiált hasonlóság a teljes térben definiált hasonlósággá terjeszthető ki. Az állítás bizonyítására 17.3 B okoskodása szó szerint alkalmazható azzal az eltéréssel, hogy 11.1 B3c) helyett e megjegyzés a) részére hivatkozunk.

**26.5** Ha egy sokszög vonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy egyenessel, amely a sokszög síkjával nem párhuzamos, akkor egy végtelenbe nyúló felületet (végtelen hasábfelület) kapunk. Ez a felület egy a sokszöget tartalmazó, végtelenbe nyúló testet, *végtelen hasábot* határol. Ez a test a sokszögtartomány pontjain át húzott párhuzamosok egyesítése. Ha ezt a testet a sokszög síkjával és egy ezzel párhuzamos síkkal elmetsszük, egy poliéderhez jutunk, melyet *hasábnak* (prizma) nevezünk (194. ábra).



194

A metsző síkokban elhelyezkedő lapok a hasáb *alaplappjai* (alap, alaplapp és fedőlap). A többi lap a hasáb *oldallapja* (oldal). Az alaplappok síkjainak távolsága a hasáb *magassága*. Az alaplappok oldalainak száma, vagyis az oldallapok száma mondja meg, hogy a hasáb hány oldalú. Ez a szám legalább 3. Az oldallapok együttesen a hasáb *palástját* alkotják. Az alaplappok élei a hasáb *alapélei*, a többi a hasáb *oldaléle*. A hasáb származtatásakor húzott párhuzamosoknak az oldallapokon haladó darabjai a hasáb alkotói. Eszerint az oldalélek is *alkotók*. A hasáb akkor konvex, ha az alapja konvex sokszög.

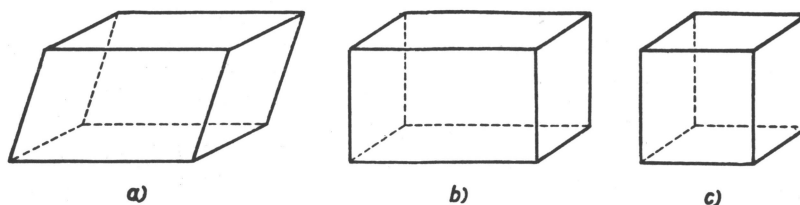
Ha az alkotók az alaplappokra merőlegesek, a hasábot *egyenes* (merőleges) hasábnak nevezzük. A nem egyenes hasábot *ferde* hasábnak is mondják. Az egyenes hasáb magassága alkotóival egyenlő. Az egyenes hasábot, ha alapja szabályos sokszög, *szabályos* hasábnak nevezzük. Az alaplappok középpontjait összekötő szakasz a szabályos hasáb *tengelye*. Az  $n$  oldalú szabályos hasáb az alaplappokat szimmetriatengelyeikben metsző síkokra szimmetrikus, tengelyére vonatkozólag pedig  $n$ -edrendben forgásszimmetrikus. A négyoldalú szabályos hasábot *négyzetes* hasábnak (négyzetes oszlop) is nevezik.

A hasáb alkotói egyenlők, mert párhuzamos síkokat összekötő párhuzamos szakaszok. Ez többek között az oldalélekre is áll. A hasáb alaplappjai egybevágó sokszögek, mert az egyiket az alkotók irányában oldalélnyi távolságra eltolva a másikat kapjuk. A hasáb oldallappjai parallelogrammák, mert két oldalél párhuzamos és egyenlő. Az egyenes hasáb oldallappjai téglalapok, mert az oldalélek az alapélekre merőlegesek. Ebből adódik az, hogy az egyenes hasáb palástjának felszíne az alaplapp területének és a magasságnak a szorzata.

Ha egy hasábot az alaplappokkal párhuzamos síkkal metszünk, a metszetidom az alaplappokkal egybevágó. Ez a metsző sík ugyanis egy hasábot vág le hasábunkból, és a levágott hasáb alaplappjai is egybevágók. Ezek szerint az alaplappok és a velük párhuzamos metszetek területe egyenlő.

Szó lehet a (párhuzamosan metszett) hasáb mellett ferdén metszett hasábról is. Ez akkor keletkezik, ha a hasábot az alapsíkkal nem párhuzamos, de valamennyi oldalélt metsző síkkal vágjuk ketté. Az ilyen ferdén metszett hasábot nem soroljuk a hasábok közé.

**26.6** A parallelogrammaalapú hasábot *parallelepipedon* nevezzük (195. ábra). A parallelepipedont három, páronként párhuzamos lappár határolja, s minden lapja parallelogramma. Bármelyik párhuzamos lappár a parallelepipedon alaplapjainak tekinthető.



195

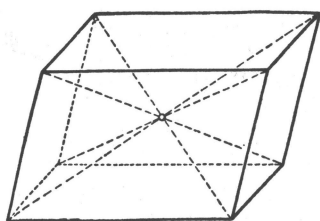
A téglalapalapú egyenes hasábot *derékszögű parallelepipedon* (téglatest) nevezzük. A derékszögű parallelepipedon minden élszöge és minden lapszöge derékszög, lapjai téglalapok.

Ha a négyzetalapú egyenes hasáb magassága az alapélekkel egyenlő, *kockának* (hexaéder) mondjuk. A kocka lapjai négyzetek, élei mind ugyanakkorák. Ha az élek közös hossza 1, a kockát *egységkockának* mondjuk.

**Tétel.** *A parallelepipedon centrálszimmetrikus test.*

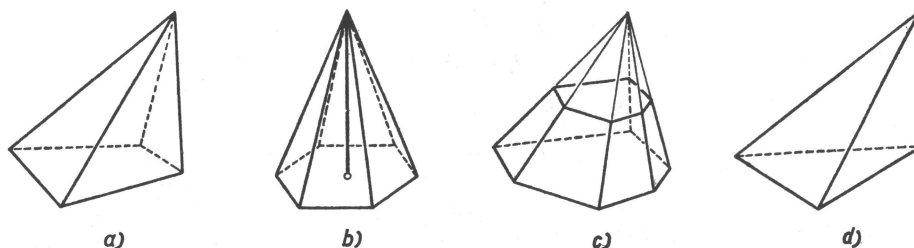
*Bizonyítás.* A párhuzamos lapsíkpárok középpárhuzamosai egymást egy pontban metszik, hiszen egymást egy pontban metsző síkokkal párhuzamosak. E pontra vonatkozó tükrözés a párhuzamos lapsíkokat felcseréli, a parallelepipedont tehát változatlan helyzetben hagyja. —

A most megállapított szimmetria centrumát a parallelepipedon *középpontjának* nevezzük. A szimmetriából következik, hogy a parallelepipedon testátlói a középpontban metszik egymást, és a középpont a testátlókat felezi (196. ábra).



196

**26.7** Ha egy pontból egy sokszög vonal pontjaihoz félegyeneseket indítunk, és a pont nincs a sokszög síkjában, akkor egy végtelenbe nyúló felületet (végtelen gúlafelület) kapunk. Ez a felület egy a sokszöget tartalmazó, végtelenbe nyúló testet, *végtelen gúlát* határol. Ez a test a sokszögtartomány pontjaihoz indított félegyeneseinek egyesítése. Ezt a testet a sokszög síkjával elmet szve egy poliéder adódik, melyet *gúlának* (piramis) nevezzük (197. ábra).



197

A sokszög a gúla *alaplappja* (alap). A többi lapja háromszög, ezek a gúla *oldallapjai* (oldal). Az alap oldalainak száma, azaz az oldallapok száma mondja meg, hány oldalú a gúla. Ez a szám legalább 3. Az oldallapok együttesen a gúla *palástját* alkotják. Az alaplap élei a gúla *alapélei*, a többi él pedig a gúla *oldaléle*. A származtatásnál szereplő félegyenéseknek az oldallapokon elhelyezkedő kezdő szakaszai a gúla *alkotói*. Eszerint az oldalélek is alkotók. A félegyenések kezdőpontja a gúla *csúcsa*. A csúcsból az alaplap síkjára bocsátott merőleges szakasz a gúla *magassága* (magasságszakasz, magasságvonal). Magasságnak mondjuk a magasságszakasz hosszát is. A gúla akkor és csak akkor konvex, ha az alapja konvex sokszög.

Ha a gúlát alapjával párhuzamosan metsszük, az alaphoz hasonló metszetidomhoz jutunk, hasonlóságuk arányát a csúcs és a metszősík távolságának, valamint a gúla magasságának az aránya adja. Ezt a csúcsból való kinagyítás révén láthatjuk be.

Ha a gúla alapja szabályos sokszög, és csúcsa az alap középpontjában az alapra emelt merőlegesen van, a gúlát *szabályosnak* mondjuk. Ennek magasságát *tengelynek* is mondjuk. Az  $n$  oldalú szabályos gúla az alaplapot a szimmetriatengelyeiben merőlegesen metsző síkokra szimmetrikus, tengelyére vonatkozólag pedig  $n$ -edrendben forgásszimmetrikus. A szabályos gúla oldallapjainak az alapélekhez tartozó közös magassága a szabályos gúla *oldalmagassága*. Az oldalmagasság és az alapkerület szorzatának fele a szabályos gúla palástjának a felszínét adja. A négyoldalú szabályos gúlát *négyzetes gúlának* is nevezzük.

A háromoldalú gúlát *tetraédernek* nevezzük. A tetraédert négy háromszög határolja, s ezek mindegyikét alapnak tekinthetjük.

Ha a gúlát alapjával párhuzamos síkkal metsszük, egy gúlára és egy *csonkagúlára* vágjuk szét. Az eredeti alaplap és a metszetidom a csonkagúla *alaplappjai* (alap, alaplap és fedőlap), ezek tehát hasonló sokszögek. A fedőlap az eredeti gúla palástjából és oldallapjaiból a csonkagúla *palástját* és *oldallapjait* vágja le. A csonkagúla oldallapjai trapézok. Egy-egy ilyen trapéz két alapja a csonkagúla két egymásnak megfelelő *alapéle*. A fedőlap síkja az eredeti gúla oldaléléből és alkotóiból a csonkagúla *oldalélét* és *alkotóit* vágja le. A csonkagúla *magassága* az alaplapok síkjainak távolsága.

Ha szabályos gúlából indulunk ki, *szabályos* csonkagúlához jutunk. Ez forgásszimmetrikus test. Ennek *tengelye* (tengelyszakasz) az alaplapok középpontját köti össze. Oldallapjainak mint trapézoknak a magassága a szabályos csonkagúla *oldalmagassága*. Ha az oldalmagasságot az alapkerületek számtani közepével szorozzuk, a szabályos csonkagúla palástjának a felszínéhez jutunk.

Szó lehet a (párhuzamosan metszett) csonkagúla mellett ferdén metszett csonkagúláról is. Ez akkor keletkezik, ha a gúlát metsző sík nem párhuzamos az alappal, viszont a gúla valamennyi oldalélét metszi. Az ilyen ferdén metszett csonkagúlát nem soroljuk a csonkagulák közé.

A Ügyeljünk arra, hogy a tetraéder, a szabályos háromoldalú gúla és a szabályos tetraéder (lásd 26.9) elnevezéseket össze ne cseréljük, mert mindegyik más fogalmat jelöl.

**26.8** Közös  $O$  csúcsú végtelen gúlaak egyesítése olyan végtelenbe nyúló testet adhat, amelyet az egymáshoz csatlakozó  $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_{n-1}OA_n, A_nOA_1$  szögtartományok határolnak. Feltesszük, hogy ezeknek az előírt csatlakozási vonalakon kívül nincs közös pontjuk, hogy két-két csatlakozó szögtartomány nincs egy síkban, s hogy legalább három szögtartomány szerepel. Az így jellemzett térbeli alakzatot *szöglettartománynak* (szöglet, térszög) nevezzük. Minden szöglettartomány kiegészítő tartománya is szöglettartomány.

A határoló szöglettartományok a szöglet *oldalai* (lapjai), csatlakozási vonalaik a szöglet *élei*, és a csatlakozó szöglettartományok által alkotott lapszögek a szöglet *szögei*. Az oldalak, élek és szögek száma ugyanannyi, mégpedig legalább 3. A gúla élei a *csúcsból* induló félegyenések. A szöglet oldalait is és szögeit is szögekkel mérjük.

A végtelen gúla is szöglettartomány. Egy szöglettartomány akkor és csak akkor konvex, ha konvex sokszögből kiindulva kapott végtelen gúla. A háromélű konvex szöglettartományt, azaz a háromoldalú végtelen gúlát *triédernek* (háromélű szöglet, hároméi) mondjuk. A *derékszögű* triéder (térnyolcad) minden oldala és szöge derékszög.

Egy szöglet *szabályos*, ha oldalai is és szögei is egyenlők. A derékszögű szöglet is ilyen. Nyilvánvaló, hogy a szabályos szöglet éleinek a csúcstól egyenlő távolságra levő pontjai egy szabályos sokszöget határoznak meg, amely a szöglet lapjaival együtt egy szabályos gúlát határol. Ebből nyomban következik, hogy az  $n$  élű szabályos szöglet az oldalait merőlegesen felező síkokra, valamint szögeinek felezősíkjaira szimmetrikus, hogy továbbá ezek a síkok egymást egy egyenesben, a szöglet *tengelyében* metszik, hogy végül a szabályos szöglet a tengelyére vonatkozólag  $n$ -edrendben forgásszimmetrikus.

A közönséges poliéder minden csúcsához egy-egy szöglettartomány, a poliéder *szöglete* (testszöglet) tartozik. Ennek élei a csúcstól induló poliéderéleket tartalmazó félegyenesek, oldalai a poliéder élszögei, szögei pedig a poliéder lapszögei. Konvex poliéder minden szöglete konvex. A téglatest minden szöglete derékszögű triéder.

**B1** A szöglettartomány szögeihez szabatosabban a következőképpen jutunk el. A szöglettartomány két élben csatlakozó oldalát az élegyenes által határolt félsíkká egészítjük ki, vagy ilyen félsíkká csökkentjük. A szöglettartományt ezekkel a félsíkokkal egy vagy több szöglettartományra bontjuk fel. Az így kapott szöglettartományok egyikének az élei között szerepel az az él, amelyből kiindultunk. Ezt a szöglettartományt a félsíkjaink által határolt két lapszög egyike tartalmazza. Ez a lapszög adja az eredeti szöglettartomány szögét.

Hasonlót mondhatunk arról, hogy a poliéderből hogyan juthatunk el a testszögleteihez. Egy csúcsot tekintünk és mindazoknak a lapoknak a síkjait, amelyek a csúcsot tartalmazzák. Ezek a síkok a teret végtelen gúlákra bontják fel. Némelyik gúla a poliéderből olyan poliédert vág ki, amelynek csúcsai között a szóban forgó csúcs is szerepel. Az ilyen végtelen gúlákat egyesítve a csúcshoz tartozó testszögletet kapjuk meg.

**B2** Említettük, hogy ha egy szöglet konvex, akkor konvex sokszögből kiindulva végtelen gúlaként kapható meg. Vegyünk fel ennek bizonyítása végett a konvex szöglet mindegyik élén egy-egy az  $O$  csúcstól különböző pontot. Ezeknek a pontoknak a konvex burka az  $O$  pontot nem tartalmazó konvex poliédert ad, hiszen a szöglet tartalmazza ezt a poliédert, s ezért  $O$  csak csúcsa lehetne, márpedig  $O$  nem szerepel a konvex burkot meghatározó pontok között. A kapott poliédernek van olyan lapsíkja, amely az  $O$  pontot a poliédertől elválasztja. Ez a sík a szöglet minden élet metszi, és mivel a szöglet konvex, a szögletet konvex sokszögben metszi.

**26.9 Szabályos testnek** (szabályos poliéder) nevezzük az olyan konvex poliédert, amelynek élei, élszögei és lapszögei egyenlők. Az élek és élszögek egyenlőségéből következik, hogy a szabályos test lapjai egybevágó szabályos sokszögek, lapjai tehát mindannyian ugyanannyi oldalúak. Az élszögek és a lapszögek egyenlőségéből következik, hogy a szabályos test szögletei egybevágó szabályos szögletek, tehát mindannyian ugyanannyi élűek.

Mondhatjuk, hogy a szabályos test olyan konvex poliéder, amelynek lapjai szabályos sokszögek és szögletei is szabályosak. Ebből ugyanis lapról lapra haladva következik az élek egyenlősége, csatlakozó éleken át haladva pedig az élszögek és a lapszögek egyenlősége is.

Ha egy szabályos testet úgy mozgatunk el, vagy általánosabban egybevágósággal olyan helyzetbe vesszük, hogy egyik lapja ennek vagy egy másik lapnak eredeti helyét foglalja el, s hogy az eredeti és az új poliéder a közös lap síkjának ugyanazon az oldalán helyezkedjék el, akkor 26.4 szerint a két poliéder fedi egymást.

Egy szabályos test alakjának az ismeretéhez elég az élek hosszát ismernünk, valamint tudnunk, hogy lapjai hány oldalúak és szögletei hány élűek. Az élhossz és az oldalszám ugyanis meghatározza a szabályos sokszöglapokat, tehát a szögletek oldalait is, ez utóbbiak pedig az élszámmal együtt meghatározzák a szabályos szögleteket. Adataink alapján tehát egy lapból kiindulva a szomszédos lapok, majd sorozatosan az összes lapok meghatározhatók.

Megállapításunkból következik, hogy ha két szabályos testre a lapok  $n$  oldalszáma és a szögletek  $m$  élszámá megegyezik, akkor a két test hasonló.

**Tétel.** *Ötféle szabályos test van. Ezeknek az adatait a következő táblázat tartalmazza:*

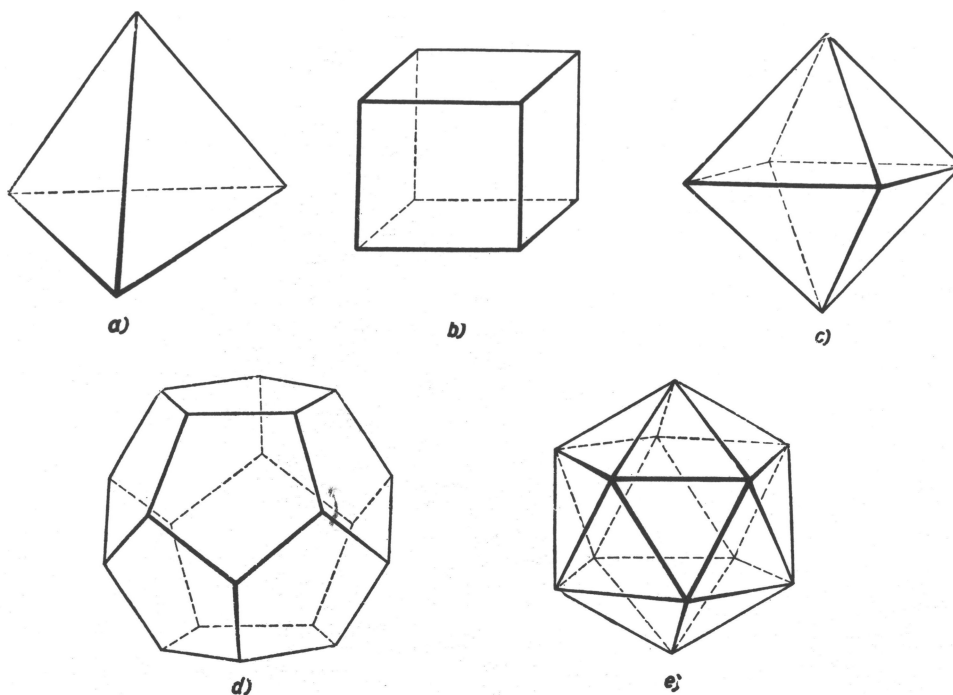
|   |   |   |   |   |  |
|---|---|---|---|---|--|
| n | m | c | e | l |  |
|---|---|---|---|---|--|



|   |   |    |    |    |            |
|---|---|----|----|----|------------|
| 3 | 3 | 4  | 6  | 4  | tetraéder  |
| 4 | 3 | 8  | 12 | 6  | hexaéder   |
| 3 | 4 | 6  | 12 | 8  | oktaéder   |
| 5 | 3 | 20 | 30 | 12 | dodekaéder |
| 3 | 5 | 12 | 30 | 20 | ikozaéder  |

Az elnevezések görög eredetűek, s a lapszámra vonatkoznak (198. ábra). A tétel ötféle testről szól, s ez azt jelenti, hogy az említett adataik ötféleké lehetnek. Az ugyanolyan adatúakról már tudjuk, hogy hasonlóak. A szabályos tetraéder esetében a szabályos jelzőt csak a legritkábban hagyhatjuk el (vö.

26.7 A). A többi szabályos test esetében viszont csak ritkán van szükség a szabályos jelző használatára.



198

*Bizonyítás.* a) Minthogy minden él két lap oldala, a lapok oldalszámát összegezve, azaz  $n$  oldalszámukat az  $l$  lapszámmal szorozva, az élek számának kétszeresét kapjuk:

$$ln = 2e.$$

Minthogy minden él két csúcsba fut, a csúcsokba futó élek számát összegezve, azaz  $m$  élszámukat a  $c$  csúcsszámmal szorozva, ismét az élszám kétszerese lesz az eredmény:

$$cm = 2e.$$

Minthogy konvex, tehát egyszerű poliéderekről van szó, Euler tétele szerint  $l + c = e + 2$ . Ha itt minden tagot  $2e$ -vel osztunk, és az imént kapott összefüggéseket figyelembe vesszük, akkor az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

összefüggéshez jutunk, amiből

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

következik.  $2mn$ -nel szorozva és átalakítva az

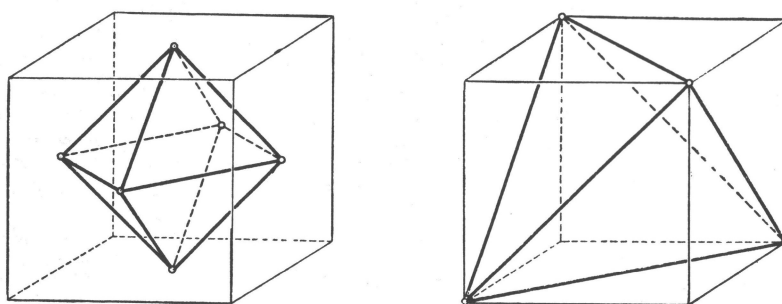
$$(n-2)(m-2) < 4$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Egyenlőtlenségünk bal oldala 1-nél kisebb nem lehet, mert sem  $n$ , sem  $m$  nem lehet 3-nál kisebb. A bal oldal lehetséges értékei tehát csak 1, 2 és 3. E számok  $1 \cdot 1, 2 \cdot 1, 1 \cdot 2, 3 \cdot 1, 1 \cdot 3$  felbontásai  $n$  és  $m$  számára öt lehetőséget adnak, s ezek a fenti összefüggések felhasználásával a tételben felsorolt számadatokhoz vezetnek.

Beláttuk tehát, hogy csak a tételben említett öt eset lehetséges. *b)* Be kell még bizonyítanunk, hogy mind az öt eset meg is valósul.

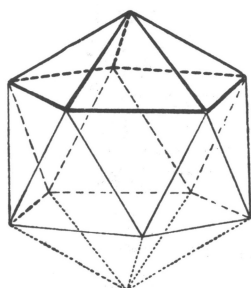
A hexaédert (kocka) már ismerjük. Ennek szabályosságából következik, hogy a kocka lapközéppontjai oktaédert, egymáshoz csatlakozó lapátlói pedig szabályos tetraédert határoznak meg (199. ábra).



199

Ikozaéder létezését a következőképpen bizonyítjuk: Egy szabályos ötszögalapú gúlát szerkesztünk, amelynek oldallapjai szabályos háromszögek (200. ábra). Ez lehetséges, mert a szabályos ötszög oldala a köré írt kör sugaránál (az  $e$  körbe írt szabályos hatszög oldalánál) nagyobb. Gúlánk palástját mindegyik oldalél felezőmerőleges síkjára tükrözve olyan palástokhoz jutunk, amelyek az oldallapok egybevágósága és lapszögeik egyenlősége miatt lapjaikkal borulnak egymásra. Tekintsük mindezeknek a palástoknak az egyesítését. Az így kapott felület 15 szabályos háromszögből áll, hiszen ötször csatoltunk az eredeti palást öt háromszögéhez három-három háromszöget, de ezek közül a palást öt alapéléhez csatlakozó két-két háromszög a lapszögek egyezése miatt azonos volt. A kapott felületet egy ötszög vonal határolja, ez a csatolt, de nem alapélhez csatlakozó öt háromszög egy-egy oldalából áll. Ennek a határvonalnak minden csúcsában három háromszöglap találkozik, amelyeket a lapszögek egyezése miatt az eredetivel egybevágó palásttá egészíthetünk ki. Csatoljuk most felületünkhöz az ezekkel a palástokkal kiegészítő háromszögeket is. Ilyen módon egy 20 háromszögből álló felülethez jutunk, hiszen öt ízben csatoltunk az előbb kapott felülethez két-két háromszöget, de a lapszögek egyezése miatt a határvonal mindegyik éléhez két azonos háromszög csatlakozott. Zárt felülethez jutottunk, hiszen minden élében két-két lap találkozik. Ez a zárt felület ikozaéder, mert 20 egybevágó háromszög határolja, és ezek lapszögei egyenlők.

Az ikozaéder szabályosságából következik, hogy lapközéppontjai dodekaédert határoznak meg. —



**Tétel.** *Egyetlenegy olyan pont van, amelynek a szabályos test csúcsaitól mért távolságai egyenlők, és egyetlenegy olyan pont van, amelynek a szabályos test lapsíkjaiktól való távolságai egyenlők. Ez a két pont azonos.*

Ez a pont a szabályos test *középpontja* (centrum). A gömbre vonatkozó elemi ismeretek birtokában mondhatjuk majd, hogy ez a pont a szabályos test köré írt és a szabályos testbe írt gömb közös középpontja.

*Bizonyítás.* A szabályos test éleit merőlegesen felező síkokat tekintjük. Egy lap oldalainak felezősíkjai egymást a lap középpontjában a lapra emelt merőlegesben, a lap tengelyében metszik, hiszen a lapsíkon belül az oldalak felezőmerőlegesei a szabályos sokszög középpontjában metszik egymást.

Két szomszédos lap tengelye metszi egymást, mert a lapok és tengelyeik a lapok által bezárt lapszögtartomány szögfelező síkjára vonatkozólag szimmetrikusan helyezkednek el. A szimmetriából következik, hogy a metszéspont a lapoktól ugyanakkora távolságra van. Ugyanakkora távolsághoz jutunk, bármelyik két szomszédos lapból indulunk is ki, hiszen a szabályos test elmozgatható úgy, hogy két szomszédos lapja egy másik, tetszőlegesen megválasztott, szomszédos lappár helyét foglalja el. A távolságok egyenlőségéből következik, hogy egy laptengelyt a szomszédos lapok tengelyei mindannyian ugyanabban a pontban metszenek.

Minden laptengelyen egy-egy ponthoz jutottunk, és tudjuk, hogy két szomszédos lap tengelyén azonos pontról van szó. Ebből következik, hogy azonos pont adódott a tengelyek mindegyikén, hiszen bármely lapból mindig szomszédos lapra térve át, bármely laphoz eljuthatunk. Ezek szerint a lapok tengelyei egy pontban metszik egymást, és ez a pont a lapok mindegyikétől ugyanakkora távolságra van.

Mindhogy a kapott pont rajta van az éleket merőlegesen felező síkokon, azért ez a pont bármely él két végpontjától egyenlő távolságra van. Ugyanakkora távolságra van akkor ez a pont a szabályos test minden csúcsától, hiszen bármely két csúcs összeköthető élekből álló töröttvonalal.

Más pont nem felel meg a tétel követelményei közül egyiknek sem. Az egyik esetben ugyanis csak az éleket merőlegesen felező síkok közös pontja, a másik esetben pedig csak a lapszögek felezősíkjainak közös pontja felelhet meg. —

**BI a)** A szabályos test definiálásakor kimondtuk, hogy élei, élszögei és lapszögei egyenlők. E három feltétel egyikét sem hagyhatjuk el. Ezt a téglatest, a kockaélek középpontjainak a konvex burka, valamint az a kettősgúla támasztja alá, amelyet az ikozaéder megszerkesztésekor használt, gúlapalást és ennek az alapsíkra vonatkozó tükröképe határol.

Kimondtuk a definícióban azt is, hogy a szabályos test konvex poliéder. Ebből következett, hogy egyszerű. Okoskodásainkban csak az egyszerűsége támaszkodtunk.

*b)* Ha a szabályos test definiálásakor konvex helyett egyszerű poliédert mondunk, akkor tárgyalásunk a mondottak szerint változatlanul helyes. Elvárható viszont ebben az esetben, hogy a szabályos test konvexitását is bizonyítsuk. Ez 26.1 B2 alapján nyomban belátható, hiszen az ott mondottak szerint a lapszögek egyenlőségéből konvexitásuk, ebből pedig az egyszerű poliéder konvexitása következik.

*c)* Még tovább lazíthatjuk a szabályos test definícióját. Bebizonyítjuk, hogy a definíció akkor is helyes marad, ha konvex helyett nem egyszerű, hanem közönséges poliéderről szólnak.

Tekintsünk tehát egy olyan közönséges poliédert, amelynek az élei, élszögei és lapszögei egyenlők. Ennek a poliédernek a lapjait osztályozzuk, egy osztályba sorolva két lapot akkor, ha egyikből eljuthatunk a másikba úgy, hogy mindig élben csatlakozó lapokon át haladunk. Egy-egy ilyen laposztály egy zárt poliéderfelületet alkot.

Ezekre a poliéderfelületekre változtatás nélkül alkalmazható ennek a szakasznak a teljes tárgyalása, kivéve az első tételt, de beleértve ennek a megjegyzésnek a b) részét is. Így tehát konvex zárt poliéderfelületekről van szó, sőt az első tételünket közvetlenül megelőzők szerint ezek a poliéderfelületek egybevágók, tehát egyenlő térfogatú konvex poliédereket határoznak. Ebből

következik, hogy az egyik poliéder nem tartalmazhatja a belsejében a másikat. Ez azt jelenti, hogy csak egyetlen konvex zárt poliéderfelülethez juthattunk, hiszen közönséges, tehát összefüggő poliéderről van szó. Eszerint közönséges poliéderünk valóban konvex poliéder.

Megemlítjük, hogy a szabályos test definíciójában a közönségességet meg kell követelni, hiszen különben nem beszélhetünk élszögekről és lapszögekről, s ha csak az összefüggőség megköveteléséről mondanánk le, akkor már két közös pont nélküli kocka együttesét is szabályos testnek kellene mondanunk.

**B2** Szakaszunk utolsó tételének bizonyítására, valamint a szabályos testek önmagukra való egybevágó leképezéseiről mondottakra hivatkozva megállapíthatjuk, hogy a szabályos testek az éleket vagy élszögeket merőlegesen felező síkokra, a lapszögek szögfelező síkjaira, valamint a középpontot egy él felezőpontjával összekötő egyenesekre vonatkozólag szimmetrikusak, s hogy a középpontot csúccsal vagy lapközépponttal összekötő egyenesekre vonatkozólag forgásszimmetriát mutatnak. Ez utóbbi forgásszimmetria rendjét a csúcsban találkozó élek száma vagy a lap oldalszáma adja meg.

Más szimmetriasík és szimmetriatengely nincs, mert ezeknek utolsó tételünk folytán a középpontot tartalmazniuk kell, s mert lapot és élt csak szimmetriatengelyben vagy szimmetriacentrumban metszhetnek.

A szabályos testek a tetraéder kivételével a középpontjukra is szimmetrikusak. Ez következik abból, hogy ezeknél a testeknél a lapok oldalszáma nem egyenlő a csúcsok élszámával, 8 ezért egy csúcsot a középponttal összekötő egyenes a rá vonatkozó forgásszimmetria miatt a test felületét csak csúcsban metszheti.

Más szimmetriacentrum nincs, hiszen korlátos alakzatnak csak egy szimmetriacentruma lehet (lásd 19.2 B1). Nyilvánvaló, hogy a tetraéder nem lehet centrálisán szimmetrikus, hiszen akkor négy csúcsa egy síkban, ti. a centrumon és egy élen átfektetett síkban volna.

**B3** A szabályos test néhány általánosítását említjük meg.

*Félig szabályos testnek* mondjuk az olyan konvex poliédert, amelynek lapjai szabályos sokszögek és szögletei egybevágók (Archimedes-féle poliéderek), vagy pedig szögletei szabályosak és lapjai egybevágók. A szabályos testek mind a két követelményt kielégítik, de ezeket nem nevezzük félig szabályos testeknek. A félig szabályos testek először említett fajtájára kockaélek középpontjainak a konvex burka ad példát. Ennek háromszöglapjai egy oktaéder lapjain helyezkednek el. Ennek az oktaédernek és az eredeti kockának a konvex burka másik fajtájú félig szabályos testre ad példát.

Egy másik általánosításhoz, a *szabályos csillagpoliéderek*hez jutunk, ha véges sok olyan szabályos sokszögvonalat vagy szabályos csillagsokszöget tekintünk, amelyeknek minden oldala két ilyen sokszög közös oldala, és található hozzájuk olyan egybevágóság, amely e sokszögek egyikét egy tetszőlegesen megadott másikra fekteti, sőt az elsőnek egyik csúcsát a másiknak megadott csúcsába viszi, s amely a teljes alakzat helyét nem változtatja meg. A szabályos testek élhálózata is kielégíti ezeket a követelményeket, de azokat nem nevezzük szabályos csillagpoliédernek. Egy szabályos testnek a középponttól egyenlő (0-tól különböző) távolságra haladó átlói szabályos csillagpoliédert alkotnak.

## 27. § Térfogat és felszín

A térfogat tárgyalásához mintául a terület síkbeli tárgyalása szolgál. Először csak a poliéderek térfogatáról lesz szó, majd a görbe lapú testekről is. A görbe lapú testek vizsgálatát felszínük tárgyalásával is előkészítjük. A felszínt illetően megelégszünk azonban azzal, hogy a későbbi tárgyalás igényeit kielégítsük. A felszín fogalmának általánosabb körben való tisztázására nem törekszünk.

27.1 Minden poliéderhez hozzárendelhetünk egy számot, amelyet *térfogatnak* (köbtartalom, volumen) nevezünk, s amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden poliéder térfogata pozitív szám.

2. Egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.

3. Ha egy poliédert két poliéderre bontunk, e kettő térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyenlő.

4. Az egységkocka térfogata 1.

Ha a hosszegységet, illetve térfogategységet megváltoztatjuk, minden poliéder térfogatát osztani kell annak a poliédernek térfogatával, amelyet újonnan térfogategységül választottunk. Ebből következik, hogy nem függ a térfogategység megválasztásától az olyan kijelentések helyessége, hogy két poliéder térfogata egyenlő, hogy egy poliéder térfogata másik kettő összegével vagy különbségével egyenlő, vagy hogy az egyik poliéder térfogata a másikénak valahányszorososa.

Ha egy poliédert véges sok poliéderre bontunk fel, akkor a 3. követelmény ismételt alkalmazása alapján kimondhatjuk, hogy a véges sok részpoliéder térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyenlő.

Ha egy poliéder tartalmaz egy másikat, akkor a tartalmazó poliéder térfogata nagyobb, mert ez utóbbi a tartalmazott poliéder és az ennek elhagyása után maradó poliéder térfogatának összegével egyenlő, és e maradó poliéder térfogata is pozitív.

**A** A térfogathoz szemléletes úton eljutunk, ha adott alakú homogén test súlyát az egységkockáéval elosztjuk.

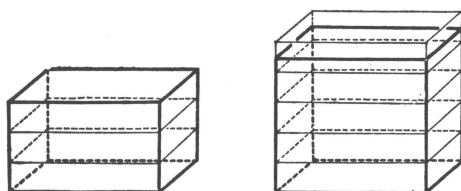
**B** Eddig csak követelményeket támasztottunk a poliéderekhez térfogatként hozzárendelt számokkal szemben, és nem vizsgáltuk meg, hogy ezek a követelmények kielégíthetők-e. Erre később kerül majd sor (lásd 27.6 B). Amíg ezt a kérdést nem tisztáztuk, minden eredményünk csak úgy értendő, hogy ha hozzá lehet rendelni a poliéderekhez követelményeinket kielégítő számokat, akkor állításainknak az ilyen számok körében teljesülniük kell.

**27.2 Tétel.** *Ha két téglatest alaplapja egybevágó, térfogatuk aránya magasságuk arányával egyenlő.*

A tételt csak téglatestekre mondtuk ki, mert erre lesz szükségünk. Kimondhattuk volna egyenes hasábokra, mert a bizonyítás változatlanul érvényes azokra is.

*Bizonyítás.* A már jól ismert gondolatmenetet alkalmazzuk. Az egyik hasáb  $m_1$  magasságát  $n$  egyenlő részre osztjuk, s e részt felmérjük a másik  $m_2$  magasságára, ahányszor csak lehetséges (201. ábra). Ha  $k$ -szor mérhetjük fel, akkor

$$k \frac{m_1}{n} \leq m_2 < (k+1) \frac{m_1}{n}.$$



201

A magasságok osztó pontjain át az alappal párhuzamos síkokat fektetünk. E síkok egyenlő magasságdarabokhoz tartozóan egybevágó, egyenlő térfogatú hasábokat szelnek le. Ezért a térfogatokra

$$k \frac{V_1}{n} \leq V_2 < (k+1) \frac{V_1}{n}.$$

Egyenlőtlenségeinket  $m_1$ -gyei, illetve  $V_1$ -gyel osztva azt kapjuk, hogy sem  $\frac{m_2}{m_1}$ , sem  $\frac{V_2}{V_1}$  nem kisebb  $\frac{k}{n}$ -nél, és mindkettő kisebb  $\frac{k+1}{n}$ -nél. Ezért

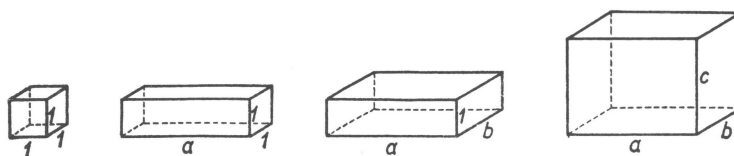
$$\left| \frac{V_2}{V_1} - \frac{m_2}{m_1} \right| < \frac{1}{n}.$$

$n$  tetszőleges volta miatt tehát a bal oldal értéke csak 0 lehet. —

**Tétel.** *A téglatest térfogata három egy csúcsban találkozó él szorzatával egyenlő.*

Egy csúcsban találkozó élek helyett természetesen három egymással nem párhuzamos élt is mondhattunk volna. Tételünk kimondja, hogy a derékszögű paralelepipedon térfogata az alapterület és a magasság szorzata.

*Bizonyítás.* Az 1, 1, 1 élű egységkocka térfogata 1. Az  $a$ , 1, 1 élű téglatest  $V_1$  térfogatára az előző tétel szerint  $V_1 : 1 = a : 1$ , tehát  $V_1 = a$  adódik (202. ábra). Az  $a$ ,  $b$ , 1 élű téglatest  $V_2$  térfogatára ugyanígy  $V_2 : V_1 = b : 1$  és  $V_2 = V_1 b = ab$  következik. Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  élű téglatest  $V$  térfogatára hasonló módon azt kapjuk tehát, hogy  $V : V_2 = c : 1$  és  $V = V_2 c = abc$ . —



202

A Ha a hosszegység megváltoztatásakor a hosszúság mérőszáma  $n$ -szeresre változik, akkor a térfogat mérőszáma utolsó tételünk szerint  $n^3$ -szeres lesz. Ezért mondjuk, hogy a térfogat dimenziója „hosszúság a köbön”. Ez teszi célszerűvé azt a megállapodást is, hogy ha a hosszegység jele cm vagy m, akkor a megfelelő térfogategységet  $\text{cm}^3$  vagy  $\text{m}^3$  jelöli, mert pl.  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$  összefüggésből „köbreemeléssel” kapjuk az  $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$  összefüggést.

Az egységek megadását és a szóhasználatot illetően itt is elmondhatnák mindazt, amit 20.2 A-ban a területtel kapcsolatosan elmondtunk.

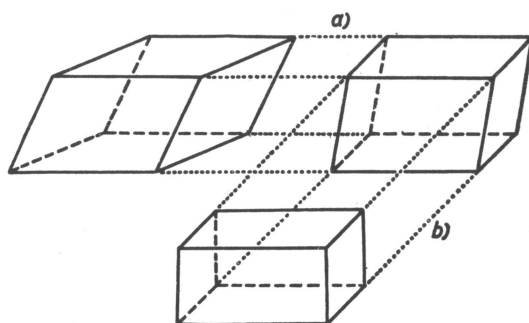
**27.3 Tétel.** *A paralelepipedon térfogata az alapterület és a hozzá tartozó magasság szorzatával egyenlő.*

Már tudjuk, hogy derékszögű paralelepipedonra helyes ez az állítás.

*Bizonyítás.* Tételünket azáltal bizonyítjuk, hogy egy paralelepipedonból kiindulva ugyanakkora térfogatú, alapterületű és magasságú derékszögű paralelepipedont készítünk. Minthogy az utóbbról az állítás teljesül, valóban az adódik így, hogy az eredeti paralelepipedonra is teljesülnie kell.

a) Paralelepipedonunk alaplapjait és két párhuzamos oldallapját meghosszabbítva egy végtelen hasábhöz jutunk. Messük el ezt a végtelen hasábot egy éleire merőleges, az eredeti élek meghosszabbításait metsző síkkal (203. ábra). Ez a sík a két meg nem hosszabbított oldallappal együtt a végtelen hasábból két poliédert vág le, amelyek egyike a másikat tartalmazza, s ha ez utóbbit az azt tartalmazóból elvesszük, maradékol az eredeti paralelepipedont kapjuk. Csúszassuk el a tartalmazott

poliédert a meghosszabbított élek irányában és azok hosszával. Olyan poliéderhez jutunk, amelyet az imént tartalmazónak mondott poliéder ugyancsak tartalmaz, s ha elvesszük belőle, akkor maradékul egy újabb paralelepipedont kapunk. Ennek két oldallapja a szerkesztés folytán merőleges az azokat összekötő élekre.



203

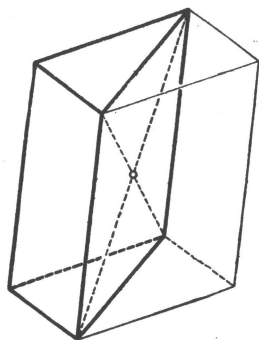
b) Az új paralelepipedonnal ugyanúgy járunk el, ahogyan az eredetivel eljártunk, de most az eredeti alapsíkokban elhelyezkedő alaplapokat és az élekre merőleges oldallapokat hosszabbítjuk meg. Ennek következménye, hogy a végtelen hasáb oldallapjai derékszögű lapszögeket alkotnak, azaz a végtelen hasábot az éleire merőleges sík téglalapban metszi. Ezért a második lépés derékszögű paralelepipedonhoz vezet.

c) A térfogat mindkét alkalommal változatlan marad, hiszen egy poliéder hozzáillesztése után a hozzáillesztett poliéderrel egybevágó poliédert vettünk el, a térfogatot tehát ugyanannyival növeltük, majd csökkentettük. Változatlan maradt az alapterület is, hiszen eljárásunk az alaplapot egy trapézzal egészítette ki, majd egy ezzel egybevágó trapézt vágott le belőle, a területet tehát ugyanannyival növelte, majd csökkentette. Változatlan maradt végül a magasság is, hiszen az alapsíkok mindvégig ugyanazok maradtak. Ezek a megállapítások tételünk helyességét bizonyítják. —

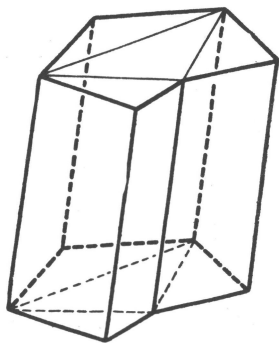
**27.4 Tétel.** *A hasáb térfogata az alapterület és a magasság szorzata.*

E tétel magában foglalja a térfogatról eddig bizonyított tételek mindegyikét.

*Bizonyítás.* a) Először háromoldalú hasábra bizonyítjuk az állítást. A háromoldalú hasáb alapját egyik oldalának középpontjára tükrözve paralelogrammává egészítjük ki (204. ábra). A kiegészítő háromszög fölé az adott hasáb alkotójával hasábot szerkesztünk. A két háromoldalú hasáb együtt paralelepipedont alkot. A két hasáb a paralelepipedon középpontjára nézve szimmetrikus, s az egybevágóság miatt térfogatuk is egyenlő. Az adott hasáb térfogata ezért a paralelepipedon térfogatának a fele, tehát magasságának és alapterülete felének, azaz hasábunk alapháromszöge területének szorzata.



204



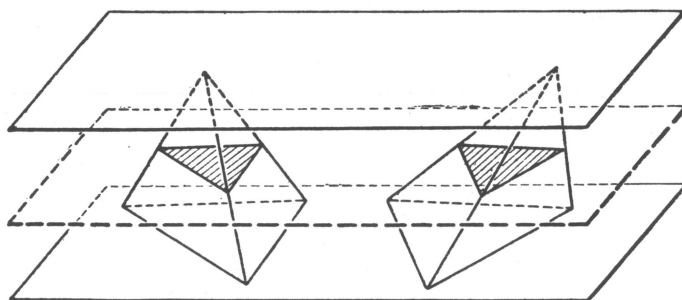
205

b) Bármely hasáb alapját felbonthatjuk háromszögekre, és a hasábot ezeknek megfelelő háromoldalú hasábokra (205. ábra). Minthogy a) szerint ezek mindegyikének a térfogata az alapterület magasságszorosa, a teljes hasáb térfogata a közös magasságnak és az alapháromszögek területösszegének, azaz a hasáb alapterületének a szorzata. —

**B** A térfogatra vonatkozó, 27.1-ben kimondott 2. követelményt olyan poliéderekre alkalmaztuk, amelyek egybevágók ugyan, mert pontra nézve szimmetrikusak, de mozgással fedésbe nem hozhatók. Ha ezt a követelményt kevesebbet követelő módon úgy szövegeztük volna, hogy „mozgással fedésbe hozható poliéderek térfogata egyenlő”, akkor is eljuthatnánk a térfogatra vonatkozó tételek mindegyikéhez, ebben az esetben azonban a háromoldalú hasábra vonatkozó bizonyítást módosítani kellene, hacsak nem egyenes hasábról van szó. Az előző szakasz okoskodásával bizonyíthatnák, hogy a 204. ábra két hasábját két mozgással is fedésbe hozható egyenes hasábbal megegyező térfogatú.

**27.5 Tétel.** *Ha két tetraéder alapterülete és magassága egyenlő, akkor egyenlő a térfogatuk is.*

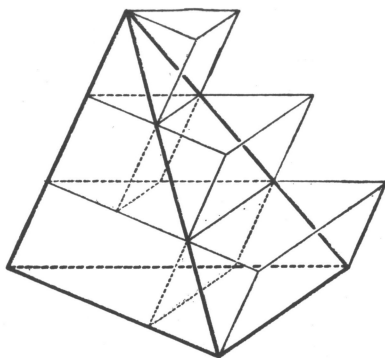
*Bizonyítás.* Helyezzük a két tetraédert alapjukkal ugyanarra a síkra, a síknak ugyanarra az oldalára (206. ábra). A magasságok egyezése miatt csúcsaik egy az alapsíkkal párhuzamos síkban lesznek. Ha a tetraédereket az alapsíkokkal párhuzamos síkkal metsszük, egyenlő területű metszetidomokat kapunk, mert a két csúcsból kinagyítva az egyenlő területű alaplapokat adják, és a kinagyítás aránya is egyenlő, hiszen ezt a párhuzamos síkok távolságai meghatározzák.



206

Messük el most tetraédereinket az alappal párhuzamos síkokkal úgy, hogy ezek az oldaléleket és a magasságot  $n$  egyenlő részre osszák,  $n$  itt tetszőleges természetes számot jelent. Mindkét tetraédernek kiválasztjuk egy oldalélét, és ennek  $n$ -edrészével, mint alkotóval az alaplap és a kapott metszetek mindegyike fölé hasábot szerkesztünk (207. ábra). E hasábok együttesen egy-egy lépcsős poliédert alkotnak, amelyek a tetraédereket magukban foglalják. E poliéderek térfogata egyenlő, mert egyenlő alapú és egyenlő magasságú hasábok egyesítésével keletkeztek. Jelölje  $A$  e poliéderek egyező térfogatát.





207

Most újabb hasábokat szerkesztünk ugyanazzal az alkotóval, de most a metszetidomok mindegyike alá. E hasábok együttesen ugyancsak egy-egy lépcsős poliédert alkotnak, amelyek a tetraéderek belsejében vannak. Az előbb említett okból ezeknek a térfogata is egyenlő, és ezt  $B$ -vel jelöljük.

Ha az alapterület és a magasság szorzatát  $V$ -vel jelöljük, az alaplapok fölé szerkesztett hasáb térfogata  $\frac{V}{n}$ . Ha ezt a hasábot az először szerkesztett poliédertől elhagyjuk, éppen a másodszor szerkesztett poliédert kapjuk eltolt helyzetben. Ezek szerint

$$A - B = \frac{V}{n}.$$

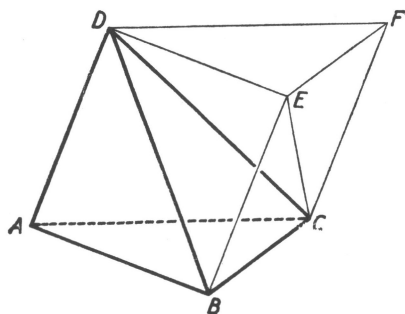
Tetraédereink  $V_1, V_2$  térfogata  $A$ -nál kisebb és  $B$ -nél nagyobb, mert egy tartalmazott poliéder térfogata a tartalmazóénál kisebb. A két térfogat különbsége ezért  $A$  és  $B$  különbségénél kisebb:

$$|V_1 - V_2| < \frac{V}{n}.$$

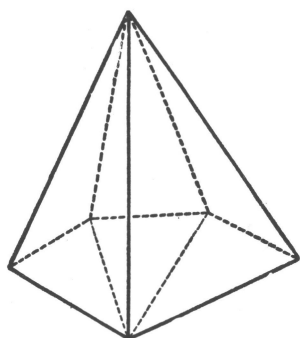
Míthogy ez minden  $n$  természetes számra teljesül, és a bal oldal nem negatív, következik, hogy a bal oldal értéke csak 0 lehet, azaz  $V_1 = V_2$ . —

**27.6 Tétel.** *A tetraéder térfogata az alapterület és a magasság szorzatának harmada.*

*Bizonyítás.* A tetraéder  $AD$  oldalélével mint alkotóval az  $ABC$  alaplap fölé hasábot emelünk (208. ábra). Ezt a hasábot az eredeti tetraéderre, valamint a  $BCDE$  és  $CDEF$  tetraéderekre bontjuk fel. Az eredeti és a  $BCDE$  tetraédernek a közös  $C$  csúcsukkal szemközt lapjai egy síkban vannak és egybevágók, hiszen a paralelogrammát átlója egybevágó háromszögekre bontja fel. Ha tehát ezeket a lapokat tekintjük alaplapnak, akkor az előző tétel alapján kimondhatjuk, hogy ez a két tetraéder egyenlő térfogatú. A  $BCDE$  tetraéder hasonló indoklással a  $CDEF$  tetraéderrel is egyenlő térfogatú, hiszen közös  $D$  csúcsukkal szemközt lapjukról hasonló mondhatunk. Ezek szerint a három tetraéder térfogata egyenlő, és az eredeti tetraéder térfogata a hasáb térfogatának, azaz az alapterület és a magasság szorzatának a harmada. —



208



209

**Tétel.** *A gúla térfogata az alapterület és a magasság szorzatának harmada.*

*Bizonyítás.* A gúla alapját háromszögekre bontjuk fel, és a gúlát ezeknek megfelelően közös csúcsú és közös magasságú tetraéderekre daraboljuk (209. ábra). Minthogy a tetraéderek térfogata a magasság harmadának és alapterületüknek a szorzata, a teljes térfogat a magasság harmadának és a háromszögek területei összegének, azaz a teljes alapterületnek a szorzata. —

**Tétel.** *Minden poliéder tetraéderekre darabolható fel.*

Ez a tétel lehetőséget ad arra, hogy bármely poliéder térfogatát kiszámítsuk.

*Bizonyítás.* Ha egy poliédert minden lapsíkkal elmetszünk, konvex poliédereket kapunk. Ha egy konvex poliéder valamelyik csúcsát kiszemeljük, és azokat a gúlákat tekintjük, amelyeknek csúcsa a kiszemelt csúcs, alaplapja pedig a konvex poliédernek a kiszemelt csúcsot nem tartalmazó minden egyes lapja, akkor a konvex poliédert gúlákra daraboltuk. Végül, mint az előbb is láttuk, minden gúlát tetraéderekre bonthatunk fel. —

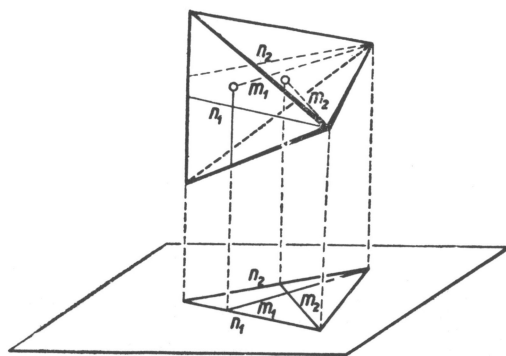
**B\*** A térfogat eddigi tárgyalása csak olyan állításokhoz vezetett, amelyeknek teljesülniök kell akkor, ha minden poliéderhez 27.1 négy követelményét kielégítő, térfogatnak nevezett számot hozzá lehet rendelni. Utolsó tételünk alapján kimondhatjuk, hogy ez a hozzárendelés, ha egyáltalában, akkor csak egyféleképpen lehetséges. Most bebizonyítjuk, hogy van ilyen hozzárendelés, igazoljuk tehát, hogy a térfogategység rögzítése után minden poliéderhez egyértelműen meghatározott térfogat tartozik.

Minden poliéderhez hozzárendelünk egy-egy számot, és majd azt tapasztaljuk, hogy az általunk hozzárendelt számok kielégítik 27.1 követelményeit. Az alábbi gondolatmenet hasonlít 20.4 B gondolatmenetéhez, de annak nem pontos térbeli megfelelője, mert az ott alkalmazott, valamivel egyszerűbb gondolatsor átültetése akadályokba ütközik.

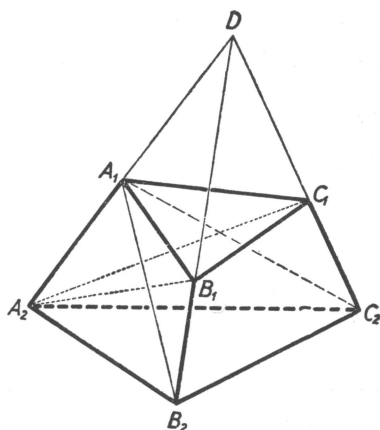
*a) A tetraéder egy lapjának területét a hozzá tartozó magassággal szorozva a lap megválasztásától független eredményt kapunk. Ennek az értéknek a harmadát a tetraéderhez rendeljük hozzá. Legyen*

a tetraédernek az a élben találkozó,  $T_1, T_2$  területű lapokhoz tartozó magassága  $m_1$  és  $m_2$ , a lapoknak  $a$ -hoz tartozó magasságai pedig  $n_1$  és  $n_2$  (210. ábra). Vetítsük a tetraédert egy az  $a$  élre merőleges síkra. A vetület egy háromszög, melynek két oldala  $n_1$  és  $n_2$ , a hozzájuk tartozó két magasság pedig  $m_1$  és  $m_2$ . A síkgeometriából ismeretes az  $m_1 n_1 = m_2 n_2$  összefüggés, amiből  $T_1 = \frac{1}{2} a n_1$  és  $T_2 = \frac{1}{2} a n_2$  figyelembevételével  $T_1 m_1 = T_2 m_2$  adódik.

b) Ha egy gúlát azonos csúcsú tetraéderekre bontunk fel, akkor az ezekhez rendelt számok összege nem függ attól, hogy a felbontást hogyan végeztük. Ezt az értéket a gúlához rendeljük hozzá. Állításunk nyomban adódik abból a síkgeometriai ismeretünkből, hogy a tetraéderek alapterületének összege a gúla alapterületével egyenlő, magasságuk pedig közös. A gúlához rendelt érték ezek szerint az alapterület és a magasság szorzatának harmada. Ez a megállapodás magában foglalja a tetraéderre vonatkozó korábbi megállapításunkat. Változatlan indokolással azt is kimondhatjuk, hogy ha egy gúlát azonos csúcsú gúlákra bontunk fel, akkor az ezekhez rendelt számok összege az eredeti gúlához rendelt számmal egyenlő.



210

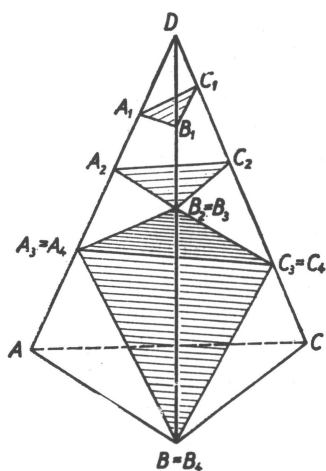


211

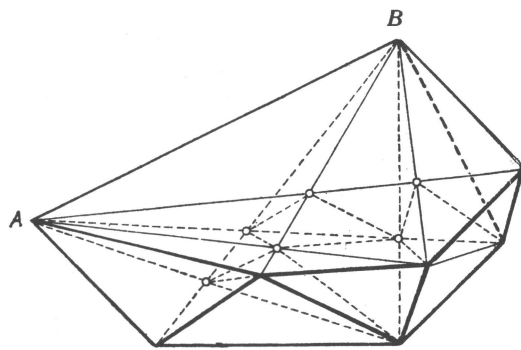
c) Fekessünk síkot a háromoldalú, párhuzamosan vagy ferdén metszett csonkagúla egyik csúcsán és azon az élen át, amelynek a végpontjait ezzel a csúccsal nem köti össze él. Ez a sík ezt a poliédert egy háromoldalú és egy négyoldalú gúlára vágja fel. Állítjuk, hogy az ehhez a két gúlához rendelt szám összege nem függ attól, hogy melyik csúcsból indultunk ki. Ezt az értéket a háromoldalú, párhuzamosan vagy ferdén metszett csonkagúlához rendeljük hozzá. Állításunkat annak kimutatásával bizonyítjuk, hogy a kapott érték mindig annyi, mint amennyi akkor marad, ha a teljes gúlavá kiegészítő

gúlához rendelt számot a teljes gúlához rendelt számból levonjuk. Ha pl. a 211. ábra ferdén metszett csonkagúlájának  $A_1$  csúcsát választjuk ki, akkor a csonkagúlát  $A_2B_2C_2$  és  $B_1C_1C_2B_2$  alapú gúlákra vágjuk fel. Az  $A_1B_1C_1D$  kiegészítő gúlához és az  $A_1B_1C_1C_2B_2$  gúlához rendelt értékek összege a közös  $A_1$  csúcs révén b) szerint az  $A_1B_2C_2D$  gúlához rendelt értéket adja. Ha ehhez az értékhez az  $A_1A_2B_2C_2$  gúlához rendelt értéket hozzáadjuk, akkor a közös  $B_2$  csúcs révén ismét b) szerint a teljes  $A_2B_2C_2D$  gúlához rendelt értéket kapjuk. Ugyanígy láthatjuk be állításunk helyességét, ha az  $A_2$  csúcsból indulunk ki, csak most a kiegészítő gúlához elsőnek közös  $B_1$  csúccsal az  $A_2A_1B_1C_1$  gúla csatlakozik, a kapott  $B_1A_2C_1D$  gúlához pedig közös  $A_2$  csúccsal az  $A_2B_1C_1C_2B_2$  gúla.

d) Ha egy háromoldalú gúlát az alaplapot nem metsző és egymást a gúlán belül nem metsző síkokkal feldarabolunk, akkor a keletkező darabokhoz rendelt számok összege az eredeti gúlához rendelt számmal egyenlő (212. ábra). Minthogy a síkok a gúlán belül nem metszik egymást, a szétvágással keletkező darabok csúcsai gúlánk oldalélein vannak. Így azt is belátjuk, hogy a darabok csak háromoldalú gúla, négyoldalú gúla és háromoldalú párhuzamosan vagy ferdén metszett csonkagúla lehetnek, tehát olyan poliéderek, amelyekhez már hozzárendeltünk egy-egy értéket. A darabok egy-egy olyan háromszöglapban csatlakoznak egymáshoz, amelynek csúcsai a három oldalélen vannak. Ennek következménye, hogy a darabokat a csúcshoz illeszkedő gúlán kezdve, és mindig a csatlakozó darab illesztésével folytatva, úgy illeszthetjük sorban egymáshoz, hogy minden egyes illesztés után egy tetraéder áll elő. A darabokhoz rendelt számokat ilyen sorrendben összegezve b) és c) szerint minden lépésnél a már összerakott tetraéderhez rendelt számot kapjuk meg részösszegként. A teljes összeg ezért a teljes gúlához rendelt számmal egyenlő.



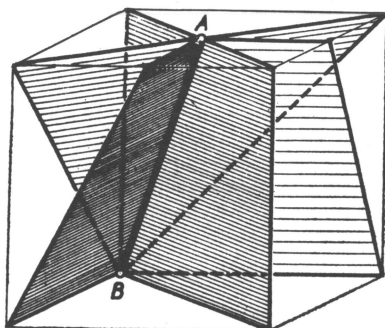
212



213

e) Ha két konvex sokszög nincs egy síkban, de egy oldaluk közös, ha továbbá e sokszögek konvex burkát a közös oldal egy végpontján és ezt nem tartalmazó éleken átfektetett síkokkal gúlákra vágjuk fel, akkor az ezekhez rendelt számok összege nem függ attól, hogy a közös oldal melyik végpontjából indultunk ki. Poliéderünket a két sokszögon kívül háromszögek és esetleg négyszögek határolják, hiszen egy-egy lapnak a sokszögek egyikével legfeljebb két csúcsa lehet közös (213. ábra). Ha van ilyen négyszög, bontsuk fel egy átlóval két háromszögre, és tekintsük élnek a következőkben ezt az átlót is. Ez a megállapodás b) szerint állításunk tartalmát nem változtatja meg. Vágjuk fel poliéderünket a közös  $AB$  oldal  $A$  végpontján és az ezt nem tartalmazó éleken át fektetett síkokkal. Vágjuk fel ezután az így kapott háromoldalú gúlát a  $B$  végponton és az azt nem tartalmazó éleken át fektetett síkokkal. Minthogy ez utóbbi síkok nem metszik egymást poliéderünkön belül, és a poliéder háromszöglapjait sem metszik, ez a második feldarabolás megfelel d) kívánalmainak. Így tehát d) szerint a kétszeri feldarabolással kapott testekhez rendelt számokat úgy csoportosíthatjuk, hogy egy-egy csoport összege egy-egy olyan gúlához rendelt számot adjon, amelyet az első felvágás alkalmával kaptunk. A testjeinkhez rendelt számok teljes összege egyenlő tehát azzal az összeggel, amelyikről állításunk szól akkor, ha az  $A$  végpontból indulunk ki. Ugyanilyen indokolással azonban ugyanez a teljes összeg azzal a másik összeggel is egyenlő, amelyet akkor kapunk, ha a  $B$  végpontra esik választásunk, hiszen közömbös, hogy a kétszeri feldarabolást milyen sorrendben hajtjuk végre. Az  $A$  és  $B$  közötti választás tehát a szóban forgó összeg értékét valóban nem befolyásolja.

f) Ha a konvex poliéder felületén egy pontot adunk meg, akkor a konvex poliédert felbonthatjuk azokra a gúlákra, amelyeknek közös csúcsa az adott pont, alaplapjaik pedig a poliédernek az adott pontot nem tartalmazó lapjai. Állítjuk, hogy az ezekhez a gúlához rendelt számoknak az összege nem függ attól, hogy a konvex poliéder felületének melyik pontjából indultunk ki. Ezt az értéket a konvex poliéderhez rendeljük hozzá. Ez a megállapodás fedi a), b) és c) megállapodását. A most hozzárendelt értékről szolt e) állítása is. Állításunk bizonyítása végett a konvex poliéder felületén az  $A$ ,  $B$  pontokat először úgy vesszük fel, hogy az  $AB$  szakasz meghosszabbításai a poliéderen kívül helyezkedjenek el, és igazoljuk, hogy ezekből a pontokból kiindulva egyenlő összegekhez jutunk. Szeleteljük fel poliéderünket az  $AB$  egyenes által határolt, a poliéder  $A$ -tól és  $B$ -től különböző csúcsain átfektetett félsíkokkal (214. ábra). E félsíkok a poliéder lapjait háromszögekre és négyszögekre darabolják fel, és a poliéder pedig a félsíkok mindegyikéből egy-egy konvex sokszöget metsz ki, amelyek közös  $AB$  oldalukkal csatlakoznak egymáshoz, hiszen az  $AB$  egyenesből poliéderünk az  $A$ ,  $B$  pontok megválasztása miatt az  $AB$  szakaszt metszi ki. A poliéderünkben keletkező szeletek mindegyike két-két szomszédos félsíkból kimetszett sokszögnek a konvex burka, hiszen mindegyik szelet konvex, és minden csúcsa két szomszédos sokszög valamelyikének a szögpontja. Bontsuk fel most a szeletek mindegyikét e) előírása szerint  $A$  csúcsú gúlákra. Ezeknek a gúláknak az alaplapjai azok a háromszögek és négyszögek, amelyekre félsíkjaink az  $A$  pontot nem tartalmazó poliéderlapokat feldarabolták. Az állításunkban szereplő,  $A$ -hoz tartozó összeg b) szerint mindezen gúlához rendelt számok összegével egyenlő, hiszen ezekből a gúlákból mind egyik olyan  $A$  csúcsú gúla összerakható, amelyről állításunk szól akkor, ha az  $A$  pontból indulunk ki. A  $B$ -hez tartozó összegről ugyanezt mondhatjuk el. Ezért ez a két összeg e) miatt valóban egyenlő.



Vegyük fel most a poliéder felületén az  $A$ ,  $B$  pontokat úgy, hogy a poliéder az  $AB$  szakasz meghosszabbításain elhelyezkedő pontot is tartalmazzon. Ebben az esetben a meghosszabbítások valamelyikén van olyan pont, amelyet egy az  $AB$  szakaszt nem tartalmazó lap is tartalmaz. Ennek a

lapnak a belsejében egy  $C$  pontot veszünk fel. Minthogy az  $A$ ,  $C$ , valamint a  $B$ ,  $C$  pontok nincsenek egy lapon, mindkét pontpárra érvényes az előző bekezdés okoskodása. Az  $A$ ,  $B$  pontokhoz tartozó összegek tehát most is egyenlők, hiszen mindkettő egyenlő a  $C$ -hez tartozó összeggel.

g) Ha egy konvex poliédert egy síkkal két konvex poliéderre vágunk fel, akkor a keletkező részpoliéderekhez rendelt számok összege az eredeti poliéderhez rendelt számmal egyenlő. Ennek bizonyítása végett mind a három poliéderhez rendelt értéket f) előírása szerint határozzuk meg, mégpedig közös kiindulópontul a metszetidom határának egy pontját választjuk. Ekkor a teljes poliéder felbontásában szereplő gúlákat metsző síkunk éppen a részpoliéderek felbontásában előforduló gúlákra vágja fel. Ezért b)-ból állításunk helyessége következik.

h) Ha egy konvex poliédert konvex poliéderekre darabolunk fel, akkor a darabokhoz rendelt számok összege az eredeti poliéderhez rendelt számmal egyenlő. Ezt a darabok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Két darabra vonatkozó állításunk g) szerint helyes, mert két konvex poliéder csak egy lap mentén érintkezhetik, a darabolás tehát ebben az esetben síkkal metszve áll elő. Tekintsünk egy  $k$  konvex darabra felbontott konvex poliédert, és tegyük fel, hogy állításunk  $k$ -nál kevesebb darabra helyes. Válasszuk ki valamelyik darabnak egy olyan  $L$  lapját, amely nincs az eredeti poliéder felületén.  $L$  síkjával kettévágjuk az eredeti poliédert és az általa metszett darabokat. g) szerint úgy számíthatjuk ki az állításunkban szereplő összeget, hogy a kettészelt darabokat két részükkel helyettesítjük, és a hozzájuk rendelt számokat szerepeltetjük. Ugyanabban az  $L$  síkja által határolt feltérben elhelyezkedő darabokról és darabrészekről az indukciós feltevés értelmében elmondhatjuk, hogy az ezekhez rendelt számok összege az eredeti poliéder e feltérben elhelyezkedő részpoliéderéhez rendelt számmal egyenlő. Ehhez csak azt kell meggondolnunk, hogy ebben a feltérben  $k$ -nál kevesebb darab és darabrész van, mert az  $L$  laphoz a másik oldalról is támaszkodik legalább egy konvex darab, és ennek még része sincs a vizsgált feltérben. Így tehát a vizsgált összeg úgy számítható ki, hogy az  $L$  síkjának két oldalán elhelyezkedő két részpoliéderhez rendelt számot adjuk össze. Ezek összege azonban g) szerint az eredeti poliéderhez rendelt számmal egyenlő.

i) Ha egy poliédert konvex poliéderekre bontunk fel, akkor az ezekhez rendelt számok összege nem függ a felbontás mikéntjétől. Ezt az értéket a felbontott poliéderhez rendeljük hozzá. Ez a megállapodás fedi a konvex poliéderekre vonatkozó f)-ben kimondott megállapodásunkat, és most minden poliéderhez rendel számot, mert minden poliéder felbontható konvex poliéderekre, sőt tetraéderekre is. Állításunk helyességét csak konkáv poliéderekre kell bizonyítanunk, mert konvexekre már h) kimondta. Tekintsünk tehát egy konvex poliéderekre felbontott konkáv poliédert és ennek konvex burkát. A poliédert a burokpoliéderré kiegészítő, esetleg nem összefüggő poliédert is konvex poliéderekre daraboljuk fel. Ezek a konvex kiegészítő poliéderek az eredeti poliéder konvex darabjaival együtt a burokpoliéder konvex poliéderekre való felbontását szolgáltatják. Ha most az eredeti konkáv poliéder felbontását megváltoztatjuk, de a kiegészítő poliéder felbontását nem, akkor valamennyi darabhoz rendelt számnak az összege h) szerint változatlan marad. Ez azt jelenti, hogy a konkáv poliéder darabjaiból számított összeg sem változott meg.

j) A poliéderekhez hozzárendelt számok kiegészítik 27.1 négy követelményét. Minden hozzárendelt szám pozitív, mert pozitív számok összege. Egybevágó poliéderekhez egyenlő számokat rendeltünk hozzá, mert azokat egybevágó módon darabolhatjuk fel. Ha egy poliédert két poliéderre bontunk fel, akkor e kettőt konvex poliéderekre darabolva az eredetit is feldaraboltuk; így tehát a két poliéderhez hozzárendelt szám összege az eredeti poliéderhez hozzárendelt számmal egyenlő. Az egységkockát feldarabolhatjuk három gúlára, melyeknek alapja a kockának három egy csúcsban találkozó lapja, és

közös csúcsuk az e csúcscsal átellenes kockacsúcs; minthogy b) e három gúla mindegyikéhez  $\frac{1}{3}$ -ot rendel hozzá, az egységkockához hozzárendelt szám 1.

**27.7** Eddig csak poliéderek térfogatáról volt szó. Most kiterjesztjük a térfogat fogalmát, hogy görbe lapú testek térfogatával is foglalkozhassunk. Targyalásunk a terület fogalmának kiterjesztéséről mondottakat követi (lásd 20.6).

A test által tartalmazott poliédereket *belső* poliédereknek, a testet tartalmazó poliédereket pedig *külső* poliédereknek nevezzük. Minden poliéder egyben saját magának belső poliédere és külső poliédere is. Korlátos testnek van külső poliédere a korlátosság miatt. Korlátos test külső poliédereinek egyike sem lehet kisebb térfogatú valamelyik belső poliédernél, hiszen tartalmazza azt. Ebből következik, hogy

mindig van olyan nem negatív szám, amelynél a belső poliéderek térfogatának egyike sem nagyobb, és a külső poliéderek térfogatának egyike sem kisebb.

Ha egy korlátos test esetében egyetlen ilyen szám van csak, akkor ezt a számot a test *térfogatának* (köbtartalom, volumen) nevezzük.

Poliéderekre az új definíció is ugyanazt adja, mint amit eddig térfogatnak nevezünk.

Ha a külső poliéderek térfogatának alsó határa 0, akkor 0 a test térfogata is. Ilyenkor egyetlen belső poliéder sincs. Ilyen 0 térfogatú test az üres alakzat is.

Ha van belső poliéder, akkor a külső poliéderek térfogatának alsó határa pozitív. Ilyenkor a térfogat létezése azt jelenti, hogy a mondott alsó határ egyben a belső poliéderek térfogatának a felső határa is.

Egy testnek van tehát térfogata, ha bármely  $\varepsilon$  pozitív számhoz található  $\varepsilon$ -nál kisebb térfogatkülönbségű, illetőleg  $(1 + \varepsilon)$ -nél kisebb térfogatarányú külső és belső poliéder. Van ezért térfogat akkor is, ha található külső és belső poliéderekből álló poliéderpároknak olyan sorozata, amelynél az egyes párokra számított térfogatkülönbség 0-hoz, illetőleg a térfogatarány 1-hez tart. Ilyenkor a sorozat külső poliédereinek a térfogata, valamint belső poliédereinek a térfogata is a szóban forgó test térfogatához tart.

Nyomban belátható, hogy az előző bekezdés kijelentései változatlanul helyesek akkor is, ha külső és belső poliéderek helyett térfogattal rendelkező, tartalmazó és tartalmazott testeket mondunk.

**Tétel.** Ha egy testet két olyan testre bontunk fel amelyeknek van térfogata, akkor van térfogata az eredeti testnek is, és ez a két résztest térfogatának összege.

Tételünk egyaránt vonatkozik arra az esetre, amikor a két résztestnek nincs közös pontja, valamint térbeli tartományok olyan felbontására, amelynél a két résztestnek nincs közös belső pontja. Tételünket kettő helyett véges sok résztestre is kimondhattuk volna, hiszen a kettőre kimondott tétel ismételt alkalmazható.

*Bizonyítás.* Jelölje  $V_1$  és  $V_2$  a két résztest térfogatát. Legyen  $\varepsilon$  egy tetszőleges pozitív szám. A térfogat fogalmából következik, hogy résztestjeinkhez olyan  $B_1, B_2$  belső poliéderek (esetleg üres alakzatok) tartoznak, amelyeknek térfogata nagyobb, mint  $V_1 - \varepsilon$  és  $V_2 - \varepsilon$ , s hogy vannak olyan  $K_1, K_2$  külső poliédereik, amelyeknek térfogata kisebb, mint  $V_1 + \varepsilon$  és  $V_2 + \varepsilon$ .

$B_1$  és  $B_2$  egyesítése az eredeti testnek (talán nem összefüggő) belső poliédere, s ennek térfogata nagyobb, mint  $V_1 + V_2 - 2\varepsilon$ .

$K_1$  és  $K_2$  egymást egészben vagy részben fedheti. Egyesítésük az eredeti testnek külső poliédere, melynek térfogata  $K_1$  és  $K_2$  térfogatának összegénél nem nagyobb, tehát kisebb, mint  $V_1 + V_2 + 2\varepsilon$ .

Ezek szerint testünknek van  $4\varepsilon$ -nál kisebb térfogatkülönbségű belső és külső poliédere, van tehát térfogata is. Ez a térfogat nagyobb, mint  $V_1 + V_2 - 2\varepsilon$ , és kisebb, mint  $V_1 + V_2 + 2\varepsilon$ , tehát  $\varepsilon$  tetszőlegessége miatt csak  $V_1 + V_2$  lehet. —

**Tétel.** Ha egy testet két testre bontunk fel, és az eredeti testnek, valamint az egyik résztestnek van térfogata, akkor van térfogata a másik résztestnek is.

Nem foglaltuk bele a tételbe, hogy a második résztest térfogata a térfogatkülönbséggel egyenlő, hiszen ezt az előző tétel már kimondta. A felbontás fogalmát illetően ismét gondolunk arra a két lehetőségre,

amelyeket az előző tétel kimondása után említettünk. Tételünkben nyomban következik, hogy ha egy test egy másikat tartalmaz, akkor az előbbinek a térfogata nem lehet az utóbbiánál kisebb.

*Bizonyítás.* Okoskodásunk poliéderekről szól, de megengedjük, hogy köztük üres alakzatok is szerepelhessenek.

Jelölje  $V$  az eredeti test,  $V_1$  pedig az első résztest térfogatát. Legyen  $\varepsilon$  tetszőleges pozitív szám. A térfogat fogalmából következik, hogy a két testhez tartoznak olyan  $B, B_1$  belső poliéderek, amelyeknek térfogata rendre nagyobb, mint  $V - \varepsilon$  és  $V_1 - \varepsilon$ , s hogy vannak olyan  $K, K_1$  külső poliédereik, amelyeknek térfogata rendre kisebb, mint  $V + \varepsilon$  és  $V_1 + \varepsilon$ .

Ha  $K$ -ból a  $B_1$  poliédert elhagyjuk, a második résztest külső poliéderéhez jutunk. Ennek térfogata kisebb, mint  $V - V_1 + 2\varepsilon$ .

Ha  $B$ -ból elhagyjuk a  $B$  és  $K_1$  poliéderek közös részét, akkor a második résztest belső poliéderéhez jutunk. Ennek térfogata nagyobb, mint  $V - V_1 - 2\varepsilon$ , hiszen a  $B$ -ból elhagyott poliéder térfogata  $K_1$  térfogatánál nem nagyobb.

Ezek szerint a második résztestnek van  $4\varepsilon$ -nál kisebb térfogatkülönbségű külső és belső poliédere, van tehát térfogata is. —

**Tétel.** Ha két testnek van térfogata, akkor van térfogata a közös részüknek is.

Nem követeltük meg, hogy a két testnek legyen közös pontja, mert közös résznek tekinthetjük az üres alakzatot is. Tételünk azt is kimondja, hogy ha valamely testnek van térfogata, akkor van térfogata a test és egy poliéder közös részének is.

*Bizonyítás.* Az előző bizonyításhoz hasonlóan itt is megengedjük, hogy azok között a poliéderek között, amelyekről szólunk, üres alakzatok is szerepelhessenek.

Jelölje  $K_1$  és  $B_1$ , illetve  $K_2$  és  $B_2$  a két test  $\varepsilon$ -nál kisebb térfogatkülönbségű külső és belső poliéderét. A  $K_1, K_2$  poliéderek  $K$  közös része a két test közös részének külső poliédere, és hasonlóan a  $B_1, B_2$  poliéderek  $B$  közös része a két test közös részének belső poliédere.

Jelölje  $D_1, D_2$  és  $D$  azokat a poliédereket, amelyek a  $K_1, K_2, K$  poliéderekből keletkeznek, ha belőlük rendre a  $B_1, B_2, B$  poliédereket elhagyjuk.  $K_1$  és  $K_2$  mindegyike tartalmazza  $D$  minden pontját. Nincs viszont  $D$ -nek olyan belső pontja, amelyet  $B_1$  és  $B_2$  mindegyike tartalmaz.  $D$  minden belső pontja hozzátartozik ezért a  $D_1, D_2$  poliéderek valamelyikéhez, és ezért ez utóbbiak egyesítése tartalmazza a  $D$  poliédert.

Eszerint  $D$  térfogata, azaz  $K$  és  $B$  térfogatkülönbsége  $D_1$  és  $D_2$  térfogatának összegénél, vagyis  $2\varepsilon$ -nál kisebb. Ez azt jelenti, hogy két testünk közös részének valóban van térfogata. —

**B1** 20.6 megjegyzéseinek mintájára és ugyanolyan indokolással említjük meg a következőket: a térfogattal szemben támasztott eredeti követelményeink a térfogat fogalmának kiterjesztése után már csak részben teljesülnek; ha egy testnek van térfogata, akkor a belseje is ugyanakkora térfogatú, a belsejének elhagyásával keletkező alakzat térfogata pedig 0, és ennek megfelelően szakaszunk első két tételében általánosabban közös belső pont nélküli testek egyesítéséről szólhattunk volna; ha térfogattal rendelkező testekből indulunk ki, akkor nemcsak a közös rész, hanem az egyesítés is ugyanilyen testekhez vezet.



20.7 mintájára kimondhatjuk, hogy hasonló testek térfogatának az aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő.

**B2** Ha szakaszunkat a terület fogalmának kiterjesztésével foglalkozó 20.6 szakasz tárgyalásával egybevetjük, a hasonlóság mellett eltérést is tapasztalhatunk. Ezt az okozza, hogy minden konvex testnek van ugyan térfogata, de ennek bizonyításával nem foglalkozunk. 20.6 harmadik tételének bizonyításához hasonló térbeli eljárás nem is ismeretes.

**27.8** Poliéderek felszínéről már 26.1-ben szoltunk. Most a felszín fogalmának általánosításával foglalkozunk, mégpedig korlátos konvex testek felszínéről lesz szó. A tárgyalás ahhoz a gondolatmenethez igazodik, amely 19.3-ban a kerület tárgyalásakor szerepelt.

Konvex test esetében az olyan poliédert, amelynek csúcsai a testet határoló felületen vannak, *beírt* poliédernek nevezzük. Konvex test beírt poliédere nem feltétlenül konvex. Bármely külső poliéder felszíne 26.3 szerint bármely (más) konvex belső poliéder felszínénél nagyobb.

Egy korlátos konvex test konvex beírt poliéderei felszínének felső határát a konvex test *felszínének* nevezzük. Mondjuk azt is, hogy ez a testet határoló zárt konvex felület felszíne. A felső határ létezését biztosítja az, hogy a test külső poliéderének felszíne a konvex belső poliéderek felszínének felső korlátja.

Konvex poliéderre az új definíció 26.3 folytán ugyanazt adja, mint amit eddig felszínnek neveztünk.

Definícióból következik, hogy a konvex test felszíne *egyetlen külső poliéder felszínénél sem nagyobb*. Nem lehet viszont egyetlen konvex belső poliéder felszínénél sem kisebb, mert minden konvex belső poliéderhez található azt tartalmazó konvex beírt poliéder, hiszen ilyen beírt poliédert ad azoknak a pontoknak a konvex burka, amelyekben a konvex belső poliéder élegyenesei a konvex testet határoló felületet metszik, illetve elhagyják. A konvex test felszíne tehát a *konvex belső poliéderek felszínének felső határa*.

Egy konvex test felszíne *a test belsejében elhelyezkedő konvex poliéderek felszínének is felső határa*. Ez abból következik, hogy ezt minden konvex poliéderre elmondhatjuk, elmondhatjuk tehát a test konvex belső poliédereire is. Elég tehát arra hivatkoznunk, hogy egy számhalmaz felső határa nem változik meg, ha egyes részhalmazainak a felső határát a számhalmazhoz csatoljuk.

Ha egy konvex test tartalmaz egy másik konvex testet, akkor *a tartalmazónak a felszíne nem lehet a tartalmazotténál kisebb*, hiszen a tartalmazott test konvex belső poliéderei a tartalmazó testnek is.

Azt mondjuk, hogy egy adott konvex test által tartalmazott *konvex testeknek egy sorozata tart* (konvergál) az adott konvex testhez, ha az adott konvex test bármely belső pontjára teljesül az, hogy ezt a pontot a testsorozat testjei véges soknak a kivételével mindannyian tartalmazzák, ha tehát a sorozat valamelyik testjétől kezdve már mindegyik tartalmazza. Azt is mondjuk, hogy e testsorozat elemeit határoló *konvex zárt felületek sorozata tart* (konvergál) az adott konvex test felületéhez.

**Tétel.** *Ha egy adott korlátos konvex test által tartalmazott konvex testeknek egy sorozata az adott testhez tart, akkor felszínük az adott test felszínéhez tart.*

*Bizonyítás.* Minthogy a tartalmazott testek felszíne nem lehet az adott test felszínénél nagyobb, s minthogy az adott test felszíne a test belsejében elhelyezkedő konvex poliéderek felszínének a felső határa, elég azt bizonyítanunk, hogy a vizsgált felszínsorozatnak nincs olyan torlódási értéke, amely egy az adott test belsejében elhelyezkedő konvex  $P$  poliéder felszínénél kisebb. Ez viszont abból következik, hogy a testsorozat elemei konvexek, és véges soknak a kivételével  $P$ -nek minden csúcsát, tehát a  $P$  poliédert is tartalmazzák. —

A felszín fogalma a szemlélet szerint is bonyolultabb a kerület fogalmánál. Még szemléletesen sem definiálhatjuk a felszínt a testet borító, majd síkban kifeszített hártya területeként. Ez csak némelyik testnél lehetséges anélkül, hogy a hártya meg ne nyúlják. Ha valaki szemléletesen akar képet alkotni a felszín fogalmáról, akkor olyan kerülőútra kényszerül, hogy pl. a testet egy homogén anyaggal egyenletesen vékonyan bevonja, s ennek a bevonatnak a súlyát az egységnégyzet bevonatának súlyával osztva jut el a felszínhez.

**B1** A felszín talán a geometria legkényesebb fogalomalkotása. Mi azért járhattunk el egyszerűen, mert csak konvex testek felszínével foglalkoztunk. Ez a tárgyalás több vonatkozásban hasonlít ahhoz, ahogyan 19.3-ban a konvex síkidomok területét tárgyaltuk.

Ez a párhuzam is megbomlik azonban, hiszen a konvex test felszíne a beírt poliéderek felszínének nem felső határa. Akkor sem jutunk a felszínhez, ha a beírt poliéderek olyan sorozatánál vizsgáljuk a felszín határértékét, amelynél a lapterületek, sőt az élhosszak is minden határon túl csökkennek (vö. 19.8 B4). Ezt az utolsó tényt H. A. Schwarz (1843—1921; a berlini egyetem tanára) egy híres ellenpéldája bizonyítja, de mi ezt nem ismertetjük. Csak annyit említünk meg, hogy az ellenpélda konvex test felszínéről szól, sőt bármely konvex testre elmondható, ha az nem poliéder.

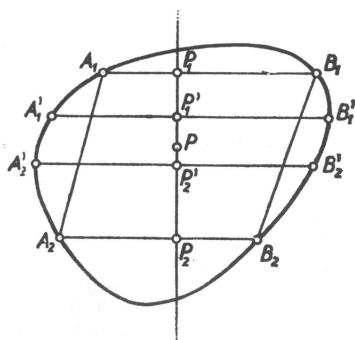
Mi a felszín definíciójára nem az egyedül lehetséges utat választottuk. Tetszetős definícióhoz juthatnánk pl., ha az A-ban mondottakat szabatos definícióvá építenők ki. Hasonló lehetőség egyébként a terület és ívhossz, valamint a határolt felületek felszínének (vö. 27.9) definiálásánál is fennáll. Definícióink megválasztásakor ügyeltünk arra, hogy a szabatos kidolgozás ne okozzon felesleges munkatöbbletet, s hogy a felszínhez poliéderek felszínéből (ívhosszhoz poligonok ívhosszából) jussunk el.

**B2** Bebizonyítjuk, hogy *minden korlátos konvex testhez található beírt konvex poliédereknek a testhez tartó sorozata*. Mindig van tehát olyan poliédersorozat, amelyre szakaszunk tétele alkalmazható.

Ilyen poliédersorozathoz a következő előírással jutunk: Az adott konvex testet egymással párhuzamos, egymástól rendre  $h$  távolságra levő síkokkal metsszük. A kapott véges sok konvex metszetidom mindegyikében elvégezzük azt a szerkesztést, amely 20.6 harmadik tételében beírt sokszöghöz vezetett, mégpedig minden esetben ugyanolyan állású, egymástól rendre  $h$  távolságra levő párhuzamosokkal. Az így adódó véges sok konvex sokszög konvex burka egy a konvex testünkbe írt konvex poliéder. Ha  $h$  szerepét rendre egy 0-hoz tartó  $h_1, h_2, \dots$  sorozat elemei veszik át, de a párhuzamos síkok és egyenesek állása mindvégig megmarad, akkor a beírt konvex poliéderek egy sorozatához jutunk.

Erről a poliédersorozatról akarjuk belátni, hogy az adott konvex testhez tart. Tekintsük evégből a test egy belső  $P$  pontját, fektessünk át rajta a párhuzamos síkokra merőleges egyenest, és vegyünk fel rajta  $P$  két oldalán a konvex test belsejéhez tartozó  $P_1, P_2$  pontokat. Ezen a két ponton át síkjainkkal párhuzamos és egyenesünkre merőleges egyeneseket fektetünk. Ezeken a konvex testnek a  $P_1, P_2$  pontokat tartalmazó  $A_1B_1, A_2B_2$  húrjai helyezkednek el. Azt állítjuk, hogy ha a  $h$  szerepét játszó érték a  $P_1P_2, P_2P_1, P_1A_1, P_1B_1, P_2A_2, P_2B_2$  távolságok mindegyikénél kisebb, akkor a kapott beírt poliéder a  $P$  pontot belsejében tartalmazza.

Minthogy ugyanis  $h$  a  $P_1P_2, P_2P_1$  távolságoknál kisebb, a párhuzamos síkok között van két olyan, amely a  $P_1P_2, P_2P_1$  szakaszokat a  $P'_1, P'_2$  pontokban metszi. Az adott testnek ezen a két ponton áthaladó, az  $A_1B_1, A_2B_2$  húrokkal párhuzamos  $A'_1B'_1, A'_2B'_2$  húrjait tekintjük\*<sup>^</sup>(lásd a 215. ábrát, amely a konvex test egy keresztmetszetét ábrázolja). A konvexitásból következik, hogy  $P'_1A'_1$  átszeli a  $P_1P_2A_2A_1$  trapézt, hogy tehát  $P'_1A'_1$  a trapéz  $P_1A_1, P_2A_2$  alapjainak mindegyikénél kisebb nem lehet. Ha tehát  $h$  értékére a fenti kikötés teljesül, akkor ez az érték  $P'_1A'_1$ -nél, és ugyanilyen indokolással a  $P'_1B'_1, P'_2A'_2, P'_2B'_2$  távolságok mindegyikénél kisebb. A szerkesztett konvex síkidomok tartalmazzák tehát a  $P'_1, P'_2$  pontokat (vö. 20.6 B3), és konvex burkuk tartalmazza a  $P'_1P'_2$  szakaszon elhelyezkedő  $P$  pontot.



215

**27.9** Egyes nyílt (határolt) felületek felszínével is foglalkozni fogunk, s ezért most azt tisztázzuk, hogy felszínüknek mit nevezünk. Csak olyan nyílt felületekről lesz szó, amelyeket konvex zárt felületből konvex poliéder metsz ki.

Egy konvex test *síklapjának* (lap) nevezzük a konvex test felületén elhelyezkedő konvex síkidomot, ha síkja a test felületéből további pontot nem tartalmaz. Az ilyen síklap területét felszínének is mondjuk.

Az olyan felületet, amelyhez egy korlátos konvex test felületéből véges sok síklapjának elhagyása révén eljuthatunk, *konvex felületi poligon*nak nevezzük. Ennek határát elhagyott lapok határán elhelyezkedő konvex ívek és konvex zárt görbék alkotják.

Konvex felületi poligon a nyílt poliéderfelület, sőt a konvex sokszög is. Egy konvex felületi poligon több darabból is állhat (vö. B1). Lehetséges, hogy különböző konvex testekből síklapok elhagyása révén ugyanaz a konvex felületi poligon származik.

Egy konvex felületi poligon *felszínét* megkapjuk, ha a származtató konvex test felszínéből az elhagyott lapok területének az összegét levonjuk.

Ez a definíció nem ad új értéket, ha a konvex felületi poligon nyílt poliéderfelület. A felszínül kapott érték nem függ attól, hogy a konvex felületi poligont milyen konvex testből származtatjuk.

Ez utóbbi kijelentést a következő tétel támasztja alá.

**Tétel.** Ha két konvex testet véges sok síklapon kívül ugyanaz a konvex felületi poligon határol, akkor e síklapok területösszegét a testek felszínéből levonva mindkét esetben ugyanahhoz az eredményhez jutunk.

*Bizonyítás.* Legyen  $K_1$  és  $K_2$  két olyan konvex test, amelyeket véges sok síklapon kívül ugyanaz az  $F$  konvex felületi poligon határol. Ha a következőkben  $K_1$  és  $K_2$  síklapjairól szólnak, mindig csak az  $F$ -et zárt felületté kiegészítő síklapokra gondolunk.

a) Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor az egyik test a másikat, például  $K_1$  a  $K_2$  testet tartalmazza. Ha ekkor  $K_1$ -ből a  $K_2$  testet elhagyjuk, egy  $P$  poliéderhez jutunk.

Alkossunk  $K_1$  belső konvex poliédereiből egy  $K_1$ -hez tartó sorozatot;  $K_1$  minden egyes síklapjának belső konvex sokszögeiből pedig a síklaphoz tartó sorozatot. E sorozatok ugyanannyiadik elemeinek, valamint  $P$ -nek és  $K_1$  valamely  $P$ -hez nem tartozó  $A$  pontjának a konvex burka egy  $S_1$  poliédersorozat ad.

Ezek szerint  $S_1$  olyan konvex poliéderekből áll, amelyek  $K_1$ -hez tartanak, és  $K_1$  síklapjaihoz tartó lapsorozatokkal rendelkeznek. Az  $S_1$  sorozatot alkotó poliéderek felszíne ezért  $K_1$  felszínéhez,  $K_1$

síklapjain elhelyezkedő lapjaik területe pedig e síklapok területéhez tart. Ha tehát e poliéderek nem  $K_1$  síklapjain elhelyezkedő lapjainak a területét összegezzük, akkor ahhoz a különbséghez tartó sorozatot kapunk, amelyről a tételünk  $K_1$ -gyel kapcsolatban szól.

Ha  $S_1$  poliédereiből az általuk tartalmazott  $P$  poliédert elhagyjuk, egy  $S_2$  poliédersorozathoz jutunk. Ennek elemei konvex poliéderek, hiszen  $S_1$  megfelelő elemeinek  $K_2$ -vel alkotott közös részei.

Az  $S_2$  sorozat poliéderei  $K_2$ -höz,  $K_2$  síklapjain elhelyezkedő lapjaik pedig e síklapokhoz, tartanak. Ez az  $S_1$  sorozat hasonló tulajdonságából következik, hiszen  $K_2$  belső pontjai és síklapjainak a belső pontjai vagy  $K_1$  belsejében vannak, vagy pedig  $K_1$  síklapjain helyezkednek el. Ezért minden ilyen pontot  $S_2$  elemei legfeljebb véges soknak a kivételével mindannyian tartalmaznak.

Miként  $S_1$ -ről megállapítottuk,  $S_2$  poliédereire is kimondhatjuk tehát, hogy ha nem  $K_2$  síklapjain elhelyezkedő lapjaik területét összegezzük, akkor ahhoz a különbséghez tartó sorozatot kapunk, amelyről a tételünk  $K_2$ -vel kapcsolatban szól. Ha tehát belátjuk, hogy  $S_1$  poliédereinek nem  $K_1$  felületén elhelyezkedő lapjai azonosak  $S_2$  megfelelő poliédereinek nem  $K_2$  felületén elhelyezkedő lapjaival, akkor igazoltuk, hogy a tételben szereplő különbségek valóban egyenlők, hiszen mind a kettő ugyanannak a sorozatnak a határértéke. Támaszkodtunk itt arra is, hogy a  $K_1$ ,  $K_2$  síklapjaihoz nem tartozó poliéderlapok csak akkor lehetnek e testek felületén, ha  $F$ -en helyezkednek el, az ilyen lapok pedig a két sorozatban azonosak, hiszen  $P$  elhagyásakor érintetlenül maradtak.

Az  $S_1$ ,  $S_2$  sorozatok egymásnak megfelelő  $P_1$ ,  $P_2$  poliédereit tekintjük. Minthogy  $P_2$  a  $P_1$  poliédereiből  $P$  elhagyásával keletkezik, elég azt igazolnunk, hogy  $P_1$ -nek  $K_1$  felületéhez nem tartozó lapjai és  $P_2$ -nek  $K_2$  felületéhez nem tartozó lapjai mindannyian  $K_2$  belsejében haladnak, hiszen akkor valóban csak azonosak lehetnek.

$P_2$  szóban forgó lapjait illetően nyilvánvaló, hogy állításunk helyes. Azt kell csak belátnunk, hogy  $P_1$  szóban forgó lapjai (vagy azok részei) nem lehetnek sem  $P$  belsejében, sem  $P$  felületén. Ez egyrészt abból következik, hogy  $P_1$  tartalmazza a teljes  $P$  poliédert, másrészt pedig abból, hogy ha a konvex  $P_1$  poliéder  $P$  egy lapja mentén érintkeznék a konvex  $K_1$  testtel, akkor  $P_1$  nem tartalmazhatna  $K_1$ -ből ehhez a laphoz nem tartozó pontot, tehát az  $A$  pontot sem.

b) Ha  $K_1$  és  $K_2$  egyike sem tartalmazza a másikat, akkor a két test  $K$  közös részét tekintjük. Ezt is az  $F$  konvex felületi poligon és véges sok síklap határolja. Ha tételünknek a)-ban már bebizonyított részét egyrészt a  $K_1$ ,  $K$ , másrészt a  $K_2$ ,  $K$  testekre alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a szóban forgó különbség mindezeknél a testeknél ugyanakkora. —

Miután a konvex felületi poligonok felszínének a definícióját tisztáztuk, megállapíthatjuk, hogy egybevágó konvex felületi poligonok felszíne egyenlő, hasonlóképpen az aránya pedig a hasonlóság arányának a négyzetét adja.

Ha egy konvex testet az  $F$  konvex felületi poligon és az  $L_1, \dots, L_n$  síklapok határolnak, ha továbbá a test által tartalmazott konvex testeknek egy a testhez tartó sorozatában minden testet egy-egy konvex felületi poligon és az  $L_1, \dots, L_n$  lapokon elhelyezkedő síkidomok határolnak, mégpedig legfeljebb véges sok testnek a kivételével mindegyiknek van lapja az  $L_1, \dots, L_n$  síklapok mindegyikén, és ezek a

síklapokhoz tartó sorozatokat alkotnak, akkor a szereplő felületi poligonok sorozatáról azt mondjuk, hogy  $F$ -hez tart (konvergál).

**Tétel.** Ha konvex felületi poligonoknak egy sorozata egy konvex felületi poligonhoz tart, akkor felszínük is tart annak felszínéhez.

*Bizonyítás.* A szóban forgó felszínsorozat elemei egy konvex testhez tartó konvex testek felszínének és annak síklapjaihoz tartó lapjaik területösszegének a különbségei. A sorozat határértéke ezért a mondott konvex test felszínének és szóban forgó síklapjai területösszegének a különbsége, tehát valóban az eredeti konvex felületi poligon felszíne. —

**Tétel.** Ha egy konvex zárt felületet véges sok konvex felületi poligonra és síklapra darabolunk fel, akkor mindezek felszínének az összege a teljes zárt felület felszínével egyenlő.

A tételt konvex zárt felület felbontása helyett mindjárt konvex felületi poligonok felbontására is kimondhattuk volna, hiszen a kimondott tételből a megfelelő állítás könnyen következik. Elég ehhez a tételt a konvex felületi poligont származtató konvex zárt felületre alkalmaznunk.

*Bizonyítás.* Egy  $K$  konvex testet tekintünk, melyet az  $F_1, \dots, F_m$  konvex felületi poligonok és az  $L_1, \dots, L_n$  síklapok határolnak. Feltehetjük, hogy az  $F_1, \dots, F_m$  felületeknek egyike sem nyílt poliéderfelület, mert akkor helyette a feldarabolásban a lapjait szerepeltethetnők.

Olyan  $K_1, \dots, K_m$  konvex testeket választunk, amelyeket rendre az  $F_1, \dots, F_m$  felületek és a  $K$  test által tartalmazott síklapok határolnak. Vannak ilyen testek, hiszen konvex felületi poligonjaink konvex burkai is ilyenek (lásd B2). A  $K_1, \dots, K_m$  testek közül kettőnek-kettőnek a közös része (ha van) csak poliéder lehet, mert csak síklapok határolhatják. Poliéderhez (vagy üres alakzathoz) jutunk akkor is, ha  $K$ -ból a  $K_1, \dots, K_m$  testek egyesítését elhagyjuk. Ha ezt a poliédert a  $K_1, \dots, K_m$  testek közös részeivel egyesítjük, egy  $A$  poliéderhez jutunk ( $A$  lehet üres is). A  $K_1, \dots, K_m$  testek mindegyikében egy-egy belső pontot választunk, és ezek együttesét  $B$ -vel jelöljük.

$K$  belső konvex poliédereiből olyan  $P_1, P_2, \dots$  sorozatot választunk ki, amely  $K$ -hoz tart, elemei az  $L_1, \dots, L_n$  síklapok mindegyikén e síklaphoz tartó lapsorozattal rendelkeznek, továbbá minden eleme tartalmazza az  $A$  poliédert és a  $B$  pontthalmazt. Ilyen sorozathoz jutunk, ha egy  $K$ -hoz konvergáló poliédersorozat és az  $L_1, \dots, L_n$  lapokhoz konvergáló sokszögsorozatok ugyanannyiadik elemeinek, valamint  $A$ -nak és  $B$ -nek a konvex burkát képezzük.

A  $K_i$  testnek és a  $P_j$  poliédernek van közös része, mert  $P_j$  tartalmazza a  $B$  pontthalmazt. Ilyen módon egy  $K_j$  konvex poliéderhez jutunk. Ennek  $K_i$  belsejében haladó, valamint az  $F_i$  felületen elhelyezkedő lapjai egy (konvex felületi poligonnak is nevezhető)  $F_j$  nyílt poliéderfelületet alkotnak.

Bizonyítjuk, hogy az  $F_{i1}, F_{i2}, \dots$  sorozat  $F_i$ -hez tart. Evégből azt kell belátnunk, hogy a  $K_{i1}, K_{i2}, \dots$  poliédereknek az  $F_i$  felületet  $K_i$  felületévé kiegészítő síklapokhoz tartó lapsorozatuk van. Ezek közül a síklapok közül a  $K$  belsejében haladóakra, valamint az  $L_1, \dots, L_n$  síklapokon elhelyezkedőkre vonatkozólag a mondott konvergencia a  $P_1, P_2, \dots$  sorozat megválasztásából következik. Számolnunk kell azonban azzal a lehetőséggel, hogy  $K_i$ -nek az  $F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_m$  felületeken elhelyezkedő lapja is van. Az ilyen lapot azonban a  $K_1, \dots, K_m$  testek közül kettő, tehát az  $A$  poliéder is tartalmazza. Ezért az ilyen lapot a  $P_1, P_2, \dots$  poliéderek mindegyike, s ezért a  $K_{i1}, K_{i2}, \dots$  poliéderek mindegyike ugyancsak teljes egészében tartalmazza, vagyis a konvergencia nyilvánvaló módon itt is teljesül.

Azt állítjuk, hogy a  $P_j$  poliéder felületén elhelyezkedő  $F_{1j}, \dots, F_{mj}$  nyílt poliéderfelületek egymást részben sem fedik. Minthogy ezeket az  $F_1, \dots, F_m$  felületeken elhelyezkedő, valamint belsejében haladó lapok alkotják, csak azt kell belátnunk, hogy az utóbbiak körén belül egymást fedők nem lehetnek. Ez így is van, mert különben  $P_j$  felületén volnának olyan pontok, amelyek a  $K_1, \dots, K_m$  testek közül kettőnek közös belső pontjai, amelyeket tehát az  $A$  poliéder a belsejében tartalmaz, s ez ellentmond annak, hogy  $P_j$  tartalmazza az  $A$  poliédert.

Most azt bizonyítjuk, hogy ha  $P_j$  felületéből az  $F_{1j}, \dots, F_{mj}$  nyílt poliéderfelületeket elhagyjuk, akkor éppen  $P_j$ -nek az  $L_1, \dots, L_n$  síklapokon elhelyezkedő lapjaihoz jutunk. Minthogy ezek a lapok részben sem tartoznak az  $F_{1j}, \dots, F_{mj}$  felületekhez, csak azt kell igazolnunk, hogy az elhagyáskor más lap vagy laprész nem marad. Minthogy  $P_j$  lapjai közül a  $K$  felületén elhelyezkedők vagy az elhagyott felületeken, vagy az  $L_1, \dots, L_n$  síklapokon vannak, elég a  $K$  belsejében haladó lapokkal foglalkoznunk.  $K$  belsejét azonban az  $A, K_1, \dots, K_m$  testek beborítják, és  $P_j$ -nek nincs  $A$  belsejében haladó lapja, a  $K_1, \dots, K_m$  testek belsejében haladó lapokat, illetőleg laprészeket pedig elhagytuk. Azt kell tehát belátnunk, hogy  $P_j$  felületén nincs olyan sokszög, amelyhez két oldalról az  $A, K_1, \dots, K_m$  testek közül egy-egy test támaszkodik. Ebben az esetben, minthogy az  $A$  poliéder  $P_j$ -ben van, a konvex  $P_j$  poliédert egy lapsíkja elválasztaná a konvex  $K_1, \dots, K_m$  testek valamelyikétől. Ez valóban lehetetlen, hiszen  $P_j$  tartalmazza az  $e$  testek belső pontjaiból álló  $B$  ponthalmazt.

Ezek szerint a  $P_1, P_2, \dots$  poliéderek felületét az  $F_1, \dots, F_m$  konvex felületi poligonokhoz tartó konvex felületi poligonokra és az  $L_1, \dots, L_n$  konvex síkidomokhoz tartó konvex sokszögekre darabolhatjuk fel. A  $P_1, P_2, \dots$  poliéderek felszínének  $K$  felszínéhez tartó sorozata tehát tagonkénti összeadással keletkezik az  $F_1, \dots, F_m$  konvex felületi poligonok felszínéhez tartó, valamint az  $L_1, \dots, L_n$  lapok területéhez tartó sorozatokból. Igaz ezért, hogy  $K$  felszíne  $F_1, \dots, F_m$  felszínének és  $L_1, \dots, L_n$  területének az összege. —

A Minthogy a felszín területmértékkel definiáltuk, a felszín dimenziója is hosszúság a négyzetben.

**B1** Felhívjuk a figyelmet arra, hogy definíciónk alapján egyetlen konvex felületi poligonnak nevezhetjük pl. egy konvex test felületéből a test belsején áthatoló hasáb által kimetszett két konvex felületi poligon együttesét is. Nem látjuk ugyan semmi előnyét annak, hogy tárgyalásunk az ilyen, több darabból álló, konvex felületi poligonokra is vonatkozik, viszont ezeknek a tárgyalásból való kirekesztése csak felesleges munkát okozna.

Mindemellett rámutathatunk arra, hogy a konvex felületi poligon megnevezésben a konvex jelző használata kétszeresen is indokolt. Egyrészt azért, mert konvex felület alakzatáról van szó, másrészt pedig, mert konvex poliéder által kimetszett alakzatról van szó ugyanúgy, mint a konvex síkpoligonok esetében. Igaz ugyan, hogy a konvex felületi poligon általában nem konvex alakzat, csak akkor, ha konvex síkpoligonnal azonos.

**B2\*** Szó volt a konvex felületi poligonok konvex burkáról. Megmutatjuk most, hogy egy konvex sokszögtől különböző  $F$  konvex felületi poligonból kiindulva hogyan juthatunk el konstruktív módon annak konvex burkához (vö. 15.2 B1).

$F$ -hez eredetileg úgy jutottunk, hogy a  $K$  korlátos konvex test felületéből az  $L_1, \dots, L_n$  síklapokat elhagytuk. E lapok síkjai egy-egy olyan félteret határolnak, amely a  $K$  testet tartalmazza. Ezeknek a

féltereknek, valamint egy a  $K$  testet belsejében tartalmazó konvex  $P$  poliédernek a közös részét  $P_1$ -gyel jelöljük. A  $P_1$  poliédernek a  $K$  testen kívül haladó élei és éleinek a  $K$  testen kívül haladó szakaszai konvex burokként egy  $P_2$  poliédert határoznak meg.

Állítjuk, hogy  $P_2$  és  $K$  közös része az  $F$  felületi poligon  $B$  konvex burka. A következőkben ezt az állítást bizonyítjuk, tehát egyben azt is, hogy a  $B$  burkot az  $F$  felületen kívül csak síklapok határolják.

Előrebocsátjuk, hogy  $P_1$  származtatása miatt  $P_1$  éleinek csak olyan pontjai tartoznak  $F$ -hez, amelyekből  $P_1$  élein elhelyezkedő,  $K$ -n kívül haladó szakasz is kiindul, hogy tehát ezeket a pontokat  $P_2$  is tartalmazza, hogy továbbá a  $P_1$  poliéder  $K$ -hoz tartozó és  $K$ -n kívül haladó élszakaszainak közös pontja  $F$ -hez tartozik.

a)  $B$  konvex test és tartalmazza az  $F$  felületet. Minthogy  $P_2$  és  $K$  konvex,  $B$  is konvex alakzat. Elég tehát csak azt bizonyítanunk, hogy  $B$  tartalmazza  $F$  tetszőleges  $A$  pontját. Ha  $B$  az  $A$  pontot nem tartalmazza, akkor  $P_2$  sem tartalmazza azt, hiszen  $K$  bizonyosan tartalmazza. Az ilyen  $A$  ponton át lehet ezért olyan  $S$  síkot fektetni, amelynek nincs a konvex  $P_2$  poliéderrel közös pontja. Minthogy  $P_1$  tartalmazza az  $A$  pontot, az  $S$  síknak vannak  $P_1$  éleivel közös pontjai. Ezek a pontok, minthogy nem tartoznak  $P_2$ -höz,  $P_2$  származtatása miatt  $K$ -hoz tartoznak, viszont előrebocsátott megjegyzésünk folytán nem tartoznak  $F$ -hez, hozzátartoznak tehát ahhoz az alakzathoz, amely  $K$ -ból  $F$  elhagyásával keletkezik. Ez a konvex alakzat tartalmazza ezért a szóban forgó pontok konvex burkát, azaz  $S$  és  $P_1$  közös részét, és ezzel együtt az  $A$  pontot is. Az  $A$  pont azonban  $F$ -hez tartozik. Ez az ellentmondás állításunkat bizonyítja.

Felhasználtuk, hogy  $K$ -ból  $F$  elhagyásakor konvex alakzat keletkezik. Ennek bizonyítása végett messzük alakzatunkat két pontján, valamint egy belső pontján átfektetett síkkal. A metszetidom úgy keletkezik egy konvex síkidomból, hogy elhagyjuk belőle a határának azt a részét, amely a határból legfeljebb véges sok „oldal” (támaszegyenessel közös szakasz) elhagyásával keletkezik. Ennek a síkbeli alakzatnak a konvexitása az eredeti térbeli alakzatét is biztosítja.

b) Ha egy  $K_1$  konvex test tartalmazza az  $F$  felületet, akkor tartalmazza a  $B$  testet is. Az  $L_1, \dots, L_n$  síklapok  $P_1$  felületén vannak, tehát nem haladhatnak a  $P_1$  által tartalmazott  $P_2$  poliéder belsejében. Ezért  $P_2$  és  $K$  közös részét, a  $B$  testet, az  $F$  felület és  $P_2$  lapjain elhelyezkedő síkidomok határolják, és az utóbbiak határvonalát az  $F$  felületet határoló konvex ívek (vagy zárt görbék) és  $P_2$  éleinek  $K$  által tartalmazott szakaszai ( $K$ -nak és ezeknek az éleknek a közös részei) alkotják. Ha tehát ezekről a szakaszokról bebizonyítjuk, hogy végpontjaik az  $F$  felületen vannak, akkor beláttuk, hogy a konvex  $K_1$  test az  $F$  felülettel együtt  $B$  síklapjainak teljes határát, s ezért e síklapokat és magát a  $B$  testet is tartalmazza.

Tekintsük ezért  $P_2$  egy élének és  $K$ -nak közös részét, az  $A_1A_2$  szakaszt. Meg kell mutatnunk, hogy pl.  $A_1$  az  $F$  felületen van. Minthogy az  $A_1A_2$  szakasz  $P_2$  élén van, ezt a szakaszt az  $A_1A_2$  egyenesen  $P_2$  csúcsai, tehát  $P_1$  élei  $K$  testen kívül haladó szakaszainak a végpontjai fogják közre. Legyen  $C$  e közrefogó csúcsok egyike, mégpedig az, amelyik az  $A_1A_2$  félegyenes belső pontja. Ha  $C$ -ből  $P_1$  élén elhelyezkedő,  $K$ -hoz tartozó szakasz is kiindul, akkor előkészítő megjegyzésünk szerint  $C$  az  $F$  felületen van; ilyenkor  $C$  és  $A_1$  azonos, mert az  $A_1A_2$  szakasz  $P_2$  élének  $K$ -val alkotott közös része, és  $C$  is  $K$ -hoz tartozik; ezek szerint a vizsgált esetben  $F$  tartalmazza az  $A_1$  pontot. Ha viszont  $P_1$  élein  $C$ -ből

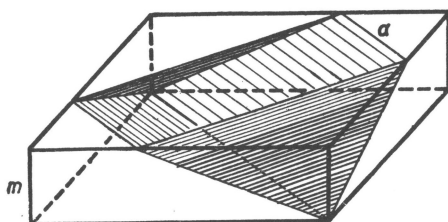
csak a  $K$  testen kívül haladó szakaszok indulnak ki, akkor az ezeket tartalmazó és  $F_1$  által tartalmazott konvex  $F_2$  poliéder  $C$  csúcsú szöglete a  $F_1$  poliéder  $C$  csúcsú szögletével azonos; ilyenkor tehát  $A_1A_2$  a  $F_1$  poliéder élén helyezkedik el, s ezért az  $A_1$ -ből kiinduló, a  $F_1$  poliéder élein elhelyezkedő szakaszok között a  $K$  test által tartalmazott  $A_1A_2$  szakasz mellett a  $K$  testen kívül haladó szakasz is szerepel, ti. vagy az  $A_1C$  szakasz, vagy pedig, ha  $A_1$  és  $C$  azonos, akkor a  $F_2$  poliédert konvex burokként meghatározó szakaszok között található  $C$  végpontú szakasz; előrebecsített megjegyzésünk szerint tehát  $A_1$  ebben az esetben is  $F$ -hez tartozik.

Felhasználtuk, hogy ha egy  $C$  csúcsú  $F_1$  konvex poliéderben egy olyan  $F_2$  konvex poliéder helyezkedik el, amely  $F_1$ -nek  $C$ -ből kiinduló mindegyik élén egy-egy  $C$ -ből kiinduló szakaszt tartalmaz, akkor a két poliéder  $C$  csúcsú szöglete azonos. Ez abból következik, hogy konvex poliéder szöglete azoknak a félegyeneseknek a konvex burka, amelyek a csúcsból kiinduló élek meghosszabbításakor keletkeznek.

**B3** Már 27.8 B 1-ben szóltunk a felszín és a kerület tárgyalásában mutatkozó megegyezésről és eltérésről. Hasonlót mondhatunk most is, ha a konvex felületi poligonok felszínének, valamint a konvex ívek ívhosszáinak tárgyalását vetjük egybe. Ennél az egybevetésnél azonban még több eltérést tapasztalhatunk, s ennek egyik oka az, hogy az ívhosszal ellentétben a most tárgyalt felszínhez felső határként nem juthatunk el.

Nem jutunk el a konvex felületi poligon felszínéhez, ha az olyan beírt nyílt poliéderfelületek felszínének felső határát tekintjük, amelyek maguk is konvex felületi poligonok (konvex poliéder felületének részei), és határvonalaik az adott felületi poligon határvonalába írt sokszögek. A beírt poliéderfelület felszíne ugyanis a felületi poligonénál nagyobb is lehet (hacsak ez utóbbi nem konvex sokszög). Ezt egy példán mutatjuk be.

Egy egységnyezet-alapú,  $m$  magasságú hasáb felületéből a fedőlapot elhagyva olyan felületi poligonhoz jutunk, amelynek felszíne, ha  $m$  kicsiny, kevéssel lesz 1-nél nagyobb. Kiszemeljük az alaplap egyik átlóját, és a fedőlapba olyan téglalapot írunk, amelynek oldalai az alaplapok átlóival párhuzamosak, mégpedig a kiszemelt átlóval párhuzamos oldal hossza  $a$ . Ennek a téglalapnak és az alaplap kiszemelt átlójának a konvex burkát tekintjük, és felületéből a téglalapot elhagyva olyan beírt poliéderfelülethez jutunk, amilyenről az állításunk szólt (216. ábra). Ha  $m$  és  $a$  kicsiny akkor ennek a beírt poliéderfelületnek a felszíne kevéssel lesz 2-nél kisebb. Ilyen módon elérhetjük, hogy ez a felszín nagyobb legyen, mint a felületi poligoné.



216

A felszín tárgyalásával kapcsolatban megemlíthetjük még, hogy azt a térfogat tárgyalásával egybevetve hasonlóan mondhatnánk, mint amit 20.6 B6-ban a terület és a kerület, illetve ívhossz tárgyalásának egybevetésekor mondhattunk.

**B4** Szakaszunk utolsó tétele biztosítja azt, hogy a felszín fogalmát konvex zárt felületek olyan darabjaira is kiterjeszthetjük, amelyek véges sok konvex felületi poligonból és konvex síkidomból rakhatók össze. Az összerakott felület felszínének természetesen az egymáshoz illesztett darabok felszínének az összegét mondjuk; bizonyítanunk kell azonban, hogy az említett tétel megfelelő szövegezmódosítással e kiterjesztés után is érvényben marad. Lehetőség van ezután arra, hogy 20.6



mintájára konvex zárt felületek tetszőleges darabjainak a felszínét tárgyaljuk. Azt mondjuk, hogy van felszín ha a korábbiak alapján felszínnel rendelkező belső és külső felületi idomok felszínének közös felső, illetve alsó határa van, s hogy ez a közös érték a felületdarab felszíne. Tovább általánosíthatjuk a felszín fogalmát, ha az imént mondottak alapján felszínnel rendelkező felületekből összerakott felületek felszínét mint az egymáshoz illesztett részek felszínének összegét definiáljuk.

Nem jutunk el azonban az általánosításoknak e sora után sem pl. a tórusz felszínéhez. A tórusz úgy keletkezik, hogy egy kört a síkjában elhelyezkedő és a kört nem metsző egyenes körül megforgatunk. A tóruszt példának azért említhettük, mert nem lehet véges sok olyan darabra felbontani, amelyek mindannyian elhelyezhetők konvex testek felületén. A differenciálgeometriának tehát a felszínfogalom további kiterjesztésére is szüksége van.

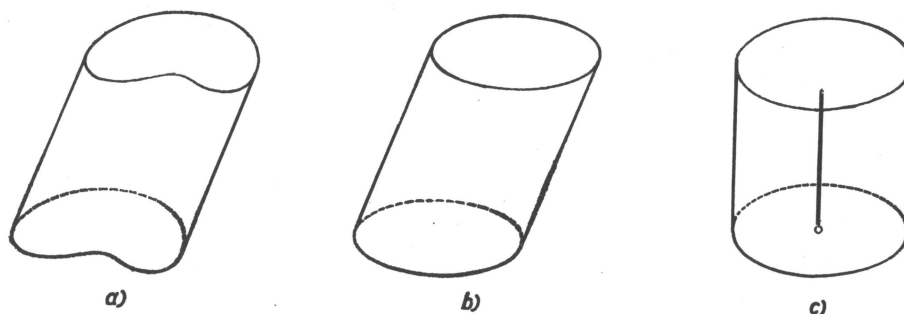
## 28. § Henger és kúp

A hengerről, a kúpról és a csonkakúpról lesz szó. Foglalkozunk e testek térfogatával és felszínével is.

**28.1** Ha egy síkbeli vonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy olyan egyenessel, amely a síkkal nem párhuzamos, akkor egy végtelenbe nyúló alakzatot, felületet kapunk, amelyet *hengerfelületnek* (henger) nevezünk. A származtatásnál szereplő vonalat *vezérvonalnak*, a húzott párhuzamosokat *alkotóknak* (alkotóegyenes) nevezzük.

Ha a vezérvonal kör, *körhengerhez* (körhengerfelület) jutunk. Ez *egyenes* (merőleges) vagy *ferde* aszerint amint az alkotók a kör síkjára merőlegesek vagy sem. Az egyenes körhenger vagy *forgáshenger* (forgáshengerfelület) forgásszimmetrikus, forgástengelye alkotóival párhuzamos és a vezérvonalul választott kör középpontján halad át. Alkotóinak a tengelytől való közös távolsága az egyenes körhenger *sugara*, ennek kétszerese pedig az *átmérője*.

Ha a vezérvonal egy korlátos síkbeli tartomány határa, akkor a hengerfelület egy ezt a tartományt tartalmazó, végtelenbe nyúló testet, *végtelen hengert* (végtelen hengertest) határol. Ez a test a tartomány pontjain át húzott párhuzamosok egyesítése. Ha ezt a testet a tartomány síkjával és egy ezzel párhuzamos síkkal elmetsszük, egy korlátos testhez, *hengerhez* (hengertest, cylinder) jutunk (217. ábra). Akkor és csak akkor jutunk ilyen módon konvex testhez, ha konvex síkidomból indultunk.



217

A hengerfelületnek a hengert határoló darabja a henger *palástja*. A párhuzamos síkok a henger *alaplappjait* (alap, alaplapp és fedőlap) tartalmazzák. Az alkotóegyeneseknek a palásthöz tartozó szakaszai a henger *alkotói*. Az alaplappok síkjainak távolsága a henger *magassága*. A henger *egyenes* (merőleges) vagy *ferde* aszerint, hogy az alkotók az alaplappokra merőlegesek-e vagy sem. A henger alkotói párhuzamosak és, mert párhuzamos síkokat összekötő szakaszok, egyenlők is. Egyenes henger magassága az alkotóival egyenlő. A henger alaplappjai egybevágók, mert ha az egyiket az alkotók irányában alkotói távolságra eltoljuk, akkor a másikat fedi. Az alaplappokkal párhuzamos sík az alaplappokkal egybevágó metszetet ad, hiszen ez a sík a hengerből hengert vág le, és a levágott henger alaplappjai is egybevágók.

Ha az alaplappok körök, a hengert *körhengernek* (körhengertest) nevezzük, de többnyire csak hengert mondunk, mert másfajta henger ritkán szerepel. Az egyenes körhengert *forgáshengernek*

is mondjuk. A forgáshenger alaplapjainak középpontjait összekötő szakasz a forgáshenger *tengelye* (tengelyszakasz). A forgáshenger forgásszimmetrikus alakzat. Forgástengelye tengelyszakaszának egyenese (tengelyegyenese).

Szó lehet a hasábnál mondottak mintájára (párhuzamosan metszett) henger mellett ferdén metszett hengerrel is. Ezt nem soroljuk a hengerek közé.

**B** Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a henger vezérvonalát illetően semmiféle megkötés nincs. Végtelen hengerfelület a sík is, mert ha a vezérvonal egyenes, síkhoz jutunk. Lehet a vezérvonal két párhuzamos vagy metsző egyenes, s akkor hengerfelületként két párhuzamos vagy metsző sík adódik. Minden hasábot hengerek is mondhatunk, mert a vezérvonal sokszög is lehet.

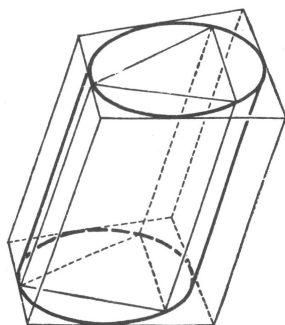
**28.2 Tétel.** *A henger térfogata az alaplap területének és a magasságnak a szorzata.*

Feltételezzük természetesen, hogy az alaplapnak van területe.

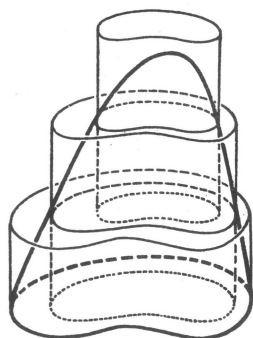
*Bizonyítás.* A henger alaplapjának belső és külső sokszögei fölé a henger alkotójával mint hasábalkotóval hasábot szerkesztve a henger belső és külső poliédereihez jutunk (218. ábra). Mindezeknek a hasáboknak a magassága a henger magasságával egyenlő. Tudjuk, hogy a belső sokszögek területének felső határa a külső sokszögek területének alsó határával egyenlő, és az alaplap területét adja. Ha mindezeket az értékeket a magassággal megszorozzuk, azt kapjuk, hogy a szerkesztett belső poliéderek térfogatának felső határa a szerkesztett külső poliéderek térfogatának alsó határával egyenlő, és az alapterületnek a magassággal való szorzatát adja. A hengernek van tehát térfogata, és ez az alapterület és magasság szorzata. —

Az  $r$  sugarú és  $m$  magasságú körhenger térfogata tételünk szerint  $\pi r^2 m$ .

**28.3 Tétel.** *Ha két test úgy helyezkedik el egy féltérben, hogy a féltér határsíkja által tartalmazott lapjaiknak  $s$  a határsíkkal párhuzamos síkok által kivágott metszeteiknek van területük, és ezek páronként egyenlők, hogy továbbá mindkét testhez található egy-egy egyenes, amellyel párhuzamos egyeneseknek a testhez tartozó pontjai (amennyiben ilyenek vannak) egy a féltér határsíkján végződő szakaszt alkotnak, akkor a két testnek van térfogata, és térfogatuk egyenlő.*



218



Tételünk 27.5 tételének általánosítása. A tételben említett egyenesek szerepét ott egy-egy élegyenes játszhatta.

*Bizonyítás.* A féltér határsíkját alapsíknak és a testeknek az alapsíkon elhelyezkedő lapját alaplapnak mondjuk. Messzük el a két testet az alapsíkkal párhuzamos síkokkal, amelyek az alapsíktól rendre  $h, 2h, 3h, \dots$  távolságra vannak. Emeljünk mindkét testnél az alaplap és a metszetek fölé olyan  $h$  magasságú hengereket, amelyeknek alkotója a tételben említett egyenessel párhuzamos (219. ábra). Ugyanahhoz a testhez tartozó hengerek nem fedik egymást, és egyesítésük egy lépcsős testet ad. Az alkotóirányú egyenesek megkövetelt tulajdonságából következik, hogy a két lépcsős test tartalmazza a két vizsgált testet. A metszetidomok területének egyenlőségéből viszont az adódik, hogy az általunk szerkesztett hengerek térfogata páronként egyenlő, s ezért a két lépcsős test térfogata is megegyezik. Egyező térfogatukat  $A$ -val jelöljük.

Szerkesszünk most hengereket a metszetek alá is, ugyancsak  $h$  magassággal és ugyanolyan irányú alkotóval. Ugyanahhoz a testhez tartozó hengerek most sem nyúlnak egymásba, és összeillesztve egy lépcsős testet adnak. A tétel követelményeiből most az adódik, hogy a vizsgált testek tartalmazzák a lépcsős testeket, s hogy a két lépcsős test térfogata most is egyenlő. Egyező térfogatukat  $B$ -vel jelöljük.

Ha  $T$  az alaplapok területe, akkor az alaplapra emelt hengerek térfogata  $Th$ . Ha valamelyik testet tartalmazó lépcsős testből az alapsíkon nyugvó hengert elhagyjuk, éppen eltolt helyzetben a test által tartalmazott lépcsős testhez jutunk. Ezek szerint

$$A - B = Th,$$

és ezért a testeket tartalmazó és a testek által tartalmazott lépcsős testek térfogatkülönbsége, ha  $h$  értékét megfelelően választjuk meg, egy önkényesen választott pozitív értéknél kisebb. Testjeinknek van tehát térfogatuk, és mivel ugyanazok a közrefogó értékek biztosítják ezt, térfogatuk egyenlő. —

A Helytelen a következő, Cavalieri-féle elvnek<sup>2</sup> mondott kijelentés: ha két testnek egy síkkal párhuzamos metszetei páronként egyenlő területűek, akkor a két test térfogata egyenlő. Ebből a követelésből a térfogat létezése nem következik. Mi többet követeltünk, és a mondott pongyola kijelentést szabatos tétellel helyettesítettük.

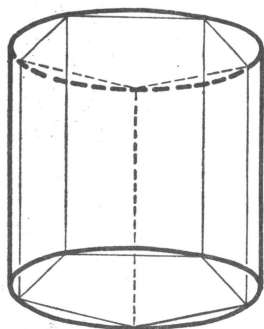
**28.4 Tétel.** *Az egyenes körhenger palástjának felszíne az alapkör kerületének és a henger magasságának a szorzata.*

Ha az alapkör sugara  $r$  és a magasság  $m$ , akkor a henger teljes felszíne a tétel alapján  $2\pi r^2 + 2\pi r m$ .

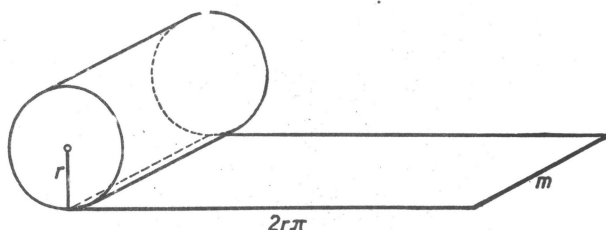
*Bizonyítás.* Az alapkörbe minden határon túl növekvő oldalszámmal szabályos sokszögeket írunk. E sokszögek fölé a henger magasságával egyenes hasábokat emelünk (220. ábra). E hasábok palástjának felszíne a henger palástjának felszínéhez tart (ezt 19.5 és 27.9 második tétele biztosítja). A hasábpalástok felszíne alapjuk kerületének és a magasságuknak a szorzata. Minthogy alapterületük az alapkör kerületéhez tart, a hasábpalástok felszínének a határértéke valóban az alapkör kerületének és a magasságnak a szorzata. —

A A forgáshenger palástjának felszínéhez szemléletes úton úgy juthatunk el, hogy a palástot síkba terítjük, s így egy téglalaphoz jutunk, melynek oldalai az alapkör kerületével és a henger magasságával egyenlők (221. ábra). Könnyen jegyezhetjük meg így azt, amit éppen bebizonyítottunk.

<sup>2</sup>\* B. Cavalieri, 1598-1647, a bolognai egyetem tanára.



220



221

**B** A palást felszínének kiterítéssel való meghatározását bizonyításnak nem mondhatjuk. Akkor volna csak teljes értékű ez a Bizonyítás, ha előbb pontosan körülírnók, hogy mit nevezünk kiterítésnek, és bebizonyítanók, hogy a kiterítés során a felszín nem változik meg. Nem volna értelme annak, hogy a kiterítés definíciójában éppen azt követeljük meg, hogy a felszín változatlan maradjon, mert akkor a kiterítéssel végzett bizonyítás előtt kellene a palást felszínét meghatároznunk. Szó lehet arról, hogy a kiterítést mint a felületen elhelyezkedő vonalak hosszát meg nem változtató transzformációt definiáljuk. Ebben az esetben azonban tisztázni kell, hogy milyen vonalak hosszának meg nem változtatását követeljük meg, és térgörbék ívhosszával kellene először foglalkoznunk ahhoz, hogy hosszas előkészítés után a kiterítéssel végzett felszínbizonyítást kifogástalannak mondhassuk. Mind e hiányosságok ellenére mégis azt kell mondanunk, hogy a kiterítéses okoskodás meggyőzőbb, mint amilyen meggyőző a mi bizonyításunk volna, ha 27.9 nem nyújtott volna hozzá szilárd alapot. Semmiképpen nem kifogásolható ezért, hogy pl. középiskolában a kiterítéssel végzett bizonyítás szerepel.

**28.5** Ha egy síkbeli vonal pontjain és egy a síkon kívül elhelyezkedő ponton át egyeneseket fektetünk, akkor *kúpfelülethez* (kúp) jutunk. A síkbeli vonal a kúp *vezérvonala*, a síkon kívül elhelyezkedő pont a kúp *csúcsa*, a vezérvonal pontjait a csúccsal összekötő egyenesek a kúp *alkotói* (alkotóegyenesek).

Ha a vezérvonal kör, a kúpfelületet *körkúp*nak (körkúpfelület) mondjuk. Ez akkor *forgáskúp* (forgáskúpfelület), ha csúcsa a vezérvonalul választott kör középpontjában a síkjára emelt merőlegesen van. A középpont és a csúcs összekötő egyenese a forgáskúp *tengelye*. A forgáskúp forgásszimmetrikus alakzat, és tengelye egyben forgástengelye is. Ebből a szimmetriából következik, hogy a forgáskúp alkotói a tengellyel mindannyian ugyanakkora szöget határoznak meg. Közös hajlásszögük a forgáskúp *félnyílásszöge*.

Ha a kúpfelület alkotóiból csak a csúcsból kiinduló és a vezérvonal pontjain áthaladó félegyeneseket tartjuk meg, akkor *félkúp*hoz jutunk. Ilyen módon a teljes kúpfelületet (kettős kúp) két félkúpra bonthatjuk. Az alkotóegyenesekből megtartott félegyenesek a félkúp *alkotói* (alkotó-félegyenesek).

Ha a vezérvonal egy korlátos síkbeli tartomány határa, akkor a félkúp egy ezt a tartományt tartalmazó, végtelenbe nyúló testet, *végtelen kúpot* (végtelen kúptest) határol. Ez a test a csúcspontból a tartomány pontjaihoz indított félegyenesek egyesítése. Ha ezt a testet a tartomány síkjával elmetsszük, egy korlátos testhez, *kúp*hoz (kúptest) jutunk. Akkor és csak akkor jutunk ilyen módon konvex testhez, ha konvex síkidomból indulunk ki.

A kúpfelületnek a kúpot határoló darabja a kúp *palástja*. A vezérvonal által határolt síkbeli tartomány a kúp *alaplappja* (alap). A csúcsot a vezérvonal pontjaival összekötő szakaszok a kúp *alkotói* (alkotószakasz). A kúp csúcsából az alaplap síkjára bocsátott merőleget (magasságszakasz) és ennek hosszát a kúp *magasságának* mondjuk.

Ha a kúpot alapjával párhuzamos síkkal metsszük, az alaplaphoz hasonló metszetidomhoz jutunk. Hasonlóságuk arányát a csúcs és metszősík távolságának, valamint a kúp magasságának az aránya adja. Ezeket az állításokat a csúcsból 17.3 előírása szerint végzett kinagyítás támasztja alá.

Ha az alaplap kör, a kúpot *körkúp*nek (körkúp) nevezzük, de általában csak kúpot mondunk, mert többnyire ilyen kúp szerepel. Ha a körkúp csúcsa az alapkör középpontjában a síkjára emelt merőlegesen van, a körkúpot *egyenest kúp*nek vagy *forgáskúp*nek nevezzük. Ha a körkúp nem ilyen, *ferde kúp*nek mondjuk.

A forgáskúp magasságszakaszát *tengelyének* (tengelyszakasz) is mondjuk. A forgáskúp forgásszimmetrikus alakzat, szimmetriatengelye tengelyszakaszának egyenese (tengelyegyenese). Ebből a szimmetriából következik, hogy alkotói egyenlők, és a tengelyhez ugyanakkora szögben hajlanak. Közös hajlásszögök a forgáskúp *félnyílásszöge*, közös hosszuk a forgáskúp *oldalmagassága*.

Ha a kúpot az alapjával párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor egy kisebb kúphoz és egy testhez jutunk, amelyet *csanak kúp*nek nevezünk. Az eredeti alaplap és a metszetidom a csanak kúp *alaplappjai* (alap, alaplap és fedőlap), ezek tehát egymáshoz hasonlóak. Az eredeti alkotóknak az alaplapokat összekötő szakaszai a csanak kúp *alkotói* (alkotószakasz). Ezek egyesítése a csanak kúp *palástja*. Az alaplapok síkjának távolsága a csanak kúp *magassága*. A következőkben csak *köralapú* csanak kúppal foglalkozunk, a csanak kúp megnevezést eleve ilyen csanak kúpra használjuk.

Az egyenes körkúpból származtatott csanak kúpot *egyenest csanak kúp*nek nevezzük. Ez forgásszimmetrikus test, szimmetriatengelye az alaplapok középpontjait összekötő szakasznak, az egyenes csanak kúp *tengelyének* (tengelyszakasz) egyenese. Alkotóinak közös hossza az egyenes csanak kúp oldalmagassága.

Szó lehet a csanak kúpnál mondottak mintájára (párhuzamosan metszett) csanak kúp mellett ferdén metszett csanak kúpról is. Ezt nem soroljuk a csanak kúpok közé.

Vezérvonalul sokszöget is választhatunk. Ezért a végtelen gúlafelület is félkúp, a végtelen gúla is végtelen kúptest, a gúla is kúp, és a csanak gúla is csanak kúp.

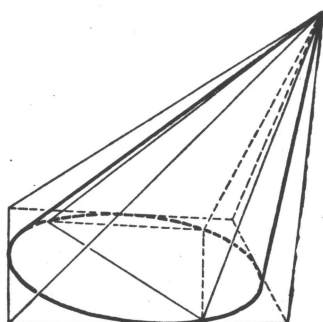
**28.6 Tétel.** *A kúp térfogata az alapterület és a magasság szorzatának a harmada.*

Feltételezzük természetesen, hogy az alaplapnak van területe. A körkúp térfogata tételünk szerint

$$\frac{1}{3} \pi r^2 m,$$

ahol  $r$  az alapkör sugara és  $m$  a kúp magassága.

*Bizonyítás.* A kúp alaplapjának belső és külső sokszögei a kúp csúcsával együtt gúlákat, a kúp belső és külső poliédereit határozzák meg (222. ábra). Mindezeknek a gúlának és a kúpnak közös a magassága. Tudjuk, hogy az alaplap belső sokszögei területének felső határa a külső sokszögek területének alsó határával egyenlő, és az alaplap területét adja. Ha mindezeket az értékeket a magasság harmadával megszorozzuk, azt kapjuk, hogy a szerkesztett belső poliéderek térfogatának felső határa megegyezik a szerkesztett külső poliéderek térfogatának alsó határával, s hogy ez az érték az alapterület és a magasság szorzatának a harmada. Van tehát térfogata a kúpnak, és ez a tételben megadott érték. —



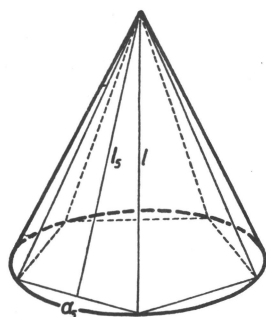
222

**Tétel.** *A forgáskúp palástjának felszíne az alapkerület és az oldalmagasság szorzatának a fele.*

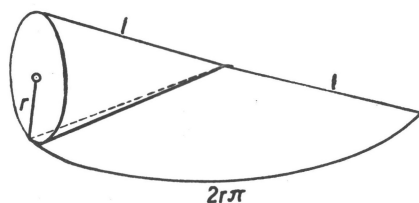
Ha tehát  $r$  az alapkör sugara, és  $l$  az oldalmagasság, akkor a forgáskúp teljes felszíne  $\pi r^2 + \pi r l$ .

*Bizonyítás.* Az alapkörbe minden határon túl növekvő oldalszámmal szabályos sokszögeket írunk. E sokszögek fölé a kúp magasságával szabályos gúlákat emelünk (223. ábra). Így a kúppal közös csúcsú gúlákhöz jutunk, amelyeknek felszíne a kúppalást felszínéhez konvergál (ezt 19.5 és 27.9 második tétele támasztja alá). Tételünk most már közvetlenül következik abból, hogy a gúlapalástok felszíne alapkerületük és oldalmagasságuk szorzatának a fele, és hogy a körbe írt növekvő oldalszámú sokszögek kerülete a kör kerületéhez, gúláink oldalmagasságai pedig a kúp oldalmagasságához tartanak. Ez utóbbi kijelentés helyessége abból adódik, hogy az  $n$  oldalú szabályos

gúla  $l_n$  oldalmagassága a háromszög-egyenlőtlenség szerint a kúp  $l$  oldalmagasságától kevesebbet tér el, mint az alapkörbe írt szabályos  $n$ -szög oldalának a fele, márpedig ez  $n$  növekedtével minden határon túl csökken. —



223



224

A A kúppalást felszínét szemléletes utón úgy határozhatjuk meg, hogy a kúp palástját síkba terítjük. Így olyan körcikkhez jutunk, amelynek sugara a kúp oldalmagassága, határoló körívének hossza pedig a kúp alapkörének kerülete (224. ábra). Tételünket ilyen módon könnyen jegyezhetjük meg (vö. 28.4 B).

**28.7 Tétel.** *A köralapú csonkakúp térfogata*

$$\frac{\pi}{3} m (R^2 + Rr + r^2),$$

ahol  $R$  és  $r$  az alapkörök sugara,  $m$  pedig a csonkakúp magassága.

*Bizonyítás.* Jelölje  $R$  a két sugár nagyobbikát, és legyen a csonkakúpot kúppá kiegészítő kúp magassága  $x$ . A 225. ábra a kiegészített kúp magasságát alapkörök középpontját tartalmazó síkban ábrázolja a szereplő mennyiségeket. Ennek az ábrának hasonló háromszögeiből

$$x : m = r : (R - r)$$

következik, amiből

$$(1) (R - r) x = mr$$

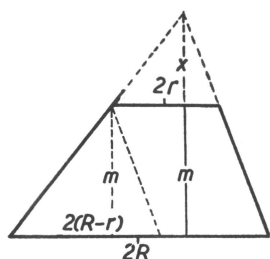
adódik. A csonkakúp térfogata a kiegészített és kiegészítő kúp térfogatának különbsége, azaz

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 (m + x) - \frac{\pi}{3} r^2 x = \frac{\pi}{3} [R^2 m + (R + r)(R - r)x].$$

Ha (1) felhasználásával  $x$ -et kiküszöböljük, akkor a

$$V = \frac{\pi}{3} m [R^2 + (R + r)r]$$

képlethez jutunk. —



225

**Tétel.** Az egyenes csonkakúp palástjának felszíne az alapkerületek számtani közepének és az oldalmagasságnak a szorzata.

Ha az alapkörök sugarát ismét  $R$  és  $r$ , az oldalmagasságot pedig  $l$  jelöli, akkor az egyenes csonkakúp palástjának felszíne a tétel szerint  $\pi(R + r)l$ .

*Bizonyítás.* Legyen ismét  $R$  a sugarak nagyobbika, és jelölje  $y$  a kiegészítő kúp oldalmagasságát. A 226. ábra a kiegészített kúp tengelyén átfektetett síkban szemlélteti a szereplő mennyiségeket. Ennek az ábrának hasonló háromszögeiből

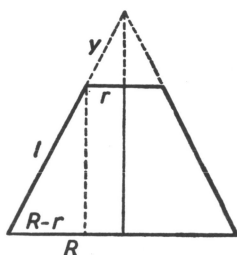
$$y : l = r : (R - r)$$

következik, amiből

$$(2) (R - r)y = rl$$

adódik. A csonkakúp palástjának felszíne (27.9 harmadik tétele szerint) a kiegészített és a kiegészítő kúp palástfelszínének különbsége, azaz (2) felhasználásával

$$F = \pi R(l+y) - \pi r y = \pi [Rl + (R-r)y] = \pi (R+r)l. \quad \_$$



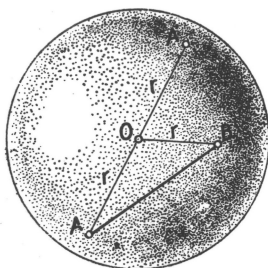
226

## 29. § Gömb

Már a bevezető fejezetben, 5.1-ben megismerkedtünk a gömbbel. Itt a gömbre vonatkozó alapvető tudnivalókról, majd részletesebben a gömbnek és egyes részeinek térfogatáról és felszínéről lesz szó. A szóhasználatot illetően 5.1A2-re utalunk.

**29.1** A gömbfelület két pontját összekötő szakasz a gömb *húrja*. A középponton áthaladó húrok a gömb *átmérői* (átmérőszakasz, diaméter). A középpont ezeket két sugárra bontja fel, tehát mind egyenlők. Közös hosszukat is átmérőnek mondjuk, s ez a sugár kétszerese. Egy átmérő két végpontjáról azt mondjuk, hogy a gömb (diametrálisan) *átellenes pontjai*.

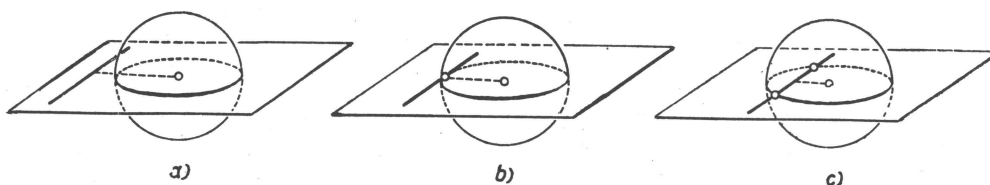
Bármely az átmérőktől különböző húr a végpontjaihoz vezető sugarakkal együtt egy háromszög határol (227. ábra). Ebből a háromszög-egyenlőtlenség alapján kiolvashatjuk, hogy az átmérőktől különböző húrok hossza az átmérőnél kisebb.



227

A gömb definíciójából közvetlenül adódik, hogy a gömb középpontján áthaladó sík a gömböt olyan körben metszi, amelynek középpontja és sugara a gömb középpontjával és sugarával azonos, s hogy a gömbtesttel alkotott metszetidom ugyanannak a körnek a tartománya. Ezek a körök a gömb *főkörrei*.

Ha a gömb középpontján és egy rajta át nem haladó egyenesen át síkot fektetünk, és az általa kimetszett főkört tekintjük (228. ábra), akkor elmondhatjuk, hogy az egyenesnek ehhez a főkörhöz tartozó pontjai azonosak az egyenesnek a gömbhöz tartozó pontjaival. Ez a kijelentés egyaránt helyes, akár a gömbfelületre és a főkör vonalára, akár pedig a gömbtestre és a főkör tartományára vonatkoztatjuk.





Következik ebből, hogy egy egyenesnek 0, 1 vagy 2 pontja van a gömbfelületen aszerint, amint a középpontnak az egyenestől való távolsága a gömb sugaránál nagyobb, akkora vagy annál kisebb, hogy tehát a gömbfelület három pontja nem lehet egy egyenesen. Kiolvasható az is, hogy a gömbtest konvex, mélyet a gömbfelület határol, hogy tehát minden húr a gömb belsejében halad.

Ha egy egyenesnek csak egyetlen közös pontja van a gömbbel, a gömb *érintőjének* (érintőegyenes), egyetlen közös pontját pedig *érintési pontnak* mondjuk. Az imént mondottakból következik, hogy egy egyenes akkor és csak akkor érinti a gömböt, ha a gömb középpontjától sugárnyi távolságra van, hogy az érintő merőleges az érintési ponthoz vezető sugárra, s hogy egy sugár végpontjában a sugárra bocsátott merőlegesek mindegyike érintő.

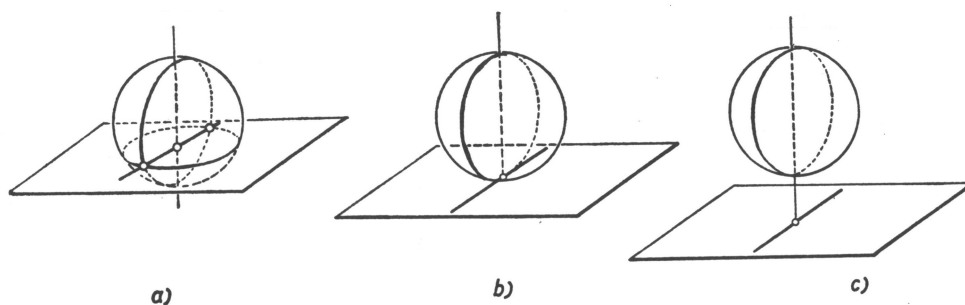
**B** A gömb definíciójából közvetlenül következik, hogy a hasonlóság gömbhöz gömböt rendel, mégpedig középpontjukat is egymáshoz rendeli, s hogy bármely két gömb hasonló.

A gömbfelület a középpontot egyértelműen meghatározza, hiszen ez a leghosszabb húrok közös felezőpontja. A gömbnek tehát egyetlenegy középpontja van (vö. 15.1 B2).

A gömb átmérőjét illetően megállapíthatjuk, hogy az átmérő a szónak abban az általánosabb értelmében is, amelyről 15.1 B3 szólt.

**29.2** A gömb definíciójából következik, hogy a gömb minden középpontot tartalmazó síkra vonatkozólag szimmetrikus, hogy minden átmérőjének egyenesére vonatkozólag forgásszimmetrikus, sőt középpontjára vonatkozólag gömbszimmetrikus is.

Ha egy gömb és egy sík van adva, akkor a gömb középpontján át a síkra merőlegest állítva olyan egyenest kapunk, amelyre vonatkozólag a gömb is és a sík is forgásszimmetrikus. Ha e tengelyen át síkot fektetünk, ez a gömböt egy főkörben, és a síkot egy a tengelyre merőleges egyenesben metszi. A forgásszimmetriából következik, hogy ezeknek a közös pontjai a tengely körül pörgetve a gömb és a sík közös pontjait adják (229. ábra). Így azt kapjuk, hogy egy síknak a gömbbel közös pontjai vagy kört alkotnak, vagy egyetlen közös pont van, vagy pedig nincs is közös pont, mégpedig aszerint, amint a középpontnak a síktól való távolsága a gömb sugaránál kisebb, ugyanakkora vagy nagyobb nála. Meggondolásunkból az is adódik, hogy ha egy sík a gömböt körben metszi, akkor a gömb középpontjának a síkra vetett merőleges vetülete a kör középpontja.

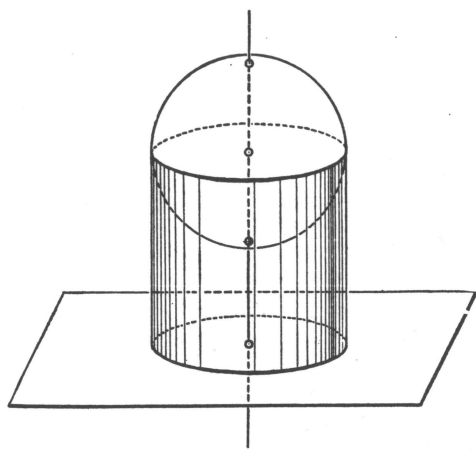


Ha egy síknak a gömbbel csak egyetlen közös pontja van, akkor *érintősíknak*, a közös pontot pedig *érintési pontnak* mondjuk. Az elmondottakból következik, hogy egy sík akkor és csak akkor érinti a gömböt, ha középpontjától sugárnyi távolságra van, hogy az érintősík az érintési ponthoz vezető sugárra merőleges, s hogy egy sugárra végpontjában merőleges síkot állítva, a gömböt e végpontban érintő síkhoz jutunk. Egyetlen olyan sík van tehát, amely a gömböt megadott pontjában érinti. Megadott állással a gömbhöz két érintősík fektethető, s ezek a gömböt átellenes pontokban érintik.

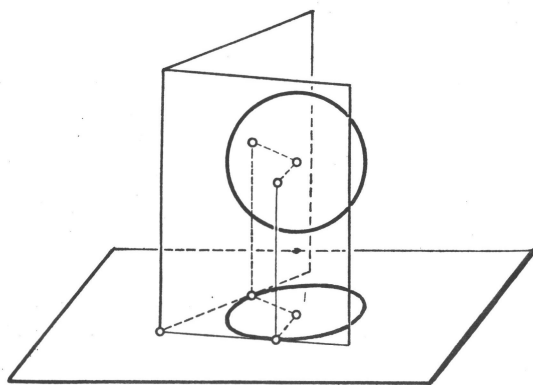
Az érintősík definíciójából nyomban adódik, hogy az érintősíknak az érintési ponton áthaladó egyenesei a gömb érintői. Az érintési ponton áthaladó, a gömböt körben metsző sík az érintősíkot

a metszatkör érintőjében metszi, mert a két sík metszésvonalának csak egy pontja tartozik a metszatkörhöz. Két főkör síkjának hajlásszöge a metszéspontjukban vont érintők hajlásszögével, azaz a két főkör hajlásszögével egyenlő, hiszen e két érintőt a síkokból a metszésvonalukra merőleges sík metszi ki.

A gömbből és egy síkból álló alakzat forgásszimmetriájából következik, hogy a gömbnek valamely síkra vetett merőleges vetülete körlemez, amelynek középpontja a gömb középpontjának vetülete és sugara a gömbsugár (230. ábra), hogy továbbá a vetület határvonalán a síkra állított merőlegesek a gömb érintői, ezek együttesen egy forgáshengert alkotnak, és a gömböt a síkkal párhuzamos főkör pontjaiban érintik. Következik az is, hogy a vetületi kör érintői mentén a kör síkjára merőleges síkokat állítva a gömb érintősíkjaihoz jutunk, s hogy ezek érintési pontjai ugyancsak az imént említett főkört szolgáltatják. Egy a gömböt nem metsző egyenesen át a gömbhöz két érintősíkot fektethetünk, hiszen ezeket az egyenesre merőleges síkra való vetítés révén egy külső pontból a körhöz vont érintők szolgáltatják (231. ábra).

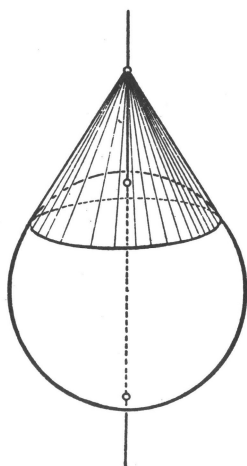


230



231

A gömbből és egy külső pontból álló alakzat is forgásszimmetrikus, forgástengelye a pont és a gömbközpont összekötő egyenese. Ebből a szimmetriából következik, hogy egy külső pontból a gömbhöz vont érintők forgáskúpot alkotnak, hogy az érintési pontok egy gömbi körön helyezkednek el, s hogy a külső ponttól az érintési pontokhoz vezető szakaszok, a külső pontból a gömbhöz vont érintők (érintőszakasz) mind egyenlők (232. ábra).



232

Két gömb együttese is forgásszimmetrikus alakzat, forgástengelye a gömbközpontokon áthaladó egyenes. Ha egy a tengelyen átfektetett sík által a két gömbből kimetszett főkört a tengely körül megpörgetjük, a két gömbhöz jutunk. Két gömbfelület közös pontjai ezért vagy kört alkotnak, vagy egyetlen közös pont van, vagy pedig nincs is közös pont. Azt mondjuk, hogy két gömb érinti egymást, ha a két gömbfelületnek egyetlenegy közös pontja van. Egymást érintő gömbök érintési pontja ezek szerint a középpontjukat összekötő egyenesen van, és ebben a pontban közös az érintősíkjuk. Két gömb viszonylagos elhelyezkedésére vonatkozólag változtatás nélkül elmondhatnók mindazt, amit 15.6-ban két kör viszonylagos elhelyezkedéséről mondtunk.

A gömbnek, valamint azt metsző egyenesnek, síknak, körnek vagy gömbnek egy közös pontjában beszélhetünk a két alakzat hajlásszögéről. Ez azt a szöget jelenti, amit a gömböt ebben a pontban érintő sík a metsző egyenessel vagy síkkal, illetőleg a metsző kör érintőjével vagy a metsző gömb érintősíkjával alkot. A hajlásszög mindezekben az esetekben a közös pontok mindegyikében ugyanakkora. Ez a gömb és sík, valamint két gömb esetében az ebben a szakaszban említett forgásszimmetriákból, gömböt metsző egyenes és kör esetében pedig arra a síkra vonatkozó szimmetriából következik, amelyik a gömb középpontján áthalad, és az egyenest, illetőleg kört merőlegesen metszi.

**A 15.2** A1 mintájára megemlítjük, hogy egy síkot akkor mondunk egy térbeli tartomány *támaszsíkjának*, ha a tartomány határának van a síkhoz tartozó pontja, és a sík által határolt egyik féltér tartalmazza a teljes tartományt. A támaszsíkon természetesen nem lehet a tartománynak belső pontja. A gömb érintősíkja tehát támaszsík is, és más támaszsíkja nincs.

**B1** Minthogy a gömb belső pontján átfektetett sík a gömböt körben metszi, a körre vonatkozó ismereteink közvetítésével adódik, hogy belső és külső pontot összekötő szakasznak és körívnek, valamint belső pontból kiinduló félegyenesnek egyetlenegy pontja van a gömbfelületen (vö. 5.2 B2).

**B2 15.1** B4 mintájára elsőnek megemlítjük, hogy a gömb bármely belső pontjához található egy ezt a belsejében tartalmazó és a gömb által tartalmazott poliéder, hiszen ez minden konvex testre teljesül (lásd 5.3 Bc).

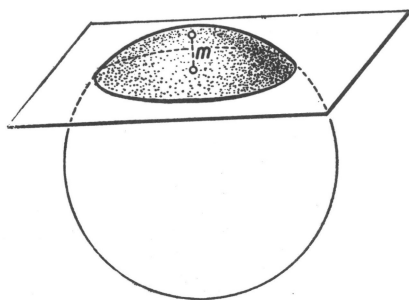
*Van olyan poliéder, amely egy megadott gömbtestet tartalmaz.* Ha ugyanis három nem egysíkú átmérő végpontjainak mindegyikében érintősíkot fektetünk a gömbhöz, akkor a kapott hat sík a gömböt tartalmazó poliédert, mégpedig paralelepipedont határol.

*Egy poliéder bármely belső pontja körül elhelyezhető, olyan gömbtest, amelyet a poliéder tartalmaz.* Elég ezt konvex poliéderre belátnunk, hiszen a poliéder tartalmaz olyan konvex poliédert, amely az adott  $B$  belső pontot tartalmazza. Ha  $B$ -nek a konvex poliéder lapsíkjaitól való távolságait tekintjük, és ezek legkisebbikével mint sugárral  $B$  körül gömböt írunk, akkor a konvex poliéder által tartalmazott gömbhöz jutunk.

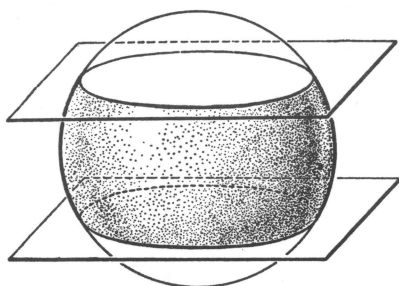
Bármely pont körül elhelyezhető olyan gömbtest, amely egy megadott poliédert tartalmaz. Ha ugyanis az adott  $P$  pontnak a poliéder csúcsaitól való távolságait tekintjük, és ezek legnagyobbikával mint sugárral  $P$  körül gömböt írunk, akkor olyan gömbtesthez jutunk, amely tartalmazza a poliéder csúcsait, tehát a gömbtest konvexitása miatt azok konvex burkát és magát a poliédert is.

Az elmondottakból következik, hogy 5.3-ban a környezetet konvex poliéder helyett gömbbel is definiálhattuk volna, s hogy egy test akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó gömbtest (vö. 5.4 B2). A gömb tehát 5.4 definíciója szerint is korlátos test.

**29.3** Ha a gömböt egy síkkal elmetsszük, a gömbfelületet két *gömbsüvegre* vágjuk fel (233. ábra). A sík által kimetszett körvonal a gömbsüvek *alapköre*. A gömbsüveg tartalmazza az alapkör síkjára merőleges átmérő egyik végpontját. E pontból az alapkör síkjára bocsátott merőleges hossza a gömbsüveg *magassága*. Ha az alapkör főkör, azaz a magassága a gömbsugárral egyenlő, akkor a gömbsüveget *félgömbnek* (félgömbfelület) mondjuk.



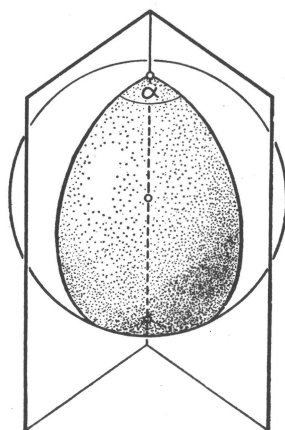
233



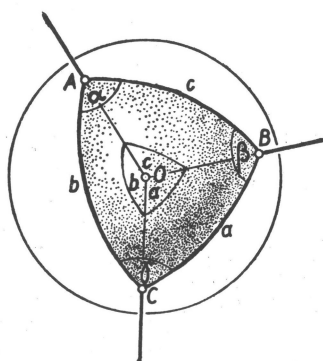
234

Ha a gömböt két párhuzamos síkkal metsszük, a gömbfelületet két gömbsüvegre és egy *gömbövre* bontjuk fel (234. ábra). A síkok metszetkörei a gömböven *alapkör* (alapkör és fedőkör). E körök síkjának távolsága a gömböven *magassága*.

Ha egy lapszög éle a gömb középpontján halad át, akkor a lapszög a gömbfelületből egy *gömbkétyszöget* vág ki (235. ábra). A gömbkétyszöget két félkör, a kétyszög két *oldala* határolja, és ezek a kétyszög két *csúcsában* (szögpont) találkoznak. A lapszög szögét, azaz a határoló félkörívek szögét a gömbkétyszög *szögének* mondjuk. Két főkör a gömbfelületet négy gömbkétyszögre bontja fel.



235



236

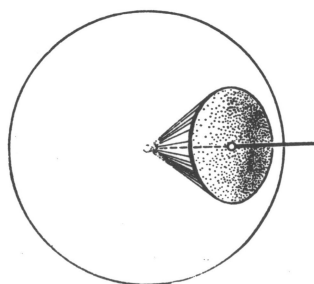
Egy konvex háromélű szöglet, ha csúcsa a gömb középpontja, a gömbfelületből *gömbháromszöget* (szférikus háromszög) vág ki (236. ábra). Három főkör ezek szerint, ha nincs közös pontjuk, a gömböt nyolc gömbháromszögre bontja fel, és ilyen módon minden gömbháromszöghöz eljuthatunk. A gömbháromszöget három főkörív, a gömbháromszög *oldalai* határolják. Ezek a gömbháromszög *csúcsaiban* (szögpont) találkoznak. A gömbháromszög oldalait a hozzájuk tartozó középponti szögekkel mérjük. Az oldalak által alkotott szögeket, azaz a gömbháromszöget meghatározó konvex triéder szögeit a gömbháromszög *szögeinek* mondjuk. Ezek szerint a gömbháromszög oldalai és szögei  $180^\circ$ -nál kisebb szögek. A gömbháromszög oldalait és szögeit, miként a síkháromszögekét, egymásnak megfelelő kisbetűkkel és görög betűkkel szokás jelölni. Megállapíthatjuk, hogy a gömbháromszög és az ezt meghatározó triéder megfelelő oldalai és szögei páronként egyenlők. Közömbös tehát, hogy valaki a gömbháromszög vagy a triéder oldalai és szögei között fennálló összefüggésekkel foglalkozik-e. Az ilyen feladatok a *gömbháromszögtan* körébe tartoznak.

A gömböt metsző sík a gömbtestet két *gömbszeletre* (gömbszegmentum) vágja fel. A gömbszeletet egy gömbsüveg és egy körlap, a gömbszelet *alaplapja* (alap) határolja. A határoló gömbsüveg magasságát a gömbszelet *magasságának* is mondjuk. A *félgömb* (félgömbtest) olyan gömbszelet, amelynek az alapja főkör.

Ha a gömböt két párhuzamos síkkal metsszük, akkor a gömbtestet két gömbszeletre és egy *gömbbrétegre* vágjuk fel. A gömbbréteget egy gömböv és két körlap, a gömbbréteg két *alaplapja* (alap, alaplap és fedőlap) határolja. Az alaplapok távolsága a gömbbréteg *magassága*.

Az olyan lapszög, amelynek éle a gömb középpontján halad át, a gömbtestből egy *gömbgerezdet* tartalmaz. Ezt egy gömbkétszög és két félkörlemez határolja. A gömbkétszög szögét a *gömbgerezdszögének* is mondjuk.

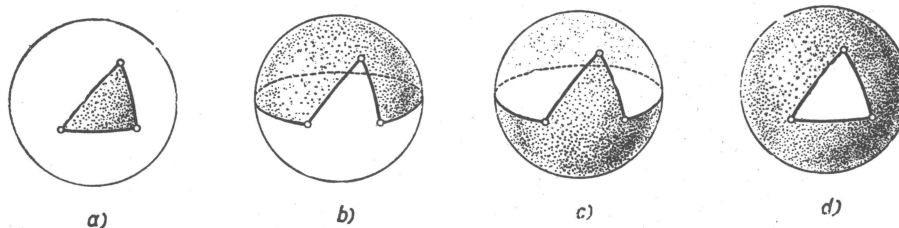
Tekintsünk egy olyan konvex (de nem egyenesszögű) szögtartományt, amelynek csúcsa a gömb középpontja. Ha ezt egyik szára körül megpörgetjük, forgáskúphoz, féltérhez vagy egy forgáskúp kiegészítő tartományához jutunk. Az így keletkező forgástest a gömbből mind a három esetben egy *gömbcikket* (gömbszektor) tartalmaz (237. ábra). Ezt egy gömbsüveg és egy forgáskúp palástja (esetleg körlemez) határolja. A megpörgetett szög a gömbcikk *félnyílásszöge*. Ha ez derékszög, a gömbcikk félgömb.



237

A most definiált testekkel kapcsolatban megemlítjük, hogy minden gömbszelet és gömbréteg konvex, hiszen konvex testek (gömb és féltér, illetőleg gömb és térréteg) közös részeként származtatható, a gömbgerezd és a gömbcikk viszont konkáv is lehet.

**B** A gömbháromszög definiálásakor konvex triéderekre szorítkoztunk. Ha tetszőleges triéderből indulunk ki, *általánosabb értelemben vett gömbháromszöghöz* jutunk. Ehhez az általánosabb fogalomhoz jutunk akkor is, ha azt mondjuk, hogy a gömbháromszög a gömbfelületnek három csatlakozó és egymást nem metsző főkörív által határolt része. A gömbfelületnek három pontja, ha nincs egy főkörön, egyetlen közöséges értelemben vett gömbháromszöget határoz meg. A 238. ábra bemutatja, hogy ugyanaz a három csúcs milyen általánosabb értelemben vett gömbháromszöget határoz meg. Mi a következőkben — hacsak ellenkezőjét külön nem hangsúlyozzuk — mindig a közöséges értelemben vett gömbháromszögekről szólunk.



238

**29.4** Két ponton át végtelen sok gömb halad. Középpontjaik mértani helye a két pont összekötő szakaszát merőlegesen felező sík, hiszen ez a sík a két ponttól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye.

Három nem kollineáris ponton át szintén végtelen sok gömb halad. Ezek a három pont síkját körben, tehát mindannyian a három pont által meghatározott körben metszik. Középpontjaik mértani helye ennek a körnek a középpontjában a síkjára állított merőleges egyenes, hiszen ebben az egyenesben metszik egymást azok a síkok, amelyeket a három pont közül kettő-kettő az előző bekezdés szerint meghatároz.

**Tétel.** Ha négy pont nincs egy síkban, akkor egyetlen olyan gömb van, amely a négy ponton áthalad.

Más szövegezésben azt mondja ki ez a tétel, hogy egyetlen olyan gömb van, amely egy tetraéder valamennyi csúcsán áthalad, azaz a tetraéder köré egyetlen gömb írható. Azt is mondhatjuk, hogy négy nem kollineáris pont vagy egy síkot, vagy egy gömböt határoz meg.

*Bizonyítás.* Legyenek  $A, B, C, D$  az adott pontok. Az  $AB, AC, AD$  szakaszokat merőlegesen felező síkoknak egyetlen közös  $O$  pontjuk van, mert nincs olyan egyenes, amely mind a három síkkal párhuzamos, hiszen ez az egyenes merőleges volna a mondott három szakasz mindegyikére, s akkor mind a négy pont abban a síkban volna, amelyik az  $A$  ponton áthalad és erre az egyenesre merőleges. Az  $O$  pont köré az  $A, B, C, D$  pontokon áthaladó gömb írható, mert  $O$  helyzete miatt az  $OB, OC, OD$  szakaszok mindegyike egyenlő az  $OA$  szakasszal. Más ilyen gömb nincs, mert középpontjának a két pontról az imént mondottak értelmében hozzá kell tartoznia mindazokhoz a síkokhoz, amelyek az  $O$  pontot meghatározták, s ezért az  $O$  ponttól nem különbözhetik. —

Tételünkéből következik, hogy egy kör és ennek síkján kívüli pont, vagy két egymást két pontban metsző, nem egysíkú kör is egyetlen gömböt határoz meg. Ezt a gömböt az első esetben a pont és a kör három pontja, a második esetben pedig a két metszéspont és a két kör egy-egy további pontja határozza meg.

**29.5** A gömb felületén ugyanúgy végezhetünk geometriai vizsgálatokat mint a síkban. Ez a *gömbi* (szférikus) *geometria* a síkgeometriához sokban hasonlít.

A gömbi geometriában az egyenes szerepét a főkör, a körök szerepét a többi gömbi kör játssza. Gömbi szakasznak a félkörnél nem nagyobb főköríveket mondjuk. Két pont távolságát ennek megfelelően a hozzájuk vezető sugarak hajlásszögével, tehát lényegében (állandó tényezőtől eltekintve) a pontokat összekötő rövidebbik főkörív hosszával mérjük. A szögek a gömbi geometriában a főkörívek szögeit jelentik. A háromszögek szerepét a gömbháromszögek játsszák.

A gömbi geometriában is lehet egy alakzatot egy pont körül (a ponthoz vezető sugár körül) elforgatni, egy főkörre (a főkör síkjára) tükrözni, vagy úgy elmozgatni, hogy egy pontja és egy ebből kiinduló főkörív előre megadott helyzetbe jusson.

Megtehetnők, hogy a síkgeometria felépítésének mintájára részletesen tárgyaljuk a gömbi geometriát is. Ehelyett egy-két alapvető tételt említünk.

**Tétel.** Egy főkörívet merőlegesen felező főkör pontjai a főkörív végpontjaitól egyenlő gömbi távolságra vannak, a főkör által határolt félgömbök belső pontjai pedig a főkörívnek attól a végpontjától vannak kisebb gömbi távolságra, amelyik ugyanahhoz a félgömbhöz tartozik.

*Bizonyítás.* Az említett főkört a gömbből a körív végpontjait összekötő egyenesszakaszt merőlegesen felező sík metszi ki (239. ábra). A bizonyítandó állítások 24.4 szerint helyesek tehát akkor, ha bennük gömbi távolság helyett közönséges távolságot mondunk. A húrok és a hozzájuk tartozó középponti szögek kapcsolatára hivatkozva helyes ezért a kimondott tétel is. —

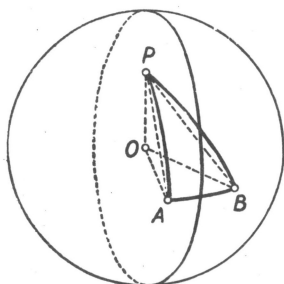
**Tétel.** Egy gömbháromszögben két oldal és az ezekkel szemközti szögek vagy páronként egyenlők,

vagy nem, s ekkor az oldalak nagyobbika a szögek nagyobbikával van szemben.

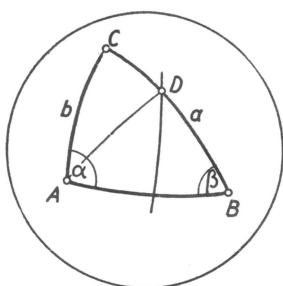
Ha két oldal és szög egyenlő, a gömbháromszög *egyenlőszárú* (szimmetrikus), ha pedig mindhárom oldal és szög egyenlő, akkor *szabályos* (egyenlő oldalú).

*Bizonyítás.* Tekintsük az  $ABC$  gömbháromszög  $A, B$  csúcsainál elhelyezkedő szögeit és ezekkel szemközti oldalait. Ha  $C$  az  $AB$  oldalt merőlegesen felező főkörön van, akkor a főkör síkjára vonatkozó szimmetriából következik, hogy a vizsgált szögek és oldalak páronként egyenlők. Ha a  $C$  pont az említett főkör által határolt egyik, például az  $A$  pontot tartalmazó félgömb belsejében van, akkor az előző tétel szerint (az oldalakat és szögeket a szokott módon jelölve)  $\alpha > \beta$ , és feladatunk az  $\alpha > \beta$  egyenlőtlenség bizonyítása. Minthogy  $B$  és  $C$  más-más félgömbön van, az  $a$  oldal a két félgömb határát egy  $D$  pontban metszi (240. ábra). Az  $AD$  gömbi szakasz kettévágja az  $a$  szöget, hiszen az  $\alpha$  szögű

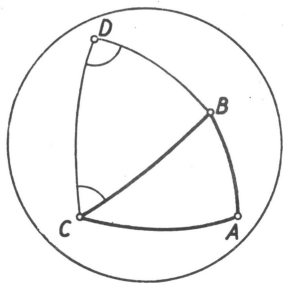
gömbkétyszög tartalmazza gömbháromszögünket. A már említett szimmetriából következik, hogy  $\beta$  a  $BAD$  gömbi szöggel egyenlő, tehát az ezt részként tartalmazó  $BAC$  gömbi szögnél, azaz  $\alpha$ -nál kisebb.



239



240



241

**Tétel.** Egy gömbháromszög két oldalának összege a harmadik oldalnál nagyobb.

*Bizonyítás.* Nyilvánvaló a tétel állítása akkor, ha a szóban forgó két oldal összege  $180^\circ$ , vagy annál nagyobb, hiszen a gömbháromszög harmadik oldala  $180^\circ$ -nál kisebb. Ha tehát az  $ABC$  gömbháromszög oldalaira vonatkozó  $AB + BC > AC$  egyenlőtlenséget akarjuk bizonyítani, feltehetjük hogy az  $AB$  oldalt a  $BC$  oldallal egyenlő  $BD$  ívvel meghosszabbítva, félkörnél kisebb  $ABD$  ívhez jutunk (241. ábra). Igaz ekkor, hogy ez az ív az  $ACD$  gömbháromszög egyik oldala, s hogy ezt a gömbháromszöget a  $CB$  ív kettévágja. A  $BCD$  gömbháromszögnek a  $C$  és  $D$  csúcsoknál elhelyezkedő szögei az előző tétel szerint egyenlők. Az  $ACD$  gömbháromszög  $C$  csúcsánál ezért nagyobb szög helyezkedik el, mint a  $D$  csúcsnál. Ebből, ismét az előző tétel alapján, következik, hogy az  $ABD$  ív az  $AC$  ívnél hosszabb. —

Tételünkéből következik, hogy 9.4 tételének gömbi megfelelője is helyes.

**B1** Utolsó két tételünk általánosabb értelemben vett gömbháromszögekre nem teljesül. Erről a 238. ábra gömbháromszögei is meggyőznek.



**B2** Láthattuk, hogy a gömbi geometria a síkgeometriával sokban megegyezik. Lényeges eltérések is vannak azonban közöttük. Így például az egyenesek szerepét játszó főköröknek mindig van metszéspontjuk, sőt két pontban metszik egymást.

**29.6 Tétel.** Az  $r$  sugarú gömb térfogata  $\frac{4\pi}{3}r^3$ .

*Bizonyítás.* Elég azt bizonyítanunk, hogy a félgömb térfogata  $\frac{2\pi}{3}r^3$ , hiszen a gömböt alkotó két félgömb egybevágó s így térfogatuk is egyenlő (ha van térfogatuk).

A félgömb alaplajának síkjára  $r$  sugarú és  $r$  magasságú hengert állítunk. Ebből a hengerből kivágjuk azt a kúpot, amelynek csúcsa a henger alaplajának középpontja, alaplaja pedig a henger fedőlapja. A 242. ábra a félgömböt és a szerkesztett testet keresztmetszetben mutatja be.

28.3 tételének segítségével bizonyítjuk, hogy a félgömb térfogata (létezik és) a szerkesztett testével egyenlő. Minthogy az alapsíkra merőleges egyeneseknek a testjeinkhez tartozó pontjai (ha vannak ilyenek) az alapsíkon végződő szakaszt alkotnak, csak azt kell bizonyítanunk, hogy az alapsíkkal párhuzamos síkok a két testből egyenlő területű síkidomokat metszenek ki. Ha a metsző sík  $h$  magasságban halad az alapsík felett és metszi testjeinket, tehát  $h < r$ , akkor a félgömböt  $\varrho$  sugarú körben, a szerkesztett testet pedig  $r$  sugarú és  $h$  sugarú körök határolta körgyűrűben metszi. E metszetek területe tehát

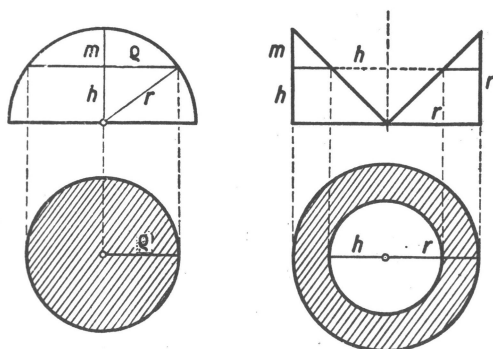
$$\pi\varrho^2 \quad \text{és} \quad \pi r^2 - \pi h^2,$$

és ezek egyenlők, mert Pythagoras tétele szerint  $\varrho^2 = r^2 - h^2$ .

A szerkesztett test térfogata a henger és a kúp térfogatképlete alapján

$$\pi r^3 - \frac{\pi}{3}r^3 = \frac{2\pi}{3}r^3,$$

ekkora tehát a félgömb térfogata is. —



242

**Tétel.** A  $\varrho$  alapkörsugarú és  $m$  magasságú gömbszelet térfogata

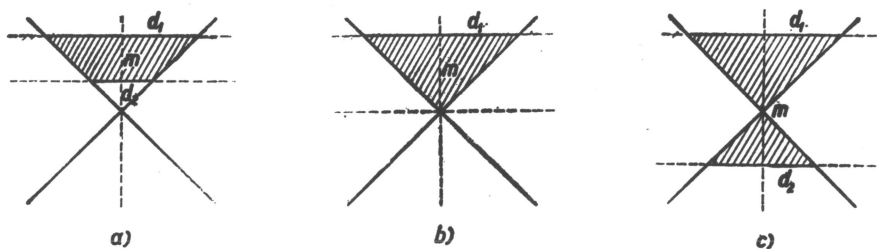
$$\frac{\pi}{6}m(3\varrho^2 + m^2).$$

Ez a tétel határesetként magában foglalja az előzőt, mert magát a gömböt olyan gömbszeletnek foghatjuk fel, amelyre  $\varrho = 0$  és  $m = 2r$ .

