h) Egyelőre $\sin x = m$; $\sin y = n$-et tekintjük ismeretlennek, mert ezek szorzatának és összegének értéke adott. Akár az egyenletrendszerből kiküszöböléssel, akár direkt felírással másodfokú egyenletet írhatunk fel. Az eredményben x és y felcserélhetők.
$x = 19{,}47°$ vagy $160{,}53°$; $y = 14{,}47°$ vagy $165{,}53°$ (négyféle csoportosítás lehetséges).

i) Az előzőkhöz hasonlóan $\cos x = m$; $\cos y = n$;

$x = 53{,}13°$ és $306, 87°$; $y = 70{,}53°$ és $289{,}47°$ (négyféle csoportosítás lehetséges).

j) Összeadjuk a két egyenletet:

$\sin x = \pm 1$, $\cos y = 0$.

$x = 90°$ és $270°$; $y = 90°$ és $270°$.

Itt is a négyféle csoportosítás lehetséges. A két gyök:

$90°$ és $90°$; $90°$ és $270°$; $270°$ és $90°$; $270°$ és $270°$.

k) Összeadjuk a két egyenletet, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $\cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y$-t helyettesítjük.

$x = 45° + n \cdot 360°$; $y = n \cdot 180°$.

l) Összeadjuk, majd kivonjuk a két egyenletet. Így kapjuk $\cos(x-y) = 1$ és $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$ egyenleteket, amelyekből $x-y$ és $x+y$ értékei megállapíthatók.

$x-y = 0°$ és $x+y = 60°$; $x = y = 30°$.

m) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ képletet alkalmazzuk.

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi$; $y = -\frac{\pi}{12} + 2n\pi$.

n) $x_1 = n\pi$; $y_1 = \pm\frac{\pi}{6}$; $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ és $-\frac{5\pi}{6}$; $y_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

o) $\sin(x+y) = \sin[90° - (x-y)]$.

Vagy $(x+y)+(x-y) = 90° + n \cdot 360°$, ebből $x = 45° + n \cdot 180°$ és a második egyenletből $y = n \cdot 180°$;

vagy $(x+y)-(x-y) = 90° + n \cdot 360°$; ebből $y = 45°$; a második egyenletből $\operatorname{tg} x = 2$; $x = 63{,}43° + n \cdot 180°$.

p) Maradjanak az egyenlet egyik oldalán az egyenlő együtthatójú tagok, emeljünk négyzetre mindkét egyenletben és vonjuk össze:

$4 = 4 - 2\cos y - 2\cos^2 y$,

$y_1 = 90°$; $y_2 = 180°$; $y_3 = 270°$,

$x_1 = 60°$; $x_2 = 0°$; $x_3 = 300°$.

r) Maradjanak az egyenlet egyik oldalán az ugyanazon ismeretlent tartalmazó tagok. Emeljünk négyzetre, s adjuk össze a két egyenletet.

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$y_1 = 45°;\ y_2 = 135°;\ y_3 = 225°;\ y_4 = 315°;$
$x_1 = 30°;\ x_2 = 150°;\ x_3 = 210°;\ x_4 = 330°.$

x és y-ra a sinusok előjele is, a cosinusok előjele is egyezik, ezért x és y mindig ugyanabban a negyedben vannak.

s) Az első egyenletet négyzetre emeljük, a második egyenletbe $\operatorname{tg} 2x$ és $\operatorname{tg} 2y$ képletét helyettesítjük, és eltávolítjuk a törtet. $1-\operatorname{tg}^2 x \neq 0$, mert akkor $x = 45°$ és $\operatorname{tg} 90° = \infty$, ami az egyenletrendszer szerint lehetetlen.

$\operatorname{tg} x = 1+2\sqrt{2};\ \operatorname{tg} y = 1-2\sqrt{2};\ \operatorname{tg} x = 1;\ \operatorname{tg} y = 1;$

$x_1 = 45°;\ y_1 = 45°;\ x_2 = 75{,}38°;\ y_2 = -61{,}3°.$

t) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$-et és $\operatorname{tg} y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$-t helyettesítünk, közös nevezőre hozunk, majd a második egyenletből a nevezőbe helyettesítünk. $x = 45°$; $y = 45°$.

u) Az első egyenletből $\operatorname{tg} y$-t kifejezve a második egyenletbe helyettesítünk, ahol $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$-et és $\operatorname{ctg} y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} y}$-t helyettesítünk.

$x_1 = 53{,}1°+n\cdot 180°;\ x_2 = 33{,}69°+n\cdot 180°,$
$y_1 = 97{,}12°+n\cdot 180°;\ y_2 = 116{,}57°+n\cdot 180°.$

v) A második egyenletet átalakítjuk $\cos 2x$ képletét alkalmazva. $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$-et, illetve $\sin^2 y = 1-\cos^2 y$-t helyettesítünk. Megkapjuk $\cos^2 x+\cos^2 y$ értékét, és így másodfokú egyenletrendszert kaptunk $\cos x$-re és $\cos y$-ra. $x = 6°$; $y = 19°$.

z) $x_1 = 60°;\ y_1 = 90°;$
$x_2 = 90°;\ y_2 = 120°.$

512. *a)* Az első egyenletből: $y = 2x$.

A második egyenletbe helyettesítünk $\operatorname{ctg} 3x = \dfrac{1}{8}$.

$x = 27{,}63°,\ y = 55{,}26°.$

b) $2^{x-2} = (2^2)^{y-1};\ x = 2y.$

Helyettesítünk, $\sin 2y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ képletet alkalmazzuk, majd kiemelünk, $y_1 = \dfrac{\pi}{4};\ x_1 = \dfrac{\pi}{2};\ y_2 = n\pi;\ x_2 = 2n\pi.$

c) $\operatorname{tg} y \cdot {}^{2}\log x = -3,$

$$\frac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}\cdot {}^{2}\log x = 2.$$

$$x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 64;\ y_1 = 71{,}6°;\ y_2 = -26{,}5°.$$

513. A tanult azonosságok segítségével az első egyenletrendszert átalakítjuk s kiemelünk. – Ezután oldjuk meg a második egyenletrendszert.

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = -1,$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = 0.$$

A második egyenletet elosztjuk az elsővel: $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = 0$, ebből $y = 2n\pi - x$, ezt helyettesítjük az első egyenletbe.

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n'\pi;\quad y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n''\pi.$$

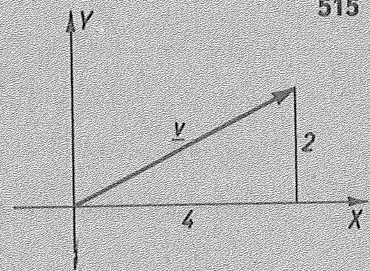
514. Az első egyenletből: $\sin^2 x = \frac{b-a_1}{a-a_1}$;

$\cos^2 x = \frac{a-b}{a-a_1}$; $\operatorname{tg}^2 x = \frac{b-a_1}{a-b}$. Hasonlóan kapjuk a második egyenletből $\operatorname{tg}^2 y$ értékét. Ezeket helyettesítjük a harmadik egyenletbe. Eltávolítjuk a törteket. Kiemelünk, végül osztunk aa_1bb_1-gyel.

KOORDINÁTA-GEOMETRIA

515. Az *a)* esetben a megoldás a 515. ábráról leolvasható. $|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$.

515



519. A $\mathbf{v}(3; 4)$-re a megoldások rendre $(3; -4)$, $(-3; 4)$, $(-3; -4)$, $(4; 3)$, $(-4; -3)$.

521. 4 megoldás van.

522. *a)* $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\left(0; \frac{-a\sqrt{2}}{2}\right)$.

523. Ha a hatszög oldala a, akkor a csúcsainak helyvektorai:

a) $(a; 0)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, ...

b) $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $(0; a)$, ...

524. $\left(\frac{d}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{d\sqrt{2}}{4};\ \frac{d\sqrt{2}}{4}\right)$, ...

526. Az $\mathbf{a}(2;\ 3)$-ra a megoldás $(-3;\ 2)$, illetve $(3;\ -2)$.

528. $\overrightarrow{AB}$ koordinátái $(-2;\ 7)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{53}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ koordinátái $(0;\ 0)$.

530. *e)* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *f)* $\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *g)* $\left(\frac{a}{2};\ \frac{c}{2}\right)$.

531. $\left(-\frac{3+\sqrt{2}}{2};\ -\frac{5+\sqrt{2}}{2}\right)$.

532. A háromszög A, B, C csúcsainak helyvektorai legyenek rendre $\mathbf{a}(x_1;\ y_1)$, $\mathbf{b}(x_2;\ y_2)$, $\mathbf{c}(x_3;\ y_3)$. Ekkor például az AC oldal felezéspontjának helyvektora $\mathbf{b}_1\left(\frac{x_1+x_3}{2};\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$, az AB oldal felezéspontjának helyvektora $\mathbf{c}_1\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Igazoljuk, hogy $|\mathbf{b}_1-\mathbf{c}_1| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

533. $(8;\ -1)$; $(-4;\ 7)$; $(0;\ -5)$.

534. $3\sqrt{2}$; $\frac{3}{2}\sqrt{5}$; 4,5.

535. $(3;\ -2)$, $(-6;\ 4)$, illetve $(-a;\ -b)$, $(2a;\ 2b)$, ha az adc[illegible]pont $(a;\ b)$.

536. *a)* $\left(4\frac{3}{7};\ 1\frac{5}{7}\right)$ vagy $\left(4\frac{4}{7};\ 1\frac{2}{7}\right)$,

b) $(5;\ 2)$ vagy $(8;\ 8)$.

537. $\left(2\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{3}\right)$.

538. *a)* $(3;\ 2)$, $(4;\ 6)$, $(5;\ 10)$.

b) $\left(\frac{13}{3};\ \frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{17}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

539. $(3;\ 5)$ és $(7;\ -3)$.

540. $(27;\ -4)$ és $(-22;\ 10)$.

541. *c)* $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{3};\ \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; *d)* $\left(\frac{11a+b}{18};\ \frac{11a-b}{18}\right)$.

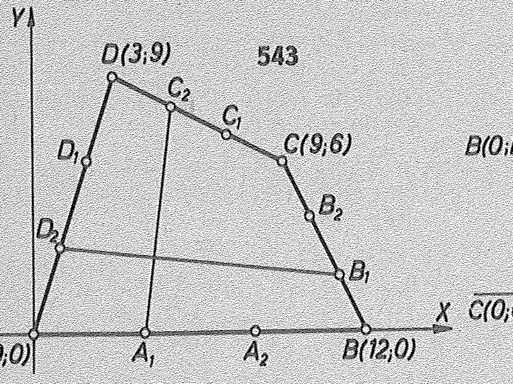
542. 5; $2\sqrt{5}$; 2; $S\left(\frac{10}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

543. Számítsuk ki például az A_1, B_1, C_2, D_2 pontok koordinátáit. Ezután bizonyítsuk be, hogy az A_1C_2 szakasz és a D_2B_1 szakasz A_1, illetve D_2 ponttal szomszédos harmadolópontjainak koordinátái megegyeznek (543. ábra).

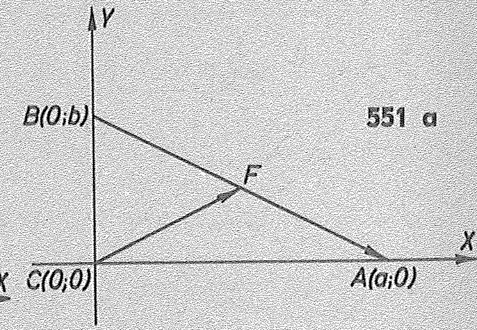
544. Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.

546. Három megoldás van:

a) $(2;\ -2)$, $(4;\ 4)$, $(-2;\ 2)$;
b) $(5;\ -5)$, $(7;\ -3)$, $(3;\ 9)$;
c) $(8;\ 3)$, $(4;\ 7)$, $(-2;\ 1)$.



543



551 a

547. Használjuk fel a háromszög belső szögfelezőire vonatkozó tételt: a belső szögfelező az oldalt olyan két részre osztja, amelyeknek az aránya a szakaszokkal szomszédos oldalak arányával egyenlő. Megoldások:

$$\left(\frac{10}{3};\ \frac{17}{3}\right),\quad \left(6-2\sqrt{5};\ \frac{3\sqrt{5}-1}{2}\right),\quad (6\sqrt{5}-8;\ 8\sqrt{5}-15).$$

548. Az x tengelyt az AB egyenes C pontban metszi. Számítsuk ki azt, hogy a B pont milyen arányban osztja az AC szakaszt. A felírt egyenletekkel a C abszcisszája kiszámítható: $C\left(\frac{46}{5};\ 0\right)$. Az y tengellyel való metszéspont: $D\left(0;\ \frac{23}{3}\right)$.

549. $\left(\frac{96}{25};\ \frac{72}{25}\right)$.

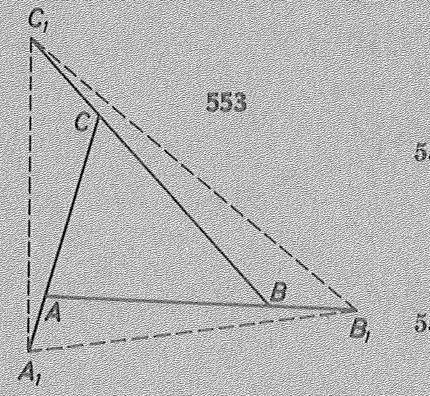
550. $\left(-\frac{7}{4};\ \frac{5}{4}\right)$.

551. *a)* Igazoljuk, hogy $|\overrightarrow{CF}| = |\overrightarrow{FA}|$ (551/*a* ábra).
b) Fejezzük ki a szemközti oldalak felezéspontjainak helyvektorait a csúcsok koordinátáival.

552. Helyezzük el a háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a súlypontja az x tengelyre illeszkedjen.
A tétel igaz akkor is, ha a csúcsokból a súlyponton áthaladó egyenessel α szöget közrefogó párhuzamos szakaszokat húzunk az egyeneshez. Bizonyítsuk be!
Hogyan általánosítható a tétel sokszögekre? (A $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$,

$P_3(x_3;\ y_3)$, ..., $P_n(x_n,\ y_n)$ csúcsokkal megadott sokszög súlypontján az $S\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n};\ \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)$ pontot értjük.)

553. Fejezzük ki a nyújtással adódó $A_1B_1C_1$ háromszög csúcsainak koordinátáit az adott ABC háromszög csúcsainak koordinátáival. Ezután számítsuk ki a két háromszög súlypontjának a koordinátáit (553. ábra). Igazoljuk a tételt elemi úton is, az A, B, C, illetve az A_1, B_1, C_1 csúcsok helyvektorainak a segítségével.



553

554. A mozgó P pont helyvektora: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$, ahol $\mathbf{r}_0(3;\ 4)$, $\mathbf{v}(1;\ 1)$, t tetszőleges szám.

Például, ha a $t = 3{,}5$, akkor $P(3+3{,}5;\ 4+3{,}5)$.

555. *a)* $x = t$, $y = 2t$;

e) $x = 3+3t$, $y = 1+2t$.

558. *a)* $A = \frac{2}{7}$; $B = -\frac{1}{14}$; *b)* $A = \frac{1}{4}$; $B = -\frac{3}{8}$.

561. $(-3;\ 6)$ vagy $(6;\ -6)$.

562. $\left(-5;\ -\frac{10}{3}\right)$.

565. $x = 4(\sqrt{3}-1)$.

566. *a)* $x = 2$, $y = 4$.

568. *h)* $\left(-3\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right)$; *i)* $\left(-4\frac{7}{8};\ -9\frac{19}{30}\right)$;

j) $(-1;\ -1)$; *k)* $(2;\ -1{,}9)$.

569. *h)* $x+y = 0$.

570. *a)* $3x-5y = -3$; *b)* $x-y = -2$; *c)* $x-3y = 7$;
d) $5x-4y = 0$; *e)* $9x-14y = -15$; *f)* $3x+5y = -14$;
g) $25x+10y = 32$; *h)* $5x+36y = -8$; *i)* $y = 4$;
j) $x = 0$; *k)* $8x-3y = -24$; *l)* $x-y = 0$;
m) $(7\sqrt{6}+12)x+15y = 36\sqrt{2}+12\sqrt{3}$.

572. *a)* $x+y = 2$; *b)* $4x-3y+12 = 0$; *c)* $6x-5y = 30$;
d) $3x+2y = -6$; *e)* $6x+y = 4$; *f)* $3x+5y = 4$;
g) $170x+30y = 51$; *h)* $x+y = a$; *i)* $x-y = a$.

573. Először határozzuk meg az egyenes egyik irányvektorát, majd írjuk fel a $P(a;\ 0)$ ponton áthaladó, adott irányvektorú egyenes egyenletét.

574. $5x\pm 4y = 20$ és $-5x\pm 4y = 20$ vagy
$4x\pm 5y = 20$ és $-4x\pm 5y = 20$.

576. *a)* 2 és 3; *b)* 5 és 8; *c)* 4 és −6; *d)* −3 és −

e) −5 és 4; *f)* $-\frac{4}{3}$ és 2; *g)* 5 és $\frac{5}{3}$; *h)* $-\frac{1}{4}$ és $-\frac{1}{5}$;

i) $-\frac{C}{A}$ és $-\frac{C}{B}$, ha $AB \neq 0$; *j)* −3 és 5; *k)* 3 és 3;

l) 7,5 és −3; *m)* 0 és 0; *n)* 0 és 0.

577. *a)* 24; *b)* $\frac{50}{99}$; *c)* 3.

578. *a)* 13; *b)* $\frac{2}{3}\sqrt{13}$; *c)* $\frac{4}{15}\sqrt{34}$; *d)* $\sqrt{13}$.

579. Legyen $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = k$, ahol a és b a tengelymetszetek és a k adott állandó ($ab \neq 0$). Bizonyítsuk be, hogy a feltételt kielégítő egyenesek a $P\left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$ ponton haladnak át ($k \neq 0$). Igazoljuk, hogy ha a $k = 0$, akkor párhuzamos egyenessereget kapunk.

580. *a)* Két megoldás van: $x+y = 6$; $x-y = 2$.
b) Két megoldás van: $x+y = -1$; $-x+y = 3$.
c) Két megoldás van: $x+y = -7$; $-x+y = 3$.

581. Két megoldás van: $3x+y = 7$, $3x-y = 7$.

582. $x+2y = 6$.

583. *a)* Két megoldás van: $x+4y = 2$ vagy $x+9y = -3$.
b) Két megoldás van: $x+8y = 4$ vagy $x+2y = -2$.
c) A tengelymetszetek:

$$a = \frac{t \pm \sqrt{t(t-2uv)}}{v}, \qquad b = \frac{t \mp \sqrt{t(t-2uv)}}{u},$$

ha $ab > 0$ és

$$a = \frac{-t \pm \sqrt{t(t+2uv)}}{v}, \qquad b = \frac{-t \mp \sqrt{t(t+2uv)}}{u},$$

ha $ab < 0$.
Ha $u = v = 0$, nincs megoldás.
Legyen u és v megegyező előjelű. Ekkor 4, 3, 2 megoldás van aszerint, hogy $t > 2uv$, $t = 2uv$ vagy $t < 2uv$. Legyen u és v különböző előjelű. Ekkor 4, 3, 2 megoldás van aszerint, hogy $t > -2uv$, $t = -2uv$ vagy $t < -2uv$.
Ha u és v közül valamelyik zérus, mindig két megoldás van. Ha $u = 0$, akkor $a = \pm\frac{2t}{v}$ és $b = v$.

Ha $v = 0$, akkor $a = u$ és $b = \pm\frac{2t}{u}$.

584. *a)* $3x+2y = 24$, *b)* $-2x+3y = 12$

585. (2; 11).

586. $x-4y = -9$.

587. $\sqrt{3}x+y = \pm 6\sqrt{3}$; $y = \pm 3\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}x+y = \pm 6\sqrt{3}$.

588. *a)* A súlyvonalak egyenletet: $17x+3y = 72$,
$x-9y = -8$, $4x+3y = 20$.
A középvonalak egyenlete: $5x+7y = 38$, $11x+5y = 42$,
$3x-y = 15$.

b) A súlyvonalak egyenlete: $7x-y = 11$, $x-16y = 28$,
$13x+14y = -6$.
A középvonalak egyenlete: $4x+10y = 1$, $9x+4y = -7$,
$5x-6y = 29$.

589. A súlyvonalak egyenlete: $2bx+ay = ab$, $bx-ay = 0$, $bx+2ay = ab$.
A középvonalak egyenlete: $y = \frac{b}{2}$, $x = \frac{a}{2}$, $2bx+2ay = ab$.

592. $a = b$ vagy $a = 2b$ legyen.

593. $3x+y = 9$, $d = \frac{\sqrt{10}}{2}$ hosszúságegység.

594. A csúcsok: $(0;\ 4)$, $(-6\sqrt{3};\ -2)$, $(6\sqrt{3};\ -2)$.

Az oldalak egyenletei: $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$.

595. 11; $2\sqrt{13}$; $\sqrt{85}$; 83,1°; 40,6°; 56,3°.

596. 45°.

597. $y = \sqrt{3}x+3+2\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3}x-3-2\sqrt{3}$.

598. $(0;\ 0)$.

599. *a)* $x-4y = -3$; *b)* $3x-2y = -28$; *c)* $x+2y = -14$;
d) $5x-2y = 0$.

600. *l)* Az egyenes egyik irányvektora $(a^2+b^2;\ -ab)$.
Az egyenes áthalad az origón és irányszögének a tangense: $-\frac{ab}{a^2+b^2}$.
Tekintsük az a és b befogójú derékszögű háromszöget. Ennek átfogója c^2. Ekkor $\frac{ab}{c^2} = \frac{ab}{c}:c$. Vegyük figyelembe azt, hogy $\frac{ab}{c}$ a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága. Az origón és a $P\left(c;\ -\frac{ab}{c}\right)$ ponton áthaladó egyenes adja a megoldást.

601. A pont az $x+y = a$ egyenes $(a;\ 0)$ és $(0;\ a)$ pontok által határolt szakaszán mozog.

602. Oldjuk meg az egyenletet y-ra. $\lambda = 4$. Az egyenespár $2x+y = 3$ és $2x+y = -1$.

603. Az első autó indulásától számítva 6 óra múlva találkoznak az A helységtől 240 km távolságban.

604. 16 óra $53\frac{1}{3}$ perckor találkoznak A-tól $244\frac{4}{9}$ km távolságban.

605. *a)* $(-5{,}5;\ -2{,}5)$; *b)* $(2{,}8;\ -0{,}6)$; *c)* $(2;\ 5)$;
d) $(-2;\ -1)$; *e)* $(-3;\ 2)$; *f)* $(1{,}2;\ 1{,}2)$;

g) (2; 4); *h)* $x = \frac{d-b}{a-c}$ és $y = \frac{ad-bc}{a-c}$, feltéve, hogy $a \neq c$.

Mit mondhatuk akkor, ha $a = c$, de $b \neq d$ és akkor, ha $a = c$ és $b = d$? *i)* (0; b).

606. *a)* (3; 5); (5; −2); (−2; 1);

b) $\left(\frac{12}{11}; -\frac{8}{11}\right)$; $\left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$; $\left(\frac{16}{9}; -\frac{5}{9}\right)$;

c) $\left(-\frac{32}{3}; -\frac{55}{3}\right)$; $\left(-\frac{25}{13}; -\frac{11}{13}\right)$; $\left(\frac{60}{37}; -\frac{110}{37}\right)$.

607. *a)* $k = 9(\sqrt{2}+1)$; $t = \frac{81}{4}$; $k = 5\sqrt{2}+\sqrt{34}$; $t = 4$.

608. *a)* Az oldalak: $\sqrt{34}$, $2\sqrt{26}$, $\sqrt{226}$; a szögek: 15,1°, 27,2°, 137,7°; $t = 20$; $r = 11{,}2$; $S\left(\frac{11}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

b) Az oldalak: $2\sqrt{13}$, $2\sqrt{17}$, $2\sqrt{2}$; a szögek: 59,0°, 19,7°, 101,3°; $t = 10$; $r = 4{,}2$; $S\left(\frac{5}{3}; 6\right)$.

609. $t = 2{,}11$; $F = 45$; $V = 11{,}5$.

610. *a)* Nincs közös pontjuk; *b)* a $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ pontban metszik egymást; *c)* nincs közös pontjuk; *d)* a $\left(\frac{29}{14}; -\frac{5}{14}\right)$ pontban metszik egymást.

611. Nincs közös pontjuk.

612. $a+b \neq 0$.

613. Az egyenesek akkor és csak akkor metszik egy pontban egymást, ha két egyenes metszéspontjának koordinátái kielégítik a harmadik egyenes egyenletét. A keresett feltétel:

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) = 0.$$

614. A súlyvonalak egyenlete: $x = 1$; $x-6y = -27$; $2x+3y = 16$.

615. *a)* 2,8; *b)* 32; *c)* 14.

616. 28.

617. $A_1+\lambda A_2 = (a_1+\lambda a_2)x+(b_1+\lambda b_2)y+c_1+\lambda c_2 = 0$ egyenlet x-ben és y-ban elsőfokú, tehát egyenes egyenlete.

$A_1 = 0$ és $A_2 = 0$ egyenesek metszéspontjának koordinátái kielégítik mindkét egyenes egyenletét, tehát λ értékétől függetlenül az $A_1+\lambda A_2 = 0$ egyenletet is. Ha λ az összes valós értékeket befutja, az $A_1+\lambda A_2 = 0$ egyenlet megadja a két egyenes metszéspontján áthaladó valamennyi egyenes egyenletét, kivéve az $A_2 = 0$ egyenest. Ugyanis, ha $(x_0; y_0)$ az $A_2 = 0$ egyenesnek nem pontja, akkor a λ mindig meghatározható úgy, hogy

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1+\lambda(a_1x_0+b_2y_0+c_2) = 0$$

legyen. Mivel λ együtthatója nem zérus, azért

$$\lambda = -\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{a_2x_0+b_2y_0+c_2}.$$

Ezzel a sík $A_2 = 0$ egyenesén kívül fekvő $(x_0;\ y_0)$ pontján és a metszéspontn áthaladó egyenes egyenletét felírhatjuk.

618. *a)* Alkalmazzuk a 617. feladat megoldásában mondottakat. A két egyenes metszéspontján és az $(1;\ 2)$ ponton áthaladó egyenesre

$$\lambda = -\frac{3\cdot 1-2+2}{1+4-3} = -\frac{3}{2}.$$

A keresett egyenes egyenlete;

$$3x-y+2-\frac{3}{2}(x+2y-3) = 0$$

vagy $3x-8y+13 = 0$;

b) $11x-15y-8 = 0$;

c) $8x-7y+9 = 0$.

619. *a)* $39x+13y+6 = 0$; *b)* $14x-7y-5 = 0$.

620. *a)* $x+5y-15 = 0$; *b)* $5x-3y+20 = 0$.

621. $9x-16y-18 = 0$.

622. $m = \frac{5}{4}$.

623. Két megoldás van: $y = 2x$ és $2x+4y-5 = 0$.

624. $b = \frac{14}{3}\pm\sqrt{2}$.

625. $b = \pm 8$.

626. $x+6y = 0$.

627. Számítsuk ki a két egyenes metszéspontjának abszcisszáját, amelynek abszolút értéke a szóban forgó háromszög y tengelyre illeszkedő oldalához tartozó magasság mértékszámával egyenlő.

628. Négy megoldás van:

$$\frac{x}{4{,}5}+\frac{y}{12} = 1;\quad \frac{x}{9}+\frac{y}{6} = 1;\quad \frac{x}{2{,}5}-\frac{y}{21{,}6} = 1;\quad \frac{x}{-16}+\frac{y}{3{,}4} = 1.$$

629. A rögzített P pont koordinátái $(a;\ a)$, ahol $a \neq 0$. Írjuk fel a P ponton áthaladó $\mathbf{v}(v_1;\ v_2)$, illetve a $\mathbf{v}'(v_1';\ v_2')$ irányvektorú e és e' egyenesek egyenletét. Számítsuk ki A_1, A_2, B_1, B_2 pontok koordinátáit, azután írjuk fel az A_1B_2 és az A_2B_1 egyenesek egyenletét. Ezek Q metszéspontjának koordinátái kielégítik az $x+y = 0$ egyenletet. Figyeljük meg, hogy a megoldásban hol használtuk ki azt, hogy $OA_1 \neq OB_2$.

630. Egyenletünk a következőképpen is felírható: $m(x-4)+3y+1 = 0$.

631. Rendezzük az egyenletet m hatványai szerint.

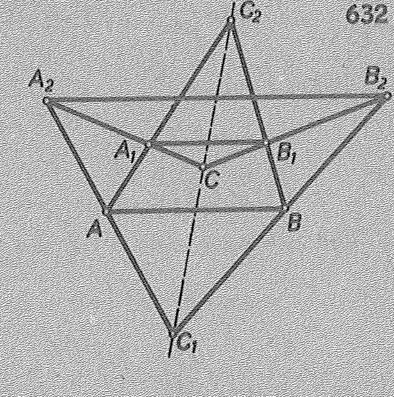
$$(x-2y)m^2+3(2x-6y-1)m+3x-2y+2 = 0.$$

Állításunkat igazoltuk, ha kimutatjuk, hogy van olyan x, y számpár, amely a fenti egyenletet m-től függetlenül kielégíti.

632. A koordináta-rendszer x tengelye legyen párhuzamos a megadott egyenesekkel, az y tengelyt egyelőre tetszőlegesen válasszuk meg (632. ábra). A távolságok végpontjainak koordinátái legyenek:

$A(a;\ b)$; $A_1(a_1;\ b_1)$; $A_2(a_2;\ b_2)$

$B(a+c;\ b)$; $B_1(a_1+c_1;\ b_1)$; $B_2(a_2+c_2;\ b_2)$.



632

Írjuk fel a szóban forgó egyenesek egyenletét, és számítsuk ki a C, C_1 és C_2 pontok abszcisszáit.

$$x = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{c_1 - c_2}; \quad x_1 = \frac{c_2a - a_2c}{c_2 - c};$$

$$x_2 = \frac{ca_1 - ac_1}{c - c_1}.$$

Legyen az y tengely a CC_1 egyenes. Ekkor $x = x_1 = 0$. Mutassuk meg, hogy x_2 is zérus. Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.

633. Helyezzük el a derékszögű háromszöget koordináta-rendszerben úgy, hogy átfogója az x tengelyre, az átfogóhoz tartozó magassága az y tengelyre illeszkedjék. Az átfogó végpontjainak koordinátái: $A(-a;\ 0)$, $B_1(b;\ 0)$. A négyzetek szóban forgó csúcsainak koordinátái: $A_1(b+m;\ b)$, $B_1(-a-m;\ a)$, ahol m a magasság. Mutassuk meg, hogy az AA_1 és a BB_1 egyenesek egyenlő szakaszokat vágnak le az y tengelyből. Oldjuk meg a feladatot elemi geometriai úton is.

634. *a)* 60°; *b)* 120°; *c)* 30°; *d)* 150°; *e)* 135°; *f)* 63,4°; *g)* 54,5°; *h)* 153,9°.

638. *a)*, *b)*, *e)*, *g)* egyenesek párhuzamosak; *c)*, *d)*, *f)*, *h)* egyenesek merőlegesek.

639. *a)* $p = 8$; *b)* $p = \pm 6$; *c)* $p = -\frac{2}{15}$; *d)* $p = -\frac{8}{9}$;

e) $p_1 = 2$; $p_2 = -\frac{2}{3}$.

640. Az első két egyenes párhuzamos, ha $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$. Ha ez teljesül, akkor egyszersmind

$$\frac{b+b'}{a+a'} = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'},$$

tehát a harmadik egyenes is párhuzamos a másik kettővel. (Igazoljuk, hogy ebben az esetben a harmadik egyenes egy olyan trapéz középvonalának egyenese, amelynek párhuzamos oldalai az első két egyenesre, a szárai pedig a tengelyekre illeszkednek.)

641. *a)* $p=-1$; *b)* $p=\frac{b}{a}$; *c)* $p=-1$; *d)* $p=\frac{5}{6}$; *e)* $p_1=0$; $p_2=1$.

642. *a)* $y=2x-2$; *b)* $3x-5y=21$; *c)* $4x-3y+21=0$;
d) $12x+4y=5\sqrt{3}$; *e)* $3x+2y=6{,}3$; *f)* $4\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=7$.

643. *a)* $y=-\frac{7}{5}x$; *b)* $y=\frac{a}{b}x$; *c)* $x+y=5$;
d) $3x+2y=19$; *e)* $4x-3y=12$; *f)* $5x+7y-11=0$;
g) $5x+2y-15=0$; *h)* $4x-3y=12{,}6$; *i)* $3x+2y=12$;
j) $2y-3x+14=0$; *k)* $x=-2$; *l)* $3x-4y=23$.

