830. Gondoljunk arra, hogy a húrok felező merőlegesei átmennek a középponton.

832. Lásd a 831. feladatot.

833. A legkisebb húr merőleges a pontot a körközépponttal összekötő egyenesre.

834. Állításunk a 833. feladat megoldásából következik.

835. A húr merőleges a pontot a középponttal összekötő egyenesre.

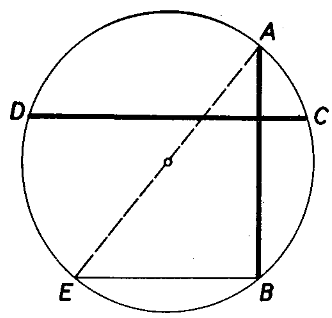
836. Az egyenlő hosszúságú húrok felezési pontjai egyenlő távol vannak a kör középpontjától, ezért a felezési pontok egy körön vannak. Ennek a körnek az érintői az egyenlő hosszúságú húrok.

837. Az érintőszakaszok végpontjai egyenlő távol vannak a kör középpontjától.

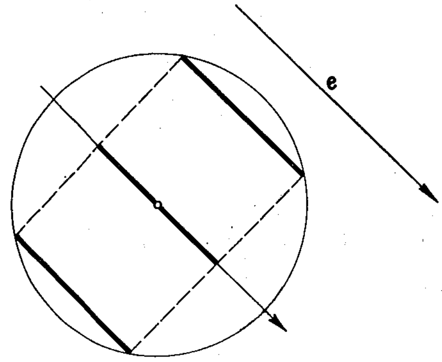
839. Szerkesszünk egy tetszőleges olyan egyenest, amely az adott egyenessel az adott szöget zárja be.

840. Az érintő a két egyenes egyik szögfelezőjével párhuzamos.

841. Húzzunk párhuzamost a B húrvégpontból a CD húrral, így a BE húrt kapjuk. Thalész tétele értelmében AE átmérő, és ezért leolvasható, hogy
$\widehat{AD}+\widehat{CB} = \widehat{AD}+\widehat{DE} =$ félkör (841. ábra).



841



851

844. Az előző feladat alapján oldható meg.

845. $2r$.

846. A körben elhelyezkedő, adott hosszúságú húrok egy kört burkolnak, a húrok felezési pontjukban érintik a burkolt kört. Ehhez a körhöz szerkesszünk érintőt az adott pontból.

847. Először egy tetszőleges négyzetet írunk a körbe, majd a 846. feladat alapján az adott ponton át szerkesszünk a négyzetoldallal egyenlő húrt.

848. A feladat a 847. feladat módszerével megoldható.

849. Az adott nagyságú körívet lemetsző húrok mind egyenlők, és hosszuk megszerkeszthető.

850. Lásd a 846. feladatot.

851. Húzzuk meg a körnek az adott egyenessel párhuzamos átmérőjét (851. ábra), erre mérjük rá a középpontra tükrösen az adott húrt, és toljuk el az átmérőre merőlegesen a körig.

854. Általában nem.

857. Az adott húr felezőpontja a pontból az egyenesre állított merőleges talppontja.

858. Az egyenessel párhuzamos két egyenes.

859. A szögfelező.

860. A 858. feladat alapján a kör középpontja két mértani hely metszéspontjaként szerkeszthető.

862. A kör középpontja rajta van a két pont meghatározta szakasz felező merőlegesén; ez párhuzamos az adott egyenessel, tehát távolságuk a kör sugara.

863. Bármely két kör centrálisa a háromszög oldalával, tehát a sugarak összegével egyenlő.

864. Az *a)* esetben növeljük, a *b)* esetben kisebbítjük a háromszög köré írt kör sugarát az adott távolsággal.

865. A *C* csúcs körül szerkesszünk egy-egy kört, amelyek áthaladnak az *A*, ill. *B* csúcson; a szerkesztendő kör ezek középköre.

866. Használjuk fel a 864. feladat megoldásának gondolatmenetét.

869. A körközéppont rajta van a szögszárakkal sugárnyi távolságban szerkesztett párhuzamosokon.

870. A kör középpontja az alappal szemközti szög felezőjének és az alapnak a metszéspontja.

871. Növeljük meg az adott kör sugarát a szerkesztendő kör sugarával. A szerkesztendő kör középpontja ezen a körön van.

872. Lásd az előző feladatot.

873. Lényegében azonos a 872. feladattal.

874. Lásd a 872. feladatot.

875. Lásd a 871. feladatot.

877. Lásd a 871. feladat módszerét.

878. A 877. feladat speciális esete.

879. Lásd a 877. feladatot.

884. 60°.

885. 120°.

886. 2 cm.

887. 5 cm és 2 cm. (Lásd az előző feladatot.)

888. 4 cm.

889. 8 cm és 12 cm.

890. Lásd a 844. feladatot. Az érintőszakasz hossza 3 cm.

891. 12 cm.

892. 1,5 cm.

895. A kör sugara a párhuzamosok távolságának fele, középpontja a párhuzamosok középvonalán van, és ismert az adott kör középpontjától mért távolsága is.

896. Lásd a 895. feladat módszerét.

899. Lásd a 895. és 896. feladatokat.

900. Vegyük figyelembe, hogy a kör sugara ismert (a két kör távolságának fele).

901. Csökkentsük felére az adott kör sugarát, az így nyert körön rajta van a szerkesztendő kör középpontja.

902. *a)* Nem metszők; *b)* kívülről érintkezők; *c)* metszők; *d)* a nagyobbik tartalmazza a kisebbet, érintkeznek; *e)* nem metszők; *f)* koncentrikusak.

903. A szerkesztendő kör érintője háromszöget metsz le a szögből. Ebbe a háromszögbe kell kört beírni, ill. ehhez hozzáírni.

904. Az alaphoz tartozó magassággal osszuk két derékszögű háromszögre háromszögünket.

905. A szimmetria miatt a kör a körívet felezőpontjában érinti. Lásd a 903. feladatot.

906. A középpont rajta van bármely két kör szimmetriatengelyén.

907. A kört osszuk fel három egybevágó körcikkre, az ezekbe írt körök megfelelnek a feltételeknek. (Lásd a 905. feladatot.)

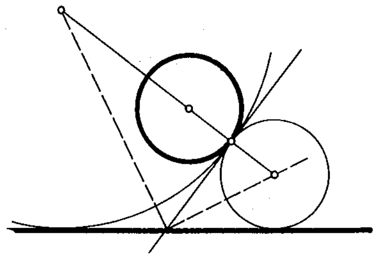
908. L. az előző feladatot. A beírt kör sugara a nagy kör sugarának harmada, tehát 1 cm.

909. Az előző feladat megoldásának módszerét követve, a kis körök sugarául *r* adódik.

910. Hatot. Lásd a 908. feladatot.

911. Az érintési pont a háromszög szimmetriatengelyén van.

912. Szerkesszük meg az adott körnek adott pontbeli érintőjét, ez az egyenessel szöget zár be, ennek felezőjén rajta van a keresett körközéppont (912. ábra). Vegyük még figyelembe, hogy érintkező köröknél a centrális átmegy az érintési ponton.



912

913. A szerkesztendő körközéppont az *a)* és *b)* esetben rajta van az adott körök szimmetriatengelyén, a *c)* eset ezekre vezethető vissza.

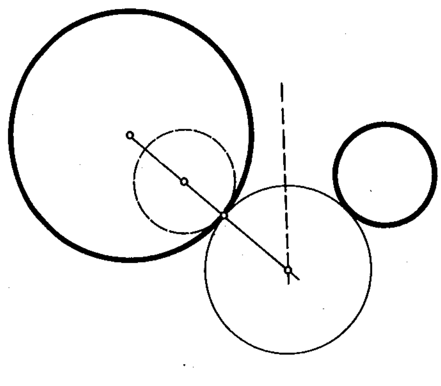
914. A feladat megoldása az előzőére vezethető vissza, ha az érintési ponttal adott kört a másik körrel egyenlő sugarú körrel helyettesítjük (914. ábra).

915. A feladat speciális esete a 913/*b* feladatnak.

916. A feladat a 913/*c* feladat speciális esete.

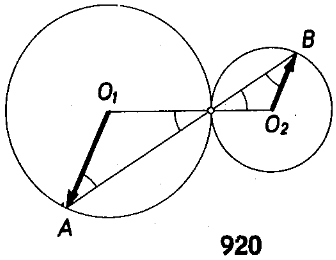
917. Lásd a 914. feladatot.

918. A 914. feladat módszere alkalmazható; az egyenest kell körrel helyettesítenünk.



914

920. Kössük össze a *C* érintési pontot az *A*, ill. *B* sugárvégpontokkal. AC és CB egy egyenesbe esnek, mert $AO_1C\sphericalangle = BO_2C\sphericalangle$ (váltószögek), tehát az egyenlő szárú



920

háromszögek tulajdonsága miatt $O_1CA\sphericalangle = O_2CB\sphericalangle$ (920. ábra).

921. Lásd az előző feladatot.

922. Külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő.

923. Az adott egyenes érintési pontjai A, ill. B. Az E érintkezési pontok mértani helye az AB mint átmérő fölé írt kör, kivéve az A és B pontokat.

924. Lásd a 923. feladatot.

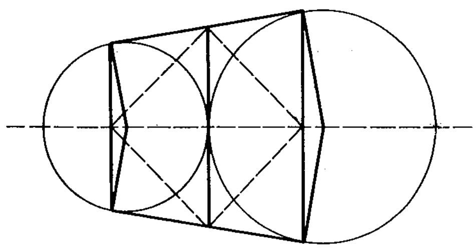
925. A körök érintkezési pontja a szimmetriatulajdonságok miatt rajta van a párhuzamosok középvonalán és a 920. feladat tétele miatt az érintési pontokat összekötő egyenesen.

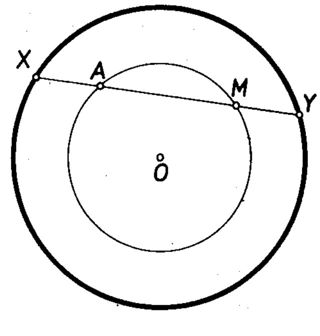
928. A szerkesztendő ábra szimmetrikus a két érintési pont meghatározta körív szimmetriatengelyére, tehát a két kör ezen érinti egymást.

929. A beírt kör sugarát csökkentsük 1 cm-rel.

930. A beírt körrel koncentrikus körről van szó.

931. Az egész alakzat szimmetrikus a két kör centrálisára, ezért a trapéz egyenlő szárú (szimmetrikus). Mivel a közös érintési ponthoz tartozó érintő a 922. feladat alapján felezi a külső érintők érintési pontjai közötti szakaszokat, a közös belső érintő egyúttal középvonal is, és fele egyenlő a külső érintő, tehát a trapéz szárának felével. (931. ábra)


931



937

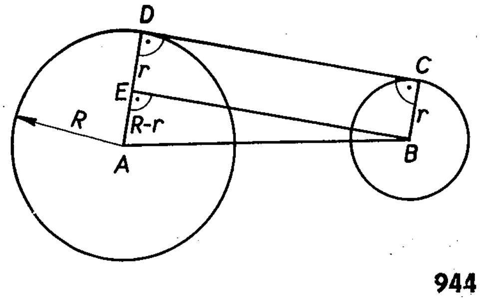
933. Az adott körrel koncentrikus kör a mértani hely.

937. Szerkesszünk az adott A ponton át az adott körrel koncentrikus kört. Ebben a körben helyezzünk el az adott különbséggel egyenlő, A végpontú húrt. Ennek egyenese megfelel a feladat feltételeinek (937. ábra).

942. A körök rendre: egyik belsejében tartalmazza a másikat; belülről érintkeznek; metszik egymást; kívülről érintkeznek.

943. Szerkesszük meg mindkét körben azokat a köröket, amelyeket az adott hosszúságú húrok burkolnak (lásd a 836. feladatot); e két kör közös érintői megfelelnek a feltételnek.

944. Az AB szakasz fölé az ABE derékszögű háromszöget meg tudjuk szerkeszteni. Mivel $AE = R-r$, AE-hez a sugarak összegét hozzáadva, $R-r+R+r=2R$ miatt R kétszeresét kapjuk (944. ábra).



944

945. A szerkesztendő kör koncentrikus a középpontok köré írt körrel.

947. Az állítás pl. Thalész tételével igazolható.

948. Az így szerkesztett derékszöget a kör középpontja körül forgatva, ismét a feltételnek eleget tevő derékszögeket kapunk; közben a derékszögű csúcs kört ír le.

949. Feladatunk állítása Thalész tétele értelmében teljesül.

950. 0° és 180° között.

951. A középponti szögek nagysága: 90°, 270°, 144°, 300°. A kerületi szögek ennek megfelelően: 45°, 135°, 72°, 150°.

953. 60°, ill. 120°.

954. 36°42'16", ill. 73°24'32".

955. 5 cm.

956. 2 cm.

957. 128°.

958. 34°, 63°, 83°.

959. 2α szögben látszik.

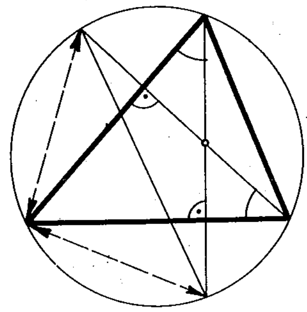
960. A húr látószöge 52°-os.

961. 56,5°, ill. 123,5°.

962. 30°, ill. 150°.

963. 120°.

964. 60°.


970

966. Vizsgáljuk a szóban forgó metszéspont, a B és a körközéppont meghatározta derékszögű háromszöget.

967. A szögfelező a szögszárak által közrefogott ívet két egyenlő részre osztja.

968. Következik a 967. feladatból.

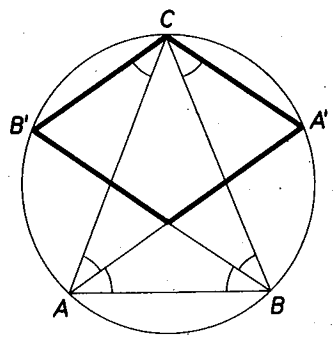
969. A külső és belső szögfelező merőlegességéből következik, hogy a kört egy átmérő végpontjaiban metszik. (Lásd a 968. feladatot.)

970. A 970. ábrán megjelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy az egyes magasságvonalak metszéspontja és a harmadik csúcs közötti ívek egyenlők.

971. Lásd a 970. feladatot.

972. Lásd a 970. feladatot.

973. Az egyformán jelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy AA' párhuzamos $B'C$-vel, ill. BB' párhuzamos $A'C$-vel (975. ábra).



975

977. Következik a 974. feladatból.

978. $180°-2\alpha$, $180°-2\beta$, $180°-2\gamma$.

979. A 978. feladat eredményének felhasználásával adódik, hogy most a kérdéses háromszög szögei $\frac{180^\circ-\alpha}{2}$, $\frac{180^\circ-\beta}{2}$, $\frac{180^\circ-\gamma}{2}$-vel egyenlők.

980. A 979. feladat eredményéből az állítás leolvasható.

981. Az érintési pontok alkotta háromszög szögeinek nagysága: $\frac{\gamma}{2}$; $\frac{\beta}{2}$; $90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.

982. Lásd a 981. feladatot.

984. A háromszög oldalai 60°, 60°, ill. 120°-os szögben látszanak.

986. A keresett kör az adott szakasz fölé szerkesztett adott látószögű körív, ill. kör.

988. A keresett pontot a két pont fölé szerkesztett, adott látószögű körív metszi ki az egyenesből.

989. Lásd a 988. feladatot.

990. Lásd a 988. feladatot.

991. Lásd a 990. feladatot.

992. Az egység helyét a térképen a K_1K_2 fölé szerkesztett 45°-os látószögű körív és a K_1T fölé szerkesztett 60°-os körív (f túlsó oldalán levő) metszéspontja adja.

993. Lásd a 988. feladatot.

994. α, ill. β nagyságú szöget.

995. Lásd a 994. feladatot.

996. A szakasz végpontjain átmenő kör az egyenest P_0-ban érinti. Az egyenes P_0-tól különböző pontjai mind a körön kívül vannak, tehát mindegyikükből kisebb szögben látszik, mint P_0-ból.

997. Lásd a 996. és a 862. feladatot.

998. Lásd a 996. feladatot.

999. Lásd a 996. feladatot.

1000. Lásd a 996. feladatot.

1002. Az 1002. ábrán vastagon húzott háromszög a, α, r ismeretében megszerkeszthető.

1003. Tekintsük a feladatot megoldottnak.
a) Forgassuk az egyik oldalt a másik oldal meghosszabbítására (1003. ábra).

1004. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Tükrözzük a háromszöget az alap felezőpontjára. A létrejött paralelogramma egyik csúcsát a kétszeres súlyvonal mint átló fölé szerkesztett, $180^\circ-\alpha$ látószögű körív és a vonalkázott háromszög alapegyenesének metszéspontja adja (1004. ábra).

1005. Lásd a 1001/*b* feladatot.

1007. A feladat lényegileg az 1005. feladattal azonos.

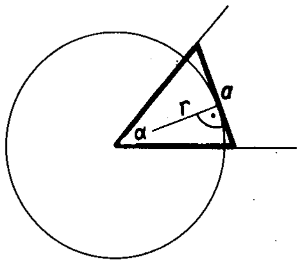
1008. Az adott szöggel szemközti e átló két háromszögre bontja a négyszöget. Az egyik háromszögben adott három oldal így megszerkeszthető.

1009. Toljuk el az e átlóval lemetszett ABD háromszöget az f átlóval párhuzamosan az 1009. ábrán látható helyzetbe. A $BB'D'D$ paralelogramma szerkeszthető, ebben a C csúcs a BD, ill. $B'D'$ fölé szerkesztett látókörívek metszéspontjaként adódik.

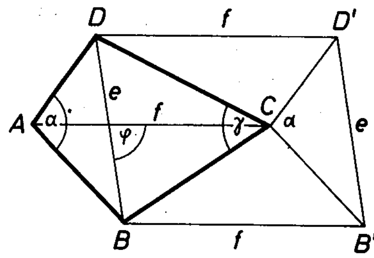
1010. Alkalmazzuk a négyszögre az 1009. feladatban közölt eltolást.

1012. Helyezzük el az adott szög csúcsát a kör kerületén, szárai a körnek a szemközti oldallal egyenlő húrját zárják közre.

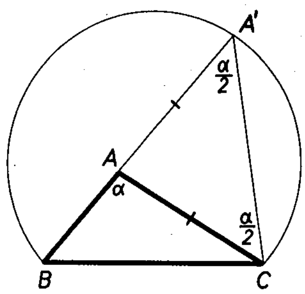
1013. *I. megoldás:* A szögfelezőknek a körrel való metszéspontjai és a csúcsok a



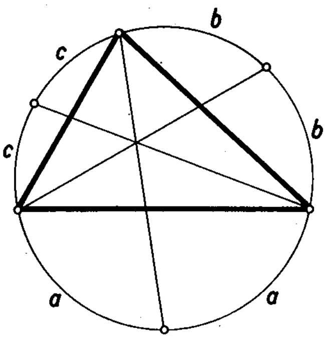
1002



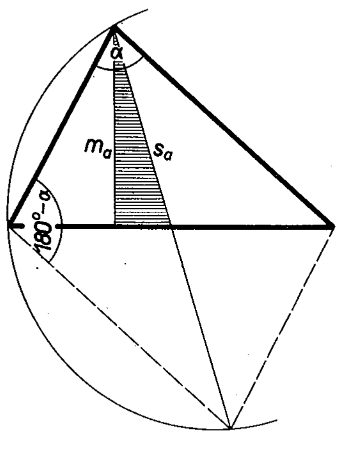
1009



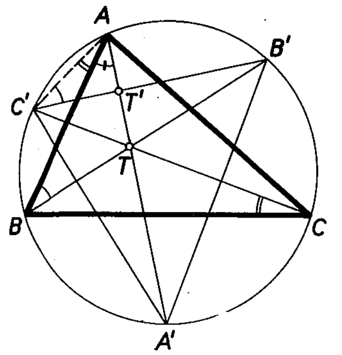
1003



1013 a



1004

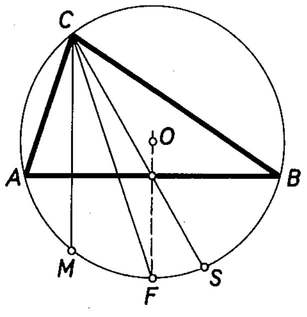


1013 b

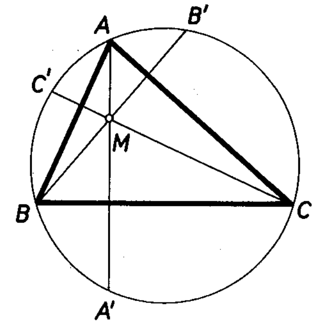
köré írt kört három egyenlő ívpárra osztják (lásd a 967. feladatot). Legyen ezek hossza a, a, b, b, c, c. Mivel $2a+2b+2c$ egyenlő a kör kerületével, ezért $a+b+c$ a kör fél kerülete. Mivel $a+b$, $b+c$,$c+a$ ismertek, a, b és c külön szerkeszthetők (1013/a ábra).

II. megoldás: Az egyformán jelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy az $AT'C'$ háromszög A-nál és C'-nél fekvő szögeinek összege az ABC háromszög fél szögösszegével egyenlő, tehát az $AT'C'$ szög derékszög. AA' ezért magassága az $A'B'C'$ háromszögnek (1013/b ábra).

1014. A háromszög köré írt kör középpontja O. A C-hez tartozó magasságvonal, szögfelező, súlyvonal a köré írt kört az M, F, S pontokban metszik. Mivel F felezi az AB ívet (lásd a 968. feladatot), OF párhuzamos MC-vel, ennek alapján C szerkeszthető. FO a CS-et az AB felezőpontjában metszi (1014. ábra).



1014



1015

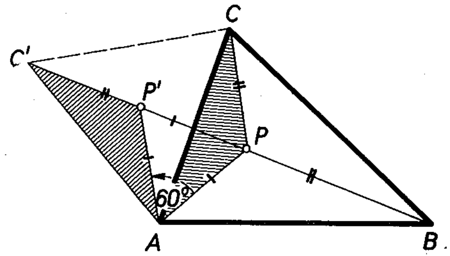
1015. *I. megoldás:* A rajta van az $A'B'C'$ háromszög A'-höz tartozó szögfelezőjén, mert A felezi a $C'B'$ ívet.

II. megoldás: Az M magasságpontnak az oldalakra vonatkozó tükörképei A', B', C', ezért pl. $AM = AC' = AB'$, így az A csúcs rajta van a $B'C'$ felező merőlegesén (1015. ábra).

1016. Az egyes háromszögoldalak fölé szerkesztett 120°-os látószögű körívek metszéspontja adja a keresett pontot.

1017. Lásd az 1016. feladatot.

1018. Lásd az 1017. feladatot.



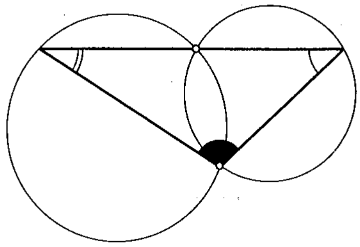
1019

1019. Legyen P a háromszög egy tetszőleges pontja. Forgassuk el az APC háromszöget az A csúcs körül 60°-kal. A háromszög elforgatottja az $AP'C'$ háromszög. Mivel $AP = AP'$ és a köztük levő szög 60°-os, az APP' háromszög egyenlő oldalú, tehát $AP = PP'$. A $BPP'C'$ törött vonal így a P pont és az ABC háromszög egyes csúcspontjai között levő távolságok összege. A C' pont helyzete a P helyzetétől teljesen független. A $BPP'C'$ törött vonal akkor a legrövidebb, ha a BC' szakasszal egyenlő. Ez akkor következik be, ha P, ill. P'-nél nincs törés, vagyis ha az $APB\sphericalangle = APC\sphericalangle = 120°$ (1019. ábra).

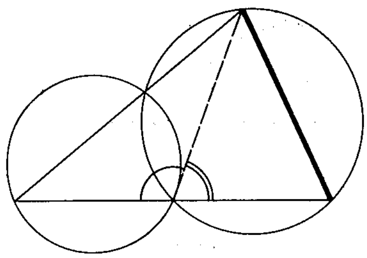
1022. Az 1022. ábrán egy, ill. két ívvel jelölt szögek a szelő tetszőleges helyzete esetében ugyanakkorák (ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek), így a háromszög harmadik szöge is állandó.

1023. Az 1022. feladat ábráján levő háromszög megszerkeszthető.

1024. Az 1022. feladatból tudjuk, hogy az 1024. ábrán egy ívvel jelölt szög állandó. Ebből következik, hogy a kétíves szög is állandó. Mivel egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek, ill. húrok tartoznak, a kérdéses szakasz mindig ugyanakkora.



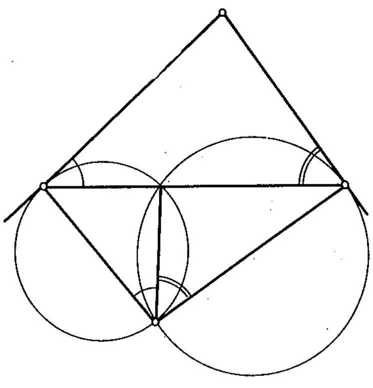
1022



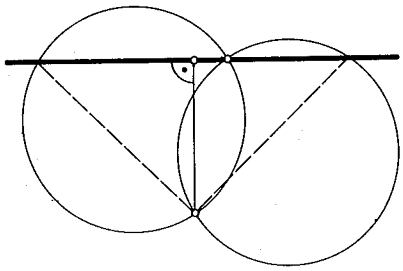
1024

1025. Az 1025. ábrán egyformán jelölt szögek (azonos íven nyugvó kerületi szögek) egyenlőségéből következik az állítás.

A mértani hely a körök metszéspontjai fölé szerkesztett Thalész-kör (1026. ábra).



1025



1026

1027. A kérdéses pontok mértani helye a szélső pontok meghatározta szakasz felező merőlegese.

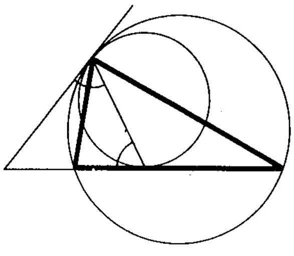
1028. A kérdéses B' pontok mértani helye az AB fölé szerkesztett α, ill. $(90° - \alpha)$ látószögű körív (α az AB-hez tartozó egyik kerületi szög fele).

1029. A mértani hely az AB ív fölé szerkesztett $90° - \alpha$, ill. $90° + \alpha$ látószögű körív (α az AB-hez tartozó egyik kerületi szög).

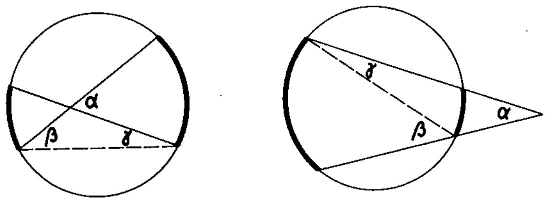
1030. Felhasználva azt, hogy egyenlő sugarú körökben az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlők, a kiegészítő íven nyugvó kerületi szögek pedig egymás kiegészítő szögei, az állítás bebizonyítható.

1031. A kerületi szögek tételének és a háromszög külsőszög-tételének felhasználásával az állítás igazolható.

1032. Az 1032. ábrán egyformán jelölt szögek az 1031. feladatból adódóan egyenlők, amiből az állítás már közvetlenül következik.



1032



a) b)

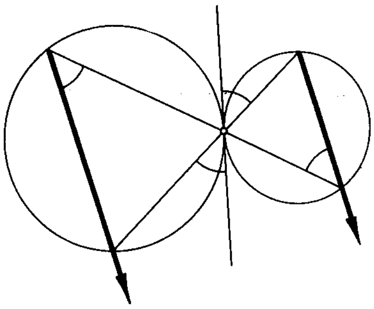
1033

1033. *a)* Jelöljük az adott kerületi szögeket β, ill. γ-val. Ekkor az ábráról leolvasható hogy $\alpha = \beta+\gamma$ (1033. ábra).

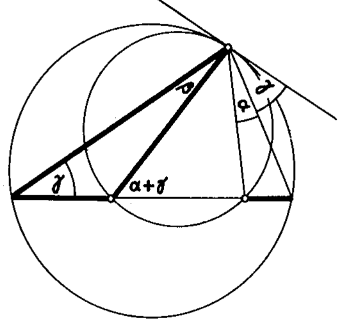
b) $\alpha = \beta-\gamma$.

1034. Az 1034. ábrán egyformán jelölt szögek (ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek) egyenlők. Ebből már következik az állítás.

1035. Az 1035. ábrán egyformán jelölt szögek azonos íven nyugvó kerületi szögek, így egyenlők. A vastagon húzott háromszögben a külsőszög-tételből következőleg $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$, ahonnan $\alpha = \beta$.



1034



1035

1036. A bizonyítás az előző feladatéhoz hasonló módon történhet.

1037. Az érintő a szemközti oldallal $|\beta-\gamma|$ nagyságú szöget zár be.

1038. Az adottal szemközti csúcsból az adott csúcs és egy adott pont által meghatározott szakasz 45°, az ebbe futó oldalak adott pontjai által meghatározott szakasz pedig 90°-os szögben látszik.

1039. L. az 1002. feladatot.

1040. Egy félegyenesre egymás után ráмérjük az adott szakaszokat, majd föléjük – az adott félegyenesek által bezárt szöggel megegyező α, ill. β látószögű – köríveket szerkesztünk. A körívek metszéspontját a szakaszok végpontjaival összekötve, olyan ábrát nyerünk, amely az adott félegyenesekre átmásolva, a feladat megoldását adja.

1041. Lásd az 1001/*b* feladatot.

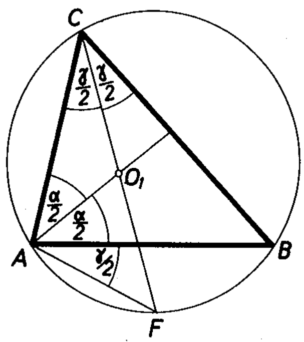
1042. Az adott ötszöggel megegyező szögű ötszöget szerkeszthetünk az adott körbe, ha a szögek (mint adott kerületi szögek) ismeretében az átlókat a körben megszerkesztjük.

1043. A háromszögbe írt kör középpontja az adott csúcsokat összekötő szakasz fölé szerkesztett $90°+\frac{\gamma}{2}$, ill. $90°-\frac{\gamma}{2}$ látószögű köríveket írja le.

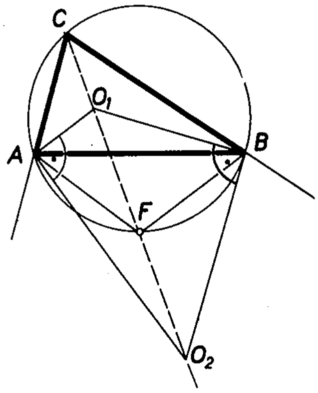
1044. *I. megoldás:* A szakasz levágta háromszöget az előző feladat segítségével külön megszerkeszthetjük, és átmásolhatjuk az adott szögbe.
II. megoldás: A 650. feladat felhasználásával $E_1E_2 = c$. A szög szárait érintő kört megszerkeszthetjük. A két kör közös érintője a szerkesztendő szakasz.

1045. A feladat lényegében megegyezik az előzővel.

1046. Az F rajta van a C-hez tartozó szögfelező egyenesen is, mert $\widehat{AF} = \widehat{FB}$.
Az 1046. ábráról leolvasható, hogy $FAO_1\sphericalangle = AO_1F\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}$, tehát az FAO_1 háromszög egyenlő szárú.



1046



1047

1047. Az AO_1BO_2 húrnégyszög, mert az egy csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra; ennek középpontja viszont F, mert az előző feladat szerint egyenlő távolságra van az A, B, O_1 pontoktól (1047. ábra).

1048. Következik az 1047. feladatból.

1049. Az 1048. feladatból következik, hogy a beírt kör O_1 és a hozzáírt kör O_2 középpontját összekötő szakasz F felezőpontját a köré írt kör O középpontjával összekötő szakasz a köré írt kör sugarával egyenlő. A köré írt körből az FO_1 sugarú kör az A, ill. B csúcsokat, az O_1O_2 egyenes a C csúcsot metszi ki. (Lásd az 1047. feladat jelöléseit.)

1050. Tekintsük a feladatot megoldottnak (1050. ábra). Toljuk el az a oldalt az oldalegyenes adott P pontjába. Az ábráról leolvasható, hogy $QCC' \sphericalangle = \alpha$. A szerkesztést mármost a következőképpen végezzük: Az adott háromszögoldallal párhuzamosan felmérjük a P pontba az adott a oldalt. A létrejött QC' szakasz fölé szerkesztett α látószögű körívnek az alapegyenessel akotott metszéspontja megadja a háromszög C csúcsát.

1059. Az 1056. feladatból következik, hogy az ábrán vastagon húzott négyszög húrnégyszög, így az egyformán jelölt szögek egyenlők. (1059. ábra.)

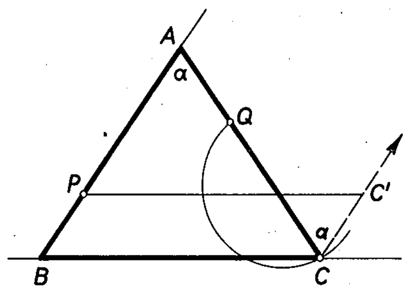
1060. Az állítás az előző feladat következménye. Vizsgáljuk meg külön a tompaszögű esetet.

1061. Az 1060. feladat következménye, hogy a talpponti háromszög belső-, ill. külső szögfelezői lesznek a szerkesztendő háromszög oldalai.

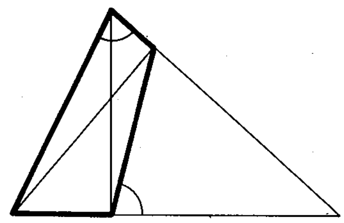
1062. $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$.

1064. Az állítás Thalész tételéből következik.

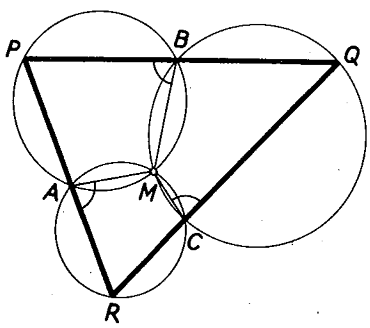
1065. Tekintsük az A és B csúcsokhoz tartozó köröket. Azt kell igazolnunk, hogy ezek D metszéspontja rajta van a harmadik, C-hez tartozó körön, vagyis hogy $CRDQ$ húrnégyszög.



1050



1059



1066

1066. Az 1066. ábrán látható négyszögek húrnégyszögek, következőleg az egyformán jelölt szögek egyenlők, és így az RA és RP egyenesszakaszok egy egyenesbe esnek. (1066. ábra.) Hasonlóan igazolható, hogy a P pont a kisebbik $\overset{\frown}{BM}$ íven van.

1069. Lásd az 1009. feladatot.

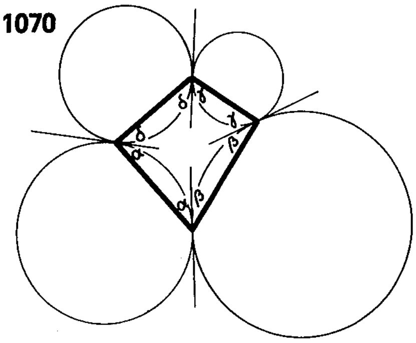
1070. Az 1070. ábrán egyformán jelölt szögek egyenlők, így a vastagon húzott négyszög húrnégyszög.

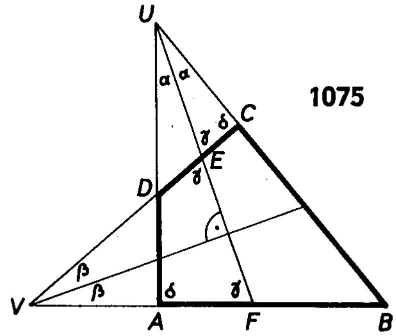
1073. Húzzuk meg az érintési pontokban az érintőket. Az 1073. ábrán egyformán jelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy a négy érintési pont által meghatározott négyszög szemközti csúcsainál levő szögek összege egyenlő.

1074. Alkalmazzuk azt a tételt, hogy a húrnégyszög bármely külső szöge egyenlő a szemközti belső szöggel.

1075. Az AUF és CUE háromszögek megegyeznek α és δ szögükben, ezért a harmadik szög mindkettőben γ. Így az FVE háromszög egyenlő szárú, szögfelezője ezért merőleges az FE alapra (1075. ábra).

1070





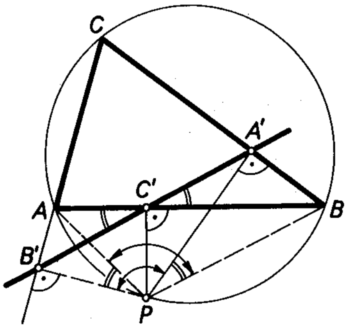
1075

1076. Az állítás a húrnégyszögtétel többszöri alkalmazásával látható be.

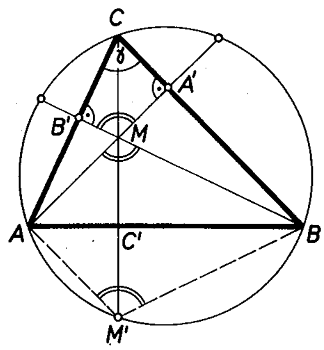
1077. A feladat visszavezethető az 1076. feladatra.

1078. Jelöljük az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjait A', B', ill. C'-vel. A $CA'PB'$, ill. a $CBPA$ négyszög húrnégyszög, így a $B'PA'\sphericalangle = APB\sphericalangle$. Ennek felhasználásával adódik, hogy az $AC'PB'$ és az $A'C'PB$ húrnégyszög két ívvel jelölt szögei egyenlők, így $B'C'$-nek és $C'A'$-nek az AB oldallal alkotott szöge megegyezik. Következőleg B', C' és A' pontok valóban egy egyenesen vannak (1078. ábra).

1079. Jelöljük M tükörképét M'-vel. Az 1079. ábrán két ívvel jelölt szögek egyenlőségéből, továbbá a $CB'MA'$ négyszög húrnégyszög voltából



1078



1079

következik, hogy $AM'B\sphericalangle = 180°-\gamma$, tehát M' rajta van a háromszög köré írt körön.

1080. Lásd az 1079. feladat megoldását.

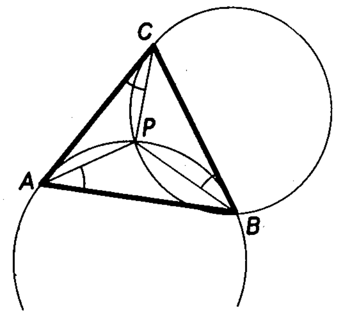
1081. A megoldás gondolatmenete megegyezik az 1079. feladatával.

1082. Az állítás helyessége következik az 1079. feladatból.

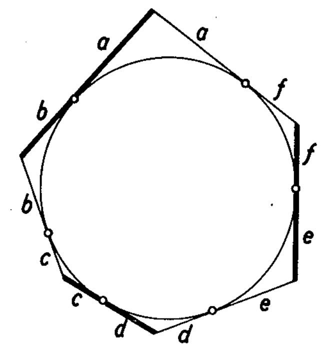
1083. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyek szögpontban érintenek egy-egy háromszögoldalt, és átmennek egy másik csúcson is. A lehetséges hat kör közül úgy válasszunk ki hármat, hogy minden csúcson csak egy menjen át oldalt érintve. E három kör egy ponton megy át, és ezek közös P pontja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal (1083. ábra).

1084. 4 cm.

1086. A rombuszok.



1083



1087

1087. Az érintési pontokat összekötve, hat egyenlő szárú háromszöget kapunk hat pár egyenlő szárral. Az egyenlő szárakat egyformán jelölve, nyerjük, hogy a három nem szomszédos oldalon mind a hatféle távolság előfordul (1087. ábra).

1088. Lásd az 1087. feladat megoldását.

1089. A deltoid akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha egyenlő szögei derékszöggel egyenlők.

1090. Az érintési pontokat összekötő egyenes a rombusz középpontos szimmetriája miatt átmegy a beírt kör középpontján, amiből az állítás már következik.

1091. A rombusz középpontját az adott oldal fölé szerkesztett Thalész-körből az adott sugártávolságra szerkesztett párhuzamos egyenes metszi ki.

1093. A két párhuzamos érintő megszabja a trapéz magasságát. A szárakat a két párhuzamos közé elhelyezve a körhöz kell tolnunk.

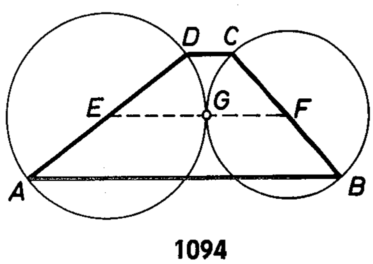
1094. A feltétel elégséges. Ugyanis ha a trapéz AD és BC szárai mint átmérők fölé írt körök érintik egymást egy G pontban (1094. ábra), akkor ennek a pontnak rajta kell lennie a két kör EF centrálisán (amely most a trapéz középvonala). Következőleg $BC = 2GF$, és $AD = 2EG$, azaz $AD+BC =$
$= 2(GF+EG) = 2EF = 2\dfrac{AB+DC}{2} = AB+DC$, azaz ekkor a trapéz valóban érintőnégyszög. A feltétel szükséges is. Ha a trapéz érintőnégyszög, akkor

$$AB+CD = AD+BC, \text{ vagyis } \frac{AB+CD}{2} = \frac{AD+BC}{2},$$

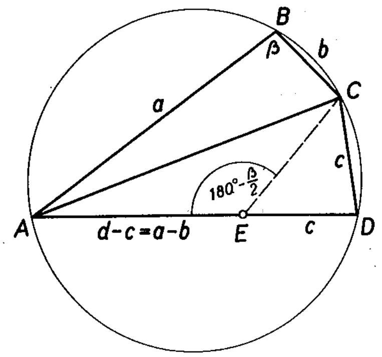
ahonnan

$EF = \dfrac{AD+BC}{2}$, azaz a trapéz középvonala egyenlő a szárak félösszegével, vagyis a szárakhoz tartozó Thalész-körök sugarainak összegével. Így ezek a körök valóban érintik egymást, mert közös pontjuk a centrálisukra esik.

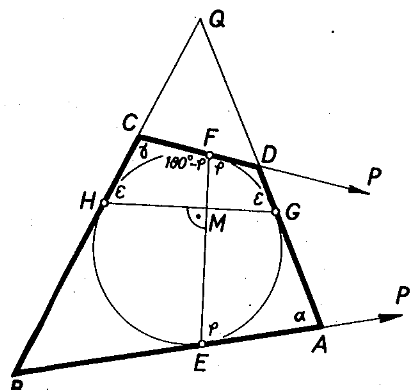
1095. Legyen $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. Mivel $ABCD$ érintőnégyszög, ezért $a+c = b+d$, tehát $a-b = d-c$. Ez azt jelenti, hogy az ACD háromszögben ismert egy oldal (AC), az ezzel szemközti szög (β kiegészítő szöge) és két oldalának különbsége. Ennek alapján az ACD háromszöget pl. a következőképpen szerkeszthetjük meg: Mérjük rá az AD oldalra, D-ből kiindulva, a $DC = DE$-t. A keletkezett ACE háromszög és ebből az ACD háromszög már szerkeszthető (1095. ábra).



1094



1095



1096

1096. Tegyük fel, hogy az $ABCD$ érintőnégyszög szemközti oldalain az érintési pontok E és F, ill. G és H, továbbá EF merőleges GH-ra. Hosszabbítsuk meg a négyszög szemközti oldalait a P, ill. Q metszéspontokig. A PEF és QGH háromszögek egyenlő szárú voltából következik az 1096. ábrán ε-nal, ill. φ-vel jelölt szögek egyenlősége. Az $AEMG$ négyszögből

$$\alpha = 360° - (180° - \varepsilon) - \varphi - 90° = 90° - \varphi + \varepsilon.$$

Az $FMHC$ négyszögből:

$$\gamma = 360° - (180° - \varphi) - \varepsilon - 90° = 90° + \varphi - \varepsilon.$$

Következőleg $\alpha + \gamma = 180°$, tehát az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.

A bizonyítás másik fele a fenti gondolatmenet megfordításából adódik.

1102. Egy háromszöget, középvonalaival együtt.

1109. A feladatnak általában négy megoldása van.

1122. Kössük össze az O vetítési középpontot az A és B csúcsokkal. A feladat most már az, hogy az AOB szög szárai közé az AB-vel párhuzamosan helyezzük el az adott szakaszt.

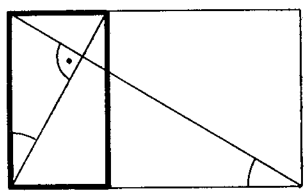
1123. Lásd az 1119. feladatot.

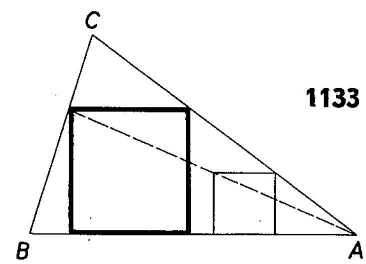
1128. A hasonló téglalapok megszerkesztéséhez vágjuk szét a téglalapot egyik átlójával két háromszögre. A szerkesztési eljárás az 1127. feladatéval azonos.

1129. Vágjuk szét a téglalapot egyik átlójával két háromszögre. A szerkesztés az 1128. ábrán látható háromszögek hasonlóságán alapszik.

1130. Lásd az 1128. feladat megoldását.

1128





1133

1133. Először az A szög szárai közé a szerkesztendő ábrához hasonlót szerkesztünk, majd azt az A csúcsból a kívánt nagyságúra nagyítjuk (1133. ábra).

1135. Egy az irányokkal párhuzamos oldalú háromszög köré kört írunk, majd kicsinyítjük (vagy nagyítjuk) az ábrát, felhasználva, hogy a háromszög csúcsaihoz tartozó sugarak a kicsinyített ábrán is ugyanakkora szöget zárnak be.

1136. Vegyünk fel a négyzet átlóival párhuzamos oldalakkal egy a szerkesztendőhöz hasonló téglalapot, melynek két szomszédos csúcsa két szomszédos négyzetoldalon van. Ezt a téglalapot nagyítjuk fel a négyzet csúcsából a kívánt nagyságúra.

1137. Lásd az 1133. feladatot.

1138. Lásd az 1133. feladatot.

1139. Először a határoló sugarakat érintő kört szerkeszthetünk, majd azt az O csúcsból a kívánt nagyságúra nagyítjuk.

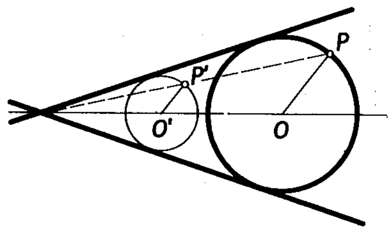
1140. Lásd az 1139. feladatot.

