

- 3030.** Legyen O az ABC háromszög köré írt kör középpontja. Szerkesszük meg a következő vektorokat:
- $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$,
 - $\vec{OA} + \vec{OB}$,
 - $\vec{OA} - \vec{OC}$.
- 3031.** Adjunk meg két olyan vektort, amelyeknek összege az egyik vektoral egyenlő hosszú.
- 3032.** Adjunk meg két olyan vektort, amelyeknek különbsége az egyik vektoral egyenlő hosszú.
- 3033.** Szerkesszünk meg tízütünkben egy tetszőleges v vektort. Szerkesszünk meg
- négyszeresét, amelynek összege v ;
 - négyszeresét, amelynek különbsége v ;
 - négyszeresét, amelynek összege v ;
 - négyszeresét, amelynek összege v -hez hozzáadva O -t kapunk.
- 3034.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.
- 3035.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor egyenlő hosszú.
- 3036.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor összegük és különbségük egyenlő hosszú.
- 3037.** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége egyenlő hosszú, akkor a két vektor merőleges egymásra.
- 3038.** Egy szög csücskéből kiindulva, a szárazokon vegyünk fel egy a , ill. egy b vektort úgy, hogy hosszuk egyenlő legyen, a és b segítségével állítsunk elő olyan vektort, amely a szög felezőjének irányába mutat.
- 3039.** Az $ABCD$ paralelogramma síkjában O tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy
- $$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$
- 3040.** Melyik vektorra igaz az, hogy egyenlő az ellentettjével?
- 3041.** Mutassuk meg, hogy ha $v + v = 0$, akkor a és v is nullvektor.
- 3042.** Legyen $ABCD$ egy tetszőleges paralelogramma. Bizonyítsuk be, hogy
- $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$;
 - $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{AD}$;
 - $\vec{AD} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{BC}$.
- 3043.** Az $ABCD$ paralelogramma A , B , C csücskeihez egy tetszőleges O pontból
- rendre az a , b , c vektorok vezetnek. Állítsuk elő ezek segítségével az $\vec{OD} = d$ vektort.
- 3044.** Az ABC háromszög A csücskéhez egy tetszőleges O pontból az a , B csücskéhez b , a BC felezőpontjához pedig p vektor vezet. Állítsuk elő az a , b , p segítségével
- az O -ból a C -hez vezető vektort;
 - az $\vec{AC}$ vektort.

3045. Egy háromszög minden oldalvektorát állítsuk elő a 3045. ábrán látható módon két egyenlő vektor összegeként. Mutassuk meg, hogy
- $$a) \ a + b + c = 0;$$
- $$b) \ x = a;$$
3046. A 3045. ábra jelöléseit használva, bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek az oldali párhuzamosak és egyenlők az ABC háromszög $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ súlyvonaljaival.
3047. Egy $2n$ oldalú sokszög oldalait irányításuk valamilyen körüljárás szerint, és számozzuk meg ugyanebben a sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik egy olyan n oldali sokszög, amelynek oldali rendre párhuzamosak és egyenlők az eredeti sokszög páratlan számozású oldalaival, akkor létezik olyan n oldali sokszög is, amelynek oldali a páros számú oldalakkal egyenlők.
3048. Egy háromszög oldalaira kifeje szerkesszünk négyzeteket. Két különböző négyzet egy-egy csúcsát szomszédosnak nevezzük, ha össze vannak kötve ugyanazzal a háromszögszúccsal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek oldali egyenlők és párhuzamosak az egy-egy szomszédos csúcsok között összekötő szakaszokkal.
3049. Egy négyyszög oldalai között nincs két párhuzamos. Hány olyan négyyszög van, amelynek oldali párhuzamosak és egyenlők az eredeti négyyszög egy-egy oldalával? (Itt egyenlő oldalakat is megengedünk.)
3050. Az a és b vektorok hossza egyenlő, és 120° -os szöget zárnak be egymással. Határozzuk meg az $a + b$ hosszát.
3051. Az a vektor hossza kétszerese a b vektorénak. Mekkora a két vektor szöge, ha $a - b$ merőleges b -re?
3052. Három egyenlő hosszú vektor (nem 0 -vektorok) összege 0 . Mekkora szöget zárnak be egymással?
3053. Egy háromszög köré írt kör O középpontjából a csúcsokhoz mutató vektorok legyenek a , b , c . Bizonyítsuk be, hogy O -ból felmért $a + b + c = m$ vektor végpontja a háromszög magasságpontja.
3054. Egy O pontból egy tetszőleges A ponthoz az a vektor, egy másik B ponthoz a b vektor mutat. Bizonyítsuk be, hogy az AB szakasz F felezőpontjába mutató $OF = F$ -re fennáll az
- $$F + f = a + b$$
- egyenlőség.
3055. Egy kocka egyik csúcsából kiinduló elvektorok a , b , c . Állítsuk elő ezek segítségével (összegeként, ill. különbségeként)
- $$a) \text{ az összes lapátíróvektorokat;}$$
- $$b) \text{ testátíróvektorokat.}$$
3056. Egy kocka egy A csúcsából kiinduló és az A -t tartalmazó lapok közép-pontjaiba mutató vektorok x , y , z . Állítsuk elő ezek segítségével
- $$a) \text{ az } A \text{ csúcsból kiinduló elvektorokat,}$$
- $$b) \text{ a testátíróvektorokat.}$$
3057. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban szereplő x , y , z vektorok közül bármelyik kettő 60° -os szöget zár be egymással.

$$2a, -2a, 1, 5a, 3a, -2, 5a, \frac{3}{2}a, \frac{2}{2}a, \frac{2}{2}a \text{ vektorokat.}$$

3064. Adott az a vektor. Szerkesszük meg a

VEKTOR SZORZÁSA SZÁMMAL

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}.$$

hogy

3063. Legyen $ABCD$ egy szabályos tetraéder és rajta kívül O olyan pont, hogy az $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, továbbá az O és D pontok az ABC sík különböző oldalán vannak. Bizonyítsuk be,

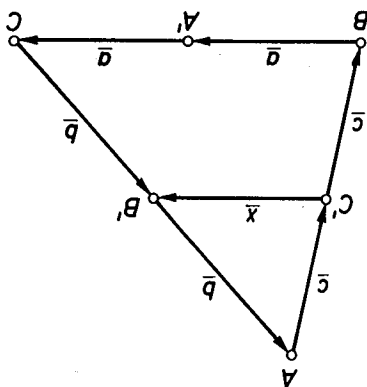
3062. Egy paralelepipedon középpontjából egy lap három csúcsához az a, b, c vektorok mutatnak. Határozzuk meg a többi 5 csúcsba tartó vektorokat. (b és c egy lap szemközti csúcsaihoz tartozó vektorok.)

3061. Az a, b, c nem egy síkú vektorok olyanok, hogy közülük bármelyik merőleges a másik kettő összegére. Adjunk meg ilyen vektorokat.

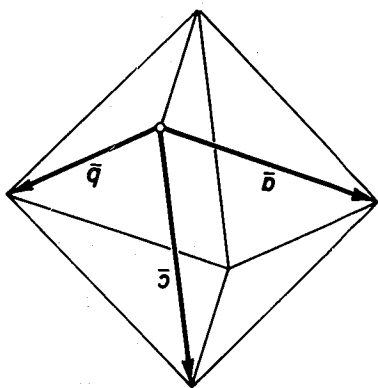
- a) $a + b + c$,
 b) $a + b - c$,
 c) $a + c$,
 d) $b - b$,
 e) $a - b$,
 f) $a + b + c - a$.

3060. Egy kocka A csúcsából kiinduló elvektorok a, b, c . Állapítsuk meg, hogy az alábbi vektorok közül melyek mutatnak az A -ból kiindulva valamelyik kockacsúcsba.

3045



3059



3058. A tetraéder egy csúcsából a másik három csúcsba mutató vektorok a, b és c . Állítsuk elő ezek segítségével a másik három oldalvektort.
 3059. Egy szabályos oktaéder egyik csúcsából kiinduló három elvektor a, b, c (3059. ábra). Állítsuk elő ezek segítségével a többi elvektort.

3065. Adott a b vektor. Szerkesszük meg a

$$-\frac{4}{3}b, 2b, 0,5b, \frac{3}{5}b, -b, \frac{4}{b} \text{ vektorokat.}$$

3066. Adottak az a és b vektorok. Szerkesszük meg az

$$\begin{array}{ll} a) a+2b, & f) \frac{a}{2}+\frac{1}{b}, \\ b) a-2b, & g) \frac{2a+b}{3}, \\ c) 2a-3b, & h) \frac{1}{2}(2a-3b), \\ d) -0,5a+\frac{1}{3}b, & \\ e) \frac{a+b}{2}, & \end{array}$$

vektorokat.

3067. Adottak az a, b, c egy síkú vektorok. Szerkesszük meg az

$$\begin{array}{ll} a) \frac{1}{3}(a+b+c), & e) \frac{a+2b+3c}{3}, \\ b) \frac{a+b+c}{3}, & f) a-\frac{b+c}{2}, \\ c) 2(a+b)-c, & g) \frac{a+b}{2}+\frac{c}{2}, \\ d) 3\left[2a+\frac{1}{2}(b-c)\right], & \end{array}$$

vektorokat.

3068. Legyenek A, B, C, D, E adott pontok. Mekkora λ értéke, ha

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \lambda(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}).$$

3069. Az a és b vektorok nem párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy az $|a| + |b|$ vektor párhuzamos az a és b vektorok szögfelezőjével.

3070. Mutassuk meg, hogy ha az AB szakasz végpontjainak a helyvektora a, ill. b, akkor felezőpontjának helyvektora $\frac{a+b}{2}$.

3071. Egy O pontból az AB szakasz végpontjaihoz az a és b vektorok vezetnek. Bizonyítsuk be, hogy az AB szakasz harmadolópontjaihoz vezető vek-

$$\frac{2a+b}{3} \text{ és } \frac{a+2b}{3}.$$

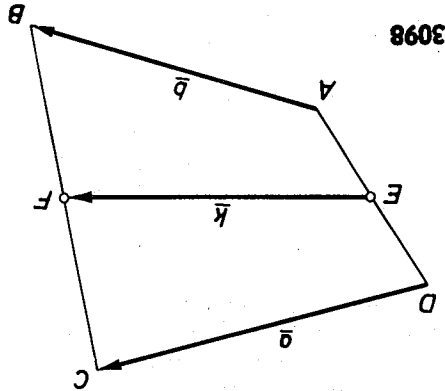
3072. Bizonyítsuk be, hogy ha egy O pontból az AB szakasz végpontjaihoz az a és b vektorok vezetnek, akkor az AB szakaszt $\lambda:\mu$ arányban osztó P

$$\frac{\mu a + \lambda b}{\mu + \lambda} \text{ vektor vezet.}$$

pontba a

3073. A sík egy O pontjából egy P pontjához vezető vektor adott a és b vektorok segítségével $3a - 2b$ alakban adható meg, egy Q pontba vezető vektor pedig $-2a + b$ alakban. Határozzuk meg a PQ szakasz felezőpontjához mutató vektort.
3074. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy háromszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanaból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.
3075. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontból egy sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő ugyanaból a pontból az oldalfelező pontokhoz vezető vektorok összegével.
3076. Jelöljünk ki egy sokszögre egy körüjárás irányát és minden oldalon jelöljük meg az első harmadoló pontot. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő a harmadoló pontokba vezető vektorok összegével.
3077. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög csúcsainak helyvektorai a, b, c , akkor súlypontjának helyvektora
- $$\frac{a+b+c}{3}.$$
3078. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontjából a csúcsokba vezető vektorok összege 0 .
3079. Legyen az ABC háromszög súlypontja S , az XYZ háromszögé pedig Q . Bizonyítsuk be, hogy
- $$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 3\overrightarrow{SQ}.$$
3080. Egy tetszőleges hatszög oldalfelező pontjai valamilyen körüjárás sorrendjében legyenek A, B, C, D, E, F . Bizonyítsuk be, hogy az ACF és BDF háromszögek súlypontja azonos.
3081. A 3077. feladat eredményét felhasználva, igazoljuk, hogy a háromszög csúcsaiban (Bz a háromszög Euler-egyenese. L. még az 1377. feladatot.) jelölje F a háromszög köré írt kör középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy F a háromszög minden oldalfelező pontjától egyenlő távolságra van.
3083. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban szereplő F pontra tükrözve a háromszög tetszőleges oldalfelező pontját, olyan pontot kapunk, amely felezi a szemközti csúcs és a magasságpont közötti szakaszt.
3084. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának egy oldal-tól mért távolsága felekkora, mint a magasságpontnak a szemközti csúcsból mért távolsága.
3085. Bizonyítsuk be vektorok segítségével a Feuerbach-kör létezését (l. a 3082–83. feladatot).
3086. Adott két tetszőleges háromszög: ABC és $A'B'C'$. Az ABC háromszög csúcsaiból kiindulva, másoljuk át az $A'B'C'$ háromszög egy-egy oldalát, irányukat és hosszukat megtartva. Az átmásolt szakaszok szabad végpontjai legyenek X, Y, Z . Bizonyítsuk be, hogy az ABC és XYZ háromszögek súlypontja közös.
3087. Legyen $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ két tetszőleges háromszög, súlypontjaik S_1 , ill. S_2 . A megfelelő csúcsok összekötő szakaszainak felezőpontjai (ha nincs-

egyenlőség. Feltevéssük meg egymásnak két tetszőleges paralelogramma csücsait úgy, hogy az egymásnak megfelelő csücsök mindkét paralelogrammául azonos sorrendben következék egymást, és bizonyítsuk be, hogy a megfelelő csücsök össze-kötő szakaszainak felezőpontjai ugyancsak paralelogramma csücsai.



3098

vonalvektorra áll $a, k = \frac{a+b}{2}$

Bizonyítsuk be, hogy a k közép-

3098. Az a és b vektorok egy négyzög szemközti oldalvektora (3098. ábra).

3097. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontot egy síknégyzög oldalfelező

viszszavisz az eredeti pontba.

lelogramma minden csücsára. Bizonyítsuk be, hogy a négyedik tükrözés

majd az eredményt egy vele szomszédos csücsára, és így körbe a para-

3096. Egy tetszőleges P pontot tükrözzünk egy paralelogramma egy csücsára,

rözés visszavisz a P pontot az eredeti helyzetbe.

tatva újra A-ra, B-re és végül C-re. Bizonyítsuk be, hogy a hatodik tük-

3095. Egy tetszőleges P pontot tükrözzünk először egy A pontra, majd a tükör-

P pont C-re vonatkozó tükröképének helyvektorát.

3094. Egy C pont helyvektora c, egy tetszőleges P ponté p. Határozzuk meg a

Állítsuk elő ezek segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort.

$$\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{BC} = b, \overrightarrow{CD} = c.$$

3093. Az ABCD négyzög oldalvektoraival legyenek:

vannak.

be, hogy az AA', BB', CC', DD' szakaszok felezési pontjai egy egyenesen

3092. AB és A'B' tetszőleges szakaszok, ezek felezőpontjai F és F'. Bizonyítsuk

szakaszt.

pontja felezi az M-et a paralelogramma középpontjával összekötő

lakat. Bizonyítsuk be, hogy az ABCD négyzög középvonalainak metszés-

3091. Egy paralelogramma belsejében fekvő M ponton át húzzunk párhuzamo-

szakat az átlók felezőpontját összekötő szakaszt.

3090. Bizonyítsuk be, hogy a négyzög súlypontja (l. a 3088. feladatot) felezi

egy más, és metszéspontjuk a négyzög súlypontja (l. a 3088. feladatot).

3089. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyzög középvonalai felezve metszik

kezdpont esetén a fentebb definiált vektor végpontja mindig ugyanaz.

be, hogy a súlypont független a kezdpont választásától, azaz tetszőleges

3088. Egy négyzög súlypontjának nevezzük azt a pontot, amelynek helyvek-

tora a csücsökhöz tartozó helyvektorok összegének a negyede. Bizonyítsuk

be, hogy S felezi az S_1S_2 szakaszt.

nek egy egyenesen) által alkotott háromszög súlypontja S. Bizonyítsuk

3100. Az $ABCD$ húrnégyszög ABC, BCD, ABD, ACD részháromszögeinek szerkesszük meg a magasságpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek a magasságpontok az $ABCD$ -vel egybevágó négyszöget alkotnak.
3101. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges húrnégyszög középpontját súlypontjára tükrözve olyan pontot kapunk, amely rajta van bármely oldalfelező ponttól a szemközti oldalra állított merőlegesen (a húrnégyszög magasságpontja).
3102. Az ABC háromszög minden oldalát osszuk fel három egyenlő részre, és jelöljük meg az AB, BC, CD oldalon rendre az A, B, C pontokhoz közeli harmadolópontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek a pontok olyan háromszöget határoznak meg, amelynek súlypontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával.
3103. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalain jelöljük ki egy-egy A', B', C' pontot. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB', CC' szakaszokat egy háromszögbe lehet összetolni, ha az A', B', C' pontok a megfelelő oldalakat azonos arányban osztják.
3104. Egy kocka A csúcsából kiinduló elvektorok legyenek a, b, c . Határozzuk meg az A -ból a lapközéppontokba vezető vektorokat.
3105. Egy kocka középpontjából három, egy közös csúcscsal rendelkező lap középpontjaiba mutató vektorok x, y és z . Határozzuk meg a csúcsokba vezető vektorokat.
3106. Egy paralelepipedonnak válasszuk ki egyik testtőlját; ennek egyik végpontjából kiinduló elekt pedig az X, Y, Z pontokban végződnek. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és XYZ síkok három egyenlő részre osztják a testtőlját.
3107. Egy tetraéder egyik lapjának súlypontját kössük össze a szemközti csúcsal, és az össze kötő szakaszt osszuk négy egyenlő részre; a laphoz legközelebbi negyedelőpont a tetraéder súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder csúcsainak helyvektorai a, b, c, d , akkor a súlypont helyvektorára — bármely lapból indulunk is ki —
- $$\frac{a+b+c+d}{4}.$$
3108. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontjából a csúcsokhoz vezető vektorok összege 0 .
3109. Bizonyítsuk be, hogy ha egy S pontból a tetraéder csúcsaihoz vezető vektorok összege 0 , akkor az S pont a tetraéder súlypontja.
3110. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is válasszunk ki n pontot a térben, meghatározható egyetlen olyan S pont, hogy ebből a pontokhoz vezető vektorok összege 0 legyen.
3111. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder súlypontja és a lapsúlypontok meghatározta tetraéder súlypontja egybeesik.
3112. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontja felezi bármely két szemközti él felezőpontját össze kötő szakaszt.
3113. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder két szemközti él párhuzamnak felezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

3134. Bizonyítsuk be, hogy ha az egy pontból kiinduló a, b, c vektorok olyanok, hogy a és b nem egyállásúak, és

$$c = \alpha a + \beta b,$$

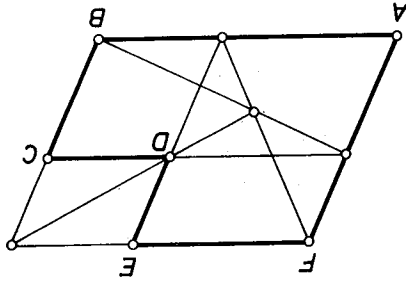
ahol $\alpha + \beta = 1$, akkor az a, b, c vektorok végpontjai egy egyenesbe esnek.

3135. Az O pontból két félégyenes indul ki, az egyikben levő $A_1, \text{ ill. } A_2$ pontba O -ból az $a, \text{ ill. } A_1$ vektor vezet, a másikon levő $B_1, \text{ ill. } B_2$ pontba viszont a $b, \text{ ill. } A_2$ vektor. Határozzuk meg az A_1B_2 és B_1A_2 egyenesek metszéspontjába mutató v vektort ($\lambda \neq 0, \mu \neq 0$; az A_1 és $A_2, \text{ ill. } B_1$ és B_2 pontok különbözőek).

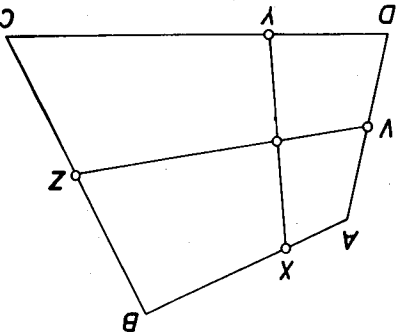
3136. Bizonyítsuk be, hogy egy trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő egyenes párhuzamos az alapokkal.

3137. Az $ABCD$ négyszögben nincsenek párhuzamos oldalak. Legyen az AB és CD egyenesek metszéspontja E , az AD és BC egyeneseké F . Bizonyítsuk be, hogy az AC, BD, EF szakaszok felezési pontjai egy egyenesen vannak.

3138. Legyen a $ABCDEF$ olyan hatszög, hogy minden második oldala párhuzamos egymással. (3138. ábra.) Bizonyítsuk be, hogy a csúcsokat a harmadszomszédos csúcsokkal összekötő átlók vagy párhuzamosak, vagy egy ponton mennek át.



3138



3139

3139. Az $ABCD$ négyszög $AB, \text{ ill. } CD$ oldalán vegyünk fel egy $X, \text{ ill. } Y$ pontot úgy, hogy azok az $AB, \text{ ill. } CD$ oldalakat ugyanabban a $\frac{\lambda}{\mu}$ arányban osszák (3139. ábra). Milyen arányban osztja a VZ középvonalat az XY egyenes P metszéspontja?

3140. Bizonyítsuk be, hogy ha az egy pontból kiinduló a, b, c, d vektorok közül a, b, c nem egy síkú, végpontjaik akkor és csak akkor vannak egy síkon, ha

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

ahol $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

VEKTOROK ELFORGATÁSA

3141. Jelentse a' , b' , c' azokat a vektorokat, amelyeket az a , b , c vektoroktól α szögű pozitív irányú elforgatással kaptunk. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$c = a + b,$$

$$\text{akkor } c' = a' + b',$$

$$\text{azaz } (a+b)' = a' + b'.$$

3142. Jelentse a' az a vektor α szögű pozitív irányú elforgatottját. Mutassuk meg, hogy ha

$$a + a' = 0,$$

akkor $a = 0$, feltéve, hogy α nem egész számu többszöröse 180° -nak. Legyen a' az a valamely elforgatottja, ahol az elforgatás szöge 360° -nak nem többszöröse, és tegyük fel, hogy $a = a'$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a = 0.$$

3144. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege 0 .

3145. Egy háromszög két oldala fölé (kifelé) szerkesztünk négyzeteket. Mutassuk meg, hogy ezek két legközelebbi — a háromszögcsúcsoktól különböző — csúcsát összekötő szakasz kétakkora, mint a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal.

3146. Az $ABCD$ négyyszög belsejében O olyan pont, hogy az ABO és CDO egyenlő szárú derékszögű háromszögek (a derékszögű csúcsok O -nál). Bizonyítsuk be, hogy

a) a négyyszög átlói merőlegesek és egyenlők;

b) a négyyszög oldalfelező pontjai négyzetet határoznak meg.

3147. Tetszőleges ABC háromszög oldalaira szerkesztünk kifelé négyzeteket. Legyenek ezek (pozitív körüjárással) $BAHF$, $CBGH$, $ACJK$; a négyzetek középpontjai rendre X , Y , Z . Szerkesszük meg ezeken kívül a $BFPG$, $CHQJ$, $AKRE$ paralelogrammákat. Így egy összetett alakzatot nyerünk. Bizonyítsuk be, hogy érvényesek a következő állítások:

- Az FG , HJ , KE szakaszok kétszer akkora, mint az ABC háromszög súlyvonala, és merőlegesek azokra.
- Az A , B , C csúcsokból rendre a KE , FG , HJ szakaszokra állított merőlegesek egy pontban, az ABC súlypontjában metszik egymást.
- Az AR , BP , CQ szakaszok merőlegesek az ABC egy-egy oldalára, és egyenlők velük.
- Az XYZ háromszög oldalaira befelé szerkesztett négyzetek középpontjai felezik az ABC háromszög oldalait.
- Az X , Y , Z pontok a PQR háromszög oldalfelező pontjai.
- Az XQ , YR , PZ egyenesek egy pontban metszik egymást.
- Az ABC , XYZ , EGJ , FHK háromszögek súlypontjai egybeesnek.
- Az AH és BJ ; BK és CH ; CH és AG szakaszok páronként egyenlők, és merőlegesek egymásra.