644. *a)* $5x-y=0$; $x+5y-26=0$; *b)* $7x-8y-53=0$; $8x+7y+4=0$;
c) $2x+y-10=0$; $x-2y-5=0$;
d) $y=\sqrt{2}$; $x=\sqrt{3}$.

645. $x=-\frac{389}{15}$.

646. $y=-9\frac{1}{3}$.

647. $5x+4y=30$; $4x-5y+17=0$.

648. $(-1;\ 2)$.

649. *a)* $(7{,}25;\ 2{,}75)$; $63{,}4°$; *b)* $\left(\frac{5}{11};-\frac{13}{11}\right)$, $12{,}65°$.

650. *a)* $\left(-2;\ \frac{19}{3}\right)$; *b)* $\left(\frac{10}{3};\ 2\right)$.

651. *a)* $x+3y+1=0$; *b)* $2x-8y=17$.

653. *a)* $\left(4\frac{26}{41};-1\frac{17}{82}\right)$; *b)* $\left(3\frac{6}{11};-\frac{4}{11}\right)$; *c)* $\left(9\frac{2}{3};-1\frac{1}{6}\right)$.

654. $8x+6y=7$.

655. *a)* $7x-2y=12$; $5x+y=28$; $2x-3y=18$;
$(6;\ -2)$; $(0;\ -6)$; $(4;\ 8)$;
b) $x+y=6$; $3x-y=34$; $x-3y=-42$;
$(18;\ 20)$; $(-6;\ 12)$; $(10;\ -4)$.

656. *a)* $x-6y+59=0$ és $13x-2y-69=0$;
b) $x-y+3=0$ és $9x-7y+7=0$;
c) $4x-3y+2=0$ és $3x-2y+1=0$.

659. $x+3y=13$.

660. $-3x+y=7$ vagy $x+3y=11$; $m=2\sqrt{10}$.

661. $P\ (a;\ b)$.

662. $M_1\,(0;\ 2\sqrt{6}-2)$, $M_2\,(0;\ -2\sqrt{6}-2)$.

663. $C\left(4\frac{2}{5};\ 1\frac{1}{5}\right)$.

664. $(-1;\ -1)$; $(6;\ 1)$; $(2;\ 4)$.

665. *a)* $(2;\ 4)$; *b)* $\left(5;-1\frac{1}{4}\right)$; *c)* $(67;-12)$.

666. *a)* $7x+2y=13$, $2x+7y=-22$, $y=x+2$;
b) $3x+2y=7$, $x-y=-1$, $2x+3y=-7$.

667. A terület két tizedes pontossággal 2,44.

668. Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja: $\left(\frac{1}{2};\ \frac{11}{4}\right)$.

669. Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja: $\left(2\frac{7}{18};\ \frac{11}{18}\right)$.

670. *a)* $M\,(2;\ 2)$; *b)* $M\,(-4;\ -1)$; *c)* $M\,(4;\ -16)$; *d)* $M\left(0;\ \frac{ac}{b}\right)$;

e) $M\left(-\frac{6}{7};-\frac{4}{7}\right)$; *f)* $M\left(\frac{10}{19};\ 1\frac{13}{19}\right)$.

671. $M\,(1;\ 2)$; $S\left(\frac{5}{3};\ \frac{4}{3}\right)$; $O\,(2;\ 1)$.

672. $M\left(5;\ \frac{5}{2}\right)$; $S\left(\frac{13}{3};\ 2\right)$ $O\left(4;\ \frac{7}{4}\right)$.

673. $141x-35y=212$.

674. $\left(\frac{7}{10};\ -2\frac{1}{6}\right)$.

675. *a)* $B\,(2;\ 3)$, $D\,(5;\ 4)$; *b)* $B\,(5{,}5;\ 3{,}5)$, $D\,(-0{,}5;\ 6{,}5)$.

676. Három megoldás van:
a) $(2;\ -2)$, $(4;\ 4)$ és $(-2;\ 2)$;
b) $(4;\ -3)$, $(2;\ 3)$ és $(-4;\ -1)$;
c) $(4;\ 12)$, $(2;\ 4)$ és $(6;\ -10)$;
d) $(24;\ 9)$, $(0;\ 39)$, $(-10;\ -33)$.

678. $C\,(7;\ -1)$, $D\,(1;\ 2)$.

679. $y=x+2$, $y=-x+4$.

680. $\left(\frac{7}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{11}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{17}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3};\ \frac{19}{3}\right)$.

681. $(-2;\ -4)$, $(2;\ 0)$, $(1;\ 3)$, $(-3;\ -1)$.

682. $t=25{,}5$ területegység.

683. $t=400$ területegység.

684. $t=22{,}45$ területegység.

685. Helyezzük el koordináta-rendszerben a derékszögű háromszöget úgy, hogy befogói a tengelyekre illeszkedjenek. Legyen a befogók hossza a. Igazoljuk, hogy a szóban forgó merőleges az $(a;\ a)$ ponton halad át. (Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.)

686. A feladat visszavezethető a 685. feladatra. A rögzített pont: $P\,(s;\ s)$, ahol s a négyszög fél kerülete.

687. Az $A'B'$ egyenes egyik irányvektora: $(a+z;\ -b-z)$. A reá merőleges egyenesé: $(b+z;\ a+z)$. Az $A'B'$ szakasz felezőpontján áthaladó és az $A'B'$ szakaszra merőleges egyenes egyenlete:

$$(2by-2ax+a^2-b^2)+2z\,(y-x+a-b)=0. \qquad (1)$$

Ezen egyenes egyenletét z bármely értéke mellett kielégítik a

$$2by-2ax+a^2-b^2=0, \qquad (2)$$

$$y-x+a-b=0 \qquad (3)$$

egyenletrendszer gyökei.
(2) és (3) gyökei:

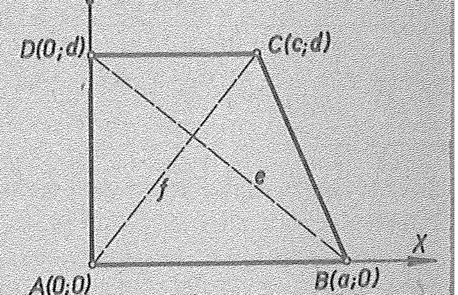
$$x=\frac{a-b}{2},\quad y=\frac{b-a}{2}.$$

z különböző értékei mellett a $P\left(\frac{a-b}{2};\ \frac{b-a}{2}\right)$ ponton áthaladó sugársor egyeneseit kapjuk. Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.

688. Helyezzük el a téglalapot koordináta-rendszerben úgy, hogy az OA oldala az x tengelyre, OC oldala az y tengelyre illeszkedjék. O és B csúcson áthaladó egyenesek egyik irányvektora legyen $(1;\ m)$, A és C csúcson áthaladó egyenesek egyik irányvektora ekkor $(-m;\ 1)$. Írjuk fel a keletkezett téglalap oldalegyeneseinek az egyenletét, számítsuk ki két szemközti csúcs koordinátáit. Mutassuk meg, hogy a két csúcs által meghatározott szakasz felezéspontja azonos a $OABC$ téglalap középpontjával.
Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.

689. Helyezzük el a trapézt koordináta-rendszerben az ábrán látható módon (689. ábra). Írjuk fel az átlók egy-egy irányvektorát. Mutassuk meg, hogy ha $e \perp f$, vagyis $\frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{v_2'}{v_1'}=-1$, akkor $d^2=ac$.
Ezután igazoljuk, hogy az utóbbi feltételből következik az átlók merőlegessége. Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.

689



690. Válasszuk a koordináta-rendszer origójának 0-t. A szóban forgó pontok koordinátái legyenek: $K\,(1;0)$, $L\,(a;b)$. Ekkor $K_1\,(0;1)$, $L_1\,(b;-a)$. A koordináták felhasználásával a feladat állításai könnyen igazolhatók.

691. $5;\ 5;\ 13;\ \sqrt{58};\ \sqrt{7};\ \frac{\sqrt{6}}{2};\ 3;\ \sqrt{a^2+b^2};\ a\sqrt{2};\ \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

692. *a)* 5; *b)* $\sqrt{65}$; *c)* $\sqrt{65}$; *d)* $\sqrt{53}$; *e)* $\sqrt{74}$; *f)* $\frac{\sqrt{370}}{4}$; *g)* 1; *h)* $3\sqrt{5}$.

693. $5;\ \sqrt{29};\ \sqrt{17};\ \sqrt{85}$.

694. *a)* 5; 10; $5\sqrt{5}$;
b) $10\sqrt{2}$; 13; $\sqrt{29}$.
695. *a)* $26{,}6$;
b) $a+2b+\sqrt{a^2+4b^2}$.
696. *a)* 4 területegység, *b)* 6 területegység.
697. *a)* $32{,}5\,\pi$ területegység, *b)* $157{,}25\,\pi$ területegység.
698. $22{,}3°$, $119{,}8°$ és $37{,}9°$. $T = 7$ területegység.
699. $112{,}2°$.
700. *a)* téglalapot, *b)* egyenlő szárú trapézt, *c)* négyzetet, *d)* négyzetet, *e)* négyzetet.
701. $OP_1 = \sqrt{244}$, $OP_2 = \sqrt{245}$, tehát a P_2 pont nem illeszkedik a körre.
702. P_1 pont nem illeszkedik a körre.
703. *a)* $\sqrt{34}$; *b)* $3\sqrt{3}$.
704. *a)* $4\sqrt{5}$; *b)* $2\sqrt{2}$.
705. *a)* $7x-y=1$; *b)* $x+7y=7$.
706. *a)* $(x-6)^2+(y+2)^2=9$;
b) $(x+5)^2+(y-7)^2=4$.
707. Két megoldás van: $(8;\ 0)$ és $(-1;\ 3\sqrt{3})$.
708. $(5;\ 0)$.
709. $(0;\ 2{,}9)$.
710. $(7;\ 0)$.
711. Két megoldás van: $(10;\ 0)$ és $(0;\ 0)$.
712. Két megoldás van: $(0;\ -9+10\sqrt{2})$ és $(0;\ -9-10\sqrt{2})$.
713. 13 vagy -3.
714. A középpont rajta van a $(2;\ 0)$ pontban az x tengelyre állított merőlegesen, másrészt egyenlő távolságra van a $(2;\ 0)$ és a $(-4;\ 2)$ pontoktól. Ebből $y = 10$ adódik.
715. $(10;\ 6)$.
716. Két megoldás van: $(2;\ 2)$ és $(10;\ 10)$.
717. Két megoldás van: $(3;\ 2)$ és $(4;\ -1)$.,
718. *a)* $(-3;\ 2)$; *b)* $\left(\frac{1}{2};\ \frac{13}{2}\right)$; *c)* $(-3;\ -2)$; *d)* $(3;\ 4)$; *e)* $\left(\frac{7}{4};\ -\frac{1}{8}\right)$.
719. *a)* $A_1(0;\ 5)$, $B_1(3;\ 1)$, $C_1(7;\ 4)$, $D_1(4;\ 8)$ vagy
$A_2(0;\ 5)$, $B_2(3;\ 1)$, $C_2(-1;\ -2)$, $D_2(-4;\ 2)$.
b) $A_1(4;\ 8)$, $B_1(7;\ 4)$, $C_1(11;\ 7)$, $D_1(8;\ 11)$ vagy
$A_2(4;\ 8)$, $B_2(7;\ 4)$, $C_2(3;\ 1)$, $D_2(0;\ 5)$.
720. $\alpha = 45°$, $\beta = 82{,}9°$, $\gamma = 81{,}9°$, $\delta = 150{,}2°$.
721. Használjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggést.
$$A_1A_2 = \sqrt{\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2-4\left(\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}\right)}.$$
722. Két megoldás van: $P_1(1;\ 4)$ és $P_2(-6;\ -3)$.
723. Két megoldás van: $(0;\ 3)$ és $(2;\ -1)$.
724. $A(5;\ 3)$, $B(15;\ 8)$, $C(12;\ 14)$, $D(2;\ 9)$.

725. A C csúcson áthaladó szögfelező az AB oldalt C_1 pontban metszi. Ekkor $CA:CB = AC_1:BC_1$. Megoldás:

$$C\left(-\frac{13}{5};\ \frac{31}{5}\right).$$

726. Két megoldás van: $(-1;\ -4)$, $(8;\ -1)$, $(6;\ 5)$ $(-3;\ 2)$ vagy $(-1;\ -4)$, $(-10;\ -7)$, $(-8;\ -13)$, $(1;\ -10)$.

727. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy az origó a háromszög súlypontja legyen.

728. Legyen az e egyenes az x tengely. A megoldást adó P pont abszcisszája:

$x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, ahol x_1, x_2, x_3 a háromszög csúcsainak a koordinátái.

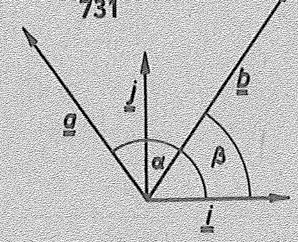
Szerkesszük meg a P pontot. – Hogyan általánosíthatnánk a feladatot sokszögekre?

729. *a)–f)* feladatok megoldásához használjuk fel a skaláris szorzat definícióját.

730. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a vektorok között nullvektor is szerepel. Azután vizsgáljuk a nullvektoroktól különböző **a** és **b** vektor skaláris szorzatát.

731. Legyen $\mathbf{a}\,(x_1;\ y_1)$, $\mathbf{b}\,(x_2;\ y_2)$ (731. ábra).
A skaláris szorzat definíciója szerint

731



$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\alpha-\beta).$$

Fejezzük ki $|\mathbf{a}|$-t, $|\mathbf{b}|$-t és $\cos(\alpha-\beta)$-t **a** és **b** koordinátáival.

Megoldás: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2+y_1y_2$

733. Először azt bizonyítsuk be, hogy ha a P pont az egyenesre illeszkedik, akkor fennáll az egyenlőség. (Ehhez gondoljuk meg azt, hogy mit fejez ki az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$ különbség. Mit állíthatunk az **n** és az $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ vektorok kölcsönös helyzetére vonatkozóan? Mi következik ebből a két vektor skaláris szorzatára?)
Azután igazoljuk, hogy ha a koordináta-rendszer síkjában fekvő pont **r** helyvektora kielégíti az $\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet, akkor a pont csak az adott egyenes pontja lehet.

734. Fejezzük ki az $\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) = 0$ skaláris szorzatot **n**, **r** és $\mathbf{r}_1$ koordinátái segítségével.

735. *a)* $4x+3y = 26$; *b)* $2x+y = -2$; *c)* $-2x+3y = -8$;
d) $x+5y = 0$; *e)* $x+y = 1$.

736. *a)* $\mathbf{n}\,(1;\ 1)$.

737. Vegyük figyelembe a merőleges szárú szögekre vonatkozó tételt. Fejezzük ki $\cos\omega$-t az $\mathbf{n}_1$ és az $\mathbf{n}_2$ vektorok irányszögének a segítségével.

a) 29°45′; *b)* 49,4°; *c)* 45°; *d)* 86°49′; *e)* 74,9°; *f)* 45°; *g)* 56,3°; *h)* 21,8°;

i) 90°;

j) $\cos\omega = \left|\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}\right|$

738. Számítsuk ki a hajlásszöget, ha az egyik egyenes párhuzamos az y tengellyel.
739. 78,5°.
740. *a)* 18,4°; 90°; 71,6°; *b)* 7,1°; 105,3°; 67,6°.
741. 64,4°.
742. *a)* 57,5°, 74,7°, 47,7°; *b)* 30°, 135°, 15°; *c)* 48,2°, 29,9°, 101,9°.
743. $y = 2x+4$.
744. Két megoldás van: $y = (2+\sqrt{3})\,x-5\sqrt{3}-6$ és
$$y = (2-\sqrt{3})\,x+5\sqrt{3}-6.$$
745. Két megoldás van: $7x-2y = -31$ és $2x+7y = 29$.
746. Két megoldás van: $y = (8+5\sqrt{3})\,x$ és $y = (8-5\sqrt{3})\,x$.
747. $x = 3$ és $y = 4$.
748. *a)* 72,4°; *b)* 65,2°.
749. *I. megoldás:* Számítsuk ki két szemközti szög tangensét,
II. megoldás: Bontsuk fel a négyszöget egyik átlójával két háromszögre. Mutassuk meg, hogy a két háromszög köré írható körök középppontja egybeesik.
750. Tegyük fel, hogy a csúcsok koordinátái egész számok. Először igazoljuk, hogy ekkor a szabályos háromszög egyik oldala sem lehet párhuzamos egyik koordináta-tengellyel sem. Azután fejezzük ki két oldal hajlásszögének a tangensét a csúcsok koordinátáival. Mutassuk meg, hogy ellentmondásra jutunk.
751. Először mutassuk meg, hogy az $Ax+By+C = 0$ egyenlettel megadott egyenes, ahol az A és B értékeknek legalább az egyike nem 0, felírható
$$\mathbf{n}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$$
alakban is, ahol $\mathbf{n}$ az egyenes egyik normálvektora, $\mathbf{r}_0$ az egyenes egyik rögzített pontjának, $\mathbf{r}$ pedig az egyenes futó pontjának helyvektora.
Bizonyítás. Legyen $\mathbf{n}\,(A;\ B)$ és $\mathbf{r}\,(x;\ y)$. Ekkor $\mathbf{n}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \mathbf{n}\,\mathbf{r}-\mathbf{n}\,\mathbf{r}_0 = Ax+By+C$ egyenlet alapján kijelenthetjük, hogy olyan $\mathbf{r}_0$ vektort kell keresnünk, amelyre $-\mathbf{n}\,\mathbf{r}_0 = C$. Ilyen vektor például az $\mathbf{r}_0 = -\dfrac{C}{\mathbf{n}^2}\,\mathbf{n}$ vektor. Ebből
$$\mathbf{r}_0\left(-\frac{AC}{A^2+B^2};\ -\frac{BC}{A^2+B^2}\right).$$
Ha $\mathbf{r}\,(x_1;\ y_1)$, akkor $\mathbf{n}\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \gtrless 0$ aszerint, hogy az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektorok hegyes- vagy tompaszöget alkotnak. Ez pedig attól függ, hogy az $\mathbf{r}_0$ helyvektorú pontból felmért $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektor ugyanabba a félsíkba vezet-e, mint az $\mathbf{n}$ vektor vagy sem.
752. A normálegyenlet bal oldalából azonnal látható, hogy az egyenes normálvektora egységvektor: $\mathbf{n}^\circ\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$. Tehát az egyenlet bal oldala $\mathbf{n}^\circ\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$ alakban írható, ahol $\mathbf{r}$ az egyenes futópontjához, $\mathbf{r}_0$ az egyenes rögzített pontjához vezető vektor.
Most vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{n}^\circ\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ skaláris szorzat mit fejez ki,

ha $\mathbf{r}$ a sík tetszőleges pontjához vezető helyvektor? (Vegyük figyelembe a 751. feladat megoldását.)

753. *a)* $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+4=0$; *b)* $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{3}{2}=0$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{\sqrt{7}}{3}y-1=0$; *d)* $\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{3\sqrt{2}}{2}=0$.

754. *a)* $\frac{6\sqrt{5}}{5}$; *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; *d)* 1,4; *e)* $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

755. *a)* $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; *b)* $7\sqrt{2}$; *c)* $\frac{313}{\sqrt{298}}$; *d)* 3; *e)* $\frac{\sqrt{13}}{13}$; *f)* $\frac{3\sqrt{10}}{5}$; *g)* $\frac{23\sqrt{5}}{5}$.

756. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

757. 2; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

758. $m_a=7$; $m_b=\frac{14\sqrt{65}}{13}$; $m_c=\frac{14\sqrt{85}}{17}$.

759. *a)* 15,5; *b)* 25; *c)* 7.

760. $\frac{23}{87}\sqrt{29}$; $\frac{23}{246}\sqrt{82}$; $\frac{23}{591}\sqrt{197}$.

761. Az adott pontok az egyenes ugyanazon oldalán vannak.

762. *a)* $\frac{1}{5}\sqrt{10}$; *b)* $\frac{8}{5}\sqrt{5}$; *c)* $\frac{14}{5}\sqrt{5}$; *d)* $\frac{2\sqrt{13}}{13}$; *e)* $\frac{|b-b'|}{\sqrt{m^2+1}}$.

763. $\frac{81}{34}$.

764. Két megoldás van: $3x+4y+20=0$ és $3x+4y+30=0$.

765. Két megoldás van: $4x+3y-14=0$ és $4x+3y+16=0$.

766. *a)* $y=x-8$ és $y=x-4$; *b)* $y=x\pm 6\sqrt{2}$; *c)* $y=x\pm 4\sqrt{3}$.

767. *a)* $3y+x+5=0$ és $3y+x-15=0$;

b) $y=x+1\pm 3\sqrt{2}$.

768. Két megoldás van: $x=-4$ és $24y-7x=100$.

769. Két megoldás van: $3x-4y+11=0$ és $4x+3y-2=0$.

770. $x_1=-15{,}5$; $x_2=9{,}5$.

771. Két megoldás van: $P_1\left(\frac{28\sqrt{5}+13}{24};\ \frac{4\sqrt{5}-23}{12}\right)$ és

$P_2\left(\frac{15-28\sqrt{5}}{24};\ -\frac{21+4\sqrt{5}}{12}\right)$.

772. *a)* $x-9y+13=0,\ 9x+y+7=0;$

b) $21x+7y+3=0,\ x-3y-7=0;$

c) $(3\pm\sqrt{5})\,x-(1\mp\sqrt{5})\,y=\pm\sqrt{5};$

d) $y-2x+2{,}5=0,\ x+2y-5=0;$

e) $y=x+2,\ y=-x+8.$

773. Az egyenes és az x tengely által bezárt szögek szögfelezői: $8y-4x=1$ és $4x+2y=-1$. Az egyenes és az y tengely által bezárt szögek szögfelezői:

$x+3y-1=0$ és $3y-9x-1=0.$

774. A belső szögfelezők egyenlete: $(f_\alpha)\ 3y-2x-10=0$; $(f_\beta)\ y+8x-12=0$; $(f_\gamma)\ 2y+x-9=0$. A belső szögfelezők metszéspontja $(1;\ 4)$. A kör sugara 4 egység. A külső szögfelezők egyenlete: $(f'_\beta)\ y=\frac{1}{8}x+12$, $(f'_\gamma)\ y=2x-18$. Metszéspontjuk: $(16;\ 14)$.

775. *a)* $m_a=\dfrac{9\sqrt{34}}{17},\ m_b=\dfrac{9\sqrt{10}}{5},\ m_c=\dfrac{9\sqrt{13}}{13},$

$s_a=\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\quad s_b=\dfrac{9\sqrt{2}}{2},\ s_c=3,\ R=\dfrac{1}{9}\sqrt{1105},\ \varrho=1{,}1;$

b) $m_a=\dfrac{64\sqrt{85}}{85},\ m_b=\dfrac{64\sqrt{61}}{61},\ m_c=\dfrac{16\sqrt{5}}{5},$

$s_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{197},\ s_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{269},\ s_c=\sqrt{53},\ R=5,\ \varrho=2{,}46.$

776. Az alapegyenes egyenlete: $y=-x+5$. A csúcsok koordinátái:

$$\left(\frac{22}{3},\ -\frac{7}{3}\right),\ (-1;\ 6),\ \left(-\frac{28}{3};\ -\frac{32}{3}\right).$$

777. $Q\,(11;\ -11)$.

778. A tükörkép koordinátái:

$$\left(\frac{(B^2-A^2)a-2ABb-2AC}{A^2+B^2};\quad \frac{(A^2-B^2)b-2ABa-2BC}{A^2+B^2}\right).$$

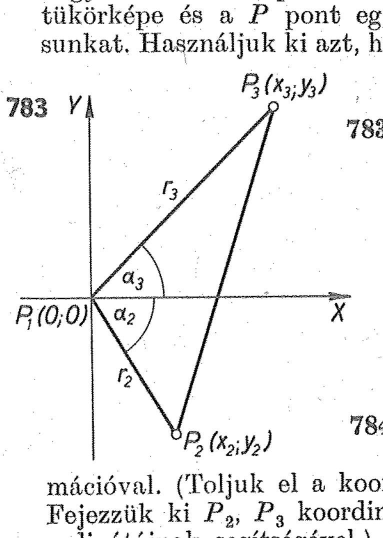
779. A beeső fénysugár egyenlete: $4x-7y+64=0$, a visszavert fénysugár egyenlete: $8x-y+76=0$.

780. $29x-2y+33=0$.

781. Tükrözzük A pontot az adott e egyenesre. A kapott pontot, A'-t, kössük össze B-vel. $A'B$ egyenes kimetszi az e egyenesből a keresett pontot. Megoldás: $(2;\ -1)$.

782. Az AP és BP szakaszok különbségének abszolút értéke akkor a legnagyobb, ha az A pont, a B pontnak az adott egyenesre vonatkozó B' tükörképe és a P pont egy egyenesbe esnek. (Bizonyítsuk be állításunkat. Használjuk ki azt, hogy bármely háromszögben két oldal különbségének abszolút értéke mindig kisebb, mint a harmadik oldal.) Megoldás: P (2; 5).

783



783. Vegyük figyelembe azt, hogy

$$t = \frac{1}{2} r_2 r_3 \sin \varphi$$

(783. ábra), ahol $\varphi = |\alpha_3 - \alpha_2|$. ($\alpha_2$ és α_3 annak az elforgatásnak az előjeles szögét jelenti, amellyel az origó körül az x tengely pozitív felét el kell forgatni, hogy az r_2 és r_3 szakaszokra essen. Ábránkon $\alpha_3 > 0$ és $\alpha_2 < 0$.)

784. Vezessük vissza a megoldást a 783. feladatban tárgyalt esetre koordináta transzformációval. (Toljuk el a koordináta-rendszer kezdőpontját a P_1 pontba. Fejezzük ki P_2, P_3 koordinátáit az új koordináta-rendszerben P_1 koordinátáinak segítségével.)

785. *a)* 25; *b)* 20; *c)* 18,5; *d)* 3,5; *e)* 32.

786. $AA_1 = 3{,}5\sqrt{2}$; $BB_1 = \dfrac{21\sqrt{37}}{37}$; $CC_1 = 4{,}2$.

787. (−8; 0) vagy (32; 0).
788. 4 megoldás van: (1; 5), (5; 7), (9; −1), (5; −3).
789. *a)* 14,5; *b)* 39,5; *c)* 75; *d)* 20.
790. 75.
791. 17,5.
792. Először fejezzük ki P, Q és R koordinátáit a háromszög megfelelő csúcsainak koordinátáival és az osztásviszonnyal. Például a P pont koordinátái:

$$x_1' = \frac{x_2+\lambda_1 x_3}{1+\lambda_1}; \quad y_1' = \frac{y_2+\lambda_1 y_3}{1+\lambda_1}.$$

Ezután fejezzük ki a PQR háromszög területét P, Q és R koordinátáival.
793. (10; 9).
794. Fejezzük ki az egyenlőségben szereplő háromszögek területét a csúcsok koordinátáival.

795. $t = \dfrac{1}{2} |x_1 (y_2-y_4)+x_2 (y_3-y_1)+x_3 (y_4-y_2)+x_4 (y_1-y_3)|$.

796. A három pont által meghatározott háromszög területe nem zérus, tehát a három pont nem illeszkedik egy egyenesre.
797. (4; 6).
798. A területképlet segítségével először azt bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög csúcsai rácspontok, akkor a területének mértékszáma leg-

alább $\frac{1}{2}$. (Bebizonyítható a következő tétel: ha egy rácsparalelogrammának sem a belsejében, sem a határán nincs további rácspont, akkor a területe pontosan 1. Igazoljuk a tételt!)

799. *c)* $16x^2+16y^2=9$; *d)* $4x^2+4y^2=3$.

800. *a)* $x^2+y^2=65$; *b)* $x^2+y^2=5$; *c)* $x^2+y^2=a^2+b^2$.

801. *a)* $x^2+y^2-8x-10y+32=0$;
b) $x^2+y^2-6x-6y+13=0$;
c) $x^2+y^2+2x-6y-15=0$;
d) $x^2+y^2-4x-8{,}25=0$;
e) $x^2+y^2+6y-4=0$;
f) $x^2+y^2+10x+6y+32=0$.

802. *a)* $x^2+y^2-8x-6y=0$; *b)* $x^2+y^2+6x-8y=0$;
c) $x^2+y^2-2ax-2by=0$; *d)* $x^2+y^2-10x+4y+3=0$;
e) $x^2+y^2+4x-6y-10\sqrt{2}-4=0$.

803. Az ordináták rendre: 7 és -1; $\sqrt{21}+3$ és $3-\sqrt{21}$; $3+\sqrt{24}$ és $3-\sqrt{24}$; 8 és -2; $3+\sqrt{24}$ és $3-\sqrt{24}$; $3+\sqrt{21}$ és $3-\sqrt{21}$.
Az abszcisszák rendre: $2+\sqrt{21}$ és $2-\sqrt{21}$; 6 és -2; nincs megfelelő pont.

804. *a)* $x^2+y^2-6x+4=0$; *b)* $x^2+y^2-6x-4y+11=0$;
c) $x^2+y^2+2x-6y-7=0$; *d)* $12x^2+12y^2+28x-57y-39=0$.

805. $a-r \le x \le a+r$ és $b-r \le y \le b+r$.

806. $x^2+y^2+6x=0$.

807. $x^2+y^2-4y=0$.

808. *h)* $\left[x-\sqrt{3(7+4\sqrt{3})}\right]^2+\left[y-(24-13\sqrt{3})\sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{3}}\right]^2=36.$

809. *a)* $x^2+y^2-10x=0$; *b)* $x^2+y^2+10x=0$;
c) $x^2+y^2-10y=0$; *d)* $x^2+y^2+10y=0$.

810. *a)* $x^2+y^2-6x\pm 10y+9=0$;
b) $x^2+y^2\pm 10x+12y+36=0$;
c) $x^2+y^2\pm 10x-10y+25=0$;
és $x^2+y^2\pm 10x+10y+25=0$.

811. $x^2+y^2\pm 2rx-2ry+r^2=0$ és
$x^2+y^2\pm 2rx+2ry+r^2=0$.

812. *a)* $x^2+y^2-2ax-4ay+a^2=0$;
b) $x^2+y^2-2ax-4ay+4a^2=0$.

813. *a)* Két megoldás van: $(x-17)^2+(y-17)^2=289$ és
$(x-5)^2+(y-5)^2=25$;
b) két megoldás van: $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ és
$(x-15)^2+(y-15)^2=225$;
c) két megoldás van: $(x-10)^2+(y-10)^2=100$ és
$(x-2)^2+(y-2)^2=4$;
d) két megoldás van: $(x+8+\sqrt{30})^2+(y-8-\sqrt{30})^2=(8+\sqrt{30})^2$ és
$(x+8-\sqrt{30})^2+(y-8+\sqrt{30})^2=(8-\sqrt{30})^2$.

814. *a)* $(x-6)^2+(y-7)^2=36$;
b) $(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{32}{37}$.

815. *a)* $(x-12)^2+(y-5)^2=25$ és $(x-6)^2+(y-5)^2=25$;
b) $(x-5)^2+(y-12)^2=25$ és $(x-5)^2+(y-6)^2=25$.

816. *a)* $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{325}{9}$; *b)* $x^2+\left(y+\frac{2}{11}\right)^2=\frac{4745}{121}$.

817. *a)* $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{85}{9}$; *b)* $x^2+(y+8)^2=125$.

818. *a)* $(x-3)^2+(y-5)^2=25$; *b)* $(x+6)^2+(y+2)^2=26$;
c) $(x+1)^2+(y-11)^2=100$;
d) $\left(x-\frac{85}{12}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=37\frac{5}{72}$.

819. *a)* Két megoldás van: $(x-1)^2+(y+5)^2=25$ és
$(x-21)^2+(y+145)^2=145^2$;
b) két megoldás van:
$[x-(4+2\sqrt{2})]^2+[y-(5+2\sqrt{2})]^2=(5+2\sqrt{2})^2$ és
$[x-(4-2\sqrt{2})]^2+[y-(5-2\sqrt{2})]^2=(5-2\sqrt{2})^2$;
c) két megoldás van: $(x-13)^2+y^2=169$ és
$(x-5)^2+(y-8)^2=25$.

820. *a)* $\left(x-\frac{31}{14}\right)^2+\left(y-\frac{39}{14}\right)^2=6\frac{37}{98}$;
b) $(x-2{,}5)^2+(y+5{,}5)^2=112{,}5$.

821. *a)* Két megoldás van: $x^2+(y-2)^2=2$ és
$(x-2)^2+(y-4)^2=2$;
b) két megoldás van: $x^2+(y+4)^2=5$ és
$(x+2)^2+y^2=5$.