1142. Felhasználjuk, hogy a szögszárakat érintő körök párhuzamos helyzetűek és hasonlók, hasonlósági középpontjuk a szög csúcsa. Először egy tetszőleges, a szögszárakat érintő kört szerkesztünk, majd az 1142. ábrán látható módon felnagyítjuk úgy, hogy P-n menjen át. (Két megoldás.)

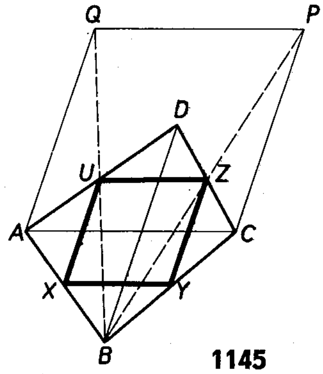
1143. Tükrözzük az e egyenest az f egyenesre. A szerkesztendő Q pont az e, e' szögszárakat érintő, P-n átmenő kör középpontja (lásd az 1142. feladatot).

1144. Helyezzünk el a szögszárak közé az adott iránnyal párhuzamos szakaszt, és írjunk e fölé α látószögű körívet. E kört kell felnagyítani úgy, hogy a kitűzött ponton menjen át (lásd az 1142. feladatot).

1145. Szerkesszünk az AC átló fölé a szerkesztendőhöz hasonló $ACPQ$ rombuszt. Ezt a B-ből lekicsinyítve, a szerkesztendő $XYZU$ rombuszt kapjuk. Ehhez azt kell belátni, hogy pl. $XY = UX$, ez viszont abból következik, hogy UX és XY is a felvett rombusz egy-egy oldalának $XB{:}AB$ arányú kicsinyítése (1145. ábra).



1142



1145

1147. Ilyen háromszögek pl. azok, melyeknek oldalai 27, 18 és 12, ill. 18, 12 és 8.

1154. A két téglalap hasonló, mert az átlók által meghatározott négy részháromszög páronként hasonló.

1159. Általában nem hasonlók.

1160. A másik két oldal hossza 1, ill. 1,2 cm.

1161. $b' = 5{,}6$ cm, $c' = 3{,}5$ cm.

1162. A másik két oldal $\frac{9}{16}$, ill. $\frac{3}{4}$ cm hosszú.

1163. A másik szár hossza 13,6 cm.

1164. A gyárkémény 42 m magas.

1165. A szoba szélességének a tervrajzon 1,52 cm felel meg.

1166. A háromszög oldalainak hossza $\frac{9}{2}$, 6 és $\frac{15}{2}$ m.

1167. A háromszög oldalainak hossza 10, 20 és 25 cm.

1168. A két háromszög hasonló, mert két oldaluk aránya és az általuk bezárt szög egyenlő.

1169. A háromszög oldalainak hossza 1 m, 2 m és 2,5 m.

1170. A kérdéses oldalak hossza 6,5 cm és 5,5 cm.

1171. $b = 3$ cm, $b' = 1{,}2$ cm.

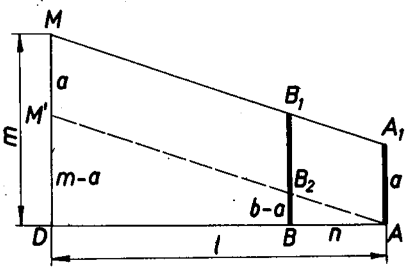
1172. a) $b' = 35$ cm, $c = 8$ cm.
b) $c' = 12$ cm, $c = 20$ cm.

1173. *a)* Hasonlók,
b) hasonlók, de nem ilyen megfeleltetéssel,
c) nem hasonlók.

1174. $a' = 0{,}8$ cm, $b' = 1{,}2$ cm, $c' = 1{,}6$ cm.

1175. 8 cm, 12 cm, 16 cm, 20 cm.
1176. 18 cm, 9 cm, 12 cm, 36 cm.
1177. 30 cm, 12 cm, 24 cm, 18 cm, 36 cm.
1178. 40 mm és 100 mm.
1179. A táblázat kitöltve:

a	7	10	×	10
b	4	$\frac{60}{11}$	×	$\frac{30}{11}$
c	9	11	$\frac{28}{3}$	11
d	$\frac{36}{7}$	6	4	3
e	6	8	7	$\frac{99}{14}$
f	$\frac{66}{7}$	$\frac{136}{11}$	10	9



1185

1180. $DE = 1{,}25$ m.
1181. $KB = 2{,}0$ m-es álcázatot kell építeni.
1182. *a)* $DA = 4$ cm,
b) $AD:BD = 27:28$.
1183. A párhuzamosság miatt a megfelelő csúcsokat összekötő szakaszokat a meghúzott törött vonal egyenlő arányú részekre bontja, amiből az állítás már következik.
1184. A középső metszetek hossza 68 cm, ill. 80 cm.
1185. *a)* Húzzunk az A csúcson át párhuzamost az A_1M szakasszal (1185. ábra). Az ábráról leolvasható, hogy a létrejött AB_2B háromszög hasonló az $AM'D$ háromszöghöz, így $(m-a):l = (b-a):n$, ahonnan

$$m = \frac{l(b-a)+an}{n}, \qquad \text{b)}\ m = \frac{28}{3}\ \text{m}.$$

1189. Az egyes cseréptartó lécek hossza: 0,85 m, 1,7 m, 2,5 vagy 2,6 m, 3,4 m, 4,2, vagy 4,3 m, 5,1 m, 5,9, vagy, 6,0 m és 6,8 m.
1190. Mérjük rá egy egyenesre a téglalap kerületét, és az így kapott szakaszt osszuk három egyenlő részre.
1194. A háromszög oldalait mérjük fel (a kiválasztott csúcsból kiindulva) sorra az egyenesre, majd az így kapott szakaszt osszuk az ismert módon a kívánt arányos részekre.
1195. a) Az adott háromszög oldalai legyenek a, b, c. A feladat most az, hogy az új k' kerületet osszuk fel $a{:}b{:}c$ arányú részekre. A megoldási módokat az 1195. ábra szemlélteti.

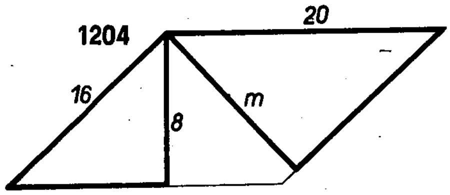
b) $a' = 4$ cm, $b' = 10$ cm, $c' = 12$ cm.

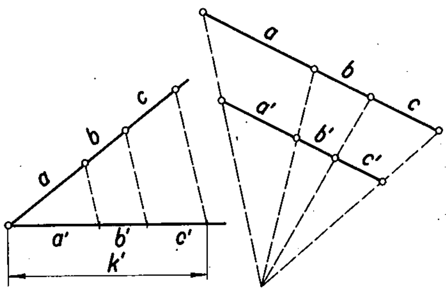
1196. Két szög már elegendő ahhoz, hogy a keresett háromszöghöz hasonlót szerkesszünk (lásd az előző feladat megoldásának módszerét). A b), c),

d) és e) esetekben a megszerkesztett hasonló háromszög ismeretében a megfelelő $a'+b'$, $a'-b'$, $(2a'+b')$, ill. $(2a'-b')$ szakaszokat szerkesztjük meg, majd ezek segítségével az előző feladatban ismertetett módon az a, b oldalakat.

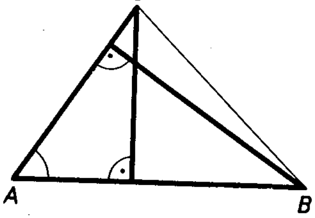
1197. Lásd az 1196. feladatot.
1198. Lásd az 1196. feladatot.
1199. Lásd az 1191. feladatot.
1200. Lásd az 1196. feladatot.
1201. Lásd az 1196. feladatot.
1202. $\frac{16}{7}$ cm és 4 cm.

1204





1195



1206

1203. $\sqrt{2}$.
1204. Az 1204. ábrán vastagon húzott háromszögek hasonlóságából következik, hogy $m = 10$ cm.
1205. Az oldalak hossza 10 cm, ill. 14 cm.
1206. a) Az 1206. ábrán vastagon húzott háromszögek hasonlóságából adódik, hogy a b oldalhoz tartozó magasságvonal 2,5 cm.

b) $m_b = \frac{am_a}{b}$.

1207. $m_a = 6$ cm; $m_b = 8$ cm.
1208. A szerkesztéshez lásd az 1133. feladat megoldását. A paralelogramma oldalai 10, ill. 12 cm hosszúak.
1209. 7,5 cm és 13,5 cm.
1210. Az 1908. feladathoz hasonlóan járunk el. A téglalap oldalainak hossza:

$$\frac{ah}{hm+an}\cdot n \quad \text{és} \quad \frac{ah}{hm+an}\cdot m.$$

1211. A szerkesztéshez lásd az 1133. feladatot. A beírt négyzet oldala $\frac{ah}{h+a}$.
1212. Az ABC és DAC hasonló háromszögek. A megfelelő befogók arányát felírva, nyerjük, hogy $DB = 3$ cm, $CD = 9$ cm.
1213. Lásd az 1212. feladat megoldását. $c = 12$ cm, $BD:BC = 3:4$.
1214. a) Lásd az 1212., ill. az 1213. feladat megoldását. Most $DA = 1$ cm és $DC = 3$ cm.

b) $AD = \frac{c^2}{b}$ és $DC = \frac{b^2 - c^2}{b}$.

1215. *a)* $r_1 = 26$ cm és $r_2 = 10$ cm.

b) $r_1 = \frac{d}{a+b} \cdot a$ és $r_2 = \frac{d}{a+b} \cdot b$.

1216. $r = \frac{ah}{2h+a}$.

1217. Lásd az 1216. feladatot.

1218. $x = \frac{bc}{b+c}$.

1219. Az AC és MN szakaszok a $\beta\sphericalangle$ szárait párhuzamosan metsző szelők. Ennek felhasználásával $MN = \frac{bc}{a+c}$ adódik.

1220. $ED = 20$.

1221. a) Az EPB háromszög és az EDA háromszög hasonlóságából adódik, hogy $CP = 4$ cm.

b) $CP = \frac{ab}{a+b}$.

1222. Lásd az előző feladat megoldását. $BE = 3$ cm.

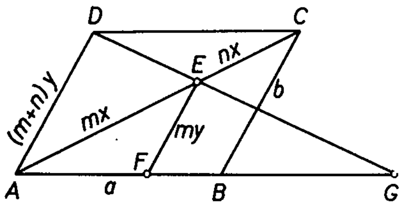
1223. Felhasználva azt, hogy párhuzamos szelők a szögszárakból egyenlő arányú szakaszokat metszenek ki, adódik, hogy $AF = \frac{m}{m+n} \cdot a$ és $FB = \frac{n}{m+n} \cdot a$ (1223. ábra).

1224. Az 1223. ábráról leolvasható, hogy az AFE és ABC hasonló háromszögek, és a hasonlóság aránya $m:(m+n)$. Az előző feladat eredményének felhasználásával a GFE és GAD hasonló háromszögek oldalarányait felírva, nyerjük, hogy $BG = \frac{m-n}{n} \cdot a$.

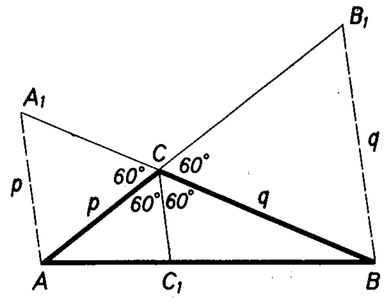
1225. *a)* Az ABA_1 és C_1BC háromszögek, továbbá az ABB_1 és AC_1C háromszögek hasonlóságából adódik, hogy $CC_1 = \frac{6}{5}$.

b) $CC_1 = \frac{pq}{p+q}$.

1226. Hosszabbítsuk meg az AC, ill. BC szögszárakat a C csúcson túl az 1226. ábrán látható módon. Az A, ill. B csúcsból a CC_1 szakaszon húzott párhuzamosok a meghosszabbításokat az A_1, ill. B_1 pontokban metszik. Ezzel a feladatot az előzőre vezettük vissza, tehát $CC_1 = \frac{pq}{p+q}$.



1223



1226

1227. Az 1227. ábráról leolvasható, hogy az ABD és AB_1D_1 háromszögek, ill. a CBE és CB_2E_2 háromszögek hasonlók. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, ahonnan $y = \frac{ab}{a+b}$ és $x = \frac{ab}{a+b}$ adódik.

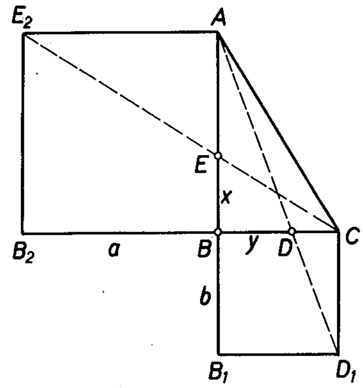
1228. $\approx 4{,}29$ cm.

1229. 20 cm.

1230. 2,5 cm, ill. 2 cm.

1231. a) $\frac{12}{7}$ cm és $\frac{18}{7}$ cm.

b) a, b, c, d oldalú trapéz esetében a kérdéses oldalak hossza: $\frac{c}{a-c}\cdot d$, ill. $\frac{c}{a-c}\cdot b$.



1227

1232. 18 cm

1234. $\frac{5}{3}$ cm.

1235. 3, ill. 24 cm.

1236. A trapéz középvonaltételéből, továbbá abból, hogy az alapok aránya megegyezik az átló szeleteinek arányával, adódik, hogy az alapok hossza 40 cm, ill. 18 cm.

1237. Az l szakasz metszetei: $l_1 = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3$, $l_2 = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8$, $l = 11$.

1239. a) Az 1237. feladat megoldásának jelöléseit használva nyerjük, hogy most $l_1 = \frac{m}{m+n}\cdot b$, és $l_2 = \frac{n}{m+n}\cdot a$.

b) $l = l_1 + l_2 = \frac{na+mb}{n+m}$.

1240. Az 1239. feladat eredményét alkalmazva, a párhuzamos szakaszok hossza:

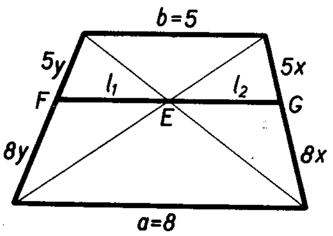
$\frac{34}{3}$ cm, $\frac{32}{3}$ cm, 10 cm, $\frac{28}{3}$ cm, $\frac{26}{3}$ cm.

1241. $h_1 = \frac{3a+b}{4}$, $h_2 = \frac{a+b}{2}$, $h_3 = \frac{a+3b}{4}$.

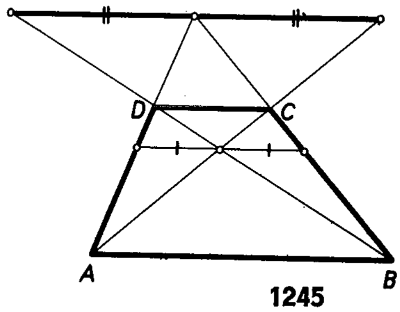
1242. a) 10 cm, 18 cm.

b) $A'B' = \frac{4b-a}{3}$, $C'D' = \frac{4a-b}{3}$.

1243. Felhasználva, hogy a trapéz átlói a párhuzamos oldalak arányában osztják egymást, adódik, hogy az FG szakasz a szárakat 8:5 arányban osztja. Az 1239. feladat eredményét alkalmazva, $l_1 = \frac{8}{13}\cdot 5 = \frac{40}{13}$ és $l_2 = \frac{5}{13}\cdot 8 = \frac{40}{13}$ eredmény adódik. Tehát az átlók metszéspontja a kérdéses szakaszt felezi. (1243. ábra.)



1243



1245

1244. Az előző feladat gondolatmenetét alkalmazva, most $l_1 = \frac{a}{a+b}\cdot b = \frac{ab}{a+b}$ és $l_2 = \frac{b}{a+b}\cdot a = \frac{ab}{a+b}$ adódik. Így csakugyan igaz, hogy $l_1 = l_2$, azaz a metszéspont a párhuzamos szakaszt csakugyan mindig felezi.

1245. Mindkét szakasz az átlók metszéspontján át húzott párhuzamos egyenlő szakaszainak (lásd az előző feladatot) az A, ill. B pontból történő ugyanannyiszoros nagyításával hozható létre, tehát egyenlők (1245. ábra).

1246. Az 1246. feladat következménye.

1247. a) A harmadoló pontokat közrefogó szakasz hossza $\frac{2a-b}{3}$.

b) $m:n$ arányban osztó pontokat összekötő szakasz esetén a közrefogott szakasz hossza $\frac{na+b(m-2n)}{n+m}$.

1248. Lásd az előző feladatot.

1249. Az a oldal meghosszabbítására mérjük rá a b oldalt. Az A' végpontot kössük össze A-val. Az 1249. ábráról leolvasható, hogy az egyformán jelölt szögek egyenlők, így $A'A$ párhuzamos f_c-vel. Felhasználva azt, hogy párhuzamos szelők a szögszárakból egyenlő arányú szakaszokat metszenek ki, adódik, hogy $c_1:c_2 = 7:6$. Mivel továbbá $c_1+c_2 = c = 5{,}5$, nyerjük, hogy $c_2 = \frac{33}{13}$ és $c_1 = \frac{38{,}5}{13}$.

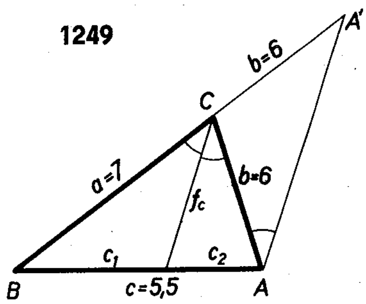
1250. Lásd az előző feladat megoldásának gondolatmenetét. $c_1:c_2 = a:b$, és $c_1+c_2 = c$. Ebből $c_1 = \frac{ac}{a+b}$, $c_2 = \frac{bc}{a+b}$ adódik.

1251. a) A C csúcs körül forgassuk rá az a oldalra a b oldalt. Az A' végpontot kössük össze A-val. Az 1251. ábráról leolvasható, hogy AA' párhuzamos DC-vel. Mivel párhuzamos szelők a DBC szög száraiból egyenlő arányú szakaszokat metszenek le, így valóban $c'':c' = a:b$.

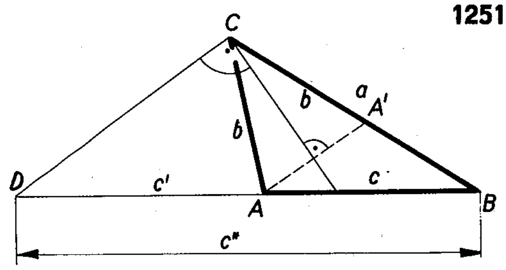
b) Felhasználva, hogy $c:c'' = (a-b):a$, továbbá, hogy $c''-c' = c$, nyerjük, hogy $c'' = \frac{ac}{a-b}$, és $c' = \frac{bc}{a-b}$ (1251. ábra).

1252. A C_1E szögfelező az AC oldalt $AC_1:CC_1$, a C_1D szögfelező a BC oldalt $BC_1:CC_1$ arányban osztja. Mivel $AC_1 = C_1B$, a két osztásarány egyenlő, amiből az állítás már kiolvasható (1252. ábra).

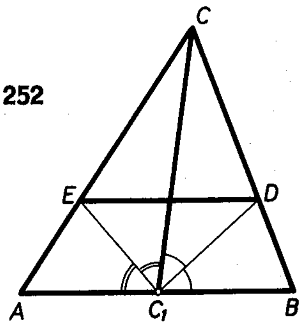
1249



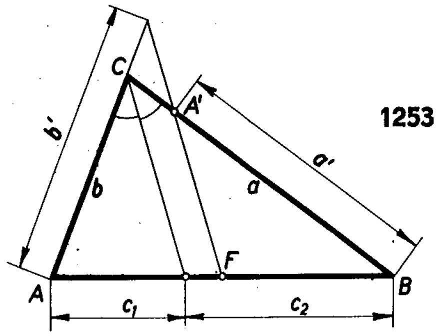
1251



1252



1253



1253. Az 1253. ábrán fellelhető hasonlóságokból $\frac{b'}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{c_1}$, $\frac{a}{a'} = \frac{c_2}{\frac{c}{2}}$. E kettő szorzata a bizonyítandót adja, ha figyelembe vesszük, hogy $a:b = c_2:c_1$.

1254. A kérdéses szakasz hossza $\frac{ab}{a+b}$.

1255. $EF = 16$ cm, általánosan $EF = m_b \cdot \frac{b}{b+c}$.

1256. Az AA_1 szögfelező az ABC háromszög köré írt kört D-ben metszi. Az 1256. ábra jelöléseit ($AA_1 = l$, $BA_1 = a_1$, $A_1C = a_2$, $A_1D = x$) használva: $lx = a_1a_2$, továbbá az ABA_1, ADC hasonló háromszögekből $\frac{c}{l} = \frac{l+x}{b}$, ahonnan $l^2 = bc - a_1a_2$.

1257. Az előző feladatból $l^2 < bc$, vagy $l < \sqrt{bc}$.

1258. Legyen a szögfelezők metszéspontja K. Húzzunk C-ből párhuzamost AA_1-gyel, ez D-ben, ill. E-ben metszi a BA és a BB_1 egyeneseket. Mivel a BB_1 egyenes a CBD háromszögben is szögfelező, $\frac{DE}{EC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BA+AC}{BC}$. Másrészt $\frac{AK}{KA_1} = \frac{DE}{EC}$. Így $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB+AC}{BC}$ (1258. ábra).

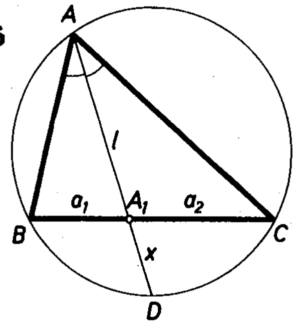
1259. A B csúcson keresztül húzzuk meg a BE egyenest úgy, hogy $ABE\sphericalangle = DBC\sphericalangle$ legyen. A kerületi szögek tételének felhasználásával adódik, hogy az ABE háromszög hasonló a DBC háromszöghöz, így $\frac{a}{e} = \frac{AE}{c}$, ahonnan $ac = AE \cdot e$. Ugyanígy a BEC háromszög hasonló a BAD háromszöghöz, így $\frac{e}{b} = \frac{d}{EC}$, ahonnan $bd = EC \cdot e$. Összeadva a két összefüggést, $ef = ac + bd$ (1259. ábra).

1260. Előjeles távolságokkal számolunk, így belátható, hogy a szereplő arányok közül mindenképpen egy vagy három negatív. (Ui. a metsző egyenes, ha nem megy át egyik csúcson sem, akkor vagy két oldalt metsz a csúcsok között és egyet a meghosszabbításon, vagy mind a hármat a meghosszabbításon.) Az abszolút értékekre érvényes $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ összefüggést a következőképpen bizonyíthatjuk: A B ponton keresztül párhuzamost húzunk AC-vel, és ezt A_1B_1-gyel D-ben metsszük. Az AC_1B_1 és BC_1D hasonló háromszögekből $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_1A}{BD}$. Az A_1BD és A_1CB_1 hasonló háromszögekből $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BD}{CB_1}$. Ha a két aránypárt tagonként összeszorozzuk, és BD-vel egyszerűsítünk: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{B_1A}{CB_1}$, vagy:

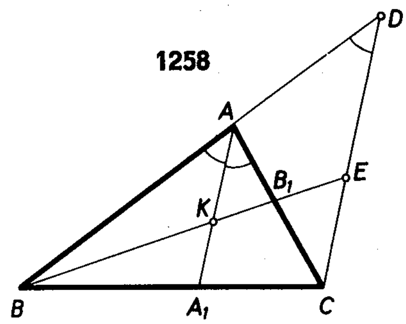
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB}{B_1A} = 1.$$

1261. Jelöljük P-vel az A_1B_1 és az AB egyenesek metszéspontjait. Bizonyítjuk, hogy a P és C_1 pont ugyanaz. Az előző feladat alapján $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} =$

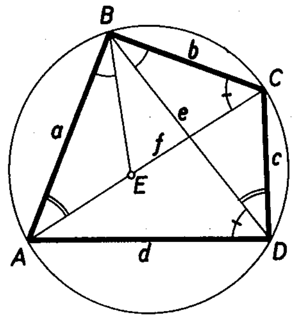
1256



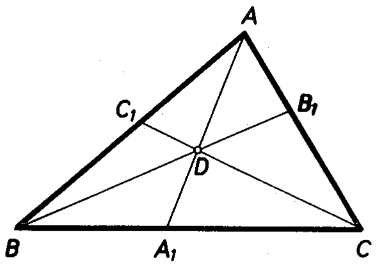
1258



1259



1263



$= -1$, amiből a feltevést összehasonlítva: $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$ következik. De ez éppen azt jelenti, hogy P és C_1 egybeesik.

1262. Tekintsük az 1258. feladat megoldásának ábráján az AA_1C háromszöget és a BKB_1 szelőt. Menelaosz tétele szerint $\dfrac{AK}{KA_1}\cdot\dfrac{A_1B}{BC}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A} = -1$. A háromszög szögfelezőjére vonatkozó tétel szerint $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$, és $\dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{BC}{AB}$. Az első aránypárt átalakítva: $\dfrac{A_1B}{BC} = \dfrac{A_1B}{A_1B+A_1C} = \dfrac{AB}{AB+AC}$. Behelyettesítve Menelaosz tételébe, és csak az abszolút értékeket véve: $\dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{AB+AC}{BC}$.

1263. Alkalmazzuk Menelaosz tételét az AA_1C háromszögre és a BB_1 egyenesre, majd az AA_1B háromszögre és a CC_1 egyenesre. A két egyenlőséget összeszorozzuk. Figyelembe véve, hogy $CA_1 = -A_1C$, $A_1B = -BA_1$ és $AO = -OA$, ill. $OA_1 = -A_1O$, a kívánt összefüggést nyerjük (1263. ábra).

1264. Ha a BB_1 és CC_1 egyenesek metszik egymást, akkor a metszéspontjukon és az A ponton átmenő egyenest BC-vel metsszük P-ben, ha pedig BB_1

párhuzamos CC_1-gyel, akkor P-vel jelöljük az A-n átmenő és BB_1-gyel párhuzamos egyenesnek BC-vel alkotott metszéspontját. Az előző feladatból $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Ebből és a feltevésből következik, hogy $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BP}{PC}$, tehát a P és az A_1 pont egybeesik, és így az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy pontban találkoznak vagy párhuzamosak.

1265. *a)* Ha A_1, B_1, C_1 oldalfelezőpontok, akkor az $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$ egyenlőség fennáll, mert mindegyik arány 1-gyel egyenlő.

b) Most A_1, B_1, C_1 a szögfelezők szemközti oldallal alkotott metszéspontjai. Ekkor a szögfelezőtétel alapján $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BC}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$ és $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AB}$, ez utóbbi három arány szorzata pedig 1. (Ugyanígy bizonyítható be a tétel az 1251. feladat felhasználásával a külső szögfelezőkre is.)

c) Ha A_1, B_1, C_1 magasságok talppontjai, akkor az ABA_1 háromszög hasonló a C_1CB háromszöghöz, tehát $\frac{BA_1}{C_1B} = \frac{AB}{BC}$. Ugyanígy $\frac{CB_1}{A_1C} = \frac{BC}{CA}$, és $\frac{AC_1}{B_1A} = \frac{CA}{AB}$. Felhasználva, hogy a magasságok talppontjai közül vagy kettő van egy oldal meghosszabbításán, vagy egy sem (vagyis a három arány közül vagy kettő negatív és egy pozitív, vagy mind pozitív), a három arány tagonkénti szorzatával a Ceva-tétel feltétele teljesül.

1266. Az 1266. ábráról leolvasható, hogy ekkor $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$, és $CA_1 = CB_1$, így a Ceva-féle összefüggés fennáll.

1267. A 645. feladat felhasználásával az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

1268. Ceva tétele értelmében $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Pontnak körre vonatkozó hatványa értelmében $AB_1\cdot AB_2 = AC_1\cdot AC_2$, $BC_1\cdot BC_2 = BA_1\cdot BA_2$ $CA_1\cdot CA_2 = CB_1\cdot CB_2$. Ebből a négy összefüggésből következik, hogy $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A} = 1$, amiből az állítás már következik.

1269. Megrajzoljuk a négyszög egyik átlóját. Ennek mindkét oldalán középpontosan hasonló háromszögeket találunk, melyek oldalaránya 2:3. $a_1 = \frac{2}{3}e$, és $a_2 = \frac{2}{3}e$, tehát $a_1 = a_2$. Így a kérdéses négyszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők, tehát a négyszög paralelogramma (1269. ábra).

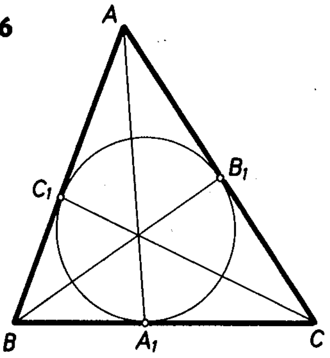
1270. Lásd az előző feladat megoldását.

1271. Az 1269. feladat megoldásának gondolatmenetéből következik az állítás.

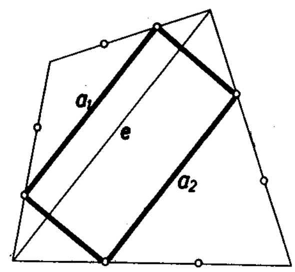
1272. Megoldáshoz lásd az 1271. és 1233. feladatot.

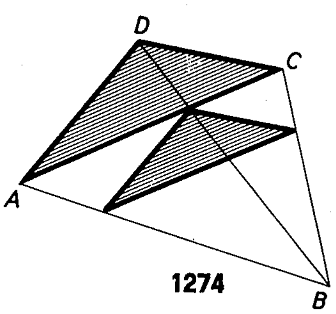
1273. Alkalmazzuk az 1269. feladat megoldási módszerét.

1266

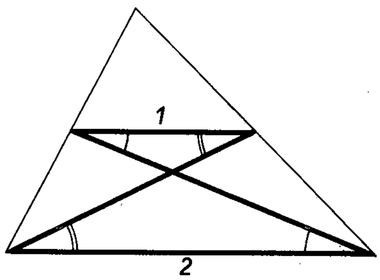


1269





1274



1275

1274. Az állítás következik abból, hogy az 1274. ábrán vonalkázott háromszögek középpontosan hasonlók. Hasonlósági középpontjuk a B pont.

1275. Az 1275. ábrán vastagon húzott háromszögek hasonlók, a hasonlóság 2:1, amiből az állítás már következik.

1276. Gondoljunk arra, hogy a magasság két hasonló háromszögre bontja a háromszöget.

1277. $1\frac{1}{3}$ cm.

1279. Mindkét esetben megfelelő háromszögek hasonlóságát használhatjuk fel. *a)* 1:2, *b)* 2:1.

1280. A keresett arány 1:2.

1281. $\frac{a}{3}$.

1282. Húzzunk a BC oldal felezőpontján át párhuzamost AB-vel. Így egy derékszögű trapéz középvonalát kapjuk, hasonló háromszögek keletkeznek. A transzverzálisok a csúcstól számítva 2:3, ill. 4:1 arányban osztják egymást.

1284. 3:1.

1285. Az állítás annak következménye, hogy a két négyzet középpontosan hasonló.

1286. A húrnégyszög köré írt kör P pontjából az oldalakra állított merőlegesek talppontjai X, Y, Z, U. A PBX és PDU háromszögek hasonlósága miatt $PB:PD = PX:PU$. Ugyancsak hasonlók a PZD és PYB háromszögek is, ezért $PB:PD = PY:PZ$. E két arány összehasonlításából következik az állítás (1286. ábra).

1287. Az 1287. ábráról leolvasható, hogy az $AC'M$ háromszög hasonló a $CA'M$ háromszöghöz, tehát $\frac{AM}{MC} = \frac{C'M}{MA'}$, ahonnan $AM \cdot MA' = CM \cdot MC' = BM \cdot MB'$ (1287. ábra).

1288. Húzzuk meg a köré írt körön felvett pontból az átlókat. Ezek két-két háromszögre bontják a téglalapokat. A részháromszögek páronként hasonlók, amiből a téglalapok hasonlósága már következik (1288. ábra).

1289. $2\frac{1}{4}$ cm, ill. $5\frac{3}{4}$ cm.

1290. $\frac{a^2}{2b}, \frac{2ab-a^2}{2b}$.

1292. A' a BC, C' az AB felezőpontja, S a súlypont. Az állítás az $AC'S$ és az ADB háromszögek hasonlóságából következik.

1293. Az átfogónak a rábocsátott magasságvonal által levágott szeletei úgy aránylanak egymáshoz, mint:

a) 1:9, *b)* 1:16, *c)* $1:n^2$, *d)* $q^2:p^2$.

1294. 50 cm, ill. 72 cm.

1295. 5,2 cm.

1296. 18 cm, ill. 98 cm.

1297. 8; $8\sqrt{3}$ cm és $4\sqrt{3}$ cm.

1298. $\frac{25}{2}$ cm, $\frac{5}{2}\sqrt{21}$ cm.

1299. $\frac{25}{4}$ cm, $\frac{15}{4}$ cm.

1301. A feladat visszavezethető derékszögű háromszög szerkesztésére, ha adott az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasság.

1302. A feladatot visszavezethetjük az előzőre. Jelöljük az adott távolságokat x-szel, ill. y-nal. Szerkesszünk az adott $x-y$ és $2\sqrt{xy}$ távolságokkal mint befogókkal derékszögű háromszöget. Az átfogó $x+y$ lesz.

1305. A derékszögű háromszögben érvényes mértani közép-tételből következik, hogy $AL^2 = AP \cdot 2OA$, és $AK^2 = AP \cdot OA$ (1305. ábra).

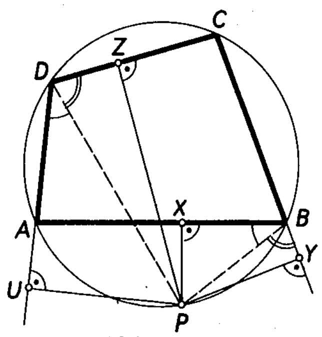
1306. Az 1306. ábrán vastagon húzott háromszögek hasonlósága alapján igazolható.

1307. Az 1307. ábrán vastagon húzott háromszögek hasonlóságából adódik az állítás.

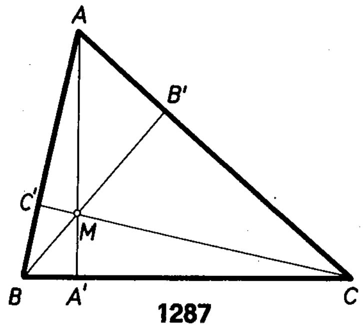
1308. Lásd az előző feladatot.

1309. $h = 2\sqrt{m(2r-m)}$.

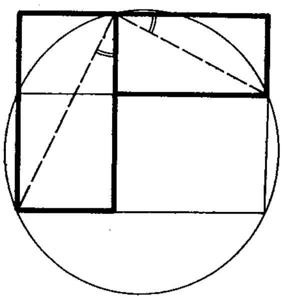
1310. Az állítás következik az ABD és az ACB háromszögek hasonlóságából.



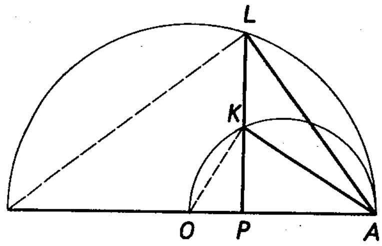
1286



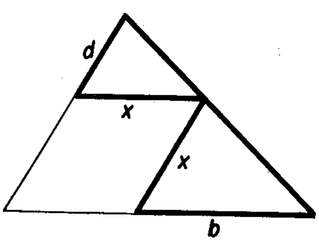
1287



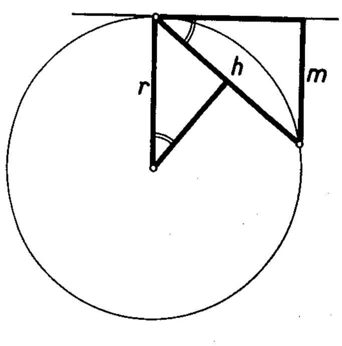
1288



1305

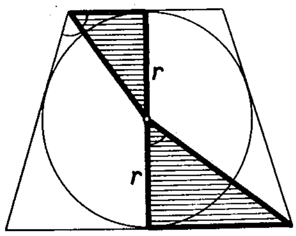


1306

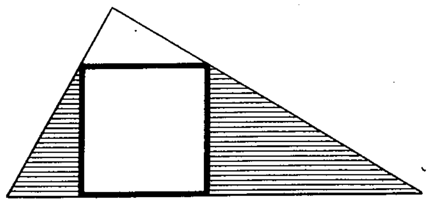


1307

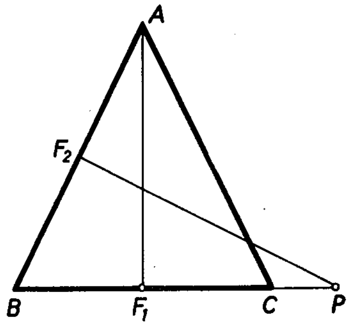
1311. Az 1311. ábrán vonalkázott háromszögek hasonlóságából következik az állítás.
1313. Az állítás következik az 1313. ábrán vonalkázott háromszögek hasonlóságából.
1314. A téglalap oldalainak hossza $12\sqrt{3}$, ill. $12\sqrt{6}$ cm.
1315. A négyzetoldal a téglalapoldalak mértani közepe.
1316. Az állítás következik az ABF_1 és PBF_2 háromszögek hasonlóságából (1316. ábra).
1317. Az ABC és a DAB háromszögek hasonlóságából következik az állítás (1317. ábra).
1318. Az OEA és a BEO háromszögek hasonlóságából következik az állítás (1318. ábra).
1319. Az $AEPG$ és $BEPF$ négyszögek húrnégyszögek, ezért egyrészt $PAG\sphericalangle = PEG\sphericalangle$, másrészt a kerületi szögek tétele értelmében $PAG\sphericalangle = PBA\sphericalangle = PFE\sphericalangle$, és így a GPE és EPF háromszögek hasonlók. A hasonlóságból már következik az állítás (1319. ábra).
1320. Legyen $\beta - \gamma = 90°$, továbbá E a magasság talppontja. Hosszabbítsuk meg a BC oldalt E-n túl $DE = EB$-vel. Ekkor az 1320. ábrán egy ívvel jelölt szögek egyenlők, és az A-nál levő kétíves szög derékszög, tehát $EA^2 = DE \cdot EC = EB \cdot EC$ (1320. ábra).
1321. Az 1321. ábra jelöléseit használva, a bizonyítandó állítás egyenértékű $\frac{d}{a} = \frac{m_1}{m}$-mel, ami viszont az ABC és a DEC háromszögek hasonlósága miatt valóban fennáll.



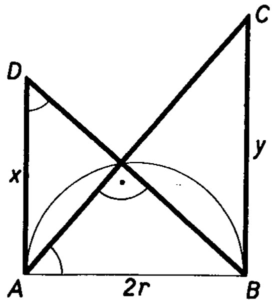
1311



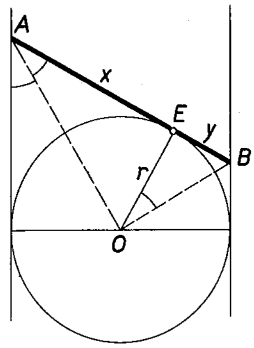
1313



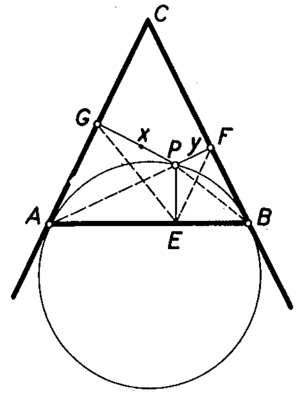
1316



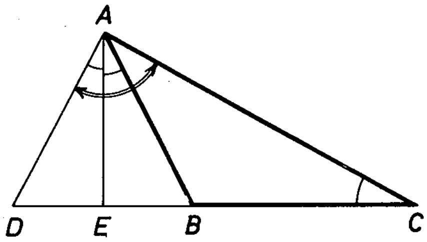
1317



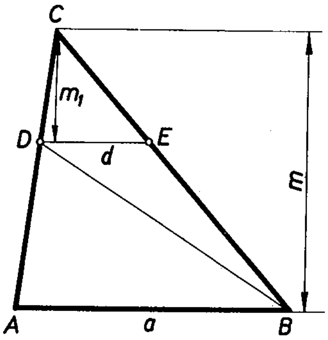
1318



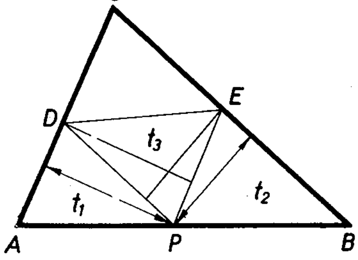
1319



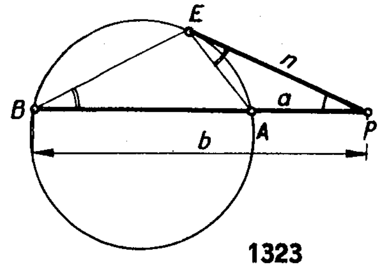
1320



1321



1322



1323

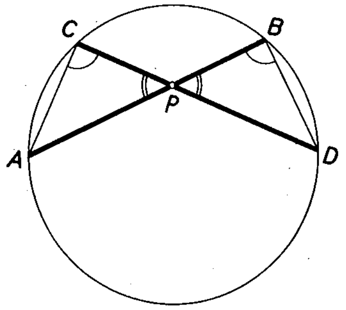
1322. A t_1 és t_3, ill. a t_3 és t_2 területű háromszögek megegyeznek egy-egy magasságban, tehát területeik aránya a megfelelő oldalak arányával egyenlő, azaz $t_1:t_3 = AD:DC$, és $t_3:t_2 = CE:EB$. Mivel $AD:DC$ és $CE:EB$ páronként egyenlő $AP:PB$-vel, így a megfelelő arányból az állítás már következik (1322. ábra).

1323. Az 1323. ábrán egyformán jelölt szögek egyenlőségéből következik, hogy a PEA háromszög hasonló a PBE háromszöghöz, így megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $a:n = n:b$, ahonnan $n^2 = ab$.

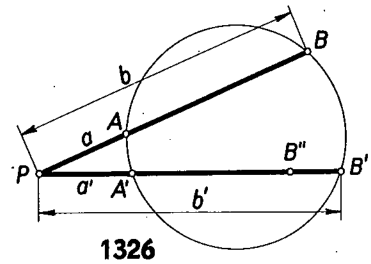
1324. Az előző feladatból következik, hogy $PA \cdot PB = PC \cdot PD = n^2$.

1325. A PAC és a PDB háromszögek az 1325. ábrán egyformán jelölt szögek egyenlősége miatt hasonlók.

1326. Tegyük fel, hogy a kérdéses négy pont nincs egy körön. Szerkesszünk az A, B, A' pontokon átmenő kört. A PA' egyenes ezt egy B'' pontban metszi. Az 1324. feladat értelmében ekkor $PA \cdot PB = PA' \cdot PB''$, azaz $a \cdot b = a' \cdot PB''$. De a feltevés szerint $a \cdot b = a' \cdot b'$, így $PB'' = b'$. Ez csak úgy lehetséges, ha $B'' = B'$ (1326. ábra).



1325



1326

1327. Alkalmazzuk az előző feladat megoldásánál végzett okoskodást.

1328. Az állítás következik az 1324. feladatból.

1329. Az állítás az 1323., ill. 1324. feladatok közvetlen következménye.

1331. k és k' közös érintőjét az AB egyenes H-ban metszi (1331. ábra); k'' viszont a k' kört A'-ben, ill. B'-ben. Kössük össze H-t A'-vel, az összekötő egyenes k'-t még egyszer B''-ben metszi. Az előző feladat szerint A, B, A', B'' egy körön vannak, de az A, B, A' pontok éppen a k'' kört határozzák meg, tehát B'' azonos B'-vel, ami azt jelenti, hogy az $A'B'$ egyenes mindig átmegy H-n.

1332. Legyen E a kör érintési pontja. Az adott A, B pontokon átmenő egyenes az adott e egyenest P pontban metszi. Az 1323. feladatból adódik, hogy $PE^2 = PA \cdot PB$, így a PE szakaszt mint a PA, PB szakaszok mértani közepét megszerkeszthetjük.

1333. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük az érintési pontot E-vel, és húzzuk meg a közös e érintőt. Az adott kör k', a szerkesztendő k, az adott pontok A és B. Az A és B pontokon átmenő tetszőleges k'' kör k'-t az A' és B' pontokban metszi. Az 1331. feladat szerint AB és $A'B'$ metszéspontja, H az e érintőn van. H tehát szerkeszthető; az ebből k'-höz húzott érintő a szerkesztendő kör érintési pontját tűzi ki.

1334. Két szög ismeretében a szerkesztendő háromszöghöz hasonlót tudunk már szerkeszteni, majd ezt akkorára nagyítjuk, hogy a szereplő nevezetes vonal a kívánt nagyságú legyen.

1335. Alkalmazzuk az 1334. feladat módszerét.

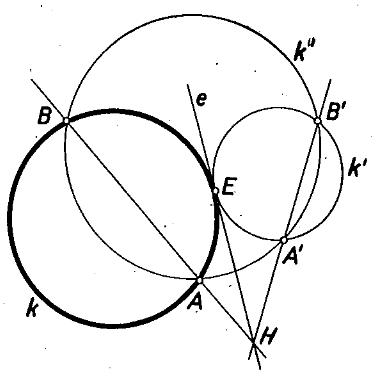
1336. Lásd az 1334. feladatot.

1339. Adott arányú két távolságot egymás mellé mérünk, és az így keletkezett szakasz fölé megrajzoljuk azt a körívet, melyről ez a szakasz az adott szög alatt látszik. Ha merőlegest állítunk a szakaszok egyenesére azok választópontjában, ez a körből egy a keresett háromszöghöz hasonlónak a harmadik csúcsát metszi ki.

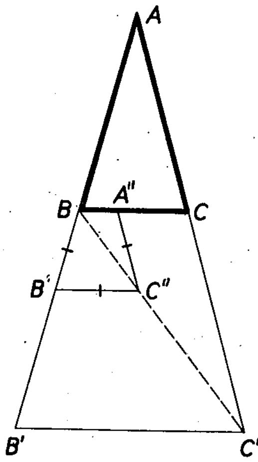
1340. Lásd az 1338. feladatot.

1342. Az adott szög szárai közé a szerkesztendőhöz hasonló háromszöget szerkesztünk, majd azt felnagyítjuk úgy, hogy a harmadik csúcs az adott pontba essék.

1343. Lásd az előző feladat megoldását.



1331



1347

1344. Tetszőleges egyenlő szárú háromszöget rajzolunk az adott szöggel, azután akkorára nagyítjuk, hogy az alap és a szár különbsége a kívánt nagyságú legyen.

1346. Lásd az előző feladat megoldását.

1347. A kérdéses meghosszabbítások adta szimmetrikus trapézhoz hasonlót tudunk szerkeszteni (az 1347. ábrán a $BB''C''A''$ trapéz), majd azt a B pontból felnagyítjuk a kívánt nagyságúra.