3148. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyyszög átlói egyenlők, és merőlegesek egymásra, akkor oldalfelező pontjai négyzetet határoznak meg.

3149. Egy négyszög oldalai fölé szerkesztünk négyzeteket. Jelöljük meg a szomszédos négyzetek középpontjait összekötő szakaszainak középpontjait; bizonyítsuk be, hogy ezek négyzetet alkotnak.
3150. Egy paralelogramma oldalai fölé szerkesztünk négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontjai négyzetet alkotnak.
3151. Egy ABC háromszög AB , BC , CA oldalai fölé szerkesztünk négyzeteket, ezek középpontjai rendre X , Y , Z . Mutassuk meg, hogy az XY és BZ szakaszok egyenlők és merőlegesek egymásra.
3152. Legyenek ABC és $A_1B_1C_1$ azonos körülírásu egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1 , BB_1 , CC_1 szakaszok felezőpontjai ugyancsak egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak.
3153. Bizonyítsuk be, hogy előző feladatunk feltételei között és bizonyítandó állításában „egyenlő szárú derékszögű” helyett „egyenlő szárú hasonló” is állhat.
3154. Jelentse a' azt a vektort, amely a -ból 60° -os pozitív irányú elforgatással származik, és legyen $(a') = a''$, azaz a'' -vel jelöljük a' 60° -os elforgatottját. Bizonyítsuk be, hogy $a'' = a' - a$.
3155. Legyenek ABC és AB_1C_1 azonos körülírásu szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy az A , a , BB_1 és CC_1 szakaszok felezőpontjai egy szabályos háromszög csúcsai.
3156. Bizonyítsuk be, hogy ha ABC és $A'B'C'$ egyező körülírásu szabályos háromszögek, akkor az AA' , BB' , CC' szakaszok felezőpontjai szabályos háromszög csúcsai.
3157. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalai fölé kifele szabályos háromszögeket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy az A pont, továbbá a szabályos háromszögeknek a paralelogrammában nem levő csúcsai szabályos háromszöget alkotnak.
3158. Egy körben helyezzünk el három sugár hosszúságú húr, legyenek ezek: AB , CD , EF . Bizonyítsuk be, hogy a BC , DE , FA szakaszok felezési pontjai szabályos háromszög csúcsai.
3159. Legyenek OAB , OCD , ODE tetszőleges szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy a BC , DE , FA szakaszok felezési pontjai szabályos háromszög csúcsai.
3160. Egy háromszög oldalai fölé (mind kifele vagy mind befelé) szerkesztünk szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a középpontjai ismét szabályos háromszöget alkotnak.
3161. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex hatszög minden második csúcsánál 120° -os szög van, és egy-egy 120° -os szöget közrefogó oldalpár egyenlő oldalakkból áll, akkor ezek a csúcsok szabályos háromszöget alkotnak.
3162. Az AB szakaszon jelöljünk ki tetszőleges C pontot. A szakasz egyik oldalára AC és CB fölé, másik oldalára pedig AB fölé szerkesztünk szabályos háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontjai szabályos háromszög csúcsai.
3163. Jelölje a' az a vektorból α szögű pozitív forgással származó vektort. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és XYZ akkor és csak akkor egyező körülírásu hasonló háromszögek, ha $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB'}$ és $\overrightarrow{XZ} = \lambda \overrightarrow{XY'}$.

3178. Az ABC szabályos háromszögben tekintsük az $a = \overrightarrow{BC}$, $b = \overrightarrow{CA}$, $c = \overrightarrow{AB}$ vektorokat. Határozzuk meg az

$$ab + bc + ca$$

értékét.

3179. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ szorzatot, ha az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 10$ cm.

3180. Nevezünk valamely vektor egy egyenesen levő merőleges vetületének azt a vektort, amelyiknek kezdőpontja, illetve végpontja az eredeti vektor kezdő-, illetve végpontjának a vetülete. Legyen az a vektornak az e -vel párhuzamos egyenesen levő vetülete a' , és legyen e egyességvektor. Igazoljuk, hogy

$$a' = (ae) \cdot e.$$

3181. Igazoljuk, hogy a -nak a b -vel párhuzamos összetevője $(b^0a) \cdot b^0$, és a b -re merőleges összetevője $a - (b^0a) \cdot b^0$. (b^0 -al jelöltük a b -vel egyező irányú egyességvektort.)

3182. Legyen a és b két tetszőleges vektor és c^0 tetszőleges egyességvektor. Igazoljuk, hogy a és b -nek a c^0 -al párhuzamos egyenesen levő merőleges vetületének az összege egyenlő az $a + b$ merőleges vetületével.

b) Igazoljuk, hogy $(a + b)c^0 = ac^0 + bc^0$.
 c) Igazoljuk, hogy $(a + b)c = ac + bc$, ha a , b , c tetszőleges vektorok. (A skalárszorzás disztributív.)

3183. Igazoljuk, hogy

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

3184. Igazoljuk, hogy az $(ab) \cdot c - (ac) \cdot b$ vektor merőleges a -ra.
 3185. Tekintsük az a és b nem párhuzamos vektorokat. Van-e olyan k szám, hogy $a + kb$ merőleges a -b-re?

3186. Milyen a , b , c vektorokhoz található olyan $p \neq 0$, hogy $ap = bp = cp$?

3187. Határozzuk meg az a és b egyességvektorok szögét, ha $a + 2b$ és $5a - 4b$ egyenestől merőleges vektorok.

3188. Határozzuk meg az a és b vektorok szögét, ha

$$3a - 5b \quad \text{és} \quad 2a + b,$$

illetve

$$a + 4b \quad \text{és} \quad -a + b$$

egyéb merőleges vektorok.

3189. Adott a háromszög a és b oldala és az ezek bezárt γ szög. Határozzuk meg a γ szög szögfelezőjének a hosszát.

3190. Tekintsük a síkon két koncentrikus kört, az egyikbe írt ABC szabályos háromszöget és a másikon mozgó P pontot. Igazoljuk, hogy

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

állandó.

3191. Igazoljuk, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra.

3192. Bizonyítsuk be Thalesz tételét.

3193. Igazoljuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegevel.
3194. Igazoljuk, hogy a paralelepipedon testátlóinak a négyzetösszege az élék négyzetösszegevel egyenlő.
3195. Igazoljuk, hogy a négyyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egy-másra, ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő.
3196. A tér egy egyenesre egy háromszög oldalaival egyenlő szögeket alkot. Igazoljuk, hogy az egyenes merőleges a háromszög síkjára.
3197. Legyen egy tetraéder két szemközti éle a , a_1 , továbbá b , b_1 és c , c_1 . Igazoljuk, hogy az a és a_1 bezárta α szögére
- $$\cos \alpha = \frac{2aa_1}{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}.$$
3198. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalainak a négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegeinek a $\frac{3}{4}$ részével.
3199. Jelöljük a , b , c , x -szel az $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OX}$ vektorokat (az A , B , C , X pontok helyvektorait). Legyen adott az ABC háromszög, és keressük az olyan X pontok mértani helyét, amelyre
- $$(a-b)(c-x) = 0.$$
3200. Legyen adott az ABC háromszög. Jelöljük a csúspontok helyvektorát a , b , c -vel, az A és B ponton átmenő magasságvonalak metszéspontjának helyvektorát m -mel.
- $a)$ Igazoljuk, hogy $(b-c)(a-m) = 0$ és $(c-a)(b-m) = 0$.
- $b)$ Igazoljuk, hogy ha $(b-c)(a-m) = 0$ és $(c-a)(b-m) = 0$, akkor $(a-b)(c-m) = 0$.
- $c)$ Előbbi eredményekből hogyan következik, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást?
3201. Legyen az A és B pontok helyvektora a és b . Keressük az olyan X pontok mértani helyét, melyek x helyvektorára
- $$(a-b)\left(a+b-\frac{x}{2}\right) = 0.$$
3202. Legyen adott az ABC háromszög. Jelöljük a csúspontok helyvektorát a , b , c -vel, az AB és BC oldalak felezőmerőlegesének K metszéspontjához tartozó helyvektort k -val.
- $a)$ Igazoljuk, hogy $(a-b)\left(a+b-\frac{k}{2}\right) = 0$ és $(b-c)\left(b+c-\frac{k}{2}\right) = 0$.
- $b)$ Igazoljuk, hogy ha $(a-b)\left(a+b-\frac{k}{2}\right) = 0$ és $(b-c)\left(b+c-\frac{k}{2}\right) = 0$, akkor $(c-a)\left(c+a-\frac{k}{2}\right) = 0$.

- c) Az előbbi eredményekből hogyan következik, hogy a háromszög oldal-felező merőlegesei egy pontban metszik egymást?
3203. Vezessük le az $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ azonosságból a skaláris szorzat értelmezése alapján a cosinustételt.
3204. a) Igazoljuk, hogy ha $a(b-c) = 0$ és $b(c-a) = 0$, akkor $c(a-b) = 0$.
b) Legyenek a, b, c a tetraéder egyik csúcsából induló elvektorok. Mit jelent akkor az a)-ban bizonyított tétel?
3205. Legyen a és b kezdőpontja közös, továbbá $|a| = |b|$. Keressük a velük egyező kezdőpontú $\lambda(a+b)$ vektorok végpontjainak a mértani helyét, ha λ tetszőleges valós szám lehet.
3206. Adott az $\vec{OA} = e$ egységvektor. Keressük az X pontok mértani helyét, ha $e \cdot \vec{OX} = 3$.
3207. Adott az $\vec{OA}$ vektor. Keressük az X pontok mértani helyét, ha $\vec{OA} \cdot \vec{OX} = 2$.
3208. Adott az $\vec{OA}$ és az $\vec{OB}$ vektor. Keressük az X pontok mértani helyét, ha $\vec{OA} \cdot \vec{OX} = 0$ és $\vec{OB} \cdot \vec{OX} = 2$.
3209. Adott az $\vec{OA}$. Határozzuk meg az olyan X pontoknak a mértani helyét, hogy $\vec{OX}$ -nek az $\vec{OA}$ -ra való merőleges vetületének hossza megegyezze az $\vec{OA}$ -nak az $\vec{OX}$ -re való merőleges vetületének hosszával.
3210. Adott $\vec{OA}$ -hoz határozzuk meg az olyan X pontoknak a mértani helyét, amelyekre $|\vec{OA} + \vec{OX}| = |\vec{OA}|$.
3211. Adott $\vec{OA}$ -hoz határozzuk meg az olyan X pontoknak a mértani helyét, amelyekre $|\vec{OA} + \vec{OX}| = |\vec{OA} - \vec{OX}|$.
3212. Adottak az A, B pontok és a k^2 szám. Keressük az olyan P pontoknak a mértani helyét, amelyekre $PA^2 - PB^2 = k^2$.
3213. Adottak az A, B pontok, továbbá a k^2 szám. Keressük az olyan P pontoknak a mértani helyét, amelyekre $PA^2 + PB^2 = k^2$.
3214. Igazoljuk, hogy $(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$, ha i és j egymásra merőleges egységvektorok.
3215. Igazoljuk, hogy $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$, ha i, j, k páronként egymásra merőleges egységvektorok.
3216. Legyenek i, j, k páronként egymásra merőleges egységvektorok. Igazoljuk, hogy a tér minden a vektorához egyértelműen található olyan a_1, a_2, a_3 számhármas, hogy $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$. E számhármaszt nevezzük a koordinátáinak.

3217. Határozzuk meg $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ -t, ha
- $\mathbf{a}(1, 2, 5); \mathbf{b}(-1, 3, -7);$
 - $\mathbf{a}(0, 2, 3); \mathbf{b}(-2, 1, 3);$
 - $\mathbf{a}(2, 3, 4); \mathbf{b}(5, 7, -1);$
 - $\mathbf{a}(\sqrt{2}, 5, 1); \mathbf{b}(\sqrt{3}, -12, 2).$
3218. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ hosszát, ha
- $\mathbf{a}(1, 3, 5),$
 - $\mathbf{a}(-1, -2, 7),$
 - $\mathbf{a}(2, -2, 3).$
3220. Mekkora szögét zárnak be az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok, ha
- $\mathbf{a}(-1, 3, 7); \mathbf{b}(2, 5, -4);$
 - $\mathbf{a}(2, -3, 5); \mathbf{b}(-1, -2, 5).$
3221. Tekintsük az x, y, z derékszögű koordináta-rendszert, ahol $O(0, 0, 0)$
 $A(1, 0, 0); B(0, 1, 0); C(0, 0, 1).$ Legyenek továbbá $\mathbf{i} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{j} = \overrightarrow{OB},$
 $\mathbf{k} = \overrightarrow{OC}.$ Igazoljuk, hogy a tér bármely P pontjának koordinátái meg-
 egyeznek a P pont $\overrightarrow{OP}$ helyvektorának a koordinátáival.
3222. Bontsuk fel az $\mathbf{a}(1, 2, -1)$ vektort a $\mathbf{b}(3, -1, -2)$ vektorral párhuzamos
 és rá merőleges összetevőkre.
3223. Legyen $\mathbf{a}(3, -1, 2)$ és $\mathbf{b}(5, 2, -3),$ és legyen közös a kezdőpontjuk. Így
 meghatározhatunk egy síkot. Keresünk e síkban olyan vektorokat, melyek
 $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ -vel egyenlő szögeket zárnak be.
3224. Adott $\mathbf{a}(1, -1, 2).$ Határozzuk meg a $\mathbf{b}(5, -1, x)$ harmadik koordinátáját
 úgy, hogy $\mathbf{b}$ merőleges legyen $\mathbf{a}$ -ra.
3225. Legyenek $\mathbf{a}(5, -1, 2)$ és $\mathbf{b}(-2, 3, 1).$ Keresünk olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyik
 merőleges $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re is.
3226. Legyenek $\mathbf{a}(1, 1, 1)$ és $\mathbf{b}(0, 1, 1).$ Keresünk olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyik $\mathbf{a}$ -val
 és $\mathbf{b}$ -vel 45° -os szöget zár be.
3227. Tekintsük az $\mathbf{a}(1, 2, 2); \mathbf{b}(-2, -1, 2); \mathbf{c}(3, 2, \sqrt{3})$ vektorokat. Keresünk
 olyan vektorokat, amelyek az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorokkal egyenlő szöget zár-
 nak be.
3228. Az $\overrightarrow{AO}(2, -4, 7)$ vektort tükrözzük az $\overrightarrow{OB}(-5, 2, 0)$ vektor egyenesére.
 Határozzuk meg a tükrözött vektor koordinátáit.
3229. Tükrözzük az $\mathbf{a}(-2, -5, 7)$ vektort olyan síkra, amelyik merőleges a
 $\mathbf{b}(1, -1, 1)$ vektorra. Határozzuk meg a tükrözött vektor koordiná-
 táit.
3230. Adott az O és a P_0 pont, továbbá az $\mathbf{n} \neq 0$ vektor. Igazoljuk, hogy P
 akkor és csak akkor illeszkedik a P_0 ponton átmenő és az $\mathbf{n}$ -re merőleges
 síkra ha
- $$\mathbf{n}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0.$$

3231. Igazoljuk, hogy a $P(x, y, z)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és az $n(A, B, C)$ vektorra merőleges síkra, ha
- $$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$
- (Ez utóbbi egyenletet a szövegben forgó sík egyenletének, n -et e sík normálvektorának nevezik.)
3232. Írjuk fel a $P_0(1, 5, -7)$ ponton átmenő, $n(1, -1, 2)$ normálvektoru sík egyenletét.
3233. Írjuk fel a $P_0(2, 5, 5)$ ponton átmenő és az xy síkkal párhuzamos sík egyenletét.
3234. Határozzuk meg a sík egy pontjának és egy normálvektorának a koordinátáit, ha egyenlete
- $$a) \ 2x + 5y - 4z = 11, \quad b) \ 2x - 11y = 7, \quad c) \ 6x = 13.$$
3235. Igazoljuk, hogy $Ax + By + Cz = D$ sík egyenlete, ha A, B, C közül legalább az egyik nem nulla.
3236. Igazoljuk, hogy
- $$|n^0(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})|$$
- a P pontnak és a P_0 ponton átmenő, az n^0 egyenessvektorra merőleges síknak a távolsága.
3237. Határozzuk meg a P pontnak a P_1 ponton átmenő és n normálvektoru síktól való távolságát, ha
- $$a) \ P(5, 7, 2), \ P_0(-2, 3, 4), \ n(1, 2, 1), \quad b) \ P(0, 0, 0), \ P_0(7, 3, 2), \ n(2, -1, 1).$$
3238. Írjuk fel az $A(2, 1, 3)$ ponton átmenő és a $2x - 7y + 5z = 6$ síkkal párhuzamos sík egyenletét, és határozzuk meg a két sík távolságát.
3239. Számítsuk ki a $2x - y + 5z = 7$ és az $5x + 2y - z = 3$ egyenletű síkok hajlásszögét.
3240. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ és az $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ síkok
- $$a) \text{ párhuzamosak,} \quad b) \text{ merőlegesek}$$
- legyenek.
3241. Írjuk fel az $A(1, 2, 3), B(-1, -2, 3)$ pontok meghatározta szakasz felezőmerőleges-síkjának az egyenletét.
3242. Igazoljuk, hogy P akkor és csak akkor illeszkedik a P_0 ponton átmenő és a v -vel párhuzamos egyenesre, ha
- $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + tv,$$
- ahol t tetszőleges valós szám.

3243. Igazoljuk, hogy $P(x, y, z)$ akkor és csak akkor illeszkedik a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő és a v_1, v_2, v_3 vektorral párhuzamos egyenesre, ha

$$x = x_0 + tv_1,$$

$$y = y_0 + tv_2,$$

$$z = z_0 + tv_3$$

illetve ha v_1, v_2, v_3 egyike sem nulla:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

(Ez az egyenes paraméteres egyenletrendszere, ill. egyenletrendszere.)
3244. Írjuk fel az egyenes paraméteres egyenletrendszert, ill. egyenletrendszert, ha

$$a) P_0(1, -1, 2); \quad v(5, 1, -3),$$

$$b) P_0(0, 0, 0); \quad v(1, 2, -1),$$

$$c) P_0(2, 3, 4); \quad v(0, 1, 2),$$

$$d) P_0(7, -2, 5); \quad v(0, 0, 1).$$

3245. Írjuk fel az A, B pontokat összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszert, ill. egyenletrendszert, ha

$$a) A(1, 2, -3); \quad B(2, -1, -5),$$

$$b) A(0, 1, 3); \quad B(-2, -3, 7).$$

3246. Határozzuk meg az egyenes egy pontjának és irányvektorának koordinátáit, ha egyenletrendszere

$$a) \frac{x-2}{x-2} = \frac{y+5}{y+5} = \frac{z-7}{z-7},$$

$$b) \frac{x}{x} = \frac{y+4}{y+4} = \frac{z-5}{z-5}.$$

3247. Határozzuk meg az $\frac{x-1}{x-1} = \frac{y+7}{y+7} = \frac{z}{z}$ és az $\frac{3}{x} = \frac{4}{y+5} = \frac{5}{z-1}$ egyenlőségek hajlásszögét.

3248. Határozzuk meg a $2x-5y-7z=3$ és az $\frac{x-2}{x-2} = \frac{y+5}{y+5} = \frac{z}{z}$ egyenes hajlásszögét.

3249. Határozzuk meg a $4x+5y-7z=4$, a $2x-3y+7z=3$ és a $3x-4y+z=10$ síkok közös pontját.

3250. Számítsuk ki az $\frac{x-1}{x-1} = \frac{y+2}{y+2} = \frac{z}{z}$ egyenes és az $x-y+2z=0$ sík metszéspontjának koordinátáit.

KÉT VEKTOR VEKTORIÁLIS SZORZATA

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatának nevezzük azt a vektort, amely merőleges az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokra, és irányát megfigyeljük jobbra kezünk középső ujjának irányával, ha a jobb kezünk hüvelyk-, ill. mutatóujja az $\mathbf{a}$, ill. $\mathbf{b}$ irányába mutat. (Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és a vektoriális szorzat jobbrendszerrel alkotnak.) A vektoriális szorzat hossza pedig $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\alpha, \beta)$, ahol $|\mathbf{a}|$, ill. $|\mathbf{b}|$ az $\mathbf{a}$, ill. $\mathbf{b}$ hosszát, (α, β) pedig a két vektor hajlásszögét jelöli. A vektoriális szorzatot $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jelöli. Beszédben is megkülönböztetjük a skaláris szorzattól és a keresztszorzattól $\mathbf{b}$ -nek mondjuk. Az alábbi néhány feladatot rámutat a vektoriális szorzat legjellemzőbb tulajdonságaira, majd néhány alkalmazására. E feladatok megoldása közben találkozzunk: paralelogramma területvektora (3255.), vektor síkon való vetülete (3258.) fogalmakkal.

3251. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

(A vektoriális szorzás nem kommutatív.)

3252. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

3253. Igazoljuk, hogy párhuzamos vektorok vektoriális szorzata a nullvektor.

3254. Igazoljuk, hogy

$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}),$$

ahol λ tetszőleges valós szám.

3255. Igazoljuk, hogy ha $\vec{OA} = \mathbf{a}$ és $\vec{OB} = \mathbf{b}$, akkor

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

az $OACB$ paralelogramma területével egyenlő. ($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -t az előbbi parallelogramma területvektorának nevezzük.)

3256. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ hajlásszögére

$$\operatorname{tg}(\alpha, \beta) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

3257. Az ABC háromszögben $AB = 10$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 5$ cm. Számítsuk ki az $|\vec{AC} \times \vec{BC}|$ értéket.

3258. Vétítsük az $\mathbf{a}$ vektort merőlegesen egy $\mathbf{e}$ egységvektorra. merőleges

síkra. Igazoljuk, hogy a vetület hossza egyenlő $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}|$ -val. (Egy vektor valamely síkon való merőleges vetülete olyan vektor, melynek kezdő-,

III. végpontja az eredeti vektor kezdő-, illetve végpontjának a vetülete.)

3259. Legyen $\mathbf{a}_m$ az $\mathbf{a}$ -nak egy $\mathbf{e}$ egységvektorra merőleges síkon lévő merőleges

vetülete. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_m$ -et az $\mathbf{e}$ körül megfelelő irányban 90° -kal

elforgatva, az $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ vektort kapjuk.