*Bizonyítás.* a) Messünk egy  $45^\circ$ -os félnyílásszögű forgáskúpot két, a tengelyre merőleges síkkal. A két metszetidom a forgáskúppal együtt csónakakúpot, kúpot vagy két kútból álló testet határol aszerint, amint a metszősíkok ugyanazt a félkúpot metszik, egyikük a csúcson halad át, vagy más-más félkúpot metszenek. Segédtevéként bizonyítjuk, hogy az így keletkező test térfogata mindhárom esetben

$$\frac{\pi}{6}(3d_1^2 + 3d_2^2 - m^2),$$

ahol  $m$  a síkok távolsága,  $d_1$  és  $d_2$  pedig a metsztekörök sugara, a sugarat 0-nak tekintve akkor, ha a metszetidom pont. A 243. ábra a három lehetőséget keresztmetszetben ábrázolja.



243

Legyen  $d_1 \geq d_2$ . A  $d_1, d_2$  értékeknek előjelet adunk,  $d_1$  legyen pozitív,  $d_2$  pedig pozitív vagy negatív aszerint, hogy a két metsztekör ugyanazon a félkúpon van-e vagy sem. Ezzel az előjelzéssel elérjük, hogy

$$m = d_1 - d_2$$

minden esetben teljesül, s hogy a vizsgált test térfogata mindig

$$V = \frac{\pi}{3}d_1^3 - \frac{\pi}{3}d_2^3,$$

hiszen a  $d_2 > 0$  esetben két kúp különbségéről, a  $d_2 < 0$  esetben két kúp együtteséről, a  $d_2 = 0$  esetben pedig egyetlen kúpról van szó. Ebből egyszerű átalakítással

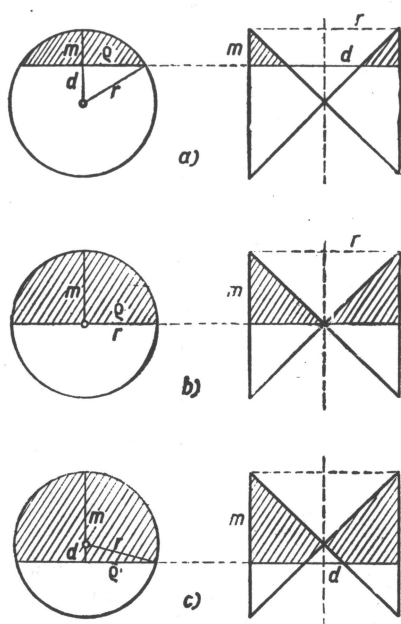
$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}(d_1 - d_2)(d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2) = \\ &= \frac{\pi}{6}(d_1 - d_2)[3d_1^2 + 3d_2^2 - (d_1 - d_2)^2] \end{aligned}$$

adódik, ami  $m$  helyettesítésével a segédtevé állítását bizonyítja.

b) Legyen  $d$  a gömbszelet alapkörének a gömbközponttól mért távolsága. Az alapkör sugarára Pythagoras tétele szerint

$$\rho^2 = r^2 - d^2.$$

Az előző tétel bizonyítása szerint a gömbszelet térfogata (létezik és) úgy adódik, hogy egy  $r$  alapkörsugarú,  $m$  magasságú henger térfogatából egy a)-ban tárgyalt,  $r$  és  $d$  alapkörsugarú,  $m$  magasságú test térfogatát levonjuk (244. ábra).



244

A gömbszelet térfogata ezért

$$\pi m r^2 - \frac{\pi}{6} m (3r^2 + 3d^2 - m^2) = \frac{\pi}{6} m [3(r^2 - d^2) + m^2],$$

ami  $e^2$  bevezetésével tételünk állítását adja. —

**Tétel.** Az  $r$  sugarú gömb  $m$  magasságú gömbsüvegéhez tartozó gömbcikkének térfogata  $\frac{2\pi}{3} m r^2$ .

Ez az  $m = r$  esetben a félgömb térfogatát, az  $m = 2r$  határesetben pedig a gömb térfogatát adja.

*Bizonyítás.* A gömbcikk térfogatát az  $m$  magasságú gömbszelet térfogatából úgy kapjuk, hogy az  $m < r$  esetben a gömbszelet alapköre fölé emelt  $r - m$  magasságú kúp térfogatával növeljük, az  $m = r$  esetben változatlanul hagyjuk, az  $m > r$  esetben pedig a gömbszelet alapköre fölé emelt  $m - r$  magasságú kúp térfogatával csökkentjük. Ezek szerint a gömbcikk térfogata mindhárom esetben

$$V = \frac{\pi}{6} m (3e^2 + m^2) + \frac{\pi}{3} (r - m) e^2,$$

mert az utolsó tag mindegyik esetben megfelelő előjelű és nagyságú.

Ha felhasználjuk, hogy

$$e^2 = r^2 - (r - m)^2 = (2r - m)m,$$

akkor egyszerű átalakítással a

$$V = \frac{\pi}{6} [m^3 + 3m e^2 + 2(r - m) e^2] = \frac{\pi}{6} [m^3 + (2r + m) e^2] = \frac{\pi}{6} 4r^2 m$$

eredményhez jutunk. —

**Tétel.** A  $\varrho_1, \varrho_2$  alapkörsugarú,  $m$  magasságú gömbréteg térfogata

$$\frac{\pi}{6} m (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + m^2).$$

A tétel a  $\varrho_2 = 0$  határesetben a gömbszelet térfogatát adja.

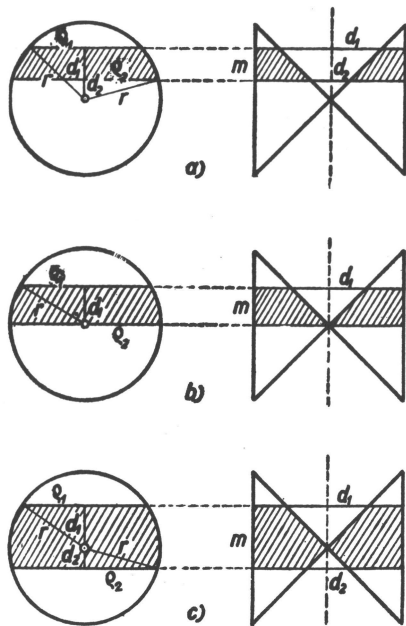
*Bizonyítás.* Legyen  $d_1$  és  $d_2$  a gömbréteg alapköreinek a gömbközepptől mért távolsága. Ezekre tehát

$$\varrho_1^2 = r^2 - d_1^2, \quad \varrho_2^2 = r^2 - d_2^2.$$

Szakaszunk első tételének bizonyítása szerint a gömbréteg térfogatához úgy jutunk, hogy egy  $r$  alapkörsugarú,  $m$  magasságú henger térfogatából egy  $d_1, d_2$  alapkörsugarú,  $m$  magasságú olyan test térfogatát levonjuk, amelyről az előző bizonyítás segédtetele szolt (245. ábra). A gömbréteg térfogata tehát a segédétel szerint

$$\begin{aligned} \pi m r^2 - \frac{\pi}{6} m (3d_1^2 + 3d_2^2 - m^2) = \\ = \frac{\pi}{6} m [3(r^2 - d_1^2) + 3(r^2 - d_2^2) + m^2], \end{aligned}$$

ami  $\varrho_1^2$  és  $\varrho_2^2$  bevezetésbe után tételünk állítását 245. ábra adja. —



245

**29.7 Tétel.** Az  $r$  sugarú gömb felszíne  $4\pi r^2$ .

**Tétel.** Az  $r$  sugarú gömb  $m$  magasságú gömbsüvegének és gömbövének felszíne  $2\pi r m$ .

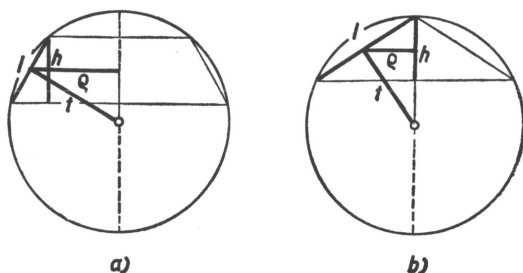
Az utóbbi tétel az  $m = 2r$  határesetben az első tételt adja. Tételeink azt mondják ki, hogy a gömb, a gömbsüveg és a gömböv felszíne megegyezik a gömbsugárral készített és ugyanolyan magas hengerpalást felszínével.

*Bizonyítás. a)* Tekintsük a kör egy átmérőjét és egy olyan  $l$  hosszúságú húrját, amely ezt az átmérőt nem metszi. Ha ezt a húr az átmérő körül megforgatjuk, csonkakúppalásthöz vagy kúppalásthöz jutunk. Segédételként azt állítjuk, hogy ennek a palástnak a felszíne minden esetben

$$2\pi h,$$

ahol  $t$  a húrnak a középponttól mért távolsága,  $h$  pedig a húr átmérőre vetett vetületének a hossza.

Jelölje  $\varrho$  a húr középpontjának az átmérőtől való távolságát. Minthogy a szóban forgó felület felszíne  $2\pi\varrho l$ , akár csonkakúpról, akár kúpról van szó, állításunk a  $\varrho l = th$  összefüggés bizonyítását kívánja. A 246. ábra  $l$ ,  $h$  oldalú és  $t$ ,  $\varrho$  oldalú háromszögei hasonlóak, mert oldalaik páronként merőlegesek. Ebből a hasonlóságból  $l : h = t : \varrho$ , tehát a bizonyítandó összefüggés is következik.



246

*b)* A gömbre, gömbszüvegre és gömbövre kimondott tételeket egyszerre bizonyítjuk. A vizsgált felület forgástengelyén át síkot fektetünk, és az ezáltal kimetszett főkörnek azt az ívét tekintjük, amelyik a forgatás során a vizsgált felületet írja le. Ezt az ívet  $n$  egyenlő részre osztjuk, s az ezekhez az ívekhez tartozó hurok által a forgatás során leírt csonkakúpokat (és kúpokat) tekintjük (247. ábra). Ezek alkotói a középponttól ugyanakkora  $t$  távolságra vannak, magasságaik összege a gömb esetében az átmérőt, gömbszüveg és gömböv esetében pedig ezek magasságát adja. Segédételünkből ezért az következik, hogy palástjaik felszínének összege

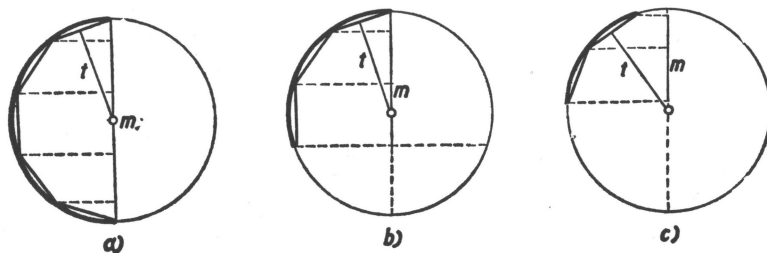
$$2\pi m,$$

ahol a gömb esetében  $m$  az átmérőt jelenti.

Ez a felszínösszeg a vizsgált felület felszínéhez tart akkor, ha  $n$  minden határon túl növekszik (ezt 19.5 és 27.9 második tétele biztosítja). Minthogy  $t$  ekkor  $r$ -hez tart, a keresett felszín

$$2\pi m,$$

s itt a gömb esetében  $m = 2r$  veendő. —



247

A gömbcikk térfogata a határoló göombsüveg felszínének  $\frac{1}{3}r$ -szerese. Ugyanilyen kapcsolatban van a gömb térfogata a gömb felszínével (és mint a következő szakaszban látni fogjuk, a gömbgerezd térfogata a gömbkétyszög felszínével).

Ezt a kapcsolatot könnyen megjegyezhetjük, ha a gömbcikket olyan „görbe alapú kúpnak” képzeljük, melynek az „alapja” gömbszelet (vö. 20.8 A). Hasonlót mondhatunk a többi említett esetben is.

**29.8 Tétel. Egy gömb gömbkétyszögeinek felszíne és gömbgerezdjeinek térfogata a szögükkel arányos.**

*Bizonyítás.* Két olyan gömbkétyszöget tekintünk, amelynek csúcsai azonosak. A 248. ábra felülnézetben ábrázolja a gömböt, az ábrán egybeeső  $P_1, P$  csúcspárt és a gömbi kétyszögeket. Az  $\alpha$  és  $\beta$  szögű kétyszögek felszínét  $F_\alpha$  és  $F_\beta$ , a hozzájuk tartozó gömbgerezdek (27.7 harmadik tétele szerint létező) térfogatát  $V_\alpha$  és  $V_\beta$  jelöli. Az  $\alpha$  szöget  $n$  egyenlő részre osztjuk, és az így kapott szöget a  $\beta$  szögre, egyik szárától kiindulva, annyiszor mérjük fel, ahányszor csak lehet. Ha  $k$ -szor mérhettük fel, akkor

$$k \frac{\alpha}{n} \leq \beta < (k+1) \frac{\alpha}{n}.$$

A szögek felosztása a gömbkétyszögek és gömbgerezdek felosztását határozza meg. Egyenlő szögekhez egybevágó, tehát egyenlő felszínű, illetőleg térfogatú darabok tartoznak. Ebből a felszínekre és a térfogatokra (27.7 és 27.9 szerint)

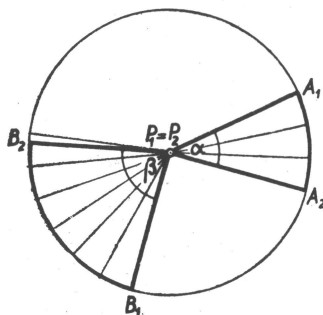
$$k \frac{F_\alpha}{n} \leq F_\beta < (k+1) \frac{F_\alpha}{n},$$

$$k \frac{V_\alpha}{n} \leq V_\beta < (k+1) \frac{V_\alpha}{n}$$

következik. Ha egyenlőtlenségeinket rendre  $\alpha$ -val,  $F$ -val,  $V$ -val osztjuk, azt kapjuk, hogy a

$$\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{F_\beta}{F_\alpha}, \quad \frac{V_\beta}{V_\alpha}$$

hányadosok egymástól  $\frac{1}{n}$ -nél kevesebbel különböznek, hiszen  $\frac{k}{n}$ -nél nem kisebbek, viszont  $\frac{k+1}{n}$ -nél kisebbek. Minthogy  $n$  bármely természetes számot jelenthet, a felírt hányadosok egyenlők. —



248

**Tétel. Az  $r$  sugarú gömb  $\alpha$  szögű gömbkétyszögének felszíne  $2\alpha r^2$ .**

*Bizonyítás.* Minthogy a  $\pi$  szögű gömbkétyszög a félgömbfelület, az előző tétel szerint

$$\alpha: \pi = F_\alpha : 2\pi r^2,$$

és ez állításunk helyességét mondja ki. —

**Tétel.** Az  $r$  sugarú gömb  $\alpha$  szögű gömbgerezdjének térfogata  $\frac{2}{3}\alpha r^3$ .

*Bizonyítás.* Minthogy a  $\pi$  szögű gömbgerezd a félgömbtest, szakaszunk első tétele szerint az  $\alpha$  szögű gömbgerezd térfogatára

$$\alpha: \pi = V_\alpha : \frac{2\pi}{3}r^3,$$

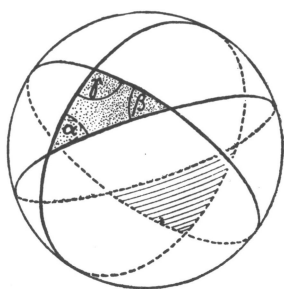
ami a tétel állítását adja. —

**Tétel.** Az  $r$  sugarú gömb  $\alpha, \beta, \gamma$  szögű gömbháromszögének felszíne  $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ .

*Bizonyítás.* Az  $\alpha, \beta, \gamma$  szögű gömbháromszög oldalait teljes főkörökké hosszabbítjuk meg (249. ábra). E három főkör a gömbfelületet nyolc gömbháromszögre bontja fel. Ezek között van az eredeti gömbháromszög, és ennek a gömb középpontjára vonatkozó tükörképe. Ez a két gömbháromszög a gömb középpontjára vonatkozólag egymás tükörképe, ezért egybevágók és felszínük egyenlő. Közös felszínüket  $F$ -fel jelöljük. Illesszünk e két gömbháromszög mindegyik szögéhez egy-egy gömbkétszöget, összesen tehát hat gömbkétszöget tekintünk, és közöttük két-két  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  szögű van. Ezeknek a gömbkétszögeknek mindegyike azon a gömbháromszögen kívül, amelyeknek szögéhez illesztettük, még egyet fed le a szereplő nyolc gömbháromszög közül, mégpedig mindegyik egy másikat. A hat gömbkétszög együttesen a teljes gömbfelületet beborítja, az eredeti gömbháromszöget s annak tükörképét háromszorosan, a többit pedig egyszeresen. Ezek szerint (27.9 harmadik tétele alapján) a hat gömbkétszög felszínének összege  $4F$ -fel több mint a gömb felszíne:

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4F.$$

Ebből, ha 4-gyel osztunk és rendezünk, az állításunkhoz jutunk. —



249

**Tétel.** A gömbháromszög szögeinek összege nagyobb, mint  $180^\circ$ .

*Bizonyításként* elég arra hivatkozni, hogy az előző tétel felszínképletének pozitív értéket kell adnia. —

Azt a szöget, amennyivel a gömbháromszög szögösszege a  $180^\circ$ -ot meghaladja, *gömbi feleslegnek* (szférikus excessus) nevezzük. Ha ezt  $\varepsilon$ -nal jelöljük, akkor a gömbháromszög felszíne  $\varepsilon r^2$ .

**B1** A gömbháromszög felszínképlete változatlanul érvényes az általánosabb értelemben vett gömbháromszögekre is. Erről a 238. ábra alapján könnyen meggyőződhetünk.

**B2** Utolsó tételünk a gömbi geometria és a síkgeometria egyik lényeges eltérését szögezi le (vö. 29.5 B2). Ilyen eltérés az is, hogy a gömbi geometriában hasonlóságról nem lehet szó. Nem lehet ugyanis a gömbháromszöget ugyanannak a gömbnek egy gömbháromszögévé úgy kinagyítani, hogy a szögei ne változzanak meg, hiszen a szögek egyezése felszínük egyezését is maga után vonja.

**B3** Utolsó tételünk a gömbi geometria és a hiperbolikus geometria bizonyos rokonságára mutat rá, hiszen a háromszögek szögösszege ott sem  $180^\circ$ . A gömbi geometriából újabb geometria keletkezik, ha a gömb átellenes pontpárjait tekintjük „pontnak”, és alakzatait is egyesítjük az átellenes alakzatokkal. Ebben a geometriában az *elliptikus síkgeometria* tételei teljesülnek. Az elliptikus geometriát elsőnek Riemann<sup>3</sup> vizsgálta. Az elliptikus és a *Bolyai-Lobacsevszkij-féle* hiperbolikus geometria a *nem-euklideszi* geometria két ága.

---

<sup>3</sup>\* B, Riemann, 1826—1866, a göttingai egyetem tanára.



---

## 4. fejezet - ANALITIKUS GEOMETRIA

### AZ ANALITIKUS GEOMETRIA SEGÉDESZKÖZEI

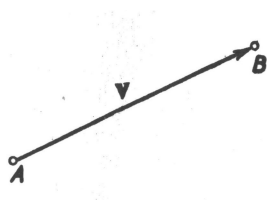
Az analitikus geometriát már a második fejezet bevezető soraiban jellemeztük. Ebben a fejezetben az analitikus geometria tárgyalásába kezdünk. A tárgyalás egyaránt vonatkozik a síkra és a térre. Nemcsak a vektorokról és koordinátákról, az analitikus geometria legfontosabb segédeszközeiről lesz szó, hanem olyan geometriai ismereteket is közlünk, amelyekhez vektorok vagy koordináták segítségével kényelmesen eljuthatunk.

Nem ragaszkodunk ahhoz, hogy csak analitikus módszerrel dolgozzunk. Helyenként bemutatjuk, hogy a tárgyalt anyag hogyan kezelhető az elemi geometria módszereivel, sőt megelégszünk ilyen tárgyalással ott, ahol az analitikus módszernek nincs előnye. Célunk tehát kettős: egyrészt az analitikus módszert és annak alkalmazásait akarjuk megismerni, másrészt azonban arra is törekszünk, hogy esetenként az előnyösebb módszert alkalmazzuk.

#### 30. § Vektor

A vektorok a geometria tárgyalásának igen jól használható segédeszközei. A vektorokkal, összegükkel, különbségükkel, számszorosukkal foglalkozunk, majd a vektorok felbontásáról és koordinátáik bevezetéséről lesz szó.

**30.1** Az irányított szakaszokat *vektoroknak* mondjuk. Beszélhetünk tehát a vektor *kezdőpontjáról*, *végpontjáról*, (előjel nélküli) *hosszáról*, *állásáról* és *irányáról*. A vektor hosszát a vektor *abszolút értékének* is mondjuk. Az egységnyi hosszúságú vektort *egységvektornak* mondjuk. Ha vektorok szögéről beszélünk, ez mindig az irányuk által alkotott szöget jelenti.



250

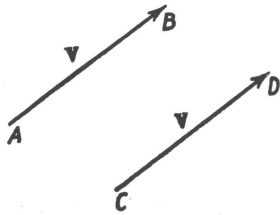
$\overrightarrow{AB}$  az A kezdőpontú és B végpontú vektort jelöli. Ha a vektorokat egy betűvel jelöljük, a nyomtatásban vastag kisbetűt használunk. Elterjedt szokás, hogy a vektort jelölő betű vastagítását kézírásban és gépírásban a betű aláhúzásával pótoljuk. Rajzban a vektorokat nyíllal ábrázoljuk, a nyílhegyet az irányított szakasz végpontjához, helyezzük. A 250. ábra az

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$$

vektort ábrázolja. A  $\mathbf{v}$  vektor hosszát  $|\mathbf{v}|$  Jelöli. A  $\mathbf{v}$  vektor irányába mutató egységvektort  $\mathbf{v}^0$ -al szokás jelölni.

Két vektort azonosnak tekintünk és egyenlőnek mondunk, ha hosszuk és irányuk megegyezik. A 251. ábrán bemutatott vektorokra  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \mathbf{v}$ . Mondhatjuk tehát, hogy a vektort hossza és irányja jellemzi, s hogy a párhuzamos eltolás a vektort nem változtatja meg. Az egy irányú és az ellentétes irányú vektorok állása megegyezik. *Párhuzamosnak* mondunk két vektort, egy vektort és egy egyenest, valamint egy vektort és egy síkot, ha állásuk megegyezik, illetőleg párhuzamos. A vektorok szabad eltolhatóságának megfelelően akkor mondjuk vektorokra, hogy *egysíkúak* (komplanáris), ha egy

síkkal párhuzamosak, azaz egy síkon belül is elhelyezhetők. Ugyanígy a párhuzamos vektorokat kollinéarisoknak is mondhatjuk.



251

Vektorokat a síkgeometrián belül is bevezethetünk. Így *síkbeli* vektorokhoz jutunk. A *térbeli* vektorok körén belül az egysíkú vektorok síkbeli vektoroknak tekinthetők.

A vektort *irányított mennyiségnek* vagy *vektoriális mennyiségnek* is mondjuk. Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy nem vektorról van szó, akkor a valós számot *skalárnak*, *skaláris mennyiségnek* mondjuk, utalva arra hogy skálán ábrázolható.

24.8 szerint a tér minden eltolásához egy-egy vektor tartozik, mert a tér bármely pontjának kezdőhelyzete és eltolás utáni véghelyzete ugyanazt a vektort szolgáltatja. Az eltolást ez az *eltolásvektor* egyértelműen meghatározza. Hasonlót mondhatunk természetesen a sík eltolásairól is.

Vektornak tekintjük a *nullvektort* is, amelynek kezdőpontja és végpontja egybeesik:  $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ . A nullvektor hossza 0, és megállapodunk abban, hogy iránya (és állása) tetszőleges lehet. Mondhatjuk tehát, hogy a nullvektor minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges is, minden vektorral egy irányú, és minden vektorral ellentétes irányú is. A nullvektor az eltolások közé sorolt változatlanul hagyásnak az eltolásvektora. Megállapíthatjuk, hogy ha egy vektor két egymással nem párhuzamos vektor mindegyikével párhuzamos, akkor csak nullvektor lehet.

**A1** A vektorok történetileg először a fizikában szerepeltek. Sok vektorral jellemezhető, vektoriális mennyiség szerepel a fizikában. Ilyenek pl. a sebesség, a gyorsulás, az erő.

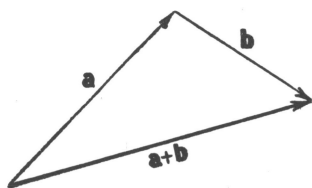
**A2** A vektorok legszokottabb írásmódját említettük. Szerepel még a vektorok gót betűvel való jelölése is. Előfordul, hogy a vektorokat közönséges betűkkel jelölik, de ezek fölé nyilat tesznek, s hogy kéziratban a vastagítást a betű föléhúzásával pótolják. A fizikában a szokásos jelölésmód megkívánja, hogy egyes vektoriális mennyiségeket nagybetűvel jelöljenek. Nem származik zavar abból, ha a nullvektort közönséges 0-val jelöljük.

**A3** Vannak fejezetek, ahol csak egy rögzített pontból kiinduló vektorok szerepelnek, vagy szerepelnek ugyan egymásból eltolással származó vektorok, de azokat egyenlőknek tekinteni nem lehet. Ezek *helyhez kötött* vektorok.

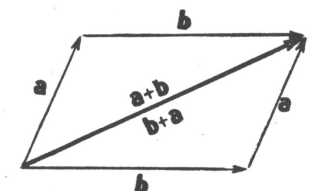
A merev testek sztatikájában a támadó erőknek vektorok felelnek meg, de az egymásból eltolással származók közül csak az egy egyenesen elhelyezkedők gyakorolnak a testre ugyanolyan hatást. Így tehát ebben a fejezetben a vektorok ugyan nem szabadon eltolhatók, viszont nem is helyhez kötöttek, mert egyenesükön *elcsúsztathatók*.

Mi csak szabadon eltolható vektorokkal foglalkozunk, a vektorok egyenlőségére fentebb kimondott megállapodást mindig elfogadjuk.

**30.2** Két vektor *összegét* megkapjuk, ha a két vektort úgy helyezzük el, hogy az elsőnek a végpontja a másodiknak a kezdőpontja legyen, és ebben a helyzetben az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjához vektort indítunk (252. ábra). A vektorok mondott elhelyezését a vektorok egymáshoz fűzésének mondjuk. A vektorok eltolhatóságából következik, hogy definíciónk két vektor összegét egyértelműen határozza meg. Definíciónk kimondja, hogy két vektorhoz tartozó két eltolás egymás utáni végrehajtása olyan eltolást eredményez, amelynek eltolásvektora a két vektor összege.



252



253

Két vektorral mint oldallal szerkesztett paralelogramma (253. ábra) azt mutatja, hogy vektorok összeadásánál a két összeadandó felcserélhető, vektorok összege *kommutatív*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Az összeg definíciójából következik, hogy egy vektor nullvektor hozzáadásával nem változik meg:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Közvetlenül adódik a definícióból az is, hogy három vektor összegét számítva, az eredmény nem függ az összeadandók csoportosításának mikéntjétől, a vektorok összeadása *asszociatív* művelet:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

E tulajdonság ismételt alkalmazásával azt is beláthatjuk, hogy akárhány (de véges sok) vektor összege sem függ a tagok csoportosításától. Ez jogot ad arra, hogy több vektor összegéről beszélhessünk anélkül, hogy utasítást adnánk a tagok csoportosítására, s hogy több vektor összegét zárójelek alkalmazása nélkül írassuk le.

A kommutativitás szabályának ismételt alkalmazásával az is nyomban adódik, hogy véges sok vektor összege nem változik meg akkor, ha a tagokat akárhogyan cseréljük, permutáljuk. Beszélhetünk tehát több vektor összegéről anélkül, hogy sorrendjüket valamilyen módon rögzítsük.

Vektorok összegét *eredőnek* (rezultáns) és az összeg tagjait *összetevőknek* (komponens) is mondjuk.

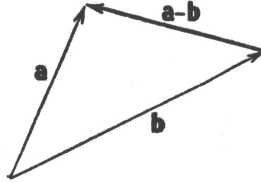
**A** A vektorösszeadás szabályát azért választották meg a fizikában így, mert mozgások összetételekor a sebesség és gyorsulás e szabály szerint összegeződik, és egyidejű erőhatásnál is ez a szabály adja meg az eredő erőt. A 253. ábrán bemutatott „paralelogramma-szabály” a fizikai mennyiségek körében tapasztalati tény.

**B** A kezelő számára szokatlan dolog, hogy mi a műveleteket — bár a fizikai alkalmazások vezetnek bennünket — elvileg mégiscsak szabadon definiáljuk. Ezt a szabadságot korlátok közé szorítja azonban az a kívánság, hogy az újonnan bevezetett műveletekre vonatkozólag ne kelljen új szabályokat kimondani, sőt lehetőleg minden szabály ugyanúgy szóljon, ahogyan a régebben is ismert megfelelő műveletekre szólt. A műveletek definiálásának ezt a szabályozását a *műveleti szabályok megmaradása* (permanencia) *elvének* nevezzük.

A „műveleti szabály” kifejezés nem utasítást jelent, hogy hogyan kell a műveletet elvégezni, hanem olyan törvényt, amelyet a művelet által egymáshoz rendelt mennyiségek kielégítenek. Ezt a körülményt hangsúlyozzák, akik műveleti szabályok helyett a műveletek azonosságairól szólnak.

Hangsúlyozzuk, hogy új műveletek bevezetése után fontos feladat annak az ellenőrzése, hogy érvényben maradtak-e a régebbiről ismert műveleti szabályok. Nehezebb feladat volna az olyan vizsgálat, hogy egy műveletet hogyan lehet, vagy éppen hogyan kell definiálni, ha a műveleti szabályok megmaradásának elvét tiszteletben tartjuk. Mi ilyen vizsgálattal nem foglalkozunk.

**30.3** Két vektor *különbségét* megkapjuk, ha a két vektort egy pontból mérjük fel, majd a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjához vektort indítunk (254. ábra). A vektorok eltolhatóságából következik, hogy két vektor különbségét egyértelműen határoztuk meg.



254

Közvetlenül belátható, hogy a különbség és a kivonandó összege a kisebbítendőt adja:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{a},$$

s hogy a vektor változatlan marad, ha belőle a nullvektort levonjuk:

$$\mathbf{a} - \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

Közvetlenül adódik az is, hogy egy vektort a nullvektorból levonva olyan vektorhoz jutunk, amely ugyanolyan hosszú, de ellentétes irányú. Ezt *ellentétes* vektornak nevezzük. Az  $\mathbf{a}$  vektorral ellentétes vektort  $-\mathbf{a}$  jelöli. Erre a definíció szerint

$$\mathbf{0} - \mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

Az ellentétes vektor bevezetése után elmondhatjuk, hogy a különbség a kisebbítendőnek és a kivonandóval ellentétes vektornak az összege:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Erről a 254. ábra alapján győződhetünk meg, ha a jobb oldali tagok sorrendjét felcseréljük.

Ha a 252. és 254. ábra (esetleg elfajuló) háromszögeire a háromszög-egyenlőtlenségeket felírjuk, az

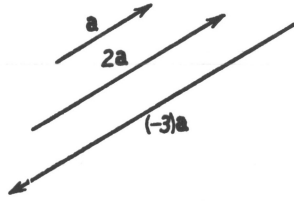
$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq \left| |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \right|$$

egyenlőtlenségekhez jutunk.

A A vektorkülönbség definíciójának megjegyzésénél ügyelni kell a különbségvektor irányítására. Segít ebben a „vég mínusz kezdet” szavak emlékeztetbe vésése. Minden időbeni változást úgy mérünk, hogy a végértékből vonjuk le a kezdőértéket, és a különbség vektor is úgy adódik, hogy a végponthoz vezető vektorból vonjuk le a kezdőponthoz vezető vektort.

**30.4** A vektorok és számok szorzatát, azaz a vektoroknak *skalárral való szorzását* definiáljuk: ha  $\lambda$  valós szám, akkor  $\lambda \mathbf{a}$  azt a vektort jelenti, amelynek hossza az  $\mathbf{a}$  vektor hosszának  $|\lambda|$ -szorosa, iránya pedig a irányával egyező vagy ellentétes aszerint, amint  $\lambda$  pozitív vagy negatív (255. ábra).



255

Ez a definíció minden esetben egyértelműen megszabja a  $\lambda \mathbf{a}$  vektort. Ha  $\mathbf{a}$  nullvektor vagy ha  $\lambda = 0$ , akkor a definíció nem mond semmit a szorzatvektor irányáról, de erre ezekben az esetekben  $|\lambda||\mathbf{a}| = 0$  miatt nincs is szükség.

Kiemeljük, hogy a definíció szerint

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|,$$

s hogy  $\lambda \mathbf{a}$  mindig párhuzamos az  $\mathbf{a}$  vektorral. Megemlítjük, hogy  $\lambda$  és  $\mathbf{a}$  szorzatát  $\mathbf{a}\lambda$  sorrendben is írhatjuk. A definícióból következik, hogy egy vektor 1-szerese magát a vektort,  $(-1)$ -szerese pedig a vektorral ellentétes vektort adja:

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a},$$

s hogy egy vektor  $(-\lambda)$ -szorosa, valamint  $\lambda$ -szorosa egymással ellentétes:

$$(-\lambda)\mathbf{a} = -\lambda\mathbf{a}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy a definíció szerint

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Definíciókból nyomban adódik, hogy ha két vektor párhuzamos, akkor valamelyikük bizonyosan felírható a másiknak számszorosaként, s ha tudjuk, hogy egyikük nem nullvektor, akkor ennek számszorosaként felírható a másik vektor. Ha  $\mathbf{a}^0$  az  $\mathbf{a}$  vektor irányába mutató egységvektor, akkor

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}^0.$$

Ha  $\mathbf{e}$  egy irányított egyenesen pozitív irányba mutató egységvektor, akkor  $\lambda \mathbf{e}$  az egyenes  $\lambda$  előjeles hosszúságú irányított szakaszát adja.

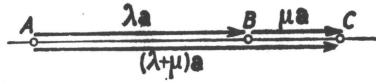
A skalárral való szorzás műveleti szabályaira térünk rá. Egy egyenesen valamely ( $\mathbf{0}$ -tól különböző)  $\mathbf{a}$  vektor hosszát a hossz mérés egységéül, irányát pedig pozitív irányul választjuk. Ekkor a  $\lambda \mathbf{a}$ ,  $\mu \mathbf{a}$  vektorok  $\lambda$  és  $\mu$  előjeles hosszúságú irányított szakaszok. Ha ezeket az egyenesen egymáshoz fűzzük, az

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \mu \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AC} = (\lambda + \mu) \mathbf{a}$$

vektorokhoz jutunk (256. ábra), hiszen az irányított szakaszok előjeles hosszára  $AB + BC = AC$  érvényes. Így a

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$$

szabályhoz jutottunk, amely szám és vektor szorzásánál a szorzatnak a számtényező tagjaira való eloszlását, *disztributivitását* mondja ki. E szabály ismételt alkalmazásával adódik, hogy ugyanez a szabály akkor is érvényes, ha a számtényező kettőnél több (véges sok) tagból áll.



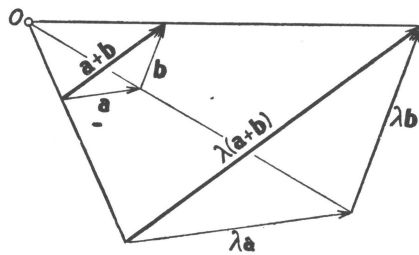
256

Tekintsük az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok összegét szolgáltató ábrát, és vessük alá ezt olyan párhuzamos hasonlóságnak, amelynél az egymásnak megfelelő irányított szakaszok előjeles hosszának aránya  $\lambda$

(257. ábra). Így olyan ábrához jutunk, amely

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$

helyességét mondja ki. Eszerint szám és vektor szorzása a vektortényező tagjaira is eloszló, *disztributív* művelet. Ismételt alkalmazás mutatja, hogy ugyanezt kettőnél több (véges sok) tagú vektortényező esetén is elmondhatjuk.



257

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}),$$

hiszen mindkét oldalon ugyanolyan hosszú, valamint  $\mathbf{a}$ -val egyező vagy ellentétes irányú vektor áll aszerint, hogy  $\lambda$  és  $\mu$  előjele megegyezik-e vagy sem.

Befejezésül a skalárral való szorzás definíciójának azt a közvetlen következményét említjük, hogy  $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$  akkor és csak akkor áll, ha a  $\lambda = 0$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  feltételeknek legalább az egyike teljesül, hogy tehát a szorzat akkor és csak akkor tűnik el, ha valamelyik tényezője eltűnik. Ebből nyomban következik, hogy ha a  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  és  $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a}$ , akkor  $\lambda = \mu$ , hiszen feltételünk  $\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{a} = (\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0}$  alakban írható.

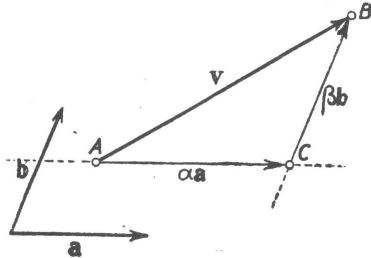
Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy a vektorok összeadását, kivonását és számmal való szorzását úgy definiáltuk, hogy a régi műveleti szabályok mindannyian érvényben maradtak.

**30.5 Tétel.** Ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{v}$  egy sík vektorai, továbbá  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem párhuzamosak egymással, akkor található és csak egyféleképpen található olyan  $\alpha$ ,  $\beta$  számok, amelyekre

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

Az a megszorítás, hogy  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem párhuzamosak, magában foglalja azt is, hogy egyikük sem lehet nullvektor.

*Bizonyítás. a)* A  $\mathbf{v}$  vektor  $A$  kezdőpontján át az  $\mathbf{a}$  vektorral,  $B$  végpontján át a  $\mathbf{b}$  vektorral párhuzamos egyenest húzunk (258. ábra). Minthogy ezek nem párhuzamosak, egy  $C$  pontban metszik egymást. Minthogy az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok nem nullvektorok, a velük párhuzamos  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{CB}$  vektorok  $\alpha\mathbf{a}$  és  $\beta\mathbf{b}$  alakban írhatók. Ez bizonyítja, hogy  $\alpha$  és  $\beta$  megválasztható a tétel követelményének megfelelően.



258

*b)* Ha az  $\alpha$ ,  $\beta$  számok megfelelnek a követelménynek, és az  $A$  pontból az  $\alpha\mathbf{a}$  vektort, ehhez fűzve pedig a  $\beta\mathbf{b}$  vektort felmérjük, akkor a  $\mathbf{v}$  vektor  $B$  végpontjához kell jutnunk. Minthogy a felmért vektorok az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorokkal párhuzamosak, az általunk imént szerkesztett párhuzamos egyeneseken helyezkednek el. Ezért csatlakozási pontjuk csak a  $C$  pont lehet. Ez azt jelenti, hogy  $\alpha$  és  $\beta$  meg kell, hogy egyezzenek azokkal az értékekkel, amelyekhez a)-ban jutottunk. —

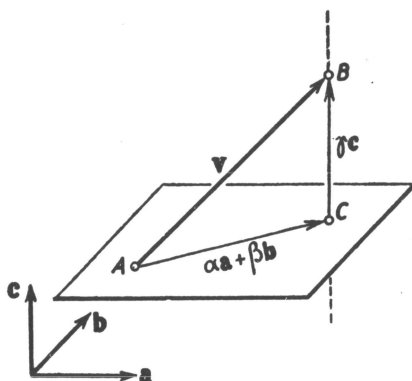
A bizonyított tételből következik, hogy ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem párhuzamosak, és  $\alpha\mathbf{a} = \beta\mathbf{b}$ , akkor  $\alpha = \beta = 0$ .

**Tétel.** Ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  nem egysíkú vektorok, akkor minden  $\mathbf{v}$  vektorhoz találhatók és csak egyféleképpen találhatók olyan  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  számok, amelyekre

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}.$$

Abból, hogy  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  nem egysíkúak, már következik, hogy nincs közöttük két párhuzamos vektor, és egyikük sem nullvektor.

*Bizonyítás. a)* Minthogy  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem párhuzamos, egy pontból felmérve egy síkot határoznak meg. Fekessünk a  $\mathbf{v}$  vektor  $A$  kezdőpontján át ilyen állású síkot,  $B$  végpontján át pedig  $\mathbf{c}$ -vel párhuzamos egyenest (259. ábra). Minthogy a három vektor nem egysíkú, a szerkesztett sík és egyenes egy  $C$  pontban metszi egymást. Minthogy  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  nem párhuzamosak, és  $\overrightarrow{AC}$  egysíkú velük, az előző tétel szerint  $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$  alakban írható. Minthogy  $\mathbf{c}$  nem nullvektor és párhuzamos a  $\overrightarrow{CB}$  vektorral, ez  $\gamma\mathbf{c}$  alakban írható. Ezzel beláttuk, hogy az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  számok megválaszthatók a tétel követelményét kielégítő módon.

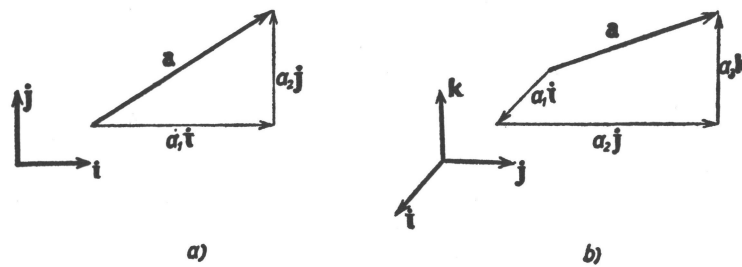


b) Ha az  $\alpha, \beta, \gamma$  számok megfelelnek a követelménynek, és az  $A$  pontból az  $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$  vektort, ehhez fűzve pedig a  $\gamma \mathbf{c}$  vektort felmérjük, akkor a  $B$  ponthoz kell jutnunk. Minthogy a felmért vektorok az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vektorok által meghatározott síkkal, illetőleg a  $\mathbf{c}$  vektorral párhuzamosak, az általunk imént szerkesztett síkban, illetőleg egyenesen helyezkednek el. Ezért csatlakozási pontjuk csak  $C$  lehet. Ez azt jelenti, hogy  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  azokkal az értékekkel egyenlő, amelyekhez a)-ban jutottunk. —

Azt mondjuk, hogy két síkbeli vektor a síkot, három térbeli vektor pedig a teret *kifeszíti*, ha a két síkbeli vektor nem párhuzamos, illetőleg a három vektor nem egysíkú. A most bizonyított két tétel úgy is szövegezzük, hogy minden síkbeli vektor egyértelműen bontható fel két adott, a síkot kifeszítő vektorral párhuzamos összetevőre, és minden vektor egyértelműen bontható fel három adott, a teret kifeszítő vektorral párhuzamos összetevőre.

**30.6** A vektorokat számokkal akarjuk jellemezni. Evégett a síkban két egymásra merőleges egységvektort, a térben három egymásra páronként merőleges egységvektort veszünk fel, s ezeket *alapvektoroknak* nevezzük. Szokás szerint az alapvektorokat a síkban  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  (vagy  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ), a térben pedig  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (vagy  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) jelöli.

A síkbeli alapvektorokat irányított síkban úgy szoktuk megválasztani, hogy az  $\mathbf{i}$  vektort pozitív irányú,  $90^\circ$ -os forgás vigye át a  $\mathbf{j}$  vektorba, a térbeli alapvektorokat pedig úgy, hogy az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vektorok jobbrendszert alkossanak. Ebben a könyvben mindig feltesszük, hogy az alapvektorokat ezeknek a szokásoknak megfelelően választottuk meg.



Ha az alapvektorok adva vannak, akkor az előző szakasz szerint bármely síkbeli vagy térbeli  $\mathbf{a}$  vektor egyféleképpen írható fel rendre

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

alakban (260. ábra). Síkban az  $a_1, a_2$  térben pedig az  $a_1, a_2, a_3$  számokat az  $\mathbf{a}$  vektor *koordinátáinak* nevezzük. Azt a tényt, hogy ezek a számok az  $\mathbf{a}$  vektor koordinátái, az

$$\mathbf{a}(a_1, a_2), \quad \mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$$

írásmóddal is kifejezésre juttathatjuk,  $(a_1, a_2)$  és  $(a_1, a_2, a_3)$  az ilyen koordinátájú vektorokat is jelöli, s így az

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

írásmód is megengedett. Két vektor egyenlőségéből az előző szakasz szerint következik, hogy koordinátáik rendre egyenlők. Egyetlen vektoregyenlet tehát több skaláregyenletet foglal egybe.



**Tétel.** *Vektorok összegének koordinátái a vektorok megfelelő koordinátáinak összegei.*

*Bizonyítás.* A tétel akárhány vektor összegéről szól, de elég két vektor összegére bizonyítanunk, hiszen a tételt ismételten két vektorra alkalmazva az általános tételhez is eljutunk. A tétel egyaránt vonatkozik síkbeli és térbeli vektorokra, de elég térbeli vektorokra bizonyítanunk, mert a síkbeli vektorokat mindig felfoghatjuk olyan térbeli vektoroknak, amelyeknek harmadik koordinátájuk 0. Elég ezek szerint az  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$  és  $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$  vektorok összegének koordinátáit meghatároznunk. A koordináták definícióját, a vektorösszeg kommutativitását és asszociativitását, továbbá a számmal való szorzás disztributivitását felhasználva

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ &= (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

adódik, s ez állításunk helyességét mondja ki. —

**Tétel.** *Egy vektor  $\lambda$ -szorosának koordinátái a vektor megfelelő koordinátáinak  $\lambda$ -szorosai.*

*Bizonyítás.* Ismét mondhatjuk, hogy elegendő térbeli vektorokra bizonyítani a tételt. Az  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$  vektor  $\lambda$ -szorosát számítjuk ki, s a számítás közben a koordináták definícióját, a számmal való szorzás disztributivitását, valamint a számszoros számszorosára vonatkozó szabályt használjuk fel:

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{a} &= \lambda(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = \lambda(a_1\mathbf{i}) + \lambda(a_2\mathbf{j}) + \lambda(a_3\mathbf{k}) = \\ &= (\lambda a_1)\mathbf{i} + (\lambda a_2)\mathbf{j} + (\lambda a_3)\mathbf{k}. —\end{aligned}$$

A most bizonyított tételből következik, hogy az  $(a_1, a_2)$  és  $(b_1, b_2)$ , illetőleg az  $(a_1, a_2, a_3)$  és  $(b_1, b_2, b_3)$  vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2, \quad a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

teljesül (vö. 17.1 A2).

**Tétel.** *Két vektor különbségének koordinátái a vektorok megfelelő koordinátáinak különbségei.*

*Bizonyítás.* Minthogy  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$ , a tétel állítása az előző két tételből közvetlenül adódik. —

**30.7** Az egybevágóságról tudjuk, hogy egyenlő hosszú és egyező irányú szakaszokhoz egyenlő hosszú és egyező irányú, szakaszokat rendel. Ez azt jelenti, hogy egyenlő vektorok képei is egyenlő vektorok. Ha tehát egyenlő vektorok között nem teszünk különbséget, akkor is kimondhatjuk, hogy az egybevágóság vektorhoz vektort, mégpedig egyértelműen meghatározott vektort rendel.

Minthogy az egybevágóság ponttranszformáció, nyilvánvaló, hogy közös kezdőpontú, közös végpontú vagy egymáshoz fűzött vektorokhoz ugyanilyen elhelyezkedésű vektorokat rendel. Ebből következik, hogy vektorok összegéhez és különbségéhez a tárgyvektorok összegét, illetőleg különbségét rendeli.

Hasonlót mondhatunk a vektor számszorosáról is, hiszen az egybevágóság egyirányú vagy ellentétes irányú szakaszokhoz ugyanilyen szakaszokat rendel, és a párhuzamos szakaszok hosszának az arányát megtartja.

Összefoglalva kimondhatjuk, hogy az egybevágóság a vektorok egyenlőségét, összeadását, kivonását és számszorozását megtartó transzformáció. Hozzátehetjük, hogy az egybevágóság a vektorok hosszát is megtartja.

Ezek szerint olyan egyenlőségből, amelyben az eddig megismert vektorműveletek szerepelnek, ismét helyes egyenlőséghez jutunk, ha az egyenletben szereplő vektorok mindegyikét valamely

egybevágóság adta képével helyettesítjük. A vektorműveletek közé soroltuk itt a vektor abszolút értékének a képzését is.

Megállapításunk egyaránt érvényes síkbeli vektorokra és a sík egybevágóságaira, valamint térbeli vektorokra és a tér egybevágóságaira. Természetesen egyaránt érvényes mindenfajta egybevágóságra, tehát elforgatásra és tükrözésre is.

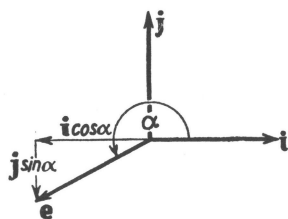
**B** Az egybevágóságról mondottakat javarészt elmondhatjuk a közönséges félegyenestartó transzformációk mindegyikéről (lásd 6.1 B4), egyedül az abszolút érték képzését kell elhagynunk. Ez abból következik, hogy mindezek a ponttranszformációk megtartják az irányok megegyezését és a párhuzamos szakaszok hosszának az arányát (lásd 12.5 B2 és 17.2 B4). Megállapításaink tehát a hasonlóságra is vonatkoznak ebben az értelemben.

## 31. § Szögfüggvények

A vektorokra vonatkozó ismeretek tárgyalását megszakítva a szögfüggvények bevezetésével, összefüggéseikkel és legfontosabb tulajdonságaikkal foglalkozunk. Ebben a paragrafusban csak síkvektorokkal dolgozunk.

**31.1** Úgy választjuk meg az irányított síkban az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  alapvektorokat, hogy az  $\mathbf{i}$  vektort pozitív irányú,  $90^\circ$ -os forgás vigye át a  $\mathbf{j}$  vektorba. Azt az  $\mathbf{e}$  egységvektort tekintjük, amely  $\alpha$  előjeles mértékű elforgatással keletkezik az  $\mathbf{i}$  vektorból (261. ábra). Az  $\mathbf{e}$  vektor koordinátái  $\alpha$  értékétől függenek. Az első  $\alpha$  *koszinuszának* (cosinus), a másodikat  $\alpha$  *szinusznak* (sinus) nevezzük. Jelük  $\cos \alpha$  és  $\sin \alpha$ :

$$\mathbf{e}(\cos \alpha, \sin \alpha).$$



261

Ha  $\cos \alpha \neq 0$ , illetőleg  $\sin \alpha \neq 0$ , akkor képezhetjük a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

hányadosokat. Ezeket az  $\alpha$  szög *tangensének*, illetve *kotangensének* (cotangens) nevezzük, s a megadott módon jelöljük. Ha  $\cos \alpha = 0$ , akkor  $\operatorname{tg} \alpha$ -ról nem beszélünk, s ha  $\sin \alpha = 0$ , akkor  $\operatorname{ctg} \alpha$  nincs értelmezve.

A definíció alapján közvetlenül meggyőződhetünk arról, hogy a következő táblázat helyes értékeket ad meg:

| $\alpha$      | $0^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|---------------|-----------|------------|-------------|-------------|-------------|
| $\cos \alpha$ | 1         | 0          | -1          | 0           | 1           |
| $\sin \alpha$ | 0         | 1          | 0           | -1          | 0           |

hiszen az egyes oszlopokban az  $\mathbf{i}$ -ből elforgatással keletkező  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $-\mathbf{i}$ ,  $-\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{i}$  vektorok koordinátái állnak. Azt is kiolvashatjuk ebből a táblázatból, hogy  $\operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{tg} 180^\circ = \operatorname{tg} 360^\circ = 0$ , s hogy  $\operatorname{ctg} 90^\circ = \operatorname{ctg} 270^\circ = 0$ .

A  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  értékek reciprokát (ha értékük nem 0) a szög *székánsának* (secans) és *koszekánsának* (cosecans) mondják. Mi az így definiált  $\sec \alpha$  és  $\csc \alpha$  függvényt ebben a könyvben nem használjuk. Bevezetésük csak ritkán előnyös.

31.2 Tétel.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

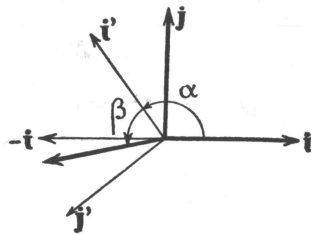
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Tételünk a szinuszfüggvény és a koszinuszfüggvény összegezési tételét mondja ki.

*Bizonyítás.* Ha az  $\alpha$  szögű elforgatás az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  alapvektorokat az  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  vektorokba viszi (262. ábra), akkor ezekre

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha,$$

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha.$$



262

A második összefüggést is a szögfüggvények definíciója adja, ha ti. a  $\mathbf{j}'$  vektort a  $\mathbf{j}$ ,  $-\mathbf{i}$  alapvektorokkal fejezzük ki. Itt  $\mathbf{j}$  mellett a  $-\mathbf{i}$  vektort kellett említenünk, hiszen  $\mathbf{j}$ -ből  $+90^\circ$ -os elforgatással ez származik.

Ha most újabb  $\beta$  szögű elforgatást alkalmazunk, az  $\mathbf{i}'$  vektorból olyan  $\mathbf{e}$  vektort kapunk, amelyet az  $\mathbf{i}$  vektorból  $\alpha + \beta$  szögű elforgatással kaphattunk volna meg. Erre az  $\mathbf{e}$  vektorra tehát a szögfüggvények definíciója szerint az

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}' \cos \beta + \mathbf{j}' \sin \beta,$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos(\alpha + \beta) + \mathbf{j} \sin(\alpha + \beta)$$

összefüggések mindegyike felírható. Ha az elsőbe behelyettesítjük  $\mathbf{i}'$  és  $\mathbf{j}'$  fenti kifejezéseit, és felhasználjuk a számmal való szorzás műveleti szabályait, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) \cos \beta + (-\mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha) \sin \beta = \\ &= \mathbf{i} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + \mathbf{j} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

adódik. Ha ezt  $\mathbf{e}$  előző kifejezésével egybevetjük, tételünk állításaihoz jutunk, hiszen a vektor a koordinátáit egyértelműen meghatározza. —

Tétel.  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ .

Az analízis szóhasználatával mondhatjuk tehát, hogy a koszinusz páros, a szinus pedig páratlan függvény.

*Bizonyítás.* Ha az  $\mathbf{i}$  vektorból  $\alpha$  szögű elforgatással  $\mathbf{e}$ ,  $-\alpha$  szögű elforgatással pedig  $\mathbf{e}'$  származik, akkor az  $\mathbf{e}$  és  $\mathbf{e}'$  vektorok  $\mathbf{i}$  egyenesére vonatkozólag egymás tükörképei. Ha tehát az

$$\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha,$$

$$\mathbf{e}' = \mathbf{i} \cos(-\alpha) + \mathbf{j} \sin(-\alpha)$$

vektorok közül az elsőt  $\mathbf{i}$  egyenesére tükrözzük, akkor a másodikhoz jutunk. Ez a tükrözés az

$$\mathbf{e}' = \mathbf{i} \cos \alpha - \mathbf{j} \sin \alpha$$

eredményhez vezet, hiszen  $\mathbf{j}$  tükörképe a  $-\mathbf{j}$  vektor.  $\mathbf{e}'$  két kifejezését egybevetve a tétel összefüggéseihez jutunk. —

**Tétel.**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

*Bizonyítás.* Ha első tételünk összefüggéseiben  $\beta$  helyébe a  $-\beta$  szöget írjuk, és felhasználjuk az előző tételt, állításunk helyességét látjuk be. —

**A** Felhívjuk a figyelmet arra, hogy okoskodásaink sehol sem alkalmaztak semmiféle megszorítást a szereplő szögekre. A középiskolában szokásos bizonyításokról ezt nem mondhatjuk el. Ott tehát az általunk kimondott tételeket teljes terjedelmükben nem is bizonyítják be.

31.3 Tétel.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

*Bizonyítás.* A két összefüggést  $\cos(\alpha + \beta)$  és  $\sin(\alpha + \beta)$  képleteiből megkapjuk, ha azokban  $\beta$  helyébe az  $\alpha$  szöget írjuk. —

**Tétel.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

*Bizonyítás.* Ha  $\cos(\alpha - \beta)$  képletében  $\beta$  helyébe az  $\alpha$  szöget írjuk, akkor állításunkhoz jutunk, hiszen  $\cos 0 = 1$ . —

A bizonyított tételből kiolvasható, hogy  $\sin \alpha$  és  $\cos \alpha$  abszolút értéke 1-nél nagyobb nem lehet.

Tétel.  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

*Bizonyítás.* Mindkét összefüggéshez eljutunk, ha az előző tétel egyenletéhez a  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$  egyenletet hozzáadjuk, illetőleg belőle levonjuk. —

**A** Az utolsó tételt felhasználhatjuk arra, hogy egy szög koszinuszából a feleakkora szög szinuszát és koszinuszát kiszámítsuk. Legfontosabb alkalmazása azonban az, hogy kifejezések átalakításakor a szögfüggvények négyzetétől megszabaduljunk, ami többféle előnnyel járhat, s itt elsősorban az integrálásra gondolunk. Ezért tételünk állításának az általunk megadott alakban való megjegyzését

ajánljuk, nem pedig azt az alakot, amely  $\cos \frac{\alpha}{2}$  és  $\sin \frac{\alpha}{2}$  értékét adja meg  $\cos \alpha$  függvényeként.

**31.4** A szögfüggvényekre megismert összefüggések birtokában sok további összefüggést vezethetünk le. Példaképpen néhányat említünk.

A tangensfüggvényre vonatkozó

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

összefüggésekhez úgy jutunk, hogy 31.2 első és harmadik tételének egyenleteit elosztjuk egymással, majd a jobb oldali tört számlálóját és nevezőjét elosztjuk a  $\cos \alpha \cos \beta$  szorzattal. Mindkét esetben hozzá kell tennünk, hogy az összefüggés csak olyan szögekre áll fenn, amelyeknek van tangense, hiszen a levezetés során is osztunk a szereplő szögek koszinuszával, s ezért ezek egyike sem lehet 0.

Szögfüggvények összegét és különbségét szorzattá alakíthatjuk a következő összefüggések segítségével:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

E formulákat sokszor fordítva, szögfüggvények szorzatának összeggé vagy különbséggé alakítására

használjuk, s ebben az esetben  $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$  bevezetésével az összefüggéseket

$$\sin \gamma \cos \delta = \frac{1}{2} [\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta)],$$

$$\cos \gamma \sin \delta = \frac{1}{2} [\sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta)],$$

$$\cos \gamma \cos \delta = \frac{1}{2} [\cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta)],$$

$$\sin \gamma \sin \delta = \frac{1}{2} [\cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta)]$$

alakban írjuk. Valamennyinek helyességét nyomban belátjuk, ha az utóbbi egyenletek jobb oldalát az összegezési tétel felhasználásával átírjuk.

**A** Sok kezdő hibája, hogy a szögfüggvények összefüggései közül túlzottan sokat akar betanulni, és ezért aztán ezt a fejezetet „magolni való” nehéz fejezetnek látja. Csak az általunk tételként kimondott összefüggések megtanulását ajánljuk. A további összefüggések a feladatmegoldás, az ismételt alkalmazás vagy esetleg a levezetésük szem előtt tartása révén ragadhatnak meg emlékezetünkben.

**31.5** Ha egy vektort az **i** és **j** vektor szögfelezőjére tükrözzük, olyan vektort kapunk, amelynek ugyanazok a koordinátái, de felcserélt sorrendben, hiszen **i** és **j** egymás tükörképe. Minthogy az **i** vektort  $\alpha$  és  $90^\circ - \alpha$  szöggel elforgatva ilyen szimmetrikus vektorpárt kapunk,

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Ha egy vektort a **j** vektor egyenesére tükrözzük, olyan vektort kapunk, amelynek második koordinátája változatlan, első koordinátája azonban előjelet vált, hiszen **j** önmagának, **i** pedig a **-i** vektornak tükörképe. Minthogy az **i** vektort  $\alpha$  és  $180^\circ - \alpha$  szöggel elforgatva ilyen szimmetrikus vektorpárt kapunk,

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

Ha egy vektort  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  közös kezdőpontjára tükrözzük, mindkét koordinátája előjelet vált, hiszen az  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  vektorból a tükrözés révén  $-\mathbf{i}$  és  $-\mathbf{j}$  származik. Minthogy az  $\mathbf{i}$  vektort  $\alpha$  és  $180^\circ + \alpha$  a szöggel elforgatva ilyen szimmetrikus vektorpárt kapunk,

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

Ha egy vektort  $360^\circ$ -kal elforgatunk, újból ugyanahhoz a vektorhoz jutunk. Ezért  $\alpha$  és  $\alpha + 2\pi$  szögfüggvényei azonosak, és ha egy szöget  $2\pi$  bármely egész számú többszörösével megváltoztatunk, szögfüggvényei ugyancsak változatlanok maradnak, azaz  $2\pi$  a szögfüggvények mindegyikének periódusa. Ez a megállapítás lehetővé teszi, hogy irányított szögek esetében is beszélhessünk egyértelműen meghatározott szögfüggvényekről. Ehhez a koszinusz párossága miatt hozzátehetjük, hogy irányított szögeknek koszinusza a hajlásszögükével egyenlő.

A legutoljára felírt két összefüggést egymással elosztva azt kapjuk, hogy  $\alpha$  és  $\alpha + \pi$  tangense és kotangense egyenlő, hogy tehát ezeknek a szögfüggvényeknek nemcsak  $2\pi$ , hanem  $\pi$  is periódusa.

Megállapításainkhoz hozzáfűzhetjük, hogy a szinusz és koszinusz esetében  $2\pi$ -nél, a tangens és kotangens esetében pedig  $\pi$ -nél kisebb periódus nincs. Ennek helyessége nyomban kiolvasható a szögfüggvények előjelét feltüntető alábbi táblázatból:

| $\alpha$                                              | $0^\circ-90^\circ$ | $90^\circ-180^\circ$ | $180^\circ-270^\circ$ | $270^\circ-360^\circ$ |
|-------------------------------------------------------|--------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\sin \alpha$                                         | +                  | +                    | -                     | -                     |
| $\cos \alpha$                                         | +                  | -                    | -                     | +                     |
| $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$ | +                  | -                    | +                     | -                     |

A táblázat első két sorát közvetlenül ellenőrizhetjük, harmadik sora pedig az első kettőből következik.

Ha az egymástól  $360^\circ$  többszörösében különböző szögek között nem is teszünk különbséget, szakaszunk második bekezdésére hivatkozva megállapíthatjuk, hogy sem a szinusz, sem a koszinusz értéke nem határozza meg mindig egyértelműen a szöget. Ezzel szemben ez a két érték együttesen

már megteszi ezt, hiszen az  $\mathbf{i}$  alapvektor a  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  vektorral együtt egyértelműen meghatároz egy irányított szöget.

A Szakaszunk első bekezdése a koszinusz és kotangens elnevezések eredetére utal. A „ko” szótag a latin „complementi anguli” (pótszögnek a) szavak lerövidítéséből ered.

Megemlítjük, hogy a „sinus” latin szó jelentése öböl, de ez arabból való hibás fordítás eredménye, mert eredetileg húr jelentésű szó szerepelt. Ez utóbbi szó arra utalt, hogy hegyes  $\alpha$  szög esetében az egységsugarú körben  $2\alpha$  középponti szöghöz  $2 \sin \alpha$  hosszúságú húr tartozik. Hasonló a latin „tangens” (érintő) szó használatának eredete, mert az egységsugarú kör érintőjéből az érintési ponthoz vezető sugárral hegyes  $\alpha$  szöget bezáró sugár meghosszabbítása  $\operatorname{tg} \alpha$  hosszúságú szeletet vág le.

**31.6** Ha az alapvektorok adva vannak, akkor valamely síkbeli vektor *irányszögének* az  $\mathbf{i}$  vektor és a vektor által meghatározott irányított szöget mondjuk. Ha egy vektor hossza  $c$  és irányszöge  $\alpha$ , akkor a vektor koordinátái

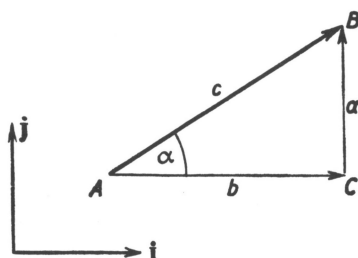
$$c \cos \alpha, \quad c \sin \alpha,$$

hiszen ez a vektor a  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  egységvektor  $c$ -szerese.

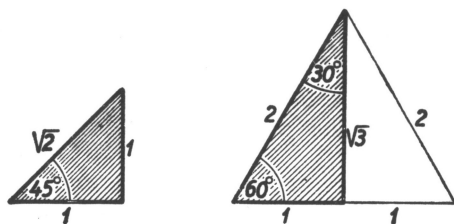
Az  $ABC$  derékszögű háromszöget elhelyezhetjük úgy, hogy az  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$  befogóvektorok az  $i, j$  vektorokkal egyirányúak legyenek (263. ábra). Ekkor a háromszög  $\alpha$  szöge az  $\overrightarrow{AB}$  átfogóvektor irányszöge, e vektor koordinátái tehát  $c \cos \alpha$  és  $c \sin \alpha$ . Minthogy azonban  $b$  és  $a$  is ugyanennek a vektornak koordinátái,

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Ezek szerint a derékszögű háromszög hegyesszögének koszinusza a szög melletti befogó és az átfogó hányadosa, szinusza pedig a szemközti befogó és az átfogó hányadosa. Azt is beláttuk, hogy egy szakasz merőleges vetületének hossza a szakasz hosszának, valamint vetületével alkotott hajlásszöge koszinuszának a szorzata.



263



264

Eredményeinkből osztással

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

adódik. A derékszögű háromszög hegyesszögének tangense tehát a szemközti és a szög melletti befogó hányadosa, kotangense pedig a mellette levő és a szemközti befogó hányadosa.

Minthogy a derékszögű háromszöget két oldala egyértelműen meghatározza, az elmondottakból az is adódik, hogy minden 1-nél kisebb pozitív szám egyetlen hegyesszög szinusza és egyetlen hegyesszög koszinusza, hogy továbbá minden pozitív szám egyetlen hegyesszög tangense és egyetlen hegyesszög kotangense. Az előző szakaszra támaszkodva kimondhatjuk tehát, hogy minden  $-1$  és  $1$  közötti érték egyetlen konvex szög koszinusza, viszont minden  $0$  és  $1$  közötti érték két konvex szög szinusza, mégpedig kiegészítő szögeké.

Az 1 befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója Pythagoras tétele szerint  $\sqrt{2}$  (264. ábra). Ebből kiolvasható, hogy

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

A 2 oldalú szabályos háromszögből a magasság olyan derékszögű háromszöget vág le, amelynek átfogója 2, befogói pedig 1 és Pythagoras tétele szerint  $\sqrt{3}$ . Ez a háromszög azt mutatja, hogy

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, & \operatorname{ctg} 30^\circ &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

A A levezetett függvényértékek emlékeztetőbe vésését megkönnyítheti annak említése, hogy  $\frac{\sqrt{n}}{2}$  az  $n=0, 1, 2, 3, 4$  értékek helyettesítésével rendre a  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  szögek szinuszt (és pótiszögek koszinuszt) adja meg.

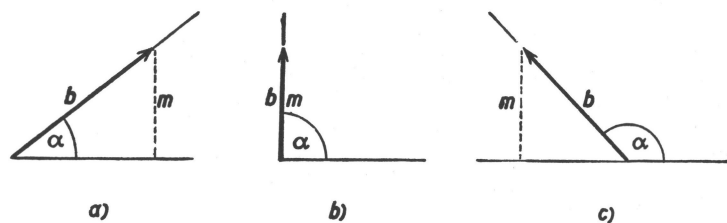
**31.7** A szögfüggvények jól használhatók háromszögekkel kapcsolatos feladatok megoldására. A szögfüggvényekkel foglalkozó fejezetet (goniometriát) ezért *trigonometriának*, magukat a szögfüggvényeket pedig *trigonometrikus függvényeknek* nevezzük. Két tételt ismerünk meg itt, amelyek a szögfüggvények mondott alkalmazhatóságát mutatják.

**Tétel (szinusztétel).** Egy háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti szögek szinusztai.

A szokott jelöléssel tehát  $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ .

*Bizonyítás.* a) Ha egy konvex  $\alpha$  szög egyik szárára a szög csúcsából  $b$  hosszúságú szakaszt mérünk fel (265. ábra), a végpontnak a másik szár egyenesétől való távolsága

$$m = b \sin \alpha.$$



265

A szöveget elhelyezhetjük ugyanis úgy, hogy a mondott másik szár  $i$  irányába mutasson, és az ebből a szárból kiinduló, a szögtartományt végigsöpörő félegyenes pozitív irányban forogjon. Ekkor a felmért  $b$  szakasz a csúcstól távolodóan irányítva  $\alpha$  irányiszögű vektort ad, és  $m$  ennek a vektornak második koordinátája, tehát az előző szakasz szerint valóban egyenlő a megadott értékkel.

b) Az  $a, b, c$  oldalú háromszögben az  $a, b$  oldalak találkozási pontjából húzott  $m$  magasságra a) szerint (266. ábra)

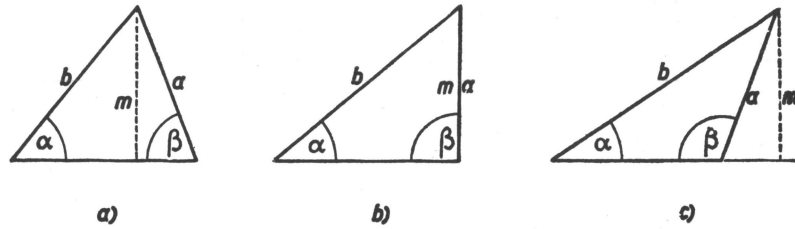
$$m = a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

s ez éppen az

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$

aránypár helyességét mondja ki. Ez teljes állításunkat bizonyítja, mert  $a$  és  $b$  szerepét akármelyik oldalpár játszhatja. —





266

A bizonyításból azt is kiolvashatjuk, hogy a háromszög területe két oldal és az általuk közrefogott szög szinusza szorzatának a fele, a paralelogramma területe pedig két szomszédos oldalnak és az általuk közrefogott szög szinuszának a szorzata.

**Tétel (tangenstétel).** A háromszög  $a, b$  oldalaira és szemközi  $\alpha, \beta$  szögeire

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

A tételt természetesen akármelyik oldalpárra kimondhatjuk.

*Bizonyítás.* A szinusz-tétel szerint van olyan  $\lambda$  szám, amelyre

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \lambda,$$

és ezért

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\lambda \sin \alpha + \lambda \sin \beta}{\lambda \sin \alpha - \lambda \sin \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

Ebből 31.4 két összefüggését felhasználva az

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

eredményhez jutunk, ami egyszerűsítés és a tangensfüggvény bevezetése után éppen állításunk helyességét mondja ki. —

**A** A most bizonyított két tételt felhasználhatjuk arra, hogy ha egy háromszög oldalai és szögei közül három adatot ismerünk, és az adatok között egy vagy két szög szerepel, akkor a hiányzó három adatot kiszámíthatjuk.

Ha egy oldal és két szög ismeretes, akkor a harmadik szöget is kiszámíthatjuk, és a hiányzó két oldalt a szinusz-tétel adja.

Két oldal és az általuk közrefogott szög ismeretében kiszámíthatjuk a másik két szög összegét, és a tangenstétel segítségével e két szög különbségét is. Így ezt a két szöget és a szinusz-tétel segítségével a harmadik oldalt is meghatározhatjuk.

Ha két oldal és az egyikkel szemközi szög van adva, akkor a szinusz-tétel a másikkal szemközi szög szinuszt adja meg. Magát a szöveget úgy kell ehhez a szinuszértékhez megválasztanunk, hogy

a nagyobb oldallal szemközti szög legyen a nagyobb, illetőleg egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek legyenek. Ez csak egyféleképpen lehetséges akkor, ha a két megadott oldal egyenlő volt, vagy ha a nagyobb oldallal szemközti szög volt adva, hiszen konvex szögek körében a  $\sin \alpha$ -nál kisebb szinuszu szögek közül csak az egyik szög kisebb, mint  $\alpha$ . Ha már két szög ismeretes, akkor belőlük kiszámítható a harmadik szög, tehát a szinusztétel révén a harmadik oldal is.

Megemlítjük, hogy 32.3 A-ban lesz szó a háromszög meghatározásáról akkor, ha három oldal van adva.

**B** Ellenőrizhetjük; hogy a most említett számítások mindegyike elvégezhető, ha lehetséges adatokból indulunk ki.

Ha egy oldal és két szög van adva, akkor a két szög összegének természetesen  $180^\circ$ -nál kisebbnek kell lennie. Ezért a harmadik szög kiszámítható, és a további számításnak semmi akadálya nincs.

Ha két oldal és az általuk közrefogott szög van adva, akkor a hiányzó szögek összegének felére hegyesszög adódik, és különbségük felére a tangensztétel hegyesszöget ad. Ez utóbbi kisebb az előbbinél, mert a tangense  $a - b < a + b$  miatt kisebb. Ezért a hiányzó két szögre pozitív és  $180^\circ$ -nál kisebb értéket kapunk.

Ha két különböző oldal és a nagyobbikkal szemközti szög van adva, akkor már beláttuk, hogy a kisebbik oldallal szemközti szögre egyetlen értéket kapunk. Ennek és a megadott szögnek az összege  $180^\circ$ -nál kisebb, hiszen az adott szögnél kisebb szinuszu konvex szögek közül csak azok kisebbek az adott szögnél, amelyek annak kiegészítő szögeinél is kisebbek.

Ha két egyenlő oldal és egy szemközti szög van adva, akkor ez a szög természetesen csak hegyesszög lehet, hiszen a másik szemközti szög is ugyanakkora, és egy háromszögben nem lehet két szög legalább  $90^\circ$ -os. Ilyenkor a harmadik szög és oldal meghatározásának nincs akadálya.

Ha két különböző oldal és a kisebbikkel szemközti szög van adva, pl.  $a < b$  és  $\alpha$ , akkor  $\alpha$  csak hegyesszög lehet, hiszen a háromszögnek nála nagyobb  $\beta$  szöge is van. Teljesülnie kell ezenkívül  $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$  és  $\sin \beta \leq 1$  miatt az

$$a \geq b \sin \alpha$$

egyenlőtlenségnek is. Ha mindkét feltételünk teljesül, akkor a szinusztételből 1-nél kisebb abszolút értékű  $\sin \beta$  érték adódik, és az ehhez tartozó  $\beta$  szög  $\alpha$ -nál nagyobb, hiszen egy hegyesszögnél nagyobb szinuszu konvex szögről van szó. Ilyenkor  $\alpha + \beta < 180^\circ$  is teljesül, hiszen egy hegyesszögnél nagyobb szinuszu konvex szög a hegyesszög kiegészítő szögénél kisebb. Ezek szerint feltételeink teljesülésekor annyi megoldás van, ahány  $\beta$  szög adódott. Ez azt jelenti, hogy egy vagy két megoldás van aszerint, amint  $\sin \beta$  értékeül 1 vagy 1-nél kisebb számot kaptunk, tehát aszerint, amint a fenti egyenlőtlenségben az egyenlőség vagy az egyenlőtlenség jele érvényes.

Megemlítjük, hogy az itt megismert feltételekhez a háromszögszerkesztések taglalása is elvezet.

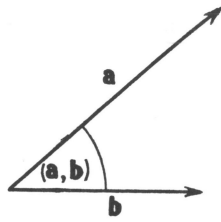
## 32. § Vektorok szorzása

A vektorok körében kétfajta szorzást vezetünk be. Két vektor kétféle szorzását tárgyaljuk, majd többletanyagként vektorszorzatokról lesz szó.

**32.1** Két vektor *skaláris szorzata* (belső szorzat) a két vektor hosszának és hajlásszögük koszinuszának a szorzata. Az **a** és **b** vektor skaláris szorzatát **ab** vagy **a · b** jelöli:

$$ab = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Itt  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok hajlásszögét jelöli (267. ábra). Ha a két vektor között nullvektor is szerepel, akkor sem hajlásszögüket, sem ennek koszinuszát nem határozzák meg egyértelműen. Ilyenkor azonban a skaláris szorzat definíciójában 0 is szerepel tényezőként, és a szorzat értékéül 0 adódik. Definíciónk tehát a skaláris szorzat értékét minden esetben egyértelműen szabja meg.



267

A bevezetett szorzat megnevezését az indokolja, hogy értéke skaláris mennyiség. Megkülönböztető jelzőre szükség van, mert vektoroknak más szorzata is szerepel majd.

A skaláris szorzat definíciójából kiolvashatjuk, hogy ez a szorzat *kommutatív*:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}.$$

Egy vektornak önmagával való skaláris szorzatát a vektor *négyzetének* mondjuk. Az  $\mathbf{a}$  vektor négyzetét  $\mathbf{a}^2$  jelöli, és ez a definíció szerint a vektor hosszának a négyzetével egyenlő:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2,$$

hiszen a vektornak önmagával alkotott hajlásszöge 0.

Egységvektorok skaláris szorzata a definíció szerint hajlásszögük koszinuszával egyenlő.

A nullvektor skaláris szorzata bármely vektorral 0. Ha pedig egy  $\mathbf{a}$  vektor minden vektorral, vagy minden egységvektorral szorozva 0 skaláris szorzatot ad, akkor  $\mathbf{a}$  csak nullvektor lehet, hiszen az  $\mathbf{a}$ -val egy irányú  $\mathbf{a}^2$  egységvektorra definíciónk alapján

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^0 = |\mathbf{a}|.$$

**Tétel. Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.**

Emlékeztetnünk kell itt arra, hogy a nullvektort minden vektorra merőlegesnek mondhatjuk. Hangsúlyozzuk, hogy a tétel szerint — a megszokott szabálytól eltérően — a skaláris szorzat nem csak akkor 0, ha valamelyik tényező 0.

*Bizonyítás.* Ha a vektorok között nullvektor is szerepel, akkor helyes az állítás, mert a skaláris szorzat 0, és a két vektort egymásra merőlegesnek mondhatjuk.

Nullvektoroktól különböző vektorok körében a definícióból következik, hogy  $\mathbf{a}\mathbf{b}$  akkor és csak akkor 0, ha  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ . Ez pedig akkor és csak akkor következik be, ha  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 90^\circ$ , hiszen két vektor hajlásszöge konvex szög, és a konvex szögek közül csak  $90^\circ$  koszinusza 0. —

A bizonyított tételt kiegészíti az a megállapítás, hogy két nullvektortól különböző vektor skaláris szorzata pozitív vagy negatív aszerint, hogy a két vektor hajlásszöge derékszögnél kisebb vagy nagyobb. Ez a skaláris szorzat definíciójából nyomban adódik.

**Tétel. Minden  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorra és  $\lambda$  számra**

$$\lambda\mathbf{a}\mathbf{b} = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}).$$

Tételünk kimondja, hogy a skaláris szorzat egyik tényezőjét számmal szorozva az egész szorzatot is megszorozzuk ugyanazzal a számmal. Mondhatjuk azt is, hogy a skaláris szorzat valamelyik tényezőjének számszorója az egész szorzat számszorójává emelhető ki.

*Bizonyítás.* Elég a

$$\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}$$

egyenlőséget bizonyítanunk, mert ebből a kommutativitás alapján a másik állítás is következik. Kizárhatjuk azt az esetet, amikor nullvektor is szerepel, mert akkor egyenlőségünk mindkét oldalán 0 áll.

a) Ha  $\lambda = 0$ , egyenlőségünk helyes, mert mindkét oldalán 0 áll.

b) Ha  $\lambda > 0$ , akkor egyenletünk jobb oldala a skaláris szorzat definíciója szerint

$$|\lambda\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

mert  $|\lambda| = \lambda$ , továbbá  $\mathbf{a}$  és  $\lambda\mathbf{a}$  egy irányú. A jobb oldal tehát valóban az  $\mathbf{ab}$  szorzat  $\lambda$ -szorosa.

c) Ha  $\lambda = -1$ , akkor egyenlőségünk jobb oldala

$$|-\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

mert  $(-\mathbf{a}, \mathbf{b})$  és  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  kiegészítő szögek, s ezért koszinuszuk előjelben különbözik egymástól. A jobb oldal tehát valóban az  $\mathbf{ab}$  szorzat  $(-1)$ -szerese.

d) Ha  $\lambda < 0$ , akkor egyenlőségünk helyessége abból következik, hogy az  $\mathbf{ab}$  számot úgy szorozhatjuk  $\lambda$ -val, hogy először  $|\lambda|$ -val, majd  $(-1)$ -gyel szorozzuk, és a szorzást b) és c) szerint a skaláris szorzat első tényezőjét szorozva hajtjuk végre. —

**A1** A skaláris szorzat bevezetése történetileg a munka fizikai fogalmából eredt. Egy állandó erő által végzett munka valóban az erő nagyságának, az elmozdulás hosszának és a kettő által bezárt szög koszinuszának a szorzata. Az utolsó két tényezőt egybefoglalva azt is szokás mondani, hogy a munka az erő és az irányában végzett elmozdulás szorzata, mert az elmozdulás hosszának és a mondott koszinuszának a szorzata az elmozdulás erő irányú vetületének a hosszát adja meg.

**A2** A skaláris szorzat legelterjedtebb jelölését használtuk. Megemlítjük, hogy  $\mathbf{ab}$  helyett az  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  jelölést is használják.

**B** Minthogy az egybevágóság sem a vektorok hosszát, sem szögüket nem változtatja meg, ez a skaláris szorzatra is áll: két vektor skaláris szorzata egyenlő a képvektorok skaláris szorzatával (vö. 30.7).

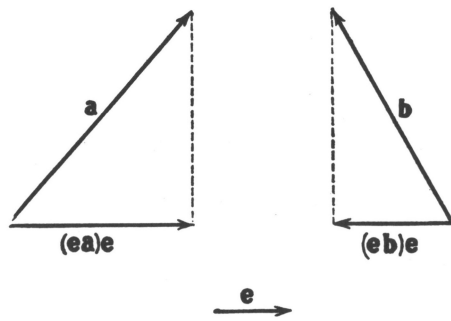
**32.2** Ha egy vektort két egymásra merőleges vektor összegeként állítunk elő, azt mondjuk, hogy a vektort (egymásra) merőleges összetevőkre bontjuk fel. A felbontást azzal jellemezhetjük, hogy az egyik összetevő állását megadjuk. Szó lehet tehát a vektornak egy egyenessel *párhuzamos* és rá *merőleges* összetevőjéről (vagy egy síkra merőleges és vele párhuzamos összetevőjéről). A párhuzamos összetevő a vektornak az egyenesre (illetőleg síkra) vetett merőleges vetülete. Ha ritkán nem egymásra merőleges összetevőkre bontunk fel, akkor erre a körülményre fel kell hívunk a figyelmet.

**Tétel.** Az a vektornak az  $\mathbf{e}$  egységvektorral párhuzamos összetevője (268. ábra)

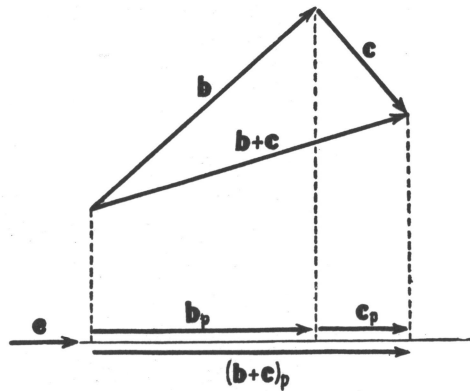
$$\mathbf{a}_p = (\mathbf{ea})\mathbf{e}.$$

Mondhatjuk, hogy ez az  $\mathbf{a}$  vektor  $\mathbf{e}$  irányára vetett merőleges vetülete, vagy hogy az  $\mathbf{a}$  vektor  $\mathbf{e}$  irányára vetett merőleges vetületének előjeles hossza  $\mathbf{ea}$ .

*Bizonyítás.* Úgy vesszük fel az alapvektorokat, hogy  $\mathbf{i}$  az  $\mathbf{e}$  vektorral megegyezzen, és  $\mathbf{a}$  az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  vektorokkal egysíkú legyen. Ha  $\alpha$  az  $\mathbf{a}$  vektor irányszöge, akkor 31.6 szerint az  $\mathbf{a}$  vektor első koordinátája  $|\mathbf{a}|\cos\alpha$ , ezért  $\mathbf{i}$  irányú összetevője  $|\mathbf{a}|\cos\alpha\mathbf{i}$ . Ez az állítást bizonyítja, hiszen  $|\mathbf{i}| = 1$  miatt  $\mathbf{ia} = |\mathbf{a}|\cos\alpha$  és  $\mathbf{i} = \mathbf{e}$ . —



268



269

Tétel.  $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ .

A kommutativitás miatt a tételt  $(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$  alakban is írhatjuk. A tétel kimondja tehát, hogy a skaláris szorzás bármelyik tényező tagjaira eloszló, *disztributív* művelet. A tételben összeg helyett különbségről is szólhattunk volna, hiszen szabad  $\mathbf{c}$  helyébe mind a két oldalon a  $-\mathbf{c}$  vektort írunk. Kimondhattuk volna mindjárt, hogy többtagú vektorösszeget is megszorozhatunk tagonként, hiszen tételünk ismételt alkalmazása ezt adja. Ismételt alkalmazás azt is mutatja, hogy többtagú vektorösszegeket ugyanúgy emelhetünk négyzetre és ugyanúgy szorozhatunk egymással, ahogyan ezt a számokkal tesszük.

*Bizonyítás.* a) Elegendő a tételnek azt a speciális esetét bizonyítanunk, amikor  $\mathbf{a}$  helyén egy  $\mathbf{e}$  egységvektor áll:

$$\mathbf{e}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{eb} + \mathbf{ec}.$$

Ha ugyanis  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{e}$ , akkor a felírt egyenletet  $\lambda$ -val szorozva, mégpedig mindenütt az első tényezőt szorozva meg, a tétel állítását kapjuk meg.

b) Vetítsük az egymáshoz fűzött  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorokat és a belőlük készített  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  vektort az  $\mathbf{e}$  vektor egyenesére (269. ábra). Minthogy egyező pontok vetületei is megegyeznek, a  $\mathbf{b}_p$ ,  $\mathbf{c}_p$  és  $(\mathbf{b} + \mathbf{c})_p$  vetületekre

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})_p = \mathbf{b}_p + \mathbf{c}_p.$$

Ha itt a párhuzamos összetevőket az előző tétel felhasználásával írjuk fel, és a számmal való szorzás disztributivitását alkalmazzuk, az

$$[\mathbf{e}(\mathbf{b} + \mathbf{c})]\mathbf{e} = (\mathbf{eb})\mathbf{e} + (\mathbf{ec})\mathbf{e} = (\mathbf{eb} + \mathbf{ec})\mathbf{e}$$

eredményhez jutunk. Ebből a bizonyítandó egyenlőség helyessége már következik, mert  $\mathbf{e}$  nem nullvektor, s így számszorosai csak akkor egyenlők, ha ugyanannyiszorosak. —

A skaláris szorzás műveleti szabályainak áttekintése után leszögezzük, hogy a szokott szabályoktól csak a szorzat eltűnésére vonatkozó eredményünk tért el. Ha tehát skaláris szorzatot számítunk, a megszokott szabályok szerint járhatunk el. A következőkben nem is említjük esetenként, hogy milyen műveleti szabályokat használtunk fel.

**32.3** A skaláris szorzás hasznosságát egy trigonometriai tétel bizonyításán mutatjuk be.

**Tétel (koszinusztétel).** *A háromszög oldalait és szögeit a szokott módon jelölve*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Természetesen bármely oldal átveheti a  $\mathbf{c}$  oldal kitüntetett szerepét. Ha  $\gamma = 90^\circ$ , tételünk Pythagoras tételét adja.

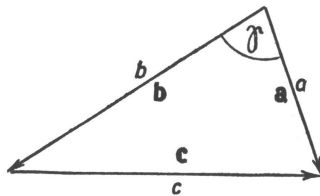
*Bizonyítás.* A háromszög  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  oldalát a  $\mathbf{c}$  oldal felé irányítva  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorokhoz jutunk (270. ábra). A  $\mathbf{c}$  oldalt úgy irányítjuk, hogy a kapott  $\mathbf{c}$  vektorra

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

teljesüljön. Mindkét oldalt négyzetre emelve

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}$$

adódik, ami éppen állításunk helyességét mondja ki. —



270

A koszinusztétel alkalmas arra, hogy egy háromszög szögeit meghatározzuk, ha a három oldal van adva. Célszerű, ha a koszinusztételt a legnagyobb oldalra alkalmazzuk, tehát elsőnek a legnagyobb szöget határozzuk meg. A legnagyobb szögből a többit már kényelmesebben, a szinusztétel révén határozhatjuk meg (vö. 31.7A).

Alkalmazhatjuk a koszinusztételt akkor is, ha két oldal és az általuk közrefogott szög van adva. azonban a 31.7-ben említett, a tangens-tételt felhasználó eljárás kevesebb munkával jár.

**B1** Ha a háromszög oldalaira vonatkozó adatok kielégítik a háromszög-egyenlőtlenség követelményeit, akkor van ilyen adatokkal rendelkező háromszög, miként ezt 15.6-ban láthattuk. Ez a tény a koszinusztétellel végzett szögmeghatározásban is tükröződik, mert  $c < a + b$  és  $c > |a - b|$  miatt adatainkra a

$$c^2 < a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$$

egyenlőtlenségek teljesülnek, a koszinusztétel tehát  $\cos \gamma$  számára abszolút értékben 1-nél kisebb értéket ad.

Ha két oldal és az általuk közrefogott szög van adva, és a harmadik oldalt a koszinusztétel segítségével számítjuk, akkor  $c^2$  számára a fenti második egyenlőtlenség folytán pozitív érték adódik. Itt is tükröződik tehát a számításban az, hogy van az adatokhoz tartozó háromszög.

**B2** Az előző megjegyzést és 31.7 B eredményeit összefoglalva a következőket mondhatjuk ki: A háromszög oldalaira és szögeire vonatkozó, nem csupa szögből álló három adathoz akkor és csak akkor tartozik háromszög, ha az adatok nem mondanak ellent a következő feltételeknek:

$$(1) a + b > c,$$

$$(2) \alpha + \beta < \pi,$$

$$(3) \text{ ha } a \leq b, \text{ akkor } \alpha \text{ hegyesszögű}$$

$$(4) a \geq b \sin \alpha.$$

Ezek a feltételek úgy értendők, hogy bennük az oldalakat és velük együtt a szemközti szögeket szabadon felcserélhetjük.

Ilyen adatokhoz egyetlen kivétellel mindig csak egyetlenegy megoldás tartozik. Ez a kivétel az, amikor a három adatra (4)-ben az egyenlőtlenség jele érvényes; ilyenkor két megoldás van.

### 32.4 Az egymásra páronként merőleges $\mathbf{i}$ , $\mathbf{j}$ , $\mathbf{k}$ egységvektorokra

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0.$$

**Tétel.** Az  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$  vektor koordinátáira

$$a_1 = \mathbf{ia}, \quad a_2 = \mathbf{ja}, \quad a_3 = \mathbf{ka}$$

Síkbeli vektoroknál természetesen nem kell  $\mathbf{a}_3$ -ról beszélni.

*Bizonyítás.* Ha az

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

egyenletet skalárisan szorozzuk az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  vektorokkal, akkor éppen állításunkhoz jutunk. —

**Tétel.** Az  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$  vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Síkbeli vektorok esetében a harmadik tag természetesen elmarad.

*Bizonyítás.* Ha az

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a}(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$$

szorzatot tagonkénti összeszorzással számítjuk ki, akkor tételünk állítását kapjuk meg. —

Tételünkéből következik, hogy az  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$  vektor hossza

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

azaz a koordináták négyzetösszegéből vont (nem negatív) négyzetgyök.

**B** Az utolsó tétel birtokában könnyen ellenőrizhetjük a skaláris szorzat műveleti szabályait. Ez az ellenőrzés egyben bizonyítás is volna, ha a skaláris szorzatot az utolsó tétel állításával definiálnók. Ebben az esetben azonban külön bizonyítani kellene, hogy a skaláris szorzat értéke nem függ az alapvektorok megválasztásától. Hátránya volna ennek az eljárásnak az is, hogy a geometriai jelentés kevésbé domborodnék ki. Bennünket elsősorban ez utóbbi szempont vezet, amikor tárgyalásunkban előnyben részesítjük a koordinátákat nem szerepeltető, közvetlenül a vektorokkal dolgozó, *direkt* okoskodásokat.

**32.5** A térbeli  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok *vektoriális szorzatának* (külső szorzat) nevezzük azt a vektort,

a) amelynek hossza  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , ahol  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ismét a két vektor hajlásszögét jelöli,

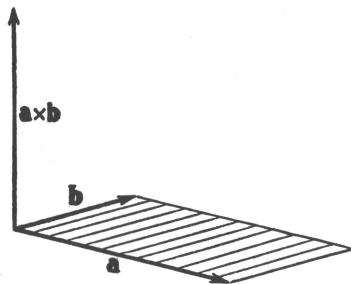
b) amely merőleges az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorokra,

c) és amelynek iránya olyan, hogy  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és a vektoriális szorzat jobbrendszeret alkot.

Ezt a vektoriális szorzatot  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  jelöli. Célszerű a szorzás jelét „kereszt”-nek olvasni, hogy a vektoriális szorzatot a beszéd is megkülönböztesse a skaláris szorzattól. Hangsúlyozzuk, hogy síkbeli vektorok körén belül nem beszélünk vektoriális szorzatról.

Ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok között nullvektor is szerepel, akkor  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  akármilyen szöveget jelenthet, viszont definíciónk  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  számára ebben az esetben is egyetlen értéket, ti. 0-t ad. Nem szabja meg a definíció  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  állását, ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  párhuzamos, de ekkor erre nincs is szükség, mert a szorzat a) szerint nullvektor. Ugyanígy látjuk, hogy a definíció csak akkor szabja meg  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  irányát, ha erre szükség van.

Ha az egymással nem párhuzamos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorokat egy pontból mérjük fel, ezeket egy paralelogrammává egészíthetjük ki. Ezt a két vektor által *kifeszített* paralelogrammának mondjuk. Az olyan vektort, amely egy síkidom síkjára merőleges, s amelynek hossza a síkidom területével egyenlő, a síkidom *területvektorának* mondjuk. Megállapíthatjuk, hogy  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  az egymással nem párhuzamos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területvektora (271. ábra).



271

A definícióból kiolvashatjuk, hogy



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

hiszen a) és b) szerint az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  vektorok hossza és állása megegyezik, viszont c) miatt ellentétes irányúak. A vektoriális szorzás tehát nem kommutatív, hanem *alternáló* művelet.

Bármely vektor önmagával 0 szöget alkot, s ezért

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

**Tétel. Két vektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor párhuzamos.**

Hangsúlyozzuk, hogy a vektoriális szorzat nem csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

*Bizonyítás.* Ha a két vektor között nullvektor is szerepel, akkor helyes az állítás, mert a vektoriális szorzat 0, és a két vektort egymással párhuzamosnak mondhatjuk.

Null vektoroktól különböző vektorok körében  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  a definíció a) része miatt akkor és csak akkor 0, ha  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ . Ez pedig akkor és csak akkor következik be a konvex  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  szögre, ha vagy  $0^\circ$ , vagy  $180^\circ$ , ha tehát az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok egymással párhuzamosak. —

**Tétel. Minden  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorra és  $\lambda$  számra**

$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}).$$

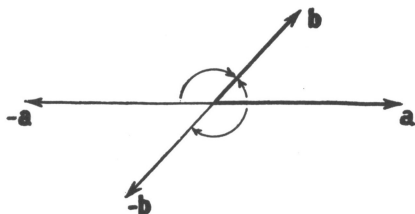
Tételünk kimondja, hogy a vektoriális szorzat egyik tényezőjét egy számmal szorozva az egész szorzatot is megszorozzuk ugyanazzal a számmal, vagy hogy a tényezők számszorói a vektoriális szorzat számszorójává emelhetők ki.

*Bizonyítás.* a) A tétel állítása nyilvánvaló, ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  párhuzamos, ideértve azt az esetet is, amikor nullvektor is van közöttük. Ebben az esetben ugyanis a tétel nullvektorok egyenlőségét mondja ki.

Ugyanezzel az indokolással nyilvánvaló az állítás akkor is, ha  $\lambda = 0$ .

b) Ha  $\lambda > 0$  és  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  akkor  $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$  a vektoriális szorzat definíciója szerint az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorral megegyező állású és megegyező irányú is, hosszuk viszont az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektor hosszának  $\lambda$ -szorososa. Itt arra támaszkodtunk, hogy  $|\lambda| = \lambda$ , s hogy  $\mathbf{a}$  és  $\lambda\mathbf{a}$ , valamint  $\mathbf{b}$  és  $\lambda\mathbf{b}$  egy irányú vektorok.

c) Ha  $\lambda = -1$  és  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ , akkor a vektoriális szorzat definíciója szerint  $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \times (-\mathbf{b})$  hossza és állása megegyezik az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektoréval, hiszen az  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  szög helyébe ennek kiegészítő szöge lép (272. ábra), és kiegészítő szögek szinusza egyenlők. A mondott két vektor azonban az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorral ellentétes irányú, mert ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok síkjának egyik oldaláról (ti.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  oldaláról) nézve az  $\mathbf{a}$  vektort a  $\mathbf{b}$  vektorba pozitív irányú ( $180^\circ$ -nál kisebb) elforgatás viszi át, akkor ugyanerről az oldalról nézve a  $-\mathbf{a}$  vektort  $\mathbf{b}$ -be vivő és az  $\mathbf{a}$  vektort  $-\mathbf{b}$ -be vivő ( $180^\circ$ -nál kisebb) elforgatás iránya negatív, és e két elforgatás a sík másik oldaláról szemlélve látszik pozitívnak.



d) Ha  $\lambda < 0$  és  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ , akkor az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektort b) és c) alapján úgy szorozhatjuk meg a  $\lambda$  számmal, hogy az egyik vektortényezőt először  $|\lambda|$ -val s azután  $(-1)$ -gyel szorozzuk meg. Ez állításunk helyességét bizonyítja. —

**A1** A fizikában több fogalomalkotás vezet a vektoriális szorzathoz. Ha egy merev testet az  $O$  pontban rögzítünk, és a test  $P$  pontjában  $\mathbf{p}$  erő hat, akkor  $\overrightarrow{OP} \times \mathbf{p}$  adja a forgató nyomatékot. A forgató nyomaték abszolút értéke eszerint az erő nagyságának és az erő karja hosszának a szorzata, ahol az erő karja az  $O$  pontból a támadó erő egyenesére bocsátott merőleges hosszát jelenti.

**A2** A vektoriális szorzat legelterjedtebb jelölését használtuk. A skaláris szorzat 32.1 A2-ben említett jelöléséhez kapcsolódva megemlítjük, hogy  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  helyett az  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  jelölést is használják.

Megemlítjük azt is, hogy amelyik tudományágban balrendszert alkotó alapvektorokat használnak, ott jobbrendszer helyett a vektoriális szorzat definíciójában is balrendszert mondanak, tehát a vektoriális szorzatot másként definiálják.

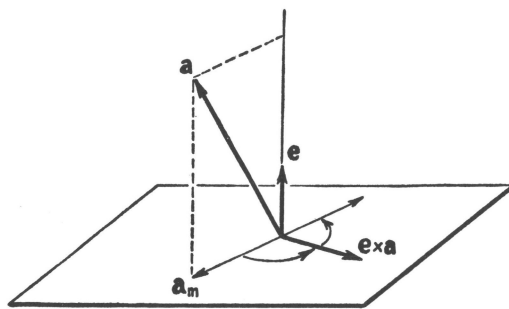
**B1** Minthogy a tér elmozgatása sem a vektorok hosszát, sem a szögüket, sem pedig három vektor rendszerének a jellegét nem változtatja meg, ugyanezt a vektoriális szorzatról is elmondhatjuk: két vektor vektoriális szorzatának a képe a képvektorok vektoriális szorzatával egyenlő (vö. 30.7).

A tér egybevágóságáról ezt nem mondhatjuk el, hiszen az egybevágóság jobbrendszert alkotó vektorokat balrendszert alkotókba vihet át.

**B2** Ha a  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  vektorokat egy pontból felmérjük, és a négy végpont konvex burkát képezzük, akkor az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogrammához jutunk, feltéve, hogy a két vektor nem párhuzamos. Ha párhuzamosak, akkor lineáris alakzathoz (szakaszhoz vagy ponthoz) jutunk. Ezt az alakzatot a két párhuzamos vektor által kifeszített, *elfajuló paralelogrammának* mondjuk.

Ha ilyen elfajuló paralelogrammákra is gondolunk, akkor minden megszorítás nélkül kimondhatjuk, hogy  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területvektora. Párhuzamos vektorok esetében ugyanis a vektoriális szorzatuk nullvektor, és az általuk kifeszített paralelogramma területe is 0.

**32.6 Tétel.** Az  $\mathbf{e}$  egységvektor és az  $\mathbf{a}$  vektor  $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$  szorzatához eljuthatunk úgy, hogy az  $\mathbf{a}$  vektort egy az  $\mathbf{e}$  vektorra merőleges síkra vetítjük, és a kapott vektort ebben a síkban, az  $\mathbf{e}$  vektor irányából nézve pozitív irányban  $90^\circ$ -kal elforgatjuk (273. ábra).



273

*Bizonyítás.* A tétel nyilvánvalóan helyes akkor, ha  $\mathbf{a}$  párhuzamos  $\mathbf{e}$ -vel, hiszen ilyenkor a vetítés nullvektorhoz vezet. Megmutatjuk, hogy ha  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{e}$ , akkor a tétel előírása szerint szerkesztett vektor mindazoknak a követelményeknek megfelel, amelyekkel az  $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$  vektort definiáltuk.

a) Az  $\mathbf{a}$  vektor szóban forgó  $\mathbf{a}_m$  vetülete az  $\mathbf{a}$  vektor  $\mathbf{e}$ -re merőleges összetevője (273. ábra), hossza tehát

$$|\mathbf{a}_\pi| = |\mathbf{a}| \sin(\mathbf{e}, \mathbf{a}) = |\mathbf{e} \times \mathbf{a}|.$$

Minthogy az elforgatás a vektor hosszát nem változtatja meg, az általunk szerkesztett vektor hossza megfelel a követelménynek.

b) A szerkesztett vektor 24.6 negyedik tétele szerint merőleges  $\mathbf{e}$  és  $\mathbf{a}$  síkjára, tehát merőleges  $\mathbf{e}$  két vektor mindegyikére.

c) A pozitív irányú elforgatás következtében  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{a}_\pi$  és a szerkesztett vektor jobbrendszert alkot.

Jobbrendszert alkot ezért  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{a}$  és a szerkesztett vektor is, hiszen  $\mathbf{a}_\pi$  és  $\mathbf{a}$  a másik két vektor által meghatározott síknak ugyanarra az oldalára mutat. —

**Tétel. Az a vektornak az e egységvektorra merőleges összetevője**

$$\mathbf{a}_\pi = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$$

Felhívjuk a figyelmet ennek a tételnek és 32.2 első tételének párhuzamára.

*Bizonyítás. Az*

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a})$$

vektor az előző tétel szerint úgy keletkezik, hogy az  $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$  vektort az  $\mathbf{e}$ -re merőleges síkban,  $\mathbf{e}$  irányából nézve pozitív irányban  $90^\circ$ -kal tovább forgatjuk (273. ábra). Ez a vektor tehát ellentétes az  $\mathbf{a}_\pi$  vektorral, és a vektoriális szorzat tényezőinek felcserélésével belőle az  $\mathbf{a}_\pi$  vektorhoz jutunk. —

Tétel.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

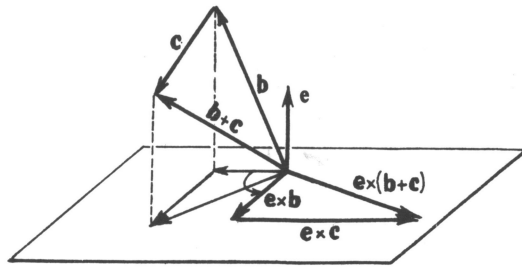
Ez a tétel kimondja, hogy a vektoriális szorzás bármelyik tényezőjének a tagjaira eloszló, *disztributív* művelet. A tétel mindkét alakjára szükség van, mert a vektoriális szorzat nem kommutatív. Összeg helyett különbséget is szerepeltethetünk volna, hiszen  $\mathbf{c}$  helyébe a  $-\mathbf{c}$  vektort írhatjuk mind a két egyenletben. A tételt kettőnél több tagú összegre is kimondhattuk volna, mert a tétel ismételt alkalmazása ezt is alátámasztja. Hasonlóképpen, a tétel két állítását egybefoglalva, mindjárt azt is kimondhattuk volna, hogy akárhány tagú vektorösszegek vektoriális szorzatát tagonkénti összeszorzással számíthatjuk ki.

*Bizonyítás.* Elegendő a tétel első állítását bizonyítanunk, mert ha ezt  $(-1)$ -gyel szorozzuk, mégpedig a szorzást a tényezők felcserélése útján hajtjuk végre, akkor a második állításhoz jutunk. Elég a tételnek azt a speciális esetét bizonyítanunk, amikor  $\mathbf{a}$  helyén egy  $\mathbf{e}$  egységvektor áll:

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{e} \times \mathbf{b} + \mathbf{e} \times \mathbf{c}.$$

Ha ugyanis  $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{e}$ , akkor az  $\mathbf{e}$ -re felírt egyenletet  $\lambda$ -val szorozva, mégpedig mindenütt az első tényezőt szorozva meg, az  $\mathbf{a}$ -ra kimondott állításhoz jutunk.

Vetítsük az egymáshoz fűzött  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorokat és a belőlük készített  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  vektort egy az  $\mathbf{e}$  vektorra merőleges síkra (274. ábra), majd forgassuk el a kapott vektorháromszöget ebben a síkban  $90^\circ$ -kal, mégpedig  $\mathbf{e}$  irányából nézve pozitív irányban. Szakaszunk első tétele szerint így az  $\mathbf{e} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{e} \times \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{e} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  vektorokhoz jutunk. Csatlakozásuk éppen a bizonyítandó egyenlőség helyességét támasztja alá. —



274

A vektoriális szorzat műveleti szabályainak áttekintése után leszögezzük, hogy itt két eltérést tapasztaltunk a megszokott szabályoktól. Egyrészt azt, hogy ez a szorzás nem kommutatív, másrészt pedig, hogy a szorzat eltűnhetik olyankor is, amikor egyik tényező sem tűnik el. Ha tehát vektoriális szorzatot számítunk, akkor ügyelnünk kell arra, hogy a tényezőket nem cserélhetjük fel szabadon, ettől eltekintve azonban a megszokott szabályokat alkalmazzuk. A következőkben nem említjük esetenként, hogy milyen szabályok jutottak szóhoz.

**32.7** Minthogy az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  alapvektorok egymásra páronként merőleges egységvektorok és jobbrendszert alkotnak, a vektoriális szorzat definíciója szerint

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Az alapvektorokat önmagukkal vektoriálisan szorozva természetesen nullvektort kapunk, hiszen ez minden vektorra áll.

**Tétel.** Az  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3), \mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$  vektorok vektoriális szorzata

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

*Bizonyítás.* Ha az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$$

szorzatot tagonkénti összeszorzással számítjuk ki, és a kapott tagok közül az egyforma vektortényezőjűeket egybefoglaljuk, akkor az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

eredményhez jutunk. Ugyanezt kapjuk akkor is, ha a tételben szereplő determinánst az első sor szerint kifejtjük. —

**A1** Első ízben használtunk determinánst. A következőkben sok példát látunk majd arra, hogy a determinánsok jól áttekinthető, tömör írásmódot tesznek lehetővé. Feltételezzük a determinánsokról szóló egyszerű szabályok ismeretét. Ezek a determináns kifejtésére, a soroknak vagy oszlopoknak egy számmal való megszorzására, felcserélésükre és összeadásukra, valamint determinánsok összeszorzására vonatkoznak.

**A2** A determináns értékének meghatározásakor, tehát a vektoriális szorzat kiszámításakor is ügyelni kell az előjelekre, mert e téren könnyen tévedhetünk. Ajánljuk ezért a számítás ellenőrzését. A vektoriális szorzat gyors ellenőrzésére azt használhatjuk fel, hogy a szorzatvektor és a tényezővektorok skaláris szorzata 0, hiszen merőleges vektorokról van szó.

**32.8** Ha áttekintjük a vektorok körében bevezetett műveleteket és műveleti szabályait, és ezeket a számokra vonatkozó ismereteinkkel vetjük egybe, eltéréseket állapíthatunk meg.

Ha csak azt nézzük, hogy a vektorműveletek szabályai megegyeznek-e a számműveletek szabályaival, akkor csak három eltérést észlelhetünk: a vektoriális szorzat nem kommutatív, továbbá a skaláris és a vektoriális szorzat is el tűnhetik olyankor, amikor egyik tényezőjük sem tűnik el. Ezekre az eltérésekre már korábban is felhívtuk a figyelmet.

Eltérést jelent természetesen az is, hogy a vektorműveletekben kétfajta mennyiség is szerepel, s hogy kétféle szorzásról van szó. Bonyodalmak lépnek fel ezért, ha többtényezős vektorszorzatokat akarunk bevezetni. Bizonyos háromtényezős szorzatokkal a következő két szakaszban még foglalkozunk. Szóltunk már a vektor négyzetéről, az önmagával alkotott skaláris szorzatról. Más hatványról a vektorok körében nem beszélhetünk. Vektornak (0-tól különböző) számmal való osztásáról csak azért nem szoltunk, mert ez a szám reciprokával való szorzást jelenti.

Lényeges eltérést jelent, hogy vektorral sem számot, sem (vele nem párhuzamos) vektort soha nem osztunk. Ilyen műveletet be sem vezethetünk. Rámutatunk arra, hogy ennek mi az oka. A számok körében az osztás bevezetésének az az alapja, hogy ha  $bc_1 = bc_2$  és  $b \neq 0$ , akkor  $c_1 = c_2$ . Ez biztosítja a hányados egyértelműségét. Kijelentésünk egyértelmű azzal, hogy ha  $b(c_1 - c_2) = 0$  és  $b \neq 0$ , akkor  $c_1 - c_2 = 0$ , vagyis azzal, hogy a szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényező 0. Minthogy vektorok körében ilyen szabály sem a skaláris, sem a vektoriális szorzatra nem mondható ki, nem kerülhet sor e műveletek megfordítására sem.

Beszélünk azért párhuzamos vektorok arányáról. Ha  $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$  és  $\mathbf{b} \neq 0$ , akkor azt mondhatjuk, hogy  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  aránya  $\lambda$ -val egyenlő, vagyis  $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \lambda$ . Ez lehetőséget ad arra, hogy párhuzamos vektorokkal aránypárokat is felírassunk, ideértve azt az esetet is, amikor az egyik arányban párhuzamos vektorok, a másikban pedig számok szerepelnek.

**B1** Utolsó bekezdésünk nem jutott ellentétbe az előző bekezdés következtetésével, mert a számmal való szorzás megfordításáról volt szó, és erre a műveletre azt a következtetést nem alkalmazhatjuk.

Az utolsó bekezdésben csak azért nem beszéltünk vektorral való osztásról, hogy ezáltal zavar ne keletkezzék. Jobb lemondani ebben a szűk körben erről a beszédmódról, mintsem tápot adni annak a téves hiedelemnek, hogy vektort vektorral általánosságban is oszthatunk.

Nem volna tehát elvi akadálya annak, hogy amikor a  $\lambda \mathbf{a} = \mu \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \neq 0$  feltételekből a  $\lambda = \mu$  egyenlőségre következtetünk, azt mondjuk, hogy ezt az egyenlőséget  $\mathbf{a}$ -val való osztás adja.

**B2** Csak megemlítjük, hogy akárhogyan definiálnók is a térbeli vektorokra a szorzást, a közönséges műveleti szabályok sohasem lennének maradéktalanul érvényesek. Síkbeli vektorokról ugyanezt nem mondhatjuk el, hiszen a komplex számok körében a megszokott műveleti szabályok mindegyike érvényes.

**32.9** Újabb vektorműveletet nem vezetünk ugyan már be, ellenben foglalkozunk még a megismert műveletek bizonyos kombinációival.

Az  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  szorzatot *vegyesszorzatnak* nevezzük. Az elnevezés arra utal, hogy itt vektoriális és skaláris szorzás is szerepel.

Az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  jelöléssel kapcsolatban megemlítjük, hogy az  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  szorzatokban (skaláris szorzat adta szám és vektor szorzatában) a zárójelet sohasem szabad elhagyni, hiszen azt elhagyva nem tudnánk különbséget tenni közöttük. A vegyesszorzatra bevezetett jelölésünk tehát nem válhatik félreérthetővé.

Ha három nem egysíkú vektort egy pontból mérünk fel, és belőlük mint élekből paralelepipedont építünk fel, akkor a három vektor által *kifeszített* paralelepipedonhoz jutunk. Ha a három vektor sorrendjét megadjuk, akkor az általuk kifeszített paralelepipedon térfogatát pozitív vagy negatív előjellel láthatjuk el aszerint, hogy a három kifeszítő vektor a megadott sorrendben jobbrendszer vagy balrendszer alkot-e. Ezt az előjeles értéket a sorrendben megadott három vektor által kifeszített paralelepipedon *előjeles térfogatának* nevezzük.

**Tétel.** Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata  $\mathbf{abc}$ .

Tételünk természetesen csak nem egysíkú, tehát paralelepipedont kifeszítő vektorról szól. A tétel alapján kimondhatjuk, hogy három vektor jobb- vagy balrendszert alkot aszerint, amint vegyesszorzatuk pozitív vagy negatív.

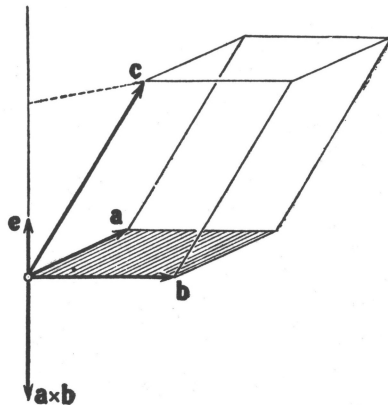
*Bizonyítás.* Paralelepipedonunk egyik lapja az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogramma (275. ábra). Ennek területe  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ . Az ehhez a laphoz tartozó magasságot a  $\mathbf{c}$  vektornak e lapra merőleges összetevője adja. Ha tehát az  $\mathbf{e}$  egységvektor ennek az összetevőnek az irányába mutat, akkor a magasság  $\mathbf{ec}$ , a térfogat pedig

$$|\mathcal{V}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \mathbf{ec}.$$

Az  $\mathbf{e}$  vektor az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektor irányába mutató  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0$  egységvektorral azonos vagy vele ellentétes aszerint, amint  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorok síkjának ugyanarra az oldalára mutat vagy sem, tehát aszerint, amint az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok jobb- vagy balrendszert alkotnak. Az előjeles térfogathoz jutunk tehát, ha  $\mathbf{e}$  helyébe az  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0$  vektort írjuk. Így a

$$\mathcal{V} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

értékhez jutunk. —



275

**Tétel.** Három vektor akkor és csak akkor egysíkú, ha vegyesszorzatuk 0.

*Bizonyítás.* Ha  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , akkor az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok egysíkúak, és vegyesszorzatuk is 0. Ezért tételünk bizonyítása során az  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  esetre szorítkozhatunk.

Ha az egymással nem párhuzamos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorokat egy pontból felmérjük, egy síkot határoznak meg. Az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  vektor merőleges erre a síkra. A  $\mathbf{c}$  vektor tehát akkor és csak akkor egysíkú az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  vektorokkal, ha szintén merőleges az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorra. Ennek pedig szükséges és elégséges feltétele, hogy az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok skaláris szorzata 0 legyen. —

Kiemeljük, hogy a most bizonyított tétel szerint a vegyesszorzat 0 akkor, ha tényezői között van két azonos vagy két egymással párhuzamos vektor.

**Tétel (felcserélési tétel).**  $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ .

A tétel elnevezése arra utal, hogy a kétféle szorzásjel felcserélése a szorzat értékét nem változtatja meg. A skaláris szorzás kommutativitására hivatkozva, tételünket  $\mathbf{abc} = \mathbf{bca}$  alakban is kimondhatjuk. Kimondja tehát a tétel azt is, hogy a vegyesszorzat nem változik meg, ha a tényezőket ciklikusan cseréljük fel:  $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$ .

*Bizonyítás.* a) Ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok egysíkúak, akkor  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok is azok, tehát a tételben szereplő szorzatok mindegyike 0.

b) Ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok nem egysíkúak, akkor paralelepipedont feszítenek ki. A  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$  vektorok is ugyanezt a paralelepipedont feszítik ki. Ennek a paralelepipedonnak az előjeles térfogata is ugyanaz az érték, mint az előbbi, mert az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$  vektorhármassok rendszere ugyanolyan jellegű. Az előjeles térfogatuk egyezése szakaszunk első tétele folytán a tétel állítását bizonyítja. —

A bizonyított tételt kiegészíthetjük azzal a megállapítással, hogy a (most bizonyított tétel szerint egyenlő)  $\mathbf{cba} = \mathbf{bac} = \mathbf{acb}$  vegyesszorzatok a fentebb említetteknek  $(-1)$ -szeresei, hiszen  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  és  $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$  csak előjelben különbözik egymástól. Ezek szerint a tényezők sorrendjét megváltoztatva a vegyesszorzat értéke változatlan marad vagy előjelet vált aszerint, amint a sorrendváltás a tényezők ciklusát meghagyja vagy megváltoztatja.

**Tétel.**  $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ ,  $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$  vektorok vegyesszorzata

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Megfigyelhetjük, hogy amit a tényezők sorrendjének megváltoztatásáról az imént mondtunk, pontosan megfelel annak, amit az algebra a determináns sorainak felcseréléséről tanít.

*Bizonyítás.* A  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$  vektorból úgy jutunk az  $\mathbf{av} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$  skaláris szorzathoz, hogy az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  alapvektorok helyébe rendre az  $a_1, a_2, a_3$  koordinátákat írjuk. Ha ezt a megállapítást a  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  vektor determinánsalakjára alkalmazzuk, akkor  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  értékeként éppen a tételben adott determináns adódik. —

**B** Ha a  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  vektorokat egy pontból mérjük fel, és a nyolc végpont konvex burkát képezzük, akkor az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedonhoz jutunk, feltéve, hogy a három vektor nem egysíkú. Ha egysíkú vektorokból indulunk ki, akkor előírásunk síkidomhoz vezet. Ezt a síkidomot a három egysíkú vektor által kifeszített, *elfajuló paralelepipedon*nak nevezzük.

Szakaszunk első tétele helyes marad, ha ilyen elfajuló paralelepipedonokra mondjuk ki, hiszen síkidom térfogata 0. Ebben az esetben azonban a térfogat előjelezésére sem szükség, sem lehetőség nincs.

### 32.10 Tétel (kifejtési tétel).

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \end{aligned}$$

A tétel megjegyzését elősegíti, ha arra gondolunk, hogy a bal oldali vektoriális szorzat merőleges a tényezőire, tehát arra a tényezőre is, amelyik maga is vektoriális szorzat. Ha pedig egy vektor merőleges egy vektoriális szorzatra, akkor egysíkú annak tényezőivel, tehát számszorosaik összegeként írható fel. Tudjuk tehát, hogy a jobb oldalakon mely vektorok számszorosainak kell állniuk, és már csak azt kell megjegyezni, hogy milyen számtényezők szerepelnek. Könnyű megjegyezni, hogy a számtényezők mindegyike a másik két vektor skaláris szorzata. Nehezebb annak az emlékezetben tartása, hogy a két szorzó közül melyik veendő pozitív, és melyik negatív előjellel.

Ezt megkönnyíti az az észrevétel, hogy a bal oldali három vektor közül mindkét esetben a középsőnek a szorzóját kell pozitív előjellel ellátni.

*Bizonyítás. a)* Elegendő az első állítást bizonyítanunk, mert ha ezt  $(-1)$ -gyel szorozzuk, s a szorzást a bal oldalon tényezőcserével hajtjuk végre, akkor a

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{cb})\mathbf{a} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}$$

egyenlethez jutunk, s ez betűcserével a tétel második állítását adja.

*b)* Ha  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , akkor a bizonyítandó első egyenlet mindkét oldala 0. A bal oldalra nézve ez  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  következménye, a jobb oldalra vonatkozólag pedig  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b} = \beta \mathbf{e}$  helyettesítéssel adódik, hiszen a különbség mindkét tagja az  $(\mathbf{ec})\mathbf{e}$  vektor  $\alpha\beta$ -szorosa.

*c)* Már csak az  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  esetben kell bizonyítanunk a tétel első egyenletét.

Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorokat rögzített vektoroknak gondoljuk, és azt vizsgáljuk, hogy az egyenlet milyen  $\mathbf{c}$  vektorokra teljesül.

Ha  $\mathbf{c}$ -re helyes az egyenlet, akkor helyes a  $\lambda \mathbf{c}$  vektorra is, mert

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \lambda \mathbf{c} = [\mathbf{a}(\lambda \mathbf{c})]\mathbf{b} - [\mathbf{b}(\lambda \mathbf{c})]\mathbf{a}$$

a helyesnek feltételezett egyenletből adódik, ha azt  $\lambda$ -val megszorozzuk.

Ha egyenletünk a  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  vektorokra helyes, azaz

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}_1 = (\mathbf{ac}_1)\mathbf{b} - (\mathbf{bc}_1)\mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}_2 = (\mathbf{ac}_2)\mathbf{b} - (\mathbf{bc}_2)\mathbf{a},$$

akkor a  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  vektorra is teljesül:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = [\mathbf{a}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)]\mathbf{b} - [\mathbf{b}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)]\mathbf{a},$$

hiszen a fenti két egyenlet összeadása ezt az egyenletet adja.

Kimondhatjuk ezek alapján, hogy ha a  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  vektorok nem egysíkúak, és egyenletünk ezekre a vektorokra teljesül, akkor ez az egyenlet minden  $\mathbf{c}$  vektorra helyes. Ez az előző két bekezdés alapján adódik abból, hogy minden  $\mathbf{c}$  vektor felírható  $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_3 \mathbf{c}_3$  alakban.

*d)* Minthogy az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorok nem egysíkúak, az elmondottak szerint elég azt bizonyítanunk, hogy tételünk első egyenlete helyes akkor, ha  $\mathbf{c}$  helyébe az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorokat írjuk, hogy tehát

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{aa})\mathbf{b} - (\mathbf{ba})\mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{ab})\mathbf{b} - (\mathbf{bb})\mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [\mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]\mathbf{b} - [\mathbf{b}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]\mathbf{a}.$$

Az utolsó egyenlet helyes, mert mindkét oldalán  $\mathbf{0}$  áll, hiszen a bal oldali vektoriális szorzat tényezői egyenlők, a jobb oldali vegyesszorzatokban pedig két-két egyenlő tényező szerepel. Nem kell külön bizonyítanunk a felírt második egyenletet sem, mert ha az első egyenletben  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  szerepét felcseréljük,



és  $(-1)$ -gyel szorzunk, akkor a második egyenlethez jutunk. Elegendő tehát a felírt három egyenlet közül csak az elsőt bizonyítanunk.

e) Elég azonban ezt is csak arra az esetre igazolnunk, amikor  $\mathbf{a}$  helyén egy  $\mathbf{e}$  egységvektor áll:

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{b} - (\mathbf{eb}) \mathbf{e},$$

hiszen  $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{e}$  esetén ebből az eredeti egyenlethez jutunk, ha  $\lambda^2$ -tel megszorozzuk. Ez az egyenlet helyes, mert 32.2 és 32.6 szerint

$$\mathbf{b}_{\mathbf{m}} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_{\mathbf{p}}$$

alakban írható, ahol  $\mathbf{b}_{\mathbf{m}}$  és  $\mathbf{b}_{\mathbf{p}}$  a  $\mathbf{b}$  vektor  $\mathbf{e}$ -re merőleges és vele párhuzamos összetevőjét jelenti. Ezzel tételünk bizonyítását is befejeztük. —

A Ezt a bizonyítást visszafelé is elmondhatjuk. Akkor nem „már csak annak bizonyítására van szükség” és „ha ez igaz, akkor az is igaz” jellegű állítások szerepelnének a bizonyításban, hanem egyre többet és többet bizonyítva jutnánk el a tétel állításához. Ez a módszer logikailag egyszerűbb volna, viszont nem adna magyarázatot arra, hogy miért kezdjük úgy, ahogy elkezdjük, és miért tesszük azt, amit teszünk. Sokszor találkozunk hasonló kettősséggel. Didaktikailag helyesebb, ha a bizonyítás nem dolgozik „deus ex machina” fordulatokkal, viszont több esetben mégiscsak az ilyen okoskodás a sokkal áttekinthetőbb. Van rá eset, amikor csak olyan bizonyítás ismeretes, amely logikailag következetes ugyan, de az egyes lépések mértéke semmi magyarázatot nem ad.

### 33. § A gömbháromszögtan elemei

A gömbháromszögek oldalai és szögei között fennálló összefüggéseket tárgyaljuk, mondhatnók azonban azt is, hogy nem a gömbháromszöggel, hanem a triéderrel foglalkozunk (vö. 29.3).

**33.1** Ha a gömbháromszög oldalait és szögeit vizsgáljuk, közömbös hogy a gömb sugara mekkora. A következőkben a gömb sugarát 1-nek választjuk.

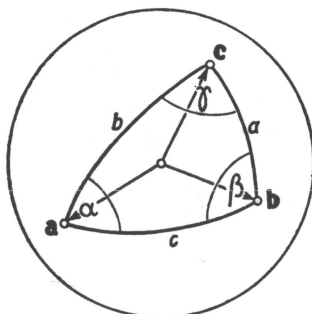
A gömbközpontból a csúcsokhoz vezető  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  egységvektorok betűzését úgy választjuk meg, hogy ezek a vektorok a megadott sorrendben jobbrendszert alkossanak, hogy tehát  $\mathbf{abc} > 0$  teljesüljön (276. ábra).

Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok hajlásszögei a gömbháromszög oldalai:

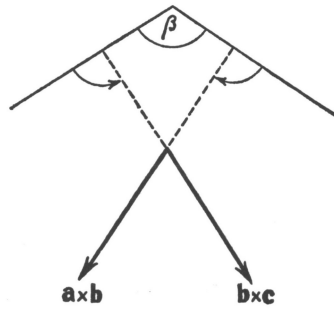
$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha, \quad (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \beta, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \gamma.$$

A  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorok a gömbháromszög oldalainak síkjára merőlegesek. Hajlásszögeik a gömbháromszög szögeinek kiegészítő szögei:

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \pi - \alpha, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \pi - \beta, \quad (\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \pi - \gamma.$$



276



277

Utóbbi kijelentésünk alátámasztása végett meggondoljuk, hogy mivel  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  jobbrendszer alkot, azért pl.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vektorok síkjának ugyanarra az oldalára mutat, mint a  $\mathbf{c}$  vektor. Eszerint  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  és  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  egy  $\beta$  szögű lapszög lapjaira merőleges, és abba a lapsík határolta féltérbe mutat, amelyik a másik lapot tartalmazza. Ezt az elhelyezkedést egy a lapszög élére merőleges síkban ábrázolhatjuk (277. ábra), és megállapíthatjuk, hogy a lapszögből kimetszett  $\beta$  szög szarait ellentétes irányokban kell  $90^\circ$ -kal elforgatni, ha vektoraink irányához akarunk jutni. Ez 12.7 szerint azt jelenti, hogy valóban kiegészítő szögekről van szó.

**33.2 Tétel (színusztétel).** *A gömbháromszög oldalainak szinuszaik úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti szögek szinuszaik.*

A szokott jelölést használva tehát

$$\sin \alpha : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

*Bizonyítás.* Az előző szakaszban bevezetett jelölést használva az

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

szorzatot képezzük. Ha ezt a szorzatot a kifejtési tétel alkalmazásával átalakítjuk, az

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \mathbf{b} - [\mathbf{b}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \mathbf{a} = (\mathbf{abc}) \mathbf{b}$$

eredményhez jutunk, hiszen  $\mathbf{bbc} = 0$ . Minthogy egyenlő vektorok hossza is egyenlő,

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = \mathbf{abc},$$

mert  $\mathbf{abc} > 0$  és  $\mathbf{b}$  egységvektor. Ha felhasználjuk a vektoriális szorzat abszolút értékéről tudottakat és az előző szakasz megállapításait, akkor eredményünket

$$\mathbf{abc} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \sin \beta = \sin c \sin \alpha \sin \beta$$

alakban írhatjuk.

Ha okoskodásunkban az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok helyett rendre a  $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  vektorokat szerepeltetjük, akkor

$$\mathbf{abc} = \sin b \sin c \sin \alpha$$

lesz az eredmény. A két eredmény egybevetéséből

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin b \sin \alpha$$

következik, s ez az  $a, b$  oldalakra vonatkozó

$$\sin \alpha : \sin b = \sin \alpha' : \sin \beta$$

állításunkat bizonyítja. —

**B** Az itt szereplő **abc** értéket a gömbháromszöghöz tartozó triéder *szögletszínuszának* mondják. A konvex szög színusza a szárak irányába mutató egységvektorok által kifeszített paralelogramma területe, a konvex triéder szögletszínusza pedig az élek irányába mutató egységvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.

**33.3 Tétel** (oldalakra vonatkozó koszinusztétel). A gömbháromszög szokott módon jelölt oldalaira és szögeire

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Természetesen bármely oldal átveheti a  $c$  oldal kitüntetett szerepét. A tétel elnevezésében szükség van megkülönböztető jelzőre, mert majd egy másik koszinusztételt is megismerünk.

*Bizonyítás.* A 33.1-ben bevezetett vektorokkal az

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

szorzatot képezzük. A felcserélési és a kifejtési tétel alkalmazásával ezt a szorzatot

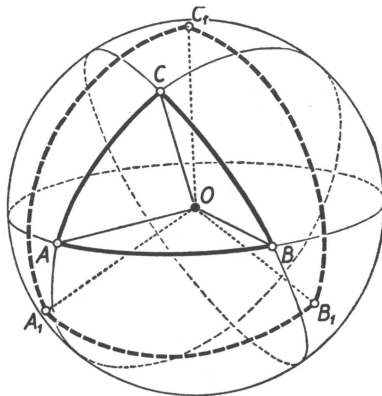
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}] \mathbf{c} = [(\mathbf{ab}) \mathbf{b} - \mathbf{a}] \mathbf{c} = (\mathbf{ab})(\mathbf{bc}) - \mathbf{ac}$$

alakra hozhatjuk. Ezt 33.1-re hivatkozva

$$\cos c \cos a - \cos b = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cos(\pi - \beta) = -\sin c \sin a \cos \beta$$

alakban írhatjuk. Ez pedig éppen a  $b$  oldalra felírt állítást adja. —

**33.4** A gömbháromszög oldalainak síkjára a gömb középpontjában merőlegest állítunk. E merőlegesek által a gömbfelületből kimetszett két-két pont közül azokat választjuk ki, amelyeket az oldal síkja a gömbháromszögtől nem választ el, amelyeket tehát a harmadik csúccsal negyedkörnél kisebb főkörív köt össze. Ez a három pont egy gömbháromszöget, az eredeti gömbháromszög *polárgömbháromszögét* határozza meg (278. ábra).



278

33.1 jelölésével, az ott mondottak alapján megállapíthatjuk, hogy a gömb középpontjából indított  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorok a polárgömbháromszög csúcsai felé mutatnak.

**Tétel.** Bármely gömbháromszög a saját polárgömbháromszögének polárgömbháromszöge.

Beszélhetünk tehát két polárgömbháromszögről anélkül, hogy megmondanók, melyikből képeztük a másikat.

*Bizonyítás.* Az  $ABC$  gömbháromszöghöz tartozó  $A_1B_1C_1$  polárgömbháromszöget az jellemzi, hogy  
 $a$   $BA_1, CA_1; CB_1, AB_1; AC_1, BC_1$

főkörvívek negyedkörök, az

$$AA_1, BB_1, CC_1$$

főkörvívek pedig negyedkörnél kisebbek.

Ha itt az  $A, A_1$  pontok, valamint a  $B, B_1$  és  $C, C_1$  pontok szerepét felcseréljük, ugyanezekhez az ívekhez jutunk. Ez azt jelenti hogy ha az  $A_1B_1C_1$  gömbháromszögből indulunk ki, akkor az  $ABC$  gömbháromszög elégti ki a polárgömbháromszöget jellemző feltételeket. —

**Tétel. Polárgömbháromszögek egyikének az oldalai a másiknak a megfelelő szögeit  $180^\circ$ -ra egészítik ki.**

A megfelelő szó jelentése aligha szorul magyarázatra: a 278. ábra két gömbháromszögénél az  $AB$  oldalnak a  $C_1$  csúcsú szög felel meg, mert az  $OC_1$  sugár az  $AB$  oldal síkjára merőleges. Ha két polárgömbháromszög egymásnak megfelelő adatai  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  valamint rendre  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a_1, b_1, c_1$  akkor a tétel szerint

$$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \gamma + \gamma_1 = \pi,$$

$$\alpha_1 + \alpha = \beta_1 + \beta = \gamma_1 + \gamma = \pi.$$

*Bizonyítás.* Az előző tételre való tekintettel elég pl. csak a  $\beta_1 + \beta = \pi$  állítást igazolnunk. Ezt azonban már 33.1-ben megtettük, hiszen a  $\beta_1$  oldala polárgömbháromszög csúcsai felé mutató  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  vektorok hajlásszöge. —

**33.5 Tétel (szögekre vonatkozó koszinusztétel).** A gömbháromszög szokott módon jelölt szögeire és oldalaira

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

Természetesen bármely szög átveheti a  $\gamma$  szög kitüntetett szerepét. Ha ezt a tételt az oldalakra vonatkozó koszinusztétellel vetjük egybe, a jobb oldal elején álló negatív előjelle figyelünk fel.

*Bizonyítás.* Tekintsük az  $a, b, c$  oldalú  $\alpha, \beta, \gamma$  szögű gömbháromszög polárgömbháromszögét, és írjuk fel erre a már ismert, oldalakra vonatkozó koszinusztételt. Előző tételünk alapján így a

$$\cos(\pi - \gamma) = \cos(\pi - \alpha) \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \sin(\pi - \beta) \cos(\pi - c)$$

összefüggéshez jutunk. Ha itt a kiegészítő szögek függvényeiről tudottakat alkalmazzuk, majd  $(-1)$ -gyel szorzunk, éppen a tétel állítását kapjuk meg. —

**A** Ha egy gömbháromszög oldalai és szögei közül három adatot ismerünk, akkor a megismert tételek segítségével meghatározhatjuk a három hiányzó adatot is.

Ha három oldal vagy három szög ismeretes, akkor a hiányzó adatokat a megfelelő koszinusztétel háromszori alkalmazásával kaphatjuk meg. Célszerű ilyenkor elsőnek a legnagyobb szinuszu oldallal szemközti szöget, illetőleg a legnagyobb szinuszu szöggel szemközti oldalt határozni meg, mert akkor a másik két adatot már kényelmesebben, a szinusztétel segítségével is egyértelműen meg tudjuk

határozni. A kisebb szinuszokhoz tartozó (oldalt vagy szöget mérő) kiegészítő szögek közül ugyanis nyomban kiválaszthatjuk az egyedül megfelelőt, mert 29.5 második tétele szerint nagyobb oldallal szemben nagyobb szög és nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van. Itt ugyanúgy, mint 31.7 A-ban, arra építettünk, hogy konvex szögek körében a  $\sin \alpha$ -nál kisebb szinuszhoz egy  $\alpha$ -nál kisebb és egy  $\alpha$ -nál nagyobb szög tartozik.

Ha két oldal és az általuk közrefogott szög, vagy két szög és a csúcsaikat összekötő oldal van adva, akkor a harmadik oldalt vagy szöget a megfelelő koszinusztétel adja. A többi hiányzó adat azután már az előző bekezdés utasításai szerint határozható meg, hiszen három oldal, illetőleg három szög vált ismeretessé. Eszerint szükség lehet a koszinusztétel újólagos alkalmazására, mielőtt a szinusztétel segítségével tovább mehetnénk.

Ha két oldal és az egyikkel szemközti szög, vagy pedig két szög és az egyikkel szemközti oldal ismeretes, akkor a másikkal szemközti szöget vagy oldalt a szinusztétel segítségével számíthatjuk ki. Ez csak akkor vezet egyértelmű eredményhez, ha nem a kisebbik szinuszú oldallal szemközti szög vagy a kisebbik szinuszú szöggel szemközti oldal volt adva. Az ellenkező esetben a számítás két eredményhez vezet. Ha már ismerünk két oldalt és velük szemközti szöget, pl. az  $a, b$  oldalakat és az  $\alpha, \beta$  szögeket, akkor  $\cos c$  és  $\cos \gamma$  a

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c\end{aligned}$$

egyenletrendszerből számítható ki. Ez mindig megoldható, s csak akkor ad több megoldást, ha  $\alpha = \beta = \alpha = \beta = 90^\circ$  (hiszen az egyenletrendszer determinánsának az eltűnése a  $\sin \alpha \sin \beta \sin \alpha \sin \beta = 1$  feltételt adja). Ebben a kivételes esetben az egyenletrendszer semmitmondó.

**B1** Nyilvánvaló, hogy (ugyanazon a gömbön) két gömbháromszög egybevágó, ha egy-egy szögük és az ezeket közrefogó oldalaik páronként egyenlők. Egybevágók ezért a gömbháromszögek akkor is, ha olyan adatokban egyeznek meg, amelyekből két oldal és az általuk közrefogott szög egyértelműen számítható ki.

Az előző megjegyzésből kiolvashatjuk tehát, hogy két gömbháromszög egybevágó, ha bennük páronként egyenlő:

$a_1$ ) három oldal,

$a_2$ ) három szög,

$b_1$ ) két oldal és az általuk közrefogott szög,

$b_2$ ) két szög és a csúcsaikat összekötő oldal,

$c_1$ ) két különböző szinuszú oldal és a nagyobb szinuszúval szemközti szög,

$c_2$ ) két különböző szinuszú szög és a nagyobb szinuszúval szemközti oldal,

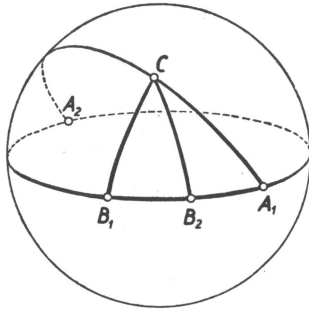
$d_1$ ) két egyenlő szinuszú, de  $90^\circ$ -tól különböző oldal és valamelyikkel szemközti szög,

$d_2$ ) két egyenlő szinuszú, de  $90^\circ$ -tól különböző szög és valamelyikkel szemközti oldal.

Az utolsó két esetben látszólag kevesebbet mondtunk ki, mint amennyit állíthattunk volna. Nem szóltunk ugyanis olyan gömbháromszögekről, amelyekben két oldal vagy szög  $90^\circ$ -os, egy szemközti szög vagy oldal pedig  $90^\circ$ -tól különböző. Ilyen gömbháromszög azonban nincs (lásd B2).

Az egybevágóságot valamennyi esetben könnyen bizonyíthatnók elemi úton is.

A  $c_1), c_2), d_1), d_2)$  esetekben megszorítás is szerepel. Kijelentéseink ilyen megszorítás nélkül nem volnának helyesek. Két gömbháromszög nem feltétlenül egybevágó, ha bennük két különböző szinuszu oldal és a kisebbik szinuszuval szemközti szög, vagy pedig két különböző szinuszu szög és a kisebbik szinuszuval szemközti oldal egyezik meg. Ezt a 279. ábrán bemutatott  $A_1B_1C$  és  $A_2B_2C$ , valamint  $A_1B_1C$  és  $A_2B_2C$  gömbháromszögek egybevetése mutatja. Ezen az ábrán az  $A_1, A_2$  pontok átellenesek, a  $CB_1, CB_2$  főkörívek egyenlők, az  $A_1B_2, A_2B_1$  főkörívek viszont nem egyenlők. Nem feltétlenül egybevágó két gömbháromszög akkor sem, ha bennük két-két oldal vagy szög  $90^\circ$ -os, továbbá egy-egy szemközti szög vagy oldal egyenlő. Ezt azok a gömbháromszögek mutatják, amelyek tetszőleges gömbkétszögből keletkeznek, ha azt az oldalak középpontját összekötő főkörívvel kettévágjuk.



279

**B2** A gömbháromszöget meghatározó adatok között bizonyos összefüggések állnak fenn. Ha olyan értékeket adunk meg, amelyek ezeket nem elégítik ki, akkor belőlük gömbháromszöghöz nem juthatunk. Az alábbiakban ilyen összefüggésekről lesz szó.

A háromszög-egyenlőtlenség és a gömbi felesleg tétele szerint (lásd 29.5 és 29.8)

- (1)  $a + b > c$ ,
- (2)  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$

Ha ezeket az összefüggéseket a polárgömbháromszögre írjuk fel, akkor belőlük 33.4 második tétele alapján az

- (3)  $\alpha + \beta - \gamma < \pi$ ,
- (4)  $a + b + c < 2\pi$

egyenlőtlenségekhez jutunk.

Bebizonyítjuk, hogy

(5) ha  $a$  és  $b$  egyenlők vagy kiegészítő szögek, akkor  $a$  és  $\alpha$  vagy mindketten hegyesszögek, vagy mindketten derékszögek, vagy pedig tompaszögek.

Mindjárt azt is kimondhatjuk, hogy

(6) ha  $\alpha$  és  $\beta$  egyenlők vagy kiegészítő szögek, akkor  $a$  és  $\alpha$  vagy mindketten hegyesszögek, vagy mindketten derékszögek, vagy pedig tompaszögek,

hiszen ezt kapjuk, ha a bizonyítandó állítást a polárgömbháromszögre alkalmazzuk. Ezek szerint, ha az  $a = b$ ,  $\alpha = \beta$ ,  $a + b = \pi$ ,  $\alpha + \beta = \pi$  feltételek valamelyike teljesül, akkor  $a$  és  $\alpha$  ugyanolyan szögek, ti. hegyesszögek, derékszögek vagy tompaszögek.

Állításunk bizonyítása végett írjuk fel a  $b = \alpha$ , majd a  $b = \pi - \alpha$  esetben az a oldalra vonatkozó koszinusztételt:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \alpha \cos c + \sin \alpha \sin c \cos \alpha, \\ \cos \alpha &= -\cos \alpha \cos c + \sin \alpha \sin c \cos \alpha.\end{aligned}$$

Innen  $\cos \alpha$  számára rendre a

$$\cos \alpha = \frac{1 - \cos c}{\sin \alpha \sin c} \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{1 + \cos c}{\sin \alpha \sin c} \cos \alpha$$

kifejezések adódnak. Minthogy itt a jobb oldali első tényezők pozitívak,  $\cos \alpha$  és  $\cos c$  előjele mind a két esetben megegyezik, illetőleg értékük csak egyszerre lehet 0. Ez állításunk helyességét bizonyítja.

Az ebben a megjegyzésben említett feltételek természetesen úgy értendők, hogy bennük az  $a, b, c$  oldalak szerepét szabadon cserélhetjük, velük együtt cserélve a megfelelő  $\alpha, \beta, \gamma$  szögeket is.

**B3\*** A B1-ben említett nyolc eset mindegyikére bebizonyítjuk, hogy ha a három ( $0$  és  $180^\circ$  közötti) adat nem ütközik az előző megjegyzés tilalmaiba, akkor mindig van ilyen adatokkal rendelkező gömbháromszög. Már tudjuk, hogy több gömbháromszög nem felelhet meg, tehát minden esetben egyetlenegy gömbháromszöghöz jutunk.

Nem kell külön foglalkoznunk az  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  esetekkel. A három adat kiegészítő szöge ugyanis a polárgömbháromszög három adata, mégpedig rendre az  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  esethez tartozó adathármas. Feltételeink ezekre az adathármasokra is teljesülnek, mert a nyolc feltétel páronként ugyanazt állítja a gömbháromszögre, mint amit a párja a polárgömbháromszögre mond ki. Ezért az említett adathármashoz tartozik gömbháromszög, ennek a polárgömbháromszöge pedig az eredeti kíváncsolomnak felel meg.

A  $b_1)$  esetben alig van alátámasztásra szükség. Ha ugyanis  $a, b$  és  $\gamma$  adott, akkor egy  $\gamma$  szögű gömbkétszög két oldalára egy csúcsból kiindulva felmérhetjük az  $a, b$  oldalakat. Ez a csúcs a két végponttal együtt egy gömbháromszöget határoz meg. Ez eleget tesz a követelményeknek.

Megemlítjük, hogy az előző bekezdés értelmében már a  $b_2)$  esetet is elintéztük.

Az  $a_1)$  esetben az  $a, b, c$  adatokból a  $c$  oldalra felírt koszinusztétel alapján  $\cos \gamma$  értékét számíthatjuk ki. Ez a számítás 1-nél kisebb abszolút értékű eredményhez vezet, mert a

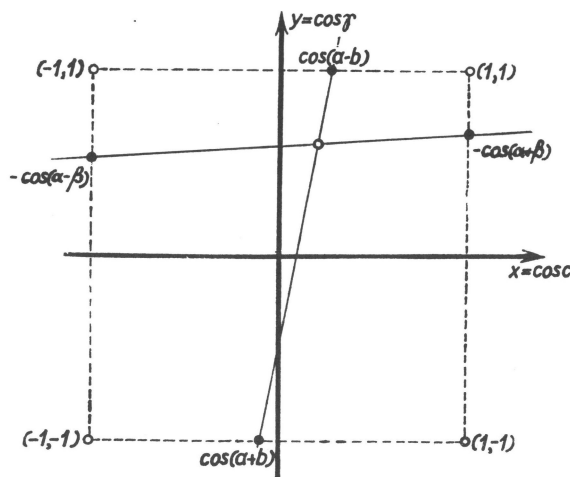
$$\begin{aligned}\cos < \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b), \\ \cos > \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b),\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Az első egyenlőtlenség esetében ez abból következik, hogy (1) szerint  $|a - b| < c < \pi$ , másodikon pedig abból, hogy (1) és (4) folytán  $0 < c < a + b, c < 2\pi - a - b$ .

Eszerint a  $\gamma$  szög valóban meghatározható. Az  $a, b, \gamma$  adatokhoz a már elintéztett  $b_1)$  eset szerint található egy gömbháromszög. Minthogy  $c$  értékére a rá felírt koszinusztétel teljesül, a kapott gömbháromszög harmadik oldala valóban  $c$ -vel egyenlő.

A  $c_1), d_1)$  esetekkel egyszerre foglalkozunk, de itt hosszabb okoskodásra van szükség. Azzal kezdjük, hogy az  $a, b, \alpha$  adatokból a szinusztétel alapján 1-nél kisebb abszolút értékű  $\sin \beta$  értékhez jutunk, hiszen a  $c_1)$  esetben  $\sin a > \sin b$ , a  $d_1)$  esetben pedig  $\sin a = \sin b$ , azonban B2 miatt  $\sin a < 1$ . A  $\beta$  szöget úgy határozzuk meg, hogy nagyobb (ugyanakkora) oldallal szemben nagyobb (ugyanakkora) szög legyen.

Be kell látnunk, hogy az  $\alpha, b, \alpha, \beta$  értékekkel felírt, a 282. oldalon említett egyenletrendszernek van megoldása, s hogy  $\cos c$  és  $\cos \gamma$  adódó értékei abszolút értékben 1-nél kisebbek. Ebben a bizonyításban egyszerűbb szövegezés kedvéért koordináta-rendszerrel dolgozunk, és az egyenes egyenletének az ismeretére is építünk (lásd 34.2 és 37.2). Egyenleteink az  $x = \cos c$ ,  $y = \cos \gamma$  változóiban lineárisak, tehát egyenesekkel ábrázolhatók (280. ábra). Azt kell igazolnunk, hogy ezek az egyenesek az  $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$  csúcsú négyzeten belül metszik egymást (280. ábra). Az első egyenletből kiolvasható, hogy egyenese az  $y = 1$  egyenest  $\cos(\alpha - b)$  abszcisszájú, az  $y = -1$  egyenest pedig  $\cos(\alpha + b)$  abszcisszájú pontban metszi. Ugyanígy láthatjuk be, hogy a második egyenlet egyenese az  $x = 1$  és  $x = -1$  egyeneseket rendre  $-\cos(\alpha + \beta)$  és  $-\cos(\alpha - \beta)$  ordinátájú pontokban metszi. Egyik egyenes sem haladhat át sem a  $(-1, 1)$  sem az  $(1, -1)$  ponton, mert ebből az első egyenesnél  $\cos(\alpha - b) = -1$  vagy  $\cos(\alpha + b) = 1$ , második egyenesnél pedig  $\cos(\alpha - \beta) = -1$  vagy  $\cos(\alpha + \beta) = 1$  következne, márpedig  $180^\circ$ -nál kisebb pozitív szögek körében  $-\pi < \alpha - b < \pi$ ,  $0 < \alpha + b < 2\pi$ ,  $-\pi < \alpha - \beta < \pi$  és  $0 < \alpha + \beta < 2\pi$ . Sem a  $(-1, -1)$ , sem az  $(1, 1)$  pont nem tartozhatik hozzá mindkét egyenesünkhöz; ez ugyanis az első esetben azt követelné meg, hogy  $\cos(\alpha + b) = -1$  és  $\cos(\alpha - \beta) = 1$  fennálljon, azaz  $\alpha + b = \pi$  és  $\alpha = \beta$  teljesüljön, a második esetben pedig azt, hogy  $\cos(\alpha - b) = 1$  és  $\cos(\alpha + \beta) = -1$  folytán az  $a = b$ ,  $\alpha + \beta = \pi$  összefüggések teljesüljenek; egyik eset sem lehetséges, mert egyrészt  $\alpha + b = \pi$  esetén a  $d_1$  eset megszorítása folytán  $\alpha \neq b$  és ezért  $\beta$  megválasztásából kifolyólag  $\alpha \neq \beta$ , másrészt pedig  $\alpha \neq b$  esetén ismét  $d_1$  megszorítása miatt  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , (5) miatt tehát  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , végül  $\beta$  megválasztása folytán  $\beta = \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , és ennek következtében  $\alpha + \beta \neq \pi$ . Ezek szerint ez a két egyenes négyzetünk két-két szemközti oldalát köti össze, de egyik csúcs sem lehet közös pontjuk. Ezért az egyenesek egymást valóban a négyzet belsejében metszik.



280

Miután  $c$  és  $\gamma$  értékét is meghatároztuk, a már elintézett  $b_1$  eset alapján tudjuk, hogy van az  $\alpha, b, \gamma$  értékekhez tartozó  $H$  gömbháromszög. Jelölje  $\alpha_1$  és  $\beta_1$  ennek másik két szögét.  $H$  harmadik oldala a  $c$  érték, hiszen ez a rá felírt koszinusztételt kielégíti. Be akarjuk látni, hogy  $\alpha_1 = \alpha$ , hogy tehát  $H$  eredeti követelményeinket is kielégíti.



Először csak azt bizonyítjuk, hogy  $\sin \alpha = \sin \alpha_1$  és  $\sin \beta = \sin \beta_1$ . Abból indulunk ki, hogy ezekre a szögekre a

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c, \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos c\end{aligned}$$

egyenletek teljesülnek, hiszen az első  $c$  és  $\gamma$  meghatározásakor kimondtuk, a második pedig a  $H$ -ra érvényes koszinusztétel. Hasonló indokolással

$$(*) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1}$$

is érvényes, hiszen a bal oldalra  $\beta$  meghatározásakor mondtuk ki, a jobb oldalra pedig a szinusztételből tudjuk, hogy a  $\sin a : \sin b$  hányadossal egyenlő. A fentebbi két egyenletből

$$-\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c = -\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos c,$$

tehát  $|\cos c| < 1$  miatt

$$(**) \quad |\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha_1 \sin \beta_1| < |\sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha_1 \sin \beta_1|$$

következik. Feltesszük, hogy a két megcsillagozott összefüggésen kívül  $\sin \alpha \neq \sin \alpha_1$  és ezért  $\sin \beta \neq \sin \beta_1$  is teljesül. Ebből ellentmondásra következtetünk, s ezáltal bebizonyítjuk, hogy  $\sin \alpha = \sin \alpha_1$  és ezért  $\sin \beta = \sin \beta_1$  is valóban teljesül.

Az  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$  szögek nem nagyobbak  $180^\circ$ -nál, de most feltehetjük, hogy nem nagyobbak  $90^\circ$ -nál sem. Ha ugyanis a tompaszögeket kiegészítő szögükkel pótoljuk, akkor a szinuszuk nem változik meg,  $(**)$  bal oldala pedig csak csökkenhet azáltal, hogy a különbség mindkét tagja helyébe annak abszolút értéke lép. Feltehetjük azt is, hogy  $\alpha > \alpha_1$ , és így  $(*)$  folytán  $\beta > \beta_1$  hiszen  $\alpha$  és  $\alpha_1$ , valamint  $\beta$  és  $\beta_1$  szerepe most felcserélhető. Feltevéseink alapján a  $(**)$  egyenlőtlenség

$$\cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha \cos \beta < \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha_1 \sin \beta_1$$

alakban írható. Eszerint  $\cos(\alpha - \beta) > \cos(\alpha_1 - \beta_1)$ , és ezért

$$|\alpha - \beta| < |\alpha_1 - \beta_1|.$$

Ebből következik, hogy  $\alpha_1 \neq \beta_1$  és  $\sin \alpha_1 \neq \sin \beta_1$ , hogy továbbá  $(*)$  folytán  $\sin \alpha \neq \sin \beta$  és  $\alpha \neq \beta$ . Ezek szerint  $(*)$ -ból a

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\sin \alpha_1 + \sin \beta_1}{\sin \alpha_1 - \sin \beta_1}$$

egyenlethez juthatunk. Ezt a tangens-tétel levezetésekor is használt átalakítással (lásd 263. oldal)

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}}$$

alakban írhatjuk, hiszen  $\alpha \neq \beta$  és  $\alpha_1 \neq \beta_1$  miatt itt derékszög még a számlálókban sem szerepel, s ezért az átalakítás során a koszinuszokkal valóban oszthatunk. A két számláló közül  $\alpha > \alpha_1$  és  $\beta > \beta_1$  miatt a bal oldali a nagyobb. Ezért a nevezők abszolút értékei közül is a bal oldali a nagyobb, tehát

$$|\alpha - \beta| > |\alpha_1 - \beta_1|.$$

Ez ellentmond korábbi eredményünknek, tehát állításainkat bizonyítja.

Beláttuk már, hogy az  $\alpha, b, \gamma$  adatokkal szerkesztett gömbháromszög  $\alpha_1, \beta_1$  szögeire

$$\sin \alpha = \sin \alpha_1, \quad \sin \beta = \sin \beta_1.$$

Ha a  $\cos \alpha, \cos \beta$  értékeket meghatározó második egyenletet a  $H$  gömbháromszög  $\gamma$  szögére felírt koszinusztétellel egybevetjük, akkor a

$$\cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha_1 \cos \beta_1$$

eredményhez jutunk. Ezek szerint két lehetőséggel kell számolnunk: vagy  $\alpha = \alpha_1$  és  $\beta = \beta_1$ , vagy pedig  $\alpha$  és  $\alpha_1$  valamint  $\beta$  és  $\beta_1$  egymással nem egyenlő kiegészítő szögek. Feltételezzük, hogy ez utóbbi lehetőség következik be, s ebből ellentmondáshoz jutunk. Ez majd azt bizonyítja, hogy  $\alpha = \alpha_1$ , valóban mindig teljesül.

Ha  $\alpha \neq \beta$ , mégpedig pl.  $\alpha > \beta$ , akkor a  $H$  gömbháromszög szögeire  $\alpha_1 > \beta_1$  s ebből a kiegészítő szögekre  $\alpha < \beta$  következik. Ez ellentmond annak, hogy  $\beta$  megválasztásakor az  $\alpha > \beta$  feltételt tartottuk be.

Ha  $\alpha = \beta$ , akkor a  $\alpha_1$  eset megszorítása szerint  $\alpha$  nem derékszög. Minthogy (5) az eredeti  $\alpha, b$ ,  $\alpha$  adatokra, meg a  $H$  gömbháromszög adataira is teljesül,  $\alpha$  és  $\alpha_1$  mindketten hegyesszögek vagy tompaszögek aszerint, hogy a milyen szög. Ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy  $\alpha$  és  $\alpha_1$  kiegészítő szögek.

**B4** Láttuk, hogy ha B1 nyolc esetének valamelyikéhez tartozó három adat nem mond ellent B2 feltételeinek, akkor ezek mindig egyetlenegy gömbháromszöget határoznak meg. Most megvizsgáljuk, hogy ha a gömbháromszög oldalai és szögei közül hármat megadunk, de ez az adathármas nem tartozik B1 eseteihez, viszont kielégíti B2 feltételeit, akkor hány gömbháromszög tartozik hozzá. Az adatok megválasztásának lehetőségeit ismét párokba soroljuk, az egyik olyan adatokból áll, mint amilyenek a másiktól a polárgömbháromszögre adódnak.

$e_1$ ) Ha két különböző szinuszu oldal és a kisebb szinuszuval szemközti szög van adva. pl. a  $\sin a < \sin b$  feltételt kielégítő  $a, b$  oldal és az  $\alpha$  szög, akkor  $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$ , valamint  $\sin \beta \leq 1$  miatt csak akkor található az adatokhoz gömbháromszög, ha

$$(7) \quad \sin \alpha \geq \sin b \sin a$$

Ha ez teljesül, akkor a szinusztétel abszolút értékben 1-gyel egyenlő vagy 1-nél kisebb  $\sin \beta$  értéket, tehát egy vagy két  $\beta$  szöget ad aszerint, hogy (7)-ben az egyenlőség vagy az egyenlőtlenség jele érvényes. Az így kapott  $\beta$  szög azonban akkor és csak akkor nem mond ellent

29.5 második tételének, ha  $\alpha$  hegyesszög vagy tompaszög aszerint, amint  $a < b$ , vagy  $a > b$ , hiszen a konvex szögek körében bármely hegyesszög a nagyobb szinuszuaknál kisebb, bármely tompaszög pedig nagyobb. A megoldhatóságnak ez a feltétele másként fogalmazva azt jelenti, hogy

(8) ha  $\sin a < \sin b$ , akkor  $a$  és  $\alpha$  vagy mindketten hegyesszögek, vagy mindketten tompaszögek

hiszen az imént mondottak szerint  $a < b$  vagy  $a > b$  éppen aszerint teljesül, hogy  $a$  hegyesszög-e vagy tompaszög. Ha 29.5 második tételét kielégítő  $\beta$  szöghöz jutottunk, akkor már azt tekinthetjük feladatunknak, hogy az  $a$ ,  $b$ ,  $\beta$  adatokhoz tartozó gömbháromszöget keressük, hiszen ezekből az adatokból egyértelműen az eredetileg adott  $\alpha$  szöghöz jutunk. Minthogy az utóbbi feladatnak egyetlenegy megoldása van, eredeti feladatunknak (7) és (8) teljesülése esetén egy vagy két megoldása van aszerint, amint (7)-ben az egyenlőség vagy az egyenlőtlenség jele érvényes.

$e_2$ ) Ha két különböző szinuszu szög és a kisebb szinuszuval szemközti oldal van adva, akkor ezekből az adatokból a polárgömbháromszög  $e_1$ ) esethez tartozó adathármasa adódik. Ha belőlük gömbháromszöghöz jutunk, akkor annak polárgömbháromszöge az eredeti feladat megoldása. Az  $e_1$ ) eset tárgyalásából következik tehát, hogy a  $\sin \alpha < \sin \beta$  feltételt kielégítő  $\alpha$ ,  $\beta$  szögekhez és az  $\alpha$  oldalhoz csak akkor található gömbháromszög, ha

$$(9) \sin \alpha \geq \sin \beta \sin \alpha,$$

továbbá az a feltétel is teljesül, hogy

(10) ha  $\sin \alpha < \sin \beta$ , akkor  $a$  és  $\alpha$  vagy mindketten hegyesszögek, vagy pedig mindketten tompaszögek.

Az is következik, hogy egy vagy két megoldás található aszerint, amint (9)-ben az egyenlőtlenség vagy az egyenlőség jele érvényes.

$f_1$ ) Ha két  $90^\circ$ -os oldal és egy szemközti szög van adva, akkor (5) szerint ez utóbbi is csak  $90^\circ$ -os lehet. Ekkor természetesen a másik szemközti szög is  $90^\circ$ -os, a harmadik oldal és szög pedig, amint B1 utolsó bekezdésében már láthattuk, tetszőleges lehet. Ilyenkor tehát végtelen sok megoldás van.

$f_2$ ) Ha két  $90^\circ$ -os szög és egy szemközti oldal van adva, akkor (6) szerint ez utóbbi is csak  $90^\circ$ -os lehet. Ekkor ugyanazokhoz a gömbháromszögekhez jutunk, mint az imént, hiszen a másik  $90^\circ$ -os szöggel szemközti oldal ugyancsak  $90^\circ$ -os. Eszerint itt is végtelen sok megoldás van.

Minden lehetőséget áttekintettünk. A B2-ben már említett hat feltétellel együtt összesen tíz feltételt találtunk. Mindezekben a feltételekben természetesen szabadon cserélhetjük a gömbháromszög oldalait és velük együtt a szemközti szögeit. Az oldalakra és a szögekre vonatkozó (0 és  $180^\circ$  közötti) három adathoz akkor és csak akkor tartozik gömbháromszög, ha ezek az adatok tíz feltételünk tilalmát nem hágják át. Ilyen adatokhoz két kivétellel mindig egyetlenegy gömbháromszög tartozik (vö. 32.3 B2). Az egyik kivételes eset az, amikor két különböző szinuszu oldalt vagy szöget, valamint a kisebb szinuszuval szemközti szöget vagy oldalt adjuk meg, és a megfelelő (7) vagy (9) feltétel az egyenlőtlenség jelével teljesül; ilyenkor két megoldás van. A másik kivételes esetben két oldal és a két szemközti szög közül hármat adunk meg, és mindegyik adat  $90^\circ$ -os; ilyenkor végtelen sok gömbháromszög felel meg.

Mindezt közvetlenebbül, elemi úton is beláthattuk volna. Eljárásunknak megvan azonban az az előnye, hogy rámutat, a lehetetlen adatok a számítás során hol és hogyan lehetetlenülnek.

**B5** A szinusztétel és a koszinusztételek változatlanul helyesek akkor is, ha azokat a 29.3 B-ben bevezetett, a 238. ábrán bemutatott, általánosabb értelemben vett gömbháromszögekre mondjuk ki.

Ha ugyanis a 238. ábra a) gömbháromszögről a d) gömbháromszögre térünk át, akkor az oldalak változatlanok maradnak, a szögek helyébe pedig az azokat  $360^\circ$ -ra kiegészítő szögek lépnek. Ilyenkor

tehát a tételekben előforduló szögfüggvények közül csak a szögek szinuszai változnak meg, mégpedig előjelet váltanak. Ilyen előjelváltás után azonban mind a szinusztétel, mind a szögekre vonatkozó koszinusztétel helyes marad, az oldalakra vonatkozó koszinusztételben pedig szögszínusz nem is szerepel.

Elég most már csak azt ellenőriznünk, hogy a tételek akkor is helyesek maradnak, ha  $\alpha, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  helyébe rendre

$$2\pi - \alpha, b, c, 2\pi - \alpha, 2\pi - \beta, 2\pi - \gamma$$

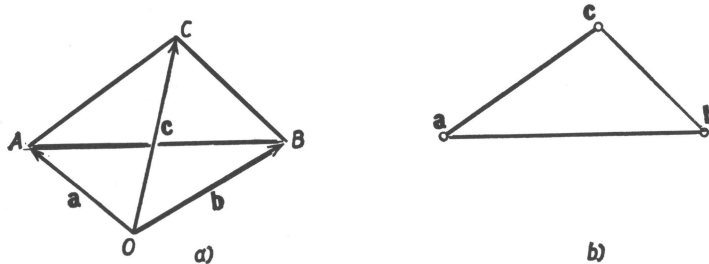
lép, mert így változnak meg az adatok, ha a 238. ábrán bemutatott gömbháromszögek közül a)-ról b)-re térünk át, és akkor is, ha d) adatainak helyébe c) adatait írjuk. Könnyen ellenőrizheti az olvasó, hogy tételeink a mondott változtatás után is helyesek maradnak. Meg kell itt azonban jegyezni, hogy a  $c$  oldalra, valamint a  $\gamma$  szögre felírt koszinusztétel vizsgálata után az  $a$ -ra és az  $\alpha$ -ra felírt tétel megvizsgálására is szükség van.

## 34. § Koordináta-rendszer

A vektorok koordinátáiról már 30.6-ban szóltunk. Itt a pontok koordinátáit vezetjük be. Foglalkozunk az irányok számszerű jellemzésével, a koordináta-rendszer megváltoztatásával és a kevésbé szokásos koordináta-rendszerekkel is.

**34.1** Ha egy  $O$  kezdőpontot (origó) adunk meg, akkor bármely  $P$  pont helyzetét jellemezhetjük az  $\overrightarrow{OP}$  helyvektor (helyzetvektor) megadásával. Ha csak egy sík pontjainak, vagy csak egy egyenes pontjainak jellemzéséről van szó, akkor a kezdőpontot a síkban, illetve az egyenesen vesszük fel.

A pontok helyvektorát többnyire a pontot jelölő nagybetűnek megfelelő kisbetűvel jelöljük. Az  $A(\mathbf{a})$  írásmód azt jelenti, hogy  $\mathbf{a}$  az  $A$  pont helyvektora. Ábránk egyszerűsítése érdekében magukat a pontokat is helyvektoruk jelével jelölhetjük. Ebben az esetben a helyvektorokat ábrázoló nyilakat is elhagyhatjuk, sőt ha a kezdőpont megválasztását semmi sem köti meg, akkor még a kezdőpont helyét sem adjuk meg. A 281. ábra bemutatja, hogy ez az eljárás az ábrát mennyire egyszerűsíti.



281

A vektorkivonás szabályából közvetlenül adódik, hogy az  $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b})$  pontok összekötő vektora

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

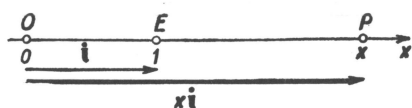
**34.2** A pont helyvektorának koordinátáit a pont (derékszögű) *koordinátáinak* nevezzük. A pontok koordinátáinak bevezetésekor a *kezdőpont* (origó) megadásán kívül szükség van tehát arra, hogy a vektorkoordinátákat meghatározó alapvektorokat is megadjuk. Ezeket az alapvektorokat *koordináta-egységvektoroknak* is mondjuk. A kezdőponton át e vektorokkal párhuzamosan húzott egyeneseket *koordinátatengelyeknek* nevezzük. A koordináta-egységvektorok a koordinátatengelyeknek irányítást adnak, amelyet rajzban az egyenesek megnyílásával szoktunk jelölni. A nyíl mellé szoktuk írni, hogy a megfelelő koordinátát milyen betűvel jelöljük. A koordinátatengelyek együttesét *tengelykeresztnek* mondjuk. Ha a hosszegység ismeretes, akkor az irányított tengelyekből álló

tengelykereszt megadásával már jellemeztük azt, hogy melyik ponthoz milyen koordináták tartoznak, tehát *koordináta-rendszert* adtunk meg.

Ha az egyenes pontjait akarjuk koordinátákkal jellemezni, akkor egyetlen koordináta-egységvektort kell csak megadni, elegendő tehát az egyenes irányítása és a hosszegység megadása. A pont helyzetét most egyetlen koordináta határozza meg. A  $P$  pont koordinátája  $x$ , ha helyvektora

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i},$$

ahol  $\mathbf{i}$  a választott egységvektor (282. ábra). Ha ilyen módon az egyenes minden pontjához egy-egy koordinátát, számot rendeltünk, *számegyeneshez* jutottunk. Ebben az egydimenziós koordináta-rendszerben minden valós számhoz egy-egy pont tartozik. Az  $x$  koordinátájú pontot  $P(x)$  vagy  $(x)$  is jelölheti. A kezdőpont koordinátája 0. Az 1 koordinátájú pontot *egységpontnak* nevezzük. A koordináta-rendszert a kezdőpont és az egységpont megadásával jellemezhetjük. A pozitív koordinátájú és a negatív koordinátájú pontok a kezdőpont által meghatározott félegyenesek egyikén és másikon, a pozitív és a negatív félegyenesen helyezkednek el. Az egyenes esetében koordinátatengelyről nem beszélünk.

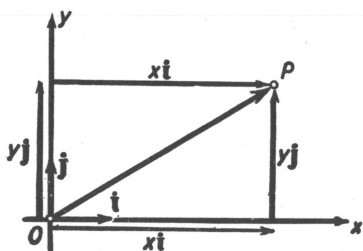


282

A sík pontjainak koordinátákkal való jellemzésénél két koordináta-egységvektor megadására van szükség, a pontoknak tehát két koordinátájuk van. Ezeket  $x, y$  betűkkel szokás jelölni. A  $P$  pont koordinátái  $x$  és  $y$ , ha helyvektora

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

ahol  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  a koordináta-rendszer két egységvektora (283. ábra). Ezt a  $P$  pontot  $P(x, y)$  vagy  $(x, y)$  is jelölheti. A  $(0, 0)$  pont a kezdőpont. Ebben a kétdimenziós koordináta-rendszerben minden valós számokból álló  $x, y$  számpárhoz egyetlen pont tartozik. Ha a koordinátákat  $x, y$  betűkkel jelöljük, a két koordinátatengelyt  $x$ -tengelynek és  $y$ -tengelynek mondjuk. A két tengely merőleges egymásra, és metszéspontjuk a kezdőpont. Az első koordinátát *abszcisszának*, a másodikat *ordinátának* is nevezzük, és ennek megfelelően abszcisszatengelyről és ordinátatengelyről beszélünk. *Ordinátának* mondjuk a pontból az abszcisszatengelyre bocsátott merőleget is. Egy pontból a két tengelyre bocsátott merőlegesek előjeles hossza a két koordinátát szolgáltatja; pozitívnak vagy negatívnak veendő ez a hossz aszerint, amint a tengelytől a pont felé irányított merőleges a megfelelő tengellyel egyező vagy ellentétes irányú. A kezdőpont és a koordináta-egységvektorok a tengelyek mindegyikén egy-egy egydimenziós koordináta-rendszert határoznak meg; egy síkbeli pont koordinátái a pont tengelyekre vetett merőleges vetületeinek koordinátái ezekben az egydimenziós koordináta-rendszerekben. A két tengely a síkot négy derékszögű szögtartományra vágja fel. Ezek közül azt, amelyiket a tengelyek pozitív félegyenesei határolnak, *első síknegyednek* szokás mondani. Ez azokat a pontokat tartalmazza, amelyeknek mindkét koordinátája pozitív. A másik három síknegyedben vagy az abszcissza, vagy az ordináta, vagy mindkettő negatív.

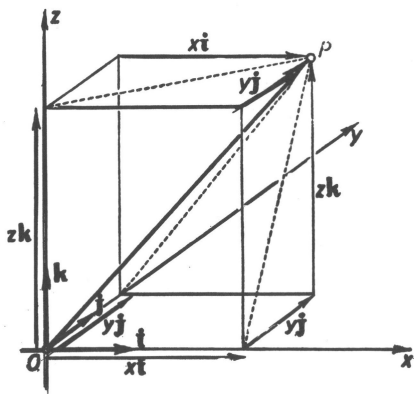


283

A tér pontjainak koordinátákkal való jellemzésénél három koordináta-egységvektor szerepel, a pontoknak tehát három koordinátájuk van. Ezeket  $x, y, z$  betűkkel szokás jelölni. A  $P$  pont koordinátái  $x, y$  és  $z$ , ha helyvektora

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

ahol  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  a koordináta-rendszer három egységvektora (284. ábra). Ezt a  $P$  pontot  $P(x, y, z)$  vagy  $(x, y, z)$  is jelölheti. A  $(0, 0, 0)$  pont a kezdőpont. A térbeli koordináta-rendszerben minden valós számokból álló  $x, y, z$  számhármashoz egy-egy pont tartozik. Ha a koordinátákat  $x, y, z$  betűkkel jelöljük, a koordinátatengelyeket  $x$ -tengelynek,  $y$ -tengelynek és  $z$ -tengelynek mondjuk. A tengelyek egymást a kezdőpontban merőlegesen metszik. Két-két tengely síkját *koordinátasíknak* nevezzük. Egy pont koordinátáit megkapjuk, ha a pontból a koordinátasíkokra bocsátott merőlegesek hosszát megfelelő előjellel vesszük; ez az előjel pozitív vagy negatív aszerint, amint a koordinátasíktól a pont felé irányított merőleges a megfelelő tengellyel egyező vagy ellentétes irányú. Egy pont koordinátáit úgy is megkaphatjuk, hogy a pont tengelyekre vetett merőleges vetületeinek koordinátáit tekintjük azokban az egydimenziós koordináta-rendszerekben, amelyeket az egyes tengelyeken a kezdőpont a megfelelő koordináta-egységvektorral együtt meghatároz. A három koordinátasík a teret nyolc derékszögű szögletre vágja szét. Ezek közül az az *első térfelület*, amelynek az élei a tengelyek pozitív félegyenesei. Ez azokat a pontokat tartalmazza, amelyeknek minden koordinátája pozitív.



284

**A1** A vektorok alkalmazása révén kevesebb és egyszerűbb képlet megjegyzésére van szükség.

Nem kell pl. képletet megtanulni két pont távolságának a kiszámítására, hiszen a  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  és  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  pontok összekötő vektora az előző szakasz szerint  $\overrightarrow{P_1P_2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ , ennek hossza pedig a koordinátáinak négyzetösszegéből vont nem negatív négyzetgyök. Ez a megjegyzés is mutatja, hogy a vektorműveletek megtanulására fordított energia bőven megtérül.

**A2** Ha a sík pontjainak és síkbeli vektoroknak koordinátáiról van szó, mindig úgy gondolkozhatunk, hogy a harmadik koordináta 0, és ezt ki sem írjuk, hiszen síkunkat mindig a térbeli koordináta-rendszer koordinátasíkjának képzelhetjük. A térbeli háromkoordinátás formulákból úgy jutunk tehát a síkbeliekhez, hogy a harmadik koordináta helyébe mindenütt 0-t írunk, vagyis ezt a koordinátát elhagyjuk. Ez a megjegyzés pl. az előző megjegyzésben mondottakra is vonatkozik.

**B** Szokásos az is, hogy a koordinátákat  $x, y, z$  helyett  $x_1, x_2, x_3$  az alapvektorokat pedig  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  helyett  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  jelöli. Ennek a jelölésmódnak előnye, hogy ha egyszerre akarunk beszélni síkbeli és térbeli koordináta-rendszerről, akkor  $x_1, \dots, x_n$  jelölheti a koordinátákat, és  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  koordináta-egységvektorokat, mert ez az írásmód  $n = 2$  esetben a kétdimenziós,  $n = 3$  esetben pedig a háromdimenziós koordináta-rendszernek felel meg.

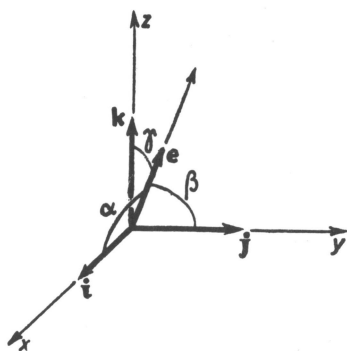
**34.3** Azzal foglalkozunk, hogy koordináta-rendszer használatakor hogyan lehet az irányokat számokkal jellemezni. Az adott irányba mutató, nullvektortól különböző vektort *irányvektornak* nevezzük. Az irányvektor hossza tehát tetszőleges 0-tól különböző érték lehet. Egy irányt bármely irányvektorával, s így ennek koordinátaival is jellemezhetjük. Az irányvektorok közül sokszor az 1 hosszúságú *irány-egységvektort* használjuk.

**Tétel.** Az irány-egységvektor koordinátái az irány és a tengelyirányok hajlásszögeinek koszinuszai.

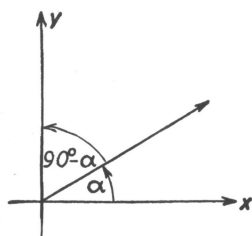
Ezeket a koszinuszokat *iránykoszinuszoknak* nevezzük.

*Bizonyítás.* Az  $\mathbf{e}$  egységvektor koordinátái 32.4 szerint az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  vektorokkal alkotott skaláris szorzatai (285. ábra). Egységvektorok skaláris szorzata viszont hajlásszögük koszinuszával egyenlő. —

Tételünkéből következik, hogy egy irány iránykoszinuszainak négyzetösszege 1. A skaláris szorzatra hivatkozva az is nyomban adódik, hogy két irány hajlásszögének koszinuszát megkapjuk, ha megfelelő iránykoszinuszok szorzatát összeadjuk.



285



286

Az elmondottakat a síkbeli esetre is alkalmazhatjuk. Síkban azonban, amint ezt 31.6-ban a vektorokról szólva már megemlítettük, az irányt egyetlen szöggel, *irányszögevel* is jellemezhetjük. Ez a szög az  $x$ -tengely iránya és az adott irány által meghatározott irányított szög, vagyis az irányvektor irányszöge. Az iránykoszinuszok helyébe most az irányszög koszinusza és szinusza lép, hiszen az  $\alpha$  irányszögű irányt az  $y$ -tengely irányába átvivő elforgatás mértéke  $90^\circ - \alpha$  (286. ábra).

Ha nem akarunk megkülönböztetést tenni egy irány és az ellentétes irány között, ha tehát csak állást akarunk jellemezni, akkor elég az iránykoszinuszok viszonyát megadni, hiszen a viszonyt meghatározó számok egy az irány-egységvektorral párhuzamos vektor koordinátái. A síkbeli esetben az állást ezek szerint az irányszög szinuszának és koszinuszának a hányadosa, azaz az irányszög tangense, az *iránytangens* is meghatározza, feltéve természetesen hogy az irányszögnek van tangense,

azaz nem az  $y$ -tengely állásáról van szó. A  $\mathbf{v}(v_1, v_2)$  vektor iránytangense 31.6 szerint  $\frac{v_2}{v_1}$ , ha  $v_1 \neq 0$ . A most mondottak szerint irányítatlan egyenesnek és szakasznak is van iránytangense.

