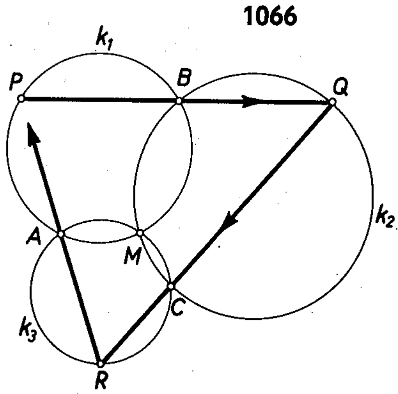
1065. Jelöljünk ki egy háromszög minden oldalán egy pontot, kössük össze ezeket egymással. Az összekötő szakaszok az eredeti háromszögből egy-egy kis háromszöget metszenek le. Bizonyítsuk be, hogy a kis háromszögek köré írt körök egy ponton mennek át.

1066. Az 1066. ábrán látható három kör: k_1, k_2, k_3 egy közös M pontban metszi egymást. A k_1 kör P pontjából kiindulva húzzunk egyenest B-n át, ez k_2-t Q-ban metszi; a QC egyenes k_3-at R-ben. Mutassuk meg, hogy az R-et A-val összekötő egyenes átmegy a P ponton.

1066



1067. Szerkesszünk húrnégyszöget, ha adott három oldala és egy átlója.

1068. Szerkesszünk húrnégyszöget, ha adott három oldala és két ismert oldalának szöge.

1069. Szerkesszünk húrnégyszöget egy szögéből, két átlójából és az átlók szögéből.

1070. Rajzoljunk két kört és mindegyikben egy-egy húrt, amelyek párhuzamosak egymással. Kössük össze a húrok megfelelő végpontjait. Mutassuk meg, hogy a két összekötő vonal második körrel alkotott metszéspontjai, valamint a másik körben levő húr végpontjai egy körön vannak.

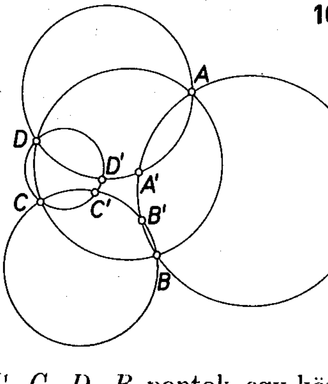
1071. Húzzunk két kör metszéspontjain át egy-egy szelőt. Ezek mindkét kört még egy pontban metszik. Kössük össze az ugyanabban a körben levő második metszéspontokat, és igazoljuk, hogy az így nyert két egyenes párhuzamos.

1072. Szerkesszünk érintőt a háromszög köré írt körhöz az egyik csúcsban, és messük el a csúcshoz tartozó két oldalt ezzel párhuzamos egyenessel. Mutassuk meg, hogy a háromszögből így lemetszett négyszög húrnégyszög.

1073. Mutassuk meg, hogy ha négy kör bármelyike két másikat (és csak kettőt) kívülről érint, akkor a négy érintési pont egy körön van.

1074. Négy kör az 1074. ábrán látható módon metszi egymást úgy, hogy a külső A, B, C, D metszéspontok egy körön vannak. Igazoljuk, hogy a belső A', B', C', D' metszéspontnégyes is egy körön van.

1074



1075. Bizonyítsuk be, hogy egy húrnégyszög két pár szemközti oldalegyenese – feltéve, hogy nem párhuzamosak – olyan két szöget zár közre, melyeknek felezői merőlegesek egymásra.

1076. Két kör A-ban és B-ben metszi egymást. Az A ponton át két szelőt húzunk; ezek másodszor a C és D, illetőleg E és F pontokban metszik a köröket. EC és DF metszéspontja G. Igazoljuk, hogy a G, C, D, B pontok egy körön vannak.

1077. Négy egyenes négy háromszöget határoz meg. Igazoljuk, hogy e négy háromszög köré írt négy kör egy ponton megy át.

1078. Állítsunk merőlegeseket egy háromszög oldalegyeneseire a köré írt kör egy pontjából. Igazoljuk, hogy ezek talppontjai egy egyenesen vannak. (*Simson*-egyenes.)

1079. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körön vannak.

1080. Tükrözzük a háromszög magasságpontját az egyik oldalra. Mekkora szögben látszik a tükörképből a szóban forgó oldal?

1081. Tükrözzük a háromszög magasságpontját az oldalfelező pontokra, és bizonyítsuk be, hogy a tükörképek a háromszög köré írt körön vannak.

1082. Kössük össze a háromszög magasságpontját a csúcsokkal. Így az eredetivel együtt négy háromszög keletkezik. Bizonyítsuk be, hogy az ezek köré írt körök egyenlő sugarúak.

1083. Egy ABC háromszög belsejében szerkesszünk olyan P pontot, hogy $PBC\sphericalangle = PCA\sphericalangle = PAB\sphericalangle$ legyen. (A háromszög *Brocard*-féle pontja.)

1084. Egy érintőnégyszög három oldala (ebben a sorrendben) 3 cm, 4 cm, 5 cm. Mekkora a negyedik oldal?

1085. Igazoljuk, hogy a deltoid érintőnégyszög.

1086. A paralelogrammák közül melyek érintőnégyszögek?

1087. Bizonyítsuk be, hogy az érintőhatszög három-három nem szomszédos oldalának összege egyenlő.

1088. Bizonyítsuk be, hogy a páros oldalszámú érintősokszög nem szomszédos oldalainak összege egyenlő.

1089. Van-e olyan deltoid, amely egyszerre húr- és érintőnégyszög is? Mi a feltétele ennek?

1090. Igazoljuk, hogy a rombusz beírt körének az oldalakkal való érintési pontjai téglalapot határoznak meg.

1091. Szerkesszünk rombuszt, ha adott az oldala és a beírt kör sugara.

1092. Szerkesszünk érintőnégyszöget, ha adott a beírt kör sugara és

a) két oldala és a közbezárt szög,
b) három szöge.

1093. Szerkesszünk adott kör köré érintőtrapézt, ha adottak a szárai.

1094. Bizonyítsuk be, hogy trapézba akkor és csak akkor írható az oldalakat érintő kör, ha a szárak mint átmérő fölé írt körök érintik egymást.

1095. Adott egy körön három pont: A, B, C. Szerkesszünk D pontot a körön úgy, hogy $ABCD$ érintőnégyszög legyen.

1096. Bizonyítsuk be, hogy egy érintőnégyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha a szemközti érintési pontokat összekötő egyenesek merőlegesek egymásra.

A HASONLÓSÁG FOGALMA, KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG

1097. Nagyítsunk egy háromszöget a sík egy adott pontjából

a) kétszeresére,
b) háromszorosára,
c) háromkettedszeresére,
d) öthetedszeresére.

1098. Nagyítsunk egy háromszöget súlypontjából

a) kétszeresére,
b) kétharmadszorosára.

1099. Rajzoljunk hatszöget, és vegyünk fel a belsejében egy pontot. E pontból

a) nagyítsuk az idomot háromszorosára,
b) kicsinyítsük felére.

1100. Rajzoljunk ötszöget. Szerkesszük meg két átlójának metszéspontját. E pontból

a) kicsinyítsük az ötszöget harmadára,
b) nagyítsuk az idomot kétszeresére.

1101. Szerkesszünk négyzetet, és az egyik oldalon kijelölt pontból szerkesszük meg

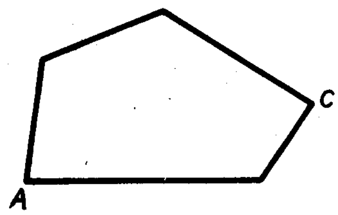
a) háromszoros nagyítását,
b) felére kicsinyítését.

1102. Kicsinyítsünk egy háromszöget mindegyik csúcsából felére. Milyen alakzatot nyerünk?

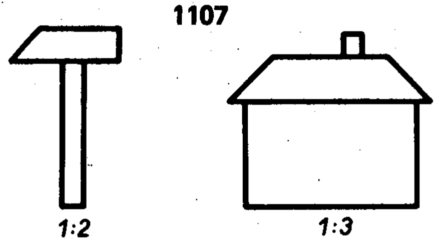
1103. Rajzoljunk tetszés szerinti négyszöget. Hosszabbítsuk meg egyik oldalát, és ennek megfelelően szerkesszük meg a nagyított négyszöget.

1104. Rajzoljunk derékszögű trapézt. Az egyik alapon a derékszögű csúcsból kiindulva jelöljünk ki egy szakaszt. Szerkesszük meg a trapéz kicsinyített képét úgy, hogy az így kapott kép egyik alapja az adott szakasszal legyen egyenlő.

1105



1107



1105. Az ábra ötszögét kicsinyítsük felére úgy, hogy

a) az A pontot, majd
b) a C pontot tartjuk rögzítve (1105. ábra).

1106. Rajzoljunk ötszöget, melynek egyik oldalán két derékszög van. Ezen az oldalon jelöljünk ki egy pontot. Szerkesszük meg az ötszög két kicsinyített képét úgy, hogy a kapott kép alapja az alap egy-egy szakaszával legyen egyenlő.

1107. Szerkesszük meg az 1107. ábrán látható idomok nagyítását. A nagyítás arányát az ábra alá írt arányszám jelzi.

1108. Adott egy O pont és egy e egyenes, továbbá AB szakasz. Az O pontból nagyítsuk az AB-t úgy, hogy egyik végpontja e-re essék.

1109. Adott egy kör, rajta kívül egy O pont, továbbá a kör belsejében egy AB szakasz. Az O pontból nagyítsuk AB-t úgy, hogy egyik végpontja a körön legyen.

1110. Nagyítsunk egy háromszöget a sík egy adott pontjából úgy, hogy egyik oldala egy előre kitűzött ponton menjen át.

1111. Nagyítsunk egy négyszöget egy előre kitűzött pontból úgy, hogy egyik csúcsa adott egyenesre essék.

1112. Szerkesszünk négyzetet, és rajzoljunk rajta kívül egy oldalával párhuzamos egyenest. Vegyünk fel

a) a négyzet belsejében,
b) a négyzet kerületén,
c) a négyzeten kívül egy pontot, és ebből szerkesszük meg azt a nagyítását, amelynek egyik oldala a megrajzolt egyenesre esik.

1113. Szerkesszünk négyzetet, és rajzoljunk két szomszédos oldallal párhuzamos egyeneseket. Keressük meg az egyik (majd a másik) átlónak azt a pontját, amelyből a négyzetnek olyan nagyítása szerkeszthető, melynek két oldala a megrajzolt egyenesekre esik.

1114. Egy téglalap belsejében rajzoljunk négyzetet, melynek oldalai sorra párhuzamosak a téglalap oldalaival. Szerkesszünk olyan pontot, melyből a négyzetet úgy lehet felnagyítani, hogy a nagyítás három oldala a téglalap három oldalára essék.

1115. Egy négyzet belsejébe rajzoljunk téglalapot, melynek oldalai párhuzamosak a négyzet oldalaival. Szerkesszünk olyan pontot a négyzet belsejében, amelyből a négyzetet úgy lehet lekicsinyíteni, hogy a kicsinyített négyzet három oldala a téglalap három oldalára essék.

1116. Egy háromszög egyik oldala fölé szerkesszünk négyzetet. Az oldallal szemközti csúcsból kicsinyítsük le a négyzetet úgy, hogy csúcsai a háromszög oldalaira essenek.

1117. Egy háromszög egyik oldala fölé szerkesszünk az eredeti háromszöggel egybevágó háromszöget. Az oldallal szemközti csúcsból kicsinyítsük le a háromszöget oly módon, hogy csúcsai a háromszög oldalaira essenek.

1118. Egy egyenlő szárú háromszög alapja fölé szerkesszünk szabályos háromszöget. Az alappal szemközti csúcsból kicsinyítsük le a háromszöget úgy, hogy csúcsai a háromszög oldalaira essenek.

1119. Rajzoljunk háromszöget, majd az egyik oldallal párhuzamosan egy szakaszt. Szerkesszük meg a vetítési középpontot úgy, hogy az adott szakasz a vele párhuzamos háromszögoldal nagyított képe legyen, majd hajtsuk végre a nagyítást.

1120. Rajzoljunk négyszöget, és vegyünk fel akkora szakaszt, amekkorára egyik oldalát kicsinyíteni akarjuk. Helyezzük el a szakaszt ezzel az oldallal párhuzamosan. Szerkesszük meg a vetítési középpontot, és hajtsuk végre a kicsinyítést.

1121. Rajzoljunk ötszöget és belsejében vegyünk fel egyik oldalával párhuzamosan egy szakaszt. Szerkesszük meg az ötszög kicsinyített képét úgy, hogy a kicsinyített kép egyik oldala a felvett szakasz legyen.

1122. Rajzoljunk egy háromszöget, és egy szakasszal jelöljük ki, hogy az egyik oldalt mekkorára akarjuk kicsinyíteni. A kicsinyítés középpontját előre vegyük fel, és hajtsuk végre a szerkesztést.

1123. Az O középpontú kört nagyítsuk (ill. kicsinyítsük) egy előre kitűzött A pontból úgy, hogy a kör középpontja az OA egyenes adott O' pontjába essék.

1124. Adott egy ABC háromszög és egy egyenes. Az egyenesen vegyünk fel tetszés szerinti A' és B' pontokat. Szerkesszünk az ABC háromszöghöz hasonló $A'B'C'$ háromszöget úgy, hogy az $A'B'C'$ körüljárási iránya

a) egyenlő,
b) ellenkező

legyen ABC körüljárási irányával.

1125. Adott háromszög egyik oldala fölé szerkesszünk szabályos háromszöget. Szerkesszünk az adott háromszögbe szabályos háromszöget a megadott szabályos háromszögéhez hasonló helyzetben.

1126. Adott egy egyenlő szárú és egy derékszögű háromszög.

a) Szerkesszünk a derékszögű háromszög oldalai mint alapok fölé az egyenlő szárúhoz hasonló háromszögeket.
b) Szerkesszünk az egyenlő szárú háromszög oldalai mint átfogók fölé a derékszögűhöz hasonló háromszögeket, mégpedig úgy, hogy ezeknek körüljárási iránya az eredetivel megegyezzék.

1127. Adott derékszögű háromszög átfogója fölé szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy alapja az átfogóra essék, továbbá a háromszög szára másfélszerese legyen az alapnak. Szerkesszünk a derékszögű háromszögbe a szerkesztett egyenlő szárú háromszöghöz hasonló helyzetű háromszöget.

1128. Rajzoljunk egy háromszöget és egy téglalapot. Szerkesszünk a háromszög oldalai fölé a megadotthoz hasonló téglalapokat, amelyeknek hosszabbik oldala egy-egy háromszögoldal.

1129. Adott egy téglalap. Egy egyenessel vágjunk le belőle olyan téglalapot, amely az eredetihez hasonló.

1130. Adott paralelogrammához illesszünk hozzá egy paralelogrammát úgy, hogy a kettő együtt az eredetihez hasonló legyen.

1131. Adott hegyesszögű háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy az eredetihez hasonló háromszöget messen le a háromszögből.

1132. Egy háromszög egyik oldalához illesszünk egy olyan háromszöget, mely az elsővel együtt az eredetihez hasonló háromszöget ad.

1133. Szerkesszünk adott háromszögbe négyzetet úgy, hogy a négyzet csúcsai a háromszög oldalain legyenek.

1134. Szerkesszünk adott háromszögbe téglalapot, melynek oldalainak aránya 2:3.

1135. Adott egy kör és három irány. Szerkesszük meg azt a háromszöget, melynek oldalai az adott irányokkal párhuzamosak, csúcsai pedig a kör kerületére esnek.

1136. Adott egy négyzet és egy téglalap. Szerkesszünk téglalapot, melynek csúcsai a négyzet különböző oldalaira esnek, és amely hasonló a megrajzolt téglalaphoz.

1137. Adott az ABC és az XYZ háromszög. Szerkesszünk az ABC háromszögbe az XYZ háromszöghöz párhuzamos helyzetű hasonló háromszöget.

1138. Adott egy háromszög. Szerkesszünk hozzá hasonló, de 90°-kal

a) balra,
b) jobbra

elforgatott háromszöget, melynek csúcsai az adott háromszög különböző oldalaira esnek.

1139. Adott körcikkbe szerkesszünk kört, mely a határoló sugarakat és a körívet is érinti.

1140. Adott körcikkbe szerkesszünk négyzetet, melynek két csúcsa a köríven, másik kettő a határoló sugarakon helyezkedik el.

1141. Adott körszeletbe szerkesszünk négyzetet úgy, hogy két csúcsa a határoló köríven, kettő pedig a határoló egyenesen legyen.

1142. Adott egy szög és szárai között egy P pont. Szerkesszünk kört, amely a szögszárakat érinti, és átmegy az adott P ponton.

1143. Adott egy e egyenes és rajta kívül egy pont. Szerkesszünk egy adott f egyenesen olyan pontot, mely egyenlő távol van a kitűzött ponttól és egyenestől.

1144. Adott egy szög szárai között egy pont, továbbá egy irány és egy szög. Szerkesszünk háromszöget, melynek a kitűzött pont egyik csúcsa, a csúcsban levő szög az adott α szöggel egyenlő, szemközti oldala pedig a kijelölt iránnyal párhuzamos, és végpontjai a megrajzolt szög száraira esnek.

1145. Adott egy tetszőleges négyszög. Szerkesszünk olyan rombuszt, melynek csúcsai a négyszög oldalaira esnek, oldalai pedig az átlókkal párhuzamosak.

1146. Cáfoljuk meg a következő állításokat: Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha megegyeznek

a) egyik szögükben,
b) száraik arányában.

1147. Bizonyítsuk be, hogy létezik két olyan hasonló, de nem egybevágó háromszög, amelyek megegyeznek két oldalban.

1148. Bizonyítsuk be, hogy két háromszög hasonló, ha megegyeznek

a) egy szögben és a szöghöz tartozó szögfelezőnek, valamint a szöget közrefogó egyik oldalnak az arányában,
b) két-két oldaluk és a harmadikhoz tartozó súlyvonal arányában.

1149. Bizonyítsuk be, hogy két háromszög hasonló, ha megegyeznek egy szögükben, és a szög csúcsából kiinduló magasságvonal a szöget mindkét háromszögben ugyanakkora részekre bontja.

1150. Mutassuk meg, hogy az előző feladat állítása nem igaz, ha benne magasságvonal helyett szögfelezőt veszünk.

1151. Mutassuk meg, hogy két négyszög hasonlóságához általában nem elegendő a szögeik egyenlősége.

1152. Igazoljuk, hogy két téglalap hasonló, ha szomszédos oldalaik aránya egyenlő.

1153. Bizonyítsuk be, hogy két négyzet mindig hasonló.

1154. Bizonyítsuk be, hogy két téglalap hasonló, ha átlóik egyenlő szöget zárnak be.

1155. Mutassuk meg, hogy két rombusz hasonló, ha egy-egy szögükben megegyeznek.

1156. Mutassuk meg, hogy két paralelogramma hasonló, ha megegyeznek két szomszédos oldal arányában és a közbezárt szögben.

1157. Mutassuk meg, hogy két paralelogramma hasonló, ha megegyeznek átlóik arányában és az átlók szögében.

1158. Mutassuk meg, hogy a háromszög egyik oldalával a háromszög belsejében párhuzamosan húzott szakaszokat az oldalhoz tartozó súlyvonal felezi.

1159. Igaz-e, hogy két szimmetrikus trapéz hasonló, ha megegyeznek szögeikben?

1160. Egy háromszög oldalainak aránya 4:5:6, a hozzá hasonló háromszög legkisebb oldala 0,8 cm. Határozzuk meg az utóbbi háromszög másik két oldalának hosszát.

1161. A háromszöget, melynek oldalai: $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 2{,}5$ cm, felnagyítottuk. A nagyításban az a oldalnak megfelelő a' oldal 8,4 cm hosszú. Mekkora a másik két oldal a nagyításban?

1162. Két hasonló háromszög közül az egyik oldalai 9, 12, 16 cm. A másik háromszög leghosszabb oldala 1 cm. Mekkora a másik két oldal?

1163. Két egyenlő szárú háromszög csúcsnál fekvő szöge egyenlő. Az egyik háromszög alapja 10 cm, szára 17 cm, a másik háromszög alapja pedig 8 cm. Határozzuk meg a másik háromszög szárának a hosszát.

1164. Egy gyárkémény árnyéka 35,8 m, ugyanakkor a merőlegesen földbe szúrt 1,9 m hosszú karónak az árnyéka 1,62 m. Határozzuk meg a gyárkémény magasságát.

1165. Egy ház tervrajzán egy 5 m hosszú szoba 2 cm. A szoba 3,8 m szélességének a tervrajzon hány cm felel meg?

1166. Egy háromszög oldalainak aránya 3:4:5. Határozzuk meg annak a hozzá hasonló háromszögnek az oldalait, melynek legnagyobb oldala 3 cm-rel hosszabb a legrövidebbnél!

1167. Egy háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 2:4:5, a hozzá hasonló háromszög kerülete 55 m. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát.

1168. Az ABC háromszögben $c = 15$ m, $b = 20$ m. A c oldalra A-ból kiindulva 9 m-t, a b oldalra A-ból kiindulva 12 m-t mérünk rá. Az így kapott $A'B'C'$ háromszög hasonló-e az eredeti ABC háromszöghöz?

1169. Egy háromszög oldalai 0,8 m, 1,6 m és 2 m, a hozzá hasonló háromszög kerülete 5,5 m. Határozzuk meg az utóbbi háromszög oldalainak hosszát!

1170. Egy háromszög kerülete a hozzá hasonló háromszög kerületének $\frac{11}{13}$-a. Két megfelelő oldal különbsége 1 m. Határozzuk meg a két háromszög megfelelő oldalainak hosszát.

1171. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekről azt tudjuk, hogy $\beta = \beta_1$ és a β szög szárai 2,5-szer nagyobbak, mint a β_1 szög szárai. Határozzuk meg a b és b_1 oldalak hosszát, ha tudjuk, hogy összegük 4,2 cm.

1172. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek szögei megegyeznek. Határozzuk meg a b' és c, illetve c' oldalak hosszát, ha tudjuk, hogy

a) $a = 10$ cm, $b = 14$ cm, $a' = 25$ cm, $c' = 20$ cm,
b) $a = 35$ cm, $a' = 21$ cm, $c - c' = 8$ cm.

1173. Hasonlók-e az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek, ha oldalaik hossza:

a) $a=1$ m, $b=1{,}5$ m, $c=2$ m; $a'=10$ cm, $b'=15$ cm, $c'=20$ cm;
b) $a=1$ m, $b=2$ m, $c=15$ dm; $a'=12$ dm, $b'=8$ dm, $c'=16$ dm;
c) $a=1$ m, $b=2$ m, $c=1{,}25$ m; $a'=10$ cm, $b'=9$ cm, $c'=16$ cm.

1174. Egy négyszög oldalai: $a = 1{,}2$ cm, $b = 1{,}8$ cm, $c = 2{,}4$ cm, $d = 3{,}3$ cm. Kicsinyített képén $d' = 2{,}2$ cm. Mekkorák a kicsinyített kép többi oldalai?

1175. Egy négyszög oldalai 10 cm, 15 cm, 20 cm és 25 cm. A hozzá hasonló négyszögben a legnagyobb és legkisebb oldal összege 28 cm. Határozzuk meg ez utóbbi négyszög oldalainak hosszát.

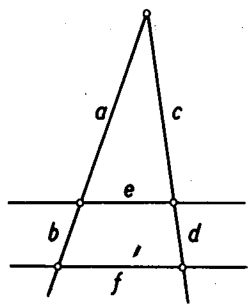
1176. Egy négyszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$. A hozzá hasonló négyszög kerülete 75 cm. Határozzuk meg az utóbbi négyszög oldalainak hosszát!

1177. Egy ötszög oldalai 35 cm, 14 cm, 28 cm, 21 cm és 42 cm. A hozzá hasonló ötszög legkisebb oldala 12 cm. Határozzuk meg a többi oldal hosszát!

1178. Két hasonló sokszög leghosszabb oldala 35 mm és 14 mm, kerületük különbsége 60 mm. Határozzuk meg a két sokszög kerületének hosszát!

1179. Egy szög szárait párhuzamosokkal metszettük el. Jelöljük a keletkezett szakaszokat rendre *a, b, c, d, e, f*-fel (1179. ábra). Töltsük ki a mellékelt táblázat üresen hagyott helyeit.

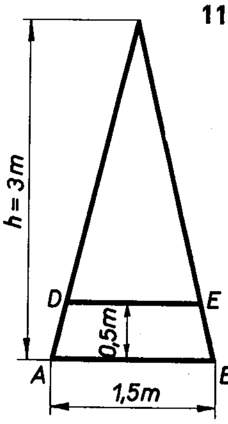
a	7	10		10
b	4			
c	9	11		11
d		6	4	3
e	6	8	7	
f			10	9



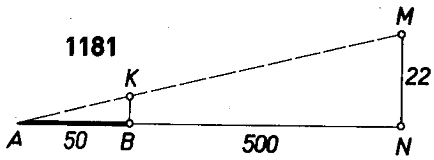
1179

1180. A bakállványokon nyugvó hadihidak építésénél – hogy a híd súlya az alapra egyenletes nyomást gyakoroljon – a baklábak A és B talpaihoz egy AB deszkát szegeznek, és minden lábpárt kötéssel kötnek össze. Megkeresendő a DE kötés hossza, ha tudjuk, hogy a bak magassága $h = 3$ m, a deszka hossza $AB = 1{,}5$ m, és a kötés az AB deszkától 0,5 m távolságra van erősítve (1180. ábra).

1180



1181



1181. Egy nyílt útszakasz 50 m széles AB sávon fekszik; az ellenség megfigyelője az $MN = 22$ m-es magaslaton helyezkedett el. Milyen magas KB álcázatot kell a magaslattól 500 m-re építeni, hogy a megfigyelőnek az út betekintését megakadályozzuk (1181. ábra)?

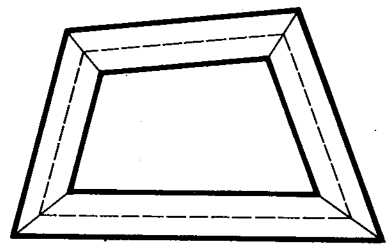
1182. Adott az ABC háromszögben az AC-vel párhuzamos DE távolság (D az AB-n, E a CB-n helyezkedik el). Meghatározandó

a) AD, ha $AB = 16$ cm, $AC = 2$ dm és $DE = 15$ cm;

b) $AD{:}BD$, ha $AC{:}DE = \frac{5}{7}{:}\frac{4}{11}$.

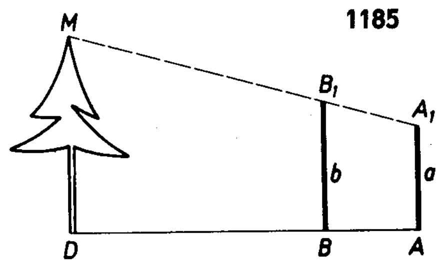
1183. Az 1183. ábrán látható két négyszög egy-egy oldala párhuzamos. Kössük össze a megfelelő csúcsokat. Az egyik ilyen összekötő vonal egy tetszés szerinti pontjából induljunk az oldallal párhuzamosan, míg a legközelebbi összekötő vonalig nem érünk. Innen a következő oldallal és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy ilyen módon a kiindulási ponthoz jutunk vissza.

1183



1184. Négy párhuzamos egyenes távolságainak aránya sorra 2:3:4. Az adott egyeneseket két – nem párhuzamos – egyenessel elmetszve, a keletkezett párhuzamos metszetek közül a szélsők hossza 60 cm és 96 cm. Határozzuk meg a középső metszetek hosszát!

1185. Egy fa magasságát akarjuk megmérni oly módon, hogy a fa törzsétől ugyanazon irányban két karót szúrunk a földbe úgy, hogy azok A_1 és B_1



1185

végpontjai a fa M tetőpontjával egy egyenesbe essenek (1185. ábra).

a) Keressük meg a fa magasságát, ha az $AD = l$, $AB = n$ és a karók a, b magasságai ismeretesek.

b) Milyen magas a fa, ha $l = 22$ m, $n = 1{,}5$ m, $a = 2$ m és $b = 2{,}5$ m?

1186. Adottak az a, b és a' szakaszok. Szerkesszük meg a b' szakaszt úgy, hogy eleget tegyen az $a:b = a':b'$ összefüggésnek.

1187. Adott szakaszt osszunk fel olyan részekre, amelyeknek aránya:

a) $2:3$; *b)* $5:7$; *c)* $2\frac{2}{3}:5\frac{1}{3}$; *d)* $4\frac{1}{3}:3\frac{2}{5}$;

e) $2:3:4$; *f)* $5:7:8$; *g)* $\frac{2}{3}:1\frac{1}{3}:4$; *h)* $1\frac{1}{5}:\frac{2}{5}:2\frac{2}{3}$.

1188. Rajzoljunk háromszöget, és mindhárom oldalát osszuk fel:

a) 3 egyenlő részre,

b) 6 egyenlő részre,

c) $2:3$ arányú részekre.

1189. A háztetőt fedő cserepeket az eresszel párhuzamosan futó, egymástól egyenlő távolságban levő lécekre rakják. Milyen hosszúak az egyes lécek azon a háromszög alakú tetősíkon, amelynek ereszvonala 6,8 m, ha a tetősíkon nyolc cseréptartó léc van?

1190. Rajzoljunk téglalapot, jelöljük ki egy csúcsát. Határozzuk meg a kerület két pontját úgy, hogy a három pont a kerületen mérve egymástól egyenlő távol legyen.

1191. Rajzoljunk négyzetet és egy téglalapot. A téglalapot nagyítsuk akkorára, hogy kerülete egyezzék a négyzet kerületével.

1192. Adott egy trapéz és egy téglalap. A trapézt nagyítsuk (kicsinyítsük) akkorára, hogy kerülete a téglalap kerületével legyen egyenlő.

1193. Adott egy téglalap és egy háromszög. A téglalap egyik oldalán vegyünk fel egy pontot, a kerületen pedig szerkesszünk másik kettőt úgy, hogy a kerület három darabjának aránya megegyezzék a háromszög oldalainak arányával.

1194. Adott háromszög egyik csúcsához határozzuk meg a kerületnek egy olyan pontját, hogy a két pont a kerületet

a) $2:3$, *c)* $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}$,

b) $5:6$, *d)* $\sqrt{2}:2$

arányban levő szakaszokra ossza.

1195. *a)* Adott háromszöghöz szerkesszünk hasonlót úgy, hogy kerülete adott szakasszal legyen egyenlő.

b) Oldjuk meg a feladatot számolással is, ha az adott háromszög oldalai: $a = 2$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm; az adott kerület: $k' = 26$ cm. Határozzuk meg az a', b', c' szakaszok hosszát!

1196. Szerkesszünk háromszöget, ha adott α és β, továbbá

a) $2s$, *b)* $a+b$, *c)* $a-b$,
d) $2a-b$, *e)* $2a+b$.

1197. Szerkesszünk derékszögű háromszöget a következő adatokból:

a) $a+b$, α *b)* $a-b$, α, *c)* $a+c$, α, *d)* $c-a$, α,
e) $2s$, α, *f)* $b+c$, β, *g)* $c-b$, β, *h)* $2s$, β.

1198. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget a szárak között levő szögből, továbbá

a) a kerületből,
b) az alap és egy szár összegéből,
c) az alap és egy szár különbségéből.

1199. *a)* Adott derékszögű háromszöget nagyítsunk fel úgy, hogy a nagyításban a befogók összege adott szakasszal legyen egyenlő.
b) Végezzük el a nagyítást abban az esetben, ha az adott háromszög egyenlő szárú, és a nagyított szárak összege adott.

1200. Adott négyzetet nagyítsunk fel úgy, hogy

a) az átló és az oldal összege,
b) az átló és az oldal különbsége

adott szakasszal legyen egyenlő.

1201. Szerkesszünk négyzetet, ha adott

a) az átló és oldal összege,
b) az átló és oldal különbsége.

1202. Egy paralelogramma oldalai $a = 7$ cm, $b = 4$ cm hosszúak. A b oldallal párhuzamos e szelő a paralelogrammából az eredetihez hasonló paralelogrammát metsz le. Határozzuk meg az új paralelogramma oldalainak hosszát.

1203. Egy gyár padlókészítéshez olyan szabvány téglalap alakú cementtáblákat tervezett, melyeket hosszabbik oldalukhoz tartozó középvonaluk az eredeti téglalaphoz hasonló téglalapokra vág szét. Határozzuk meg a cementtáblák oldalainak arányát.

1204. Egy paralelogramma oldalai 20 cm és 16 cm hosszúak. A hosszabb oldalak távolsága 8 cm. Határozzuk meg a rövidebb párhuzamosok távolságát.

1205. Egy paralelogramma kerülete 48 cm, magasságainak aránya 5:7. Mekkorák az oldalak?

1206. Egy ABC háromszög a oldalának hossza 5 cm, b oldalának hossza 4 cm.

a) Határozzuk meg a b oldalhoz tartozó magasság hosszát, ha az a oldalhoz tartozó magasság 2 cm hosszú.
b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is! (Adott a, b, m_a; $m_b = $?)

1207. Egy ABC háromszög két oldalának hossza: $a = 16$ cm, $b = 12$ cm. Az a oldalhoz és b oldalhoz tartozó magasságok összege 14 cm. Határozzuk meg a két magasságvonal hosszát.

1208. Szerkesszünk adott háromszögbe paralelogrammát úgy, hogy egyik szögük közös legyen. Határozzuk meg a paralelogramma oldalainak hosszát, ha a szöget közrefogó háromszögoldalak 20 cm és 25 cm hosszúak, és az ezen oldalakra illeszkedő paralelogrammaoldalak aránya 6:5.

1209. Egy háromszög alapja 48 cm, magassága 16 cm. Szerkesszünk a háromszögbe (az alapon nyugvó) téglalapot, melynek oldalai 5:9 arányúak. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.

1210. Szerkesszünk adott háromszögbe téglalapot, melynek oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint $m:n$. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát, ha a háromszög alapja a, az a oldalhoz tartozó magassága h.

1211. Adott a alapú és h magasságú háromszögbe szerkesszünk négyzetet oly módon, hogy két csúcsa a háromszög alapjára, másik két csúcsa pedig az oldalakra illeszkedjék. Határozzuk meg a négyzet oldalának hosszát!

1212. Egy ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza: $a = 12$, $b = 6$ cm, az a oldallal szemközti szöge α. Szerkesszünk az A csúcson keresztül szelőt, mely az a oldallal α szöget alkot. Mekkora részekre bontja a D pont az a oldalt?

1213. Az ABC háromszög B csúcsán keresztül szerkesztett szelő a b oldalt D pontban, β szög alatt metszi. A D pont a b oldalt 7 cm és 9 cm hosszú szakaszokra osztja. Határozzuk meg a háromszög c oldalának hosszát, továbbá a BD és BC szakaszok arányát.

1214. Egy ABC háromszög B csúcsán keresztül szerkesszünk szelőt úgy, hogy a szelő c oldallal alkotott hajlásszöge megegyezzék a háromszög C csúcsánál levő γ szöggel. A szelő b oldallal alkotott metszéspontját jelöljük D-vel.

a) Határozzuk meg az AD és DC szakaszok hosszát, ha a háromszög két oldala: $c = 2$ cm és $b = 4$ cm.
b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

1215. Két, egymást kívülről érintő kör érintési pontján keresztül húzott szelő által kimetszett húrok aránya 13:5.

a) Határozzuk meg a sugarak hosszát, ha a középpontok távolsága 36 cm.
b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is, ha a középpontok távolsága d, és a húrok aránya $a:b$.

1216. Egy a alapú és h magasságú háromszögbe szerkesszünk félkört oly módon, hogy átmérője az alappal párhuzamos legyen, továbbá a félkör érintse az alapot. Határozzuk meg a kör sugarának hosszát!

1217. Egy háromszög alapja 30 cm, a hozzá tartozó magasság 10 cm. Szerkesszünk a háromszögbe egyenlő szárú derékszögű háromszöget úgy, hogy átfogója az alappal párhuzamosan helyezkedjék el, derékszögű csúcsa pedig illeszkedjék az alapra. Határozzuk meg a derékszögű háromszög átfogójának (oldalainak) hosszát.

1218. Adott egy háromszög b, c oldala és α szöge. Szerkesszünk a háromszögbe rombuszt oly módon, hogy az α szög közös legyen. Határozzuk meg a rombusz oldalának hosszát.

1219. Adott ABC háromszögben szerkesszünk az AC oldallal párhuzamos MN szakaszt úgy, hogy $AM = BN$ legyen. Fejezzük ki az MN szakasz hosszát a háromszög a, b, c oldalaival.

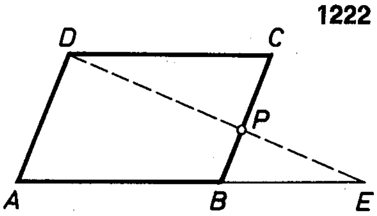
1220. Az ABC háromszög AC oldalával húzott párhuzamos az AB oldalt D, a BC-t E pontban metszi. Határozzuk meg DE hosszát, ha adott a háromszög oldalainak hossza, továbbá az $AD+CE$ összeg. A háromszög oldalai: $AB = 24$ cm, $BC = 32$ cm, $AC = 28$ cm és $AD+CE = 16$ cm.

1221. *a)* Az $ABCD$ paralelogramma két szomszédos oldala: $AB = 20$ cm, $BC = 5$ cm. Az AB-t hosszabbítsuk meg B-n túl 5 cm-rel, így egy E pontot kapunk. A DE egyenes a BC oldalt P-ben metszi. Mekkora a CP szakasz?

b) Fejezzük ki a CP távolság hosszát, ha a paralelogramma oldalai a, ill. b cm hosszúak.

1222. Egy $ABCD$ paralelogramma AB oldala 4,2 cm. A BC oldalon levő P pont 5:7 arányú részekre osztja a b oldalt. Az AB oldalt mennyivel kell meghosszabbítani, hogy az E végpontjából húzott PE szelő átmenjen a paralelogramma felső D csúcsán? (1222. ábra.)

1222

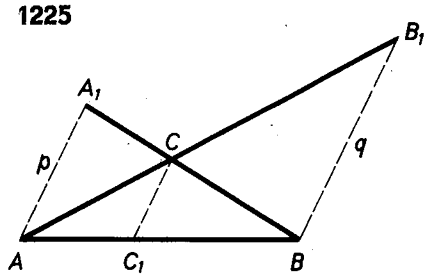


1223. Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának E pontjából húzzunk párhuzamost a BC oldallal. Határozzuk meg, hogy ez a párhuzamos mekkora részekre osztja az a oldalt, ha az E pont az AC átlót $m:n$ arányú részekre osztja?

1224. Adott egy paralelogramma alapja: a, az AC átlón egy E pont, továbbá az $AE:CE = m:n$ arány. Határozzuk meg, hogy DE szelő mekkora szakaszt metsz le az a oldal meghosszabbításából?

1225. *a)* Az ABC háromszög $AB = c$ alapján felveszünk egy C_1 pontot, és ezt összekötjük a szemközti csúccsal. Az ezzel az egyenessel az alap végpontjaiból párhuzamosan húzott egyenesek A_1 és B_1 pontokban metszik a másik két oldal meghosszabbítását. Ha $AA_1 = p = 2$, és $BB_1 = q = 3$, mekkora akkor $CC_1 = x$? (1225. ábra.)

1225

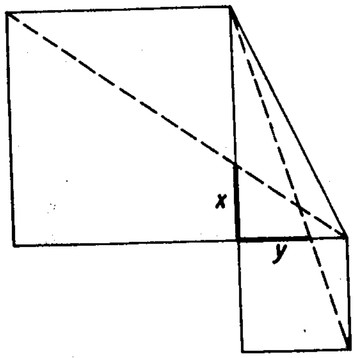


b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is!

1226. Egy 120°-os szög két szárát és szögfelezőjét metszi az AB egyenes. Számítsuk ki, hogy a szögfelezőnek a szög C csúcsától az AB egyenesig terjedő CC_1 darabja milyen hosszú, ha ismerjük a 120°-os szög két szárának a csúcstól az egyenesig terjedő $CA = p$ és $CB = q$ darabját.

1227. Derékszögű háromszög befogói fölé rajzoljunk négyzeteket. Kössük össze az átfogó két végpontját a szemközti négyzet távolabbi szögpontjával. Igazoljuk, hogy ezek az összekötő vonalak a befogókból egyenlő darabokat metszenek le a derékszög csúcsa mellett (1227. ábra).

1227



1228. Egy egyenlő szárú trapéz hosszabbik alapja 6 cm, szára 2 cm hosszú. Határozzuk meg a másik alap hosszát, ha tudjuk, hogy a trapéz kiegészítő háromszögének szára 5 cm hosszú.

1229. Egy trapéz párhuzamos oldalainak aránya 5:9. Az egyik szár 16 cm hosszú. Mennyire kell ezt a szárat meghosszabbítani, hogy a másik szár meghosszabbítását metssze?

1230. Egy trapéz alapjainak hossza 2 cm és 3 cm. A szárak meghosszabbításával keletkezett „kiegészítő" háromszög oldalai 5 és 4 cm hosszúak. Határozzuk meg a trapéz szárainak hosszát.

1231. Egy trapéz oldalai: $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $c = 3$ cm, $d = 4$ cm (a és c alapok).

a) Számítsuk ki a kiegészítő háromszög ismeretlen oldalait.

b) Végezzük el a számítást általánosan is!

1232. Egy trapéz alapjai 12 cm és 27 cm hosszúak. Az egyik szár a hosszabbik alappal ugyanakkora szöget alkot, mint amekkorát a másik szár a hosszabbik alappal való metszéspontjából induló átlóval bezár. Határozzuk meg az utóbbi átló hosszát.

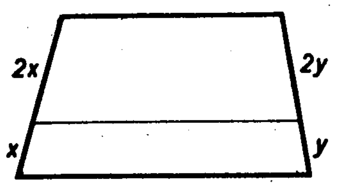
1233. Bizonyítsuk be, hogy egy trapéz átlói a párhuzamos oldalak arányában osztják egymást.

1234. Egy trapéz hosszabbik alapja 5 cm, továbbá az egyik átló a másikat 3:1 arányú részekre osztja. Határozzuk meg a másik alap hosszát!

1235. A trapéz 27 cm-es átlója a másik átlót 8 cm-es és 1 cm-es részekre osztja. Határozzuk meg; hogy az utóbbi átló mekkora részekre osztja a 27 cm-es átlót?

1236. Egy trapéz egyik átlója a másikat $0{,}3:\frac{2}{3}$ részekre osztja. Ismeretes továbbá a trapéz középvonala: 29 cm. Határozzuk meg az alapok hosszát és a másik átló szeleteinek arányát.

1237



1237. Egy trapéz párhuzamos oldalai 9 és 12 cm hosszúak. Egy ezekkel párhuzamos szakasz a szárakat az 1237. ábrán látható módon 1:2 arányban osztja.

a) Milyen hosszú részekre osztja a trapéz egyik átlója ezt a szakaszt?

b) Milyen hosszú maga a szakasz?

1238. Egy adott trapéz szárait (a hosszabbik alap végpontjából kiindulva) osszuk fel 2:3 arányú részekre. A szárakon kapott osztópontokat kössük össze. Bizonyítsuk be, hogy az osztópontokat összekötő szakasz párhuzamos az alappal, és hossza $\frac{3a+2b}{5}$ (a a hosszabbik, b a rövidebbik alap).

1239. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b. Egy ezekkel párhuzamos szakasz a szárakat $m:n$ arányban osztja (m az a oldalhoz közelebb eső osztásarányt jelöli).

a) Milyen hosszú részekre osztja a trapéz egyik átlója ezt a szakaszt?

b) Milyen hosszú maga a szakasz?

1240. A trapéz párhuzamos oldalai 12 és 8 cm, szárai 4 és 3 cm hosszúak. Számítsuk ki azoknak a szakaszoknak a hosszát, amelyek ezekkel párhuzamosak, és a trapéz szárait hat egyenlő részre osztják.

1241. Egy trapéz párhuzamos oldalai a és b cm hosszúak. A nem párhuzamos oldalakat négy egyenlő részre osztjuk. Milyen hosszúak a szemközti osztópontokat összekötő egyenesszakaszok?

1242. Egy trapéz két párhuzamos oldala: $a = 16$ cm, $b = 12$ cm. Hosszabbítsuk meg a nem párhuzamos oldalakat mindkét irányban hosszuk felével.

a) Milyen hosszúak az így kapott nagyobb trapéz párhuzamos oldalai?

b) Végezzük el a számítást úgy is, hogy a párhuzamos oldalak hosszúságát a-val és b-vel jelöljük, a meghosszabbítást pedig a nem párhuzamos oldalak harmadrészének vesszük.

1243. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 5 cm és 8 cm. A trapéz átlóinak metszéspontján át húzzunk párhuzamost az alapokkal. Határozzuk meg, hogy ezt a szakaszt az átlók metszéspontja mekkora részekre osztja.

1244. Igazoljuk, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján a párhuzamos oldalakkal szerkesztett párhuzamos szakaszt az átlók metszéspontja felezi.

1245. Hosszabbítsuk meg egy trapéz nem párhuzamos oldalait, míg metszik egymást. Ezen a metszésponton át húzzunk a párhuzamos oldalakkal párhuzamos egyenest. Mutassuk ki, hogy ennek az egyenesnek az a két szelete, amely az oldalegyenesek metszéspontja és az átlóegyenesek közé esik, egyenlő.

1246. Bizonyítsuk be, hogy a trapéz nem párhuzamos oldalainak metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz párhuzamos oldalait.

1247. Egy trapéz párhuzamos oldalai a és b. A nem párhuzamos oldalakat harmadoljuk.

a) A hosszabbik oldalhoz közelebb eső osztópontokat összekötő egyenesből mekkora szeletet fog közre a két átló?

b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is, ha a két nem párhuzamos oldalt $m:n$ arányban osztjuk.

1248. Igazoljuk, hogy ha egy trapéz belsejében akárhol húzunk is a párhuzamos oldalakkal párhuzamos egyenest, ennek az egyenesnek az a két darabja, mely az átló és az oldal között van, egyenlő.

HASONLÓSÁG ALKALMAZÁSA

1249. Egy háromszög oldalainak hossza: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5{,}5$ cm. Határozzuk meg, hogy az f_c szögfelező mekkora részekre osztja a c oldalt.

