z) az egyik aszimptotája, a középpontja és két pontja;
x) a két aszimptotája és egyik pontja;
y) a két aszimptotája és egyik érintője.

1105. Adott a hiperbola két fókusza, a valós tengelyének a hossza és a hiperbola síkjában az e egyenes. Szerkesszük meg az e egyenes és a hiperbola metszéspontjait.

1106. Adott a hiperbola két fókusza, két tengelypontja és a síkjában egy P pont. Szerkesszünk a P pontból a hiperbolához érintőt.

1107. Adott a hiperbola két fókusza és a valós tengelyének a hossza. Szerkesszük meg a hiperbola egyik P pontját. Szerkesszük meg a hiperbola P pontjához tartozó érintőjét.

1108. Adott a hiperbola két aszimptotája és egyik érintője. Szerkesszük meg a hiperbola fókuszait és az adott érintőn az érintési pontot.

1109. Szerkesszük meg a hiperbola aszimptotáit (aszimptotáját), ha
a) adott a hiperbola középpontja, a valós tengelyegyenese és két pontja;
b) adott az egyik fókusza és két érintője, amelyek közül az egyik a hiperbolát a tengelypontban érinti;
c) adott az egyik aszimptotája és három pontja;
d) adott az egyik aszimptotája, az egyik fókusza és a fókuszok távolsága.

A PARABOLA

A PARABOLA EGYENLETE

1110. Rajzoljunk egy egyenest, és tőle 5 cm távolságra jelöljünk ki egy pontot. Szerkesszünk olyan köröket, amelyek az egyenest érintik, és áthaladnak a kitűzött ponton.

1111. Szerkesszük meg a parabola néhány pontját, ha a tengelyponti egyenlete:

$$a)\ x^2 = 8y; \quad b)\ y = \frac{1}{4}x^2; \quad c)\ x^2 = -2y; \quad d)\ x^2 = -\frac{1}{3}y.$$

1112. Egy pontot a parabola belső vagy külső pontjának nevezünk aszerint hogy a fókusztól mért r és a vezéregyenestől mért t távolságára

$$r - t < 0, \quad \text{vagy} \quad r - t > 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges pontjának koordinátáira $x^2 < 2py$, illetve $x^2 > 2py$ aszerint, hogy a pont az $x^2 = 2py$ parabola belső vagy külső pontja.

1113. Vizsgáljuk meg, hogy az (1; 2); (−3; 1); (6; 3) és a (−7; 4) pontok az $x^2 = 12y$ parabola belső vagy külső pontjai-e?

1114. A p_1 és p_2 paraboláknak közös a vezéregyenese, a fókuszok az e egyenesre illeszkednek. A p_1 paramétere 4, a p_2 paramétere 6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan középpontos hasonlóság, amely a p_1 parabolát a p_2 parabolába viszi át. Mi a hasonlóság aránya?

1115. Bizonyítsuk be, hogy ha a parabola paramétere p és
a) a tengelypontja az origó, a fókusza az y tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y = -\frac{1}{2p}x^2$;

b) a tengelypontja az origó, a fókusza az x tengely pozitív oldalán van, akkor az egyenlete $y^2 = 2px$;

c) a tengelypontja az origó, a fókusza az x tengely negatív oldalán van, akkor az egyenlete $y^2 = -2px$.

Mi az egyenlete annak a parabolának, amelynek a tengelypontja az origó, és

d) áthalad a (12; 6) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;

e) áthalad a (4; 4) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;

f) áthalad a (−4; 3) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely;

g) áthalad a (−8; −6) ponton, tengelye az y, illetve az x tengely?

1116. Írjuk fel a parabola tengelyponti egyenletét, ha a fókusza az

a) (0; 4); *b)* (0; −3); *c)* (0; 2); *d)* (0; −8);

e) (4; 0); *f)* (−5; 0) pont?

1117. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) a fókusza a (−7; 0) pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $x - (-7) = 0$;

b) a fókusza a (0; −4) pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $y - (-4) = 0$.

1118. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) a vezéregyenesének az egyenlete $y + 1 = 0$, a fókusza a (4; 3) pont;

b) a vezéregyenesének az egyenlete $y - 3 = 0$, a fókusza a (2; −3) pont;

c) a vezéregyenesének az egyenlete $y - 6 = 0$, a fókusza a (3; −2) pont;

d) a vezéregyenesének az egyenlete $x - 1 = 0$, a fókusza a (4; 2) pont;

e) a vezéregyenesének az egyenlete $x + 4 = 0$, a fókusza a (−1; 3) pont;

f) a tengelypontja a (−1; 2), fókusza a (−1; 4) pont;

g) a tengelypontja a (4; 2), fókusza a (8; 2) pont;

h) a fókusza a (0; 6) pont, a tengelye az y tengely és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 8 egység;

i) a fókusza a (6; 2) pont, a tengelye párhuzamos az x tengellyel és a fókuszának a vezéregyenestől való távolsága 4 egység.

1119. Mi a feltétele annak, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ parabola áthaladjon a következő ponton:

a) (0; 0); *b)* (2; 1); *c)* (−4; 0); *d)* (3; −2).

1120. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelypontja az $y = 2$ egyenesre illeszkedik, áthalad a (0; 8) ponton, paramétere 3, és a tengelye párhuzamos az y tengellyel.

1121. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelye párhuzamos az x tengellyel, paramétere $\frac{1}{2}$, és áthalad a (−6; 4) és a (9; 1) pontokon.

1122. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) a tengelypontja az y tengelyre illeszkedik, tengelye párhuzamos az x tengellyel, és áthalad a (−4; 1) és a (−1; 1) pontokon;

b) a tengelypontja az x tengelyen van, szimmetriatengelye párhuzamos az y tengellyel, és áthalad a (2; 3) és a (−1; 12) pontokon.

1123. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad

a) a $(-2; 3)$; $(4; 0)$; $(8; 8)$ pontokon;
b) a $(-3; 2)$; $(0; 0)$; $(3; 2)$ pontokon;
c) a $(4; 5)$; $(-2; 11)$; $(-4; 21)$ pontokon;
d) az $(1; 1)$; $(3; 0)$; $(4; -4)$ pontokon,

és tengelye párhuzamos az y tengellyel.

1124. Egy parabola tengelye az x tengely, tengelypontja a $(-5; 0)$ pont, és az y tengelyből 12 egység hosszúságú húrt metsz ki. Írjuk fel a parabola egyenletét.

1125. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja az $(a; 0)$ pont, és az y tengelyt a $(0; b)$ és $(0; -b)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az x tengellyel.

1126. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha az y tengelyt a $(0; b)$, az x tengelyt az $(a; 0)$; $(-a; 0)$ pontokban metszi, tengelye párhuzamos az y tengellyel.

1127. Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa a $(2; 1)$ pont, a vele szemközti oldal 8 egység, és párhuzamos az y tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelye párhuzamos az x tengellyel, és az egyenlő oldalú háromszög csúcsain halad át. Hány megoldás van?

1128. Parabolikus tartószerkezetű híd fesztávolsága 60 m, középső legmagasabb pontja 15 m-re emelkedik a vízszintes út fölé. Számítsuk ki a függőleges tartóvasak hosszát, ha azok a híd egyik végétől kiindulva 5 m-enként helyezkednek el.

1129. Egy a vízszinteshez hegyesszögben elhajított kő az eldobástól számítva 36 m-re esett le, és 12 m-re emelkedett. Írjuk fel a röppálya egyenletét.

1130. A vízszintes talajszintjén elhelyezett szökőkútból kilépő víz röppályája parabola, melynek paramétere $\frac{1}{10}$. Milyen magasra emelkedik a vízsugár, ha a szökőkút nyílásától 2 m-re jut vissza a talajra?

1131. Az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsa az origóban van, a BC oldala párhuzamos az y tengellyel. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek fókusza A, és áthalad a B és C csúcsokon. A háromszög oldala a.

1132. Az $x^2+y^2=r^2$ körben az x tengelyre illeszkedő átmérő és az $y=b$ $(0<b<r)$ egyenletű húr végpontjai parabolát határoznak meg. Írjuk fel e parabola egyenletét.

1133. Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének az egyenletét, ha a parabola egyenlete:

a) $y^2=24x$; *b)* $y^2=-8x$; *c)* $x^2=6y$; *d)* $x^2+y=0$;
e) $4y^2+x=0$; *f)* $(x-5)^2=8(y+6)$; *g)* $(y-2)^2=12(x+3)$;
h) $(y-3)^2=-4(x+1)$; *i)* $y^2=4x-8$; *j)* $y^2=4-6x$;
k) $x^2=6y+2$; *l)* $x^2=2-y$; *m)* $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$;
n) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$; *o)* $y^2-10x-2y-19=0$; *p)* $y=Ax^2+Bx+C$.

1134. Határozzuk meg

a) az $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$; *b)* az $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$ parabola tengelypont-

jának és a fókuszának a koordinátáit, ha a parabolát az $y = x$ egyenesre tükrözzük.

1135. Milyen hosszú az $x^2 = 8y$ parabolának az a húrja, amely az $y_1 = 4$, $y_2 = 12$ ordinátájú pontjait köti össze.

1136. Számítsuk ki az $x^2 = 6y$ parabola 6 abszcisszájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

1137. Számítsuk ki az $x^2 = 12y$ parabola 6 ordinátájú pontjának a fókusztól mért távolságát.

A PARABOLA ÉS EGYENES

1138. Határozzuk meg

a) az $y = \frac{1}{6}x^2$ parabola és a $2x-3y+6 = 0$ egyenes;

b) az $y = -\frac{1}{9}x^2$ parabola és a $4x+3y-12 = 0$ egyenes;

c) az $y^2 = 4x$ parabola és az $x+y-3 = 0$ egyenes közös pontjainak a számát.

1139. Számítsuk ki az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabola $7x-3y-30 = 0$ egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát.

1140. Milyen hosszú az $y = \frac{1}{9}x^2$ parabolának az a húrja, amelynek egyenese fókuszon halad át, és az egyik irányvektora $\mathbf{v}(3; \sqrt{3})$?

1141. Az $y = \frac{1}{6}x^2$ parabola tengelypontjából húzzuk meg azt a húrt, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(1; \sqrt{3})$, azután rajzoljuk meg a tengelypontból a reá merőleges húrt. Számítsuk ki, hogy a húrok nem közös végpontjain áthaladó egyenes mely pontokban metszi a koordinátatengelyeket.

1142. Határozzuk meg az $y = \frac{x^2}{4}$ parabolának azokat a pontjait, amelyek a $P_1(-1; 5)$ és a $P_2(5; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak.

1143. Írjuk fel az $y = \frac{1}{20}x^2$ parabola olyan húrjának az egyenletét, amely áthalad az (5; 2) ponton, és ez a pont a húrt felezi.

1144. Írjuk fel az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolába írt háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha a háromszög egyik csúcsa a parabola tengelypontja, a magasságpontja a parabola fókusza. (Parabolába írt háromszögnek az olyan háromszöget mondjuk, amelynek csúcsai a parabolára illeszkednek.)

1145. Az egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa az $x^2 = 2py$ parabola tengelypontja, a másik két csúcsa a parabolára illeszkedik. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

1146. A súlydobó a golyót a vízszintes talaj felett h magasságból löki el c kezdősebességgel. A kezdősebesség iránya a vízszintessel α szöget zár be. A golyó az A pontban esik a talajra. Mekkora az OA távolság, ha O a súlydobó talpának a helyét jelenti.

1147. A $P_1(-10;\ y_1)$ és a $P_2(15;\ y_2)$ pontok az $y = \frac{1}{10}x^2$ parabolára illeszkednek. Számítsuk ki a parabola P_3 pontjának a koordinátáit, ha a $P_1P_2P_3$ háromszög területe $31\frac{1}{4}$ területegység.

1148. Vizsgáljuk meg a következő parabolák és egyenesek viszonylagos helyzetét:

a) $y = \frac{1}{8}x^2,\quad x-y-2=0;$

b) $x^2+3y=0,\quad 8x+3y-15=0;$

c) $y^2+5x=0,\quad 5x-y-15=0;$

d) $y^2=4x,\quad x+3y+9=0.$

1149. Igazoljuk, hogy az $y = mx+\frac{a}{m}\ (m\neq 0)$ egyenes az $y^2=4ax$ parabola érintője. (Azt az egyenest, amely nem párhuzamos a parabola tengelyével, egyetlen közös pontja van a parabolával, és a parabola síkjában van, a parabola érintőjének mondjuk. Az érintő tehát olyan egyenes, amelynek az érintési pont kivételével minden pontja a parabola külső pontja.)

1150. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $ax+bx+c=0$ egyenes érintse az $y^2=2px$ parabolát?

1151. Igazoljuk, hogy az $y^2=2px$ parabola $(x_1;\ y_1)$ pontjához tartozó érintő egyenlete $yy_1=p(x+x_1)$. Írjuk fel ennek alapján az $y^2=8x$ parabola 1, 2, 3 abszcisszájú pontjaiban húzható érintők egyenletét.

1152. Bizonyítsuk be, hogy a parabola érintője a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) a fókuszból az érintőre húzott merőleges talppontja a tengelyponthoz tartozó érintőre illeszkedik;

b) a fókusznak az érintőre vonatkozó tükörképe a vezéregyenesre illeszkedik;

c) az $y^2=2px$ parabola bármelyik a tengelyponthoz tartozó érintőtől különböző érintője az y tengelyből feleakkora szakaszt vág le, mint amekkora az érintési pont ordinátája;

d) az $y^2=2px$ parabola bármelyik érintője az x tengelyt olyan pontban metszi, amelynek az origótól mért távolsága egyenlő az érintési pont abszcisszájával.

1153. Szerkesszük meg adott parabola adott pontjához tartozó érintőjét.

1154. Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus tükör fókuszából kiinduló fénysugarak visszaverődés után a parabola tengelyével párhuzamosan haladnak és megfordítva, a parabola tengelyével párhuzamosan haladó fénysugarak a visszaverődés után a fókuszon haladnak át.

1155. Az $y^2=12x$ parabola 2, 6, -3 ordinátájú pontjaiban a parabolához érintőket húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatározott háromszög és az érintők alkotta háromszög területeinek az arányát.

1156. Az $y^2 = 16x$ parabola fókuszán át húrt fektetünk, melynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(1; \sqrt{3})$. Számítsuk ki a húr végpontjaiban húzható érintők hajlásszögét.

1157. Az $y^2 = 2px$ parabola $(x_1; y_1)$ pontjához tartozó érintőre merőlegest állítunk az érintési pontban. Mely pontokban metszi ez az egyenes (a normális) a koordinátatengelyeket?

1158. Az $y^2 = 2px$ parabola érintője és a hozzá tartozó normális egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja az x tengelyre illeszkedik. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.

1159. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $y^2 = 2px$ parabolát a fókuszán áthaladó és a tengelyére merőleges húr végpontjaiban érinti.

1160. Határozzuk meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx - 2$ egyenes érintse az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolát.

1161. Határozzuk meg m értékét úgy, hogy az $y = mx - 4$ egyenes érintse az $y^2 = -8x$ parabolát.

1162. Mekkorára kell választani b értékét ahhoz, hogy az $y = x + b$ egyenes messe, érintse, illetve elkerülje az $y = x^2$ parabolát?

1163. Határozzuk meg a b értékét úgy, hogy az $y = x + b$ egyenes érintője legyen az $y^2 = 4x$ parabolának.

1164. Mi a feltétele annak, hogy az $y = mx + b$ egyenes érintse az $y^2 = 2px$ parabolát?

1165. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolának az $y = -x + 4$ egyenessel párhuzamos érintőjét.

1166. Az $y^2 = 8x$ parabolához érintőt húzunk, amely párhuzamos az $y = x$ egyenessel. Írjuk fel az érintő egyenletét.

1167. Az $x^2 = 16y$ parabolához érintőt húzunk, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenesre. Írjuk fel az érintő egyenletét.

1168. Írjuk fel az $y^2 = 12x$ parabola érintőjének az egyenletét

a) az $x = 3$ abszcisszájú pontjaiban;

b) amely párhuzamos a $3x - y + 5 = 0$ egyenessel;

c) amely merőleges a $2x + y - 7 = 0$ egyenesre;

d) amely 45°-os szöget zár be a $4x - 2y + 9 = 0$ egyenessel.

1169. Az $y^2 = 2px$ parabolához érintőt húzunk, amely párhuzamos az $y = x$ egyenessel. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit.

1170. Milyen messze van a $3x + 4y + 46 = 0$ egyenes az $y = \frac{1}{64}x^2$ parabolától?

1171. Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolánál a p értékét úgy, hogy a parabola

a) az $y = \frac{x}{2} + 1$ egyenest érintse;

b) az $x - 2y + 5 = 0$ egyenest érintse.

1172. Mekkora az $y^2 = 2px$ parabola paramétere, ha az az $ax + by + c^2 = 0$ egyenest érinti?

1173. Tekintsük az

$$y = (p-1)x^2+2px+4$$

egyenlettel jellemzett g_p görbesereget:

a) Határozzuk meg a p paramétert úgy, hogy g_p érintse az x tengelyt. (Az érintési pont legyen A.)

b) Határozzuk meg p-t úgy, hogy a g_p parabola tengelypontja az y tengelyen legyen. (A tengelypont legyen B.)

c) Mutassuk meg, hogy a fenti két görbe az AB szakasz felezőpontjára szimmetrikus.

d) Létezik-e olyan pont, amelyen a görbesereg minden görbéje átmegy?

1174. Határozzuk meg a (9; 2) pontból az $y = \frac{1}{36}x^2$ parabolához húzható érintők egyenletét.

1175. Határozzuk meg az (5; −7) pontból az $y^2 = 8x$ parabolához húzható érintők egyenletét.

1176. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amelyből az $y^2 = 4x$ parabolához húzott érintők a tengelyponthoz tartozó érintővel egyenlő oldalú háromszöget alkotnak.

1177. Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabolának azt az érintőjét, amelynek az érintési pont és az x tengely közé eső szakasza 20 egység.

1178. Számítsuk ki az alábbi parabolák metszéspontjait:

a) $y^2 = 2x$ és $x^2 = y$; *b)* $x^2 = 3y$ és $x^2 = y-2$; *c)* $y^2+x-2y = 0$ és $x^2 = y$; *d)* $y = x^2$ és $2x = 3y-y^2$; *e)* $y = x^2$ és $y^2+6x-7y = 0$; *f)* $y = x^2+x$ és $y^2-8y+12x = 0$; *g)* $x^2-4x-4y = 4$ és $4x^2 = 4x+4y$; *h)* $y^2 = 2px$ és $y^2 = px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

1179. Egy parabola tengelypontja az $y^2 = 8x$ parabola fókusza, a fókusza pedig az adott parabola tengelypontja. Számítsuk ki a parabolák metszéspontjait.

1180. Számítsuk ki a parabola és a kör metszéspontjait, ha egyenletük:

a) $y^2 = \frac{9}{4}x$ és $x^2+y^2 = 25$; *b)* $y^2 = 18x$ és $x^2+12x+y^2-64 = 0$.

1181. Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabolának azt a pontját, amely a fókuszától 13 egység távolságra van.

1182. Milyen távolságra van a tengelyponttól az $y^2 = 4{,}5x$ parabolának az a pontja, amely a fókusztól $9\frac{1}{8}$ egységnyi távolságra van?

1183. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelypontja a (0; −5) pont, és érinti az $x^2+y^2 = 9$ kört. (A parabola tengelye az y tengely.)

1184. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely az $(x-11)^2+y^2 = 40$ kört érinti, tengelypontja az origóban van, és a tengelye az x tengely. Határozzuk meg az érintési pontok koordinátáit.

1185. Adott az $(x-a)^2+y^2 = r^2$ kör ($a > 0$). Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az adott kör az $y^2 = 2px$ parabolát érintse.

1186. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ ellipszis és az $y^2=\frac{20}{3}x$ parabola közös érintőinek az egyenletét.

1187. Számítsuk ki

a) az $x^2+y^2=16$ és az $y^2=6x$;

b) az $x^2+y^2=p^2$ és az $y^2=2px$

görbék hajlásszögét. Írjuk fel az *a)* esetben a görbék közös érintőinek az egyenletét.

1188. A $49x^2+100y^2=4900$ ellipszis középpontja legyen annak a parabolának a fókusza, amelynek a tengelypontja a (0; 7) pont. Számítsuk ki az ellipszis és a parabola közös pontjainak a koordinátáit.

1189. A $64x^2-49y^2=3136$ hiperbola középpontja legyen annak a parabolának a fókusza, amelynek a tengelypontja a $(-7; 0)$ pont. Számítsuk ki a parabola és a hiperbola közös pontjainak a koordinátáit.

1190. Az $y^2=2px$ parabolából az $x=a$ egyenessel ($a>0$) egy parabolaszeletet határolunk el. Szerkesszünk a parabolaszeletbe maximális területű téglalapot, amelynek középvonala a parabola tengelyére illeszkedik.

1191. Rajzoljuk meg az $y^2=2px$ parabola egyik, a tengelypontjától különböző P pontjához tartozó érintőjét. Az érintőre rajzoljunk merőlegest az érintési pontban. Ez az egyenes az x tengelyt Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasznak az x tengelyre eső merőleges vetülete nem függ a P pont megválasztásától.

1192. Bizonyítsuk be, hogy a parabola három érintője által meghatározott háromszög köré rajzolható kör áthalad a fókuszon.

1193. Tekintsük a parabolának azokat a húrjait, amelyek a parabola tengelypontjából derékszögben láthatók. Bizonyítsuk be, hogy ezek a húrok egy rögzített ponton haladnak át.

1194. Két parabolának közös a tengelye és a fókusza. A tengelypontokat a fókusz elválasztja egymástól. Bizonyítsuk be, hogy a két parabola hajlásszöge 90°. (Két parabola hajlásszögét a metszéspontban a parabolákhoz húzott érintők hajlásszögével definiáljuk.)

1195. Bizonyítsuk be, hogy a parabola vezéregyenesének tetszőleges pontjából a parabolához húzott két érintő érintési pontja és a fókusz egy egyenesre illeszkednek.

1196. A parabola belsejében rögzítsünk egy P pontot. A P ponton áthaladó és a tengellyel nem párhuzamos e egyenes a parabolát R és S pontokban metszi. A P, R, S pontoknak a vezéregyenesre eső merőleges vetületei rendre P_1, R_1, S_1. Bizonyítsuk be, hogy a $P_1R_1 \cdot P_1S_1$ szorzat nem függ az e egyenes megválasztásától. (A parabola belsején azt a síktartományt értjük, amelynek pontjaira $r-t<0$. 1112. feladat.)

1197. Bizonyítsuk be, hogy a parabolának a tengelyére vonatkozó merőleges affinitással származtatott képe parabola. Határozzuk meg a transzformált parabola paraméterét, ha az affinitás aránya: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 2; λ.

1198. Rajzoljuk meg a parabola egyik külső P pontjából az érintőket. Az érintési pontokat jelöljük P_1-gyel és P_2-vel. Bizonyítsuk be, hogy

a) a P pontnak a parabola tengelyétől mért előjeles távolsága a P_1 és P_2 pontok tengelytől mért előjeles távolságainak a számtani közepe;

b) a P pontnak a parabola tengelypontjához tartozó érintőtől mért távolságának a négyzete egyenlő a P_1 és P_2 pontoknak ugyanezen érintőtől mért távolságának a szorzatával;

c) a P pontnak a fókusztól mért távolsága a P_1 és P_2 pontok fókusztól mért távolságainak mértani középarányosa.

1199. A parabola társérintőinek mondjuk azokat az érintőket, amelyeknek a hajlásszöge 90°. A parabola két tetszőleges, de a tengelyponthoz tartozó érintőtől különböző e_1 és e_2 érintője az M pontban, a hozzájuk tartozó társérintők, e_1', és e_2' az M' pontban metszik egymást. Az e_1 és az e_2' metszéspontja Q_1, az e_2 és e_1' metszéspontja Q_2. Bizonyítsuk be, hogy az MM' és a Q_1Q_2 egyenesek a fókuszon haladnak át, és a hajlásszögük 90°.