3260. Igazoljuk, hogy $e \times (e \times a) = -a$, ahol a az a -nak egy e egységvektortól merőleges síkon lévő merőleges vetülete.
3261. Igazoljuk, hogy $a''' = (e \times a) \times e$, ahol a''' az a -nak egy e egységvektorra merőleges síkon lévő merőleges összetevője.
3262. Igazoljuk, hogy az a -nak az e egységvektorra merőleges összetevője $(e \times a) \times e$.
3263. Igazoljuk, hogy
- $e \times (b + c) = e \times b + e \times c$, ha e egységvektor,
 - $(\lambda e) \times (b + c) = (\lambda e) \times b + (\lambda e) \times c$, ha e egységvektor,
 - $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$,
 - $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$.
- (a vektoriális szorzás disztributív).
3264. Igazoljuk, hogy
- $$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d.$$
3265. Igazoljuk, hogy
- $$(a + b + c) \times (d + e + f) = a \times d + a \times e + a \times f + b \times d + b \times e + b \times f + c \times d + c \times e + c \times f.$$
3266. Hogyan írható másképpen
- $(a + b) \times (a - b)$,
 - $(2a + b) \times (a - 2b)$?
3267. Igaz-e, hogy ha $a \times c = b \times c$, akkor $a = b$?
3268. Mi a geometriai értelme az $(a + b) \times (a - b)$ szorzatnak?
3269. Legyen $a + b + c = 0$. Igazoljuk, hogy $a \times b = b \times c = c \times a$.
3270. Igazoljuk, hogy ha $a \times b = b \times c = c \times a$, akkor a , b és c párhuzamos vektorok, vagy $a + b + c = 0$.
3271. Legyenek $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, $\vec{OC} = c$ és $a \times b + b \times c + c \times a = 0$. Igazoljuk, hogy A, B, C egy egyenesre illeszkednek.
3272. Legyenek $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, $\vec{OC} = c$, $\vec{OD} = d$ nullvektortól különböző olyan vektorok, hogy $a \times b$ és $c \times d$ párhuzamosak. Igazoljuk, hogy O, A, B, C, D pontok egy síkra illeszkednek.

3273. Legyenek $\vec{OA} = a$ és $\vec{OB} = b$ adott, egymásra merőleges vektorok. Határozzuk meg az olyan X pontoknak a mértani helyét, melyekhez tartozó $OX = x$ -re $a \times x = b$.
3274. Legyenek O -ból az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ pontba mutató vektorok i, j, k . Igazoljuk, hogy $i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$.
3275. Igazoljuk, hogy az $a(a_1, a_2, a_3)$ és $b(b_1, b_2, b_3)$ vektoriális szorzata $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$.
3276. Határozzuk meg az $a \times b$ -t és $|a \times b|$ -t, ha
- $$\begin{aligned} a) & a(1, 2, 1), \quad b(2, 3, -2), \\ b) & a(2, 0, 1), \quad b(0, 0, 1), \\ c) & a(5, 7, -3), \quad b(-1, -2, 5). \end{aligned}$$
3277. Számítsuk ki az $ABCD$ paralelogramma területét, ha
- $$\begin{aligned} a) & A(0, 0, 0); \quad B(2, 0, 0); \quad C(1, 1, 1), \\ b) & A(1, 2, 3); \quad B(2, -1, 3); \quad C(5, -2, -3). \end{aligned}$$
3278. Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha
- $$\begin{aligned} a) & A(-1, 1, 2); \quad B(1, -1, -2); \quad C(1, 1, 1), \\ b) & A(2, 1, 1); \quad B(1, 2, 3); \quad C(4, 1, -5). \end{aligned}$$
3279. Írjuk fel az $A(1, 2, -1)$ ponton átmenő és az $u(1, -1, 1); v(2, -2, 3)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletét.
3280. Írjuk fel az $A(1, 0, -1)$ pontra és az $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{y} = \frac{5}{z}$ egyenesre illeszkedő sík egyenletét.
3281. Írjuk fel a $2x - 5y + z = 3$ és a $3x - y + 2z = 7$ síkok metszésvonalának egyenletrendszerét.
3282. Határozzuk meg az ABC sík egy normálvektorát, és írjuk fel a sík egyenletét, ha $A(4, 0, 2); B(-1, -2, -3); C(5, 1, 3)$.
3283. Legyenek adottak az $OA(3, 1, -2); OB(-1, -2, 3); OC(2, 4, 5)$ vektorok. Határozzuk meg az OC egyenes és az OAB sík hajlásszögét.
3284. Írjuk fel az $A(3, -2, -1)$ pontra illeszkedő, az $a(1, 2, -1)$ vektorral párhuzamos és a $2x + 5y - z = 3$ síkra merőleges sík egyenletét.
3285. Írjuk fel az $A(0, 0, 0)$ pontra illeszkedő, az $x - y + z = 1$ és a $2x - 3y - 5z = 2$ síkokra merőleges sík egyenletét.
3286. Van-e olyan sík, amely illeszkedik az $A(1, 2, 3); B(2, -1, 5); C(3, 4, -7); D(5, -1, -2)$ pontokra?
3287. Számítsuk ki az $A(1, -1, 2)$ pontnak az $x - \frac{4}{y+2} = \frac{2}{z} = \frac{3}{y+2}$ egyenestől való távolságát.
3288. Írjuk fel az $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{y} = \frac{2}{z-8} = y-8 = z$ és az $\frac{2}{x-8} = \frac{3}{z-2}$ egyenesek meghatározta sík egyenletét.

3289. Írjuk fel a $-\frac{x+2}{y-3} = -z$ és az $\frac{x+2}{y-1} = \frac{5}{3}$ egyenlesek normaltranszverzálisának az egyenletrendszerét.

TÖBB TÉNYEZŐS SZORZATOK. VEGYES SZORZAT. KIFEJTÉSI TÉTEL

3290. Mi az értelmük az alábbi szorzatoknak:

- $(a \cdot b) \cdot c$,
- $(a \cdot b) \times c$,
- $(a \times b) \cdot c$,
- $(a \times b) \times c$?

3291. Igazoljuk, hogy

$$(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c).$$

Értelmezés: Az $(a \times b) \cdot c = a(b \times c)$ szorzatot nevezik vegyes szorzatnak, és abc -vel jelölik.

3292. Igazoljuk, hogy $acb = -abc$.

3293. Igazoljuk, hogy $abc = bca = cab$.

3294. Milyen a, b, c vektorokhoz létezik olyan v , amelyik merőleges az a, b és c vektorokra?

3295. Igazoljuk, hogy $aba = 0$.

3296. Igazoljuk, hogy $(\alpha a)bc = \alpha(abc) = a(\alpha b)c = ab(\alpha c)$.

3297. Igazoljuk, hogy $ab(5a + 6b + c) = abc$.

3298. Igazoljuk, hogy

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 2abc.$$

3299. Legyenek $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$. Igazoljuk, hogy abc a térfogata annak a paralelepipedonnak, amelynek egy csúcsból induló élei OA, OB, OC .

3300. Legyenek $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$. Igazoljuk, hogy az $OABC$ tetraéder térfogata $\frac{1}{6} |abc|$.

3301. Legyenek $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$. Igazoljuk, hogy O, A, B, C akkor és csak akkor illeszkednek egy síkra, ha $abc = 0$.

3302. Számítsuk ki abc értékét, ha

- $a(0, 1, -1); b(1, 1, 1); c(1, 2, 3)$,
- $a(1, 2, 3); b(-1, 2, -5); c(5, 7, 2)$.

3303. Számítsuk ki a paralelepipedon térfogatát, ha OA, OB, OC egy csúcsból induló élei és $\vec{OA}(2, -1, 3); \vec{OB}(0, -2, -1); \vec{OC}(3, 2, 1)$.

3304. Legyenek $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$. Számítsuk ki az $OABCD$ tetraéder térfogatát, ha $a(2, 4, 1); b(0, 1, 3); c(3, -1, -2)$.

3305. Számítsuk ki az $OABC$ tetraéder O -ból induló magasságát, ha $\overrightarrow{OA}(-3, -4, 0)$; $\overrightarrow{OB}(1, 0, 2)$; $\overrightarrow{OC}(2, 3, -1)$.
3306. Legyenek adottak $a(1, -1, 2)$; $b(3, 4, 0)$; $c(-2, -5, 1)$ és $d(5, 2, 1)$. Számítsuk ki annak a paralelepipedonnak a térfogatát, amelynek élei az a, b, c vektorokkal párhuzamosak, és testátlója d .
3307. Legyenek adottak az $a(1, -1, 7)$; $b(-1, 2, 5)$ vektorok. Határozzuk meg az $x(0, 1, x)$ vektor harmadik koordinátáját, hogy az $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\overrightarrow{OX} = x$ vektorok egy síkban legyenek.
3308. Igazoljuk, hogy ha $abc \neq 0$, akkor tetszőleges v -re:
- $$v = \frac{abc}{avc} \cdot a + \frac{abc}{abv} \cdot b + \frac{abc}{abc} \cdot c.$$
3309. Igazoljuk, hogy
- $$\begin{aligned} a) \quad (a^0 \times b) \times a^0 &= b - (a^0 b) a^0 \quad (a^0 \text{ egységvektor}), \\ b) \quad (a \times b) \times a &= (aa)b - (ba)a, \\ c) \quad (a \times b) \times b &= (ab)b - (bb)a, \\ d) \quad (a \times b) \times (a \times b) &= [a(a \times b)]b - [b(a \times b)]a, \\ e) \quad (a \times b) \times c &= (ac)b - (bc)a, \\ f) \quad a \times (b \times c) &= (ac)b - (ab)c. \end{aligned}$$
- Megjegyzés: $e)$ és $f)$ az ún. kifejtési tétel, az előbbieket ezek speciális esetei.
3310. Számítsuk ki $(a \times b) \times c$ értékét, ha
- $$\begin{aligned} a) \quad a(0, 1, 2); \quad b(1, 1, -1); \quad c(2, -1, 0); \\ b) \quad a(1, 2, 3); \quad b(-1, -2, -3); \quad c(5, 7, 2). \end{aligned}$$
3311. Számítsuk ki $a \times (b \times c)$ értékét, ha
- $$\begin{aligned} a) \quad a(0, 0, 1); \quad b(2, 3, 1); \quad c(-2, 3, -1); \\ b) \quad a(1, 2, 3); \quad b(-1, -2, -3); \quad c(5, 7, 2). \end{aligned}$$
3312. Tekintsük az $(a \times b) \times (c \times d)$ vektort. Igazoljuk, hogy ez a vektor párhuzamos az OAB és az OCD síkokkal, ha $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\overrightarrow{OC} = c$, $\overrightarrow{OD} = d$.
3313. Legyen a merőleges b -re. Határozzuk meg az
- $$\begin{aligned} a) \quad a \times (a \times b), \\ b) \quad a \times [a \times (a \times b)], \\ c) \quad a \times [a \times (a \times b)] \end{aligned}$$
- vektorokat.
3314. Legyenek a, b, c, d páronként kitérő egyenesek. Igazoljuk, hogy ha az a, b és c, d , továbbá az a, c és b, d egyenesek normáltranszverzálisai merőlegesek egymásra, akkor az a, d és b, c egyenesek normáltranszverzálisai is merőlegesek egymásra.

Ha egy konvex triéder csúcsa a gömb középpontja, a gömbfelületből gömbháromszöget vág ki. A gömböt három főkörre, ha nincs közös pontjuk, nyolc gömbháromszögre bontja fel. A gömbháromszöget három főkörív, a gömbháromszög oldalai határolják. Két-két oldal metszéspontja a gömbháromszög középpontja. A gömbháromszög oldalait a hozzájuk tartozó középponti szögekkel mérjük. A gömbháromszöget meghatározó triéder szögeit a gömbháromszög szögeinek nevezik. A gömbháromszög oldalai és szögei tehát 180° -nál kisebbek. Megjegyezzük, hogy ha a triéder konvex voltát nem kötjük ki, akkor általában több értelemben vett gömbháromszöghöz jutunk. Az alábbi feladatok között sárga értelemben vett gömbháromszögekre vonatkoznak. Az oldalakat a, b, c -vel, a megfelelő szögeket α, β, γ -val jelöljük majd.

3315. Legyenek a, b, c közös kezdőpontú egységvektorok. Igazoljuk, hogy megfelelő jelöléssel elérhető, hogy $abc > 0$.

3316. Tekintsük az egységugaru gömbön azt a gömbháromszöget, melynek csúcsai A, B, C és $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$ (O a gömb középpontja). Így $|a| = |b| = |c| = 1$, és legyen $abc > 0$. Számítsuk ki a gömbháromszög oldalait és szögeit.

3317. Mutassanak az egységugaru gömb középpontjából a gömbháromszög ABC csúcsába az a, b, c vektorok. Legyenek a gömbháromszög oldalai a, b, c és szögei α, β, γ .

a) Igazoljuk, hogy

$$|(a \times b) \times (b \times c)| = abc.$$

b) Igazoljuk, hogy

$$abc = \sin c \sin a \sin b = \sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha.$$

c) Igazoljuk, hogy a gömbháromszög oldalainak sinusi úgy aránylik egymáshoz, mint a szemközti szögek sinusai.

Megjegyezzük, hogy ezt az utóbbi tételt a gömbháromszög sinustételének nevezik.

3318. Mutassanak az egységugaru gömb középpontjából a gömbháromszög csúcsába az a, b, c vektorok. Legyenek a gömbháromszög oldalai a, b, c , és szögei α, β, γ .

a) Igazoljuk, hogy

$$(a \times b)(b \times c) = (ab)(bc) - ac.$$

b) Igazoljuk, hogy

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta.$$

Megjegyezzük, hogy ez utóbbi a gömbháromszög oldalra vonatkozó cosinustétele.

3319. Mutassanak az egységugaru gömb O középpontjából az ABC gömbháromszög csúcsába az a, b, c vektorok. Az O kezdőpontú $b \times c, c \times a, a \times b$ vektorok végpontjai egy újabb gömbháromszög csúcsai. Ezt a gömb-

c) Határozzuk meg α és α értékét, ha $\alpha + \alpha = 90^\circ$,
ha α az oldal és α a szög.

$$b) \cos \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha},$$

$$a) 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1,$$

3326. Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú gömbháromszögben

$$\begin{aligned} a) \sin \alpha &= \sin \alpha \sin c, \\ b) \cos \alpha &= \sin \beta \cos a, \\ c) \cos \beta &= \sin \alpha \cos b, \\ d) \cos c &= \cos a \cos b, \\ e) \cos c &= \cotg \alpha \cotg \beta. \end{aligned}$$

3325. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c a gömbháromszög oldalai, α, β, γ a szögei és $\gamma = 90^\circ$, akkor

$$\begin{aligned} a) & \text{tetraéder,} \\ b) & \text{oktaéder,} \\ c) & \text{dodekaéder,} \\ d) & \text{ikozaedér} \end{aligned}$$

3324. Számítsuk ki a szabályos

$$\begin{array}{lll} a) \alpha = 90^\circ, & b = 60^\circ, & c = 45^\circ, \\ b) \alpha = 120^\circ, & \beta = 60^\circ, & \gamma = 45^\circ, \\ c) \alpha = 60^\circ, & b = 120^\circ, & \gamma = 45^\circ, \\ d) \alpha = 60^\circ, & \beta = 90^\circ, & c = 60^\circ, \\ e) \alpha = 45^\circ, & b = 45^\circ, & c = 60^\circ, \\ f) \alpha = 60^\circ, & \beta = 120^\circ, & a = 45^\circ. \end{array}$$

3323. Számítsuk ki a gömbháromszög oldalait és szögeit, ha a, b, c a gömbháromszög oldalai, α, β, γ a gömbháromszög szögei.

$$\begin{aligned} a) & a + b > c, \\ b) & a + b + c < 2\pi, \\ c) & \alpha + \beta - \gamma < \pi, \\ d) & \alpha + \beta + \gamma > \pi, \end{aligned}$$

3322. Igazoljuk, hogy

Megjegyezzük, hogy ez a gömbháromszög szögeire vonatkozó cosinus tétel.

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

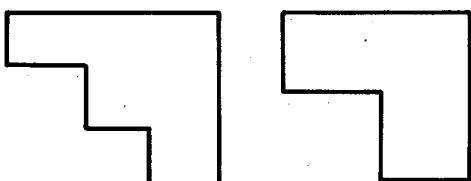
3321. Igazoljuk, hogy

3320. Igazoljuk, hogy polár-gömbháromszögek egyikének az oldalai a másiknak a megfelelő szögeit 180° -ra egészítik ki.
háromszöget nevezik az ABC gömbháromszög polár-gömbháromszögének. Igazoljuk, hogy a polár-gömbháromszög polár-gömbháromszöge az eredeti gömbháromszög.

2. A két szakasz összege: $a+b$, különbsége $a-b$. Következésképp az adott távolságok összege: $a+b+a-b=2a$. Hasonlóan az adott távolságok különbsége:
- $$a+b-(a-b)=2b.$$
3. Lásd a 2. példában követett gondolatmenetet.
5. $AF = \frac{a+b}{2}.$
6. $F_1F_2 = 11$ cm.
7. 18 cm.
8. Ha A, B és C egymás után következnek, akkor a felezőpontok távolsága 30 m, ha A, B és C között helyezkedik el, akkor 130 m. b) A felezőpontok távolsága $\frac{|b-a|}{2}$, ill. $\frac{a+b}{2}$.
9. $CD = 14$ m.
10. a) 36 m, ill. 54 m. b) 40 m, ill. 50 m. c) 18 m, ill. 72 m. d) 20 m, ill. 70 m.
11. $b \cdot \frac{a}{b+c}$, ill. $c \cdot \frac{b+c}{a}$.
12. 3,5 m.
13. Az osztópont távolsága a végpontoktól 4 m, ill. 1,6 m. A keresett szakasz hossza 1,2 m.
14. $\frac{(a+b)|c-d|}{2(c+d)}.$
15. $AB_1 = 6$ cm.
16. Rajzoljuk fel az A, B, C és D pontokat az összes lehetséges sorrendben, majd minden egyes esetben írjuk fel algebrailag alakban a bizonyítandó összefüggést. Az egyes szakaszokat az irányításnak megfelelően pozitív vagy negatív előjellel lássuk el. Végezzünk felbontásokat. Pl. $AC = AB + BC.$

17. A pontok meghatározta szakaszok közül válasszunk ki háromat, és a többit ezekkel kifejezve, mutassuk ki a két kifejezés azonosan egyenlő voltát.
18. Amnyi egyenest nyerünk, ahányféleképpen négy elemből (pontból) kettőt ki lehet választani. $a) \binom{4}{2} = 6$. $b) \binom{5}{2} = 10$. $c) \binom{212}{2} = 22\ 366$. $d) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. $a)$ Minden pontot három másikkal köthetünk össze, kapnánk $4 \cdot 3 = 12$ egyenest. De akkor minden egyenes kétszer szerepelne. Így a helyes eredmény 6 egyenes. Alkalmában $\frac{n(n-1)}{2}$ egyenest nyerünk.
19. 13.
20. 10.
21. 15.
22. 20.
23. 10.
24. 9.
25. $a) 6, b) \binom{7}{2} = 21$. Lásd a 18. feladatot.
26. 15.
27. 5.
31. Lásd a 2. példában követett gondolatmenetet.
32. Lásd a 3. példában követett gondolatmenetet.
33. 126° , III. 54° . Cél szerű a szögeket $7x$ és $3x$ -szel jelölni.
34. 90° , III. 76° .
36. $\alpha = 144^\circ$, $\beta = 72^\circ$.
37. A szögek nagysága sorra: 30° , 40° , 50° , 60° .
38. A legkisebb szög 24° -os.
39. $a) 97,5^\circ$, $b) 105^\circ$, $c) 127,5^\circ$.
40. Egy óra alatt a kismutató 30° -kal, egy perc alatt $\frac{1}{2}^\circ$ -kal, egy másodperc alatt $\frac{1}{120}^\circ$ -kal fordul el. A nagymutató egy óra alatt 360° -kal, egy perc alatt $\frac{1}{1}^\circ$ -kal, egy másodperc alatt $\frac{1}{10}^\circ$ -kal fordul el. $a)$ 50° , $b) 86^\circ$, $c) 116,5^\circ$, $d) 105\frac{29}{40}^\circ$, $e) \left| b \cdot \frac{2}{11}^\circ - a \cdot 30^\circ \right|$, $f) \left| b \cdot \frac{2}{11}^\circ + c \cdot \frac{120}{11}^\circ - a \cdot 30^\circ \right|$.
41. 30° , 60° , 90° , 120° , ... 360° -os szögeket zárnak be az óramutatók minden egész órákor.
42. $1' = \frac{1^\circ}{60}$, $1'' = \frac{1^\circ}{3600}$, ennek alapján: $a) 21,6^\circ$, $b) 49,15^\circ$, $c) 51,405^\circ$, $d) 17,4625^\circ$.

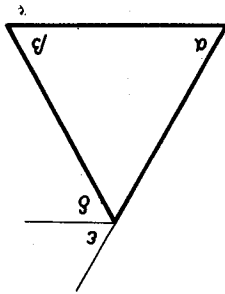
43. a) $108^\circ 30'$, b) $20^\circ 42'$, c) $18^\circ 18'$, d) $59^\circ 42'$, e) $100^\circ 0' 36''$.
 44. $\delta = \varepsilon = \sigma = 32^\circ 42'$; $\beta = 147^\circ 18'$; $\beta = \gamma = \eta = \omega$.
 45. $53^\circ 14'$.
 46. $\alpha = 30^\circ$.
 47. $\alpha = 90^\circ$.
 49. a) 72° , b) 54° , c) $67,5^\circ$.
 50. a) $\alpha = 146,25^\circ$, b) $\alpha = 80^\circ$.
 51. a) 45° , 135° , b) 36° , 144° , c) 30° , 150° .
 52. a) $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 165^\circ$, b) $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$, e) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 140^\circ$.
 53. $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.
 54. a) 135° , 45° , b) 30° , 150° , c) $52,5^\circ$, $127,5^\circ$.
 55. 72° .
 59. $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 155^\circ$.
 62. a) Az A csúsnál levő szög $52^\circ 43'$, b) $37^\circ 23'$, c) $132^\circ 53' 18''$.
 63. A hajó 21° -os szög alatt látszik.
 64. Nyugat-északnyugati irányban halad.
 65. Délkelet felé.
 66. Pozitív irányba 137° -kal vagy negatív irányba 43° -kal.
 69. a) 360° , b) 1080° , c) 1980° , d) $16\ 920^\circ$, e) $(n-2) \cdot 180^\circ$.
 70. A sokszög 11 oldalú.
 71. a) 108° , b) 120° , c) $128 \frac{4}{7}^\circ$, d) 144° , e) $(n-2) \cdot \frac{180^\circ}{n}$.
 74. A 74. ábra ilyen sokszögeket mutat
 75. Ha egy sokszög bármely két oldala merőleges egymásra, akkor a sokszög szögei 90° , ill. 270° -osak. Következésképpen a sokszög oldalain oldalazamu sokszög esetében 90° páratlan többszöröse lenne. Ez lehetetlen, mivel minden sokszögben a szögösszeg $(n-2) \cdot 180^\circ = 2(n-2) \cdot 90^\circ$. Így a sokszög valóban csak páros oldalazamú lehet.
 76. A szögösszeg 720° -kal növekszik.
 77. A sokszög szögösszege $(s+360^\circ)$ -kal nő.
 78. n háromszög keletkezik, ezek szögösszege $n \cdot 180^\circ$. Ezek alapján a sokszög szögösszege $n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$.
 79. a) 360° , b) 360° , c) 360° .
 80. A sokszög 12 oldalú, a külső szög 46° .
 81. a) A sokszög 105 oldalú. b) A külső szögek összege 360° .
 82. A konkáv négyszög is felbontható egyik átlója segítségével két háromszögre, így szögösszege valóban $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.
 83. A sokszög belső szögei egyenek: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Mikor a külső szögek összege $n \cdot 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$.
 84. A külső szögek együttesen 360° -ot adnak.
 85. A belső szögek egyenek: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Felírható a következő összefüggés a külső szögek összege: $n \cdot 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = 360^\circ$, ahonnan $(n-2) \cdot 180^\circ = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.



