

350. Egy általános háromszög oldalai $x^2 + x + 1$; $2x + 1$ és $x^2 - 1$. Bizonyítsuk be, hogy a legnagyobb szöge 120° -os!
351. Van-e olyan háromszög, melynek szögei számtani, oldalai pedig mértani sorozatot alkotnak?
352. ABC háromszögben $AB = 2 \cdot AC$. Hosszabbítsuk meg a BC oldalt $\frac{3}{1}$ -ával. C -n túl, így kapjuk a D pontot. Bizonyítsuk be, hogy $AD = 2CD$.
353. Bizonyítsuk be, hogyha egy négyszög szemközti oldalainak négyszög-összege egyenlő a másik két oldal négyszög-összegevel, akkor a négyszög átlói merőlegesek egymásra.
354. Egy háromszög két oldala $13,2$ cm és $28,5$ cm hosszú. Az általuk bezárt szög $65,2^\circ$. Mekkora a háromszög területe?
- Oldjuk meg ugyanezt a feladatot a következő adatokkal:
- | | | |
|-----------------|----------------|---------------------------|
| a) $a = 15$ cm, | $b = 36$ cm, | $\gamma = 49^\circ 28'$; |
| b) $a = 398$ m, | $b = 1456$ m, | $\gamma = 75,4^\circ$; |
| c) $a = 47$ cm, | $b = 21,8$ cm, | $\gamma = 57,4^\circ$. |
355. Három oldalú ferde hasáb két alapéle 13 cm és 18 cm hosszú, az általuk közbezárt szög 68° . A 32 cm hosszú oldalai az alap síkjához $53,5^\circ$ -os szög alatt hajlik. Mekkora a hasáb térfogata?
356. Bizonyítsuk be, hogy adott oldali négyszögek közül a húrnégyszög területe a legnagyobb!
357. Egy háromszögben adott egy oldal és két szög, hogyan számíthatjuk ki a háromszög területét? Fejezzük ki szavakban az eredményt. Legyen $a = 16$ cm; $\beta = 68^\circ$; $\gamma = 53^\circ$; $t = ?$
358. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek egyik oldala $26,4$ cm hosszú, az adott oldalon fekvő egyik szög 100° , az oldallal szemközti szöge pedig 38° ?
359. Osszuk fel az 1 m sugarú kör kerületét $1:2:3$ arányban. Kössük össze az osztáspontokat, és számítsuk ki az így keletkezett háromszög területét!
360. Osszuk fel egy kör kerületét $1:2:3:4$ arányban. Kössük össze az osztáspontokat, és számítsuk ki az így keletkezett húrnégyszög területét, ha $r = 12$ cm!
361. Egy paralelogramma két oldala 14 cm és 16 cm hosszú. Az általuk bezárt szög 53° . Mekkora a paralelogramma területe?
362. Egy rombusz oldalai 12 cm hosszúak, hegyszöge 80° . Mekkora a területe?
363. Egy paralelogramma két átlója $32,5$ cm és $43,8$ cm; az általuk bezárt hegyszög 62° . Mekkora a paralelogramma területe?
364. Oldjuk meg általánosan az előbbi feladatot.
365. Egy háromszög két súlyvonala 6 cm és 9 cm hosszú. Az általuk bezárt hegyszög 72° . Mekkora a háromszög területe?
366. Az ABC háromszögben: $c = 4$ cm; $b = 12$ cm. A c oldalon A -tól 3 cm-nyire kitűzzük a P pontot. Határozzuk meg b oldalnak azt a pontját (X), amelyet P ponttal összekötve, a húzott szakasz: XP felezi a háromszög területét!

TERÜLETSZÁMITÁSI FELADATOK

367. Az ABC háromszög három oldala: $a = 8$ cm; $b = 15$ cm; $c = 9,6$ cm hosszú. A C csúcsból milyen messze jelöljük ki az a és b oldalon azt a két pontot, melyeket egy egyenessel összekötve, a keletkezett két rész kerülete és területe is egyenlő?
368. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex, konkáv (de nem húrkölt) négyszög területe egyenlő az átlók és az átlaluk bezárt szög sinusának felosztásával! Legyen $e = 64$ dm; $f = 50$ dm; az átlaluk bezárt szög $68^\circ 35'$; $t = ?$
369. Négyszög alakú tér négy oldala rendre 610 m; 320 m; 580 m és 470 m. Az első két oldal által bezárt szög $76,8^\circ$. Mekkora a négyszög területe?
370. Határozzuk meg az l m sugarú körbe rajzolt szabályos ötagú csillag területét!
371. Egy park kör alakú területén ötágú csillag alakú területet virággal ültetnek be, a kimaradt részeket pedig fűvel. Mekkora a fűvel bevetett terület, ha a kör sugara 5 m?
372. Egy szabályos hatszög területe 900 cm². Osszuk minden oldalt három-három egyenlő részre, és kössük össze páronként az egy csúcsához legközelebb eső két-két osztópontot. Mekkora az így keletkező tizenkét szög területe?
373. Háromszög alakú beültetett terület nagysága $9,51$ ha. Két oldala 320 m és 610 m hosszú. Mekkora a harmadik oldala, valamint a szögei?
374. Valamely háromszög területe 715 m². Egyik oldala $53,4$ m, és az ezen az oldalon fekvő egyik szög $38,8^\circ$. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
375. Egy háromszög területe 4920 cm². Két szög $43^\circ 36'$ és $72^\circ 23'$. Mekkora a háromszög oldalai?
376. Egy háromszög területe $9,92$ cm². Egyik oldala 4 cm; kerülete 15 cm. Mekkora a háromszög szögei és ismeretlen oldalai?
377. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal:
 $t = 24$ cm², $2s = 32$ cm, $a = 15$ cm.
378. Egy szabályos hatszög területe egyenlő egy olyan háromszög területével, melynek alapja $11,8$ cm hosszú, s a rajta fekvő szögek $50^\circ 28'$ és $47^\circ 56'$ -nyi nagyságúak. Mekkora a hatszög oldala?
379. Valamely háromszögben két oldal aránya: $2:3$, az átlaluk bezárt szög 30° . A háromszög területe $337,5$ cm². Mekkora a háromszög oldalai?
382. Egy háromszög két oldalának különbsége 2 cm; az átlaluk bezárt szög 38° . A háromszög területe 16 cm². Mekkora a háromszög oldalai?
383. Egy háromszögben két oldal négyzetének összege 881 dm²; a két oldal által bezárt szög $71,8^\circ$ és a háromszög területe 190 dm². Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
384. Egy háromszög területe 84 cm². Egyik oldala 15 cm, a másik két oldal négyzetének összege 365 dm². Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai?
385. Egy háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak, melynek különbsége 1 . A háromszög területe úgy aránylik egy vele egyenlő kerületű szabályos háromszög területéhez, mint $3:5$. Mekkora a háromszög oldalai és legnagyobb szöge?

386. Az $ABCD$ négyszögben adott $AB = a$, $CD = b$, ABC szög $= ADC$ szög $= 90^\circ$ és BAD szög $= \alpha$ úgy, hogy $\alpha < 90^\circ$. Számítsuk ki AD -t, BC -t és a négyszög területét. Melyek a feladat megoldhatóságának feltételei?
387. Egy trapéz alakú telket, melynek területe 3600 m^2 , egyik átlós útja úgy oszt egy szabályos és egy általános háromszögre, hogy a nyert részek területeinek aránya $5:4$. Mekkora a trapéz oldalai és szögei?
388. Egy trapéz területe 204 m^2 , a párhuzamos oldalak különbsége: $a - c = 14 \text{ m}$; a nem párhuzamos oldalak különbsége: $b - d = 2 \text{ m}$, a szemben fekvő szögek különbsége: $\gamma - \alpha = 59^\circ 29'$. Számítsuk ki a párhuzamos oldalak hosszát.
389. Valamely háromszögben két oldal aránya: $a:b = 2:3$. A körülírt kör sugara 15 cm ; a harmadik oldalhoz tartozó magasság: $m_c = 20 \text{ cm}$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
390. Egy háromszögben két oldal összege: $b + c = 5 \text{ cm}$, az általuk bezárt szög 60° , a harmadik oldalhoz tartozó magasság: $m_a = \sqrt{3} \text{ cm}$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
391. Egy háromszög oldalainak aránya: $a:b:c = 25:29:36$. A beírt kör sugara: $\rho = 232 \text{ cm}$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
392. Adott háromszöghöz szerkesszünk vele egyenlő területű egyenlő oldalú háromszöget.

FOKOK ÁT SZÁMITÁSA IVMÉRTÉKEK ÉS VISSZA

393. Mekkora a következő szögek π -vel kifejezett ivmértéke:
 15° ; $22^\circ 30'$; 45° ; 60° ; 90° ; 108° ; 120° ; 135° ; 150° ; 180° ; 210° ; 225° ; 240° ;
 270° ; 300° ; 315° ; 330° ; 750° ; 840° ; 1080° ?
394. Mekkora a következő szögek ivmértékének négy tizedesjegyre közelített értéke:
 22° ; 40° ; 55° ; 110° ; 130° ; 250° ; 320° ; 400° ; 1110° ; $17,4^\circ$; $24^\circ 38'$; $228,2^\circ$;
 $412^\circ 15'$; $316^\circ 10'$; $72^\circ 50'$; $12^\circ 30'$; $21^\circ 18'$; $20^\circ 20'$; $300^\circ 10'$; $79,58^\circ$?
395. Hány fokosak azok a szögek, melyeknek ivmértéke:
 $a) \frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{5}$; $\frac{3}{5\pi}$; $\frac{3}{3\pi}$; $\frac{4}{5\pi}$; $\frac{4}{7\pi}$; $\frac{4}{5\pi}$; $\frac{4}{7\pi}$; $\frac{6}{5\pi}$; $\frac{6}{7\pi}$; $\frac{6}{11\pi}$; $\frac{6}{\pi}$; $\frac{5}{2\pi}$; $\frac{5}{3\pi}$; $\frac{8}{\pi}$; $\frac{8}{15\pi}$; $\frac{9}{10\pi}$;
 $b) 0,125$; $0,25$; $0,75$; $1,5$; 3 ; 6 ; 8 ; 10 ; 18 ;
 $c) 0,01$; $0,11$; $0,111$; $0,93$; $0,99$; $2,2$; $4,1$; $9,1$; $13,6$; $18,55$;
 $d) \frac{5}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{6}{100}$; $\frac{9}{8}$; 1963 ?
396. Határozzuk meg a következő szögfüggvényértékeket:
 $a) \sin \frac{\pi}{x}$; $\sin \frac{4}{x}$; $\sin(-\pi)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{x}\right)$; $\sin\left(-\frac{3}{x}\right)$; $\sin\left(-\frac{6}{7x}\right)$;

$$\begin{aligned}
 a) \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) &= \\
 b) \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) &= \\
 c) \sin(\alpha + 60^\circ) + \sin(\alpha - 60^\circ) &= \\
 d) \cos(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha) &= \\
 e) \sin(45^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) + \sin^2 30^\circ - \cos(45^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) + \\
 &+ \sin^2 60^\circ = \\
 f) \sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha + 240^\circ) &= \\
 g) \sin^2 30^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ + \sin^2 120^\circ &=
 \end{aligned}$$

400. Az addíciós tételek alapján írjuk egyszerűbben a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
 a) \sin(90^\circ + \alpha) &= \\
 b) \cos(90^\circ + \alpha) &= \\
 c) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) &= \\
 d) \sin(90^\circ - \alpha) &= \\
 e) \cos(90^\circ - \alpha) &= \\
 f) \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \\
 g) \sin(180^\circ + \alpha) &= \\
 h) \sin(180^\circ - \alpha) &= \\
 i) \cos(180^\circ + \alpha) &= \\
 j) \cos(180^\circ - \alpha) &= \\
 k) \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \\
 l) \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= \\
 m) \sin(270^\circ + \alpha) &= \\
 n) \cos(270^\circ + \alpha) &= \\
 o) \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) &= \\
 p) \sin(270^\circ - \alpha) &= \\
 q) \cos(270^\circ - \alpha) &= \\
 r) \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) &= \\
 s) \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) &=
 \end{aligned}$$

399. Az addíciós összefüggések alapján hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
 a) \sin(x+y) + \sin(x-y); \\
 b) \sin(x+y) - \sin(x-y); \\
 c) \cos(x+y) + \cos(x-y); \\
 d) \cos(x+y) - \cos(x-y).
 \end{aligned}$$

398. Vezessük le: $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ kifejezését a $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ képlet levezetése mintájára, valamint a $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)}$ összefüggés alapján!

alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

397. Vezessük le: $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$ kifejezését a $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ képlet levezetése mintájára, valamint a $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)}$ összefüggés alapján!

AZ ADDÍCIÓS TÉTELEK ALKALMAZÁSA

$$\begin{aligned}
 a) \sin 0,5; \sin 3,14; \sin(-2); \sin(-100); \sin 1962; \\
 b) \cos 3; \cos 9,42; \cos 0,3; \cos 11; \cos 48; \\
 c) \operatorname{tg} 9,5; \operatorname{tg} 0,1; \operatorname{tg} 7; \operatorname{tg} 52; \operatorname{tg} 360; \\
 d) \operatorname{ctg} 1,2; \operatorname{ctg} 2; \operatorname{ctg} 120; \operatorname{ctg} 235; \operatorname{ctg} 1000; \\
 e) \sin 0,5; \sin 3,14; \sin(-2); \sin(-100); \sin 1962; \\
 f) \cos 3; \cos 9,42; \cos 0,3; \cos 11; \cos 48; \\
 g) \operatorname{tg} 9,5; \operatorname{tg} 0,1; \operatorname{tg} 7; \operatorname{tg} 52; \operatorname{tg} 360; \\
 h) \operatorname{ctg} 1,2; \operatorname{ctg} 2; \operatorname{ctg} 120; \operatorname{ctg} 235; \operatorname{ctg} 1000; \\
 i) \sin 0,5; \sin 3,14; \sin(-2); \sin(-100); \sin 1962; \\
 j) \cos 3; \cos 9,42; \cos 0,3; \cos 11; \cos 48; \\
 k) \operatorname{tg} 9,5; \operatorname{tg} 0,1; \operatorname{tg} 7; \operatorname{tg} 52; \operatorname{tg} 360; \\
 l) \operatorname{ctg} 1,2; \operatorname{ctg} 2; \operatorname{ctg} 120; \operatorname{ctg} 235; \operatorname{ctg} 1000;
 \end{aligned}$$

401. Számítsuk ki a 30° -, 45° -, 60° - és 90° -os szögek tanult szögfüggvényeit-nek értékeit felhasználva a 15° -, a 75° -, a 105° -, a 120° - és a 135° -os szögek szögfüggvényértékeit!
402. Az egyégsugarú körbe rajzolt szabályos tizszögből határozzuk meg a 18° -os és a 72° -os szögek szögfüggvényértékeit.
403. Bizonyítsuk be, hogy az egyégsugarú körbe szerkesztett $ABCDE$ szabályos ötszögben $(AB \cdot AC)^2 = 5$.
404. Számítsuk ki a 63° -os és a 27° -os szögek szögfüggvényértékeit a 45° -os és az előző feladatban kapott 18° -os szögek szögfüggvényértékei segítségével.
405. Táblázat használata nélkül állapítsuk meg, hogy mekkora:
 $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha$; $\operatorname{ctg} 2\alpha$; ha
- a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$;
 b) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$;
 c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$;
 d) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$.
- Végül ellenőrizzük az eredményeket a táblázattal.
406. Számítsuk ki $\operatorname{tg} 2\alpha$ értékét, ha $\sin (90^\circ - \alpha) = \frac{3}{1}$ ($0 < \alpha < 90^\circ$).
407. Táblázat használata nélkül állapítsuk meg, hogy mekkora $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$;
 $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, ha
- a) $\cos \alpha = \frac{7}{25}$;
 b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$;
 c) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$;
 d) $\cos \alpha = 0$;
- Végül ellenőrizzük az eredményeket a táblázattal.
408. Számítsuk ki a 36° -os szög szögfüggvényértékeit a 18° -os szögre kapott szögfüggvényértékek segítségével.
409. Számítsuk ki a 15° -, $22,5^\circ$ -, $67,5^\circ$ -os és végül a $7,5^\circ$ -os szögek szögfüggvényértékeit a 30° -, 45° -, 135° -os és végül a feladatban kapott 15° -os szögek szögfüggvényértékei segítségével.
410. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket azáltal, hogy a 2α -nek függvényeit α függvényeivel helyettesítjük:
- a) $\frac{\sin 2x}{2 \sin x} =$
 b) $\cos 2x + 2 \sin^2 x =$
 c) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x =$
 d) $\frac{\cos 2x}{\cos x} - \cos x =$

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{2 \cdot \cos^3 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \\
 b) & \frac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \\
 c) & \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha} = \\
 d) & \frac{\sin 3\alpha + 4 \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - 4 \cos^3 \alpha} =
 \end{aligned}$$

415. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket, felhasználva az előző feladat eredményeit:

$$\begin{array}{llll}
 a) \sin 3\alpha; & b) \cos 3\alpha; & c) \operatorname{tg} 3\alpha; & d) \sin 4\alpha; \\
 e) \cos 4\alpha; & f) \sin 6\alpha; & g) \cos 6\alpha; & h) \sin 8\alpha; \\
 i) \cos 8\alpha; & j) \sin 5\alpha; & k) \cos 5\alpha; & l) \sin 10\alpha; \\
 m) \cos 10\alpha
 \end{array}$$

414. Fejezzük ki α szögfüggvényeivel:

$$a) \sin(\alpha + \beta + \gamma); b) \cos(\alpha + \beta + \gamma); c) \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma).$$

413. Fejezzük ki α ; β ; γ szögfüggvényeivel a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
 a) \sin x & \equiv \frac{3}{\cos 2x} - \frac{4}{4}; \\
 b) \cos x & \equiv \frac{3}{\cos 2x} + \frac{4}{4}.
 \end{aligned}$$

412. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned}
 a) \frac{\sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x}{1 + \cos x} &= \\
 b) \frac{\cos 2x - 2 \cos x + 1}{\cos 2x + 2 \cos x + 1} &= \\
 c) \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} &= \\
 d) \frac{2 \sin x + \sin 2x}{1 - \cos 2x} &=
 \end{aligned}$$

411. Alakítsuk az alábbi kifejezéseket azáltal, hogy az x -nek függvényeit az $\frac{x}{2}$ függvényeivel helyettesítjük s a $2x$ függvényeit x függvényeivel:

$$\begin{aligned}
 a) & (\cos x + \sin x + 1) \cdot (\cos x + \sin x - 1) - \sin 2x = \\
 b) & \frac{(2 + \sin 2x) \cdot (\sin x - \cos x) - (2 - \sin 2x) \cdot (\sin x + \cos x)}{(2 + \sin 2x) \cdot (\sin x - \cos x) + (2 - \sin 2x) \cdot (\sin x + \cos x)} = \\
 c) & \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x - \sin^4 x} = \\
 d) & \frac{\sin 2x}{\sin x - \sin^3 x} =
 \end{aligned}$$

417. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

$$\begin{aligned}
 a) & \sin \alpha \cdot \sin (\alpha + \beta) + \cos \alpha \cdot \cos (\alpha + \beta) = \cos \beta; \\
 b) & \cos \alpha \cdot \sin (\alpha + \beta) - \sin \alpha \cdot \cos (\alpha + \beta) = \sin \beta; \\
 c) & \sin \alpha \cdot \sin (\alpha - \beta) + \cos \alpha \cdot \cos (\alpha - \beta) = \cos \beta; \\
 d) & \cos \alpha \cdot \sin (\alpha - \beta) - \sin \alpha \cdot \cos (\alpha - \beta) = -\sin \beta; \\
 e) & \sin (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \beta + \cos \beta); \\
 f) & \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \text{ vagy} \\
 g) & \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha; \\
 h) & \sin (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta; \\
 i) & \sin (\alpha - \beta) \cdot \cos (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \cos \beta; \\
 j) & \cos (\alpha + \beta) \cdot \cos (\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta; \\
 k) & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \beta - \cos^2 \beta; \\
 l) & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha; \\
 m) & \sqrt{(1 + \sin \alpha) \cdot (1 - \sin \alpha)} = \pm \cos \alpha; \\
 n) & (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha; \\
 o) & \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 1 + \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

416. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha} = 2; \\
 b) & \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha} = 2; \\
 c) & \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\
 d) & \frac{4 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin 3\alpha + \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\
 e) & \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1. \\
 f) & \frac{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \sin^3 \alpha}; \\
 g) & \sin 3\alpha \cdot \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha = \\
 h) & \cos (30^\circ + \alpha) \cdot \cos (30^\circ - \alpha) - \frac{\sin 3\alpha}{4 \sin \alpha} = \\
 i) & \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} = \\
 j) & \frac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = \\
 k) & \sin 3\alpha - \cos 3\alpha + (\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (1 - 2 \sin 2\alpha) =
 \end{aligned}$$

418. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$

b) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha =$

c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$

d) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha =$

e) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha =$

f) $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha =$

419. Bizonyítsuk be, hogy

$\cos^2(\alpha + x) + \cos^2 x - 2 \cos \alpha \cos x \cos(\alpha + x)$ kifejezés független x -től.

420. Igazoljuk, hogy

a) $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$;

b) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (= \sin 45^\circ)$;

c) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$;

d) $\operatorname{tg} 135^\circ + (1 - \cos 15^\circ) \cdot (1 + \sin 75^\circ) + \operatorname{ctg} 45^\circ + \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = 1$;

e) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}$;

f) $\sin 18^\circ \cdot \sin 234^\circ = -\frac{1}{4}$;

g) $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha = \frac{1}{2}$, ha $\alpha = 20^\circ$;

h) $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = -\frac{1}{2}$, ha $\alpha = 20^\circ$;

i) $\cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cos 4\alpha = \frac{1}{2}$, ha $\alpha = 20^\circ$;

j) $\cos \frac{\pi}{x} + \cos \frac{3\pi}{x} + \cos \frac{5\pi}{x} = \frac{1}{2}$;

k) $\cos \frac{2\pi}{L} + \cos \frac{4\pi}{L} + \cos \frac{6\pi}{L} = -\frac{1}{2}$;

l) $\cos \frac{\pi}{x} + \cos \frac{3\pi}{x} + \cos \frac{5\pi}{x} + \dots + \cos \frac{n}{(n-2)\pi} = \frac{1}{2}$;

m) $\cos \frac{\pi}{x} - \cos \frac{2\pi}{x} + \cos \frac{3\pi}{x} = \frac{1}{2}$;

n) $\cos \frac{2\pi}{L} \cdot \cos \frac{\pi}{L} + \cos \frac{4\pi}{L} + \cos \frac{6\pi}{L} \cdot \cos \frac{7\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}$;

o) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3$;

d) $\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^7$;

$$r) \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4;$$

$$s) \sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2 \cdot \cos 15^\circ;$$

$$t) \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{3}{5};$$

$$u) \sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0;$$

$$v) \sin^4 \frac{\pi}{4} + \frac{8}{\pi} + \sin^4 \frac{3\pi}{4} + \sin^4 \frac{5\pi}{4} + \sin^4 \frac{7\pi}{4} = \frac{3}{2};$$

$$w) (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1)^3 + 27 \sin^6 \alpha \cdot \cos^6 \alpha = 0;$$

$$z) 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0.$$

421. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám és $\alpha = \frac{2n+1}{\pi}$, akkor:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \dots \cos n\alpha = \left(\frac{2}{1}\right)^n.$$

422. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám és $\alpha = \frac{2n}{\pi}$, akkor:

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin (2n-1)\alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

423. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}.$$

424. Mely α hegyesszögre lesz:

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 7?$$

425. Igazoljuk az alábbi összefüggések helyességét:

$$a) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = 0;$$

$$b) \sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2 \beta + 2 \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha;$$

$$c) \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$d) \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

427. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ (k egész szám), akkor

$$\begin{aligned} a) \sin 3\alpha &= 4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{3}{2}\pi + \alpha \right) \sin \left(\frac{3}{2}\pi - \alpha \right); \\ b) \cos 3\alpha &= 4 \cdot \cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{3}{2}\pi \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3}{2}\pi \right) \end{aligned}$$

426. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} l) \frac{2}{1 + \cos 2\alpha} &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha}; \\ s) \operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha &= \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos 2\alpha; \\ r) (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 &= 4 \cdot \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ p) (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 &= 4 \cdot \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ o) 2 \cdot \cos^2 (45^\circ + \alpha) &= 1 - \sin 2\alpha; \\ y) \frac{1}{1 - \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} &= -\operatorname{tg} 2\alpha; \\ m) \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}; \\ l) \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} &= \operatorname{ctg}^2 \alpha; \\ k) \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha; \\ j) \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha; \\ i) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha \text{ és } \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} = \cos 2\alpha; \\ h) \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha \text{ és } \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha; \\ g) 2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha &= \sin 2\alpha; \\ f) 2 \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= \sin 2\alpha; \\ e) \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \end{aligned}$$

$$\gamma) \quad \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$$

$$\delta) \quad \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta};$$

$$f) \quad \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta};$$

$$e) \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta};$$

$$d) \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta};$$

$$c) \quad \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta};$$

$$b) \quad \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta};$$

$$a) \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta};$$

432. Bizonyítsuk be, hogy

$$d) \quad \cos \alpha = \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}{2};$$

$$c) \quad 8 \cdot \cos^4 \alpha - 5 \cdot \cos^2 \alpha + 2 - 2 \sin^2 \alpha + 3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 5 \cos^4 \alpha;$$

$$b) \quad \frac{1}{\sin \alpha} - \tan \frac{\alpha}{2} = \cot \alpha, \text{ ha } \alpha \neq k \cdot 180^\circ;$$

$$a) \quad \cos 2\alpha = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} \text{ ha } \alpha \neq k \cdot 90^\circ;$$

431. Bizonyítsuk be, hogy

$$\tan \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = 1.$$

430. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \neq 90 + k \cdot 180^\circ$, akkor

$$\tan \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

429. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sin \alpha \neq -1$, akkor

$$\tan^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

428. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sin \alpha \neq -1$, akkor:

$$a) \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \quad (\text{tangensétel});$$

435. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben:

a csücsöktől,

n) $d_1, d_2, d_3 = 4 \cdot \frac{r}{\sin \alpha}, 4 \cdot \frac{r}{\sin \beta}, 4 \cdot \frac{r}{\sin \gamma}$, ha r a háromszögbe írt kör sugara; d_1, d_2, d_3 a belső kör középpontjának távolsága

$$m) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$l) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma;$$

$$k) r = 4r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}, \text{ ha } r \text{ a háromszögbe írt kör sugara;}$$

$$j) t = 2r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma;$$

$$i) r = \frac{4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{s}, \text{ ha } r = \text{a háromszög köré írt kör sugara;}$$

felkerülte;

$$h) t = s^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \text{ ha } t \text{ háromszög területé, } s = \text{a háromszög}$$

$$g) \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2};$$

$$f) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1;$$

$$e) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma;$$

$$d) \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1;$$

$$c) \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$b) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2};$$

434. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, akkor:

$$c) \cos \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\beta}{3} \cos \frac{\gamma}{3} = \frac{\cos \frac{\alpha+2\pi}{3} \cos \frac{\alpha+4\pi}{3}}{\cos \alpha} = \frac{1}{4}.$$

$$b) \cos \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\beta}{3} \cos \frac{\gamma}{3} = \frac{\cos \frac{\alpha+2\pi}{3} + \cos \frac{\alpha+4\pi}{3}}{\cos \alpha} + \cos \frac{\alpha}{3} = -\frac{1}{4};$$

$$a) \cos \frac{\alpha}{3} + \cos \frac{\beta}{3} + \cos \frac{\gamma}{3} = 0;$$

433. Bizonyítsuk be, hogy

SZÖVEGES FELADATOK HÁROMSZÖGEKRE, NEGYSZÖGEKRE, SOKSZÖGEKRE AZ ADDÍCIÓS TÉTELEK ALAPJÁN

436. Bizonyítsuk be a következő tételt: Ha c a derékszögű háromszög átfogója, a és b pedig a befogói, akkor $c^2 = 2ab$ és $b^2 - a^2$ szintén derékszögű háromszög oldalainak mértékszáma, s ennek egyik hegyesszöge az eredeti háromszög kisebbik hegyesszögének kétszerese.
437. Bizonyítandó, hogy bármely derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b+c}$ (c az átfogó). Fejezzük ki $\frac{\alpha}{2}$ minden szögfüggvényértékét a $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ segítségével.
438. Valamely derékszögű háromszögben az átfogó és az egyik befogó összege: $c+b = 14$ cm; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, ahol α az a befogóval szemközti szög. Számítsuk ki a háromszög oldalainak mértékszáma trigonometria táblák felhasználása nélkül.
439. Egy derékszögű háromszögben adott a derékszög felezője: f , és az α hegyesszög. Fejezzük ki a háromszög oldalait és területét a megadott alkotórészekkel, és állapítsuk meg, mikor lesz a háromszög területé a legkisebb.
440. Egy háromszögnek adott két oldala, és tudjuk, hogy a szögek aránya 1:2. Mekkora a háromszög szögei és az ismeretlen harmadik oldala?
- a) $a = 5$ cm; $b = 4$ cm; b) $a = 7$ cm; $b = 4$ cm.
441. Egy háromszög két oldala 3 és 4 cm, az általuk közbezárt szög 60° . Mekkora a háromszög ismeretlen szögei?
442. Egy háromszög két oldala 10 cm és 5 cm, az általuk bezárt szög kétszerese a rövidebbik oldalal szemben fekvő szögnek. Mekkora a háromszög szögei?
443. Egy háromszög két oldalának összege 132,7 cm, a harmadik oldalon fekvő szögek $27^\circ 45'$ és $72^\circ 17'$ nagyságúak. Mekkora a háromszög oldalai?
444. Egy háromszög köré írt kör sugara 5 cm, egyik oldala 7 cm és a másik két oldal aránya 5:3. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
445. Határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha adott a , α és $m_b : m_c = k$!
446. Számítsuk ki a feladatot, ha $a = 260$ cm; $\alpha = 67^\circ 23'$ és $m_b : m_c = 21:13$. Számítsuk ki a feladatot, ha $a = 260$ cm; $\alpha = 67^\circ 23'$ és $m_b : m_c = 21:13$. Egy háromszögben két oldal aránya 1:2; az általuk bezárt szög 40° , a harmadik oldal 15 cm. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

447. Egy háromszög szögei tangenseinek aránya 1:2:3. Mi az oldalak aránya?
448. Mekkora a háromszög ismeretlen szögei és oldalai, ha tudjuk, hogy $a:b = 1:2$; $\alpha:\beta = 1:3$ és $c = 5$ cm?
449. Egy háromszög két oldala 15 cm és 9 cm hosszú. A nagyobbik oldalal szemközti szög háromszor akkora, mint a kisebbik oldalal szemközti szög.
- a) Mekkora a háromszög szögei és a harmadik oldali?
- b) Mekkora a háromszögbe írható kör sugara?
450. Egy szilulükörtől az A pont 4, a B pont 9 m-re s a két pont egymástól 20 m-re van. Mekkora beesési szöggel esik a tükörre az A pontból kiinduló fényugár, ha a B pontba verődik vissza?
451. Egy egyenlő szárú trapézban a két párhuzamos oldal: $2a$ és $2b$ hosszú. A hosszabbik párhuzamos oldal egyik végpontjából a rövidebbik párhuzamos oldal α szög alatt látszik. Mekkora a trapéz területe?
452. Számítsuk ki a feladatot, ha $2a = 26$ cm; $2b = 16$ cm; $\alpha = 36^\circ 30'$. P pont helyzetét kell az 1:1 250 000 méretű térképen három ponthoz, az úgynevezett háromszögezési pontokhoz viszonyítva meghatározni. A le-mért-látások: APB szög = 83° , APC szög = 130° , BAC szög = 65° . A le-mért távolságok: $AB = 17,2$ cm és $AC = 20$ cm. Milyen távolságra van P pont az A ponttól a valóságban?
- (A = Szeged; B = Miskolc; C = Győr; P = Budapest.)
453. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal: APB szög = 52° ; APC szög = 23° ; $\alpha = 105^\circ$; $AB = 15$ cm; $AC = 8$ cm. Mekkora az AP távolság a valóságban?
454. Egy négyyszög oldalai: $AB = 4$ cm, $AD = 5$ cm; BAD szög = $110^\circ 15'$. Az A csúsból húzott átló a C csússal levő szöget két részre bontja: BCA szög = $29,3^\circ$, ACD szög = $35^\circ 45'$. Mekkora az AC átló?
455. Az ABCD négyyszögben adott AB és AD oldal, valamint az α szög és $\beta = \delta = 90^\circ$. Mekkora az AC átló hossza?
456. Számítsuk ki a feladatot, ha $AB = 10$ cm, $AD = 20$ cm és $\alpha = 72^\circ$. Milyen messze van a derékszög csúcsától az egyenesírt befogó a egyenlő szárú derékszögű háromszögeknek az a belső P pontja, amelyből az egyik befogó 90° -os, a másik befogó 120° -os szög alatt látszik?
457. Egy háromszög alapját a hozzá tartozó magasság egy 9 és egy 4 cm-es darabra bontja. A háromszögeknek az alap 4 cm-es darabja mellett levő szöge kétszerese a 9 cm-es darabon fekvő szögnek. Mekkora a háromszög szögei, és mekkora az alaphoz tartozó magasság?
458. Egy négyzet alapú egyenlő oldalú gúla oldalai a , az oldal az alap síkjával α szöget zár be. Mekkora a test térfogata?
459. Határozzuk meg az egyenes körkúpba írt gömb térfogatát és a körpalástot érintő kör sugarát, ha adott a kör sugara, ha adott a szög, amelyet az alkotó az alapkör síkjával zár be.
460. Egyenes hasáb alapja egyenlő szárú háromszög. Mekkora a hasáb térfogata, ha adott az egyenlő szárú háromszög alapja: a , a szárnak és az alap által bezárt α szög, és tudjuk, hogy a palást területe egyenlő az alaplapok területének összegével.
461. Szabályos háromoldali gúla alapja a , oldalapja az alaplap síkjával α szöget zár be. Mekkora a gúla felszíne és térfogata?
462. Bizonyítsuk be, hogy ha α , β , γ egy háromszög szögei, és $\sin \gamma - \cos \alpha = \cos \beta$, akkor a háromszög derékszögű.

463. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\operatorname{tg} \beta \cdot \sin^2 \gamma = \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin^2 \beta$, akkor a háromszög vagy egyenlő szárú, vagy derékszögű.
464. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben
- $$a \cdot \operatorname{tg} \alpha + b \cdot \operatorname{tg} \beta = (a+b) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2},$$
- akkor a háromszög egyenlő szárú.
465. Bizonyítsuk be, hogy ha α , β , γ egy háromszög szögei,
- $$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta},$$
- akkor a háromszög derékszögű.
466. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 2 \cos \alpha$, akkor a háromszög egyenlő oldalú.
467. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben
- $$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2},$$
- akkor a háromszög egyenlő szárú.
468. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{1}{8}$, akkor a háromszög egyenlő oldalú.
469. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben
- $$\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \text{ és } \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{4}{3},$$
- akkor a háromszög egyenlő oldalú.
470. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\alpha = 120^\circ$, akkor az oldalakra nézve fennáll:
- $$b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2).$$
471. Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan háromszögek közül, amelyeknek egyenlő a kerülete és egyenlő a γ szögük, annak lesz a legkisebb a c oldala, amelyben $\alpha = \beta$, azaz a háromszög egyenlő szárú.
472. Adott egy háromszög egyik szöge, α a szemközti fekvő oldal a és a másik két oldal különbsége: $b - c = d$. Mekkora a háromszög területe?
473. Egy kör 60° -os középponti szögét osszuk fel két részre úgy, hogy a rész-szögekhez tartozó húrok aránya: $5:2$ legyen.
474. 60° -os szög egyik szárán A pont 16 , B pont 25 cm-nyire van a szög csúcsától. Mekkora annak a körnek a sugara, amely az A és B pontokon megy át, és a szög másik szárát érinti?
475. Bizonyítsuk be, hogy
- $$\frac{1}{1} = \frac{A_n}{1} + \frac{a_n}{1},$$
- ha ugyanarra a körre vonatkozólag a_n a belső n oldalú, A_n a körülírt n oldalú és A_n a körülírt $2n$ oldalú szabályos sokszög oldalát jelenti.
476. Egy szabályos hatszög átlói b és c , egyik oldala a . Bizonyítsuk be, hogy
- $$\frac{1}{1} = \frac{b}{1} + \frac{c}{1}.$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad y &= \sin x; \quad y = 3 \sin x; \quad y = \frac{2}{1} \sin x; \\
 b) \quad y &= \cos x; \quad y = 2 \cos x; \quad y = \frac{3}{1} \cos x; \\
 c) \quad y &= -\sin x; \quad y = -3 \sin x; \quad y = -\frac{2}{1} \sin x; \\
 d) \quad y &= -\cos x; \quad y = -2 \cos x; \quad y = -\frac{3}{1} \cos x;
 \end{aligned}$$

486. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket a $[0, 2\pi]$ intervallumban:

A SINUS- ÉS COSINUSFÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA ÉS Néhány TRANSZFORMÁCIÓJUK

485. Egy négyszögben $a:b:c:d = 9:8:7:6$. Az a és d oldalak által bezárt szög $\alpha = 72,6^\circ$ és a négyszög területe 225 cm^2 . Mekkora a négyszög oldalai és ismeretlen szögei?
484. Egy húrnegyszög három egymás utáni oldala $a = 15$, $b = 18$ és $c = 20 \text{ m}$, BD átlója 23 m . Mekkora a szögek és az ismeretlen oldala?
483. Egy húrnegyszög oldalai: $13, 14, 16, 10 \text{ dm}$ hosszúak. Mekkora az átlói és a köré írt kör sugara?
482. Egy húrnegyszög oldalai: $41, 45, 22$ és 31 cm hosszúak. Mekkora a területe?
- c) Mekkora a körülírt kör sugara?
b) Mekkora a négyszög területe?
a) Mekkora a négyszög átlói?
481. Egy húrnegyszög oldalai: a, b, c, d .

$$a + b + c + d = 2s.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}, \text{ ahol } \alpha \text{ az } a \text{ és } d \text{ oldalak által bezárt szög, és}$$

480. Bizonyítsuk be, hogy minden húrnegyszögben

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 3.$$

számtani sorozatot alkotnak, akkor

479. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ szögek cotangensei

478. Egy háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak, melynek különbsége 1 . A legkisebb szöge fele a legnagyobbjának. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?

477. Számítsuk ki a szabályos ötagú csillag területét, ha ismerjük két szomszédos külső csúcspont összekötő egyenesének távolságát az ettől az egyenestől legtávolabb fekvő csúcsponttól.

$$\begin{aligned}
 e) \quad y &= \sin x + 2; \quad y = \sin x - 3; \quad y = 2 \sin x + 3; \\
 f) \quad y &= -\sin x + 3; \quad y = -\frac{1}{2} \sin x + 2; \quad y = -3 \sin x - 1; \\
 g) \quad y &= \cos x + \frac{1}{2}; \quad y = \cos x - 3; \quad y = 3 \cos x - 2; \\
 h) \quad y &= -\cos x - 2; \quad y = -\frac{3}{4} \cos x + 3; \quad y = -2 \cos x + 1; \\
 i) \quad y &= \sin 2x; \quad y = \sin \frac{1}{2}x; \quad y = \sin \frac{1}{4}x; \\
 j) \quad y &= \cos 3x; \quad y = \cos \frac{3}{4}x; \quad y = \cos 2x; \\
 k) \quad y &= \sin(-x); \quad y = \sin(-2x); \quad y = \sin\left(-\frac{3}{4}x\right); \\
 l) \quad y &= \cos(-x); \quad y = \cos(-3x); \quad y = \cos\left(-\frac{1}{4}x\right); \\
 m) \quad y &= \sin(x+x); \quad y = \sin\left(x-\frac{2}{x}\right); \quad y = \sin\left(x+\frac{2}{x}\right); \\
 n) \quad y &= \sin(x-x); \quad y = \sin(x+1); \quad y = \sin(x-1); \\
 o) \quad y &= \cos\left(x+\frac{2}{x}\right); \quad y = \cos\left(x-\frac{2}{x}\right); \quad y = \cos\left(x-\frac{2}{x}\right); \\
 p) \quad y &= \operatorname{tg} x; \quad y = \operatorname{tg} \frac{2}{x}; \quad y = -\operatorname{tg} x; \\
 r) \quad y &= |\sin x|; \quad y = |\cos x|; \\
 s) \quad y &= [\sin x]; \quad y = [\cos x]; \\
 t) \quad y &= \lfloor \sin x \rfloor; \quad y = \lfloor \cos x \rfloor.
 \end{aligned}$$

487. Az alapfüggvény lineáris transzformációjával ábrázoljuk a következő függvényeket a $[0, 2\pi]$ intervallumban:

$$\begin{aligned} a) y &= \sin x + \cos x; \\ b) y &= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x; \\ c) y &= 2 \sin x; \\ d) y &= 2 \cos x; \end{aligned}$$

függvénygörbét.

490. Allapítsuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, majd vizsgáljuk meg a függvények monotonitását. Ennek alapján vázoljuk fel a

$$c) y = \cos \left(\frac{x}{2} + x \right) + \cos \left(\frac{x}{2} - x \right).$$

$$b) y = \sin \left(x + \frac{x}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{x}{4} \right);$$

$$a) y = \sin x + \sin \left(\frac{x}{3} + x \right);$$

ezeket:

489. A szögfüggvények összegére és különbségére kapott azonosságok alapján hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi függvényeket, s ezután ábrázoljuk is

$$g) y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$f) y = 2 \sin \frac{x}{2} + \cos x;$$

$$e) y = \sin x + 2 \sin \left(x + \frac{x}{4} \right);$$

$$d) y = \sin \left(x + \frac{x}{2} \right) + \sin \left(x - \frac{x}{3} \right);$$

$$c) y = 2 \cos x + \sin \left(x + \frac{x}{2} \right);$$

$$b) y = \sin x - \cos \left(x + \frac{x}{2} \right);$$

$$a) y = \sin \left(x + \frac{x}{2} \right) + \sin \left(x - \frac{x}{2} \right);$$

intervallumban:

488. Grafikus összegezéssel ábrázoljuk a következő függvényeket a $[0, 2\pi]$

$$f) y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

$$h) y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$g) y = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{x}{4} \right);$$

$$e) y = \sqrt{1 - \sin x};$$

$$f) y = \sqrt{1 - \cos x};$$

$$g) y = \log_a \sin x, \text{ illetve } y = \lg \sin x;$$

$$h) y = \sqrt{\log_a \sin x}, \text{ illetve } y = \sqrt{\lg \sin x};$$

$$i) y = \sin(\sin x);$$

$$j) y = \cos(\cos x);$$

$$k) y = \frac{x}{\sin x};$$

$$l) y = \frac{x}{\cos x};$$

$$m) y = \sin x^2;$$

$$n) y = x \cdot \sin x;$$

$$o) y = x^2 \cdot \sin x;$$

$$p) y = x^2 |\sin x|.$$

491. Vizsgáljuk a következő függvényeket differenciálhányadosuk 0 helyein, azok környezetében. Készítsünk értéktáblázatot, állapítsuk meg a helyi maximum és minimum értékeit. Végül vázoljuk a függvényeket!

$$a) y = \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{3} \sin x \cdot \cos x;$$

$$b) y = 6 \sin x - 3 \cos 2x + 2 \sin 3x;$$

$$c) y = 2 \sin x + \cos 2x.$$

492. Mozogjon egy P pont az $AB = 2r$ átmérőjű felkörön. Húzzunk merőleges P pontból az átmérőre és az átmérő A végpontjában húzott érintőre. Számítsuk ki az így keletkezett téglalap területét, mint a PAB szög (x) függvényét!

493. P pont milyen helyzetében lesz a téglalap területe maximális? Az r sugarú gömb köré írható egyenes kúpok közül melyiknek a térfogata a legkisebb?

494. Mozogjon egy P pont az $AB = 2r$ átmérőjű felkörön. Kössük össze a P pontot a felkör középpontjával (O) és A -val. Szerkesztünk AP -re egyenlő oldalú háromszöget (kifeje).

a) Számítsuk ki az $AOPC$ négyszög területét, mint a PAB szög (x) függvényét! C az egyenlő oldalú háromszög harmadik csúcsa.
b) Mekkora x értéke, ha a négyszög területe $\frac{r^2 \sqrt{3}}{2}$?

495. Oldjuk meg grafikus úton a következő trigonometrikus egyenleteket:

$$a) \sin x = \frac{1}{2};$$

$$b) \cos x = 0,5;$$

$$c) \sin 2x = 0,5;$$

$$\frac{1,2071}{0,5021}$$

$$\frac{1,2585}{4,324}$$

$$\frac{1,239}{4,33}$$

$$214,2 - 157$$

$$\begin{aligned}
 e) \sin \left(x + \frac{6}{x} \right) &= \cos \left(x - \frac{6}{x} \right) \\
 d) \operatorname{tg} x \cdot (2x + 1) - \operatorname{tg} x \cdot (x + 1) &= 0; \\
 c) \operatorname{tg} \left(3x + \frac{2}{x} \right) \cdot \operatorname{ctg} (5x - x) &= 1; \\
 b) \sin 3x &= \cos 5x; \\
 a) \sin \left(2x + \frac{3}{x} \right) &= \frac{1}{2};
 \end{aligned}$$

500. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 f) \cos (3x + 8^\circ) &= -\cos x; \\
 e) \cos 5x &= \cos x; \\
 d) \cos 2x &= -\cos x; \\
 c) \sin \left(4x + \frac{6}{x} \right) &= -\sin x; \\
 b) \sin 4x &= \sin \frac{x}{2}; \\
 a) \sin 5x &= \sin x; \\
 g) \operatorname{tg} 5x &= \operatorname{tg} x; \\
 h) \operatorname{tg} 2x &= -\operatorname{tg} \left(x - \frac{12}{x} \right); \\
 i) \operatorname{tg} 4x &= -\operatorname{tg} \frac{x}{2}; \\
 j) \operatorname{ctg} (3x + 20^\circ) &= -\operatorname{ctg} x; \\
 k) \operatorname{ctg} (5x + 20^\circ) &= -\operatorname{ctg} x; \\
 l) \operatorname{ctg} 4x &= \operatorname{ctg} x.
 \end{aligned}$$

499. Határozzuk meg azon pozitív hegyesszögeket, amelyek kielégítik a következő trigonometrikus egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 a) \sin x &= -0,66; \\
 b) \sin x &= 0,993; \\
 c) 7 \sin x &= 3; \\
 d) 2 \sin x &= 1; \\
 e) 2 \sin x &= -1; \\
 f) 2 \sin x &= -\sqrt{2}; \\
 g) \cos x &= 0,5; \\
 h) \cos x &= -0,66; \\
 i) 3 \cos x &= 2; \\
 j) 2 \cos x &= \sqrt{2}; \\
 k) 4 \cos^2 x &= 1; \\
 l) \operatorname{tg} x &= 2,3; \\
 m) 7 \operatorname{tg} x &= 9; \\
 n) \operatorname{tg} x &= -1; \\
 o) \operatorname{ctg} x &= -0,4.
 \end{aligned}$$

498. Határozzuk meg x -nek azon értékeit, melyek az alábbi trigonometrikus egyenleteket elégítik ki:

TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK ES EGYENLETRENDSZEREK

496. Egy háromszög két oldala 5 cm és 10 cm hosszú. Az általuk bezárt szög kétszer akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög. Számítsuk ki a háromszög szögeit grafikus úton.

497. Egy háromszög két oldala 5 cm és 6 cm hosszú. A nagyobbik oldallal szemközti szög kétszer akkora, mint a kisebbik oldallal szemközti szög. Számítsuk ki a háromszög szögeit grafikus úton.

$$\begin{aligned}
 d) \operatorname{tg} x &= 2 \sin x; \\
 e) \operatorname{ctg} x &= 2 \cos x.
 \end{aligned}$$

501. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

- a) $2 \sin x = \operatorname{tg} x$;
 b) $3 \sin x = 2 \operatorname{tg} x$;
 c) $5 \sin x = 3 \operatorname{tg} x$;
 d) $7 \cos x = 4 \operatorname{ctg} x$;
 e) $\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$.

502. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

- a) $\sin x - \cos x = 0$;
 b) $\sin x + \cos x = 0$;
 c) $3 \sin x = 4 \cos x$;
 d) $\sin x = 2 \cos x$;
 e) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$;

- f) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;
 g) $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$;
 h) $4 \cos^2 x = \sin^2 x$;

- i) $\frac{1 - \sin x}{2 \cos x} = 1$;
 j) $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

503. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

- a) $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$;
 b) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$;
 c) $2 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$;
 d) $4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} = 0$;
 e) $\cos^2 x - \cos x = \sin^2 x$;
 f) $5(1 - \cos x) = 4 \sin x$;
 g) $\frac{1 - \sin x}{\sin x} = \cos x$;

- h) $4 \sin x + 3 \cos x = 2$;
 i) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$;

- j) $\frac{1}{\sin x} + \cos x = \frac{1}{\sin x}$;

- k) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$;

- l) $\cos x - \sin^2 x = -0,4$;

- m) $\cos x = \operatorname{tg} x$;

- n) $\frac{\operatorname{ctg} x}{x} = 2\sqrt{3}$;

- o) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 1,5$.

$$\begin{aligned} x &= 30^\circ + 360^\circ \\ \sin x &= \cos x \\ \sin x + \cos x &= 1 \end{aligned}$$

504. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

$$a) 4 \cos x = \operatorname{tg} x;$$

$$b) 16 \operatorname{tg} x = 15 \cos x;$$

$$c) \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x - 1 = 0;$$

$$d) \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0;$$

$$e) 5 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x = 11;$$

$$f) \operatorname{tg}^2 x - 5 = \frac{1}{\cos x};$$

$$g) \operatorname{tg}^2 x + 17 = \frac{10}{\cos x};$$

$$h) \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$i) \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2;$$

$$j) \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + 2 = 0;$$

$$k) 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 3 = 0;$$

$$l) \operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0;$$

$$m) \sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{4}{3} \sin^2 2x = 0;$$

$$n) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{16}{7};$$

$$o) 4 \cos^4 x = \cos 2x + \sin^2 2x;$$

$$p) 5 \cos^2 x + \cos^2 2x = 4;$$

$$r) 3 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x = 16.$$

505. Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

$$a) \sin(60^\circ - x) = 2 \sin x;$$

$$b) \cos(30^\circ - x) = 3 \sin x;$$

$$c) 2 \sin \left(x + \frac{6}{x} \right) + 3 \cos \left(x - \frac{3}{x} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{2};$$

$$d) \operatorname{tg}(a+x) \cdot \operatorname{tg}(a-x) = \frac{1-2 \cos 2a}{1+2 \cos 2a};$$

$$e) \cos 2x = \sin x;$$

$$f) \sin 2x + \cos^2 x = 1;$$

$$g) 4 \cos x = \frac{1}{\sin x};$$

$$h) \sin 2x - \cos x = 0;$$

$$i) 3 \sin 2x = 2 \cos x;$$

$$j) \sin 2x = 2 \sin x;$$

$$k) \sin x = \frac{2}{\cos 2x}.$$

506. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

$$a) 2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2;$$

$$b) \cos 2x + \sin 2x = -1;$$

507. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 a) & 2 \sin 2x = \operatorname{tg} x; \\
 b) & \sin 2x = \operatorname{tg} x; \\
 c) & \sin x + \cos x = 1,2; \\
 d) & \sin x + \cos x = 1; \\
 e) & \sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}; \\
 f) & \sin x + \cos x = \frac{5}{4}; \\
 g) & \sin x - \sqrt{3} \cos x = 1; \\
 h) & \sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

508. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 a) & \sin 2x = \cos 3x; \\
 b) & \sin 4x + \sin x = 0; \\
 c) & \cos 3x + 2 \cos x = 0; \\
 d) & \sin 4x - \sin 2x = \sin x; \\
 e) & \sin 2x + \sin 3x = 3 \sin x; \\
 f) & \sin 3x \cdot \sin x = \frac{1}{4}; \\
 g) & \sin 4x + \sin 2x = \sin 3x; \\
 h) & \cos 5x + \cos 3x = \cos 6x + \cos 2x; \\
 i) & \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0; \\
 j) & \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0; \\
 k) & \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0; \\
 l) & \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0; \\
 m) & \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x; \\
 n) & \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0; \\
 o) & \cos 10x + \operatorname{tg}^2 5x = 2; \\
 p) & \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = \sqrt{2}; \\
 r) & \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2 \cdot \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

509. Oldjunk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket:

$$a) 16 \sin^4 x + 41 + \cos 2x = 10;$$

$$b) \left[\operatorname{tg}_2(x) \right] \frac{1}{1 - \cos 2x} \left[\frac{2}{\cos^2 x} \right] = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$

510. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelyet $\cos 2x$ elégít ki, ha x a

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0 \text{ egyenlet gyöke!}$$

511. Oldjunk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket:

$$l) \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4};$$

$$3) \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4};$$

$$m) \sin(x+y) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2}; \sin 2x + \sin 2y = \frac{1}{2};$$

$$n) \sin x \cdot \cos y = 0;$$

$$\frac{1}{4}; (\sin x + \cos^2 y) \sin^2 y = \frac{1}{4};$$

$$o) \sin(x+y) = \cos(x-y);$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1;$$

$$p) 2 \cos x + \cos y = 1;$$

$$2 \sin x - \sqrt{3} \sin y = 0;$$

$$q) \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \frac{y \sin \frac{y}{2}}{\frac{2}{2}};$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{6}} = \frac{y \cos \frac{y}{2}}{\frac{2}{2}};$$

$$s) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2;$$

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = 1;$$

$$t) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2;$$

$$9) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4;$$

$$2) \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} y = 1;$$

$$v) \cos x + \cos y = 1,94;$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 1,7661;$$

$$z) \cos x - \cos y = 0,5;$$

$$\cos 2x + \cos 2y = -1,5.$$

$$\cos^2 x - \cos^2 y = \frac{2}{1};$$

$$e) x + y = 90^\circ;$$

$$\frac{1}{4}; \sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4};$$

$$d) x + y = 75^\circ;$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 3;$$

$$c) x - y = 60^\circ;$$

$$\sin x + \sin y = 1,5;$$

$$b) x + y = 120^\circ;$$

$$2 \operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y;$$

$$a) x + y = 45^\circ;$$

$$\frac{2}{1}; \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{2}{1};$$

$$\frac{2}{3}; \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{1}; \sin^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{1};$$

$$\frac{5}{1}; \cos x \cdot \cos y = \frac{5}{1};$$

$$\frac{1}{15}; \cos x + \cos y = \frac{1}{15};$$

$$\frac{1}{12}; \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{12};$$

$$\frac{1}{7}; \sin x + \sin y = \frac{1}{7};$$

$$\sin(x+y) = 0,4540;$$

$$\sin(x-y) = 0,3523;$$

$$\sin(x+y) = 0,5299;$$

$$\sin(x-y) = 0,9903;$$

$$\sin(x+y) = 0,9903;$$

$$\sin(x-y) = 0,5299;$$

$$\sin(x+y) = 0,4540;$$

$$\sin(x-y) = 0,3523;$$

$$\sin(x+y) = 0,5299;$$

$$\sin(x-y) = 0,9903;$$

512. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned} a) \quad {}^2\log y - {}^2\log x &= 1; \\ {}^2\log \cos(x+y) - {}^2\log \sin(x+y) &= -3; \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} + y\right) = 1 - \cos x;$$

$$b) \quad x^2 y = \frac{1}{8};$$

$$\frac{1+xy}{x} = \frac{1-xy}{y};$$

513. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0$$

$$\sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0$$

egyenletrendszert egyenértékű az

$$1 + \cos x + \cos y = 0$$

$$\sin x + \sin y = 0$$

egyenletrendszerrel.

514. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$a \cdot \sin^2 x + a_1 \cdot \cos^2 x = b$$

$$a_1 \cdot \sin^2 y + a \cdot \cos^2 y = b_1$$

egyenletek gyökei kielégítik az

$$a \cdot \lg x = a_1 \cdot \lg y \text{ egyenletet, akkor}$$

$$\frac{a}{1} + \frac{a_1}{1} = \frac{b}{1} + \frac{b_1}{1}.$$

HELYVEKTOR

515. Szerkesszük meg derékszögű koordináta-rendszerben a

- $a) (4; 2);$ $b) (-5; 3);$ $c) (-6; -3);$ $d) (4; -2);$
 $e) (0; 0);$ $f) (6; 0);$ $g) (-2; 0);$ $h) (0; 4);$
 $i) (0; -2);$ $j) \left(\frac{3}{2}; \frac{2}{5}\right);$ $k) \left(\frac{3}{2}; -3,2\right);$ $l) (\sqrt{3}; 0);$

$m) (-\sqrt{2}; -\sqrt{5});$ $n) \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8+3}}; \frac{2}{2}\right)$ helyvektorokat, és számítsuk ki

az abszolút értékeit. (A továbbiakban is koordináta-rendszeren mindig derékszögű koordináta-rendszert értünk, és a tengelyeken azonos egyégeket veszünk fel.)

516. Jelöljünk ki helyvektorokat a koordináta-rendszerben, és határozzuk meg a koordinátáikat!

517. Ábrázoljuk azt a háromszöget, amelynél a csúcsok helyvektora:

- $a) (5; 1); (-2; 3)$ és $(-1; 5); b) (0; 0); (-2; -5)$ és $(8; -1).$

518. Ábrázoljuk azt a négyszöget, amelynél a csúcsok helyvektora:

- $a) (5; -2); (4; 3); (-2; 8); (2; -5);$
 $b) (1; 4); (-3; 0); (-3; 5); (4; 2).$

519. Határozzuk meg a $(3; 4); (-4; 2); (2; -5); (3; -5); (4; 4); (5; 0); (2; -2); (p; q)$ helyvektorok tükörképeinek koordinátáit, ha azokat

- $a)$ az x tengelyre,
 $b)$ az y tengelyre,
 $c)$ az origóra,

- $d)$ az origón áthaladó és az x tengely pozitív felével 45° -os szöget bezáró egyenesre,
 $e)$ a II. és a IV. síknegyedet felező és az origón áthaladó egyenesre tükrözzük.

520. Adott két helyvektor: $a(a; b)$ és $b(b; a)$. Hogyan helyezkednek el egymáshoz viszonyítva?
 521. Egyenlő szárú háromszög alapja 10, magassága 6 hosszúságú egység. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak helyvektorait, ha úgy helyezzük el

- a koordináta-rendszerben, hogy a kezdőpont az alap egyik végpontjában van, és az alap az x tengelyre illeszkedik. Hány megoldás van? Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, ha az alap 12, a szár 8 hosszúság-egység. Hány megoldás van?
522. Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja egy a oldalú négyzet közep-pontjában. Határozzuk meg a csúcsok helyvektorait, ha
- a) a négyzet csúcsai a tengelyekre illeszkednek,
 b) a négyzet oldalai párhuzamosak a tengelyekkel.
523. Határozzuk meg a szabályos hatszög csúcsainak helyvektorait, ha az oldala 1; 2; 3; 4; a ; $2a$ hosszúság-egység, középpontja az origóban van, és egyik csúcsa
- a) az x tengelyre,
 b) az y tengelyre illeszkedik.
524. Határozzuk meg a szabályos nyolcszög csúcsainak helyvektorait, ha az átlója d , és egy-egy átló a koordináta-tengelyekre illeszkedik.
525. Szerkesszük meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek
- a) az abszcisszája 0,
 b) az ordinátája 0,
 c) az abszcisszája 2, -3 ,
 d) az ordinátája 4, -5 ,
 e) az abszcisszája és ordinátája egyenlő,
 f) a koordinátái abszolút értékben egyenlők.
526. Az $a(2; 3)$, $b(4; -5)$, $c(-3; 8)$, $d\left(-5; -\frac{3}{2}\right)$, $e(a; b)$, $f(\sin \alpha; \cos \alpha)$ hely-vektorokat 90° -kal elforgatjuk. Határozzuk meg az elforgatott helyvek-torok koordinátáit. Írjuk fel azokat a helyvektorokat is, amelyek a meg-adott helyvektorokból -90° -os elforgatással adódnak.
- KÉT VEKTOR ÖSSZEÉGENEK ÉS KÜLÖNBSEGENEK,
 EGY VEKTOR SZÁMSZOROSÁNAK KOORDINÁTÁI,
 ADOTT SZAKKASZT ADOTT ARÁNYBAN OSZTÓ PONT, STÍLPONT**
527. Legyen az $a(3; 5)$; $b(-4; 2)$; $c(-2; -5)$; $d(0; 3)$; $e(5; -2)$. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:
- $a+b$;
 - $a-c$;
 - $a-b+c-d+e$;
 - $a-2b$;
 - $\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b$;
 - $\frac{a+b+c}{3}$;
 - $\frac{a+b+c+d}{4}$.
528. Ábrázoljuk a kapott vektorokat!
- Egy háromszög csúcsai: $A(8; 2)$, $B(6; 9)$, $C(4; -3)$. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ koordinátáit. Rajzoljuk meg az $\overrightarrow{AB}$ -ral, $\overrightarrow{BC}$ -ral és a $\overrightarrow{CA}$ -ral egyenlő helyvektorokat. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ koordinátáit. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ hosszúságát.
529. Egy négyszög csúcsai: $A(6; 4)$, $B(-2; 5)$, $C(-6; -3)$ és $D(1; -8)$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ koordinátáit.

530. Állapítsuk meg a következő pontpárokkal meghatározott szakaszok felezőpontjainak koordinátáit:

- a) (6; 6) és (2; 2);
b) (4; 10) és (12; 3);
c) (-2; -6) és (-3; 4);

d) $\left(\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{5}\right)$;

e) $(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ és $(-\sqrt{8}; \sqrt{12})$;

f) $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ és $\left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;

g) $\left(\frac{a-b}{2}; \frac{c-d}{2}\right)$ és $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{c+d}{2}\right)$.

531. Az AB szakasz felezőpontja $(-1; -1)$. A pont koordinátái $\left(\sqrt{2}-1; \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. Határozzuk meg a B pont koordinátáit.

532. Felezzük meg az $A(2; 7); B(1; 1); C(3; 6)$ pontokkal adott háromszög oldalait. Igazoljuk, hogy a felezéspontok által meghatározott háromszög oldalai feleakkorák, mint az ABC háromszög oldalai. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

533. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai az $A_1(-2; 1); B_1(4; -3); C_1(2; 3)$ pontok. Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit.

534. Határozzuk meg az $A(1; 2); B(2; 6); C(6; 4)$ csúcsokkal adott háromszög súlyvonalainak a hosszát.

535. Kösseük össze a $(-3; 2)$ pontot az origóval. A kapott szakaszt hosszabbítsuk meg mindkét irányban önmagával. Határozzuk meg a végpontok koordinátáit. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

536. Osszuk fel a az $(5; 0); (4; 3)$ pontokat összekötő szakaszt $3:4$, illetve $4:3$ arányban; b a $(3; -2); (10; 12)$ pontokat összekötő szakaszt $2:5$, illetve $5:2$ arányban.

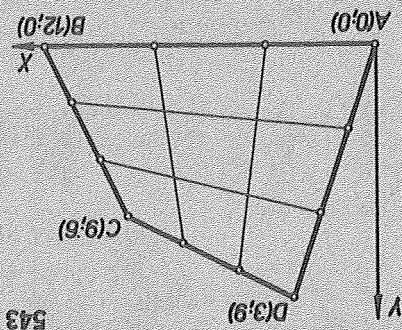
537. (A pontok sorrendjére nem vagyunk tekintettel.) Az $(1; 3)$ és $(5; -2)$ pontokat összekötő szakaszt harmadoljuk. Határozzuk meg az $(1; 3)$ ponthoz közelebb fekvő harmadoló pont koordinátáit.

538. Osszuk fel a a $(2; -2); (6; 14)$ pontokat összekötő szakaszt négy egyenlő részre; b a $(3; 5); (7; -2)$ pontokat összekötő szakaszt három egyenlő részre.

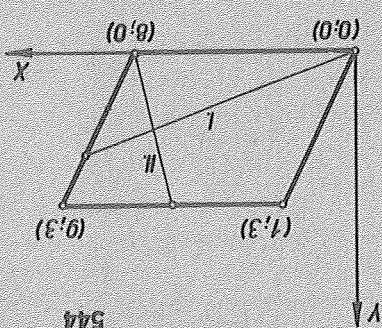
539. Határozzuk meg az osztópontok koordinátáit. $A(4; 3); (-1)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban meg-nyújtjuk másfelzszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

540. $A(-1; 4)$ és $(6; 2)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban meg-nyújtjuk négyszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

541. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának koordinátáit, ha a csúcsai:
- $A(8; 2); B(4; 6); C(0; -2);$
 - $A(6; 2); B(-4; 1); C(2; -3);$
 - $A(\sqrt{2}; -\sqrt{3}); B(-\sqrt{8}; \sqrt{12}); C(-\sqrt{32}; \sqrt{27});$
 - $A\left(\frac{a-b}{2}; \frac{a+b}{2}\right); B\left(\frac{a-b}{3}; \frac{a+b}{3}\right); C(a+b; a-b);$
542. Egy háromszög csúcsai: $A(2; 2); B(2; 4); C(6; 4)$. Számítsuk ki a háromszög oldalait, a súlypontjának koordinátáit.
543. Rajzoljuk meg az $A(0; 0); B(12; 0); C(9; 6); D(3; 9)$ pontokkal meghatározott négyszöget. Harmadoljuk meg az oldalait, majd kössük össze a két-két szemközti harmadolópontot. Igazoljuk, ezek az egyenesek egyenlő darabokra vágják (szintén harmadolják) egymást (543. ábra).



543



544

544. A $(0; 0); (8; 0); (9; 3); (1; 3)$ pontokkal meghatározott paralelogrammában kössük össze a $(0; 0)$ csúcsot a $(8; 0)$ és $(9; 3)$ pontokkal meghatározott oldal „felső” harmadolópontjával, a $(8; 0)$ csúcsot pedig az $(1; 3)$ és a $(9; 3)$ csúcsokat összekötő oldal felezőpontjával. Igazoljuk, hogy az így kapott első szakasz felezi a második szakaszt, ez viszont $\frac{1}{4}$ részt vág le az előbbiből (544. ábra).
545. Bizonyítsuk be, hogy az
- $A(1; 3); B(4; 7); C(2; 8); D(-1; 4);$
 - $A\left(\frac{2}{3}; 1\right); B(2; 5); C(3; -2); D\left(\frac{2}{5}; -6\right);$
 - $A(1; 2); B(-5; 1); C\left(-6; -\frac{2}{1}\right); D\left(0; \frac{2}{1}\right);$

546. Adott a paralelogramma három csúcsa:

- $A(0; 0); B(3; 1); C(1; 3);$
- $A(4; 2); B(5; 3); C(6; -4);$
- $A(1; 4); B(3; 2); C(6; 5);$

- g) $\left(5\frac{2}{3}; -3,5\right)$ ponton és irányvektora $(-5; 4)$;
 f) $\left(4\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ ponton és irányvektora $(1; -0,5)$;
 e) $(3; 1)$ ponton és irányvektora $(3; 2)$;
 d) $(-2; 0)$ ponton és irányvektora $(-3; 2)$;
 c) $(0; 3)$ ponton és irányvektora $(4; 3)$;
 b) $(0; 0)$ ponton és irányvektora $(2; -1)$;
 a) $(0; 0)$ ponton és irányvektora $(1; 2)$;

554. A koordináta-rendszer síkjában egy pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Az időmérés kezdetekor a $(3; 4)$ pontban van. Sebességvektora: $v(1; 1)$. Hol volt a pont az időmérés kezdete előtt 1, 2, 3 időegységgel, és hol lesz a pont az időmérés kezdete után 1; 2,5; 3; 4; 5 időegységgel? Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely áthalad a

AZ EGYENES EGYENLETET

553. Egy háromszög oldalait ugyanolyan forgási irányban, azonos arányban meghosszabbítottuk. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkező háromszögnek es az eredetinek közös a súlypontja.
552. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög súlypontján áthaladó tetszőleges egyenese a csücsökből merőlegesséket rajzolunk, akkor az egyenes egyik oldalán levő merőleges távolság egyenlő a másik oldalon levő két merőleges távolság összegével.
551. Igazoljuk koordináta-geometriai úton is, hogy
 a) a derékszögű háromszög átfogójának felezőpontja egyenlő távol van a csücsöktől;
 b) a háromszög szemközti oldalainak felezőpontját összekötő szakaszok felezik egymást;
 c) a háromszög oldalainak felezőpontját összekötő szakaszok párhelyes gramát határoznak meg.
550. Két kör középpontja: $O_1(2; 5); O_2(7; 10)$. Sugárak rendre: $r_1 = 3$ egység, $r_2 = 7$ egység. Határozzuk meg a két kör közös érintőinek a metszéspontját.
549. Egy egyenes az x tengelyből $OA = 6$, az y tengelyből $OB = 8$ hosszúságú egyenesnyi szakaszt vág le. Határozzuk meg az OAB derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság talpontiának a koordinátáit.
548. Egyenes vonalú mozgást végző pont átmegy az $A(2; 6)$ és $B(8; 1)$ ponton. Milyen pontokban metszi a pálya a koordináta-tengelyeket?
547. Egy háromszög csücsai: $A(4; 1); B(7; 5); C(-4; 7)$. Határozzuk meg a negyedik csücs koordinátáit. Hány megoldás van?
- Határozzuk meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben a belső szögfelezők az oldalakat metszik.

h) $\left(-0,5; -\frac{3}{4}\right)$ ponton és irányvektora $(-1; 1)$.

Szerkesszük meg az egyeneseket.

556. Mi az egyenlete annak egyenesnek, amely áthalad az

a) $(0; 0)$ ponton és irányvektora $(2; 3)$;

b) $(-2; 1)$ ponton és irányvektora $(3; \sqrt{3})$;

c) $(4; 0)$ ponton és irányvektora $(-1; \sqrt{3})$;

d) $(3; -2)$ ponton és irányvektora $(1; 1)$;

e) $(3; 5)$ ponton és irányvektora $(-1; 1)$;

f) $\left(-4\frac{1}{2}; -3\frac{1}{4}\right)$ ponton és irányvektora $(5; -2)$;

g) $(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ ponton és irányvektora $(1; -1)$;

h) $(5; -4)$ ponton és irányvektora $(0; 4)$;

i) $(-1; -3)$ ponton és irányvektora $(1; \sqrt{3})$;

j) $(-2; -8)$ ponton és irányvektora $(5; 2)$.

557.

Állapítsuk meg, hogy rajta van-e (vannak-e)

a) az $x - y = 1$ egyenesen a $(7; 6)$ pont;

b) a $2x - y = 3$ egyenesen az $(1; 1)$ pont;

c) az $\frac{x}{2} + y = 1$ egyenesen a $(2; 0)$ pont;

d) a $4x + y = 6$ egyenesen az $(1; 2)$; $(2; -1)$; $(4; -10)$ pontok;

e) a $2x - 3y + 4 = 0$ egyenesen az $(1; 3)$; $(-2; 0)$; $(7; 6)$; $(10; 8)$ pontok.

558. Határozzuk meg az A és a B értékeit úgy, hogy a) $A(3; -2)$ és a $(4; 2)$, b) a $(7; 2)$ és az $(1; -2)$ pontok az $Ax + By = 1$ egyenesre illeszkedjenek.

559. Mely pontokban metszi a koordináta-rendszer tengelyeit az

a) $x - 5y = -10$;

b) $7x - 9y = -1$;

c) $2x - 3y = 5$;

d) $6x - 4y = -8$;

egyenest?

560. Adjunk meg 3 pontot, amelyek a $2x - 7y = -3$ egyenesre illeszkednek.

561. Határozzuk meg a $4x + 3y = 6$ egyenesnek azokat a pontjait, amelyek az x tengelytől $+6$, illetve -6 egységnyi távolságra vannak.

562. Az $5x - 3y = -15$ egyenesen határozzuk meg azt a pontot, amelynek az x tengelytől mért távolsága $\frac{3}{2}$ része az y tengelytől mért távolságának.

563.

Határozzuk meg k értékeit úgy, hogy a $2x - y = k$ egyenes áthaladjon

a) a $(4; 1)$ ponton; b) a $(-2; -3)$ ponton; c) az origón.

564. Határozzuk meg m értékeit úgy, hogy az $mx - y = -3$ egyenes át-

haladjon

a) az $(1; 4)$ ponton; b) a $(-2; 2)$ ponton; c) a $(-\sqrt{3}; -\sqrt{2})$ ponton;

d) a $(0; -4)$ ponton; e) a $(3; 0)$ ponton; f) az origón.

565. Egy egyenes áthalad a $(-4; 2)$ ponton és irányvektora $(3; \sqrt{3})$. Határozzuk meg az egyenesre illeszkedő olyan P pontnak az abszcisszáját, amelynek az ordinátája 6.

566. Írjuk fel
 a) a $(2; 4)$ ponton áthaladó,
 b) a $(-1; 3)$ ponton áthaladó,
 c) a $(-2; -1)$ ponton áthaladó,
 d) a $(0; 0)$ ponton áthaladó

567. Írjuk fel a $(4; 5)$ ponton áthaladó egyenesek egyenletét. Ezek közül és a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos az x , illetve az y tengelyel?

568. Adjuk meg az alábbi pontpárokon áthaladó egyenesek egyik irányvektorát:

- a) $(7; 8)$ és $(0; 0)$;
 b) $(2; 3)$ és $(9; 5)$;
 c) $(2; 1)$ és $(-1; 4)$;
 d) $(3; -4)$ és $(1; 2)$;
 e) $(-7; -5)$ és $(-3; 0)$;
 f) $(-4; -3)$ és $(2; 5)$;
 g) $(3; 2)$ és $(8; 1)$;

- h) $\left(\frac{1}{4}; -\frac{2}{1}\right)$ és $\left(-3; -\frac{3}{1}\right)$;
 i) $\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{5}\right)$ és $\left(-\frac{2}{1}; -\frac{8}{4}\right)$;
 j) $\left(\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right)$ és $\left(\frac{3}{1}; -\sqrt{3}\right)$;

- k) $(-3, 4; 8, 2)$ és $(5, 6; -1, 3)$;
 l) $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$.

569. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón és a
 a) $(4; 3)$; b) $(5; -2)$; c) $\left(\frac{1}{4}; \frac{6}{1}\right)$; d) $(3, 1; 4, 6)$; e) $(-1, 8; 10, 8)$;

- f) $(a; b)$; g) $(-a; b)$; h) $(a; -a)$; i) $(a; -b)$ ponton.

570. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a következő két ponton:

- a) $(9; 6)$ és $(4; 3)$;
 b) $(4; 6)$ és $(-3; -1)$;
 c) $(-2; -3)$ és $(4; -1)$;
 d) $(4; 5)$ és $(0; 0)$;

- e) $\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right)$;

- f) $(-2, 5; -1, 3)$ és $(2, 5; -4, 3)$;

Adjuk meg az egyenesek egyik irányvektorát, és írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét is.

$$\begin{aligned} d) \quad 3x + \frac{y}{2} &= 1; & e) \quad 3x - \frac{y}{3} &= 1; & f) \quad x + y &= 1. \\ a) \quad \frac{3}{x} + \frac{4}{y} &= 1; & b) \quad \frac{2}{x} - \frac{4}{y} &= 1; & c) \quad x + \frac{3}{y} &= 1. \end{aligned}$$

573. Ábrázoljuk a tengelymetszetek segítségével a következő egyeneseket: egyenletét, ha az átlók a koordináta-rendszer tengelyeire illeszkednek. 574. Egy rombusz átlóinak a hossza 10 és 8 egység. Írjuk fel az oldalainak az egyenletét az egyenes tengelymetszetes egyenletének nevezetűk.)

ahol $a \neq 0$ és $b \neq 0$. (a -t és b -t az egyenes tengelymetszeteinek, a felírt

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1,$$

573. Igazoljuk, hogy a $P_1(a; 0)$ és a $P_2(0; b)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete: mondjuk.)
(Ha az egyenes metszi a koordináta-rendszer tengelyeit vagy azok valamelyikét, akkor az x tengelyből kimentszett pont a abszcisszáját és az y tengelyből kimentszett pont b ordinátáját az egyenes tengelymetszeteinek

$$\begin{aligned} c) \quad 5 \text{ és } -6; & \quad f) \quad \frac{3}{4} \text{ és } -\frac{5}{4}; & i) \quad a \text{ és } -a. \\ b) \quad -3 \text{ és } 4; & \quad e) \quad \frac{3}{2} \text{ és } 4; & h) \quad a \text{ és } a; \\ a) \quad \frac{2}{a} \text{ és } \frac{2}{b}; & \quad d) \quad -\frac{2}{a} \text{ és } -\frac{3}{b}; & g) \quad \frac{0,3}{a} \text{ és } \frac{1,7}{b}. \end{aligned}$$

572. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek tengelymetszetei: az $x_1 = x_2$ vagy az $y_1 = y_2$.

Írjuk fel az egyenes egyenletét azokban a speciális esetekben is, amikor $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.

571. Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1; y_1)$ és a $P_2(x_2; y_2)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} g) \quad (0,8; 1,2) \text{ és } (1,2; 0,2); & \quad h) \quad \left(2; -\frac{1}{2}\right) \text{ és } \left(-4; \frac{3}{2}\right); \\ i) \quad (3; 4) \text{ és } (8; 4); & \quad j) \quad \left(0; \frac{3}{5}\right) \text{ és } \left(0; -\frac{5}{2}\right); \\ k) \quad (0; 8) \text{ és } (-3; 0); & \quad l) \quad (a; a) \text{ és } (b; b); \\ m) \quad (\sqrt{3}; \sqrt{2}) \text{ és } (3\sqrt{2}; -2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

576. Számítsuk ki az alábbi egyenesek tengelymetszeit:
- a) $3x+2y=6$; b) $8x+5y=40$; c) $6x-4y=24$;
 d) $2x+3y=-6$; e) $4x-5y+20=0$; f) $3x-2y+4=0$;
 g) $x+3y-5=0$; h) $4x+5y+1=0$; i) $4x+By+C=0$;
 j) $5x=3y-15$; k) $y=-x+3$; l) $y=\frac{5}{2}x-3$;
 m) $7x-5y=0$; n) $2x+3y=0$.
- Adjuk meg az egyenesek egyik irányvektorát, és írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét is.
577. Mekkora annak a háromszögnek a területé, amelyet
 a) $4x+3y=24$; b) $\frac{3x-y}{4y-5}=\frac{2}{3}$; c) az $y=\frac{2}{3}x-3$ egyenes
 zár be a koordinátatengelyekkel?
578. Mekkora szakaszt vágunk le a tengelyek a) $12x-5y+60=0$; b) a
 $3x-2y+4=0$; c) az $5x-3y+4=0$; d) a $2x-3y+6=0$ egyenesekből lemet-
 szett szeletek reciprok értékeinek összege állando. Bizonyítsuk be, hogy
 ekkor az egyenes egy rögzített pont körül forog.
580. Egy egyenes áthalad a) $(4; 2)$; b) $(-2; 1)$; c) $(-5; -2)$ ponton, és
 tengelymetszeteinek abszolút értéke egyenlő. Határozzuk meg az egyenes
 egyenletét.
581. Egy egyenes áthalad a) $(3; -2)$ ponton, és a koordináta-rendszer tengelyeit
 a) $P_1(a; 0)$ és a $P_2(0; b)$ pontokban metszi. Írjuk fel az egyenes egyenletét,
 ha kikötjük azt, hogy $|b|=3|a|$ legyen. Hány megoldás van?
582. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik áthalad a) $(4; 1)$
 ponton, és a tengelymetszeteinek összege 9 hosszúságúegység.
583. Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha tengelymetszetei a és b, áthalad
 a) $(6; -1)$ ponton és $|ab|=1$;
 b) $(-4; 1)$ ponton, és a tengelyekkel alkotott háromszög területé:
 $\frac{1}{2}|ab|=1$;
 c) a $P(u; v)$ ponton és a tengelyekkel alkotott háromszög területé:
 $\frac{1}{2}|ab|=t$, ahol t adott pozitív szám. Mi a megoldhatóság feltétele?
- Hány megoldás lehetséges?
584. Írjuk fel a) $(4; 6)$; b) $(-3; 2)$ ponton áthaladó egyenesek közül annak
 az egyenesnek az egyenletét, amelynek a koordináta-rendszer tengelyei
 közé eső szakaszát az adott pont felezi.
585. Határozzuk meg annak a pontnak a koordinátáit, amely az $A(-4; -3)$,
 $B(-1; 4)$ pontokon áthaladó egyenesre illeszkedik és abszcisszája 2.
586. Egy egyenes áthalad a) $(7; 4)$ ponton, és a -1 abszcisszájú pontja felezi az
 egyenesnek a) $(7; 4)$ és az x tengely közötti szakaszát. Írjuk fel az egyenes
 egyenletét.
587. Egy szabályos hatszog középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja,
 a hatszog egyik csúcsa a) $(6; 0)$ pont. Írjuk fel az oldalak egyenletét.