SZERKESZTÉSEK

1200. A parabolát ismertnek tekintjük, ha tudjuk a fókuszának és a vezéregyenesének a helyét. Ezt szem előtt tartva szerkesszünk parabolát, ha adott

a) a fókusza és a tengelypontja;

b) a tengelye, a tengelypontja és a paraméterének a hossza;

c) a fókusza, egyik érintője az érintési ponttal;

d) a fókusza és két érintője;

e) a fókusza, a tengelye és egyik érintője;

f) a fókusza, az egyik érintője és egyik pontja;

g) a fókusza és két pontja;

h) a fókusza, a tengelye és egyik pontja;

i) a tengelye, a tengelypontja és egyik érintője;

j) a tengelye, a tengelypontja és egyik pontja;

k) a vezéregyenese és az egyik érintője az érintési ponttal;

l) a vezéregyenese, a tengelye és egyik érintője;

m) a vezéregyenese, az egyik érintője és egyik pontja,

n) a vezéregyenese és két pontja;

o) a vezéregyenese, a tengelyponthoz tartozó érintője és egy másik érintője;

p) a tengelyponthoz tartozó érintője és egy másik érintője az érintési ponttal;

r) a vezéregyenese, a tengelye és egyik pontja;

s) a tengelye és egyik érintője az érintési ponttal;

t) a tengelyponthoz tartozó érintője és két másik érintője;

u) két érintője az érintési pontokkal;

v) a tengelyének iránya, két pontja és az egyikre illeszkedő érintője;

z) három érintője és a vezéregyenese.

1201. Adott egy parabola fókusza, a vezéregyenese és egy egyenes. Szerkesszük meg a parabola és az adott egyenes metszéspontját.

1202. Szerkesszünk külső pontból a parabolához érintőt.

1203. Adott a parabola fókusza, egyik pontja és e ponthoz tartozó érintőnek a tengelyponthoz tartozó érintő és a vezéregyenes közötti szakasza. Szerkesszük meg a vezéregyenest.

VEGYES FELADATOK

1204. A $P(-2;\ 3)$ pontból kiinduló fénysugár az x tengelyről visszaverődik. Írjuk fel a beeső és a visszavert fénysugár egyenesének az egyenletét, ha a beeső fénysugár egyik irányvektora $\mathbf{v}(1;\ 3)$.

1205. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik irányvektora $\mathbf{v}(5;\ -12)$, és áthalad a $(-4;\ 16)$ ponton. Számítsuk ki az egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög köré, a háromszögbe írható kör középpontjának és a súlypontnak a koordinátáit.

1206. Induljon el a $(18;\ 7)$ pontból és haladjon az $\mathbf{a}(-4;\ -3)$ vektorral párhuzamos irányban az M pont 2,5 egységnyi sebességgel. Mennyi időegység alatt éri el az M pont az $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ hiperbolát?

1207. Számítsuk ki a $P(8;\ 5)$ pontnak a $2x-3y-8=0$ egyenestől mért távolságát. Tükrözzük P-t az adott egyenesre. Határozzuk meg a tükörkép koordinátáit.

1208. Adott két egyenes: $4x+7y-15=0$, $9x-14y-4=0$.

a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek egyik normálvektora $\mathbf{n}(-1;\ 3)$, és áthalad a két adott egyenes metszéspontján.

b) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a két adott egyenes metszéspontján, és a koordinátatengelyek pozitív felével 4 egység területű háromszöget határoz meg.

c) Számítsuk ki a két adott egyenes hajlásszögét.

1209. Adott két pont: $A(1;\ 2)$, $B(5;\ -1)$. Számítsuk ki az $\overrightarrow{AB}$-nak a koordinátatengelyekkel bezárt szögeit.

1210. Adott két pont: $A(3;\ 5)$, $B(6;\ -2)$. Vetítsük az $\overrightarrow{AB}$-t merőlegesen az $y=x$ egyenesre. Határozzuk meg a vetületének a hosszát.

1211. Határozzuk meg a $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$-t, ha $\mathbf{v}_1(1;\ 2)$, $\mathbf{v}_2(-2;\ 3)$, $\mathbf{v}_3(6;\ -10)$.

1212. Az A és B pontokat összekötő szakaszt az $M_1(1;\ 2)$ és az $M_2(3;\ 4)$ pontok három egyenlő részre osztják. Számítsuk ki az A és a B koordinátáit.

1213. A $(2;\ 3)$ és a $(6;\ 6)$ pontok egy négyzet szomszédos csúcsai. Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

1214. A $(3;\ 5)$ és a $(9;\ -7)$ pontokban elhelyezett 2 és 1 tömegegységnyi anyagi pontokból álló rendszernek hol van a súlypontja?

1215. Az m_1, m_2, m_3 tömegű anyagi pontokat rendre az $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ pontokban helyeztük el. Bizonyítsuk be, hogy a három pontból álló anyagi pontrendszer súlypontjának koordinátái

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\qquad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

1216. A sokszög csúcsaiban egyenlő tömegek vannak. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott anyagi pontrendszer súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlő:

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\qquad y=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$$

$(n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots)$

1217. Egy szabályos sokszög középpontja az origóban van. Bizonyítsuk be, hogy a csúcsok abszcisszáinak (ordinátáinak) összege zérus.

1218. Egy sokszög mindegyik oldalára egy, az illető oldal hosszával arányos hosszúságú és kifelé mutató merőleges vektort állítunk. A vektorok rendre a következők: $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$, ... $\mathbf{p}_n$ (n a sokszög oldalainak a számát jelenti). Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\ldots+\mathbf{p}_n=0$.

1219. Egy ötszög oldalfelező pontjai (pozitív körüljárást választva) a következők: $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$, $P_4(x_4; y_4)$, $P_5(x_5; y_5)$. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.

1220. Egy háromszög területe 10 egység, két csúcsa (5; 1); (−2; 2), a harmadik csúcsa az x tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

1221. A koordináta-rendszer eltolása után a (2; 4) pont koordinátái (−3; 0). Számítsuk ki az eredeti koordináta-rendszer origójának a koordinátáit az új koordináta-rendszerben.

1222. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha csúcsai (0; 1), (1; 1) és (5; 5).

1223. Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete: $x+2y+1=0$ és $2x+y-3=0$. Középpontja a (0; 4) pont. Írjuk fel a másik két oldalegyenesének egyenletét.

1224. A (2; −2) ponton áthaladó egyenes az (5; 2) ponttól 3 egységnyi távolságra van. Írjuk fel az egyenes egyenletét.

1225. Írjuk fel az $x+2y=1$ és az $x+2y=3$ egyenesekkel párhuzamos egyenes egyenletét, amely az adott egyenesek távolságát 1:3 arányban osztja.

1226. Egy háromszög két csúcsa: (2; 1); (4; 9), a magasságpontja (0; 4). Írjuk fel az oldalegyenesek egyenletét.

1227. Egy háromszög két oldalegyenese: $x+y-1=0$; $y+1=0$, a súlypontja a (−1; 0) pont. Írjuk fel a harmadik oldalegyenesének egyenletét.

1228. Az e egyenes áthalad az $x+2y-11=0$ és a $2x-y-2=0$ egyenesek metszéspontján; az origótól 5 egységre van. Írjuk fel e egyenletét.

1229. Húzzunk az origón át olyan egyenest, amelyből az $x-y+1=0$ és az $x-y-2=0$ egyenesek 3 egységnyi szakaszt vágnak ki.

1230. Az e egyenes áthalad a (2; 3) ponton. e-ből a $3x+4y-7=0$ és a $3x+4y+8=0$ egyenesek $3\sqrt{2}$ egységnyi szakaszt vágnak ki. Írjuk fel e egyenletét.

1231. Írjuk fel a $3x+4y-3=0$ és a $4x-3y+5=0$ egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek az egyenletét.

1232. A $3x-4y=25$, $5x+12y=65$ és a $8x+15y+85=0$ egyenesek egy háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.

1233. A $2x+y-1=0$ egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az (1; 2) és a (−1; −1) pont. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

1234. A $2x-y-1=0$ egyenes egy háromszög egyik belső szögfelezője, a háromszög két csúcsa az (1; 1) és az (5; 4) pont. A háromszög területe 5 egység. Írjuk fel az oldalak egyenletét.

1235. Valamely egyenlőszárú háromszög alapegyenesének egyenlete: $x+y-1=0$; az egyik szár egyenesének egyenlete: $x-2y-2=0$; a másik szárra illeszkedő egyik pont (−2; 0). Írjuk fel az utóbbi szár egyenesének egyenletét.

1236. Az ABC háromszög csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög A csúcsán áthaladó magasság egyenes egyenlete: $(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{x})=0$, ahol $\mathbf{x}$ az egyenesre illeszkedő tetszőleges pont helyvektorát jelenti.

b) Bizonyítsuk be, hogy a magasságvonalak egy pontban metszik egymást.

1237. Az ABC háromszög csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$.

a) Igazoljuk, hogy az AB oldal felező merőlegesének egyenlete: $\left(\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}-\mathbf{x}\right)=0$, ahol $\mathbf{x}$ a felező merőleges tetszőleges pontjának helyvektora.

b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

c) Bizonyítsuk be, hogy az oldalfelező merőlegesek közös metszéspontja, O a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van. (A bizonyítás egyszerűsítése céljából válasszuk az O pontot kezdőpontnak. Ekkor a O pont helyvektora a $\mathbf{0}$ vektor, a háromszög csúcsainak helyvektorai: $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$. Vegyük figyelembe azt, hogy az O helyvektora kielégíti az oldalfelező merőlegesek egyenletét.)

d) A *c)*-hez fűzött megjegyzés felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írható kör középpontja, a súlypont és a magasságpont egy egyenesre illeszkednek úgy, hogy a súlypont 1:2 arányban osztja az OM szakaszt (O a háromszög köré írható kör középpontja, M a magasságpont). Igazoljuk, hogy az OM szakasz F felezéspontja középpontja egy olyan körnek, amelynek a sugara a háromszög köré írható kör sugarának a fele, áthalad az oldalak felezéspontjain, a magasságok talppontjain és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezéspontjain (848. feladat).

1238. Tekintsük azt az α hegyesszöget, amelynek a csúcsa az origó, egyik szára az x tengely pozitív fele, a másik szára az $y=mx$ egyenesnek az a része, amelynek pontjaira $x\geq 0$. Az α szöget felező félegyenesen jelöljünk ki egy, a csúcstól különböző P pontot. Rajzoljunk a P ponton áthaladó két, a szög szárait metsző egyenest. Az egyik egyenes a szög száraiból (a csúcstól számítva) a és b, a másik a szögszárakból a_1 és b_1 szakaszokat vág le. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}$.

1239. Írjuk fel az $x^2+y^2-2ax=0$ és az $x^2+y^2-2by=0$ körök hatványvonalának az egyenletét. Számítsuk ki a hatványvonalra illeszkedő húr hosszát.

1240. Határozzuk meg az x tengelynek azt a pontját, amelyből az $x^2+y^2-6y+6=0$ és az $x^2+y^2-2x=0$ körökhöz egyenlő hosszú érintőszakasz húzható.

1241. Írjuk fel általánosan azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek az $x+y=0$ és az $x-y=0$ egyeneseket érintik.

1242. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2-2ax+b^2=0$ és az $x^2+y^2-2cy-b^2=0$ körök merőlegesen metszik egymást.

1243. Az ellipszis P_1 és P_2 pontjait a középponttal összekötő szakaszok d_1 és d_2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

ha d_1 és d_2 merőlegesek egymásra (a és b az ellipszis féltengelyei).

1244. Az ellipszis középpontjából az ellipszis P_1, P_2, P_3, ... P_n pontjaihoz vezető szakaszok legyenek d_1, d_2, ... d_n. Bizonyítsuk be, hogy ha $d_i d_{i+1} \sphericalangle = \frac{\pi}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots n-1)$, akkor az

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\ldots+\frac{1}{d_n^2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

a és b az ellipszis féltengelyei, és n páros szám.

1245. Az ellipszisnek a középponton áthaladó húrjait az ellipszis átmérőinek, a kör merőleges átmérőinek affin képét a körből származtatott ellipszis konjugált átmérőinek mondjuk. Bizonyítsuk be, hogy

a) az ellipszis konjugált átmérőinek végpontjaiban rajzolt érintők olyan paralelogrammát határoznak meg, amelynek az oldalait az érintési pontok felezik;

b) $a_1 b_1 \sin \omega = ab$,
ahol a_1 és b_1 az ellipszis konjugált félátmérői, a és b az ellipszis féltengelyei, ω a konjugált félátmérők hajlásszöge;

c) az ellipszis konjugált átmérőinek négyzetösszege nem függ a konjugált átmérőpár megválasztásától;

d) ha a konjugált átmérőpár irányvektorai $(1; m_1)$ és $(1; m_2)$, akkor az $m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$. ($a$ és b az ellipszis féltengelyei);

e) az ellipszis konjugált félátmérői által kifeszített háromszög területe nem függ a konjugált félátmérők megválasztásától.

1246. Bizonyítsuk be, hogy az a és b féltengelyű ellipszis területe $ab\pi$.

1247. Számítsuk ki az $x^2+3y^2 = 6$ ellipszis egyenlő hosszú konjugált átmérőinek a hajlásszögét.

1248. Számítsuk ki az $x^2+15y^2 = 5$ ellipszis konjugált átmérőinek a hosszúságát, ha a hajlásszögük 150°.

1249. A $8x^2+17y^2 = 136$ ellipszis konjugált átmérőinek az aránya 4:3. Írjuk fel az átmérők egyenletét.

1250. Számítsuk ki az ellipszis féltengelyeit, ha egyik konjugált átmérőpárja hosszúságainak összege 6 egység, az általuk bezárt szög 150°, és a fókuszok távolsága $\frac{18}{11}$ egység.

1251. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszishez húzott érintő egyenlete:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2},$$

ahol m az egyenes iránytangense, a és b az ellipszis féltengelyei.

1252. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolához húzott $v(1; m)$ irányvektorú érintő egyenlete

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

1253. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2=a^2+b^2$ körnek a koordinátatengelyekkel való metszéspontjain áthaladó egyenesek érintik az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszist.

1254. Bizonyítsuk be, hogy az $x+y=c$ és az $x+y=-c$ egyenesek érintik az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszist, ha $c^2=a^2+b^2$.

1255. Számítsuk ki az $y^2=2px$ parabola fókuszának az érintőtől való távolságát, ha az érintő irányszöge α.

1256. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{4}x^2$ parabola érintőjének az egyenletét, ha az áthalad a $(0;\ -4)$ ponton.

1257. Határozzuk meg az $y^2=2x$ parabola érintőjének az egyenletét, ha az áthalad $(-4;\ -1)$ ponton.

1258. Határozzuk meg az $x^2+9y^2=9$ ellipszishez a $(2;\ -1)$ pontból húzható érintők egyenletét.

1259. Határozzuk meg a $4x^2-9y^2=36$ hiperbolához a $(3;\ -6)$ pontból húzható érintők egyenletét.

1260. A merőleges affinitás tengelye legyen az x tengely, és az affinitás aránya $\frac{4}{3}$. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amely az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbola affin transzformálásakor adódik.

1261. λ mely értéke mellett létezik olyan x, y számpár, amely megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$x^2+y^2-8x-6y=0$$
$$9x^2+y^2-6y=0$$
$$y^2-\lambda x-6y+9-\lambda=0.$$

Milyen geometriai értelmezést adhatunk a feladatnak?

1262. Írjuk fel annak a hiperbolának a középponti egyenletét, amely áthalad a $(\sqrt{6};\ 3)$ ponton, és érinti a $9x+2y-15=0$ egyenest.

1263. Rajzoljunk a hiperbola F_1 fókuszából egy $2a$ sugarú kört ($2a$ a hiperbola valós tengelye), ezután húzzunk egy e érintőt ehhez a körhöz az F_2 fókuszból. Bizonyítsuk be, hogy e érinti azt a kört is, amelynek a középpontja a hiperbola O középpontjába esik, és a sugara a. Az e egyenes a $2a$ sugarú kört P, az a sugarú kört Q pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az OQ egyenes az F_2P szakasz felező merőlegese.

1264. Adott a hiperbola két fókusza, F_1 és F_2 és egyik P pontja. $PF_1 > PF_2$. Mérjük rá PF_1 szakaszra P-ből a PF_2 szakaszt. Így egy F' pontot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy az $F'F_2$ szakasz felező merőlegese érinti a hiperbolát a P pontban.

1265. Adott az ellipszis két pontja és két tengelyének az egyenese. Szerkesszük meg az adott pontokhoz tartozó ellipszisérintőket.

1266. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis $0\leq x\leq a$ és $0\leq y\leq b$ egyenlőtlenségekkel kijelölt ívén szerkesszük meg azt a pontot, amely az $(a;\ 0)$, $(0;\ 0)$ és $(0;\ b)$ pontokkal együtt a legnagyobb területű négyszöget határozza meg.

1267. Az a, b, c, x és y nem negatív számok eleget tesznek a következő egyenleteknek:

$$14x+3y-3a-b-c = 15$$

$$8x-10y+a-b+2c = -3$$

$$11x-y-2a-b-c = 3.$$

Jelöljük ki a derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek koordinátái eleget tesznek a feltételeknek. Milyen értékekre lesz szélső értéke a $3y-4x$ kifejezésnek?

1268. Bizonyítsuk be, hogy ha egy külső P pontból a parabolához két érintőt rajzolunk, akkor az egyik érintő ugyanakkora szöget zár be a PF egyenessel, mint a másik érintő a parabola tengelyegyenesével (F a parabola fókusza).

1269. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög köré írható kör középpontja és magasságpontja olyan ellipszisnek a fókuszai, amelyet a háromszög oldalai érintenek.

1270. Adott 3 pont: A, B és C. Bizonyítsuk be, hogy az ezeken áthaladó bármelyik derékszögű hiperbola középpontja rajta van az ABC háromszög Feuerbach-féle körén.

1271. Szerkesszük meg annak a két parabolának a metszéspontjait, amelyeknek adottak a fókuszai és a közös vezéregyenesük.

1272. Adott ellipszis két érintőjének a metszéspontját jelöljük P-vel, a fókuszokat F_1-gyel és F_2-vel. Bizonyítsuk be, hogy a PF_1 egyenes ugyanakkora szöget zár be az egyik érintővel, mint a PF_2 egyenes a másik érintővel.

1273. A parabola A és B pontján áthaladó szelőjén felvett P pontból érintőket húzunk a parabolához. Az érintési pontok C és D. Húzzunk a C ponton át az AB szelővel párhuzamos húrt, amelynek a másik végpontja E. Bizonyítsuk be, hogy az AB húrnak a felezéspontja rajta van a DE húron.

1274. Bizonyítsuk be, hogy ha két egymást metsző parabolának közös a vezéregyenese, akkor a metszéspontjaikon áthaladó egyenes a fókuszokat összekötő szakasz felező merőlegese.

1275. Rajzoljuk meg a parabola tetszőleges, de a tengelyponttól különböző pontjához húzható érintőjét. Bizonyítsuk be, hogy az érintőnek az érintési pont és a vezéregyenes közötti szakasza a fókuszból derékszögben látszik.

1276. Adott egy O középpontú, r sugarú kör. Az O-tól különböző P ponthoz rendeljük hozzá az OP félegyenesen azt a P' pontot, amelyre

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Az így definiált ponttranszformációt inverziónak (körre vonatkozó tükrözésnek) mondjuk. Az O pontot az inverzió pólusának, az r^2 értékét az inverzió hatványának nevezzük.

a) Fejezzük ki a $P(u; v)$ adott pont $x^2+y^2 = 1$ körre vonatkozó tükörképének a P' pontnak $(u'; v')$ koordinátáit az u és a v segítségével. Szerkesszük meg a P' pontot.

b) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán áthaladó egyenes inverze önmaga, a póluson áthaladó kör inverze egyenes. Szerkesszük meg az egyenest.

c) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán át nem haladó egyenes inverze a póluson áthaladó kör. Szerkesszük meg a kört.

d) Bizonyítsuk be, hogy az inverzió pólusán át nem haladó kör inverze egy a póluson át nem haladó kör. Szerkesszük meg ezt a kört.

e) Az $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszist, illetve hiperbolát tükrözzük az $x^2+y^2=a^2$ körre. Bizonyítsuk be, hogy az inverzió az ellipszist a $b^2(x^2+y^2)^2-a^2(b^2x^2+a^2y^2)=0$, a hiperbolát a $b^2(x^2+y^2)^2-a^2(b^2x^2-a^2y^2)=0$ egyenlettel megadott görbébe viszi át.

MÉRTANI HELYEK *

1277. Egy pont úgy mozog a síkon, hogy a síkban fekvő $P_1(3;\ 2)$ és a $P_2(-1;\ 5)$ pontoktól egyenlő távolságra van. Határozzuk meg a mozgó pont pályájának az egyenletét.

1278. Egyenlő szárú háromszög alapjának a végpontjai $(7;\ 3)$ és $(-7;\ 1)$. Mi a harmadik csúcs mértani helye a koordináta-rendszer síkjában?

1279. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek áthaladnak az $(1;\ 5)$ és a $(-3;\ -1)$ pontokon?

1280. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek egyenlő távolságra vannak az $y=\frac{1}{2}x+3$ és az $y=2x-5$ egyenesektől?

1281. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik az x tengelyt és a $12x-5y=0$ egyenest?

1282. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik a $4x+y+3=0$ és a $4x+y-7=0$ egyeneseket?

1283. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, a koordináta-rendszer síkjában, amelyeknek a sugara 3 egység, és érintik a $2x-5y=2$ egyenest?

1284. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek $(4;\ 0)$ ponttól mért távolságának a négyzete 20-szal kisebb, mint a $(0;\ 2)$ ponttól mért távolságának a négyzete?

1285. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek az $x+y=3$ egyenestől 4-szer akkora távolságra vannak, mint a $7x-y+1=0$ egyenestől?

1286. Egy háromszög két csúcsa $(-6;\ 0)$ és $(6;\ 0)$, a harmadik csúcsa pedig az $y=-3x+5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1287. Egy háromszög két csúcsa $(-4;\ -6)$ és $(6;\ 2)$, a harmadik csúcsa pedig az $y=3x+5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1288. Egy háromszög két csúcsa $(1;\ 0)$ és $(5;\ 0)$. Harmadik csúcsa a koordinátatengelyek által bezárt szög szögfelezőjén mozog. Mi a súlypontjának a mértani helye?

1289. Egyenlő szárú háromszög egyik szárának végpontjai $A(4;\ 2)$ és $B(1;\ 8)$. Mi a harmadik csúcs mértani helye?

1290. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyeknek az $(1;\ 0)$ ponttól mért távolságuk négyzetének a számértéke egyenlő az $x=1$ egyenestől mért távolságukkal?

* Ebben a fejezetben kitűzött feladatok megoldása előtt célszerű tanulmányozni a 956., 1277., és az 1321. feladatok megoldását.

1291. Adott két pont: $O(0; 0)$ és $Q(a; 0)$. Mi azoknak az M pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyekre

$$OM = k \cdot QM (k > 0)?$$

Legyen $Q(8; 0)$. Írjuk fel a $k = 3; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ értékeknek megfelelő mértani helyek egyenletét. Szerkesszük meg a mértani helyeket ugyanabban a koordináta-rendszerben. Milyen változást tapasztalunk a mértani helyek vonalában, ha a k 1-től kezdve növekszik, illetve, ha 1-től kezdve közeledik a nullához?

1292. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak a koordináta-rendszer síkjában, amelyek olyan távolságra vannak a $(-4; 0)$ és a $(8; 0)$ pontoktól, hogy a távolságuk négyzetösszege 80 (terület) egység? Oldjuk meg a feladatot általánosan is. Legyen az $A(-a; 0)$, a $B(a; 0)$ és

$$MA^2 + BM^2 = c^2.$$

Mi a megoldhatóság feltétele? Szerkesszük meg a mértani helyet, ha a $c^2 = 6a^2; 4a^2; 2a^2; a^2$.