**34.4** Ha más koordináta-rendszerre térünk át, kiszámíthatjuk az egyik rendszerbeli koordinátákból a másik rendszerbelieket. Ezt a számítást *koordináta-transzformációnak* mondjuk. Itt csak azokról az esetekről beszélünk, amikor a hosszegység változatlan, és az új tengelykereszt elmozgatással keletkezik a régieből.

Ha az új koordináta-rendszer tengelyirányai a régiekével megegyeznek, a koordináta-rendszer *eltolásával* (tranzláció) van dolgunk. Ha a koordináta-rendszer elmozgatásakor a kezdőpont helyben marad, akkor a koordináta-rendszer *elforgatásáról* beszélünk. Világos, hogy eltolást követő elforgatással minden elmozgatással keletkező új koordináta-rendszerre áttérhetünk.

**Tétel.** Ha a koordináta-rendszer eltolásakor a régi koordinátákat  $x, y, z$ , az új koordinátákat pedig  $x', y', z'$  jelöli, ha továbbá az új kezdőpont koordinátái a régi koordináta-rendszerben  $x_0, y_0, z_0$  akkor

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0$$

és

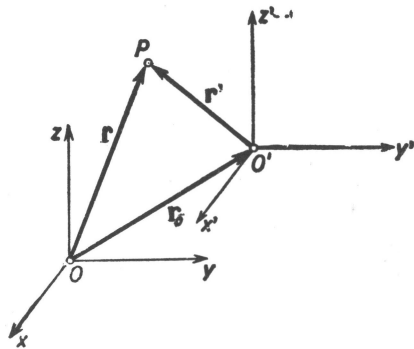
$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0.$$

A síkbeli esetben a  $z$  koordináták természetesen nem szerepelnek.

*Bizonyítás.* Jelölje  $O$  és  $O'$  a régi és új kezdőpontot (287. ábra). Az  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OO'}$ ,  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'P}$  vektorokra

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0.$$

vektoregyenlőségek az  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{r}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}'(x', y', z')$  vektorok koordinátáira a tételben kimondott összefüggéseket adják. —



287

**Tétel.** Ha a koordináta-rendszer elforgatásakor a régi és új koordinátákat  $x, y, z$  és  $x', y', z'$  jelöli, akkor ezekre

$$x' = x \cos(\angle xOx') + y \cos(\angle yOx') + z \cos(\angle zOx'),$$

$$y' = x \cos(\angle xOy') + y \cos(\angle yOy') + z \cos(\angle zOy'),$$

$$z' = x \cos(\angle xOz') + y \cos(\angle yOz') + z \cos(\angle zOz')$$

és

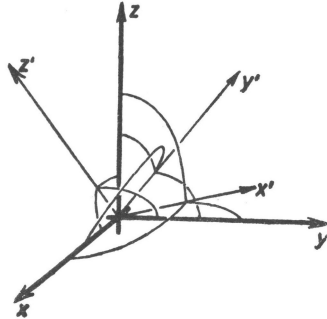
$$x = x' \cos(\angle x'Ox') + y' \cos(\angle x'Oy') + z' \cos(\angle x'Oz'),$$



$$y = x' \cos(yx') + y' \cos(yy') + z' \cos(yz'),$$

$$z = x' \cos(zx') + y' \cos(zy') + z' \cos(zz'),$$

ahol a zárójelök a megfelelő tengelyek hajlásszögét jelölik (288. ábra).



288

A tétel állításait az

|    | x           | y           | z           |
|----|-------------|-------------|-------------|
| x' | $\cos(xx')$ | $\cos(yx')$ | $\cos(zx')$ |
| y' | $\cos(xy')$ | $\cos(yy')$ | $\cos(zy')$ |
| z' | $\cos(xz')$ | $\cos(yz')$ | $\cos(zz')$ |

táblázatba tömöríthetjük. A koordináták bármelyikét úgy kaphatjuk meg a másik háromból, hogy azokat a megfelelő sorok és oszlopok keresztezésében álló számokkal megszorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk. A tétel által előírt helyettesítést *ortogonális helyettesítésnek* mondjuk.

*Bizonyítás.* Elegendő a tétel hat állításából egyet bizonyítanunk, hiszen sem a régi és az új koordináta-rendszer között, sem pedig egy koordináta-rendszer három tengelye között nincs semmiféle szerepkülönbség.

Ha a régi és új koordináta-egységvektorokat  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  és  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  jelöli, akkor  $P(x, y, z)$  pont

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

helyvektorát az  $\mathbf{i}'$  vektorral skalárisán szorozva

$$\mathbf{r}\mathbf{i}' = x\mathbf{i}\mathbf{i}' + y\mathbf{j}\mathbf{i}' + z\mathbf{k}\mathbf{i}'$$

adódik, ami a tételben kimondott első összefüggéssel azonos, hiszen  $\mathbf{r}\mathbf{i}' = x'$ , és egységvektorok skaláris szorzata hajlásszögük koszinusza. —

**Tétel.** Ha a síkbeli koordináta-rendszert a kezdőpont körül az irányított a szöggel elforgatjuk, akkor az eredeti  $x, y$  és az új  $x', y'$  koordinátákra

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

és

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

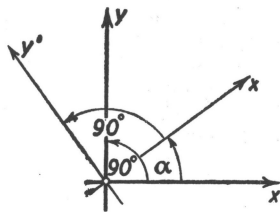
$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Az előző tétel után mondottak mintájára tételünk állítását az

|    | x              | y             |
|----|----------------|---------------|
| x' | $\cos \alpha$  | $\sin \alpha$ |
| y' | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ |

táblázatba tömöríthetjük.

*Bizonyítás.* Az előző tétel a síkban is alkalmazható. Ha a harmadik koordinátát tartalmazó tagokat elhagyjuk, akkor így nyomban a bizonyítandó összefüggésekhez jutunk, hiszen az  $(xx')$ ,  $(xy')$ ,  $(yx')$ ,  $(yy')$  irányított szögek mértéke rendre  $\alpha$ ,  $\alpha+90^\circ$ ,  $\alpha-90^\circ$ ,  $\alpha$  (289. ábra), koszinuszaik pedig  $\cos \alpha$ ,  $-\sin \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ . —



289

Az elmondottak részben magukban foglalják azt a közvetlenül belátható tényt, hogy ha a koordináta-rendszert a kezdőpontra, egy koordinátatengelyre vagy egy koordinátasíkra tükrözzük, akkor a szimmetriatengelyhez, valamint a szimmetriasíkban elhelyezkedő tengelyekhez tartozó koordináták változatlanok maradnak, a többi pedig előjelet vált.

**B** A koordináta-rendszer elforgatásakor fellépő összefüggések együtthatóit egy háromsoros és háromszlopos, illetőleg kétsoros és kétszlopos táblázatba, *mátrixba* foglaltuk. E mátrix soraiban az új alapvektorok régi rendszerbeli koordinátái, oszlopaiban pedig a régi alapvektorok új rendszerbeli koordinátái állanak. Ezért a mátrix minden sorában és oszlopában az elemek négyzetösszege 1, két különböző sor vagy két különböző oszlop skaláris szorzata (azaz megfelelő elemeik szorzatának összege) pedig minden esetben 0. Ez utóbbi tulajdonságot jelzi az algebra azáltal, hogy a szóban forgó mátrixokat *ortogonálisnak* mondja. Az elnevezés eredete éppen az, hogy derékszögű, azaz ortogonális koordináta-rendszer elforgatásakor ilyen mátrix lép fel.

Megemlítjük még, hogy mátrixaink determinánsa 1, s hogy minden elemük megegyezik az előjeles aldeterminánsával. A térbeli esetben ez abból adódik, hogy az **i**, **j**, **k** vektorok vegyesszorzata 1, s hogy bármelyikük a másik kettő vektoriális szorzata. A síkbeli esetben az állítás helyessége közvetlenül ellenőrizhető.

**34.5** A már megismert koordináta-rendszeren kívül sok másféle van. Ha megkülönböztetésre van szükség, akkor a már megismert koordinátákat *derékszögű (Descartes-féle) koordinátáknak* mondjuk<sup>\*1</sup>.

Általában *koordinátáknak* az olyan számokat nevezzük, amelyek valamely alakzatokból álló sokaság esetében megmondják, hogy a sokaság melyik alakzatáról van szó. Azt az előírást, amely megmondja, hogy melyik alakzathoz milyen koordináták tartoznak, *koordináta-rendszernek* nevezzük.

Így beszélhetünk a vektorok koordinátáiról is. A sokaság többnyire egybevágó alakzatokból áll, s a koordináták akkor azt mondják meg, hogy az alakzat milyen helyzetben van. A szóban forgó alakzat

<sup>\*1</sup> R. Descartes (ejtsd: dékart), 1596—1650, francia filozófus és matematikus. Nevének latinos alakja Cartesius.

legtöbbször pont, s ilyenkor *pontkoordinátákról* beszélhetünk, de erre a megkülönböztetésre ritkán van szükség.

A koordinátáktól megköveteljük, hogy a pontot (vagy alakzatot) egyértelműen határozzák meg. Nem kívánjuk viszont meg azt, hogy a pont (vagy alakzat) is egyértelműen határozza meg koordinátáit. Vannak és használatosak olyan koordináta-rendszerek, amelyeknél ugyanannak a pontnak a koordinátái többféleképpen is megválaszthatók. Megtehetjük pl., hogy két térbeli pontnak összesen hat koordinátáját összekötő szakaszuk felezőpontjának koordinátáit választjuk. Nem teszünk tehát semmiféle megszorítást arra vonatkozólag, hogy hány koordináta szerepel. Azt sem követeljük meg, hogy a koordináták mindenféle megválasztása mellett található legyen olyan pont (vagy alakzat), amelynek a választott értékek a koordinátái.

**B** Legyen adva egy  $S$  alakzatsokaság koordináta-rendszereinek egy  $H$  halmaza. Gondolhatunk pl. a síkbeli pontok valamennyi derékszögű koordináta-rendszerére. Legyen továbbá ismeretes az a szabály, amely  $S$  valamely alakzatának  $H$  tetszőleges két koordináta-rendszerében megválasztott koordinátáit egymáshoz rendeli, azaz eldönti, hogy ezek a koordináták ugyanannak az alakzatnak a koordinátái-e. Az említett példa esetében ezeket a transzformációs szabályokat 34.4 tartalmazza.

Rendeljünk most hozzá  $H$  minden koordináta-rendszeréhez olyan számokat, amelyek az illető koordináta-rendszerben egy alakzat koordinátái, s amelyek kielégítik az általunk ismert transzformációs szabályt. Az ilyen számcsoporthoz tehát  $H$  mindegyik koordináta-rendszerében ugyanahhoz az alakzathoz jutunk. Ezzel a módszerrel, bár egyes koordináta-rendszerekhez tapadó számokat adtunk csak meg, a koordináta-rendszer megválasztásától független *geometriai objektumhoz*, tárgyhoz jutottunk. Ez az analitikus geometriában szokásos eljárás nem *geometriai* módszerrel jellemez egy alakzatot, hanem *analitikus* módszerrel egy alakzathoz jut.

Változtatlanul ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha  $S$ -nek nem egyetlen alakzatáról, hanem bizonyos alakzatainak a halmazáról van szó. Ilyenkor természetesen nem  $H$  egy-egy koordináta-rendszeréhez rendelt számcsoporthoz, hanem ilyen számcsoporthoz halmazáról kell beszélni, és a transzformációs szabálynak is azt kell eldöntenie, hogy vajon  $H$  két koordináta-rendszeréhez tartozó számcsoporthalmaz ugyanazoknak az alakzatoknak az összességéhez vezet-e. Példa erre, ha a derékszögű koordináta-rendszereket választva alapul, egy irányú vektorok halmazának analitikus jellemzéséről, tehát irányok meghatározásáról van szó.

A vázolt analitikus módszer természetes velejárója, hogy ha alakzatoknak egymással vagy számokkal való kapcsolatait tárgyalja, állandóan ellenőrizni kell hogy tárgyalása a tekintett koordináta-rendszerek mindegyikében ugyanazt eredményezi-e (vö. 32.4 B).

**34.6** Ha az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  vektorok helyébe a nem egysíkú  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  alapvektorokat vezetjük be, a már megismert koordináták kétféle általánosításához juthatunk. Az egyik a koordináták eredeti definícióját, a másik 32.4 első tételét választja alapul.

A  $P(\mathbf{x})$  pont koordinátáit most is az  $\mathbf{x}$  vektor koordinátáit választjuk, de ezeket kétféleképpen definiáljuk. Az  $\mathbf{x}$  vektor *kontravariáns*  $x^1, x^2, x^3$  koordinátáit

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$$

(a felső index nem hatványkitevő!), *kovariáns*  $x_1, x_2, x_3$  koordinátáit pedig az

$$x_1 = \mathbf{x} \mathbf{e}_1, \quad x_2 = \mathbf{x} \mathbf{e}_2, \quad x_3 = \mathbf{x} \mathbf{e}_3$$

előírás definiálja. Az így bevezetett koordinátákat *Descartes-féle* koordinátáknak nevezzük. A már megismert derékszögű koordináták is ilyenek, de ott a kontravariáns és a kovariáns koordináták azonosak. A derékszögű koordinátáktól való megkülönböztetésül az újonnan bevezetetteket *ferdeszögű* koordinátáknak mondjuk. Ha ferdeszögű koordinátákról beszélünk, és semmi sem utal arra, hogy melyik fajtáról van szó, akkor a kontravariáns koordinátákra gondolunk, hiszen az eredeti definíció ezekhez vezet.

Mindez természetesen a síkra is áll, csak a harmadik koordinátát kell ott elhagyni. Ugyanígy vonatkoznak a síkra a most következők is.

Mindkét ferdeszögű koordinátafajtára változatlanul érvényes mindaz, amit 30.6-ban a derékszögűekről mondtunk. Az ottani tárgyalás szó szerint érvényes a kontravariáns koordinátákra, a kovariáns koordinátákra kimondott tételeket viszont úgy kapjuk, hogy az  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $\lambda \mathbf{a}$  vektorokat skalárisan szorozzuk az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  alapvektorokkal.

Bevezetjük a

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$$

jelölést. Eszerint  $\mathbf{e}_i$  kovariáns koordinátái  $g_{11}, g_{12}, g_{13}$ .

Legyen továbbá

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

A derékszögű esetben itt a főátlóban csupa 1, a főátlón kívül pedig csupa 0 áll, és ezért  $g = 1$ .

**Tétel. A kontravariáns és kovariáns koordinátákkal megadott,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatára**

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} a^i b^k,$$

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3.$$

*Bizonyítás.* Az első állítást az  $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$  és  $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3$  vektorok tagonkénti összeszorzása adja, a másodikat pedig megkapjuk, ha az  $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$  vektort tagonként megszorozzuk a  $\mathbf{b}$  vektorral. —

Közvetlenül adódik ebből a tételből, hogy

$$\mathbf{a}^2 = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} a^i a^k = a^1 a_1 + a^2 a_2 + a^3 a_3,$$

s hogy a kovariáns és a kontravariáns koordináták között az

$$a_i = g_{1i} a^1 + g_{2i} a^2 + g_{3i} a^3$$

összefüggések állnak fenn.

**Tétel. Ha a térbeli ferdeszögű koordináta-rendszer alapvektorai jobbrendszert alkotnak, akkor a kontravariáns és a kovariáns koordinátákkal megadott  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok vegyes szorzatára**

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

*Bizonyítás.* a) Előrebocsátjuk, hogy tetszőleges  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  vektorokra

$$(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3)(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3 \end{vmatrix}.$$

Ez derékszögű koordináták segítségével közvetlenül belátható, hiszen a bal oldali tényezők determinánsalakban írhatók fel, s ha ezeket a determinánsokat sor-sor-szorzással összeszorozzuk, éppen a jobb oldali determinánshoz jutunk.

Ha a kapott összefüggést az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  vektorokra alkalmazzuk, akkor  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2 = g$  lesz az eredmény, amiből

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \sqrt{g}$$

következik, hiszen az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  alapvektorok jobbrendszert alkotnak.

b) Ha ugyanazt az összefüggést az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  vektorokra alkalmazzuk, akkor az

$$(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

eredményhez, tehát tételünk egyik állításához jutunk.

A másik állítás

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

alakban írható. Ezt a kontravariáns és kovariáns koordináták összefüggésére való tekintettel a bal oldali determinánsszorzat sor-sor-szorzással való kiszámítása bizonyítja. —

**Tétel.** Ha a térbeli ferdeszögű koordináta-rendszer  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  alapvektorai jobbrendszert alkotnak, akkor a kovariáns koordinátákkal adott  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vektorok vektoriális szorzata

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

E tétel alapján a tényezők kovariáns koordinátaiból a vektoriális szorzat kontravariáns koordinátáit kapjuk meg.

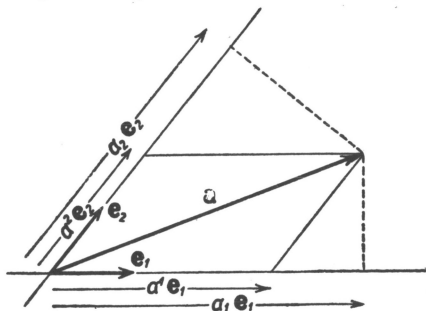
*Bizonyítás.* Abból indulunk ki, hogy ha a  $v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3$  vektorban az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  alapvektorok helyébe egy másik vektor kovariáns koordinátáit írjuk, akkor a két vektor skaláris szorzatához jutunk. Ha ezt a tétel egyenletének jobb oldalán álló vektorra alkalmazzuk, akkor az előző tételre való tekintettel azt kapjuk, hogy az egyenlet két oldalán álló vektorok bármely vektorral ugyanazt a skaláris szorzatot adják. Ezért ez a két vektor egyenlő. —

Megemlítjük, hogy ha a ferdeszögű koordináta-rendszer  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  alapvektorai egységvektorok, akkor egy vektor kovariáns koordinátái a definíciójuk szerint a vektornak a tengelyekre vetett merőleges vetületeit mérik. A 290. ábra ezt a síkban szemlélteti.

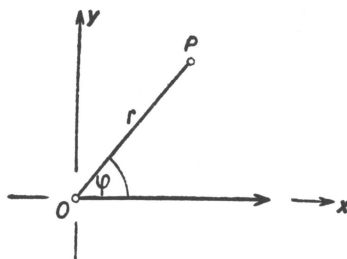
Bár a ferdeszögű koordinátákat is megismertük, ebben a könyvben, hacsak az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk, mindig derékszögű koordinátákkal dolgozunk.

**B1** A kovariáns (= együtt változó) és kontravariáns (= ellentétesen változó) jelzők eredetét az magyarázza, hogy ha az alapvektorok szerepét pl. kétszer akkora vektorok játsszák, akkor a kovariáns koordináták megkétszereződnek, viszont minden kontravariáns koordináta a felére csökken.

Általános az a szokás, hogy a kovariáns koordináták indexeit lent, a kontravariánsokét pedig fent helyezik el.



290



291

**B2** 34.4-nek a koordináta-rendszer eltolásáról szóló tétele a bizonyításával együtt változatlanul helyes akkor is, ha akármilyen fajtájú ferdeszögű koordinátákat használunk. Ez természetesen akkor van így, ha a tételben szereplő koordináták mindegyike ugyanolyan fajtájú.

Ha a ferdeszögű koordináta-rendszer megváltoztatásakor a kezdőpont helyben marad, akkor a koordináták transzformációjáról 34.4 második tételéhez hasonlóan mondhatunk ki, mégpedig akármilyen fajtájú koordinátákról akármilyen fajtájúakra térünk is át. A transzformáció minden esetben homogén lineáris, de az együtthatómátrix általában más a koordináta-rendszer megváltoztatásakor, mint a visszaváltoztatásakor. A mátrixnak a régi koordinátákhoz tartozó oszlopaiban rendre az  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  régi koordinátájú vektorok új koordinátái állnak. Ez közvetlenül adódik abból, hogy ezeknek a vektoroknak a régi koordinátaszorosait összeadva azt a vektort kapjuk meg, amelynek régi és új koordinátáiról szó van.

Aki a vektorokat a Descartes-féle koordináta-rendszerekben analitikusan vezeti be (vö. 34.5 B), annak a most említett transzformációs szabályok elsődlegesen fontosak.

**34.7 a)** A sík pontjait (síkbeli) *polárkoordinátákkal* is jellemezhetjük. Az irányított síkban egy  $O$  kezdőpontú félegyenest választunk, amelynek irányát *kezdőiránynak* nevezzük. A  $P$  pont polárkoordinátái az  $r = OP$  távolság, valamint a kezdőirány és az  $OP$  irány által meghatározott  $\varphi$  irányított szög (291. ábra). Minden ponthoz többféle koordinátapár tartozik, hiszen  $\varphi$  mértéke  $360^\circ$  bármely egész többszörösével megváltoztatható. Magának az  $O$  kezdőpontnak a  $\varphi$  koordinátája tetszőleges lehet.

Ha azt a derékszögű koordináta-rendszert tekintjük, amelynek kezdőpontja a polárkoordináta-rendszeré,  $x$ -tengelyének iránya pedig a kezdőirány, akkor az  $r, \varphi$  polárkoordinátájú pont közös koordinátái

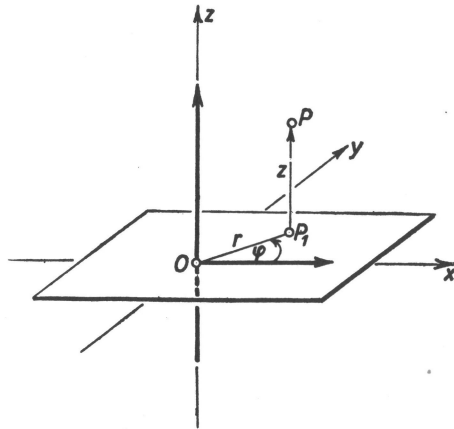
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Ez a 31.6 szerint igaz, hiszen  $\varphi$  az  $OP$  vektor irányszöge.

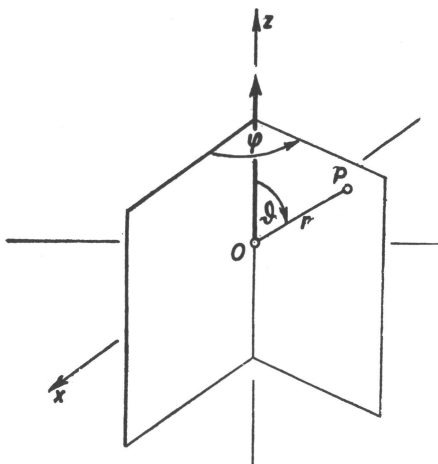
b) A tér pontjait *hengerkoordinátákkal* (cilindrikus koordináták) is jellemezhetjük. Egy alapsíkot, egy rá merőleges irányított egyenest, az alapsíkon belül pedig az  $O$  dőféspontból induló félegyenest veszünk fel. Az irányított egyenes a vele párhuzamos egyeneseknek is irányítást ad, továbbá az alapsík egyik oldalára mutatván, az alapsík irányítását is megszabja. Az irányított alapsíkban a megadott félegyenest egy polárkoordináta-rendszert határoz meg. A  $P$  pont polárkoordinátái az alapsíkra vetett

$P_1$  vetületének  $r, \varphi$  polárkoordinátái, valamint az irányított  $P_1P$  szakasz előjeles  $z$  hossza (292. ábra).

Ha az alapsíkbeli polárkoordináta-rendszerhez derékszögű  $xy$  koordinátarendszert illesztünk, és irányított egyenesünket  $z$  tengelyül választjuk, akkor a közös koordinátákat az  $r, \varphi, z$  polárkoordinátákból a) előírása szerint számíthatjuk ki.



292



293

c) Használatosak a *térbeli polárkoordináták* is. Most egy félsíkot és ennek határán egy  $O$  kezdőpontú félegyenest veszünk fel. Az  $r = OP$  távolság a  $P$  pont első koordinátája (293. ábra). A második koordináta az a  $\varphi$  irányított szög, amelyet az adott félsík, valamint a vele közös határú, a  $P$  pontot

tartalmazó fêlsík meghatároz. Ennek az irányított szögnek a mérésénél azt a forgásirányt választjuk pozitívnak, amely az adott fêlegyenes irányából nézve pozitívnak látszik. Vêgûl a harmadik koordináta az adott és az  $OP$  fêlegyenes  $\vartheta$  hajlásszöge. Eszerint  $\vartheta$  konvex szög;  $\varphi$  minden pontra több értékû, mégpedig  $360^\circ$  bármely egész többszörösével megváltoztatható; az  $O$  kezdôpont  $\varphi$ ,  $\vartheta$  koordinátái pedig tetszôlegesek lehetnek.

Ha olyan jobbsodrásû derékszögû koordináta-rendszert veszünk fel, amelynek kezdôpontja  $O$ ,  $z$ -tengelye az adott fêlegyenes irányába mutat,  $x$ -tengelyének pozitív fele pedig az adott fêlsíkban halad, akkor az  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  koordinátájû  $P$  pont közönséges koordinátái

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

Ez abból adódik, hogy  $P$  hengerkoordinátái az  $xy$  sík, az irányított  $z$ -tengely és az  $x$ -tengely pozitív fele által adott hengerkoordináta-rendszerben  $r \sin \vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $r \cos \vartheta$ , hiszen a  $P$  pontot tartalmazó fêlsíkban az  $r$ ,  $\vartheta$  polárkoordinátákból a) elôírása szerint ezt kapjuk. A felírt hengerkoordinátákból b) elôírása  $x$ ,  $y$ ,  $z$  megadott kifejezéseikhez vezet.

A földi helymeghatározásnál térbeli polárkoordinátákat használunk. Ezeket a Föld tengelye által határolt, Greenwich-et tartalmazó fêlsík és ennek határán a Föld középpontjától az Északi-sark felé haladó fêlegyenes határozza meg. Az általunk bevezetett  $\varphi$  koordináta a földrajzi hosszúsággal azonos, viszont  $\vartheta$  a sarktávolság, amely a  $90^\circ - \vartheta$  földrajzi szélességgel nem azonos. A geometriában azért használatos inkább a sarktávolság, mert ennek értéke mindig pozitív, de használják néha a földrajzi szélesség mintájára  $\vartheta$  helyett a  $90^\circ - \vartheta$  szöget is.

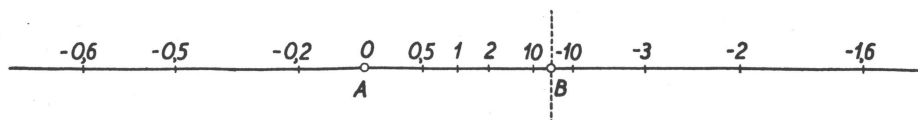
## 35. § Súlypont

Az egyenes pontjának helyzetét meghatározó arányról, egy pontrendszer súlypontjáról, majd a sík pontjának helyzetét meghatározó arányokról lesz szó. Alkalmazásként néhány az elemi geometriába illô tételt bizonyítunk, és ezekhez, részben elemi geometriai módszerrel, kiegészítéseket is fűzünk.

**35.1** Ha az egyenesen az  $A$ ,  $B$  alappontokat megadjuk, akkor az egyenes  $B$ -tôl különbözô  $P$  pontja az

$$(\overline{ABP}) = \frac{AP}{PB}$$

értéket határozza meg, ahol  $AP$  és  $PB$  irányított szakaszok elôjeles hosszát jelenti. Ez az érték nem függ attól, hogy az egyenest hogyan irányítjuk. Az  $(\overline{ABP})$  értéket a  $P$  pont  $A$ ,  $B$  alappontokra vonatkozó egyszerű viszonyának vagy osztóviszonyának nevezzük. A 294. ábra bemutatja, hogy  $P$  különféle elhelyezkedése mellett  $(\overline{ABP})$  értéke mekkora. Ez az érték  $-1$  nem lehet, hiszen az elôjeles hosszakra  $AP + PB = AB$ , és ezért  $AP \neq -PB$ .



294

A  $B$  pontot ki kellett rekesztenünk, mert 0 nem lehet osztó. Ezt a kivételt megszüntethetjük, ha nem hányadosról beszélünk, hanem olyan  $\alpha$ ,  $\beta$  számokról, amelyek  $AP$  és  $PB$  viszonyát megszabják:

$$AP : PB = \beta : \alpha.$$

Ha  $P$  azonos  $B$ -vel, akkor  $\alpha = 0$ . Ha viszont  $P$  nem azonos  $B$ -vel, akkor  $\alpha \neq 0$ . és



$$(ABP) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Az  $\alpha, \beta$  számok mindegyike természetesen nem lehet 0.

**Tétel.** Ha az  $\alpha, \beta$  számokra  $\alpha + \beta \neq 0$ , akkor a

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}}{\alpha + \beta}$$

helyvektori  $P$  pont az  $A(\mathbf{a})$  és  $B(\mathbf{b})$  pontok egyenesén van, mégpedig ennek az egyenesnek az egyetlen olyan pontja, amelyre

$$AP : PB = \beta : \alpha,$$

ahol a bal oldalon irányított szakaszok előjeles hossza szerepel.

*Bizonyítás.* a) Egyszerű átalakítás mutatja, hogy a tételben megadott  $\mathbf{p}$  vektorra

$$\alpha(\mathbf{p} - \mathbf{a}) = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{p}).$$

$P$  az  $AB$  egyenesen van, hiszen különben itt a zárójelekben egymással nem párhuzamos vektorok állnának, és az egyenlet csak az  $\alpha = \beta = 0$  értékekkel teljesülhetne. Minthogy az egyenlet zárójeleiben párhuzamos vektorok állnak, az egyenlet

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) : (\mathbf{b} - \mathbf{p}) = \beta : \alpha$$

alakban írható. Ez  $\overrightarrow{AP} = \mathbf{p} - \mathbf{a}$  és  $\overrightarrow{PB} = \mathbf{b} - \mathbf{p}$  miatt a tételbeli aránypár helyességét mondja ki (295. ábra).



295

b) Ha a  $P$  pont az  $AB$  egyenesen van, és kielégíti a tételbeli aránypárt, akkor az utoljára felírt aránypár, tehát a fentebbi egyenlet is helyes. Ez pedig az  $\alpha + \beta \neq 0$  esetben a tételben megadott  $\mathbf{p}$  vektort adja. —

Tételünkben nyomban adódik, hogy ha  $(ABP) = \lambda$ , akkor a tétel jelöléseivel

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}}{1 + \lambda}.$$

Ha  $\lambda = 1$ , akkor  $P$  az  $AB$  szakasz felezőpontja. Ennek helyvektora tehát a végpontok helyvektorainak számtani közepe. Ha állításainkat a helyvektorok koordinátaival fejezzük ki, azt kapjuk, hogy a szereplő pontok megfelelő koordinátái között is ugyanilyen összefüggések állnak fenn.

Tételünk mutatja, hogy az  $AP : PB$  arány, illetőleg az  $(ABP)$  osztóviszony a  $P$  pont helyzetét az  $AB$  egyenesen egyértelműen meghatározza, s hogy  $P$  változtatásakor az  $(ABP)$  osztóviszony az egyetlen  $-1$  érték kivételével minden valós értéket felvesz.

**B1** Az irodalomban az  $(ABP) = \frac{AP}{BP}$  megállapodás is szerepel, amely az egyszerű viszonyoknak ellenkező előjelet ad. A következőkkel, különösképpen a 35.5 szakasszal való egybevetés az általunk

is elfogadott megállapodás mellett szól. Előnye ennek az is, hogy akkor mondja  $P$  osztóviszonyát pozitívnak, ha  $P$  valóban oszt.

**B2**  $A^{-1}$  érték tapasztalt kivételességét majd megszüntetjük (lásd 44.6 B), ha megfelelő előkészítés után már az egyenes végtelen távoli pontjáról is beszélhetünk.

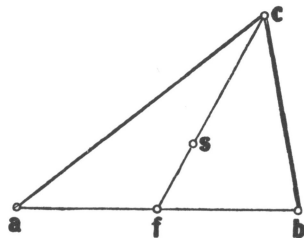
**35.2 Tétel.** *A háromszög súlypontjának helyvektora a csúcsok helyvektorainak számtani közepe.*

Eszerint tehát a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepei a súlypont koordinátáit adják.

*Bizonyítás.* A bizonyítás során nem támaszkodunk a háromszög súlypontjára vonatkozó, általunk már ismert tényekre (lásd 21.3). Újból bebizonyítjuk ezeket is.

Legyen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  a három csúcs helyvektora (296. ábra). Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  helyvektorú csúcsokat összekötő oldal  $\mathbf{f}$  helyvektorú felezőpontjára

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$



296

Ha e pontból az innen induló súlyvonalra ennek harmadát felmérjük, olyan  $\mathbf{s}$  helyvektorú ponthoz jutunk, amely a súlyvonalat 1:2 arányban osztja. Az előző szakasz szerint tehát

$$\mathbf{s} = \frac{2\mathbf{f} + \mathbf{c}}{2+1} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

Ha a háromszög másik oldalából indulunk ki, akkor az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok szerepet cserélnek, de az eredmény ugyanez az  $\mathbf{s}$  vektor, hiszen az ilyen szerepcsere az  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$  összeget nem változtatja meg. Eszerint tehát a súlyvonalakat ugyanaz a pont harmadolja, és ennek helyvektora a csúcsok helyvektorainak valóban a számtani közepe. —

**Tétel.** *A tetraéder csúcsait a szemközti súlypontjával összekötő szakaszok egy pontban metszik. Közös pontjuk mindegyik szakaszt negyedeli, mégpedig a csúcstól van messzebb. Helyvektora a csúcsok helyvektorainak számtani közepe.*

A tételben szereplő négy szakaszt a tetraéder súlyvonalának, közös pontjukat a tetraéder *súlypontjának* nevezzük.

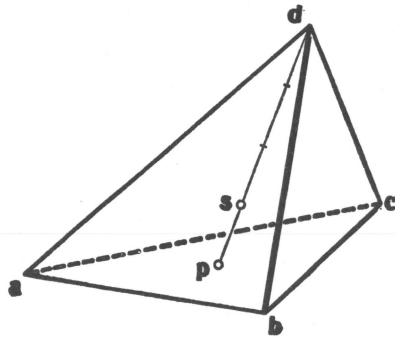
*Bizonyítás.* Legyen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  a négy csúcs helyvektora (297. ábra). Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  helyvektorú csúcsok által meghatározott lap súlypontjának helyvektora az előző tétel szerint

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

Ebből a súlypontból az innen kiinduló súlyvonalra felmérjük ennek negyedét. Minthogy a kapott pont a súlyvonalat 1 : 3 arányban osztja, helyvektora

$$\mathbf{s} = \frac{3\mathbf{p} + \mathbf{d}}{3+1} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}.$$

Tételünk helyessége most már az előző bizonyítás mintájára látható be. Ha más lapból indulunk ki, az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  vektorok szerepet cserélnek, de az eredmény változatlan. Eszerint a súlyvonalakat ugyanaz a pont negyedei, és ennek helyvektora a négy csúcs helyvektorának számtani közepe. —

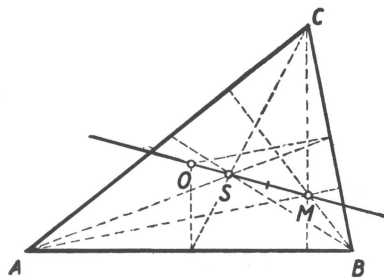


297

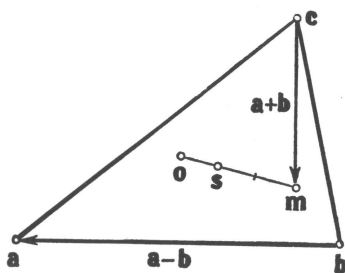
A Megemlítjük, hogy a tetraéder alakú homogén test fizikai, értelemben vett súlypontja az általunk bevezetett súlyponttal azonos.

**35.3 Tétel.** *A háromszög magasságpontja, súlypontja és a körülírt kör középpontja egy egyenesen van. A súlypont a másik kettő távolságát harmadolja, és a körülírt kör középpontjához van közelebb.*

E három nevezetes pont egyenesét *Euler-féle egyenesnek* nevezik (298 ábra).



298



299

*Bizonyítás.* Válasszuk a helyvektorok kezdőpontjául a háromszög köré írt kör középpontját (299. ábra). A csúcsok  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  helyvektorai e megállapodás következtében egyenlő hosszúak. A súlypont helyvektora

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

A kezdőpontból való háromszoros kinagyítás a súlypontot egy

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

helyvektórú pontba viszi. Tételünket bebizonyítjuk, ha kimutatjuk, hogy az így kapott pont a háromszög magasságpontja.

Ehhez azt kell belátnunk, hogy az  $\mathbf{m}$  helyvektórú pontot a háromszög csúcaival összekötő szakaszok az oldalakra merőlegesek. Minthogy a csúcsok között nincs szerepkülönbség, elég ezt egy csúcsra igazolnunk, tehát megmutatnunk, hogy az

$$\mathbf{m} - \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

vektor az  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  oldalvektorra merőleges. Ez azonban igaz, mert skaláris szorzatuk

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 0,$$

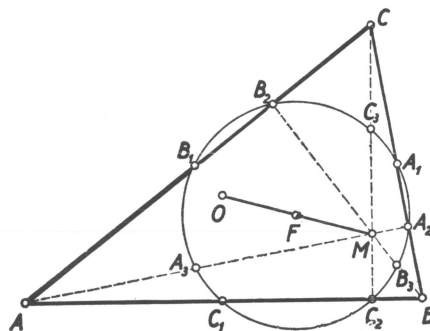
hiszen  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  ugyanolyan hosszú. —

**Tétel.** *A háromszög oldalainak felezőpontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. E kör középpontja felezi a magasságpontot és a háromszög köré írt kör középpontját összekötő szakaszt. Sugara a háromszög köré írt kör sugarának a fele.*

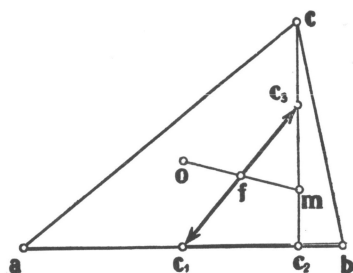
Ezt a kört Feuerbach-féle körnek nevezzük.<sup>\*2</sup>

*Bizonyítás.* A három csúcs szerepének egyenrangúsága miatt elég, ha a tételben említett három fajta pont közül csak egyre-egyre bizonyítjuk az állítást. A 300. ábra jelöléseivel igazodva azt bizonyítjuk,

hogy a  $C_1, C_2, C_3$  pontok az  $OM$  szakasz  $F$  felezőpontjától  $\frac{r}{2}$  távolságra vannak, ahol  $r$  a körülírt kör sugarát jelenti.



300



<sup>2\*</sup> K. W. Feuerbach 1800—1834, gimnáziumi tanár Erlangenben. Nem azonos a hasonló nevű filozófussal.

Az előző bizonyítás vektorjelöléseit használjuk (301. ábra). Minthogy  $F$  és a  $C_1$  oldalfelezőpont helyvektora

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{m}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}, \quad \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2},$$

összekötő vektorukra

$$\overrightarrow{FC_1} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{f} = -\frac{\mathbf{c}}{2}.$$

Az  $FC_1$  távolság hossza tehát valóban  $\frac{r}{2}$ , hiszen  $|\mathbf{c}| = r$ .

Az  $MC$  szakasz  $C_3$  felezőpontjának

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{m} + \mathbf{c}}{2} = \mathbf{f} + \frac{\mathbf{c}}{2}$$

helyvektorából azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{FC_3} = \mathbf{c}_3 - \mathbf{f} = \frac{\mathbf{c}}{2},$$

hogy tehát az  $FC_3$  szakasz hossza is  $\frac{r}{2}$ .

Azt is beláttuk, hogy a  $C_1C_3$  szakasz az  $F$  körül sugárral írt kör átmérője, hiszen  $\overrightarrow{FC_1}$  és  $\overrightarrow{FC_3}$  csak előjelben különbözik. Ebből azonban Thales tétele szerint következik, hogy a  $C$ -ből húzott magasság  $C_2$  talppontja is ugyanazon a körön van, hiszen e pontból (ha egyszer  $C_1$  és  $C_2$  nem azonosak) a  $C_1C_3$  szakasz derékszög alatt látható. —

**B1** A háromszög Euler-féle egyeneséről természetesen nem lehet szó akkor, ha az  $O$ ,  $S$ ,  $M$  pontok egybeesnek. Ez csak a szabályos háromszögnél következik be, hiszen (a 300. ábra jelöléseivel)  $O$  és  $M$  csak akkor eshetik egybe, ha pl.  $C$  az  $OC_1$  felezőmerőlegesen van, ha tehát a háromszög  $CA$ ,  $CB$  oldalai egyenlők.

**B2** E szakasz második tétele is *Eulertől* való, ezért a benne említett kört *Euler-féle körnek* is nevezzük. Szokásos a *kilenc pont köre* megnevezés is. *Feuerbachról* azért nevezték el, mert ő bizonyította be, hogy érinti a háromszögbe írt kört és a háromszöghöz írt körök mindegyikét.

**B3** Szakaszunk mindkét tételét tiszta elemi geometriai módszerrel is könnyen bebizonyíthatjuk.

Az első tételnél csak arra kell hivatkozni, hogy (a 300. ábra jelöléseivel) a párhuzamos  $OC_1$ ,  $CC_2$  egyeneseket összekötő  $OM$ ,  $C_1C$  szakaszok harmadolópontjait a két egyenessel párhuzamos egyenesek metszik ki. Ezért  $OM$ -nek  $O$ -hoz közelebbi harmadolópontja az  $S$  súlyponttal csak azonos lehet, hiszen egyenesük nem lehet a három magasság mindegyikével párhuzamos.

A második tétel esetében a háromszög középvonaláról tudottakra hivatkozva kimondhatjuk, hogy pl.  $A_1B_1A_3B_3$  téglalap. Ezért az  $A_1A_3$ ,  $B_1B_3$ ,  $C_1C_3$  szakaszok egyenlők, és a felezőpontjuk közös. Ezen a hat ponton áthaladó kör Thales tétele szerint az  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  pontokon is áthalad. Ez a kör a háromszög köré

$\frac{1}{2}$  írt körből  $M$  centrumú és  $\frac{1}{2}$  arányú kicsinyítéssel származik, hiszen áthalad az  $A_3, B_3, C_3$  pontokon. Ezért középpontja  $OM$  felezőpontja, sugara pedig a körülírt körének a fele.

**35.4** Ha véges sok ponthoz *súlyként* egy-egy valós számot rendelünk, *súlyozott pontrendszerrel* beszélünk.

Az  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  súlyokkal súlyozott,  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  helyvektorú  $A_1, \dots, A_n$  pontok *súlypontjának* nevezzük az

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$$

feltétel teljesülése esetén azt az  $S$  pontot, amelyre

$$\alpha_1 \overrightarrow{SA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0}.$$

Az  $S$  pont  $\mathbf{s}$  helyvektorára tehát

$$\alpha_1 (\mathbf{a}_1 - \mathbf{s}) + \dots + \alpha_n (\mathbf{a}_n - \mathbf{s}) = \mathbf{0}.$$

Az  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$  megszorítást nem hagyhatjuk el. Az utolsó egyenletből ugyanis

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \mathbf{s} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$$

adódik. Ha tehát a súlyösszeg 0, akkor definíciónkat vagy egyetlen  $S(\mathbf{s})$  pont sem elégíti ki, vagy pedig bármely pont megfelel.

Ha viszont a súlyösszeg nem 0, akkor utolsó egyenletünk szerint egyetlenegy  $S(\mathbf{s})$  pont felel csak meg, és ennek helyvektora

$$\mathbf{s} = \frac{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

Mondhatjuk tehát, hogy a súlyozott pontrendszer súlypontjának helyvektora a pontok helyvektorának súlyozott közepe. Ez azt is kimondja, hogy a súlypont koordinátái a pontok megfelelő koordinátáinak súlyozott közepei.

Akárhol vesszük is fel a kezdőpontot, a felírt tört mindig ugyanabba a pontba, ti. a súlypontba mutató vektort ad, hiszen a súlypont definíciójában kezdőpont nem is szerepel. Ha egy egyenesen (vagy síkon) elhelyezkedő pontrendszer esetében az egyenes (sík) egy pontját választjuk kezdőpontul, akkor  $\mathbf{s}$  törtalakja azt mutatja, hogy a súlypont is az egyenesen (síkon) van.

Már a súlypont definíciójából is kiolvashatjuk, hogy a pontrendszer súlypontja nem változik meg akkor, ha a súlyokat ugyanazzal a (0-tól különböző) számmal megszorozzuk. Nyilvánvaló az is, hogy ha a pontrendszer egyetlen pontból áll, akkor ez súlypont is.

Ha egy pontrendszer súlypontjáról beszélünk, és nincs szó a pontok súlyozásáról, akkor hallgatólag feltesszük, hogy a súlyok mind ugyanakkorák. Ezek szerint az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  helyvektorú pontok súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n}{n},$$

a pontok helyvektorainak számtani közepe. Mondhatjuk tehát, hogy a háromszög és a tetraéder súlypontja egyben a csúcsok súlypontja is.

Egy súlyozott pontrendszerben 0 súlyú pont is szerepelhet, de a súlypont nem változik meg, ha az ilyen pontot a pontrendszerből elhagyjuk.

Megengedjük azt is, hogy a súlyozott pontrendszerben ugyanaz a pont többször is szerepeljen, mégpedig talán különféle súlyokkal. Világos, hogy ilyenkor a súlypont nem változik meg, ha a szóban forgó pontot csak egyszer szerepeltetjük, súlyául pedig eredeti súlyainak az összegét választjuk.

**Tétel.** Egy súlyozott pontrendszer súlypontja nem változik meg akkor, ha a pontok közül néhány olyat, amelyeknek súlyösszege nem 0, elhagyunk, majd súlypontjukat az említett súlyösszeggel súlyozva a pontrendszerhez csatoljuk.

*Bizonyítás.* Az  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  súlyú  $A_1, \dots, A_n$  pontok közül hagyjuk el az  $A_1, \dots, A_k$  pontokat ( $k < n$ ), majd  $P$  súlypontjukat  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq 0$  súllyal súlyozva csatoljuk a pontrendszerhez. A keletkező súlyozott  $P, A_{k+1}, \dots, A_n$  pontrendszer súlypontjának helyvektora

$$\frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \mathbf{p} + \alpha_{k+1} \mathbf{a}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy  $P(\mathbf{p})$  helyvektorára  $(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) \mathbf{p} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$ , akkor a felírt törtből éppen az eredeti súlyozott pontrendszer súlypontjának helyvektorához jutunk. —

**B1** Ha a súlyok mind pozitív számok, akkor a pontrendszer általunk bevezetett súlypontja a fizika tanítása szerint annak a tömegpont-rendszernek a tömegközéppontja, amelynél az általunk súlynak mondott valós számok az egyes pontokban elhelyezkedő tömegek mérőszámai.

A háromszög és a tetraéder esetében a csúcsokba helyezett egyenlő tömegek súlypontja megegyezik a homogén háromszöglemez, illetőleg a homogén tetraédertest súlypontjával. Sokszögek és poliéderek körében azonban a csúcssúlypont a lemezsúlyponttal, illetőleg testsúlyponttal általában nem azonos. Példa erre a trapéz is. A háromszög és a tetraéder esetében is más ponthoz jutunk, ha az oldalsúlypontot, illetőleg az élsúlypontot vagy a lapsúlypontot tekintjük.

**B2** Utolsó tételünkéből nyomban következik, hogy a háromszög csúcsainak súlypontja egy csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával (a másik két csúcs súlypontjával) összekötő szakaszon van, és harmadolja azt. Ez a háromszög súlyvonalaíróról szóló tételt (lásd 21.3) újból bizonyítja.

**35.5** A pont helyét jellemezhetjük azokkal a súlyokkal, amelyekkel bizonyos *alappontokat* súlyoznunk kell, ha azt akarjuk, hogy a súlypontjuk a megadott pont legyen. Ezeket a súlyokat *baricentrikus* (azaz súlyponti) *koordinátáknak* nevezzük. Egy pont baricentrikus koordinátáinak összege tehát nem lehet 0.

Ha a baricentrikus koordináták mindegyikét ugyanazzal a számmal megszorozzuk, akkor az általuk meghatározott pont változatlan marad. Eszerint minden pont baricentrikus koordinátái sokféleképpen választhatók meg. Az egyes baricentrikus koordinátáknak nincs is közvetlen jelentésük, a pont helyzetét a viszonyuk határozza meg. Az ilyen tulajdonságú koordinátákat *viszonykoordinátáknak* mondjuk.

Ha az egyenes pontjait akarjuk baricentrikus koordinátákkal jellemezni, az egyenesen két alappontot választunk. Ha a  $P$  pontnak az  $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b})$  pontokhoz tartozó baricentrikus koordinátái  $\alpha$  és  $\beta$ , akkor  $P$  helyvektora 35.4 szerint

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}}{\alpha + \beta}.$$

Ez a kifejezés megegyezik azzal, amellyel 35.1-ben ismerkedtünk meg. Ez azt jelenti, hogy már ott is az egyenes pontjainak baricentrikus koordinátaival foglalkoztunk. Az  $\alpha + \beta \neq 0$  megszorítás is összhangban van az ottani tárgyalással. Eszerint már tudjuk, hogy az egyenes minden pontjának vannak baricentrikus koordinátái, és a pont egyértelműen meghatározza baricentrikus koordinátáinak a viszonyát. Azt is leszögezhetjük, hogy ha  $\alpha \neq 0$ , akkor a baricentrikus koordináták viszonya

$$\frac{\beta}{\alpha} = (ABP).$$

A sík pontjainak baricentrikus koordinátákkal való jellemzéséhez a síkban három nem egy egyenesbe eső alappontot veszünk fel. Ezek az *alapháromszög* csúcsai. Ha helyvektoraik  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , akkor az  $\alpha, \beta, \gamma$  koordinátájú pont helyvektora 35.4 szerint

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Tudjuk, hogy  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , és ha  $\alpha, \beta, \gamma$  ezt a feltételt kielégíti, akkor hozzájuk egy síkbeli pont tartozik.

**Tétel. A sík minden pontjának vannak baricentrikus koordinátái.**

*Bizonyítás.* Vegyük fel a hely vektorok kezdőpontját az  $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$  alappontok síkján kívül. Ekkor az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok nem egysíkúak, és ezért a  $P(\mathbf{p})$  pont helyvektora (302. ábra)

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$$

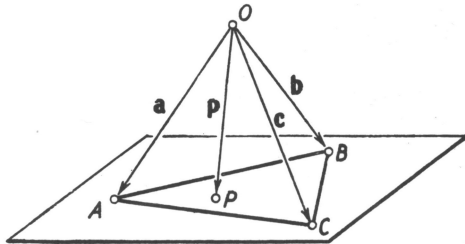
alakban írható fel. Ebből az

$$(1 - \alpha - \beta - \gamma)\mathbf{p} = \alpha(\mathbf{a} - \mathbf{p}) + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{p}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{p})$$

egyenlethez jutunk. Itt a jobb oldalon az  $ABC$  síkkal párhuzamos vektorok állanak, tehát ez a bal oldalra is áll. Minthogy azonban  $\mathbf{p}$  nem párhuzamos ezzel a síkkal, a bal oldalon nullvektornak kell állnia, azaz  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Ezért

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}}{\alpha + \beta + \gamma},$$

és az  $\alpha, \beta, \gamma$  számok a  $P$  pont baricentrikus koordinátái. —



302

**Tétel. A sík minden pontja egyértelműen meghatározza baricentrikus koordinátáinak a viszonyát.**

Ha  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  és  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  ugyanannak a pontnak baricentrikus koordinátái, akkor tételünk szerint

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2.$$

Tudtuk már, hogy ha a baricentrikus koordinátákat ugyanazzal a (0-tól különböző) számmal szorozzuk meg, akkor ugyanannak a pontnak a koordinátáihoz jutunk. Tételünk azt mondja ki, hogy ilyen szorzással a pont valamennyi koordinátahármasához eljutunk.

*Bizonyítás.* A kezdőpontot ismét az  $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$  alappontok síkján kívül vesszük fel. A  $P(\mathbf{p})$  pont kétféle baricentrikus koordinátáira



$$\mathbf{p} = \frac{\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c}}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} = \frac{\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b} + \gamma_2 \mathbf{c}}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}.$$

Mint hogy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok nem egysíkúak, e vektorok az utolsó egyenlőség mindkét oldalán ugyanolyan együttműködéssel szerepelnek. A két koordinátahármas tehát csak szám tényezőben különbözik egymástól. —

A most bizonyított tételből következik, hogy egy pont  $\alpha, \beta, \gamma$  baricentrikus koordinátáira pl  $\alpha + \beta = 0$  vagy mindig teljesül, vagy sohasem.

**B1** Foglalkozhatnánk a térbeli baricentrikus koordinátákkal is. Ott egy tetraéder csúcsait választanók alappontokul.

**B2** Több szempont szól amellett, hogy a baricentrikus koordináták tárgyalása az ideális térelemek bevezetése után következzen (lásd 44. §). A következő szakasz csak alátámasztja ezt (vö. 35.6 B2). Ezzel szemben a súlypont bevezetése ide illik, és a baricentrikus koordináták bevezetése ehhez természetesen csatlakozik. Ez az elrendezés az olvasót egy újfajta koordináta-rendszerrel ismerteti meg, és ezáltal éppen az ideális térelemek kezelését, a homogén koordináták bevezetését készíti elő.

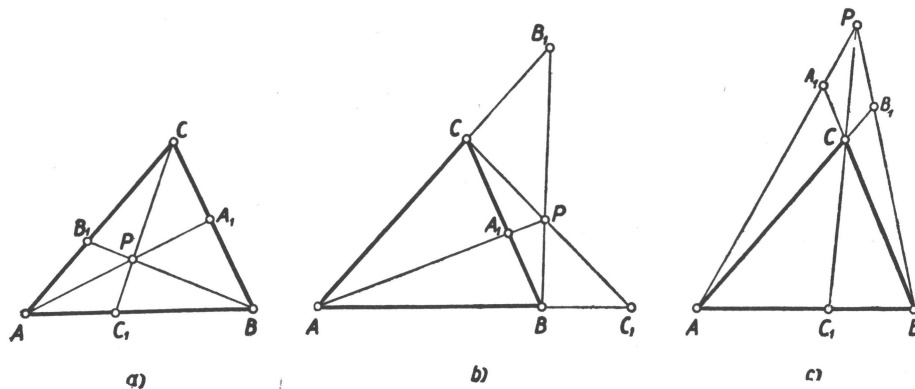
**35.6** A baricentrikus koordinátákat néhány geometriai tétel bizonyítására használjuk fel. Ezt egy a baricentrikus koordinátákról szóló tétel bizonyításával készítjük elő.

**Tétel.** Ha a  $P$  pont  $A, B, C$  alappontokhoz tartozó baricentrikus koordinátáira  $\alpha + \beta \neq 0$ , akkor az  $AB$  és  $CP$  egyenes  $C_1$  metszéspontjára

$$AC_1 : C_1B = \beta : \alpha.$$

Ha viszont  $\alpha + \beta = 0$ , akkor  $P$  a  $C$  ponton áthaladó,  $AB$ -vel párhuzamos egyenesen van.

Az  $A, B, C$  pontok és velük együtt az  $\alpha, \beta, \gamma$  koordináták szerepét természetesen szabadon cserélhetjük. A tétel első állítása azt is magában foglalja, hogy  $\alpha + \beta \neq 0$  esetén  $P$  és  $C$  egyenest határoz meg, s hogy ez metszi az  $AB$  egyenest (303. ábra).



303

*Bizonyítás.* a) Ha a  $\alpha + \beta \neq 0$ , akkor 35.4 tétele szerint úgy juthatunk el  $P$ -hez, hogy először az  $\alpha, \beta$  súlyú  $A, B$  pontok súlypontját, az  $AB$  egyenes  $C_1$  pontját határozzuk meg, ezután pedig az  $\alpha + \beta$  és  $\gamma$  súlyú  $C_1, C$  pontok súlypontját képezzük. Az utóbbi lépés a  $C_1C$  egyenes  $C$ -től különböző pontjához vezetett, hiszen  $\alpha + \beta \neq 0$ . Eszerint  $P$  és  $C$  nem azonos, az  $AB, CP$  egyenesek a  $C_1$  pontban metszik egymást, és  $C_1$  származtatása révén a tétel rá vonatkozó állítása is teljesül.

b) Ebből az okoskodásból azt is kiolvassuk, hogy ha az  $\alpha + \beta \neq 0$  feltétel kielégítő  $\alpha, \beta, \gamma$  számokat megfelelően választjuk meg, akkor belőlük az  $AB$  egyenes bármely  $C_1$  pontja által meghatározott  $CC_1$  egyenesnek bármely  $C$ -től különböző  $P$  pontjához eljuthatunk. Ha tehát  $\alpha + \beta = 0$ , akkor  $P$  nem lehet ilyen pont, és ezért a  $C$  ponton áthaladó,  $AB$ -vel párhuzamos egyenesen van. —

**Tétel.** Ha az  $ABC$  háromszög  $BC, CA, AB$  oldalegyenesein a csúcsoktól különböző  $A_1, B_1, C_1$  pontok úgy helyezkednek el, hogy az  $AA_1, BB_1, CC_1$  egyenesek egymást egy közös pontban metszik, akkor

$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC_1) = 1.$$

Ha figyelembe vesszük az egyszerű viszonyok jelentését, akkor a tétel állítását

$$BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 = A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B$$

alakban írhatjuk (303. ábra).

*Bizonyítás.* Legyen  $ABC$  a baricentrikus koordináta-rendszer alapháromszöge, és legyenek  $\alpha, \beta, \gamma$  a  $P$  közös pont baricentrikus koordinátái. Az előző tétel szerint

$$(ABC_1) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (BCA_1) = \frac{\gamma}{\beta}, \quad (CAB_1) = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

és ezért a szorzatuk valóban 1. —

**Tétel.** Ha az  $ABC$  háromszög  $BC, CA$  oldalegyenesein a csúcsoktól különböző  $A_1, B_1$  pontok úgy helyezkednek el, hogy az  $AA_1, BB_1$  egyenesek egy  $P$  pontban metszik egymást, és  $P$  a  $C$  ponton áthaladó,  $AB$ -vel párhuzamos egyenesen van, akkor

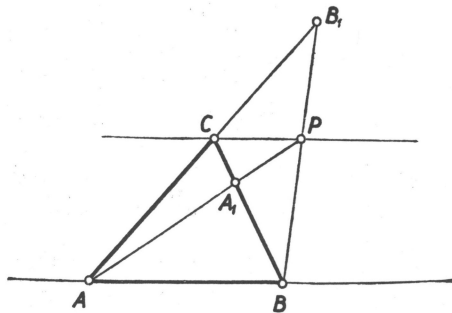
$$(BCA_1)(CAB_1) = -1.$$

$C$  szerepét természetesen bármely csúcs átveheti.

*Bizonyítás.* Legyenek ismét  $\alpha, \beta, \gamma$   $P$  pontnak az  $ABC$  alapháromszögre vonatkozó baricentrikus koordinátái (304. ábra). Első tételünk szerint most  $\alpha + \beta = 0$ , továbbá

$$(BCA_1) = \frac{\gamma}{\beta}, \quad (CAB_1) = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Ezért a szorzatuk  $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ . —



304

**Tétel.** Ha az  $ABC$  háromszög  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  oldalegyenesein az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok úgy helyezkednek el, hogy az  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  egyenesek párhuzamosak, akkor

$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC_1) = 1.$$

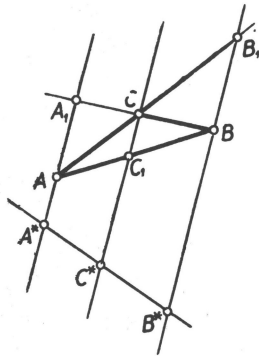
*Bizonyítás.* Messük a három párhuzamos egyenest egy egyenessel (305. ábra). Elég belátnunk, hogy az  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  metszéspontokra

$$(B^*C^*A^*)(C^*A^*B^*)(A^*B^*C^*) = 1,$$

hiszen ezek az egyszerű viszonyok a párhuzamos szelők tétele szerint a tételbeliekkel egyenlők. Ha még az egyszerű viszonyok jelentését is figyelembe vesszük, nyilvánvalóan helyes

$$\frac{B^*A^*}{A^*C^*} \cdot \frac{C^*B^*}{B^*A^*} \cdot \frac{A^*C^*}{C^*B^*} = 1$$

egyenlethez jutunk. —



305

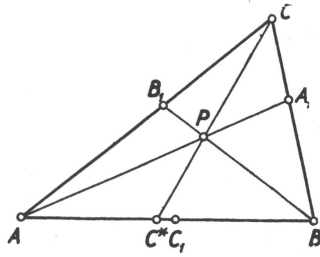
**Tétel** (Ceva<sup>3</sup> tétele). Ha az  $ABC$  háromszög  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  oldalegyenesein a csúcsoktól különböző  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok úgy helyezkednek el, hogy

$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC_1) = 1,$$

akkor az  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  egyenesek vagy egy pontban metszik egymást, vagy pedig párhuzamosak egymással.

*Bizonyítás.* Ha a három egyenes párhuzamos, akkor a tétel állítása helyes. Feltéhetjük tehát, hogy pl. az  $AA_1$  és  $BB_1$  egyenesek egy  $P$  pontban metszik egymást.  $P$  és  $C$  nem lehet azonos, hiszen  $B_1$  nem azonos  $C$ -vel. Nem lehetséges az sem, hogy a  $PC$  egyenes ne messe az  $AB$  oldalegyenest, mert akkor harmadik tételünkéből és a tétel egyenletéből  $(ABC_1) = -1$  következne, ami lehetetlen, hiszen az egyszerű viszony értéke nem lehet  $-1$ . Jelölje  $C^*$  a  $PC$  és  $AB$  egyenesek metszéspontját (306. ábra). Azt kell igazolnunk, hogy  $C_1$  és  $C^*$  azonos.

<sup>3</sup>\* C. Ceva (ejtsd: cséva), 1647—1736, kollégiumi tanár Mantuában.



306

Második tételünk szerint az  $A_1, B_1, C^*$  pontokra

$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC^*) = 1.$$

Ha ezt a tétel egyenletével egybevetjük,

$$(ABC_1) = (ABC^*)$$

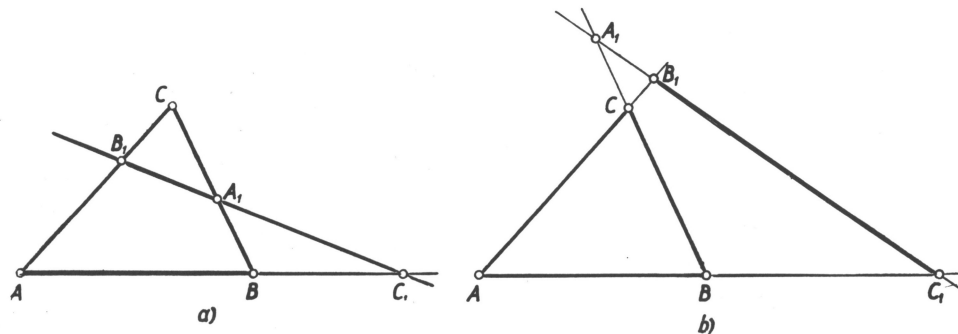
és ebből  $C_1$  és  $C^*$  azonossága adódik, hiszen az osztóviszony az egyenes pontját egyértelműen meghatározza. —

**A** Az utolsó tételből nyomban következik, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton haladnak át, hiszen nem párhuzamosak, és az oldalfelező pontok az oldalakat 1 osztóviszonnyal osztják.

**B1** Tételeinket úgy is kimondhatjuk, hogy osztóviszony és tört ne szerepeljen bennük, miként erre a második tétel kimondása után már rámutattunk. Ebben az esetben elhagyhatjuk azt a megszorítást, hogy az  $A_1, B_1, C_1$  pontok a csúcsoktól különbözők, hiszen második és harmadik tételünk esetében ez csak akkor nem következik be, ha a fellépő szorzatok mindegyikében tényezőként 0 is szerepel, az utolsó tétel bizonyítása pedig változatlan maradhat, csak az utolsó lépésben kell egyszerű viszonyok egyenlősége helyett egy aránypár helyességéről beszélni.

**B2** Ha ideális pontokról is szólhatunk (lásd 44. §), akkor második, harmadik és negyedik tételünk egyetlen tétellé olvasható össze, utolsó tételünkben pedig nem kell kétféleségről beszélni.

**35.7** Olyan tételekkel foglalkozunk, amelyek az előző szakasz tételeivel párhuzamba állíthatók.



307

**Tétel.** Ha egy egyenes az  $ABC$  háromszög  $BC, CA, AB$  oldalegyeneseit a csúcsoktól különböző  $A_1, B_1, C_1$  pontokban metszi, akkor

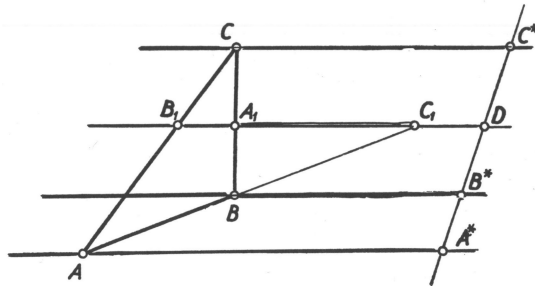
$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC_1) = -1.$$

Ha figyelembe vesszük az egyszerű viszonyok jelentését, akkor az állítást

$$BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 = -A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B$$

alakban írhatjuk (307. ábra).

*Bizonyítás.* Húzzunk  $A, B, C$  csúcsokon át párhuzamosokat az  $A_1B_1C_1$  egyenessel. Messe egy egyenes ezeket az  $A^*, B^*, C^*$  pontokban, az  $A_1B_1C_1$  egyenest pedig a  $D$  pontban (308. ábra). Az  $A^*, B^*, C^*$ ,  $D$  pontok mind különbözők, mert az  $A_1B_1C_1$  egyenes nem halad át csúcson, és egyik oldalegyenessel sem párhuzamos, hiszen mindegyiket metszi.



308

Elég azt bizonyítanunk, hogy

$$(B^*C^*D)(C^*A^*D)(A^*B^*D) = -1,$$

hiszen ezek az osztóviszonyok a párhuzamos szelők tétele szerint a tételbeliekkel egyenlők. Ha az osztóviszonyok jelentését kiírjuk, a

$$\frac{B^*D}{DC^*} \cdot \frac{C^*D}{DA^*} \cdot \frac{A^*D}{DB^*} = -1$$

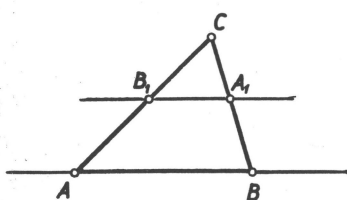
egyenlethez jutunk. Ez helyes egyenlet, mert itt a számlálókban ugyanazok az értékek szerepelnek, mint a nevezőkben, de ellenkező előjellel. —

**Tétel.** Ha egy az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalával párhuzamos egyenes a  $BC, CA$  oldalegyeneseket a háromszög csúcsaitól különböző  $A_1, B_1$  pontokban metszi, akkor

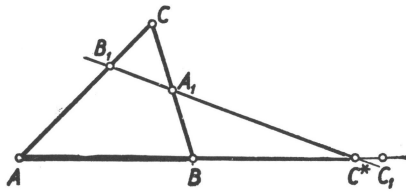
$$(BCA_1)(CAB_1) = 1.$$

A tételben  $C$  szerepét természetesen más csúcs is átveheti (309. ábra).

*Bizonyítás.* A párhuzamos szelők tétele szerint  $(CAB_1) = (CBA_1)$ . Állításunk tehát  $(BCA_1)(CBA_1) = 1$  alakban írható. Ennek helyessége közvetlenül belátható, ha az egyszerű viszonyok jelentését figyelembe vesszük. —



309



310

**Tétel** (Menelaos <sup>4</sup> tétele). Ha az  $ABC$  háromszög  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  oldalain a csúcsoktól különböző  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok úgy helyezkednek el, hogy

$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC_1) = -1,$$

akkor az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok egy egyenesen vannak.

*Bizonyítás.* Az  $A_1$ ,  $B_1$  pontok nem lehetnek azonosak, mert akkor a  $C$  csúccsal kellene egybeesniük. Az  $A_1B_1$  egyenes nem lehet párhuzamos az  $AB$  oldallal, mert akkor az előző tételből és tételünk egyenletéből  $(ABC_1) = -1$  következne, pedig az egyszerű viszony értéke  $-1$  nem lehet. Messe az  $A_1B_1$  egyenes az  $AB$  oldalegyenest a  $C^*$  pontban (310. ábra). Azt kell bizonyítanunk, hogy  $C_1$  és  $C^*$  azonos.

Az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C^*$  pontokra e szakasz első tétele szerint

$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC^*) = -1.$$

Ebből és a tétel egyenletéből  $(ABC_1) = (ABC^*)$  következik. Eszerint  $C_1$  és  $C^*$  valóban azonos. —

AHa arra gondolunk, hogy a Ceva-tétel esetében az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok mindegyike magukon a háromszögoldalokon helyezkedhetik el, viszont a Menelaos-tétel esetében ez nem lehetséges, akkor nem téveszthetjük el, hogy melyik tételben áll a jobb oldalon  $+1$ , és melyikben  $-1$ .

**B1** E szakasz tételeit úgy is kimondhatjuk, hogy egyszerű viszony és tört ne szerepeljen bennük, miként erre az első tétel után már rámutattunk. Ebben az esetben elhagyhatjuk a tételekből azt a megszorítást, hogy az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  pontok nem csúcspontok. Ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint ahogyan 35.6 B1 az előző szakasszal kapcsolatosan erre rámutatott.

**B2** Az ideális pontok bevezetése után e szakasz első két tétele egyetlen tétellé olvad egybe (vö. 35.6 B2).

## 36. § Távolság, terület, térfogat

Koordinátáik által megadott pontok távolságáról már 34.2 A1-ben szoltunk. Itt elsősorban a csúcsok koordinátái által meghatározott háromszög területéről és az így megadott tetraéder térfogatáról lesz szó. Ehhez kapcsolódva néhány olyan tételt is tárgyalunk, amelyek távolságok, területek és térfogatok közti összefüggésekről szólnak.

<sup>4</sup>\* Alexandriai Menelaos 100 körül Rómában működött.

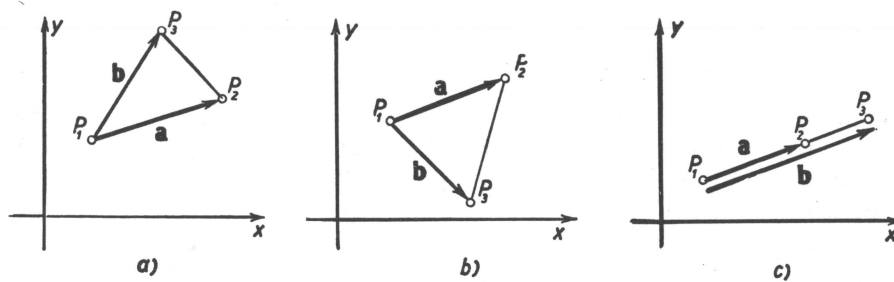
**36.1** Ha egy háromszög csúcsainak sorrendjét is megadjuk, akkor ezáltal a háromszög körüljárását adtuk meg, a háromszöget irányítottuk (lásd 4.3). Az irányított sík irányított háromszögének *előjeles területéhez* úgy jutunk, hogy a területét pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, amint a háromszög pozitív vagy negatív körüljárású.

**Tétel.** A sík egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  pontjai által meghatározott (esetleg elfajuló) irányított háromszög előjeles területe.

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

A tétel arról az esetről is szól, amikor a három pont egy egyenesen van, a pontok tehát elfajuló háromszöget határoznak meg. Ilyenkor a terület 0-nak veendő, hiszen a pontok konvex burka nem háromszög, hanem 0 területű szakasz (esetleg pont). Ebben az elfajuló esetben természetesen nem kell és nem is lehet beszélni a terület előjeléről.

A tétel kimondásakor feltételeztük, hogy a sík irányított, mégpedig pozitív irányú az a  $90^\circ$ -os forgás, amelyik az  $x$ -tengely irányát az  $y$ -tengely irányába viszi át.



311

*Bizonyítás.* Az  $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$  és  $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$  vektorok vektoriális szorzatáról tudjuk, hogy abszolút értéke az általuk kifeszített paralelogramma területét, háromszögünk területének kétszeresét adja meg (311. ábra);

$$|T| = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

A bal oldalon csak azért áll abszolút érték, mert most  $T$  az előjeles területet jelenti. Megállapításunk akkor is helyes, ha elfajuló háromszögről van szó.

Jelölje  $\mathbf{k}$  a síkunkra merőleges, az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  alapvektorokkal együtt jobbrendszert alkotó egységvektort. Állítjuk, hogy

$$2T\mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Már beláttuk, hogy a két oldalon egyenlő hosszú vektorok állnak. Állásuk is megegyezik, mert mindkettő merőleges a síkunkra. Csak azt kell még belátnunk, hogy irányuk is egyezik, tehát azt, hogy amikor a háromszög nem fajul el,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $2T\mathbf{k}$  jobbrendszert alkot.

Ha háromszögünk pozitív körüljárású, akkor az  $\mathbf{a}$  irányát  $\mathbf{b}$  irányába átvivő ( $180^\circ$ -nál kisebb) elforgatás pozitív, tehát  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{k}$  jobbrendszert alkot. Ha a körüljárás negatív, akkor ennek ellenkezőjét mondhatjuk, s ezért  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $-\mathbf{k}$  alkot jobbrendszert. Mindkét esetben igaz tehát, hogy az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, 2T\mathbf{k}$  vektorok jobbrendszert alkotnak.

A már bebizonyított vektoregyenlet

$$2T\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

alakban írható. Ha a determinánst a harmadik oszlop szerint kifejtjük,  $\mathbf{k}$  együtthatóinak megegyezése

$$T = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

eredményhez vezet. Tételünk igazolásához már csak az hiányzik, hogy a kapott determinánst átalakítsuk.

Ezt a determinánst

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

alakban írhatjuk, hiszen ez az utolsó oszlop szerint kifejtve az előbbi determinánst adja. Ha viszont az utóbbi determináns első sorát második és harmadik sorához adjuk, akkor a tételben szereplő determinánshoz jutunk. —

A Numerikus feladat kidolgozásakor nem érdemes a most bizonyított tétellel dolgozni. Valamivel

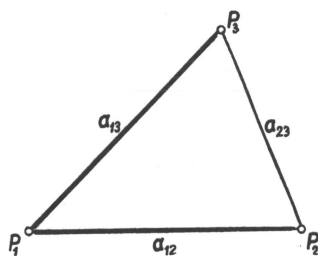
rövidebb a számítás, ha a területet az  $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  előírással számítjuk. Ez az előírás térbeli háromszög területének a kiszámítására is jó.

**36.2 Tétel.** Az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1, P_2, P_3$  pontok által meghatározott (esetleg elfajuló) háromszög  $T$  területére

$$T^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

ahol  $a_{ik}$  a  $P_i P_k$  távolságot jelenti.

Ez a tétel a háromszög területét a háromszög oldalaival fejezi ki (312. ábra). A tételbeli determináns szimmetrikus, mert  $a_{ik} = a_{ki}$ .





*Bizonyítás.* Az előző tétel felhasználásával és jelöléseivel

$$T^2 = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & y_1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix},$$

hiszen az első determináns első sora szerint kifejtve az előző tétel determinánsát adja, a második pedig két oszlop felcserélésével keletkezik az elsőből, ami a determinánsnak csak az előjelét változtatja meg. Ha determinánsaink szorzatát sor-sor-szorzással számítjuk ki, a csúcsok

$\mathbf{p}_1(x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{p}_2(x_2, y_2)$ ,  $\mathbf{p}_3(x_3, y_3)$  helyvektorait szerepeltetve

$$T^2 = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{p}_1\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 \\ 1 & \mathbf{p}_2\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2\mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \\ 1 & \mathbf{p}_3\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3\mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3\mathbf{p}_3 \end{vmatrix}$$

lesz az eredmény.

Azt akarjuk most elérni, hogy a determináns elemei között  $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_k$  helyén a háromszög megfelelő oldalának a négyzete, azaz  $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k)^2$  álljon. Ezt előkészítjük azzal, hogy a szóban forgó elemek elé  $-2$  szorzót hozunk. Evégből a determináns oszlopait az első kivételével  $(-2)$ -vel szorozzuk, majd az első sort  $(-2)$ -vel osztjuk, végül az egyenlet jobb oldalát 4-gyel osztjuk. A jobb oldal értéke ezek után az átalakítások után változatlan marad:

$$T^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1 & -2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 & -2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 \\ 1 & -2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1 & -2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2 & -2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 \\ 1 & -2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1 & -2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_2 & -2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_3 \end{vmatrix}$$

Ha most az első sornak és az első oszlopnak rendre  $\mathbf{p}_1^2$ -szeresét,  $\mathbf{p}_2^2$ -szeresét,  $\mathbf{p}_3^2$ -szeresét hozzáadjuk a rákövetkező sorokhoz és oszlopokhoz, akkor éppen a kívánt

$$T^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 & (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 \\ 1 & (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)^2 & 0 & (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2 \\ 1 & (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2 & (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

eredményhez jutunk. —

**Tétel.** Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalú (esetleg elfajuló) háromszög  $T$  területére

$$T^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

*Bizonyítás.* Az előző tétel szerint,  $a = a_{23}$ ,  $b = a_{13}$ ,  $c = a_{12}$  jelöléssel,

$$T^2 = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ha itt a determináns sorait rendre az  $abc$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  számokkal megszorozzuk, majd az oszlopokat rendre az  $1$ ,  $bc$ ,  $ac$ ,  $ab$  számokkal elosztjuk, akkor a tételbeli determinánshoz jutunk. —

**Tétel** (Heron<sup>5</sup> tétele). Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalú (esetleg elfajuló) háromszög  $T$  területére

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

ahol  $s$  a háromszög kerületének a felét jelöli.

*Bizonyítás.* Tekintsük  $T^2$ -nek az előző bizonyításban felírt értékét. Ha a determináns második oszlopát a harmadik és negyedik oszlopból levonjuk, majd az első sor szerint kifejtünk,

$$T^2 = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & c^2 & b^2 \\ 1 & -c^2 & a^2 - c^2 \\ 1 & a^2 - b^2 & -b^2 \end{vmatrix}$$

lesz az eredmény. Ha most az első sort vonjuk le a második kettőből, és az első oszlop szerint fejtünk ki,

$$T^2 = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} -2c^2 & a^2 - b^2 - c^2 \\ a^2 - b^2 - c^2 & -2b^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{16} [4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2]$$

adódik. A négyzetkülönbségeket tényezőkre bontva

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{16} (-a^2 + b^2 + 2bc + c^2)(a^2 - b^2 + 2bc - c^2) = \\ &= \frac{1}{16} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c), \end{aligned}$$

és ebből  $a+b+c = 2s$  figyelembevételével a tétel állítását kapjuk. —

**A** Ebben a könyvben általában arra törekszünk, hogy az egyes tételek bizonyítása lehetőleg egyszerű legyen. A Heron-féle formulára adott bizonyításunkról ezt nem mondhatjuk el, főként akkor, ha azt is nézzük, mennyi előkészítés után és milyen segédeszközök használatával jutottunk el a tételhez.

**B** Gyorsabban jutunk a Heron-formulához, ha a háromszög egy csúcsból induló  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  oldalvektorairól szólva a

$$16T^2 = 4(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = 4[\mathbf{b}^2\mathbf{c}^2 - (\mathbf{bc})^2] = 4\mathbf{b}^2\mathbf{c}^2 - (2\mathbf{bc})^2 = 4\mathbf{b}^2\mathbf{c}^2 - [\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - (\mathbf{b}-\mathbf{c})^2]^2$$

átalakítást hajtjuk végre. Így máris ahhoz  $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$  kifejezéshez jutottunk, amely az előbb a Heron-formulához vezetett.

Még gyorsabban jutunk célhoz, ha a 21.4, 21.5 szakaszokra támaszkodunk. A 145. ábrában az  $OC_0B$ ,  $BC_1O_2$  háromszögek az oldalak merőlegessége miatt hasonlóak. Ezért  $OC_0 : C_0B = BC_1 : C_1O_2$ , azaz

$$\frac{T}{s} : (s-b) = (s-c) : \frac{T}{s-a}.$$

<sup>5</sup>\* Heron 100 körül Alexandriában működött.

Ez éppen Heron tételét adja.

A Heron-formulával kapcsolatban felhívjuk még 36.4 B2-re a figyelmet.

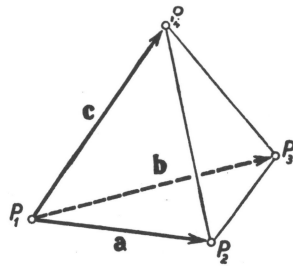
**36.3** A tetraéder térfogatának tárgyalására térünk. Négy egymástól nem feltétlenül különböző pont konvex burka tetraéder vagy pedig *elfajuló* tetraéder. Az utóbbi tehát négyszög, háromszög, szakasz vagy pont.

**Tétel.** Az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$  pontok által meghatározott (esetleg elfajuló) tetraéder  $V$  térfogatára

$$\pm V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nem vizsgáljuk, hogy a térfogat milyen előjellel adódik, s ezért áll a bal oldalon  $\pm$  előjel.

A tétel arról az esetről is szól, amikor a négy pont egy síkban van, a pontok tehát elfajuló tetraédert határoznak meg. Ilyenkor a térfogat 0, hiszen négyszögről, háromszögről, szakaszból vagy pontról van szó.



313

*Bizonyítás.* Az  $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{P_1P_4}$  vektorokról tudjuk (313. ábra), hogy vegyesszorzatuk az általuk kifeszített paralelepipedon térfogatát adja (valamilyen előjellel). Ez a térfogat tetraéderünk térfogatának hatszorosa, hiszen a paralelepipedon két olyan háromoldalú hasábra bontható, amelyeknek alapterülete és magassága a tetraéderével megegyezik. Megállapításunk akkor is helyes, ha a négy pont egy síkban van, hiszen akkor a vegyesszorzat 0. Ezek szerint

$$\pm V = \frac{1}{6} \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c},$$

vagy az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok koordinátaival

$$\pm V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

E helyett a determináns helyett

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

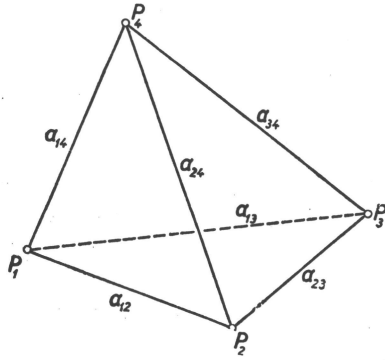
is írható, hiszen ez az utolsó oszlop szerint kifejtve az előbbi determináns  $(-1)^{(-1)}$ -szeresét adja, és nem vizsgáljuk, hogy a bal oldalon milyen előjel szerepel. Ha az utóbbi determináns első sorát a többi sorához adjuk, a tételbeli determinánshoz jutunk. —

**Tétel.** Az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pontok által meghatározott (esetleg elfajuló) tetraéder  $V$  térfogatára

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

ahol  $a_{ik}$  a  $P_i P_k$  távolságot jelenti.

Tételünk a tetraéder térfogatát a hat él hosszával fejezi ki (314. ábra). A tételbeli determináns szimmetrikus, mert  $a_{ik} = a_{ki}$ .



314

**Bizonyítás.** Az előző tétel felhasználásával és jelöléseivel

$$V^2 = -\frac{1}{36} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

hiszen az első determináns az első sor szerint kifejtve az előző tétel determinánsát adja, a második pedig két oszlop felcserélésével keletkezik az elsőből. Ha a két determinánst a sor-sor-szorzással

összeszorozzuk, akkor a pontok  $P_1, P_2, P_3, P_4$  helyvektorait használva a

$$V^2 = -\frac{1}{36} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & P_1 P_1 & P_1 P_2 & P_1 P_3 & P_1 P_4 \\ 1 & P_2 P_1 & P_2 P_2 & P_2 P_3 & P_2 P_4 \\ 1 & P_3 P_1 & P_3 P_2 & P_3 P_3 & P_3 P_4 \\ 1 & P_4 P_1 & P_4 P_2 & P_4 P_3 & P_4 P_4 \end{vmatrix}$$

eredményhez jutunk.

Ha most 36.2 mintájára az első oszlop kivételével az oszlopokat  $(-2)$ -vel szorozzuk, az első sort  $(-2)$ -vel osztjuk, és az egyenlet jobb oldalát  $(-8)$ -cal osztjuk, akkor

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1 & -2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 & -2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 & -2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_4 \\ 1 & -2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1 & -2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_2 & -2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 & -2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_4 \\ 1 & -2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1 & -2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_2 & -2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_3 & -2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4 \\ 1 & -2\mathbf{p}_4\mathbf{p}_1 & -2\mathbf{p}_4\mathbf{p}_2 & -2\mathbf{p}_4\mathbf{p}_3 & -2\mathbf{p}_4\mathbf{p}_4 \end{vmatrix}$$

adódik, amiből a tétel állítását kapjuk, ha az első sornak és az első oszlopnak  $\mathbf{p}_1^2, \mathbf{p}_2^2, \mathbf{p}_3^2, \mathbf{p}_4^2$  számokkal való szorzatát a többi sorhoz és oszlophoz rendre hozzáadjuk. —

A Ha a csúcsok numerikusán adott koordinátaiból számítjuk ki a tetraéder térfogatát, akkor leggyorsabban nem e szakasz első tétele, hanem az  $|\mathbf{abc}|$  előírás vezet célhoz.

6

**36.4 Tétel (Euler négypont-tétele).** A  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pontok akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ahol  $a_{ik}$  a  $P_i P_k$  távolságot jelöli.

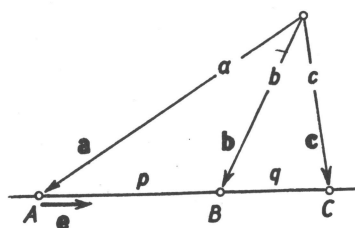
*Bizonyítás.* A négy pont akkor és csak akkor van egy síkban, ha a pontok által meghatározott tetraéder elfajuló, ha tehát térfogata 0. Tételünk helyessége következik tehát abból, hogy a benne szereplő determináns az előző tétel szerint a mondott térfogat négyzetének 288-szorosa. —

**Tétel (Stewart<sup>6</sup> tétele).** Ha az  $A, B, C$  pontok ilyen sorrendben helyezkednek el egy egyenesen, és  $AB = p, BC = q$ , ha továbbá egy  $P$  pont távolsága az  $A, B, C$  pontoktól rendre  $a, b, c$  akkor

$$a^2q - b^2(p+q) + c^2p = pq(p+q).$$

Tételünk az előzőhöz hasonlóan ismét négy pont hat távolságáról szól, most azonban tudjuk, hogy a pontok közül három egy egyenesen van.

*Bizonyítás.* Bevezetjük az  $\mathbf{a} = \overrightarrow{PA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{PB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{PC}$  vektorokat, valamint az  $AB$  irányú  $\mathbf{e}$  egységvektort (315. ábra).



<sup>6</sup>\* M. Stewart (ejtsd: sztjuárt), 1717—1785, az edinburghi egyetem tanára.

315

Minthogy  $\overrightarrow{AB} = p\mathbf{e}$  és  $\overrightarrow{BC} = q\mathbf{e}$ , fennállnak az

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} - p\mathbf{e},$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + q\mathbf{e}$$

összefüggések. Ezeket négyzetreemelve

$$a^2 = b^2 + p^2 - 2p(\mathbf{b}\mathbf{e}),$$

$$c^2 = b^2 + q^2 + 2q(\mathbf{b}\mathbf{e})$$

adódik, hiszen  $a, b, c$  az ugyanolyan betűvel jelölt vektorok hosszai. Az első egyenletet  $q$ -val, a másodikat  $p$ -vel szorozva, majd az egyenleteket összeadva az

$$a^2q + c^2p = b^2(p + q) + p^2q + q^2p$$

eredményhez jutunk, s ez a tétel állításával azonos. —

**Tétel** (Euler ötpon-tétel). A  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  pontok által meghatározott tíz távolságra

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & a_{15}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & a_{25}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 & a_{35}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 & a_{45}^2 \\ 1 & a_{51}^2 & a_{52}^2 & a_{53}^2 & a_{54}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ahol  $a_{ik}$  a  $P_i P_k$  távolságot jelenti.

*Bizonyítás.* a) Először azt látjuk be, hogy található olyan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  számok,

amelyek között van 0-tól különböző is, s amelyekre

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0,$$

$$\lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{p}_3 + \lambda_4 \mathbf{p}_4 + \lambda_5 \mathbf{p}_5 = 0,$$

ahol  $\mathbf{p}_i$  a  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  pont helyvektorát jelenti. Ha ugyanis a vektoregyenletet koordináta-egyenletekké írjuk át, akkor ahhoz a követeléshez jutunk, hogy a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  számoknak a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0,$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 + \lambda_5 y_5 = 0,$$

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 + \lambda_5 z_5 = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer kell kielégíteniük. Ha pedig egy homogén lineáris egyenletrendszerben kevesebb egyenlet van, mint ahány ismeretlen, akkor az egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. Vannak tehát a követeléseinket kielégítő  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  számok.

b) Azt állítjuk, hogy ha egy tetszőleges  $P(\mathbf{p})$  pontra kiszámítjuk a

$$\lambda_1 \overrightarrow{PP_1^2} + \lambda_2 \overrightarrow{PP_2^2} + \lambda_3 \overrightarrow{PP_3^2} + \lambda_4 \overrightarrow{PP_4^2} + \lambda_5 \overrightarrow{PP_5^2}$$

értéket, akkor  $P$  megválasztásától függetlenül mindig ugyanahhoz az eredményhez jutunk. A felírt kifejezés

$$\lambda_1 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p})^2 + \dots + \lambda_5 (\mathbf{p}_5 - \mathbf{p})^2 = (\lambda_1 \mathbf{p}_1^2 + \dots + \lambda_5 \mathbf{p}_5^2) - 2(\lambda_1 \mathbf{p}_1 + \dots + \lambda_5 \mathbf{p}_5) \mathbf{p} + (\lambda_1 + \dots + \lambda_5) \mathbf{p}^2$$

alakban írható. Ha a  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  számok tulajdonságait is figyelembe vesszük, akkor a

$$\lambda_1 \mathbf{p}_1^2 + \dots + \lambda_5 \mathbf{p}_5^2 = -\mu$$

eredményhez jutunk, amely valóban nem függ  $P$  megválasztásától.

c) A  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  számok kielégítik a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 0, \\ \mu + \lambda_2 a_{12}^2 + \lambda_3 a_{13}^2 + \lambda_4 a_{14}^2 + \lambda_5 a_{15}^2 &= 0, \\ \mu + \lambda_1 a_{21}^2 + \lambda_3 a_{23}^2 + \lambda_4 a_{24}^2 + \lambda_5 a_{25}^2 &= 0, \\ \mu + \lambda_1 a_{31}^2 + \lambda_2 a_{32}^2 + \lambda_4 a_{34}^2 + \lambda_5 a_{35}^2 &= 0, \\ \mu + \lambda_1 a_{41}^2 + \lambda_2 a_{42}^2 + \lambda_3 a_{43}^2 + \lambda_5 a_{45}^2 &= 0, \\ \mu + \lambda_1 a_{51}^2 + \lambda_2 a_{52}^2 + \lambda_3 a_{53}^2 + \lambda_4 a_{54}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Az utóbbi öt egyenlethez úgy jutottunk, hogy b)-nek a  $P$  pontról szóló megállapítását a  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  pontokra írtuk fel. Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális  $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  megoldása, és ezért a determinánsa 0. —

**B1** A Stewart-tétel az Euler-féle négy pont-tétel speciális esete, és abból kiindulva is le lehet vezetni. Ez a levezetés azonban nagyon hosszadalmas volna.

**B2** Ugyanúgy, ahogyan a tetraéder térfogatformulájából az Euler-féle négy pont-tételt levezettük, a háromszög 36.2-ben megismert területformulájából kiindulva egy három pont-tételt vezethetünk volna le, ti. azt, hogy egymástól  $a, b, c$  távolságra levő három pont akkor és csak akkor van egy egyenesen, ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt a tételt azért nem mondtuk ki, mert ugyanarra a kérdésre jóval egyszerűbb feleletet is adhatunk: egymástól  $a, b, c$  távolságra levő három pont akkor és csak akkor van egy egyenesen, ha a három távolság valamelyike a másik kettőnek összege. Ebből a megjegyzésből következik, hogy  $-a+b+c, a-b+c$  és  $a+b-c$  tényezői annak a kifejezésnek, amelyet a fenti determináns kifejtésével kapunk. Tudjuk ugyanis, hogy ez a kifejezés pl.  $a$ -nak olyan polinomja, amelyik 0 helyettesítési értéket ad, ha  $a$  helyébe a  $b+c$  értéket helyettesítjük, hogy tehát a polinom az  $a-b-c$  gyöktényezővel osztható. Ezzel rávilágítottunk arra, hogy miért volt lehetséges 36.2-ben a tényezőkre bontás, s hogy Heron formulájában miért szerepel tényezőként  $s-a, s-b$  és  $s-c$ .

**B3** Az ötpont-tételre adott bizonyítás módszerét a négy pont-tétel esetében is alkalmazhattuk volna. Ezzel a módszerrel azonban nem tudjuk bizonyítani a négy pont-tételnek azt az állítását, hogy a feltétel teljesülésekor a négy pont egy síkban van.

**36.5** Az előző szakaszban pontok távolságai között fennálló összefüggésekről volt szó, itt most irányok alkotta szögek összefüggéseiről szólunk.

**Tétel.** Ha négy irány közül az  $i$ -edik és a  $k$ -edik hajlásszögének koszinuszát  $c_{ik}$  jelöli, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Bizonyítás.* a) Hivatkozni fogunk arra, hogy megadott  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  vektorokhoz találhatók olyan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  valós számok, amelyek között van 0-tól különböző, s amelyekre

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 = 0.$$

Ha ugyanis ezt a vektoregyenletet három koordinátaegyenlettel pótoljuk, akkor három egyenletből álló és négyismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, s ennek van nem triviális megoldása.

b) Jelöljön  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  a szóban forgó irányokba mutató egységvektorokat, és válasszuk meg hozzájuk a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  értékeket a) előírása szerint. Minthogy egységvektorok skaláris szorzata a hajlásszögük koszinuszával egyenlő,

$$\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k = c_{ik}.$$

Ha tehát a) egyenletét skalárisán szorozzuk a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  vektorokkal, akkor a

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 c_{12} + \lambda_3 c_{13} + \lambda_4 c_{14} &= 0, \\ \lambda_1 c_{21} + \lambda_2 + \lambda_3 c_{23} + \lambda_4 c_{24} &= 0, \\ \lambda_1 c_{31} + \lambda_2 c_{32} + \lambda_3 + \lambda_4 c_{34} &= 0, \\ \lambda_1 c_{41} + \lambda_2 c_{42} + \lambda_3 c_{43} + \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Minthogy ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  megoldása, a determinánsa valóban 0. —

**B1** Ha tételünket négy olyan irányra alkalmazzuk, amelyek közül három egymásra páronként merőleges, ahhoz a 34.3-ból már ismert eredményhez jutunk, hogy egy irány iránykoszinuszainak négyzetösszege 1.

**B2** Semmi akadályja sincs annak, hogy tételünk síkbeli megfelelőjét is kimondjuk, és ugyanúgy bizonyítsuk. Az eredmény azonban nem érdekes, mert a szögfüggvények összegezési tételei ugyanazok között a szögek között egyszerűbb összefüggéseket adnak meg.

**36.6** Egy poliéder lapjaihoz tartozó területvektorokkal foglalkozunk. Ha a területvektort a lap egy belső pontjából mérjük fel, van olyan kezdőszakasza, amely a poliéderen kívül vagy pedig a poliéderen belül halad. Ennek megfelelően kifelé vagy befelé irányított lapterületvektorról beszélünk.

**Tétel.** Egy poliéder kifelé irányított lapterületvektorainak összege nullvektor.

A tétel a kifelé irányított lapterületvektorok helyett természetesen a befelé irányítottakról is szólhatna.

*Bizonyítás.* a) Először csak tetraéderre bizonyítjuk az állítást. Azt bizonyítjuk, hogy a négy lapterületvektor összege merőleges a tetraéder minden élére. Ebből következik, hogy ez az összeg nullvektor, mert más vektor csak egysíkú vektorokra merőleges. Minthogy a tetraéder élei között



nincs szerepkülönbség, elég a tetraéder egy éléről bizonyítanunk, hogy merőleges a lapterületvektorok összegére.

Tekintsük az  $ABCD$  tetraédert, amelynek  $\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{DB}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{DC}$  élvektorai jobbrendszert alkotnak (316. ábra). A lapok területvektorát a szemközti csúccsal indexeljük. A lapterületvektorok

$$\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B + \mathbf{t}_C + \mathbf{t}_D$$

összegéről bizonyítjuk, hogy az  $AC$  élre merőleges. Minthogy a  $\mathbf{t}_B, \mathbf{t}_D$  vektorok  $AC$ -re merőlegesek, hiszen ezt az élt tartalmazó lapnak területvektorai, elég azt bizonyítanunk, hogy

$$\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_C$$

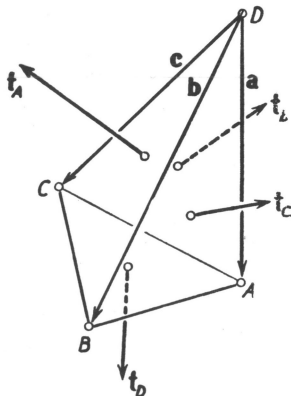
az  $AC$  élre merőleges. Felhasználtuk itt azt, hogy egy egyenesre merőleges vektorok összege is merőleges ugyanarra az egyenesre. Ez abból következik, hogy az egyenesre merőleges síkban haladó vektorok egymáshoz fűzéssel nyert összege ugyancsak a síkban van. Állításunk helyessége most már következik abból, hogy

$$\mathbf{t}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{c} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{t}_C = \frac{1}{2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

és így

$$\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_C = \frac{1}{2}[(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b}].$$

Mivel a vektoriális szorzat merőleges a tényezőire,  $\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_C$  valóban merőleges a  $\mathbf{c} - \mathbf{a} = \overrightarrow{AC}$  vektorra.



316

b) Tetszőleges poliéderre úgy bizonyítjuk tételünket, hogy a poliédert tetraéderekre bontjuk fel, amelyeknek minden lapja vagy egészében a poliéder felületén, vagy annak belsejében terül el. Tudjuk, hogy ez lehetséges (lásd 27.6). A tetraéderek mindegyikére, igaz a) szerint, hogy lapterületvektorainak összege  $\mathbf{0}$ . Igaz tehát az is, hogy valamennyi tetraéder valamennyi lapterületvektorának összege  $\mathbf{0}$ . Kimutatjuk, hogy a lapterületvektoroknak ez az összege a poliéder lapjai területvektorainak összegével egyenlő. Ezáltal tételünk helyességét bizonyítjuk be.

Tetraédereink lapjai között vannak olyanok, amelyek a poliéder felületén helyezkednek el. Ezek a lapok együttesen a poliéder teljes felületét adják, a poliéderfelületet háromszögekre bontják. Egy poliéderlap háromszög-felbontásában egy vagy több háromszög szerepel, és e háromszögekhez tartozó területvektorok összege a teljes lap területvektorát adja, hiszen a tetraéderek mind ugyanarról az oldalról, a poliéder belseje felől támaszkodnak a lapra, így tehát a most vizsgált tetraéderlapok kifelé

mutató területvektorainak az összege a poliéderlapok kifelé mutató területvektorainak az összegével egyenlő.

Azt kell már csak belátnunk, hogy a poliéder belsejében elhelyezkedő tetraéderlapok területvektorainak összege  $\mathbf{0}$ . Tekintsünk egy olyan síkot, amely ilyen tetraéderlapot tartalmaz. Ebben a síkban van egy olyan sokszög, amelyet az egyik oldalról a síknak támaszkodó tetraéderek a most vizsgált belső lapjukkal beborítanak. Ugyanehhez a sokszöghöz jutunk, ha a másik oldalról síkunknak támaszkodó tetraéderekből indulunk ki, hiszen most csak belső lapokról van szó. Eszerint az ebben a síkban elhelyezkedő belső tetraéderlapok területvektorainak az összege az említett sokszög területvektorát adja egyszer az egyik oldalra, másodszor meg a másik oldalra irányítva, és ezért a teljes összegük  $\mathbf{0}$ . Minthogy ez minden belső lapot tartalmazó síkra helyes, a belső tetraéderlapok területvektorainak teljes összege is  $\mathbf{0}$ . —

**B** A bizonyított tételt fizikai megfontolással is alátámaszthatjuk. Tekintsünk egy térrészt kitöltő, hidrosztatikus nyomás alatt álló folyadékot, amelyre külső erő nem hat. A folyadék egyensúlyban van, s ez az egyensúly akkor sem bomlik meg, ha a folyadékból egy poliéder alakot kitöltő részt merev testtel pótlunk, vagy ilyenre merevítjük. E merev testre ható erők tehát egyensúlyt tartanak, s ezért a rá ható erők összege nullvektor. Az egyes lapokra hidrosztatikus nyomóerő hat, amely a lapra merőleges, a test belseje felé mutat, és a lap területével arányos. Ezek az erők tehát a poliéder befelé irányított területvektorainak tekinthetők. Ezek szerint e területvektorok összege nullvektor.

Fizikai megfontolásunk mutatja, hogy nemcsak a lapterületvektorok összege nullvektor, hanem az is igaz, hogy a lapsúlypontokban ható lapterületvektoroknak bármely pontra vonatkozó forgató nyomatéka (vö. 32.5 A1) is nullvektort ad összegül. Tételünk bizonyításának mintájára ezt is bizonyíthatnók.

### 36.7 Tétel. Egy $T$ területű sokszög merőleges vetületének területe

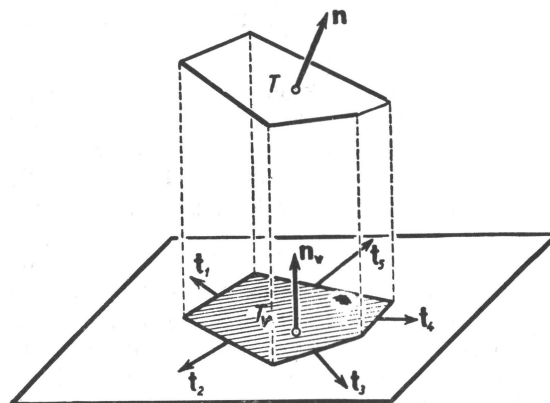
$$T_v = T \cos \alpha,$$

ahol  $\alpha$  az eredeti sokszög síkjának és a vetületi síknak a hajlásszöge.

Nyilvánvalóan helyes ez a tétel akkor is, amikor  $\alpha = 90^\circ$ , hiszen ilyenkor  $T_v = 0$ . Tételünk párhuzamba állítható a szakaszok vetítéséről szóló megfelelő kijelentéssel (lásd 31.6).

*Bizonyítás.* Csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor nem a sokszög síkjára merőleges síkra vetítünk. A vetület alakja változatlan marad, ha a vetület síkja helyett egy vele párhuzamos síkra vetítünk, hiszen ez csak a vetület eltolását jelenti. Megválaszthatjuk tehát az új síkot úgy, hogy ne messe a vetített sokszöget. Ekkor az eredeti sokszög, az oldalak vetítésíkjai és a vetületi sokszög egy poliédert határolnak (317. ábra). Jelölje  $\mathbf{n}$  a vetített sokszögre merőleges, a poliéderből kifelé mutató

egységvektort,  $\mathbf{n}_v$  pedig a vetületi sokszögre merőleges, befelé mutató egységvektort. Legyenek  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$  a poliéder oldallapjainak kifelé mutató területvektorai.



317

Az előző szakasz tétele szerint

$$T_v \mathbf{n}_v = T \mathbf{n} + \mathbf{t}_1 + \dots + \mathbf{t}_n,$$

hiszen  $-T_v \mathbf{n}_v$  a kifelé mutató területvektor. Szorozzuk meg ezt az egyenletet skalárisan az  $\mathbf{n}_v$  egységvektorral. Minthogy  $\mathbf{n}_v$  merőleges az oldallapok területvektoraira,

$$T_v = T(\mathbf{n}, \mathbf{n}_v)$$

lesz az eredmény. Ez az eredmény is mutatja, hogy  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{n}_v$  hegyesszöget zár be hiszen  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_v$  pozitív. Ez a hegyesszög a két vektor egyenesének hajlásszöge, tehát a rájuk merőleges síkok  $\alpha$  hajlásszögével egyenlő. Ezek szerint

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_v = \cos \alpha,$$

és ez a tétel állítását bizonyítja. —

**Tétel. Egy  $T$  területű síkidom merőleges vetületének a területe**

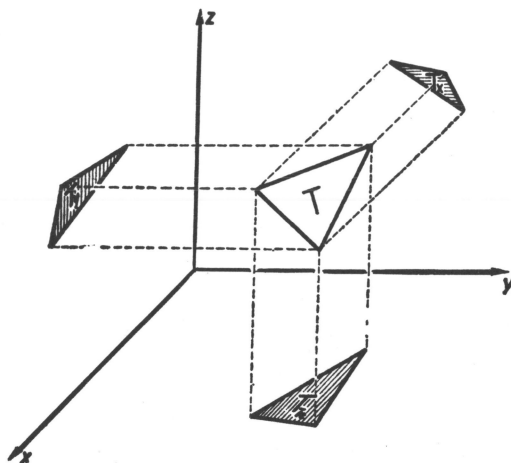
$$T_v = T \cos \alpha,$$

ahol  $\alpha$  az eredeti idom és a vetületi idom síkjának hajlásszöge.

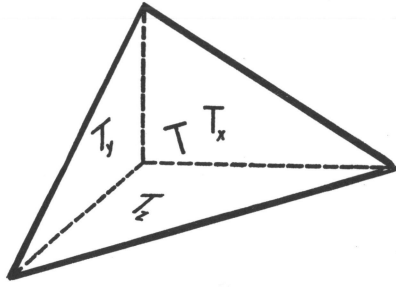
Tételünk az előző tételt magában foglalja. Az előző tételhez fűzött megjegyzéshez hasonlóan itt is megemlíthetjük, hogy az  $\alpha = 90^\circ$  esetben a tétel nyilvánvalóan helyes. A tétel pontosabban úgy értendő, hogy ha az eredeti síkidomnak van területe, akkor van területe a vetületének is, és kielégíti a tétel egyenletét.

*Bizonyítás.* Csak az  $\alpha \neq 90^\circ$  esettel kell foglalkoznunk. Ha egy síkidom tartalmaz egy másikat, akkor vetülete is tartalmazza annak vetületét. Ebből következik, hogy síkidomunk belső és külső sokszögeinek vetületei a vetületi idom belső és külső sokszögei.

Az előző tételt alkalmazva azt kapjuk tehát, hogy az eredeti idom belső és külső sokszögeinek területét  $\cos \alpha$ -val szorozva a vetületi idom belső, illetve külső sokszögeinek a területéhez jutunk.



318



319

Tudjuk, hogy  $T$  az egyetlen olyan érték, amelyik az eredeti síkidom egyetlen belső sokszögének területénél sem kisebb, és egyetlen külső sokszögének területénél sem nagyobb. Ebből következik az imént mondottak alapján, hogy  $T \cos \alpha$  az egyetlen olyan érték, amelyik a vetületi idom egyetlen belső sokszögének területénél sem nagyobb, és egyetlen külső sokszögének területénél sem kisebb. Ez azt jelenti, hogy a vetületi idomnak van területe, és ez  $T \cos \alpha$ . —

A most bizonyított tételből következik, hogy ha egy síkidom területvektorát merőlegesen vetítjük egy sík normálisára, akkor a síkidom síkra vetett merőleges vetületének a területvektorához jutunk. Az eredeti területvektor hossza ugyanis  $T$ , és vetületének hossza valóban  $T \cos \alpha$ , hiszen két sík normálisának a hajlásszöge megegyezik a síkok hajlásszögével.

**Tétel.** Ha egy  $T$  területű síkidomot merőlegesen vetítünk a koordinátságokra, és  $T_x, T_y, T_z$  e vetületek területei, akkor

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2.$$

*Bizonyítás.* Ha  $\mathbf{t}(\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y, \mathbf{t}_z)$  a vetített síkidom területvektora, akkor a tétel kimondása előttiék szerint  $T_x = |\mathbf{t}_x|$ ,  $T_y = |\mathbf{t}_y|$ ,  $T_z = |\mathbf{t}_z|$ . Állításunk helyessége következik tehát abból, hogy a vektor koordinátáinak négyzetösszege a vektor hosszának négyzete (318. ábra). —

Ha egy olyan tetraédert tekintünk, amelynek három lapja páronként merőleges egymásra (319. ábra), akkor a most bizonyított tétel szerint a negyedik lap (átfogólap) területének a négyzete a másik három lap (befogólapok) területének négyzetösszegével egyenlő.

**B** E szakasz első tételét bizonyíthattuk volna anélkül, hogy az előző szakasz tételére hivatkoznánk. Könnyű a tétel bizonyítása olyan háromszögre, amelyiknek egyik oldala a vetületi síkkal párhuzamos, hiszen ezt az oldalt és vetületét alapnak választva mondhatjuk, hogy a vetített háromszög magasságának vetülete a vetületi háromszög magassága. Így minden sokszögre beláthatjuk a tétel helyességét, mert minden sokszög felbontható mondott tulajdonságú háromszögekre.

---

## 5. fejezet - A SÍK ANALITIKUS GEOMETRIÁJA

Ebben a fejezetben csak síkbeli alakzatokkal foglalkozunk. Azokat az alakzatokat tárgyaljuk, amelyeknek az egyenlete derékszögű koordináta-rendszerben a legegyszerűbbek közé tartozik. Ezek az alakzatok: az egyenes, a kör és a kúpszeletek. A fejezet legnagyobb része az utóbbiakkal foglalkozik.

A tárgyalás javarészt analitikus, ahol azonban a tárgy megkívánja, elemi geometriai módszerrel is dolgozunk. Ez főként a kúpszeletek bevezetésére vonatkozik, hiszen ezekkel a könyv elemi geometriai részében még nem foglalkoztunk.

Célszerűnek mutatkozik majd, hogy vizsgálatunk eszközeit tovább bővítsük. Így kerül sor a „végtelen távoli” térelemek bevezetésére, és olyan újfajta koordináták tárgyalására, amelyek az újonnan bevezetett térelemek kezelését is lehetővé teszik.

### 37.§ Egyenes

Először azt tisztázzuk, hogy mit nevezünk egy alakzat egyenletének. Az egyenes különféle egyenleteit és az egyenessel kapcsolatos alapvető feladatokat tárgyaljuk, majd az egy ponton áthaladó és az egymással párhuzamos egyenesekkel foglalkozunk.

37.1 Az olyan összefüggést, amelyet egy alakzat pontjainak koordinátái kielégítenek és más pont koordinátái nem, az alakzat egyenletének (koordinátaegyenlet) nevezzük. Megköveteljük tehát, hogy az alakzat pontjainak koordinátái kielégítsék az egyenletet, és azt is, hogy ha egy pont koordinátái kielégítik az egyenletet, akkor ez a pont az alakzathoz tartozzék. Hasonló módon értelmezzük egy alakzat vektor egyenletét. Ez olyan összefüggés, amelyet az alakzat pontjainak helyvektorai kielégítenek, és más pontok helyvektorai nem. Az alakzat egyenletében változókként szereplő koordinátákat (helyvektort) a futó pont koordinátáinak (helyvektorának) mondjuk.

Ha adva van egy összefüggés a koordináták között, nem bizonyos, hogy van olyan alakzat, amelynek ez egyenlete. Lehetséges az is, hogy nincs olyan pont, amelynek koordinátái az összefüggést kielégítik. Az ilyen összefüggés az üres alakzat, tehát nem valódi alakzat egyenlete. Példa erre az  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  egyenlet.

Nem kell egy alakzat egyenletében a koordináták mindegyikének szerepelnie. Nyilvánvaló pl., hogy a síkbeli koordináta-rendszerben  $y = 0$  az  $x$ -tengely egyenlete,  $x = 0$  pedig az  $y$ -tengely egyenlete.

Még azt is megengedhetjük, hogy egyetlenegy koordináta se szerepeljen, vagy hogy a koordináták csak látszatra szerepeljenek. Így pl.  $x + y = x + y$ ,  $0x = 0$  vagy  $1 = 1$  is egyenlet, mégpedig a sík minden pontjának koordinátái kielégítik ezeket, ezek tehát a teljes sík egyenletei. Másfajta példa  $x + y = x + y + 1$ ,  $0x = 1$  vagy  $0 = 1$ ; minthogy ezeket egyetlen pont koordinátái sem elégítik ki, ezek az üres alakzat egyenletei. Ezeket az egyenletfajtákat csak a teljesség kedvéért említettük, a tárgyalás során nem lesz szó róluk.

Az alakzatok egyenletét sokszor írjuk úgy, hogy a jobb oldalon 0 áll. Az ilyen egyenletet *zérusra redukált* (redukált) egyenletnek nevezzük. Ilyen egyenlethez jutunk, ha az egyenlet két oldalán álló kifejezések különbségét zérussal tesszük egyenlővé. Két zérusra redukált egyenlet között nem teszünk különbséget akkor, ha a bal oldalaik azonos kifejezések. Így pl.  $y = 0$  és  $x + y - x = 0$  ugyanaz az egyenlet.

Ha valamely alakzat egyenletét egy 0-tól különböző számmal megszorozzuk, újból ugyanannak az alakzatnak az egyenletéhez jutunk. Ha  $F = 0$  egy alakzat egyenlete, ahol  $F$  egy a koordinátákat tartalmazó kifejezés, akkor  $\lambda \neq 0$  esetén  $\lambda F = 0$  ugyanannak az alakzatnak az egyenlete.

Két zérusra redukált egyenlet lehet ugyanannak az alakzatnak az egyenlete anélkül, hogy bal oldalaik azonosak volnának, vagy az egyik a másikból számmal való szorzással keletkeznék. Így pl. az  $F = 0$  alakzatnak egyben  $F^2 = 0$  is egyenlete.

Ha két alakzat egyenletét ismerjük, akkor ezeknek az alakzatoknak közös pontjaihoz úgy jutunk, hogy a két egyenletet egyenletrendszerbe foglaljuk, és közös megoldásaikat keressük. Így valóban a közös pontokhoz jutunk, hiszen ezek azok a pontok, amelyeknek a koordinátái mind a két egyenletet kielégítik.

Ha két alakzat egyenletét ismerjük, akkor könnyűszerrel felírhatjuk a két alakzat egyesítésének egy egyenletét. Ha ugyanis  $F_1 = 0$  és  $F_2 = 0$  a két alakzat egyenlete, akkor  $F_1 F_2 = 0$  egyesítésüknek egyenlete, hiszen ez az összefüggés valamely pont koordinátáira akkor és csak akkor teljesül, ha az előző kettőnek legalább az egyike teljesül. Így pl. a síkbeli koordináta-rendszerben  $xy = 0$  a tengelykereszt egyenlete.

Azt is megállapíthatjuk, hogy ha egy alakzat egyenlete  $F_1 F_2 = 0$  alakú, akkor alakzatunk két alakzatnak, az  $F_1 = 0$  és  $F_2 = 0$  alakzatoknak az egyesítése, azaz alakzatunk e két alakzatra esik szét. Arra az esetre gondoltunk itt hogy mind a két tényező egy-egy valódi és egymástól különböző alakzat egyenlete, mert ha pl.  $F_2 = 0$  üres alakzat, akkor  $F_1 F_2 = 0$  és  $F_1 = 0$  ugyanannak az alakzatnak egyenletei.

Minthogy ebben a fejezetben csak síkbeli alakzatokkal foglalkozunk, és többnyire síkbeli derékszögű koordináta-rendszert használunk, *tételeink megszövegezésekor nem ismételjük azt a hallgatólagos feltevést, hogy csak egy sík alakzatairól van szó, s hogy a szereplő  $x, y$  koordináták egy derékszögű koordináta-rendszerre vonatkoznak.* A futó pont helyvektorát többnyire  $\mathbf{r}(x, y)$  jelöli.

**B** Rögzített koordináta-rendszerhez- tartozó egyenleteket osztályozhatunk aszerint, hogy milyen *geometriai alakzatok* egyenletei. Ha egy megadott alakzat egyenletét keressük, akkor egy ilyen osztályhoz tartozó egyenlet keresése a cél. Láttuk, hogy  $\lambda \neq 0$  esetén  $F = 0$ ,  $\lambda F = 0$ ,  $F^2 = 0$  ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak.

Osztályozhatjuk azonban az egyenleteket más szempontból is. Megtehetjük, hogy két zérusra redukált egyenletet akkor és csak akkor sorolunk egy osztályba, ha az egyik bal oldala a másikéból egy 0-tól különböző számmal szorozva keletkezik. Ez az előbb említettél finomabb osztályozás, most  $F = 0$  és  $F^2 = 0$  más-más osztályba tartozik. Azt mondjuk, hogy egy ilyen finomabb egyenletosztály egy *analitikus alakzatot* definiál. Előfordul majd, hogy ilyen analitikus alakzatoknak nevet is adunk.

Ezek szerint egymástól különböző analitikus alakzatok geometriai szempontból azonosak is lehetnek. Ez a kétféleség a magyarázata annak, hogy pl.  $y = 0$  és  $y^2 = 0$  ugyanannak az egyenesnek, ti. az  $x$ -tengelynek az egyenlete, és mégis mondhatjuk, ha analitikus alakzatokra gondolunk, hogy az egyik egyenes, a másik pedig „kettős egyenes” egyenlete. Ugyanígy válik érthetővé, hogy még az üres alakzatnak is különféle neveket adunk majd aszerint, hogy milyen egyenletéről van szó.

Két analitikus alakzat akkor egybevágó, ha a koordináta-rendszer egy egybevágóság révén megváltoztatható úgy, hogy a megfelelő koordinátatranszformáció az egyik analitikus alakzat egyenletét a másikéba vigye át. Egybevágó analitikus alakzatok természetesen geometriai szempontból is egybevágók. Megállapodásunk lehetővé teszi, hogy analitikus alakzatok körében is beszélhessünk alakról, az alak megegyezéséről.

Ha nem hely szerint is rögzített alakzatot, hanem csak az alakját akarjuk definiálni, akkor egyetlen rögzített analitikus alakzatnak sem kell megkülönböztetett szerepet adni, hanem egyszerre szólhatunk az egybevágó analitikus alakzatok összességéről, valamennyinek az egyenletéről. Ezt tesszük, ha olyan egyenletsokaságot adunk meg, amely elemeinek (0-tól különböző) számszorosait és a belőlük egybevágósági koordinátatranszformációval származó egyenleteket is tartalmazza. Ilyenkor természetesen az egybevágósággal egymáshoz kapcsolt koordináta-rendszerek is mindannyian egyenrangú szerepet játszanak. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha nem egy alakzatról, hanem bizonyos alakzatokat felölelő alakzattípusról van szó. A most vázolt eljárás szorosan kapcsolódik ahhoz az analitikus módszerhez, amelyről 34.5 B szólt.

**37.2** Egy adott egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektort az egyenes *normálvektorának* mondunk.

**Tétel.** A  $P_0(\mathbf{r}_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{n}$  normálvektorú egyenes vektoregyenlete

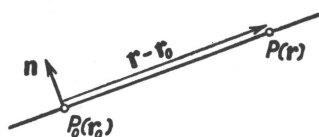
$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

ahol  $\mathbf{r}$  a futó pont helyvektora.

Csak azt állítjuk, hogy a megadott egyenlet egyenlete a szóban forgó egyenesnek, s nem azt, hogy más egyenlete nincs. Ha egy tétel egy alakzat egyenletét adja meg, a tétel mindig így értendő.

*Bizonyítás.* Ha  $P(\mathbf{r})$  az egyenes egy tetszőleges pontja, akkor a  $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor párhuzamos az egyenessel (320. ábra). Ezért ez a vektor  $\mathbf{n}$ -re merőleges, és skaláris szorzatuk 0.

Akkor is helyes ez az okoskodás, ha  $P$  és  $P_0$  történetesen azonos, és  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ .



320

b) Ha egy  $P(\mathbf{r})$  pont helyvektora kielégíti a megadott egyenletet, akkor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n}$ , tehát

$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  az egyenessel párhuzamos. Ha ezt a vektort az egyenes  $P_0$  pontjából felmérjük, akkor az egyenesen elhelyezkedő vektorhoz jutunk, melynek  $P$  végpontja is az egyenesen van. —

**Tétel.** A  $P_0(x_0, y_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{n}(A, B)$  normálvektorú egyenes egyenlete

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

*Bizonyítás.* Az előző tételben szereplő  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor koordinátái  $x - x_0$  és  $y - y_0$ , tehát az ott adott egyenlet átírása a most adott egyenletet adja. —

**Tétel.** Minden egyenes egyenlete írható

$$Ax + By + C = 0.$$

alakban, ahol az  $A$  és  $B$  értékeknek legalább az egyike nem 0. Minden ilyen egyenlet egy egyenes egyenlete (általános egyenlet).

Az  $Ax + By + C$  kifejezést éppen akkor mondjuk lineárisnak, ha  $A = B = 0$  nem teljesül. Mondhatjuk tehát, hogy minden lineáris egyenlet egyenes egyenlete, és hogy ilyen módon minden egyenes egyenletét felírhatjuk.

*Bizonyítás.* a) Minden egyenes egyenlete felírható az előző tételben megadott alakban, s ebből beszorzással és összevonással a most megadott alakhoz jutunk. Minthogy  $A$  és  $B$  az  $\mathbf{n}$  normálvektor koordinátái, és ez nem nullvektor,  $A$  és  $B$  között van 0-tól különböző.

b) Legyen adva egy olyan  $Ax + By + C = 0$  egyenlet, amelyben az  $A, B$  együtthatók között van 0-tól különböző. Azt kell bizonyítanunk, hogy ez egyenes egyenlete. Szakaszunk első tételére hivatkozva ezt az által tesszük, hogy olyan  $\mathbf{n}, \mathbf{r}_0$  vektorokat adunk meg, amelyekre

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = Ax + By + C.$$

Ehhez  $\mathbf{n}(A, B)$  bevezetése után csak arra van szükség, hogy az

$$\mathbf{n}\mathbf{r}_0 = -C$$

összefüggést kielégítő  $\mathbf{r}_0$  vektort találunk. Ilyen vektort pl. az

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{C}{\mathbf{n}^2} \mathbf{n}$$

előírással kapunk, amiről egyszerű helyettesítés meggyőző. Jogosan írhattuk itt  $\mathbf{n}^2$ -et a nevezőbe, hiszen  $\mathbf{n}$  nem nullvektor. —

Az egyenes általános egyenletében szereplő  $A$ ,  $B$ ,  $C$  értékeket az egyenes *vonalkoordinátáinak* nevezzük. A fentiek szerint mindkét első vonalkoordináta nem lehet 0, és e kettő az egyenes egy normálvektorának koordinátáit adja. Az egyenes zérusra redukált lineáris egyenletéből közvetlenül kiolvasható tehát az egyenes egy normálvektora. Minthogy az egyenes egyenletét egy 0-tól különböző értékkel szorozva ugyanannak az egyenesnek az egyenletét kapjuk, megállapíthatjuk, hogy egy egyenes vonalkoordinátáit ugyanazzal a 0-tól különböző értékkel szorozva ugyanannak az egyenesnek a vonalkoordinátáihoz jutunk. A következő tétel mutatja, hogy minden más változtatás már más egyenes vonalkoordinátáihoz vezet.

**Tétel.** *Ugyanannak az egyenesnek két zérusra redukált lineáris egyenlete csak egy (0-tól különböző) számtényezőben különbözhetik egymástól.*

*Bizonyítás.* Legyenek

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ L_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

Ugyanannak az egyenesnek egyenletei. Itt  $L_1$  és  $L_2$  lineáris kifejezéseket jelölünk.

Az egyenletekből kiolvasható  $\mathbf{n}_1 (A_1, B_1)$ ,  $\mathbf{n}_2 (A_2, B_2)$  normálvektorok párhuzamosak, mert ugyanarra az egyenesre merőlegesek. Van tehát olyan (0-tól különböző)  $\lambda$  szám, amelyre  $\lambda \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$  tehát  $\lambda A_1 = A_2$ , és  $\lambda B_1 = B_2$ . Készítsük el ezzel a  $\lambda$  értékkel a  $\lambda L_1 - L_2$  kifejezést. A megválasztásának következményeként így

$$\lambda L_1 - L_2 \equiv \lambda C_1 - C_2$$

adódik. Ha itt a bal oldalon egyenesünk egy pontjának a koordinátáit helyettesítjük, akkor 0 az eredmény, hiszen az egyenes pontjaira  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$ . Minthogy a felírt egyenlőségnek a mondott helyettesítés után is fenn kell állnia, a jobb oldali szám csak 0 lehet. Ezért  $\lambda C_1 = 0$  és  $C_2 = 0$ . —

Miként ebben a bizonyításban tettük, sokszor írjuk az egyenes egyenletét röviden  $L = 0$  módjára, ahol  $L$  egy az  $x, y$  koordinátákat szerepeltető lineáris kifejezést jelöl. Azt a számértéket, amelyet úgy kapunk, hogy az  $L$  kifejezésben  $x$  és  $y$  helyébe egy  $P$  pont koordinátáit helyettesítjük,  $L(P)$ -vel jelöljük.

**Tétel.** *Ha egy egyenes lineáris egyenletében az állandó tagot megváltoztatjuk, egy az eredetivel párhuzamos egyenes egyenletéhez jutunk. Ilyen változtatással minden az eredetivel párhuzamos egyenes egyenletéhez eljutunk.*

*Bizonyítás.* a) Az  $Ax + By + C_1 = 0$  és  $Ax + By + C_2 = 0$  egyenesek egyenletéből ugyanazt az  $\mathbf{n} (A, B)$  normálvektort olvashatjuk ki, ezért ezek párhuzamos egyenesek egyenletei.

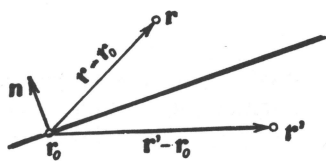
b) Ha egy  $L = 0$  egyenes egyenletéből az  $L = L(P)$  egyenletet képezzük, olyan egyenes egyenletéhez jutunk, amely tartalmazza a  $P$  pontot, és a) szerint párhuzamos az eredeti egyenessel. Minthogy a  $P$  pontot tetszőlegesen vehetjük fel, így minden az eredetivel párhuzamos egyenes egyenletéhez eljutunk. —

**Tétel.** *Ha egy egyenes zérusra redukált lineáris egyenletének bal oldalába egy az egyenesen kívül elhelyezkedő pont koordinátáit helyettesítjük, pozitív vagy negatív értékhez jutunk aszerint, hogy a pont az egyenes által határolt félsíkoknak egyikében vagy másikában helyezkedik el.*



*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy a zérusra redukált lineáris egyenlet bal oldala

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$



321

alakban is írható, ahol  $\mathbf{n}$  egy normálvektor,  $\mathbf{r}_0$  és  $\mathbf{r}$  pedig az egyenes egy rögzített pontjának és a futó pontnak a helyvektora. Ha tehát  $\mathbf{r}$  nem az egyenes egy pontjának, hanem egy az egyenesen kívül elhelyezkedő pontnak a helyvektora, akkor a kapott számérték nem 0, hanem pozitív vagy negatív aszerint, amint az  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor hegyes- vagy tompaszöget alkot (321. ábra). Ez pedig attól függ, hogy az  $\mathbf{r}_0$  helyvektorú pontból felmért  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor ugyanabba a félsíkba vezet-e, mint az  $\mathbf{n}$  vektor, vagy sem. —

**A** Az egyenes (linea) egyenletének meghatározásakor elsőfokú egyenlethez jutottunk. Ez az oka annak, hogy „elsőfokú” helyett a matematika más fejezeteiben is szokásos a „lineáris” jelző használata.

**37.3** Ebben a szakaszban speciális lineáris egyenletekkel foglalkozunk.

**Tétel.** Az egyenes akkor és csak akkor párhuzamos az  $x$ -tengellyel, illetőleg az  $y$ -tengellyel, ha lineáris egyenletében  $x$ , illetőleg  $y$  nem szerepel.

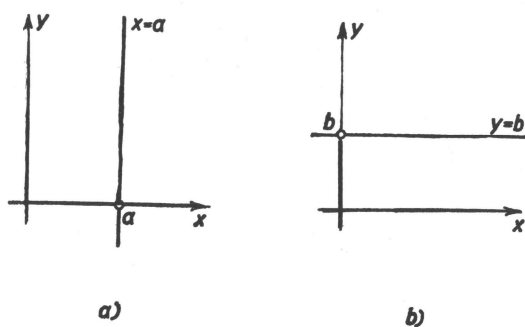
Mindkét esetben tudjuk, hogy a másik koordináta szerepel, hiszen mindkét koordináta együttthatója nem lehet 0.

*Bizonyítás.* Az egyenes akkor és csak akkor párhuzamos a tengelyek valamelyikével, ha az  $\mathbf{n} (A, B)$  normálvektor párhuzamos a másik tengellyel, ha tehát ennek valamelyik koordinátája 0. Ezek szerint  $A = 0$  az egyenes és az  $x$ -tengely,  $B = 0$  pedig az egyenes és az  $y$ -tengely párhuzamosságának a feltétele. —

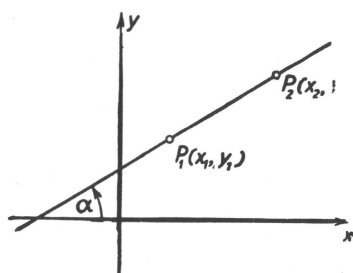
Ha egy egyenes metszi a tengelyeket vagy azok valamelyikét, akkor az  $x$ -tengelyből kimetszett pont  $a$  abszcisszáját és az  $y$ -tengelyből kimetszett pont  $b$  ordinátáját az egyenes *tengelymetszeteinek* mondjuk

**Tétel.** Az  $y$ -tengellyel párhuzamos, az  $x$ -tengelyen  $a$  tengelymetszetet adó egyenes egyenlete  $x = a$ . Az  $x$ -tengellyel párhuzamos, az  $y$ -tengelyen  $b$  tengelymetszetet adó egyenes egyenlete  $y = b$  (322. ábra).

*Bizonyítás.* Az  $x = a$  egyenes az előző tétel szerint párhuzamos az  $y$ -tengellyel, és tartalmazza az  $(a, 0)$  pontot, mert e koordináták kielégítik az egyenletet. Második állításunk a tengelyek szerepcseréje révén keletkezik az elsőből. —



322



323

Az egyenest kétféleképpen irányíthatjuk. Ennek megfelelően az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző, egymással esetleg ellentétes irányú vektorok mindegyikét az egyenes *irányvektorának* mondjuk. Ha  $P_1(x_1, y_1)$  és  $P_2(x_2, y_2)$  az egyenes két pontja, akkor  $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  az egyenes irányvektora (323. ábra). Ha tehát az egyenes az  $y$ -tengellyel nem párhuzamos, akkor 34.3 szerint

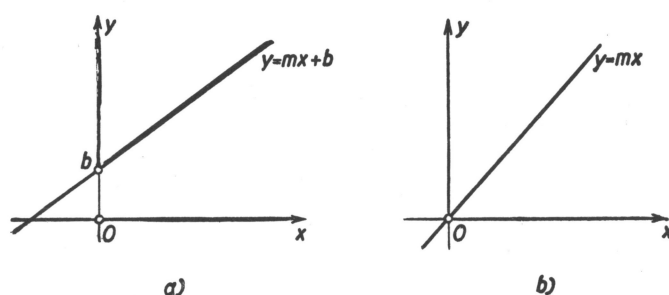
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

az egyenes iránytangense. Ez az érték nem függ ezért a két pont megválasztásától. Ha  $\alpha$  az egyenes (egyik) irányszöge, akkor  $m = \tan \alpha$ . Párhuzamos egyenesek iránytangensei (ha vannak iránytangenseik) egymással egyenlők.

**Tétel.** Az  $y$ -tengellyel nem párhuzamos,  $m$  iránytangensű, az  $y$  tengelyen  $b$  tengelymetszetet adó egyenes egyenlete

$$y = mx + b.$$

Az a tény, hogy az egyenes nem párhuzamos az  $y$ -tengellyel, biztosítja, hogy van az egyenesnek iránytangense, és metszi az  $y$ -tengelyt, tehát ad tengelymetszetet az  $y$ -tengelyen. Ezek szerint tételünk minden az  $y$ -tengellyel nem párhuzamos egyenes egyenletéről szól (324. ábra). A tételbeli egyenlet az egyenes egyenletének  $y$ -ra kifejtett (explicit) alakja.



324

**Bizonyítás.** A tételben megadott egyenlet lineáris, s így egyenes egyenlete.  $y$  szerepel az egyenletben, ezért az egyenes az  $y$ -tengellyel nem párhuzamos. Ha  $(x_1, y_1)$  és  $(x_2, y_2)$  az egyenes két pontja, akkor az

$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b$$

egyenletekből kivonással

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

adódik, tehát  $m$  az egyenes iránytangense. Végül egyszerű helyettesítés meggyőz arról, hogy a  $(0, b)$  pont az egyenesen van. —

Kiemeljük a tételnek a  $b = 0$  esetről szóló állítását: a kezdőponton áthaladó, az  $y$ -tengellyel nem azonos,  $m$  iránytangensű egyenes egyenlete  $y = mx$ .

**Tétel.** A  $P_0(x_0, y_0)$  ponton áthaladó, az  $y$ -tengellyel nem párhuzamos,  $m$  iránytangensű egyenes egyenlete

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

*Bizonyítás.* Minthogy egyenesünk az  $y$ -tengellyel nem párhuzamos, egyenlete

$$y = mx + b$$

alakban írható. Mivel  $P_0$  az egyenesen van, teljesül az

$$y_0 = mx_0 + b$$

összefüggés. Ezt a fenti egyenletből levonva az egyenletnek a tételben megadott alakjához jutunk. —

**Tétel.** Ha egy egyenes nem halad át a kezdőponton, és metszi a tengelyek mindegyikét, akkor egyenlete

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

alakban írható, ahol  $a$  és  $b$  az egyenes tengelymetszetei.

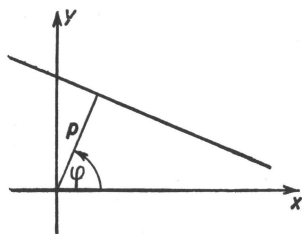
Ezt az egyenletet *tengelymetszetes alaknak* nevezzük, de mondják SALMON-féle *alaknak* is<sup>1</sup>.

*Bizonyítás.* A megadott egyenlet lineáris, tehát egyenes egyenlete. Helyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy az  $(a, 0)$  és  $(0, b)$  pontok az egyenesen vannak. —

**37.4** Ha az egyenes  $Ax + By + C = 0$  egyenletéből kiolvasható  $\mathbf{n}(A, B)$  normálvektor egységvektor, ha tehát  $A^2 + B^2 = 1$ , akkor az egyenletet az egyenes *normálegyenletének* nevezzük.

Ha az  $\mathbf{n}(A, B)$  vektor nem egységvektor, akkor az egyenletet az  $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$  értékkel

osztva az egyenes normálegyenletéhez jutunk, hiszen akkor az  $\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$  egységvektor lesz az új egyenletből kiolvasható. Minden egyenesnek két normálegyenlete van, mert normálvektorai között két egységvektor van. Ha az egyenes normálegyenletét  $(-1)$ -gyel szorozzuk, másik normálegyenletéhez jutunk.



325

**Tétel.** Ha a kezdőpontból egy egyenesre bocsátott merőleges irányszöge  $\varphi$ , és a merőleges hossza  $p$ , akkor

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

<sup>1</sup>\* G. Salmon (ejtsd: szemon), 1819-1904, a dublini egyetem tanára.

az egyenes normálegyenlete (325. ábra).

Ha az egyenes áthalad a kezdőponton, akkor két lehetőség van  $\varphi$  megválasztására, és tételünk az egyenes mindkét normálegyenletéhez elvezet. A tételbeli egyenlet az egyenes egyenletének HESSE-féle alakja<sup>2</sup>.

*Bizonyítás.* A megadott egyenlet lineáris, tehát egyenes egyenlete. Az egyenletből kiolvasható normálvektor  $\mathbf{n}$   $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  egységvektor, tehát az egyenlet normálegyenlet. Ennek az  $\mathbf{n}$  vektornak irányszöge  $\varphi$ , tehát az egyenes a  $\varphi$  irányszögű irányra merőleges. Ha a kezdőpontból  $\varphi$  irányszöggel induló félegyenesre a  $p$  távolságot felmérjük, a  $(p \cos \varphi, p \sin \varphi)$  ponthoz jutunk. Helyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez a pont az egyenesen van. —

**Tétel.** Ha  $N = 0$  egy egyenes normálegyenlete, akkor a  $P$  pontnak az egyenestől való távolsága

$$d = |N(P)|.$$

Tételünk összhangban van azzal, hogy az egyenes  $P$  pontjára  $N(P) = 0$ . *Bizonyítás.* Minthogy a normálegyenletből kiolvasható normálvektor egységvektor, a normálegyenlet bal oldala

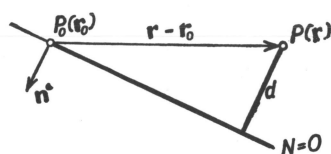
$$N = \mathbf{n}^0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

alakban írható, ahol  $\mathbf{n}^0$  normál-egységvektor,  $\mathbf{r}_0$  és  $\mathbf{r}$  pedig az egyenes egy  $P_0$  pontjának és a futó pontnak a helyvektora. Ha tehát  $\mathbf{r}$  egy tetszőleges  $P$  pont helyvektora (326. ábra), akkor  $N(P)$  a  $\overrightarrow{P_0 P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor  $\mathbf{n}^0$  egységvektorral párhuzamos összetevőjének előjeles hosszát,  $|N(P)|$  pedig a  $d$  távolságot adja. —

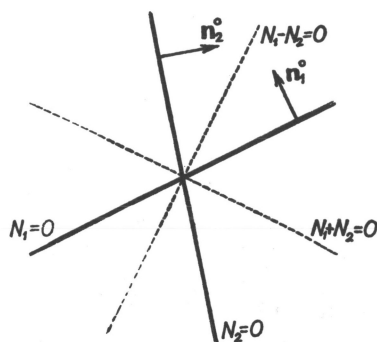
A bizonyítás azt is mutatja, hogy  $N(P)$  aszerint pozitív vagy negatív, hogy a normálegyenletből kiolvasható  $\mathbf{n}^0$  normálvektor a  $P$  pontot tartalmazó félsíkba mutat-e vagy sem. Ebből és a normálegyenlet származtatásából következik, hogy ha az egyenes  $L = 0$  egyenletéből az  $\mathbf{n}$  normálvektor olvasható ki, akkor a  $P$  pontnak az egyenestől való előjeles távolsága

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} L(P).$$

Itt az előjel aszerint pozitív vagy negatív, hogy  $\mathbf{n}$  a  $P$  pontot tartalmazó félsíkba mutat-e vagy sem



326



<sup>2</sup>\* L. O. Hesse, 1811 — 1874, a heidelbergi egyetem tanára.

**Tétel.** Ha  $N_1 = 0$  és  $N_2 = 0$  két egymást metsző egyenes normálegyenlete, akkor szögfelezőik egyenlete

$$N_1 + N_2 = 0 \text{ és } N_1 - N_2 = 0.$$

*Bizonyítás.* A szögfelezők együttese azoknak a  $P$  pontoknak a mértani helye, amelyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak (327. ábra), amelyekre tehát

$$|N_1(P)| = |N_2(P)|.$$

Eszerint a szögfelezők pontjaira  $N_1^2(P) = N_2^2(P)$ , azaz a szögfelezők együttesének az egyenlete

$$N_1^2 - N_2 = 0.$$

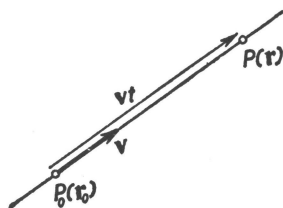
Ha itt a bal oldalt tényezőkre bontjuk, a tételbeli két lineáris egyenlethez jutunk. Mivel két egyenes együtteséről van szó, az egyik egyenlet az egyik egyenes egyenlete, a másik pedig a másiké. —

Ha szem előtt tartjuk az előző tételhez fűzött,  $N(P)$  előjelére vonatkozó megjegyzést, akkor azt is megmondhatjuk, hogy a most bizonyított tétel két egyenlete közül melyik melyik szögfelezőnek az egyenlete.  $N_1 = N_2$  annak a szögfelező egyenesnek az egyenlete, amelyik a két normálegyenletből kiolvasható (metszéspontból felmért) két normálvektor szögét felezi.

**B1** Az utolsó tétellel kapcsolatban megjegyezhetjük, hogy ha  $N_1 = 0$  és  $N_2 = 0$  két párhuzamos egyenes egyenlete, akkor az  $N_1 + N_2 = 0$  és  $N_1 - N_2 = 0$  egyenletek egyike a két egyenes középpárhuzamosának egyenlete (a másik pedig üres alakzaté). Akkor adja  $N_1 + N_2 = 0$  ezt az egyenletet, ha az  $N_1 = 0$  és  $N_2 = 0$  egyenletből kiolvasható normálvektorok megegyeznek. Az utolsó tétel bizonyításából a most mondottak helyessége is kiolvasható.

**B2** Az a tény, hogy minden egyenesnek két normálegyenlete van, és minden egyenes kétféleképpen irányítható, módot nyújt arra, hogy minden irányított egyeneshez egy-egy normálegyenletet rendeljünk. Ilyen hozzárendelésnél az irányított egyenes normálegyenletének azt szokás választani, amelyiknél az egyenletből kiolvasható normálvektor iránya az egyenes irányából pozitív irányú  $90^\circ$ -os elforgatással keletkezik.

**37.5** Ha egy vonal pontjaihoz valami módon értékeket rendelünk, mégpedig minden ponthoz rendelünk értéket, és különböző pontokhoz különböző értékeket rendelünk, akkor az egyes pontokhoz rendelt értékeket *paraméternek* vagy *segédváltozónak* nevezzük. Ilyenkor a vonalat úgy is jellemezhetjük, hogy az egyes paraméterértékekhez rendelt pontok koordinátáit vagy helyvektorait a paraméter függvényeként adjuk meg. Így a vonal egyenletének *paraméteres* (segédváltozós) *alakjához*, illetőleg *paraméteres* (segédváltozós) *vektoregyenletéhez* jutunk. A pontokhoz rendelt paraméterértékek összessége a *paramétertartomány*. Szükséges ezek szerint, hogy az egyenlet paraméteres alakja a vonal minden pontját szolgálta, s hogy minden a paramétertartományhoz tartozó érték a vonalhoz tartozó pontot szolgálta. Ugyanaz a vonal természetesen sokféleképpen paraméterezhető, és ezért egyenletének sokféle paraméteres alak adható.



**Tétel.** A  $P_0(\mathbf{r}_0)$  ponton áthaladó  $\mathbf{v}$  irányvektorú egyenes paraméteres vektoregyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t,$$

ahol  $\mathbf{r}$  a futó pont helyvektora, és a  $t$  paraméter min- den valós értéket felvehet.

Miként a 329. oldalon már leszögeztük, tételünk csak megad egy paraméteres egyenletet, és nem 328. ábra állítja, hogy más ilyen egyenlet nincs.

*Bizonyítás.* a) Az egyenes  $P(\mathbf{r})$  pontja által meghatározott  $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor párhuzamos a  $\mathbf{v}$  irányvektorral (328. ábra), s ezért található egyetlenegy olyan  $t$  szám, amelyre  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}t$ . Akkor is helyes ez, ha a  $P$  pont azonos a  $P_0$  ponttal.

b) A megadott egyenlet minden  $t$  számhoz olyan  $P(\mathbf{r})$  pontot rendel, amelyre  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ . Így tehát  $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  párhuzamos a  $\mathbf{v}$  vektorral, és a  $P_0$  pontból felmérve az egyenes egy  $P$  pontjához vezet. —

**Tétel.** A  $P_0(x_0, y_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{v}(a, b)$  irányvektorú egyenes egyenletének paraméteres alakja

$$x = x_0 + at,$$

$$y = y_0 + bt.$$

*Bizonyítás.* Ha az előző tétel paraméteres vektoregyenletét koordinátákra írjuk át, a tételbeli egyenletrendszerhez jutunk. —

Ha az egyenes (egyik) irányszöge  $\alpha$ , tehát  $\mathbf{v}(\cos \alpha, \sin \alpha)$  irányvektora, akkor a most bizonyított tétel az egyenes egyenletének

$$x = x_0 + t \cos \alpha,$$

$$y = y_0 + t \sin \alpha.$$

paraméteres alakjához vezet.

**Tétel.** A  $P_0(x_0, y_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{v}(a, b)$  irányvektorú egyenes egyenlete

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

*Első bizonyítás.* A tételbeli egyenlet lineáris, tehát egyenes egyenlete. Elég ezért csak azt bizonyítanunk, hogy a tételben jellemzett egyenes pontjainak koordinátái kielégítik az egyenletet. Ez ugyanaz az egyenes, amelyikről az előző tétel is szólt. Ha  $x$  és  $y$  ott megadott kifejezését helyettesítjük, a tételbeli determináns első sora a második sor  $t$ -szerese lesz, és ezért a determináns értéke valóban 0. —

*Második bizonyítás.* Ha  $(a, b)$  irányvektora az egyenesnek, akkor  $(b, -a)$  normálvektora, hiszen e két vektor skaláris szorzata 0. Állításunk helyessége 37.2 második tétele szerint következik tehát abból, hogy a tételben megadott egyenletet  $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$  alakban írhatjuk. —

A Ha  $\mathbf{v}(a, b)$  egyik koordinátája sem 0, ha tehát az egyenes a koordinátatengelyek egyikével sem párhuzamos, akkor az utolsó tétel egyenlete

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

alakban írható (vö. 49.3).

**37.6 Tétel.** Az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  pontok akkor és csak akkor vannak egyenesen, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Első bizonyítás.* Három pont akkor és csak akkor van egy egyenesen, ha az általuk meghatározott háromszög elfajuló, vagyis területe 0. Tételünk helyessége következik tehát abból, hogy a tételbeli determináns 36.1 szerint a  $P_1P_2P_3\Delta$  (előjeles) területének a kétszerese. —

*Második bizonyítás.* A három pont akkor és csak akkor van egy  $Ax + By + C = 0$  egyenesen, ha mindhárom pont koordinátái kielégítik ezt az egyenletet. Ilyen egyenes akkor és csak akkor van, ha az  $A, B, C$  értékekre felírt

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + C &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyben az  $A$  és  $B$  értékeknek nem mindegyike 0. Ez utóbbi tulajdonsággal a rendszer minden nem triviális megoldása rendelkezik, hiszen az  $A = B = 0, C \neq 0$  értékek a rendszert nem elégítik ki. Tételünk állítása most már következik abból, hogy homogén lineáris egyenletrendszerünknek akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha a determinánsa 0. —

**Tétel.** A  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  pontok által meghatározott egyenes egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Első bizonyítás.* A  $P(x, y)$  pont akkor és csak akkor van a  $P_1, P_2$  egyenesen, ha a  $P, P_1, P_2$  pontok egy egyenesen vannak. Tételünk következik tehát az előző tételből. —

*Második bizonyítás.* Ha a determinánst az első sor szerint kifejtjük, lineáris egyenlethez jutunk,  $x$  és  $y$  együtthatója ugyanis  $y_1 - y_2$  és  $x_1 - x_2$ . Mindkettő tehát csak akkor lehetne 0, ha  $P_1$  és  $P_2$  azonos volna. A megadott egyenlet tehát egyenes egyenlete.

A  $P_1, P_2$  pontok ezen az egyenesen vannak, mert koordinátáikat helyettesítve olyan determinánshoz jutunk, amelynek két sora megegyezik. —

A Ha az utolsó tételben olyan  $P_1, P_2$  pontokra szorítkozunk, amelyek nincsenek egy az  $y$ -tengellyel párhuzamos egyenesen, amikor tehát e pontok abszcisszái különbözők, akkor van a szóban forgó egyenesnek iránytangense, ez 37.3 előírása szerint meghatározható, s ezt az  $y - y_1 = m(x - x_1)$  egyenletbe helyettesítve a  $P_1, P_2$  egyenes

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

egyenletéhez jutunk. Ez az egyenlet tehát nem mindig alkalmazható a feladat megoldására, a tételünkben adott egyenlet viszont mindig célhoz vezet.

**37.7** Már az eddig tárgyaltak is sokféle feladat analitikus megoldására adnak lehetőséget. Most a feladatok analitikus megoldására vonatkozólag teszünk néhány megjegyzést.

Az elemi geometriai és az analitikus módszert egybevetve megállapíthatjuk, hogy az utóbbinál kevesebb leleményességre van szükség, a módszer többnyire automatikusan célhoz vezet. A számítási munkát azonban sokszor lényegesen csökkenthetjük ötletességgel és azáltal, hogy bővebb ismeretekre támaszkodunk.

Ha a feladat maga még nem írja elő a koordináta-rendszert, akkor sok függ attól, hogy a koordináta-rendszert hogyan vesszük fel. Ha pl. azt akarjuk analitikusan bizonyítani, hogy azoknak a pontoknak mértani helye, amelyek két ponttól mért távolságainak négyzetkülönbsége állandó, egy a pontok egyenesére merőleges egyenes, akkor célszerű a két pont egyenesét  $x$ -tengelynek, összekötő szakaszuk felezőpontját kezdőpontnak választani, sőt azt is megtehetjük, hogy a két pont távolságának a felét választjuk hosszegységül.

Ha a feladat egy egyenes egyenletének felírását kívánja, akkor többnyire helyes, ha arra törekszünk, hogy az egyenes egy pontját, továbbá normálvektorát, irányvektorát vagy iránytangensét határozzuk meg. Az  $m$  iránytangensből az  $(1, m)$  irány vektorhoz, az  $(a, b)$  irányvektorból pedig a  $(b, -a)$  normálvektorhoz juthatunk. Megjegyezzük itt, hogy egymásra merőleges (az  $y$ -tengelyt metsző) egyenesek  $m_1, m_2$  iránytangenseire

$$m_1 m_2 = -1,$$

azaz egyik a másiknak negatív reciproka, hiszen ez éppen azt mondja ki, hogy az  $(1, m_1), (1, m_2)$  irányvektorok skaláris szorzata 0.

Ha a feladatban egyenes egyenlete szerepel, megtehetjük néha, hogy először csak az egyenletekben álló lineáris alakok betűjeleivel dolgozunk, és csak azután térünk át a numerikus értékekre. Így pl. az  $L = 0$  egyenessel párhuzamos, a  $P$  ponton áthaladó egyenes egyenletét  $L = L(P)$  alakban írhatjuk, és ebből egyszerű helyettesítéssel a numerikus egyenletet is megkapjuk.

A vektorokra vonatkozó ismereteink sokszor tehetnek jó szolgálatot feladatok analitikus megoldásakor. Ha pl. két egyenes egyenletéből a hajlásszögüket akarjuk kiszámítani, akkor az egyenletekből kiolvasható normálvektorok szögét keressük, mégpedig leggyorsabban a skaláris szorzatukból a szög koszinuszát kapjuk meg. Adott egyenletű egyenesre merőleges, adott koordinátájú ponton áthaladó egyenes egyenletét azonnal felírhatjuk, hiszen az egyenletből kiolvasható normálvektor a keresett egyenes irányvektora.

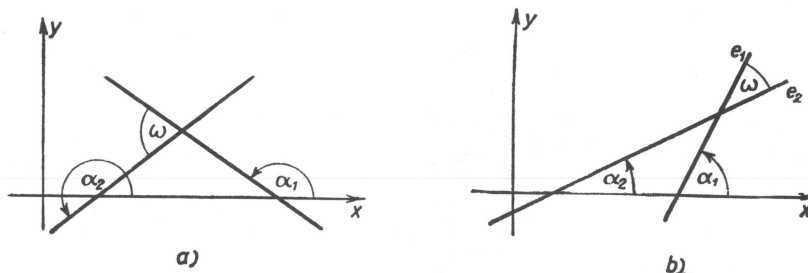
**A** A trigonometriáról mondottakhoz (lásd 31.4 A) hasonlóan itt is felhívjuk a figyelmet arra a hibára, amikor a kezdő mennél több analitikus geometriai képletet akar megtanulni. Kevés formula ügyes használata nemcsak okosabb, hanem kényelmesebb is.

**B** Már szóltunk arról, hogy két egyenes egyenletéből hogyan számíthatjuk ki gyorsan a hajlásszögüket. Ugyanezt a célt szolgálja egy sokak által említett képlet, amely szabatosan a következőképpen adható elő:

Ha az ( $y$ -tengelyt metsző)  $m_1 m_2$  iránytangensű egyenesek nem merőlegesek egymásra, akkor  $\omega$  hajlásszögükre

$$\operatorname{tg} \omega = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

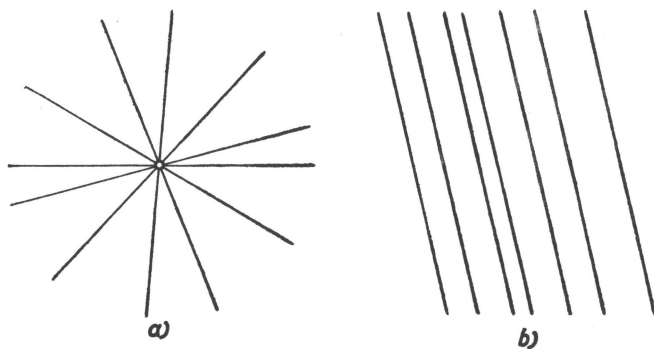
Ennek bizonyítása végett jelölje  $\alpha_1$  az  $e_1$  egyenes (valamelyik) irányszögét (329. ábra). Az  $x$ -tengelyt egy  $\alpha_1$  szögű elforgatás  $e_1$ -be, egy további  $+\omega$  vagy  $-\omega$  szögű elforgatás pedig a másik egyenessel párhuzamos helyzetbe viszi. Ezért  $\alpha_1 + \omega$  vagy  $\alpha_1 - \omega$  az  $e_2$  egyenes irányszöge. Ha ezt  $\alpha_2$ -vel jelöljük,  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \omega$  révén  $\operatorname{tg}(\pm\omega) = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)$  adódik, ami 31.4 szerint a megadott képlethez vezet.





E képlet ismeretét nem tartjuk szükségesnek. Mindenképpen helytelenül jár el azonban, aki ebből a képletből akar közvetlenül a merőlegesség  $m_1 m_2 = -1$  feltételére következtetni, hiszen az egyenesek merőlegességét a fenti szövegben ki kellett éppen zárunk.

**37.8** Az egy ponton áthaladó, valamint az egymással párhuzamos egyenesek összességét *sugársornak* nevezzük (330. ábra). A sugársorhoz tartozó egyenesek a sugársor *elemei*. Az egy ponton áthaladó egyenesek alkotta sugársor esetében a közös pont a sugársor *tartója* vagy *alappontja* (fixpont).



Nyomban megállapíthatjuk, hogy bármely sugársornak van olyan eleme, amely áthalad egy megadott ponton, sőt a tartópont esetét kivéve csak egy ilyen elem van. A sugársor definíciója alapján azt is kimondhatjuk, hogy a sík bármely két egyenese egyetlenegy sugársort határoz meg. Ez az egyöntetűség a sugársor definíciójában szereplő kétféleségnek köszönhető.

**Tétel.** Az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenletű egyenesek által meghatározott sugársort azok az egyenesek alkotják, amelyeknek egyenlete

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

alakban írható, ahol  $\lambda_1, \lambda_2$  valós számok.

Mondhattuk volna azt is, hogy „azok a valódi alakzatok alkotják”, mert a felírt egyenlet csak egyenes egyenlete lehet. A  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  értékválasztás természetesen nem vezet alakzat egyenletéhez. Az is lehetséges azonban, hogy  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  más értékválasztásánál sem jutunk egyenes egyenletéhez, hiszen lehetséges, hogy  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$  összevonás után konstans ad. Így azonban csak üres alakzat egyenletéhez juthatunk, mert ez a konstans nem lehet 0, hiszen akkor az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenletek csak számtényezőben különböznének, és nem lehetett volna szó a sugársort meghatározó egyenesekről.

**Bizonyítás.** a) Először azt bizonyítjuk, hogy a  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$  egyenletű egyenes hozzátartozik az  $L_1 = 0, L_2 = 0$  egyenesek meghatározta sugársorhoz.

Ha az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenesek egy  $P$  pontban metszik egymást, akkor  $L_1(P) = 0$  és  $L_2(P) = 0$  miatt, azaz  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$  egyenes is áthalad a  $P$  ponton.

Ha az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenesek párhuzamosak, azt kell bizonyítanunk, hogy a  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$  egyenes nem metszheti ezeket. Ha metszené pl. az  $L_1 = 0$  egyenest a  $P$  pontban, akkor  $L_1(P) = 0$  és  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = \lambda_2 L_2 = 0$  miatt  $\lambda_2 L_2(P) = 0$  is teljesülne. Ez azonban lehetetlenség, mert egyrészt  $P$  nem lehet az  $L_1 = 0$  egyenessel párhuzamos  $L_2 = 0$  egyenesen, s ezért  $L_2(P) \neq 0$ , másrészt  $\lambda_2 = 0$  esetén az  $L_1 = 0$  és  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$  egyenesek azonosak volnának, s így nem metszenék egymást.

b) Azt kell még bizonyítanunk, hogy az  $L_1 = 0, L_2 = 0$  egyenesek meghatározta sugársor minden elemének egyenlete felírható  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$  alakban. Ezt azáltal tesszük, hogy felírjuk ilyen alakban egy olyan egyenes egyenletét, amely áthalad a sík tetszőlegesen választott  $P$  pontján, csak azt kötvé ki, hogy  $P$  ne legyen az  $L_1 = 0, L_2 = 0$  egyenesek közös pontja.

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_1(P) & L_2(P) \end{vmatrix} = 0$$

ilyen egyenes egyenlete. A  $P$  pont koordinátái valóban kielégítik ezt az egyenletet, hiszen helyettesítésük után a determináns két sora megegyezik. Ez azt is bizonyítja, hogy a felírt egyenlet egyenes egyenlete, hiszen üres alakzaté nem lehet, ha egyszer a  $P$  pont kielégíti, azonosság pedig — mint láttuk — csak akkor lehetne, ha  $L_1$  és  $L_2$  szorzója 0 volna, ámde az  $L_1(P) = L_2(P) = 0$  esetet a  $P$  pont megválasztásakor kizártuk. —

**A** A bizonyítás b) részében felírt egyenlet lehetőséget ad arra, hogy két egyenes metszéspontján és egy másik adott ponton áthaladó egyenes egyenletét felírjuk anélkül, hogy magát a metszéspontot meghatároznók.

**B1** Az utolsó tételben kimondott feltétel szükségességét abban a valamivel többet mondó alakban is kimondhatjuk, hogy ha az  $L = 0$  egyenes eleme az  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$  egyenesek által meghatározott sugársornak, akkor a  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  számok megválaszthatók úgy, hogy  $L \equiv \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$  teljesüljön. Ehhez csak azt kell meggondolnunk, hogy ha a szóban forgó egyenes egy egyenletét már felírtuk a tétel előírása szerint, akkor  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  együtthatók helyébe ugyanannyiszorosait írva az egyenes  $L = 0$  egyenletét is felírhatjuk ugyanolyan alakban.

**B2** Megemlítjük, hogy az ideális pontok bevezetése után (lásd 44.1) a sugársor definíciójában szereplő kétféleség megszűnik.

**37.9 Tétel.** *Az egymástól nem feltétlenül különböző  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$ ,  $L_3 = 0$  egyenesek akkor és csak akkor tartoznak egy sugársorhoz, ha van három szám,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  és  $\lambda_3$  amelyeknek nem mindegyike 0, s amelyekre*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 \equiv 0$$

Arról szól a tétel, hogy mikor van olyan sugársor, amelynek mindhárom egyenes eleme, és nem arról hogy mikor van egyetlenegy ilyen sugársor. Ha mindhárom egyenes azonos, akkor több ilyen sugársor is van.

*Bizonyítás.* a) Először a feltétel elégségességét bizonyítjuk. Feltesszük, tehát, hogy a felírt azonosság nem triviális  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  értékválasztással teljesül. Feltehetjük, hogy pl.  $\lambda_3 \neq 0$ . Feltehetjük azt is, hogy az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenesek nem azonosak, mert az ellenkező esetben nyilvánvaló, hogy a három egyenes egy sugársorhoz tartozik. Minthogy  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$  és  $-\lambda_3 L_3 = 0$  ugyanaz az egyenlet, és az utóbbi  $\lambda_3 \neq 0$  miatt egyben az  $L_3 = 0$  egyenes egyenlete, az előző tétel szerint az  $L_3 = 0$  egyenes az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenesek meghatározta sugársor eleme. A három egyenes tehát valóban egy sugársorhoz tartozik.

b) A feltétel szükségességének bizonyításakor abból indulunk ki, hogy az  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$ ,  $L_3 = 0$  egyenesek egy sugársorhoz tartoznak. Ha az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenesek azonosak, akkor van olyan  $\lambda$  szám, amelyre  $L_1 = \lambda L_2$ , s ezért  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\lambda$ ,  $\lambda_3 = 0$  választással a tétel azonossága is teljesül.

Ha viszont az  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  egyenesek nem azonosak, akkor egy sugársort határoznak meg. Ennek eleme tehát az  $L_3 = 0$  egyenes is, és ezért az egyenlete az előző tétel szerint  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$  alakban írható. Minthogy pedig ugyanannak az egyenesnek két lineáris egyenlete csak számtényezőben különbözhetik egymástól, van olyan  $\lambda_3 \neq 0$  érték, amelyre  $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = -\lambda_3 L_3$  azonosan teljesül. A  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  értékek tehát valóban megválaszthatók a tétel követelményeit kielégítő módon. —

A tételben kimondott feltétel elégségességét gyakran alkalmazzuk a  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  esetben. Az erről az esetről szóló állítás azt mondja ki, hogy az  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$ ,  $L_3 = 0$  egyenesek egy sugársorhoz tartoznak akkor, ha  $L_1 + L_2 + L_3 = 0$  azonosan teljesül.

**Tétel.** *Az egymástól nem feltétlenül különböző  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ,  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$  egyenesek akkor és csak akkor tartoznak egy sugársorhoz, ha*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Az előző tétel mintájára ez a tétel is csak arról szól, hogy mikor van egy vagy több olyan sugársor, amely mind a három egyenest tartalmazza. Tételünk ugyanarra a kérdésre ad választ, mint az előző tétel, viszont a kérdést nem másik kérdésre vezeti vissza, hanem kevés számolást követelve valóban válaszol.

*Bizonyítás.* A három egyenes akkor és csak akkor tartozik egy sugársorhoz, ha a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  értékek megválaszthatók az előző tétel által megkövetelt módon. Ez a követelés azt jelenti, hogy léteznek olyan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  számok, amelyeknek nem mindegyike 0, s amelyekre

$$A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + A_3 \lambda_3 = 0,$$

$$B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 + B_3 \lambda_3 = 0,$$

$$C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + C_3 \lambda_3 = 0,$$

hiszen ez a feltétele annak, hogy az előző tétel azonossága teljesüljön. Ezek szerint azt kell megmondanunk, hogy a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ismeretlenekre felírt homogén lineáris egyenletrendszernek mikor van nem triviális megoldása. Ennek szükséges és elégséges feltétele a rendszer determinánsának eltűnése, azaz

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a feltétel azonos a tételben kimondottal, hiszen a sorok és oszlopok felcserélése a determináns értékét nem változtatja meg. —

A Példaképpen bebizonyítjuk, hogy a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást. Minthogy két szögfelező nem lehet párhuzamos, elég azt bizonyítanunk, hogy a három szögfelező egy sugársorhoz tartozik. Legyenek az oldalegyenesek normálegyenletei  $N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0$ , és az ezekből kiolvasható normálvektorok mutassanak a háromszög belseje felé. A szögfelezők egyenletei 37.4 szerint  $N_1 - N_2 = 0, N_2 - N_3 = 0, N_3 - N_1 = 0$ . Ezek az egyenesek valóban egy sugársorhoz tartoznak, mert a bal oldalak összege 0.

## 38.§ Kör

Lényegében csak a kör egyenletével foglalkozunk. A körrel kapcsolatos további tudnivalókat majd a következő két paragrafus tárgyalja.

**38.1 Tétel.** A  $C(\mathbf{c})$  középpontú,  $r$  sugarú kör vektoregyenlete

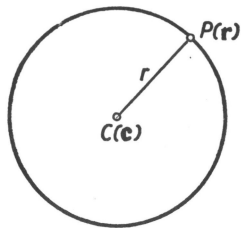
$$(\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 = r^2,$$

ahol  $\mathbf{r}$  a futó pont helyvektora.

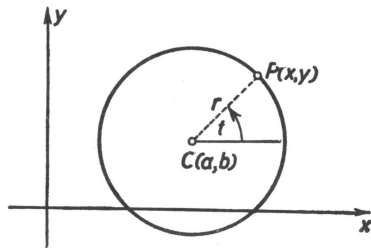
*Bizonyítás.* A  $P(\mathbf{r})$  pont akkor és csak akkor van a  $C$  középpontú,  $r$  sugarú körön (331. ábra), ha  $CP = r$ , ha tehát

$$|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = r.$$

Minthogy két nem negatív szám akkor és csak akkor egyenlő, ha négyzeteik egyenlők, a most felírt egyenlőség akkor és csak akkor helyes, ha a tétel egyenlete teljesül. —



331



332

**Tétel.** A  $C(a, b)$  középpontú,  $r$  sugarú kör egyenlete.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

*Bizonyítás.* Egyenletünk az előző tétel vektoregyenletének átírása, hiszen az  $\mathbf{r} - \mathbf{c}$  vektor koordinátái  $x - a$  és  $y - b$  (332. ábra).—

Kiemeljük azt az állítást, hogy a kezdőpont körül írt  $r$  sugarú kör egyenlete

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ezt az egyenletet (középponti egyenlet) a kör *kanonikus egyenletének* nevezzük. Bármely kör egyenlete felírható így, ha a koordináta-rendszer eltolásával a kezdőpontot a körközéppontba visszük.

**Tétel.** Minden kör egyenlete

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

alakban írható, ahol  $A \neq 0$  (általános egyenlet).

*Bizonyításként* elég meggondolnunk, hogy az előző tétel egyenlete a műveletek elvégzése és rendezés után ilyen alakot ölt. —

Ha a tételbeli egyenlet bal oldalán álló másodfokú kifejezést röviden  $K$ -val jelöljük, a kör egyenletét  $K = 0$  alakban írhatjuk. Ezt a jelölésmódot gyakran használjuk.

A bizonyításból kiolvashatjuk, hogy tételünkben  $A$  helyén 1 is állhatna. Ha az  $A = 1$  feltétel teljesül, az egyenletet a kör *normálegyenletének* mondjuk.

Így tehát

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

az  $(a, b)$  középpontú,  $r$  sugarú kör normálegyenlete. Megállapíthatjuk, hogy itt a bal oldalon az a kifejezés áll, amelyet az  $(\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 - r^2$  kifejezésből kapunk, ha értékét az  $\mathbf{r}(x, y)$  és  $\mathbf{c}(a, b)$  vektorok koordinátaival fejezzük ki.

Ha a  $\overrightarrow{CP} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$  vektor (egyik) irányszögét  $t$ -vel jelöljük (332. ábra), akkor ezt a vektort  $(r \cos t, r \sin t)$  alakban írhatjuk. Ilyen módon az  $(a, b)$  középpontú és  $r$  sugarú kör egyenletének paraméteres

$$\begin{aligned}x &= a + r \cos t, \\y &= b + r \sin t\end{aligned}$$

alakjához jutunk. Ezt az alakot legtöbbször az  $a = b = 0$  esetben alkalmazzuk.

**B1** Még nem bizonyítottuk, hogy egy körnek (rögzített koordináta-rendszerben) nincs más normálegyenlete, mint amit felírtunk. Csak azt mondtuk ki, hogy a felírt egyenlet normálegyenlet. Rövidesen belátjuk majd (lásd 38.2 B1), hogy (azonos átalakítástól eltekintve) ez az egyetlen normálegyenlet.

**B2** Egy alakzat egyenlete lényegesen függ attól, hogy a koordináta-rendszert hogyan választjuk meg. Vizsgálhatjuk, hogy a koordináta-rendszer milyen megválasztása mellett írható fel az alakzat egyenlete a legegyszerűbben. Egyes alakzatoknál meg szokás adni egy ilyen legegyszerűbb, vagy legalábbis annak mondható egyenletet, s ezt *kanonikus egyenletnek* mondjuk. Ennek a felírásakor az alakzathoz jól illeszkedő, kanonikus helyzetű koordináta-rendszert használunk. Megtehetjük azt is, hogy a koordináta-rendszert változatlanul hagyjuk, és az alakzatot visszük *kanonikus helyzetbe*. A kanonikus egyenletben nem szerepelnek az alakzat elhelyezkedését jellemző adatok, csak az alakzat alakját jellemző értékek. Ha egy alakzat alakj tulajdonságait akarjuk analitikus módszerrel vizsgálni, akkor többnyire kanonikus egyenletéből indulunk ki.

Az alakzat lehetséges egyenletei közül azokat szoktuk használni, amelyek a kanonikus egyenletből egybevágósági koordinátatranszformációval (eltolással, elforgatással és tükrözéssel) és 0-tól különböző számmal szorozva keletkeznek. Az *általános egyenlet* ezeket az egyenleteket foglalja magában. A kör esetében ezt a következő szakaszban látjuk be. Az egyenes kanonikus egyenletétől pl.  $y = 0$  választható, s ebből az általános egyenlete valóban a mondott átalakításokkal keletkezik.

**38.2** Az  $A \neq 0$  értékkel felírt  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  egyenlet nem mindig kör egyenlete. Erre példa az

$$x^2 + y^2 = 0$$

egyenlet, amelyet nyilvánvalóan csak a kezdőpont koordinátái elégítenek ki. Ez az egyenlet tehát egy pont egyenlete. Mondjuk azonban azt is, hogy az ezzel az egyenlettel megadott alakzat *pontkör*. Erre az elnevezésre az ad alapot, hogy a felírt egyenlet a kör kanonikus egyenletéből  $r = 0$  helyettesítéssel keletkezik. A pontkör egyetlen pontját a pontkör középpontjának is nevezzük, és azt mondjuk, hogy sugara 0. Igaz marad így a pontkör esetében is, hogy ez azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek a középponttól mért távolsága a megadott sugárral egyenlő.

Más példát ad a fenti állításra az

$$x^2 + y^2 = -r^2$$

egyenlet. Nyilvánvaló, hogy ezt az egyenletet egyetlen pont koordinátái sem elégítik ki, hogy ez tehát üres alakzat egyenlete. Mondjuk mégis, hogy a felírt egyenlettel megadott (üres) alakzat *képzetes kör*, s hogy középpontja a kezdőpont. Ezt a szóhasználatot azzal magyarázhatjuk, hogy a felírt egyenlet úgy keletkezik a kör kanonikus egyenletéből, hogy  $r$  helyébe a képzetes  $ri$  értéket írjuk.

A most említett kanonikus egyenletekből a koordináta-rendszer eltolása révén fentebbi állításunkat alátámasztó új példákat kapunk. Ha a kezdőpontot az  $(a, b)$  pontba toljuk, ha tehát  $x$  és  $y$  helyébe az  $x - a$  és  $y - b$  kifejezéseket írjuk, akkor az egyetlen  $(a, b)$  pontból álló pontkör

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

egyenletéhez, és a képzetes körnek is nevezett üres alakzatot adó

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = -r^2$$

egyenlethez jutunk. Az  $(a, b)$  pontot mindkét esetben középpontnak mondjuk. Ha a második egyenletet is zérusra redukáljuk, mindkét egyenlet normálegyenletté válik.

Ha a kör szót általánosabb értelemben használjuk, és a pontkört és képzetes kört is körnek mondjuk, akkor a közöséges kört megkülönböztetés céljából *valós körnek* nevezzük. A valós kör és a pontkör valós alakzat, ellentétben a képzetes körnek mondott üres (képzetes) alakzattal.

**Tétel.** Ha  $A \neq 0$  akkor az

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

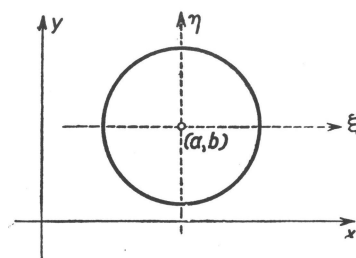
egyenlet vagy valós kör, vagy pontkör, vagy pedig képzetes kör egyenlete, a szó általánosabb értelmében tehát mindig kör egyenlete.

*Bizonyítás.* Minthogy  $A \neq 0$ , az egyenletet  $A$ -val oszthatjuk. Ezáltal, a fellépő együtthatókat célunknak megfelelően jelölve, az alakzat

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

normálegyenletéhez jutunk.

A koordináta-rendszer eltolásával elérhetjük, hogy az egyenletben a koordináták első hatványai ne szerepeljenek. A koordinátákat tartalmazó tagokat ugyanis teljes négyzetté egészíthetjük ki, s a normálegyenletet



333

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = d$$

alakban írhatjuk. Ha tehát a koordináta-rendszer kezdőpontját az  $(a, b)$  pontba toljuk, és az új  $\xi = x - a$ ,  $\eta = y - b$  koordinátákat vezetjük be (333. ábra), akkor az elsőfokú tagokat már valóban nem tartalmazó

$$\xi^2 + \eta^2 = d$$

kanonikus egyenlethez jutunk.

Ebből tételünk helyessége következik, hiszen a jobb oldalon álló  $d$  értéket előjelétől függően mindig felírhatjuk  $d = r^2$ ,  $d = 0$  vagy  $d = -r^2$  alakban. —

Tételünk bizonyítása egyben gyakorlati utasítást is ad arra, hogy az egyenlet ismeretében eldöntsük, milyen kör az alakzat, s hogy a kör sugarát és középpontjának koordinátáit meghatározzuk.

Kiolvashatjuk a bizonyításból, hogy ha két kör egyenlete csak az állandó tagban különbözik, akkor a két kör koncentrikus, s hogy egy kör egyenletének állandó tagját megváltoztatva a koncentrikus körök mindegyikéhez eljuthatunk.

Bizonyításunk azt is mutatja, hogy ha két  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  alakú egyenlet ugyanannak a körnek az egyenlete, akkor a két egyenlet csak egy 0-tól különböző számtényezőben különbözhetik egymástól. Ugyanezt pontkörre és képzetes körre is elmondhatjuk.

Tételünket az egyenes egyenletéről tudottakkal egybefogva kimondhatjuk, hogy ha az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  értékeknek nem mindegyike 0, akkor  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  vagy egyenes, vagy (általánosabb értelemben vett) kör egyenlete. Ez az egyenlet bizonyosan (valós) kör vagy egyenes egyenlete, ha nem mind a négy együttható 0, és tudjuk, hogy az egyenletet egynél több pont kielégíti.

**B1** Azt is kiolvashatjuk a fenti bizonyításból, hogy ha két normálegyenlet nem azonos, akkor a hozzájuk tartozó alakzatok sem azonosak. Ezek szerint mindenfajta körhöz csak egyetlenegy normálegyenlet tartozik.

A valós kör és a pontkör esetében tehát a normálegyenlet bal oldalán mindig az  $(\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 - r^2$  kifejezés koordinátákkal kifejezett értéke áll.

**B2** Ha egy görbe a  $P = 0$  egyenlettel van adva, ahol  $P$  az  $x, y$  koordinátáktól függő kétváltozós polinom, akkor *algebrai görbének* nevezzük. Az algebrai görbékkel és a hasonlóan definiált térbeli alakzatokkal az *algebrai geometria* foglalkozik.

Egy többváltozós polinom egyes tagjainak fokszámát megkapjuk, ha a tagban tényezőként előforduló változóhatványok kitevőit összeadjuk. Egy többváltozós polinom tagjai fokszámának legnagyobbikát a polinom fokszámának nevezzük. Ha a  $P$  polinom  $n$ -edfokú, akkor a  $P = 0$  görbét  *$n$ -edrendű görbének* mondjuk.

Az  $n$ -edrendű görbe egyenlete  $n$ -edfokú marad, ha 0-tól különböző számmal szorozzuk, s ha koordinátatranszformációval más koordináta-rendszerre térünk át. Ez utóbbi kijelentést az támasztja alá; hogy a transzformációs egyenletek lineárisak, ezért transzformáláskor a fokszám nem növekedhetik, de nem is csökkenhet, mert akkor az inverz transzformáció növelné a fokszámot.

Megállapíthatjuk, hogy az egyenes elsőrendű görbe, és minden elsőrendű görbe egyenes, hogy továbbá a kör másodrendű görbe.

**B3** Nem minden másodrendű görbe kör. A kör általános egyenletének bal oldalán ugyanis speciális másodfokú polinom áll. E másodfokú polinomnak az a különlegessége, hogy egyrészt  $x^2$  és  $y^2$  együtthatója megegyezik, másrészt  $xy$  nem szerepel benne. Megmutatjuk, hogy csak az ilyen másodfokú egyenlethez tartozhatik valós kör. A pontkörrel és a képzetes körrel nem kell foglalkoznunk, mert ezek analitikus alakzatok (vö. 37.1 B), ezért rájuk az állítás eleve teljesül.

Minthogy az eltolás koordinátatranszformációja a másodfokú tagok együtthatóit nem változtatja meg, arra az esetre szorítkozhatunk, amikor a valós kör középpontja a kezdőponttal azonos. Legyen tehát egy ilyen kör másodfokú egyenlete

$$K(x, y) \equiv A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2 + Bx + Cy + D = 0$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy itt  $A_1 = A_3$  és  $A_2 = 0$ .