1250. Az ABC háromszög oldalai a, b és c. Határozzuk meg, mekkora részekre osztja a c oldalt a C csúcshoz tartozó szögfelező.

1251. *a)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög külső szögfelezője a szemközti oldal meghosszabbítását – az oldal végpontjaitól számítva – a másik két oldal arányában osztja.

b) Számítsuk ki a szemközti oldalon létrejött szeletek hosszát.

1252. Az ABC háromszög CC_1 súlyvonalának C_1 végpontjából szögfelezőket húzunk, melyek a másik két oldalt D, ill. E pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a DE egyenes párhuzamos AB-vel.

1253. Az ABC háromszög AB oldalának F felezőpontján át húzzunk párhuzamost a szemközti szög felezőjével, ez az AC-t B'-ben, BC-t A'-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AB' = BA'$.

1254. Adott ABC háromszögben a C csúcshoz tartozó szögfelező szemközti oldallal alkotott metszéspontján át szerkesszünk a b oldallal párhuzamos egyenest. Határozzuk meg az így szerkesztett párhuzamos háromszög belsejébe eső részének hosszát, ha ismeretes a háromszög a és b oldalának hossza.

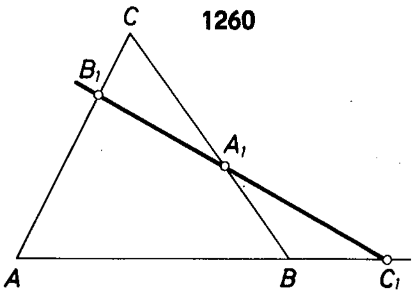
1255. Adott ABC háromszög α szögének szögfelezője a szemközti oldalt E pontban metszi. Az E pontból a b oldalra bocsátott merőleges talppontja F. Határozzuk meg EF hosszát, ha ismeretes a B csúcsból húzott magasság hossza ($m_b = 30$ cm), továbbá a c és b oldalak aránya ($c:b = 7:8$). Oldjuk meg a feladatot először a megadott adatokkal, majd általánosan is.

1256. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezőjének négyzete egyenlő a közrefogó oldalak szorzatának és azon két szakasz szorzatának a különbségével, amelyekre a szögfelező a szemközti oldalt osztja.

1257. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a szögfelező rövidebb, mint a mellette fekvő oldalak mértani középarányosa.

1258. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezőjét a szögfelezők metszéspontja a következő arányban osztja: A csúcs melletti rész úgy aránylik a másik részhez, mint a szögfelezőt közrefogó két oldal összege a harmadik oldalhoz.

1259. Legyenek a, b, c, d egy húrnégyszög oldalai, e és f az átlók. Bizonyítsuk be, hogy az átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével, azaz: $ef = ac+bd$ (*Ptolemaiosz* tétele).



1260

1260. Jelöljük az ABC háromszög megfelelő oldalainak egy adott egyenessel alkotott metszéspontjait A_1, B_1, C_1-gyel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = -1$$

(*Menelaosz* tétele).* A távolságokon előjeles távolságokat értünk. (1260. ábra.)

1261. Bizonyítsuk be Menelaosz tételének fordítottját: Ha az ABC háromszög oldalain fekvő A_1, B_1, C_1 pontokra érvényes az $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = -1$ összefüggés, akkor az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesen fekszenek.

* Megjegyezzük, hogy gyakran e tétel megfordítását vagy a tétel és megfordítás együttesét szokták Menelaosz tételének nevezni.

1262. Bizonyítsuk be az 1258. feladatot Menelaosz tételének segítségével.

1263. Legyenek A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB egyenesein fekvő pontok. Ha az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ (*Ceva* tétele).* (A távolságokon irányított távolságokat értünk.)

1264. Bizonyítsuk be Ceva tételének fordítottját: Ha A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesein fekvő pontok, és $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} =$ $= 1$, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban találkoznak (vagy párhuzamosak).

1265. Bizonyítsuk be Ceva tételének segítségével, hogy bármely háromszögben

a) a súlyvonalak,
b) a szögfelezők,
c) a magasságvonalak

egy pontban metszik egymást.

1266. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszögbe írt kör érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötjük, akkor ezek az egyenesek egy pontban metszik egymást.

1267. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög hozzáírt köreinek érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötjük, akkor ez a három egyenes egy pontban metszi egymást.

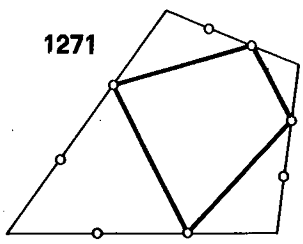
1268. Legyen A_1, B_1 és C_1 az ABC háromszög oldalain három olyan pont, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban találkozzanak. Az A_1, B_1, C_1 pontokon áthaladó kör másodszor az A_2, B_2, C_2 pontokban metszi a háromszög oldalait. Mutassuk ki, hogy az AA_2, BB_2 és CC_2 egyenesek is egy pontban találkoznak.

1269. Osszuk egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre, és kössük össze sorra a négy osztópontot, melyek két szemközti csúcs szomszédságába esnek. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott négyszög paralelogramma.

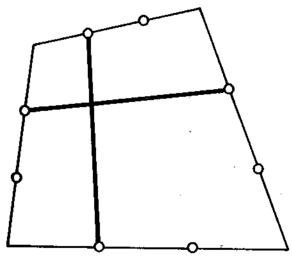
1270. Osszuk egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre, és a szomszédos oldalak legközelebbi osztópontjait kössük össze egyenessel. Igazoljuk, hogy ez a négy egyenes paralelogrammát határoz meg.

1271. Egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztottuk, és az osztópontok közül négyet az 1271. ábrán látható módon kötöttünk össze. Igazoljuk, hogy az összekötő vonalak trapézt alkotnak, és állapítsuk meg a párhuzamos oldalak arányát.

1271



1272



* Előző megjegyzésünk Ceva tételére is áll.

1272. Egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztjuk. Milyen arányban osztják egymást az 1272. ábrán látható összekötő vonalak?

1273. Két háromszögnek közös az alapja. Osszuk a másik két oldalpárt három-három egyenlő részre, és a felső osztópontokat páronként kössük össze. Igazoljuk, hogy a keletkezett négyszög paralelogramma.

1274. Négyszög átlóinak metszéspontján át két szomszédos oldallal párhuzamos egyenest rajzolunk, és meghatározzuk metszéspontjukat a másik két oldallal. Igazoljuk, hogy ennek a két pontnak összekötő egyenese párhuzamos az egyik átlóval.

1275. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármely két súlyvonala – a csúcstól számítva – 2:1 arányban osztja egymást.

1276. Egy derékszögű háromszög egyik befogója kétszerese a másiknak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az átfogóra bocsátott magasság 1:4 arányban osztja az átfogót.

1277. Az ABC háromszög AB oldala 3 cm, AC 2 cm. Erre a két oldalra rajzoljunk a háromszögbe paralelogrammát, melynek AB-n fekvő oldala 1 cm hosszú. A negyedik csúcs BC-n van. Mekkora a másik oldal?

1278. Az ABC háromszög AC és BC oldalát három-három egyenlő részre osztjuk, és a C csúcstól számítva, az egyik oldal második, a másik oldal első osztópontjából az AB oldalra x, ill. y merőlegest bocsátjuk. Mutassuk meg, hogy $y = 2x$.

1279. Paralelogramma két szemközti oldalát osszuk fel hat egyenlő részre, és mindegyik oldalon válasszunk ki egy-egy osztópontot. Milyen arányban osztja ezek összekötő egyenesét az egyik átló, ha

a) az egyik oldal első és a másik negyedik osztópontját,
b) az egyik oldal második és a másik ötödik osztópontját kötjük össze?

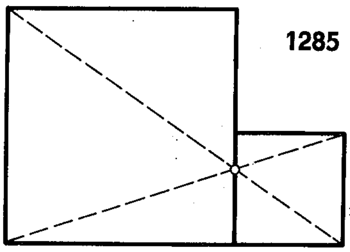
1280. Egy adott téglalap egyik csúcsát összekötjük az egyik szemközti oldal felezőpontjával, és meghúzzuk a csúccsal szemközti átlót. Milyen arányban osztja egymást ez a két egyenes?

1281. Egy a alapú egyenlő szárú háromszög két szárát három-három egyenlő részre osztjuk. Mekkora darabot vág le az alap meghosszabbításából egy felső és egy alsó osztópontot összekötő egyenes?

1282. Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontját kössük össze a D, CD oldalának felezőpontját az A csúccsal. Milyen arányban osztja egymást a két összekötő szakasz?

1283. Egy $ABCD$ paralelogramma AD oldalát osszuk n egyenlő részre, az A-hoz legközelebbi osztópont P. Mutassuk meg, hogy a BP egyenes az AC átlóból annak $(n+1)$-ed részét metszi le.

1284. Egy trapéz egyik alapja a másiknak háromszorosa. Milyen arányban osztják egymást az átlók?



1285

1285. Rajzoljunk egymás mellé két négyzetet, és kössük össze egymással a négyzet távolabbi csúcspontjait. Igazoljuk, hogy ez a két összekötő vonal a közös oldalon metszi egymást (1285. ábra).

1286. Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög köré írt kör tetszőleges pontjának a szemközti oldalaktól mért távolságainak szorzata mindkét oldalpárra egyenlő.

1287. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a magasságpont a magasságokat két olyan szakaszra bontja, amelyeknek szorzata független a választott magasságtól.

1288. Téglalap köré kört írunk, és ennek egy pontjából merőlegest bocsátunk az oldalakra. Ezek és az oldalak meghosszabbításai két téglalapot adnak. Bizonyítsuk be, hogy ezek a téglalapok hasonlók.

1289. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, szárai 8 cm hosszúak. Mekkora részekre bontja a szárakat a hozzájuk tartozó magasság?

1290. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárai b egység hosszúak. Mekkora részekre bontja a szárakat a hozzájuk tartozó magasságvonal?

1291. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóit három-három egyenlő részre osztjuk, és a derékszög csúcsával szomszédos osztópontokat összekötjük, valamint ezekből az osztópontokból az átfogóra is merőlegeseket bocsátunk. Bizonyítsuk be, hogy az ily módon keletkező derékszögű négyszög négyzet.

1292. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög A csúcsból induló súlyvonalát meghosszabbítjuk a háromszög köré írt körrel való D metszéspontig. Bizonyítsuk be, hogy $AD = 3 \cdot BD$. ($C\sphericalangle = 90°$.)

1293. Derékszögű háromszög egyik befogója

a) háromszorosa,

b) négyszerese,

c) n-szerese,

d) $\frac{p}{q}$-szorosa

a másik befogónak. Hogyan aránylanak egymáshoz az átfogónak a rábocsátott magasságvonal által levágott szeletei?

1294. Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 5:6, az átfogó 122 cm hosszú. Határozzuk meg az átfogónak a rábocsátott magasságvonal által levágott szeleteinek hosszát.

1295. Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 3:2. Az átfogónak a hozzá tartozó magasságvonal által levágott szeletei közül az egyik 2 cm-rel nagyobb a másiknál. Határozzuk meg az átfogó hosszát.

1296. Egy derékszögű háromszög befogói úgy aránylanak egymáshoz, mint 3:7, az átfogóhoz tartozó magasságvonal hossza 42 cm. Határozzuk meg az átfogó szeleteinek hosszát.

1297. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság az átfogót egy 4 és egy 12 cm-es darabra osztja. Mekkorák a befogók és a magasság?

1298. Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó 5 cm, ennek vetülete az átfogón 2 cm, mekkora az átfogó és a másik befogó?

1299. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogóhoz tartozó magasság 3 cm, mekkora az átfogó és a másik befogó?

1300. Szerkesszük meg két adott távolság mértani közepét.

1301. Adott két távolság összege és mértani középarányosa. Szerkesszük meg a távolságokat.

1302. Adott két távolság különbsége és mértani középarányosa. Szerkesszük meg a távolságokat.

1303. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszögben a befogók négyzeteinek aránya megegyezik a befogók átfogóra eső vetületeinek arányával.

1304. Igazoljuk, hogy a kör AB húrja az A-ból induló átmérő és erre az átmérőre eső vetületének mértani közepe.

1305. Félkörbe másik félkört rajzolunk, melynek átmérője az elsőnek OA sugara. Az ezen felvett P pontból OA-ra merőlegest állítunk, mely a kisebb félkört K-ban, a nagyobbat L-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AL^2 = 2AK^2$.

1306. Egy rombusz egyik csúcsán keresztül húzzunk a rombuszon kívül haladó e egyenest. A csúccsal szemközti oldalak meghosszabbításából az e egyenes p, ill. q hosszúságú szakaszokat metsz ki. Bizonyítsuk be, hogy a rombusz oldala mértani közepe a p és q szakaszoknak.

1307. Adott egy r sugarú kör és benne h hosszúságú húr. A húr egyik végpontjában húzzunk érintőt, a húr másik végpontjának az érintőtől való távolságát jelöljük m-mel. Bizonyítsuk be, hogy a húr mértani közepe az átmérőnek és az utóbbi m szakasznak.

1308. Határozzuk meg adott körben húzott húr hosszát, ha adott a kör sugara, továbbá a húr egyik végpontjában húzott érintőnek a húr másik végpontjától való a távolsága.

1309. Egy r sugarú körből egy egyenes m magasságú körszeletet vág ki. Számítsuk ki a körszeletet határoló húr hosszát.

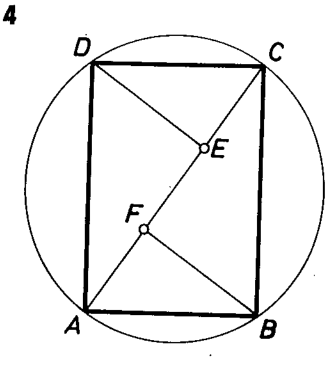
1310. Az ABC háromszög B csúcsán keresztülhaladó szelő a b oldalt D pontban, β szög alatt metszi. Bizonyítsuk be, hogy AB mértani közepe az AD és AC szakaszoknak.

1311. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú trapézba írt kör átmérője a trapéz két párhuzamos oldalának mértani középarányosa.

1312. A h húr F felezőpontján átmenő átmérő két szakasza AF és BF. Igazoljuk, hogy a húrra rajzolt négyzet területe négyszer akkora, mint azé a téglalapé, melynek oldalai AF-fel és BF-fel egyenlők.

1313. Egy derékszögű háromszögbe az átfogóra állított négyzetet írunk. Bizonyítsuk be, hogy az átfogón létrejött három szelet közül a négyzetoldal mértani közepe a másik két szeletnek.

1314



1314. A technikusok megállapították, hogy egy gömbfából kivágandó legnagyobb hordképességű, téglalap keresztmetszetű gerendát a következő szerkesztéssel kapjuk: a gömbfa kör keresztmetszetének egyik átmérőjét három egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokban ellenkező irányban merőlegeseket emelünk (1314. ábra). E merőlegeseknek a körrel való metszéspontjai, valamint az átmérő két végpontja alkotják a gerenda keresztmetszet csúcsait. Számítsuk ki az így nyert téglalap oldalait, ha a gömbfa átmérője 36 cm.

1315. Szerkesszünk adott téglalappal egyenlő területű négyzetet.

1316. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB szárának felezőpontjában emelt merőleges az alapegyenest P pontban metszi. Igazoljuk, hogy az AB oldal mértani közepe a BC és BP szakaszoknak.

1317. Egy kör egyik átmérőjének két végpontjában érintőket szerkesztünk a körhöz. Ha a körvonal bármely pontját összekötjük az átmérő végpontjaival, ezek az összekötő egyenesek olyan szeleteket vágnak le a két érintőből, amelyeknek mértani közepe az átmérő.

1318. Egy kör egyik átmérőjének két végpontjában érintőket szerkesztünk a körhöz. Ezenkívül egy tetszés szerinti harmadik érintőt is megrajzolunk. Igazoljuk, hogy az utóbbi érintőből a másik két érintő által lemetszett szakaszok mértani közepe a kör sugara: $xy = r^2$.

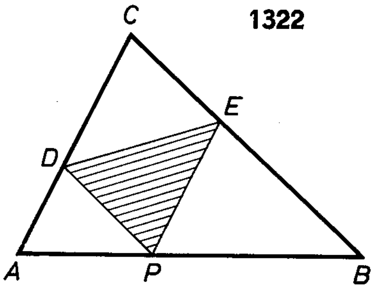
1319. Igazoljuk, hogy a kör egy pontjának egy húrtól mért távolsága mértani középarányos a húrvégpontokhoz tartozó érintőktől mért távolságok között.

1320. Az ABC háromszögben az alapon fekvő két szög különbsége derékszög. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög alaphoz tartozó magassága mértani középarányos a magasság talppontjának az alap végpontjaitól mért távolságai között.

1321. Az ABC háromszögben meghúzzuk az AB alappal párhuzamos DE szakaszt. Igazoljuk, hogy a BDC háromszög területe az ABC és DEC háromszögek területének mértani közepe.

1322. Egy háromszög alapjának P pontjából párhuzamost húzunk a másik két oldallal, és az így kapott metszéspontokat összekötjük (D az AC, E pedig a BC oldalon fekszik) (1322. ábra). Igazoljuk, hogy a PDE háromszög területe mértani közepe az APD és PEB háromszögek területének.

1322



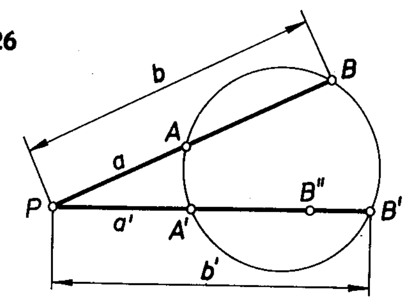
1323. Húzzunk egy körhöz egy külső P pontból szelőt és érintőt. Bizonyítsuk be, hogy az érintőszakasz a szelődarabok mértani közepe. (Szelődarabon a szelőnek a P ponttól a körrel való metszéspontig terjedő szakaszát értjük.)

1324. Bizonyítsuk be, hogy külső P pontból a körhöz húzott szelők szeleteinek szorzata állandó. (Ez a számérték a P pont körre vonatkozó hatványa.)

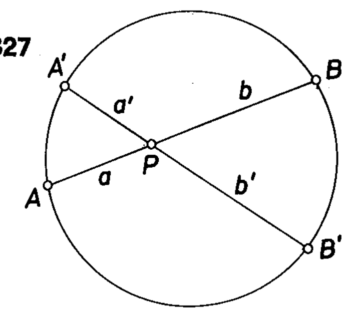
1325. Egy kör belsejében levő P ponton át húzzunk két tetszés szerinti szelőt. Bizonyítsuk be, hogy a szelő szeleteinek szorzata állandó. (Belső P pont körre vonatkozó hatványa.)

1326. Egy adott szög száraira a csúcstól számítva úgy mérjünk rá szakaszokat, hogy $ab=a'b'$ legyen (1326. ábra). Bizonyítsuk be, hogy a szakaszok A, B, ill. A', B' végpontjai egy körön helyezkednek el.

1326



1327



1327. Egy szög mindkét szárát hosszabbítsuk meg a szög P csúcsán túl, és egy-egy szögszárra, ill. meghosszabbítására az 1327. ábrán látható módon mérjünk rá a, b és a', b' szakaszokat úgy, hogy $ab=a'b'$ legyen (1327. ábra).

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a szakaszok A, B, ill. A', B' végpontjai egy körön helyezkednek el.

1328. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kör két másikat az A, B, ill. A', B' pontokban metsz, akkor az AB és $A'B'$ húregyenesek közös H pontjára fennáll a $HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$ egyenlőség.

1329. Bizonyítsuk be, hogy ha három kör úgy helyezkedik el, hogy kettő-kettő páronként metszi, ill. érinti egymást, akkor a közös húregyenes, ill. érintő H metszéspontjára áll a $HA \cdot HB = HE^2$ egyenlőség (ahol A, B a két metszéspont, E az érintési pont).

1330. Két egymást érintő kör közös érintőjének egy pontjából húzzunk mindkét körhöz egy-egy szelőt. Bizonyítsuk be, hogy a szelők és a körök alkotta négy metszéspont egy körön van.

1331. A k és k' érintkező körök. A k-n válasszunk ki egy A és egy B pontot. Szerkesszünk az A és B pontokon át egy a k'-t metsző k'' kört. Bizonyítsuk be, hogy a k' és k'' közös húregyenese k'' tetszőleges választása esetén ugyanabban a pontban metszi k és k' közös érintőjét.

1332. Adott egy egyenes és rajta kívül (az egyenes egyik oldalán) két pont. Szerkesszünk a két ponton átmenő kört úgy, hogy az az egyenest érintse.

1333. Adott egy kör és rajta kívül két pont. Szerkesszünk a két ponton át kört úgy, hogy az az adott kört érintse.

1334. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két szöge, továbbá a harmadik szög csúcsához tartozó

a) magasságvonal,
b) súlyvonal,
c) szögfelező.

1335. Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük egy oldalát, a szemközti szöget és a másik két oldal arányát.

1336. Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha ismert az egyik szárhoz tartozó súlyvonal hossza.

1337. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az oldalak aránya és a beírt kör sugara.

1338. Húzzunk két egyenest, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk háromszöget úgy, hogy két oldala az egyeneseken helyezkedjék el, arányuk adott érték legyen, a harmadik oldal pedig az adott ponton menjen át.

1339. Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük egy szögét, a szög csúcsából húzott magasságot és annak a két résznek az arányát, melyekre a magasság osztja a szemközti oldalt.

1340. Adott egy szög és szárai között egy pont. Szerkesszük meg azt a háromszöget, melynek az adott szög egyik szöge, az ezzel szemközti oldala átmegy az adott ponton, és ismert a szöget közrefogó két oldal aránya.

1341. Szerkesszünk háromszöget úgy, hogy két oldal összege adott távolsággal legyen nagyobb a harmadiknál, és a két oldal adott nagyságú szögeket zárjon be a harmadikkal.

1342. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szára adott egyenessel párhuzamos, és végpontjai adott szög szárain feküsznek, harmadik csúcsa pedig adott pontba esik. Szerkesszük meg a háromszöget!

1343. Szerkesszünk háromszöget, ha az egyik csúcsa adott pontba esik, adott az e csúcsnál fekvő szöge, a csúccsal szemközti oldal adott egyenessel párhuzamos, végpontjai pedig adott szög szárain feküsznek.

1344. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alap és a szár különbsége, továbbá a szárak közti szög.

1345. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismerjük az átfogóját, és tudjuk, hogy az egyik befogó és a derékszög felező egyenese egyenlő hosszú.

1346. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, az oldallal szemközti szög, továbbá tudjuk, hogy az adott szög felezője egyenlő hosszú a szöget közrefogó egyik oldallal.

1347. Hosszabbítsuk meg egy egyenlő szárú háromszög szárait egyenlő darabokkal úgy, hogy a meghosszabbítások a végpontjukat összekötő szakasszal egyenlő hosszúak legyenek.

1348. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha ismerjük a szárakhoz tartozó súlyvonal hosszát és ennek a szárral bezárt szögét.

1349. Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük az egyik szögét, a csúcsból kiinduló magasságot és a súlyvonalat.

1350. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha ismerjük a szárakhoz tartozó magasság- és súlyvonal hosszát.

351. Az a, b, c és az egységszakasz birtokában szerkesszük meg a következő szakaszokat:

a) ab, *b)* $\frac{1}{a}$, *c)* $\frac{a}{b}$, *d)* a^2, *e)* $\sqrt{a}$, *f)* $\sqrt{ab}$, *g)* $\frac{ab}{c}$, *h)* $\frac{a^2}{b}$.

1352. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságainak aránya a hozzá tartozó oldalak reciprokainak arányával egyenlő.

1353. Adott egy háromszög három magasságvonala. Szerkesszük meg a háromszöget!

1354. Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük magasságvonalainak arányát és a beírt kör sugarát.

1355. Szerkesszük meg a háromszöget, ha ismert a köré írt kör sugara, két oldal összege és az ezekre az oldalakra bocsátott magasságok aránya.

1356. Adott két párhuzamos egyenes és köztük egy pont. Szerkesszük meg azt a szabályos háromszöget, melynek egyik csúcsa az adott pont, a másik kettő pedig a két párhuzamos egyenesen fekszik.

1357. Írjunk adott körbe egyenlő szárú háromszöget, ha ismerjük az alap és a hozzá tartozó magasság összegét.

1358. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a hozzáírt érintőkörök sugara (ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c).

1359. Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük a párhuzamos oldalakat és azt a két szöget, amit az egyik szár zár be az átlókkal.

1360. Adott egy szög és (szögtartományán kívül) egy P pont. Szerkesszünk a ponton át egyenest úgy, hogy a ponttól a közelebb eső szögszárig terjedő szakasz

a) ugyanakkora,
b) feleakkora

legyen, mint a szelőből a szögszárak által kimetszett szakasz.

1361. Adott pontból, adott körhöz szerkesszünk szelőt úgy, hogy a ponttól a körig terjedő szakasz

a) ugyanakkora,
b) kétszer akkora
legyen, mint a szelőből kimetszett húr.

1362. Két egymást metsző kör egyik metszéspontján át húzzunk szelőt úgy, hogy a nagyobb és kisebb közbeeső húrok aránya 3:2 legyen.

1363. Adott egy kör és benne két sugár. Hosszabbítsuk meg mindkettőt ugyanannyival úgy, hogy a végpontjukat összekötő egyenest a körrel való metszéspontok három egyenlő részre bontsák.

1364. Adott egy kör és benne két sugár. Szerkesszük meg azt a húrt, amit a két sugár három egyenlő részre vág.

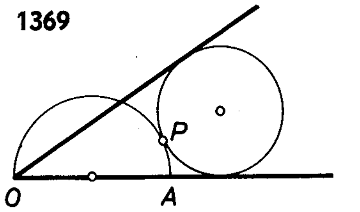
1365. Körhöz adott ponton át szerkesszünk szelőt úgy, hogy a ponttól a körig terjedő szakasz és a körbe eső húr a középpontból egyenlő szög alatt lássék.

1366. Adott egy háromszög két csúcsa és az egyiken átmenő oldal- és súlyvonalegyenesek. Szerkesszük meg a háromszöget.

1367. Egy háromszögből ki van jelölve két csúcs, az egyiken átmenő súlyvonal egyenese, és ismert a harmadik csúcsnál levő szög. Szerkesszük meg a háromszöget.

1368. Adott körbe rajzoljunk húrt. Mi a húr fölé a körbe írható háromszögek súlypontjainak mértani helye?

1369



1369. Egy adott szög (csúcsa O) egyik szárán tűzzünk ki egy A pontot. Rajzoljunk OA mint átmérő fölé félkört és egy kört úgy, hogy érintse a szög két-két szárát és a félkört (1369. ábra). Mi a két kör érintési pontjának a mértani helye, ha A végigfut a szög szárán?

1370. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a közbezárt szög felezője.

1371. Egy A faluból két út indul ki, az egyik B-be, a másik C-be. Ha azonban B-ből C-be akarnánk menni, nem kell A-n keresztülmenni, mert van közben egy elágazás. Ha B-ből elmegyünk idáig, innen ugyanakkora úton érjük el az A-ból C-be vezető utat, mint amekkora utat elágazásig megtettünk, és ugyanennyi út van hátra, míg C-be érünk. Rajzunkon adott A, B és C, rajzoljuk meg az utat B-ből C-be.

1372. Egy adott ABC háromszög AB és AC oldalát messük át egy egyenessel úgy, hogy a B-ből a metszéspontig, innen az AC oldalig, onnan pedig az A pontba vezető törtvonal egyenlő szakaszokból álljon.

1373. Szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy érintsék egymást, és érintsék egy szög egy-egy szárát a száron előre kitűzött pontban.

1374. Szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy érintsék egymást, és érintsenek egy-egy előre adott kört, méghozzá kitűzött pontokban.

1375. Szerkesszünk háromszöget, ha adott

a) egy oldala, szemközti szöge és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonala;

b) egy oldala, az oldalon fekvő egyik szög és annak csúcsából induló súlyvonal;

c) egyik oldala, egy másikhoz tartozó súlyvonala és a harmadikhoz tartozó magassága.

1376. Bizonyítsuk be, hogy a háromszöget középpontos hasonlósággal át lehet vinni az oldalfelező pontok meghatározta háromszögbe. Mi a hasonlóság középpontja?

1377. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontja, súlypontja és a háromszög köré írt kör középpontja egy egyenesen vannak (ez az ún.

Euler-féle egyenes), és a súlypont harmadolja a magasságpont és a köré írt kör középpontja közti szakaszt.

1378. Húzzunk párhuzamost a háromszög minden oldalfelező pontjából a szemközti csúcshoz tartozó szögfelezővel. Mutassuk meg, hogy a három egyenes egy ponton megy át.

1379. Adott egy háromszög magasságpontja, súlypontja és egyik csúcsa. Szerkesszük meg a háromszöget.

1380. Mutassuk meg, hogy a háromszög oldalfelező pontjai, a magasságok talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak. A kör sugara fele a háromszög köré írt kör sugarának, középpontja felezi a magasságpont és a köré írt kör középpontja közti szakaszt. (A háromszög *Feuerbach*-köre, *kilenc pont* köre, *Euler*-féle köre.)

1381. Tekintsük azt a négy háromszöget, melyet egy háromszög három csúcsa és magasságpontja határoz meg. Mutassuk meg, hogy e négy háromszögnek közös a Feuerbach-köre.

1382. Bizonyítsuk be, hogy a Feuerbach-kör oldalfelező pontbeli érintője párhuzamos a szemközti csúcsban a köré írt körhöz húzott érintővel.

1383. Mutassuk meg, hogy a háromszög hozzáírt köreinek középpontján átmenő kör kétszerese a körülírt körnek.

1384. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör felezi az oldalakat érintő körök középpontjait összekötő szakaszokat.

1385. Igazoljuk, hogy a háromszöghöz írt körök középpontjain átmenő kör középpontja, valamint a beírt és köré írt körök középpontjai egy egyenesen vannak.

1386. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az oldalakat érintő körök középpontjai közül három középpont.

1387. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott a köré írt kör középpontja és

a) két hozzáírt körének középpontja,
b) a beírt és egy hozzáírt körének középpontja.

1388. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe írt kör nem nagyobb a köré írt kör felénél.

1389. Tükrözzük a háromszög magasságpontján átmenő tetszőleges egyenest a háromszög oldalegyeneseire. Bizonyítsuk be, hogy a három tükörkép a köré írt kör egy pontjában metszi egymást.

1390. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör tetszőleges pontjából az oldalakra állított merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak (*Simson*-egyenes).

1391. Mozgassunk egy pontot a háromszög köré írt körén. Írjuk le, hogyan változik a hozzá tartozó Simson-egyenes.

1392. Mutassuk meg, hogy az egymásra merőleges Simson-egyenesek a háromszög Feuerbach-körén metszik egymást.

1393. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög köré írt kör tetszőleges pontját tükrözzük az oldalegyenesekre, a tükörképként kapott három pont egy a magasságponton átmenő egyenesen van.

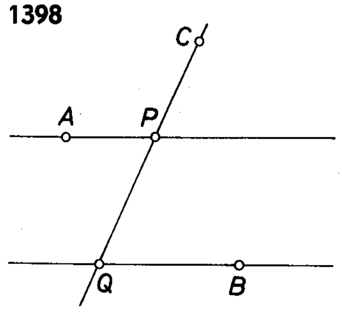
1394. Szerkesszük meg egy háromszög adott irányú Simson-egyenesét.

1395. Adott két pont. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekre e két ponttól mért távolságok aránya állandó, kör (ún. *Apollonius*-kör).

1396. Szerkesszük meg azoknak a pontoknak mértani helyét, amelyeknek egy A, ill. B ponttól mért távolságaik úgy aránylanak egymáshoz, mint két adott szakasz.

1397. A sík mely részén helyezkednek el azok a pontok, amelyek két adott ponttól vett távolságainak aránya kisebb, ill. nagyobb egy adott értéknél?

1398



1398. Húzzunk két párhuzamos egyenest. Tűzzünk ki rajtuk egy-egy pontot (A és B) és egy C pontot az egyeneseken kívül. Jelöljük egy C-n átmenő egyenesnek a két párhuzamossal alkotott metszéspontját P-vel és Q-val. Szerkesszük meg a metszőegyenest úgy, hogy $AP{:}BQ$ adott érték legyen (1398. ábra).

1399. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismerjük azt a két szeletet, amikre az egyik hegyesszög felezője vágja szét a szemközti befogót.

1400. Szerkesszünk háromszöget egy szögből és abból a két szakaszból, amelyre az adott szög felezője bontja a szemközti oldalt.

1401. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget a szárhoz tartozó súlyvonalból és annak a szárral bezárt szögéből.

1402. Egyenlő szárú háromszögben adott a szárak szöge és a szárakhoz tartozó súlyvonal. Szerkesszük meg a háromszöget.

1403. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldal, a hozzá tartozó magasság, továbbá a másik két oldal aránya.

1404. Szerkesszünk háromszöget egy szögből és abból a két szakaszból, amelyre az adott külső szög felezője bontja a szemközti oldalt.

1405. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott

a) az egyik csúcshoz tartozó szögfelező, a szemközti oldalhoz tartozó magasság és a másik két oldal aránya,

b) az egyik csúcshoz tartozó külső szögfelező, a szemközti oldalhoz tartozó magasság és a másik két oldal aránya.

1406. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyekből két adott kör egyenlő szög alatt látszik? (Kör látószögén a hozzá húzott érintők szögét értjük.)

1407. Adott három kör. Szerkesszük meg azt a pontot, amelyből mind a három kör egyenlő szög alatt látszik.

1408. Adott egy szög és szárai között egy pont. Szerkesszük meg azt a háromszöget, melynek egyik oldala adott irányú, az oldallal szemközti csúcsa az adott pont, a másik kettő pedig az adott szög szárain fekszik, ha ismerjük az adott pontból induló oldalak és a harmadik oldal arányát.

1409. Szerkesszünk trapézt, ha adottak szögei és átlói.

1410. Egy a és b sugarú kör középpontjainak távolsága c ($c > a+b$).

a) Szerkesszünk mindkét körben párhuzamos sugarakat, majd kössük össze az egyirányú párhuzamos sugarak végpontjait. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyenesek a két kör centrálisát ugyanabban a pontban metszik.

b) Szerkesszük meg a két kör közös külső érintőit. Bizonyítsuk be, hogy ezek metszéspontja a centrálison az előbb említett pontban van.

1411. *a)* Kössük össze az előző feladatban szereplő két kör párhuzamos, de különböző irányú sugarainak végpontjait. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyenesek a centrálist ugyanabban a pontban metszik.

b) Szerkesszük meg a két kör közös belső érintőit. Bizonyítsuk be, hogy ezek metszéspontja a centrálison ugyanott van.

1412. Szerkesszük meg két kör hasonlósági pontjait, ha az egyik kör a másik belsejében helyezkedik el.

1413. Két kör

a) kívülről,
b) belülről

érinti egymást. Hol helyezkednek el hasonlósági pontjaik?

1414. Adott egy egyenes, rajta egy pont, továbbá egy – az egyenest nem metsző – kör. Szerkesszünk kört, amely a kört és az egyenest érinti, az utóbbit az adott pontban. (Hány megoldása van a feladatnak?)

1415. Szerkesszünk két kört érintő kört, ha az egyik körön ki van jelölve az érintési pont.

1416. Szerkesszünk kört, amely érint egy adott egyenest, továbbá egy adott kört adott pontban.

1417. Adott egy kör és egy azt metsző egyenes, továbbá az egyenes körbe eső szakaszán egy pont. Szerkesszünk kört, amely a kört és az egyenest érinti, utóbbit a megadott pontban.

1418. Adott egy egyenes, továbbá az egyenes egyik oldalán egy kör és egy pont. Szerkesszünk az adott ponton átmenő kört úgy, hogy az egyenest és a kört érintse.

1419. Adott egy egyenes és az egyik oldalán két (különböző sugarú) kör. Szerkesszünk az egyenest és a köröket érintő kört.

1420. Adott két kör és (rajtuk kívül) egy pont. Szerkesszünk az adott ponton átmenő kört úgy, hogy az adott köröket érintse.

1421. Adott három különböző sugarú kör. Szerkesszünk mindhármat érintő kört.

1422. Mekkorák annak az egyenlő szárú háromszögnek a szögei, amelyből az alap egyik szögének felezője az eredetihez hasonló háromszöget metsz le?

1423. Az x szakaszt az a szakasz *aranymetszetének* nevezzük, ha $a:x = x:(a-x)$ (vagy $a^2 = (x+a)\,x$). Szerkesszük meg egy adott a szakasz aranymetszetét.

1424. Bizonyítsuk be, hogy ha az egyenlő szárú háromszög szárai 36°-os szöget zárnak be egymással, akkor az alap a szárnak aranymetszete.

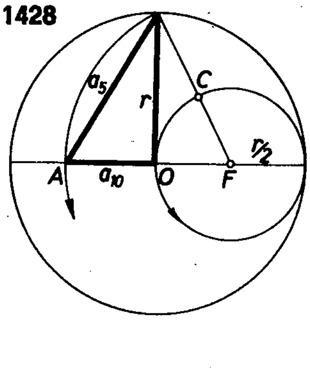
1425. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tízszög köré írt kör sugarának aranymetszete a tízszög oldala.

1426. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos ötszög oldala átlójának aranymetszete.

1427. Az r sugarú körbe írt szabályos ötszög oldala a_5, a szabályos tízszögé a_{10}. Mutassuk meg, hogy $a_{10}^2+r^2 = a_5^2$.

1428. Az 1428. ábrán eljárást adtunk meg az r sugarú körbe írt szabályos öt-, ill. tízszög oldalának szerkesztésére. Igazoljuk a szerkesztés helyességét.

1428



TERÜLETSZÁMÍTÁS, TERÜLETÁTALAKÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

1429. Mekkora a téglalap területe, ha átlója 13 m, egyik oldala 5 m?

1430. Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amely egyenlő területű a 17 cm és 8 cm oldalú téglalappal?

1431. Hányszorosára nő egy négyzet területe, ha minden oldalát háromszorosára növeljük?

1432. Hányszorosára nő a téglalap területe, ha egyik oldalát ötszörösére, másik oldalát háromszorosára növeljük?

1433. Hányszorosára kell növelnünk a négyzet oldalait ahhoz, hogy területe ötszörösére növekedjék?

1434. Egy földdarab területe az 1:75 000 méretarányú térképen 4 cm^2. Mekkora a területe a valóságban?

1435. A paralelogramma két szomszédos oldala 12 cm és 8 cm, a nagyobbikhoz tartozó magasság 5 cm. Mekkora a másik magasság?

1436. Egy paralelogramma és egy téglalap oldalai egyenlők. Mekkorák a paralelogramma szögei, ha területe fele a téglalap területének?

1437. Mekkora annak a paralelogrammának a területe, amelynek oldalai 8 és 7, egyik hegyesszöge *a)* 60°, *b)* 30°, *c)* 45°?

1438. Mutassuk meg, hogy az adott oldalakkal rendelkező paralelogrammák közül a téglalap területe a legnagyobb.

1439. Bizonyítsuk be, hogy a rombusz területe átlói szorzatának felével egyenlő.

1440. Mekkora a rombusz területe, ha átlói 16 cm és 5 cm?

1441. Mekkora a rombusz magassága, ha átlói 16 m és 12 m?

1442. Mekkora a rombusz területe, ha oldala 9 cm, egyik átlója 7 cm?

1443. A rombuszba írt kör sugara 3 cm, egyik oldala 7 cm. Mekkora a rombusz területe?

1444. Mekkora az a oldalú szabályos háromszög területe?

1445. Mekkora annak a szabályos háromszögnek oldala, amelynek területe 1?

1446. Mekkora az egyenlő oldalú háromszög területe, ha magassága m?

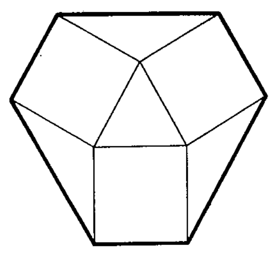
1447. Mekkora az átfogója a t területű egyenlő szárú derékszögű háromszögnek?

1448. Határozzuk meg az egyenlő szárú háromszög területét, ha alapja és egyik szára

a) 42 cm és 72 cm,
b) 18 cm és 49 cm,
c) 26 cm és 18 cm.

1449. Határozzuk meg a háromszög területét, ha alapja a, a rajta fekvő szögek 30° és 45°-osak.

1451



1450. Mekkora annak az egyenlő szárú háromszögnek a területe, amelynek szára a hosszúságú, a szárak szöge pedig 120°-os?

1451. Az a oldalú szabályos háromszög minden oldala fölé négyzetet szerkesztve, az 1451. ábrán látható hatszöget nyerjük. Mekkora a hatszög területe?

1452. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek oldalai a és b, ezek szöge 60°-os?

1453. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek oldalai a és b, ezek szöge pedig 120°-os?

1454. Bizonyítsuk be, hogy két háromszög egyenlő területű, ha megegyeznek két oldalban, az ezek közrezárt szöge pedig α, ill. $180° - \alpha$.

1455. Határozzuk meg a trapéz területét, ha alapjai 6 cm és 14 cm, magassága 8 cm.

1456. Határozzuk meg a szimmetrikus trapéz területét, ha alapjai 7 és 9, szárai 5 cm-esek.

1457. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 4 és 2 cm, a szárak hossza 3 cm. Mekkora a trapéz kiegészítő háromszögének területe?

1458. Határozzuk meg a szimmetrikus trapéz területét, ha alapjai 42 cm, ill. 54 cm, a nagyobbik alapon fekvő szögei pedig 45°-osak.

1459. Határozzuk meg a szimmetrikus trapéz területét, ha nagyobbik alapja 44 m, szára 17 m, és átlója 39 m.

1460. Határozzuk meg a szimmetrikus trapéz területét, ha átlói merőlegesek egymásra, és magassága m.

1461. Határozzuk meg a szimmetrikus trapéz területét, ha alapjai 10 és 26 cm, átlói pedig a szárakra merőlegesek.

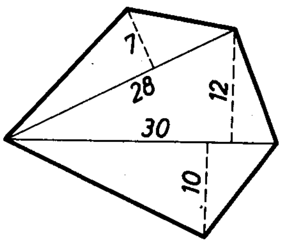
1462. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges konvex négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma területe fele a négyszög területének.

1463. Mutassuk meg, hogy ha két konvex négyszög megegyezik két átlóban és az átlók szögében, akkor a két négyszög területe is egyenlő.

1464. Határozzuk meg annak a konvex négyszögnek a területét, amelynek átlói 8 cm és 12 cm, és az átlók merőlegesek egymásra.

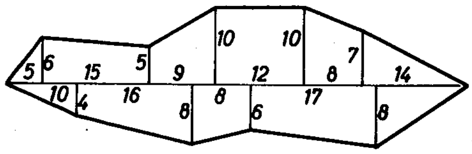
1465. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor területe az átlók szorzatának felével egyenlő.

1466. Számítsuk ki az 1466. ábrán látható sokszög területét.



1466

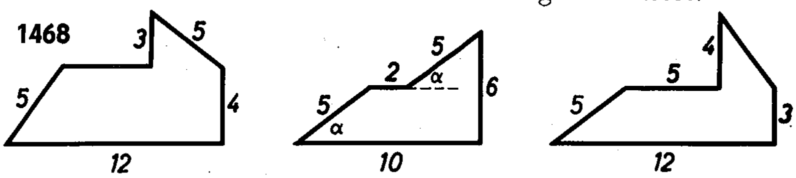
1467



1467. Számítsuk ki az 1467. ábrán látható földdarab területét.

1468. Számítsuk ki az 1468. ábrán látható sokszögek területét.

1468

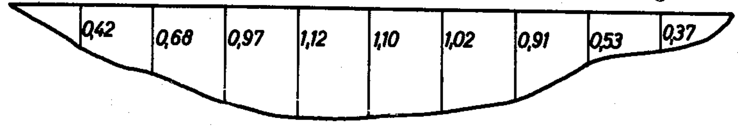


a) b) c)

1469. Egy patak vízhozamának meghatározására keresztmetszetéről rajzot készítenek (1469. ábra). Mekkora a keresztmetszet területe (két szomszédos mérési pont távolsága 2 m)?

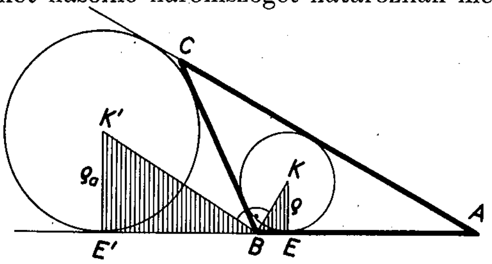
1470. Egy háromszög oldalai a, b, c, területe t.

a) Mekkora a beírt kör sugara?
b) Mekkora a köré írt kör sugara?
c) Mekkora az *a* oldalt kívülről érintő hozzáírt kör sugara?



1469

1471. Mutassuk meg, hogy a háromszögbe beírt és hozzáírt köreinek középpontjai, a körök egyik oldalon levő érintési pontjai és az azok között fekvő csúcs, két hasonló háromszöget határoznak meg (1471. ábra).

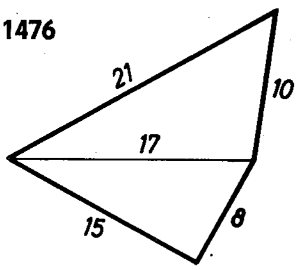


1471

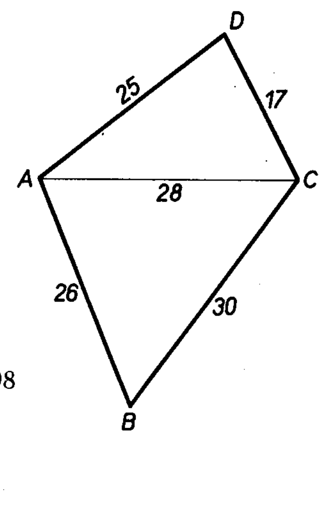
1472. Az előző feladat alapján bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög oldalai a, b, c, területe t és $a+b+c = 2s$, akkor $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. (*Heron* képlete.)