588. Írjuk fel a háromszög súlyvonalainak és középvonalainak egyenletét, ha csúcsai:
- a) $A(3; 7), B(1; 1), C(8; -4)$;
 b) $A(2; 3), B(-4; -2), C(6; -6)$.
589. A koordináta-rendszer tengelyei és a $bx + ay = ab$ egyenes háromszöget határoznak meg ($a \neq 0$ és $b \neq 0$). Írjuk fel a súlyvonalak és a középvonalak egyenletét.
590. Bizonyítsuk be, hogy
- a) az $(1; -9)$; $(7; 6)$ és $(3; -4)$;
 b) a $(0; 2)$; $(4; 1)$ és $(16; -2)$
- pontok egy egyenesre illeszkednek.
591. Vizsgáljuk meg, hogy egy egyenesre illeszkedik-e a következő három pont:
- a) $(-2; -8)$; $(1; -7)$; $(10; -4)$;
 b) $(3; 8)$; $(5; 4)$; $(6; 2)$;
 c) $(3; -5)$; $(-2; 4)$; $(8; -14)$;
 d) $(3; -4)$; $(2; 0)$; $(4; -1)$;
 e) $(3; 1)$; $(4; 2)$; $(0; -2)$.
592. Mi a feltétele annak, hogy az $(a; b)$, $(b; a)$, $(2a; -b)$ pontok egy egyenesre illeszkedjenek?
593. Írjuk fel az $A(1; 6)$ ponton áthaladó olyan egyenesnek az egyenletét, amely a $B(1; 1)$ és $C(3; 5)$ pontok között halad, és tölük egyenlő távolságra van. Mekkora ez a távolság?
594. Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja az origóban van, alapja az $y = -2$ egyenesre illeszkedik, az alapon fekvő szögei 30° -osak. Írjuk fel hiányzó két oldalának az egyenletét, és határozzuk meg a csúcsainak koordinátáit.
595. Valamely háromszög egyik oldal egyenesének az egyenlete: $2x - 3y - 9 = 0$. Az oldal végpontjainak abszcisszája: $x_1 = 3$; $x_2 = 9$. A háromszög súlypontja $(5; 4)$. Mekkora az oldalak és a szögek?
596. Milyen szög alatt kell az $A(5; 4)$ pontból fényugarat ejteni az x tengelyre, hogy az x tengelyről visszaverett fényugár áthaladjon a $B(-2; 3)$ ponton? Az $A(-2; 3)$ pontból fényugár esik az x tengelyre. A fényugár irány-szöge 60° . A sugár az x tengelyről visszaverődik. Határozzuk meg a beeső és a visszaverett fényugár által meghatározott egyenesek egyenletét. Határozzuk meg a koordináta-rendszer x tengelyén a P pontot úgy, hogy az APB törött vonal hossza a lehető legkisebb legyen, ha $A(-4; 8)$ és $B(2; 4)$.
599. Egy adott egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektort az egyenes normálvektorának mondunk.
- Írjuk fel
- a) az $(5; 2)$ ponton áthaladó, $n(-1; 4)$ normálvektoru,
 b) a $(-4; 8)$ ponton áthaladó, $n(3; -2)$ normálvektoru,
 c) a $(-6; -4)$ ponton áthaladó, $n(-2; -4)$ normálvektoru,
 d) a $(0; 0)$ ponton áthaladó, $n(-5; 2)$ normálvektoru
- egyenes egyenletét.

600. Határozzuk meg az alábbi egyenesek egyik irányvektorát és egyik normálvektorát:

a) $y - x = 0$; b) $x - y = -3$; c) $2x - y = 4$;

d) $3x - y = 1$; e) $2x + y = -1$; f) $\frac{3}{2}x + y = 2$;

g) $\frac{4}{3}x - y = -5$; h) $\frac{1}{2}x - y = 4$; i) $\frac{3}{x} - y = -1$;

j) $\frac{x}{4} + y = -2$; k) $3x + 2y = 10$; l) $abx + (a^2 + b^2)y = 0$.

Abrajoljuk az egyeneseket a normálvektor, illetve az irányvektor segítségével.

601. Egy mozgó pont koordinátáit az

$$x = a \cos^2 t, \quad y = a \sin^2 t$$

egyenletek határozzák meg, ahol t az idő és $a > 0$. Milyen pályán mozog a pont?

602. λ milyen értéke mellett jelent a

$$\lambda x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

egyenlet egyenespárt?

KÉT EGYENES METSZÉSPONTJA

603. Egy személyautó délben indul egyenes útvonalon A helységből a 300 km-

re fekvő B helységbe 40 km/óra átlagsebességgel. Egy másik személy-

autó 2 óra múlva indul A helységből az első autó útvonalán 60 km/óra

átlagsebességgel. Állapítsuk meg grafikusán és számításal is, hogy mikor

és hol éri utol a második autó az első!

604. Egy személyautó délben indul A helységből a 400 km-re fekvő B helységbe

50 km/óra átlagsebességgel. Egy személyautó 13 órakor indul 40 km/óra

átlagsebességgel B -ből A felé. Állapítsuk meg grafikusán és számításal is, hogy mikor és hol találkoznak!

605. Számítsuk ki az

a) $y = x + 3$ és az $y = -x - 8$;

b) $y = \frac{x}{2} - 2$ és az $y = -2x + 5$;

c) $x + 2y = 12$ és az $5x - 3y = -5$;

d) $3x + y + 7 = 0$ és az $x - 4y - 2 = 0$;

e) $2x + 7y - 8 = 0$ és az $9x - 4y + 35 = 0$;

f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ és az $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$;

g) $\frac{y-1}{x-1} = 3$ és az $\frac{y-1}{y-2} = 2$;

$$h) y = ax + b \text{ és az } y = cx + d;$$

$$i) y = ax + b \text{ és az } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

606. Valamely háromszög oldaljegyeneseinek egyenlete: egyenesek metszéspontját.

$$a) 4x - 5y = -13; \quad b) y = 3x - 4; \quad c) y = 2x + 3;$$

$$7x + 2y = 31; \quad x - 4y = 4; \quad \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1;$$

$$3x + 7y = 1; \quad 2x + y = 3; \quad 3x + 5y + 10 = 0.$$

607. Valamely háromszög oldaljegyeneseinek egyenlete: Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

$$a) x + 1 = 0; \quad b) x + y - 2 = 0; \quad c) x - y - 2 = 0;$$

$$y - x + 2 = 0; \quad 3x - 5y - 14 = 0; \quad y + x - 5 = 0;$$

608. Valamely háromszög oldaljegyeneseinek egyenlete: Számítsuk ki a háromszög területét és területét.

$$a) 5x - 3y = 1; \quad b) x + y = 11; \quad c) 5x + y = 13;$$

$$15x - y = 67; \quad x = 4y - 19; \quad 2x = 3y - 18;$$

609. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelynek oldalait az $y = -8x + 15$; $y = 2x - 7$ egyenesekre és az x tengelyre illeszkednek. Forgassuk meg a háromszöget az x tengely körül. Számítsuk ki a kelet-kező kettős kup térfogatát és felszínét.

610. Alapítsuk meg, hogy az alábbiak közül melyik három egyenesnek van közös metszéspontja:

$$a) 3x - 4y + 9 = 0; \quad b) 4x - 6y + 15 = 0; \quad c) 3x - y - 1 = 0;$$

$$x + 2y + 4 = 0; \quad 5x + 4y + 13 = 0; \quad 2x - y + 3 = 0;$$

$$5x - 7y + 6 = 0; \quad x + 12y - 3 = 0; \quad x - y + 1 = 0;$$

$$3x - 5y - 8 = 0;$$

611. Három egyenes közül az első áthalad az origón és irányvektora $(1; 1)$, a második tengelymetszetei 2 és 5, a harmadik áthalad az $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ és $(-2; 2)$ pontokon. Van-e közös pontja a három egyenesnek?

612. Bizonyítsuk be, hogy az $ax + by = 1$, $bx + ay = 1$ és $x - y = 0$ egyeneseknek csak egy közös pontja van. Milyen kikötést kell tennünk a -ra és b -re?

613. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ egyenesek egy pontban messék egymást?

614. Valamely háromszög csúcsai: $(-3; 4)$; $(1; 8)$; $(5; 2)$. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

615. Számítsuk ki a négyzet területét, ha oldalai a következő egyenesekre illeszkednek:
- a) $x - 2y - 3 = 0$; $2x + y + 4 = 0$; $x - 2y + 4 = 0$; $x + 6y - 21 = 0$;
 b) $5x - 2y + 23 = 0$; $x + 6y - 21 = 0$; $x - 10y - 5 = 0$;
 c) $y = 3x + 2$; $3y = 2x + 6$; $4x + y = 16$; $5y = x - 4$.
616. Egy négyzet két szomszédos oldal egyeneseinek egyenlete: $3x - 4y = 8$ és $x + 2y = 16$. A metszéspontjukkal szemközti csúcs az origó. A másik két csúcsot összekötő átló egyeneseinek egyenlete: $3x + y = 13$. Számítsuk ki a négyzet területét.
617. Legyen $A_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$
 $A_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
- Bizonyítsuk be, hogy az $A_1 + \lambda A_2 = 0$ olyan egyenesnek az egyenlete, amely áthalad az $A_1 = 0$ és az $A_2 = 0$ egyenesek metszéspontján. (Ki-kötjük, hogy a két adott egyenes ne legyen párhuzamos.)
618. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad
 a) a $3x - y + 2 = 0$ és az $x + 2y - 3 = 0$ egyenesek metszéspontján és az $(1; 2)$ ponton;
 b) a $2x + 3y + 1 = 0$ és a $6x - 5y - 3 = 0$ egyenesek metszéspontján és a $(-2; -2)$ ponton;
 c) a $3x - 4y + 13 = 0$, $11x + 7y - 104 = 0$ és a $4x - y + 7 = 0$, $3x - y + 5 = 0$ egyenese párok metszéspontján.
619. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely
 a) áthalad az $x - 3y - 6 = 0$ és a $4x + y = 0$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $(1; -3)$;
 b) áthalad a $2x + 3y + 1 = 0$ és a $6x - 5y - 3 = 0$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $(1; 2)$.
620. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad
 a) a $3x + 4y = 23$ és a $6x - 7y = 16$ egyenesek metszéspontján, és az y tengelyből 3 egységet vág le;
 b) a $4x - 7y + 39 = 0$ és az $5x + 4y - 15 = 0$ egyenesek metszéspontján, és az x tengelyből -4 egységet vág le.
621. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $3x - 2y + 4 = 0$ egyenes -3 ordinátájú pontján, és az x tengelyt az origótól ugyanolyan távolságban metszi, mint az adott egyenes az y tengelyt.
622. Hogyan kell az m értéket megválasztani úgy, hogy az $y = mx + 4$ egyenes áthaladjon a $2x - y + 1 = 0$ és az $y = x + 5$ egyenesek metszéspontján? Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $2x - 6y + 5 = 0$ és a $2x - 4y + 3 = 0$ egyenesek metszéspontján, és az első egyenessel 45° -os szöget zár be.
624. Az $y = -x + b$ egyenesnel határozzuk meg b értéket úgy, hogy az egyenesből a $-x + 2y = 6$, $5x - y = 2$ egyenesek egységnyi hosszúságú szakaszt vágjanak ki.
625. Az $y = -\frac{4}{3}x + b$ egyenesnel határozzuk meg b értéket úgy, hogy az

$$j) 123^\circ 24'.$$

$$a) 45^\circ; b) 30^\circ; c) 60^\circ; d) 135^\circ; e) 150^\circ; f) 120^\circ; g) 10^\circ; h) 142^\circ; i) 48^\circ;$$

635. Adjuk meg az egyenes egyik irányvektorát, ha az irányszöge

$$e) \varphi (1; -1); -1); f) \varphi (1; 2); g) \varphi (5; 7); h) \varphi (-1; 0,49).$$

$$a) \varphi (1; \sqrt{3}); b) \varphi (1; -\sqrt{3}); c) \varphi (3; \sqrt{3}); d) \varphi (-\sqrt{3}; 1);$$

634. Számítsuk ki az egyenes iránytangensét és irányvektorát, ha irányvektora

PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES EGYENESEK

az átlaghoz tartozó magasságvonalra illeszkedik.

633. Rajzoljunk egy derékszögű háromszög mindegyik befogója fölé kitéle egy-egy négyzetet, azután az átlagó végpontjait kössük össze a szemközti befogóra rajzolt négyzetnek a kiszemelt csücskétől leg távolabb levő csücskével. Bizonyítsuk be, hogy az így adódó két egyenes metszéspontja

632. Az $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ és $\overline{A_2B_2}$ azonos irányúak. Az A_1A_2 és B_1B_2 , az A_2A_3 és B_2B_3 , az A_3A_4 és B_3B_4 egyenespárok metszéspontjai rendre C , C_1 , C_2 . Bizonyítsuk be, hogy a C , C_1 , C_2 pontok egy egyenesre illeszkednek.

adunk is az m -nek.

egyenesek mindig ugyanazon a ponton haladnak át, bármilyen értéket

$$(m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$$

631. Bizonyítsuk be, hogy az

630. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen értéket is adunk m -nek, az $mx + 3y - 4m + 1 = 0$ egyenesek a sík egy rögzített pontján haladnak át.

egyenesek az $x + y = 0$ egyenesen metszik egymást, ha $OA_1 \neq OB_2$.

629. Az $x - y = 0$ egyenesen rögzítsünk egy pontot. Ezen a ponton át két

amelynek a területe 2 t ?

628. Adott két egyenes: $x - 3y = -9$, $8x + 3y = 36$. E két egyenes a koordi-

lata t . Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely a két egyenes metszéspontján halad át, és a koordinátatengelyekkel olyan háromszöget alkot,

$$t = \left| \frac{2(m - m_1)}{(b - b_1)^2} \right|.$$

627. Igazoljuk, hogy az y tengely, az $y = mx + b$ és az $y = m_1x + b_1$ egyenesek

626. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek a $3x - 5y = 6$ és a $4x + y + 6 = 0$ egyenesek közötti szakaszát az origó felezi.

egyenestől az $5x - 4y = 0$ és az $x - 4y = 0$ egyenesek 5 hosszúság-

636. Határozzuk meg az egyenes iránytangensét, ha az egyenlete:

$$\begin{array}{ll}
 a) 2x - y = 0; & o) \frac{x}{4} + y = \frac{5}{4} \\
 b) x - y = 0; & p) \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-2x} - \frac{4}{1} = 0. \\
 c) 2x - 3y = 0; & \\
 d) x + 2y = 0; & \\
 e) 3x + 4y = 0; & \\
 f) \sqrt{3}x + y = 0; & \\
 g) 3x + y = 0; & \\
 h) x - y = -4; & \\
 i) 2x - 3y = 15; &
 \end{array}$$

637. Írjuk fel az egyenes iránytényezős egyenletét, azután ábrázoljuk az egyenest az y tengellyel való metszéspont és az iránytényező segítségével:

$$\begin{array}{ll}
 a) x + y = 1; & p) \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-2x} - \frac{4}{1} = 0. \\
 b) x - y = 5; & \\
 c) 3x + y = 4; & \\
 d) 3x - 2y = 8; & \\
 e) 5x + 3y = 12; & \\
 f) 4y - 8 = 0; & \\
 g) 3x + 12 = 0; & \\
 h) 4x - 2y = 7; & \\
 i) 2x - 3y + 6 = 0; & \\
 j) x - 3y - 9 = 0; &
 \end{array}$$

638. Állapítsuk meg ábrázolás nélkül, hogy a következő egyenespárok közül melyek párhuzamosak egymással, és melyek merőlegesek egymásra:

$$\begin{array}{ll}
 a) x + 2y = 6 & \text{és} & x + 2y = 4; \\
 b) 2x - y = 4 & \text{és} & 2x - y = -1; \\
 c) x + 2y = 6 & \text{és} & -2x + y = 3; \\
 d) \sqrt{2}x + y = 5 & \text{és} & \sqrt{2}x - 2y = 6; \\
 e) 3x + 5y = 1 & \text{és} & y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{5}; \\
 f) 2x + 3y = 5 & \text{és} & y = \frac{2}{3}x - 6; \\
 g) 4x - 5y = 12 & \text{és} & 8x - 10y = 7; \\
 h) 5x - 6y = 30 & \text{és} & 12x + 10y = 8.
 \end{array}$$

639. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy

$$\begin{array}{ll}
 a) \text{ az } y = \frac{2}{p}x + 1 \text{ és az } y = 4x - 8; \\
 b) \text{ az } y = \frac{3}{p}x - 4 \text{ és az } y = \frac{12}{2}x + 3;
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 c) \text{ a } 2x - 5y = 3 \text{ és a } 3px + y = 1; \\
 d) \text{ a } 3x - 4y = 5 \text{ és a } 2x + 3py = 0; \\
 e) \text{ a } 3px - 8y + 13 = 0 \text{ és a } (p+1)x - 2py - 20 = 0
 \end{array}$$

egyenesek párhuzamosak legyenek egymással.

640. Adott a következő három egyenes:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{x}{a+a'} + \frac{y}{b+b'} = \frac{1}{2}.$$

Mi a szülőkés és elégséges feltétele annak, hogy a három egyenes párhuzamos legyen?

641.

Határozzuk meg p értékét úgy, hogy

- a) az $y = x + 2$ egyenes merőleges legyen az $y = px + 1$ egyenesre;
 b) az $y = \frac{b}{a}x - 4$ egyenes merőleges legyen az $y = -px + 2$ egyenesre;
 c) a $\sqrt{3}x + p\sqrt{2}y = 5$ egyenes merőleges legyen a $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5$ egyenesre;
 d) a $2x - 5y + 3 = 0$ egyenes merőleges legyen a $3px + y - 2 = 0$ egyenesre;
 e) a $(3p+2)x + (1-4p)y + 8 = 0$ egyenes merőleges legyen az $(5p-2)x + (p+4)y - 4 = 0$ egyenesre.

642.

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad

- a) a (3; 4) ponton és párhuzamos az $y = 2x - 3$ egyenessel;
 b) a (2; -3) ponton, és párhuzamos a $3x - 5y = 15$ egyenessel;
 c) a $\left(-3\frac{1}{2}; 2\frac{3}{2}\right)$ ponton, és párhuzamos a $4x - 3y - 12 = 0$ egyenessel;
 d) a $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ ponton, és párhuzamos a (-1; 3) irányvektorú egyenessel;
 e) a (3,5; -2,1) ponton, és párhuzamos a (2; -3) irányvektorú egyenessel;
 f) az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ponton, és párhuzamos az $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 1$ egyenessel.

643.

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad

- a) az origón, és merőleges az $y = \frac{1}{5}x - 5$ egyenesre;
 b) az origón, és merőleges az $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ egyenesre;
 c) a (2; 3) ponton, és merőleges az $y = x - 4$ egyenesre;
 d) az (5; 2) ponton, és merőleges az $y = \frac{3}{2}x - 1$ egyenesre;
 e) a (0; -4) ponton, és merőleges a $3x + 4y = 12$ egyenesre;
 f) a (-2; 3) ponton, és merőleges a $7x - 5y - 7 = 0$ egyenesre;
 g) az x tengely 3 abszcisszájú pontján, és merőleges a $2x - 5y = 10$ egyenesre;
 h) az y tengely -4,2 ordinátájú pontján, és merőleges a $3x + 4y + 1 = 0$ egyenesre;
 i) a $\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{2}\right)$ ponton, és merőleges a $2x - 3y = 4$ egyenesre;
 j) a (4; -1) ponton, és merőleges a (-3; 2) irányvektorú egyenesekre;
 k) a (-4; -2) ponton, és merőleges a (4; 0) irányvektorú egyenesekre;

644. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az (1; 5) ponton, párhuzamos, illetve merőleges a (4; -2) és az (5; 3) pontokon áthaladó egyenesre;
- a) az (1; 5) ponton, párhuzamos, illetve merőleges a (4; -2) és az (5; 3) pontokon áthaladó egyenesre;
- b) a (3; -4) ponton, párhuzamos, illetve merőleges a (6; 4) és a (-2; -3) pontokon áthaladó egyenesre;
- c) az (5; 0) ponton, párhuzamos, illetve merőleges a (-2; -4) és a (-3; -2) pontokon áthaladó egyenesre;
- d) a (3; 2) ponton, párhuzamos, illetve merőleges a (4; 5) és a (-3; 5) pontokon áthaladó egyenesre.
645. Egy egyenes áthalad a $\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ és az $\left(x; \frac{4}{3}\right)$ pontokon, és merőleges az $y - 4x + 3 = 0$ egyenesre. Számítsuk ki a második pont ismeretlen abszcisszáját.
646. Egy egyenes áthalad a (-6; 4) és a (4; y) pontokon, és párhuzamos a $4x + 3y = 5$ egyenessel. Számítsuk ki a második pont ismeretlen ordinátáját.
647. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $x + 2y - 12 = 0$ és a $4x - 3y + 7 = 0$ egyenesek metszéspontján, és párhuzamos, illetve merőleges az $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ egyenesre.
648. Mely pontban metszi a kezdőponton áthaladó és az $y = -2x + 3$ egyenesel párhuzamos egyenes az $x + 2y = 4$ egyenest?
649. Határozzuk meg az e és az f egyenesek metszéspontját és hajlásszögét, ha
- a) az e egyenes párhuzamos az $x - 3y + 5 = 0$ egyenessel, és áthalad a (-1; 0) ponton; az f egyenes áthalad a (3; 7) ponton, és merőleges az $x - y - 1 = 0$ egyenesre;
- b) az e egyenes áthalad a kezdőponton és az $x + y - 2 = 0$, $3x - y + 7 = 0$ egyenesek metszéspontján; az f egyenes áthalad a (3; -5) ponton, és merőleges a $2x - 3y - 8 = 0$ egyenesre.
650. Határozzuk meg annak a szakasznak a középpontját, amelynek az egyik végpontja:
- a) a (-4; 3) pont, a másik pedig ezen a ponton áthaladó és az $5x - 3y = 7$ egyenessel párhuzamos egyenesnek az y tengelyre illeszkedő pontja;
- b) a (6; 4) pont, a másik pedig ezen a ponton áthaladó és a $4x + 3y = 8$ egyenesre merőleges egyenesnek az x tengelyre illeszkedő pontja.
651. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely
- a) a (-5; -2) és a (-3; 4);
- b) a (4; 1) és az (5; -3)
- pontokat összekötő szakaszt merőlegesen felezi.
652. Igazoljuk, hogy a (7; -14) pont a (-3; 1) és a (13; 3) pontokat összekötő szakasz felező merőlegessére illeszkedik.
653. Határozzuk meg
- a) a $-5x + 4y + 28 = 0$ egyenesnek azt a pontját, amely az (1; 5) és a (7; -8) pontoktól;

654. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $3x-4y=12$ egyenes tengelyek közé eső szakaszának a felezéspontján, és merőleges az adott egyenesre.
655. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai: $a)$ az $A(2; 1)$; $b)$ az $B(5; 3)$ és $c)$ az $C(3; -4)$ pontok. Határozzuk meg a háromszög oldalainak az egyenletét és csúcsainak a koordinátáit.
656. Húzzunk pontoktól egyenlő távolságra van.
- $a)$ a $(7; 11)$ ponton át olyan egyenest, amely a $(3; 4)$ és a $(9; 5)$ pontoktól; $b)$ a $(7; 10)$ ponton át olyan egyenest, amely a $(4; 5)$ és a $(-4; -3)$ pontoktól; $c)$ az $(1; 2)$ ponton át olyan egyenest, amely a $(2; 3)$ és a $(-4; -5)$ pontoktól egyenlő távolságra van.
657. Bizonyítsuk be, hogy az $(1; 3)$, $(6; 5)$, $(5; 5)$ és (-7) pontok derékszögű háromszöget határoznak meg.
658. Adjunk meg a $8x+5y-40=0$ egyeneshez másik kettőt úgy, hogy a három egyenes egyenlő szárú derékszögű háromszöget határozzon meg. Az átfogó az adott egyenesre illeszkedik.
659. Egy derékszögű háromszög átfogóegyeneseinek egyenlete $y=3x-5$. Egyik befogóegyeneseinek egyenlete $x+y-5=0$, és az ezzel szemközti csúcs a befogóegyenestől a^2+b^2 egyenesre a koordináta-rendszer kezdőpontjából merőlegest állítunk. Határozzuk meg a merőleges talpontjának a koordinátáit.
662. Adott két pont: $A(-4; 2)$, $B(2; -6)$. Határozzuk meg az y tengelyen az M pontot úgy, hogy az AM és a BM egyenesek merőlegessé legyenek egymásra.
663. Egy derékszögű háromszög átfogójának a két végpontja a $(4; 2)$ és a $(-6; -4)$ pont. Utóbbit csúcsból kiinduló befogóegyeneseinek $y=\frac{1}{2}x-1$.
664. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak a koordinátáit, ha az egyik oldal-egyeneseinek egyenlete $5x-3y+2=0$, a másik két oldalához tartozó magasságvonala egyenlete $4x-3y+1=0$ és $7x+2y-22=0$.
665. Egy háromszög két csúcsa: $a)$ $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$. Magasságpontja: $M(1; 2)$; $b)$ $A(3; -1)$, $B(5; 7)$. Magasságpontja: $M(4; -1)$; $c)$ $A(2; 1)$, $B(4; 9)$. Magasságpontja: $M(3; 4)$.
- Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

666. Írjuk fel a háromszög oldal egyeneseinek egyenletét, ha az
 a) egyik csúcsa $A(3; -4)$, és két magasságvonalának az egyenlete $tx - 2y - 1 = 0$ és $2x - 7y - 6 = 0$,
 b) egyik csúcsa $A(1; 2)$, és két magasságvonalának az egyenlete $2x - 3y + 1 = 0$ és $x + y = 0$.
667. Egy háromszög csúcsai: $A(-3; 4)$, $B(4; 1)$, $C(0; 9)$.
 Számítsuk ki a talponti háromszög területét.
668. Egy háromszög csúcsai: $(-3; 2)$, $(-1; 6)$, $(4; 2)$. Igazoljuk, hogy az oldalfelező merőlegesek egy pontban metszik egymást.
669. Igazoljuk, hogy az $x - y = 1$; $x + 2y = 5$ és $a - x + 4y = 1$ egyeneseikkel meghatározott háromszög oldalfelező merőlegesek egy pontban metszik egymást.
670. Egy háromszög csúcsai:
 a) $(0; 0)$; $(8; 0)$; $(2; 6)$;
 b) $(0; 0)$; $(-6; 0)$; $(-4; -8)$;
 c) $(0; 0)$; $(4; -2)$; $(12; 0)$;
 d) $(a; 0)$; $(0; b)$; $(-c; 0)$;
 e) $(2; 0)$; $(3; 2)$; $(4; -3)$;
 f) $(-2; 0)$; $(5; -1)$; $(1; 5)$.
- Igazoljuk, hogy az adott háromszögek magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Számítsuk ki a magasságpont koordinátáit.
671. Határozzuk meg a $(-1; 0)$; $(5; 0)$ és $(1; 4)$ csúcsokkal adott háromszög súlypontjának, magasságpontjának és a körülírt kör középpontjának koordinátáit. Igazoljuk, hogy a három pont egy egyenesen van.
672. Egy háromszög csúcsai $(0; 0)$; $(8; 0)$; $(5; 6)$. Igazoljuk, hogy a súlypont, magasságpont és a köré írt kör középpontja egy egyenesen van.
673. Határozzuk meg a $(2; 7)$; $(-4; -3)$ és $(8; 2)$ csúcsokkal adott háromszög Euler-féle egyenesének egyenletét.
674. Egy háromszög csúcsai: $A(1; -2)$; $B(-3; 4)$; $C(2; -5)$. Számítsuk ki az A csúcshoz tartozó magasságvonal és az AC oldalhoz tartozó súlyvonal metszéspontjának a koordinátáit.
675. Egy négyzet két szemközti csúcsa:
 a) $A(3; 5)$ és $C(4; 2)$; $b) A(1; 2)$ és $C(4; 8)$.
- Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.
676. Egy paralelogramma három csúcsa:
 a) $(3; 1)$; $(1; 3)$; $(0; 0)$;
 b) $(-1; 1)$; $(0; -2)$; $(3; 0)$;
 c) $(3; 8)$; $(5; 1)$; $(4; -3)$;
 d) $(7; -12)$; $(12; 24)$; $(-5; 3)$.
- Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit. (Hány megoldás van?)
677. Igazoljuk, hogy az $x + 2y + 1 = 0$, $6x - 3y = 5$, $y = 2x - 1$ és $4x + 8y + 7 = 0$ egyenesek derékszögű paralelogrammát határoznak meg.
678. Derékszögű paralelogramma két szomszédos csúcsa: $A(-1; -2)$; $B(5; -5)$. Utóbbi csúcson áthaladó átló egyenesének egyenlete $7x + 4y = 15$.
- Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.