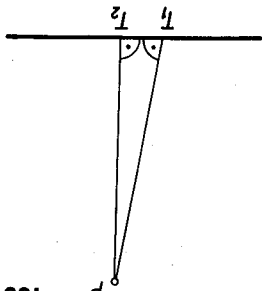
74

87. Mivel a sokszög külsőszög-összege 360° , már az ötszög külső szögei között is biztosan van (két) hegyesszög.
88. Gondolhatunk arra, hogy a háromszög egy csúcsából induló belső és külső szögfelező merőleges egymásra.
89. A 89. ábra jelöléseit használva: $\beta = \delta$ (váltószögek), $\alpha = \varepsilon$ (egyállású szögek). A szögfelezés miatt viszont $\delta = \varepsilon$, tehát $\alpha = \beta$.
91. Az előző példából következik, hogy ilyen háromszög nincs.
94. A sokszög nyolcsoldalú.
95. $50^\circ, 70^\circ, 60^\circ$.
96. $70^\circ, 50^\circ, 60^\circ$.
97. a) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. b) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. c) $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$.
98. $55,25^\circ, 82,35^\circ, 42,24^\circ$.
99. $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ, 180^\circ$.
100. Tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy egy külső pontból (P) egy egyenesre két merőleges állítható, és jelöljük a merőlegesek talppontjait T_1, T_2 -vel. (100. ábra.) Ekkor a létrejött PT_1T_2 háromszög két szöge 90° -os lenne, ami lehetetlen.

89



100



101. $27^\circ, 60^\circ$ és 93° -osak.
102. Jelöljük a külső szöget δ -val. A háromszög kiegészítő szögei ekkor $2\delta, 3\delta$. Alkalmazzuk a külsőszög-tételt.
104. Az alapon fekvő szögek $43,5^\circ$ -osak, a csúcsnál lévő szög 93° .
105. a) $48^\circ, 48^\circ, 84^\circ$; ill. $12^\circ, 84^\circ, 84^\circ$; b) $32^\circ, 32^\circ, 116^\circ$.
106. a) 106° , b) $111,155^\circ$, c) $115,7^\circ$.
107. 135° -os szöget zárnak be.
109. a) m_a és m_b által bezárt szög $82,5^\circ$.
 m_b és m_c által bezárt szög $22,5^\circ$.
 m_c és m_a által bezárt szög 75° .
- b) m_a és m_b által bezárt szög 45° .
 m_b és m_c által bezárt szög 30° .
 m_c és m_a által bezárt szög 75° .
- c) m_a és m_b által bezárt szög 60° .
 m_b és m_c által bezárt szög 75° .
 m_c és m_a által bezárt szög 75° .
110. a) $60^\circ 26'$; b) $59^\circ 8'$.
 m_b és m_c által bezárt szög 75° .
 m_c és m_a által bezárt szög 15° .
111. $82^\circ 59'$.
112. 168° .
113. 83° -os szöget.

114. a) 15° -os, b) 60° -os szöget.

115. 77° , 77° , 26° .

116. 27° -os és 63° -os szögekre.

119. A szögek felezői $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ szöget alkotnak. b) A külső szögek felezői

$180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$ nagyságú szöget alkotnak. c) A magasságvonalak $\alpha + \beta$

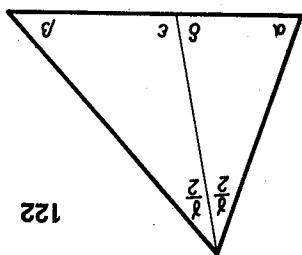
nagyságú szöget alkotnak.

120. $\frac{\alpha + \beta}{2}$, $\frac{\beta + \gamma}{2}$ és $\frac{\gamma + \alpha}{2}$.

121. a) 17° , b) $|\frac{\alpha - \beta}{2}|$.

122. A külsőszög-tétel alapján (122. ábra):

$$\delta = \beta + \frac{\gamma}{2}, \quad \varepsilon = \alpha + \frac{\gamma}{2}, \quad |\delta - \varepsilon| = |\alpha - \beta|.$$



123. A feltételnek csak egyenlő szárú derékszögű háromszög tesz eleget.

124. A keletkezett háromszögek szögei: 36° , 72° , 72° és 108° , 36° , 36° .

126. A β szög 75° -os.

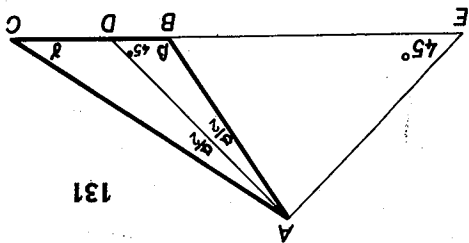
127. a) A törött vonal már nem folytatható tovább az ábrán látható módon, mert a következő egyenlő szárú háromszög alapján levő szögére 90° adódik, ami lehetetlen. b) Egy a kívánt módon elhelyezett szakasz hajlásszöge az elhagyott szögszárral a szakasz és az α csúcsa meghatározta háromszög külső szöge. Így a 2., 3., ..., 9. szakaszánál rendre 2α , 3α , ..., 9α adódik. Ha 9α kisebb 90° -nál, akkor a 10. szakasz is elhelyezhető; ha $9\alpha \equiv 90^\circ$, akkor viszont nem. Tehát a feladat akkor és csak akkor oldható meg, ha $\alpha < 10^\circ$.

129. Az ADC és a BCE egyenlő szárú háromszögek alapján levő szögek $67,5^\circ$ -osak. Így a CED háromszög E -nél és D -nél levő szögei is $67,5^\circ$ -osak, következésképpen a háromszög egyenlő szárú. A háromszögben $C \angle = 45^\circ$.

130. A DBE háromszög szögeinek nagysága $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

131. a) Tegyük fel, hogy H a B -nek C -vel ellentétes oldalára esik (131. ábra). Ekkor α és γ között $\alpha + 2\gamma = 90^\circ$ az összefüggés, ebből és a szögeösszege vonatközö tételből a másik két szög között $\beta = 90^\circ + \gamma$ összefüggést nyerjük.

133. a) Az $EAF \angle = \frac{\beta + \gamma}{2}$.



150. A 150. ábrán egyformán jelölt szögek egyenlőségéből következik az állítás.

$$149. \frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} + \gamma.$$

148. Mindkét körben a centrális és a párhuzamos sugarak által bezárt középponti szögek egyenlők (148. ábra). Következésképp a párhuzamos sugarak végpontjait az érintési ponttal összekötve, egyenlő szárú háromszögeket nyerünk, melyeknek megfelelő szögei egyenlők. Ebből az állítás már közvetlenül következik.

szög és vele együtt α szerkeszthető lenne, akkor $\frac{3}{\delta}$ -at is meg tudnánk szerkeszteni.

147. Tegyük fel, hogy a szögfelező a szemközti szárral δ szöget zár be. Ezen az alapon fekvő szög α , a csúcsnál fekvő ekkor $180^\circ - 2\alpha$. A külsőszögfelező miatt $\delta = 180^\circ - 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$, ebből $\frac{3}{\delta} = 60^\circ - \frac{\alpha}{2}$, tehát ha a három-

146. A 146. (15. old.) ábrán vastagon jelölt szakaszok által meghatározott háromszög egyenlő szárú, mert két szöge egyenlő.

145. Kéressünk egyenlő szárú háromszögeket. négyzet átlójának és oldalának különbsége. re —, és egyenlő hosszúságúak. b) A kis négyzet oldala akkora, mint az eredeti huzamosak az eredeti négyzet oldalával — így derékszöget fognak köz-

143. A szerkesztésből következik, hogy a keletkezett négyyszög oldalai párhuzamosak az eredeti négyzet oldalával — így derékszöget fognak köz-

142. Gondoljunk arra, hogy a lementezett háromszögek éppen egy szabályos háromszög „felezésével” állíthatók elő. (Vö. a 140. feladattal.)

A 140. feladat alapján az állítás helyessége világos.

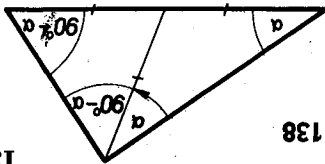
141. A 138. feladat alapján az átfogóhoz tartozó magasság és súlyvonal egy 30° -os derékszögű háromszög két oldala. tozó magasság és súlyvonal egy 30° -os derékszögű háromszög két oldala.

138. A derékszög csúcsán át húzzunk az α mel-

137. A jelölt szögek egyenlőségét felhasználva adódik, hogy bármelyik derékszög a vele szemközti háromszögcsúcsnál levő szög kétszeresével egyenlő.

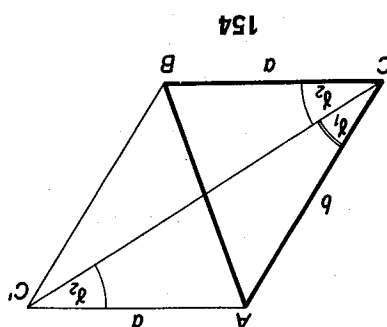
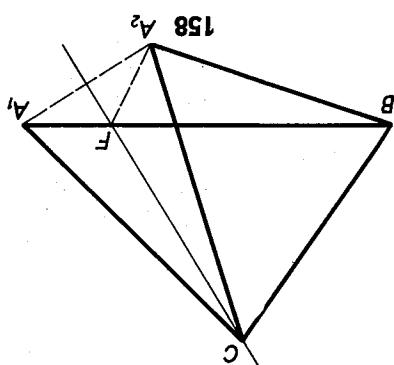
136. Hosszabbítsuk meg az egyik berajzolt szakaszt a szemközti oldallal való metszéspontjáig.

135. Jelöljük az AC oldal meghosszabbításán a kívánt módon szerkesztett csúcsnál levő szögei egyenlők, és a külsőszög-tétel értelmében meg-

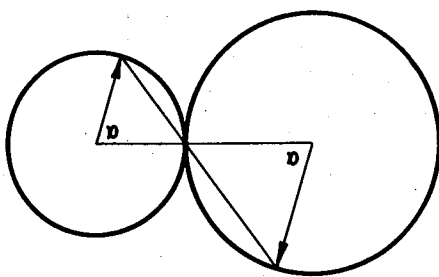
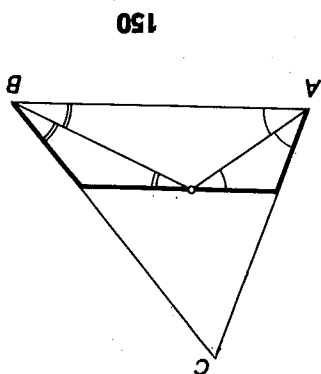


következik.

157. Lásd az előző feladat megoldásánál követett gondolatmenetet.
158. Legyen két háromszög A_1BC és A_2BC (a két háromszöget mindjárt egy-
másra helyeztük úgy, hogy egyik egyenlő oldalparjút egybeesessék, és a
nagyobbik közérfogott szög lefedje a kisebbik szögön kívül halad, és az
 A_1B -t F -ben metszi. $FA_1 = FA_2$, mivel az A_1CA_2 háromszög egyenlő
szárú. A BA_2F háromszögben $BA_2 < BF + FA_2 = BF + FA_1 = BA_1$.
Tehát $BA_2 < BA_1$ (158. ábra).



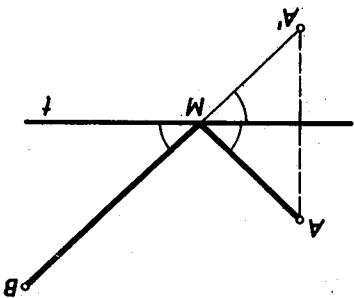
156. Kössük össze az alap egy pontját a szemközti csúccsal, így két olyan
háromszöget kapunk, amelyek közül az egyikben az eredeti háromszög
szárával szemben tompaszög vagy derékszög fekszik, tehát a szár nagyobb
az összekötő szakasszal.



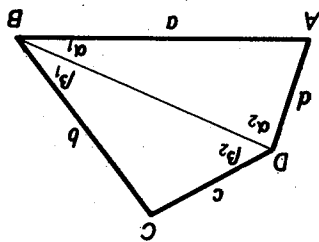
154. A feladat állítása következik abból, hogy a háromszög bármelyik súly-
vonala a vele közös csúcshoz tartó oldalak közül a nagyobbikkal zár be
kisebbszöget. Ez utóbbi állításunkat a következő módon láthatjuk be:
Legyen az ABC háromszögben $a < b$. Az ABC háromszöget tükrözzük
az AB felezési pontjára. Az ACC' háromszögben $a < b$ miatt $\gamma_1 < \gamma_2$
(154. ábra).

172. Merte a BP egyenes az AC oldalt D -ben. A háromszög-egyenlőtlenség is, mert az a 157. feladat szerint kisebb a szabályos háromszög oldalánál. Összekötő háromszögoldalánál és így a harmadik P -ből induló szakaszánál AP -ből, vagy AC -nél kisebb, amiből az állítás már következik.
171. A P -ből induló bármely két szakasz összege nagyobb a másik végüket AA' -nél, vagy AC -nél kisebb, amiből az állítás már következik.
170. Legyen a két pont X és Y (170. ábra). Ha az XY átmegy az egyik csúcson, akkor az állítás a 157. feladat értelmében nyilvánvaló. Ha nem megy át egyik csúcson sem, akkor pl. a BC oldalt az A' belső pontban metszi. Az AA' ugyancsak a 157. feladat értelmében kisebb valamelyik háromszög oldalánál. Az $AA'C$ háromszögben az idézett feladat szerint XY vagy AC -nél, vagy AA' -nél kisebb, amiből az állítás már következik.
169. Mivel $a < b + c$, ezért $2a < a + b + c$, és $a < s$. A kerület jele $2s$ szög-egyenlőtlenségek.
168. Legyen $a \equiv b \equiv c$, azaz $a \equiv b$, $a \equiv c$. E két egyenlőtlenség összege $2a \equiv b + c$. Ez éppen azt jelenti, hogy a $2a$, b , c szakaszok nem tesznek eleget a háromszög-egyenlőtlenségnek.
167. Az alap hossza a , a száraké b . A két kerületrés $a + \frac{2}{b}$ és $\frac{3b}{2}$. A feladat szerint ezek mindegyike lehet 15 cm, ill. 6 cm. Az eredmények vizsgálata-ból kiderül, hogy csak az $a = 1$, $b = 10$ megoldás.

166. 6 cm.
165. 2 m.
164. Azt kell megvizsgálunk, hogy az adott oldalhosszak eleget tesznek-e a háromszög-egyenlőtlenségeknek.
163. Húzzunk a ponton át párhuzamost a háromszög egyik oldalával. A feladatot ezzel az előzőre vezettük vissza.
162. Húzzunk az alap P pontjából a szárakkal párhuzamosokat (162. ábra). Ezek az ABC háromszögből az APB és BPD egyenlő szárú háromszögeket vágják le. A szögek távolosok e kis háromszögek magasságai. Az ábráról leolvasható, hogy ezek összege az ABC háromszög AC oldalához tartozó magasságával egyenlő.



161



159

159. Az ABD háromszögben $\alpha_1 < \alpha_2$, a BCD háromszögben $\beta_2 < \beta_1$ (159. ábra), mivel a feltétel szerint kisebb oldalal szemben fekszenek. Így $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_2 + \beta_2$.
161. Tükrözzük az A pontot a tükröt jelképező t egyenesre (161. ábra). Kössük össze A' -t B -vel, ez t -t M -ben metszi. A tükrözés miatt AM ugyanakkora szöget zár be t -vel, mint BM , tehát AMB itt eleget tesz a feltételnek.

x és n . f -gitól z és n . Igaz, hogy $x + y \equiv e$ és $z + u \equiv f$; egyenlőség akkor áll fenn, ha a pont az átlón van, így $x + y +$

182. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlensé-
get.

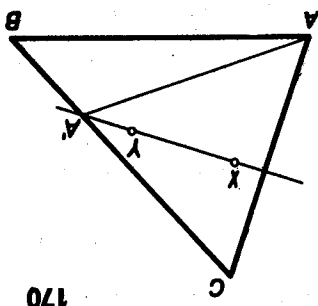
ezért $AB + AC = BC$, ez viszont nyilván
 rövidebb, mint az $A_1B + A_1C = A_1B' + A_1C'$

180. A B pontnak a szögfelezőre vonatkozó B' szögekre (S a súlypont).

178. Egyrészt $s_a + \frac{a}{2} > b$, másrészt a $2s_a > b + c$ (l. az előző feladatot) típusú

176. A BD szakasz két háromszögre vágja ABC -t. Írjuk fel mindkettőre a háromszög-egyenlőtlenséget.

174. A magasság rövidebb, vagy legfeljebb ugyanakkora, mint a vele közös


$$AB + AD > BD, \quad PD + DC > PC,$$

és egy belső pontját alkotják. Az első esetben a négy pont konvex négy- szöget határoz meg, ennek viszont nem lehet minden szöge hegyesszög, mert a négy szög összege ekkor kisebb lenne 360° -nál. A második esetben a belső D pontnál fellelő szögek mindegyike ugyancsak nem lehet hegyesszög.

188. Pl. a 188. ábrán.

189. Legyen PQ felezőpontja F (189. ábra). A 177. feladat eredményét fel-

$$\text{használva, } AF < \frac{AP + AQ}{2}; \quad BF < \frac{BP + BQ}{2}.$$

E két egyenlőtlenség összege:

$$AF + BF < AP + BP.$$

213. Azok a körvonalak, amelyek átmennek az A és B pontokon, és sugaruk

az adott sugárral egyenlő (213. ábra). (Az A és B pontok kivételével.)

228. A pontok szögfelezők metszéspontjaiként szerkeszthetők.

229. A pontok egy körvonalon vannak.

243. Szerkesztük meg először a magasság és a szögfelező közrezárt derékszögű

háromszöget.

261. Vázoljuk fel a megoldást. Végezzünk olyan átalakítást, amely behozza

az adott összeget: az egyik befogót a hegyesszögű csúcs körül forgassuk

rá az átfogó meghosszabbítására (261. ábra). Az ADC háromszög szer-

keszthető, ebből a keresett háromszög már könnyen előállítható.

262. Képzeliük el, hogy az előző feladat megoldásának ábráján a befogót az

átfogó A -n túli meghosszabbítására is felmérjük.

263. Lásd a 261. feladat megoldását.

265. Lásd a 262. feladatot.

266. Adott $b + c$, α és m_c . Hosszabbítsuk meg a c oldalt az A csúcson túl b -vel.

A DBC háromszöget meg tudjuk szerkeszteni, mert adott a $DB =$

$$= b + c \text{ oldala, } \frac{\alpha}{2} \text{ szöge és } m_c \text{ magassága (266. ábra).}$$

267. Lásd az előző feladatot.

268. A feladatok megoldása az előző feladatcsoporthoz hasonlóan azon alap-

szik, hogy a kívánt oldalösszeget az elképzelt megoldásba berajzolva,

egyenlő szárú háromszögeket nyerünk, és az ezekkel kiegészített három-

szöget szerkesztjük meg. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha a szakaszok

különbségét ismerjük.

273. A feladat lényegében derékszögű háromszög szerkesztése az egyik befogó

és az átfogó összegeiből és a szögekiből (60° , illetve 30°).

274. A feladat derékszögű háromszög szerkesztése, ha adott az egyik befogó

és a másik két oldal összege.

275. Az a oldalhoz tartozó magasság a háromszögből olyan derékszögű

háromszöget metsz le, amelynek ismerjük γ hegyesszögét, továbbá az

átfogónak és a γ -val szemközti befogónak az összegét. Ennek a három-

szögnek a szerkesztésével kezdjük a megoldást.

278. Először a szögeket számítsuk ki. Lásd a 140. feladatot.

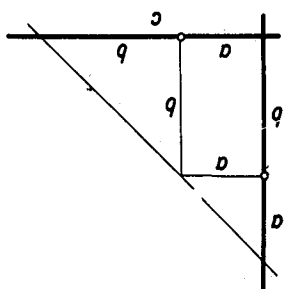
280. Húzzunk a szög szárával egy e párhuzamost, amely a szártól az adott

szakasszal egyenlő távolságra halad (280. ábra). Az e és b szögeknek

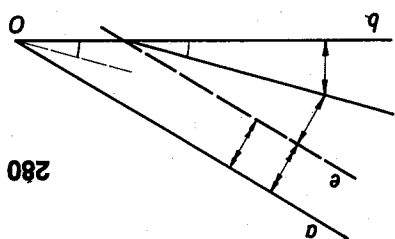
felezőjén bármely pont a -tól és b -től mért távolságainak különbsége

éppen az adott szakasszal egyenlő.

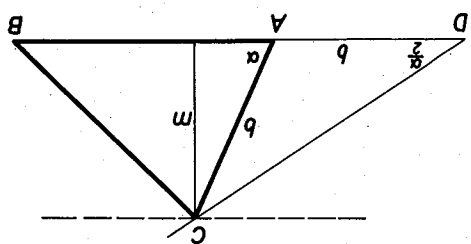
281. Mériük rá a derékszög mindkét szárát a csücsből kiindulva a távolság-összege egyenlő c szakaszt. Ezek végpontjait összekötve, egyenlő szárú derékszögű háromszöget kapunk. Az átfogó minden pontjának a két derékszögű távolságösszege éppen a befogóval egyenlő (281. ábra).
 282. A négyzet egyik csücsét a derékszög felezője metszi ki az átfogóból. Az átfogón olyan pontot keresünk, amelynek a befogóktól mért távolság-összege az adott terület fele. (L. a 281. feladatot.)



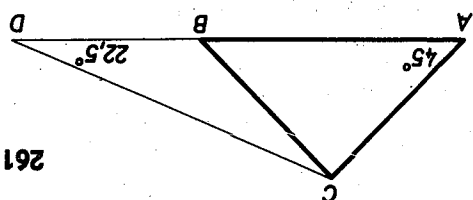
281



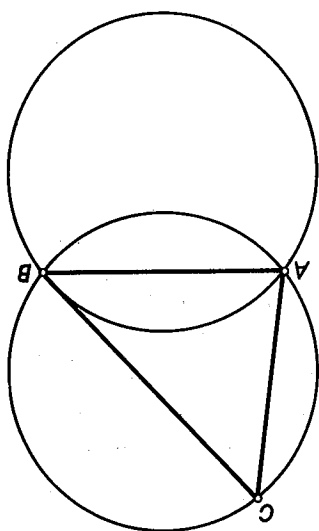
280



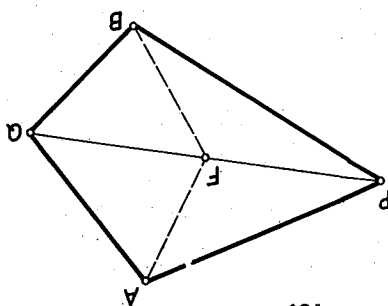
266



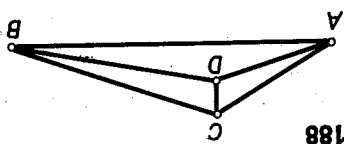
261



213



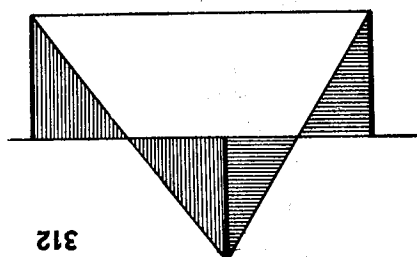
189



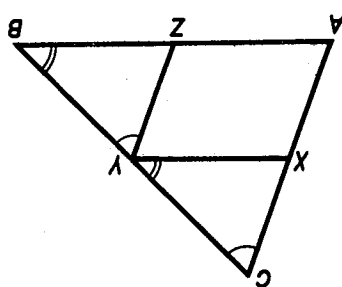
188

284. Az előző feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazhatjuk (284. ábra).
285. A kerület annál nagyobb, minél hosszabb az előző feladat megoldásához használt egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója. Megoldás még akkor van, ha az átfogó érinti a kört; az érintési ponthoz viszont beírt téglalapként négyzetet tartozik (284. ábra).
287. Minden egyes feladat megoldásához készítsünk ábrát. A nevezetes vonalak meghúzásával részháromszögeket nyerünk, amelyek egybevágóságra közvontelenül belátható a háromszögek egybevágósági alapeseteinek alkal-mazásával.
292. Az állítás hamis voltát legkönnyebben konkrét ellenpélda bemutatásával láthatjuk be. Legyen pl. az adott szakasz a , az adott két szög egyike derékszög, másik hegyesszög. Szerkesszünk két háromszöget. Az első esetben az adott szögeket az a szakasz végpontjaiban mérjük fel, a második esetben helyezzük el a derékszög az adott szakasszal szemben. Nyilvánvaló, hogy a két háromszög nem egybevágó. Gondoljunk meg, lenyegese-e, hogy az adott szögek egyike derékszög legyen?
297. Húzzuk meg a kérdéses négyyszögek egyik átlóját. Ez a négyyszögeket két-két háromszögre bontja (297. ábra). A „felső” (I és I') háromszögek egybe-vágók, mivel – a feltevés értelmében – megegyeznek két oldalban és az átlaluk közbezárt szögben. Eből következik a harmadik megfelelő oldal és a vitorlásszögek egyenlősége. Az eredeti négyyszög másik szögének egyenlőségéből következik, hogy a kétíves szögek is egyenlők. De ekkor az „alsó” (II és II') háromszögek is egybevágók, ismét két oldal és a közbezárt szög egyenlősége miatt.
298. Ábrán a két négyyszög nem egybevágó.
300. Minden esetben a szártárhoz tartozó nevezetes vonalak és az alap által meghatározott részháromszögek egybevágóságából következik az állítás.
303. a) Legyen az ABC háromszögben $AX = XC$ és $XY \parallel AB$. Az X ponton át az AC oldallal húzott párhuzamos az AB oldalt Z pontban metszi. A párhuzamosságból következik az ábrán egyformán jelölt szögek egyen-lősége, továbbá az, hogy $XZ = XA = CX$. Következésképp CXY háromszög egybevágó az YZB háromszöggel, tehát $XY = ZB$. A párhuzamos-ság miatt $XY = AZ$, és így a Z az AB szakaszt felezi. Mivel $ZB = \frac{AB}{2} = XY$, $XY = \frac{AB}{2}$ (303. ábra).
- b) Az előzőkből következik, hogy a felezőpontokat összekötő egyenesnek egybe kell esnie az egyik felezőponton át az alappal párhuzamosan húzott egyenessel.
304. A 303. feladatból következik, hogy F_1F_2 egyenlő és párhuzamos S_1S_2 -vel, és így a 304. ábrán egyformán jelölt szögek is egyenlők, tehát SF_1F_2 háromszög egybevágó az S_1S_2 háromszöggel.
305. Az előző feladatból következik, hogy SF_1S_2 háromszög egybevágó az SF_2S_1 háromszöggel.
306. A feltételekből és abból, hogy a súlyvonalak 2:1 arányban osztják egy-mást, következik, hogy az ABS háromszög és az F_2F_1S háromszög egyenlő szárú (304. ábra), továbbá az ASF_1 háromszög egybevágó a BSF_2 háromszöggel. A megfelelő szögek egyenlősége és az ABS háromszög egyenlő szárú volta miatt a $BAC \angle = ABC \angle$. Így az ABC háromszög valóban egyenlő szárú.