1293. Az origón áthaladó egyenes kétszer olyan gyorsan forog ugyanabban az irányban, mint a $(-4; 0)$ ponton áthaladó egyenes. Induláskor mindkettő az x tengellyel azonos. Milyen vonalat ír le a metszéspontjuk?

1294. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, melyekből az $(x-5)^2+(y+2)^2 = 9$ körhöz 4 hosszúságegységnyi érintő húzható?

1295. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, melyekből az $x^2+y^2-8x+6y = 0$ és az $x^2+y^2-10y = 0$ körhöz húzható érintőszakaszok aránya 1:1; 2:1; 3:2?

1296. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $x^2+y^2 = 16$ és az $(x-8)^2+y^2 = 4$ körök azonos szögben látszanak?

1297. Az $y = \lambda(x-4)$ egyenesre az origóból merőleges egyenest húzunk. Határozzuk meg e két egyenes M metszéspontjának a mértani helyét, ha a λ felvesz minden valós értéket.

1298. Mi a $(3; 4)$ ponton áthaladó és az x tengelyt érintő körök középpontjainak a mértani helye?

1299. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik az $x = 10$ egyenest, és áthaladnak a $(2; 1)$ ponton?

1300. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik az y tengelyt és a $(2; 0)$ középpontú egységsugarú kört?

1301. Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolára illeszkedő pontok ordinátái felezőpontjainak a mértani helyét.

1302. Vizsgáljuk meg az $y = 3x^2-4$ parabola mindazon húrjait, melyeknek irányhatározója adott m szám. Mi lesz ezen húrok felezőpontjainak a mértani helye?

1303. Az $y^2 = x$ parabola változó M pontjából húzott érintő az y tengelyt egy A pontban metszi. Határozzuk meg az AM szakasz felezőpontjának a mértani helyét.

1304. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek érintik az $(x+1)^2+y^2 = 9$ kört, és áthaladnak az $(1; 0)$ ponton?

1305. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, melyek az $(1; 0)$ ponttól feleakkora távolságra vannak, mint az $x = 4$ egyenestől?

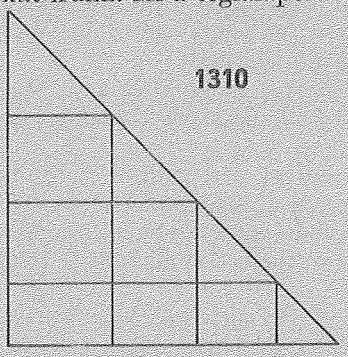
1306. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek a (3; 2) ponttól kétszer akkora távolságra vannak, mint az y tengelytől?

1307. Forgassuk a $(-1; 0)$ ponton áthaladó egyenest és a reá merőleges, az $(1; 0)$ ponton áthaladó egyenest egyenlő szögsebességgel egymással ellentétes irányban. Milyen görbét ír le a két egyenes metszéspontja? A $(-1; 0)$ ponton áthaladó egyenes kezdőhelyzete legyen az x tengely. Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

1308. Adott az $x-y+1=0$ és az $x+y+1=0$ egyenes, továbbá a $P(1; 0)$ pont. E ponton áthaladó egyenes a két adott egyenest az M_1 és M_2 pontokban metszi. Állapítsuk meg az M_1M_2 szakasz felezéspontjának a mértani helyét.

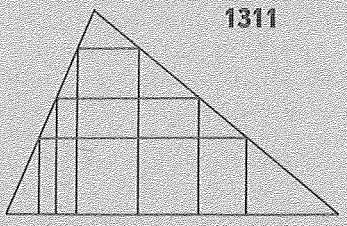
1309. Adott egy sík és a síkban két metsző egyenes, e_1 és e_2. Jelöljük a sík tetszőleges pontjának az e_1 egyenestől mért távolságát d_1-gyel, az e_2 egyenestől mért távolságát d_2-vel. Legyen a k adott pozitív szám. Hol helyezkednek el a síkban azok a pontok, amelyek kielégítik a $\frac{d_1}{d_2}=k$ feltételt? Határozzuk meg a mértani helyet akkor is, ha az $e_1 \| e_2$.

1310. Adott derékszögű háromszögbe az 1310. ábrán látható módon téglalapokat írunk. Mi a téglalapok középpontjainak a mértani helye?



1310

1311. Adott háromszögbe az 1311. ábrán látható módon téglalapokat írunk. Határozzuk meg a téglalapok középpontjainak a mértani helyét.



1311

1312. Adott síkban rajzoljunk a rögzített AB szakaszra mint alapra egy ABC egyenlő szárú háromszöget ($AC=BC$). Hosszabbítsuk meg a szárakat a C ponton túl, és mérjük rá az AC félegyenesre a C pontból az $AC=CA_1$, a BC félegyenesre a C pontból a $BC=CB_1$ szakaszt. Határozzuk meg az A_1, illetve a B_1 pont mértani helyét, ha a C pont az AB szakasz felező merőlegesén végigfut.

1313. Adott a síkban két pont: $O_1(5; 0)$ és $O_2(1; 7)$. Rajzoljunk az O_1 és az O_2 pontok körül egységsugarú köröket. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek a két kört kívülről érintik?

1314. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a koordináta-rendszer síkjában, amelyek a $(0; 9)$ ponttól háromszor akkora távolságra vannak, mint az $y=1$ egyenestől?

1315. Rajzoljuk meg az $y=\frac{1}{x}$ hiperbola húrjait, amelyek párhuzamosak az $y=-2x$ egyenessel. Mi a húrok felezéspontjainak a mértani helye?

1316. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye egy adott derékszög síkjában, amelyeknek a derékszög két szárától mért távolságainak összege adott állandó.

1317. Adott háromszög egyik csúcsát összekötjük a szemközti oldal pontjaival. Mi a kapott szakaszok felezőpontjainak a mértani helye?

1318. Két egymásra merőleges egyenesen egy-egy pont mozog egyenletesen, azonos sebességgel. A 0 időpontban elfoglalt helyzetük ismeretében határozzuk meg a két pontot összekötő szakasz felezőpontjának a mértani helyét.

1319. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek egy adott szakasz végpontjaitól mért távolságai négyzetének a különbsége egyenlő egy adott k^2 állandóval?

1320. A, B, C egy háromszög csúcsai. Mi azoknak az M pontoknak a mértani helye az ABC háromszög síkjában, amelyekre nézve

$$MB^2+MC^2 = 2MA^2?$$

1321. Két egymásra merőleges a és b egyenes síkjában egy rögzített P pont körül a DPD' derékszög forog. PD szár az a egyenest az A pontban, PD' szár a b egyenest a B pontban metszi. Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának a mértani helyét. Határozzuk meg a P pont AB-re eső merőleges vetületének a koordinátáit. Mi ezen vetületi pont mértani helye?

1322. A síkban jelöljünk ki két pontot, A-t és B-t, továbbá egy az AB egyenesre merőleges e egyenest. Az e egyenes P pontját összekötjük az A és B pontokkal. PA egyenesre az A-ban, BP egyenesre a B-ben merőlegest állítunk. Határozzuk meg a merőlegesek M metszéspontjának a mértani helyét, ha P végigfut az e egyenesen.

1323. Adva van két pont, A és B. Egy CD szakasz mozog ezekkel egy síkban egy AB egyenessel párhuzamos irányban úgy, hogy közben sem az iránya, sem a nagysága nem változik. Mi lesz az AC és BD egyenesek P metszéspontjának a mértani helye?

1324. Adott egy e egyenes és rajta két pont A és B, továbbá egy e-vel párhuzamos CD szakasz. Mérjük fel e-re A-ból, illetőleg B-ből egyező irányban az AP és a $BQ = 2\cdot AP$ szakaszokat. Határozzuk meg a PC és QD egyenesek M metszéspontjának a mértani helyét, ha P végigfut az e egyenesen.

1325. Az OAB derékszögű háromszög befogói: $OA = a$, $OB = b$. Az A és B pontoknak az O ponton áthaladó e egyenesre eső merőleges vetületei legyenek A_1 és B_1. Az A_1 és B_1 pontokon át a háromszög befogóival párhuzamosan húzott egyenesek az A_1MB_1N téglalapot határozzák meg. Állapítsuk meg az M és N pontoknak a mértani helyét, ha e az O pont körül forog.

1326. Adott az e egyenes és a rögzített A pont, amely nem illeszkedik az e egyenesre. Mi az M pont mértani helye az A és az e által meghatározott síkban, amelyre nézve

$$\frac{MA^2}{MB} = l,$$

ahol B az M pont merőleges vetülete az egyenesen és az l adott pozitív szám?

1327. Adott egy sík és ebben a síkban két rögzített pont: A és B. P pont úgy mozog a síkban, hogy $AP^2+k\cdot BP^2=l^2$, ahol k és l pozitív állandók. Határozzuk meg a P pont mértani helyét. Mi a megoldhatóság feltétele?

1328. Két rúd egy-egy rögzített pont körül forog úgy, hogy a rudak állandóan merőlegesek egymásra. Mi a rudak közös pontjának a mértani helye, ha a két rögzített pont távolsága $2a$?

1329. Adott $AB=2a$ hosszúságú szakasz úgy mozog a koordináta-rendszerben, hogy az A végpontja mindig az x tengelyre, a B végpontja mindig az y tengelyre illeszkedik. Határozzuk meg a szakasz felezéspontjának a mértani helyét.

1330. Egy háromszög alapja egy adott kör rögzített sugara. Harmadik csúcsa a kör kerületén mozog. Mi a súlypont mértani helye?

1331. Adott egy kör és benne a középponttól d távolságra egy rögzített húr. Rajzoljunk a húr fölé olyan háromszögeket, melyek csúcsai a körre illeszkednek. Mi a háromszögek súlypontjainak a mértani helye?

1332. Adott körön belül adott egy P pont. A P pont körül egy derékszöget forgatunk, amelynek szárai a kört A és B pontokban metszik. Határozzuk meg AB húrok felezőpontjainak a mértani helyét.

1333. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $x^2+y^2=r^2$ körhöz d hosszúságú érintőszakaszokat húzhatunk?

1334. Adott egy kör és a síkjában egy P pont. P pontot kössük össze a kör pontjaival. A kapott szakaszokat osszuk fel 1:1; 1:2; 2:3; m:n arányban. Mi az osztópontok mértani helye?

1335. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyekből adott körhöz egymásra merőleges érintőket húzhatunk?

1336. Adott körhöz érintőket húzunk, melyek 2α szöget alkotnak egymással. Határozzuk meg a szög csúcsainak a mértani helyét.

1337. Adott egy sík, a síkban egy AB szakasz és a szakaszon egy rögzített O pont. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyekből az AO és OB szakaszok egyenlő szög alatt látszanak?

1338. Az O pont körül rajzolt koncentrikus körökhöz adott A pontból érintőket rajzolunk. Határozzuk meg az érintési pontok mértani helyét.

1339. Az $A(a;\,0)$ és a $B(-a;\,0)$ pont körül két rúd forog úgy, hogy az y tengelyből az általuk lemetszett szakaszok szorzata állandó, mégpedig $b_1\cdot b_2=a^2$. Mi a rudak közös pontjának a mértani helye?

1340. Jelöljük O-val a koordináta-rendszer kezdőpontját. A rögzített P pont koordinátái $(a;\,b)$. P' pont az OP félegyenesre illeszkedik úgy, hogy $OP'\cdot OP=k^2$, ahol k^2 adott szám. 1. Határozzuk meg a P' koordinátáit. 2. Mi a P' mértani helye, ha a P egy az x tengelyre merőleges egyenesen mozog? 3. Mi a P' mértani helye, ha a P olyan körön mozog, amelynek a középpontja az x tengelyre illeszkedik?

1341. Legyen a koordináta-rendszer kezdőpontjának merőleges vetülete az

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

egyenesen P. Mi a P pontok mértani helye, ha az egyenes úgy mozog, hogy az $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ állandó marad?

1342. Az $y-y_1 = m(x-x_1)$ egyenes irányhatározója melyik másodfokú egyenletnek a gyöke, ha az egyenes az $x^2+y^2 = R^2$ kört érinti. — Az egyenlet gyökei legyenek m_1 és m_2. Mi az $M(x_1; y_1)$ pont mértani helye, feltéve, hogy $m_1 \cdot m_2 = -1$?

1343. Kössük össze a parabola tengelypontját, O-t, a parabola tetszőleges P pontjával. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek az OP szakaszt 1:1, 1:2, 2:3, $m:n$ arányban osztják, ha a P változik?

1344. Kössük össze a parabola fókuszát, F-et, a parabola tetszőleges P pontjával. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek az FP szakaszt 1:1, 1:2, $m:n$ arányban osztják?

1345. Határozzuk meg a parabola fókuszán áthaladó húrok felezőpontjainak a mértani helyét.

1346. Húzzunk a parabolában párhuzamos húrokat. Mi a húrok felezőpontjainak a mértani helye?

1347. A parabola tetszőleges P pontját kössük össze a fókusszal, majd a két pont közé eső szakaszt mérjük rá az előbbi egyenes meghosszabbítására a parabolaponton túl. Mi lesz az így nyert végpont mértani helye, ha a P változik?

1348. Az $y^2 = 2px$ parabola vezéregyenesének és tengelyének metszéspontjából húzzunk a parabolához szelőket. Határozzuk meg az így keletkező parabola húrok felezőpontjainak a mértani helyét.

1349. Keressük meg azon körök középpontjainak a mértani helyét, amelyek érintenek egy adott félkört és annak átmérőjét.

1350. Az M pont az OY félegyenesen mozog egyenletesen változó mozgással. Sebessége induláskor az O pontban zérus. Az OY félegyenes ugyanakkor önmagával párhuzamosan mozog úgy, hogy az O pont az OY-ra merőleges OX félegyenest írja le egyenletes mozgással. Határozzuk meg az M pont pályáját.

1351. A parabola fókuszából merőlegeseket húzunk az érintőkre. Mi a merőlegesek talppontjának a mértani helye?

1352. A parabola fókuszából merőlegeseket húzunk a parabola normálisaira. Mi a merőlegesek talppontjának a mértani helye? (A parabola normálisán azt az egyenest értjük, amely az érintőt az érintési pontban derékszögben metszi és a parabola síkjában van.)

1353. Felezzük meg a parabola normálisának az érintési pont és az x tengely közé eső darabját. Mi a felezőpontok mértani helye?

1354. A parabola M pontjában a parabolához érintőt húzunk, és erre a parabola tengelypontján áthaladó merőleges e egyenest állítunk. Ezen e egyenes az MF egyenest (F a fókusz) a P pontban metszi. Mi a P pont mértani helye, ha az M pont végigfut a parabolán?

1355. Egy derékszög úgy csúszik a parabola síkjában, hogy a szárai érintik az $y^2=2px$ parabolát. Határozzuk meg a derékszög csúcsának a mértani helyét.

1356. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $y^2 = 2px$ parabolához húzott érintők irányténye zőinek szorzata $-\frac{1}{2}$?

1357. Felezzük meg az $y = \frac{1}{2p}x^2$ parabola érintőinek a koordinátatengelyek közé eső szakaszát. Mi a felezőpontok mértani helye?

1358. Adott az $x^2+y^2=r^2$ kör. A kör tetszőleges, de a $(0;\ r)$ és $(0;\ -r)$ pontoktól különböző pontját jelöljük P-vel. P-nek az x tengelyre eső merőleges vetülete legyen Q. A $(0;\ 0)$ és a P ponton áthaladó egyenes a $(0;\ -r)$ és a Q ponton áthaladó egyenest S pontban metszi. Határozzuk meg az S pont mértani helyét, ha a P pont végigfut az adott körön.

1359. Mi az adott síkban fekvő közös alapú és egyenlő területű háromszögek magasságpontjainak a mértani helye?

1360. Legyen O egy adott parabola tengelypontja és M a parabola változó pontja. Az OM egyenesre az O pontban merőlegest rajzolunk, az M ponton át pedig a parabola tengelyével párhuzamost húzunk. Határozzuk meg e két egyenes metszéspontjának a mértani helyét.

1361. Adott az e egyenes és rajta kívül a P pont. Mi azon parabolák fókuszainak a mértani helye, amelyek áthaladnak a P ponton, és közös tengelyponti érintőjük az e egyenes?

1362. Az $y^2=2px$ parabolát az $y=ax$ egyenes az origóban és még egy M pontban metszik. Határozzuk meg M pont koordinátáit. Az M ponton át az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenes az y tengelyt A pontban metszi. A pontból az OM-re húzott merőleges talppontja legyen H. Bizonyítsuk be, hogy ez a merőleges a bármely értéke mellett egy rögzített ponton megy át. Határozzuk meg a H pont mértani helyét, ha az a változik.

1363. Határozzuk meg a parabola három érintője alkotta háromszög magasságpontjának a mértani helyét.

1364. Az ABC háromszög BC alapja rögzített, az A csúcs egy, a BC alappal párhuzamos egyenesen mozog. Mi a háromszöghöz tartozó Feuerbach-kör középpontjának a mértani helye?

1365. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, melyek érintik az $(x-u)^2+y^2=u^2$ és az $(x+u)^2+y^2=16u^2$ köröket?

1366. Egy háromszög alapja egy ellipszis nagytengelye, a háromszög csúcsa pedig az ellipszisen mozog. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának a mértani helyét. Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a háromszög alapja az ellipszis fél nagytengelye.

1367. Az ellipszisbe derékszögű háromszöget illesztünk. Átfogójának egyik végpontja az origó, másik végpontja az ellipszisre illeszkedő P pont. Egyik befogója az x tengelyen van. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának a mértani helyét, ha a P az ellipszisen mozog.

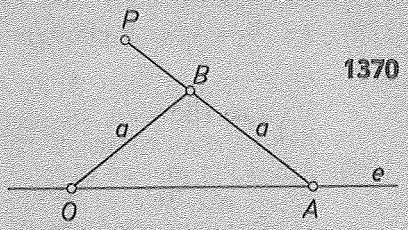
1368. Kössük össze *a)* az ellipszis középpontját az ellipszis tetszőleges P pontjával; *b)* az ellipszis tetszőleges de rögzített pontját P-vel. Határozzuk meg a kapott szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha a P végigfut az ellipszisen.

1369. Adott két egymásra merőleges egyenes, a és b. Az a egyenesen az M pont, a b egyenesen az N pont úgy mozog, hogy a távolságuk nem változik. Határozzuk meg az MN szakasz rögzített P pontjának a mértani helyét.

1370. A gőzgép felrajzolt indikátor-írószerkezetének O pontja rögzített, az A pontja egy egyenesen mozog (1370. ábra). Milyen görbét ír le a P pont, amely az AB meghosszabbításán van, B-től b távolságban? ($OB=AB=a$.)

1371. Rögzítsük az ω szög O csúcsát és a szögfelezőjét. A szög egyik szárára mérjük fel az $OA=a$, a másik szárára az $OB=b$ szakaszt. Határozzuk

meg az AB szakasz felezéspontjának a mértani helyét, ha az ω szög nagysága változik. Mi a mértani hely akkor, ha az $a = b$?



1370

1372. Az ellipszis egyik fókuszából az ellipszis érintőire merőlegeseket húzunk. Mi a merőlegesek talppontjainak a mértani helye?

1373. Az ellipszis átmérői fölé egyenlő oldalú háromszögeket szerkesztünk. Mi ezen háromszögek csúcsainak a mértani helye?

1374. Határozzuk meg az ellipszis párhuzamos húrjai felezéspontjainak a mértani helyét.

1375. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis derékszög alatt látszik?

1376. Egy pontból egyenlő c kezdősebességgel ugyanabban a függőleges síkban, de különböző α szögek alatt testeket hajítunk el. Határozzuk meg a parabolapályák tengelypontjainak a mértani helyét, ha α 0°-től 90°-ig változik.

1377. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, melyek érintik az $x^2+y^2+2cx=0$ kört, és áthaladnak a $(c;\,0)$ ponton?

1378. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, melyek kívülről érintik az $(x-2c)^2+y^2=c^2$ és az $(x+2c)^2+y^2=4c^2$ köröket?

1379. Keressük azon szakaszok középpontjainak a mértani helyét, amelyek a hiperbola pontjait kötik össze

a) a hiperbola bal oldali fókuszával;

b) a hiperbola jobb oldali tengelypontjával;

c) a hiperbola középpontjával.

1380. Tekintsük adott síkban az összes olyan derékszögű háromszöget, amelyeknek a derékszöge közös, és a területük egyenlő. Mi az átfogók felezéspontjának a mértani helye?

1381. Adott az AB távolság. Felezéspontja O. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét a síkban, amelyeknek az O-tól mért távolsága egyenlő az A-tól és B-től mért távolságuk mértani közepével.

1382. Az $x^2+y^2=r^2$ egyenlettel megadott kört az $x=a$ egyenes, ahol $0<|a|<r$, az A és B pontokban metszi. Az A, B, $(-r;\,0)$ és az $(r;\,0)$ pontok egy konvex négyszöget határoznak meg. Mi a négyszög szemközti oldalegyenesei metszéspontjainak a mértani helye, ha az adott egyenest az y tengelyre merőleges irányban mozgatjuk?

1383. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek az x tengelyből a, az y tengelyből b hosszúságú szakaszokat metszenek ki?

1384. Állapítsuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyekből az $y^2=2px$ parabola 45°-os szögben látszik.

1385. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekből az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola derékszögben látszik?

1386. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek a $P(a;\,0)$ ponttól és az $x=-a$ egyenestől mért távolságuk hányadosa adott pozitív c szám?

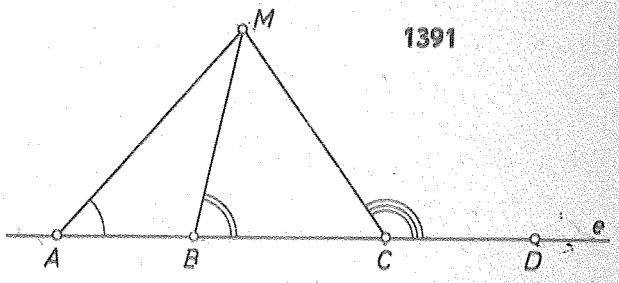
1387. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis változó M pontjában húzott érintők a koordinátatengelyeket K és L pontokban metszik. Ezekben a pontokban az ellipszis síkjában a tengelyekre merőlegeseket állítunk, melyek P pontban metszik egymást. Határozzuk meg a P mértani helyét.

1388. Adott két metsző egyenes: e_1 és e_2; az e_1 egyenesen az A_1, az e_2 egyenesen az A_2 rögzített pontokkal. Jelöljünk ki az e_1 egyenesen egy M_1 pontot és az e_2 egyenesen egy M_2 pontot, az A_1A_2 egyenes ugyanazon a partján úgy, hogy $A_2M_2 = k \cdot A_1M_1$ legyen (k adott pozitív szám). Határozzuk meg az M_1M_2 szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha M_1 befutja az e_1 egyenest.

1389. Adott a síkban három rögzített pont: A, B, C. Mi az M pont mértani helye az adott síkban, ha az eleget tesz az $l \cdot MA^2+m \cdot MB^2+n \cdot MC^2 = 0$ feltételeknek. (l, m, n nullától különböző adott számok.)

1390. A paralelogramma egyik oldalát, a-t rögzítjük, a másik oldalát, b-t az a-val közös pontja körül forgatjuk. Határozzuk meg az átlók metszéspontjának a mértani helyét.

1391. Adott egy sík, a síkban egy e egyenes és az e egyenesen az A, B, C és D pontok (az 1391. ábrán látható sorrendben). Határozzuk meg azoknak az M pontoknak a mértani helyét az adott síkban, amelyekre nézve $MCD\sphericalangle = MAD\sphericalangle + MBD\sphericalangle$.