679. Egy rombusz két oldal egyeneseinek egyenlete: $x - 3y = 0$, $3x - y + 8 = 0$. A két oldal metszéspontjával szemközti csúcsa (5; 7). Határozzuk meg a rombusz két szimmetriatengelyének az egyenletét.
680. Egy paralelogramma két oldalának egyenlete: $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$. Középpontja az (1; 2) pont. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.
681. Valamely paralelogramma két szomszédos oldal egyeneseinek egyenlete: $3x + y + 10 = 0$, $x - y - 2 = 0$. A két oldal metszéspontjával szemközti átló egyenesének egyenlete $x - 5y - 2 = 0$. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.
682. Igazoljuk, hogy a (0; 1); (4; 2); (3; 6); (-5; 4) pontokkal megadott négy-szögben két derékszög van. Számítsuk ki a területét.
683. Igazoljuk, hogy a (10; 10); (-14; -2); (-10; -10); (4; -24) pontokkal adott négy-szög egyik átlójával két derékszögű háromszögre bontható. Számítsuk ki a területét.
684. Mekkora annak a négy-szögnek a területe, amelyet az $x = 2y - 4$ egyenes, $oré$ a (7; 1) pontból húzott merőleges és a koordinátatengelyek zárnak be?
685. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe téglalapot írunk úgy, hogy a téglalap két oldala a két befogóra illeszkedjen. Ennek az átlóóra illeszkedő csúcsból merőleges egyenest húzunk a téglalapnak vele szemközti átlójára. Mutassuk meg, hogy a merőleges egy rögzített ponton halad át, függetlenül a téglalap méretétől.
686. Az XOY koordináta-rendszerben adott az $OABC$ derékszögű paralelogramma. O az origóval azonos, A az x tengelyre, C az y tengelyre illeszkedik. Bizonyítsuk be, hogy ha a közölt feltételek mellett a derékszögű paralelogramma területe változik, de a kerülete állandó, akkor a változó helyzetű B pontok mind egy egyenesről az AC átlóra húzott merőlegesek a sík ugyanazon pontján haladnak át. Szerkesszük meg ezt a pontot.
687. A koordináta-rendszerben az origóból mérjük fel az x tengelyre az $OA = a$ és az $OA' = a + z$, az y tengelyre az $OB = b$ és az $OB' = b + z$ távolságokat. Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'$ szakasz felező merőlegessége mindig ugyanazon a ponton halad át, ha az a és b rögzített számok, z pedig változik.
688. Az $OABC$ téglalap szemközti O és B csúcsain át párhuzamosokat, a másik két csúcson át ezekre merőlegeseket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett téglalap középpontja azonos az $OABC$ téglalap középpontjával.
689. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű trapéz átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a merőleges szár a párhuzamos oldalak mértani közepe.
690. K , L és O a sík tetszőleges pontjai, a KL szakasz felezőpontja M . O körül K -t $+90^\circ$ -kal, L -t -90° -kal elforgatva a K_1 , illetve az L_1 pontot kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy $K_1L_1 = 2 \cdot OM$ és $K_1L_1 \perp OM$.

691. Számítsuk ki a következő pontoknak az origótól mért távolságát:
 $P_1(3; 4); P_2(3; -4); P_3(-5; -12); P_4(-3; 7); P_5(\sqrt{2}; \sqrt{5});$
 $P_6\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}; \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right); P_7(0; 3); P_8(a; b); P_9(a; -a); P_{10}(a+b; a-b).$

692. Számítsuk ki az
 $a) (1; 3), (4; 7);$
 $c) (-3; 6), (4; 2);$
 $b) (-3; -2), (1; 5);$
 $d) (0; -4), (2; 3);$
 $e) (-6; -2), (-1; -9);$
 $f) \left(\frac{3}{2}; -\frac{4}{7}\right), \left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right);$
 $g) \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right);$
 $h) (-\sqrt{8}; \sqrt{3}), (\sqrt{2}; -\sqrt{12})$ pontok távolságát.

693. Számítsuk ki az $a(4; 3), b(-5; 2), c(-4; -1), d(7; -6)$ vektorok hosszát.
 694. Mekkora a háromszög oldalai, ha csúcsai:

- $a) (2; 3); (5; 7); (10; -3);$
 $b) (3; 4); (-7; -6); (5; -1)?$

695. Számítsuk ki a háromszög kerületét, ha csúcsai:

- $a) (-1; -1); (3; 7); (3; -5);$
 $b) (a; b); (a; -b); (0; -b).$

696. Bizonyítsuk be, hogy

- $a) a(3; 2); (7; -2); (6; 1);$
 $b) az (1; 3); (3; -1); (7; -3)$

- pontok egy egyenlő szárú háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög területét.

697. Bizonyítsuk be, hogy

- $a) a(10; 4); (3; -5); (1; 1);$
 $b) (2; 4); (-2; 3); (8; -20)$

- pontok egy derékszögű háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög köré írható kör területét.

698. Egy háromszög csúcsai $(3; -1); (2; 4); (-1; 5)$. Mekkora a háromszög szögei, és mekkora a területe?

699. Egy háromszög csúcsai: $(-2; 1); (4; 8); (10; 6)$. Számítsuk ki a háromszög legnagyobb szögét.

700. Állapítsuk meg, hogy milyen négyszöget határoznak meg a következő pontok:

- $a) (1; 3); (2; 1); (5; 2); (4; 4);$
 $b) (1; 1); (6; 1); (5; 4); (2; 4);$

701. Rajzoljunk kört, melynek a középpontja a $P(3; 2)$ pont, és áthalad a $P_1(13; -10)$ ponton. Ellenőrizzük, hogy a $P_2(-11; 9)$ pont illeszkedik-e a körre?
 702. Rajzoljunk kört, melynek középpontja a $P(0; -13)$ pont, és érinti az x tengelyt. Vizsgáljuk meg, hogy áthalad-e a kör a $P_1(11; -6)$ és a $P_2(-5; -1)$ pontokon is.
 703. Határozzuk meg annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja a (3; 1) pont, és 6 hosszúságú húrját a (6; 5) pont felezi; b) az (1; -1) pont, és 10 hosszúságú húrját a (2; 0) pont felezi.
 704. Egy kör középpontja a (5; 3), a sugara 5 egység. Milyen hosszú az a húrja, melyet a (3; 2) pont felezi?
 b) (6; -1), a sugara 6 egység. Milyen hosszú az a húrja, melyet a (3; 4) pont felezi?
 705. Milyen összefüggés van azoknak a pontoknak a koordinátái között, melyek egyenlő távolságra vannak a (4; 2) és a (-3; 3); b) a (-3; 5) és a (-4; -2)
 706. Milyen összefüggés van azoknak a pontoknak a koordinátái között, melyek a (6; -2) ponttól 3 egységnyi, b) a (-5; 7) ponttól 2 egységnyi távolságra vannak?
 707. Határozzuk meg a szabályos hatszög középpontjának a koordinátáit, ha két szomszédos csúcsa: $A(2; 0)$ és $B(5; 3\sqrt{3})$.
 708. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amely az origótól és a (9; -3) ponttól egyenlő távolságra van.
 709. Határozzuk meg az y tengelynek azt a pontját, amely az origótól és a (-2; 5) ponttól egyenlő távolságra van.
 710. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amely a (2; 1) és a (6; 5) pontoktól egyenlő távolságra van.
 711. Határozzuk meg az x tengelyen azokat a pontokat, amelyek az (5; 12) ponttól 13 egységnyi távolságra vannak.
 712. Az y tengely mely pontjai vannak 15 egységnyi távolságra a (-5; -9) ponttól?
 713. Két pont távolsága 10 hosszúságú; az egyik pont (4; 5), a másik pont abszcisszája -2. Mekkora az utóbi pont ordinátája?
 714. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a (-4; 2) ponton és az x tengelyt a (2; 0) pontban érinti.
 715. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a (2; 0) ponton, és az y tengelyt a (0; 6) pontban érinti.
 716. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit, ha áthalad a (4; 2) ponton, és mindkét koordinátátengelyt érinti.

717. Egyenlő szárú háromszögben az alap végpontjai $(-1; -1)$ és $(8; 2)$, a szára 5 egység. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.
718. Határozzuk meg a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit, ha csúcsai:
719. Egy négyzet két szomszédos csúcsa:
- a) $A(1; 5); B(0; 6); C(-6; -2);$
 b) $A(2; 1); B(-3; 2); C(-1; 1);$
 c) $A(0; 2); B(1; 1); C(2; -2);$
 d) $A(7; 7); B(0; 8); C(-2; 4);$
 e) $A(4; 0); B(1; 2); C(3; -2).$
720. Egy négyyszög egymás után következő csúcsai: $A(-1; 2); B(4; 3); C(3; 6)$ és $D(1; 5)$. Mekkora a négyyszög szögei?
721. Jelöljük az $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2 -vel, az $a_2y^2 + b_2y + c_2 = 0$ egyenlet gyökei y_1 és y_2 -vel. Fejezzük ki az $A_1(x_1, y_1)$ és az $A_2(x_2, y_2)$ pontok távolságát az együtthatókkal.
722. A koordináta-rendszerben adottak az $A(0; 9); B(6; 3); C\left(-\frac{1}{3}; -1\right); D\left(3; -\frac{7}{2}\right)$ pontok. Határozzuk meg azt a P pontot, amelyre nézve $PA = PB$ és $PC : PD = 2 : 3$.
723. A $2x + y - 3 = 0$ egyenesen határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek az $(1; 1)$ ponttól $\sqrt{5}$ távolságra vannak.
724. Egy téglalap egyik átlója az $x + 13y = 119$, a másik átlója a $11x - 7y = 34$ egyenesre illeszkedik. Az átló hossza $\sqrt{170}$ egység. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.
725. Adott az ABC háromszög két csúcsa és a harmadik csúcsához tartozó belső szögfelező egyenlete: $A(-1; -1); B(1; 2); 2x + y = 1$. Számítsuk ki a hiányzó csúcs koordinátáit.
726. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak koordinátáit, ha egyik oldal egyenlő a $3y = 11$, egyik átlójának az egyenlete: $9x - 7y = 19$, az átló hossza $\sqrt{130}$. Hány megoldás van?
727. Jelöljük az ABC háromszög súlypontját S -sel. Bizonyítsuk be, hogy $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AS^2 + BS^2 + CS^2)$.
728. Adott az ABC háromszög és a síkjában az e egyenes. Határozzuk meg az e egyenesen azt a pontot, amelynek a csúcsoktól mért távolságainak négyzetösszege a legkisebb.

SKALÁRIS SZORZAT, ADOTT PONTON ÁTMENŐ ADOTT NORMALVEKTORÚ EGYENES EGYENLETE, PONT TÁVOLSAGA EGYENESTŐL, KÉT EGYENES HAJLÁSSZÖGE

729. Két vektor skaláris szorzatán a két vektor hosszának és hajlásszögük koszinuszának a szorzatát értjük. Az a és b vektor skaláris szorzatát $a \cdot b$ -vel jelöljük. A definíció szerint:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(a, b)$$

(a, b) az a, b vektorok hajlásszögét jelöli.

Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \text{ ha } a \text{ és } b \text{ egyirányú, akkor } a \cdot b = |a| \cdot |b|,$$

$$b) \text{ ha } a \text{ és } b \text{ ellentétes irányú, akkor } a \cdot b = -|a| \cdot |b|,$$

$$c) a \cdot b = b \cdot a,$$

d) egy vektornak önmagával való skaláris szorzata, amit a vektor négyzetének mondunk, a vektor hosszának a négyzetével egyenlő,
e) az egységvektorok skaláris szorzata a hajlásszögük koszinuszával egyenlő,
f) a nullvektor skaláris szorzata bármely vektoral 0.

730. Megállapodva abban, hogy a nullvektort minden vektorra merőlegesnek mondjuk, bizonyítsuk be, hogy két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

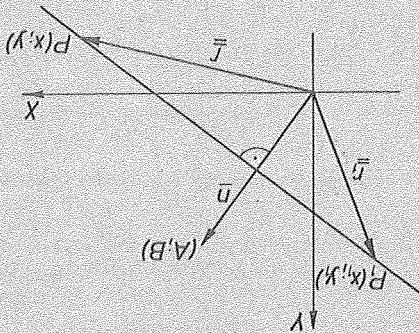
731. Számítsuk ki az a és b vektorok skaláris szorzatát, ha adottak az a és b vektorok koordinátái.

732. A 731. feladat eredményét felhasználva bizonyítsuk be, hogy

$$a) (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

$$b) \lambda \cdot a \cdot b = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b), \text{ ahol } \lambda \text{ egy valós szám.}$$

733



733. Bizonyítsuk be, hogy a P_1 ponton áthaladó, n normálvektorú egyenes vektoregyenlete:

$$n \cdot (r - r_1) = 0,$$

ahol r_1 a P_1 ponthoz, r az egyenes tetszőleges pontjához tartozó helyvektort jelöli (733. ábra).

(Egy adott egyenesre merőleges nullvektortól különböző vektort az egyenes normálvektorának nevezünk.)

734. Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1, y_1)$ ponton áthaladó, $n(A, B)$ normálvektorú egyenes egyenlete:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

(733. ábra).

735. Írjuk fel

- a) $aP_1(5; 2)$ ponton áthaladó, $n(4; 3)$ normálvektoru,
 b) $aP_1(-3; 4)$ ponton áthaladó, $n(2; 1)$ normálvektoru,
 c) $aP_1(-5; -6)$ ponton áthaladó, $n(-2; 3)$ normálvektoru,
 d) $aP_1(0; 0)$ ponton áthaladó, $n(-1; -5)$ normálvektoru,
 e) $aP_1(8; -7)$ ponton áthaladó, $n(-1; -1)$ normálvektoru

egyenest egyenletét.

736. Az

- a) $x+y-1=0$, b) a $3x-4y+5=0$; c) az $5x-y=1$

egyenlethez állapítsuk meg az egyenes egy normálvektorát.

737. Két metsző, nem merőleges egyenes hajlásszögén a két egyenes által meghatározott 2-2 egyenlő szögteremtő között a kisebbet értjük. Igazoljuk, hogy az e_1 és e_2 egyenes ω hajlásszögére

$$\cos \omega = |\cos(n_1, n_2)|,$$

ahol n_1 az e_1 , n_2 az e_2 egyenes egyik normálvektora. Számítsuk ki az egyenesek hajlásszögét, ha egyenletek:

- a) $x-2y+4=0$, $3x-2y-6=0$;
 b) $5x-3y-12=0$, $3x+y-6=0$;
 c) $3x-y=0$, $y+2x-5=0$;
 d) $3x+2y-24=0$, $3x-4y-12=0$;
 e) $3x+4y=0$, $5x-2y-3=0$;
 f) $4x-3y-6=0$, $x-7y-2=0$;
 g) $4x+1=0$, $2x+3y=6$;
 h) $4x-6=0$, $5x-2y-2=0$;
 i) $3x-4=0$, $5y-15=0$;
 j) $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$.

738. Bizonyítsuk be, hogy ha az y tengelyt metsző m_1 , m_2 iránytangensű egyenesek nem merőlegesek egymásra, akkor ω hajlásszögükre

$$\operatorname{tg} \omega = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

739. Számítsuk ki a $(-3; -2)$ és az $(5; 8)$ pontokon áthaladó egyenes és a $6x+5y=30$ egyenes hajlásszögét.

740. Számítsuk ki a háromszög szögét, ha oldal egyeneseinek egyenlete:

- a) $y=2x-1$; $y=x+3$; $y=-x+5$;

- b) $x-5y+9=0$; $3x+2y-7=0$; $2x+y+1=0$.

741. Mekkora szöget zárnak be egymással az $(1; 8)$ és a $(6; 2)$ pontokból az origóba húzott szakaszok?

742. Mekkora a háromszög szögét, ha csúcsai:

- a) $(-1; -2)$; $(2; 3)$; $(4; -1)$;
 b) $(0; 2)$; $(2; 2)$; $(3+\sqrt{3}; 3+\sqrt{3})$;
 c) $(4; 2)$; $(1; 4)$; $(2; -3)$.

- a) $3x+4y+20=0$;
 b) $6x-8y+15=0$;
 c) $\sqrt{2}x+\sqrt{7}y-3=0$;
 d) $x-y+3=0$.

753. Írjuk fel a következő egyenesek normálegyenletét:

P_1 pont az egyenesre illeszkedik, illetve a normál egységvektor a P_1 pontot tartalmazó félsíkba mutat-e vagy sem.

Mégpedig az $\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ nulla pozitív vagy negatív aszerint, hogy a

$$d = \left| \frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha az egyenes normálegyenletébe tetszőleges $P_1(x_1; y_1)$ pont koordinátáit behelyettesítjük, akkor a P_1 pontnak az egyenestől való távolsága:

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

normálegyenlete
 nes normálegyenletének nevezzük. Ha $A^2+B^2 \neq 1$, akkor az egyenes vektor egységvektor, ha tehát $A^2+B^2 = 1$, akkor az egyenletet az egy-

752. Az $Ax+By+C=0$ egyenes egyik normálvektora $n(A, B)$. Ha a normál-

kedik el.
 az egyenes által határolt félsíkoknak egyikében vagy másikában helyez-
 sítjük, pozitív vagy negatív értékekhez jutunk, aszerint, hogy a P_1 pont
 az egyenesen kívül elhelyezkedő $P(x_1; y_1)$ pont koordinátáit behelyette-
 751. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes $Ax+By+C=0$ egyenletébe egy,

nem lehetnek valamennyien egész számok.

750. Bizonyítsuk be, hogy egyenlő oldalú háromszög csúcsainak koordinátái
 $+12=0$, $5x+3y+15=0$ egyenesek húrnegyszöget határoznak meg.

749. Bizonyítsuk be, hogy a $3x-4y-20=0$, $3x+5y-20=0$, $4x-3y+$

- a) $A(-1; 2)$; $B(6; 1)$; $C(5; 6)$; $D(1; 5)$;
 b) $A(5; 4)$; $B(-2; 7)$; $C(-3; -6)$; $D(4; -5)$.

csúcsai:

748. Számítsuk ki a négyszög átlóinak hajlásszögét, ha egymás után következő
 bezáró egyenes egyenletét.

747. Írjuk fel a (3; 4) ponton áthaladó és az $y = x+3$ egyenessel 45° -os szöget
 áthaladó egyenes egyenletét.

746. Írjuk fel a $2x-4y+9=0$ egyenessel 60° -os szöget bezáró és az origón
 ponton halad át, és az $5x-9y=-43$ egyenessel 45° -os szöget alkot.

745. Határozzuk meg annak az egyenesnek egyenletét, amely a (-3; 5)
 $= -x+7$ egyenessel 60° -os szöget alkot.

744. Írjuk fel az (5; 4) ponton áthaladó egyenes egyenletét, amely az $y =$
 egyenletét.

743. Egyenlő szárú háromszög alapegyeneseinek egyenlete $x+y-1=0$. Az egyik
 szár egyenesének egyenlete $x-2y-2=0$. A másik szára illeszkedő pont
 koordinátái (-2; 0). Határozzuk meg a harmadik oldal egyenesének

754. Milyen messze van az origó az
 a) $y = \frac{1}{x} + 3$; b) $x + y = 1$; c) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$;
 d) $4x + 3y - 7 = 0$; e) $Ax + By + C = 0$ egyenestől?
755. Milyen messze van
 a) az (1; 2) pont az $y = -2x + 2$ egyenestől;
 b) a (-3; 9) pont az $x - y = 2$ egyenestől;
 c) a (4; -19) pont a $3x + 17y - 1 = 0$ egyenestől;
 d) a (4; -2) pont a $8x - 15y - 11 = 0$ egyenestől;
 e) az (1; 1) pont az $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ egyenestől;
 f) a (-2; 0) pont a $3x + y = 0$ egyenestől;
 g) a (2; -6) pont a (7; 3) és (5; 4) pontokon áthaladó egyenestől?
756. Egy háromszög csúcsai: A(-5; 0); B(4; 2); C(-1; 8). Számítsuk ki a súlypontnak a B csúcson áthaladó magasságvonalától mért távolságát.
757. Egy háromszög oldaljegyeneseinek egyenlete: $y = -x + 3$; $y = \frac{2}{x}$; $x = 0$. Számítsuk ki a magasságokat.
758. Mekkora a háromszög magasságai, ha a csúcsai:
 A(-4; 6); B(-2; -3); C(4; 5)?
759. Számítsuk ki a háromszög területét, ha a csúcsai:
 a) (0; 0); (3; 4); (7; -1);
 b) (-1; -1); (1; 5); (7; -2);
 c) (4; 2); (9; 4); (7; 6).
760. Egy háromszög oldaljegyeneseinek egyenlete:
 $5x + 2y - 29 = 0$, $9x - y - 43 = 0$, $14x + y - 49 = 0$.
 Milyen messze van a háromszög súlypontja a háromszög oldalaitól?
761. Számításokkal döntjük el, hogy a $P(0; -2)$ és a $Q(1; -4)$ pontokat elválasztja-e a $2x - 4y + 5 = 0$ egyenes.
762. Számítsuk ki a következő egyenesek távolságát:
 a) $3x - y = 6$, $3x - y = 8$;
 b) $x + 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$;
 c) $y = \frac{x}{2} + 3$, $y = \frac{x}{2} - 4$;
 d) $2x + 3y - 8 = 0$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$;
 e) $y = mx + b$, $y = mx + b'$.
763. Számítsuk ki a négyzet területét, ha két oldaljegyenésének egyenlete $3x - 5y = 4$ és $3x - 5y = 5$.

- Az alap egyik pontja $(5; 0)$. Határozzuk meg az alap egyenletét és a csúcsok koordinátáit.
777. Tükörözzük a $P(-5; 13)$ pontot a $2x - 3y - 3 = 0$ egyenesre. Számítsuk ki a tükrökép koordinátáit.
778. Tükörözzük a $P(a; b)$ pontot az $Ax + By + C = 0$ egyenesre. Számítsuk ki a tükrökép koordinátáit.
779. A fénysugár áthalad a $(-2; 8)$ ponton, visszaverődik a $2x + 3y + 6 = 0$ egyenesről, és a $(-7; 20)$ pontra esik. Határozzuk meg a beeső és a visszaverett fénysugár egyenletét.
780. A fénysugár az $x - 2y + 5 = 0$ egyenesen terjed, és a $3x - 2y + 7 = 0$ egyenesről visszaverődik. Határozzuk meg a visszaverett fénysugár pályá-jának az egyenletét.
781. A $2x - y - 5 = 0$ egyenesen keressük meg azt a pontot, amelynek az $A(-7; 1)$ és a $B(-5; 5)$ pontoktól mért távolságainak összege a leg-kisebb.
782. A $3x - y - 1 = 0$ egyenesen keressünk olyan P pontot, amelynek az $A(4; 1)$ és a $B(0; 4)$ pontoktól mért távolságai különbségének abszolút értéke a legnagyobb.

TERÜLETSZÁMÍTÁS

- (Megjegyezzük, hogy területszámítással kapcsolatos feladatok más fejezetekben is találhatók. Ebben a fejezetben a koordináta-geometriaiban használatos terület-képletekkel és azok alkalmazásával ismeretjüket meg az olvasót.)
783. Igazoljuk, hogy a $P_1(0; 0)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ pontokkal meghatározott háromszög területe
- $$T = \frac{1}{2} \left| x_2 y_3 - x_3 y_2 \right|.$$
784. Igazoljuk, hogy a $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ pontokkal meghatározott háromszög területe:
- $$T = \frac{1}{2} \left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|.$$
785. Számítsuk ki a háromszög területét, ha csúcsai:

a)	$(-2, -1); (6, 1); (1, 6);$
b)	$(0; 0); (4; 8); (2; 14);$
c)	$(2; 5); (7; -1); (0; 0);$
d)	$(1; 3); (-1; 4); (0; 0);$
e)	$(4; 0); (-4; 0); (3; 8);$

786. Egy háromszög csúcsai: $A(3; 1); B(7; 4); C(4; 7)$. Számítsuk ki a háromszög magasságait.
787. Egy háromszög két csúcsa az $(5; 1)$ és a $(-2; 2)$ pont, a harmadik csúcsa az x tengelyen van. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit, ha a terület 10 egység.
788. Valamely háromszög területe 15 területegység, két csúcsa $(-1; -1)$ és $(5; 2)$, harmadik csúcsa az $(5; 2)$ ponttól 5 egység távolságra van. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

789. Mekkora a négyszög területe, ha csúcsai rendre:

- a) (2; 1); (8; 3); (6; 6); (3; 4);
 b) (-4; 3); (2; 8); (7; 9); (6; 3);
 c) (8; 4); (7; -3); (-4; -5); (1; 5);
 d) (3; 2); (-8; 9); (-3; 4); (-10; 3).