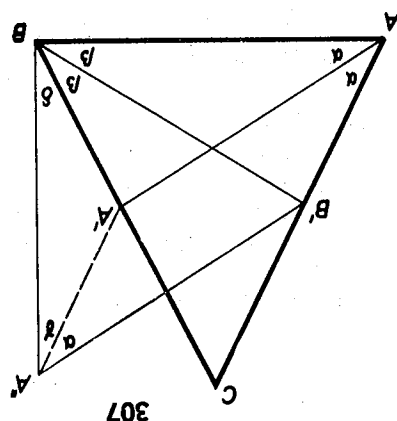
307. Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy a háromszög nem egyenlő szárú, hanem pl. $\alpha < \beta$ (307. ábra). Tojjuk el az AA' szögfelezőt a $B'A''$ helyzetbe, az így kapott $BB'A''$ háromszög egyenlő szárú. Mivel $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, ezért $\gamma > \delta$, és így az $A'A''B$ háromszögből $A'B > A'A'' = AB'$. Ez azonban lehetetlen, mert az ABB' és BAA' háromszögek két oldalban megegyeznek, és így a harmadik oldal abban nagyobb, amelyben a közbezárt szög is nagyobb. Az állítások következnek a 306. és 307., illetve 302. feladatokból. 312. A 312. ábrán egyformán vonalkázott derékszögű háromszögek egybe-
vágók.



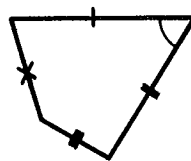
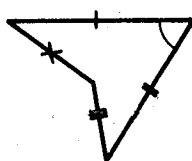
312



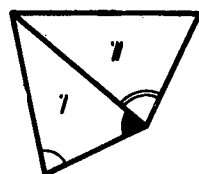
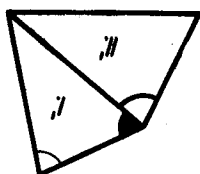
304



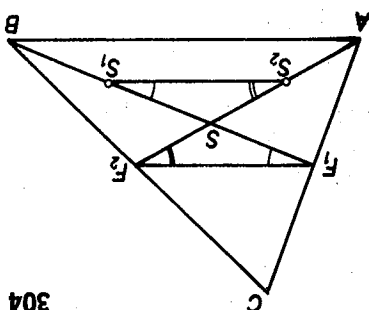
307



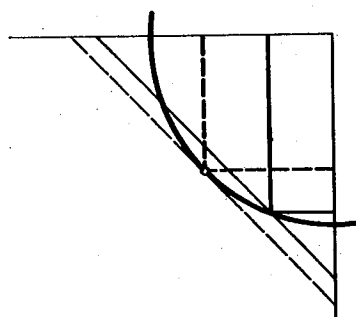
298



297

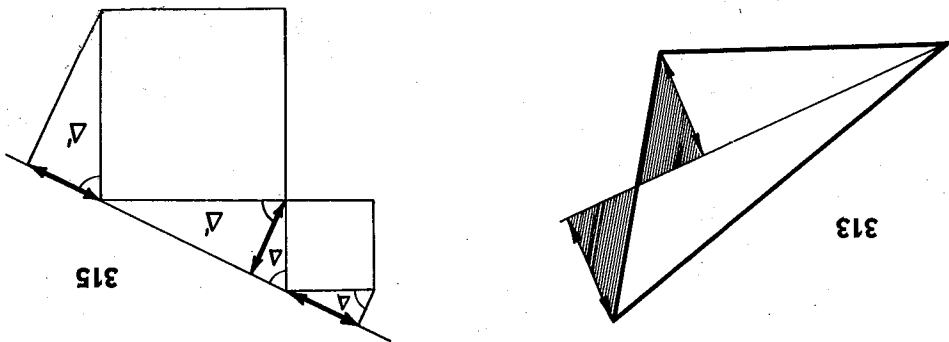


304

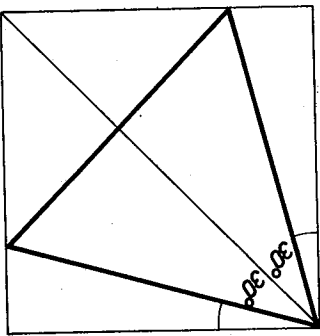
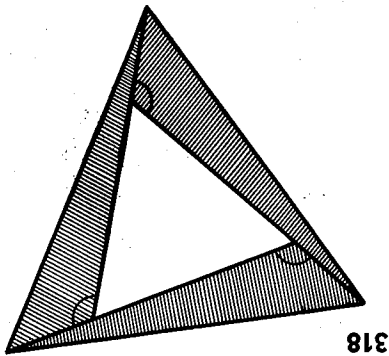


284

313. Bocsszünk a súlyvonalra merőlegeseket a csúcsokból (313. ábra). A vonalak között derékszögű háromszögek egybevágók.
315. Húzzuk meg a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságvonalat (315. ábra). Ez az eredeti háromszöget két részháromszögre

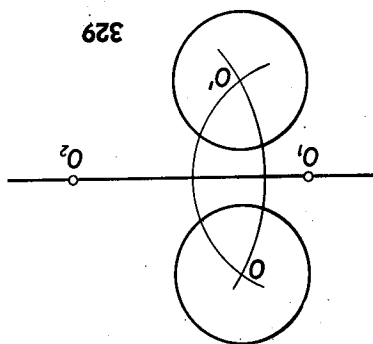


bontja. Az ábrán egyformán jelölt szögek egyenlőségből (merőleges szaru szögek) következik, hogy az egyformán jelölt háromszögek egybevágók.
318. A 318. ábrán vonalkázott háromszögek egybevágók.
321. b) Az egybevágóságból következik az egyenlő oldalak által közbezárt – egyformán jelölt – szögek egyenlő, így a közös csúcshoz induló négyzetálló a négyzet szögével együtt az egyenlő oldalú háromszög itt levő 60° -os szögét is megfelelt (321. ábra).

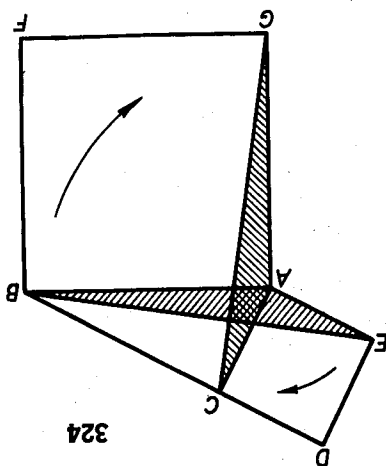


324. Mindkét szakasz egy-egy tompaszögű háromszög hosszabb oldala (324. ábra). A tompaszögeket közrefogó oldalak a befogó fölé emelt, ill. az átfogóra emelt négyzetek az oldalak, tehát egyenlők. A szomszédos négyzetek oldalai pedig 90° -os szöget alkotnak, tehát az egyik háromszöget a két háromszög közös csúcsa körüli 90° -os forgással ráforgathatjuk a másik háromszögre, így valóban egybevágók. (A négyzetek oldalai által közbezárt szögek egyenlősége másként is belátható, ti. mindkét szög derékszögből és az eredeti háromszög ugyanazon szögéből tevődik össze.)
326. A kérdéses szakaszok egyenlősége következik abból, hogy a 326. ábrán a szaggatott szakaszok és egy-egy szar egybevágó háromszögeket határoznak meg.

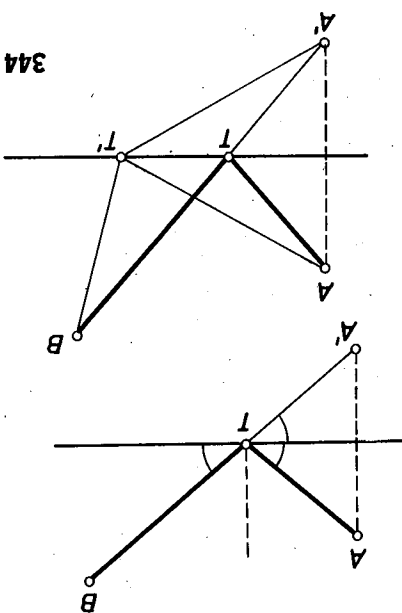
327. A kérdéses pontok mértani helye az eredeti körrel koncentrikus kör.
 329. A kör középpontjának tükröképét a 329. ábrán látható módon szerkeszt-
 hetjük meg az O_1 és O_2 középpontú körök segítségével.
 340. Sík, felsík, két párhuzamos egyenes által határolt sáv, párhuzamos
 egyenesnyaláb (sugársor), kör stb.
 341. Gondoljunk arra, hogy e -nek a -val, ill. b -vel alkotott metszéspontjai
 tükrösek b -re.
 342. A szerkesztés visszavezethető az előző feladatra.
 343. Ha az A és B pontok a t különböző oldalain helyezkednek el, akkor AB
 t -vel alkotott metszéspontja T . Ha az A és B pontok a t egy oldalán
 vannak, akkor A -t tükrözzük b -re, a tükröképet jelöljük A' -vel, $A'B$
 egyenes t -vel alkotott metszéspontja T (343. ábra).
 344. A feladat megoldását a 343. feladat megoldása adja. U.i. legyen T' a t
 egyenes egy tetszőleges, T -től különböző pontja (344. ábra). Ekkor
 $T'A + T'B = T'A' + T'B = A'B = AT + TB$.
 345. Lásd a 343., ill. a 344. feladat megoldását.
 346. Tükrözzük a háromszöget és az egyik merőleges szakaszt a háromszög
 alapegyenesére.



329

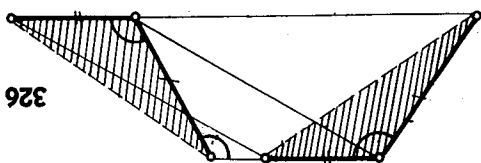


324



343

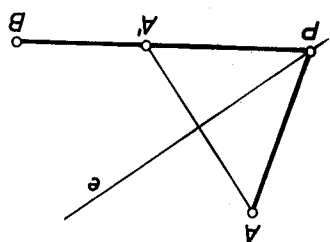
344



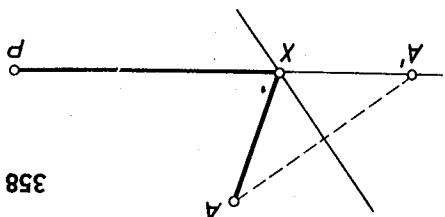
326

347. Az adott ponton át húzzunk párhuzamost a háromszög egyik oldalával, ezzel a feladatot az előzőre vezettük vissza.
348. Tegyük fel, hogy P az ABC háromszög AB oldalának keresett pontja. Állítsunk ebből merőlegest a C csúshoz tartozó szögfelezőre, ez a CA , CB szakrész egyeneséből származó háromszöget metsz le. A 346. feladat alapján tudjuk, hogy a távollátósság összeg ennek a háromszögnek a szakrészéhez tartozó magassága.
349. Állítsunk a szövegben forgó szakaszok csúcsebbi végpontjaiban a szakaszokra szögekhez tartozó magasságát.
349. Állítsunk a szövegben forgó szakaszok csúcsebbi végpontjaiban a szakaszokra szögekhez tartozó magasságát.
349. Állítsunk a szövegben forgó szakaszok csúcsebbi végpontjaiban a szakaszokra szögekhez tartozó magasságát.
350. A 344. feladat megoldásánál követett gondolatmenetet felhasználva, a szerkesztés az ábráról leolvasható (350. ábra).
- 351–352. A feladat lényegében azonos az előzővel.
353. A háromszög alapjainak bármely P pontjához tartozik egy egyenlő szárú háromszög ($P'P''C$ háromszög), melynek szára a P pontnak a szemközti csústól való távollátósságával egyenlő ($P'C = PC = P''C$ a tükrözés miatt), a szakrész szöge pedig kétszerese a háromszög C szögének (353. ábra). A beírt háromszög kerülete éppen megegyezik ezen egyenlő szárú háromszög alapjával, $P'P''$ -vel. Tehát a beírt háromszög kerülete akkor a legkisebb, ha $P'P''$ a legrovidebb. Mivel a $P'P''C$ háromszög C csúcsánál levő szöge állandó, ezért az alap különböző pontjaihoz – a közölt mód – tartozó egyenlő szárú háromszögek közül annak kisebb az alapja, amelyiknek a szára is rövidebb, azaz amelyre a PC szakasz kisebb.
354. Az előző feladat megoldásánál követett gondolatmenetből következik, hogy a beírt háromszög kerülete akkor a legkisebb, ha az alapon levő P pont a szemközti csúshoz tartozó magasságvonal talpontiába esik (354. ábra).
355. A feladatot a 350. feladat gondolatmenetével oldható meg.
356. Tegyük fel, hogy a két adott pont az egyenes egy oldalán helyezkedik el. Ez esetben az AB egyenes metszi ki az adott egyenesből azt a P pontot, melyre $|PB - PA|$ a lehető legnagyobb. Ha a két adott pont az egyenes különböző két oldalán helyezkedik el, akkor A -t tükrözzük az egyenesre, és a tükröképét jelöljük A' -vel (356. ábra). Mivel $PA = PA'$, ezért az AB egyenes metszi ki az egyenesből P -t. Természetesen, ha $A'B$ párhuzamos az adott egyenessel, akkor a feladatoknak nincs megoldása.
357. A 344. feladatot használhatjuk fel.
358. Tegyük fel, hogy a feladatot megoldottuk (358. ábra). Mivel AX fel az AX szakaszt X -ből kiindulva, az egyenes P -vel ellentétes oldalára. Ennek végpontja A' és PA' az adott szakasszal egyenlő. Mivel $AX = XA'$, az X pontot AA' felező merőlegese metszi ki az adott egyenesből.
359. Lásd az előző feladat megoldásának gondolatmenetét.
360. Tegyük fel, hogy a feladatot megoldottuk, és jelöljük a b -re bocsátott merőleges talpontiát T -vel. Az AXT háromszög egyenlő szárú, így az A pontot az AXT felezőjére tükrözve, éppen a T pontot nyerjük. Gondoljuk meg, hogy az AXT háromszög szögei ismeretek.
361. Ha B -t az AX egyenesre tükrözzük, e B' tükrökép az adott egyenesen van, továbbá $AB = AB'$.

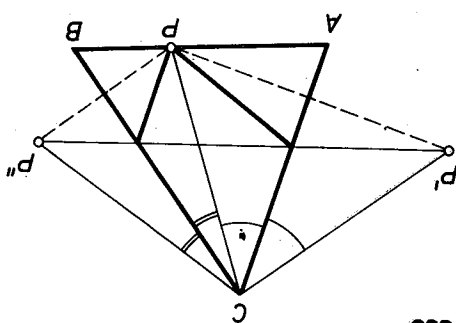
365. A mértani hely kör.
 368. Használjuk fel az előző feladat megállapítását.
 370. Először olyan háromszög megszerkesztésére törekedjünk, amelynek oldalai párhuzamosak a szerkesztendő háromszög oldalaival.
 372. A szerkesztéshez felhasználható az előző feladat eredménye.
 373. A külső szögekre vonatkozó tétellel könnyen igazolhatjuk, hogy annak a két szögnek a különbsége, amelyet a szögfelező a szemközti oldalra egyenesel bezár, a másik két szög különbségével egyenlő. Ennek birtokában feladatunkat az előzőre vezethetjük vissza.



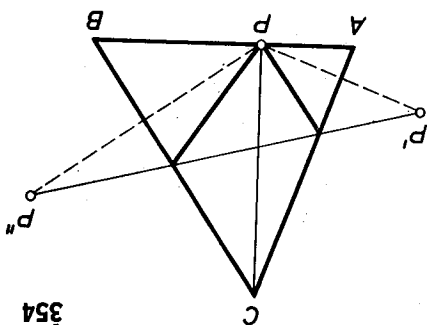
356



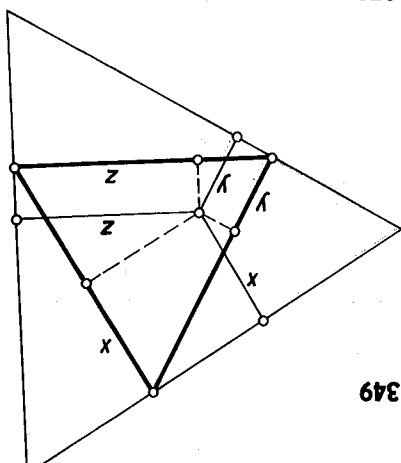
358



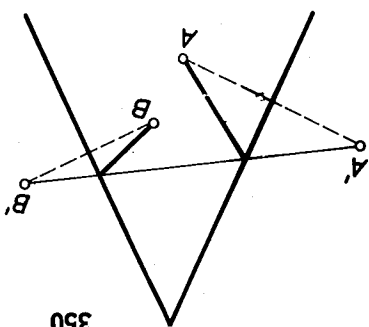
353



354



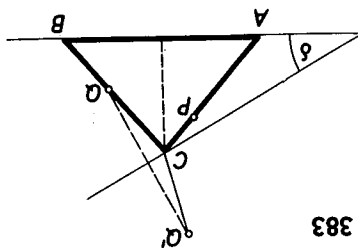
349



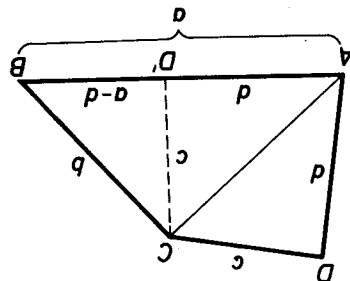
350

374. Tekintsük a feladatot megoldótnak. Tükrözzük az ABC háromszöget a BC oldal felező merőlegeseire. A tükröképe A' . Az így létrejött $A'A'C'$ háromszög szerkesztésére törekedjünk.
375. Tükrözzük az ABC háromszög B csúcsát az adott AB oldalal párhuzamos és a C csúcson átmenő egyenesre (375. ábra). Az $\angle ACB = \gamma + 2\beta = 180^\circ - \alpha - \beta + 2\beta = 180^\circ - (\alpha - \beta)$. Ez a szög tehát az adatokból meg-szerkeszthető, így a C csúcsot az AB fölé szerkesztett $180^\circ - (\alpha - \beta)$ látó-szögű kör metszi ki az AB -vel párhuzamos egyenesből.
377. Az átló felezi az A -nál fekvő szöget. Tegyük fel, hogy $a > d$, tükrözzük a $D'BC$ háromszög szerkesztésével kezdhettük a feladat megoldását.
379. A tükröképek a csúccsal szemközti oldalon sorakoznak.
380. Következik az előző feladat megoldásából.
381. Alítsunk merőlegest az adott P pontból a hozzá tartozó f_1 merőlegesre, ez lesz a háromszög egyik oldallegyenese.
382. Tükrözzük az egyik kört az adott egyenesre, és szerkesszük meg a helyben maradt és a tükröképként kapott kör közös érintőt.
383. Legyen a δ szög szárjai közé szerkesztett ABC háromszög keresett csúcsa C , a két adott pont P és Q , Q -nak a C -t tartalmazó szírra vonatkozó tükröképe Q' (383. ábra). Egyszerű számmolással adódik, hogy $\angle Q'CP = 180^\circ - 2\delta$, tehát szerkeszthető. A keresett C csúcsot a PQ fölé szer-kesztett $180^\circ - 2\delta$ látószögű kör metszi ki a szögszárból.
384. Mériük rá az AD -t a BC oldal C -n túli meghosszabbítására, és tükrözzük az A -t a CD oldalra (384. ábra). Az így kapott B_1 , ill. A' pontok a C és D pontokkal együtt paralelogrammát alkotnak, mert $A'D = AD = CB_1$, és $A'D$ párhuzamos CB_1 -gyel. Mivel A -nak a CD egyenesről mért távol-sága ismert, az $A'B_1$ derékszögű háromszög szerkeszthető, az AB és BB_1 szakaszok ismeretében pedig B is kitérhető.
385. Tegyük fel először, hogy van két szimmetriatengely, t_1 és t_2 , amelyek nem metszik egymást a sokszögön belül (385. ábra). Ez viszont lehetetlen, mert a tengelyek mindenképp két egyenlő területű részre vágja a sok-szöget. Tengelyek tehát csak belső pontban metszhetik egymást. Legyen most t_1, t_2, t_3 három olyan tengely, amelyek nem metszik egymást egy pontban, hanem az ABC háromszöget alkotják. Az előzőek szerint A, B, C belső pontok, így az ABC háromszögnek van a sokszöghez tartozó P belső pontja. Legyen D a sokszögnek a P -től legtávolabbi (vagy a legtávolabbiak közül az egyik) csúcsa. P és D az egyik tengelynek ugyanazon oldalon fekszenek (ábránkon t_2 -nek). Legyen D_1 a D -nek a t_2 tengelyre vonatkozó tükröképe. Nyilvánvaló, hogy $PD < PD_1$, ez azonban ellentmondás a D választása miatt.
386. A bizonyításnál felhasználhatjuk azt az elemi ténnyt, hogy ha (a, b) és (a', b') úgy alkotnak egyenlő szögeket, hogy a párhuzamos a' -vel, és b párhuzamos b' -vel, és egyik szögfelezőjük közös, akkor a szögfelező egyenesével párhuzamos egyenesből a, b és a', b' egyenlő szakaszokat metszenek ki (386. ábra).
- Legyenek mármost az osztópontok (ábránkon hét részre osztottuk a félkört) $A_0, A_1, \dots, A_7$. Kössük össze az első csoport minden pontját a vesszős csoport nála 1-gyel kisebb és 1-gyel nagyobb indexű elemével. Így a pár-

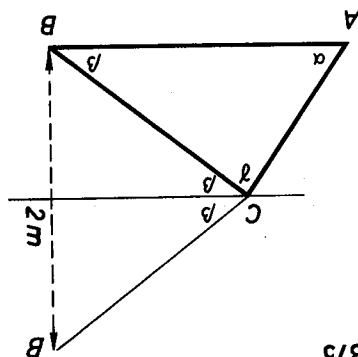
huzamos egyenesek két seregét kapjuk: $A_0A_1 \parallel A_1A_2 \parallel A_2A_3 \parallel \dots$ és $A_0A'_1 \parallel A_1A'_2 \parallel A_2A'_3 \parallel \dots$, mivel a közrezárt ívek rendre egyenlők. A szimmetria miatt az A_iA_{i+1} egyenesek a tengelyen metszik egymást, és párhuzamosak a két középső osztóponttal tartozó sugarak egyikével. A bizonyítás további menete a bevezetőben közölt megjegyzés alapján az ábráról leolvasható.