822. Két megoldás van:
$\left[x-\left(-1-2\sqrt{2}+\sqrt{12\sqrt{2}-9}\right)\right]^2+\left[y-\left(5-2\sqrt{2}-\sqrt{12\sqrt{2}-9}\right)\right]^2=$
$=16$ és
$\left[x-\left(-1-2\sqrt{2}-\sqrt{12\sqrt{2}-9}\right)\right]^2+\left[y-\left(5-2\sqrt{2}+\sqrt{12\sqrt{2}-9}\right)\right]^2=16$.

823. Két megoldás van:
$(x+1)^2+(y-2)^2=20$ és $(x-2{,}2)^2+(y-8{,}4)^2=20$.

824. *a)* Két megoldás van: $x^2+y^2=20$ és
$(x-2)^2+(y-6)^2=20$;
b) két megoldás van: $(x-8)^2+(y-1)^2=25$ és
$(x-1)^2+(y+6)^2=25$;
c) két megoldás van: $(x-3)^2+(y-2)^2=10$ és
$(x+1)^2+(y-6)^2=10$.

825. *d)* $O(1;\ 2)$, $r=2$; *e)* $O(3;\ -2)$, $r=1$;
f) $O(-2;\ 3)$, $r=7$; *g)* $O(-3;\ -1)$, $r=4$;
h) $O(0;\ 4)$, $r=3$; *i)* $O(-5;\ 0)$, $r=5$;

j) $O(-1{,}2;\ 1{,}5)$, $r = 2{,}5$; *k)* $O\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$, $r = 5$;

l) $O\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right)$, $r = 4$; *m)* $O\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$, $r = \frac{\sqrt{58}}{3}$;

n) $O\left(\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right)$, $r = \frac{\sqrt{10}}{4}$; *o)* $O(a;\ 0)$, $r = |a|$;

p) $O\left(-\frac{a}{2};\ 0\right)$, $r = \left|\frac{a}{2}\right|$; *r)* $O(0;\ b)$, $r = |b|$;

s) $O\left(0;\ -\frac{b}{2}\right)$, $r = \left|\frac{b}{2}\right|$; *t)* $O\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$, $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$;

u) $O\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$, $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$.

A megoldhatóság feltétele: $a^2+b^2 \geq 4c$. Ha egyenlőség áll fenn, akkor $r = 0$, az alakzat nullkör.

826. *a)* $5x+2y = 7$; *b)* $17x+8y = 11$.

827. *a)* $x^2+y^2+Ax+By+\frac{B^2}{4} = 0$;

b) $x^2+y^2+Ax+By+\frac{A^2}{4} = 0$;

c) $x^2+y^2+Ax\pm Ay+\frac{A^2}{4} = 0$ vagy

$x^2+y^2\pm Ax+Ay+\frac{A^2}{4} = 0$;

d) $x^2+y^2+Ax+By = 0$;

e) $x^2+y^2+Ax+B = 0$ és $A^2 > 4B$;

f) $x^2+y^2+Ay+B = 0$ és $A^2 > 4B$;

g) $(x-u)^2+(y-mu-b)^2 = r^2$.

828. Alakítsuk át az egyenletet $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$ alakra.

829. $x^2+y^2-10x-6y+9 = 0$.

830. Az $x^2+y^2+Ax+By+C_1 = 0$ és az $x^2+y^2+Ax+By+C_2 = 0$ koncentrikus körök egyenletei, feltéve, hogy $A^2+B^2 > 4C_1$ és $A^2+B^2 > 4C_2$.

831–833. Számítsuk ki az adott pontok távolságát a kör középpontjától, és eredményeinket hasonlítsuk össze a kör sugarával.

834. Megmutatjuk, hogy amennyiben az $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ rácspontok az adott pont körül r sugárral írt körön vannak, vagyis kielégítik annak

$(x-\sqrt{2})^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 = r^2$ egyenletét, akkor $B \equiv A$.

Képezzük az $(x_1-\sqrt{2})^2+\left(y_1-\frac{1}{3}\right)^2=r^2$

és az $(x_2-\sqrt{2})^2+\left(y_2-\frac{1}{3}\right)^2=r^2$ egyenletek különbségét.

Rendezés után

$$x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2-\frac{2(y_1-y_2)}{3}=2\sqrt{2}\,(x_1-x_2) \text{ adódik.}$$

Ebből az egyenletből következik a feladat állítása.

835. *a)* $(6;0)$, $(-2;0)$, $(0;3+\sqrt{21})$, $(0;3-\sqrt{21})$;
b) $(1;0)$, $(-3;0)$, $(0;\sqrt{3})$, $(0;-\sqrt{3})$;
c) $(\sqrt{5};0)$, $(-\sqrt{5};0)$, $(0;1)$, $(0;-5)$.

836. $(2;0)$, $(-1;0)$, $\left(0;\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(0;\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)$. A kör belsejének egy pontján (példánkban az origón) átmenő húrok metszeteinek szorzata állandó. A szorzatot az illető pont körre vonatkozó hatványának nevezzük.

837. Két megoldás van: $x^2+y^2-10x\pm2\sqrt{50}y+25=0$.

838. $x^2+y^2\pm60x-96y+704=0$.

839. $x^2+y^2-6x-2y+5=0$.

840. $d=1$.

841. *a)* $a=\frac{7}{3}$, $b=\frac{11}{3}$; *b)* $a=-2\frac{7}{11}$, $b=-6\frac{1}{11}$.

842. *a)* $(x-2)^2+(y+1)^2=13$; *b)* $(x-2)^2+(y+3)^2=100$;
c) $(x-5)^2+(y-4)^2=25$; *d)* $(x-3)^2+\left(y-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$.

843. A CD szakaszra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő tartórudak hossza rendre: $10(\sqrt{24}-3)$; $10(\sqrt{21}-3)$ és 10 méter.

844. *a)* $\left(x-2\frac{11}{86}\right)^2+\left(y-\frac{83}{86}\right)^2=17\frac{151}{3698}$;
b) $(x-2)^2+(y-2)^2=25$;
c) $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{50}{7}\right)^2=90\frac{310}{441}$.

845. *a)* Jelöljük a három egyenes egyenletét

$L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$-val.

Képezzük a következő kifejezést:

$$K=L_1L_2+\lambda L_2L_3+\mu L_3L_1,$$

ahol λ és μ tetszőleges valós értéket jelent. A felírt kifejezés másodfokú. A $K=0$ egyenlettel jellemzett összes másodrendű görbe átmegy az adott egyenesek metszéspontjain. (Miért?) Feladatunk λ-t és μ-t úgy megválasztani, hogy $K=0$ éppen kör egyenlete legyen. Ennek az a feltétele, hogy az x^2 és az y^2-es tagok együtthatói egyenlők legyenek, továbbá, hogy az xy-os tag együtthatója 0 legyen. (Ha ez teljesül, kört kapunk, hiszen ezen alakzat egyenletét 3 pont kielégíti, s így nem lehetséges, hogy a teljes négyzetté alakítás után r^2 negatívnak adódjék.)

A mondottak figyelembevételével a $K=0$ egyenletből λ-ra és μ-re a következő értékek adódnak: $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{5}{2}$.

A kör egyenlete: $(x-1)^2+(y+2)^2 = 25$.

Előfordulhat, hogy a paraméterek meghatározására szolgáló egyenletek nem függetlenek egymástól. Így nem alkalmasak λ és μ kiszámítására. Ez akkor következik be, ha az adott egyenesek közül kettő párhuzamos. Ebben az esetben a feladatnak nincs megoldása.

b) $7x^2+7y^2-19x+11y-6 = 0$.

846. Húrnégyszög.

847. *a)* $(0;\ -2{,}9)$; *b)* $\left(\frac{43+\sqrt{8249}}{16};\ 0\right)$.

848. A kör egyenlete: $8x^2+8y^2-16x-79y = 0$.

849. A kör egyenlete: $20x^2+20y^2-40x-121y = 0$.

A középpontja a magasságpontot a súlyponttal összekötő szakaszt 3:1 arányban osztja.

850. $2c(x^2+y^2)-(a+b)cx+(ab-c^2)y = 0$.

851. *a)* $x^2+y^2 = 5$; *b)* $(x-2)^2+(y-3)^2 = 0{,}9$;

c) $(x+1)^2+(y-2)^2 = \frac{121}{17}$;

d) $(x-6)^2+(y-7)^2 = 36$;

e) $(x-1)^2+(y-2)^2 = 2$.

852. *a)* $x^2+y^2-2x-2y-23 = 0$;

b) $x^2+y^2-12x-2y+32 = 0$;

c) $3x^2+3y^2-50x-8y+101 = 0$.

853. $(x-5)^2+(y-9)^2 = 9$.

854. 4 megoldás van:

$$[x-(4-2\sqrt{2})]^2+[y-(4-2\sqrt{2})]^2 = (4-2\sqrt{2})^2;$$

$$[x-(4+2\sqrt{2})]^2+[y-(4+2\sqrt{2})]^2 = (4+2\sqrt{2})^2;$$

$$(x-2\sqrt{2})^2+(y+2\sqrt{2})^2 = 8;$$

$$(x+2\sqrt{2})^2+(y-2\sqrt{2})^2 = 8.$$

855. Két megoldás van: $(x-3)^2+y^2 = \frac{1}{5}$ és

$$\left(x-\frac{11}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

856. *a)* Két megoldás van: $(x-5)^2+(y+2)^2 = 12{,}1$ és

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{121}{90}.$$

b) Két megoldás van: $(x-3)^2+(y-1)^2 = 4{,}5$ és

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{19}{4}\right)^2 = 4{,}5.$$

857. Négy megoldás van:

$$[x-(3\sqrt{3}-4)]^2+[y-(\sqrt{3}-3)]^2 = 25,$$
$$[x+(\sqrt{3}+4)]^2+[y-(3\sqrt{3}-3)]^2 = 25,$$
$$[x+(3\sqrt{3}+4)]^2+[y+(\sqrt{3}+3)]^2 = 25,$$
$$[x-(\sqrt{3}-4)]^2+[y+(3\sqrt{3}+3)]^2 = 25.$$

858. Két megoldás van: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ és

$$\left(x-\frac{13}{18}\right)^2+\left(y-\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{25}{162}.$$

859. Két megoldás van: $(x-6)^2+(y-7)^2 = 32$ és
$(x-6)^2+(y-39)^2 = 800.$

860. *a)* (3; 4) és (5; 0); *b)* (3; 1);

c) 2 megoldás van, ha $r > \frac{|a|}{\sqrt{2}}$; 1 megoldás van, ha $r = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$; nincs megoldás, ha $r < \frac{|a|}{\sqrt{2}}$;

d) $\left(\frac{r}{\sqrt{m^2+1}};\ \frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$ és $\left(-\frac{r}{\sqrt{m^2+1}};\ -\frac{mr}{\sqrt{m^2+1}}\right)$;

e) 2 megoldás van, ha $r > \frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}}$;

1 megoldás van, ha $r = \frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}}$;

nincs megoldás, ha $r < \frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}}$.

861. *a)–b)* Az egyenes a kört két pontban metszi;
c) az egyenes a kört érinti;
d) nincs közös pontjuk.

862. *a)* (4; 2) és $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$; *b)* (0; 0) és $\left(\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}\right)$;

c) (1,9; 1,45) és (0,1; 0,55);

d) $(3;\ 1)$ és $(-1;\ -3)$;
e) $(5;\ -6)$.

863. *a)* Két közös pontjuk van: $(5;4)$ és $\left(\frac{9}{13};\ -\frac{32}{13}\right)$.

b) Egy közös pontjuk van: $(5;\ -1)$.
c) Az első kört érinti, a másodikat két pontban metszi.

864. $\frac{54\sqrt{13}}{13}$.

865. $x+y=4$; $4\sqrt{2}$.

866. Az adott kör $(0;\ 1)$ pontján áthaladó $(1;\ m)$ irányvektorú egyenes egyenlete: $y=mx+1$.
Számítsuk ki az egyenes és a kör metszéspontjának koordinátáit.

$$P_1(0;\ 1),\quad P_2\left(-\frac{2m}{m^2+1};\ \frac{1-m^2}{m^2+1}\right).$$

P_2 koordinátáiból a bizonyítás rögtön adódik.

867. $x^2+y^2+x-7y=0$.
868. $(3;\ 2)$ és $(-1;\ 4)$.
869. $(-4;\ 5)$ és $\left(\frac{92}{25};\ -\frac{19}{25}\right)$.

870. Két megoldás van: $(x+3)^2+(y-4)^2=225$ és
$(x-15)^2+(y+20)^2=225$.
871. Két megoldás van: $(x-1)^2+(y-7)^2=25$ és
$(x-17)^2+(y+105)^2=12\,025$.
Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.
872. A koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó kör egyenlete: $x^2+y^2+ax+by=0$. P koordinátái legyenek $(p;\ p)$. Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.
873. Írjuk fel az érintő vektoregyenletét. Ebből rögtön adódik az érintő egyenlete: $x_1x+y_1y=r^2$, ahol $(x_1;\ y_1)$ az érintési pont koordinátái, r a kör sugara, $(x;\ y)$ az érintő tetszőleges pontjának koordinátái.
874. $4x+3y=25$.
875. $67{,}1°$.
876. $\left(\frac{50}{7};\ \frac{50}{7}\right)$; $16{,}3°$.

877. A trapéz csúcsai $A(-1;\ -1)$, $B\left(\frac{1+y_1}{x_1};\ -1\right)$, $C\left(\frac{1-y_1}{x_1};\ 1\right)$ és $D(-1;\ 1)$.

Bizonyítsuk be azt is, hogy a nem párhuzamos oldalak érintési pontjain áthaladó egyenes átmegy az átlók metszéspontján.

878. *a)* $x\pm\sqrt{3}y=10$, $(2{,}5;\ \pm2{,}5\sqrt{3})$, $5\sqrt{3}$, $60°$;
b) $4x-3y=25$, $3x+4y=25$, $(4;\ -3)$, $(3;\ 4)$, 5, $90°$;

c) $y = 4$, $4x-3y = 20$, $(0;\ 4)$, $(3{,}2;\ -2{,}4)$, 8, $53{,}2°$;

d) $x+2y = 5$, $-2x+y = 5$, $(1;\ 2)$, $(-2;\ 1)$, $\sqrt{5}$, $90°$.

879. $60°$.

880. $\left(-\frac{10}{3};\ 10\right)$ és $\left(\frac{10}{3};\ -\frac{410}{11}\right)$.

881. *a)* $y = 2x \pm 5\sqrt{5}$; *b)* $y = 2x \pm 5$;

c) $5x+12y = \pm 169$; *d)* $x+3y = \pm 5\sqrt{10}$.

882. $12x \pm 35y = 444$.

883. $3x+4y = -40$, $(-24;\ 8)$, $(14{,}4;\ -20{,}8)$.

884. $y = \pm\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$; $y = -2\sqrt{3}$; $(0;\ 4\sqrt{3})$, $(-6;\ -2\sqrt{3})$, $(6;\ -2\sqrt{3})$.

885. Az adott kör középpontján át húzzunk merőleges egyenest az adott egyenesre. Válasszuk ezt x tengelynek és az adott e egyenest y tengelynek. A kör középpontjának a koordinátái $(u;\ 0)$, sugara r, az y tengely változó pontjának koordinátái $P(0;\ p)$. P körül rajzolt kör egyenlete: $x^2+(y-p)^2 = u^2+p^2-r^2$. A rögzített pont az x tengelyen van. Mikor van 2, 1, 0 megoldás?

886. $(x_1-u)(x-u)+(y_1-v)(y-v) = r^2$, ahol $(x_1;\ y_1)$ az érintési pont, $(x;\ y)$ az érintő tetszőleges pontjának koordinátái.

887. *a)* $4x+3y-35 = 0$; *b)* $2x-3y+9 = 0$;

c) $3x-4y+39 = 0$ és $3x+4y-1 = 0$.

888. $\left(\frac{7}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$.

889. $36{,}9°$ és $53{,}1°$.

890. $3x-4y-2 = 0$.

891. $P_1(11;\ -11)$, $P_2(-5;\ 1)$, $4x-3y-77 = 0$.
$4x-3y+23 = 0$.

892. $y = 3x-9 \pm 4\sqrt{10}$.

893. $2x+y-7 = 0$ és $2x+y+3 = 0$.

894. *a)* $y = 0$, $20x-21y = 0$; *b)* $x-2y+1 = 0$, $2x-y-7 = 0$;

c) $x = 3$, $5x-12y-3 = 0$; *d)* $9x+40y = 258$, $x = 2$.

895. 3; 0; a $(2;\ 0)$ pont a körön belül van; $\sqrt{10}$.

896. Két megoldás van aszerint, hogy milyen irányban mozgott a pont a kör kerületén: $(-0{,}4;\ 8{,}8)$; $(6;\ 4)$.

897. $P_1\left(\frac{2+4\sqrt{309}}{13};\ \frac{6\sqrt{309}-23}{13}\right)$,

$P_2\left(\frac{2-4\sqrt{309}}{13};\ \frac{-23-6\sqrt{309}}{13}\right)$.

898. Vegyük figyelembe azt, hogy a kör akkor és csak akkor metszi az egyenest merőlegesen, ha az egyenes áthalad a kör középpontján.

899. *a)* A közös érintők átmennek a körök belső, illetve külső hasonlósági pontján.

$y-2 = 0$; $4x-3y-10 = 0$; $x-1 = 0$; $3x+4y-5 = 0$.

b) A két körnek csak közös külső érintői vannak. Miért?
Legyen egy tetszőleges egyenes egyenlete: $y = mx+b$. Számítsuk ki ennek mindkét körrel való közös pontjait. Az egyenes érinti a köröket, ha a kapott másodfokú egyenletek diszkriminánsai 0-val egyenlők. A feltételekből m-re és b-re a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$225m^2-b^2+225 = 0,$$

$$-189m^2-30mb-b^2+36 = 0.$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert. A közös érintők egyenletei:

$$3x+4y-75 = 0 \text{ és } 3x-4y-75 = 0.$$

c) A két körnek csak közös érintői vannak.

$$x+y = 3(1\pm\sqrt{2}).$$

900. $x+2y = 12.$

901. A k és k_1 körök középpontjai O, O_1. Válasszuk az OO_1 egyenest x tengelynek. Az origó legyen az O pont. Legyen $OO_1 = a$. Ekkor a k és k_1 körök egyenlete:

$$x^2+y^2 = R^2 \text{ és } x^2+y^2-2ax = 0.$$

A k_1 kör $A(x_1; y_1)$ pontjában húzott érintő egyenlete:

$$(x_1-a)x+y_1y-ax_1 = 0.$$

Az O pont ettől az egyenestől R távolságra van. Ebből a feltételből $|x_1| = R$ adódik.

902. *a)* A két kör egymást a $(-1; 0)$ pontban belülről érinti.
b) Két pontban metszik egymást. A metszéspontok koordinátái:

$$P_1\left(\frac{8+5\sqrt{14}}{13};\ \frac{\sqrt{14}-1}{13}\right),\qquad P_2\left(\frac{8-5\sqrt{14}}{13};\ -\frac{\sqrt{14}+1}{13}\right).$$

c) Érintik egymást a $P(-1; 1)$ pontban.
d) Érintik egymást.

903. Az érintési pont $P(3; 4)$. Két megoldás van:

$$[x-(7+2\sqrt{6})]^2+[y-(7+2\sqrt{6})]^2 = (7+2\sqrt{6})^2;$$

$$[x-(7-2\sqrt{6})]^2+[y-(7-2\sqrt{6})]^2 = (7-2\sqrt{6})^2.$$

904. *a)* $x^2+y^2-4x+2y = 0$ és $x^2+y^2+2x-4y = 0.$
b) $x^2+y^2-x-y = 0.$

905. Az $x^2+y^2+x-2y-6+\lambda(x^2+y^2-2x+y-10) = 0$, ahol $\lambda \neq -1$, olyan kör egyenlete, amely áthalad az adott körök metszéspontjain. Miért? A keresett kör középpontja az x tengelyre illeszkedik, ha egyenletünkben nem szerepel y-ra nézve elsőfokú tag. Megoldás: $3x^2+3y^2-3x-14 = 0.$

906. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el:

$$3x^2+3y^2+y-9 = 0.$$

907. *a)* $x^2+y^2-3x+3y+4 = 0;$
b) $5x^2+5y^2-8x-12y-6 = 0.$

908. $P_1(1; 2)$, $P_2(5; 4)$.

909. $(x-2)^2+(y-2)^2 = 1$ és $(x-2{,}8)^2+(y-0{,}4)^2 = 1$.

910. *a)* $(x-6)^2+(y-4)^2 = 2(5-2\sqrt{2})^2$;

b) $(x-6)^2+(y-4)^2 = 2(5+2\sqrt{2})^2$.

911. $(x-1)^2+(y-1)^2 = 8$ és $\left(x+\frac{47}{13}\right)^2+\left(y-\frac{25}{13}\right)^2 = 8$.

912. $(x-2)^2+y^2 = 25$.

913. $(x-3)^2+(y-5)^2 = 25$.

914. 4 megoldás van:

$(x-5)^2+(y-5)^2 = 25$, $(x-3-2\sqrt{6})^2+(y+3+2\sqrt{6})^2 = (3+2\sqrt{6})^2$,

$(x+9+4\sqrt{6})^2+(y+9+4\sqrt{6})^2 = (9+4\sqrt{6})^2$,

$(x+15)^2+(y-15)^2 = 225$.

915. Két megoldás van:

$O_1(-6{,}09; 7{,}92)$, $O_2(9{,}99; -0{,}12)$.

916. Két megoldás van:

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{48}{5}\right)^2 = \frac{48^2}{25} \quad \text{és} \quad (x+4)^2+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}.$$

917. Két megoldás van: $(x-5)^2+(y-5)^2 = 9$,
$(x-5)^2+(y-5)^2 = 49$.

918. $\varphi = 90°$.

919. Először állapítsuk meg annak a szükséges és elégséges feltételét, hogy az adott egyenletek köröket állítsanak elő. Azután vegyük figyelembe azt, hogy két kör akkor metszi egymást merőlegesen, ha a metszésponthoz vont sugarak merőlegesek egymásra. Alkalmazzuk a kapott derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt. — Igazoljuk azt is, hogy megfordítva, ha $2(a_1a_2+b_1b_2) = c_1+c_2$, és az adott egyenletek köröket állítanak elő, akkor a körök merőlegesen metszik egymást.

920. *I. megoldás:* Alkalmazzuk a 919. feladatban bebizonyított tételt, és vegyük figyelembe azt is, hogy az adott pontok koordinátái kielégítik a keresett kör egyenletét.

Megoldás: $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$.

II. megoldás: A keresett kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$. Először bizonyítsuk be az adott pontok koordinátáinak segítségével, hogy $u = v$. — A keresett kör merőlegesen metszi az $x^2+y^2+2x = 0$ kört, ha a metszésponthoz vont sugarak és a centrális derékszögű háromszöget határolnak. Ebből az egyenletből adódik a megoldás:

$$u = v = \frac{1}{4} \quad \text{és} \quad r = \frac{5}{8}.$$

III. megoldás: Az adott pontokat tekintsük zérus sugarú köröknek. A feladat ekkor a következőképpen fogalmazható: írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+(y-1)^2=0$, $(x-1)^2+y^2=0$ köröket merőlegesen metszi. A keresett kör középpontját két-két kör hatványvonalának a metszéspontja adja. Elegendő két hatványvonal egyenletét felírni. (Például $2x+2y=1$, $4x=1$.)

921. Két megoldás van: $(x+1)^2+(y-3)^2=9$,

$$\text{és } \left(x-\frac{41}{13}\right)^2+\left(y-\frac{3}{13}\right)^2=9.$$

922. A két egyenes metszéspontja: (2; 5). Határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az első egyenestől 5-ször távolabb vannak, mint a második egyenestől. Két egyenes adódik:

$y=5$ (I) és $x-3y=-13$ (II).

A keresett kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. A kör áthalad a (2; 5) ponton, azért

$$(2-u)^2+(5-v)^2=r^2. \tag{1}$$

A középpontja (I)-re illeszkedik, azért $v=5$. (2)

Merőlegesen metszi az adott $(x-14)^2+(y+3)^2=40$ egyenletű kört, tehát

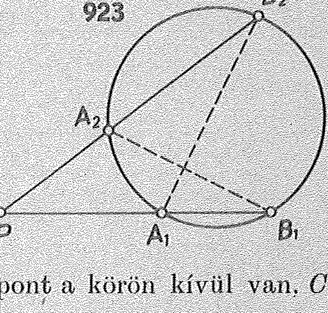
$$(u-14)^2+(v+3)^2=r^2+40. \tag{3}$$

(1), (2) és (3) megoldás adja az egyik kör középpontjának koordinátáit és a sugarát. A másik kör adatait (II) felhasználásával, a fenti gondolatmenet alapján számíthatjuk ki. Megoldások:

$(x-9)^2+(y-5)^2=49$ és $(x-11)^2+(y-8)^2=90$.

923. Ha az adott P pont például a körön kívül van, akkor a 923. ábrán látható PA_1B_2 és PA_2B_1 hasonló háromszögek felhasználásával igazolhatjuk az állítást.

923



927. $h=(x-u)^2+(y-v)^2-r^2$, ahol $(u;v)$ a kör középpontjának koordinátái, r a kör sugara.

928. *a)* 14; *b)* 0; *c)* −15; *d)* 32.

929. Számítsuk ki az adott pontoknak az adott körre vonatkozó hatványát, és alkalmazzuk a 924. feladatban bebizonyított tételt.

Megoldás: A és D pont a körön belül van, B pont a körön kívül van, C pont a körre illeszkedik.

930. $\sqrt{71}$.

931. Először igazoljuk, hogy a $K_1-K_2=0$ egyenes egyenlete. Számítsuk ki a $K_1-K_2=0$ egyenes és a centrális egyenesek egyik irányvektorát. Igazoljuk, hogy a két irányvektor merőleges egymásra. A feladat *b)* állítása a $K_1=K_2$ egyenletből azonnal leolvasható.

932. *a)* $8x+12y=57$; $\left(\frac{57}{8};\ 0\right)$; $\left(0;\ \frac{57}{12}\right)$; $\frac{9}{8}\sqrt{33}$; $\frac{3}{8}\sqrt{217}$,

b) $(4;\ 0)$; $(0;\ 4)$; $\sqrt{6}$,

c) $\left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$; $(0;\ -3)$; $\frac{\sqrt{33}}{4}$; 3.

933. *a)* $\frac{3}{5}\sqrt{91}$; *b)* $\frac{4}{5}\sqrt{5}$; *c)* $2\sqrt{2}$; *d)* $\frac{2\sqrt{97}}{97}$;

e) $10\sqrt{2}$; $7x-y+2=0$, ahol $x\geq 1$ vagy $x\leq -1$.
Ha $r_1=r_2=5\sqrt{2}$, akkor a mértani hely $7x-y+2=0$.

934. Két megoldás van: $\left(\frac{-24+\sqrt{251}}{10};\ \frac{3-2\sqrt{251}}{10}\right)$ és $\left(\frac{-24-\sqrt{251}}{10};\ \frac{3+2\sqrt{251}}{10}\right)$.

935. Két megoldás van: $(5;\ -5)$ és $(-6;\ 6)$.

936. Legyen a három kör egyenlete $K_1=0$, $K_2=0$, $K_3=0$. A hatványvonalak egyenletei rendre: $K_1-K_2=0$, $K_2-K_3=0$ és $K_1-K_3=(K_1-K_2)+(K_2-K_3)=0$. A felírt egyenletek segítségével igazolható a tétel, ha a körök középpontjai nem illeszkednek egy egyenesre. – Ha a három kör középpontja egy egyenesre illeszkedik, akkor nincs hatványpont. Miért?

937. *a)* $(6;\ 1)$; *b)* $(-1;\ -3)$.

938. $r=3\sqrt{2}$.

939. A keresett kör középpontja az adott körök hatványvonalára illeszkedik. Megoldás: $(x-2)^2+(y+6)^2=13$.

940. Helyezzük el a háromszöget koordináta-rendszerben úgy, hogy csúcsai az $A(-a;\ 0)$, $B(b;\ 0)$, $C(0;\ c)$ pontok legyenek. Ekkor az AA_1 és a BB_1 súlyvonalak fölé rajzolt Thalész-körök egyenletei:

$$\left(x-\frac{b-2a}{4}\right)^2+\left(y-\frac{c}{4}\right)^2=\frac{(b+2a)^2+c^2}{16}$$

és $$\left(x-\frac{2b-a}{4}\right)^2+\left(y-\frac{c}{4}\right)^2=\frac{(a+2b)^2+c^2}{16},$$

a hatványvonal egyenlete: $x=0$.

941. A trapéz csúcsai legyenek $(0;\ 0)$, $(a;\ 0)$, $(b;\ c)$ és $(d;\ c)$, ahol $a+d\neq b$.

942. Ha $\alpha+\beta\neq 0$, akkor az $\alpha K_1+\beta K_2=0$ egyenlet az adott koncentrikus körökkel koncentrikus kör egyenlete. Ha $\alpha+\beta=0$, akkor nem létezik olyan pont, amelynek koordinátái kielégítenék az $\alpha K_1+\beta K_2=0$ egyenletet.

943. Először bizonyítsuk be, hogy az $\alpha K_1+\beta K_2=0$ egyenlet, kör egyenlete. Azután bizonyítsuk be, hogy az $\alpha K_1+\beta K_2=0$ kör áthalad a két kör közös pontján. Ha $\alpha+\beta=0$, akkor a felírt egyenlet a hatványvonal egyenlete.

944. Kövessük a 943. feladat megoldásának gondolatmenetét.

945. $x^2+y^2-6x+8y+8=0$.

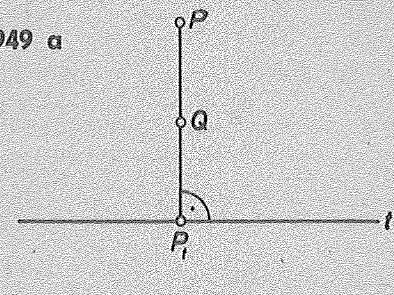
946. $\left(x+\frac{73}{24}\right)^2+y^2=\left(\frac{169}{24}\right)^2$.

947. Két megoldás van: $\left(x+\frac{7\pm\sqrt{1129}}{10}\right)^2+(y-2)^2=16$.

948. A három kör ugyanahhoz a körsorhoz tartozik, ha közös hatványvonaluk van. Megoldás: $a=-8$, $b=-1$.

949. *a)* Az affinitás tengelye a síkot két félsíkra osztja. Az adott P pontnak a tengelyre eső merőleges vetülete legyen P_t (949. *a)* ábra). Mivel $\lambda=\frac{1}{2}>0$, azért a P_tP félegyenesen meg kell szerkeszteni azt a Q pontot, amelyre $QP_t=\frac{1}{2}\cdot PP_t$. (Ha P a tengelyre illeszkedik, akkor $Q\equiv P$.)

949 a



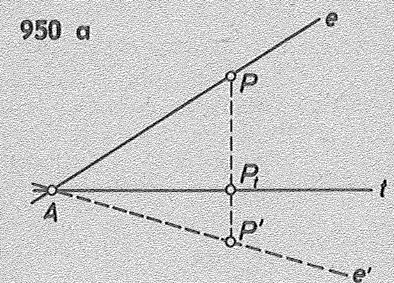
b) Mivel $\lambda=-2<0$, azért a P tárgypontot a Q képponttal összekötő szakaszt az affinitás tengelye metszi. (Ha P a tengelyre illeszkedik, akkor $Q\equiv P$.)

950. *a)* Az affinitás tengelye legyen t. Rajzoljunk egy olyan e egyenest, amely a t tengelyt A pontban metszi (950. *a)* ábra).

Ekkor az A pont képe önmaga.

Legyen P az e egyenes tetszőleges, de A-tól különböző pontja. P-nek a t tengelyre eső merőleges vetülete legyen P_t. P tárgypont képpontja legyen P'. e egyenes affin képe egyenes, ha bebizonyítjuk, hogy a $P'A$ szakasznak a t tengellyel bezárt szöge független a P pont megválasztásától. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a $\frac{P'P_t}{AP_t}$ hányados állandó.

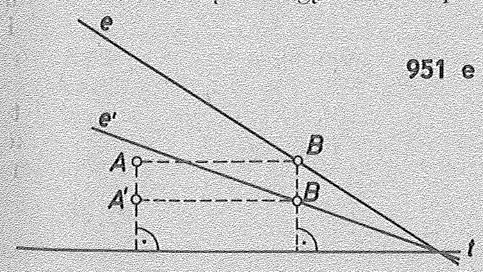
950 a

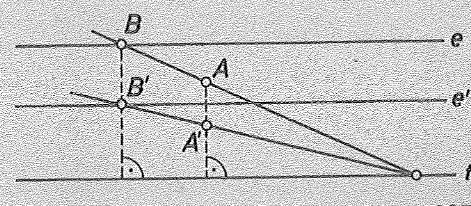


A most bebizonyított tételből következnek a feladat további állításai.