790. Bizonyítsuk be, hogy a (6; 2); (13; 1); (12; -6); (1; -8) pontok egy deltoid csúcsai. Számítsuk ki területét.

791. Az $A(-8; -14)$; $B(-4; 2)$; $C(5; 8)$ pontokkal megadott háromszögben az AB oldal 1:3 arányban, a BC oldal 1:2 arányban és a CA oldal 1:1 arányban osztjuk. Mekkora területű háromszöget határoznak meg az osztópontok?

792. Egy háromszög csúcsai: $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $C(x_3; y_3)$. Jelöljük ki a P pontot a BC oldalon úgy, hogy $BP = \lambda_1 \cdot PC$, a Q pontot a CA oldalon úgy, hogy $CQ = \lambda_2 \cdot QA$, az R pontot az AB oldalon úgy, hogy $AR = \lambda_3 \cdot RB$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög területe T , akkor a PQR háromszög területe

$$t = \frac{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)}{(1 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3)T}.$$

Mit kapunk akkor, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$?

793. Egy háromszög csúcsai: $A(3; 0)$; $B(18; 15)$; $C(0; 9)$. A háromszög belsője-ben felelt P pont a háromszöget 3 háromszögre bontja. Jelöljük a PAB háromszög területét t_1 -gyel, a PBC háromszög területét t_2 -vel, a PCA háromszög területét t_3 -mal. Számítsuk ki P pont koordinátáit, ha

$$t_1:t_2:t_3 = 1:2:3.$$

794. Igazoljuk, hogy bárhol jelöljük is ki a koordináta-rendszerben a P_1 , P_2 , P_3 pontokat, a $P_1P_2P_3$ háromszög területe: $t = OP_1P_2\Delta + OP_2P_3\Delta + OP_3P_1\Delta$, ahol O az origó.

795. Számítsuk ki a négyszög területét, ha csúcsai pozitív körülírást választva: $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$; $(x_3; y_3)$; $(x_4; y_4)$.
 Alkalmazzuk képletünket a 789. feladatban szereplő négyszögek területének kiszámítására.

796. Egy egyenesen helyezkedik-e el az a három pont, amelyek koordinátái: $(-10; -3)$; $(-1; 1)$; $(6; 4)$?

797. $A(-2; 0)$; $(0; 2)$; $\left(a; \frac{2}{3}a\right)$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Számítsuk ki harmadik pont koordinátáit.

798. A koordináta-rendszerben rácsponthoz nevezünk azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen paralelogramma csúcsai rácsponthoz, és a belsőjében vagy a határára van még más rácsponthoz is, akkor a terület nagyobb 1-nél.

A KÖR EGYENLETE

799. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az origóban van, és a sugara a) 4 ; b) $2,5$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ egység. (Ha az egyenletben törték vannak, távolítsuk el azokat.)
800. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja az origóban van, és áthalad a) $(4; 7)$ ponton; b) $a(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ponton; c) az a ; b) ponton.
801. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a a) középpontja $a(4; 5)$ pont, és a sugara 3 egység; b) középpontja $a(3; 3)$ pont, és a sugara $\sqrt{5}$ egység; c) középpontja $a(-1; 3)$ pont, és a sugara 5 egység; d) középpontja $a(2; 0)$ pont, és a sugara $3,5$ egység; e) középpontja $a(0; -3)$ pont, és a sugara $\sqrt{13}$ egység; f) középpontja $a(-5; -3)$ pont, és a sugara $\sqrt{2}$ egység.
802. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a) középpontja $a(4; 3)$ pont, és áthalad az origón; b) középpontja $a(-3; 4)$ pont, és áthalad az origón; c) középpontja $a(a; b)$ pont, és áthalad az origón; d) középpontja az $(5; -2)$ pont, és áthalad $a(4; 3)$ ponton; e) középpontja $a(2x+y+1=0)$ és $a(3x-y+9=0)$ egyenesek metszéspontja, és áthalad $a(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ ponton.
803. Határozzuk meg $a(2; 3)$ középpontú és az $r=5$ sugarú kör $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ abszcisszájú pontjainak az ordinátáit, továbbá az $1, 0, -5$ ordinátájú pontjainak az abszcisszáit.
804. Egy kör átmérőjének a végpontjai a) $(1; 1)$; $(5; -1)$; b) $(4; 1)$; $(2; 3)$; c) $(-5; 4)$; $(3; 2)$; d) $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$; $(-3; 5)$.
- Írjuk fel a kör egyenletét.

805. Írjuk fel az $(a; b)$ középpontú és az r sugarú kör egyenletét. Milyen határok között változhatnak a körre illeszkedő pontok koordinátái?
806. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és áthalad az $A(-6; 0)$ ponton.
807. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az x tengelyt az origóban érinti, és áthalad a $(0; 4)$ ponton.
808. Induljunk ki az $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 36$ körből, és
- tükrözzük az x tengelyre;
 - tükrözzük az y tengelyre;
 - tükrözzük az origóra;
 - toljuk el a $(2; 3)$ vektorral;
 - toljuk el a $(-5; -1)$ vektorral;
 - forasszuk el az origó körül $+90^\circ$ -kal;
 - forasszuk el az origó körül -90° -kal;
 - forasszuk el az origó körül $+60^\circ$ -kal;
 - forasszuk el az origó körül -60° -kal;
 - nagyítsuk a középpontjától 2-szeresére;
 - kicsinýítsuk az origóból a felére.
- Írjuk fel az így kapott körök egyenletét.
809. Mi annak az b egyenes sugarú körnek az egyenlete, amelynek a középpontja
- az x tengely pozitív oldalára illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
 - az x tengely negatív oldalára illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
 - az y tengely pozitív oldalára illeszkedik, és érinti az x tengelyt;
 - az y tengely negatív oldalára illeszkedik, és érinti az x tengelyt?
810. Írjuk fel a kör egyenletét, ha sugara b egyenes,
- középpontja az $x = 3$ egyenesre illeszkedik, és érinti az x tengelyt;
 - középpontja az $y = -6$ egyenesre illeszkedik, és érinti az y tengelyt;
 - mindkét tengelyt érinti.
811. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a sugara r , és mindkét tengelyt érinti.
812. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja az $(a; 2a)$ pont, és érinti
- az x tengelyt, $b)$ az y tengelyt.
813. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely
- $a)$ a $(2; 9)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
 - $b)$ a $(6; 3)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
 - $c)$ a $(4; 2)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti;
 - $d)$ a $(-5; 3)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti.
814. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja
- $a)$ a $(6; 7)$ pont, és érinti az $bx - 12y - 24 = 0$ egyenest;
 - $b)$ az $(1; 2)$ pont, és érinti az $bx + 7y = 11$ egyenest.
815. Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a sugara b egyenes, áthalad
- $a)$ a $(9; 9)$ ponton, és $a)$ érinti az x tengelyt; $b)$ érinti az y tengelyt.
816. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A(1; 6)$ és a $B(4; -5)$ pontokon, a középpontja pedig $a)$ az x tengelyre, $b)$ az y tengelyre illeszkedik.
817. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A(2; 3)$ és a $B(5; 2)$ pontokon, a középpontja pedig $a)$ az x tengelyre, $b)$ az y tengelyre illeszkedik.
818. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad
- $a)$ a $P_1(3; 0)$ és $P_2(-1; 2)$ pontokon, és a középpontja az $x - y + 2 = 0$ egyenesre illeszkedik;

- $d) x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0;$
 $e) x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0;$
 $f) x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0;$
 $g) x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0;$
 $h) x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0;$
 $i) x^2 + y^2 + 10x = 0;$
 $j) x^2 + y^2 + 2,4x - 3y - 2,56 = 0;$
 $k) 4x^2 + 4y^2 - 20x - 75 = 0;$
 $l) 16x^2 + 16y^2 - 24x - 16y - 243 = 0;$
 $m) 3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0;$
 $n) 2x^2 + 2y^2 - 3x - 5y + 3 = 0;$
 $o) x^2 + y^2 - 2ax = 0;$
 $p) x^2 + y^2 + ax = 0;$
- $a) x^2 + y^2 = 25;$
 $b) x^2 + y^2 = 10;$
 $c) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 10;$
- 825.** Határozzuk meg a következő kör egyenletekből a középpontok koordinátáit, a sugarakat, és ábrázoljuk a köröket:
 $a)$ sugara $\sqrt{20}$ egység, és áthalad a $(-2; 4)$ és a $(4; 2)$ pontokon;
 $b)$ sugara 5 egység, és áthalad a $(4; -2)$ és az $(5; -3)$ pontokon;
 $c)$ sugara $\sqrt{10}$ egység, és áthalad a $(0; 3)$ és a $(2; 5)$ pontokon.
826. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a $2x - y = 6$ és a $2x - y = -14$ párhuzamosokat érinti és áthalad a $(3; 4)$ ponton.
827. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az $x + y - 4 = 0$ egyenest.
828. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(-4; 2)$ ponton, és érinti az $x + y - 4 = 0$ egyenest.
829. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az $x - 2y = 3$ egyenest a -1 abszcisszájú pontjában és a sugara $\sqrt{5}$ egység.
830. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $P_1(0; 4)$ és a $P_2(3; 1)$ pontokon, és az y tengelyt, és áthalad a $P_1(1; 5)$ és a $P_2(8; 12)$ pontokon.
831. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az $x + y = 4$ egyenest az 1 abszcisszájú pontjában, és a sugara $\sqrt{2}$ egység.
832. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, ha a $2x - y = -14$ párhuzamosokat érinti és áthalad a $(3; 4)$ ponton.
833. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a $2x - y = 6$ és a $2x - y = -14$ párhuzamosokat érinti és áthalad a $(3; 4)$ ponton.
834. Irjuk fel a kör egyenletét, ha a $2x - y = -14$ párhuzamosokat érinti és áthalad a $(3; 4)$ ponton.
835. Határozzuk meg a következő kör egyenletekből a középpontok koordinátáit, a sugarakat, és ábrázoljuk a köröket:
 $a) x^2 + y^2 = 25;$
 $b) x^2 + y^2 = 10;$
 $c) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 10;$

826. Írjuk fel az
 $r) x^2 + y^2 - 2by = 0;$
 $s) x^2 + y^2 + by = 0;$
 $t) x^2 + y^2 + ax + by = 0;$
 $u) x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$
827. Írjuk fel általánosan olyan körnek az egyenletét, amelyik
 $a) x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ és $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0;$
 $b) x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ és $x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$
 körök centrálisának az egyenletét.
827. Írjuk fel általánosan olyan körnek az egyenletét, amelyik
 $a) érinti az y tengelyt;
 $b) érinti az x tengelyt;
 $c) érinti mindkét tengelyt;
 $d) áthalad az origón;
 $e) középpontja az x tengelyre illeszkedik;
 $f) középpontja az y tengelyre illeszkedik;
 $g) középpontja az $y = mx + b$ egyenesre illeszkedik.$$$$$$$
828. Igazoljuk, hogy az $4x^2 + 4y^2 + Bx + Cy + D = 0$ egyenlet ($D \neq 0$) pontot ábrázol, ha $B^2 + C^2 - 4AD = 0.$
829. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a (2; 7) ponton, és az $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$ körrel koncentrikus.
830. Rajzoljunk az $a)$; $b)$ pont körül koncentrikus köröket r_1 és r_2 sugárral. Írjuk fel az egyenleteiket. Hogyan ismerhetjük fel két kör egyenletéből azt, hogy koncentrikus köröket határoznak meg?
831. Hogyan helyezkednek el a (2; 3); (3; -3); (-4; -2); (-4; 3) pontok az $x^2 + y^2 = 20$ körhöz viszonyítva?
832. Hogyan helyezkednek el a (-3; 0); (5; 0); (4; 2); (2; 7); (-4; 6); (3; -1); (-2; 3) pontok az $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ körhöz viszonyítva?
833. Hogyan helyezkednek el a (-1; 3); (-4; 3); (-1; 5); (1; 5) pontok az $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ körhöz viszonyítva?
834. Bizonyítsuk be, hogy a koordináta-rendszer $\left(\sqrt{2}; \frac{3}{1}\right)$ pontja körül írt bármely körön legfeljebb egy rácspontra van (vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám).
835. Határozzuk meg, hogy mely pontokban metszik az alábbi körök a koordináta-rendszer tengelyeit:
 $a) (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25;$
 $b) x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0;$
 $c) x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0.$
836. Számítsuk ki az origó távolságát azoktól a pontoktól, amelyekben az $x^2 + y^2 - x - 5y - 2 = 0$ kör metszi a koordinátatengelyeket. Indokoljuk meg, hogy az x tengelyen mért két távolság szorzata miért egyenlő az y tengelyen mért két távolság szorzatával?
837. Mi az egyenlete annak a körnek, amely az x tengelyt az (5; 0) pontban érinti, s amely az y tengelyből 10 egység hosszúságú hűrt metsz ki? Hány megoldás van?
838. Egy kör sugara 50 egység. Írjuk fel a kör egyenletét, ha tudjuk, hogy az x tengelyből 28 egység hosszúságú hűrt metsz ki, és áthalad az $A(0; 8)$ ponton.

843. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ kört az $(1; 2)$ pontban, és áthalad a $(4; -1)$ ponton. Milyen távolságra van az $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 2 = 0$ kör középpontja a $3x + 4y = 2$ egyenestől?

841. Határozzuk meg a és b értékeit úgy, hogy az $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ kör áthaladjon

a) az $(1; 2)$ és a $(-3; 3)$ pontokon;
 b) a $(4; 5)$ és a $(-2; 3)$ pontokon.

842. Határozzuk meg a következő három ponton áthaladó kör egyenletét:

a) $(-1; 1)$; $(4; 2)$; $(4; -4)$;
 b) $(8; 5)$; $(2; 7)$; $(10; -9)$;
 c) $(1; 1)$; $(0; 4)$; $(9; 7)$;
 d) $(4; 3)$; $(2; 3)$; $(3; 6)$.

843. Kötél alakú híd feszítávolsága $AB = 80$ m, a CD iv magassága 20 m. (843. ábra.) Számítsuk ki a 10 m-enként elhelyezett függőleges tartórudak hosszát.

844. Egy háromszög oldal egyenesei:

a) $4x - 5y + 13 = 0$; $7x + 2y - 31 = 0$; $3x + 7y - 1 = 0$
 b) $y = x + 1$; $y = -\frac{1}{2}x - 2$; $y = 3x - 9$;
 c) $3x - 4y - 5 = 0$; $4x - 3y + 10 = 0$; $y = 2$.

845. Valamely háromszög oldal egyenesei:

a) $x - 3y = 2$; $7x - y = 34$; $x + 2y = -8$;
 b) $x + 2y - 3 = 0$; $3x - y - 2 = 0$; $2x - 3y - 6 = 0$.

846. A $(6; 5)$; $(8; 1)$; $(0; -3)$; $(-1; 4)$ pontok négyzöget határoznak meg. Vizsgáljuk meg, hogy a négyzög hűrnégyszög-e?

847. Egy hűrnégyszög három csúcsát ismerjük:

a) $(2; 4)$; $(8; 2)$; $(1; -4)$. A negyedik csúcs az y tengely negatív oldalára illeszkedik;
 b) $(0; 5)$; $(0; -5)$; $(8; 2)$. A negyedik csúcs az x tengely pozitív oldalára illeszkedik.

Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit.

Igazoljuk, hogy a $(-6; 0)$; $(10; 0)$; $(0; 16)$ pontokkal meghatározott háromszögben az oldalak felezőpontjai, a magasságvonalak talppontjai és a középháromszög csúcsai egy körön helyezkednek el. (A középháromszög csúcsain a háromszögcsúcsok és a magasságvonalak közötti távolságok felezőpontjait értjük. A 9 nevezetes ponton áthaladó kört a háromszög Feuerbach-féle körének nevezzük.)

848. Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit.

849. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ kört az $(1; 2)$ pontban, és áthalad a $(4; -1)$ ponton.

840. Milyen távolságra van az $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 2 = 0$ kör középpontja a $3x + 4y = 2$ egyenestől?

841. Határozzuk meg a és b értékeit úgy, hogy az $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ kör áthaladjon

a) az $(1; 2)$ és a $(-3; 3)$ pontokon;
 b) a $(4; 5)$ és a $(-2; 3)$ pontokon.

842. Határozzuk meg a következő három ponton áthaladó kör egyenletét:

a) $(-1; 1)$; $(4; 2)$; $(4; -4)$;
 b) $(8; 5)$; $(2; 7)$; $(10; -9)$;
 c) $(1; 1)$; $(0; 4)$; $(9; 7)$;
 d) $(4; 3)$; $(2; 3)$; $(3; 6)$.

843. Kötél alakú híd feszítávolsága $AB = 80$ m, a CD iv magassága 20 m. (843. ábra.) Számítsuk ki a 10 m-enként elhelyezett függőleges tartórudak hosszát.

844. Egy háromszög oldal egyenesei:

a) $4x - 5y + 13 = 0$; $7x + 2y - 31 = 0$; $3x + 7y - 1 = 0$
 b) $y = x + 1$; $y = -\frac{1}{2}x - 2$; $y = 3x - 9$;
 c) $3x - 4y - 5 = 0$; $4x - 3y + 10 = 0$; $y = 2$.

845. Valamely háromszög oldal egyenesei:

a) $x - 3y = 2$; $7x - y = 34$; $x + 2y = -8$;
 b) $x + 2y - 3 = 0$; $3x - y - 2 = 0$; $2x - 3y - 6 = 0$.

846. A $(6; 5)$; $(8; 1)$; $(0; -3)$; $(-1; 4)$ pontok négyzöget határoznak meg. Vizsgáljuk meg, hogy a négyzög hűrnégyszög-e?

847. Egy hűrnégyszög három csúcsát ismerjük:

a) $(2; 4)$; $(8; 2)$; $(1; -4)$. A negyedik csúcs az y tengely negatív oldalára illeszkedik;
 b) $(0; 5)$; $(0; -5)$; $(8; 2)$. A negyedik csúcs az x tengely pozitív oldalára illeszkedik.

Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit.

Igazoljuk, hogy a $(-6; 0)$; $(10; 0)$; $(0; 16)$ pontokkal meghatározott háromszögben az oldalak felezőpontjai, a magasságvonalak talppontjai és a középháromszög csúcsai egy körön helyezkednek el. (A középháromszög csúcsain a háromszögcsúcsok és a magasságvonalak közötti távolságok felezőpontjait értjük. A 9 nevezetes ponton áthaladó kört a háromszög Feuerbach-féle körének nevezzük.)

848. Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit.

849. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ kört az $(1; 2)$ pontban, és áthalad a $(4; -1)$ ponton.

840. Milyen távolságra van az $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 2 = 0$ kör középpontja a $3x + 4y = 2$ egyenestől?

841. Határozzuk meg a és b értékeit úgy, hogy az $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ kör áthaladjon

a) az $(1; 2)$ és a $(-3; 3)$ pontokon;
 b) a $(4; 5)$ és a $(-2; 3)$ pontokon.

842. Határozzuk meg a következő három ponton áthaladó kör egyenletét:

a) $(-1; 1)$; $(4; 2)$; $(4; -4)$;
 b) $(8; 5)$; $(2; 7)$; $(10; -9)$;
 c) $(1; 1)$; $(0; 4)$; $(9; 7)$;
 d) $(4; 3)$; $(2; 3)$; $(3; 6)$.

843. Kötél alakú híd feszítávolsága $AB = 80$ m, a CD iv magassága 20 m. (843. ábra.) Számítsuk ki a 10 m-enként elhelyezett függőleges tartórudak hosszát.

844. Egy háromszög oldal egyenesei:

a) $4x - 5y + 13 = 0$; $7x + 2y - 31 = 0$; $3x + 7y - 1 = 0$
 b) $y = x + 1$; $y = -\frac{1}{2}x - 2$; $y = 3x - 9$;
 c) $3x - 4y - 5 = 0$; $4x - 3y + 10 = 0$; $y = 2$.

- a) az $x^2+y^2=25$ kör és a $2x+y=10$ egyenes;
 b) az $x^2+y^2=10$ kör és a $3x+y=10$ egyenes;
 c) az $x^2+y^2=r^2$ kör és az $x+y=a$ egyenes;
 d) az $x^2+y^2=r^2$ kör és az $y=mx$ egyenes;
 e) az $x^2+y^2=r^2$ kör és az $y=mx+b$ egyenes közös pontjainak számát.

860. Határozzuk meg

A KÖR ÉS EGYENES

859. Írjuk fel annak a körnek egyenletét, amely áthalad a (2; 11) és a (10; 11) pontokon, és érinti az $x+y=5$ egyenest.
858. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az (1; 1) ponton, és érinti a $7x+y-3=0$ és az $x+7y-3=0$ egyeneseket.
857. Írjuk fel az 5 egyenes sugárú, az $y=2x+5$ és a $2y+x+10=0$ egyeneseket érintő körök egyenletét.
- a) az $x+y=4$ egyenesre illeszkedik, az $x+y-1=0$ és a $7x-y-5=0$ egyeneseket érinti;
 b) az $x+y=3$ egyenesre illeszkedik, az $x-3y=0$ és a $3x+y-2=0$ egyeneseket érinti;
856. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja érintő körök egyenletét.
855. Írjuk fel az $x+2y-4=0$, $x+2y-2=0$ és az $y=2x-5$ egyeneseket érintő körök egyenletét.
854. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti a koordinátatengelyeket és az $x+y=4$ egyenest. Hány megoldást kapunk?
853. Írjuk fel az $x-2=0$ és az $x-8=0$ egyeneseket érintő, középpontjával a $3x-y-6=0$ egyenesre illeszkedő kör egyenletét.
- a) érinti a $4x-3y=26$ egyenest az 5 abszcisszájú pontjában, és áthalad a (-2; -3) ponton;
 b) érinti a $2x+y=8$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában, és áthalad a (7; 3) ponton;
 c) érinti az $x+y=1$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában, és áthalad a (6; 7) ponton.
852. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely egyenesek metszéspontja, és a kör érinti az $y=x-1$ egyenest.
- a) a $\frac{3}{2x-3}-\frac{6}{3y-8}=0$ és az $\frac{3}{x+5}+\frac{5}{2y-4}=2$ egyenest;
 b) a (2; 3) pont, és a kör érinti az $x-3y+4=0$ egyenest;
 c) a (-1; 2) pont, és a kör érinti a $4x-y-5=0$ egyenest;
 d) a (6; 7) pont, és a kör érinti az $5x-12y-24=0$ egyenest;
851. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja Feuerbach-féle körnek az egyenletét.
850. Határozzuk meg az (a; 0); (b; 0); (0; 0); (0; c) pontokkal megadott háromszög pontja a magasságpont és a súlypont meghatározta szakaszt?
849. Egy háromszög csúcsai (-5; 0); (5; 0); (2; 10). Írjuk fel Feuerbach-féle körnek az egyenletét. Igazoljuk, hogy a Feuerbach-féle kör sugara fele a körülírt kör sugarának, és a középpontja a háromszög Euler-féle egyenesére illeszkedik. Milyen arányban osztja a Feuerbach-féle kör középpontja a magasságpont és a súlypont meghatározta szakaszt?

- A c) és e) feladatban vizsgáljuk meg, hogy a , illetve b milyen értékei mellett kapunk 2, 1, 0 közös pontot?
861. Milyen helyzetűek az alábbi egyenesek az $x^2 + y^2 = 36$ körhöz képest:
- a) $x - 2y + 5 = 0$; b) $5x - 12y + 26 = 0$; c) $3x - 4y + 30 = 0$; d) $x + y - 17 = 0$.
862. Határozzuk meg
- a) az $x^2 + y^2 - 5x = 0$ kör és az $y = x - 2$ egyenes;
 b) az $x^2 + y^2 - 2x = 0$ kör és a $3x - y = 0$ egyenes;
 c) az $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ kör és a $2y - x - 1 = 0$ egyenes;
 d) az $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$ kör és az $x - y = 2$ egyenes;
 e) az $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ kör és a $4x - 3y - 38 = 0$ egyenes közös pontjainak a számát.
863. Milyen helyzetű
- a) a $3x - 2y = 7$ egyenes az $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$ körhöz képest?
 b) a $3x - 4y = 19$ egyenes az $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ körhöz képest?
 c) a $(1; -1)$ és az $(1; 7)$ pontokon átmenő egyenes az $x^2 + y^2 = 25$ és az $x^2 + y^2 = 36$ körökhöz képest?
864. Számítsuk ki annak a húrnak a hosszát, amelyet az $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$ kör metsz ki a $2y - 3x + 12 = 0$ egyenesből.
865. Valamely kör egyenlete $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$. Határozzuk meg az $(1; 3)$ ponton áthaladó legrovidebb húr egyenletét és hosszúságát.
866. Mutassuk meg, hogy az $x^2 + y^2 = 1$ körnek végtelen sok olyan pontja van, amelynek koordinátái racionális számok.
867. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2 + y^2 = 25$ kör és az $x - 7y + 25 = 0$ egyenes metszéspontjain és a $(0; 0)$ ponton.
868. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek az $x + 2y = 7$ egyenesre illeszkednek, és a $(3; 7)$ ponttól 5 egység távolságra vannak.
869. Egy derékszögű háromszög átfogójának a végpontjai $(2; 5)$ és $(-4; -3)$, a hozzá tartozó magasság talppontjának az ordinátája 2,12. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.
870. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 100$ kört a $(6; -8)$ pontban érinti, és a sugara 15 egység.
871. Adott az e egyenes: $y = \frac{1}{2}x + 9$, ennek egyik partján az A és a B pont: $A(-2; 3)$, $B(5; 4)$, továbbá a $d = 4\sqrt{5}$ szakasz. Szerkesszünk az A és B pontokon áthaladó olyan kört, amely az e egyenesből d hosszúságú hűrt metsz ki.
872. Az XOY derékszög szögfelezőjén rögzítsünk egy O -tól különböző P pontot. Ezután rajzoljunk egy, az O és P ponton áthaladó kört. Ez a derékszög szárait az O -tól különböző A és B pontokban is metszi. Bizonyítsuk be, hogy az előjeles OA és OB távolságok összege nem függ a kör sugarától.
873. Határozzuk meg az r sugarú kör adott pontjában a körhöz húzott érintő egyenletét, ha a kör középpontja az origóban van.
874. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ kör $(4; 3)$ pontjához tartozó érintőének az egyenletét.