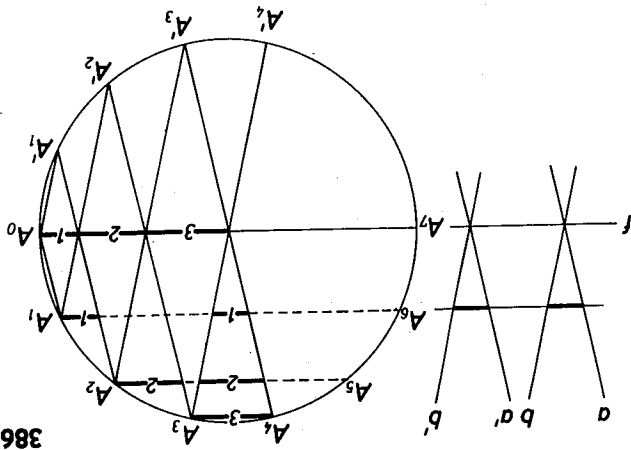
383



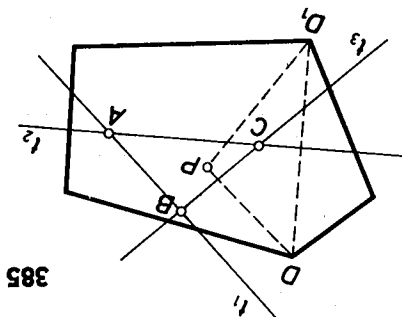
377



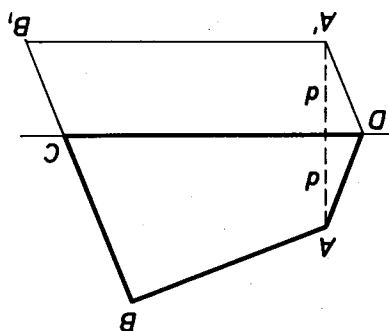
375



386



385

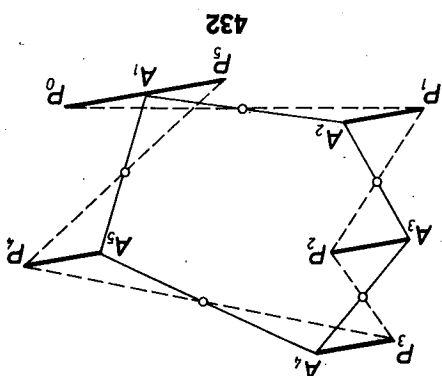
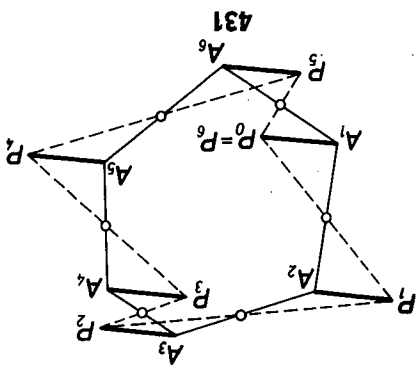


384

387. A kör két pontja legyen A és B (387. ábra). A fénysugár útját úgy szerkeszthetjük meg, hogy pl. B -t az átmérőre tükrözzük, és a B' tükröképet A -val összekötő egyenes metszi ki az átmérőből a fénysugár érintkezési pontját. A kerületi szögek tétele alapján az $AB'B$ állandó, ezért az ACB is állandó, tehát C az AB fölé szerkesztett köríven mozog. Legyen a két háromszög ABC és $A_1B_1C_1$ (388. ábra). Töljük el az ABC -t olyan $A'B'C'$ helyzetbe, hogy $C_1 = C'$ legyen. Az $A_1B_1C_1$ és $A'B'C'$ háromszögek tükrösek egy t egyenesre, a tükröző egyenesek a tengelyt az A^*, B^*, C_1 pontokban metszik. Az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok felezőpontjai $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$. Az ábráról leolvasható, hogy az A^*, B^*, C_1 pontokat $\frac{C_1C}{2}$ -nek megfelelő eltolás viszi az A, B, C pontokba.
394. A közös rész szabályos sokszög.
395. Gondoljunk arra, hogy középpontosan tükrös sokszögnek csak páros számú csúcsa lehet.
399. Az A , majd B pontra való tükrözés következtében a P pont olyan P'' helyzetbe kerül, mint ha a $2\overline{AB}$ -ral megadott eltolást alkalmaztuk volna, hiszen AB a PP'' háromszög középvonala (399. ábra).
400. I. az előző feladatot.
406. Vegyük figyelembe az előző feladat állítását.
407. Tükrözzük az egyik szögsszárat az adott pontra. A tükrökép kimetszi a szelőnek a másik szögsszárral való metszéspontját.
408. Lásd a 407. feladat megoldását.
410. A ponton át húzzunk párhuzamost a közelebbi szögsszárral, és ezt tükrözzük a szárra. A tükröképnek a másik szárral való metszéspontján át megy a szerkesztendő egyenes.
411. A megoldás a 407. feladat gondolatmenetének kétszeri alkalmazása. Tükrözzük az egyik egyenest az adott pontra. A tükrökép és a másik egyenes közé helyezzünk tetszőlegesen az adott összeggel egyenlő szakaszt, és ezt toljuk rá az adott pontra (413. ábra).
416. I. az előző feladatot.
418. I. az előző feladatot.
419. A szelő két metszéspontja tükrös az adott pontra.
421. A közös szelők az O_1 középpontú körbe a hosszúságú darabja esik, az O_2 középpontúba b hosszúságú. Tükrözzük az O_2 középpontú körre a két kör közös M pontjára, az új középpont O_2' . Az O_1 -ből és O_2' -ből a szelőre állított merőlegesek talppontjai egymástól $\frac{a-b}{2}$ távolságra vannak, azaz O_1 -ből a szelőre emelt merőleges érinti az O_2' körül $\frac{a-b}{2}$ sugárral szerkesztett kört. Ehhez a körhöz húzzunk érintőt O_1 -ből, az M -ből erre állított merőleges a szerkesztendő egyenes (421. ábra).
422. Alkalmazhatjuk a 407. feladat módszerét.
423. Alkalmazhatjuk a 411. és a 407. feladat megoldási módszerét.
424. I. a 414. feladatot.
425. Az Y pontok mértani helye az adott körnek az AB húr felezési pontjára vonatkozó tükröképe.

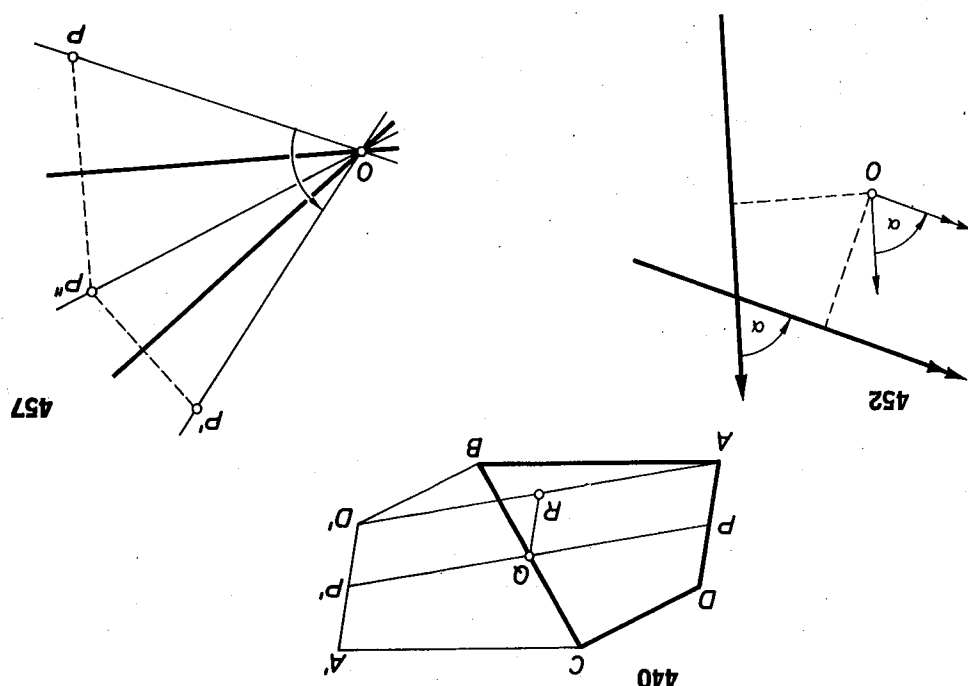


426. Legyenek a felmért szakaszok AA' és BB' . A B pontból az AC egyenessel húzott párhuzamos az AB egyenest D -ben metszi. A $BB'D$ háromszög egyenlő szárú, mert két szöge egyenlő, ezért $B'D = AA'$, ez viszont azt jelenti, hogy az A' , B' pontok tükrösek az AD felezőpontjára.
427. I. a 399. feladatot.
428. Alkítsunk a 399. feladat következménye.
429. Feladatunk állítása következménye az előzőnek.
430. Gondoljunk arra, hogy a 429. feladatban a P pontot tetszőlegesen vettük fel.
431. A 431. ábránkon hatszögre végeztük el a tükrözéseket. A tükrözés tulajdonságából következik, hogy a vastagon húzott szakaszok párhuzamosak és egyenlők. Ezt figyelembe véve az állítás az ábráról közvetlenül leolvasható.



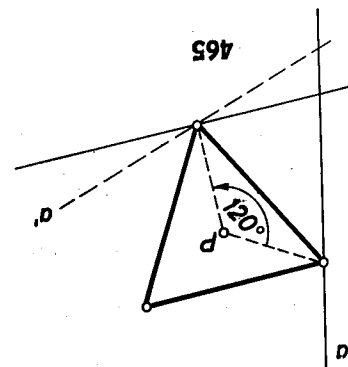
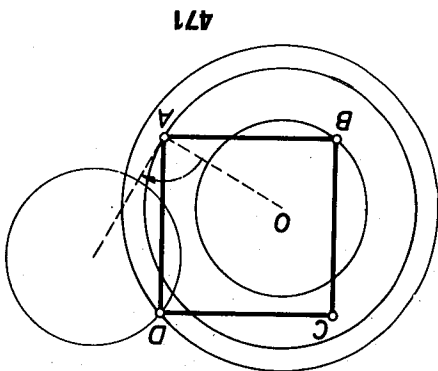
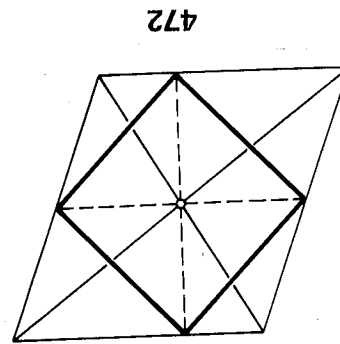
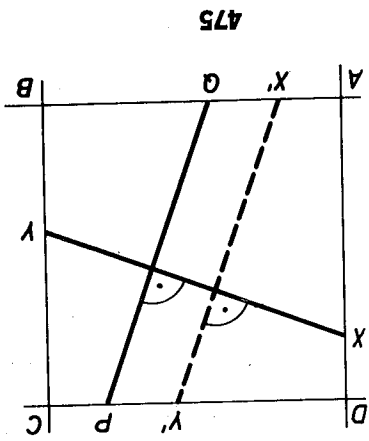
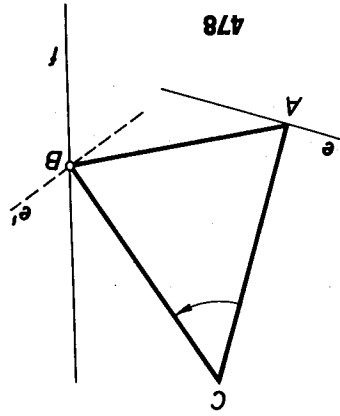
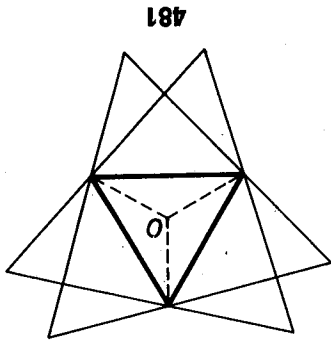
432. A tükrözés tulajdonságából következik, hogy a 432. ábrán vastagon húzott szakaszok párhuzamosak és egyenlők. Így P_0A_1 egy egyenesbe esik, és egyenlő hosszú P_3A_1 -gyel.
433. A feladat megoldható a 432. feladat alapján is.
434. A szerkesztéssel felhasználhatjuk a 431. és 432. feladatokat. Páros oldal-szám esetében (ha van megoldás) végtelen sok megoldás van, páratlan oldal-szám esetében pedig csak egy.
435. Legyenek a háromszög csúcsai A , B , C pontok. Az ABC , ABC tükrözés-sorozat a 399. feladat értelmében a $2AB$; $2CA$; $2BC$ eltolások összegevel helyettesíthetjük. Mivel az AB ; CA majd a BC -ral megadott eltolások egymás utáni alkalmazásával a sík pontjai helyben maradnak, ugyanez áll a kétszeresükre is.
436. Minden egyes esetben tükrözzük a háromszöget az egyik oldal felező-pontjára.
437. Minden egyes esetben tükrözzük a trapézt egyik szárának felezőpontjára.
438. Tükrözzük a trapézt egyik szárának felezőpontjára.
439. A 438. feladat megoldásának módszerét követve, megkaphatjuk az alapok összeget. Ehhez hozzáadva a különbséget, az egyik alap kétszeresét nyerjük.

456. Tükörözzünk egy P pontot egymás után két egyenest metsző egyenesre. A tükrözés tulajdonságából következik, hogy a P pont és P' , P'' tükörképei egyenlő távol vannak a két egyenes metszéspontjától.
457. Az elforgatás középpontja O , szöge α , P' a P pont elforgatottja. Az O ponton át húzott egyenes α -t két részre osztja. E részszegek szögfelezőit választhatjuk a forgatást helyettesítő tükrözés tengelyeinek (457. ábra).
460. A szabályos háromszöget középpontja körüli 120° , 240° és 360° -os forgással viszik át önmagába.



441. A bizonyítás a 440. feladat ábrájáról leolvasható.
451. Következik a 450. feladathból.
452. Az elforgatás fogalmából következik, hogy az egyenes az elforgatottjával α nagyságú szöget zár be (452. ábra).
454. Lásd a 449. feladat megoldását.
455. Azt a forgáscentrumot kell megkeresnünk, amely körül forgatva az A pont A' -be, B pedig B' -be kerül.
440. Az $ABCD$ négyszöget BC oldalának Q felezőpontjára tükrözve, az $ABD'A'CD$ hatszöget nyerjük; ennek szemközti oldalai párhuzamosak, ezért az $AD'P'$ négyszög paralelogramma. Az ABD' háromszög szerkesztendő, mert két oldala a négyszög két szemközti oldala, a harmadik pedig a négyszög középvonalának kétszerese. Ennek birtokában a Q pontot szerkesztjük meg, amely az AD' oldal R felezőpontjától $\frac{AD}{2}$, a B csústól pedig $\frac{BC}{2}$ távolságban van (440. ábra).
441. A bizonyítás a 440. feladat ábrájáról leolvasható.
451. Következik a 450. feladathból.
452. Az elforgatás fogalmából következik, hogy az egyenes az elforgatottjával α nagyságú szöget zár be (452. ábra).
454. Lásd a 449. feladat megoldását.
455. Azt a forgáscentrumot kell megkeresnünk, amely körül forgatva az A pont A' -be, B pedig B' -be kerül.

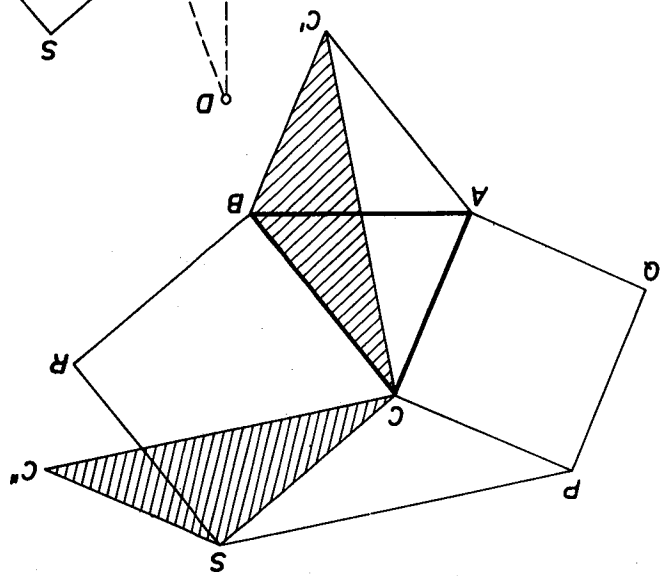
461. Az első esetben 60° -os, a másodikban 240° -os elforgatást alkalmaztunk. A és Q pontok mértani helye az adott egyenes O pont körüli 60° -os elforgatottja.
465. b) Az egyik szögszárnak az adott pont körüli 120° -os elforgatottja-metszi ki a másik szögszárból a szerkesztendő háromszög csúcsát (465. ábra).
466. A megoldás kiolvasható a 465. feladat megoldásából. (Most a szögszárrak között levő pontnak az egyik oldal adott pontja felel meg.)
468. A forgatást a körközéppont elforgatásával végezzük.
471. Tekintsük a feladatot megoldotttá. Nyilvánvaló, hogy egy megoldásból O körüli forgatással számtalan megoldás szerkeszthető. A 471. ábráról leolvasható, hogy a négyzet B csúcsa a D csúcsba A körüli 90° -os forgatással vihető át.
472. Tükrözzük az egész ábrát a négyzet középpontján át (472. ábra). A négyzet csúcsai ekkor a szemközti csúcsokba, a rajtuk átmenő paralelogramma- oldalak a szemközti csúcsokon átmenő párhuzamos egyenesekbe, vagyis a szemközti paralelogramma- oldal egyenesekbe mennek át. Ennek következtében a négyzet tükrözése a paralelogrammáé is fedi az eredetjét. Ez csak úgy lehet, ha a tükrözési középpontul választott négyzet-középpont a paralelogrammának is középpontja.
473. A 472. feladatból következik, hogy a négyzet középpontja a paralelogramma-középpontjával egybeesik. Forgassuk el a középpont körüli 90° -kal a paralelogramma egyik oldalát, és szerkesszük meg a forgatás irányába eső szomszédos oldallal való metszéspontját. Ez a négyzet egyik csúcsa lesz.
474. Az adott P ponttal szomszédos négyzetcsúcsok P körüli 90° -os forgatással egymásba vihetők.
475. Legyen a két, szövegben forgó egyenes szakasz XY és PQ . Forgassuk el az $ABCD$ négyzetet középpontja körüli 90° -kal. Mivel XY merőleges PQ -ra, XY 90° -os elforgatottja, $X'Y'$ párhuzamos PQ -val, de akkor $X'Q'PY'$ paralelogramma, és így $PQ = X'Y' = XY$ (475. ábra).
476. Használjuk fel az előző feladat állítását:
478. Forgassuk el az adott csúcs körüli az alap egyik csúcsán átmenő e egyenest a megadott szöggel. Az elforgatott e egyenes az alap másik csúcsán átmenő / egyenesből kimeetszi a háromszög csúcsát (478. ábra).
479. Forgassuk el az adott háromszöget középpontja körüli 120° -kal. Ez a forgás az adott háromszöget önmagába viszi át, a beírt háromszöget pedig olyan háromszögbe, amelynek oldalai rendre egy irányúak a beírt háromszög egy-egy oldalával, és ugyancsak be van írva az adott háromszögbe. Mivel egy szabályos háromszögbe adott oldaliránnyal csak egyetlen szabályos háromszög írható be, a beírt háromszög a forgatáskor szűkségképpen önmagába megy át, tehát középpontja az adott háromszög középpontjával esik egybe.
480. A 479. feladat felhasználásával végezhetjük el szerkesztést.
481. Forgassuk el 120° -kal a két háromszögből álló alakzatot. Ez a forgatás a metszéspontok meghatározta háromszöget is önmagába viszi át, tehát ez is szabályos háromszög (481. ábra).



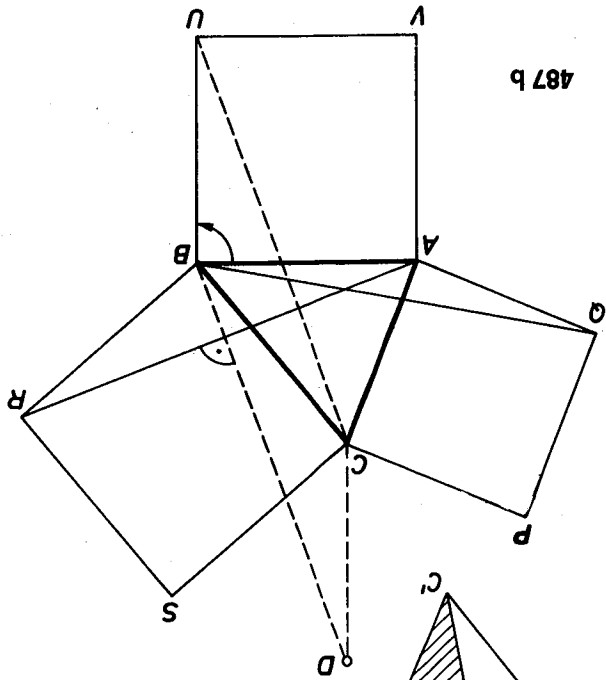


485. Forgassuk el az adott P pont körül az egyik kört az adott szögrel. Ebben a helyzetben a két szerkesztendő egyenes egybeesik.
486. Helyezzük el a két kör közé eső szakaszt egy tetszőleges helyen a két kör között, majd forgassuk el úgy, hogy menjen át P -n.
487. a) Legyen C' a C esücsnek AB középpontjára vonatkozó tükröképé (487/a ábra). CC' a súlyvonal kiegészése. Forgassuk el 90° -kal C körül a CBC' háromszöget, ez a CSC'' helyzetbe kerül. Mivel $PC = CA = BC' = SC''$, és SC'' az elforgatás miatt párhuzamos PC -vel, így a $CC''SP$ négyszög parallelogramma, tehát $PS = CC'' = CC'$.

b) Szerkesztük meg az $ABUV$ négyzetet (487/b ábra). Az ABR háromszöget B körül 90° -kal elforgatva, az UBC háromszöget nyerjük. Ezt az $UBOC$ paralelogrammává kiegészítve,



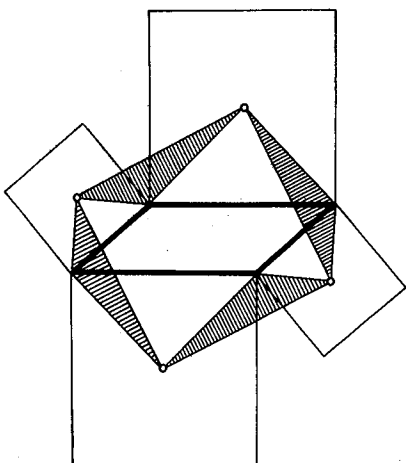
487 a



487 b

kapjuk, hogy $BD \perp AR$ és $CD \perp AB$, vagyis az ABD háromszögben AR és CD a magasságvonalakon vannak. Hasonlóan nyerhetjük, hogy BQ is magasságvonala az ABD háromszögnek, tehát az AR , BD és CD egyenesek egy pontban metszik egymást, de a DC egyenes az ABC magasságvonalát is tartalmazza.