1473. Mekkora a háromszög területe, ha oldalai
a) 5, 6, 9;
b) 29, 25, 6;
c) 27, 36, 45?

1476



1479



1474. Határozzuk meg a háromszög legkisebb magasságát, ha oldalai 25, 29, 36 cm hosszúak.

1475. Mekkora annak a paralelogrammának a területe, amelynek oldalai 12 és 8, egyik átlója 6?

1476. Határozzuk meg az 1476. ábrán látható négyszög területét.

1477. Két metsző kör sugara 17 cm, ill. 39 cm, a középpontok közötti távolság 44 cm. Mekkora a két kör közös húrja?

1478. Számítsuk ki a paralelogramma területét, ha átlói 40 és 74, egyik oldala 51.

1479. Az 1479. ábrán levő négyszögnek ismerjük oldalait és egyik átlóját. Mekkora a négyszög területe és másik átlója?

1480. Mekkora annak a trapéznak a területe, amelynek alapjai 60 cm, ill. 20 cm, szárai 13 cm, ill. 37 cm?

1481. Egy érintőnégyszög három oldala (ebben a sorrendben) 9, 12, 7, területe 48. Mekkora beírt körének sugara?

1482. Bizonyítsuk be, hogy a háromszöget bármelyik súlyvonala két egyenlő területű részre osztja.

1483. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak metszéspontjain átmenő minden egyenes két egyenlő területű részre vágja a paralelogrammát.

1484. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes két egyenlő területű részre vág egy paralelogrammát, akkor szükségképpen át kell mennie az átlók felezőpontján.

1485. Mekkora a kör sugara, ha kerületének és területének mértékszáma megegyezik?

1486. Mekkora a kör sugara, ha területe *a)* 2 cm², *b)* 50 cm², *c)* 17 dm²?

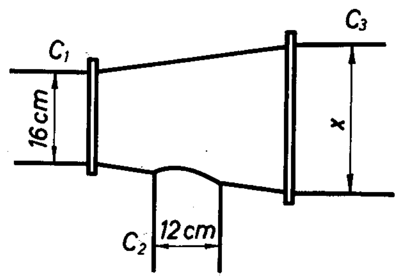
1487. Határozzuk meg a kör területét, ha kerülete 8 cm.

1488. Határozzuk meg a kör kerületét, ha területe 18 cm².

1489. Egy henger alakú tárgy keresztmetszetének területe 12,56 cm². Mekkora az átmérője?

1490. Az 1490. ábrán látható C_1 és C_2 csövek szállítják a vizet a C_3 csőbe. Mekkora C_3 átmérője, ha a víz áramlási sebessége mindenütt egyforma?

1490



1491. Mekkora az előző feladatban szereplő C_3 cső átmérője, ha C_1-é 8 cm és C_2-é 6 cm?

1492. Egy körlap területe 4,3 m²-rel kisebb, mint a körülírt négyzet területe. Mekkora a körlap területe?

1493. Egy körgyűrű középkörének kerülete 12 m, szélessége 2 m. Mekkora a területe?

1494. Két egyközepű kör körgyűrűt határol; a nagyobbikban elhelyezett a hosszúságú húrt érinti a kisebbik kör. Mekkora a körgyűrű területe?

1495. Határozzuk meg a körcikk területét, ha sugara r, és középponti szöge *a)* 67°30′, *b)* 15,75°.

1496. Határozzuk meg a körszelet területét, amelynek sugara r, és középponti szöge *a)* 90°, *b)* 60°.

1497. Határozzuk meg a körszelet területét, amelynek húrja a, és középponti szöge *a)* 120°, *b)* 90°, *c)* 60°.

1498. Egy 10 m széles egyenes- és körívszakaszokból álló úttestet aszfaltburkolattal kell ellátni. A középvonalán mért távolság 310 m. Mekkora a burkolandó úttest területe?

1499. Igazoljuk, hogy a trapéz átlói a trapézt olyan négy háromszögre bontják, amelyek közül kettőnek a területe egyenlő.

1500. Egy paralelogramma egyik szögpontját kössük össze az egyik szemközt fekvő oldal középpontjával. Igazoljuk, hogy az így keletkezett háromszög területe negyedrésze a paralelogramma területének.

1501. Egy paralelogramma egyik oldalán vegyünk fel tetszés szerint P pontot, és kössük össze a két szemközti szögponttal. Igazoljuk, hogy a háromszög, amelynek egyik csúcsa P, egyik oldala pedig a szemközti oldal, akkora területű, mint a paralelogramma fele.

1502. Egy paralelogramma két szemközti oldalának felezőpontját kössük össze a másik két oldal egy-egy tetszés szerinti pontjával. Igazoljuk, hogy a négy összekötő szakasz által határolt négyszög területe fele a paralelogramma területének.

1503. A trapéz egyik szárának végpontjaiban állítsunk a szárra merőlegeseket, és a másik szár felezőpontjából messük el ezeket az első szárral párhuzamos egyenessel. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett téglalap egyenlő területű a trapézzal.

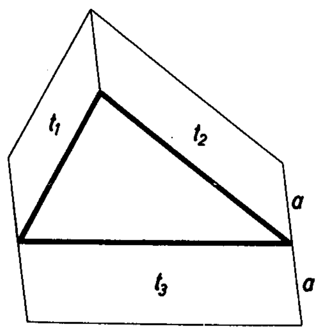
1504. A trapéz egyik szárának felezőpontja és a másik szár két végpontja olyan háromszöget határoz meg, amely feleakkora területű, mint a trapéz. Bizonyítsuk be ezt az állítást.

1505. Mutassuk meg, hogy egy négyszögben az az átló, amely a másikat felezi, a négyszög területét is felezi.

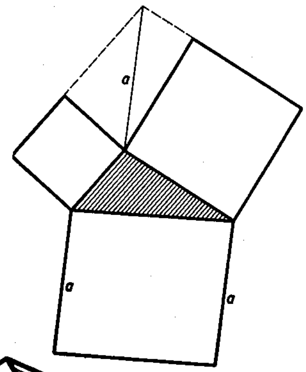
1506. A háromszög alapjához tartozó súlyvonal egy pontját összekötjük az alap végpontjaival. Igazoljuk, hogy az összekötő szakaszok felett levő két háromszög területe egyenlő.

1507. Tetszőleges konvex négyszög csúcsain át húzzunk párhuzamosakat az átlókkal. Igazoljuk, hogy a négyszög köré írt paralelogramma területe a négyszög területének kétszerese.

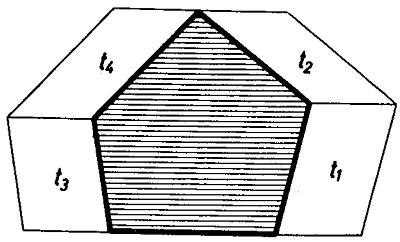
1508. Bizonyítsuk be, hogy az 1508. ábrán jelölt területekre fennáll a $t_1+t_2=t_3$ összefüggés.



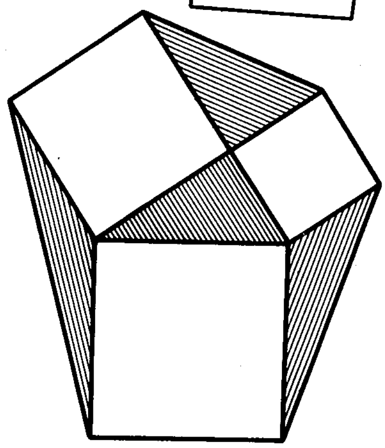
1509



1510



1511



1509. Mutassuk meg, hogy az 1509. ábrán látható négyzetek területének összege a paralelogramma területével egyenlő.

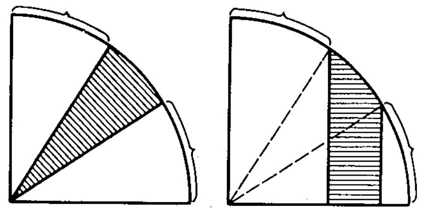
1510. Egy ötszög négy oldalára egy-egy oldalban megegyező paralelogrammákat szerkesztünk (1510. ábra). Mutassuk meg, hogy $t_1+t_2 = t_3+t_4$.

1511. Egy derékszögű háromszög oldalaira kifelé szerkesszünk négyzeteket. Mutassuk meg, hogy az 1511. ábrán vonalkázott háromszögek területei egyenlők.

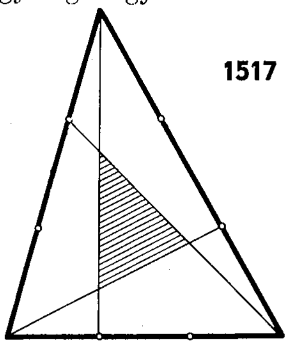
1512. Az 1512. ábrán látható kapcsos körívek egyenlők. Mutassuk meg, hogy a vonalkázott területek is egyenlők.

1513. Egy körön kijelölünk két pontot, és a kört eltoljuk a két pontot összekötő húrra merőleges irányban úgy, hogy az eltolt kör az eredetit messe. Igazoljuk, hogy az a terület, melyet a két pont közötti körív súrol, ugyanakkora, mint annak a téglalapnak a területe, melyet a két pontot összekötő húr súrol.

1514. A négyszög átlóinak felezőpontjain át húzzunk a másik átlóval párhuzamost. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamosak metszéspontját a négyszög oldalfelező pontjaival összekötő szakaszok a négyszöget egyenlő részekre bontják.



1512



1517

1515. Hosszabbítsuk meg egy háromszög mindegyik oldalát egyik irányba (egy meghatározott körüljárási irányt tartva) saját hosszával. A végpontok összekötésével nyert háromszög területe hányszorosa az eredetinek?

1516. Hosszabbítsuk meg egy négyszög minden oldalát saját hosszával (egy meghatározott körüljárási irányt tartva). A végpontok összekötésével nyert új négyszög hányszorosa az eredetinek?

1517. A háromszög oldalait osszuk három egyenlő részre, és válasszunk ki minden oldalon egy osztópontot az 1517. ábra szerint, és kössük ezeket össze a szemközti csúccsal. Mutassuk meg, hogy az összekötő szakaszokkal közrezárt háromszög területe az eredeti háromszög területének hetedrésze.

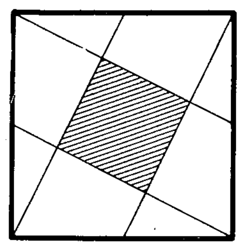
1518. Egy háromszög egyik csúcsát kössük össze az alap egy tetszés szerinti pontjával, és az összekötő szakaszt osszuk fel három egyenlő részre. Kössük össze az alsó osztópontot az alap két végpontjával. Hányadrésze a keletkezett háromszög területe az eredetinek?

1519. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög átlói egyenlő területű háromszögekre bontják a négyszöget, akkor a négyszög paralelogramma.

1520. Egy négyzet átlóján szerkesszük meg azt a pontot, amelyet a négyzet három csúcsával összekötve, három egyenlő területű idomot kapunk.

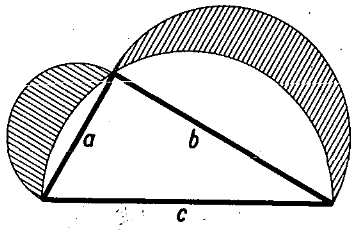
1521. A háromszög egyik oldalát osszuk három egyenlő részre, és az egyik osztópontot kössük össze a közelebbi végpontjából induló másik oldal felezőpontjával. Az összekötő szakasz hányadrészét metszi le a háromszög területének?

1522. Kössük össze a négyzet csúcsait a szemközti oldalak felezőpontjaival. Hányadrésze a négyzet közepén így körülzárt kis négyzet az eredeti négyzetnek (1522. ábra)?

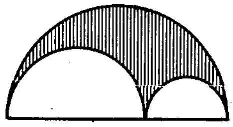


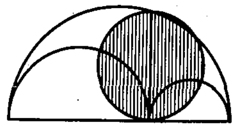
1522

1523. Az ábrán levő holdacskákat (*Hippokratész* holdacskái) a derékszögű háromszög oldalai fölé szerkesztett félkörök határolják. Bizonyítsuk be, hogy a holdacskák területének összege a háromszög területével egyenlő (1523. ábra).



1523





1524

1524. Bizonyítsuk be, hogy az 1524. ábrán vonalkázott területek egyenlők.

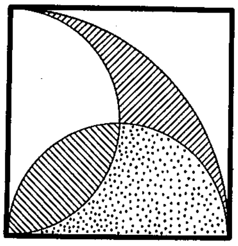
1525. Mutassuk meg, hogy ha a derékszögű háromszög oldalaira hasonló sokszögeket szerkesztünk úgy, hogy a hasonlóságnál a háromszögoldalak egymásnak feleljenek meg, akkor a befogók fölé szerkesztett sokszögek területének összege az átfogó fölé szerkesztett sokszög területével egyenlő.

1526. Szerkesszünk szabályos háromszöget, amelynek területe két adott szabályos háromszög területének összegével egyenlő.

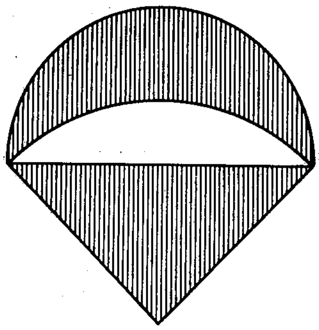
1527. A háromszög két oldalára t_1, ill. t_2 területű négyzetet rajzolunk, és a közös csúcsból merőlegest bocsátunk a harmadik oldalra. Ennek két szeletére szintén rajzolunk négyzeteket, melyeknek területe t_3, ill. t_4. (A t_1 és t_3 területűeknek közös csúcsuk van.) Igazoljuk, hogy $t_1 - t_3 = t_2 - t_4$.

1528. Rajzoljunk egy hegyesszögű háromszög két oldala fölé négyzetet. Igazoljuk, hogy ezeknek a négyzeteknek azok a darabjai, melyeket a háromszög megfelelő magasságvonalainak meghosszabbítása levág belőlük, egyenlők.

1529. Bizonyítsuk be, hogy az 1529. ábrán vonalkázott területrészek egyenlők, a pontozott területrész pedig a négyzet területének negyede.



1529



1530

1530. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójára félkört, a derékszögű csúcsból pedig a befogókkal negyedkört rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett holdacska területe a háromszög területével egyenlő (1530. ábra).

1531. Alakítsunk át egy paralelogrammát olyan paralelogrammává, amelynek egyik oldala adott, szögei pedig az eredetiével egyenlők.

1532. Alakítsunk át háromszöget egyik szögének megtartásával olyanná, hogy a szög melletti egyik oldala adott hosszúságú legyen.

1533. Alakítsunk át egy háromszöget egyenlő szárúvá, adott alappal.

1534. Alakítsunk át egy paralelogrammát rombusszá egy oldal megtartásával.

1535. Alakítsunk át egy paralelogrammát rombusszá egy átló megtartásával.

1536. Alakítsunk át egy háromszöget olyanná, melynek egyik szöge megegyezik egy adott szöggel.

1537. Alakítsunk át egy téglalapot paralelogrammává, melynek egyik szöge és oldala adott.

1538. Alakítsunk át adott háromszöget adott oldalú téglalappá.

1539. Alakítsunk át ötszöget adott alapú háromszöggé.

1540. Vágjunk egy háromszöget az egyik csúcsán átmenő egyenesekkel n egyenlő részre.

1541. Vágjunk egy paralelogrammát egyik csúcsán átmenő egyenesekkel n egyenlő részre.

1542. Osszunk egy háromszöget alapjának felezőpontjából kiinduló egyenesekkel három egyenlő részre.

1543. Vágjunk egy négyszöget egyik csúcsán átmenő egyenessel két egyenlő részre.

1544. Rajzoljunk a háromszög egyik oldala fölé kifelé egy tetszés szerinti körívet. Ennek felezőpontjából húzott egyenessel osszuk a háromszögből és a körszeletből álló idomot két egyenlő részre.

1545. Osszuk a trapézt egyik szárának felezőpontjából induló egyenessel két egyenlő részre.

1546. Osszuk a négyszöget egy csúcsából induló egyenesekkel három egyenlő részre.

1547. Egy háromszög belsejében szerkesszünk pontot úgy, hogy azt a háromszög csúcsaival összekötve, három egyenlő területű háromszöget nyerjünk.

1548. Osszunk egy háromszöget egyik oldalával párhuzamos egyenessel két egyenlő területű részre.

1549. Szerkesszünk négyzetet, melynek területe akkora, mint két megadott négyzet területének különbsége.

1550. Szerkesszünk négyzetet, melynek területe egy adott négyzet területének harmadrészével egyenlő.

1551. Adott egy négyzet és az oldalánál hosszabb szakasz. Erre a szakaszra szerkesszünk egymás mellé két négyzetet, melyek területének összege akkora, mint az adott négyzeté.

1552. Szerkesszünk kört, melynek területe kétszer akkora, mint egy adott köré.

1553. Adott kör területét bontsuk koncentrikus körrel két egyenlő területű részre.

1554. Adott háromszögből vágjunk le az egyik oldallal párhuzamos egyenessel egy másik adott háromszöggel egyenlő területű háromszöget.

1555. Vágjunk le egy szögből az egyik szárra merőleges egyenessel olyan háromszöget, melynek területe akkora, mint egy adott derékszögű háromszögé.

1556. Felezzük meg a háromszög területét az alapra merőleges irányú egyenessel.

1557. Alakítsunk át egy négyzetet vele egyenlő területű szabályos háromszöggé.

1558. Mutassuk meg, hogy két páros oldalszámú sokszögnek egyenlő a területe, ha oldalfelező pontjaik egybeesnek.

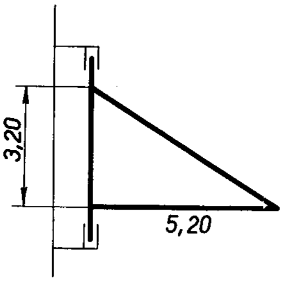
PITAGORASZ TÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA

1559. Egy 2 km hosszúságú útszakasz két végpontjában rögzítünk egy 2001 m hosszúságú kötelet. A kötél középpontját emeljük fel, amennyire csak lehet. Át tud-e alatta menni így egy felnőtt ember anélkül, hogy lehajolna?

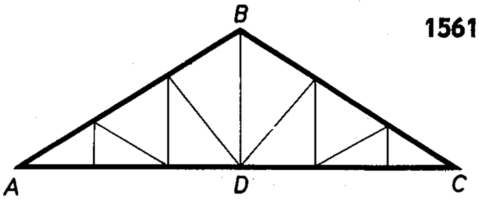
1560. Falra erősített forgódarunak (1560. ábra) a fallal párhuzamos vasrúdja 3,20 m, rá merőleges forgórúdja 5,20 m. Milyen hosszú az ezeket összekötő húzórúd?

1561. Határozzuk meg az 1561. ábrán látható tetőszerkezet BD magasságát, ha az AB, ill. BC szarufák 9 m, az AC keresztfa pedig 15 m hosszú.

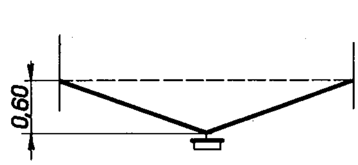
1560



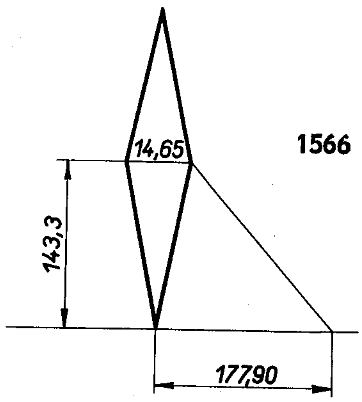
1561



1562



1566



1562. Egy 20 m széles úton két szemközti ház közé kifeszített acélhuzalra függesztett villanylámpa „belógása" 60 cm. Milyen hosszú a huzal? (1562. ábra.)

1563. Egy 1,2 m széles és 1,9 m magas vasajtóra átlóvasat kell tenni. Mekkora ennek hossza?

1564. Két gyárépület között anyagszállításhoz lejtős csúszdát építettek. Határozzuk meg a csúszda hosszát, ha a gyárépületek távolsága 10 m, és a csúszda végeit 8, ill. 4 m magasan helyezték el.

1565. Egy derékszög szárai között levő P pont a száraktól a, ill. b cm távol van. Milyen távol van a derékszög csúcsától?

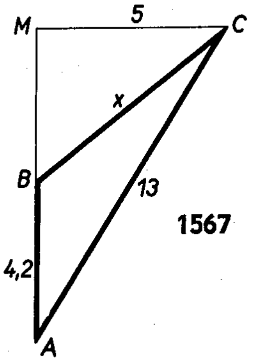
1566. Egy 317 m magas rádió-leadótorony kifeszítése a földtől 143,3 m magasságból induló sodronykötelekkel történik. A torony szélessége itt 14,65 m. A kifeszítőkötelek a torony körül írt 177,9 m sugarú kör kerületén vannak leerősítve. Milyen hosszú egy ilyen kifeszítőkötél? (1566. ábra.)

1567. Egy falra szerelt forgódaru alsó rúdja 13 m-es, a rúd végpontjának távolsága a tengelytől 5 m. Mekkora a felső rúd hossza, ha a rúdnak a tengelyen forgó végei 4,2 méterre vannak egymástól? (1567. ábra.)

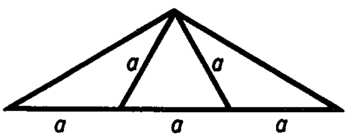
1568. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 16 cm, szárai 17 cm hosszúak. Határozzuk meg az alaphoz tartozó magasság hosszát.

1569. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának és szárának aránya 48:25. Az alaphoz tartozó magasság hossza 35 cm. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát.

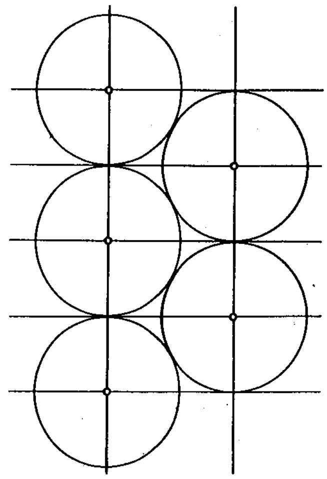
1570. Mekkora az a oldalú szabályos háromszög magassága, valamint beírt, ill. köré írt körének sugara?

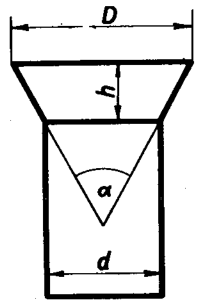


1567



1573


1574



1579

1571. Mekkora az r sugarú körbe írt szabályos háromszög oldala?

1572. Határozzuk meg a h magasságú szabályos háromszög oldalának hosszát.

1573. Az 1573. ábrán levő tetőszerkezeten mindegyik a-val jelölt gerenda egyenlő hosszú: 3,6 m. Milyen hosszú a nem jelölt két gerenda?

1574. Vaslemezből 28 mm átmérőjű körlapokat kell kivágni. Határozzuk meg az 1574. ábrán látható rácshálózat egyeneseinek távolságát.

1575. A derékszögű háromszög egyik szöge 60°-os, az e melletti befogó hossza a. Mekkora a másik befogó?

1576. A derékszögű háromszög egyik szöge 30°-os, a mellette levő befogó hossza b. Mekkora a másik befogó?

1577. Mekkora a szabályos háromszög oldala, ha magassága d-vel kisebb, mint az oldala?

1578. Egy 30°-os derékszögű háromszög hosszabbik befogója 6 m. Mekkora a másik befogó és az átfogó?

1579. Az 1579. ábrán ún. rejtett fejű cövekszeg oldalnézetét láthatjuk. Az ábrán látható szög 60°-os. Számítsuk ki

a) D-t, ha $d = 16{,}5$ mm, és $h = 7{,}5$ mm;
b) d-t, ha $D = 30$ mm, és $h = 9{,}5$ mm;

c) h-t, ha $D = 35$ mm, és $d = 22$ mm.
d) Milyen összefüggést írhatunk fel D, d és h között?

1580. Mekkorák annak az egyenlő szárú háromszögnek a szárai, amelynek alapja 4 cm hosszú, és az alapon fekvő szögek 45°-osak?

1581. Egy háromszög alapján levő nagyobbik szög 45°-os. Az alapot a hozzá tartozó magasság 20 és 21 cm-es részekre osztja. Számítsuk ki a nagyobbik oldal hosszát.

1582. Egy háromszög két oldalának hossza: $a = 25$ cm, $b = 30$ cm, a harmadik oldalhoz tartozó magasság: $m_c = 24$ cm. Számítsuk ki a c oldal hosszát.

1583. *a)* Határozzuk meg az a oldalú négyzet átlójának hosszát.
b) Határozzuk meg annak a négyzetnek az oldalhosszát, amelynek átlója b hosszúságú.

1584. Mekkora a négyzet oldala, ha átlója 2 cm-rel hosszabb az oldalánál?

1585. Mekkora az r sugarú körbe írt négyzet oldala?

1586. Mekkora a téglalap köré írt kör sugara, ha oldalai a, ill. b hosszúságúak?

1587. Milyen átmérőjű gömbfából lehet olyan gerendát kivágni, amelynek keresztmetszete 35 és 20 cm-es oldalakkal rendelkező téglalap?

1588. Milyen szélesnek kell lennie egy henger alakú vasrúdnak, ha belőle 32 mm alapélű négyzetes hasábot akarunk kiesztergálni?

1589. Egy rönkfa átmérője 12 cm. Lehet-e belőle 10 cm élű négyzetalapú gerendát készíteni?

1590. Egy 34 cm sugarú körbe írt téglalap oldalainak aránya 8:15. Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.

1591. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 8 dm és 18 dm. Számítsuk ki a köré írt kör sugarának hosszát.

1592. Határozzuk meg a derékszögű háromszög átfogójához tartozó súlyvonal hosszát, ha a befogók hossza 12, ill. 16 cm.

1593. Egy rombusz átlóinak hossza 24 cm és 70 cm. Számítsuk ki a rombusz oldalainak hosszát.

1594. Egy rombusz kerülete 1 m hosszú, átlóinak aránya 3:4. Határozzuk meg az átlók hosszát.

1595. A rombusz átlói 14 cm és 48 cm. Mekkora a magassága?

1596. Egy rombusz egyik átlója 20 cm, oldala 17 cm. Mekkora a másik átlója?

1597. Egy egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalai 7, ill. 4 cm hosszúak, a nem párhuzamos oldalak hossza 2,5 cm. Mekkora a trapéz magassága?

1598. Egy egyenlő szárú trapéz alapjainak hossza 10, ill. 24 cm, a szár hossza 25 cm. Határozzuk meg a trapéz magasságának hosszát.

1599. Egy egyenlő szárú trapéz középvonala 45 cm, magassága 40 cm. A trapéz szára 41 cm hosszú. Számítsuk ki a párhuzamos oldalak hosszát.

1600. Egy egyenlő szárú trapézba egy 3 cm sugarú érintőkört lehet írni. Mekkorák a trapéz oldalai, ha hosszabbik alapja 10 cm?

1601. Mekkora sugarú kör írható abba a szimmetrikus trapézba, amelynek alapja 10 cm és 36 cm?

1602. Mekkora az egyenlő szárú trapéz átlóinak hossza, ha alapjai 4 és 6 m, szára 5 m?

1603. Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és ferde szára egyenlő hosszú. Határozzuk meg a hosszabbik átló hosszát, ha a ferde szár a és a hosszabbik alap b hosszúságú.

1604. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű trapézban az átlók négyzeteinek különbsége megegyezik az alapok négyzeteinek különbségével.

1605. Egy P pontból egy e egyeneshez két ferde és egy merőleges szakaszt húztunk. Határozzuk meg a merőleges szakasz hosszát, ha a ferdék 41 cm és 50 cm hosszúak, és az e-re eső vetületeik aránya 3:10.

1606. Egy ABC egyenlő szárú háromszög alapja 32 cm, a szárak hossza 20 cm. Az alappal szemközti csúcsban merőlegest állítunk az egyik szárra. Mekkora részekre osztja ennek meghosszabbítása az alapot?

1607. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a C csúcsból a rövidebbik befogóval elmetsszük. Az átfogón létrejött szeletek 98, ill. 527 cm-esek. Határozzuk meg a befogók hosszát.

1608. Egy derékszögű háromszög átfogóját a derékszög szögfelezője $2\frac{1}{7}$ és $2\frac{6}{7}$ cm hosszú részekre osztja. Határozzuk meg a befogók hosszát.

1609. Határozzuk meg, mekkora részekre osztja az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóját a szemközti szög szögfelezője.

1610. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög szögfelezője a szemközti befogót m és n hosszúságú szeletekre ($m > n$) osztja. Határozzuk meg a másik befogó és az átfogó hosszát.

1611. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 15 cm és 20 cm. Mekkora részekre osztja az átfogót a derékszög csúcsából húzott magasság és szögfelező?

1612. Egy derékszögű háromszög átfogóját a derékszög szögfelezője 7:9 arányú részekre osztja. Milyen arányban osztja a magasság az átfogót (a részeket ugyanolyan sorrendben véve)?

1613. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 15, ill. 20 cm. A derékszög csúcsából meghúzzuk a magasságot, valamint a magasság és a befogók által közrefogott szögek szögfelezőit. Határozzuk meg az átfogóból a két szögfelező által kimetszett szelet hosszát.

1614. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapon levő szögeinek szögfelezői a D pontban metszik egymást. Határozzuk meg a D pontnak az alappal szemközti csúcstól való távolságát, ha a háromszög alapja 12 cm, a szárak hossza 10 cm.

1615. Határozzuk meg, milyen távol van a 89 mm sugarú kör középpontjától annak 16 cm hosszúságú húrja.

1616. Milyen távol van a 4 cm sugarú kör középpontjától egy 5 cm hosszú húr?

1617. Két egymást metsző kör közös húrja 24 cm. Határozzuk meg a középpontok távolságát, ha a körök 13, ill. 15 cm sugarúak.

1618. Egy 15 cm sugarú kör két párhuzamos húrja 18 cm, ill. 24 cm hosszú. Határozzuk meg ezek távolságát, ha tudjuk, hogy a kör középpontja a párhuzamosok között van.

1619. Mekkora a kör sugara, ha benne egymástól 22 cm távolságra egy 40 cm-es és egy 48 cm-es párhuzamos húrpár helyezhető el?

1620. Egy 30 cm sugarú kör két párhuzamos húrja 36, ill. 48 cm hosszú. Határozzuk meg ezek távolságát, ha tudjuk, hogy a kör középpontja a párhuzamosok közötti távolságon kívül helyezkedik el.

1621. Egy 25 cm sugarú kör két párhuzamos húrja 14 és 40 cm hosszú. Határozzuk meg a közöttük levő távolságot.

1622. Egy h magasságú körszeletet határoló húr hossza a. Határozzuk meg a körszelet sugarának hosszát.

1623. Kör alakú tárgyak átmérőjének meghatározásához az 1623. ábrán látható tolómérőt használják. A tolómérő szárainak hossza: $s = 25$ mm.

a) Határozzuk meg az átmérő hosszát, ha a tolómérő végpontjainak távolsága: $l = 200$ mm.

b) Határozzuk meg, hogyan függ a d átmérő s-től és l-től.

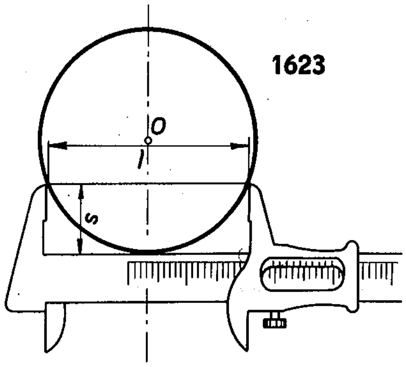
1624. Egy kör átmérőjének egyik végpontja a vele párhuzamos húr végpontjaitól 18, ill. 84 cm távol van. Mekkora a kör sugara?

1625. Egy 36 cm sugarú kör középpontjától 85 cm távol levő pontból a körhöz érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintőszakasz hosszát.

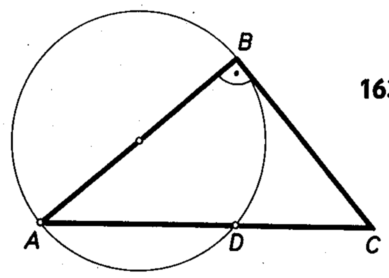
1626. Mekkora a kör középpontjától 13 cm távol levő pontból az 5 cm sugarú körhöz húzott érintő hossza?

1627. Egy 11 cm sugarú körhöz adott P pontból érintőt húzunk. Határozzuk meg a P pontnak a kör középpontjától való távolságát, ha az érintőszakasz 60 cm hosszú.

1628. Egy 7 cm sugarú körhöz a kör középpontjától 25 cm távol levő P pontból két érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok távolságát.



1623



1630

1629. Mekkora annak a körnek a sugara, amelyhez egy pontból 156 cm hosszú érintők húzhatók, és az érintési pontok távolsága 120 cm.

1630. Egy kör adott B pontbeli érintőjének C pontját összekötjük a kör B-vel átellenes A pontjával (1630. ábra). Az AC egyenes a kört D pontban metszi. Határozzuk meg a kör sugarának hosszát, ha $AD = 32$ cm, és $DC = 18$ cm.

1631. Határozzuk meg az előző feladat ábráján levő AD és DC szakaszok arányát, ha a BC érintőszakasz egyenlő a kör sugarával.

1632. Adott P pontból adott körhöz húzott érintő és szelő merőlegesek egymásra. Az érintőszakasz 12 cm, a szelő P ponthoz közelebb eső szelete 10 cm. Határozzuk meg a kör sugarát.

1633. Két kör sugara 1, ill. 3 cm. A középpontjukat összekötő szakasz 8 cm. Milyen hosszúak

a) a közös külső érintők?

b) a közös belső érintők?

1634. Egy 27 cm és egy 13 cm sugarú kör középpontjainak távolsága 50 cm. Határozzuk meg

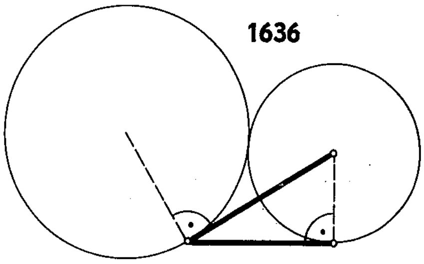
a) a közös külső érintők hosszát,
b) a közös belső érintők hosszát.

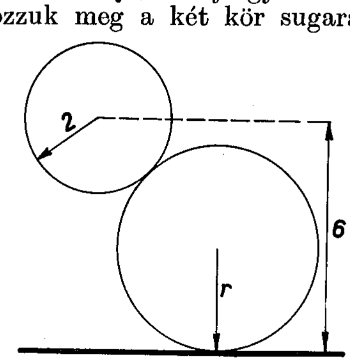
1635. Határozzuk meg – két egymást kívülről érintő – kör közös külső érintőjének hosszát, ha a körök 16 cm és 25 cm sugarúak.

1636. Két kör kívülről érinti egymást. Az egyik kör középpontjából a másik körhöz húzott érintő érintési pontjából az első körhöz ismét érintőt húzunk. Határozzuk meg az utóbbi érintőszakasz hosszát (1636. ábra).

1637. Egy félhenger alakú bolthajtásos pincében a falaktól egyenlő távolságra két állványt kell felállítani. Határozzuk meg az állványok magasságát, ha a pince szélessége alul 4 m, és az állványok 2 m-re vannak egymástól.

1638. Egy 8 dm széles körgyűrű külső körének az a húrja, amely egyúttal belső körének érintője, 4 m hosszú. Határozzuk meg a két kör sugarának hosszát.

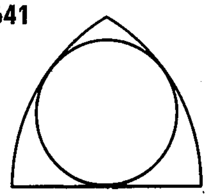

1636

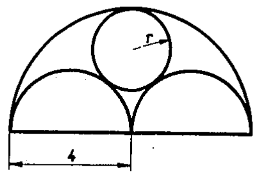


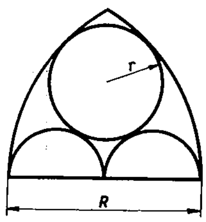
1640

1639. Egymástól 8 cm távolságban húzódó párhuzamos egyenesek között két egymást és egy-egy egyenest is érintő kör van. A körök középpontjából a párhuzamosakra állított merőlegesek távolsága 3 cm. Mekkora a két kör sugara?

1640. Számítsuk ki az adott kört és egyenest érintő kör sugarát az 1640. ábrán adott méretekből.

1641


1642


1643


1641. Gótikus ablak felső része két körívből áll, ezeknek sugara megegyezik az ablak 60 cm szélességével. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a két körívet és a vízszintes keresztfát érinti? (1641. ábra.)

1642. Számítsuk ki az 1642. ábra román ablakán levő legkisebb kör sugarát.

1643. Számítsuk ki az 1643. ábrán r-rel jelölt kör sugarát, ha R-et ismertnek tételezzük fel.

1644. Számítsuk ki a 1644. ábrán levő kis kör sugarát.

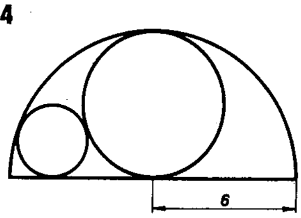
1645. Egy 9 cm sugarú kör ívét és az ívhez tartozó húrt egy 3 cm sugarú kör felezőpontjukban érinti. Mekkora a sugara annak a két körnek, amely érinti a két előbbi kört és a húrt?

1646. Egy egyenlő szárú háromszögben az alaphoz 3 cm-es, a szárhoz 4 cm-es magasság tartozik. Mekkorák a háromszög oldalai?

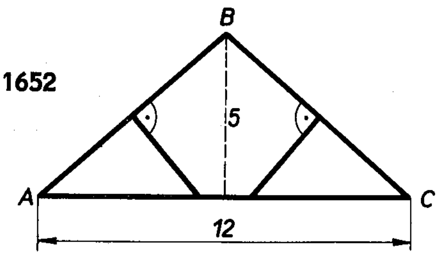
1647. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 30 cm, magassága 20 cm. Mekkora a szárhoz tartozó magasság?

1648. Egy egyenlő szárú háromszög köré írt kör sugara 5 cm, alapja 8 cm. Mekkorák a szárai?

1644



1652



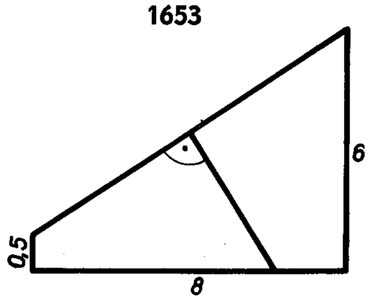
1649. Egy egyenlő szárú háromszög alapja és magassága egyaránt 6 cm. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

1650. Határozzuk meg az egyenlő szárú háromszögbe írt kör sugarának hosszát, ha a háromszög alapja 30 cm, a szárak hossza 39 cm.

1651. Egy egyenlő szárú háromszögbe írt kör középpontja a magasságot 17:15 arányban osztja. Határozzuk meg a kör sugarát, ha a háromszög alapja 60 cm.

1652. Egy tetőszerkezet 12 m széles és 5 m magas. Mindegyik tetőgerendát közepén egy rá merőleges gerenda támasztja alá (1652. ábra). Milyen hosszúak ezek?

1653



1653. Az 1653. ábrán levő tetőszerkezet (ún. süllyesztett fedélszék) 8 m hosszú gerendája 0,5 m-rel lejjebb van, mint az eresz. A tetőszerkezet 6 m magas. A tető közepéből támasztófa (dúc) indul ki a tetőre merőlegesen. Milyen hosszú ez a támasztófa?

1654. Mekkora annak az ingának a hossza, amely 20 cm-es kitérésnél 2 cm-t emelkedik?

1655. Egy háromszög oldalai 25 cm, 52 cm és 63 cm. Határozzuk meg a leghosszabb oldalhoztartozó magasságot.

1656. Számítsuk ki annak a háromszögnek a magasságait, amelynek oldalai
a) 13, 20, 21 cm,
b) 26, 16,9, 27,3 cm.

1657. Egy trapéz alapjai 23 cm és 13 cm, szárai 9 cm és 17 cm hosszúak. Mekkora a magassága?

1658. Mekkora annak a trapéznak a magassága, amelynek alapjai 22 és 7 cm, szárai pedig 7 és 20 cm-esek?

1659. Egy r sugarú körbe kereszt alakban öt egyenlő nagyságú négyzetet írtunk. Mekkorák a négyzetek oldalai?

1660. Egy r sugarú körbe három egyenlő nagyságú, egymást és az eredetit is érintő kört írunk. Mekkorák a kis körök sugarai?

1661. Egy a oldalú szabályos háromszögbe három egyenlő sugarú, egymást és a háromszög két-két oldalát is érintő kört írtunk. Mekkora a sugaruk?

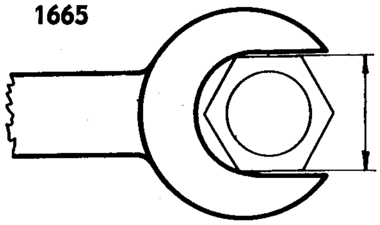
1662. Egy négyzet csúcsai körül, az átló felével mint sugárral, negyedköröket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a negyedköröknek és a négyzet oldalainak metszéspontjai szabályos nyolcszöget határoznak meg.

1663. Mekkora az r sugarú körbe írt szabályos nyolcszög oldala?

1664. Mekkora az r sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala?

1665. Egy csavaranya oldala 2,5 cm hosszú. Milyen x nyílású csavarkulcs kell hozzá, ha a csavar és a csavarkulcs között 0,5 mm hézagra is szükség van? (1665. ábra.)

1665



1666. Az a oldalú négyzet egyik oldalán az egyik csúcstól b távolságra kijelölünk egy pontot. Mekkora ennek a pontnak az átlóktól mért távolsága?

1667. Egy egyenlő oldalú háromszög a alapjának egyik végpontjában egy a hosszúságú merőlegest állítunk. Mekkora a merőleges végpontjának a háromszög csúcsaitól mért távolsága?

1668. Egy a oldalú négyzetben két szomszédos csúcs körül egy-egy a sugarú negyedkört írunk. Milyen messze van ezek metszéspontja a csúcsoktól?

1669. Egy a oldalú négyzetben minden csúcs körül a sugarú negyedkört rajzolunk. Mekkora az oldala annak a négyzetnek, melyet a negyedkörök metszéspontjai határoznak meg?

1670. Egy a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögben kijelölünk egy pontot, amelynek távolsága a befogóktól x és y. Mekkora a pont távolsága az átfogótól?

1671. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.

1672. *a)* Egy paralelogramma oldalai 6 cm és 10 cm, egyik átlója 7 cm. Mekkora a másik átló?

b) Egy paralelogramma átlói 12 cm és 18 cm, egyik oldala 9 cm. Mekkora a másik oldal?

c) Határozzuk meg a paralelogramma magasságát, ha átlói 40 és 74, egyik oldala 51.

1673. *a)* Egy háromszög oldalai a, b, c. Mekkorák a súlyvonalai?

b) A háromszög oldalai 16, 18, 26. Mekkora a legnagyobb oldalhoz tartozó súlyvonal?

c) A háromszög két oldala 7 és 11, a harmadikhoz tartozó súlyvonal 6. Mekkora a harmadik oldal?

1674. A háromszög egyik oldala 60 cm, a hozzá tartozó súlyvonal, ill. magasság 13 cm, ill. 12 cm. Mekkora a másik két oldal?

1675. Mutassuk meg, hogy azokban a derékszögű háromszögekben, amelyekben az átfogók egyenlők, a súlyvonalak négyzetösszege is egyenlő.

1676. Mutassuk meg, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegének $^3/_4$-ével egyenlő.

1677. Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszögben az átlók négyzetösszege a középvonalak négyzetösszegének kétszeresével egyenlő.

1678. Mutassuk meg, hogy tetszőleges négyszögben az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetének és az átlók felezőpontjait összekötő szakasz négyszeres négyzetének összegével.

1679. A sík egy pontjának egy téglalap négy egymás utáni csúcsaitól mért távolságai: a, b, c, d. Mutassuk meg, hogy $a^2+c^2 = b^2+d^2$.

1680. Adott a sík A és B pontja. Mi azoknak a C pontoknak a mértani helye, amelyekre AC^2+BC^2 állandó érték?

1681. Egy háromszög belsejében levő pontból az oldalakra állított merőleges az oldalakat az a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 szakaszokra osztja (ebben a sorrendben). Bizonyítsuk be, hogy $a_1^2+b_1^2+c_1^2 = a_2^2+b_2^2+c_2^2$.

1682. Adott az A és B pont. Mi azoknak a C pontoknak a mértani helye, amelyekre CA^2-CB^2 állandó?

1683. Legyen D az ABC háromszög A csúcsából induló magasságának egy pontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $AB^2-AC^2 = BD^2-CD^2$.

1684. Bizonyítsuk be Pitagorasz tételének megfordítását: ha egy háromszög oldalai a, b, c és $a^2+b^2 = c^2$, akkor a háromszög derékszögű.

1685. Mutassuk meg, hogy a és b egy derékszögű háromszög befogói, átfogója c, és a hozzá tartozó magasság m, akkor $a+b$, m és $c+m$ szintén egy derékszögű háromszög oldalai.

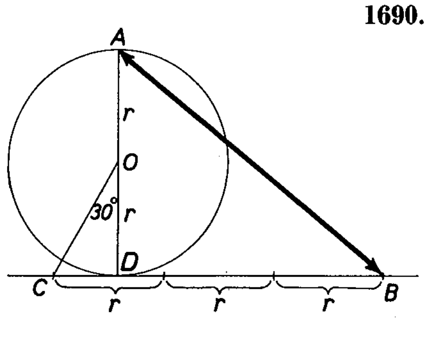
1686. Egy derékszög mindkét szárára a csúcsból egyenlő a távolságot mérünk fel. Jelöljük a kapott végpontoknak a derékszög csúcsán áthaladó tetszés szerinti egyenestől való távolságát x-szel, ill. y-nal. Mutassuk meg, hogy x^2+y^2 értéke csak a-tól függ.

1687. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárai b hosszúságúak. Az alap egyik végpontjához tartozó m magasság a szemközti szárat c és d hosszúságú darabokra osztja (c esik az alaphoz közelebb). Bizonyítsuk be, hogy $c^2+2d^2+3m^2 = a^2+2b^2$.

1688. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor két-két szemközti oldalának négyzetösszege egyenlő.

1689. Egy körben két egymást metsző, egymásra merőleges húrt rajzoltunk. Igazoljuk, hogy a húr négy szeletének négyzetösszege mindig ugyanakkora.