951. Az *e)* feladat megoldása a 951/*e* ábráról közvetlenül leolvasható. Az ábrán kétféle helyzetű egyenes szerepel.

951 e





Az e egyenes az egyik esetben metszi az affinitás tengelyét, a másik esetben párhuzamos az affinitás tengelyével.

Végezzük el a szerkesztést akkor is, ha az affinitás aránya $\lambda < 0$ (AA' szakaszt metszi a t tengely), továbbá akkor is, ha az $e \| t$ és az A nem az e-t tartalmazó félsíkban van.

952. *a)* $2x+3y-8=0$, *b)* $x-y-4=0$.

953. $\lambda = \dfrac{16}{3}$

955. $x^2+y^2=25$ és $x^2+y^2=16$, illetve $x^2+y^2=100$ és $x^2+y^2=25$.

956. *a)* $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{11}=1$.

b) A feltétel szerint a $P(x;\ y)$ pontra $PF_1+PF_2=2a$, illetve:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{*}$$

Ebből gyöktelenítéssel és a $b^2=a^2-c^2$ helyettesítéssel adódik az állítás.

Tegyük fel, hogy valamely Q pont $(x;\ y)$ koordinátái kielégítik az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{**}$$

egyenletet. Bebizonyítjuk, hogy akkor Q csak az ellipszis pontja lehet, azaz Q koordinátái kielégítik (*) egyenletet is.

Mivel a és b, valamint x és y valós számokat jelentenek, azért $\dfrac{y^2}{b^2} \geq 0$, tehát $\dfrac{x^2}{a^2} \leq 1$. Ebből $|x| \leq a$. Hasonlóképpen $|y| \leq b$. A (**) egyenletet tehát csak olyan pontok koordinátái elégíthetik ki, amelyek abszcisszáinak abszolút értéke nem nagyobb a-nál és ordinátáinak abszolút értéke nem nagyobb b-nél.

A $b^2=a^2-c^2$ helyettesítéssel és rendezéssel (**) egyenlet a következő alakban is írható:

$$a^2(x^2+c^2)+a^2y^2=a^4+c^2x^2. \tag{***}$$

Mindkét oldalhoz adjunk hozzá $+2a^2cx$-et. Ekkor

$$a^2(x+c)^2+y^2=(a^2+cx)^2.$$

Mivel $a>c$ és $a \geq |x|$, azért $a^2+cx>0$.

Tehát

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x. \tag{1}$$

A (***) egyenlet mindkét oldalát bővítsük $-2a^2cx$-szel. Ekkor

$$a^2(x-c)^2+y^2=(a^2-cx)^2.$$

Mivel $a>c$ és $a \geq |x|$, azért $a^2-cx>0$, tehát

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x. \tag{2}$$

(1) és (2) egyenletek megfelelő oldalait összeadva:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Abból, hogy valamely Q pont koordinátái kielégítik az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ egyenletet, következik, hogy

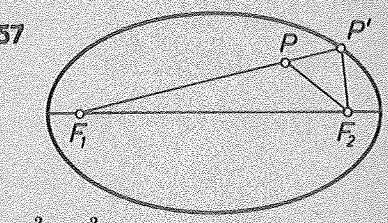
$$QF_1+QF_2 = 2a.$$

Tehát Q az ellipszis pontja.

957. Az ellipszis belső tartományának tetszőleges P pontjára vonatkozó állítás bizonyítása a 957. ábráról közvetlenül leolvasható.

$$PF_1+PF_2 < PF_1+(P'P+P'F_2) = P'F_1+P'F_2 = 2a.$$

957



958. *b)* $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49} = 1$; *c)* $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39} = 1$.

959. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25} = 1$ és $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25} = 1$.

960. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2+c^2} = 1$.

961. *a)* 26; 24; $(-5;\ 0)$ és $(5;\ 0)$;

e) $3\sqrt{2}$; 3; $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$ és $\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$.

962. *a)* $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{y^2}{25} = 1$; *b)* $\frac{(x+3)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{64} = 1$;

c) $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{7} = 1$; *d)* $\frac{(x-7)^2}{49}+\frac{(y-4)^2}{16} = 1$.

963. *a)* $O(3;\ -1)$, $F_1(2;\ -1)$, $F_2(4;\ -1)$;

b) $O(-3;\ 0)$, $F_1(-3-\sqrt{2};\ 0)$, $F_2(-3+\sqrt{2};\ 0)$;

c) $O(1;\ 1)$, $F_1(1-\sqrt{2};\ 1)$, $F_2(1+\sqrt{2};\ 1)$;

d) $O(-2;\ 2)$, $F_1\left(-2\frac{1}{2};\ 2\right)$, $F_2\left(-1\frac{1}{2};\ 2\right)$;

e) az egyenletet csak az $(5;\ -3)$ pont koordinátái elégítik ki.

964. ± 2; $\pm\frac{\sqrt{35}}{3}$; $\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$; $\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

965. $\frac{2b^2}{a}$.

966. $(5;\ 2)$, $(5;\ -2)$, $(-5;\ 2)$, $(-5;\ -2)$.

967. 93,7°.

968. Először igazoljuk, hogy az ellipszis belső, illetve külső tartományának pontjaira

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\lesseqgtr 1.$$

A (8; 2) pont az ellipszis külső, a (−4; 3) pont az ellipszis belső pontja, a $\left(2;\ -\frac{3}{2}\sqrt{15}\right)$ pont az ellipszisre illeszkedik.

969. *a)* $\frac{x^2}{36}+\frac{3y^2}{64}=1$; *b)* $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$;

c) $x^2+12y^2=16$; *d)* $x^2+4y^2=52$;

e) $3x^2+4y^2=12$; *f)* $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

970. $r_1=3\sqrt{10}$; $r_2=\sqrt{10}$; $\omega=90°$.

971. A mozgó pont pályája ellipszis, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Az ellipszisen π sec alatt fut végig a pont.

972. A kérdéses háromszög csúcsai: $(x;\ y)$, $(-a;\ 0)$ és $(0;\ -b)$, ahol $0\le x\le a$ és $0\le y\le b$. A háromszög területe:

$$t=\frac{1}{2}(bx+ay+ab).$$

Meg kell keresnünk az $u=bx+ay$ kifejezés legnagyobb értékét, ha $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

Megoldás: $u_{\max}=ab\sqrt{2}$

$$t_{\max}=\frac{ab}{2}(\sqrt{2}+1).$$

973. *a)* $P_1\left(\sqrt{\frac{21}{31}};\ 2\sqrt{\frac{21}{31}}\right)$, $P_2\left(-\sqrt{\frac{21}{31}};\ -2\sqrt{\frac{21}{31}}\right)$;

b) $P_1(3;\ -3)$; $P_2\left(\frac{69}{13};\ \frac{21}{13}\right)$;

c) $P_1(5;\ -3)$, $P_2(2;\ 4)$; *d)* nincs közös pontjuk.

974. *a)* $2ab\sqrt{\frac{m^2+1}{a^2m^2+b^2}}$; *b)* $\sqrt{a^2+b^2}$.

975. $\sqrt{2}$.

976. $A\left(\frac{6}{7};\ \frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{6}{7};\ -\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$.

977. $d=10$.

978. $O_1\left(-\frac{64}{25};\ 0\right)$, $O_2\left(0;\ -\frac{128}{15}\right)$.

979. $15-\frac{30}{\sqrt{13}}$.

980. $2ab\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}$.

981. $\frac{2a^3}{a^2+c^2}$.

982. A metszéspontok koordinátái:

$$x_{1,2}=\frac{-4l\pm 2\sqrt{25-l^2}}{5},\quad y_{1,2}=\frac{l\pm 2\sqrt{25-l^2}}{5}.$$

2 megoldás van, ha $|l|<5$; 1 megoldás van, ha $|l|=5$, nincs megoldás ha $|l|>5$.

983. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

984. Két megoldás van:

a) $P_1(6,9;\ 0,9)$, $P_2(-6,9;\ 0,9)$, $P_3(-6,9;\ -0,9)$, $P_4(6,9;\ -0,9)$,
b) $P_1(1,3;\ 4,6)$, $P_2(-1,3;\ 4,6)$, $P_3(-1,3;\ -4,6)$, $P_4(1,3;\ -4,6)$.

985. Két megoldás van: $P_1\left(\frac{4\sqrt{7}}{7};\ \frac{3}{7}\sqrt{42}\right)$, $P_2\left(\frac{4\sqrt{7}}{7};\ -\frac{3}{7}\sqrt{42}\right)$,

$P_3\left(-\frac{4\sqrt{7}}{7};\ -\frac{3}{7}\sqrt{42}\right)$, $P_4\left(-\frac{4\sqrt{7}}{7};\ \frac{3}{7}\sqrt{42}\right)$.

986. $\left(-\frac{15}{2};\ \pm\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

987. $\left(\frac{c}{2};\ \frac{b}{2a}\sqrt{3a^2+b^2}\right)$.

988. $y=\frac{1}{2}x$ és $y=-\frac{1}{2}x$.

989. $A(a;\ 0)$ és $B(-a;\ 0)$.

990. $4x+9y-13=0$.

991. $x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}$ és $y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ $(a>b)$.

Mindegyik x értékhez két y érték tartozik.
4 pontot kapunk, ha $a^2-2b^2>0$, $a>b\sqrt{2}$.
2 pontot kapunk (a kistengely végpontjait), ha $a=b\sqrt{2}$.
Nincs megoldás, ha $a<b\sqrt{2}$.

992. $P_1(3;\ 2)$, $P_2(3;\ -2)$.

993. 4 metszéspont van: $x = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $y = \pm 2\sqrt{\frac{11}{3}}$.

994. Az állítást elegendő a félátmérőkre bizonyítani. Számítsuk ki a $-mx+$ $+y = 0$ és az $x+my = 0$ egyeneseknek az ellipszissel való metszéspontjait, majd a félátmérők (e és f) hosszát. Ekkor $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ adódik.

995. Elegendő, ha az első síknegyedre ($x > 0$, $y > 0$) oldjuk meg a feladatot.

4 megoldás van: $x = \pm\frac{2ab}{a^2+3b^2}\sqrt{a^2+2b^2}$, $\quad y = \pm\frac{b(a^2+b^2)}{a^2+3b^2}$.

996. Keressük az $x^2+(y-b)^2 = r^2$,
$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$
egyenletrendszer megoldását. A diszkriminánsból meghatározhatjuk r legnagyobb értékét.

$$r = \frac{a^2}{c}.$$

997. Ismeretes, hogy egy síkidom és az affin képidom területének aránya állandó. A körbe írható háromszögek közül az egyenlő oldalú háromszög területe a legnagyobb. Az ellipszisbe írható maximális területű háromszög csúcsai:

$$(0;b),\ \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{b}{2}\right),\ \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{b}{2}\right).$$

998. Az egyenes az ellipszist az $(5;\ -4)$ pontban érinti.

999. $a^2A^2+b^2B^2 = C^2$.

1001. $x-2y = 8$.

1002. $k = \frac{4a}{c}\sqrt{a^2+c^2}$; $\quad t = 2\cdot\frac{a^3}{c}$.

1003. $t = \frac{125}{8}$.

1004. $P_1\left(\frac{c^2x_1}{a^2};\ 0\right)$, $\quad P_2\left(0;\ -\frac{c^2y_1}{b^2}\right)$ $\quad (x_1, y_1 \neq 0)$.

Vizsgáljuk meg külön azt az esetet, amikor $(x_1;\ y_1)$ pont az ellipszis valamelyik tengelypontja. Csak egy metszéspont van: $P(0;0)$.

1005. Oldjuk meg az

$x^2+4y^2 = 20$,
$y = -x+b$

egyenletrendszert. A diszkrimináns segítségével állapítsuk meg b értékét. Megoldás: $x+y = \pm 5$.

1006. Az adott egyenesre merőleges érintő egyenlete

$$12x-13y+C=0$$

alakú. Alkalmazzuk a 999. feladat megoldásában kapott feltételt C értékének kiszámítására.
Megoldás: $12x-13y\pm 169=0$.

1007. A négyzet csúcsai $(0;\ \pm\sqrt{13})$, $(\pm\sqrt{13};\ 0)$. A téglalap területe $t=11\frac{1}{13}$.

1008. Szimmetriaokokból elegendő csak az első síknegyedbe eső pontokat vizsgálni. Ekkor az érintési pont koordinátái: $x_1>0$, $y_1>0$. Az érintő koordinátatengelyek közé eső darabjának a négyzete:

$$d^2=\frac{a^4}{x_1^2}+\frac{b^4}{y_1^2}$$

vagy

$$d^2=\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^4}{x_1^2}+\frac{b^4}{y_1^2}\right)=a^2+b^2+\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{x_1^2}{y_1^2}+\frac{a^4}{b^2}\cdot\frac{y_1^2}{x_1^2}.$$

Ebben az összegben az utolsó két változó tag pozitív, másrészt a szorzatuk állandó. Összegük tehát akkor a legkisebb, ha a tagok egyenlők. d akkor minimális, ha

$$x_1=a\sqrt{\frac{a}{a+b}},\quad y_1=b\sqrt{\frac{b}{a+b}},\quad d_{\min}=(a+b)^2.$$

1009. Az ellipszis egyenlete: $3x^2+4y^2=12$. Az érintők egyenlete: $x-2y+4=0$ és $x-6y-28=0$.

1010. $8x+9y=30$ és $x-2y=-5$.

1011. $y=\frac{4}{5}x-2$.

1012. $d=\frac{1}{a}\sqrt{2a^2c^2-a^2b^2+b^4}$.

1013. $T=\sqrt{b^2p^2+a^2q^2-a^2b^2}$.

1014. Használjuk fel a és b kiszámításához a 999. feladat megoldását. Két ellipszis adódik:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\quad\text{és}\quad\frac{16x^2}{225}+\frac{y^2}{16}=1.$$

1015. $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$.

1016. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

1017. Mivel a kör és az ellipszis szimmetria-középpontja az origó, azért elegendő a kör és ellipszis első síknegyedbe eső $(x_1;\ y_1)$ metszéspontját figyelembe venni a megoldáshoz.

Az $(x_1;\ y_1)$ ponthoz tartozó körérintő, illetve ellipszisérintő egyik irányvektora $(-y_1; x_1)$, illetve $(-a^2y_1; b^2x_1)$.
Az érintők hajlásszögének tangense:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}x_1y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad (*)$$

ahol a és b az ellipszis fél nagytengelye és fél kistengelye. Számítsuk ki először x_1, y_1 értékét, azután helyettesítük be a (*) egyenletbe. Vegyük figyelembe még azt is, hogy az ellipszis fél fókusztávolsága r, tehát $b^2 = a^2-r^2$.

Megoldás: $\dfrac{2x^2}{3r^2}+\dfrac{2y^2}{r^2} = 1.$

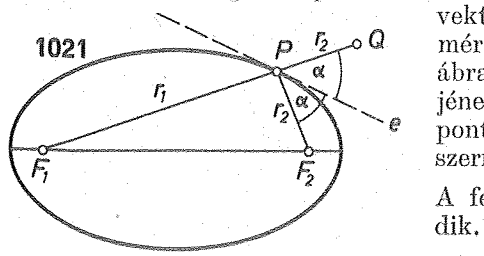
1018. Először számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit.
4 megoldás van: $\pm 2\sqrt{5}x+5y = 30$ és $\pm 2\sqrt{5}x+5y = -30$.

1019. 4 megoldás van: $\pm 3x+4y+15 = 0$ és $\pm 3x-4y+15 = 0$.

1020. Alkalmazzuk a 999. feladat megoldásában talált összefüggést.
4 megoldás van: $x+y\pm 3 = 0$ és $x-y\pm 3 = 0$.

1021. Húzzuk meg a P ponthoz vezető rádiuszvektorokat. Az egyik rádiuszvektor P ponton túli meghosszabbítására mérjük rá a másik rádiuszvektort (1021. ábra). Igazoljuk, hogy a $QPF_2\sphericalangle$ szögfelezőjének az ellipszissel P ponton kívül más közös pontja nincs. (A bizonyítás indirekt módszerrel egyszerűen adódik.)

1021



A feladat állítása ezután egyszerűen adódik.

1022. A megoldás az 1021. feladat állításából rögtön adódik.

1023. A feladat *a)* állítása koordináta-geometriai módszerrel bizonyítható. A *b)* állítás igazolásához vegyük figyelembe azt, hogy az $AA_1F_1\triangle \sim BB_1F_1\triangle$.

1024. Használjuk ki az érintőnek azt a tulajdonságát, hogy felezi az érintési ponton áthaladó rádiuszvektor egyenesek közrefogta egyik szöget. Lásd a 1021. feladat megoldását. (Külön vizsgáljuk meg a tétel állítását arra az esetre, amikor a fókuszt a nagytengely végpontjaihoz tartozó ellipszisérintőkre tükrözzük.)

1025. A bizonyításnál használjuk ki az 1024. feladat állítását.

1026. Az F_1 fókusznak az e érintőre eső merőleges vetülete legyen P_1, az F_2 fókusznak az e érintőre eső merőleges vetülete legyen P_2. Az 1025. feladat szerint P_1 és P_2 az ellipszis középpontja körül rajzolt a sugarú körön van. (a az ellipszis fél nagytengelye.) Tükrözzük az F_2P_2 szakaszt az ellipszis középpontjára, azután alkalmazzuk a pont körre vonatkozó hatványának tételét.
Megoldás: $F_1P_1 \cdot F_2P_2 = b^2$, ahol b az ellipszis fél kistengelye.

1027. Oldjuk meg a feladatot koordináta-geometriai módszerrel. (Igazoljuk, hogy a BP egyenes egyik irányvektora párhuzamos az OQ egyenes egyik irányvektorával.)

1028. Használjuk fel az 1021. feladat állítását.

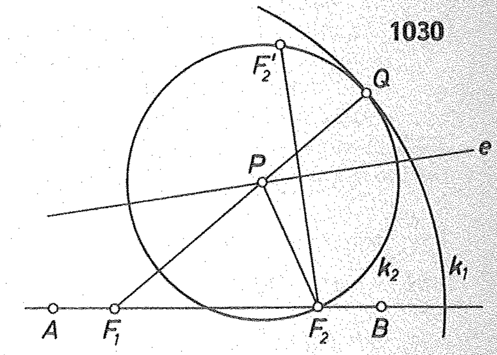
1029. *I. megoldás:* Az adott külső pontot jelöljük P-vel. Először szerkesszük meg P affin képét, P'-t. A P'-ből a főkörhöz húzott érintő felhasználásával a keresett érintő azonnal adódik.

II. megoldás: Használjuk fel az 1024. feladatban közölt tételt. Ennek alapján bármelyik fókusznak a keresett érintőre vonatkozó tükörképe, majd ebből az érintő megszerkeszthető. Mindig 2 megoldás van.

1030. *I. megoldás:* Először szerkesszük meg az e egyenes affin képének a főkörrel való metszéspontjait.

A metszéspontok száma lehet 2, 1 vagy 0.

II. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak (1030. ábra). A fókuszokat jelöljük F_1-gyel és F_2-vel, a metszéspontot P-vel, a nagytengely végpontjait A-val és B-vel. Tegyük fel, hogy e nem halad át egyik fókuszon sem. Mérjük fel F_1P szakasz P-n túli meghosszabbítására a $PQ = PF_2$ szakaszt. Ekkor $F_1Q = AB = 2a$. Tükrözzük az F_2 fókuszt az e egyenesre. A tükörképe legyen F_2'. F_2' a P pont körül a $PF_2 = PQ$ sugárral rajzolt k_2 körre illeszkedik. Ez a kör érinti az F_1 körül $F_1Q = 2a$ sugárral rajzolt k_1 kört.



Mivel a feladatban közölt adatokból k_1, F_2 és F_2' szerkeszthető, azért a feladat a következőképpen is fogalmazható. Adott a k_1 kör és a belsejében két pont, F_2 és F_2'. Szerkesszünk olyan k_2 kört, amely érinti a k_1 kört, és áthalad az adott F_2 és F_2' pontokon.

A szerkesztés inverzióval végezhető (1276. feladat). Legyen az inverzió pólusa F_2 és a sugara például F_2F_2'. Ez az inverzió F_2' pontot helybenhagyja, k_1 kört k_1' körbe viszi át. A keresett kör inverze az F_2' pontból a k_1' körhöz húzott érintő.

A megoldások száma 2, 1, 0 aszerint, hogy F_2' a k_1 kör belső pontja, a k_1 körön van, vagy a k_1 kör külső pontja. Ettől függően az F_2' pontból a k_1' körhöz 2, 1, 0 érintő húzható.

Ha e áthalad az egyik fókuszon, a szerkesztés akkor is elvégezhető inverzióval. A megoldást és a diszkussziót az olvasóra bízzuk.

1031. *e)* Alkalmazzuk az 1024. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

f)–i) Alkalmazzuk az 1025. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

j) Alkalmazzuk az 1023. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

k) Tükrözzük az adott fókuszt az adott érintőre. A másik fókusz a képponton és az adott érintési ponton áthaladó egyenesre illeszkedik

1046. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1.$

1047. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1.$

1048. *a)* $P_1(6;\ 2)$, $P_2\left(\frac{14}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$; *b)* $P\left(\frac{25}{4};\ 3\right)$.

1049. $d=7{,}2\sqrt{5}.$

1050. A húr egyenesének egyenlete: $3x+4y-5=0.$

1051. $d=\frac{2ab\sqrt{5(4b^2-a^2+1)}}{|4b^2-a^2|}$, ahol $4b^2+1>a^2.$

1052. $l=3\sqrt{d^2+4}.$

1053. A metszéspont koordinátái:

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}};\quad y=\pm\frac{abm}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}.$$

Metszéspont csak akkor van, ha $|m|<\frac{b}{a}$. Nincs metszéspont, ha $|m|\geq\frac{b}{a}$.

1054. $P\left(\pm\frac{136}{15};\ \pm\frac{136}{15}\right)$.

1055. $d=\frac{272}{9}.$

1056. $(\pm 136;\ 9\sqrt{34})$.

1057. 48 területegység.

1058. $P(-6;\ \pm 4\sqrt{3})$.

1059. *a)* 4 megoldás van: $x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}$; $y=\pm 1{,}8$;

b) 2 megoldás van: $x=9{,}6$; $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$

1060. $r=\sqrt{\frac{25\sqrt{65}+7}{2}}.$

1061. $x=\pm\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3\sqrt{73}-9}}$; $y=\pm\sqrt{\frac{3\sqrt{73}-9}{2}}.$

1062. $x=\pm 39$; $y=\pm 48.$

1063. A hangforrás helyét két hiperbola egyik metszéspontja adja. Megoldás: $P\left(8;\ \frac{1}{2}\sqrt{105}\right)$.

1064. $y = \pm\frac{2}{3}x$.

1065. 77,3°.

1066. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$, illetve $\frac{x^2}{a^2}-\frac{3y^2}{a^2}=1$.

1067. $xy=-8$.

1068. Oldjuk meg a feladatot koordináta-geometriai módszerrel és elemi úton is.

1069. A távolság: a.

1070. A távolságokat jelöljük d_1-gyel és d_2-vel. Alkalmazzuk a 752. feladatban közölt tételt.

Megoldás: $d_1d_2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$.

1071. Elegendő az első síknegyedbe eső pontra igazolni a tételt. A P pont a szóban forgó merőlegesnek az aszimptoták közötti darabját két szakaszra osztja:

$$h_1 = \frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad \text{és} \quad h_2 = \frac{b}{a}x+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

1072. Húzzuk meg a szóban forgó fókusz melletti tengelyponthoz tartozó hiperbolaérintőt, és keressünk egybevágó háromszögeket.

1073. Vegyük figyelembe az 1072. feladatban igazolt tételt.

1074. 4 megoldás van:

$$x=\pm\frac{14\sqrt{3}}{3}, \quad y=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

1075. Igazoljuk, hogy az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=\pm\frac{b}{a}x+l$ $(l\neq 0)$ egyenletrendszernek egy megoldása van.

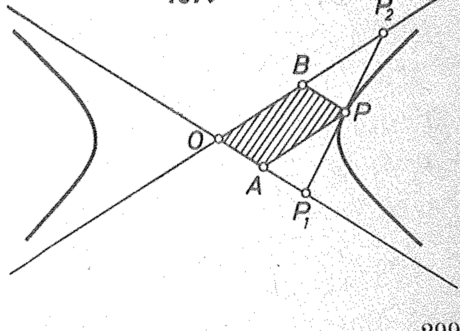
1076. A tétel igazolása céljából elegendő megmutatni, hogy az egyenes aszimptoták közti szakaszának felezéspontja és az egyenes hiperbola közti szakaszának felezéspontja egybeesnek. (A felezéspontok koordinátáinak kiszámításakor alkalmazzuk a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggést.)

1077. Alkalmazzuk az 1076. feladatban közölt tételt.

1078. Alkalmazzuk az 1077. feladatban közölt tételt.

1079. Vezessük be az 1079. ábrán látható jelölést. (P az érintési pont, P_1P_2 a P ponthoz tartozó hiperbola érintőinek az aszimptoták közé eső szakasza. PA és PB az OP_2P_1 háromszög középvonalai az 1077. feladat értelmében). Mi-

1079



vel az OP_1P_2 háromszög területe az $OAPB$ paralelogramma területének a kétszerese, azért elegendő megmutatni, hogy a $PA \cdot PB$ szorzat független a P pont megválasztásától. (Alkalmazzuk az 1070. feladatban közölt tételt.)

1080. *a)* Az egyenesnek és a hiperbolának egy közös P pontja van. $P(4;\ 1)$.
b) Az egyenes a hiperbolát két pontban metszi.

$$P_1\left(\frac{4+6\sqrt{21}}{5};\ \frac{9+6\sqrt{21}}{10}\right),\quad P_2\left(\frac{4-6\sqrt{21}}{5};\ \frac{9-6\sqrt{21}}{10}\right).$$

c) Az egyenesnek és a hiperbolának nincs közös pontja.

1081. *a)* $|m| > \frac{9}{2}$; *b)* $|m| = \frac{9}{2}$; *c)* $|m| < \frac{9}{2}$.

1082. $a^2A^2-b^2B^2 = C^2$.

1084. Legyen P a hiperbola tetszőleges pontja (1084. ábra). Rajzoljuk meg az F_2PF_1 szöget felező e egyenest. Igazoljuk, hogy az e egyenesnek a P ponton kívül más közös pontja nem lehet a hiperbolával. Tegyük fel, hogy Q is közös pont. Tükrözzük az F_2 fókuszt az e egyenesre, ezután vizsgáljuk az F_1QF_2' háromszög oldalait, ahol F_2' az F_2 tükörképe.

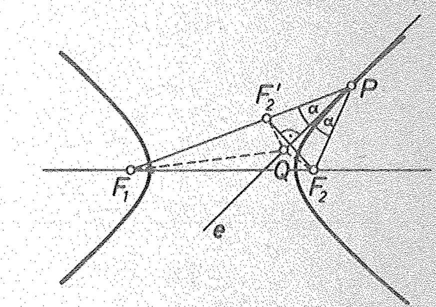
1085. Alkalmazzuk az 1084. feladatban közölt tételt.

1086. $x+y = 1$.

1087. Használjuk fel az 1082. feladat megoldását. Megoldás:

$$\frac{x^2}{4}-y^2 = 1.$$

1084



1088. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4} = 1$.

1089. $x^2-4y^2 = 16$.

1090. $a^2 = \frac{c^2+n^2}{m^2+1}$ és $b^2 = \frac{m^2c^2-n^2}{m^2+1}$.

Mivel $a^2 < c^2$, azért

$$\frac{c^2+n^2}{m^2+1} < c^2, \text{ és innen}$$

$$|n| < c|m|$$

kell hogy legyen.

1091. $x+y\pm 3 = 0$.

1092. $10x-3y\pm 32 = 0$.

1093. $3x\pm 2y-6 = 0$.

1094. $2x+5y-16 = 0$.

1095. $d = \sqrt{2a^2+4b^2}$.

1096. $\frac{2x}{5}\pm\frac{1}{20}\sqrt{11}y = 1$.

1097. $y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{15}$.

1098. $A\left(0;\ \frac{c^2y_1}{b^2}\right)$; $B\left(\frac{c^2x_1}{a^2};\ 0\right)$.

1099. Számítsuk ki a metszéspontban a két görbéhez húzható érintők hajlásszögét. $\varphi=90°$

1100. Az ellipszis, illetve a hiperbola egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \quad \text{és} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Számítsuk ki a metszéspontban húzható érintők iránytangensét. Igazoljuk, hogy szorzatuk -1.

1101. Használjuk fel az érintőnek azt a tulajdonságát, hogy felezi az érintési ponthoz vezető rádiuszvektorok hajlásszögét.

1102. Használjuk fel az 1101. feladat állítását.

1103. Alkalmazzuk az 1102. feladatban igazolt tételt.

1104. *c)* Állapítsuk meg a megoldhatóság feltételét.

d) Mi a megoldhatóság feltétele? Hány megoldás lehetséges?

e) Alkalmazzuk az 1073. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

f) Alkalmazzuk az 1101. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

g)–i) Alkalmazzuk az 1101. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

j) Alkalmazzuk az 1102. feladatban közölt tételt.

k)–n) Alkalmazzuk az 1084., illetve az 1101. feladatban közölt tételeket. Vizsgáljuk meg a megoldhatóság feltételét.

o)–p) Alkalmazzuk az 1102. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

s) Alkalmazzuk az 1072., illetve az 1102. feladatokban közölt tételeket. Mi a megoldhatóság feltétele?

z) Először szerkesszük meg a másik aszimptotát az 1076. feladatban közölt tétel segítségével. Azután szerkesszük meg az egyik adott ponthoz, a P_1-hez tartozó hiperbola-érintőt az 1077. feladatban közölt tétel segítségével. Majd igazoljuk a következő tételt. Az érintő az x tengelyt olyan $Q(x_0;\ 0)$ pontban metszi, hogy $x_0x_1=a^2$, ahol x_1 a P_1 pont abszcisszája, a a hiperbola valós féltengelye. Ennek segítségével a, majd a fókusz távolsága megszerkeszthető.

x)–y) A megoldáshoz az ötletet a *z)* feladat megoldásából meríthetjük.

1105. A fókuszokat jelöljük F_1-gyel és F_2-vel, az adott egyenest e-vel, a hiperbola tengelypontjait A-val és B-vel.

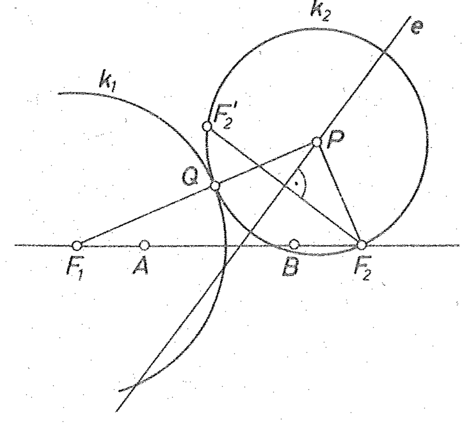
Ha e a hiperbola valós tengelyegyenese, akkor a megoldás triviális. Eltekintve ettől az esettől, e helyzetét illetően két esetet különböztetünk meg.

1. e nem halad át egyik fókuszon sem. Tekintsük a feladatot megoldottnak (1105. ábra).