488. Vegyük észre, hogy a négyzetközéppontok meghatározta négyszög tükros a paralelogramma átlóinak metszéspontjára, tehát maga is paralelogramma (488. ábra). Ellegend ezért megmutatnunk, hogy két szomszédos oldala egyenlő, és merőleges egymásra. A 488. ábra bármely szomszédos két vonalkázott háromszöge 90° -os elforgatással egymásba megy át, ez éppen a kérdéses dolgot bizonyítja.



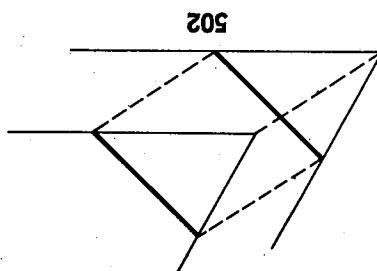
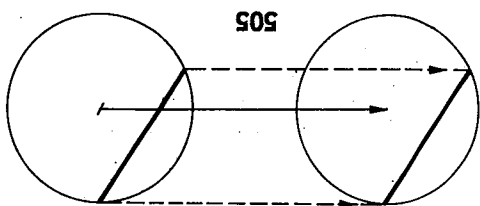
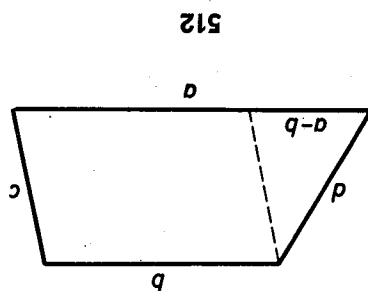
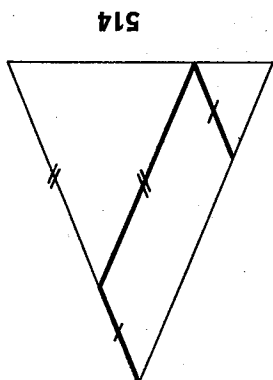
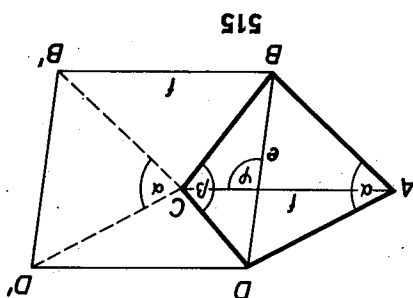
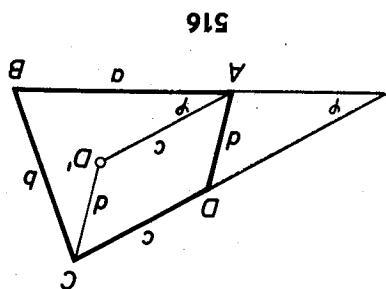
488

492. A két párhuzamos egyenesre való egymás utáni tükrözés eredménye a párhuzamosok távolságának kétszeresével való eltolás.
494. Tekintsük a feladatot megoldottnak. A „vetületszakaszt” toljuk el az adott szakasz végpontjába. Hzt az eltoló szakaszt Thalesz-kör segítségével vel már meg tudjuk szerkeszteni.
495. I. az előző feladatot.
497. Az adott szakaszt toljuk el a két pont által meghatározott szakasz végpontjába.
498. Mivel a szerkesztendő szakasznak egyenlő szárú háromszöget kell a szögszárból lemetesznie, ezért a szakasz a szögfelezőre merőlegesen helyezkedik el.
502. Szerkesszünk az adott szakasz végpontjaiban az adott szögszárakkal párhuzamosot. Ezután az így létrejött háromszöget kell az adott szög csücskébe tolni (502. ábra).
503. Lásd az előző feladat megoldását.
505. Szerkesszünk az adott szakasz mint húr fölé az eredetivel egybevágó kört. A körközéppontokat összekötő egyenes megadja az eltolás irányát és nagyságát (505. ábra).
506. Lásd az 505. feladat megoldását.
507. Az 505. feladat megoldásának felhasználásával toljuk el az adott szakaszt úgy, hogy a körnek húrja legyen.
508. Feladatunkat az 505. feladatra vezethetjük vissza.
509. Alkalmazzunk a két kör egyikére a szakasszal párhuzamos és egyenlő nagyságú eltolást.

515. Toljuk el az e átlóval lemetezett ABD háromszöget az f átlóval párhuzamosan az 515. ábrán látható helyzetbe. A $BB'DD'$ paralelogramma szerkeszthető, ebben a C csúcs a BD , ill. $B'D'$ fölé szerkesztett látkörívek metszéspontjaként adódik.

516. Toljuk el a c -t az ábrán látható módon (516. ábra).

517. Az 516. feladat módszere alkalmazható.

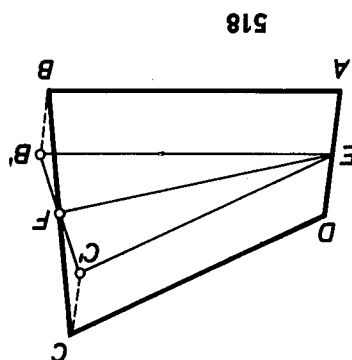
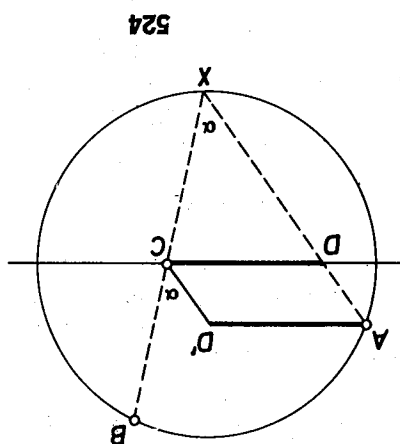
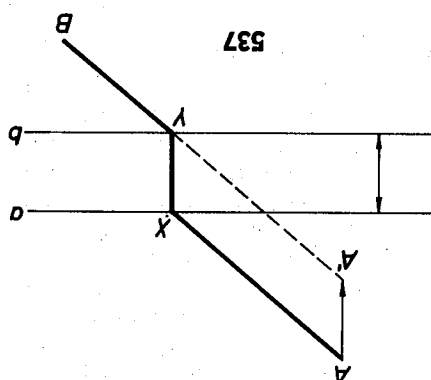
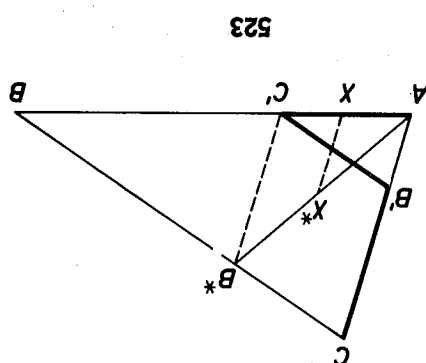


512. Az összeg éppen a szár hosszával egyenlő (512. ábra).

513. A feladat megoldásánál felhasználhatjuk az előző feladat eredményét.

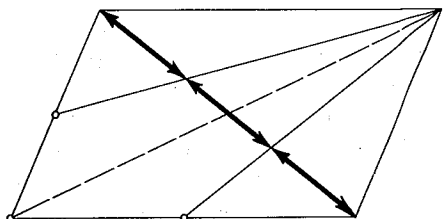
514. Toljuk el az egyik szarát az 514. ábrán látható módon.

518. Töljük el az egyenlő szemközti oldalakat az 518. ábrán látható módon az egyik oldalfelező pontba. Az eltolt B' , C' végpontok tükrösek a BC oldal felezőpontjára, és így a $B'E'C'$ egyenlő szárú háromszögben az H' középvonal szögfelező.
520. Legyen a három párhuzamos a , b , c (ilyen sorrendben). A b egyenesre tükrözve a -t, a feladatot az 519. feladatra vezettük vissza.
521. A két pont meghatározta szakasz felezőpontjából szerkesztünk szelőt, amelynek a szárak közé eső szakasza az adott távolságsszeg felével legyen egyenlő.
522. Alkalmazhatjuk az előző feladat módszerét.
523. Lásd az előző feladatot.
524. Az adott A , B pontokat a szerkesztendő X pontból α szög alatt látjuk (a szerkeszthető). Az adott hosszúságú DC szakaszt az A pontba tolván, a $D'B$ szakasz C -ből α szög alatt látszik, így C -t a $D'B$ fölé szerkesztett α látószögű kör metszi ki az átmerőből (524. ábra).
526. Felhasználhatjuk az előző feladat állítását.
527. Következik az 526. feladat megoldásából.
529. Az $ABCD$ paralelogramma két csúcsa, az A és B közös körpontok. Az egyik kört AB -vel eltolva, a C -n átmenő kört kapunk.
530. Az V pontok a kör BA irányú és nagyságú eltoltján helyezkednek el.
531. Az V pontok a harmadik háromszögből BA irányú és nagyságú eltoltján helyezkednek el.
532. Az érintési pontok körökön vannak.
533. Lásd az 532. feladat megoldását.
534. Az $AC'B'C$ út helyett törekedjünk először az $AC'B'C$ út megszerkesztésére, ahol $B'C$ -ből eltolással nyerjük (534. ábra). A B' -ra mértani helyet állapíthatunk meg, rajta lesz az AX^* egyenesen. Az X^* -ot úgy nyerjük, hogy az AB tetszőleges X pontjából az AX -szel párhuzamosan felmérjük az AX szakaszt. A B' -ot az AX^* egyenes metszi ki a BC oldalból.
535. Az 534. feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazzuk.
536. Töljük el az a egyenes és A pont kijelölté feladatát úgy, hogy a a b egyenesre essék. Az $AXYB$ út így a vele egyenlő $AA'VB$ úttá alakul át. (536. ábra.)
537. Lásd az előző feladat megoldását.
538. Töljük el az A pontot h -val az s irányába (538. ábra). Kézzel A az A' helyzetbe került. Most már a feladat arra redukálódott, hogy szerkesztjük meg az A' -ből s érintésével B -be vezető legrövidebb utat. (Lásd a 344. feladatot.)
539. Tükrözzük a háromszöget az alap felezési pontjára. Az állítás az 539. ábráról leolvasható.
540. Az állítás leolvasható az 539. ábráról.
541. a) 3,5; 4,5; 6. b) $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{12}{7}$; c) m ; $\frac{3}{2}n$; $\frac{4}{l}$. d) $m + \frac{2}{3}n$; $m - \frac{2}{3}n$; $\frac{4}{3}m$.
542. a) 4 cm; 8 cm; 10 cm; b) 1 ; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; c) m ; $\frac{3}{4n}$; $m + n$.

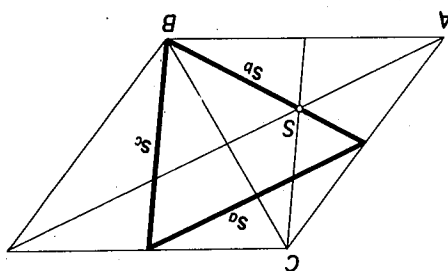


543. a) 10 cm; b) $\frac{4}{15}$ cm; c) $\frac{2}{a}$ cm.
544. Lásd a 303. feladat megoldását.
546. 6 cm.
547. A gerenda hossza 2,4 m.
548. a) Alkalmazzuk a középvonalátételt: 1 óra múlva a távolság 360 m.
- b) $\frac{5}{4}$ óra múlva $\frac{4}{5} \cdot 360$ km = 450 km.
- c) 1 óra múlva 1.360 m.
549. Az állítás következik a középvonalátételtől.
551. Az 551. ábrán látható $F_1 F_2 O$ háromszög egybevégő az $F_1' F_2' M$ háromszöggel.
552. A mértani hely — a középvonalátételtől következőleg — a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz felező merőlegese. (552. ábra.)
553. Az előző feladatból következik, hogy a mértani hely az adott egyenessel párhuzamos egyenes.
554. A mértani hely egyenes.
555. A mértani hely az alappal párhuzamos egyenes.
557. Húzzuk meg a négyszög átlóját. (557. ábra.)
558. Következik az előző feladatból.
559. Alkalmazzuk a középvonalátételt.
560. Következik az 558. és 559. feladatokból.
561. Vö. az 552. feladattal.
564. a) 111,5°, 127,5° és 121°-os szög alatt, b) 118°, 137° és 105°-os szög alatt.
566. A szerkesztést az 566. ábra mutatja. Adottak az a , b és c , d merőleges egyenespárok. A P pontból kell az e egyenesre merőlegest állítani. A szerkesztés az ábráról leolvasható. Az egyforma betűvel jelölt egyenesek párhuzamosak. (A b és d egyenesek a keletkezett háromszög magasság-vonalai.)
576. Gondoljunk arra, hogy a háromszög oldalfelezési pontja rajta van az oldal végpontját a köré írt kör középpontjával összekötő szakasz fölött írt Thalesz-körön.
577. Használjuk fel a 305. feladatot.
585. Az adott oldalból és magasságból derékszögű háromszöget szerkeszthető.
586. A szögéből és a magasságból derékszögű háromszöget szerkeszthetünk.
587. Az adott oldal felével, a hozzá tartozó súlyvonal harmadával és a másik súlyvonal kétharmadával szerkesztünk háromszöget.
588. Használjuk fel, hogy a háromszög alapja és az adott súlyvonalak két harmada által meghatározott háromszög magasság-vonalai az adott magasság-vonal egyharmadával egyenlő.
589. Tükörözzük a háromszöget az alap felezési pontjára. Az 589. ábrán létrejött súlyvonal-háromszög, majd ebből az eredeti háromszög megszerkeszthető.
590. Húzzuk meg a paralelogramma másik átlóját. Az így kapott háromszögekben az eredetileg berajzolt egyenesek súlyvonalak. Ebből már következik az állítás (590. ábra).

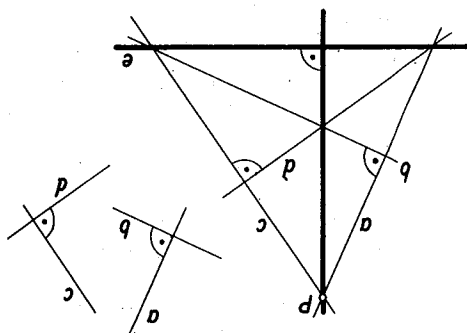
590



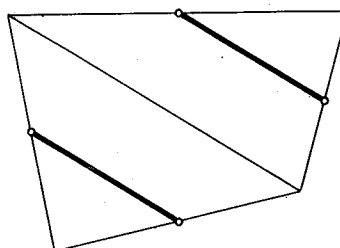
589



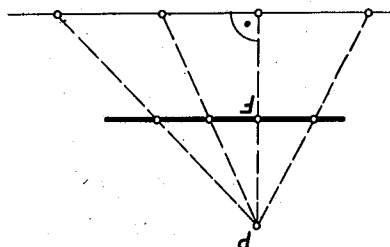
566



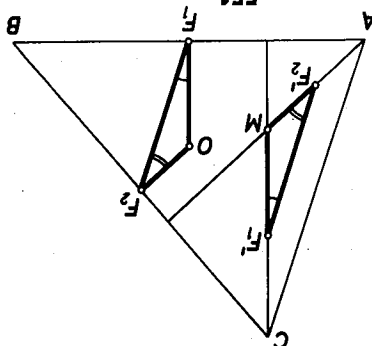
557



552

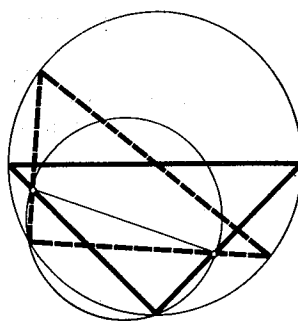


551

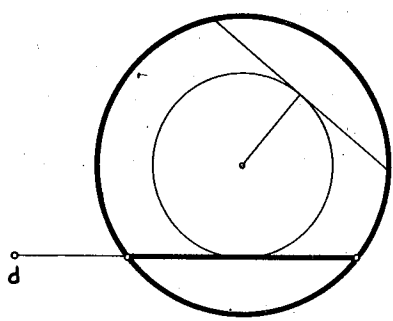


592. Rajzoljunk a körbe két merőleges húrpart (592. ábra).
593. Az oldal végpontjain és a magasságtalponatokon átmenő Thalesz-kör középpontja éppen a harmadik oldal felezőpontja.
594. Lásd az előző feladat megoldását.
595. A két pont fölé szerkesztett Thalesz-kör metszi ki az adott egyenesből a háromszög harmadik csúcsát.
596. A szerkesztést az 596. ábra mutatja.
597. Az egyik pontból bocsássunk merőlegest a párhuzamosokra. Megszerkeszthető derékszögű háromszöghöz jutunk.
598. Gondoljunk arra, hogy a Thalesz-kör középpontja az átfogó felezési pontja esik.
599. Az 598. feladat és a középvonalattal felhasználásával az állítás bebizonyítható.
600. Az 598. feladat alapján a leírt vonal egy $\frac{d}{2}$ sugarú negyed körív (600. ábra).
602. A 602. ábráról leolvasható az állítás igazolása.
603. Következik abból, hogy az alapához tartozó magasságvonal egyúttal súlyvonal.
604. Ismeretes, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik szög 30° -os, akkor az ezzel szemközti befogó fele az átfogónak (140. feladat). Ennek felhasználásával adódik az állítás.
605. A közös hűrök a háromszög magasságvonalai.
606. A két másik csúcsához tartozó magasságvonal talppontjában.
607. Kössük össze az átmérők nem közös végpontját a két kör másik közös pontjával, és mutassuk ki, hogy ez a két szakasz nem alkot törött vonalat.
609. A derékszögű háromszög csúcsát (csúcsait) az adott két pont fölé szerkesztett Thalesz-kör metszi ki az átfogó egyenessel párhuzamos, fölé magasságvonal távollágban haladó egyenesből.
610. A kérdéses háromszög (ill. háromszögek) derékszögű csúcsát (csúcsait) az adott két pont fölé szerkesztett Thalesz-kör metszi ki az adott körből (610. ábra).
611. Az adott pontok fölé páronként szerkesztünk Thalesz-kört. Ezek közös pontjain át kell adott hosszúságú szelőt (téglalapoldalt) szerkeszteni.
612. A mértani hely az alap fölé emelt Thalesz-kör (két pont kivételével).
613. A mértani hely az egyenesek „tartópontja”, és az adott pontot összekötő szakasz fölé szerkesztett Thalesz-kör.
614. A rögzített oldal fölé szerkesztett Thalesz-kör (két pont kivételével).
616. A hűrök felezőpontjainak mértani helye az adott pont és a középpont fölé szerkesztett Thalesz-körnek az adott körbe eső része.
618. Az előző feladat felhasználásával történik a szerkesztés.
619. Az adott körrel koncentrikus kör, melynek sugara a középponttól az adott hűr középpontjával összekötő szakasz.
620. Az előző feladat eredményét felhasználva, szerkesztünk az adott körbe egy tetszőleges kívánt hosszúságú hűrt, majd kört, melynek ez a hűr érintője. Az adott pontból ez utóbbi körhöz húzott érintő lesz a keresett szelő (620. ábra).
622. Az egyik pont köré 2 cm sugarúval szerkesztett körhöz a másik pontból húzott érintő – ill. érintők – adja a keresett egyenest.

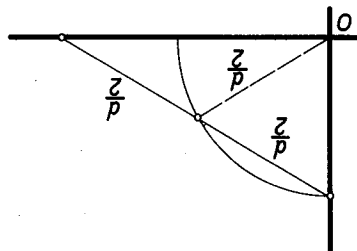
610



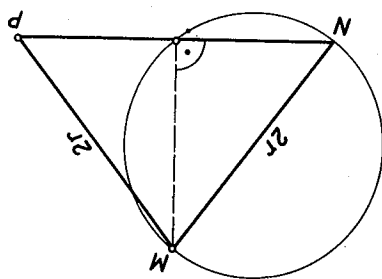
620



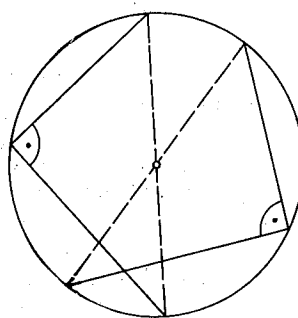
600



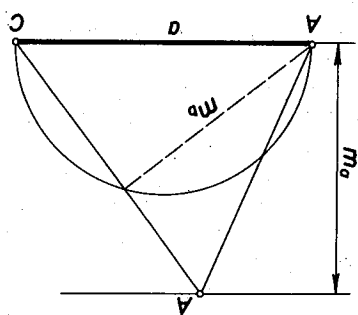
602



592

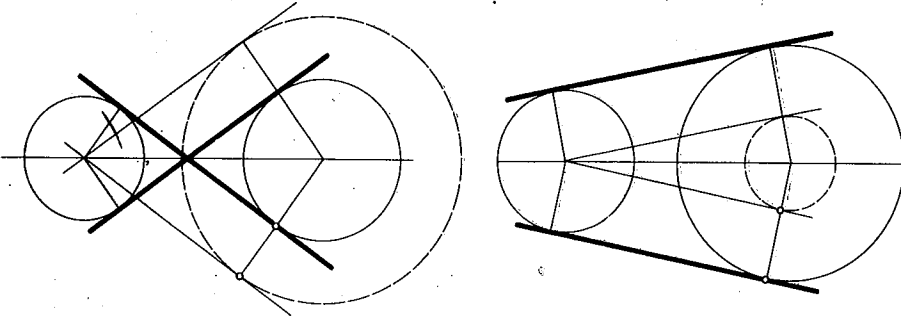


596

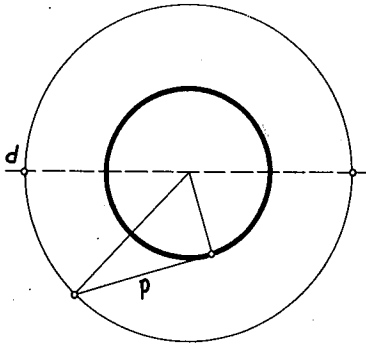


629. Lásd az előző feladat megoldását.
 630. A keresett mértani hely az adott körrel egyközepű kör.
 631. Azon pontok mértani helye, melyekből a körhöz húzott érintők 90° -os szöget zárnak be, az eredeti körrel egyközepű kör.
 632. A mértani hely az adott körrel egyközepű kör.
 633. A feladatot a körsugartörés módszerével oldhatjuk meg (633. ábra).
 634. A követeleménynek elegendő tesznek az adott pontok – mint középpont – köré szerkesztett 2 cm , ill. 1 cm sugarú körök közös külső, ill. belső érintői.