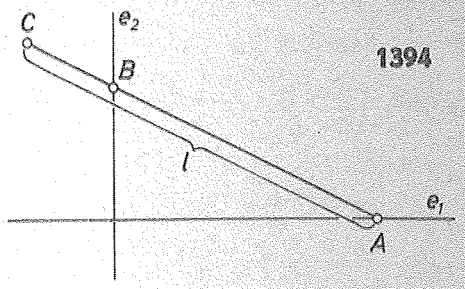
1391

1392. Mi az ABC háromszög A csúcsának a mértani helye, ha a BC oldala rögzített, és az A-ból húzott magasság a $(c+b)$ és a $(c-b)$ mértani közepe (c és b a háromszög változó oldalainak a mértékszámát jelentik és $c > b$).

1393. Adott a síkban egy e egyenes, egy k kör és a k kör középpontján áthaladó az e egyenesre merőleges egyenesen egy P pont. Rajzoljunk a P pont körül olyan k' kört, amelynek legalább egy közös pontja van e-vel is és k-val is. Húzzuk meg a k és k' közös húrjának h egyenesét, illetve a k és k' közös érintőjét. Ezután állítsunk merőlegeseket (merőlegest) az e egyenesre azokban a pontokban (pontban), amelyekben a k' kör metszi (érinti) az e egyenest. Ezek a merőlegesek metszik a h egyenest. Mi a metszéspontok mértani helye, ha a k' kör változik? Mi a mértani hely akkor, ha a feladatot a következőképpen módosítjuk: k' körnek legalább egy közös pontja legyen az e egyenessel, h pedig legyen a k és k' körök hatványvonala?

1394. Adott két egymásra merőleges egyenes e_1, e_2 és egy $AC = l$ hosszúságú szakasz. Jelöljünk ki a szakaszon egy B pontot. Ezután helyezzük el a szakaszt az 1394. ábrán látható módon. Határozzuk meg a C végpont mértani helyét, ha a szakaszt úgy mozgatjuk, hogy az A végpontja min-

dig az e_1 egyenesre, a B belső pontja pedig az e_2 egyenesre illeszkedjék.



1394

1395. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét a síkban, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenletet:

a) $x^2+x|x|+2y^2=8$;

b) $\frac{1}{4}x^2+4y^2+4y|y|=1$;

c) $2x^2-4x+2(x-1)|x-1|+8y^2-8y|y|+1=0$.

1396. Adottak az egyenlő oldalú háromszög csúcsai: $A\left(-\frac{a}{2};\ 0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$, $C\left(0;\ \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$. Határozzuk meg a háromszög síkjában azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek a háromszög csúcsaitól mért távolságuk négyzetösszege $4a^2$, $2a^2$, a^2, illetve $\frac{1}{2}a^2$.

1397. Két egyenlő hosszú pálcát a közös C végpontjukban csuklósan kapcsoltunk össze. Az egyik pálca A végpontja rögzített. A másik pálca B végpontja egy rögzített és az A ponton áthaladó egyenesen mozog. Határozzuk meg a BC pálca felezéspontjának a mértani helyét.

1398. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye egy adott négyzet síkjában, amelyeknek a négyzet csúcsaitól mért távolságainak négyzetösszege adott c^2 állandó?

1399. Adott síkban fekvő rögzített k_1 és k_2 körökhöz P pontból érintőket rajzolunk. Az érintési pontok P_1, illetve P_2 (P_1 a k_1, P_2 a k_2 kör pontja). Mi a P pont mértani helye, ha

a) $PP_1^2+PP_2^2=a^2$;

b) $PP_1^2-PP_2^2=a^2$;

c) $kPP_1^2+lPP_2^2=a^2$

ahol a, k és l adott számok?

1400. Az origón áthaladó e egyenes az $x^2+y^2-4x=0$ és az $x^2+y^2-2x=0$ köröket az origótól különböző M_1, illetve M_2 pontokban metszi ($M_1\neq M_2$). Az első kör középpontja O_1, a második kör középpontja O_2. Az O_1M_2 és az O_2M_1 egyenesek metszéspontját jelöljük P-vel. Milyen vonalat ír le a P pont, ha az e egyenest az origó körül forgatjuk?

1401. A $2x+3y=6$ egyenes tetszőleges P pontját vetítsük merőlegesen a koordinátatengelyekre. Az x tengelyre illeszkedő vetület legyen P_1, az y tengelyre illeszkedő vetület legyen P_2. Mi annak a P_1P_2 szakaszra illeszkedő Q pontnak a mértani helye, amelyre a $\frac{P_1Q}{P_2Q}=\lambda$, ahol λ adott pozitív szám.

1402. Az $x = 0$, $y = 0$ és az $\frac{x}{k}+\frac{y}{a-k} = 1$ egyenesek háromszöget határoznak meg. ($k \neq 0$ és $a \neq k$.) Milyen vonalat ír le a háromszög súlypontja, ha a állandó, k pedig változik?

1403. Adott két egymásra merőleges egyenes e_1 és e_2 és az e_1 egyenesen a metszésponttól különböző rögzített P pont. Jelöljünk ki az e_2 egyenesen egy M pontot, azután az M ponton át húzzunk párhuzamost az e_1 egyenessel. Mérjük rá az így adódó e egyenesre M pontból mindkét irányban az $MP = MQ$ szakaszt. Határozzuk meg a kapott pontok mértani helyét, ha az M pont végigfut az e_2 egyenesen.

1404. Adott két pont: $A(0; a)$ és $B(b; a)$. Osszuk fel az OA és az AB szakaszt n egyenlő részre. (O az origó.) Az OA szakasz osztópontjain át húzzunk párhuzamosokat az AB egyenessel, az AB szakasz osztópontjait pedig kössük össze az origóval. Határozzuk meg az azonos sorszámú osztópontokból húzott egyenesek metszéspontjainak a mértani helyét. (A számozást az OA szakaszon az O pontnál, az AB szakaszon az A pontnál kezdjük.)

1405. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek az $x^2+y^2+4x+8y-5 = 0$ körre vonatkozó hatványa *a)* 7; *b)* -2?

1406. Adott egy kör és annak a belsejében egy rögzített P pont. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek az adott kört érintik, és áthaladnak a P ponton?

1407. Adott a k_1 kör és annak a belsejében a k_2 kör. Határozzuk meg k_1 és k_2 kört érintő k körök középpontjainak a mértani helyét.

1408. Adott egy kör és a kör síkjában a körön kívül egy rögzített P pont. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek áthaladnak a P ponton, és az adott kört érintik?

1409. Adott a k_1 kör és a k_1 kör síkjában a körön kívül a k_2 kör. Mi a k_1 és k_2 kört érintő k körök középpontjainak a mértani helye?

1410. Adott egy kör és egy a középpontján áthaladó rögzített e egyenes. Jelöljünk ki a kör síkjában egy P pontot. Ezután szerkesszük meg azt a körre illeszkedő Q pontot, amelyre $QQ' = PQ'$, ahol Q' a Q pontnak az e egyenesre eső merőleges vetületét jelenti. Mi azoknak a P pontoknak a mértani helye, amelyekre a szerkesztés elvégezhető?

1411. A síkban rögzítsünk két pontot, A-t és B-t. Mi azoknak a P pontoknak a mértani helye a síkban, amelyek eleget tesznek a következő követelményeknek: $k \cdot PA^2 + l \cdot PB^2 = m$ (k, l és m adott pozitív állandók)?

1412. Adott a hiperbola két, a valós tengelyére szimmetrikus pontja, A és B. Jelöljük a hiperbola tengelypontjait T_1-gyel és T_2-vel. Az AT_1 és a BT_2 egyenesek metszéspontját jelöljük M-mel. Határozzuk meg az M pont mértani helyét, ha az A pont végigfut a hiperbolán.

1413. Adott két kör: k_1 és k_2. A két kör kívülről érinti egymást a P pontban. A k_1 kör sugara egyenlő a k_2 kör sugarának a kétszeresével. A k_1 kör a rögzített középpontja, O_1 körül forog, és közben a súrlódás miatt forgatja a k_2 kört is a rögzített középpontja, O_2 körül. Jelöljük ki a k_1 kör O_1P és a k_2 kör PO_2 sugarát. A kijelölt sugarak a forgás megkezdése után ellentétes irányban elfordulnak. Határozzuk meg a két sugár egyenesei metszéspontjának a mértani helyét.

1414. Adott ellipszis egyik Q pontjában rajzoljuk meg az érintőt. Húzzunk erre merőlegest az ellipszis középpontjából. Jelöljük a merőleges talp-

pontját P-vel. Mi a P pont mértani helye, ha a Q pont végigfut az ellipszisen?

1415. Az $y^2 = 2px$ parabola F fókuszát kössük össze a parabola tetszőleges P pontjával. Az FP szakasz C pontjára legyen $\frac{FC}{CP} = \lambda$ (λ adott pozitív szám). Határozzuk meg a C pont mértani helyét, ha a P végigfut a parabolán.

1416. A koordináta-rendszerben kijelöljük az $A(a; 0)$ és a $B(0; b)$ pontokat úgy, hogy $a+b = k$ legyen, ahol k adott pozitív szám. Rajzoljuk meg az OAB háromszög köré írható kört (O az origó), ezután húzzunk az O ponton áthaladó és AB-vel párhuzamos egyenest, amely a kört O és P pontban metszi. Határozzuk meg a P pont mértani helyét, ha az A és B pontokat a feltételnek megfelelő módon változtatjuk.

1417. Az $x^2+y^2 = r^2$ egyenlettel megadott kör síkjában határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az x tengelytől feleakkora távolságra vannak, mint a körtől.

1418. Az $x^2+y^2 = r^2$ kör $P(x_1; y_1)$ pontjában a körhöz érintőt rajzolunk. Az érintő az x tengelyt $A(a; 0)$ az y tengelyt $B(0; b)$ pontban metszi. Határozzuk meg az $M(a; b)$ pont mértani helyét, ha a P végigfut a körön.

1419. Rajzoljuk meg az $y^2 = 2px$ parabola $P(x_1; y_1)$ pontjában a parabola t érintőjét. t egyenes az x tengelyt A, az y tengelyt B pontban metszi. A pontban az x tengelyre, B pontban az y tengelyre merőlegest rajzolunk. A metszéspontjukat jelöljük M-mel. Határozzuk meg az M pont mértani helyét, ha a P pont végigfut a parabolán.

1420. Adott O középpontú és r sugarú kör A pontjában a körhöz érintőt rajzolunk. Az érintő tetszőleges M pontjában rajzoljunk a kör síkjában merőlegest az érintőre, azután az M pontból mérjük fel erre M-nek a körtől mért távolságát. Határozzuk meg az így adódó P pont mértani helyét, ha az M végigfut az érintőn.

1421. Adott a k kör. Rögzítsük a kör egyik átmérőjét. Határozzuk meg azon körök középpontjainak a mértani helyét, amelyek érintik a rögzített átmérőt, és a k-hoz legközelebb eső pontjuknak a k-tól való távolsága egyenlő a sugarukkal.

1422. Adott egy parabola: A tengelypontja O és egy tetszőleges pontja M. Az OM egyenesre az O pontban merőlegest emelünk, az M ponton át a parabola tengelyével párhuzamost húzunk. Határozzuk meg a két egyenes metszéspontjának a mértani helyét, ha az M végigfut a parabolán.

1423. Rögzítsünk a síkon két pontot, A-t és B-t. Rajzoljunk az A és B pontokon áthaladó köröket. Mi a körök azon pontjainak a mértani helye, amelyek legtávolabb vannak az AB szakasz felező merőlegesétől?

1424. Az $x^2+y^2-2rx = 0$ körön rögzítsük az $A(0; 0)$ és a $B(r; r)$ pontokat, azután jelöljük ki a kör egy harmadik pontját, M-et. A BM húr felezéspontjából húzzunk az AM egyenesre merőleges e egyenest. Bizonyítsuk be, hogy ha az M pontot a körön mozgatjuk, az e egyenes egy rögzített ponton halad át. Határozzuk meg az AM egyenes és az e egyenes metszéspontjának a mértani helyét.

1425. Adott két párhuzamos egyenes, e és f és közöttük az O pont. O távolsága e től a, f-től b. Rajzoljunk O ponton át olyan g egyenest, amely e-t E-ben, f-et F-ben metszi. F pontban merőlegest állítunk a g-re, azután az e-vel

való metszéspont irányába F-ből felmérjük rá az $FX = OE$ szakaszt. Mi az X pont mértani helye, ha a g egyenest az O pont körül forgatjuk?

1426. Adott az ABC derékszögű háromszög. Toljuk el a CA befogó egyenesét. Ez az egyenes az CB befogó egyenesét P, az AB átfogó egyenesét R pontban metszi. Határozzuk meg a PA és az RC egyenesek metszéspontjának a mértani helyét, ha a CA egyenesre különböző eltolást alkalmazunk.

1427. Adott méretű homogén négyzet alakú fémlemezt a középpontján átmenő e egyenessel két darabra vágjuk szét. Határozzuk meg az egyes lemezdarabok súlypontjainak a mértani helyét, ha az e egyenest a középpont körül forgatjuk.

1428. Adott síkban fekvő e egyenesen rögzítsünk két pontot, M-et és S-et. Tekintsük e-t egy egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelyének, M-et a magasságpontnak és S-et a súlypontnak. Az e-re illeszkedő csúcsot jelöljük C-vel. Határozzuk meg a háromszög másik két csúcsának a mértani helyét, ha C az e egyenesen mozog.

1429. Adott kör középpontján áthaladó és a kör síkjába eső egyenesek közül rögzítsük az egyik egyenest. Mi azon körök középpontjának a mértani helye, amelyek érintik az adott kört és a rögzített egyenest?

1430. g és l adott egyenesek merőlegesek egymásra. g egyenesen rögzítsünk két pontot, A-t és B-t. Az l egyenes tetszőleges P pontját összekötjük A-val és B-vel, azután az AP és BP egyenesekre az A, illetve a B pontban az adott egyenesek által kifeszített síkban merőlegest rajzolunk. Mi a merőlegesek M metszéspontjának a mértani helye, ha a P pont végigfut az l egyenesen?

1431. Rajzoljunk O pont körül egy kört, és rögzítsük az egyik átmérőjét. A kör kerületén jelöljünk ki egy P pontot. P-nek a rögzített átmérőre eső merőleges vetülete legyen Q. A középpontból a P-hez húzott sugárra mérjük fel az $OR = OQ$ szakaszt. Határozzuk meg az R pont mértani helyét, ha P végigfut az adott körön.

1432. Rögzítsünk a koordináta-rendszer síkjában egy $A(x_0; y_0)$ pontot. ($x_0 > 0$ és $y_0 > 0$). Húzzunk az A ponton át olyan e egyenest, amely az x tengelyt Q, az y tengelyt R pontban metszi. Határozzuk meg a QR szakasz felezőpontjának a mértani helyét, ha az e egyenest az A pont körül forgatjuk.

1433. Adott két egymásra merőleges egyenes: e_1 és e_2. Mi azon körök középpontjainak a mértani helye, amelyek az e_1 egyenest érintik, az e_2 egyenesből pedig d hosszúságú szakaszt vágnak ki?

1434. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét a síkban, amelyek két rögzített ponttól mért távolságainak a szorzata adott állandóval egyenlő.

1435. Az $x = a$ egyenlettel megadott egyenest, ahol $a > 0$, messük az origóból húzott egyenesekkel. A metszéspontokból az origó felé mérjünk fel adott b hosszúságú szakaszokat. Határozzuk meg a kapott végpontok mértani helyét.

1436. Az origón áthaladó e egyenes az $x^2+y^2-2ax = 0, (a > 0)$ kört az $A(0; 0)$ és egy B, az $x = 2a$ egyenest C pontban metszi. Mérjük fel A pontból az AC szakaszra az $AP = CB$ szakaszt. Határozzuk meg P pont mértani helyét, ha m minden valós értéket felvesz.

1437. Adott r sugarú kör csúszás nélkül gördül az x tengelyen. Milyen görbét ír le a körnek az a pontja, amelyik a mozgás kezdetekor az origóban van?

1438. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenség-rendszert:

a) $x \geq 2$, $y \geq x-1$;

b) $x > 0$, $y \geq \frac{1}{x}$;

c) $x < 0$, $y > \frac{1}{x}$;

d) $x+y \geq 2$, $2x-y \geq 8$;

e) $3x-y-2 < 0$, $5x-4y+6 < 0$;

f) $x-y-2 < 0$, $2x-2y+5 < 0$;

g) $x+y-4 < 0$, $2x+2y+5 > 0$;

h) $2x+y = 3$, $x-y < 12$;

i) $x-5y+6 < 0$, $3x+y-14 < 0$, $x-y+2 > 0$;

j) $3x+2y-5 > 0$, $2x-y-8 < 0$, $3x-5y+2 = 0$;

k) $x^2+y^2 \geq 25$, $x \geq 0$;

l) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} < 1$, $y > 0$;

m) $y > 3x-2$, $y < x^3$;

n) $x^2-y^2 \leq 9$, $2x-3y+2 = 0$;

o) $y \geq \frac{1}{4}x^2$, $y \leq 2x$.

1439. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(y-x^2)(x+y-6) < 0$;

b) $(x^2+y^2-4)(x^2-4) > 0$;

c) $\frac{x^2-y}{y^2-x^2} > 0$;

d) $y \geq |x-2|$;

e) $y^2 < |4x|$;

f) $y+\sqrt{(x-1)^2} \leq 0$;

g) $y+x-|x-3| \geq 0$.

1440. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} 2x+y &\geq 6 \\ x+2y &\geq 6 \\ y &\geq 1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy a $k = 5x+6y$ függvénynek a fenti feltételek mellett minimuma legyen.

1441. Egy osztály klubdélutánra készül, és a tanulók elhatározzák, hogy szendvicseket készítenek. A szendvicsek elkészítéséhez a következő nyersanyag áll rendelkezésükre: 120 dkg vaj, 100 dkg sonka, 200 dkg sajt, 20 db

kemény tojás és korlátlan mennyiségű kenyér. Kétféle szendvicset akarnak készíteni. Az A típusú szendvicshez darabonként a következő anyagokat használják fel: 3 dkg vaj, 3 dkg sonka, 2 dkg sajt, $\frac{1}{4}$ tojás és kenyér. A B típusú szendvicshez darabonként 2 dkg vajra, 1 dkg sonkára, 5 dkg sajtra, $\frac{1}{2}$ tojásra és kenyérre lesz szükség. A rendelkezésre álló nyersanyagból hány darab A és hány darab B típusú szendvics készíthető úgy, hogy az összes szendvicsek száma a lehető legnagyobb legyen?

1442. Az A és a B típusú ruhák elkészítéséhez egy üzemben darabonként a következő munkaműveletek szükségesek:

Munkaművelet	A	B
Szabás	3 perc	3 perc
Varrás	1 perc	4 perc
Hegesztés	1 perc	—

Egy műszakon belül a szabásra összesen 420 perc, a varrásra összesen 440 perc, a hegesztésre összesen 80 perc fordítható. Az A típusú ruha 60 Ft a B típusú ruha 30 Ft haszonnal jár darabonként. Az A típusú ruha termelési értéke darabonként 450 Ft, a B típusú ruha termelési értéke darabonként 500 Ft.

Hány darabot termeljen a gyár egy műszakban az egyes modellekből, ha

a) maximális haszonra,

b) maximális termelési értékre,

c) maximális haszon mellett maximális darabszám elérésére törekszik?

Létezik-e olyan termelési program, amely mindhárom követelményt egyszerre kielégíti?

1443. Egy üzem A és B típusú termékeket gyárt, munkadarabonként a következő feltételek mellett

Munkaművelet	A	B
Marás	2 perc	—
Préselés	—	2 perc
Csiszolás	2 perc	1 perc
Festés	5 perc	5 perc

Egy műszakon belül a marásra 90 perc, a préselésre 80 perc, a csiszolásra 100 perc, a festésre 300 perc fordítható.

Az A típusú munkadarab előállítási költsége 1,28 Ft, a B típusú munkadarab előállítási költsége 4,65 Ft.

Az A típusú munkadarabot 2 Ft-ért, a B típusút 5 Ft-ért adja el az üzem.

Milyen termelési program mellett tudna az üzem a legnagyobb nyereségre szert tenni úgy, hogy közben a lehető legtöbb munkadarabot állítsa elő?

TRIGONOMETRIA

Általános utasítások

Készítsünk vázlatot majdnem minden feladatban, majd a számítások befejeztével mérethű vagy arányosan kicsinyített rajzot, s ezen ellenőrizzük — a rajz pontossága erejéig — az eredményeket. — A számításokat az elvont feladatokban általában négy jegyre kerekítsük, gyakorlati feladatokban lehet kevesebb jegyre is. — A nevező gyöktelenítése csak akkor szükséges, ha könnyebbséget okoz a számításnál. — Eltérések adódhatnak a közölt eredményeknél abban az esetben, ha szögfüggvényekkel (II. osztályos anyagrész) vagy a szögfüggvények logaritmusaival, vagy tangens függvényértékek helyett cotangens függvényértékekkel számolunk, vagy különböző táblázatok alkalmazása következtében. — Ha nincs külön utasítás, a jelölések a szokásos háromszög-, négyszögjelölések, amelyek az ilyen feladatok elején megtalálhatók. — Az útmutatás nem az egyetlen megoldás: néhol erre rá is mutatunk.

Az ábrák számozása megegyezik a feladatok sorszámával.

1. Az átfogó 6 cm, az adott szöggel szemközti befogó $\frac{1}{4}$ cm stb.; $\sin\alpha = \frac{1}{24}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$. Ha a merőleges távolság 6 cm lenne, akkor a szög $90°$ lenne, $\sin 90° = \frac{6}{6} = 1$.

2. Az átfogó 5 cm, az adott szög melletti befogó 4 cm stb.; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{20}$. Ha a vetület 5 cm lenne, akkor a szög $0°$ lenne, azaz $\cos 0° = 1$.

3. A szöggel szemközti befogó k cm, a szög melletti befogó l cm.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{13{,}5} = \frac{2}{27}; \frac{20}{109}; \frac{25}{54}; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}$; 2,16; 5,45; 13,5;

$\operatorname{ctg}\alpha = 13{,}5$; 5,45; 2,16; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{25}{54}$; $\frac{20}{109}$; $\frac{2}{27}$.