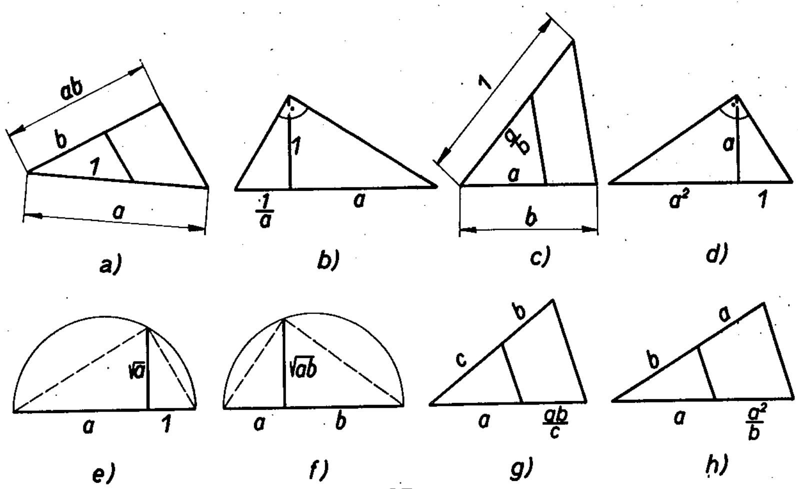
1348. A szerkesztendőhöz hasonló háromszöget tudunk szerkeszteni.

1349. Az adott magasság és súlyvonal ismeretében megszerkeszthetjük a súlyvonal alappal bezárt szögét. E szögnek és az adott alappal szemközti szögnek ismeretében a szerkesztendő háromszöghöz hasonlót szerkesztünk, majd a kívánt nagyságúra nagyítjuk.

1350. Lásd az előző feladat megoldásának gondolatmenetét.

1351. A számos szerkesztési lehetőség közül az alábbi ábrákon mutatunk a megoldáshoz egy-egy módszert (1351. ábra)

1352. L. pl. az 1206. feladatot.



1351

1353. A szerkesztést az előző feladat felhasználásával végezzük. Három távolságot szerkesztünk, melyek úgy aránylanak, mint $\frac{1}{m_a}:\frac{1}{m_b}:\frac{1}{m_c}$ (lásd az 1351. feladatot). Ezekből háromszöget szerkesztünk, és azt úgy nagyítjuk, hogy egyik magassága a kívánt hosszúságú legyen.

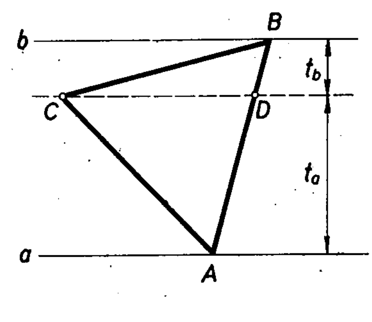
1354. Lásd az előző feladat megoldását.

1355. Mivel a háromszög magasságvonalai fordítottan arányosak a szemben fekvő oldalakkal; ha az adott oldalösszeget az adott $m_a:m_b$ arányban kettéosztjuk, megkapjuk a b és a oldal hosszát.

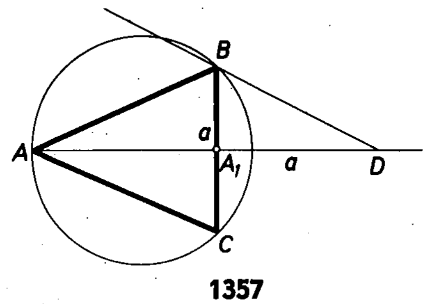
1356. Legyenek a és b az adott párhuzamos egyenesek (1356. ábra). Tekintsük a feladatot megoldottnak. Ha a C pontból az egyenesekkel párhuzamost húzunk, ennek AB oldallal való D metszéspontja olyan részekre osztja a c oldalt, melynek aránya ugyanaz, mint a C pont távolságaié a két párhuzamostól (az ábrán $t_a:t_b$). Így az ACD háromszöghöz hasonlót kapunk, ha tetszőleges szabályos háromszöget rajzolunk, annak egyik oldalát $t_a:t_b$ arányban kettéosztjuk, és az osztáspontot összekötjük a szemközti csúccsal. Ezt a háromszöget kell a kívánt nagyságúra nagyítani.

1357. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Hosszabbítsuk meg a magasságot talppontján, A_1-en túl, és mérjük rá az alapot. A létrejött A_1BD derékszögű háromszög befogóinak aránya 1:2. A D pont, majd ebből DB szerkeszthető (1357. ábra).

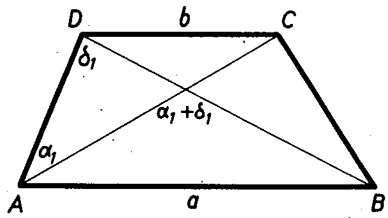
1358. Ha ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c a háromszög hozzáírt körök sugara, akkor (lásd az 1470. feladatot) $t = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c)$. Innen $s-a$, $s-b$, $s-c$-vel arányos távolságokat tudunk szerkeszteni. Mivel $(s-a)+(s-b) = c$, ezekből a szakaszokból a szerkesztendőhöz hasonló háromszöget tudunk szerkeszteni.



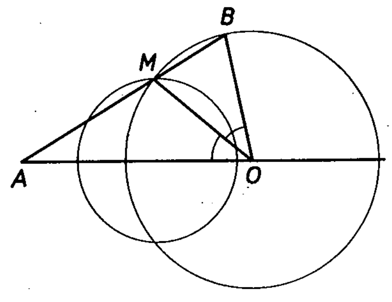
1356



1357



1359



1365

1359. Ismeretes, hogy a trapéz átlói a párhuzamos oldalak arányában osztják egymást, továbbá az 1359. ábráról leolvasható, hogy $\alpha_1+\delta_1$ szögben metszik egymást (α_1 és δ_1 két adott szög). Az elmondottak felhasználásával a szerkesztendő trapézhoz hasonlót tudunk szerkeszteni, majd azt hasonlósági transzformációval a kívánt nagyságra nagyíthatjuk.

1360. Nagyítsuk kétszeresére az adott pontból a közelebb eső szögszárat. A szerkesztendő szelő átmegy a másik szögszár és a nagyított szögszár metszéspontján.

b) Most a közelebb eső szögszárat P-ből nagyítsuk háromszorosára, egyébként ugyanúgy végezzük a szerkesztést, mint fent.

1361. *a)* Kicsinyítsük felére az adott pontból az adott kört. A szerkesztendő szelő átmegy az eredeti és a kicsinyített kör metszéspontján.

b) A szerkesztési eljárás lényegileg azonos az *a)* pontban közölttel, csak most az adott kört $^2/_3$-ára kicsinyítjük az adott pontból.

1362. Lásd az előző feladatot. Most hasonlósági középpontként a két kör közös pontja alkalmazható.

1363. A keresett összekötő egyenes párhuzamos a megrajzolt középponti szöghöz tartozó húrral. Húzzuk meg ezt a húrt, osszuk három egyenlő részre, és a két belső osztáspontot nagyítsuk ki a körvonalra.

1364. Lásd az előző feladat megoldását.

1365. Az AOB háromszögben OM szögfelező, ezért ha a kört A-ból $AM:AB = AM:(AM+MB) = AO:(AO+OB)$ arányban nagyítjuk, az M metszéspontot megszerkeszthetjük (1365. ábra).

1366. Lásd az 1360. feladat módszereit.

1367. Lásd az 1360. feladatot.

1368. A mértani hely az adott körnek a húrfelező pontból kétharmadára kicsinyített képe (a húr végpontjait kivéve).

1369. A szereplő érintési pontok O középpontú hasonlósági transzformációval egymásba vihetők. Így a mértani hely O-n átmenő félegyenes.

1370. Húzzunk a B csúcsból párhuzamost a szögfelezővel, ennek f' szakasza jut az $A\sphericalangle$ szárai közé. Hasonlóság miatt $f':f = (a+b):b$, ebből már f' és így a $BB'C$ háromszög szerkeszthető (1370. ábra).

1371. Jelöljük az AB úton levő elágazási pontot D-vel, az AC úton levőt E-vel. A feladat az 1371. ábrán látható egyenlő szakaszokból álló $BDEC$ törött vonal szerkesztése. Ennek tetszőleges kicsinyítettje a $BD'E'A'$ vonal. $E'A'$-t $D'E''$ helyzetbe tolva, a $BD'E''A'$ már szerkeszthető, mivel $D'E''$ párhuzamos AC-vel (1371. ábra).

1372. Lásd az előző feladat megoldási módszerét.

1373. Legyen az egyik szögszáron az érintési pont A, a másikon B, a hozzájuk tartozó körközéppontok O_1, ill. O_2. Lényegében az AO_1O_2B út megszerkesztése a feladatunk; itt az egyes szakaszoknak az arányát ismerjük, ehelyett azonban elegendő az $AO_1O_1'B$ út megszerkesztése, ahol az O_1O_1' az O_2B-ből eltolással keletkezik. Ehhez hasonló utat már az A pontból kiindulva tudunk szerkeszteni, és ezt A-ból kívánt arányban felnagyíthatjuk (1373. ábra).

1374. A feladatot az előzőre vezethetjük vissza, ha az adott érintési pontokban megszerkesztjük a körök érintőit.

1375. *a)* Az ABC háromszög AB oldalának és a szemközti γ szögnek birtokában megszerkeszthetjük a köré írt kört. Ezt az A csúcsból felére kicsinyítve, olyan kört kapunk, amely tartalmazza a B-hez tartozó súlyvonal végpontját.

b) Az AB oldal B csúcsából kétszeresére nagyítjuk az A csúcsú és az A-hoz tartozó súlyvonalnyi sugarú kört. Ezen van a C csúcs. (Más megoldás: Az A-t tükrözzük a BC felezőpontjára, így olyan háromszöget nyerünk, amelynek egyik szöge az adott szög kiegészítője.)

c) Az oldal és a magasságvonal segítségével olyan derékszögű háromszög szerkeszthető, amelynek egyik szöge a háromszögével azonos. A feladatot ezzel az előzőre vezettük vissza.

1376. A hasonlóság középpontja a súlypont.

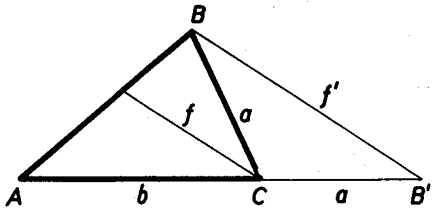
1377. Az előző feladatban leírt hasonlóság az ABC háromszög M magasságpontját az $A'B'C'$ háromszög O magasságpontjába viszi át. Ez utóbbi viszont az ABC háromszög köré írt körének a középpontja. Az M, S, O pontok tehát egy egyenesen vannak, és S harmadolja az OM szakaszt (1377. ábra).

1378. Az 1376. feladatban leírt hasonlósági transzformáció a háromszög szögfelezőit a szóban forgó egyenesekbe viszi át.

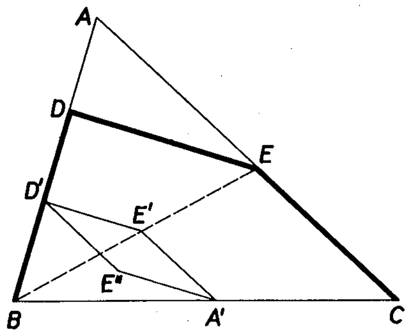
1379. Adott az A csúcs, az M magasságpont és az S súlypont. Az AS szakaszt A-ból $^3/_2$-szeresére nagyítva, a BC oldal F felezőpontját kapjuk, ebből az AM-re állított merőleges a BC egyenese. Az M-ből az MS szakaszt $^3/_2$-szeresére nagyítva, a köré írt kör O középpontját kapjuk, ennek birtokában OA sugárral a köré írt kör szerkeszthető (l. az 1377. feladatot).

1380. Tükrözzük a háromszög magasságpontját az oldalakra és az oldalfelező pontokra (1380. ábra). A tükörképek az 1079. és 1081. feladatok szerint a köré írt körön vannak. A köré írt kört a magasságpontból felére kicsinyítve, olyan kört kapunk, amelynek középpontja felezi a magasságpontot, a köré írt kör középpontjával összekötő szakaszt, sugara fele a köré írt körének, és átmegy a feladatban kikötött kilenc ponton.

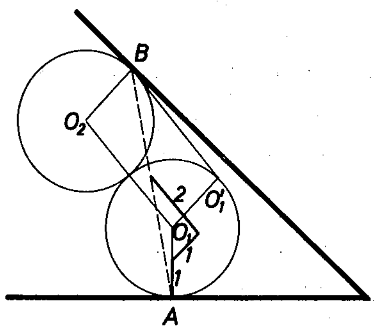
1381. A magasságvonalak talppontjai mind a négy háromszögben azonosak, tehát azonosak az általuk meghatározott Feuerbach-körök is.



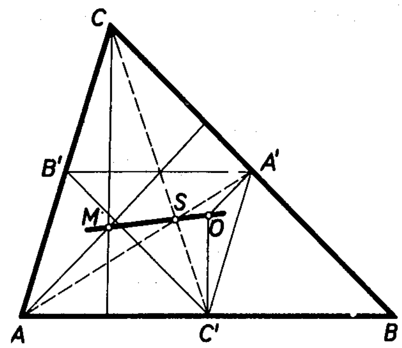
1370



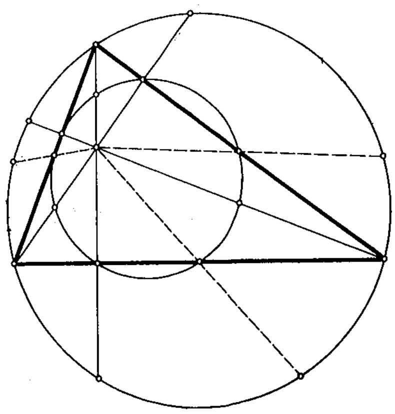
1371



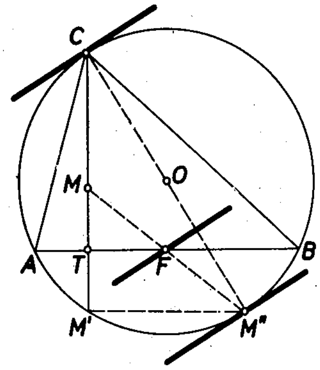
1373



1377



1380



1382

1382. A Feuerbach-kör 1380. feladatbeli származtatására gondolva, látjuk, hogy a TF szakaszt M-től kétszeresére nagyítva, az $M'M''$ húrt nyerjük, amely merőleges CM'-re, tehát C és M'' átellenes köri pontok, és így érintőik párhuzamosak, ezért párhuzamos velük az M''-beli érintő kicsinyítettje, a Feuerbach-kör F-beli érintője (1382. ábra).

1383. A hozzáírt körök középpontjai meghatározta háromszögben az eredeti háromszög szögfelezői magasságvonalak, tehát a hozzáírt körök középpontjai meghatározta háromszögnek az eredeti háromszög körül írt köre Feuerbach-köre (lásd az 1380. feladatot).

1384. Az állítás az 1380. és az előző feladat következménye.

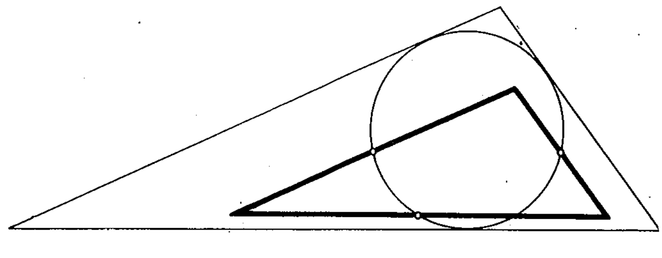
1385. A feladat állítása az 1380. és 1383. feladatok közvetlen következménye.

1386. Bármely három körközéppont olyan háromszöget határoz meg, amelynek talpponti háromszöge a szerkesztendő háromszög.

1387. *a)* Az 1384. feladat szerint az O középpontú köré írt kör felezi a hozzáírt körök O_1, O_2 középpontjait összekötő szakaszt. Ennek alapján a szerkesztést úgy kezdhetjük, hogy megszerkesztjük a háromszög köré írt kört OF sugárral, ahol F az O_1O_2 szakasz felezőpontja. Ez az O_1O_2 szakaszt még egyszer az A csúcsban metszi. A B és C csúcsokat az O_1O_2 fölé szerkesztett Thalész-kör metszi ki a körülírt körből.

b)-re a fentihez hasonló gondolatmenet alkalmazható.

1388. Szerkesszük meg a háromszög Feuerbach-körét (lásd a 181. feladatot), majd nagyítsuk fel annyira, hogy oldalai érintsék a Feuerbach-kört (1388. ábra). Legyen az eredeti háromszög köré írt kör sugara r, beírt

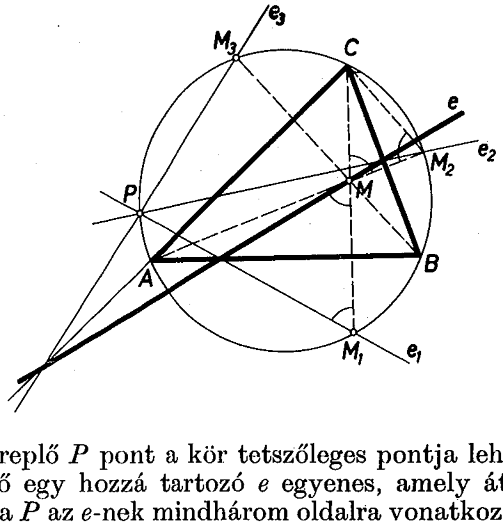


1388

köréé ϱ, a felnagyítotté r', ill. ϱ'. Az eredeti háromszög Feuerbach-körének sugara $r/2$, a felnagyítotté $r'/2$. A szerkesztésből következik, hogy

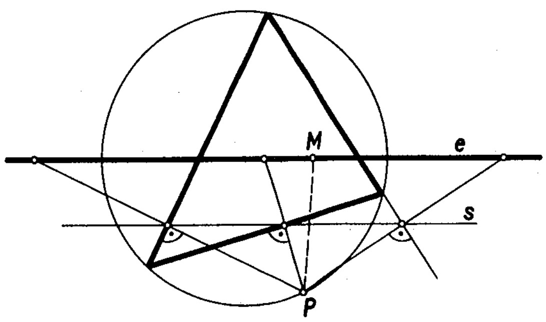
$$\varrho' = \frac{r}{2}, \text{ és } \varrho' \geqq \varrho, \text{ tehát } \frac{r}{2} \geqq \varrho.$$

1389. Elegendő kimutatni, hogy a tükrözött egyenesek közül bármelyik kettő a háromszög köré írt körén metszi egymást, hiszen a tükörképnek a körrel alkotott egyik metszéspontja a magasságpontnak az oldalra vonatkozó tükörképe (1389. ábra). Legyen az M magasságpontnak az oldalakra vonatkozó három tükörképe M_1, M_2, M_3. Messék egymást pl. az e_1, e_2 tükörképek a P pontban. A tükrözések miatt $PM_1M\sphericalangle = eMM_1\sphericalangle = eMC\sphericalangle = PM_2C\sphericalangle$. Ebből következik, hogy az M_1 és M_2 pontokból ugyanakkora szögben látszik a C pont és az e_1, ill. e_2 egyenesek közrezárta körív, tehát e_1 és e_2 a körön metszik egymást.



1389

1390. Az előző feladatban szereplő P pont a kör tetszőleges pontja lehet, minden P-hez szerkeszthető egy hozzá tartozó e egyenes, amely átmegy a magasságponton. Mivel a P az e-nek mindhárom oldalra vonatkozó tükörképén rajta van, ezért P-nek az oldalakra vonatkozó tükörképei rajta vannak az e egyenesen. Kicsinyítsük most e-t felére a P-ből, a kicsinyítés eredményeként kapott s egyenes átmegy a P-ből a háromszög oldalegyeneseire állított merőlegesek talppontjain, tehát ezek valóban egy egyenesen sorakoznak (1390. ábra).



1390

1391. Figyeljük meg az 1389. feladat ábráján az e egyenes és P pont összefüggését. Forgassuk el az e-t M körül α szöggel. Mint az ábráról leolvasható, a CM_1P kerületi szög is α-val változik, és így a CP-hez tartozó középponti szög is 2α-val. Ezért röviden azt mondhatjuk, hogy a P kétszer akkora szögsebességgel forog a kör középpontja körül, mint az e a magasságpont körül. Mivel pedig az s (Simson-egyenes) párhuzamos e-vel, ezért P forgása a Simson-egyenesek irányának feleakkora sebességű forgását vonja maga után (az s egyenesek azonban nem mennek egy ponton át).

1392. Az előző feladat szerint az átellenes köri pontokhoz merőleges Simson-egyenesek tartoznak. Húzzunk most az átellenes P_1, ill. P_2 körpontokba a hozzájuk tartozó Simson-egyenesekkel párhuzamosokat. Ezeket M-ből felére kicsinyítve, az 1390. feladat szerint a Simson-egyeneseket kapjuk vissza, viszont az M-ből felére kicsinyített kör éppen a háromszög Feuerbach-köre.

1393. A feladat az 1389. feladatnak megfordítása, és azzal egyenértékű.

1394. A feladat az 1389. és 1390. feladatok alapján oldható meg.

1395. Legyen a két adott pont A és B, az adott távolságarány $\lambda:\mu$. Ha P a sík olyan pontja, amelyre $PA:PB = \lambda:\mu$, jelölje az ABP háromszög P-hez tartozó belső és külső szögfelezőjének AB-vel alkotott metszéspontját X, ill. Y. Az XY mint átmérő fölé szerkesztett kör tartalmazza P-t, X-et és Y-t a $\lambda:\mu$ arány már meghatározza.

1396. A mértani hely az adott A, B pontokhoz és az adott szakaszarányhoz tartozó Apollonius-kör. A kör szimmetrikus az AB egyenesre, ezért elegendő az AB-vel alkotott metszéspontjait megszerkeszteni, azaz AB-n olyan pontokat keresni, amelyeknek A-tól, ill. B-től való távolsága az adott a és b szakaszok arányával egyenlő. Kiindulási párhuzamosokat húzunk A-n és B-n át, a kapott X és Y pontok eleget tesznek a kirótt feltételnek (1396. ábra).

1397. Az adott távolság végpontjaihoz és az adott arányhoz tartozó Apollonius-körön belül, ill. kívül.

1398. A keresett PQ egyenes és az AB egyenes metszéspontja legyen R. Ekkor $RA:RB = PA:BQ$, ez az arány tehát adott. Ilyen R pontot AB-n szerkeszthetünk (lásd az 1396. feladatot), majd azt C-vel összekötve a keresett egyenest nyerjük.

1399. Az adott befogóhoz és az adott befogószeletekhez mint szakaszarányokhoz tartozó Apollonius-kört meg tudjuk szerkeszteni. Az Apollonius-körből a derékszög másik szára metszi ki a befogóval szemközti háromszögcsúcsot.

1400. Lásd az előző feladat megoldását.

1403. Az adott oldal végpontjaihoz és az adott oldalarányhoz tartozó Apollonius-kör segítségével oldhatjuk meg a feladatot.

1404. A feladat megoldásánál pl. Apollonius-kör alkalmazható.

1405. A feladatok Apollonius-kör segítségével oldhatók meg. (L. az 1395. feladatot.)

1406. Ha P ilyen tulajdonságú, akkor a PE_1O_1 és a PE_2O_2 derékszögű háromszögek hasonlók, ezért $PO_1:PO_2 = r_1:r_2$ állandó, tehát a P pontnak az O_1 és O_2 középpontoktól mért távolságaránya állandó, P rajta van az O_1, O_2 pontokhoz és az $r_1:r_2$ arányhoz tartozó Apollonius-körön (1406. ábra). (Az igazolt állítás megfordítása is bizonyítható.)

1407. Az előző feladat ismételt alkalmazásáról van szó.

1408. Messük az adott irányú egyenessel a szög szárait, és szerkesszünk az így keletkezett szakaszhoz az adott aránynak megfelelő Apollonius-kört. Ezen, másrészt az adott ponton és a szög csúcsán átmenő egyenesen fekszik a keresett háromszöghöz hasonló háromszög csúcsa.

1409. Az AEB háromszöghöz hasonlót szerkeszthetünk. Az $AM:BM$ arány az átlók arányával egyenlő, tehát ismert. Ehhez az arányhoz és az A, B pontokhoz tartozó Apollonius-körből az EF súlyvonal metszi ki M-et. Az ábrát kívánt nagyságra felnagyíthatjuk (1409. ábra).

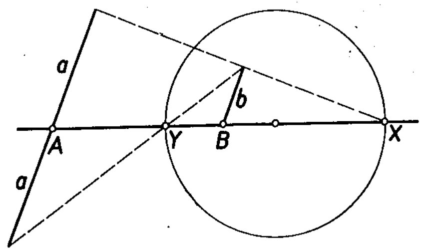
1410. A kérdéses metszéspont az *a)*, ill. *b)* esetben a két kör külső hasonlósági pontja.

1411. A kérdéses metszéspont az *a)*, ill. *b)* esetben a két kör belső hasonlósági pontja.

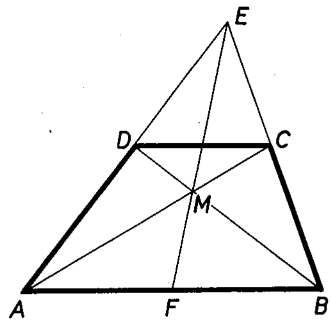
1412. Lásd az 1410. és 1411. feladatot.

1413. *a)* A belső hasonlósági pont a közös érintési pont.
b) A külső hasonlósági pont a közös érintési pont.

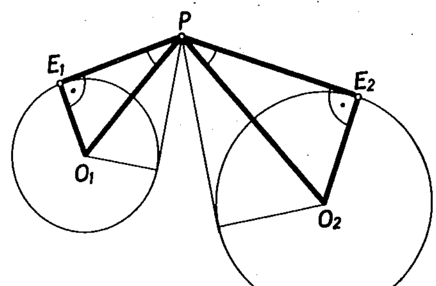
1414. Legyen az adott kör k, a szerkesztendő k'. E két kör hasonlósági pontja az E érintési pont. Az adott kör megfelelő érintője párhuzamos az adott egyenessel, így az érintési pontba vezető sugár merőleges rá. Ezzel az E_1 (ill. E_2) érintési pontot megszerkeszthetjük. Az E_1P (ill. E_2P) egyenes metszi ki az adott k körből az E (ill. F) hasonlósági pontot, amely egyúttal közös érintési pont is. A feladatnak általában két megoldása van (1414. ábra).



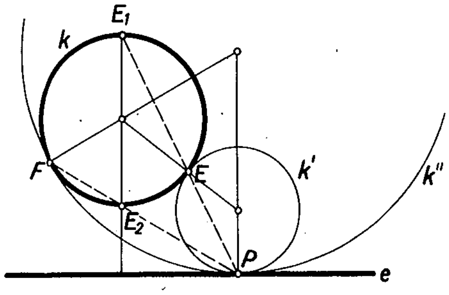
1396



1409



1406



1414

1415. Az adott érintési pontban megszerkesztjük a pontbeli érintőt. Ezzel a feladatot az előzőre vezettük vissza.

1416. Most az E_1E metszéspontja metszi ki az egyenesből a P pontot (1414. ábra).

1417. Lásd az 1414. feladat megoldását.

1418. Legyen az adott kör k, az adott pont P, az egyenes e. Az 1414. feladatból következik, hogy N, E, T egy egyenesbe esik. Kössük össze az adott P pontot N-nel, a szerkesztendő érintőkörrel alkotott metszéspontja legyen Q (1418. ábra). Ekkor a szelőtétel értelmében $NQ \cdot NP = NE \cdot NT$. Továbbá, mivel $RSET$ húrnégyszög, $NE \cdot NT = NR \cdot NS$. E két egyenlőséget összevetve, $NQ \cdot NP = NR \cdot NS$. De ekkor az 1326. feladatból következik, hogy $PQRS$ négyszög húrnégyszög. A szerkesztendő kör Q pontját megkapjuk, ha NP-t az R, S, P-n átmenő körrel elmetsszük. A feladatnak általában négy megoldása van.

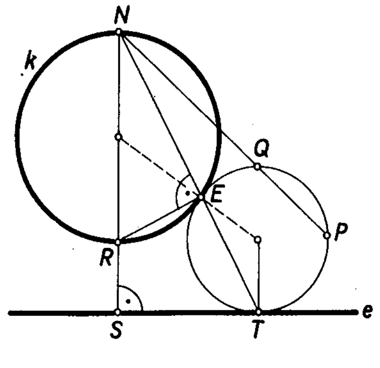
1419. Alkalmazzuk alkalmas módon a körzsugorítás módszerét, ezzel a feladatot az előzőre vezethetjük vissza.

1420. A feladat megoldási módszere hasonló az 1418. feladatéhoz. Most is az érintőkör P-től különböző Q pontját szerkesztjük meg. Ezzel a feladatot visszavezetjük adott kört érintő és két adott ponton átmenő kör megszerkesztésére (lásd az 1133. feladatot). Tekintsük a feladatot megoldottnak. Az E_1, E_2 érintési pontokat összekötő egyenes az 1420. ábrán látható szögek egyenlősége miatt átmegy a két kör S külső hasonlósági pontján. Továbbá az 1418. feladatban közölt gondolatmenettel azonos módon belátható, hogy az E_1E_2AB és az E_1E_2PQ négyszög húrnégyszög (lásd az ábrán egyformán jelölt szögeket) voltából következik, hogy az $ABQP$ négyszög is húrnégyszög. Mivel az A, B, P ismert pontok, a rajtuk átmenő kör metszi ki az SP egyenesből a Q pontot.

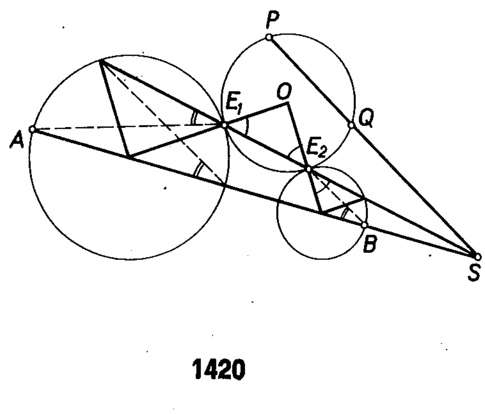
1421. Körzsugorítást alkalmazva, a feladatot az előzőre vezethetjük vissza.

1422. 36°, 72°, 72°.

1423. Szerkesszünk az AB szakaszt B-ben érintő, $\frac{a}{2}$ sugarú kört. Húzzunk ehhez A-ból a középpontján átmenő szelőt. A szelőnek a körön kívüli szakasza x, mert a feladat szerint $a^2 = x(x+a) = x^2+ax$, ebből $a(a-x) = x^2$, azaz $a:x = x:(a-x)$.



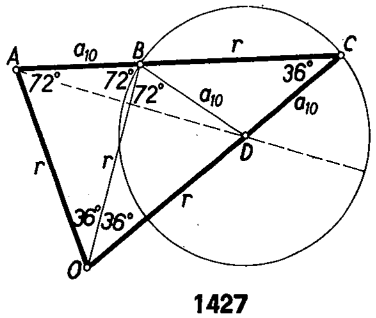
1418



1420

1425. A tízszög köré írt kör középpontját kössük össze két szomszédos csúccsal, így olyan egyenlő szárú háromszöget nyerünk, amelynek szárai 36°-os szöget zárnak be, és ezért az előző feladat alapján állításunk következik.

1427. Szerkesszük meg a szabályos tízszög egyik oldala és középpontja által alkotott egyenlő szárú OAB háromszöget, és egészítsük ki azt az egyenlő szárú ACO háromszöggé (1427. ábra). Mérjük rá az $OA = r$ szakaszt az OC szárra, ennek végpontja D. A D körül a_{10} sugárral szerkesztett kör átmegy B-n és C-n, az AD szakasz éppen a_5-tel egyenlő. Az A ponttól a körhöz húzott két szelő metszeteinek szorzata egyenlő, azaz $a_{10}(a_{10}+r) = (a_5-a_{10})(a_5+a_{10}) = a_5^2-a_{10}^2$, viszont mivel a_{10} az r-nek aranymetszete, az 1423. feladat alapján $a_{10}(a_{10}+r) = r^2$, tehát $a_{10}^2+r^2 = a_5^2$.



1427

1428. A BC szakasz az 1423. feladat szerint r-nek aranymetszete, tehát a_{10}-zel egyenlő, AB pedig az előző feladat eredménye miatt egyenlő a_5-tel.

1429. 60 m².

1430. $\sqrt{136}$ cm.

1431. Kilencszeresére.

1432. 15-szörösére.

1433. $\sqrt{5}$-szörösére.

1434. 2,25 km².

1435. 7,5 cm.

1436. 30°, ill. 150°.

1437. *a)* $28\sqrt{3}$, *b)* 28, *c)* $28\sqrt{2}$.

1440. 40 cm².

1441. 9,6 m.

1442. $7\sqrt{68{,}75}$ cm².

1443. 42 cm².

1444. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

1445. $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

1446. $\frac{m^2}{\sqrt{3}}$.

1447. $2\sqrt{t}$.

1448. *a)* $63\sqrt{527}$, *b)* $36\sqrt{145}$, *c)* $13\sqrt{155}$.

1449. $t = \dfrac{a^2}{(1+\sqrt{3})2} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)a^2}{4}$.

1450. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

1451. Az 1450. feladat szerint a négy háromszög területe egyenlő, a kérdéses terület tehát: $4\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+3a^2 = a^2(\sqrt{3}+3)$.

1452. $t = \dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$.

1453. $t = \dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$.

1454. Az állítás a magasságok egyenlőségéből következik.

1455. 80 cm^2.

1456. $8\sqrt{24}$.

1457. $2\sqrt{2}$ cm^2.

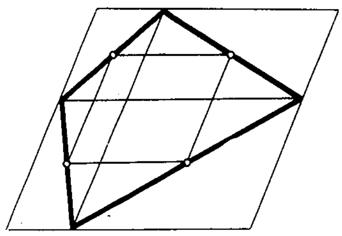
1458. 288 cm^2.

1459. 540 m^2.

1460. $t = m^2$.

1461. $t = 216$ cm^2.

1462. Nagyítsuk fel kétszeresére a paralelogrammát a négyszög átlóinak metszéspontjából. Az 1462. ábráról leolvasható, hogy a felnagyított paralelogramma területe a négyszögének éppen kétszerese.



1463. Az 1462. ábra alapján világos, hogy a négyszög kétszeres területével egyenlő területű paralelogramma oldalai és szögei csak a négyszög átlóitól és azok szögétől függenek.

1464. 48 cm^2.

1465. Az állítás következik az 1462. feladatból.

1466. 428.

1467. 741.

1468. *a)* 48, *b)* 30, *c)* 36.

1469. 14,24 m².

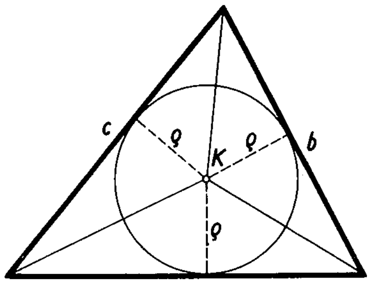
1470. *a)* Legyen a beírt kör középpontja K, sugara ϱ (1470.*a* ábra).

$$t = \frac{a\varrho}{2}+\frac{b\varrho}{2}+\frac{c\varrho}{2} = \varrho\frac{a+b+c}{2} = \varrho s; \quad \varrho = \frac{t}{s}.$$

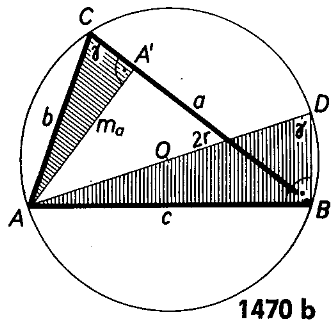
b) A köré írt kör sugara r, középpontja O, és legyen γ hegyesszög. Ekkor az $AA'C$ és ABD háromszögek hasonlósága miatt $b:m_a = 2r:c$, $r = \frac{bc}{2m_a}$.

Mivel $m_a = \frac{2t}{a}$, $r = \frac{abc}{4t}$ (1470.*b* ábra).

c) Az *a)*-hoz hasonló gondolatmenettel $\varrho_a = \frac{t}{s-a}$.



1470 a



1470 b

1471. A két derékszögű háromszög szögei egyenlők (merőleges szárú szögek).

1472. A 642., 643. feladatok alapján $EB = s-b$, $BE' = s-c$. Az előző feladatokban kimutatott hasonlóságok miatt $\varrho:(s-b) = (s-c):\varrho_a$. Vegyük figyelembe ϱ és ϱ_a 1470. feladatban meghatározott értékeit:

$$\frac{t}{s}\cdot\frac{t}{s-a} = (s-b)(s-c), \text{ ebből } t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

1473. *a)* $10\sqrt{2}$, *b)* 60, *c)* 486.

1474. 20 cm. (A legkisebb magasság a legnagyobb oldalhoz tartozik.)

1475. $2\sqrt{455}$.

1476. 144 cm².

1477. 30 cm.

1478. 1224 cm².

1479. A négyszög területe 546 cm², a másik átló $\sqrt{1621}$ cm.

1480. 480 cm². (Kiindulhatunk úgy, hogy a trapézt egy háromszögre és egy paralelogrammára bontjuk fel; a háromszög magasságát – ami egyúttal a trapéz magassága – Heron képletével meghatározhatjuk.)

1481. A negyedik oldal d; mivel $9+7 = 12+d$, $d = 4$. Legyen a beírt kör sugara ϱ. Az 1470.*a* feladat megoldásához hasonlóan $t = 48 = \frac{\varrho}{2}(9+12+7+4)$, $\varrho = 3$.

1483. A két rész a középpontra tükrös, tehát egybevágó is.

1484. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben az f egyenes felezi a paralelogramma területét, de nem megy át a K középponton. Húzzunk K-n át f-fel párhuzamos f' egyenest, ez az előző feladat szerint felezi a paralelogrammát, de ez lehetetlen, mert akkor az $ABCD$ és $AEFD$ négyszögek területének mindegyike egyenlő lenne a paralelogramma területének a felével (1484. ábra).

1485. 2.

1486. *a)* 0,8 cm, *b)* 4 m, *c)* 2,3 dm.

1487. 5,1 cm².

1488. 15 cm.

1489. Közelítőleg 4 cm.

1490. A C_1, ill. C_2 csövek keresztmetszetének területe együttesen akkora, mint a C_3 keresztmetszetének területe, tehát $8^2\pi+6^2\pi=\left(\frac{x}{2}\right)^2\pi$, ebből $x = 20$ cm.

1491. 1 dm.

1492. 15,7 m².

1493. 24 m².

1494. $\frac{a^2\pi}{4}$. (Fejezzük ki a két kör sugarát a segítségével.)

1495. *a)* $0{,}19\cdot\pi\cdot r^2$, *b)* $0{,}04\cdot\pi\cdot r^2$.

1496. *a)* $\frac{r^2}{4}(\pi-2)$; *b)* $\frac{r^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$.

1497. *a)* $\frac{a^2}{36}(4\pi-3\sqrt{3})$; *b)* $\frac{a^2}{8}(\pi-2)$; *c)* $\frac{a^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$.

1498. 3100 m².

1503. Alakítsuk át az $ABCD$ trapézt először $AB'C'D$ paralelogrammává (1503. ábra).

1505. Bontsuk a középvonallal két részre a szóban forgó háromszöget.

1506. Egyenlőkből egyenlő területdarabokat veszünk el.

1508. Figyeljük meg az 1508. ábrán látható átalakítást.

1509. Húzzunk a bevonalkázott háromszög alsó csúcsaiból párhuzamosokat az a-val jelzett szakaszokkal, így a feladatot az előzőre vezethetjük vissza.

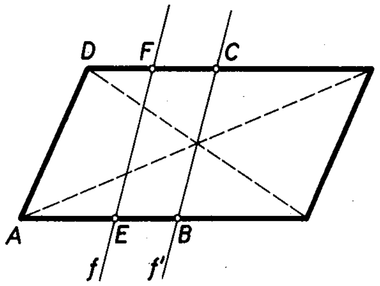
1511. Forgassuk el a középső háromszöget egy-egy csúcsa körül 90°-kal.

1512. Egy-egy ábrán a pontozott és vonalkázott részek egyenlők (1512. ábra).

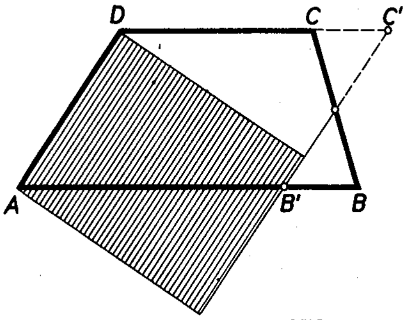
1513. Az 1513. ábrán jelzett átdarabolással az állítás azonnal belátható.

1514. Az átlókkal párhuzamos egyenesek metszéspontja Q, az oldalfelező pontok X, Y, Z, U (1514. ábra). Azt kell megmutatni, hogy a szóban forgó négyszögek mindegyike negyedrésze az $ABCD$ négyszögnek. Mutassuk meg ezt pl. az $AXQU$ négyszögre. $AXQU$ egyenlő terület $AXFU$-val, ahol F az AC felezőpontja. Az $AXFU$ viszont valóban negyedrésze az $ABCD$-nek, mert $\frac{1}{2}$-szeres kicsinyítéssel származik abból.

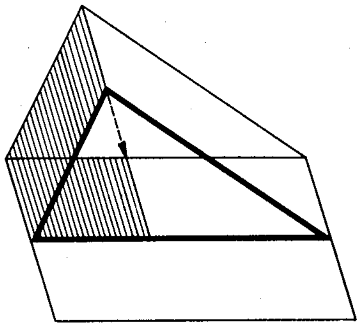
1515. Az 1515. ábrán látható felosztásban szereplő háromszögek egyenlő területűek, ezért a nagy háromszög területe a kiindulási háromszögének hétszerese.



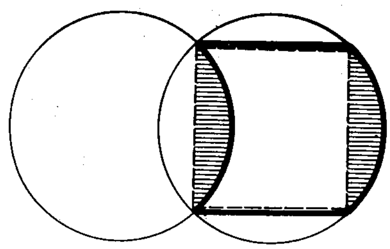
1484



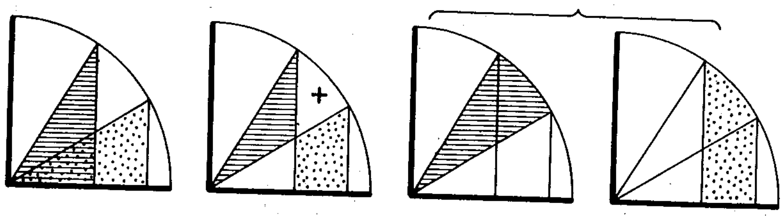
1503



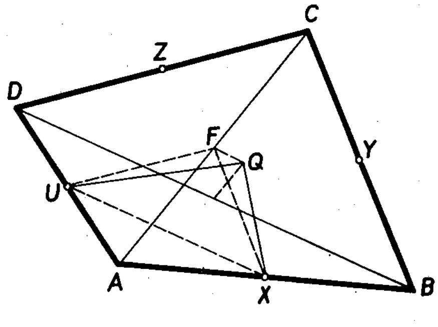
1508



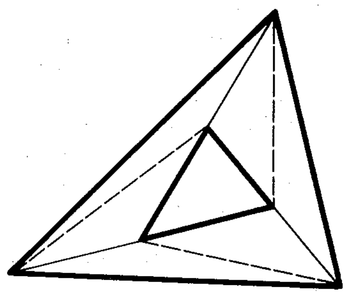
1513



1512



1514

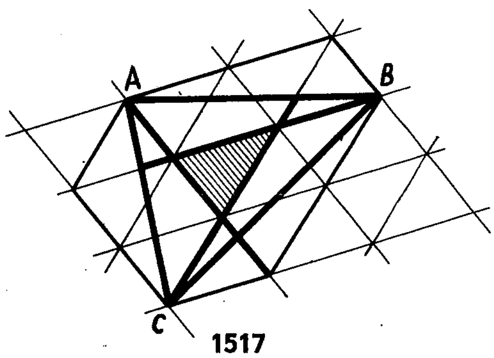


1515

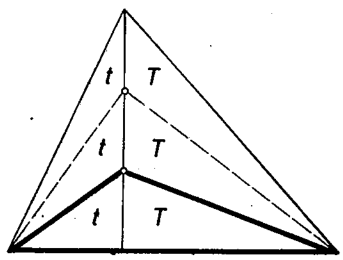
1516. A nagy négyszög területe az eredetinek ötszöröse.

1517. Osszuk az ABC háromszög AC és CB oldalát három egyenlő részre (1517. ábra). Kössük össze az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontját B-vel, és húzzunk ezzel párhuzamos egyeneseket a másik harmadolóponton és a végpontokon át. Hasonlóan járjunk el a BC oldal C-hez közelebb eső harmadolópontjaiból kiindulva is. Ezzel háromszögünket egy paralelogrammarácsba foglaltuk, amely 3×3 kis paralelogrammára van bontva. Meghúzzuk a nagy paralelogramma C-ből kiinduló átlóját és a kis paralelogrammák ezzel párhuzamos átlóit. Így egymással párhuzamos és egyenlő távolságokban elhelyezkedő egyeneseket kapunk. Kettő közülük átmegy A-n, ill. B-n, a másik kettő metszi az AB oldalt, és így azt három egyenlő részre osztja. A B-hez közelebbi egyenes átmegy C-n is. Ilyen módon egy egybevágó háromszögekből álló hálóval fedtük le az ABC háromszöget. A háromszögekből leszámlálható, hogy a vonalkázott háromszög az ABC háromszögnek hetedrésze.

1518. Az 1518. ábrán egyformán jelölt területrészek egyenlők, tehát a szóban forgó terület a háromszög területének harmadrésze.



1517



1518

1519. Ha az átlók egyenlő részekre bontják a négyszöget, akkor bármelyik oldal végpontjait, pl. A-t, B-t a szemközti csúcsokkal összekötve, az ABC és ABD egyenlő területű háromszögeket kapjuk, ezért AB és CD párhuzamosak. Tehát bármely szemközti oldalpár párhuzamos.

1520. Az átló harmadolópontja.

1521. A háromszög területének hatodát.

1522. Az 1522. ábrán látható átdarabolásokat elvégezve, a kereszt alakú idomról leolvashatjuk, hogy a kis négyzet területe az eredetinek ötödrésze.

1523. A holdacskák területét megkapjuk, ha a háromszög és a befogók fölé szerkesztett félkörök területének összegéből levonjuk az átfogó fölé szerkesztett félkör területét.

1524. Az átmérő metszetei a, b, a közös érintőszakasz m. A derékszögű háromszög magasságára vonatkozó ismert összefüggés szerint $m^2 = ab$.