1690



1690. A XVII. században *Kochansky* a kör kerületével egyenlő szakasz szerkesztésére az ábráról leolvasható közelítő szerkesztést adta, az r sugarú kör kerületének fele közelítőleg AB-vel egyenlő. Számítsuk ki AB hosszát két tizedesjegy pontossággal (1690. ábra).

Térgeometria

TÉRELEMEK KÖLCSÖNÖS HELYZETE. ILLESZKEDÉSI FELADATOK

1691. Hány egyenest húzhatunk a tér *a)* 4, *b)* 5, *c)* 6, *d)* n olyan pontján át, melyek között nincs három egy egyenesbe eső?

1692. Adott a térben 7 különböző pont; ezek közül 3 egy egyenesen, 4 egy másik egyenesen helyezkedik el. Hány egyenest határoznak meg a 7 pont közül kiválasztható pontpárok?

1693. Adott a térben n különböző pont: ezek közül a egy egyenesen, b egy másik egyenesen helyezkedik el ($a+b = n$, $a>1$, $b>1$). Hány különböző egyenest határoznak meg az n pont közül kiválasztható pontpárok?

1694. Vegyük fel a térnek *a)* 4, *b)* 5, *c)* 6, *d)* n olyan pontját, melyek közül bármely négy nem esik egy síkba. Hány síkot határoznak meg a belőlük kiválasztható ponthármasok?

1695. Adott a térben m egyenes és rajtuk kívül n pont. Hány síklap fektethető ezeken át úgy, hogy minden sík tartalmazzon egy egyenest és egy pontot?

1696. Adott a térben négy párhuzamos egyenes, melyek közül bármely három nem esik egy síkba és egy egyenes, amelyik a párhuzamosok közül kettőt metsz. Hány síkot határoznak meg az öt egyenesből kiválasztható párok?

1697. Adott a térben egy ponton átmenő *a)* 3, *b)* 4, *c)* 5, *d)* 6, *e)* n egyenes, melyek közül bármelyik három nincs egy síkban. Hány síkot határoznak meg az ezekből kiválasztható párok?

1698. Legfeljebb hány metszésvonala van *a)* 3, *b)* 4, *c)* 5, *d)* 6, *e)* n síknak? *f)* Hány metszésvonala van n adott síknak, ha közülük a párhuzamos és b ugyanazon egyenesben metszi egymást, és az utóbbiak között nincs az előbbiekkel párhuzamos, továbbá $a+b = n$?

1699. Bizonyítsuk be, hogy két kitérő egyenes bármelyikén át felvehető a másikkal párhuzamos sík.

1700. Bizonyítsuk be, hogy ha metszősíkok egy-egy egyenese egymással párhuzamos, akkor a két sík metszésvonalával is párhuzamosak.

1701. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes két metszősík mindegyikével párhuzamos, akkor a metszésvonallal is párhuzamos.

1702. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes egy síkot metsz, akkor ez a metszéspont rajta van az egyenesen átmenő bármely síknak és az eredeti síknak a metszésvonalán.

1703. Bizonyítsuk be, hogy ha három sík páronként metszi egymást, és a páronkénti metszésvonalak közül kettőnek van metszéspontja, akkor a harmadik is átmegy ezen a metszésponton.

1704. Bizonyítsuk be, hogy ha két párhuzamos síkot metszünk egy harmadikkal, akkor a metszésvonalak párhuzamosak.

1705. Adott két kitérő egyenes és egy pont, amely nincs rajta az egyenesek egyikén sem. Keressünk olyan egyenest, amely átmegy az adott ponton, és mindkét egyenest metszi. Ábrázoljuk a keresett egyenest, ha az adatokat a képeivel adjuk meg.

1706. Adott két kitérő egyenes és egy harmadik. Keressünk a harmadik egyenessel párhuzamos mindkét adott egyenest metsző egyenest. Vegyük fel az adatokat a képeivel, és ábrázoljuk a keresett egyenest.

1707. Adott a térben egy metsző egyenespár, továbbá két, egymáshoz és az előbbi egyenesekhez képest kitérő egyenes. Keressünk olyan egyenest, amely mind a négy egyenest metszi. Vegyük fel az adatokat a képeikkel, és ábrázoljuk a keresett egyenest.

1708. Bizonyítsuk be, hogy három olyan egyeneshez, amelyek közül bármely kettő kitérő, számtalan olyan egyenes vehető fel, amelyik mindhármat metszi. Egy ilyen egyenest ábrázoljunk, ha az adatokat a képeivel adjuk meg.

1709. Keressünk olyan egyenest, amelyik két adott síkkal párhuzamos, és két adott kitérő egyenest metsz.

1710. Bizonyítsuk be, hogy ha több egyenes közül bármely kettő metszi egymást, akkor vagy valamennyi egy ponton megy át, vagy mindannyian egy síkban vannak.

1711. Bizonyítsuk be, hogy ha ABC és $A'B'C'$ különböző síkban fekvő háromszögek és a BC, $B'C'$ oldalak egyenesei metszik egymást, hasonlóan a CA, $C'A'$, valamint az AB, $A'B'$ oldalak egyenesei is, akkor

a) ezek a metszéspontok egy egyenesen vannak.
b) Az AA', BB', CC' egyeneseknek közös pontjuk van vagy párhuzamosak.

1712. Az ABC és $A'B'C'$ legyenek különböző síkban fekvő olyan háromszögek, hogy AB párhuzamos $A'B'$-vel, hasonlóan BC párhuzamos $B'C'$-vel, és CA párhuzamos $C'A'$-vel. Bizonyítsuk be, hogy akkor az AA', BB', CC' egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

1713. Adott két háromszög: ABC és $A'B'C'$. Síkjuk legyen különböző. Adott továbbá egy ezektől különböző **S** sík. Határozzunk meg az **S** síkban olyan $A''B''C''$ háromszöget, hogy az AA'', BB'', CC'' egyenesek egy pontban találkozzanak vagy párhuzamosak, és ugyanezt mondhassuk az $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ egyenesekről is.

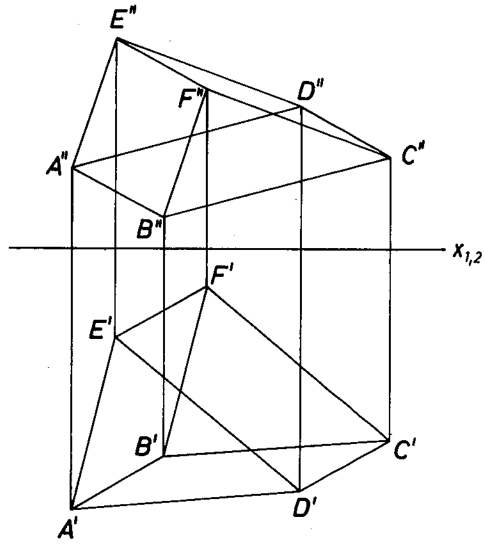
1714. *a)* Ábrázoljunk első fedőpontpárt. Melyik takarja a másikat?
b) Ábrázoljunk második fedőpontpárt. Melyik takarja a másikat?
c) Ábrázoljuk az a, b párhuzamos egyenespárt és az ezekhez képest kitérő c egyenest. Tüntessük fel a láthatóságot.

1715. Másoljuk le az 1715. ábrát, és tüntessük fel a láthatóságot, ha

a) tömör test;
b) test élvázas modellje;
c) $ABCD$, $CDEF$, $EFBA$ paralelogramma alakú lemezek;
d) ADE és BCF háromszög alakú lapok.

1716. Ábrázoljuk egyenes és sík döféspontját, ha az egyenest a képeivel és a síkot

a) három pontjának,
b) egy metsző egyenespárjának,
c) két párhuzamos egyenesének
a képeivel adjuk meg.



1715

1717. Adott két sík két-két párhuzamos egyenesük képeivel. Szerkesszük meg a két sík metszésvonalának képeit! A láthatóságot tüntessük fel úgy, hogy mindkét síkból csak a párhuzamosok határolta szalagot tekintjük.
1718. Adott két sík három-három pontjának képeivel. Ábrázoljuk a két sík metszésvonalát! A láthatóságot úgy tüntessük fel, hogy mindkét síkból az adott pontok alkotta háromszöglemezt tekintjük.
1719. Adott egy sík két metszőegyenesével. Szerkesszük meg az $x_{1,2}$ tengely és e sík metszéspontjának képeit!
1720. Vegyünk fel négy párhuzamos egyenest a képeivel. Tekintsük azt a két síkot, melyeket az előbbi egyenesek közül kettő és a még megmaradt kettő meghatároznak. Ábrázoljuk e síkok metszésvonalát.
1721. Ábrázoljuk az *a*, *b*, *c*, *d* egy ponton átmenő egyeneseket. Szerkesszük meg az *a*, *b* és a *c*, *d* egyenesek alkotta síkok metszésvonalának képeit!
1722. Ábrázoljunk egyenest a két képével. Szerkesszük meg

a) az első képsíkkal,
b) a második képsíkkal,
c) a képsíkok szögfelező síkjaival
való metszéspontjának képeit.

1723. Ábrázoljunk síkot két egyenesének képeivel. Szerkesszük meg

a) az első képsíkkal,
b) a második képsíkkal,
c) a képsíkok szögfelező síkjaival
való metszésvonalának képeit.

MERŐLEGES TÉRELEMEK. TÉRELEMEK TÁVOLSÁGA, HAJLÁSSZÖGE

1724. Bizonyítsuk be, hogy egy síknak valamely pontjában csak egy merőleges egyenes állítható a síkra.

1725. Bizonyítsuk be, hogy egy síkon kívül fekvő bármely pontból csak egy merőleges egyenes húzható a síkra.

1726. *a)* Két térbeli pontnak egy síktól való távolsága: $a = 3{,}7$ m és $b = 5{,}8$ m; a pontokból a síkra bocsátott merőlegesek talppontjainak távolsága $c = 4{,}2$ m. Határozzuk meg a térbeli pontok távolságát.

b) Mekkora egy A pontnak egy α síktól való távolsága, ha az A pont a sík egy A' pontjától a távolságban van, és az A' pontnak az A pontból húzott merőleges talppontjától való távolsága b? Határozzuk meg a távolságot, ha $a = 11{,}38$ m, $b = 4{,}62$ m.

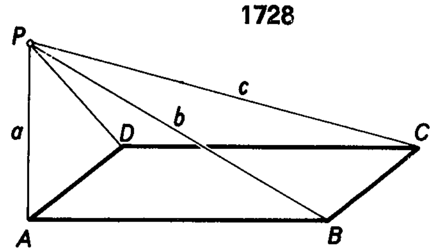
c) Az A pont a, a B pont b távolságra van egy adott síktól. Milyen távol van az AB szakasz F felezőpontja az adott síktól?

d) Az A pont a, a B pont b távolságra van egy adott síktól, a sík ugyanazon oldalán. Legyen C az AB szakaszt $p{:}q$ arányban osztó pont. Milyen távolságra van a C pont a síktól?

1727. Az ABC háromszög csúcspontjai egy adott sík ugyanazon oldalán a síktól a, b, c távolságra vannak. Határozzuk meg a háromszög S súlypontjának a síktól való távolságát.

1728. Egy $ABCD$ paralelogramma A, B, C, D csúcsai egy sík ugyanazon oldalán a síktól a, b, c, d távolságra vannak. Határozzuk meg, hogy milyen összefüggés van az a, b, c, d értékek között.

1728



1729. Bizonyítsuk be, hogy ha egy síkon kívül levő pontból a síkra merőlegest és több ferde egyenest húzunk, akkor

a) ezek közül a merőleges távolság a legrövidebb,

b) két ferde akkor és csak akkor egyenlő, ha talppontjaik egyenlő távol esnek a merőleges talppontjától,

c) két ferde közül az a nagyobbik, amelynek talppontja távolabb esik a merőleges talppontjától.

1730. Egy $ABCD$ téglalap A csúcsában állítsunk merőlegest a téglalap síkjára. Ezen legyen a P pont úgy, hogy $PA = a$ adott. Adott még a $PB = b$ és $PC = c$ távolság. Határozzuk meg a PD távolságot és a téglalap méreteit. (1728. ábra.)

1731. Egy a oldalú szabályos háromszög csúcsaitól egy P pont b távolságra van. Milyen távol van a P pont a háromszög síkjától?

1732. Adott két metszősík. Állítsunk a tér egy tetszőleges pontjából a síkokra merőleges egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontjait összekötő egyenes merőleges a két sík metszésvonalára.

1733. Adott két kitérő egyenes. Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, mégpedig mindig csak egy, amely mindkettőt metszi, és mindkettőre merőleges. Ezt az egyenest a két kitérő egyenes normáltranszverzálisának nevezik. A feladat így is fogalmazható: Bizonyítsuk be, hogy két kitérő egyenesnek mindig van egy és csak egy normáltranszverzálisa.

1734. Bizonyítsuk be, hogy két kitérő egyenes normáltranszverzálisának a hossza a legrövidebb a két egyenes egy-egy pontját összekötő szakaszok között.

1735. Legyen a és b két egymásra merőleges kitérő egyenes. Normáltranszverzálisuk a, illetve b-vel való metszéspontja legyen A, illetve B. Mozogjon egy CD adott hosszúságú egyenes szakasz C végpontjával az a, D végpontjával pedig a b egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy $AC^2+AD^2+BD^2+BC^2$ független a szakasz helyzetétől.

1736. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes egy síkkal párhuzamos, az egyenes legrövidebb távolsága a sík bármely vele nem párhuzamos egyenesétől állandó.

1737. Adott ponton át vegyünk fel olyan egyenest, amelyik három adott egyenessel egyenlő szögeket zár be. Vegyük fel az adott egyeneseket képeikkel, és ábrázoljuk a nevezett egyenest.

1738. Legyen adott a térben két pont. Vegyünk fel a két pont által meghatározott szakasz felezőpontján át egy tetszőleges síkot. Bizonyítsuk be, hogy a szakasz végpontjai a síktól egyenlő távolságra vannak.

1739. Illesszünk egy paralelogramma egyik átlójához tetszőleges síkot. Bizonyítsuk be, hogy a másik átló végpontjai e síktól egyenlő távolságra vannak.

1740. Adott a térben az e egyenes és a nem rajta fekvő két pont, A és B. Fektessünk az e egyenesen át olyan síkot, amelyik az A és B ponttól egyenlő távolságban van.

1741. Legyen adott a térben négy pont. Meghatározandó egy sík úgy, hogy két pont az egyik, kettő pedig a sík másik oldalán legyen, de mind a négy pont ugyanolyan távolságra a síktól. Hány megoldás van?

1742. Adott egy sík ugyanazon oldalán az A és a B pont. Keressük a sík olyan P pontját, amelyre $AP+PB$ a lehető legkisebb.

1743. Adott egy sík különböző oldalán az A és a B pont. Keressük a sík P pontját, úgy, hogy e pontokból mért távolságainak a különbsége a lehető legnagyobb legyen.

1744. Egy sík O pontjából induljon ki a sík ugyanazon oldalán haladó OA és OB félegyenes. Határozzuk meg a sík egy félegyenesét úgy, hogy a félegyenesekkel bezárt szögeinek összege a lehető legkisebb legyen.

1745. Egy sík O pontjából induljon ki a sík különböző oldalain OA, illetve OB félegyenes. Határozzuk meg a sík egy félegyenesét úgy, hogy az előbbi félegyenesekkel bezárt szögeinek különbsége a lehető legnagyobb legyen.

1746. Adott a térben az e egyenes és az A, B pontok. Keressük az e egyenes olyan pontját, amely az A és B pontoktól egyenlő távolságra van. Vegyük fel az adatokat képeikkel, és ábrázoljuk a keresett pontot.

1747. Adott egy ABC háromszög és egy tetszőleges sík. Keressük a sík azon pontját, amely a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van. Adjuk meg a háromszög képeit és a síkot két egyenesének képeivel, és ábrázoljuk a keresett pontot.

1748. Legyen adott két párhuzamos sík: α_1 és α_2. Egy A pontnak az α_1-re vonatkozó tükörképét jelöljük A'-vel és A'-nek az α_2-re vonatkozó tükörképét A''-vel. Bizonyítsuk be, hogy az AA'' távolság kétszerese a párhuzamos síkok távolságának, és A-ból az A''-be mutató irány megegyezik α_1-ből az α_2 felé mutató iránnyal.

1749. Legyen adott két párhuzamos sík: α_1 és α_2. A tér tetszőleges pontját tükrözzük először az α_1-re, majd a kapott tükörképet az α_2-re. Bizonyítsuk be, hogy ugyanazon ponthoz jutunk, ha az eredeti pontot a síkokra merőlegesen α_1-ből az α_2 felé mutató irányban a síkok távolságának kétszeresével eltoljuk.

1750. Legyen adott két metszősík: α_1 és α_2. Egy A pontnak az α_1-re vonatkozó tükörképét jelöljük A'-vel, A'-nek az α_2-re vonatkozó tükörképét A''-vel. Bizonyítsuk be, hogy A, A', A'' egy az α_1 és α_2 metszésvonalára merőleges síkon vannak. Jelöljük ezen sík és az eredeti síkok metszésvonalának közös pontját O-val. Bizonyítsuk be, hogy $OA = OA' = OA''$, továbbá, hogy az $AOA''\sphericalangle$ az α_1 és α_2 síkok hajlásszögének kétszerese.

1751. Legyen adott két metszősík, α_1 és α_2, metszésvonalukat jelöljük t-vel. Az α_1-et az α_2-be a t körüli pozitív irányú, ε nagyságú szöggel való elforgatás vigye át. A tér tetszőleges pontját tükrözzük először az α_1-re, majd a kapott tükörképet az α_2-re. Bizonyítsuk be, hogy ugyanazon ponthoz jutunk, ha az eredeti pontot a t egyenes körül pozitív irányban 2ε szöggel elforgatjuk.

1752. A térben tetszőlegesen elhelyezett, egymással egyenlő AB és $A'B'$ szakaszokhoz keressünk olyan t egyenest, amelyet forgástengelyként használva A az A'-be, B a B'-be megy át.

1753. Bizonyítsuk be, hogy az olyan félegyenes, amely egy sík három félegyenesével egyenlő szögeket zár be, merőleges a síkra.

1754. Bizonyítsuk be, hogy annak a két szögnek az összege, amelyeket egy tetszőleges egyenes két egymásra merőleges síkkal bezár, kisebb egy derékszögnél, hacsak az egyenes nem merőleges a két sík metszésvonalára.

1755. Bizonyítsuk be, hogy két sík lapszögét és melléklapszögét felező síkok merőlegesek egymásra.

1756. Bizonyítsuk be, hogy két sík szögét felező sík bármely pontja egyenlő távol van a síkoktól.

1757. Bizonyítsuk be, hogy ha két sík szögfelező síkjának egy pontjában a szögfelező síkra merőleges egyenest állítunk, ez a síkokat a talpponttól egyenlő távolságban metszi.

1758. *a)* Bizonyítsuk be, hogy két metszősíkkal egyenlő szögeket bezáró egyenes a síkokat a metszésvonaltól egyenlő távolságban levő pontokban metszi.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenesnek két metszősíkkal való metszéspontjai a metszésvonaltól egyenlő távolságra vannak, akkor a két síkkal az egyenes ugyanakkora szöget zár be.

1759. Bizonyítsuk be, hogy két olyan lapszög, melyek élei párhuzamosak, lapjaik pedig egymásra kölcsönösen merőlegesek, egyenlők vagy kiegészítő szögek.

1760. Két félsík által meghatározott lapszög élének egy pontjában állítsunk mindkét szárlapra merőleges félegyenest úgy, hogy mindkettő a másik szárlappal közös féltérben vagy mindkettő ellentétes féltérben legyen. Bizonyítsuk be, hogy a félegyenesek szöge a lapszög kiegészítő szöge.

1761. Keressünk egy adott sík adott pontján át olyan egyenest, amely az adott síkhoz adott szögben hajlik. Hány megoldás van?

1762. Egy P pont egy síktól m távolságra van. A P ponton átmegy két egyenes, melyek egymással és a síkkal is 60°-os szöget zárnak be. Határozzuk meg ezen két egyenes és a sík metszéspontjainak a távolságát.

1763. Keressünk olyan egyenest, amelyik egy sík adott egyenesének egy adott pontján átmegy, az egyenesre merőleges, és a síkkal adott szöget zár be. Hány megoldás van?

1764. Keressünk adott ponton át olyan síkot, amelyik egy adott síkkal adott szöget zár be. Hány megoldás van?

1765. Keressünk adott ponton átmenő két adott síkra merőleges síkot.

1766. Keressünk két adott ponton átmenő, adott síkra merőleges síkot.

1767. Legyen egy sík egyik pontjából egy másik síkra bocsátott merőleges szakasz fele az ugyanazon pontból a két sík metszésvonalára bocsátott merőlegesnek. Mekkora a két sík hajlásszöge?

1768. Adott két metszősík és egy a metszésvonalukhoz illeszkedő e egyenes. Fektessünk az e egyenesen át olyan síkot, hogy ezt az adott síkok olyan egyenesekben messék, melyek szögfelezője az e egyenes.

1769. Adott a térben két nem párhuzamos sík: S_1 és S_2, két párhuzamos egyenes: a és b és egy P pont. Keressünk a P ponton átmenő olyan egyenest, amely egyenlő szögeket zár be az adott síkokkal, és egyenlő távolságra van az adott egyenesektől.

1770. Adott a térben három egyenes: a, b, c, egy a c-vel párhuzamos S sík, továbbá egy P pont. Keressünk a P ponton át olyan síkot, amely egyenlő szögeket zár be az a és b egyenesekkel, másrészt a c egyenessel és az S síkkal.

1771. Adott egy S sík és azon kívül elhelyezett (nem egy egyenesen sorakozó) három pont: A, B, C. Keressünk olyan P pontot, hogy a PA, PB, PC egyenesek egy adott háromszöghöz hasonló háromszög csúcsait messék ki az S síkon.

1772. Adott egy S sík és azon kívül elhelyezett (nem egy egyenesen sorakozó) három pont: A, B, C. Keressünk olyan P pontot, hogy a PA, PB, PC egyenesek egy adott háromszöggel egybevágó háromszög csúcsait messék ki az S síkon.

1773. Vetítsünk merőlegesen egy térbeli pontot két egymást metsző síkra. Bizonyítsuk be, hogy a vetületekből a két sík metszésvonalára bocsátott merőlegesek talppontjai egybeesnek.

1774. Legyen adott két metszősík és mindegyiken egy-egy pont oly módon, hogy belőlük a két sík metszésvonalára bocsátott merőlegesek talppontjai egybeessenek. Bizonyítsuk be, hogy a két adott pont egy térbeli pontnak a síkon való merőleges vetülete.

1775. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenes pontjainak egy síkra való merőleges vetületei egy bizonyos feltétel teljesülése esetén egyenest alkotnak. Ezt az egyenest röviden az eredeti egyenes merőleges vetületének nevezik. Mi ez a feltétel? Mi az egyenes merőleges vetülete, ha ez a feltétel nem teljesül?

1776. Milyen megszorítással érvényes az az állítás, hogy minden olyan vonal, amelynek merőleges vetülete két egymást metsző sík mindegyikén egyenes, maga is egyenes?

1777. Bizonyítsuk be, hogy párhuzamos egyeneseknek egy síkra eső merőleges vetületei szintén párhuzamosak, vagy mindkét egyenes vetülete pont.

1778. Igaz-e mindig a következő állítás: „Ha két egyenes merőleges vetületei két egymást metsző sík mindegyikén párhuzamosak, akkor maguk is párhuzamosak"?

1779. Bizonyítsuk be, hogy egy szakasz merőleges vetületének a hossza az eredeti hosszúság és a síkkal bezárt szöge cosinusának a szorzata.

1780. Bizonyítsuk be, hogy két párhuzamos és egyenlő hosszú szakasz ugyanazon síkra eső merőleges vetülete szintén párhuzamos és egyenlő.

1781. Bizonyítsuk be, hogy szakasz felezőpontjának egy síkra való merőleges vetülete a szakasz vetületének a felezőpontja.

1782. Bizonyítsuk be, hogy egymásra merőleges egyeneseknek az egyikkel párhuzamos síkra való merőleges vetületei is merőlegesek egymásra (esetleg az egyik szár merőleges vetülete pont) és megfordítva, ha két egyenes közül az egyik párhuzamos egy síkkal, és a síkon való merőleges vetületeik merőlegesek, akkor a két egyenes merőleges.

1783. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor egy másik (az előbbivel nem párhuzamos) síkra való merőleges vetülete merőleges a két sík metszésvonalára.

1784. Bizonyítsuk be, hogy hegyesszögnek, illetve tompaszögnek az egyik szárával párhuzamos síkon való merőleges vetülete is hegyesszög, illetve tompaszög.

1785. Bizonyítsuk be, hogy ha derékszöget olyan síkra vetítünk merőlegesen, amely annak szárait metszi, vagy olyan síkra, amely a szög szárainak meghosszabbításait metszi, a vetülete tompaszög; ezzel szemben hegyesszög lesz a vetülete, ha a sík, amelyre vetítünk, a derékszög egyik szárát és a másiknak a meghosszabbítását metszi.

1786. Bizonyítsuk be, hogy ha egy AOB szöget egy az OC szögfelezővel párhuzamos síkra merőlegesen rávetítünk, a vetülete olyan szög lesz, amelynek felezője az OC szögfelező vetülete.

1787. Bizonyítsuk be, hogy egy szög szögfelezőjének egy síkra eső merőleges vetülete akkor és csak akkor lesz a szög vetületének szögfelezője, ha a szög szárai ugyanakkora szöget zárnak be a síkkal (amelyre vetítünk).

1788. Bizonyítsuk be, hogy két kitérő egyenesnek a normáltranszverzálisukkal párhuzamos síkon való merőleges vetülete párhuzamos egyenespár vagy egy egyenes és egy rajta kívül fekvő pont. Mikor következik be az utóbbi eset?

1789. Legyen a és b két egymásra merőleges kitérő egyenes. Normáltranszverzálisuk a, illetve b-vel való metszéspontja legyen A, illetve B. Mozogjon egy CD adott hosszúságú egyenesszakasz C végpontjával az a, D végpontjával pedig a b egyenesen. Legyen E az AC, F pedig a BD szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az EF szakasz hossza állandó.

1790. Egy 12 m hosszú rúd egy síkkal 30°-os szöget zár be. Mekkora a rúd síkra eső vetülete?

1791. Mekkora szöget zár be a 102 m hosszú szakasz egy síkkal, ha a síkra eső merőleges vetülete

a) fele a szakasz hosszának,
b) egyenlő a két végpont síktól való távolságának a különbségével.

1792. Adott egy sík és rajta kívül egy P pont. A P pont a sík két pontjától a, illetve b távolságra van. A két távolság vetületének aránya $m{:}n$. Milyen távol van a P pont a síktól? Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha $a = 143$ m; $b = 157$ m; $m:n = 11:17$.

1793. Egy a egyenes egy **S** síkkal 45°-os szöget zár be. Húzzunk az **S** síkban az a egyenes talppontján át az a egyenes vetületével 45°-os szöget bezáró b egyenest. Határozzuk meg az a és b egyenesek hajlásszögét.

1794. Az ABC háromszög oldalai: $AB = 40$ m, $BC = 25$ m, $AC = 25$ m. Az AB oldal egy **S** síkon van, a C pont az **S**-től 7 m távolságban. Mekkora a háromszög vetületének a területe?

1795. Egy szabályos háromszög középpontjában a háromszög síkjára merőlegesen áll egy b hosszúságú egyenesszakasz. Felső végpontjának távolsága a háromszög csúcspontjaitól C. Mekkora a háromszög területe?

1796. Ábrázoljunk olyan szakaszokat, amelyeknek valamelyik képe valódi hosszúságú.

1797. Ábrázoljunk egy szakaszt a képeivel. Szerkesszük meg a szakasz hosszát.

1798. Ábrázoljunk az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges szakaszt. Szerkesszük meg a hosszát.

1799. Ábrázoljunk egy e egyenest és ezen egy E pontot a képeivel. Ábrázoljuk az e egyenes olyan pontjait, amelyeknek E-től való távolsága adott d szakasz hosszával egyenlő.

1800. Ábrázoljunk egy gömböt és a középpontján áthaladó egyenest a képeivel. Ábrázoljuk az egyenes és a gömb döféspontjait.

1801. Adott egy háromszög a képeivel. Szerkesszük meg a háromszög valódi nagyságát.

1802. Adott egy paralelogramma a képeivel. Szerkesszük meg a paralelogramma valódi nagyságát.

1803. Vegyünk fel egy AC szakaszt és ennek felezőpontján át egy e egyenest a képeivel. Ábrázoljuk azt a téglalapot, amelynek egyik átlója AC, a másik átlója pedig az e egyenesen van.

1804. Ábrázoljunk két párhuzamos egyenest és egy ezeket metsző harmadik egyenest. Szerkesszük meg olyan rombusznak a képeit, amelynek három oldala az adott egyeneseken van.

1805. Adott az A pont a képeivel és a B pont első képe, továbbá az AB szakasz valódi hossza. Szerkesszük meg a B pont második képét.

1806. Adott egy P pont a képeivel és egy sík két egyenesének a képeivel. Szerkesszük meg a P pont és a sík távolságát.

1807. Adott három párhuzamos egyenes a képeivel. Szerkesszük meg az egyik egyenesnek a másik kettő síkjától való távolságát.

1808. Ábrázoljunk két-két egyenesével két párhuzamos síkot. Szerkesszük meg a két sík távolságát.

1809. Vegyünk fel egy síkot két egyenesének képeivel, és adjunk meg egy d távolságot. Ábrázoljunk két egyenesével olyan síkot, amelyik az adott síktól d távolságra van.

1810. Ábrázoljunk olyan pontot és egyenest a képeivel, hogy valamelyik képen a pont és egyenes távolságát leolvashassuk.

1811. Szerkesszük meg képeivel adott pont és egyenes távolságát.

1812. Szerkesszük meg képeivel adott párhuzamos egyenesek távolságát.

1813. Ábrázoljunk olyan pontot, amelyik képeivel adott egyenestől adott távolságra van.

1814. Vegyünk fel képeivel egy pontot és egy rá nem illeszkedő egyenest. Ábrázoljuk azt a szabályos háromszöget, amelyiknek egyik csúcspontja az adott pont, és egyik oldala az adott egyenesen van.

1815. Ábrázoljunk négyzetet, ha adott egyik csúcsának a két képe, továbbá egy erre nem illeszkedő oldalegyenesének a két képe.

1816. Ábrázoljunk négyzetet, ha adott egyik csúcsának és az erre nem illeszkedő átlójának a két képe.

1817. Ábrázoljunk négyzetet, ha adott egyik átlója a ~~két~~ képével, és a másik átlója párhuzamos az első képsíkkal.

1818. Ábrázoljuk egy pont második képét és egy erre nem illeszkedő, az első képsíkkal párhuzamos szakaszt. Szerkesszük meg annak a rombusznak a képeit, amelyiknek csúcsa a második képével adott pont, és átlója az adott szakasz.

1819. Szerkesszük meg képeivel adott kitérő egyenesek távolságát, és ábrázoljuk a normáltranszverzálisukat, ha

a) egyik egyenes második vetítősugár;
b) mindkét egyenes párhuzamos a második képsíkkal;
c) mindkét egyenes profilegyenes ($x_{1,2}$ tengelyre merőleges);
d) az egyenesek második képei párhuzamosak, az első képei metszők;
e) tetszőleges kitérő egyenesekről van szó.

1820. Ábrázoljunk egy az első képsíkon álló szabályos hatoldalú gúlát. Szerkesszük meg egy oldala és egy hozzá képest kitérő alapéle távolságát.

1821. Adott egy egyenes a két képével és egy erre merőleges egyenes első képe. Szerkesszük meg az utóbbi egyenes második képét.

1822. Adott egy szakasz a két képével, ábrázoljuk a felező merőleges síkját.

1823. Ábrázoljunk

a) paralelogrammát,
b) síkhatszöget,
és szerkesszük meg a valódi alakját.

1824. Ábrázoljunk háromszöget. Szerkesszük meg

a) a súlypont,
b) a magasságpont,
c) a körülírt kör középpontjának,
d) a beírt kör középpontjának
képeit.

1825. Adott két kitérő egyenes a képeivel. Szerkesszük meg az egyenesek hajlásszögét.

1826. Szerkesszük meg képeivel adott egyenes és két egyenesének képeivel adott sík hajlásszögét.

1827. Szerkesszük meg két-két egyenesének képeivel adott síkok hajlásszögét.

1828. Ábrázoljunk háromoldalú gúlát. Szerkesszük meg

a) két kitérő élének szögét,
b) egy él és egy lap szögét,
c) két lap hajlásszögét.

1829. Ábrázoljunk egy síkot két egyenesének a képeivel. Szerkesszük meg e sík és az $x_{1,2}$ tengely szögét.

KOCKA

1830. Hány részre osztja a teret a kocka lapjainak hat síkja?

1831. Hányféleképpen tudunk kiválasztani a kocka 8 csúcsa közül hármat úgy, hogy az ezeken átfektetett sík ne menjen át egy negyedik csúcsponton?

1832. Egy kockának hány átlóssíkja van? (Átlóssíknak nevezünk minden olyan síkot, amely tartalmazza a kocka négy csúcsát, de lapját nem.)

1833. Milyen hosszú az a élű kocka lapátlója, testátlója, körülírt gömbjének sugara és beírt gömbjének sugara?

1834. Hányszorosa a kocka köré írt gömb sugara a beleírt gömb sugarának?

1835. Adott egy kocka élének a hossza. Szerkesszük meg a lapátló, majd a testátló hosszát.

1836. Adott egy kocka testátlójának a hossza. Szerkesszük meg az él hosszát.

1837. Határozzuk meg egy kocka csúcsainak az egyik testátlótól való távolságát, ha az élhossz a.

1838. Adott a kocka egyik csúcsának a csúcsot nem tartalmazó valamelyik testátlótól való távolsága. Szerkesztendő a kocka éle.

1839. Egy kocka éle a. Mekkora két kitérő él felezőpontjának a távolsága?

1840. Egy kocka éle a. Mekkora az egyik testátlójának egy hozzá kitérő éltől való távolsága?

1841. Mekkora szöget zár be a kocka két testátlója?

1842. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója egy éllel?

1843. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója egy lappal?

1844. Mekkora szöget zár be a kocka két különböző irányú élére támaszkodó két átlóssíkja?

1845. Egy a élhosszúságú kocka két párhuzamos négyzetlapja legyen $ABCD$ és $EFGH$. Az utóbbi lap középpontja legyen M. Határozzuk meg az MA és a BC egyenesek távolságát.

1846. Egy a élű kocka egyik élén (nem csúcsponton) ül egy légy. A lehető legrövidebb útvonalat keresi, amely a kocka minden lapján áthaladva visszavezet a kiindulási ponthoz. Mekkora ez a legrövidebb útvonal?

1847. Vegyük egy kocka egyik testátlójára illeszkedő síkmetszeteit. Melyiknek a területe lesz a legkisebb?

1848. Tekintsük egy kocka két szemközti csúcsát és ezekbe a csúcsokba nem befutó élek felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy szabályos hatszög csúcspontjai.

1849. Bizonyítsuk be, hogy a kocka valamelyik csúcsából kiinduló három él végpontjai által kifeszített sík a csúcsból kiinduló testátlóra merőleges, és harmadolja azt.

1850. Határozzuk meg az a élű kocka két nem metsző lapátlójának távolságát.

1851. Bizonyítsuk be, hogy a kocka középpontján átmenő, valamelyik testátlóra merőleges sík szabályos hatszögben metszi a kockát.

1852. Keressük meg a kocka felszínén azokat a pontokat, amelyek valamelyik testátló két végpontjától egyenlő távolságra vannak.

1853. Bizonyítsuk be, hogy a kocka felosztható három egybevágó gúlára.

1854. Vetítsük a kockát merőlegesen az egyik testátlóra merőleges síkra. Bizonyítsuk be, hogy a vetület szabályos hatszög.

1855. Tekintsük az a élű kocka egyik testátlójára merőleges síkot és ezen a kocka merőleges vetületét, továbbá a kocka középpontján átmenő, erre az átlóra merőleges síkmetszetét. Határozzuk meg a vetület és a metszet területének arányát.

1856. Helyezzünk el egy kockát egy síkhoz képest úgy, hogy a síkon levő merőleges vetülete szabályos hatszög legyen. Mekkora szöget zárnak be a kocka élei és lapjai ezzel a síkkal?

1857. Bizonyítsuk be, hogy egy kockának az egyik testátlóra merőleges síkon való párhuzamos vetületének területe a vetítősugár irányától független állandó, feltéve, hogy a testátló két végpontjának vetülete a többi csúcspont vetülete által meghatározott sokszög belsejébe esik. (Párhuzamos vetületen értjük a pontokon átmenő, egy megadott egyenessel párhuzamos egyeneseknek a síkkal való metszéspontjainak az összességét.)

1858. Mekkora az a élű kocka testátlója és felszíne?

a) $a = 8$ dm, *b)* $a = 12,6$ cm, *c)* $a = 423$ mm, *d)* $a = {}^1/_2$ m.

1859. Mekkora az a élű kocka egyik lapjának középpontján és a szemközti lap egyik élén átmenő síkmetszetének területe?

a) $a = 8$ dm, *b)* $a = 12,6$ cm, *c)* $a = 423$ mm, *d)* $a = {}^1/_2$ m.

1860. Egy kockának a testátlója d. Mekkora az éle és a felszíne?

a) $d = 24$ dm, *b)* $d = 18$ cm, *c)* $d = 36$ mm, *d)* $d = {}^1/_2$ m.

1861. Mekkora a kocka éle, ha felszíne

a) 18 816 dm^2, *b)* 31 104 cm^2, *c)* 15,36 m^2, *d)* 28 644 mm^2?

1862. Mekkora a térfogata

a) a 32 kg-os ólomkockának (sűrűség 11,35),
b) az 1 kg-os aranykockának (sűrűség 19,3),
c) az 5 kg-os alumínium kockának (sűrűség 2,7),
d) a 3 kg-os márványkockának (sűrűség 2,83)?

1863. Két darab parafa kockánk van. Az egyik tömege 100 kg, a másiké 1 kg. Mekkorák az élek (sűrűség 0,25)?

1864. Mekkora az éle annak a vörösréz kockának, amelynek sűrűsége 8,8; tömege pedig 5 kg?

1865. Mekkora a kocka alakú hektoliteres edény belső éle?

1866. Mekkora a térfogata annak a kockának, amelynek felszíne

a) 73,5 cm^2, *b)* 100 cm^2, *c)* 1 m^2?

1867. Mekkora a kocka felszíne, ha térfogata

a) 2197 cm^3, *b)* 30 dm^3, *c)* 2 m^3?

1868. Mekkora a kocka átlós metszetének területe, ha éle

a) a, *b)* 24,6 cm, *c)* 6,8 dm?

1869. Határozzuk meg a kocka élét, lapátlóját, testátlóját, felszínét és térfogatát, ha átlóssíkjának területe

a) t, *b)* 250 cm^2, *c)* 64 mm^2.

1870. Határozzuk meg olyan kocka élét, melynek térfogata kétszer akkora, mint egy adott kockáé. Az adott kocka éle legyen a.

1871. Egy kocka éle a méterrel hosszabb, mint egy másiké; a két térfogat különbsége b m^3. Mekkorák az élek?

1872. Vágjuk ketté a kockát egy átlóssíkkal. Mekkora az egyik rész térfogata és felszíne, ha az élhossz a?

1873. Valaki kocka alakú testek sorozatát akarja előállítani 8,5 sűrűségű öntvényből,

$$1 \text{ kg}, \tfrac{1}{2} \text{ kg}, \tfrac{1}{4} \text{ kg}, \tfrac{1}{8} \text{ kg}, \tfrac{1}{16} \text{ kg} \ldots$$

Mekkora élhosszúságúak lesznek ezek?

1874 Egy zárt, kocka alakú láda falvastagsága mindenütt d, külső élhossza a, a sűrűsége γ. Mekkora a tömege? Legfeljebb mennyi lehet a rakománya, hogy vízben el ne süllyedjen? Oldjuk meg a feladatot általánosan, majd az $a = 1$ m, $d = 2$ cm, $\gamma = 0{,}8$ esetben.

1875. Egy S és egy S′ sík hajlásszöge 45°, metszésvonaluk m. Vegyük fel az S síkban az m egyenessel 45°-os szöget bezáró e egyenest. Határozzuk meg az e és az S′ hajlásszögét.

1876. Ábrázoljunk az első képsíkon álló kockát. Vezessünk be új képsíkrendszert úgy, hogy a kocka egyik testátlója vetítősugár legyen! Szerkesszük meg az új képeket!

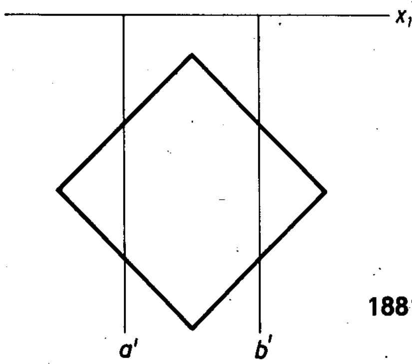
1877. Adott egy t egyenes és a t-re nem illeszkedő A pont a képeivel. Ábrázoljunk olyan kockát, amelyiknek egyik csúcspontja A, és egyik testátlója a t egyenesen van.

1878. Ábrázoljunk két egymásra merőleges kitérő egyenest, továbbá olyan kockát, amelynek két éle az előbbi egyeneseken van.

1879. Ábrázoljunk kockát, ha adott egy csúcsa és egy erre nem illeszkedő lap két egyenese a képeivel.

1880. Adott egy pont és egy rá nem illeszkedő egyenes a képeivel. Ábrázoljuk azt a kockát, melynek középpontja az adott pont, és egyik éle az adott egyenesen van.

1881 Az 1881. ábrán egy első képsíkon álló kocka első képe, továbbá az első képsíkon levő a és az első képsíkkal párhuzamos lap síkján levő b egyenesek első képe szerepel. (a és b második vetítősugarak, a kocka két-két élének felezőpontját kötik össze.) Szerkesszük meg a második képeket, továbbá az a, b egyenesek síkjának és a kocka metszésvonalának a képeit és valódi nagyságát!



1881

TÉRBELI SOKSZÖG

Kössük össze szakaszokkal a tér n pontját ($n \geqq 3$) úgy, hogy az első pontból a másodikba, innen a harmadikba megyünk és így tovább, és az utolsó pontból visszatérünk az elsőbe. Az így kapott alakzatot sokszögnek nevezzük. (A szakaszoknak ne legyenek belső közös pontjai.) Ha a pontok nincsenek mind egy síkban, torzsokszögről beszélünk.

1882. Lehet-e egy torznégyszögnek egy síkra való merőleges vetülete paralelogramma?

1883. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög oldalainak felezőpontjai egy paralelogramma csúcspontjai.

1884. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög két szemközti oldalának felezőpontjai és a két átló felezőpontjai egy paralelogramma csúcspontjai.

1885. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög szemközti oldalainak felezőpontjait, továbbá az átlók felezőpontjait összekötő szakaszok bármelyike felezi a másikat.

1886. Bizonyítsuk be, hogy egy torznégyszög oldalainak felezőpontjai által meghatározott paralelogramma középpontja egyszersmind a két átló felezőpontjait összekötő szakasznak is felezőpontja.

1887. Bizonyítsuk be, hogy azok a szakaszok, amelyek egy torznégyszög két szomszédos oldalának egy-egy pontját összekötik a szemközti oldalt a párjáéval megegyező arányban osztó megfelelő ponttal, metszik egymást, azonkívül mindegyik szakasz olyan arányban osztja a másikat, amely arányban a végpontjai osztották az illető oldalpárt.

1888. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges sík egy adott torznégyszög oldalait olyan arányban osztja, amelyek szorzata az egység.

1889. $A_1B_1C_1D_1$ és $A_2B_2C_2D_2$ legyenek különböző síkban elhelyezkedő paralelogrammák. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 szakaszok felezőpontjai szintén egy paralelogramma csúcsai.

1890. Bizonyítsuk be, hogy az n oldalú torzsokszög szögeinek összege kisebb, mint az n oldalú síksokszög szögeinek összege.

TRIÉDER-SZÖGLETTARTOMÁNY

Egy gúla csúcsából mint kezdőpontból induló, az oldalélekre illeszkedő félegyenesek szöglettartományt (szögletet) alkotnak. A gúla csúcsát a szöglet csúcsának, a félegyeneseket éleknek, két félegyenes alkotta szöget oldalaknak, két oldal félsíkjának hajlásszögét pedig a szöglet szögének nevezzük. A szöglet konvex, ha konvex sokszögalapú gúlából származtatható. Az alábbi feladatokban mindig konvex szögletre gondoljunk.

A háromélű konvex szöglettartományt triédernek nevezzük.

1891. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

1892. Bizonyítsuk be, hogy egy n oldalú testszöglet bármely oldala kisebb a többi oldal összegénél.

1893. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder két oldalának a különbsége kisebb a harmadik oldalnál.

1894. Bizonyítsuk be, hogy a triéderben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van és megfordítva: nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

1895. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder oldalainak összege kisebb, mint 360°.

1896. Bizonyítsuk be, hogy az n oldalú testszöglet oldalainak összege kisebb, mint 360°.

1897. Adott egy triéder, vegyünk fel a belsejében egy pontot, és ebből a pontból bocsássunk merőleges félegyenest a triéder mindhárom oldalára. Egy újabb triéder három élét kaptuk. Ezt a triédert az eredeti triéder polártriéderének nevezik. Bizonyítsuk be, hogy a polártriéder oldalai az eredeti triéder szögeinek a kiegészítő szögei, és szögei az eredeti triéder oldalainak a kiegészítő szögei.

1898. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder szögeinek összege nagyobb, mint 180°.

1899. Bizonyítsuk be, hogy az n oldalú testszöglet szögeinek összege nagyobb, mint $(n-2)\pi$.

1900. Bizonyítsuk be, hogy a triéder két szögének összegéből levonva a harmadik szöget, 180°-nál kisebb értéket kapunk.

1901. Bizonyítsuk be, hogy egyenlő szárú triéderben két szög megegyezik. (Egyenlő szárúnak nevezzük a triédert, ha két oldala megegyezik; a harmadik oldalt nevezzük alapnak.)