Minthogy körünk a kezdőpontra vonatkozólag szimmetrikus, egyenlete  $K(-x, -y) = 0$  alakban is írható. A kör pontjai kielégítik ezért a

$$K(x, y) - K(-x, -y) \equiv 2Bx + 2Cy = 0$$

egyenletet is. Ez csak akkor lehetséges, ha  $B = C = 0$ , hiszen különben egyenes egyenletével állunk szemben, és egy egyenes nem tartalmazhatja egy kör valamennyi pontját. Ezek szerint

$$K(x, y) \equiv A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2 + D$$

Minthogy azonban körünk az  $y$ -tengelyre is szimmetrikus, egyenletét  $K(-x, y) = 0$  alakban is írhatjuk. A kör pontjai kielégítik tehát a

$$K(x, y) - K(-x, y) \equiv 2A_2xy = 0$$

egyenletet is. Ebből  $A_2 = 0$ , azaz

$$K(x, y) \equiv A_1x^2 + A_3y^2 + D$$

következik, hiszen különben a kör valamennyi pontját nem tartalmazó tengelykereszt egyenletéről van szó. Minthogy végül körünk az  $y = x$  egyenesre is szimmetrikus, egyenlete,  $K(y, x) = 0$  alakban is írható, s ezért a kör pontjai a

$$K(x, y) - K(y, x) \equiv (A_1 - A_3)(x^2 - y^2) = 0$$

egyenletet is kielégítik. Ha itt  $A \neq A_3$ , akkor  $x + y = 0$  és  $x - y = 0$  egyenesek együttesének az egyenlete. Mivel ezek sem tartalmazzák a kör valamennyi pontját, bebizonyítottuk, hogy  $A_1 = A_3$  is teljesül.

Megemlítjük, hogy későbbi tárgyalásunk az itt közölt bizonyítást majd feleslegessé teszi (lásd 47.2).

**B4\*** A geometria tárgyalását másként is el lehet indítani, mint ahogyan mi tettük. Mi az anyagot a szemléletből elvonatkoztatott axiómákra, elemi geometriai megállapításokra építettük fel. Itt most arról szólunk, hogyan lehet a tárgyalást a valós számok aritmetikájára alapozni. Ezt azért tesszük, hogy majd a következő megjegyzésben a képzetes alakzatokról bővebben szólhassunk.

Megtehetjük, hogy a valós számokból álló  $(x, y)$  számpárokat pontnak nevezzük, és a szokott módon nagybetűkkel jelöljük. Az  $x, y$  számok a pont koordinátái. A vektorokat azáltal vezetjük be, hogy a  $P_1(x_1, y_1)$  pontból a  $P_2(x_2, y_2)$  pontba vezető  $\overrightarrow{P_1P_2}$  vektornak az  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  számpárt mondjuk, s a vektorokat is a szokott módon jelöljük. Eszerint ugyanaz a számpár adja meg a pontot és a  $(0, 0)$  kezdőpontból a pontba vezető vektort, a pont helyvektorát. Az  $\mathbf{a}$   $(a_1, a_2)$  és  $\mathbf{b}$   $(b_1, b_2)$  vektorok összegének az  $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$  vektort, az  $\mathbf{a}$  vektor  $\lambda$ -szorosának a  $(\lambda a_1, \lambda a_2)$  vektort,  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  skaláris szorzatának az  $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2$  számot mondjuk. Két vektort akkor mondunk párhuzamosnak, ha egyikük számszorosa a másiknak.

A  $P_0$  ponton átmenő egyenesnek olyan  $P$  pontok összességét nevezzük, amelyekre a  $\overrightarrow{P_0P}$  vektorok mindannyian párhuzamosak egymással. Ezek a vektorok, a  $\overrightarrow{P_0P_0}$  vektort kivéve, az egyenes irányvektorai. Az  $\mathbf{a}$  vektorja  $|\mathbf{a}|$  hosszát  $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^2$  az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor  $\omega$  hajlásszögét az  $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \omega$  definiálja. Két vektor tehát akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0. A kezdőpont körüli elforgatást az általunk már ismert koordinátatranszformációs formulák segítségével vezethetjük be. Két pont távolságának összekötő vektoruk hosszát mondjuk. Körnek itt is egy adott ponttól adott távolságra levő pontok egyesítését nevezzük.

Nem volna célja annak, hogy itt ezzel az aritmetikai módszerrel újból felépítsük mindazt, amit más úton már elértünk. Csak megemlítjük, hogy a most mondottakra támaszkodva és a szükséges további fogalmakat is bevezetve a sík elemi geometriájában bizonyítottakat újból bizonyíthatnánk, s hogy szinte változatlanul átvehetnénk mindazt, amit az egyenes és a kör egyenletéről mondtunk.

Nem juthatunk ezzel a módszerrel más eredményekhez, hiszen definíciókul a tárgyalásunkban bizonyított tételek szolgáltak. Eredményekben nincs különbség, de annál nagyobb a különbség a szemlélethez való viszony tekintetében. A mi tárgyalásunk szemléletből elvont - megállapításokra épített, és szemlélettel ellenőrizhető állításokhoz vezetett. Ezzel szemben az aritmetikai módszer a szemléletből kölcsönzött megnevezéseket ad aritmetikai tárgyakkal (számpároknak, számpárok összességeinek), s ha nem tudnók, hogy ezek a megnevezések szemléletes fogalomalkotásoknak felelnek meg, azt mondhatnánk, hogy az egész tárgyalásnak s a bizonyított tételeknek a geometriai szemlélethez semmi közük nincs.

Az elmondottakhoz hasonlókat mondhatnánk természetesen a térgeometria tárgyalásáról is, és így az *aritmetikai térhez* juthatnánk.

**B5\*** A geometria aritmetikai megalapozásából kiindulva még tovább mehetünk az absztrakció útján. Megtehetjük, hogy a valós számok helyett egy tetszőleges algebrai test elemeivel dolgozunk. Az



így kapott geometria — ha még annak nevezhetjük — már nem mindig mond szemléletesen is átérthető mondatokat, sőt kijelentései a szemlélettel sokszor már ellentétesek is. A szemléletestől való eltávolodás mérve lényegesen függ attól, hogy milyen testet választunk. Ha a komplex számtestből indulunk ki, akkor a *komplex geometriához* jutunk. Ez a geometria sokban különbözik a közönséges (valós) geometriától.

A komplex geometriában vektorok  $(a + ib)$ -szereséről is beszélhetünk. Ha a komplex egyenes egy irányvektorának  $(a + ib)$ -szeresét az egyenes egy pontjából felmérjük, mindig az egyenes egy pontjához jutunk. A komplex egyenes tehát kétparaméteres sokaság (vö. 11.4 B1). A komplex geometriában egy pont nem bontja az egyenest két félegyenesre. A komplex egyenest egy sikkal ábrázolhatjuk, az ún. (Gauss-féle) komplex számsík is egy komplex egyenes ábrája.

A komplex geometriában két különböző pont (B4 útmutatása szerint definiált) távolsága 0 is lehet, amit a  $(0, 0)$   $(1, i)$  pontok példája mutat. Vannak olyan egyenesek is, amelyeknek bármely két pontja 0 távolságra van egymástól. Az  $y = ix$  és  $y = -ix$  egyenes ilyen (itt az  $x, y$  koordináták komplex számokat jelentenek). Ha két pont távolsága nem 0, akkor csak távolságuk négyzetét határozzák meg egyértelműen, maga a távolság a négyzetgyökvonás miatt kétértékű, az egyik érték a másik  $(-1)$ -szere. A távolságokat eszerint nem számokkal, hanem a komplex számok mondott párjaival mérjük. A kör egyenletének felírásánál ez nem okoz zavart, hiszen abban csak a sugár négyzete szerepel.

Az algebra alaptételéből következik, hogy a komplex geometriában a  $P = 0$  egyenlet, ha  $P$  az  $x, y$  koordinátáktól függő polinom, nem lehet üres alakzat egyenlete. Következik az is, hogy ezeknek az alakzatoknak a pontjai mindig kétparaméteres sokaságot alkotnak. Nincs viszont mindig valós pontjuk, azaz olyan, amelynek mindkét koordinátája valós.

A kezdőponttól  $\pm ri$  távolságra elhelyezkedő pontok az

$$x^2 + y^2 = -r^2$$

kört alkotják. E kör pontjai is két páramét eres sokaságot alkotnak, valós pontja azonban nincs. A kezdőponttól 0 távolságra elhelyezkedő pontok a 0 sugarú

$$x^2 + y^2 = 0$$

kört alkotják. Ennek egyetlen valós pontja a kezdőpont. Ha az egyenletet

$$(x + iy)(x - iy) = 0$$

alakban írjuk, megállapíthatjuk, hogy körünk két egyenesből, az  $x = iy$  és  $x = -iy$  egyenesekből áll. Ezek a kör egyetlen valós pontjában metszik egymást.

A szereplő két egyenesnek néhány érdekes tulajdonságát említjük meg. Az egyenletükből könnyű kiolvasni, hogy ezeknek az egyeneseknek normálvektora egyben irányvektoruk is. Ezek az egyenesek tehát önmagukra merőlegesek. Már láttuk, hogy bármely két pontjuk távolsága 0. Ha elforgatjuk a síkot a kezdőpont körül, akkor ez a két egyenes helyben marad, hiszen az  $x^2 + y^2 = 0$  kör helyben marad, és ezért e kört alkotó egyenesek is helyben maradnak. Az utóbbi tulajdonságra utalva ezeket az egyeneseket *izotrop* egyeneseknek mondjuk.

Megemlítjük, hogy ha a komplex geometriában a távolságot másként értelmeznők, mégpedig az általunk távolságnak nevezett komplex számpár abszolút értékét mondanók távolságnak, akkor ez a geometria részben közelebb kerülne a valós geometriához, részben viszont még jobban eltávolodnék tőle. Ebben az esetben pl. a háromszög-egyenlőtlenség érvényben maradna, az újfajta távolsággal definiált kör azonban már háromparaméteres sokaság volna, és nem is lenne algebrai görbe.

A komplex geometriáról szóló megjegyzéseink tartalommal töltötték meg a kör általánosításával kapcsolatos elnevezéseket, melyek bevezetésükkor üres szójátéknak tündek. Másrészt azonban arra is felhívtuk a figyelmet, hogy a talán egyszerűnek látszó általánosítás mi mindent takar.

**38.3 Tétel.** Ha a  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  pontok nincsenek egy egyenesen, akkor a rajtuk áthaladó kör egyenlete

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Bizonyítás.* Ha a determináns első sora szerint kifejtjük, megállapíthatjuk, hogy az egyenlet  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  alakú. Az  $A$  együttható értéke

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

s ez 37.6 szerint nem lehet 0, mert a három pont nincs egy egyenesen. A felírt egyenlet tehát (a szó általánosabb értelmében vett) kör egyenlete.

A  $P_1, P_2, P_3$  pontok hozzátartoznak ehhez a körhöz, mert bármelyiknek a koordinátáit helyettesítjük is, olyan determinánshoz jutunk, melynek két sora megegyezik. Eszerint a tételbeli egyenlet valós kör egyenlete, hiszen egyébként nem lehetne három pontja. —

**Tétel.** *Az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$  pontok akkor és csak akkor helyezkednek el egyenesen vagy körön, ha*

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Bizonyítás.* Írjuk fel a tétel determinánsát tetszőlegesen megválasztott  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pontokra, és vizsgáljuk meg, hogy az értéke mikor 0.

Ha a négy pont egy egyenesen van, akkor az első oszlop elemeihez tartozó al-determinánsok 37.6 szerint mindannyian eltűnnek. Az első oszlop szerinti kifejtés tehát azt mutatja, hogy ilyenkor a determináns értéke mindig 0.

Ha a négy pont nincs egy egyenesen, akkor feltehetjük, hogy közülük pl.  $P_2, P_3, P_4$  nincs egy egyenesen, hiszen a sorcsere a determináns eltűnésén nem változtat. Ekkor az előző tétel alapján kimondhatjuk, hogy determinánsunk akkor és csak akkor 0, ha koordinátái kielégítik a  $P_2, P_3, P_4$  pontok által meghatározott kör egyenletét, ha tehát a négy pont egy körön van.

Ezek szerint a tétel egyenlete valóban teljesül akkor, ha a pontok egyenesen vagy körön vannak, és máskor ez nem következik be. —

**Tétel.** *Ha a  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$  pontok mind különbözők, akkor*

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

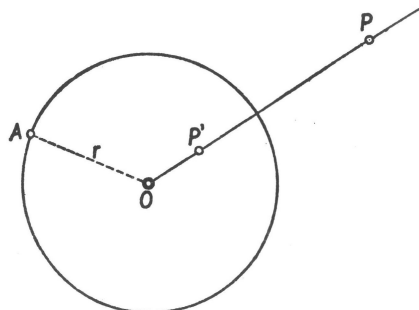
*a  $P_1, P_2, P_3$  pontok által meghatározott körnek vagy egyenesnek az egyenlete.*

Tételünk e szakasz első tételét magában foglalja.

*Bizonyítás.* A  $P(x, y)$  pont koordinátái az előző tétel szerint akkor és csak akkor elégítik ki a megadott egyenletet, ha a  $P, P_1, P_2, P_3$  pontok vagy egy egyenesen, vagy egy körön vannak, tehát akkor és csak akkor, ha  $P$  a  $P_1, P_2, P_3$  pontok által meghatározott körön vagy egyenesen van. —

## 39.§ Inverzió

Egy ponttranszformációval foglalkozunk, amely érdekes tulajdonságai révén nemcsak bizonyítási segédeszközként használható jól fel, hanem szerkesztési feladatok megoldására is alkalmazható. Ezt a paragrafust közvetlenül csak a második szakasz kapcsolja analitikus tárgyalásunkhoz.



334

**39.1** Legyen adva egy  $O$  középpontú,  $r$  sugarú kör. Ezt most az inverzió *alapkörének*, az  $O$  pontot az inverzió *pólusának*, az értéket pedig az inverzió *hatványának* nevezzük. Ha a  $P$  pont  $O$ -val nem azonos, akkor a  $P$  ponthoz hozzárendeljük az  $OP$  félegyenesnek azt a  $P'$  pontját (334. ábra), amelyre

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

A  $P'$  pont a  $P$  pont *inverz pontja*. Az így definiált ponttranszformációt *inverzió*nak (síkbeli elemi geometriai inverzió, körre vonatkozó tükrözés) mondjuk. Az inverzió az  $O$  pólust kivéve minden ponthoz rendel egy-egy inverz pontot. Egy alakzat pontjainak inverzei az *inverz alakzatot* alkotják. Ha egy alakzatról az inverz alakzatra térünk át, azt mondjuk, hogy az alakzatot *invertáljuk*.

Az alapkör az inverziót a hosszegység megválasztásától függetlenül egyértelműen meghatározza. Ha viszont egy koncentrikus alapkörre térünk át, akkor már megváltozik az inverzió, mégpedig az általuk szolgáltatott inverz alakzatok egymáshoz centrálisán hasonlóak. E hasonlóság arányát nyilván az inverziók hatványának az aránya adja.

Az inverzió definíciójából következik, hogy ha  $P$  inverze  $P'$ , akkor  $P'$  inverze  $P$ . Eszerint bármely alakzat inverzének inverze az eredeti alakzattal azonos. Mondhatjuk tehát két pontról vagy két alakzatról, hogy azok inverzek, azaz egymás inverzei.

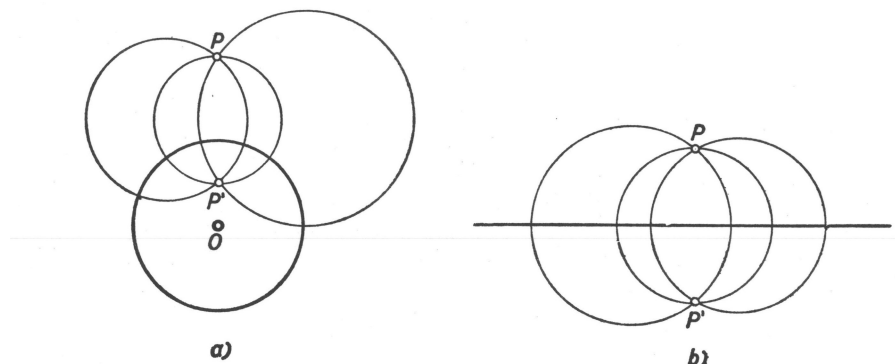
Nyomban belátható az is, hogy az alapkörön belüli pontok inverzei az alapkörön kívül vannak, az alapkörön kívüli pontok inverzei az alapkörön belül helyezkednek el, az alapkör pontjai pedig önmaguk inverzei. Más pontok nem rendelkeznek ez utóbbi tulajdonsággal.

Vannak alakzatok, amelyek önmaguk inverzei. Láttuk éppen, hogy az alapkör is ilyen, mégpedig az inverzió nemcsak az egész alapkört, hanem annak minden egyes pontját helyben hagyja. A póluson áthaladó egyenes is önmagának az inverze, viszont ezt minden egyes pontjáról nem mondhatjuk el.

**B1** A pólusnak egy körre vonatkozó hatványa akkor és csak akkor egyenlő  $r^2$ -tel, az inverzió hatványával, ha a pólusból a körhöz vont érintők hossza  $r$ , ha tehát a kör az inverzió alapkörét merőlegesen metszi. A körre vonatkozó hatvány definíciójából következik tehát, hogy mindezek a körök önmaguk inverzei. Az is következik így, hogy ha egy az alapkörtől különböző kör önmagának az inverze, akkor a pólusnak e körre vonatkozó hatványa  $r^2$ , hogy tehát ez a kör az alapkört merőlegesen metszi. Ezek szerint csak az alapkör és az alapkört merőlegesen metsző körök azok, amelyek önmaguk inverzei.

Következik ebből, hogy ha az inverz és egymástól különböző  $P, P'$  pontokon át köröket rajzolunk (335. ábra), akkor az alapkört merőlegesen metsző köröket kapunk, hiszen az  $OPP'$  szelőből leolvasható,

hogy az  $O$  pólus hatványa e körökre vonatkozólag  $r^2$ -tel egyenlő. Vessük egybe az így kapott ábrát azzal az ábrával, amelyet úgy kapunk, hogy egy egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő  $P, P'$  pontokon át köröket rajzolunk, amelyek az egyenest merőlegesen metszik. Ez az egybevetés indokolja azt, hogy az inverziót körre vonatkozó tükrözésnek is nevezzük. Nem igaz viszont, hogy ha az alapkör egy gömbtükör főköré, akkor a külső  $P$  pont képe az inverz  $P'$  pont.



335

**B2** Az inverzió nem a teljes sík transzformációja, hanem azé az alakzaté, amely a síkból a pólus elhagyása által keletkezik. A pólusnak ugyanis nincs inverze, és egy pontnak sem inverze a pólus. Ha mégis a pólust tartalmazó alakzat inverzéről beszélünk, vagy azt mondjuk, hogy valamely alakzatnak egy a pólust tartalmazó alakzat az inverze, akkor csak arra az alakzatra gondolunk, amelyet a pólust tartalmazó alakzathoz a pólust elhagyva kapunk. Így mondhattuk, hogy a póluson áthaladó egyenes önmagának az inverze, s nem kellett azt mondanunk, hogy egy ilyen egyenesből a pólust elhagyva olyan alakzatot kapunk, amely önmagának az inverze.

**B3** Az inverzió fogalmát kiterjesztve  $-r^2$  hatványú inverzióknak nevezzük azt a transzformációt, amelyik az  $r^2$  hatványából keletkezik, ha azt követően a pólusra még tükrözzük is.

**39.2** Ha analitikus módszerrel akarjuk vizsgálni, hogy egy alakzatnak mi az inverze, akkor az alapkör sugarát hosszegységnek választhatjuk, hiszen az inverzió hozzárendelése a hosszegység választásától nem függ. Természetesen azt is megtehetjük, hogy az inverzió pólusát választjuk kezdőpontul. Elég tehát az  $x^2 + y^2 = 1$  körre vonatkozó inverziót vizsgálnunk.

**Tétel.** Az  $x^2 + y^2 = 1$  körre vonatkozó inverzió az  $(x, y)$  ponthoz inverzként az

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

pontot rendeli.

*Bizonyítás.* Ha  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  és  $\mathbf{P}'(\mathbf{r}')$  a kezdőpont körül írt egységkörre vonatkozólag inverz pontok, akkor

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{r^2},$$

hiszen ez  $\mathbf{r}$ -rel egy irányú vektor, és hosszaik szorzata 1, tehát az inverzió hatványával egyenlő. A felírt vektoregyenlet alapján az  $\mathbf{r}'(x', y')$ ,  $\mathbf{r}(x, y)$  vektorok koordinátáira

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

s ez tételünk állítása. —

Megjegyezzük, hogy az inverz pontok koordinátáira

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Ennek belátásához még helyettesítésre sincs szükség, mert ez  $\mathbf{r}'^2 \mathbf{r}^2 = 1$  átírásából adódik.

**Tétel.** Valamely  $F(x, y) = 0$  egyenletű alakzat  $x^2 + y^2 = 1$  körre vonatkozó inverzének egyenlete

$$F\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

*Bizonyítás.* A  $P(x, y)$  pont akkor és csak akkor tartozik az  $F(x, y) = 0$  alakzat inverzéhez, ha  $P$  inverze, azaz a

$$P'\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

pont az alakzathoz tartozik, ha tehát az  $F(x, y) = 0$  egyenletben  $x$  és  $y$  helyébe  $P'$  koordinátáit írva az egyenlet teljesül. Így pedig a tételben megadott egyenlethez jutunk. —

**Tétel.** Ha egy alakzat kör vagy egyenes, akkor inverze is kör vagy egyenes.

A tételben valós körről és egyenesről van szó.

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy elég tételünk helyességét az  $x^2 + y^2 = 1$  körre vonatkozó inverzióra igazolni. Ha az alakzat kör vagy egyenes, egyenlete

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

alakban írható, és itt az együtthatók között van 0-tól különböző is.

Az előző tétel szerint az inverz alakzat egyenlete (e szakasz első tétele után tett megjegyzésünket is figyelembe véve)

$$\frac{A}{x^2 + y^2} + \frac{B}{x^2 + y^2} + \frac{C}{x^2 + y^2} + D = 0$$

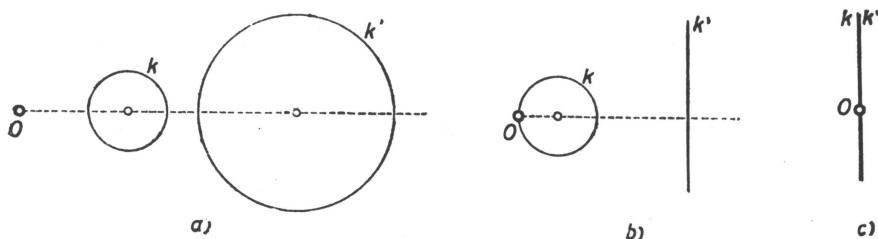
azaz  $(x^2 + y^2)$ -tel szorozva

$$A + Bx + Cy + D(x^2 + y^2) = 0$$

Ez valóban kör vagy egyenes egyenlete, mert egyrészt az együtthatóknak nem mindegyike 0, másrészt egyenél több pont koordinátái elégítik ki. hiszen az eredeti alakzat minden pontjának inverze ilyen. —

**Tétel.** A póluson át nem haladó kör inverze ugyanilyen kör. A póluson áthaladó kör inverze a póluson át nem haladó egyenes, és a póluson át nem haladó egyenes inverze a póluson áthaladó kör. A póluson áthaladó egyenes önmagának az inverze.

Tételünk magában foglalja az előző tételt, s azt részletezi (336. ábra). Az utolsó kijelentést már ismertük.



*Bizonyítás.* Az előző tétel bizonyításában láttuk, hogy az

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

$$D(x^2 + y^2) + Bx + Cy + A = 0$$

alakzatok egymás inverzei az  $x^2 + y^2 = 1$  körre vonatkozólag. Ebből sorra kiolvashatjuk tételünk állításait.

Ha az első alakzat kör, akkor  $A \neq 0$ . Ez a kör aszerint nem tartalmazza vagy tartalmazza az  $O(0, 0)$  pólust, amint  $D \neq 0$ , vagy  $D = 0$ . Az előbbi esetben a második alakzat is kör, az utóbbi esetben pedig egyenes.  $A \neq 0$  miatt a második alakzat sohasem halad át a póluson.

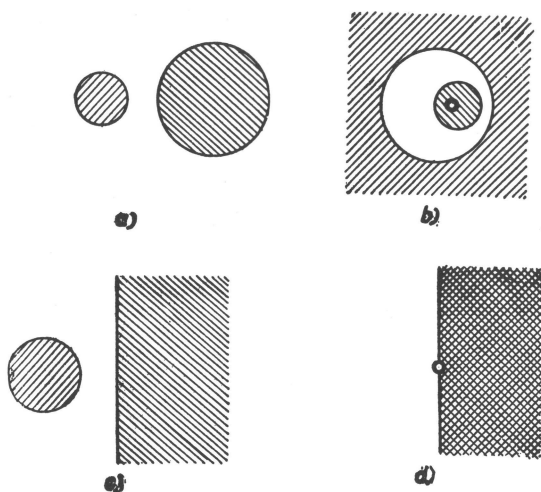
Ha az első alakzat egyenes, akkor  $A = 0$ . Ez az egyenes aszerint nem tartalmazza vagy tartalmazza a pólust, amint  $D \neq 0$ , vagy  $D = 0$ . Az előbbi esetben a második alakzat kör, amely  $A = 0$  miatt áthalad a póluson, az utóbbi esetben viszont mindkét alakzatnak  $Bx + Cy = 0$  az egyenlete. —

Az inverzió definíciója alapján nyilvánvaló, hogy ha egy alakzat egy a póluson áthaladó egyenesre szimmetrikus, akkor az inverz alakzat is szimmetrikus ugyanerre az egyenesre. Ebből tételünk kiegészítéseképp következik, hogy a póluson át nem haladó, egymáshoz inverz körök centrálisa áthalad a póluson, s hogy a póluson áthaladó kör középpontja a pólusból az inverz egyenesre bocsátott merőlegesen van, azaz e körnek a pólusban vont érintője az inverz egyenessel párhuzamos.

**B1** Megjegyezzük, hogy az  $x^2 + y^2 = 1$  körre vonatkozó inverz alakzatok vizsgálata

kor szabad az alakzatok egyenletét  $(x^2 + y^2)$ -tel szorozni vagy osztani. Ez a művelet ugyanis sem új pontot nem csatol az alakzathoz, sem nem rekeszt ki pontot, hiszen  $x^2 + y^2$  csak a kezdőpontra 0, a pólust viszont a tárgyalt alakzatok pontjai közül már eleve kirekesztettük.

**B2** E szakasz tételeit könnyen bizonyíthatnánk volna elemi geometriai úton is. Ha a póluson át nem haladó kör esetében a pólusnak erre a körre vonatkozó hatványát választjuk az inverzió hatványául (vö. 39.1 B3), akkor a kör nyilván önmagának az inverze. Ha egy egyenes érinti az inverzió alapkörét, akkor a befogótétel alapján könnyen beláthatjuk, hogy ez az egyenes a pólusból rábocsátott merőlegeshez tartozó Thales-kör inverze. Ezekből a megállapításokból az inverzió hatványát megváltoztatva, tehát centrális hasonlóságot alkalmazva, szakaszunk minden állítása következik.



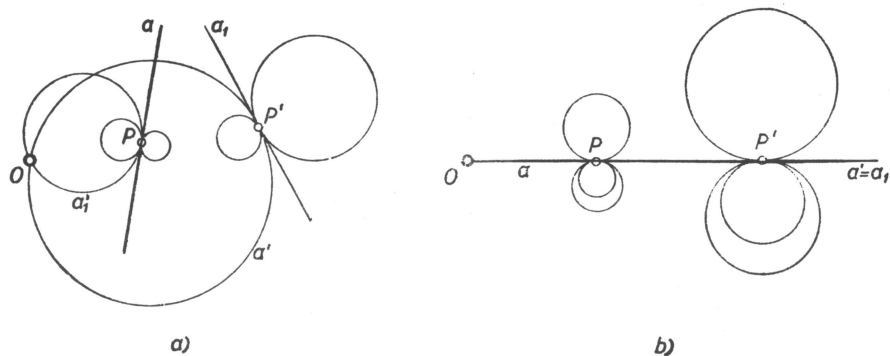
**B3** A 337. ábra bemutatja, hogy a körlemez és a félsík inverze a pólus különféle elhelyezkedései mellett milyen alakzat. Az ábra indoklásaképpen elég arra hivatkoznunk, hogy az  $O$  pólusból induló

félegyenes önmagának az inverze, s ha a félegyenes  $A, B$  belső pontjainak inverze  $A'$  és  $B'$  akkor  $AB$  és  $A'B'$  inverz szakaszok, viszont az  $OA$  szakasz inverze az  $OA$  irányú,  $A'$  kezdőpontú félegyenes. Megemlítjük, hogy inverz körök esetében a középpontok nem egymás inverzei.

**39.3 Tétel** Ha egy kör és egy egyenes, vagy pedig két kör egymást a pólustól különböző pontban érinti, akkor inverzeik is érintik egymást.

*Bizonyítás.* A pólus nem lehet a két inverz alakzat közös pontja, mert kör inverze nem halad át a póluson, és a két alakzat között kör is van. Egy a pólustól különböző pont akkor és csak akkor tartozik hozzá mind a két inverz alakzathoz, ha az inverze a két eredeti alakzat közös pontja. Minthogy az érintési pont az egyetlen ilyen pont, ennek inverze az inverz alakzatok egyetlen közös pontja. Ezek között az inverz alakzatok között kör is van, hiszen a pólus nem lehet az eredeti alakzatok közös pontja. Ezek szerint az inverz alakzatok valóban érintik egymást, mert egy körrel és ennek egyetlen pontján áthaladó körrel vagy egyenesről van szó. —

Tekintsük az  $a$  egyenest és mindazokat a köröket, amelyek az  $a$  egyenest a pólustól különböző  $P$  pontban érintik. Ha ezt az egyenesből és körökből összetett alakzatot invertáljuk, akkor tételünk szerint ugyancsak egy egyenesből és azt közös pontban érintő körökből összetett alakzathoz jutunk (338. ábra). Ilyen módon a  $P$  ponthoz és rajta áthaladó  $a$  egyeneshez az inverz  $P'$  pontot és az ezen áthaladó egyenest rendeltük. Az  $a, a^1$  egyenesek természetesen általában nem inverzek, ez csak akkor következik be, ha  $a$  áthalad a póluson, s ekkor  $a$  és  $a^1$  azonos.



338

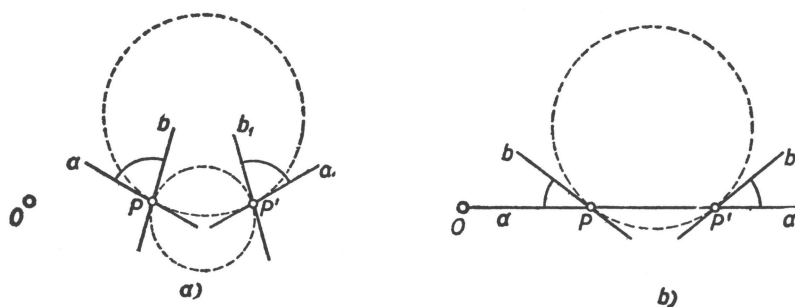
**Tétel.** Ha két alakzat, melyeknek mindegyike kör vagy egyenes, egymást egy a pólustól különböző pontban metszi, akkor inverzeik ugyanakkora szögben metszik egymást.

Tételünk kiegészíti az előző tételt, hiszen ott arról az esetről volt szó, amikor az alakzatok hajlásszöge 0, itt pedig a hajlásszög 0-tól különböző. Tételünk azt mondja ki, hogy körök és egyenesek hajlásszögét illetően az inverzió szögtartó.

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy a két alakzat metszéspontja az inverzével nem azonos, mert ha az inverzió hatványát megváltoztatjuk, az inverz alakzat az előbbihez hasonló, és a hasonlóság a hajlásszögeket nem változtatja meg.

Tekintsük tehát az inverz és egymástól különböző  $P, P'$  pontokat, valamint a  $P$  ponton áthaladó  $a, b$  egyeneseket (339. ábra). A tétel kimondása előtt közölt utasítás az  $a, b$  egyenesekhez a  $P'$  ponton áthaladó  $a^1, b^1$  egyeneseket rendeli. Elég azt bizonyítanunk, hogy  $a$  és  $b$  hajlásszöge megegyezik  $a^1$  és  $b^1$  hajlásszögével, mert ha azok az eredeti alakzatok érintői, akkor ezek az inverz alakzatokat érintik. Ezt arra az esetre is mondjuk, amikor az alakzat egyenes, mert a bizonyítás során az egyenest saját érintőjének tekintjük.

A  $P, P'$  pontokon áthaladó kör vagy egyenes, amely az  $a$  egyenest a  $P$  pontban érinti. Ez a kör vagy egyenes a tétel kimondása előtt mondottak szerint érinti az  $a^1$  egyenest is. Ugyanígy  $b$  is meghatároz egy a  $P, P'$  pontokon áthaladó kört vagy egyenest, amely érinti a  $b, b^1$  egyeneseket. Ezek szerint  $a$



339

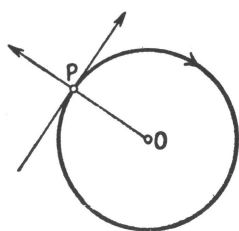
és  $b$ , valamint  $a^1$  és  $b^1$  metsző köröknek vagy pedig egymást metsző körnek és egyenesnek a metszéspontokban vont érintői. Ezért a két egyenes pár hajlásszöge valóban egyenlő. —

Kiemeljük tételünknek azt az állítását, hogy ha két alakzat, amelyek mindegyike kör és egyenes is lehet, merőlegesen metszi egymást, akkor inverzeik is merőlegesen metszik egymást.

**B1** Tételeinket általánosíthatjuk arra az esetre, amikor irányított alakzatokról van szó.

a) *Irányított körről* (ciklus) beszélünk, ha egy körvonalat és egy forgásirányt adunk meg. Azt mondjuk, hogy egy pont az irányított körön a kör irányításának megfelelően mozog, ha mozgása közben a ponthoz vezető sugár az előírt forgásiránnyal forog. A kör irányítását ábrán a körvonal megfelelő irányú nyílazásával jelöljük.

b) Irányított egyenesekhez és irányított körökhöz az inverzió ugyancsak irányított alakzatokat rendel, mert az alakzatot az irányításnak megfelelően befutó pont inverze az inverz alakzatot futja be, s ezen irányítást szab meg. Irányított egyenes befutásakor mindig arról van szó, hogy ha a pont a kezdőhelyzetéből elindulva és megfelelő irányban haladva befutotta az egyenest, akkor ezután a másik irányból tér vissza kezdőhelyzetébe. A póluson áthaladó irányított egyenes inverze ugyanaz az egyenes, de ellenkező irányítással.



340

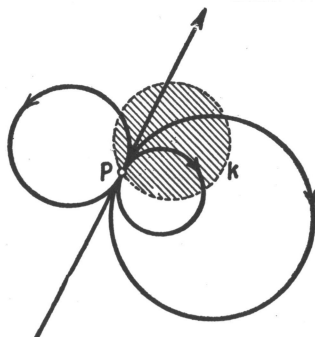
c) A kör irányításának megfelelően irányíthatjuk a kör érintőit is. Az  $O$  középpontú kör  $P$  pontbeli érintőjének irányításához úgy jutunk, hogy az  $\overrightarrow{OP}$  irányú  $OP$  egyenest a  $P$  pont körül  $90^\circ$ -kal elforgatjuk abban az irányban, amelyet a kör irányításával megadtunk (340. ábra). Két érintkező kör irányítása akkor felel meg egymásnak, ha közös érintőjüknek ugyanazt az irányítást adják.

Érintkező körök és érintőjük egymásnak megfelelő irányítását egyöntetűen is jellemezhetjük. Egy olyan  $k$  kört tekintünk, amely ezeket az alakzatokat a  $P$  érintési pontjukban metszi (341. ábra). A  $k$  körlemez a körök egy-egy ívét és az egyenes egy szakaszát tartalmazza. Ha a  $P$  pontot kezdőpontnak választjuk, irányított ívekhez és irányított szakaszhoz jutunk, amelyek alakzataink egymásnak megfelelő irányítását szabják meg. Ha mindegyik irányítást az ellenkezőre változtatjuk, újból egymásnak megfelelő irányításokhoz jutunk.

d) Most már szakaszunk teljes tárgyalását átírhatjuk irányított körökre és egyenesekre.



Az első tételhez hozzátehetjük, hogy ha az érintkező alakzatok irányítása egymásnak megfelelő, akkor ez inverzeikre is áll. Bizonyításul elég megemlítenünk, hogy ha az alakzatokat egy  $k$  körlemez segítségével irányítottuk, mégpedig ezt a körlemez úgy választottuk meg, hogy a pólust ne tartalmazza, akkor az inverz  $k'$  körlemez közvetítésével megállapíthatjuk, hogy az inverz alakzatok irányítása is megfelel egymásnak.



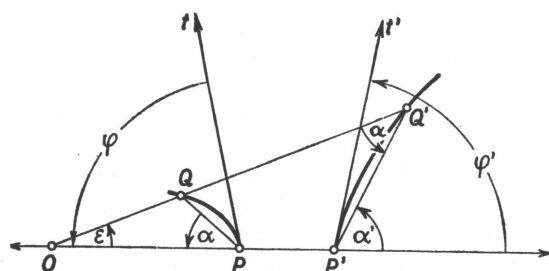
341

A 338. ábrához fűzött megjegyzésünk ugyanígy módosítható. A  $P$  ponton áthaladó irányított  $a$  egyeneshez ezek szerint az inverz  $P'$  ponton áthaladó irányított  $a^1$  egyenes tartozik. Az  $a$  egyenesnek és a  $P$  pontban érintkező köröknek az inverzei mindannyian az  $a^1$  egyenesnek megfelelő irányítással haladnak át a  $P'$  ponton.

A második tétel átírása módosítást követel: az inverzió az irányított alakzatok szögének a nagyságát megtartja, de  $a$  szög irányítását az ellenkezőre változtatja. Irányított körök esetében az irányított szögeket természetesen irányított érintőkkel definiáljuk. A tétel bizonyítását most is átvehetjük, a 339. ábrához fűződő záró következtetés azonban valamelyest módosul. Eredetileg mondhattuk volna, hogy az  $a, b$  egyenesek hajlásszöge a  $PP'$  szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó szimmetria miatt egyenlő az  $a', b'$  egyenesek hajlásszögével. Ez a szimmetria az irányított egyenesekre is teljesül, azonban szögeik irányítását ellenkezőre változtatja.

**B2** Aki ismeri az érintő geometriai határátmenetet igénylő általánosabb fogalomalkotását (vö. 15.2 B1), ennek a szakasznak a tételeit könnyűszerrel általánosabb érvénnyel is bebizonyíthatja. Megmutatjuk itt, hogy ez hogyan lehetséges, nem magyarázzuk azonban, hogy a szereplő geometriai határmenetek hogyan értendők.

Tekintsünk egy az  $O$  pólustól különböző  $P$  pontból induló, érintővel rendelkező görbét, azaz tegyük fel, hogy a görbén  $P$ -hez tartó  $Q$  pont által meghatározott  $PQ$  félegyenes bizonyos  $t$  határhelyezethez, a görbe  $P$  pontbeli érintőjéhez tart (342. ábra). Az inverz görbe az inverz  $P'$  pontból indul ki, és a  $P'$  pontban akkor van érintője, ha a  $P'$  ponthoz közeledő inverz  $Q'$  pont olyan  $P'Q'$  félegyenest határoz meg, amely egy  $t'$  határhelyezethez tart. Bebizonyítjuk, hogy ez így van, s hogy  $a$   $t$  és  $PO$  irányok irányított  $\varphi$  szöge csak irányításban különbözik a  $t'$  és  $OP'$  irányok irányított szögé irányok irányított  $\varphi'$  szögével egyenlő. Bebizonyítjuk tehát, hogy a  $PQ$  irányított görbe és a  $PO$  irányított egyenes irányított szöge inverzeik irányított szögétől csak irányításban különbözik. Ez majd jogot ad természetesen arra is, hogy két irányított görbe irányított szögéről hasonlót mondjunk.



342

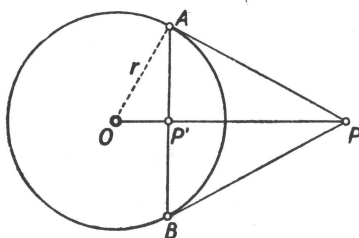
A bizonyítás abból indul ki, hogy az  $OPQ$  és  $OQP'$  háromszögek hasonlóak, mert  $O$  csúcsú szögeik azonosak, és e szöget közrefogó oldalaik aránya megegyezik, hiszen az inverzió miatt  $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$ . A háromszögek hasonlóságából a 342. ábra jelöléseivel  $OQ'P'\alpha = QPO\alpha = \alpha$  következik, és ezért

$$\alpha' = \alpha + \varepsilon,$$

hiszen  $\alpha'$  az  $OQ'P'\Delta$  külső szöge. Ha  $Q$  közeledik a  $P$  ponthoz, akkor az  $\varepsilon$  szög 0-hoz,  $\alpha$  pedig  $\varphi$ -hez tart. Van tehát határértéke az  $\alpha'$  szögnek, és ez is  $\varphi$ -vel egyenlő. Beszélhetünk ezért a  $t'$  érintőről, és az általa meghatározott  $\varphi'$  szög valóban  $\varphi$ -vel egyenlő.

**39.4** Az inverziót jól felhasználhatjuk szerkesztési feladatok megoldására. Ehhez szükséges, hogy meg tudjuk szerkesztetni a pontok inverzeit.

**Tétel.** Ha a  $P$  pont az inverzió 0 középpontú alapkörén kívül van, a  $P$  pont pedig az alapkörhöz  $P$ -ből vont érintők érintési pontjait összekötő szakasz és az  $OP$  szakasz metszéspontja, akkor  $P$  és  $P'$  inverz pontok.



343

A tétel lehetőséget ad bármely (0-tól különböző) pont inverzének megszerkesztésére, hiszen az alapkör pontjai önmaguk inverzei, a külső  $P$  pontok és a belső  $P'$  pontok inverzei pedig a tétel alapján könnyen megszerkeszthetők (343. ábra).

*Bizonyításként* elég az  $A$  érintési pont által meghatározott derékszögű  $OAP$  háromszög  $OA = r$  befogójára a befogótételt felírunk, hiszen ez éppen az  $OP \cdot OP' = r^2$  összefüggést mondja ki. —

Könnyű most már bármely kör és egyenes inverzét megszerkesztenünk, hiszen egyes pontok inverzeit ismerve az inverz alakzatot is megszerkeszthetjük. Megkönnyíthetjük ezt a szerkesztést annak felhasználásával, amit 39.2 utolsó bekezdésében mondtunk, és azzal, hogyha erre lehetőség van, hogy az alapkör önmagukhoz inverz pontjaira támaszkodunk.

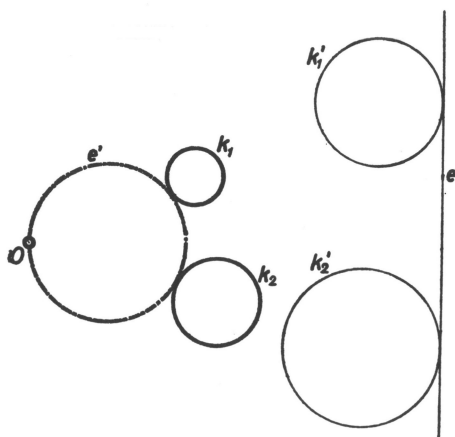
Ha egy szerkesztési feladatban csak körök és egyenesek szerepelnek, és csak érintkezésről, valamint megadott szögben való metszésről van szó, akkor mindig áttérhetünk az *inverz feladatra*, tehát arra, amelyben megadott alakzatokként az eredetileg adott alakzatok inverzei szerepelnek, s amelyben a megszerkesztendő alakzat az eredetileg megszerkesztetni kívánt alakzat inverze. Ha ezt az inverz feladatot megoldjuk, akkor az eredményalakzat invertálásával az eredeti feladat megoldásához jutunk.

Az inverz feladatra való áttérés gyakran megkönnyíti vagy éppen lehetővé teszi az olyan feladat megoldását, amely eredetileg nehezen vagy egyáltalában nem volt megoldható.

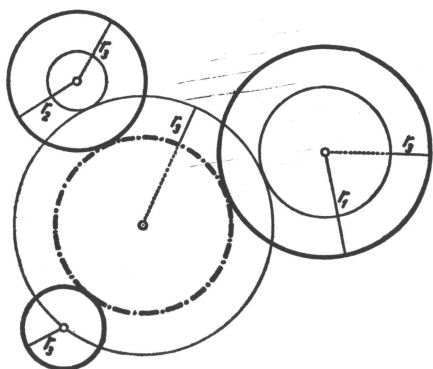
Az inverz feladatot egyszerűbbé tehetjük azáltal, hogy az inverzió pólusát ügyesen választjuk meg. Segíthetünk az inverzió alapkörének megválasztásával is, mert könnyebb az inverz alakzat megszerkesztése, ha az eredeti alakzat metszi az alapkört. A pólus megválasztásakor ügyelni kell arra, hogy a póluson áthaladó körök inverzei egyenesek, ami a feladatot egyszerűsíti, viszont a póluson át nem haladó egyenesek inverzei körök, ami az inverz feladatot nehezebbé teheti. Különösen olyankor tesz jó szolgálatot a feladat inverziója, amikor ismerjük a megszerkesztendő kör egy pontját, mert ha pólusul választjuk, az inverz feladat egyenes szerkesztését követeli meg.

Példaképpen említjük a következő feladatot: Szerkesztendő kör, amely egy adott ponton áthalad és két megadott kört érint. Ha itt a megadott pontot választjuk az inverzió pólusául, akkor az inverz feladat két adott kört érintő egyenes szerkesztését kívánja, s ezt könnyen elvégezhetjük (344. ábra).

**A1** Az utoljára említett szerkesztési feladat megoldása arra is lehetőséget ad, hogy három adott kört érintő kört szerkesszünk. Ezt a feladatot egy fogással az imént megoldott feladatra vezethetjük vissza. Ha pl. azt a kört keressük, amelyik kívülről érinti az adott  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  sugarú köröket, és a három sugár közül  $r_3$  a legkisebb (a legkisebbek egyike), akkor következőképpen járhatunk el (345. ábra): Csökkentsük a három adott kör sugarát  $r_3$ -mal. Az  $r_3$  sugarú kör ezáltal pontkörré, azaz ponttá válik. Növeljük a megszerkesztve gondolt kör sugarát ugyancsak  $r_3$ -mal. A növelt kör kívülről érinti a csökkentéssel kapott köröket, illetőleg áthalad a csökkentéssel kapott ponton (pontokon). Ezt a kört inverzió segítségével meg tudjuk szerkeszteni, és sugarát  $r_3$ -mal csökkentve a keresett kört kapjuk meg.



344



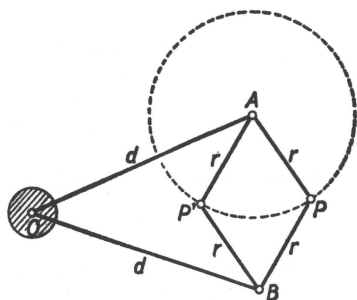
345

Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha a keresett körre előírjuk, hogy a három adott kör melyike érintse kívülről, és melyike belülről. Ebben az esetben is úgy változtatjuk meg a körök sugarát, hogy azok a változtatás után is érintkezzenek, s hogy egyikük pontkörré váljék. Ennek megfelelően döntjük el, hogy mely körök sugarát növeljük és melyekét csökkentjük.

A most megoldott feladat a legnehezebb az *Apollonios-éle* szerkesztési feladatok közül. Ezeknél a feladatoknál három alakzat van adva, amelyek mindegyike kör, egyenes vagy pont is lehet, és olyan kör szerkesztendő, amelyik ezeket érinti, illetve tartalmazza. Ha az egyenes esetében sugárváltoztatás helyett az egyenes párhuzamos eltolását alkalmazzuk, akkor a most bemutatott fogással mindezeket a

feladatokat megoldhatjuk. Nem állítjuk azonban, hogy így a feladatok mindegyikénél a legegyszerűbb megoldáshoz jutunk.

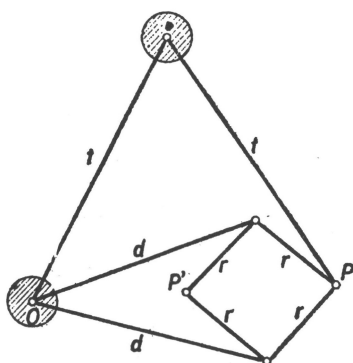
**A2** Ha egy rajzot inverzió alkalmazásával akarunk elkészíteni, akkor jó szolgálatot tehet egy olyan eszköz, amely az eredeti alakzatnak egy tűvel való végigkísérésekor az inverz alakzatot rajzolja meg. Az ilyen eszközt *inverzornak* nevezzük. Ha ilyen eszközt alkalmazunk, akkor eljárásunk természetesen már nem euklideszi szerkesztés.



346

Itt a *PEAUCELLIER-féle inverzort*<sup>3</sup> ismertetjük. Ennél a rögzített  $O$  csuklóból  $d$  hosszúságú  $OA$ ,  $OB$  rudak indulnak (346. ábra). Ezekhez csuklósán csatlakoznak az  $r < d$  hosszúságú  $AP$ ,  $BP$  és  $AP'$ ,  $BP'$  rudak, amelyek a  $P$ ,  $P'$  pontokban ugyancsak csuklósán csatlakoznak egymáshoz. Az eszköz mozgatásakor a  $P$ ,  $P'$  pontok az  $O$  pólusra vonatkozólag inverz alakzatokat írnak le. Ez abból következik, hogy egyrészt az  $O$ ,  $P$ ,  $P'$  pontok egy egyenesen, ti. az  $AB$  szakasz felezőmerőlegesén vannak, mégpedig  $r < d$  miatt  $P'$  az  $OP$  félegyenesen van, másrészt pedig az  $OP \cdot OP'$  szorzat állandó, mert ez az  $O$  pontnak az  $A$  körül  $r$  sugárral írt körre vonatkozó hatványa, és ez a hatvány mindig  $d^2 - r^2$ . Hátán a  $P$  pont egy alakzatot kísér végig, akkor a  $P'$  pont az inverz alakzatot futja be.

**B** Ha az inverzornak  $P$  pontját csuklós kar segítségével egy a póluson áthaladó körött mozgatjuk, akkor  $P'$  egyenest ír le. Így tehát egy különös és bonyolult vonalzóhoz jutottunk (347. ábra). A közönséges vonalzóval egyenest rajzolva igazában csak utánarajzoljuk azt a vonalat, amilyenre a vonalzó készítője a vonalzó élét készítette. A közönséges vonalzóval tehát nem szerkesztünk vonalat abban az értelemben, ahogyan a körző a körvonalat valóban megszerkeszti, hanem csak vonalat másolunk. A most megismert eszköz az egyenest ilyen értelemben megszerkeszti, s ebből a szempontból a közönséges vonalzónál tökéletesebb eszköznek mondható. Nem állítjuk azonban, hogy eszközünk az egyenest pontosabban rajzolja meg, mint a közönséges vonalzó.



347

**39.5 Tétel.** Ha az  $O$  középpontú  $r^2$  hatványú inverzió a  $P$ ,  $Q$  pontokhoz a  $P'$ ,  $Q'$  pontokat rendeli, akkor

<sup>3</sup> Ch. N. Peaucellier (ejtsd: pőszölié), 1832—1913, francia tábornok.

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{r^2}{OP \cdot OQ}$$

*Bizonyítás.* Az  $O, P, Q$  pontokból álló alakzat hasonló az  $O', Q', P'$  pontokból álló alakzathoz (348. ábra), mert egyrészt a  $POQ$ -t megegyezik a  $Q'OP'$ -gel, másrészt száraik szeleteire

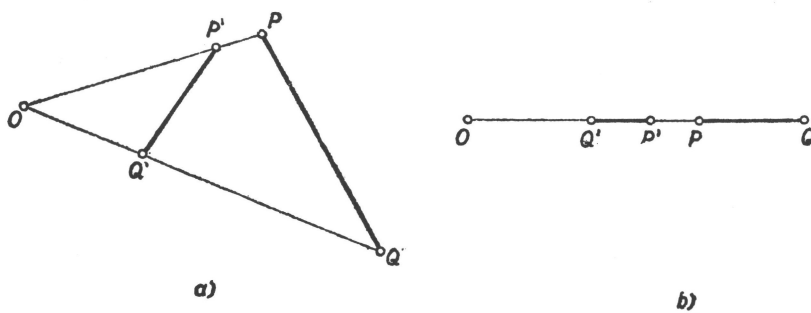
$$OP : OQ = OQ' : OP',$$

hiszen itt a beltagok szorzata és a kültagok szorzata egyaránt  $r^2$ -tel egyenlő. Okoskodásunk akkor is helyes, ha az  $O, P, Q$  pontok egy egyenesen vannak.

A bizonyított hasonlóság miatt

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OQ'}{OP}$$

Ebből  $OQ' = r^2 : OQ$  helyettesítéssel a tétel állítását kapjuk. —



348

**Tétel.** Az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pontok  $P_i P_k = a_{ik}$  távolságaiból képzett

$$a_{12}a_{34}, \quad a_{13}a_{24}, \quad a_{14}a_{23}$$

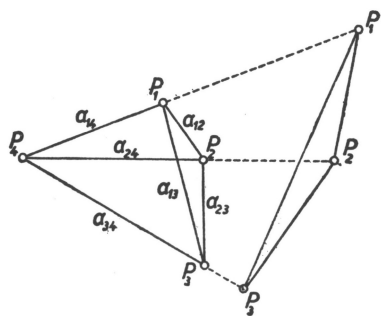
szorzatok közül egyik sem lehet a másik kettő összegénél nagyobb. Akkor és csak akkor van köztük Olyan, amely a másik kettő összegével egyenlő, ha a négy pont egy körön vagy egy egyenesen van

*Bizonyítás:* a) Ha pl.  $P_1$  és  $P_2$  azonos, akkor a négy pont egy körön van, továbbá  $a_{12} = 0$  miatt az első szorzat 0, s a másik két szorzat pedig  $a_{13} = a_{23}$  és  $a_{14} = a_{24}$  miatt egyenlő. A tétel állításai ezek szerint ebben az esetben helyesek.

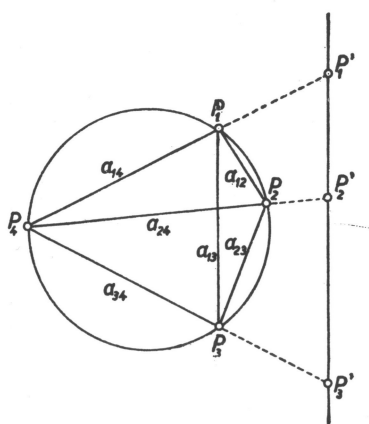
b) Ha a négy pont különböző, akkor  $P_4$  pólusú, 1 hatványú inverzió a  $P_1, P_2, P_3$  pontokhoz  $P'_1, P'_2, P'_3$  pontokat rendel, hiszen  $P_4$ -től különböző pontokról van szó (349. ábra). Az inverz pontok távolságaira az előző tétel szerint

$$P_1 P'_2 = \frac{a_{12}}{a_{14} a_{24}}, \quad P'_1 P'_3 = \frac{a_{13}}{a_{14} a_{34}}, \quad P'_2 P'_3 = \frac{a_{23}}{a_{24} a_{34}}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt e távolságok egyike sem nagyobb a másik kettő összegénél. Ugyanez áll akkor e távolságok  $a_{14}a_{24}a_{34}$ -szeresére is, és ez tételünk első állítása.



349



350

A tételbeli szorzatok között akkor és csak akkor van a másik kettő összegével egyenlő, ha ugyanezt a velük arányos  $P_1P'_1, P_1P'_2, P_1P'_3$  távolságokról elmondhatjuk. Ez pedig akkor és csak akkor következik be, ha a  $P'_1, P'_2, P'_3$  pontok egy egyenesen vannak (350. ábra), ha tehát a  $P_1, P_2, P_3$  pontok egy egyenes inverzén, azaz egy a  $P_4$  ponton áthaladó körön vagy egy egyenesen helyezkednek el.—

**Tétel.** (PTOLEMAIOS<sup>\*4</sup> tétele). *A húrnégyszög átlóinak szorzata a szemközti oldalpárok szorzatának összegével egyenlő.*

*Bizonyítás.* Az előző tétel bizonyításából azt is kiolvashatjuk, hogy ha a négy pont egy kör négy különböző pontja, és a  $P_4P_2$  egyenes elválasztja a  $P_1, P_3$  pontokat, akkor az ott említett szorzatok közül a középső egyenlő a szélsők összegével. Ez éppen a most bizonyítandó tétel állítása.—

## 40.§ Hatványvonal és körsor

Pont körre vonatkozó hatványával már a 18. §-ban megismerkedtünk. Itt a hatvány analitikus kiszámítása után olyan pontok mértani helyével foglalkozunk, amelyeknek két vagy három körre vonatkozó hatványa ugyanaz az érték. Ez a vizsgálat vezet majd olyan körök tanulmányozásához, amelyek közül bármely kettőhöz ugyanaz a mértani hely tartozik. Tárgyalásunk jobbára analitikus, bár több részlet elemi úton egyszerűbben volna elintézhető, viszont a paragrafus egészéhez az analitikus módszer illik jobban.

**40.1** Ha ebben a paragrafusban körről lesz szó, mindig valós körre vagy pontkörre gondolunk. Nem fogjuk tehát esetenként hangsúlyozni, hogy a kör szó pontkört is jelent.

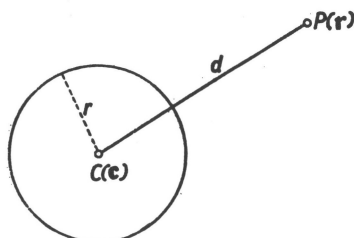
Ezt a megállapodást azzal tesszük lehetővé, hogy pontnak pontkörre vonatkozó hatványáról is beszélünk. A  $P$  pont  $C$  pontkörre (pontra) vonatkozó *hatványának* a  $d = CP$  távolság négyzetét

<sup>4\*</sup> Ptolemaios 150 körül Alexandriában élt, egyiptomi születésű geográfus, csillagász és matematikus.

mondjuk, összhangban van ez a megállapodás azzal, hogy  $P$ -nek a  $C$  középpontú  $r$  sugarú körre vonatkozó hatványa  $d^2 - r^2$ , hiszen a pontkör esetében  $r = 0$ . A pontkörre most definiált hatvány csak magának a pontkörnek mondott pontra 0, minden más pontra pozitív.

**Tétel.** Ha  $K = 0$  egy kör normálegyenlete, akkor a  $P$  pontnak e körre vonatkozó hatványa  $K(P)$ .

Miként az egyeneseknél tettük,  $K(P)$ -vel azt az értéket jelöljük, amelyet a  $K$  kifejezés ad, ha  $x$  és  $y$  helyébe a  $P$  pont koordinátáit helyettesítjük.



351

*Bizonyítás.* A  $C(c)$  középpontú,  $r$  sugarú normálegyenletének bal oldalán a

$$K = (\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 - r^2$$

kifejezésnek az  $\mathbf{r}(x, y)$  vektor koordinátaival kifejezett értéke áll. Ha itt  $\mathbf{r}$  egy tetszőleges  $P$  pont helyvektora (351. ábra), és  $CP = d$ , akkor tehát

$$K(P) = d^2 - r^2,$$

ami a tétel állítását adja. —

Következik tételünkéből, hogy ha  $K = 0$  normálegyenlet, akkor  $K(P)$  értéke a körön belüli pontokra negatív, a rajta kívüliekre pedig pozitív. Pontkör esetében ez az érték sohasem negatív.

**B** Ha a bizonyított tételt 37.4 második tétele mellé állítjuk, az egyenes és a kör normálegyenletére egyaránt megállapíthatjuk, hogy ha a bal oldalba egy pont koordinátáit helyettesítjük, olyan értéket kapunk, amelynek közvetlen geometriai jelentése van. Ez indokolhatja, hogy mindkét egyenletnek ugyanazt a nevet adtuk.

**40.2** Azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek két körre vonatkozó hatványa ugyanakkora, a két kör *hatványvonalának* nevezzük.

Két koncentrikus körnek nincs hatványvonala, mert ugyanannak a pontnak két koncentrikus körre vonatkozó hatványa mindig két különböző érték. Ha ugyanis  $r_1$  és  $r_2$  a két koncentrikus kör sugara, és  $d$  a pont távolsága a közös centrumtól, akkor különböző  $r_1, r_2$  értékekre a  $d^2 - r_1^2, d^2 - r_2^2$  hatványok sohasem egyenlők.

**Tétel.** Két nem koncentrikus kör hatványvonala egyenes.

*Bizonyítás.* Legyen  $K_1 = 0$  és  $K_2 = 0$  a két kör normálegyenlete. A hatványvonal azoknak a  $P$  pontoknak a mértani helye, amelyekre az előző szakasz szerint

$$K_1(P) = K_2(P),$$

tehát azoké, amelyeknek koordinátái kielégítik a

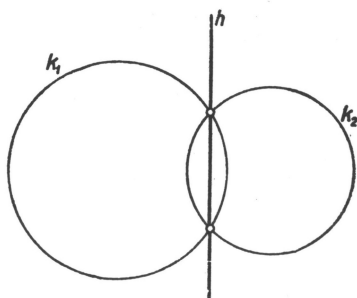
$$K_1 - K_2 = 0$$

egyenletet. Már meg is kaptuk a hatványvonal egyenletét, s csak azt kell még belátnunk, hogy ez egyenes egyenlete.

Míthogy  $x^2$  és  $y^2$  együtthatója a  $K_1, K_2$  kifejezések mindegyikében 1, a  $K_1 - K_2$  kifejezés csak lineáris vagy állandó lehet. Nem lehet azonban állandó sem, mert, ha  $c$  egy állandó, a  $K_1 = 0, K_1 + c = 0$  körök 38.2 szerint koncentrikusak. Ezért  $K_1 - K_2$  lineáris, és a hatványvonal valóban egyenes. —

Kiemeljük, hogy a  $K_1 = 0, K_2 = 0$  normálegyenletű körök hatványvonalának egyenlete  $K_1 - K_2 = 0$ .

**Tétel.** Ha két körnek van közös pontja, akkor rajta van a hatványvonalon.



352

*Bizonyítás.* A közös pont hatványa mindkét körre vonatkozólag 0, tehát ugyanaz az érték.\*

Ezért a közös pont a hatványvonalon van. —

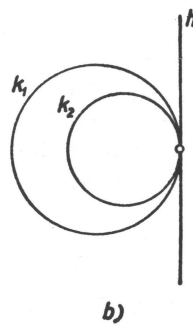
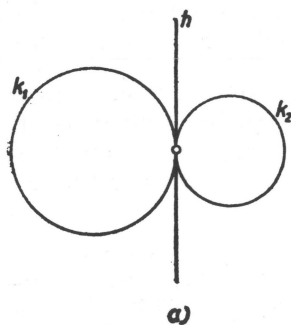
Következik tételünkből, hogy metsző körök hatvány vonala a metszéspontok által meghatározott egyenes (352. ábra).

**Tétel.** Két kör hatványvonala acentrális egyenesükre merőleges.

A tétel olyan körökről szól, amelyeknek van hatványvonaluk, azaz nem koncentrikusak. Szó lehetett ezért a centrálisukról is. Metsző körökre tételünk nem mond újat, mert közös húrjuk a centrálisra merőleges.

*Bizonyítás.* Ha egy pontot két kör centrálisára tükrözzünk, olyan pontot kapunk, amelynek mindkét körre vonatkozólag ugyanaz a hatványa, mint az eredeti ponté volt. Ez abból következik, hogy a tükrözés a pontnak a körközéppontoktól való távolságát nem változtatja meg. Ha tehát a hatványvonal valamely pontját a centrálisra tükrözzük, újból a hatványvonal pontjához jutunk, azaz a hatványvonal a centrálisra vonatkozólag szimmetrikus. Mivel így csak maga a centrális és a rá merőleges egyenesek helyezkednek el, elegendő már csak azt bizonyítanunk, hogy a centrális nem hatványvonal.

A centrális a két kört két egymással nem azonos pontpárban metszi. Van tehát a centrálisnak az egyik körhöz tartozó, de a másik körhöz nem tartozó pontja. Ez a pont nem tartozhatik a hatványvonalhoz, mert az egyik körre vonatkozólag 0 a hatványa, a másikra pedig nem. Az ezt a pontot tartalmazó centrális tehát valóban nem lehet hatványvonal. —





Az előző és a most bizonyított tételből következik, hogy érintkező körök hatványvonala a két kör közös érintője (353. ábra). Ugyanígy azt is belátjuk, hogy egy pontkörnek és rajta áthaladó körnek a hatványvonala a pontkörnek tekintett pontban a körhöz vont érintő.

A Közös pont nélküli körök hatványvonalára még nem tudunk egyszerű szerkesztést adni. Ezt a hiányt rövidesen pótoljuk (lásd 40.3 A1).

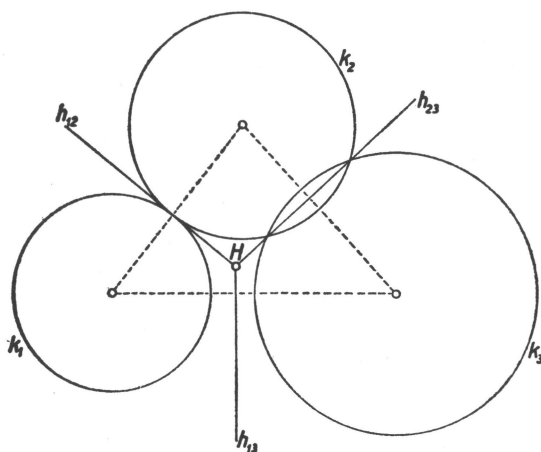
**40.3 Tétel.** *Ha három kör között nincs két koncentrikus, akkor hatványvonalaik egy sugársorhoz tartoznak.*

A tétel arról a három hatványvonalról szól, amelyeket a három kör közül kettő-kettő határoz meg. Ha volna a körök között két koncentrikus, akkor nem lehetne szó három hatványvonalról.

*Bizonyítás.* Legyen a három kör normálegyenlete  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 0$ ,  $K_3 = 0$ . Hatványvonalaik egyenlete tehát

$$K_1 - K_2 = 0, \quad K_2 - K_3 = 0, \quad K_3 - K_1 = 0.$$

Mint hogy ezeknek az egyenleteknek bal oldalait összeadva azonosan nullát kapunk, a három egyenes 37.9 első tétele szerint egy sugársorhoz tartozik. —



**Tétel.** *Ha három kör középpontja nincs egyenesen, akkor egyetlenegy olyan pont van, amelynek mind a három körre vonatkozólag ugyanaz a hatványa.*

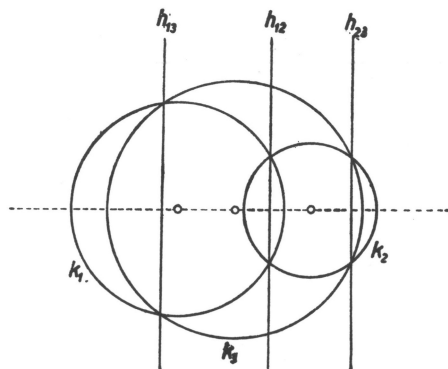
Ezt az egyetlen pontot a három kör *hatványpontjának* nevezzük.

*Bizonyítás.* Minthogy a három középpont nincs egyenesen, nem lehet két középpont azonos, és ezért a három kör közül bármely kettőnek van hatványvonala. Egy pont akkor és csak akkor felel meg a tétel követelményének, ha hozzátartozik mind a három hatványvonalhoz. Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy a három hatványvonalnak egyetlenegy közös pontja van (354. ábra).

Az előző tétel szerint a három hatványvonal egy sugársorhoz tartozik. Elég ezért belátnunk, hogy a három hatványvonal nem egyező állású. Ez abból következik, hogy a hatvány vonalak a körök centrálisaira merőlegesek, a centrálisok pedig egy háromszög oldalegyenesei, hiszen a centrumok nincsenek egy egyenesen. —

Ha három kör középpontja egyenes három különböző pontja, akkor e körök hatványvonalai egyező állásúak, mert mindannyian merőlegesek a közös centrálisra. Ebben az esetben a hatvány Vonalak általában egymástól különböző, párhuzamos egyenesek (355. ábra). Ilyenkor tehát nincs olyan pont, amelynek mind a három körre vonatkozólag ugyanaz a hatványa.

Ha a  $k_1$ ,  $k_2$  és  $k_1$ ,  $k_3$  körpárok hatványvonala azonos, akkor ez egyben a  $k_2$ ,  $k_3$  körök hatványvonala is, mert a közös hatvány vonal minden pontjának ugyanakkora a  $k_2$ ,  $k_3$  körökre vonatkozó hatványa, ti. mindkettő megegyezik a pont  $k_1$ -re vonatkozó hatványával. Ha tehát három kör három hatványvonalat határoz meg, és ezek nem mindannyian különböznek, akkor mindannyian azonosak. Ilyenkor a három középpont természetesen csak egy egyenesen lehet.

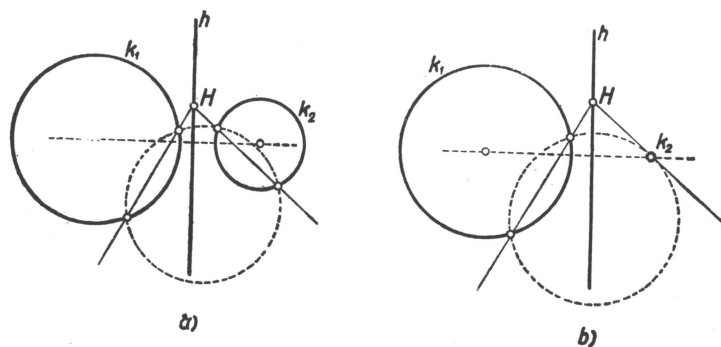


355

Valóban lehetséges az, hogy három kör páronként ugyanazt a hatvány vonalat adja, sőt akárhány ilyen tulajdonságú körrel is szó lehet. A következő szakaszokban ilyen köröket tárgyalunk.

**A1** Az utolsó tétel lehetőséget ad két olyan kör hatvány vonalának gyors megszerkesztésére, amelyeknek nincs közös pontjuk. Rajzoljunk ugyanis olyan kört, amelyik mind a két kört metszi, s amelynek a középpontja nincs a centrálisukon. E három kör hatványpontja a közös húrok egyeneseinek metszéspontjaként gyorsan megszerkeszthető (356. ábra). A hatványpontból az eredetileg adott körök centrálisára merőlegest bocsátva, a keresett hatványvonalat kapjuk meg.

Akkor is alkalmazhatjuk a most megismert szerkesztést, ha a két kör egyike pontkör. Ebben az esetben a pontkört áthaladó körrel van szó, és hatványvonalukat érintőszerkesztés adja.



356

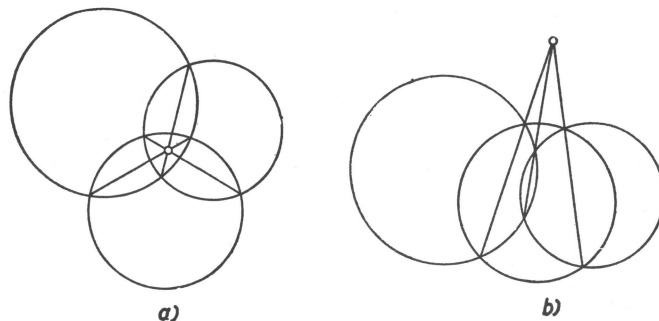
Két pontkör hatványvonata természetesen a szimmetriatengelyükkel, összekötő szakaszuk felezőmerőlegesével azonos. Ugyanígy bármely két egyenlő sugarú kör hatványvonalát is megkaphatjuk a szimmetriatengelyük megszerkesztése révén.

**A2** Az utolsó tételből következik, hogy három egymást páronként metsző kör közös húrai, illetve azok egyenesei párhuzamosak vagy egymást egy pontban metszik (357. ábra).

**40.4** A következő szakaszok tárgya bizonyos alakzatokból összetett alakzat, a körsor lesz. Ilyen összetett alakzat a sugársor is, melyet 37.8-ban ismertünk meg. A sugársorok és körsorok tárgyalása között sok a hasonlóság. Lényeges eltérést jelent azonban, hogy a sugársorok tárgyalását a geometriai jellemzésükkel kezdtük, és ebből kiindulva jutottunk el a sugársorra vonatkozó analitikus állításokhoz,

a körsoroknál Viszont analitikus definícióból indulunk ki, és geometriai áttekintést majd csak a tárgyalás végén kapunk.

Legyen  $K_1 = 0$  és  $K_2 = 0$  mindegyike vagy egy kör másodfokú egyenlete, vagy egy egyenes lineáris egyenlete, mindkét egyenlet azonban ne legyen



357

lineáris. Tekintsük mindazokat az alakzatokat, amelyeknek az egyenlete valamilyen  $\lambda_1, \lambda_2$  valós számokkal

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

alakban írható. Ezeknek az alakzatoknak az összességét *körsornak*, mégpedig a  $K_1 = 0, K_2 = 0$  alakzatok által meghatározott körsornak nevezzük. A körsorhoz tartozó alakzatokat a körsor *elemeinek* mondjuk. Közéjük tartozik a körsort meghatározó két kör vagy kör és egyenes is, hiszen a  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$  és  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$  értékek ezeket adják.

A felírt egyenlet bal oldala az  $x, y$  koordinátáknak mindig olyan legfeljebb másodfokú kifejezése, amelyben  $x^2$  és  $y^2$  együttthatója ugyanakkora, hiszen a  $K_1$  és  $K_2$  kifejezések is ilyenek. A körsor minden eleme tehát vagy kör (pontkör), vagy egyenes. Van azonban a körsor elemei között kör is, hiszen ezt már a körsort meghatározó két alakzatra is kikötöttük.

**Tétel.** *A körsor elemei között két egyenes nem lehet.*

A körsor elemei között tehát, miként a körsort meghatározó alakzatok között is, csak legfeljebb egy egyenes lehet.

*Bizonyítás.* Ha az  $\alpha_1, \alpha_2$  és  $\beta_1, \beta_2$  értékpárok a körsor két egymástól különböző egyeneselemét adnák, akkor ezekre egyrészt

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 = L_1,$$

$$\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 = L_2$$

teljesülne, ahol  $L_1$  és  $L_2$  lineáris kifejezések, másrészt

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

volna, hiszen az  $\alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2$  aránypárból az következne, hogy a fenti egyenletek bal oldalai, s így jobb oldalai is egymás számszorosai, vagyis  $L_1 = 0$  és  $L_2 = 0$  ugyanannak az egyenesnek az egyenlete volna. Ha azonban a felírt determináns nem 0, akkor a fenti egyenletrendszerből  $K_1$  és  $K_2$  kifejezhető, s ezért mindkettő  $L_1$  és  $L_2$  számszorosainak összege, tehát lineáris kifejezés. Ez azonban lehetetlen, mert a  $K_1 = 0, K_2 = 0$  alakzatok mindegyike nem lehet egyenes. —

Ebből a tételből következik, hogy a körsor bármely két eleme meghatároz egy körsort, hiszen mindkettő nem lehet egyenes.

**Tétel.** *Ha két körsor nem azonos, akkor legfeljebb egy közös elemük van.*

Más szövegezéssel azt mondja ki ez a tétel, hogy ha két körsornak két közös eleme van, akkor a két körsor azonos. A tétel kimondja tehát, hogy egy körsor bármely két eleme által meghatározott körsor azonos az eredeti körsorral. A körsort meghatározó alakzatok ezek szerint a körsornak nem kitüntetett elemei, szerepüket a körsor bármely két eleme betöltheti, azaz a körsort bármely két eleme meghatározza.

*Bizonyítás.* Legyen a  $K_1 = 0, K_2 = 0$  alakzatok által meghatározott  $S$  körsor két elemének egyenlete

$$K_1^* \equiv \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 = 0,$$

$$K_2^* \equiv \beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 = 0.$$

Itt az előző bizonyításhoz hasonlóan megállapíthatjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

mert különben  $K_1^*$  és  $K_2^*$  egymás számszorosai volnának, a  $K_1^* = 0, K_2^* = 0$  alakzatok tehát azonosak lennének. Azt kell bebizonyítanunk, hogy  $S$  azonos a  $K_1^* = 0, K_2^* = 0$  alakzatok által meghatározott  $S^*$  körsorral.

$S^*$  minden eleme  $S$ -hez tartozik, mert hiszen bármely  $\lambda_1 K_1^* + \lambda_2 K_2^*$  kifejezés a fenti egyenletek alapján  $K_1$  és  $K_2$  számszorosainak összegeként is felírható.

Azt kell még megmutatnunk, hogy  $S^*$  is tartalmazza  $S$  elemeit. Ehhez elég azt igazolnunk, hogy  $K_1 = 0$  és  $K_2 = 0$  az  $S^*$  körsor elemei, hiszen már beláttuk, hogy egy körsor tartalmazza az olyan körsor minden elemét, amelyet az eredeti körsor két eleméből építettünk fel. A  $K_1 = 0, K_2 = 0$  alakzatok valóban  $S^*$  elemei, mert a felírt determináns nem 0, ezért a fenti egyenletrendszerből  $K_1$  és  $K_2$  kifejezhető, tehát mindkettő  $K_1^*$  és  $K_2^*$  számszorosainak összege. —

A A szakasz elején mondottakhoz hozzáfűzzük, hogy azért választottunk analitikus definíciót a körsorok tárgyalásának alapjául, mert így egyöntetű fogalomalkotás vezet a geometriai képek sokféleségéhez, nem pedig fordítva (vö. 40.7 B2). Eljárásunk hátránya, hogy okoskodásainkat majd csak a tárgyalás végén tudjuk geometriai képpel egybevetni. Megteheti viszont az olvasó, hogy fellapozza a 358–360., 362. ábrákat és már most, azok jogos felrajzolása előtt elkezdi ezt az egybevetést.

**B1** Érthető a körsor definíciójában az a megszorítás, hogy a két meghatározó alakzat mindegyike nem lehet egyenes. Ha ugyanis mindkettő egyenes volna, akkor a definíció sugársorhoz vezetne. Megtehetnők viszont, hogy két alakzat által meghatározott „sorról” beszélünk, amelyeknek mindegyike, minden megszorítás nélkül kör vagy egyenes lehet. Így a körsort és a sugársort egyszerre tárgyalhatnánk. Ilyen tárgyalásmódnál szakaszunk két tétele egybeolvadna. Hasonló módon szó lehetne bármely két,  $F_1 = 0$  és  $F_2 = 0$  egyenletű alakzataból felépített alakzatsorról is.

**B2** A körsor definíciójához fűzünk megjegyzéseket.

Nem minden  $\lambda_1, \lambda_2$  értékpár vezet a körsor valamely elemének egyenletéhez, hiszen a  $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$  egyenlet képzetes körnek nevezett üres alakzat egyenlete is lehet. Az is lehetséges, hogy a bal oldalra 0-tól különböző állandó kerül, ez azonban csak akkor következhetik be, ha két koncentrikus körből indulunk ki, hiszen ekkor a  $\lambda_1 K_1 = 0$  és  $\lambda_2 K_2 = 0$  egyenletek csak egy állandóban különböznek. Ha a  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  értékpártól eltekintünk, egyenletünk bal oldalán nem állhat 0, vagyis egyenletünk azonossággá nem válhatik, hiszen ekkor  $K_1$  és  $K_2$  csak egy számtényezőben különböznek. A  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  értékválasztás természetesen azonossághoz vezet.

Ha a  $K_1$  és  $K_2$  kifejezések helyett ezeknek valamilyen (0-tól különböző) számszorosa választjuk kiindulásul, akkor ugyanazokhoz az alakzatokhoz jutunk, hiszen belőlük ugyan azokhoz a kifejezésekhez jutunk, amelyekhez a  $K_1$  és  $K_2$  kifejezések szorzásával juthattunk. Mondhatjuk ezért, hogy a körsort valóban két alakzat határozza meg, s nem számít az, hogy a két alakzatnak melyik

(zérusra redukált első-, illetve másodfokú) egyenletéből indulunk ki mindig megtehetjük ezért, hogy a körsort meghatározó alakzatok normálegyenletét használjuk.

A körsor elemeinek minden (zérusra redukált első-, illetve másodfokú) egyenletét fel írhatjuk  $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$  alakban, hiszen ezek az egyenletek csak számtényezőben külön bűznek egymástól, s ezért a  $\lambda_1, \lambda_2$  számokat ugyanannyiszorosaikkal pótolva mindezekhez az egyenletekhez eljuthatunk. Megtehetjük volna ezek szerint azt is, hogy a körsor definíciójában csak normálegyenletekről szólnunk, mégpedig a meghatározó és a meghatározott alakzatok esetében egyaránt.

**40.5** Ebben és a következő szakaszban olyan tételeket bizonyítunk, amelyek mutatják, hogy a körsor elemei mennyire együvé tartoznak.

**Tétel.** *A sík valamennyi pontja hozzátartozik a körsornak legalább egy eleméhez.*

*Bizonyítás.* Tekintsük a  $K_1 = 0, K_2 = 0$  alakzatokkal meghatározott körsort, és legyen  $P$  olyan pont, amelyet ez a két alakzat nem tartalmaz. A  $P$  pont koordinátái kielégítik a

$$\begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_1(P) & K_2(P) \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet, hiszen helyettesítésük után a determináns két sora azonos. Ez az egyenlet nem azonosság, mert a  $P$  pont megválasztásakor a  $K_1(P) = K_2(P) = 0$  esetet kizártuk. A felírt egyenlet nem üres alakzat egyenlete, hiszen  $P$  koordinátái kielégítik. A felírt egyenlet ezek szerint egy a körsorhoz tartozó és a  $P$  pontot tartalmazó alakzat egyenlete. —

**Tétel.** *A körsor két elemének közös pontját a körsor valamennyi eleme tartalmazza.*

Az ilyen pontot a körsor *alappontjának* (fixpont) nevezzük.

*Bizonyítás.* Ha  $P$  a körsorhoz tartozó  $K_1 = 0, K_2 = 0$  alakzatok közös pontja, akkor  $K_1(P) = K_2(P) = 0$ , s ezért koordinátái kielégítik a  $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$  egyenletet, tehát a körsor valamennyi elemének egyenletét. —

Megjegyezzük, hogy egy körsornak kettőnél több alappontja nem lehet, hiszen három pont már egyértelműen meghatározza azt a kört vagy egyenest, amely rajtuk áthalad.

A most bizonyított két tételt egybefoglalhatjuk azzal a kijelentéssel, hogy a sík minden pontja vagy egy, vagy minden körsorelemnek pontja.

**Tétel.** *Ha a körsor két eleme olyan kör, amelyeknek van hatványvonaluk, akkor ez a hatványvonal is eleme a körsornak.*

*Bizonyítás.* Legyen  $K_1 = 0$  és  $K_2 = 0$  a két kör normálegyenlete. Mivel a körsort ez a két kör is meghatározza, a körsor definíciója folytán a  $K_1 - K_2 = 0$  egyenletű hatványvonal is a körsorhoz tartozik. —

Következik tételünkből, hogy ha a körsor nem tartalmaz egyenest, akkor valamennyi köre koncentrikus. Ekkor a közös középpontot a *körsor centrumának* nevezzük.

**40.6** Tudjuk, hogy egy körsor egynél több egyenest nem tartalmazhat. Ebben a szakaszban csak olyan körsorokról szólnunk, amelyek tartalmaznak egy egyenest.

**Tétel.** *Ha egy körsor elemei között van egyenes, akkor ez az egyenes a körsor bármely két körének hatványvonala.*

Nem kötöttük ki, hogy csak olyan két körről szól a tétel, amelyeknek van hatványvonaluk. Tételünk azt is állítja, hogy körsorunk bármely két körelemének van hatvány vonala.

A körsor egyetlen egyenesét a tétel alapján a *körsor hatványvonalának* nevezzük. Ha  $P$  ennek pontja, akkor a körsor köreire vonatkozó hatványainak közös értékét a  $P$  pont *e körsorra vonatkozó hatványának* mondjuk.

*Bizonyítás.* a) Először azt bizonyítjuk, hogy ha a körsorban van egyenes, akkor nem tartalmazhat koncentrikus köröket. A koncentrikus  $K = 0$ ,  $K + c = 0$  körökből felépített körsor elemeinek egyenlete ugyanis

$$\lambda_1 K + \lambda_2 K(K + c) = (\lambda_1 + \lambda_2)K + \lambda_2 c = 0.$$

Itt a bal oldal sohasem lineáris, mert ha  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ , akkor másodfokú, ha pedig  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , akkor állandó. Koncentrikus köröket tartalmazó körsorban tehát valóban nincs egyenes.

b) Ha a körsorban van egyenes, akkor a) szerint bármely két körének van hatványvonala. Ez az előző szakasz utolsó tétele szerint a körsorhoz tartozik, tehát a körsor egyetlen egyenesével azonos. —

**Tétel.** Ha a köröknek egy halmaza olyan, hogy közülük bármely kettőnek ugyanaz az egyenes a hatványvonala, akkor mindezek a körök és a közös hatványvonalluk egy körsor elemei.

*Bizonyítás.* A tétel állításán (látszatra) túlmenően azt bizonyítjuk, hogy ha a köröknek egy halmaza olyan, hogy egy  $k$  körrel alkotott hatványvonalluk ugyanaz a  $h$  egyenes, akkor  $h$ ,  $k$ , valamint a halmaz körei mindannyian ugyanahhoz a körsorhoz, mégpedig a  $h$  és  $k$  alakzatok által meghatározott körsorhoz tartoznak.

Ennek az állításnak helyessége abból következik, hogy ha egy  $k_1$  körnek és a  $k$  körnek  $h$  a hatványvonala, akkor  $k_1$  hozzátartozik a  $k$  és  $h$  által meghatározott körsorhoz. Ez igaz, mert a  $k$  és  $k_1$  körök által meghatározott körsor tartalmazza a  $h$  egyenest, és így azonos a  $k$  és  $h$  által meghatározott körsorral. —

**Tétel.** Ha egy körsornak van hatványvonala, akkor a körsor körelemeinek középpontjai mindannyian egy a hatványvonallra merőleges egyenesnek egymástól különböző pontjai.

Ezt az egyenest a körsor *centrálisának* mondjuk. Nem állítottuk, hogy a centrális a körelemek középpontjainak mértani helye, mert — mint később látni fogjuk — a centrálisnak lehet olyan pontja is, amely nem középpontja egyetlen körelemnek sem.

*Bizonyítás.* Ha egy körelem középpontjából merőlegest bocsátunk a hatványvonallra, akkor a kapott egyenes tartalmazza a többi körelem mindegyikének középpontját, hiszen bármely két körelemnek ugyanaz a hatványvonala, és két kör centrális a hatványvonallukra merőleges.

Nem lehet ennek az egyenesnek egy pontja két körelem középpontja, hiszen hatványvonalas körsorban nincsenek koncentrikus körök (első tételünk bizonyítása szerint). —

**40.7** A körsorok osztályozásával és az egyes fajták geometriai jellemzésével foglalkozunk. A körsorokat a tartalmazott egyenesek és az alappontok száma szerint osztályozzuk. Tudjuk, hogy az előbbi egynél, az utóbbi kettőnél nagyobb nem lehet.

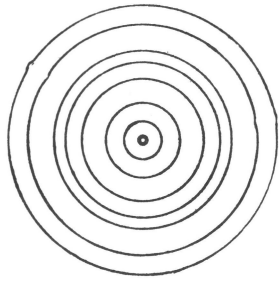
Ha a körsor nem tartalmaz egyenest, akkor *koncentrikus körsornak* nevezzük. Az ilyen körsornak nincs alappontja, hiszen elemei koncentrikus körök.

Ha a körsor tartalmaz egy egyenest, akkor *elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus körsornak* nevezzük aszerint, hogy alappontjainak száma 0, 1 vagy 2.

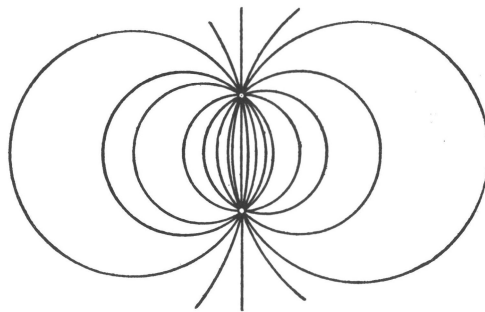
**Tétel.** Egy adott pont körül írt körök együttesen koncentrikus kör sort alkotnak (358. ábra).

A pont körül írt körök közé tartozik maga a pont is mint pontkör.

*Bizonyítás.* Az adott pont köré írt körök halmazát  $H$ -val jelöljük. Ennek két eleme egy  $S$  körsort határoz meg. Ez koncentrikus körsor, azaz nincs hatványvonala, hiszen a körsort meghatározó köröknek sincs.  $S$  minden köre szerepel a  $H$  halmazban, mert a koncentrikus körsorról tudjuk, hogy körei mind koncentrikusak. A  $H$  halmaz körei is szerepelnek mindannyian az  $S$  körsorban, hiszen különben volna a síknak olyan pontja, amely nem tartozik  $S$  egyik eleméhez sem. Ezek szerint  $H$  és  $S$  azonos. —



358



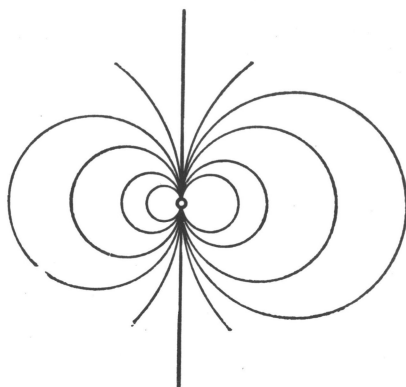
359

**Tétel. Két adott ponton áthaladó körök a két ponton áthaladó egyenessel együtt hiperbolikus körsort alkotnak (359. ábra).**

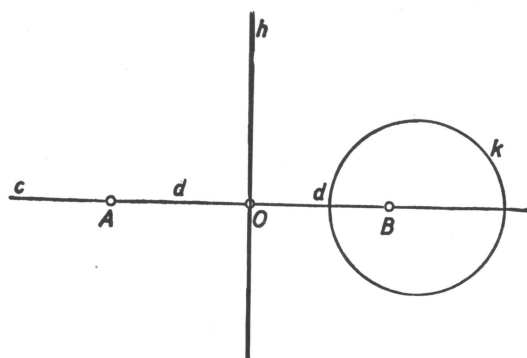
*Bizonyítás.* A két adott ponton áthaladó körökből és egyenesből álló halmazt  $H$ -val jelöljük.  $H$  két eleme egy hiperbolikus  $S$  körsort határoz meg, amelynek alappontjai a megadott pontok, hiszen ezek a meghatározó alakzatok közös pontjai.  $S$  minden eleme szerepel  $H$ -ban, hiszen mindannyian áthaladnak az alappontokon.  $H$  minden eleme szerepel  $S$ -ben, hiszen különben volna a síknak  $S$  egyik eleméhez sem tartozó pontja. Ezek szerint  $H$  és  $S$  azonos. —

**Tétel. Egy adott egyenest adott pontjában érintő körök az adott egyenessel és az adott ponttal mint pontkörrel együtt parabolikus körsort alkotnak (360. ábra).**

*Bizonyítás.* Az adott egyenes és pont által meghatározott, a tételben felsorolt alakzatok halmazát  $H$ -val jelöljük. Az adott egyenes és az adott pont mint pontkör egy parabolikus  $S$  körsort határoz meg, amelynek az adott egyenes a hatványvonala, és az adott pont az alappontja, hiszen a meghatározó alakzatoknak ez az egyetlen közös pontjuk.  $S$  körei  $H$ -hoz tartoznak, hiszen áthaladnak az alapponton, és nincs más közös pontjuk a hatványvonallal.  $H$  minden köre  $S$ -hez tartozik, hiszen különben volna a síknak  $S$  elemeihez nem tartozó pontja. Ezek szerint  $H$  és  $S$  azonos. —



360



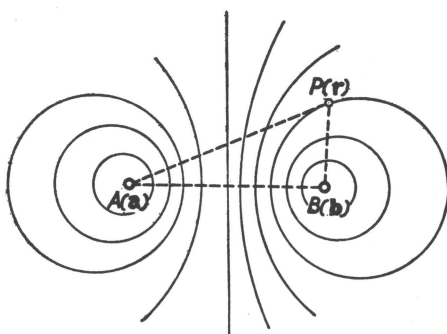
361

**Tétel.** Minden elliptikus körsorhoz két pontkör tartozik.

*Bizonyítás.* Az elliptikus körsor  $h$  hatványvonala nem metszi a körsor köreit, mert a körsornak nincs alappontja. Ezért  $h$ -nak a  $c$  centrálissal alkotott  $O$  metszéspontja a körsor körein kívül van, és  $O$ -nak a körsorra vonatkozó hatványa pozitív szám, amelyet  $d^2$ -tel jelölhetünk (361. ábra). A körsorhoz tartozó pontkör csak a centrálison lehet, hiszen minden körsorelem centruma ezen van. Az ilyen pontkör  $O$ -tól csak  $d$  távolságra lehet, hiszen  $O$ -nak a körsor minden körelemére vonatkozólag  $d^2$  a hatványa. Eszerint a körsor pontkörei csak a  $c$  egyenesnek az  $O$  ponttól  $d$  távolságra levő  $A, B$  pontjai lehetnek.

Be kell még bizonyítanunk, hogy az  $A, B$  pontkörök valóban a körsorhoz tartoznak. Legyen  $k$  a körsor egy (az  $A, B$  pontkörökkel nem azonos) köre. Elég azt igazolnunk, hogy pl. az  $A$  pontkör, valamint  $k$  és  $h$  egy körsorhoz tartozik. Az  $A$  pontkör és a  $k$  kör hatvány vonala merőleges a  $c$  centrálisukra és áthalad az  $O$  ponton, hiszen ennek mindkettőre vonatkozólag  $d^2$  a hatványa. Ez a hatványvonal tehát  $h$ -val azonos, és ezért a szóban forgó három alakzat valóban egy körsorhoz tartozik. —

**Tétel.** Két ponthoz tartozó Apollonios-körök a két ponttal mint pontkörrel, valamint összekötő szakaszuk felezőmerőlegesével együtt elliptikus körsort alkotnak.



362

A felezőmerőleges külön említése felesleges, ha 1 távolságarányt adó mértani helyként az Apollonios-körökhöz soroljuk (vö. 18.4).

*Bizonyítás.* a) Nem támaszkodunk az Apollonios-féle körökről szóló, az elemi geometriában bizonyított tételre. Újból bizonyítjuk tehát azt is, hogy az  $A(a), B(b)$  pontoktól megadott  $PA : PB = \lambda$  távolságarányban elhelyezkedő  $P(r)$  pontok mértani helye kör, s itt  $\lambda$  tetszőleges 1-től különböző pozitív számot jelent (362. ábra). Ha  $\lambda = 1$  akkor nyilván az  $AB$  szakasz  $h$  felezőmerőlegese a mértani hely.



b) A keresett mértani helyhez azok a  $P$  pontok tartoznak, amelyekre a  $PA = |\mathbf{r} - \mathbf{a}|$  távolság  $\lambda$ -szorososa a  $PB = |\mathbf{r} - \mathbf{b}|$  távolságnak, vagyis amelyekre e távolságok négyzetei kielégítik az

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 - \lambda^2 (\mathbf{r} - \mathbf{b})^2 = 0$$

egyenletet. A keresett mértani hely vektoregyenletét tehát máris felírtuk. Az egyenletből kiolvasható, hogy a mértani hely az

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{b})^2 = 0$$

egyenletű alakzatok, tehát az  $A, B$  pontkörök által meghatározott elliptikus  $S$  körsorhoz tartozik. A vizsgált mértani hely  $S$ -nek köreleme, mert  $\lambda > 0$  és  $\lambda \neq 1$  miatt sem pontköreivel, sem hatványvonalával nem azonos.

c) Már beláttuk, hogy az  $A, B$  pontok által meghatározott, a tételben felsorolt alakzatok olyan  $H$  halmazt alkotnak, amelyeknek minden eleme  $S$ -hez tartozik. A sík minden pontja a  $H$  halmaz valamelyik eleméhez tartozik, hiszen minden, az  $A, B$  pontoktól különböző és nem a  $h$  egyenesen elhelyezkedő  $P$  pontra a  $PA : PB$  arány értéke egy 1-től különböző pozitív szám. Nincs ezért  $S$ -nek  $H$ -hoz nem tartozó eleme, mert különben a síknak volna  $S$  több eleméhez tartozó pontja, márpedig  $S$ -nek nincs alappontja. Ezek szerint  $H$  az  $S$  körsorral azonos. —

Tételeinkből kiolvasható, hogy egy nem koncentrikus körsor aszerint hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus, amint 0, 1 vagy 2 pontkört tartalmaz.

**A1** Az elliptikus körsor köreinek megrajzolása eddigi ismereteink alapján még nem könnyű. Megrajzolására rövidesen egyszerű eljárást adunk (lásd 40.9 A).

**A2** A körsorok elnevezésében szereplő elliptikus, parabolikus, hiperbolikus jelzők nem utalnak arra, hogy ezek a körsorok valamilyen szorosabb kapcsolatban vannak a következőparagrafusban megismerendő görbékkel. Ezeket a jelzőket gyakran alkalmazzuk olyan hármass osztályozásnál, amelynél az osztályokat az különbözteti meg, hogy valaminek a száma 0, 1 vagy 2.

**B1** Tételeinkből az is következik, hogy ezek a tételek nem pusztán példákat adtak a körsorokra, hanem egyben minden körsor szerepel a tételekben jellemzett körsorok között. Ez abból következik, hogy minden koncentrikus körsornak van centruma, minden hiperbolikus körsornak van két alappontja, minden parabolikus körsornak van egy alappontja és ehhez illeszkedő hatványvonala, végül minden elliptikus körsornak van két pontköre. Ezek a körsort jellemző adatok tételeink révén olyan körsort határoznak meg, amelynek egy tetszőlegesen felvett körsorral van két közös eleme, amely tehát vele azonos.

**B2** A körsorok megismerésének befejeztével rámutatunk arra, hogyan lehet elemi úton egységesen definiálni a körsorokat. Ebből a célból „hatványalakzatnak” mondjuk azoknak a pontoknak (esetleg üres) halmazát, amelyeknek két körre vonatkozó hatványa megegyezik. A hatványalakzat lehet tehát egyenes, de üres alakzat is.

A körsorok minden fajtájára áll, hogy a körsor körei közül bármely kettőnek ugyanaz a hatványalakzata. Minden körsor maximális abban az értelemben, hogy nem csatolhatunk hozzá további kört anélkül, hogy az előző mondatban leszögezett tulajdonságot meg ne sértenők. Azt is megállapíthatjuk, hogy a most mondott két tulajdonság jellemzi a körsorokat: ha egy körhalmaz bármely két körének ugyanaz a hatványalakzata, és e tulajdonság megsértése nélkül nem lehet hozzá további kört csatolni, akkor körei a hatványalakzattal együtt körsort alkotnak.

Ezek szerint definícióként mondhattuk volna: közös hatványalakzatú körök maximális halmazát a hatványalakzattal bővítve körsort kapunk. Ez a definíció természetesség és egyszerűség tekintetében aligha veszi fel a versenyt eredeti definícióinkkal (vö. 40.4 A), és nem nyitja meg az utat további általánosítások felé (vö. 40.4 B1).

**40.8** A következő szakasz előkészítése végett egymást merőlegesen metsző körökről lesz itt szó. Fogalombővítéssel lehetővé tesszük, hogy állításaink pontkörökre is vonatkozhassanak.

Egy körről vagy egyenesről, valamint egy pontkőről azt mondjuk, hogy egymást *merőlegesen metszik*, ha illeszkednek egymáshoz. Eszerint a pontkört a rajta áthaladó kör vagy egyenes merőlegesen metszi. Megállapodásunk azt is magában foglalja, hogy ha két pontkör egymással azonos, azt mondjuk, hogy egymást merőlegesen metszik.

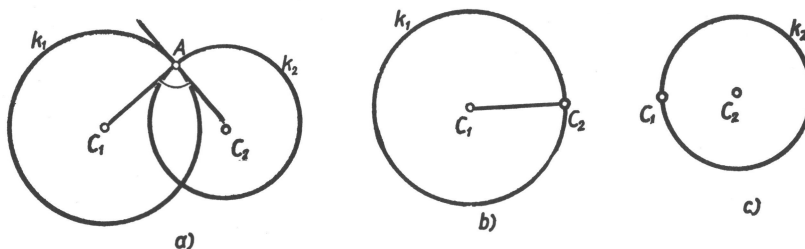
Ezek után kimondhatjuk, hogy egy egyenes akkor és csak akkor metsz merőlegesen egy kört, ha áthalad a kör középpontján, hiszen ez valós körökre és pontkörökre egyaránt áll.

**Tétel.** *Egy kör akkor és csak akkor metsz merőlegesen egy másik kört, ha az első kör sugarának a négyzete e kör középpontjának a második körre vonatkozó hatványával egyenlő.*

A két kör szerepét természetesen felcserélhetjük, hiszen egy kör akkor metsz merőlegesen egy másikat, ha ez utóbbi merőlegesen metszi az elsőt. Tételünk ezért egyrészt azt mondja ki, hogy ha a két kör merőlegesen metszi egymást, akkor a tételben megadott feltétel a két kör mindegyikére teljesül, másrészt azt is, hogy két kör merőlegességének megállapításához elég tudnunk, hogy a tétel feltétele az egyik körre teljesül.

*Bizonyítás.* a) Ha a  $C_1$  középpontú  $k_1$  kör a  $k_2$  kört merőlegesen metszi, és e körök egyike sem pontkör (363. ábra), akkor az  $A$  metszéspontjukban vont érintőik merőlegesek egymásra, s ezért a  $C_1A$  sugár a  $k_2$  kört az  $A$  pontban érinti. Ezért a  $C_1$  pontnak a  $k_2$  körre vonatkozó hatványa a  $C_1A$  sugár négyzete.

Ha a  $C_1$  középpontú  $k_1$  kör a  $C_2$  pontkört merőlegesen metszi, azaz áthalad rajta, akkor  $C_1C_2$  a  $k_1$  kör sugara, s ennek négyzete a  $C_1$  pontnak a  $C_2$  pontkörre vonatkozó hatványa.



363

Ha a  $C_1$  pontkör merőlegesen metszi a  $k_2$  kört, azaz rajta helyezkedik el, akkor  $C_1$  hatványa a  $k_2$  körre vonatkozólag 0, tehát a pontkör sugarának négyzetével valóban egyenlő,

b) Ha a valós  $k_1$  kör  $C_1$  középpontjának a valós  $k_2$  körre vonatkozó hatványa  $k_1$  sugarának négyzete, akkor a  $C_1$ -ből  $k_2$ -hez vont  $C_1A$  érintőszakasz ezzel a sugárral egyenlő,  $A$  tehát a  $k_1$  körön van. Eszerint a  $k_1$  kör  $A$  pontban vont érintője merőleges a  $k_2$  kör  $C_1A$  érintőjére, hiszen a kör érintője merőleges az érintési ponthoz vezető sugárra. A két kör tehát egymást merőlegesen metszi.

Ha a  $k_1$  kör  $C_1$  középpontjának a  $C_2$  pontkörre vonatkozó hatványa, azaz  $C_1C_2$  négyzete a  $k_1$  kör sugarának négyzetével egyenlő, akkor  $C_1C_2$  ezzel a sugárral egyenlő, és a  $C_2$  pontkör a  $k_1$  körön van, tehát azt merőlegesen metszi.

Ha a  $C_1$  pontnak a  $k_2$  körre vonatkozó hatványa a  $C_1$  pontkör sugarának négyzetével, azaz 0-val egyenlő, akkor a pontkörnek tekintett  $C_1$  pont a  $k_2$  körön van, tehát azt merőlegesen metszi. —

**B** Nem szóltunk külön két azonos pontkőről, mert a kör szó, ahol jelentését nem korlátoztuk, ebben a szakaszban is valós kört vagy pontkört jelentett. Ezt a bizonyítás során is szem előtt tartottuk.

**40.9** Ebben a szakaszban azokról a körökről és egyenesekről szólunk, amelyek egy körsor elemeit merőlegesen metszik.

**Tétel.** *Ha egy egyenes merőlegesen metszi egy körsor két elemét, akkor merőlegesen metszi a körsor valamennyi elemét.*

Ha a körsor koncentrikus, akkor elég megkövetelni, hogy az egyenes a körsor egy elemét merőlegesen metsse, hiszen ebből már következik, hogy az egyenes áthalad a körsor centrumán. Elég lett volna ezért, ha a tétel csak nem koncentrikus körsorról szól.

*Bizonyítás.* Feltehetjük, hogy a szereplő körsor nem koncentrikus. Ha a szóban forgó egyenes merőlegesen metszi a körsor két körét, akkor centrálisukkal azonos. Ha pedig az egyenes a körsor hatványvonalát és egy körét metszi merőlegesen, akkor a körközéppontból a hatványvonalra bocsátott merőlegessel, tehát ugyancsak a centrálissal azonos. Tételünk helyessége minden esetben következik tehát abból, hogy a centrális a körsor minden elemét merőlegesen metszi. —

Ezek szerint a nem koncentrikus körsor centrálisa az egyetlen olyan egyenes, amely a körsor elemeit merőlegesen metszi.

**Tétel.** *Ha egy kör merőlegesen metszi egy kör sor két elemét, akkor merőlegesen metszi a körsor valamennyi elemét.*

A bizonyítás mutatja majd, hogy a tétel követelménye csak nem koncentrikus körsorra teljesülhet. Elég lett volna ezért, ha a tételt csak nem koncentrikus körsorra mondjuk ki.

*Bizonyítás.* Ha a két merőlegesen metszett elem egyike a körsor hatványvonala, akkor a metsző kör középpontja a hatványvonalon van, és sugarának négyzete az előző szakasz szerint középpontjának a merőlegesen metszett körelemre vonatkozó hatványa. Ha mindkét merőlegesen metszett elem kör, akkor az előző szakasz alapján tudjuk, hogy a metsző kör középpontjának hatványa a két metszett kör mindegyikére vonatkozólag a metsző kör sugarának négyzete. Ebből következik, hogy a merőlegesen metsző kör középpontja a két metszett kör (létező) hatványvonalán, tehát a körsor (létező) hatványvonalán van. Minden esetben igaz tehát, hogy a metsző kör középpontja a körsor hatványvonalán van, sugarának négyzete pedig a hatványvonal e pontjának a körsorra vonatkozó hatványával egyezik meg. Ebből az előző szakasz szerint következik, hogy ez a kör a körsor valamennyi körét merőlegesen metszi, és mivel középpontja a hatvány vonalon van, merőlegesen metszi a körsor hatványvonalát is. —

A bizonyításból látható, hogy a körsor elemeit merőlegesen metsző körök középpontjai a körsor hatvány vonalán vannak, és az is kiolvasható, hogy a hatványvonal minden olyan pontja körül, amelynek a körsorra vonatkozó Hatványa nem negatív, egyetlenegy ilyen kör írható. Mivel a hatványvonalnak csak egy (nyílt) szakasza lehet a körsor köreinek belsejében, e szakasz (esetleges) kivételével a hatványvonal minden pontja körül írható a körsor elemeit merőlegesen metsző kör. Beláttuk tehát, hogy nem koncentrikus kör- sorhoz mindig végtelen sok, a körsor elemeit merőlegesen metsző kör található.

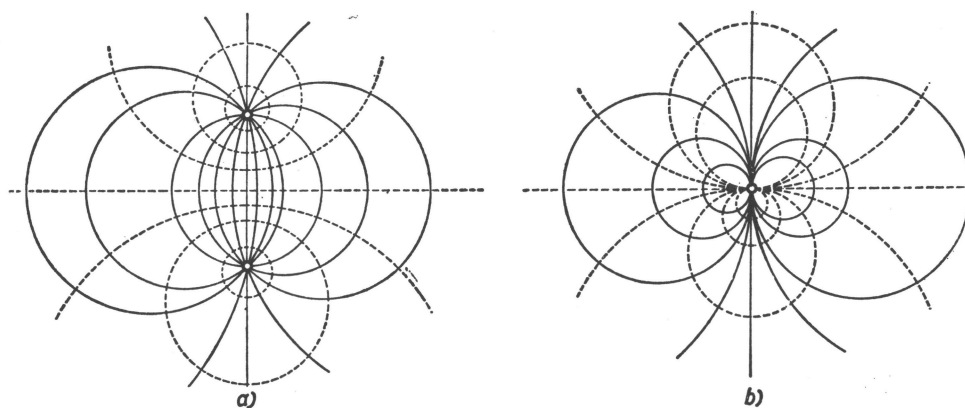
Ha csak két körrel beszélünk, akkor is kimondhatjuk a fentiek alapján, hogy a két kört merőlegesen metsző körök középpontjai a két kör hatványvonalán vannak.

**Tétel.** *Egy nem koncentrikus körsor elemeit merőlegesen metsző körök a körsor centrálisával együtt körsort alkotnak (364. ábra).*

A kapott körsort az eredeti körsor *konjugáltjának* nevezzük. Mivel csak nem koncentrikus körsornál van a körsor elemeit merőlegesen metsző kör, a koncentrikus körsorokat joggal rekesztettük ki. Csak nem koncentrikus körsornak van konjugált körsora.

Az előző két tétel állítását szem előtt tartva azt is kimondhattuk volna, hogy két nem koncentrikus kört, valamint egy kört és egy egyenest merőlegesen metsző körök a merőlegesen metsző egyenessel együtt körsort alkotnak.

*Bizonyítás.* Tekintsünk két, az  $S_1$  körsor elemeit merőlegesen metsző kört. Minthogy két kör hatvány vonala az  $e$  két kört merőlegesen metsző köröknek közös centrálisa, megállapíthatjuk, hogy az  $S_1$  körsor  $c$  centrálisa a tekintett két kör hatványvonala. Következik ebből, hogy az  $S_1$  körsor elemeit merőlegesen metsző körök közül bármely kettőnek ugyanaz, *ti. a  $c$  egyenes a hatványvonala*, s ezért 40.6 második tétele szerint mindezek a körök egy  $S_2$  körsorhoz tartoznak, s ennek  $c$  a hatványvonala.



364

Bizonyítanunk kell még, hogy  $S_2$  minden eleme merőlegesen metszi az  $S_1$  körsor elemeit. Ez abból következik, hogy  $S_1$  bármely eleméről elmondhatjuk: merőlegesen metszi  $S_2$ -nek (több mint) két elemét, ti. azokat, amelyek merőlegesen metszik elemeit, s ezért e szakasz első két tétele szerint valóban merőlegesen metszi  $S_2$  valamennyi elemét. —

Egy körsor konjugáltjának konjugáltja az eredeti körsor, hiszen az eredeti körsor elemei is merőlegesen metszik a konjugált körsor elemeit. Mondhatjuk ezért, hogy a két körsor egymáshoz konjugált.

**Tétel.** *Konjugált körsorok egyikének a centrálisa a másik hatványvonala, és az egyiknek a hatványvonala a másik centrálisa.*

A tétel második állítása már következik az elsőből, hiszen egy körsornak nincs több hatvány vonala.

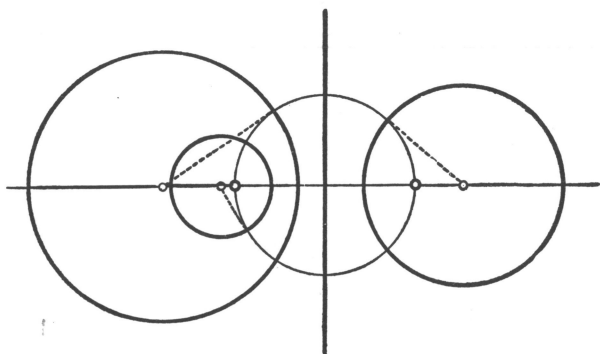
*Bizonyításként* elég arra hivatkozni, hogy egy körsor elemeit merőlegesen metsző körök középpontjai a körsor hatványvonalán vannak. —

**Tétel.** *Konjugált körsorok egyikének az alappontjai a másik pontkörei, és az egyiknek a pontkörei a másik alappontjai.*

*Bizonyítás.* a) Az  $S_1$  körsor alappontja  $S_1$  minden elemén rajta van, s ezért az alappont mint pontkör merőlegesen metszi  $S_1$  minden elemét. Ez a pontkör tehát az  $S_1$ -hez konjugált  $S_2$  körsorhoz tartozik.

b) Minthogy  $S_2$  minden eleme merőlegesen metszi  $S_1$  valamennyi elemét, áll ez  $S_1$  pontköreire is, azaz  $S_2$  elemei valóban tartalmazzák e pontköröket. — Ha figyelembe vesszük, hogy a körsorok egyes fajtáinál mennyi az alappontok és pontkörök száma, akkor közvetlenül következik tételünkéből, hogy minden hiperbolikus körsor konjugáltja elliptikus, és fordítva, minden elliptikus körsor konjugáltja hiperbolikus, hogy továbbá minden parabolikus körsor konjugáltja parabolikus.

**A** A konjugált körsorokról mondottak módot adnak az elliptikus körsor könnyű megszerkesztésére. A két pontkör összekötő szakaszának Thales-köréhez vont érintők a centrálisból az elliptikus körsor azon körének a középpontját metszik ki, amelyik az érintési ponton halad át. A szerkesztés helyessége közvetlenül kiolvasható a 365. ábrából.

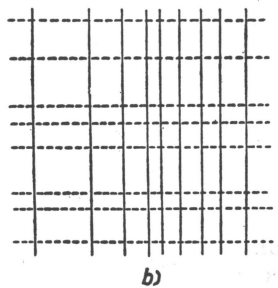
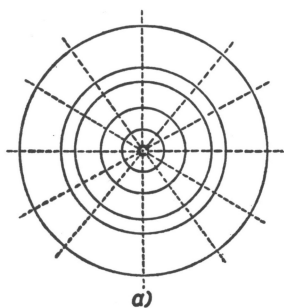


365

**B1** Ha a konjugált körsorokról tudottakat egybevetjük a 335. ábra tárgyával, megállapíthatjuk, hogy egy elliptikus körsorhoz azok a körök tartoznak, amelyekre vonatkozóan a két pontkör egymás inverze.

**B2** A konjugált körsorok tárgyalásából kiviláglik, hogy egy körsor kör elemei középpontjának a mértani helye a hiperbolikus és parabolikus körsor esetében maga a centrális, viszont az elliptikus körsor esetében úgy keletkezik a centrálisból, hogy belőle a pontkörök összekötő szakaszának a belsejét elhagyjuk.

**B3** Ha a körsorokat és a sugársorokat közös néven „sornak” mondjuk (vö. 40.4 B1), akkor két ilyen sort a konjugáltság fogalmát általánosítva konjugáltaknak nevezhetünk, ha egymás elemeit merőlegesen metszik. Megjegyezzük, hogy ugyanígy kiterjeszthetnők a konjugáltság fogalmát más síkbeli, görbehalmazokra is (ha ismernénk más görbéket és tudnók, mikor mondjuk azokat merőlegesen metszőknek. Ez utóbbi általánosabb esetben a konjugált görbehalmaz elemeit az eredeti halmaz *ortogonális trajektóriáinak* mondják).



366

Ha a konjugált jelzőt a most említett általánosabb értelemben használjuk, a következőket állapíthatjuk meg (366. ábra): Koncentrikus körsor konjugáltja sugársor, amelynek tartója a körsor centruma. Egymást metsző egyenesek által alkotott sugársor konjugáltja koncentrikus körsor, amelynek centruma a sugársor alappontja. Párhuzamos egyenesek sugársorának konjugáltja a merőleges egyenesek sora. Így minden körsorhoz és sugársorhoz találtunk konjugáltat, és mindnek egyetlen ilyen konjugáltja van.

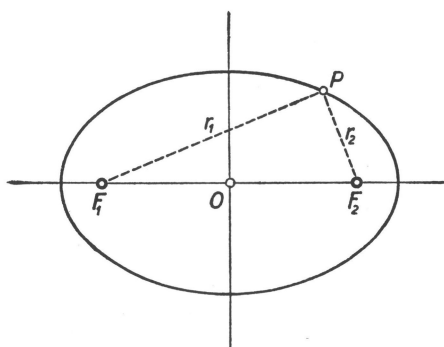
## 41.§ Kúpszeletek

Három görbével, az ellipszissel, hiperbolával és parabolával ismerkedünk meg. Szó lesz e görbék származtatásáról, legalapvetőbb tulajdonságaikról és kanonikus egyenletükről. Mindaddig, míg az egyenletek tárgyalásához nem érkezünk, csak elemi geometriai módszert használunk.

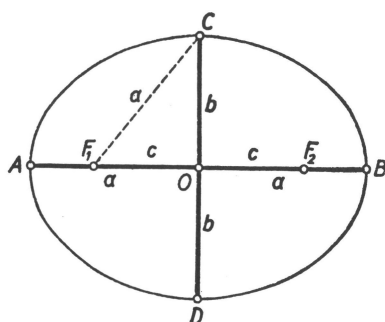
**41.1** Ha adva van a síkban két pont, kereshetjük azoknak a síkbeli pontoknak a mértani helyét, amelyeknek a két ponttól mért távolsága összegül egy megadott, a két pont távolságánál nagyobb

értéket ad. Ezt a mértani helyet *ellipszisnek* nevezzük (367. ábra). A két pont az ellipszis *fókusza* (gyújtópont). Az ellipszis egy pontját a fókuszokkal összekötő szakaszok a ponthoz tartozó *rádiusz vektorok*.

Az ellipszis a fókuszokat összekötő szakasz egyenesére, felezőmerőlegesére és felezőpontjára vonatkozólag szimmetrikus. Ez abból következik, hogy a mondott szimmetriáknál a fókuszok pontpárja szimmetrikus alakzat, és ezért ezek a szimmetriák ellipszisünkhöz ugyanazoktól a pontoktól ugyanakkora távolságösszeget adó pontok mértani helyét, tehát ugyanazt az ellipszist rendelik. A fókuszokat összekötő szakasz egyenesét és felezőmerőlegesét, tehát az ellipszis szimmetriatengelyeit az ellipszis *tengelyeinek* (tengelyegyes) nevezzük. A tengelyek egymást a fókuszok összekötő szakaszának felezőpontjában, az ellipszis szimmetriacentrumában merőlegesen metszik. Ez a pont az ellipszis *középpontja* (centrum). A fókuszoknak az ellipszis középpontjától mért távolságát *lineáris excentricitásnak* mondjuk.



367



368

Ha az  $F_1, F_2$  fókuszoktól az egyes pontokhoz vezető rádiusz vektorok  $r_1$  és  $r_2$ , akkor az ellipszis pontjait az

$$r_1 + r_2 = 2a$$

egyenlet jellemzi, s az a állandóra teljesül az

$$a > c$$

egyenlőtlenség, ahol  $c$  a lineáris excentricitást jelöli (368. ábra).

Mindkét tengelyen van az ellipszisnek két-két pontja. A fókuszokat tartalmazó tengelyre ez abból következik, hogy egyrészt az  $F_1F_2$  szakasz pontjai nem tartozhatnak az ellipszishez, hiszen ezekre  $r_1 + r_2 = 2c$ , másrészt e szakasz meghosszabbításain elhelyezkedő pontra  $r_1 + r_2$  értéke a középponttól mért távolság kétszerese, s ezért ezek közül a pontok közül azok az  $A, B$  pontok tartoznak az ellipszishez, amelyek az  $O$  középponttól  $a$  távolságra vannak. A másik tengely pontjai egyenlő távolságra vannak a

fókuszoktól, ezért közülük azok vannak az ellipszisen, amelyekre ez a távolság  $a$ , és ez  $c < a$  miatt két pontra, a tengely és valamelyik fókusz körül írt  $a$  sugarú kör  $C, D$  metszéspontjaira teljesül. Ezeknek a pontoknak a középponttól mért  $b$  távolságára pl. az  $F_1OC$  derékszögű háromszögből Pythagoras tétele szerint

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

A tengelyeken elhelyezkedő ellipszispontokat *tengelypontoknak* (csúcspont, orompont), a tengelyeken elhelyezkedő összekötő szakaszaikat az ellipszis *tengelyeinek* (tengelyszakasz) mondjuk.

A tengelyszakaszok egymást a középpontban merőlegesen felezik. Hosszuk felét, az  $a, b$  értékeket az ellipszis *féltengelyeinek* mondjuk. Minthogy a fenti egyenlet következtében  $a > b$ , a két tengelyszakasz közül a fókuszokat tartalmazó a hosszabb. Ennek megfelelően  $AB$  az ellipszis *nagy tengelye*,  $CD$  pedig a *kis tengelye*, továbbá  $a$  az ellipszis *nagy féltengelye*,  $b$  pedig a *kis féltengelye*. Az ellipszist, definíciója szerint, a két fókusz és a nagy tengely hossza meghatározza.

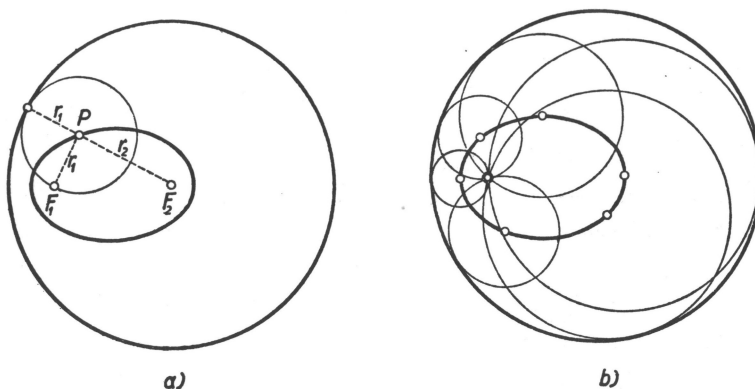
Az ellipszis egyik fókusza körül a nagy tengellyel mint sugárral írt kört az ellipszis *vezérkörének* nevezzük. Az ellipszisnek tehát két vezérköre van.

**Tétel.** a) Az ellipszis azoknak a pontoknak mértani helye, amelyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő körök írhatók.

b) A kört érintő és a kör egy a középponttal nem azonos belső pont fán áthaladó körök közé pontjainak mértani helye ellipszis.

A tétel a) része egy ellipszisre két származtatást ad, hiszen a két fókusz szerepe felcserélhető. Ha a tétel b) részében a kör középpontját nem zártuk volna ki, mértani helyként kör is adódott volna.

*Bizonyítás.* a) Ha  $P$  az ellipszis pontja, akkor a  $P$  körül  $r_1$  sugárral írt kör áthalad az  $F_1$  fókuszon, és belülről érinti az  $F_2$  fókusz körül írt vezérkört, hiszen centrálisuk hossza a sugaraik különbsége:  $r_2 = 2a - r_1$  (369. ábra).



369

Ha egy  $P$  pont körül olyan kör írható, amely áthalad az  $F_1$  fókuszon, és érinti az  $F_2$  fókusz körül írt  $2a$  sugarú vezérkört, akkor csak belülről érintheti, mert az  $F_1$  pont a vezérkör belsejében van, hiszen  $F_1$ -nek e kör középpontjától mért  $2c$  távolsága a kör  $2a$  sugaránál kisebb. Az érintkező körök  $r_2$  centrálisára és  $r_2$ ,  $2a$  sugaraikra eszerint  $r_2 = 2a - r_1$ ,  $P$  pont tehát  $r_1 + r_2 = 2a$  miatt az ellipszisen van.

b) Ha egy adott körből és középpontjával nem azonos, megadott belső pontjából indulunk ki, akkor tekintsük azt az ellipszist, melynek fókuszai a kör középpontja és az adott pont, nagy tengelyének hossza pedig a kör sugara. A kör ennek az ellipszisnek vezérköre, s ezért a) szerint ez az ellipszis az a mértani hely, melyről tételünk b) része szól. —

**A1** Ha ellipszis egymástól  $2c$  távolságra levő fókuszait és a nagy tengely  $2a$  hosszát ismerjük, akkor az ellipszis tetszőlegesen sok pontját megszerkeszthetjük. Elég ehhez az  $a - c \leq r_2 \leq a + c$  egyenlőtlenséget

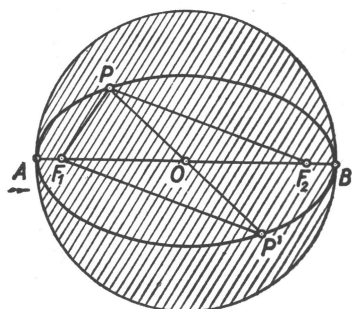
kielégítő  $r_1$  sugárral kört írni az egyik fókusz körül és  $r_2 = 2a - r_1$  sugárral a másik fókusz körül, mert e köröknek van közös pontjuk, és ilyen módon az ellipszis pontjaihoz jutunk.

**A2** Ha az ellipszis megszerkesztéséről beszélünk, akkor ezt mindig csak úgy gondoljuk, hogy az ellipszis elegendő sok pontját szerkesztjük meg, s azután ezek ismeretében jó közelítéssel megrajzoljuk magát az ellipsziszvonalat is. Ha egy szerkesztési feladatban egy adott ellipszis szerepel, akkor ezt úgy kell érteni, hogy ismereteseek olyan adatok, amelyek az ellipszis pontjait meghatározzák, pl. nagytengelye és az egyik fókusza.

**B1** Az ellipszis definíciójában szereplő  $2a > 2c$  megszorítás természetesnek mondható. Ha ugyanis  $2a < 2c$ , akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint nincs olyan pont, amelyre  $r_1 + r_2 = 2a$ ; ha viszont  $2a = 2c$ , akkor csak a fókuszokat összekötő szakasz pontjaira teljesül az  $r_1 + r_2 = 2a$  egyenlet, és a szakaszt nem akarjuk ellipszisnek nevezni.

Ha megengednők, hogy az  $F_1, F_2$  pontok azonosak lehessenek, akkor az ellipszis definíciója az e pont körül  $a$  sugárral írt körhöz vezetne. A kört azonban nem mondjuk ellipszisnek. Sokszor mégis az ellipszisek közé soroljuk a kört is, de ilyenkor ezt mindig megemlítjük.

Ha az olvasó kifogásolja szóhasználatunkat, mert pl. azzal veti egybe, hogy a négyzetet is téglalapnak mondtuk, akkor a következőképpen válaszolhatunk: a téglalapról szóló, gyakorlatilag is jelentős tételek változatlanul mondhatók ki négyzetre is, sőt a négyzetre szövegezett tételektől alig különböznek; ezzel szemben az ellipsziszről szóló tételek többnyire kimondhatók ugyan a körre is, de annyira leegyszerűsödnek, hogy csak az eredeti tétel elfajult esetének tekinthetők. Röviden: a négyzet speciális téglalap, de a kör elfajult ellipszis. Kétségtelen viszont, hogy álláspontunk sokszor kényszerít arra, hogy ellipszishez vezető eljárásokról szólva ellipsziszről vagy körről beszéljünk, vagy pedig (miként a tételben éppen tettük) a kör esetét valami módon kizárjuk. Mi csak megmagyaráztuk álláspontunkat, és nem állítjuk, hogy ez az egyedül elfogadható.



370

**B2** Az ellipszis definíciójából következik, hogy az  $g$  ellipszishez minden egybevágóság és hasonlóság ellipszist rendel.

**B3** Az ellipszis nagytengelyéhez mint átmérőhöz tartozó kör áthalad a nagytengely végpontjain, az ellipszis minden más pontját pedig a belsejében tartalmazza (370. ábra). Ez abból következik, hogy ha  $P$  az ellipszisnek nem a nagytengelyen levő pontja, és  $P'$  ennek az  $O$  középpontra vonatkozó tükörképe, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$2\overline{OP} = PP' < F_1P + F_1P' = F_1P + F_2P = r_1 + r_2 = 2a.$$

Azt is beláttuk így, hogy az ellipszis pontjai közül a nagytengely végpontjainak a távolsága a legnagyobb, azaz a nagytengely hossza egyben az ellipszis átmérője abban az értelemben, ahogyan 15.1 B3-ban átmérőről beszéltünk.

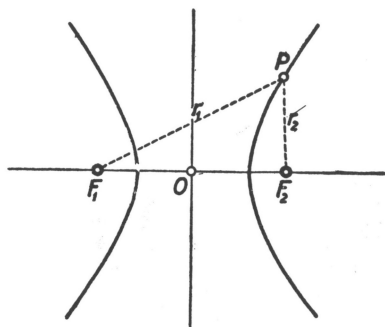
Következik a mondottakból, hogy az ellipszis egyértelműen meghatározza nagytengelyét, tehát középpontját, kistengelyét és két fókuszát is. Következik az is, hogy az ellipszisnek nincs a tengelyeitől különböző szimmetriatengelye és a középpontjától különböző szimmetriacentruma.



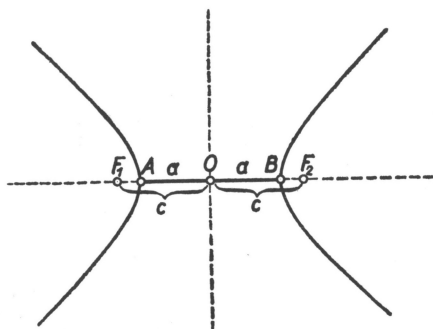
**41.2** Ha adva van a síkban két pont, kereshetjük azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek a két ponttól mért távolsága különbségül (vagyis különbségük abszolút értékeként) egy megadott, a két pont távolságánál kisebb pozitív értéket ad. Ezt a mértani helyet *hiperbolának*, a két megadott pontot *fókuszoknak* (gyűjtőpont), egy hiperbolapontot a fókuszokkal összekötő szakaszokat a ponthoz tartozó *rádiusz vektoroknak* nevezzük (371. ábra).

A két rádiusz vektor közül az egyik kisebb a másiknál, hiszen különbségük nem 0. Osztályozhatjuk ezért a hiperbola pontjait aszerint, hogy melyik fókuszhoz vannak közelebb. A hiperbola pontjai közül azok, amelyek a két fókusz egyikéhez vannak közelebb, a hiperbola e fókuszhoz tartozó *ágát* alkotják. A hiperbolának két ága van.

A hiperbola és mindkét ága szimmetrikus a fókuszokon áthaladó egyenesre, hiszen erre az egyenesre tükrözve nem változik meg a pont távolsága a fókuszok egyikétől sem. A hiperbola a fókuszokat összekötő szakasz felező-merőlegesére és felezőpontjára is szimmetrikus, mert ezek a szimmetriák a fókuszokat felcserélik ugyan, de a tőlük mért távolságok különbségének abszolút értékét nem változtatják meg. A fókuszokat összekötő szakasz egyenesét és felezőmerőlegesét, tehát a hiperbola szimmetriatengelyeit a hiperbola *tengelyeinek* (tengelyegyenes) nevezzük. A tengelyek merőlegesen metszik egymást a fókuszok összekötő szakaszának felezőpontjában, a hiperbola szimmetriacentrumában. Ezt a pontot a hiperbola *középpontjának* (centrum) nevezzük. A fókuszoknak a középponttól mért távolsága a hiperbola *lineáris excentricitása*.



371



372

Ha az  $F_1$ ,  $F_2$  fókuszoktól az egyes pontokhoz vezető rádiusz vektorok  $r_1$  és  $r_2$ , akkor a hiperbola pontjait az

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

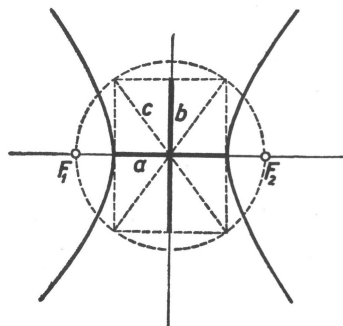
egyenlet jellemzi, s az  $a$  állandóra teljesül az

$$a < c$$

egyenlőtlenség, ahol  $c$  a lineáris excentricitást jelöli (372. ábra).

A fókuszokat tartalmazó *valós tengelyen* (valós tengelyegyenes) a hiperbolának két pontja van. Ez egyrészt abból következik, hogy az  $F_1F_2$  szakasz meghosszabbításain nincs a hiperbolának pontja, hiszen ezekre  $|r_1 - r_2| = 2c$ , másrészt abból, hogy az  $F_1F_2$  szakasz pontjaira  $|r_1 - r_2|$  értéke a középponttól mért távolság kétszerese, s ezért ezek közül a pontok közül azok az  $A, B$  pontok tartoznak a hiperbolához, amelyek az  $O$  középponttól  $a$  távolságra vannak. A valós tengelyen elhelyezkedő hiperbolapontokat *tengelypontoknak* (csúcspont, orompont), összekötő szakaszukat *valós tengelynek* (valós tengelyszakasz) mondjuk. Ennek megfelelően  $a$  a hiperbola *valós féltengelye*. A fókuszok és a valós tengely hossza a hiperbolát egyértelműen meghatározzák.

A fókuszok távolságát merőlegesen felező *képzetes tengelyen* (képzetes tengelyegyenes) nincs a hiperbolának pontja, hiszen a pontjaira  $r_1 - r_2 = 0$ . A képzetes tengely elválasztja a hiperbola két ágát, mert a képzetes tengely határolja azokat a félsíkokat, amelyeknek a belső pontjai az egyik vagy a másik fókuszhoz vannak közelebb. Jóllehet a hiperbola nem metsz ki a képzetes tengelyből tengelyszakaszt, szokás mégis az ellipszis tárgyalásával párhuzamban a hiperbolánál is bevezetni egy pozitív  $b$  értéket, mégpedig a



373

$$b^2 = c^2 - a^2$$

előírással. Ezt a  $b$  értéket *képzetes féltengelynek* nevezzük. Látni fogjuk, hogy bevezetése jó szolgálatokat tesz. Előfordul, hogy a képzetes tengelynek a középpontra szimmetrikus,  $2b$  hosszúságú Szakaszát képzetes tengelynek (képzetes tengelyszakasz) mondják (373. ábra).

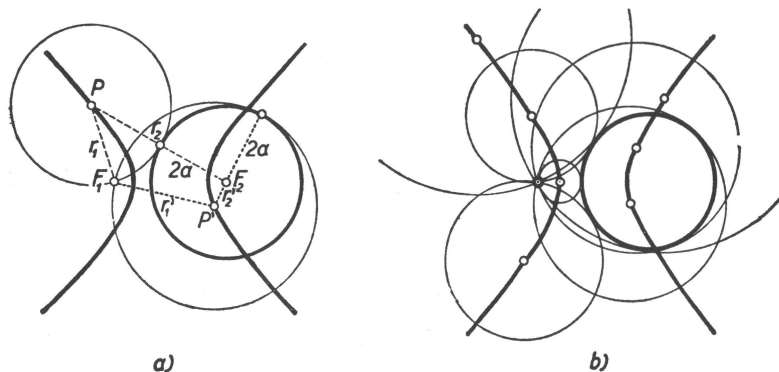
A hiperbola egyik fókusza körül a valós tengellyel mint sugárral írt kört a hiperbola *vezérkörének* nevezzük. A hiperbolának két vezérköre van.

**Tétel.** a) A hiperbola azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek körül az egyik fókuszon áthaladó s a másik fókusz körüli vezérkört érintő kör írható.

b) A kört érintő és egy a körön kívüli ponton áthaladó körök középpontjainak mértani helye hiperbola.

A tétel a) része egy hiperbolára két származtatást ad, mert a két fókusz szerepe felcserélhető.

*Bizonyítás.* a) Ha  $P$  a hiperbola pontja, akkor a  $P$  körül  $r_1$  sugárral írt kör áthalad az  $F_1$  fókuszon és érinti az  $F_2$  körül írt  $2a$  sugarú vezérkört, hiszen centrálisuk hossza  $r_2$  és erre  $r_1 - r_2 = \pm 2a$  miatt  $r_2 = r_1 \pm 2a$  (374. ábra). Így tehát a vezérkör kívülről vagy belülről érinti a szerkesztett kört aszerint, amint a  $P$  pont az  $F_1$  fókuszhoz tartozó ágon, vagy a másik ágon van.



374

Ha egy  $P$  pont körül olyan kör írható, amely áthalad az  $F_1$  fókuszban, és érinti az  $F_2$  fókusz körül írt  $2a$  sugarú vezérkört, akkor ez a kör csak a vezérkörtől kívül helyezkedhet el, hiszen ennek a körnek  $F_1$  pontja  $2c > 2a$  miatt a vezérkörtől kívül van. Az érintkező körök  $r_1$  centrálisára és  $r_1, 2a$  sugaraikra ezek szerint vagy  $r_2 = r_1 + 2a$  vagy  $r_2 = r_1 - 2a$  teljesül. Minden esetben fennáll tehát az  $|r_1 - r_2| = 2a$  egyenlet, és ezért  $P$  a hiperbolán van.

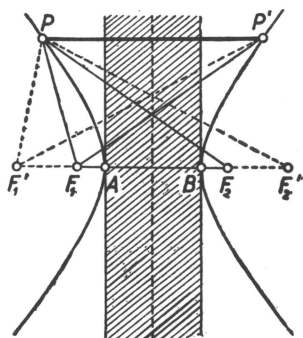
b) Ha egy adott körből és egy megadott külső pontjából indulunk ki, akkor tekintsük azt a hiperbolát, amelynek fókuszai a kör középpontja és az adott pont, nagytengelyének hossza pedig a kör sugara. Minthogy a kör ennek a hiperbolának vezérköre, a) szerint ez a hiperbola az a mértani hely, amelyről tételünk b) része szól. —

**A1** A kezdő értetlenül fogadja talán, hogy a két ágból álló hiperbolát egyetlen vonalnak görbének tekintjük. Jogunkban áll azonban a két ágból összetett alakzatnak adni a hiperbola nevet, s ezt vonalnak nevezhetjük. Ez a szóhasználat már eddig is (tételünk kimondásakor) előnnyel járt.

**A2** Ha adva vannak a hiperbola egymástól  $2c$  távolságra levő fókuszai és a valós tengely  $2a$  hossza, akkor megszerkeszthetjük a hiperbola tetszőlegesen sok pontját. Evégből valamelyik fókusz körül az  $r_1 \geq c - a$  egyenlőtlenséget kielégítő  $r_1$  sugárral, a másik körül  $r_2 = r_1 + 2a$  sugárral kört írunk. E köröknek van közös pontja, és így akárhogyan osztottuk is ki a fókuszok szerepét, a hiperbola pontjaihoz jutunk.

**A3** Ha a hiperbola megszerkesztéséről van szó, akkor ezt mindig csak úgy értjük, hogy a hiperbola kellő sok pontját szerkesztjük meg, és ezek ismeretében jó közelítéssel megrajzoljuk a hiperbola ágainak kívánt nagyságú darabjait. Ha egy szerkesztési feladatban adott hiperbola szerepel, ez azt jelenti, hogy ismeretesek olyan adatok, amelyek a hiperbola pontjait meghatározzák, pl. a valós tengelyszakasz és az egyik fókusz.

**B1** A hiperbola definíciójában szereplő  $2a < 2c$  megszorítás természetesnek mondható. Ha ugyanis  $2a > 2c$ , akkor a háromszög-egyenlőtlenség folytán nincs olyan pont, amelyre  $|r_1 - r_2| = 2a$ ; ha viszont  $2a = 2c$ , akkor csak a fókuszokat összekötő szakasz meghosszabbításaira teljesül az  $|r_1 - r_2| = 2a$  egyenlőség, és ennek a két félegyenesnek az együttesét nem akarjuk hiperbolának nevezni.



**B2** A hiperbola definíciójából közvetlenül adódik, hogy a hiperbolához minden egybevágóság és hasonlóság hiperbolát rendel.

**B3** A valós tengelyre a végpontjaiban állított merőlegesek olyan  $2a$  szélességű sávot határoznak meg, amely a valós tengely végpontjai kivételével nem tartalmazza a hiperbola egyetlen pontját sem (375. ábra). Ez abból adódik hogy ha  $P$  a hiperbolának a valós tengelyhez nem tartozó pontja, és  $P'$  ennek a sáv középpárhuzamosára, azaz a hiperbola képzetes tengelyére vonatkozó tükörképe, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$PP' > |F_1P - F_1P'| = |F_1P - F_2P| = 2a.$$

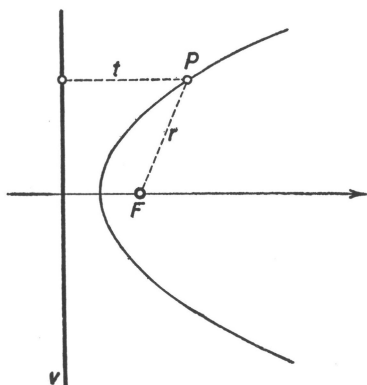
Azt is beláttuk, hogy a valós tengely hossza a hiperbola két ágának a távolsága (vö. 10.1 B).

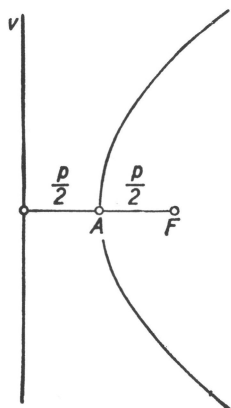
Az elmondottakból következik, hogy a hiperbola egyértelműen meghatározza valós tengelyét, tehát középpontját és képzetes tengelyét is, s hogy a hiperbolának nincs a tengelyeitől különböző szimmetria- tengelye és középpontjától különböző szimmetriacentruma.

Egyértelműen meghatározza a hiperbola két fókusz helyzetét is. Ha ugyanis  $F_1, F_2$  mellett a valós tengelynek a centrumra szimmetrikus  $F'_1, F'_2$  pontjai is fókuszok volnának, és pl. az utóbbiak távolsága volna nagyobb, akkor a képzetes tengely által a hiperbola  $P$  pontjától el nem választott  $F_1, F'_1$  pontokra  $F_1P' - F_1P = F_2P - F_1P = 2a$  és  $F'_1P' - F'_1P = F'_2P - F'_1P = 2a$  miatt teljesülnie kellene az  $F_1P' + F'_1P = F_1P + F'_1P'$  egyenletnek; ámde ez lehetetlen, mert a benne szereplő szakaszok által határolt két háromszögre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alapján  $F_1P' + F'_1P < F_1P + F'_1P'$ .

**41.3** Ha adva van a síkban egy pont és egy ezen a ponton át nem haladó egyenes, kereshetjük azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek a ponttól és az egyenestől ugyanakkora távolságra vannak. Ezt a mértani helyet *parabolának* nevezzük (376. ábra). Az adott pont a parabola *fókusza* (gyűjtőpont), az adott egyenes a parabola *vezéregyenes*e (direktrix). A fókuszról egy parabolaponthoz vezető szakasz az ehhez a ponthoz tartozó *rádiusz vektor*.

A parabola a fókuszról a vezéregyenesre merőlegesen bocsátott egyenesre szimmetrikus, hiszen erre az egyenesre tükrözve nem változik meg a pontnak sem a fókusztól, sem a vezéregyenestől való távolsága. Ezt a szimmetriatengelyt a parabola *tengelyének* nevezzük. Ha a tengelyen a vezéregyenestől a fókusz felé haladunk, irányt szabunk meg, és ezt a parabola *tengelyirányának* mondjuk.





377

A tengelynek és a parabolának egyetlen közös pontja van, s ez felezi a fókuszról a vezéregyenesre bocsátott merőleges szakaszt (377. ábra). Ez abból következik, hogy ez a tengely egyetlen olyan pontja, amely a fókuszról és a fókuszhoz a vezéregyenesre vetett merőleges vetületétől ugyanakkora távolságra van. A szóban forgó pontot a parabola *tengelypontjának* nevezzük, de *csúcspontjának* (orompont) is mondják. A fókusz és a vezéregyenes távolsága a parabola *paramétere*. A tengelypont

a vezéregyenesről és a fókuszról egyaránt  $\frac{p}{2}$  távolságra (gyújtótávolság) van, ha  $p$  a paramétert jelöli.

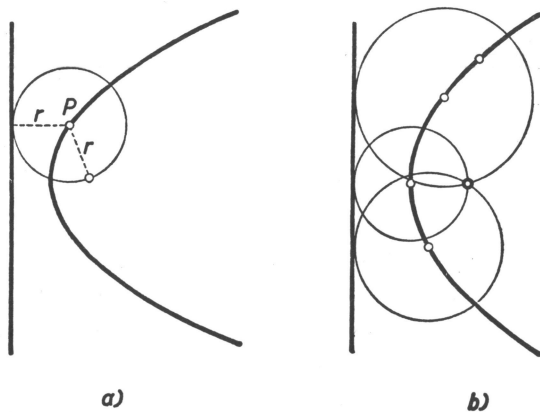
**Tétel.** a) A parabola azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek körül a fókuszon áthaladó és a vezéregyeneset érintő kör írható.

b) Az egyenest érintő és egy az egyenesen kívüli ponton áthaladó körök középpontjainak mértani helye parabola.

*Bizonyítás.* a) Ha  $P$  a parabola pontja és  $r$  a hozzá tartozó rádiusz vektor, akkor a  $P$  körül  $r$  sugárral írt kör áthalad a fókuszon és érinti a vezéregyeneset, hiszen  $r$  egyben a vezéregyenes távolsága a  $P$  ponttól (378. ábra).

Ha egy  $P$  pont körül a fókuszon áthaladó és a vezéregyeneset érintő kör írható, akkor e kör sugara a  $P$  pontnak a fókuszról való távolságát és a vezéregyenesről való távolságát is megadja, s ezért e két távolság egyenlő, azaz  $P$  a parabolán van.

b) Ha egy adott egyenesből és hozzá nem tartozó megadott pontból indulunk ki, akkor tekintsük azt a parabolát, amelynek vezéregyenesese az adott egyenes és fókusza az adott pont. a) szerint ez a parabola az a mértani hely, amelyről a tétel b) része szól. —



378

Tételünkből következik, hogy a parabola minden pontja a vezéregyenes által határolt, a fókusz tartalmazó félsík belsejében van, hiszen egy kör érintője nem választhatja el a kör középpontját a kör pontjaitól.

Ha az egyes pontoknak a fókuszról mért távolságát  $r$ , a vezéregyenestől való távolságát  $t$  jelöli, akkor a parabola pontjait az

$$r - t = 0$$

összefüggés jellemzi. A sík pontjainak a vezéregyenestől való távolságát előjellel is elláthatjuk, a távolságot pozitívnak vagy negatívnak tekintve aszerint, hogy a pont a vezéregyenes által határolt félsíkok közül a fókusz tartalmazóban van-e vagy sem. Ha ezt az előjeles távolságot  $s$ -sel jelöljük, a parabola pontjait jellemző összefüggést

$$r - s = 0$$

alakban is írhatjuk. Ha ugyanis egy pontra  $r - t = 0$ , akkor  $t = s$ , tehát  $r - s = 0$ , hiszen éppen az imént állapítottuk meg, hogy a parabola pontjai a pozitív távolságokat adó félsíkban vannak; ha viszont  $r - s = 0$ , akkor ebből sorra  $s = r$ ,  $s > 0$ ,  $s = t$ , tehát  $r - t = 0$  következik.

**A1** Felületes szemlélő a parabolát a hiperbola egy ágához hasonlónak látja. Meggyőződhetünk majd róla, hogy lényeges különbség van a görbék alakja között; ezt ábráinkból már most is megállapíthatjuk. Erre a különbségre még gyors szabadkézi rajznál is ügyelni kell.

**A2** Ha adva van a parabola vezéregyenes és ettől  $p$  távolságra levő fókusza, akkor a parabola

tetszőlegesen sok pontját megszerkeszthetjük. Evégből a fókusz körül  $r \geq \frac{p}{2}$  sugárral kört írunk, és a vezéregyenes által határolt, a fókusz tartalmazó félsíkban a vezéregyenestől  $t = r$  távolságban párhuzamost szerkesztünk. A szerkesztett körnek és egyenesnek van közös pontja, és így a parabola pontjaihoz jutunk.

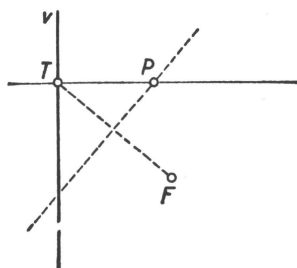
**A3** Ha a parabola megszerkesztéséről szólnunk, ez úgy értendő, hogy a parabola kellő sok pontját szerkesztjük meg, és ezek ismeretében jó közelítéssel megrajzoljuk a parabola kívánt nagyságú ívét. Ha egy szerkesztési feladatban adott parabola szerepel, ez azt jelenti, hogy ismeretesek olyan adatok, amelyeknek birtokában a parabola pontjai megszerkeszthetők, pl. a parabola tengelypontja és fókusza.

**B1** Természetes a parabola definíciójában az a megszorítás, hogy a fókusz nem lehet a vezéregyenesen. Ha ezt megengednők, akkor az adott pontban az adott egyenesre merőlegesen emelt egyenest is parabolának kellene neveznünk.

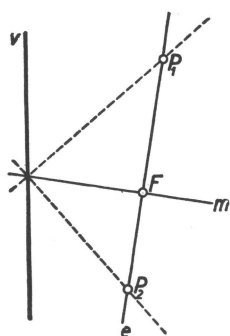
**B2** Közvetlenül adódik a parabola definíciójából, hogy parabolához az egybevágóság és a hasonlóság parabolát rendel.

Az is nyomban belátható, hogy bármely két parabola hasonló egymáshoz, hiszen mindig található olyan hasonlóság, amely egy ponthoz és egy azon át nem haladó egyeneshez egy megadott pontot és egy ezen át nem haladó megadott egyenest rendel.

**B3** A vezéregyenesre merőleges, azt  $T$  pontban metsző egyenes pontja akkor és csak akkor van a parabolán, ha  $T$ -től és az  $F$  fókuszról ugyanakkora távolságra van. Ennek a merőlegesnek a parabolához tartozó pontját ezért az  $FT$  szakasz felezőmerőlegese metszi ki (379. ábra) Minden esetben egy metszéspont van, mert  $FT$  nem párhuzamos a vezéregyenessel. Beláttuk ezzel, hogy (a tengelyen és) minden a tengellyel párhuzamos egyenesen a parabolának egyetlenegy pontja van, s hogy a parabolának nincs a tengellyel megegyező állású húrja.



379



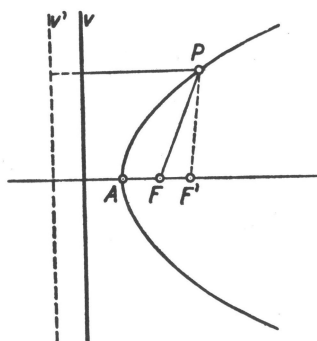
380

Az  $F$  fókuszon áthaladó, a tengelytől különböző  $e$  egyenes pontjairól megállapíthatjuk, hogy akkor és csak akkor tartoznak a parabolához, ha a  $v$  vezéregyenesről és az  $F$  pontban  $e$ -re emelt  $m$  merőlegestől egyenlő távolságra vannak (380. ábra). Ebből következik, hogy az  $e$  egyenesnek a parabolához tartozó pontjait a  $v$ ,  $m$  egyenesek szögfelező egyenesei metszik ki. Mindig két ponthoz jutunk, mert  $m$  metszi a vezéregyeneset, hiszen  $e$  nem azonos a tengellyel, és metsző egyenesek szögfelezői mindig metszik az egyenesek valamelyikére merőleges egyenest. Beláttuk ezzel, hogy minden a fókuszon áthaladó, a tengelytől különböző egyenes tartalmazza a parabola egy húrját. Van tehát a parabolának tetszőlegesen megadott állású húrja, csak éppen — mint láttuk — a tengellyel egyező állású húrja nincs.

Beláttuk, hogy a parabola egyértelműen meghatározza tengelyének az állását. Meghatározza magát a tengelyt is, mert ez felezi a rá merőleges húrokat, sőt a tengely irányát is, hiszen ezt az irányt a húrfelezőpontok alkotta félegyenes megszabja. Ezekből a megállapításokból nyomban következik az is, hogy a parabolának a tengelyén kívül nincs más szimmetriatengelye.

Egyértelműen meghatározza a parabola a fókuszát és vezéregyenesét is. Tegyük fel ugyanis, hogy a parabolát az  $F$  fókusz és  $v$  vezéregyenes mellett a tengely  $F'$  pontjából és a

$v$ -vel párhuzamos  $v'$  egyenesből is származtathatjuk (381. ábra). Abból, hogy a parabola pontjainak a  $v$ ,  $v'$  egyenesektől való távolságai állandó különbséget adnak, következik az  $F$ ,  $F'$  fókuszoktól mért távolságaiknak is állandó különbséget kellene adniuk. Ez a különbség azonban a parabola tengelypontjára az  $FF'$  távolsággal egyenlő, pontra vonatkozólag pedig a háromszög-egyenlőtlenség miatt  $FF'$ -nél kisebb. A parabolának tehát valóban csak egy fókusza és csak egy vezéregyenes van.



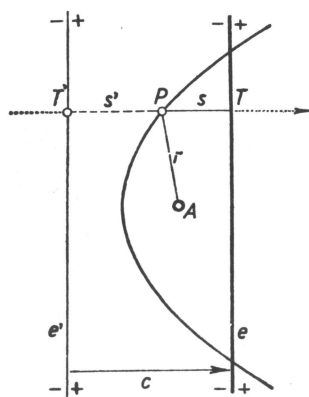
381

**B4** Beszélünk egy pontnak egy orientált egyenestől való *előjeles* távolságáról. Ehhez úgy jutunk, hogy a pont távolságát pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, amint a pont az orientált egyenes által határolt pozitív vagy negatív félsíkban van. A parabola definíciójának átírásakor az orientált vezéregyenestől való előjeles  $s$  távolságot használtuk, tehát a fókuszot tartalmazó félsíkot tekintettük pozitívnak.

Ha  $r$  jelöli a pontoknak egy adott  $A$  ponttól való távolságát,  $s$  pedig egy adott orientált  $e$  egyenestől való előjeles távolságukat (382. ábra), akkor azok a pontok, amelyekre

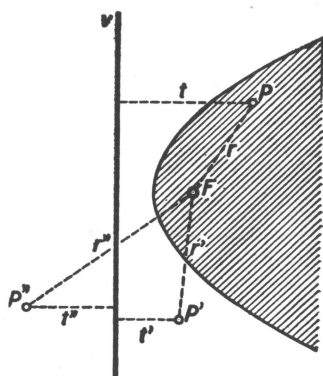
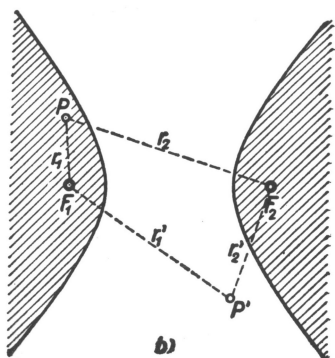
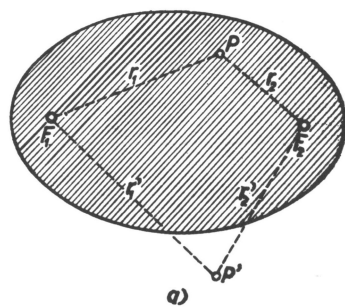
$$r - s \quad \text{vagy} \quad r + s$$

megadott állandó érték, parabolát alkotnak akkor, ha maga  $A$  nem tartozik ezek közé a pontok közé. Elegendő ezt  $r - s$  állandóságára belátnunk, hiszen ebből az  $r + s$ -re vonatkozó is következik, ha az ellenkezően orientált egyenesre alkalmazzuk. Legyen tehát  $r - s = c$ ,



382





383

ahol  $c$  egy állandó. Toljuk el az eredetileg adott  $e$  egyenest önmagával párhuzamosan  $c$  távolságra, mégpedig az  $e$  által határolt pozitív vagy negatív félsíkba aszerint, amint  $c$  negatív vagy pozitív. Az így kapott  $e'$  egyenest is orientáljuk, pozitívnak választva azt az  $e'$  által határolt félsíkot, amelyik az  $e$  által határolt pozitív félsík eltolásával keletkezik. Ha a pontoknak az orientált  $e'$  egyenestől való távolságát  $s'$  jelöli, akkor  $e'$  megválasztása folytán egy  $P$  pont előjeles  $s$ ,  $s'$  távolságaira teljesül az  $s' = s + c$  összefüggés. Ez abból következik, hogy  $s$  és  $s'$  az  $e$ -re és  $e'$ -re bocsátott, irányított  $TP$  és  $T'P$  merőlegesek előjeles mértéke,  $c$  pedig az irányított  $T'T$  szakasz előjeles mértéke, ha a  $PT'$  egyenesen pozitív irányban a pozitív félsíkokba vezető irányt választjuk, hogy továbbá az előjeles mértékekre fennáll a  $T'P = TP + T'T$  összefüggés. Megállapításainkból következik, hogy az általunk vizsgált,  $r - s = c$  összefüggést kielégítő pontok éppen azok, amelyekre  $r - s' = 0$  teljesül. Az  $A$  pont nincs az  $e'$  egyenesen, hiszen nem tartozik a keresett mértani helyhez. Ez a mértani hely ezek szerint az  $A$  fókuszú,  $e'$  vezéregyenesű parabola.

**41.4** Az ellipszis, a hiperbola és a parabola által határolt tartományokról lesz most szó. Ehhez szükséges, hogy tisztázzuk, melyek a belső és melyek a külső pontjaik (383. ábra).

Az ellipszis esetében egy pont *belső* vagy *külső* pont aszerint, amint a fókuszoktól mért  $r_1$ ,  $r_2$  távolságaira

$$r_1 + r_2 < 2a \quad \text{vagy} \quad r_1 + r_2 > 2a$$

teljesül, ahol  $2a$  a nagytengely hossza.

A hiperbola esetében egy pont *belső* vagy *külső* pont aszerint, amint a fókuszoktól mért  $r_1, r_2$  távolságaira

$$|r_1 - r_2| > 2a \text{ vagy } |r_1 - r_2| < 2a$$

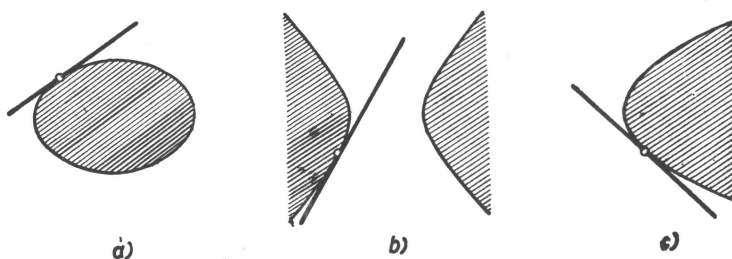
teljesül, ahol  $2a$  a valós tengely hossza.

A parabola esetében egy pont *belső* vagy *külső* pont aszerint, amint a fókuszról és a vezéregyenestől való  $r$  és  $t$  távolságaira

$$r - t < 0 \quad \text{vagy} \quad r - t > 0.$$

Az ellipszis pontjai és belső pontjai együttesen *ellipszistartományt* (ellipszis), a hiperbola pontjai és belső pontjai együttesen *hiperbolatartományt*, a parabola pontjai és belső pontjai együttesen *parabolatartományt* alkotnak. Mindhárom esetben az eredeti görbét a most értelmezett tartomány *határvonalának* mondjuk. Beszélhetünk mindhárom esetben a görbe által határolt, a görbepontokból és a külső pontokból álló kiegészítő tartományról is.

Mindhárom esetben az olyan egyenest nevezzük *érintőnek*, amelynek egyetlenegy közös pontja van a görbével, és minden más pontja külső pont (384. ábra).



384

A belső és külső pontok definíciójából közvetlenül adódik, hogy az ellipszis tengelyszakaszai az ellipszisen belül, meghosszabbításai pedig az ellipszisen kívül haladnak. A hiperbola esetében viszont megállapíthatjuk, hogy a képzetes tengelyegyenest és a valós tengelyszakasz a hiperbolán kívül halad, az utóbbinak a meghosszabbításai pedig a hiperbola belsejéhez tartoznak.

A hiperbolatartomány pontjait két osztályba sorolhatjuk aszerint, amint

$$r_1 - r_2 \geq 2a \quad \text{vagy} \quad r_2 - r_1 \geq 2a$$

teljesül. Ilyen módon a két ág által határolt két tartományhoz jutunk. Ezeknek az *ágtartományoknak* mindegyike egy-egy fókuszot tartalmaz. A képzetes tengely elválasztja ezt a két tartományt, hiszen elválasztja azokat a pontokat, amelyekre  $r_1 - r_2$  pozitív vagy negatív.

A parabolatartományt illetően 41.3 B3-nak a 379. ábrához fűződő okoskodásából közvetlenül következik, hogy a parabola pontjaiból induló, a tengellyel egy irányú félegyenese a parabolatartományhoz tartoznak, és ellenkező irányú meghosszabbításai a parabolán kívül haladnak. Ezzel azt is beláttuk, hogy a vezéregyenest által határolt, a fókuszot tartalmazó félsík nemcsak a parabolát, hanem a parabolatartományt is tartalmazza, s hogy külső pontból a vezéregyenestre bocsátott merőleges szakasz a parabolán kívül van.

A parabola esetében a belső és külső pontok definíciójában  $t$  helyett az orientált vezér- egyenestől való előjeles  $s$  távolságot is szerepeltethetjük volna, mert egy pont belső vagy külső pont aszerint, amint

$$r - s < 0 \quad \text{vagy} \quad r - s > 0.$$

Ez abból következik, hogy az  $s = t$  összefüggéssel jellemzett félsíkra ez az állítás a definíció megismétlése, a sík többi pontja pedig külső pont, és rájuk  $s < 0$ , valamint  $r > 0$  miatt teljesül az  $r - s > 0$  egyenlőtlenség is.

Ha az ellipszis és a hiperbola vezérkörét, valamint a parabola vezéregyenesét közös néven *vezéralakzatnak* nevezzük, akkor az előző három szakasz tételeit abba a kijelentésbe foglalhatjuk egybe, hogy a szóban forgó görbét azok a pontok alkotják, amelyek körül a (kiszemelt) fókuszon áthaladó kört írva a megfelelő vezéralakzatot érintő kört kapunk. Megfelelő vezéralakzaton az ellipszis és hiperbola esetében a másik fókusz körül írt vezérkör értendő.

**Tétel.** *Az ellipszis, hiperbola és parabola által határolt tartományokra egyaránt igaz az, hogy a tartományt azok a pontok alkotják, amelyek körül a (kiszemelt) fókuszon áthaladó kört írva, a megfelelő vezéralakzatot nem metsző kört kapunk.*

A tétel állítását a 385. ábra szemlélteti. Tételünket az előző három szakasz tételével egybefoglalva kimondhatjuk, hogy egy pont a szóban forgó tartományoknak külső pontja, határpontja vagy pedig belső pontja aszerint, amint a pont körül a tétel előírása szerint szerkesztett kör a vezéralakzatot metszi, érinti, vagy pedig nincs vele közös pontja.

*Bizonyítás.* Azt bizonyítjuk, hogy egy pont akkor és csak akkor van a szóban forgó tartományon kívül, ha a tétel utasítása szerint szerkesztett kör metszi a megfelelő vezéralakzatot (386. ábra).

a) Az ellipszistartományról és a hiperbolatartományról egyaránt elmondhatjuk, hogy egy pont akkor és csak akkor van a tartományon kívül, ha a már megszokott jelölést használva, teljesülnek az

$$r_1 + r_2 > 2a, \quad |r_1 - r_2| < 2a$$

egyenlőtlenségek. Az ellipszis esetében ez azért igaz, mert az első egyenlőtlenség a külső pontokat definiálja, a második viszont mindig teljesül, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség miatt  $|r_1 - r_2| \leq 2c$ , és  $2c < 2a$ . A hiperbola esetében is igaz az állításunk, mert a második egyenlőtlenség a külső pontokat definiálja, az első viszont mindig teljesül, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség szerint  $r_1 + r_2 \geq 2c$  és  $2c > 2a$ .

A felírt két egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha van  $r_1, r_2, 2a$  oldalú háromszög. Ilyen háromszög akkor és csak akkor van, ha az  $r_2$ -ről szóló

$$|r_1 - 2a| < r_2 < r_1 + 2a$$

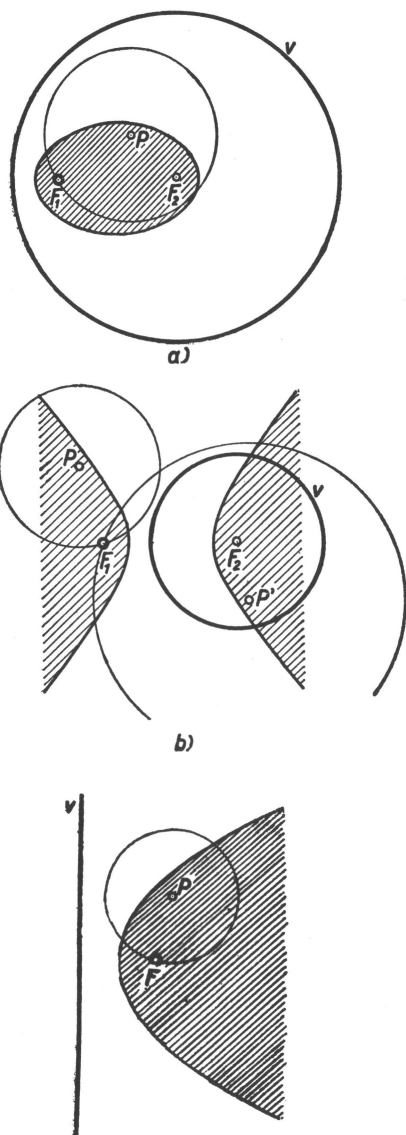
egyenlőtlenségek teljesülnek. Ez viszont éppen annak a feltétele, hogy az  $r_1$  sugárral szerkesztett kör és a megfelelő,  $2a$  sugarú vezérkör messe egymást, hiszen centrálisuk hossza  $r_2$ .

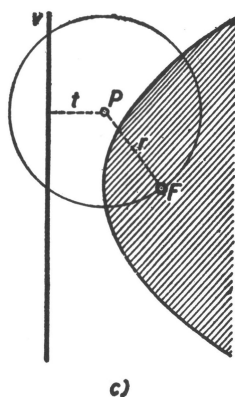
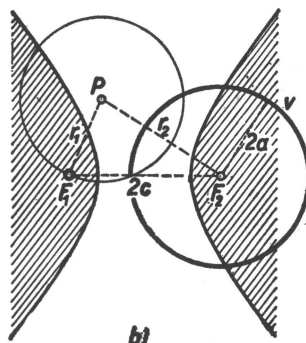
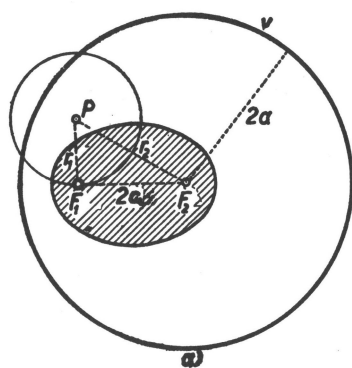
b) Egy pont akkor és csak akkor van a parabolatartományon kívül, ha  $r > t$ . Ez egyben éppen annak a feltétele, hogy a vezéregyenestől  $t$  távolságra levő pont körül  $r$  sugárral szerkesztett kör messe a vezéregyeneset. —

A hiperbola esetében a tétel állítását azzal egészíthetjük ki, hogy a hiperbola tartomány egy pontja az egyik vagy a másik ágtartományhoz tartozik aszerint, amint a pont körül szerkesztett kör tartománya tartalmazza a vezérkört, vagy pedig a vezérkör tartománya tartalmazza azt. Ez abból adódik, hogy a vezérkör középpontja aszerint van a szerkesztett körön kívül vagy belül, amint az  $r_2$  centrális nagyobb vagy kisebb az  $r_1$  sugárnál, márpedig a két ág által határolt tartomány egyikére  $r_2 > r_1$ , másikára pedig  $r_2 < r_1$ .

A Ha valaki nem látja annak szükségét, hogy definiáljuk, mely pontok vannak a szóban forgó görbéken belül és kívül, az a szakasz elején mondottakat nem definícióként, hanem megállapításként fogadhatja el. A hiperbola esetében azt vitathatná valaki, hogy az ágak közötti pontokat kellene belső pontoknak

mondani. A tárgyalás egyöntetűsége azonban már eddig is megmutatta, hogy az általunk elfogadott szóhasználat az előnyösebb. Itt elsősorban a 384. ábra egyöntetűségére gondolunk.





386

**B1** Használtuk a tartomány és határ megnevezéseket. Rövidesen belátjuk majd, hogy ez a szóhasználat megfelel 5.3 előírásának (lásd 41.6 B1).

Az ellipszisre, hiperbolára és parabolára használjuk a *görbe* vagy *vonal* megnevezéseket. Nem foglalkozunk azzal, hogy hogyan lehet általánosságban határt szabni azok között az alakzatok között, amelyeket görbének vagy vonalnak mondhatunk, és azok között, amelyeket nem nevezhetünk így. Ez a vizsgálat nem volna könnyű, és a *halmazelméleti geometriába*, a topológia egy ágába vezetne. Megemlítjük, hogy ebbe a fejezetbe vág 5.3 anyaga is.

Ebben a könyvben a görbe és a vonal szót nem használjuk valamilyen alakzatosztály jellemzésére, hanem csak bizonyos, pontosan definiált alakzatokra. Így nevezhetjük pl. a konvex síkidomok határát, a konvex ívet, valamint a véges sok ilyenből összetett alakzatokat.

Megemlítjük, hogy a görbe és a vonal szót ugyanazokra az alakzatokra szokás használni, tehát az elfogadott szokás szerint mondhatjuk, hogy az egyenes vagy a félegyenes is „görbe”.

A most mondottakat szem előtt tartva helytelennek kell mondani azt, ha valaki pl. a kört „A kör olyan vonal, amely...” kezdetű szöveggel definiálja, mert egy elemi fogalom, a kör definíciójába egy még nem tisztázott, elemi úton aligha tisztázható fogalmat, a vonal vagy görbe fogalmát keveri.

**B2** Az érintő definíciójához hozzáfűzzük, hogy az ellipszis esetében elég lett volna azt mondani: érintő egy olyan egyenes, amelynek a görbével egyetlenegy közös pontja van. Látjuk majd, hogy ez igaz (lásd 43.2), már tudjuk, hogy a paraboláról hasonló nem mondhatunk, és majd belátjuk, hogy ez a hiperbolára sem volna helyes (lásd 43.5). Hangsúlyozzuk, hogy eddig sem azt nem bizonyítottuk be, hogy görbéink minden pontjában vonható érintő, sem azt, hogy nem vonható több.

**B3** Az ellipszistartomány korlátos, mert a vezérkör tartalmazza. A hiperbolatartomány és a parabolatartomány nem korlátos, hiszen mindkettő tartalmaz félegyenest.

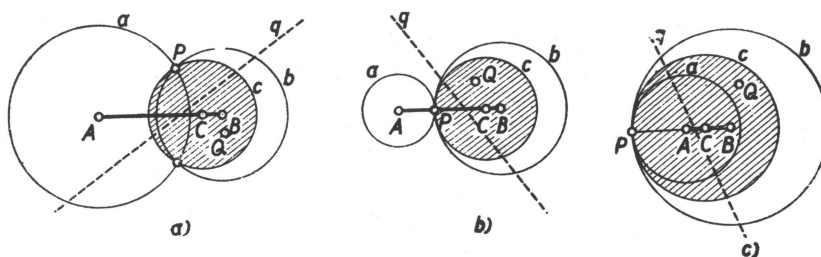
**B4** Ez a szakasz is mutatja, hogy az ellipszis, hiperbola és parabola a definíciójukban mutatkozó különbségek ellenére mennyi hasonlóságot mutat. Tapasztalunk ugyan lényeges különbségeket is e három görbe között, azonban egyre több tény indokolja majd azt, hogy e három görbét egy családba kell soroljuk, hogy ezeket a görbéket jogosan tárgyaljuk együtt. Rövidesen közös nevet is adunk majd e három görbének.

A három görbe szoros kapcsolatát mutatja, hogy ha egy pontot és egy rajta át nem haladó alakzatot, mégpedig kört vagy egyenest választunk, akkor azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek körül a ponton áthaladó és a választott alakzatot érintő kör írható, három görbének valamelyike. Ha körből indulunk ki, akkor ellipszishez (vagy körhöz) vagy hiperbolához jutunk aszerint, hogy a pont belső vagy külső pont, ha pedig egyenesből indulunk ki, akkor parabolát kapunk.

Ha egy parabolikus körsor centrálisán egy az alapponttól különböző pontot fókuszaként jelölünk ki, és a körsor pontkörtől különböző, a fókuszon át nem haladó elemeit vezéralakzatnak választjuk, akkor a vezéralakzat megválasztásától függően ellipszishez (vagy körhöz), parabolához és hiperbolához jutunk. Ez a megfontolás is mutatja, hogy a parabolát egyaránt felfoghatjuk az ellipszisek vagy a hiperbolák határeseteként. Mondhatjuk, hogy a három görbe családjában a parabola választja el a család két ágát, az ellipsziseket és a hiperbolákat, s itt a kört is az ellipszisek közé sorolhatjuk.

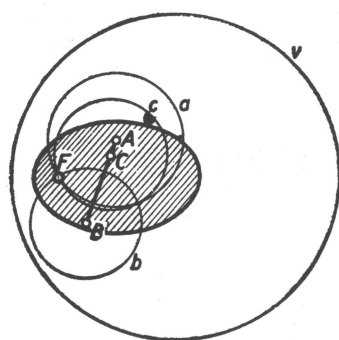
**41.5** Az előző szakaszban bevezetett tartományok konvexitását vizsgáljuk. Ezt egy elemi geometriai tétel bizonyításával készítjük elő.

**Tétel.** Ha az  $A, B$  pontok körül írt  $a, b$  köröknek a  $P$  pont közös pontja, és az  $AB$  szakasz egy belső  $C$  pontja körül a  $P$  ponton áthaladó  $c$  kört írunk, akkor a  $c$  körlemez minden olyan pontját, amely az  $a, b$  körvonalaknak nem közös pontja, az  $a, b$  körlemezeknek legalább az egyike a belsejében tartalmazza (387. ábra).

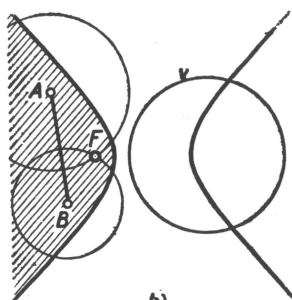


387

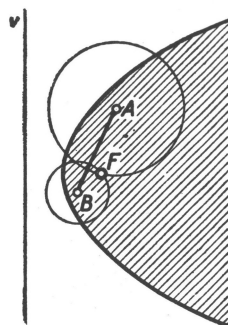
Röviden mondhatjuk, hogy az  $a, b$  körlemezek belseje leborítja a zárt  $c$  körlemez, azonban az  $a, b$  körvonalak közös pontjainak a kivételével. Szükség van arra, hogy kirekesszük az  $a, b$  körvonalak (egy vagy két) közös pontját, mert az ilyen pont rajta van a  $c$  körvonalon is. A  $P$  pontra vonatkozólag ez a  $c$  kör megválasztásából következik, a másik közös pont pedig csak  $P$ -nek az  $AB$  egyenesre vonatkozó tükröképe lehet, amelyen az erre az egyenesre szimmetrikusan elhelyezkedő három kör mindegyike áthalad. Figyelmen kívül hagyhatjuk azt az érdektelen esetet, amikor  $C$  és  $P$  azonos, hiszen ebben az esetben a  $c$  kör a  $P$  pontkörre és tételünk semmitmondóvá fajul.



a)



b)



c)

388

*Bizonyítás.* Legyen  $Q$  a  $c$  körlemez olyan pontja, amely az  $a, b$  körvonalaknak nem közös pontja, amely tehát  $P$ -vel sem azonos. Tekintsük a  $PQ$  szakasz  $q$  felezőmerőlegese által határolt félsíkok közül azt, amelyik tartalmazza a  $Q$  pontot. Ez a félsík  $CQ \leq CP$  miatt tartalmazza a  $C$  pontot. Az  $AB$  szakasz nem helyezkedhetik el e félsík határán, mert akkor  $Q$  a  $P$  pontnak az  $A$  egyenesre vonatkozó tükörképe, s így az  $a, b$  körvonalak közös pontja volna. Ebből következik, hogy a  $C$  ponton áthaladó  $AB$  szakasz valamelyik végpontja, pl. a  $B$  pont az általunk tekintett félsík belsejében van. Ez azt jelenti, hogy  $BQ < BP$ , hogy tehát a  $b$  körlemez a  $Q$  pontot a belsejében tartalmazza. –

A most bizonyított tétel alapján kimondhatjuk, hogy az  $AB$  egyenes  $C$  pontja akkor és csak akkor van az  $AB$  szakaszon, ha a hozzá tartozó  $c$  körlemez az  $a, b$  körlemezek egyesítése lebontja, viszont az  $a, b$  körlemezek mindegyike nem teszi meg ezt. Ez utóbbi kiegészítés csak a 387c ábrán bemutatott eset miatt szükséges.

Egy tartományt akkor mondunk *szűkebb értelemben konvexnek*, ha a tartomány két pontját összekötő szakaszok belső pontjai mindannyian a tartomány belsejében helyezkednek el. A körlemezről tudjuk, hogy ilyen szűkebb értelemben is konvex tartomány.

**Tétel.** Az ellipszistartomány, a parabolatartomány és a hiperbola ágatartománya szűkebb értelemben is konvex.

*Bizonyítás.* Legyen  $A$  és  $B$  a szóban forgó tartomány két pontja, és  $C$  az  $AB$  szakasz belső pontja. Írjunk e három pont körül a tartományban elhelyezkedő (egyik)  $F$  fókuszon áthaladó, rendre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  betűkkel jelölt köröket (388. ábra). Mivel  $A$  és  $B$  a tartomány pontjai, az előző szakasz szerint  $a$  és  $b$  nem metszi a megfelelő vezéralakzatot, sőt az  $a$ ,  $b$  körlemezek belsejének sincs a vezéralakzathoz tartozó pontja, hiszen a hiperbola esetében az  $F$  fókusz tartalmazó ágtartományról van szó. Ebből az előző tételre hivatkozva következik, hogy a  $c$  körlemez pontjai közül legfeljebb az  $a$ ,  $b$  körvonalak közös pontjai lehetnek a vezéralakzaton. Megmutatjuk, hogy ez sem lehetséges, hogy tehát  $C$  valóban pont.