1525. A derékszögű háromszög a, b, c hosszúságú oldalai fölé szerkesztett sokszögek területei legyenek T_a, T_b, T_c. Mivel a hasonlóság miatt $\frac{T_a}{a^2} =$

$$= \frac{T_b}{b^2} = \frac{T_c}{c^2} = k, \text{ ezért } T_a + T_b = k(a^2+b^2) = kc^2 = T_c.$$

1526. Lásd az 1525. feladatot.

1527. A területkülönbségek Pitagorasz tétele szerint a magasság fölé szerkesztett négyzet területével egyenlők.

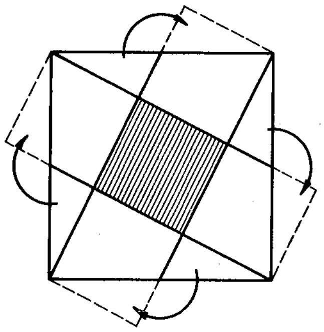
1528. A szóban forgó téglalapokat az 1528. ábrán vonalkázott paralelogrammákká alakítjuk át, ezek az A csúcs körüli forgatással egymásba forgathatók.

1529. Hogy a pontozott részek a négyzet területének negyedét adják, az 1529. ábráról leolvasható. A két félkör területének összege a nagy kör egynegyedével egyenlő, ebből következik, hogy a vonalkázott területek egyenlők.

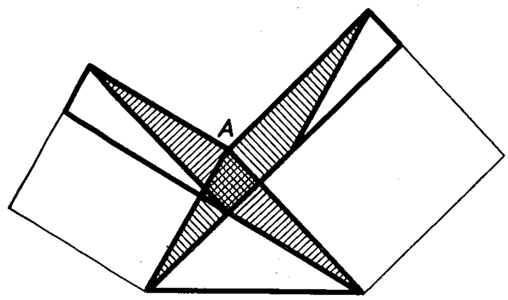
1530. A háromszög és félkör területének összegéből vonjuk ki a negyedkör területét.

1531. Az átalakítás az 1531. ábráról leolvasható, a vonalkázott az átalakítással nyert paralelogramma.

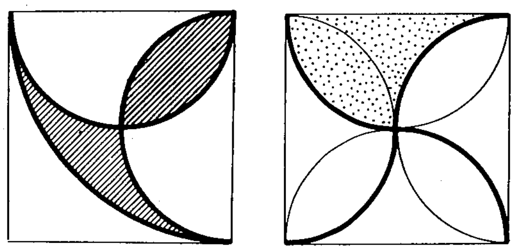
1532. Az α szöget tartjuk meg, AB' az új oldalhossz (1532. ábra).



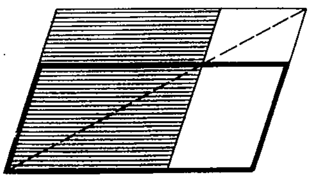
1522



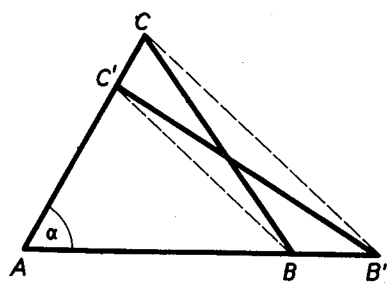
1528



1529



1531



1532

1533. Először úgy alakítjuk át, hogy egyik oldala adott legyen (pl. az előző feladat alapján), majd az ezzel szemközti csúcsot az alap felező merőlegesére „csúsztatjuk”.

1534. Lásd az 1534. ábrát.

1535. Lásd az 1535. ábrát.

1537. A téglalapot először adott szögű, majd adott oldalú paralelogrammává alakítjuk (lásd az 1531. feladatot).

1538. A háromszöget először a háromszögével egyező alapú téglalappá alakítjuk, majd utána adott oldalú téglalappá. (Az 1538. ábrán az első lépés van meg, a második lépés megegyezik az előző feladat második lépésével.)

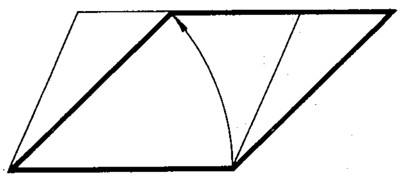
1539. Az ötszöget először tetszőleges háromszöggé alakítjuk (1539. ábra).

1540. Az egyenesek átmennek az alap n részre osztásának osztópontjain.

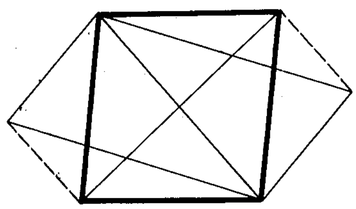
1541. Az 1541. ábra mutatja az n részre osztást, előbb páros (6), majd páratlan (5) esetben.

1542. A súlyvonallal kettéosztott háromszög mindkét felét három-három részre osztjuk, és ezekből kettőt-kettőt egyesítünk.

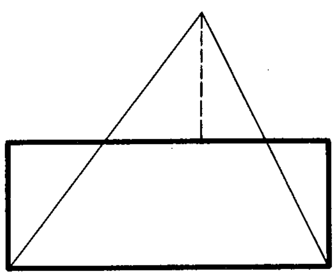
1543. A négyszöget először az átló felezőpontján átmenő törött vonallal vágjuk két egyenlő részre, utána ezt a törött vonalat kiegyenesítjük (1543. ábra).



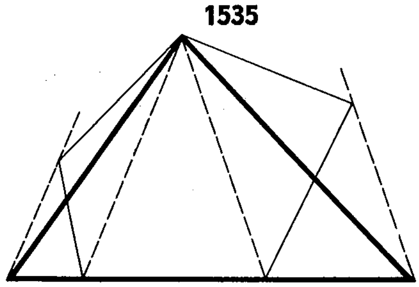
1534



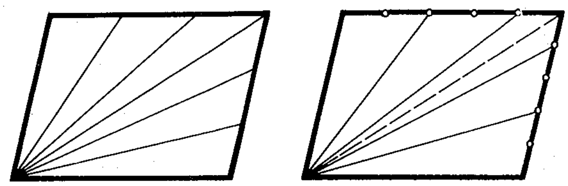
1535



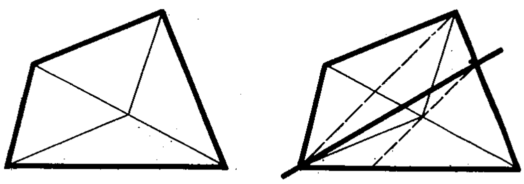
1538



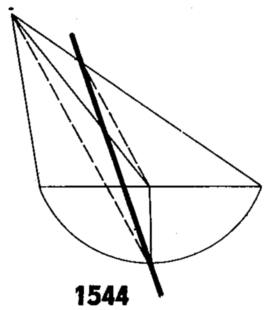
1539



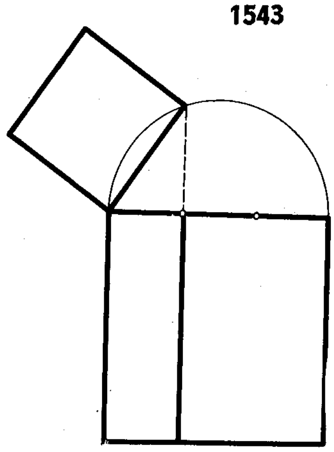
1541



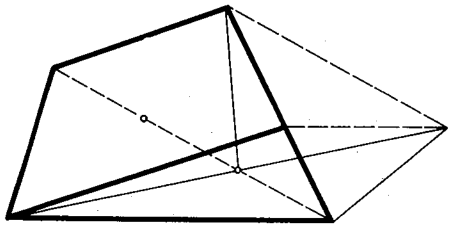
1543



1544



1550



1546

1544. Először törött vonallal osztjuk két egyenlő részre, azután „kiegyenesítjük” a törött vonalat (1544. ábra).

1545. Lásd az 1544. feladatot.

1546. Először törött vonalakkal bontsuk szét a négyszöget, majd arra törekszünk, hogy a négyszög harmadával egyenlő területű darabot messünk le a négyszögből (1546. ábra).

1547. A keresett pont a háromszög súlypontja.

1548. Tegyük fel, hogy a keresett egyenes $A'B'$. Az eredeti és az $A'B'C$ hasonló háromszögek területének aránya a megfelelő oldalak négyzetének arányával egyenlő, tehát pl.: $CB^2:CB'^2 = 2:1$, ebből $CB:CB' = \sqrt{2}:1$, azaz CB és CB' aránya egy négyzet átlójának és oldalának arányával egyenlő. Ennek alapján B' szerkesztését elvégezhetjük.

1549. A feladat egyszerűen megoldható Pitagorasz tétele alapján.

1550. Az a oldalú négyzet harmadrészeként kapott téglalapot kell négyzetté alakítani (1550. ábra).

1551. A feladatot úgy is fogalmazhatjuk, hogy adott egy derékszögű háromszög átfogója (az adott négyzet oldala) és két befogójának összege (az adott szakasz), szerkesztendő a háromszög.

1552. A szerkesztendő kör sugara az eredetinek $\sqrt{2}$-szerese; úgy aránylanak egymáshoz, mint a négyzet oldala és átlója.

1553. A nagy kör sugara $\sqrt{2}$-szerese a szerkesztendő körének, a feladatnak ez a része az előzőnek fordítottja.

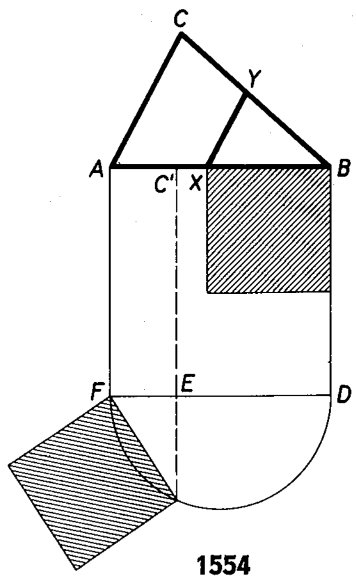
1554. Legyen az adott háromszög Δ_1, ebből a Δ_2-vel egyenlő területű háromszöget kell levágni. Δ_2-t alakítsuk át először úgy, hogy egyik szöge Δ_1-ével egyezzék meg, és helyezzük bele Δ_1-be, majd az egyik csúcson átmenő egyenessel messünk le a háromszögből Δ_2-vel egyenlő területű darabot. A Δ_1 és Δ_2 területek aránya az $ABDF$ négyzet és az $AC'EF$ téglalap területének arányával egyenlő. Alakítsuk át a téglalapot négyzetté, és helyezzük bele ezt a négyzet B csúcsú sarkába. A BXY és a BAC hasonló háromszögek területének aránya a megfelelő oldalaik fölé szerkesztett négyzetek területével arányos. Ezért XY éppen a kitűzött területdarabot metszi le a háromszögből (1554. ábra).

1555. A feladat az előzőre vezethető vissza: a szögszárból készített derékszögű háromszögből adott területű darabot kell lemetszeni az egyik befogóval párhuzamosan.

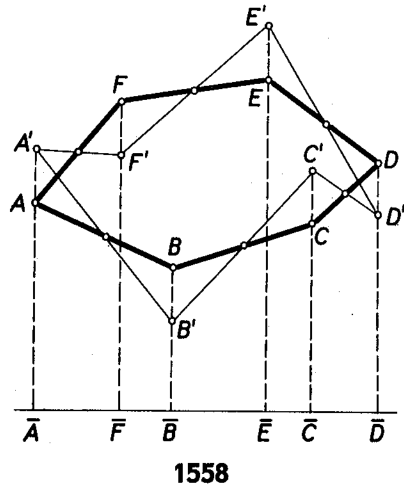
1556. A háromszög alapján fekvő kisebb szögből a szögszárra merőlegesen adott területű darabot kell lemetszeni, ez tulajdonképpen az előző feladat.

1557. A feladat lényegében az, hogy a 60°-os szögből az egyik szárra merőlegesen a négyzet felével egyenlő területű háromszöget messünk le. Ehhez lásd az előző két feladatot.

1558. Az 1558. ábra az igazolás menetét hatszögre mutatja. Legyen az egyik hatszög $ABCDEF$, a másik $A'B'C'E'F'$. Az AA', BB', ... stb. szakaszok párhuzamosak, mert egymásnak az oldalfelező pontokra vonatkozó tükörképei. E szakaszokra merőlegesen vegyünk a sokszögön kívül egy e egyenest. A csúcspontok és az e-n levő merőleges vetületek trapézokat alkotnak, mindkét sokszög területe előállítható e trapézok területének összegeként, ill. különbségeként. A két sokszöghöz tartozó megfelelő trapézok területe azonban megegyezik, mert pl. az $A\bar{A}\bar{B}B$ trapéz területe megegyezik az $A'\bar{A}\bar{B}B'$ területével, mert mindkettőnek egyenlő a középvonala és a magassága



1554



1558

1559. A kötél legmagasabb pontja és két rögzített pontja olyan egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja 2000, szárai 1000,5 m hosszúak. Ebből a magasság kb. 31,6 m.

1560. 6,11.

1561. $BD \approx 4{,}97$ m (vagy 4,98 m).

1562. 20,04 m.

1563. 2,2 m.

1564. A csúszda hossza kb. 11 m (1564. ábra).

1565. $\sqrt{a^2+b^2}$ cm távol.

1566. 216,64 m.

1567. 9,3 m.

1568. 15 cm.

1569. A háromszög alapja 240 cm, a száruk hossza 125 cm.

1570. $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\varrho = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (gondoljunk arra, hogy szabályos háromszögnél a beírt és a köré írt kör középpontja azonos a súlyponttal).

1571. $r\sqrt{3}$.

1572. $a = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

1573. $a\sqrt{3}$, ill. $3{,}6\sqrt{3}$ m $\approx 6{,}2$ m.

1574. A vízszintes egyenesek távolsága 14 mm, a függőlegeseké kb. 24 mm.

1575. $a\sqrt{3}$.

1576. $\frac{b\sqrt{3}}{3}$.

1577. $a = 2d(2+\sqrt{3})$.

1578. Az átfogó $4\sqrt{3}$ cm, a befogó $2\sqrt{3}$ cm.

1579. *a)* $D \approx 25{,}2$ mm,

b) $d \approx 19$ mm,

c) $h \approx 11$ mm,

d) $D = d + \frac{2}{3}h\sqrt{3}$.

1580. $2\sqrt{2} \approx 2{,}82$ cm.

1581. 29 cm.

1582. 25 cm vagy 11 cm.

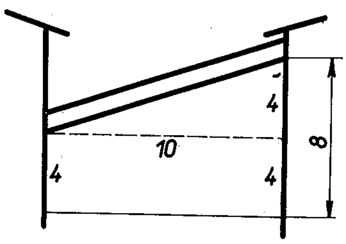
1583. *a)* $a\sqrt{2}$,

b) $\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

1584. $2(\sqrt{2}+1) \approx 4{,}82$ cm.

1585. $r\sqrt{2}$.

1586. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.



1564

1587. Legalább 40 cm átmérőjű gömbfából.

1588. $32\sqrt{2} \approx 45{,}3$ mm.

1589. Nem lehet, mert a készítendő négyzet alapú gerenda átmérője $10\sqrt{2} \approx \approx 14{,}1$ cm lenne.

1590. 32 cm és 60 cm.

1591. $\sqrt{97} \approx 9{,}849$.

1592. 10 cm.

1593. 37 cm.

1594. 3 dm, ill. 4 dm.

1595. 13,44 cm.

1596. 13,7 cm.

1597. 2 cm.

1598. $m = 24$ cm.

1599. 36 cm, ill. 54 cm.

1600. Legyen a másik alap $2x$ (1600. ábra), az oldalak 3,6 és 6,8.

1601. Lásd az előző feladat módszerét, $r = 3\sqrt{10}$ cm.

1602. 7 m.

1603. $\sqrt{2ab}$.

1605. $m \approx 40$ cm.

1606. 7 cm és 25 cm.

1607. 175 cm és 600 cm.

1608. 3, ill. 4 cm.

1609. Legyen a befogó hossza a. A szögfelező a befogót $a(\sqrt{2}-1)$ és $a(2-\sqrt{2})$ részekre osztja.

1610. A befogó hossza: $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$, az átfogó hossza: $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$.

1611. 9 cm, $1\frac{5}{7}$ cm, $14\frac{2}{7}$ cm.

1612. 49:81.

1613. 10 cm.

1614. 5 cm.

1615. 39 mm.

1616. $\sqrt{9{,}75}$ cm $\approx 3{,}12$ cm.

1617. 14 cm vagy 4 cm.

1618. 21 cm.

1619. $r = 25$ cm.

1621. 9 cm vagy 39 cm.

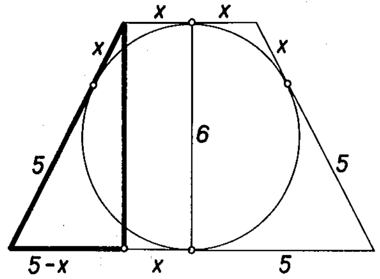
1622. $r = \dfrac{a^2+4h^2}{8h}$.

1623. *a)* Az átmérő 425 mm hosszú,

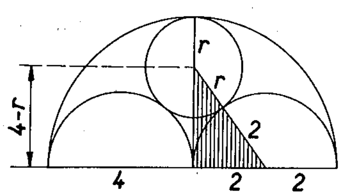
b) $d = \dfrac{l^2+4s^2}{4s}$.

1624. $r = 3\sqrt{205}$ cm.

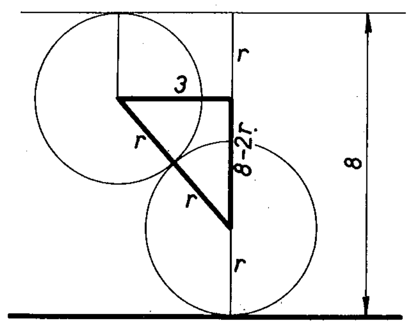
1625. 77 cm.
1626. 12 cm.
1627. 61 cm.
1628. 13,44 cm.
1629. 65 cm.
1630. $r = 20$ cm.
1631. 4.
1632. 12,2 cm.
1633. $\sqrt{60}$, ill. $\sqrt{48}$.
1634. *a)* 48 cm,
b) 30 cm.
1635. 40 cm.
1636. Az érintőkörök sugara legyen R és r. A kérdéses érintőszakasz hossza: $\sqrt{2Rr}$.
1637. $\sqrt{3} \approx 1,7$ m.
1638. $R = 29$ dm és $r = 21$ dm.
1639. Az 1639. ábrán vastagon kihúzott háromszögből $r = 73/32$.
1640. $r = 3$ cm.
1641. $r = \frac{3a}{8}$ (a a vízszintes keresztfa hossza).
1642. Jelöljük a kérdéses kör sugarát r-rel. Az 1642. ábrán vonalkázott derékszögű háromszög oldalai $2,4-r$, $2+r$, ebből $r = \frac{4}{3}$.



1600



1642



1639

1643. Az 1643. ábra alapján $x = 0{,}3R$.

1644. Az 1644. ábra felhasználásával nyerjük, hogy $r = 1{,}5$.

1645. A körközéppontok meghatározta háromszög magasságának négyzetét fejezzük ki a magasság által létrehozott két derékszögű háromszögből: $m^2 = (r+3)^2-(3-r)^2$ és $m^2 = (9-r)^2-(3+r)^2$. Ebből $r = 2$ (1645. ábra).

1646. Az oldalak $2{,}4\sqrt{5}$, $1{,}8\sqrt{5}$.

1647. $m = 24$ cm.

1648. A szár hossza $4\sqrt{5}$.

1649. $r = 3{,}75$.

1650. $\varrho = 10$ cm.

1651. $\varrho = 7{,}5$ cm.

1652. Az ABB' derékszögű háromszögből $AB = \sqrt{61}$, és $AF = \frac{\sqrt{61}}{2}$. Az ABB' és az AEF háromszögek hasonlósága miatt $5:6 = x:\frac{\sqrt{61}}{2}$, ebből $x = 3{,}25$ m (1652. ábra).

1653. Egészítsük ki a tetőszerkezet rajzát az 1653. ábrán látható módon. Az AGD derékszögű háromszögből AD kiszámítható, és $AF = \frac{AD}{2}$. A HBA és az AGD háromszögek hasonlósága miatt $HA:AB = AD:DG$, ebből HA-t ki tudjuk számítani, így most már $HA+AF = HF$ is ismert. Mivel az AGD és HFE háromszögek ugyancsak hasonlók, $EF:HF = DG:AG$, ebből EF meghatározható ($EF = 3{,}93$ m).

1654. 101 cm.

1655. Az m magasság a hozzá tartozó oldalt x és $63-x$ hosszúságú darabokra osztja. A magasság által létrehozott két derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét, nyerjük, hogy $m^2 = 25^2-x^2$, és $m^2 = 52^2-(63-x)^2$. Ebből $x = 15$, $m = 20$.

1656. Lásd az előző feladat módszerét:

a) 19,38; 12,6; 12,
b) 16,38; 25,20; 15,60.

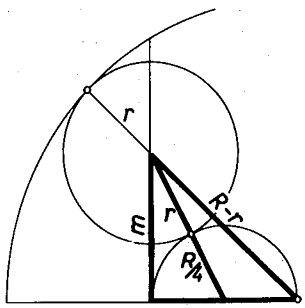
1657. Húzzunk a trapéz rövidebb alapjának egyik végpontján át a másik szárral párhuzamost, ez olyan háromszöget metsz le a trapézből, amelynek oldalai 9, 10, 17. A feladat e háromszög 10-es oldalához tartozó magasságának meghatározása (lásd az 1565. feladatot). $m = 7{,}2$.

1658. Lásd az előző feladatot. $m = 5{,}6$ cm.

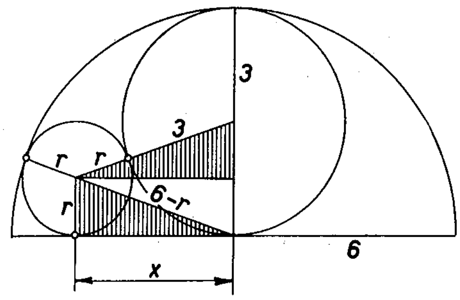
1659. $\frac{r\sqrt{10}}{5}$.

1660. Jelöljük a kis körök sugarait r_1-gyel; középpontjaik $r-r_1$ sugarú körbe írt szabályos háromszöget határoznak meg, r_1 fele a háromszög oldalának: $r_1 = \frac{(r-r_1)\sqrt{3}}{2}$. Ebből $r_1 = r\cdot(2\sqrt{3}-3)$.

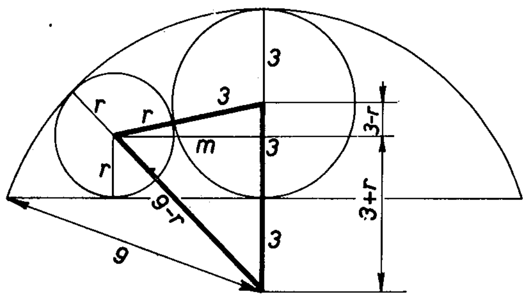
1661. Az 1661. ábrán vastagon kihúzott négyszögekből egy olyan szabályos háromszöget lehet összerakni, amelynek beírt köre az egyik körrel egyenlő, oldala pedig: $a-2r$, ezért az 1570. feladat alapján $r = \frac{1}{4}a(\sqrt{3}-1)$.



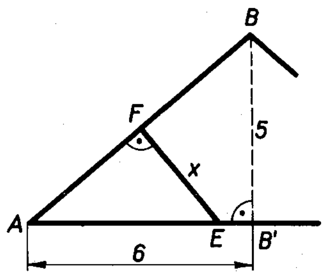
1643



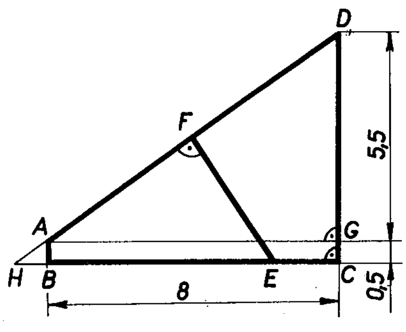
1644



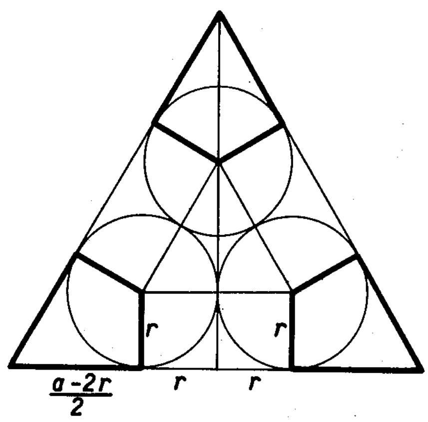
1645



1652



1653



1661

1662. Az 1662. ábrán fellépő szimmetriák miatt elegendő megmutatni, hogy két szomszédos oldal egyenlő. Legyen a négyzet oldala a, átlójának fele $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ezért a négyzetoldalon levő b nyolcszögoldal: $b = a-2\left(a-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a(\sqrt{2}-1)$. A c oldal a vonalkázott derékszögű háromszögből:

$$c = \left(a-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = a(\sqrt{2}-1).$$

1663. A szabályos nyolcszög csúcsait a körbe írt négyszög oldalai feletti körívek felezésével nyerhetjük.

$$a = r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1664. Az előző feladat megoldásának módszerével adódik, hogy $a = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1665. A csavar szélessége a hatszög köré írt körbe írható szabályos háromszög oldalával egyenlő. A köré írt kör sugara 2,5 cm, ezért az 1571. feladat szerint a beírt háromszög oldala $2{,}5\sqrt{3}$; a csavarkulcs nyílása így $2{,}5\sqrt{3}+0{,}1\approx 4{,}4$ cm.

1666. $\frac{b}{\sqrt{2}}$, ill. $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

1667. Az x távolság (1667. ábra) $a\sqrt{2}$-vel egyenlő, a vastagon húzott háromszögből $y = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1668. Két csúcstól mért távolság a, a másik kettőtől mért távolság $b = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1669. A keletkezett négyzet átlója: $d = a-2\left(a-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = a(\sqrt{3}-1)$. Mivel $d = b\sqrt{2}$, $b = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$ (1669. ábra).

1670. Számítsuk ki a háromszög területét az 1670. ábrán látható három részháromszög területének összegeként: $\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(ax+ay+a\sqrt{2}z)$, ebből $z = \frac{a-(x+y)}{\sqrt{2}}$.

1672. Alkalmazzuk az 1671. feladat tételét:

a) $\sqrt{223}$ cm,

b) $\sqrt{153}$ cm, *c)* 24.

1673. *a)* Egészítsük ki a háromszöget paralelogrammává. Az 1671. feladat szerint az átlók négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő, ebből $s_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$. *b)* 11; *c)* 14.

1674. Induljunk ki a magasság- és súlyvonal által közrezárt derékszögű háromszögből. Az oldalak: 37 cm és 27,7 cm.

1675. Az állítás az 1673. feladat eredményének következménye.

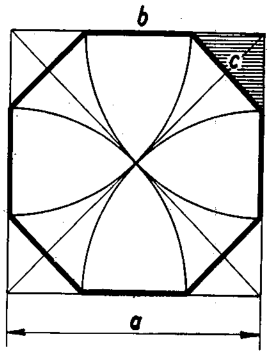
1676. Fejezzük ki a súlyvonalak négyzetét az oldalak segítségével (lásd az 1673. feladatot).

1677. A négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg, ennek egy-egy oldala fele egy-egy négyszögátlónak, a paralelogramma átlói a négyszög középvonalai. Alkalmazzuk a paralelogrammára az 1671. feladat tételét.

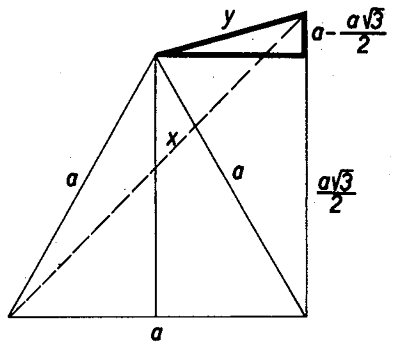
1678. Alkalmazzuk sorozatosan az 1673. feladat eredményét.

1679. A téglalap két-két szemközti csúcsa és az adott pont egy-egy olyan háromszöget alkot, amelyeknek közös egy súlyvonala. Erre a súlyvonalra alkalmazzuk az 1673. feladat eredményét.

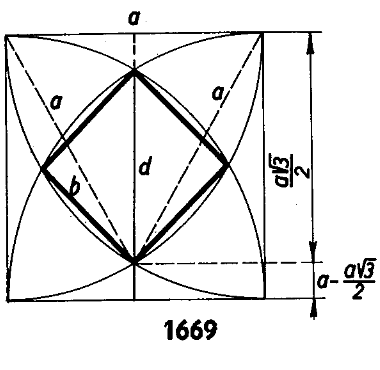
1680. Legyen AB felezőpontja F. Az 1673. feladat szerint $CF =$ $= \sqrt{\frac{AC^2+BC^2}{2}-\frac{AB^2}{4}}$, tehát ha $AC^2+BC^2 = k$ (állandó), akkor CF hossza is az, tehát a C pontok az F középpontú körön vannak.



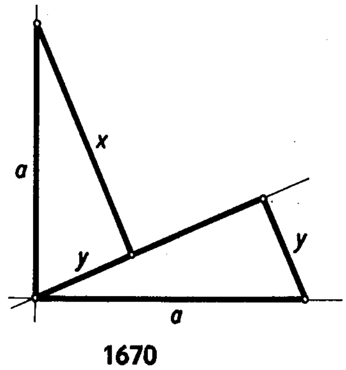
1662



1667



1669



1670

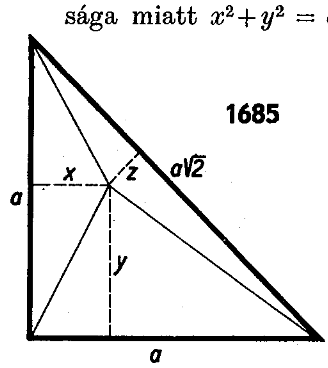
1681. Kössük össze a pontot a háromszög csúcsaival, így hat darab derékszögű háromszöget nyerünk, melyeknek páronként közös az átfogójuk. Ezekre alkalmazva Pitagorasz tételét, adódik az állítás.

1682. Állítsunk merőlegest C-ből az AB egyenesre, ennek talppontja D. Mivel egyrészt $CD^2 = CA^2 - AD^2$, másrészt $CD^2 = CB^2 - BD^2$, $CA^2 - CB^2 = AD^2 - DB^2$. Viszont a D-t rögzítve, így az AB-re D-ben állított merőleges minden pontjára ugyanakkora a $CA^2 - CB^2$ különbség. Fordítva is megmutatható, hogy a CD egyenes minden pontja kielégíti a feltételeket.

1684. Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelynek befogói a és b. Pitagorasz tétele szerint átfogója $\sqrt{a^2+b^2}$, de ez a feltétel szerint c-vel egyenlő. Így a most szerkesztett és az eredeti háromszög megegyezik három oldalban, tehát egybevágók; ezért az eredeti háromszög is derékszögű.

1685. Az állítás Pitagorasz tételének megfordításából következik (lásd az előző feladatot).

1686. Az 1686. ábrán vastagon kihúzott derékszögű háromszögek egybevágósága miatt $x^2 + y^2 = a^2$.



1685

1687. Az állítás Pitagorasz tételének többszöri alkalmazásával adódik.

1688. Az átlók a négyszöget derékszögű háromszögekre bontják, ezekre alkalmazva Pitagorasz tételét, adódik az állítás.

1689. A szeletek hosszát fejezzük ki a kör sugarával és a húroknak a középponttól mért távolságával.

1690. Először CD-t határozzuk meg, majd az ABD háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét, AB-re $r \cdot 3{,}14$ adódik.

TÉRGEOMETRIA

1691. *a)* 6; *b)* 10; *c)* 15; *d)* $\frac{n(n-1)}{2}$.

1692. 14.

1693. $a \cdot b+2$.

1694. *a)* 4; *b)* 10; *c)* 20; *d)* $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

1695. $m \cdot n$.

1696. 6.

1697. *a)* 3; *b)* 6; *c)* 10; *d)* 15; *e)* $\frac{n(n-1)}{2}$.

1698. *a)* 3; *b)* 6; *c)* 10; *d)* 15; *e)* $\frac{n(n-1)}{2}$; *f)* $ab+1$.

1700. Indirekt úton történhet a bizonyítás. Tegyük fel, hogy a két párhuzamos egyenes közül az egyik metszi a két sík metszésvonalát, és ebből bizonyítsuk be, hogy ezek metszéspontján a másik egyenesnek is át kellene mennie.

1701. Lásd az 1699. és az 1700. feladatot.

1704. Indirekt úton bizonyítható, felhasználva az 1703. feladat eredményét.

1705. Keressük először a ponton átmenő és az egyik egyenest metsző egyenesek összességét. Lásd a 2995. feladatot.

1706. Keressük először az egyik egyenest metsző és a harmadik egyenessel párhuzamos egyenesek összességét. Lásd a 2996. feladatot.

1707. Az 1705. feladat is adhat ötletet a megoldáshoz.

1708. Lásd az 1705. feladatot.

1709. Lásd az 1706. feladatot.

1710. Először vizsgáljunk három páronként metsző egyenest.

1711. A *b)*-hez lásd az 1710. feladatot.

1712. Lásd az 1711. feladatot.

1713. Lásd az 1711. feladatot.

1724. Indirekt úton bizonyítható.

1725. Indirekt úton bizonyítható.

1726. *a)* Bizonyítsuk be, hogy a négy pont egy derékszögű trapézt határoz meg. $\sqrt{22{,}05} \approx 4{,}696$ m.

b) $\sqrt{a^2-b^2}$; $\sqrt{108{,}16} \approx 10{,}4$ m.

c) $\frac{a+b}{2}$, ha a két pont a sík ugyanazon oldalán van; $\frac{a-b}{2}$, ha a két pont a sík különböző oldalán van, és $a>b$.

d) $\frac{aq+bp}{p+q}$.

1727. $\frac{a+b+c}{3}$. (Lásd az 1726. *c* és *d)* feladatot.)

1728. $a+c = b+d$ (a paralelogramma átlói felezik egymást).

1730. $AB = \sqrt{b^2-a^2}$; $BC = \sqrt{c^2-b^2}$; $PD = \sqrt{a^2+c^2-b^2}$. (Keressünk derékszögű háromszögeket.)

1731. Mutassuk meg először, hogy a P pontból a háromszög síkjára bocsátott merőleges talppontja a szabályos háromszög középpontja. A keresett távolság $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$.

1732. Csak azt kell bebizonyítani, hogy a két merőleges egyenes a metszésvonalra merőleges síkot határoz meg.

1733. Először mutassuk meg, hogy mindkét egyenesre merőleges egyenesek egymással párhuzamosak. Azután lásd az 1706. feladatot.

1734. Legyen a és b a két kitérő egyenes. Ha A az a és B a b egyenes egy pontja, és például AB egyenes nem merőleges a-ra, akkor a B-ből húzhatunk az a-ra merőleges BC szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy ez rövidebb, mint az eredeti szakasz.

1735. Bizonyítsuk be először, hogy a CAD és CBD háromszögek derékszögűek.

1736. Lásd az 1733. és az 1734. feladatokat.

1737. Vegyük fel az adott ponton átmenő, az adott egyenesekkel párhuzamos egyeneseket. Keressünk olyan forgáskúpot, melynek ezek az egyenesek alkotói. A feladatnak négy megoldása van.

1738. Először bizonyítsuk be, hogy a végpontokból a síkra bocsátott merőlegesek talppontjai és a szakasz felezőpontja egy egyenesen vannak.

1739. Lásd az 1738. feladatot.

1740. Lásd az 1738. feladatot.

1741. Lásd az 1738. feladatot; három megoldás van.

1744. Lásd az 1891. feladatot.

1745. Lásd az 1893. feladatot.

1749. Lásd az 1748. feladatot.

1751. Lásd az 1750. feladatot.

1752. Lásd az 1751. feladatot.

1754. Vegyük az egyenesnek a két sík közé eső darabját és ennek a síkokra eső merőleges vetületét. A szakasz és egy-egy vetület egy derékszögű háromszög két oldala. E háromszögek segítségével a bizonyítás elvégezhető.

1758. Jelöljük a síkokat α, illetve β-val, metszésvonalukat m-mel. A síkokkal egyenlő szögeket bezáró e egyenes az α-t A-ban, a β-t B-ben metszi. A-ból a β-ra bocsátott merőleges talppontja T_1, az m-re bocsátott merőleges talppontja M_1 (1758. ábra). B-ből az α-ra bocsátott merőleges talppontja T_2, az m-re bocsátott merőleges talppontja M_2. Bizonyítsuk be, hogy az AT_1M_1 és BT_2M_2 háromszögek egybevágók.

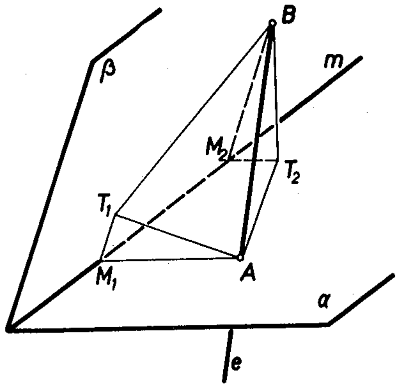
1760. Tekintsük a félegyenesek síkjának a lapszög síkjaival való metszésvonalait. Mutassuk meg, hogy ezek a lapszöget mérik.

1761. Számtalan sok megoldás.

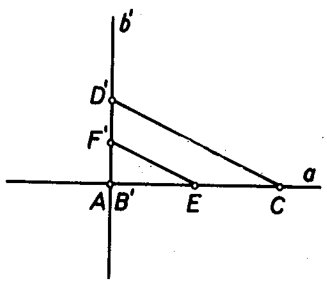
1762. $\frac{2m\sqrt{3}}{3}$. (Bizonyítsuk be, hogy a P pont és a két egyenesnek a síkkal való metszéspontjai egy szabályos háromszög csúcspontjai.)

1763. Két megoldás.

1764. Számtalan sok megoldás. (Egy forgáskúp érintősíkjai.)
1767. 30°.
1768. Gondoljuk a feladatot megoldottnak, és nézzük az adott és a keresett térelemeknek egy az e-re merőleges síkkal való metszetét.
1769. Lásd a 2998. és a 3005. feladatokat.
1770. Lásd a 3016. és a 3019. feladatokat.
1771. Lásd az 1711. feladatot. Számtalan megoldás.
1772. Lásd az 1711. és az 1771. feladatokat.
1773. Azt bizonyítsuk be, hogy a két sík metszésvonalának a két vetítősugár síkjával való metszéspontját összekötve a vetületekkel, a metszésvonalra merőleges egyeneseket kapunk.
1775. Ha az egyenes nem merőleges a síkra. Síkra merőleges egyenes merőleges vetülete pont.
1776. A megszorítás: a két vetület ne feszítsen ki egy a síkok metszésvonalára merőleges síkot.
1778. Nem igaz az állítás, ha az egyes egyenesekhez tartozó két vetítősík egybeesik.
1782. Legyenek a és b a merőleges egyenesek, S a sík, amelyre vetítünk és a párhuzamos S-sel. Bizonyítsuk be, hogy a b vetítősíkja merőleges az a vetületére.
1786. Mérjünk a szög száraira a csúcsból kiindulva egyenlő szakaszokat. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett egyenlő szárú háromszög vetülete is egyenlő szárú háromszög lesz.
1787. A bizonyítás az 1786. feladat bizonyításához hasonló gondolattal végrehajtható.
1789. Az egészet vetítsük rá az a egyenesen átmenő és a b-vel párhuzamos síkra. Bizonyítsuk be, hogy a vetület az 1789. ábrának megfelelő lesz.
1790. $6\sqrt{3}$.
1791. *a)* 60°; *b)* 45°.
1792. $\sqrt{\dfrac{n^2a^2-m^2b^2}{n^2\cdot m^2}}$; 132 m.

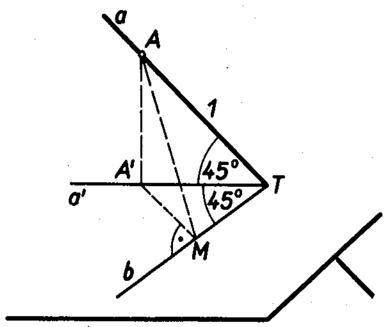


1758



1789

1793. Legyen az a egyenes talppontja T, egy további pontja A, hogy $AT = 1$ legyen. (1793. ábra.) Jelöljük A'-vel az A merőleges vetületét és M-mel az A'-ből a b-re bocsátott merőleges talppontját. Az adott szögek és a keletkezett derékszögű háromszögek segítségével számítsuk ki az AT, TM és AM szakaszok hosszát, majd ezek ismeretében cosinustétellel a keresett szöget. Az eredmény 60°.



1793

1794. $80\sqrt{11} \approx 265{,}34\ \text{m}^2$.

1795. Jelöljük a-val a háromszög oldalának hosszát. Akkor $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = c^2 - b^2$, ahonnan $a^2 = 3(c^2 - b^2)$, és a keresett terület $\frac{3\sqrt{3}}{4}(c^2 - b^2)$ (1795. ábra).

1830. 27.

1831. 8.

1832. 6.

1833. $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a}{2}$.

1834. 3-szorosa.

1837. Jelöljük a kocka csúcsait A, B, C, D, E, F, G, H-val (1837. ábra), és tekintsük az AG testátlót. Az A és a G-től különböző bármely csúcs és a testátló olyan derékszögű háromszöget feszítenek ki, melynek derékszögű csúcsa a kiszemelt csúcs, oldalai él, lapátló és testátló. Egy ilyen háromszögnek az átfogóhoz tartozó magasságát kell kiszámítani: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

1839. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

1840. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (Illesszünk a testátlóra az éllel párhuzamos síkot.)

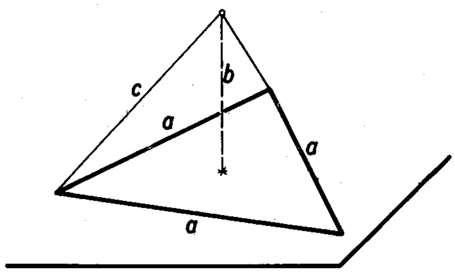
1841. A szög felének tangense $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1842. A szög tangense $\sqrt{2}$.

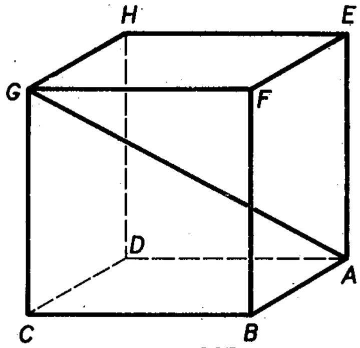
1843. A szög tangense $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1844. 60°.

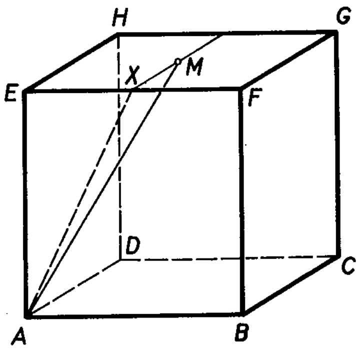
1845. AD párhuzamos BC-vel (1845.*a* ábra). Ezért a keresett távolság megegyezik a B pontnak az ADM síktól való távolságával. Az ADM sík az $ABFE$ síkot az AX egyenesben metszi. Belátható, hogy az X pont az EF oldal felezőpontja. Belátható, hogy az $ADMX$ sík merőleges az $ABFE$ síkra, ezért a B pontból az ADM síkra bocsátott merőleges Y talppontja az AX egyenesre esik. A BY távolság a kérdéses. Elég most már csak az $ABEF$ síkot tekinteni. A szükséges vonalakat ebben a síkban az 1845.*b* ábra mutatja. Az ábráról leolvasható, hogy $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$, és $BY = a \cos \varphi$. Ebből nyerjük, hogy $BY = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.



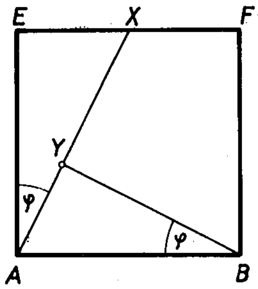
1795



1837



1845 a



1845 b

1846. A kocka hálózata többféleképpen teríthető ki a síkba. Az 1846.*a* ábra egy az AB él X pontjából kiinduló törött vonalat mutat és az 1846.*b* ábra a hálózat egy kiterítését. Az X és X' pontok a felhajtásnál egyesülnek. Általában az ugyanazon betűvel jelölt csúcspontok a felhajtásnál egyesülnek. $AX = A'X'$. Belátható, hogy az X és X' pontokat összekötő egyenesszakasz adja a keresett legrövidebb törött vonal kiterítettjét. XX' párhuzamos AA'-vel. A törött vonal tehát minden lapon egy átlóval párhuzamosan halad. A törött vonal hossza az XX', tehát az AA' szakasz hosszával egyenlő: $3a\sqrt{2}$.

1847. Tekintsük a DF testátlót (1847. ábra). Egy erre illeszkedő sík metszi a BC élt egy X, az EH élt egy Y pontban. A síkmetszet az $XDYF$ négyszög lesz. Területe akkor a legkisebb, ha az X pont a lehető legközelebb van a DF átlóhoz, azaz ha az X-ből a DF-re bocsátott merőleges a BC és a DF normáltranszverzálisa.

1848. Hosszabbítsuk meg a hatszög minden második oldalát. Bizonyítsuk be, hogy ezek páronként metszik egymást, és egy szabályos háromszöget alkotnak. A hatszög csúcspontjairól belátható, hogy ezen szabályos háromszög oldalainak harmadolópontjai. Ebből már következik, hogy szabályos hatszög (1848. ábra).

1849. Tekintsük az F pontból kiinduló élek B, E, G végpontjai által kifeszített síkot (1849. ábra). Keressük meg a DF testátlónak e síkkal való M metszéspontját. A DF átlóra a $BDHF$ síkot fektetjük. Belátható, hogy ennek a BEG síkkal való metszésvonala a háromszög B csúcsán átmenő súlyvonala. A harmadolás ténye a $BDHF$ síkban leolvasható. A merőlegesség bizonyítása úgy történhet, hogy a DF átló és a BEG háromszög tetszőleges súlyvonalának merőlegességét mutatjuk meg.

1850. Tekintsük a kocka BG lapátlóját (1850. ábra). Ez az AH és ED átlótól a távolságra van. Szóba jöhetnek még az AF, HF, CH, AC átlók, ezektől való távolsága $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

1851. Lásd az 1848. feladatot.

1853. Lásd az 1853. ábrát.

1854. Lásd az 1849. és az 1853. feladatokat.

1855. 3:4.

1856. Élek 35°15'50'', lapok 54°44'10''

1857. Lásd az 1848., az 1854. és az 1856. feladatokat. (Síkkal párhuzamos sokszög párhuzamos vetülete az eredetivel egybevágó.)

1858. *a)* 13,9 dm, 384 dm², *b)* 21,82 cm, 952,8 cm², *c)* 732,5 mm, 1073,500 mm², *d)* $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ m, $\frac{6}{4} = 1{,}5$ m².