4. Az átfogó 13 cm, a szöggel szemközti befogó 5 cm. A másik befogót Pitagorasz-tétellel számítjuk ki, s felírjuk a négy szögfüggvényt:

$$\sin\alpha = \frac{5}{13};\quad \cos\alpha = \frac{12}{13};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12};\quad \operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4.$$

5. Az átfogót Pitagorasz-tétellel számítjuk ki, $a = 0{,}7$ cm, $b = 2{,}4$ cm.

$$\sin\alpha = \frac{7}{25};\quad \cos\alpha = \frac{24}{25};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{24}{7}.$$

6. Lásd az előzőket $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

7. Lásd az előzőket.

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
8	15	17	$\frac{8}{17}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{15}{8}$
40	9	41	$\frac{40}{41}$	$\frac{9}{41}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{9}{40} = 0{,}225$
8	3,9	8,9	$\frac{80}{89}$	$\frac{39}{89}$	$2\frac{2}{39}$	$\frac{39}{80}$
1,2	3,91	4,09	0,2934	0,9559	0,3069	3,258
$\frac{51}{100}$	$\frac{253}{400}$	$\frac{13}{16}$	0,6277	0,7784	0,806	1,24
$21\frac{3}{5}$	9	$23\frac{2}{5}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$	2,4	$\frac{5}{12}$
$m-n$	$2\cdot\sqrt{mn}$	$m+n$	$\frac{m-n}{m+n}$	$\frac{2\cdot\sqrt{mn}}{m+n}$	$\frac{(m-n)\sqrt{mn}}{2mn}$	$\frac{2\sqrt{mn}}{m-n}$

8. *a)* Lásd az előzőket. $c = b\sqrt{5}$; $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Lásd előzőket. $b = \frac{c\sqrt{5}}{3}$; $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Fejezzük ki a értékét, s az eredményt helyettesítsük be Pitagorasz tételébe. A b-re nyert másodfokú egyenletből b-re két eredményt kapunk. Ezután írjuk fel a négy szögfüggvényt. Két eredményt kapunk.

$$\sin\alpha = \frac{5\mp\sqrt{7}}{8};\quad \cos\alpha = \frac{5\pm\sqrt{7}}{8};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{16\mp 5\sqrt{7}}{9};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{16\pm 5\sqrt{7}}{9}.$$

d) Lásd előzőt. A b-re nyert másodfokú egyenletből csak az egyik b értéke használható, így a négy szögfüggvényre csak egy-egy értéket kapunk.

$$b = \frac{3}{5}c;\quad a = \frac{4}{5}c;\quad \sin\alpha = \frac{4}{5};\quad \cos\alpha = \frac{3}{5};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}.$$

9. Jelölés a 9. ábra szerint. Az a átfogójú részháromszögből x értékét Pitagorasz-tétellel kapjuk, s ugyanebben a részháromszögben (α merőleges szárú szög) felírjuk a szögfüggvényeket.

$$x = \sqrt{a^2 - m_c^2};\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2-m_c^2}}{a};\quad \cos\alpha = \frac{m_c}{a};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{a^2-m_c^2}}{m_c};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{m_c}{\sqrt{a^2-m_c^2}}.$$

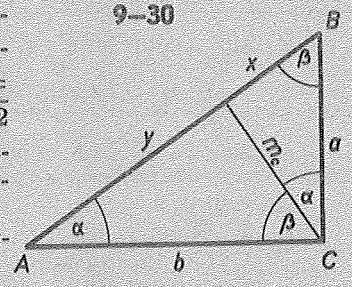
10. Lásd a 10. ábra jelöléseit. a-t és b-t mértani középarányossal kapjuk, majd felírjuk a négy szögfüggvényt.

$$a = \sqrt{x(x+y)};\quad b = \sqrt{y(x+y)};\quad c = x+y.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x}{x+y}};\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{x+y}};\quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{x}{y}};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

11—14. Derékszögű háromszögeket szerkesztünk a megfelelő adatokból. A tizedes törteket célszerű közönséges törtekké alakítani, majd egyszerűsíteni. $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ mértani középarányossal szerkeszthető. $\sqrt{2} = \sqrt{1\cdot 2}$ és $\sqrt{3} = \sqrt{1\cdot 3}$. — Másképpen a $\sqrt{2}$ az egységnyi oldalú négyzet átlója. $\sqrt{3}$ pedig a 2 egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága.

9—30



15. Lásd előző feladatokat. Az α szöget szögmérővel mérjük meg.

a) kb. 32°; 45°; *c)* kb. 52°; 60°;
b) kb. 37°; 60°; *d)* kb. 58°; 45°

16. *a), b), c)*; **17.** *a), b), c)*; **18.** *a), b), c)* és **19.** *a), b), c)* eredményei a sinus-cosinus; illetőleg a tangens-cotangens táblázatból leolvashatók. **16.** *d), e)*; **17.** *d), e)*; **18.** *d), e)* és **19.** *d), e)* eredményeit interpolálással számítjuk ki.

21. A szögértékek közvetlenül leolvashatók.

22. Interpolálással számolunk.

23. Lásd az előzőt.

24. Alakítsuk át az egyenletek egyik oldalát a pótszögek szögfüggvényeivel. Olyan egyenleteket kapunk, amelyekben mindkét oldalon ugyanazon szögfüggvények szerepelnek. Ezek egyenlőségéből következik a szögek egyenlősége.

a) $\sin\alpha = \sin(90°-\alpha)$; $\alpha = 90°-\alpha$; $\alpha = 45°$, de közismert is, hogy $\sin 45° = \cos 45°$;
b) $\alpha+12° = 90°-(\alpha+8°)$; $\alpha = 35°$;
c) $\alpha = 50°$;
d) $\alpha = 32°$;
e) $\alpha = 20°$;
f) $4\alpha = 90°-(\alpha-22°)$; $5\alpha = 112°$; $\alpha = 22{,}4° = 22°24'$;
g) $\alpha = 18°$;
h) $\alpha = 44°$;
i) $\alpha = 16\frac{5°}{6} = 16°50'$;
j) $\alpha = 5°$.

25. Lehet a tanult összefüggések alapján számolni. De lehet úgy is, hogy a megadott szögfüggvényértékekből derékszögű háromszöget szerkesztünk, az ismeretlen harmadik oldalt Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk, s akkor írjuk fel a keresett három szögfüggvényértéket.

26. Kiszámítjuk $\sin\alpha$ értékét, és behelyettesítjük az adott egyenlőségbe. Eredmény: $\gamma = 90°$.

27. *a)* $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$-t helyettesítünk s egyszerűsítünk. Eredmény: $\cos\alpha$.

b) Eredmény: $\sin\alpha$.

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-t helyettesítünk s egyszerűsítünk. Eredmény: $\sin^2\alpha$.

d) $\sin\alpha$-t gyökjel alá visszük, s szorzunk vele, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$-t helyettesítve. Eredmény: 1.

e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-t helyettesítünk, a törteket összeszorozzuk s egyszerűsítünk.
Eredmény: 1.

f) Gyök alá viszünk, szorzunk, s $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$-t helyettesítjük.
Eredmény: 1.

g) $1 = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha$-t helyettesítjük, összevonunk, s tagonként osztunk.
Eredmény: $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.
Lehet az egyik $\cos^2\alpha$ helyett $1-\sin^2\alpha$-t írni.

28. *a)*–*g)* példákban a tanult szögfüggvényértékeket helyettesítjük, és elvégezzük a kijelölt műveleteket. Eredmények:

a) $3\frac{1}{2}$; *b)* $\sqrt{3}$; *c)* $\frac{1}{2}$; *d)* $\frac{1}{4}$; *e)* $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; *f)* 2; *g)* 0.

h) A 75° szögfüggvényeit a pótszög megfelelő szögfüggvényével helyettesítjük. $\operatorname{ctg} 15° = \dfrac{\cos 15°}{\sin 15°}$-ot írunk, egyszerűsítünk, s összevonunk.

Eredmény: 1.

i) $\sin(45°-\alpha) = \cos(45°+\alpha)$,
$\cos(30°+\alpha) = \sin(60°-\alpha)$,
$\sin^2 30° \quad = \cos^2 60°$.
Helyettesítünk s összevonunk. Eredmény: 1.

j) Alkalmazzuk a tanult azonosságokat:

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab\cdot(a+b)$;
$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.
Legyen $a = \sin^2\alpha$ és $b = \cos^2\alpha$.
$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$;
$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

A kifejezés: $2(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-3(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = -1$.

k) Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatnál.
Az eredeti kifejezésbe helyettesítve, a kijelölt műveleteket elvégezve, az eredmény: 1.

l) Hasonló az előző két feladathoz. Eredmény: 1.

29. *a) I. megoldás:* Az egyenlőség bal oldalát alakítjuk.

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$-t helyettesítünk, és közös nevezőre hozunk.

II. megoldás: A jobb oldalon $1 = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha$-t helyettesítünk, és tagonként osztunk a nevezővel.

b) I. megoldás: A bal oldalon a szorzást elvégezzük, majd
$2 = 1+1 = 1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$-t helyettesítünk.

II. megoldás: A jobb oldalon elvégezzük a négyzetre emelést, majd kétszeres kiemeléssel szorzattá alakítunk.

c) I. megoldás: A bal oldal számlálóját és nevezőjét is megszorozzuk $\cos\alpha$-val, majd a nevezőben $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = (1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$-t helyettesítve egyszerűsítünk.
II. megoldás: A helyesen feltett egyenlőségben a törteket eltávolítjuk.

d) A jobb oldalon $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$-t és $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$-t helyettesítünk, közös nevezőre hozunk. Végül $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta$-t és $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$-t helyettesítünk.

e) Az egyenlőség bal oldalán elvégezzük a szorzást, az $1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ helyettesítést, majd négyzetgyököt vonunk.

f) I. megoldás: A jobb oldalon beszorzunk.

II. megoldás: A bal oldalon csoportokra bontunk, s szorzattá alakítunk.

g) I. megoldás: A bal oldalon az osztást elvégezzük, s $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ helyett $\operatorname{ctg}\alpha$-t helyettesítünk.

II. megoldás: A jobb oldalon $\operatorname{ctg}\alpha$ helyett $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$-t írva, közös nevezőre hozunk.

h) Az egyenlőség bal oldalán $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$-t helyettesítünk, azután a számlálóban és a nevezőben is közös nevezőre hozunk, majd egyszerűsítünk.

i) I. megoldás: Emeljük ki a jobb oldal számlálójából $\cos^2\alpha$-t, majd egyszerűsítsünk $(1-\operatorname{tg}\alpha)$-val.
II. megoldás: A helyesnek feltett egyenlőségben távolítsuk el a törtet, majd osszunk $\cos^2\alpha$-val.

j) A bal oldalon $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$-t és $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$-t helyettesítve, majd közös nevezőre hozva, egyszerűsítünk.

k) Lásd előző feladatot.

l) Hasonló az előző feladathoz, csak a számlálót hozzuk közös nevezőre.

m) Lásd a *k)* feladatot.

n) Az egyenlőség jobb oldalán $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-t helyettesítünk, közös nevezőre hozunk, majd kiemeléssel kapjuk az egyenlőség bal oldalát.

30. *a), b), c)* A harmadik oldalt Pitagorasz tételével, a szögeket valamelyik szögfüggvénnyel kapjuk. m_c az eredeti háromszöget 2 hasonló háromszögre bontja (30. ábra), amelyekben merőleges szárú szögek vannak. Így $m_c = b\sin\alpha$, vagy $m_c = a\sin\beta$, vagy $m_c = a\cos\alpha$; $x = a\sin\alpha$; $y = b\cos\alpha$; $y = c-x$; $t = \frac{ab}{2} = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{2} = \frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{2}$.

30. *d), e), f), g), h), i)* A megadott szögből a pótszög azonnal adódik, az oldalak szögfüggvénnyel, esetleg Pitagorasz-tétellel kaphatók. m_c; x; y az előbbiek alapján, a terület a megadott alkotórészekből is felírható.

$$t = \frac{ab}{2} = \frac{a^2\operatorname{ctg}\alpha}{2} = \frac{a^2\operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{b^2\operatorname{ctg}\beta}{2} = \frac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{c^2\sin\beta\cos\beta}{2}.$$

30. *j), k)* A terület képletéből kapjuk a másik befogót, a többi már az előbbi utasítások alapján számítható (lásd 30. *a), b)*).

30. *l)* $\frac{ab}{2} = t$ és $a^2+b^2 = c^2$ egyenletrendszerből a és b kiszámítható.

30. *m), n)* $x = a\sin\alpha$-ból az α szög, illetve $y = b\cos\alpha$-ból az α szög kiszámítható. β pótszög. Szögfüggvénnyel a másik 2 oldal könnyen adódik.

30. *o), p)* $m_c = a\cos\alpha$; illetve $m_c = b\sin\alpha$ összefüggésekből az α szög, szögfüggvénnyel a többi oldal kiszámítható.

30. *q), r)* $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_c}{x}$; illetve $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_c}{y}$ összefüggésekből az egyik szög kiszámítható.

30. *s), t)* $m_c = a \cos \alpha$; $m_c = b \sin \alpha$; illetve $m_c = a \sin \beta$; $m_c = b \cos \beta$ összefüggésekből nyerhetők a befogók. De lehet x és y értékét a kis háromszögekből szögfüggvénnyel kiszámítani, s akkor $c = x+y$; a befogók mértani középarányossal számíthatók.

30. *u)* $a = \sqrt{xc}$; $y = c-x$; $m_c = \sqrt{xy}$; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{x}{m_c}$ stb.

30. *v)* $c = x+y$; $m_c = \sqrt{xy}$; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{x}{m_c}$ stb.

30. *z)* $t = \dfrac{b^2 \operatorname{ctg} \beta}{2}$ képletből a b befogó, a többi alkatrész valamelyik szögfüggvénnyel számítható.

Az *a)–z)* feladatok az útmutatás alapján a táblázat adataival elvégezhetők. Az eredmények a táblázatnak 20 háromszögén ellenőrizhetők. Ez összesen $23 \cdot 20 = 460$ gyakorlópéldát jelent.

Pl.:

30. *u)* $x = 4{,}84$; $c = 6{,}184$ (A 30. feladat táblázatának 6. háromszöge.)

30. *v)* $x = 22{,}79$; $y = 11{,}61$ (A 30. feladat táblázatának 9. háromszöge.)

30. *z)* $t = 2574$; $\beta = 20°37'$ (A 30. feladat táblázatának 11. háromszöge.)

31. *a), b), c), d)* A megadott összegek, illetve különbségek kétismeretlenes egyenletet adnak, ezekhez második egyenletnek a megadott oldalakból és az α szögből felírt szögfüggvényt vesszük, majd az egyenletrendszert megoldjuk.

Pl. $a+b = 17$ és $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg} 67°23'$. (A 30. feladat táblázatának 1. háromszöge.)

$a-b = 0{,}1$ és $\operatorname{tg} 53°8' = \dfrac{a}{b}$. (A 30. feladat táblázatának 5. háromszöge.)

$c+b = 32$ és $\cos 73°44' = \dfrac{b}{c}$. (A 30. feladat táblázatának 8. háromszöge.)

$c-b = 49$ és $\cos 56{,}6° = \dfrac{b}{c}$. (A 30. feladat táblázatának 12. háromszöge.)

31. *e)* $x-y = c\ (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$ egyenlőségből c-t, vagyis az $x+y$ értékét kapjuk, ennek segítségével x, y kiszámítható.

31. *f)* $t = \dfrac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2}$ képletből az a befogó kiszámítható.

31. *g), h), i), j), o), p)* A megadott összeg, illetve különbség, illetve hányados ad egy egyenletet két ismeretlennel, ehhez járul Pitagorasz tétele második egyenletnek, a megadott oldal értékét behelyettesítve.

Pl. $a+b = 28$ és $a^2+b^2 = 400$. (A 30. feladat táblázatának 19. háromszöge.)

$a-b = 31$ és $a^2+b^2 = 11\,881$. (A 30. feladat táblázatának 12. háromszöge.)

$c+b = 225$ és $2025+b^2 = c^2$. (A 30. feladat táblázatának 20. háromszöge.)

$c-b = 2{,}56$ és $144+b^2 = c^2$. (A 30. feladat táblázatának 18. háromszöge.)

$\frac{a}{b} = 1$ és $a^2+b^2 = 3{,}38$. (A 30. feladat táblázatának 4. háromszöge.)

$\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ és $a^2+6{,}25 = c^2$. (A 30. feladat táblázatának 3. háromszöge.)

31. *k), l)* $c+b$ értéke, illetve $c-b$ értéke az egyik egyenlet.

Tudjuk, hogy $x+y = c$ és $b^2 = cy$, azaz $y = \frac{b^2}{c}$, tehát $x+\frac{b^2}{c} = c$ a másik egyenlet. Az egyenletrendszer adja x és y értékét; $m_c = \sqrt{xy}$ stb.

Pl. $c+b = 4{,}29$ és $2{,}03+\frac{b^2}{c} = c$. (A 30. feladat táblázatának 17. háromszöge.)

$c-b = 2{,}1$ és $3{,}88+\frac{b^2}{c} = c$. (A 30. feladat táblázatának 14. háromszöge.)

31. *m), n)* A megadott összegből, illetve különbségből kapunk egy kétismeretlenes egyenletet; ehhez 2. egyenlet az $m^2 = xy$ mértani középarányos egyenlete.

Pl. $x-y = 43$ és $xy = 2508$. (A 30. feladat táblázatának 12. háromszöge.)

$x+y = 8{,}53$ és $xy = 17{,}12$. (A 30. feladat táblázatának 7. háromszöge.)

32. $a = 3k$; $b = 4k$; ahol k meghatározandó mennyiség.

$c = 5k$; $m:a = b:c$; $2{,}4k = 24$; $k = 10$.

$a = 30$; $b = 40$; $c = 50$; $\alpha = 36°52'$; $\beta = 53°8'$.

33. $c = 7k$; $a = 5k$; ahol k arányossági tényező. Pitagorasz tételéből

$b = \sqrt{24k^2} = 2k\sqrt{6}$; $x = 32{,}14$; $x:a = a:c$; $x = \frac{a^2}{c}$; ebből $k \approx 9$.

$c \approx 63$ cm; $a \approx 45$ cm; $b \approx 18\sqrt{6} \approx 44$ cm; $\alpha = 45°35'$; $\beta = 44°25'$.

34. Egyik eljárás, ha az összes alkotórészt az átfogóval és az α szöggel fejezzük ki. Így:

$a = c \sin\alpha$; $b = c\cos\alpha$; $m_c = b\sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha$;
$x = c\sin^2\alpha$; $y = c\cos^2\alpha$; $a+b = c(\sin\alpha+\cos\alpha)$; $a-b = c(\sin\alpha-\cos\alpha)$;
$c+b = c(1+\cos\alpha)$; $c-b = c(1-\cos\alpha)$; $x-y = c(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$;

$t = \frac{ab}{2} = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$. Mindezek az eredmények még egyszerűbb alakban is írhatók magasabb ismeretek alapján. Ebben a feladatban:

$c(\sin\alpha+\cos\alpha+1) = 64$; $c = 26{,}6$ cm.

35. Lásd az előző feladatot. $a = c\sin\alpha = 216{,}6$ mm; $b = 784{,}7$ mm.

36. A 9. ábra alapján felírjuk a részháromszögek területének arányát; a befogókat mértani középarányossal kapjuk.

$t_1:t_2 = \frac{xm_c}{2}:\frac{ym_c}{2} = \frac{x}{y}$; $a^2 = xc$; $b^2 = yc$; $a^2:b^2 = \operatorname{tg}^2\alpha$;

$\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} = \operatorname{tg}\alpha$; $\alpha = 24°6'$; $\beta = 65°54'$.

37. A $\operatorname{tg}\alpha$ és a terület képletéből kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk.

$a = 6$ cm; $b = 4$ cm; $\alpha = 56°19'$; $\beta = 33°41'$.

38. *a), b), c)* Az adott szögfüggvényből kifejezzük az egyik oldalt, s Pitagorasz tételébe helyettesítünk.

a) $a = 1{,}05$ cm; $b = 1$ cm; $\alpha = 46°24'$;
b) $c = 25$ cm; $b = 7$ cm; $\alpha = 73°44'$;
c) $c = 125$ cm; $a = 44$ cm; $\alpha = 20°37'$.

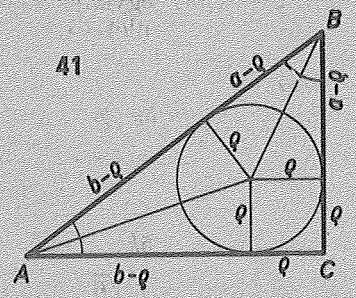
39. $a = c\sin\alpha$; $b = c\cos\alpha$ értékeket az $a+b = c+6$ egyenletbe helyettesítjük.

$c = 25$ m; $a = 24$ m; $b = 7$ m.

40. $a = \dfrac{b+c}{2}$; $\sin\alpha = \dfrac{b+c}{2c}$ az első egyenlet és Pitagorasz tétele alapján a-t és b-t c-vel fejezzük ki. $\alpha = 53°8'$; $\beta = 36°52'$.

41. A derékszögű háromszög csúcsaiból, mint külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. Így $a-\varrho+b-\varrho = c$; azaz $a+b-c = 10$. Ezután a 39. feladat útmutatása szerint haladunk. $a = 20{,}62$ cm; $b = 14{,}71$ cm; $c = 25{,}33$ cm (41. ábra).

41



42. Megrajzoljuk a befogókhoz tartozó súlyvonalakat, majd felírjuk Pitagorasz tételét az új két derékszögű háromszögben:

$s_b^2 = a^2+\dfrac{b^2}{4}$ és $s_a^2 = \dfrac{a^2}{4}+b^2$; $a = 5$ cm; $b \approx 12$ cm; $c \approx 13$ cm;

$\alpha = 22°37'$; $\beta = 67°23'$.

43. *a)* és *b)* Az összeg egyenlete mellé felírjuk Pitagorasz tételét abban a derékszögű háromszögben, melynek átfogója a megadott súlyvonal.

a) $b = 7$ cm, vagy 5,4 cm; $a = 24$ cm, vagy 25,6 cm; $c = 25$ cm, vagy 26,16 cm; $\alpha = 73°44'$, vagy $78°5'$; $\beta = 16°16'$, vagy $11°55'$.

b) $a = 8$ cm; $b = 6$ cm; $c = 10$ cm; $\alpha = 53°8'$; $\beta = 36°52'$.

44. A körülírt kör sugaráról tudjuk, hogy az az átfogó fele.
Így $c = 2r$. Felírjuk Pitagorasz tételét az eredeti háromszögre és arra a derékszögű háromszögre is, melynek átfogója a megadott súlyvonal.

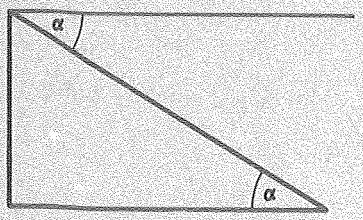
$c = 25$ cm; $a = 20$ cm; $b = 15$ cm; $\alpha = 53°8'$; $\beta = 36°52'$.

45. Legyen $a = p+q$. A szögfelező tétele értelmében: $p:q = c:b$. Ebből az összefüggésből kifejezzük c-t, s Pitagorasz tételébe helyettesítünk.

$a = 8{,}8$ cm; $b = 6{,}6$ cm; $c = 11$ cm; $\alpha = 53°8'$; $\beta = 36°52'$.

Általános utasítások a szöveges feladatokkal kapcsolatban

Ha mást nem mondunk, vízszintes talajra gondolunk.
A napsugár beesési szöge az a szög, amelyet a napsugarak a vízszintessel zárnak be. Emelkedési szögön a pályahossznak a vízszintes iránnyal alkotott szögét értjük.
Depressziószögön (lehajlás) értjük a megfigyelőn és a tárgyon átmenő függőleges síkban a megfigyelőn átmenő vízszintes irány és a tárgyra irányított egyenes közti szöget.



A teodolit egy vízszintes és függőleges tengely körül is forgatható távcső, melynek a tengelyére szögmérőt szerelnek.

46. 242,7 m. **47.** 32 m. **48.** 70,02 m.
49. 442,8 m. **50.** 202 m.

51—53. A síkban kiterített csavarmenet egy derékszögű háromszög, melynek alapja a csavar kerülete, másik befogója egy menetnek a magassága.
51. 10,97 mm. **52.** 6°43′. **53.** 52,06 mm.
54. 23,32 m. **55.** 25,73 m. **56.** 304,7 m. **57.** 1104 m.
58. 57,20 m.
59. Elindulunk abból a derékszögű háromszögből, melyben két alkotórész adott. Kifejezzük szögfüggvénnyel a két háromszög közös oldalát. Ezután a másik háromszögből a távolság második része kiszámítható. A két ház közötti távolság 67,6 m.
60. Az alapvonal két részét a d szélességgel kifejezve:

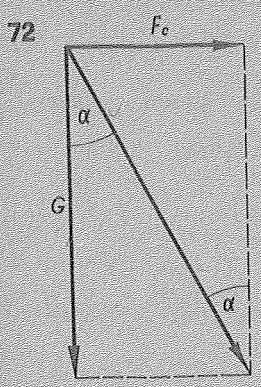
$$d\,(\operatorname{ctg} 67{,}1° + \operatorname{ctg} 72°38') = 56;\quad d = 76{,}16 \text{ m}.$$

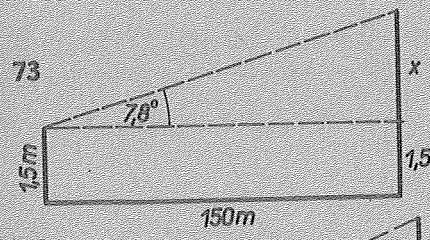
61. Lásd előző feladatot. $d = m = 186{,}6$ m.
62. 2°52′. **63.** 4,37%. **64.** 2°45′. **65.** 18°26′.
66. Először tg 15° az első levágott szakasz, majd tg 30° − tg 15° a második szakasz nagyságát adja. A maradék a harmadik szakasz. A szakaszok 0,2679; 0,3095; 0,4226.
67. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{3}$-ból az α_1 szöget kapjuk; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2}{3}$-ból α_2-t nyerjük. $\alpha_2 - \alpha_1 =$ = a második szögrész; a maradék a harmadik rész. A szögek: 18°26′; 15°15′; 11°19′.
68. A testátló, az egyik él és az egyik négyzet átlója derékszögű háromszöget alkot. $\alpha = 35°16'$.
69. A téglalap átlója az eredő erő, amelyet Pitagorasz tételével számítunk ki. $R = 97$ kp; a szög 42°5′.
70. A csúszda lejtő, melyre helyezett test akkor marad nyugalomban, ha a mozgató erő és a súrlódási erő egyenlő.
$F_1 = G \sin\alpha$; $F_2 = \mu G \cos\alpha$; $F_1 = F_2$; $\mu = \operatorname{tg}\alpha$; $\mu =$ arányossági tényező = súrlódási tényező. — A hajlásszög: 14°2′.
71. Vontatóellenállási tényező $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Hajlásszög: 2°17′.
72. Először a sebességet m/sec-ra alakítjuk. Ábrát készítünk (72. ábra); $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{v^2}{gr}$. Az eltérés szöge: 34°34′.