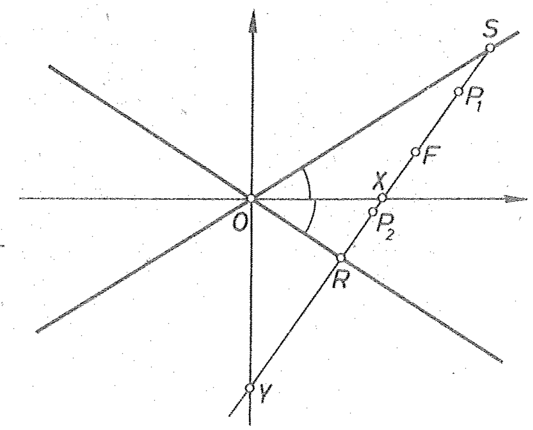
Legyen P az egyenes és a hiperbola metszéspontja. Ekkor $|PF_1-PF_2|=$ $=F_1Q=AB=2a$. Rajzoljunk P körül PF_2 sugárral és F_1 körül $2a$

sugárral kört. A két kör, k_1 és k_2 nyilván Q pontban érinti egymást. Tükrözzük F_2-t az e egyenesre. Tükörképe, az F_2', a P pont körül rajzolt k_2 körre illeszkedik.
A feladat megoldása így visszavezethető a következő szerkesztésre.
Adott egy k_1 kör és két pont: F_2 és F_2'. Szerkesztendő olyan k_2 kör, amely áthalad az adott két ponton, és érinti az adott k_1 kört. k_2 kör inver-

1105



1109 a



zióval megszerkeszthető (1276. feladat). Az inverzió pólusa legyen F_2, az inverzió sugara legyen például az F_2F_2' szakasz. Ez az inverzió az F_2' pontot helybenhagyja, a k_1 kört egy k_1' körbe viszi át. A keresett k_2 kör inverze olyan k_2' egyenes, amely áthalad az F_2' ponton és k_1' kört érinti. k_2' inverze, a k_2 kör és ennek P középpontja adja a megoldást.
Lehetséges megoldások száma 2, 1, 0 aszerint hogy az F_2' pontból a k_1' körhöz 2, 1 vagy 0 érintő szerkeszthető, és egyik érintő sem halad át az F_2 ponton. (Biztosan 1 megoldás van, ha az érintő párhuzamos valamelyik aszimptotával — 1075. feladat.)
2. e áthalad az egyik fókuszon. A feladat ebben az esetben a következőképpen is fogalmazható. Szerkeszteni kell olyan kört, amely a k_1 kört érinti; áthalad az F_2 ponton, és érinti az F_2 fókuszon áthaladó, az adott e egyenesre merőleges e' egyenest. A szerkesztés inverzióval megoldható.
A szerkesztés végrehajtását és a diszkussziót az olvasóra bízzuk.

1106. A megoldáshoz az ötletet az 1029. feladatra adott II. megoldásból meríthetjük.
Megjegyezzük, hogy a hiperbola középpontjából nem vonható érintő, az aszimptotákra illeszkedő pontokból 1 érintő, a hiperbola síkjának többi pontjából 2 érintő vonható a hiperbolához.

1107. Alkalmazzuk az 1084. feladatban közölt tételt.

1108. A megoldáshoz az ötletet az 1104. *z)* feladat megoldásából meríthetjük.

1109. *a)* Tekintsük a feladatot megoldottnak (1109. *a)* ábra). Az adott pontokat jelöljük P_1-gyel és P_2-vel.
Bizonyítsuk be az 1076. feladatban közölt tétel és a háromszög belső, illetve külső szögfelezőire vonatkozó tétel felhasználásával, hogy a P_1P_2 szakasz F felezéspontjára, a P_1P_2 egyenesnek a hiperbola tengelyeivel

való X és Y metszéspontjaira és az egyik aszimptotával való S metszéspontjára igaz a következő tétel: $FS^2 = FX \cdot FY$.
(Igaz a következő arány:

$$OR:OS = RX:XS = YR:YS,$$

hiszen az OX és az OY egyenesek az ORS háromszög belső, illetve külső szögfelezői.)

b) Alkalmazzuk az 1102. feladatban közölt tételt. Hány megoldás lehetséges? Mi a megoldhatóság feltétele?

c) Alkalmazzuk az 1076. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele?

d) Alkalmazzuk az 1072. feladatban közölt tételt.

1111. Az adott egyenletekből állapítsuk meg először a vezéregyenes egyenletét és a fókusz koordinátáit.

1112. A parabola tengelyponti egyenletének meghatározásakor igazoltuk, hogy ha egy pont a parabolára illeszkedik, akkor $(x;\, y)$ koordinátáira teljesül az $y = \frac{1}{2p}x^2$ összefüggés. Válasszunk olyan $(x;\, y)$ pontot, amely a parabola külső pontja. $(x;\, y)$ ponton át húzzunk a parabola tengelyével párhuzamost. Ez egy pontban metszi a parabolát. (Miért?) A metszéspont koordinátái: $(x_1; y_1)$. Itt $x_1 = x$ és $y_1 > y$. Ekkor $y_1 = \frac{1}{2p}x_1^2 = \frac{1}{2p}x^2 > y$.

Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $y > \frac{1}{2p}x^2$, ha a pont a parabola belső pontja.

1113. Használjuk fel az 1112. feladatban közölt tételt.

1114. A hasonlóság középpontja a vezéregyenes és az e egyenes metszéspontja. A hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{3}{2}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét.

1115. *d)* $x^2 = 24y$, $y^2 = 3x$.

1116. *a)* $x^2 = 16y$, *b)* $x^2 = -12y$.

1117. *b)* $x^2 = -16y$.

1118. *a)* $x^2-8x-8y+24 = 0$; *b)* $x^2-4x+12y+4 = 0$;
c) $x^2-6x+16y-23 = 0$; *d)* $y^2-4y-6x+19 = 0$;
e) $y^2-6y-6x-6 = 0$; *f)* $x^2+2x-8y+17 = 0$;
g) $y^2-4y-16x+68 = 0$; *h)* $x^2-16y+32 = 0$ vagy $x^2+16y-160 = 0$;
i) $y^2-4y-8x+36 = 0$ vagy $y^2-4y+8x+60 = 0$.

1119. *a)* $C = 0$; *b)* $4a+2b+c-1 = 0$.

1120. $(x\pm 6)^2 = 6(y-2)$.

1121. $(y-5)^2 = x+7$; $y^2 = -(x-10)$.

1122. *a)* $(y+3)^2 = -4x$; $\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}x$;
b) $(x-5)^2 = 3y$; $(x-1)^2 = \frac{1}{3}y$.

1123. *a)* $x^2-4x-4y=0$; *b)* $y=\frac{2}{9}x^2$;

c) $x^2-4x-2y+10=0$; *d)* $7x^2-25x+6y+12=0$.

1124. $5y^2-36x-180=0$.

1125. $b^2x+ay^2-ab^2=0$.

1126. $bx^2+a^2y-a^2b=0$.

1127. $(y-1)^2=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-2)$.

1128. $4\frac{7}{12}$; $8\frac{1}{3}$; $11\frac{1}{4}$; $13\frac{1}{3}$; $14\frac{7}{12}$; 15.

1129. A parabola tengelye párhuzamos az y tengellyel. Pontjai: $(0;\ 0)$, $(18;\ 12)$, $(36;\ 0)$. Egyenlete: $(x-18)^2=-27\,(y-12)$.

1130. 5 méter.

1131. Két megoldás van:

$$y^2=2a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{és}$$

$$y^2=-2a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{4}\right).$$

1132. $x^2=r^2-by$.

1133. *a)* $(6;\ 0)$, 12, $x+6=0$; *b)* $(-2;\ 0)$, 4, $x-2=0$;

c) $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$, 3, $y+\frac{3}{2}=0$; *d)* $\left(0;\ -\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{2}$, $y-\frac{1}{4}=0$;

e) $\left(-\frac{1}{16};\ 0\right)$, $\frac{1}{8}$, $x=\frac{1}{16}$; *f)* $(5;\ -4)$, 4, $y+8=0$;

g) $(0;\ 2)$, 6, $x+6=0$; *h)* $(-1;\ 3)$, 2, $x=0$;

i) $(3;\ 0)$, 2, $x=1$; *j)* $\left(-\frac{5}{6};\ 0\right)$, 3, $x=\frac{13}{6}$;

k) $\left(0;\ 1\frac{1}{6}\right)$, 3, $y+1\frac{5}{6}=0$; *l)* $\left(0;\ \frac{7}{4}\right)$, $\frac{1}{2}$, $y=\frac{9}{4}$;

m) $(-2;\ 2)$, 2, $y=0$; *n)* $(6;\ -2{,}5)$, 3, $y=0{,}5$;

o) $(0{,}5;\ 1)$, 5, $x+4{,}5=0$;

p) $\left(-\frac{B}{2A};\ \frac{4AC+1-B^2}{4A}\right)$; $\frac{1}{2A}$, $y=\frac{4AC-1-B^2}{4A}$.

1134. *a)* $C\,(-5;\ 4)$, $F\,(-4{,}5;\ 4)$; *b)* $C\,(-3;\ -2)$, $F\,(-2;\ -2)$.

1135. $8\sqrt{3\pm\sqrt{3}}$

1136. $\frac{1}{2}\sqrt{153}$.

1137. 9.

1138. *a)* Az egyenes a parabolát két pontban metszi.

$P_1(6;\ 6),\ P_2\left(-2;\ \frac{2}{3}\right).$

b) Az egyenesnek és a parabolának egy közös pontja van.

$P(6;\ -4).$

c) Az egyenes a parabolát két pontban metszi.

$P_1(1;\ 2),\ P_2(9;\ -6).$

1139. $\sqrt{522}$.

1140. 6.

1141. $(0;\ 6),\ (-3\sqrt{3};\ 0)$.

1142. $(0;\ 0),\ (4;\ 4)$.

1143. $x-2y=1$.

1144. Az oldalegyenesek egyenletei: $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x,\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x,\ y=10.$

1145. $(2p\sqrt{3};\ 6p),\ (-2p\sqrt{3};\ 6p)$.

1146. Helyezzük el a koordináta-rendszer kezdőpontját a golyó indulási helyére. Az x tengely legyen vízszintes, az y tengely függőleges irányú. A pálya egyenlete:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha}.$$

$$OA=\frac{c^2\cos\alpha}{g}\left[\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+\frac{2hg}{c^2}}\right].$$

1147. 4 megoldás van. A megoldást adó P_3 pontok abszcisszái:

$$x_3=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{525})\ \text{vagy}\ x_3=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{725}).$$

1148. *a)* Az egyenesnek és a parabolának egy közös pontja van, $(4;\ 2)$.

b) Az egyenes a parabolát az $\left(5;\ \frac{-25}{3}\right)$, $(3;\ -3)$ pontokban metszi.

c) Nincs közös pontjuk.

d) Az egyenes a parabolát $(9;\ -6)$ pontban érinti.

1149. Az érintési pont koordinátái $\left(\frac{a}{m^2};\ \frac{2a}{m}\right)$.

1150. $pb^2=2ac$ legyen.

1151. $2x\pm\sqrt{2}y+2=0;\ x\pm y+2=0;\ 2x\pm\sqrt{6}y+6=0.$

1152. A tételek igazolhatók például az 1151. feladatban megadott parabola-érintő egyenletének felhasználásával.

1153. Alkalmazzuk például az 1152/*d*. tételt.

1154. A bizonyítás az 1152. feladatban közölt tételekkel elvégezhető. De igazolható az 1021. feladat megoldásához hasonlóan is.

1155. 2:1.
1156. 90°.
1157. $\left(0;\ \frac{y_1}{p}(x_1+p)\right);\ (x_1+p;\ 0)$.
1158. $\left(\frac{p}{2};\ \pm p\right)$.
1159. Írjuk fel a $\left(\frac{p}{2};\ p\right)$ pontban a parabola, illetve a kör érintőjének iránytangensét, kihasználva azt, hogy a kör középpontjának koordinátái $(u;\ 0)$. A két iránytangens egyenlő. Ebből $u = \frac{3p}{2}$ adódik.

A kör egyenlete:

$$\left(x-\frac{3p}{2}\right)^2+y^2 = 2p^2.$$

1160. $m = \pm\sqrt{2}$.
1161. $m = \frac{1}{2}$.
1162. $b \gtreqless -\frac{1}{4}$.
1163. $b = 1$.
1164. $p = 2mb$.
1165. $y = -x-2$.
1166. $y = x+2$.
1167. $y = 2x-16$.
1168. *a)* $x\pm y+3 = 0$; *b)* $y = 3x+1$; *c)* $x-2y+12 = 0$; *d)* $3x+y+1 = 0$.
$x-3y+27 = 0$.
1169. $\left(\frac{p}{2};\ p\right)$.
1170. $d = 2$.
1171. *a)* $p = 1$; *b)* $p = 2{,}5$.
1172. $p = \frac{2ac^2}{b^2}(a,\ b,\ c,\ p \neq 0)$.
1173. Ha $p = 1$, akkor az egyenlet egyenest jelent. Ha a $p \neq 1$, akkor a görbe parabola. Tengelye párhuzamos az y tengellyel, tengelypontjának koordinátái:

$$u = -\frac{p}{p-1};\quad v = 4-\frac{p^2}{p-1}.$$

a) Ha g_p érinti az x tengelyt, akkor

$v = 0,\ p = 2,\ A\,(-2;\ 0)$.

b) g_p tengelypontja az y tengelyen van, ha $u = 0$, $p = 0$, $B\,(0;\ 4)$.
c) Először igazoljuk, hogy a két parabola egybevágó, azután mutassuk meg, hogy centrálisan szimmetrikus.
d) $y = p\,(x^2+2x)-x^2+4$.
Innen rögtön látható, hogy g_p görbesor p értékétől függetlenül az $x_1 = 0$; $y_1 = 4$ és az $x_2 = -2$, $y_2 = 0$ pontokon halad át.

1174. $2x-3y-12 = 0$ és $x-3y-3 = 0$.
1175. $x+y+2 = 0$ és $2x+5y+25 = 0$.
1176. $(-3;\ 0)$.
1177. Az érintési pont koordinátái:

$$\left[2(\sqrt{26}-1);\ \pm 4\sqrt{2(\sqrt{26}-1)}\,\right].$$

1178. *a)* $(0;\ 0)$, $(\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{4})$;
b) nincs közös pontjuk;
c) $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;
d) $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $(2;\ 4)$;
e) $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $(2;\ 4)$, $(-3;\ 9)$;
f) $(0;\ 0)$, $(1;\ 2)$, $(-4;\ 12)$;
g) nincs közös pontjuk;
h) $\left(\frac{p}{4};\ \pm\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)$.

1179. $(1;\pm 2\sqrt{2})$.
1180. *a)* $(4;\pm 3)$, *b)* $(2;\pm 6)$.
1181. $(9;\pm 12)$.
1182. 10.
1183. $x^2 = 2\,(y+5)$.
1184. $y^2 = 4x$, $(9;\pm 6)$.
1185. Megoldás: $p = a-\sqrt{a^2-r^2}$. $(a \geq r)$.
Ha $a = r$, akkor $p = a$, a kör a parabolát a tengelypontban érinti.
1186. $x\pm 3y+15 = 0$.
1187. *a)* 70°54'; *b)* 72°10'.
A közös érintők egyenlete *a)* esetben:

$$y = \pm\left(\frac{x}{4}+3\right)\sqrt{2}.$$

1188. $P_1\,(0;\ 7)$, $P_2\,(2{,}8;\ 6{,}72)$, $P_3\,(-2{,}8;\ 6{,}72)$.

1189. $P_1\,(-7;\ 0)$, $P_2\left(\frac{455}{16};\ \frac{63}{2}\right)$, $P_3\left(\frac{455}{16};\ -\frac{63}{2}\right)$.

1190. Legyenek a téglalap parabolán fekvő csúcsainak koordinátái x és $y = \pm\sqrt{2px}$. A téglalap területe:

$$T = 2\,(a-x)\,\sqrt{2px}. \quad (0 < x < a).$$

Ennek ugyanott van a maximuma, ahol a

$$\frac{T^2}{4p} = 2x\,(a-x)\,(a-x) \text{ kifejezésnek.}$$

A három pozitív tényező összege állandó, $(2a)$.

Így a számtani és mértani közép közti ismert egyenlőtlenség szerint szorzatuk akkor lesz maximális, ha a tényezők egyenlők.

$$2x = a-x, \quad x = \frac{a}{3}.$$

Ekkor $y = \pm\sqrt{\frac{2ap}{3}}$ és a maximális terület:

$$T_{\max} = \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2ap}{3}}.$$

1191. A vetület p.

1192. Használjuk fel a bizonyításhoz a parabola érintőjének azt a tulajdonságát, hogy a fókuszból az érintőre húzott merőleges talppontja a tengelyponthoz tartozó érintőre esik.

1193. A parabola egyenlete legyen $y^2 = 2px$. A parabola tengelypontján átmenő egyenesek egyenlete: $mx-y = 0$, $my+x = 0$ $(m \neq 0)$. A parabola tengelypontjából derékszög alatt látható húrok végpontjai:

$$A\left(\frac{2p}{2};\ \frac{2p}{m}\right),\ B\,(2pm^2;\ -2pm).$$

Igazoljuk, hogy AB húrnak az x tengellyel való metszéspontja m-től független.

1194. A két parabola közös tengelyét válasszuk az x tengelynek, a közös fókuszt origónak.

1195. Használjuk fel az 1164. és az 1355. feladat megoldásának eredményeit.

1196. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy kezdőpontja az adott P pont legyen, és x tengelye párhuzamos legyen a parabola tengelyével.

Az egyenes egyenlete:

$$y = mx. \tag{1}$$

A parabola egyenlete:

$$(y-v)^2 = 2p\,(x-u). \tag{2}$$

Az egyenes a parabolát olyan R és S pontokban metszi, amelyeknek ordinátái megegyeznek a P_1R_1 és P_1S_1 (előjeles) távolságokkal.

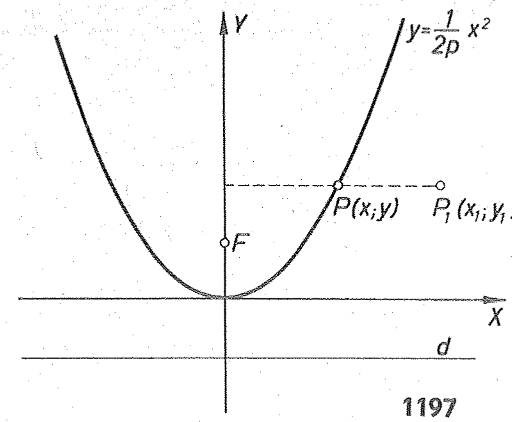
$$P_1R_1 \cdot P_1S_1 = v^2-2pu.$$

1197. A parabola egyenlete $y = \frac{1}{2p}x^2$. A merőleges affinitás aránya legyen λ (1197. ábra). A merőleges affinitás definíciója szerint a parabola $P\,(x;\,y)$ pontjához rendelt P_1 képpont koordinátái: $x_1 = \lambda \cdot x$, $y_1 = y$. Tehát

$$y_1 = \frac{1}{2p}\left(\frac{x_1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2p\,\lambda^2}x_1^2. \quad (*)$$

(*) olyan parabolának az egyenlete, amelynek a fókusza az $F_1\left(0; \frac{p\lambda^2}{2}\right)$ pont, vezéregyenese az $y = -\frac{p\lambda^2}{2}$ egyenes.

A paraméter $p\lambda^2$.



1197

1198. Induljunk ki az $y^2 = 2px$ parabola érintőjének egyenletéből:

a) P $(a;\ b)$ pontból a parabolához húzható érintő érintési pontjainak ordinátáira: $y^2-2by+2pa = 0$.

Ebből: $b = \frac{y_1+y_2}{2}$,

ahol y_1 a P_1 és y_2 a P_2 pontnak a parabola tengelyétől mért előjeles távolsága.

b) Az érintési pontok abszcisszáira:

$px^2+2\,(ap-b^2)\,x+pa^2 = 0$.

Ebből $x_1x_2 = a^2$, ahol x_1 a P_1 és x_2 a P_2 pontnak az abszcisszája

c) Használjuk fel az *a)* és *b)* alatti tételeket.

1199. Az e_1 és e_2 érintő egyenlete, ha érintési pontjuk $(x_1;\ y_1)$, illetve $(x_2;\ y_2)$ és a parabola egyenlete $y^2 = 2px$,

$$px-y_1y+\frac{y_1^2}{2} = 0, \tag{1}$$

$$px-y_2y+\frac{y_2^2}{2} = 0. \tag{2}$$

Az e_1' és e_2' társérintők egyenletének felírásakor használjuk fel az 1355. feladat megoldását.
e_1' és e_2' érintők egyenletei:

$$\frac{y_1}{p}x+y+\frac{p^2}{2y_1} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{y_2}{p}x+y+\frac{p^2}{2y_2} = 0. \tag{4}$$

(1)–(4) egyenletek felhasználásával a feladat állításai egyszerűen igazolhatók.

1200. *c)–f)* feladatok megoldásához használjuk fel az 1152. feladatban közölt valamelyik tételt.

f) megoldhatóságának a feltétele az, hogy $FF' \geq PF$ legyen (F a fókusz, F' a fókusznak az adott egyenesre vonatkozó tükörképe, P az adott pont). 2 megoldás van, ha $FF' > PF$, 1 megoldás van, ha $FF' = PF$.

g) Jelöljük a fókuszt F-fel, az adott pontokat P_1-gyel és P_2-vel. 2 megoldás van, ha $P_1F+P_2F \geq P_1P_2 > |P_1F-P_2F|$. Elfajuló parabola, egyenes adódik akkor, ha $|P_1F-P_2F| = P_1P_2$. Más eset nem lehetséges.

h) Mindig van megoldás, mégpedig 2 vagy 1, aszerint, hogy az adott pont nem illeszkedik a tengelyre, vagy a tengelyen van.

i)–k) feladatok megoldásánál használjuk fel az 1152. feladatban közölt tételek valamelyikét. Mi a megoldhatóság feltétele? Lehetséges-e az, hogy az *i)* feladatnak végtelen sok megoldása, vagy 0 megoldása legyen?

l)–m) Tükrözzük a vezéregyenest az adott érintőre. Vizsgáljuk meg a megoldások számát.

n) Állapítsuk meg a megoldások számát, a megoldhatóság feltételét.

r) Vizsgáljuk meg a megoldhatóság feltételét, és állapítsuk meg a megoldások számát.

t) Mindig van egy és csakis egy megoldás, ha az adott érintők nem párhuzamosak egymással, egyik sem merőleges a tengelyponthoz tartozó érintőre, de azt egymástól különböző pontokban metszik.

u)–v) Először igazoljuk a következő tételt: a parabola bármely két érintőjének metszéspontja és az érintési pontok által meghatározott szakasz felezéspontja egy, a tengellyel párhuzamos egyenesre illeszkedik.

z) Alkalmazzuk az 1192. feladatban közölt tételt. Mi a megoldhatóság feltétele? Hány megoldás lehetséges?

1201. A vezéregyenest jelöljük d-vel, a fókuszt F-fel, az adott egyenest e-vel. Tükrözzük a vezéregyenest e-re. A tükörkép legyen d'. Ezzel visszavezettük a feladatot a következő feladat megoldására. Szerkesztendő olyan kör, amely áthalad F-en, és a d, d' egyeneseket érinti. A kör középpontja adja a megoldást. A megoldások száma 2, 1 vagy 0, aszerint, hogy F a d és d' által meghatározott szögtartományok közül benne van-e abban, amelyikben az e egyenes halad, vagy F illeszkedik d'-re, vagy az előbb említett szögtartományon kívül van.
A szerkesztés elvégezhető középpontos hasonlósággal, vagy inverzióval. (Lásd az 1030. feladat megoldását.) Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha e párhuzamos d-vel.

1202. Használjuk fel az 1152/*a* feladatban közölt tételt.

1203. Használjuk fel az 1275. feladatban közölt tételt.

1205. A köré írható kör középpontja: $\left(1\frac{1}{3};\ 3\frac{1}{5}\right)$, a beírható kör középpontja: $\left(1\frac{1}{15};\ 1\frac{1}{15}\right)$, a súlypont $\left(\frac{8}{9};\ 2\frac{2}{15}\right)$.

1206. Ha a pont az a vektorral azonos irányban mozog, akkor 6 időegység alatt, ha ellenkező irányban mozog, akkor 3,6 időegység alatt éri el a hiperbolát.

1207. $d = \frac{7\sqrt{15}}{15}$, $Q\left(\frac{132}{13}; \frac{23}{13}\right)$.

1208. *a)* $x-3y+1=0$; *b)* $x+2y=4$; *c)* $\operatorname{tg}\omega = \frac{119}{62}$.

1210. $-2\sqrt{2}$.

1212. $A(-1;\ 0)$, $B(5;\ 6)$.

1213. $(3;\ 10)$ és $(-1;\ 7)$ vagy $(9;\ 2)$ és $(5;\ -1)$.

1214. $S(5;\ 1)$.

1215. Az m_1, m_2 tömegű anyagi pontokból álló pontrendszer $S_{1,2}$ súlypontja az M_1M_2 szakaszt két olyan részre osztja, amelyek aránya a tömegekkel fordítottan arányos. Ennek alapján az $S_{1,2}$ helyvektorra ($\mathbf{s}_{1,2}$) a $\mathbf{p}_1(x_1;\ y_1)$, $\mathbf{p}_2(x_2;\ y_2)$ helyvektorokkal, és az m_1, m_2 tömegekkel meghatározható:

$$\mathbf{s}_{1,2} = \frac{m_1\mathbf{p}_1+m_2\mathbf{p}_2}{m_1+m_2}.$$

Tovább folytatva a meggondolást, az m_1+m_2, és m_3 tömegű anyagi pontokból álló pontrendszerre, a bizonyítandó állítást kapjuk. A súlypont helyvektora:

$$\mathbf{s} = \frac{m_1\mathbf{p}_1+m_2\mathbf{p}_2+m_3\mathbf{p}_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Ebből a súlypont koordinátái $(x;\ y)$ azonnal felírhatók.

1216. Igazoljuk az állítást az 1215. feladat megoldásában használt tétel felhasználásával teljes indukcióval. $n=3$-ra a tétel igaz.

$$\mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3}{3},$$

ahol $\mathbf{s}_3$ a három egyenlő tömegből álló $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ helyvektorú anyagi pontrendszer súlypontjának a helyvektora. Tegyük fel, hogy tetszőleges n-re ($n \geq 3$) az állítás igaz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n+1$ anyagi pontra:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \frac{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\ldots+\mathbf{p}_n+\mathbf{p}_{n+1}}{n+1}$$

1217. Jelöljük a szabályos sokszög csúcsaihoz vezető egységvektorokat: $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$-nel. ($n \geq 3$).

Azt kell igazolni, hogy

$$\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\varphi+2\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left[\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]=0,$$

és

$$\sin\varphi+\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\varphi+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left[\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]=0.$$

Az első állítást a következőképpen bizonyíthatjuk: Alkalmazzuk a $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta+\alpha)-\sin(\beta-\alpha)$ azonosságot a $2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\varphi$, $2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\varphi+\frac{2}{n}\right), \ldots, 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left[\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]$ szorzatok átalakítására.

Ekkor

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\varphi = \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right),$$

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right) = \sin\left(\varphi+\frac{3\pi}{n}\right)-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{n}\right),$$

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left(\varphi+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) = \sin\left(\varphi+\frac{5\pi}{n}\right)-\sin\left(\varphi+\frac{3\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\left[\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = \sin\left[\varphi+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]-\sin\left[\varphi+\frac{(2n-3)\pi}{n}\right].$$

Adjuk össze a fenti egyenlőségek megfelelő oldalait.

Ekkor

$$2\sin\frac{\pi}{n}\left[\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\varphi+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\varphi+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right] =$$
$$= \sin\left[\varphi+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]-\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right).$$

Ha alkalmazzuk a jobb oldalon álló különbségre a $\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot, az állítás azonnal adódik.

Hasonlóképpen igazolhatjuk azt is, hogy az ordináták összege zérus. (Bizonyítsuk be!)
Figyelembe véve a 1216. feladatban közölt tételt, ezzel bebizonyítottuk, hogy ha a szabályos sokszög csúcsaiban egyenlő tömegeket helyezünk el, akkor ennek az anyagi pontrendszernek a súlypontja a szabályos sokszög középpontjában van.

1218. Induljunk ki abból, hogy

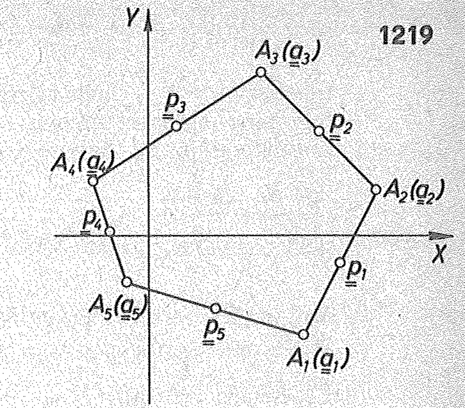
$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1},$$

ahol $A_1, A_2, \ldots A_n$ a sokszög csúcsai, nullvektor.

1219. Ha a csúcsok helyvektorai rendre $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ és az adott pontok helyvektorai rendre $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$, akkor felírhatjuk a következő egyenleteket (1219. ábra).

$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2 = 2\,\mathbf{p}_1$
$\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3 = 2\,\mathbf{p}_2$
$\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4 = 2\,\mathbf{p}_3$
$\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5 = 2\,\mathbf{p}_4$
$\mathbf{a}_5+\mathbf{a}_1 = 2\,\mathbf{p}_5$.
Ebből $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4+\mathbf{p}_5$.
Tehát az A_1 csúcs koordinátái $(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5;\ y_1-y_2+y_3-y_4+y_5)$. Hasonlóképpen számíthatók ki a többi csúcs koordinátái is.

1219



1220. Két megoldás van. $P_1\,(-8;\ 0)$, $P_2\,(32;\ 0)$.
1222. $135°$, 38, $7°$, $6{,}3°$.
1223. $x+2x-11 = 0$, $2x+y-5 = 0$.
1224. Két megoldás van:
$7x-24y-62 = 0$ és $x-2 = 0$.
1225. $2x+4y-3 = 0$.
1226. $4x-y-7 = 0$; $2x-3y+19 = 0$; $4x+5y-13 = 0$.
1227. $x-y+3 = 0$.
1228. $3x+4y = 25$.
1229. Két megoldás van: $x = 0$, $y = 0$.
1230. Két megoldás van: $x-7y+19 = 0$, $7x+y-17 = 0$.
1231. $7x+y+4 = 0$ és $x-7y+6 = 0$.
1232. $r = 5$.
1233. $\left(\frac{-13}{5};\ \frac{31}{5}\right)$.
1234. $x-1 = 0$; $3x-4y+1 = 0$; $x-8y+27 = 0$.
1235. $2x-y+4 = 0$.
1236. *a)* Vegyük figyelembe, hogy a magasságvonal merőleges a BC oldal egyenesére.
b) Induljunk ki a következő azonosságból:
$(\mathbf{b}-\mathbf{c})\,(\mathbf{a}-\mathbf{x})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})\,(\mathbf{b}-\mathbf{x})+(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,(\mathbf{c}-\mathbf{x}) = 0$.
1237. *b)* Induljunk ki a következő azonosságból:

$$\left(\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}-\mathbf{x}\right)+\left(\mathbf{b}-\mathbf{c}\right)\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}-\mathbf{x}\right)+\left(\mathbf{c}-\mathbf{a}\right)\left(\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}}{2}-\mathbf{x}\right) = 0.$$

c) Jelöljük a magasságpont helyvektorát $\mathbf{m}$-mel.
Ekkor

$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,(\mathbf{c}-\mathbf{m}) = 0$,
$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 0$.
Ebből $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{m}) = 0$.
Hasonlóképpen
$(\mathbf{b}-\mathbf{c})\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{m}) = 0$,
$(\mathbf{c}-\mathbf{a})\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{m}) = 0$.

A felírt egyenletekből már következik a háromszög köré írható kör középpontjára, a súlypontra és a magasságpontra vonatkozó állítás.

F helyvektora $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{m}}{2}$. Fejezzük ki például az MA szakasz A_2 felezéspontjának helyvektorát, és ezzel – valamint a BC oldal felezéspontjának, A_1-nek helyvektorával írjuk fel az A_1A_2 szakasz felezéspontjának helyvektorát. Azt kapjuk, hogy

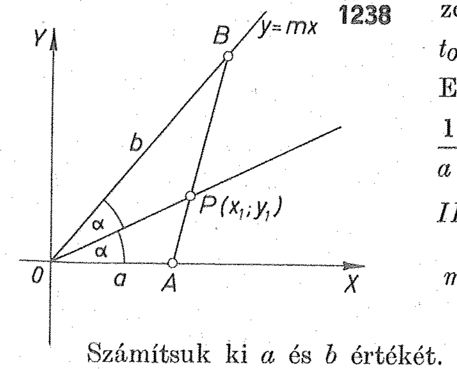
$$\frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{m}}{2}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{m}}{4} = \frac{2\mathbf{m}}{4} = \frac{\mathbf{m}}{2} = \mathbf{f}.$$

Mit fejez ki a fenti egyenlőség?

Határozzuk meg azt is, hogy milyen távol van az A_2 F-től.

Igazoljuk ezután, hogy az F körül $\frac{r}{2} = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ sugárral rajzolt kör áthalad a magasságvonalak talppontjain. is

1238. *I. megoldás:* A szögfelezőn rögzítsük a $P\,(x_1;\, y_1)$ pontot (1238. ábra). Ekkor a háromszögek területére vonatkozóan felírhatjuk a következő egyenlőséget:



1238

$$t_{OAB} = t_{OAP}+t_{OPB}.$$

Ebből adódik, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{2x_1}{x_1^2+y_1^2} = \text{konstans}.$$

II. megoldás: Vegyük figyelembe azt, hogy

$$m = \frac{2x_1y_1}{x_1^2-y_1^2}. \qquad (x_1 > y_1 > 0)$$

Számítsuk ki a és b értékét. Reciprokaik összegére az I. megoldásban kapott konstans adódik.