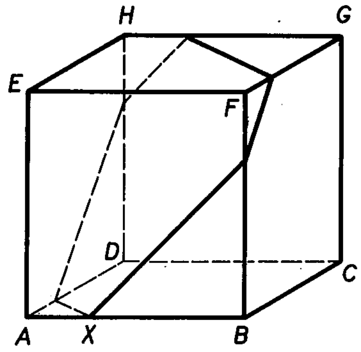
1859. *a)* 71,56 dm², *b)* 177,6 cm², *c)* 199 850 mm², *d)* $\frac{\sqrt{5}}{8} \approx 0{,}28$ m².

1860. *a)* 13,85 dm, 1152 dm², *b)* 10,39 cm, 648 cm², *c)* 20,78 mm, 2592 mm², *d)* 0,298 m, 10,5 m².

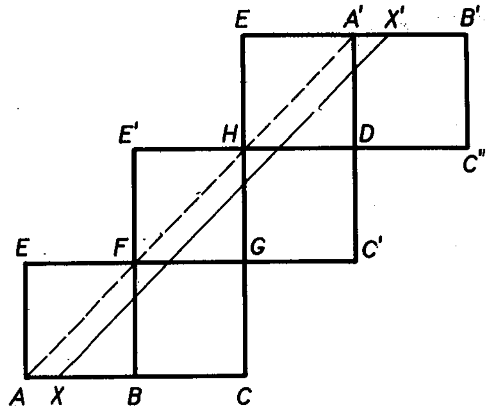
1861. *a)* 56 dm, *b)* 72 cm, *c)* 1,6 m, *d)* 69,1 mm.

1862. *a)* 2,819 dm³, *b)* 51,8 cm³, *c)* 1,852 dm³, *d)* 1,06 dm³.

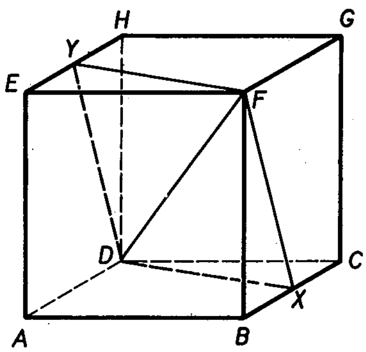
1863. 7,368 dm, 1,59 dm.



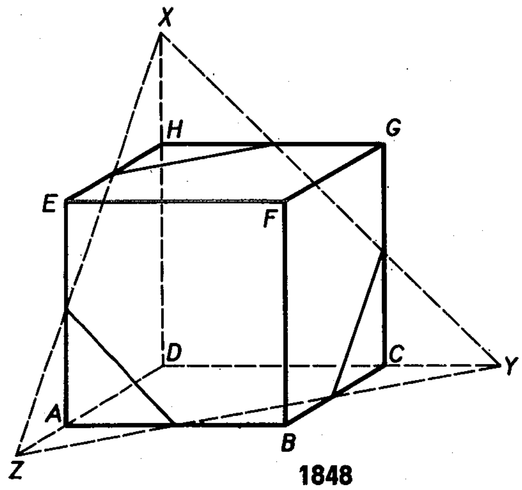
1846 a



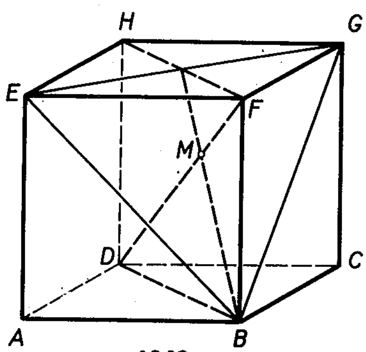
1846 b



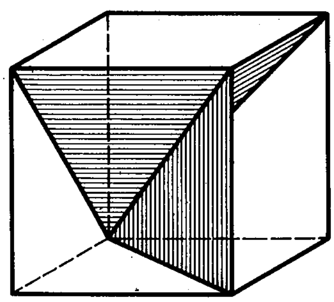
1847



1848



1849

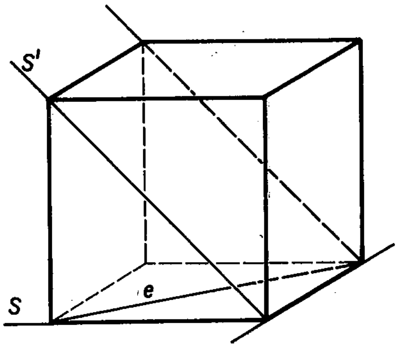

1853

1864. 8,28 cm.
1865. 4,641 dm.
1866. *a)* 42,88 cm³, *b)* 68,014 cm³, *c)* 68,014 dm³.
1867. *a)* 1014 cm², *b)* 57,93 dm², *c)* 9,526 m².
1868. *a)* $a^2\sqrt{2}$, *b)* 855,6 cm², *c)* 65,39 dm².
1869. *a)* $\sqrt{\frac{t\sqrt{2}}{2}}$, $\sqrt{t\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3t\sqrt{2}}{2}}$, $3t\sqrt{2}\cdot\frac{t}{2}\sqrt{t\sqrt{2}}$;
b) 13,29 cm, 18,80 cm, 23,03 cm, 1061,66 cm², 2350,4 cm³;
c) 6,727 mm, 9,513 mm, 11,65 mm, 271,5 mm², 304,4 mm³.
1870. $a\sqrt[3]{2}$.
1871. $-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12}}$; $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12}}$.
1872. $\frac{a^3}{2}$, $a^2(3+\sqrt{2})$.
1873. $\sqrt[3]{\frac{1}{8,5}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2\cdot 8,5}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2^2\cdot 8,5}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2^3\cdot 8,5}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2^4\cdot 8,5}}$, ...
1874. A láda súlya $[a^3-(a-2d)^3]\gamma = 909{,}4$ N, a megengedett terhelés $a^3(1-\gamma)+(a-2d)^3\gamma = 8906$ N.
1875. Elképzelhetünk egy kockát, amelynek egyik lapsíkja S, átlósíkja S', *m* egy élegyenese, *e* egy lapátló-egyenese (1875. ábra). A keresett szög 30°.
1883. A síknégyszög megfelelő tételének bizonyításához hasonlóan bizonyíthatjuk.
1887. Legyen $ABCD$ a torz négyszög. P_1 az AB, Q_1 pedig az AD oldalnak egy-egy tetszőleges pontja. P_2 pont olyan arányban osztja a DC oldalt, mint P_1 az AB-t. Q_2 pedig a BC oldalt, mint Q_1 az AD-t. Vetítsük a torz négyszöget merőlegesen olyan síkra, hogy vetülete egy $A'B'C'D'$ paralelogramma legyen. (1887. ábra.) Akkor, a feltétel miatt, és mert merőleges vetítéskor a szakaszok aránya nem változik meg, a P_1P_2' szakasz az $A'D'$-vel és a Q_1Q_2 szakasz az $A'B'$-vel párhuzamos lesz. Ebből már következik, hogy a P_1P_2, AD és BC egyenesek egy síkkal párhuzamosak, és hasonlóan a Q_1Q_2, AB és CD egyenesek egy másik síkkal párhuzamosak. Jelöljük M'-vel a $P_1'P_2'$ és $Q_1'Q_2'$ egyenesek metszéspontját és M_1-gyel a P_1P_2 szakasz azon pontját, melynek merőleges vetülete M'; M_2-vel pedig a Q_1Q_2 szakasz azon pontját, melynek merőleges vetülete ugyancsak M'. Megmutatható, hogy $M_1M' = M_2M'$. Ez azt jelenti, hogy $M_1 \equiv M_2$, tehát a két egyenes metszi egymást.
1888. Egy átlóval osszuk fel két háromszögre, és alkalmazzuk a Menelaosz-tételt a két háromszögre.
1890. Egy csúcsból kiinduló átlókkal bontsuk fel háromszögekre a torz sokszöget, és ezen átlók mentén a háromszögeket forgassuk egy síkba. Hasonlítsuk össze az így kapott síksokszög szögeinek összegét az eredeti sokszög szögeinek összegével.

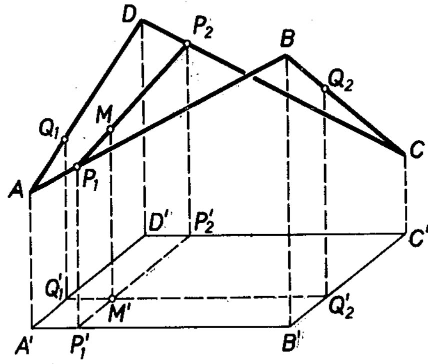
1891. SA, SB, SC félegyenesek alkotják a triédert. (1891. ábra.) ASB szöget c-vel, BSC szöget a-val, CSA szöget b-vel jelöljük. A triéder oldalai tehát: a, b, c. Tegyük fel, hogy c a legnagyobb oldal. Elég akkor azt bebizonyítani, hogy $a+b>c$. Az AB oldalon felvesszük a C' pontot úgy, hogy $C'SA\sphericalangle = b$ legyen. Az SC félegyenesen a C pontot úgy választjuk ki, hogy $SC = SC'$ legyen. Akkor az ASC' és az ASC háromszögek egybevágók, tehát $AC' = AC$. Az ABC háromszögben $AB-AC<BC$, de akkor $AC = AC'$ miatt $AB-AC' = BC'<BC$. Az SBC' és az SBC háromszögek két-két oldalban megegyeznek, de a harmadikban nem, hiszen azt kaptuk, hogy $BC'<BC$. Akkor a velük szemközti szögekre is hasonló egyenlőtlenség áll fenn: $BSC\sphericalangle > BSC'\sphericalangle$, azaz $a>c-b$. Ahonnan a bizonyítandó $a+b>c$ egyenlőtlenséget kapjuk.

1893. A bizonyítás úgy hajtható végre, mint a háromszögre vonatkozó megfelelő tétel bizonyítása.

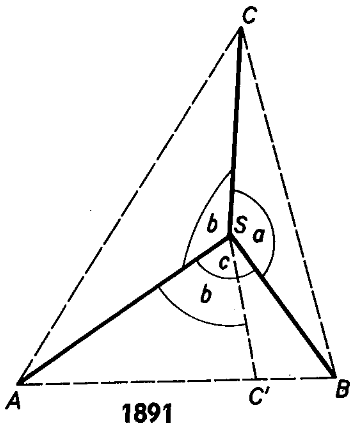
1894. Legyen $ASC\sphericalangle > BSC\sphericalangle$ (1894. ábra). Vegyük fel az $ASB\sphericalangle$ szögfelezőjében a síkjára merőleges síkot. Bizonyítsuk be, hogy ez az ASC síkot az $ASC\sphericalangle$ belsejében haladó egyenesben metszi. Tükrözzük a triéder BSC oldalával szemközti szögét az előbb felvett síkra. Bizonyítsuk be, hogy a tükörkép az ASC oldallal szemközti szög belsejében van.



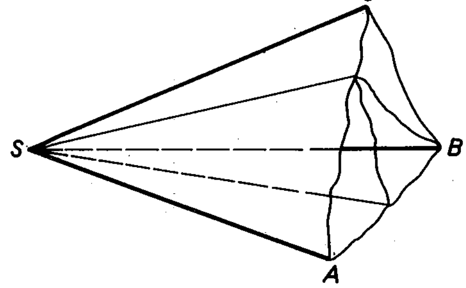
1875



1887



1891



1894

1895. Mérjünk a csúcspontból kiindulva egyenlő szakaszokat az élekre, a végpontokat jelöljük A, B, C-vel. Belátható, hogy a csúcspontnak az ABC síkon való merőleges vetülete az ABC háromszög köré írt kör középpontja. Ebből belátható, hogy az oldalak ABC síkra eső merőleges vetületeinek az összege legfeljebb 360°.

1896. Vegyük a testszöglet egy síkmetszetét, és nézzük a metszetnél keletkezett triédereket.

1897. Bizonyítsuk be, hogy a polártriédernek az eredeti triéder a polártriédere.

1899. Bontsuk fel a testszögletet triéderekre.

1901. Bebizonyítható, hogy a triéder tükrös az alap felezőjében a síkjára emelt merőleges síkra.

1902. Az 1901. feladat bizonyításához hasonlóan megy.

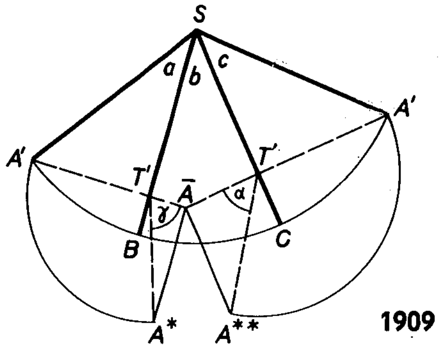
1903. Tükrözzük a triédert erre a síkra.

1905. Képzeljük a feladatot megoldottnak.

1906. Alkalmazzuk többször az 1891. feladat állítását és azt a tételt, hogy egy egyenes egy sík egyenesei közül a merőleges vetületével zárja be a legkisebb szöget.

1907. A bizonyítás az 1891. tétel felhasználásával úgy történhet, mint a háromszögre vonatkozó megfelelő tétel bizonyítása.

1909. Legyenek az adott oldalak: a, b, c. Helyezzük ezeket egymás mellé (1909. ábra). A félegyeneseken úgy jelöljük ki az A', B, C, A'' pontokat, hogy $SA' = SB = SC = SA''$ legyenek. Hajtsuk fel az SC egyenes körül az SA''-t és az SB egyenes körül az SA'-t, amíg A' és A'' egy A pontban találkoznak. SA, SB, SC félegyenesek alkotják az adott oldalakkal rendelkező triédert. Az A pontnak a síkon való merőleges vetülete az $\bar{A}$ pont.



1909

1910. Lásd az 1909. feladat megoldását.

1911. Lásd az 1909. feladat megoldását.

1912. Lásd az 1909. és az 1897. feladatokat.

1913. Az 1909. ábráról leolvasható az állítás helyessége. Legyen $SA' = SA'' = 1$. Az oldalak és szögek segítségével számítsuk ki az $\bar{A}A^*$ és AA^{**} szakaszokat, és írjuk fel, hogy a két szakasz egyenlő.

1914. Azt mutassuk meg, hogy két szögfelező sík metszésvonala rajta van a harmadik szögfelező síkon.

1915. Lássuk be, hogy két ilyen szögfelező síkja a triéder mindhárom élével egyenlő szöget zár be. Akkor belátható, hogy e síkon rajta kell lennie a harmadik szögfelezőnek is.

1916. Lásd az 1915. feladat megoldásához fűzött utasítást.

1918. A triéder csúcsa mindhárom síknak közös pontja. Az állítás bizonyítást nyer, ha megmutatjuk, hogy a három síknak a csúcsponton kívül még van közös pontja. Messük el a triéder éleit olyan síkkal, amelyik az éleket a csúcsponttól egyenlő távolságra metszi. Könnyű megmutatni, hogy egy ilyen síkban van közös pontja a három kérdéses síknak.

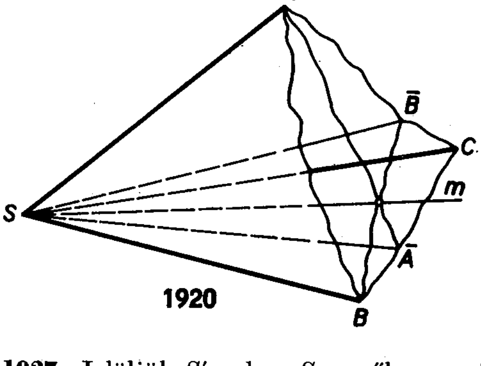
1919. Be kell bizonyítani, hogy a triéder csúcspontján kívül van még a három síknak közös pontja. Vegyünk fel egy a kérdéses síkok közül kettőnek a metszésvonalára merőleges síkot, és mutassuk meg, hogy ebben a síkban van közös pontja a három kérdéses síknak.

1920. Lásd az 1919. feladatot és az 1920. ábrát. Jelöljük $\bar{A}$-val az AM és BC egyenesek metszéspontját. Akkor $\bar{A}$ pontja az SA' félegyenesnek. Hasonlóan származtatjuk a $\bar{B}$ és $\bar{C}$ pontokat.

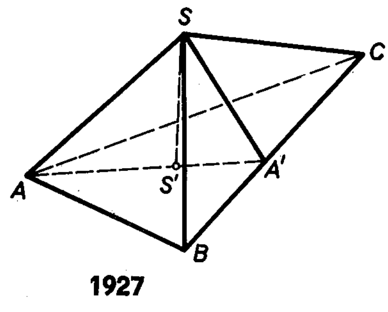
1922. Lásd az 1919. feladatot és az 1920. ábrát. Az ottani AB, BC, CA egyenesekről belátható, hogy a csúcspontba eltolva (párhuzamosan) a kérdéses egyeneseket kapjuk.

1923. Könnyen belátható, hogy két él szöge éppen két oldallap síkjának szögével, azaz a triéder egy szögével egyenlő.

1925. Vegyük fel a háromszög egyik oldala fölé emelt Thalész-gömböt. A triéder csúcsa a gömb egy pontja. A harmadik csúcshoz tartozó él érintője a gömbnek, és így minden pontja a gömbön kívül van (a csúcspontot kivéve, mert az az érintési pont).



1920



1927

1927. Jelöljük S'-vel az S merőleges vetületét és A'-vel a BC és AS' egyenesek metszéspontját. (1927. ábra.) Bebizonyítható, hogy SA' merőleges BC-re. Könnyen bizonyítható, hogy AS merőleges SA'-re. Írjuk fel a BCS, BCS' és BCA háromszögek területét, és nézzük meg a közöttük levő kapcsolatot.

1928. Az 1927. feladat állításából következik ugyanúgy, mint a megfelelő derékszögű háromszögekre vonatkozó tételből a Pitagorasz-tétel.

1929. A megoldhatóság feltétele az 1925. feladatból következik. A feladat első része az 1927. ábráról leolvasható.

1931. Először az adott háromszög fölé emelt derékszögű triédert keressük meg.

1932. Lásd az 1926. feladatot, és nézzük meg, hogy hegyesszögű háromszög magasságvonalai milyen helyzetűek.

1933. Az 1927. ábrából a szerkesztés menete is leolvasható.

1934. Vegyünk fel az egyenesnek a csúcstól különböző pontján át a triéder oldallapjaival párhuzamos síkokat. Ezek és a triéder oldallapjai egy téglatestet határoznak meg, melynek testátlója a kérdéses egyenes, és ennek a csúcsból kiinduló lapátlókkal bezárt szögei a kérdéses szögek. Bármely kettő összegéről belátható, hogy 90°-nál kisebb.

1935. Mérjünk fel az egyenesre a csúcstól számítva egységnyi hosszúságú szakaszt. A végponton át vegyünk fel a triéder oldallapjaival párhuzamos síkokat. Ezek és a triéder oldallapjai egy téglatestet határoznak meg, melynek testátlója az egységnyi szakasz, és a testátló a téglatest éleivel α, β, γ szögeket zárja be. Számítsuk ki az éleket, és írjuk fel az élek és a testátló közötti kapcsolatot. Ez a feladat állítása. (1935. ábra.)

1936. Jelöljük γ_1, illetve γ_2-vel az egyeneseknek a triéder harmadik élével bezárt szögét. Az 1935. feladatból adódik, hogy $\cos\gamma_1=\sqrt{1-\cos^2\alpha_1-\cos^2\beta_1}$ és $\cos\gamma_2=\sqrt{1-\cos^2\alpha_2-\cos^2\beta_2}$. Vegyük fel az egyeneseken az E_1 és E_2 pontokat úgy, hogy $SE_1 = SE_2 = 1$. Akkor az E_1 pont a triéder oldallapjaitól $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ távolságra van, az E_2 pont pedig $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ távolságra. A 2042. feladat alapján kiszámítható az E_1E_2 szakasz hossza. Ismerve az SE_1E_2 háromszög oldalait, a cosinustétel segítségével kiszámítható az S-nél levő szöge. Ez a kérdéses szög. A kérdéses szög cosinusára $\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2$ adódik.

1937. Vegyünk fel a triéder csúcspontján át a síkra merőleges egyenest. Ez az élekkel $90°-\alpha$, $90°-\beta$, $90°-\gamma$ szögeket zár be. Ebből és az 1935. feladatból következik a feladat állítása.

1939. Jelölje a triéder oldalait a, szögeit α. Az éleken úgy válasszuk az A, B, C pontokat, hogy $SB = SC = 1$, és BA merőleges SA-ra. Belátható, hogy akkor CA is merőleges SA-ra, és így az ABC háromszög A-nál levő szöge éppen α. Számítsuk ki az ABC háromszög oldalait, majd cosinustétellel az α szöget. $\cos\alpha=\dfrac{\cos a}{1+\cos a}$.

1940. 15.

1941. Azt bizonyítsuk be, hogy két tetszőleges súlyvonal metszi egymást, és a metszéspont bármelyiket 1:3 arányban osztja.

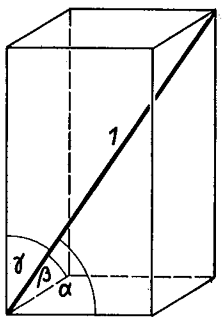
1942. Mutassuk ki, hogy az XS egyenes felezi a CD oldalt (1942. ábra), ha X a súlypont és a CD él által kifeszített sík és az AB él közös pontja.

1943. Az 1942. ábráról leolvasható, hogy $C'D'$ párhuzamos CD-vel, és $C'D'$ a CD-nek harmada.

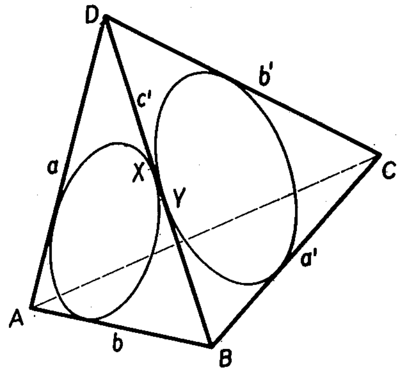
1949. Jelöljük a beírt gömbnek a középpontját O-val, a BCD síkkal való érintési pontját A'-vel, hasonlóan az ACD, ABD, ABC síkokkal való érintési pontokat B', C', D'-vel. Bizonyítsuk be, hogy $A'B'$ merőleges CD-re stb.

1955. Tekintsük az ABD és a BCD háromszögekbe írt köröket. Az első X, a második Y pontban érinti a DB oldalt. (1955. ábra.) Fejezzük ki a DX és DY szakaszok hosszát a megfelelő háromszögek oldalaival, és használjuk fel az 1954. feladat eredményét is.

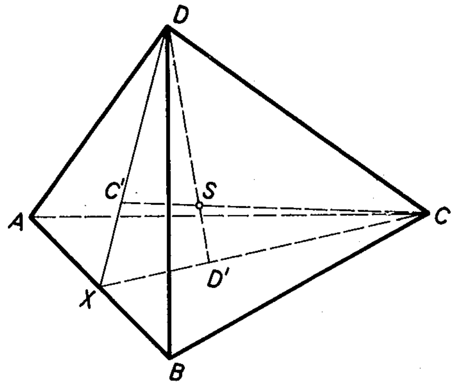
1957. Alkalmazzuk többször azt a tételt, hogy ha egy egyenes merőleges egy sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor merőleges a sík minden



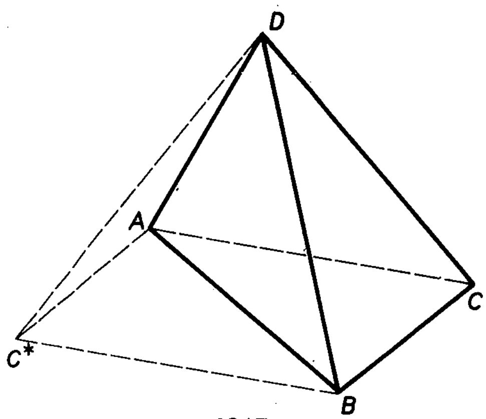
1935



1955



1942



1965

egyenesére. Továbbá: ha két merőleges sík egyikének egy pontjából a másik síkra merőlegest állítunk, ez benne lesz az első síkban.

1960. A két magasságegyenes egy síkot határoz meg, amelyről könnyű belátni, hogy merőleges egy élre.

1961. Vegyük az él és az egyik végpontjából kiinduló magasságvonalat. Bizonyítsuk be, hogy ezek síkján rajta van a másik végpontból kiinduló magasságvonal is.

1963. Lásd az 1959., 1961. feladatokat.

1965. Legyen az $ABCD$ ortocentrikus tetraéder (1965. ábra). Vegyük fel a C^* pontot úgy, hogy $ACBC^*$ egy paralelogramma csúcspontjai legyenek. Lásd az 1964. feladatot.

1966. Legyen az $ABCD$ ortocentrikus tetraéder (1966. ábra). M a magasságpont, azaz DM magasságvonal. AB és CD merőlegessége miatt az AB egyenes merőleges a CDM síkra. Jelöljük C'-vel az AB egyenesnek a CDM síkkal való metszéspontját. Belátható, hogy $C'XM$ egyenes az AB és CD egyenesek normáltranszverzálisa.

1967. Az 1966. ábráról e feladat állítása is leolvasható.

1972. Nézzük az O, S, M pontoknak az ABC lapon levő merőleges vetületeit. Az 1972. ábrán O'-vel jelöltük az O, M'-vel az M és F'-vel az S merőleges vetületét. S' jelentse az ABC háromszög súlypontját. M' az ABC háromszög magasságpontja; O'-ről belátható, hogy az ABC háromszög köré írt kör középpontja. Belátható, hogy O', S', M' egy egyenesen vannak. Ebből már következik, hogy az O, S, M pontok egy az előbbi egyenesen átmenő, az ABC síkra merőleges síkban vannak. ABC tetszőlegesen választott oldallapja volt a tetraédernek. Egy másik oldallapon hasonló okoskodást végrehajtva arra az eredményre jutunk, hogy O, S, M egy egyenesen vannak. Belátható, hogy az F' éppen az ABC háromszög Feuerbach-körének középpontja, és abból már az $OS = SM$ bizonyítandó egyenlőség is adódik.

1973. Az állítás második része az 1972. ábra segítségével bizonyítható.

1974. A lapsúlypontok köré írt gömb a tetraéder köré írt gömbnek a súlypontból harmadára való kicsinyítettje. Ezen észrevétel alapján a feladat állításait rendre bizonyíthatjuk.

1976. A feltétel elégséges volta következik az 1956. feladatból. A feltétel szükséges voltának bizonyításához az 1976. ábrán az éleket a, a', b, b', c, c'-vel jelöltük. Az érintési pontok minden élt két darabra osztanak. $a = s_1+s_2$, $a' = s_3+s_4$, $b = s_2+s_3$, $b' = s_1+s_4$, $c = s_1+s_3$, $c' = s_2+s_4$. Írjuk fel az 1965. feladat állítását. Ebből nyerhetjük a feladat állítását.

1977. A két gömb akkor és csak akkor eshet egybe, ha minden lapon a magasságpont és a súlypont egybeesik.

1978. Tekintsük azt a négy tetraédert, amelynek egy csúcsa a felvett pont, a vele szemközti lapja az eredeti tetraéder egy-egy lapja. Írjuk fel, hogy a négy újabb tetraéder térfogatának összege egyenlő az eredeti tetraéder térfogatával. Külső pont esetében bizonyos távolságokat negatív előjellel kell venni, hogy összegül a test magasságát kapjuk.

1979. Használjuk ki, hogy a P pontnak a háromszög oldalaitól vett távolságainak összege állandó, és hogy a szabályos tetraéder bármely két lapsíkjának ugyanaz a hajlásszöge.

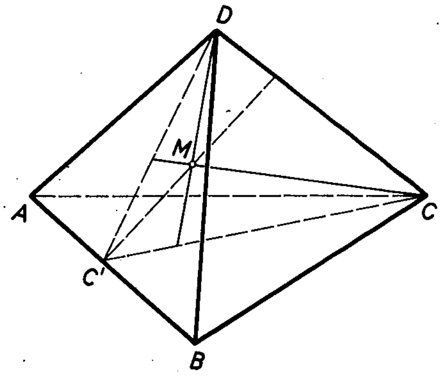
1980. Válasszuk a tetraéder alaplapjának pl. azt a lapot, amelyen az a és b hosszúságú élek fekszenek. Az a és b oldalak bezárta szöget jelöljük ε-nal. E háromszög területe $\frac{ab \sin \varepsilon}{2}$. A hozzá tartozó magasság nem lehet c-nél nagyobb. Ezen észrevételből már adódik a feladat állítása.

1981. Fejezzük ki a tetraéder térfogatát a D csúcsból kiinduló élek segítségével, majd ezeket az éleket az a, b, c segítségével.

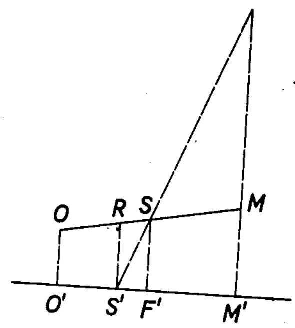
1982. Azt kell megmutatni, hogy az O pontnak S-re vonatkozó T tükörképe rajta van mindazon a hat síkon, melyet úgy nyerünk, hogy egy-egy él felezőpontján át a szemközti élre merőleges síkot veszünk fel. Az 1982. ábrán a tetraéder BC élének felezőpontját F_1-gyel, a vele szemközti

AD él felezőpontját F_2-vel jelöltük. Bizonyítsuk be, hogy OF_1TF_2 paralelogramma. Ebből már következik, hogy F_1T párhuzamos OF_2-vel, de OF_2 merőleges az AD-re, és így F_1T benne van az F_1 ponton átmenő és az AD-re merőleges síkban.

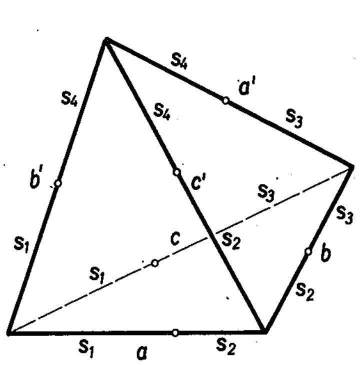
1983. A gömböt megkapjuk, ha a tetraéder köré írt gömböt az S súlypontból harmadára kicsinyítjük, majd tükrözzük az S-re. Így a gömb K középpontja az OST egyenesen lesz, az állításnak megfelelő helyen. Sugara is az állításnak megfelelő. Bizonyítsuk még be, hogy a gömböt a körülírt gömbből úgy is megkaphatjuk hogy T-ből harmadára kicsinyítjük. Ennek segítségével beláthatók a még bizonyítást nem nyert állítások is.



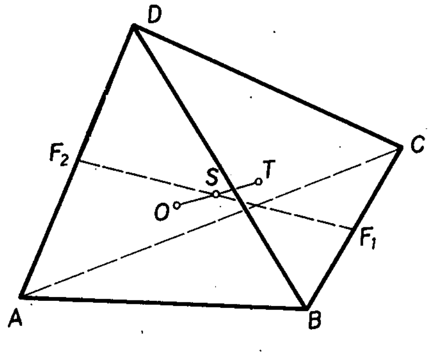
1966



1972



1976



1982

1984. Húzzuk meg a három lap közös pontjából kiinduló magasságvonalat mindhárom lapban. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a negyedik lapon levő merőleges vetületei megegyeznek a kívánt vetületekkel.

1985. Lásd az 1984. feladathoz fűzött útmutatást.

1988. Tekintsük azt a négy tetraédert, amelyek közös csúcsa a beírt gömb középpontja, és szemközti lapja az eredeti tetraéder egy-egy lapja. Írjuk fel, hogy a négy tetraéder együttes térfogata egyenlő az eredeti tetraéder térfogatával.

1989. Lásd az 1988. feladat megoldásához adott útmutatást.

1990. Az $ABCD$ tetraéder BC élének felezőpontja legyen F_1, AD élének felezőpontja F_2. (1990. ábra.) Messe az F_1F_2 egyenesen átmenő sík a CD, illetve AB éleket az X, illetve Y pontokban. M-mel jelöltük az F_1F_2 és XY egyenesek metszéspontját. Be kell bizonyítani, hogy $MX = MY$. Lásd az 1887. feladat megoldását. Abból adódik, hogy az AB, CD, F_1F_2 egyenesekre illeszthető egymással párhuzamos sík. Bizonyítsuk be, hogy az F_1F_2-n átmenő sík egyenlő távolságra van a másik két síktól. Ebből már következik a feladat állítása.

1991. Jelöljük A'', B'', C''-vel az AO, BO, CO egyeneseknek a BC, CA, AB-vel való metszéspontjait. (1991. ábra.) Bizonyítsuk be, hogy az $OA''A'$ és $AA''D$ háromszögek hasonlók. Ebből belátható, hogy az OA' és DA aránya megegyezik a BCO és BAC háromszögek területének arányával. Hasonlóan fejezhető ki a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló másik két tört is. Ebből már adódik a bizonyítandó egyenlőség.

1992. Bizonyítsuk be, hogy az OA' és az AA' szakaszok aránya megegyezik a $BCDO$ és a $BCDA$ tetraéderek térfogatának arányával.

1993. Bizonyítsuk be, hogy a kérdéses szakaszok aránya és a kérdéses területek aránya is megegyezik az $ABMC$ és az $ABMD$ tetraéderek térfogatának arányával.

1994. Bizonyítsuk be, hogy a bizonyítandó arányok mindegyike megegyezik az $AA'BC$, $AA'CD$, $AA'DB$ tetraéderek térfogatának arányával.

1996. Messük az $ABCD$ tetraédert az F_1F_2XY síkkal, ahol F_1, illetve F_2 a BC, illetve AD él felezőpontja (1996. ábra). Az 1995. feladatból következik, hogy az ABF_1D és az ACF_1D tetraéderek egyenlő térfogatúak. Bizonyítsuk be, hogy ezekből egyenlő részeket elvéve, illetve hozzáragasztva, éppen az XF_1YF_2 sík által kettévágott részekhez jutunk.

1997. Lásd az 1996. feladatot.

1998. Lásd az 1996. feladatot.

1999. Bizonyítsuk be, hogy a súlypont a feladat követelményeinek megfelelő pont.

2000. Hozzuk fedésbe az egybevágó triédereket. (2000. ábra.) Alaplapnak valamelyik közös síkban elhelyezkedő lapokat válasszuk.

2001. Válasszuk alaplapnak az egyenlő élekhez illeszkedő egyik síkot. Bizonyítsuk be, hogy a hozzá tartozó magasságok úgy aránylanak egymáshoz, mint az előbbi élhez illeszkedő másik lapok területei.

2002. 1:27.

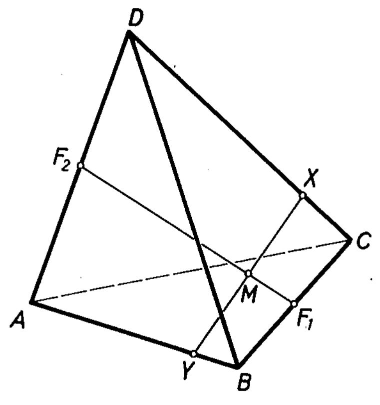
2003. Bizonyítsuk be, hogy a két tetraéder megfelelő lapjai területének aránya megegyezik a közös csúcsnak a szemközti lapoktól való távolságai négyzetének arányával. Ebből kiszámíthatjuk, hogy a közös csúcstól milyen távolságban kell elmetszeni a tetraédert.

2004. Az eredeti és a levágott tetraéder közös csúcshoz tartozó magasságainak aránya $1:\sqrt[3]{\dfrac{q}{1+q}}$ lesz.

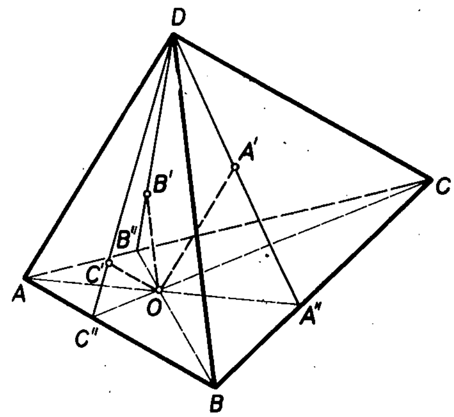
2005. Lásd a 2000. feladatot. Ha az eredeti tetraéder térfogata V, akkor a maradék test térfogata $\dfrac{(a_1b_1c_1-a_2b_2c_2)V}{a_1b_1c_1}$ lesz.

2006. A *b)* összefüggés bizonyításához lásd az 1988. feladatot. Az *a)*-t megkapjuk, ha a *b)*-ben szereplő négy összefüggést összeadjuk, és tekintettel vagyunk az 1988. feladatban bizonyítottakra.

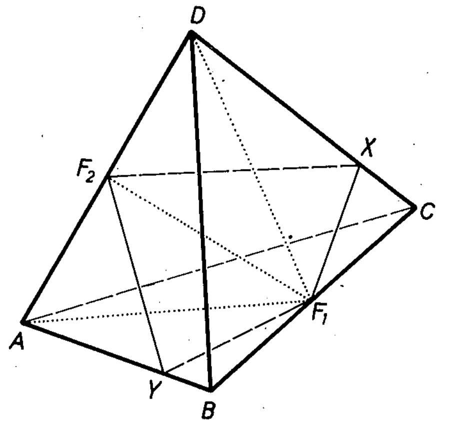
2007. A kocka minden csúcsánál levágunk egy tetraédert. Először egy tetraéder térfogatát számítsuk ki (180 cm³).



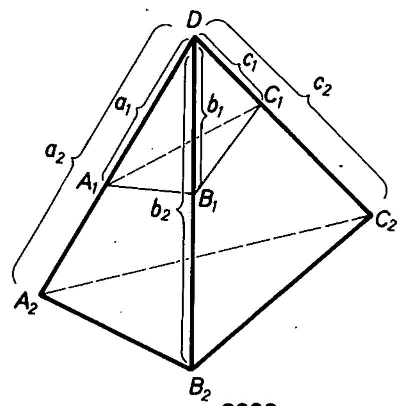
1990



1991



1996



2000

2008. *a)* 128,1 cm², 74,96 cm³;
b) 91,78 cm², 45,46 cm³;
c) 8,232 dm², 1,221 dm³;
d) 0,108 25 m², 0,001 841 m³.

2009. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

2010. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

2011. Háromszor.

2012. $V = \dfrac{m^3\sqrt{3}}{8}$.

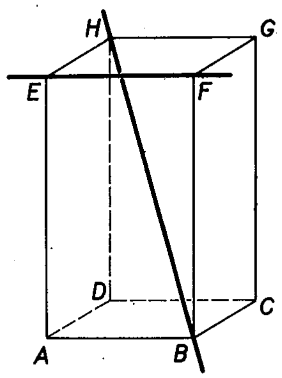
2013. $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\dfrac{F^3}{3\sqrt{3}}}$.

2014. $\sqrt[3]{\dfrac{12V}{\sqrt{2}}}$.

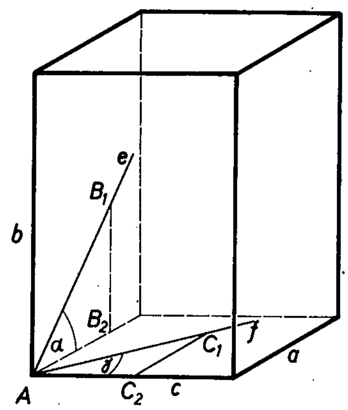
2015. $\cos\varepsilon = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\varepsilon \approx 35°16'$.

2016. $\cos\lambda = \dfrac{1}{3}$ $\lambda \approx 70°32'$.

2017. 7,73 kp. (Számítsuk ki a tetraéderbe írt gömb sugarát. Ebből a lecsiszolt tetraéderbe írt gömb sugarát, azután az élét.)



2021



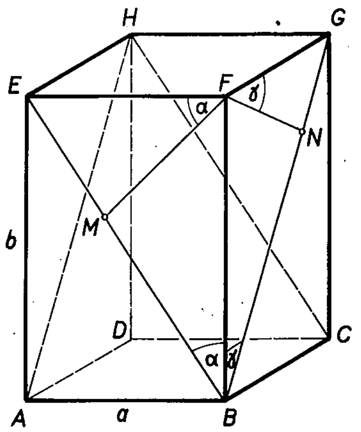
2023

2021. Az $ABCDEFGH$ téglatestben nézzük például az EF él és a BH testátló normáltranszverzálisát. Belátható, hogy elegendő az F pontnak a BG egyenestől való távolságát meghatározni. (2021. ábra.) Az eredmény

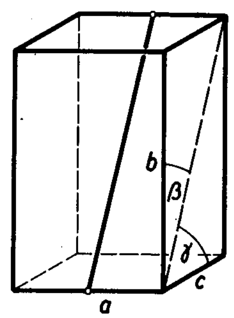
$$\frac{b\cdot c}{\sqrt{b^2+c^2}},\ \text{ha } b = BF \text{ és } c = FG.$$

2023. Legyen az e egyenesen a B_1 pont úgy, hogy $AB_1 = 1$ és az f egyenesen a C_1 pont úgy, hogy $AC_1 = 1$. (2023. ábra.) Ha B_2, illetve C_2 a B_1, illetve a C_1 pontnak az a, illetve a c-re eső merőleges vetülete, akkor $AB_2 = \cos\alpha$, $AC_2 = \cos\gamma$, $B_1B_2 = \sin\alpha$, $C_1C_2 = \sin\gamma$. Ezen adatok segítségével kiszámítható a B_1C_1 távolság, majd cosinustétellel a B_1AC_1 szög. $\cos B_1AC_1\sphericalangle = \sin\alpha\cdot\sin\gamma$.

2024. Az $ABGH$ és a $BCHE$ síkok hajlásszögét kell meghatározni. (2024. ábra.) Legyen FM merőleges BE-re és FN merőleges BG-re. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy-egy átlóssíkra merőlegesek, és így hajlásszögük megegyezik a két sík hajlásszögével.



2024



2026

2025. $a\sqrt{b^2+c^2}$.

2026. Vegyük észre, hogy az éltengely egy lapátlóval párhuzamos, továbbá a keresett szög bármelyike ezen lapátlóval bezárt szög pótszöge. (2026. ábra.) A keresett szög cosinusa: $\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}}$.

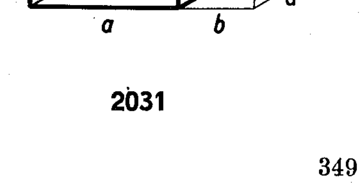
2027. Nézzük meg az éleknek és a lapoknak a testátlóval bezárt szögét. A pótszög lesz a keresett szög.

2028. Mutassuk meg, hogy a párhuzamos lapsíkpárok középpárhuzamosai egymást egy pontban metszik. Erre a pontra vonatkozó tükrözés a testet változatlan helyzetben hagyja.

2030. Azt bizonyítsuk be, hogy az átlók közös pontja bármelyiknek felezőpontja.

2031. Helyezzünk el egy $a+b$ oldalú kocka egyik csúcsában egy a, a szemközti csúcsában egy b oldalú kockát. (2031. ábra.) A két kocka lapsíkjai az eredeti kockát több darabra vágják. Írjuk fel, hogy az egyenes darabok térfogatának összege megegyezik az eredeti kocka térfogatával.

2032. Egy a oldalú kocka egyik sarkában helyezzünk el egy b oldalú kockát ($a>b$ feltevésből kell kiindulnunk). Ennek lapsíkjai az eredeti kockát több részre bontják. Keletkezik egy $(a+b)$ oldalú kocka is. Ennek térfogatát megkapjuk, ha az eredeti kocka térfogatából a többi rész térfogatát elvesszük.



2031

2038. A feladat egy speciális esete az 1849. feladat.
2039. Lásd az 1848. feladatot.
2040. $|a_1-a_2|$, $|b_1-b_2|$, $|c_1-c_2|$.
2041. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. (Vegyük fel azt a téglatestet, amelynek három lapja a triéder három oldalára esik, és P a triéder csúcsával szemközti csúcsa.)
2042. $\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}$.
2043. $\sqrt[3]{\frac{Va^2}{bc}}$, $\sqrt[3]{\frac{Vb^2}{ac}}$, $\sqrt[3]{\frac{Vc^2}{ab}}$.
2044. a) 6,2 dm, 73,92 dm^2, 42,336 dm^3;
b) 48,6 cm, 42,91 dm^2, 18,02 dm^3;
c) 547 m, 384 728 m^2, 13 043 808 m^3.
2045. 15,1 dm^3.
2046. $\sqrt[3]{\frac{20}{9}}\approx 1{,}305$ dm; $2\sqrt[3]{\frac{20}{9}}\approx 2{,}61$ dm; $3\sqrt[3]{\frac{20}{9}}\approx 3{,}915$ dm.
2047. 502.
2048. 2052.
2049. $1{,}2\cdot 10^8$ N.
2050. 7000 kg.
2051. $2{,}720\cdot 10^{-4}$ mm.
2052. 2380,5 cm^3.
2053. 7,596 cm, 10,875 cm.
2054. 114,85 cm^3.
2055. 459,46 dm^2, 653,3 dm^3, $A = 2(77+108\sqrt{2})$, $V = 462\sqrt{2}$.
2056. 2,718 cm, 5,518 cm, 12,14 cm, $x = \sqrt{\frac{t_2t_3}{t_1}}$, $y = \sqrt{\frac{t_3t_1}{t_2}}$, $z = \sqrt{\frac{t_1t_2}{t_3}}$.
2057. 95 020 m^3 vagy 85 310 m^3.
2058. $3\sqrt[3]{97{,}6}$, $4\sqrt[3]{97{,}6}$, $5\sqrt[3]{97{,}6}$.
2059. 10,38 cm, 15,57 cm, 20,76 cm.
2060. 11,86 cm, 14,82 cm, 17,78 cm.
2061. $24+14\sqrt{7}$ m^2, $12\sqrt{7}$ m^3.
2062. $3\frac{1}{15}$, $9\frac{1}{5}$, $15\frac{1}{3}$.
2063. 9,6 cm, 11,6 cm, 15,6 cm.
2064. 12 cm, 16 cm, 21 cm.
2065. 1035 cm^2.
2066. 2038,5 cm^3.
2067. 725,8 cm^3.
2068. 574,5 cm^2, 770,9 cm^3.
2070. Lásd a 2069. feladatot.
2074. Először annyit könnyű belátni, hogy téglatest, melynek lapjai egybevágó téglalapok. Ebből már következik, hogy négyzetek a lapok, és így a test kocka.

2075. 90°.

2076. Vegyük a köré írt kockát.

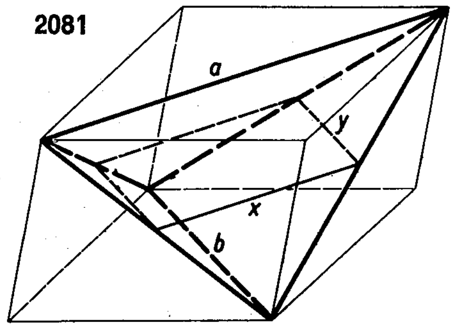
2077. Vegyük a köré írt kockát. Ennek segítségével könnyen belátható, hogy két-két szemközti élpár felezőpontja egy négyzet négy csúcspontja.

2078. Vegyük a köré írt kockát.

2079. Vegyük a köré írt kockát. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapmetszet síkja párhuzamos a kocka valamelyik lapjával. Vetítsük rá merőlegesen erre a lapra a téglalapot. Belátható, hogy a kerület a tetraéder élének a kétszeresével egyenlő.