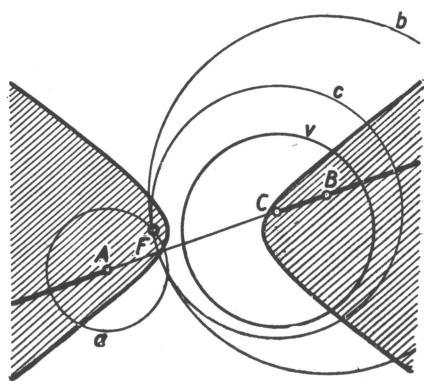
Ha az  $a$ ,  $b$  körvonalaknak van a vezéralakzathoz tartozó pontjuk, akkor érintik azt, hiszen nem metszhetik (és vele nem azonosak). Ha tehát e két kör közös pontja a vezéralakzaton volna, akkor ott egymást is érintenék, ezért egyetlen közös  $F$  pontjuk a vezéralakzaton volna. Ez azonban lehetetlen, hiszen  $F$  nincs a vezéralakzaton. —

**Tétel.** Ha két pont a hiperbola más-más ága által határolt tartományban van, akkor a két pontot összekötő szakasz meghosszabbításainak belső pontjai a hiperbolatartomány belsejében vannak.

Maga az összekötő szakasz nem tartozhatik a hiperbolatartományhoz, hiszen metszi a hiperbolatartományhoz nem tartozó képzetes tengelyt.

*Bizonyítás.* Tartozzék  $A$  és  $C$  más-más hiperbolaág által határolt tartományhoz, és legyen  $B$  az  $AC$  szakasznak pl. a  $C$  ponton túli meghosszabbításán (389. ábra). Legyen  $A$  és az  $F$  fókusz ugyanabban az ágtartományban. Írjunk az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok körül az  $F$  fókuszon áthaladó rendre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  betűkkel jelölt köröket.

Az előző szakasz szerint a megfelelő  $v$  vezérkör az  $a$  körön kívül és a  $c$  körön belül helyezkedik el. Az  $a$ ,  $c$  körök közös pontja (vagyis az  $a$ ,  $b$  körök közös pontja) az előző bizonyítás utolsó bekezdése szerint nem tartozhatik  $v$ -hez. Ezért e szakasz első tétele szerint az  $a$  és  $b$  körlemez belseje együttesen leborítja a zárt  $c$  körlemez, tehát az utóbbi által tartalmazott zárt  $v$  körlemez is. Ebből következik, hogy  $b$  belseje egymagában is leborítja a  $v$  körlemez, hiszen az  $a$  körlemez a  $v$  körlemezen kívül helyezkedik el. Eszerint  $B$  valóban a hiperbolatartomány belsejében van.



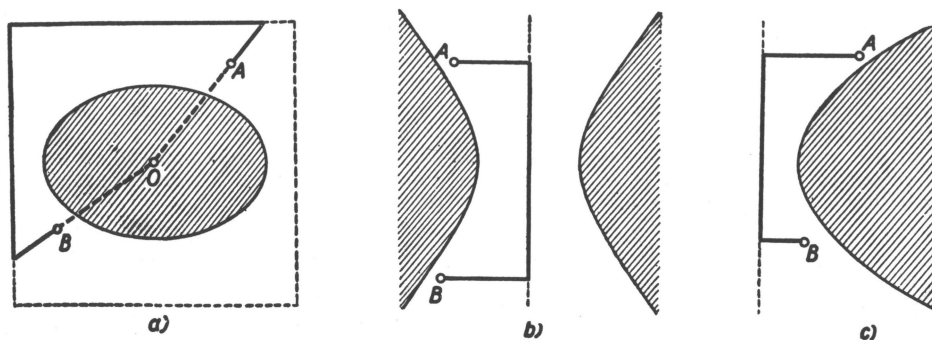
389

**B1** Az ideális pontok bevezetése után e szakasz második és harmadik tétele egybeolvad (vö. 44.1 B2).

**B2** Az ellipszistartomány, a hiperbola ágtartománya, valamint a parabolatartomány poligonálisan összefüggő, hiszen konvex. Bebizonyítjuk, hogy az ellipszis, hiperbola és parabola külső pontjai is poligonálisan összefüggő alakzatot alkotnak.

Állításunk helyessége az ellipszis esetében következik abból, hogy az ellipszistartomány korlátos, és így pl. egy négyzetbe foglalható (390. ábra). Ha ezt a négyzetet az  $O$  középpont és a külső  $A$ ,  $B$  pontok által meghatározott  $OA$ ,  $OB$  félegyenésekkel metsszük, akkor az  $A$ ,  $B$  pontokat összekötő, az  $A$ ,  $B$  pontoktól a metszéspontokig terjedő szakaszokból és a négyzet határvonalának a metszéspontokat összekötő darabjából álló töröttvonalhoz jutunk. Az ellipszistartomány konvexitása miatt ez a töröttvonal az ellipszisen kívül halad.





390

A hiperbola esetében a külső  $A, B$  pontokból a képzetes tengelyre bocsátott merőleges szakaszok és talppontjaik összekötő szakasza adnak kívánt törött vonalat. A képzetes tengelyről tudjuk, hogy a hiperbolán kívül helyezkedik el. Nem lehet azonban hiperbolapont a merőleges szakaszokon sem, mert ha pl. az  $A$ -ból bocsátott merőlegesen volna (a képzetes tengelyhez nem tartozó) hiperbolapont, akkor ez és a tengelyre vonatkozó tükörképe utolsó tételünk szerint azt vonná maga után, hogy  $A$  is belső pont.

A parabola esetében a külső  $A, B$  pontokból a vezéregyenesre bocsátott merőlegesek és talppontjaik összekötő szakasza alkotnak állításunkat bizonyító töröttvonalat, hiszen már beláttuk, hogy mindezek a szakaszok csak külső pontokat tartalmaznak. Ezzel állításunk bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a hiperbola esetében összefüggő alakzatot alkotnak azok a pontok is, amelyek nem tartoznak az egyik ágtartományhoz. A hiperbola esetére imént adott bizonyítás ennek bizonyítására is alkalmazható.

Megemlítjük végül, hogy nem minden konvex tartomány külső pontjai alkotnak poligonálisan összefüggő alakzatot, hiszen a sáv esetében ez nincs így. Pusztán a konvexitásra támaszkodva állításainkat ezért nem is bizonyíthattuk volna be.

**41.6 Tétel.** *Az ellipszisnek, hiperbolának és parabolának egy egyenessel legfeljebb két közös pontja lehet.*

*Bizonyítás.* Ha  $A, B, C$  egy egyenes három pontja, és  $C$  az  $AB$  szakasz belső pontja, akkor abból, hogy  $A$  és  $B$  a szóban forgó görbén van, 41.5 második tétele szerint következik, hogy  $C$  belső pont, hacsak nem hiperboláról van szó, és  $A, B$  nincsenek más-más ágon. Ez utóbbi esetben viszont  $C$  csak külső pont lehet, hiszen különben pl.  $A$  és  $C$  más-más ágtartományhoz tartoznának, s akkor  $B$  az előző szakasz utolsó tétele szerint belső pont volna.  $C$  tehát egyik esetben sem lehet a görbén. —

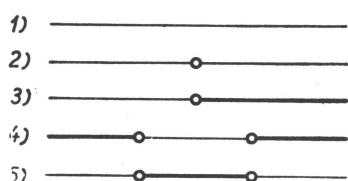
**Tétel.** *Az ellipszis, hiperbola és parabola esetében egyaránt igaz az, hogy egy belső és egy külső pontot összekötő szakasznak a görbével egyetlenegy közös pontja van.*

*Bizonyítás.* a) Attól függően, hogy ellipsziszről, hiperboláról vagy paraboláról van-e szó, a sík pontjaihoz rendelt  $r_1 + r_2 - 2a$ ,  $2a - |r_1 - r_2|$  vagy  $r - t$  érték előjele dönti el, hogy a pont a görbén belül vagy a görbén kívül van-e. Vizsgáljuk ennek az értéknek a változását a szóban forgó szakaszon. A végpontokhoz különböző előjelű értékek tartoznak, mert egyikük belső, másikuk külső pont. Ebből következik, hogy ha egy pont a szakaszt bejárja, akkor a ponthoz rendelt, folytonosan változó érték közben legalább egy helyen 0, hogy tehát a szakasznak legalább egy pontja a görbén van (lásd B2).

b) Bizonyítanunk kell még, hogy a külső  $A$  és belső  $B$  pontot összekötő  $AB$  szakasznak nem lehet két pontja,  $P_1$  és  $P_2$  a görbén. A jelölést úgy választjuk, hogy a szakaszt bejárva, a pontok  $A, P_1, P_2, B$  sorrendben következzenek. Nem lehetséges ez akkor, ha a  $P_1$  és  $B$  pontok egy ellipszistartomány, parabolatartomány vagy a hiperbola egy ágtartományának a pontjai, mert akkor az előző szakasz szerint  $P_2$  csak belső pont lehet, hiszen a  $P_1B$  szakasz belső pontja. Akkor sem lehetséges azonban, ha  $P_1$  és  $B$  a hiperbola más-más ágtartományához tartoznak, mert akkor ugyancsak az előző szakasz szerint a  $P_1B$  szakasz meghosszabbításán elhelyezkedő  $A$  pontnak kellene belső pontnak lennie. —

**Tétel.** Az ellipszistartomány, hiperbolatartomány és parabolatartomány nem tartalmaz teljes egyenest.

*Bizonyítás.* Tekintsük a szóban forgó görbe (egyik)  $F$  fókuszát és a megfelelő vezéralakzatot. Legyen  $e$  egy tetszőlegesen adott egyenes, és  $G$  egy olyan pont, amely nincs az  $F$ -ből  $e$ -re merőlegesen bocsátott egyenesen, s amelyet a vezéralakzat  $F$ -től elválaszt. A  $G$  pont megválasztásából következik, hogy az  $FG$  szakasz felezőmerőlegese metszi az  $e$  egyenest egy  $P$  pontban. E  $P$  pont körül az  $F$  ponton áthaladó kört írva olyan kört kapunk, amely áthalad a vezéralakzat által elválasztott  $F$ ,  $G$  pontokon, amely tehát metszi a vezéralakzatot. Az  $e$  egyenesnek a  $P$  pontja ezért a szóban forgó görbén kívül van. —



391

Az előző szakasznak és ennek a szakasznak a tételeit egybefoglalva megállapíthatjuk, hogy ha egy ellipszis, hiperbola vagy parabola által határolt tartománynak és egy egyenesnek a közös pontjairól van szó, akkor a következő esetek lehetségesek (391. ábra): 1. az egyenes minden pontja a görbén kívül van, 2. az egyenesnek egy pontja van a görbén, és minden más pontja a görbén kívül van, 3. az egyenesnek egy pontja van a görbén, s az  $e$  pont által határolt félegyenesek egyike a görbén belül, a másik pedig a görbén kívül halad, 4. az egyenesnek két pontja van a görbén, összekötő szakaszuk a görbén kívül, meghosszabbításai pedig a görbén belül haladnak, 5. az egyenesnek két pontja van a görbén, összekötő szakaszuk a görbén belül, meghosszabbításai pedig a görbén kívül haladnak. Megállapíthatjuk azt is, hogy az 1., 2. és 5. eset mindhárom görbénél előfordul; a nagytengelyre, valós tengelyre és parabolatengelyre merőleges egyenesek körében mindhárom esetre könnyen találhatunk példát. A 2. eset megvalósulása éppen az érintő definíciója. A 4. eset csak a hiperbolánál valósulhat meg, hiszen a másik két görbe konvex tartományt határol. Az ellipszisznel a korlátosság miatt a 3. eset sem lehetséges.

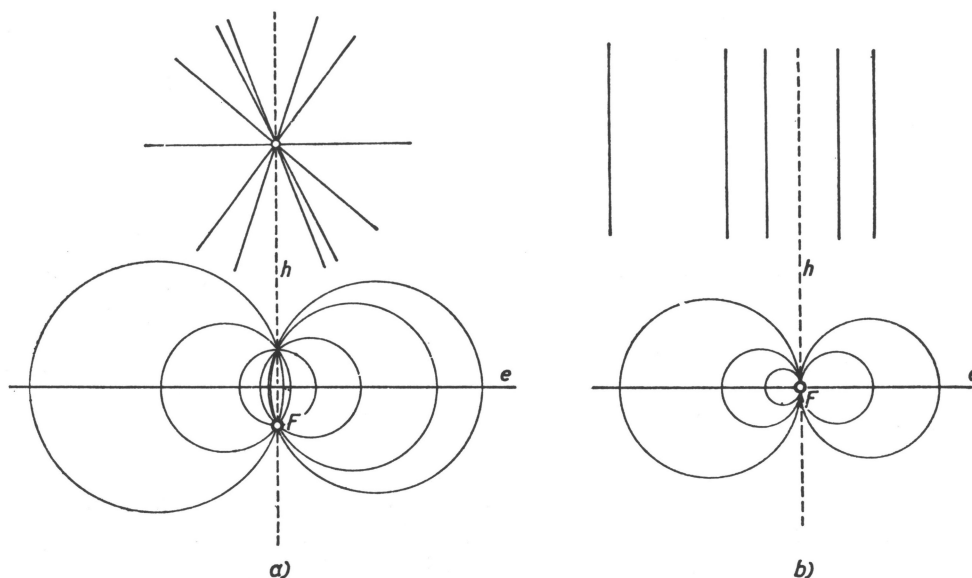
**B1** Eredményeinkből következik, hogy az ellipszistartomány, a hiperbola ágtartománya és a parabolatartomány (zárt) konvex síkidom. 5.3 Bc) alapján kimondhatjuk tehát, hogy ezek valóban tartományok, s hogy az ellipszis, hiperbolaág és parabola valóban a határuk. Ugyanezt a hiperbola által határolt hiperbolatartományra is elmondhatjuk, hiszen ez két ágtartomány egyesítése.

Az ellipszistartomány, a hiperbola ágtartománya és a parabolatartomány esetében minden érintő támaszegyenes, és más támaszegyenes nincs. Ha ugyanis az érintő két oldalán volna a tartománynak pontja, akkor az érintő 41.5 második tétele szerint belső pontot is tartalmazna, ami lehetetlen. Ugyanezért a támaszegyenes nem tartozhatik a fent említett 3—5. esetekhez, és természetesen az 1. esethez sem.

Az ellipszis, a hiperbolaág és a parabola a sík két poligonálisan összefüggő, egymást kiegészítő tartományának közös határa. Ezért 5.3 Bh) alapján kimondhatjuk, hogy ezek a görbék a síkot kettévágják.

**B2** Szakaszunk második tételének bizonyításában a folytonosságra támaszkodtunk. Megmutatjuk, hogyan lehet célt érni, ha a folytonosságból csak a köraxiómát használjuk fel.

Legyen  $e$  egy tetszőleges egyenes,  $F$  a görbe (egyik) fókusza és  $v$  a megfelelő vezéralakzat. Az  $e$  egyenes pontjai körül írt, az  $F$  ponton áthaladó körök az  $F$  pontból az  $e$  egyenesre bocsátott merőlegessel együtt egy parabolikus vagy hiperbolikus körsort alkotnak aszerint, amint  $F$  az egyenesen van vagy sem (392. ábra). Azt kell megvizsgálnunk, hogy az  $e$  egyenes mely pontjai vannak a görbén, azon kívül vagy azon belül, tehát azt, hogy mely pontok körül írt körök érintik, metszik vagy nem érik el a vezéralakzatot.



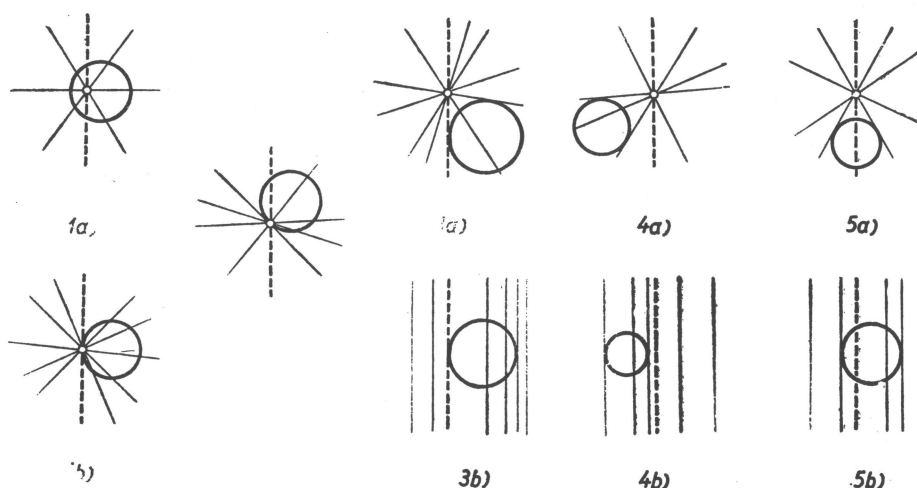
392

Alkalmazzunk a vezéralakzatra és a körsor minden elemére egy  $F$  centrumú inverziót. Ez az inverzió a vezéralakzathoz minden esetben kört, a körsor elemeihez (az  $F$  pontkör esetleges kivételével) egy sugársor elemeit rendeli. Ez a sugársor vagy egymást egy az  $F$ -től különböző pontban metsző, vagy pedig párhuzamos egyenesekből áll aszerint, hogy a körsor hiperbolikus vagy parabolikus. A sugársor minden eleme a körsor egy-egy körének, és  $e$  kör középpontja révén  $e$  egy-egy pontjának felel meg, kivéve a sugársornak azt a  $h$  elemét, amelyik az  $F$  centrumon halad át.

Az előző szakasz első tétele alapján tudjuk, hogy ha az egyenes három pontja körül az  $F$  ponton áthaladó kört írunk, akkor a három középpont közül az van a másik kettő között, amelyikhez tartozó kört a másik kettő együttesen lefedi, de mindkettő külön-külön nem. Az inverzió a körsor köreinek belsejéhez az inverz egyenesek által határolt, a centrumot nem tartalmazó félsíkokat rendeli. Így tehát három a sugársorhoz tartozó,  $h$ -től különböző egyenesnek az  $e$  egyenesen megfelelő pontok közül az van a másik kettő között, amelynek menetelő (az  $F$  pontot nem tartalmazó) félsíkot a másik két ilyen félsík leborítja. Ez azt jelenti, hogy a három egyenes közül az felel meg a közbülső pontnak, amelyet a másik két egyenes a sugár- sorban  $h$ -től elválaszt.

Ha az  $F$  pont az  $e$  egyenesen van, amikor is párhuzamos egyenesek alkotta sugársorhoz jutunk, az  $e$  egyenes  $F$  pontjához a sugársornak nem tartozik eleme. A sugársornak két a  $h$  egyenest közrefogó eleméhez tartozik ilyenkor két az  $F$  pontot közrefogó pont.

Tekintsük a vezéralakzat inverzét, a  $v'$  kört. Ennek a sugársorhoz viszonyított elhelyezkedéséből kiolvashatjuk, hogy az  $e$  egyenesen levő görbepontok és külső pontok hogyan helyezkednek el (393. ábra). Az elmondottakból következik, hogy a következő esetek lehetségesek:



393

1. Ha a  $v'$  kör a metsző egyenesek sugársorának tartóját a belsejében tartalmazza, vagy a  $h$  egyenest érintve halad át rajta, akkor a sugársor minden  $h$ -től különböző eleme metszi a kört, s az  $e$  egyenes minden pontja külső pont. 2. Ha a  $v'$  kör áthalad a metsző egyenesek sugársorának tartóján, és  $h$  nem érinti a kört, akkor a sugársor egy  $h$ -től, különböző eleme érinti a kört, s a többi mind metszi; az  $e$  egyenesen tehát egy görbepont van, s a többi mind külső pont. 3. Ha a  $v'$  kör érinti a  $h$  egyenest, de az érintési pont nem tartója a sugársornak, akkor a sugársor egy  $h$ -től különböző eleme is érinti a kört, s ez az elem  $h$ -val együtt elválasztja a sugársornak a kört metsző elemeit a nem metszőktől; az  $e$  egyenesen tehát egy görbepont van, és ez elválasztja egymástól a (sugársor elemeinek megfelelő) külső és belső pontokat. 4. Ha a  $v'$  körnek nincs a  $h$  egyenesttel közös pontja, akkor ezt a kört a sugársor két  $h$ -től különböző eleme érinti, és ezek a sugársornak azokat az elemeit választják el  $h$ -től, amelyek a kört metszik; az  $e$  egyenesen tehát két görbepont van, és ezek (a sugársor elemeihez tartozó pontok közül) a külső pontokat fogják közre. 5. Ha a  $v'$  kör metszi a  $h$  egyenest, de a metszéspontok egyike sem tartója a sugársornak, akkor ezt a kört a sugársor két  $h$ -től különböző eleme érinti, és ez a két elem azokat az elemeket választja el a sugársorban  $h$ -től, amelyek nem metszik a kört; az  $e$  egyenesen tehát két görbepont van, és ezek (a sugársor elemeihez tartozó pontok közül) a belső pontokat fogják közre.

Az utolsó három esethez hozzá kell tennünk, hogy ha  $F$  az  $e$  egyenesen van, akkor ez a sugársor egyik elemének sem megfelelő, belső  $F$  pont is a belső pontok tartományában helyezkedik el. Mindhárom esetben van ugyanis a sugársornak két, a  $h$  egyenest közrefogó, a  $v'$  kört nem metsző olyan eleme, amely a  $v'$  kört érintő sugársorelemeket nem választja el  $h$ -től; van tehát az  $e$  egyenesen két az  $F$  pontot közrefogó olyan belső pont, amelyek nem fogják közre az  $e$  egyenes görbe pontjait.

Eljutottunk a 391. ábrán bemutatott öt esethez, újból bebizonyítottuk tehát szakaszunk mindhárom tételét.

#### 41.7 A teljes forgáskúpfelület síkmetszeteit vizsgáljuk.

Ha a sík a kúp csúcsán halad át, akkor a kúpfelületből csak a kúp csúcsát, két alkotóegyenest vagy egy alkotóegyenest tartalmazza aszerint, amint a sík és kúptengely hajlásszöge a kúp félnyílásszögénél nagyobb, kisebb vagy ugyanakkora. Ez a három eset rendre akkor következik be, ha a sík egy a tengelyre merőleges, a kúpot körben metsző síkot a kört nem érő (nem is létező), metsző vagy érintő egyenesben metszi.

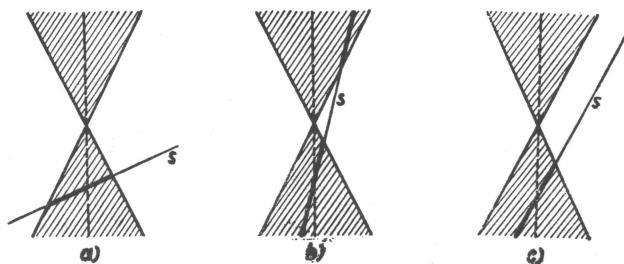
Ha a csúcson áthaladó síkot párhuzamosan eltoljuk, akkor párhuzamos lesz azokkal az alkotókkal, amelyeket tartalmazott, s a többi alkotót metszi. A sík a mondott három eset közül csak a másodikban metszi mind a két félkúpot, hiszen a csúcson átfektetett sík csak a második esetben választja ketté ugyanannak a félkúpnek az alkotó-félegyeneseit.

Ezek szerint a kúp csúcsán át nem haladó síkot illetően a következő három eset lehetséges: *a)* a sík és a kúptengely hajlásszöge a kúp félnyílásszögénél nagyobb, a sík csak az egyik félkúpot metszi, és minden alkotót metsz; *b)* a sík és kúptengely hajlásszöge a kúp félnyílásszögénél kisebb, a sík

mind a két félkúpot metszi, és két alkotóval párhuzamos; c) a sík és a kúptengely hajlásszöge a kúp félnyílásszögével egyenlő, a sík csak az egyik félkúpot metszi, és csak egyetlen alkotóval párhuzamos.

**Tétel.** *A forgáskúp csúcsán át nem haladó, a kúp tengelyére nem merőleges sík a kúpfelületet ellipszisben, hiperbolában vagy parabolában metszi aszerint, amint a sík egy alkotóval sem, két alkotóval vagy egyetlenegy alkotóval párhuzamos.*

Ez a tétel indokolja azt, hogy a három görbét közös néven *kúpszeletnek* nevezzük. A metsző sík háromféle elhelyezkedését a korábban mondottak szerint másként is jellemezhetjük volna. Ha a metsző sík a kúp tengelyére merőleges, akkor a metszetgörbe kör.

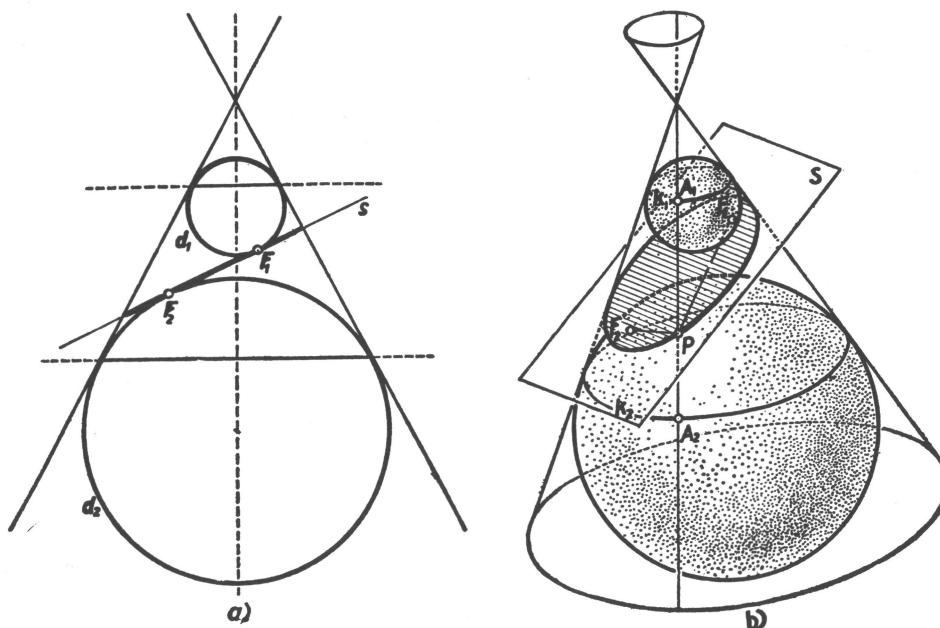


394

*Bizonyítás.* Tekintsük a kúp tengelyén átfektetett, a metsző  $S$  síkra merőleges  $R$  síkot. A kúp  $R$  síkra vetett merőleges vetülete csúcshelyet adó szögtartománypár, az  $S$  sík vetülete viszont az  $R$  és  $S$  síkok  $s$  metszévonalára. A metszetgörbe vetületét az  $s$  egyenesnek a szögtartománypárban elhelyezkedő darabjai alkotják. Az  $R$  síkban készített vetületi ábrán (394. ábra) a tengely és az  $s$  egyenes hajlásszöge a tengely és az  $S$  sík hajlásszögét adja meg.

Mindhárom esetben olyan gömböket szerepeltetünk, amelyek érintik a kúpfelületet, azaz annak minden alkotóját, és érintik a metsző síkot is. Ezeket DANDELIN-féle gömbökné<sup>5</sup> nevezzük.

a) Ha  $S$  a kúp minden alkotóját metszi, akkor a kúp tengelyéhez a félnyílásszögnél nagyobb szöggel hajlik, és az  $s$  egyenes a két vetületi szögtartomány egyikéből egy háromszöget vág le. Tekintsük az e háromszögbe írt  $d_1$  kört és az ehhez a háromszöghöz írt, az  $s$  oldalegyenest kívülről érintő  $d_2$  kört (395. ábra). E két kör az  $s$  egyenest az  $F_1, F_2$  pontokban érinti. Ezek a pontok



<sup>5</sup>\* G.P. Dandelin (ejtsd; dandölen), 1794—1847, francia mérnök, Belgiumban működött.

395

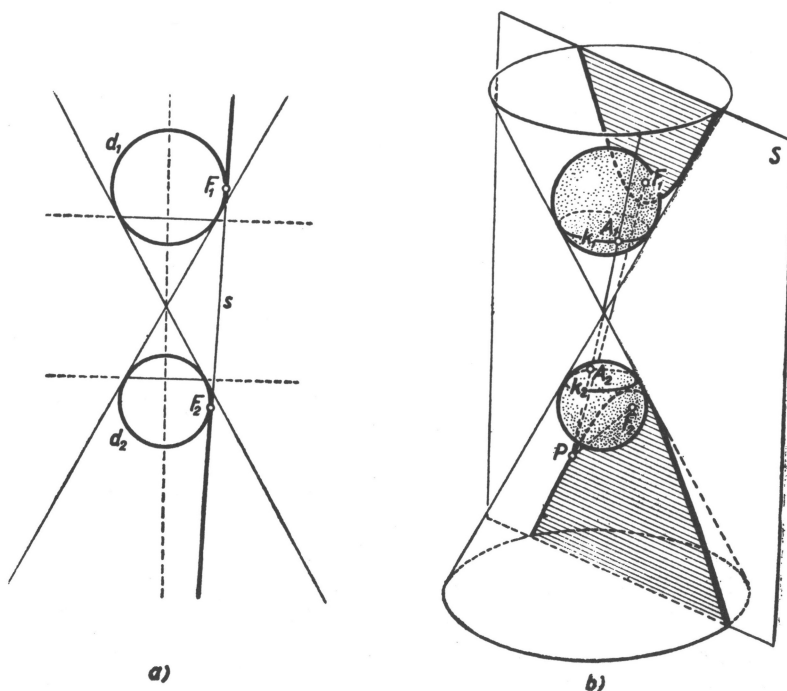
nem azonosak, mert  $s$  nem merőleges a tengelyre, hiszen  $S$  sem merőleges rá. Ha a két kört a szögtartományt felező kúptengely körül megpörgetjük, két Dandelin-féle gömbhöz jutunk, amelyek a kúpfelületet  $k_1, k_2$  körökben, az  $S$  síkot pedig az  $F_1, F_2$  pontokban érintik. Állítjuk, hogy a metszetgörbe ellipszis, és  $F_1, F_2$  a fókuszai.

Legyen  $P$  a metszetgörbe egy pontja, és mossa a  $P$  ponton áthaladó alkotó a  $k_1, k_2$  köröket az  $A_1, A_2$  pontokban. A  $P$  pont az  $A_1, A_2$  szakasz belsejében van, hiszen a vetületi ábrából kiolvasható, hogy a metszetgörbe a  $k_1, k_2$  körök síkjai között helyezkedik el. Minthogy a gömbhöz egy külső pontból vont érintőszakaszok egyenlők,  $PF_1 + PA_1$  és  $PF_2 + PA_2$ , tehát

$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2.$$

Ebből arra következtetünk (vö. B1), hogy a metszetgörbe valóban  $F_1, F_2$  fókuszú ellipszis, hiszen  $A_1, A_2$  hossza a forgásszimmetria miatt a  $P$  pont megválasztásától független állandó.

**b)** Ha  $S$  a kúp két alkotójával párhuzamos, akkor a kúp tengelyéhez a félnyílásszögnél kisebb szöggel hajlik, és  $s$  a két vetületi szögtartomány mindegyikébe belevág. Most  $s$  és a szögtartományok szárai olyan háromszöget határoznak, amely a szögtartományokon kívül helyezkedik el. Tekintsük az ehhez a háromszöghöz írt, a két szögtartomány egyikében és másikában elhelyezkedő, az  $s$  egyenest az  $F_1, F_2$  pontokban érintő  $d_1, d_2$  köröket (396.ábra). Ha ezt a két kört a szögtartományt felező kúptengely körül megpörgetjük, két Dandelin-féle gömbhöz jutunk, amelyek a kúpfelületet körökben, az  $S$  síkot pedig az  $F_1, F_2$  pontokban érintik. Állítjuk, hogy a metszetgörbe hiperbola, és az  $F_1, F_2$  pontok a fókuszai.



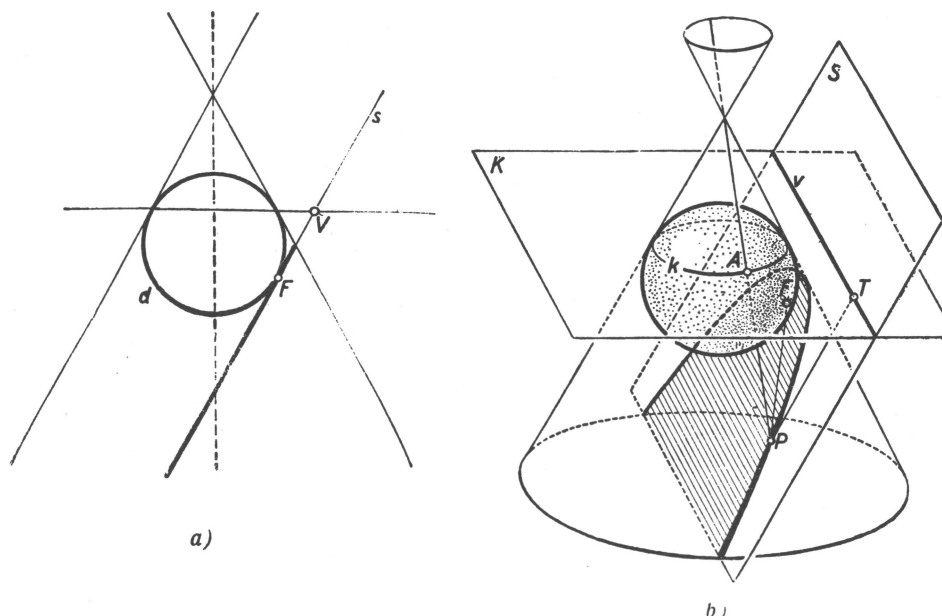
396

Legyen  $P$  a metszetgörbe egy pontja, és mossa a  $P$  ponton áthaladó alkotó a  $k_1, k_2$  köröket az  $A_1, A_2$  pontokban. A  $P$  pont az  $A_1, A_2$  szakasz meghosszabbításán van, hiszen a vetületi ábrából kiolvasható, hogy a metszetgörbe a  $k_1, k_2$  körök síkjainak közén kívül helyezkedik el. Minthogy a gömbhöz egy külső pontból vont érintőszakaszok egyenlők,  $PF_1 = PA_1$  és  $PF_2 = PA_2$ , tehát

$$|PF_1 - PF_2| = A_1A_2$$

Ebből arra következtetünk (vö. B1), hogy a metszetgörbe valóban  $F_1, F_2$  fókuszú hiperbola, hiszen  $A_1, A_2$  hossza a forgásszimmetria miatt nem függ a  $P$  pont megválasztásától.

c) Ha az  $S$  sík a kúp egyetlenegy alkotójával párhuzamos, akkor a kúp tengelyével alkotott hajlásszöge a félnyílásszöggel egyenlő, s az egyik vetületi szögtartományba vág bele és annak egyik szárával párhuzamos. Írjunk ebbe a szögtartományba olyan  $d$  kört, amely a szárakat és az  $s$  egyenest érinti, mégpedig az utóbbit az  $F$  pontban (397. ábra). Ha ezt a kört a szögtartományt



397

felező kúptengely körül megpörgetjük, egy Dandelin-féle gömbhöz jutunk, amely a kúpot a  $k$  körben, az  $S$  síkot pedig az  $F$  pontban érinti. Legyen  $v$  az  $S$  síknak és a kör  $K$  síkjának a metszésvonala. Mivel ez a két sík a vetületi ábra síkjára merőleges, a  $v$  egyenes vetülete ezen az ábrán egy  $V$  pont. Állítjuk, hogy a metszetgörbe parabola, mégpedig  $F$  a fókusz és  $v$  a vezéregyese.

Legyen  $P$  a metszetgörbe egy pontja. Messe a  $P$  ponton áthaladó alkotó a  $k$  kört az  $A$  pontban, és legyen a  $P$ -ből  $v$ -re bocsátott merőleges talppontja  $T$ . A kúp tengelye a  $PA$ ,  $PT$  egyenesek mindegyikével ugyanakkora hajlásszöget alkot, mégpedig ez a hajlásszög a kúp félnyílásszögével egyenlő.  $PA$  ugyanis a kúp alkotója,  $PT$  viszont  $s$ -sel egyező állású, hiszen az  $S$  síkon belül mindkettő merőleges  $v$ -re,  $s$  pedig párhuzamos a kúp egyik alkotójával. Eszerint a  $PT$  és  $PA$  szakaszok ugyanakkora szögben hajlanak nemcsak a kúp tengelyéhez, hanem a rá merőleges  $K$  síkhoz is. 25.1 szerint tehát  $PT = PA$ . Másrészt azonban  $PF = PA$ , hiszen egy külső pontból a gömbhöz vont érintőszakaszok egyenlők. Egyenlőségeink egybevetéséből

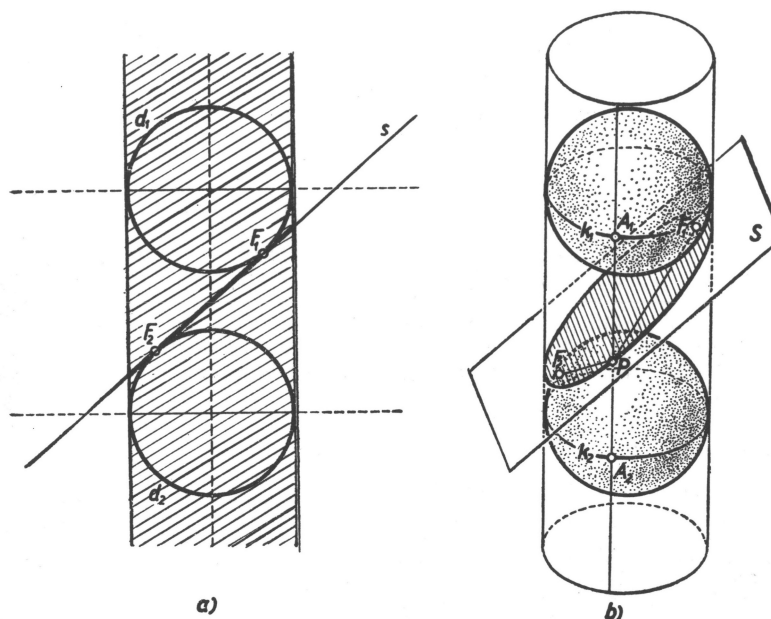
$$PF = PT$$

adódik, s ebből arra következtetünk (vö. B1), hogy a metszetgörbe valóban az  $F$  fókuszú,  $v$  vezéregyenesű parabola. —

**Tétel.** *A forgáshenger tengelyével nem párhuzamos és rá nem merőleges sík a hengerfelületet ellipsziszben metszi.*

A tengellyel párhuzamos síkban a hengerfelületnek vagy nincs pontja, vagy pedig egy vagy két alkotója van. A tengelyre merőleges sík viszont a hengert körben metszi.

**Bizonyítás.** Az előző bizonyítások mintájára Dandelin-féle gömbök segítségével dolgozunk. Tekintsük a henger tengelyéin átfektetett, a metsző  $S$  síkra merőleges  $R$  síkot. A henger  $R$  síkra vetett merőleges vetülete két párhuzamos alkotó által határolt sáv, az  $S$  sík vetülete viszont az  $S$  sík  $s$  metszésvonala (398. ábra). Minthogy az  $R$  síkban készített vetületi ábrán a



398

tengely és az  $s$  egyenes hajlásszöge a tengely és az  $S$  sík hajlásszögét adja meg,  $s$  nem párhuzamos a sáv határegyeneseivel és nem merőleges rájuk. A metszetgörbe vetülete az  $s$  egyenesnek a sávban haladó szakasza.

Tekintsük azokat a  $d_1, d_2$  köröket, amelyek érintik a sáv határegyeneseit, és az  $F_1, F_2$  pontokban érintik az  $s$  egyenest is. Ha e két kört a sáv középpárhuzamosa, azaz a henger tengelye körül megforgatjuk, akkor két Dandelin-féle gömbhöz jutunk, amelyek a  $k_1, k_2$  körökben érintik a hengerfelületet, annak minden alkotóját, az  $F_1, F_2$  pontokban pedig az  $S$  síkot. Állítjuk, hogy a metszetgörbe  $F_1, F_2$  fókuszú ellipszis.

Legyen  $P$  a metszetgörbe egy pontja, és mossa a  $P$  ponton áthaladó alkotó a  $r$  köröket az  $A_1, A_2$  pontokban. A  $P$  pont az  $A_1, A_2$  szakasz belsejében van, hiszen a vetületi ábrából kiolvasható, hogy a metszetgörbe a  $k_1, k_2$  körök síkjai között helyezkedik el. Mivel egy külső pontból a gömbhöz vont érintőszakaszok egyenlők,  $PF_1 = PA_1$  és  $PF_2 = PA_2$ , tehát

$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2.$$

Ebből arra következtetünk (vö. B1), hogy a metszetgörbe valóban  $F_1, F_2$  fókuszú ellipszis, hiszen az  $A_1, A_2$  szakasz hossza a forgásszimmetria miatt nem függ a  $P$  pont megválasztásától. —

**B1** E szakasz bizonyításainak mindegyike hiányos volt, mert minden esetben csak azt állapítottuk meg, hogy a metszetgörbe pontjainak mindegyike hozzátartozik ahhoz az alakzathoz (ellipszishoz, hiperbolához, parabolához), amelyről állítottuk, hogy a metszetgörbével azonos. Hiányzott annak az igazolása, hogy a metszetgörbe pontjai között ennek az alakzatnak valamennyi pontja szerepel. Itt ezt a hiányt pótoljuk.

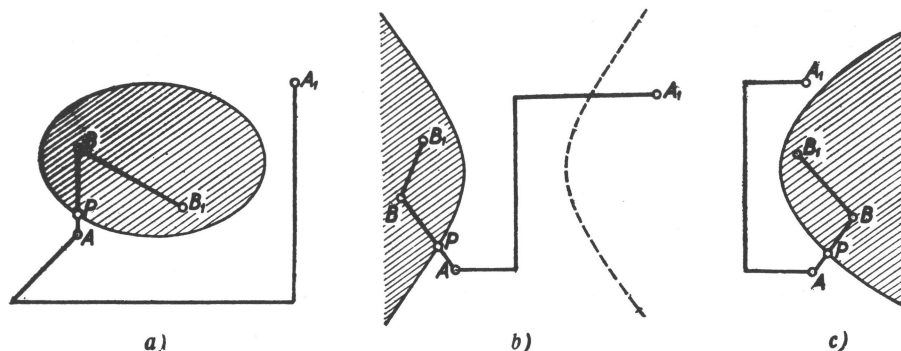
Abból indulunk ki, hogy a metszett félkúp és henger konvex testet határol. Ha tehát ezeket belső pontjukon is áthaladó síkkal metsszük, akkor konvex síkidomhoz jutunk, s ennek határa a metszett test felületének a metszete. Ezekről a határvonalakról láttuk be, hogy egy ellipszisen, hiperbolaágon vagy parabolán helyezkednek el. Bizonyításaink hiánytalanok válnak tehát, ha hivatkozhatunk arra a tényre, hogy az ellipsziszről, hiperbolaágról és paraboláról legalább egy pontot elhagyva olyan alakzathoz jutunk, amely nem lehet konvex síkidom határvonala. Ezt a szemléletesen közvetlenül belátható tényt bizonyítjuk is.

Ha a síkból egy konvex síkidom határvonalát elhagyjuk, akkor nem jutunk poligonálisan összefüggő alakzathoz, hiszen minden olyan szakasznak van a konvex síkidom határához tartozó pontja, amely



nem két belső vagy két külső pontot köt össze. Megmutatjuk viszont, hogy ha a síkból egy ellipszis, hiperbolaág vagy parabola pontjait egy  $P$  pont híján elhagyjuk, akkor poligonálisan összefüggő alakzathoz jutunk. Ebből a bizonyítandó állítás is következik.

A  $P$  ponton át mindhárom esetben olyan egyenest fektetünk, amely belső pontot is tartalmaz, és ezen az egyenesen a  $P$  pontot közrefogó külső  $A$  pontot és belső  $B$  pontot veszünk. fel (399. ábra). Minthogy az ellipszistartomány, a hiperbola ágtartománya, valamint



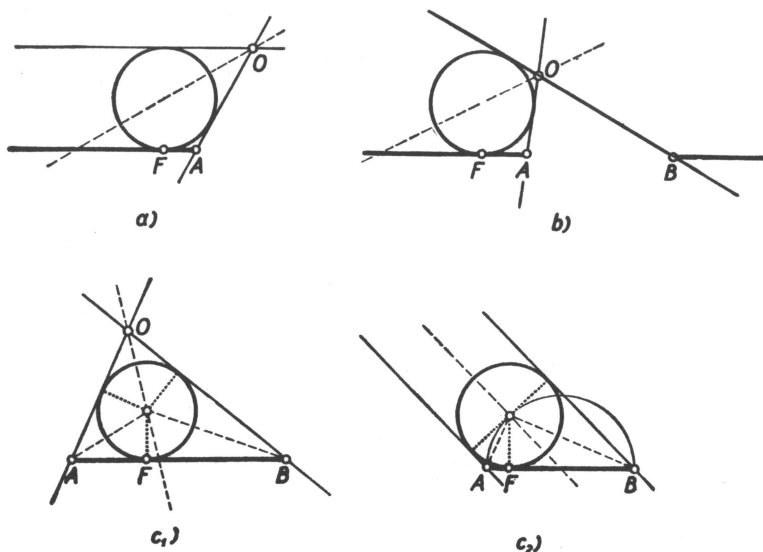
399

parabolatartomány belseje is és külseje is poligonálisan összefüggő, minden pontjukból vezet az  $A$ ,  $B$  pontok valamelyikéhez olyan törött vonal, amely a határgörbét nem éri. Az  $AB$  szakasz esetleges közvetítésével tehát az adódik, hogy ha a síkból a határgörbét a  $P$  pont híján elhagyjuk, akkor valóban összefüggő alakzathoz jutunk.

Mindehhez a hiperbola esetében csak azt kell hozzátennünk, hogy ha a metszetgörbe mindkét darabja hiperbolaág, akkor a teljes metszetgörbe teljes hiperbola.

**B2** Kiegészíthetjük e szakasz tételeit azzal, hogy minden ellipszis, hiperbola és parabola előállítható forgáskúp metszeteként, és minden ellipszist megkaphatunk forgáshenger metszése révén. Ezt minden esetben beláthatjuk úgy, hogy az adott görbe síkjára a fókuszokat tartalmazó tengely mentén merőleges síkot állítunk, ebben a síkban elkészítjük az adott görbe méreteinek megfelelően a 395a—398a vetületi ábrákat, s azután pörgetéssel megfelelő kúphoz, illetve hengerhez jutunk.

Ez az eljárás a parabolánál és hiperbolánál semmi gondot nem okoz (400. ábra). Ha  $A$  az adott parabola tengelypontja és  $F$  a fókusz, akkor az  $AF$  egyenest  $F$ -ben érintő kört, ehhez  $A$ -ból második érintőt és az  $AF$  egyenessel párhuzamos érintőt szerkesztünk. Ha  $AB$  az adott hiperbola nagytengelye és  $F$  egy fókusz, akkor az  $AB$  egyenest  $F$ -ben érintő kört, s ehhez  $A$ -ból és  $B$ -ből második érintőt szerkesztünk.



Az ellipszis esetében is szerkeszthetünk az adott  $AB$  nagytengelyt az egyik adott  $F$  fókuszban érintő kört, s ehhez  $A$ -ból és  $B$ -ből második érintőt, kérdéses azonban, hogy a szerkesztett érintők metszik-e egymást, hogy tehát kúphoz vagy hengerhez jutunk-e. Ez attól függ, hogy a szerkesztett érintők érintési pontjaihoz vezető sugarak egyenesszöget alkotnak-e. E két sugár által határolt, az  $AB$  szakaszt tartalmazó szögtartomány kétszerese annak a szögnek, amekkora szögben az  $AB$  szakasz a körközéppontból látható. Hengerhez vagy kúphoz jutunk tehát aszerint, hogy az  $AB$  szakasz a körközéppontból derékszögben látható-e vagy sem, hogy tehát a kör középpontját az  $AB$  szakasz Thales-körén vesszük-e fel vagy sem.

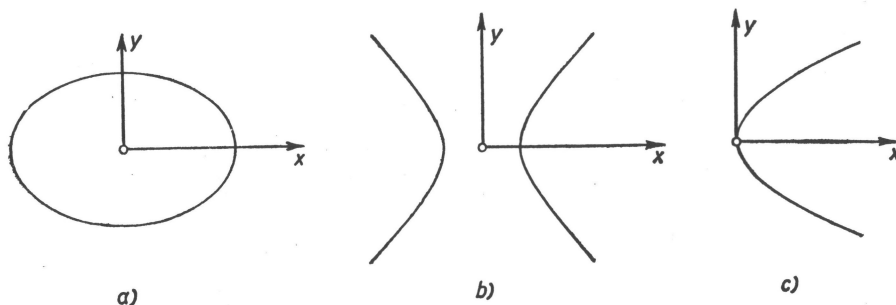
Közvetlenül kiolvasható a most megismert szerkesztésekből, hogy a parabola és az ellipszis esetében még akkor is elvégezhető a szerkesztés, ha a kúp félnyílásszögét előre megadjuk. A hiperbolával kapcsolatos szerkesztésről nem mondhatjuk el ugyanezt, mert ott a félnyílásszög egy a hiperbola adataitól függő szögnél kisebb nem lehet. Ebben az esetben az  $AOBA$ -et kell ugyanis megszerkeszteni, ha adva van  $BF = s$ , az  $AB$  oldal és a szemközti szög; ez éppen a 22.5-ben vizsgált szerkesztés, s ott láttuk, hogy  $a$  és  $b + c$  ismerete az  $a$  szög számára alsó korlátot szab. Ezek szerint bármely kúp síkmetszetei között minden ellipszis és parabola szerepel, de megadott hiperbolához csak akkor juthatunk, ha a kúp félnyílásszöge elég nagy.

A hengerrel kapcsolatos szerkesztésből is kiolvasható, hogy a henger sugara a metszetellipszis kis féltengelyével egyenlő, hogy tehát megadott ellipszishez csak ilyen sugarú hengernél juthatunk.

**B3** Ha a kört is az ellipszisek közé soroljuk, akkor e szakasz tételeit ferde körkúpra és ferde hengerre is kimondhatjuk, a metsző síkról egyedül azt kötvé ki, hogy ne haladjon át a kúp csúcán, illetőleg ne legyen párhuzamos a henger alkotóival. Ezt itt nem bizonyítjuk, csak utalunk arra, hogy későbbi tárgyalásunkból ez is könnyen következik majd (lásd 50.8 B5).

**B4** Megtehetnők, hogy a kúpszeletek különféle tulajdonságainak bizonyításakor a kúp metszeteiként való származtatásukra építünk. Igen egyszerűvé válnék így pl. annak bizonyítása, hogy a kúpszeleteknek minden pontjukban van érintőjük, és csak egy érintőjük van. Más esetekben is előfordul, hogy síkgeometriai problémák tárgyalása azzal válik egyszerűvé, hogy térgeometriai okoskodást alkalmazunk. Sokszor részesítik mégis előnyben az olyan tárgyalást, amely síkgeometriai feladat megoldásába nem kever idegen elemként még térgeometriát sem. A következőkben mi is tisztán síkgeometriai úton tárgyaljuk a kúpszeleteket.

**41.8** Megismerjük itt a kúpszeletek egyenletét megfelelően választott koordináta-rendszerben. Az ellipsziszén és hiperbolánál a középpontot, parabolánál a tengelypontot választjuk a koordináta-rendszer kezdőpontjául, a koordinátatengelyeket pedig úgy választjuk meg, hogy a fókuszok minden esetben az  $x$ -tengelyen legyenek, s a parabola esetében az  $x$ -tengely iránya a parabolatengelyével egyezze meg (401. ábra). A kúpszeletnek az ilyen koordináta-rendszerben felírt, alább tárgyalt egyenletét *kanonikus* egyenletnek mondjuk (középponti, illetve tengelyponti egyenlet).



**Tétel.** Ha  $a$  és  $b$  az ellipszis nagy és kis féltengelye, akkor kanonikus egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

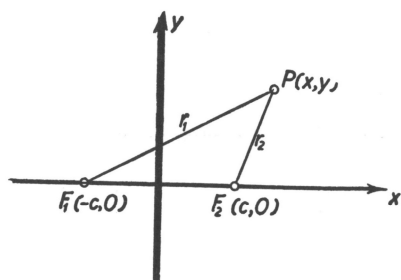
**Tétel.** Ha  $a$  és  $b$  a hiperbola valós és képzetes féltengelye, akkor kanonikus egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Bizonyítás.* A két tételt egyszerre bizonyítjuk. Jelölje  $r_1$  és  $r_2$  a sík tetszőleges  $P(x, y)$  pontjának az  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$  fókuszoktól való távolságát (402. ábra).

Állítjuk, hogy az

$$(r_1 + r_2 + 2a)(r_1 + r_2 - 2a)(r_1 - r_2 + 2a)(-r_1 + r_2 + 2a) = 0$$



402

egyenlet, ha  $a > c$ , akkor a  $2a$  nagytengelyű ellipszis pontjaira és csak azokra, ha viszont  $a < c$ , akkor a  $2a$  valós tengelyű hiperbola pontjaira és csak azokra teljesül. Ehhez elég azt meggondolnunk, hogy az első tényező nem lehet 0, hiszen nem negatív számok összege és közülük  $2a$  pozitív, hogy továbbá a második tényező akkor és csak akkor 0, ha  $r_1 + r_2 = 2a$ , és ez az  $r_1 + r_2 \geq 2c$  háromszög-egyenlőtlenség miatt az  $a < c$  esetben nem következhetik be, hogy végül az utolsó két tényező valamelyike akkor és csak akkor 0, ha  $|r_1 - r_2| = 2a$ , és ez az  $|r_1 - r_2| \leq 2c$  háromszög-egyenlőtlenség miatt az  $a > c$  esetben nem következhetik be.

A feladatunk most már csak az, hogy a fenti egyenletet úgy alakítsuk át, hogy benne a  $P$  pont koordinátái szerepeljenek. Evégből az összegeket és különbségeket összeszorozva egyenletünket

$$\left[ (r_1 + r_2)^2 - 4a^2 \right] \left[ 4a^2 - (r_1 - r_2)^2 \right] = 0$$

azaz

$$\left[ 2r_1r_2 + (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2) \right] \left[ 2r_1r_2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2) \right] = 0$$

alakban írjuk, majd újabb szorzással a

$$4r_1^2r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4a^2)^2 = 0$$

egyenlethez, és ezt átalakítva a

$$-(r_1^2 - r_2^2)^2 + 8a^2(r_1^2 + r_2^2) - 16a^4 = 0$$

eredményhez jutunk.

Az  $r_1$ ,  $r_2$  távolságokra a pontok koordinátái alapján

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2,$$

$$r_2^2 = (x - c)^2 + y^2,$$

és így

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx, \quad r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2).$$

Ha ezeket a fenti eredménybe helyettesítjük, kúpszeleteink

$$-16c^2x^2 + 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) - 16a^4 = 0$$

alakban írt egyenletéhez jutunk. Ezt 16-tal osztva és rendezve

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

és végül a jobb oldali kifejezéssel osztva

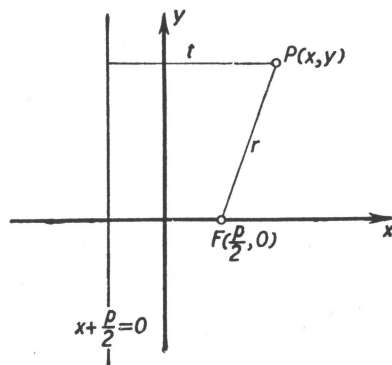
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

lesz az eredmény, ami tételeink állítását adja, hiszen az ellipsziszénél  $a^2 - c^2 = b^2$ , a hiperbolánál pedig  $a^2 - c^2 = -b^2$ . —

**Tétel.** *A  $p$  paraméterű parabola kanonikus egyenlete*

$$y^2 = 2px.$$

*Bizonyítás.* A koordináta-rendszer felvétele folytán  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  a fókusz, és  $x + \frac{p}{2} = 0$  a vezéregyenes egyenlete (403. ábra). Jelölje  $r$  és  $t$  a  $P(x, y)$  pontnak a fókuszról és a vezéregyenestől való távolságát. A  $P$  pont akkor és csak akkor van a parabolán, ha  $r = t$ , ha tehát



403

$$r^2 = t^2,$$

hiszen két nem negatív szám akkor és csak akkor egyenlő, ha négyzeteik egyenlők.

Az  $r$ ,  $t$  távolságokra

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad t = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

hiszen a vezéregyenes megadott egyenlete normálegyenlet. Ha ezeket a fenti összefüggésbe helyettesítjük, a parabola

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

alakban írt egyenletéhez jutunk, és ebből egyszerű átalakítás a tételben megadott egyenlethez vezet. —

**Tétel.** Az előző három tételben szereplő ellipszis, hiperbola és parabola tartományának pontjaira

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px,$$

és ezek az egyenlőtlenségek csak ezeknek a tartományoknak a pontjaira teljesülnek.

Mondhatjuk, hogy a felírt egyenlőtlenségek a tartományok egyenlőtlenségei, ugyanabban az értelemben, ahogyan egy alakzat egyenletéről beszélünk.

*Bizonyítás.* a) Az ellipszis és hiperbola esetében tekintsük azt a négytényezős szorzatot, amely egyenleteik levezetésekori kiindulásul szolgált. Ez a szorzat csak a külső pontokra pozitív, mert a háromszög-egyenlőtlenség folytán az ellipszis esetében az  $r_1 + r_2 - 2a$  tényező kivételével, a hiperbola esetében pedig a  $2a - |r_1 - r_2|$  tényező kivételével csupa olyan tényező szerepel, amelyeknek értéke mindig pozitív, a mondott tényezők viszont a külső pontok definíciója szerint csak a külső pontokra pozitívak.

Beláttuk ezzel, hogy ha az ellipszis és hiperbola egyenletének levezetése során felírt egyenletekben, a legutolsót kivéve, az egyenlőség jele helyett  $\leq$  jelet írunk, akkor olyan egyenlőtlenséget kapunk, amely csak a kúpszelet tartományának pontjaira teljesül. Helyes maradt ez akkor is, amikor a pozitív értékkel osztottunk. Legutoljára azonban  $(a^2 - c^2)$ -tel is osztottunk, és az az  $a > c$ ,  $a < c$  eseteknek megfelelően pozitív vagy negatív. Ezért az egyenlőtlenség iránya az ellipszis esetében mindvégig változatlan marad, a hiperbola esetében viszont megfordul.

b) A parabolatartomány pontjait az  $r \leq t$  egyenlőtlenség jellemzi, és ez  $r^2 \leq t^2$  alakban is írható, hiszen  $r$  és  $t$  nem negatív értékek. A parabola egyenletének levezetéséből kiolvashatjuk tehát, hogy a tétel egyenlőtlensége valóban csak a parabolatartomány pontjaira teljesül. —

**B** Bebizonyítjuk, hogy a 401. ábrán bemutatott kanonikus elhelyezkedésű koordináta-rendszerekben a kúpszeleteknek nincs más másodfokú egyenletük, mint a tételeinkben megadott kanonikus egyenletek és azok, amelyek belőlük 0-tól különböző számmal szorozva keletkeznek.

Abból indulunk ki tehát, hogy

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a kanonikus helyzetű kúpszelet egyenlete. 38.2 B3 módszerét alkalmazzuk.

a) Az ellipszis és a hiperbola esetében a kezdőpontra vonatkozó szimmetriából  $D = E = 0$  következik, hiszen egy egyenes nem tartalmazhatja a görbe minden pontját. Az  $x$ -tengelyre vonatkozó szimmetriából  $B = 0$  is következik, mert a görbe minden pontja nincs a tengelykeresztben. Így tehát görbénk egyenlete csak

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

alakú lehet, és itt az  $A$ ,  $C$ ,  $F$  értékek egyike sem lehet 0, mert görbepontok abszcisszái és ordinátái nem mind egyenlők, és a kezdőpont nem tartozik a görbéhez.

Az ellipszis esetében  $A$  és  $C$  előjele  $F$  előjelével ellentétes, mert különben nem volna az ellipszisnek a tengelyeken pontja. Ezenkívül  $|A| < |C|$  is teljesül, mert ellipszisünk az  $x$ -tengelyből nagyobb szeletet vág le mint az  $y$ -tengelyből.

A hiperbola esetében  $A$  előjele  $F$  előjelével ellentétes,  $C$  előjele pedig egyező, mert hiperbolánknak az  $x$ -tengelyen van pontja, az  $y$ -tengelyen pedig nincs.

Ezek szerint a  $-F \neq 0$  értékkel osztva mind a két esetben a tételeinkben megadott kanonikus egyenletekhez jutunk.

b) A parabola esetében  $F = 0$ , mert a parabola áthalad a kezdőponton. Csak  $C \neq 0$  lehetséges, mert különben nem volna olyan  $x = 0$  egyenes, amely a parabolát két pontban metszi. Az  $x = 0$  egyenes viszont a parabolát csak a kezdőpontban éri, s ebből  $C \neq 0$  miatt  $E = 0$  adódik. Ebből  $D \neq 0$  következik, mert a parabola a kezdőpontra nem szimmetrikus. Mivel az  $y = 0$  egyenes a parabolát csak a kezdőpontban éri,  $D \neq 0$  miatt  $A = 0$ . Végül  $B = 0$ , mert a parabola az  $x$ -tengelyre szimmetrikus, és nincs a tengelykeresztben. Eszerint

$$Cy^2 + Dx = 0$$

alakú az egyenlet, és itt  $C, D$  értékek egyike sem 0. Mivel a parabolának van pozitív abszcisszájú pontja,  $C$  és  $D$  előjele ellentétes, tehát  $C \neq 0$  számmal osztva a tételbeli kanonikus egyenlethez jutunk.

Megjegyezzük, hogy későbbi vizsgálataink a most mondottakat majd feleslegessé teszik (lásd 47.5 B2). Az itt bizonyítottakból következik, hogy ha egy kúpszeletnek akármilyen koordináta-rendszerbeli másodfokú egyenleteit tekintjük, akkor ezek is csak egy 0-tól különböző számtényezőben különbözhetnek egymástól, hiszen a kanonikus helyzetű koordináta-rendszerből koordinátatranszformációval tetszőleges másik koordináta-rendszerre térhetünk át.

## 42.§ A kúpszeletek fokális tulajdonságai

A kúpszeletek olyan tulajdonságaival ismerkedünk meg, amelyekben a fókuszok fontos szerepet játszanak, s amelyeket ezért *fokális tulajdonságoknak* nevezünk. E tulajdonságok tárgyalását a kúpszeletek érintőinek vizsgálatával kezdjük. A tárgyalás nagyrészt elemi geometriai, csak az utolsó három szakaszé lesz analitikus.

**42.1 Tétel.** *A kúpszelet bármely pontjában egyetlenegy érintő vonható. Ez az érintő az ellipszis esetében jelezi a ponthoz vezető rádiusz vektorok szögének mellékszögeit, a hiperbola esetében a ponthoz vezető rádiusz vektorok szögét, a parabola esetében pedig a ponthoz vezető rádiusz vektor és a pontból a vezéregyenesre bocsátott merőleges szögét.*

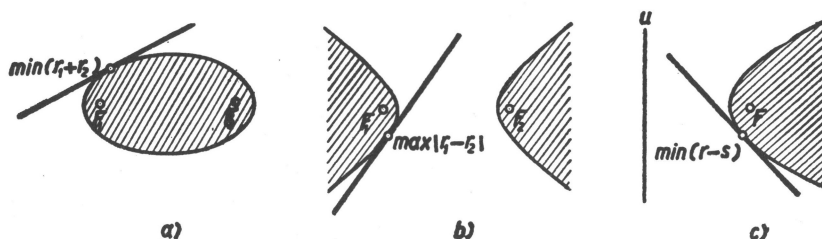
A tétel szerint tehát az ellipszis, hiperbola és parabola bármely pontjához egyetlen olyan egyenes található, amely áthalad ezen a ponton, és minden más pontja a kúpszeleten kívül van.

*Bizonyítás.* Az ellipszis, a hiperbola és a parabola esetét egyszerre tárgyaljuk. Ha három esetről szólnunk, akkor ez erre a három görbére vonatkozik. Az első két esetben  $r_1$  és  $r_2$  a fókuszoktól való távolságot, a harmadikban pedig  $r$  és  $s$  a fókuszoktól való távolságot, valamint egy a vezéregyenessel egyező állású és ugyanúgy orientált  $u$  egyenestől mért előjeles távolságot jelenti.

a) A kúpszelet  $P$  pontján áthaladó egyenes akkor és csak akkor érintő, ha az egyenes pontjaihoz tartozó  $r_1 + r_2$ ,  $|r_1 - r_2|$  vagy  $r - s$  értékek körében

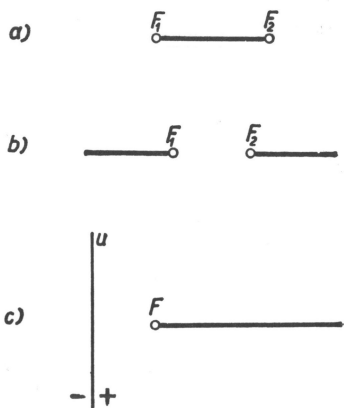
$$\min(r_1 + r_2), \quad \max|r_1 - r_2|, \quad \min(r - s)$$

létezik, és csak a  $P$  ponthoz tartozik (404. ábra). A kúpszelet pontjaihoz ugyanis az első két esetben  $2a$ , a parabola esetében pedig valamilyen  $c$  állandó tartozik; a  $P$  ponton áthaladó egyenes meg akkor és csak akkor érintő, ha a



többi pontja külső pont, ha tehát a hozzájuk tartozó érték a három esetben rendre  $2a$ -nál nagyobb,  $2a$ -nál kisebb, illetőleg  $c$ -nél nagyobb. Megjegyezzük hogy itt a parabola esetében azért áll 0 helyett  $c$ , mert nem a vezéregyenessel dolgozunk, tehát  $s$  a vezéregyenestől mért előjeles távolságtól egy állandóban különbözik.

A tétel bizonyítása céljából megvizsgáljuk, hogy a sík tetszőleges egyenesének a pontjai közül melyik adja a felírt szélsőértéket, s hogy egyetlenegy ilyen pontja van-e. Ezt követően arról lesz szó, hogy a sík megadott  $P$  pontján áthaladó egyenesek közül melyiken adja egyedül a  $P$  pont a vizsgált szélsőértéket. Így majd a kúpszelet érintőihez jutunk.



b) Előkészítésül arra a kérdésre felelünk, hogy a sík valamennyi pontja közül melyek adják szélsőérték-feladataink megoldását. Ezek a pontok az ellipszisnek megfelelő esetben az  $F_1F_2$  szakaszt, a hiperbolának megfelelő esetben az  $F_1F_2$  szakasz meghosszabbításait, a parabolának megfelelő esetben pedig az  $F$ -ből  $u$ -ra merőlegesen, pozitív irányban induló félegyenest alkotják (405. ábra).

Állításunk az első két esetben közvetlenül következik a háromszög-egyenlőtlenségből, s csak a harmadik esetben van alátámasztására szükség. Itt is könnyen belátható, hogy  $r - s$  értéke a megadott félegyenes pontjaira ugyanannyi, mint  $F$ -re, minden más pontra pedig nagyobb. Ha ugyanis  $F$ -ből pozitív irányban mozdulunk el, akkor  $r$  és  $s$  ugyanannyival nő,  $r - s$  tehát változatlan; ha negatív irányban történik az elmozdulás, akkor  $r$  nő, és  $s$  fogy,  $r - s$  tehát növekszik; ha végül a már említett helyzetekből  $u$ -val párhuzamosan mozdulunk el, akkor  $r$  nő, és  $s$  változatlan,  $r - s$  tehát ismét növekszik.

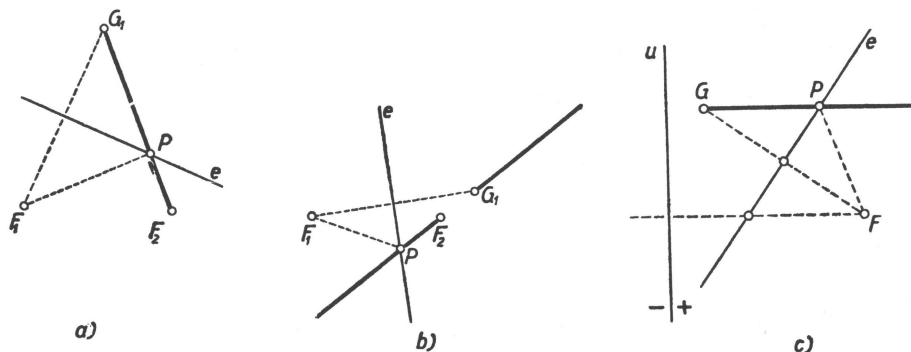
c<sub>1</sub>) Rátérünk annak vizsgálatára, hogy egy  $e$  egyenes pontjai közül melyek adják szélsőérték-feladataink megoldását, és mikor adja egyetlenegy pont.

Azzal a megállapítással kezdjük, hogy ha  $e$ -nek van a b)-ben említett, a 405. ábrán bemutatott alakzattal közös pontja, akkor nyilván az ilyen közös pont adja a szélsőérték-feladat megoldását az  $e$  egyenes pontjainak szőkébb körén belül is.

Ilyenkor tehát a feladat megoldása egy vagy több ponthoz vezethet. Egy pont adódik akkor, ha  $e$  nemcsak áthalad az említett alakzat egy pontján, hanem annak egyenesét is metszi.

c<sub>2</sub>) Minthogy egy egyenes pontjai az egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő pontoktól egyenlő távolságra vannak, szélsőérték-feladatunk megoldása nem változik meg, ha a fókuszok valamelyikét az  $e$  egyenesre vonatkozó tükröképével helyettesítjük. Ha tehát az  $e$  egyenesről szóló feladat c<sub>1</sub>) módszerével nem volt megoldható, akkor a mondott tükrözés után ez a módszer mégiscsak elvezethet a megoldáshoz (406. ábra). Ilyenkor a feladat megoldásaképpen az  $e$  egyenesnek mindig egyetlenegy pontjához jutunk, hiszen  $e$  nem tartalmazhatja a tükrözött fókuszot, mert akkor az eredetit is tartalmazná, s a feladat c<sub>1</sub>) módszerével is megoldható volna.

Ha az ellipszis és hiperbola esetében  $F_1$  tükörképét  $G_1$ , a parabola esetében pedig  $F$  tükörképét  $G$  jelöli, és a most megismert módszer a  $P$  ponthoz vezet, akkor  $e$  a szimmetria miatt felezi az  $F_1PG_1$ , illetőleg  $FPG$  szöget. Az ellipszis esetében ez azt jelenti, hogy  $e$  felezi az  $F_1PF_2$  szög mellékszögeit, hiszen  $P$  a  $G_1F_2$  szakaszon van, s ezért  $PG_1$  és  $PF_2$  ellentétes irányú; a hiperbola esetében  $e$  felezi az  $F_1PF_2$  szöget, hiszen  $P$  a szakasz meghosszabbításán van, s ezért  $PG_1$  és  $PF_2$  egyező irányú; a parabola esetében  $e$  felezi a  $PF$  szakasz és a  $P$ -ből a vezéregyenesre bocsátott merőlegesszakasz szögét, hiszen  $P$  a  $G$ -ből pozitív irányban induló félegyenesen van, s ezért  $PG$  negatív irányú, azaz az említett merőlegessel egyirányú.



406

$c_3$ ) Megvizsgáljuk, hogy melyek azok az egyenesek, amelyeken sem  $c_1$ ), sem  $c_2$ ) módszere nem oldja meg szélsőérték-feladatunkat. Megmutatjuk, hogy ezeken az egyeneseken vagy nincs is megoldás, vagy pedig nem egyetlenegy pont adja a megoldást.

Az ellipszis esetében nincs ilyen egyenes. Ha ugyanis  $c_1$ ) nem vezet eredményhez, tehát  $e$  nem éri az  $F_1F_2$  szakaszt, akkor ezek a pontok egy  $e$  határolta félsík belsejében vannak,  $e$  tehát elválasztja a  $G_1$ ,  $F_2$  pontokat. Ilyenkor tehát  $c_2$ ) vezet eredményhez, hiszen  $e$  metszi a  $G_1F_2$  szakaszt.

A hiperbola esetében  $c_1$ ) akkor nem ad megoldást, ha  $e$  vagy párhuzamos  $F_1F_2$ -vel, vagy pedig metszi az  $F_1F_2$  szakaszt. Az utóbbi esetben  $G_1$  és  $F_2$ , ugyanannak az  $e$  határolta félsíknak a belsejében van, ezért ilyenkor  $c_2$ ) vezet el a megoldáshoz, kivéve azt az esetet, amikor  $G_1$  és  $F_2$  azonos, vagy pedig  $G_1F_2$  párhuzamos  $e$ -vel, amikor tehát  $F_1$  és  $F_2$  az  $e$  egyenes két oldalán, tőle ugyanakkora távolságra van, azaz  $e$  áthalad a hiperbola középpontján. Ezek szerint az  $F_1F_2$ -vel párhuzamos, valamint a középponton áthaladó egyeneseket kell vizsgálnunk. Ezek az egyenesek vagy a képzetes tengelyre, vagy pedig a középpontra vonatkozólag szimmetrikusak, szimmetrikus pontjaikhoz ugyanaz az  $|r_1 - r_2|$  érték tartozik. Ezért csak a szimmetriatengely pontja vagy a szimmetriacentrum adhatja egyetlen pontban megvalósuló maximális értéket. Ezek a pontok azonban a képzetes tengelyen vannak, és a hozzájuk tartozó  $|r_1 - r_2| = 0$  érték nem lehet maximális.

A parabola esetében csak a tengellyel párhuzamos egyeneseket kell megvizsgálnunk, mert ha  $e$  metszi a tengelyt, akkor a metszéspont vagy az  $F$ -ből pozitív irányban induló félegyenesen van, tehát  $c_1$ ) célhoz vezet, vagy pedig az  $F$ -ből negatív irányban induló félegyenes belső pontja, s ekkor az  $FG$  szakasz felezőpontjára vonatkozó szimmetria miatt  $e$  metszi a  $G$ -ből pozitív irányban induló félegyeneset, azaz  $c_2$ ) módszere vezet eredményhez. A tengellyel párhuzamos egyenesen viszont nincs  $(r - s)$ -nek minimuma, mert ha rajta egy pontot negatív irányban valamilyen távolságra viszünk, akkor  $s$  ezzel a távolsággal csökken,  $r$  pedig a háromszög-egyenlőtlenség miatt ennél kevesebbel változik,  $r - s$  tehát növekszik.

Beláttuk, hogy ha szélsőérték-feladatunk az  $e$  egyenesre  $c_1$ ) és  $c_2$ ) módszerével nem oldható meg, akkor valóban nem adhatja rajta egyetlenegy pont a megoldást.

$d$ ) Rátérünk annak vizsgálatára, hogy a sík megadott  $P$  pontján át mikor fektethető olyan egyenes, amelyen a szélsőérték-feladat megoldását egyedül  $P$  adja. Már beláttuk, hogy minden ilyen egyenesen vagy  $c_1$ ), vagy  $c_2$ ) módszere elvezet a  $P$  ponthoz.



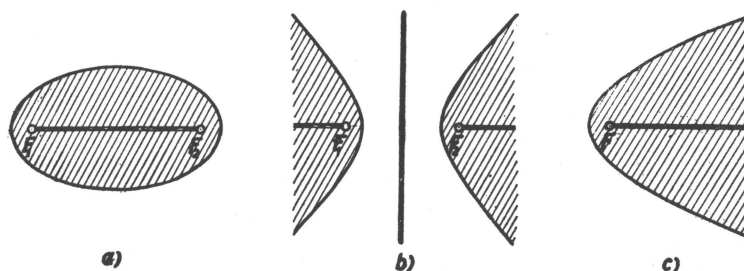
Ha  $P$  az egész síkban szélsőértéket adó, a 405. ábrán bemutatott alakzatokon van, akkor  $c_1$ ) vezet el a megoldáshoz, és az alakzat egyenesét metsző egyenesek mindegyikén csak a  $P$  pontot adja megoldásul.

Ha  $P$  nincs az említett alakzaton, és az  $e$  egyenesen egyedül  $P$  adja a szélsőértéket, akkor  $c_2$ ) módszere vezet el  $P$ -hez,  $e$  tehát csak a  $c_2$ )-ben említett szögfelező lehet. Megvizsgáljuk, hogy ezen a szögfelezőn valóban csak a  $P$  pont ad-e szélsőértéket, azaz  $c_2$ ) módszere alkalmazható-e és a  $P$  ponthoz vezet-e. Megmutatjuk, hogy ez valóban így van, csak a hiperbola esetében kell kirekeszteni azokat a  $P$  pontokat, amelyek a képzetes tengelyen vannak.

Az ellipszis esetében ez abból következik, hogy ha a szög szárának pontját a mellékszögek felezőjére tükrözzük, akkor a másik szár meghosszabbításának egy pontjához jutunk, s ezért a  $G_1F_2$  szakasz az  $e$  szögfelezőt a  $P$  csúcsban metszi. Ha a hiperbola esetében, akkor  $F_1P \neq F_2P$  nem azonos a szögfelezőre vonatkozó tükröképpel, ezért az egyik szár  $G_1F_2$  szakaszához jutunk, és a  $P$  csúcs  $e$  szakasz meghosszabbításának belső pontja; ha viszont  $P$  a képzetes tengelyen van, akkor  $G_1$  és  $F_2$  azonos, s ezért  $c_2$ ) módszere nem alkalmazható. A parabola esetében nincs kivétel, mert a felezett szög  $PG$  szára negatív irányú, s ezért a pozitív irányú  $GP$  félegyenes a szögfelezőt  $P$ -ben metszi.

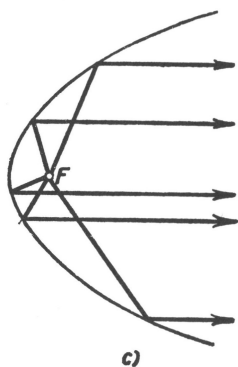
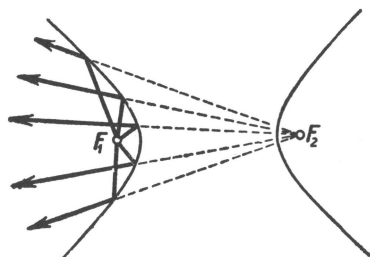
Összefoglalva elmondhatjuk, hogy a  $P$  ponton át akkor halad egyetlen olyan egyenes, amelyen csak  $P$  ad szélsőértéket, ha  $P$  nincs a 405. ábra alakzatain, és a hiperbola esetében nincs a képzetes tengelyen sem.

e) A kúpszeletek pontjai nem tartoznak a most említett kivételes pontokhoz, hiszen mindezekről már megállapítottuk, hogy a kúpszelet belső vagy külső pontjai (407. ábra). Így tehát bármely kúpszelet bármely pontján át



407

egyetlen olyan egyenes halad, amelyen csak maga a pont ad szélsőértéket, és ezen az egyenesen  $c_2$ ) módszere vezet el a ponthoz. Ez a) szerint azt jelenti, hogy a pontban egyetlenegy érintő vonható,  $c_2$ )-ben mondottak szerint felezi a tételben is említett szöget. —



A bizonyított tételnek érdekes fizikai átfogalmazást adhatunk. A fényvisszaverődés törvényéből következik, hogy ha kúpszeleteink egy tükröző felület keresztmetszetei, mégpedig a tükröző felület a kúpszelet minden pontjában merőleges a kúpszelet síkjára, akkor a kúpszelet síkjában haladó sugarakra szorítkozva a következőket állapíthatjuk meg (408. ábra): Az ellipszis egyik fókuszának képe az ellipszis másik fókusza; a hiperbola egyik fókuszának virtuális képe a hiperbola másik fókusza; a parabola tengelyével párhuzamosan érkező sugarak visszaverődés után a parabola fókuszán haladnak át, illetőleg a parabola fókuszából induló sugarak a tengely irányában távoznak. Ezzel rámutattunk a fókusz (= tüzhely) és gyújtópont szavak használatának eredetére.

**42.2 Tétel.** Azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekhez a kúpszelet (egyik) fókuszát a kúpszelet érintőire tükrözve jutunk.

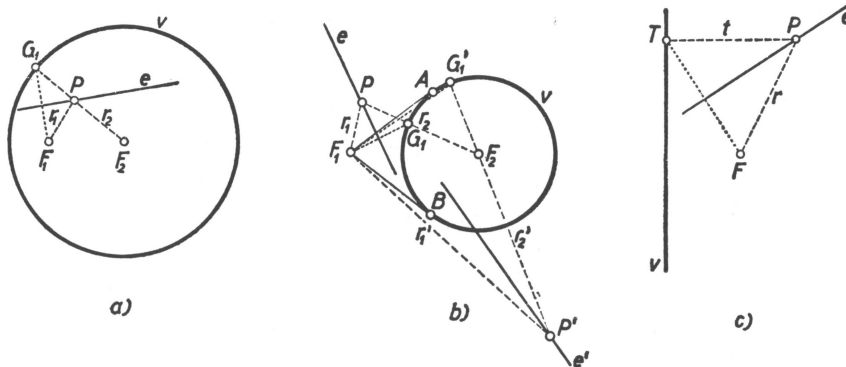
- a) az ellipszis esetében a másik fókusz körül írt vezérkör,
- b) a hiperbola esetében az az alakzat, amelyet a másik fókusz körül írt vezérkörből kapunk, ha pontjai közül elhagyjuk a tükrözött fókuszról a vezérkörhöz vont két érintő érintési pontját,
- c) a parabola esetében a vezéregyenes.

---

422

Ha viszont  $G_1$ , az  $F_2$  körül  $2a$  sugárral írt vezérkör egy pontja, akkor az  $F_1G_1$  szakasz felezőmerőlegese metszi az  $F_2G_1$  sugarat egy  $P$  pontban, mert  $F_1F_2 < G_1F_2$ . Ez a  $P$  pont az ellipszisen van, mert  $F_1P = G_1P$  miatt  $F_1P + F_2P = F_2G_1 = 2a$ . A már említett felezőmerőleges a  $P$  pánban vont érintő, mert felezi a  $P$ -hez vezető rádiusz vektorok szögének mellékszögeit. A  $G_1$  pont tehát az  $F_1$  fókuszának egy érintőre vonatkozó tükörképe.

b) Ha a hiperbola  $F_1$  fókuszát a hiperbola  $P$  pontjában vont érintőjére tükrözzük, akkor a kapott  $G_1$  pontra az előző szakasz szerint  $F_2G_1 = |G_1P - F_2P|$ , és ezért  $G_1$  az  $F_2$  körül  $|r_1 - r_2| = 2a$  sugárral írt körön van.  $G_1$  nem lehet az  $F_1$ -ből a körhöz vont érintők  $A, B$  érintési pontjával azonos, hiszen metszi a kúpszelet érintőjét, s ezért az utóbbira merőleges  $F_1G_1$ -re nem merőleges, márpedig az  $A, B$  pontokhoz vezető sugarak a pontokban vont körérintőkre merőlegesek.



409

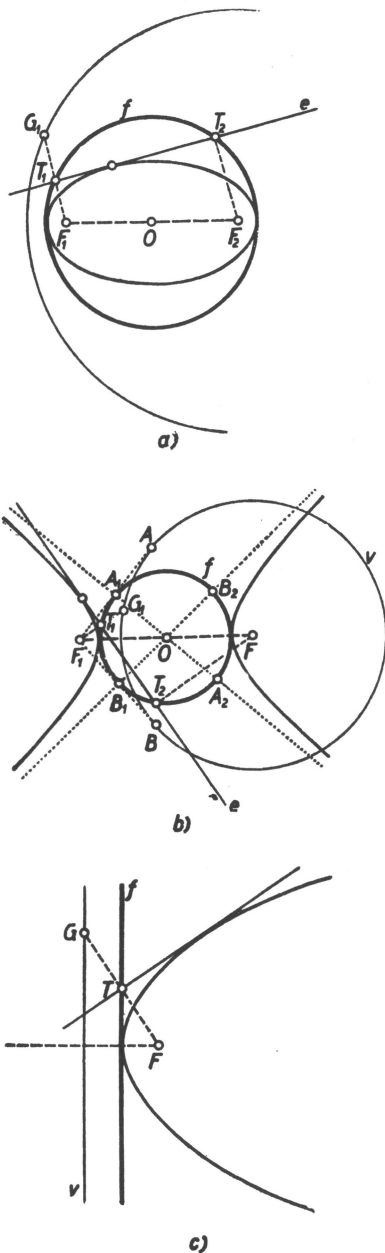
Legyen most  $G_1$  az körül  $2a$  sugárral írt vezérkörnek az  $A, B$  pontoktól különböző pontja. Az  $F_1G_1$  szakasz nem merőleges tehát az  $F_2G_1$  sugarra, s ezért felezőmerőlegese az  $F_2G_1$  egyenest egy  $P$  pontban metszi. Ez a  $P$  pont a hiperbolán van, mert  $F_1P = G_1P$  miatt  $|F_1P - F_2P| = F_2G_1 = 2a$ . Az imént említett felezőmerőleges a  $P$  pontban vont érintő, mert felezi a  $P$ -hez vezető rádiusz vektorok szögét. A  $G_1$  pont ezek szerint az  $F_1$  fókuszának egy érintőre vonatkozó tükörképe.

c) Ha a parabola  $F$  fókuszát a parabola  $P$  pontjában vont érintőre tükrözzük, akkor az előző szakasz szerint a vezéregyenest  $T$  pontban merőlegesen metsző  $PT$  fűlegyenestek egy pontjához, mégpedig  $r = t$  miatt éppen a  $T$  ponthoz jutunk.

Ha viszont  $T$  a vezéregyenes egy pontja, akkor  $FT$  felezőmerőlegese a vezéregyenesre  $T$ -ben emelt merőlegestől a parabola egy  $P$  pontját metszi ki (vö. 41.3 B3), és a kimetsző felezőmerőleges az előző szakasz szerint a  $P$ -ben vont érintő. Így tehát  $T$  az  $F$  fókuszának egy érintőre vonatkozó tükörképe. —

Az ellipszis nagytengelyéhez, valamint a hiperbola valós tengelyéhez, mint átmérőkhöz tartozó kör  $e$  kúpszeletek *főköre*. Középpontjuk tehát a kúpszelet középpontja, sugaruk pedig a nagy, illetve valós féltengely. A parabola tengelypontjában vont érintőjét a parabola *főegyenesének* mondjuk. Ez tehát a vezéregyenessel párhuzamos, és a fókuszról a vezéregyenesre bocsátott merőlegest merőlegesen felezi. A főkört és a főegyenest közös néven a kúpszelet *főalakzatának* mondhatjuk.

**Tétel.** *A kúpszelet (egyik) fókuszából a kúpszelet érintőire bocsátott merőlegesek talppontfainak mértani helye*



410

a) az ellipszis esetében a főkör,

b) a hiperbola esetében a főkör annak a két pontnak a híján, amelyekben a vetített fókuszról hozzá vont érintők érintik,

c) a parabola esetében a főegyenes.

Hangsúlyozzuk, hogy az ellipszis esetében mind a két fókusz ugyanazt a mértani helyet szolgáltatja. A hiperbola esetében is ugyanahhoz a körhöz jutunk az egyik és a másik fókuszról indulva ki, azonban a kör pontjai közül más-más két pont hiányzik. Ezek a pontpárok a főkörön egymással átellenesek, hiszen a középpontra vonatkozólag szimmetrikus előírások vezetnek hozzájuk (410. ábra).

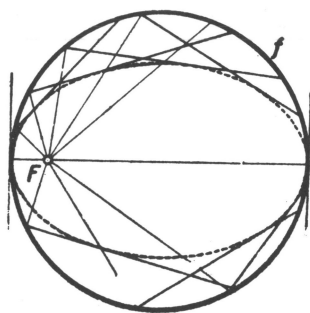
*Bizonyítás.* Egy pontból egy egyenesre bocsátott merőleges talppontját megkapjuk, ha a pontot az egyenesre tükrözzük, majd a helyben hagyó  $\frac{1}{2}$  arányú kicsinyítést alkalmazunk. Ebből következik,

hogy mértani helyeire alkalmazzuk a vetített fókusz helyben hagyó,  $\frac{1}{2}$  arányú kicsinyítést, akkor azokhoz a mértani helyekhez jutunk, amelyekről tételünk szól.

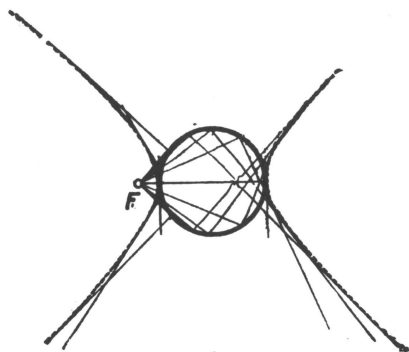
Az ellipszis és hiperbola esetében ez az  $F_1$  centrumú kicsinyítés az körül  $2a$  sugárral írt kört az  $F_1F_2$  szakasz  $O$  felezőpontja körül  $a$  sugárral írt körbe, tehát a főkörbe viszi. Minthogy a hiperbola esetében az  $F_1$  fókuszról a vezérkörhöz vont érintő egyben a kicsinyítéssel kapott főkörnek is érintője, és a kicsinyítés az érintési pontokat az érintési pontokba viszi, a főkörből valóban az  $F_1$ -ből vont érintők érintési pontjait kell elhagyni ahhoz, hogy a mértani, helyet megkapjuk. A parabola esetében

a kicsinyítés az  $F$ -től  $p$  távolságra haladó vezéregyenest vele párhuzamos és  $F$ -től  $\frac{p}{2}$  távolságra levő egyenesbe, tehát a főegyenesbe viszi. —

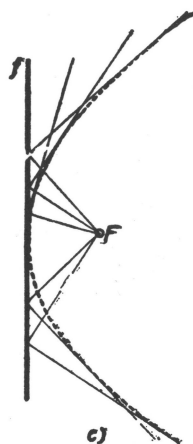
A bizonyítás során alkalmazott kicsinyítés lehetővé teszi, hogy a vezéralakzatról szóló korábbi kijelentéseinket a főalakzatról szólóvá írjuk át. 41.4 alapján kimondhatjuk tehát, hogy egy pont kúpszelettartomány külső pontja, határpontja vagy belső pontja aszerint, amint a (tetszőlegesen megválasztott) fókuszról a ponthoz vezető szakasz Thales-köre a főalakzatot metszi, érinti vagy pedig nincs vele közös pontja.



a)



b)



c)

411

A Utolsó tételünket a kúpszeletek megszerkesztésére használhatjuk fel. Ha adva van az ellipszis esetében a főkör és azon belül az egyik fókusz, a hiperbola esetében a főkör és azon kívül az egyik fókusz, végül a parabola esetében a főegyenes és azon kívül a fókusz, akkor minden esetben úgy jutunk el a kúpszelet érintőihez, hogy a fókusból a főalakzat pontjaihoz húzott (nem érintő) szakaszokra a végpontjaikban merőlegest állítunk (411. ábra). Keltő sok érintő ismeretében a kúpszeletet már jó közelítéssel megrajzolhatjuk. Megtehetjük azt is, hogy az egyes érintőkön az előző szakasz útmutatása szerint az érintési pontot is megszerkesztjük, s ezzel a rajz pontosságát növeljük.

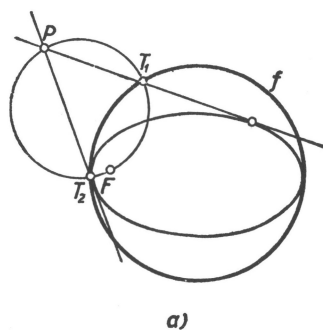
**42.3 Tétel.** *Az ellipszishez és parabolához minden külső pontból két érintő vonható, a hiperbola esetében viszont vannak olyan külső pontok is, amelyekre ez nem áll, s ezek a pontok két egyenest alkotnak. E két egyenes egymást a hiperbola középpontjában metszi. A középpontból nem vonható érintő a hiperbolához, a két egyenes többi pontjából pedig egy érintő húzható.*

A tételben említett két egyenest a hiperbola *aszimptotáinak* (végérintő) nevezzük. Ha az aszimptotákat az érintők közé soroljuk, akkor a hiperbolára is kimondhatjuk, hogy hozzá minden külső pontból

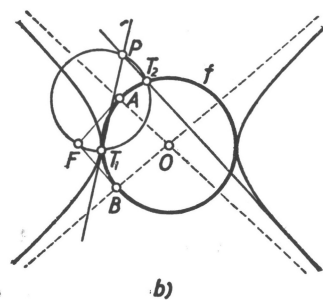
két érintő (tehát érintő vagy aszimptota) húzható. Az aszimptotákataz érintők közé sorolva, az előző szakasz tételeiben sem kellett volna a hiperbola esetében kivételes pontokról szólnunk.

*Bizonyítás.* Legyen  $F$  valamely kúpszelet (egyik) fókusza,  $P$  pedig külső pontja. A  $P$  pont körül  $PF$  sugárral írt kör  $\frac{1}{2}$  szerint a megfelelő vezéralakzatot két pontban metszi. Ebből az  $F$  centrumú,  $\frac{1}{2}$  arányú kicsinyítés alkalmazásával következik, hogy a  $PF$  átmérőjű kör a főalakzatot  $T_1, T_2$  pontokban metszi (412. ábra).

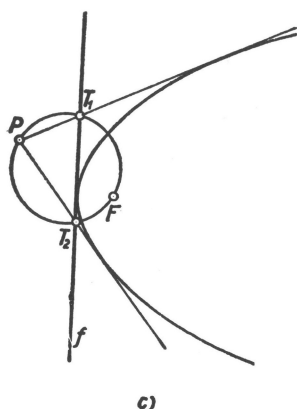
A  $P$  pontból vont érintők csak a  $PT_1, PT_2$  egyenesek lehetnek, mert az érintőkre  $F$ -ből bocsátott merőlegesek talppontjai az előző tétel szerint a főalakzaton és Thales tétele szerint a  $PF$  átmérőjű körön vannak. A  $PT_1, PT_2$  egyenesek az előző tétel szerint a kúpszeletet valóban érintik is, hacsak nem hiperboláról van szó, és a  $T_1, T_2$  pontok között nem szerepelnek az  $F$ -ből a főkörhöz vont érintők  $A, B$  érintési pontjai.



a)



b)



c)

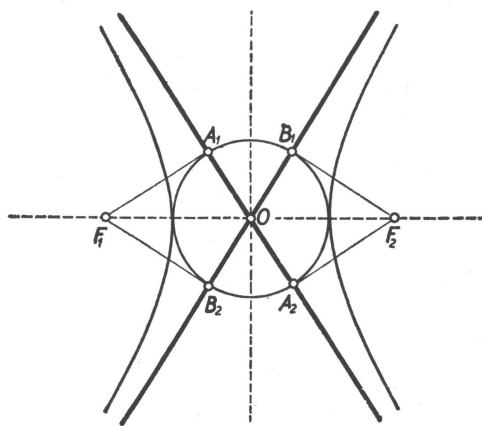
412

Minden külső pont tehát két érintőhöz vezet, kivéve a hiperbola esetében az  $FA, FB$  szakaszokra  $A, B$  végpontjaikban emelt merőlegesek pontjait, mert ezekből kiindulva az  $A, B$  pontok is szerepelnek a  $T_1, T_2$  pontok között, ilyenkor tehát csak legfeljebb egy érintőhöz jutunk (413. ábra).

Míthogy egyenesek a főkör átmérőegyenesei, egymást a hiperbola  $O$  középpontjában metszik. Ha  $O$ -ból indulunk ki, akkor a  $T_1, T_2$  pontpár az  $A, B$  pontpárral azonos, és ezért  $O$ -ból a hiperbolához

egyetlen érintő sem húzható. Ha a két egyenes többi pontjából indulunk ki, akkor az  $A, B$  pontok közül a  $T_1, T_2$  pontok között csak egy szerepel, s ezért ilyenkor egy érintő van.

Megállapíthatjuk, hogy az aszimptoták bármely pontja külső pont, hiszen vagy érintőn van, vagy pedig a középponttal azonos. Azt is kimondhatjuk, hogy az aszimptoták a főkört azokban a pontokban metszik, ahol a fókuszokból vont érintők érintik, s hogy az aszimptoták a hiperbola tengelyeire vonatkozólag szimmetrikusan helyezkednek el.



413

**Tétel.** Ha az aszimptotákat is az érintők közé soroljuk, akkor kimondhatjuk, hogy egy egyenes a kúpszeleten kívül halad, azt érinti vagy pedig metszi aszerint, amint a főalakzat a (tetszőlegesen megválasztott) fókuszról "az egyenesre bocsátott merőleges talppontját a (két) fókuszról elválasztja, tartalmazza, vagy pedig e két eset egyike sem következik be.

Az ellipszis és a hiperbola esetében közömbös, hogy a fókuszok melyikéből indulunk ki, s hogy egy vagy két fókuszról való elválasztásról beszélünk-e, hiszen a főkör a fókuszokat nem tartalmazza és nem is választja el.

A fókuszról való kétszeres kinagyítás révén adódik, hogy tételünket a főkör helyett a vezérkörre is megszővegezhettük volna. Ekkor nem a fókuszról az egyenesre bocsátott merőleges talppontjáról, hanem a fókuszhoz az egyenesre vonatkozó tükröképéről kellett volna szólnunk, és csak a tükrözött fókuszról való elválasztásról kellett volna beszélnünk.

*Bizonyítás.* Legyen  $T$  az  $F$  fókuszhoz valamely  $e$  egyenesre vetett merőleges vetülete. Már tudjuk, hogy  $e$  akkor és csak akkor érintő vagy aszimptota, ha  $T$  az  $f$  főalakzaton van. Elég ezért csak azt bizonyítanunk, hogy az  $e$  egyenesen akkor és csak akkor van a kúpszeletnek belső pontja, ha  $F$  és  $T$  ugyanannak az  $f$  határolta tartománynak a belsejében van.

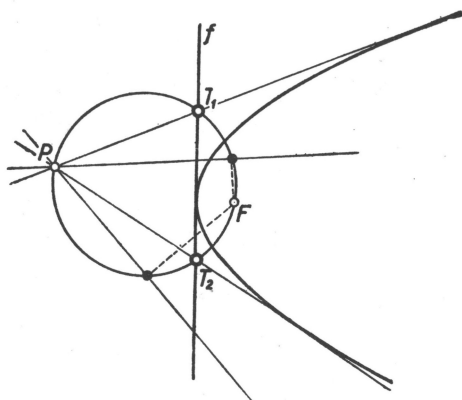
Feltesszük, hogy  $e$  nem halad át az  $F$  fókuszon, hiszen az ilyen egyenesekre a bizonyítandó állítás nyilvánvalóan helyes. Az  $e$  egyenesen 42.2 utolsó bekezdése szerint akkor és csak akkor van belső pont, ha van olyan  $F$ -ből  $e$ -hez vezető szakasz, amelynek a Thales-körén nincs  $f$ -hez tartozó pont. Az  $F$ -ből  $e$ -hez vezető szakaszok Thales-körei azonban az  $F, T$  pontokon áthaladó körökkel azonosak. Azt kell tehát belátnunk, hogy az  $F, T$  pontokon át akkor és csak akkor írható olyan kör, amelynek nincs  $f$ -hez tartozó pontja, ha  $F$  és  $T$  ugyanannak az  $f$  határolta tartománynak a belsejében van.

Alkalmazzunk  $F$  centrumú inverziót. Minthogy a fókusz nincs a főalakzaton,  $f$ -inverze egy  $f'$  kör. Az  $F$  pontot tartalmazó,  $f$ -által határolt tartomány inverze az  $f'$  kör külseje (vö. 39.2 B3). A még bizonyításra váró állítás ezek szerint azzal a nyilvánvalóan helyes állítással egyenértékű, hogy a  $T'$  ponton át akkor és csak akkor fektethető olyan egyenes, amelynek nincs az  $f'$  körhöz tartozó pontja, ha  $T'$  az  $f'$  körön kívül van. —

**Tétel.** Egy külső ponton áthaladó egyenesek sugársorában a két érintő (vagy aszimptota) akkor és csak akkor választja el a sugársor két elemét, ha az egyik metszi s a másik nem éri a kúpszeletet.



Tételünk szerint az adott külső ponton áthaladó, a kúpszeletet érő egyenesek csúcshögekhez tartozó szögtartománypárt alkotnak. Ugyanezt mondhatjuk a kúpszeletet nem metsző egyenesekről is. A két szögtartománypár közös határegyenesei az adott ponton áthaladó érintők vagy aszimptoták. Első tételünk már kimondta, hogy két ilyen egyenes mindig van.



414

A tétel csak külső pontról szól, hiszen minden belső ponton áthaladó egyenes metszi a kúpszeletet, a határponton áthaladók közül pedig csak az érintő nem metszi.

*Bizonyítás.* Legyen  $F$  a kúpszelet (egyik) fókusz,  $f$  a megfelelő főalakzat és  $P$  egy külső pont. Az  $FP$  átmérőjű  $k$  kör az  $f$  alakzatot  $T_1$ ,  $T_2$  pontokban metszi (412. ábra).  $PT_1$  és  $PT_2$  az  $a$  két érintő (vagy aszimptota), amelyről a tétel szól. Bizonyításunkat a parabola esetét bemutató 414. ábra kíséri.

Ha a  $P$  ponton áthaladó egyenes  $P$  körül forog, akkor az  $F$ -ből rá bocsátott merőleges talppontja a  $k$  kört járja be. A  $PT_1$ ,  $PT_2$  egyenesek tehát akkor és csak akkor választják el a sugársor két elemét, ha az  $F$ -ből rájuk bocsátott merőlegesek talppontjai a  $T_1$ ,  $T_2$  pontokat összekötő más-más köríven vannak, ha tehát  $f$  ezeket a talppontokat elválasztja egymástól, hiszen  $f$  elválasztja egymástól a tartalmazó köríveket is. Szükséges és elégséges feltételül tehát azt kaptuk, hogy a két talppont egyike az  $f$  által határolt tartományok közül az  $F$  pontot tartalmazóban legyen, a másik pedig a másik tartományban. Ez az előző tétel szerint azt jelenti, hogy az egyik egyenes metszi a kúpszeletet, a másik pedig azon kívül halad. —

**A** Ha adva van egy kúpszelet és egy egyenes, akkor szerkesztéssel is eldönthetjük, van-e közös pontjuk, és ezeket meg is szerkeszthetjük. Ehhez a szerkesztéshez első tételünk bizonyításából, vagy 41.6 B2 okoskodásából is eljuthatunk, de ezt a szerkesztést már közvetlenül 41.4-hez kapcsolódva is tárgyalhattuk volna. Ezt tesszük most meg.

A közös pont keresése olyan kör szerkesztését kívánja, amely áthalad a (választott) fókuszon, amelynek középpontja a megadott egyenesen van, s amely érinti a megfelelő vezéralakzatot. Ha a fókusz nincs a megadott egyenesen, akkor azt a követelményt, hogy a kör középpontja a megadott egyenesen legyen, helyettesíthetjük azzal, hogy a kör haladjon át a fókuszban a megadott egyenesre vonatkozó tükörképén. Ha a fókusz a megadott egyenesen van, akkor a mondott követelményt azzal helyettesítjük, hogy a kör ne csak áthaladjon a fókuszban, hanem érintse is a fókuszban a megadott egyenesre emelt merőlegest. Ezen a módon minden esetben Apollonios-féle szerkesztéshez jutunk (lásd 39.4 A1). Ezt a szerkesztést pl. inverzió segítségével könnyen elvégezhetjük.

**B1** Az utolsó két szakasz valamennyi tétele egyszerűbb akkor, ha az aszimptotákat is az érintők közé soroljuk. Ezt gyakran meg is tesszük, és az ideális pontok bevezetése után teljes joggal tehetjük majd meg (lásd 44.4).

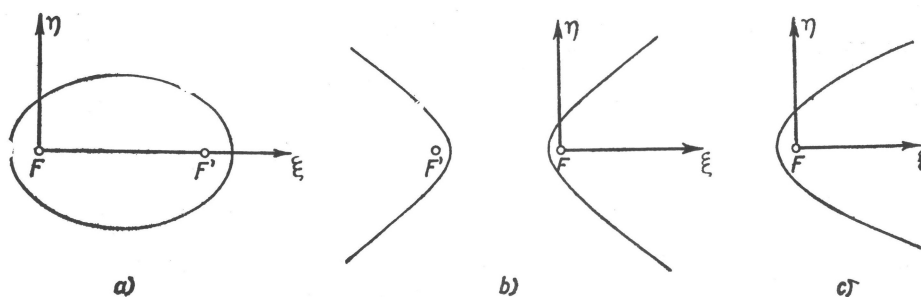
**B2** Párhuzamot vonhatunk ennek a szakasznak megállapításai és a 41.5, 41.6 szakaszokban mondottak között. Ott arról volt szó, hogy a kúpszelet hogyan osztályozza egy egyenes pontjait, itt arról, hogyan osztályozza az egy ponton áthaladó egyeneseket. A kúpszeleteket *másodrendű görbéknek* mondhatjuk azzal az indokolással, hogy egy egyenes legfeljebb két pontban metszi, *másodosztályú*

görbéknek pedig azért, mert egy pontból legfeljebb két érintő vonható hozzájuk. Megemlítjük, hogy a „másodrendű” szónak itt használt jelentése nem fedi pontosan azt, amit 38.2 B2-ben mondtunk.

Még teljesebbé válik a most említett párhuzam, ha a pontokból összetett *pontalakzatok* mellett és velük egyenlő rangban egyenesekből összetett alakzatokról, *vonalakzatokról* is szólunk. A pontalakzatok körében az egyenest mint az egyeneshez illeszkedő pontok összességét, azaz *pontsort* tekintjük; a vonalakzatok körében a pontot mint a ponthoz illeszkedő egyenesek által alkotott *sugársort* vezethetjük be. A geometria ilyen kétféle felépítése a *pontgeometriához* és a *vonalgeometriához* vezet. Mi ebben a könyvben a pontgeometriát tárgyaljuk, a vonalgeometriát csak kíséző megjegyzésekben említjük.

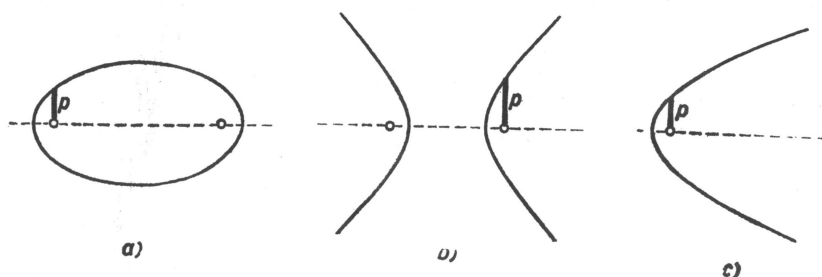
A kúpszeleteket mint pontalakzatokat *pontkúpszeleteknek* mondjuk; az olyan egyenesek vonalakzatát, amelyekhez mi mint kúpszeletek érintőihez jutottunk el, *vonalkúpszeletnek* nevezzük. A pontkúpszeletek és vonalkúpszeletek párhuzamával a továbbiakban még ismételten találkozunk (lásd 46.5 B3).

**42.4** A kúpszeletek *fokális egyenletét* tárgyaljuk, vagyis egyenletüket abban a koordináta-rendszerben, amelynek kezdőpontja a kúpszelet (egyik) fókusz,  $x$ -tengelye a fókuszt tartalmazó kúpszelettengely, és ez az ellipszis esetében a másik fókusz irányába, a hiperbola esetében a másik fókusszal ellentétes irányba, a parabola esetében pedig a parabolatengely irányába mutat (415. ábra).



415

A fókuszt tartalmazó kúpszelettengelyre a fókuszban emelt merőleges a kúpszelet egy húrját tartalmazza. E húr hosszának fele a kúpszelet *paramétere* (416. ábra). A parabola esetében így ugyanahhoz az értékhez jutunk, mint amelyet eddig is paraméternek neveztünk, hiszen a most szerkesztett húr végpontja a fókusztól ugyanakkora távolságra van, mint a vezéregyenestől, és a vezéregyenestől ugyanolyan messze van, mint a fókusz, ez utóbbi távolság pedig a parabola paraméterének definíciója volt.



416

Az ellipszis és hiperbola esetében a lineáris excentricitás és a nagy vagy valós féltengely arányát *numerikus excentricitásnak* mondjuk. Ez az

$$e = \frac{c}{a}$$

érték az ellipszis esetében 1-nél kisebb, a hiperbola esetében pedig 1-nél nagyobb.

**Tétel.** Minden kúpszelet fokális egyenlete felírható

$$\xi^2 + \eta^2 = (\epsilon \xi + p)^2$$

alakban, ahol  $p$  a kúpszelet paramétere,  $e$  pedig a numerikus excentricitás, a parabola esetében pedig  $e = 1$ .

A tételben megadott egyenlet tehát ellipszisé, hiperboláé vagy paraboláé aszerint, amint  $0 < e < 1$ ,  $e > 1$  vagy  $e = 1$ .

*Bizonyítás.* a) Az ellipszis esetében a kanonikus egyenlet  $x, y$  koordinátái és a fokális egyenlet  $\xi, \eta$  koordinátái között az  $x = \xi - c, y = \eta$  összefüggések állnak fenn, mert a  $\xi, \eta$  koordináta-rendszer eltolással keletkezik, és kezdőpontja  $x, y$  koordináta-rendszer  $(-c, 0)$  pontja. Az

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2$$

alakban írt kanonikus egyenletből tehát az

$$\eta^2 = -\frac{b^2}{a^2}(\xi - c)^2 + b^2$$

fokális egyenlethez jutunk. Ezt az egyenletet  $b^2 = a^2 - c^2$  felhasználásával

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{c^2}{a^2}\xi^2 + 2\frac{b^2c}{a^2}\xi + \frac{b^4}{a^2},$$

azaz

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{c}{a}\xi + \frac{b^2}{a}\right)^2$$

alakra hozhatjuk. Minthogy a  $\xi, \eta$  koordináta-rendszer  $(0, p)$  pontja az ellipszisen van, helyettesítéssel a paraméterre

$$p = \frac{b^2}{a}$$

adódik. A kapott egyenlet ezért azonos a tételbelivel.

b) A hiperbola esetében  $x = \xi - c, y = \eta$  a kanonikus és a lokális egyenlet koordinátáinak összefüggése, mert most a  $\xi, \eta$  koordináta-rendszer kezdőpontja az  $x, y$  koordináta-rendszer  $(c, 0)$  pontja. Most tehát az

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$$

alakban írt kanonikus egyenletből az

$$\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi + c)^2 - b^2$$

fokális egyenlethez jutunk. Ezt az egyenletet  $b^2 = c^2 - a^2$  felhasználásával

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{c^2}{a^2}\xi^2 + \frac{b^2c}{a^2}\xi + \frac{b^4}{a^2}$$

alakra, tehát ugyanúgy, mint az ellipsziséknél,

$$\xi^2 + \eta^2 = \left( \frac{c}{a} \xi + \frac{b^2}{a} \right)^2$$

alakra hozhatjuk. Ez azonos a tételbeli egyenlettel, mert a hiperbola paraméterére is fennáll a

$$p = \frac{b^2}{a}$$

összefüggés, hiszen a  $\zeta, \eta$  koordináta-rendszer  $(0, p)$  pontja a hiperbolán van.

c) A parabola esetében az

$$y^2 = 2px$$

egyenletben az  $x = \xi + \frac{p}{2}, y = \eta$  helyettesítést kell alkalmaznunk, mert a fókusz az  $x, y$  koordináta-rendszer  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  pontja. Így az

$$\eta^2 = 2p \left( \xi + \frac{p}{2} \right),$$

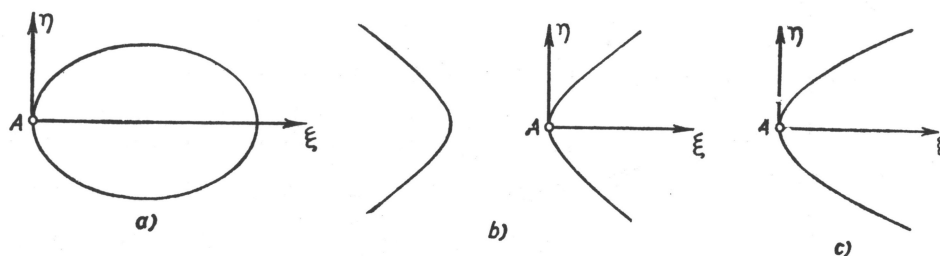
azaz

$$\xi^2 + \eta^2 = (\xi + p)^2$$

fokális egyenlethez jutunk, s ez azonos a tételben megadottal. —

**B1** A tételbeli egyenlet az  $e = 0$  esetben  $p$  sugarú kör egyenlete. A kör esetében a paraméter definíciója szerint is a sugarat kell paraméternek mondanunk. A körre vonatkozólag  $e = 0$  a 41.1 B1-ben mondottakkal összhangban van.

**B2** Hasonlóan ahhoz, ahogyan a fokális egyenlethez jutottunk, megtehetjük, hogy az ellipszis és hiperbola esetében a kezdőpontot nem  $c$  távolságra, a fókuszba, hanem ugyanolyan irányban, de  $a$  távolságra, tehát a tengelypontba toljuk (417. ábra). A parabola esetében ilyen eltolásra nincs szükség, mert már a kanonikus egyenletnél is a tengelypont a koordináta-rendszer kezdőpontja. Így a kúpszeletek *csúcsponti egyenletéhez* jutunk.



417

Az ellipszis, hiperbola és parabola csúcsponti egyenlete

$$\eta^2 = 2p\xi - \frac{p}{a}\xi^2, \quad \eta^2 = 2p\xi + \frac{p}{a}\xi^2, \quad \eta^2 = 2p\xi.$$

Ezt a fentiek mintájára, az  $\eta^2 = -\frac{b^2}{a^2}(\xi - \alpha)^2 + b^2$  és  $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi + \alpha)^2 - b^2$  egyenletek átrendezésével láthatjuk be.

A csúcsponti egyenletek jobb oldalán a kúpszeletek három fajtájánál  $2p\xi$  mellett negatív érték, pozitív érték, illetőleg 0 áll. Innen ered az ellipszis (= hiány), hiperbola (= többlet), parabola (= egyenlőség) szavak használata.

**B3** A kanonikus egyenletről 41.8B-ben bebizonyítottuk, hogy koordináta-rendszerében nincs a kúpszeletnek más másodfokú egyenlete, mint amit a kanonikus egyenletből 0-tól különböző számmal szorozva kapunk. Ebből következik, hogy ugyanezt a koordinátatranszformációval kapott lokális és csúcsponti egyenletről is elmondhatjuk.

**42.5 Tétel.** Azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekre egy ponttól való távolságukat egy  $a$  ponton át nem haladó egyenestől való távolságukkal osztva megadott pozitív értéket kapunk, ellipszis, hiperbola vagy parabola aszerint, amint az adott érték 1-nél kisebb, 1-nél nagyobb vagy, 1-gyel egyenlő. Ilyen mértani helyként minden kúpszeletet megkaphatunk.

A kúpszeleteknek ez a tulajdonsága alkalmas volna a kúpszeletek definiálására is, és így mindhárom kúpszeletfajtát egységesen definiálhatók. A tételnek a parabola esetére vonatkozó állítása csak megismétli a parabola definícióját.

*Bizonyítás.* A kúpszelet

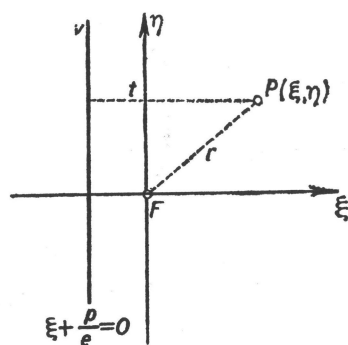
$$\xi^2 + \eta^2 = (e\xi + p)^2$$

fokális egyenletéből indulunk ki. A  $P(\xi, \eta)$  pontnak az  $F$  kezdőponttól való távolságát  $r$ -rel Jelölve egyenletünket

$$r = |e\xi + p|$$

alakban írhatjuk, hiszen  $r^2 = \xi^2 + \eta^2$  és nem negatív számok akkor és csak akkor egyenlők, ha négyzeteik egyenlők. A jobb oldali kifejezésből a pozitív  $e$  számot kiemelve az

$$r = e \left| \xi + \frac{p}{e} \right|$$



418

alakhoz jutunk. Ha bevezetjük a  $\xi + \frac{p}{e} = 0$  egyenletű  $v$  egyenest (418. ábra), és a  $P$  pont távolságát ettől

az egyenestől  $t$ -vel jelöljük, akkor  $t = \left| \xi + \frac{p}{e} \right|$ , hiszen a  $v$  egyenes megadott egyenlete normálegyenlet. Beláttuk tehát, hogy kúpszeletünket azok a pontok alkotják, amelyekre

$$r = et.$$

A  $v$  egyenes pontjai nem elégítik ki ezt az összefüggést, mert ezekre  $t = 0$  és  $r \neq 0$ , hiszen  $\xi = \eta = 0$  elégíti ki  $v$  egyenletét, azaz  $F$  nincs a  $v$  egyenesen. Ezért az összefüggést kielégítő pontokra  $r \neq 0$ , és  $t$ -vel osztva az

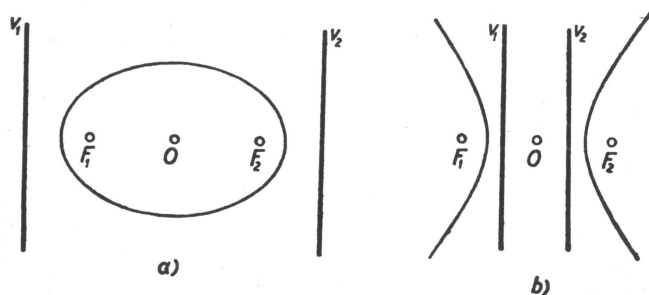
$$\frac{r}{t} = e$$

alakhoz jutunk.

Bebizonyítottuk, hogy bármely kúpszeletből indulunk is ki, található (bármely) fókuszához egy rajta át nem haladó egyenes úgy, hogy ha megadott pontnak és egyenesnek ezeket választjuk, és állandó értéként a numerikus excentricitást, illetőleg a parabola esetében 1-et adunk meg, akkor a tételben szereplő mértani hely a választott kúpszelettel azonos.

Ebből az is következik, hogy ha tetszőleges pontból, rajta át nem haladó egyenesből és pozitív  $e$  értékből indulunk ki, mértani helyként mindig kúpszelet adódik. Ha ugyanis  $e < 1$ , akkor van ekkora numerikus excentricitású ellipszis, és a mértani hely ehhez az ellipszishez hasonló, tehát ugyancsak ellipszis, hiszen van olyan hasonlóság, amely az ellipszis fókuszához az adott pontot s az ellipsziséhez hasonló  $v$  egyeneshez a megadott egyenest rendeli. Ha  $e > 1$ , akkor ugyanígy állapíthatjuk meg, hogy van  $e$  numerikus excentricitású hiperbola, s hogy a kapott mértani hely ehhez hasonló hiperbola. Ha végül  $e = 1$ , akkor a parabola definíciója szerint is parabolához jutunk. —

A kúpszelet (mindegyik) fókuszához tartozik tehát olyan egyenes, hogy a kúpszelet pontjainak a fókusztól mért távolságát az ettől az egyenestől való távolsággal osztva állandó hányadost kapunk. Az ilyen egyenest a kúpszelet *vezéregyenesének* (direktrix) nevezzük. A parabola esetében valóban az eddig is vezéregyenesnek mondott egyenesről van újból szó.



419

Az ellipszis és a hiperbola mindkét fókuszához tartozik egy-egy vezéregyenes. Ezek merőlegesen metszik a fókuszokon áthaladó tengelyt, és a szimmetria folytán a középpontra nézve szimmetrikusan helyezkednek el (419. ábra).

**Tétel.** Ha  $O$  az ellipszis vagy hiperbola középpontja és  $F$  egyik fókusza, akkor az  $F$ -hez tartozó

vezéregyenes az  $OF$  félegyenesből  $\frac{a^2}{c}$  hosszúságú szakaszt vág le, ahol  $c$  a lineáris excentricitás, a pedig a nagy, illetve valós féltengely.

*Bizonyítás.* a) Az ellipszis esetében az előző bizonyítás jelöléseivel  $O(c, 0)$  a középpont, s így a

$\xi + \frac{p}{e} = 0$  egyenletű vezéregyenes az  $OF$  félegyenesből

$$c + \frac{p}{e} = c + \frac{b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$$

hosszúságú szakaszt vág le.

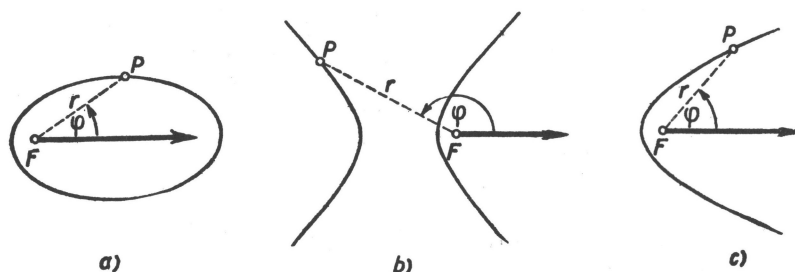
b) A hiperbola esetében az előző bizonyítás jelöléseivel  $O(-c, 0)$  a középpont, s így a  $\xi + \frac{p}{e} = 0$  egyenletű vezéregyenes az  $OF$  félegyenesből

$$c + \frac{p}{e} = c - \frac{b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$$

hosszúságú szakaszt vág le. —

**B** A most bizonyított tétel kimondja, hogy az ellipszis és a hiperbola vezéregyenesei az  $F_1F_2$ , tengelyt a fókuszoknak a főkörre vonatkozó inverz pontjaiban metszik. Később be vezetendő szóhasználatl (lásd 46.4) mondhatjuk majd, hogy az ellipszis és a hiperbola vezéregyenesei a megfelelő fókuszoknak a főkörre vonatkozó polárisai.

**42.6** A kúpszeletek polárkoordinátás egyenletével foglalkozunk. Kezdőpontnak a kúpszelet (egyik) fókuszát, kezdőiránynak pedig az ellipszisenél a másik fókusz felé haladó irányt, a hiperbolánál a másik fókusz felé haladóval ellentétes irányt, a parabolánál pedig a tengely irányát választjuk (420. ábra).



420

**Tétel.** Az ellipszis, hiperbola és parabola polárkoordinátás egyenlete

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \quad r = \frac{p}{\pm 1 - e \cos \varphi}, \quad r = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

ahol  $p$  a kúpszelet paraméterét,  $e$  pedig az ellipszis vagy hiperbola numerikus excentricitását jelöli.

A hiperbola esetére vonatkozó egyenletben a kettős előjel két egyenlet egybeírását jelenti, azaz  $r$  és  $\varphi$  akkor és csak akkor polárkoordinátái a hiperbola egy pontjának, ha ezek az értékek kielégítik a két előjelválasztással kapott két egyenletnek valamelyikét.

*Bizonyítás.* A kúpszelet

$$\xi^2 + \eta^2 = (e\xi + p)^2$$

fokális egyenletéből indulunk ki. Ebből 34.7 szerint  $\xi = r \cos \varphi$ ,  $\eta = r \sin \varphi$  helyettesítéssel a keresett polárkoordinátás egyenlethez jutunk. Minthogy  $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ , az

$$r^2 = (er \cos \varphi + p)^2$$

egyenletet kapjuk, és ez akkor és csak akkor teljesül, ha a

$$\pm r = er \cos \varphi + p$$

egyenletek valamelyike fennáll. Egyenleteinket

$$r(\pm 1 - e \cos \varphi) = p$$

alakban írva megállapíthatjuk, hogy  $p \neq 0$  miatt a bal oldali zárójelben nem állhat 0, s ezért egyenleteinket

$$r = \frac{p}{\pm 1 - e \cos \varphi}$$

alakra hozhatjuk.

Egy pont  $r, \varphi$  koordinátái csak akkor elégíthetik ki egyenleteink valamelyikét, ha a nevező helyettesítési értéke pozitív, hiszen  $p$  pozitív és  $r$  nem lehet negatív. A negatív előjellel felírt egyenlet

esetében ez azt jelenti, hogy  $-e \cos \varphi > 1$ , tehát  $-\cos \varphi > \frac{1}{e}$ . Ez csak az  $e > 1$  esetben teljesülhet, hiszen  $-\cos \varphi \leq 0$ . Ezek szerint az ellipszis és a parabola esetében a két egyenlet közül a negatív előjeleket elhagyhatjuk. —

**Tétel.** A két hiperbolaág polárkoordinátás egyenlete

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad \text{és} \quad r = \frac{p}{-1 - e \cos \varphi},$$

ahol  $p$  a paramétert és  $e$  a numerikus excentricitást jelöli.

*Bizonyítás.* Az előző tétel szerint a hiperbolát azok a pontok alkotják, amelyekre a felírt két egyenlet valamelyike teljesül. Az előző bizonyítás szerint és annak jelölését használva megállapíthatjuk, hogy egy hiperbolapontra aszerint teljesül a két egyenlet egyike vagy másika, amint  $e\xi + p$  pozitív vagy

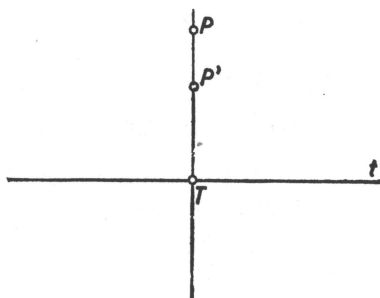
negatív. Ez pedig  $\xi + \frac{p}{e}$  előjelétől, tehát attól függ, hogy pont a  $\xi + \frac{p}{e}$  egyenletű vezéregyenesnek melyik oldalán van. Tételünk helyessége következik tehát abból, hogy a hiperbola vezéregyenes a hiperbola ágait elválasztja. —

**A** Ha polárkoordinátás egyenletet használunk, akkor többnyire  $r$  értékét adjuk meg függvényeként. Mi is a kúpszeletek ilyen *explicit* polárkoordinátás egyenletét ismertük meg. Nyilvánvaló, hogy egy görbéhez rögzített koordináta-rendszerben csak egyféle explicit polárkoordinátás egyenlet tartozik.

**B** 42.4 B1 mintájára megemlítjük, hogy az ellipszisére adott polárkoordinátás egyenlet  $e = 0$  értékválasztással a kör egyenletét adja.

## 43. § Az egyes kúpszeletfajták tulajdonságai

Az előző két paragrafusban többnyire a kúpszeletek olyan tulajdonságait ismertük meg, amelyek minden változtatás nélkül, vagy csekély változtatással a kúpszeletek mindhárom fajtájánál megtalálhatók. Most olyan tulajdonságaikkal foglalkozunk, amelyekről ezt nem mondhatjuk el. Az ellipszis és kör kapcsolatáról, a hiperbola aszimptotáiról és a parabola néhány speciális tulajdonságáról lesz szó.



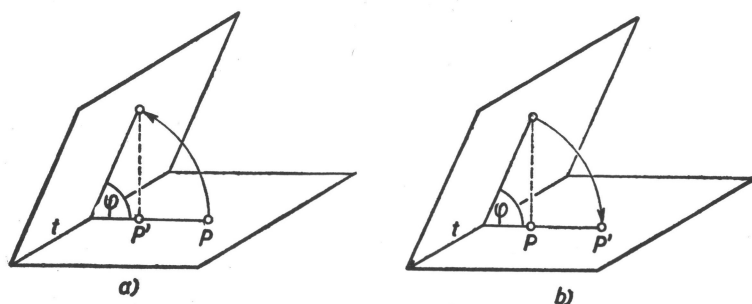


**43.1** *Merőleges affinitásnak* nevezzük azt a síkbeli ponttranszformációt, amely egy egyenes pontjait helyben hagyja, a rá merőleges egyenesek pontjaihoz ugyanannak a merőlegesnek pontját rendeli, s ha a  $T$  pontban emelt merőleges  $T$ -től különböző  $P$  pontjához a  $P'$  pontot rendeli, akkor az előjeles távolságokra felírt  $TP' : TP$  arány a  $T, P$  pontok megválasztásától független, 0-tól különböző állandó (421. ábra). A helyben maradó pontok egyenese az *affinitás tengelye*, a rá merőleges irány az *affinitás iránya*, az említett állandó arány az *affinitás aránya*. Egy alakzat pontjaihoz rendelt pontok az adott alakzat *affin képét* alkotják.

A következőkben feltesszük, hogy a merőleges affinitás aránya az 1,  $-1$  számoktól különböző. Ha az arány 1, akkor az affinitás azonosság, ha  $-1$ , akkor a tengelyre vonatkozó tükrözést jelent. Az affin kép alakjának vizsgálatakor feltehetjük azt is, hogy az affinitás aránya pozitív, mert a pozitív arányú affinitások a tengelyre vonatkozó tükrözéssel kapcsolva a negatív arányú affinitásokat adják.

Ha a síkot az affinitás  $t$  tengelye körül  $\varphi$  szöggel elforgatjuk, majd merőlegesen vetítünk az eredeti síkra, akkor az eredeti síkban a  $t$  tengelyű,  $\cos \varphi$  arányú merőleges affinitást valósítottuk meg (422. ábra). Közvetlenül belátható az is, hogy ha a sík pontjaiban a síkra állított merőlegeseket azzal a (rá nem merőleges) síkkal metsszük, amely az eredeti síkból a  $t$  tengely körüli  $\varphi$  szögű elforgatással

keletkezik, majd a metsző síkot eredeti helyzetébe forgatjuk vissza, akkor a  $t$  tengelyű  $\frac{1}{\cos \varphi}$  arányú merőleges affinitás által hozzárendelt pontokhoz jutunk. Minden merőleges affinitás megvalósítható a most említett módszerek valamelyikével.



A most említett térbeli szerkesztések is mutatják, hogy egy alakzat adott arányú merőleges affinitással származtatott képének az alakja nem változik meg, ha az affinitás tengelyét párhuzamosan eltoljuk. Azt is beláthatjuk így, hogy egyenes, félegyenes és szakasz affin képe egyenes, félegyenes és szakasz, hogy párhuzamos egyenesek affin képei is párhuzamosak, s hogy egy szakasz felezőpontjának képe a szakasz képének felezőpontja. A  $t$  tengelyű,  $\lambda$  arányú merőleges affinitás inverze nyilván a  $t$  tengelyű,

$\frac{1}{\lambda}$  arányú merőleges affinitás. Ha a merőleges affinitás tengelyéül a derékszögű koordináta-rendszer  $x$ -tengelyét választjuk, és  $\lambda$  az affinitás aránya, akkor a  $P(x, y)$  pont képe  $P'(x, \lambda y)$ , és  $P'(x, y)$  a  $P(x, \frac{y}{\lambda})$  pontnak a képe. Ebből következik, hogy az  $F(x, y) = 0$  egyenletű alakzat affin képének egyenlete  $P(x, \frac{y}{\lambda}) = 0$ .

A merőleges affinitást a köznap beszédben széthúzásnak vagy összenyomásnak mondjuk aszerint, hogy az affinitás aránya 1-nél nagyobb vagy kisebb.

**B1** Minthogy a merőleges affinitás el nem fajuló félegyenesstartó transzformáció, az ilyen transzformációk minden tulajdonságával rendelkezik (vö. 6.1 B4).

**B2** A tárgyalt transzformáció elnevezésében a merőleges jelző arra utal, hogy az affinitás iránya merőleges a tengelyre. Ha elismételjük definíciónkat, de a merőleges irány helyett egy a tengelyt

ferdén metsző irányt szerepeltetünk, akkor a *ferde affinitás* fogalomalkotásához jutunk. A merőleges és a ferde affinitást közös néven *tengelyes affinitásnak* mondjuk, s ezzel arra utalunk, hogy a helyben maradó pontok mértani helye egy egyenes, az affinitás tengelye. A megkülönböztető jelzőre azért van még itt is szükség, mert a transzformációk jóval általánosabb körét mondjuk affinitásnak, s ezzel az általánosabb fogalomalkotással mi is találkozunk majd (lásd 51.3).

### 43.2 Tétel. Merőleges affinitás a körhöz ellipszist rendel.

A tétel kimondásakor feltettük, hogy a merőleges affinitás aránya az 1,  $-1$  értékektől különböző. Az 1 és  $-1$  arányú merőleges affinitás a körhöz kört rendel.

*Bizonyítás.* Minthogy az affín képnek csak az alakja érdekel, feltehetjük, hogy az affinitás tengelye áthalad a kör középpontján, és hogy az affinitás aránya pozitív. Az affinitás tengelyét  $x$ -tengelynek, s a körközéppontot kezdőpontnak választjuk. A kör sugarát  $a$ -val jelölve, a kör egyenlete  $x^2 + y^2 = a^2$ .

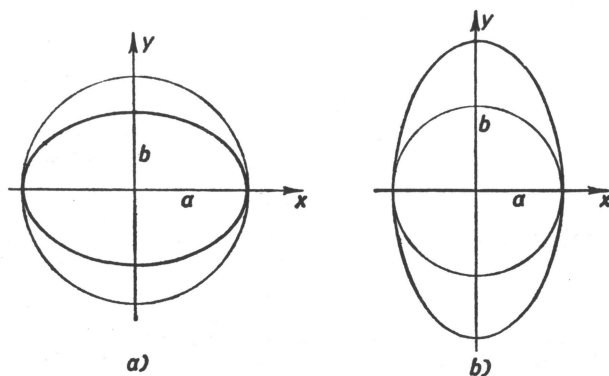
Ha tehát  $\lambda = \frac{b}{a}$  a merőleges affinitás aránya, akkor az affín kép egyenlete

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2,$$

ami

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakban is írható. Ez valóban ellipszis egyenlete, mégpedig a  $\lambda < 1$ , azaz  $b < a$  esetben  $a$  a nagy és  $b$  a kis féltengely, a  $\lambda > 1$ , azaz  $b > a$  esetben pedig  $a$  a kis és  $b$  a nagy féltengely (423. ábra). —



423

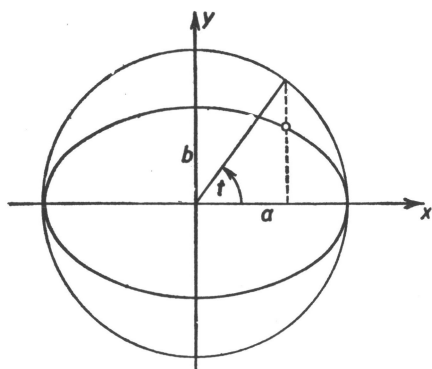
Ha  $a$  a szokott módon a nagy,  $b$  pedig a kis féltengelyt jelöli, akkor tételünk alapján kimondhatjuk, hogy az ellipszis a főköréből  $\frac{b}{a}$  arányú, a kistengelyéhez mint átmérőhöz tartozó körből pedig  $\frac{a}{b}$  arányú merőleges affinitással származtatható. Megállapíthatjuk azt is, hogy ferde síkban elhelyezkedő kör merőleges vetülete ellipszis.

Minthogy a kört ellipszisbe vivő affinitás a kör húrjaihoz az ellipszis húrjait rendeli, a körlemez affín képe ellipszistartomány. Így az is igaz, hogy a kör érintőinek affín képei az ellipszis érintői, mert egy pont kivételével minden pontjuk külső pont. A körközéppont affín képe a képellipszis középpontja, hiszen minden rajta áthaladó hűrt feleznie kell.

**Tétel. Az ellipszis pontján áthaladó egyenesek közül csak az érintőnek van az ellipszissel egyetlenegy közös pontja.**

Az érintőnek a definíció szerint csak egy pontja tartozik az ellipszishez. A tétel kimondja, hogy minden más egyenesnek, ha egyáltalán van pontja az ellipszisen, akkor több, tehát 41.6 szerint két pontja tartozik az ellipszishez. Eszerint egy egyenes vagy az ellipszisen kívül helyezkedik el, vagy érinti az ellipszist, vagy pedig két pontban metszi. Tételünk szerint nem lehetséges, hogy egy egyenes az ellipszist egyetlenegy pontban messe. Megemlítjük, hogy ezt az ellipszistartomány korlátosságára hivatkozva már 41.6-ban is kimondhattuk volna.

*Bizonyítás.* A körrel tudjuk, hogy egy egyenes vagy a körön kívül helyezkedik el, vagy érinti a kört, vagy pedig két pontban metszi. Minthogy a kört ellipszisbe vivő affinitás a kör érintőit az ellipszis érintőibe viszi át, a körrel kimondottak az ellipszisére is állnak. —



424

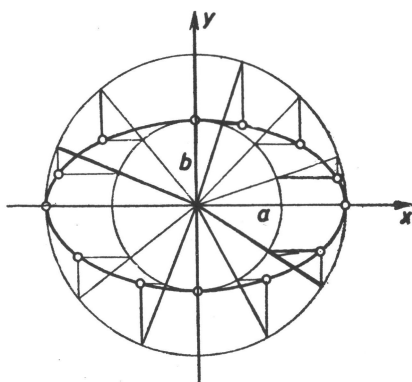
**Tétel.** Az  $a$ ,  $b$  féltengelyű ellipszis tengelyei által adott koordináta-rendszerben az ellipszis egyenletének paraméteres alakja

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Az ellipszis egyes pontjaihoz tartozó  $t$  szöget *excentrikus anomáliának* is mondják (424. ábra).

*Bizonyítás.* A főkör egyenletének paraméteres alakja  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ . Minthogy a főkörből

az ellipszist szolgáltató merőleges affinitás a  $P(x, y)$  ponthoz a  $P'\left(x, \frac{b}{a}y\right)$  pontot rendeli, a  $t$  paraméterértékhez tartozó ellipszispont koordinátái valóban a tételben megadott értékek. —



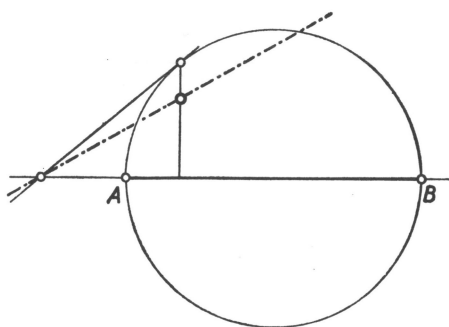
425

**A1** Az ellipszis egyenletének paraméteres alakja az ellipszis egyszerű megszerkesztéséhez vezet. A kezdőpont körül  $a$  és  $b$  sugárral írt köröket a kezdőpontból induló,  $t$  irányszögű félegyenessel metszve, egy  $a \cos t$  abszcisszájú és egy  $b \sin t$  ordinátájú ponthoz jutunk. Ezért az  $e$  pontokon át az  $y$ -tengellyel, illetőleg az  $x$ -tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek egymást az ellipszis egy pontjában metszik

(425. ábra). Ezt a szerkesztést tetszőlegesen választott  $t$  szögekkel elismételve, az ellipszis kellő sok pontjához jutunk.

**A2** Az ellipszis és a kör affinitását felhasználhatjuk ellipszisre vonatkozó szerkesztési feladatok megoldására.

Ha adva van az ellipszis nagytengelye és egy (a tengelypontoktól különböző) pontja, ebben a pontban az ellipszishez vont érintőt úgy kaphatjuk meg, hogy a pontot a nagytengelyre merőleges irányban a főkörre vetítjük, s a kör e pontbeli érintőjének a nagytengely egyenesén levő pontján és az adott ponton át egyenest fektetünk (426. ábra).



426

Az affinitás segítségével más feladatokat is a főkörrel végzett szerkesztésre vezethetünk vissza. Így szerkeszthetjük meg pl. egy egyenesnek az ellipszissel alkotott metszéspontjait, vagy egy külső pontból az ellipszishez vont érintőket.

**B1** Ha az affinitás aránya 1-nél nagyobb, akkor szakaszunk első tétele az előző szakaszban mondottak alapján következik abból, amit 41.7-ben a forgáshenger metszeteiről megállapítottunk.

Ilyen indokolással az is adódik, hogyha az ellipszist kistengelye körül  $\cos \varphi = \frac{b}{a}$  által adott szöggel elforgatjuk, merőleges vetülete kör, ti. a kistengelyhez mint átmérőhöz tartozó kör lesz.

**B2** Egy  $\lambda$  arányú merőleges affinitáshoz eljuthatunk úgy, hogy először az affinitás tengelyének egy pontjából mint centrumból  $\lambda$ -szorosra nagyítunk, majd ezt követően az e pontban az affinitás

tengelyére emelt merőlegeshez mint tengelyhez tartozó  $\frac{1}{\lambda}$  arányú merőleges affinitást alkalmazunk. Ez abból adódik, hogy megfelelő koordináta-rendszert használva, az  $(x, y)$  ponthoz az első kinagyítás a  $(\lambda x, \lambda y)$  pontot, s ehhez az utóbb alkalmazott affinitás az  $(x, \lambda y)$  pontot rendeli. Ezek alapján

természetesnek kell mondanunk, hogy az ellipszishez nemcsak egy körből  $\frac{b}{a}$  arányú affinitással,

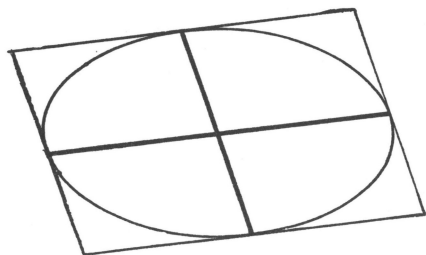
hanem egy másik körből  $\frac{a}{b}$  arányú merőleges affinitással is eljuthatunk.

Pusztán az előző megjegyzésben mondottakra támaszkodva is kimondhatjuk tehát, hogy ha a főkört a

nagytengely körül  $\cos \varphi = \frac{b}{a}$  által adott szöggel elforgatjuk, akkor merőleges vetülete az adott ellipszis lesz.

**B3** A körhöz nemcsak a merőleges affinitás, hanem minden ferde affinitás is ellipszist rendel. Ezt itt nem bizonyítjuk, mert későbbi tárgyalásunkból még több is egyszerűen következik majd (lásd 46.9 B2).

**43.3** Az ellipszisnek a középponton áthaladó húrjait az ellipszis *átmérőinek* (átmérőszakasz) mondjuk. Ha az ellipszist egy kör affin képeként származtatjuk, és elegendő itt az elforgatott főkör merőleges vetítésére gondolnunk, akkor az ellipszis átmérői a kör átmérőinek képei, mert az ellipszis középpontja a kör középpontjának képe.



427

A kör merőleges átmérőinek megvan az a tulajdonságuk, hogy a végpontjaikban vont érintők olyan paralelogrammát (mégpedig négyzetet) határolnak, amelynek az oldalait az érintési pontok felezik. Az ellipszis és a kör affinitásából következik, hogy az ellipszis két átmérője akkor és csak akkor rendelkezik ugyanezzel a tulajdonsággal, ha a kör merőleges átmérőinek az affín képei (427. ábra). Az ellipszis ilyen átmérőit *konjugált átmérőknek* (konjugált átmérőszakaszok) mondjuk. A nagytengely és a kistengely is konjugált átmérőpár. Az ellipszis minden átmérőjéhez tartozik egy konjugált átmérő.

**Tétel** (Apollonios tétele). *Az ellipszis konjugált átmérőinek négyzetösszege nem függ a konjugált átmérőpár megválasztásától.*

Mondhattuk volna, hogy a konjugált átmérők négyzetösszege a nagytengely és a kistengely négyzetösszegével egyenlő, hiszen ezek is konjugált átmérők.

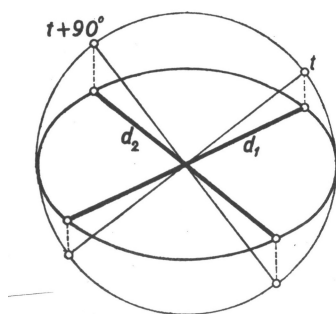
*Bizonyítás.* Minthogy a konjugált átmérők a főkör merőleges átmérőinek az affín képei, ha az ellipszis egyenletének paraméteres alakjában egy átmérővégpontához a  $t$  paraméterérték tartozik, akkor  $t + 90^\circ$  a konjugált átmérő végpontját adja (428. ábra). Ha tehát  $(a \cos t, b \sin t)$  az egyik átmérő végpontja, akkor  $(-a \sin t, b \cos t)$  a konjugált átmérőé. Ebből következik, hogy a konjugált félátmérők négyzete

$$d_1^2 = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t,$$

$$d_2^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t,$$

és ezért

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2. \quad \_$$



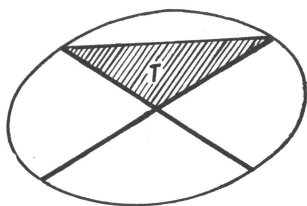
428

**Tétel** (Apollonios tétele). *Az ellipszis konjugált félátmérői által kifeszített háromszög területe nem függ a konjugált félátmérők megválasztásától (429. ábra).*

Mondhattuk volna, hogy  $a, b$  féltengelyű ellipszisenél a kifeszített háromszög területe  $\frac{1}{2}ab$ , hiszen a tengelyek is konjugált átmérők.

*Bizonyítás.* Ha az ellipszist az elforgatott főkör merőleges vetületeként származtatjuk, akkor a szóban forgó háromszögek a kör merőleges sugarai által kifeszített háromszögek vetületei. A tétel következik

tehát abból, hogy a merőleges kórsugarak állandó területű háromszöget feszítenek ki, és 36.7 szerint egyenlő területű háromszögek vetületeinek a területe is egyenlő. —



429

Az ellipszis konjugált átmérői mint átlók olyan parallelogrammát határoznak meg, amelyet az átmérők négy olyan háromszögre vágunk fel, mint amilyenről a tételünk szólt. A konjugált átmérők végpontjaiban vont érintők pedig kétszer akkora területű parallelogrammát határolnak, mint az előbbiek. Tételünk szerint tehát ezeknek a parallelogrammáknak a területe sem függ az átmérők megválasztásától, az előbbiek területe  $2ab$ , az utóbbiaké pedig  $4ab$ .

**Tétel.** Az  $a$ ,  $b$  féltengelyű ellipszis területe  $\pi ab$ .

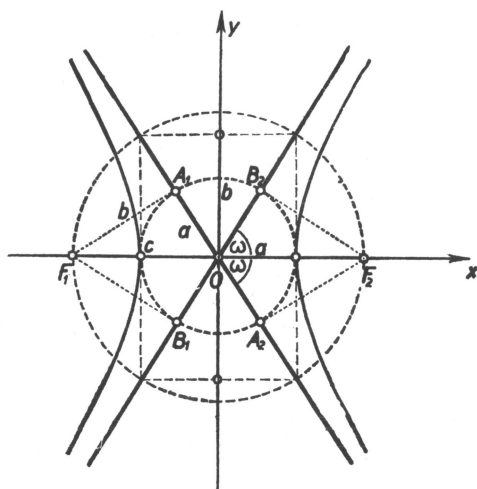
*Bizonyítás.* Ha a  $\pi ab^2$  területű főkört átmérője körül  $\cos \varphi = \frac{b}{a}$  által adott szöggel elforgatjuk, merőleges vetületeként ellipsziséket kapjuk meg. Állításunk helyessége tehát 36.7 második tételéből következik. —

**B** Az ellipszis átmérői 15.1 B3 szóhasználatával nem mondhatók átmérőknek. 41.1 B3-ban már megállapítottuk, hogy ebben az értelemben csak a nagytengely átmérő.

**43.4** A hiperbola aszimptotáival foglalkozunk, hogy azután a hiperbolának az aszimptotáival kapcsolatos tulajdonságait tárgyalhassuk.

**Tétel.** Az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletű hiperbola aszimptotáinak egyenlete

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$



430

*Bizonyítás.* Tudjuk, hogy az aszimptoták a fókuszokból a főkörhöz vont érintők érintési pontjait kötik össze, és egymást a középpontban metszik (430. ábra). Az  $F_1$  fókuszról vont  $F_1A_1$  érintőszakasz

hossza  $b$ , mert négyzetére az  $F_1A_1O$  derékszögű háromszögből  $c^2 - a^2 = b^2$  adódik. Ebből következik, hogy az aszimptotáknak  $x$ -tengelyünkkel, a valós tengellyel alkotott  $\omega$  hajlásszögére  $\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}$ , iránytangensük tehát  $\frac{b}{a}$  és  $-\frac{b}{a}$ .

A tételben megadott egyenesek valóban az aszimptoták, mert áthaladnak a középponton, és iránytangensük az aszimptotákéval egyenlő. —

Az elmondottakból következik, hogy az aszimptotákat annak a téglalapnak az átlói adják, amelyet a 373. ábrán a képzetes féltengely megszerkesztésére használtunk.

Tételünk alapján kimondhatjuk, hogy hiperbolánk aszimptotapárjának egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

*Konjugált hiperboláknak* mondunk két hiperbolát, ha aszimptotáik közösek és az egyiknek valós féltengelye a másiknak képzetes féltengelye (431. ábra). Így tehát

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -1$$

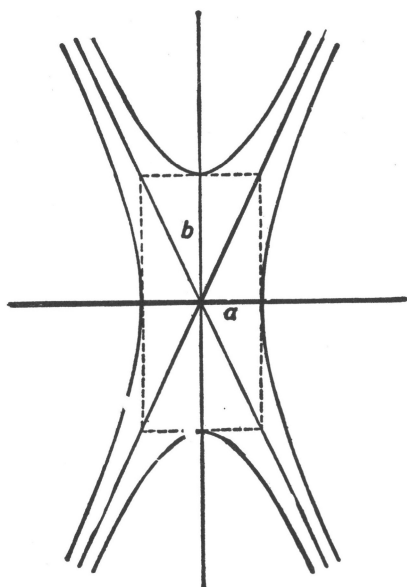
konjugált hiperbolák.

Ha az aszimptoták merőlegesek egymásra, a hiperbolát *derékszögűnek* (egyenlő szárú) mondjuk (432.

ábra). A derékszögű hiperbola valós és képzetes tengelyére  $a = b$ , hiszen most  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 45^\circ$ . A derékszögű hiperbola kanonikus egyenlete tehát

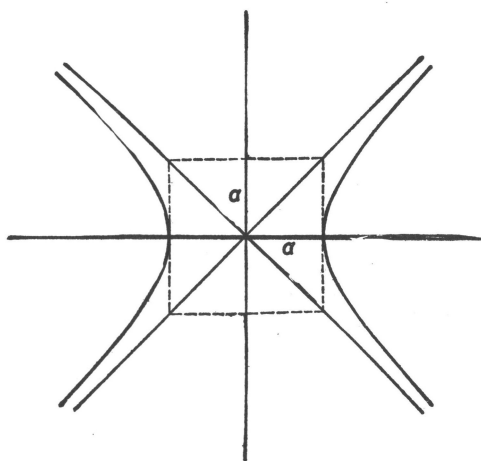
$$x^2 - y^2 = a^2$$

alakban írható.



431

A Elterjedt a semmitmondó egyenlő szárú hiperbola elnevezés. A derékszögű hiperbola elnevezést találóbbnak mondhatjuk, mert a görbe lényeges tulajdonságára mutat rá.



432

**B1** Megemlítjük, hogy a hiperbola kanonikus egyenletét

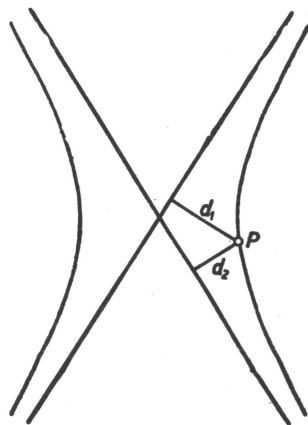
$$x = \pm a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t$$

paraméteres alakban is felírhatjuk. Az  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$  összefüggésből következik ugyanis, hogy van ilyen  $t$  érték, a paraméteresen megadott  $x, y$  értékek pedig kielégítik a kanonikus egyenletet. Mivel a képzetes tengely a hiperbola ágait elválasztja,  $x$  kifejezésében a kettős előjel a két ágnak felel meg. Párhuzamba állíthatjuk a hiperbola és az ellipszis egyenletének paraméteres alakját, azonban  $t$

értékének itt nem tudunk közvetlen geometriai jelentést adni. Csak megemlítjük, hogy  $\frac{1}{2} abt$  annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet a tengelyponttól az illető pontig terjedő hiperbolaív és ennek végpontjait a középponttal összekötő két szakasz határol.

**B2** Minthogy a hiperbola kanonikus egyenlete aszimptotapárjának megadott egyenletétől csak egy állandó tagban különbözik, és a hiperbola minden másodfokú egyenlete a kanonikus egyenletből koordinátatranszformáció és állandóval való szorzás útján származik, kimondhatjuk, hogy egy hiperbolának bármely koordináta-rendszerre vonatkozó másodfokú egyenletéből megkaphatjuk aszimptotapárjának egyenletét úgy, hogy csak az egyenlet állandó tagját változtatjuk meg.

**43.5 Tétel.** *A hiperbola olyan pontok mértani helye, amelyeknek az aszimptotáktól mért előjeles távolságai 0-tól különböző állandó értéket adnak szorzatul (433. ábra).*



433



A tétel nem szól arról, hogy melyek tekintendők az aszimptoták pozitív oldalának, mert a tétel mindig helyes, akárhogyan választjuk is meg ezeket.

*Bizonyítás.* Írjuk fel a hiperbola kanonikus egyenletét

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

alakban. A bal oldali tényezők 37.4 szerint a  $P(x, y)$  pontnak a két aszimptotától mért előjeles  $d_1, d_2$  távolságaival kifejezve

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c_1 d_1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c_2 d_2$$

alakban írhatók, ahol  $c_1$  és  $c_2$  állandó (mégpedig egyenlő) és 0-tól különböző értékek. Így tehát  $c_1 c_2 = \frac{1}{C}$  jelöléssel a

$$d_1 d_2 = C$$

eredményhez jutunk. Mivel a hiperbola egyenletét csak átalakítottuk, a kapott összefüggést a hiperbola pontjai és csak azok elégítik ki. —

Megjegyezzük, hogy azonos (és ugyanúgy orientált) aszimptotájú hiperbolák körében a  $C$  állandó minden 0-tól különböző értéket felvesz, hiszen a konjugált hiperbolára  $C$  értéke előjelet vált, a középpontból való  $\lambda$  arányú kinagyításkor pedig  $A \lambda^2$ -tel szorzódik. Ebből következik, hogy ha egymást metsző orientált egyenesek vannak adva, akkor mindig hiperbola az olyan pontok mértani helye, amelyeknek az egyenesektől mért előjeles távolságai egy megadott, 0-tól különböző értéket adnak szorzatul, és az egyenesek a hiperbola aszimptotái.

Bevezethetjük azt a ferdeszögű (esetleg derékszögű) koordináta-rendszert, amelynek tengelyei a hiperbola aszimptotái, alapvektorai pedig egységvektorok. A hiperbolának ebben a koordináta-rendszerben felírt egyenletét a hiperbola *aszimptotákra vonatkoztatott egyenletének* mondjuk.

**Tétel.** *A hiperbola aszimptotákra vonatkoztatott egyenlete*

$$\xi\eta = A,$$

ahol  $A$  egy 0-tól különböző állandó.

Az aszimptoták megfelelő irányításával természetesen mindig elérhetjük azt, hogy  $A$  pozitív legyen.

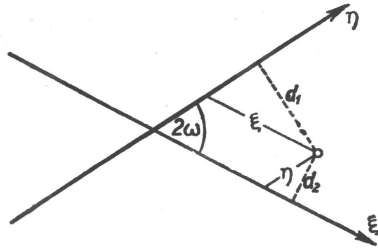
*Bizonyítás.* Ha a ferdeszögű koordináta-rendszer alapvektorai egységvektorok és tengelyeinek hajlásszöge  $2\omega$ , akkor a  $P(\xi, \eta)$  pont koordinátaival felírt

$$d_1 = \xi \sin 2\omega, \quad d_2 = \eta \sin 2\omega$$

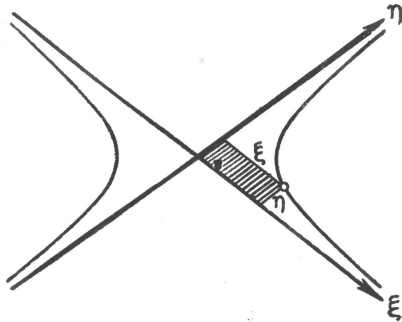
értékek a  $P$  pontnak a koordinátatengelyektől mért előjeles távolságait adják meg (434. ábra).

Ha ezt az aszimptoták koordináta-rendszerére alkalmazzuk, akkor az előző tételben szereplő távolságokhoz jutunk. Így tehát az előző tétel szerint a hiperbola aszimptotákra vonatkoztatott egyenlete

$$\xi\eta \sin^2 2\omega = C. \quad \text{—}$$



434



435

Az előző tételhez fűzött megjegyzésből következik, hogy a tételbeli egyenlet mindig egy hiperbola aszimptotákra vonatkoztatott egyenlete, akármilyen 0-tól különböző  $A$  érték áll is benne. Ez tehát akkor is igaz, ha a koordináta-rendszer alapvektorai nem egységvektorok, hiszen az egységvektor megváltoztatása a megfelelő koordináták állandóval való megszorzását eredményezi.

Eredményünket a derékszögű hiperbola esetére alkalmazva kimondhatjuk, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben  $A \neq 0$  esetén

$$xy = A$$

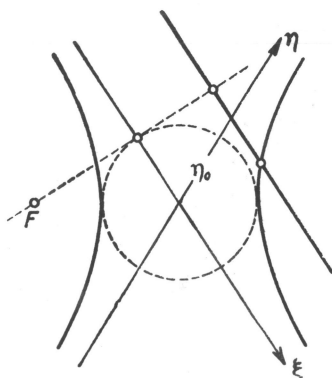
olyan derékszögű hiperbola, amelynek aszimptotái a koordinátatengelyek.

Tételünkben az is következik, hogy ha a hiperbola pontján át az aszimptotákkal párhuzamosakat húzunk, ezek az aszimptotákkal együtt állandó területű parallelogrammát határolnak, hiszen ez a terület a fenti jelölésekkel  $|\xi\eta| \cdot \sin 2\omega$  (435. ábra).

**Tétel.** Az aszimptotákkal párhuzamos egyenesek a hiperbolát egy pontban metszik.

Tételünk azt mondja ki, hogy az aszimptotákkal párhuzamos egyeneseknek egyetlen egy közös pontjuk van a hiperbolával, és a hiperbolát nem érintik.

*Bizonyítás.* a) Tekintsük az aszimptotákra vonatkoztatott koordináta-rendszerben pl. az  $\eta = 0$  aszimptotával párhuzamos  $\eta = \eta_0$  egyenest, ahol  $\eta_0 \neq 0$  (436. ábra). Ennek az egyenesnek egy közös pontja van a hiperbolával, mert a  $\xi\eta_0 = A$  egyenletet egyetlenegy  $\xi$  érték elégíti ki.



436

b) Tudjuk, hogy az  $F$  fókuszról az aszimptotára bocsátott merőleges érinti a főkört, és az aszimptotát az érintési pontban metszi. Ha tehát  $F$ -ből merőlegest bocsátunk az aszimptotával párhuzamos egyenesre, akkor ennek talppontja nincs a főkörön. Ez 42.2 második tétele szerint azt jelenti, hogy az aszimptotával párhuzamos egyenes a hiperbolát nem érinti. —

**A** Szakaszunk első tételéből kiolvashatjuk, hogy a hiperbolán az egyik aszimptotától távolodva, a másik aszimptotához egyre közelebb jutunk, s hogy ez a távolság 0-hoz tart akkor, ha az első aszimptotától minden határon túl távolodunk. Az aszimptoták ismerete tehát sok segítséget ad a hiperbola megrajzolásához. Még gyors felvázolásnál is célszerű először az aszimptotákat rajzolni meg, mert ezzel lényegesen növelhetjük a rajz jóságát.

**B1** Ha az ebben a szakaszban szereplő állandók értékét is kiszámítjuk, a következőket állapíthatjuk meg: ha az aszimptotáktól mért távolságokat úgy előjelezzük, hogy  $C$  értéké pozitív legyen, akkor

$$C = \frac{a^2 b^2}{c^2}; \text{ ha az aszimptotákat úgy irányítjuk, hogy } A \text{ értéke pozitív legyen, akkor } A = \frac{1}{4} c^2.$$

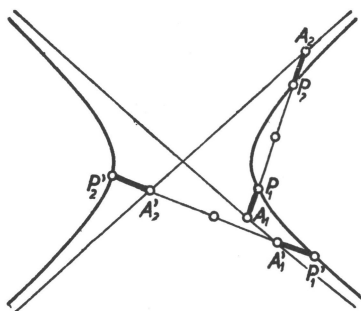
**B2** Minthogy az aszimptotákra vonatkoztatott egyenlethez a kanonikus egyenlet transz- formációja révén jutottunk, 41.8 B alapján a  $\xi\eta = A$  egyenletről is elmondhatjuk, hogy ha 0-tól különböző számokkal szorozzuk, akkor az aszimptoták koordináta-rendszerében a hiperbola minden másodfokú egyenletéhez eljutunk.

**B3** 43.4 B2 mintájára megállapíthatjuk, hogy a hiperbola bármely koordináta-rendszerbeli egyenletéből az állandó tag megváltoztatásával az azonos aszimptotákkal rendelkező hiperbolák mindegyikének egyenletéhez eljuthatunk, s hogy az egyenlet ilyen megváltoztatása vagy azonos aszimptotákkal rendelkező hiperbola, vagy pedig az aszimptotapár egyenletéhez vezet. Mindez abból következik, hogy az aszimptoták koordináta-rendszerében ezt tapasztaljuk.

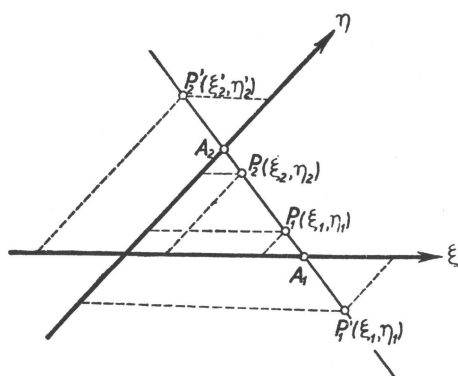
**43.6 Tétel.** *Ha egy egyenes két pontban metszi a hiperbolát, akkor ennek az egyenesnek az aszimptotáktól a hiperboláig terjedő szakaszai egyenlők.*

Nem kellett megkövetelnünk, hogy az egyenes messe az aszimptotákat is, mert az utolsó tétel szerint ennek be kell következnie, ha egyszer az egyenes a hiperbolát két pontban metszi.

*Bizonyítás, a)* Elég azt bizonyítanunk, hogy ha az aszimptoták  $A_1, A_2$  pontjait tartalmazó egyenes  $P_1$  pontja a hiperbolához tartozik, akkor  $P_1$  a pontnak az (esetleg 0 hosszúságú)  $A_1, A_2$  szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe is a hiperbolán van (437. ábra). Ez valóban elegendő a tétel bizonyításához, mert a hiperbolát két pontban metsző egyenes az aszimptotákat  $A_1, A_2$  pontokban metszi, és bizonyos, hogy a két metszéspont egyike az  $A_1, A_2$  szakasz felezőpontjától különböző  $P_1$  pont. Ha tehát tudjuk, hogy  $P_1$ -nek a felezőpontra vonatkozó  $P_2$  tükörképe ugyancsak hiperbolapont, akkor megállapíthatjuk, hogy  $P_2$  a második metszéspont, s így a szimmetriából a tétel állítása is következik.



437



438

b) Az aszimptoták koordináta-rendszerét használjuk. Legyenek  $P_1(\xi_1, \eta_1)$  és  $P_2(\xi_2, \eta_2)$  egy egyenesen az  $A_1, A_2$  metszéspontoktól különböző, szimmetrikus elhelyezkedésű pontok (438. ábra). A párhuzamos szelők tétele szerint előjelre is helyesen

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{P_1 A_2}{P_2 A_2}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{A_1 P_1}{A_1 P_2}.$$

Mint hogy a szimmetria folytán  $A_1 P_1 = P_2 A_2$  és  $A_1 P_2 = P_1 A_2$  jobb oldali törték szorzata 1, s így ez a bal oldalak szorzatára is áll, tehát

$$\xi_1 \eta_1 = \xi_2 \eta_2.$$

Ebből következik, hogy ha  $P_1$  a  $\xi\eta = A$  hiperbolán van, akkor  $P_2$  is a hiperbolához tartozik. —

**Tétel.** A hiperbola érintőjének érintési pontja jelezi az érintőből az aszimptoták által kivágott szakaszt.

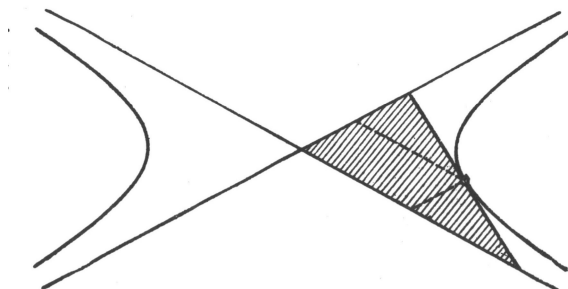
A tétel joggal szólhatott az aszimptoták által kivágott szakaszcól, mert tudjuk, hogy az aszimptotákkal párhuzamos egyenesek nem érintők, s hogy az aszimptotákat ugyanabban a pontban, ti. a középpontban metsző egyenesek között sincs érintő.

*Bizonyítás.* Az érintési pont a szóban forgó szakasz felezőpontja, mert különben az előző tétel bizonyítása szerint az érintési pontnak a szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe az érintő és a hiperbola második közös pontja volna. —

**Tétel.** A hiperbola érintője és aszimptotái által határolt háromszög területe nem függ az érintő megválasztásától.

*Bizonyítás.* Egy háromszögből két középvonala feleakkora területű parallelogrammát vág le. Az előző tétel alapján kimondhatjuk tehát, hogy az érintők és az aszimptoták által határolt háromszög

területe kétszer akkora, mint az aszimptoták és az érintési ponton át az aszimptotákkal párhuzamosan húzott egyenesek által határolt paralelogramma területe (439. ábra). Ez utóbbiról azonban az előző szakaszban már beláttuk, hogy nem függ az érintési pont helyzetétől. —

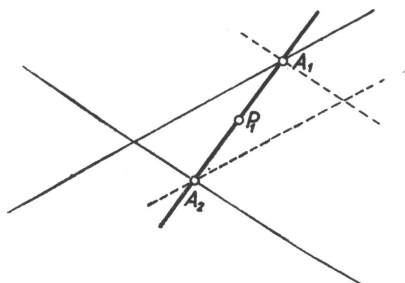


439

**Tétel.** *A hiperbola pontján áthaladó egyenesek közül csak az érintőnek és az aszimptotákkal párhuzamos egyeneseknek van a hiperbolával egyetlen egy közös pontjuk.*

Már tudjuk, hogy a kivételként felsorolt egyeneseknek valóban csak egy pontjuk tartozik a hiperbolához. A tétel állításának lényege, hogy a hiperbola pontjain áthaladó többi egyenes a hiperbolát két pontban metszi.

*Bizonyítás.* A hiperbola pontján áthaladó egyenesek között csak egy olyan van, amelynek az aszimptotákkal alkotott  $A_1, A_2$  metszéspontjai a  $P_1$  pontra nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Ez abból következik, hogy az ilyen egyenes csak annak a paralelogrammának az átlója lehet, amelyet az aszimptoták és ezeknek a  $P_1$  pontra vonatkozó tükörképei határolnak (440. ábra). A talált egyetlen egyenes a hiperbola  $P_1$  pontbeli érintője, hiszen az második tételünk szerint valóban ilyen.



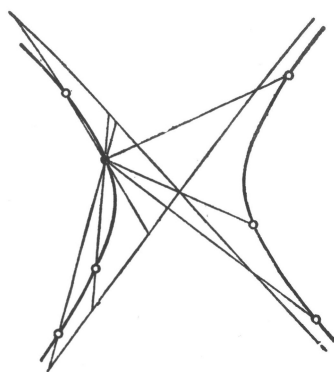
440

Ha tehát a  $P_1$  ponton áthaladó  $e$  egyenes nem párhuzamos az aszimptotákkal, és nem érinti a hiperbolát, akkor az aszimptotákat olyan  $A_1, A_2$  pontokban metszi, amelyek nem szimmetrikusak  $P_1$ -re vonatkozólag. Első tételünk bizonyítása szerint azonban  $P_1$ -nek az  $A_1, A_2$  szakasz  $P_1$ -től különböző felezőpontjára vonatkozó  $P_2$  tükörképe is a hiperbolához tartozik. Az  $e$  egyenestehát a hiperbolát valóban két pontban metszi. —

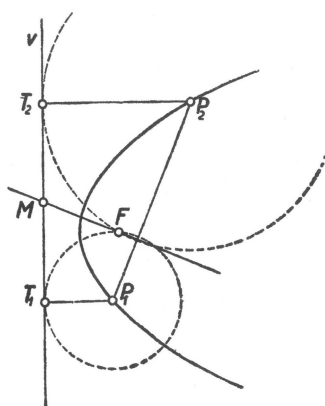
**A1** Az utolsó előtti tételnek szemléletes jelentést adhatunk. Egy vályút képzelünk, amelynek élére merőleges falai szögtartomány alakúak. Ha ebbe a vályúba folyadékot töltünk, és a vályút vízszintes éle körül ingatjuk, akkor az oldalfalak megnedvesíthető részének határa hiperbolaág.

**A2** E szakasz első tételét felhasználhatjuk arra, hogy a hiperbolát aszimptotáinak és egy pontjának ismeretében megszerkesszük (441. ábra). A második tétel viszont az aszimptoták ismeretében egy adott pontban vont érintő megszerkesztésére ad módot (440. ábra).

**B** Az utolsó előtti tételben szereplő háromszögek közös területe  $ab$  (vö. 43.5 B1).



441

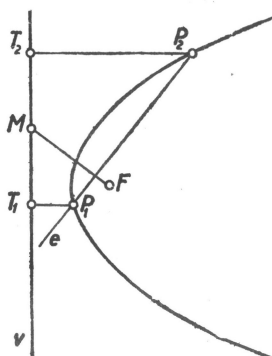


442

**43.7** A parabolának olyan tulajdonságait említjük, amelyek azt domborítják ki, hogy a parabolának csak egy fókusza van.

**Tétel.** Ha a parabola valamely húrját merőlegesen a vezéregyenesre vetítjük, akkor a vetület felezőpontjából a húrra bocsátott merőleges áthalad a fókuszon.

*Bizonyítás.* Tekintsük a parabola  $P_1P_2$  húrját, s annak a vezéregyenesre vetett  $T_1T_2$  vetületét (442. ábra). Tudjuk, hogy a  $P_1$  körül  $P_1T_1$  sugárral írt és a  $P_2$  körül  $P_2T_2$  sugárral írt kör áthalad a fókuszon. A  $T_1T_2$  szakasz  $M$  felezőpontja e két kör hatványvonalán van, mert az  $MT_1 = MT_2$  távolság négyzete adja mindkét körre vonatkozó hatványát. Ezért az  $M$ -ből  $P_1P_2$ -re bocsátott merőleges a két kör hatványvonala, tehát áthalad a körök közös pontján, a fókuszon.



443

**Tétel.** *A parabola pontjain áthaladó egyenesek közül csak az érintőknek, a tengelynek és a tengellyel párhuzamos egyeneseknek van a parabolával egyetlenegy közös pontjuk.*

Azt már tudjuk, hogy a kivételként felsorolt egyeneseknek csak egy pontjuk tartozik a paraboláidhoz. A tétel állításának lényege, hogy a parabola pontjain áthaladó többi egyenes a parabolát két pontban metszi.

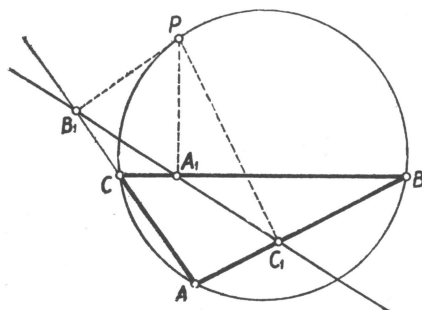
*Bizonyítás.* A parabola  $P_1$  pontján áthaladó  $e$  egyenes ne legyen érintő, és állása különbözzék a tengelyétől. Ez utóbbi megszorítás miatt az  $F$  fókuszról  $e$ -re bocsátott merőleges metszi a vezéregyeneset egy  $M$  pontban (443. ábra). Az  $M$  pont nem azonos  $P_1$ -nek a vezéregyenesre vetett  $T_1$  vetületével, mert akkor az egyenlő szárú  $FP_1T_1\Delta$ -ból következőleg  $T_1$  a fókuszhoz  $e$ -re vonatkozó tükörképe volna, és  $e$  érintené a parabolát. Legyen  $T_2$  a  $T_1$  pontnak  $M$ -re vonatkozó tükörképe. A vezéregyenesre  $T_2$ -ben állított merőleges a parabolát a  $P_2$  pontban metszi. Az előző tétel szerint a  $P_1P_2$  húr merőleges az  $FM$  egyenesre. Ez a húr tehát az  $e$  egyenesen van, és  $P_2$  az  $e$  egyenes második metszéspontja. —

Tételünk 43.2 második és 43.6 utolsó tételével együtt lezárja annak a kérdésnek vizsgálatát, hogy az érintőkön kívül melyek azok az egyenesek, amelyeknek valamely kúpszelettel csak egy közös pontjuk van. Azt tapasztaltuk, hogy csak a hiperbola aszimptotáival párhuzamos és a parabola tengelyével egyező állású egyenesek ilyenek.

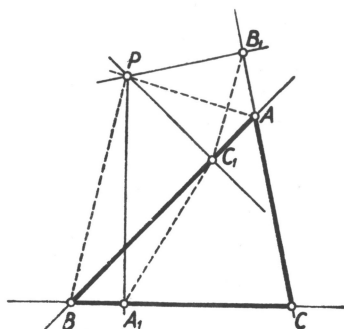
A parabolára vonatkozólag még egy tételt tárgyalunk, de ezt egy elemi geometriai tétel bizonyításával készítjük elő.

**Tétel.** *A háromszög oldalegyeneseire egy pontból bocsátott merőlegesek talppontjai akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha a pont a háromszög köré írt körön van.*

A körülírt kör pontjából bocsátott merőlegesek talppontjának egyenesét WALLACE-féle egyenesnek<sup>6</sup> mondjuk (444. ábra).



444



<sup>6</sup>\* W. Wallace (ejtsd: volesz), 1768-1843, az edinburghi egyetem tanára. Ugyancsak Skóciában működött korábban R. Simson (ejtsd: szimszn, 1687-1768, a glasgowi egyetem tanára. Innen ered a téves „Simson-féle egyenes megnevezés.

*Bizonyítás.* Jelölje  $A_1, B_1, C_1$  a  $P$  pontnak az  $ABC\Delta$  megfelelő oldal egyeneseire vetett merőleges vetületeit (445. ábra),  $PA_1, PB_1, PC_1$  pedig a vetítő egyeneseket még akkor is, ha  $P$  valamelyik vetületével esetleg azonos. Hasonló módon pl.  $AC_1$ , az  $AB$  egyenest jelöli még akkor is, ha  $A$  és  $C_1$  azonos.

Feltesszük, hogy  $P$  nem azonos az  $A, B, C$  pontok valamelyikével, mert akkor  $P$  a körülírt körön van, s az  $A_1, B_1, C_1$  pontok is egy egyenesen vannak, hiszen közülük kettő azonos. Feltevésünkből következik, hogy az  $A_1, B_1, C_1$  pontok mind különbözők.

Sorrendben megadott, irányítatlan egyenesek irányított hajlásszögeivel dolgozunk (vö. 3.5). Az előjeles mértékeikre vonatkozó egyenlőségek tehát  $180^\circ$  modulusú kongruenciáknak tekintendők.

Az  $A, B_1, C_1, P$  pontok egy körön, a  $PA$  szakasz Thales-körén vannak. A kerületi szögek tételéből tehát következik (lásd 16.1 B3b), hogy

$$(AP, B_1P) \sphericalangle = (AC_1, B_1C_1) \sphericalangle = (AB, B_1C_1) \sphericalangle,$$

és hasonló indokolással

$$(BP, A_1P) \sphericalangle = (BC_1, A_1C_1) \sphericalangle = (AB, A_1C_1) \sphericalangle$$

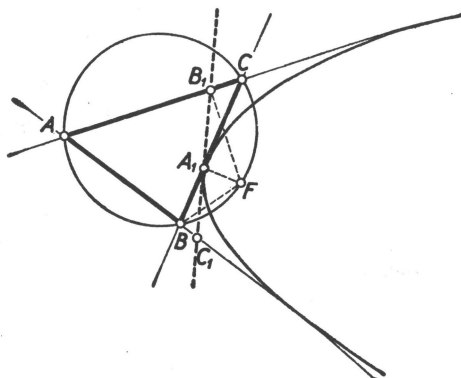
Jelölési megállapodásunk tette lehetővé, hogy nem kell külön szólnunk azokról az esetekről, amikor az egyeneseket meghatározó pontok egybeesnek.

Az  $A_1, B_1, C_1$  pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha  $B_1C_1$  és  $A_1C_1$  azonos egyenesek, ha tehát a fenti egyenlőségsorokban egyenlő szögek állnak. Ez akkor és csak akkor következik be, ha a sík elforgatható  $P$  körül úgy, hogy az  $AP, BP$  egyenesek  $B_1P, A_1P$  helyzetbe jussanak, hogy tehát  $90^\circ$ -kal tovább forgatva állásuk az  $AC, BC$  egyenesekével egyezzenek meg. Ezek szerint az  $A_1, B_1, C_1$  pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha

$$(AP, BP) \sphericalangle = (AC, BC) \sphericalangle.$$

Ez azonban éppen annak szükséges és elégséges feltétele, hogy  $P$  az  $ABC$  körön legyen (lásd 16.1B3b).

**Tétel.** A parabola három érintője által határolt háromszög köré írt kör áthalad a fókuszon.



*Bizonyítás.* A fókuszról az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesen, a parabola főegyenesén vannak (446. ábra). Az előző tétel szerint tehát a fókusz valóban az érintők háromszöge köré írt körön van.—



**B** Ebben a szakaszban fejeztük be annak vizsgálatát, hogy melyek azok az egyenesek, amelyek a kúpszeletet nem érintik, de vele csak közös pontjuk van. Megmutatjuk most, hogy ezt a vizsgálatot 41.6 B2-re támaszkodva hogyan lehet egységesen elvégezni.