1239. $ab \neq 0$, $ax-by = 0$, $h = \frac{2|ab|\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$.

1240. $(-3;\ 0)$.

1241. $(x-a)^2+y^2 = \frac{a^2}{2}$ és $x^2+(y-a)^2 = \frac{a^2}{2}$.

1242. Számítsuk ki az adott körök középpontjainak a másik körre vonatkozó hatványát. (A feladatnak csak akkor van értelme, ha $a^2 > b^2$.)

1243. *I. megoldás:* Legyen a d_1 szakaszhoz tartozó egyenes egyenlete $mx-y=0$, a d_2 szakaszhoz tartozó egyenes egyenlete $x+my = 0$. Számítsuk ki a d_1 és d_2 szakaszok ellipszisre illeszkedő pontjainak koordinátáit, azután a d_1^2 és d_2^2 értékét.

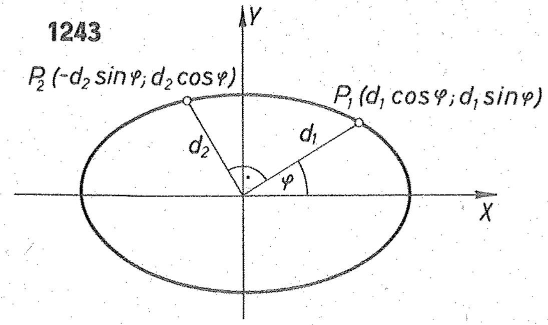
II. megoldás: Az 1243. ábra jelölése szerint

$$\frac{d_1^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{d_1^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1\,.$$

és

$$\frac{d_2^2 \sin^2\varphi}{a^2}+\frac{d_2^2 \cos^2\varphi}{b^2}=1.$$

1243



A felírt egyenletekből a tétel állítása azonnal következik.

1244. A $d_1, d_2, \ldots, d_n$ szakaszok végpontjai rendre

$$P_1\,[d_1 \cos\varphi;\ d_1 \sin\varphi],\ P_2\left[d_2 \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{n}\right);\ d_2 \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{n}\right)\right],$$

$$P_3\left[d_3 \cos\left(\varphi+2\frac{\pi}{n}\right);\ d_3 \sin\left(\varphi+2\frac{\pi}{n}\right)\right]\ldots,$$

$$P_n\left[d_n \cos\left(\varphi+(n-1)\frac{\pi}{n}\right);\ d_n \sin\left(\varphi+(n-1)\frac{\pi}{n}\right)\right].$$

Alkalmazzuk az 1243. feladat megoldásának gondolatmenetét. Vegyük figyelembe azt, hogy $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ és $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. Eszerint

$$\cos^2\left(\varphi+k\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\cos 2\left(\varphi+k\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

és $\sin^2\left(\varphi+k\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\cos 2\left(\varphi+k\frac{\pi}{n}\right)\right]$.

Ezután alkalmazzuk az 1217. feladat megoldásakor talált összegezési képleteket.

$$\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\ldots+\sin(\varphi+n\alpha)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

és $\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\ldots+\cos(\varphi+n\alpha)=\dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

1245. *a)* A merőleges affinitás definíciójából következik az állítás helyessége.
b) Először igazoljuk, hogy a konjugált félátmérők ellipszisre illeszkedő végpontjai: $P_1(a\cos\alpha;\ b\sin\alpha)$ és $P_2(-a\sin\alpha;\ b\cos\alpha)$, ha α az egyik konjugált átmérőhöz tartozó főkörátmérő irányszöge.
Az a_1 félátmérő irányszöge legyen φ_1, az a_2 félátmérő irányszöge φ_2.
A konjugált félátmérők hajlásszöge legyen ω.
Ekkor $\sin\omega = |\sin(\varphi_1-\varphi_2)| =$

$$= |\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2| \quad (*)$$

Fejezzük ki a (*)-ban szereplő szögfüggvényeket P_1, P_2 koordinátáival, a_1 és a_2-vel.
c)–d) Használjuk fel a konjugált átmérők végpontjainak koordinátáit.
e) *I. megoldás:* Az állítás azonnal következik a *b)* tételből.
II. megoldás: A szóban forgó háromszögek az elforgatott főkör merőleges sugarai által kifeszített háromszögek vetületei. A főkör merőleges sugarai által kifeszített háromszögek területei azonban egyenlők. Ebből már adódik az állítás.

1246. A feladat állításának igazolása céljából vegyük figyelembe azt, hogy egy T területű síkidom merőleges vetületének területe

$$T_v = T\cos\alpha,$$

ahol α az eredeti síkidom síkjának és a vetületi síknak a hajlásszöge.

1247. $60°$.

1248. $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ és $\sqrt{2}$.

1249. $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{17}}$ és $y = \pm\dfrac{8x}{\sqrt{17}}$.

1250. $a = \dfrac{15}{11}$; $b = \dfrac{12}{11}$.

1255. $\dfrac{p}{2\sin\alpha}$, ahol $0 < \alpha < 180°$.

1256. $\pm 2x+y+4 = 0$.
1257. $x-2y+2 = 0$ és $x+4y+8 = 0$.
1258. $y+1 = 0$ és $4x-5y = 13$.
1259. $x-3 = 0$ és $10x+9y+24 = 0$.
1260. $81x^2-256y^2 = 1296$.
1261. A λ-t nem tartalmazó egyenletekből álló egyenletrendszer gyökei $(0;\ 0)$, $(0;\ 6)$, $(-1;\ 3)$. Mindhárom értékpár kielégíti a harmadik egyenletet, ha $\lambda = 9$. A három egyenlet rendre kör, ellipszis és parabola egyenlete. A λ értékétől függetlenül közös tengelyük az $y = 3$ egyenes, közös tengelypontjuk a $(-1;\ 3)$ pont. A $\lambda = 9$ érték esetén a parabola áthalad a kör és ellipszis $(0;\ 6)$ és $(0;\ 0)$ metszéspontjain is. Ha $\lambda \neq 9$, akkor a három görbének csak a tengelypontja közös.
1262. Alkalmazzuk az 1082. feladat megoldásának eredményét. Két megoldás van. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{45} = 1$ és $\dfrac{3x^2}{10}-\dfrac{4y^2}{45} = 1$.

1265. A feladat megoldásához használjuk fel az affinitást. Először szerkesszük meg a két adott pont által meghatározott szakasz felezéspontjának affin képét. Nem végezhető el a szerkesztés, ha az adott pontokon áthaladó egyenes párhuzamos az egyik tengelyegyenessel.

1266. A feladat megoldása visszavezethető a következő szerkesztés elvégzésére. Megszerkesztendő az ellipszisnek az az érintője, amely az $A\,(a;\ 0)$, $B\,(0;\ b)$ pontokon áthaladó egyenessel párhuzamos, és az ellipszisnek a feladatban megjelölt ívét érinti. A szerkesztés az affinitás felhasználásával történhet. Az érintési pont koordinátái:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{2\sqrt{b}}{2}\right).$$

1267. Az adott egyenletrendszerből, figyelembe véve a, b, c-re tett kikötéseket, azt kapjuk, hogy

$$a = 3x+4y-12 \geq 0,$$
$$b = 7x-8y+11 \geq 0,$$
$$c = -2x-y+10 \geq 0,$$

Ebből

$$y \geq -\frac{3}{4}x+3.$$
$$y \leq \frac{7}{8}x+\frac{11}{8}.$$
$$y \leq -2x+10$$

és

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Azok a pontok, amelyeknek koordinátái egyszerre kielégítik valamennyi feltételt az $A\,(4;\ 0)$, $B\left(1;\ \frac{9}{4}\right)$, $C\,(3;\ 4)$, $D(5;\ 0)$ pontokkal kifeszített négyszög belső, illetve kerületi pontjai.

A $3y-4x = k$ kifejezésnek szélső értéke akkor lesz, ha $k = \frac{11}{4}$, illetve $k = -20$. Első esetben a $3x-4y = \frac{11}{4}$ egyenes áthalad a B ponton, a második esetben a D ponton. $k_{\text{maximum}} = \frac{11}{4}$ és ekkor $a = 0$, $b = 0$, $c = \frac{23}{4}$. $k_{\text{minimum}} = -20$ és ekkor $a = 3$, $b = 46$, $c = 0$.

1268. Alkalmazzuk az 1152/b feladatban közölt tételt. Vegyük figyelembe azt is, hogy a P pont körül PF sugárral rajzolt kör áthalad a fókusz F_1 és F_2 tükörképén is.

1269. Tükrözzük a háromszög M magasságpontját például a BC oldalra. A kapott M_1 pontot kössük össze a háromszög köré írható kör közép-

pontjával, O-val. Igazoljuk, hogy az OM_1 szakasznak a BC oldallal való A' metszéspontjára $MA'+A'O =$ konstans. Ezután bizonyítsuk be, hogy a BC oldal az A' pontban érinti a szóban forgó M_1O fókuszú ellipszist. (Alkalmazzuk az 1021. feladatban közölt tételt.)
Miért kell kikötni azt, hogy a háromszög hegyes szögű legyen?

1270. Rajzoljunk olyan derékszögű hiperbolát, amely áthalad A, B, C pontokon (1270. ábra.)
A hiperbola középpontja legyen 0, az ABC háromszög oldalainak felezéspontja rendre C_1, A_1, B_1.
Az ABC háromszög Feuerbach-köre áthalad az A_1, B_1, C_1 pontokon. O erre a körre illeszkedik, ha igazoljuk, hogy $A_1B_1C_1 \sphericalangle = A_1OC_1 \sphericalangle$.
A bizonyításhoz használjuk fel az 1076. feladatban közölt tételt.

1271. A parabolák metszéspontja a fókuszoktól és a közös vezéregyenestől egyenlő távolságra van. Ennek az észrevételnek alapján a szerkesztés elvégezhető.

1272. Alkalmazzuk az 1024. feladatban közölt tételt.

1273. Legyen a parabola egyenlete $y = ax^2$.
Rajzoljunk a parabolába két párhuzamos húrt és a húrok végpontjaiban a parabolához érintőket (1273. ábra).
Igazoljuk azt, hogy a húrok felezéspontjai (R és S), valamint a húrok végpontjaiban a parabolához húzott érintők metszéspontjai (T és U) ugyanazon e egyenesre illeszkednek, és e párhuzamos a parabola tengelyével.
Használjuk fel a bizonyításhoz azt is, hogy az $y = ax^2$ parabola $(x_0;\ ax_0^2)$ pontjához húzott érintő irányvektora $(1;\ 2ax_0)$.

1274. Vegyük figyelembe az 1271. feladat megoldásához fűzött megjegyzést. Nincs értelme a feladatnak, ha a két parabolának csak egy metszéspontja van. Ekkor a fókuszokon áthaladó egyenes párhuzamos a vezéregyenessel.)

1276. *a)* P pont inverzének, P' pontnak a megszerkesztését az 1276/*a* ábráról azonnal leolvashatjuk.

$$u' = \frac{u}{u^2+v^2}, \qquad v' = \frac{v}{u^2+v^2}.$$

b) A bizonyítást az 1276.*b)* ábra segítségével végezzük el. Az inverzió P ponthoz P' pontot, Q ponthoz Q' pontot rendeli hozzá. Elegendő kimutatni, hogy a $P'Q' \perp OQ'$. Ebből következik, hogy ha P végigfut a körön és $P \neq O$, akkor a P' végigfut a $P'Q'$ egyenesen. Miért?

c) A bizonyítást a *b)*-ben követett gondolatmenethez hasonlóan a Thalész-kör segítségével végezhetjük el.

d) Használjuk fel a kerületi szögek tételét.

1277. $8x-6y+13 = 0$.
Bebizonyítjuk, hogy a kapott egyenes *bármelyik* pontja eleget tesz a feladat követelményeinek.
Az egyenesre illeszkedő *tetszőleges* P pont koordinátái, $(x;\ y)$ között a $8x-6y+13 = 0$ összefüggés áll fenn. Ez az egyenlet a következőképpen is írható.

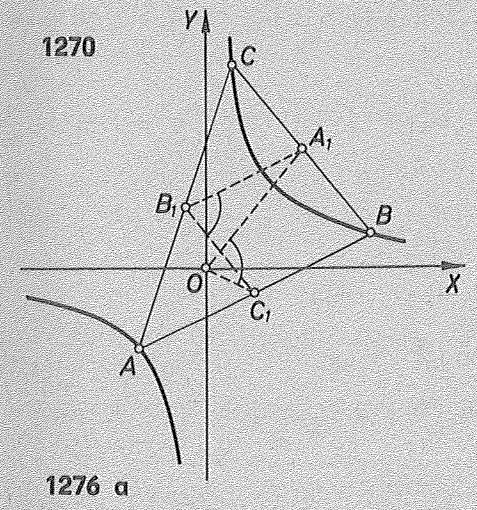
$$-6x+9-4y+4 = 2x+1-10y+25$$

vagy

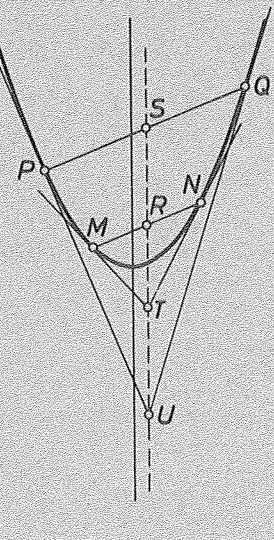
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4 = x^2+2x+1+y^2-10y+25$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = (x+1)^2+(y-5)^2.$$

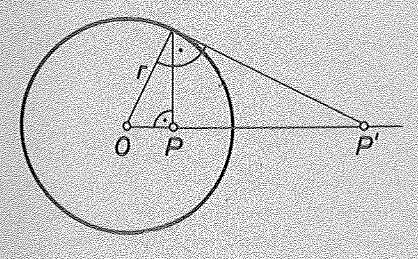
1270



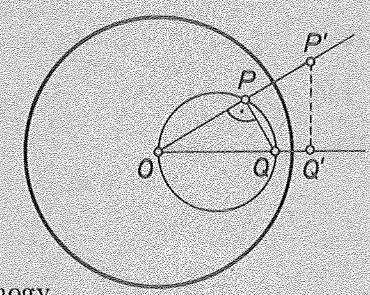
1273



1276 a



1276 b



A felírt egyenlőség éppen azt fejezi ki, hogy

$$PP_1 = PP_2.$$

Ha viszont egy Q pont nem illeszkedik a $8x-6y+13 = 0$ egyenesre, akkor annak $(x'; y')$ koordinátáit behelyettesítve az egyenes egyenletébe, $8x'-6y'+13 \neq 0$. A fenti azonos átalakítást végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$QP_1 \neq QP_2.$$

A bemutatott vizsgálatot a mértani helyre vezető feladatok *teljes megoldásakor* mindig el kell végezni! A feladatok többségénél általában azt kell meggondolni, hogy a mértani hely egyenletéhez vezető átalakítások megfordíthatók-e. Ez általában nem nehéz feladat. Helyszűke miatt a további feladatoknál le kell mondanunk annak igazolásáról, hogy a kapott mértani helynek a megoldásokban közölt pontjai valóban kielégítik-e a feltételeket, és más pontok viszont nem rendelkeznek az illető feladatban közölt tulajdonsággal (tulajdonságokkal). Az olvasóra bízzuk ezeknek a bizonyításoknak az elvégzését.

Az elmondottakat az 1321. feladat megoldásán is bemutatjuk.

1278. $7x+y-2=0$. A $(0;\ 2)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

1279. $2x+3y-4=0$.

1280. Alkalmazzuk a 752. feladatban közölt tételt. A feltételt kielégítő pont $(x;\ y)$ koordinátáira

$$\left|\frac{x-2y+6}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{2x-y-5}{\sqrt{5}}\right|.$$

Ebből $x-2y+6 = 2x-y-5$ vagy $x-2y+6 = -2x+y+5$.

1281. A mértani hely két egyenes: $2x-3y=0$ és $3x+2y=0$. A $(0;\ 0)$ pont azonban nem tartozik a mértani helyhez.

1282. $y+4x-2=0$.

1283. $5y-2x+2\pm 3\sqrt{29}=0$.

1284. $2x-y-8=0$.

1285. A mértani hely két egyenes, amelyek áthaladnak az adott egyenesek metszéspontján, a $P\left(\frac{1}{4};\ \frac{11}{4}\right)$ ponton: $33x+y-11=0$ és $23x-9y+19=0$.

1286. $9x+3y=5$. Az $\left(\frac{5}{3};\ 0\right)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

Keressünk elemi megoldást is.

1287. $9x-3y+7=0$. Az egyenes egy pontja nem tartozik a mértani helyhez. Melyik ez a pont?

1288. A mértani hely két egyenes: $y=\pm(x-2)$.

A $(2;\ 0)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

1289. A harmadik csúcs mértani helye két kör:

$x^2+y^2-2x-16y+20=0$ vagy $x^2+y^2-8x-4y-25=0$. A köröknek az AB egyenessel való metszéspontjai nem tartoznak a mértani helyhez.

1290. A mértani hely két kör: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ és $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

1291. A mértani hely kör, ha $k\neq 1$. Egyenlete:

$$\left(x-\frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{ak}{k^2-1}\right)^2.$$

Ha $k=1$, a mértani hely egyenes. Egyenlete: $x=\frac{a}{2}$. Az adott konkrét számértékeket figyelembe véve, a körök egyenletei rendre a következők:

$$x^2+y^2-18x+72=0$$

$$3x^2+3y^2-64x+256=0$$

$$x=4$$

$$3x^2+3y^2+16x-64=0$$

$$x^2+y^2+2x-8=0.$$

1292. A mértani hely kör. Egyenlete $(x-2)^2+y^2=4$.

Az általános esetben a mértani hely egyenlete:

$$x^2+y^2=\frac{c^2-2a^2}{2},$$ ami kör egyenlete, ha $c^2 \geq 2a^2$. A speciális esetekben a körök sugarai rendre $a\sqrt{2}$; a; 0; nincs megoldás.

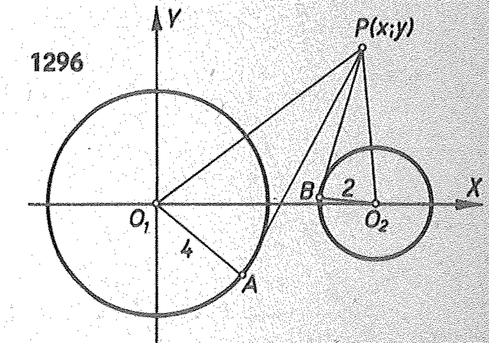
1293. A mértani hely kör. Egyenlete: $x^2+y^2=16$.
A $(-4;\ 0)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

1294. $x^2+y^2-10x+4y+4=0$.

1295. $x-2y=0$; $3x^2+3y^2+8x-46y=0$; $5x^2+5y^2+32x-114y=0$.
A mértani helyekhez csak azok a pontok tartoznak hozzá, amelyek az adott körök külső pontjai. Például az első mértani helyhez nem tartoznak hozzá a (0; 0) és a (4; 2) pontokkal meghatározott szakasz pontjai.

1296. Tegyük fel, hogy a $P\ (x;\ y)$ pontból az adott körök azonos szögben látszanak (1296. ábra).

1296



Igazoljuk, hogy ekkor

$$\frac{PO_1}{O_1A}=\frac{PO_2}{O_2B}.$$

A mértani hely kör. Egyenlete:

$$\left(x-\frac{32}{3}\right)^2+y^2=\frac{256}{9}.$$

1297. A mértani hely kör: $x^2+y^2-4x=0$. A (0; 0) és a (4; 0) pontok nem tartoznak hozzá a mértani helyhez.

1298. A mértani hely parabola. Egyenlete: $x^2-6x-8y+25=0$.

1299. A mértani hely parabola. Egyenlete: $y^2+16x-2y-95=0$.

1300. A mértani hely két parabola. Egyenleteik:

$y^2=6x-3$ és $y^2=2x-3$.

1301. A mértani hely parabola. Egyenlete: $y^2=\frac{p}{2}x$.

1302. A mértani hely egyenlete $x=\frac{m}{6}$. Ezzel az egyenlettel megadott egyenesnek csak a parabola belsejébe eső pontjai tartoznak a mértani helyhez. Ezeknek a pontoknak az ordinátáira $y>\frac{m^2}{12}-4$.

1303. A mértani hely parabola. Egyenlete: $y^2=\frac{9}{8}x$.

1304. $20x^2+36y^2=45$.

1305. $3x^2+4y^2=12$.

1306. A mértani hely hiperbola. Egyenlete: $3x^2-y^2+6x+4y-13=0$.

1307. $x^2-y^2=1$.

1308. $x^2-y^2=1$.

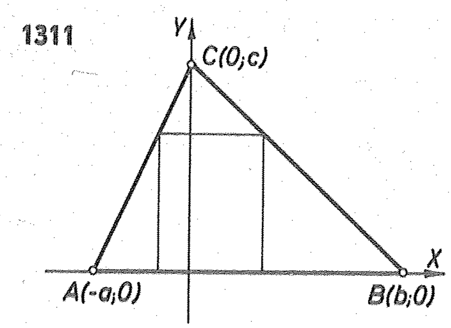
1309. A mértani hely két egyenes, amelyek áthaladnak az adott egyenesek ($a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $a_2x+b_2y+c_2 = 0$) metszéspontján. Bizonyítsuk be! A metszéspont nem tartozik hozzá a mértani helyhez. Miért? Ha $a_2 = \lambda a_1$ és $b_2 = \lambda b_1$ és $k \neq 1$, akkor 2 megoldás van, ha $k = 1$, akkor 1 megoldás van. A mértani hely (helyek) akkor is egyenes (egyenesek), amely (amelyek) párhuzamos (párhuzamosak) az adott egyenesekkel.

1310. A mértani hely a $2ax+2by = ab$ egyenes $\left(0;\ \frac{b}{2}\right)$ és $\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$ pontok által kijelölt szakaszának belső pontjai. a és b a derékszögű háromszög befogói. Az origó a derékszög csúcsa, a befogók pedig a tengelyek pozitív felére illeszkednek.

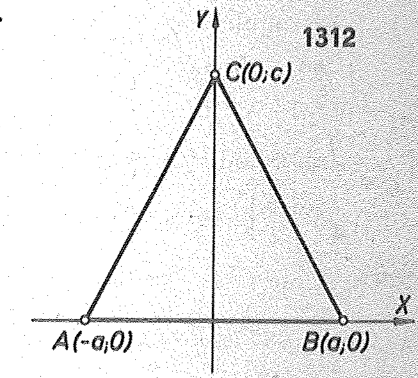
1311. Helyezzük el az adott háromszöget koordináta-rendszerben az 1311. ábrán látható módon.
A mértani hely egyenlete: $2cx+2(b-a)\,y = c\,(b-a)$,

ahol $0 < x < \dfrac{b-a}{2}$ és $0 < y < \dfrac{c}{2}$.

1311



1312



1312. Helyezzük el az ABC háromszöget koordináta-rendszerben a 1312. ábrán látható módon. A mértani hely két egyenes: $x = \pm a$, kivéve az A és a B pontokat.

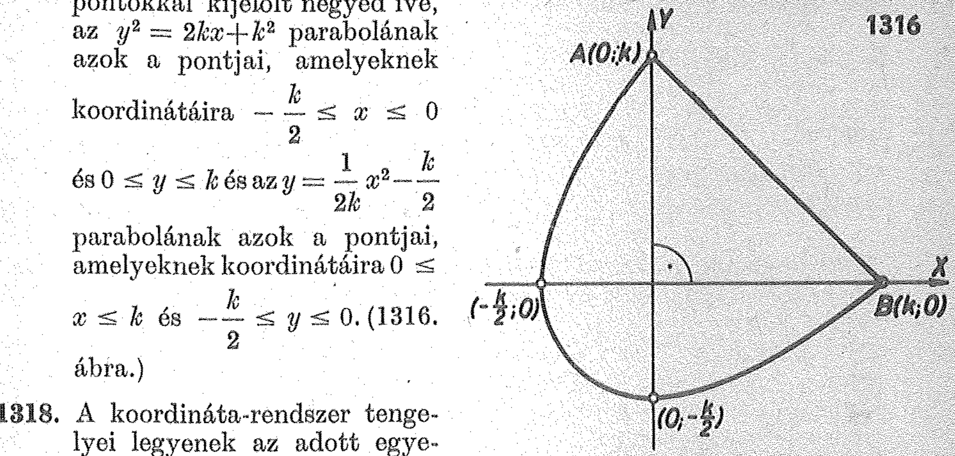
1313. $8x-14y+25 = 0$.

1314. A mértani hely hiperbola. Egyenlete: $8y^2-x^2 = 72$. Valós tengelye 3, képzetes tengelye $12\sqrt{2}$. Valós tengelyegyenese az y tengely, képzetes tengelyegyenese az x tengely.

1315. A mértani hely az $y = 2x$ egyenes, kivéve az egyenesnek azokat a pontjait, amelyek a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{2}\right)$ pontokkal meghatározott szakaszra esnek.

1316. Helyezzük el a derékszöget koordináta-rendszerben úgy, hogy csúcsa az origóba essék, egyik szára az x tengely, a másik szára az y tengely pozitív fele legyen. Az adott állandó legyen k ($k > 0$). A mértani hely $x+y = k$ egyenes $A\,(0;\ k)$ és a $B\,(k;\ 0)$ pontokkal kijelölt szakaszának pontjai, az $x^2+y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ körnek a $\left(-\frac{k}{2};\ 0\right)$ és a $\left(0;\ -\frac{k}{2}\right)$

pontokkal kijelölt negyed íve, az $y^2 = 2kx + k^2$ parabolának azok a pontjai, amelyeknek koordinátáira $-\frac{k}{2} \leq x \leq 0$ és $0 \leq y \leq k$ és az $y = \frac{1}{2k}x^2 - \frac{k}{2}$ parabolának azok a pontjai, amelyeknek koordinátáira $0 \leq x \leq k$ és $-\frac{k}{2} \leq y \leq 0$. (1316. ábra.)



1318. A koordináta-rendszer tengelyei legyenek az adott egyenesek. A mozgó pontokat jelöljük A-val és B-vel. A és B 0 időpontban elfoglalt helyzetét az $A\ (a;\ 0)$ és a $B\ (0;\ b)$ koordinátákkal adjuk meg. A mértani hely két egyenes: $2x - 2y + b - a = 0$ vagy $2x + 2y - a - b = 0$. Mégpedig ha mindkét pont egyidejűleg a tengelyek pozitív (negatív) irányába mozog, akkor a mértani hely az első egyenes. Ha A pont az x tengely pozitív (negatív), a B pont az y tengely negatív (pozitív) irányába mozog, akkor a mértani hely a második egyenes.

1319. Az adott szakasz végpontjai legyenek $\left(-\frac{a}{2};\ 0\right)$ és $\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$. A mértani hely egyenlete: $x = \pm\frac{k^2}{2a}$.

1320. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái legyenek rendre $(a;\ h)$, $(-b;\ 0)$, $(b;\ 0)$. A mértani hely egyenlete: $2ax + 2hy = a^2 + h^2 - b^2$. Igazoljuk, hogy a kapott egyenes merőleges az OA egyenesre (O az origó), és áthalad az ABC háromszög köré írható kör középpontján.

1321. Az adott egyeneseket válasszuk a koordináta-rendszer tengelyeinek. P koordinátái legyenek $(\alpha;\ \beta)$. A mértani hely egyenes. Egyenlete: $2\alpha x + 2\beta y = \alpha^2 + \beta^2$. Ha P az origóba esik, a mértani hely egyetlen pont. Adjunk a feladatra elemi megoldást is. P pont AB-re eső merőleges vetületének a mértani helye egyenes. Egyenlete: $\beta x + \alpha y = \alpha\beta$.
Bebizonyítjuk, hogy a $2\alpha x + 2\beta y = \alpha^2 + \beta^2$ egyenes *minden pontja* hozzá tartozik a mértani helyhez. Legyen az egyenes *tetszőleges* pontja $M\ (x;\ y)$, ahol $y = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x}{2\beta}$, $(\beta \neq 0)$, M olyan AB szakasz felezéspontja, amelynek végpontjai $A\ (2x;\ 0)$ és $B\left(0;\ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x}{\beta}\right)$.

AP egyenes egyik irányvektora

$\mathbf{v}_{AP}\ (\alpha - 2x;\ \beta)$,

BP egyenes egyik irányvektora

$$\mathbf{v}_{BP}\left(\alpha;\ \beta-\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha x}{\beta}\right),$$

illetve

$$\mathbf{v}_{BP}\left(\alpha;\ \frac{2\alpha x-\alpha^2}{\beta}\right).$$

Bebizonyítjuk, hogy $AP \perp BP$. Ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy létezzen olyan λ szám, amelyre

$$\alpha = -\lambda\beta \qquad (*)$$

és

$$\frac{2\alpha x-\alpha^2}{\beta} = \lambda(\alpha-2x).$$

(*)-ból $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$. Ekkor

$$\frac{2\alpha x-\alpha^2}{\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}(\alpha-2x)$$

egyenlőség is fennáll.
A bizonyításnál kihasználtuk, hogy $\beta \neq 0$. Ha $\beta = 0$, akkor a mértani hely $x = \frac{\alpha}{2}$. Erre a vizsgálat nyilvánvaló.

Az elmondottakból egyúttal az is következik, hogy ha Q pont nem illeszkedik a $2\alpha x+2\beta y = \alpha^2+\beta^2$ egyenesre, akkor a Q ponthoz nem található olyan Q_1 és Q_2 pontpár, amelyek közül Q_1 az a egyenesre, Q_2 a b egyenesre illeszkedik, Q a Q_1Q_2 szakasz felezéspontja *és* a $Q_1P \perp Q_2P$ feltétel is teljesül.

1322. A mértani hely olyan f egyenes, amely párhuzamos e-vel; e és f középvonala azonos az AB szakasz felező merőlegesével. A mértani helyhez nem tartozik hozzá az f és az AB egyenesek metszéspontja.

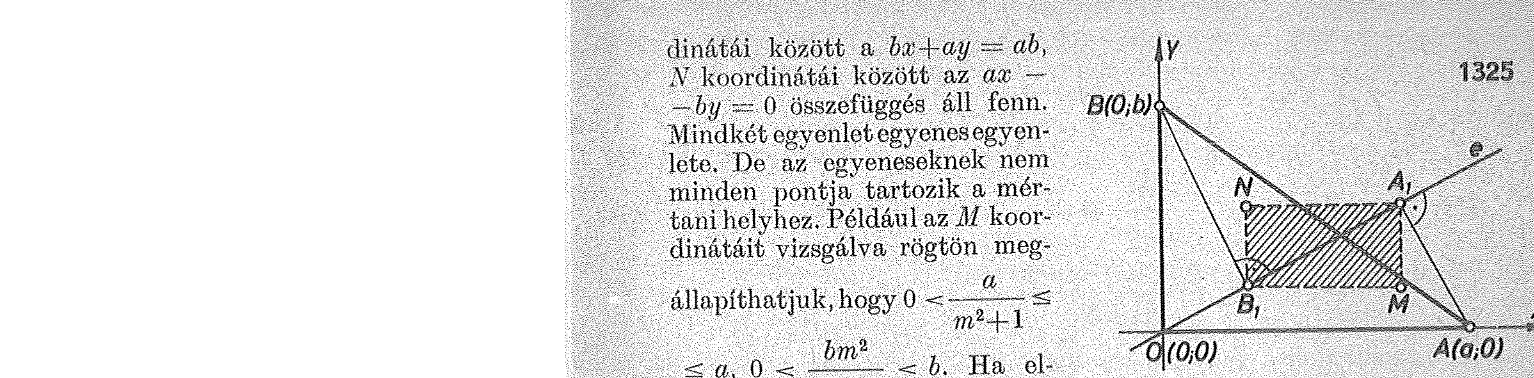
1323. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy A, B, C, D koordinátái rendre $(0;0)$, $(b;0)$, $(t;c)$, $(a+t, d)$ legyenek. a a C és D pontok abszciszszáinak különbsége, t egy változó paraméter. A mértani hely egyenes. Egyenlete: $(d-c)\,x+(b-a)\,y = bd$.

1324. A mértani hely egyenes. Egyenlete: $kx+(d-b-2c)y+bk = 0$, ha $A\,(0;\ 0)$, $B\,(b;\ 0)$, $C\,(c;\ k)$, $D\,(d;\ k)$.