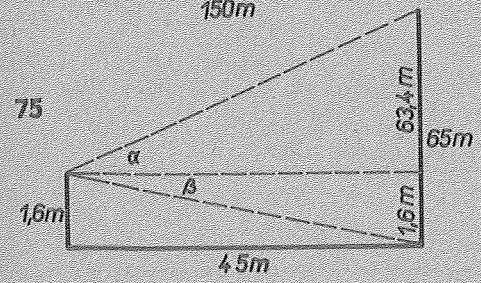
73. A mért emelkedési szög tangenséből megkapjuk a magasság egy részét.

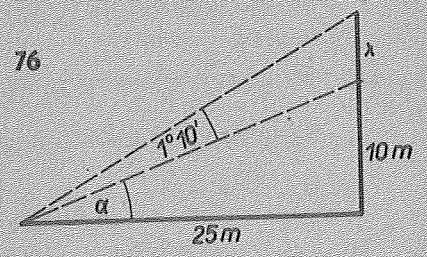
$m = 1{,}50 + x$ (73. ábra.). $m = 1{,}50 + 150 \cdot \operatorname{tg} 7{,}8°$. $m = 22$ m.

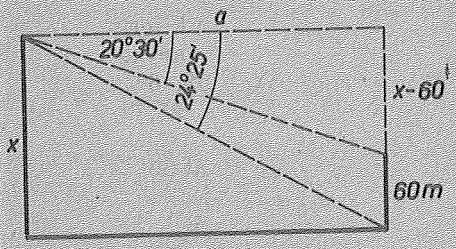
74. Lásd a 73. feladat rajzát. Itt a távolság a kérdés: 52,1 m.



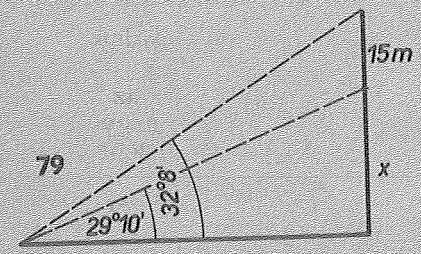








78



75. Az 1,6 m magasságból mért látószöget két részre bontjuk (75. ábra). A kapott derékszögű háromszögekből a szögek kiszámíthatók.
A látószög: $2°2' + 54°38' = 56°40'$.

76. A 76. ábra alapján először a torony emelkedési szögét számítjuk ki. Ehhez adjuk a látószöget. $\operatorname{tg}(\alpha + 1°10') = \dfrac{10+x}{25}$; $x = 0{,}59$ m.

77. 1,2 m.

78. A keletkezett két derékszögű háromszög közös befogóját fejezzük ki mindkét háromszögből. $a = x \operatorname{ctg} 24°25' = (x-60) \operatorname{ctg} 20°30'$ (78. ábra). $x = 340$ m.

79. Az ábra két derékszögű háromszögéből a közös oldalt fejezzük ki.

$x \operatorname{ctg} 29°10' = (x+15) \operatorname{ctg} 32°8'$ (79. ábra). 119,4 m.

80. $380 \operatorname{ctg} 18°41' = (380+x) \operatorname{ctg} 19°46'$ (80. ábra). 23,8 m.

81. $y \operatorname{ctg} 4°37' = (y+20) \operatorname{ctg} 5°42'$; $x = y \operatorname{ctg} 4°37'$ (81. ábra).

1052,6 m; 85 m; 105 m.

82. Legyen a léghajó magassága $x+40$, tükörképe a tó szintje alatt ugyanakkora távolságra van. $x \operatorname{ctg} 34°20' = (x+80) \operatorname{ctg} 38°42'$ (82. ábra). 502 m.

83. Először a szöget számítjuk ki. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{23}{50}$, azután a nagy derékszögű háromszögből tg-szögfüggvénnyel számolunk (83. ábra). 117 m.

84. (84. ábra). $x = \frac{280}{\operatorname{ctg} 19°48' - \operatorname{ctg} 42°53'}$; $x = 164{,}5$ m.

85. Lásd az előző feladatot: 55,77 m.

86. A két derékszögű háromszögben felírjuk az adott szögek tangensét (86. ábra).

$x = 11(\operatorname{tg} 4{,}6° - \operatorname{tg} 3{,}4°)$; $x = 232$ m.

87. A 3′ alatti út 20-szorosa az óránkénti sebesség. 11,9 km; 238 km/óra.

88. A 88. ábra alapján a két álló derékszögű háromszögből ctg szögfüggvénnyel felírjuk annak a harmadik derékszögű háromszögnek a befogóit, amelynek átfogója a 6 km. Ezután felírjuk Pitagorasz tételét.

$$x = \frac{6}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 30° + \operatorname{ctg}^2 25°}} = 2{,}18 \text{ km}$$

89. Lásd az előző feladatot (89. ábra). AB az 1′ alatt megtett út $= A'B'$, ahol A' az A pontnak, B' a B pontnak a földön való vetülete. T a mozdulatlan tárgy. $AA' = BB' = x$. Ennek segítségével fejezzük ki $B'T$ átfogót, majd felírjuk Pitagorasz tételét.

$x = 3{,}70$ m.

90. ≈ 442 m.

91. 1,4 m.

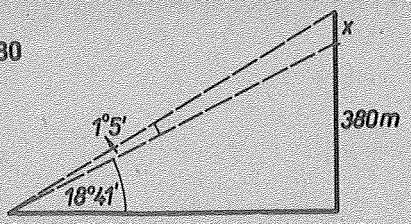
92. Három derékszögű háromszögből sinus szögfüggvénnyel számolunk. A kapott első és harmadik magasság összegéből kivonjuk a második magasságot.

$m = 36{,}57 \text{ m} + 104{,}5 \text{ m} - 14{,}92 \text{ m} = 126{,}15$ m.

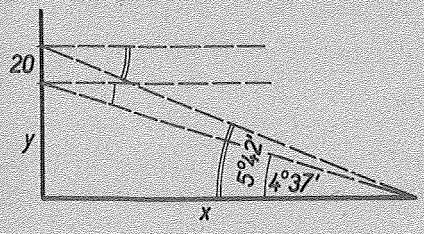
93. Lejtőt rajzolunk. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. A lejtőre helyezett G súlyú test ereje felbomlik a lejtővel párhuzamos F_1 mozgató- és erre merőleges nyomóerőre. α merőleges szárú szög. $F_1 = G \sin \alpha$ (93. ábra). $F_1 = 175$ kp; $\alpha = 30°$.

94. Az előző feladat fordított kérdése. F_1 adott. $G = 200$ kp.

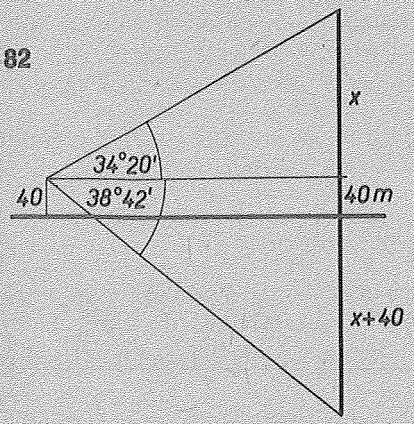
80



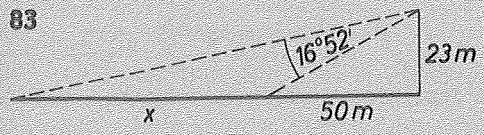
81



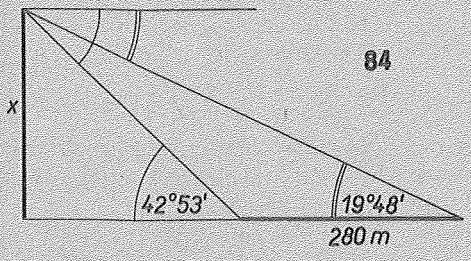
82



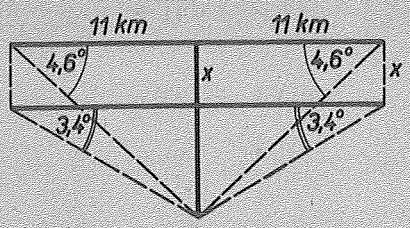
83



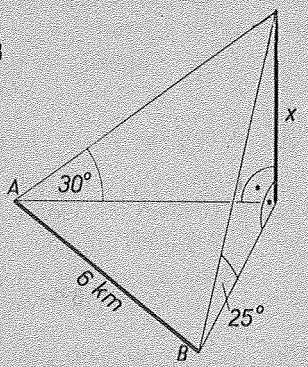
84



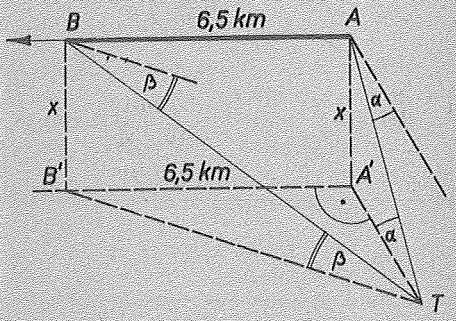
86



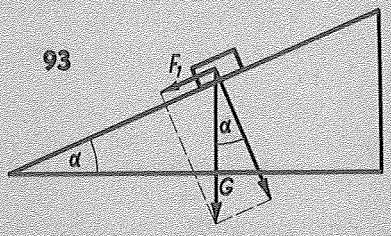
88



89



93



95. A 95. ábra alapján $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}15}{5}$; a 6 kp eredő erő felbomlik két, a huzalokban működő erőre. $\sin\alpha = \frac{R}{2} : F_1$; $F_1 = \frac{R}{2\sin\alpha}$; $F_1 = F_2 = 100\,\text{kp}$; $\alpha = 1°43'$.

96. A test súlya felbomlik két komponensre. F_1-re és F_2-re.
a) F_1 a mozgatóerő. Ezt és a súrlódási erőt is le kell győzni a teher feltolásakor. Így a feltoló erő: $F = F_1 + S$; $F_1 = G\sin\alpha$; $S = \mu F_2 = \mu G\cos\alpha$. A munka: $W = Fs$. $F = G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 603{,}9$ kp. $W = 60\,390$ mkp.
b) A fékező erő $= F_1 - S = G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha$; $W' =$ fékező erő $\cdot\, s$. $W' = F's$; $F' = G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 241{,}3$ kp; $W' = 24\,130$ mkp.

97. A térkép az út vízszintes vetületét adja. $\cos 4{,}5° = \frac{54\text{ mm}}{x}$, $10\,000\,x$ a valódi út hossza $= 541{,}6$ m.

98. $\alpha = 3°9'$.

99. Az adott szög sinusának és cosinusának segítségével kifejezzük a kis derékszögű háromszög befogóit. Ezután felírjuk a nagy derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét.
$x = 9{,}57$ m. A kötél kereken 3,3 m-rel lenne hosszabb.

100. A szög melletti befogót az adott szög felének a cosinusával kapjuk abból a derékszögű háromszögből, melynek a szögfelező az átfogója. A másik befogót az eredeti háromszögből tangens szögfüggvénnyel kapjuk.
$a = 17{,}78$ cm; $b = 23{,}71$ cm.

101. A kisebbik háromszögből a befogókat sinus és cosinus szögfüggvénnyel fejezzük ki, majd a nagy derékszögű háromszögben tangens szögfüggvénnyel számolunk. $x = 95{,}38$m.

102. $x = \frac{500}{\sin 4°8'}$; $v = 3600 \cdot \frac{x}{78}$ m/sec $= 320$ km/óra.

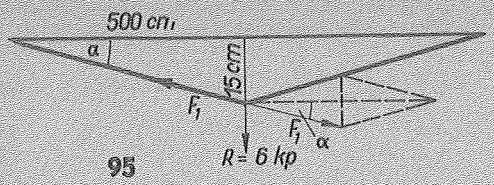
103. B pontból párhuzamost húzunk a vízszintessel (D) és merőlegest is bocsátunk rá (C). BDP háromszög szögeit kiszámítjuk, és kifejezzük a BD-t. Végül a $PP'A$ háromszögben felírjuk a tg 60° értékét. (Lásd az ábrát.)
$m = 2{,}36$ km.

104. $x = 5{,}7$ m.

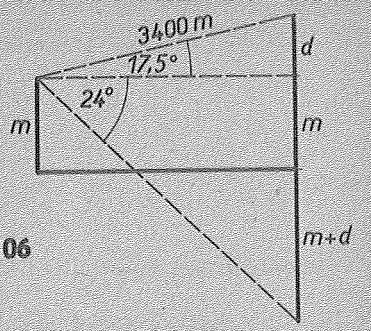
105. A magasság két részből tevődik össze. Két derékszögű háromszög keletkezik (105. ábra). Az egyik háromszög befogóit kifejezve, a másik háromszög ismeretlen befogóját határozzuk meg.
$m = 151{,}66$ m.

106. Legyen a hegy magassága: m. Az ábra alapján a felhő $m + 3400\sin 17{,}5°$ magasságban van a víz színe fölött. A tükörképe ugyanekkora távolságra van a víz alatt. Így $\operatorname{tg} 24° = \frac{2m + 3400\sin 17{,}5°}{3400\cos 17{,}5°}$; $m = 210{,}63$ m.
A felhő magassága: $m + 3400\sin 17{,}5° = 1233$ m.

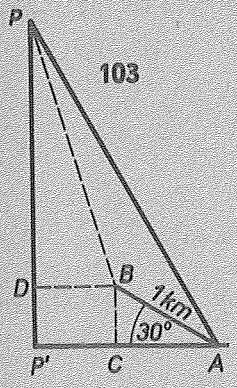
107. m jelentse a hegycsúcs magasságát a tenger színe felett. Az ábra alapján a hegycsúcs a tó fölött $(1657\sin\alpha + m - 608)$ m magasságban van, tükörképe ugyanekkora távolságra van a tó tükre alatt.
$m = 1171$ m. A hegycsúcs magassága: $m + 1657\sin 23°20' = 1827$ m.



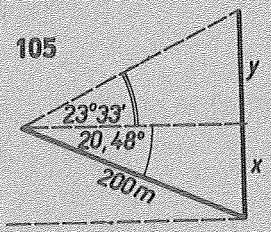
95



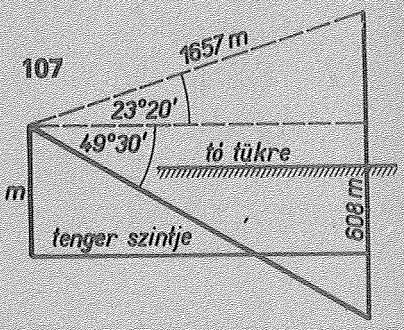
106



103



105



107

108. $\sin\beta = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ — helyettesítünk, és megoldjuk a kapott gyökös egyenletet. A $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ eredmény megszerkeszthető.

109. *a)* Meghúzzuk az alaphoz tartozó magasságot. A keletkezett derékszögű háromszögből β-t cosinus szögfüggvénnyel kapjuk. $\alpha = 180° - 2\beta$; $m_a = b\sin\beta$; vagy $m_a = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta$; $m_b = a\sin\beta$; $x = a\cos\beta$; $\varrho = \frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$; $t = \frac{a\cdot m_a}{2}$. A körülírt kör sugarát megkapjuk, ha a háromszög szögeit kerületi szögeknek tekintjük, s megrajzoljuk az α szöghöz tartozó középponti szöget. A kapott egyenlő szárú háromszög szárai a kör sugarai, az általuk bezárt szög 2α. Az alapra húzott merőleges által keletkezett derékszögű háromszögből $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$; $r = \frac{a}{2\sin\alpha}$. A felírt összefüggéseket az alábbi feladatokban is felhasználhatjuk az ismeretlen alkotórészek kiszámítására.

b) $\operatorname{tg}\beta = \frac{2m_a}{a}$; $b = \frac{m_a}{\sin\beta}$; a többi alkotórészt az *a)* feladat utasítása szerint számítjuk ki.

c) $\sin\beta = \frac{m_a}{b}$; $a = 2b\cos\beta$; a többi alkotórészt illetően lásd az *a)* feladatot.

d) $b = \dfrac{a}{2\cos\beta}$; a többi alkotórészt az *a)* feladat szerint számítjuk ki.

e) $a = 2b\cos\beta$; a többi alkotórészt az *a)* feladat szerint számítjuk ki.

f) $a = 2m_a \cdot \operatorname{ctg}\beta$; $b = \dfrac{m_a}{\sin\beta}$; a többi alkotórészre lásd az *a)* feladatot.

g) $\sin\beta = \dfrac{m_b}{a}$; $b = \dfrac{a}{2\cos\beta}$; a többi alkotórészre lásd az *a)* feladatot.

h) $\cos\beta = \dfrac{x}{a}$; $b = \dfrac{a}{2\cos\beta} = \dfrac{a^2}{2x}$; a többi alkotórészt az *a)* feladat szerint számítjuk ki.

i) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m_b}{x}$; $a = \sqrt{x^2+m_b}$ vagy $a = \dfrac{m_b}{\sin\beta}$; $b = \dfrac{a}{2\cos\beta}$ stb. *a)* szerint.

j) $\sin\alpha = m_b/b$.

A többi alkotórészt *e)* és *a)* útmutatása szerint kapjuk.

k) $a = \dfrac{m_b}{\sin\beta}$; $b = \dfrac{a}{2\cos\beta} = \dfrac{m_b}{2\sin\beta\cos\beta}$; a többi alkotórészre lásd *a)*-t.

l) $a = \dfrac{x}{\cos\beta}$; $b = \dfrac{a}{2\cos\beta} = \dfrac{x}{2\cos^2\beta}$; a többi alkotórészre lásd *a)*-t.

m) $m_a = \dfrac{2t}{a}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2m_a}{a} = \dfrac{4t}{a^2}$; $b = \dfrac{m_a}{\sin\beta}$; a többi alkotórészre lásd *a)*-t.

n) $m_b = \dfrac{2t}{b}$; a többi alkotórész kiszámítására lásd a *j)* feladatot.

o) $\beta = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$; $2t = b \cdot m_b = b^2 \sin\alpha$-ból b-t kapjuk. A többi alkotórészt *a)* feladat szerint kapjuk.

p) $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{2\varrho}{a}$; $b = \dfrac{a}{2\cos\beta}$; a többi alkotórészt az *a)* feladat szerint kapjuk.

110. $\cos\beta = \dfrac{a}{2b}$ összefüggésből kifejezzük a-t, és ennek értékét az adott különbségbe helyettesítjük. $2b\cos\beta - b = 30{,}4$;

$b = \dfrac{30{,}4}{2\cos 29{,}4° - 1}$; $m_a = b\sin\beta$; $t = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$.

$b = 40{,}95$ m; $a = 71{,}35$ m; $t = 717$ m².

111. $a = 2b\cos\beta$; $a + 2b = 78{,}4$; $m_a = b\sin\beta$; $t = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{ab\sin\beta}{2}$.

$a = 26{,}44$ m; $b = 25{,}98$ m; $t = 295{,}73$ m².

112. Pitagorasz tétele és az adott különbség egy kétismeretlenes egyenletrendszert ad b-re és m_a-ra. β-t szögfüggvénnyel kapjuk. $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$.

$b = 330{,}5$ m; $m_a = 294{,}5$ m; $\beta = 63°1'$; $\alpha = 53°59'$; $t = 44\,175$ m^2.

113. $a = 6$ cm; $b = 5$ cm; $\alpha = 73°44'$; $t = 12$ cm^2.

114. Az eredeti háromszögből $b = \frac{a}{2\cos\beta}$. Az új háromszög alapja: $a' = a + 2b$; szára: $b' = \frac{\frac{a}{2} + b}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

$a' = 33{,}12$ cm; $b' = 16{,}64$ cm.

115. $a = 12$ dm; $m_a = 18$ dm.

116. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{12}{25}$ egyenlőségből α értéke kiszámítható. $\alpha = 57°23'$; $\beta = 61°19'$.

117. $\operatorname{tg}\beta = \frac{15}{\frac{a}{2}}$; $\sin\beta = \frac{8}{a}$; a két egyenletet elosztva, megkapjuk $\cos\beta$-t, illetve β-t. $\beta = 74°32'$.

118. 1,88 magas.

119. A nyílásszög $51°41'$.

120. 1,08 m.

121. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{10{,}6}{42{,}8}$; $\alpha = 28°41'$.

122. Jelöljük a két érintő által bezárt szöget 2α-val. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; a másik derékszögű háromszögből pedig $h = 80\sin\alpha$.
A húrt lehet két derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével is számolni.

$h = 48$ cm; $2\alpha = 73°44'$.

123. $r = 2{,}68$ cm; $h = 5{,}18$ cm;

$r = 5{,}77$ cm; $h = 10$ cm.

124. a jelentse az adott oldalt, b a keresett oldalt. Ezt tangens szögfüggvénnyel számítjuk ki. Az átlót lehet Pitagorasz-tétellel vagy szögfüggvénnyel számítani.

$b = 35$ cm; $e = 38{,}48$ cm; $t = 560$ cm^2; $\varepsilon = 2 \cdot 65{,}44° = 130°53'$.

125. Ha $\alpha = 36°54'$, akkor $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}$; $a = b\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $t = ab$; $t = b^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $t = 431{,}57$ cm^2.

126. $a = 21{,}03$ m; $b = 15{,}28$ m.

127. $\alpha = 70°16'$.

128. $b = 11{,}74$ dm; $a = 24{,}48$ dm.

129. $b = 16{,}57$ cm; $a = 42{,}63$ cm.

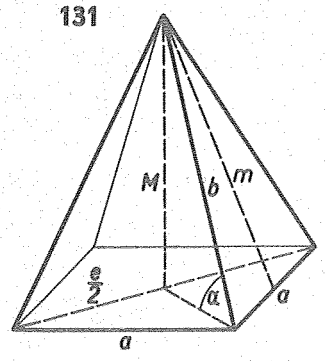
130. Kapunk egy egyenlő szárú háromszöget, melynek a csúcsnál levő szögét keressük. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{586}$; $\alpha = 1°34'$.

131. A 131. ábra szerint először a négyzet átlóját írjuk fel.

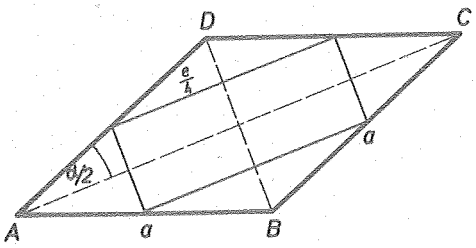
$$e = a\sqrt{2};\quad b = \sqrt{M^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2M}{e} = \frac{2M}{a\sqrt{2}} = \frac{M\sqrt{2}}{a};$$

$b = 11{,}22$ cm; $\alpha = 63°$.