1902. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú triéder egyenlő oldalai bezárta szögének felezősíkja felezi az alapot, és merőleges rá.

1903. Bizonyítsuk be, hogy a triéder egyenlő szárú, ha egyik élén és a szemközti oldal felezőjén átmenő sík merőleges erre az oldalra.

1904. Bizonyítsuk be, hogy a triéder egyenlő szárú, ha egyik szögének felezősíkja merőleges a szemközti lapra.

1905. Adott két sík és egy egyenes. Fektessünk az egyenesen át olyan síkot, amely az adott két síkkal egyenlő szárú triédert alkot. (Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a két egyenlő oldal az adott síkokon lesz vagy egyikük a keresett síkon.)

1906. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a szögeknek az összege, melyeket a triéder egy-egy éle a szemközti oldallal bezár, az oldalak összege és félösszege közé esik.

1907. Az SA, SB, SC félegyenesek alkossanak egy triédert. SD félegyenes haladjon a triéder belsejében. Bizonyítsuk be, hogy

$$ASD\sphericalangle + DSB\sphericalangle < ASC\sphericalangle + CSB\sphericalangle.$$

1908. Bizonyítsuk be, hogy egy triéder belsejében annak csúcsából kiinduló félegyenes és a triéder élei által bezárt szögek összege kisebb, mint a triéder oldalainak összege, de nagyobb, mint az oldalak összegének fele.

1909. Adott egy triéder három oldala. Szerkesszük meg a szögeket.

1910. Adott egy triéder két oldala és a közbezárt szög. Szerkesszük meg a hiányzó oldalt és a szögeket.

1911. Adott egy triéder egyik oldala és a rajta fekvő két szöge. Szerkesszük meg a hiányzó oldalakat és szöget.

1912. Adott egy triéder három szöge. Szerkesszük meg az oldalakat.

1913. Bizonyítsuk be, hogy a triéderben két oldal sinusának hányadosa egyenlő a szemközti szögek sinusának hányadosával.

1946. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéder köré lehet gömböt írni.

1947. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder két-két oldallap síkjának belső szögfelező síkjai egy ponton mennek át.

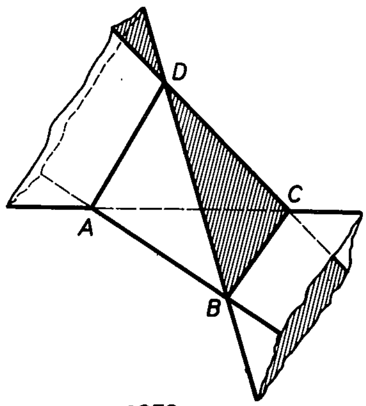
1948. Bizonyítsuk be, hogy bármely tetraéderbe lehet gömböt írni.

1949. Tekintsük egy tetraéderbe írt gömbnek a lapokkal való érintési pontjait. Ezek egy újabb tetraéder csúcspontjai. Bizonyítsuk be, hogy az újabb tetraéder bármelyik éle merőleges az eredeti tetraéder valamelyik élére.

1950. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder egy csúcsból kiinduló három éléhez illeszkedő belső lapszögfelező síkok és a többi három élhez illeszkedő külső lapszögfelező síkok egy ponton mennek át.

1951. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéderhez található olyan gömb, amelyik a tetraéder egyik oldalát és a másik három oldal síkját érinti. (Négy ilyen gömb van. Ezeket a tetraéder valamelyik lapjához hozzáírt gömbnek nevezik.)

1952. Adott egy $ABCD$ tetraéder. Vegyük fel két szemközti éléhez (pl. BC és AD-hez) illeszkedő belső lapszögfelező síkját és egy további élhez (pl. AB-hez) illeszkedő külső lapszögfelező síkját. Bizonyítsuk be, hogy ha e három síknak van közös pontja, akkor a ponton átmegy a másik három élhez illeszkedő külső lapszögfelező sík is.



1953

1953. Bizonyítsuk be, hogy a tetraédernek lehet olyan, a lapsíkjait érintő gömbje, amelyik két szemközti élhez illeszkedő vályúszerű térrészben helyezkedik el. (1953. ábra.)

1954. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéderhez csak akkor található élérintő gömb (olyan gömb, amelyik mind a hat élt érinti), ha a tetraéder szemközti éleinek összege mindhárom élpárra ugyanakkora.

1955. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder rendelkezik élérintő gömbbel, akkor a tetraéder két lapjának síkja olyan körökben metszi a gömböt, melyek a lapháromszögbe írt körök, és a két lap közös oldala ugyanabban a pontban érinti a két kört.

1956. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder szemközti éleinek összege mindhárom élpárra ugyanakkora, akkor a tetraédernek van élérintő gömbje.

1957. Bizonyítsuk be, hogy ha két tetraéder olyan helyzetű, hogy az egyiknek a csúcsaiból a másiknak bizonyos lapjaira bocsátott merőleges egyenesek egymást egy pontban metszik, akkor e tulajdonság kölcsönös.

1958. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder szemközti élei egymásra merőlegesek, akkor bármelyik csúcspontnak a szemközti lapon levő merőleges vetülete a lap magasságpontja.

1959. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két-két szemközti éle merőleges egymásra, akkor a harmadik szemközti élpár is merőleges egymásra.

1960. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két csúcsából kiinduló magasságegyenese metszi egymást, akkor a két csúcsot összekötő él merőleges a szemközti élre.

1961. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két szemközti éle merőleges egymásra, akkor az egyiknek a végpontjaiból kiinduló magasságegyenesek metszik egymást.

1962. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder két magassága metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást.

1963. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két-két szemközti élpárja merőleges egymásra, akkor a tetraéder magasságai egy pontban metszik egymást. Ezt a metszéspontot a tetraéder magasságpontjának nevezzük.

1964. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraédernek akkor és csak akkor van magasságpontja, ha a tetraéder szemközti élpárjai merőlegesek egymásra. A magasságponttal rendelkező tetraédert ortocentrikusnak nevezik.

1965. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder szemközti oldalainak négyzetösszege állandó.

1966. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder két szemközti élének normáltranszverzálisa átmegy a tetraéder magasságpontján.

1967. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder szemközti élei normáltranszverzálisainak az élekkel alkotott metszéspontjai a tetraéderlapok magasságainak az illető éleken levő talppontjai.

1968. Bizonyítsuk be, hogy ha $ABCD$ ortocentrikus tetraéder, és magasságpontja M, akkor az $ABCM$ is ortocentrikus tetraéder, és magasságpontja D. Hasonló tulajdonságúak az $ABDM$, $ACDM$ és $BCDM$ tetraéderek is.

1969. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder akkor és csak akkor ortocentrikus, ha a szemközti élek felezőpontjait összekötő egyenesszakaszok egyenlők.

1970. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder éleinek felezőpontjai egy gömbön helyezkednek el. Ezt a gömböt nevezik az ortocentrikus tetraéder második *Feuerbach*-gömbjének. (Az első Feuerbach-gömbről lásd az 1974. f.)

1971. Bizonyítsuk be, hogy ortocentrikus tetraéder élei felezőpontjainak a tetraéder bármelyik lapjára eső merőleges vetületei egy körön feküsznek.

1972. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder M magasságpontja, S súlypontja és a körülírt gömbjének O középpontja egy egyenesen van; a súlypont a másik kettő által meghatározott szakasz felezőpontja. Ezt az egyenest a tetraéder *Euler*-egyenesének nevezzük.

1973. Emeljünk egy ortocentrikus tetraéder minden lapjának súlypontjában a lapra merőleges egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ezek a tetraéder Euler-egyenesén egy R pontban metszik egymást úgy, hogy $RM = 2OR$. Továbbá az R pont távolsága egy-egy határlaptól harmadrészakkora, mint az M pont távolsága az illető lappal szemben fekvő csúcstól.

1974. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder magasságvonalainak és súlyvonalainak talppontjai olyan gömbön feküsznek, amelynek középpontja a tetraéder Euler-egyenesén van, és ez a középpont a körülírt gömb középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasznak a magasságponthoz közelebb eső harmadolópontja. E gömb sugara a tetraéder köré írt gömb sugarának harmadrésze. Végül ez a gömb a tetraéder magasságvonalainak a magasságpont és a megfelelő csúcs közötti darabját 1:2 arányban osztja két részre. Ezt a gömböt nevezik az ortocentrikus tetraéder első Feuerbach-féle gömbjének.

1975. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder második Feuerbach-féle gömbjét a tetraéder bármelyik lapjának síkja a háromszöglap Feuerbach-féle körében metszi.

1976. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraédernek akkor és csak akkor van élérintő gömbje, ha egy lapja szabályos háromszög, és az ezzel szemben fekvő csúcsában összefutó élek egyenlők.

1977. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder első Feuerbach-gömbje akkor és csak akkor egyezik meg a tetraéder beírt gömbjével, ha a tetraéder szabályos.

1978. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder valamely belső pontjának a határlapoktól mért távolságainak összege egyenlő a test magasságával. Vizsgáljuk meg a külső pont esetét.

1979. A szabályos tetraéder egyik oldallapjának egy P pontjában merőlegest állítunk a lap síkjára. Bizonyítsuk be, hogy a másik három lap ezt a merőlegest a P-től olyan távolságokban metszi, melyek összege állandó.

1980. Adott egy tetraéder egy csúcsból kiinduló három élének a hossza: a, b, c. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder térfogata akkor lesz a legnagyobb, ha az adott hosszúságú élek páronként merőlegesek.

1981. Az $ABCD$ tetraéder D csúcsából kiinduló élek legyenek páronként merőlegesek, és $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder térfogata

$$\frac{1}{6}\sqrt{(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-c^2)},$$

ahol $\quad s^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}.$

1982. Egy tetszőleges tetraéder körülírt gömbjének középpontja O, súlypontja S. Bizonyítsuk be, hogy az élfelező pontokból a szemközti élekre állított merőleges síkok az OS egyenest az O pontnak az S-re vonatkozó T tükörképében metszik. (Az OST egyenes az ortocentrikus tetraéder OSM Euler-egyenesének általánosítása.)

1983. Egy tetszőleges tetraéder körülírt gömbjének középpontja O, az O-nak az S súlypontra vonatkozó tükörképe T. Bizonyítsuk be, hogy a lapsúlypontokon átmenő gömb középpontja az OT távolság T-hez közelebbi harmadolópontja, sugara a körülírt gömb sugarának harmada; a gömb átmegy a T pontot a tetraédercsúcsokkal összekötő szakaszok T-hez közelebb eső harmadolópontjain és e pontoknak az illető csúccsal szemközti lapokon levő merőleges vetületein. (Első Feuerbach-gömb általánosítása.)

1984. Egy tetszőleges tetraéder három lapjának magasságpontjában állítsunk merőlegest a lap síkjára. Vetítsük rá merőlegesen a negyedik lap síkjára ezeket az egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy ezek a vetületek egy ponton mennek át.

1985. Egy tetszőleges tetraéder három lapjának súlypontjában állítsunk merőlegest a lap síkjára. Vetítsük rá merőlegesen a negyedik lap síkjára ezeket az egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy ezek a vetületek egy ponton mennek át.

1986. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder egy csúcsból kinduló három éle egyenlő, akkor ennek a csúcsnak a negyedik lapon való merőleges vetülete a körülírt kör középpontja.

1987. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder egy csúcsból kiinduló élei egyenlők, akkor az élek a negyedik lappal egyenlő szögeket zárnak be.

1988. Legyen egy tetraéderbe írt gömb sugara r, a tetraéder magasságai: m_1, m_2, m_3, m_4. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}.$$

1989. Jelöljük d_1, d_2, d_3, d_4-gyel egy tetraéderen belül felvett P pontnak a tetraéder lapjaitól való távolságát és m_1, m_2, m_3, m_4-gyel a tetraéder megfelelő magasságait. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{d_1}{m_1} + \frac{d_2}{m_2} + \frac{d_3}{m_3} + \frac{d_4}{m_4} = 1.$$

1990. Egy tetraéder két szemközti élének felezőpontját kössük össze. Illesszünk erre az egyenesre egy tetszőleges síkot. Bizonyítsuk be, hogy ez a sík úgy metsz két másik szemközti élt, hogy a metszéspontokat összekötő szakaszt felezi az élfelező pontokat összekötő szakasz.

1991. Az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának valamely O pontjából húzzuk meg a DA, DB, DC élekkel párhuzamos OA', OB', OC' egyeneseket a DBC, DCA, illetve a DAB lapokig. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{OA'}{DA} + \frac{OB'}{DB} + \frac{OC'}{DC} = 1.$$

1992. Kössük össze egy $ABCD$ tetraéder belsejének valamelyik O pontját a csúcspontokkal. Jelöljük az OA, OB, OC, OD egyeneseknek a szemközti lappal való metszéspontját A', B', C', D'-vel. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

1993. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder AB élén átmenő belső lapszögfelező sík a CD élt olyan M pontban metszi, hogy a CM és MD szakaszok aránya megegyezik az ABC és ABD háromszögek területének arányával.

1994. Jelöljük az $ABCD$ tetraéder A csúcsán átmenő három belső lapszögfelező sík közös metszésvonalát (l. az 1914. feladatot) f_a-val és ennek a BCD lappal való metszéspontját A'-vel. Bizonyítsuk be, hogy az $A'BC$, $A'CD$, $A'DB$ háromszögek területeinek aránya megegyezik az ABC, ACD, ADB lapok területének arányával.

1995. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder egyik éle és a szemközti él felezőpontja által kifeszített sík a tetraédert két egyenlő térfogatú részre osztja.

1996. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder két, szemben fekvő élének felezőpontjain átfektetett sík a tetraédert két egyenlő térfogatú részre osztja.

1997. Adott egy tetraéder és egy pont. Vegyünk fel a ponton át olyan síkot, amelyik a tetraédert két egyenlő térfogatú részre osztja.

1998. Adott egy tetraéder és egy egyenes. Vegyünk fel olyan, az adott egyenessel párhuzamos síkot, amelyik a tetraédert két egyenlő térfogatú részre osztja.

1999. Adott egy tetraéder, keressünk a belsejében olyan P pontot, hogy P és két-két csúcs által meghatározott háromszögek a tetraédert négy egyenlő térfogatú részre bontsák.

2000. Bizonyítsuk be, hogy egybevágó triéderrel rendelkező két tetraéder térfogatának aránya egyenlő a triéderekhez tartozó élek szorzatának arányával.

2001. Bizonyítsuk be, hogy ha két tetraéder egy élben és a hozzá tartozó lapszögben megegyezik, akkor térfogataik úgy aránylanak egymáshoz, mint a közös élhez tartozó oldallapok területének szorzatai.

2002. Egy tetraéder minden csúcsához a szemközti lapjával párhuzamos síkot illesztünk. E síkok is tetraédert határolnak. Határozzuk meg a két tetraéder térfogatának arányát.

2003. Egy tetraédert egyik lapjával párhuzamosan úgy vágjunk szét, hogy a levágott tetraéder összes felszíne az adott tetraéder felszínének felével legyen egyenlő. A közös csúcstól milyen távolságban kell elmetszeni a tetraédert?

2004. Egy tetraédert egyik lapjával párhuzamosan úgy vágjunk szét, hogy a levágott tetraéder és a csonka gúla térfogatának aránya q legyen. Határozzuk meg a két tetraéder magasságának arányát!

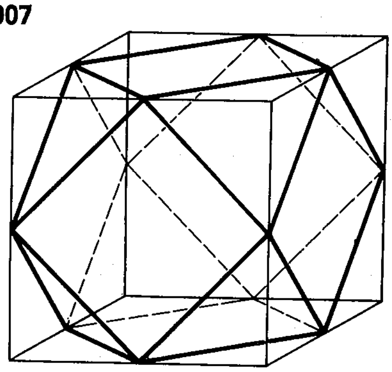
2005. Egy tetraéder egyik csúcsból kiinduló éleinek hossza a_1, b_1, c_1. Elmetsszük olyan síkkal, amely ezen élekből (a közös csúcsból számítva) a_2, b_2, c_2 darabokat vág le. Számítsuk ki a maradék test térfogatát.

2006. Jelöljük a tetraéder beírt gömbjének sugarát ϱ-val. A tetraéder A, B, C, D csúcsaival szemközti lapokat kívülről érintő gömbök sugarait rendre ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4-gyel; az A, B, C, D csúcsokból a szemközti lapokra bocsátott magasságvonalak hosszát m_1, m_2, m_3, m_4-gyel. Bizonyítsuk be, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$a)\ \frac{2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4}, \qquad b)\ \frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}.$$

(Hasonló összefüggések találhatók $\frac{1}{\varrho_2}$, $\frac{1}{\varrho_3}$, $\frac{1}{\varrho_4}$-re.)

2007



2007. Egy 6 cm élű kocka csúcsait az élek felezőpontján átmenő síkokkal levágjuk. Mekkora lesz a megmaradt test térfogata? (2007. ábra.)

2008. Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéder felszínét és térfogatát, ha

$a)$ $a = 8{,}6$ cm; $c)$ $a = 2{,}18$ dm;

$b)$ $a = 72{,}8$ mm; $d)$ $a = \frac{1}{4}$ m.

2009. Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéder köré írható gömb sugarát.

2010. Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéderbe írható gömb sugarát.

2011. Hányszor akkora a szabályos tetraéder köré írt gömb sugara, mint a beírt gömb sugara?

2012. Számítsuk ki a szabályos tetraéder térfogatát, ha adott az m magassága.

2013. Számítsuk ki a szabályos tetraéder térfogatát, ha adott az F felszíne.

2014. Számítsuk ki a szabályos tetraéder élét, ha adott a V térfogata.

2015. Mekkora szöget zár be a szabályos tetraéder magassága egy éllel?

2016. Mekkora a szabályos tetraéder lapszöge?

2017. Egy kőgúla 30 cm-es élű szabályos tetraéder. Mindegyik lapját 3 cm-es vastagságban le kell csiszolni. Mennyivel csökken a súlya? (Fajsúly: 2,8.)

2018. Adott egy pont a képeivel, továbbá egy rá nem illeszkedő sík két egyenesének képeivel. Ábrázoljunk olyan szabályos tetraédert, melynek az adott pont csúcspontja és egyik lapja az adott síkon van.

2019. Adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont a képeivel. Ábrázoljuk azt a szabályos tetraédert, amelynek egyik éle az adott egyenesen van és

a) egyik csúcsa,
b) az ezzel szemközti él felezőpontja

az adott pont.

2020. Adott egy tetraéder két képe. Készítsük el papírból valódi méretben!

PARALELEPIPEDON

2021. Milyen hosszú a téglatest egy élének és egy hozzá kitérő testátlójának a normáltranszverzálisa?

2022. Húzzuk meg egy téglatest egyik testátlóját. Bizonyítsuk be, hogy $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$, ha a testátló az élekkel α, β, γ szögeket zár be.

2023. Egy téglatest A csúcsában találkozó élek legyenek a, b, c. Húzzunk az a, b, illetve a b, c élek síkjában az A-ból kiinduló, az a-val, illetve a c-vel α, illetve γ szöget bezáró e, f egyeneseket. Mekkora szöget zár be ez a két egyenes egymással?

2024. Mekkora szöget zárnak be az a, b, c élű téglatest a és c élére illeszkedő átlóssíkjai?

2025. Mekkora az a, b, c oldalélű téglatest a élére illeszkedő átlóssík területe?

2026. Legyen az a, b, c élű téglatest a éléhez tartozó éltengelye (két szemközti él felezőpontját összekötő szakaszt nevezzük éltengelynek) merőleges egy síkra. Mekkora szöget zárnak be ezzel a síkkal a téglatest élei és lapjai?

2027. Legyen az a, b, c élű téglatest egyik testátlója merőleges egy síkra. Mekkora szöget zárnak be az élei és lapjai ezzel a síkkal?

2028. Bizonyítsuk be, hogy a paralelopipedon középpontosan szimmetrikus test. (A szimmetria középpontját a paralelepipedon középpontjának nevezzük.)

2029. Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon testátlói a középpontban metszik egymást, és a középpont a testátlókat felezi.

2030. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyoldalú hasáb átlói egy ponton mennek keresztül, akkor a hasáb paralelepipedon.

2031. Igazoljuk geometriai úton a két pozitív tag összegének köbére vonatkozó képletet.

2032. Igazoljuk geometriai úton a két pozitív tag különbségének köbére vonatkozó képletet.

2033. Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon testátlóinak négyzetösszege egyenlő az élek négyzetösszegével.

2034. Bizonyítsuk be, hogy *a)* a téglatest átlói egyenlők, és *b)* ha egy paralelepipedon átlói egyenlők, akkor az téglatest.

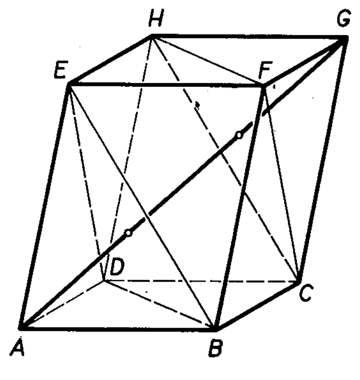
2035. Bizonyítsuk be, hogy a téglatest átlójának négyzete egyenlő az egy csúcsban találkozó három él négyzetének az összegével.

2036. Bizonyítsuk be, hogy a paralelepipedon egy csúcsból kiinduló három élének és testátlójának a négyzetösszege egyenlő az ugyanazon csúcsból kiinduló három lapátló négyzetének összegével.

2037. Adott három páronként kitérő egyenes. Keressünk olyan paralelepipedont, amelynek az adott egyenesek mindegyikére esik egy-egy éle. Ábrázoljuk, ha a kitérő egyenesek képei adottak.

2038. Legyen A és G az $ABCDEFGH$ paralelepipedon két szemközti csúcsa, B, D, E az A-val, C, F, H a G-vel szomszédos csúcsok. Bizonyítsuk be, hogy az AG átló átmegy a BDE és a CFH háromszögek súlypontjain, és a súlypontok az átlót három egyenlő részre osztják. (2038. ábra.)

2038



2039. Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelepipedon egy csúcsából kiinduló három él másik végpontjai szabályos háromszöget határoznak meg, akkor a paralelepipedon szabályos hatszögben metszhető.

2040. Egy derékszögű triéder belsejében adott két pont. Vegyük fel azt a téglatestet, amelynek lapjai párhuzamosak a triéder oldalaival, és testátlója a két pont által meghatározott szakasz. Mekkorák a téglatest élei, ha a P_1 pontnak a triéder lapjaitól való távolsága a_1, b_1, c_1; a P_2-é pedig a_2, b_2, c_2?

2041. Egy P pontnak három, páronként egymásra merőleges síktól való távolsága a, b, c. Milyen távolságra van a P pont a síkok közös pontjától?

2042. Egy derékszögű triéder belsejében adott két pont. Ezeknek a triéder oldalaitól való távolsága a_1, b_1, c_1; illetve a_2, b_2, c_2. Mekkora a két pont távolsága?

2043. Határozzuk meg a téglatest éleinek hosszát, ha tudjuk, hogy az a, b, c számokkal arányosak, és térfogata V.

2044. Egy téglatest élei:

a) 4,2 dm, 3,6 dm, 2,8 dm;
b) 36 cm, 27,5 cm, 18,2 cm;
c) 124 m, 216 m, 487 m.

Mekkora a testátlója, a felszíne és a térfogata?

2045. Mekkora a paralelepipedon térfogata, ha két éle 21 cm és 28 cm, a közbezárt szög 53°24′15″, és a magassága 32 cm?

2046. Egy öntöttvasból készült téglatest tömege 100 kg, éleinek aránya: 1 : 2 : 3. Mekkorák az élek? (Sűrűség: 7,5.)

2047. Hány darab szabványméretű tégla verhető 1 m³ agyagból? (Szabványméret: 25 – 12 – 6,5 cm; az anyag térfogatvesztesége 2%.)

2048. Hány tégla szükséges 10 m², 40 cm vastag falhoz? (A tégla 25 – 12 – 6,5 cm.)

2049. A tengeren úszik egy jégtömb. Alakja négyzetes oszlop. A négyzet oldala 24 m. A jégtömb a tenger vizéből 6 m magasra emelkedik ki. Mekkora a jégtömb tömege? (1 dm^3 jég tömege 0,8 kg, 1 liter tengervíz 1,026 kg.)

2050. Hány kg égetett mészből készíthetünk annyi oltott meszet, amennyivel egy 3,5 m hosszú, 2,5 m széles, 2 m mély meszesgödör megtelik? (1 m^3 oltott mész készítéséhez 400 kg égetett mészre van szükség.)

2051. Milyen vastag egy 1,2 gramm tömegű sztaniollap, amely 35 cm hosszú, és 18 cm széles? (Sűrűség: 7.)

2052. Egy négyzetes oszlop két szemben fekvő oldalélén átmenő síkmetszete négyzet, amelynek területe 283 cm^2. Mekkora a térfogata?

2053. Egy négyzetes oszlop térfogata 627,4 cm^3. A két szemben fekvő oldalélén átmenő síkmetszet területe 116,8 cm^2. Mekkorák az élek?

2054. Mekkora a térfogata annak a téglatestnek, amelynél a három átlós síkmetszet területe: 32 cm^2, 43,5 cm^2, illetve 52 cm^2?

2055. Egy téglatest két éle 7 és 11 dm hosszú. Ezek valamelyikéhez illeszkedő átlóssík négyzetben metszi a téglatestet. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2056. Mekkorák a téglatest élei, ha oldallapjainak területe 15, 33 és 67 cm^2?

2057. Egy téglatest egyik lapjának átlója 52 m, és ez a síkjában levő éllel 22°37′-nyi szöget zár be. Egy másik lap átlója 101 m. Mekkora a térfogata?

2058. Egy téglatest térfogata 5856 cm^3, éleinek aránya 3:4:5. Mekkorák az élei?

2059. Egy téglatest felszíne 1400 cm^2, éleinek aránya 2:3:4. Mekkorák az élei?

2060. Egy téglatest testátlója 26 cm, éleinek aránya 4:5:6. Mekkorák az élei?

2061. Egy téglatest két élének aránya $a:b = 3:4$. A b élhez illeszkedő átlósmetszet 16 m^2 területű négyzet. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2062. Egy téglatest éleinek aránya 1:3:5. Felszínének és térfogatának mértékszáma megegyezik. Mekkorák az élei?

2063. Ha egy téglatest egy-egy élét 6, illetve 4 cm-rel meghosszabbítjuk, kockát kapunk. A kapott kocka térfogata 2059,2 cm^3-rel nagyobb a téglatest térfogatánál. Mekkorák az élei?

2064. Egy téglatest lapjainak területei úgy aránylanak egymáshoz, mint 16:21:28. A testátló 29 cm. Mekkorák az élei?

2065. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három élének összege 42 cm, testátlója 27 cm. Mekkora a felszíne?

2066. Egy paralelepipedon két éle 13 cm és 9 cm, hajlásszögük 48,6°. A harmadik él 25 cm, és a másik kettő által kifeszített síkkal 68,3°-os szöget zár be. Mekkora a térfogata?

2067. Egy paralelepipedon két éle 8 cm és 11 cm, hajlásszögük 46,7°. A harmadik 16 cm hosszú él a 8 cm-es éllel 62,5°-os szöget zár be. A 8 cm-es élhez illeszkedő két lap hajlásszöge 53°. Mekkora a térfogata?

2068. Egy paralelepipedon lapjai egybevágó rombuszok. A rombuszok oldala 11 cm, és hegyesszöge 52,3°. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát.

TETRAÉDER ÉS PARALELEPIPEDON

2069. Adott egy paralelepipedon. Húzzuk meg az egyik csúcsból kiinduló lapátlókat. Bizonyítsuk be, hogy ezek végpontjai olyan tetraédert határoznak meg, melynek mindegyik éle a paralelepipedon egy lapátlója. (Az ilyen tetraédert paralelepipedonba írt tetraédernek és az ilyen paralelepipedont a tetraéder köré írt paralelepipedonnak nevezzük.)

2070. Bizonyítsuk be, hogy minden paralelepipedonba két tetraéder írható.

2071. Fektessünk egy tetraéder mindegyik élén át a szemközti éllel párhuzamos síkot. Bizonyítsuk be, hogy ezek a síkok egy a tetraéder köré írt paralelepipedont határoznak meg.

2072. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéder köré csak egy paralelepipedon írható.

2073. Bizonyítsuk be, hogy a kockába írt tetraéder szabályos.

2074. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder köré írt paralelepipedon kocka.

2075. Mekkora szöget zár be a szabályos tetraéder két szemközti éle?

2076. Kössük össze a szabályos tetraéder három csúcspontját a negyedik csúcshoz tartozó magasságvonal felezőpontjával. Bizonyítsuk be, hogy így három, páronként egymásra merőleges egyenest kapunk.

2077. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraédert lehet négyzetben metszeni.

2078. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder merőleges vetülete lehet négyzet.

2079. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder összes téglalapmetszetének kerülete állandó.

2080. Bizonyítsuk be, hogy bármely tetraéder metszhető paralelogrammában.

2081. Adott tetraédert messünk el két szemközti éllel párhuzamos síkkal. Mikor lesz a metszet területe a legnagyobb?

2082. Tekintsük a nem egy síkban fekvő AB és CD szakaszokat. Legyen M, N a szakaszok középpontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AD+BC}{2} > MN.$$

2083. Határozzuk meg a tetraéder és a köré írt paralelepipedon térfogatának arányát. (A tetraéder köré írt paralelepipedonról lásd a 2069. feladatot.)

2084. Határozzuk meg az ugyanabba a paralelepipedonba írt két tetraéder közös részének a térfogatát.

2085. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder akkor és csak akkor ortocentrikus, ha a köré írt paralelepipedon élei egyenlők.

2086. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder térfogatát megkapjuk, ha két szemközti él szorzatát szorozzuk a normáltranszverzálisuk hosszának a hatodrészével.

2087. Bizonyítsuk be, hogy ortocentrikus tetraéderben a szemközti élek szorzatai a normáltranszverzálisukkal fordított arányban vannak.

2088. Bizonyítsuk be, hogy a téglatestbe írt tetraéder lapjai egybevágók.

2089. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor a köré írt paralelepipedon téglatest.

2090. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor a lapok hegyesszögű háromszögek.

2091. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő egyenesek az élek normáltranszverzálisai, akkor a tetraéder köré írt paralelepipedon téglatest.

2092. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egyenlő területűek, akkor egybevágók is.

2093. Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelepipedon egy csúcsba futó három éle szabályos tetraédert határoz meg, akkor a paralelepipedonnak van szabályos hatszögmetszete.

2094. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder éltengelyei (szemközti élek felezőpontját összekötő egyenesszakasz) egyenlők, akkor a tetraéder ortocentrikus.

2095. Bizonyítsuk be, hogy az ortocentrikus tetraéder éltengelyei egyenlők.

2096. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder beírt és köré írt gömbjének középpontja akkor és csak akkor eshet egybe, ha a tetraéder lapjai egybevágók.

2097. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder köré írt gömbjének középpontja és súlypontja akkor és csak akkor esik egybe, ha a tetraéder lapjai egybevágók.

2098. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ tetraéder súlypontja a körülírt gömb O középpontjába esik, akkor

$$\cos BOC\sphericalangle + \cos COA\sphericalangle + \cos AOB\sphericalangle = -1.$$

2099. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder térfogata hatodrésze annak a szorzatnak, amelynek egyik tényezője két szemközti éle normáltranszverzálisának a hossza, a másik pedig olyan paralelogramma területe, amelynek oldalai egyenlők, és párhuzamosak a két éllel.

2100. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az O csúcspontú triéder élein meg lehessen határozni az A, B, C pontokat úgy, hogy az $OABC$ tetraéder szemben fekvő élei egyenlők legyenek?

HASÁB

2101. Bizonyítsuk be, hogy a háromoldalú hasáb legnagyobb oldallapjának terü lete kisebb, mint a másik kettőének összege.

2102. Bizonyítsuk be, hogy minden n oldalú hasábban az oldallapok hajlásszögeinek összege $(n-2)\ 180°$.

2103. Három adott, nem egy síkban fekvő párhuzamos egyenesen jelöljünk ki azonos hosszúságú AA', BB', CC' szakaszokat. Bizonyítsuk be, hogy az így meghatározott hasáb térfogata csupán az adott párhuzamosok helyzetétől és az AA', BB', CC' oldalélek közös hosszúságától függ, de független attól, hogy ezek hol helyezkednek el a három egyenesen.

2104. Bizonyítsuk be, hogy a háromoldalú hasáb térfogata egyenlő egyik oldallapja területének és a szemközti éltől való távolságának félszorzatával.

2105. Adott három, nem egy síkban levő párhuzamos egyenes. Ezek egyikén kijelölünk egy AB szakaszt; a másik kettőn egy-egy tetszőleges C, D pontot. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert $ABCD$ tetraéder térfogata független az A, B, C pontok helyzetétől, valamint attól, hogy melyik egyenesen helyeztük el az AB szakaszt, csak a szakasz hossza ne változzék.

2106. Egy n oldalú ferde hasábot az oldalélekre merőleges síkkal vágjunk ketté úgy, hogy az alapokat ne vágjuk szét (ha lehet). Bizonyítsuk be, hogy a két darab úgy is összeilleszthető, hogy egyenes hasábot nyerünk. Az így kapott hasáb térfogata megegyezik az eredeti hasáb térfogatával. Mit mondhatunk a két hasáb felszínéről?

2107. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n oldalú ferde hasábból készíthető vele egyező oldalélű, oldalfelszínű és térfogatú, de kisebb felszínű n oldalú egyenes hasáb.

2108. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő térfogatú téglatestek között a kockának van a legkisebb felszíne.

2109. Adott egy n oldalú érintősokszög. Hogyan vágható ki ebből egy egyenes, nyitott hasáb hálózata (alap és oldallapok), amelynek alapja a beírható kör középpontjából való kicsinyítéssel származtatható úgy, hogy a hasáb térfogata a lehető legnagyobb legyen?

2110. Az n oldalú egyenes hasáb AA' élének egy adott P pontjából ugyanezen él egy adott P' pontjába kell a hasáb palástjának körüljárásával a legrövidebb úton eljutni. Határozzuk meg az utat.

2111. Szabályos háromoldalú hasábot oly síkkal metszünk, amelyik átmegy egy alapélen, és az alaplappal 45°-os szöget zár be. Mekkora a kimetszett idom területe, ha az alaplap területe $\sqrt{50}$?

2112. Számítsuk ki az egyenes hasáb térfogatát, ha a magassága m, és az alaplapja n oldalú szabályos sokszög, melynek oldala a.

2113. Mekkora a γ fajsúlyú anyagból készült Q súlyú egyenes hasáb alapéle, ha az alaplapja szabályos hatszög, és oldallapjai négyzetek?

2114. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alapéle 0,4 cm, és magassága 23 cm. Mekkora a térfogata?

2115. Egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alapéle 3,4 cm, oldaléle 8,02 cm. Mekkora a térfogata?

2116. Egy 82 cm magasságú háromoldalú hasáb alapéleinek hossza 33, 42, illetve 54 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2117. Egy háromoldalú hasáb alapélei 2,18 m, 1,7 m. A nagyobbikkal szemközti szöge 58°23′. Térfogata 26,75 m³. Mekkora a magassága?

2118. Egy hasáb tömege 175,8 kg, anyagának sűrűsége 0,3, magassága 3 dm. Mekkora az alapterülete?

2119. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 18 dm. Az egyik alapélen és a szemközti csúcsponton átmenő síkmetszet az alaplappal 62,7°-os szöget zár be. Mekkora a térfogata?

2120. Egy egyenes hasáb valamennyi éle egyenlő hosszú. Az alaplap 5 cm élű, 63°-os szögű rombusz. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2121. Egy 43 cm magasságú egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú trapéz, amelynek párhuzamos oldalai 21 és 16 cm, szárai pedig 9 cm hosszúak. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2122. Milyen tömegű az a szabályos hatszög alapú, egyenes hasáb alakú bazalttömb, amelynek alapéle 0,24 m; magassága 2,46 m és a bazalt sűrűsége 2,85?

2123. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasábból az oldalélekkel párhuzamosan lehasítunk részeket úgy, hogy szabályos 12 oldalú hasáb maradjon meg. Számítsuk ki a két hasáb térfogatának arányát.

2124. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm. A palást területe az alaplap területének hatszorosa. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

2125. Egy csatorna keresztmetszete olyan egyenlő szárú trapéz, amelynek két párhuzamos oldala 3 és 2 m; magassága 1,6 m. Mennyi víz folyik rajta keresztül óránként, ha a víz folyásának sebessége 1,4 m másodpercenként, és a víz magassága mindenütt 1 m?

2126. Egy 10 m-es magas vasúti töltés felül 20 m széles. Emelkedése 2:3 (emelkedés = az oldal hajlásának tangense). Hány m^3 földmunkát kíván egy 10 m hosszú szakasza?

2127. Egy 6 m magas vasúti töltés felül 8 m széles. Keresztmetszete olyan egyenlő szárú trapéz, amelynek szárai 7,3 m hosszúak. Hány m^3 földmunkát kíván egy 50 m hosszú szakasza?

2128. Egy egyenes hasáb alaplapja 8 m^2 területű egyenlő szárú háromszög, melynek magassága az alapél fele. A hasáb felszíne 25 m^2. Mekkora a térfogata?

2129. Egy egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú háromszög, melynek szára 9,3 dm hosszú, és a csúcsnál levő szöge 37,8°. A hasáb magassága 23,6 dm. Mekkora a hasáb felszíne és a térfogata?

2130. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb felszíne 518,2 dm^2, magassága 22 m. Mekkora az alapéle és a térfogata?

2131. Egy 40 dm magas egyenes hasáb alaplapja egy 12 dm sugarú körbe írt szabályos ötszög. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2132. Egy 50 cm magas egyenes hasáb alaplapja egy 15 cm sugarú kör köré írt szabályos nyolcszög. Mekkora a felszíne és térfogata?

2133. Határozzuk meg olyan háromoldalú ferde hasáb térfogatát, melynek alaplapja 8 dm oldalú szabályos háromszög, oldalélei 15 dm hosszúak, és az oldalélek az alaplappal 48°16′ szöget zárnak be.

2134. Mekkora a háromoldalú ferde hasáb térfogata, ha alapélei 20 dm, 26 dm, 33 dm; az oldalélek hossza 52 dm, és az alaplappal 69,6°-os szöget zárnak be?

2135. Egy háromoldalú hasáb alapja egy 3 dm sugarú körbe írt háromszög, melynek szögei 50°7′ és 70°13′. A hasáb oldaléle 7 dm hosszú, és az alaplap-60°-os szöget zár be. Mekkora a térfogata?

2136. Ábrázoljunk egy egyenest és egy háromoldalú hasábot. Szerkesszük meg a döféspontok képeit!

2137. Ábrázoljunk két egyenesével egy síkot és egy háromoldalú hasábot. Szerkesszük meg a metszésvonal képeit.

2138. Ábrázoljunk háromoldalú hasábot. Készítsük el papírból a modelljét valódi méretben.

GÚLA

2139. Bizonyítsuk be, hogy minden gúlában az oldallapok területeinek az összege nagyobb, mint az alaplap területe.

2140. Bizonyítsuk be, hogy a gúla két éle fordítva aránylik egymáshoz, mint az alapsíkkal való hajlásszögeik sinusai.

2141. Bizonyítsuk be, hogy a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszetei hasonlók.

2142. Bizonyítsuk be, hogy a gúla alaplappal párhuzamos metszetei területének aránya megegyezik a síkoknak a csúcstól számított távolságai négyzetének arányával.

2143. Bizonyítsuk be, hogy ha két egyenlő alapterületű és egyenlő magasságú gúlát az alaplapoktól egyenlő távolságban az alaplappal párhuzamos síkkal metszünk, a metszési idomok területe egyenlő.

2144. Hány oldalú lehet az a gúla, amelynek alaplapja szabályos sokszög, és az összes éle egyenlő?

2145. Egy gúla alapterülete 900 cm^2. A magasságot három egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokon az alaplappal párhuzamos síkokat fektetünk. Mekkora területű idomokat metszenek ki ezek a síkok a gúlából?

2146. A csúcstól mekkora távolságban kell egy gúlát az alaplappal párhuzamosan metszeni, hogy a kimetszett idom területe az alaplapnak *a)* fele, *b)* harmada legyen?

2147. A csúcstól mekkora távolságban kell egy 60 cm magas gúlát az alaplappal párhuzamosan metszeni, hogy a kimetszett idom területe az alaplapnak

a) fele, *b)* harmada legyen?

2148. Mozogjon egy pont egy szabályos sokszög alapú, egyenlő oldalélű gúla alaplapján. (Az ilyen gúlát szabályos gúlának nevezzük.) Bizonyítsuk be, hogy az oldallapoktól mért távolságainak összege állandó marad.

2149. Egy szabályos gúla alaplapjának egy belső pontjában emeljünk az alaplapra merőlegest. Ez metsz minden oldallapot vagy annak meghosszabbítását. Bizonyítsuk be, hogy a kapott pontoknak az alaplaptól mért távolságait összegezve, állandó értéket kapunk.

2150. Szabályos háromoldalú gúla magasságából (m) és alapéléből (a) számítsuk ki az oldalélt.

2151. Szabályos négyoldalú gúla magasságából (m) és oldaléléből (b) számítsuk ki az alapélt.

2152. Szabályos háromoldalú gúla alapéle 13 cm, oldaléle 21 cm. Milyen magas a gúla?

2153. Szabályos hatoldalú gúla magassága 18 cm, oldaléle 23 cm. Mekkora az alapél?

2154. Négyzetes gúla alapéle 22 cm, az oldallapok az alaplappal 63,6°-os szöget zárnak be. Mekkora a gúla magassága és oldaléle?

2155. Háromoldalú gúla oldallapjai egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Az alapél a. Mekkora a gúla magassága, oldallapjának és oldalélének az alaplappal bezárt szöge?

2156. Szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek. Adott az oldalél (a). Számítsuk ki

a) a gúla magasságát,
b) oldallapjának az alapéllel bezárt szögét,
c) oldalélének az alaplappal bezárt szögét.

2157. Egy gúlának az alaplapja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú egybevágó háromszögek, melyek területe az alaplap területének $\frac{2}{3}$-szorosa. Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?

2158. Szabályos négyoldalú gúla összes felszínének és alapterületének aránya 2,56. Számítsuk ki

a) az oldallap és az alaplap hajlásszögét,
b) két oldallap hajlásszögét.

2159. *a)* Szabályos négyoldalú gúla alapéle 32 cm, a szomszédos oldallapok 120°-os szöget zárnak be egymással. Milyen magas a gúla?

b) Szabályos négyoldalú gúla alapéle a, a szomszédos oldallapok α szöget zárnak be egymással. Mekkora a gúla magassága?

2160. Egy egyiptomi piramis olyan $ABCDS$ szabályos négyoldalú gúla, melynek alapéle $a = 231$ m, és magassága $m = 140$ m. Egy turista úgy mássza meg, hogy A-ból kiindulva az SB oldalélre merőleges irányban halad. Az SB élt a B_1 pontban elérve folytatja útját az SC oldalélre merőlegesen a C_1 pontig és így tovább.

a) Milyen magasságban lesz a turista, midőn ismét az SA oldalélre kerül az A_1 pontban?

b) Mekkora a turista útjának emelkedési szöge?

c) Mekkora az A_1 pontig megtett út?

2161. *a)* Egy ötoldalú szabályos gúla élei egyenlők. Mekkora szöget zár be egy oldalél az alapélekkel?

b) Egy szabályos gúla élei egyenlők. Számítsuk ki két szomszédos oldallapjának hajlásszögét.

2162. Egy $ABCD$ téglalap alapú gúla E csúcspontjának az alaplapra eső merőleges vetülete az A pont. $AB = 4$ cm, $AD = AE$, és $BCE\sphericalangle = 60°$. Mekkora a gúla magassága?

2163. Négyoldalú szabályos gúla köré írt gömb és a beírt gömb középpontja egybeesik. Mekkora két szomszédos oldalél hajlásszöge?

2164. Az $ABCDES$ ötoldalú szabályos gúlát elmetsszük egy síkkal, amely átmegy az alap A és C csúcsain, továbbá az ES oldalél felezőpontján. Számítsuk ki a metszet területét, ha a gúla alapéle a, oldaléle b.

2165. Négyoldalú szabályos gúla alapéle a, az alap- és az oldallap hajlásszöge 2α. Elmetsszük a gúlát egy síkkal, amely illeszkedik egy alapélhez, és felezi az alap- és oldallap szögét. Mekkora a metszet területe?

2166. Mekkora a felszíne annak a szabályos sokszög alapú egyenes gúlának, amelynek

a) alaplapja 13 cm-es oldalú négyzet, magassága 16 cm;

b) alaplapja 7 cm-es oldalú szabályos hatszög, magassága 12 cm;

c) alaplapja 26 cm-es oldalú szabályos nyolcszög, magassága 69,5 cm;

d) alaplapja 15 cm-es oldalú négyzet, oldaléle 22 cm;

e) alaplapja 12,6 cm-es oldalú szabályos hatszög, oldaléle 32,7 cm;

f) alaplapja 23,7 cm-es oldalú szabályos nyolcszög, oldaléle 53 cm.

2167. Egy torony csúcsa hatoldalú szabályos gúla, melynek alapéle 2 m, magassága 5,6 m. Hány m² ónlemez szükséges a befedésére?

2168. Mekkora a térfogata annak a szabályos gúlának, amelynek

a) alaplapja 17 cm-es oldalú négyzet, magassága 28 dm;

b) alaplapja 6,7 dm-es oldalú szabályos hatszög, magassága 8,28 dm;

c) alaplapja 34,6 cm-es oldalú szabályos nyolcszög, magassága 52,7 cm;

d) alaplapja 56 cm-es oldalú négyzet, oldaléle 78 cm;

e) alaplapja 5,9 cm-es oldalú szabályos hatszög, oldaléle 12,3 cm;

f) alaplapja 75 cm-es oldalú szabályos ötszög, oldaléle 75 cm;

g) alaplapja 1,5 m-es oldalú szabályos nyolcszög, oldaléle 6 m.

2169. Négyzet alapú gúla alaplapjának átlója 6 cm. Az oldallapok szabályos háromszögek. Számítsuk ki a gúla felszínét és térfogatát.

2170. Egy gúla alaplapja derékszögű háromszög, amelynek befogói 12 és 18 cm-esek. A gúla csúcspontjának az alapsíkra eső merőleges vetülete a derékszög csúcsában van. A gúla magassága 32 cm. Számítsuk ki a gúla felszínét és térfogatát.