2081. Vegyük a tetraéder köré írt paralelepipedont. A tetraéder kiszemelt szemközti éleinek hosszát jelöljük a-val, illetve b-vel (2081. ábra); a paralelogrammametszet a-val párhuzamos oldalát x-szel, a b-vel párhuzamos oldalát y-nal. Elég azt vizsgálni, hogy az xy szorzat mikor a legnagyobb, mert a különböző paralelogrammák szögekben megegyeznek. A köré írt paralelepipedon középpontján átmenő sík adja a legnagyobb területű metszetet.

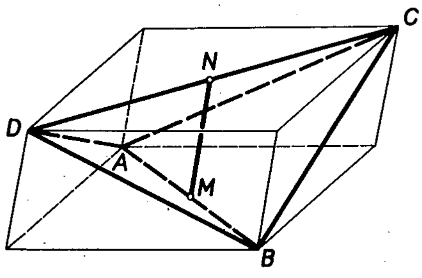
2081



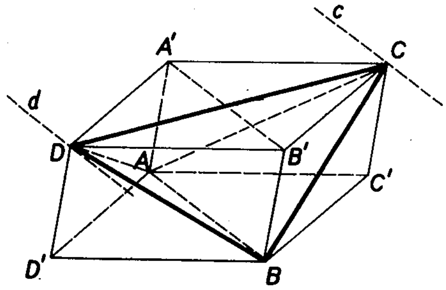
2082. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert és a köré írt paralelepipedont. (2082. ábra.) MN e paralelepipedon egyik lapjának oldalával, AD és BC pedig ugyanezen lap egy-egy átlójával lesz egyenlő.

2083. A tetraédert megkapjuk, ha a paralelepipedon négy sarkát levágjuk (1:3).

2084. Vegyük észre hogy a közös részt megkapjuk, ha az egyik tetraéder négy csúcsát levágjuk.



2082



2092

2088. Azt mutassuk meg, hogy bármely két lap oldalai egyenlők.

2089. Elég annyit bebizonyítani, hogy a tetraéder szemközti élei egyenlők.

2091. Elég azt bebizonyítani, hogy akkor a körülírt paralelepipedon bármelyik éle merőleges a másik kettő által kifeszített lapra.

2092. Elég azt bebizonyítani, hogy az egyenlő területű lapokkal rendelkező tetraéder köré írt paralelepipedon téglatest. A, B, C, D-vel jelöltük a tetraéder csúcspontjait: a köré írt paralelepipedon még hiányzó csúcspontjait pedig A', B', C', D'-vel (2092. ábra.) Húzzunk a C és D ponton át az $A'B'$-vel párhuzamos egyenest (c és d). Bizonyítsuk be, hogy az A, B, A', B' pontok a c és d egyenesektől egyenlő távolságra vannak. Akkor az $ABA'B'$ sík merőleges a c, d egyenesek síkjára, azaz az $A'CB'D$ síkra. Hasonlóan látható be, hogy a $CDC'D'$ sík merőleges ugyanerre a síkra. Akkor a két sík metszésvonala is merőleges a $CA'DB'$ síkra. Bizonyítsuk még be, hogy ez a metszésvonal az AA' éllel párhuzamos.

2094. Bizonyítsuk be, hogy egy éltengely mindig párhuzamos és egyenlő a körülírt paralelepipedon egy élével.

2095. Lásd a 2094. feladathoz adott útmutatást.

2096. Először bizonyítsuk be, hogy ha a két középpont egybeesik, akkor a lapok köré írt körök egyenlő sugarúak. Ebből belátható, hogy a tetraéder bármelyik csúcsánál levő triéder élszögeinek összege 180°. Terítsük ki a tetraéder hálózatát; belátható, az előbbi észrevételek felhasználásával, hogy a hálózatot megkapjuk, ha egy háromszöget a középvonalaival négy háromszögre bontunk. Ez éppen azt jelenti, hogy a lapok egybevágók. Azután bizonyítsuk a feltétel elégséges voltát: Ha a lapok egybevágók, akkor a köré írt körök sugara egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder köré írt gömb középpontja egyenlő távolságra van a lapoktól.

2097. Ha a tetraéder lapjai egybevágók, akkor a köré írt paralelepipedon téglatest (lásd az 2089. feladatot). A körülírt gömb középpontja a téglatest középpontja. Belátható, hogy a súlypont is a téglatest középpontja. Ha a súlypont és a köré írt gömb középpontja egybeesik, akkor a tetraéder éltengelye a két szemközti él normáltranszverzálisa.

2098. Vegyük a köré írt téglatestet. A szögek cosinusát egy-egy háromszögből a cosinustétellel kapjuk.

2099. A feladatnak speciális esete a 2086. feladat.

2100. Ha a tetraéder szemközti élei egyenlők, akkor a lapok egybevágó hegyesszögű háromszögek. Készítsük el a hálózatát. Bizonyítható, hogy bármely csúcsnál levő triéder oldalainak összege 180°. – Ha egy triéder oldalainak összege 180°, készítsünk háromszöget, amelynek szögei megegyeznek a triéder oldalaival. Bizonyítsuk be, hogy a triéder metszhető ezzel egybevágó háromszögben úgy, hogy a keletkezett tetraéder szemközti élei egyenlők legyenek.

2101. Vegyünk egy az oldalélekre merőleges metszetet, és bizonyítsuk be, hogy a metszet oldalai egy-egy lap magasságvonalának tekinthetők.

2102. Bizonyítsuk be, hogy az oldalélekre merőleges metszet olyan n oldalú sokszög, amelynek szögei megegyeznek az oldallapok szögeivel.

2104. Bizonyítsuk be, hogy a hasáb kiegészíthető kétszeres térfogatú paralelepipedonná, amelynek alaplapja a kérdéses oldallap.

2105. A tetraéder térfogata harmadrésze azon hasáb térfogatának, melynek oldalélei az adott egyeneseken vannak, és hosszuk az AB szakasz hosszával egyenlő.

2106. Azt bizonyítsuk be, hogy az oldallapok területe változatlan, de a merőleges metszet területe kisebb, mint az eredeti hasáb alapterülete. Azt kell felhasználni, hogy az oldalélekre merőleges metszet tekinthető az eredeti alapsokszögnek a metszet síkjára eső merőleges vetületének.

2107. Lásd a 2106. feladatot. Ha az ott leírt szétvágás nem lehetséges, akkor az oldalélekre merőleges sík egyes éleknek csak a meghosszabbítását metszi. Ebben az esetben is bebizonyítható, hogy ezen metszet (mint alaplap) fölé emelhető a kívánt tulajdonságú egyenes hasáb.

2108. Írjuk fel a felszínt és a térfogatot az élekkel kifejezve. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenségből adódik, hogy állandó térfogat esetén a felszín akkor a legkisebb, ha az élek egyenlők.

2109. Legyen a kicsinyítés aránya λ. Ha a sokszög kerülete a_k és a beírt kör sugara ϱ volt, akkor a hasáb alaplapjának kerülete λa_k, az alaplapba írható kör sugara $\lambda\varrho$ és a hasáb magassága $\varrho-\lambda\varrho$ lesz. A hasáb térfogata tehát $\frac{1}{2}\lambda^2 a_k\varrho(\varrho-\lambda\varrho) = \frac{1}{2}a_k\varrho^2\lambda^2(1-\lambda)$ lesz. Nézzük meg, hogy milyen λ-r lesz a lehető legnagyobb $\left(\lambda = \frac{2}{3}\right)$.

2110. Vágjuk fel a hasáb palástját az AA' él mentén, és terítsük ki a síkba. A kiterített paláston az út könnyen megrajzolható.

2111. 10.

2112. $\frac{mna^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$.

2113. $\sqrt{\frac{2Q}{3\sqrt{3}\gamma}}$.

2114. 9,56 cm^3.

2115. 447,6 cm^3.

2116. 119,64 dm^2, 56,8096 dm^3.

2117. 14,66 m.

2118. $195\frac{1}{3}$ dm^2.

2119. 4235 dm^3.

2120. 144,55 cm^2, 111,375 cm^3.

2121. 2685 cm^2, 6,88 dm^3.

2122. 1049,3 kg.

2123. $\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\approx 1{,}077$.

2124. $128\sqrt{3}$ cm^2, 192 cm^3.

2125. 11 655 m^3.

2126. 3500 m^3.

2127. 3647,4 m^3.

2128. $9(2-\sqrt{2})\approx 5{,}2722$ m^3.

2129. 634,15 dm^2, 625,6 dm^3.

2130. 0,783 dm, 58,40 dm^3.

2131. 3506,24 dm^2, 13 696 dm^3.

2132. 6462 cm^2, 37,278 dm^3.

2133. 310,25 dm^3.

2134. 12,6596 m^3.

2135. 68 dm^3.

2136. Hasonlítsuk össze az oldallapok és az alapsíkra eső merőleges vetületek területét.

2142. Lásd a 2141. feladatot.
2143. Lásd a 2141. feladatot.
2144. 3, 4 vagy 5.
2145. 100 cm^2 és 400 cm^2.

2146. *a)* $\frac{m\sqrt{2}}{2}$, *b)* $\frac{m\sqrt{3}}{3}$ (ahol m a magasság).

2147. *a)* $30\sqrt{2}$, *b)* $20\sqrt{3}$.

2148. Használjuk ki, hogy a gúla oldallapjai az alaplappal egyenlő szögeket zárnak be.

2150. $\sqrt{m^2+\frac{a^2}{3}}$.

2151. $\sqrt{2(b^2-m^2)}$. (b az oldalél, m a magasság.)
2152. 19,61 cm.
2153. $\sqrt{205}$ cm $\approx 14{,}318$ cm.
2154. 22,16 cm, 27,08 cm.

2155. $m = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, lapszög $54°44'$, az élnek az alaplappal bezárt szöge $35°16'$.

2156. *a)* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, *b)* $54°44'$, *c)* $45°$.

2157. $60°$.
2158. *a)* $50°8'$; *b)* $114°14'$.

2159. *a)* 16 cm; *b)* $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{-\cos\alpha}}$.

2160. *a)* 135,6 m, *b)* $24°28'$, *c)* 327,4 m.
2161. *a)* $60°$, $90°$ és $36°$.
b) Az alaplap *a)* szabályos háromszög, *b)* négyzet és *c)* szabályos ötszög lehet. A keresett szög az egyes esetekben: *a)* $70°32'$; *b)* $109°26'$; *c)* $138°16'$.
2162. $\sqrt{8}$.
2163. $45°$.
2164. Belátható, hogy a metszet egyenlő szárú trapéz lesz, melynek területe

$$\frac{(2a+a\sqrt{5})\sqrt{3a^2+4b^2}}{16}.$$

2165. $\frac{4a^2\cos^3\alpha}{(4\cos^2\alpha-1)^2}$.

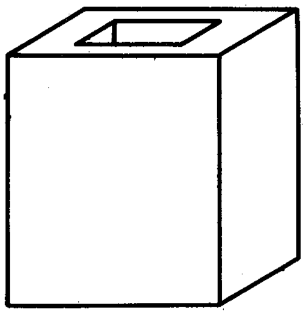
2166. *a)* 618,1 cm^2, *b)* 409,7 cm^2, *c)* 111,93 dm^2, *d)* 845,4 cm^2, *e)* 1625,4 cm^2, *f)* 7609,6 cm^2.
2167. 35,16 m^2.
2168. *a)* 2,697 m^3, *b)* 32,19 m^3, *c)* 101,5 dm^3. *d)* 70,268 dm^3, *e)* 325,3 cm^3, *f)* 127,2 dm^3, *g)* 20,55 m^3.

2169. 49,176 cm^2, 54 cm^3.
2170. 950,6 cm^2, 1,152 dm^3.
2171. 187,5 cm^3.
2172. *a)* 253,8 cm^3, *b)* 289,6 cm^3, *c)* 238,9 cm^3.
2173. *a)* 40,58 cm, *b)* 16,6 cm, *c)* 18,66 cm.
2174. Belátható, hogy a kimetszett idom trapéz. A trapéz felső élének az alapsíktól való távolságát jelöljük m'-vel, a gúla magasságát m-mel. Akkor

$$m' = m\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

2175. 12,51 m^3.
2176. 7,63 cm^2, 0,97 cm^3.
2177. 196,68 dm^2, 146,57 dm^3.
2178. 352,2 m^3.
2179. 8,042 dm^3.
2180. 599,4 cm^3.
2181. 95,16 m^2.
2182. $\sqrt[3]{153\sqrt{2}}\approx 6{,}003$ cm.
2183. 2,7 m.
2184. 167,6 dm^3.
2185. 43020 kg.
2186. 16,47 cm; 14,696 dm^2.
2187. $\dfrac{F\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{6\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{F\cos\alpha\operatorname{ctg}7{,}5^\circ}{12}}$
2188. Alapél 48 06 dm, oldalél 41,06 dm, oldalfelszín 3200 dm^2.
2189. 19,99 dm.
2190. 142,3 cm^3.
2191. Alapél 4,815 cm, szög 64°8′.
2192. 571,4 cm^3.
2193. $6\sqrt[3]{4}\approx 9{,}52$ cm.
2194. $45\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\approx 31{,}2$ cm; $45\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)\approx 8{,}11$ cm; $45\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right)\approx 5{,}69$ cm.
2195. 13,824 dm^3.
2196. $\dfrac{h}{(3\sqrt{A}+\sqrt{A'})}(A\sqrt{A}+A'\sqrt{A'})$.
2199. $\dfrac{ab}{a+b}$.
2200. 133,13 dm^2; 100,69 dm^3.

2201. 31,44 dm^2; 8,694 dm^3.
2202. 12 m^2.
2203. 187,5 cm^2; 181,6 cm^3.
2204. 60,21 m^2; 30,65 m^3.
2205. 144 m^2.
2206. 8,468 dm^3.
2207. Először a kiegészítő gúla magasságát és térfogatát számítjuk ki. Ennek segítségével írható fel a felezett test térfogata, ami egyúttal az eredeti test térfogatának a fele. 4,04 cm; 10;39 cm $\left(30-2{,}5\sqrt[3]{1120};\ \sqrt[3]{1120}\right)$.
2208. 1098 N.
2209. 686 m^3; 232,75 m^3.
2214. Indirekt úton bizonyítható: ha egy lapja vagy a vetület határa konkáv sokszög lenne, akkor meg tudnánk adni a test két olyan pontját, hogy az őket összekötő szakasz nem tartozna egészen a testhez.
2215. Baj lenne akkor, ha két csúcspontot összekötő egyenes merőleges lenne a síkra, amelyre vetítünk. Ezt a síkot magunk választjuk. Véges sok tilos síkállás van. Akkor is baj van, ha valamelyik lap merőleges a síkra. Vegyünk fel a tér egy pontján át a poliéder lapjaira merőleges egyeneseket. Bebizonyítható, hogy a választott síknak ezen véges egyenes egyikével sem szabad párhuzamosnak lennie. A választott sík nem lehet véges sok egyenesre merőleges és véges sok egyenessel párhuzamos: van tehát olyan sík, amelyen a merőleges vetület a kívánt tulajdonságú.
2216. Ha egy lap e_1 oldalú sokszög, akkor ezen a lapon az élszögek összege $(e_1-2)180°$. Számoljunk így lapról lapra haladva. Az eredmény $(e-l)360°$.
2217. Legyen a vetület határa c' csúcsszámú konvex sokszög. Ennek minden szögét duplán kell számítani. c'' csúcspont került a sokszög belsejébe ($c'+c''=c$). Mindegyik körül 360°-ot tesz ki az élszögek vetülete. Az eredmény az összegezésnél adódik: $(c-2)360°$.
b) Annak következménye, hogy n oldalú sokszöglap merőleges vetülete is n oldalú sokszög lesz a feltétel szerint.
2218. Lásd a 2216. és a 2217. feladatok eredményét.
2220. Lásd a 2220. ábrát.


2220

2221. $l \geqq 4$, $c \geqq 4$, $e \geqq 6$.
2222. Jelöljük a_3-mal, illetve a_4-gyel a háromszög-, illetve a négyszöglapok számát. Tehát $a_3+a_4=10$. Továbbá $2e=3a_3+4a_4$. A kettőből adódik, hogy $2e=30+a_4$. Ebből már belátható, hogy a_4 csak páros szám lehet. Vegyük a lehetséges eseteket, az előbb kapott összefüggésből megkaphatjuk az élek számát. Majd az Euler-féle összefüggésből a csúcsok számát.
2223. Lásd a 2222. feladat megoldásához adott útmutatást.
2224. Minden csúcsból legalább három él indul ki.
2226. Bebizonyítható, hogy $2e=5l$. Lásd még a 2225. feladatot.
2227. A feltételből következne, hogy $2e \geqq 6l$.

2228. Ha c csúcs van, akkor a feltétel értelmében $\frac{c(c-1)}{2}$ éle és $\frac{c(c-1)}{3}$ lapja van. Ezt bizonyítsuk be először. Azután írjuk fel az Euler-féle összefüggést. (A „konvex" kikötés itt lényeges.)

2229. *a)* Jelöljük m-mel az egy csúcsban találkozó élek számát. Bizonyítsuk be, hogy $l = \frac{2e}{3}$ és $c = \frac{2e}{m}$, majd írjuk fel az Euler-féle összefüggést, ezeket felhasználva ($e = 6$, 12 vagy 30; $c = 4$, 6 vagy 12; $l = 4$, 8 vagy 20).

b) Most először az $l = \frac{2e}{4}$ egyenlőséget kell igazolni. (Egy csúcsban 3 él találkozhat, $e = 12$, $c = 8$, $l = 6$.)

c) Most az $l = \frac{2e}{5}$ egyenlőséget kell igazolni. (Egy csúcsban 3 él találkozhat. $e = 30$, $c = 20$, $l = 12$.)

2230. A szabályos test definíciójából és a 2229. feladatból következik. Szabályosnak nevezzük azon konvex testeket, melyeknek lapjai egybevágó sokszögek, és szögletei egybevágó szabályos szögletek.

2231. Azt bizonyítsuk be, hogy a csúcsoknál keletkezett testszögletek nem mind egybevágók.

2233. Először bizonyítsuk be, hogy a lapjai egybevágó szabályos háromszögek. Annak bizonyításához, hogy a szögletek egybevágó szabályos szögletek, ki kell mutatni, hogy az egy csúcsból kiinduló négy él másik végpontjai egy négyzet csúcspontjai.

2234. Elég azt megmutatni, hogy az eredeti kockát a középpontból a harmadára kicsinyítve, éppen a belőle származtatott oktaéder lapközéppontjai által meghatározott testhez jutunk.

2235. Figyeljük meg a kockából származtatott szabályos tetraéder és szabályos oktaéder kapcsolatát.

2239. Nagyítsuk a kockába írt szabályos oktaédert a középpontból háromszorosra, és bizonyítsuk be, hogy ily módon a kívánt síkokhoz jutunk.

2240. Vegyük fel a középponton átmenő két szemközti lapjával párhuzamos síkot.

2241. Vetítsük rá merőlegesen egy lapjának síkjára.

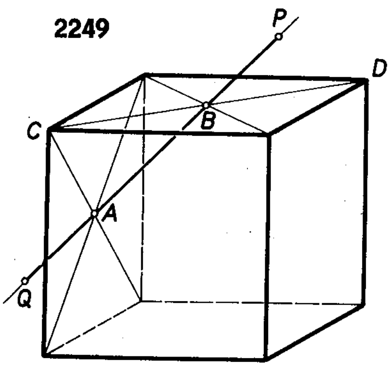
2243. Egy szabályos oktaéder minden csúcsában helyezzünk el egy feleakkora szabályos oktaédert. Bizonyítsuk be, hogy szabályos tetraéder-rések maradnak.

2245. Minden élnél marad egy üres tetraéder. Azt kell bebizonyítani, hogy négy ilyen tetraéderből egy a feladatban mondott méretű szabályos oktaéder rakható össze.

2247. Bebizonyítható, hogy a köré írt kocka középpontjától minden csúcs ugyanolyan távolságra van. Ez a pont tehát az oktaédernek is középpontja.

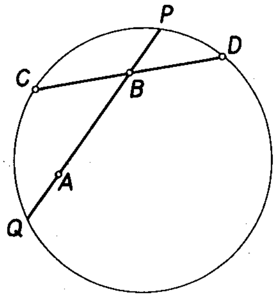
2248. Bebizonyítható, hogy a körülírt kocka középpontja az oktaéder minden lapjától egyenlő távolságra van.

2249

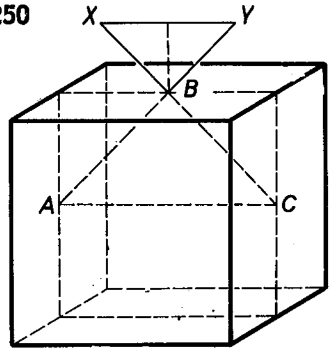


2249. A 2249. ábrán az oktaéder AB élét hosszabbítottuk meg. Messük a gömböt az ABC síkkal. Ez a gömböt egy körben metszi. A kör síkjában a viszonyokat a 2249.*b* ábra mutatja. A $BP = AQ = x$ szakaszról kell kimutatni, hogy az AB szakasz nagyobbik aranymetszete. A $BC \cdot BD = BP \cdot BQ$, és az $AB = CB = BD$-ből belátható, hogy az AP szakasz nagyobbik aranymetszete az AB. Innen már az aranymetszet tulajdonságából adódik a bizonyítható állítás.

2249 b



2250



2250. Bizonyítsuk be az ACB és az XYB háromszögek hasonlóságát. Lásd a 2250. ábrát.

2251. *a)* Először MN és ZY párhuzamosságát bizonyítsuk, majd azt, hogy az X, F, G pontok egy egyenesen vannak (F az MN, G pedig az YZ szakasz felezőpontja). Utóbbihoz elég az $XX'F$ és FCG háromszögek hasonlóságát bebizonyítani. (A 2250. feladat eredményével bebizonyítható, hogy a két derékszögű háromszögben a befogók aránya megegyezik.)

b) Az *a)* következménye, hiszen mind az öt pont a gömbön van.

c) A származtatásból következik, hogy $ZM = MX = XN = NY$. A 2250. feladatból következik, hogy YZ az MN-nek nagyobbik aranymetszete. Bizonyítsuk be, hogy $XZ = XY = MN$. Tehát az YZX egyenlő szárú háromszögben az alap a szár nagyobbik aranymetszete. Ebből következik, hogy az X-nél levő szög 36°, azaz az YZ oldalhoz tartozó középponti szög 72°. Így a többi négy egyenlő oldalhoz tartozó középponti szög is csak 72° lehet. Ebből már következik, hogy az ötszög szabályos.

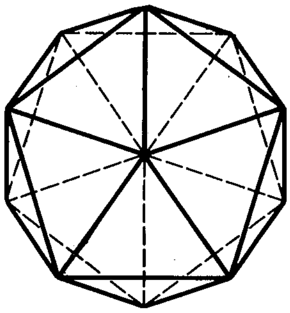
2252. Előbbi feladatból már következik, hogy a testet 12 egybevágó szabályos ötszög határolja. A szögletek triéderek. Belátható, hogy ezek egybevágó szabályos szögletek.

2253. A két fél összeilleszthető volta abból következik, hogy a triédert két oldala és a közbezárt szöge meghatározza.

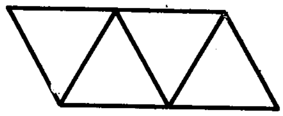
2254. Bizonyítsuk be először, hogy egy tetszőleges lapátló és a vele párhuzamos oldalához illeszkedő lap vele párhuzamos lapátlója egy négyzet két szemközti oldala (5).

2255. Könnyen belátható, hogy a lapok egybevágó szabályos háromszögek. Be kell bizonyítanunk, hogy az egy csúcsból kiinduló élek másik végpontjai egy szabályos ötszög csúcspontjai. Abból már következik, hogy a szögletei egybevágó, szabályos szögletek.

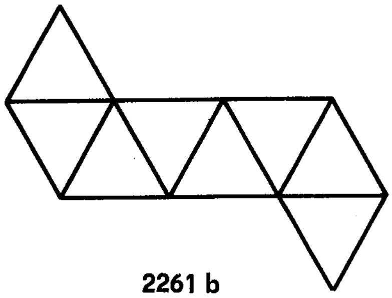
2256. Vegyük fel a középponton átmenő és *a)* az egyik lapjával párhuzamos síkot, *b)* az egyik csúcstengelyére merőleges síkot metszősíknak.



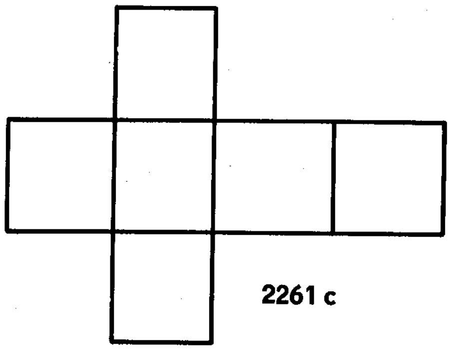
2257



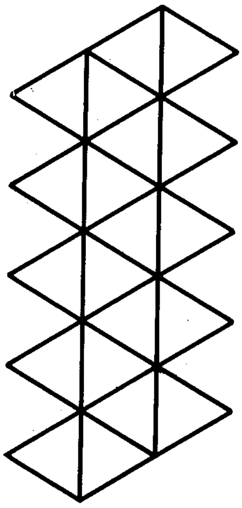
2261 a



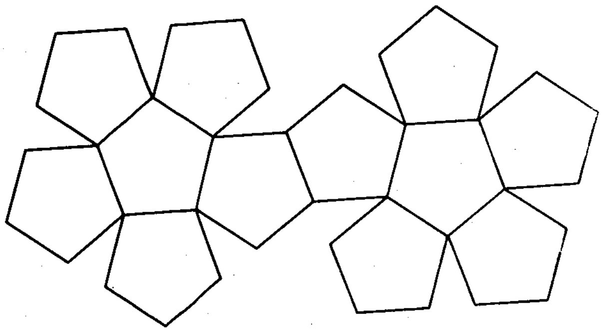
2261 b



2261 c



2261 d



2261 e

2257. Vetítsük rá merőlegesen *a)* egyik lapjának a síkjára, *b)* egyik csúcstengelyére merőleges síkra. (2257. ábra.)

2261. Lásd a 2261.*a, b, c, d, e* ábrát.

2262. a, $a\sqrt{2}$.

2263. $109°28'16''$.

2264. Nézzük a távolságnak egy négyzetmetszet síkjára való merőleges vetületét. Ennek hossza könnyen kiszámítható: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

2265. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2266. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

2267. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

2268. $3:1$.

2270. *a)* Először ki tudjuk számítani a dodekaéderbe írt kocka élét. A dodekaéder és a kocka csúcstengelye egyenlő. $\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2}$.

b) $\frac{a(3+\sqrt{5})}{2}$.

c) Bebizonyítható, hogy a csúcstengely fele (mint átfogó), a laptengely fele és egy lap köré írt kör sugara (mint befogók) derékszögű háromszöget alkotnak. $a\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

2271. *a)* Vegyük az ikozaéder merőleges vetületét egy a csúcstengelyre merőleges síkon. Az egyes élek vetületének hosszát ki tudjuk számítani majd az él valódi hosszából és vetületének hosszából azt, hogy az él egyik végpontja mennyivel van magasabban, mint a másik végpont. Három ilyen magasságot (kettő ezek közül egyenlő) összegezve, megkapjuk a csúcstengely hosszát: $a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

b) A csúcstengely fele (mint átfogó), a laptengely fele és egy lapháromszög köré írt kör sugara (mint befogók) derékszögű háromszöget határoznak meg: $\frac{a\sqrt{3}}{6}(\sqrt{5}+3)$.

c) A tízszögvetület két szemközti oldalának távolsága: $\frac{a}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

2272. $\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$.

2273. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

2274. $\frac{a\sqrt{3}}{12}(\sqrt{5}+3)$.

2275. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

2276. $116°33'54''$.

2277. $138°11'23''$.

2278. Tetraéderé $2a$; oktaéderé a; dodekaéderé $\frac{2}{5}a$; ikozaéderé $\frac{2}{5}a$.

2279. $2a^2\sqrt{3}$.

2280. $3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

2281. $5a^2\sqrt{3}$.

2282. $\frac{a^2}{3}\sqrt{2}$.

2283. $\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$. A középpontját kössük össze a csúcspontokkal, és az így kapott gúlák térfogatát számítsuk ki.

2284. $\frac{5a^3}{12}(\sqrt{5}+3)$. Lásd a 2283. feladat megoldásához adott útmutatást.

2285. $a^2\sqrt{3}$, $\frac{a^3}{6}$.

2286. $6a^2\sqrt[3]{\frac{1}{72}}$.

2287. $\sqrt{\frac{F\sqrt{3}}{6}}$.

2288. $\sqrt[3]{\frac{3K\sqrt{2}}{2}}$.

2289. $2\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{9K^2}{2}}$.

2290. $\frac{1}{6}\sqrt{\left(\frac{F}{\sqrt{3}}\right)^3}$.

2291. $\frac{d^3}{6}$.

2292. Tetraéder: $a\sqrt[4]{12}$; oktaéder: $a\sqrt[4]{3}$; dodekaéder: $a\sqrt{\frac{4(5-2\sqrt{5})}{25}}$;

ikozaéder: $a\sqrt[4]{\frac{12}{25}}$.

2293. $1:\sqrt[4]{2}:\sqrt{3}$.

2294. $1:\sqrt[6]{\frac{1}{4}}:\sqrt[6]{3}$.

2295. *a)* $1:2:2\sqrt{3}$; *b)* $1:4:6\sqrt{2}$.

2296. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{24}$.

2297. 1:2:5.

2298. Be kell bizonyítani, hogy egy-egy kockaélhez tapadó két háromszög síkja nem törik meg, hanem együtt egy rombuszt alkotnak.

a) $c = 14$, $l = 12$, $e = 24$.

b) Egybevágó rombuszok.

c) Nem, mert a rombusz nem szabályos sokszög.

d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

e) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

f) 120°.

g) $6a^2\sqrt{2}$.

h) $2a^3$.

2299. Rombdodekaéder. (Lásd a 2298. feladatot.)

2300. Lásd a 2298. feladatot.

2301. $c = 6$, $l = 8$, $e = 12$; háromszöglapok határolják.

2302. Hatod.

2303. A beírt oktaédernek a háromszorosra nagyítottját kapjuk. Így a térfogatok aránya 2:9.

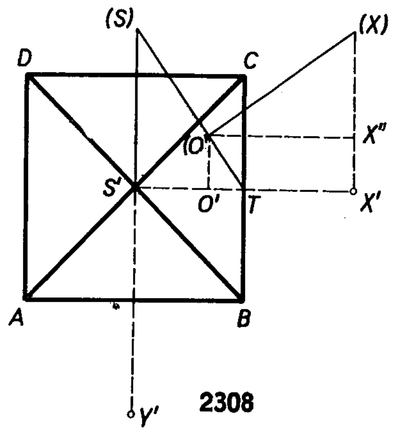
2304. Hat egybevágó gúlára. Felszíne: $a^2(1+\sqrt{2})$, térfogata $\frac{a^3}{6}$.

2305. 19.

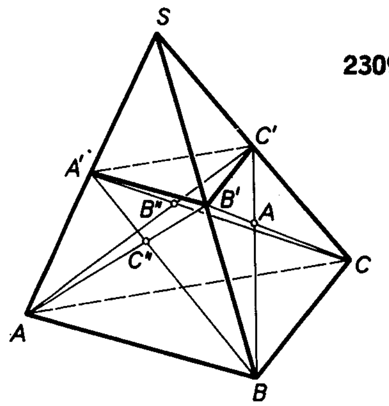
2306. 27.

2307. Vegyük a két gúla közös alapsíkját és azt az n síkot, melyek mindegyike átmegy mindkét gúla csúcspontján, és 4 élt tartalmaz. A test minden éle ezen síkok valamelyikén, de csak az egyiken rajta van. Maximális metszéspontot kapunk, ha a metszősík ezen síkok mindegyikét olyan egyenesben metszi, amelyiknek a síkon levő két éllel van metszéspontja. Eredmény: *a)* 6; *b)* 8; *c)* 10; *d)* $2(n+1)$.

2308. A két csúcs a négyzetlap síkjától egyenlő távolságra van, elég tehát a négyzetlap síkjára eső merőleges vetületüknek a távolságát kiszámítani. (2308. ábra.) $ABCDS'$ a gúla merőleges vetülete. O' a BCS háromszög középpontjának a merőleges vetülete, X' a háromszög fölé emelt szabályos tetraéder X csúcsának a merőleges vetülete. Bebizonyítható, hogy S', O', X' egy a BC oldalra merőleges egyenesen helyezkednek el. Az S, O és X pontokat az $S'X'$ egyenes körül beforgattuk a négyzet síkjába, (S), (O), (X)-szel jelöltük a beforgatott pontokat. Bebizonyítható, hogy (O) az $(S)T$ szakasz T-hez közelebbi harmadolópontja; (O) (X) egyenes merőleges az $(S)T$ egyenesre. Belátható továbbá, hogy $S'O = \frac{a}{3}$; majd hogy $S'(S) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $(O)(X) = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $T(S) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ezekből és a $T(S)S'$, $(X)(O)X''$ háromszögek hasonlóságából már következik, hogy $O'X' = \frac{2a}{3}$. Azaz $S'X' = S'O' + O'X' = a$. Jelölje Y' az ABS lap fölé emelt szabályos tetraéder negyedik csúcsának a merőleges vetületét, akkor $S'Y' = a$. Ezekből már kiszámítható az $X'Y'$ távolság. Eredmény $a\sqrt{2}$.



2308



2309

2309. $A'B'C'$-vel jelöltük az AS, BS, CS oldalélek felezőpontját (2309. ábra). A kérdéses síkok tehát az $AB'C'$; $BC'A'$; $CA'B'$. Bizonyítsuk be, hogy az $AB'C'$ és a $BC'A'$ síkok metszésvonala a $C'C''$ egyenes, ahol C'' az ABS háromszög súlypontja. Hasonlóan nyertük az A'' és B'' pontokat is. Belátható, hogy az $A''B''C''$ háromszög az ABC és $A'B'C'$ háromszögek síkjával párhuzamos síkban van, és hasonló hozzájuk, a megfelelő oldalak párhuzamosak is. Kiszámítható a megfelelő oldalak aránya, és így a síkok távolsága is. Belátható, hogy az $A'A''$; $B'B''$; $C'C''$ egyenesek egy S' pontban találkoznak. Számítsuk ki az S'-nek az $A'B'C'$ síktól való távolságát. S' a három felvett sík közös pontja lesz. A síkok feletti rész tehát az $A'B'C'S$ és az $A'B'C'S'$ tetraéderekből tevődik össze. Eredmény: $\frac{a^3\sqrt{2}}{80}$.

2310. A hiba $\frac{M(\sqrt{A_t}-\sqrt{a_t})^2}{\mathfrak{s}} \approx 0{,}06\ m^2$.

2311. Az A'' valamely csúcsát kössük össze a test csúcsaival. Így a testet gúlákra bontottuk fel. Az egyik gúla alaplapja A', magassága $\frac{m}{2}$; egy másik gúla alaplapja A', magassága $\frac{m}{2}$. A többi gúla alaplapja a test egy-egy oldallapja. Ezen gúlák térfogatának negyedrészét tudjuk könnyen kiszámítani; vegyük ugyanis az alapháromszög helyett a középvonallal levágott negyedrészét. (Ha lenne trapézoldallap, azt is egy átlóval két háromszögre bonthatjuk.) Így egy olyan tetraédert kapunk, ahol alaplapnak tekinthetjük az A'' egy háromszögét, és a magasság megint $\frac{m}{2}$. Az összes ilyen tetraéderalaplap kiadja az A''-t.

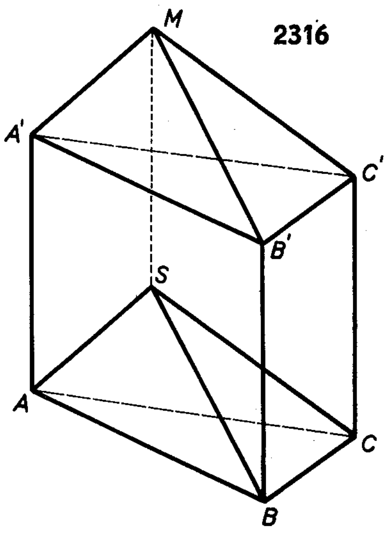
2312. Lásd a 2311. feladatot. $\frac{m}{6}(2ab+2a'b'+ab'+a'b)$.

2313. Lásd a 2311. feladatot.
2314. Nézzük meg, hogy mi marad ki a hasábból! (2:3.)

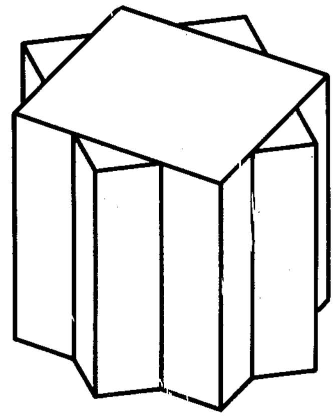
2315. A fedőlaptól $\frac{m\sqrt{3}}{3}$ távolságban kell metszeni, ahol m a hasáb magassága.

2316. Ha az $ABCS$ tetraédert SM-mel eltoljuk, az $A'B'C'M$ tetraédert kapjuk. A három hasáb térfogatának összegét megkapjuk, ha az $ABCA'B'C'$ hasábból elvesszük az $ABCS$ tetraédert, és helyette hozzávesszük az $A'B'C'M$ tetraédert. (Lásd a 2316. ábrát.)

2316



2318

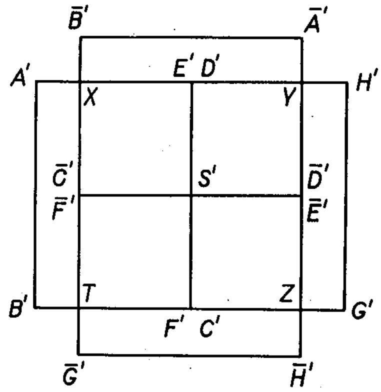


2318. A két kocka közös része szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb (2318. ábra).

a) $2a^3(\sqrt{2}-1)$,

b) $2a^3(2-\sqrt{2})$.

2319. Vetítsük rá merőlegesen a kockát egy az éltengelyére merőleges síkra. Forgassuk el az éltengely körül 90°-kal, és az elforgatott kocka merőleges vetületét is rajzoljuk meg. (2319. ábra.) $A'B = a$, $A'H' = a\sqrt{2}$. Bebizonyítható, hogy a két kocka közös része egy $XYZT$ alapú $a(\sqrt{2}-1)$ magasságú egyenes hasábból és két gúlából áll, melyek alaplapja az $XYZT$-vel egybevágó, és magassága $\frac{a}{2}$.



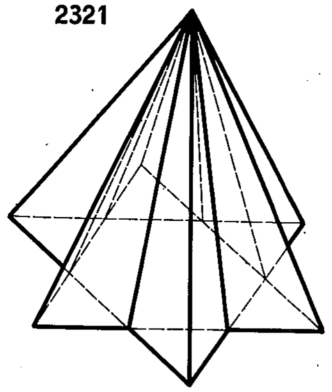
2319

Mindez a rajzról leolvasható, ha meggondoljuk, hogy a látható lapok 45°-os szöget zárnak be a papír síkjával: $a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)$.

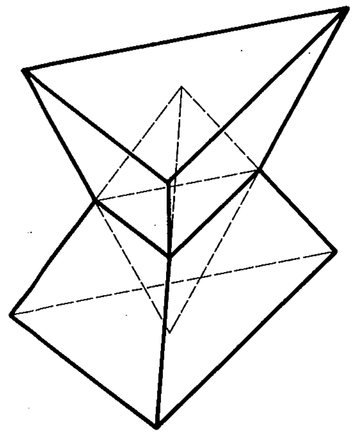
2320. Bizonyítsuk be, hogy a két kockának közös a testátlóra merőleges szabályos hatszög metszete. Ebből belátható, hogy a közös rész két gúlából tevődik össze, melyek közös alaplapja ez a szabályos hatszög metszet, csúcsai pedig a testátló végpontjai. $\left(\frac{3a^3}{4}.\right)$

2321. Könnyen belátható, hogy a közös rész egy szabályos hatszög alapú egyenes gúla, ahol az alapél a tetraéder élének a harmada, a magassága pedig megegyezik a tetraéder magasságával. (Lásd a 2321. ábrát.) $\left(\frac{a^3\sqrt{2}}{18}.\right)$

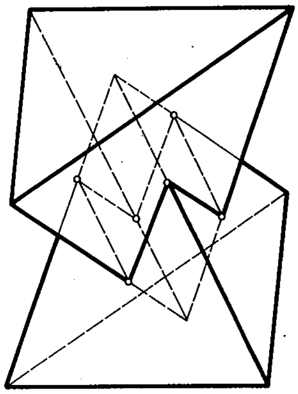
2321



2322



2322. Bebizonyítható, hogy a közös rész két közös alaplapú szabályos tetraéder, melyeknek élhossza $\frac{a}{2}$. (Lásd a 2322. ábrát.) $\left(\frac{a^3\sqrt{2}}{48}.\right)$



2323

2323. Először bizonyítsuk be, hogy egy-egy él a másik tetraédert egy-egy lapjának súlypontjában metszi. (2323. ábra.) Akkor belátható, hogy a közös rész olyan paralelepipedon, amelynek minden lapja $\frac{a}{3}$ élű 60°-os szögű rombusz.

$\left(\frac{a^3\sqrt{2}}{54}.\right)$

2324. $\left(\frac{a^3\sqrt{2}}{24}\right)$.

2325. A feladat speciális esete a 2323. feladat. Lásd az annak megoldásához adott útmutatást. A közös rész paralelepipedon. Térfogata a gúla térfogatának a $\frac{2}{9}$ része.

2326. Bizonyítsuk be, hogy a sarkokban egy-egy harmadkocka keletkezik, $\left(a+b-\frac{8}{3}\right)$.

2327. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

2328. $\left(\frac{am}{a+m}\right)^3$.

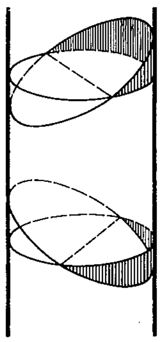
2329. $\left(\frac{am}{a+m\sqrt{2}}\right)^3$.

2333. Nézzük a síknak a vezérgörbe síkjával való metszésvonalát.

2337. Mutassuk meg, hogy a metszésvonal kör affin képe.

2339. Először keressük meg az egyik egyenes pontjaiból kiinduló, az adott síkkal párhuzamos és az adott szakasszal egyenlő hosszú szakaszok végpontjainak a halmazát.

2340. A 2337. feladat szerint a két síkmetszet közül legalább az egyik ellipszis lesz. Vegyük fel az ellipszisek középpontján átmenő, az alkotókra merőleges síkot. (2340. ábra.) Bizonyítsuk be, hogy egy félkör és egy félellipszis által határolt palást és térfogat megegyezik a kiegészítő félkör és félellipszis által határolt palásttal és térfogattal.



2340

2341. $m = \frac{\pi r}{2}$.

2342. 5,732 m^2.

2343. *a)* 150,77 $cm^2 \approx 150{,}8$ cm^2, *b)* 558 dm^2, *c)* 70 650 m^2.

2344. 367,4 cm^2.

2345. $r = 5$ cm, $m = 16$ cm.

2346. $r = 38{,}88$ m; $m = 48{,}60$ m.

2347. $r = 6{,}598$ cm; $m = 20{,}202$ cm.

2348. 35 óra.

2349. 19,6 m^2.

2350. 183,8 dkg.

2351. 474,9 cm^2; illetve 670,0 cm^2.
2352. *a)* 577,3 m^3, *b)* 88,04 m^3, *c)* 407,6 dm^3.
2353. 263,9 m^2; 1979,3 m^3.
2354. *a)* 21,14 cm, *b)* 17,86 m.
2355. 764,5 cm^2; 1490,7 cm^3.
2356. *a)* 135,23 dm^2; 92,30 dm^3;
b) 79,76 dm^2; 54,44 dm^3;
c) 46,35 dm^2; 23,08 dm^3;
d) 32,48 dm^2; 13,61 dm^3.
2357. 26:33.
2358. 627,8 cm^2.
2359. 21,675 cm.
2360. 39,89 cm.
2361. Magasság: 1,996 dm; $r = 3{,}992$ dm.
2362. 24,07 cm.
2363. 1,572 cm.
2364. 1,25 mm.
2365. 64,34 hl.
2366. 12080 kg.
2367. 377 kg.
2368. $r = 9{,}050$ cm; $m = 37{,}43$ cm.
2369. $V_1:V_2 = r_1:r_2$.
2370. $P_1:P_2 = r_2:r_1$.
2371. Megegyezik a rövidebb és a hosszabb oldal arányával.

2372. $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{ab\pi}}$.

2373. A térfogat képletéből fejezzük ki m-et, és helyettesítsük a palást és egy alaplap területének a kifejezésébe. Nézzük, hogy ez a kifejezés milyen sugár esetén lesz a legkisebb. Gondoljunk arra, hogy több tag összege, ha a szorzatuk állandó, akkor a legkisebb, ha a tagok egyenlők. Eredmény:

ha a sugár és a magasság megegyezik. $m = r = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

2374. A felszín képletéből fejezzük ki a magasságot, és helyettesítsük a térfogat képletébe. Nézzük meg, hogy ez a kifejezés milyen sugár esetén lesz a legnagyobb. Gondoljunk arra, hogy egy kifejezés akkor a legnagyobb, amikor egy állandóval szorzott négyzete a legnagyobb. Továbbá, hogy több tényező szorzata, ha az összegük állandó, akkor a legnagyobb, ha a tényezők egyenlők. Eredmény: az egyenlő oldalú henger (magasság és az alaplap átmérője egyenlő).

2375. $r = \frac{Mm-M\sqrt{Mm}}{m-M}$ és $R = r\cdot\sqrt{\frac{m}{M}}$.

2376. 1260 cm^2.
2377. 28,13 cm^3.
2378. 23,43 dm^3.
2379. 1065,6 dm^3.

2380. 29,63 dm^2; 12,38 dm^3.
2381. 138,23 cm^3.
2382. 1087,5 t.
2383. 2,965 dm; 7,071 dm.
2384. 1,2733 m.
2385. Sugár 2,769 dm; magasság 8,307 dm.
2386. 17,63 m^3.
2387. 471,2 m^2.
2388. 0,7427 m.
2389. 6,648 m^3.
2390. 1,0535 m^3.
2391. 9552 mp.
2392. 3,24 mm.
2393. 1,979 kg.
2394. 1151 kg.
2396. 76,46 kg.
2397. 22,07 kg.
2398. 35,3 N. A szigetelőanyag a három rézdrót közötti üreget és az ólomköpenyig terjedő részt tölti ki.
2399. 3,6 mm.
2400. 10 m.
2401. 5,63 dm.
2402. 57,6 cm.
2403. 3,07 cm.
2404. 0,195.
2405. 7,58 m^3.
2406. 0,374.
2407. 3443 N.
2408. 662,98 cm^3.
2409. 1,986 dm^3.
2410. 5,302 m^3.
2411. 5,06 m^3.
2416. Van, mégpedig négy. (Mérjünk a csúcsból kiindulva egyenlő szakaszokat a három egyenesre. Vegyük fel a végpontokon átmenő kört. Bizonyítsuk be, hogy az egyenesek közös pontja – mint csúcspont – és a kör – mint vezérkör – forgáskúpot határoz meg.)