131



138



132. Az előző feladat ábráját vegyük alapul. $F = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2}$ képlettel számítsuk ki m mértékét, majd Pitagorasz tételével b-t és e-t; $\cos\alpha = \frac{e}{2b}$ képletből α-t.

$b = 8{,}54$ cm; $\alpha = 60°14'$.

133. A keletkezett forgástest felszíne egyenlő két palást területének összegével.

$$F = \frac{a^2\pi}{2}(3 + \sqrt{3}).$$

A térfogat a keletkezett két kúp térfogatának a különbsége.

$$V = \frac{a^3\pi}{4}.$$

134. A rombusz átlói merőlegesek. $a = 28{,}75$ m; $\alpha = 37°46'$.

135. Legyen a rombusz oldala a; átlói e és f, hegyesszöge α.

$f = 7{,}84$ cm; $e = 11{,}76$ cm.

136. $a+e = 78{,}56$ és $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{e}{2a}$ egyenletrendszerből kapjuk az oldalt.

$a = 26{,}76$ m.

137. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{f}{2a}$; $a = \frac{f}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $a = 19{,}45$ cm.

138. A 138. ábra szerint a téglalap átlója egyenlő a keresett oldallal. Így a téglalap oldalai: $a\sin 69°$ és $a\cos 69°$; $t = a^2 \sin 69° \cos 69°$. Ebből $a = 19{,}41$ m.

139. $a = \frac{k}{4}$; $m = \frac{t}{a}$; $\sin\alpha = \frac{m}{a}$; $e = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$; $f = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$ vagy $\frac{ef}{2} = t$;

$f = \frac{2t}{e}$. $e = 12$ cm; $f = 9$ cm; $\alpha = 73°44'$; $\beta = 106°16'$.

140. Az átlók fele a keletkezett kettős kúp sugara, illetve magassága.

$F_1 : F_2 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $V_1 : V_2 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

141. Szabályos sokszöget körbe rajzolunk, s felosztjuk a kör középpontjából egyenlő szárú háromszögekre. Egy ilyen háromszög alapja a sokszög oldala, szára a kör sugara, csúcsnál levő szöge $\frac{360°}{n}$; ahol n a sokszög oldalszáma. A háromszög magasságát meghúzva, derékszögű háromszöget nyerünk. Ebből $a = 2r\sin\frac{180°}{n}$. Feladatunkban $a = 7{,}416$ cm.

142. Lásd az előzőt. $a = 6{,}07$ cm.

143. $r = 12{,}76$ cm.

144. $r = 30{,}7$ cm.

145. $k = n \cdot 2r\sin\frac{180°}{n} = 112$ cm.

146. A 141. feladat háromszögében $m = r\cos\frac{180°}{n}$; $t = n \cdot \frac{am}{2}$; $t = 1189$ cm².

147. $m = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$; $t = n \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$; $t = 61{,}92$ m².

148. Lásd a 146. feladatot. $t = 300$ cm².

149. $t = nr^2\sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n}$; $a \approx 9{,}18$ cm.

150. Lásd a 147. feladatot $t = 1931$ cm².

151. Lásd a 147. feladatot $t = 1731$ cm².

152. Lásd a 147. feladatot $t = 634{,}8$ cm².

153. Lásd a 149. feladatot $a = 3{,}54$ cm.

154. Lásd a 149. feladatot $a = 6{,}12$ m.

155. A húrsokszögre nézve lásd a 141. és 146. feladatot. Az érintő sokszöget kör köré írt szabályos sokszögnek rajzoljuk, s felosztjuk a kör középpontjából n darab egyenlő szárú háromszögre. Egy ilyen háromszög alapja a sokszög oldala $= A$; magassága a kör sugara.

$$A = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}; \quad m = r; \quad K = nA; \quad T = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}; \quad a = 3{,}061 \text{ cm};$$

$k = 24{,}49$ cm; $t = 45{,}25$ cm^2; $A = 3{,}313$ cm; $K = 26{,}5$ cm; $T = 53{,}02$ cm^2.

156. $k_{30} = 6{,}27\, r$; $t_{30} = 3{,}12\, r^2$; $k_{60} = 6{,}276\, r$; $t_{60} = 3{,}135\, r^2$.

157. $K_{30} = 6{,}306\, r$; $T_{30} = 3{,}153\, r^2$; $K_{60} = 6{,}288\, r$; $T_{60} = 3{,}144\, r^2$.

158. $k_{45} = 6{,}282\, r$ és $K_{45} = 6{,}291\, r$; π értéke 3,141 és 3,145 közé esik.

159. $k_n = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$; $t = nr^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$.

$K = 2nr \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$; $T_n = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

$2nr \sin \frac{180^\circ}{n} < 2r\pi < 2nr \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, és $2r$-rel osztva:

$$n \sin \frac{180^\circ}{n} < \pi < n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Az oldalak számának növelésével a húr- és érintő sokszögek kerületei alulról, illetve felülről megközelítik a kör kerületét s ezzel π értékét. Hasonlóan áll ez a területekre.

160. A 90 oldalú szabályos sokszögnél π értéke alulról: 3,138; felülről: 3,141. A 120 oldalú szabályos sokszögnél π értéke alulról: 3,143; felülről: 3,144.

161. Az egyenlő szárú háromszög magassága a beírt kör sugara: $\varrho = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

A körülírt kör sugara a háromszög szára: $r = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$.

A beírt kör sugara 13,76 cm; a körülírt kör sugara 17,01 cm.

162. Az előző feladat alapján: $a = 21{,}54$ cm; $r = 28{,}14$ cm.

163. $t = n \frac{a\varrho}{2} = n\varrho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$; ebből $\varrho = \sqrt{\frac{t}{n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}} = \sqrt{\frac{t \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}}{n}}$ és $r = \frac{\varrho}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$.

A beírt kör sugara: 1,76 cm; a körülírt kör sugara: 1,82 cm.

164. Az adott távolság fele a szabályos nyolcszög egy központi háromszögének a magasságával egyenlő. $a = 2m \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$; $k = 2nm \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$;

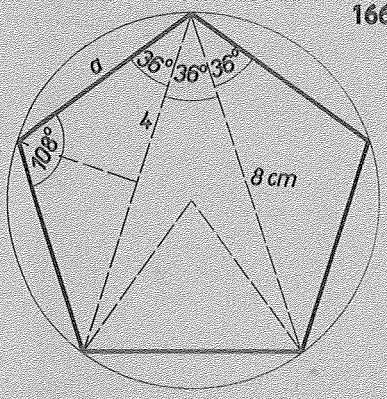
$t = nm^2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$. $k = 126{,}8$ cm; $t = 1213$ cm².

165. A keresett távolság két részből áll.

Egyrészt az egyenlő szárú háromszög magasságából, másrészt a háromszög szárából. $d = m + b = \frac{a}{2} \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{180°}{n} + \frac{1}{\sin \frac{180°}{n}} \right)$.

$t = 264{,}5$ dm²; $d = 19{,}08$ dm.

166. Az ábrán az átlók három egyenlő részre osztják a csúcsnál levő 108°-os szöget. A kapott egyenlő szárú háromszög szárát kell kifejezni. Ennek ötszöröse a kerület.



166

$k = 24{,}72$ cm; $t = 42{,}04$ cm².

167. $t_6 : t_3 = 8 : 3$.

168. Állítás: $a_7 = \frac{a_3}{2}$; $a_n = 2r \sin \frac{180°}{n}$ képlettel számolunk. Lásd 141. feladatot.

$a_7 = 2r \sin 25{,}71° = 0{,}8676$ és $a_3 = 2r \sin 60° = 1{,}732$. $0{,}8676 \approx \frac{1{,}732}{2} =$

$= 0{,}8660$. A szerkesztés hetedik oldala 0,8676.

A közelítő szerkesztés legalább századpontosságú.

169. A beírt kör sugara: ϱ, a körülírt kör sugara r, valamint a sokszög egyik oldalának fele: $\frac{a}{2}$ derékszögű háromszöget alkot. Az oldalt a sokszög területéből számítjuk ki (lásd a 147. feladatot). $t_{\text{körgyűrű}} = (r^2 - \varrho^2)\pi =$

$= \frac{a^2}{4} \cdot \pi$.

$T_{\text{sokszög}} = n \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180°}{n}$;

$t_{\text{körgyűrű}} = \frac{\pi \cdot T}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$.

170. *I. megoldás:* Az előző feladat képletébe helyettesítünk. $t_{\text{körgyűrű}} = 530{,}5\ \text{cm}^2$.
II. megoldás: A szabályos tizenkétszög hat olyan deltoidra bontható, melynek átlói a körülírt kör sugarai. A hat deltoid területéből felírható r értéke. A beírt kör sugarát r-rel fejezzük ki, majd felírjuk a körgyűrű területét.

$T_{12} = 3r^2$; $\varrho = r \cos 15°$;

$T_{\text{körgyűrű}} = \pi \cdot (r^2 - r^2 \cos^2 15°) = \pi r^2 \sin^2 15° = \frac{\pi \cdot T}{3} \cdot \sin^2 15° = 530{,}5\ \text{cm}^2$.

171. $\cos \frac{180°}{n} = \frac{\varrho}{r}$; $a = 2r \sin \frac{180°}{n}$; $t = n \cdot \frac{a\varrho}{2}$.

$n = 12$; $a = 2{,}9$ cm; $t = 94{,}11\ \text{cm}^2$.

172. $h = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$; $i = \frac{r\pi\alpha}{180°}$; $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

a) $h = 16$ cm;
b) $h = 6$ cm;
c) $\alpha = 33°48'$;
d) $i = 10{,}17$ cm; $\alpha = 97{,}2°$;
e) $r = 4$ cm;
f) $i = 21{,}15$ cm;
g) $h = 412$ cm;
h) $h = 3$ cm;
i) $r = 3$ cm;
j) $\beta = 17°28'$;
k) $r = 3{,}4$ m;
l) $h = 6{,}42$ m.

173. Az egyenlő szárú háromszög csúcsnál levő szöge: β kerületi szög. Megrajzoljuk a vele egy ívben álló középponti szöget. A háromszög alapja a kör húrja $h = 2r \sin \beta$; $r = 4{,}667$ cm.

174. Lásd az előző feladatot. $r = 2{,}83$ cm.

175. Lásd az előző feladatot. $\alpha = 38{,}94°$.

176. Az ív képletéből kiszámítjuk a középponti szöget, azután a húrt, majd a $\frac{h}{r}$ arány értékét. $\alpha = 57{,}3°$; $h = 0{,}96\ r$.

Közel vagyunk 60°-hoz, ahol pontosan $h:r = 1$.

177. $\text{Út} = \frac{480\ \text{perc} \cdot 50i}{\text{perc}}$, ahol $i = \frac{r\pi\alpha}{180°}$.

Az ütőkar hossza a kör sugara; a két szélső helyzet távolsága a kör húrja $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2r}$. Út = 8733 m.

178. Rajzot készítünk a közös külső érintők szerkesztését feltüntetve (178. ábra). Az érintőt Pitagorasz tételével számítjuk ki. Szögfüggvénnyel számítjuk ki az $\frac{\alpha}{2}$ szöget. $i = \frac{r\pi\alpha}{180°}$; $I = \frac{R\pi(360° - \alpha)}{180°}$. Szíj hossza:

$2é + i + I$.

$é = 333{,}65$ cm; $\alpha = 169{,}72°$; $360° - \alpha = 190{,}28°$.

$I + i = 262{,}95$ cm. A szíj hossza: 930,3 cm.

179. Rajzot készítünk a közös belső érintők szerkesztését feltüntetve (179. ábra).

Az érintőt Pitagorasz tételével számítjuk ki, α-t szögfüggvénnyel.

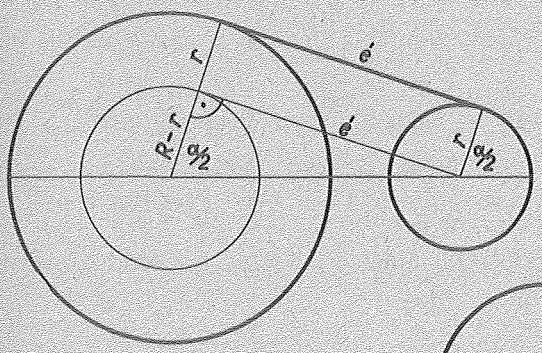
$é = 324{,}81$ cm; $\alpha = 151{,}66°$; $360° - \alpha = 208{,}34°$.

A szíj hossza: 947,7 cm.

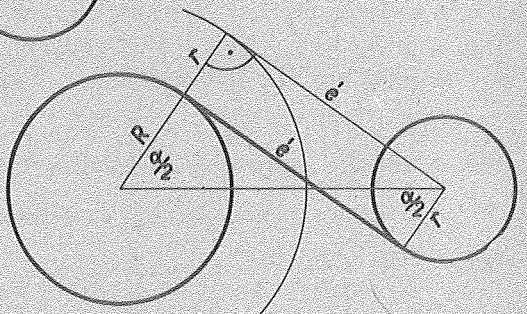
180. A tapadási felület hossza $I + i$; $d = \dfrac{15}{\cos 70°}$.

$I + i = 89$ cm; $d = 43{,}86$ cm.

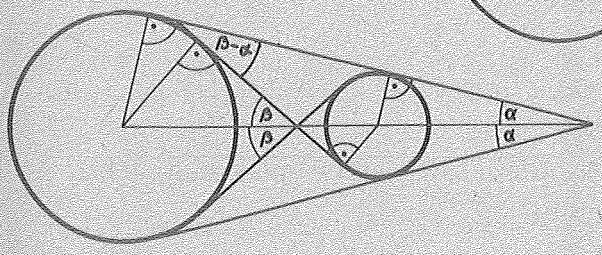
178



179



181



181. A 181. ábra szerint: 2α a külső érintők által bezárt szög; 2β a belső érintők által bezárt szög; az egy belső és egy külső érintő által bezárt szög: $\beta - \alpha$.

$2\alpha = 45°14'$; $2\beta = 115{,}6°$; $\beta - \alpha = 35°11'$.

182. Az átmérők egy téglalapot határoznak meg, s az adott szög a téglalap átlói által bezárt szög. Ezért a $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{x}{2} : \dfrac{x+409}{2}$ egyenletből x kiszámítható.

$x = h_1 \approx 200$ cm; $h_2 = 609$ cm; $r = 320{,}5$ cm.

Lehet Pitagorasz tétellel is számolni.

183. A távolság egy kör húrja, a hozzá tartozó középponti szög 2α. A Thalész-féle háromszögből mértani középarányossal indulunk.

$$70^2 = 37{,}5x; \quad 2r = x + 37{,}5; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2r}; \quad i = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}.$$

Az ív hossza: 165,33 m.

184. Az előbbi feladathoz hasonló. Először a húrt számítjuk ki mértani középarányossal vagy Pitagorasz tételével. Azután úgy számolunk, mint a 183. feladatnál.

$h = 110$ m; $i = 124{,}5$ m.

185. A 185. ábra alapján számolunk. x-et Pitagorasz tételével kapjuk. $\operatorname{tg}\beta = \frac{1{,}42}{74{,}5-5}$-ből β kerületi szöget számítjuk ki. A vele egy íven álló középponti szög egy egyenlő szárú háromszögre vezet, melyből a sugár számítható ki. Pitagorasz tétele megadja $r-m$ értékét, ebből m kiszámítható. $\frac{\alpha}{2}$ középponti szöget szögfüggvénnyel számítjuk. $i = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$.

$r = 126{,}9$ m; $i = 75{,}74$ m; $m_{\max} = 5{,}59$ m.

186. A körszelet területét a körcikk területének és a húrhoz tartozó háromszög területének a különbsége adja.

$t_{\text{körszelet}} = 6{,}88$ cm^2.

187. A körcikk területéből kiszámítható az α szög, majd $h = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$.

$h = 1{,}996$ m, ami 4 mm-es eltéréssel akkora, mint a hozzá tartozó ív.

188. $\frac{t_{\text{körcikk}} - t_{\text{háromszög}}}{t_{\text{kör}}} = 0{,}10 = 10\%$.

189. $h = 4{,}4$ cm; $r = 5{,}46$ cm; $t_{\text{körcikk}} = 12{,}34$ cm^2. $t_{\text{körszelet}} = 1{,}342$ cm^2.

190. A két derékszögű háromszög területéből kivonjuk a körcikk területét.

$T = 0{,}69\ r^2$, $T = 0{,}215\ r^2$.

191. Az ív képletéből az ívhez tartozó középponti szöget számítjuk ki.

$$40\sin\frac{\alpha}{2} = h; \quad 20\cos\frac{\alpha}{2} = m; \quad t_{\text{körszelet}} = t_{\text{körcikk}} - t_{\text{háromszög}}.$$

$t =$ félkör területe $-$ körszelet területe.

$t = 462{,}7$ m^2.

192. A nagyobbik körszelet területe = a nagyobbik körcikk területe + a háromszög területe. A sugarat mértani középarányossal kapjuk, lásd a 183. feladatot; sinus szögfüggvénnyel kapjuk az α szöget. A nagyobbik körcikk szöge $360^\circ - 2\alpha$.

$r = 5{,}8$ m; $2\alpha = 87{,}2^\circ$; $t_{\text{körszelet}} = 96{,}8$ m^2.

Kocsirakományok száma: 508.

193. Ennél a feladatnál nincs szükség táblázatra.

Olaj mennyisége 196 dm^3; $\frac{196}{\text{hordó tartalma}} = 19{,}5\%$.

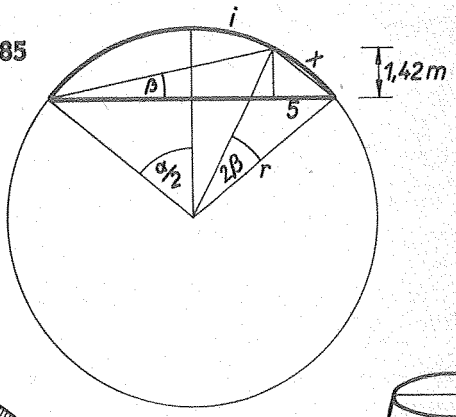
Elfogyott: 80,5%.

194. A keresett terület egy körszelet területének a kétszerese. Lásd előző feladatokat.

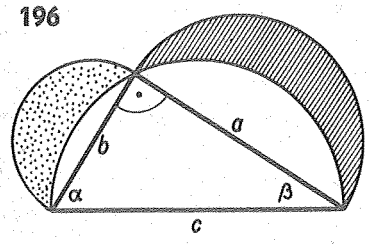
$\frac{h}{2} = 18$; $\alpha = 73°44'$; $2t_{\text{körszelet}} = 293{,}6\ \text{cm}^2$.

195. A nagyobbik húrhoz tartozó körszelet területéből kivonjuk a kisebbik húrhoz tartozó körszelet területét. Lásd az előző feladatokat. A kisebbik körszelet területe: 81,4 cm²; a nagyobbik körszelet területe 635,9 cm². A keresett sáv területe: 554,5 cm².

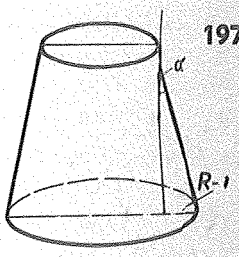
185



196



197



196. A két befogóra rajzolt félkörök területéhez hozzáadjuk a háromszög területét, s ebből kivonjuk az átfogóra rajzolt félkör területét, megkapjuk a két hold alakú idom területének összegét. A műveletek elvégzése után megkapjuk a háromszög területét (196. ábra).

$T = 24\,960\ \text{cm}^2$.

197. A félkúpszöget egy derékszögű háromszögből nyerjük (197. ábra), melynek befogói: $R-r$ és a csonka kúp hossza.

$\alpha = 6°31'$.

198. Lásd előző feladat rajzát: $\text{tg}\ 2°20' = \frac{14-r}{150}$.

$2r = 15{,}76$ mm. A különbség 12,24 mm.

199. A hosszabbik párhuzamos oldal $= 10 + 2 \cdot 12 \cos\alpha = 29{,}2$ cm.

200. $\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{6}$; $\alpha = 33{,}69°$.

201. $b = \dfrac{1}{\cos\alpha} = 1{,}28$ cm.

202. $\cos\alpha = \dfrac{3{,}5}{8}$; $\alpha = 64°3'$.

203. $c = 57 - 2 \cdot 33 \cdot \cos 58°45'$.
$c = 22{,}77$ cm.

204. $m = 5{,}8$ m.

205. $m = 7 \operatorname{tg} 61°$; $t = 543$ m^2.

206. $c = \dfrac{t}{12} - 12 \operatorname{ctg}\alpha$; $a = c + 2 \cdot 12 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

$c = 13{,}6$ dm; $a = 28{,}4$ dm.

207. $m = 68{,}79 \sin\alpha$; $\alpha = \dfrac{180° - 63{,}25°}{2}$; $c = 325{,}43 - 2 \cdot 68{,}79 \cdot \cos\alpha$.

$t = \dfrac{a+c}{2} \cdot m = 16\,950$ m^2.

208. A kapott derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével kiszámítjuk az alap egy részét (x). A kisebbik párhuzamos oldal: $c = 48 - 2 \cdot (48 - x)$;

$b = d = \sqrt{30^2 + (48-x)^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{30}{8}$.

$b = d = 31{,}05$ m; $c = 32$ m; $\alpha = 75°4'$.

209. $9 + 7 = 16$, azaz a kis háromszög területe úgy aránylik az eredeti háromszög területéhez, mint 9:16. Az eredeti háromszög magasságát Pitagorasz tételével kapjuk; $m : M = 3 : 4$. Ebből m, majd a trapéz ismeretlen alapja kiszámítható. A szárat is aránypárral kapjuk.

$M = 8$ m; $m = 6$ m; $c = 9$ m; $b = 2{,}5$ m; $\alpha = 53°8'$.

210. A derékszög melletti szárat párhuzamosan eltoljuk. Kapunk egy derékszögű háromszöget, amelyből a trapéz magasságát és a hosszabbik párhuzamos oldalának egy részét kapjuk.

$m = 35 \cos 35°$; $a = 24 + 35 \sin 35°$; $t = 976$ cm^2.

211. $c = 20 - 5 \operatorname{ctg} 35°$; $b = \dfrac{5}{\sin 35°}$;

$b = 8{,}719$ cm; $c = 12{,}86$ cm.

212. $a = 15 + 20 \operatorname{tg} 50°$; $b = \dfrac{20}{\cos 50°}$;

$a = 38{,}84$ cm; $b = 31{,}11$ cm.

213. A rövidebb párhuzamos két végéből meghúzzuk a trapéz magasságát. Az egyik derékszögű háromszög egyenlő szárú.

$a = 146{,}6$ cm; $d = 76{,}5$ cm; $t = 5315$ cm^2.

214. $c = 279{,}4$ m; $t = 10\,700$ m^2.

215. A trapéz kisebbik párhuzamos oldala a keletkezett háromszög középvonala. $m \operatorname{ctg} 70°35' + m \operatorname{ctg} 62° = 12$. $t = 244$ cm^2.

216. $m:c = 4:5$; $m:b = 4:7$; b-t és c-t kifejezzük m-mel. A trapéz területéből megkapjuk a magasságot s így b-t és c-t. Rajzot készítünk a 214. feladat szerint.

$$\sin\beta = \frac{m}{b}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{80-(c+b\cos\beta)}; \quad \gamma = 180°-\beta; \quad \delta = 180°-\alpha.$$

$$d = \frac{m}{\sin\alpha} \text{ vagy } d = \sqrt{m^2+m^2\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

$m = 10{,}71$ dm; $c = 13{,}39$ dm; $b = 18{,}74$ dm; $d = 52{,}32$ dm; $\alpha = 11°49'$; $\beta = 34°52'$.

217. Rajzot készítünk a 213. feladat szerint.
$m\cdot(\operatorname{ctg} 78°23' + \operatorname{ctg} 68{,}3°) = 48{,}36-13{,}41$;

$b = 62{,}33$ cm; $d = 59{,}14$ cm.

218. Rajzot készítünk a 213. feladat szerint. $m = 14 \sin 54{,}8°$.
$m = 11{,}44$ cm; $t = 240{,}2$ cm^2;

$\beta = 49°3'$; $b = 15{,}15$ cm.