1325. Helyezzük el az OAB derékszögű háromszöget koordináta-rendszerben az 1325. ábrán látható módon.
e egyenes egyik irányvektora legyen $(1;m)$. Ekkor M és N koordinátái a-val, b-vel és a változó m paraméterrel kifejezve: $M\left(\frac{a}{m^2+1};\ \frac{bm^2}{m^2+1}\right)$, $N\left(\frac{bm}{m^2+1};\ \frac{am}{m^2+1}\right)$. Kiküszöbölve az m paramétert M koor-

dinátái között a $bx+ay=ab$, N koordinátái között az $ax-by=0$ összefüggés áll fenn. Mindkét egyenlet egyenes egyenlete. De az egyeneseknek nem minden pontja tartozik a mértani helyhez. Például az M koordinátáit vizsgálva rögtön megállapíthatjuk, hogy $0<\frac{a}{m^2+1}\leq a$, $0<\frac{bm^2}{m^2+1}<b$. Ha elfajuló téglalapokat is megengedünk, akkor e irányvektora lehet $(1;\ 0)$ és $(0;\ 1)$ is. Ezekben az esetekben M az A, illetve a B pontba esik. Kimondhatjuk tehát, hogy az M pont mértani helye a derékszögű háromszög átfogója, az N pont mértani helye pedig az átfogóra merőleges $ax-by=0$ egyenesnek a $\left(\frac{b}{2};\ \frac{a}{2}\right)$ és $\left(-\frac{b}{2};\ -\frac{a}{2}\right)$ pontokkal határolt szakasza. Az N pontra vonatkozó vizsgálat egy részletét az alábbiakban közöljük, a hiányzó részlet kidolgozását az olvasóra bízzuk.

1325



Ha $m=0$, akkor $N(0;\ 0)$. Legyen $m>0$. Ekkor

$$x=\frac{bm}{m^2+1}=\frac{b}{m+\frac{1}{m}}>0.$$

Mivel $m>0$ és $\frac{1}{m}>0$, azért a számtani és mértani középek között fennálló egyenlőtlenség szerint $m+\frac{1}{m}\geq 2\sqrt{m\cdot\frac{1}{m}}=2$. Az $m+\frac{1}{m}$ összeg legkisebb értéke 2, és ezt akkor veszi fel, ha $m=\frac{1}{m}$, $m=1$. Ekkor lesz x értéke a legnagyobb. $x_{\max}=\frac{b}{2}$. Tehát ha $m\geq 0$, akkor

$$0\leq\frac{bm}{m^2+1}\leq\frac{b}{2}.$$

1326. A koordináta-rendszer y tengelyének válasszuk az e egyenest, x tengelyének pedig az A pontból az e-re húzott merőleges egyenest. Legyen $A(a;\ 0)$.

A mértani hely egyenlete

$$\left(x-a-\frac{l}{2}\right)^2+y^2=\frac{l^2}{4}+al;$$

illetve

$$\left(x-a+\frac{l}{2}\right)^2+y^2=\frac{l^2}{4}-al.$$

2 megoldás van, a mértani hely 2 kör, ha $l \geq 4a$. ($l = 4a$ esetén az egyik kör ponttá zsugorodik.) 1 megoldás van, a mértani hely kör, ha $l < 4a$. Szerkesszük meg a mértani helyet (helyeket).

1327. Legyen $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $P(x;\ y)$.
Ha $k = 1$, a mértani hely középponti helyzetű kör, feltéve, hogy $l^2 \geq 2a^2$.

Egyenlete: $x^2+y^2 = \dfrac{l^2-2a^2}{2}$. Ha $k \neq 1$, a mértani hely kör. Egyenlete:

$$\left[x+\frac{a(1-k)}{1+k}\right]^2+y^2 = \frac{l^2(1+k)-4a^2k}{(1+k)^2}.$$

A megoldhatóság feltétele az, hogy $k \leq \dfrac{l^2}{4a^2-l^2}$ és $4a^2 > l^2$ legyen.

1328. A rögzített pontok $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$. Ekkor a mértani hely egyenlete: $x^2+y^2 = a^2$. A mértani hely kör.

1329. A mértani hely kör. Egyenlete: $x^2+y^2 = a^2$. Készítsünk elemi megoldást is.

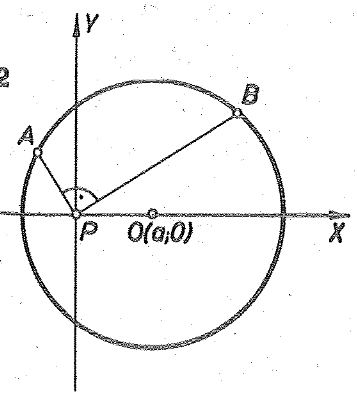
1330. A kör metszéspontja legyen az origó, a háromszög alapja legyen a $(0;\ 0)$, $(r;\ 0)$ pontokkal meghatározott sugár. A mértani hely a $(0;\ 0)$ és $\left(\dfrac{2r}{3};\ 0\right)$ pontok kivételével az $\left(x-\dfrac{1}{3}r\right)^2+y^2 = \left(\dfrac{1}{3}r\right)^2$ egyenlettel megadott kör. Készítsünk elemi megoldást is.

1331. A kör középpontja legyen az origó, sugara r. A mértani hely egyenlete:

$$x^2+\left(y-\frac{2}{3}d\right)^2 = \left(\frac{r}{3}\right)^2.$$

A mértani hely kör, kivéve a kör két pontját. Melyek ezek a pontok? Készítsünk elemi megoldást is.

1332



1332. Helyezzük el a kört koordináta-rendszerben az 1332. ábrán látható módon. A kör sugara R, $O(a;\ 0)$. A mértani hely kör. Egyenlete:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 = \frac{2R^2-a^2}{4}.$$

1333. $x^2+y^2 = d^2+r^2$.

1334. A kör egyenlete $x^2+y^2 = r^2$. P koordinátái $(a;\ b)$. A mértani hely kör. Egyenlete az általános esetben:

$$\left(x-\frac{ma}{m+n}\right)^2+\left(y-\frac{mb}{m+n}\right)^2 = \frac{n^2r^2}{(m+n)^2}.$$

1335. Az adott kör $x^2+y^2 = r^2$. A mértani hely kör. Egyenlete: $x^2+y^2 = 2r^2$

1336. Ha az adott kör középponti helyzetű, a mértani hely egyenlete

$$x^2+y^2 = \frac{r^2}{\sin^2\alpha}.$$

1337. Legyen $A(-a;\ 0)$, $B(b;\ 0)$, $O(0;\ 0)$. A mértani hely egyenlete: $(a-b)(x^2+y^2)-2abx=0$. A mértani hely kör, ha $a \neq b$, és az y tengely, ha $a=b$.
Szerkesszük meg a mértani helyet.

1338. A koncentrikus körök középpontja legyen az origó. $A(a;\ b)$. A mértani hely egyenlete:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

A mértani hely kör, kivéve a kör $(0;\ 0)$ pontját. A koncentrikus körök R sugaraira: $R \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

1339. A mértani hely az $x^2+y^2=a^2$ kör, kivéve a $(-a;\ 0)$ és $(a;\ 0)$ pontjait.

1340. 1. P' koordinátái $(x;\ y)$, P koordinátái $(a;\ b)$.

$$x=\frac{k^2a}{a^2+b^2},\quad y=\frac{k^2b}{a^2+b^2}.$$

2. A mértani hely egyenlete:

$a(x^2+y^2)-k^2x=0.$

A mértani hely kör vagy egyenes, kivéve a kör, illetve az egyenes $(0;\ 0)$ pontját.
Szerkesszük meg a mértani helyet.

3. Mozogjon a P pont az $(a;\ 0)$ középpontú, r sugarú körön. P' mértani helye kör. Egyenlete:

$$\left(x+\frac{ak^2}{r^2-a^2}\right)^2+y^2=\frac{k^4r^2}{(r^2-a^2)^2},$$

feltéve, hogy $r^2 \neq a^2$.

Ha $r^2=a^2$, a mértani hely egyenes, amelynek egyenlete $x=\dfrac{k^2}{2a^2}$ (1276. feladat).

1341. A mértani hely kör. Egyenlete: $x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

1342. m értékeit az $(R^2-x_1^2)m^2+2x_1y_1m+R^2-y_1^2=0$ másodfokú egyenlet gyökei adják.
Az $M(x_1;\ y_1)$ pont mértani helye az $x_1^2+y_1^2=2R^2$ kör, kivéve az $(R;\ R)$, $(-R;\ R)$, $(-R;-R)$, $(R;\ -R)$ pontokat.

1343. A mértani helyek parabolák. Egyenleteik rendre:

$$y^2=px,\quad y^2=\frac{2p}{3}x,\quad y^2=\frac{4p}{5}x,\quad y^2=\frac{2pm}{m+n}x,$$

ha az adott parabola egyenlete $y^2=2px$.

1344. A mértani helyek parabolák. Egyenleteik rendre:

$$y^2=p\left(x-\frac{p}{4}\right),\quad y^2=\frac{2p}{3}\left(x-\frac{p}{3}\right),\quad y^2=\frac{2pm}{m+n}\left[x-\frac{np}{2(m+n)}\right],$$

ha a parabola egyenlete $y^2=2px$.

1345. A parabola egyenlete legyen $y^2 = 2px$. Megoldás: $y^2 = p\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

1346. A mértani hely egy, a parabola tengelyével párhuzamos félegyenesnek a parabola belsejébe eső pontjai.

1347. A mértani hely parabola. Egyenlete: $y^2 = 4p\left(x+\frac{p}{2}\right)$, ha az adott parabola egyenlete $y^2 = 2px$.

1348. A mértani hely az $y^2 = p\left(x+\frac{p}{2}\right)$ parabolának azok a pontjai, amelyek abszcisszáira $x \geq \frac{p}{2}$.

1349. Tekintsük az $x^2+y^2 = r^2$ kör x tengely feletti részét. A mértani hely a $x^2+2ry-r^2 = 0$ egyenlettel megadott parabola, kivéve a parabolának azokat a pontjait, amelyek abszcisszáira $|x| \geq r$.

1350. A koordináta-rendszer kezdőpontja legyen az O pont. Az x tengely pozitív fele legyen az OX félegyenes, az y tengely pozitív fele legyen az indulás pillanatában adódó OY félegyenes. A gyorsulás legyen a, az egyenletes mozgás sebessége c. A mértani hely egyenlete:

$$y = \frac{a}{2c^2}x^2, \text{ ahol } x \geq 0.$$

1351. A parabola síkjában a tengelyponthoz tartozó parabola érintő.

1352. Helyezzük el a parabolát koordináta-rendszerben úgy, hogy fókusza az origó és a tengelye az x tengely legyen. Egyenlete: $y^2 = 2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$.

A mértani hely egyenlete: $y^2 = \frac{p}{2}x$. A mértani hely parabola, amelynek tengelypontja a vizsgált parabola fókusza, paramétere $\frac{p}{4}$, vezéregyenesének egyenlete $x = -\frac{p}{8}$, fókusza $\left(\frac{p}{8};\, 0\right)$.

1353. Az adott parabola egyenlete legyen $y^2 = 2px$.

A mértani hely az $y^2 = \frac{p}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$ egyenlettel megadott parabola, kivéve a $\left(\frac{p}{2};\, 0\right)$ pontot.

1354. A parabola egyenlete $y^2 = 2px$. Ekkor a mértani hely olyan kör, amelynek egyenlete $x^2+y^2-px = 0$, kivéve a $(0;\, 0)$ pontot.

1355. A mértani hely a parabola vezéregyenese. Oldjuk meg a feladatot elemi úton is. (Tükrözzük a fókuszt a derékszög száraira.)

1356. A mértani hely egyenes, amelynek egyenlete $x = -p$.

1357. A mértani hely parabola, amelynek egyenlete $y = -\frac{4}{p}x^2$.

1358. A mértani hely parabola, amelynek egyenlete $y=\frac{1}{2r}x^2-\frac{r}{2}$. A parabola tengelypontja nem tartozik a mértani helyhez.

1359. A közös alap végpontjainak koordinátái legyenek $(-d;\ 0)$ és $(d;\ 0)$. A háromszögek közös magassága legyen h. A mértani hely két parabola.

Egyenletük: $y=-\frac{1}{h}x+\frac{d^2}{h}$, illetve $y=\frac{1}{h}x-\frac{d^2}{h}$.

1360. A mértani hely egyenes, amely párhuzamos a parabola vezéregyenesével. Az egyenesnek a parabola tengelyére illeszkedő pontja nem tartozik a mértani helyhez.

1361. A fókuszok mértani helye olyan parabola, amelynek fókusza az adott P pont és tengelyponti érintője az adott e egyenes. A parabola tengelypontja nem tartozik a mértani helyhez.

1362. M koordinátái $\left(\frac{2p}{a^2},\ \frac{2p}{a}\right)$, A koordinátái $\left(0;\ \frac{2p}{a}\right)$, ahol $a\neq 0$. Az AH egyenes a $(2p;\ 0)$ rögzített ponton halad át függetlenül a értékétől. H mértani helye kör, amelynek egyenlete $x^2+y^2-2px=0$, kivéve a kör $(0;\ 0)$ és $(2p;\ 0)$ pontjait.

1363. A mértani hely a parabola vezéregyenese.

1364. A háromszög csúcsai: $B(-b;\ 0)$, $C(b;\ 0)$, $A(\lambda;\ h)$, ahol b és h rögzített számok, λ pedig változó. A Feuerbach-kör áthalad az $O(0;\ 0)$, $P\left(\frac{-b+\lambda}{2};\ \frac{h}{2}\right)$, $Q\left(\frac{b+\lambda}{2};\ \frac{h}{2}\right)$ pontokon. Egyenlete $x^2+y^2+kx+ly=0$ alakú. P és Q koordinátáinak felhasználásával k és l meghatározhatók. A λ paraméter kiküszöbölése után a Feuerbach-kör középpontjának koordinátái között az $y=-\frac{x^2}{h}+\frac{b^2+h^2}{4h}$ összefüggés adódik. A mértani hely parabola.

1365. A mértani hely két ellipszis. Egyenletük: $84x^2+100y^2=525u^2$ és $20x^2+36y^2=45u^2$.

1366. A mértani hely mindkét esetben ellipszis. Egyenleteik: $\frac{9x^2}{a^2}+\frac{9y^2}{b^2}=1$, illetve $\frac{9\left(x\pm\frac{a}{3}\right)^2}{a^2}+\frac{9y^2}{b^2}=1$, ha az adott ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A felírt egyenletekkel megadott ellipszisek nagytengelyeinek végpontjai nem tartoznak hozzá a mértani helyhez.

1367. A mértani hely ellipszis, amelynek egyenlete $\frac{9x^2}{4a^2}+\frac{9y^2}{b^2}=1$, ha az adott ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A $\left(\pm\frac{2a}{3};\ 0\right)$ és a $\left(0;\ \pm\frac{b}{3}\right)$ pontok nem tartoznak a mértani helyhez.

1368. Az adott ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A mértani hely egyenlete az

$a)$ esetben $\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}=1$, a $b)$ esetben $\frac{\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$,

ahol $(x_1;\ y_1)$ az ellipszis tetszőleges, de rögzített pontjának koordinátái.

1369. Legyen a egyenes az x tengely, b egyenes az y tengely. P mértani helye egy ellipszis, amelynek egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ahol $a=PN$, $b=PM$. (P koordinátái a és b, valamint az $OMN\sphericalangle$ segítségével kifejezhetők: $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$.)

1370. Kövessük az 1369. feladat megoldásának gondolatmenetét. P koordinátái: $x=(a-b)\cos\alpha$ $y=(a+b)\sin\alpha$. Ha $a\neq b$, a mértani hely egy ellipszisnek egy ívdarabja. (Melyik?) Ha $a=b$, a mértani hely a $(0;\ 0)$ és $(0;\ a+b)$ pontokkal meghatározott szakasz.

1371. A szögfelezőt válasszuk x tengelynek, az O pontban a szögfelezőre emelt merőlegest y tengelynek. Fejezzük ki az AB szakasz felezéspontjának koordinátáit a, b és $\frac{\omega}{2}$ segítségével. A mértani hely ellipszis, ha $a\neq b$. Egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=1.$$

Ha $a=b$, a mértani hely egy szakasz. Melyik?

1372. A mértani hely kör. Egyenlete $x^2+y^2=a^2$, ha az ellipszis egyenlete $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

1373. A mértani hely ellipszis, amelynek egyenlete $\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{3a^2}=1$, ha az ellipszis egyenlete $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

1374. A mértani hely a $b^2x+ma^2y=0$ egyenesnek az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszisbe eső szakasza. (m a húrok egyenesének iránytangense.)

1375. A mértani hely kör, amelynek egyenlete $x^2+y^2=a^2+b^2$. Oldjuk meg a feladatot elemi úton is.

1376. A tengelypontok koordinátái: $x=\frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}$, $y=\frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}$, ahol $0<\alpha$ $\alpha\leq 90°$, g a nehézségi gyorsulás. (A koordináta-rendszer kezdőpontja az adott pont, x tengelye vízszintes, y tengelye függőleges irányú.) Kiküszöbölve α szögfüggvényeit, a mértani hely egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{c^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{c^2}{4g}\right)^2}=1.$$

A felírt egyenlet olyan ellipszisnek az egyenlete, amelynek középpontja a $\left(0;\ \frac{c^2}{4g}\right)$ pont, nagytengelye az x tengellyel párhuzamos és a hossza $\frac{c^2}{g}$, kistengelye az y tengelyre illeszkedik, és a hossza $\frac{c^2}{2g}$. Az ellipszisnek csak azok a pontjai tartoznak a mértani helyhez, amelyeknek koordinátáira

$$0 \leq x \leq \frac{c^2}{2g} \quad \text{és} \quad 0 < y \leq \frac{c^2}{2g}.$$

1377. A mértani hely a $12x^2-4y^2 = 3c^2$ egyenlettel megadott hiperbola.

1378. A mértani hely hiperbola, amelynek egyenlete $60x^2-4y^2 = 15c^2$. A két hiperbolaág közül csak az egyik tartozik hozzá a mértani helyhez.

1379. A mértani helyek hiperbolák, és ha az adott hiperbola egyenlete $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$, akkor egyenletük a következő:

$$a)\ \frac{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1;$$

$$b)\ \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1;$$

$$c)\ \frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1.$$

Oldjuk meg a feladatot elemi módszerrel is.

1380. A derékszögű háromszögek befogói illeszkedjenek a koordináta-rendszer tengelyeinek pozitív felére. A mértani hely az $xy =$ konstans egyenlettel megadott hiperbola első síknegyedbe eső ága.

1381. Legyen $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $O(0;\ 0)$. A mértani hely hiperbola. Egyenlete: $2x^2-2y^2 = a^2$.

1382. A mértani hely hiperbola, amelynek egyenlete $x^2-y^2 = r^2$. A hiperbola tengelypontjai nem tartoznak a mértani helyhez.

1383. A mértani hely hiperbola, ha $a \neq b$. Egyenlete: $x^2-y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ha $a = b$, a mértani hely egyenespár.

1384. A mértani hely az $\left(x+\frac{3}{2}p\right)^2-y^2 = 2p^2$ hiperbolának az az ága, amelyik a parabolától távolabb esik.

Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola másik ágának pontjaiból a parabola 135°-os szögben látszik.

1385. A mértani hely kör. Egyenlete $x^2+y^2 = a^2-b^2$.

1386. A feltételt kielégítő pontok koordinátái között a következő összefüggés áll fenn:

$$(1-c^2)x^2+y^2-2a(1+c^2)x+a^2(1-c^2)=0.$$

A mértani hely ellipszis, hiperbola vagy parabola aszerint, hogy $0<c<1$, $c>1$ vagy $c=1$.

1387. A mértani hely egyenlete $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$, ahol $|x|>a$ és $|y|>b$.

1388. A koordináta-rendszer x tengelyének válasszuk az e_1 egyenest, e_1 és e_2 O metszéspontja legyen az origó. Az e_2 irányszöge legyen φ $(\varphi \neq 90°)$. A pontok koordinátái a következők:

$A_1(a_1;\ 0)$, $A_2(a_2;\ a_2 \operatorname{tg} \varphi)$, $M_1(a_1+t;\ 0)$,

$M_2(a_2+kt\cos\varphi;\ a_2 \operatorname{tg}\varphi+kt\sin\varphi)$, ahol $a_1=OA_1$, $a_2=OA_2$, t pedig bármilyen valós szám.

A mértani hely egyenes, amelynek egyenlete:

$$2k\sin\varphi\, x-2(1+k\cos\varphi)y=k\sin\varphi\,(a_1+a_2)-a_2\operatorname{tg}\varphi\,(1+k\cos\varphi).$$

Igazoljuk, hogy az egyenes áthalad az A_1A_2 szakasz felezéspontján. Igazoljuk, hogy az egyenes akkor és csakis akkor halad át az origón, ha $a_2=ka_1\cos\varphi$.

Mi a mértani hely akkor, ha $1+k\cos\varphi=0$?

Oldjuk meg a feladatot, ha $\varphi=90°$.

1389. Ha $l+m+n=0$, a mértani hely egyenes, amely áthalad az ABC háromszög köré írható kör középpontján, feltéve, hogy A, B, C pontok nem illeszkednek egy egyenesre. Ha $l+m+n\neq 0$, a mértani hely bizonyos feltételek mellett kör.

1390. Az a oldal végpontjának koordinátái legyenek $(0;\ 0)$ és $(a;\ 0)$. A mértani hely ekkor az $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$ egyenlettel megadott kör, kivéve az $\left(\frac{a+b}{2};\ 0\right)$ és $\left(\frac{a-b}{2};\ 0\right)$ pontjait.

1391. A pontok koordinátái legyenek $A(-a;\ 0)$, $B(-b;\ 0)$, $C(0;\ 0)$ és $M(x;\ y)$. A mértani hely kör, amelynek egyenlete: $x^2+y^2=ab$.

1392. Legyen a B csúcs a koordináta-rendszer kezdőpontja, BC oldala illeszkedjék az x tengely pozitív felére. Ekkor $B(0;\ 0)$ és $C(a;\ 0)$. A mértani hely az $y^2=2a\left(x-\frac{a}{2}\right)$ egyenlettel megadott parabola.

A parabola tengelypontja nem tartozik a mértani helyhez.

1393. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy az e egyenes az y tengely, a k kör középpontja az $O(a;\ 0)$ pont legyen. Ekkor a P koordinátái $(b;\ 0)$. k kör sugara legyen r.

A mértani hely ekkor az $y^2=2(a-b)x+r^2-a^2$ egyenlettel megadott parabola egy része.

Jelöljük ki a mértani helyet akkor, ha $a=6$, $r=2$ és $b=2$.

Adjunk a-nak, r-nek, b-nek olyan értékeket, hogy ne legyen megoldás, illetve olyan értékeket, hogy a mértani hely egyetlen pont legyen.

Ha h a k és k' körök hatványvonala, akkor a mértani hely a fenti egyenlettel megadott teljes parabola.

1394. A mértani hely ellipszis. Egyenlete: $l^2x^2+(l-d)^2y^2 = l^2(l-d)^2$, ahol $d = AB$.

1395. *a)* Vegyük figyelembe azt, hogy $|x| = x$, ha $x \geq 0$ és $|x| = -x$, ha $x < 0$.
b) Két esetet különböztetünk meg: $y \geq 0$ és $y < 0$.
c) Legyen $x \geq 1$ és $y \geq 0$, $x < 1$ és $y \geq 0$, $x \geq 1$ és $y < 0$, $x < 1$ és $y < 0$.
Az első intervallumban a mértani hely egy félegyenes.
Egyenlete: $x = 1\frac{1}{2}$ és $y \geq 0$, a második intervallumban egy üres alakzat.

1396. A mértani helyek egyenletei rendre:

$$x^2+\left(y-\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{5a^2}{4},$$

$$x^2+\left(y-\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{3}a^2,$$

$$x^2+\left(y-\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 = 0,$$

$$x^2+\left(y-\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 = -\frac{1}{6}a^2.$$

A mértani hely az egyes esetekben kör, kör, egyetlen pont, üres alakzat. Igazoljuk, hogy a második esetben a mértani hely az ABC háromszög köré írható kör.

1397. Az origó legyen az A pont, a B pont mozogjon az x tengely pozitív felén. A pálcák hossza legyen a. A mértani hely a $4x^2+36y^2 = 9a^2$ egyenlettel megadott ellipszisnek az első és negyedik síknegyedbe eső pontjai.

1398. A mértani hely kör, feltéve, hogy $c^2 > 2a^2$, ahol a a négyzet oldala. Ha $c^2 = 2a^2$, a mértani hely az $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ pont. Ha $c^2 < 2a^2$, a mértani hely üres alakzat. Határozzuk meg c^2 értékét úgy, hogy a mértani hely a négyzet csúcsain áthaladó kör legyen.

1399. *c)* Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a k_1 kör középpontja az $O_1(0;\ 0)$ pont, a k_2 kör középpontja az $O_2(a;\ 0)$ pont legyen. A k_1 kör sugara legyen r_1, a k_2 kör sugara legyen r_2. P koordinátái $(x;\ y)$. Ekkor a mértani hely egyenlete:

$$(k+l)\,(x^2+y^2)-2alx = a^2+kr_1^2+lr_2^2-la^2.$$

Ha $k+l \neq 0$, a mértani hely kör, illetve egyetlen pont, feltéve, hogy

$$a^2+kr_1^2+lr_2^2+\frac{a^2l^2}{(k+1)^2} \geq la^2.$$

A kör középpontja $\left(\frac{al}{k+l};\ 0\right)$, sugara

$$\sqrt{a^2+kr_1^2+lr_2^2+\frac{a^2l^2}{(k+l)^2}-la^2}.$$

A körnek csak azok a pontjai felelnek meg, amelyek a k_1 és k_2 körök külső pontjai. Mit mondhatunk akkor, ha $k+l=0$.

1400. P koordinátái:

$$x=\frac{2m^2+6}{3m^2+3}, \qquad y=\frac{4m}{3m^2+3},$$

ahol m az e egyenes iránytangense. m nulla kivételével bármilyen valós szám lehet. Fejezzük ki m paramétert x segítségével.

$$m=\pm\sqrt{\frac{6-3x}{3x-2}}, \quad \text{ahol} \quad \frac{2}{3}<x<2.$$

Behelyettesítve m értékét y-ra kapott kifejezésbe, a mértani hely egyenlete:

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}.$$

A mértani hely kör, kivéve a kör $\left(\frac{2}{3};\ 0\right)$ és $(2;\ 0)$ pontjait.

1401. A mértani hely egyenes, amelynek egyenlete:

$$2\lambda x+3y=\frac{6\lambda}{1+\lambda}.$$

1402. A mértani hely egyenlete: $y+x=\frac{a}{3}$. A mértani hely egyenes, a tengelyekkel adódó metszéspontok nem tartoznak a mértani helyhez.

1403. A mértani hely hiperbola.

1404. A mértani hely diszkrét pontok halmaza. A pontok száma $n+1$, és ezek az $y^2=\frac{a^2}{b}x$ parabolára illeszkednek. Ezzel újabb eljárást ismertünk meg parabolapontok szerkesztésére.

1405. *a)* $x^2+y^2+4x+8y-12=0$;
b) $x^2+y^2+4x+8y-3=0$.

1406. A mértani hely ellipszis, amelynek fókuszai az adott kör középpontja és P, nagytengelye az adott kör sugara.

1407. A mértani hely ellipszis. Határozzuk meg az ellipszis fókuszait és nagytengelyének a hosszát.

1408–1409. A mértani hely hiperbola. Határozzuk meg a hiperbola fókuszait és valós tengelyét. Mit mondhatunk akkor, ha k_1 és k_2 körök érintik vagy metszik egymást?

1410. Legyen az adott r sugarú kör középpontja az origó, az adott egyenes az x tengely. Legyenek P koordinátái $(x;\ y)$, Q koordinátái $(x_1;\ y_1)$. Ekkor Q' koordinátái $(x_1;\ 0)$. Felírhatjuk, hogy

$$x_1^2+y_1^2=r^2,$$

$$(x-x_1)^2+y^2=y_1^2.$$

Ebből $x_1=\frac{x}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-2y^2-x^2}$. $\quad(*)$

A diszkriminánsból a mértani hely megállapítható.

$$\frac{x^2}{2r^2}+\frac{y^2}{r^2} \leq 1. \qquad (**)$$

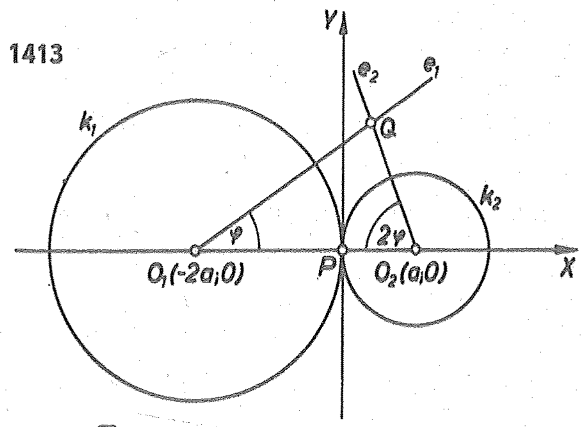
A mértani helyet (**) alapján egy $2r\sqrt{2}$ nagytengelyű és $2r$ kistengelyű, középponti helyzetű ellipszis pontjai és belső pontjai adják.
(*) alapján a szerkesztés elvégezhető és azt is megállapíthatjuk, hogy a megoldások száma 4, 2 vagy 0 aszerint, hogy P a fent definiált ellipszis belső pontja, kerületi pontja vagy külső pontja.

1412. A mértani hely ellipszis, amelynek nagytengelye azonos a hiperbola valós tengelyével, kistengelye pedig egyenlő a hiperbola képzetes tengelyével.

1413. Az adott köröket helyezzük el koordináta-rendszerben az 1413. ábrán látható módon.
A k_1 kör forgó sugarának egyenese legyen e_1, a k_2 kör megfelelő forgó sugarának egyenese legyen e_2.
Amikor e_1 egyenes negatív irányban φ szöggel fordul el, akkor az e_2 egyenes pozitív irányban 2φ szöggel fordul el.
Az e_1 egyenes egyik irányvektora legyen $(p;\, q)$. Ekkor az e_2 egyenes egyik irányvektora $(q^2-p^2;\, 2pq)$. (Igazoljuk ezt az állítást.)
Írjuk fel az ábrán látható adatok segítségével e_1 és e_2 egyenletét, azután számítsuk ki Q koordinátáit.

$$x = \frac{2aq^2}{3p^2-q^2}; \qquad y = \frac{6pqa}{3p^2-q^2},$$

1413



ahol $|q| \neq |p|\sqrt{3}$.
Kiküszöbölve a p és q paramétereket, a mértani hely egyenlete $\frac{(x+a)^2}{a^2}-$

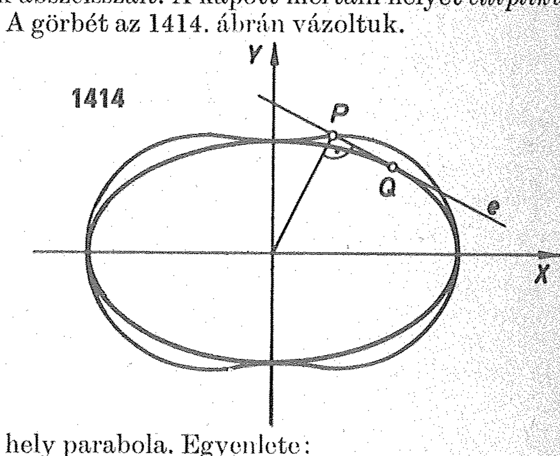
$$-\frac{y^2}{a^2} = 1.$$

A mértani hely hiperbola, kivéve a hiperbola $(0;\, 0)$ pontját.

1414. A mértani hely egyenlete $(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2 = 0$, ha az ellipszis egyenlete $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$. Igazoljuk, hogy

a) a kapott görbe szimmetrikus a koordináta-rendszer tengelyeire;
b) az ellipszis tengelypontjai hozzátartoznak a görbéhez.
c) Legyen $a > b$. Igazoljuk, hogy az $y = \pm b$ egyenesnek három közös pontja van a görbével, ha $a^2-2b^2 > 0$, és egy közös pontja van a görbével, ha $a^2-2b^2 \leq 0$.
d) Igazoljuk, hogy ha $a > b$, akkor az $x = \pm a$ egyenesnek csak egy közös pontja van a görbével.
e) Számítsuk ki a görbe legmagasabban, illetve legmélyebben fekvő pontjainak abszcisszáit. A kapott mértani helyet *elliptikus lemniszkátának* nevezzük. A görbét az 1414. ábrán vázoltuk.