633

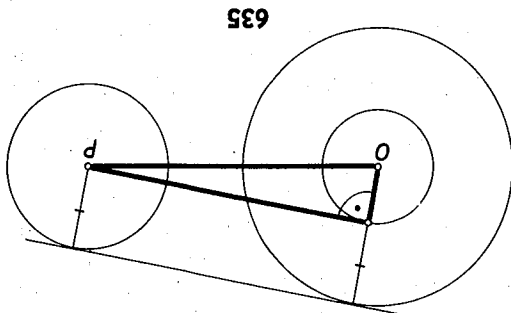
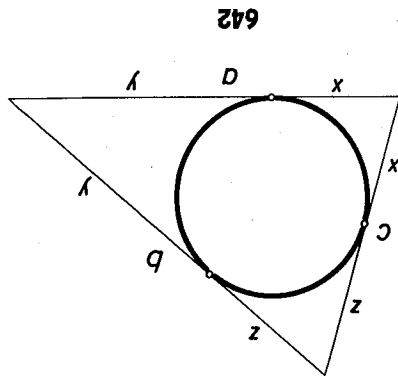
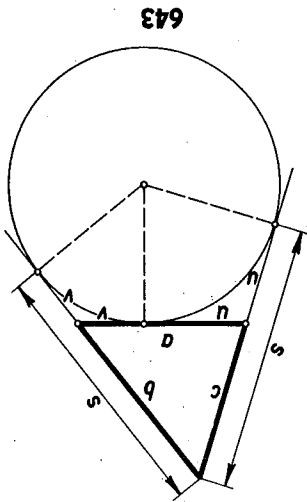


628



623. Az adott P pontot kössük össze a kör O középpontjával. Az OP fele szerkesztett Thalesz-körnek az adott húrral alkotott metszéspontja a P -n átmenő szelő körbe eső szakaszának felezési pontja.
 626. A 619. feladat felhasználásával oldhatjuk meg a feladatot.
 627. A kör átmérője egyúttal a négyzet átlója, ebből a négyzet oldal hosszát lehet meghatározni. A négyzet oldal ismeretében a 619. feladat felhasználásával a feladat már megszerkeszthető.
 628. Az egy irányban húzott azonos hosszúságú érintőszakaszok végpontjainak mértani helye az eredetivel koncentrikus kör. Ez utóbbi körnek a meg-hosszabbított átmérővel alkotott metszéspontja adja a keresett pontot (pontokat). (628. ábra.)

641. Az állítás következik abból, hogy a hozzáírt körök középpontjai külső szögfelezők metszéspontjai, és rajta vannak a belső szögfelezőzőkön.
642. A 642. ábra jelölését használva $2(x+y+z) = a+b+c$, azaz $x+y+z = s$, $x+y = a$, így $z = s-a$, hasonlóan $y = s-c$, $x = s-b$, azaz a csücsktől az érintési pontig terjedő szakasz a fél terület és a csücskal szemközti oldal különbségével egyenlő.
643. A 643. ábra jelölését használva $c+(u+v)+b = 2s$, tehát az érintőszakaszok összege a kerülettel egyenlő. Mivel a körhöz külső pontból húzott érintők egyenlők, következik az állítás.



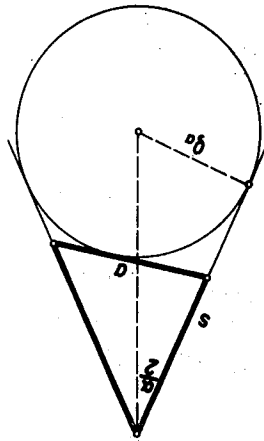
635. Tekintsük a feladatot megoldótnak. Az adott kör sugarát a kis (szerkesztendő) kör sugarával zsugorítottuk, így a közös külső érintő P -ből húzott érintő lesz. A 635. ábrán vastagon húzott háromszög és így a zsugorított kör, majd ebből a szerkesztendő kis kör sugara is megszerkeszthető.
636. A 619. feladat felhasználásával az adott körökre szerkesztünk kisebb köröket, melyeknek az adott hosszúságú hurok érintő. Ez utóbbi körök közös belső, ill. külső érintője lesz a szerkesztendő egyenes, ill. egyenesek. Gondoljunk arra, hogy a szabályos háromszögben minden nevezetes vonal és pont egybeesik.
640. Egy más páronként metsző egyenesek esetében az általunk meghatározott háromszögbe írt kör középpontja, továbbá a hozzáírt körök középpontjai.

657. Következik a 656. feladatból.

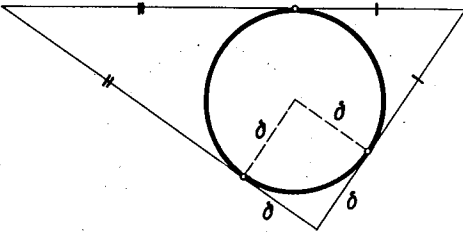
656. a) $d = \frac{a+b-c}{2}$; b) $d_c = s$.

654. A 653. feladat felhasználásával adódik, hogy a befogók összege 26 cm, így $2s = 46$ cm.
655. A 653. feladatból következik, hogy az átfogó a befogók összegének és a beírt kör átmérőjének különbségével egyenlő.

646



653



egyenlőségből.

653. Következik az előző feladatból és a 653. ábrán egyformán jelölt szakaszok csúcsa négyzetet határoznak meg.

651. Egy körközpont, a befogók egyenesen levő érintési pontok és a derékszög $E_1E_2 = a$.

650. A 642. és 643. feladatból következik, hogy $AH_1 = s - a$, $AE_2 = s$, így

649. A szerkesztés következik a 648. feladatból.

és hozzáírt körök esetében ez a távolság $b - c$ -vel egyenlő.)
648. Az állítás következik a 644. és 645. feladatokból. (Az a oldal érintő beírt

helyzetben megszerkeszthetjük.
a oldalt – mint a két kör közös belső érintőjét (ill. érintőit) – a kívánt a 642. feladatot). Következésképpen a beírt kör is szerkeszthető. Ezután az $De - a$ éppen az A csúcs távolsága a beírt kör érintési pontjától (lásd

való távolsága a fél kerülettel (s) egyenlő. Így $(s - a)$ megszerkeszthető. A 643. feladatból következik, hogy az adott csúcsnak egy érintési ponttól a , a másik két oldal egyenes és az a oldalhoz hozzáírt kör (643. ábra).

647. A feladat átfogalmazható úgy, hogy adott egy háromszög egyik oldala:

ábra).

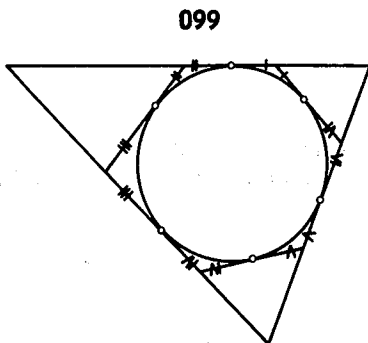
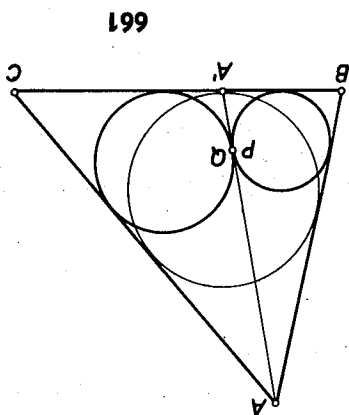
gökkal szerkesztett derékszögű háromszög egyik hegyesszöge $\frac{\alpha}{2}$ (646.

646. Az a oldalhoz hozzáírt kör sugarával (d_a) és a fél kerülettel (s) mint befo-

645. Következik a 642. és 644. feladatból.

644. Az előző feladatból következik, hogy $u = s - c$ és $v = s - b$.

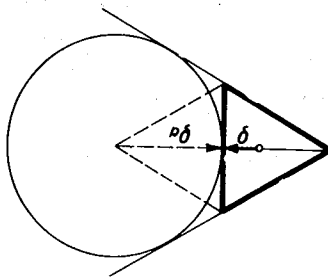
662. Az adott szögből a megszerkesztett két kör közös belső érintője (ill. érintői) metszi ki a szerkesztendő háromszöget.
663. Az adott szög szárai közé a beírt kört meg tudjuk szerkeszteni. A 643. feladat felhasználásával a hozzáírt kör érintési pontjait és ebből a hozzáírt kört is meg tudjuk szerkeszteni (lásd a 662. feladatot).
664. A szerkesztést az előző feladathoz hasonlóan végezhetjük. Az adott szöggel szemközti oldalt az oldalhoz hozzáírt kör és a szög csúcsa köré (adott magassággal mint sugárral) írt kör közös belső érintőjeként kapjuk.
666. A 648. feladat felhasználásával az adott oldalon a beírt kör érintési pontja megszerkeszthető (lásd még az előző feladatot).
669. A háromszögnek a száraiak közé eső hozzáírt körét meg tudjuk szerkeszteni, mert a kerület ismeretében (lásd a 643. feladatot) az érintési pontok szerkeszthetők. Az adott pontból a hozzáírt körhöz szerkesztett érintő metszi le az adott szögből a keresett háromszöget.
670. Egy fél kerület hosszúságú szakasz végpontjában megszerkesztjük a hozzáírt érintőkört, majd ennek segítségével a beírt kört. A további szerkesztés a 662. feladat megoldásában közölt módon történhet.
671. Egy fél kerület hosszúságú szakasz végpontjában megszerkesztjük a hozzáírt kört, majd ehhez a felvett szakasszal megadott szöget bezáró érintőt.



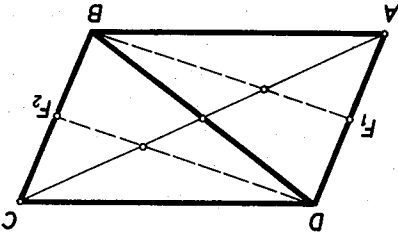
658. Az előző feladat összefüggésének, továbbá a 643. feladat felhasználásával a derékszög szárait érintő hozzáírt kör szerkeszthető. Ez utóbbit érintő és a derékszög egyik szarával adott szöget bezáró egyenes adja a háromszög átfogóját.
659. A 656. feladat felhasználásával adódik, hogy $c = 7$ cm.
660. A 660. ábrán egyformán jelölt szakaszok egyenlőségből következik az állítás.
661. Legyen a BC oldalon a beírt kör érintési pontja A' . Az AA' oldalt a kis háromszögekbe beírt körök a P , ill. Q pontokban érintik. A 642. feladat alapján határozzuk meg $A'P$ és $A'Q$ hosszát (661. ábra).

699. Az állítás következik az 590. feladathoz fűzött megjegyzésből. A 701. ábrán egyformán jelölt szögek egyenlők. Ebből már következik az állítás. A szárak a paralelogramma fel kerületével egyenlők.
702. $BD = 5$ cm.
703. Az állítás következik az így kapott négyszög középpontos szimmetriájából.
704. A körök átlókkal alkotott metszéspontjait kössük össze a megfelelő oldal végpontjaival. Látható, hogy a feladat azonos a 703. feladattal.
705. Az állítás következik abból, hogy a ponton át a szögsszárakkal párhuzamosan húzott egyenesek a szögsszárakkal paralelogrammát alkotnak.
707. Az állítás következik abból, hogy az ADH háromszög egyenlő szárú, — és a $CDEF$ négyszög paralelogramma.

672

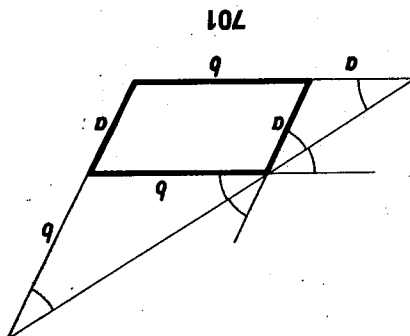
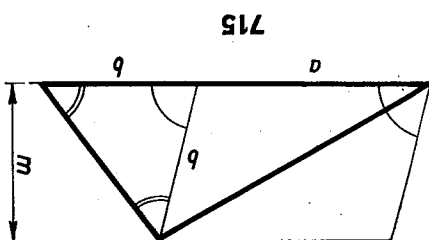
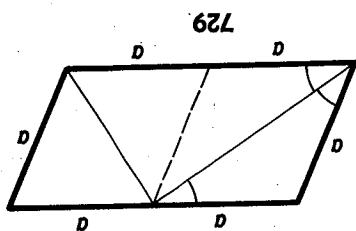


698



689. Nem.
690. Létezik.
692. Nem létezik.
695. $AB = 11,5$ cm.
697. Következik a paralelogramma középpontos szimmetriájából.
698. Következik abból, hogy a BF_1 és DF_2 szakaszok egybevágó háromszögek megfelelő súlyvonalai (698. ábra).
687. Az átlók metszéspontja (a rögzített oldal felezési pontja mint körközéppont köré írt) $\frac{d}{2}$ sugarú kört ír le, d -vel a mozgó oldalt jelölve.
683. Következik a 682. feladatból és abból, hogy két szomszédos szögfelező merőleges egymásra.
684. Következik a 683. feladatból és abból, hogy a belső és külső szögfelező merőleges egymásra.
681. $83,6^\circ$, ill. $96,4^\circ$.
676. ViSSzavezetheő a 670. feladatra.
- két kör közös külső érintőt nyerjük.
- megszerkesztjük a beírt és hozzáírt kört. A háromszög oldalait mint a végpontjaiba felhasználásával a két oldal különbségének történt.
674. A 672. és 673. feladat felhasználásával történhet.
673. Következik a 638. és 672. feladatokból.
672. A 672. ábráról leolvasható, hogy a hozzáírt kör sugara a háromszög magasságával, azaz a beírt kör sugarának háromszorosával egyenlő.

729. A szögfelezőnek a szemközti oldalal alkotott metszéspontjában a rövidebbik oldallal párhuzamos egyenes rombuszt vág le a paralelogrammából. Ebből már következik az állítás (729. ábra).
730. Lásd a 729. feladat megoldását.
733. A két pontot összekötő szakaszra a második pontban állított merőleges metszi ki az egyenesből a rombusz újabb csúcsát.



714. A szemközti oldalakon levő pontok közötti távolság fölő szerkesztett Thalesz-körből metszi ki a magasság az újabb oldalon levő pontokat. Forgassuk rá a paralelogramma egyik oldalát a másik oldal meghosszabbítására. Az egyenes szög ismeretében a kétíves szög és így az ábrán vas-tagon húzott háromszög is megszerkeszthető (715. ábra).
716. Tükörözzük a háromszöget a harmadik oldal felezőpontjára. Így paralelogrammát nyerünk, amely már szerkeszthető.
717. L. az előző feladat megoldásának a módszerét.
718. Az átlók metszéspontja az alaptól $\frac{m}{2}$ távolságra van.
719. A rögzített oldal felezőpontján átmenő, az oldal egyenessel párhuzamos egyenest (kivéve a rögzített oldal felezőpontját).
720. Téglalapvonalat (kivéve a téglalap csúcsait).
721. 19°-os, ill. 71°-os szöget.
722. 84°, ill. 96°.
723. 60°, ill. 120°.
725. 30°, ill. 150°.
728. A szögfelezők a szemközti oldal három egyenlő részre bontják.

768. Lásd a 143. feladatot.

767. Lásd a 261. feladatot.

764. Következik abból, hogy a szemközti csúcsoknál levő háromszögek páronként egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek.

b) Az átló hossza $a - b$.

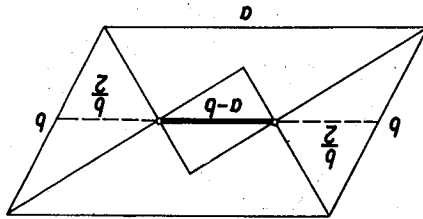
763. a) Következik a 683. feladatból és abból, hogy téglalapnál a szemközti csúcsokhoz tartozó szögfelezők egyenlő közű párhuzamos egyenesek.

$$762. \frac{b}{2}$$

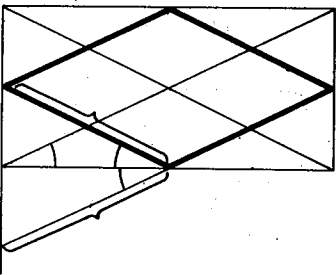
761. 2a.

756. Következik a 755. feladatból. Az állítás következik a szemközti csúcsoknál levő háromszögek egybevágóságából. Téglapot akkor nyerünk, ha az oldalakra rámerít szakaszok a rombusz oldalának felével egyenlők.

752



755



755. Rajzoljuk egy kívánt tulajdonságú paralelogrammát. Az egyik paralelogramma oldalait hosszabbítsuk meg addig, hogy a szemközti téglalap-oldal meghosszabbítását messze. Az ábrán egyformán jelölt szakaszok egyenlőségből következik, hogy a paralelogramma felkerülte a téglalap átlójával egyenlő (755. ábra).

752. A téglalap átlójának hossza: $a - b$ (752. ábra).

751. A talponti pontok által meghatározott négyszög átlói egyenlők, és felezve metszik egymást.

750. A téglalap kerülete a derékszögű háromszög befogóinak összegével egyenlő.

749. Az oldalak hossza 5 cm és 10 cm.

748. L. az előző feladatot.

140. feladatot.)

747. Következik abból, hogy ekkor az egyik átló olyan derékszögű háromszögekre bontja a téglapot, melyeknek egyik hegyesszöge 30° . (Lásd a

b) az átlók metszéspontja.

746. a) Nincs, ha a téglalap nem négyzet;

744. 62° -os, ill. 28° -os szöget.

743. 52° -os szöget.

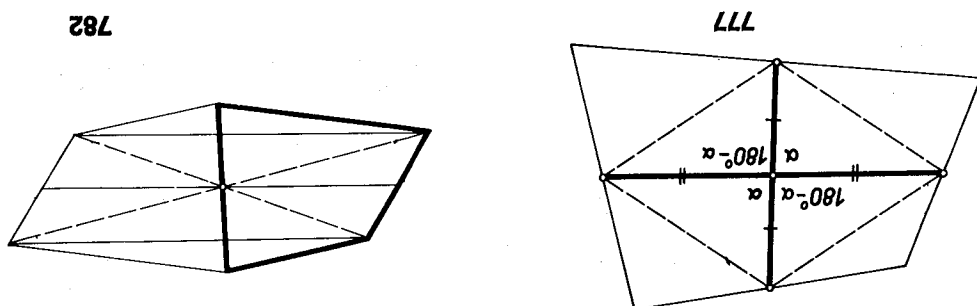
742. Következik a háromszög külsőszög-tételéből.

738. A rombusz szemközti oldalainak a távolossága egyenlő.

736. Gondoljunk arra, hogy a szerkesztendő két oldal távolossága adott.

735. Használjuk fel a rombusz tengelyes szimmetriáját.

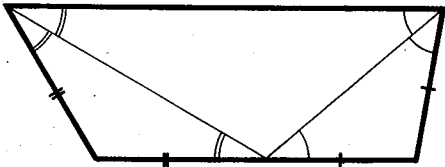
783. Alkalmazzuk a 782. feladatban szereplő egybevágó háromszögekre a háromszög-egyenlőtlenséget; a bizonyítandó összefüggést nyerjük.
787. 6 cm.
788. 107° és 72° .
789. Használjuk fel, hogy 30° -os derékszögű háromszög 30° -os szöggel szemközti befogója fele az átfogónak.
790. 11,5 cm.
791. 22 cm.
792. A rövidebb alaphoz.
793. A hosszabbik alap 14 cm.
794. A hosszabbik alap 10 cm, a rövidebbik alap 5 cm hosszú.
795. a) $140^\circ 48'$; b) 111° és 69° .
796. 11, 13 és 15 cm hosszúak.
797. Mindkét szakasz az átló által lemetezett két háromszög középvonalával egyenlő.
798. Következik a 797. feladatból.
800. Következik a 797. feladathoz fűzött megjegyzésből.
801. Ha egy négyszög átlói felezve metszik egymást, akkor a négyszög parallelogramma.
802. Következik a 798. feladatból.
803. A másik alap hossza 2a.
804. Következik a 797. feladatból.



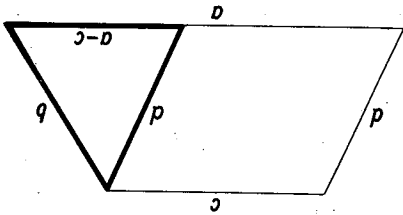
777. Az állítás a 782. ábráról leolvasható.
781. Lásd az 560. feladat megoldását.
782. Lásd az 560. feladat megoldását.
783. A feltételből következik, hogy a felezőpontok által meghatározott parallelogramma négyzet.
784. Lásd a 778. feladat megoldását.
785. Lásd a 778. feladat megoldását.
786. Gondoljunk arra, hogy a középvonalak a felezőpontok által meghatározott parallelogramma átlói. Egy parallelogramma téglalap, ha a párhelyes oldalak egyenlők, azaz a középvonalak egyenlők, amiből az állítás nyilvánvaló.
787. A 776. feladatból következik, hogy a 777. ábrán egyformán jelölt szakaszok és szögek egyenlők, amiből az állítás nyilvánvaló.
788. A feltétel a négyszög átlóinak merőlegességére.
789. Lásd az 558. feladat megoldását.
790. Lásd az 558. feladat megoldását.
791. Lásd az 558. feladat megoldását.
792. Lásd az 558. feladat megoldását.
793. Lásd az 558. feladat megoldását.
794. Lásd az 558. feladat megoldását.
795. Lásd az 558. feladat megoldását.
796. Lásd az 558. feladat megoldását.
797. Lásd az 558. feladat megoldását.
798. Lásd az 558. feladat megoldását.
799. Lásd az 558. feladat megoldását.
800. Lásd az 558. feladat megoldását.
801. Lásd az 558. feladat megoldását.
802. Lásd az 558. feladat megoldását.
803. Lásd az 558. feladat megoldását.
804. Lásd az 558. feladat megoldását.

818. Forgassuk rá a szárakat — a rövidebb alap végpontjai körül — a rövidebb alapra. A 818. ábrán egyformán jelölt szögek egyenlőségből következik az állítás.
819. Következik a trapéz középvonalátételéből.
820. A másik két szög 96° -os.
821. Az egyik átló az oldalakkal 50° -os, ill. $19,5^\circ$ -os, a másik átló 40° -os és $70,5^\circ$ -os szöget alkot.
823. A rombusz és a négyzet.
825. Lásd a 75. feladatot.
827. A szemközti oldalak a végpontjait összekötő átlókkal paralelogrammát alkotnak, melyeknek átlói felezve metszik egymást. Két „szomszédos” paralelogrammának mindig van egy közös átlója, amiből következik az állítás.

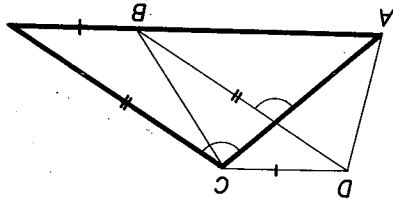
818



815



811



817. A b) és c) esetekben toljuk el a merőleges szárát a másik szár végpontjába.
815. Tolvuk el az egyik szárát a másik szár végpontjába. Az állítás a 815. ábrán vastagon húzott háromszög oldalaira fennálló háromszög-egyenlőséget jelenti.
- b) A 811. ábrán levő háromszög ismét szerkeszthető.
813. Mivel az alapok összege a középvonal kétszeresével egyenlő, a 811. ábrán látható háromszög és ezzel a trapéz szöge is szerkeszthető.
- c) A 811. ábrán látható háromszög ismét megszerkeszthető.
812. a) Tolvuk el az egyik átlót a másik végpontjába. A jelölt szögek egyenlősége miatt a 811. ábrán vastagon húzott háromszög megszerkeszthető.
811. e) Tolvuk el az egyik átlót a másik végpontjába (811. ábra). Ekkor az ábrán vastagon húzott háromszög és ebből a trapéz megszerkeszthető.
809. $(k-m)$, ill. $(k+m)$.
808. 5 cm, ill. 8 cm.
807. 6 cm.
806. Használjuk fel a 798. feladatot.
805. Következik a trapéz középvonalátételéből.