875. Mekkora szöget zárnak be az $x^2 + y^2 = 36$ kör — 5 abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők?
876. Az $x^2 + y^2 = 100$ körhöz érintőket húzunk a (6; 8) és a (8; 6) pontokban. Számítsuk ki az érintők metszéspontját és hajlásszögét.
877. Húzzunk érintőt az $x^2 + y^2 = 1$ körhöz a (0; 1); (—1; 0); (0; —1); (1; 0) pontjaiban, ahol x_1 tetszőleges, 1-nél kisebb pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy a keletkező trapéz átlói az y tengelyen metszik egymást. Át-megy-e a metszésponton a nem párhuzamos oldalak érintési pontjain áthaladó egyenes?
878. Írjuk fel
- a) a (10; 0) pontból az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz húzható érintők egyenletét;
 b) a (7; 1) pontból az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz húzható érintők egyenletét;
 c) a (8; 4) pontból az $x^2 + y^2 = 16$ körhöz húzható érintők egyenletét;
 d) a (—1; 3) pontból az $x^2 + y^2 = 5$ körhöz húzható érintők egyenletét.
- Számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit, az érintőszakaszok hosszát és az érintők hajlásszögét.
879. Milyen szög alatt látszik az $x^2 + y^2 = 16$ kör a (8; 0) pontból?
880. Az $x^2 + y^2 = 100$ kör köré írt érintő négyzög két szemközti csúcsa: (—12; 3,5); (12; 10). Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit.
881. Keressek meg az
- a) $x^2 + y^2 = 25$ körnek a $4x - 2y = 7$ egyenessel párhuzamos érintőt;
 b) $x^2 + y^2 = 5$ körnek a $2x - y + 1 = 0$ egyenessel párhuzamos érintőt;
 c) $x^2 + y^2 = 169$ körnek az $5x + 12y - 11 = 0$ egyenessel párhuzamos érintőt;
 d) $x^2 + y^2 = 25$ körnek az $y = 3x - 7$ egyenesre merőleges érintőt.
882. Egy 12 egység sugarú kör középpontja az origóban van. Az x tengely pozitív oldalára illeszkedő egyik P pontból érintőket húzunk a körhöz. Írjuk fel az érintők egyenletét, ha $PQ = 35$ egység, ahol Q az érintési pont.
883. Egyenlő szárú háromszög alappal szemközti csúcsa (6; 8), a beírt kör egyenlete $x^2 + y^2 = 64$. Írjuk fel az alapegyeneseinek egyenletét, és számítsuk ki a hiányzó két csúcs koordinátáit.
884. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 12$ körhöz rajzolt egyenlő oldalú háromszög oldal egyeneseinek egyenletét, és számítsuk ki a háromszög csúcsainak a koordinátáit, ha az egyik csúcsa az y tengely pozitív oldalára illeszkedik. Adott a K kör és egy e egyenes, amelyeknek nincs közös pontja. Az egyenes minden pontja körül olyan kört szerkesztünk, amelynek a sugara pontból a körhöz húzható érintőszakasszal egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az így rajzolt körök két rögzített ponton mennek át. Mit mondhatunk akkor, ha a K -nak és az e -nek van közös pontja?
886. Határozzuk meg az r sugarú kör adott pontjához tartozó érintőjének az egyenletét, ha a középpontja a $C(u; v)$ pont.
887. Írjuk fel
- a) az $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ kör (5; 5) pontjához tartozó érintőjének az egyenletét;
 b) az $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ kör (0; 3) pontjához tartozó érintőjének az egyenletét;

- c) az $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ kör -1 abszcisszájú pontjához tartozó érintőjének az egyenlete.
888. Az $x^2+y^2+4x-4y-18=0$ körhöz egy kívül fekvő P pontból érintőket rajzolunk. Számítsuk ki a P pont koordinátáit, ha az érintési pontokon áthaladó szelő egyenlete $x-y-2=0$.
889. Mekkora szögben metszi az $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ kör a koordinátarendszer tengelyeit?
890. A P anyagi pont erő hatására az $(x-5)^2+(y+3)^2=25$ körön mozog. Amikor a $P(2; 1)$ pontba érkezik, az erő hatása megszűnik. Írjuk fel további pályájának az egyenletét.
891. Az $x^2+y^2-6x+10y-66=0$ körhöz érintőket húzunk, melyek párhuzamosak a $4x-3y=0$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit és az érintési pontok koordinátáit.
892. Az $x^2+y^2-10x-12y+45=0$ körhöz érintőket húzunk, amelyek párhuzamosak az $y=3x$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit. Az $x^2+(y-2)^2=5$ körhöz érintőket húzunk, amelyek merőlegesek az $y=0,5x+1$ egyenesre. Írjuk fel az érintők egyenleteit.
893. Írjuk fel
- a) az $x^2+y^2-10x-4y+25=0$ kör origón áthaladó érintőinek az egyenletét;
 b) az $x^2+(y+2)^2=5$ kör (5; 3) ponton áthaladó érintőinek az egyenletét;
 c) az $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ kör (3; 1) ponton áthaladó érintőinek az egyenletét;
 d) az $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ kör (2; 6) ponton áthaladó érintőinek az egyenletét.
895. Milyen hosszú érintő húzható az $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ körhöz a $P_1(0; -1)$; $P_2(1; -1)$; $P_3(2; 0)$; $P_4(0; 0)$ pontokból?
896. A P anyagi pont az $(x-4)^2+(y-8)^2=20$ körön mozog. Milyen a centripetális erő megszűnik, a pont pályája áthalad a $(-2; 0)$ ponton. Melyik pontban hagyta el a mozgó pont a körpályát?
897. Határozzuk meg a $3x-2y-4=0$ egyenesnek azokat a pontjait, melyekből az $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ körhöz húzott érintők 60° -os szöget zárnak be.
898. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ kör akkor és csak akkor metszi merőlegesen az $ax+by+c=0$ egyenest, ha $aA+bB-2c=0$.
899. Írjuk fel
- a) az $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ és az $(x+2)^2+(y+1)^2=9$ körök;
 b) az $x^2+y^2=225$ és az $x^2-30x+y^2+189=0$ körök;
 c) az $x^2+y^2-6x=0$ és az $x^2+y^2-6y=0$ körök közös érintőinek az egyenletét.
900. Adott két kör. Az egyik középpontja (1; 3) és a sugara $\sqrt{5}$; a másik középpontja (0; 1) és a sugara $2\sqrt{5}$. Írjuk fel a közös érintőknek az egyenletét.
901. A k és k_1 körök olyan helyzetűek, hogy a k_1 kör áthalad a k kör középpontján. A két kör közös érintői a k_1 kört A , illetve B pontban érintik. Bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes a k kör érintője.

902. Vizsgáljuk meg a következő körök viszonylagos helyzetét:
- $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$;
 - $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6y - 3 = 0$;
 - $x^2 + y^2 - 10x - 8y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$.
903. Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 = 25$ és az $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$ körök érintik egymást. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a két kör érintési pontján, és a tengelyeket érinti.
904. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2 + y^2 - x = 0$ és az $x^2 + y^2 - 2y = 0$ körök metszéspontjain, és $a)$ a sugara $\sqrt{5}$; $b)$ a középpontja az $y = x$ egyenesre illeszkedik.
905. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2 + y^2 + x - y - 6 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 2x + y - 10 = 0$ körök metszéspontjain, és a középpontja az x tengelyre illeszkedik.
906. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2 + y^2 + 3x - y - 5 = 0$ és az $2x^2 + 2y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$ körök metszéspontjain, és a középpontja az y tengelyre illeszkedik.
907. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ és az $x^2 + y^2 = 5$ körök metszéspontjain és a pontjain és a $(2; -2)$ ponton;
- $b)$ áthalad az $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 4x = 0$ körök metszéspontjain és az $(1; 3)$ ponton.
908. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$ körnek azokat a pontjait, amelyek $(5; -1)$ ponttól 5 egység távolságra vannak.
909. Irjuk fel a $(2; 1)$ ponton áthaladó és az $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$ kört érintő egységssugarú kört.
910. Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a középpontja a $(6; 4)$ pont, és az $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ kört $a)$ kívülről; $b)$ belülről érinti.
911. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek sugara $\sqrt{8}$, áthalad a $(-1; 3)$ ponton, és az $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2$ kört kívülről érinti.
912. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az x tengelyen van, az $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 100$ kört belülről, az $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 25$ kört pedig kívülről érinti.
913. Irjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 100$ kört a $(7; 8)$ pontban belülről és az x tengelyt érinti.
914. Irjuk fel a koordinátatengelyeket és az $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$ kört kívülről érintő kör egyenletét. Hány megoldás van?
915. Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit (2 tizedesjegy pontossággal), ha a sugara 5 egység, és az $x^2 + y^2 = 25$, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$ köröket érinti.
916. Irjuk fel az $x^2 + y^2 + 10x + 19 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 16y + 4 = 0$ körök metszéspontjain áthaladó és az x tengelyt érintő kör egyenletét.
917. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely az $(x-2)^2 + (y-9)^2 = 4$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ és $(x-9)^2 + (y-8)^2 = 4$ köröket kívülről érinti.
918. Milyen szögben metszik egymást az $x^2 + y^2 = 16$ és az $(x-5)^2 + y^2 = 9$ körök?

PONTNAK KÖRRE VONATKOZÓ HATVÁNYA, HATVÁNYVONAL, HATVÁNYPONT, KÖRÖR

919. Bizonyítsuk be, hogy az
- $$x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$
- $$\text{és az } x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$
- derékszögben, ha $2(a_1a_2 + b_1b_2) = c_1 + c_2$.
920. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a (0; 1) és az (1; 0) pontokon, és az $x^2 + y^2 + 2x = 0$ kört merőlegesen metszi.
921. Írjuk fel a (2; 3) ponton áthaladó és az $x^2 + y^2 = 1$ kört merőlegesen metsző 3 egyenes sugártű kör egyenletét.
922. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az $x + y = 7$ egyenestől 5-ször olyan távol van, mint az $x - 7y + 33 = 0$ egyenestől, áthalad a két egyenes metszéspontján, és az $x^2 + y^2 - 28x + 6y + 165 = 0$ kört derékszögben metszi.

919. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$

$$\text{és az } x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$

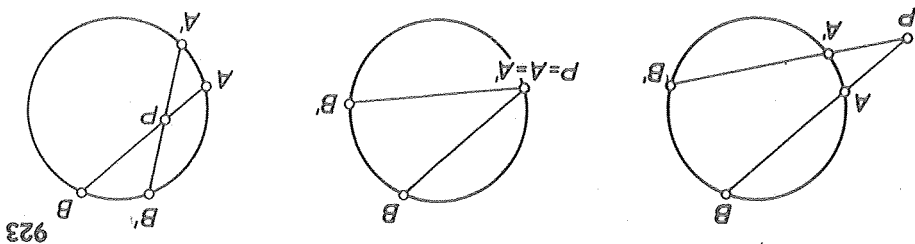
derékszögben, ha $2(a_1a_2 + b_1b_2) = c_1 + c_2$.

920. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a (0; 1) és az (1; 0) pontokon, és az $x^2 + y^2 + 2x = 0$ kört merőlegesen metszi.

921. Írjuk fel a (2; 3) ponton áthaladó és az $x^2 + y^2 = 1$ kört merőlegesen metsző 3 egyenes sugártű kör egyenletét.

922. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az $x + y = 7$ egyenestől 5-ször olyan távol van, mint az $x - 7y + 33 = 0$ egyenestől, áthalad a két egyenes metszéspontján, és az $x^2 + y^2 - 28x + 6y + 165 = 0$ kört derékszögben metszi.

923. Bizonyítsuk be, hogy ha egy ponton át szelőket húzunk a körhöz, akkor a szelők szelvényeinek a szorzata állandó. (Három esetet kell vizsgálni, 923. ábra.)



923. ábra.)

923. Bizonyítsuk be, hogy ha egy ponton át szelőket húzunk a körhöz, akkor a szelők szelvényeinek a szorzata állandó. (Három esetet kell vizsgálni,

924. Az előjeles távolságokkal számított $PA \cdot PB$ szorzatot a P pont körre vonatkozó hatványának mondjuk (923. feladat). (Állapodjunk meg abban, hogy ha A a PB szakaszra illeszkedik, akkor a PA és PB távolságok azonos előjeleűek, ellenkező esetben különböző előjeleűek.) Igazoljuk, hogy a P pontnak körre vonatkozó hatványa pozitív, nulla vagy negatív, aszerint, hogy a P pont a körön kívül, a körön vagy a körön belül van.

925. Fejezzük ki a P pontnak a körre vonatkozó hatványát a sugár és a pont körközépponttól mért távolsága segítségével.

926. Igazoljuk, hogy egy körön kívül lévő pontnak a körre vonatkozó hatványa a pontból a körhöz húzott érintő négyzetével egyenlő.

927. Fejezzük ki a $P(x; y)$ pontnak egy adott körre vonatkozó hatványát a sugárral és a középpont koordinátáival.

928. Számítsuk ki a
- a) $P(2; 3)$ pontnak az $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 1 = 0$ körre;
- b) $P(0; 0)$ pontnak az $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 0$ körre;
- c) $P(3; -1)$ pontnak az $x^2 + y^2 - 25 = 0$ körre;
- d) $P(-2; 1)$ pontnak az $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ körre vonatkozó hatványát.

929. Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ kör. Határozzuk meg, hogy a következő pontok hogyan helyezkednek el a körhöz viszonyítva? (Melyik pont van a körön belül, melyik van a körön kívül, melyik illeszkedik a körre?)
 $A(0; 0), B(2; 3), C(0; \sqrt{7}-1), D(3; -2)$.
930. Számítsuk ki azt, hogy a $P(-4; 6)$ pontból mekkora érintőszakasz húzható az $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ körhöz?
931. Legyen $K_1 \equiv (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 - r_1^2 = 0$ és $K_2 \equiv (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 - r_2^2 = 0$ két nem koncentrikus kör. Igazoljuk, hogy a $K_1 - K_2 = 0$ olyan egyenesnek az egyenlete, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
 a) merőleges a két adott kör centrális egyenesére;
 b) bármelyik pontjának a két körre vonatkozó hatványa egyenlő.
 A $K_1 - K_2 = 0$ egyenlettel definiált egyenest a két kör hatványvonalának mondjuk.
932. Számítsuk ki
 Két koncentrikus körnek miért nincs hatványvonala?
933. Számítsuk ki a következő körök közös húrjának a hosszúságát:
 a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, $x^2 + y^2 = 9$;
 b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$;
 c) $x^2 + y^2 = 10$, $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$;
 d) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$;
- e) ha sugaraik $r_1 = r_2 = 10$ egyseg, középpontjaik $O_1(7; 1)$ és $O_2(-7; 3)$.
 Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből a két körhöz egyenlő hosszúságú érintőszakasz húzható. Hogyan módosul a mértani hely, ha $r_1 = r_2 = 5\sqrt{2}$.
934. Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekből az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$ és az $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ körökhöz 3 egyseg hosszúságú érintőszakaszok húzhatók.
935. Számítsuk ki azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekből az $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 36$ és az $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ körökhöz 7 egyseg hosszúságú érintőszakaszok húzhatók.
936. Bizonyítsuk be, hogy ha három kör között nincs két koncentrikus, akkor a hatványvonalak vagy párhuzamosak, vagy egyetlen egy közös pontjuk van. Ezt az egyetlen pontot a három kör hatványpontjának mondjuk.
937. Határozzuk meg
 a) az $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$;
 b) az $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0$, $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$ körök hatványpontját.
 Az $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$, $(x-3)^2 + (y+1)^2 = r^2$ körök hatványpontja az $y = x+1$ egyenesre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik kör sugarát.
938. Az $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$, $(x-3)^2 + (y+1)^2 = r^2$ körök hatványpontja az $y = x+1$ egyenesre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik kör sugarát.

939. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $(5; -4)$ ponton, és merőlegesen metszi az $(x-3)^2 + y^2 = 24$ és az $x^2 + (y+1)^2 = 16$ köröket.
940. Az ABC háromszög AA_1 és BB_1 súlyvonala! Fölé Thalesz-köröket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög O csúcsán áthaladó magasságvonal e két kör hatványvonalával egyenlő.
941. Igazoljuk, hogy ha a trapéz szárai nem párhuzamosak, akkor a trapéz átlóihoz tartozó Thalesz-körök hatványvonala és a száruk egyenesei egy ponton haladnak át.
942. Legyen a $K_1 = 0$ és a $K_2 = 0$ két koncentrikus kör egyenlete. Minek az egyenlete az $\alpha K_1 + \beta K_2 = 0$ egyenlet, ahol α és β adott valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha K_1 + \beta K_2 = 0$ egyenlet, amely áthalad a két adott kör metszéspontján. Minek az egyenlete az $\alpha K_1 + \beta K_2 = 0$ egyenlet, ha $\alpha + \beta = 0$?
943. Legyen a $K_1 = 0$ és a $K_2 = 0$ két egyenlőtérű koncentrikus kört áthaladó pont körül írt körök együttesen koncentrikus körsort alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 10 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ ugyanannak a koncentrikus körsornak az elemei. Határozzuk meg ennek a koncentrikus körsornak azt az elemét, amely áthalad a $(2; 0)$ ponton.
946. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 40 = 0$ és az $x^2 + y^2 - 14x + 40 = 0$ köröknek csak egy közös pontja van. A közös ponton áthaladó és középpontjával az adott körök centrális egyenesére illeszkedő körök körsort alkotnak. Írjuk fel a körsor azon elemének az egyenletét, amely áthalad a $(-8; -5)$ ponton.
947. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ és az $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$ köröknek két közös pontja van. A két közös ponton áthaladó körök körsort alkotnak. Határozzuk meg a körsor azon elemének az egyenletét, amelynek a sugara 4 egység.
948. Adott három kör: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + x - y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + ax - 4y + b = 0$. Hogyan kell az a és a b értékeit megválasztani, hogy a megadott körök ugyanahhoz a körsorhoz tartozzanak?

MÉRŐLEGES AFFINITÁS, AZ ELLIPSZIS SZÁRMAZTATÁSA
ÉS EGYENLETE

949. Adott a mérőleges affinitás tengelye és az affinitás aránya: $a) \lambda = \frac{2}{1}$; $b) \lambda = -2$; $c) \lambda = \frac{3}{4}$; $d) \lambda = -\frac{4}{5}$. Szerkesszük meg néhány pontnak az affín képét.
950. Bizonyítsuk be, hogy a mérőleges affinitásnak a következő tulajdonságai vannak.
- $a)$ Egyenes, félegyenes és szakasz affín képe rendre egyenes, félegyenes és szakasz.
 $b)$ A tengellyel párhuzamos egyenes affín képe a tengellyel párhuzamos egyenes.
 $c)$ A tengellyel nem párhuzamos e egyenes affín képe olyan egyenes, amely az e egyenest a tengelyen metszi.
 $d)$ Párhuzamos egyenesek affín képei párhuzamos egyenesek.
 $e)$ Központosan szimmetrikus alakzat affín képe is középpontosan szimmetrikus alakzat.
951. Adott a mérőleges affinitás tengelye és egy megfelelő pontpárra, A és A' . (Sem az A , sem az A' nem illeszkedik az affinitás tengelyére.) Szerkesszük meg
 $a)$ adott háromszög;
 $b)$ adott négyszög;
 $c)$ adott négyszög;
 $d)$ adott szabályos hatszög;
 $e)$ adott egyenes
 affín képét.
952. Legyen a mérőleges affinitás tengelye az x tengely. A $3x + 4y - 9 = 0$ egyenes affín képe a $4x - y - 12 = 0$ egyenes. Számítsuk ki az affinitás arányát.
954. Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját, ha a fóköre és a kisköre: $a) x^2 + y^2 = 49$, $x^2 + y^2 = 16$; $b) x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 9$.
 A mérőleges affinitás tengelye az x tengely.
955. Az $x^2 + y^2 = 25$ kör mindegyik pontjának ordinátáját $\frac{5}{4}$ részére zsugorítjuk, illetve 2-szeresére nyújtjuk. Írjuk fel az így kapott ellipszisek fókörének és kiskörének az egyenletét.
956. $a)$ Adott a síkban két pont: $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$. Milyen összefüggés áll fenn az adott sík olyan P pontjainak a koordinátái között, amelyekre $PF_1 + PF_2 = 12$.

b) Adott a síkban két pont: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a pontoknak a koordinátái, amelyek az adott síkra illeszkednek, és az F_1 és F_2 pontoktól mért távolságainak összege $2a$ ($2a > 2c$), kielégítik az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletet, ahol $b^2 = a^2 - c^2$.

Igazoljuk, hogy megfordítva, ha valamelyik pont koordinátái kielégítik a felírt egyenletet, akkor erre a pontra teljesül az a feltétel is, hogy az F_1 és F_2 pontoktól mért távolságainak az összege $2a$.

Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletről megállapítottuk, hogy olyan ellipszisnek az egyenlete, amelyet az a sugarú körből $\frac{a}{b}$ arányú merőleges affinitás-

sal származtathatunk.

A megoldott feladat alapján definiáljuk az ellipszist. (Az adott F_1 és F_2

pontokat az ellipszis fókuszainak nevezzük.)

Az ellipszis a sík két tartományra bontja. A középpontot (a fókuszokat)

tartalmazó tartományt nevezzük belső tartománynak, a középpontot

(a fókuszokat) nem tartalmazó tartományt nevezzük külső tartománynak. Bizonyítsuk be, hogy a belső tartomány P pontjaira

$$PF_1 + PF_2 < 2a,$$

a külső tartomány P pontjaira

$$PF_1 + PF_2 > 2a,$$

ahol F_1 és F_2 az ellipszis fókuszai és $2a$ a nagytengelye.

958. Írjuk fel az ellipszis középponti egyenletét, ha

a) a kistengelye 20 cm, a kistengelye 12 cm;

b) a kistengelye 14 cm, a fókuszok távolsága 12 cm;

c) a nagytengelye 16 cm, a fókuszok távolsága 10 cm.

Mind egyik esetben szerkesztünk meg az ellipszis néhány pontját.

959. Egy rombusz oldala 5 egység, magassága 4,8 egység. Két szemközti

csúcson olyan ellipszis halad át, amelynek a fókuszai a rombusz másik

két csúcsában vannak. Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha attól a tenge-

lyekre illeszkednek.

960. Írjuk fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek fókuszai $F_1(0; c)$

és $F_2(0; -c)$, az x tengelyt pedig az $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$ pontokban metszi.

961. Számítsuk ki az ellipszis nagy- és kistengelyét, fókuszainak a koordiná-

táit, ha az egyenlete:

$$a) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1; \quad b) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1;$$

$$c) 3x^2 + 5y^2 = 15; \quad d) 2x^2 + y^2 = 4; \quad e) 4x^2 + 2y^2 = 9.$$

Szerkesztünk meg az ellipszis néhány pontját.

962. Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha

a) a nagytengelye 26 egység, fókuszai a $(-10; 0)$ és $(14; 0)$ pontok;

b) a középpontja a $(-3; 4)$ pont, a nagytengelye 10 egység, kistengelye

8 egység, és a nagytengelye párhuzamos az x tengellyel;

972. Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis tengelyei által meghatározott pozitív sík-koordináták adják meg, ahol t az idő. Milyen vonalat ír le a pont?
- $$x = 4 \cos 2t \quad \text{és} \quad y = 3 \sin 2t$$
971. A mozgó pont helyét a derékszögű koordináta-rendszerben az
970. Számítsuk ki a $3x^2 + 8y^2 = 120$ ellipszis $x = 4$ abszcisszájú pontjához f) áthalad a $(\sqrt{3}; -2)$ és $(-2/\sqrt{3}; 1)$ pontokon?
- e) áthalad az $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ pontokon;
- d) áthalad a $(4; 3)$ és $(6; 2)$ pontokon;
- c) fókusz távolsága $\frac{4\sqrt{33}}{3}$, és az ellipszis áthalad a $(2; 1)$ ponton;
- b) kistengelyének hossza 6 cm, és az ellipszis áthalad a $(-4; 1)$ ponton;
- a) nagytengelyének a hossza 12 cm, és az ellipszis áthalad a $(3; 4)$ helyre, kistengelye pedig az y tengelyre illeszkedik, továbbá
969. Mi az egyenlete annak az ellipszisnek, amelynek nagytengelye az x tengelyre, kistengelye pedig az y tengelyre illeszkedik, továbbá
968. Allapítsuk meg a $(8; 2); (-4; 3); \left(2; -\frac{2}{3}\sqrt{15}\right)$ pontok helyzetét az $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipszisére vonatkozólag.
967. Az ellipszis tengelyei 10 és 6 cm hosszúak. Mekkora szöget zárnak be a kistengelyétől 5 egység távolságra van.
966. Határozzuk meg a $4x^2 + 5y^2 = 120$ ellipszisnek azt a pontját, amely leges a nagytengelyre. Számítsuk ki a húr hosszát.
965. Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis fókuszán keresztül hűrt fektetünk, amely merő-pontjának az ordinátáját.
964. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellipszis $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ abszcisszájú pontját a fókuszokkal összekötő szakaszokat a ponthoz tartozó rádiuszvektoroknak nevezzük.)
963. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott ellipszisek középpontjainak a $(7; 0)$, az y tengelyt a $(0; 4)$ pontban érinti.
- d) a tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, az x tengelyt az $(1; -5)$ pont;
- c) a középpontja a $(4; -5)$ pont, a nagytengelye 8 egység, egyik fókusz a

negyedben határozzuk meg az ellipszisnek azt a pontját, amely a harmadik negyedben fekvő tengelyvégpontokkal együtt legnagyobb területű háromszöget határoz meg.

METSZESI FELADATOK

978. Hol metszi

a) az $y = 2x$ egyenes az $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ ellipszist;

b) a $2x - y - 9 = 0$ egyenes az $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ ellipszist;

c) a $7x + 3y = 26$ egyenes a $7x^2 + 21y^2 = 364$ ellipszist;

d) a $3x - 4y - 40 = 0$ egyenes a $9x^2 + 16y^2 = 144$ ellipszist?

974. Milyen hosszú húr vág ki

a) az $y = mx$ egyenesből az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist;

b) az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ egyenesből az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist?

975. Milyen hosszú az $5x^2 + 9y^2 = 161$ ellipszisnek az $x + y = 7$ egyenesre illeszkedő húrja?

976. Az $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszisbe olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa a nagytengely jobb oldali végpontja; ezzel szemközti oldala pedig meőleges a nagytengelyre. Számítsuk ki a háromszög másik két csúcsának a koordinátáit.

977. Milyen hosszú az $x^2 + 2y^2 = 34$ ellipszis 4 abszcisszájú pontján áthaladó átmérő? (Az ellipszis középpontján áthaladó húr az ellipszis átmérőjének mondjuk.)

978. Kéressük meg az ellipszis mindkét tengelyén azokat a pontokat, amelyekből mint középpontokból köröket rajzolva, azok áthaladnak az $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipszis és a $3x - 10y + 60 = 0$ egyenes metszéspontján.

979. Rajzoljunk az $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipszis középpontja körül 15 egység sugarral kör. Húzzuk meg a körnek azt a sugarát, amelynek irányszöge 30° . Számítsuk ki a sugar azon részének a hosszúságát, amely a kör és az ellipszis közé esik.

980. Milyen hosszú a középponti helyzetű ellipszisnek az az átmérője, amely a koordinátatengelyek valamelyik szögfelezőjére illeszkedik?

981. Számítsuk ki a középponti helyzetű ellipszis egyik fókuszán és a kis-tengely végpontján áthaladó húr hosszát.

982. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ ellipszis és az $y = x + l$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit. l milyen értéke mellett van 2, 1, 0 megoldás?