1414



1415. A mértani hely parabola. Egyenlete:

$$y^2 = \frac{2\lambda p}{1+\lambda}\left[x-\frac{p}{2(1+\lambda)}\right].$$

1416. A mértani hely kör. Egyenlete:

$$\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{2}.$$

1417. A mértani hely két hiperbolának egy-egy ága. Az egyik hiperbola egyenlete:

$$\frac{\left(y-\frac{2}{3}r\right)^2}{\left(\frac{r}{3}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2}=1.$$

A mértani helyhez tartozó pontok y koordinátáira: $y \leq \frac{1}{3}r$. A másik hiperbola egyenlete: $\dfrac{\left(y+\frac{2}{3}r\right)^2}{\left(\frac{r}{3}\right)^2}-\dfrac{x^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$. A mértani helyhez tartozó pontok y koordinátáira: $y \geq -\frac{1}{3}r$.

1418. A mértani hely egyenlete $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{r^2}$, ahol $ab \neq 0$.

1419. A mértani hely parabola, amelynek egyenlete $y^2 = -\frac{p}{2}x$.

1420. A kört helyezzük el koordináta-rendszerben úgy, hogy középpontja az origó, az x tengely az OA egyenes, az érintő egyenlete $x = r$ legyen. M-ben az $x = r$ egyenesre emelt merőlegesre mérjük fel M-nek a körtől vett távolságát először az érintőnek arra az oldalára, amelyen nincs a kör. Ekkor a mértani hely az $x^2-y^2 = r^2$ derékszögű hiperbolának az az ága, amelynek tengelypontja az A pont.
Ha az M-nek a körtől vett távolságát az érintőnek arra az oldalára mérjük fel, amelyen a kör van, akkor a mértani hely az $(x-2r)^2-y^2 = r^2$ derékszögű hiperbolának az az ága, amelynek a tengelypontja az A pont.

1421. A k kör egyenlete $x^2+y^2 = r^2$. Ekkor a mértani hely a $3\left(y \pm \frac{2r}{3}\right)^2 - x^2 = \frac{r^2}{3}$ hiperboláknak azok az ívei, amelyek a $(-r;\ 0)$ és $(r;\ 0)$ pontok közé esik. Ha 0 sugarú köröket is megengedünk, akkor az ív végpontjai is a mértani helyhez tartoznak.

1422. A mértani hely az $x = -2p$ egyenes, kivéve az egyenes $(-2p;\ 0)$ pontját.

1423. Legyen $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$. A két ponton áthaladó körök egyenlete $x^2+(y-t)^2 = a^2+t^2$ alakú, ahol t tetszőleges valós szám. Az y tengelytől legtávolabb eső pontok $A_1(-\sqrt{a^2+t^2};\ t)$ és $A_2(\sqrt{a^2+t^2};\ t)$. A mértani hely ebből már könnyen meghatározható. A mértani hely az $x^2-y^2 = a^2$ derékszögű hiperbola.

1424. Az M pont koordinátái legyenek $(x_1;\ y_1)$. Ekkor az e egyenes egyenlete: $2x_1x+2y_1y = x_1^2+y_1^2+rx_1+ry_1$. Először feltételezzük, hogy $x_1y_1 \neq 0$. Ezt, valamint kihasználva azt is, hogy $x_1^2+y_1^2-2rx_1 = 0$, igazolhatjuk, hogy a mértani hely egyenlete:

$$\left(x-\frac{3}{4}r\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}r\right)^2 = \frac{5r^2}{8}.$$

Külön vizsgáljuk meg, hogy az $M_1(2r;\ 0)$ és az $M_2(0;\ 0)$ pontnak megfelelő metszéspontok koordinátái kielégítik-e a kapott köregyenletet.
Az e egyenes az M pont helyzetétől függetlenül a $\left(\frac{3}{2}r;\ \frac{r}{2}\right)$ ponton halad át. Ennek igazolása céljából alakítsuk át e egyenletét.

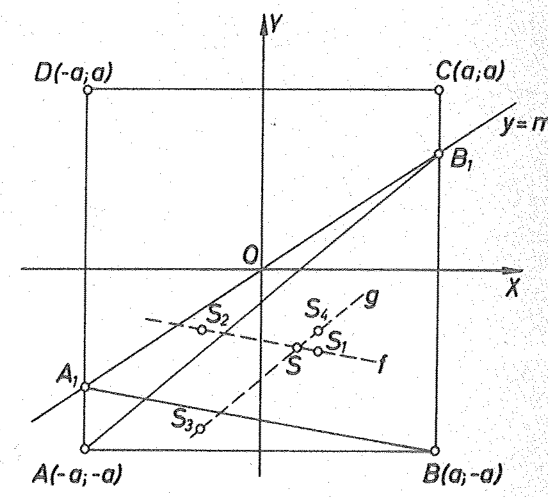
1425. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy az f egyenes legyen az x tengely, e egyenes egyenlete legyen $y = a+b$, az 0 pont koordinátái legyenek $(0;\ b)$. A mértani hely két félegyenes. A koordináta-rendszer fenti megválasztása mellett egyenletük:

$ax+by = -a^2$, ahol $x \leq -a$ és $ax-by = a^2$, ahol $x \geq a$.

1426. A mértani hely egyenes, amely áthalad a B csúcson és a CA befogó B_1 felezéspontján. B_1 pont nem tartozik a mértani helyhez.

1427. Helyezzük el a négyzetet koordináta-rendszerben az 1427. ábrán látható módon.

1427



A lemezt az $y = mx$ egyenes az ABB_1A_1 lemezre és az A_1B_1CD lemezre vágja szét.

Legyen először $-1 \leq m \leq 1$, és keressük meg az ABB_1A_1 lemez súlypontjának mértani helyét.

Vágjuk szét a trapézt az AB_1 átlóval két háromszögre. A trapéz súlypontja rajta van az ABB_1 háromszög S_1 súlypontján és az AB_1A_1 háromszög S_2 súlypontján áthaladó f egyenesen.

Vágjuk szét a trapézt a BA_1 átlóval két háromszögre. A trapéz súlypontja rajta van az ABA_1 háromszög S_3 súlypontján és a BB_1A_1 háromszög S_4 súlypontján áthaladó g egyenesen.

f és g egyenesek metszéspontja adja az ABB_1A_1 lemez S súlypontját.

S koordinátái:

$$x = \frac{ma}{3}; \quad y = \frac{a(m^2-3)}{6},$$

ahol $-\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{a}{3}$ és $-\frac{a}{2} \leq y \leq -\frac{a}{3}$.

Ebből a mértani hely egyenlete: $y = \frac{3}{2a}x^2 - \frac{a}{2}$. A mértani hely a kapott parabolának egy íve. Ha ezt az ívet az x tengelyre tükrözzük, a $-1 \leq m \leq 1$ intervallumnak megfelelő A_1B_1CD lemez súlypontjának mértani helyét kapjuk.

Az $|m| > 1$ esetnek megfelelő mértani hely felkutatását az olvasóra bízzuk.

Megoldás: $y^2 = -\frac{2a}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)$, ahol $\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{a}{2}$ és

$$y^2 = \frac{2a}{3}\left(x + \frac{a}{2}\right), \text{ ahol } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{3}.$$

1428. Ha $S = M$, a csúcsok mértani helye az egész sík, kivéve az S pontot. Tegyük fel, hogy $S \neq M$. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy S az origóban legyen, M pedig illeszkedjék az y tengelyre. M koordinátái $(0; m)$. Két esetet különböztetünk meg.

a) $m > 0$. Ekkor a mértani hely az

$$\frac{\left(y-\frac{m}{2}\right)^2}{\left(\frac{m}{2}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

hiperbolának az az ága, amelyre $y < 0$. (A tengelypont nem tartozik a mértani helyhez.)

b) $m < 0$. Ekkor a mértani hely az

$$\frac{\left(y+\frac{m}{2}\right)^2}{\left(\frac{m}{2}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

hiperbolának az az ága, amelyre $y > 0$.
(A tengelypont nem tartozik a mértani helyhez.)
Az első esetben a $C(0;\, c)$ csúcs az y tengely pozitív, a második esetben az y tengely negatív felén mozoghat. ($c \neq 0$.)

1429. A mértani hely két parabola, amelyek a középponton áthaladó, rögzített egyenesre szimmetrikusak. A paraboláknak az adott körrel való metszéspontjai nem tartoznak a mértani helyhez.

1430. A mértani hely egy, az l egyenessel párhuzamos egyenes, kivéve az egyenesnek a g egyenessel közös pontját.

1431. Legyen az adott kör egyenlete: $x^2+y^2 = r^2$. Ekkor a mértani hely egyenlete: $x^2+y^2 \pm rx = 0$. A mértani hely két kör.

1432. A mértani hely egyenlete: $y_0x+x_0y = 2xy$. Ebből

$$y = \frac{y_0}{2}\cdot\frac{x}{x-\frac{x_0}{2}} = \frac{y_0}{2}+\frac{x_0y_0}{4}\left(\frac{1}{x-\frac{x_0}{2}}\right).$$

A felírt egyenletből rögtön leolvashatjuk, hogy a mértani hely olyan derékszögű hiperbola, amelynek aszimptotái az $y = \frac{y_0}{2}$ és az $x = \frac{x_0}{2}$ egyenes; tengelypontjai az origó és az A pont, középpontja az $\left(\frac{x_0}{2},\ \frac{y_0}{2}\right)$ pont, valós és képzetes tengelye: $2a = 2b = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$, fókusztávolsága $\sqrt{2(x_0^2+y_0^2)}$.
Határozzuk meg a fókuszok koordinátáit is.

1433. A mértani hely egy derékszögű hiperbola.

1434. Az adott pontok koordinátái legyenek $F_1(-c;\, 0)$ és $F_2(c;\, 0)$, a szorzat legyen a. ($a > 0$.) A mértani hely egyenlete:

$$y^2 = \sqrt{a^4+4c^2x^2}-(c^2+x^2).$$

A felírt egyenletből rögtön leolvashatjuk, hogy a mértani helyet ábrázoló görbe a koordinátatengelyekre nézve szimmetrikus.
A diszkusszió elvégzésekor ezért elegendő az első síknegyedre szorítkozni, azokra a pontokra, amelyek koordinátáira $x \geq 0$ és $y \geq 0$.
x csak olyan értékeket vehet fel, amelyekre

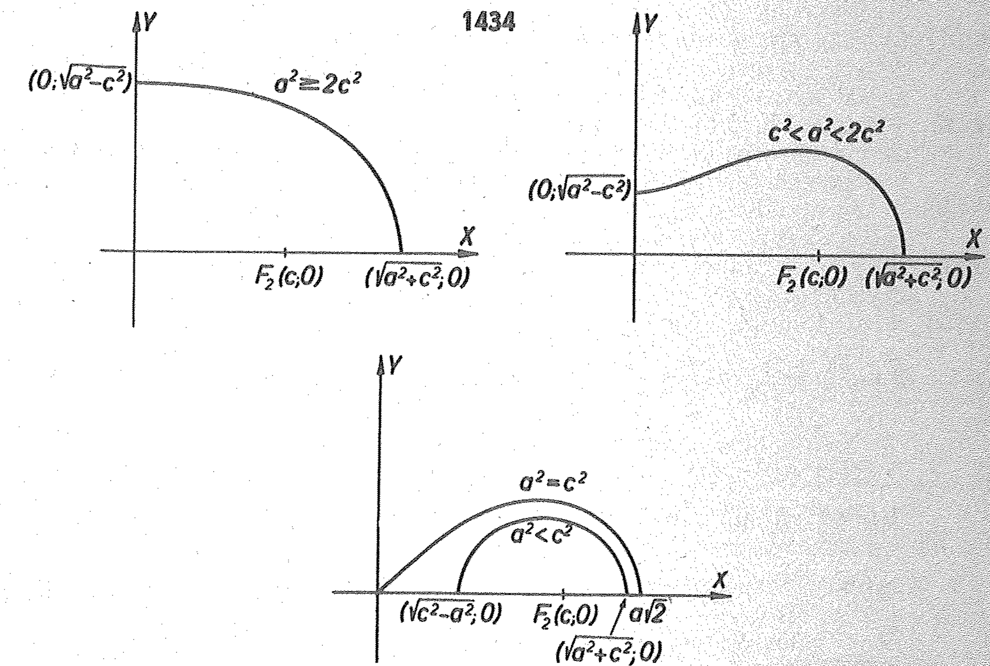
$$a^4+4c^2x^2 \geq (c^2+x^2)^2.$$

Ebből rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$c^2-a^2 \leq x^2 \leq c^2+a^2.$$

Három esetet különböztetünk meg.
Ha $a^2 > c^2$, akkor $0 \leq x \leq \sqrt{c^2+a^2}$.
Ha $a^2 = c^2$, akkor $0 \leq x \leq a\sqrt{2}$.
Ha $a^2 < c^2$, akkor $\sqrt{c^2-a^2} \leq x \leq \sqrt{c^2+a^2}$.
Az első síknegyedben a függvény menetére vonatkozó vizsgálatot a derivált segítségével az olvasóra bízzuk.
Az egyes eseteknek megfelelően a mértani helyet az 1434. ábrán vázoltuk.
A kapott görbét *Cassini-féle* görbének nevezzük.

1434



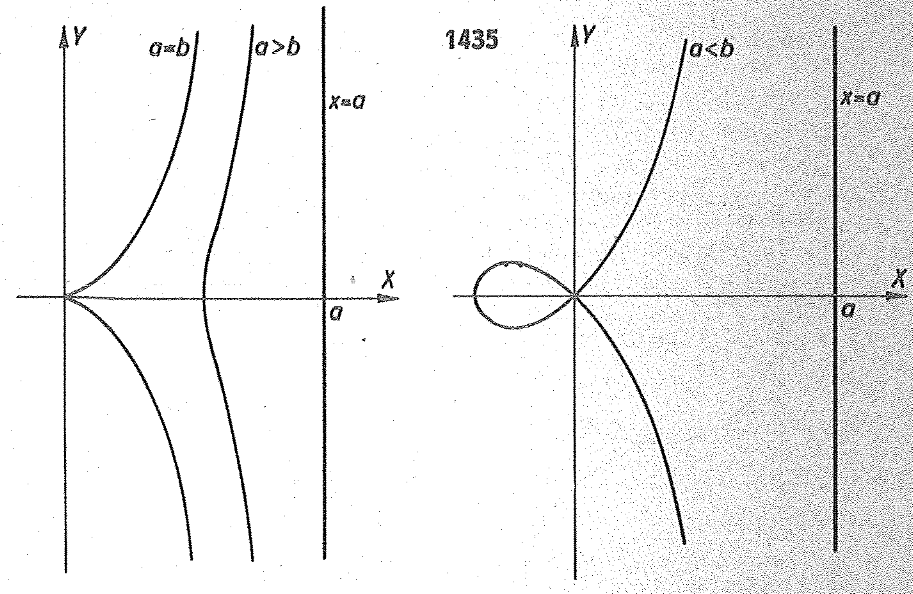
1435. Az $x = a$ egyenest messük az $y = mx$ egyenessel, ahol m tetszőleges valós szám. A feltételnek megfelelő P pont koordinátái ekkor

$$x = a-\frac{b}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad y = m\left(a-\frac{b}{\sqrt{1+m^2}}\right).$$

A mértani hely egyenlete:

$$x^2+y^2=\frac{b^2x^2}{(a-x)^2} \qquad x \neq a.$$

A fenti egyenletből azonnal leolvashatjuk, hogy a mértani helyet ábrázoló görbe az x tengelyre nézve szimmetrikus. Ezért vizsgáljuk a mértani helyet az m paraméter nem negatív értékei mellett ($m \geq 0$).



1435

1. Legyen $a \geq b$. Ha $m = 0$, akkor $x = a-b \geq 0$ és $y = 0$. Ha $m > 0$, akkor
   $\lim\limits_{m\to\infty} x = a$, és $\lim\limits_{m\to\infty} y = \infty$.
   A mértani helyhez tartozó pontok koordinátáira $m \geq 0$ esetén tehát a $0 \leq a-b \leq x < a$ és $y \geq 0$ egyenlőtlenség teljesül.
2. Legyen $a < b$. Ha $m = 0$, akkor $x = a-b < 0$ és $y = 0$.

   Ha $m = \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$, akkor $x = y = 0$.

   Ha $0 < m < \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$, akkor $a-b < x < 0$ és $y < 0$.

   (A derivált segítségével meghatározhatjuk m-nek azt az értékét, amelyre abban az intervallumban y értéke a legkisebb.)

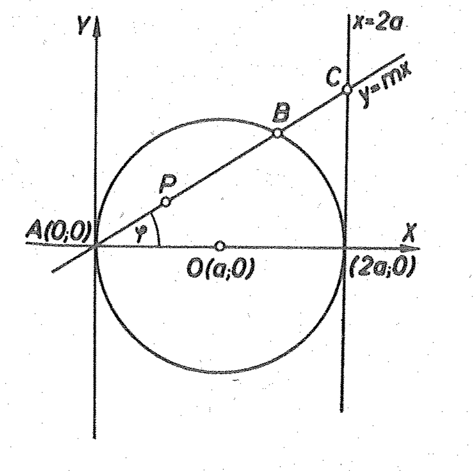
   Ha $m > \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$, akkor $0 < x < a$ és $y > 0$.

   Az elmondottak alapján vázolhatjuk a mértani helyet ábrázoló görbét (1435. ábra).
   A kapott görbét *quadratrixnak* nevezzük.

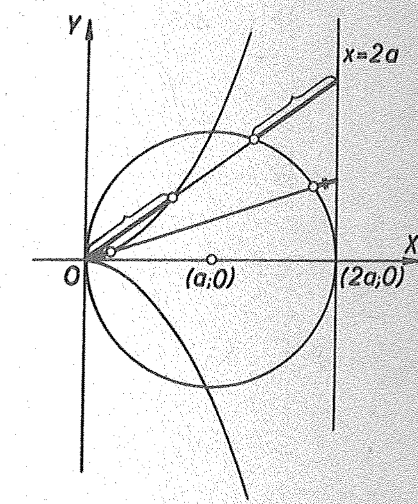
1436. Jelöléseinket az 1436.*a)* ábrán láthatjuk.
Válasszuk paraméternek az e egyenes φ irányszögét. ($-90° < \varphi < 90°$.) Ekkor C koordinátái $(2a;\ 2a \operatorname{tg} \varphi)$, B koordinátái $(2a \cos^2 \varphi;$
$2a \sin \varphi \cos \varphi)$, P koordinátái $\left(2a \sin^2 \varphi;\ 2a \dfrac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi}\right)$.

A mértani hely egyenlete: $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$, ahol $0 \leq x < 2a$.

1436 a



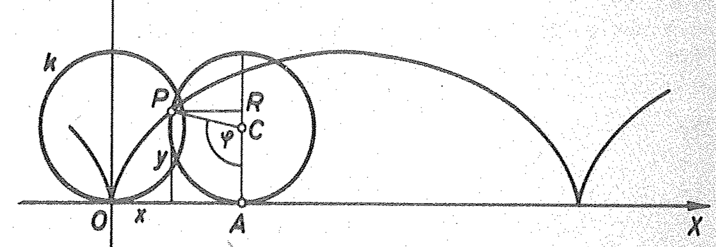
1436 b



A mértani hely görbéjének vizsgálatát az 1435. feladat megoldásában követett módszerhez hasonlóan végezhetjük el.
A görbét az 1436.*b)* ábrán láthatjuk.
A kapott görbét *cisszoidnak* nevezzük.

1437. Feltételezzük, hogy a gördülés iránya az x tengely pozitív irányába mutat. Alkalmazzuk az 1437.*a)* ábrán látható jelölést. Tegyük fel, hogy

1437 a



az adott k kör O ponttól előregördült A pontig. Ekkor az O pont olyan P pontba jut, amelyre

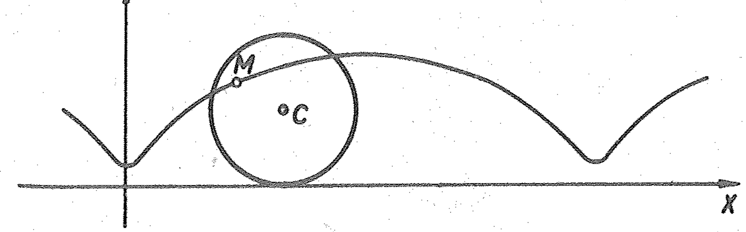
$\overset{\frown}{AP}$ körív $= OA$ szakasz.

P koordinátái a $\varphi = POA \sphericalangle$ segítségével meghatározhatók.

$x = OA-PR = r\varphi - r \sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi)$,

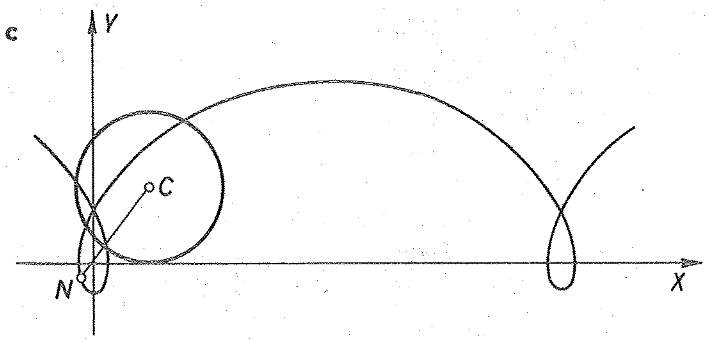
$y = CA+RC = r+r\cos\varphi = r(1+\cos\varphi)$.

1437 b



A P pontnak a kör egy teljes gördülésekor leírt pályáját az ábrán szaggatott vonallal feltüntettük.

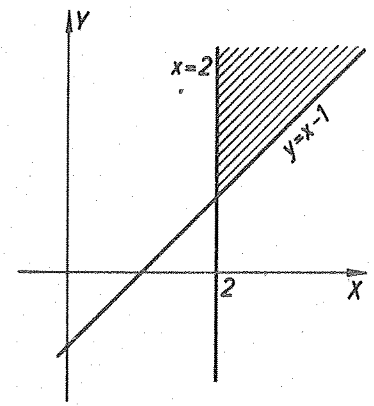
1437 c



A P pont által leírt görbét *cikloisnak* nevezzük.

Megemlítjük, hogy a kör belsejében rögzített M pont a kör gördülésekor az 1437. *b)* ábrán látható úgynevezett nyújtott cikloist írja le. A körhöz rögzített és a körön kívüli N pont pedig az 1437. *c)* ábrán látható hurkolt cikloison mozog.

1438 a



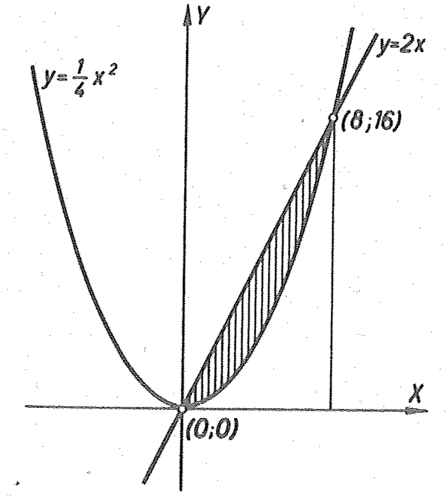
1438. *a)* Azok a pontok, amelyeknek koordinátái kielégítik az adott egyenlőtlenségeket, az 1438. *a)* ábrán bevonalkázott síktartományban vannak. (A síktartományt határoló félegyenesek pontjai is hozzátartoznak a mértani helyhez!)

i) Azok a pontok, amelyeknek koordinátái kielégítik az adott egyenlőtlenségeket, a $(-1; 1)$, $(4; 2)$ és $(3; 5)$ pontokkal megadott háromszög belső pontjai.

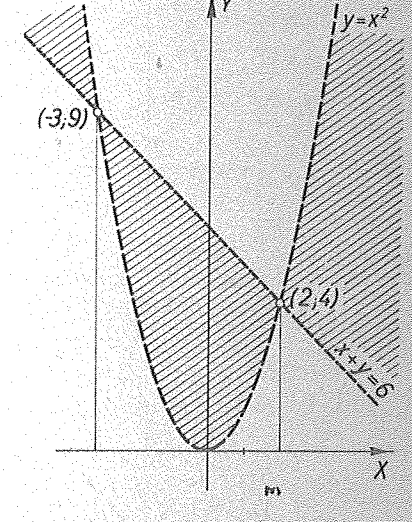
j) A mértani hely az (1; 1) és (6; 4) pontokat összekötő szakasz belső pontjai.

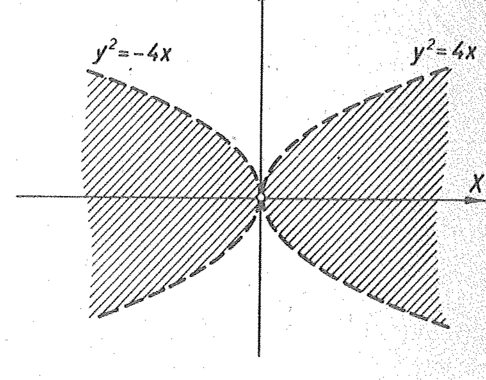
o) A mértani hely az 1438. *o)* ábrán látható bevonalkázott parabolaszelet. (A síktartományt határoló vonalak *is* hozzátartoznak a mértani helyhez.)

1438 o



1439 a





1439 e

1439. *a)* Két esetet különböztetünk meg:

$$y-x^2>0 \quad \text{és} \quad x+y-6<0$$

vagy $y-x^2<0$ és $x+y-6>0$.

A megoldást az 1439. *a)* ábrán láthatjuk.
A síktartományt határoló vonalak nem tartoznak a mértani helyhez.

e) Vegyük figyelembe azt, hogy

$$|4x| = \begin{cases} 4x, \text{ ha } x \geq 0 \\ -4x, \text{ ha } x < 0. \end{cases}$$

A megoldást az 1439. *e)* ábrán láthatjuk.
A parabolák pontjai nem tartoznak a mértani helyhez.

1440. Alkalmazzuk az 1267. feladat megoldásakor követett gondolatmenetet. Megoldás: $k = 22$. Ekkor az $5x+6y = 22$ egyenes áthalad a (2; 2) ponton.

1441. Az A típusú szendvicsből x db, a B típusú szendvicsből y db készült. Ekkor

$$3x+2y \leq 120$$

$$3x+y \leq 100$$

$$2x+5y \leq 200$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2} \leq 20$$

$$x \geq 0 \quad \text{és} \quad y \geq 0.$$

Keressük a megadott feltételek mellett az $x+y = d$ függvényben d legnagyobb értékét.

Azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek koordinátái kielégítik a fenti egyenlőtlenség-rendszert, egy ötszög kerületének és belsejének pontjai.

Az ötszög csúcsai $(0; 0)$, $\left(\frac{100}{3}; 0\right)$, $\left(\frac{80}{3}; 20\right)$, $(20; 30)$, $(0; 40)$. d legnagyobb értéke 50. Ekkor $x = 20$, $y = 30$.

1442. Tegyük fel, hogy az A típusú ruhákból egy műszak alatt x db, a B típusú ruhákból egy műszak alatt y db készül.

Ekkor teljesülnie kell az

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$3x+3y \leq 420$$

$$x+4y \leq 440$$

$$x \leq 80$$

egyenlőtlenségeknek.

a) esetben A értékét úgy kell megválasztani, hogy a $60x+30y = A$ összeg, (A értéke) maximális legyen.

Megoldás: $x = 80$, $y = 60$. $A_{\max} = 6600$ Ft.

b) esetben a megoldás: $x = 40$, $y = 100$,

c) esetben a megoldás: $x = 80$, $y = 60$.

Mindhárom követelményt egyszerre kielégítő termelési program nem létezik.

1443. Megoldás: Az A típusú munkadarabból 40, a B típusú munkadarabból 20 db-ot kell előállítani. A maximális nyereség ekkor $N = 40 \cdot 0{,}72 + 20 \cdot 0{,}35 = 35{,}8$ Ft.

TARTALOM

JAVASOLT SZAKIRODALOM

RUZSA IMRE:
A MATEMATIKA NÉHÁNY FILOZÓFIAI PROBLÉMÁJÁRÓL

RUZSA IMRE — URBÁN JÁNOS:
MATEMATIKAI LOGIKA

A matematikai tudományok az utolsó évtizedekben hatalmas méretű fejlődést mutatnak, alkalmazásuk behatol a természettudományok számos területére. A gazdagon illusztrált kötet két tanulmánya a tudományos munkában nélkülözhetetlenné vált logikai struktúrák és a velük való műveletek kérdéseit tárgyalja, alapozást adva ahhoz, hogy a különböző természettudományok és társadalomtudományok ágazataiban miként használható fel a mai modern matematikai szimbolika. A kötet két tanulmánya foglalkozik technikai kérdésekkel is, és vázlatosan bemutatja alkalmazásukat a nyelvtudományok, a biológia, a pszichológia stb. területén.

TAKÁCS LAJOS–L. ZIERMANN MARGIT:
VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

A könyvnek az a célja, hogy az olvasó képet kapjon arról, hogyan lehet a valószínűségszámítás segítségével leírni a tapasztalati valóságot. A könyv megismerteti az olvasóval a valószínűségszámítás eredményeit, tételeit, és megmutatja, hogyan lehet azokat egyszerű feladatok megoldására felhasználni. Foglalkozik a könyv a klasszikus valószínűségszámítási feladatokkal (érmedobás, kockadobás, golyók húzása urnából stb.) Ezzel bemutatja a fejlődés első szakaszait, de felhasználja ezeket bonyolultabb feladatok megoldásához is. Ismerteti a valószínűségszámítás legújabb elméletének alapjait is.

SCHOPP JÁNOS:
KÚPSZELETEK

A füzet célja az, hogy a műszaki életben gyakran előforduló görbékről — a kúpszeletekről —, alapos tárgyi ismeretet nyújtson. A másik célja az, hogy gondolkodásra neveljen. Ezért csaknem minden fejezethez olyan feladatok csatlakoznak, amelyeknek megoldásához a tárgyalt ismeretek alkalmazása szükséges. A nehezebb feladatok megoldásához a könyv ötleteket is ad.

REIMAN ISTVÁN:
GEOMETRIAI FELADATOK MEGOLDÁSA A KOMPLEX SZÁMSÍKON

A könyv néhány planimetriai feladatnak a komplex számsíkon való megoldását ismerteti és mutatja be. Nem az a célja, hogy a feladatok megoldását adja, hanem az, hogy olyan módszereket mutasson be, amelyek segítségével a komplex számsík által geometriai feladatok megoldhatók. A feladatok a könyvben egymásra épülnek s így a legegyszerűbb megoldási módszerek bemutatása válik lehetővé.

KÜRSCHÁK J.–HAJÓS GY.–NEUKOMM GY.–SURÁNYI J.:

MATEMATIKAI VERSENYTÉTELEK I—II. KÖTET

Magyarországon 1894 óta minden évben versenyt rendeztek (ma ezeket Kürschák-versenynek nevezik) a középiskolát végzett tanulók számára. Az évek során igen sok feladat szerepelt ezeken a versenyeken. E feladatok különböző megoldásait és a hozzájuk tartozó elméleti kiegészítéseket és történeti vonatkozásokat tartalmazza ez a két kötet, amelyek ma már nemcsak nálunk, de határainkon túl is népszerűek lettek.

DR. FARAGÓ LÁSZLÓ:

A SZÁMELMÉLET ELEMEI

Tárgyalja a számelmélet elemeinek elméletét szorosan kapcsolódva azokhoz az ismeretekhez, amelyeket a tanulók iskolai tanulmányaik során szereztek. A számok oszthatóságával kezdi a tárgyalást, és az egyszerű kongruenciák megoldásával zárja. Ismertet néhány számelméleti tételt. Sok megoldott feladatot közöl, de tartalmaz megoldásra kitűzött feladatokat is.

DR. BACSKAY ZOLTÁN:

KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSOK

A könyv első megjelenése alkalmával is időszerű volt, s ez az időszerűség azóta megnövekedett, mivel a közelítő számítások elemei az általános iskola felső tagozatában is a tantervi anyag közé kerültek. A könyv tárgyalja a közelítő számítások elemeit, rámutat a közelítő számítások gyakorlati jelentőségére, feladatokon keresztül mutatja meg az ismertetett elmélet gyakorlati alkalmazását.

DR. FARAGÓ LÁSZLÓ–FORGÓ PÉTERNÉ:

GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK

A középiskolai tananyaghoz szorosan kapcsolódnak azok a geometriai szerkesztési feladatok, amelyeknek helyenként több megoldási módját is ismerteti a könyv. A kidolgozott feladatok nagy része még a tankönyveinkben található ismereti anyagon felül is nyújt az olvasónak elméleti anyagot (például inverzió). A megoldott feladatokon kívül gyakorlásra szánt feladatok is találhatók a könyvben s ezek némelyikéhez a könyv egy külön részében megoldási útmutatás is van.