2171. Mekkora a négyoldalú szabályos gúla térfogata, ha palástját kiterítve egy 8 cm-es oldalú szabályos nyolcszög felét kapjuk.

2172. Szabályos gúla felszíne 272 cm^2, alaplapja

a) 7 cm-es oldalú négyzet,
b) 5,5 cm-es oldalú szabályos hatszög,
c) 4,7 cm-es oldalú szabályos nyolcszög.

Mekkora a gúla térfogata?

2173. Szabályos gúla térfogata 533,7 cm^3, alaplapja

a) 6,3 cm-es oldalú négyzet,
b) 7,8 cm-es oldalú szabályos ötszög,
c) 5,9 cm-es oldalú szabályos hatszög.

Mekkora a gúla oldaléle?

2174. Szabályos négyoldalú gúla térfogatát felezzük meg az egyik alapéléhez illeszkedő síkkal. Határozzuk meg a kimetszett síkidom alaplaptól legtávolabb fekvő élének az alaplaptól való távolságát.

2175. Szabályos négyoldalú gúla alapéle 2,56 m, oldaléle az alaplappal 72°28′-nyi szöget zár be. Mekkora a térfogata?

2176. Szabályos gúla alaplapja 2,54 cm oldalú szabályos háromszög, oldalélei egymásra merőlegesek. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2177. Szabályos nyolcoldalú gúla alapéle 4 dm, az alapél és az ezt metsző oldalél hajlásszöge 75°. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2178. Szabályos gúla magassága 37,65 m, alaplapja pedig egy 3,15 m sugarú körbe írt szabályos nyolcszög. Mekkora a térfogata?

2179. Szabályos gúla alaplapja 1,9 cm oldalélű szabályos 24 oldalú sokszög. Oldallapja az alaplappal 87°11′-nyi szöget zár be. Mekkora a térfogata?

2180. Szabályos négyoldalú gúla térfogata 864 cm^3, alapélének és magasságának aránya 2:3. Mekkora a felszíne?

2181. Szabályos négyoldalú gúla térfogata 49,905 m^3, magassága pedig kétszer akkora, mint az alaplap átlója. Mekkora a felszíne?

2182. Szabályos négyoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek. Térfogata 51 cm^3. Mekkora az alapéle?

2183. Szabályos négyoldalú gúla térfogata 4,86 m^3. Oldaléle az alaplappal 46°20′-nyi szöget zár be. Mekkora az alapél?

2184. Téglalap alapú, egyenlő oldalélű gúla alapélei 7 és 5 dm, oldaléle 15 dm. Mekkora a térfogata?

2185. Mekkora a tömege egy öntöttvasból készült szabályos ötoldalú gúlának ha az alapél 1,56 m, az oldalél az alaplappal 72°45′-nyi szöget zár be? (Sűrűség: 7,21.)

2186. Szabályos négyoldalú gúla alaplapjának területe 1024 cm^2, a gúla térfogata 5622 cm^3. Mekkora a gúla magassága és oldalfelszíne?

2187. Szabályos 24 oldalú gúla felszíne F, és oldallapjának az alaplappal bezárt α szöge ismeretes. Mekkora a térfogata?

2188. Szabályos négyoldalú homokkőből faragott gúla tömege 4620 kg, magassága 2,4 dm, alapéle 7 dm-rel hosszabb, mint az oldaléle. Mekkorák az élek és az oldalfelszín? (Sűrűség: 2,5.)

2189. Öntöttvasból készült szabályos négyoldalú gúla tömege 1012,2 kg, alapéle 45 cm. Mekkora a magassága? (Sűrűség: 7,5.)

2190. Szabályos hatoldalú gúla alapéle 4,5 cm, oldallapjának magassága 9 cm. Mekkora a térfogata?

2191. Rombusz alapú gúla magasságának talppontja a rombusz középpontjában van, magassága 9 cm, térfogata 62,52 cm^3. A két nagyobbik oldalélen átmenő síkmetszet területe 36,7 cm^2. Számítsuk ki az alapélt és az alaplap egyik szögét.

2192. Egy gúla magassága 14 cm, az alaplaptól 4,2 cm távolságban az alaplappal párhuzamos síkmetszet területe 60 cm^2. Számítsuk ki a gúla térfogatát.

2193. Egy 6 és 8 cm-es oldalakkal rendelkező téglalap alapú egyenes gúla oldalélei 13 cm hosszúak. A csúcstól milyen távol kell a gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal metszenünk, hogy két egyenlő térfogatú részre osszuk?

2194. Egy 45 cm magas gúlát két síkkal, melyek az alaplappal párhuzamosak, három egyenlő térfogatú részre osztunk. Számítsuk ki az egyes részek magasságát.

2195. Egy négyoldalú szabályos gúla alapéle 4 dm, magassága 6 dm. Írjunk a gúlába kockát úgy, hogy négy csúcsa az alaplapon, a másik négy pedig egy-egy oldalélen legyen. Számítsuk ki a kocka térfogatát.

2196. Egy gúla oldaléleit a csúcson túl meghosszabbítjuk, és e meghosszabbításokat az alaplappal párhuzamos síkkal metsszük. Fejezzük ki a két gúla térfogatának összegét, ha ismerjük a két alapterületet (A és A') és ezek síkjának egymástól mért h távolságát.

2197. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma alapú csonka gúla átlói egy pontban metszik egymást.

2198. Messünk egy csonka gúlát az alaplappal párhuzamosan, a két alaplaptól egyenlő távolságban. Bizonyítsuk be, hogy a kimetszett idom területe annyi, mint a két alapterület számtani és mértani közepének a számtani közepe.

2199. Szabályos csonka gúlának alaplapjai a és b oldalú négyzetek. A négy oldallap területének összege megegyezik a két alaplap területének összegével. Számítsuk ki a csonka gúla magasságát.

2200. Egy 52 cm magas négyzetes csonka gúla alapéle 55 cm, fedőéle 32 cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2201. Egy 20 cm magas, 49,5 cm oldalú szabályos háromszög alapú csonka gúla oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2202. A kovács tűzhelye fölött csonka gúla alakú négyzetes füstfogó van. Hány m^2 bádog kell a készítéséhez, ha az alapél 1,8 m, a fedőél 1,2 m, az oldalél 1,8 m? (Vigyázat: csak az oldallapok és a fedőlap jön számításba!)

2203. Szabályos hatoldalú csonka gúla alapéle 3,7 cm, fedőéle 2,4 cm, magassága 7,4 cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2204. Szabályos ötoldalú csonka gúla alapéle 2,5 m, fedőéle 1,2 m, magassága 5 m. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát.

2205. Egy 12 m magasságú csonka gúla térfogata 916 m^3, az alaplap területe 25 m^2. Számítsuk ki a fedőlap területét.

2206. Négyzet alapú szabályos csonka gúla felszíne 2873 cm^2. Az alapél 32 cm, a fedőél 9 cm. Számítsuk ki a térfogatát.

2207. Négyzet alapú egyenes csonka gúla alapéle 12 cm, fedőéle 8 cm, magassága 10 cm. Az alaplaptól milyen távolságban kell az alaplappal párhuzamos síkkal metszenünk a csonka gúlát, hogy a két rész egyenlő térfogatú legyen, és mekkora a síkmetszet oldala?

2208. Csonka gúla alakú, 65 cm magasságú láda (melegházakban a délszaki növényeket nevelik ilyenben) négyzetes fenekének éle 32 cm, felső éle 52 cm. Mennyit nyom a benne levő föld, ha a ládát 50 cm magasságig töltik meg? (Egy m^3 föld tömege 1400 kg.)

2209. Egy vízgyűjtő medence lefelé keskenyedő csonka gúla alakú. Felső lapja 14 m, az alsó 7 m oldalú négyzet, mélysége 6 m. Mennyi víz fér bele? Mennyi víz van benne, ha csak fele magasságig van töltve?

2210. Ábrázoljunk az első képsíkon álló szabályos négyoldalú gúlát és egy egyenest. Szerkesszük meg a döféspontok képeit.

2211. Ábrázoljunk az első képsíkon álló szabályos hatoldalú gúlát és két egyenesével egy síkot. Szerkesszük meg a metszésvonal képeit, ha a sík

a) második vetítősík;

b) a képsíkokhoz képest általános helyzetű.

2212. Vegyünk fel az első képsíkon egy egyenlő szárú háromszöget. Ábrázoljuk azt a szabályos négyoldalú gúlát, amelynek az adott háromszög egyik oldallapja!

2213. Adott egy pont a képeivel, továbbá egy rá nem illeszkedő sík két fővonalának képeivel. Ábrázoljunk olyan szabályos hatoldalú gúlát, melynek alaplapja az adott síkon van, és csúcsa az adott pont.

POLIÉDER

2214. Konvexnek nevezünk egy alakzatot, ha bármely két pontjának összekötő szakasza egészen az alakzathoz tartozik. Bizonyítsuk be, hogy síklapokkal határolt konvex test minden lapja konvex sokszög, és merőleges vetületének a határa is konvex sokszög.

2215. Bizonyítsuk be, hogy minden konvex poliédert lehet egy síkra merőlegesen vetíteni úgy, hogy minden csúcspont vetülete különböző pont legyen, és minden lapjának sokszög legyen a vetülete.

2216. Legyen egy konvex poliéder csúcsainak száma c, lapjainak száma l, éleinek száma e. Mennyivel egyenlő a test összes élszögeinek az összege?

2217. Vetítsük a c csúcspontú, l lapú, e élű konvex poliédert merőlegesen egy síkra úgy, hogy a csúcspontok vetületei között ne legyen két egybeeső, és minden lapjának a vetülete sokszög legyen.

a) Mennyivel egyenlő a test összes élszöge vetületének az összege?

b) Bizonyítsuk be, hogy az élszögek összege megegyezik az élszögek vetületének összegével.

2218. Bizonyítsuk be, hogy konvex poliéderben a csúcsok és a lapok számának összege kettővel több az élek számánál. (*Euler*-féle tétel.)

2219. Rajzoljunk olyan (nyilván nem konvex) poliédereket, amelyekre nem érvényesül az Euler-féle összefüggés (l. a 2218. feladatot).

2220. Rajzoljunk olyan konkáv poliédert, amelyre érvényes az Euler-féle összefüggés (l. a 2218. feladatot). (Az Euler-féle poliédertétel a poliédereknek egy a konvex testeknél tágabb családjára igaz. Az itt javasolt bizonyítás azonban felhasználta a poliéder konvex voltát.)

2221. Legalább hány lapja, éle és csúcsa van egy konvex poliédernek?

2222. Egy konvex poliéder 10 határlapja között csak háromszögek és négyszögek vannak. Mekkora lehet az élek és csúcsok száma?

2223. Bizonyítsuk be, hogy ha a konvex test lapjai mind háromszögek, akkor a lapok száma csak páros lehet.

2224. Bizonyítsuk be, hogy egy poliéderben a csúcsok számának háromszorosa legfeljebb akkora, mint az élek számának kétszerese.

2225. Bizonyítsuk be, hogy minden konvex poliéderen

$$3l \geqq e+6.$$

2226. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex test lapjai mind ötszögek, akkor a lapok száma legalább 12.

2227. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan konvex test, amelynek a lapjai mind hat vagy hatnál több oldalú sokszögek lennének.

2228. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder az egyetlen olyan konvex poliéder, amelyiknek bármelyik két csúcsát él köti össze.

2229. Tekintsük azokat a konvex poliédereket, melyeknek minden csúcsában ugyanannyi él találkozik. Hány él találkozhat egy csúcsban? Mennyi lehet a poliéder lapjainak, éleinek és csúcsainak száma, ha a poliéder minden lapja

a) háromszög,
b) négyszög,
c) ötszög?

2230. Bizonyítsuk be, hogy csak ötféle szabályos test létezhet.

2231. Szabályos test keletkezik-e, ha alaplapjukkal összeillesztünk két egybevágó hatoldalú gúlát, amelyek oldallapjai szabályos háromszögek?

2232. Egy kocka minden lapjára négyoldalú gúlát helyezünk, amelyeknek oldallapjai szabályos háromszögek. Szabályos test keletkezik-e így?

2233. Bizonyítsuk be, hogy a kocka lapjainak középpontjai egy szabályos test csúcspontjai. (Ezt a testet nevezik szabályos oktaédernek.)

2234. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéder lapjainak középpontjai egy kocka csúcspontjai.

2235. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder éleinek felezőpontjai egy szabályos oktaéder csúcspontjai.

2236. Bizonyítsuk be, hogy egy kockába írt két tetraéder közös része a kockába írt szabályos oktaéder.

2237. Adott szabályos oktaéderhez keressük meg azt a kockát, amelyikből a 2233. feladat szerint származtatható.

2238. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéder testátlói páronként merőlegesek.

2239. Egy kocka minden csúcsán át vegyünk fel síkot párhuzamosan a szomszédos három csúcson átmenőhöz. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy szabályos oktaéder lapsíkjai.

2240. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaédert lehet szabályos hatszögben metszeni.

2241. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéder merőleges vetülete lehet szabályos hatszög.

2242. Bizonyítsuk be, hogy négy egybevágó szabályos tetraéderből és egy velük egyező élű szabályos oktaéderből egy kétszeresre nagyított szabályos tetraéder építhető.

2243. Bizonyítsuk be, hogy hat egybevágó szabályos oktaéderből és nyolc, velük egyező élű szabályos tetraéderből egy kétszeresre nagyított szabályos oktaéder építhető.

2244. Bizonyítsuk be, hogy egybevágó szabályos tetraéderekkel és velük egyező élű szabályos oktaéderekkel a tér hézagtalanul megtölthető.

2245. Vegyünk egy kockába írt két tetraédert. Bizonyítsuk be, hogy az üres részekből összerakható három szabályos oktaéder, amelyek egybevágók a két tetraéder közös részével.

2246. Bizonyítsuk be, hogy két egybevágó kocka szétdarabolható két egybevágó szabályos tetraéderbe és egy velük egyező élű szabályos oktaéderbe.

2247. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéder köré lehet gömböt írni.

2248. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos oktaéderbe lehet gömböt írni.

2249. Bizonyítsuk be, hogy a kockába írt szabályos oktaéder egy élét a kocka köré írt gömbig meghosszabbítva, a meghosszabbítás az oktaéder élének a nagyobbik aranymetszetével egyenlő.

2250. Tekintsünk egy kockát és a beírt szabályos oktaédert. Az oktaéder egyik csúcspontjánál hosszabbítsuk meg az oktaéder két egymásra merőleges élét a kocka köré írt gömbig. Bizonyítsuk be, hogy a két gömbi pont távolsága a kockaél nagyobbik aranymetszete. Mutassuk meg továbbá, hogy a két gömbi pontot összekötő szakasz az alatta levő kockalaptól olyan távolságra van, mint a szakasz fele (tehát ez a távolság a fél kockaél nagyobbik aranymetszete).

2251. Tekintsünk egy kockát és a beírt szabályos oktaédert, továbbá az AB, DC és EC éleknek a rajzon látható módon a kocka köré írt gömbig való meghosszabbítását. Bizonyítsuk be, hogy az M, X, N, Y, Z pontok (2251. ábra)

a) egy síkon vannak,
b) egy körön vannak,
c) egy szabályos ötszög csúcspontjai.

2252. Tekintsünk egy kockát és a beírt szabályos oktaédert. Hosszabbítsuk meg az oktaéder éleit a 2252/a ábrán látható módon a kocka köré írt gömbig. Így 12 pontot kapunk a gömbön. Bizonyítsuk be, hogy ez a 12 pont és a kocka 8 csúcspontja egy szabályos dodekaéder csúcspontjai (2252/b ábra).

2253. Vegyünk egy szabályos ötszöget. Tükrözzük ezt minden oldalára. Így újabb öt szabályos ötszöget nyerünk. Hajtsuk fel ezeket a középső ötszöggel szomszédos oldaluk körül, míg kettő-kettő egy-egy élben összeér. Bizonyítsuk be, hogy két ilyenből egy szabályos dodekaéder rakható össze.

2254. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos dodekaéderbe írható kocka. Határozzuk meg a beírható kockák számát is.

2255. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos dodekaéder lapközéppontjai egy szabályos ikozaéder csúcspontjai (2255. ábra).

2256. Bizonyítsuk be, hogy

a) a szabályos dodekaédernek,
b) a szabályos ikozaédernek

van szabályos tízszög metszete.

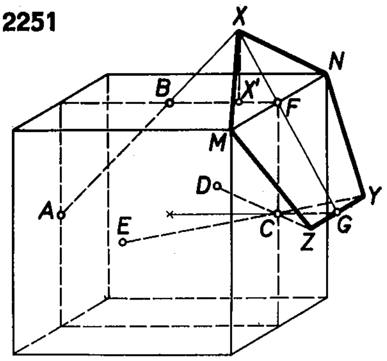
2257. Bizonyítsuk be, hogy

a) a szabályos dodekaéder,
b) a szabályos ikozaéder

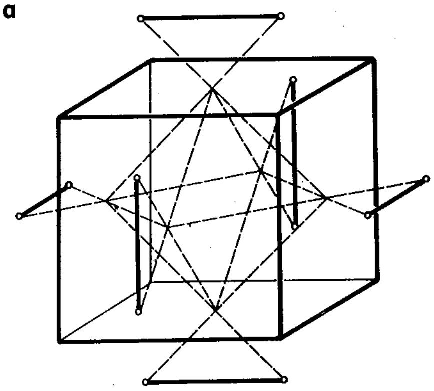
merőleges vetülete lehet szabályos tízszög.

2258. Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos ikozaéder lapközéppontjai egy szabályos dodekaéder csúcspontjai.

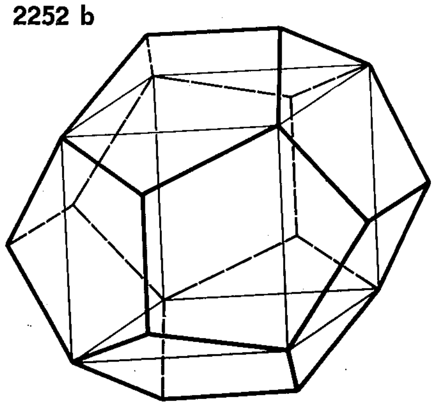
2251



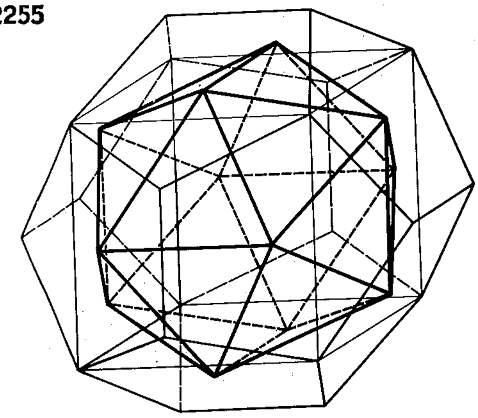
2252 a



2252 b



2255



2259. Tekintsük a szabályos dodekaéder egy lapját. Ennek szögpontjain átmenő, de a lap síkjára nem illeszkedő éleit hosszabbítsuk meg. Bizonyítsuk be, hogy ez az öt egyenes egy ponton megy át.

2260. Hosszabbítsuk meg egy szabályos dodekaéder éleit. Bizonyítsuk be, hogy ötösével egy-egy pontban metszik egymást, és ezek a metszéspontok egy szabályos ikozaéder csúcspontjai.

2261. Készítsük el az öt szabályos test hálóját.

2262. Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder éltengelyének és testátlójának a hosszát.

2263. Határozzuk meg a szabályos oktaéder két szomszédos lapjának a hajlásszögét.

2264. Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder két kitérő éle felezőpontjának a távolságát.

2265. Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder köré írható gömb sugarát.

2266. Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéderbe írható gömb sugarát.

2267. Határozzuk meg az a élű szabályos oktaéder két kitérő éle normáltranszerválisának a hosszát.

2268. Egy a élű kockába oktaédert írunk, majd ebbe kockát. Határozzuk meg a két kocka élének arányát.

2269. Egy r sugarú gömbbe beírunk egy kockát és egy szabályos oktaédert. Bizonyítsuk be, hogy az ezekbe írt gömbök sugara egyenlő.

2270. Számítsuk ki az a élű szabályos dodekaéder

a) csúcstengelyét,
b) éltengelyét,
c) laptengelyét.

2271. Számítsuk ki az a élű szabályos ikozaéder

a) csúcstengelyét,
b) laptengelyét,
c) éltengelyét.

2272. Számítsuk ki az a élű szabályos dodekaéder köré írt gömb sugarát.

2273. Számítsuk ki az a élű szabályos dodekaéderbe írt gömb sugarát.

2274. Számítsuk ki az a élű szabályos ikozaéderbe írt gömb sugarát.

2275. Számítsuk ki az a élű szabályos ikozaéder köré írt gömb sugarát.

2276. Számítsuk ki az a élű szabályos dodekaéder két szomszédos lapjának hajlásszögét.

2277. Számítsuk ki az a élű szabályos ikozaéder két szomszédos lapjának hajlásszögét.

2278. Egy kocka éleinek összege $12a$. Mekkora az éle az ugyanilyen élösszegű többi szabályos testnek?

2279. Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder felszínét.

2280. Számítsuk ki az a élű szabályos dodekaéder felszínét.

2281. Számítsuk ki az a élű szabályos ikozaéder felszínét.

2282. Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder térfogatát.

2283. Számítsuk ki az a élű szabályos dodekaéder térfogatát.

2284. Számítsuk ki az a élű szabályos ikozaéder térfogatát.

2285. Számítsuk ki az a élű kockába írt szabályos oktaéder felszínét és térfogatát.

2286. Egy szabályos tetraéder éle a. Mekkora a felszíne annak a kockának, amelynek térfogata megegyezik a tetraéder térfogatával?

2287. Adott egy szabályos oktaéder F felszíne. Számítsuk ki az élét?

2288. Adott egy szabályos oktaéder V térfogata. Számítsuk ki az élét.

2289. Adott egy szabályos oktaéder V térfogata. Számítsuk ki a felszínét.

2290. Adott egy szabályos oktaéder F felszíne. Számítsuk ki a térfogatát.

2291. Adott egy szabályos oktaéder d csúcstengelye. Számítsuk ki a térfogatát.

2292. Egy kocka felszíne $6a^2$. Mekkora az éle az ugyanilyen felszínű többi szabályos testnek?

2293. Egy szabályos tetraédernek, egy szabályos oktaédernek és egy kockának a felszíne egyenlő. Hogyan aránylanak egymáshoz a térfogatok?

2294. Egy szabályos tetraédernek, egy szabályos oktaédernek és egy kockának a térfogata egyenlő. Hogyan aránylanak egymáshoz a felszínek?

2295. Egy szabályos tetraédernek, egy szabályos oktaédernek és egy kockának az élei egyenlők. Hogyan aránylanak egymáshoz

a) a felszínek,
b) a térfogatok?

2296. Egy a élű szabályos oktaéder csúcsait az élek felezőpontján átmenő síkokkal levágjuk. Mekkora lesz a megmaradó rész térfogata?

2297. Egy szabályos tetraéder, egy szabályos oktaéder és egy szabályos ikozaéder élei egyenlők. Hogyan aránylanak egymáshoz a felszínek?

2298. Vegyünk egy kockát, és tükrözzük a testet minden lapjára. Újabb hat kockát nyerünk. Tekintsük azt a konvex testet, amelynek csúcspontjai az eredeti kocka csúcsai és a kapott hat kocka középpontja. Ezt a testet rombdodekaédernek nevezik (2298. ábra).

a) Mennyi a csúcsok, a lapok és az élek száma?

b) Milyen lapok határolják?

c) Szabályos test-e?

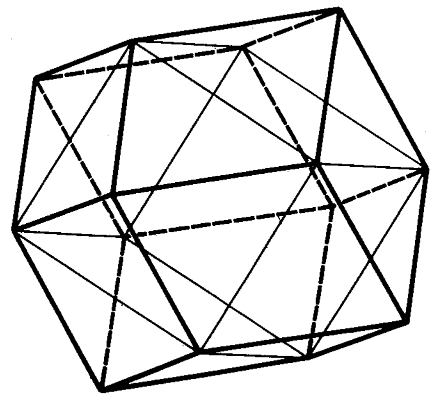
d) Mekkorák az élek, ha a kocka éle a?

e) Mekkora két szomszédos él hajlásszöge?

f) Mekkora két szomszédos lapjának hajlásszöge?

g) Mekkora a felszíne?

h) Mekkora a térfogata?



2298

2299. Fektessünk egy kocka élein át a hozzá illeszkedő lapokkal 45°-os szöget bezáró síkokat. Milyen test keletkezik?

2300. Bizonyítsuk be, hogy egybevágó rombdodekaéderekkel a tér hézagtalanul kitölthető.

2301. Vegyünk egy paralelepipedont és a beleírt tetraédereket. Nézzük a két tetraéder közös részét. Milyen testet határoznak meg (csúcsok, lapok, élek száma)? Ezt a testet paralelepipedonba írt oktaédernek nevezzük.

2302. Vegyük egy paralelepipedon lapjainak középpontjai által meghatározott testet. Határozzuk meg, hogy térfogata hányadrésze a paralelepipedon térfogatának.

2303. Egy paralelepipedon minden csúcsához illesszünk síkot, amelyik párhuzamos a szomszédos három csúcson átmenővel. Milyen testet határoznak meg ezek a síkok? Mekkora a két test térfogatának aránya?

2331. Ábrázoljuk a szabályos dodekaédert, ha

a) egy laptengelye merőleges az első képsíkra;
b) egy csúcstengelye merőleges az első képsíkra;
c) egy-egy éltengelye merőleges a képsíkokra.

2332. Ábrázoljuk a szabályos ikozaédert, ha

a) egy csúcstengelye merőleges az első képsíkra;
b) egy laptengelye merőleges az első képsíkra;
c) egy éltengelye merőleges az első képsíkra.

HENGER

2333. Bizonyítsuk be, hogy a másodrendű hengert (olyan hengert, melynek vezérgörbéje kúpszelet) az alkotóval párhuzamos sík két alkotóban metszi, egy alkotó mentén érinti, vagy nincs közös pontja a hengerrel.

2334. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenesnek egy hengerrel való metszéspontjai rajta vannak az egyenesre illeszkedő tetszőleges sík és a henger metszésvonalán.

2335. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenes egy másodrendű hengert (ha annak nem alkotója) két pontban metsz, egy pontban érint, vagy nincs közös pontja a hengerrel.

2336. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenesnek egy másodrendű henger palástjával kettőnél több közös pontja van, akkor az egyenes alkotója a hengernek.

2337. Bizonyítsuk be, hogy egy forgáshengernek a síkmetszete ellipszis, ha a sík nem merőleges és nem párhuzamos a henger alkotóival.

2338. A tér adott pontján át fektessünk adott másodrendű hengerhez érintősíkot.

2339. Adott két kitérő egyenes és egy sík, továbbá egy szakasz. Keressük meg a két kitérő egyeneshez azt az adott síkkal párhuzamos transzverzálist, amelynek hossza akkora, mint az adott szakasz. Ábrázoljuk, ha az adatokat a képeivel adtuk meg.

2340. Messünk egy forgáshengert két, egymással nem párhuzamos síkkal, amelyek egymást nem a henger belsejében metszik. Bizonyítsuk be, hogy a hengernek a két sík közé eső darabja akkora palástfelszínű és térfogatú, mint a két metszet középpontján átmenő, az alkotókra merőleges síkok közötti darabé. A továbbiakban a másodrendű hengerfelület két párhuzamos körmetszete közé eső részére vonatkoznak feladataink. Az így kapott testet körhengernek, röviden hengernek nevezzük. A két párhuzamos körmetszetet alap- és fedőlapnak nevezzük. Egyenes, illetve ferde hengerről beszélünk aszerint, hogy az alkotók az alaplap síkjára merőlegesek vagy nem. Az egyenes henger tengelye az alap- és fedőlap középpontját összekötő szakasz. Tengelymetszet a tengelyre illeszkedő síkmetszet.

2341. Hányszorosa valamely egyenes körhenger magassága az alapsugárnak, ha a tengelymetszet területe megegyezik az alap területével?

2342. Egy ferde henger alkotója 3,42 m, az alkotónak az alapsíkkal bezárt szöge 32°16', az alapkör sugara 1,57 m. Mekkora az alapsíkra merőleges, az alapkör és a fedőkör középpontjait tartalmazó metszet területe?

2343. Az egyenes körhenger

a) alaplapjának sugara 3 cm, magassága 5 cm;
b) alaplapjának sugara 6,5 dm, magassága 7,9 dm;
c) alaplapjának sugara 72,33 m, magassága 83,16 m.

Határozzuk meg a henger felszínét.

2344. Az egyenes körhenger alaplapjának kerülete 20,33 cm, a magasságnak és az alaplap sugarának különbsége 11,6 cm. Mekkora a felszíne?

2345. Egyenes körhenger felszíne 659,6 cm^2. Ha az alaplap sugarát 4 cm-rel, a magasságot pedig 3 cm-rel nagyobbítjuk, akkor a felülete 923,4 cm^2-rel növekszik. Mekkora az alaplap sugara és a magasság?

2346. Egyenes körhenger felszíne 21 356,62 cm^2, az alaplap sugarának és a magasságnak aránya 4:5. Mekkora az alaplap sugara és a magasság?

2347. Egyenes körhenger felszíne 1111 cm^2. Az alaplap sugarának és a magasságnak az összege 26,8 cm. Mekkora a sugár és a magasság?

2348. Mennyi idő alatt készül el egy szakmunkás egy dongaboltozat (fekvő félhenger) vakolásával, ha a boltozat 15 m hosszú, és fesztávolsága (átmérője) 5,6 m? (Egy óra alatt 4,5 m^2-t vakol be.)

2349. Mennyi bádoglemez szükséges 50 db 12 cm átmérőjű, 1 m hosszú kályhacső elkészítéséhez? (Takarásra számítsunk 1,5 cm-t.)

2350. Mennyi festék kell egy 6,5 m hosszú, 45 cm átmérőjű oszlop befestéséhez, ha 1 m^2-re 20 dkg-ot számítunk?

2351. Egy 5,6 cm és 7,9 cm oldalú téglalapot egyszer az egyik, majd a másik oldala körül megforgatunk. Számítsuk ki a keletkezett hengerek felszínét.

2352. Egyenes körhenger

a) alaplapjának sugara 3,5 m, magassága 15 m;
b) alaplapjának sugara 32,72 dm, magassága 26,18 dm;
c) alaplapjának sugara 45,7 cm, magassága 62,15 cm.

Mekkora a térfogata?

2353. Mekkora a hengeres oszlop palástjának felszíne és az oszlop térfogata, ha átmérője 30 m, magassága 2,8 m?

2354. Egyenes körhenger térfogata V, alaplapjának sugara r. Mekkora a magassága?

a) $V = 5\,025{,}72$ cm^3, $r = 8{,}7$ cm;
b) $V = 62\,584{,}84$ cm^3, $r = 33{,}4$ m.

2355. Egy 7,8 cm oldalú négyzetet forgatunk az egyik oldala körül. Mekkora lesz a keletkezett forgási test felszíne és térfogata?

2356. Egy 21,7 cm és 36,8 cm oldalú téglalapot forgatunk egyszer az egyik, majd a másik oldala, végül az egyik és a másik szimmetriatengelye körül. Határozzuk meg a keletkezett testek felszínét és térfogatát.

2357. Egy 26 cm és 33 cm oldalú téglalapot kétféleképpen csavarhatunk hengerré. Hogyan aránylik egymáshoz ennek a két hengernek a térfogata?

2358. Mennyi bádog kell annak a henger alakú litermértéknek a készítéséhez, amely kétszer olyan magas, mint amilyen széles? (Fogóra, hulladékra, forrasztásra számítsunk még 20%-ot.)

2359. Mekkora a kétliteres, henger alakú mérték magassága, ha a magassága kétszer akkora, mint az átmérője?

2360. A 25 literes, henger alakú edény 20 cm mély; mekkora az átmérője?

2361. Az 1 hektoliteres, henger alakú edény belső átmérője a belső magasságának négyszerese. Mekkora a sugár és a magasság?

2362. Henger alakú víztartály belső átmérője 2,3 m. Mennyit emelkedik a víz felszíne, ha a tartályba 10 hl vizet engednek?

2363. Hengeres üveg kémcső cm^3-ekre van beosztva. A kémcső belső átmérője 0,9 cm. Milyen távol vannak egymástól a beosztások?

2364. Mekkora a kapilláris cső belső átmérője, ha 100 mg higany 6 mm magasságig töltötte meg a csövet? (Fajsúly: 13,6.)

2365. Hány hl víz van egy 1,6 m széles kútban, ha a víz 3,2 m magasan áll?

2366. Egy öntöttvas lendítőkerék méretei (tengely, küllők stb. nélkül): a külső sugár 3 m, a belső sugár 2,7 m, vastagság 0,3 m. Mekkora a tömege, ha a sűrűsége 7,5?

2367. Egy malomkő sugarai 0,5 m és 0,1 m; vastagsága 0,2 m. Mekkora a tömege, ha sűrűsége 2,5?

2368. Egyenes körhenger térfogata 9628,17 cm^3, palástjának felszíne 2128,29 cm^2. Mekkora az alaplap sugara és a magasság?

2369. Határozzuk meg két egyenlő palástú egyenes körhenger térfogatának az arányát.

2370. Határozzuk meg két egyenlő térfogatú egyenes körhenger palástjának arányát.

2371. Adott téglalapot forgassunk előbb a hosszabbik, majd a rövidebbik oldala mint tengely körül. Határozzuk meg a leírt testek térfogatának az arányát.

2372. Ha egy téglalapot először a hosszabb, majd a rövidebb oldala körül forgatunk, a kapott testek térfogata a m^3, illetve b m^3. Mekkora a téglalap átlója?

2373. Egyenlő térfogatú egyenes körhengerek között melyik az, melynek palástja és egyik alaplapjának az összege a legkisebb?

2374. Egyenlő felszínű egyenes körhengerek között melyik az, melynek a térfogata a legnagyobb?

2375. Milyen összefüggés van két nem egybevágó egyenes körhenger sugara és magassága között, ha a két henger felszíne és térfogata egyenlő?

2376. Egyenes körhenger térfogata 3280 cm^3, az alaplap sugara és a magasság úgy aránylik egymáshoz, mint 5:6. Mekkora a henger felszíne?

2377. Egyenes körhenger palástja lefejtve négyzet, melynek átlója 10 cm. Mekkora a henger térfogata?

2378. Egyenes körhenger felszíne 4532,6 cm^2, a tengelymetszet területe 969,5 cm^2. Mekkora a térfogata?

2379. Egyenes körhenger felszíne 62 528,7 cm^2, palástjának területe 51 983,8 cm^2. Mekkora a térfogata?

2380. Egyenlő oldalú egyenes körhenger tengelymetszetének területe 628,7 cm^2. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2381. Egyenes körhenger alaplapjának sugara 6 cm, a magassága 11 cm. A tengely által határolt, egymással 40°-os szöget bezáró két síkkal kivágunk egy részt. Mekkora a kisebbik rész térfogata?

2382. Egy 5,2 m átmérőjű, kör keresztmetszetű alagút fenekén vízszintes felületű betonréteget építenek. A betonréteg körszelet-keresztmetszetének a magassága 1 m. Hány tonna cementre van szükség, ha az alagút 2,5 km hosszú, és 1 m^3 beton 150 kg cementet tartalmaz?

2383. Egy 80 dm^2-es, téglalap alakú bádogból csövet akarunk késziteni. A téglalap egyik oldala a másik oldal $\frac{5}{8}$ része. A rövidebb oldalból legyen a cső hossza. Ráhajtásra 2 cm-t szánjunk. Mekkora lesz a cső átmérője és magassága?

2384. Milyen magas legyen a henger alakú víztartály, ha az alaplapja 5 m átmérőjű kör, és a befogadóképessége 25 m^3?

2385. Egy 200 l űrtartalmú, henger alakú edény magassága háromszor akkora, mint az alapkör sugara. Mekkora a sugár és a magasság?

2386. Egyenlő oldalú egyenes körhenger palástja 25 m^2. Mekkora a térfogata?

2387. Egyenlő oldalú egyenes körhenger térfogata 785,25 m^3. Mekkora a felszíne?

2388. Egy forrás, mely óránként 82 hl vizet ad, henger alakú medencébe folyik, amelynek átmérője 7,5 m. Milyen magasságnyira telik meg a medence 4 óra alatt?

2389. Hány m^3 a gőzszükséglete percenként egy gőzgép hengerének, ha a henger belső átmérője 42 cm, a dugattyúlöket hossza 80 cm, és percenként 60-szor szív és nyom?

2390. Szivattyú dugattyújának az átmérője 18 cm, a lökethossza 46 cm, percenként 100-szor szív és nyom; hatásfoka 0,9. (A hatásfok azt jelenti, hogy a valóságos teljesítmény az elméletből adódó teljesítménynek hányadrésze.) Mennyi vizet szállít percenként ez a szivattyú?

2391. 500 literes olajtartály hány másodperc alatt tölthető tele, ha a töltés 20 mm-es átmérőjű csövön át történik, és az ömlés sebessége 10 m percenként.

2392. 100 m hosszú rézfonal tömege 7,26 kg. Mennyi az átmérője? A réz sűrűsége 8,8.

2393. Mennyi az öntöttvas hengerhuzal tömege, ha a magassága 3,5 m, kerülete 31,41 mm, sűrűsége 7,2?

2394. Milyen nagy a folyadék sűrűsége, ha a belemártott 0,05 m sugarú és 0,2 m magasságú, 7,78 sűrűségű vashenger benne 9 kg tömegű?

2395. Milyen súlyos a henger alakú vasedény, ha a magassága 0,9 m, fenekének átmérője 0,7 m, és falának vastagsága 0,09 m? A vas sűrűsége 7,42.

2396. 5 cm hosszú vascső falvastagsága 12 mm, belső átmérője 40 mm. Mekkora a vascső tömege, ha a sűrűsége 7,8?

2397. 100 kg 1,5 mm átmérőjű vörösréz drótot 0,5 mm vastagon gumiszigetelővel vonnak be. Hány kg gumira van szükség, ha ugyanabból a gumiból 1 m hosszú zsinór, melynek keresztmetszete 3 mm-es oldalhosszúságú négyzet, 0,1 N-t nyom? A réz sűrűsége 8,95.

2398. Erősáramú kábelben 3 darab 6,6 mm-es átmérőjű rézdrót van. Kívül 2 mm falvastagságú, 3 cm-es belső átmérőjű ólomköpeny veszi körül, amelyen belül szigetelőanyag tölti ki a fennmaradó részt. Mennyi a súlya a kábel méretének? (A réz sűrűsége 8,9; az ólomé 11,4; a szigetelőanyagé 0,9.)

2399. Rézcső hossza 1,2 m, tömege 90 kg, külső átmérője 0,75 m, sűrűsége 9. Milyen vastag a fala?

2400. Henger alakú kémény belső sugara 1,5 m, falvastagsága 0,5 m, a falazata 54,96 m^3. Milyen magas a kémény?

2401. Parafából készült hengerbe, melynek alapköre 36,77 dm sugarú, henger alakú nyílást kell fúrni úgy, hogy ha azt ólommal töltjük ki, a henger magasságának feléig merül alá a vízben. Milyen sugarú legyen a nyílás? (A parafa sűrűsége 0,24; az ólomé 11,33.)

2402. Minden oldalról zárt üres rézhengernek a magassága 84 cm, falvastagsága 1,2 cm. Milyen nagy az alaplap külső átmérője, ha a tengely merőleges állásánál 60 cm-nyire merül el a vízben, és ha a sűrűsége 8,75?

2403. Milyen vastag az olyan öntöttvas hengeres oszlopnak a fala, melynek kerülete 90 cm, magassága 3,6 m, tömege 650 kg? (Sűrűség: 7,5.)

2404. Tömör henger tengelyével párhuzamosan fekve úszik a vízen úgy, hogy félsugárnyira merül a vízbe. Mekkora a sűrűsége?

2405. Körhenger alakú fekvő kazán belső átmérője 150 cm, hossza 5 m. Mennyi víz van benne, ha a víz magasságának $\frac{4}{5}$ részéig tölti meg?

2406. 15 cm sugarú hengeres fatörzs fekve úszik a vízben, és merülésének mélysége 12 cm. Mekkora a sűrűsége?

2407. Egy félhenger alakú fateknő (sűrűsége: 0,6) sugara 35 cm, hossza 2,5 m, falvastagsága 10 cm. Mekkora a teherbírása, ha csónaknak használják?

2408. Mennyi víz önthető egy egyenes körhenger alakú, a függőleges helyzetből 36,57°-nyi szöggel elfordított literes edénybe, ha az edény magassága az átmérő kétszerese?

2409. Egy ferde körhenger alkotói 30 cm, az alkotók az alapsíkkal 57°28′ szöget zárnak be. Az alaplap sugara 5 cm. Mekkora a henger térfogata?

2410. Egy ferde körhenger alkotói 15 dm, az alkotók az alaplappal 67°34′ szöget zárnak be; az alaplap kerülete a magasság ötszöröse. Mekkora a henger térfogata?

2411. Egy ferde körhenger alkotói 36 dm, az alkotók az alaplappal 32°48′ szöget zárnak be, az alaplapra merőleges, az alapkör egy átmérőjén átmenő metszet területe 354,5 dm^2. Mekkora a henger térfogata?

2412. Ábrázoljunk hengert, ha adott a tengely két képe és az alapkör sugara.

2413. Adott a forgáshenger tengelye, egyik alkotója, továbbá egy egyenes a két képével. Szerkesszük meg a döféspontok képeit.

2414. Adott a forgáshenger tengelye, egyik alkotója, továbbá egy sík két egyenesének a képeivel. Szerkesszük meg a metszésvonal képeit.

2415. Adott a forgáshenger tengelye, egyik alkotója, továbbá egy pont a képeivel. Ábrázoljuk a forgáshenger adott pontra illeszkedő érintősíkjait.

KÚP. CSONKA KÚP

2416. Adott három, nem egy síkban fekvő, egy ponton átmenő egyenes. Van-e olyan forgáskúp, melynek ezek alkotói?

2417. Bizonyítsuk be, hogy a másodrendű kúpot (olyan kúpot, melynek vezérgörbéje kúpszelet) a kúp csúcspontján átmenő sík két alkotóban metszi, egy alkotó mentén érinti, vagy a csúcsponton kívül nincs több közös pontja a felülettel.

2418. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenes és egy kúp metszéspontjai rajta vannak az egyenesre illeszkedő tetszőleges sík és a kúp metszésvonalán.

2419. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenes egy másodrendű kúpot, ha nem alkotója, két pontban metsz, egy pontban érint (esetleg átmegy a csúcsponton), vagy nincs közös pontja a kúppal.

2420. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenesnek kettőnél több közös pontja van egy másodrendű kúpfelülettel, akkor annak egy alkotója.

2421. Bizonyítsuk be, hogy ha egy forgáskúp egy lapszög mindkét lapját érinti, akkor az érintő alkotók a lapszög élével egyenlő szögeket zárnak be, továbbá a kúp tengelye a lapszög szögfelező síkján van.

2422. Adott három sík, melyeknek egy közös pontjuk van. Keressük azt a forgáskúpot, amelynek ezek érintősíkjai.

2423. Adott síkban, annak adott pontján át húzzunk olyan egyenest, amely egy adott egyenessel adott szöget zár be. Hány megoldás lehetséges?

2424. Adott síkban, annak adott pontján át húzzunk olyan egyenest, amely egy másik adott síkkal adott szöget zár be.

2425. Adott egyeneshez illesszünk olyan síkot, amely adott síkkal adott szöget zár be.

2426. Illesszünk két adott kitérő egyeneshez olyan, mindkettőt metsző harmadikat, amely azokkal adott szögeket zár be.

2427. Adott ponton át fektessünk egyenest, amely a nem egy síkban levő adott egyeneshez és körhöz illeszkedik.

2428. Bizonyítsuk be, hogy egy forgáskúp két körmetszete sugarának aránya megegyezik a síkjuk csúcstól számított távolságainak arányával.

2429. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csonka kúp palástjának területe egyenlő olyan kör területével, melynek sugara a csonka kúp alkotója, akkor a csonka kúpba lehet gömböt írni.

2430. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csonka kúp magassága az alapkörök átmérőinek a mértani közepe, akkor a csonka kúpba lehet gömböt írni.

2431. Forgáskúpfelületnek vegyük olyan két kör metszetét, hogy a csúcspont a két kör síkja között legyen. Az így kapott testet nevezzük másodfajú csonka kúpnak. Határozzuk meg a térfogatát, ha ismerjük a metsző körök sugarát (R, r) és síkjaik egymástól való távolságát (m).

2432. Mekkora az egyenes körkúp magassága, ha

a) alkotója 10 cm, alaplapjának sugara 6 cm;
b) alkotója 128,9 cm, alaplapjának sugara 89,2 cm;
c) alkotója 0,09 m, alaplapjának sugara 0,02 m?

2433. Mekkora az egyenes körkúp alkotója, ha

a) alaplapjának sugara 2,5 cm, magassága 4,6 cm;
b) alaplapjának sugara 11,5 dm, magassága 22,3 dm;
c) alaplapjának sugara 113,6 cm, magassága 86,7 cm?

2434. Mekkora az egyenes körkúp alaplapjának sugara, ha

a) alkotója 7,9 dm, magassága 5,8 dm;
b) alkotója 7,28 cm, magassága 6,17 cm;
c) alkotója 132,7 mm, magassága 87,52 mm?

2435. Mekkora a forgáskúp nyílásszöge, ha

a) alkotója 16,4 cm, az alapkör sugara 7,8 cm;
b) alkotója 111,6 mm, magassága 79,6 mm;
c) az alapkör sugara 7,82 cm, magassága 9,37 cm?

2436. Mekkora a forgáskúp kiterített palástjának a középponti szöge, ha

a) alkotója 8 cm, az alapkör sugara 5 cm;
b) alkotója 12,56 cm, magassága 9,28 cm?

2437. Ferde körkúp alapkörének középpontja a csúcstól 10 cm-re van, és a kettőt összekötő szakasz az alaplappal 60°-os szöget zár be, az alapkör sugara 5 cm. Számítsuk ki a magasságot, a leghosszabb alkotót és a legrövidebb alkotót.

2438. Ferde körkúp leghosszabb alkotója 52 cm, a legrövidebb alkotója 39 cm, az alapkör középpontját a csúccsal összekötő szakasz 42,4 m. Mekkora az alaplap sugara?