2417. Vegyük a síknak a vezérgörbe síkjával való metszésvonalát, és nézzük meg ennek a vezérgörbével való lehetséges kölcsönös helyzeteit.

2421. Először bizonyítsuk be, hogy a forgáskúp csúcsa a lapszög élén van. Majd vegyük fel a kúp egy köre vezérgörbéjének síkját. Bizonyítsuk be, hogy ezen síknak a lapszög síkjával való metszésvonalai, a lapszög éle és a két érintő alkotó két egybevágó háromszöget határoz meg. A második állítás igazolásához elég bebizonyítani, hogy a kör vezérgörbe-középpontja a lapszög síkjaitól egyenlő távolságra van.

2422. Négy ilyen forgáskúp van.

2423. A megoldások száma: 2, 1 vagy 0.

2424. A megoldások száma: 2, 1 vagy 0.

2425. A megoldások száma: 2, 1 vagy 0.

2426. Legfeljebb négy megoldás.

2431. $V = \frac{m\pi}{3}(R^2+r^2-Rr)$.

2432. *a)* 8 cm; *b)* 93,05 cm; *c)* 0,088 m.
2433. *a)* 5,236 cm; *b)* 25,09 dm; *c)* 142,93 cm.
2434. *a)* 5,364 dm; *b)* 3,864 cm; *c)* 99,75 mm.
2435. *a)* 56°48′; *b)* 89°; *c)* 79°42′
2436. *a)* 225°; *b)* 242,6°.
2437. $a = 5\sqrt{7}$, $b = 5\sqrt{3} = m$.
2438. 17,75 cm.
2439. 68,31 cm.

2440. *a)* $\frac{r^2\pi}{4}$; *b)* $\frac{r^2\pi}{16}$; *c)* $\frac{r^2\pi m^2}{(m+n)^2}$.

2441. *a)* 216π dm²; *b)* 12,21 dm²; *c)* 310,4 cm².
2442. $r = 12{,}88$ cm; $m = 15{,}81$ cm; $a = 20{,}39$ cm.
2443. $r = 5$ cm; $m = 5\cdot\sqrt{3} \approx 8{,}6$ cm; $\alpha = 60°$.
2444. $m = r\sqrt{15}$.
2445. 145,3°; 412,3 cm².
2446. 12,5 cm².
2447. 33,55 cm.
2448. 2,037 m.

2449. $23\sqrt{2}$ cm.

2450. $11\sqrt{3}$; $11\sqrt{6}$.

2451. $m\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

2452. A csúcstól számítva $\frac{m\sqrt{n}}{n}, \frac{m\sqrt{2n}}{n}, \ldots, \frac{m\sqrt{(n-1)n}}{n}$.

2453. *a)* 15,39 cm²; 0,637 cm³; *b)* 76,93 dm²; 36,88 dm³; *c)* 3,185 m²; 343,0 dm³; *d)* 3,648 dm²; 446,6 cm³.
2454. 4:1 és 8:1.
2455. 103,12 dm²; 67,9 dm³.

2456. $0{,}49\pi$ m²; $\frac{0{,}343\pi}{9}$ m³.

2457. $\frac{2\sqrt{3\pi}}{3\pi}$ m.

2458. $2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$ m.

2459. 239,85 cm².
2460. 3,168 m³ vagy 1,313 m³.

2461. $(1+\sqrt{2})\pi$, $\frac{\pi}{3}$.

2462. 449,2 cm^3.

2463. $\frac{m\sqrt[3]{4}}{2}$.

2464. 233,6 dm^2; 237,3 dm^3.

2465. $\frac{3a^2\pi}{4}$, $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$.

2466. 599,4 cm^3.

2467. $72\pi\sqrt{3} \approx 391{,}7$ cm^3.

2468. 19,72 dm^2; 5,72 dm^3.

2469. 3,55 m^3.

2470. 15,50 m^2.

2471. 47,41 dm.

2472. A csúcstól 33,82 cm távolságban. $\varrho = 10{,}08$ cm.

2473. Jelöljük az alkotót a-val, a kúp nyílásszögének felét α-val. Fejezzük ki a és α segítségével az alapkör sugarát és magasságát. Végül ezek segítségével írjuk fel a térfogatot. Azt kell megnéznünk, hogy az így kapott kifejezés milyen α-ra lesz a legnagyobb. Gondoljunk arra is, hogy egy kifejezés akkor a legnagyobb, ha egy állandóval szorzott négyzete a legnagyobb, továbbá, hogy több tényező szorzata (ha a tényezők összege állandó) akkor a legnagyobb, ha a tényezők egyenlők. (Ha a fél nyílásszög tangense $\sqrt{2}$.)

2474. Legyen az alkotó a, az alaplap sugara r, a magasság m. A felszín képletéből fejezzük ki az a-t. m-et az a és r segítségével írjuk fel. Elég azt megnézni, hogy a térfogat négyzete milyen r-re lesz a legnagyobb. Lásd még a 2473. feladat megoldásához adott útmutatást. (Ha az alkotó az alaplap sugarának háromszorosa.)

2475. A 2474. feladatban számítsuk ki a legnagyobb térfogat értékét is. Így a felszín és a térfogat között kapunk egy egyenlőtlenséget. Ebből leolvasható a feladat eredménye: ha az alkotó az alaplap sugarának háromszorosa. A 2473 – 75. feladatok differenciálszámítással is megoldhatók.

2476. A kisebbik rész 252,2 cm^3.

2477. 492,5 cm^2; 600 cm^3.

2478. 919,8 cm^3.

2479. 64,02 dm^3.

2480. 2,72 dm^3.

2481. 1319 cm^3.

2482. 9,41 dm^3.

2483. 30755 cm^3.

2484. $\frac{360}{k}$.

2485. $\frac{t}{10}\sqrt{\frac{11t}{10\pi}}$.

2486. $\sqrt{\dfrac{F^2 \pm \sqrt{F^4-72V^2F\pi}}{4F\pi}}$.

2487. $\dfrac{\pi}{6} rf \sin\dfrac{\alpha}{2}\left[f\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sqrt{4r^2+f^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\right]$.

Legyen a leghosszabb alkotó x, a legrövidebb alkotó y, akkor az átmérő két szakasza kx és ky; $k = \dfrac{2r}{x+y}$. Az átmérő két szakaszára felírjuk a cosinustételt, a két egyenletet kivonjuk egymásból. A kapott másodfokú egyenlet megadja $x+y$ értékét. A magasságot a kétféle területképletből kapjuk, az egyik háromszögből. Végül $x+y$ értékét helyettesítjük.

2488. 11,21 dm^2; 11,15 cm.
2489. 121,7 dm^2.
2490. $m = 1{,}73$ m; $2r = 5{,}76$ m.
2491. 33,6 dm.
2492. 452 340 kg.
2493. 2,2 cm.
2494. $m = 15{,}1$ dm; $r = 10{,}77$ dm.

2495. $m \cdot \sqrt[3]{\gamma}$.

2496. $a = 11{,}91$ cm; $\alpha = 40°55'$.

2497. $\alpha = 16°58'$; $m = \dfrac{\sqrt{45}}{10}$ cm.

2498. $r = 11{,}91$ cm; $\alpha = 44°32'$.
2499. $m = 20{,}7$ m; $a = 29{,}3$ m.
2500. *a)* 20,27 dm^2; *b)* 1274 cm^2.
2501. 2803,5 cm^2.
2502. 2,13 cm; 8,13 cm.
2503. 4,505 cm; 13,515 cm.
2504. $2t\pi$.
2505. 194,1 cm^2.
2506. 4,956 cm.
2507. 1,310 dm.
2508. 10,12 cm; $\varrho = 14{,}30$ cm.
2509. *a)* 439,6 cm^3; *b)* 0,018 83 cm^3; *c)* 4,46 dm^3; *d)* 114 cm^3.
2510. 490,6 liter.
2511. 2,077 dm^3.
2512. 39,99°.
2513. 3,069 dm.
2514. 2,682 m.

2515. $\dfrac{R}{r} = 1+\sqrt{3}$.

2516. 76 700 N.
2517. 12 168 kg.
2518. 35,25 kg.

2519. $\frac{21}{\sqrt{\pi}} = 11{,}8\ \mathrm{m}^3$.

2520. 19,72 m^2; 2,84 m^3.

2521. 157,13 m^3.

2522. 74,24 m^2; 44,61 m^3.

2523. 35 liter; 50 dm^2.

2524. 190,5 dm^3.

2525. 682,2 dm^3.

2526. 1,437 m^3.

2527. 45,90 cm^2; 21,98 cm^3.

2528. 396,5 cm^3.

2529. $\frac{7F}{120}\sqrt{\frac{3F}{\pi}}$.

2530. 422,9 m^3; 731,7 m^3.

2531. 7,9 dm távolságban; a síkmetszet sugara 7,14 dm. A kiegészítő kúpból kell elindulni.

2532. 0,26 m. Lásd az előző feladatot.

2533. 2,822 dm.

2534. $\sqrt[3]{\frac{61}{12}},\ \sqrt[3]{\frac{41}{6}}$.

2535. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4V}{m\pi}+\frac{m^2}{3}-\frac{a^2}{3}}+\sqrt{a^2-m^2}\right)$; $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4V}{m\pi}+\frac{m^2}{3}-\frac{a^2}{3}}-\sqrt{a^2-m^2}\right)$.

2536. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+\frac{2F}{\pi}}+\sqrt{a^2-m^2}-a\right)$; $\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+\frac{2F}{\pi}}-\sqrt{a^2-m^2}-a\right)$.

2537. $\frac{1}{2m\pi}\left(t\pi+\sqrt{12mV\pi-3t^2\pi^2}\right)$; $\frac{1}{2m\pi}\left(t\pi-\sqrt{12mV\pi-3t^2\pi^2}\right)$.

2538. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{3V}{\pi m}+\frac{1}{8}\left(m^2-\frac{2F}{\pi}\pm A\right)}\pm\sqrt{\frac{3V}{\pi m}-\frac{3}{8}\left(m^2-\frac{2F}{\pi}\pm A\right)}\right]$,

ahol $A = \sqrt{\left(m^2+\frac{2F}{\pi}\right)\left(m^2+\frac{48V}{\pi m}-\frac{6F}{\pi}\right)}$.

2539. $\varrho = \sqrt[3]{\frac{R^3(\gamma'-\gamma)+r^3\gamma}{\gamma'}}$; $\quad m' = \frac{m(R-\varrho)}{R-r}$.

2543. A gömböt a kérdéses pontokban a pontot a gömb középpontjával összekötő egyenes metszi.

2548. Bocsássunk a gömb középpontjából a metszősíkra merőleges egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ennek talppontjától a metszésvonal minden pontja egyenlő távolságra van.

2552. $R^2 = r^2+d^2$.

2556. Vegyünk fel a két gömb egy közös pontján át a gömbök középpontjait összekötő egyenesre merőleges síkot, és bizonyítsuk be, hogy ez a sík mindkét gömböt ugyanabban a körben metszi.

2557. Be kell bizonyítani, hogy a két kör középpontjában a síkjukra állított merőleges egyeneseknek van metszéspontja. Először azt bizonyítsuk be, hogy a középpontokból a metszésvonalra állított merőlegeseknek ugyanaz a talppontja.

2558. Vegyük a két kör egy-egy, egymással párhuzamos átmérőjét. Ezek végpontjai egy egyenlő szárú trapéz csúcspontjai. E köré lehet kört írni. Bizonyítsuk be, hogy e kör középpontja, illetve sugara lesz a keresett gömb középpontja, illetve sugara.

2560. Lásd a 2559. feladatot. Azt kell még bebizonyítani, hogy bármely két kör ugyanazt a gömböt határozza meg.

2562. Két kört rögzítve, bizonyítsuk be, hogy tetszőleges harmadik (ha nem ugyanazon két pontban metszi a rögzített kettőt) síkmetszete a rögzített kettő által meghatározott gömbnek.

2563. Tegyük fel, hogy a felület nem sík. Tekintsük a felület egy körmetszetét és egy ettől különböző pontját. Majd azt a gömböt, melyet ezek meghatároznak. Bebizonyítható, hogy a kiszemelt pontot a körlemez egy belső pontjával összekötő egyenesre illeszkedő tetszőleges sík az eredeti felületet és a gömböt ugyanabban a körben metszi. Ebből már belátható, hogy a felület azonos ezzel a gömbbel.

2564. Vegyünk egy érintőt, majd a gömbnek erre az érintőre illeszkedő főkör metszetét. A külső pontot a gömb középpontjával összekötő egyenes körül forgassuk a főkört és az érintőt is.

2566. Vegyünk fel a gömb középpontján átmenő és az egyenesre merőleges síkot. Ez a gömböt egy főkörben metszi. Az egyenes és a főkör síkjának metszéspontjából húzzunk a főkörhöz érintőt. Bizonyítsuk be, hogy egy ilyen érintő és az adott egyenes a kívánt érintősíkot feszíti ki.

2567. Azt bizonyítsuk be, hogy ezek az egyenesek a két gömb középpontját összekötő egyenest ugyanabban a pontban metszik.

2568. Lásd a 2567. feladat megoldásához adott útmutatást.

2570. Vegyük a gömbök középpontjain átmenő síkot, és ezen vizsgáljuk a viszonyokat.

2571. Általában négy lehet.

2572. Általában nyolc. Előfordulhat, hogy számtalan sok. Mikor?

2573. Vegyük a három gömb középpontja által meghatározott síknak mindhárom gömbbel való metszésvonalát, és itt tanulmányozzuk a viszonyokat.

2575. Először bizonyítsuk be, hogy bármely háromnak van egy közös egyenese. Azután mutassuk meg, hogy bármely két ilyen egyenes metszi egymást.

2576. Természetesen a megadott síknak a kör síkját a kör egy érintőjében kell metszenie. Be kell bizonyítani, hogy az érintési pontban az érintősíkra állított merőleges és a kör középpontjában a kör síkjára állított merőleges metszi egymást. Ez a keresett gömb középpontja.

2580. Számtalan sok van.

2581. Számtalan sok van.

2582. A három sík közös pontjából egy mindhárom síkot érintő gömböt nagyítással átvihetünk a kívánt gömbbe.

2583. A gömb zsugorításával vezessük vissza a feladatot a 2582. feladatra.

2584. Vegyük fel a kör középpontján átmenő és a síkjára merőleges m egyenest. Az m egyenes és a gömb középpontja által kifeszített sík a kört egy átmérőben, a gömböt egy főkörben metszi. Vegyük fel az átmérő két végpontján átmenő, a főkört merőlegesen metsző kört. Bizonyítsuk be, hogy ez a kör a keresett gömb főköre.

2585. Tekintsük a két gömb középpontjára illeszkedő síkmetszeteket.

2586. Olyan pontot kell keresnünk a két sík metszésvonalán, amelyből egyenlő érintők húzhatók a két körhöz. Ez a pont lesz a keresett gömb középpontja és az érintőhossz a sugara.

2587. Az adott pontot a középpontot tartalmazó egyenes körül forgatva, a gömb egy körét írja le. Az adott pont és az érintő síkjában a gömb egy újabb körét is megtalálhatjuk.

2588. A középpontot tartalmazó egyenes és az érintősík metszéspontjából egy tetszőleges gömb, amelynek középpontja az adott egyenesen van, és érinti az adott síkot, egy nagyítással vagy kicsinyítéssel átvihető a keresett gömbbe.

2590. Lásd a 2589. feladatot.

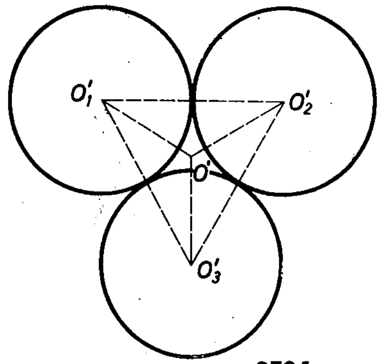
2591. Lásd a 2589. feladatot.

2592. Vegyük észre, hogy a félegyenesek közös pontja és az érintési pontok egy szabályos tetraédert határoznak meg. ($\sqrt{3}$.)

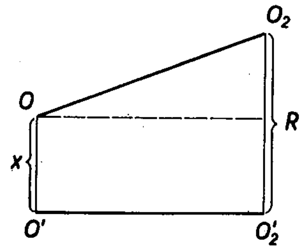
2593. A három húr egy tetraéder egy csúcsból kiinduló három éle. A gömb e tetraéder köré írt gömb. A tetraéder egyenlő éleinek hosszát keressük, ha ismerjük két-két él hajlásszögét és a köré írt gömb sugarát

$$\left(2R\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}\right).$$

2594. Képzeljük el az O_1, O_2, O_3 középpontú és R sugarú, továbbá az O középpontú, x sugarú gömböknek a közös érintősíkon való merőleges vetületét. (2594.*a* ábra.) A pont vetületét vesszővel különböztettük meg az eredeti ponttól. Bebizonyítható, hogy $O'_1O'_2O'_3$ egy $2R$ oldalú szabályos háromszög, és O' ennek középpontja. Így pl. az $O'O_2$ távolság könnyen kiszámítható. Ki tudjuk fejezni R-rel és x-szel az $OO'O'_2O_2$ derékszögű trapéz többi oldalát is (2594.*b* ábra), és a trapézból levágott derékszögű háromszög segítségével az x értékét kiszámíthatjuk. $x = \dfrac{R}{3}$.



2594 a



2594 b

2595. $\sqrt{3}:1$. (Lásd a 2594. feladat megoldásához adott útmutatást.)

2596. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2597. $\frac{bc}{2a}$; $\frac{ca}{2b}$; $\frac{ab}{2c}$. (Lásd a 2594. feladat megoldásához adott útmutatást.)

2598. *a)* 2,99 cm; *b)* 44 m.

2599. $\frac{3}{2}R^2\pi$.

2600. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

2601. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

2602. 25 cm.
2603. 29,55 cm.

2604. $\frac{1}{2d}\sqrt{[d^2+(r_1+r_2)^2][d^2+(r_1-r_2)^2]}$.

2605. $\pi\left[1-\left(\frac{t_2-t_1}{2\pi d}\right)^2\right]$.

2606. 75,1 km.
2607. 312,9 m/s.
2608. *a)* 4900π dm²; *b)* $5{,}76\pi \approx 18{,}097$ cm²; *c)* 3402 m².
2609. *a)* 1,995 m; *b)* 4,527 dm; *c)* 9,460 cm.
2610. *a)* négyszer; *b)* kilencszer; *c)* k^2-szer akkora lesz.
2611. 265,4 m².
2612. $170 \cdot 10^3$ km².
2613. 3178 N.
2614. $75{,}36\pi \approx 236{,}7$ cm².
2615. 13%.
2618. 58,81 m².
2619. 23,12 m².
2620. 599,9 m².
2621. 30,89 m.
2622. 5,465 dm; 24,76 dm, illetve 216,00 dm².
2623. 2,25%.
2624. 49,17%.
2625. 149,4 m².
2626. 21 055 000 km².
2627. $m = 8{,}428$ dm; $r = 19{,}35$ dm.
2628. 18,285 m.

2629. $r = 2R\sqrt{\sqrt{5}-2}$; $m = R(3-\sqrt{5})$.

2630. $\frac{2R(\alpha-1)}{\alpha}$.

2631. $d_1 = \frac{(n-2)R}{n}$; $d_2 = \frac{(n-4)R}{n}, \ldots, d_{\left[\frac{n}{2}\right]} = \frac{\left(n-2\left[\frac{n}{2}\right]\right)R}{n}$, ahol $\left[\frac{n}{2}\right] =$
$= \frac{n}{2}$, ha n páros, és $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$, ha n páratlan.

2633. 520π cm^2.
2634. 630π cm^2.
2635. $10\,144 \cdot 10^4$ km^2; $13\,240 \cdot 10^4$ km^2; $2105 \cdot 10^4$ km^2.
2636. A magasság a gömb sugarának fele.
2638. *a)* 7,24 mm^3; *b)* 0,1131 dm^3; *c)* 2000,5 dm^3; *d)* 7,645 dm^3.
2639. *a)* 5,032 m; *b)* 6,129 dm; 7,158 cm.
2640. 1,663 dm^3.
2641. 3.
2642. 24,23 cm.
2643. 8-szorosra; 27-szeresre; n^3-szörösre.
2644. 723,9 gramm.
2645. 527 N.
2646. 7990 N.

2647. $R = \sqrt[3]{\frac{13}{15}}$.

2648. 9,06 g/cm^3.
2649. 33,68 m; vastagság 0,97 cm.

2650. $\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$ dm; a 8 kg-os $\sqrt[3]{\frac{20}{3\pi}}$ dm.

2651. Vegyük észre, hogy a négy gömb középpontjai egy $2R$ oldalú szabályos tetraéder csúcspontjai, és hogy a tetraéder köré írt gömbből zsugorítással, illetve nagyítással megkaphatjuk az ötödik és a hatodik gömböt. $(V_5 : V_6 = 1 : (5+2\sqrt{6})^3.)$

2652. *a)* 523,8 m^3; *b)* 4,187 cm^3; *c)* 2,974 dm^3; *d)* 1,382 dm^3.
2653. *a)* 77,38 cm^2; *b)* 554,9 m^2; *c)* 122,9 dm^2; *d)* 0,8979 m^2.
2654. 17,13 dm^2; $6^2/_3$ dm^3.
2655. $r = {}^1/_4$ dm.
2656. $7073 \cdot 10^7$.

2657. A felszín $\frac{9}{121}$; a térfogat $\frac{27}{1331}$.

2658. $8\sqrt[3]{500} \approx 63{,}51$ cm^2.

2659. $\frac{45\sqrt{2}}{6} \approx 10{,}605$ cm^3.

2660. 5,688 dm.
2661. 15,47 dm, illetve 14,57 dm.
2662. 10,80 dm, illetve 9,50 dm.
2663. 4500π cm³
2664. $D:d = R:r = \sqrt[3]{63\cdot 10^6} \approx 398$.
2665. *a)* 2,29 dm³; *b)* 291,5 dm³; *c)* 243,7 m³.
2666. *a)* 10,706 cm; *b)* 14,276 m; *c)* 9,7704 dm.
2667. *a)* 96,7 cm³; *b)* 1518 dm³; *c)* 0,2759 m³.
2668. 1581 cm²; 2205 cm³.
2669. 446,6 m²; 322,1 m³.
2670. 7,690 dm³; 31,19 dm³.
2671. 1,47 m³.
2672. 3,764 cm.
2673. $r = 33{,}08$ m; $m = 13{,}23$ m.
2674. 218,9 cm³.
2675. 1,66.
2676. 69,48 cm³.
2677. 0,74.
2678. 0,97.
2679. 0,84.
2680. 1,6 mm.
2681. $\dfrac{m^2(3R-m)}{4R^3}$.
2682. $\dfrac{m^2(3R-m)}{M^2(3R-M)}$.
2683. $\dfrac{m^2(3R-m)}{4(R^3-r^3)}$.
2684. A megengedhető teher $\dfrac{\pi}{3}[(R-m)^2(2R+m)-15(R^3-r^3)]$.
2685. 0,67.
2686. 0,496 N.
2687. 5,09 dm²; 954,2 cm³.
2688. $A_1 = 63\pi$ cm², $A_2 = 99\pi$ cm², $V_1 = 45\pi$ cm³, $V_2 = 99\pi$ cm³.
2689. 295,3 dm³.
2690. 4,653 cm.
2691. 30,06 cm.
2692. *a)* 7,576 cm³; *b)* 21,10 dm³; *c)* 1,894 m³.
2693. 11,46 cm.
2694. 23,06 dm²; 4,769 dm³.
2695. *a)* 142,25 dm³; *b)* 82,80 dm³.
2696. *a)* 0,2806 m³; *b)* 17,50 dm³.
2697. 17,515 dm³.
2698. 14,28 dm; 9,03 cm.
2699. $m = 6{,}420$ cm; $\varrho_1 = 23{,}63$ cm; $\varrho_2 = 16{,}73$ cm.
2700. 76,67 cm³.

2766. $\frac{8R^3\pi(k^2-1)^2}{3k^6}$.

2767. Felszínek aránya: 3:4; térfogatok aránya: $\sqrt{3}:4$.

2768. 2:3.

2769. Felszínek aránya: 9:4; térfogatok aránya: 9:4.

2770. Felszínek aránya: 36:16:9; térfogatok aránya: 72:32:9.

2771. 502,6 cm^2 ($= 160\pi$).

2772. $\frac{3200\pi}{3}$ cm$^2 \approx 33{,}51$ dm^2; $\frac{32\,000\pi}{9}$ cm$^3 \approx 11{,}17$ dm^3.

2773. 1296π cm$^2 \approx 40{,}71$ dm^2; 5184π cm$^3 \approx 16{,}29$ dm^3.

2774. $R(3-\sqrt{5})$.

2775. $R\sqrt{k \pm \sqrt{k(k-2)}}$, $k \geqq 2$.

2776. $R\sqrt{k \pm \sqrt{k(k-2)}}$, $k \geqq 2$.

2777. A nyílásszög felének a sinusa $\frac{5}{49}$

2778. 60°.

2779. $1:n$.

2780. $\frac{R^3\pi}{3\sin\alpha}(1-\sin\alpha)^2$.

2781. $(2-k)(k-1)(7-5k+k^2):2k$.

2782. $A = \frac{8Rr\pi}{(R+r)^2}(R^2+Rr+r^2)$, $V = \frac{16R^2r^2\pi}{3(R+r)^3}(R^2+Rr+r^2)$.

2783. $A = 32r^2\pi$, $V = \frac{64r^3\pi}{3}$.

2784. $4r$.

2785. $r^2\pi(a+b)$.

2786. 363,4 m^3.

2787. $\frac{2\pi\sqrt{5}R^3r^3}{25}$.

2788. $\frac{m\pi}{6}[(r_1-r_2)^2+m^2]$.

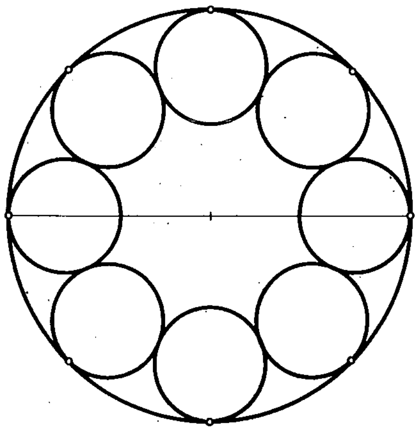
2789. $\frac{R(2-3k)}{1-k}$.

2790. $\frac{2Rk^2}{k^2+4}$.

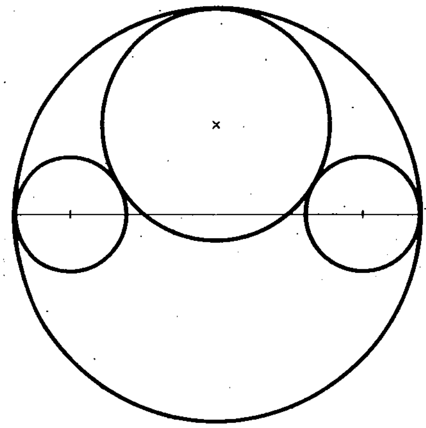
2791. $\frac{3R}{2}$.

2792. Nézzük a gömbök merőleges vetületét azon főkör síkján, amelyen a 8 érintési pont elhelyezkedik. (2792.*a* ábra.) Az ábra segítségével kiszámítható a 8 kör sugara. Majd vegyük fel ennek a főkörnek egy olyan átmérőjét, amelyik két kis gömb középpontját tartalmazza. Vegyünk fel ezen az átmérőn át a főkör síkjára merőleges síkot. Belátható, hogy erre a síkra szimmetrikus az egész alakzat, és így tartalmaznia kell az utolsó gömb középpontját is. Ezen síknak az alakzattal való metszésvonalát a 2792.*b* ábra mutatja. Az ábra segítségével már kiszámítható a keresett sugár:

$$R\left[1+\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right].$$



2792 a



2792 b

2794. A beírt gömb középpontja legyen közös csúcsa azon négy tetraédernek, melyeknek ezen csúccsal szemközti lapja az eredeti tetraéder egy-egy lapja. Felírhatjuk, hogy ezen négy tetraéder térfogatának az összege egyenlő az eredeti tetraéder térfogatával.

$$\left(\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+2b+\sqrt{a^2-b^2}}\right).$$

2795. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.

2796. $\frac{a\sqrt{219}}{24}$.

2797. Felszín: $\frac{a^2\pi}{2}(6\sqrt{2}-5)$; térfogat: $\frac{a^3\pi}{12}(15-8\sqrt{2})$.

2798. $\dfrac{Ma \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4M^2+a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}}+a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}$.

2799. $\dfrac{a \cos \frac{\pi}{n}\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}-a^2}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}\sqrt{4b^2-a^2}+2a \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}$.

2800. $A = 100\pi$ cm². $V = \frac{500\pi}{3}$ cm³.

2801. $\frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}$.

2802. A sugár $\frac{d}{4}(3+\sqrt{3})$, az élek $\frac{d(1+\sqrt{3})}{2}$, $\frac{d(3+\sqrt{3})}{2}$.

2803. $\frac{8r^3(9-\sqrt{3})}{9}$.

2804. $16r^2$.

2805. $r = \sqrt[3]{\frac{V(27+\sqrt{27})}{208}}$, az élek: $\sqrt[3]{\frac{V(27+\sqrt{27})}{26}}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{\frac{V(27+\sqrt{27})}{26}}$.

2806. $r = \frac{\sqrt{F}}{4}$, az élek $\frac{\sqrt{F}}{2}$, $\frac{\sqrt{3F}}{6}$.

2807. $A = 12d^2(2+\sqrt{3})$, $V = 2d^3(3\sqrt{3}+5)$.

2808. $\sqrt[6]{\frac{27V^2}{8}}$.

2809. $\frac{1}{2}\sqrt{F}$.

2810. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

2811. $a = \frac{r\sqrt{6}}{3}$, $A = 4r^2$, $V = \frac{2r^3\sqrt{6}}{9}$.

2812. $\frac{r\sqrt{14}}{7}$, $\frac{2r\sqrt{14}}{7}$, $\frac{3r\sqrt{14}}{7}$.

2813. $\frac{12r}{7}, \frac{6r}{7}, \frac{4r}{7}$.

2814. $\frac{2s\pm\sqrt{384r^2-2s^2}}{24}, \frac{s\mp\sqrt{384r^2-2s^2}}{12}$.

2815. $\frac{s^2-64r^2}{16}$.

2816. $\frac{1}{8}\sqrt{s^2-16F}$.

2817. $4\sqrt{F+4r^2}$.

2818. $\frac{1}{2}(A\pm\sqrt{A^2-4B})$, ahol $A = \sqrt{F+4r^2}-a$; $B = \frac{F}{2}-a(\sqrt{F+4r^2}-a)$.

2819. 1:27.

2820. $\frac{2\sqrt{3}\,V}{9}$.

2821. $A = \frac{8r^2\sqrt{3}}{9}$; $V = \frac{8r^3}{81}$.

2822. $\frac{243a^3}{2}$.

2823. 9:1.

2824. A kérdéses gömböt és a kockába írt gömböt a kocka három lapja érinti. Ezek közös pontjából az egyik gömb egy középpontos nagyítással átvihető a másik gömbbe. Ezt számolás közben kihasználhatjuk $\left(\frac{a(3-\sqrt{3})}{4}\right)$.

2825. Fejezzük ki a magasságot és az alapélt is a beírt gömb sugarának segítségével. Ezek segítségével pedig kifejezhető a keresett szög tangense.

$(\operatorname{tg}\alpha = (2\pm\sqrt{2})\sqrt{3\mp2}.)$

2826. $\sqrt{\frac{B^2-2t\pm\sqrt{R^4-4t^2+4tR^2}}{2}}$.

2827. Csupán ellenőrizni kell, hogy a felsorolt esetekben az itt megadott képlet azonos a tanult képletekkel, ha a középmetszet és az alaplapok területének értékét a szokásos adatokkal fejezzük ki.

2834. Bontsuk fel a poliédert gúlákra, melyeknek alaplapja a poliéder egy-egy lapja, és közös csúcsuk a gömb középpontja. Kimutatható, hogy a térfogat és a felszín aránya a gömb sugarának a harmadával egyenlő.

2837. A testet megkapjuk, ha a gömbből elveszünk egy hengert és két gömbszeletet. Kimutatható, hogy a közös térfogat $\frac{4\pi h^3}{3}$, ahol h az adott húr fele.

2838. Az előbbi testet megkapjuk, ha egy csonka kúpból két gömbszeletet elveszünk; utóbbit, ha egy gömbszeletből egy csonka kúpot elveszünk.

2839. *a)* 0,3 cm; *b)* $\frac{a^3\sqrt{2}}{12\pi r^2}$; *c)* 8,56 dm.

2840. $\sqrt[3]{12r^3+m^3}-m$.

2841. 5,31 cm.

2842. 41,89 cm³.

2843. $r\sqrt[3]{15}$.

2844. $A = a^2\pi\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3\pi}{4}$.

2845. $A = 512\pi\sqrt{3}$ cm²; $V = 2048\pi$ cm³.

2846. $A_1:A_2 = 25:33$; $V_1:V_2 = 5:6$.

2847. 218,2 dm²; 188,3 dm³.

2848. 53,64 dm²; 32,25 dm³.

2849. $A = 49{,}8$ dm²; $V = 26{,}55$ dm³.

2850. $A = b\pi\sqrt{a^2+4b^2}$; $V = \frac{ab^2\pi}{3}$.

2851. Megegyezik a megfelelő magasságok arányával.

2852. $a = \frac{k}{V_1}$, $b = \frac{k}{V_2}$, $c = \frac{k}{V_3}$,

ahol $k = \sqrt[3]{\frac{12V_1^2V_2^2V_3^2}{\pi\left\{2(V_1^2+V_2^2+V_3^2)-\left[\left(\frac{V_2V_3}{V_1}\right)^2+\left(\frac{V_3V_1}{V_2}\right)^2+\left(\frac{V_1V_2}{V_3}\right)^2\right]\right\}}}$

2853. $A = a^2\pi\sqrt{2}$; $V = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{6}$.

2854. $A = 200\pi\sqrt{3}$ cm² $\approx 10{,}88$ dm²; $V = 1000\pi$ cm³ $\approx 3{,}142$ dm³.

2855. $A = 6a^2\pi\sqrt{3}$; $V = \frac{9a^3\pi}{2}$.

2856. $A = 2a^2\pi\sqrt{3}$; $V = a^3\pi$.

2857. $A = \frac{7a^2\pi}{2}$; $V = \frac{7a^3\pi\sqrt{3}}{12}$.

2858. $V = \frac{3a^3\pi\sqrt{3}}{4}$.

2859. $V_1 : V_2 = 1$.
2860. $A = 2400\pi\ \mathrm{cm}^2 \approx 75{,}39\ \mathrm{dm}^2$; $V = 24^2\pi\, 25\ \mathrm{cm}^3 \approx 45{,}24\ \mathrm{dm}^3$.

2861. $A = 4a^2\pi\sqrt{3}$; $V = \dfrac{3a^3\pi}{2}$.

2862. $V_a : V_b = b : a$.
2863. $A = 8880\pi\ \mathrm{cm}^2 \approx 278{,}9\ \mathrm{dm}^2$; $V = 88\,800\pi\ \mathrm{cm}^3 \approx 278{,}9\ \mathrm{dm}^3$.

2864. Felszínek aránya $\sqrt{2}:2$, térfogatok aránya: $1:2$.
2865. $A = 22{,}08\pi\ \mathrm{dm}^2$; $V = 15{,}36\pi\ \mathrm{dm}^3$.
2866. $A = 48{,}6\pi\ \mathrm{dm}^2$; $V = 45{,}36\pi\ \mathrm{dm}^3$.
2867. $\pi(a^2+2ac+ab)$.
2868. $32:9$.
2869. $4:9$.

2870. $A_1 = \dfrac{R^2\pi(3+2\sqrt{3})}{9}$; $F_2 = \dfrac{4R^2\pi(3+2\sqrt{3})}{9}$.

$$V_1 = \frac{R^3\pi}{27},\quad V_2 = \frac{8R^3\pi}{27}.$$

2871. $r(2k-1)$, $k>1$.

2873. $A = \dfrac{a^2\pi[(n+1)\sin\alpha - \sin(n+1)\alpha]}{1-\cos\alpha}$.

$$V = \frac{na^3\pi \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4},\ \text{ahol}\ \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

2874. $A = \dfrac{a^2\pi}{1-\cos\alpha}\left[(2n+1)\sin\dfrac{\alpha}{2} - \sin(2n+1)\dfrac{\alpha}{2}\right]$.

$$V = \frac{n\pi a^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}},\ \text{ahol}\ \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

2876. Az adott pont mint középpont köré az adott távolsággal mint sugárral írt gömb felülete.
2877. Az adott pont mint középpont köré az adott távolsággal mint sugárral írt gömb belseje.
2878. A térnek az adott pont mint középpont köré az adott távolsággal mint sugárral írt gömbön kívüli része.
2879. Az adott pont mint középpont köré az adott távolsággal mint sugárral írt gömb és az adott sík metszésvonala. A mértani hely tehát egy kör vagy egy pont, esetleg üres halmaz, attól függően, hogy milyen távolságra van az adott sík az adott ponttól.
2882. A mértani hely: két pont, egy pont vagy üres halmaz.
2885. Egy forgáshenger *a)* területe; *b)* belseje; *c)* a térnek a hengeren kívüli része.

2886. *a)* Kör, ellipszis, két párhuzamos egyenes vagy üres halmaz az adatok különböző kölcsönös elhelyezkedése szerint;
b) előbbiek belseje;
c) előbbiek külseje.

2887. *a)* Két pont, egy pont, egy egyenes vagy üres halmaz az adatok különböző kölcsönös elhelyezkedése szerint.
b) Egy szakasz belseje vagy üres halmaz, az előbbieknek megfelelően.
c) Egy szakasz külső része, egy pont kivételével az egyenes, üres halmaz vagy az egyenes az előbbieknek megfelelően.

2888. *a)* Két párhuzamos sík, amelyeknek középsíkja az adott sík, és távolságuk az adott távolság kétszerese.
b) A két párhuzamos sík közé eső pontok halmaza.
c) A tér többi pontja.

2891. *a)* Az adott gömbbel koncentrikus egy vagy két gömbfelület. (Egyik gömb esetleg ponttá is fajulhat.)
b) Az előbbi két gömbfelület közé eső pontok (ha csak egy gömbfelület volt, akkor annak a belseje).
c) A tér többi pontja.

2898. Az AB szakasz felezőmerőleges-síkjának az a nyílt féltere, amelyikhez B hozzátartozik.

2902. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot. Annak segítségével megtalálható a térben a mértani hely. A két adott pontot összekötő egyenesen van két pontja a mértani helynek. Ezen két pont által meghatározott szakasz mint átmérő fölé emelt gömb lesz a mértani hely.

2904. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot. Annak segítségével megtalálható a térben a mértani hely. Egy az adott pontokat összekötő egyenesre merőleges sík.

2906. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot. Annak segítségével megtalálható a térben a mértani hely. Egy gömb, amelynek középpontja rajta van a két adott pontot összekötő egyenesen.

2907. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot. Annak segítségével megtalálható a térben a mértani hely. Az adott pontokra illeszkedő tetszőleges síkban a mértani hely ellipszis lesz; a keresett mértani helyet egy ilyen ellipszis söpri, ha a nagytengelye körül forgatjuk. Az így keletkezett felületet forgásellipszoidnak nevezik.

2908. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot. Annak segítségével megtalálható a térben a mértani hely. Az adott pontokra illeszkedő tetszőleges síkban a mértani hely hiperbola lesz; ha ezt a hiperbolát a valós tengely körül forgatjuk, söpri a keresett mértani helyet. Az így keletkezett felületet kétköpenyű forgáshiperboloidnak nevezik.

2909. A három adott ponton átmenő kör középpontjában a síkjukra állított merőleges egyenes.

2911. Olyan kör, amely merőlegesen metszi a három adott ponton átmenő összes gömbfelületet.

2913. Egy az adott pontra illeszkedő és az adott síkra merőleges síkban a mértani hely parabola lesz. Forgassuk ezt a parabolát a tengelye körül, söpri a keresett mértani helyet. A kapott felületet forgásparaboloidnak nevezik.

2916. Először bizonyítsuk be, hogy a keresett pontoknak A és B pontoktól való távolságainak aránya megegyezik az A és B pontoknak az adott síktól való távolságának arányával.

2917. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot. Annak segítségével megtalálható a térben a mértani hely. A szakasz mint átmérő fölé emelt gömbfelület a szakasz végpontjainak kivételével. (Röviden: a szakasz Thalész-gömbje.)

2918. A mértani hely a szakasz Thalész-gömbjének belseje.

2919. A szakasz Thalész-gömbjén kívül eső pontok.

2926. Először azt bizonyítsuk be, hogy a mértani hely egy pontjának a párhuzamosok síkjára eső merőleges vetülete rajta van a párhuzamosok középvonalán. A mértani hely erre a középvonalra illeszkedő, az egyenesek síkjára merőleges sík.

2927. Először azt bizonyítsuk be, hogy a mértani hely egy pontjának az adott egyenesek síkjára eső merőleges vetülete valamelyik szögfelezőn van. A mértani hely: az egyenesek szögfelezőiben a síkjukra állított merőleges síkok.

2931. Először rögzítsük az E pontot, és az E' fussa be az e' egyenest. A mértani hely a normáltranszverzális felezőpontján átmenő mindkét egyenessel párhuzamos sík.

2932. Lásd a 2931. feladat megoldásához adott útmutatást.

2933. Bizonyítsuk még be, hogy a szakaszoknak az adott egyenesekkel párhuzamos síkra való merőleges vetületei is egyenlő hosszúak. A mértani hely kör.

2934. Lásd a 2933. feladat megoldásához adott útmutatást. A mértani hely ellipszis.

2936. Először bizonyítsuk be, hogy egy ponthoz tartozó látószöget a ponton átmenő és a párhuzamosokra merőleges síkban mérhetjük. A mértani hely: a két párhuzamos egyenes mint tengelymetszet által meghatározott forgáshenger felülete a két egyenes kivételével.

2939. Az egyik egyenes egy pontjából állítsunk a másik egyenesre illeszkedő síkokra merőleges egyeneseket. Nézzük meg a talppontok mértani helyét. Ezen talppontokról belátható, hogy a mértani hely pontjai. A mértani hely: egy kúpfelület (két egyenes kivételével), melynek csúcsa és egy kör vezérgörbéje megtalálható.

2943. A mértani hely egy a C ponton átmenő kör, esetleg a C pont.

2951. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot.

2952. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot. Hasonló okoskodással megkaphatjuk a keresett mértani helyet itt is.

2963. Nézzük a két pontot összekötő egyenesnek az adott síkkal való metszéspontját. Ebből a pontból a gömbökhöz húzott érintők hosszát vizsgáljuk.

2964. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot.

2966. Lásd a megfelelő síkgeometriai feladatot.

2968. Vetítsük rá merőlegesen a két egyenest a mértani hely síkjára. Ezek szögfelezői adják a mértani helyet.

2969. Az adott gömbbel koncentrikus $\frac{R\sqrt{6}}{2}$ sugarú gömbfelület.

2973. Gondoljunk arra, hogy egy gömb két érintősíkjának érintési pontjai az érintősíkok szögfelező síkjára tükrösek.

2974. A feladat így is fogalmazható: Határozzuk meg a térben azon gömbök középpontjainak a mértani helyét, amelyek átmennek egy adott ponton, és érintenek egy adott gömböt. Külön kell nézni azt az esetet, amikor az adott pont a gömb belsejében van, és amikor a gömbön kívül van.

2975. A feladat így is fogalmazható: Határozzuk meg a térben azon gömbök középpontjainak a mértani helyét, amelyek két adott gömböt érintenek.

2977. Bizonyítsuk be, hogy a mértani hely pontjainak az adott gömbök középpontjaitól való távolságainak aránya a sugarak arányával egyenlő.

2988. Először nézzük két-két sík metszésvonalának a mértani helyét.

2990. Jelöljük A'-vel, illetve X'-vel a BC, illetve YZ oldaluk felezőpontját. Keressük először az X' pont mértani helyét. Bizonyítsuk be, hogy ez a mértani hely az A' ponton átmenő és az $YSZ\sphericalangle$ szögfelezőjével párhuzamos egyenes. Ennek segítségével már megtalálható a keresett mértani hely.

2991. Az adott kör középpontjának a derékszögű triéder lapjaitól való távolsága kifejezhető az adott kör sugarával és a triéder oldalainak az ABC síkkal bezárt szögeivel. Ezen szögek között bizonyos kapcsolatot találhatunk. Így kimutatható, hogy az adott kör középpontjától az S pont $r\sqrt{2}$ távolságra van, ha r-rel jelöljük az adott kör sugarát.

2993. Vegyük észre, hogy a változó egyenesen elhelyezkedő éllel szemközti él és így annak felezőpontja is határozott. Ezen a felezőponton átmenő, a rögzített egyenesekkel párhuzamos síkban kell lennie a középpontnak. Gondoljunk még arra, hogy a meglevő élfelező pontnak a keresett középpontra való tükörképe a változó egyenesen van.

3000. Vizsgáljuk először egy metsző egyenespár metszéspontján átmenő, az egyenesekkel egyenlő szögeket bezáró egyenesek mértani helyét. Bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben a keresett egyenesek bármely pontja a két adott egyenestől egyenlő távolságra van. Ezután nézzük az általánosabban kitűzött feladatot.

3007. Az adott egyenes egy pontjából (ez ne legyen a síkkal való metszéspontja) bocsássunk a változó egyenesekre merőlegeseket. Határozzuk meg először a merőlegesek talppontjának a mértani helyét. Használjuk még fel azt a tételt, hogy a háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában metszi.

3009. Tükrözzük az egyik síkot az adott pontra.

VEKTOROK ALKALMAZÁSA A GEOMETRIÁBAN

3025. *a)* $\mathbf{g} = \mathbf{a}+\mathbf{f}$; *b)* $\mathbf{h} = -\mathbf{a}-\mathbf{f}$; *c)* $\mathbf{e} = \mathbf{g}-\mathbf{i}$.

3034–38. Alkalmazzuk a paralelogrammaszabályt.

3039. Gondoljunk arra, hogy a bizonyítandó egyenértékű az
$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$$
egyenlőséggel.

3040. Nullvektor.

3043. $\overrightarrow{OD} = \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

3044. $\overrightarrow{OC} = \mathbf{p}+\mathbf{p}-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{p}+\mathbf{p}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

3046. Azt kell igazolni, hogy a súlyvonalvektorok összege **0**.

3047. Az a bizonyítandó, hogy ha a páratlan sorszámú vektorok összege **0**, akkor a párosoké is az.

3048. Állításunk az előzőnek speciális esete.

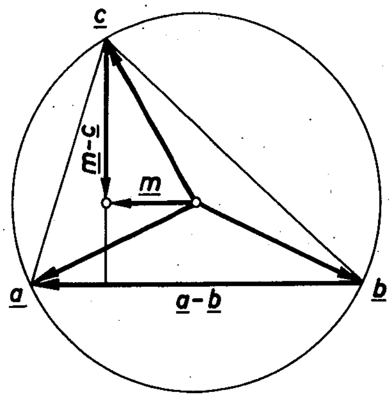
3049. 6.