Azt kell megvizsgálnunk, hogy a 41.6 B2-beli 3. eset mikor következik be, hiszen megállapítottuk, hogy ez az az eset, amikor az  $e$  egyenesen egy görbepont van, és  $e$  többi pontja nem mind külső pont. Tudjuk, hogy ez az eset akkor lép fel, ha az  $F$  centrumú inverzió a  $v$  vezéralakzatot olyan  $v'$  körbe viszi, amely  $F$ -ből  $e$ -re bocsátott  $h$  merőlegest érinti, és nem halad át (a 41.6 B2-ben szereplő sugársor tartóján) az  $F$  pont  $e$ -re vonatkozó tükörképének az inverzén (ha van inverze). Ez a két feltétel akkor teljesül, ha  $v$  az  $F$ -ből  $e$ -re bocsátott  $h$  merőlegest érintő kör vagy vele párhuzamos egyenes, s ha  $F$ -nek  $e$ -re vonatkozó tükörképe nem tartozik  $v$ -hez. Az utóbbi megszorítás természetesen semmitmondó akkor, ha  $v$  egyenes, mert ekkor a vele párhuzamos  $h$ -nak egyetlen egy pontja sem tartozik  $v$ -hez, tehát  $F$ -nek  $e$ -re vonatkozó tükörképe sem tartozhatik hozzá.

Ezek szerint a feltételek csak a következő két esetben teljesülnek: ha  $v$  kör,  $e$  pedig merőleges az  $F$ -ből  $v$ -hez húzott érintők valamelyikére, de az  $F$ -ből vont érintőszakaszt nem felezi; ha továbbá  $v$  egyenes, és  $e$  merőleges rá. Az első esetben a kúpszelet hiperbola, mert  $F$  a vezérkörön kívül van,  $e$  pedig az aszimptoták valamelyikével párhuzamos egyenes, hiszen az  $F$ -ből  $v$ -hez vont érintőszakaszok merőleges felezői az aszimptoták. A második esetben a kúpszelet parabola, mert  $v$  egyenes,  $e$  pedig a parabola tengelyével egyező állású, hiszen merőleges a vezéregyenesre.

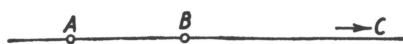
Megemlítjük, hogy az inverzió szerepe ebben a vizsgálatban nem volt lényeges, csak az esetek áttekintését könnyítette meg. Ugyanehhez az eredményhez (körülményesebben) a 42.3A-ban említett szerkesztés taglalása is elvezethetett volna.

## 44. § Ideális térelemek

A kúpszeletek tárgyalását két előkészítő jellegű paragrafussal szakítjuk meg. Ebben a paragrafusban a közönséges térelemek körét végtelen távolinak is mondott ideális térelemekkel bővítjük ki. Ezzel a másodrendű görbék egyöntetűbb tárgyalását tesszük majd lehetővé. Olyan új koordinátákat vezetünk be, amelyekkel az ideális térelemeket is kezelni tudjuk. Foglalkozunk végül egy érdekes párhuzammal, amely a sík pontjaira és egyeneseire vonatkozó kijelentésekben és formulákban mutatkozik meg.

**44.1** A sík két egyenese vagy párhuzamos, vagy pedig van egy közös pontjuk. Ezt a kétféleséget megszüntethetjük azáltal, hogy az egyenes pontjainak az összességét egy *ideális pontnak* (végtelen távoli pont) mondott elemmel bővítjük, mégpedig két egyenes pontjainak az összességét akkor és csak akkor bővítjük ugyanazzal az új elemmel, ha a két egyenes párhuzamos.

A nem ideális pontokat megkülönböztetésül *közönséges pontoknak* (végesben elhelyezkedő pontok) is nevezzük. Ha pontot mondunk, ez közönséges pontot és ideális pontot is jelenthet. A betűkkel való jelölés tekintetében sem teszünk különbséget közönséges és ideális pontok között. Egy ideális pontot azzal adhatunk meg, hogy megadunk egy olyan egyenest, amely azt tartalmazza. Beszélhetünk így adott állású, irányvektorú, irányú és irányszögű ideális pontról. Ábrán az egyenessel párhuzamosan rajzolt nyíl mellé írjuk az egyenes ideális pontját jelölő betűt (447. ábra). Ugyanannak az ideális pontnak jelölésénél tehát ellentétes irányú nyilakat is alkalmazhatunk.

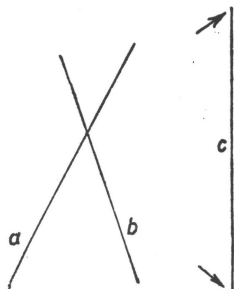


447

Az ideális pontok bevezetése után elmondhatjuk, hogy a sík bármely két egyenesének egyetlenegy közös pontja van. A közös pontot metszéspontnak mondjuk akkor is, ha ideális pont, ha tehát párhuzamos egyenesekről van szó.

Két közönséges pont, valamint egy közönséges és egy ideális pont egyetlen egyenest határoz meg, viszont két ideális pontról ugyanezt nem mondhatjuk el. Ezt a kivételt megszüntethetjük azáltal, hogy a sík egyeneseinek az összességét a sík egyeneseinek ideális pontjai által alkotott alakzattal, a sík *ideális egyenesével* (végtelen távoli egyenes) bővítjük.

A nem ideális egyeneseket megkülönböztetésül *közönséges egyeneseknek* (végesben elhelyezkedő egyenesek) mondjuk. Ha csak egyenest mondunk ez közönséges és ideális egyenest is jelenthet. Betűkkel való jelölés tekintetében sem teszünk különbséget a sík közönséges egyenesei és ideális egyenesei között. Ábrán a sík ideális egyenesét két egymással nem párhuzamos nyíl mellé rajzolt vonallal jelölhetjük (448. ábra).

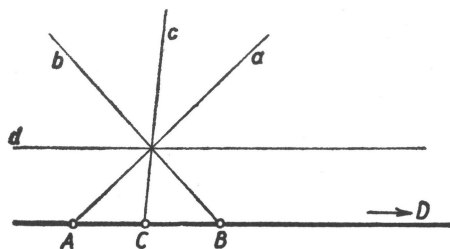


448

A sík ideális egyenesének bevezetése után már az is igaz, hogy bármely két pont egyetlenegy egyenest határoz meg, hiszen két ideális pont összekötő egyenes az ideális egyenes. Igaz marad az is, hogy bármely két egyenesnek egyetlenegy közös pontja van, hiszen egy közönséges egyenesnek és a sík ideális egyenesének metszéspontja a közönséges egyenes ideális pontja.

**A** Az új térelemek bevezetésekor nem volt szó arról, hogy egy pont vagy egyenes minden határon túl eltávolodik. Ha valaki így akarna szemléletes jelentést adni az újonnan bevezetett pontoknak és egyenesnek, és azokat „végtelenbe távozott” pontoknak és egyenesnek látja, akkor jelentős akadályok állják útját a szemléletes kép kialakulásának. Ilyen akadályt jelent az a kijelentés, hogy ha egy egyenesen az egyik vagy a másik irányban „távozik a végtelenbe” egy pont, akkor ugyanahhoz a határhelyzethez jut, s hogy a különböző irányokban „végtelenbe távozott” pontok nem kört, hanem egyenest alkotnak. Jobb tehát, ha lemondunk arról, hogy az újonnan bevezetett pontoknak és egyenesnek ilyesfajta szemléletes jelentést adjunk. Jobbnak mondhatjuk ezért az ideális pont és ideális egyenes elnevezéseket, mert a „végtelen távoli” jelző zavaros gondolatokra csábíthat.

**B1** Az ideális pont bevezetése után egységesebbé válik egy s más az eddig tárgyaltak körében is. Így például minden esetben mondhatjuk, hogy  $q$  sugársort egy ponton áthaladó egyenesek alkotják. Ha a sugársor tartója ideális pont, akkor elemei párhuzamos közönséges egyenesek, s ilyenkor a sík ideális egyenesét is a sugársor elemei közé soroljuk. Kivétel nélkül igazzá válik így, hogy ha egy (közönséges vagy ideális) egyenes pontjait egy hozzá nem tartozó (közönséges vagy ideális) ponttal összekötjük, akkor sugársorhoz jutunk, mégpedig az egyenes minden pontját figyelembe kell venni ahhoz, hogy a sugársor minden eleméhez eljussunk (449. ábra).



449

**B2** Közönséges tartójú sugársor esetében nem szorul magyarázatra az a kijelentés, hogy a sugársor két eleme két másikat elválaszt. Ez azt jelenti, hogy két egyenes olyan csúcshökeket alkotó szögtartományokat határol, amelyek a másik két egyenes közül csak az egyiket tartalmazzák.

Megállapodunk abban, hogy a közönséges tartójú sugársort metsző (tartóján át nem haladó) egyenesen akkor mondjuk két pontpárról, hogy egymást *elválasztják*, ha a sugársornak ezeket kimetsző elemei

elválasztják egymást. A szakasz fogalmát általánosítva azt mondjuk, hogy az egyenesnek két rögzített pont által el nem választott pontjai *szakaszt* (projektív szakasz) alkotnak. Az egyenes bármely két pontja tehát két ilyen szakasz közös végpontja, és a két pont akkor választ el két másikat, ha ezek a két pont által határolt két szakasz egyikében és másikában vannak.

Ezek szerint közönséges egyenesen az eddig is így nevezett, közönséges szakaszon kívül szakasznak mondjuk a közönséges szakaszt kiegészítő félegyenesek egyesítését (közös ideális pontjukkal együtt), valamint a közönséges és ideális pont által határolt félegyeneset is. Az ideális egyenes szakaszát az egy pontból induló, konvex (de nem egyenesszőgű) szögterományt alkotó félegyenesek ideális pontjai alkotják, és a száraz ideális pontjai határolják.

Egy sugársor két elempárja akkor és csak akkor választja el egymást, ha egy a tartóponton át nem haladó egyenesből egymást elválasztó pontpárokat metszenek ki. Ez részben megállapítás, részben definíció: közönséges tartójú sugársorra vonatkozólag abból következik, ahogyan a pontok elválasztását definiáltuk, ideális tartójú sugársorra vonatkozólag viszont az elválasztás definíciója. Eszerint párhuzamos egyenesek sugársorában két közönséges párhuzamos egyenes a közrefogott párhuzamosokat elválasztja a többitől és az ideális egyenestől.

Minden esetben igaz, hogy ha két elem elválaszt két másikat, akkor ez utóbbiak is elválasztják az első kettőt. Ez abból következik, hogy ez a kiindulásul szolgáló, közönséges tartójú sugársorra igaz.

A szakasz fogalmának általánosítása a konvexitás fogalmának általánosítását teszi lehetővé. Az ideális elemekkel kiegészített sík alakzata akkor *konvex* (projektíven konvex), ha bármely két pontja összeköthető az alakzathoz tartozó szakasszal, ha tehát az alakzat a két összekötő szakasznak legalább az egyikét tartalmazza. Ebben az értelemben pl. a hiperbolatartomány is konvex, tehát 41.5 második és harmadik tétele egybeolvad.

**B3** Ha ebben a könyvben pontsorozatok és egyenessorozatok konvergenciájával is foglalkoznánk, akkor a tárgyalásba az ideális pontok másfajta bevezetését is beilleszthetnők. Azt mondanák, hogy bizonyos divergáló pontsorozatok egy ideális ponthoz, bizonyos divergáló egyenessorozatok az ideális egyeneshez konvergálnak, ugyanúgy, ahogyan az analízis bizonyos divergáló számsorozatokról azt mondja, hogy  $\infty$ -hez konvergálnak. Szabatos alakba önthetnők így azt az elképzelést, amelyről az A megjegyzés szólt. A részletes kidolgozást azonban semmiképpen sem helyettesíthetnők azzal a megjegyzéssel, hogy „szemléletesen is látható” dolgokról van szó.

**B4** Mi minden egyeneshez egy ideális pontot csatoltunk, és csak párhuzamos egyenesekhez csatoltuk ugyanazt az ideális pontot. Más megállapodás is lehetséges, de akkor mások lesznek az ideális pontokról szóló kijelentések is. A komplexváltozós analízis pl. egyetlenegy pontot csatol a síkhoz, s ezt minden egyenes pontjának mondja. Ez a megállapodás lett volna célszerű az inverzió tárgyalásánál is, s akkor az inverzió centrumát az ideális pont inverzének mondhattuk volna. Ilyen módon nagyrészt eloszlának az a zavar, amelyre 39.1B2 utalt.

**44.2** Annak mintájára, ahogyan a síkban ideális pontokat és ideális egyenest vezettünk be, most a térbeli pontok, egyenesek és síkok körének a bővítésével foglalkozunk. Erre a síkra vonatkozó további tárgyalásunk során is szükségünk lesz.

Az ideális pontok bevezetéséről már nem kell szólnunk. Elég azt hangsúlyoznunk, hogy akkor és csak akkor csatoljuk ugyanazt az ideális pontot két egyeneshez a térben is, ha a két egyenes párhuzamos.

Az ideális pontokra vonatkozó megállapodásból következik, hogy két sík ideális egyenese akkor és csak akkor azonos, ha a két sík párhuzamos. Ez abból következik, hogy csak párhuzamos síkok esetében található az egyik sík bármely közönséges egyeneséhez a másik síkban vele párhuzamos egyenes. Egy ideális egyenest úgy adhatunk meg, hogy megadunk egy olyan síkot, amely azt tartalmazza. Beszélhetünk tehát az ideális egyenes állásáról.

Az új térelemek bevezetését a tér valamennyi ideális pontja által alkotott *ideális sík* (végtelen távoli sík) bevezetésével zárjuk le. A nem ideális síkokat megkülönböztetésül *közönséges síkoknak* (végesben elhelyezkedő síkok) mondjuk. Az ideális sík is tartalmaz minden olyan egyenest, amelynek két pontja hozzá tartozik, hiszen két ideális pontot csak ideális egyenes tartalmazhat, és ideális egyenesnek csak ideális pontja van.

Az ideális térelemek bevezetése után lehetővé válik, hogy a metszésre és összekötésre vonatkozó szabályok kimondásakor sohasse legyen szükség a párhuzamosság esetének elkülönítésére.

**Tétel.** *Bármely két ponthoz egyetlenegy ezeket tartalmazó egyenes tartozik.*

*Bizonyítás.* Két közösleges pont esetében igaz az állítás, mert a közösleges egyenesek közül csak a két pont összekötő egyenese felel meg, s az újonnan bevezetett egyeneseknek nincsenek közösleges pontjaik.

Egy közösleges és egy ideális pont esetében is helyes az állítás, mert egy adott közösleges ponton át egyetlenegy adott állású közösleges egyenes halad, és ideális egyenes nem tartalmaz közösleges pontot.

Végül két ideális pontot csak ideális egyenes tartalmazhat, és az ideális egyenesek közül csak a két ideális pontot meghatározó egyenesekkel párhuzamos síkok közös ideális egyenese felel meg. -

**Tétel.** *Ha három pont nincs egy egyenesen, akkor ezeket egyetlen egy sík tartalmazza.*

*Bizonyítás.* Ha a három pont között közösleges pont is van, akkor ez az előző tétel szerint a másik kettővel egy-egy egyenest határoz meg. Ez a két egyenes közösleges, mert van közösleges pontjuk, és metszik egymást, mert a három adott pont nincs egy egyenesen. A két egymást metsző közösleges egyenes síkja az egyetlen olyan sík, amely a három adott pontot tartalmazza, mert a három pontot tartalmazó síknak tartalmaznia kell az általuk meghatározott egyeneseket, tehát az említett metsző egyeneseket is.

Ha mind a három adott pont ideális, akkor a tér ideális síkja mind a hármat tartalmazza, és közösleges sík nem tartalmazhatja, mert akkor a három adott pont egy egyenesen, a közösleges sík ideális egyenesén volna. -

Tételünkéből következik, hogy egy egyenes és egy rajta kívül elhelyezkedő pont mindig egy síkot határoz meg, s hogy ugyanezt két egymást metsző egyenesről is mindig elmondhatjuk.

**Tétel.** *Bármely két síknak egyetlenegy közös egyenese van.*

*Bizonyítás.* Két egymást metsző közösleges sík metszésvonala az egyetlen közös közösleges egyenesük, és közös ideális egyenesük nincs, mert egymással nem párhuzamosak.

Párhuzamos közösleges síkoknak nincs közös közösleges egyenesük, viszont ideális egyenesük közös.

Egy közösleges síknak és az ideális síknak közös egyenese a közösleges sík ideális egyenese. és a közösleges sík közösleges egyenesei nincsenek az ideális síkban. —

**Tétel.** *Ha három síknak nincs közös egyenese, akkor egyetlenegy közös pontja van.*

*Bizonyítás.* A három sík között van közösleges sík is, mert csak egy ideális sík van. Ez a közösleges sík az előző tétel szerint a másik kettőt egy-egy egyenesben metszi. Ez a két egyenes nem azonos, mert akkor a három adott síknak volna közös egyenese. Tételünk következik tehát abból, hogy egy közösleges sík két egyenesének egyetlenegy közös pontja van. —

**Tétel.** *Ha egy sík egy egyenest nem tartalmaz, akkor egyetlenegy közös pontja van vele.*

*Bizonyítás.* Az adott egyenesen át két síkot fektetünk. E két sík az adott síkkal együtt három közös egyenessel nem rendelkező síkot ad, hiszen az első kettőnek a metszésvonalát a harmadik a feltevés szerint nem tartalmazza. Állításunk tehát következik az előző tételből. -

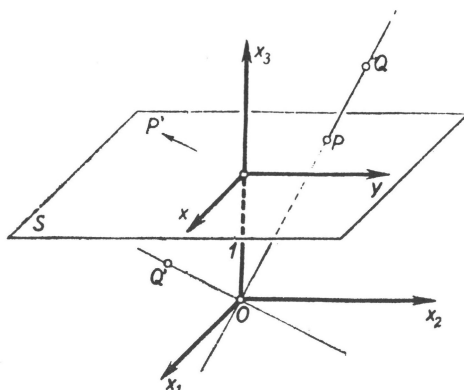
**B1** Két egyenes ideális pontjának azonossága a két egyenes állásának megegyezését, és két sík ideális egyenesének azonossága a két sík állásának megegyezését jelenti. A pont fogalmának kiterjesztését tehát úgy is magyarázhatjuk, hogy egy egyenes pontjainak és állásának adunk közös nevet, közös névként azonban megint csak a pont szót használjuk. Hasonlóan mondhatjuk, hogy az egyenes fogalmának kiterjesztésekor a sík egyenesének és állásának adunk közös nevet, és közös névként megint csak az egyenes szót használjuk.

**B2** Ha két síkot és egy olyan  $C$  pontot tekintünk; amely nem tartozik a két sík egyikéhez sem, akkor e szakasz első és utolsó tétele alapján kimondhatjuk, hogy ha az egyik sík bármely pontját  $C$ -vel összekötjük-, a kapott egyenes a másik síkból minden esetben egyetlenegy pontot dőf ki. Hasonlót mondhattunk volna már az előző szakaszban is a sík két egyeneséről és hozzájuk nem tartozó  $C$  pontjáról. Az ideális térelemek bevezetése után igaz tehát az, hogy a *pontból való vetítés* (centrális projekció) a centrumon át nem haladó síkok, illetőleg síkban- a centrumon át nem haladó egyenesek pontjai között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít. Ez a magyarázata annak, hogy az ideális ponttal kiegészített egyenest *projektív egyenesnek*, az ideális egyenessel kiegészített síkot *projektív síknak*, s az ezeket tartalmazó, ideális síkkal kiegészített teret *projektív térnek* nevezzük. A projektív tér pontjai, egyenesei és síkjai mind egyenrangúak.

**B3** Mi a projektív térelemek illeszkedési törvényeihez az euklideszi geometrián át jutottunk el. Lehetséges volna azonban, hogy ilyen illeszkedési szabályokat axiómaként mondjunk ki, s akkor a geometria felépítése közvetlenül a projektív térhez vezetne.

**44.3** A most következőkben csak az ideális elemekkel bővített síkkal foglalkozunk. Olyan koordinátákat vezetünk be, amelyek az ideális elemek kezelését is lehetővé teszik.

A vizsgált  $S$  síkban derékszögű  $x, y$  koordináta-rendszert veszünk fel. Ezt követően olyan térbeli derékszögű  $x_1, x_2, x_3$  koordináta-rendszert választunk, amelynek  $x_1, x_2$  tengelyei az  $x, y$  tengelyekkel párhuzamosak;  $x_3$ -tengelyének  $x_3 = 1$  pontja pedig az  $x, y$  koordináta-rendszer kezdőpontja (450. ábra).



450

Tekintsük az  $S$  sík egy tetszőleges (közönséges vagy ideális)  $P$  pontját. A térbeli koordináta-rendszer  $O$  kezdőpontja és a  $P$  pont egy  $OP$  egyenest határoz meg, és minden az  $O$  ponton áthaladó egyenes egyértelműen meghatározza az  $S$  sík egy  $P$  pontját. Az  $OP$  egyenest viszont egyértelműen meghatározhatjuk azáltal, hogy egy  $O$ -tól különböző közönséges  $Q$  pontját adjuk meg. A  $P$  pontot így meghatározó  $Q(x_1, x_2, x_3)$  pont koordinátáit a  $P$  pont *homogén koordinátáinak* (homogén pontkoordináták) mondjuk. Szólhatunk a  $P$  pontot meghatározó  $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  vektorról is. Ha tehát a következőkben a  $P$  pontot meghatározó vektorról beszélünk, nem szabad ezt a pont helyvektorával összetévesztenünk.

Félreértések elkerülése végett a homogén koordinátákat és a pontot meghatározó vektort szögletes zárójelbe helyezzük, az imént említett pontot tehát  $P[x_1, x_2, x_3]$  és  $P[\mathbf{x}]$ , vagy  $[x_1, x_2, x_3]$  és  $[\mathbf{x}]$  is jelölheti. Az ábra egyszerűsítése érdekében megtesszük majd, ahogyan ezt a helyvektorokkal is tettük, hogy a  $P[\mathbf{x}]$  pontot az ábrán csak az  $\mathbf{x}$  vektor jelével jelöljük;

A mondottakból következik, hogy egy pont homogén koordinátáinak mindegyike nem lehet 0, s a pontot meghatározó vektor nem lehet nullvektor. Ettől a kivételtől eltekintve minden számhármast, és minden vektor egyetlenegy pontot határoz meg.

**Tétel.** Ha egy pont homogén koordinátáit ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk meg, akkor ugyanannak a pontnak homogén koordinátáihoz jutunk, s így a pont minden homogén koordinátahármastól eljuthatunk.

Szólhattunk volna természetesen homogén koordinátahármas helyett a pontot meghatározó vektorról is. A szorzóról ki kellett kötnünk, hogy nem 0, hiszen a homogén koordináták mindegyike nem lehet 0.

Tételünk kimondja, hogy ha  $x_1, x_2, x_3$  és  $x'_1, x'_2, x'_3$  ugyanannak a pontnak homogén koordinátái, akkor

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3,$$

s hogy ha ez teljesül, s egyik oldalon sem áll csupa 0, akkor mindkét oldalon ugyanannak a pontnak homogén koordinátái állnak. Mondhatjuk tehát, hogy a pont homogén koordinátái is viszonykoordináták (vö. 35.5), s hogy a pont egyértelműen meghatározza homogén koordinátáinak a viszonyát.

*Bizonyítás.* A nullvektortól különböző  $\mathbf{x} (x_1, x_2, x_3)$  és  $\mathbf{x}' (x'_1, x'_2, x'_3)$  vektorok akkor és csak akkor határozzák meg ugyanazt a  $P$  pontot, ha ugyanazt az  $O$  kezdőponton áthaladó egyenest szolgáltatják, ha tehát párhuzamosak egymással. Ezért a  $P[\mathbf{x}]$  pontnak nemcsak  $\mathbf{x}$ , hanem a  $\lambda \neq 0$  értékkel számított  $\lambda \mathbf{x}$  vektor is meghatározó vektora; az  $[\mathbf{x}]$ ,  $[\mathbf{x}']$  pontok azonosságából pedig következik, hogy  $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$  és  $\lambda \neq 0$ . —

*Tétel.* A közösleges  $P(x, y)$  pont homogén koordinátáira

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1.$$

A tétel szerint a közösleges pontok harmadik homogén koordinátája nem 0, és közösleges koordinátáik a homogén koordinátákból

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

előírással számíthatók. Az előző tétel szerint tételünk egyenértékű azzal a kijelentéssel, hogy  $[x, y, 1]$  a  $P(x, y)$  pont homogén koordinátái.

*Bizonyításként* elég arra hivatkozni, hogy a homogén koordináták bevezetésekor  $Q$  pontként magát a  $P$  pontot is választhatjuk, és az  $x_1, x_2, x_3$  koordináta-rendszerben a  $P$  pont koordinátái  $x, y, 1$ . —

**Tétel.** Az  $xy$  sík  $\mathbf{v} (v_1, v_2)$  irányvektorú egyenesei közös ideális pontjának homogén koordinátáira

$$x_1 : x_2 : x_3 = v_1 : v_2 : 0.$$

Ha irányvektorként az  $\mathbf{e} (\cos \varphi, \sin \varphi)$  egységvektort adjuk meg, ha tehát a  $\varphi$  irányszögű ideális pontról van szó, akkor a tétel szerint

$$x_1 : x_2 : x_3 = \cos \varphi : \sin \varphi : 0.$$

Azt is megállapíthatjuk így, hogy  $[1, m, 0]$  az  $m$  iránztangensű ideális pont homogén koordinátái. A tétel azt is kimondja, hogy ideális pont harmadik homogén koordinátája 0.

*Bizonyítás.* A  $\mathbf{v}$  vektor koordinátái az  $x_1, x_2, x_3$  koordináta-rendszerben  $v_1, v_2, 0$ . Állításunk következik tehát abból, hogy a homogén koordinátákat szolgáltató  $Q$  pontul az  $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{v}$  vektor végpontját is választhatjuk, hiszen az  $OQ$  egyenes tartalmazza a szóban forgó ideális pontot. —

**44.4** Egy alakzatnak az  $x, y$  koordináta-rendszerben felírt egyenletéből az előző szakasz (\*)-gal jelölt helyettesítéssel az alakzat homogén koordinátás egyenletéhez jutunk. Ha  $k$ -adfokú algebrai egyenletből indultunk ki, s a kapott egyenletben a törteket eltávolítjuk, ha tehát az egyenlet  $x_3^k$ -val szorozzuk, akkor homogén  $k$ -adfokú egyenlet lesz az eredmény, azaz a három koordináta kitevőjének összege minden tagban  $k$  lesz. Ez a tény indokolja, hogy az újonnan bevezetett koordinátákat homogén koordinátáknak neveztük.

A kapott egyenlet homogén voltából következik, hogy ha egy pontnak valamely homogén koordinátahármasa kielégíti az egyenletet, akkor bármely koordinátahármasa kielégíti, hiszen egy

koordinátahármasból minden másikat megkapunk, ha a koordináták mindegyikét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk.

A homogén koordináták egyenlet származtatásából következik, hogy egy közös pont homogén koordinátái akkor és csak akkor elégítik ki az egyenletet, ha a pont az alakzathoz tartozik. Az új egyenletet azonban egyes ideális pontok koordinátái is kielégíthetik. Megállapodunk abban, hogy ezeket az ideális pontokat az alakzathoz csatoljuk. Ha egy algebrai görbe ideális pontjairól van szó, az így bővített alakzatra gondolunk.

Az egyenes ideális pontjait az új megállapodás értelmében is az a pont adódik, amelyet már eddig is az egyenes ideális pontjának nevezünk. Az  $Ax + By + C = 0$  egyenes homogén koordináták egyenlete ugyanis

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

s ezt egy ideális pont  $[x_1, x_2, 0]$  koordinátái akkor és csak akkor elégítik ki, ha  $Ax_1 + Bx_2 = 0$ ,  $Ax_1 + Bx_2 = 0$ , ha tehát az ideális pont  $(x_1, x_2)$  irány vektora az egyenes  $(A, B)$  normál vektorára merőleges. Ez pedig valóban csak arra az ideális pontra teljesül, amelyet eddig is az egyenes ideális pontjának nevezünk.

**Tétel.** *Az ellipszisnek (és a körnek) nincs ideális pontja. A parabolának egy ideális pontja van, s ez a tengely ideális pontja. A hiperbolának két ideális pontja van, s ezek az aszimptoták ideális pontjai.*

*Bizonyítás.* A kúpszeletek kanonikus egyenleteiből az

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2, \quad x_2^2 = 2px_1x_3, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2$$

homogén koordináták egyenletéhez jutunk. Azt kell megvizsgálnunk, hogy mely  $[x_1, x_2, 0]$  értékek elégítik ki ezeket az egyenleteket. Az  $x_1, x_2$  értékekre így az

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0, \quad x_2^2 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$

feltételek adódnak.

Az ellipszis (és a kör) esetében csak  $x_1 = x_2 = 0$  elégíti ki a felírt egyenletet, s ezek az értékek nem adnak pontot, hiszen a homogén koordináták között kell 0-tól különbözőnek lennie. A parabola esetében  $x_2 = 0$  adódik, s így az  $[1, 0, 0]$  ponthoz, a parabola tengelyével azonos  $x$ -tengely ideális pontjához

jutunk. Végül a hiperbola esetében az egyenlet az  $x_1 : x_2 = \pm \frac{a}{b}$  arányhoz, tehát az  $[a, b, 0]$  és  $[a, -b, 0]$  pontokhoz, az aszimptoták ideális pontjaihoz vezet.

A kúpszeletek ideális pontjainak bevezetése után megállapíthatjuk, hogy a kúpszelet közös pontján áthaladó egyenesek közül csak a pontbeli érintőnek nincs a kúpszelettel második közös pontja (vö. 43.6 és 43.7). A kúpszelet érintőjének fogalmát általánosítjuk tehát, ha az olyan egyenest nevezzük a kúpszelet *érintőjének*, amelynek a kúpszelettel csak egy (közös vagy ideális) közös pontja van, s ezt az egyetlen közös pontot érintési pontnak mondjuk.

Az új definíció szerint az eddig is így nevezett, közös érintők mellett érintőnek kell mondanunk azokat az egyeneseket is, amelyeknek csak egy ideális pontjuk tartozik a kúpszelethez. Eszerint a parabola ideális pontjában vont érintőjének a sík ideális egyenesét, a hiperbola ideális pontjaiban vont érintőinek pedig pedig az aszimptotákat kell mondanunk.

**B** A kúpszeletek ideális pontjainak bevezetésekor a kúpszeletnek egy megadott koordináta-rendszerben megadott egyenletéből indultunk ki. Bebizonyítjuk azonban, hogy a kúpszelethez csatolt ideális pontok elhelyezkedése nem függ sem a koordináta-rendszer felvételétől, sem pedig a másodfokú egyenlet megválasztásától.

Az utóbbi tény abból következik, hogy rögzített koordináta-rendszerben ugyanannak a kúpszeletnek a másodfokú egyenletei egymástól csak számtényezőben különböznek (lásd 41.8 B), és a

számtényezővel szorzott homogén koordinátás egyenleteket is ugyanazok a koordinátahármasok elégítik ki.

Ha eltolással és elforgatással más koordináta-rendszerre térünk át, akkor a koordináta-transzformációt közvetlenül a homogén koordinátás egyenleten is végrehajthatjuk. Ha a kezdőpontot az  $(a, b)$  pontba toljuk, akkor az

$$x_1' = x_1 - ax_3, \quad x_2' = x_2 - bx_3, \quad x_3' = x_3,$$

ha pedig a koordináta-rendszert  $\alpha$  szöggel elforgatjuk, akkor az

$$x_1' = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \quad x_2' = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha, \quad x_3' = x_3,$$

transzformáció adja az új egyenletet. Ezekből a transzformációs formulákból megállapítható, hogy nemcsak a közönséges pontok új homogén koordinátáit adják meg, hanem az ideális pontokéit is. Az eltolás esetében azt kell ehhez meggondolnunk, hogy egy  $\mathbf{v}(v_1, v_2)$  vektor koordinátái nem változnak meg a koordináta-rendszer eltolásakor, és a  $[v_1, v_2, 0]$  értékekhez

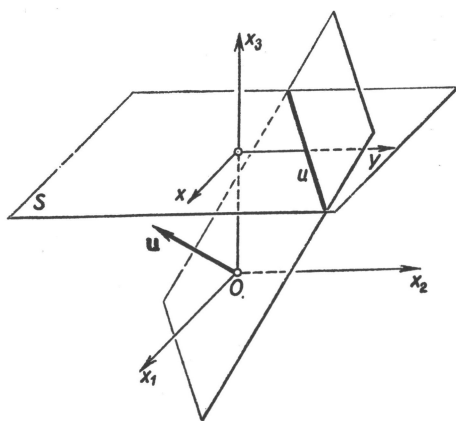
a transzformációs képletek is ugyanezt az értékhármast rendelik; az elforgatás transzformációs képletei viszont a  $[v_1, v_2, 0]$  értékekhez a  $[v_1', v_2', 0]$  értékeket rendelik, s a fellépő  $(v_1', v_2')$  értékek éppen a  $\mathbf{v}(v_1, v_2)$  vektor koordinátái az elforgatott koordináta-rendszerben.

**44.5** Hasonlóan ahhoz, ahogyan a pontok homogén koordinátáit bevezettük, most az egyenesek jellemzésével foglalkozunk. A vizsgált  $S$  sík legyen ismét a térbeli  $x_1, x_2, x_3$  koordináta-rendszer  $x_3 = 1$  síkje.

Az  $S$  sík (közönséges vagy ideális)  $u$  egyenesét jellemezhetjük az  $u$  egyenesen és a térbeli koordináta-rendszer  $O$  kezdőpontján átfektetett sík megadásával, ezt a síkot pedig azzal, hogy egy rá merőleges  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  vektort adunk meg (451. ábra). Ha a következőkben egy egyenest meghatározó vektorról beszélünk, ilyen vektorra gondolunk.

**Tétel.** Az  $\mathbf{x}$  vektor által meghatározott pont és az  $\mathbf{u}$  vektor által meghatározott egyenes akkor és csak akkor illeszkedik egymáshoz, ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0.$$



451

Mondhattuk volna, hogy az  $\mathbf{u}, \mathbf{x}$  vektorok merőlegessége a feltétel,

Bizonyításként elég arra hivatkozni, hogy az  $O$  ponton áthaladó,  $\mathbf{u}$ -ra merőleges sík csak  $\mathbf{u}$ -ra merőleges vektorokat tartalmaz, és minden  $O$ -ból induló,  $\mathbf{u}$ -ra merőleges vektort tartalmaz. —

Ha az  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$   $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  vektorok koordinátáit használjuk, a kapott feltételt

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$



alakban írhatjuk. Rögzített  $u_1, u_2, u_3$  értékek mellett ez tehát az  $u$  egyenes egyenlete, és ez mindig egyenes egyenlete, akárhogyan rögzítjük is az  $u_1, u_2, u_3$  értékeket, egyedül azt kötve ki, hogy ne legyen mindegyikük 0.

Az  $\mathbf{u}$  vektor koordinátáit, az  $u_1, u_2, u_3$  értékeket az  $u$  egyenes *vonalkoordinátáinak* (homogén vonalkoordináták) nevezzük. Az elmondottakból következik, hogy a sík minden egyenesének vannak vonalkoordinátái, s ezeknek nem lehet mindegyike 0, hogy egy vonalkoordináta-hármas 0-tól különböző számmal megszorozva ugyanannak az egyenesnek a vonalkoordinátáihoz jutunk, hogy ilyen módon az egyenesnek minden vonalkoordináta-hármasához eljutunk, hogy végül minden nem csupa 0-ból álló  $u_1, u_2, u_3$  számhármast egy egyenes vonalkoordináta-hármasa, azaz egy egyenes  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  egyenletét adja.

Megállapodásunk összhangban van a 37.2 szakaszban bevezetett elnevezéssel, mert a közösleges  $Ax + By + C = 0$  egyenes homogén koordinátás egyenlete  $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$  alakban írható. Már tudtuk, hogy az ideális pontokat  $x_3 = 0$  jellemzi, hogy tehát ez az összefüggés az ideális egyenes egyenletének mondható. Most látjuk, hogy ez az összefüggés azt mondja ki, hogy az  $x_3$ -tengellyel párhuzamos  $\mathbf{u}(0, 0, 1)$  vektor a sík ideális egyenesét határozza meg, hiszen merőleges az  $S$  sík ideális egyenesét tartalmazó  $x_1x_2$  síkra. Ugyanezt természetesen az  $\mathbf{u}(0, 0, u_3)$  vektorról is elmondhatjuk, ha  $u_3 \neq 0$ . Ilyen módon az ideális egyenes

$$u_3x_3 = 0$$

egyenletéhez és  $0, 0, u_3$  vonalkoordinátáihoz jutottunk.

Az elmondottakból következik, hogy egy egyenes aszerint közösleges vagy ideális, amint vonalkoordinátái közül az első kettő között van vagy nincs 0-tól különböző érték.

A homogén pontkoordinátáknál bevezetett írásmód mintájára a homogén vonalkoordinátákat is szögletes zárójelbe helyezzük. Az  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$  vektor által meghatározott  $u$  egyenest így  $u[\mathbf{u}]$ ,  $u[u_1, u_2, u_3]$ ,  $[\mathbf{u}]$  vagy  $[u_1, u_2, u_3]$  is jelölheti.

**B1** Ez a szakasz az egyenes egyenletének új levezetését tartalmazza, és 37.2 harmadik tételét is újból bizonyítja.

**B2** Az  $\mathbf{ux} = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  egyenlet, ha  $\mathbf{u}$  rögzített, akkor az  $[\mathbf{u}]$  egyeneshez tartozó  $[\mathbf{x}]$  pontokat, ha pedig  $[\mathbf{x}]$  rögzített, akkor az  $[\mathbf{x}]$  ponton áthaladó  $[\mathbf{u}]$  egyeneseket jellemzi. Ezt az egyenletet ezért nemcsak az egyenesnek nevezett pontsor, hanem a vonalgeometriában (lásd 42.3 B2) pontnak nevezhető sugársor egyenletének is tekinthetjük.

**44.6** A pontok és az egyenesek kezelésének hasonlósága a róluk szóló tételekben és bizonyításukban is megnyilvánul.

**Tétel.** a) Az  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  vektorok által meghatározott pontok összekötő egyenesét az  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  vektor határozza meg.

b) Az  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  vektorok által meghatározott egyenesek metszéspontját az  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  vektor határozza meg.

*Bizonyítás.* a) Ha az  $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}]$  pontok különbözők, akkor  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  nem párhuzamosak, ezért  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ , tehát beszélhetünk az  $[\mathbf{x} \times \mathbf{y}]$  egyenesről. Ez az egyenes illeszkedik az  $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}]$  pontokhoz, mert a vektoriális szorzat a tényezőire merőleges, és ez az előző szakasz szerint biztosítja az illeszkedést.

b) Ha az  $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$  egyenesek különbözők, akkor  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  nem párhuzamosak, ezért  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , tehát szó lehet az  $[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]$  pontról. Ez a pont illeszkedik az  $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$  egyenesekhez, mert a vektoriális szorzat merőleges a tényezőire, és ez az előző szakasz szerint biztosítja az illeszkedést. —

**Tétel.** a) Az  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  vektorok által meghatározott pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy egyeneshez, ha  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ .

b) Az  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  vektorok által meghatározott egyenesek akkor és csak akkor illeszkednek egy ponthoz, ha  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Mindkét esetben mondhattuk volna, hogy a három vektor egysíkúsága a feltétel.

*Bizonyítás, a)* Az  $[x]$ ,  $[y]$ ,  $[z]$  pontok akkor illeszkednek az  $[u]$  egyeneshez, ha  $u$  merőleges az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vektorok mindegyikére. Akkor és csak akkor található ilyen  $u$  vektor, ha az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vektorok egysíkúak, ha tehát vegyesszorzatuk 0.

*b)* Az  $[u]$ ,  $[v]$ ,  $[w]$  egyenesek akkor illeszkednek az  $[x]$  ponthoz, ha  $x$  merőleges az  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorok mindegyikére. Akkor és csak akkor található ilyen  $x$  vektor, ha az  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorok egysíkúak, ha tehát vegyesszorzatuk 0. —

**Tétel.** *a)* Az  $[x]$ ,  $[y]$  pontok által meghatározott egyenest a  $[\lambda x + \mu y]$  pontok alkotják.

*b)* Az  $[u]$ ,  $[v]$  egyenesek által meghatározott sugár sort a  $[\lambda u + \mu v]$  egyenesek alkotják.

*Bizonyítás, a)* Az  $[x]$ ,  $[y]$  pontok összekötő egyenesének pontjait az előző tétel szerint azok a  $z$  vektorok határozzák meg, amelyek az egymással nem párhuzamos  $x$ ,  $y$  vektorokkal egysíkúak. Márpedig egy vektor akkor és csak akkor egysíkú az  $x$ ,  $y$  vektorokkal, ha  $\lambda x + \mu y$  alakban írható.

*b)* Az  $[u]$ ,  $[v]$  egyenesek által meghatározott sugársor elemeit az előző tétel szerint azok a  $w$  vektorok határozzák meg, amelyek az egymással nem párhuzamos  $u$ ,  $v$  vektorokkal egysíkúak. Egy vektor pedig akkor és csak akkor egysíkú az  $u$ ,  $v$  vektorokkal, ha  $\lambda u + \mu v$  alakban írható. —

**B** Ennek a szakasznak a tételei sok, korábban már tárgyalt tételt ölelnek fel.

Az első tétel a) része az  $x(x_1, y_1, 1)$ ,  $y(x_2, y_2, 1)$  vektorokra alkalmazva 37.6 második tételéhez, az  $x(x_0, y_0, 1)$ ,  $y(1, m, 0)$  vektorokra alkalmazva 37.3 negyedik tételéhez, az  $x(x_0, y_0, 1)$ ,  $y(a, b, 0)$  vektorokra alkalmazva pedig 37.5 harmadik tételéhez vezet.

Az első tétel b) része egyenesek metszéspontjának meghatározására, tehát két egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldására ad egyszerű utasítást. Ez az utasítás akkor is alkalmazható, ha párhuzamos egyenesekről van szó, amikor is ideális metszéspontjuk meghatározása a cél.

A második tétel a) része az  $x(x_1, y_1, 1)$ ,  $y(x_2, y_2, 1)$ ,  $z(x_3, y_3, 1)$  vektorokra alkalmazva 37.6 első tételét, b) része pedig 37.9 második tételét adja.

A harmadik tétel a) része az  $x(a_1, a_2, 1)$ ,  $y(b_1, b_2, 1)$  vektorokra alkalmazva az  $A(a_1, a_2)$  pontok összekötő egyenesének azt a  $P$  pontját adja, amelyről 35.1 tétele szól. E tétel szerint  $(ABP) = \mu : \lambda$ , ha  $P$  közös pont. Ott a  $\mu + \lambda = 0$  esetet ki kellett zárunk, most erre nincs szükség, hiszen így az  $AB$  egyenes ideális pontjához jutunk. Ha tehát az  $(ABP)$  egyszerű viszonyt azzal a  $\mu : \lambda$  aránnyal definiáljuk, amelyet az  $A[x]$ ,  $B[y]$  pontokból a  $P[\lambda x + \mu y]$  ponthoz vezető  $\mu, \lambda$  számok szolgáltatnak, akkor általánosítottuk az egyszerű viszony fogalmát. Lényeges itt, hogy  $x$  és  $y$  harmadik koordinátája 1, mert különben az új definíció nem vezet egyértelműen meghatározott értékhez. Ezért új definíciónk is csak akkor alkalmazható, ha az  $A, B$  alappontok közös pontok. Ebben az esetben az  $AB$  egyenes ideális  $P$  pontjára az új definíció szerint  $(ABP) = -1$ .

A harmadik tétel b) része 37.8 tételét mondja ki.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy ennek a szakasznak a tételei nemcsak egybefoglalják és általánosítják a korábbi ismereteinket, hanem egyszerűsítik is.

**44.7** Rá kívánunk mutatni annak a párhuzamnak az okaira, amely különösen az utolsó szakaszban nyilvánult meg.

Ha egy síkgeometriai tételben és bizonyításában a pontok és egyenesek homogén pontkoordinátái és vonalkoordinátái szerepelnek, akkor megtehetjük, hogy a pontkoordinátákat egy egyenes vonalkoordinátáinak, a vonalkoordinátákat pedig egy pont pontkoordinátáinak tekintjük. Ha illeszkedő pontról és egyenesről volt eredetileg szó, akkor az új értelmezés révén is illeszkedő egyeneshez és ponthoz jutunk, mert 44.5 tételében  $u$  és  $x$  szerepe felcserélhető. Ebből következik, hogy ha a bizonyításban csak pontok és egyenesek szerepelnek, és a bizonyítás során csak az jut szóhoz, hogy a pontok és egyenesek illeszkednek-e vagy sem, akkor a bizonyítás átírása helyes okoskodást eredményez. Helyes tehát ilyenkor az a tétel is, amelyik az eredeti tételből az átírás révén keletkezik.

Az így párhuzamba állítható fogalmakat, tételeket és bizonyításokat egymás *duáljainak* (duális megfelelők) mondjuk. Magát ezt a párhuzamot *dualitásnak* (síkbeli dualitás) nevezzük.

Ennél a dualitásnál pontnak egyenes és egyenesnek pont felel meg, két pont összekötő egyenesének megfelelője két egyenes metszéspontja, egy egyenes pontjai által alkotott pontsor duálja egy ponton áthaladó egyenesek sugársora, a pontsor és sugársor tartói ugyancsak egymás megfelelői.

Az előző szakasz tételei egymásnak duálisan megfelelő részekből álltak. Most már mondhatjuk, hogy felesleges volt mind a két részt bizonyítani, mert az egyik tételből a duális tétel helyessége is következik.

**B1** Hangsúlyozzuk, hogy a dualitás elvének felismerése csak az ideális térelemek bevezetése után vált lehetségessé. Ennek megfelelően (síkbeli) dualitásról csak a projektív sík geometriájában beszélhetünk.

**B2** A dualitás szótárát ki lehet terjeszteni. Ehhez olyan fogalompárokat kell találni, amelyeket pontkoordinátákkal és vonalkoordinátákkal azonos módon írhatunk le. A 42.3 B2-ben említett pontgeometria és vonalgeometria, pontalakzat és vonalalakzat szintén duális fogalompárok. A pontkúpszeletről és vonalkúpszeletről ezt itt még nem mondhatjuk ki (vö. 46.5 B3).

**B3** Mi a dualitás elvének felismeréséhez a homogén koordináták révén jutottunk el. El lehet jutni ehhez az eredményhez szintetikus úton, koordináták szerepeltetése nélkül is.

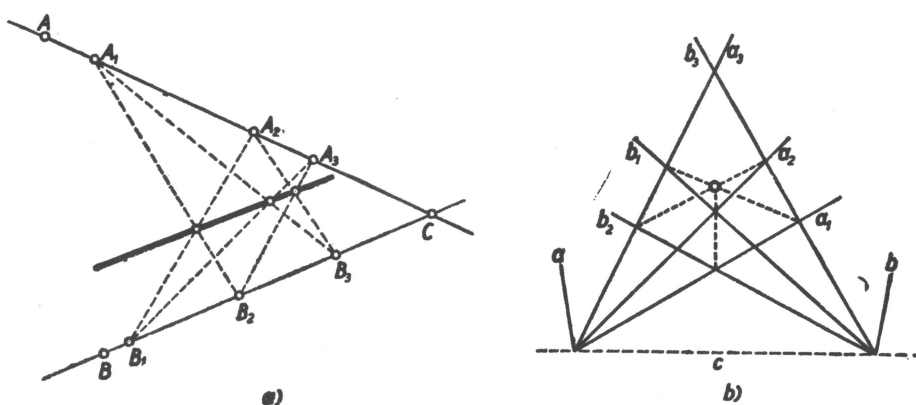
Ha a projektív sík geometriájának tárgyalását axiómákra alapozzuk (vö. 44.2 B3), és megállapítjuk, hogy a dualitás szótára axiómához axiómát rendel, akkor ebből már következik, hogy a dualitás elve az axiómákból levezetett tételek körében is érvényesül. Ez a tárgyalásmód túllépné ennek a könyvnek célkitűzését és kereteit.

**B4** A megismert dualitást azért mondják *síkbeli* dualitásnak, mert a térgeometriában is érvényesül egy hasonló párhuzam (lásd 50.8 B6).

**44.8** Két példán mutatjuk be azt, hogy a dualitás elve bonyolultabb tételek körében is alkalmazható.

**Tétel.** a) Ha  $A_1, A_2, A_3$  egy egyenesnek és  $B_1, B_2, B_3$  egy másik egyenesnek a két egyenes közös pontjától különböző három-három pontja, akkor az  $A_1B_2, A_2B_1$  egyenesek, továbbá az  $A_2B_3, A_3B_2$  és  $A_3B_1, A_1B_3$  egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak (PAPPUS<sup>7</sup> tétele),

b) Ha  $a_1, a_2, a_3$  sugár sornak és  $b_1, b_2, b_3$  egy másik sugár sornak a két sugársor közös egyenestől különböző három-három egyenese, akkor az  $a_1, b_2$  és  $a_2, b_1$  egyenespárok metszéspontjait összekötő egyenes, továbbá az  $a_2, b_3$  és  $a_3, b_2$  egyenespárok, valamint az  $a_3, b_1$  és  $a_1, b_3$  egyenespárok metszéspontjait összekötő egyenesek egy ponton haladnak át (452. ábra).



452

A tétel mindkét része semmitmondóvá válik akkor, ha a pontsorok vagy sugársorok közös eleme is előfordul a szereplő három-három elem között. Vagy ha nem három-három különböző elemet szerepeltetünk.

<sup>7</sup>\* Pappos 300 körül Alexandriában működött.

*Bizonyítás.* a) Legyen  $C[\mathbf{c}]$  a két egyenes metszéspontja és  $A[\mathbf{a}]$ ,  $B[\mathbf{b}]$  egy-egy  $C$ -től különböző pontjuk. Az  $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{c}$  vektorok az  $AC$  pontsor  $C$ -től különböző pontjait határozzák meg, és  $\alpha$  értékének változtatásával minden  $C$ -től különböző pontot megadnak. Ez 44.6 harmadik tételéből következik, mert  $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c}$  akkor határoz meg  $C$ -től különböző pontot, ha  $\lambda \neq 0$ , és ebben az esetben a meghatározó vektort  $\lambda$ -val oszthatjuk.

A bizonyítás során tekinthetjük tehát az  $A_1[\mathbf{a} + \alpha_1\mathbf{c}]$ ,  $A_2[\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{c}]$ ,  $A_3[\mathbf{a} + \alpha_3\mathbf{c}]$  és hasonló indokolással a  $B_1[\mathbf{b} + \beta_1\mathbf{c}]$ ,  $B_2[\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{c}]$ ,  $B_3[\mathbf{a} + \beta_3\mathbf{c}]$  pontokat. Bevezetjük még a

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \beta_1\mathbf{a} + \alpha_1\mathbf{b} + \alpha_1\beta_1\mathbf{c}, \\ \mathbf{v}_2 &= \beta_2\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{b} + \alpha_2\beta_2\mathbf{c}, \\ \mathbf{v}_3 &= \beta_3\mathbf{a} + \alpha_3\mathbf{b} + \alpha_3\beta_3\mathbf{c}\end{aligned}$$

vektorokat.

A  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  vektor az  $A_1B_2$ ,  $A_2B_1$  egyenesek metszéspontját határozza meg, mert ez a pont 44.6 harmadik tétele szerint

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (\beta_1 - \beta_2)(\mathbf{a} + \alpha_1\mathbf{c}) + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{b} + \beta_2\mathbf{c}) = (\beta_1 - \beta_2)(\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{c}) + (\alpha_1 - \alpha_2)(\mathbf{b} + \beta_1\mathbf{c})$$

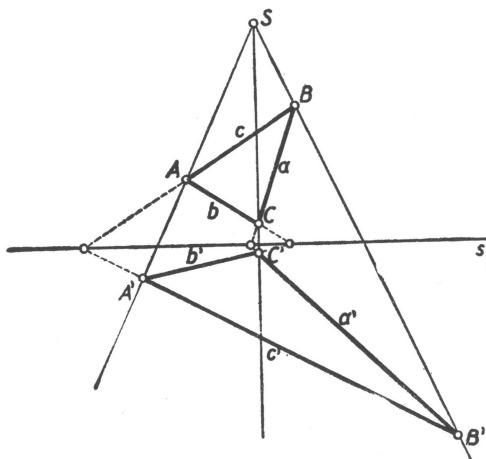
folytán az pontsornak és az  $A_1B_2$  pontsornak is pontja. Hasonló indokolással adódik, hogy  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$  és  $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$  a tételben szereplő másik két pontot határozza meg. Minthogy pedig a  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$  vektorok összege  $\mathbf{0}$ , e három vektor egysíkú, s az általuk meghatározott pontok 44.6 második tétele szerint egy egyenesen vannak.

b) Az előző szakasz alapján kimondhatjuk, hogy tételünk b) részét már felesleges bizonyítani. Megtehetjük azonban hogy a bizonyítás a) részét végigkövetve, és közben a pontok és egyenesek szerepét felcserélve, az előadottakból a tétel b) részének a bizonyítását olvassuk ki. —

Ha két háromszög csúcsait páronként egymáshoz rendeljük, vizsgálhatjuk, hogy a megfelelő csúcspárok egy ponton áthaladó három (egymástól nem feltétlenül különböző) egyenesen vannak-e, s hogy a megfelelő oldalegyenespárok egy egyenes három (egymástól nem feltétlenül különböző) pontján haladnak-e át. Az előbbi esetben a két háromszöget *pontra nézve perspektívnek*, az utóbbi esetben *egyenesre nézve perspektívnek* mondjuk. A pontot, illetve egyenest a *perspektivitás centrumának*, illetve *tengelyének* nevezzük.

**Tétel. (DESARGUES<sup>8</sup> tételé),** a) Ha két háromszög pontra nézve perspektív, akkor egyenesre nézve is perspektív.

b) Ha két háromszög egyenesre nézve perspektív, akkor pontra nézve is perspektív.



<sup>8</sup>\* G. Desargues (ejtsd: dézarg), 1593—1662, francia építész.

A tétel értelmében beszélhetünk *perspektív* háromszögekről, mert mindegy, hogy pontra vagy egyenesre vonatkozó perspektivitásról van-e szó (453. ábra). Hangsúlyozzuk, hogy a tétel csak akkor helyes, ha ideális elemekről is beszélünk. Semmitmondóvá válik a tétel mindkét része akkor, ha akár két megfelelő csúcs, akár két megfelelő oldalegyenes azonos. Ezt az érdektelen esetet a bizonyítás során is kirekesztjük.

*Bizonyítás, a)* Legyen  $S[s]$  a perspektivitás centruma, és  $A[a]$ ,  $B[b]$ ,  $C[c]$  az egyik háromszög csúcsai. Az előző bizonyítás első bekezdése alapján tudjuk, hogy az  $S A$  pontsor  $A$ -tól különböző pontjai meghatározhatók  $s + \alpha a$  alakú vektorokkal. Minthogy pedig a második háromszög  $A'[a']$ ,  $B'[b']$ ,  $C'[c']$  csúcsai nem azonosak az első háromszög megfelelő csúcsaival, a második háromszög csúcsainak meghatározó vektorait.

$$a' = s + \alpha a, \quad b' = s + \beta b, \quad c' = s + \gamma c$$

alakban írhatjuk.

Az  $a' - b'$  vektor az  $AB$  és  $A'B'$  oldalegyenesek metszéspontját határozza meg, mert ez a pont (44.6 harmadik tétele szerint)

$$a' - b' = \alpha a - \beta b$$

következtében az  $A'B'$  és az  $AB$  pontsornak is pontja. Hasonló indokolással  $b' - c'$  és  $c' - a'$  a tételben szereplő másik két pontot határozza meg.

Minthogy az  $a' - b'$ ,  $b' - c'$ ,  $c' - a'$  vektorok összege  $0$ , e vektorok egysíkúak, és az általuk meghatározott pontok egy egyenesen vannak.

b) A tétel második része az első rész duális megfelelője. A pontok és egyenesek szerepét felcserélve az a) részre adott bizonyítás a b) rész bizonyításává válik. —

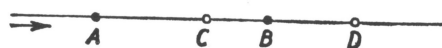
**B** A 453. ábrát úgy tekinthetjük, hogy az  $S A'B'C'$  tetraédernek az  $s$  egyenest is tartalmazó  $ABC$  síkkal való metszését mutatja be. Ez az észrevétel Desargues tétele mindkét részének bizonyításához elvezethet, de ki kell egészíteni az ideális elemekre vonatkozó megfontolásokkal.

## 45. § Kettősvizony

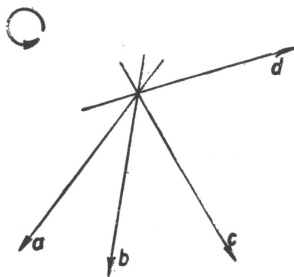
Az előző paragrafushoz hasonlóan ez a paragrafus is előkészítő jellegű. Egyszerű viszonyok hányadosaként bevezetjük a kettősvizonyt, az így bevezetett fogalmat az ideális elemek körére is általánosítjuk, majd azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor a kettősvizony értéke  $-1$ . Ez az eset lényeges szerepet játszik majd a másodrendű görbék tárgyalásakor.

**45.1** Legyen  $A, B, C, D$  egy közönséges egyenes négy különböző, közönséges pontja (454. ábra). Az

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$



értéket az  $A, B, C, D$  pontok *kettősvizonyának* nevezzük. Minthogy az egyszerű viszony értéke, előjelét is figyelembe véve, nem függ az egyenes irányításától, ugyanezt a kettősvizonyról is elmondhatjuk.



455

Legyen  $a, b, c, d$  egy olyan sugársornak négy különböző egyenese, amelynek tartója közös és a sítot és az  $a, b, c, d$  egyeneseket valamilyen módon irányítjuk, akkor kiszámíthatjuk az

$$(abcd) = \frac{\sin(\angle ac)}{\sin(\angle cb)} \cdot \frac{\sin(\angle ad)}{\sin(\angle db)}$$

értéket. Itt irányított egyenesek irányított szögének egyértelműen meghatározott szinusza szerepelnek. Ezt az értéket az  $a, b, c, d$  egyenesek *kettősszónyának* nevezzük.

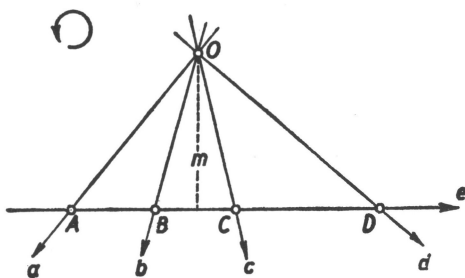
Beláthatjuk, hogy az  $(abcd)$  kettősszóny értéke nem függ sem a sík, sem a négy egyenes irányításának minkéntjétől. A sík irányításának megváltoztatásakor ugyanis minden szereplő szög és szinusza is előjelet vált, a kettősszóny értéke tehát változatlan marad. Ha az  $a, b, c, d$  egyenesek egyikének az irányítását ellenkezőre változtatjuk, akkor  $180^\circ$ -kal változik meg az a két szög, amelynek szárai között a megváltoztatott irányú egyenes szerepel; ilyenkor tehát két szinusz értéke vált előjelet, s a kettősszóny értéke ismét változatlan marad. Ugyanezt a négy egyenes irányításának minden megváltoztatásáról elmondhatjuk, hiszen ha több egyenes irányítását változtatjuk meg, akkor ezt a helyzetet egy-egy egyenes sorozatos irányváltoztatásával is elérhetjük.

**B** Bizonyos esetekben nem származik zavar abból, ha a kettősszónyt meghatározó négy pont vagy egyenes között azonosak is szerepelnek. Mi kizártuk ennek lehetőségét, mert ezzel egyszerűbbé válik a tárgyalás, hiszen nem kell majd kivételes esetekre ügyelnünk, s mert sehol sem látjuk majd kárát ennek a megkötésnek.

**45.2 Tétel (Pappos tétele).** Ha  $a, b, c, d$  egy közös tartópontú sugársor négy eleme, és egy  $a$  tartóponton át nem haladó egyenes ezeket a közös  $A, B, C, D$  pontokban metszi, akkor

$$(ABCD) = (abcd).$$

*Bizonyítás.* A síkban pozitív forgásirányt veszünk fel. A metsző  $e$  egyenest úgy irányítjuk, hogy ha egy pont az egyenesen pozitív irányban halad, akkor az  $O$  tartópontot a mozgó ponttal összekötő egyenes pozitív irányban forogjon. Az  $a, b, c, d$  egyeneseket az  $O$  ponttól az  $A, B, C, D$  metszéspontok felé irányítjuk (456. ábra).



456

Az  $OAC\Delta$  előjeles területét számítjuk. A terület előjelét a háromszög körüljárása szabja meg. Ez a körüljárás aszerint pozitív vagy negatív, amint az irányított  $AC$  szakasz az  $e$  egyenessel egyező vagy ellentétes irányú, tehát aszerint, amint  $AC$  előjeles hossza pozitív vagy negatív. Az előjeles terület ezért

$$T(OAC) = \frac{1}{2} AC \cdot m,$$

ahol  $AC$  előjeles hossz,  $m$  pedig az  $O$  pont távolsága az  $e$  egyenestől. Ugyanezt az előjeles területet 31.7 szerint

$$T(OAC) = \frac{1}{2} AC \cdot OC \sin(\alpha)$$

is megadja, mert az irányított  $(\alpha)$  konvex szög aszerint pozitív vagy negatív, amint  $AC$  pozitív vagy negatív irányú, tehát amint háromszögünk előjeles területe pozitív vagy negatív.

A két eredmény egybevetéséből

$$AC \cdot m = OA \cdot OC \sin(\alpha)$$

adódik. Az  $OCBA$ -ból hasonló okoskodással a

$$CB \cdot m = OC \cdot OB \sin(\beta)$$

eredményhez jutunk. Egyenleteink osztása az

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

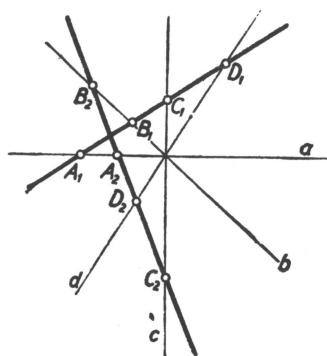
egyenlethez vezet, és hasonló indokolással az

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

egyenletet is felírhatjuk. Újabb osztással az

$$\frac{AC}{DB} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

végeredményhez, tételünk állításához jutunk. —



**Tétel.** Ha egy közösleges tartó pontú sugársor *négy elemét két a tartóponton át nem haladó közösleges egyenes rendre az  $A_1, B_1, C_1, D_1$  és  $A_2, B_2, C_2, D_2$  pontokban metszi, akkor*

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

Tételünk kimondja, hogy a vetítés a kettősviszony értékét nem változtatja meg (457. ábra).

*Bizonyítás.* Legyen  $a, b, c, d$  a sugársor négy metszett egyenese. Az előző tétel szerint

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (abcd) = (A_2 B_2 C_2 D_2) \quad \text{---}$$

**B1** Abból, hogy a kettős viszonyt alkotó pontok mindannyian különbözők, következik, hogy a kettős viszony értéke nem lehet 1, hiszen  $(ABC) = (ABD)$  csak  $C$  és  $D$  azonossága mellett áll fenn. E szakasz első tételéből következik tehát, hogy négy egyenes kettősviszonya sem lehet 1-gyel egyenlő.

**B2** Tudjuk, hogy az  $(ABP)$  osztóviszony aszerint pozitív vagy negatív, amint  $P$  az  $A, B$  pontok között belül vagy kívül helyezkedik el. Ebből következik, hogy az  $(ABCD)$  kettősviszony aszerint negatív vagy pozitív, amint az  $A, B$  pontok elválasztják vagy nem választják el a  $C, D$  pontokat. E szakasz első tételéből következik, hogy hasonló mondhatunk az egyenesek kettősviszonyáról is:  $(abcd)$  negatív vagy pozitív aszerint, amint az  $a, b$  egyenesek a sugársorban elválasztják vagy nem választják el a  $c, d$  egyeneseket.

**B3** Bebizonyítottuk, hogy a centrális projekció a pontok kettős viszonyát nem változtatja meg. Ebből Pappos tétele alapján következik, hogy a térbeli centrális projekció nem változtatja meg az egyenesek kettősviszonyát sem. Ezek szerint a centrális projekció *kettősviszonytartó*.

A kettősviszonytartó leképezéseket *projektív transzformációknak* nevezzük. Ilyen tehát a centrális projekció és mindazok a leképezések, amelyek centrális projekciók sorozatos alkalmazásával állíthatók elő.

A geometriának azt az ágát, amely az alakzatoknak projektív transzformáció során meg nem változó tulajdonságaival foglalkozik, *projektív geometriának* nevezzük. Ebben és az előző paragrafusban a projektív geometria elemeiről van szó. Erre utaltak már a 44.2 B2-ben bevezetett elnevezések is.

A projektív geometriában is dolgozhatunk analitikus vagy elemi (szintétikus) módszerrel. Beszélhetünk tehát *analitikus* és *szintétikus* projektív geometriáról. Az elemi jelző használata itt nem szokásos, hiszen már nem „elemi” anyagról van szó.

**B4** A geometria egyes fejezeteit osztályozhatjuk aszerint, hogy milyen transzformációk során meg nem változó, *invariáns* tulajdonságokkal foglalkoznak. Eszerint a geometria egyes fejezetei az egyes geometriai transzformációcsoportok invariánsaival foglalkoznak. Ezt az elvet *erlangeni programnak* mondják, mert FÉLIX KLEIN, az erlangeni egyetemen 1872-ben tartott tanári székfoglalójában mondotta ki.

Az erlangeni program értelmében a mozgáscsoportokhoz a közösleges, *metrikus* geometria, a projektív transzformációk csoportjához a projektív geometria tartozik. Szó lehetne pl. a hasonlósági transzformációkhoz tartozó geometriai fejezetről is.

**45.3** Kiterjesztjük a kettősviszony fogalmát azokra az esetekre, amidőn a kettősviszonyt meghatározó elemek között ideális elemek is szerepelnek. Ezt úgy tesszük, hogy Pappos tétele (45.2 első tétele) a kettősviszony fogalmának kiterjesztése után is érvényben maradjon.

Megállapodunk abban, hogy egy egyenes  $[x]$ ,  $[y]$ ,  $[\lambda_1 x + \mu_1 y]$ ,  $[\lambda_2 x + \mu_2 y]$  pontjaihoz, valamint egy sugársor  $[u]$ ,  $[v]$ ,  $[\lambda_1 u + \mu_1 v]$ ,  $[\lambda_2 v + \mu_2 u]$  egyeneseihez a

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$



értéket rendeljük. Megemlítjük, hogy ha a négy pont vagy egyenes különböző, akkor a  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$  együtthatók egyike sem 0, és ezért a hozzárendelt értékről minden esetben szó lehet.

A hozzárendelt érték nem függ a pontsor, illetőleg a sugársor elemeit meghatározó vektorok megválasztásától, mert ha az  $\mathbf{x}$  vagy  $\mathbf{u}$ , illetve  $\mathbf{y}$  vagy  $\mathbf{v}$  vektorok valamelyikét a  $\varrho$ -szorosával

helyettesítjük ( $\varrho \neq 0$ ), akkor  $\lambda_1$ , és  $\lambda_2$ , illetve  $\mu_1$ , és  $\mu_2$  helyébe az  $\frac{1}{\varrho}$ -szorosuk kerül, ha pedig a  $\lambda_1\mathbf{x} + \mu_1\mathbf{y}$  vagy  $\lambda_1\mathbf{u} + \mu_1\mathbf{v}$ , illetve  $\lambda_2\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y}$  vagy  $\lambda_2\mathbf{u} + \mu_2\mathbf{v}$  vektorok valamelyikét helyettesítjük a  $\varrho$ -szorosával, akkor a  $\lambda_1$  és  $\mu_1$ , illetve  $\lambda_2$  és  $\mu_2$  értékek helyébe a g-szorosuk kerül, a hozzárendelt érték tehát minden esetben változatlan marad. Igaz marad ez a megállapítás akkor is, ha a négy meghatározó vektornak nem egyikét, hanem közülük sorozatosan többet is megváltoztatunk. Elmondhatjuk tehát, hogy a fenti megállapodás a pontsor és a sugársor négy eleméhez, nem pedig az azokat meghatározó vektorokhoz rendel értéket.

**Tétel.** Ha  $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\lambda_1\mathbf{x} + \mu_1\mathbf{y}], [\lambda_2\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y}]$  egy közös egyenes négy közös pontja, akkor

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} : \frac{\mu_1}{\mu_2} \text{ a kettősvizonyukkal egyenlő.}$$

Tételünk jogot ad arra, hogy a négy ponthoz rendelt értéket *kettősvizony*nak mondjuk akkor is, ha nem egy közös egyenes négy közös pontjáról van szó.

*Bizonyítás.* Minthogy a meghatározó vektorok megválasztása a négy ponthoz rendelt értéket nem befolyásolja, feltehetjük, hogy  $\mathbf{x}(x_1, x_2, 1)$ ,  $\mathbf{y}(y_1, y_2, 1)$  alakú vektorokról van szó, s itt  $x_1, x_2$  és  $y_1, y_2$  a két pont közösleges koordinátáit jelöli.

A  $\lambda_1\mathbf{x} + \mu_1\mathbf{y}(\lambda_1x_1 + \mu_1y_1, \lambda_1x_2 + \mu_1y_2, \lambda_1 + \mu_1)$  vektor által meghatározott pont közösleges koordinátái

$$\frac{\lambda_1x_1 + \mu_1y_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad \frac{\lambda_1x_2 + \mu_1y_2}{\lambda_1 + \mu_1}$$

s ebből 35.1 szerint az egyszerű viszonyra

$$([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\lambda_1\mathbf{x} + \mu_1\mathbf{y}]) = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$$

adódik (vö. 44.6 B). Hasonlóan helyes

$$([\mathbf{x}], [\mathbf{y}], [\lambda_2\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y}]) = \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

is. Az egyszerű viszonyok osztása a tétel állítását adja. —

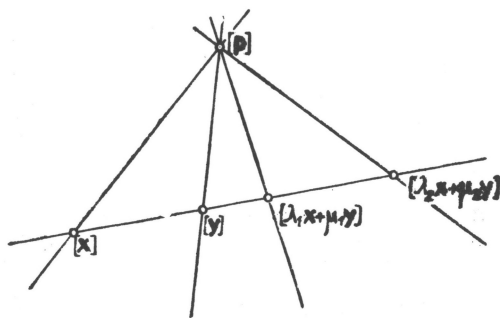
A most bizonyított tételből következik, hogy négy különböző pont kettősvizonya sohasem lehet 1

(vö. 45.2 B1), hiszen  $\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2}$  csak akkor teljesül, ha  $\lambda_1\mathbf{x} + \mu_1\mathbf{y}$  és  $\lambda_2\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y}$  csak számtényezőben különbözik, ha tehát ezek a vektorok ugyanazt a pontot határozzák meg.

**Tétel.** Ha egy sugársor négy egyenesét egy a sugársorhoz nem tartozó egyenessel metsszük, akkor a kapott négy ponthoz kettősvizonyként rendelt érték a négy egyeneshez hozzárendelt értékkel egyenlő.

Tételünk Pappos tételére való hivatkozással jogot ad arra, hogy egy sugársor négy eleméhez rendelt értéket *kettősvizony*nak mondjuk akkor is, ha nem egy közösleges ponton áthaladó négy egyenesről van szó, mert ez a szóhasználat nem üti a régit. Ez a megállapodás eleve biztosítja azt, hogy Pappos tétele korlátozás nélkül helyes marad. 45.2 második tételének bizonyítására hivatkozva nyomban

adódik így az is, hogy egy sugársor négy elemét két a sugársorhoz nem tartozó egyenessel metszve egyenlő kettősviszonyokat adó pontnégyesekhez jutunk.



458

*Bizonyítás.* Legyen  $[p]$  a sugársor tartópontja és  $[x]$ ,  $[y]$ ,  $[\lambda_1 x + \mu_1 y]$ ,  $[\lambda_2 x + \mu_2 y]$  a négy metszéspont (458. ábra). 44.6 első tétele szerint a négy metszett egyenest a

$$p \times x = u,$$

$$p \times y = v,$$

$$p \times (\lambda_1 x + \mu_1 y) = \lambda_1 u + \mu_1 v,$$

$$p \times (\lambda_2 x + \mu_2 y) = \lambda_2 u + \mu_2 v$$

vektorok határozzák meg. Ezek szerint a szóban forgó négy ponthoz és négy

egyeneshez valóban ugyanazt a  $\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$  értéket rendeltük. —

A most általánosított kettősviszonyról is kimondhatjuk (vö. 45.2 B2), hogy aszerint negatív vagy pozitív, amint a kettősvizonyt alkotó két pontpár (egyenespár) egymást az egyenesen (sugársorban)

elválasztja vagy nem (vö. 44.1 B2). Ez kiolvasható pl. abból, hogy a  $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$  hányados dönti el, hogy az egy pontból felmért vektorok körében  $\lambda_1 x + \mu_1 y$  vajon az  $x$ ,  $y$  vektorok egyenesei által határolt két csúcsszögtartománypár melyikének a belsejében halad, hogy tehát az  $[x]$ ,  $[y]$  pontok egyenesen a  $[\lambda_1 x + \mu_1 y]$  pont az  $[x]$ ,  $[y]$  pontok által két csoportra szétválasztott pontok közül melyik csoporthoz tartozik.

**B1** A kettősvizony új definícióinak egyöntetűsége mutatja, hogy pontok és egyenesek kettősvizonya egymásnak duálisan megfelelő fogalmak.

**B2** Megtehetjük volna, hogy a kettősvizonyt 45.1 és 45.2 előkészítése nélkül ennek a szakasznak az utasításával definiáljuk, és nyomban e szakasz második tételét bizonyítjuk, hiszen ehhez 45.2 tételeire nincsen szükség. Ebben az esetben utólag bizonyítanók, hogy a kettősvizony geometriai jelentése az, amelyet 45.1-ben megismertünk. Ilyen módon 45.2 feleslegessé válnék. A tárgyalás logikai felépítése így egyszerűbb volna, viszont a geometriai tartalom kevésbé domborodott volna ki.

**45.4** Az előző szakasz a kettősvizony fogalmának többirányú általánosítását tartalmazza.

a) Minden esetben elmondhatjuk, hogy egy (közönséges vagy ideális) egyenes négy (közönséges vagy ideális) pontjának kettősvizonyát megkapjuk, ha ezeket a pontokat egy az egyenesen kívüli közönséges ponttal összekötjük, és a kapott négy egyenes kettősvizonyát 45.1 előírása szerint számítjuk ki.

A pontok kettősvisszonya fogalmának kiterjesztése az ideális egyenes négy (ideális) pontjának kettősvisszonyára, valamint egy közönséges egyenes négy olyan pontjának kettősvisszonyára vonatkozik, amelyek között az egyenes ideális pontja is szerepel. Az utóbbiakra vonatkozólag kiemelünk egy speciális esetet:

**Tétel.** Ha  $A, B, C$  egy közönséges egyenes három közönséges pontja,  $D$  pedig az egyenes ideális pontja, akkor (459. ábra)



459

$$(ABCD) = -(ABC).$$

A tétel szerint a kettősvisszony 45.1 előírása szerint számítható ki, azonban az  $(ABD)$  osztóviszony értéke  $-1$ -nek tekintendő (vö. 44.6 B). Kiemeljük a tételnek azt az állítását, hogy ha  $C$  az  $AB$  szakasz felezőpontja, akkor  $(ABCD) = -1$ .

*Bizonyítás.* 45.3 első tétele bizonyításának jelöléseit használjuk. Most azonban  $D [\lambda_2 \mathbf{x} + \mu_2 \mathbf{y}]$  ideális pont, s ezért harmadik homogén koordinátája  $\lambda_2 + \mu_2 = 0$ . Ebből következik, hogy

$$(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2} = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} = -(ABC). \quad \text{—}$$

b) Egy (közönséges vagy ideális tartópontú) sugársor négy (közönséges vagy ideális) egyenesének kettősvisszonyát minden esetben megkapjuk, ha ezeket egy a sugársorhoz nem tartozó egyenessel metszjük, és a négy metszéspont kettősvisszonyát számítjuk ki.

Az egyenesek kettősvisszonya fogalmának kiterjesztése ideális tartópontú sugársor négy közönséges egyenesére, tehát négy párhuzamos egyenes kettősvisszonyára, valamint ideális tartópontú sugársor három közönséges egyenesére és ideális egyenesére, tehát három párhuzamos egyenes és a sík ideális egyenesére kettősvisszonyára vonatkozik.

**B1** Azokból az előírásokból, amelyeket itt egy tetszőleges pontsor és egy tetszőleges sugársor négy tetszőleges eleme kettősvisszonyának meghatározására adtunk, következik, hogy a kettős viszony fogalmának kiterjesztése, ha egyszer azt kívánjuk, hogy Pappos tét ele érvényben maradjon, csak úgy végezhető el, ahogyan mi tettük. Az előző szakasz fogalomkiterjesztése tehát ilyen feltétel mellett az egyetlen lehetséges.

**B2** 45.3 B2-vel ellentétben most arra hívjuk fel a figyelmet, hogy az általánosított kettősvisszonyt azzal a két utasítással is definiálhatnánk, amelyet ebben a szakaszban négy pont és négy egyenes kettős viszonyának kiszámítására megadtunk. Ebben az esetben feleslegessé válnék ugyan az előző szakasz tárgyalása, viszont a fogalomkiterjesztés irányának sokfélesége miatt nagyon hosszadalmas volna egyrészt annak igazolása, hogy a definícióként elfogadott utasítás mindig ugyanahhoz az értékhez vezet, függetlenül attól, hogy a vetítés centrumát, illetve a metsző egyenest hogyan vesszük fel, másrészt még hosszadalmasabb volna annak bizonyítása, hogy Pappos tétele az esetek sokféleségében is mindig érvényben marad.

Határátmenettel is el lehet jutni a kettősvisszony fogalmának kiterjesztéséhez. Ebben az esetben azonban egyrészt ugyanaz a sokféleség nehezíti a tárgyalást, amelyről az imént szoltunk, másrészt az ideális elemek határhelyzetként való szabatos bevezetésére is szükség volna (vö. 44.1 B3).

**45.5** A kettősvisszony fogalmának kiterjesztése után a kettősvisszonyra vonatkozólag két egyszerű tételt tárgyalunk.

**Tétel.**  $(ABCD) \cdot (ABCD) = 1$ .

*Bizonyítás.* Ha az  $A, B, C, D$  pontokat az  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda_1\mathbf{x} + \mu_1\mathbf{y}, \lambda_2\mathbf{x} + \mu_2\mathbf{y}$  vektorok határozzák meg, akkor 45.3 szerint

$$(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \quad (ABDC) = \frac{\mu_2}{\lambda_2} : \frac{\mu_1}{\lambda_1}.$$

A két kettősviszony tehát valóban egymás reciproka.—

**Tétel.**  $(ABCD) = (CDAB)$ .

*Bizonyítás.* Elegendő a tételt egy közöséges egyenes négy közöséges pontjára bizonyítanunk, mert vetítéssel bármely négy kollineáris pont ilyen pontokba vihető át, és a vetítés a kettősviszony értékét nem változtatja meg.

Közöséges pontokra azonban 45.1 szerint

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}, \quad (CDAB) = \frac{CA}{AD} : \frac{CB}{BD},$$

és ez a két érték egyenlő, hiszen  $AC$  és  $CA$ , valamint  $DB$  és  $BD$  előjelkülönbsége a végeredményt nem változtatja meg. —

**B** Tételeinket minden nehézség nélkül kimondhattuk volna egyenesek kettősviszonyára is, erre azonban a továbbiak során nem lesz szükségünk.

**45.6** A következőkben pontsorok négy olyan pontjáról lesz szó, amelyeknek kettősviszonya  $-1$ . Négy ilyen pontot *harmonikus pontnégyesnek* nevezünk. Megemlítjük, hogy hasonlóan *harmonikus sugárnégyesről* is beszélni lehet. Mindkét esetben mondjuk, hogy a négy elem *harmonikus viszonyt* alkot.

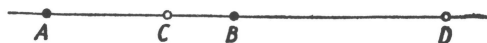
Ha  $(ABCD) = -1$ , akkor az előző szakasz szerint

$$(ABCD) = (ABDC) = (DCAB) = (DCBA) = -1.$$

Eszerint az  $A, B$  pontpárról és a  $C, D$  pontpárról akkor is mondhatjuk, hogy harmonikus négyest alkotnak, ha sem a pontpárok sorrendjét, sem az egyes pontpárokon belül a pontok sorrendjét nem rögzítjük.

Ha  $(ABCD) = -1$ , akkor az  $A, B$  pontok elválasztják  $C, D$  pontokat, hiszen a kettősviszony negatív (vö. 45.3 és 44.1 B2).

A most mondott tényekre utalunk akkor, amikor  $(ABCD) = -1$  esetén azt mondjuk, hogy az  $A, B$  és  $C, D$  pontpárok egymást *harmonikusan választják el* (460. ábra).



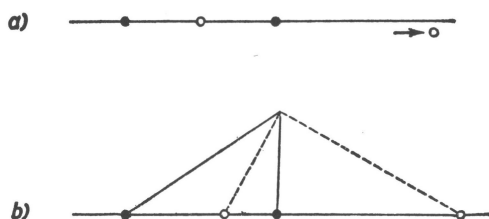
460

Ha az  $A, B, C$  pontokat az  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$  vektorok határozzák meg, akkor 45.3 szerint a  $D[\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}]$  ponttal együtt harmonikus négyest alkotnak, és ez egyenesüknek csak erre a pontjára teljesül.

Azt is beláttuk ezzel, hogy az  $A, B, C$  pontok egyértelműen meghatározzák a velük harmonikus négyest alkotó  $D$  pontot. Ha az  $A, B$  pontokat rögzítjük, akkor a  $D$  pontot  $C$  *harmonikus társának* mondjuk. Mondhatjuk, hogy  $C, D$  pontok harmonikus társak, hiszen  $C$  is harmonikus társa a  $D$  pontnak.

**A** Sok olyan példát említhetünk, ahol harmonikus négyes szerepel.

45.4 tétele kimondta, hogy egy szakasz végpontjai, valamint felezőpontja és egyenesének ideális pontja harmonikus négyest alkotnak (461. ábra).



461

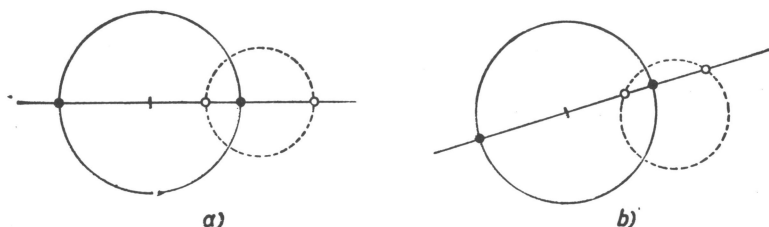
Két metsző egyenes és szögfelezők harmonikus sugárnégyest alkotnak. Ez a kettősviszony definíciója alapján közvetlenül is belátható, de abból is következik, hogy ezeket az egyeneseket az egyik szögfelezővel párhuzamos egyenessel metszve az imént említett harmonikus pontnégyeshez jutunk.

Egy háromszög két csúcsa és oldalegyenesükből a belső és külső szögfelező által kimetszett pontok 18.3 szerint harmonikus négyest alkotnak. Ez abból is következik, hogy a két szögfelező és a másik két oldalegyenes, mint éppen említettük, harmonikus sugárnégyest alkot.

**B** 40.7 utolsó tétele szerint az elliptikus körsor körei a centrális olyan pontpárokból metszik, amelyek a körsor pontköreit harmonikusan választják el.

Ebből 40.9 B1 alapján következik, hogy egy körre vonatkozó inverz pontpár harmonikusan választja el az egyenesük által kimetszett átmérő végpontjait. Ha ezt a tulajdonságot fogadnák el az inverzió definíciójául, akkor a sík ideális pontjai inverzének az inverzió pólusát kellene mondanunk (vö. 44.1 B4).

Mint hogy az inverzió alapkörét merőlegesen metsző kör önmagának az inverze, azt is kimondhatjuk, hogy ha két kör egymást merőlegesen metszi, akkor ezeket az egyikük középpontján áthaladó egyenes egymást harmonikusan elválasztó pontpárokból metszi (462. ábra). Itt az egyik kör helyett egyenes is szerepelhet, de ebben az esetben a kimetszett pontpár másik pontjának a metsző egyenes ideális pontja tekintendő.



462

Utolsó megállapításunkból következik, hogy ha az inverzió pólusán áthaladó egyenesen harmonikus pontnégyest veszünk fel, akkor e négy pont inverze ugyancsak harmonikus négyest alkot, hiszen a merőlegesen metsző köröket az inverzió merőlegesen metsző körökbe viszi át.

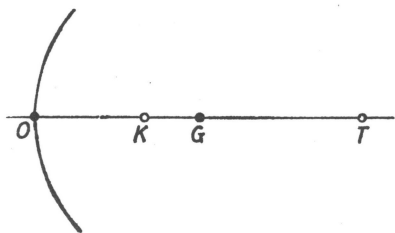
Így azt is belátjuk, hogy a száme egyenes  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{a+b}, 0$  pontjai harmonikus négyest alkotnak, hiszen

az  $a, b$  pontok harmonikusan választják el az  $\frac{a+b}{2}$  pontot az egyenes ideális pontjától, márpedig ezek a pontok a kezdőpont körül írt egységkörös tükrözve az először említett négy pontot adják. Rámutat

ez a tény a harmonikus jelző eredetére, hiszen  $\frac{2}{a+b}$  az  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$  számok harmonikus közepe; ilyen

számokra egy hang  $\frac{h}{n}$  hullámhosszúságú  $n$ -edik (harmonikus) felhangja s az ezt közrefogó  $\frac{h}{n-1}$  és  $\frac{h}{n+1}$  hullámhosszúságú két felhang ad példát.

Ha a mondottakat a fizika jól ismert  $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$  vetjük egybe, és az  $f = \frac{r}{2}$  összefüggést is figyelembe vesszük, akkor kimondhatjuk, hogy a gömbtükör tengelyén elhelyezkedő tárgy és kép harmonikusan választja el a tükör optikai és geometriai középpontját (463. ábra).



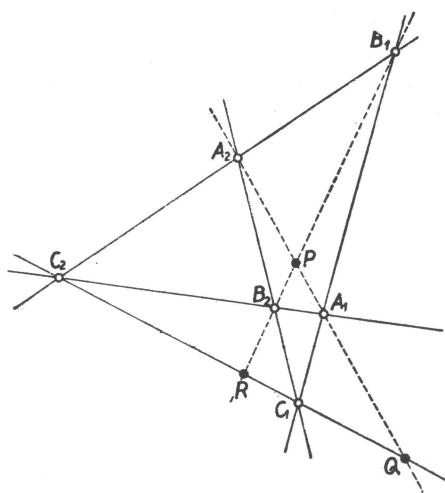
463

**45.7** Négy egyenes teljes négyoldalt alkot akkor, ha nincs közöttük három közös ponton áthaladó egyenes. A négy egyenest a teljes négyoldal *oldalainak*, hat metszéspontjukat a teljes négyoldal *szögpontjainak* mondjuk. Két szögpont *átellenes*, ha nincsenek ugyanazon az oldalon. Az átellenes szögpontokat összekötő három egyenest a teljes négyoldal *átlóinak*, az átlók három metszéspontját a teljes négyoldal *átlóspontjainak* nevezzük.

**Tétel.** (teljes négyoldal tétele). A teljes négyoldal valamely átlóján elhelyezkedő két szögpont és két átlóspont egymást harmonikusan választja el.

*Első bizonyítás.* Bizonyítani akarjuk, hogy az átellenes  $A_1, A_2$  szögpontok harmonikusan választják el a  $P, Q$  átlóspontokat (464. ábra). Vetítsük e pontokat a  $B_1$  szögpontból a  $C_1C_2$  átlóra. Minthogy a kettősviszony vetítésnél változatlan marad,

$$(PQA_1A_2) = (RQC_1C_2).$$



464

Vetítsük a most kapott pontokat a  $B_1$  szögpontból az  $A_1, A_2$  átlóra. A kettősviszony megmaradásából így

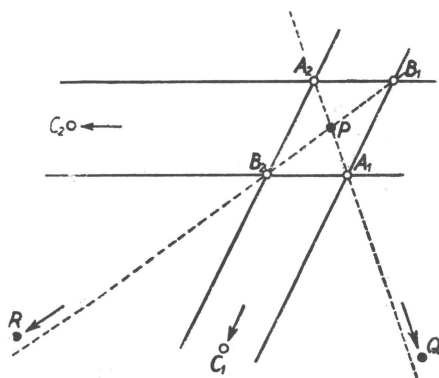
$$(RQC_1C_2) = (PQA_2A_1),$$

és az előző eredménnyel egybevetve

$$(PQA_1A_2) = (PQA_2A_1)$$

következik. E kettőssviszonyok közös értéke 45.5 első tétele szerint a saját reciproka, ez az érték tehát csak 1 vagy  $-1$  lehet, Négy különböző pont kettőssviszonya nem lehet 1, s ezért a vizsgált kettőssviszony értéke csak  $-1$  lehet. —

*Második bizonyítás.* Vetítsük a vizsgált teljes négyoldalt egy a síkján kívüli pontból egy másik síkba úgy, hogy a  $C_1C_2$  átló vetülete a vetületi sík ideális egyenese legyen. Ezt elérhetjük azáltal, hogy a vetületi síkot a  $C_1C_2$  átlót vetítő síkkal párhuzamosan vesszük fel. Az új ábra pontjait ugyanúgy jelöljük, mint az eredeti ábra megfelelő pontjait.



465

A vetületi ábrában  $A_1B_1A_2B_2$  paralelogramma, mert szemközti oldalai egymást ideális pontokban metszik (465. ábra). Az  $A_1A_2$  átlót a paralelogramma másik átlója az  $A_1A_2$  szakasz felezőpontjában, a  $C_1C_2$  ideális egyenes pedig az  $A_1A_2$  egyenes ideális pontjában metszi. A vetületi ábrában az  $A_1, A_2$  szögpontok harmonikusan választják el tehát a  $P, Q$  átlópontokat. Minthogy a vetítés a kettőssviszonyt nem változtatta meg, ez az eredeti ábrára is áll. —

**A** A teljes négy oldalra vonatkozó tetei módot ad arra, hogy három adott ponthoz a negyedik harmonikust könnyedén megszerkesszük. Ehhez a szerkesztéshez csak vonalzóra van szükség, hiszen a szerkesztés csupán a 464. ábra rekonstrukcióját kívánja.

**B** A teljes négyoldalnak duálisan a teljes négyszög felel meg. Ennek négy szögpontja és ezeket összekötő hat oldala van. A teljes négyoldal tételének duáljaként a teljes négyszög tételét is kimondhatnánk.

## 46. § Másodrendű görbék

Az előző két paragrafus előkészítése után a kúpszeletek tárgyalásához térünk vissza. Most azonban nem a kúpszeletek alaki tulajdonságainak vizsgálata a cél, és nem a kúpszelethez illeszkedő koordináta-rendszerrel dolgozunk, hanem a koordináta-rendszer síkjában valahogyan elhelyezkedő kúpszelet egyenletéből indulunk ki, és ebből olvassuk majd ki a kúpszelet alakját és helyzetét jellemző adatokat. A kúpszeleteken túlmenően mindazokkal a görbékkel foglalkozunk, amelyeknek egyenlete másodfokú. Tárgyalásunk néhány eddig még nem említett alaki tulajdonság megismeréséhez is elvezet. Ahol az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk, vagy értelemszerűen nem nyilvánvaló, a pont és egyenes szavak az ideális tételeket is jelentik.

**46.1** Azokat a görbéket, amelyeknek egyenlete a két (közönséges) koordinátában másodfokú, *másodrendű görbéknek* nevezzük (vö. 38.2 B2). E görbék általános egyenlete tehát

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

az  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  együttthatók azonban nem lehetnek mindannyian 0-val egyenlők.

Ha 44.4 előírása szerint a görbe homogén koordinátás egyenletére térünk át, az

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ha megállapodunk abban, hogy

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

akkor egyenletünket

$$x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

alakban, vagy röviden

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k = 0$$

alakban is írhatjuk. Ez az Írásmód mutatja, hogy az együtthatók jelölését célszerűen választottuk meg. Az összegezés határainak jelzését el is hagyhatjuk, mert félreértésre nincs lehetőség.

Gyakran lesz szó az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinánsról, a *másodrendű görbe determinánsáról*. Ez  $a_{ik} = a_{ki}$ , miatt szimmetrikus.

Sokszor szerepel majd az  $A$  determináns

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

aldeterminánsa is. Ez is szimmetrikus.

**A1** Ha feladatok megoldásakor a másodrendű görbe egyenletéből indulunk ki, akkor az első lépés rendszeren a görbe determinánsának a felírása. Célszerű először a főátló elemeit, azaz  $x^2$ ,  $y^2$  és 1 együtthatóját írni be, majd ezt követően  $xy$ ,  $x$  és  $y$  együtthatóinak a felét, mégpedig mindegyiket két-két szimmetrikus helyre. Ezáltal csökken annak a lehetősége, hogy a 2-vel osztandó együtthatókat elfelejtjük 2-vel elosztani.

**A2** A kanonikus egyenletek alapján megállapíthatjuk, hogy a kúpszeletek mindegyike másodrendű görbe. Ez a kijelentés a körre is vonatkozik. A másodrendű görbék tárgyalása során ugyanis a kört is a kúpszeletek közé soroljuk.

Vannak azonban olyan másodrendű görbék is, amelyek nem kúpszeletek. Az itt következőkben ilyen

másodrendű görbéket említünk. Az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  egyenletet egyetlen pont koordinátái sem elégítik ki,

s ez akkor is áll, ha a homogén koordinátás  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = x_3^2$  egyenletre térünk át. Az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  egyenletet

csak a kezdőpont koordinátái elégítik ki, ez tehát egy pont egyenlete. Az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  egyenletet 43.4-ből már ismerjük, ez két egymást metsző egyenes egyenlete. Az  $x^2 = -1$  egyenletet egyetlen pont

koordinátái sem elégítik ki, ha azonban a homogén koordinátás  $x_1^2 = -x_3^2$  egyenletre térünk át, akkor megállapítható, hogy ez már nem üres alakzat egyenlete, de csak a  $[0, 1, 0]$  ideális pont tartozik hozzá. Az  $x^2 = 1$  egyenlet két párhuzamos egyenes, az  $x = 1$ ,  $x = -1$  egyenespár egyenlete. Végül az  $x^2 = 0$  egyenletet csak az  $x = 0$  egyenes pontjainak koordinátái elégítik ki, ez tehát egyetlen egyenes egyenlete.



A másodrendű görbék tárgyalása tehát a kúpszeletekre és a most felsorolt alakzatokra is vonatkozik. Eszerint a másodrendű görbékre érvényes kijelentések érvényesek a kúpszeletekre is, viszont a kúpszeletekre érvényes kijelentések nem érvényesek eleve a másodrendű görbék mindegyikére.

**A3** A másodrendű görbék megismerése során különbséget teszünk a „kúpszelet” és a „másodrendű görbe” megjelölések között. Ez a különbségtétel azonban csak átmeneti, mert majd képzetes kúpszeletnek vagy degenerált kúpszeletnek nevezzük mindazokat a másodrendű görbéket, amelyekről most még azt kell mondanunk, hogy nem kúpszeletek. Nem követ el tehát lényeges hibát, aki a két megjelölést már ennek a tárgyalásnak a során is felcseréli.

**B1** A kúpszeletek kanonikus egyenletéből és az A2-ben felsorolt egyenletekből 0-tól különböző számmal való szorzás és koordinátatranszformáció további olyan egyenletekhez vezet, amelyek másodrendű görbéket adnak meg, hiszen ezek a műveletek nem változtatják meg a fokszámot (vö. 38.2 B2).

A másodrendű görbék tárgyalásának egyik fő célja annak vizsgálata, hogy vannak-e az eddig említetteken kívül további másodrendű görbék. Látni fogjuk, hogy nincsenek (lásd 47.5).

**B2** A homogén koordinátás egyenletre való áttérés a másodrendű görbékhez ideális pontokat csatol (lásd 44.4). A következőkben mindig ilyen, ideális pontokkal bővített alakzatokkal foglalkozunk.

**46.2** A másodrendű görbék minőségével foglalkozunk. Egy másodrendű görbét *elliptikusnak*, *parabolikusnak* vagy *hiperbolikusnak* mondunk aszerint, amint 0, 1 vagy 2 ideális pontja van.

**Tétel.** *A másodrendű görbe aszerint elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus, amint  $A_{33}$  pozitív, nulla vagy negatív.*

Tételünk azt is kimondja, hogy minden másodrendű görbe a három minőségosztály valamelyikébe tartozik, hogy tehát a másodrendű görbének legfeljebb két ideális pontja lehet.

*Bizonyítás* Az  $[x_1, x_2, 0]$  ideális pont akkor tartozik a  $\sum \alpha_{ij} x_i x_j = 0$  másodrendű görbéhez, ha

$$\alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{22} x_2^2 = 0$$

Ez homogén másodfokú egyenlet, mert az együtthatók mindegyike 0 nem lehet. A 0, 0 értékeket nem tekintjük a homogén másodfokú egyenlet megoldásának, a megoldások összeszámlálásakor nem tekintünk két megoldást különbözőnek, ha az egyik a másikból (0-tól különböző) számmal szorozva áll elő. Ezek szerint a felírt egyenlet két megoldását csak akkor tekintjük különbözőnek, ha különböző ideális pontokat adnak meg. Homogén másodfokú egyenletünk megoldásainak a száma tehát a másodrendű görbe ideális pontjainak a számával egyenlő.

Az egyenlet megoldásainak a száma viszont (az egyenlet diszkriminánsától) az  $A_{33}$  értéktől függ (lásd A1). Az egyenletnek 0, 1 vagy 2 megoldása van aszerint, amint  $A_{33}$  pozitív, nulla vagy negatív, s ezért ugyanez a görbe ideális pontjainak számára is áll, —

**A1** Az  $\alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{22} x_2^2 = 0$  egyenletet homogén másodfokú egyenletnek mondjuk akkor, ha benne nem minden együttható 0. Felhasználtuk, hogy megoldásainak száma 0, 1 vagy 2 aszerint, amint

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$$

pozitív, nulla vagy negatív. Ezt a következőképpen bizonyítjuk be:

Ha  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ , akkor  $\alpha_{12} \neq 0$ , s az egyenlet  $x_1 x_2 = 0$  alakban is írható. Ebben az esetben tehát két megoldás van, mert az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  megoldások 0-tól különböző számmal szorozva minden megoldást megadnak. Ebben az esetben tehát helyes az állításunk, mert most  $A_{33} = -\alpha_{12}^2 < 0$ .

Ha az  $\alpha_{11}$  és  $\alpha_{22}$  együtthatóknak nem mindegyike 0, akkor feltehetjük, hogy pl.  $\alpha_{11} \neq 0$ . Ekkor az egyenlet megoldásában  $x_2 = 0$  nem fordulhat elő, hiszen ebből az egyenletbe való helyettesítés révén

$x_1 = 0$  következne, márpedig a 0,0 értékeket nem tekintjük megoldásnak, A vizsgált esetben szabad ezért az egyenletet  $x_1^2$ -tel osztani. Így az

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

közönséges másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek a másodfokú egyenletnek annyi megoldása van, ahány az eredeti homogén másodfokú egyenletnek volt, mert a homogén egyenlet két megoldása akkor és csak akkor különböző, ha  $x_1 : x_2$  arányuk nem egyenlő. Helyes ezért az állítás a most vizsgált esetben is, hiszen a felírt közönséges másodfokú egyenlet valós gyökeinek száma valóban úgy függ  $A_{33}$ -tól, ahogyan ezt az ideális pontokról a tétel kimondja.

**A2** A minőségsztyályok elnevezését az indokolja, hogy az ellipszis, a parabola és a hiperbola valóban elliptikus, parabolikus és hiperbolikus görbe. Ezt már 44.4 tetele is kimondta, de  $A_{33}$ -nak a kanonikus egyenletekből adódó

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{vmatrix} < 0$$

értékei is mutatják. Elliptikus, parabolikus és hiperbolikus görbék helyett viszont nem mondhatunk ellipszist, parabolát és hiperbolát, mert a minőségsztyályok a 46.1 A2-ben említett görbéket is felölelik.

**A3** Parabola és hiperbola esetében a görbe ideális pontjainak meghatározása a tengelyirány, illetve az aszimptotairányok meghatározását jelenti. Ilyen feladat megoldásánál a keresett ideális pont koordinátáit  $[\cos \varphi, \sin \varphi, 0]$  alakban írjuk, s így az irányszögre vonatkozó

$$a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = 0$$

egyenlethez jutunk. Ezt az egyenletet A2 útmutatása szerint oldhatjuk meg. Ügyelnünk kell azonban arra, hogy csak akkor térhetünk át  $\cos^2 \varphi$ -vel való osztással az  $m = \tan \varphi$  iránytangensre vonatkozó

$$a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2 = 0$$

egyenletre, ha  $\cos \varphi = 0$  nem megoldás, ha tehát  $a_{22} \neq 0$ . Az ellenkező esetben  $\cos \varphi$  kiemelésével oldhatjuk meg az egyenletet.

**B** A diszkrimináns szó használata terén nincs egyértelműen kialakult szokás. Az  $ax^2 + bx + c = 0$  egyenlet diszkriminánsának a  $b^2 - 4ac$  értéket s a  $4ac - b^2$  értéket is mondják. Szokás az is, hogy az  $ax^2 + 2bx + c = 0$  másodfokú egyenlet diszkriminánsának az  $ac - b^2$  értéket nevezik. Ez utóbbi szokáshoz igazodva az  $A_{33}$  értéket a tárgyalt homogén másodfokú egyenlet diszkriminánsának mondhatjuk.

**46.3 Tétel.** Egy egyenesnek egy másodrendű görbével 0, 1 vagy 2 közös pontja van, vagy pedig az egyenes minden pontja a másodrendű görbéhez tartozik.

A tétel kimondja, hogy ha egy egyenes három pontja egy másodrendű görbéhez tartozik, akkor minden pontja a görbén van.

*Bizonyítás.* Tekintsük az  $[\mathbf{x}] = [x_1, x_2, x_3]$  és  $[\mathbf{y}] = [y_1, y_2, y_3]$  pontok által meghatározott egyenes  $[\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}]$  pontját. Ez a pont akkor tartozik a  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$  görbéhez, ha

$$\sum a_{ik} (\lambda x_i + \mu y_i)(\lambda x_k + \mu y_k) = \lambda^2 \sum a_{ik} x_i x_k + 2\lambda\mu \sum a_{ik} x_i y_k + \mu^2 \sum a_{ik} y_i y_k = 0$$

Ha itt mind a három együttható 0, akkor az egyenlet minden  $\lambda, \mu$  számpárra teljesül, tehát az egyenes minden pontja a másodrendű görbén van.

Ha a három együttható között van 0-tól különböző, akkor a felírt egyenlet a  $\lambda, \mu$  ismeretlenekre felírt homogén másodfokú egyenlet, s erről tudjuk, hogy legfeljebb két megoldása van. Ez úgy értendő,

hogy két megoldást akkor tekintünk különbözőnek, ha egymásnak nem számszorosai, ha tehát a megoldásokkal felírt  $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$  vektorok egymásnak nem számszorosai, azaz nem párhuzamosak, vagyis különböző pontokat határoznak meg. Eszerint a most vizsgált esetben az egyenesnek és a másodrendű görbének valóban legfeljebb két közös pontja van. —

Az említett homogén másodfokú egyenlet középső együtthatója

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} x_i y_k &= \sum a_{ik} y_i x_k = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} x_2 y_2 + a_{13} (x_1 y_3 + x_3 y_1) + a_{23} (x_2 y_3 + x_3 y_2) + a_{33} x_3 y_3 = \\ &= x_1 (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) + x_2 (a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3) + x_3 (a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3) = \\ &= y_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) + y_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) + y_3 (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) \end{aligned}$$

alakokban írható. Ez a kifejezés az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  vektorok mindegyikének koordinátaiban homogén lineáris, azaz *bilineáris* kifejezés.

Azt mondjuk, hogy az  $[x_1, x_2, x_3]$  pont  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$  másodrendű görbére vonatkozólag *konjugált* az  $[y_1, y_2, y_3]$  ponthoz, ha

$$\sum a_{ik} x_i y_k = 0$$

Ebben az esetben  $[\mathbf{y}]$  is konjugált az  $[\mathbf{x}]$  ponthoz, s a két pontot egymáshoz konjugáltnak mondhatjuk. Joggal mondhatjuk, hogy a pontok konjugáltak, s nem kell azt mondanunk, hogy a két meghatározó vektor konjugált, mert ha a konjugáltság definíciója az  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  vektorokra teljesül, akkor teljesül a  $\lambda \mathbf{x}$ ,  $\mu \mathbf{y}$  vektorokra is.

Ha közönséges koordinátákat használunk, akkor a közönséges  $P(p_1, p_2)$ ,  $Q(q_1, q_2)$  pontok konjugáltsága az

$$a_{11} p_1 q_1 + a_{12} (p_1 q_2 + p_2 q_1) + a_{22} p_2 q_2 + a_{13} (p_1 + q_1) + a_{23} (p_2 + q_2) + a_{33} = 0$$

összefüggés fennállását jelenti. Mindez nyomban kiolvasható a fentebbi átalakításból.

**Tétel.** Egy pont akkor és csak akkor konjugált önmagához, ha a másodrendű görbének pontja.

*Bizonyítás.* Az  $[x_1, x_2, x_3]$  pont akkor konjugált önmagához, ha  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ , ez pedig a másodrendű görbe egyenlete. —

**Tétel.** Ha egy egyenes két pontban metszi a másodrendű görbét, akkor az egyenesnek a metszéspontokat harmonikusan elválasztó két pontja egymáshoz konjugált.

*Bizonyítás.* Legyen  $[\mathbf{x}]$  és  $[\mathbf{y}]$  a metszéspontokat harmonikusan elválasztó két pont, és  $[\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}]$ ,  $[\lambda \mathbf{x} - \mu \mathbf{y}]$  a két metszéspont (vö. 45.6). Minthogy az utóbbiak a görbén vannak, az első tétel bizonyításában már használt átalakítás szerint

$$\begin{aligned} \lambda^2 \sum a_{ik} x_i x_k + 2 \lambda \mu \sum a_{ik} x_i y_k + \mu^2 \sum a_{ik} y_i y_k &= 0, \\ \lambda^2 \sum a_{ik} x_i x_k - 2 \lambda \mu \sum a_{ik} x_i y_k + \mu^2 \sum a_{ik} y_i y_k &= 0. \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből kivonással következik, hogy  $\sum a_{ik} x_i y_k = 0$ , hiszen  $\lambda$  és  $\mu$  nem 0. —

**Tétel.** Egy másodrendű görbe akkor és csak akkor tartalmazza két pontjának összekötő egyenesét, ha a két pont konjugált egymáshoz.

Ez a tétel azt is kimondja, hogy a másodrendű görbéhez tartozó egyenes bármely két pontja konjugált egymáshoz.

*Bizonyítás.* Ha  $[\mathbf{x}]$  és  $[\mathbf{y}]$  a másodrendű görbe pontjai, akkor az első tétel bizonyításában felírt egyenletben  $\lambda^2$  és  $\mu^2$  együtthatója 0, így tehát a  $[\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}]$  pontsornak azok a pontjai tartoznak a görbéhez, amelyekre

$$2\lambda\mu \sum \alpha_{ik} x_i y_k = 0.$$

Ez az egyenlet azonban minden  $\lambda, \mu$  számpárra akkor és csak akkor teljesül, ha  $\sum \alpha_{ik} x_i y_k = 0$ . —

**Tétel.** *Ha a másodrendű görbe két konjugált pont összekötő egyenesét nem tartalmazza, akkor az egyenesnek és a görbének vagy nincs közös pontja, vagy a két pont egyike az egyetlen közös pontjuk, vagy pedig két közös pontjuk van, és ezek a két konjugált pontot harmonikusan választják el.*

Tételünk tartalmazza e szakasz harmadik tételének következő megfordítását: Ha egy egyenes két pontban metszi a másodrendű görbét, és tartalmaz két konjugált pontot, akkor e pontpárok harmonikusan választják el egymást.

*Bizonyítás.* Legyen  $[\mathbf{x}]$  és  $[\mathbf{y}]$  a két konjugált pont. E két pont mindegyike nem tartozhatik a görbéhez, mert akkor az előző tétel szerint összekötő egyenesük is a görbéhez tartoznék. Elég tehát azt igazolnunk, hogy ha az egyenesnek az  $[\mathbf{x}]$ ,  $[\mathbf{y}]$  pontoktól különböző  $[\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}]$  pontja a görbéhez tartozik, akkor ennek a harmonikus társa, azaz a  $[\lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{y}]$  pont is a görbén van.

Az első tétel bizonyítása szerint a  $[\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}]$  pontsornak azok a pontjai tartoznak a másodrendű görbéhez, amelyekre

$$\lambda^2 \sum \alpha_{ik} x_i x_k + \mu^2 \sum \alpha_{ik} y_i y_k = 0,$$

hiszen most az eredeti egyenlet középső együtthatója az  $[\mathbf{x}]$  és  $[\mathbf{y}]$  pontok konjugáltsága miatt 0. Ha tehát a  $\lambda, \mu$  számpár kielégíti ezt az egyenletet, akkor valóban kielégíti a  $\lambda, -\mu$  számpár is. —

A most bizonyított tételből következik, hogy ha két konjugált pontot egy pontpár harmonikusan választ el, és e pontpár egyik pontja a másodrendű görbén van, akkor a másik pontja is a görbéhez tartozik.

**B1** A pontok konjugáltságát analitikusan definiáltuk. Tisztán geometriai definíciót nem is lehet adni, hiszen a másodrendű görbék között üres alakzatok is szerepelnek, és ezeknél is beszélhetünk konjugált pontokról. A szakasz harmadik tétele alkalmas a konjugáltság definiálására, ha olyan pontpárookra szorítkozunk, amelyeknek az összekötő egyenese metszi a másodrendű görbét.

Ha komplex koordinátájú pontokról is szólnánk (vö. 38.2 B5), akkor a második és harmadik tételünkben kimondott tulajdonságok alapján, tisztán geometriai úton is definiálhatnók a pontok konjugáltságát.

**B2** Minthogy a konjugáltság definíciója analitikus, azt kell mondanunk, hogy két pont konjugáltságát nem egy megadott másodrendű görbére vonatkozólag definiáltuk, hanem egy másodrendű görbének egy koordináta-rendszerben megadott egyenletére vonatkozólag. Bebizonyítjuk, hogy ha a görbe egyenletét egy állandóval szorozzuk, s ha koordinátatranszformációt hajtunk végre, akkor két pont konjugáltságának ténye nem változik meg.

Ha a másodrendű görbe egyenletét egy számmal szorozzuk, akkor az egyenlet minden együtthatóját megszorozzuk ezzel a számmal. Ezért a  $\sum \alpha_{ik} x_i y_k = 0$  összefüggés, ha a szorzás előtt fennállt, a szorzás után is fennáll.

A koordinátatranszformációval kapcsolatban a következőképpen okoskodunk: A másodrendű görbe  $\sum \alpha_{ik} x_i x_k = 0$  egyenletének bal oldala minden  $\mathbf{x} (x_1, x_2, x_3)$  vektorhoz egy-egy

$$f(\mathbf{x}) = \sum \alpha_{ik} x_i x_k$$

számot rendel. Ezzel a jelöléssel a konjugáltság definícióját

$$\sum \alpha_{ik} x_i y_k = \frac{1}{2} [f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})] = 0,$$

alakban írhatjuk. Ha homogén lineáris transzformációval új koordinátákat vezetünk be, akkor minden  $\mathbf{x}$  vektorhoz új  $\mathbf{x}' (x'_1, x'_2, x'_3)$  vektort rendelünk. Ez a hozzárendelés az  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  vektorhoz az  $\mathbf{x}' + \mathbf{y}'$  vektort rendeli. A transzformációval keletkező  $\sum \alpha'_{ik} x'_i x'_k = 0$  kifejezés az  $\mathbf{x}'$  vektorhoz a változatlan  $f(\mathbf{x})$  értéket rendeli, hiszen az  $\alpha'_{ik}$  együtthatókat éppen  $\sum \alpha'_{ik} x'_i x'_k = \sum \alpha_{ik} x_i x_k$  alapján vezettük be. A fenti összefüggés alapján következik tehát, hogy a konjugált pontok új koordinátáira is fennáll a  $\sum \alpha'_{ik} x'_i x'_k = 0$  összefüggés. Ez a megfontolás a koordinátarendszer eltolására és elforgatására egyaránt vonatkozik, mert a homogén koordinátákban mindkettő homogén lineáris transzformációt jelent (vö. 44.4 B).

**46.4 Tétel.** *Egy pont konjugáltjai vagy egy egyenest alkotnak, vagy pedig a teljes síkot belepik.*

*Bizonyítás.* A konjugáltság definíciója szerint az  $[x_1, x_2, x_3]$  ponthoz azok  $[y_1, y_2, y_3]$  pontok konjugáltak, amelyekre

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

teljesül, ahol

$$u_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3,$$

$$u_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3,$$

$$u_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3.$$

Eszerint a konjugált pontok egyenest alkotnak, ha az  $u_1, u_2, u_3$  értékeknek nem mindegyike 0, és ezek az értékek az egyenes vonalkoordinátái. Ha viszont  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ , akkor az  $[x_1, x_2, x_3]$  pont a sík minden pontjához konjugált.—

Ha egy pont konjugáltjai egyenest alkotnak, ezt az egyenest a pont *polárisának* (poláris egyenes, poláregyenes) nevezzük. Ha egyetlen olyan pont van, amely egy egyenes minden pontjához konjugált, akkor ezt a pontot az egyenes *pólusának* mondjuk. Azok a 46.3-ban említett összefüggések, amelyek két pont konjugáltságát juttatják kifejezésre, egyben a poláris egyenletét is megadják akkor, ha bennük az egyik pont koordinátáit rögzítjük, s a másik pont koordinátáit változóknak tekintjük.

Ha egy pont a sík minden pontjához konjugált, akkor *szinguláris pontnak* nevezzük. A másodrendű görbe *elfajuló* (degenerált), ha van egy vagy több szinguláris pontja. Az elfajuló másodrendű görbéket elfajuló kúpszeleteknek is nevezik. Az el nem fajuló másodrendű görbéket *közönséges* másodrendű görbéknek is mondjuk.

Ebben a szakaszban az elfajuló másodrendű görbékkel foglalkozunk.

**Tétel.** *Egy másodrendű görbe akkor és csak akkor elfajuló, ha determinánsa  $A = 0$ .*

*Bizonyítás.* Az  $[x_1, x_2, x_3]$  pont az előző tétel bizonyítása szerint akkor és csak akkor szinguláris, ha

$$\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 = 0,$$

$$\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 = 0,$$

$$\alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 = 0.$$

A görbe tehát akkor és csak akkor elfajuló, ha ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. Ennek viszont szükséges és elégséges feltétele az, hogy a rendszer determinánsa eltűnjék. —

A felírt egyenletrendszer módot ad a másodrendű görbék szinguláris pontjainak meghatározására is.

**Tétel.** *Egy elfajuló másodrendű görbe vagy egyetlen pontból, vagy egyetlen egyenesből, vagy pedig két egyenesből áll.*

*Bizonyítás.* a) Ha  $S$  szinguláris pont, akkor  $S$  pontja a görbének, hiszen a szinguláris pont a sík minden pontjához, tehát önmagához is konjugált. Az elfajuló görbének ezért bizonyosan van legalább egy pontja.

b) Ha  $S$  szinguláris pont, és  $A$  a görbének  $S$ -től különböző pontja, akkor a görbe tartalmazza az  $SA$  egyenest. Ez 46.3 negyedik tételéből következik, mert  $S$  és  $A$  a görbe pontjai, és  $S$  a sík minden pontjához, tehát  $A$ -hoz is konjugált. Ebből következik, hogy ha  $S$  az elfajuló görbének nem egyetlen pontja, akkor a görbe az  $S$  ponton áthaladó egyenesekből áll.

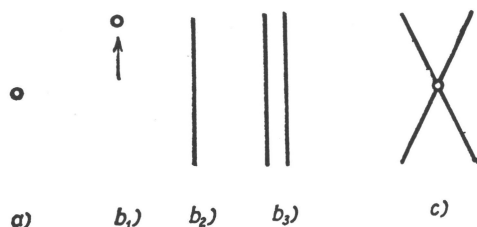
c) Már csak azt kell bizonyítanunk, hogy az elfajuló görbe nem tartalmazhat több, mint két egyenest. Ez abból következik, hogy a görbének egy az  $S$  ponton át nem haladó egyenessel csak legfeljebb két közös pontja lehet. Az ellenkező esetben ugyanis a görbe 46.3 első tétele szerint ezt az egész egyenest, és így b) szerint minden az  $S$  ponton áthaladó egyenest, azaz a sík minden pontját tartalmazná, márpedig 46.2 szerint a másodrendű görbe a teljes ideális egyenest nem tartalmazhatja. —

**Tétel.** Ha egy másodrendű görbe egyenest tartalmaz, akkor a görbe c/- fajuló.

Azt is kimondhatjuk 46.3 első tétele alapján, hogy a másodrendű görbe elfajuló, ha egy egyenes három pontját tartalmazza.

*Bizonyítás.* Bizonyítanunk kell, hogy görbénknek van szinguláris pontja. Minthogy a görbe tartalmazza az  $e$  egyenest, 46.3 negyedik tétele szerint  $e$  bármely két pontja konjugált egymáshoz. Legyen  $P$  egy az  $e$  egyeneshez nem tartozó pont. Feltehetjük, hogy  $P$  nem szinguláris, mert különben nincs mit bizonyítanunk. Legyen  $S$  az  $e$  egyenesnek és a  $P$  pont polárisának közös pontja. Ez az  $S$  pont ezek szerint konjugált az  $e$  egyenes pontjaihoz és az  $e$  egyenesen kívül felvett  $P$  ponthoz is. Ezért  $S$  csak szinguláris pont lehet. —

A 46.1A2 példái mutatják, hogy valóban vannak olyan elfajuló másodrendű görbék, amelyeknek lehetőségét e szakasz harmadik tétele kimondja. Ezeket az elfajuló kúpszeleteket 46.2 alapján minőségük szerint is osztályozhatjuk (466. ábra).



466

Minden elliptikus elfajuló kúpszelet egyetlenegy közös pontból áll.

A parabolikus elfajuló kúpszelet állhat egyetlen ideális pontból, egyetlen egyenesből vagy két párhuzamos közös pontból.

Minden elfajuló hiperbolikus görbe két egymást közös pontban metsző, közös pontból áll.

Megemlíthetjük, hogy minden el nem fajuló kúpszelet közös pontból áll, hiszen a harmadik tételben említett alakzatok egyikével sem azonos. Ugyanezt  $A$  értékének a kanonikus egyenletekből való kiszámításával is ellenőrizhetjük.

**B** Az egy pontból álló elfajuló kúpszeleteknek ez a pont az egyetlen szinguláris pontjuk, hiszen a szinguláris pontnak a görbéhez kell tartoznia. A két egyenesből álló elfajuló kúpszeleteknek a két egyenes közös pontja az egyetlen szinguláris pontjuk, mert más pont nem rendelkezik a harmadik tétel bizonyításának b) részében említett tulajdonsággal.

Egyetlen  $e$  egyenesből álló elfajuló kúpszelet esetében bebizonyítjuk, hogy minden pontja szinguláris. Legyen ugyanis  $S$  az  $e$  egyenesnek,  $A$  pedig a síknak tetszőleges pontja. Azt kell bebizonyítanunk,

hogy  $S$  és  $A$  konjugált. Ha  $A$  az  $e$  egyenesen van, akkor 46.3 negyedik tétele szerint  $S$ -hez konjugált. Ha viszont  $A$  nincs az  $e$  egyenesen, akkor  $A$  nem szinguláris, hiszen nincs a görbén. Ugyanezért  $A$  nincs a saját polárisán, tehát  $A$  polárisa az  $SA$  egyenest egy  $A$ -tól különböző,  $A$ -hoz konjugált pontban metszi. Ez a metszéspont 46.3 utolsó tétele szerint csak  $S$  lehet, mert ez az  $SA$  egyenes egyetlen közös pontja a görbével. Így tehát  $S$  az  $A$  pont polárisán van, és hozzá valóban konjugált.

Kimondhatjuk ezek alapján, hogy ha egy elfajuló másodrendű görbének egynél több szinguláris pontja van, akkor szinguláris pontjai egy egyenest alkotnak, s a görbe ezzel az egyenessel azonos. Azt is beláttuk, hogy az elfajuló parabolikus görbék ideális pontja szinguláris pont.

**46.5** Miután az előző szakaszban az elfajuló másodrendű görbéket vizsgáltuk, a most következőkben a közösleges görbékkel foglalkozunk.

**Tétel.** *Közösleges másodrendű görbe esetében minden pontnak van polárisa, és minden egyenesnek van pólusa.*

*Bizonyítás.* Minden pontnak van polárisa, hiszen szinguláris pont nincs.

Ebből következik, hogy ha egy adott egyenes minden pontja konjugált egy ponthoz, akkor ennek a pontnak a polárisa az adott egyenes. Tételünknek a pólusról szóló állítása azt jelenti tehát, hogy minden egyenes egyetlenegy pontnak a polárisa.

Az  $[x_1, x_2, x_3]$  pont polárisának vonalkoordinátái

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = u_1,$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = u_2,$$

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = u_3.$$

Minthogy a pont homogén koordinátáit tetszőleges 0-tól különböző számmal megszorozhatjuk, a felírt három lineáris kifejezés a poláris tetszőlegesen megválasztott  $[u_1, u_2, u_3]$  vonalkoordinátáit adja meg, ha a pont megfelelően megválasztott homogén koordinátaiból indulunk ki. Ebből következik, hogy egy adott  $[u_1, u_2, u_3]$  egyenes azoknak és csak azoknak a pontoknak a polárisa, amelyeknek homogén koordinátái a fenti egyenletrendszer kielégítő módon választhatók meg.

Tételünk pólusra vonatkozó állítása következik ezért abból, hogy a felírt egyenletrendszernek  $A \neq 0$  miatt egyetlenegy megoldása van, s ez nem triviális, hiszen az  $u_1, u_2, u_3$  vonalkoordináták között van 0-tól különböző is. —

A most bizonyított tétel alapján kimondhatjuk, hogy közösleges másodrendű görbe esetében minden pont a saját polárisának a pólusa, és minden egyenes a saját pólusának a polárisa. A bizonyításban használt egyenletrendszer lehetővé teszi, hogy egy egyenes vonalkoordinátaiból kiszámítsuk pólusának a koordinátáit.

Egy olyan egyenest, amelynek a közösleges másodrendű görbével egyetlenegy közös pontja van, a görbe *érintőjének* nevezzük, s a közös pontot *érintési pontnak* mondjuk. Ez az elnevezés 44.4 szerint összhangban van a kúpszeleteknél használt elnevezésekkel, s még nem tudjuk, hogy takar-e újat.

**Tétel.** *Közösleges másodrendű görbe érintőjének pólusa az érintési pont, a görbe pontjának polárisa pedig az az egyetlen egyenes, amelyik a görbét ebben a pontban érinti.*

Itt természetesen nem támaszkodhatunk arra, hogy a kúpszelet pontjában egyetlenegy érintő vonható, hiszen nem tudjuk, hogy a tárgyalás csak a kúpszeletekre vonatkozik-e. Bebizonyítjuk viszont, hogy a másodrendű görbe bármely pontjában egyetlenegy érintő vonható, tehát újól az is, amit a kúpszeletekre vonatkozólag éppen az imént idéztünk.

*Bizonyítás.* a) Érintse a  $t$  egyenes a másodrendű görbét a  $T$  pontban, legyen továbbá  $A$  a  $t$  egyenes egy  $T$ -től különböző pontja. A  $t$  egyenesen van  $A$ -hoz konjugált pont, hiszen  $A$  polárisának és  $t$ -nek közös pontja ilyen. Minthogy azonban  $t$  pontjai közül csak  $T$  tartozik a görbéhez, 46.3 utolsó tétele szerint  $t$  pontjai közül csak  $T$  lehet  $A$ -hoz konjugált. Eszerint  $T$  konjugált  $A$ -hoz és önmagához, s ezért  $T$  polárisa a  $TA$  egyenes, azaz  $t$ .

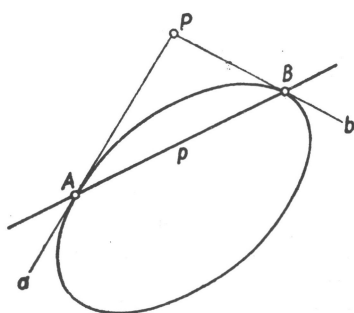
*b)* Legyen  $T$  a közös másodrendű görbe pontja, és  $t$  a  $T$  pont polárisa. A  $t$  egyenes tartalmazza a  $T$  pontot, mert  $T$  önmagához konjugált. A  $t$  egyenes nem tartalmazhatja a görbének  $T$ -től különböző  $A$  pontját, mert akkor a görbe 46.3 harmadik tétele szerint tartalmazná a  $TA$  egyenest, és 46.4 utolsó tétele szerint elfajuló volna. A  $t$  egyenes érinti tehát a görbét a  $T$  pontban.

Nem lehet a görbének a  $T$  pontban  $t$ -től különböző érintője, mert a) szerint  $T$  annak is pólusa volna, márpedig a  $T$  pontnak csak egyetlen polárisa van. —

**Tétel.** *Ha egy pont polárisának két közös pontja van a közös másodrendű görbével, akkor ezek a pontból a görbéhez vont két érintő érintési pontjai.*

A tétel azt is kimondja, hogy az ilyen pontból a görbéhez két érintő vonható.

*Bizonyítás.* Messe a  $P$  pont polárisa a görbét az  $A, B$  pontokban (467. ábra). A  $P$  pont az előző tétel szerint nincs a görbén, tehát az  $A, B$  pontokkal nem azonos. A  $PA, PB$  egyenesek az  $A, B$  pontok polárisai, mert ezek önmagukhoz és  $P$ -hez is konjugáltak. Ez a két egyenes tehát az előző tétel szerint valóban érinti a görbét az  $A$  és  $B$  pontban.



467

Ha a  $P$  ponton áthaladó egyenes érinti a görbét akkor ez az előző tétel szerint az érintési pontjának a polárisa. Az érintési pont eszerint  $P$ -hez is konjugált, tehát hozzátartozik  $P$  polárisához. Ezért az érintési pont csak az  $A, B$  pontok valamelyike lehet, és  $P$ -ből a görbéhez a  $PA, PB$  érintőkön kívül más érintő nem vonható. —

Az utolsó két tétel alapján kimondhatjuk, hogy egy közös másodrendű görbe esetében valamely ponton át a görbének annyi érintője halad, ahány közös pontja van a polárisának a görbével. Ez a megállapítás módot ad arra, hogy a kúpszeleteknél bevezetett elnevezésekkel összhangban a közös másodrendű görbéknél is beszélhessünk *belső* és *külső* pontokról.

**Tétel.** *Egy pont polárisa tartalmazza a ponton áthaladó egyenes és a közös másodrendű görbe két közös pontjában vont érintők metszéspontját.*

A tétel csak azokról az egyenesekről szól, amelyek két pontban metszik a görbét.

*Bizonyítás.* Ha a  $P$  pontból vont szelő a görbét a  $C$  és  $D$  pontban metszi, és  $A, B$  az e pontokban vont érintők közös pontja (468. ábra), akkor a  $CD$  egyenes az előző tétel szerint az  $M$  pont polárisa. Ezért  $M$  konjugált a  $P$  ponthoz, és rajta van  $P$  polárisán. —

Ha külső  $P$  pontból indulunk ki, akkor három olyan módszert említhetünk, amely  $P$  polárisának egyes pontjaihoz vezet: most bizonyítottuk, hogy az  $M$  metszéspont  $P$  polárisán van, s emellett a  $P$ -ből vont érintők érintési pontjairól, valamint a  $P$  ponton áthaladó szelőkön  $P$ -nek a metszéspontokra vonatkozó harmonikus társairól is tudjuk, hogy  $P$  polárisán helyezkednek el.

Ha belső  $P$  pontról van szó, akkor csak az utoljára említett módszert használhatjuk.

**A1** A második tétel módot ad arra, hogy egy adott egyenletű közös másodrendű görbe adott koordinátájú pontjában vont érintőjének egyenletét felírjuk, hiszen ehhez csak a pont polárisának az egyenletét kell felírunk.

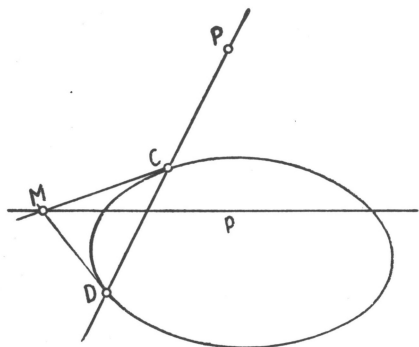


Ha ezt a kanonikus egyenlettel adott kúpszeletekre alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a kanonikus egyenlettel megadott ellipszis, parabola és hiperbola adott  $(x_0, y_0)$  pontjában vont érintőjének egyenlete rendre

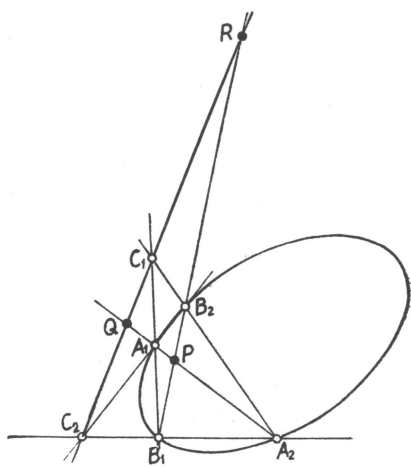
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \quad y_0 y = p(x + x_0), \quad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Az ellipsziszre vonatkozó egyenlet a kör esetét is magában foglalja.

A hiperbola aszimptotáinak egyenletét is könnyen felírhatjuk, ha a hiperbola ideális pontjainak homogén koordinátáit ismerjük, hiszen az aszimptoták az ideális pontok polárisai.



468



469

**A2** Adott pont polárisának a megszerkesztéséről szólunk. Arra az esetre gondolunk, amikor a közösleges másodrendű görbe kúpszelet (ti. még nem tudjuk, hogy ez az eset minden lehetőséget felölel-e).

Ennek a szakasznak az anyaga sok lehetőséget ad a poláris egyenes pontjainak, s magának a polárisnak megszerkesztésére. Hangsúlyozzuk, hogy csak külső  $P$  pont esetében használhatjuk azt a módszert, hogy  $P$ -ből érintőket szerkesztünk, és az érintési pontokat összekötjük.

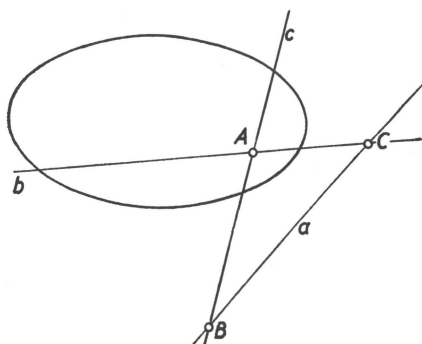
Bármely  $P$  pont polárisát megszerkeszthetjük, ha két a  $P$  ponton áthaladó Szelőnek a görbével alkotott  $A_1, A_2$  és  $B_1, B_2$  metszéspontjait ismerjük (469. ábra).. Az  $A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2$  egyenesek által alkotott teljes négyoldalnak  $P$  átlóspontja, a  $P$  ponton át nem haladó átlója pedig a  $P$  pont polárisa. Ez abból következik, hogy ez az átló két a  $P$  ponthoz konjugált pontot tartalmaz, ti.  $P$ -nek az  $A_1, A_2$  és  $B_1, B_2$  pontokra vonatkozó harmonikus társait.

**B1** Az olyan leképezést, amely a sík minden pontjához a sík egy egyenesét és minden egyeneséhez egy-egy pontját rendeli, mégpedig olyan módon, hogy illeszkedő pontokhoz és egyenesekhez illeszkedő egyeneseket és pontokat rendel, *korrelációnak* (reciprocitás) nevezzük.

Ilyen korrelációt ad egy közöséges másodrendű görbe esetében a pólusok és polárisok egymáshoz rendelése. Ezt a korrelációt *polaritásnak* (poláris korreláció, pólárreciprocitás) nevezzük. Ennek a korrelációnak e szakasz második tétele szerint megvan az a tulajdonsága is, hogy ha a  $P$  ponthoz a  $p$  egyenest rendeli, akkor a  $P$  pontot a  $p$  egyeneshez rendeli.

A polaritás ismerete lehetővé teszi, hogy egy egyenes pólusát mint két pontja polárisának metszéspontját, s hogy egy pont polárisát mint két a ponton áthaladó egyenes pólusának összekötő egyenesét határozzuk meg.

A polaritás említett tulajdonságából az is következik, hogy két a görbéhez nem tartozó, konjugált pont és polárisuk metszéspontja olyan háromszöget ad meg, amelynek csúcsai a szemközti oldalegyenesek pólusai és oldalegyenesei a szemközti csúcsok polárisai. Az ilyen háromszöget *poláris háromszögnek* nevezzük (470. ábra).



470

**B2** a polaritásról elmondhatjuk, hogy egy pontokból és egyenesekből álló alakzathoz duális alakzatot rendel, mert ez a leképezés az illeszkedést megtartja, a pontok és egyenesek szerepét pedig felcseréli. Ha az  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  egyenletű üres alakzat (de közöséges másodrendű görbe) polaritását tekintjük, azt is megállapíthatjuk, hogy az  $[x_1, x_2, x_3]$  pontot és az  $[x_1, x_2, x_3]$  egyenest rendeli egymáshoz.

Ilyen módon a dualitás elvét új megvilágításban láthatjuk. Egy alakzatra kimondott tétel duális megfelelője és annak helyessége leolvasható ugyanis a polaritás által hozzárendelt alakzatból. Ha a tételben homogén pontkoordinátákat és vonalkoordinátákat is szerepeltettünk, akkor dualizálás céljából a mondott üres alakzat polaritását használhatjuk.

**B3** A másodrendű görbéket másodrendű síkbeli pontalakzatoknak is mondhatjuk. Duális megfelelőik a *másodosztályú* síkbeli vonalalakzatok. Azok az  $[u_1, u_2, u_3]$  egyenesek alkotnak ilyen alakzatot, amelyeknek koordinátái egy

$$\sum b_{ik} u_i u_k = 0$$

egyenletet elégítenek ki. Ha egy egyenesnek valamilyen vonalkoordináta-hármasa kielégíti ezt az egyenletet, akkor nyilván mindegyik kielégíti.

Egy közöséges másodrendű görbe érintői másodosztályú vonalalakzatot alkotnak. Ennek bizonyítása végett e szakasz első tétele bizonyításában felírt egyenletrendszer megoldását

$$x_1 = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3,$$

$$x_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3,$$

$$x_3 = b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3.$$

alakban írjuk. Megjegyezzük, hogy az  $A$  determináns szimmetriája miatt  $b_{ik} = b_{ki}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), továbbá a most felírt egyenletrendszer  $B$  determinánsa nem 0, mert mindig van megoldása, akárhogyan választjuk meg az  $x_1, x_2, x_3$  értékeket, ti. a 471. oldalon felírt egyenletrendszer adja a megoldását. Ha a most felírt egyenleteket az említett egyenletrendszer megfelelő egyenleteivel megszorozzuk, és a kapott egyenleteket összegezzük, akkor

$$\sum \alpha_k x_i x_k = \sum b_{ik} u_i u_k$$

lesz az eredmény. Ebből következik, hogy a  $\sum b_{ik} u_i u_k = 0$  egyenletet azok és csak azok az egyenesek elégítik ki, amelyeknek a pólusai a  $\sum \alpha_k x_i x_k = 0$  görbéhez tartoznak, vagyis amelyek érintői ennek a másodrendű görbének. Ezek az érintők tehát valóban másodosztályú vonalalakzatot alkotnak.

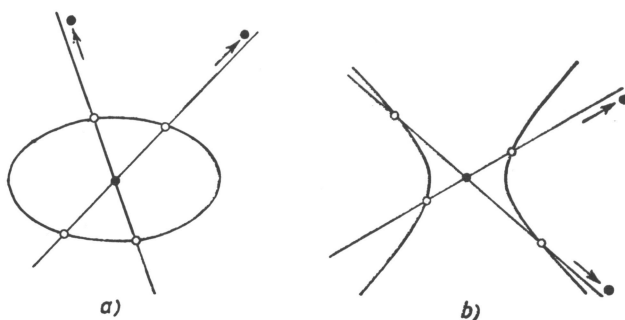
Ebből a bizonyításból mindjárt azt is kiolvashatjuk, hogy minden olyan másodosztályú vonalalakzat, amelynek szimmetrikus

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

determinánsa nem 0, egy közösleges másodrendű görbe érintőiből áll. Ezeket a közösleges másodosztályú vonalalakzatokat joggal nevezhetjük majd *vonalkúpszeleteknek*, ha már tudjuk, hogy minden közösleges másodrendű görbe kúpszelet (lásd 47.5).

A közösleges másodosztályú vonalalakzatokon kívül vannak elfajuló másodosztályú vonalalakzatok is, ti. azok, amelyeknél  $B = 0$ . Ezekről az elfajuló másodosztályú vonalalakzatokról (elfajuló vonalkúpszeletekről) 46.4 harmadik tételének duális megfelelőjeként kimondhatjuk, hogy vagy egyetlen egyenesből, vagy egy sugársorból, vagy pedig két sugársorból állnak.

**46.6** Az ellipszisnél és a hiperbolánál a centrum polárisa a sík ideális egyenese. Ez abból következik, hogy a centrumon áthaladó szelő a görbét a centrumra vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő pontokban metszi, és a centrumnak az ilyen pontpárookra vonatkozó harmonikustársa a szelő ideális pontja (471. ábra).



471

Ha a sík ideális egyenesének van pólusa, és ez közösleges pont, akkor a másodrendű görbe *centrumának* (középpont) mondjuk. Ez a definíció összhangban van az imént mondottakkal. A másodrendű görbe *centrális* (középpontos), ha van centruma. Hangsúlyozzuk, hogy itt az elfajuló másodrendű görbékről is beszéltünk.

**Tétel.** *A másodrendű görbe akkor és csak akkor centrális, ha*

$$A_{33} \neq 0.$$

Tételünk szerint az elliptikus és a hiperbolikus görbék centrálisak, a parabolikusak pedig nem.

*Bizonyítás.* Az  $[x_1, x_2, x_3]$  pont akkor konjugált az  $[y_1, y_2, 0]$  ideális pontok mindegyikéhez, ha

$$(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)y_1 + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3)y_2 = 0$$

minden  $y_1, y_2$  értékpárra teljesül, ha tehát

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = 0,$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = 0.$$

Ebből az egyenletrendszerből

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_{31} : A_{32} : A_{33}$$

adódik, ahol  $A_{31}, A_{32}, A_{33}$  az  $A$  determináns megfelelő aldeterminánsait jelölik. Az egyenletrendszer akkor határozza meg egyértelműen az  $x_1, x_2, x_3$  értékek arányát, ha a három aldetermináns között 0-tól különböző is van.

Az ideális egyenesnek ezek szerint akkor van pólusa, ha az  $A_{31}, A_{32}, A_{33}$  aldeterminánsoknak nem mindegyike 0, és ekkor az  $[A_{31}, A_{32}, A_{33}]$  pont a pólus. Ez a pólus akkor közös pont, ha harmadik homogén koordinátája  $A_{33} \neq 0$ . —

Bizonyításunk a centrum meghatározására is lehetőséget ad. Ha közös pont koordinátákat használunk, akkor az

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}x + \alpha_{13}x = 0,$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}x + \alpha_{23}x = 0.$$

egyenletrendszer szolgáltatja a centrum koordinátáit.

**Tétel.** Egy centrális másodrendű görbe centruma akkor és csak akkor azonos a koordináta-rendszer kezdőpontjával, ha a görbe egyenletében lineáris tag nem szerepel.

*Bizonyítás.* A  $(0, 0)$  pont akkor és csak akkor centrum, ha koordinátái kielégítik a centrum koordinátáit szolgáltató, imént felírt egyenletrendszert, azaz akkor, ha  $a_{13} = 0$  és  $a_{23} = 0$ . —

Ha a másodrendű görbe centruma a kezdőpont, akkor tételünk szerint az egyenlete

$$\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{13}y^2 + \alpha_{33} = 0$$

alakú. Azt is beláttuk, hogy minden centrális görbe egyenlete a koordináta-rendszer eltolásával ilyen alakra hozható. A felírt egyenletből kiolvasható, hogy a centrális másodrendű görbék a centrumukra vonatkozólag szimmetrikusak, hiszen az  $(x, y)$  ponttal együtt a  $(-x, -y)$  pont is kielégíti az egyenletet.

Az elfajuló centrális görbék centruma a szinguláris pontjukkal azonos. Ez következik abból, hogy a szinguláris pont az ideális pontokhoz is konjugált.

**B1** Beláttuk, hogy a másodrendű görbe centruma egyben szimmetriacentrum is. Nem definiálhattuk azonban a centrumot szimmetriacentrumként, hiszen a centrális másodrendű görbe üres alakzat is lehet.

Ha csak az a cél, hogy a közös ponttal is rendelkező másodrendű görbék szimmetriacentrumához eljussunk, akkor a következőképpen járhatunk el: A kezdőpont akkor szimmetriacentrum, ha az  $(x, y)$  ponttal együtt  $(-x, -y)$  is a görbén van. Ez akkor igaz, ha a görbe egyenletében  $a_{13} = a_{23} = 0$  (vö. 38.2 B3). Ha a kezdőpontot az  $(a, b)$  pontba toljuk, akkor  $a_{13}$  és  $a_{23}$  helyébe a koordinátatranszformáció révén az

$$\alpha_{11}a + \alpha_{12}b + \alpha_{13}, \quad \alpha_{21}a + \alpha_{22}b + \alpha_{23}$$

értékek lépnek. Az  $(a, b)$  pont tehát akkor szimmetriacentrum, ha ez a két érték 0, ha tehát a centrum meghatározására levezetett egyenletrendszer teljesül.

**B2** Bármely másodrendű görbéről van is szó, beszélhetünk a görbe *centrumalakzatáról*. Ez azokból a pontokból áll, amelyeknek mindegyike mindegyik ideális ponthoz konjugált. A centrális görbék centrumalakzata a centrum. Első tételünk bizonyításából kiolvashatjuk, hogy a centrum meghatározására szolgáló homogén koordinátás egyenletrendszernek a megoldásai minden esetben a centrumalakzat pontjait adják meg. Ebből B1 alapján következik, hogy ha a másodrendű görbének van közös pontja, akkor minden szimmetriacentruma a centrumalakzathoz tartozik.

Közös pontsúlyos parabolikus görbe centrumalakzata a görbe ideális pontja, hiszen 46.5 második tétele szerint ez a pont az ideális egyenes pólusa.

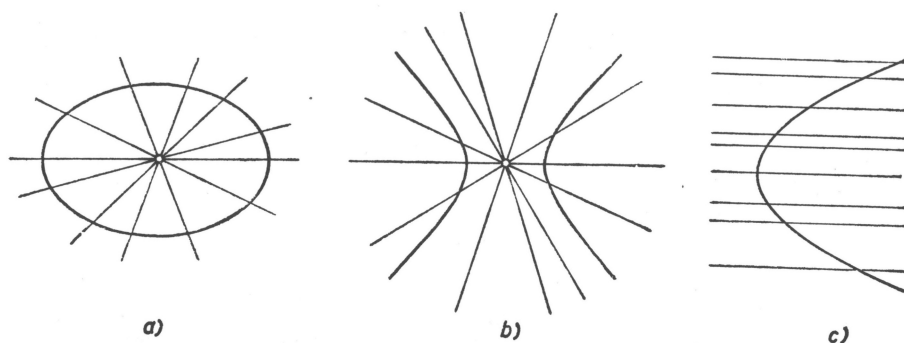
Elfajuló parabolikus görbe centrumalakzata egyenes. Legyen ugyanis  $S$  az elfajuló parabolikus görbe ideális pontja. Tudjuk, hogy  $S$  szinguláris pont, tehát bármely nem szinguláris pont polárisa áthalad rajta. Legyen  $c$  egy  $S$ -től különböző ideális  $A$  pont polárisa. Azt állítjuk, hogy  $c$  a centrumalakzat, vagyis azt, hogy  $c$  közös pontjai is konjugáltak minden ideális ponthoz. Ha ugyanis  $c$  egy közös pontja nem szinguláris, akkor a polárisa áthalad az  $S, A$  pontokon, és ezért az ideális egyenessel valóban azonos.

A centrumalakzat minden közös pontja szimmetriacentrum, mert ha az  $A_1, A_2$  pontok  $P$ -re szimmetrikusak, akkor harmonikusan választják el a  $P$  pontot az  $A_1, A_2$  egyenes ideális pontjától, ez utóbbiak pedig konjugáltak, hiszen  $P$  a centrumalakzathoz tartozik. Ha tehát  $A_1$  és  $A_2$  valamelyike a görbén van, akkor 46.3 utolsó bekezdése szerint valóban a másikkal is a görbéhez kell tartoznia.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy ha az elfajuló parabolikus görbe egyetlen egyenes, akkor azonos a centrumalakzatával; ha a görbe két párhuzamos egyenesből áll, akkor középpárhuzamosuk a centrumalakzat; ha pedig a görbe egyetlen ideális pontból áll, akkor a centrumalakzat olyan egyenes, amelynek ez az ideális pontja.

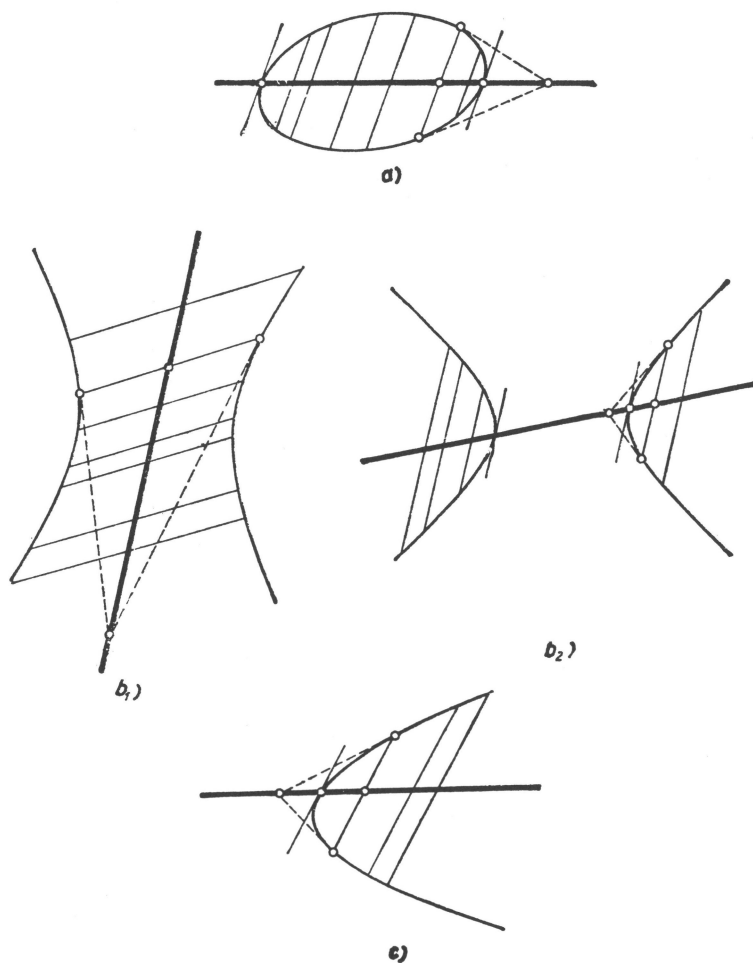
**46.7** A másodrendű görbéknél azokat a közös egyeneseket, amelyek ideális pont polárisai, *átmérőnek* (átmérőegyenes) nevezzük. Azt mondjuk, hogy az átmérő konjugált ezt az ideális pontot (a pólust) meghatározó irányhoz.

A pólus és a poláris kapcsolatából következik, hogy az átmérők az ideális egyenes pólusán áthaladó egyenesek sugársorának közös egyenesei. Centrális görbénél ezért az átmérők a centrumon áthaladó egyenesekkel, parabolikus görbénél pedig a görbe ideális pontján áthaladó közös egyenesekkel azonosak (472. ábra). A parabola átmérőinek eszerint a tengellyel párhuzamos egyeneseket mondjuk.



472

**Tétel.** Közös másodrendű görbe párhuzamos húrjainak felezőpontjai, az ezekkel párhuzamos érintők érintési pontjai, valamint a párhuzamos húrok végpontjaiban vont érintők metszéspontjai egy egyenesen, a húrok irányához konjugált átmérőn vannak (473. ábra).



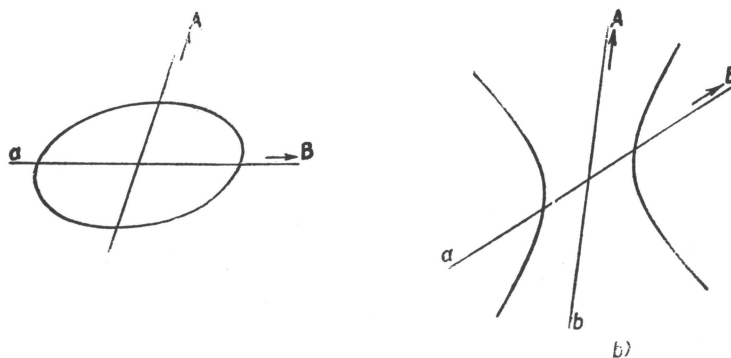
473

Tételünk a körről szóló, 15.3-ban kimondott tételt általánosítja. Bizonyítás. Egy húr felezőpontjának a húr végpontjaira vonatkozó harmonikus társa a húr egyenesének ideális pontja. Ez az ideális pont a húr felezőpontjához konjugált, tehát a polárisa közöséges egyenes, azaz átmérő 46.5 harmadik és negyedik tétele szerint ez az átmérő a tételben említett érintési pontokat és metszéspontokat is tartalmazza. —

Megjegyezzük, hogy a hiperbola aszimptotái is átmérők, ezekhez azonban a most bizonyított tétel révén nem juthatunk el.

**Tétel.** Ha egy közöséges másodrendű görbe centrális, akkor minden átmérőjéhez tartozik egy olyan átmérő, hogy ez a két átmérő egymás irányához konjugált.

Két ilyen átmérőt egymáshoz *konjugált átmérőnek* mondunk, és irányaikról is mondjuk, hogy *konjugált irányok* (474. ábra). A tétel csak centrális görbékről szól, mert közöséges parabolikus görbe esetén az átmérő ideális pontjának a polárisa az ideális egyenes, tehát az átmérő irányához konjugált átmérőről nem lehet szó.



474

*Bizonyítás.* Ha az  $A$  ideális pont polárisa az  $a$  átmérő, és ennek ideális pontja  $B$ , akkor  $A$  és  $B$  konjugált pontok. Ezért  $B$  polárisa, a  $b$  átmérő, áthalad az  $A$  ponton. —

A kör két átmérője akkor konjugált, ha merőlegesek egymásra. Az ellipszis konjugált átmérőszakaszaival már 43.3-ban megismerkedtünk. Ezek a konjugált átmérőegyeneseznek az ellipszistartományhoz tartozó szakaszai, hiszen az egymás végpontjaiban vont érintőkkel párhuzamosak.

A hiperbola aszimptotája önmagához konjugált átmérő, mert ideális pontjának polárisa.

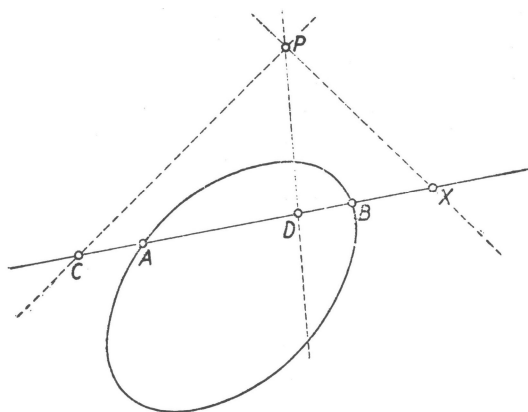
**B** Az átmérő szó használatával kapcsolatban itt is megemlíthetjük, hogy 15.1 B3 szóhasználatához itt sem igazodunk (vö. 43.3 B).

**46.8** Megmutatjuk, hogy a közösleges másodrendű görbék minőségét hogyan lehet a görbe egy ívének ismeretében eldönteni. Tárgyalásunkat egy tétellel készítjük elő.

**Tétel.** Ha  $P$  polárisa a közösleges másodrendű görbét  $A, B$  pontokban metszi, és  $e$  pontok a poláris  $C, D$  pontjait elválasztják, akkor a  $PC, PD$  egyenesek egyike két pontban metszi a görbét, a másikkal pedig nincs közös pontja a görbével.

A tétel kiegészíti azt az ismeretünket, hogy  $PA$  és  $PB$  a görbe érintői. Ez a tétel tehát a másodrendű görbékre általánosítja 42.3 utolsó tételét olyan módon, hogy a közösleges és ideális térelemek között nem tesz különbséget.

*Bizonyítás.* Legyen  $X[\mathbf{x}] = [x_1, x_2, x_3]$  az  $A[\mathbf{a}] = [a_1, a_2, a_3]$  és  $B[\mathbf{b}] = [b_1, b_2, b_3]$  pontok egyenesének egy az  $A, B$  pontoktól különböző pontja (475. ábra). Az  $X$  pontot a  $P[\mathbf{p}] = [p_1, p_2, p_3]$  ponttal összekötő egyenesnek a görbével alkotott  $[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{x}]$  közös pontjaira 46.3 szerint



475

$$\lambda^2 \sum a_{ik} p_i p_k + \mu^2 \sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

hiszen  $P$  és  $X$  konjugált. Azt kell megvizsgálnunk, hogy ennek a homogén másodfokú egyenletnek mikor van 0, és mikor van 2 megoldása. Minthogy  $\lambda^2$  együtthatója 0-tól különböző állandó, a megoldások számát 46.2 A1 szerint  $\sum a_{ik} x_i x_k$  előjele dönti el. Ez az érték nem lehet 0, hiszen  $X$  nincs a görbén.

Ha  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$  akkor

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 2\alpha\beta \sum a_{ik} a_i b_k,$$

hiszen az  $A, B$  pontok a görbén vannak. Megjegyezzük, hogy  $\alpha$  és  $\beta$  nem lehet 0, mert  $X$  az  $A, B$  pontok egyikével sem azonos, s hogy a jobb oldali összeg 0-tól különböző állandó, mert az  $A, B$  pontok nem lehetnek konjugáltak. Ezért az  $\alpha\beta$  szorzat előjele dönti el a bal oldal előjelét, tehát azt is, hogy a  $PX$  egyenes két pontban metszi-e a görbét, vagy pedig nincs vele közös pontja.

Ezek szerint a felvetett kérdésre adandó válasz attól függ, hogy az  $\alpha\beta$  szorzattal megegyező előjelű  $\frac{\beta}{\alpha}$  hányados milyen előjelű. Ezt azonban 45.3 szerint valóban az dönti el, hogy  $X$  az  $AB$  egyenesnek  $A$  és  $B$  által két csoportra szétválasztott pontjai közül melyik csoporthoz tartozik. —

**Tétel.** *Ha a közösleges másodrendű görbe  $AB$  húrjának felezőpontja  $H$ , az  $A, B$  pontokban vont érintők metszéspontja a közösleges  $E$  pont és az  $EH$  szakasz a görbét  $C$  pontban metszi, akkor a görbe aszerint elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus, amint  $C$  az  $E, H$  pontok közül  $E$ -től vagy  $H$ -től van messzebb, vagy pedig távolságukat jelezi.*

*Bizonyítás.* Jelölje  $U$  az  $AB$  egyenes és  $V$  az  $EH$  egyenes ideális pontját (476. ábra). Az  $E, H$  pontok 46.7 első tétele szerint  $U$  polárisán vannak, az  $EH$  egyenes tehát  $U$  polárisa. Az  $AB$  egyenes 46.5 szerint  $E$  polárisa, s ezért  $E$  és  $H$  konjugált pontok. Ebből és 46.3 utolsó bekezdése szerint következik, hogy  $C$ -nek az  $E, H$  pontokra vonatkozó  $D$  harmonikus társa ugyancsak a görbén van.

Ha  $C$  az  $E, H$  pontok közül  $E$ -től van messzebb, akkor a harmonikus viszony definíciója szerint  $D$  is  $E$ -től van messzebb, s ezért a  $CD$  szakasz tartalmazza a  $H$  pontot, a  $C, D$  pontok tehát elválasztják a  $H, V$  pontokat. Abból, hogy  $UH$  metszi a görbét, az előző tétel szerint következik, hogy az  $UV$  egyenesnek, azaz az ideális egyenesnek nincs közös pontja a görbével. A görbe tehát ebben az esetben elliptikus.

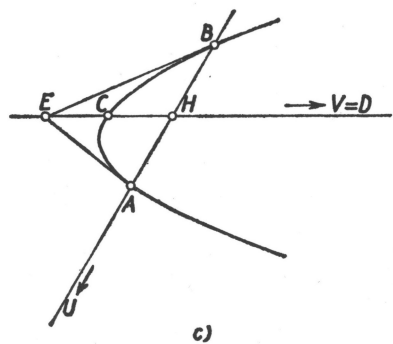
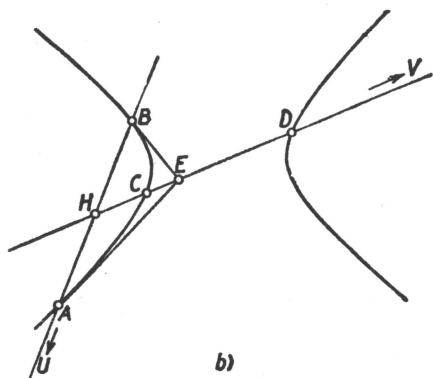
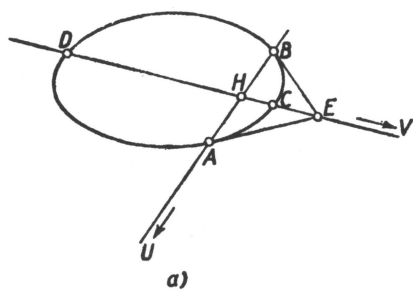
Ha  $C$  az  $E, H$  pontok közül a  $H$  ponttól van messzebb, akkor hasonlóan okoskodhatunk, de most  $D$  is  $H$ -től van messzebb, ezért a  $CD$  szakasz az  $E$  pontot tartalmazza, és a  $C, D$  pontok nem választják el a  $H, V$  pontokat. Ebből az következik, hogy az  $UV$  ideális egyenes is metszi a görbét, azaz a görbe hiperbolikus.

Ha  $C$  felezi az  $EH$  szakaszt, akkor  $D$  ideális pont. Ezért az ideális egyenes az  $UD$  egyenessel azonos, ez pedig érinti a görbét, a görbe tehát parabolikus. —

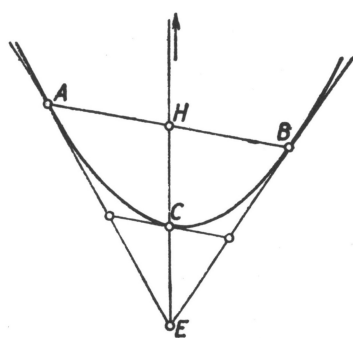
Tételünknek a parabolára vonatkozó állítását kiegészítjük azzal, hogy az  $EH$  átmérő a parabola tengelyével párhuzamos, s hogy a  $C$  pontban vont érintő 46.7 első tétele szerint párhuzamos az  $AB$  húrral, és ezért ez az érintő az  $EA, EB$  szakaszokat felezi (477. ábra).

**A1** Utolsó megjegyzésünk módot ad a parabola pontjainak és az ezekben vont érintőknek, tehát a parabolának a megszerkesztésére, ha a parabola két pontja és az azokban vont érintők adva vannak. Ha ismeretes a parabola tengelyének iránya, akkor elég, ha csak a két pont egyikében van adva az érintő, mert a másikban vont érintőt már megszerkeszthetjük (478. ábra). A szerkesztés a 477. ábra ismételt rekonstrukcióját kívánja meg.

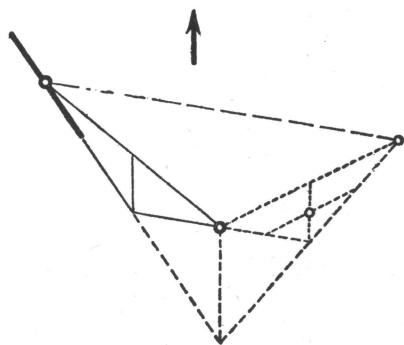




476

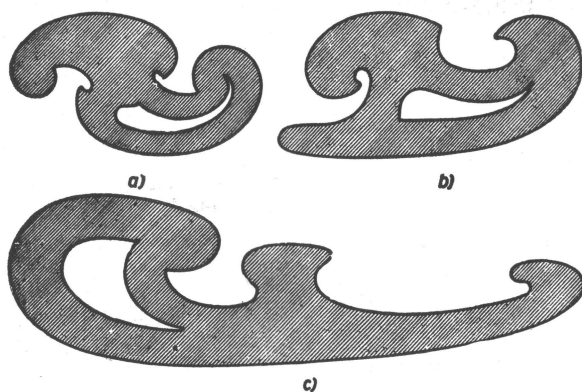


477



478

**A2** Utolsó tételünk rámutat arra, hogy a kúpszeletek minősége még kis íveknél is *minőségi* különbséget jelent. Ez a különbség a *görbevonalzók* használatakor is tükröződik. Készítenek vonalzókat ellipszisek, hiperbolák és parabolák kihúzásához (479. ábra). Ezek határvonalai (ha helyesen készülnek) ilyen görbék íveiből vannak összerakva. Tételünk alapján érthető, hogy pl. ellipszis kihúzása könnyebben és pontosabban történhetik az ellipszisvonalzóval, mint a másik kettővel. Az is belátható, hogy ha csak egyet akarunk használni a három vonalzófajta közül, s ha nemcsak kúpszeletek, hanem különféle görbék kihúzása a cél, akkor a három vonalzó közül legjobban a parabolavonalzó felel meg. A három vonalzó közül valóban a parabolavonalzó a legelterjedtebb.



479

**46.9** Ennek a paragrafusnak a teljes anyaga lényegében változatlanul helyes akkor is, ha ferdeszögű koordináta-rendszert használunk.

Ebben az esetben is ugyanazok az alakzatok a másodrendű görbék. A kétféle koordináta-rendszer kapcsolatát ugyanis lineáris transzformációs egyenletek írják le (vö. 34.6 B2), és ezek az egyenlet foksámát nem változtatják meg (vö. 38.2 B2).

Homogén pontkoordinátákat is bevezethetünk a ferdeszögű (kontravariáns) koordinátákhoz, mégpedig ugyanúgy, ahogyan 44.3-ban tettük, tehát a térbeli koordináta-rendszer  $x_1, x_2$  tengelyeit a síkbeliekkel párhuzamosan, az  $x_3$ -tengelyt pedig síkjukra merőlegesen vehetjük fel. Ezzel elérjük, hogy 44.3(\*) változatlanul helyes maradjon.

Homogén vonalkoordinátákul most 44.5-től valamelyest eltérően a vetítősík normálvektorának kovariáns koordinátáit kell választanunk, ha azt akarjuk, hogy 44.5 tételének koordinátás alakja formailag változatlanul legyen helyes. Ezzel azt is elérjük, hogy mindazok az okoskodásaink, amelyek a homogén pontkoordináták és vonalkoordináták kapcsolatára építettek, a ferdeszögű esetre is átvihetők.

Ez a pólus és poláris tárgyalására is vonatkozik. Ha tehát ferdeszögű koordinátákat használunk, akkor a polarításra épülő tárgyalásunknak teljes egésze átvihető, sőt formulái is változatlanul helyesek.

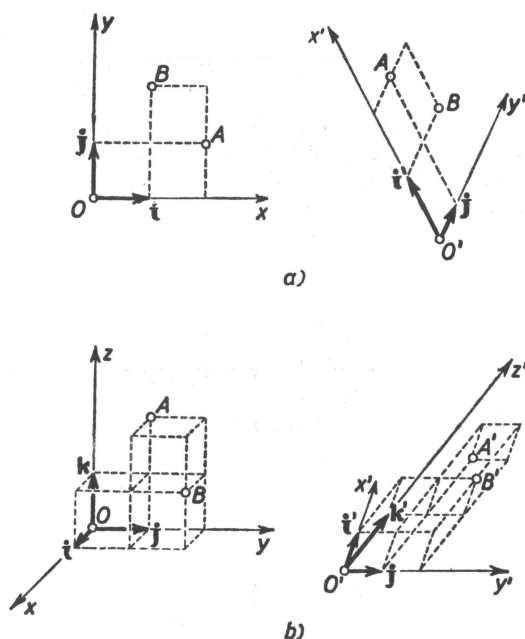
**B1** Tekintsünk két olyan koordináta-rendszert, amelyek ugyanazokhoz a számcsoporthoz rendelnek pontot, mégpedig két számcsoporthoz ugyanakkor rendeli az egyik koordináta-rendszer ugyanazt a pontot, amikor a másik. Megtehetjük tehát, hogy két pontot akkor rendelünk egymáshoz, ha az elsőhöz az első koordináta-rendszerben ugyanazok a koordináták tartoznak, mint a másodikhoz a második koordináta-rendszerben. Ilyen módon a koordinátatranszformáció egy ponttranszformációhoz vezetett. Például a koordináta-rendszer eltolásából és elforgatásából éppen az eltolás és az elforgatás ponttranszformációjához jutunk.

Ha két (síkbeli vagy térbeli) derékszögű vagy ferdeszögű koordináta-rendszerből indulunk ki, a kapott ponttranszformációt (közönséges) *affinitásnak* nevezzük. Ez a transzformáció tehát akkor rendeli az  $A$  ponthoz az  $A'$  pontot, ha  $A$ -nak az első koordináta-rendszerben ugyanazok a Descartes-féle koordinátái, mint  $A'$ -nek a második koordináta-rendszerben (480. ábra). Azt mondjuk, hogy  $A'$  az  $A$  pont *affin képe*. Egy alakzat affin képe a pontjainak az affin képéből áll.

A 43.1-ben megismert merőleges és ferdeszögű tengelyes affinitás a most megismert transzformáció speciális esete. Felöleli azonban az affinitás az elmozgatást, sőt minden egybevágóságot és hasonlóságot is.

A definícióból nyilvánvaló, hogy az affinitás el nem fajuló transzformáció, hogy az inverze is affinitás, s hogy két affinitás egymásutánja újból affinitást eredményez. Az affinitások tehát csoportot alkotnak.

A geometriának azt az ágát, amely az alakzatoknak affin transzformációkor meg nem változó tulajdonságaival foglalkozik (vö. 45.2 B4), *affin geometriának* nevezzük. Ez a geometria a metrikus geometriánál szűkebb, hiszen nem minden affinitás egybevágóság, viszont a projektív geometriánál bővebb, mert a kettősviszonyt minden affinitás megtartja.



480

Nyilvánvaló az is, hogy az affinitás egyeneshez egyenest rendel, mégpedig párhuzamos egyenesekhez párhuzamos egyeneseket. Ezért az affinitást az ideális térelemekre is kiterjeszthetjük. Síkbeli affinitásnál az ideális egyenes, térbelinél az ideális sík önmagának affin képe.

**B2** Szakaszunk megmutatta, hogy a most lezárt paragrafus az affin geometriához tartozik. Ennek a kijelentésnek néhány következményére hívjuk fel a figyelmet.

Bármely másodrendű görbe affinképe ismét másodrendű görbe, mégpedig ugyanolyan minőségű, mint az eredeti volt, továbbá aszerint közönséges vagy elfajuló, hogy az eredeti milyen volt. Megjegyezzük,

hogy az affin geometriában nem tehetünk különbséget kör és ellipszis között. 43.2 első tétele a most elért eredmény speciális esetévé válik, ha majd belátjuk, hogy a körön és ellipszisen kívül nincs más közösleges elliptikus másodrendű görbe.

Kimondhatjuk azt is, hogy az affinitás pólushoz és poláriehez ugyanilyen kapcsolatban levő pontot és egyenest rendel, hogy továbbá a centrum affín képe a görbe affín képének a centruma, hogy végül egy irányhoz és hozzá konjugált átmérőhöz, valamint egymáshoz konjugált átmérőkhöz az affinitás ugyanilyen kapcsolatban levő irányt és egyenest, illetőleg egyeneseket rendel.

**B3** Az affinitás definíciójából közvetlenül következik, hogy párhuzamos vektorokhoz párhuzamos vektorokat rendel, mégpedig a párhuzamos vektorok arányát sem változtatja meg. Ebből következik, hogy az affinitás egyenestartó, sőt félegyenestartó, hogy továbbá megtartja az egyszerű viszonyt, tehát a kettős viszonyt is. Ezekre a nyilvánvaló tényekre részben már hivatkoztunk is.

Minthogy az affinitás el nem fajuló, félegyenestartó leképezés, rendelkezik az ilyen transzformációknak már megállapított tulajdonságaival (vö. 6.1 B4). Bebizonyítjuk azonban azt is, hogy a sík és a tér minden el nem fajuló, félegyenestartó transzformációja affinitás. Lezárul tehát az a lehetőség újabb és újabb transzformációk fellelésére, amelyről 6.1B4 utolsó szavai szóltak. Azt is leszögezhetjük, hogy a már ott definiált transzformációk rendelkeznek mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyeket itt az affinitásról megállapítottunk.

A bizonyítás azon alapszik, hogy az el nem fajuló, félegyenestartó leképezések 30.7 B szerint egyenlő vektorokhoz egyenlő vektorokat rendelnek, és vektor számszorosához a képvektor ugyanannyiszorosát rendelik. Ha tehát az  $O, A$  pontok és az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vektorok képei az  $O', A'$  pontok és az  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  vektorok, akkor az

$$\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

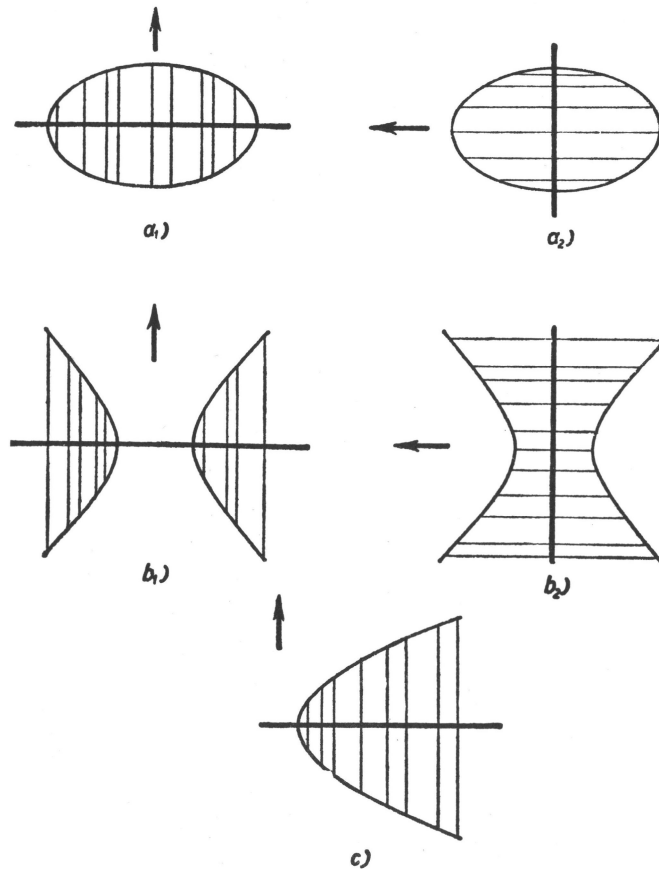
vektorhoz a transzformáció az

$$\overrightarrow{O'A'} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

vektort rendeli. Ez azt jelenti, hogy az  $A'$  pont koordinátái az  $O'$  kezdőpontú,  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  alapvektorú koordináta-rendszerben ugyanazok, mint  $A$  koordinátái az  $O$  kezdőpontú,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  alapvektorú koordináta-rendszerben, hogy tehát valóban affinitásról van szó. Ez a bizonyítás természetesen a síkbeli esetet is felöleli.

## 47. § A másodrendű görbék osztályozása

A másodrendű görbék szimmetriatengelyeit keressük. A tengelykeresés algebrai jellegű problémához vezet, s ennek megoldása teszi majd lehetővé, hogy a másodrendű görbék kanonikus egyenleteihez eljussunk, s hogy így minden másodrendű görbéről eldöntsük, milyen alakú.



481

**47.1** A kúpszeletek tengelyei a rájuk merőleges irányhoz konjugált átmérők, hiszen felezik a rájuk merőleges húrokat (481. ábra). Ezt a tapasztalatot általánosítva akkor mondunk egy egyenest a másodrendű görbe *tengelyének* (főtengely), ha a rá merőleges irányhoz konjugált átmérővel azonos. Tengely tehát csak közösleges egyenes lehet.

**Tétel.** Az  $(x_1, x_2)$  vektor irányához konjugált átmérő akkor és csak akkor tengely, ha van olyan 0-tól különböző  $\lambda$  érték, hogy  $x_1, x_2$  és  $\lambda$  kielégíti az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2.$$

egyenletrendszer.

A megadott feltétel azt is biztosítja, hogy az  $(x_1, x_2)$  vektor irányához valóban tartozik konjugált átmérő.

**Bizonyítás.** Az  $(x_1, x_2)$  vektor iránya által megszabott  $[x_1, x_2, 0]$  ideális pont polárisának vonalkoordinátái

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2$$

feltéve, hogy ezeknek az értékeknek nem mindegyike 0. Ez a poláris akkor közösleges egyenes, ha az első két vonalkoordináta között is van 0-tól különböző. Ebben az esetben az  $(x_1, x_2)$  vektor irányához konjugált átmérőről van szó, és

$$\mathbf{n} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

a konjugált átmérő normálvektora. Ez a konjugált átmérő akkor és csak akkor tengely, ha merőleges az  $(x_1, x_2)$  vektor irányára, ha tehát normálvektora párhuzamos ezzel a vektorral. Ezek szerint az  $(x_1, x_2)$  vektor irányához akkor és csak akkor tartozik olyan konjugált átmérő, amely a másodrendű görbének tengelye, ha  $\mathbf{n}$  nem nullvektor és párhuzamos az  $(x_1, x_2)$  vektorral, ha tehát ebből a vektorból 0-tól különböző  $\lambda$  számmal szorozva keletkezik. A tételben megadott feltétel éppen ezt biztosítja. —

Legyen adva egy szimmetrikus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix, legyen tehát  $a_{12} = a_{21}$ . Ez a mátrix meghatározza az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2.$$

homogén lineáris transzformációt, azaz minden  $\mathbf{x}(x_1, x_2)$  vektorhoz egy  $\mathbf{x}'(x'_1, x'_2)$  vektort rendel. Az  $\mathbf{x}$  vektort a mátrix sajátvektorának nevezzük akkor, ha nem nullvektor, s ha párhuzamos a hozzá rendelt-  
 $\mathbf{x}'$  vektorral. Eszerint  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  akkor sajátvektor, ha

$$\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x},$$

s itt  $\lambda$  tetszőleges valós szám, tehát 0 is lehet. A sajátvektorok mindegyikéhez ilyen módon egy-egy  $\lambda$  érték tartozik, s ezt *sajátértéknek* (karakterisztikus érték) mondjuk.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha  $\mathbf{x}$  sajátvektor, akkor minden vele párhuzamos ( $\mathbf{0}$ -tól különböző) vektor is sajátvektor. Elég tehát a sajátvektorok állását ismerni ahhoz, hogy a sajátvektorok összességét ismerjük. A sajátvektorok irányát *főiránynak* vagy *sajátiránynak* mondjuk. Minden sajátiránnyal ellentétes irány is sajátirány, de ezeket a sajátirányok össze- számlálásakor nem számítjuk külön, tehát igazában nem irányokat, hanem állásokat számlálunk.

A másodrendű görbék esetében az  $A_{33}$  determináns elemeiből álló mátrixot  $A_{33}$ -mal jelöljük. Fenti tételünk ezek szerint azt mondja ki, hogy a másodrendű görbe tengelyeire merőleges irányok az  $(A_{33})$  mátrixnak azok a sajátirányai, amelyekhez 0-tól különböző sajátérték tartozik, maguk a tengelyek pedig az ezekhez az irányokhoz konjugált átmérők.

**Tétel.** A szimmetrikus  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  mátrix sajátértékeit az

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökei adják.

Ezt az egyenletet LAPUACE-féle<sup>9</sup> (karakterisztikus, szekuláris) *egyenletnek* mondjuk. A determinánst kifejtve az egyenlet

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + A_{33} = 0$$

alakot ölt. Tételünk szerint a sajátértékek száma legfeljebb kettő.

*Bizonyítás.* A  $\lambda$  szám akkor és csak akkor sajátérték, ha az előző tételben is szereplő

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0$$

<sup>9</sup>\* P. S. Laplace (ejtsd: laplasz), 1749—1827, francia matematikus, csillagász és államférfi.

egyenletrendszernek van nem triviális  $x_1, x_2$  megoldása. Ennek viszont szükséges és elégséges feltétele az, hogy ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek a determinánsa 0 legyen. —

A Laplace-féle egyenlet kifejtett alakjából a gyökök és együtthatók összefüggése alapján

$$\lambda_1 \lambda_2 = A_{33}$$

adódik, ahol  $\lambda_1, \lambda_2$  az egyenlet gyökei (többszörösségük figyelembevételével).

Tételünk lehetővé teszi, hogy a másodrendű görbék tengelyeit meghatározzuk, mert  $(A_{33})$  sajátértékeinek mindegyikére felírhatjuk a fenti egyenletrendszert, ennek megoldásai a sajátvektorokat, az irányaikhoz konjugált átmérők pedig a tengelyeket adják meg. Ez a kapcsolat az oka annak, hogy a sajátvektorok és a sajátértékek meghatározásának problémáját *főtengelyproblémának* is mondjuk.

A számítás bármely másodrendű görbe esetében arra is feleletet ad, hogy hány tengelye van. A lehetséges esetekkel a következő szakaszban foglalkozunk.

**A1** A parabola tengelyének meghatározására rövidebb utat is választhatunk. Ha ugyanis  $[x_1, x_2, 0]$  a parabola ideális pontja, akkor az  $(x_1, x_2)$  vektor a tengely irányát, a rá merőleges  $(x_2, -x_1)$  vektor a vezéregyenes irányát adja meg, és a tengely a vezéregyenes irányához konjugált átmérő.