2439. Ferde körkúp legnagyobb alkotója 92,6 cm, legkisebb alkotója 52,6 cm, az alapkör sugara 31,7 cm. Milyen távolságra van az alapkör középpontja a csúcstól?

2440. Messük az r alapsugarú körkúpot az alaplappal párhuzamosan olyan síkkal, mely a kúp magasságát

a) felezi;
b) 1:3 arány szerint osztja (csúcstól számítva);
c) m:n arány szerint osztja (csúcstól számítva).

Mekkora a metszet területe?

2441. Mekkora az egyenes körkúp felszíne, ha

a) alaplapjának sugara 9 dm, magassága 12 dm;
b) alaplapjának sugara 11,5 cm, alkotója 22,3 cm;
c) magassága 112,5 mm, nyílásszöge 52°?

2442. Egyenes körkúp felszíne 1346,52 cm², tengelymetszetének területe 203,6 cm². Mekkora az alaplap sugara (r), a kúp magassága (m) és alkotója (a)?

2443. Egyenes körkúp kiterített palástja 10 cm sugarú félkör. Mekkora a kúp magassága, alapkörének sugara és nyílásszöge?

2444. Negyedkörből kúppalástot alakítunk. Milyen kapcsolat van a kúp magassága és alapkörének a sugara között?

2445. 16,5 cm magas kúp nyílásszöge 47,6°. Mekkora a kiterített palást középponti szöge és területe?

2446. 50 cm² területű negyedkörből kúppalástot alakítunk. Mekkora az alapkör területe?

2447. Milyen magas az egyenes körkúp, ha az alapkör sugara 9,7 cm, és a kiterített palást középponti szöge 100°?

2448. Egy sátorlap 8 m². Az egyenes körkúp alakú sátor alapkörének átmérője 2,2 m. Milyen magas a sátor?

2449. 46 cm magas egyenes körkúpot a csúcstól számított mekkora távolságban kell az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy a palást területét felezzük?

2450. 33 cm magas egyenes körkúpot a csúcstól számított mekkora távolságban kell két, az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy a palást területét három egyenlő részre osszuk?

2451. Adott egyenes körkúp palástját az alaplappal párhuzamos síkkal a csúcstól számított $a:b$ arányban kell osztani. Milyen távolságra lesz a metszősík a csúcstól, ha a kúp magassága m?

2452. Osszuk fel egy egyenes körkúp palástját az alaplappal párhuzamos $n-1$ síkkal n egyenlő részre. A csúcstól milyen távolságra kell ezeket a síkokat felvenni, ha a kúp magassága m?

2453. Mekkora egy egyenes körkúp felszíne és térfogata, ha

a) alaplapjának sugara	1,56 cm,	magassága	0,25 cm;
b) alaplapjának sugara	3,1 dm,	alkotója	4,8 dm;
c) magassága	91 cm,	alkotója	109 cm;
d) magassága	20 cm,	nyílásszöge	26°?

2454. Két egyenes körkúp magasságainak, illetve alapkörsugarainak aránya 2:1. Hogy aránylik egymáshoz a két test felszíne, ill. térfogata?

2455. Mekkora az egyenes körkúp felszíne és térfogata, ha alkotója 72 cm, magasságának és az alaplap sugarának különbsége pedig 33 cm?

2456. Egyenlő oldalú kúp (olyan egyenes körkúp, amelynek a tengelymetszete szabályos háromszög) magassága 0,7 m. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2457. Mekkora az egyenlő oldalú kúp alkotója, ha a felszíne 1 m^2?

2458. Mekkora az egyenlő oldalú kúp alkotója, ha a térfogata 1 m^3?

2459. Mekkora az egyenes körkúp felszíne, ha térfogata 247 cm^3, alkotója pedig háromszor akkora, mint az alapkör sugara?

2460. Egyenes körkúp tengelymetszete 1,56 m^2, alkotója 2,1 m. Mekkora a térfogata?

2461. Egyenes körkúp alkotója $\sqrt{2}$, nyílásszöge 90°. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2462. Mekkora a térfogata annak az egyenes körkúpnak, amelynek palástja kiterítve egy 16 cm sugarú harmadkör?

2463. A csúcstól számítva milyen távolságban kell az egyenes körkúpot az alaplappal párhuzamos síkkal elmetszeni, hogy térfogatát felezzük, ha magassága m?

2464. Forgassunk a szimmetriatengelye körül egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek alaplapja 88 cm, szárai 125 cm hosszúak. Mekkora lesz a keletkezett forgási test felszíne és térfogata?

2465. Egyenes körkúp palástja kiterítve a sugarú félkört alkot. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2466. Egyenes körkúp palástja kiterítve 12 cm sugarú, 240° középponti szögű körcikk. Mekkora a térfogata?

2467. Egyenes körkúp alapkörének a sugara 6 cm. A palást területe kétszer akkora, mint az alapköré. Mekkora a kúp térfogata?

2468. Egyenes körkúp tengelymetszetének területe 400 cm^2, az alkotók az alaplappal 65°-os szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

2469. Egyenes körkúp felszíne 20 m^2, az alkotók az alaplappal 35°-os szöget zárnak be. Mekkora a kúp térfogata?

2470. Egyenes körkúp térfogata 4,05 m^3, alkotói az alaplappal 72°18′-nyi szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne?

2471. Egyenes körkúp magassága 42,6 cm, alaplapjának sugara 12,7 cm. A csúcstól milyen távolságban kell a kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy a két rész térfogata egyenlő legyen; és mekkora a síkmetszet sugara?

2472. Egyenes körkúp magassága 53,4 dm, alaplapjának sugara 21,8 dm. A csúcstól milyen távolságban kell a kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy az alsó rész térfogata 7972,8 dm^3 legyen?

2473. Az adott alkotójú egyenes körkúpok között melyiknek a térfogata a legnagyobb?

2474. Egyenlő felszínű egyenes körkúpok között melyiknek a térfogata a legnagyobb?

2475. Egyenlő térfogatú egyenes körkúpok között melyiknek a felszíne a legkisebb?

2476. 14 cm magas egyenes körkúp alaplapjának sugara 8 cm; a kúp csúcsán áthaladó sík az alapkör síkjával 78°-os szöget zár be. Mekkora a sík által lemetszett kúprész térfogata?

2477. Két egyenes körkúpnak közös az alaplapja. A csúcsok az alapsík ugyanazon oldalán vannak. Az egyiknek az alkotói az alaplappal 78°50′-nyi, a másikéi 25°40′-nyi szöget zárnak be. Az alapkör sugara 5 cm. Mekkora a két palást közt levő térrész felszíne és térfogata?

2478. 10 cm alapsugarú és 18 cm magasságú egyenes körkúpból egy 8 cm alapsugarú, egyenes körkúp alakú részt kivágnak. A két kúpnak közös a tengelye és egyenlő a nyílásszöge. Mekkora a megmaradt rész térfogata?

2479. Egy kör fölött két egyenes körkúp áll. A csúcsok távolsága 3,2 dm. Egyiknek a nyílásszöge 90°, a másiké 60°. Mekkora a palástok közti térrész térfogata?

2480. Mekkora egy ferde körkúp térfogata, ha az alaplap sugara 10 cm, legnagyobb alkotója 32 cm, legkisebb alkotója 26 cm?

2481. Ferde körkúp alaplapjának sugara 10 cm, a legrövidebb alkotója 13 cm, a leghosszabb 21 cm. Mekkora a kúp térfogata?

2482. Ferde körkúp leghosszabb és legrövidebb alkotójának összege 8 dm, ezek hajlásszöge 44°, és az általuk meghatározott háromszög területe

$$\frac{15\sqrt{2}}{4}\ dm^2.$$ Mekkora a kúp térfogata?

2483. Ferde körkúp legrövidebb alkotója 32 cm, és az alaplappal 65°15′ szöget zár be, a leghosszabb alkotója 58 cm. Mekkora a kúp térfogata?

2484. Egyenes körkúp palástjának területe k-szorosa az alaplap területének. Mekkora a kiterített palást középponti szöge?

2485. Egyenes körkúp palástjának területe t. A kiterített palást középponti szöge 36°. Mekkora a kúp térfogata?

2486. Egyenes körkúp felszíne F, térfogata V. Mekkora a kúp alapkörének sugara?

2487. Ferde körkúp alaplapjának sugara r, a leghosszabb és legrövidebb alkotó hajlásszöge α, ezek szögfelezőjének hossza f. Mekkora a kúp térfogata?

2488. Egyenes körkúp tömege 2,5 kg, sűrűsége 3,2, magassága 30 cm. Mekkora a palástja és az alaplap sugara?

2489. Ólomból készült egyenes körkúp tömege 936,86 kg, nyílásszöge 64°14′. Mekkora a kúp felszíne? (Sűrűség: 11,4.)

2490. A kiöntött homok egyenes körkúp alakú, melynek alkotói az alaplappal 31°-os szöget zárnak be. Milyen magas és széles az a homokkúp, amelyben 15 m^3 homok van?

2491. Vaskúp (egyenes körkúp) tömege 2375 kg, alaplapjának sugara 30 cm; sűrűség 7,5. Milyen magas a kúp?

2492. Mennyi a vízen úszó olyan kúp alakú jégtömeg tömege, melynek a víz színén úszó kerülete 25,12 m, és a kiálló részének alkotója 5 m? (A víz sűrűsége 1, a jégé 0,9.)

2493. Egyenes körkúp alakú test a csúcsával lefelé úszik a vízen, magassága 2,5 cm, sűrűsége 0,73. Mennyire merül a víz alá?

2494. Egyenes körkúpnak a csúcsa a vízből 7 dm-nyire emelkedik ki, a vízből kiálló rész alaplapjának sugara 5 dm. Mekkora a kúp magassága és az alapkör sugara? (A kúp sűrűsége 0,9.)

2495. Egyenes körkúp magassága m, sűrűsége $\gamma < 1$. Mennyire merül el, ha a csúcsával lefelé vízbe mártjuk?

2496. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 26 cm, a fedőlap sugara 17 cm, a magassága 7,8 cm. Mekkorák az alkotók, és mekkora szöget zárnak be az alaplappal?

2497. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 3,9 cm, a fedőlap sugara 1,7 cm, az alkotók 2,3 cm. Mekkora a magasság, és mekkora szöget zárnak be az alkotók az alaplappal?

2498. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 33,42 cm, magassága 21,16 cm, alkotója 30,17 cm. Mekkora a fedőlap sugara, és mekkora szöget zárnak be az alkotók az alaplappal?

2499. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 113,5 m, a fedőlap sugara 92,8 m, az alkotók az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Mekkora a magassága és az alkotói?

2500. Mekkora az egyenes csonka kúp felszíne, ha

a) az alapkör sugara 11,3 cm, a fedőlapé 8,9 cm, alkotója 21,7 cm;
b) az alapkör sugara 112,5 mm, a fedőlapé 97,3 mm, magassága 86,5 mm?

2501. Egyenes csonka kúp alakú papír lámpaernyő alkotója 35 cm, a felső nyílás átmérője 6 cm, az alsóé 45 cm. Mekkora a palást területe?

2502. Egyenes csonka kúp felszíne 628,17 cm^2, alkotója 12,6 cm, az alaplap sugara 6 cm-rel nagyobb a fedőlap sugaránál. Mekkora az alap- és a fedőlap sugara?

2503. Egyenes csonka kúp palástja 1933,2 cm^2, az alkotók az alaplappal 74,7°-os szöget zárnak be, a fedőlap sugara harmadrésze az alap sugarának. Mekkora az alap- és a fedőlap sugara?

2504. Mekkora az olyan egyenes csonka kúp palástja, melyben a tengelymetszet területe t, és az alkotó a magasság kétszerese?

2505. Egyenes csonka kúp alapterülete 25 cm^2, a fedőlap területe 17 cm^2, az alkotók 12 cm hosszúak. Mekkora a palástja?

2506. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 1,25 cm, a fedőlapé 0,6 cm, a palástja 29,045 cm^2? Mekkora a magassága?

2507. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 4 dm, a fedőlapé 2 dm, a felszíne 107,89 dm^2. Mekkora a magassága?

2508. Egyenes csonka kúp alaplapjának sugara 16,5 cm, a fedőlapé 11,7 cm, az alkotók 19,3 cm. A fedőlaptól milyen távolságban kell a csonka kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszenünk, hogy a két résznek a palástja egyenlő legyen, és mekkora a síkmetszet sugara?

2509. Számítsuk ki az egyenes csonka kúp térfogatát, ha

a) az alaplap sugara 11 cm, a fedőlapé 7 cm, a magasság 1,7 cm;
b) az alaplap sugara 0,9 cm, a fedőlapé 0,09 cm, a magasság 0,02 cm;
c) az alaplap sugara 113,7 mm, a fedőlapé 86,9 mm, alkotója 142,8 mm;
d) az alaplap sugara 45,16 mm, magassága 28,9 mm, alkotója 35,42 mm.

2510. Egyenes csonka kúp alakú vízgyűjtő felső átmérője 102 cm, az alsó átmérője 84 cm, magassága 72 cm. Hány liter víz fér bele?

2511. Egyenlő szárú trapéz forog a szimmetriatengelye körül. A trapéz párhuzamos oldalai 22, illetve 8 cm, a nem párhuzamos oldalak 13 cm hosszúak. Mekkora a forgás közben keletkezett csonka kúp térfogata?

2512. Egyenes csonka kúp térfogata 347,13 m^3, az alapkör kerülete 50 m, a fedőlap kerülete 30 m. Mekkora szöget zárnak be a csonka kúp alkotói az alaplappal?

2513. Egyenes csonka kúp térfogata 2021,6 dm^3, az alapkör sugara 5,7 dm, a magassága 32,5 dm. Mekkora a fedőlap sugara?

2514. Egyenes csonka kúp térfogata 41,388 m^2, magassága 1,817 m, alapkörének sugara 2,698 m. Számítsuk ki a fedőlap sugarát.

2515. Számítsuk ki egy egyenes csonka kúp alap- és fedőlapsugarának arányát, ha azt akarjuk, hogy térfogata félakkora legyen, mint az alapkörre emelt ugyanolyan magas hengeré.

2516. Tutajt állítottak össze 36 db fenyőfatörzsből, amelyek mindegyike 12 m hosszú; vastagabb végüknél 28 cm, a vékonyabb végüknél 20 cm az átmérőjük. A fenyőfa sűrűsége 0,6. Mekkora terhet bír el a tutaj?

2517. Vasból öntött egyenes csonka kúp alaplapjának sugara 1,06 m, fedőlapjának sugara 0,65 m, alkotói az alappal 60°23′-nyi szöget zárnak be. Mekkora a test súlya? (Sűrűség: 7,2.)

2518. Egyenes csonka kúp alakú edénybe 1,82 sűrűségű folyadékot öntünk, mennyi ennek a tömege, ha az edény magassága 0,2 m, az alapkör sugara 0,2 m, a fedőlap sugara 0,15 m?

2519. Egyenes csonka kúp fedőlapjának területe 3 m^2, az alaplapé négyszer akkora, és az alaplap középpontjának távolsága a fedőlap kerületének tetszőleges pontjától akkora, mint a fedőlap átmérője. Mekkora a térfogata?

2520. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 17 dm, a fedőlap sugara 13 dm, az alkotók az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2521. Egy parkban öt egyenlő, csonka kúp alakú virágágyat készítenek. Az alapkör sugara 5,2 m, a fedőlap sugara 4,8 m, a magassága 0,4 m. Hány m^3 földet kell hozatni?

2522. Egy 3 m magasságú egyenes csonka kúp fedőlapjának átmérője és alkotója egyenlő. Tengelymetszetének kerülete 15 m. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2523. Egyenes csonka kúp alakú bádogvödör alapjának átmérője 26 cm, felső körének átmérője 42 cm, a magassága 38 cm. Mennyi víz fér bele? Mennyi bádog kell az elkészítéséhez? Összeillesztésre és hulladékra 6%-ot számítunk.

2524. Egyenes csonka kúp palástja 128,64 dm^2, az alkotók az alaplappal 59,5°-os szöget zárnak be. Az alap- és fedőlap sugarainak különbsége 33 cm. Mekkora a térfogata?

2525. Egyenes csonka kúp felszíne 527,5 dm^2, palástja 314,2 dm^2, és alkotója 10,3 dm. Mekkora a térfogata?

2526. Egyenes csonka kúp palástja 502,7 dm^2, magassága 6,3 dm, és alkotója 9,7 dm. Mekkora a térfogata?

2527. Csonka kúp palástja kiterítve olyan körgyűrűcikk, amelynek sugarai 6 és 2,5 cm hosszúak, középponti szöge 120°. Mekkora a csonka kúp felszíne és térfogata?

2528. Csonka kúp palástja kiterítve olyan körgyűrűcikk, melynek területe 202 cm^2, a középponti szöge 120,6°, és a külső sugár a belsőnek kétszerese. Mekkora a csonka kúp térfogata?

2529. Egyenes körkúp felszíne F, palástjának és alaplapjának aránya 4:1. A kúpot elmetsszük az alaplappal párhuzamosan úgy, hogy a kimetszett kör az alap negyedrésze. Mekkora a csonka kúp térfogata?

2530. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 8,6 m, a fedőlap sugara 5,8 m, magassága 7 m. Messük a csonka kúpot az alaplaptól 2 m távolságra az alaplappal párhuzamos síkkal. Mekkora a két rész térfogata?

2531. Egyenes csonka kúp alaplapjának sugara 8 dm, a fedőlapé 6 dm, magassága 14 dm. A fedőlaptól milyen távolságban kell a csonka kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal metszeni, hogy a két rész térfogata egyenlő legyen, és mekkora a síkmetszet sugara?

2532. Egyenes körkúp magassága 10 m, alaplapjának sugara 5 m. Az alaplaptól milyen távolságban kell a kúpot az alaplappal párhuzamosan metszeni, hogy a kapott csonka kúp térfogata 20 m^3 legyen?

2533. Egyenes csonka kúp alapkörének sugara 5 dm, a fedőlap sugara 3 dm, magassága 4 dm, fajsúlya 0,6. Mennyire merül el a vízben, ha az 5 dm sugarú lapja van alul?

2534. Egyenes csonka kúp magassága 3 m, az alapkör sugara 2 m, a fedőlap sugara 1 m. Osszuk fel a testet az alaplappal párhuzamos síkokkal olyan három részre, melyek térfogatának az aránya 2:3:7. Mekkora lesz a kimetszett körök sugara?

2535. Adott egy egyenes csonka kúp m magassága, a alkotója és V térfogata. Mekkora az alap- és a fedőlap sugara?

2536. Adott egy egyenes csonka kúp m magassága, a alkotója és F felszíne. Mekkora az alap- és fedőlap sugara?

2537. Adott egy egyenes csonka kúp m magassága, V térfogata és t a tengelymetszet területe. Mekkora az alap- és fedőlap sugara?

2538. Adott egy egyenes csonka kúp m magassága, F felszíne és V térfogata. Mekkora az alap- és a fedőlap sugara?

2539. Egyenes csonka kúp magassága m, alaplapjának sugara R, fedőlapjának sugara r, anyagának sűrűsége γ. Függőlegesen úszik egy γ' sűrűségű folyadékban. Számítsuk ki az elmerülő rész m' magasságát és annak a körnek a ϱ sugarát, amelyben a nyugvó folyadék felszíne metszi a palástot.

2540. Adott a kúp csúcsa, alapkörének középpontja a két képével, az alapkör sugara, továbbá egy egyenes a képeivel. Szerkesszük meg a döféspontok képeit.

2541. Adott a kúp csúcsa, alapkörének középpontja a képeivel, az alapkör sugara, továbbá egy sík két egyenesének képeivel. Ábrázoljuk a metszésvonalat.

2542. Ábrázoljuk a kúpot, ha adott a csúcspont, a tengely és egy alkotó a képeivel.

GÖMB ÉS RÉSZEI

2543. Keressük adott ponthoz egy adott gömbfelület olyan pontjait, melyekhez legközelebb vagy legtávolabb van.

2544. Bizonyítsuk be, hogy a gömb érintősíkja merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra.

2545. Milyen kölcsönös helyzete lehet egy egyenesnek és egy gömbnek?

2546. Bizonyítsuk be, hogy a gömböt érintő egyenes merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra.

2547. Bizonyítsuk be, hogy a gömb egy pontjában a gömböt érintő egyenesek egy síkban vannak.

2548. Bizonyítsuk be, hogy a gömb síkmetszete kör.

2549. Bizonyítsuk be, hogy a gömb középpontját egy körmetszetének középpontjával összekötő szakasz merőleges a kör síkjára.

2550. Bocsássunk a gömb középpontjából egy körmetszetének síkjára merőleges egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ez az egyenes átmegy a kör középpontján.

2551. Bizonyítsuk be, hogy a gömb két körmetszete közül annak a sugara kisebb, amelyiknek síkja távolabb van a gömb középpontjától.

2552. Milyen összefüggés van a gömb R sugara, egy körmetszetének r sugara és a kör síkjának a gömb középpontjától való d távolsága között?

2553. Bizonyítsuk be, hogy az olyan gömbi körök közt, melyek síkjai egy a gömb belsejében megadott pontra illeszkednek, az a legkisebb sugarú, melynek ez a pont középpontja.

2554. Milyen kölcsönös helyzete lehet két gömbnek?

2555. Bizonyítsuk be, hogy ha két gömb érintkezik, akkor az érintkezési pont és a két gömb középpontjai egy egyenesen vannak.

2556. Bizonyítsuk be, hogy két egymást metsző gömb áthatása (a felületek közös pontjainak összessége) mindig kör.

2557. Bizonyítsuk be, hogy ha két különböző síkú kör két pontban metszi egymást, akkor van egy és csak egy olyan gömb, amelynek mindkét kör síkmetszete.

2558. Bizonyítsuk be, hogy ha két párhuzamos síkú kör középpontjait összekötő egyenes merőleges a síkokra, akkor van egy és csak egy olyan gömb, amelynek mindkét kör síkmetszete.

2559. Bizonyítsuk be, hogy ha két különböző síkú kör érintkezik, akkor van egy és csak egy olyan gömb, amelynek mindkét kör síkmetszete. (Két kör érintkezik, ha egy közös pontjukban közös az érintőjük.)

2560. Legyenek a k_1, k_2, k_3 körök különböző síkokban, és páronként különböző pontban érintkezzenek. Bizonyítsuk be, hogy van egy és csak egy olyan gömb, melynek mindhárom kör síkmetszete.

2561. Adott egy kör és egy pont, amelyik nincs rajta a kör síkján. Bizonyítsuk be, hogy van egy és csak egy olyan gömb, melynek az adott kör síkmetszete, és az adott pont pontja.

2562. Bizonyítsuk be, hogy ha tetszőleges számú kör olyan, hogy bármely kettő különböző síkon van, és egymást két pontban metszi, akkor vagy mindannyinak két közös pontja van, vagy valamennyi ugyanannak a gömbfelületnek síkmetszete.

2563. Bizonyítsuk be, hogy az a felület, amely bármely három pontján átmenő kör minden pontját tartalmazza, sík vagy gömb.

2564. Bizonyítsuk be, hogy egy külső pontból egy adott gömbhöz húzott érintő egyenesek egy forgáskúp alkotói, és a ponttól az érintési pontig terjedő szakaszok egyenlők.

2565. Bizonyítsuk be, hogy egy gömbnek olyan érintő síkjai, melyek egy adott külső pontra illeszkednek, egy forgáskúpnak is érintő síkjai.

2566. Bizonyítsuk be, hogy egy a gömböt nem metsző egyenesre két olyan sík illeszthető, amelyik érinti a gömböt.

2567. Adott két gömb. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamos és egyirányú sugarak végpontjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át (vagy esetleg párhuzamosak, ha a két gömb egyenlő sugarú). Ezt a pontot nevezik a két gömb külső hasonlósági pontjának.

2568. Adott két gömb. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamos, de ellenkező irányú sugarak végpontjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át. Ezt a pontot nevezik a két gömb belső hasonlósági pontjának.

2569. Adott két gömb. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik hasonlósági pontjukból az egyikhez húzott érintő egyenes vagy sík a másikat is érinti.

2570. Bizonyítsuk be, hogy három különböző sugarú gömb páronként vett hasonlósági pontjai egy síkon vannak, továbbá a három külső egy egyenesen és minden külső két-két belsővel szintén egy-egy egyenesen helyezkednek el.

2571. Adott két gömb és egy mindkettőhöz képest külső pont. Van-e a két gömbnek az adott pontra illeszkedő közös érintő síkja?

2572. Legfeljebb hány közös érintő síkja lehet három gömbnek?

2573. Adott két gömb és egy mindkettőt érintő tetszőleges harmadik gömb. Bizonyítsuk be, hogy az érintési pontokat összekötő egyenes átmegy a két gömb valamelyik hasonlósági pontján.

2574. Legyen adott három különböző sugarú gömbfelület. Bizonyítsuk be, hogy ha egy negyedik gömb úgy változik, hogy mindhármat állandóan ugyanazon értelemben érinti (azaz minden egyes gömbre az érintkezés vagy mindig külső, vagy mindig belső), akkor az érintési pontokat páronként összekötő egyeneseknek egy-egy pontja állandó, és a három állandó pont egy egyenesbe esik.

2575. Adott négy, egymást kölcsönösen érintő gömb (bármelyik érinti a többi hármat), melyek középpontjai nincsenek egy síkon. Tekintsük az érintési pontokban vett közös érintő síkokat. Bizonyítsuk be, hogy e hat síknak van egy közös pontja.

2576. Keressük azt a gömböt, amelynek egyik körmetszete és ennek egy pontjához illeszkedő érintő síkja adott.

2577. Keressük azt a gömböt, amely két adott kitérő egyenest azok adott pontjában érint.

2578. Keressünk olyan gömböt, amely három adott ponthoz illeszkedik, és egy adott síkot érint.

2616. Adott két koncentrikus gömb. Vegyük fel a kisebbiknek egy érintő síkját, ez a nagyobbik gömböt egy körben metszi. Legyen ez a kör egy újabb gömb főköre. Bizonyítsuk be, hogy e gömb felszíne megegyezik a két koncentrikus gömb felszínének a különbségével.

2617. Három gömb sugarai egy derékszögű háromszög oldalai. Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb gömb felszíne egyenlő a másik két gömb felszínének az összegével.

2618. Egy gömböt a középpontjától 1,5 m távolságban egy síkkal metszünk. Mekkora a kisebbik gömbsüveg felszíne, ha a gömbi kör sugara 3,6 m?

2619. Mekkora a 2 m sugarú gömbnek a középponttól 25 m távolságban levő pontszerű fényforrásból megvilágított felülete?

2620. Mekkora a 11,6 m sugarú gömbnek a felületétől 28,3 m távolságban levő pontszerű fényforrás által megvilágított felülete?

2621. Milyen távolságra van a pontszerű fényforrás a 11,8 m sugarú gömb középpontjától, ha a gömbfelület megvilágított része 540,6 m^2?

2622. Adott két gömb, sugaruk 4,3 dm és 12,7 dm, középpontjuk távolsága 21,6 dm. A gömbök közt levő pontszerű fényforrásból közös érintőkúp húzható a gömbhöz. Milyen távolságra van a pontszerű fényforrás a kisebbik gömb középpontjától, és mekkora a két felület megvilágított része?

2623. A Föld felszínének hány %-át láthatják az űrhajósok 300 km magasságból? (A Föld sugarát vegyük 6370 km-nek.)

2624. A Föld felszínének hány %-a látható a Holdról? (A Föld sugara 6370 km, a Hold távolsága a Föld középpontjától ennek 60-szorosa.)

2625. Hány m^2 selyem szükséges egy ejtőernyőhöz, ha az olyan gömbsüvegnek tekinthető, melynek magassága 3,4 m, és alapkörének sugara 6 m?

2626. Mekkora az északi hideg földgömbsüveg felszíne, ha a sarkkör földrajzi szélessége 66°32′54″, és a Föld sugara 6370 km?

2627. Egy gömbsüveg felszíne 1024,8 dm^2, alapkörének területe 801,7 dm^2. Mekkora a gömbsüveg magassága és a gömb sugara?

2628. Egy kiállítási csarnok gömbsüveg alakú tetejének befedésére 40 m^2 bádog szükséges. Mekkora sugarú gömbhöz tartozik a gömbsüveg, ha a tető 3,5 m sugarú körfalon nyugszik? (Az összeillesztéseknél duplán fedett rész az egésznek 3%-a.)

2629. Számítsuk ki az R sugarú gömb olyan körének sugarát, amelynek területe egyenlő az általa elválasztott két gömbsüveg felszínének a különbségével. Mekkora a kisebbik gömbsüveg magassága?

2630. Adott R sugarú gömbön keressünk olyan süveget, amelynek felszíne adott α arányban áll alapköre területével. Határozzuk meg a gömbsüveg magasságát.

2631. Az R sugarú gömbön kívül adott egyeneshez illeszkedő síkokkal osszuk fel a gömb felszínét n egyenlő részre. Határozzuk meg az egyes síkoknak a gömb középpontjától való távolságát.

2632. Egy változó sugarú gömb mindig átmegy egy rögzített gömb középpontján. Bizonyítsuk be, hogy a rögzített gömb a változó gömbről állandó felszínű gömbsüveget metsz ki.

2633. Számítsuk ki a gömböv felszínét, ha a gömb sugara 65 cm, az alapkörök sugara 33 cm és 25 cm.

2634. Egy gömböv alapköreinek sugara 12 cm és 9 cm, magassága 21 cm. Mekkora a felszíne?

2635. Mekkora területűek a Föld övei, melyeket a térítőkörök és a sarki körök létesítenek? (A Föld sugara 6370 km, a térítőkörök távolsága az Egyenlítőtől és a sarki körök távolsága a sarktól 23°27′20″.)

2636. Milyen magas az a gömböv, amelynek felszíne a gömb felszínének negyedrésze?

2637. Bizonyítsuk be, hogy két adott koncentrikus gömb a középpontján áthaladó változó sugarú gömbből olyan övet metsz ki, amelynek felszíne független a változó gömb sugarától.

2638. Mekkora a gömb térfogata, ha a sugara

a) 1,2 mm; *b)* 0,03 m; *c)* 7,816 dm; *d)* 12,22 cm?

2639. Mekkora a gömb sugara, ha a térfogata

a) 533,6 m^3; *b)* 964,78 dm^3; *c)* 1536,77 cm^3?

2640. Mennyi a 12 cm külső sugarú és 1 cm falvastagságú üres golyó térfogata?

2641. Hány 5 cm sugarú gömb önthető 20 kg ólomból? (Az ólom sűrűsége 11,38.)

2642. Mekkora a 7,2 sűrűségű, 37,5 kg-os, 4 cm falvastagságú üres vasgolyó átmérője?

2643. Hányszorosra növekszik a gömb térfogata, ha a sugara kétszeresre, háromszorosra, n-szeresre növekszik?

2644. Mekkora a súlya a 12 cm átmérőjű tekegolyónak? (Sűrűség: 0,8).

2645. A hajdani 24 cm-es mozsárágyú lövedéke 23,6 cm átmérőjű tömör vasgolyó volt. Mekkora volt a lövedék tömege? (Sűrűség: 7,8.)

2646. Mekkora terhet bír emelni egy hidrogénnel töltött 12 m sugarú gömb alakú léghajó, ha a burkolat 1 m^2-e 0,29 kg tömegű? (1 m^3 levegő tömege 1,29 kg 1 m^3 hidrogéné 0,09 kg.)

2647. Egy üres vasgolyó (külső sugara R, sűrűsége 7,5) tiszta vízben teljesen elmerülve lebeg. Mekkora a belső sugara?

2648. Egy 16 cm külső sugarú 3 mm falvastagságú gömb félig merülve úszik a vízen. Milyen sűrűségű anyagból készítették?

2649. Mekkora a Szegedi Gázmű 20 000 m^3-es, gömb alakú gáztartályának átmérője? Milyen vastag acéllemezből készült, ha tudjuk, hogy a tömege 260 000 kg, sűrűsége 7,5
a vízen. Milyen sűrűségű anyagból készítették?

2650. Ha 1 dm^2 öntvény tömege 7,2 kg, számítsuk ki egy belőle készült 24 kg-os golyó átmérőjét. Ebből következtessünk egy 8 kg-oséra.

2651. Adott négy R sugarú gömb, melyek páronként érintik egymást. Egy ötödik gömb érinti mindegyiket belülről, egy hatodik mindegyiket kívülről. Határozzuk meg az ötödik és a hatodik gömb térfogatának arányát.

2652. Mekkora a gömb térfogata, ha a felszíne

a) 314,16 m^2; *c)* 10 dm^2;
b) 12,564 cm^2; *d)* 0,06 m^2?

2653. Mekkora a gömb felszíne, ha térfogata

a) 64 cm^3; *b)* 1229 m^3; *c)* 128,2 dm^3; *d)* 0,08 m^3?

2654. Mekkora egy 0,6 sűrűségű 4 kg-os fagolyó felszíne és térfogata?

2655. A vasbádog négyzetdeciméterének tömege 1/12 kg. Mekkorának kell lennie a belőle készült üres gömbnek, hogy a vízben ússzék?

2656. Hány csepp köd képződik 1 cm^3 vízből, ha 1 csepp köd átmérője $3{,}10^{-3}$ mm?

2657. A Hold sugara 3/11 része a Föld sugarának. Hányadrésze a Hold felszíne és térfogata a Földének? (A Föld sugara 6370 km.)

2658. Egy gömb felszíne 40 cm^2. Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelynek térfogata kétszer akkora, mint az első gömbé?

2659. Egy gömb térfogata 30 cm^3. Mekkora a térfogata annak a gömbnek, amelynek felszíne az első gömb felszínének a fele?

2660. Ha egy gömb sugarát 2 dm-rel nagyobbítjuk, akkor a térfogata 1132,5 dm^3-rel növekszik. Mekkora a gömb sugara?

2661. Két gömb felszínének összege 5672,8 dm^2, a sugaruk különbsége 0,9 dm. Mekkora a két gömb sugara?

2662. Két gömb térfogatának különbsége 1683,72 dm^3, a két sugár különbsége 1,3 dm. Mekkora a két gömb sugara?

2663. Egy gömböt a középpontjától egy oldalon két, egymástól 3 cm távolságban levő párhuzamos síkkal elmetszünk. A metszetek sugarai 9 cm és 12 cm. Mekkora a gömb térfogata?

2664. Tekintsük a Napot és a Holdat pontos gömbnek és a Nap térfogatát a Hold-térfogat $63 \cdot 10^6$-szorosának. Számítsuk ki a két égitest középpontja Földtől mért távolságainak arányát, amikor látszólagos átmérőjük megegyező.

2665. Mekkora a gömbszelet térfogata, ha

a) a gömb sugara 12 cm, a gömbszelet magassága 9 cm;
b) a gömb sugara 4,19 dm, a gömbszelet magassága 7,2 dm;
c) a gömb sugara 6,9 m, a gömbszelet magassága 3,7 m?

2666. Mekkora a gömb sugara, ha

a) egy gömbszeletének térfogata 128 cm^3, magassága 32 cm;
b) egy gömbszeletének térfogata 1532,6 m^3, magassága 42 m;
c) egy gömbszeletének térfogata 359,72 dm^3, magassága 28,9 dm?

2667. Mekkora a gömbszelet térfogata, ha

a) alapkörének sugara 5 cm, magassága 2,3 cm;
b) alapkörének sugara 13,6 dm, magassága 5 dm;
c) alapkörének sugara 0,93 m, magassága 0,2 m?

2668. Egy 23,5 cm sugarú gömbből (a középponttól 17,8 cm távolságban) levágunk egy gömbszeletet. Mekkora a felszíne és a térfogata?

2669. Egy 128 dm sugarú gömbből levágott szelet alapkörének sugara 81,7 dm. Mekkora a levágott rész felszíne és térfogata?

2670. Egy 21 cm sugarú gömböt síkkal úgy vágunk két részre, hogy a gömbsüvegek felszínének aránya 2:5. Mekkora a két rész térfogata?

2671. Egy gömb térfogata 14,13 m^3, egyik síkmetszetének területe 4,53 m^2. Mekkora a metszéssel keletkezett kisebbik gömbszelet térfogata?

2672. Egy gömbszelet alapkörének átmérője megegyezik a magassággal. Mekkora a gömb sugara, ha a gömbszelet térfogata 200 cm^3?

2673. Egy gömbszelet térfogata 15 756,28 m^3, alapkörének sugara kétszerakkora, mint a magassága. Mekkora a gömb sugara és a gömbszelet magassága?

2674. Mekkora a 7,8 sűrűségű 4,5 cm sugarú vasgömb higany alá merülő térfogatrésze, ha a higany sűrűsége 13,6?

2675. Fából készült 10 cm átmérőjű golyó 4 fokos desztillált vízben annyira merül alá, hogy a kiálló rész magassága 2 cm. Mennyi a golyó anyagának a sűrűsége?

2676. Mekkora a gömbszelet térfogata, ha a hozzá tartozó gömbcikk tengelymetszetének a középponti szöge 141,05°, és a gömb sugara 4 cm?

2677. Egy gömb úszik a vízben. Átmérőjének 2/3 része merül el a vízben. Mekkora a sűrűsége?

2678. Egy 5 cm sugarú gömb úszik a vízen. A vízből kiálló részének a magassága 1 cm. Mekkora a sűrűsége?

2679. Egy gömb úszik a vízen. A vízből kiálló rész alapkörének sugara 11,7 cm, magassága 6,8 cm. Mekkora a sűrűsége?

2680. Üres vasgömb tömege 3,012 kg. 9,3 cm-nyire merül a vízbe. Mekkora a gömb falának a vastagsága, ha a vas sűrűsége 7,5?

2681. R sugarú gömb a vízen $m < 2R$ mélységig merül el. Mekkora a sűrűsége?

2682. R sugarú gömb M magasságú gömbszelete úszik a vízben. Domborulata alul $m < M$ mélységig merül el. Mekkora a sűrűsége?

2683. R külső és r belső sugarú gömbhéj úszik a vízben. Nedves szeletének magassága m. Mekkora a sűrűsége?

2684. R külső és r belső sugarú félgömbhéj sűrűsége 7,5. Hajónak használva mekkora a teherbírása, ha m magasságnyira ki kell emelkednie a vízből?

2685. 16 cm átmérőjű tömör tölgyfa golyó vízben úszik úgy, hogy a gömbfelületből 307,2 cm^2 marad szárazon. Mekkora a tölgyfa sűrűsége?

2686. Egy kétszeresen domború üveglencse átmérője 8 cm, vastagsága a középen 7,3 mm, az üveglencsét bezáró két gömbszelet egybevágó. Mekkora a lencse súlya, ha az üveg sűrűsége 2,6?

2687. Egy kétszer domború lencse határfelületét két egymást metsző 9 cm sugarú gömb egymásra illesztett gömbsüvegei alkotják. A gömbök középpontja egymás felületén van. Számítsuk ki a lencse felszínét és térfogatát.

2688. Egy 6 cm sugarú félgömböt az alapjával párhuzamosan, tőle 3 cm távolságra kettévágunk. Mekkora a keletkezett két rész felszíne és térfogata?

2689. Mekkora a gömbszelet térfogata, ha a süvegének felszíne 180 dm^2, és alapsíkja a gömb középpontjától 3 dm távolságra van?

2690. Mekkora a gömb sugara, ha egy szeletének térfogata 312,6 cm^3, és a hozzá tartozó gömbsüveg felszíne háromszor nagyobb az alapkör területénél?

2691. Gömbsüveg felszíne 113,6 cm^2, a hozzá tartozó gömbcikk térfogata a gömb térfogatának a 100-ad része. Mekkora a gömb sugara?

2692. Mekkora a gömbcikk térfogata:

a) ha a gömb sugara 3 cm, tengelymetszetének a csúcsnál levő szöge 60°;

b) ha a gömb sugara 4,6 dm, tengelymetszetének a csúcsnál levő szöge 52,6°;

c) ha a gömb sugara 2,342 m, tengelymetszetének a csúcsnál levő szöge 43°16′?

2693. Egy gömbcikk térfogata kétszerakkora, mint a hozzá tartozó gömbszeleté. Mekkora a gömbszelet magassága, ha a gömb sugara 30 cm?

2694. Egy 20 cm sugarú gömböt középpontjának ugyanazon az oldalán két párhuzamos síkkal metszünk, amelyek a középponttól 9 cm és 15 cm távolságra vannak. Mekkora a kimetszett gömbréteg felszíne és térfogata?

2695. Mekkora a gömbréteg térfogata, ha

a) alapsugarak: 56 cm és 25 cm, magasság 23 cm;

b) alapsugarak: 42,5 cm és 31,3 cm, magasság 18,2 cm?

2696. Mekkora a gömbréteg térfogata, ha

a) a gömb sugara: 0,9 m, a réteg magassága 0,2 m, nagyobbik alapkörének a középponttól való távolsága 0,5 m;

b) a gömb sugara: 25 cm, a réteg alapsugarai 24 cm és 15 cm, és az alapsíkok a középpont ugyanazon oldalán vannak?

2697. Egy virágváza, melyet gömböv határol, a szájánál 1,8 dm, az aljánál 1,5 dm átmérőjű, a magassága 2,8 dm. Mekkora a térfogata?

2698. Egy 16 cm sugarú gömb 6 cm magas gömbrétegének térfogata 2804 cm³. Mekkora a gömbréteg alapkörének a sugara?

2699. Egy gömb sugara 30 cm, egy rétegének térfogata 8591 cm³, a hozzá tartozó gömböv felszíne 1210 cm². Mekkora a gömbréteg magassága és alapköreinek a sugara?

2700. Egy 5 cm sugarú, 45°-os középponti szögű körcikket az egyik sugara körül megforgatunk. Mekkora lesz a leírt gömbcikk térfogata?

2701. Mekkora a gömbcikk térfogata, ha

a) a gömb sugara 21 cm, tengelymetszetének középponti szöge 68°;

b) a gömb sugara 1,26 m, tengelymetszetének középponti szöge 43,5°?

2702. Egy gömbcikk tengelymetszetének középponti szöge 123,78°, palástja 16,8 cm². Mekkora a térfogata?

2703. Mekkora a gömbcikk felszíne és térfogata, ha

a) a gömb sugara 19 cm, a hozzá tartozó szelet magassága 6 cm;

b) a gömb sugara 33,6 dm, a hozzá tartozó szelet magassága 11,6 dm?

2704. Mekkora a gömbcikk felszíne és térfogata, ha

a) a gömb sugara 16 cm, szelete alapkörének sugara 9 cm;

b) a gömb sugara 45,7 dm, szelete alapkörének sugara 7,6 dm?

2705. Egy gömbcikk térfogata 1613,6 cm³, tengelymetszetének középponti szöge 57,3°. Mekkora a gömb sugara?

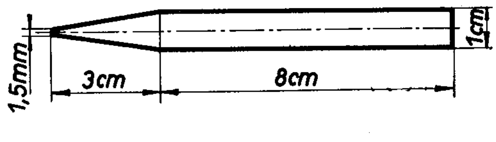
2706. Egy boltozat két koncentrikus gömbhöz tartozó gömbcikk különbsége. Mekkora a boltozat térfogata, ha a belső gömbsüveg magassága 1 m, alapkörének átmérője 6 m, és a boltozat vastagsága 0,4 m?

2707. Adott R sugarú gömböt úgy vágjunk ketté egy síkkal, hogy egyik szeletének térfogata és a süveghez tartozó gömbcikk térfogatának aránya adott $\alpha < 1$ legyen. Határozzuk meg a szelet magasságát.

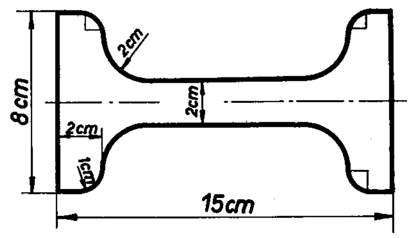
2708. Ábrázoljunk gömböt, és szerkesszük meg a gömbfelület egy pontjának a másik képét, ha az egyik kép adott.
2709. Ábrázoljunk gömböt, és adjunk meg egy egyenest a képeivel. Szerkesszük meg a döféspontok képeit.
2710. Ábrázoljunk gömböt és a gömbfelület egy pontját. Szerkesszük meg az adott pontban a gömb érintő síkjának két egyenesét a képeivel.
2711. Ábrázoljuk adott gömbnek adott egyenesre illeszkedő érintő síkjait.
2712. Ábrázoljunk adott csúcspontú forgáskúpot, amelyik adott gömböt érint. Ábrázoljuk az érintő kört is.
2713. Ábrázoljuk adott gömb három adott pontján átmenő síkmetszetét.
2714. Ábrázoljunk gömböt és a gömb középpontján átmenő egyenest. Szerkesszük meg az egyenesen annak a két pontnak a képeit, amelyeknek a gömb középpontjától való távolsága a gömb sugarának a felével egyenlő. Vegyük fel e két ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges síkokat. Ábrázoljuk a gömbnek e két sík közé eső rétegét.

VEGYES FELADATOK

2715. Egy acéllyukasztó hengeres része csonka kúpban végződik. Tengelymetszetét a 2715. ábra mutatja. A hengeres rész átmérője 1 cm, hossza 8 cm, a csonka kúp magassága 3 cm, kisebbik alapkörének átmérője 1,5 mm. Mekkora a tömege? (Sűrűség: 7,85.)
2716. Egy víztartály alakja henger, és mindkét végét egy-egy félgömb zárja le. A henger átmérője 40 cm, hossza 1,5 m. Mekkora a tartály térfogata?
2717. Egy üveg próbacső alul 1,6 cm átmérőjű félgömbben végződik. A hengeres cső hossza 16 cm. Mekkora a térfogata?



2715



2720

2718. Anyacsavar szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alakú, oldallapjai négyzetek, hengeres (csavarmenetes) furatának közepes átmérője egyenlő az élekkel. Mekkora a tömege 1000 db-nak, ha az élhossza 2 cm, és a sűrűség 7,8?
2719. Félgömbökkel végződő, henger alakú kazán összes felszíne a^2, tengelymetszetének kerülete b. Számítsuk ki hengeres része magasságát és sugarát.
2720. Mekkora a tömege a felrajzolt keresztmetszetű (2720. ábra) I vas 1 méterének? (Sűrűsége: 7,8. Az ábrán a méretek cm-ben vannak megadva.)