983. Mekkora az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsziszbe írt négyzet oldalai?
- (Ellipsziszbe írt négyzetben, általában sokszögön olyan négyzetet, sokszöget értünk, amelynek csúcsai az ellipsziszre illeszkednek.)
984. Az $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellipsziszbe olyan téglalapot írunk, amelynek területje a kistengely négyzete. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.
985. Határozzuk meg a $9x^2 + 16y^2 = 144$ ellipszisznek azokat a pontjait, amelyekhez vezető egyik rádiuszvektor hossza 5 egység.
986. Adjuk meg az $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipszisznek azokat a pontjait, amelyek a jobb oldali fókuszról négyyszer akkora távolságra vannak, mint a bal oldali fókuszról.
987. Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisznek azokat a pontjait, amelyek a középponttól és az egyik fókuszról egyenlő távolságra vannak.
988. Határozzuk meg az $x^2 + 6y^2 = 2$ ellipszisz olyan átmérőinek az egyenletét, amelyeknek a hossza 2 egység.
989. Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisznek azokat a pontjait, amelyekhez vezető rádiuszvektorok szorzata a kistengely felének a négyzetével egyenlő.
990. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellipszisz olyan húrnak az egyenletét, amely áthalad a $P(1; 1)$ ponton, és amelyet a P pont felez.
991. Határozzuk meg a középponti helyzetű ellipszisznek azokat a pontjait, amelyekhez vezető rádiuszvektorok merőlegessék egymásra. Hány megoldás van?
992. Számítsuk ki az $x^2 + 9y^2 = 45$ és az $x^2 + 9y^2 - 6x = 27$ ellipsziszek metszéspontjait.
993. Két ellipszisz középpontja egybeesik a koordináta-rendszer kezdőpontjával; az egyiknek a nagy tengelyre, a másiké az y tengelyre illeszkedik. Az x tengelyre illeszkedő fél nagytengely $a_1 = 8$, az y tengelyre illeszkedő fél nagytengely $a_2 = 6$. A hozzájuk tartozó fél kistengelyek $b_1 = 4$ és $b_2 = 3$. Számítsuk ki az ellipsziszek metszéspontjait.
994. Bizonyítsuk be, hogy az ellipsziszben bármelyik két egymásra merőleges átmérő hossza reciprok értékeinek a négyzetösszege ugyanakkora.
995. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisz mindegyik negyedében azt a pontot, amelynek ordinátája felakkora, mint az illető pontnak a kistengelynek hozzá közelebb eső végpontjától mért távolsága.
996. Határozzuk meg azt a legnagyobb, sugártú kört, amelynek a középpontja az ellipszisz kistengelyének egyik végpontja, és még van közös pontja az ellipszisszel.
997. Adott az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisz. Írjunk bele olyan háromszögeket, amelyeknek egyik csúcsa a kistengely végpontja, a szemközti oldal pedig párhuzamos a nagy tengellyel. Melyik közülük a legnagyobb területű?

998. Vizsgáljuk meg a $4x - 5y - 40 = 0$ egyenes és az $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$ ellipszis viszonylagos helyzetét.

999. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $Ax + By + C = 0$ egyenes érintse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist. (Azt az egyenest, amelynek csak egy közös pontja van az ellipszissel, és az ellipszis síkjában van, az ellipszis érintőjének mondjuk.)

1000. Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 = a^2$ kör és az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis közös abszcisszájú pontjaiban húzott érintők az x tengelyen metszik egymást.

1001. Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis $(x_1; y_1)$ pontjához húzható érintő egyenlete $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$. Írjuk fel az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ellipszis $(2; -3)$ pontjában az ellipszishöz húzható érintő egyenletét.

1002. Írjuk fel az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis $x = \pm c$ abszcisszájú pontjaiban az ellipszishöz húzható érintők egyenletét. Határozzuk meg az érintők által meghatározott négyszög kerületét és területét.

1003. Az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszis jobb oldali fókuszában megrajzoljuk a pozitív ordinátát, és ennek végpontjában az ellipszishöz érintőt szerkesztünk. Mekkora az érintő és a tengelyek által bezárt háromszög területe?

1004. Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis $(x_1; y_1)$ pontjában merőlegest rajzolunk ebben a pontban az ellipszishöz húzott érintőre. Mely pontokban metszi az így kapott egyenes a koordinátatengelyeket?

1005. Határozzuk meg az $x^2 + 4y^2 = 20$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek párhuzamosak az $y = -x$ egyenessel.

1006. Írjuk fel az $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek merőlegesek a $13x + 12y - 115 = 0$ egyenessel.

1007. Határozzuk meg annak a négyszetnek csücsait, amelyeknek az átlói a koordináta-tengelyein vannak, és az oldalai érintik a $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipszist. Mekkora az érintési pontok által meghatározott négyszög területe?

1008. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintőknek legközelebb a koordinátatengelyek közé eső

1009. Írjuk fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek a tengelyei a koordináta-rendszer tengelyeire illeszkednek, és áthalad az $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{3}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ pontokon. Határozzuk meg a $(4; 4)$ pontból az ellipszishez húzható érintők egyenletét.
1010. Írjuk fel a $\left(\frac{3}{5}; \frac{14}{5}\right)$ pontból a $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipszishoz húzott érintők egyenletét.
1011. A $(10; -8)$ pontból érintőket rajzolunk az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipszishöz. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatározott húr egyenletét.
1012. A $(0; a)$ pontból érintőket húzunk az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszishöz ($a > b$). Számítsuk ki az érintőszakaszok hosszát.
1013. Számítsuk ki annak a négyszögnek a területét, amelyet a $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ellipszisen kívül fekvő $(p; q)$ pont, e pontból az ellipszishöz húzható érintők érintési pontjai és az origó határoznak meg.
1014. Írjuk fel annak a középponti helyezett ellipszisnek az egyenletét, amely áthalad a $\left(3; \frac{5}{12}\right)$ ponton, és érinti a $4x + 5y = 25$ egyenest.
1015. Írjuk fel annak az ellipszisnek egyenletét, amelynek a fókuszai a $(-3; 0)$ és a $(3; 0)$ pontok, és érinti az $x - y - 5 = 0$ egyenest.
1016. Írjuk fel annak a középponti helyezett ellipszisnek az egyenletét, amely érinti a $4x + 5y = 25$ és a $9x + 20y = 75$ egyeneseket.
1017. Határozzuk meg annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek a fókuszai az $x^2 + y^2 = r^2$ kör $(-r; 0)$ és $(r; 0)$ pontjaiban vannak, és a kört 30° -os szögben metszi.
1018. Határozzuk meg a $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipszis és az $x^2 + y^2 = 20$ kör közös érintőinek az egyenletét.
1019. Írjuk fel a $3x^2 + 8y^2 = 45$ ellipszis olyan érintőinek az egyenletét, amelyek a középponttól 3 egységgel távoloságra vannak.
1020. Határozzuk meg a $4x^2 + 5y^2 = 20$ és az $5x^2 + 4y^2 = 20$ ellipszisek között érintőinek az egyenletét.
1021. Bizonyítsuk be, hogy az ellipszis P pontjához tartozó érintő a ponthoz vezető rádiuszvektorok egyenesével egyenlő szögeket zár be.
1022. Feltevélezve azt, hogy egy tükörző felület keresztmetszete ellipszis, igazoljuk, hogy az ellipszis egyik fókuszából kiinduló fényugarak egy-az-egyével szembe fordítottak után a másik fókuszra haladnak át.
1023. Jelöljük az ellipszis nagytengelyén elhelyezkedő tengelypontokat A -val és B -vel, a hozzájuk tartozó érintőket rendre e_1 -gyel és e_2 -vel. Ezután jelöljük ki az ellipszisen egy tetszőleges, de A -tól és B -től különböző P pontot, és rajzoljuk meg a P ponthoz tartozó e érintőt is. Az e és e_1 metszéspontját jelöljük B_1 -gyel. Bizonyítsuk be, hogy
- a) az A_1B_1 szakasz a fókuszokból derékszög alatt látszik;
- b) az $AA_1 \cdot BB_1$ szorzat állandó.

1024. Bizonyítsuk be, hogy ha az ellipszis egyik fókuszát az ellipszis érintőjére tükrözzük, akkor a tükröképpek a másik fókusz körül a nagytengellyel, mint sugárral írt körre illeszkednek. (Az ellipszis egyik fókusza körül a nagytengellyel mint sugárral írt kör az ellipszis vezérkörének nevezzük.)
1025. Bizonyítsuk be, hogy ha az ellipszis egyik fókuszából az ellipszis érintőjére merőlegeseket állítunk, akkor a merőlegesek talpontjai az ellipszis fő-körére illeszkednek.
1026. Bizonyítsuk be, hogy a fókuszoknak az ellipszis érintőjétől mért távolságainak szorzata nem függ az érintő megválasztásától.
1027. Jelöljük az ellipszis középpontját O -val, a nagytengelyen elhelyezkedő ellipszispontokat A -val és B -vel. Az ellipszis A -tól különböző P pontjához tartozó érintője az A pontjához tartozó érintőjét a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BP \parallel OQ$.
1028. Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza. Szerkesszük meg az ellipszis egyik pontját és ehhez a ponthoz tartozó érintőt.
1029. Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza. Szerkesszük meg az ellipszis néhány pontját. Az ellipszis síkjában felvett kúlsó pontból szerkesszünk az ellipszishoz érintőt.
1030. Adott az ellipszis nagytengelyének és a kistengelyének a hossza és az ellipszis síkjában egy e egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és az egyenes metszéspontjait.
1031. Az ellipszist ismernek tekintjük, ha ismerjük nagytengelyének a hosszát és a fókuszainak a távolságát. Ezt szem előtt tartva, szerkesszünk ellipszist, ha adott
- a) a nagytengelyének és a kistengelyének a hossza;
 b) a kistengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
 c) a két fókusz és egy pontja;
 d) az egyik fókusz, két pontja és a nagytengelyének a hossza;
 e) a két fókusz és az egyik érintője;
 f) az egyik fókusz, az egyik érintője és a középpontja;
 g) az egyik fókusz, két érintője és a nagytengelyének az iránya;
 h) az egyik fókusz, két érintője és a nagytengelyének a hossza;
 i) az egyik fókusz, az egyik érintője és a nagytengelyének egyik végpontja;
 j) a nagytengelyének helyzete és hossza, valamint az egyik érintője;
 k) az egyik fókusz, az egyik érintője az érintési ponttal és a fókuszainak a távolsága;
 l) az egyik fókusz, az egyik érintője az érintési ponttal és a nagytengelyének az iránya;
 m) az egyik fókusz, két érintője és az egyik az érintési pont;
 n) az egyik fókusz, az egyik érintője, a nagytengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
 o) az egyik fókusz, az egyik érintője, egyik pontja és a nagytengelyének a hossza.

(A 2a hosszúságú szakaszt, amely a valós tengelyegyenestől elhelyezkedő két hiperbolapontot köti össze, valós tengelyszakasznak vagy valós tengelynek nevezzük. Jelöljük a fókuszokat összekötő szakasz hosszát $2c$ -vel. Ekkor $b^2 = c^2 - a^2$. A $2b$ hosszúságú szakaszt, amely a fókuszok távolságát mérőlegesen felező egyenesnek, a képzetes tengelyegyenestnek a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1037. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola középponti egyenlete:

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy megfordítva, azok a pontok, amelyeknek koordinátái kielégítik a (**). egyenletet, elégítik a (*)

$$(**) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kielégítik az

$$(*) \quad |PF_1 - PF_2| = 8,$$

amelyekre

1036. Adott egy sík és a síkban két pont: $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$. Bizonyítsuk be, hogy azoknak az adott síkra illeszkedő P pontoknak a koordinátái, tengelyegyenese.

1035. Írjuk fel $a)$ az $xy = 2$; $b)$ az $xy = 4$ hiperbola egyenletét abban a koordináta-rendszerben, amelynek az x tengelye a hiperbola valós és képzetes tengelyegyeneseinek az egyenletét.

1034. Határozzuk meg, hogy $a)$ az $xy = 18$; $b)$ a $2xy - 9 = 0$ hiperbola mely pontjai vannak legközelebb az origóhoz? Írjuk fel a hiperbola valós felező pontot.

ahol $F_1(-3; -3)$ és $F_2(3; 3)$. Szerkesszünk néhány, a feltételnek meg-

$$|PF_1 - PF_2| = 6,$$

1033. Hol helyezkednek el azok a P pontok a síkban, amelyekre

A HIPERBOLA EGYENLETE

A HIPERBOLA

1032. Szerkesszünk adott ellipszis köré olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcsa a kistengely egyenesére illeszkedik.

- $v)$ az egyik fókusza és három érintője.
 $u)$ két érintője, a középpontja és a nagytengeleynél a hossza;
 $t)$ a nagytengeleynél két végpontja és egy pontja;
 $s)$ az egyik fókusza, az egyik pontja és a kistengelynek az egyik végpontja;
 $r)$ az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal, tengelyének a hossza;
 $p)$ az egyik fókusza, az egyik érintője az érintési ponttal és a nagy-

1038. Írjuk fel a hiperbola középponti egyenletét, ha képzetes tengelynek nevezzük.)

1039. Szerkesszük meg a hiperbola középpontját, ha

a) a valós tengelye 8 cm, a képzetes tengelye 6 cm;

b) a valós tengelye 12 cm, a fókuszok távolsága 14 cm;

c) a képzetes tengelye 8 cm, a fókuszok távolsága 12 cm.

1040. A hiperbola a síkot két tartományra osztja. A fókuszokat tartalmazó tartományt belső, a fókuszokat nem tartalmazó tartományt külső tartománynak nevezzük. Igazoljuk, hogy ha a hiperbola fókuszai F_1 és F_2 és a valós tengelye $2a$, akkor a belső tartomány P pontjaira

$$|PF_1 - PF_2| > 2a,$$

és a külső tartomány P pontjaira

$$|PF_1 - PF_2| < 2a.$$

Határozzuk meg, hogy a (2; 4); (5; 8); (-6; 1) pontok a $36x^2 - 9y^2 = 324$ hiperbolához viszonyítva hol helyezkednek el.

1041. Mi az egyenlete annak a hiperbolának, amelynek a valós tengelyegyenese az x tengely, a képzetes tengelyegyenese az y tengely, továbbá

a) a valós tengelye 6 egység és a hiperbola áthalad az (5; 8) ponton;

b) a fókuszainak a távolsága 10 egység és a hiperbola áthalad az $(5; -\frac{9}{4})$ ponton;

c) a képzetes tengelye 8 egység, és a hiperbola áthalad a (-6; 4) ponton;

d) a hiperbola áthalad a (6; -1) és a (-8; $2\sqrt{2}$) pontokon.

1042. Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét

a) amelynek a középpontja a (-4; -3) pont, a valós tengelye 12, a képzetes tengelye 8 egység, és a valós tengelye párhuzamos az x tengellyel;

b) amelynek a valós tengelye 24 egység, a fókuszai $F_1(-10; 2)$; $F_2(16; 2)$;

c) amelynek a képzetes tengelye 10 egység, a fókuszai $F_1(4; 4)$; $F_2(-8; 4)$.

1043. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott hiperbolák középpontjainak és a fókuszainak koordinátáit:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{216} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{324} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{256} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{216} = 1$$

1048. Határozzuk meg
 a) a $2x - y - 10 = 0$ egyenes és az $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ hiperbola közös pontjait;
 b) a $4x - 3y - 16 = 0$ egyenes és az $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbola közös pontjainak a számát;
 1049. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbola és az $y = \frac{2}{x} - 2$ egyenes közös pontjainak a számát. Mekkora az egyenesnek a két hiperbolaág közötti szakasza?
 1050. Szerkesztük meg az $x^2 - 4y^2 = 4$ hiperbolának a $P(3; -1)$ ponton áthaladó olyan húrját, amelyet a P pont megfelelez.
 1051. Milyen hosszú húr vág ki az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola az $x - 2y - 1 = 0$ egyenesből?
 1052. Az $\frac{9}{x^2} - \frac{4}{y^2} = 1$ hiperbola valós tengelyével párhuzamost húzunk tőle d távolságban. Mekkora szakaszt vág ki a hiperbola az egyenesből?
 1053. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola és az $y = mx$ egyenes metszéspontjainak koordinátáit.

METSZÉSI FELADATOK

1047. Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek a fókusza azonos az $x^2 - y^2 = 8$ hiperboláéval, és áthalad a $(-5; 3)$ ponton.
 1046. Határozzuk meg a (4; 6) ponton áthaladó, és az $x^2 - y^2 = 8$ hiperbolával közös fókuszú ellipszis egyenletét.
 1045. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ hiperbola $x = 10$ abszcisszájú pontjához tartozó rádiuszvektorok hosszát és hajlásszögét.
 1044. A hiperbola fókuszai egybeesnek az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszis fókuszaival. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha a valós tengelye 6 egység.
 c) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
 d) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0$.
 a) $\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$;
 b) $\frac{1}{\left(y + \frac{3}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = 1$;

A HIPERBOLA ASZIMPTOTAI ES ERINTŐJE

1054. Keressük meg az $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{289} = 1$ hiperbolának azt a pontját, amelyet a $v(1; 1)$ irányvektor szaksz köt össze a kezdőponttal.
1055. Milyen hosszú az $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolának az a húrja, amely az egyik fókuszán és a képzetes tengely végpontján áthaladó egyenesre illeszkedik?
1056. A $9x^2 - 16y^2 = 576$ hiperbola az origón áthaladó valamelyik egyenesből 20 egyenes hosszúságú szakaszt vág ki. Határozzuk meg az egyenes egyik irányvektorát.
1057. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = 25$ kör és a $9x^2 - 4y^2 = 108$ hiperbola metszéspontjai által meghatározott négyszög területét.
1058. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbolának azokat a pontjait, amelyek a bal oldali fókuszról 7 egységre távoloságra vannak.
1059. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolának azt a pontját, amelyhez tartozó rádiuszvektorok egymásra merőlegesek;
- a) amely a bal oldali fókuszról kétszer akkora távoloságra van, mint a jobb oldalról.
1060. Egy hiperbola egyenlete $9x^2 - 16y^2 = 144$. Az $x^2 + y^2 = r^2$ kör úgy metszi a hiperbolát, hogy a metszéspontok által meghatározott téglalap területé egyenlő azon téglalap területének a négyszeresével, amelynek oldalai a hiperbola tengelyei. Mekkora a kör sugara?
1061. Egy téglalap csúcsai a $9x^2 - 16y^2 = 144$ hiperbolára illeszkednek. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak a koordinátáit, ha a területe a valós tengellyel szerkesztett négyszög területével egyenlő.
1062. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{400} = 1$ hiperbolának azt a pontját, amelyhez tartozó rádiuszvektorok összege 130 egység.
1063. Egy hangforrás helyét akarják meghatározni. Ezért három megfigyelő $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ és $C(6; 0)$. (A távolság egységet km-ben adták meg.) A, B és C egy egyenesen úgy helyezkedik el, hogy a koordinátáik: A, B figyelihez a hangforrásból 3 másodperccel később érkezik meg a hang, mint a C figyelihez. Az A figyeli 9 másodperccel később hallja ugyanazt a hangot, mint a B . A hang terjedési sebessége $\frac{1}{3}$ km/s. Határozzuk meg a hangforrás helyét.

1064. Irjuk fel a $4x^2 - 9y^2 = 36$ hiperbola aszimptotáinak az egyenletét.
1065. Mekkora szöveget zárnak be az $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5.76} = 1$ hiperbola aszimptotái?
1066. Irjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak a hajlásszöge 120° .

egyenesnek és az $\frac{9}{x^2} - \frac{36}{y^2} = 1$ hiperbolának?

1081. m milyen értékei mellett lesz 2, 1, illetve 0 közös pontja az $y = \frac{2}{5}x + m$ helyzetét.
- c) a $16x^2 - 25y^2 = 400$ hiperbola és a $7x - 5y = 0$ egyenes viszonylagos
 b) a $9x^2 - 16y^2 = 144$ hiperbola és az $x - 2y + 1 = 0$ egyenes;
 a) az $x^2 - 4y^2 = 12$ hiperbola és az $x - y - 3 = 0$ egyenes;
1080. Vizsgáljuk meg
 háromszög területére nem függ az érintő megválasztásától.
1079. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője és aszimptotái által határolt tartozó hiperbolaérintőt.
1078. Szerkesszük meg az $xy = a$, illetve az $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ hiperbola egyik pontját (a , b adott szakaszok), ezután szerkesszük meg az adott ponthoz tartozó hiperbolaérintőt.
1077. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintőjének az érintési pontja felezi az érintőtől az aszimptoták által kivágott szakaszt.
1076. Igazoljuk, hogy ha egy egyenes két pontban metszi a hiperbolát, akkor ennek az egyenesnek az aszimptotáktól a hiperboláig terjedő szakaszai egyenlők.
1075. Bizonyítsuk be, hogy az aszimptotákkal párhuzamos egyenesek a hiperbolát egy pontban metszik.
1074. Az $\frac{49}{x^2} - \frac{16}{y^2} = 1$ hiperbolán keressük meg azt a pontot, amely az egyik aszimptotához háromszor közelebb van, mint a másikhoz.
1073. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszán az aszimptotákra vonatkozó tükkörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.
1072. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszából az aszimptotákra húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós felteengellyel rajzolt körön vannak.
1071. Az $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ hiperbola P pontján át állítsunk merőleges egyenest az x tengelyre. Bizonyítsuk be, hogy ennek az egyenesnek az aszimptoták közötti szakaszát a P pont olyan két részre osztja, amelyeknek a mértani közepe b .
1070. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármely pontjának az aszimptotáktól totára húzott merőleges talppontjának a középponttól mért távolságát mért távolságai 0-tól különböző állandó értéket adnak szorzatul.
1069. Számítsuk ki az $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ hiperbola egyik fókuszából az egyik aszimptotára húzott merőleges talppontjának a középponttól mért távolságát.
1068. Igazoljuk, hogy a derékszögű hiperbola felezi a fókuszainak az aszimptotától mért távolságát. (Derékszögűnek mondjuk a hiperbolát akkor, ha az aszimptotái merőlegesek egymásra. A derékszögű hiperbola valós és képzetes tengelye egyenlő.
1067. Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek aszimptotái a koordinátatengelyek, és áthalad a $(-4; 2)$ ponton.

1082. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $Ax + By + C = 0$ egyenes érintse az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolát? (Ázt az egyenest, amelynek egy közös pontja van a hiperbolával, és a hiperbola síkjában van, a hiperbola érintőjének mondjuk.)
1083. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola $P(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.
1084. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintője felezi az érintési ponthoz tartozó rádiuszvektorok hajlásszögét. Hogyan alkalmazhatjuk ezt a tételt a hiperbola adott pontjához tartozó érintő megszerkesztésére?
1085. Feltételezve azt, hogy egy tüköröző felület keresztmetszete hiperbola, igazoljuk, hogy az egyik fókusz képe a hiperbola másik fókusza.
1086. Írjuk fel a $4x^2 - 5y^2 = 20$ hiperbola (5; -4) pontjához tartozó érintő egyenletét.
1087. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha aszimptotáinak az egyenlete $y = \pm \frac{1}{2}x$ és egyik érintőjének az egyenlete $5x - 6y - 8 = 0$.
1088. Mi az egyenlete annak a hiperbolának, amely az $x - y - 2 = 0$ egyenest a $P(4; 2)$ pontjában érinti, és tengelyei a koordinátatengelyekre illeszkednek?
1089. Írjuk fel a középponti helyzetű hiperbola egyenletét, ha két érintője: $5x - 6y - 16 = 0$; $13x - 10y - 48 = 0$.
1090. Írjuk fel a hiperbola egyenletét, ha fókuszai: $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$, és az egyik érintője $y = mx + n$.
1091. Húzzunk olyan érintőt az $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ hiperbolához, amely párhuzamos az $x + y - 7 = 0$ egyenessel. Mi az érintő egyenlete?
1092. Írjuk fel az $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ hiperbola olyan érintőjének az egyenletét, amely merőleges az $y = -0,3x$ egyenesre.
1093. Írjuk fel az $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolához a (2; 0) pontból rajzolható érintők egyenletét.
1094. A $P(1; -10)$ pontból érintőket rajzolunk a $4x^2 - y^2 = 32$ hiperbolához. Írjuk fel az érintési pontok által meghatározott húr egyenletét.
1095. A (0; b) pontból érintőket húzzunk az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolához. Mekora az adott pont és az érintési pontok közé eső szakaszok hossza?
1096. Húzzunk érintőt az $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbolához, amely a középponttól és a jobb oldali fókuszától egyenlő távolságra van.
1097. Illeszkedik a $9x^2 - 8y^2 = 72$ hiperbolához olyan érintőt, amelynek az egyik irányvektora $(1; \sqrt{3})$.

1098. Az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola (x_1, y_1) pontjában merőlegest húzunk az ebben a pontban a hiperbolához tartozó érintőre. Mely pontokban metszi ez az egyenes a koordinátatengelyeket?
1099. Milyen szögben metszik egymást a $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipszis és a $12x^2 - 4y^2 = 225$ hiperbola?
1100. Igazoljuk, hogy a közös fókuszú ellipszis és hiperbola derékszögben metszik egymást.
1101. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola egyik fókuszának az érintőkre vonatkozó tükörképei a másik fókusz köré a valós tengellyel rajzolt körön vannak.
1102. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola fókuszaitól az érintőkre húzott merőlegesek talppontjai a hiperbola középpontja köré a valós félteneggellyel rajzolt körön vannak.
1103. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola bármelyik érintőjének a fókuszoktól mért távolságainak szorzata nem függ az érintő megválasztásától.
1104. A hiperbolát ismertnek tekintjük, ha ismerjük a valós tengelyét és a fókuszainak a távolságát. Szerkesszünk hiperbolát, ha adott
- a) a valós és a képzetes tengelyének a hossza;
 - b) a képzetes tengelyének a hossza és a fókuszainak a távolsága;
 - c) a két fókusz és egyik pontja;
 - d) az egyik fókusz, két pontja és a valós tengelyének a hossza;
 - e) a két fókusz és az egyik aszimptotája;
 - f) az egyik fókusz és három érintője;
 - g) a két fókusz és az egyik érintője;
 - h) az egyik fókusz, az egyik érintője és az egyik tengelypontja;
 - i) az egyik fókusz, két érintője és a valós tengelyének az iránya;
 - j) az egyik fókusz, az egyik érintője és a középpontja;
 - k) az egyik fókusz, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengely egyenese;
 - l) az egyik fókusz és két érintője, az egyiken az érintési ponttal;
 - m) az egyik fókusz, az egyik érintője, a valós tengelyének az iránya és a valós tengelyének a hossza;
 - n) az egyik fókusz, az egyik érintője, a valós tengelyének a hossza és az egyik pontja;
 - o) az egyik érintője és a két tengelypontja;
 - p) az egyik érintője, a középpontja, a valós tengelyének a hossza és a fókuszok távolsága;
 - r) a valós tengelyének a hossza és a két aszimptotája;
 - s) az egyik fókusz, az egyik érintője és az egyik aszimptotája;
 - t) az egyik tengelyponthoz tartozó érintője, az egyik aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
 - u) az egyik fókusz, a két aszimptotája és a valós tengelyének a hossza;
 - v) az egyik fókusz, az egyik érintője az érintési ponttal és a valós tengelyének az iránya;