**A2** Felhívjuk a figyelmet arra az érdekes ellentétre, hogy a sajátértékeket a sajátvektorok közvetítésével definiáltuk, viszont a sajátvektorokat a sajátértékek közvetítésével határozzuk meg.

**A3** Itt csak a síkbeli főtengelyproblémát ismertük meg. A probléma a térben is fellép, s ezzel is foglalkozunk majd (lásd 51.1). Megemlítjük, hogy a főtengelyprobléma még sokkal általánosabb körben (többdimenziós, sőt végtelen sok dimenziós terekben) is felvethető.

Az általánosabb körben felvetett főtengely probléma nemcsak a matematika, hanem a fizika számos fejezetével is szoros kapcsolatban van. Példaképpen megemlítjük, hogy a főtengelyprobléma vezet el a főfeszültségi irányokhoz, a sajátrezgésekhez, a spektrumok vonalainak meghatározásához s a kvantummechanikának mondhatni az egészéhez. Kiemeljük a bolygók pályájának lassú, évszázados (azaz szekuláris) periódusú rezgéseit, mert ezeknek a vizsgálatára során írta fel Laplace a róla elnevezett egyenletet.

Ebben a szakaszban tehát egy szerteágazó és sokfelé alkalmazott matematikai fejezet elemeivel ismerkedtünk meg.

**B1** A másodrendű görbe tengelye és szimmetriatengelye nem azonos fogalmak. Ha pl. azt az elfajuló parabolikus görbét tekintjük, amely két párhuzamos egyenesből áll, akkor megállapíthatjuk, hogy minden rájuk merőleges egyenes szimmetriatengely, viszont egyikük sem tengely, sőt nem is poláris, hiszen minden poláris áthalad a szinguláris ponton, párhuzamos egyenesek ideális pontján.

Bebizonyítjuk viszont, hogy minden tengely egyben szimmetriatengely is. Ha ugyanis az  $A_1, A_2$  pontok a  $t$  tengelyre vonatkozólag szimmetrikusak, akkor harmonikusan választják el az  $A_1, A_2$  szakasz felezőpontját az  $A_1, A_2$  egyenes ideális pontjától. Ez utóbbi pontok azonban konjugáltak, hiszen az egyik a  $t$  tengelyen van, a másik pedig  $t$  pólusa. Ha tehát az  $A_1, A_2$  pontok egyike a görbéhez tartozik, akkor 46.3 utolsó bekezdése szerint a másik is a görbén van.

**B2** 46.9 B2-nek az előző paragrafusról tett megállapításaival ellentétben itt azt kell hangsúlyoznunk, hogy a tengely fogalomalkotása már nem tartozik az affín geometria körébe, hiszen a merőlegességet az affín transzformációk nem tartják meg.

Meg kell változtatni ennek a szakasznak a tárgyalását, ha derékszögű koordináták helyett ferdeszögű koordinátákat használunk. Ha az ilyen koordináta-rendszerben megadott  $\sum a_{ij} x^i x^j = 0$  másodrendű görbe tengelyeit keressük, mondhatjuk, hogy az  $[x^1, x^2, 0]$  pont polárisa akkor tengely, ha párhuzamos ennek a pontnak a

$$g_{11} x^2 + 2g_{12} x^1 x^2 + g_{22} x^2 = 1$$

egységkörre vonatkozó polárisával, ahol  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  a 34.6-ban bevezetett értékek. Így azt kapjuk, hogy  $[x_1, x_2, 0]$  polárisa tengely, ha valamely 0-tól különböző  $\lambda$  értékkel

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x^1 + \alpha_{12}x^2 &= \lambda(g_{11}x^1 + g_{12}x^2), \\ \alpha_{21}x^1 + \alpha_{22}x^2 &= \lambda(g_{21}x^1 + g_{22}x^2).\end{aligned}$$

Innen a sajátértékekre az

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda g_{11} & \alpha_{12} - \lambda g_{12} \\ \alpha_{21} - \lambda g_{21} & \alpha_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet adódik. Mi ennek az egyenletnek a  $g_{11} = g_{22} = 1$ ,  $g_{12} = 0$  speciális esetét tárgyaljuk.

**47.2** Most azt vizsgáljuk, hogy a tengelyek keresésekor az előző szakaszban megismert számítás hány tengelyhez vezet. Vizsgálatunkat a tengelykeresés problémáján túl a 0 sajátértékű sajátvektorokra is

kiterjesztjük, és egy tetszőleges szimmetrikus  $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$  mátrix valamennyi sajátvektorát vizsgáljuk.

**Tétel (síkbeli főtengetytétel). A szimmetrikus  $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$  mátrixnak vagy két egymásra merőleges sajátiránya van, vagy pedig minden irány sajátirány.**

Tételünk kimondja tehát, hogy mindig vannak sajátvektorok, sőt mindig található két egymásra merőleges sajátirány. A sajátirányok száma tehát legalább kettő, s a sajátértékek az előző szakasz szerint legfeljebb kettő.

*Bizonyítás.* a) A Laplace-egyenlet kifejtett alakjából kiolvashatjuk, hogy a gyökei mindig valósak, mert

$$D = (\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 - 4(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2) = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}^2 \geq 0,$$

hiszen négyzetösszegekről van szó. Eszerint vagy egy, vagy két sajátérték van.

b) Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor csak egy sajátérték van.

Ez akkor következik be, ha  $D = 0$ , ha tehát  $\alpha_{11} = \alpha_{22}$  és  $\alpha_{12} = 0$ . Ebben az esetben mátrixunk

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

alakot ölt. Az ehhez tartozó  $x' = ax$ ,  $y' = ay$  transzformáció mutatja, hogy minden (0-tól különböző) vektor sajátvektor, és mindhez ugyanaz a sajátérték tartozik.

c) Legyenek  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  a sajátértékek. Most a két sajátérték mindegyikéhez egy-egy sajátirány tartozik, mert a sajátvektorokat adó egyenletrendszernek nem lehet mind a két egyenlete semmitmondó. Ez csak akkor következik be ugyanis, ha az egyenletrendszer minden együtthatója 0, azaz  $\alpha_{11} - \lambda = \alpha_{12} = 0$  és  $\alpha_{12} = \alpha_{22} - \lambda = 0$ ; ekkor azonban  $\alpha_{11} = \alpha_{22}$  és  $\alpha_{12} = 0$ , vagyis ilyenkor a már letárgyalt esettel állunk szemben.

Legyen  $\mathbf{s}(s_1, s_2)$  a  $\lambda_1$  sajátértékhez,  $\mathbf{t}(t_1, t_2)$  pedig a  $\lambda_2$  sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ezek koordinátáira fennállnak tehát az

$$\begin{aligned}\alpha_{11}s_1 + \alpha_{12}s_2 &= \lambda_1 s_1, & \alpha_{11}t_1 + \alpha_{12}t_2 &= \lambda_2 t_1, \\ \alpha_{21}s_1 + \alpha_{22}s_2 &= \lambda_1 s_2, & \alpha_{21}t_1 + \alpha_{22}t_2 &= \lambda_2 t_2\end{aligned}$$

egyenletek. Ha az

$$(\alpha_{11}s_1 + \alpha_{12}s_2)t_1 + (\alpha_{21}s_1 + \alpha_{22}s_2)t_2 = (\alpha_{11}t_1 + \alpha_{12}t_2)s_1 + (\alpha_{21}t_1 + \alpha_{22}t_2)s_2$$



egyenlőséget a felírt egyenletek alapján átalakíthatjuk, akkor a

$$\lambda_1 (s_1 t_1 + s_2 t_2) = \lambda_2 (s_1 t_1 + s_2 t_2)$$

egyenlőséghez jutunk. Ebből  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  miatt  $s_1 t_1 + s_2 t_2 = 0$ , tehát az  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{t}$  sajátvektorok merőlegessége következik. —

Ezek szerint minden irány akkor sajátirány, ha  $a_{11} = a_{22}$  és  $a_{12} = 0$ , és minden más esetben két egymásra merőleges sajátirány van.

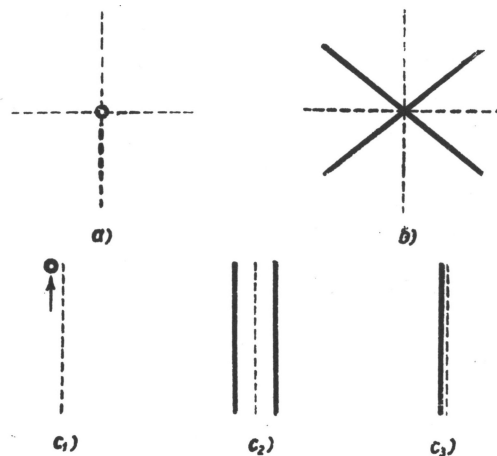
Az első eset a másodrendű görbék között a körnek felel meg. Ekkor  $\lambda = a_{11} = a_{22}$  az egyetlen sajátérték. Minthogy ez nem 0, a kör minden átmérője tengely.

A többi esetben 0 is lehet sajátérték, mégpedig  $\lambda_1 \lambda_2 = A_{33}$  miatt ez akkor és csak akkor következik be, ha  $A_{33} = 0$ , ha tehát parabolikus görbéről van szó. Ezek szerint (a körtől különböző) elliptikus és hiperbolikus görbéknek két egymásra merőleges tengelyük van, parabolikus görbéknek pedig csak egy.

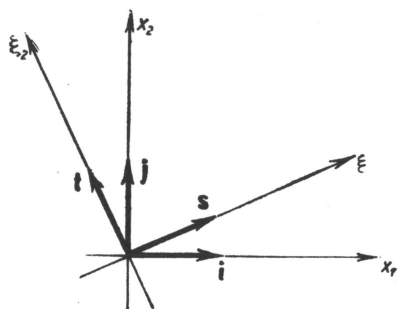
**B** Megállapításaink az elfajuló másodrendű görbékre is vonatkoznak. Ha felhasználjuk, hogy a tengely egyben szimmetriatengely is (vö. 47.1 B1), s hogy mint poláris áthalad a szinguláris ponton (vagy pontokon), akkor a következő eredményekhez jutunk (482. ábra).

Ha az elfajuló másodrendű görbe egyetlen pont, de a görbe nem pontkör, akkor tengelyei egymást ebben a pontban merőlegesen metszik; ha a görbe két metsző egyenes, akkor tengelyei a szögfelező egyenesek; ha a görbe egyetlen ideális pontból áll, akkor ez egyben az egyetlen tengelynek is ideális pontja; ha a görbét két párhuzamos egyenes alkotja, akkor középpárhuzamosuk az egyetlen tengely; ha végül a görbe egyetlen egyenesből áll, akkor ez egyben az egyetlen tengely is.

Megállapíthatjuk, hogy az elfajuló parabolikus görbék tengelye azonos centrumalakzatukkal.



482



**47.3**  $n$  változó homogén másodfokú kifejezését  $n$ -változós *másodfokú alaknak* (kvadratikus forma) nevezzük. A másodfokú alak együtthatói tetszőleges valós számok lehetnek, és még azt is megengedjük, hogy mindegyik 0 legyen, hogy tehát a másodfokú alak azonosan eltűnjék.

Tekintsünk egy kétváltozós

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

másodfokú alakot, és az együtthatóiból alkotott szimmetrikus mátrixot. Legyenek az  $\mathbf{s}(s_1, s_2)$ ,  $\mathbf{t}(t_1, t_2)$  egységvektorok ennek a mátrixnak egymásra merőleges sajátvektorai. Ha az eredeti koordináta-rendszerrel az  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{t}$  alapvektorú elforgatott koordináta-rendszerre térünk át, s ha az eredeti koordinátákat  $x_1$  és  $x_2$ , az új koordinátákat pedig  $\xi_1$  és  $\xi_2$ , jelöli (483. ábra), akkor a koordinátatranszformációt az

$$x_1 = s_1\xi_1 + t_1\xi_2,$$

$$x_2 = s_2\xi_1 + t_2\xi_2$$

helyettesítések adják. E helyettesítések segítségével az eredeti másodfokú alakot  $\xi_1$  és  $\xi_2$  kifejezésévé alakíthatjuk át, s ilyenkor azt mondjuk, hogy *főtengelytranszformációt* alkalmaztunk.

**Tétel.** *A kétváltozós másodfokú alak a főtengelytranszformáció után*

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2$$

*alakot ölt, ahol  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  a két tengelynek megfelelő sajátérték.*

A másodfokú alakot *kanonikusnak* mondjuk, ha csak négyzetes tagok szerepelnek benne. A másodfokú alak együtthatóiból alakított mátrix sajátértékeit a másodfokú alak sajátértékeinek is mondjuk. Tételünk kimondja, hogy minden kétváltozós másodfokú alak ortogonális helyettesítéssel (vö. 34.4) kanonikus alakra hozható, s hogy a kanonikus alak együtthatói a másodfokú alak sajátértékei. Ha a tételt így szövegezzük, merőben algebrai tétellé válik. Mondhatjuk azt is, hogy tételünk a főtengelytétel algebrai alakja.

*Bizonyítás.* A főtengelytranszformáció helyettesítését, majd az  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{t}$  sajátvektorok koordinátáira fennálló, az előző szakaszban felírt egyenleteket alkalmazva

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = (a_{11}s_1 + a_{12}s_2)\xi_1 = (a_{11}t_1 + a_{12}t_2)\xi_2 = \lambda_1 s_1 \xi_1 + \lambda_2 t_1 \xi_2$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = (a_{21}s_1 + a_{22}s_2)\xi_1 = (a_{21}t_1 + a_{22}t_2)\xi_2 = \lambda_1 s_2 \xi_1 + \lambda_2 t_2 \xi_2$$

adódik. Ha figyelembe vesszük, hogy a főtengelytranszformáció mint elforgatás az

$$s_1x_1 + s_2x_2 = \xi_1,$$

$$t_1x_1 + t_2x_2 = \xi_2$$

összefüggéseket is előírja, akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\xi_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\xi_2 = \\ &= \lambda_1 \xi_1 (s_1x_1 + s_2x_2) + \lambda_2 \xi_2 (t_1x_1 + t_2x_2) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 \end{aligned}$$

eredményhez jutunk. —

**B** A főtengelytranszformációból következik, hogy a  $\lambda_1, \lambda_2$  sajátértékek minden értéket felvehetnek.

**47.4** A másodfokú alakokat osztályozhatjuk aszerint, hogy a változók helyébe különböző értékeket helyettesítve milyen előjelű helyettesítési értékeket kaphatunk. Ennél az osztályozásnál figyelmen

kívül hagyjuk a triviális helyettesítést, amely mindegyik változónak 0 értéket ad, hiszen ez a helyettesítés mindig 0-hoz vezet.

A másodfokú alak *definit*, ha minden nem triviális helyettesítés 0-tól különböző és ugyanolyan előjelű értéket ad. A helyettesítési értékek közös előjelének megfelelően az ilyen alak vagy *pozitív definit*, vagy pedig *negatív definit*.

A másodfokú, alak *szemidefinit*, ha a nem triviális helyettesítéssel kapott értékek között 0 is szerepel, viszont minden más helyettesítési érték ugyanolyan előjelű. Ennek a közös előjelnek megfelelően az ilyen alak vagy *pozitív szemidefinit*, vagy pedig *negatív szemidefinit*.

A másodfokú alak *indefinit*, ha helyettesítési értékei között pozitív és negatív érték is szerepel.

A felsorolt lehetőségek mindegyike bekövetkezhetik, amint ezt a különböző minőségű kétváltozós  $x_1^2 + x_2^2$ ,  $-x_1^2 - x_2^2$ ,  $(x_1 + x_2)^2$ ,  $-(x_1 + x_2)^2$ ,  $x_1^2 - x_2^2$  másodfokú alakok példái mutatják.

Ha az  $n$ -változós másodfokú alak változói helyébe másik  $n$  változó homogén lineáris kifejezéseit helyettesítjük, akkor az új változók másodfokú alakjához jutunk. Az új másodfokú alak minden helyettesítési értéke előfordul természetesen az eredeti alak helyettesítési értékei között is. Ha tehát az új változók is homogén lineáris kifejezése a régieknek, akkor a két alak értékkészlete azonos, s ezért ugyanolyan minőségűek.

A kétváltozós másodfokú alak minősége ezek szerint nem változik meg a főtengelettranszformáció végrehajtásakor. Ebből a tényből közvetlenül kiolvasható, hogy a kétváltozós másodfokú alak minden helyettesítési értéke akkor és csak akkor 0, ha mindkét sajátértéke 0, ha tehát minden együtthatója 0. Ha az ilyen azonosan eltűnő másodfokú alakoktól eltekintünk, elmondhatjuk, hogy minden másodfokú alak vagy definit, vagy szemidefinit, vagy pedig indefinit.

**Tétel.** *A kétváltozós másodfokú alak aszerint definit, indefinit vagy szemidefinit, amint két sajátértéke egyező vagy ellentétes előjelű, vagy pedig a két sajátérték egyike 0.*

Kiegészíthetjük a tételt azzal, hogy definit és szemidefinit másodfokú alakoknál a két sajátérték (egyikének) előjele a másodfokú alak előjelét is megadja. Mondhatjuk tehát, hogy a másodfokú alak minősége sajátértékeiben is tükröződik. Nem szolt a tétel arról az esetről, amikor mind a két sajátérték 0, hiszen ilyenkor azonosan eltűnik a másodfokú alak.

*Bizonyítás.* Főtengelettranszformációval a másodfokú alakot  $\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2$  alakra hozhatjuk. Itt  $\xi_1$  és  $\xi_2$  az eredeti  $x_1$ ,  $x_2$  változók homogén lineáris kifejezése. A  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  értékpár minden értéket felvehet, de  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  csak a triviális  $x_1 = x_2 = 0$  esetben következik be.

Ebből következik, hogy ha  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  pozitív, akkor minden nem triviális helyettesítés pozitív helyettesítési értéket ad, mert a  $\lambda_1 \xi_1^2$  és  $\lambda_2 \xi_2^2$  számok egyike sem lehet negatív, és mindkettő nem lehet 0. Hasonlót mondhatunk, ha  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  negatív.

Ha a  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  sajátértékek egyike 0, pl.  $\lambda_2 = 0$ , akkor a másodfokú alak  $\lambda_1 \xi_1^2$  alakot ölt. Ha tehát pozitív, akkor a helyettesítési érték nem lehet negatív, viszont pl. a  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1$  helyettesítés 0-hoz vezet. Hasonlót mondhatunk, ha  $\lambda_1$  negatív.

Ha  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  különböző előjelű, akkor pl. a  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = 0$  és a  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1$  helyettesítés a  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  helyettesítési értékekhez, tehát különböző előjelű értékekhez vezet. —

**Tétel.** *Az azonosan el nem tűnő kétváltozós alak aszerint definit, indefinit vagy szemidefinit, amint az együtthatóiból alakított determináns értéke pozitív, negatív vagy 0.*

*Bizonyítás.* A tétel nyomban következik az előző tételből és a  $\lambda_1 \lambda_2 = A_{33}$  összefüggésből. —

46.2 alapján kimondhatjuk tehát, hogy a másodrendű görbe aszerint elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus, amint az egyenletében szereplő  $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  alak definit, indefinit vagy szemidefinit.

**B** Szó lehet az egyváltozós  $a_1x_1^2$  másodfokú alakról is. Ez azonban, ha azonosan nem tűnik el, csak definit lehet.

**47.5** Lezárjuk a másodrendű görbék tárgyalását. Minden másodrendű görbéről eldöntjük, hogy milyen alakú.

**Tétel.** Minden másodrendű görbe egyenlete a koordináta-rendszert elmozgatva, valamint (0-tól különböző) állandóval szorozva a következő kanonikus alakok valamelyikére hozható:

$$a) \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad (\text{valós) ellipszis vagy (valós) kör},$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = -1 \quad \text{üres alakzat (amelyhez valós ideális pont sem tartozik, képzetes ellipszis vagy kör),}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 0 \quad \text{pont (pontellipszis vagy pontkör, valós pontban metsző képzetes egyenespár),}$$

$$b) \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad \text{hiperbola},$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0 \quad \text{metsző (valós) egyenespár},$$

$$c) \eta^2 = 2p\xi \quad \text{parabola},$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} = 1 \quad \text{párhuzamos (valós) egyenes pár},$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} = -1 \quad \text{üres alakzat (amelyhez egy valós ideális pont tartozik),}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} = 0 \quad \text{egyenes (kettős egyenes)}.$$

A felsorolás csak már eddig is ismert egyenleteket tartalmaz. Az a), b) és c) részben elliptikus, hiperbolikus és parabolikus görbék szerepelnek. Az elliptikus görbéknél és a metsző valós egyenespárnál az  $a \geq b$  megszorítást is befoglalhattuk volna a tételbe, hiszen szükség esetén a kezdőpont körüli  $90^\circ$ -os elforgatással ezt is elérhetjük. A (valós vagy képzetes) metsző egyenespároknál  $a^2 + b^2$  (0-tól különböző) értékét is előírhattuk volna.

Az elnevezéseket illetően a következőket említjük meg: a képzetes ellipszis és pontellipszis megnevezéseket a már ismert képzetes kör és pontkör nevek mintájára vezettük be; a komplex számok körében lehetséges

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \left(\frac{\xi}{a} + i\frac{\eta}{b}\right)\left(\frac{\xi}{a} - i\frac{\eta}{b}\right), \quad \frac{\xi^2}{a^2} + 1 = \left(\frac{\xi}{a} + i\right)\left(\frac{\xi}{a} - i\right)$$

tényezőkre bontás magyarázza hogy miért nevezzük a megfelelő görbéket képzetes egyenespárnak (vö. 38.2 B5), amelyek az első esetben egymást a  $\xi = \eta = 0$  pontban metszik, a második esetben pedig párhuzamosak, hiszen a két lineáris kifejezés csak állandóan különbözik egymástól; végül a kettős egyenes megnevezésnek az az oka, hogy a bal oldal mindkét tényezője egy- egy egyenes egyenletét adja, mégpedig mindkettő ugyanazét az egyenest.

Tételünk kimondja, hogy minden közönséges másodrendű görbe kúpszelet (azaz kör, ellipszis, hiperbola vagy parabola), tehát kimondja azt is, hogy minden másodrendű görbe közönséges vagy elfajuló kúpszelet.

*Bizonyítás.* I. Először csak az  $A_{33} \neq 0$  esettel foglalkozunk, amikor is a görbe centrális. A koordináta-rendszer kezdőpontját a centrumba tolva az egyenlet 46.6 szerint

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

alakot ölt, s itt  $a_{33}$  már a koordinátatranszformáció útján kapott értéket jelöli. Ha a koordináta-rendszer tengelyeit  $(A_{33})$  sajátirányába forgatjuk, akkor az egyenletet 47.3 szerint

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_{33} = 0$$

alakra hozzuk. Ebből az egyenletből kiolvasható, hogy a görbe akkor és csak akkor elfajuló, ha  $a_{33} = 0$ , hiszen a görbe determinánsa  $A = \lambda_1 \lambda_2 a_{33} = A_{33} a_{33}$ , és most  $A_{33} \neq 0$ .

a) Ha  $A_{33} > 0$ , azaz a görbe elliptikus, akkor az  $(A_{33})$ -hoz tartozó másodfokú alak definit, és a  $\lambda_1, \lambda_2$  sajátértékek egyező előjelűek. Feltehetjük, hogy előjelük pozitív, mert különben az egyenletet  $(-1)$ -gyel szorozva érjük el ezt.

Ha a görbe közönséges, akkor  $a_{33} \neq 0$ , oszthatunk tehát az  $|a_{33}|$  számmal, így a

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \pm 1$$

alakhoz jutunk, hiszen a bal oldali pozitív együtthatókat  $\frac{1}{a^2}$  és  $\frac{1}{b^2}$  jelölheti.

Ha a görbe elfajuló, akkor  $a_{33} = 0$ . Ebben az esetben a  $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0$  egyenletet

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 0$$

alakban írhatjuk.

b) Ha  $A_{33} < 0$ , azaz a görbe hiperbolikus, akkor az  $(A_{33})$ -hoz tartozó másodfokú alak indefinit, és a  $\lambda_1, \lambda_2$  sajátértékek különböző előjelűek.

Ha a görbe közönséges, akkor  $a_{33} \neq 0$  Feltehetjük, hogy  $a_{33}$  negatív, mert különben  $(-1)$ -gyel szorozva érhetjük el ezt. Feltehetjük azt is, hogy  $\lambda_1$  pozitív és  $\lambda_2$  negatív, mert ha  $\lambda_1$  volna negatív és  $\lambda_2$  pozitív, akkor  $90^\circ$ -os elforgatással érhetnők el ezt. Ha feltevéseinknek megfelelő egyenletet a pozitív  $(-a_{33})$ -mal osztjuk, akkor a

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

egyenlethez jutunk.

Ha a görbe elfajuló, akkor  $a_{33} = 0$ . Ebben az esetben a  $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0$  egyenlet, szükség esetén  $(-1)$ -gyel szorozva,

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0$$

alakban írható.

II. Legyen most  $A_{33} = 0$ . Ekkor a görbe parabolikus, az  $(A_{33})$ -hoz tartozó másodfokú alak szemidefinit, és a  $\lambda_1, \lambda_2$  sajátértékek egyike 0. Feltehetjük, hogy  $\lambda_1 = 0$  és  $\lambda_2 > 0$ . Ha a koordináta-rendszer tengelyeit  $(A_{33})$  sajátirányába forgatjuk, akkor 47.3 szerint egyenletük

$$\lambda_2 y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

alakot ölt. Itt  $a_{13}, a_{23}$  már a koordinátatranszformáció útján kapott értékeket jelölik.

Ha  $a \neq 0$  akkor az  $ay^2 + by + c$  másodfokú polinomot  $\eta = y + \frac{b}{2a}$  helyettesítéssel az  $a\eta^2 + d$  alakra hozhatjuk. Ezt  $\lambda_2 \neq 0$  miatt egyenletünkre is alkalmazhatjuk, s ez azt jelenti, hogy a koordináta-rendszert az  $y$ -tengellyel párhuzamosan eltolva egyenletünket a

$$\lambda_2 \eta^2 + 2a_3 x + d = 0$$

alakra hozhatjuk, ahol  $\eta$  az eltolás révén megváltozott ordinátát jelöli. Ebből az egyenletből kiolvasható, hogy a görbe akkor és csak akkor elfajuló, ha  $a_{13} = 0$ ,

hiszen a görbe determinánsa  $A = -\lambda_2 a_3^2$  és  $\lambda_2 \neq 0$ .

Ha a görbe közösleges, akkor tehát  $a_{13} \neq 0$ . Ha  $a \neq 0$ , akkor az  $ax + b$  elsőfokú polinomot  $\xi = x + \frac{b}{a}$  helyettesítéssel az alakra hozhatjuk. Ezt  $a_{13} \neq 0$  miatt egyenletünkre is alkalmazhatjuk, s ez azt jelenti, hogy a koordináta-rendszert az  $x$ -tengellyel párhuzamosan eltolva

$$\lambda_2 \eta^2 + 2a_3 \xi = 0$$

alakú egyenlethez jutunk. Feltehetjük, hogy  $a_{13}$  negatív, mert az ellenkező esetben a koordináta-rendszer  $180^\circ$ -os elforgatásával érhetjük el ezt. Így tehát  $\lambda_2$ -vel való osztás után egyenletünket az

$$\eta^2 = 2p\xi$$

alakban írhatjuk, ahol  $p$  pozitív számot jelent.

Ha a görbe elfajuló, akkor  $a_{13} = 0$ ; Most tehát  $\lambda_2 \eta^2 + d = 0$  az egyenlet, és ebből annak megfelelően, hogy  $d$  negatív, pozitív vagy 0, az

$$\frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad \frac{\eta^2}{b^2} = -1, \quad \frac{\eta^2}{b^2} = 0$$

alakok valamelyikéhez jutunk.  $90^\circ$ -os elforgatással azt is elérhetjük, hogy  $\eta^2$  helyébe  $\xi^2$  lépjen, hogy tehát a tételbeli egyenletekhez jussunk. —

**A** A másodrendű görbék osztályozására vonatkozó eredményeinket a következő táblázatba foglalhatjuk össze:

|            | $A_{33} > 0$                           | $A_{33} < 0$              | $A_{33} = 0$                                                     |
|------------|----------------------------------------|---------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $A \neq 0$ | valós<br>képzetes } ellipszis          | hiperbola                 | parabola                                                         |
| $A = 0$    | képzetes metsző<br>egyenespár          | valós metszetű egyenespár | valós } párhuzamos<br>képzetes } egyenespár,<br>(kettős) egyenes |
|            | definit                                | indefinit                 | szemidefinit                                                     |
|            | $(A_{33})$ -hoz tartozó másodfokú alak |                           |                                                                  |

A kört külön nem említettük, mert itt az ellipszisekhez soroltuk. A táblázat oszlopainak alsó megnevezése felesleges, csak a megfelelő térgeometriai osztályozással való egybevetés kedvéért foglaltuk a táblázatba (vö. 51.9 A1).

Ez a táblázat nem minden esetben ad egyértelmű választ a görbe alakját illetően. Ha az  $A \neq 0$ ,  $A_{33} > 0$  esetben azt is el akarjuk dönteni, hogy a görbe valós vagy képzetes ellipszis, akkor meghatározhatjuk a görbe centrumát, és egy ezen áthaladó egyenes metszéspontjainak vizsgálata döntheti el a kérdést.

Ha az  $A = 0$ ,  $A_{33} = 0$  esetben akarunk a háromféleségben ítéletet mondani, akkor egy a görbe ideális pontját nem tartalmazó egyenes metszéspontjainak a száma alapján dönthetünk.

**B1** Bizonyításunk során az  $A$  determinánst a már transzformált egyenletből számítottuk ki, és így vontunk le következtetést eltűnéséből vagy el nem tűnéséből. Ezt joggal tettük, mert a görbe elfajuló vagy el nem fajuló volta nem függ a koordináta-rendszer megválasztásától (vö. 46.3 B2).

Megjegyezzük, hogy  $A$  előjele nem szerepei osztályozásunk eseteinek szétválasztásánál, viszont  $A_{33}$  előjele igen.  $A$  előjele nem is szerepelhet, mert ha az egyenletet  $(-1)$ -gyel szorozzuk, akkor ennek a harmadrendű determinánsnak minden eleme, és így maga a determináns is előjelet vált.  $A_{33}$ -ról nem mondhatunk hasonlót, mert ez másodrendű determináns.

**B2** Minthogy bármely másodfokú görbeegyenlet a koordináta-rendszert elmozgatva és 0-tól különböző számmal szorozva kanonikus alakra hozható, ugyanannak a görbének bármely két koordináta-rendszerbeli másodfokú egyenlete ugyanilyen műveletekkel vihető át egymásba. Ebből már könnyen következik, hogy ugyanannak a másodrendű görbének ugyanabban a koordináta-rendszerben felírt két egyenlete egymástól csak  $(0$ -tól különböző) számtényezőben különbözhetik (vö. 41.8 B). Az elfajuló görbék esetében nincs ehhez indoklásra szükség, hiszen ezeket analitikus alakzatokként vezettük be (vö. 37. 1 B); a közöséges görbék viszont minden elmozgatáskor megváltoztatják a helyzetüket, kivéve (a kör elforgatását, valamint) az ellipszis és a hiperbola  $180^\circ$ -os elforgatását a középpont körül, de ilyenkor a görbe egyenlete sem változik meg a megfelelő koordinátatranszformáció végrehajtásakor.

**B3** Bebizonyítjuk majd (lásd 51.4 B2), hogy a másodrendű görbe  $A$  determinánsa a koordináta-rendszer elmozgatásakor nem változtatja meg az értékét. Ez módot ad majd arra, hogy egy kúpszelet valamilyen egyenletéről közvetlenül a  $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_{33} = 0$  vagy  $\lambda_2 \eta^2 + 2a_{13}\xi = 0$  egyenletre térhessünk át, tehát a görbe alakjának jellemző adatait is kiolvashassuk.

**B4** A kanonikus egyenletek alapján ellenőrizhetjük a következő, az előbbinél teljesebb táblázat helyességét:

| $(A)$ rangja | $(A)$ -hoz tartozó alak | $(A_{33})$ -hoz tartozó alak |                           |                                |
|--------------|-------------------------|------------------------------|---------------------------|--------------------------------|
|              |                         | definit                      | indefinit                 | szemidefinit                   |
| 3            | definit                 | képzetes ellipszis           | –                         | –                              |
| 3            | indefinit               | (valós) ellipszis            | hiperbola                 | parabola                       |
| 2            | indefinit               | –                            | (valós) metsző egyenespár | (valós) párhuzamos egyenespár  |
| 2            | szemidefinit            | képzetes metsző egyenespár   | –                         | képzetes párhuzamos egyenespár |
| 1            | szemidefinit            | –                            | –                         | (kettős) egyenes               |

A  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$  görbe egyenletében a bal oldalhoz mint másodfokú alakhoz az  $(A)$  mátrix tartozik. Nyilvánvaló, hogy 0-tól különböző számmal való szorzáskor sem az  $(A)$ -hoz tartozó másodfokú alak minősége, sem  $(A)$  rangja nem változik meg. Az  $(A)$ -hoz tartozó alak minősége 47.4 szerint akkor sem változik meg, ha a koordináta-rendszert eltoljuk vagy elforgatjuk, hiszen a homogén koordináták megfelelő transzformációs egyenletei 44.4 B szerint homogén lineárisak, és ilyen az inverz transzformáció is. Bebizonyítjuk majd (lásd 51.4 B2), hogy a koordinátatranszformáció  $(A)$  rangját sem változtatja meg. Ezek szerint azt is kimondhatjuk majd, hogy a fenti táblázat nemcsak a kanonikus egyenletek körében helyes, hanem a másodrendű görbék osztályozására is alkalmas.

Ez az osztályozás akkor lesz jól használható, ha majd megismerkedünk azzal, hogyan lehet egy háromváltozós másodfokú alak minőségét kevés számításal meghatározni (lásd 52.4).

**B5** A másodrendű görbékre adott osztályozást *affin osztályozásnak* mondhatjuk, mert minden affin transzformáció az egyes kategóriákba tartozó görbékét ugyanabba a kategóriába tartozó görbébe viszi át.

Ha egy kategóriába soroljuk mindazokat a görbéket, amelyek projektív transzformációval vihetők át egymásba, akkor a másodrendű görbék *projektív osztályozásához* jutunk. Ehhez a másodrendű görbék körének bizonyos bővítése célszerű: ha megengedjük, hogy az elfajuló görbéket alkotó egyenespárokban az ideális egyenes is szerepelhessen, akkor igaz lesz, hogy bármely projektív

transzformáció minden másodrendű görbét másodrendű görbébe visz. Ha  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$  egyenletben nem azt kötjük ki, hogy az  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  együtthatók mindegyike nem lehet 0, hanem csak azt, hogy nem lehet valamennyi együttható 0, akkor a most említett általánosabb értelemben vett másodrendű görbék általános egyenletéhez jutunk. Mivel az ideális egyenes kivételezett szerepét megszüntettük, a másodrendű görbék projektív osztályozásánál B4 táblázatának három oszlopa egybeolvad, és az osztályozásban csak a következő öt lehetőség szerepel: képzetes kúpszelet, kúpszelet, egyenespár, képzetes egyenespár, kettős egyenes.

Más a helyzet a másodrendű görbék *komplex geometriai osztályozásánál*. A komplex geometriában a másodrendű görbék egyenletében tetszőleges komplex együtthatók szerepelhetnek. Ha komplex számokat is helyettesíthetünk, akkor minden másodfokú alaknak van pozitív és negatív helyettesítési értéke, s ezért a másodfokú alakok osztályozása értelmét veszti. A másodrendű görbék komplex geometriai osztályozásánál egybeolvad ezért B4 táblázatának első két és második két sora, valamint első két oszlopa. Ennek megfelelően az öt lehetőség most: centrális kúpszelet, parabola, metsző egyenespár, párhuzamos egyenespár, kettős egyenes.

**B6** Ha homogén koordinátákat vezetünk be, és azt is megengedjük, hogy a homogén koordináták akármilyen komplex számok legyenek, akkor a *komplex projektív síkhoz* jutunk. Ennek a síknak képzetes ideális pontjai is vannak. Ezek közül nevezetes az  $[1, i, 0]$  és  $[1, -i, 0]$  pont; ezeket *körpontoknak* (képzetes körpontok) nevezik, mert minden kör tartalmazza e két pontot, és e két pontot tartalmazó minden másodrendű görbe kör.

A komplex projektív sík másodrendű görbéinek *komplex projektív osztályozására* mindaz vonatkozik, amit B5-ben a projektív osztályozásról és a komplex geometriai osztályozásról mondtunk. Ezért itt csak három lehetőség van: a másodrendű görbe lehet kúpszelet, egyenespár és kettős egyenes.

## 48. § Kúpszeletek meghatározása öt adattal

Először azt vizsgáljuk, hogy öt pont mikor határozza meg a másodrendű görbét. Másodrendű görbe helyett most már kúpszeletet is mondhatunk, mert ha az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk, egyaránt gondolunk közös és elfajuló kúpszeletekre. Olyan tételekkel is foglalkozunk, amelyek lehetővé teszik, hogy a közös kúpszeletet meghatározó öt pontból vagy öt érintőből a kúpszeletet megszerkesszük. Módszerünk részben analitikus, részben szintetikus lesz.

**48.1 Tétel.** *Akkor és csak akkor van olyan másodrendű görbe, amely az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4), P_5(x_5, y_5), P_6(x_6, y_6)$  pontokat tartalmazza, ha*

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tételünk csak azt állítja, hogy a feltétel teljesülésekor van az adott hat pontot tartalmazó kúpszelet, és nem állítja, hogy csak egy ilyen kúpszelet van.

*Bizonyítás.* Ha az

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

görbe tartalmazza a megadott hat pontot, akkor koordinátáik helyettesítése a következő hat egyenletet adja:



$$\begin{aligned} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F &= 0, \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F &= 0, \\ Ax_3^2 + Bx_3y_3 + Cy_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F &= 0, \\ Ax_4^2 + Bx_4y_4 + Cy_4^2 + Dx_4 + Ey_4 + F &= 0, \\ Ax_5^2 + Bx_5y_5 + Cy_5^2 + Dx_5 + Ey_5 + F &= 0, \\ Ax_6^2 + Bx_6y_6 + Cy_6^2 + Dx_6 + Ey_6 + F &= 0. \end{aligned}$$

Minthogy ennek az egyenletrendszernek van nem triviális  $A, B, C, D, E, F$  megoldása, a rendszer determinánsa, vagyis a tételbeli determináns 0.

b) Ha a tételben szereplő determináns 0, akkor az imént felírt egyenletrendszernek van nem triviális  $A, B, C, D, E, F$  megoldása. Ha ebben a megoldásban az  $A, B, C$  értékek nem mind egyenlők 0-val, akkor ez a megoldás egy a hat pontot tartalmazó másodrendű görbe egyenletének együtthatóit adja.

Ha viszont a nem triviális megoldásban  $A = B = C = 0$ , akkor a

$$Dx + Ey + F = 0$$

egyenlet teljesül a hat pont mindegyikére. Nem lehet itt  $D = E = 0$ , mert akkor  $F \neq 0$  volna, hiszen nem triviális megoldásról van szó, márpedig ebben az esetben az  $F = 0$  egyenletnek kellene teljesülnie. Így tehát a most vizsgált esetben hat pontunk egy egyenes egyenletét elégíti ki, azaz a hat pont egy egyenesen van. Ezt az egyenest kettős egyenesként másodrendű görbének tekinthetjük, és kimondhatjuk, hogy hat pontunk a vizsgált esetben is egy (elfajuló) másodrendű görbén van.—

*Tétel. Bármely öt közöséges ponthoz található olyan másodrendű görbe, amely ezt az öt pontot tartalmazza.*

*Bizonyítás.* Ha az adott  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  pontokhoz hatodikként pontot csatoljuk, és felírjuk rájuk az előző tétel determinánsát, akkor ennek az értéke 0 lesz, hiszen az utolsó két sor megegyezik. Az előző tételből következik tehát, hogy van olyan kúpszelet, amely a hat pontot, vagyis az eredeti öt pontot tartalmazza. —

**B** Mindkét tételünket módosítani lehet úgy, hogy ideális pontok is szerepelhessenek bennük.

Az első tétel ebben az általánosabb értelemben is helyes marad, ha a determináns soraiba az  $x, y$  közöséges koordinátákból számított  $x^2, xy, y^2, x, y, 1$  értékek helyébe az  $x_1, x_2, x_3$  homogén koordinátákból számított  $x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2$  értékeket írjuk, és a kúpszeletek körét úgy bővítjük, ahogyan 47.5 B5-ben a projektív osztályozáskor tettük. Az így módosított tétel bizonyítása az eredetienél egyszerűbb, mert a b) részben elmarad annak a vizsgálata, hogy az együtthatók közül melyek nem tűnnek el, hiszen most  $\sum a_{*x_i x_i} = 0$  mindig kúpszelet egyenlete, ha benne nem minden együttható 0.

Ebből következik, hogy a második tétel is helyes marad, ha benne közöséges vagy ideális pontokról szólunk, és a kúpszeletek körét ugyanúgy bővítjük.

Ha a második tételben nem akarunk közöséges pontokra szorítkozni, viszont a kúpszeletek körét sem akarjuk bővíteni, akkor azt is ki kell kötni, hogy az adott öt pont közül legfeljebb kettő lehet ideális, s hogy ha két ideális pont van közöttük, akkor a három közöséges pont ne legyen egy olyan egyenesen, amely nem tartalmazza a két ideális pont egyikét sem. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az öt pontnak így kell elhelyezkednie akkor, ha ezeket a kúpszelet fogalmának általánosításakor bevezetett új kúpszeletfajták (ideális és közöséges egyenes, valamint kettős ideális egyenes) valamelyike tartalmazza, de eredeti értelemben vett kúpszelet nem.

**48.2 Tétel.** *Ha öt közöséges pont között nincs négy egy egyenesen elhelyezkedő, akkor csak egy olyan másodrendű görbe van, amely mind az öt pontot tartalmazza.*

Az előző szakaszból már tudjuk, hogy van ilyen görbe. A tétel azt hangsúlyozza, hogy csak egy ilyen van. Nem volna helyes a tétel akkor, ha öt egymástól nem feltétlenül különböző pontra mondanék ki.

*Bizonyítás.* Azt bizonyítjuk, hogy ha két kúpszelet nem áll azonos pontokból, akkor vagy csak legfeljebb négy közös pontjuk van, vagy pedig a közös pontjaik egynek az esetleges kivételével egy egyenesen vannak. Ebből valóban következik majd, hogy ha két kúpszeletnek öt közös pontja van, akkor közülük négynek egy egyenesen kell lennie, s ha öt adott pontra ez nem következik be, akkor mindannyian nem tartozhatnak két kúpszelethez.

a) Állításunkat először arra az esetre bizonyítjuk, amikor a két kúpszeletnek legalább az egyike elfajuló. Ha a két kúpszelet közös egyenest tartalmaz, akkor ezen az egyenesen kívül csak egy közös pontjuk lehet, ti. a kúpszeletek által tartalmazott másik egyenesek metszéspontja. Ha mind a két kúpszelet elfajuló, de közös egyenesük nincs, akkor legfeljebb négy közös pontjuk van, mert legfeljebb két-két egyenes legfeljebb négy metszéspontot alkot. Ha végül kúpszeleteink egyike elfajuló s másika közönséges, akkor ismét legfeljebb négy közös pont van, mert az elfajuló kúpszeletet alkotó legfeljebb két egyenes mindegyikének legfeljebb két pontja van a közönséges kúpszeleten. Állításunk ezek szerint valóban mindig helyes, ha nem mind a két kúpszelet közönséges.

b) Tekintsük most a közönséges  $A \equiv \sum a_{ik} x_i x_k = 0$ ,  $B \equiv \sum b_{ik} x_i x_k = 0$  kúpszeleteket. Feltehetjük róluk, hogy van közös pontjuk. Bebizonyítjuk, hogy van olyan elfajuló kúpszelet, amely minden közös pontjukat tartalmazza. Ebből a) szerint következik majd, hogy állításunk ebben az esetben is helyes.

Az  $A + \lambda B = 0$  alakzat tartalmazza az  $A = 0$ ,  $B = 0$  kúpszeletek közös pontjait, bármilyen értéket jelent is  $\lambda$ , hiszen egy ilyen közös pont koordinátáira  $A = 0$  és  $B = 0$ , tehát  $A + \lambda B = 0$ .

Meg lehet választani  $\lambda$  értékét úgy, hogy az  $A + \lambda B = 0$  egyenlet együtthatóiból alkotott determináns 0 legyen, ugyanis az

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & a_{13} + \lambda b_{13} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} & a_{23} + \lambda b_{23} \\ a_{31} + \lambda b_{31} & a_{32} + \lambda b_{32} & a_{33} + \lambda b_{33} \end{vmatrix}$$

egyenlet  $\lambda$ -ban harmadfokú, mert  $\lambda^3$  együtthatója a közönséges  $B = 0$  kúpszelet 0-tól különböző determinánsa, és minden harmadfokú egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

Jelentse  $\lambda$  a felírt egyenlet valós gyökét. Az  $A + \lambda B = 0$  kifejezés nem lehet állandó, mert ha 0 volna, akkor az  $A = 0$ ,  $B = 0$  kúpszeletek azonosak volnának, s ha 0-tól különböző állandó volna, akkor az  $A = 0$ ,  $B = 0$  kúpszeleteknek nem volna közös pontja. Beláttuk tehát, hogy  $A + \lambda B = 0$  kúpszelet vagy egyenes egyenlete. Ha kúpszeleté, akkor ez elfajuló, mert determinánsa 0; ha viszont egyenesé, akkor ezt elfajuló kúpszeletnek, ti. kettős egyenesnek tekinthetjük. Minden esetben találtunk tehát olyan elfajuló kúpszeletet, amely az  $A = 0$ ,  $B = 0$  kúpszeletek közös pontjait tartalmazza. —

**Tétel.** Ha a  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ ,  $P_3(x_3, y_3)$ ,  $P_4(x_4, y_4)$ ,  $P_5(x_5, y_5)$  pontok között nincs négy egy egyenesen elhelyezkedő, akkor a rajtuk áthaladó másodrendű görbe egyenlete

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Bizonyítás.* Szakaszunk első tétele értelmében azoknak és csak azoknak a  $P(x, y)$  pontoknak a koordinátái elégítik ki a felírt egyenletet, amelyeken áthalad az öt adott pontot is tartalmazó kúpszelet. Minthogy azonban az előző tétel szerint az öt adott pont egyetlenegy kúpszeletet határoz meg, a felírt egyenletet ennek az egyetlen kúpszeletnek a pontjai és csak ezek elégítik ki. —

**Tétel.** Ha öt közönséges pont között nincs három egy egyenesen elhelyezkedő, akkor egyetlenegy olyan közönséges kúpszelet van, amely ezt az öt pontot tartalmazza.

Tudjuk már, hogy az öt pont egyetlen másodrendű görbét határoz meg. Tételünk azt mondja ki, hogy ez az egyetlen másodrendű görbe közöséges. Kimondhatnánk, hogy az előző tétel determinánsalakban megadott görbeegyenletének determinánsa akkor és csak akkor 0, ha az öt pont közül három egy egyenesen van.

*Bizonyítás.* Az öt pont által meghatározott másodrendű görbe nem lehet elfajuló, mert akkor legfeljebb két egyenesből állna, és két egyenesen csak négy pontot tudunk úgy felvenni, hogy közülük három pont ne legyen egy egyenesen. —

**B1** 48.1 B mintájára megjegyezhetjük, hogy ha a kúpszeletek körét az ideális egyenest tartalmazó elfajuló görbékkel bővítjük, akkor szakaszunk első tétele még ideális pontok szerepeltetése mellett is érvényes. Ennek bizonyítása egyszerűbb is, mert csak azt kell vizsgálni, hogy a harmadfokú egyenlet megoldása révén adódó  $A + \lambda B$  kifejezés azonosan eltűnik-e.

48.1 B utolsó bekezdésének mintájára kimondhatjuk, hogy ha az ottani megszorításokat is a tételbe foglaljuk, akkor első tételünkben ideális pontokat is szerepeltethetünk anélkül, hogy a kúpszeletek körét bővítenők.

A második tételben sem kell közöséges pontokra szorítkozni, ha a determinánst úgy képezzük a homogén koordinátákból, ahogyan 48.1 B az ottani első tétellel kapcsolatban előírta.

Közvetlenül adódik így az is, hogy utolsó tételünk változtatás nélkül érvényes, ha közöséges pontok mellett ideális pontokról is szólnak.

**B2** A dualitás elve alapján az utolsó két szakasz tételeit átírhatjuk másodosztályú vonalalakzatokra (vö. 46.5 B3), ha a projektív síkra megfogalmazott tételekből indulunk ki. Ez az átírás semmiféle nehézséggel sem jár, s mi itt csak az utolsó tétel duális megfelelőjét hangsúlyozzuk: Ha öt egyenes között nincs három közös ponton áthaladó, akkor egyetlenegy olyan közöséges kúpszelet van, amely érinti ezt az öt egyenest.

Ebből következik, hogy egy közöséges kúpszelet hat érintője már nem adható meg tetszőlegesen, hogy tehát hat érintő már bizonyos megkötésnek tesz eleget. A következő szakaszban éppen ezzel a megkötéssel foglalkozunk.

**48.3** Ha egy közöséges kúpszelet hat érintőjének valamilyen ciklikus sorrendet adunk, azt mondjuk, hogy a *kúpszelet köré írt hatszöget* alkotnak, és ennek a hatszögnek az *oldalai*. Azt is megengedjük, hogy két *szomszédos*, a ciklikus sorrendben egymást követő oldal azonos legyen.

Két-két szomszédos oldal metszéspontja a hatszög egy-egy *szögpontját* adja. Ha két szomszédos oldal azonos, akkor érintési pontjukat tekintjük metszéspontjuknak. A hat szögpont között nincsenek azonos pontok (lásd B1). Két szögpont *szomszédos*, ha az ezeket metszéspontként szolgáltató oldalak közül az egyik közös. Két szögpont *átellenes*, ha nem szomszédosak, és nincs közös szomszédjuk. A hat szögpont tehát három átellenes szögpont-párból áll, és ezek egymástól különböző egyeneseket határoznak meg (lásd B1).

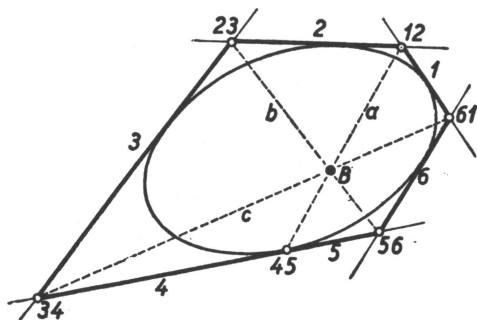
**Tétel (Brianchon\*<sup>10</sup> tétele)** Egy közöséges kúpszelet köré írt hatszög átellenes szögpontpárjait összekötő egyenesek egymást egy közös pontban metszik.

A három egyenes közös pontja a hatszög *Brianchon-féle pontja*. Ha a körülírt hatszög oldalait a ciklikus sorrendjükben számozzuk meg, és a számpárok a megfelelő oldalak metszéspontjait jelölik, akkor az

$$\begin{array}{ccc} 12 & 23 & 34 \\ 45 & 56 & 61 \\ \hline a & b & c \end{array}$$

elrendezésben az átellenes szögpontpárok állnak egy-egy oszlopban. Alattuk az összekötő egyenesüket jelölő betű áll. Tételünk azt mondja ki, hogy az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  átlók közös  $B$  pontban metszik egymást (484. ábra).

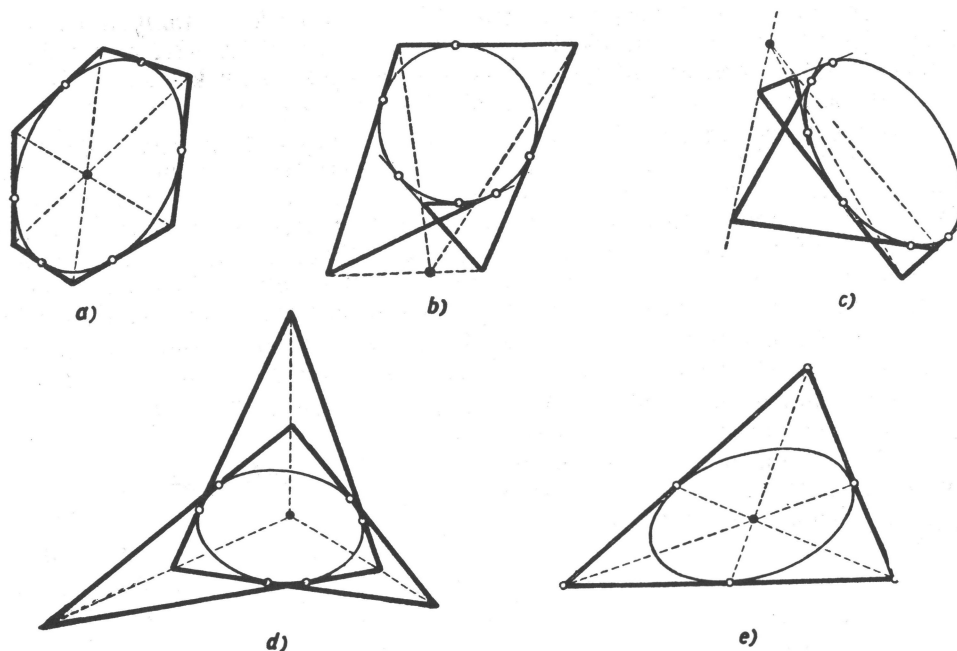
<sup>10</sup>\* Ch. J. Brianchon (ejtsd: brianson), 1785—1864, francia tűzértiszt.



484

Hangsúlyozzuk, hogy tételünk arra az esetre is vonatkozik, amikor a hatszög oldalai, ezek érintési pontjai, valamint a hatszög szögpontjai között ideális elemek is szerepelnek. Hangsúlyozzuk azt is, hogy a hat érintő ciklikus sorrendje teljesen függetlenül választható meg attól, hogy érintési pontjaik a kúpszeleten milyen sorrendben következnek (485. ábra).

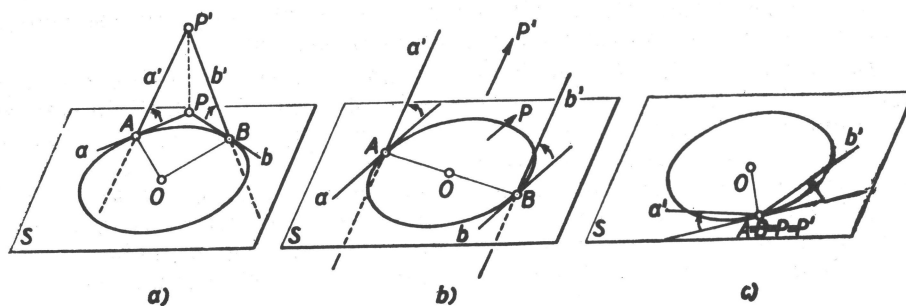
*Bizonyítás, a)* Először azt látjuk be, hogy elegendő a tételt tetszőleges közönséges kúpszelet helyett csak körre bizonyítani. Ez abból következik, hogy minden közönséges kúpszelet forgáskúpnak a metszete, azaz bármely közönséges kúpszelet centrális vetítéssel körbe vihető át. Ez a vetítés a kúpszelet érintőit a kör érintőibe, a kúpszelet köré írt hatszöget a kör köré írt (ugyanúgy definiált) hatszögbe, az eredeti hatszög átellenes szögpontjait és összekötő egyenesüket a vetületi hatszög átellenes szögpontjaiba és összekötő egyenesükbe viszi át. Ha pedig a vetületi ábráról tudjuk, hogy az átellenes szögpontokat összekötő átlók egy pontban metszik egymást, akkor ennek az eredeti ábrára is teljesülnie kell, mert csak egymást egy pontban metsző egyenesek adhatnak vetületként egymást egy pontban metsző egyeneseket.



485

b) Mielőtt tételünket a körre bizonyítanók, segédtegelként egy a körre vonatkozó állítást igazolunk. Tekintsük az  $S$  síkban az  $O$  középpontú kört  $A, B$  pontokban érintő  $a, b$  egyeneseket. Az  $A, B$  pontok azonosak is lehetnek, s akkor az  $a, b$  érintők is azonosak. Forgassuk el az  $a$  egyenest az  $OA$  tengely körül valamely  $\alpha$  hegyesszöggel, mégpedig az  $O$  pontból tekintve pozitív irányban, a  $b$  egyenest pedig

az  $OB$  tengely körül ugyanazzal az a szöggel, de az  $O$  pontból tekintve negatív irányban (486. ábra). Azt állítjuk, hogy az



486

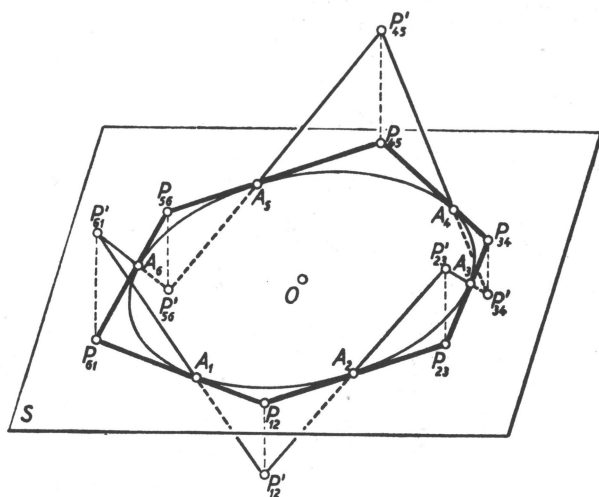
elforgatással keletkező  $a'$ ,  $b'$  egyenesek egy síkban vannak, és  $P'$  közös pontjuknak az  $S$  síkra vetett merőleges vetülete az  $a$ ,  $b$  egyenesek közös  $P$  pontja, és itt  $a$   $b$  azonossága esetén közös pontjuknak a közös érintési pontjuk tekintendő. A  $P'$  pont merőleges vetületéhez úgy jutunk, hogy az  $S$ -re merőleges irányú ideális pontból mint centrumból a kör síkjára vetítjük. Erre a kiegészítésre azért van szükség, mert az  $a$ ,  $b$  egyenesek párhuzamosak is lehetnek, és akkor ideális pont vetítésére van szükség.

Állításunk bizonyítása végett tekintsük azt a  $T$  síkot, amely  $S$ -et az  $AOB$  szögfelező egyenesében merőlegesen metszi. A kör, az  $A$ ,  $B$  pontpár, az  $a$ ,  $b$  egyenesek és az  $OA$ ,  $OB$  sugarak a  $T$  síkra vonatkozóan szimmetrikusan helyezkednek el. Ebből következik, hogy az  $a'$ ,  $b'$  egyenesek is egymás tükörképei, mert az  $OA$  sugár körüli pozitív szögű elforgatásnak a tükrözés az  $OB$  sugár körüli negatív szögű elforgatást felelteti meg, hiszen ez a tükrözés az orientációt megváltoztatja. Az  $a'$ ,  $b'$  egyenesek nem azonosak, mert vagy más-más pontban döfik az  $S$  síkot, vagy pedig ugyanabból az egyenesből más-más elforgatással származnak. Ebből és a szimmetriából következik, hogy az  $a'$ ,  $b'$  egyenesek a  $T$  síkot ugyanabban a (közönséges vagy ideális)  $P'$  pontban döfik.

Az  $a'$ ,  $b'$  egyenesek származtatásából következik, hogy  $S$ -re vetett merőleges vetületeik az  $a$ ,  $b$  egyenesek.  $P'$  metszéspontjuk  $P$  vetülete ezért az  $a$ ,  $b$  egyenesek közös pontja. Ha tehát az  $a$ ,  $b$  egyenesek nem azonosak, akkor  $P$  a metszéspontjuk. Ha viszont a és  $b$  azonos, akkor az  $a'$ ,  $b'$  egyenesek áthaladnak az  $A = B$  ponton, ez a pont tehát a  $P'$  metszéspontjukkal és  $P'$ -nek  $S$ -re vetett vetületével is azonos.

c) Tételünk körre vonatkozó állításának bizonyítására térünk rá. Tekintsük az  $S$  síkban az  $O$  középpontú kör  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  pontjaiban vont érintői által alkotott körülírt hatszöget (487. ábra). A hatszög szögpontjait  $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}, P_{56}, P_{61}$  jelöli. Forgassuk el a hatszög oldalait az érintési pontjukhoz vezető sugár körül a hegyesszöggel, mégpedig az  $OA_1, OA_3, OA_5$  sugarak körül  $O$ -ból tekintve pozitív irányban, az  $OA_2, OA_4, OA_6$  sugarak körül pedig negatív irányban. A szomszédos oldalak b)

szerint az elforgatás után is metszik egymást, metszéspontjaikat rendre  $P'_{12}, P'_{23}, P'_{34}, P'_{45}, P'_{56}, P'_{61}$  jelöli. Ezeknek a pontoknak  $S$ -re vetett merőleges vetületei b) szerint körülírt hatszögünk ugyanolyan indexű szögpontjai. Eszerint a hat vetített pont között nincsenek azonosak.



487

Az is következik b)-ből, hogy a  $P'_{12}P'_{23}$  és  $P'_{45}P'_{56}$  egyenesek egy síkban vannak. Ezért a  $P'_{12}P'_{45}$  és  $P'_{23}P'_{56}$  egyenesek is egy síkban vannak, tehát metszik egymást. Hasonló megfontolással adódik, hogy az

$$a' = P'_{12}P'_{45}, \quad b' = P'_{23}P'_{56}, \quad c' = P'_{34}P'_{61}$$

egyenesek közül bármely kettő metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy ez a három egyenes vagy egy síkban van (ha metszéspontjaik különbözők), vagy egy közös ponton halad át.

Az  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  egyenesek azonban nincsenek egy síkban. Ha ugyanis egy síkban volnának, akkor ez a sík tartalmazná a  $P'_{12}, P'_{23}, P'_{34}, P'_{45}, P'_{56}, P'_{61}$  pontokat és az összekötő egyenseiken elhelyezkedő  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  pontokat is, tehát az  $S$  síkkal volna azonos. Ez azonban lehetetlen, mert  $S$  nem tartalmazza az elforgatott érintőket, s így nem tartalmazhatja egy ilyen érintő két különböző pontját.

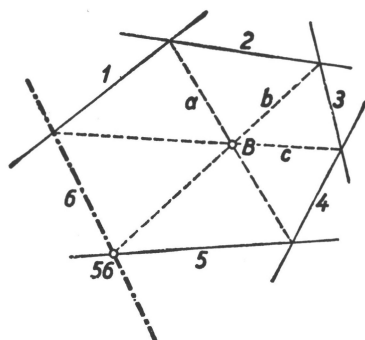
Az  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  egyenesek ezek szerint egy közös ponton haladnak át. Ezért az  $S$  síkra vetett merőleges vetületeik, az

$$a = P_{12}P_{45}, \quad b = P_{23}P_{56}, \quad c = P_{34}P_{61}$$

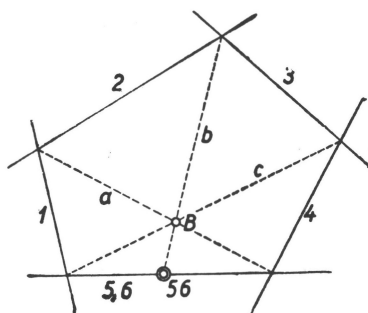
egyenesek is egy pontban metszik egymást. -

**A1** Brianchon tételét felhasználhatjuk szerkesztési feladatok megoldására.

Ha egy kúpszelet öt érintője van adva, és egy hatodik érintőt akarunk szerkeszteni, akkor a következő módon járhatunk el: Jelölje  $l, 2, 3, 4, 5$  az adott egyeneseket (488. ábra). Az 5 egyenesen felvesszünk egy az  $l, 2, 3, 4$  egyenesekhez nem illeszkedő 56 pontot, és az ebből a pontból a kúpszelethez vont másik érintőt, a 6 egyenest keressük. Az  $l, 2, 3, 4$  pontokat összekötő  $a$ , és  $23, 56$  pontokat összekötő  $b$  egyenes metszéspontja a  $B$  Brianchon-pont. A  $34$  és  $B$  pontokat összekötő  $c$  egyenes az  $l$  egyenesből a  $6l$  pontot metszi ki. Az  $56, 6l$  pontok összekötő egyenese a keresett 6 érintő.



488



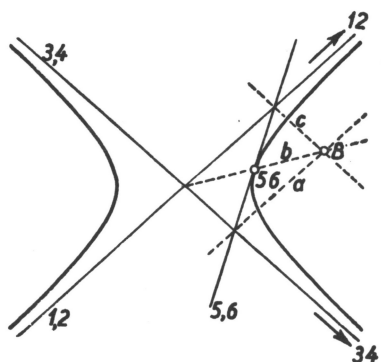
489

Ha egy kúpszelet öt érintője van adva, akkor egyikük érintési pontját a következőképpen szerkeszthetjük meg: Az adott egyeneseket  $1, 2, 3, 4, 5$  jelöli, és az  $5$  egyenest egyben  $6$  egyenesnek is tekintjük (489. ábra). A  $12, 45$  és  $34, 61$  pontpárok által meghatározott  $a, c$  egyenesek  $B$  metszéspontját a  $23$  ponttal kötjük össze. Az így kapott  $b$  egyenes az  $5, 6$  jelű egyenesből a keresett  $56$  pontot metszi ki.

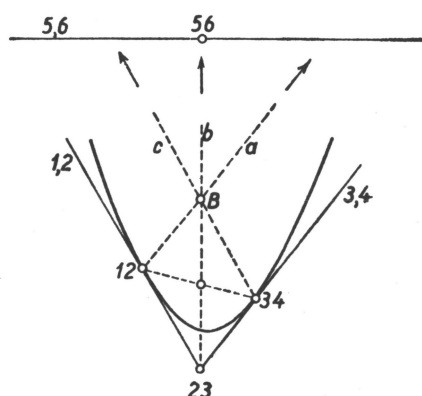
Ezek a szerkesztések mutatják, hogy öt érintő birtokában megszerkeszthetjük a kúpszelet tetszőlegesen sok pontját és a bennük vont érintőket, azaz mondhatjuk, hogy megszerkeszthetjük magát a kúpszeletet is. Érdekességgéppen hangsúlyozzuk, hogy ehhez a szerkesztéshez csak vonalzót használtunk.

**A2 Brianchon tétele** lehetőséget ad néhány már ismert tétel gyors bizonyítására.

Első példának azt bizonyítjuk be, hogy a hiperbola érintőjének az aszimptoták által kimetszett szakaszát az érintési pont felezi (lásd 43.6). Jelölje  $1$  és  $2$  az egyik aszimptotát,  $3$  és  $4$  pedig a másik aszimptotát, tehát  $12$  és  $34$  az aszimptoták ideális pontját (490. ábra). Ha  $5$  és  $6$  a hiperbola egy érintőjét jelöli, akkor A1 utasítása szerint megszerkeszthetjük az  $56$  érintési pontot. Ez a szerkesztés az aszimptoták és az  $a, c$  egyenesek által határolt paralelogrammához vezet. Ennek egyik átlója az  $5, 6$  érintőből az aszimptoták által kimetszett szakasz, s ebből az  $56$  érintési pontot a paralelogramma másik átlója metszi ki.



490



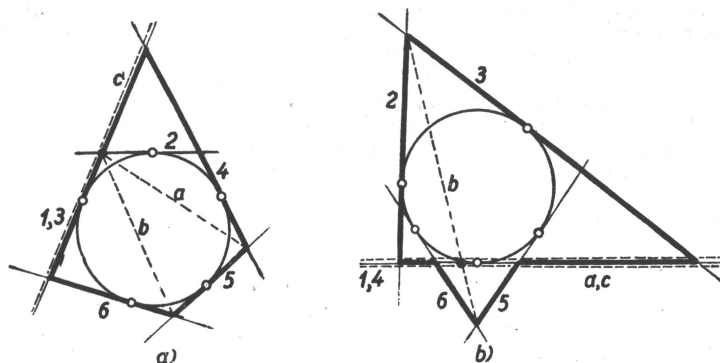
491

Második példaképpen bebizonyítjuk, hogy ha a parabola húrjának felezőpontját a végpontjaiban vont érintők metszéspontjával összekötjük, a parabola tengelyével egyező állású egyeneshez jutunk (lásd 46.7). Jelölje evégből  $1$  és  $2$  az egyik,  $3$  és  $4$  a másik érintőt,  $5$  és  $6$  pedig az ideális egyenest, amely ugyancsak érinti a parabolát (491. ábra). A1 második szerkesztése ezekből az adatokból az  $56$  érintési ponthoz, azaz a parabola ideális pontjához vezet. Ilyen módon az  $12$ ,  $23$ ,  $34$ ,  $B$  csúcsú paralelogrammához jutunk. Ennek egyik átlóegyenese parabolaátmérő, és valóban felezi a  $12$ ,  $34$  pontokat összekötő másik átlót, a parabola húrját.

**B1** Brianchon tételének kimondásakor csak a körülírt hatszög szomszédos oldalairól mondtuk, hogy azonosak lehetnek. Ha csak az egymástól különböző átellenes szögpontpárok által meghatározott egyenesekről szólnunk, és csak annyit, hogy az ilyen pontpárok által meghatározott egyeneseknek van közös pontjuk, akkor Brianchon tételében minden megszorítás nélkül megengedhetjük, hogy a hat érintő között azonosak is szerepelhessenek (nemcsak kettő és nemcsak szomszédosak).

Ez a kiegészítés azonban csak érdektelen vagy semmitmondó állításokkal bővíti tételünk tartalmát (492. ábra). Ha az oldalak között két azonos másodsomszéd szerepel, pl. az  $1$  és  $3$  egyenesek azonosak, akkor az egymástól különböző átellenes szögpontpárok által meghatározott átlók tartalmazzák a  $12$  pontot; ha pedig két azonos harmadszomszéd, azaz átellenes oldal szerepel közöttük, pl.  $1$  és  $4$  azonos, akkor azért helyes a tétel állítása, mert  $a$  és  $c$  azonos (feltéve, hogy ezeket az egyeneseket két-két egymástól különböző pont határozza meg).

A tétel eredeti kimondásakor azért engedtük meg csak a szomszédos oldalak azonosságát, mert ez a korlátozás egyrészt csak érdektelen, semmitmondó eseteket zár ki, másrészt viszont a bizonyítás megszövegezését lényegesen megkönnyítette. Ez a korlátozás tette lehetővé, hogy mondhattuk, a körülírt hatszög szögpontjai különböző pontok, s hogy az átellenes szögpontokat összekötő átlók különböző egyenesek. Ezt a kijelentést a következőkkel támasztjuk alá:



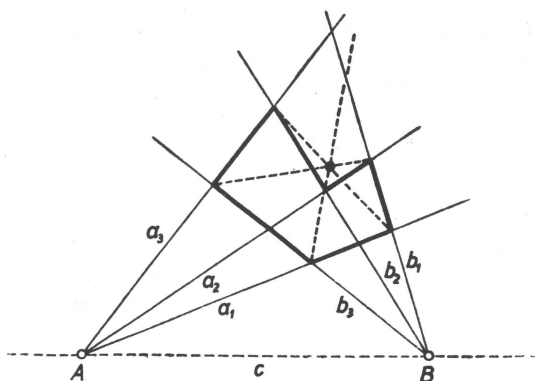
492



Két szögpont csak akkor lehet azonos, ha az ezeket szolgáltató oldal párok is azonosak; ilyen oldalpárok esetében azonban két nem szomszédos oldalnak is azonosnak kell lennie. Ha pedig az átelleses szögpontpárokat összekötő átlók közül kettő azonos, de a szögpontok mind különbözők, pl. a 12, 45 és 34, 61 pontokat összekötő átlók azonosak, akkor ezek az 1 és 4 oldallal is azonosak, hiszen mindegyiknek két-két pontját, ti. a 12 és 61, valamint a 45 és 34 pontokat tartalmazzák; ilyenkor tehát két azonos átelleses oldal szerepel.

**B2\*** A Brianchon-tétel egy közönséges másodosztályú vonalalakzat, azaz vonalkúpszelet hat egyeneséről szól. Igaz a tétel akkor is, ha elfajuló másodosztályú vonalalakzatra, azaz (az ilyen vonalalakzatokat felölölő) két sugársorra mondjuk ki (vö. 46.5 B3). B1 mintájára azt is megengedhetjük, hogy ne csak szomszédos oldalak legyenek azonosak, de akkor csak az egymástól különböző átelleses szögpontok által meghatározott átlók közös pontjáról beszélünk. Azonos oldalak metszéspontjának most a sugársor tartóját tekintjük, ha egy sugársornak a másikhoz nem tartozó eleméről van szó; két sugársor közös elemének önmagával alkotott metszéspontjával pedig ennek az egyenesnek bármely pontját választjuk.

Brianchon tételének ez a bővítése felölleli Pappos tételének 44.8-ban tárgyalt duálisát (493. ábra). Megmutatjuk azonban, hogy ezen túlmenően csak érdektelen vagy semmitmondó állításokat foglal magába.



493

Semmitmondó a tétel, ha egyetlen sugársorról van csak szó, hiszen ilyenkor a szögpontok mind azonosak. Vizsgáljuk tehát az  $A, B$  tartójú sugársorokat. Közös egyenesüket  $c$ , a többit pedig indexes  $a$  és  $b$  jelöli. Különböző indexű  $a$  vagy  $b$  betűk ugyanazt az egyenest is jelölhetik. A lehetőségek áttekintésekor mindig számolunk azzal, hogy a sugársorok szerepe felcserélhető, s hogy a hat oldal ciklikus cseréje, valamint az ellentétes sorrendre való áttérés a tétel tartalmán mit sem változtat.

a) Először csak azokat az eseteket tekintjük, amikor  $c$  nem szerepel a hat oldalegyenes között. A következő esetekkel kell foglalkoznunk:

1.  $a_1 \ b_2 \ a_2 \ b_2 \ a_3 \ b_3,$
2.  $a_1 \ a_2 \ b_1 \ a_3 \ b_2 \ b_3,$
3.  $a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3,$
4.  $a_1 \ a_2 \ b_1 \ a_3 \ a_4 \ b_2,$
5.  $a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ a_4 \ b_2,$
6.  $a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ x \ x,$

ahol  $x$  bármelyik sugársorhoz tartozó egyeneseket jelöl. Ha a hat egyenes közül három-három tartozik az egyik és a másik sugársorhoz, akkor az első három esethez jutunk; ha négy tartozik ugyanahhoz a sugársorhoz, akkor meg az utolsó három eset adódik; a legutolsó azokat a lehetőségeket is felölleli, amikor a hat egyenes közül öt vagy hat tartozik ugyanahhoz a sugársorhoz.

Az általánosított Brianchon-tétel minden esetben helyes. Ha az 1. esetben nem szerepelnek azonos egyenesek, akkor a tétel Pappos tételének duális megfelelőjét mondja ki; ha viszont azonos egyenesek

is szerepelnek, pl.  $a_1$  és  $a_2$  azonos, akkor az  $(a_1b_1)$  ponton mindegyik átló áthalad, hiszen az  $(a_2b_2) = (a_1b_2)$  és  $(b_3a_1)$  szögpont csak az  $a_1$  átlót határozhatja meg. A 2. esetben mindegyik átló áthalad a  $(b_1a_3)$  ponton, hiszen  $(a_1b_2)$  és  $(a_3b_2)$  összekötő egyenese  $a_3$ ,  $(a_2b_1)$  és  $(b_2b_3)$  összekötő egyenese pedig  $b_1$ . A 3. esetben két átló azonos, hiszen  $(a_1a_2)$  azonos  $(a_2a_3)$ -mal,  $(b_1b_2)$  pedig  $(b_2b_3)$ -mal. A 4. esetben az átellenes  $(a_1a_2)$ ,  $(a_3a_4)$  szögpontok azonosak. Az 5. esetben két átló azonos, mert az  $(a_1a_2)$  és  $(b_1a_4)$  pontok, valamint az  $(a_2a_3)$  és  $(b_1a_4)$  pontok összekötő egyenese  $a_4$ -gyel azonos. Végül a 6. esetben mindegyik átló áthalad az  $A = (a_1a_2) = (a_2a_3) = (a_3a_4)$  ponton.

b) Tekintsük most azokat az eseteket, amikor a hat oldal között  $c$  is szerepel, de bármely két szomszédos oldal között van  $c$ -től különböző is. Feltehetjük, hogy a  $c$ -től különböző oldalak közül legalább annyi tartozik az  $A$  tartópontú sugársorhoz, mint a másikhoz.

Ha a  $c$  egyenest is az  $A$  tartópontú sugársorhoz tartozónak tekintjük, és pl.  $a_0$ -lal jelöljük, akkor az a)-ban már letárgyalt 4–6. esetek valamelyikéhez jutunk. Az ezekről mondottak változatlanul alkalmazhatók most is, s ezért a most tekintett esetekben nincs újabb okoskodásra szükség.

c) Tekintsük most azokat az eseteket, amikor a hat oldal közül két szomszédos azonos  $c$ -vel, de a többi nem. A következő eseteket kell vizsgálnunk:

1.  $c \quad a_1 \quad b_1 \quad b_2 \quad a_2 \quad c,$
2.  $c \quad a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c,$
3.  $c \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2 \quad c,$
4.  $c \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad a_3 \quad c,$
5.  $c \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad b_1 \quad c,$
6.  $c \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad c.$

Ha a  $c$ -től különböző oldalak közül kettő-kettő tartozik az egyik és a másik sugársorhoz, akkor az 1 —3. esetekhez jutunk; ha közülük három tartozik ugyanahhoz a sugársorhoz, akkor a 4., 5. esetek valamelyike lép fel; ha végül mind ugyanahhoz a sugársorhoz tartozik, akkor a 6. eset adódik.

A tétel állítása minden esetben helyes, mégpedig azt is figyelembe véve, hogy  $(cc)$  metszéspontul  $c$  tetszőleges pontját választhatjuk. Az 1. esetben ugyanis az  $A = (ca_1) = (ca_2)$  ponton a  $B = (b_1b_2)$  és  $(cc)$  pontok által meghatározott egyenes is áthalad, hiszen az utóbbi pont is az  $AB$  egyenesen van. A 2. esetben mindegyik átló áthalad a  $(b_1a_2)$  ponton, mert  $(ca_1)$  és  $(b_1a_2)$  összekötő egyenese  $a_2$ , az  $(a_1b_1)$ ,  $(b_2c)$  pontoké pedig új. A 3. esetben két átló azonos, mert  $(ca_1)$  azonos  $(a_1a_2)$ -vel,  $(b_1b_2)$  pedig  $(b_2c)$ -vel. A 4. esetben az átellenes  $(a_1a_2)$ ,  $(a_3c)$  szögpontok azonosak. Az 5. és 6. esetben mindegyik átló áthalad az  $A = (ca_1) = (a_1a_2) = (a_2a_3)$  ponton.

d) Most a hat oldal közül két szomszédos és egy harmadik, velük nem szomszédos legyen azonos  $c$ -vel. A b)-ben alkalmazott fogást most is alkalmazhatjuk, és ilyen módon a c)-ben már letárgyalt 4–6. esetek valamelyikéhez jutunk. Az ezekről az esetekről mondottak most is helytállóak.

e) Ha a hat oldal közül három, mégpedig három egymásra következő azonos  $c$ -vel, akkor az

1.  $c \quad a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad c \quad c,$
2.  $c \quad a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad c \quad c,$
3.  $c \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad c \quad c$

eseteket kell vizsgálnunk. Az 1. esetben az átellenes  $(ca_1)$ ,  $(a_2c)$  szögpontok azonosak. A 2. és 3. esetben a hat szögpont közül legfeljebb egy van a  $c$  egyenesen kívül, ti. a 2. esetben az  $(a_2b_1)$  szögpont, s ezért az átlók közül csak egy lehet  $c$ -től különböző.

f) Az utolsó érv minden olyan esetben helytálló, amikor a hat oldalegyenes közül legalább négy azonos  $c$ -vel.

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, tehát befejeztük az általánosított Brianchon-tétel bizonyítását. Leszögezzük, hogy joggal mondják Pappos tételének duálisát a Brianchon-tétel elfajuló esetének, bár helyesebb volna egyetlen érdeke elfajuló esetének mondani

**48.4** Ha egy közösleges kúpszelet hat pontjának valamilyen ciklikus sorrendet adunk, azt mondjuk, hogy a *kúpszeletbe írt hatszöget* határoztunk meg. A hat pont a hatszög hat *szögpontja*. Azt is megengedjük, hogy két *szomszédos*, azaz a ciklikus sorrendben egymást követő szögpont azonos legyen.

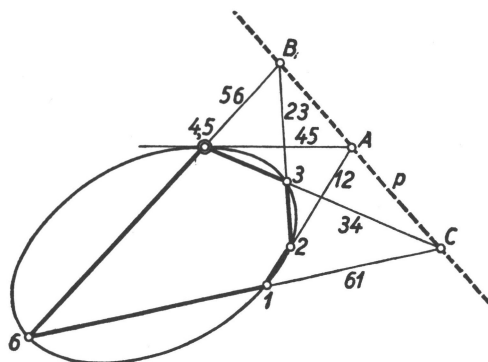
Két-két szomszédos szögpont összekötő egyenese a beírt hatszög egy-egy *oldalát* adja. Ha két szomszédos szögpont azonos, akkor összekötő egyenesüknek az ebben a pontban a kúpszelethez vont érintőt tekintjük. A hat oldal között nincsenek azonosak (lásd B). Két oldal *szomszédos*, ha az ezeket meghatározó szögpontok közül az egyik közös. Két oldal *átellenes*, ha nem szomszédosak, és nincs közös szomszédjuk. A hat oldal tehát három átellenes oldalpárból áll, és ezek egymást három különböző pontban metszik (lásd B).

**Tétel (Pascal\*<sup>11</sup> tétele).** Egy közösleges kúpszeletbe írt hatszög átellenes oldalpárjai egymást egy egyenes három pontjában metszik.

A három metszéspontot tartalmazó egyenest *Pascal-féle egyenesnek* mondjuk. Ha a beírt hatszög szögpontjait ciklikus sorrendben megszámozzuk, és a számpárok a megfelelő szögpontok összekötő egyeneseit jelölik, akkor az

$$\begin{array}{ccc} 12 & 23 & 34 \\ 45 & 56 & 61 \\ \hline A & B & C \end{array}$$

elrendezésben átellenes oldalpárok állnak egy-egy oszlopban. Alattuk a metszéspontjukat jelölő betű áll. A tétel szerint az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok egy  $p$  egyenesen vannak (494. ábra).

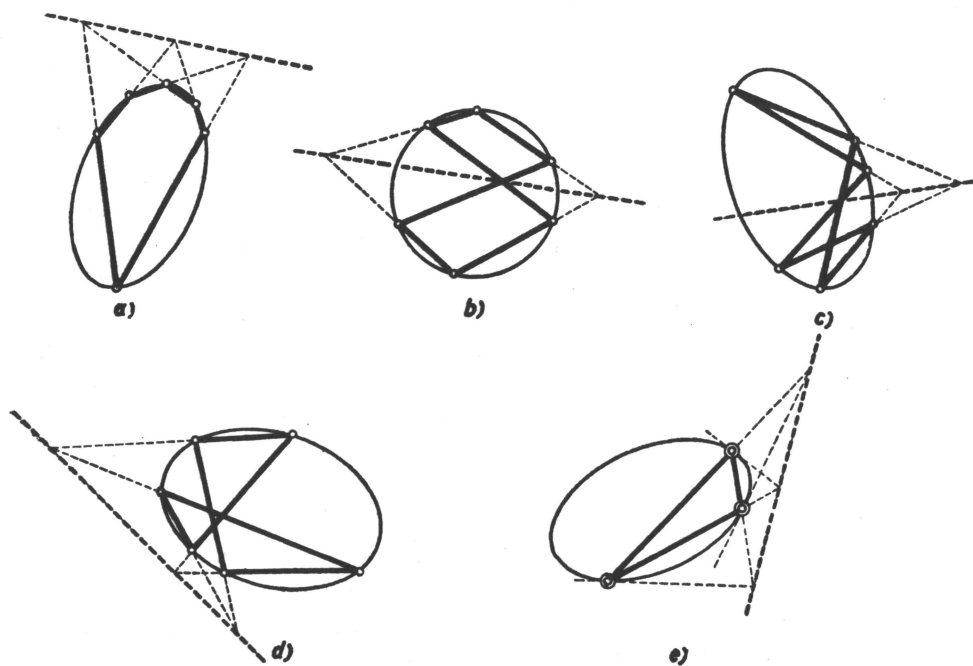


494

Tételünk arra az esetre is vonatkozik, amikor a hatszög szögpontjai és oldalai között ideális elemek is szerepelnek.

Hangsúlyozzuk, hogy a szögpontok ciklikus sorrendje teljesen függetlenül választható meg attól, hogy a pontok a kúpszelet bejárása során hogyan következnek egymásra (495. ábra).

<sup>11</sup>\* B. Pascal, 1623—1662 francia matematikus, fizikus, író és filozófus

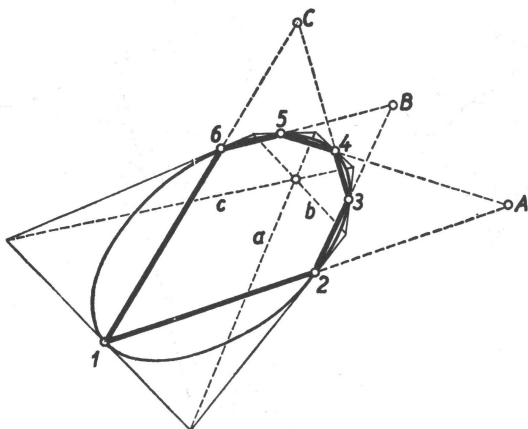


495

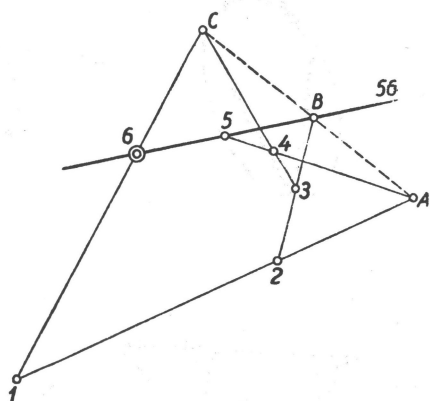
*Bizonyítás.* A beírt hatszög szögpontjaiban vont érintők egy a kúpszelet köré írt hatszöget adnak meg, ha sorrendjüknek érintési pontjaik megadott sorrendjét választjuk.

Ennek a körülírt hatszögnek a szögpontjai a beírt hatszög megtelelő oldalainak a pólusai (496. ábra). Ha ugyanis a beírt hatszög két különböző szögpontot összekötő oldaláról van szó, akkor azért helyes az állítás, mert a kúpszelet két pontjában vont érintő metszéspontja a két pont összekötő egyenesének a pólusa; ha viszont a beírt hatszög két azonos szögpontja által meghatározott oldalról, tehát a szögpontban vont érintőről van szó, akkor ennek pólusa az érintési pont, és a körülírt hatszög esetében két azonos érintő metszéspontjának valóban az érintési pontot tekintettük.

Ezek szerint a kapott körülírt hatszög átellenes szögpontjai az eredeti beírt hatszög átellenes oldalainak pólusai. A beírt hatszög átellenes oldalpárjának a metszéspontja ezért a körülírt hatszög megfelelő két átellenes szögpontjának mindegyikéhez konjugált. Ebből következik, hogy a beírt hatszög átellenes oldalainak a metszéspontja a körülírt hatszög megfelelő átellenesszögpontjait összekötő egyenesnek a pólusa. Következik így az is, hogy a körülírt hatszög átellenes szögpontjait összekötő átlók közös pontja, azaz a körülírt hatszög Brianchon-féle pontja konjugált a beírt hatszög átellenes oldalpárjai által alkotott három metszéspont mindegyikéhez. Ez a három metszéspont ezért a körülírt hatszög Brianchon-pontjának polárisán, tehát egy egyenesen van. —



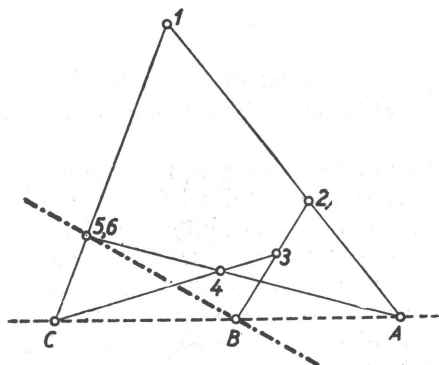
496



497

**A1** A Pascal-tételt felhasználhatjuk szerkesztési feladatok megoldására (vö. 48.3 A1). Ha egy kúpszelet öt pontja van adva, és egy hatodik pontot keresünk, akkor az 5-tel jelölt ponton át az 1, 2, 3, 4 pontokat nem tartalmazó egyenest húzunk, s ezt 56 egyenesnek választjuk (497. ábra). Megszerkeszthetjük így az A, B pontokat és a Pascal-egyenest, ebből a 34 egyenes a C pontot metszi ki, végül az A és C pontok összekötő egyenese az 56 egyenest a keresett 6 pontban metszi.

Ha egy kúpszelet öt pontja van adva, és ezek egyikében a kúpszelethez vont érintőt keressük, akkor ezt a pontot 5 és egyben 6 pontnak is tekintve megszerkeszthetjük az A, C pontokat és a Pascal-egyenest, ebből a 23 a B pontot metszi ki, és ezt az 5, 6 ponttal összekötve a keresett érintőt kapjuk (498. ábra).



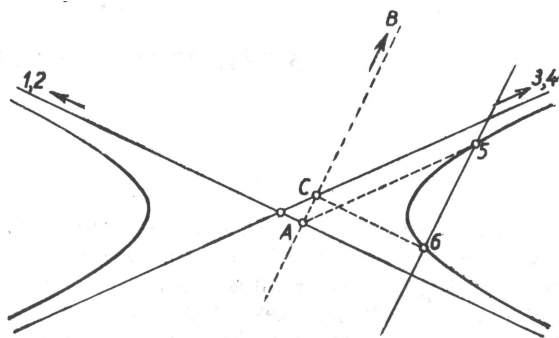
498

Ezek szerint a kúpszelet öt pontjának ismeretében megszerkeszthetjük a kúpszelet tetszőlegesen sok pontját és a bennük vont érintőket, azaz mondhatjuk, hogy megszerkeszthetjük magát a kúpszeletet is. Ehhez a szerkesztéshez csak vonalzóra van szükség.

**A2** Pascal tételét egy már ismert tétel bizonyítására használjuk fel. Bebizonyítjuk, hogy a hiperbolát két pontban metsző egyenesen a hiperbola által kimetszett pontok szimmetrikusan helyezkednek el az aszimptoták által kimetszett pontokhoz viszonyítva (lásd 43.6). Jelölje 1, 2 és 3, 4 az aszimptoták ideális pontjait, 5 és 6 pedig a két metszéspontot (499. ábra). Pascal tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy az A és C pontokat az aszimptotákból az 5, 6 pontokon át az aszimptoták egyikével és másikával párhuzamosan húzott egyenesek metszik ki, s hogy AC párhuzamos az 56 egyenessel. Ebből kiolvasható, hogy az AC szakasz egyenlő az 56 egyenesnek azzal a két szakaszával, amelyeknek egyike az 5 ponttól a C pontot tartalmazó aszimptotáig, a másik pedig a 6 ponttól az A pontot tartalmazó aszimptotáig terjed. Ez a bizonyítandó állítás helyességét mondja ki.

**B** Pascal tétele Brianchon tételének duális megfelelője. Az első a közöséges vonalkúpszelet hat egyeneséről szól, a második pedig a közöséges pontkúpszelet hat pontjáról mondja ki a duálisan megfelelőt.

Elég lett volna ezért Pascal tételének bizonyítása végett csak erre a dualításra hivatkoznunk. Azért bizonyítottuk mégis ilyen hivatkozás nélkül, hogy az olyan olvasó is követhesse, aki a dualitás bizonyító erejét nem értette még át. Brianchon tételére adott bizonyításunkat nem írhattuk át a duális tétel bizonyításává, mert olyan fogalmakkal dolgozott (pl. elforgatás szöge), amelyeknek nincsenek duális megfelelői. Pascal tételére adott bizonyításunk igazában a dualításra épült, mert polaritás segítségével duálisan megfelelő alakzatra tért át (vö. 46.5 B2).

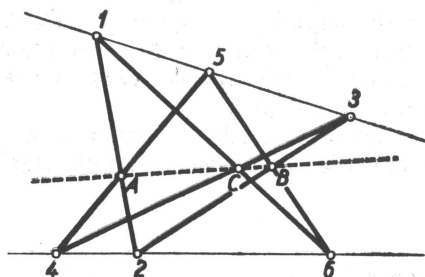


499

Ennek és az előző szakasznak A1 megjegyzése is duálisan felel meg egymásnak. 48.3. B1 és 48.3 B2 dualizálása a következő eredményeket adja:

Ha csak egymástól különböző átellenes oldalak metszéspontjáról szólnunk, és csak azt mondjuk ki, hogy van olyan egyenes, amely ezeket a metszéspontokat tartalmazza, akkor Pascal tételének kimondásakor megengedhetjük, hogy ne csak szomszédos szögpontok lehessenek azonosak. Ha viszont csak szomszédos szög- pontok lehetnek azonosak, akkor a beírt hatszög oldalai mind különbözők, és az átellenes oldalak metszéspontjai között sincsenek azonosak.

Pascal tételét elfajuló kúpszeletekre, azaz (az ilyeneket felölölő) egyenespárra is kimondhatjuk, ha azonos szomszédos szögpontok összekötő egyenesének az elfajuló kúpszeletnek ezt a pontot tartalmazó egyenesét tekintjük, illetőleg a kúpszeletet alkotó egyenesek metszéspontja esetében szabadon választjuk meg az ezen a ponton áthaladó egyenesei: közül. Az előző bekezdésben mondtak mintájára itt is megengedhetjük, hogy ne csak szomszédos szögpontok legyenek azonosak. Pascal tételének ezek az általánosításai felöllelik Pappos tételét (500. ábra), de ezen kívül a tétel eredeti tartalmát csak érdektelen vagy semmitmondó állításokkal bővítik. Eszerint Pappos tétele a Pascal-tétel egyetlen érdekes elfajuló esete.



500

## 6. fejezet - A TÉR ANALITIKUS GEOMETRIÁJA

Ez a fejezet a térgeometria analitikus tárgyalásával foglalkozik. Nem olyan terjedelmes, mint az előző, a sík analitikus geometriáját tárgyaló fejezet. Ennek azonban nem az az oka, hogy a tér analitikus geometriája a síkénál egyszerűbb, vagy kevesebbet ölel fel. Csak mi fogjuk rövidebbre a tárgyalást, s a kihagyott részekre sokszor csak megjegyzéseinkben utalunk.

Ezt egyrészt azért tesszük, mert a módszereket a síkgeometriában már megismertük, s a térben a legtöbb esetben ugyanazokkal a módszerekkel érhetünk célt. A részletes tárgyalás hosszadalmas volna, de javarészt csak a már megismert módszerek újabb, néha kissé módosított alkalmazását jelentené, és sok esetben valamivel bonyolultabb eredményekhez vezetne.

A rövidebbrefogást indokolja másrészt az is, hogy a síkgeometriát fontosabbnak kell mondanunk. Ezt elsősorban azzal támasztjuk alá, hogy mi mindig síkban rajzolunk. A síkgeometria sok részlete ezért gyakorlatilag is fontos, míg a térgeometria megfelelő részletei legfeljebb érdekesek. Példaképpen említjük a szerkesztéseknél is hasznát hajtó síkgeometriai inverziót és kúpszeletek öt ponttal való meghatározását; szólhatnánk ezek térbeli megfelelőiről is, de ez különösebb haszonnal nem járna.

A térgeometria analitikus tárgyalása során csak a sík, az egyenes, és a kúpszeleteknek megfelelő térbeli alakzatok egyenleteivel s az utóbbiak osztályozásával foglalkozunk.

### 49. § Sík és egyenes

A 37. § az egyenes egyenletét tárgyalta a síkban. Ennek mintájára most a sík térbeli egyenletével és az egyenes térbeli egyenletrendszerével foglalkozunk.

**49.1** Egy adott síkra merőleges, 0-tól különböző vektort a sík *normál-vektorának* nevezzük.

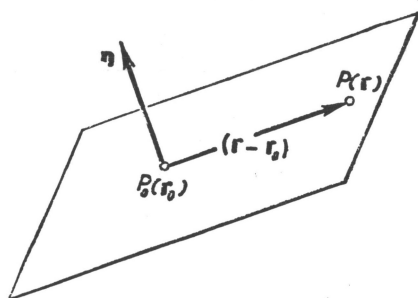
Tétel. A  $P_0(r_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{n}$  normálvektorú sík vektoregyenlete

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

ahol  $\mathbf{r}$  a futó pont helyvektora.

*Bizonyítás, a)* Ha a  $P(\mathbf{r})$  pont a síkhoz tartozik, akkor a  $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor a síkban van (501. ábra), merőleges tehát a síkra merőleges  $\mathbf{n}$  vektorra, s ezért a skaláris szorzatuk 0.

*b)* Ha egy  $P(\mathbf{r})$  pont helyvektora kielégíti a tétel egyenletét, akkor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n}$ , tehát  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  párhuzamos a  $\mathbf{n}$ -re merőleges síkkal. Ebből következik, hogy ha a sík egy  $P_0$  pontjából felmérjük, akkor végpontja, a  $P$  pont is a síkban van.



**Tétel.** A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{n}(A, B, C)$  normálvektori sík egyenlete

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

*Bizonyítás.* Az előző tétel vektoregyenletének átírásával a most felírt egyenlethez jutunk, hiszen  $x - x_0, y - y_0, z - z_0$  az  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  vektor koordinátái.

**Tétel.** Ha az  $A, B, C$  együtthatóknak nem mindegyike 0, akkor

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sík egyenlete, és minden sík egyenlete ilyen alakban írható (általános egyenlet).

*Bizonyítás.* a) Minden sík egyenlete írható a megadott alakban, hiszen az előző tétel egyenletéből beszorzással ilyen alakhoz jutunk. Az  $A, B, C$  együtthatók között mindig van 0-tól különböző, mert  $\mathbf{n}$  nem nullvektor.

b) Ha a tételbeli egyenletből indulunk ki, akkor bevezethetjük a 0-tól különböző  $\mathbf{n}(A, B, C)$  vektort és egy olyan vektort, amelyre  $\mathbf{n}\mathbf{r}_0 = -D$ . Ilyen vektort pl. az

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{D}{\mathbf{n}^2} \cdot \mathbf{n}$$

előírással kaphatunk. A most bevezetett vektorokkal az egyenlet  $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$  alakban írható. Első tételünk szerint ez valóban sík egyenlete.

Bizonyításunk mutatja, hogy a sík általános egyenletében szereplő  $A, B, C$  együtthatók egy normálvektor koordinátáit adják meg.

**B** Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 37. § tárgyalásának mintájára foglalkozhatnánk a sík egyenletének tengelymetszetes alakjával és a sík normálegyenletével is. A paraméteres alakra ez nem áll, erről majd rövidesen szövegünk (lásd 49.3). A sugársorok mintájára itt (egy egyenesen áthaladó vagy párhuzamos síkok által alkotott) *síksorokról* beszélhetnénk.

**49.2 Tétel.** Az egymástól nem feltétlenül különböző  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$  pontok akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A tétel annak feltételét adja meg, hogy mikor van olyan sík, amely mind a négy pontot tartalmazza, és nem szól arról, hogy egy vagy több ilyen sík van-e.

*Első bizonyítás.* Négy pont akkor és csak akkor van egy síkban, ha elfajuló tetraédert határoznak meg, ha tehát a négy pont által meghatározott tetraéder térfogata 0. Tételünk következik tehát abból, hogy a megadott determináns 36.3 szerint a négy pont által meghatározott tetraéder térfogatának (valamilyen előjellel vett) hatszorosa. —

*Második bizonyítás.* Az adott négy pont akkor és csak akkor van egy síkban, ha az

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0,$$

$$Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0$$



egyenletrendszernek van olyan  $A, B, C, D$  megoldása, amelyben az  $A, B, C$  értékek között 0-tól különböző is szerepel. A felírt homogén lineáris egyenletrendszer minden nem triviális megoldása rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, mert az  $A = B = C = 0, D \neq 0$  értékek az egyenleteket nem elégítik ki. Tételünk következik tehát abból, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha determinánsa 0. —

**Tétel.** Ha a  $P_1(x_1, y_1, z_1) P_2(x_2, y_2, z_2) P_3(x_3, y_3, z_3)$  pontok nincsenek egy egyenesen, akkor az általuk meghatározott sík egyenlete

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

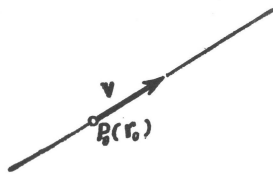
**Bizonyítás.** A  $P(x, y, z)$  pont akkor és csak akkor van a  $P_1P_2P_3$  síkban, ha a  $P, P_1, P_2, P_3$  pontok egy síkban vannak. Tételünk következik tehát az előző tételből. —

A Ha a síkot meghatározó három pont koordinátáit numerikusan ismerjük, és a sík egyenletét akarjuk felírni, akkor nem a most bizonyított tétel adja a leggyorsabb utat. Kevesebb munkával érünk célt, ha kiszámítjuk a három pont két összekötő vektorának vektoriális szorzatát, azaz a keresett sík normálvektorát, majd a normálvektor és (a három pont közül kiválasztott) egy pont ismeretében felírjuk a sík egyenletét.

**49.3 Tétel.** A  $P_0(\mathbf{r}_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{v}$  irányvektorú egyenes paraméteres vektoregyenlete

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t,$$

ahol  $\mathbf{r}$  a futó pont helyvektora, és a  $t$  paraméter minden valós értékei felvehet (502. ábra).



502

**Bizonyításként** elég megemlítenünk, hogy az azonos szövegű síkbeli tétel tárgyalásakor (lásd 37.5) nem támaszkodtunk arra, hogy az egyenes síkban van. —

**Tétel.** A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó  $\mathbf{v}(a, b, c)$  irányvektorú egyenes egyenletének paraméteres alakja

$$x = x_0 + at,$$

$$y = y_0 + bt,$$

$$z = z_0 + ct.$$

**Bizonyításként** elég arra hivatkoznunk, hogy ha az előző tétel vektor- egyenletét koordinátákra írjuk át, a megadott egyenletrendszerhez jutunk. —

Annak mintájára, ahogyan egy alakzat egyenletéről beszéltünk, beszélhetünk egy alakzat egyenletrendszeréről is. Ezt olyan egyenletek alkotják, amelyeknek mindegyikét kielégítik az alakzat minden pontjának koordinátái, viszont más pont koordinátái nem elégítik ki mindegyiküket. Ha egy alakzat egyenletrendszerrel van megadva, ezt mindig felfoghatjuk úgy, hogy ez az alakzat azoknak az alakzatoknak a közös része, amelyeket a rendszert alkotó egyenletek adnak meg.

Tétel. Ha  $\mathbf{v}(a, b, c)$  koordinátáinak egyike sem 0, akkor

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{v}$  irányvektorú egyenes egyenletrendszer.

A tételnek  $\mathbf{v}$  koordinátáira vonatkozó megköötése azt jelenti, hogy az egyenes nem merőleges a koordinátatengelyek egyikére sem, azaz nem párhuzamos egyik koordinátasíkkal sem. Ez a megköötés éppen azt biztosítja, hogy az egyenletrendszerben szereplő törtnek van értelmük.

*Bizonyítás.* Egyenesünk egyenletének paraméteres alakját

$$\frac{x-x_0}{a} = t, \quad \frac{y-y_0}{b} = t, \quad \frac{z-z_0}{c} = t,$$

alakban írhatjuk, mert az  $a, b, c$  számok egyike sem 0. Ebből következik, hogy az egyenes pontjainak koordinátái kielégítik a megadott egyenletrendszert, és az is, hogy az egyenletrendszert kielégítő koordináták az egyenes egy pontjának koordinátái, hiszen ezek a koordináták ugyanahhoz a paraméterértékhez, az egyenletrendszerben szereplő törtnek közös értékéhez tartoznak. —

**A1** Feladatok megoldásánál többnyire az utolsó tételben szereplő egyenletrendszert használjuk. Nem tehetjük azonban ezt akkor, ha olyan egyenesről van szó, amely a koordináta-síkok valamelyikével párhuzamos, amikor tehát valamelyik nevező értéke 0 volna. Ha pl.  $a = 0$ , de  $b$  és  $c$  zérustól különböző, akkor az egyenes egyenletrendszerét

$$x = x_0, \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

alakban írhatjuk; ha viszont pl.  $a = b = 0$ , akkor

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

az egyenes egyenletrendszer. Az egyenes egyenletének paraméteres alakját természetesen minden esetben használhatjuk.

**A2** Hangsúlyozzuk, hogy térbeli egyenes normál vektoráról nem beszélünk, hiszen egy egyenesre merőleges vektorok állása végtelenül sokféle lehet.

**B1** Érdekes megfigyelni, hogy a síkbeli egyenesről mondottak megfelelőit a térben is elmondhatjuk, de részben a síkról, részben pedig az egyenesről.

**B2** 37.2. negyedik tételének mintájára a sík egyenletéről is bebizonyíthatnánk, hogy ugyanannak a síknak két zérusra redukált lineáris egyenlete egymástól csak egy (0-tól különböző) állandó tényezőben különbözhetik. Egy alakzat egyenletrendszerét illetően ilyenfajta egyértelműségről nem lehet szó. Ha az  $F_1 = 0, F_2 = 0$  egyenletrendszerrel adott alakzatot tekintjük, akkor egyenletrendszerét pl.  $F_1 = F_2 = 0, F_1 - F_2 = 0$  alakban is írhatjuk. Nem segít az sem, ha csak  $F_1 = F_2 = F_3$  alakú egyenletrendszerekről szólunk, mert ugyanez az egyenletrendszer pl.  $F_1 + F_2 + F_3 = F_3 + F_3$  alakban is írható, és itt  $F$  a koordinátáknak tetszőleges függvényét jelölheti.

Egy egyenest megadhatunk két tetszőleges, rajta áthaladó sík egyenlete által. Az utolsó tétel egyenletrendszer is két síkot ad meg, ha az egyenletrendszert két egyenletre bontjuk. Ez a két sík speciális helyzetű, mert egy-egy koordinátasíkra merőlegesek. Ha tehát két ismert egyenletű sík metszéspontjáról van szó, és ennek olyan alakú egyenletrendszerét határozzuk meg, amilyen az utolsó tételben szerepelt, akkor igazában nem azt kell mondani, hogy meghatározzuk az egyenes egyenletrendszerét, hanem csak azt, hogy egyenletrendszerét szokott alakra hozzuk.

**B3** Egy alakzat egyenletrendszeréből mindig áttérhetünk az alakzat egyenletére. Ha pl. az  $F_1 = 0, F_2 = 0$  egyenletrendszerrel adott alakzatról van szó, akkor  $F_1^2 + F_2^2 = 0$  ugyanennek az alakzatnak egyenlete.

Felírhatjuk így az egyenes egyenletét is, de az már nem lesz lineáris. Megemlítjük, hogy a komplex geometriában az egyenletrendszernek egyenlettel való helyettesítése hasonló módon nem lehetséges.

49.4 Térgeometriai feladatok analitikus megoldásáról szólnak.

Ha sík vagy egyenes egyenletét keressük, akkor egy pont és egy normálvektor, illetve irányvektor meghatározása a cél, mert ezek birtokában a keresett egyenletet már felírhatjuk. Az adott síkok és egyenesek egyenleteiből is elsősorban egy-egy pontjuknak és az állásukat meghatározó vektornak a koordinátáit olvassuk ki. Ezeket szem előtt tartva mondhatjuk, hogy a síkokra és egyenesekre vonatkozó feladatok többnyire vektorgeometriai feladatokká válnak.

Három sík közös pontjának meghatározása a síkok egyenleteiből alakuló egyenletrendszer megoldását kívánja. Sík és egyenes dőfspontjának meghatározásánál is eljárhatunk úgy, hogy az egyenes egyenletrendszeréből két egymást az egyenesben metsző sík egyenletét olvassuk ki, és a dőfspontot három sík közös pontjaként határozzuk meg. Célszerűbb azonban, ha ilyenkor az egyenes egyenletének paraméteres alakjára térünk át, a sík egyenletében a koordináták helyébe paraméteres kifejezéseiket helyettesítjük, s az így kapott lineáris egyenletet megoldva a dőfspont koordinátáit a paraméter értékének helyettesítésével kapjuk meg.

Külön említjük még, hogy két sík metszésvonalának meghatározásakor a metszésvonal irányvektorát a két sík normálvektorának vektoriális szorzataként könnyen megkaphatjuk, ellenben a metszésvonal egy pontjának meghatározása gondot okozhat. Ilyenkor úgy járhatunk el, hogy az egyik koordináta értékét önkényesen rögzítjük, és a síkok egyenletéből így adódó kétismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk. Ez az eljárás geometriailag azt jelenti, hogy a két sík mellett még egy harmadik, az egyik koordinátatengelyre merőleges síkot veszünk fel, és a metszésvonal egy pontját három sík metszéspontjaként kapjuk meg. Nem vezet eredményhez ez az eljárás, ha a felvett sík a metszésvonallal párhuzamos, vagy tartalmazza azt. Ilyenkor egy másik tengelyre merőleges sík, azaz egy másik koordináta rögzítésével érhetünk célt.

A Ha a sík egyenlete  $Ax + By + Cz + D = 0$  alakban van adva, akkor tudjuk, hogy  $\mathbf{n}(A, B, C)$  normálvektor. A sík egy pontjának koordinátáit úgy olvashatjuk ki, hogy előbb az egyenletet  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  alakra hozzuk. Ezt elérhetjük azáltal, hogy ha pl.  $C \neq 0$ , akkor a  $Cz + D$  tagokból a  $C$  együtthatót kiemeljük.

Ha az egyenes egyenletrendszere  $Ax + A_1 = By + B_1 = Cz + C_1$  alakban van adva, és itt az  $A, B, C$  együtthatók egyike sem 0, akkor egy pontjának és egy irányvektorának koordinátáit azáltal kapjuk

meg, hogy az egyenletrendszert 
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
 alakra hozzuk.

Megjegyezhetjük, hogy egy pont koordinátáit az  $Ax + A_1 = 0$ ,  $By + B_1 = 0$ ,  $Cz + C_1 = 0$  egyenletek gyökei adják, egy irányvektor koordinátái pedig az  $A, B, C$  együtthatók reciprocai.

B Feladatok megoldását is meggyorsítja az, ha több ismerettel rendelkezünk. Ha pl. a sík normálegyenletével is foglalkoztunk volna, akkor a megfelelő síkbeli feladat mintájára gyorsabban meghatározhatnánk egy pontnak egy síktól való távolságát, vagy azoknak a síkoknak az egyenletét, amelyek két sík alkotta lapszögeket feleznek.

## 50. § Másodrendű felületek

A másodrendű görbék térbeli megfelelőivel, a másodrendű felületekkel foglalkozunk. Ebben a paragrafusban csak az a célunk, hogy egyes felületekkel, származtatásukkal és legegyszerűbb alaki tulajdonságaikkal megismerkedjünk, s hogy kanonikus egyenletükhöz eljussunk. Még nem vizsgáljuk, hogy vannak-e másfajta másodrendű felületek is, mint amelyeket itt tárgyalunk. Csak a következő paragrafusban látjuk majd be, hogy nincsenek.

**50.1 Másodrendű felületeknek** nevezzük azokat a térbeli alakzatokat, amelyeknek az egyenlete a koordinátákban másodfokú. Általános egyenletük tehát

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

és itt a másodfokú tagok együtthatói, tehát az  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{33}$ , értékek nem lehetnek mindannyian 0-val egyenlők.

Az együtthatókat a másodrendű görbék együtthatóinak mintájára jelöltük. Itt is megállapodunk abban, hogy

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Az együtthatókból alkotott

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

determinánst a *másodrendű felület determinánsának* nevezzük. Gyakran szerepel majd ennek

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

aldeterminánsa. Ez a másodrendű felület egyenletének másodfokú tagjaiból álló másodfokú alak determinánsa. Mind a két felírt determináns szimmetrikus.

A Másodrendű felület determinánsának felírásakor célszerű először a főátló elemeit írni fel, s azután a többi együttható felét a szimmetrikus helyekre elosztani, mert ilyen módon csökkentjük annak a hibának a lehetőségét, hogy elfelejtünk kettővel osztani. Az együtthatók elrendezését illetően gondolhatjuk, hogy a determináns soraihoz és oszlopaihoz rendre  $x, y, z$  és 1 van hozzárendelve, mert akkor a determináns egy-egy eleme a sorához és oszlopához hozzárendelt mennyiségek szorzatának együtthatója, vagy annak fele.

**B1** Minthogy a koordinátarendszer eltolása és elforgatása lineáris helyettesítést jelent, és az inverz transzformáció is ilyen, a másodrendű felület eltolásával és elforgatásával újból másodrendű felülethez jutunk (vö. 38.2 B2). Ugyanezt természetesen az egyenletnek 0-tól különböző számmal való szorzásáról is elmondhatjuk. Ezek szerint a másodrendű felületek az analitikus alakzatoknak olyan osztályát alkotják, amely a koordináta-rendszer megválasztásától független (vö. 37.1 B).

**B2** A másodrendű felület általános egyenletéből kiolvashatjuk, hogy a  $z = 0$  síkkal alkotott metszete ennek a síknak

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

egyenletű alakzata. Ez a metszet általában másodrendű görbe, de lehet  $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$  esetben egyenes is, sőt ha  $a_{13} = a_{23} = 0$  is teljesül, akkor  $a_{33} = 0$  egyenletű alakzathoz jutunk, tehát vagy a teljes síkhoz, vagy pedig üres alakzathoz.

A most mondottakból B1 alapján következik, hogy a másodrendű felület síkmetszete másodrendű görbe, egyenes, teljes sík vagy ( $c \neq 0$  állandóval felírt  $c = 0$  egyenletű) üres alakzat lehet. Ebből következik, hogy 46.3 első tétele a másodrendű felületek körében is érvényes, hogy ti. egy egyenesnek egy másodrendű felülettel 0, 1 vagy 2 közös pontja van, vagy pedig a teljes egyenes a másodrendű felülethez tartozik.

**B3** A most bevezetett alakzatokat *felületnek* mondtuk. Erről a megnevezésről hasonlóan mondhatunk, mint amit 41.4 B1-ben a görbe szó használatáról mondtunk. Felületnek mondtunk tehát bizonyos,

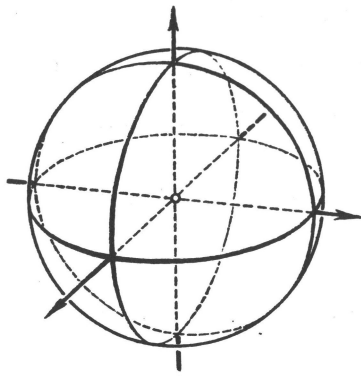
pontosan definiált alakzatokat, de nem foglalkozunk azzal, hogy a felület szó használatának hogyan lehet pontos határt szabni.

**50.2** A másodrendű felületekre első példaként a gömböt említjük.

**Tétel.** *A kezdőpont körül írt  $r$  sugarú gömb egyenlete*

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Ezt az egyenletet a gömb *kanonikus egyenletének* mondjuk (503. ábra).



503

*Bizonyítás.* A gömböt azok a  $P(\mathbf{r})$  pontok alkotják, amelyeknek helyvektorára  $|\mathbf{r}| = r$ , azaz  $\mathbf{r}^2 = r^2$ , hiszen nem negatív számok akkor és csak akkor egyenlők, ha négyzeteik egyenlők.

Tételünk helyessége következik tehát abból, hogy a bal oldalon az  $\mathbf{r}(x, y, z)$  vektor négyzete áll. —

A koordináta-rendszer eltolásával adódik, hogy a  $C(a, b, c)$  középpontú,  $r$  sugarú gömb egyenlete

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

(A műveletek elvégzésével azt kapjuk így, hogy minden gömb egyenlete

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

alakban írható. Nem igaz viszont, hogy minden ilyen egyenlet gömb egyenlete, amint azt az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= -r_2^2 \end{aligned}$$

egyenletek példái mutatják. Az első nyilván csak a  $(0, 0, 0)$  kezdőpont, a másodikat pedig egyetlen pont sem elégíti ki. Az elsővel definiált alakzatot *pontgömbnek*, a másodikkal definiáltat pedig *képzetes gömbnek* nevezzük. Magát a gömböt a most bevezetettekkel szembe állítva *valós gömbnek* is mondjuk.

**Tétel.** *Ha  $A \neq 0$ , akkor*

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

vagy valós gömb, vagy pontgömb, vagy pedig képzetes gömb egyenlete, a szó általánosabb értelmében tehát mindig gömb egyenlete.

*Bizonyítás.* Az egyenletet  $A$ -val osztva

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

alakú egyenlethez jutunk, s ezt

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = k$$

alakban is írhatjuk. Ha a koordináta-rendszer kezdőpontját az  $(a, b, c)$  pontba toljuk, és az új koordinátákat  $\xi, \eta, \zeta$  jelöli, akkor egyenletünk

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k$$

alakot ölt. Ez állításunk helyességét bizonyítja, mert  $k$  mindig felírható az  $r^2, 0, -r^2$  alakok valamelyikében. —

**B1** A komplex geometriában a pontgömböt valós csúcsú képzetes kúpnak mondhatjuk, mert ott az  $O$  kezdőponttól különböző pontokat is tartalmaz, és minden ilyen  $P$  ponttal együtt a teljes  $OP$  egyenest is tartalmazza. Ezek az alkotók a kezdőponton áthaladó izotrop egyenesek (vö. 38.2 B5).

**B2** 38.2 B3 mintájára bebizonyíthatnák, hogy rögzített koordináta-rendszerben ugyanannak a gömbnek két másodfokú egyenlete egymástól csak egy (0-tól különböző) állandó tényezőben különbözhetik. Megelégszünk annak megemlítésével, hogy ez a későbbiekben majd egyszerűen következik (lásd 51.9 B2).

Hasonlót mondhatunk azokról a geometriai alakzatokról, amelyekről a következőkben megállapítjuk, hogy másodrendű felületek. A rájuk vonatkozó bizonyítást sem végezzük tehát el, esetükben is megelégszünk ugyanazzal a hivatkozással.

Geometriai alakzatot mondtunk, mert analitikusan bevezetett alakzatok esetében, mint amilyen a pontgömb és a képzetes gömb, eleve nincs szükség az említett vizsgálatra.

**B3** Ez a szakasz a kör 38. §-beli tárgyalásának felel meg, azonban nem olyan részletes. Semmi akadály sem volna annak, hogy az ottani tárgyalás mintájára itt is részletezzük a tárgyalást, szóljunk a gömb normálegyenletéről, foglalkozzunk négy pont által meghatározott gömb egyenletével, valamint annak feltételével, hogy öt pont mikor van egy gömbön (vagy egy síkban). Nem járna nehézséggel az sem, hogy a 39. §-nak megfelelő módon a *térgeometriai inverziót* is tárgyaljuk. A 40. §-nak megfelelő térbeli tárgyalás már eltéréseket mutatna, mert a térben két gömb hatványsíkjáról, három gömb hatványegyeneséről és négy gömb hatványpontjáról lehet szó. A közös hatványsíkú gömbök által alkotott *gömbsor* mellett szó lehet *gömbseregről*, azaz olyan gömbök halmazáról, amelyeknek hatványsíkjai mindannyian tartalmaznak egy közös egyenest. gömbsor konjugáltjaiként ilyen gömbseregre jutunk, ha ti. a gömbsor elemeit merőlegesen metsző gömböket vizsgáljuk.

**50.3** Ebben a szakaszban a következők előkészítése céljából az elforgatással és az összenomással vagy széthúzással keletkező alakzatokkal foglalkozunk.

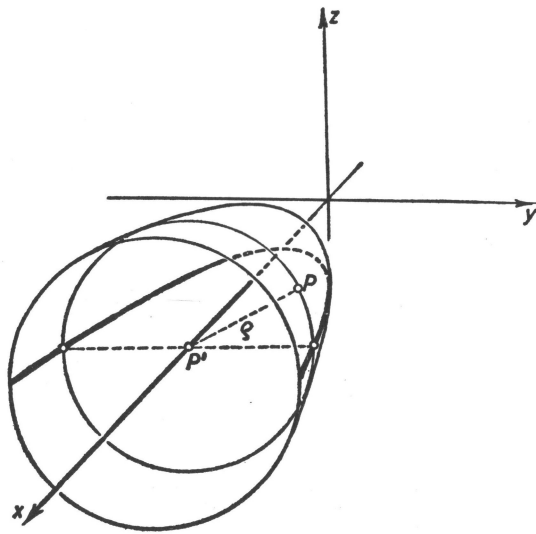
**Tétel.** Ha az  $xy$ -sík  $F(x, y^2) = 0$  egyenletű alakzatát az  $x$ -tengely körül megpörgetjük, a keletkező térbeli alakzat egyenlete

$$F(x, y^2 + z^2) = 0$$

Az  $x, y, z$  koordináták szerepét természetesen megcserélhetjük. A tétel csak az  $x$ -tengelyre nézve szimmetrikusan elhelyezkedő síkbeli alakzatokról szól, mert ha az  $x, y$  értékek kielégítik az  $F(x, y^2) = 0$  egyenletet, akkor az  $x, -y$  értékek is megteszik ezt.

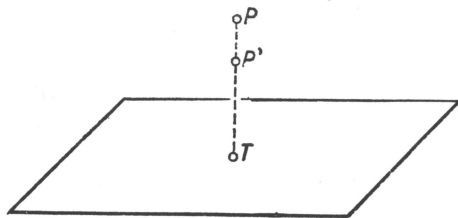
*Bizonyítás.* Jelölje  $\varrho$  a  $P(x, y, z)$  pont távolságát az  $x$ -tengelytől (504. ábra). Ha a  $P$  pontot az  $x$ -tengely körül forgatjuk, az  $xy$ -sík  $(x, \varrho)$  és  $(x, -\varrho)$  pontjaihoz jutunk. A  $P$  akkor és csak akkor tartozik térbeli alakzatunkhoz, ha ez a két pont az  $F(x, y^2) = 0$  alakzaton van, ha tehát  $F(x, \varrho^2) = 0$ . Ez tételünk

helyességét mondja ki, hiszen a  $P$  pontnak az  $x$ -tengelyre vetett merőleges vetülete  $P'(x, 0, 0)$ , és a  $\varrho = PP'$  távolságra  $\varrho^2 = y^2 + z^2$ . —



504

A síkbeli tárgyalás mintájára (lásd 43.1) *merőleges affinitásnak* nevezzük azt a térbeli ponttranszformációt, amely egy síknak, az affinitás *alapsíkjának* pontjait helyben hagyja, és az alapsík  $T$  pontjában az alapsíkra emelt merőleges  $T$ -től különböző  $P$  pontjához képként ennek a merőlegesnek azt a  $P'$  pontját rendeli (505. ábra), amelyre az irányított szakaszokkal képzett  $TP':TP$  arány egy 0-tól különböző  $\lambda$  valós számmal egyenlő. Ezt a számot az *affinitás arányának* nevezzük. Az alapsíkra merőleges egyenesek irányát az *affinitás irányának* mondjuk. Egy alakzat *affin képe* az alakzat pontjaihoz rendelt pontoknak az összessége.



505

Ha az affinitás aránya 1 vagy  $-1$ , akkor azonosságot vagy az alapsíkra vonatkozó tükrözést jelent. A következők előkészítése érdekében elég lett volna csak pozitív arányú merőleges affinitásról szólnunk. Ha  $\lambda$  pozitív és 1-nél kisebb, akkor a merőleges affinitás összenyomást jelent, ha pedig 1-nél nagyobb, akkor széthúzást.

*Tétel. Ha azt a merőleges affinitást alkalmazzuk, amelynek az alapsíkja az  $xy$ -sík és az aránya  $\lambda$ , akkor az  $F(x, y, z) = 0$  alakzat képeinek egyenlete*

$$F\left(x, y, \frac{z}{\lambda}\right) = 0.$$

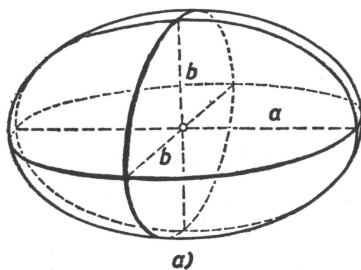
*Bizonyítás.* A tételben jellemzett affinitás a  $P(x, y, z)$  ponthoz a  $P'(x, y, \lambda z)$  pontot rendeli, tehát a

$P'(x, y, z)$  pont a  $P\left(x, y, \frac{z}{\lambda}\right)$  pont képe. A  $P'(x, y, z)$  pont akkor és csak akkor tartozik a szóban

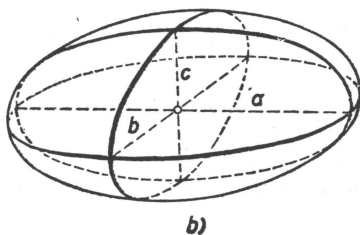
forgó képalakzathoz, ha olyan pontnak a képe, amely az eredeti alakzatnak pontja, ha tehát az  $x, y, \frac{z}{\lambda}$  koordináták kielégítik az eredeti egyenletet. —

**B** A térbeli merőleges affinitás a 46.9 B 1-ben megismert térbeli affinitás speciális esete. Bevezetésekor azért nem említettük ezt, hogy a jóval egyszerűbb speciális eset önmagában is megérthető legyen.

50.4 *Forgásellipszoid* akkor keletkezik, ha az ellipszist egyik tengelye körül megpörgetjük (506a ábra). Ez tehát forgásszimmetrikus alakzat. A forgásellipszoidok közé soroljuk néha a gömböt is, miként a kört is néha az ellipszisek közé soroltuk.



506a



506b

Általános *ellipszoidhoz* jutunk, ha a forgásellipszoidra olyan merőleges affinitást alkalmazunk, amelynek az alapsíkja tartalmazza a forgásellipszoid forgástengelyét (506b ábra). Eszerint a forgásellipszoid is ellipszoid, és néha az ellipszoidok közé soroljuk a gömböt is.

Ha az ellipszoid származtatásánál ellipszisvonal helyett ellipszislemezből indulunk ki, akkor egy testhez jutunk, amelyet ugyancsak *ellipszoidnak* (ellipszoidtest) nevezünk.

**Tétel.** *Ha a koordináta-rendszert megfelelően választjuk, az ellipszoid egyenlete*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

alakú, és ez mindig ellipszoid vagy gömb egyenlete, akárhogyan választjuk is meg a 0-tól különböző  $a, b, c$  értékeket.

Tételünk a gömböt is az ellipszoidok közé sorolta, mert az  $a = b = c$  esetben gömb egyenletéről van szó. A tétel azt is kimondja, hogy az ellipszoid másodrendű felület. A tételbeli egyenletet az ellipszoid kanonikus egyenletéül választjuk. Nem jelent megszorítást, ha kikötjük, hogy  $a, b, c$  pozitív értékek.

**Bizonyítás.** a) Válasszuk a koordináta-rendszer  $xy$ -síkjaúl az ellipszoid származtatásánál szereplő affinitás alapsíkját,  $x$  és  $y$  tengelyeiül az alapsíkban elhelyezkedő, a származtatás során megpörgetett



ellipszis tengelyeit, és pedig  $x$ -tengelyül azt, amely körül pörgettünk. Ennek az ellipszisnek az egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

s az  $x$ -tengely körüli forgatással keletkező forgásellipszoidé 50.3 első tétele szerint

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ha az alkalmazott affinitás aránya  $\lambda = \frac{c}{b}$ , akkor 50.3 második tétele szerint  $z$  helyébe  $\frac{z}{\lambda}$ , tehát  $\frac{z}{b}$  helyébe  $\frac{z}{c}$  kerül, s így a tételben megadott egyenlethez jutunk.

b) A megadott egyenlet mindig ellipszoid vagy gömb egyenlete, mert a megpörgetett ellipszis (vagy kör)  $a$ ,  $b$  féltengelyei tetszőlegesen választhatók meg, és az alkalmazott affinitás  $\frac{c}{b}$ -vel jelölt aránya is tetszőleges, 0-tól különböző érték lehet. —

Okoskodásunkból kiolvashatjuk, hogy a forgásellipszoidhoz úgy is eljuthatunk, hogy a gömbre merőleges affinitást alkalmazunk. Azt is mondhatjuk tehát, hogy minden ellipszoid úgy keletkezik a gömbből, hogy egymást követően két egymásra merőleges irányú merőleges affinitást alkalmazunk.

Az ellipszoid kanonikus egyenletének felírásához választott koordinátarendszer kezdőpontját az ellipszoid *centrumának*, tengelyeit az ellipszoid *tengelyeinek* (főtengely) mondjuk. Az egyenletből is kiolvasható, hogy az ellipszoid centruma szimmetriacentrum, és tengelyei szimmetriatengelyek.

Az ellipszoid kanonikus egyenletéből kiolvashatjuk, hogy a koordinátatengelyeket a kezdőponttól mindkét irányban rendre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  távolságban metszi. Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  távolságok az ellipszoid *féltengelyei*. Ha két féltengely egyenlő, az ellipszoid forgásellipszoid. Gömb adódik akkor, ha mind a három féltengely egyenlő.

Ha a féltengelyek különbözők (háromtengelyű ellipszoid), feltehetjük, hogy az  $a > b > c$  egyenlőtlenség teljesül. Ha ilyen értékválasztás mellett tekintjük a fenti bizonyítás b) részét, akkor megállapíthatjuk, hogy minden háromtengelyű ellipszoidhoz eljuthatunk úgy, hogy egy ellipszist nagytengelye körül forgatunk, és ezt követően a forgástengelyt tartalmazó alapsíkkal  $0 < \lambda < 1$  arányú merőleges affinitást, tehát összenyomást alkalmazunk.

Az ellipszoid korlátos alakzat, amint ezt származtatása is mutatja. Ebből következik, hogy minden síkmetszete ellipszis (vagy kör), hiszen a másodrendű felület minden más lehetséges síkmetszete nem korlátos alakzat, ti. parabola, hiperbola, egyenes vagy sík. A koordinátasíkokkal párhuzamos metszetekre vonatkozólag ezt a tényt a kanonikus egyenletből is könnyen kiolvashatjuk.

Másodrendű felületet adnak meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

egyenletek is. Az első egyenletet csak a kezdőpont elégíti ki, ez tehát pont egyenlete. Az ezzel az egyenlettel megadott alakzatot a körnél és gömbnél bevezetett elnevezések mintájára, *pontellipszoidnak* nevezhetjük, de nevezik valós csúcsú *képzetes kúp*nak is. A második egyenletet egyetlen pont koordinátái sem elégítik ki. Az ezzel az egyenlettel megadott üres alakzatot *képzetes*

*ellipszoidnak* nevezzük. Magát az ellipszoidot, ha a most bevezetett alakzatokkal állítjuk szembe, *valós ellipszoidnak* mondjuk.

**B1** A pontellipszoidra bevezetett valós csúcsú képzetes kúp elnevezéssel kapcsolatban 50.2 B1-re utalunk. Megemlítjük azonban, hogy itt a képzetes kúp alkotói általában nem izotrop egyenesek.

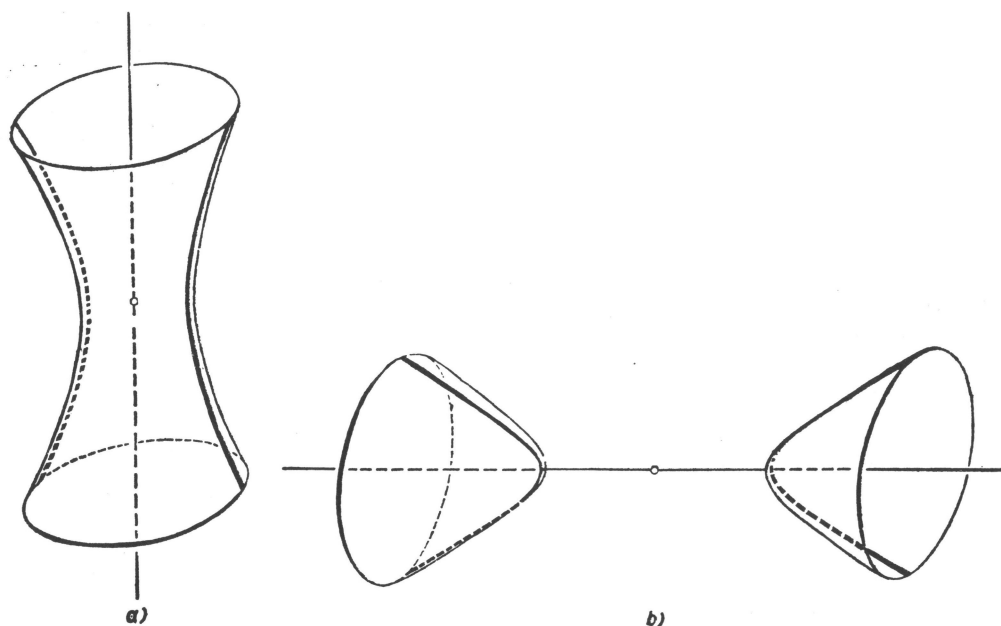
**B2** Ha a 46.9 B 1-ben megismert affinitás fogalmát használjuk, kimondhatjuk, hogy minden (valós) ellipszoid egy gömb affín képe. Alátámasztásul elég megemlítenünk, hogy  $x = ax'$ ,  $y = by'$ ,  $z = cz'$  egy affinitás transzformációs egyenletei.

Megemlítjük, hogy a gömb affín képe mindig ellipszoid vagy gömb, de ezt majd csak később láthatjuk be (lásd 51.9 B6).

**50.5** *Forgáshiperboloid* akkor keletkezik, ha a hiperbolát valamelyik tengelye körül megpörgetjük. Ha képzetes tengely körül pörgettünk, akkor a forgáshiperboloidot *egyköpenyűnek* (egypalástú), ha pedig a valós tengely körül, akkor *kétköpenyűnek* (kétpalástú) mondjuk. Ez az elnevezés annak felel meg, hogy az egyköpenyű hiperboloidot úgy is megkaphatjuk, hogy a hiperbolának csak az egyik ágát forgatjuk, viszont a kétköpenyű hiperboloid származtatásakor a két ág forgatása két, a valós tengelyt merőlegesen felező sík által elválasztott alakzatot ad.

Az egyköpenyű forgáshiperboloid esetén azt a kört, amelyet a forgatott hiperbola valós tengelyének végpontjai írnak le, *torokkörnek* nevezzük.

Általános *hiperboloidhoz* jutunk, ha a forgáshiperboloidokra olyan merőleges affinitást alkalmazunk, amelynek az alapsíkja a forgáshiperboloid forgástengelyét tartalmazza. Beszélhetünk tehát *egyköpenyű* (egypalástú) és *kétköpenyű* (kétpalástú) hiperboloidról (507. ábra). Ezek közé tartoznak a forgáshiperboloidok is.



507

**Tétel.** Ha megfelelő koordináta-rendszert választunk, akkor az egyköpenyű hiperboloid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

a kétköpenyűé pedig

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

alakú, s ezek mindig ilyen hiperboloidok egyenletei, akárhogyan választjuk is meg a 0-tól különböző  $a$ ,  $b$ ,  $c$  értékeket.

Tételünk mutatja, hogy a hiperboloidok másodrendű felületek. A tételben szereplő egyenleteket a hiperboloidok kanonikus egyenleteiül választjuk. Nem jelent megszorítást, ha kikötjük, hogy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pozitív értékek.

*Bizonyítás.* a) Az egyköpenyű hiperboloid esetében az alkalmazott affinitás alapsíkját  $xz$ -síknak, az ebben a síkban elhelyezkedő megpörgetett hiperbola valós tengelyét  $x$ -tengelynek, képzetes tengelyét  $z$ -tengelynek választjuk. Ennek a hiperbolának egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

és a  $z$ -tengely körüli forgatással keletkező egyköpenyű forgáshiperboloidé 50.3 első tétele szerint

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ha az alkalmazott affinitás aránya  $\lambda = \frac{b}{a}$ , akkor 50.3 második tétele szerint  $y$  helyébe  $\frac{y}{\lambda}$ , tehát  $\frac{y}{a}$  helyébe  $\frac{y}{b}$  kerül, s így a tételben adott egyenlethez jutunk.

A kétköpenyű hiperboloid esetében az alkalmazott affinitás alapsíkját  $xy$ -síknak, az ebben elhelyezkedő megpörgetett hiperbola valós tengelyét  $x$ -tengelynek, képzetes tengelyét  $y$ -tengelynek választjuk. Ennek a hiperbolának egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

az  $x$ -tengely körüli forgatással keletkező kétköpenyű forgáshiperboloidé tehát

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ha az alkalmazott affinitás aránya  $\lambda = \frac{c}{b}$ , akkor  $z$  helyébe  $\frac{z}{\lambda}$ , azaz  $\frac{z}{b}$  helyébe  $\frac{z}{c}$  kerül, s így a megadott egyenlethez jutunk.

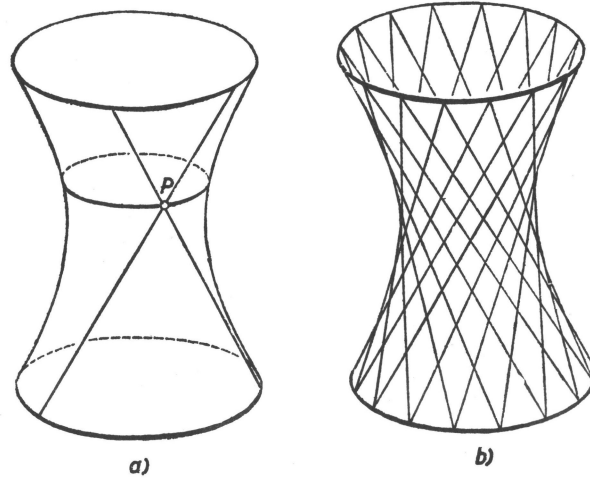
b) A megadott egyenletek mindig hiperboloidot adnak, mert a megpörgetett hiperbola tengelyei tetszőlegesen választhatók meg és az alkalmazott affinitás aránya is tetszőleges, 0-tól különböző érték lehet. —

A hiperboloidok kanonikus egyenletének felírásához választott koordináta-rendszer kezdőpontját a hiperboloid *centrumának*, tengelyeit a hiperboloid *tengelyeinek* (főtengely) mondjuk. Az egyenletből is kiolvasható, hogy a hiperboloid centruma egyben szimmetriacentruma és tengelyei egyben szimmetriatengelyei.

Az egyköpenyű hiperboloid kanonikus egyenletében feltehetjük, hogy  $a \geq b$ , kétköpenyűében pedig azt, hogy  $a \geq c$ . Az  $a = b$ , illetőleg  $b = c$  esetekben forgáshiperboloidról van szó. Ezek szerint minden

olyan hiperboloidhoz, amely nem forgáshiperboloid, eljuthatunk úgy, hogy a hiperbola forgatása után a forgástengelyt tartalmazó alapsíkú,  $0 < \lambda < 1$  arányú merőleges affinitást, tehát összenyomást alkalmazunk.

**Tétel.** Az egyköpenyű hiperboloid minden pontján áthalad két olyan egyenes, amelyet a hiperboloid tartalmaz.



508

Ezeket az egyeneseket egyköpenyű hiperboloid *alkotóinak* nevezzük (508. ábra). Tételünk szerint az egyköpenyű hiperboloid *vonalfelület*, mert egyeneseket tartalmaz, és ezek az egyenesek az egyköpenyű hiperboloid minden pontját tartalmazzák.

*Bizonyítás.* a) Tételünket először az egyköpenyű forgáshiperboloidra bizonyítjuk be. Ennek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

egyenletéből következik, hogy az  $x = a$  sík egyenesekben metszi, mert az egyenletből  $x = a$  helyettesítéssel

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{y}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0$$

adódik. Ez azt jelenti ugyanis, hogy a síkmetszet az

$$x = a, \quad \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 0 \quad \text{és} \quad x = a, \quad \frac{y}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

egyenletrendszerű egyenesekből áll.

A kapott két egyenes a torokkörhöz tartozó  $(a, 0, 0)$  pontban metszi egymást. Ha tehát a két egyenest a  $z$ -tengely körül más-más szöggel elforgatjuk, akkor a torokkört már más-más pontban metszik. Ebből következik, hogy a kapott két egyenes nem vihető át egymásba a  $z$ -tengely körül való elforgatással.

Legyen  $P$  az egyköpenyű forgáshiperboloid tetszőlegesen adott pontja. Tekintsük azt a síkot, amely a  $P$  pontot tartalmazza és a  $z$ -tengelyre merőleges. Ez a sík a hiperboloidot egy körben, és az imént kapott egyeneseket ennek a körnek egy-egy pontjában metszi. Elforgathatjuk tehát ezt a két egyenest a  $z$ -tengely körül úgy, hogy a  $P$  ponton haladjanak át, s a forgásszimmetria miatt az elforgatott egyenesek is a hiperboloidon vannak. Két különböző egyeneshez jutottunk így, mert már előbb beláttuk, hogy az elforgatott egyenesek nem fedhetik egymást.

*b)* Tételünk az általános egykőpenyű hiperboloidra is érvényes, mert ez merőleges affinitással származik az egykőpenyű forgáshiperboloidból, és a merőleges affinitás egyenesekhez egyeneseket rendel. Az utóbbi kijelentés helyessége nyomban következik abból, hogy a térbeli merőleges affinitás az alapsíkra merőleges síkon belül síkbeli merőleges affinitást jelent, erről pedig már tudjuk, hogy egyeneshez egyenest rendel. —

**Tétel.** *Ha két kitérő egyenes nem merőleges egymásra, akkor az egyiket a másik körül megforgatva egykőpenyű forgáshiperboloid keletkezik.*

A merőlegesség esetét ki kellett zárunk, mert akkor a forgatott egyenes síkban mozog.

*Bizonyítás.* Az előző tétel bizonyításának a) részében láttuk, hogy a kanonikus egyenlettel adott egykőpenyű forgáshiperboloid úgy származtatható, hogy egy egyenest a  $z$ -tengely körül megpörgetünk. Ennek az egyenesnek a  $z$ -tengelytől való távolsága  $a$ , s a  $z$ -tengellyel alkotott

hajlásszögének tangense  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{a}$ . Itt  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tetszőleges pozitív értékeket jelenthettek, s ezért  $\alpha$  is tetszőleges hegyesszög lehetett. Ebből tételünk helyessége következik, hiszen két kitérő egyenes viszonylagos helyzetét normáltranzverzálisuk hossza és hajlásszögük meghatározza, és tételünk csak hegyesszöget alkotó kitérő egyenesekről szólt. —

A Megjegyezhetjük, hogy a hiperboloidok kanonikus egyenletében annyi negatív tag szerepel, ahány kőpenyű a hiperboloid.

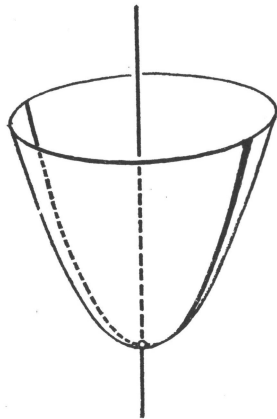
**B** Akárhogyan választunk ki az egykőpenyű hiperboloid két alkotóseregéből egy-egy alkotót, ezeknek van közös (közönséges vagy ideális) pontjuk. A forgáshiperboloidra nézve ezt 48.3 tétele bizonyításának *b)* része mondja ki, hiszen a két alkotósereg a torokkör érintőiből úgy keletkezik, hogy azokat az érintési pontjukhoz vezető sugár körül ugyanakkora szöggel, de a kör középpontjából nézve ellenkező irányban elforgatjuk. Ebből már következik, hogy állításunk az általános egykőpenyű hiperboloidra is teljesül, mert a merőleges affinitás egymást metsző egyenesekhez egymást metsző egyeneseket és párhuzamos egyenesekhez párhuzamos egyeneseket rendel. Az utóbbi tény azzal kapcsolatos, hogy a merőleges affinitás síkhoz síkot rendel, mert a sík képe is tartalmazza bármely két pontjának összekötő egyenesét, hiszen ez a két tárgypont összekötő egyenesének a képe.

Az egykőpenyű hiperboloidnak ugyanahhoz az alkotósereghez tartozó két alkotója mindig kitérő. Az egykőpenyű forgáshiperboloidnál ez abból következik, hogy ha egy egyenes körül egy rá nem merőleges kitérő egyenest elforgatunk, akkor ez az eredetit nem metszheti, mert a forgástengelyre merőleges síkot egy kör másik pontjában döfi, és az eredetivel párhuzamos sem lehet, mert az elforgatás az egyenes állását is elforgatta. A merőleges affinitás révén következik ebből, hogy állításunk az általános egykőpenyű hiperboloidra is teljesül.

Az egykőpenyű hiperboloid az általunk talált két alkotóseregen kívül további egyenest már nem tartalmaz. Ha ugyanis volna ilyen, akkor ennek egy pontján át az egyik sereghez tartozó, két másik pontján át pedig a másik sereghez tartozó egy-egy alkotót vehetnénk fel; ez utóbbiak tehát két-két pontban metszik a vizsgált egyenest és az első sereghez tartozó alkotót, azaz két metsző egyenest; ebből azonban az következik, hogy a második sereg két alkotója nem kitérő, hanem egy síkban van, ami nem lehet igaz.

A kétkőpenyű hiperboloid nem tartalmaz egyenest. Ez abból következik, hogy a kanonikus egyenlettel megadott kétkőpenyű hiperboloidnak az  $x = 0$  síkban nincsen pontja, az  $yz$ -síkkal párhuzamos síkok pedig ellipszisben metszik, tehát tartalmazott egyenes az ilyen síkokban sincs.

**50.6 Forgásparaboloid** úgy keletkezik, hogy egy parabolát tengelye körül megforgatunk. Ha a forgásparaboloidra olyan merőleges affinitást alkalmazunk, amelynek alapsíkja a forgástengelyt tartalmazza, akkor általános *elliptikus paraboloid*hoz jutunk (509. ábra). A forgásparaboloid is elliptikus paraboloid. A megforgatott parabola tengelyét és tengelypontját az elliptikus paraboloid tengelyének és tengelypontjának (csúcspont, orompont) mondjuk. Az elliptikus paraboloid tengelye egyben szimmetriatengely is.



509

**Tétel.** Ha megfelelő koordináta-rendszert választunk, akkor az elliptikus paraboloid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

alakú, s ez mindig elliptikus paraboloid egyenlete, akárhogyan választjuk is meg  $a$  0-tól különböző  $a, b$  értékeket.

Az elliptikus paraboloid tételünk szerint másodrendű felület. A tételben adott egyenletet az elliptikus paraboloid kanonikus egyenletéül választjuk. Nem jelent megszorítást, ha kikötjük, hogy  $a, b$  pozitív értékek.

*Bizonyítás.* a) Az elliptikus paraboloid származtatásánál alkalmazott affinitás alapsíkját  $xz$ -síknak, az ebben elhelyezkedő forgatott parabola tengelyét (irányítását is figyelembe véve)  $z$ -tengelynek, tengelypontjait érintőjét (azaz főegyenését)  $x$ -tengelynek választjuk. Ennek a parabolának a paraméterét  $a^2$ -tel jelölve, a parabola egyenletét

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z$$

alakban írhatjuk. 50.3 alapján következik, hogy a  $z$ -tengely körüli forgatással keletkező forgásparaboloid egyenlete

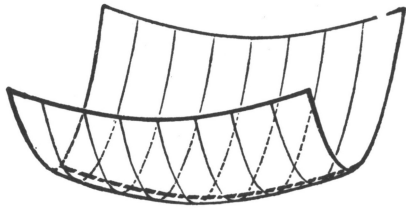
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

s hogy ha az alkalmazott merőleges affinitás aránya  $\lambda = \frac{b}{a}$ , akkor  $y$  helyébe  $\frac{y}{\lambda}$ , azaz  $\frac{y}{a}$  helyébe  $\frac{y}{b}$  kerül. Így a tételben adott egyenlethez jutottunk.

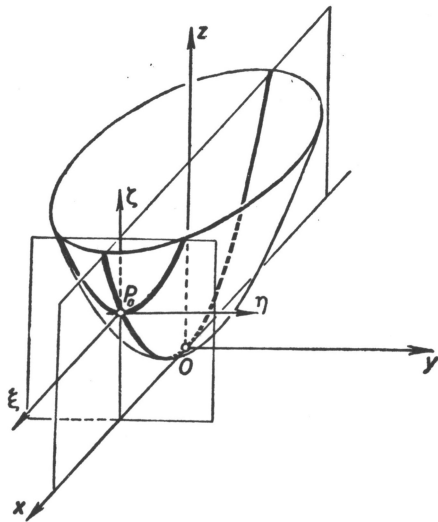
b) Az adott egyenlet mindig elliptikus paraboloidot ad, mert a megpörgetett parabola paramétere és az alkalmazott merőleges affinitás aránya tetszőleges pozitív érték lehet. —

A kanonikus egyenletből kiolvasható, hogy a  $z$ -tengelyre merőleges síkok alakzatunkat elliptikus görbében metszik. Ez indokolhatja az „elliptikus” paraboloid megnevezést.

**Tétel.** Ha két parabola tengelyének iránya egyező, és síkjaik merőlegesek egymásra, ha továbbá az egyik parabolát úgy mozgatjuk, hogy síkjának állása és tengelyének iránya ne változzék, s hogy tengelypontja a másik parabolát írja le, akkor a mozgó parabola elliptikus paraboloidot ír le. Minden elliptikus paraboláid származtatható ilyen módon (510. ábra).



510



511

*Bizonyítás. a)* Először, azt mutatjuk meg, hogy minden elliptikus paraboloid származtatható a tételben leírt eljárással. A kanonikus egyenlettel adott elliptikus paraboloidból indulunk ki. Az eljárásban szereplő rögzített parabola szerepét az  $y = 0$  sík metszete játssza (511. ábra). Helyettesítéssel adódik,

hogy ennek a metszetnek az egyenlete  $\frac{x^2}{a^2} = 2z$ , ezt a parabolát tehát azok a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pontok alkotják, amelyeknek koordinátáira

$$y_0 = 0, \quad \frac{x_0^2}{a^2} = 2z_0.$$

Messük most az elliptikus paraboloidot a ponton áthaladó  $x = x_0$  síkkal. Az elliptikus paraboloid egyenletéből adódik, hogy a metszetgörbe pontjaira

$$\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{x_0^2}{a^2} = 2(z - z_0).$$

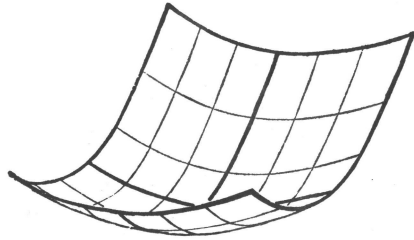
Ha tehát a koordináta-rendszer kezdőpontját a  $P_0$  pontba toljuk, és az új koordinátákat  $\xi, \eta, \zeta$  jelöli, akkor az  $\eta\zeta$ -síkon belül elhelyezkedő metszetgörbénk egyenlete az  $\eta = y, \zeta = z - 2z_0$  transzformáció révén

$$\frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta$$

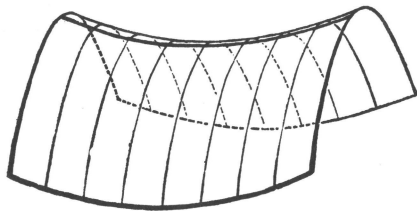
alakot ölt. Parabolához jutottunk, amelynek tengelypontja  $P_0$  és tengelye a  $z$ -tengellyel egyirányú  $\zeta$ -tengely. Minthogy a kapott egyenlet nem függ  $P_0$  megválasztásától a metszetként kapott parabolák egybevágók. Ez bizonyítja, hogy ha ilyen parabolát mozgatunk, akkor eljárásunk a megadott elliptikus paraboloidhoz vezet.

b) A tételben leírt eljárás mindig elliptikus paraboloidhoz vezet, mert a rögzített és a mozgatott parabola paramétere  $a^2$  és  $b^2$ , és ezek a pozitív értékek tetszőlegesen választhatók meg. —

Bizonyításunk mutatja, hogy ha két egybevágó parabolából indulunk ki, akkor a parabolamozgatás forgásparaboloidot ad. Azt is kiolvashatjuk, hogy ugyanazt az elliptikus paraboloidot eljárásunkkal kétféleképpen is megkaphatjuk, hiszen  $x$  és  $y$  a bizonyításban szerepet cserélhet (512. ábra).



512



513

**A** Az elliptikus paraboloid megnevezésben szükség van az elliptikus jelzőre, mert másfajta paraboloidról is szó lesz. Téved viszont, aki azt hiszi, hogy másfajta paraboloidhoz majd úgy jutunk, hogy a parabolát a tengelyére merőleges egyenes, pl. vezéregyenesé körül forgatjuk. Kúpszeletek forgatása csak akkor vezet másodrendű felülethez, ha szimmetria- tengely körül forgatunk.

**B** Az elliptikus paraboloid nem tartalmaz egyenest. Ez következik abból, hogy a kanonikus egyenlettel adott elliptikus paraboloidnak a  $z < 0$  féltérben nincsen pontja, és az  $xy$ - síkkal párhuzamos egyenesek sem tartozhatnak az elliptikus paraboloidhoz, hiszen a  $z = z_0$  síkok metszete ellipszis.

**50.7** Ha az utolsó tételben leírt, elliptikus paraboloidot szolgáltató eljárást csak annyiban módosítjuk, hogy két olyan parabolából indulunk ki, amelyeknek tengelyei párhuzamosak ugyan, de irányuk ellentétes, akkor az eljárás nem elliptikus paraboloidot szolgáltat, hanem egy más, *hiperbolikus paraboloidnak* (nyeregfelület) nevezett alakzatot (513. ábra).

Hiperbolikus paraboloidhoz eszerint úgy jutunk, hogy két merőleges síkú és ellentétes tengelyirányú parabolát választunk, és ezeknek egyikét úgy mozgatjuk, hogy síkjának állása és tengelyének iránya változatlan maradjon, tengelypontja pedig a másik parabolát írja le. Ennek a másik parabolának tengelyét a hiperbolikus paraboloid *tengelyének*, tengelypontját pedig a hiperbolikus paraboloid *nyeregpontjának* (tengelypont) mondjuk. A hiperbolikus paraboloid tengelye egyben szimmetriatengelye is.

Az elliptikus és hiperbolikus paraboloidokat közös néven *paraboloidnak* nevezzük. Ha az előbbi definíciót elismételjük, de a parabolatengelynek csak a párhuzamosságát kötjük ki, akkor egyszerre definiáljuk mind a két paraboloidot.

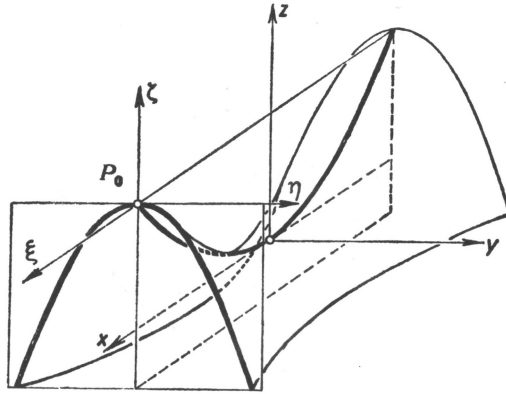
**Tétel.** Ha megfelelő koordináta-rendszert választunk, akkor a hiperbolikus paraboloid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



alakú, s ez mindig hiperbolikus paraboloid egyenlete, akárhogyan választjuk is meg a 0-tól különböző  $a$ ,  $b$  értékeket.

A hiperbolikus paraboloid tehát másodrendű felület. A tételben adott egyenletet a hiperbolikus paraboloid kanonikus egyenletének választjuk. Nem jelent megszorítást, ha feltételezzük, hogy  $a$  és  $b$  pozitív értékek.



514

*Bizonyítás.* a) Először azt bizonyítjuk be, hogy a tételbeli egyenlet hiperbolikus paraboloidé. A származtatásban szereplő rögzített parabola szerepét az  $y = 0$  sík metszete játssza (514. ábra).

Helyettesítéssel adódik, hogy ennek az egyenlete  $\frac{x^2}{a^2} = 2z$ , ezt a parabolát tehát azok a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pontok alkotják, amelyeknek koordinátáira

$$y_0 = 0, \quad \frac{x_0^2}{a^2} = 2z_0.$$

Messük most alakzatunkat a ponton áthaladó  $x = x_0$  síkkal. Az egyenletből adódik, hogy a metszetgörbe pontjaira

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{x_0^2}{a^2} = 2(z - z_0).$$

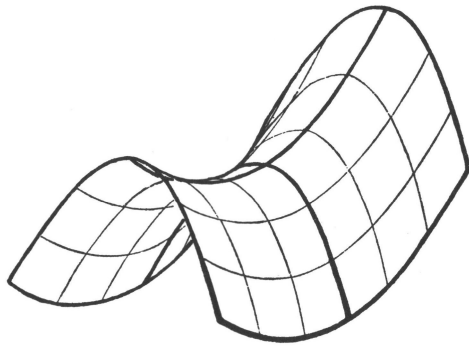
Ha a koordináta-rendszer kezdőpontját a  $P_0$  pontba toljuk, és az új koordinátákat  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  jelöli, akkor az  $\eta\zeta$ -síkban elhelyezkedő metszetgörbénk egyenlete az  $\eta = y$ ,  $\zeta = z - z_0$  transzformáció révén

$$-\frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta$$

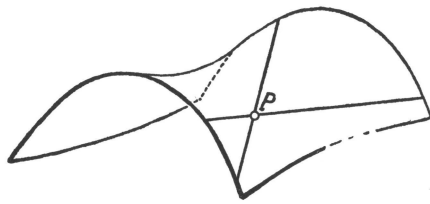
alakot ölt. Parabola-hoz jutottunk, amelynek tengelypontja  $P_0$ , és tengelye a negatív irányítású  $\zeta$ -tengely, tehát a  $z$ -tengellyel ellentétes irányú. Minthogy a kapott egyenlet nem függ  $P_0$  megválasztásától, a metszetként kapott parabolák egybevágók. Ezzel beláttuk, hogy a tétel egyenletével adott alakzat hiperbolikus paraboloid, mert olyan előírással mozgó parabola írja le, mint amilyenről a hiperbolikus paraboloid definíciója szólt.

b) A rögzített és a mozgatott parabola paramétere  $a^2$  és  $b^2$ . Minthogy ezek tetszőleges pozitív értékek lehetnek, minden hiperbolikus paraboloid egyenlete felírható a tételben megadott alakban, ha a koordináta-rendszert megfelelően választjuk meg. —

Abból a tényből, hogy okoskodásunkban  $x$  és  $y$  szerepet cserélhet, következik, hogy ugyanazt a hiperbolikus paraboloidot kétféle módon is származtathatjuk, mindkét alkalommal parabolát parabolán csúsztatva (515. ábra).



515



516

A kanonikus egyenletből kiolvasható, hogy a  $z$ -tengelyre merőleges síkok alakzatunkat hiperbolikus görbében metszik. Ez indokolja a „hiperbolikus” paraboloid megnevezést.

**Tétel.** *A hiperbolikus paraboloid minden pontján áthalad két olyan egyenes, amelyet a hiperbolikus paraboloid tartalmaz.*

Ezeket az egyeneseket a hiperbolikus paraboloid *alkotóinak* mondjuk (516. ábra). Tételünk szerint a hiperbolikus paraboloid is vonalfelület, az egyköpenyű hiperboloid mellett a második, amelyet a másodrendű felületek között találtunk.

*Bizonyítás.* Legyen  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  kanonikus egyenletével megadott hiperbolikus paraboloid egy pontja. A kanonikus egyenletet

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z$$

alakban írjuk. Messük felületünket a  $P_0$  ponton áthaladó, a  $z$ -tengellyel párhuzamos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = C_1, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = C_2$$

síkokkal. Ezeket figyelembe véve a hiperbolikus paraboloid egyenlete a

$$C_1 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z, \quad C_2 = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z$$

összefüggésekhez, tehát síkok egyenleteihez vezet. Ezek a síkok a  $z$ -tengellyel nem párhuzamosak, tehát a metsző síkokat egyenesekben metszik. Ez azt jelenti, hogy metsző síkjaink a hiperbolikus paraboloidot ezekben az egyenesekben metszik. Ezek az egyenesek áthaladnak a  $P_0$  ponton, hiszen rajta áthaladó síkok metszésvonalai. —

A kanonikus egyenletből kiolvasható, hogy a hiperbolikus paraboloid az  $xy$ -síkot  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  és  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$  egyenesekben metszi. Ugyanezekhez egyenesekhez jutunk, ha a fenti bizonyításban  $P_0$  a kezdőpontot jelenti.

**Tétel.** Ha két kitérő egyenes és egy ezeket metsző sík van adva, s ha az adott egyeneseken át olyan egyeneseket fektetünk, amelyek az adott síkkal párhuzamos állásúak, akkor ezek az átfektetett egyenesek hiperbolikus paraboloidot alkotnak. Ilyen módon minden hiperbolikus paraboloidhoz eljuthatunk.

Más szövegezéssel azt is mondhattuk volna, hogy a hiperbolikus paraboloidot egy térbeli négyszög két átellenes oldalegyenesének olyan tranzverzálisai alkotják, amelyek a másik két átellenes oldalegyenes normáltranzverzálisára merőlegesek. A két egyenesen átfektetett tranzverzálisokhoz úgy jutunk el, hogy azokat a normáltranzverzálisra merőleges (az adott síkkal párhuzamos) síkkal metsszük, és a két metszésponton át egyenest fektetünk.

*Bizonyítás.* a) Először azt igazoljuk, hogy minden hiperbolikus paraboloid származtatható a tételben leírt eljárással. Ezt az előző tétel bizonyításából olvashatjuk ki. Ott az

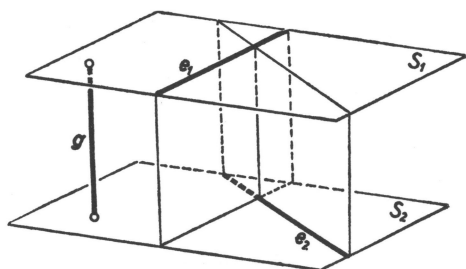
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = C_1 \quad \text{és} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = C_2$$

egyenletű síkok által kimetszett alkotóseregekhez jutottunk. A két seregből egy-egy alkotót kiválasztva, metsző egyeneseket kapunk, mert ezeket az alkotókat a  $z$ -tengellyel párhuzamos és egymást metsző síkok, tehát egymást a  $z$ -tengellyel párhuzamos egyenesben metsző síkok metszik ki, és a hiperbolikus paraboloid minden a  $z$ -tengellyel párhuzamos egyenest egyetlen pontban metsz. Ez utóbbi tény a kanonikus egyenletből is kiolvasható, hiszen mindig egyetlen olyan  $z$  érték van, amely tetszőlegesen választott  $x, y$  értékekkel együtt kielégíti ezt az egyenletet.

Tekintsük az egyik sereg két alkotóját és a másik alkotósereg minden egyenesét. Ez utóbbiak a mondottak szerint a két alkotó mindegyikét metszik és mindannyian párhuzamos állásúak az ezeket az alkotókat kimetsző, egymással párhuzamos síkokkal. Ez az alkotósereg minden ilyen tulajdonságú egyenest tartalmaz, hiszen a kimetsző párhuzamos síkokon kívül nincs más velük párhuzamos sík. Ezek szerint a tétel állításának egyik fele valóban helyes, hiszen bármelyik alkotóseregről elmondhatjuk, hogy a hiperbolikus paraboloid minden pontját tartalmazza.

$b_1$ ) Bebizonyítjuk, hogy a tétel utasítása mindig hiperbolikus paraboloidhoz vezet. Ezt a kitérő egyenesekre vonatkozó két megállapítással készítjük elő:

1. Megemlítjük azt a már ismert tényt, hogy két kitérő egyenesen át egymással párhuzamos síkokat fektethetünk, és ezt csak egyféleképpen tehetjük meg.



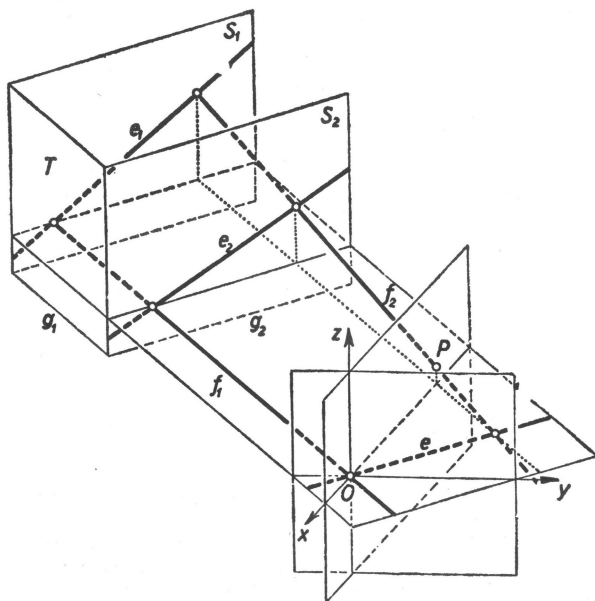
517

2. Bebizonyítjuk, hogy adott  $e_1, e_2$  kitérő egyenesekhez mindig található olyan ezeket metsző egyenes, amely egy adott  $g$  egyenessel párhuzamos, hacsak  $g$  nem párhuzamos az  $e_1, e_2$  egyeneseket tartalmazó, egymással párhuzamos  $S_1, S_2$  síkokkal (517. ábra). Ilyen egyeneshez úgy jutunk ugyanis, hogy az  $e_1, e_2$  egyeneseken át  $g$ -vel párhuzamos síkokat fektetünk, és ezek  $m$  metszéspontját tekintjük. Ezek a síkok

valóban metszik egymást, mert nem lehetnek azonosak az  $S_1, S_2$  síkokkal, hiszen  $g$  nem párhuzamos ezekkel.  $m$  valóban párhuzamos  $g$ -vel, mert  $g$ -vel párhuzamos síkok metszésvonala. Végül  $m$  valóban metszi az  $e_1, e_2$  egyeneseket, mert mindegyikükkel egy síkban van, de nem párhuzamos velük, hiszen  $g$  egyikükkel sem lehet párhuzamos.

$b_2$ ) Ezek után a kitérő  $e_1, e_2$  egyenesek és az ezeket metsző  $T$  sík által meghatározott, tételünk utasítása szerint készített alakzatot vizsgáljuk. Vizsgálatunkhoz egy koordináta-rendszert vezetünk be.

Az  $e_1, e_2$  egyeneseken átfektetett, egymással párhuzamos  $S_1, S_2$  síkok metszik a  $T$  síkot, mert ez metszi az  $e_1, e_2$  egyeneseket (518. ábra). A kapott metszésvonalak irányát a  $z$ -tengely irányának választjuk. Erre az irányra a  $T$  síkon  $g_1$ , az  $S_1, S_2$  síkok valamelyikén belül merőleget állítunk.



518

Legyen az egyeneseket metsző,  $g_1$ -gyel párhuzamos egyenes.  $b_1$ )-ből tudjuk, hogy van ilyen egyenes, mert  $g_1$  dőfi az  $S_1, S_2$  síkokat. Az  $f_1$  egyenes a vizsgált alakzathoz tartozik, mert  $T$ -vel párhuzamos állású. Legyen  $f_2$  egy másik ilyen, az  $e_1, e_2$  egyeneseket metsző és  $T$ -vel párhuzamos állású egyenes.

Az  $f_1, f_2$  egyenesek kitérők, mert ha egy síkban volnának, síkjuk az ezeket metsző  $e_1, e_2$  egyeneseket is tartalmazná. Van tehát az  $f_1, f_2$  egyeneseket metsző,  $g_2$ -vel párhuzamos  $e$  egyenes, hiszen  $f_1$  és  $f_2$  a  $T$  síkkal megegyező állású síkokban van,  $g_2$  pedig dőfi a  $T$  síkot.

Az  $f_1, e$  egyenesek síkja merőleges a választott  $z$ -tengelyirányra, mert  $g_1$  és  $g_2$  merőlegesek rá. Ezt a síkot  $xy$ -síknak választjuk és az  $f_1, e$  egyenesek szögfelező egyeneseit  $x$ -tengelynek és  $y$ -tengelynek.

Az  $f_2$  egyenes az  $xz$ -síkot  $P$  pontban dőfi, mert  $f_2$ -nek az  $xy$ -síkra vetett merőleges vetülete  $f_1$ -gyel párhuzamos, és ezért az  $x$ -tengelyt metszi. A  $P$  dőféspont nincs az  $xy$ -síkban, mert  $f_2$  az  $xy$ -síkot az  $e$  egyenes egy pontjában dőfi. A  $z$ -tengely megfelelő irányításával elérhetjük tehát, hogy a  $P(x, 0, z)$  pontra  $x \neq 0$  mellett  $z > 0$  is teljesüljön. Ilyen módon egy derékszögű koordináta-rendszert vezetünk be.

$b_3$ ) Az  $xy$ -síkban az  $f_1$  és  $e$  egyenesek egyenletét

$$mx + y = 0 \quad \text{és} \quad mx - y = 0$$

alakban írhatjuk, hiszen a koordinátatengelyek a szögfelezőik. Az

$$m^2 x^2 - y^2 = nz$$

hiperbolikus paraboloidok  $n$  minden (0-tól különböző) értékválasztásánál tartalmazzák az  $f_1, e$  egyeneseket. Úgy választjuk meg  $n$  értékét, hogy a  $P$  pont is a hiperbolikus paraboloidhoz tartozzék.

Minthogy  $P$  koordinátáira  $x \neq 0$ ,  $y = 0$  és  $z > 0$ , ilyen módon  $n$  számára pozitív érték adódik. Ha tehát

$\frac{n}{2}$ -vel osztunk, akkor hiperbolikus paraboloidunk egyenlete

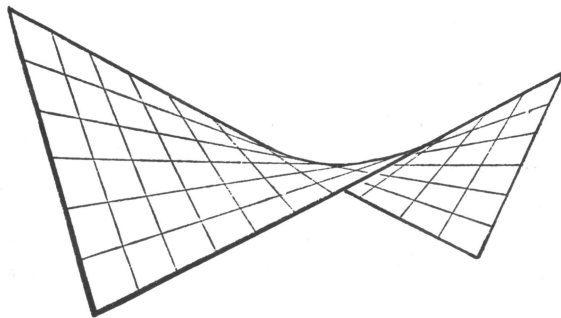
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2x$$

alakban írható.

Ennek a hiperbolikus paraboloidnak az alkotóserei egyrészt a  $T$  síkkal, másrészt az  $S_1$ ,  $S_2$  síkokkal párhuzamos állásúak. Ez abból következik, hogy az  $f_1$ ,  $e$  egyenesek az alkotók között szerepelnek, és ezek párhuzamos állásúak a mondott, az  $xy$ -síkra merőleges síkokkal. Kimondhatjuk ezért, hogy ha hiperbolikus paraboloidunk egy a mondott síkok valamelyikével párhuzamos egyenesnek két pontját tartalmazza, akkor ezt az egyenest is tartalmazza.

Minthogy hiperbolikus paraboloidunk tartalmazza az  $e$  egyenest és a  $P$  pontot, tartalmazza a  $T$ -vel párhuzamos állású  $f_2$  egyenes két pontját, és így az  $f_2$  egyenest is. Mivel tartalmazza az  $f_1$ ,  $f_2$  egyeneseket, tartalmazza az  $S_1$ ,  $S_2$  síkokban elhelyezkedő  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesek két-két pontját és az  $e_1$ ,  $e_2$  egyeneseket is. Ebből következik, hogy ez a hiperbolikus paraboloid azonos az általunk vizsgált alakzattal, mert mindkettőt az  $e_1$ ,  $e_2$  egyeneseket metsző és  $T$ -vel párhuzamos állású egyenesek alkotják. —

A bizonyítás alapján hozzátehetjük a bebizonyított tételhez, hogy ha a hiperbolikus paraboloidot két kitérő egyenesből származtatjuk, akkor ezek az egyik alkotósereghez tartoznak, a tétel előírásának megfelelően rajtuk átfektetett egyenesek pedig a másik alkotósereggel azonosak. Ha mindkét alkotóseregnek kétféle eleme ismeretes, akkor mindkét párra alkalmazhatjuk a most megismert eljárást, és így mindkét alkotósereghez eljutunk (519. ábra).



519

**A** Gyakorlati jelentősége is van annak, hogy a másodrendű felületek között vonalfelületeket, sőt két alkotósereggel rendelkező vonalfelületeket találtunk. Az építészetben az ilyen alakú kiképzés megtakarítással (főként a zsálasban faanyagmegtakarítással) járhat, mert egyenes gerendákat lehet alkalmazni.

**B1** Helyteleníteni kell, ha valaki a hiperbolikus paraboloidot „torzfelületnek” mondja, mert ezt a megnevezést a differenciálgeometria a vonalfelületeknek egy osztályára foglalta le, ez az elnevezés általánosan elfogadott, és a hiperbolikus paraboloid nem tartozik ehhez az osztályhoz.

**B2** A hiperbolikus paraboloidon két alkotósereget találtunk. Azt is láthattuk, hogy bármely két, más-más sereghez tartozó alkotó metszi egymást.

A hiperbolikus paraboloid a két alkotóseregen kívül további egyenest már nem tartalmaz. Ezt ugyanúgy bizonyíthatjuk, ahogyan 50.5 B harmadik bekezdésében az egyköpenyű hiperboloidra vonatkozó hasonló állítást bizonyítottuk, hiszen az alkotóseregek itt is kitérő egyenesekből állnak, és más-más sereghez tartozó alkotók metszik egymást.

**B3** Az ellipszoid, a hiperboloid és a paraboloid azt a szerepet játssza a térben, amit az ellipszis, a hiperbola és a parabola a síkban. Ez a paragrafus a kúpszeleteket tárgyaló 41–43. paragrafusok

térbeli megfelelőjét tartalmazza rövidített formában. Ott a kúpszeletek származtatásával, kanonikus egyenletükkel és alaki tulajdonságaikkal foglalkoztunk, itt meg a kúpszeleteknek megfelelő térbeli alakzatokra vonatkozólag végeztünk hasonló vizsgálatot. A térbeli tárgyalás lényegesen rövidebb azért, mert kevesebb alaki tulajdonságot vizsgáltunk. A síkban tárgyalt tulajdonságok megfelelőiről nem is lehet itt minden esetben szó.

Foglalkozhattunk volna az ellipszoid, a hiperboloid és a paraboloid esetében is az általuk határolt térbeli tartományokkal és érintősíkjaikkal. Az aszimptotáknak itt megfelelő aszimptotakúpról is beszélhetünk volna. Az ellipszoid és a gömb affinitása hasonló eredményekhez vezethetett volna, mint a síkban.

Az említett affinitás révén azt is bizonyítani lehet, hogy az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  feltengelyű ellipszoid térfogata

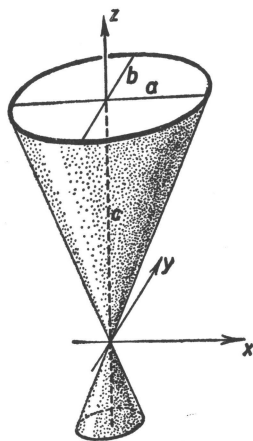
$$\frac{4}{3}abc\pi.$$

Ehhez elég azt belátni, hogy térbeli merőleges affinitás alkalmazásakor a térfogat az affinitás arányával szorozódik, s ezt is elég csak tetraéderre bizonyítani, mert ebből poliéderre, és ezek révén minden térfogattal rendelkező testre is következik. Ha a tetraéder egyik lapja az affinitás alapsíkjára merőleges, akkor állításunk abból következik, hogy a merőleges lap területe a síkbeli affinitásról tudottak szerint az affinitás arányával szorozódik, az ehhez a laphoz tartozó magasság viszont változatlan marad. Az állítás helyesnek bizonyul így minden más tetraéderre is, mert ezeket két olyan tetraéderre vághatjuk, amelyek egy adott síkra merőleges lapban érintkeznek, hiszen a négy csúcson a síkra vetett merőleges vetületei közül kettőn át olyan egyenest fektethetünk, amely a másik két vetületi pontot elválasztja.

Megemlítjük, hogy a kúpszeletek fókuszainak megfelelőiről másodrendű felületeink közül csak a forgásfelületeknél beszélhetünk. Ezért a kúpszeletek fokális tulajdonságainak nincs közvetlen és általános érvényű térbeli megfelelőjük.

**50.8** További másodrendű felületeket említünk, ezek azonban már ismert alakzatok.

*Másodrendű kúphoz* jutunk, ha egy ellipszissel (vagy körrel) mint vezérvonallal olyan kúpfelületet készítünk, amelynek csúcsa az ellipszis (vagy kör) középpontjában a síkjára emelt merőlegesen van (520. ábra). Eszerint a forgáskúp is másodrendű kúp.



520

**Tétel.** Ha megfelelő koordináta-rendszert vezetünk be, akkor a másodrendű kúp egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

alakot ölt, és ez mindig másodrendű kúp egyenlete, akárhogy választjuk is meg a 0-tól különböző  $a$ ,  $b$ ,  $c$  értékeket.

Tételünk mutatja, hogy a másodrendű kúp valóban másodrendű felület. A tételbeli egyenletet a másodrendű kúp kanonikus egyenletéül választjuk. Nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pozitív értékek.

*Bizonyítás.* a) A megadott egyenletű alakzat kúp, melynek csúcsa az  $O$  kezdőpont, mert minden  $O$ -tól különböző  $P$  ponttal együtt az egész  $OP$  egyenest tartalmazza. Ha ugyanis  $P(x, y, z)$  koordinátái kielégítik az egyenletet, akkor  $\lambda^2$ -tel szorozva azt kapjuk, hogy a  $\lambda x$ ,  $\lambda y$ ,  $\lambda z$  értékek is kielégítik, ezek pedig az  $OP$  egyenes tetszőleges pontjának koordinátái lehetnek.

Az egyenletből kiolvasható, hogy a  $z = 0$  síkban alakzatunknak  $O$  az egyetlen pontja. Ezért a  $z = c$  sík metszészonalát kúpunk vezérvonalának tekinthetjük. Ez a metszészonal azonban ellipszis, mert egyenlete a  $z = c$  síkban

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ennek az ellipszisnek a középpontja a kúp csúcsának az ellipszis síkjára vetett merőleges vetülete. Bebizonyítottuk tehát, hogy kúpunk valóban másodrendű kúp.