3050. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$.

3051. 60°.

3052. 120°–120°.

3053. Azt kell megmutatni, hogy az $\mathbf{m}-\mathbf{a}$, $\mathbf{m}-\mathbf{b}$, $\mathbf{m}-\mathbf{c}$ vektorok merőlegesek a megfelelő oldalakra. Pl. $\mathbf{m}-\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, ez viszont a 3034. feladat szerint merőleges a szemközti oldal irányát megszabó $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektorra (3053. ábra).



3053

3054. Közvetlenül következik a vektorösszeadás paralelogrammaszabályából.

3055. *a)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$; $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$.
b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

3056. *a)* $\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $-\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$.
b) L. az előző feladatot.

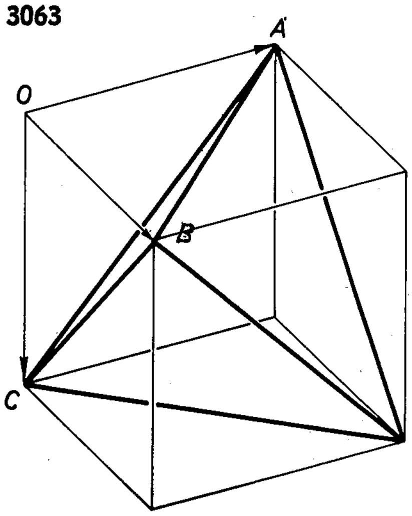
3058. $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$.

3059. $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

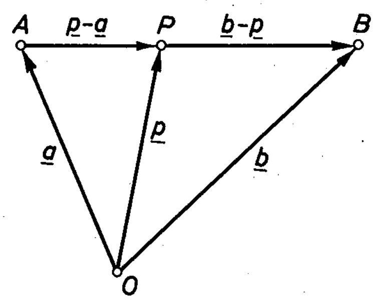
3062. $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

3063. Az O pontnak az ABC síkon levő merőleges vetülete az ABC háromszög szabályos volta miatt a háromszög középpontja, ezért az OA, OB, OC szakaszok hossza egyenlő, ezzel az O pont helyzete egyértelműen meghatározott. De így az $OABC$ tetraéder a 3063. ábrán látható módon kockává egészíthető ki, amire az állítás már nyilvánvaló.

3063



3072



3068. Gondoljunk arra, hogy a szóban forgó vektorok összege **0**.

3069. Visszavezethető a 3038. feladatra.

3072. A 3072. ábráról $AP{:}PB = \lambda{:}\mu$, azaz

$$|\mathbf{p}-\mathbf{a}|:|\mathbf{b}-\mathbf{p}| = \lambda:\mu,$$

$$\lambda|\mathbf{b}-\mathbf{p}| = \mu|\mathbf{p}-\mathbf{a}|.$$

Mivel $\mathbf{b}-\mathbf{p}$ és $\mathbf{p}-\mathbf{a}$ párhuzamosak,

$$\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{p}) = \mu(\mathbf{p}-\mathbf{a}),$$

ebből

$$\mathbf{p} = \frac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+\mu}.$$

3073. $\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$.

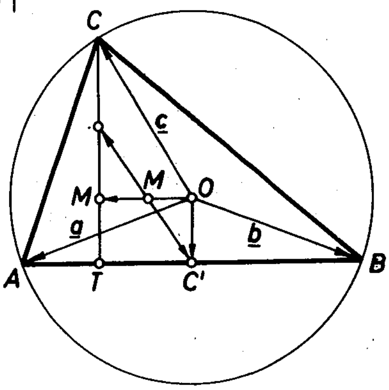
3077. Határozzuk meg az egyik súlyvonalat 2:1 arányban osztó pont helyvektorát. L. a 3071. feladatot.

3078. A súlypont helyvektora ebben az esetben nullvektor.

3078–80. Fejezzük ki a szóban forgó vektorokat egy tetszőleges pontból a csúcsokhoz mutató vektorok segítségével.

3081. Induljunk ki a 3053. feladat állításából.

3082. A 3053. feladat szerint, ha O a körülírt kör középpontja $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, az AB oldal C' középpontjáé pedig $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ (3082. ábra), így $\overrightarrow{FC'} = \overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OF} = -\frac{\mathbf{c}}{2}$. Hasonlóképpen F-ből másik két oldalfelező pontba mutató vektor $\frac{\mathbf{a}}{2}$ és $\frac{\mathbf{b}}{2}$. Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$, ezért $\left|\frac{\mathbf{a}}{2}\right| = \left|\frac{\mathbf{b}}{2}\right| = \left|\frac{\mathbf{c}}{2}\right|$.



3082

3083. A magasságpont és pl. a C csúcs közötti szakasz C^* felezőpontjának helyvektora a 3053. feladat alapján $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\mathbf{c}$, ezért az $\overrightarrow{FC^*} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\mathbf{c}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}}{2}$, ebből viszont az előző feladat alapján az állítás már következik (3082. ábra).

3084. A bizonyítandó állítás, a 3082. ábra jelöléseit használva, az OC' és CC^* vektorok egyenlőségével egyenértékű. Ehhez lásd az előző két feladatot.

3085. Ehhez a 3082–83. feladatok alapján azt kell bizonyítani, hogy az F középpontú, C' és C^* pontokon átmenő kör a magasságok talppontjain is átmegy. Hogy pl. a T talpponton átmegy, Thalész tételéből következik (3082. ábra).

3087. Fejezzük ki a vizsgált pontok helyvektorait a háromszögcsúcsok helyvektorainak segítségével.

3088. Tegyük fel, hogy egy O pontból a csúcsokhoz mutató vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ és egy O' pontból pedig $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{d}'$. Az O pontból a súlypontba az $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}$, az O' pontból pedig az $\mathbf{s}' = \frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'+\mathbf{d}}{4}$ vektor mutat. Hogy mindkettő *ugyanabba* a súlypontba mutat, úgy láthatjuk be, hogy bebizonyítjuk, hogy

$\overrightarrow{OO'}+\mathbf{s}' = \mathbf{s}$.

Ez pedig könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy

$\mathbf{a} = \overrightarrow{OO'}+\mathbf{a}'$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OO'}+\mathbf{b}'$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OO'}+\mathbf{c}'$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{OO'}+\mathbf{d}'$.

3089. Azt kell bizonyítani, hogy mindkét középvonal felezőpontja a súlypont.

3092. Állítsuk elő a kérdéses pontok helyvektorait az A, A', B, B' pontok helyvektorainak segítségével.

3093. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$.

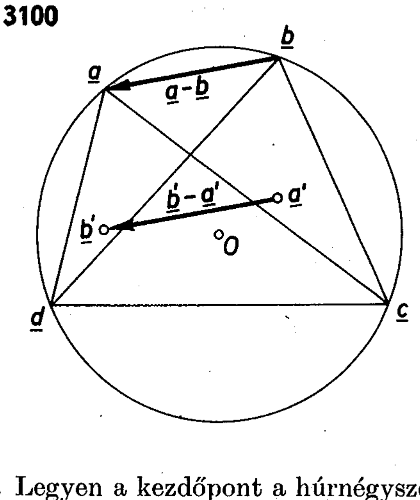
3094. $2\mathbf{c}-\mathbf{p}$.

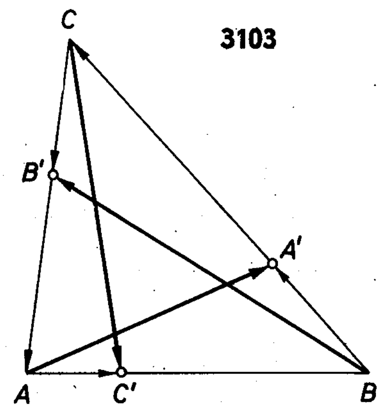
3095–97. Alkalmazhatjuk a 3094. feladat eredményét.

3098. Legyen $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EA} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB} = \mathbf{y}$. $\mathbf{k}$-t fejezzük ki először $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, majd $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ segítségével.

3100. Válasszuk kezdőpontnak a húrnégyszög középpontját (3100. ábra), a csúcsok helyvektorai rendre legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. A magasságpontok helyvektorai rendre (l. a 3053. feladatot) $\mathbf{d}' = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}' = \mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$, $\mathbf{c}' = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}$, $\mathbf{b}' = \mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$. Most már egyszerűen következik, hogy az eredeti négyszög és a magasságpontok meghatározta négyszög oldalvektorai megegyeznek; pl. $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ az eredeti négyszögét, az újnál pedig $\mathbf{b}'-\mathbf{a}' = \mathbf{a}-\mathbf{b}$.

3100





3103

3101. Legyen a kezdőpont a húrnégyszög középpontja; a csúcsok helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$; a középpontnak a súlypontra vonatkozó tükörképe $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$. Ezt a pontot pl. az AB oldal középpontjával összekötő vektor

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}=\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2},$$

ez viszont a 3034. feladat szerint merőleges a szemközti oldal $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ vektorára.

3103. Azt kell igazolni, hogy a 3103. ábrán $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = 0$. Ez viszont bizonyítható úgy, hogy a fenti vektorokat a háromszög oldalvektorai segítségével állítjuk elő.

3104. $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$, $\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}$.

3105. $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $-\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}$, $-\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $-\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $-\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

3106. Válasszuk kezdőpontnak a testátló egyik végpontját, O-t. A testátlóvektor $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, ennek harmadolópontja éppen az ABC háromszög súlypontja, tehát ez rajta van az ABC síkon.

3107. Be kell bizonyítanunk, hogy bármely súlyvonalat 3:1 arányban osztó pont helyvektora $\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$.

3110. Válasszunk a térben egy tetszőleges O pontot, az ebből a pontokba vezető vektorok legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Állítjuk, hogy az $\frac{1}{n}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n)$ helyvektorú S pont megfelel a feltételnek (l. még a 3088. feladatot).

3114. Válasszuk origónak a tetraéder súlypontját, a csúcsok helyvektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. A 3108. feladat miatt $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}$, és a 3112. feladat állítása szerint a szóban forgó egyenes átmegy a súlyponton. Ezért az egyenes irányát az $(\mathbf{ab})$ oldal esetén $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$ vektor adja meg, míg az $(\mathbf{ab})$ oldalét az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektor. Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, ezért az egyenes valóban merőleges az oldalra (l. a 3034. feladatot).

3115. Az előző feladat jelöléseit használva, legyen két szemközti élvektor $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$. Az előző feladat eredménye szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ vektorok mindegyikére, ezért merőleges összegükre is, azaz $\mathbf{a}+\mathbf{b}\perp(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{c}-\mathbf{d}) = (\mathbf{a}+\mathbf{c})-(\mathbf{b}+\mathbf{d}) = 2(\mathbf{a}+\mathbf{c})$, tehát az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ vektorok merőlegesek, de ekkor a 3036. feladat tétele szerint összegük és különbségük egyenlő hosszú.
Összegük: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = 2\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 2\mathbf{a}-(\mathbf{a}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}-\mathbf{d}$,
különbségük: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})-(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}-\mathbf{c}$,
az $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ és $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ így valóban egyenlő hosszú.

3116. Válasszuk kezdőpontnak a tetraéder S súlypontját, ekkor

$$\overrightarrow{SA_1} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{SA} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{SB_1} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{SB},$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{SA_1}-\overrightarrow{SB_1} = -\frac{5}{3}(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}) = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB},$$

amiből a vektorok hosszára a bizonyítandó adódik.

3117. A szóban forgó vektorokat a csúcsok helyvektorainak segítségével állítsuk elő.

3118. Állítsuk elő a szóban forgó vektorokat az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ vektorok segítségével.

3119. A szabályos sokszög középpontja egyúttal súlypont is (l. a 3144. feladatot). Feladatunk lényegében azt fejezi ki, hogy a súlypont független a kezdőpont választásától (erre nézve l. a 3088. feladat megoldását, amelynek módszere tetszőleges sokszögre alkalmazható).

3120. Állítsuk elő a szóban forgó vektorokat az ötszögcsúcsok helyvektoraiként, és használjuk fel, hogy a szabályos ötszög középpontja és súlypontja egybeesik.

3121. A kérdéses vektorokat helyvektoraik különbségeként állítsuk elő, így a két oldal azonossága egyszerűen adódik.

3123. Legyenek az A, B, C, P pontok helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$. Írjuk át erre az egyenletet, és oldjuk meg $\mathbf{p}$-re; $\mathbf{p} = \frac{1}{6}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c})$.

3124. L. a 3121. feladatot.

3125. Használjuk fel a húrfelező pontok helyvektorait.

3129. *b)* Használjuk fel, hogy a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, így a c oldalhoz tartozó szögfelező vektor:

$$\mathbf{f} = \frac{b}{a+b}\mathbf{a}+\frac{a}{a+b}\mathbf{b}.$$

3130. *a)* $\alpha = 3$, $\beta = 2$,

b) $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$,

c) $\alpha = 1$, $\beta = 0$,

d) $\alpha = -\frac{9}{5}$, $\beta = -\frac{23}{5}$.

3131. $\overrightarrow{D'A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$$\overrightarrow{D'B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

3132. $\mathbf{a}-\frac{\mathbf{b}}{2}$.

3133. Tegyük fel, hogy $\mathbf{c}$ végpontja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ végpontjai által meghatározott szakaszt $\lambda:\mu$ arányban osztja, ezért a 3072. feladat alapján

$$\mathbf{c} = \frac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathbf{a}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathbf{b}.$$

Bevezetve az $\alpha = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$, $\beta = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ jelölést, állításunkat igazoltuk.

3134. $\alpha+\beta = 1$ miatt a $\mathbf{c}$ vektor

$$\mathbf{c} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathbf{a}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathbf{b} = \frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}$$

alakban adható meg, ami a 3072. feladat alapján az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ végpontja által meghatározott szakaszt $\beta:\alpha$ arányban osztó pont helyvektora, így $\mathbf{c}$ végpontja rajta van az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ végpontja által meghatározott egyenesen.

3135. A 3133. feladat eredménye alapján előállítható egyrészt mint a B_1A_2, másrészt mint az A_1B_2 szakasz egy pontja, azaz (3135. ábra)

$$\mathbf{v} = \varrho\mathbf{b} + (1-\varrho)\lambda\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a} + (1-\sigma)\mu\mathbf{b}.$$

Az egyértelmű vektorfelbontás miatt

$$(1-\varrho)\lambda = \sigma,$$

$$(1-\sigma)\mu = \varrho,$$

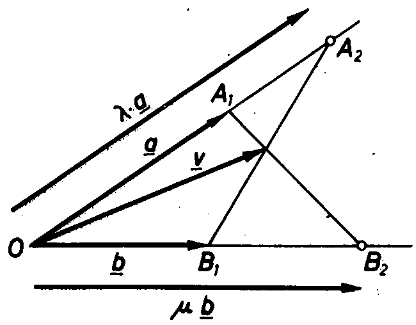
ezt az egyenletrendszert σ-ra és ϱ-ra megoldva, nyerjük, hogy

$$\varrho = \frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}; \quad \sigma = \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}.$$

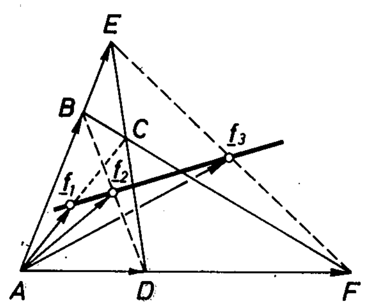
(A feltételek alapján belátható, hogy $\lambda\mu \neq 1$.) Ezért

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}\mathbf{a} + \frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\mathbf{b}.$$

3135



3137



3137. Legyen az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AF} = \mu\mathbf{b}$. Az előző feladat eredményét felhasználva, adódik, hogy a kérdéses felezőpontokba az A pontból mutató vektorok (3137. ábra):

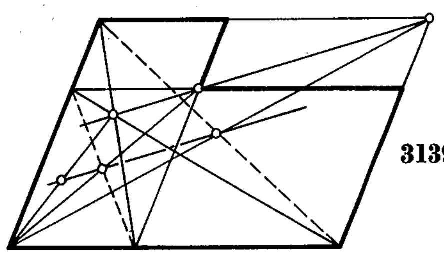
$$\mathbf{f}_1 = \frac{\lambda(1-\mu)}{2(1-\lambda\mu)}\mathbf{a} + \frac{\mu(1-\lambda)}{2(1-\lambda\mu)}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{\lambda}{2}\mathbf{a} + \frac{\mu}{2}\mathbf{b},$$

ebből viszont következik, hogy

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{\lambda\mu}{1-\lambda\mu}\mathbf{f}_2 + \frac{1}{1-\lambda\mu}\mathbf{f}_3,$$ ami a 3134. feladat alapján éppen azt jelenti, hogy a három felezőpont egy egyenesen van.



3138

3138. A 3138. ábra figyelmes szemlélésével rájöhetünk, hogy lényegében az előző feladatról van szó, itt csupán az $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ vektorok kétszereséről kell kimutatni, hogy végpontjaik egy egyenesen vannak.

3139. Az A, B, C, D pontok helyvektorai legyenek rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$; továbbá a V, Z, X, Y, P pontoké $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{d}, \quad \mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c},$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+\mu}, \quad \mathbf{y} = \frac{\mu\mathbf{d}+\lambda\mathbf{c}}{\lambda+\mu}.$$

A 3134. feladat eredménye szerint

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{v}+(1-\alpha)\mathbf{z} = \beta\mathbf{x}+(1-\beta)\mathbf{y}.$$

Az együtthatók összehasonlításából adódik, hogy

$$\alpha = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{1}{2},$$

ezért

$$\mathbf{p} = \frac{\mu\mathbf{v}+\lambda\mathbf{z}}{\lambda+\mu} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2},$$

azaz a P pont az XY szakaszt felezi, a VZ szakaszt pedig $\lambda:\mu$ arányban osztja.

3140. Tegyük fel először, hogy a végpontok egy síkon vannak, akkor az

$$\mathbf{a}-\mathbf{d}, \ \mathbf{b}-\mathbf{d}, \ \mathbf{c}-\mathbf{d}$$

vektorok egysíkúak, így $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ felbontható

$$\mathbf{c}-\mathbf{d} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{d})+\mu(\mathbf{b}-\mathbf{d}) (*)$$

alakban, amiből

$$\mathbf{d} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu-1}\mathbf{a}+\frac{\mu}{\lambda+\mu-1}\mathbf{b}-\frac{1}{\lambda+\mu-1}\mathbf{c},$$

ezzel állításunk első felét igazoltuk. (Ha $\lambda+\mu = 1$, akkor (*) azt jelentené, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ egy síkban lennének.) Ha viszont

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},$$

ahol $\alpha+\beta+\gamma = 1$, azaz $\gamma = 1-(\alpha+\beta)$, akkor

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+(1-\alpha-\beta)\mathbf{c},$$

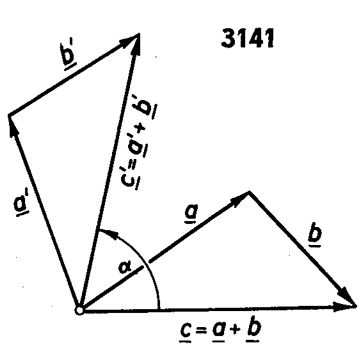
ebből

$$\mathbf{d}-\mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b}-\mathbf{c}),$$

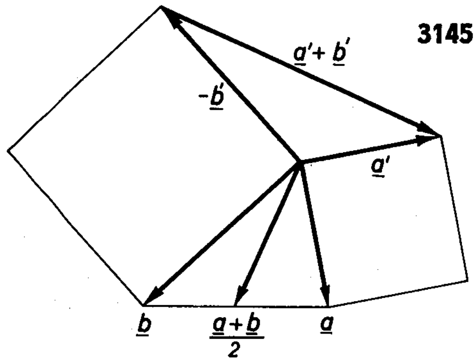
ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{d}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ vektorok egy síkban vannak, amiből már következik, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ végpontjai is egy síkon vannak rajta.

3141. Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok egy háromszöget alkotnak. Ezt a háromszöget α szöggel elforgatva, ismét háromszöget kapunk, amelyet az $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ vektorok alkotnak, és ebben is egyenlő a $\mathbf{c}'$ vektor a másik kettő összegével (3141. ábra).

3141



3145



3142. Ha $\mathbf{a}+\mathbf{a}' = \mathbf{0}$ lenne, az azt jelentené, hogy $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$, vagyis az $\mathbf{a}$ és az $\mathbf{a}$ ellentettek, de ez lehetetlen, mert kikötöttük, hogy a köztük levő szög nem többszöröse 180°-nak.

3143. L. az előző feladatot.

3144. Legyenek az n oldalú szabályos sokszög középpontjából a csucsokba mutató vektorok

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n,$$

és ezek összege

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n.$$

Forgassuk el most ezeket a vektorokat $\frac{360°}{n}$-kal, a 3141. feladat alapján kimondhatjuk, hogy

$$\mathbf{s}' = \mathbf{a}_1'+\mathbf{a}_2'+\ldots+\mathbf{a}_n'.$$

Viszont az elforgatás a csúcshoz vezető vektorok mindegyikéhez egy másik ilyen típusú vektort rendel hozzá, ezért $\mathbf{s}$ és $\mathbf{s}'$ előállításában jobb oldalon ugyanazok a vektorok szerepelnek, tehát $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$; a 3143. feladat alapján viszont ez azt jelenti, hogy $\mathbf{s} = \mathbf{0}$.

3145. A háromszög két oldalvektora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, ezek 90°-os pozitív irányú elforgatottjai $\mathbf{a}'$ és $\mathbf{b}'$, a súlyvonalvektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, a négyzetcsúcsokat az $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$ vektor köti össze (3145. ábra). Ez viszont a 3141. feladat szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$ a súlyvonalvektor kétszeresének 90°-os elforgatottja.

3146. Gondoljunk arra, hogy az $\overrightarrow{OA}$-t az $\overrightarrow{OB}$-ba és az $\overrightarrow{OC}$-t az $\overrightarrow{OD}$-ba 90°-os elforgatás viszi át.

3147. Alkalmazzuk a 3145. feladat módszerét.

3148. A négyszögcsúcsok helyvektorai pozitív forgás sorrendjében $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Jelöljük a 90°-os pozitív irányú elforgatást vesszőzéssel. A feltétel szerint a $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ és $\mathbf{d}-\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek és egyenlő hosszúak, tehát

$$(\mathbf{c}-\mathbf{a})' = \mathbf{d}-\mathbf{a}.$$

Az állítás igazolására elegendő megmutatni, hogy a felezőpontok által meghatározott négyszög tetszőlegesen választott két szomszédos oldala egyenlő, és merőleges egymásra. Válasszuk ki pl. az $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2}$, $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{b}}{2}$ felezőpontokat, ezek a $\frac{\mathbf{d}-\mathbf{b}}{2}$ és $\frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2}$ vektorokat határozzák meg. Viszont $\left(\frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2}\right)' = \frac{(\mathbf{c}-\mathbf{a})'}{2} = \frac{\mathbf{d}-\mathbf{b}}{2}$, tehát valóban egyenlő hosszúak, és merőlegesek egymásra.

3149. Az előző feladat értelmében elegendő megmutatni, hogy a négyszög átlói egyenlők, és merőlegesek egymásra. Legyenek a négyzetek fél átlóvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, a 90°-kal elforgatott vektorok $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{d}'$. A 3149. ábráról leolvasható, hogy egyrészt

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'+\mathbf{d}' = \mathbf{0},$$

ebből viszont a 3142. feladat alapján következik, hogy

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}+\mathbf{c} = -\mathbf{a}-\mathbf{d}.$$

A négyszög átlóvektorai

$$\mathbf{x} = \mathbf{d}'+\mathbf{a}+\mathbf{a}'+\mathbf{b},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}'+\mathbf{b}+\mathbf{b}'+\mathbf{c}.$$

Azt kell bizonyítani, hogy $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$. A 3141. feladat alapján (figyelembe véve, hogy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektorra $(\mathbf{v}')' = (-\mathbf{v})$,

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{d}+\mathbf{a}'-\mathbf{a}+\mathbf{b}' = \mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{a}'+\mathbf{b}' = \mathbf{y}.$$

3150–53. L. a 3149. feladat módszerét.

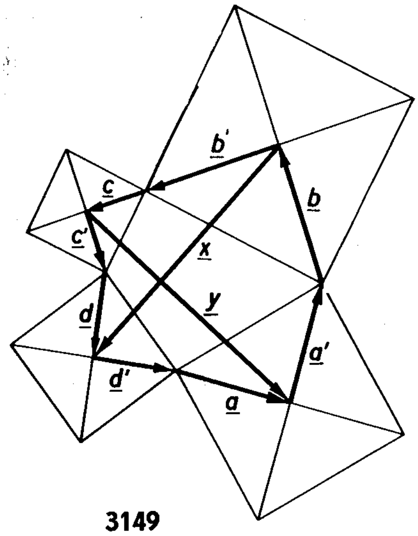
3154. Az állítás a 3154. ábráról a szabályos háromszög tulajdonságai alapján leolvasható.

3155. Jelöljük vesszőzéssel egy vektornak 60°-os elforgatását pozitív irányba (3155. ábra). Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AB_1} = \mathbf{c}$; ekkor $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}'$ és $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{c}'$. A BB_1, ill. CC_1 szakaszok felezőpontjainak A-ból induló helyvektorai $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, ill. $\frac{\mathbf{b}'+\mathbf{c}'}{2}$. Mivel $\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\right)' = \frac{\mathbf{b}'+\mathbf{c}'}{2}$, ez éppen azt jelenti, hogy az A és a felezőpontok által meghatározott háromszög szabályos.

3156. A megoldás hasonló az előzőhöz.

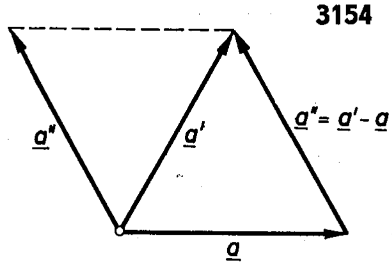
3157. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$. Jelölje a vesszőzés a 60°-os pozitív irányú elforgatást. Gondoljuk meg, hogy A-ból az egyik kérdéses csúcshoz vezető vektor $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{b}'$, a másikhoz $\mathbf{a}+\mathbf{a}'$.

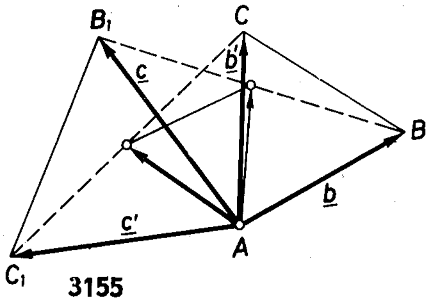
3158. A kör középontjából a húrok végpontjaihoz vezető vektorok legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$; $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$; $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ (3158. ábra) (a vesszőzés 60°-os pozitív irányú elforgatást



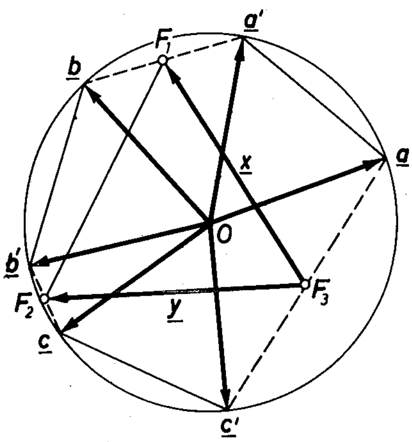
3149

3154





3155



3158

jelent). A szóban forgó F_1, F_2, F_3 felezőpontokhoz az $\frac{\mathbf{a}'+\mathbf{b}}{2}$, $\frac{\mathbf{b}'+\mathbf{c}}{2}$, $\frac{\mathbf{c}'+\mathbf{a}}{2}$ vektorok vezetnek. Azt kell bizonyítani, hogy az $F_3F_1 = \mathbf{x}$ vektort ugyancsak 60°-os elforgatás viszi az $F_3F_2 = \mathbf{y}$ vektorba, azaz

$$\mathbf{x}' = \mathbf{y}.$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{a}'}{2} - \frac{\mathbf{c}'+\mathbf{a}}{2} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{a}'-\mathbf{c}'}{2},$$

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{b}'}{2} - \frac{\mathbf{c}'+\mathbf{a}}{2} = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}+\mathbf{b}'-\mathbf{c}'}{2}.$$

Ebből viszont a 3141. és 3154. feladat alapján az állítás már egyszerűen következik.

3159. L. az előző feladatot.

3160. A feladat a 3158. feladat módszerével oldható meg.

3161 – 62. A feladatok lényegében azonosak a 3161. feladattal.

3163–64. Gondoljunk arra, hogy az ABC és az XYZ háromszögek megegyeznek egy szögben és az ezt a szöget közrefogó oldalak arányában.

3171. Egyező irányú.

3172. Ellenkező irányú.

3173. *a)* $(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) < 90°$, *b)* $90° < (\mathbf{a};\ \mathbf{b}) \leqq 180°$, *c)* $(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = 90°$.

3176. **a** és **c** párhuzamosak.

3177. **a** és **b** merőlegesek.

3178. Az oldalhossz négyzetének a $\frac{3}{2}$-szerese.

3179. 43,5.

3185. Bontsuk fel **a**-t a **b**-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. A **b**-vel párhuzamos összetevő: $-k\mathbf{b}$.

3186. $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$, vagy olyanok, hogy közös kezdőpont esetén a végpontok egy egyenesen sorakoznak.

3187. $(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = 60°$.

3188. $\cos(\mathbf{a};\ \mathbf{b}) = \frac{19\sqrt{43}}{215}$.

3189. $\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. (Bontsd fel a szögfelező vektort $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{CA}$-ral párhuzamos összetevőkre!)

3190. A kör középpontjából az A, B, C, P pontokba mutató vektorokkal fejezzük ki a szóban forgó összefüggést.

3191. Egy csúcsból induló oldalvektorok segítségével fejezd ki az átlóvektorokat, és ezek skaláris szorzatával kimutatható a merőlegességük.

3192. Az átmérő egyik végpontjának és a választott körpontnak a helyvektoraival (kezdőpont a kör középpontja) fejezd ki a középpontból az átmérő végpontjaiba mutató vektorokat. Ezek merőlegességét a skaláris szorzatuk segítségével mutathatjuk meg.

3193. Egy csúcsból induló két oldalvektorral dolgozzunk.

3194. Egy csúcsból induló élvektorokkal dolgozzunk.

3195. A csúcsok helyvektoraival dolgozhatunk.

3196. Írjuk fel az oldalvektorok és az egyenessel párhuzamos egységvektor skaláris szorzata segítségével a szög cosinusát.

3197. Egy csúcsból induló élvektorokkal dolgozhatunk.

3198. Oldalvektorokkal kifejezhetjük a súlyvonal-élvektorokat.

3199. A C ponton átmenő magasságvonal egyenese.

3201. AB szakasz felezőmerőleges-egyenese.

3203. A háromszög C csúcsából induló **a**, **b** oldalvektorokkal dolgozhatunk.

3205. Az $(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$ szögfelezője.

3206. A B ponton átmenő **e**-re merőleges sík, ahol $\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{e}$.

3207. Az **a**-ra merőleges sík, amely O-tól **a** irányában $\frac{2}{|\mathbf{a}|}$ távolságra van.

3208. Az O pontra illeszkedő, $\overrightarrow{OA}$-ra merőleges síknak és az $\overrightarrow{OB}$-ra merőleges, O-tól $\overrightarrow{OB}$ irányban $\frac{2}{|\overrightarrow{OB}|}$ távolságra levő sík metszésvonala.

3209. Az O-ra illeszkedő és az $\overrightarrow{OA}$-ra merőleges sík, továbbá az O középpontú $|\overrightarrow{OA}|$ sugarú gömbfelület.

3210. A' középpontú, $|\overrightarrow{OA}|$ sugarú gömbfelület, ha $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$.

3211. O pontra illeszkedő, $\overrightarrow{OA}$-ra merőleges sík.

3212. Megmutatható, hogy $\overrightarrow{CP}$-nak az $\overrightarrow{AB}$-ra való vetülete állandó, ha C az AB szakasz felezőpontja. Ebből már következik, hogy a mértani hely egy az $\overrightarrow{AB}$-ra merőleges sík.

3213. Az AB szakasz felezőpontja, mint középpont köré írt gömbfelület, ha $k^2 > \frac{BA^2}{2}$. A gömb sugara $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-BA^2}$.

3217. *a)* -30; *b)* 11; *c)* 27; *d)* $\sqrt{6}-58$.

3218. *a)* $\sqrt{35}$; *b)* $\sqrt{54}$.

3219. *a)* $\left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right)$; *b)* $\left(-\frac{1}{\sqrt{54}}, -\frac{2}{\sqrt{54}}, \frac{7}{\sqrt{54}}\right)$; *c)* $\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$.

3220. *a)* $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{-5}{\sqrt{295}}$; *b)* $\cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{29}{\sqrt{1140}}$.

3222. Párhuzamos összetevő $\left(\frac{9}{14}, \frac{-3}{14}, \frac{-3}{7}\right)$; merőleges összetevő $\left(\frac{5}{14}, \frac{31}{14}, -\frac{4}{7}\right)$.

3223. Lásd a 3205. feladatot és megoldását. $\lambda(\mathbf{a}^0+\mathbf{b}^0)$ vektorok a feladat megoldásai, ha $\mathbf{a}^0$, ill. $\mathbf{b}^0$ az $\mathbf{a}$, ill. $\mathbf{b}$ irányú egységvektorok.

$$\mathbf{a}^0\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right); \quad \mathbf{b}^0\left(\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{2}{\sqrt{38}}, \frac{-3}{\sqrt{38}}\right).$$

3224. $\mathbf{x} = -3$.

3225. $\mathbf{x}(-7\lambda;\ -9\lambda;\ 13\lambda)$.

3226. $\lambda\left(\sqrt{6}-2;\ 1\pm\sqrt{2\sqrt{6}-4};\ 1\pm\sqrt{2\sqrt{6}-4}\right)$.

3227. $\lambda(37;\ -37;\ 56+21\sqrt{3})$.

3228. $\left(\frac{122}{29}; \frac{44}{29};\ -7\right)$. Bontsuk fel $\overrightarrow{OA}$-t az $\overrightarrow{OB}$-ral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. $\overrightarrow{OA}$ és a merőleges összetevő -2-szeresének összege a keresett vektor. Az összetevők felírásához lásd a 3181. feladatot.

3229. $\left(-\frac{26}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Felbontjuk $\mathbf{a}$-t a $\mathbf{b}$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. Ha $\mathbf{a}$-hoz hozzáadjuk a párhuzamos összetevő -2-szeresét, akkor a tükörképvektort kapjuk. Az összetevők felírásához lásd a 3181. feladatot.

3231. Lásd a 3230. feladatot.

3232. $x-y+2z = -18$.

3233. A sík normálvektora lehet az $\mathbf{n}(0, 0, 1)$. Egyenlete $z = 5$.

3234. *a)* $\mathbf{n}(2,\ 5,\ -4)$, $\quad P_0\left(0,\ 0,\ -\frac{11}{4}\right)$;

b) $\mathbf{n}(2,\ -11,\ 0)$, $\quad P_0(3{,}5,\ 0,\ 0)$;

c) $\mathbf{n}(6,\ 0,\ 0)$, $\quad P_0\left(\frac{13}{6},\ 5,\ 2\right)$.

3235. Keressünk normálvektort és pontot, amelyekhez tartozó sík egyenlete éppen a megadott.

3237. Lásd a 3236. feladatot.

a) $\mathbf{n}^0\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP}_0(7,\ 4,\ -2)$; távolság $\frac{13}{\sqrt{6}}$.

b) $\mathbf{n}^0\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP}_0(-7,\ -3,\ -2)$; távolság $\frac{13}{\sqrt{6}}$.

3238. $2x-7y+5z = 12$; távolság $\frac{6}{\sqrt{78}}$.

3239. Normálvektoraik segítségével $\cos\alpha = 0{,}1$.

3240. *a)* $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ (ha ezenkívül $D_2 = \lambda D_1$, akkor mindkét egyenlet ugyanannak a síknak az egyenlete).

b) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 = 0$.

3242. $x+2y = 0$.

3243. Lásd a 3242. feladatot.

3244. *a)* $x = 1+5t$,

$y = -1+t, \qquad \frac{x-1}{5} = y+1 = \frac{z-2}{-3}$,

$z = 2-3t$;

b) $x = t$,

$y = 2t, \qquad x = \frac{y}{2} = -z$,

$z = -t$;

c) $x = 2$,

$y = 3+t$,

$z = 4+2t$;

d) $x = 7$,

$y = -2$,

$z = 5+t$.

3245. *a)* $x = 1+t$, $\qquad$ *b)* $x = -2t$,

$y = 2-3t$; $\qquad y = 1-4t$,

$z = -3-2t$; $\qquad z = 3+4t$.

3246. *a)* $P_0(2,\ -5,\ 7)$, $\mathbf{n}(2,\ 3,\ 6)$;

b) $P_0(0,\ -4,\ 5)$, $\mathbf{n}(2,\ 7,\ 4)$.

3247. $\cos\alpha = \frac{23\sqrt{7}}{70}$.

3248. $\cos(90^\circ-\alpha) = \frac{28}{\sqrt{2262}}$.

3249. $\left(\frac{309}{188}, -\frac{269}{188}, -\frac{123}{188}\right)$.

3250. $(-1, -5, -2)$.

3257. $4\sqrt{66}$.

3259. Lásd a 3258. feladatot.
3260. Lásd a 3258. és 3259. feladatokat.
3261. Lásd a 3260. feladatot.
3262. Lásd a 3261. feladatot.
3264. Lásd a 3263. feladatot.
3265. Lásd a 3263. és 3264. feladatokat.
3266. *a)* $-2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$;
b) $3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.
3267. Helyes állítás: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, vagy $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ párhuzamos $\mathbf{c}$-vel, vagy $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.
3268. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ oldalvektorok meghatározta paralelogramma területvektorának kétszerese. Lásd a 3255. feladatot.
3270. Megmutatható, hogy $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}$, ill. $\mathbf{b}$ vagy $\mathbf{c}$ szorzat $\mathbf{0}$. Ebből következik a feladat állítása.
3271. A feltételből levezethető, hogy $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \mathbf{0}$. Ebből következik a feladat állítása.
3272. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ mindegyike merőleges $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$-re.
3273. Ha a feltételeknek megfelelő X pontot rávetítjük az O-ra illeszkedő és $\overrightarrow{OA}$-ra merőleges síkra, majd e vetületet az O-ból $|\mathbf{a}|$ arányban nagyítjuk (kicsinyítjük), majd az OA egyenes körül 90°-kal elforgatjuk, a B pontba kerül. Ebből következik, hogy a mértani hely egy az OA egyenessel párhuzamos egyenes.
3275. Alkalmazzuk $(a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k})\times(a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k})$ szorzásnál a disztributív tulajdonságot, és legyünk tekintettel a 3274. feladatra.

3276. *a)* $-7\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{66}$;

b) $-2\mathbf{j} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 2$;

c) $29\mathbf{i}-22\mathbf{j}-3\mathbf{k} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{1334}$.

3277. *a)* $\sqrt{8}$, *b)* $\sqrt{424}$.

3278. *a)* $\sqrt{14}$, *b)* $\sqrt{11}$.

3279. $x+y = 3$.

3280. $2x+y-2z = 4$.

3281. $\frac{x}{9} = \frac{9y-1}{9} = \frac{14-9z}{117}$

3282. $\mathbf{n}(1, 0, -1)$ $x-z = 2$.

3283. $\cos(90^\circ-\alpha) = \dfrac{11}{3\sqrt{15}}$.

3284. $3x-y+z = 10$.

3285. $8x+7y-z = 0$.

3286. ABC sík egyenlete $13x+7y+4z = 39$, D nem illeszkedik erre a síkra.

3287. Az $\overrightarrow{AP_0}$-nak az egyenesre merőleges összetevőjének a hossza $P_0(4, 2, 0)$. Merőleges összetevőhöz lásd a 3262. feladatot. A távolság $\dfrac{\sqrt{30\,818}}{38} \approx 4,6$.

3288. A sík normálvektora az egyenesek irányvektorainak vektoriális szorzataként adódik. Ennek felhasználásával a sík egyenlete:

$$11x-7y-5z = 22.$$

3289. Lásd a 3287. feladatot. A normáltranszverzális párhuzamos az irányvektorok vektoriális szorzatával, és a távolság megegyezik az egyenesek egy-egy pontját összekötő vektornak a normáltranszverzálissal párhuzamos egyenesen levő merőleges vetületének a hosszával. A távolság

$$\frac{145}{\sqrt{882}} \approx 4,8.$$

3290. *a)* **c**-vel párhuzamos; *b)* nincs értelme; *c)* olyan paralelepipedon térfogata, melynek élvektorai **a**, **b**, **c**.

c) Az **a**, **b** vektorokkal párhuzamos síkkal párhuzamos és **c**-re merőleges vektor.

3294. $\mathbf{abc} = 0$.

3302. *a)* 0, *b)* -58.

3303. 21.

3304. $5\frac{5}{6}$.

3305. Tetraéder térfogata $\frac{1}{6}$, ABC háromszög területe $3\sqrt{10}$. A keresett magasság $\dfrac{\sqrt{10}}{60}$.

3306. Bontsuk fel **d**-t az **a**, **b**, **c**-vel párhuzamos összetevőkre. Így nyerjük az élvektorokat. A térfogat 84.

3307. $x = 12$. Lásd a 3301. feladatot.

3310. *a)* $-\mathbf{b}-\mathbf{a} = (-1, -2, -1)$, *b)* $25\mathbf{b}+25\mathbf{a} = (0, 0, 0)$. Lásd a 3309. feladatot.

3311. *a)* $-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (-2, -3, -2)$, *b)* $25\mathbf{b}-14\mathbf{c} = (-95, -148, -103)$. Lásd a 3309. feladatot.

3313. *a)* $-|\mathbf{a}|^2\mathbf{b}$, *b)* $\mathbf{a}\times(-\mathbf{aa})\mathbf{b}$, *c)* $|\mathbf{a}|^2\mathbf{b}$.

3314. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) = 0$, akkor $(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$.

3315. Ha **a**, **b**, **c** jobbrendszert alkotnak.

3316. $\cos\mathbf{a} = \mathbf{bc}$, $\cos\mathbf{b} = \mathbf{ca}$, $\cos\mathbf{c} = \mathbf{ab}$,
$\cos(\pi-\alpha) = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, $\cos(\pi-\beta) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$,
$\cos(\pi-\gamma) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$.

3321. Induljunk ki a polár-gömbháromszög oldalra vonatkozó cosinustételével, és alkalmazzuk a 3320. feladat állítását.

3322. *a)* A triéderre vonatkozó megfelelő állításból következik. Lásd az 1891. feladat megoldását.

b) Lásd az 1895. feladatot.

c) és *d)* az előbbiekre vezethetők vissza, ha áttérünk a polár-gömbháromszögre.

3323. *a)* $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad\cos\gamma = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

b) $\cos a = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$, $\quad\cos b = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$, $\quad\cos c = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

c) $\cos c = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{8}$, $\quad\cos\beta = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{\sqrt{14+4\sqrt{2}}}$, $\quad\cos\alpha = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{14+4\sqrt{2}}}$.

d) $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\quad\cos a = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$, $\quad\cos b = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

e) $\beta = 60°$, $\quad\cos c = \dfrac{3}{5}$, $\quad\sin\gamma = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

f) $b = 135°$, $\quad\cos c = -\dfrac{3}{5}$, $\quad\sin\gamma = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

3324. Egy csúcsból induló három szomszédos él triédert alkot. Ez értelmez gömbháromszöget.

a) Olyan gömbháromszög szögei, melynek oldalai 60°-osak, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

b) Olyan gömbháromszöget tekintünk, melynek oldalai 60°, 60°, 90°. E gömbháromszög 90°-os oldalával szemközti szöget keressük,

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}.$$

c) Olyan gömbháromszög szögei, melynek oldalai 108°-osak,

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

d) Olyan gömbháromszöget tekintsünk, melynek oldalai 60°, 60°, 108°. E gömbháromszög 108°-os oldalával szemközti szöget keressük,

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3325. $\cos a = \frac{\sqrt{21}}{6}, \qquad \cos b = \frac{4\sqrt{21}}{21}, \qquad \cos c = \frac{1}{2},$

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{-13\sqrt{15}}{6}, \qquad \cos(\pi-\beta) = \frac{-3\sqrt{105}}{35},$$

$$\cos(\pi-\gamma) = \frac{7\sqrt{7}}{35}.$$

TARTALOM

Síkgeometria 5

Szakaszok, sokszögek átlói, szögek, szögpárok 7
Sokszögek szögösszege, külsőszög-tétel. Egyenlő szárú háromszög 11
Mértani helyek 18
Az egybevágóság fogalma. Háromszögek, sokszögek egybevágósága 22
Egybevágósági transzformációk 25
  Tengelyes tükrözés 25
  Középpontos tükrözés 29
  Forgatás 32
  Eltolás 35
A háromszög nevezetes vonalai. Thalész tétele. A háromszöghöz tartozó körök 39
Négyszögek 46
A kör húrjai és érintői, körök érintkezése 55
Kerületi és középponti szögek. Húr- és érintőnégyszögek 61
A hasonlóság fogalma, középpontos hasonlóság 71
Hasonlóság alkalmazása 83
Területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai 96
Pitagorasz tételének alkalmazása 104

Térgeometria 113

Térelemek kölcsönös helyzete. Illeszkedési feladatok 115
Merőleges térelemek. Térelemek távolsága, hajlásszöge 118
Kocka 125
Térbeli sokszög 128
Triéder-szöglettartomány 128
Tetraéder 131
Paralelepipedon 137
Tetraéder és paralelepipedon 140
Hasáb 141
Gúla 143
Poliéder 148

Henger ... 156
Kúp. Csonka kúp ... 160
Gömb és részei ... 168
Vegyes feladatok ... 177
Mértani helyek ... 188

Vektorok alkalmazása a geometriában ... 197

Vektorok összege, különbsége ... 197
Vektor szorzása számmal ... 201
Vektorok felbontása összetevőkre ... 207
Vektorok elforgatása ... 209
Vektorok skaláris szorzata ... 211
Két vektor vektoriális szorzata ... 218
Több tényezős szorzatok. Vegyes szorzat. Kifejtési tétel ... 221
Néhány feladat a gömbháromszögtan köréből ... 223

Megoldások ... 225

Síkgeometria ... 227
Térgeometria ... 331
Vektorok alkalmazása a geometriában ... 389

Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt. a Sanoma company. www.ntk.hu.
Vevőszolgálat: info@ntk.hu. Telefon: 06 80 200 788.
A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató. Raktári szám: 10127/1.
Felelős szerkesztő: Gimes Györgyné. Utánnyomásra előkészítette: Szalontay Anna.
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka. Műszaki szerkesztő: Simó Sarolta.
Grafikai szerkesztő: Démuth Ágnes.
Terjedelem: 30,34 (A/5) ív. Tömeg: 320 gramm. 33. kiadás, 2011.
Nyomtatta és kötötte a Reálszisztéma Dabasi Nyomda Zrt.
Felelős vezető: Vágó Magdolna vezérigazgató.