2740. Háromoldalú gúla alapélei 16 cm, 30 cm és 34 cm, a magassága 36 cm. Mekkora a beírható és a köréje írható kúp térfogata?

2741. Szabályos tizenkétszög alapú gúla alapélei 12 cm, magassága 22 cm. Mekkora a beírható és a köréje írható kúp térfogata?

2742. Szabályos hatszög alapú egyenes gúlát kúppá csiszolunk. A gúla térfogatának hányadrésze lesz a hulladék?

2743. Egy n magasságú csonka kúpból, ha az alap- és a fedőkör sugara R és r, vágjuk ki a lehető legnagyobb, négyzet alapú csonka gúlát. Mekkora lesz a csonka gúla térfogata?

2744. Egyenes körkúp köré háromoldalú gúlát írunk, amelynek alaplapja egyenlő szárú háromszög, ennek az alapon fekvő szöge 58°, a gúla térfogata 671,6 m^3. Mekkora a kúp térfogata?

2745. Egyenlő oldalú kúp alapkörének sugara 3 cm; mennyi a beírható négyzet alapú gúla felszíne és térfogata?

2746. Egy 7 cm sugarú kör alapú, 6 cm magasságú egyenes kúp köré szabályos háromszög alapú gúlát írunk. Mekkora az oldallapok területe?

2747. Egyenes körkúp alkotója l, az alkotók az alaplappal α szöget zárnak be. Írjunk a kúpba szabályos n-oldalú sokszög alapú egyenes hasábot, melynek minden éle egyenlő. Határozzuk meg a hasáb felszínét.

2748. Milyen magas az az r sugarú egyenes körhenger, amelybe írt kúp palástja megegyezik a henger palástjával?

2749. Egyenes körhenger köré gömböt írunk. A henger magassága $2^2/_3$-szor akkora, mint az alaplap sugara. Határozzuk meg az alaplap- és fedőlap közé eső gömbréteg és az alapkör síkja által levágott gömbszelet térfogatának arányát.

2750. Egy 30 cm sugarú golyónak olyan henger alakú fúrása van, amelynek tengelye átmegy a golyó középpontján, és alapsugara 10 cm. Mekkora a test térfogata?

2751. Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írt egyenes henger palástjának felszíne 37,68 dm^2, a henger két alapköre között fekvő gömböv felszíne 62,8 dm^2?

2752. Egy R sugarú gömbbe hengert írunk, melyben a palást területe k-szorosa az alaplap területének. Határozzuk meg a henger térfogatát.

2753. Egy egyenlő oldalú henger felszíne $^3/_5$ része egy gömb felszínének. Hányadrésze a térfogata?

2754. Az egységsugarú gömbbe írt henger palástja félakkora területű, mint a gömb legnagyobb köre. Mekkora a henger magassága?

2755. Egy R sugarú gömbnek olyan henger alakú fúrása van, amelynek tengelye átmegy a gömb középpontján, és alaplapjának átmérője R. Mekkora a test térfogata?

2756. Egy gömb térfogata 122,6 cm^3. A gömbbe egyenes körkúpot írunk, melynek tengelymetszetében a csúcsnál levő szög 56,7°. Mekkora a kúp térfogata?

2757. Közös alaplapon áll egy félgömb és egy egyenes körkúp. A kúp magassága a félgömb sugarának a kétszerese. Milyen arányban osztja a gömb a kúp palástját?

2758. Egy gömb felszíne 1000 cm^2; mekkora a beírt 45°-os nyílásszögű egyenes körkúp térfogata?

2759. Egy r alapsugarú egyenes körkúpba írt gömb felszíne kétharmada a kúp palástjának. Mekkora a gömb sugara?

2760. Határozzuk meg a közös alaplapon álló félgömb és az egyenes kúp palástja területének arányát, ha a kúp magassága akkora, mint az alapkör átmérője?

2761. Számítsuk ki a 3,69 dm alapsugarú és 8 dm magasságú egyenes körkúpba írt gömb felszínét.

2762. Határozzuk meg a közös alaplapon álló félgömb és egyenes kúp metszésvonalának sugarát, ha a kúp magassága és a gömb átmérője $2r$.

2763. Egyenes körkúp alapsugara 2 m, az oldalél az alaplappal $54°16'$-nyi szöget zár be. Számítsuk ki a körülírt és a beírt gömb sugarát.

2764. Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írható egy 12 cm alapsugarú, 32 cm alkotójú egyenes körkúp?

2765. Mekkora az egyenlő oldalú kúpba írt gömb térfogata, ha a kúp magassága 12 cm?

2766. Egy R sugarú gömbbe egyenes körkúpot írunk, melyben a palást területe k-szorosa az alaplap területének. Határozzuk meg a kúp térfogatát.

2767. Egyenlő oldalú kúp alapköre ugyanakkora, mint egy gömb főköre. Határozzuk meg a felszínek és a térfogatok arányát.

2768. Egyenlő oldalú kúp és egy gömb felszíne megegyezik. Határozzuk meg a térfogatok arányát.

2769. Határozzuk meg egy egyenlő oldalú kúp és a beírt gömb felszínének és térfogatának az arányát.

2770. Írjunk egy gömb köré és a gömbbe egyenlő oldalú kúpot. Határozzuk meg a három test felszínének és térfogatának arányát.

2771. Két, egymást érintő gömb sugara 5 cm és 8 cm. Vegyünk egy kúpot, amelyik mindkét gömböt érinti. Mekkora a kúp palástjának az a része, amelyik a két érintési kör között van?

2772. Írjunk egy 10 cm sugarú gömb köré egyenes körkúpot, amelynek alapköre 20 cm sugarú. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

2773. Egy 12 cm sugarú gömb köré írjunk egyenes körkúpot, amelynek magassága 72 cm. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

2774. Egy R sugarú gömbbe írjunk olyan egyenes körkúpot, hogy a palástja egyenlő területű legyen az alapköréhez tartozó gömbsüveggel. Határozzuk meg a gömbsüveg magasságát.

2775. Adott R sugarú gömb köré írjunk olyan egyenes körkúpot, hogy annak teljes felszíne és a gömb felszínének aránya adott k legyen. Határozzuk meg a kúp alapkörének a sugarát.

2776. Adott R sugarú gömb köré írjunk olyan egyenes körkúpot, hogy térfogatának és a gömb térfogatának aránya adott k legyen. Határozzuk meg a kúp alapkörének a sugarát.

2777. Egyenes körkúp alapköre fölé félgömböt emelünk. Mekkora a kúp nyílásszöge, ha a kúp felszínének és a félgömb felszínének aránya 18:5?

2778. Egyenes körkúpba gömböt írunk. Határozzuk meg a kúp nyílásszögét, ha a gömb felszínének és a kúp alapterületének az aránya 4:3.

2779. Határozzuk meg a gömb és a köréje írható egyenes körkúp térfogatának az arányát, ha a kúp felszíne n-szerese a gömb felszínének.

2780. α nyílásszögű forgáskúpba R sugarú gömböt írunk. Határozzuk meg a gömbbel és a kúppalásttal határolt rész térfogatát.

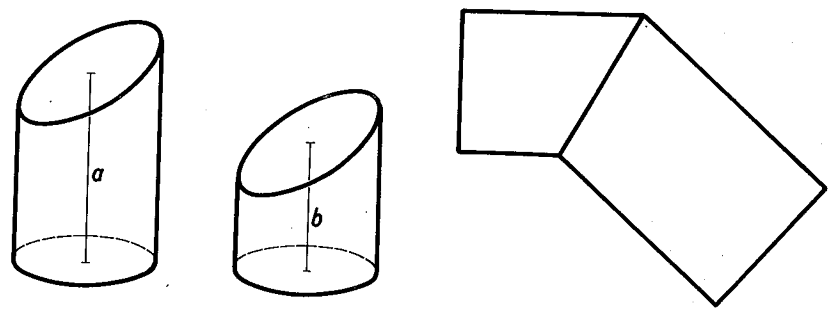
2781. Egy gömbbe két egybevágó egyenes körkúpot írunk, melyeknek tengelye közös, de a csúcsok az átmérő különböző végpontjaiba esnek. Határozzuk meg a két kúp közös része és a gömb térfogatának arányát, ha a kúp magasságának és a gömb sugarának aránya k.

2782. Adott két érintkező R és r sugarú gömb, melyek köré kúpot írunk. Határozzuk meg a csonka kúp felszínét és térfogatát, melynek alapkörei a kúp és a gömbök érintkező körei.

2783. Egyenes körkúpba két érintkező gömböt írhatunk úgy, hogy az egyik gömb térfogata nyolcszorosa a másiknak. A kisebbik gömb sugara r. Határozzuk meg a kúp felszínét és térfogatát.

2784. Egyenes körkúp palástjának területe háromszorosa az alapterületének. A kúpba r sugarú gömb írható. Számítsuk ki a kúp magasságát.

2785. Vegyünk két r sugarú egyenes körhengert, és mindkettőt az egyik végénél messük el egy a tengellyel $\alpha < 90°$-os szöget bezáró síkkal. Illesszük össze a két csonka hengert e metszetüknél úgy, hogy könyökcsövet kapjunk. Mekkora a könyökcső térfogata, ha az egyes darabok tengelyeinek hossza a és b? (2785. ábra.)



2785

2786. Egy gömbrétegbe csonka kúpot írunk, melynek térfogata 302,6 m³, alkotói az alappal 53,1°-nyi szöget zárnak be, magassága 4,2 m. Mekkora a réteg térfogata?

2787. Egy r sugarú félgömböt az alaplappal párhuzamosan metszünk úgy, hogy az öv és a süveg felszínének aránya 2:3; mekkora annak az egyenlő oldalú hengernek a térfogata, melynek felszíne akkora, mint a süvegé?

2788. Egy m magasságú, r_1 és r_2 alapsugarú gömbrétegből távolítsuk el a beírt csonka kúpot. Mekkora lesz a megmaradt test térfogata?

2789. Adott R sugarú gömbről oly szeletet vágjunk le, hogy a szeletbe írt kúp térfogatának és a szelet térfogatának aránya adott k legyen. Határozzuk meg a szelet magasságát.

2790. Adott R sugarú gömböt úgy messünk egy síkkal, hogy az általa lemetszett gömbsüveg felszínének és azon egyenes körkúppalást területének aránya egy adott k legyen, amelynek alaplapja a gömbszelet alaplapja, és csúcsa a gömb középpontja. Határozzuk meg a gömbsüveg magasságát.

2791. Határozzuk meg az R sugarú gömb süvegének magasságát, amelynek felszíne kétszer akkora, mint a hozzá tartozó szeletbe írt kúppalásté.

2792. Egy R sugarú gömbbe 8 gömböt írunk, melyek mindegyike érinti a nagy gömböt és két szomszédos gömböt, és a nagy gömbön az érintési pontok egy főkörön vannak. A gömbbe írunk még egy gömböt, amely érinti mind a 8 gömböt és az eredetit is. Határozzuk meg az utolsó gömb sugarát.

2793. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderben bármely két szemközti él összege egyenlő, akkor a tetraéder csúcsa mint középpont köré lehet olyan gömböket felvenni, amelyek kölcsönösen érintik egymást.

2794. Legyen $ABCS$ olyan tetraéder, amelyben az SA, SB, SC élek páronként merőlegesek egymásra, továbbá $AB = BC = a$, és $BS = b$. Fejezzük ki a és b segítségével a tetraéderbe írható gömb sugarát.

2795. Hogyan aránylik egymáshoz annak a három gömbnek a sugara, amelyek közül az első egy kocka köré van írva, a második átmegy e kocka éleinek felezőpontjain, és a harmadik ebbe a kockába van beírva?

2796. Szabályos háromszög alapú egyenes hasáb köré gömböt írunk. A hasáb oldallapjának területe megegyezik az alaplap területével. Mekkora a gömb sugara, ha az alapéle a?

2797. A játékkocka úgy készül, hogy egy tömör kocka csúcsait legömbölyítik azzal a gömbbel, amelynek középpontja a kocka középpontja, és érinti a kocka éleit. Mekkora a játékkocka felszíne és térfogata, ha a élű kockából készült?

2798. Egy a alapélű, M magasságú szabályos n-szög alapú egyenes gúlába gömböt írunk. Határozzuk meg a gömb sugarát.

2799. Egy a alapélű, b oldalélű szabályos n oldalú gúlába gömböt írunk. Határozzuk meg a gömb sugarát.

2800. Számítsuk ki a gömb felszínét és térfogatát, ha sugara akkora, mint a $10\sqrt{75}$ cm^2 felszínű szabályos oktaéder egy éle.

2801. Egy R sugarú gömbbe 8 gömböt írunk, melyek mindegyike érint ezek közül hármat és az eredetit. Határozzuk meg ezen gömbök sugarát, ha középpontjaik egy kocka csúcspontjai.

2802. Egy gömbbe és köré kockát írunk. Az élük különbsége d. Mekkorák az élek és a gömb sugara?

2803. Egy r sugarú gömbbe és köré írjunk kockát. Mekkora a kockák térfogata közötti különbség?

2804. Egy r sugarú gömbbe és köré írjunk kockát. Mekkora a kockák felszíne közötti különbség?

2805. Egy gömbbe és köré kockát írunk. A két kocka térfogatának különbsége V. Mekkora a kockák éle és a gömb sugara?

2806. Egy gömbbe és köré kockát írunk, a két kocka felszínének különbsége F. Mekkora a kockák éle és a gömb sugara?

2807. Egy kocka köré írt és a beírt gömb sugarának különbsége d. Mekkora a kocka felszíne és térfogata?

2808. Egy félgömbbe írt kocka térfogata V. Mekkora a félgömb sugara?

2809. Egy félgömbbe írt kocka felszíne F. Mekkora a félgömb sugara?

2810. Egy félgömbbe írt kocka élhossza a. Mekkora a félgömb sugara?

2811. Egy r sugarú félgömbbe írunk kockát. Mekkora a kocka éle, felszíne és térfogata?

2812. Egy r sugarú gömbbe írjunk be téglatestet. A téglatest éleinek aránya legyen $1:2:3$. Mekkorák az élek?

2813. Egy r sugarú gömbbe írjunk be téglatestet. A téglatest oldallapjai területének aránya legyen $1:2:3$. Mekkorák az élek?

2814. Egy r sugarú gömbbe írjunk be négyzetes oszlopot. Az élek összege legyen s. Mekkorák az élek?

2815. Egy r sugarú gömbbe írjunk be téglatestet. Az élek összege legyen s. Mekkora a felszíne?

2816. Egy téglatest felszíne F, éleinek összege s. Mekkora a körülírt gömb sugara?

2817. Egy téglatest felszíne F, és körülírt gömbjének sugara r. Mekkora az élek összege?

2818. Egy téglatest felszíne F, körülírt gömbjének sugara r, és egyik éle a. Mekkora a másik két éle?

2819. Határozzuk meg egy gömbbe és köréje írt szabályos tetraéder térfogatának arányát.

2820. Egy gömbbe írt szabályos oktaéder térfogata V. Mekkora az ugyanebbe a gömbbe írt szabályos tetraéder térfogata?

2821. Egy r sugarú gömbbe beírunk egy kockát, ebbe egy gömböt és a gömbbe egy szabályos tetraédert. Mekkora a tetraéder felszíne és térfogata?

2822. Egy kocka éle a. A kocka köré gömböt írunk, a gömb köré szabályos tetraédert, a köré megint gömböt és végül a gömb köré szabályos oktaédert. Mekkora az oktaéder térfogata?

2823. Egy gömbbe szabályos tetraédert írunk, majd ebbe ismét gömböt. Határozzuk meg a két gömb felszínének az arányát.

2824. Tekintsük a kocka két átellenes csúcsát és az ezekbe a csúcsokba nem befutó élek felezőpontját. Ezek egy síkban vannak (lásd az 1848. feladatot), és a sík két részre osztja a kockát. Írjunk egy ilyen részbe gömböt (a kocka 3 lapját és a metszősíkot érintő gömböt). Határozzuk meg a gömb sugarát.

2825. Határozzuk meg a szabályos négyoldalú gúla alap- és oldallapjának hajlásszögét, ha a gúla köré írt gömb sugara háromszorosa a beírt gömb sugarának.

2826. Adott egy R sugarú gömb. Milyen magas az a szabályos négyoldalú gúla, amelynek csúcsa a gömb középpontjában van, alapcsúcsai pedig a gömbön, ha a felszíne $4t$?

2827. Mutassuk meg, hogy a henger, a kúp, a csonka kúp és a gömbréteg térfogatára egyaránt érvényes a következő képlet:

$$V = \frac{m}{6}(A+A'+4A''),$$

ahol m a test magassága, A és A' az alap- és a fedőlap területe, A'' pedig az alappal párhuzamos középmetszet területe.

2828. Bizonyítsuk be, hogy a gömbbe írt egyenlő oldalú henger felszíne mértani közepe a gömb és a beírt egyenlő oldalú kúp felszínének.

2829. Bizonyítsuk be, hogy a gömb köré írt egyenlő oldalú henger felszíne mértani közepe a gömb és a köré írt egyenlő oldalú kúp felszínének.

2830. Bizonyítsuk be, hogy a gömbbe írt egyenlő oldalú henger térfogata mértani közepe a gömb és a beírt egyenlő oldalú kúp térfogatának.

2831. Bizonyítsuk be, hogy a gömb köré írt egyenlő oldalú henger térfogata mértani közepe a gömb és a köré írt egyenlő oldalú kúp térfogatának.

2832. Bizonyítsuk be, hogy ha a hengerfelülettel burkolt gömböt a henger tengelyére merőleges két síkkal metsszük, akkor e síkok közé eső gömböv felszíne egyenlő e síkok határolta hengerpalástéval.

2833. A hengerfelülettel burkolt gömbhöz illesszünk a henger tengelyére merőleges S érintősíkot. Ez a hengert egy körben metszi. Tekintsük ezt a kört egy kúp alapkörének, és legyen a kúp csúcsa a gömb középpontjában. Bizonyítsuk be, hogy

a) ha a három testet egy az S-sel párhuzamos közös síkkal metsszük, akkor a hengerpalástból kimetszett kör területe egyenlő azon körök területének összegével, amelyekben a gömböt, illetve a kúpot metszette;

b) ha a három testet az S-sel párhuzamos két síkkal metsszük, az ezek lezárta hengerrész térfogata egyenlő a gömbből, illetve a kúpból kimetszett részek térfogatának összegével.

2834. Bizonyítsuk be, hogy egy gömb körül írt összes poliéder térfogatának és felszínének aránya ugyanaz.

2835. Bizonyítsuk be, hogy egy gömb körül írt összes henger, kúp és csonka kúp térfogatának és felszínének aránya ugyanaz.

2836. Bizonyítsuk be, hogy egy gömb körül írt minden olyan test térfogatának és felszínének aránya ugyanaz, amelyet körülírt henger- vagy kúppalástok és érintő síkok határolnak.

2837. Adott a koncentrikus körök egy sorozata. Rajzoljunk azokba egy közös átmérővel párhuzamos helyzetű, egyenlő hosszúságú húrokat. Bizonyítsuk be, hogy ha az ábrát a mondott átmérő körül forgatjuk, a húrokhoz tartozó kisebb körszeletek által leírt testek térfogatai egyenlők.

2838. Adott forgáskúpba beírunk két, egymást kívülről érintő gömböt. Igazoljuk, hogy a kúppalást és a két gömb bezárta térfogat fele annak a térfogatnak, amelyet a kúp és azon gömb határolnak, amelyet a kúp és az adott gömbök érintőkörei határoznak meg.

2839. *a)* Egy henger alakú pohárban, melynek alapsugara 4 cm, bizonyos magasságig víz van. Mennyivel fog ez emelkedni, ha egy 5 cm élű szabályos tetraédert teszünk bele, amelyik egészen alámerül?

b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is. Legyen a pohár alapsugara r és a szabályos tetraéder éle a.

c) Egy 2 dm átmérőjű, henger alakú edényben 8 dm magasságig víz van. Mennyire emelkedik a víz, ha az edénybe egy 1,5 dm átmérőjű gömböt merítünk?

2840. Egy csúcsával lefelé fordított egyenlő oldalú kúpban m magasságig víz van. Mennyivel emelkedik a víz felszíne, ha az edényben egy r sugarú gömb egészen elmerül?

2841. Egy 10 cm átmérőjű hengeres edényben 12 cm magasan áll a víz, egy beledobott golyó a víz felszínét 1 cm-rel emeli. Mekkora a golyó átmérője?

2842. Egy csúcsával lefelé fordított egyenlő oldalú üres kúpba beleteszünk egy 2 cm sugarú gömböt. Mennyi vizet kell a kúpba öntenünk, hogy a gömböt a víz befedje?

2843. Egy csúcsával lefelé fordított egyenlő oldalú kúpba egy r sugarú érintő gömböt teszünk, majd megtöltjük vízzel, hogy a gömböt éppen ellepje. Mekkora lesz a víz magassága, ha a gömböt kivesszük?

2844. Egy a oldalú szabályos háromszöget megforgatunk az egyik oldala körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2845. Egy 16 cm oldalú szabályos háromszöget forgatunk az egyik csúcsán átmenő és a szemközti oldallal párhuzamos egyenes körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2846. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 30 cm, szárai 25 cm-esek. Forgassuk először az alap körül, majd az egyik szára körül. Határozzuk meg az így keletkezett két forgástest felszínének és térfogatának arányát.

2847. Egy háromszög két oldala 62 cm és 74 cm, a közbezárt szög 46,7°. Forgassuk a háromszöget a 62 cm-es oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2848. Egy háromszög oldalai 34 cm, 42 cm, 61 cm. Forgassuk a háromszöget a leghosszabb oldal körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2849. Egy derékszögű háromszög befogói 2,31 és 5,2 dm. Forgassuk ezt a háromszöget az átfogója körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2850. Egy a alapú, b magasságú egyenlő szárú háromszöget forgatunk az alapja körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2851. Egy a, b, c oldalú háromszöget mindhárom oldala körül megforgatunk. Számítsuk ki a keletkezett forgástestek térfogatának arányát.

2852. Számítsuk ki a háromszög oldalait, ha ismerjük az egyes oldalak körüli forgásnál keletkezett forgástestek V_1, V_2, V_3 térfogatát.

2853. Forgassunk egy a oldalú négyzetet az átlója körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2854. Egy 10 cm oldalú szabályos hatszöget forgassunk két szemközti csúcsát összekötő egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2855. Egy a oldalú szabályos hatszöget egy oldala körül megforgatunk. Számítsuk ki az így keletkezett forgástest felszínét és térfogatát.

2856. Egy a oldalú szabályos hatszöget forgassunk két szemközti csúcsát összekötő egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2857. Egy a oldalú szabályos hatszöget forgassunk két szemközti oldalának felezőpontját összekötő egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2858. Egy a oldalú szabályos háromszög egyik oldalát egy a szakasszal meghosszabbítjuk, és erre a végpontjában merőlegest emelünk. Forgassuk a háromszöget az így kapott egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata?

2859. Kössük össze egy háromszög két oldalának a felezőpontját, majd forgassuk a háromszöget a harmadik oldala körül. Mi a háromszög két része által leírt forgástestek térfogatának az aránya?

2860. Egy rombusz oldalai 25 cm-esek, egyik átlója 40 cm. Forgassuk a rombuszt az egyik oldala körül. Mekkora lesz az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2861. Egy rombusz oldala és egyik átlója a. A másik átló egyik végpontjában húzzunk merőlegest erre az átlóra, és forgassuk e körül a rombuszt. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2862. Egy paralelogrammát egyszer a hosszabb, majd a rövidebb oldala körül forgatunk. Mekkora a keletkezett forgástestek térfogatának aránya?

2863. Egy deltoid oldalai 61 cm és 87 cm, forgassuk a 74 cm-es szimmetriatengelye körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2864. Félkörbe írt derékszögű háromszöget forgatunk az átmérő körül. Határozzuk meg a keletkezett forgástest felszínének, illetve térfogatának és a félkör által leírt gömb felszínének, illetve térfogatának arányát.

2865. Egy egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalai 20 cm és 40 cm, a szárak 26 cm hosszúak. Forgassuk a 40 cm-es oldal körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2866. Egy derékszögű trapéz párhuzamos oldalai 30 cm és 45 cm, a két derékszög melletti oldal 36 cm. Forgassuk a trapézt a 45 cm-es oldal körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2867. Egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalai a és b, ahol $a>b$, szára c. Az a alap egyik végpontjában húzzunk rá merőlegest, és forgassuk a trapézt az így kapott egyenes körül. Határozzuk meg a forgástest felszínét.

2868. Szabályos háromszög köré kört írunk, és az egész idomot forgatjuk a háromszög egyik magasságvonala körül. Határozzuk meg a forgatás közben keletkezett gömb és kúp térfogatának arányát.

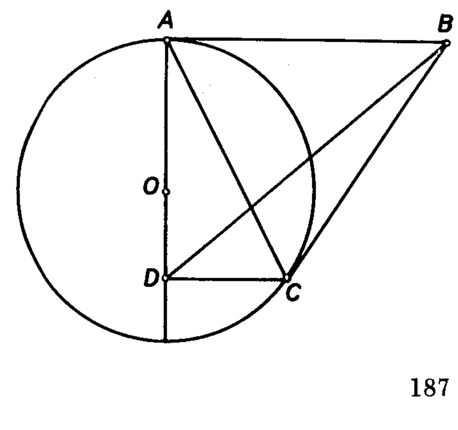
2869. Szabályos háromszögbe kört írunk, és az egész idomot forgatjuk a háromszög egyik magasságvonala körül. Határozzuk meg a forgatás közben keletkezett gömb és kúp térfogatának arányát.

2870. Legyen $ABCDEF$ az O középpontú és R sugarú kör szabályos érintő hatszöge. Húzzuk meg az FC átlót és az AC, BF egyeneseket. Ezek az FC-re merőleges OH sugár I pontjában metszik egymást. Számítsuk ki R függvényeként az IHA és IOF háromszögek forgatásával keletkezett forgástestek felszínét és térfogatát, ha az OH egyenes körül forgatunk.

2871. Adott r sugarú kör OA sugarának meghosszabbításán felveszünk egy B pontot, és megrajzoljuk a BT érintőt. Forgassuk az ábrát az OAB tengely körül, és határozzuk meg, hogy mekkora az OB szakasz, ha a BT érintő és az AT ív leírta felületek aránya adott k érték.

2872. Egy adott r sugarú, O középpontú körön kívül fekvő B pontból a körhöz két érintőt húzunk. BA-t és BC-t (A és C az érintési pontok). A C pontnak az OA sugár egyenesére eső merőleges vetülete legyen D. Forgassuk az ábrát az AOD ten-

2872

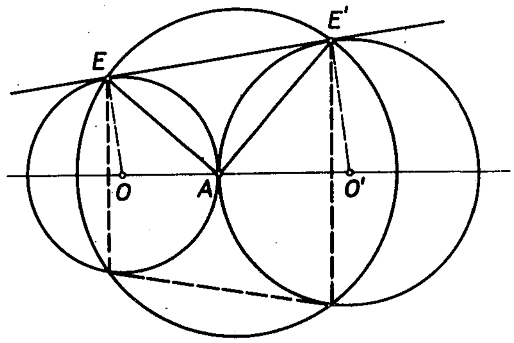


gely körül. Igazoljuk, hogy az $ABCA$ vegyesvonalú idom leírta test térfogata egyenlő a BAD által leírt forgáskúp térfogatával; továbbá, hogy a $DACD$ vegyesvonalú idom által leírt gömbszelet térfogata egyenlő azzal a térfogattal, melyet a BCD háromszög ír le (2872. ábra).

2873. Adott egy n oldalú szabályos sokszög, oldalának hossza a. Forgassuk egy oldala körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2874. Adott egy n oldalú szabályos sokszög, oldalának hossza a. Forgassuk az egyik csúcsán átmenő, a csúcshoz tartozó tükörtengelyre merőleges egyenes körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

2875. Az O és O' középpontú R és R' sugarú körök kívülről érintik egymást az A pontban. A közös külső érintők egyike a köröket az E, illetve E' pontban érinti. (2875. ábra.) Forgassuk idomunkat az OO' egyenes körül;



a körök söprik a G és G' gömböket, az EE' szakasz a C csonka kúpot. Tekintsük még a C csonka kúp köré írt G'' gömböt. Igazoljuk, hogy a G'' gömbnek a C csonka kúpon kívül levő része kétakkora térfogatú, mint a csonka kúpnak az a része, amely a G és G' gömbök közé esik. Mutassuk meg továbbá, hogy az utóbbi test egyenlő térfogatú azon két test együttes térfogatával, amelyeket AE, illetve AE' húrok és az általuk határolt körívek a forgatáskor söpörtek.

MÉRTANI HELYEK

2876. Mi lesz a térben egy adott ponttól adott távolságra levő pontok halmaza?

2877. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál kisebb.

2878. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál nagyobb.

2879. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, melyek egy adott ponttól adott távolságra vannak, és egy adott síkba esnek.

2880. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, melyeknek egy adott ponttól való távolsága adott távolságnál kisebb, és adott síkba esnek.

2881. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál nagyobb, és egy adott síkba esnek.

2882. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak, és egy adott egyenesre esnek.

2883. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál kisebb, és egy adott egyenesre esnek.

2884. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága egy adott távolságnál nagyobb, és egy adott egyenesre esnek.

2885. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott egyenestől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb.

2886. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott egyenestől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,

és egy adott síkra esnek.

2887. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott egyenestől való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,

és egy adott egyenesre esnek.

2888. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott síktól való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb.

2889. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott síktól való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,
c) egy adott távolságnál nagyobb,

és egy adott síkra esnek.

2890. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyeknek egy adott síktól való távolsága

a) egy adott távolsággal egyenlő,
b) egy adott távolságnál kisebb,

2923. Adott AB szakasz mozogjon a térben úgy, hogy mindig párhuzamos maradjon egy adott egyenessel, és az A végpontok leírnak

a) síkot,
b) egyenest,
c) gömbfelületet.

Határozzuk meg a B pontok mértani helyét.

2924. Határozzuk meg a KP szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha K a térben rögzített pont, és P

a) síkot,
b) kört,
c) egyenest

ír le.

2925. Határozzuk meg a KP szakaszt adott arányban osztó pontjának a mértani helyét, ha K a térben rögzített pont, és P

a) síkot,
b) kört,
c) egyenest

ír le.

2926. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak.

2927. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két metsző egyenestől egyenlő távolságra vannak.

2928. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy háromszög oldalegyeneseitől egyenlő távolságra vannak.

2929. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak, és egy adott síkra esnek.

2930. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek két metsző egyenestől egyenlő távolságra vannak, és egy adott síkra esnek.

2931. Adott két kitérő egyenes: e és e'. Keressük az olyan pontok mértani helyét, amelyeket úgy nyerünk, hogy az e egyenes tetszés szerinti E pontját az e' egyenes tetszés szerinti E' pontjával összekötő szakaszt megfelezzük.

2932. Adott két kitérő egyenes: e és e'. Kössük össze az e egyenes tetszés szerinti E pontját az e' egyenes tetszés szerinti E' pontjával. Határozzuk meg az EE' szakaszokat adott arányban osztó pontok mértani helyét.

2933. Adott két egymásra merőleges kitérő egyenes. Egy adott hosszúságú szakasz úgy mozog, hogy végpontjai az egyeneseken vannak. Határozzuk meg a mozgó szakasz felezőpontjának mértani helyét.

2934. Adott két egymásra merőleges kitérő egyenes. Egy adott hosszúságú szakasz úgy mozog, hogy végpontjai az egyeneseken vannak. Határozzuk meg a mozgó szakaszt adott arányban osztó pont mértani helyét.

2935. Határozzuk meg adott irányú egyenesek két adott sík közé eső szakaszai felezőpontjainak a mértani helyét.

2936. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott párhuzamos egyenes derékszög alatt látszik. (Két egyenesnek egy pontra vonatkoztatott „látószög”-én értjük a pont és az egyenesek által meghatározott két sík hajlásszögét.)

2937. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott párhuzamos egyenes tompaszög alatt látszik.

2938. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott párhuzamos egyenes hegyesszög alatt látszik.

2939. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott metsző egyenes derékszög alatt látszik.

2940. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott metsző egyenes tompaszög alatt látszik.

2941. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott metsző egyenes hegyesszög alatt látszik.

2942. Az adott e, e' egyenesekhez úgy illesszünk egy-egy síkot, hogy ezek helyzetüket változtatva, egymásra mindig merőlegesek maradjanak. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyben a derékszögű lapszög éle az egyenesek egyikére merőleges rögzített síkot metszi.

2943. Legyen adva egy **S** sík, egy **S**-et C-ben metsző egyenes és ezen két pont: A és B. Az **S** síkon a C ponton át tetszőlegesen felvett egyenesen meghatározzuk a P pontot úgy, hogy $PA+PB$ a lehető legkisebb legyen. Határozzuk meg a P pontok mértani helyét.

2944. Adott pontot vetítsünk merőlegesen egy adott ponton átmenő egyenesekre. Határozzuk meg a vetületek mértani helyét.

2945. Adott pontot vetítsünk merőlegesen egy adott ponton átmenő síkokra. Határozzuk meg a vetületek mértani helyét.

2946. Adott pontot tükrözzünk egy adott ponton átmenő egyenesekre. Határozzuk meg a tükörképek mértani helyét.

2947. Adott pontot tükrözzünk egy adott ponton átmenő síkokra. Határozzuk meg a tükörképek mértani helyét.

2948. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott **A** síktól a és egy adott **B** síktól b távolságra vannak.

2949. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két párhuzamos síktól egyenlő távolságra vannak.

2950. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két metsző síktól egyenlő távolságra vannak.

2951. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek olyanok, hogy két adott síktól való távolságaik aránya adott érték.

2952. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek olyanok, hogy két adott síktól mért távolságaiknak összege vagy különbsége adott állandó.

2953. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két párhuzamos és egy harmadik, az előbbieket metsző síktól egyenlő távolságra vannak.

2954. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek három adott, páronként metsző síktól egyenlő távolságra vannak.

2955. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek három, nem egy egyenesben fekvő, adott ponton átmennek.

2956. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek egy adott síkot adott pontban érintenek.

2957. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek adott sugarúak, és egy adott síkot érintenek.

2958. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek adott sugarúak, és adott gömböt érintenek.

2959. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek adott gömböt adott pontban érintenek.

2960. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek adott sugarúak, és két adott ponton átmennek.

2961. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek egy adott egyenest egy adott pontjában érintenek.

2962. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyek két adott síkot érintenek.

2963. Adott egy sík és a síkon kívül két pont. Határozzuk meg az adott pontokon átmenő és az adott síkot érintő gömbök érintési pontjának a mértani helyét.

2964. Határozzuk meg két adott gömböt főkörben metsző gömbök középpontjának a mértani helyét.

2965. Határozzuk meg három adott gömböt főkörben metsző gömbök középpontjának a mértani helyét.

2966. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyeket két adott gömb főkörben metsz.

2967. Határozzuk meg az olyan gömbök középpontjának a mértani helyét, amelyeket három adott gömb főkörben metsz.

2968. Egy változó sugarú gömb két adott kitérő egyenest érint, és középpontja abban a síkban marad, amely párhuzamos a két egyenessel, és azoktól egyenlő távolságban van. Határozzuk meg a középpontok mértani helyét.

2969. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből egy adott R sugarú gömbhöz három, páronként egymásra merőleges érintő húzható.

2970. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyekből adott R sugarú gömbhöz három olyan érintő síkot fektethetünk, amelyek páronként merőlegesek egymásra.

2971. Adott egy gömb és egy pont. Tekintsük a ponton átmenő és a gömböt metsző síkokat, határozzuk meg a kimetszett körök középpontjának mértani helyét.

2972. Adott egy gömb és egy egyenes. Tekintsük az egyenesre illeszkedő és a gömböt metsző síkokat. Határozzuk meg a kimetszett körök középponjának a mértani helyét.

2973. Adott síkot adott pontjában érintő gömb változtatja sugarát. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekben egy adott síkkal párhuzamos síkok a gömböket érintik.

2974. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy adott ponttól és egy adott gömbtől egyenlő távolságra vannak. (Az adott pont nincs az adott gömbön.)

2975. Határozzuk meg a térben az olyan pontok mértani helyét, amelyek két adott gömbfelülettől egyenlő távolságra vannak.

2976. Adott egy sík és rajta kívül két pont. Határozzuk meg az adott pontokon átmenő és az adott síkot érintő gömbök középpontjának a mértani helyét.

2977. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott gömb egyenlő kúpszög alatt látszik.

2978. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből három adott gömb egyenlő kúpszög alatt látszik.

2979. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott gömbhöz egyenlő hosszú érintők húzhatók.

2980. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből három adott gömbhöz egyenlő hosszú érintők húzhatók.

2981. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott gömbhöz húzott érintők aránya adott állandó.

2982. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből három adott gömbhöz húzott érintők úgy aránylanak egymáshoz, mint három adott szám.

2983. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyek egy triéder éleitől egyenlő távolságra vannak.

2984. Adott egy síknégyszög. Határozzuk meg az olyan négyoldalú testszögletek csúcspontjainak a mértani helyét, amelyek minden lapja az adott síknégyszög egy-egy oldalához illeszkedik, és van

a) téglalapmetszete,
b) rombuszmetszete,
c) négyzetmetszete.

(Határozzuk meg a négyzet középpontjának a mértani helyét is.)

2985. Határozzuk meg egy torz négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma középpontjának a mértani helyét, ha a négyszög három csúcsa adott, a negyedik csúcs pedig

a) adott síkot,
b) adott egyenest

ír le.

2986. Egy adott triédert egy sík az ABC háromszögben metszi. Rögzítsük az A és B pontokat. Határozzuk meg a változó ABC háromszögek súlypontjának mértani helyét.

2987. Egy adott triédert egy sík az ABC háromszögben metszi. Rögzítsük az A csúcsot. Határozzuk meg a változó ABC háromszögek súlypontjának a mértani helyét.

2988. Messük az adott $SABC$ tetraédert az ABC alaplapjával párhuzamos síkkal. Ez a sík az SA, SB, SC éleket a D, E, F pontokban metszi. Mozogjon a metszősík párhuzamosan. Határozzuk meg

a) az AEF, BFD, CDE síkok metszéspontjának
b) a BCD, CAE, ABF síkok metszéspontjának

a mértani helyét.

2989. Messük az adott $SABC$ tetraédert az ABC lapjával párhuzamos síkkal. A metszési idom oldalainak felezőpontjait kössük össze az ABC lapnak szemben fekvő csúcsaival. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három egyenes egy pontban metszi egymást. Határozzuk meg e pont mértani helyét.

2990. Az adott $SABC$ tetraéder SA, SB, SC élein kijelöljük az X, Y, Z pontokat úgy, hogy $AX = BY = CZ$, és mindhárom pont az ABC sík ugyanazon félterében legyen. Határozzuk meg a változó XYZ háromszög súlypontjának a mértani helyét.

2991. Adott egy sík és azon egy kör. Az $SABC$ tetraéder ABC háromszöge legyen az adott kör érintőháromszöge, és az S csúcsponthoz tartozó triéder legyen derékszögű. Határozzuk meg az S pont mértani helyét.

2992. Vegyünk fel egy adott $ABCD$ tetraéder AB élén egy X, CD élén egy Y pontot úgy, hogy

$$\frac{XA}{XB} = \frac{YD}{YC}.$$

Az XY vonaldarabot a P pont $m:n$ arányban két részre osztja. Határozzuk meg a P pont mértani helyét, ha X változik.

2993. Adott három, páronként kitérő egyenes. Rögzítsünk ezek közül kettőt, a harmadik egy adott síkban párhuzamosan mozoghat. Határozzuk meg az olyan paralelepipedon középpontjának a mértani helyét, melynek a három egyenes mindegyikére esik egy-egy éle.

2994. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek egy adott ponton átmennek, és egy adott síkkal párhuzamosak.

2995. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő és egy adott egyenest metsző egyenesek mértani helyét.

2996. Határozzuk meg egy adott egyenessel párhuzamos és egy adott egyenest metsző egyenesek mértani helyét.

2997. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek egy adott egyenessel tőle adott távolságban párhuzamosak.

2998. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak.

2999. Határozzuk meg az olyan adott pontra illeszkedő egyenesek mértani helyét, amelyek egy adott egyenestől adott távolságra vannak.

3000. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, két adott egyenessel egyenlő szögeket bezáró egyenesek mértani helyét.

3001. Adott egy szög. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek átmennek a szög csúcsán, és a szög egyik szárával nagyobb szöget zárnak be, mint a másik szárral.

3002. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, egy adott egyenesre merőleges egyenesek mértani helyét.

3003. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő és két adott párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra levő egyenesek mértani helyét.

3004. Határozzuk meg két adott metsző síkkal egyenlő szögeket bezáró egyenesek mértani helyét.

3005. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, két adott metsző síkkal egyenlő szögeket bezáró egyenesek mértani helyét.

3006. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, egy adott síkkal adott szöget bezáró egyenesek mértani helyét.

3007. Tekintsünk egy síkot metsző egyenest és ennek talppontján átmenő, a síkon változó egyenest. Határozzuk meg az így kapott szögek szögfelezőinek a mértani helyét.

3008. Adott egy AOB szög. Határozzuk meg az olyan lapszögek élének a mértani helyét, amelyek átmennek az adott szög szárain, és felezősíkjuk átmegy az adott szög szögfelezőjén.

3009. Egy adott lapszög szögfelező síkjában felveszünk egy P pontot. A P ponton át egyeneseket húzunk, melyeknek a lapszöget határoló síkok közé eső darabját a P pont felezi. Határozzuk meg az ilyen egyenesek mértani helyét.

3010. Határozzuk meg egy adott lapszög síkjait érintő forgáskúpok tengelyeinek a mértani helyét.

3011. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, melyek egy adott egyenessel párhuzamosak, és egy adott gömböt érintenek.

3012. Határozzuk meg az olyan egyenesek mértani helyét, amelyek egy adott ponton átmennek, és egy adott gömböt érintenek.

3013. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, adott egyenessel adott szöget bezáró egyenesek mértani helyét.

3014. Határozzuk meg az olyan síkok mértani helyét, amelyek egy adott egyenessel, tőle adott távolságban párhuzamosak.

3015. Határozzuk meg két adott ponttól egyenlő távolságra levő síkok mértani helyét.

3016. Határozzuk meg az olyan síkok mértani helyét, amelyek adott pontra illeszkednek, és két adott egyenessel egyenlő szögeket zárnak be.

3017. Határozzuk meg az olyan síkok mértani helyét, amelyek egy adott pontra illeszkednek, és egy adott síkkal adott szöget zárnak be.

3018. Határozzuk meg az olyan síkok mértani helyét, amelyek egy adott síkkal és egy vele párhuzamos adott egyenessel egyenlő szögeket zárnak be.

3019. Határozzuk meg az olyan síkok mértani helyét, amelyek egy adott pontra illeszkednek, egy adott síkkal és egy vele párhuzamos adott egyenessel egyenlő szögeket zárnak be.

3020. Határozzuk meg két adott egyenessel egyenlő szögeket bezáró síkok mértani helyét.

3021. Egy változó sugarú gömb középpontja rögzített. Egy adott pont legyen csúcspontja a gömböt érintő kúpfelületnek. Határozzuk meg az érintőkörök mértani helyét.

VEKTOROK ALKALMAZÁSA A GEOMETRIÁBAN

VEKTOROK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE

3022. A 3022. ábrán jelölt vektorok közül válasszuk ki

a) az egyenlőket,

b) az ellentetteket,

c) adjunk meg olyan vektorokat, amelyeknek összege **0**.

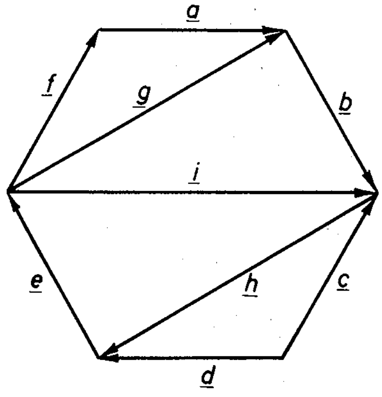
3023. A számegyenesen pl. a 2-vel jelölt pontból az 5-tel jelölt pontba mutató vektort jelöljük $\overrightarrow{2,5}$-ral. Válasszuk ki az alábbi vektorok közül

a) az egyenlőket,

b) az ellentetteket:

$\overrightarrow{2,5}$; $\overrightarrow{4,9}$; $\overrightarrow{7,11}$; $\overrightarrow{0,3}$; $\overrightarrow{3,0}$; $\overrightarrow{-3,7}$; $\overrightarrow{2,6}$; $\overline{5}$
$\overrightarrow{-4}$, $\overrightarrow{-1}$; $\overrightarrow{0,0}$; $\overrightarrow{9,9}$.

3022



3024. Egy négyzetnek rajzoljuk be mindkét átlóját. Az oldalakat és az átlókat irányítsuk úgy, hogy összesen 6 vektort kapjunk. Válasszuk ki ezek közül azokat, amelyeknek összege **0**.

3025. A 3022. ábra vektorai közül állítsuk elő

a) a $\mathbf{g}$-t az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{f}$ segítségével;

b) a $\mathbf{h}$-t az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{f}$ segítségével;

c) a $\mathbf{k}$-t a $\mathbf{g}$ és $\mathbf{i}$ segítségével.

3026. Egy szabályos háromszög minden oldalára szerkesszünk egy újabb szabályos háromszöget. Az így kapott 9 szakaszt irányítsuk. Jelöljük meg az így nyert vektorok közül az egyenlőket és az ellentetteket.

3027. Egy szabályos hatszög egyik csúcsából a többi öt csúcsba mutató vektorok legyenek rendre

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$.

Szerkesszük meg a következő vektorokat:

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}$;

c) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

d) $\mathbf{a}-\mathbf{c}$;

e) $\mathbf{c}-\mathbf{a}$;

f) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$;

g) $\mathbf{a}+\mathbf{d}-\mathbf{c}-\mathbf{b}$;

h) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{d}-\mathbf{e}$;

i) $\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{b}$;

j) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

3028. Egy téglalap csúcsai legyenek A, B, C, D. Szerkesszük meg a következő vektorokat:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$,

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$,

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$,

e) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$,

f) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$,

g) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}$,

h) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$,

i) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$.

3029. Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Szerkesszük meg a következő vektorokat:

a) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$,

b) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$,

c) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$,

d) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$.