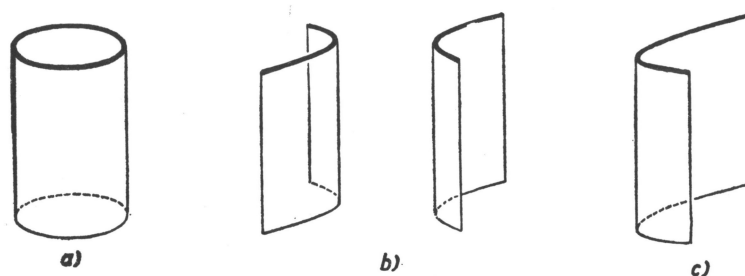
b) A vezérvonal féltengelyei  $a$  és  $b$ , síkjának a kúp csúcsától való távolsága pedig  $c$ . Minthogy ezek tetszőleges pozitív értékek lehetnek, minden másodrendű kúp egyenlete felírható a tételben megadott alakban, ha a koordináta-rendszert megfelelően választjuk meg. —

Egybevetés céljából megemlítjük, hogy az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

egyenletű pontellipszoidot valós csúcsú képzetes kúpnek is mondtuk (vö. 50.4 B1).

*Másodrendű hengernek* mondjuk a hengerfelületet, ha alkotóira merőleges síkmetszete (közönséges vagy elfajuló) másodrendű görbe. E másodrendű görbe minőségének megfelelően a másodrendű hengert *elliptikus hengernek*, *hiperbolikus hengernek* vagy *parabolikus hengernek* nevezzük (521. ábra). Annak megfelelően, hogy a vezérvonalul választott másodrendű görbe közönséges vagy elfajuló, a másodrendű hengert is *közönségesnek* vagy *elfajulónak* mondjuk. Elliptikus henger az egyenes és a ferde körhengerfelület is, mert alkotóikra merőleges síkmetszetük kör, illetőleg kör merőleges vetületeként keletkező ellipszis.



521

A másodrendű görbe  $x, y$  koordinátás egyenletét egyben egy ilyen vezérvonalú másodrendű henger egyenletének is tekinthetjük. Ha ugyanis egy térbeli alakzat egyenletében  $z$  nem szerepel, akkor a  $z$ -tengellyel párhuzamos egyenesek pontjai vagy mindannyian az alakzathoz tartoznak, vagy egyikük sem. Az ilyen alakzat tehát a  $z$ -tengellyel párhuzamos alkotójú henger, és a térbeli alakzat egyenlete az  $xy$ -síkbeli vezérvonal  $xy$ -síkbeli egyenletével azonos.

A másodrendű görbék egyenleteinek kanonikus alakjai ilyen módon a másodrendű hengerek egyenleteinek kanonikus alakjait is megadják. Az elliptikus hengerek kanonikus egyenletei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

s ezek rendre (valós) *elliptikus hengert*, *képzetes elliptikus hengernek* nevezett üres alakzatot, illetőleg egyenest adnak meg, és ez utóbbit egymást *valós egyenesben metsző képzetes síkpárnak* is mondhatjuk. A hiperbolikus hengerek esetében az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

kanonikus egyenletek rendre (közönséges) *hiperbolikus hengert* és (valós) *metsző síkpárt* adnak. Végül a parabolikus hengerek kanonikus egyenletei

$$y^2 = 2px, \quad \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} = 0.$$

Ezek (közönséges) *parabolikus hengert* (valós) *párhuzamos síkpárt* *képzetes párhuzamos síkpárnak* mondott üres alakzatot, illetőleg egyetlen síkot szolgáltatnak, és ez utóbbit *kettős síknak* is mondjuk.

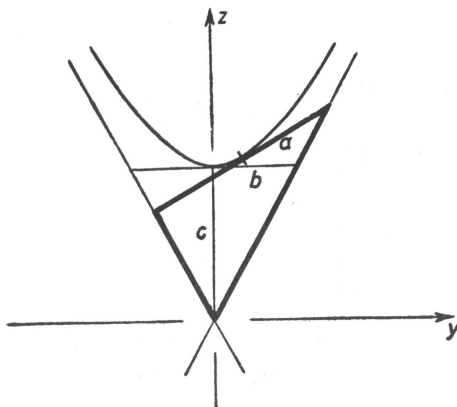
Hangsúlyozzuk, hogy az ebben a szakaszban megismert másodrendű felületek mindegyike vonalfelület.

**B1** Azt kell most még mondanunk, hogy ebben a paragrafusban egyes másodrendű felületekkel ismerkedtünk meg. A következő paragrafusban látjuk majd csak be, hogy már minddel megismerkedtünk.

**B2** A másodrendű kúp bevezetésével kapcsolatban teszünk néhány megjegyzést.

a) Először azt bizonyítjuk be, hogy *minden másodrendű kúp (egyenes vagy ferde) körkúp*. Ehhez azt kell belátnunk, hogy a másodrendű kúpnak van körmetszete.

Induljunk ki tehát az első tételünkben megadott egyenletű másodrendű kúpból. Feltehetjük, hogy  $a \geq b$ . Messük el ezt a kúpot az  $x = a$  síkkal. Helyettesítés mutatja, hogy a metszet görbe hiperbola, amelynek aszimptotái az  $x = 0$  sík által kimetszett alkotókkal párhuzamosak (522. ábra). Messük most a kúpot egy olyan síkkal, amely az  $x = a$  síkra merőleges, és ezt a síkot az imént kapott hiperbola egy érintőjében metszi. Minthogy az így kapott metszetgörbe másodrendű görbe és korlátos (vö. B5), csak ellipszis (vagy kör) lehet. Ez az ellipszis az  $x = 0$  síkra szimmetrikus, mert maga a kúp is és a metsző sík is szimmetrikus erre a síkra. Ebből következik, hogy az  $x = 0$  sík a metszetellipszis egyik tengelyét metszi ki, a metszetellipszis egyik tengelyének hossza tehát a felvett hiperbolaérintőnek az aszimptoták által kimetszett szakaszával egyenlő. A másik tengely a mondott szakasz felezőpontjában, az  $x = 0$  síkra állított merőlegesen helyezkedik el. Minthogy azonban ennek a szakasznak a felezőpontja 43.6 szerint a hiperbolán van, a kúp ebből a merőlegesből  $2a$  hosszúságú szakaszt metsz ki, hiszen a metszetellipszis centruma az  $x = 0$  síkban van, a hiperbola pontjai pedig az  $x = a$  síkban helyezkednek el. Ezek szerint metszetellipszisünk másik tengelyének a hossza  $2a$ .





Akkor jutunk tehát körmetszethez, ha a hiperbolaérintőt úgy vesszük fel, hogy az aszimptoták ebből ugyancsak  $2a$  hosszúságú szakaszt messenek ki. Ez valóban lehetséges, sőt ezt az érintőt szerkesztéssel is meghatározhatjuk. 43.6 alapján tudjuk, hogy hiperbolánknak az  $y$ -tengellyel párhuzamos,  $2b$  hosszúságú érintője az aszimptotákkal együtt ugyanakkora területű háromszöget határoz meg, mint a keresett érintő. Ennek a háromszögnek ismeretes egy oldala ( $2a$ ), az ezzel szemközti szöge (a hiperbola aszimptotáinak szöge) és a területe ( $bc$ ). Ezekből az adatokból ez a háromszög valóban megszerkeszthető: ha az adott oldalt felmérjük, a harmadik csúcsot (a megadott látószöghöz tartozó) körív és egy (a megadott terület által meghatározott) egyenes metszéspontjaként kapjuk meg. A körív magassága  $a \geq b$  miatt legalább  $c$ , az egyenesnek az adott oldaltól való távolsága pedig legfeljebb  $c$ ; ezért a szerkesztés mindig elvégezhető.

b) Megemlítjük, hogy a most bizonyított tény megfordítása is igaz: minden körkúp, tehát a ferde körkúp is másodrendű kúp. Ezt itt nem bizonyítjuk be, a következő paragrafus tárgyalásából ugyanis könnyedén kiolvashatjuk majd (lásd 51.9 B1). A „másodrendű kúp” megnevezésre tehát csak átmenetileg van szükségünk, tárgyalásunk befejeztével a körkúp szinonimájává válik.

c) Ha a kúpszeletekhez ideális pontjaikat is hozzászámítjuk, akkor nemcsak körből vagy ellipsziszből, hanem parabolából vagy hiperbolából mint vezérvonalból is kiindulhatunk, és belőlük kúpfelülethez juthatunk. Könnyedén adódik majd (lásd 51.9 B1), hogy így sem jutunk más alakzatokhoz. Ezt a kijelentést nem bizonyítja az, hogy a kúpszeletekhez forgáskúp síkmetszeteiként juthatunk. Tárgyalásunk befejeztével elmondhatjuk tehát, hogy a körkúpok osztálya azonos azoknak a kúpoknak az osztályával, amelyeknek a vezérvonala közösleges másodrendű görbe.

d) Megtehetjük, hogy az elfajuló másodrendű görbével mint vezérvonallal alkotott kúpokat is a másodrendű kúpok közé soroljuk. Ezeket *elfajuló* másodrendű kúpoknak, s ezekkel szembeállítva a közösleges vezérvonalúakat, *közösleges* másodrendű kúpoknak mondjuk. Az elfajuló másodrendű kúpok egyben elfajuló hengerek is, hiszen elfajuló kúpszeletet választva vezérvonalnak, a kúp csak valós egyenesben metsző képzetes síkpár, valós metsző síkpár vagy kettős sík lehet.

**B3** A másodrendű hengereket úgy definiáltuk, hogy alkotóikra merőleges síkmetszetük másodrendű görbe. Merőleges síkmetszet helyett ferde metszetet is mondhattunk volna, hiszen a henger merőleges és ferde metszetei egymás affín képei, és a kúpszeletek osztályozása egy kúpszeletet és az affín képét ugyanabba a kategóriába sorolta.

Minden hengert kúpnak is tekinthetünk akkor, ha megengedjük, hogy a kúp csúcsa ideális pont is lehessen. Így a másodrendű hengerek is besorolhatók a másodrendű kúpok közé, ennek előfeltétele azonban, hogy ezeket ne körből vagy ellipsziszből, hanem tetszőleges kúpszeletből kiindulva definiáljuk.

**B4** A másodrendű felületek között három üres alakzatot ismertünk meg: a képzetes ellipszoidot, a képzetes elliptikus hengert és a képzetes párhuzamos síkpárt. Ezek között különbséget tehetünk azáltal, hogy ideális pontjaikat is megvizsgáljuk. Tisztáznunk kell evégből, mikor mondjuk valamely ideális pontról, hogy egy másodrendű felülethez tartozik. Ezt ugyanazzal a módszerrel tehetjük meg, mint amellyel a kúpszeleteknél eljártunk. Ehhez a térbeli homogén koordináták bevezetésére van szükség.

A térbeli homogén koordinátákat a következő megállapodással vezetjük be: a közösleges  $P(x, y, z)$  pont homogén koordinátái olyan  $x_1, x_2, x_3, x_4$  számok, amelyeknek nem mindegyike 0, és amelyekre

$$x : y : z : 1 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4;$$

a  $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$  vektor iránya által meghatározott ideális pont homogén koordinátái olyan  $x_1, x_2, x_3, x_4$  számok, amelyeknek nem mindegyike 0, és amelyekre

$$x : y : z : 1 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4;$$

Megállapodásunkból következik, hogy az ideális pontokra és csak ezekre  $x_4 = 0$ . Ez tehát az ideális sík egyenlete.

A sík és a másodrendű felületek egyenletéből homogén koordinátás egyenletükre térhetünk át, ha a homogén koordináták definíciójából következő

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

összefüggések alapján homogén koordinátákra térünk át, majd  $x_4$  megfelelő (a síknál első, másodrendű felületeknél második) hatványával szorzunk. Ez a szorzás azt eredményezi, hogy az egyenlet homogén első-, illetve másodfokú egyenletté válik, s hogy az egyenletet egyes ideális pontok koordinátái is kielégítik. Ezeket az ideális pontokat az alakzathoz csatoljuk. Meg kell azonban vizsgálni, hogy ez az utasítás ugyanazoknak az ideális pontoknak a csatolását írja-e elő akkor is, ha az alakzat egyenletét 0-tól különböző állandóval szorozzuk, és ha más koordináta-rendszerre térünk át. Ez pontosan 44.4 B mintájára könnyen bizonyítható.

A síkhoz ilyen módon éppen a sík ideális pontjait csatoljuk, mert azok a vektorok merőlegesek a sík normálvektorára, amelyek a sík ideális pontjait határozzák meg. A másodrendű felületekhez csatolt ideális pontok az ideális síkon egy olyan alakzatot alkotnak, amelynek az első három homogén koordinátával felírt egyenlete homogén másodfokú. A kúpszelet fogalmát általánosítva mondhatjuk, hogy az ilyen, az ideális síkban elhelyezkedő alakzat is kúpszelet, és ezt *ideális kúpszeletnek* nevezzük. Az ideális kúpszeleteket csak úgy osztályozhatjuk, ahogyan a közös sík kúpszeleteit projektív osztályozásukkor osztályozhattuk (lásd 47.5 B5), hiszen az ideális síkban nincs egy kitüntetett ideális egyenes, hanem minden egyenes az. A másodrendű felületek kanonikus egyenleteiből kiolvashatjuk, hogy az ellipszoidok ideális kúpszelete üres alakzat, a hiperboloidoké és a (valós) kúpé közös sík kúpszelet, a hiperbolikus paraboloidé és a hiperbolikus hengereké valós metsző egyenespár, az elliptikus paraboloidé és az elliptikus hengereké egyetlen pont, végül a parabolikus hengereké kettős egyenes.

Kiemeljük a mondottakból, hogy a képzetes ellipszoidnak nincs (valós) ideális pontja, a képzetes elliptikus hengerhez egyetlen (valós) ideális pont tartozik, a képzetes párhuzamos síkpárhoz tartozó ideális pontok pedig (valós) egyenest alkotnak. Ezzel feleltünk arra a kérdésre, amelynek felvetéséből kiindultunk.

**B5** Az ideális pontokkal kiegészített másodrendű felületet bármely közös sík, a felület által nem tartalmazott sík csak másodrendű görbében metszheti. Itt a 47.5 B5-ben bevezetett, az ideális egyenest is tartalmazó, elfajuló másodrendű görbéket is a másodrendű görbékhez soroltuk. Állításunk pl. az  $x_1 = 0$  (azaz  $x = 0$ ) síkra nyilvánvalóan helyes, és ebből a koordináta-rendszer elmozgatásával bármely közös síkra is következik.

Ha tehát egy közös sík a másodrendű felületet (a metsző sík ideális egyenesét nem tartalmazó) másodrendű görbében metszi, akkor ennek az ideális pontjai azonosak azokkal, amelyek a másodrendű felület ideális pontjai közül a metsző síkban vannak.

A másodrendű felület egy síkmetszetének minőségét eszerint egyszerűen eldönthetjük. Csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a metsző síkban hány van a másodrendű felület ideális pontjai közül. A metszet aszerint elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus görbe, amint a metsző sík ideális egyenese a másodrendű felület ideális kúpszeletét nem éri, érinti vagy metszi, azaz vele 0, 1 vagy 2 közös pontja van.

Eredményünk messzemenően általánosítja azt, amit 41.7-ben a forgáskúp és a forgáshenger síkmetszeteiről bebizonyítottunk.

B2-ben is mondhattuk volna, hogy az ott vizsgált síkmetszet ellipszis (vagy kör), mert nincs ideális pontja, hiszen a metsző sík a kúp minden alkotóját közös pontban metszi.

**B6** A térbeli homogén koordinátákat B4-ben jóval rövidebben vezettük be, mint a 44. §-ban a síkbelieket. A különbségnek az az oka, hogy ott szemléletesen járhattunk el, mert térben elhelyezett síkot tekinthettünk, itt viszont hasonló szemléletes tárgyalásról le kellett mondanunk.

Foglalkozhattunk volna itt a *térbeli dualitással* is. Ehhez azt jegyezzük meg, hogy a sík homogén koordinátás egyenletének együtthatóit homogén *síkkoordinátáknak* nevezzük, s hogy a

pontkoordináták és síkkoordináták szerepének felcserélése ugyanúgy elvezet a térbeli dualitáshoz, mint ahogyan a 44.7-ben a pontkoordináták és vonalkoordináták felcserélése a síkbeli dualitáshoz vezetett. A térben tehát a pontnak sík és a síknak pont a duálja. Ebből már következik, hogy a térbeli dualitás egyenesnek egyenest feleltet meg.

A síkgeometriai tárgyalással való egybevetést illetően megjegyezzük még, hogy a kettősviszonyt tárgyaló 45. § eredményeit minden további nélkül alkalmazhatjuk a térben elhelyezkedő pontsorokra és sugársorokra. Kiegészíthetnők ezt azzal, hogy egy egyenesen átfektetett négy síknak, tehát egy síksor négy elemének a kettősviszonyáról is beszélünk. Ezt könnyen meg is tehetnők arra a mintára, ahogyan egy sugársor négy elemének kettősviszonyát tárgyaltuk.

**50.9** Egy másodrendű felületet *elfajulónak* mondunk, ha a koordináta-rendszer eltolásával és elforgatásával elérhető az, hogy egyenletében a) vagy csak másodfokú tagok szerepeljenek, b) vagy pedig csak legfeljebb két koordináta szerepel.

Az a) esetben elég csak eltolásról szólni, hiszen ha csak másodfokú tagok szerepelnek az egyenletben, akkor ezen a tulajdonságon az elforgatás nem változtat. A b) esetben elég csak elforgatásról szólni, hiszen ha csak két koordináta szerepel az egyenletben, akkor az eltolás ezen nem változtat.

A másodrendű felületet *közönségesnek* mondjuk, ha nem elfajuló.

**Tétel.** Egy másodrendű felület akkor és csak akkor elfajuló, ha determinánsa 0.

*Bizonyítás.* a) Először azt vizsgáljuk, mikor érhető el a koordináta-rendszer eltolásával az, hogy az egyenletben csak másodfokú tagok szerepeljenek. A koordináta-rendszer kezdőpontját az  $(x_0, y_0, z_0)$  pontba toljuk, azaz  $x=x'+x_0$ ,  $y=y'+y_0$ ,  $z=z'+z_0$  koordináta-transzformációt hajtunk végre. Ha a másodrendű felület 50.1-ben megadott egyenletéből indulunk ki, akkor egyszerű helyettesítéssel azt kapjuk, hogy az  $a_{14}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{34}$  együtthatók helyébe rendre az

$$\begin{aligned} a'_{14} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}, \\ a'_{24} &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}, \\ a'_{34} &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} \end{aligned}$$

értékek,  $a_{44}$  helyébe pedig a következő érték lép:

$$\begin{aligned} a_{44} &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}x_0z_0 + a_{33}z_0^2 + \\ &+ 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44} = \\ &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})x_0 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})y_0 + \\ &+ (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})z_0 + (a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}). \end{aligned}$$

A kapott egyenletben akkor szerepelnek csak másodfokú tagok, ha az  $x_0, y_0, z_0$  értékek kielégítik az

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0, \\ a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. Az első három egyenlet ugyanis az  $a'_{14}$ ,  $a'_{24}$ ,  $a'_{34}$  együtthatók eltűnését mondja ki, és ha ezek teljesülnek, akkor az utolsó egyenlet az  $a'_{44} = 0$  követeléssel egyenértékű. Ezek szerint akkor érhető el az, hogy a másodrendű felület egyenletében csak másodfokú tagok szerepeljenek, ha vannak olyan  $x_0, y_0, z_0$  értékek, amelyek a felírt egyenletrendszert kielégítik.

b) Most azt vizsgáljuk, mikor érhető el a koordináta-rendszer elforgatásával az, hogy a másodrendű felület egyenletében legfeljebb két koordináta szerepeljen.

Először azt bizonyítjuk be, hogy ha az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  alapvektorú (derékszögű vagy ferdeszögű) koordináta-rendszer használatakor a felület egyenletében az  $\mathbf{e}_1$ -hez tartozó koordináta nem szerepel, akkor minden (derékszögű vagy ferdeszögű)  $\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  alapvektorú koordináta-rendszernek ugyancsak megvan ez a tulajdonsága. Ha ugyanis az

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{a}_2 + x'_3\mathbf{a}_3$$

egyenletet az  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$  és  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  vektorokkal skalárisán megszorozzuk, akkor az  $x_2$  és  $x_3$  koordináták transzformációs egyenleteit kapjuk meg, és ezekben  $x'_1$  nem szerepel, mert a szorzó vektorok  $\mathbf{e}_1$ -re merőlegesek. Ha tehát  $x_1$  nem szerepelt az egyenletben, akkor  $x'_1$  sem szerepel a transzformáció után.

Azt kell tehát csak megvizsgálnunk, mikor található olyan  $\mathbf{e}$  egységvektor, hogy ha  $\mathbf{e}$  szerepel a koordináta-rendszer alapvektorai között, akkor a felület egyenletében az  $\mathbf{e}$ -hez tartozó koordináta nem szerepel. Ennél a vizsgálatnál egyelőre feltesszük, hogy  $\mathbf{e}$  nem merőleges az eredeti  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  alapvektorok közül pl.  $\mathbf{i}$ -re, hogy tehát az  $\mathbf{e}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  alapvektorok koordináta-rendszert adnak meg. Feltesszük tehát, hogy az  $\mathbf{e}(e_1, e_2, e_3)$  vektor (közönséges) koordinátái közül  $e_1 \neq 0$ .

Ha az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  alapvektorú, eredeti koordináta-rendszerről az  $\mathbf{e}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  alapvektorú, ferdeszögű koordináta-rendszerre térünk át, akkor a koordináta-transzformációt az

$$x = e_1 x', \quad y = y' + e_2 x', \quad z = z' + e_3 x'$$

egyenletek adják. Ezek helyességét belátjuk, ha az

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{e} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

egyenletet az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vektorokkal skalárisán megszorozzuk.

Ha a mondott koordináta-transzformációt végrehajtjuk, akkor egyszerű helyettesítéssel azt kapjuk, hogy a másodrendű felület 50.1-ben megadott egyenletében az  $a_{11}$  együttható helyébe

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}e_1^2 + 2a_{12}e_1e_2 + a_{22}e_2^2 + 2a_{13}e_1e_3 + 2a_{23}e_2e_3 + a_{33}e_3^2 = \\ &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3)e_1 + (a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3)e_2 + \\ &+ (a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3)e_3, \end{aligned}$$

az  $a_{12}, a_{13}, a_{14}$  együtthatók helyébe pedig a következő értékek kerülnek:

$$a'_{12} = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3,$$

$$a'_{13} = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$$

$$a'_{14} = a_{41}e_1 + a_{42}e_2 + a_{43}e_3.$$

Az  $x'_1$  koordináta akkor nem szerepel az új egyenletben, ha az  $e_1, e_2, e_3$  értékek kielégítik az

$$a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 = 0,$$

$$a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 = 0,$$

$$a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 = 0,$$

$$a_{41}e_1 + a_{42}e_2 + a_{43}e_3 = 0.$$

egyenletrendszer. Az utolsó három egyenlet ugyanis az  $a'_{12}, a'_{13}, a'_{14}$  együtthatók eltűnését mondja ki, s ha ezek teljesülnek, akkor az első  $e_1 \neq 0$  miatt az  $a_{11} = 0$  követeléssel egyenértékű. Ezek szerint akkor található kívánt tulajdonságú,  $\mathbf{i}$ -re nem merőleges  $\mathbf{e}$  egységvektor, ha vannak olyan  $e_1 \neq 0$  értékek, amelyek a felírt egyenletrendszer kielégítik. Nem kellett itt az  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$  megszorítást is kimondanunk, mert számtényező alkalmazásával elérhetjük, hogy ez is teljesüljön.

Az eredmény szimmetrikus voltából következik, hogy ha  $\mathbf{i}$  szerepét  $\mathbf{j}$  vagy  $\mathbf{k}$  játssza, akkor ugyanahhoz az egyenletrendszerhez jutunk, de  $e_1$  helyett  $e_2$ -ről vagy  $e_3$ -ról kell megkövetelnünk, hogy ne legyen 0. Eszerint akkor található kívánt tulajdonságú  $\mathbf{e}$  egységvektor, és egyben akkor érhető el a koordináta-rendszer elforgatásával, hogy a felület egyenletében legfeljebb két koordináta szerepeljen, ha az imént felírt egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.

c) Megállapíthatjuk most már, hogy egy adott másodrendű felület akkor és csak akkor elfajuló, ha az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0. \end{aligned}$$

egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. Beláttuk ugyanis, hogy ha a felület elfajuló, akkor az a) esetben  $x_0, y_0, z_0, 1$ , a b) esetben pedig  $e_1, e_2, e_3, 0$  adja ennek az egyenletrendszernek nem triviális megoldását. Ha viszont az egyenletrendszernek van nem triviális  $x_1, x_2, x_3, x_4$  megoldása, akkor az  $x_4 \neq 0$  esetben számtényezővel szorozva  $x_0, y_0, z_0, 1$  alakú megoldáshoz, az  $x_4 = 0$  esetben pedig  $e_1, e_2, e_3, 0$  alakú megoldáshoz jutunk, a felület tehát minden esetben elfajuló.

A felírt egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha determinánsa  $A = 0$ . Ez tehát annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a felület elfajuló legyen. —

Az elfajuló felületek definíciójából következik, hogy az előző szakaszban megismert felületek elfajulók, mégpedig a kúpok az a) esetnek, a hengerek pedig b) esetnek felelnek meg. A most bizonyított tétel alapján könnyű ellenőrizni, hogy az ellipszoidok, hiperboloidok és paraboloidok közönségesek.

Tételünk bizonyítása egyben gyakorlati utasítást ad arra, hogy a kúp egyenletéből a csúcsát, a henger egyenletéből pedig alkotóinak az irányát meghatározzuk.

Hangsúlyozzuk tételünknek azt a következményét, hogy ha egy másodrendű felület egyenletének determinánsa 0, akkor az egyenletnek ez a tulajdonsága a koordináta-rendszer eltolása és elforgatása után is megmarad.

**B** Ennek a szakasznak a tétele a síkbeli tárgyalásban 46.4 második tételének felel meg. Ott egyszerűbb volt az elfajultság definíciója, és jóval rövidebb volt az  $A = 0$  feltétel bizonyítása, mert homogén koordinátákat használtunk, és a konjugáltság fogalmára is építhettünk. Itt nem építjük ki annyira a tárgyalást, és ezért hosszabb okoskodás vált szükségessé. Megmutattuk viszont, hogyan lehetett volna a síkbeli esetben is okoskodnunk, ha az említett segédeszközök nem állnak rendelkezésre.

## 51. § A másodrendű felületek osztályozása

Célunk itt az, hogy a másodrendű felületek tárgyalását tengelyeik meghatározásával és osztályozásukkal zárjuk le. Megmutatjuk, hogy az előző paragrafusban már minden másodrendű felületet megismertünk. Tárgyalásunk jobbra algebrai jellegű. A legfontosabb segédeszköz a síkban már megismert főtengeteltétel térbeli megfelelője lesz.

**51.1** A síkgeometriai tárgyalás a kétsoros-kétoszlopos mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak kereséséhez vezetett. Itt most a harmadrendű kvadratikus (háromsoros és háromszlopos) mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait vizsgáljuk.

Legyen adva a szimmetrikus harmadrendű

$$(C) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

mátrix, elemei tehát olyan valós számok, amelyek közül a főátlóra nézve szimmetrikusan elhelyezkedők egyenlők:

$$c_{ik} = c_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

E mátrix révén minden  $\mathbf{x}$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) vektorhoz az

$$x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3,$$

$$x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3,$$

$$x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3$$

előírással egy-egy  $\mathbf{x}'(x'_1, x'_2, x'_3)$  vektort rendelünk.

Az  $\mathbf{x}$  vektort *sajátvektornak* mondjuk, ha nem hullvektor, és párhuzamos a hozzárendelt  $\mathbf{x}'$  vektorral, azaz

$$\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x},$$

részletesen kiírva

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = \lambda x_1,$$

$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = \lambda x_2,$$

$$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 = \lambda x_3,$$

ahol  $\lambda$  valamilyen valós számot jelöl. Megjegyezzük, hogy  $\lambda$  értéke 0 is lehet. A sajátvektorokhoz ilyen módon hozzárendelt  $\lambda$  értékeket *sajátértékeknek* (karakterisztikus érték) nevezzük.

Ha a sajátvektorokat definiáló egyenleteket egy állandóval megszorozzuk, azt kapjuk, hogy ha  $\mathbf{x}$  sajátvektor, akkor  $\mathbf{x}$ -nek bármely 0-tól különböző számmal való szorzata, azaz minden  $\mathbf{x}$ -szel párhuzamos, 0-tól különböző vektor is sajátvektor, és mindezekhez a vektorokhoz ugyanaz a sajátérték tartozik. Eszerint csak a vektor állásától függ az, hogy a vektor sajátvektor-e, s hogy milyen sajátérték tartozik hozzá. Így tehát egy sajátvektorral ellentétes irányú vektor is sajátvektor. A sajátvektorok irányát *sajátiránynak* mondjuk. A sajátirányok összeszámlálásakor az ellentétes irányok között nem teszünk különbséget, tehát igazában nem irányokat, hanem állásokat számlálunk.

**Tétel.** *A (C) mátrix sajátértékeit a*

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökei adják meg.

Ezt az egyenletet *Laplace-féle egyenletnek* (karakterisztikus egyenlet, szekuláris egyenlet) nevezzük, mint ahogyan a síkbeli tárgyalás megfelelő egyenletét neveztük.

*Bizonyítás.* A  $\lambda$  érték akkor és csak akkor saját érték, ha a sajátvektort definiáló egyenletrendszernek  $\lambda$  ilyen értékválasztása mellett van nem triviális megoldása. Ezt az egyenletrendszert

$$(c_{11} - \lambda)x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 0,$$

$$c_{21}x_1 + (c_{22} - \lambda)x_2 + c_{23}x_3 = 0,$$

$$c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + (c_{33} - \lambda)x_3 = 0$$

alakban írhatjuk. Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek azonban akkor és csak akkor van nem triviális megoldása, ha az együtthatóiból alkotott determináns értéke 0. —

Tételünkéből következik, hogy a  $(C)$  mátrixnak legfeljebb három sajátértéke lehet, hiszen a Laplace-egyenlet  $\lambda$ -ban harmadfokú, és harmadfokú egyenletnek legfeljebb három (valós) gyöke van. Az egyenlet valóban harmadfokú, mert  $\lambda^3$  együtthatója  $-1$ .

Az egyenlet állandó tagja a  $(C)$  mátrix determinánsa. Ebből következik, hogy  $0$  akkor és csak akkor sajátérték, ha a mátrix determinánsa  $0$ , hiszen  $0$  akkor és csak akkor gyöke egy algebrai egyenletnek, ha benne az állandó tag  $0$ .

**A** Ha egy adott  $(C)$  mátrix sajátvektorait akarjuk meghatározni, akkor tételünk alapján először a sajátértékeket határozzuk meg. A sajátértékek mindegyikére felírhatjuk ezután az ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektorok koordinátáit szolgáltató homogén lineáris egyenletrendszer, és ennek a megoldása az illető sajátértékhez tartozó sajátvektorokat adja. Az így felírt egyenletrendszer mindig kivételes (az egyenleteknek legalább az egyike semmitmondó, vagy a többinek következménye), hiszen a rendszer determinánsa  $0$ .

**B1** Ez a paragrafus a síkbeli tárgyalás 47. §-ának felel meg, és azt több vonatkozásban követi. Kezdhetjük volna a másodrendű felületek vizsgálatát itt is ugyanúgy, ahogyan a 46. § a síkbeli tárgyalást elindította. Az ott megismert módszerek jól alkalmazhatók itt is. Ugyanarra a mintára foglalkozhatnánk a másodrendű felületek minőségének vizsgálatával (ideális kúpszeleteik alapján osztályozva azokat). A pontok konjugáltságát is definiálhatnánk ugyanúgy, és ez a poláris egyenesnek itt megfelelő polársík, valamint a szinguláris pont fogalmához vezetne. A szinguláris ponttal rendelkező, elfajuló másodrendű felületeket is vizsgálhatnánk hasonló módon. A polársík pontjaira vonatkozólag hasonló tételket mondhatnánk ki, mint ott a poláris egyenes pontjairól. A másodrendű felület centrumát az ideális sík közönséges pólusaként definiálhatnánk, és megvizsgálhatnánk mindenfajta másodrendű felület centrumalakzatát. Az ideális pontok közönséges polársíkjai itt átmérősíkok; ha azt vizsgálnók, hogy melyek a másodrendű felület szimmetriasíkjai, akkor azt kellene megvizsgálunk, hogy milyen irányokhoz tartozik rájuk merőleges átmérősík, és ez vezetne ahhoz a problémához, amelyet ebben a szakaszban tárgyalni kezdtünk. Mindezt nem tesszük, mert – amint már leszögeztük – a térbeli tárgyalást rövidebbre fogjuk. Látjuk majd, hogy célunkat a most említett sokrétű előkészítés nélkül is elérhetjük. Rövidebb, de kevésbé geometriai tárgyalásunk arra is mintát ad, hogyan juthattunk volna el a 47. § eredményeihez a 46. § előkészítése nélkül.

A térbeli polaritást illetően megjegyezzük, hogy egy egyenes pontjainak polársíkjai, ha nem mind azonosak, síksort alkotnak, és az egyeneshez *poláris egyenesként* ennek a síksornak a tartóját rendeljük. Ilyen módon a térbeli polaritás pontokból, egyenesekből és síkokból álló alakzathoz síkokból, egyenesekből és pontokból álló duális alakzatot rendel.

A 48. §-nak megfelelő vizsgálatokkal itt nem foglalkozunk. Ennek részben az az oka, hogy nyolc ponton át mindig fektethető ugyan másodrendű felület, azonban meglehetősen bonyolult feltételt kell a nyolc pontnak kielégítenie ahhoz, hogy csak egy ilyen másodrendű felület legyen.

**B2** Ebben a szakaszban egy algebrai problémát vetettünk fel és tárgyaltunk. Csak azáltal vált a tárgyalás valamelyest geometriaivá, hogy a szereplő számhármassokat egy vektor koordinátáinak mondtuk. Ez a szóhasználat kényelmesebbé tette a szövegezést, és sok előnyét látjuk a következőkben is. Elmondhatnók azonban ennek az egész paragrafusnak az anyagát úgy is, hogy csak számhármassokról beszélünk, és sem a számhármassok által megadott vektorokról, sem az általuk megadott pontokról nem szólunk. Ez a megértést nem zavarja, azonban a terjedelmet növelné, és megfosztaná a tárgyalást a szemléletességtől.

**B3** Az ebben a szakaszban felvetett problémát  $n$ -edrendű kvadratikussá mátrixra is felvethetjük. Mindazt, amit a harmadrendű mátrixokról mondtunk, változatlanul elmondhatjuk  $n$ -edrendű mátrixokra is. Így ahhoz az eredményhez jutunk, hogy a sajátértékeket a

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet adja meg. A tárgyalás során természetesen nem számhármass szerepel itt, hanem  $n$  darab számból álló sorozat. A szövegezést sem kell azonban megváltoztatnunk, ha azt mondjuk, hogy  $n$  szám sorozata is vektort, mégpedig „ $n$ -dimenziós” vektort ad meg.

Hasonló megjegyzés érvényes a következő szakaszok tárgyalására is. Ilyen általánosításuk munkát sem okoz. Nem is írjuk át eredményeinket és okoskodásainkat az „ $n$ -dimenziós” esetre, csak ott szólunk erről az átírásról, ahol valamilyen nehézség lép fel.

Ha ennek az általánosabb esetnek a tárgyalásakor  $n$  szám sorozata helyett vektorról vagy pontról beszélünk, akkor ezáltal más geometriai kifejezéseknek is polgárjogot adhatunk. Gondolunk pl. arra, hogy párhuzamos vektorokról vagy egy egyenesen elhelyezkedő pontokról beszélhetünk. Az ilyen beszédmód nem teszi azonban szemléletessé a tárgyalást, csak a szemléletesség látszatát kelti.

**B4** Ha a geometriának arra az aritmetikai megalapozására gondolunk, amelyet 38.2 B4-ben a sík esetére vázoltunk, akkor nem jelent nehézséget az, hogy az imént bevezetett beszédmódot tartalommal töltsük meg.

Az  $n$ -dimenziós geometria aritmetikai megalapozásában pontnak az  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  számsorozatot mondjuk. Ezeknek a pontoknak az összessége  $n$ -dimenziós (aritmetikai) tér. Az  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  pontból a  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  pontba vezető vektornak a  $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$  számsorozatot nevezzük. Ugyanaz a számsorozat adja meg tehát a pontot és a  $(0, 0, \dots, 0)$  kezdőpontból a pontba vezető vektort, a pont helyvektorát. Két vektor összegét megfelelő koordinátáik összegezésével, egy vektor számszorosát mindegyik koordinátájának megszorzásával, két vektor skaláris szorzatát megfelelő koordinátáik szorzatainak összegeként definiáljuk. Hangsúlyozzuk, hogy vektoriális szorzatról csak a háromdimenziós térben beszélünk.

Két vektort akkor mondunk párhuzamosnak, ha az egyik számszorosa a másiknak. Az  $\mathbf{a}$  vektor hosszát az  $a^2 = |\mathbf{a}|^2$  összefüggéssel, az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vektorok  $\omega$  hajlásszögét pedig az  $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \omega$  összefüggéssel definiáljuk. Egy pontból felmért, egymással párhuzamos vektorok végpontjai egyenest (egydimenziós altér) alkotnak. Ha két egymással nem párhuzamos vektor számszorosainak összegét egy pontból felmérjük, a felmért vektorok végpontjai síkot (kétdimenziós altér) adnak. Ha három, egy síkban fel nem mérhető vektorral teszünk hasonlót, háromdimenziós altérhez jutunk. Ezt folytathatjuk, amíg csak az  $(n-1)$ -dimenziós altérhez (hipersík) nem jutunk. Ilyen módon az  $n$ -dimenziós tér  $1, 2, \dots, n-1$  dimenziós lineáris altereinek definíciójához jutottunk. Magát az  $n$ -dimenziós teret és a  $0$ -dimenziós pontot is az alterekhez sorolhatjuk.

Mindezt elmondhatjuk  $n$  különböző értékeire. Az  $n = 1, 2, 3$  esetek az egyenes, a sík és a tér geometriáját adják. Újat akkor kapunk, ha  $n > 3$ . Ebben az esetben többdimenziós geometriáról beszélünk.

A többdimenziós geometriáról hasonlóan mondhatunk, mint amit 38.2 B5-ben a komplex geometriáról mondhattunk: a többdimenziós geometria már nem szemléletes, csak a szemléletes geometriából kölcsönzött szavakat használja. Ebben a geometriában lehetséges az, hogy két sík egy pontban messe egymást, hogy két háromdimenziós altér hajlásszögéről beszéljünk, hogy két kitérő háromdimenziós altér távolságát meghatározzuk, vagy hogy egy háromdimenziós alteret egy síkja körül forgassunk. Senki sem lát háromnál több dimenziós térben, legfeljebb olyan gyakorlatra tesz szert a közönségesen szemléletes jelentésű fogalmak átültetésében, hogy úgy beszél, mintha látna. Akinek nincs kellő gyakorlata, azt hiheti, hogy ez az átültetés nem jár nehézséggel, és szemléletesnek hitt módszerrel hamis eredményekhez juthat.

Hangsúlyoznunk kell, hogy mi itt a többdimenziós geometriának csak egy felépítési módját, ti. aritmetikai megalapozását vázoltuk. A többdimenziós geometriához el lehet jutni elemi geometriai úton is, ha a tárgyalást megfelelően választott axiómákra alapozzuk. Felépíthetjük közvetlenül a többdimenziós topológiát, projektív geometriát vagy affin geometriát is. A többdimenziós geometriánál csak éppen szemléletes felépítésről nem lehet szó.

**B5** A többdimenziós geometria sok tudományágban bizonyul hasznosnak, mert egyszerűbb és áttekinthetőbb szövegezést tesz lehetővé, s mert ezáltal, valamint a szemléletes geometriával vont párhuzam révén az okoskodást is megkönnyíti. Vonatkozik ez a megjegyzés a matematika számos



fejezetére, de vonatkozik pl. a fizika egyes fejezeteire is. Ilyen példaként a fázisteret és a relativitás elméletét említjük. Természetesen ilyenkor is ügyelni kell arra, hogy a szemléletesebb beszéd még nem nyit kaput a szemléletre támaszkodó okoskodásnak.

**51.2**  $A(C)$  mátrix minden  $\mathbf{x}$  vektorhoz egy-egy  $\mathbf{x}'$  vektort rendelt. Ezt a hozzárendelést, vektortranszformációt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

írásmóddal juttatjuk kifejezésre. Itt  $\mathbf{C}$  a transzformáció jele. A  $(C)$  mátrixot a  $\mathbf{C}$  transzformáció mátrixának mondjuk.

**Tétel.** Ha minden  $\mathbf{x}$  vektorhoz egy-egy  $\mathbf{C}\mathbf{x}$ -szel jelölt vektort rendelünk, az így értelmezett  $\mathbf{C}$  vektortranszformáció akkor és csak akkor adható meg egy szimmetrikus  $(C)$  mátrix által, ha az

$$1. \lambda \cdot \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}(\lambda\mathbf{x}),$$

$$1. \mathbf{C}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y},$$

$$3. \mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{C}\mathbf{x}$$

egyenlőségek a  $\lambda$  valós szám és az  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  vektorok minden megválasztása mellett teljesülnek.

Az 1. és 2. tulajdonságokkal rendelkező, tehát összeg- és aránytartó vektortranszformációt *homogén lineáris* vektortranszformációnak mondjuk. A homogén lineáris vektortranszformáció *szimmetrikus*, ha a 3. tulajdonsággal is rendelkezik.

A 2. tulajdonságot kéttagú összegre írtuk fel, de felírhattuk volna többtagúra is, hiszen a két tagra érvényes tulajdonság ismételt alkalmazásával adódik, hogy akárhány tagra is érvényes.

*Bizonyítás.* a) Először azt bizonyítjuk be, hogy egy szimmetrikus  $(C)$  mátrix által adott transzformáció rendelkezik a tételben felsorolt tulajdonságokkal.

Az 1. és 2. egyenletek valóban teljesülnek, mert a két oldalon álló vektorok  $i$ -edik koordinátái ( $i = 1, 2, 3$ ) rendre egyenlők. Az  $\mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x}$  vektor  $i$ -edik koordinátája ugyanis

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3.$$

Az 1. egyenlet helyessége tehát a

$$\lambda(c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3) = c_{i1}(\lambda x_1) + c_{i2}(\lambda x_2) + c_{i3}(\lambda x_3),$$

a 2. egyenleté pedig a

$$c_{i1}(x_1 + y_1) + c_{i2}(x_2 + y_2) + c_{i3}(x_3 + y_3) = (c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3) + (c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + c_{i3}y_3)$$

azonosságból következik.

A 3. egyenlet helyességének igazolásához az  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{y}$  skaláris szorzatot

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 x_i (c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + c_{i3}y_3) = \sum_{i,k=1}^3 c_{ik}x_i y_k$$

alakban, az  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{C}\mathbf{x}$  skaláris szorzatot pedig

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{C}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 y_k (c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + c_{k3}x_3) = \sum_{i,k=1}^3 c_{ki}y_k x_i$$

alakban írjuk. A kapott két összeg egybevetése a 3. egyenlet helyességét mutatja, hiszen  $c_{ik} = c_{ki}$ .

b) Bebizonyítjuk most, hogy ha a  $C$  vektortranszformáció rendelkezik a tételben felsorolt tulajdonságokkal, akkor megadható egy szimmetrikus ( $C$ ) mátrix által.

Jelöljük  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  a koordináta-rendszer alapvektorait. A  $C$  transzformáció ezekhez  $C\mathbf{e}_1, C\mathbf{e}_2, C\mathbf{e}_3$  képvektorokat rendel. Jelöljük ezeknek a koordinátáit a következőképpen;

$$C\mathbf{e}_1 (c_{11}, c_{21}, c_{31}), \quad C\mathbf{e}_2 (c_{12}, c_{22}, c_{32}), \quad C\mathbf{e}_3 (c_{13}, c_{23}, c_{33}).$$

Ha az  $\mathbf{x} (x_1, x_2, x_3)$  vektor képét számítjuk, a 2. tulajdonság alapján

$$C\mathbf{x} = C(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = C(x_1\mathbf{e}_1) + C(x_2\mathbf{e}_2) + C(x_3\mathbf{e}_3),$$

az 1. tulajdonság alkalmazásával tehát

$$C\mathbf{x} = x_1 (C\mathbf{e}_1) + x_2 (C\mathbf{e}_2) + x_3 (C\mathbf{e}_3).$$

Ha a két oldalon álló vektorok megfelelő koordinátáit összevetjük, akkor  $C\mathbf{x}$  koordinátáira

$$x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3,$$

$$x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3,$$

$$x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3$$

adódik. Beláttuk tehát, hogy a  $C$  transzformáció egy ( $C$ ) mátrix által adható meg.

Minthogy  $c_{ik}$  a  $C\mathbf{e}_k$  vektor  $i$ -edik koordinátája,

$$c_{ik} = \mathbf{e}_i C\mathbf{e}_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ebből következik, hogy  $c_{ik} = c_{ki}$ , hiszen a 3. tulajdonság révén  $\mathbf{e}_i C\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k C\mathbf{e}_i$ . A transzformáció valóban megadható tehát szimmetrikus ( $C$ ) mátrix által. —

Tételünk lehetővé teszi, hogy homogén lineáris vektortranszformációról, sajátvektorairól és sajátértékeiről legyen szó anélkül, hogy koordináta-rendszert vennénk fel. Adott homogén lineáris  $C$  vektortranszformáció esetében  $\mathbf{x}$  sajátvektor és  $\lambda$  a hozzá tartozó sajátérték, ha

$$C\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

**B1** Tételünk bizonyításából kiolvashatjuk, hogy ha a  $C$  vektortranszformáció csak az 1. és 2. tulajdonságokkal rendelkezik, azaz homogén lineáris, akkor is megadható egy ( $C$ ) mátrix által, de ez általában nem szimmetrikus. Mi azért foglalkozunk a homogén lineáris transzformációk közül a szimmetrikusakkal, mert a szimmetrikusokra vonatkozó tételekre lesz szükségünk.

Tárgyalásunk több részlete egyaránt vonatkozik a szimmetrikus és nem szimmetrikus homogén lineáris transzformációkra, a hangsúly azonban mindig a szimmetrikus transzformációkon lesz. Az előző szakaszban sem volt szükség arra a megszorításra, hogy ( $C$ ) szimmetrikus mátrix.

**B2** A homogén lineáris vektortranszformációt *tenzornak* (affinor) is nevezzük. A tenzorokat (tenzoriális) mennyiségnek is mondjuk. A tenzorok körében műveleteket is be lehet vezetni, de mi ezzel nem foglalkozunk.

Mondhatjuk, hogy tárgyalásunkban  $C$  tenzort jelöl, s hogy  $C\mathbf{x}$  ennek a tenzornak és az  $\mathbf{x}$  vektornak a *szorzata*. Tételünk 1. és 2. egyenlősége alátámasztja ezt a felfogást, mert kimondják, hogy ez a szorzás rendelkezik a közönséges szorzás bizonyos tulajdonságaival. Ha a 3. egyenlőség is fennáll, a tenzort *szimmetrikusnak* mondjuk.

Tételünk lehetővé teszi, hogy tenzorokról beszélhessünk anélkül, hogy koordináta-rendszert vezetnénk be. A tenzoroknak ez a *direkt* tárgyalása a rövidegség és áttekinthetőség révén, valamint a koordináta-

rendszer felvételétől független okoskodások miatt sok előnnyel jár (vö. 32. 4 B), de hátrányai is vannak, mert a koordinátás számolás elkerülése néha munkatöbbletet okoz. Előnye, hogy a koordináta-rendszer megválasztásától való függetlenség magától értetődővé válik; nem kell pl. külön bizonyítanunk, hogy az 51.1-ben definiált vektortranszformáció ugyanilyen, csak más mátrixszal jellemzett vektortranszformáció marad, ha a koordináta-rendszert megváltoztatjuk.

Ha koordináta-rendszert használunk, akkor a  $\mathbf{C}$  tenzort a  $(C)$  mátrix adja meg. Ezt a tenzor *mátrixának*, elemeit a tenzor *koordinátáinak* mondjuk.

A vektorokhoz hasonlóan a tenzorokat is a fizika vezette be, és sok fejezetében alkalmazza. Kiemeljük a rugalmas testek feszültségének (tenzió) vizsgálatát, mert a tenzor szó innen ered.

**B3** Tudjuk, hogy egy tenzor mátrixát azoknak a transzformációs egyenleteknek az együtthatói adják, amelyek a képvektor koordinátáit a tárgyvektor koordinátaival fejezik ki. Ha itt a tárgyvektor és a képvektor jellemzésére ferdeszögű koordináta-rendszerbeli koordinátákat használunk, akkor a tenzornak erre a ferdeszögű rendszerre vonatkozó koordinátamátrixához jutunk. Ferdeszögű koordináta-rendszerben azonban egyaránt használhatunk kontravariáns vagy kovariáns koordinátákat. Így ugyanannak a tenzornak többféle mátrixáról, többféle koordinátáiról lehet szó. Példaként megemlíthetjük, hogy ha a tárgy- és a képvektorokat ugyanolyan koordinátákkal jellemezzük, akkor az azonosság mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha azonban az azonosság leírásához a tárgyvektorokat kontravariáns, a képvektorokat pedig kovariáns koordinátákkal jellemezzük, akkor a 34.6-ban bevezetett

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

mátrixhoz jutunk.

Megemlíthetjük, hogy a tenzorok ferdeszögű koordináta-rendszerbeli különféle mátrixait a differenciálgeometria használja. A differenciálgeometria tovább építi a mennyiségeknek azt a sorozatát is, amelyek közül mi csak a három legegyszerűbbet, a skalárt, vektort és tenzort ismertük meg, és *magasabbrendű tenzorokról* is szól. Ha ilyen tenzorokra is gondolunk, akkor az általunk vizsgáltakat *másodrendű tenzornak* kell mondanunk. Mi ebben a könyvben sem a tenzorok ferdeszögű koordináta-rendszerbeli mátrixaival, sem magasabbrendű tenzorokkal nem foglalkozunk.

**51.3** Ha adva van egy  $\mathbf{C}$  homogén lineáris vektortranszformáció, továbbá az  $O$  és  $O'$  pontok, akkor a következőképpen definiálhatunk egy ponttranszformációt: az  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}$  helyvektorú  $P$  ponthoz azt a  $P'$  pontot rendeljük, amelyikre

$$\overrightarrow{O'P'} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Ezt a ponttranszformációt *affinitásnak* nevezzük. Ha az  $O$ ,  $O'$  pontok azonosak, akkor a leképezés *centroaffin*. A következőkben csak erre az esetre gondolunk. A  $\mathbf{C}$  vektortranszformáció által ilyen módon meghatározott affinitást ugyancsak  $\mathbf{C}$ -vel jelöljük.

**Tétel.** Az egyenes affín képe egyenes vagy pont, a sík affín képe sík, egyenes vagy pont.

*Bizonyítás.* Egyenes, illetve sík pontjainak a helyvektorait

$$\mathbf{r} + \mathbf{v}t \quad \text{és} \quad \mathbf{r} + \mathbf{v}_1 t_1 + \mathbf{v}_2 t_2$$

paraméteres alakban írhatjuk. E pontok képeinek helyvektoraira a  $C$  transzformáció homogén lineáris voltát felhasználva

$$C\mathbf{r} + (C\mathbf{v})t \quad \text{és} \quad C\mathbf{r} + (C\mathbf{v}_1)t_1 + (C\mathbf{v}_2)t_2$$

adódik, s ezek a pontok általában egyenest, illetve síkot alkotnak. Az egyenes ponttá fajul, ha  $C\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . A sík viszont egyenessé fajul, ha  $C\mathbf{v}_1 \parallel C\mathbf{v}_2$ , és ponttá, ha  $C\mathbf{v}_1 = C\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ . —

Okoskodásunkból következik, hogy szakasz affin képe szakasz vagy pont, mégpedig egy irányú és egyenlő szakaszok képei is egy irányúak és egyenlők. Következik így az is, hogy paralelogramma és paralelepipedon képe (esetleg elfajuló) paralelogramma és paralelepipedon.

Ha koordináta-rendszert veszünk fel, akkor felírhatjuk azokat a homogén lineáris transzformációs egyenleteket, amelyek a  $P'$  képpont koordinátáit a  $P$  tárgypont koordinátaival fejezik ki. Ezek ugyanazok az egyenletek, mint amelyekkel 51.1-ben a vektorok koordinátáinak transzformációját írtuk le. Az egyenletek együtthatói az affinitásnak a választott koordináta-rendszerre vonatkozó mátrixát adják, a mátrix oszlopait a koordináta-rendszer alapvektoraihoz rendelt képvektorok koordinátái alkotják.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogyan tükröződnek a  $C$  affinitás egyes geometriai tulajdonságai a  $(C)$  mátrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

determinánsában.

**Tétel.** *A  $C$  affinitás bármely három vektor által kifeszített paralelepipedont  $C$ -szer akkora előjeles térfogatú paralelepipedonba visz át.*

Lehet a paralelepipedon képe természetesen 0 térfogatú elfajuló paralelepipedon is. Minthogy a  $C$  determináns oszlopaiban a  $C\mathbf{e}_1$ ,  $C\mathbf{e}_2$ ,  $C\mathbf{e}_3$  vektorok koordinátái állnak, az  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  vektorok által kifeszített egységkocka képének térfogata képvektorok vegyesszorzata, azaz a  $C$  determináns. Tételünk azt mondja ki, hogy nemcsak ebben az esetben, hanem minden más esetben is  $C$  a szorzószám.

*Bizonyítás.* Tekintsük az  $\mathbf{a}_1(a_{11}, a_{12}, a_{13})$ ,  $\mathbf{a}_2(a_{21}, a_{22}, a_{23})$ ,  $\mathbf{a}_3(a_{31}, a_{32}, a_{33})$  vektorok által kifeszített paralelepipedont. Ennek előjeles térfogata

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ha a képparalelepipedon előjeles térfogatát számítjuk, egy determináns soraiba rendre a  $C\mathbf{a}_1$ ,  $C\mathbf{a}_2$ ,  $C\mathbf{a}_3$  vektorok koordinátáit kell írunk. E determináns  $i$ -edik sorának  $k$ -edik eleme a  $C\mathbf{a}_i$  vektornak  $k$ -edik koordinátája, azaz

$$c_{k1}a_{i1} + c_{k2}a_{i2} + c_{k3}a_{i3}.$$

Ez a determináns tehát sor-sor-szorzással keletkezik a  $C$  és az  $A$  determinánsokból, értéke ezért valóban  $A$  értékének  $C$ -szerese. —

Tételünkben következik, hogy a  $C$  transzformáció  $C$  determinánsának az értéke nem függ attól, hogy a  $(C)$  mátrix felírásához a koordináta-rendszert hogyan választottuk meg.

**Tétel.** *A  $C$  affinitásnál a tér képe az egész tér, sík, egyenes vagy pont aszerint, amint  $C$  rangja 3, 2, 1 vagy 0.*

Ha a tér képe nem az egész tér, az affinitás *elfajuló*, az ellenkező esetben *közönséges*. Az affinitás tételünk szerint tehát akkor és csak akkor elfajuló, ha determinánsának értéke 0, ha tehát saját értékei között 0 is szerepel.

*Bizonyítás.* A determináns rangja a legmagasabbrendű, 0-tól különböző értékű aldeterminánsának rendszáma, s ha minden eleme 0, akkor a rangja is 0. Az algebrából tudjuk, hogy ez a rang megadja azt, hogy a determináns sorai (vagy oszlopai) közül legfeljebb hány lineárisan független választható ki. Lineárisan függetlenek az olyan sorok (vagy oszlopok), amelyeket számokkal szorozva és összeadva csak úgy kaphatunk csupa 0-ból álló eredményt, ha minden szorzó 0 volt.

Az  $x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$  helyvektorú pont képének helyvektora

$$x_1(\mathbf{Ce}_1) + x_2(\mathbf{Ce}_2) + x_3(\mathbf{Ce}_3).$$

Tudjuk, hogy a

$\mathbf{Ce}_1, \mathbf{Ce}_2, \mathbf{Ce}_3$

vektorok koordinátái a  $C$  determináns egyes oszlopaiban állanak.  $C$  rangja mondja meg tehát, hogy e között a három vektor között hány lineárisan független van. Itt a vektorok függetlensége ugyanúgy értendő, ahogyan az előbb a determináns sorairól (és oszlopairól) mondtuk. Három vektor tehát akkor lineárisan független, ha nem egysíkú; két vektor akkor, ha nem párhuzamosak; egy vektor akkor, ha nem nullvektor.

Ha tehát  $C$  rangja  $r = 3$ , akkor az előbb felírt három vektor nem egysíkú, és a képpontok az egész teret betöltik. Ha  $r = 2$ , akkor a három vektor egysíkú, de nem mind párhuzamos, és egy sík pontjaihoz jutunk. Ha  $r = 1$ , akkor 3 három vektor egymással párhuzamos, de nem mind nullvektor, a képpontok tehát egyenest alkotnak. Végül az  $r = 0$  esetben mind a három vektor nullvektor, és a kezdőpont az egyetlen képpont. —

Tételünkéből következik, hogy a  $C$  transzformáció  $C$  determinánsának rangja nem függ attól, hogy a  $(C)$  mátrixot a koordináta-rendszer milyen megválasztása mellett írjuk fel.

**A** Amit itt a térbeli vektorokról és a térbeli affinitásról mondtunk, ugyanazt természetesen a síkbeli vektorokról is elmondhatjuk, s akkor a síkbeli affinitáshoz jutunk.

Az affinitás szót itt valamivel általánosabb értelemben használtuk, mint 46.9-ben, mert ott csak a közönséges affinitásokról volt szó. Ezeket a 480. ábra szemléltette. Közéjük tartozik a síkbeli és a térbeli merőleges affinitás is.

Az elfajuló affinitások közül eddig a sík egyenesre való merőleges vetítése, valamint a tér síkra vagy egyenesre való merőleges vetítése szerepelt.

Az affinitás szóval általában csak a közönséges affinitásokat jelöljük. Ha az elfajulókra is gondolunk, akkor ezt a körülményt valahogyan jelezni kell. Ebben a paragrafusban, ha csak az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk, általánosabb értelemben vett, esetleg elfajuló affinitásokról szólnunk.

Megemlítjük, hogy az affinitás determinánsának szimmetrikus volta nem fed szemléletesen közvetlenül is megragadható tulajdonságot.

**B1** Az (esetleg elfajuló) affinitást jellemzi az, hogy párhuzamos irányított szakaszokhoz párhuzamos irányított szakaszokat rendel, s ha az eredeti szakaszok egyikének előjeles hossza a másikénak  $\lambda$ -szorosa, akkor ugyanez a képvektoraikra is áll.

Az affinitás definíciójából közvetlenül következik, hogy rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Azt kell csak belátnunk, hogy minden ilyen tulajdonságú transzformáció affinitás.

Először azt állapítjuk meg evégből, hogy a ponttranszformáció egy irányú és egyenlő szakaszokhoz egy irányú és egyenlő szakaszokat rendel, tehát minden  $\mathbf{x}$  vektorhoz egyértelműen egy-egy  $C\mathbf{x}$  vektort rendel. Ez a  $C$  transzformáció rendelkezik 51.2 tételének 1. tulajdonságával, mert a feltevés szerint  $\lambda\mathbf{x}$  képe  $\mathbf{x}$  képének  $\lambda$ -szorosa. Rendelkezik azonban a 2. tulajdonsággal is, mert a ponttranszformáció egymáshoz csatlakozó irányított szakaszokhoz egymáshoz csatlakozó irányított szakaszokat rendel.

Ezzel beláttuk, hogy ponttranszformációnk a vektorokra nézve homogén lineáris transzformációt jelent. Minthogy ez a helyvektorokra is áll, ponttranszformációnk valóban affinitás.

A most bizonyított tényből nyomban következik az, hogy két affinitás egymás utáni alkalmazása affinitást ad, hiszen a párhuzamos szakaszok aránya mindkétyszer változatlan maradt. Ilyen módon az **L** és **C** affinitások, ha először az **L** és azután a **C** affinitást alkalmazzuk, egyetlen **CL**-lel jelölt affinitást definiálnak, amelyet a **C** és **L** affinitások szorzatának mondunk.

Az (esetleg elfajuló) affinitások mégsem alkotnak csoportot, mert az elfajuló affinitások inverzéről nem lehet szó.

**B2** Szakaszunk első és harmadik tételéhez nem kell kiegészítés akkor sem, ha az  $n$ -dimenziós térről van szó. Ezek a tételek kimondják, hogy lineáris altér képe lineáris altér, amelynek dimenziója az eredetinel nagyobb nem lehet, s hogy az egész tér képének dimenzióját az affinitás determinánsának rangja adja meg.

A második tétel közvetlen átírásához az  $n$ -dimenziós térfogat bevezetésére volna szükség. Ezt a háromdimenziós térfogat mintájára akadálytalanul be is vezet hét nők. Erre sincs azonban szükség, ha nem  $n$ -dimenziós térfogatról, hanem csak  $n$  darab  $n$ -dimenzós vektor koordinátái által adott determinánsról beszélünk. Az  $n$ -dimenzióra átírt második tétel ebben a formában kimondja, hogy ha a **C** affinitást  $n$  vektorra alkalmazzuk, akkor a hozzájuk tartozó determináns  $C$ -szeresébe megy át.

**B3** Ha ismeretesek a **C**, **L** affinitások mátrixai, akkor ezekből a **CL** affinitás mátrixát sor-oszlop-szorzással kapjuk meg.

Ennek bizonyítása végett jelölje  $c_{ik}$  és  $l_{ik}$  a két, pl. harmadrendű mátrix elemeit. A **CL** affinitás mátrixának  $k$ -adik oszlopában az  $\mathbf{e}_k$  vektor képének koordinátái állanak. Ehhez a vektorhoz úgy jutunk, hogy az  $\mathbf{L}\mathbf{e}_k = (l_{1k}, l_{2k}, l_{3k})$  vektorra a **C** affinitást alkalmazzuk. **CL** mátrixa  $i$ -edik sorának  $k$ -adik eleme az így kapott vektor  $i$ -edik koordinátája, azaz

$$c_{11}l_{1k} + c_{12}l_{2k} + c_{13}l_{3k}.$$

**CL** mátrixa tehát valóban sor-oszlop-szorzással keletkezik **C** és **L** mátrixaiból.

Ha az **L** affinitás közönséges, azaz a teret az egész térre képezi le, akkor **CL** nyilván ugyanannyi dimenziós altérre képezi le a teret, mint a **C** affinitás. Szakaszunk utolsó tételéből következik tehát, hogy ha az  $L$  determináns értéke nem 0, akkor a  $C, L$  determinánsokból sor-oszlop-szorzással számított determináns rangja  $C$  rangjával egyenlő.

Valamivel általánosabban azt is kimondhatjuk, hogy *ha két determinánst a determinánsok szorzástételének megfelelő valamelyik előírás szerint összeszorozunk, és a két determináns egyikének értéke nem 0, akkor a másiknak a rangja a szorzatdetermináns rangjával egyenlő*. Ennek helyességét részben (ha a második determináns nem 0, s ha sor-oszlop-szorzással szorzunk) beláttuk már. Ebből minden esetre következik az állítás helyessége, mert a szorzás módjának megváltoztatása egyenértékű azzal, hogy az összeszorozott determinánsok egyikében vagy mindkettőben felcseréljük a sorokat az oszlopokkal, és ez a rangon nem változtat; ha pedig a két determináns sorrendjét változtatjuk meg, és megfelelő szorzásmódot választunk, akkor a szorzat- determináns változatlan marad.

#### 51.4 A háromváltozós

$$\sum_{i,k=1}^3 c_{ik} x_i x_k$$

másodfokú alak együtthatóinak jelölésénél a

$$c_{ik} = c_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

megállapodást fogadjuk el. Ezekből az együtthatókból egy szimmetrikus (**C**) mátrixot alakíthatunk. Ez a mátrix a másodfokú alakhoz rendelt **C** homogén lineáris transzformációt és a másodfokú alak  $C$  determinánsát is meghatározza.

A másodfokú alak minden  $(x_1, x_2, x_3)$  értékrendszerhez egy-egy számot rendel. Ezek a számok a másodfokú alak minden együtthatóját, tehát magát a másodfokú alakot is egyértelműen meghatározzák. Ha ugyanis két másodfokú alak minden értékrendszerhez ugyanazokat a számokat rendel, akkor a két alak különbsége minden értékrendszerhez a 0 számot rendel. Az ilyen másodfokú alakban azonban az  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  értékrendszerek miatt  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$ , tehát az  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  értékrendszerek miatt  $c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$ , azaz minden együttható 0, s ezért az eredeti két alak valóban azonos volt.

Ha az  $\mathbf{x} (x_1, x_2, x_3)$  vektort a saját képével, a  $\mathbf{C}\mathbf{x}$  vektorral skalárisan megszorozzuk, akkor – mint 46.1-ben is láttuk – a másodfokú alakhoz jutunk:

$$\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x} = \sum c_{ik} x_i x_k$$

Az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{C}\mathbf{y}$  vektorok skaláris szorzata  $\mathbf{C}$  szimmetrikus volta miatt – mint 46.3-ban is láttuk – az

$$\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{C}\mathbf{x} = \sum c_{ik} x_i y_k$$

bilineáris alakot adja.

Ha az  $\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}$  másodfokú alakban homogén lineáris

$$x_1 = l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + l_{13}y_3,$$

$$x_2 = l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + l_{23}y_3,$$

$$x_3 = l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + l_{33}y_3,$$

helyettesítéssel új  $y_1, y_2, y_3$  változókat vezetünk be, akkor ezektől függő új másodfokú alakhoz jutunk. Ebben a szakaszban a másodfokú alak ilyen transzformációról lesz szó.

Ha  $x_1, x_2, x_3$  egy derékszögű koordináta-rendszerbeli koordináták,  $y_1, y_2, y_3$  pedig egy elforgatott rendszerbeliek, akkor az elforgatás koordináta-transzformációja homogén lineáris helyettesítést ad. Mi itt elsősorban azt vizsgáljuk, hogy ha ilyen helyettesítéssel készítünk új másodfokú alakot, ha tehát a másodfokú alakot elforgatott koordináta-rendszerbe írjuk át, akkor milyen kapcsolat áll fenn az eredeti és az új másodfokú alak között.

A két másodfokú alak kapcsolatát úgy is jellemezhetjük, hogy ezek a tér minden pontjához ugyanazt a számot rendelik, de ezeket a számokat egyszer az  $x_1, x_2, x_3$  koordinátákkal, másszor az  $y_1, y_2, y_3$  koordinátákkal fejezzük ki.

Beszélhetünk koordináta-rendszer felvétele nélkül is a  $\mathbf{C}$  affinitáshoz tartozó  $\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}$  másodfokú alakról, azaz az egyes  $\mathbf{x}$  vektorokhoz ilyen módon rendelt számokról. Ezt a beszédmódot elfogadva az előbb említett másodfokú alakokról azt mondhatjuk, hogy különböző koordináta-rendszerekben ugyanazt a másodfokú alakot adják meg.

**Tétel.** *Ha egy másodfokú alakot elforgatott koordináta-rendszerbe írunk át, akkor a másodfokú alak determinánsának sem az értéke, sem a rangja nem változik meg.*

Algebrai szövegezéssel azt mondja ki ez a tétel, hogy ortogonális helyettesítés a másodfokú alak determinánsának értékét és rangját nem változtatja meg.

*Bizonyítás.* Tekintsük a  $\mathbf{C}$  affinitáshoz tartozó  $\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}$  másodfokú alakot. Az előző szakasz alapján tudjuk, hogy bármely koordináta-rendszerben írjuk is fel ezt a másodfokú alakot, determinánsának értéke és rangja azt adja meg, hogy a  $\mathbf{C}$  affinitás a paralelepipedonok térfogatát milyen arányban torzítja, s hogy a teret hány dimenziós alakzatba viszi át. Ezek az adatok nem függenek tehát a koordináta-rendszer megválasztásától, s ha koordináta-transzformációval egy elforgatott koordináta-rendszerre térünk át, akkor nem változnak meg. —

**B1** Lényegesen kihasználtuk azt, hogy derékszögű koordináta-rendszerről derékszögű koordináta-rendszerre térünk át, hiszen okoskodásunk alapja a skaláris szorzat derékszögű koordináta-rendszerbeli kifejezése volt. Megmutatjuk most, hogyan módosul tételünk, ha nem ez a helyzet,

ha tehát a másodfokú alakot nem ortogonális helyettesítéssel, hanem valamilyen homogén lineáris helyettesítéssel transzformáljuk.

Itt nem kvadratikus mátrixokkal is dolgozunk, és a mátrixokat minden esetben sor- oszlop-szorzással szorozzuk. Felhasználjuk, hogy ez a szorzás asszociatív, s hogy ezért többtényezős mátrixszorzatokat is írhatunk. Az  $(M)$  mátrix sorainak és oszlopainak felcserélésével keletkező mátrixot  $(M)^*$ -gal jelöljük. Felhasználjuk, hogy ha  $(M) = (A)(B)$  vagy  $(M) = (A)(B)(C)$ , akkor  $(M)^* = (B)^* (A)^*$ , illetőleg  $(M)^* = (C)^* (B)^* (A)^*$ .

Ha a (szimmetrikus mátrixú)  $\sum c_{ik} x_i x_k$  másodfokú alakot tetszőleges  $x_i = \sum l_{ik} y_k$  homogén lineáris helyettesítéssel transzformáljuk, akkor az új másodfokú alak determinánsa  $L^2 C$  ahol  $L$  a helyettesítés determinánsának,  $C$  pedig az eredeti másodfokú alak determinánsának értékét jelöli. Egyszerűbb bizonyítás kedvéért bevezetjük a nem kvadratikus (és pl. háromelemű)

$$(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (x)^* = (x_1 x_2 x_3)$$

mátrixokat, s hasonlóan jelöljük az  $y_1, y_2, y_3$  értékekből képzett megfelelő mátrixokat is. Használjuk továbbá a másodfokú alak  $(C)$  mátrixán kívül a homogén lineáris helyettesítés együtthatóiból alkotott kvadratikus  $(L)$  mátrixot is. Ilyen jelölésekkel a vizsgált másodfokú alak

$$\sum c_{ik} x_i x_k = (x)^* (C) (x),$$

az alkalmazott homogén lineáris helyettesítés pedig

$$(x) = (L)(y), \quad (x)^* = (y)^* (L)^*.$$

Egyszerű helyettesítéssel az

$$(x)^* (C) (x) = (y)^* (L)^* (C) (L) (y)$$

eredményhez jutunk, s ez kimondja, hogy az új másodfokú alak mátrixa a szimmetrikus  $(L)^* (C) (L)$  mátrix. Ez valóban szimmetrikus, mert  $(C)$  szimmetrikus volta miatt a főátlóra tükrözve nem változik meg. Minthogy  $(L)^*$  determinánsa is  $L$ , a determinánsok szorzástétele szerint az új másodfokú alak determinánsa valóban  $LCL = L^2 C$ .

Ha kikötjük, hogy a helyettesítés determinánsa  $L \neq 0$ , akkor a helyettesítéssel kapott új másodfokú alak determinánsának rangja az eredetivel egyenlő. Ez következik 51.3 B3 eredményéből, hiszen éppen beláttuk, hogy az új másodfokú alak determinánsát a sor-oszlop- szorzással számított  $LCL$  determinánsszorzat adja.

A most mondottak újból bizonyítják szakaszunk tételét, mert az elforgatási transzformáció determinánsa 1. Azt is elmondhatjuk tehát, hogy ez a tétel változatlanul helyes marad, ha nem elforgatott koordináta-rendszerbe való átírásról, hanem *unimoduláris* helyettesítésről szólunk, azaz olyan homogén lineáris helyettesítésről, amelynek az együtthatóiból alakított determináns értéke 1.

**B2** A másodrendű görbék és felületek egyenletének másodfokú tagjai  $A_{33}$ , illetőleg  $A_{44}$  determinánsú másodfokú alakot alkotnak. A koordináta-rendszer eltolásakor a másodfokú tagok változatlanok maradnak. Az elforgatás viszont a másodfokú alaknak az elforgatott koordináta-rendszerbe való átírásával jár. Az ebben a szakaszban bizonyított tétel alapján kimondhatjuk tehát, hogy *ha (eltolással és elforgatással) más koordináta-rendszerre térünk át, akkor az  $A_{33}$  és  $A_{44}$  determinánsok értéke és rangja változatlan marad.*

Bebizonyítjuk, hogy *a koordináta-rendszer elmozgatásakor a másodrendű görbék és felületek determinánsának értéke és rangja sem változik meg.* Írjuk át évégett egyenletük baloldalát homogén



koordinátás, tehát homogén másodfokú alakba. A koordináta-rendszer eltolása és elforgatása a homogén koordináták számára homogén lineáris helyettesítést jelent. Állításunk bizonyításához B1 szerint elég azt ellenőriznünk, hogy a szóban forgó helyettesítés minden esetben unimoduláris.

Ha a síkbeli koordináta-rendszert elforgatjuk, vagy kezdőpontját az  $(x_0, y_0)$  pontba toljuk, akkor a homogén koordináták transzformációjának determinánsa 44.4 B szerint

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) & 0 \\ \cos(\gamma) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

a térbeli koordináta-rendszer elforgatására és eltolására vonatkozó megfelelő determinánsok pedig ugyanolyan indokolással

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) & 0 \\ \cos(\delta) & \cos(\epsilon) & \cos(\zeta) & 0 \\ \cos(\eta) & \cos(\theta) & \cos(\iota) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Az utolsó sor szerint kifejtve valamennyi felírt determináns értékére valóban 1 adódik.

A most bizonyított tény felöleli azt a már korábban bizonyított tényt, hogy ha  $A = 0$ , akkor a koordináta-rendszer elmozgatása nem változtatja meg  $A$  értékét (lásd 46.4 és 50.9).

Ha a derékszögű vagy ferdeszögű koordináta-rendszert megváltoztatjuk, akkor az ezekhez a rendszerekhez tartozó homogén koordináták homogén lineáris transzformációjának a determinánsa nem lehet 0, hiszen az inverz transzformáció is homogén lineáris. Minthogy a közös affinitás ugyanígy változtatja meg a pontok koordinátáit, B1 alapján kimondhatjuk, hogy *a másodrendű görbék és felületek (közös affinitás) affín transzformációjakor az  $A$  determinánsnak, valamint  $A_{33}$ , illetve  $A_{44}$  al-determinánsának sem a rangja, sem értékének az előjele nem változik meg*, hiszen a pozitív  $L^2$  értékkel szorozódik. Az előjel meg nem változása azt jelenti, hogy ha pozitív, negatív vagy 0 volt, akkor az is maradt.

Ha a másodrendű görbe vagy felület egyenletét egy 0-tól különböző számmal szorozzuk, akkor ezáltal determinánsának minden eleme ugyanezzel a számmal szorozódik, a determináns értéke pedig a-szám-szorozónak annyiadik hatványával, ahányadrendű a determináns. A determinánsok rangja tehát ilyenkor is változatlan marad, értékük azonban megváltozhatik, előjelük pedig csak akkor marad bizonyosan változatlan, ha párosrendű determinánsról van szó. Ha tehát a másodrendű görbék és felületek Descartes-féle koordináta-rendszerbeli egyenletét (0-tól különböző) *állandóval szorozzuk, vagy megváltoztatjuk a (derékszögű vagy ferdeszögű) koordináta-rendszert, vagy pedig (közös affinitást) alkalmazunk, akkor ezáltal a görbék esetében  $A$  és  $A_{33}$  rangja, valamint  $A_{33}$  előjele, a felületek esetében pedig  $A$  és  $A_{44}$  rangja, valamint  $A$  előjele nem változik meg*.

A másodrendű görbékről szóló eredménynek  $A_{33}$ -ra vonatkozó része 46.9-ből is kiolvasható,  $A$ -ra vonatkozó része pedig teljessé teszi a 47.5 B4-ben mondottakat.

**B3** Világosabb látás kedvéért felhívjuk a figyelmet arra, hogy lényeges különbség van a (C) mátrixú affinitás egy más koordináta-rendszerre vonatkozó mátrixának megállapítása és a (C) mátrixú másodfokú alaknak erre a másik koordináta-rendszerre való átírása között.

Jelentse  $(L)$  a régi koordinátákat az újakkal kifejező,  $(L)^{-1}$  pedig az újakat a régiekkel kifejező transzformációs egyenletek mátrixát, továbbá  $(L)^*$  azt a mátrixot, amely  $(L)$ -ből a sorok és oszlopok felcserélésével keletkezik.

Ha a (C) mátrixú affinitásnak az új koordináta-rendszerbeli mátrixáról van szó, akkor abból indulunk ki, hogy 51.3 B3 szerint a sor-oszlop-szorzással számított (C)  $(L)$  mátrix adja azt a transzformációt, amely a képvektorok régi koordinátáit a tárgyvektorok új koordinátaival fejezi ki. Így tehát az ugyancsak sor-oszlop-szorzással számított

$$(L)^{-1} (C) (L)$$

mátrix adja a kép vektorok új koordinátáit a tárgy vektorok új koordinátaival kifejező transzformációs egyenleteket, azaz az eredetileg  $(C)$  mátrixú affinitásnak az új koordináta-rendszerre vonatkozó mátrixát.

A  $(C)$  mátrixú másodfokú alaknak az új koordináta-rendszerbe való átírásáról B1-ben szoltunk, és ott beláttuk, hogy

$$(L)^* (C) (L)$$

az új másodfokú alak mátrixa.

A két feladatnál más-más eredményhez jutottunk. Ugyanaz mégis az eredmény, ha a koordináta-transzformáció  $(L)$  mátrixa olyan, hogy  $(L)^{-1}$  és  $(L)^*$  azonos. Ez derékszögű koordináta-rendszerről derékszögű koordináta-rendszerre való áttérésnél, tehát elforgatásnál is bekövetkezik, általában viszont nem igaz. Ez az oka annak, hogy ennek a szakasznak a derékszögű koordináta-rendszer elforgatásáról szóló tételét az előző szakaszra támaszkodva könnyen bizonyíthatjuk, viszont az általános esettel foglalkozó B1 megjegyzésben más utat kellett keresnünk.

**51.5 Tétel (főtengelytétel).** Minden szimmetrikus homogén lineáris vektortranszformációnak van három, páronként egymásra merőleges sajátvektora.

Már láttuk, hogy legfeljebb három sajátérték van. Tételünk kimondja, hogy legalább három sajátvektor van.

*Bizonyítás.* A bizonyítás során koordinátákat nem használunk, koordináta-rendszer felvételére sincs szükségünk.

a) Legyen  $C$  az adott szimmetrikus homogén lineáris vektortranszformáció, és  $\mathbf{x}C\mathbf{x}$  a hozzá tartozó másodfokú alak.

Vizsgáljuk a kezdőpont körül írt egységsugarú gömb pontjaihoz e másodfokú alak által hozzárendelt értékeket, azaz az  $|\mathbf{x}| = 1$  megkötés mellett az  $\mathbf{x}C\mathbf{x}$  számokat. Ezeknek a számoknak minimumát  $\lambda$ -val jelöljük (lásd B4). Legyen  $\mathbf{s}$  olyan egységvektor, amelyhez ezt a minimális értéket rendeltük:

$$\mathbf{s}C\mathbf{s} = \lambda.$$

Bebizonyítjuk, hogy  $\mathbf{s}$  sajátvektor (és  $\lambda$  hozzá tartozó sajátérték).

b) Minden  $\mathbf{x}$  vektorhoz a

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}C\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^2$$

előírással egy újabb számot rendelünk. Állítjuk, hogy minden  $\mathbf{x}$  vektorra  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ .

Ezt először abban az esetben látjuk be, amikor egy  $\mathbf{e}$  egységvektorról van szó. Ebben az esetben  $Q(\mathbf{e}) = \mathbf{e}C\mathbf{e} - \lambda$ . Az  $\mathbf{e}C\mathbf{e}$  szám szerepelt azok között a számok között, amelyeknek a minimuma  $\lambda$ . Ezért  $\mathbf{e}C\mathbf{e} \geq \lambda$ , és  $Q(\mathbf{e}) \geq 0$ .

Ha tetszőleges  $\mathbf{x}$  vektorról van szó, és  $\mathbf{x} = x\mathbf{e}$ , ahol  $\mathbf{e}$  egységvektort jelöl, akkor

$$Q(\mathbf{x}) = (x\mathbf{e})C(x\mathbf{e}) - \lambda(x\mathbf{e})^2 = (x\mathbf{e})[x(C\mathbf{e})] - \lambda x^2 = x^2[\mathbf{e}C\mathbf{e} - \lambda] = x^2 Q(\mathbf{e}) \geq 0,$$

hiszen már beláttuk, hogy  $Q(\mathbf{e}) \geq 0$ .

c) Jelentsen  $\mathbf{t}$  az  $\mathbf{s}$  vektorra merőleges, tetszőlegesen megválasztott egységvektort. Alkalmazzuk az imént bizonyított  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$  tényt az  $\mathbf{s} + u\mathbf{t}$  vektorokra, ahol  $u$  tetszőleges valós számot jelent.

A  $C$  transzformáció homogén lineáris voltára való tekintettel

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{s} + u\mathbf{t}) &= (\mathbf{s} + u\mathbf{t})^T C (\mathbf{s} + u\mathbf{t}) - \lambda (\mathbf{s} + u\mathbf{t})^T (\mathbf{s} + u\mathbf{t}) = \\ &= (\mathbf{s} + u\mathbf{t})^T [C\mathbf{s} + u(C\mathbf{t})] - \lambda (1 + u^2) = \\ &= [\mathbf{s}^T C \mathbf{s} - \lambda] + u[\mathbf{t}^T C \mathbf{s} + \mathbf{s}^T C \mathbf{t}] + u^2 [\mathbf{t}^T C \mathbf{t} - \lambda]. \end{aligned}$$

Ha  $\mathbf{s}$  definícióját és  $C$  szimmetrikus voltát is felhasználjuk, akkor  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$  miatt a

$$Q(\mathbf{s} + u\mathbf{t}) = (\mathbf{t}^T C \mathbf{t} - \lambda)u^2 + 2(\mathbf{t}^T C \mathbf{s})u \geq 0$$

eredményhez jutunk.

Tudjuk, hogy  $au^2 + 2bu + c \geq 0$  csak akkor teljesülhet minden  $u$  értékre, ha  $b^2 - ac \geq 0$ . Ebből következik, hogy  $au^2 + 2bu \geq 0$  csak  $b^2 \geq 0$ , azaz  $b = 0$  esetben állhat fenn. Fenti eredményünkből ezért

$$\mathbf{t}^T C \mathbf{s} = 0$$

következik.

d) Azt kaptuk, hogy  $C\mathbf{s}$  merőleges az  $\mathbf{s}$  vektorra merőleges  $\mathbf{t}$  egységvektorok mindegyikére. Ez csak úgy lehetséges, hogy  $C\mathbf{s}$  párhuzamos  $\mathbf{s}$ -sel, tehát valóban sajátvektor.

(Azt is beláthatjuk, hogy  $\lambda$  az  $\mathbf{s}$ -hez tartozó sajátérték, mert ha  $C\mathbf{s} = \alpha\mathbf{s}$ , akkor ezt az egyenletet  $\mathbf{s}$ -sel skalárisan megszorozva  $\mathbf{s}^T C \mathbf{s} = \alpha$  adódik, s ebből  $\mathbf{s}^T C \mathbf{s} = \lambda$  miatt  $\alpha = \lambda$  következik.)

e) A tétel bebizonyításához az hiányzik még, hogy az  $\mathbf{s}$ -re merőleges vektorok között két egymásra merőleges sajátvektort találjunk.

Bizonyításunk c) részének végeredményét  $C$  szimmetrikus volta miatt

$$\mathbf{s}^T C \mathbf{t} = 0$$

alakban is írhatjuk. Ez kimondja, hogy  $C\mathbf{t} \perp \mathbf{s}$ . Ebből következik, hogy  $C(u\mathbf{t}) = u(C\mathbf{t}) \perp \mathbf{s}$ , hogy tehát a  $C$  transzformáció minden  $\mathbf{s}$ -re merőleges vektort  $\mathbf{s}$ -re merőleges vektorba visz át, azaz az  $\mathbf{s}$ -re merőleges síkon belül is vektortranszformációt ad meg. Ez a transzformáció homogén lineáris és szimmetrikus, hiszen azok a tulajdonságok, amelyek 51.2 tétele szerint ezt biztosítják, a tér minden vektorára, tehát a szóban forgó sík vektoraira is teljesülnek. Állításunk helyessége következik tehát abból, hogy a sík szimmetrikus homogén lineáris vektortranszformációjának van két egymásra merőleges sajátvektora. —

**B1** A bizonyítás teljes egészében változatlan marad, ha minimum helyett maximumot használunk.

**B2** Okoskodásunk változtatás nélkül alkalmas a síkbeli főtengeteltétel bizonyítására is, sőt még az okoskodás e) részére sincs ott szükség. A síkban ugyanis csak egy további sajátvektort kell találni, és  $\mathbf{t}$  saját vektor, mert  $C\mathbf{t}$  is merőleges  $\mathbf{s}$ -re.

A síkbeli főtengeteltétel 47.2-ben adott bizonyításának gondolatmenetét viszont nehezen alkalmazhatnók itt, mert a Laplace-egyenlet harmadfokú, és e harmadfokú egyenlet gyökeinek vizsgálata már nagyon sok számolással járna. Ugyanezt még teljesebb joggal elmondhatjuk, ha az  $n$ -dimenziós eset tárgyalására gondolunk.

Az itt adott bizonyítás az  $n$ -dimenziós esetet is elintézi, tehát bebizonyítja, hogy van  $n$  darab, páronként egymásra merőleges sajátvektor. Ebben az esetben a bizonyítás  $n$ -re vonatkozó teljes indukcióval történik. Az  $n = 1$  esetben nyilvánvaló, hogy a tétel helyes. Ha feltesszük, hogy az  $(n - 1)$ -dimenziós térben helyes az állítás, akkor helyességét a fenti okoskodás az  $n$ -dimenziós térre bizonyítja, hiszen a bizonyítás e) részében éppen az  $(n - 1)$ -dimenziós tételre van szükség.

**B3** Ha csak annyit tudunk, hogy minden szimmetrikus  $C$  tenzornak van sajátvektora, akkor ebből már a főtengetyítél egésze is könnyen következik. Ha ugyanis  $s$  sajátvektora  $C$ -nek, akkor minden  $s$ -re merőleges  $t$  vektorra teljesül a  $tCs = 0$  összefüggés, tehát  $sCt = 0$  is, és  $C$  az  $s$ -re merőleges vektorok körén belül is homogén lineáris leképezést létesít. Erre támaszkodva a B2-ben említett indukciós okoskodással akárhány dimenzióra be tudjuk bizonyítani, hogy minden szimmetrikus  $n$ -dimenziós tenzornak van  $n$  darab, egymásra páronként merőleges saját vektora.

Beláttuk ezzel azt is, hogy bármely adott sajátvektorhoz található további  $n - 1$  sajátvektor úgy, hogy mindezek egymásra páronként merőlegesek.

Az elmondottak alapján a főtengetyítél állítása lényegének azt kell mondanunk, hogy van egyáltalában sajátvektor, azaz hogy a Laplace-egyenletnek van legalább egy valós gyöke. Látni fogjuk, hogy ennek az egyenletnek csak valós gyökei vannak (lásd 51.7).

**B4** Bizonyításunkban az első sajátvektorhoz jutva arra építettünk, hogy az egységgömb pontjaihoz rendelt  $xCx$  értékek között van minimális. Itt az analízis következő tételét használtuk fel: Ha egy többváltozós függvény folytonos, akkor valamely korlátos és zárt ponthalmazon felvett értékei között van minimális (és maximális). A mi esetünkben az  $xCx$  másodfokú alak valóban folytonos, hiszen a változóknak racionális egész függvénye, az egységgömb felülete pedig korlátos és zárt ponthalmaz.

Szívesebben nem hivatkoztunk volna erre a tételre, hiszen a könyv egészében arra törekedtünk, hogy a folytonosságot lehetőleg kevésbé használjuk ki. Mégis a közölt bizonyítást választottuk, mert a minimumkeresés révén okoskodása szemléletesnek mondható. Megtehettük volna, hogy a Laplace-egyenlet algebrai vizsgálatát bocsátjuk előre, s akkor csak a racionális egész függvények folytonosságát használnánk ki.

Ha csak a háromdimenziós tételt akarjuk bizonyítani, akkor könnyűszerrel szabadulhatunk attól, hogy az analízis idézett tételére támaszkodjunk. A háromdimenziós esetben ugyanis harmadfokú a Laplace-egyenlet, s mivel harmadfokú egyenletnek mindig van valós gyöke, tudjuk, hogy van legalább egy  $\lambda$  sajátérték, található tehát  $\lambda$ -hoz tartozó  $s$  sajátvektor is. Ebből és a síkbeli főtengetyítélből már következik is a háromdimenziós főtengetyítél, amint erre az előző B3 megjegyzésben rámutattunk.

**51.6** Legyenek az egymásra páronként merőleges  $s_1, s_2, s_3$  egységvektorok a  $C$  szimmetrikus homogén lineáris transzformáció sajátvektorai, és rendre  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  az ezekhez tartozó sajátértékek. Jelölje  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  koordinátákat abban a koordináta-rendszerben, amelynek  $s_1, s_2, s_3$  az alapvektorai. Ha az  $xCx$  másodfokú alakot ebbe a koordináta-rendszerbe írjuk át, azt mondjuk, hogy *főtengetyitranszformációt* alkalmaztunk a másodfokú alakra.

**Tétel.** *Ha egy háromváltozós másodfokú alakra főtengetyitranszformációt alkalmazunk, akkor*

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2$$

alakot ölt, ahol az együtthatók a tengelyirányokba mutató sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek.

Tételünk kimondja, hogy a főtengetyitranszformáció a másodfokú alakot kanonikus alakra hozza, s hogy minden másodfokú alak ortogonális helyettesítéssel kanonikus alakra hozható. Mondhatjuk azt is, hogy a másodfokú alak  $\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2$  alakban írható, ahol  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  másodfokú alak  $x_1, x_2, x_3$  változóinak homogén lineáris kifejezései, és az egyes lineáris kifejezések együtthatói rendre az  $s_1, s_2, s_3$  egységvektorok koordinátái.

*Bizonyítás.* A  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sajátértékre definíciójuk szerint

$$Cs_1 = \lambda_1 s_1, \quad Cs_2 = \lambda_2 s_2, \quad Cs_3 = \lambda_3 s_3.$$

Ha tehát a homogén lineáris  $C$  transzformációt az  $x = \xi_1 s_1 + \xi_2 s_2 + \xi_3 s_3$  vektorra alkalmazzuk, akkor

$$Cx = \xi_1 (Cs_1) + \xi_2 (Cs_2) + \xi_3 (Cs_3) = \lambda_1 \xi_1 s_1 + \lambda_2 \xi_2 s_2 + \lambda_3 \xi_3 s_3$$

adódik. Ha most a sajátvektorok koordináta-rendszerében megadott

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \text{és} \quad \mathbf{C}\mathbf{x}(\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \lambda_3 \xi_3)$$

vektorok skaláris szorzatát számítjuk, akkor az

$$\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x} = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2$$

eredményhez jutunk. —

A főtengetytranszformáció alapján beláthatjuk, hogy egy másodfokú alak valamennyi sajátértéke csak akkor 0, ha a másodfokú alak azonosan 0.

A másodfokú alakok algebrai tárgyalása során bizonyítani szokás, hogy minden másod fokú alak homogén lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra hozható. Bebizonyítottuk, hogy ezt ortogonális helyettesítéssel is el lehet érni.

**B1** Ha egy másodfokú alakot egy új derékszögű koordináta-rendszerbe átírva kanonikus alakhoz jutunk, akkor az új koordinátatengelyek sajátirányokba mutatnak. Ez abból következik, hogy a  $\lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2$  másodfokú alakhoz a  $\xi_1^t = \lambda_1 \xi_1, \dots, \xi_n^t = \lambda_n \xi_n$  affinitás tartozik, s innen látható, hogy az új koordináta-rendszer alapvektorai sajátvektorok, mégpedig  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sajátértékek tartoznak hozzájuk.

Ezt a kiegészítést figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy a főtengetytétel egyenértékű azzal a kijelentéssel, hogy minden másodfokú alak ortogonális helyettesítéssel kanonikus alakra hozható.

**B2** Ha olyan másodfokú alak főtengetytranszformációjáról van szó, amelynek változói egy ferdeszögű koordináta-rendszer (kontravariáns) koordinátái, akkor a következőkre kell ügyelnünk:

Szimmetrikus tenzor ferdeszögű koordináta-rendszerre vonatkozó mátrixa nem mindig szimmetrikus, és szimmetrikus mátrixú tenzor nem mindig szimmetrikus tenzor. Ha  $\mathbf{C}$  szimmetrikus tenzor, és az  $\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}$  másodfokú alakot egy ferdeszögű koordináta-rendszer (kontravariáns) koordinátaival fejezzük ki, akkor a másodfokú alak együtthatói szimmetrikus mátrixot alkotnak, azonban nem adják közvetlenül a  $\mathbf{C}$  tenzor mátrixát (vö. 51.4 63).

Ezek a tények óvatosságra intenek, ha ferdeszögű rendszer (kontravariáns) koordinátaival kifejezett másodfokú alak főtengety transzformáció járói akarunk beszélni. Maga a főtengetytétel természetesen mindig helyes, akármilyen koordináta-rendszerben adjuk is meg a szimmetrikus  $\mathbf{C}$  tenzorral képezett  $\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}$  másodfokú alakot, azonban a sajátértékeket és a sajátvektorokat már nem határozhatjuk meg az 51.1-ben megismert eljárással.

Ha a szimmetrikus  $\mathbf{C}$  tenzorral képezett  $\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}$  másodfokú alakot ferdeszögű koordináta-rendszerben,

$\sum c_{*} x^i x^k$  alakban adjuk meg, és a  $(c_{ik})$  mátrix szimmetrikus, akkor  $\mathbf{C}$  tenzor sajátértékeit a

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda g_{11} & c_{12} - \lambda g_{12} & c_{13} - \lambda g_{13} \\ c_{21} - \lambda g_{21} & c_{22} - \lambda g_{22} & c_{23} - \lambda g_{23} \\ c_{31} - \lambda g_{31} & c_{32} - \lambda g_{32} & c_{33} - \lambda g_{33} \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet adja meg (vö. 47.1 62). A  $g_{ik}$  értékekről tudjuk, hogy mátrixuk szimmetrikus, s hogy  $\mathbf{x}^2 = \sum g_{ik} x^i x^k$ . Eszerint a bal oldalon az

$$\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^2 = \sum (c_{*} - \lambda g_{*}) x^i x^k$$

másodfokú alak determinánsa áll. Ez a determináns 51.4 61 szerint akkor és csak akkor 0, ha az  $\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^2$  által egy derékszögű koordináta-rendszerben szolgáltatott másodfokú alak determinánsa 0. Ez pedig 51.1 szerint valóban akkor és csak akkor teljesül, ha  $\lambda$  sajátérték.

Ha a szimmetrikus  $\mathbf{C}$  tenzorral képezett  $\mathbf{xCx}$  másodfokú alakot ferdeszögű koordináta-rendszerben  $\sum c_{ik} x^i x^k$  alakban adjuk meg, és a  $(c_{ik})$  mátrix szimmetrikus, akkor a  $\mathbf{C}$  tenzornak a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  sajátvektorait a

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda g_{11})x^1 + (c_{12} - \lambda g_{12})x^2 + (c_{13} - \lambda g_{13})x^3, \\ (c_{21} - \lambda g_{21})x^1 + (c_{22} - \lambda g_{22})x^2 + (c_{23} - \lambda g_{23})x^3, \\ (c_{31} - \lambda g_{31})x^1 + (c_{32} - \lambda g_{32})x^2 + (c_{33} - \lambda g_{33})x^3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer adja meg. A bizonyítást arra alapozzuk, hogy

$$\mathbf{xCy} = \sum c_{ik} x^i y^k,$$

a baloldalt ugyanis  $\mathbf{C}$  és  $(c_{ik})$  szimmetrikus voltára hivatkozva a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} \mathbf{xCy} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{C}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{xCx} - \mathbf{yCy}] = \\ &= \frac{1}{2} [\sum c_{ik} (x^i + y^i)(x^k + y^k) - \sum c_{ik} x^i x^k - \sum c_{ik} y^i y^k] = \\ &= \frac{1}{2} \sum c_{ik} (x^i y^k + x^k y^i) = \frac{1}{2} \sum (c_{ik} + c_{ki}) x^i y^k = \sum c_{ik} x^i y^k. \end{aligned}$$

Az  $\mathbf{x}$  vektor akkor és csak akkor a  $k$  sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha  $\mathbf{Cx} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , ha tehát minden  $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$  vektorra teljesül az, hogy

$$\mathbf{y}(\mathbf{Cx} - \lambda \mathbf{x}) = \mathbf{yCx} - \lambda \mathbf{yx} = \mathbf{xCy} - \lambda \mathbf{xy} = 0.$$

Ezt azonban

$$\sum c_{ik} x^i y^k - \lambda \sum g_{ik} x^i y^k = \sum (c_{ik} - \lambda g_{ik}) x^i y^k = 0$$

alakban írhatjuk, és ez az  $y^1, y^2, y^3$  számok mindenféle értékére akkor és csak akkor teljesül, ha mindegyiküknek 0 az együtthatója. Ezeknek az együtthatóknak az eltűnése azonban éppen a bizonyítandó állításban felírt egyenletrendszert adja.

A sajátértékek és a sajátvektorok birtokában a ferdeszögű koordináta-rendszerben adott másodfokú alak főtengelettranszformációját már végrehajthatjuk. A páronként egymásra merőleges  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  egységvektorokhoz tartozó  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  koordináták az eredeti  $x^1, x^2, x^3$  koordinátáknak homogén lineáris kifejezései, és bennük az együtthatók rendre az  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  vektorok kovariáns koordinátái. Ha ugyanis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  az eredeti alapvektorokat jelölik, akkor

$$\xi_1 \mathbf{s}_1 + \xi_2 \mathbf{s}_2 + \xi_3 \mathbf{s}_3 = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3.$$

Ezt az egyenletet  $\mathbf{s}_i$ -vel skalárisán megszorozva  $\xi_i$  kifejezését kapjuk. Ennek a homogén lineáris kifejezésnek az együtthatói  $\mathbf{s}_i \mathbf{e}_1, \mathbf{s}_i \mathbf{e}_2, \mathbf{s}_i \mathbf{e}_3$ , tehát valóban  $\mathbf{s}_i$  kovariáns koordinátái.

Megtehetjük természetesen azt is hogy a  $\sum c_{ik} x^i x^k$  másodfokú alakot úgy hozzuk kanonikus alakra, mintha a változók derékszögű koordináták volnának. Ekkor az egész számítást úgy végezhetjük, mint a derékszögű esetben. Ez azonban nem főtengelettranszformáció, hanem a másodfokú alak átírása olyan ferdeszögű koordináta-rendszerbe, amelynek alapvektorai a szimmetrikus  $(c_{ik})$  mátrix által megadott, általában nem szimmetrikus tenzor bizonyos sajátvektorai.

**51.7** Láttuk már, hogy minden szimmetrikus homogén lineáris transzformációnak legalább három sajátvektora és legfeljebb három sajátértéke van. Megvizsgáljuk most, hogy a sajátvektorok összességét és a sajátértékek számát illetően milyen esetek lehetségesek.

**Tétel.** Az olyan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sajátértékek, amelyek három egymásra páronként merőleges sajátvektorhoz tartoznak, a Laplace-egyenlet gyökei adják meg, mégpedig a gyökök többszörösségét is figyelembe véve.

Azt már tudtuk 51.1-ből, hogy a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  értékek kielégítik a Laplace-egyenletet. Tételünk kimondja, hogy más érték ezt az egyenletet nem elégíti ki, s hogy az egyenletnek minden gyöke annyszor szerepel a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sorozatban, ahányszoros gyök. Ha a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  értékek mind különbözők, akkor mindez nyilvánvaló, hiszen a harmadfokú Laplace-egyenletnek háromnál több gyöke nem lehet. A hangsúly tehát azon az eseten van, amikor a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  értékek között egyenlők is vannak.

*Bizonyítás.* A  $\mathbf{C}$  szimmetrikus homogén lineáris transzformációhoz tartozó Laplace-egyenletben az  $\mathbf{C}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}^2$  másodfokú alak determinánsa áll. Itt  $\lambda$ -val tetszőleges valós értéket jelöltünk. Ha a másodfokú alakot abba az elforgatott koordináta-rendszerbe írjuk át, amelynek az alapvektorai  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sajátértékeket adó, egymásra páronként merőleges sajátvektorok, akkor az előző szakasz szerint a

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 - \lambda (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$$

másodfokú alakhoz jutunk. Minthogy 51.4 tétele szerint az elforgatott koordináta-rendszerbe való átirás a másodfokú alak determinánsának az értékét nem változtatja meg, fennáll a

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix}$$

azonosság, hiszen ez a két determináns  $\lambda$  minden értékére egyenlő. A jobb oldali determináns kifejtése révén a Laplace-egyenlet

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0$$

gyöktényezős alakjához jutunk.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  értékek tehát valóban a Laplace-egyenlet gyökei adják meg, mégpedig a többszörösségüket is figyelembe véve. —

A most bizonyított tételből következik, hogy a Laplace-egyenlet minden gyöke valós. Azt is beláttuk, hogy ha többféleképpen lehet három, páronként egymásra merőleges sajátvektort felvenni, akkor az ezekhez tartozó sajátértékek minden esetben ugyanazt az értékhármast, ti. a Laplace-egyenlet három (egymástól nem feltétlenül különböző) gyökét adják meg.

Ha egy szimmetrikus homogén lineáris transzformáció három sajátértékéről szólunk, akkor a Laplace-egyenlet egymástól nem feltétlenül különböző gyökeire gondolunk, tehát azokra a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  értékekre, amelyek sajátértékként három, páronként egymásra merőleges sajátvektorhoz tartoznak. Ha egy érték többször is előfordul a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sajátértékek között, akkor *többszörös* (degenerált) sajátértéknek mondjuk. A három sajátérték együttesen a szimmetrikus homogén lineáris transzformáció *spektrumát* alkotja.

**Tétel.** A  $\mathbf{A}$  sajátértékhez sajátvektorként egy egyenesnek, egy síknak vagy a térnek minden (**0-tól különböző**) vektora tartozik aszerint, amint a három sajátérték között  $\lambda$  egyszer, kétszer vagy háromszor fordul elő.

Megállapíthatjuk, hogy a tétel állítása a síkbeli esetben is teljesül (lásd 47.2).

*Bizonyítás.* Ha a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektorok koordinátáit olyan koordináta-rendszerben határozzuk meg, amelynek a tengelyirányai sajátirányok, akkor a sajátvektor  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  koordinátáira a

$$(\lambda_1 - \lambda) \xi_1 = 0,$$

$$(\lambda_2 - \lambda) \xi_2 = 0,$$

$$(\lambda_3 - \lambda) \xi_3 = 0$$

egyenletrendszert kapjuk. Itt annyi egyenlet semmitmondó, ahányszor  $\lambda$  a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  értékek között előfordul. A többi egyenlet (ha vannak ilyenek) más koordinátáról mondja ki, hogy 0-val egyenlő. Az egyenletrendszer megoldása tehát valóban egy egyenes, egy sík vagy a tér minden pontjának koordinátáiból áll aszerint, amint egyenleteink között egy, két vagy három semmitmondó van. —

Ebből a bizonyításból az is látható, hogy az egyes sajátértékekhez tartozó egyenesek és síkok egymásra páronként merőlegesek.

Minthogy három érték között vagy csupa különböző, vagy két egyenlő és egy tőlük különböző, vagy pedig három egyenlő szerepel, beláttuk, hogy a sajátértékeket és sajátirányokat illetően a következő három eset lehetséges:

1. három különböző sajátérték van, mindegyikhez egyetlen sajátirány tartozik, és a három sajátirány egymásra páronként merőleges; 2. csak két különböző sajátérték van, az egyikhez egyetlen sajátirány tartozik, s az erre merőleges irányok a másik sajátértékhez tartozó sajátirányokkal azonosak; 3. csak egy sajátérték van, és minden irány sajátirány.

Ha azt nézzük, hogyan lehet a mondott három esetben három egymásra páronként merőleges sajátirányt felvenni, megállapíthatjuk, hogy az első esetben ez csak egyféleképpen lehetséges, a másodikban a három irány egyikük körül szabadon elforgatható, a harmadikban pedig szabadon vehető fej.

**Tétel.** Egy  $C$  determinánsú szimmetrikus homogén lineáris transzformáció három sajátértékének szorzata  $C$ -vel egyenlő.

*Bizonyítás.* A főtengeleytranszformáció révén kapott másodfokú alak determinánsa

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Ez az érték  $C$ -vel egyenlő, mert 51.4 tétele szerint a koordináta-rendszer elforgatása a másodfokú alak determinánsát nem változtatja meg. —

Megemlítjük, hogy a most bizonyított tétel helyességét a Laplace-egyenlet gyökei és együtthatói között fennálló összefüggés is bizonyítja. Ebből a tételből is látható, hogy 0 akkor és csak akkor szerepel egy másodfokú alak saját értékei között, ha determinánsa 0.

**Tétel.** Ha a sajátértékek többszörösségét is figyelembe vesszük, akkor a másodfokú alak 0-tól különböző sajátértékeinek a száma a másodfokú alak determinánsának a rangjával egyenlő.

Szólhattunk volna másodfokú alak helyett egy szimmetrikus determinánsról és az ehhez tartozó sajátértékekről. Másként szövegezve azt mondja ki a tétel, hogy ha a másodfokú alak változóinak számából determinánsának a rangját (a determináns rendszámából a rangját) levonjuk, akkor az eredmény megmondja, hogy 0 hányszoros sajátérték.

*Bizonyítás.* Elég, ha csak a főtengeleyekre transzformált másodfokú alak

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

determinánsát vizsgáljuk, mert ha a másodfokú alakot egy elforgatott koordináta-rendszerbe írjuk át, akkor a sajátértékei természetesen változatlanok maradnak, és 51.4 szerint a rangja sem változik meg. A felírt determináns azonban valóban annyiadrangú, ahány 0-tól különböző eleme van. —

A Érdekeség kedvéért megemlítjük, hogy a sajátértékek összességére Hilbert hamarabb vezette be a „spektrum” szót, mintsem a kvantummechanika megalkotása után a fizika megállapította, hogy



a spektrumok, azaz színeképek vonalait valóban bizonyos lineáris transzformációk „spektrumi” határozzák meg.

**51.8** Megvizsgáljuk, hogy egy másodfokú alak tulajdonságai hogyan tükröződnek az alakhoz tartozó sajátértékekben.

**Tétel.** *a) Egy másodfokú alak akkor és csak akkor (pozitív vagy negatív) definit, ha minden sajátértéke ugyanolyan (pozitív, illetve negatív) előjelű.*

*b) Egy másodfokú alak akkor és csak akkor (pozitív vagy negatív) szemidefinit, ha a sajátértékei között 0 is szerepel, és a többi sajátérték mind ugyanolyan (pozitív, illetve negatív) előjelű.*

*c) Egy másodfokú alak akkor és csak akkor indefinit, ha a sajátértékei között pozitív és negatív is van.*

Tételünk a sajátértékeket illetően minden lehetséges esetet felsorol, eltekintve attól az érdektelen esettől, amikor minden sajátérték 0, és a másodfokú alak azonosan eltűnik. Tételünk felöleli 47.4 első tételét. Röviden mondhatjuk, hogy a másodfokú alak olyan, amilyen a spektruma: ha az egyik definit, szemidefinit vagy indefinit, akkor a másik is az.

*Bizonyítás.* A másodfokú alakot a főtengelekre transzformált

$$Q = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2$$

alakban tekintjük. A bizonyítást két észrevétellel készítjük elő.

1. Minthogy  $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2$  értéke nem lehet negatív,  $Q$  egy tagja csak akkor lehet negatív (pozitív), ha az együtthatója ilyen előjelű sajátérték.

2. Ha valamelyik sajátérték, pl.  $\lambda_1$  pozitív, negatív vagy 0, akkor nem triviális helyettesítéssel elérhető, hogy  $Q$  értéke is ilyen legyen. Ilyen értékhez jutunk ugyanis, ha  $\xi_1 \neq 0$  és  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ .

Ez után az előkészítés után a tétel bizonyítására térünk rá. Azt bizonyítjuk, hogy ha a sajátértékekre bekövetkezik a tételben említett három lehetőség valamelyike, akkor a másodfokú alak valóban olyan, amilyennek a tétel állítja. Nem kell külön bizonyítanunk, hogy a másodfokú alak minősége is meghatározza a sajátértékek előjelviszonyait. Ha ugyanis az alak pl. definit, akkor a sajátértékek csak egyező előjelűek lehetnek, mert ha nem ilyenek, akkor a bebizonyítandók szerint az alak nem definit.

a) Ha mindhárom sajátérték pozitív (negatív), akkor 1. szerint  $Q$  egyetlen tagja sem lehet negatív (pozitív). Ezért  $Q$  maga sem lehet negatív (pozitív), és  $Q = 0$  is csak akkor lehetséges, ha  $Q$  minden tagja 0. Ez utóbbi eset azonban csak akkor következik be, ha  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ , ha tehát triviális helyettesítést alkalmazunk. A másodfokú alak tehát pozitív (negatív) definit.

b) Ha a sajátértékek között 0 is szerepel, és a többi sajátérték pozitív (negatív), akkor 1. szerint  $Q$  nem lehet negatív (pozitív), viszont 2. szerint 0 is szerepel  $Q$  vizsgált helyettesítési értékei között. A másodfokú alak eszerint pozitív (negatív) szemidefinit.

c) Ha a sajátértékek között pozitív és negatív érték is szerepel, akkor 2. szerint ugyanezt elmondhatjuk  $Q$  vizsgált helyettesítési értékeiről is, a másodfokú alak tehát indefinit. —

**Tétel.** *Ha egy (pozitív vagy negatív) definit másodfokú alakot a változókból alakított homogén lineáris kifejezések valós együtthatóval szorzott négyzeteinek összegeként írunk fel, mégpedig annyi ilyen tag összegeként, ahány változós a másodfokú alak, akkor a négyzetek együtthatói mind ugyanolyan (pozitív, illetve negatív) előjelűek.*

Ha főtengeletranszformációval keletkező kanonikus alakról van szó, akkor tételünk állítását már az előző tétel is kimondja. Tételünk azt mondja tehát ki, hogy a főtengeletranszformáció e tulajdonsága általánosabb körben is teljesül.

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy

$$Q = \mu_1 \eta_1^2 + \mu_2 \eta_2^2 + \mu_3 \eta_3^2$$

alakban írt háromváltozós másodfokú alakot, ahol  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  valós számok,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  pedig a másodfokú alak  $x_1, x_2, x_3$  változóinak homogén lineáris kifejezései.

Az előző bizonyítás 2. állításának mintájára bebizonyítjuk, hogy ha a  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  értékek valamelyike, pl.  $\mu_1$  nem pozitív (nem negatív), akkor nem triviális helyettesítéssel elérhető, hogy  $Q$  is ilyen legyen. Elég ehhez belátnunk, hogy az  $x_1, x_2, x_3$  értékek megválaszthatók nem triviális módon úgy, hogy  $\eta_2 = 0$  és  $\eta_3 = 0$  teljesüljön. Ez viszont igaz, mert ha egy homogén lineáris egyenletrendszer kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlent, akkor van nem triviális megoldása.

A bizonyított tényből következik, hogy ha a  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  számok között van olyan, amely nem pozitív (nem negatív), akkor  $Q$  nem triviális helyettesítéssel kapott értékei között is van ilyen.  $Q$  tehát nem lehet ilyenkor pozitív (negatív) definit. Tételünk más szövegezéssel ugyanezt mondta ki. —

A Szakaszunk első tétele módot ad arra, hogy egy másodfokú alak minőségét eldöntsük, azonban csak akkor, ha megoldjuk a Laplace-egyenletet, illetőleg tudjuk, hogy a gyökei milyen előjelűek. A másodfokú alak minőségét egyszerűbben is el lehet dönteni, az 52. §-ban ilyen módszert ismerünk majd meg.

**B1** A másodfokú alakok tárgyalásakor csak az a cél vezetett bennünket, hogy a következő szakaszt és az utolsó paragrafust előkészítsük. Ha a másodfokú alakok tárgyalása volna a cél, akkor az eddig mondottakat még bőségesen kiegészíthetnők.

Ilyen vonatkozásban itt csak azt említjük, hogy e szakasz második tétele egy általánosabb tétel speciális esete. A másodfokú alakokra vonatkozó (SYLVESTER-féle) *tehetetlenségi törvény*<sup>1</sup> kimondja ugyanis, hogy *ha egy  $n$ -változás másodfokú alak sajátértékei között  $k$  pozitív és  $n-k$  negatív érték van, akkor ugyanennyi pozitív és negatív együttható szerepel minden kanonikus előállításban, azaz valahányszor a másodfokú alakot a változókból alakított  $n$  darab homogén lineáris kifejezés valós együtthatókkal szorzott négyzeteinek összegeként írjuk fel.*

Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk be: Ha az állítás nem volna igaz, akkor

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_k \xi_k^2 - \lambda_{k+1} \xi_{k+1}^2 - \dots - \lambda_n \xi_n^2 = \mu_1 \eta_1^2 + \dots + \mu_l \eta_l^2 - \mu_{l+1} \eta_{l+1}^2 - \dots - \mu_n \eta_n^2$$

teljesülne, ahol  $k \neq l$ , továbbá  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  és  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , pozitív számok,  $\xi_1, \dots, \xi_n$  az  $x_1, \dots, x_n$  változók lineárisan független homogén lineáris kifejezései,  $\eta_1, \dots, \eta_n$  pedig az  $x_1, \dots, x_n$  változók valamilyen homogén lineáris kifejezései. Ha pl.  $k < l$  akkor a  $\xi_1 = \dots = \xi_k = \eta_{l+1} = \dots = \eta_n = 0$  egyenletrendszer  $n$ -nél kevesebb egyenletet tartalmaz, van tehát nem triviális  $x_1, \dots, x_n$  megoldása. Ha ezeket az értékeket a fenti egyenletbe helyettesítjük, akkor a bal oldalon a 0-tól különböző tagok csak negatívak, a jobb oldalon pedig csak pozitívak lehetnek. Az egyenlőség tehát csak úgy állhat fenn, ha minden tag 0, ha tehát  $\xi_1, \dots, \xi_n$  mindegyikének 0 a helyettesítési értéke. Ez azt jelentené azonban, hogy a  $\xi_1 = 0, \dots, \xi_n = 0$  homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, hogy tehát  $\xi_1, \dots, \xi_n$  feltevéssel ellentétben nem lineárisan független kifejezések.

Miután a bizonyítást befejeztük, megemlítjük, hogy  $\eta_1, \dots, \eta_n$  is csak lineárisan független lineáris alakok lehetnek. Az ellenkező esetben ugyanis kifejezhetők volnának  $n$ -nél kevesebb, lineárisan független lineáris alak segítségével, a másodfokú alak kifejezhető volna tehát ennek a kevesebb lineáris alaknak másodfokú alakjaként, s ezt azt jelenti, hogy megfelelő ferdeszögű koordináta-rendszert használva a másodfokú alak kevesebb változós másodfokú alakká volna átirtható. Ez azonban lehetetlen, mert ha az  $n$  változós másodfokú alakban nem minden változó szerepel (0-tól különböző együtthatóval), akkor a determinánsa 0, márpedig az eredeti alak determinánsa nem volt 0, hiszen 0 nem szerepelt a sajátértékei között, és a ferdeszögű koordináta-rendszerbe való átirás 51.4 B1 szerint ezen nem változtatható.

A tehetetlenségi törvény még általánosabban azt is kimondja, hogy *ha egy másodfokú alakot lineárisan független lineáris alakok együtthatós négyzeteinek összegeként állítunk elő, akkor nem függ az előállítás mintájától, hogy az együtthatók között hány pozitív és hány negatív van.*

<sup>1</sup> \* J. J. Sylvester (ejtsd: szilveszter), 1814–1897, angol matematikus, a Baltimore-i egyetem tanára.

Az előrebocsátottak szerint ez az imént bizonyított állítást is magában foglalja. A főtengeletranszformációra gondolva azt is mondhattuk volna, hogy annyi pozitív és negatív tag szerepel, ahány pozitív és negatív sajátérték van, hogy tehát a tagok száma mindig a másodfokú alak rangjával egyenlő.

Az állítás bizonyítása végett először azt jegyezzük meg, hogy ha  $n$  változó van, akkor csak legfeljebb  $n$  lineárisan független lineáris alak szerepelhet. Minden lineárisan független homogén lineáris alakok segítségével történő előállítás úgy foghatunk fel ezért, hogy benne éppen  $n$  tag szerepel, de egyesekben 0 az együttható. Eszerint ilyenkor mindig a másodfokú alaknak ferdeszögű koordináta-rendszerbe való átírásáról van szó. Minthogy az ilyen átírás az alak determinánsának rangját 51.4 B1 szerint nem változtatja meg, s mivel az átírt alak determinánsának a rangját az előállításban szereplő, 0-tól különböző együtthatók száma adja meg, beláttuk, hogy minden szóban forgó előállításban ugyanannyi (0-tól különböző együtthatós) tag szerepel.

Az előző bizonyítást követve az is adódik, hogy két előállításban ugyanannyi pozitív és ugyanannyi negatív együttható szerepel. Az okoskodást csak annyiban kell megváltoztatni, hogy most az  $r$  rang játssza  $n$  szerepét, s hogy ezért a  $\xi_1 = \dots = \xi_k = \eta_{l+1} = \dots = \eta_r = 0$  egyenletrendszert a  $\xi_{r+1} = \dots = \xi_n = 0$  egyenletekkel is kiegészítjük. Ennek az egyenletrendszernek nem triviális  $x_1, \dots, x_n$  megoldása ugyanúgy bizonyítja  $k < l$  lehetetlenségét, mint az előbb.

**B2** A tehetetlenségi törvény ismerete lehetőséget ad arra, hogy könnyűszerrel és gyorsan olyan  $n$ -változós másodfokú alakot írjunk fel, amelynek determinánsa megadott rangú, mégpedig a sajátértékei között megadottan sok a pozitív és a negatív. Ehhez tetszőleges lineárisan független homogén lineáris alakokat kell csak választanunk, és ezek négyzetét megfelelő előjelű együtthatókkal szorozva összeadnunk.

Jól hasznosíthatjuk ezt akkor, ha bizonyos fajtájú másodrendű felület egyenletét akarjuk felírni, de nem kanonikus vagy könnyen kanonikusra osztható alakban. A következő szakaszban ugyanis látjuk majd (lásd 51.9 B6), hogy ehhez éppen arra van szükség, aminek a gyors lehetőségére itt rámutattunk.

**51.9** Lezárjuk a másodrendű feladatok tárgyalását. Bebizonyítjuk, hogy az előző paragrafusban már minden másodrendű felületet megismertünk. Egyben módot adunk annak eldöntésére, hogy egy megadott egyenletű másodrendű felület milyen.

**Tétel.** Minden másodrendű felület egyenlete a koordináta-rendszert elmozgatva, valamint (0-tól különböző) állandóval szorozva a következő kanonikus alakok valamelyikére hozható

a) ha  $A_{44} \neq 0$ , és az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak definit,

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (\text{valós ellipszoid (vagy gömb)},$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = -1 \quad \text{üres alakzat (amelyhez valós ideális pont sem tartozik, képzetes ellipszoid vagy gömb),}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0 \quad \text{pont (pontellipszoid vagy pontgömb, valós csúcsú képzetes kúp);}$$

b) ha  $A_{44} \neq 0$ , és az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak indefinit,

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad \text{egyköpenyű hiperboloid}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = -1 \quad \text{kétköpenyű hiperboloid}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0 \quad \text{másodrendű (valós) kúp (egyenes vagy ferde körkúp)}$$

c) ha  $A_{44} = 0$ , és az  $A_{44}$ -hez tartozó másod fokú alak indefinit,

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta \quad \text{hiperbolikus paraboloid,}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad (\text{közönséges}) \text{ hiperbolikus henger,}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0 \quad \text{metsző síkpár (elfajuló hiperbolikus henger);}$$

d) ha  $A_{44} = 0$ , az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak szemidefinit, és  $A_{44}$  sajátértékei között két 0-tól különböző van (azaz  $A_{44}$  rangja 2),

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta \quad \text{elliptikus paraboloid,}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad (\text{valós}) \text{ elliptikus henger,}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = -1 \quad \text{üres alakzat (amelyhez egy valós ideális pont tartozik, képzetes elliptikus henger),}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 0 \quad \text{egyenes (valós egyenesben metsző képzetes síkpár, elfajuló elliptikus henger);}$$

e)  $A_{44} = 0$ , az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak szemidefinit, és  $A_{44}$  sajátértékei között csak egy 0-tól különböző van (azaz  $A_{44}$  rangja 1),

$$\eta^2 = 2p\xi \quad (\text{közönséges}) \text{ parabolikus henger,}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} = 1 \quad (\text{valós}) \text{ párhuzamos síkpár,}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} = -1 \quad \text{üres alakzat (amelyhez egy valós ideális egyenes tartozik, képzetes párhuzamos síkpár),}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2} = 0 \quad \text{sík (kettős sík).}$$

Hozzáfűzzük ehhez a tételhez, hogy az a) esetben az  $a \geq b \geq c$ , a b) eset első és harmadik egyenleténél, valamint a d) esetben az  $a \geq b$ , ab) eset második egyenleténél pedig a  $b \geq c$  megszorítást is a tételbe foglalhattuk volna. Ugyancsak nyilvánvaló, hogy a) és b) utolsó egyenleténél  $a^2 + b^2 + c^2$  és d) utolsó egyenleténél  $a^2 + b^2$ , végül e) utolsó egyenleténél  $a^2$  pozitív értékét szabadon előírhattuk volna.

*Bizonyítás.* A másodrendű felület egyenletének másodfokú tagjai egy másodfokú alakot alkotnak. Legyenek  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ennek az  $A_{44}$  detertniansü másodfokú alaknak a sajátértékei. Ezekre 51.7 szerint  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A_{44}$ .

Elforgatjuk a koordináta-rendszert úgy, hogy a koordinátatengelyek  $A_{44}$ -hez tartozó sajátirányokba mutassanak. A főtengetytranszformációról szóló tétel értelmében tudjuk, hogy felületünk egyenlete az elforgatás után

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

alakot ölt. A következőkben ebből az egyenletből indulunk ki.

*I. eset:  $A_{44}$  sajátértékei 0-tól különbözők.*

Ebben az esetben  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = A_{44}$  miatt  $A_{44} \neq 0$ , s az  $A_{44}$  determináns rangja

3. Annak megfelelően, hogy a három sajátérték megegyező előjelű-e, vagy pedig nem, az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak definit vagy indefinit.

Mint hogy  $x^2$  együtthatója nem 0, és  $x$  más másodfokú tagban nem szerepel, azért a koordináta-rendszer az  $x$ -tengellyel párhuzamosan eltolva elérhetjük, hogy az  $x$  helyébe lépő koordináta az elsőfokú tagok között se szerepeljen. Ezt a fogást már 47.5-ben is alkalmaztuk. Ez után az eltolás után hasonlóan járhatunk el az  $y$  és  $z$  koordinátákkal is. A koordináta-rendszer eltolásával elérhetjük tehát, hogy felületünk egyenlete

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + d = 0$$

alakot öltön.

Ebből az egyenletből a másodrendű felület determinánsára

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

adódik. A felület tehát aszerint közönséges vagy elfajuló, hogy  $d \neq 0$  vagy  $d = 0$ .

a) Ha az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak definit, akkor  $\xi^2$ ,  $\eta^2$ ,  $\zeta^2$  együtthatói megegyező előjelűek. Feltehetjük, hogy együtthatóik pozitívak, mert ellenkező esetben  $(-1)$ -gyel szorozva érnők el ezt.

Ha a felület közönséges, azaz  $d \neq 0$ , akkor  $d$  abszolút értékével való osztás után az egyenletet a

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = -1$$

alakok valamelyikében írhatjuk fel. A felület ebben az esetben tehát valós vagy képzetes ellipszoid, s ha a három együttható, azaz a három sajátérték egyenlő, akkor valós vagy képzetes gömb.

Ha a felület elfajuló, azaz  $d = 0$ , akkor nincs szükség osztásra, s az egyenletet

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0$$

alakban írhatjuk. Ez pont (valós csúcsú képzetes kúp) egyenlete.

b) Ha az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak indefinit, akkor  $\xi^2$ ,  $\eta^2$ ,  $\zeta^2$  együtthatói különféle előjelűek.

Ha a felület közönséges, azaz  $d \neq 0$ , akkor az egyenlet állandó tagját a jobb oldalra visszük, s ennek értékével osztva elérjük, hogy a jobb oldalon 1 álljon. A bal oldalon  $\xi^2$ ,  $\eta^2$ ,  $\zeta^2$  együtthatói között az osztás után is van pozitív és negatív. Feltehetjük, hogy  $\xi^2$  pozitív együtthatóval szerepel,  $\zeta^2$  pedig negatívval, mert ha ez nem volna így, akkor a tengelyek körüli  $90^\circ$ -os elforgatásokkal felcserélhetjük a koordináták szerepét. Felületünk egyenletét ezek szerint a

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

alakok valamelyikére hozhatjuk. A felület ezek szerint egy- vagy kétköpenyű hiperboláid.

Ha a felület elfajuló, azaz  $d = 0$ , akkor feltehetjük, hogy  $\xi^2, \eta^2, \zeta^2$  együtthatói között két pozitív van, mert ellenkező esetben  $(-1)$ -gyel szorozva érhetjük el ezt. Azt is feltehetjük, hogy  $\xi^2$  és  $\eta^2$  szerepel pozitív együtthatóval, mert ellenkező esetben a tengelyek körüli  $90^\circ$ -os elforgatásokkal juthatnánk ilyen együtthatókhoz. A felület egyenlete ezek szerint

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = 0$$

alakra hozható. A felület tehát (valós) másodrendű kúp.

*II. eset:  $A_{44}$ -nek egy sajátértéke 0.*

Mint ahogy a tengelyek szerepét szabadon cserélhetjük, feltehetjük, hogy  $\lambda_3 = 0$ , hogy tehát  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  nem 0. Most  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = A_{44}$  miatt  $A_{44} = 0$  és az  $A_{44}$  determináns rangja 51.7 szerint 2. Annak megfelelően, hogy  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  előjele különböző-e vagy nem, az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak indefinit vagy szemidefinit.

A főtengely-transzformációval kapott

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

egyenletből most azt állapíthatjuk meg, hogy a koordináta-rendszert az  $x$ -tengellyel és az  $y$ -tengellyel párhuzamosan eltolva a felület egyenlete

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a_{34}\zeta + d = 0$$

alakra hozható.

Ebből az egyenletből

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & d \end{vmatrix}$$

adódik. A felület tehát aszerint közönséges vagy elfajuló, amint  $a_{34} \neq 0$  vagy  $a_{34} = 0$ . Ha a felület közönséges, azaz  $a_{34} \neq 0$ , akkor a koordináta-rendszernek a  $z$ -tengellyel párhuzamos eltolásával elérhetjük, hogy az egyenletben állandó tag ne szerepeljen, hogy tehát az egyenlet

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a_{34}\zeta = 0$$

alakot öltön. Ha viszont a felület elfajuló, akkor  $a_{34} = 0$  miatt

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + d = 0$$

a felület egyenlete.

*c) Ha az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak indefinit, akkor  $\xi^2$  és  $\eta^2$  más-más előjelű együtthatóval szerepel.*

Ha a felület közönséges, akkor a lineáris tagot a jobb oldalra írjuk, és osztással eléljük, hogy ez a tag  $2\zeta$  legyen. A bal oldalon  $\xi^2$  és  $\eta^2$  együtthatói az osztás után is különböző előjelűek. Feltehetjük, hogy  $\xi^2$  együtthatója pozitív, mert  $\xi$  és  $\eta$  szerepét a  $\xi$ -tengely körüli  $90^\circ$ -os elforgatással felcserélhetjük. Eszerint a felület egyenlete

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta$$

alakban írható, a felület tehát hiperbolikus paraboloid.

Ha a felület elfajuló,  $d \neq 0$  akkor az állandó tagot a jobb oldalra visszük, majd vele osztva elérjük, hogy a jobb oldalon 1 álljon. A bal oldali együtthatók most is különböző előjelűek maradtak, s most is feltehetjük, hogy  $\zeta^2$  együtthatója a pozitív. Az egyenlet ezért

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

alakban írható, s a felület közönséges hiperbolikus henger.

Ha a felület elfajuló, és  $d = 0$ , akkor feltehetjük, hogy együtthatója pozitív, mert különben  $(-1)$ -gyel szorozva érhetjük el azt. Az egyenlet tehát

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0$$

alakban írható, s a felület valós metsző síkpár (elfajuló hiperbolikus henger).

*d)* Ha az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak szemidefinit, akkor  $\xi^2$  és  $\eta^2$  együtthatóinak megegyező az előjele. Feltehetjük, hogy pozitív előjelűek, mert különben  $(-1)$ -gyel szorozva érjük el ezt.

Ha a felület közönséges, akkor a lineáris tagot a jobb oldalra visszük. Feltehetjük, hogy itt  $\zeta$  pozitív együtthatóval szerepel, mert különben a  $\xi$ -tengely körüli  $180^\circ$ -os elforgatással juthatunk ilyen egyenlethez. Pozitív számmal osztva azt is elérhetjük, hogy  $\zeta$  együtthatója 2 legyen. Az így kapott egyenlet

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 2\zeta$$

alakú, a felület tehát elliptikus paraboloid.

Ha a felület elfajuló, és  $d \neq 0$ , akkor az állandó tagot a jobb oldalra visszük, és az abszolút értékével osztva

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = -1$$

alakok valamelyikéhez jutunk. A felület tehát valós vagy képzetes elliptikus henger.

Ha a felület elfajuló, és  $d = 0$ , akkor az egyenlet

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 0$$

alakban írható, s ez egyenes (valós egyenesben metsző képzetes síkpár, elfajuló elliptikus henger) egyenlete.

*III. eset:*  $A_{44}$ -nek két sajátértéke 0.

Feltehetjük, hogy  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  és  $\lambda_1 \neq 0$ , hiszen a tengelyek szerepét szabadon cserélhetjük. Miként a II. esetben a  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A_{44}$  összefüggés folytán most is  $A_{44} = 0$ , azonban  $A_{44}$  rangja 51.7 szerint 1. Az  $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak most csak szemidefinit lehet.

A főtengelytranszformációval kapott egyenlet

$$\lambda_1 x^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

alakú, s így a koordináta-rendszert az  $x$ -tengellyel párhuzamosan eltolva elérhetjük, hogy

$$\lambda_1 \xi^2 + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

alakot öltön. Feltehetjük, hogy itt szorzója pozitív, mert különben  $(-1)$ -gyel szorozva ilyen egyenlethez juthatunk.

Minthogy egyenletünkben

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{24} & a_{34} & d \end{vmatrix}$$

adódik, a felület elfajuló.

Ha az  $a_{24}$ ,  $a_{34}$  együtthatóknak nem mindegyike 0, akkor a

$$2a_{24}y + 2a_{34}z + d = 0$$

egyenlet az  $yz$ -síkból egyenest ad. Ebben a síkban elmozgathatjuk a koordináta-rendszert úgy, hogy ha  $\eta$  és  $\zeta$  az új koordinátákat jelöli, az egyenes egyenlete  $\zeta = 0$  legyen. Ez azt jelenti, hogy ha ennek a síkbeli elmozgatásnak a koordinátatranszformációját alkalmazzuk, akkor megfelelő  $c \neq 0$  állandóval

$$2a_{24}y + 2a_{34}z + d = c\zeta$$

adódik. Ha a síkban elmozgatott koordináta-rendszerrel együtt a térbeli koordináta-rendszert is elmozgatjuk, akkor ugyanaz a koordináták transzformációja, hiszen a  $\zeta$  koordináta változatlan marad. Eszerint a térbeli koordináta-rendszer (az  $yz$ -síkkal párhuzamosan eltolva és e síkra merőleges tengely körül elforgatva) elmozgatható úgy, hogy felületünk egyenlete

$$\lambda_1 \xi^2 + c\zeta = 0$$

alakot öltön. A lineáris tagot a jobb oldalra írjuk. Feltehetjük, hogy együtthatója pozitív, mert különben a  $\zeta$ -tengely körüli  $180^\circ$ -os elforgatással juthatunk ilyen egyenlethez. Pozitív számmal osztva azt is elérhetjük, hogy  $\zeta$  együtthatója 2 legyen. Az egyenlet ilyen módon

$$\frac{\xi^2}{a^2} = 2\zeta$$

alakot ölt. Ha a  $p = a^2$  jelölést alkalmazzuk, akkor a  $\xi^2 = 2p\zeta$  alakhoz jutunk. Felületünk eszerint közönséges parabolikus henger.

Ha  $a_{24} = a_{34} = 0$ , akkor

$$\lambda_1 \xi^2 + d = 0$$

az egyenlet. Ha itt  $d \neq 0$ , akkor az állandó tagot a jobb oldalra írva, majd abszolút értékével osztva a

$$\frac{\xi^2}{a^2} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a^2} = -1$$

alakok valamelyikéhez, ha viszont  $d = 0$ , akkor

$$\frac{\xi^2}{a^2} = 0$$

alakú egyenlethez jutunk. A felület tehát elfajuló parabolikus henger, azaz valós vagy képzetes párhuzamos síkpár, illetőleg sík (kettős sík). —



A bizonyításból láthatjuk, hogy a másodrendű felületek tengelyei  $A_{44}$  sajátirányai. Ez indokolja a főtengetyítélet és főtengetytranszformáció elnevezéseket. Kiolvashatjuk a bizonyításból azt is, hogy a másodrendű felület akkor forgásfelület, ha  $A_{44}$  két 0-tól különböző sajátértéke egyenlő (ha a párhuzamos síkpárt és a kettős síkot nem tekintjük forgásfelületnek).

**A1** Okoskodásunk eredményét erősen leegyszerűsítve az

TB:#tipus3#]

|            | $A_{44} \neq 0$            | $A_{44} = 0$ |
|------------|----------------------------|--------------|
| $A \neq 0$ | elipszoid vagy hiperboloid | paraboloid   |
| $A = 0$    | kúp                        | henger       |

táblázatba foglalhatjuk. Valamivel részletesebb a következő táblázat:

|            | $A_{44} \neq 0$                      |                                | $A_{44} = 0$            |                                  |
|------------|--------------------------------------|--------------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| $A \neq 0$ | valós v. képzetes ellipszoid         | egy- v. kétköpenyű hiperboloid | hiperbolikus paraboloid | elliptikus paraboloid            |
| $A = 0$    | képzetes kúp                         | (valós) kúp                    | hiperbolikus henger     | elliptikus v. parabolikus henger |
|            | definit                              | indefinit                      |                         | szemidefinit                     |
|            | $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak |                                |                         |                                  |

Ha ezt a táblázatot 47.5 A táblázatával egybevetjük, megállapíthatjuk, hogy bár a hiperbola térbeli megfelelőinek a hiperboloidokat kell mondanunk, a hiperbolikus jelző áttekint a szomszédos, ugyancsak indefinit alakokhoz tartozó oszlopra.

Hangsúlyoznunk kell, hogy  $A_{44}$  előjele nem játszik szerepet ebben az osztályozásban, ellentétben a síkbeli osztályozással, ahol  $A_{33}$  előjele lényeges szerepet játszott. Ez nem is lehet azonban másként, hiszen az egyenletet  $(-1)$ -gyel szorozva az alakzat nem változik meg, viszont a harmadfokú  $A_{44}$  determináns minden eleme és így a determináns értéke is előjelet vált.

**A2** Már 50.9-ben foglalkoztunk azzal, hogyan lehet a kúp csúcsát és a henger alkotóinak irányát meghatározni. A kúp csúcsának meghatározására megismert módszer csekély változtatással arra is alkalmas, hogy az ellipszoid és hiperboloid esetében a centrumot meghatározzuk.

A szimmetriacentrum jellemzője ugyanis, hogy ha kezdőpontnak választjuk, akkor az  $(x, y, z)$  ponttal együtt a  $(-x, -y, -z)$  pont is az alakzathoz tartozik. Ez akkor következik be a másodrendű felületről, ha egyenlete lineáris tagot nem tartalmaz (vö. 38.2 B3). Ha tehát 50.9 bizonyításának a) részében elhagyjuk az állandó tag vizsgálatát, akkor a centrum meghatározására kapunk módszert. Ezzel a módszerrel azt kapjuk, hogy az  $(x_0, y_0, z_0)$  pont akkor szimmetriacentrum, ha az

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13}z_0 + \alpha_{14} &= 0, \\ \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23}z_0 + \alpha_{24} &= 0, \\ \alpha_{31}x_0 + \alpha_{32}y_0 + \alpha_{33}z_0 + \alpha_{34} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer teljesül. Ennek az egyenletrendszernek akkor van egy megoldása, ha  $A_{44} \neq 0$ , ha tehát ellipszoidról, hiperboloidról vagy kúpról van szó. Ezeket *centrális* másodrendű felületeknek mondjuk.

**A3** Az előbbi részletesebb táblázat sem dönti el minden esetben a másodrendű felület alakját. Hengerek esetében ezt úgy tehetjük meg, hogy a felületet az alkotókkal nem párhuzamos síkkal metsszük, és a kapott metszet alapján felelünk. Ellipszoidról úgy dönthetjük el, hogy valós-e vagy képzetes, hogy megvizsgáljuk, vajon egy a centrumon áthaladó egyenes metszi-e a felületet. Hiperboloidról is eldönthetjük, hogy egy- vagy kétköpenyű-e, ha a koordináta-rendszer kezdőpontját a centrumba

toljuk, és az egyenletet úgy rendezzük, hogy a bal oldalon a másodfokú tagok álljanak, a jobb oldalon pedig pozitív állandó. Ebben az esetben az dönti el a kérdést, hogy vajon a bal oldali másodfokú alak sajátértékei között egy vagy két negatív van-e, s erre szorzatuknak, az (így felírt egyenletből számított)  $A_{44}$  determinánsnak az előjele felel (vö. B6).

**B1** Eredményeinkből következik, hogy másodrendű kúp minden olyan kúp, amelynek vezérvonala (ideális pontjaival kiegészített, közösleges) kúpszelet. Ehhez csak azt kell belátni, hogy az ilyen kúpok másodrendű felületek. Ez viszont nyilvánvaló abból, hogy a kúpszelet homogén koordinátás egyenletét egyben ama kúp térbeli egyenletének foghatjuk fel, amelynek vezérvonala ez a kúpszelet, csúcsa pedig a homogén koordinátákat szolgáltatató térbeli koordináta-rendszer kezdőpontja.

Itt említjük meg, hogy tárgyalásunk újból bebizonyította 50.9 tételét, de ez a bizonyítás  $A = 0$  invarianciájának 51.4 B2-ben adott bizonyítására támaszkodik.

**B2** Egy másodrendű felületnek valamely rögzített koordináta-rendszerbeli két másodfokú egyenlete egymástól csak egy (0-tól különböző) állandó tényezőben különbözhetik. Két ilyen egyenlet ugyanis ugyanarra a kanonikus alakra hozható, tehát eltolási és elforgatás! koordinátatranszformációval egymásba is átvihetők. Könnyű azonban az egyes kanonikus egyenleteknél ellenőrizni, hogy csak azok az eltolások és elforgatások hagyják változatlanul a felületet, amelyek az egyenletét sem változtatják meg.

**B3** Ha egy közösleges másodrendű felület alakja érdekel, akkor a  $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \alpha = 0$ , illetőleg  $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2\alpha_3 \zeta = 0$  egyenlet alapján gyorsan felelhetünk. Ezeknek az egyenleteknek a felírásához ugyanis nincs szükség a főtengelytranszformáció végrehajtására, elegendő  $A_{44}$  sajátértékeinek és  $A$  értékének ismerete, hiszen ez utóbbi a koordinátatranszformáció során nem változik meg (lásd 51.4 B2).

Az elfajuló másodrendű felületek alakjának ilyen gyors vizsgálatát lehetővé tevő módszert nem említünk. Ehhez  $A$  értékén túlmenően további invariánsok ismeretére volna szükség.

**B4** Másodrendű felületek elhelyezkedésének vizsgálatánál a kanonikus elhelyezkedésű koordináta-rendszer meghatározására van szükség. Ennek tengelyirányai  $A_{44}$  sajátirányai. Mi itt egyelőre csak ezekkel az irányokkal, tehát csak a felület elhelyezkedését jellemző irányokkal foglalkozunk.

$A_{44}$  sajátirányainak a meghatározásakor akkor nem jutunk egyértelműen meghatározott eredményhez, ha  $A_{44}$  sajátértékei nem mind különbözők. Láthattuk, hogy ha mind a három sajátérték egyenlő, akkor a felület gömb (valós gömb, képzetes gömb vagy pontgömb, azaz valós csúcsú izotrop kúp). Ha a saját értékek között kettő egyenlő (de nem 0), akkor a felület forgásfelület, az egyenlő sajátértékekhez tartozó sajátirányok síkja a forgástengelyre merőleges, a harmadik sajátértékhez tartozó pedig a forgástengely irányát adja meg.

Ha a másodrendű felület nem forgásfelület, de merőleges affinitással forgásfelületből származtatható, akkor kereshetjük e forgásfelület tengelyének irányát. Ellipszoid (és valós csúcsú képzetes kúp) esetében  $A_{44}$  sajátirányainak mindegyike betöltheti ezt a szerepet. Hiperboloid, valós kúp és elliptikus henger esetében megállapíthatjuk, hogy  $A_{44}$  sajátértékei között két egyező előjelű van, s a harmadik sajátértékhez tartozik a keresett forgástengely iránya.

Kiolvashatjuk tárgyalásunkból azt is, hogy ha  $A_{44}$  sajátértékeinek egyike 0, akkor az ehhez tartozó sajátirány paraboloidoknál a tengely irányát, elliptikus és hiperbolikus hengernél pedig az alkotó irányát adja meg. A 0 sajátértékhez tartozó sajátirány keresésekor 51.1 egyenletrendszerre azonos az alkotóirány meghatározására 50.9-ben adott egyenletrendszer első három egyenletével. Közösleges parabolikus henger esetében a kétszeres 0 sajátértékhez sajátirányként egy sík minden iránya tartozik; ha tehát az alkotóirányt akarjuk közülük megkeresni, akkor a mondott egyenletrendszer negyedik egyenletére is szükség van. Ez utóbbi tehát ilyenkor nem következménye az első háromnak. Párhuzamos síkpár és kettős sík esetében a 0-tól különböző sajátértékhez tartozó sajátirány a síkok normálisát adja meg.

**B5** A másodrendű felület lokális elhelyezkedésének ismeretéhez a kanonikus elhelyezkedésű koordináta-rendszer kezdőpontját is ismernünk kell. Ellipszoid, hiperboloid és kúp esetében ezt

a kezdőpontot a centrum egyértelműen megadja. Ha több szimmetriacentrum van, akkor ezek bármelyike választható kezdőpontnak. Könnyű tehát a másodrendű felület elhelyezkedésének megállapítása azokban az esetekben is, amikor a szimmetriacentrumot adó,  $A_2$ -ben említett egyenletrendszernek több megoldása van, amikor tehát a szimmetriacentrumok alkotta centrumalakzat egyenes vagy sík. Ez a centrumalakzat elliptikus és hiperbolikus henger esetében egyenes, elfajuló parabolikus henger esetében pedig sík. Nem oldottuk meg az elhelyezkedés problémáját a paraboloidok és a közösleges parabolikus henger esetében, s ezeknél ilyen egyszerű módszert nem is tudunk említeni.

|         | $A$ rangja       | $A$ -hoz tartozó másodfokú alak | $A_{44}$ rangja                      |                        |                                  |                         |                            |
|---------|------------------|---------------------------------|--------------------------------------|------------------------|----------------------------------|-------------------------|----------------------------|
|         |                  |                                 | 3                                    |                        | 2                                |                         | 1                          |
| $A > 0$ | 4                | definit                         | képzetes ellipszoid                  | –                      | –                                | –                       |                            |
|         |                  | indefinit                       | –                                    | egyköpenyű hiperboloid | hiperbolikus paraboloid          | –                       |                            |
| $A < 0$ | valós ellipszoid |                                 | kétköpenyű hiperboloid               | –                      | elliptikus paraboloid            |                         |                            |
| $A = 0$ | 3                |                                 | –                                    | valós kúp              | (közönséges) hiperbolikus henger | valós elliptikus henger | (l<br>p                    |
|         |                  |                                 | szemidefinit                         | képzetes kúp           | –                                | –                       | képzetes elliptikus henger |
|         | 2                |                                 | indefinit                            | –                      | –                                | valós metsző síkpár     | –                          |
|         |                  | szemidefinit                    | –                                    | –                      | –                                | képzetes metsző síkpár  | P                          |
|         |                  | 1                               |                                      | –                      | –                                | –                       | –                          |
|         |                  |                                 | definit                              | indefinit              |                                  | szemidefinit            |                            |
|         |                  |                                 | $A_{44}$ -hez tartozó másodfokú alak |                        |                                  |                         |                            |

A már elintézett esetekben is megoldhatjuk feladatunkat a szimmetriasíkok meghatározása útján, ha tudjuk, hogy a  $\mathbf{v}$  ( $v_1, v_2, v_3$ ) vektorral párhuzamos húrok felezőpontjai az

$$\begin{aligned} & (a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3)x + (a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3)y + \\ & + (a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3)z + (a_{41}v_1 + a_{42}v_2 + a_{43}v_3) = 0 \end{aligned}$$

síkban, a  $\mathbf{v}$  vektor irányához konjugált átmérősíkban, az ideális  $[v_1, v_2, v_3, 0]$  pont polársíkjában vannak. Ez pontosan megfelel annak, amit a síkbeli tárgyalásból ismerünk, és pontosan ugyanúgy bizonyítható is, miként erre 51.1 B1-ben már utaltunk. A síkbeli tárgyalás mintájára azt is kimondhatjuk, hogy ha a  $\mathbf{v}$  vektor  $A_{44}$ -nek 0-tól különböző saját értékéhez tartozó sajátvektor, akkor az irányához konjugált átmérősík rá merőleges, és a másodrendű felület szimmetriasíkja.

Ezek szerint  $A_{44}$  minden olyan sajátíránya, amely 0-tól különböző sajátértékhez tartozik, egy rá merőleges szimmetriasíkot határoz meg. Ha tehát  $A_{44}$ -nek három, páronként egymásra merőleges sajátíránya ismeretes, akkor ezek ellipszoid, hiperboloid és kúp esetében három, paraboloid, valamint elliptikus és hiperbolikus henger esetében két, parabolikus henger esetében pedig egy szimmetriasíkot szolgáltatnak. Minthogy két egymásra merőleges szimmetriasík metszésvonala szimmetriatengely, a kapott szimmetriasíkok ellipszoid, hiperboloid és kúp esetében három, paraboloid, valamint elliptikus és hiperbolikus henger esetében pedig egy szimmetriatengelyt határoznak meg. Közösleges

másodrendű felületeknél ilyen módon éppen azokhoz az egyenesekhez jutottunk, amelyeket tengelynek neveztünk el.

Ha ezeket a szimmetriasíkokat és szimmetriatengelyeket meghatároztuk, akkor mindenesetben választ tudunk adni arra a kérdésre, hogy a kanonikus elhelyezkedésű koordináta-rendszer kezdőpontja hol van, illetőleg hol lehet. Ha van szimmetriacentrum, akkor a szimmetriasíkok és szimmetriatengelyek közvetítésével újból eljutottunk a centrumalakzathoz. Itt azonban azokat az eseteket kell hangsúlyoznunk, amelyekben a felületnek nincs szimmetriacentruma. A közösleges parabolikus hengert a módszerünkkel meghatározott szimmetriasíkja egyenesben metszi, s a keresett kezdőpont ennek az egyenesnek tetszőleges pontja lehet. A paraboloidot tengelye a csúcspontban, illetve nyeregpontban dőfi, s itt ez a keresett kezdőpont.

Hangsúlyozzuk, hogy itt a tárgyalást azáltal egyszerűsítettük, hogy nem minden szimmetriasíkot és szimmetriatengelyt kerestünk.

**B6** A másodrendű felületek osztályozásáról az A1-ben adottnál teljesebb képet ad az 576. oldalon közölt táblázat. Meg kell jegyeznünk, hogy a koordináta-rendszer elmozgatásakor, valamint az egyenletnek (0-tól különböző) állandóval való megszorzásakor 51.4 B2 szerint nemcsak  $A$  és  $A_{44}$  rangja, és a hozzájuk tartozó másodfokú alakok minősége, hanem  $A$  előjele is változtatlan.

Azt is bebizonyítottuk, hogy mindezek változatlanok akkor is, ha ferdeszögű koordináta-rendszerre térünk át. Ezért táblázatunk ferdeszögű koordináta-rendszer használatakor is alkalmazható. Ilyenkor a tengelyirányok meghatározása természetesen 51.6 B2 előírása szerint történik. Ha mindig az így meghatározott sajátértékeket és sajátvektorokat használjuk, akkor ennek az 51.9 szakasznak az egészéről megállapíthatjuk, hogy tárgyalása ferdeszögű koordináta-rendszerben is változatlanul helyes, csupán B3 kijelentéseinek módosítására van szükség, mert ott  $A$  értékének invarianciájára hivatkoztunk.

Minthogy az (el nem fajuló) affinitást és a ferdeszögű koordináta-rendszer megváltoztatását ugyanolyan koordinátatranszformáció írja le, azt is kimondhatjuk, hogy a másodrendű felületek minden fajtájának affin képe ugyanolyan fajtájú felület. A gömböt ilyenkor természetesen az ellipsoidok közé kell sorolni.

Ezek szerint a most adott táblázat akkor is helyes, ha nem teszünk különbséget affin transzformációval egymásba átvihető másodrendű felületek között, azaz az *affin geometriában* is.

**B7** A *komplex geometriában* leegyszerűsödik a táblázat, hiszen ott az előjel vizsgálat értelmét veszti. Ilyen módon a következő táblázathoz jutunk:

| $A$ rangja | $A_{44}$ rangja              |                                     |                    |
|------------|------------------------------|-------------------------------------|--------------------|
|            | 3                            | 2                                   | 1                  |
| 4          | centrális közösleges felület | paraboloid                          | –                  |
| 3          | kúp                          | centrumegyenessel rendelkező henger | parabolikus henger |
| 2          | –                            | metsző síkpár                       | párhuzamos síkpár  |
| 1          | –                            | –                                   | kettős sík         |

**B8** A másodrendű felületek *projektivgeometriai* osztályozásáról is beszélhetünk, ha közéjük soroljuk az ideális síkot is tartalmazó síkpárokat, valamint a kettős ideális síkot is. Ezzel elérjük, hogy minden másodrendű felületet minden *projektív transzformáció* újból másodrendű felületbe visz.

Minthogy a projektív geometriában az ideális síknak nincs megkülönböztetett szerepe, az 576. oldal táblázatának oszlopai egybeolvadnak, hiszen ezeket a másodrendű felület ideális kúpszeletének minemősége különbözteti meg (vö. 50.8 B4). Ilyen módon az osztályozás itt a következő csoportokat adja; képzetes felület, közösleges felület alkotókkal (vonalfelület) közösleges felület alkotók nélkül, valós kúp (vagy henger), képzetes kúp (vagy henger) valós síkpár, képzetes síkpár, kettős sík.

**B9** Ha a komplex tér pontjaihoz komplex homogén koordinátákkal jellemzett ideális pontokat csatolunk, akkor a *komplex projektív térhez* jutunk. Ebben a térben a másodrendű felület ideális kúpszelete sohasem üres alakzat. A gömbök közös ideális kúpszeletének homogén koordinátás egyenlete

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

Ez az alakzat minden sík izotrop pontjait tartalmazza, s ezt *abszolút alakzatnak* nevezik.

Ha B8-hoz hasonlóan itt is a másodrendű felületek közé soroljuk az ideális síkot tartalmazó síkpárokat, akkor a másodrendű felületek *komplex projektív geometriai* osztályozását vizsgálhatjuk, egy osztályba sorolva a komplex tér másodrendű felületei közül olyanokat, amelyeket projektív transzformáció visz egymásba. Ez az osztályozás B7 osztályozásából keletkezik úgy, hogy az ottani oszlopok egybeolvadnak. Ilyen módon itt csak a következő osztályok szerepelnek: közös sík, kúp (vagy henger), síkpár kettős sík.

## 52. § A másodfokú alakok osztályozása

A könyv geometriai anyagát már befejeztük. Ez a paragrafus csak függelék jellegű, csak algebrai ismereteket közöl. Azért szerepel azonban mégis itt, mert egyrészt olyan algebra ismeretekről van szó, amelyek a másodrendű felületek osztályozásánál jól használhatók másrészt pedig bizonyításai éppen az előző paragrafusban tárgyaltakra épülnek. Az a célunk, hogy a másodfokú alakok minőségét megállapíthassuk anélkül, hogy sajátértékeit meghatároznók. Mondanivalónkat az  $n$ -változós másodfokú alakokra szövegezzük,

### 52.1 Az $n$ -változós

$$Q_n = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

másodfokú alakot vizsgáljuk. Ennek együtthatói a szimmetrikus

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

determinánst alkotják.

A másodfokú alak *karakterisztikus sorozatának* az  $A_n$  determináns bal felső sarokaldeterminánsai által alkotott

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_n$$

sorozatot nevezzük. E sorozat  $m$  indexű eleme ( $0 < m \leq n$ ) a

$$Q_m = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} x_i x_k$$

$m$ -változós másodfokú alak  $A_m$  determinánsa.

Azt fogjuk vizsgálni, hogy a másodfokú alak minősége milyen kapcsolatban van karakterisztikus sorozata elemeinek előjelével. Elsőnek a definit másodfokú alakokról lesz szó.

Azt mondjuk, hogy egy másodfokú alak karakterisztikus sorozata *jeltartó*, ha minden eleme 0-tól különböző és azonos előjelű. Ez azt mondja ki, hogy minden elem pozitív, hiszen a sorozat első eleme 1. A karakterisztikus sorozat *jelvéltő*, ha minden eleme 0-tól különböző, és bármely két szomszédos eleme különböző előjelű. Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak azok az elemei negatívak, amelyeket páratlan rendű determináns szolgáltatott, s a többi elem pozitív.

**Tétel.** Egy másodfokú alak akkor és csak akkor pozitív definit ha karakterisztikus sorozata jeltartó, továbbá akkor és csak akkor negatív definit, ha karakterisztikus sorozata jelvéltő.

*Bizonyítás.* a) Először azt látjuk be, hogy elegendő, ha csak a pozitív definit alakokra vonatkozó állítást bizonyítjuk, mert ebből a negatív definit alakokra vonatkozó állítás is következik. A  $Q$  másodfokú alak ugyanis akkor és csak akkor negatív definit, ha  $-Q$  pozitív definit. A  $-Q$  másodfokú alak együtthatói  $Q$  együtthatóinak  $(-1)$ -szeresei,  $Q$  és  $-Q$  karakterisztikus sorozatainak elemei ezért rendre egyenlők vagy egymás  $(-1)$ -szeresei aszerint, amint a sorozat páros vagy páratlan indexű eleméről van szó. Ha tehát tudjuk, hogy tételünknek a pozitív definit alakokra vonatkozó állítása helyes, akkor kimondhatjuk, hogy  $Q$  akkor és csak akkor negatív definit, ha  $-Q$  karakterisztikus sorozata jeltartó, azaz ha  $Q$  karakterisztikus sorozata páratlan indexű elemeinek  $(-1)$ -gyel való megszorozása után jeltartóvá válik.

Ez a követelés azonban éppen azt kívánja, hogy  $Q$  karakterisztikus sorozata jelvéltő legyen.

b) Tételünk pozitív definit alakokra vonatkozó állításából először azt bizonyítjuk, hogy ha  $Q_n$  pozitív definit másodfokú alak, akkor karakterisztikus sorozata jeltartó.

Abból indulunk ki, hogy ha  $Q_n$ -ben az  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  változók helyébe  $(0 < m < n)$  a 0 értéket írjuk, akkor a alakhoz jutunk. Ebből következik, hogy  $Q_m$  (nem triviális helyettesítéssel kapott) helyettesítési értékei pozitívak, hiszen ezek a pozitív definit  $Q_n$  alak (nem triviális helyettesítéssel kapott) helyettesítési értékeinek is tekinthetők. Így tehát a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  alakok mindegyike pozitív definit.

Pozitív definit másodfokú alak determinánsa pozitív, mert determinánsa a sajátértékek szorzatával egyenlő, és a sajátértékek mindegyike pozitív. Előbbi megállapításunkból következik tehát, hogy az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  értékek mindegyike pozitív, azaz  $Q_n$  karakterisztikus sorozata jeltartó.

c) Bebizonyítjuk most, hogy ha  $Q_n$  karakterisztikus sorozata jeltartó, akkor  $Q_n$  pozitív definit.

Tekintsük a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  alakok sorozatát. A  $Q_1 = a_{11}$  egyváltozós másodfokú alak pozitív definit, hiszen  $a_{11}$  a karakterisztikus sorozatban szerepel, s így pozitív érték. Igazoljuk, hogy ha  $Q_m$  pozitív definit, akkor  $Q_{m+1}$  is az  $(0 < m < n)$ . Ezáltal bizonyítjuk tehát, hogy a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  alakok mindegyike, köztük  $Q_n$  is pozitív definit.

Tegyük fel tehát, hogy  $Q_m$  pozitív definit.  $Q_{m+1}$  sajátértékeinek szorzata

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m+1} = A_{m+1}$$

pozitív érték, hiszen  $A_{m+1}$  szerepel  $Q_n$  karakterisztikus sorozatában. Ha  $Q_{m+1}$  nem pozitív definit, akkor a  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m+1} = A_{m+1}$  értékek között páros sok negatívnak kell tehát lennie, hiszen szorzatuk pozitív. Megmutatjuk azonban, hogy nem lehet köztük két negatív, vagyis hogy  $\lambda_m < 0, \lambda_{m+1} < 0$  feltevés ellentmondásra vezet, és bebizonyítjuk ezáltal, hogy minden sajátérték pozitív, hogy tehát  $Q_{m+1}$  pozitív definit.

Évégből  $Q_{m+1}$ -et a főtengelekre transzformált

$$Q_{m+1} = \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_m \xi_m^2 + \lambda_{m+1} \xi_{m+1}^2$$

alakban tekintjük. Itt  $\xi_1, \dots, \xi_m$  az  $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$  változók homogén lineáris kifejezései. Olyan értékeket választunk ezeknek a változóknak, hogy a

$$\xi_1 = 0, \dots, \xi_{m-1} = 0, x_{m+1} = 0$$

egyenletrendszer teljesüljön. Ennek az egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, mert  $m$  egyenletet tartalmaz és  $m+1$  ismeretlent. Ha az így kapott értékrendszert  $Q_{m+1}$ -be helyettesítjük, akkor  $\xi_1 = \dots = \xi_{m+1} = 0$  miatt

$$Q_{m+1} = \lambda_m \xi_m^2 + \lambda_{m+1} \xi_{m+1}^3,$$

s ez nem lehet pozitív, mert itt negatív együtthatók szerepelnek. Másrészt azonban  $Q_{m+1}$ -ből  $x_{m+1} = 0$  helyettesítéssel keletkezik, s ezért a kapott érték  $Q_m$ -nek is helyettesítési értéke. Arra az ellentmondásra jutottunk, hogy a pozitív definit  $Q_m$  alak nem triviális helyettesítéssel nem ad pozitív értéket, s ez az ellentmondás állításunk helyességét bizonyítja. —

**52.2** A szemidefinit másodfokú alakokkal foglalkozunk most.

**Tétel.** Szemidefinit másodfokú alak determinánsa 0.

Tételünk szükséges feltételt ad arra, hogy egy másodfokú alak szemidefinit legyen. Kimondja a tétel, hogy az  $n$ -változós szemidefinit alak determinánsának  $r$  rangjára  $0 < r < n$ , hiszen  $r = 0$  minden elem eltűnését, tehát a másodfokú alak azonos eltűnését jelenti. A tétel szerint minden szemidefinit alak karakterisztikus sorozata 0-ra végződik.

*Bizonyítás.* Állításunk következik abból, hogy a másodfokú alak determinánsa sajátértékeinek szorzata, s hogy 51.8 szerint a szemidefinit alak sajátértékei között 0 is szerepel. — Egy  $n$ -edrendű determináns  $m$ -edrendű alldeterminánsa szimmetrikusan helyezkedik el, ha elemei az  $n$ -edrendű determinánsnak ugyanannyiadik soraiban állanak, mint ahányadik oszlopaiban. Ha tehát az eredeti  $n$ -edrendű determináns szimmetrikus, akkor szimmetrikusan elhelyezkedő alldeterminánsai is szimmetrikus determinánsok.

**Tétel.** Ha  $a$  (pozitív vagy negatív) szemidefinit másodfokú alak determinánsában szimmetrikusan elhelyezkedő alldeterminánsnak az értéke nem 0, akkor ehhez az alldeterminánshoz (pozitív, illetőleg negatív) definit másodfokú alak tartozik.

Újabb szükséges feltételt ad ez a tétel arra, hogy a másodfokú alak szemidefinit legyen. Minden 0-tól különböző értékű, szimmetrikusan elhelyezkedő alldetermináns egy-egy szükséges feltételt szolgáltat. Ilyen szükséges feltételként azt is kimondja pl. a tétel, hogy a pozitív szemidefinit alak determinánsának főátlójában negatív érték nem állhat, hiszen a főátló elemei szimmetrikusan elhelyezkedő elsőrendű alldeterminánsok.

*Bizonyítás.* Az eredeti  $Q_n$  másodfokú alakból úgy juthatunk el determinánsa egy szimmetrikusan elhelyezkedő alldeterminánsához tartozó  $Q$  másodfokú alakhoz, hogy egyes változók helyébe a 0 értéket írjuk, ti. annyiadik változók helyébe, ahányadik soroknak és oszlopoknak az elemei nem szerepelnek az alldetermináns elemei között. Ez azt jelenti, hogy  $Q$  nem triviális helyettesítéssel adódó értékei mindannyian szerepelnek  $Q_n$  nem triviális helyettesítéssel adódó értékei között. Ha tehát  $Q_n$  pozitív (negatív) szemidefinit, akkor  $Q$  nem triviális helyettesítéssel adódó értékei között sincs negatív (pozitív),  $Q$  tehát csak pozitív (negatív) definit vagy pozitív (negatív) szemidefinit lehet. Másrészt azonban  $Q$  az előző tétel szerint nem lehet szemidefinit, hiszen determinánsa a feltevés szerint nem 0. Eszerint  $Q$  csak pozitív (negatív) definit lehet. —

**Tétel.** Ha  $a$  szemidefinit másodfokú alak karakterisztikus sorozatának a végén álló (0-tól különböző értékek által közre nem fogott) egy vagy több 0 értéket a sorozatból elhagyjuk, és ezután a sorozatból egynél több elem marad meg, akkor a maradék sorozat feltartó vagy felváltó aszerint, amint a másodfokú alak pozitív vagy negatív szemidefinit.

Tételünk megint csak szükséges feltételt ad arra, hogy a másodfokú alak szemidefinit legyen. Van rá eset, hogy a tételben leírt elhagyás után csak a karakterisztikus sorozatot kezdő 1 marad meg, hiszen pl.  $0x_1^2 + 0x_2^2$  is kétváltozós szemidefinit másodfokú alak, s ennek karakterisztikus sorozata: 1, 0, 0.

*Bizonyítás.* Legyen szemidefinit alak, és karakterisztikus sorozatában az utolsó 0-tól különböző elem. Tételünk az  $1, A_1, A_2, \dots, A_m$  sorozatról szól abban az esetben, ha  $m > 0$ .

Az  $A_m \neq 0$  értéket adó sarokaldetermináns szimmetrikusan helyezkedik el. Az előző tétel szerint tehát az  $A_m$ -hez tartozó alak pozitív vagy negatív definit aszerint, amint  $Q_m$  pozitív vagy negatív szemidefinit. Minthogy  $Q_m$  karakterisztikus sorozata éppen a szóban forgó  $1, A_1, A_2, \dots, A_m$  sorozat, az előző szakasz tétele szerint ez valóban jeltartó, illetve jelváltó. —

**52.3** Miután egy másodfokú alak szemidefinit voltának több szükséges feltételét megismertük, elégséges feltételt is adunk. Ezt előkészítjük egy a szimmetrikus determinánsokról szóló tétellel.

**Tétel.** *Ha egy szimmetrikus determináns rangja  $r > 0$ , akkor van szimmetrikusan elhelyezkedő,  $0$ -tól különböző értékű,  $r$ -edrendű aldeterminánsa.*

Semmitmondó a tétel, ha  $r$  az eredeti determináns rendszámával egyenlő. A tétel bizonyításának szövegezésénél erre a semmitmondó esetre nem is gondolunk.

A bizonyítás során a következő algebrai ismeretekre támaszkodunk: Egy determináns rangja nem változik meg, ha egyik sorának vagy oszlopának többszörösét egy másik sorához, illetve oszlopához hozzáadjuk. Ha egy determináns rangja  $r$ , és valamelyik  $r$  sora tartalmaz  $r$ -edrendű,  $0$ -tól különböző értékű aldeterminánst, akkor a determináns többi sora a mondott  $r$  sorral lineárisan kifejezhető.

*Bizonyítás.* Minthogy a szóban forgó  $n$ -edrendű determináns rangja  $r$ , van  $r$ -edrendű,  $0$ -tól különböző értékű aldeterminánsa. Helyezkedjék el egy ilyen aldetermináns az  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -edik sorokban.

Minthogy ezek a sorok  $r$ -edrendű,  $0$ -tól különböző értékű aldeterminánst tartalmaznak, ezekkel a determináns többi  $n-r$  sora lineárisan kifejezhető. Az  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -edik sorok többszöröseit a többi sorhoz adva elérhetjük tehát, hogy a többi  $n-r$  sor minden eleme  $0$  legyen. Ezután ugyanezeket a műveleteket az oszlopokon is végrehajtjuk, azaz az  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -edik oszlopoknak ugyanannyiszorosait adjuk hozzá az ugyanannyiadik oszlopokhoz, mint ahogyan ezt a sorokkal tettük. E második átalakítás során az eddig változatlan  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -edik sorokon belül ugyanaz történik, mint ami az első átalakítás során az  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -edik oszlopokon belül történt, hiszen a determináns eredetileg szimmetrikus volt. Ez azt jelenti, hogy a második átalakítás után már csak annak az  $r$ -edrendű aldeterminánsnak az elemei lehetnek  $0$ -tól különbözők, amelyek az  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -edik sorokban és az  $i_1, i_2, \dots, i_r$ -edik oszlopokban áll. Ez az aldetermináns szimmetrikusan helyezkedik el, és elemei az átalakítások során változatlanok maradtak.

Ennek a szimmetrikusan elhelyezkedő,  $r$ -edrendű aldeterminánsnak az értéke nem  $0$ , mert ha  $0$  volna, akkor az átalakításokkal kapott determináns rangja  $r$ -nél kisebb volna, márpedig átalakításaink során a determináns rangja nem változott meg. —

A most bizonyított tétel és az előző szakasz második tétele együttesen biztosítja, hogy ha egy szemidefinit másodfokú alak determinánsának rangja  $r$ , akkor van olyan szimmetrikusan elhelyezkedő,  $r$ -edrendű aldetermináns, amelyhez definit másodfokú alak tartozik.

**Tétel.** *Ha egy  $n$ -változós másodfokú alak determinánsának rangja  $r < n$ , ha továbbá szimmetrikusan elhelyezkedő,  $r$ -edrendű aldeterminánsainak egyikéhez definit másodfokú alak tartozik, akkor az  $n$ -változós másodfokú alak szemidefinit,*

Nem foglaltuk a tételbe, hogy az  $n$ -változós alak aszerint pozitív vagy negatív szemidefinit, amint a szereplő  $r$ -változós alak pozitív vagy negatív definit, hiszen ezt az előző szakasz második tétele már kimondta.

*Bizonyítás.* Egyszerűbb jelölés kedvéért úgy számozzuk át a másodfokú alak változóit, hogy a tételben szereplő aldetermináns elemei, az első  $r$  változóból alkotott  $Q_r$  másodfokú alak együtthatói legyenek.

Minthogy az  $n$  változós  $Q_n$  alak determinánsa  $r$ -edrangú, 51.7 utolsó tétele szerint  $Q_n$ -nek  $n$  sajátértéke között  $r$  darab  $0$ -tól különböző van. A főtengelettranszformáció szerint tehát

$$Q_n = \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_r \xi_r^2,$$

ahol  $\xi_1, \dots, \xi_r$  az  $x_1, \dots, x_n$  változók homogén lineáris kifejezései.



Az  $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$  helyettesítéssel  $Q_n$ -ből  $Q_r$  keletkezik. E helyettesítés révén tehát egyenletünk a definit  $Q_r$  alak

$$Q_r = \lambda_1 \eta_1^2 + \dots + \lambda_r \eta_r^2$$

előállítását adja, ahol  $\eta_1, \dots, \eta_r$  a helyettesítéssel  $\xi_1, \dots, \xi_r$ -ből keletkező  $r$ -változós homogén lineáris kifejezéseket jelöli. Ebből 51.8 második tétele szerint következik, hogy a  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  értékek előjele azonos. így 51.8 első tétele értelmében  $Q_n$  valóban szemidefinit, hiszen 0-tól különböző sajátértékei mind ugyanolyan előjelűek. —

A most bizonyított tétel alapján kimondhatjuk, hogy egy másodfokú alak szemidefinit voltának szükséges és elégséges feltétele az, hogy a szimmetrikusan elhelyezkedő, 0-tól különböző értékű,  $r$ -edrendű aldeterminánsok egyikéhez definit alak tartozzék, mondhatjuk azonban azt is, hogy szükséges és elégséges feltétel az, hogy az ilyen aldeterminánsok mindegyikéhez definit alak tartozzék, vagy hogy minden szimmetrikusan elhelyezkedő és 0-tól különböző értékű aldeterminánshoz definit alak tartozzék, hiszen az előző szakasz szerint ez is szükséges feltétel.

Ugyanezeket más alakban a következőképpen mondhatjuk ki: a másodfokú alak szemidefinit voltának szükséges és elégséges feltétele, hogy az előző szakasz utolsó tételében kimondott szükséges feltétel az alak változóinak egy olyan permutációjánál teljesüljön, amelynél az alak determinánsának bal felső sarkába 0-tól különböző értékű,  $r$ -edrendű aldetermináns kerül. Szükséges és elégséges feltétel az is, hogy ez a változók minden ilyen permutációjára teljesüljön, és az is, hogy ez a változók mindenféle permutálásakor igaz legyen.

**52.4** Indefinit alakokról szóló tételt nem bizonyítottunk. Erre nincs is szükség, mert egy azonosan el nem tűnő másodfokú alak akkor és csak akkor indefinit, ha se nem definit, se nem szemidefinit.

A másodfokú alakok osztályozásáról mondottakat összefoglalva, az osztályozás szabályát a legrövidebben a következőképpen mondhatjuk ki: Ha az alak determinánsának rangja  $r > 0$ , és egy szimmetrikusan elhelyezkedő, 0-tól különböző értékű,  $r$ -edrendű aldeterminánshoz tartozó másodfokú alak karakterisztikus sorozata se nem jeltartó, se nem jel váltó, akkor az alak indefinit; ha ez a sorozat jeltartó, akkor  $r < n$  esetén az alak pozitív szemidefinit,  $r = n$  esetén pedig pozitív definit; ha viszont jelváltó a sorozat, akkor az  $r < n$  esetben negatív szemidefinit, és az  $r = n$  esetben negatív definit.

Ha gyakorlati utasítást akarunk adni a másodfokú alak minőségének eldöntésére, akkor a következőket mondhatjuk: Először felírjuk az alak karakterisztikus sorozatát. Ha ez jeltartó, akkor az alak pozitív definit, s ha jel váltó, akkor negatív definit. Minden más esetben az alak már csak szemidefinit vagy indefinit lehet. Bizonyos, hogy indefinit az alak akkor, ha a karakterisztikus sorozatban vannak egyező előjelű szomszédos elemek (van jeltartás), és vannak ellentétes előjelű szomszédos elemek is (van jelváltás), valamint akkor, ha a karakterisztikus sorozatban van (egy vagy több) olyan 0, amelyet 0-tól különböző elemek fognak közre. A minőség kérdése csak akkor maradt eddig eldöntetlen, ha a karakterisztikus sorozatból a sorozat végén álló, egy vagy több 0 elemet elhagyva jeltartó vagy jelváltó sorozat, vagy pedig egyetlen elem marad.

Ezekben az esetekben az alak  $r$  rangját kell megállapítanunk, az alak determinánsában egy szimmetrikus elhelyezkedésű, 0-tól különböző értékű,  $r$ -edrendű aldeterminánst kell keresnünk, s az ehhez tartozó másodfokú alak karakterisztikus sorozatát kell felírunk.

A vizsgált alak ugyanis pozitív szemidefinit, negatív szemidefinit vagy indefinit aszerint, amint az így felírt karakterisztikus sorozat jeltartó, jelváltó vagy se nem jeltartó, se nem jelváltó.

Hozzátehetjük ehhez, hogy az aldetermináns-keresés természetesen elmarad, ha a bal felső sarokban már eredetileg is egy 0-tól különböző értékű  $r$ -edrendű aldetermináns állt, ha tehát az eredetileg felírt karakterisztikus sorozat utolsó 0-tól különböző elemét  $r$ -edrendű determináns szolgáltatta. Ebben az esetben pozitív vagy negatív szemidefinit az alak aszerint, amint az eredetileg felírt karakterisztikus sorozatból a sorozat végén álló, egy vagy több 0 elemet elhagyva jeltartó vagy jelváltó sorozat marad.

Megjegyezhetjük, hogy ha szükséges van megfelelő aldetermináns keresésére, akkor elegendő tetszőleges elhelyezkedésű, 0-tól különböző értékű,  $r$ -edrendű aldeterminánst keresni. 52.3 első

tételének bizonyításából ugyanis tudjuk, hogy az az  $r$  sor, amelyik ezt a determinánst tartalmazza, az  $e$  sorok tükörképeiként adódó  $r$  oszloppal együtt egy szimmetrikus elhelyezkedésű,  $r$ -edrendű és 0-tól különböző értékű aldeterminánst határoz meg.

## AZ OLVASÓHOZ

a könyv elolvasása után

Joggal vetheti fel az olvasó a kérdést, hogy ennek a könyvnek a címe miért csak „Bevezetés” a geometriába, hiszen terjedelmes anyagot ölel fel és az anyag követése fáradságos munkát jelenthetett. Erre a kérdésre válaszolunk itt, rámutatva arra, hogy a könyv mit tartalmaz, és mit nem.

A könyv valóban csak bevezet a geometria tanulmányozásába. Nem tárgyalja teljességre törekvően még az elemi és az analitikus geometriát sem. Bővebb anyagot talál az olvasó J. Hadamard (ejtsd: adamár) orosz fordításban is megjelent *Leçons de géométrie élémentaire* c. művében vagy D. I. Perepjolkin *Kursz elementarnoj geometrii* c. munkájában, illetve számos szerző analitikus geometriájában. Könyvünk megírásakor nem az anyag teljessége, hanem a világos fogalomalkotás, az egyszerűség, a kifogástalan logikai felépítés, a szemléletesnek a keresése és ellenőrzése vezetett.

A könyv nem ad axiomatikus bevezetést a geometriába. Csak az volt a cél, hogy az első fejezet felölelje mindazt, amit a tárgyaláshoz az axiomatikának nyújtania kell. Ez nemcsak az első fejezet összeállításakor okozott gondot, hanem a további fejezetek megírásakor is megkötést jelentett. A geometria axiomatikus megalapozása iránt érdeklődő olvasó figyelmét Kerékjártó Béla francia fordításban is megjelent *Az euklideszi geometria elemi felépítése* c. munkájára hívjuk fel.

A könyv nem tárgyalja ugyan teljességre törekvően a geometria egyetlen fejezetét sem, viszont elvezet a geometria nevezetes fejezeteihez, és kaput nyit a további tanulmányok számára. Némelyik fejezetnek egyes alapfogalmait is megismerteti, másoknak csak a problémakörét vázolja. A sok fejezet közül itt csak a differenciálgeometriát, projektív geometriát, nem-euklideszi geometriát, többdimenziós geometriát, algebrai geometriát és topológiát említjük, nem szólva arról, hogy ezek a fejezetek hogyan tagozódnak tovább.

A szak kifejezések összegyűjtésekor teljességre törekedtünk. A szóhasználat bizonyos kritikájára és kiegészítésére is szükség volt. Tartózkodtunk azonban attól, hogy erőltetett szóhasználat elszakítson bennünket az élő szóhasználattól.

A szemléletesség és a szabotosság szempontjainak érvényesítéséről már a könyv elején szoltunk. Ezek a szempontok irányítottak akkor is, amikor arra törekedtünk, hogy a fogalmak, a tárgyalt anyag és a tárgyalás módszerének kialakulására is rámutassunk. A könyv terjedelme lényegesen kisebb lett volna, ha csak a kész absztrakt tudást foglaltuk volna rendszerbe.

A didaktikai szempontok az anyag összeállításakor és feldolgozásakor erősen érvényesültek. A könyv a középiskolai anyagot is felöleli, és szokásos tárgyalásával kapcsolatos kritikai szempontokat is érvényesít. Nagyon hibáznék azonban, aki ennek a könyvnek a tárgyalását akarná változtatás nélkül átültetni a középiskolai oktatásba, mert tárgyalásunk sok finom részlete csak az októnak és nem a középiskolás diáknak való.

\*

A sokféle szempont érvényesítése és egyeztetése sok gondot okozott. Csak a könyv olvasói dönthetik majd el, hogy sikerült-e kellő mértékű tartalom. Könyvem megírásakor a tárgy és a tárgyat megismerni akarók szeretete vezetett. Remélem, sikerült hozzájárulnom ahhoz, hogy a megismerni akarók is eljussanak a tárgy szeretetéhez.