219. A 213. feladat rajzát készítjük el. A két derékszögű háromszögben felírjuk Pitagorasz tételét. Megkapjuk a háromszögek befogóit.

$t = 4862$ m^2; $\alpha = 76°41'$; $\beta = 63{,}2°$.

220. Először kiszámítjuk a magasságot, majd a másik derékszögű háromszögből a β szöget. A hosszabbik párhuzamost a rövidebbik párhuzamos és a két derékszögű háromszög befogóival fejezzük ki, s ezt helyettesítjük a terület képletbe.

$\beta = 36°38'$; $c = 7{,}69$ dm; $a = 40$ dm.

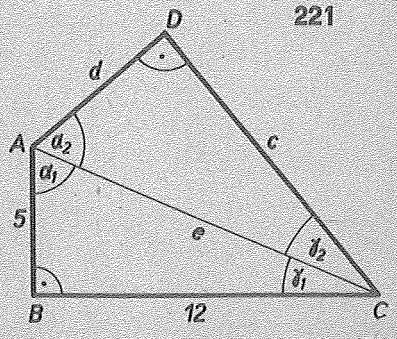
221. Lásd a 221. ábra jelölését. ABC háromszögből kiszámítjuk az átfogót; α_1 szöget. CDA háromszögben $\alpha_2 = 140°-\alpha_1$;

$d = e\cos\alpha_2$; $c = e\sin\alpha_2$;

$d = 3{,}88$ cm; $c = 12{,}4$ cm; $e = 13$ cm;

$\alpha_1 = 67°23'$.

A feladat a sorrend megadása nélkül is egyértelmű. Ugyanis az ABC derékszögű háromszögben a 22°37′ és a négyszög 140°-os szöge közti különbség tompaszög lenne.



222. $d \approx 4{,}7$ cm.

223. A 223. ábra darabolása mentén számolunk, γ_1, γ_2, δ_1 kiszámítható. $CE = 7 \cdot \sin 87{,}4°$; $EB = 7 \cos 87{,}4°$; $CF = 5 \cos \gamma_2$; $FE = CE - CF$; $DF = 5 \sin \gamma_2$; $AG = 10 - (EB + DF)$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{FE}{AG}$; $AD = \frac{FE}{\sin \alpha}$.

$AD = 7{,}04$ cm; $\alpha = 41{,}9°$; $\delta = 165{,}4°$.

A vázolt derékszöges felbontás a 7 egységnyi oldalra még szimmetrikusabb.

224. A 224. ábra két mintát mutat a darabolásra. Az egyik háromszögben az adott átlóra bocsátott merőlegessel darabolunk, a másik háromszögben az ismeretlen oldalhoz tartozó magassággal. Hasonlítsuk össze a számolás mennyiségét.

A számolás menete: CE; AE; γ_1; γ_2; β; CB; EB; AB; a másik oldalon: DF; DC; AD.

$AB = 14{,}07$ cm; $BC = 15{,}45$ cm; $CD = 10{,}24$ cm; $DA = 9{,}46$ cm.

225. *a)* Egyik csúcsból meghúzzuk a magasságot. A kapott egyik derékszögű háromszög befogóit kifejezzük ugyanannak a szögnek szögfüggvényével, majd a másik háromszögben felírjuk Pitagorasz tételét (225. a) ábra).

$\alpha = 75°45'$: $CD = 19{,}38$ cm; $\beta = 67°22'$; $\gamma = 36°53'$.

b) Az előző ábrán meghúzzuk a $BD' = m_b$ magasságot. A megoldás menete: BD'; $D'C$; AD'; α; β; AB; $\alpha = 72{,}6°$; $\beta = 44{,}3°$; $AB = 7{,}66$ cm.

c) C csúcsból meghúzzuk az m_c magasságot. A számítás menete pl.: α; DC; DB; AD; AB; AC.

$\alpha = 81{,}5°$; $AB = 8{,}02$ cm; $AC = 24{,}89$ cm.

d) C csúcsból meghúzzuk a $CD = m_c$ magasságot, amely a háromszögön kívül esik, s a tompaszög kiegészítő szögével számolunk. A számítás menete: DC; AD; β; γ; BD; AB.

$\beta = 42°39'$; $\gamma = 27°21'$; $AB = BD - AD = 50{,}9$ cm.

e) C csúcsból meghúzzuk a $CD = m_c$ (külső) magasságot. Számítás menete: α; CD; AD; $180° - \beta$; BD; $AB = AD - BD$; BC

$\alpha = 32°$; $AB = 37{,}73$ cm; $BC = 27$ cm.

f) A csúcsból meghúzzuk az $AD = m_a$ magasságot. AB-t Pitagorasz tétellel számítjuk. Utána β-t; α-t; AC-t számítjuk.

$AB = 20$ cm; $\beta = 36°52'$; $\alpha = 95°8'$; $AC = 16{,}14$ cm.

g) B csúcsból meghúzzuk a $BD = m_b$ külső magasságot. Lásd 225. g) ábrát.

$\sin \gamma = \frac{m_b}{a}$; $90° - \gamma = \beta_1$; $\cos \beta_2 = \frac{m_b}{f_\beta}$; $\beta = 2(\beta_1 - \beta_2)$;

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$; $CD = 4 \operatorname{ctg} \gamma$; $AD = 4 \operatorname{ctg} (180° - \alpha)$; $AC = CD - AD$.

$$AB = \frac{m_b}{\sin(180°-\alpha)}.$$

$\gamma = 23°35'$; $\beta_1 = 66°25'$; $\beta_2 = 36°52'$; $\beta = 59°6'$; $\alpha = 97°19'$; $CD = 9{,}164$ cm; $AD = 0{,}514$ cm; $AC = 8{,}65$ cm; $AB = 4{,}032$ cm.

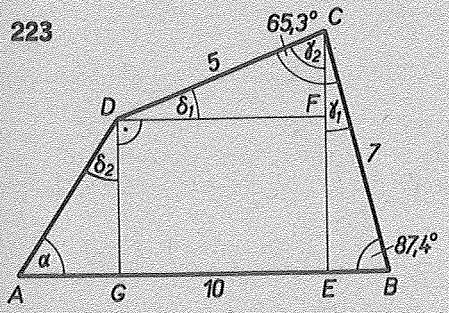
h) Meghúzzuk a magasságokat. $\sin\beta = \frac{22}{27}$; $\sin\gamma = \frac{16}{27}$;

$\alpha = 180°-(\beta+\gamma)$; $AB = \frac{16}{\sin\alpha}$; $AC = \frac{22}{\sin\alpha}$;

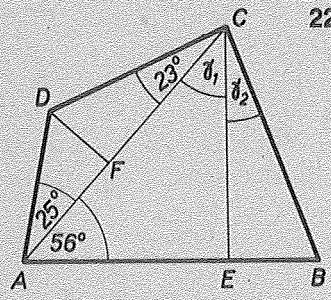
$\beta = 54°34'$; $\gamma = 36°20'$; $\alpha = 89°5'$; $AB \approx 16$ cm; $AC \approx 22$ cm.

i) Meghúzzuk az $AD = m_a = 9$ cm magasságot, majd a $CE = m_c$ magasságot is.

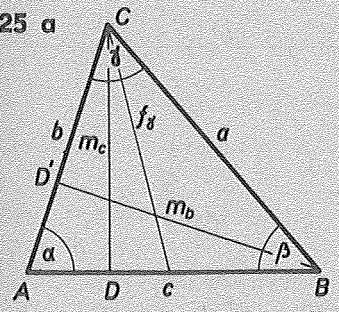
223



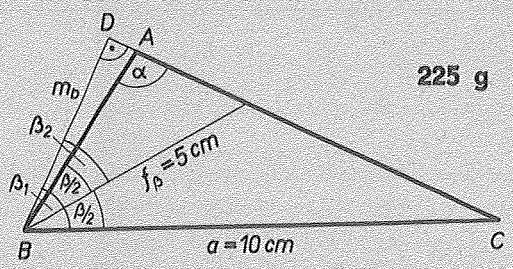
224



225 a



225 g



$\sin\gamma = \frac{9}{12}$; $\beta = 180°-(\alpha+\gamma)$; $AB = \frac{9}{\sin\beta}$; $CE = 12\cdot\sin\alpha$; $CB = \frac{CE}{\sin\beta}$.

$\gamma = 48{,}6°$; $\beta = 51{,}4°$; $AB = 11{,}52$ cm; $CB = 15{,}12$ cm.

j) A 225. *j)* ábra alapján számolunk. $\sin\gamma = \frac{m_b}{a}$; $AC = \frac{m_a}{\sin\gamma} = \frac{a \cdot m_a}{m_b}$;

$CE = m_a \operatorname{ctg}\gamma$; $EB = EC - BC$; $AB = \sqrt{m_a^2 + EB^2}$;

$\sin(180° - \beta) = \frac{m_a}{AB}$; $\alpha = 180° - (\beta - \gamma)$.

$\gamma = 28°26'$; $AC = 35{,}7$ cm; $AB = 19{,}92$ cm; $\beta = 121°25'$; $\alpha = 30°8'$.

A feladatok közül pl. a *c), d), e)* feladatok megoldhatók a körülírt kör sugarának kiszámításával, a megadott oldalakat húrnak tekintve. (Lásd a 172. feladatokat.)

226. A 226. ábra darabolása alapján számolunk. $x = 40 \sin 65°$; $y = 40 \cos 65°$;

$z = 54{,}68 - y$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{z}$; $\beta = \gamma + 65°$; $\alpha = 180° - \beta$; $a = \sqrt{x^2 + z^2}$

vagy $a = \frac{x}{\sin\gamma}$; $u = 40 \cdot \cos\alpha$; $c = a - 2u$.

$a = 52{,}36$ cm; $c = 26{,}55$ cm; $\alpha = 71°11'$.

227. A 227. ábra darabolása alapján számolunk. EDG háromszögből indulunk ki. Az ötödik oldal: 12,4 cm.

228. Négyszögünk húrnégyszög, amely köré írt kör átmérője: AC. Húzzuk meg a D csúcsból is az átmérőt. $DD'B$ szög $= \alpha$, mert egy íven álló kerületi szögek. Így DBD' derékszögű háromszögben: $DB = 2r \sin\alpha = AC \sin\alpha$. Lásd a 228. ábrát.

229. Lásd a 229. ábrát. Legyen e egyenes vetülete az S^* síkon e'. Legyen E az e egyenes egy pontja, vetülete E' az S^* síkon. EE' egyenesen át merőleges síkot állítunk m-re. $E'N \perp m$. Legyen $EM = 1$; $\alpha = \beta = 45°$; $EN = \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $EE' = EN \cdot \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 30°$.

230. Rajzot készítünk, legyen A pont vetülete BC-re A'. Kiszámítjuk $\operatorname{tg}\beta$-t és $\operatorname{tg}\gamma$-t. $A'C = 3 \cdot A'B$.

238.

$\alpha = 44{,}5°$ és $135{,}5°$;	$\beta = 45{,}5°$ és $314{,}5°$;
$\alpha = 7{,}5°$ és $172{,}5°$;	$\beta = 82{,}5°$ és $277{,}5°$;
$\alpha = 0°$ és $180°$;	$\beta = 90°$ és $270°$;
$\alpha = 90°$ és $90°$;	$\beta = 0°$ és $360°$;
$\alpha = 45°$ és $225°$;	$\beta = 45°$ és $225°$;
$\alpha = 58°$ és $238°$;	$\beta = 32°$ és $212°$;
$\alpha = 69{,}3°$ és $249{,}3°$;	$\beta = 20{,}7°$ és $200{,}7°$;
$\alpha = 86°$ és $266°$;	$\beta = 4°$ és $184°$;

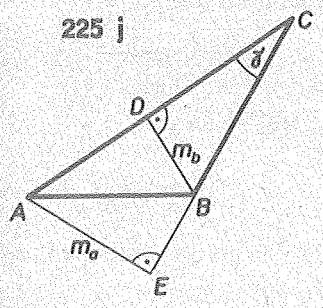
$\alpha + \beta = 90°$ vagy $450°$.

Tehát a $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ és $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha)$ általános tétel, nemcsak a pótszögekre vonatkozik.

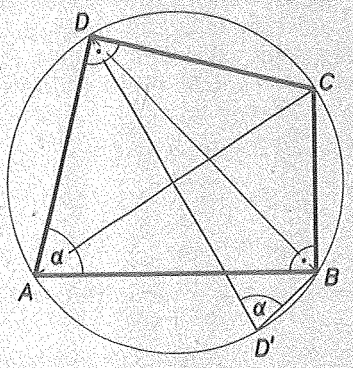
242. *a)* 18; $\sin 36{,}48° = \cos 53{,}52°$; *b)* $-0{,}0868$; *c)* $-17{,}98$; *d)* $-1{,}41$; *e)* $+2{,}11$; *f)* $+2{,}843$; *g)* $+68{,}07$; *h)* -58; $\operatorname{tg} 40° = \operatorname{ctg} 50°$; *i)* $-1{,}412$; *j)* 1,327.

243. *a)* Az egyik szöget cosinustétellel, a másikat sinustétellel, a harmadikat az $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ összefüggésből számítjuk. Célszerű a számítást a legnagyobb oldallal szemközti szögön kezdeni, így a két másik szög biztosan hegyesszög. A területet lehet Heron képletével vagy a szögek

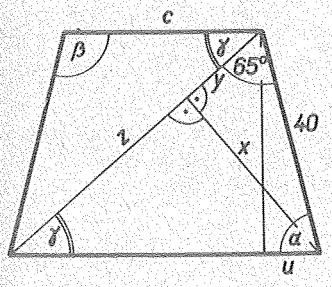
225 j



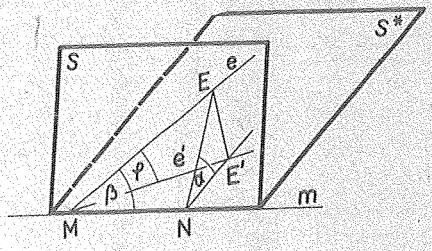
228



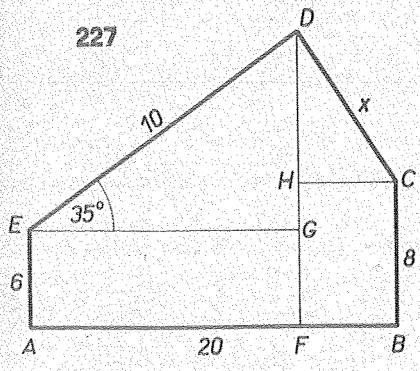
226



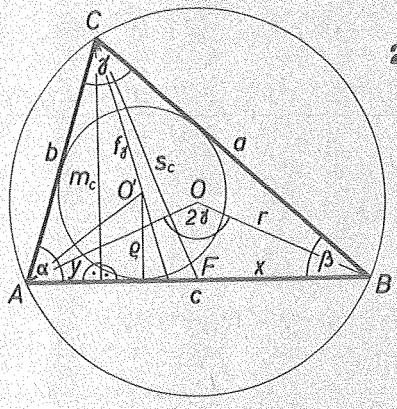
229



227



243



alapján számítani a $T = \dfrac{ab \sin \gamma}{2}$ vagy az $\dfrac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = T$ képletek alapján. A magasságokat a területből kapjuk. f_γ-t és s_c-t sinus- és cosinustétellel; r-et a kerületi szögek alapján. $r = \dfrac{a}{2 \sin \alpha}$

képlettel; ϱ-t a $\varrho(a+b+c) = 2t$, azaz $\varrho = \frac{t}{s}$ képlettel számítjuk; $x = a\cos\beta$; $y = b\cos\alpha$ (243. ábra).

b) c-t cosinustétellel kapjuk, β-t sinustétellel; $\alpha = 180° - (\beta+\gamma)$. A többi alkotórészt az előző feladat útmutatása alapján kapjuk.

c) Lásd az előző feladatot más oldalakkal.

d) β-t sinustétellel kapjuk. $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$; c-t is lehet sinustétellel számítani. A többi alkotórészt az *a)* feladat útmutatása adja.

e) $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$; b-t és c-t sinustétellel számítjuk.

f) és *g)* Lásd az *e)* feladatot.

h) $x = \sqrt{a^2 - m_c^2}$; $y = \sqrt{b^2 - m_c^2}$; $c = x \pm y$; $\sin\alpha = \frac{m_c}{b}$; $\sin\beta = \frac{m_c}{a}$; $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$; a többi alkotórészt az *a)* feladat szerint kaphatjuk.

i) $\sin\beta = \frac{m_c}{a}$ képletből β-t kapjuk. $\alpha = 180° - (\beta+\gamma)$; $x = a\cos\beta$; vagy $x = \sqrt{a^2 - m_c^2}$; $y = m_c \operatorname{ctg}\alpha$; $c = x+y$; $b = \sqrt{y^2 + m_c^2}$ stb. Elég kicsi γ esetén két megoldás van.

j) Megszerkesztjük a háromszöget Thalész tétele alapján. A kapott derékszögű háromszögekből $\sin\alpha = \frac{m_b}{c}$; $\sin\beta = \frac{m_a}{c}$; $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$. Ezután az ismeretlen oldalak sinustétellel számíthatók stb. Két megoldás van aszerint, hogy a magasságtalppontok a c-nek ugyanazon oldalán vannak, vagy c szétválasztja őket.

k) Rajzot készítünk. A számolás menete: $b = \frac{m_c}{\sin\alpha}$; $y = m_c \operatorname{ctg}\alpha$; $\sin\gamma = \frac{m_a}{b}$; $\beta = 180° - (\alpha+\gamma)$; $x = m_c \operatorname{ctg}\beta$; $c = x+y$ stb.

l) $c = x+y$; $\cos\beta = \frac{x}{a}$; $m_c = \sqrt{a^2 - x^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_c}{y}$; $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$; $b = \sqrt{y^2 + m_c^2}$ stb.

m) $\cos\beta = \frac{x}{a}$; $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$; $m_c = \sqrt{a^2 - x^2}$; $y = m_c \operatorname{ctg}\alpha$; $c = x+y$; $b = \sqrt{m_c^2 + y^2}$ stb.

n) $y = m_c \operatorname{ctg}\alpha$; $b = \sqrt{m_c^2 + y^2}$; $c = x+y$; $a = \sqrt{m_c^2 + x^2}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_c}{x}$ stb.

o) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_c}{y}$; $b = \sqrt{m_c^2 + y^2}$; $x = \sqrt{a^2 - m_c^2}$; $c = x \pm y$ stb.

p) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_c}{y}$; $b = \sqrt{m_c^2 + y^2}$; $\sin\gamma = \frac{m_a}{b}$; $\beta = 180° - (\alpha+\gamma)$; $c = \frac{m_a}{\sin\beta}$; $x = c \pm y$; $a = \sqrt{x^2 + m_c^2}$ stb.

r) $a = \sqrt{m_c^2+x^2}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_c}{x}$; $\alpha = (\alpha-\beta)+\beta$; $\gamma = 180°-(\alpha+\beta)$; a

másik két oldalt sinustétellel kapjuk stb.

s) $c = x \pm y$; $m_c = \frac{2T}{c}$; $a = \sqrt{x^2+m_c^2}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_c}{x}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_c}{y}$ stb.

244. A szögek arányából 180° arányos osztásával kapjuk a szögeket.

I. megoldás: Az I. osztályban tanult kiforgatási módszerrel megszerkesztjük a háromszöget szögeiből és a kerületből. A szerkesztés menetét követve, két sinustétellel kapjuk a kiforgatással nyert háromszög oldalait, majd a kapott egyenlő szárú háromszögekből az eredeti háromszög két oldalát cosinus szögfüggvénnyel számítjuk. $c = 2s-(a+b)$.

II. megoldás: A kiszámított szögek sinusait kikeressük a táblázatból, ezeknek arányából és a 15 cm-es kerület arányos felosztásából kapjuk az oldalakat.

$a = 4{,}18$ cm; $b = 5{,}12$ cm; $c = 5{,}7$ cm; $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 75°$.

245. Lásd az előző feladatot.

$a = 5{,}24$ cm; $b = 7{,}39$ cm; $c = 7{,}37$ cm.

246. A háromszög két oldala: a és $20-a$. Ezekre felírjuk a sinustételt. A harmadik oldalt is sinustétellel számítjuk.

$a = 8{,}03$ cm; $b = 11{,}97$ cm; $c = 9{,}456$ cm.

247. A háromszög két oldala: a és $a+6$. Ezekre, majd a harmadik oldalra is felírjuk a sinustételt.

$a = 7{,}5$ cm; $b = 13{,}5$ cm; $c = 13{,}21$ cm.

248. Felírjuk a sinustételt a nagyobbik oldallal szemközti ismeretlen szöggel kezdve.

$\sin\alpha > 1$. Nincs megoldás.

249. Lásd az előző feladatot.

$\alpha = 43{,}5°$; $\gamma = 101{,}5°$; vagy $\alpha = 136{,}5°$; $\gamma = 8{,}5°$.

250. Lásd az előző feladatokat.

$\alpha = 90°$; $\gamma = 22°37'$. A háromszög derékszögű háromszög.

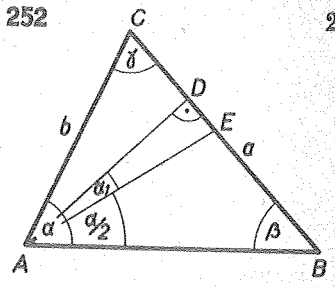
251. A 60°-os szöget harmadoló egyenesek két egybevágó háromszögre és egy egyenlő szárú háromszögre bontják az egyenlő oldalú háromszöget.

I. megoldás: A szélső háromszögből sinustétellel kapjuk az egyik szakaszt, ugyanakkora a másik szélső szakasz. A középső: $a-2x$.

$x = 10{,}42$ cm; $y = 9{,}16$ cm; $z = x$.

II. megoldás: Az egyenlő szárú háromszög magassága és szöge is adott. $x = m \operatorname{ctg}\alpha$, ahol x jelenti a középső szakasz felét.

$x = 4{,}58$ cm; $2x = 9{,}16$ cm; $a-2x = 10{,}42$ cm.



252. Az 252. ábra ADE derékszögű háromszögéből cosinus szögfüggvénnyel kiszámítjuk α_1-et. $\beta = 90° - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha}{2}\right)$; $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

ADB derékszögű háromszögből cosinus szögfüggvénnyel c-t kapjuk, a és b oldalakat sinustétellel számítjuk ki.

$\alpha_1 = 16°2'$; $\beta = 41°40'$; $\gamma = 73°44'$; $b = 18{,}56$ cm; $c = 26{,}81$ cm; $a = 25{,}22$ cm.

253. A belső és külső szögfelezők által bezárt szög 90°. A derékszögű háromszög hegyesszögei 45°-osak és a háromszögben $\beta = 135° - \frac{\alpha}{2}$. Sinustétellel számolunk.

$45° - \frac{\alpha}{2} > 0$; $\alpha < 90°$; $c = b \cdot \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

$a = 4{,}18$ cm; $c = 7$ cm.

254. A paralelogramma tétel alapján az eredő egy paralelogramma átlója. Ennek megrajzolásával nyert háromszög oldalai az összetevők. Szögei: 50°; 20°; 110°. Sinustétellel kapjuk az összetevőket.

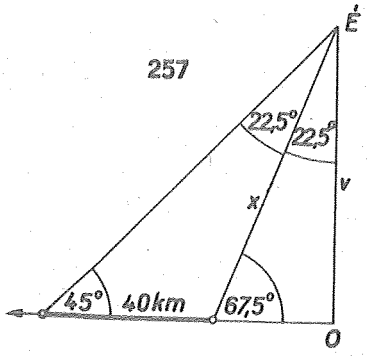
$F_1 = 36{,}4$ kp; $F_2 = 81{,}5$ kp.

255. *a)–f).* Lásd az előző feladatot.

a) $F_1 = 18$ kp; $F_2 = 32$ kp.
b) $F_1 = 70$ kp; $F_2 = 64{,}6$ kp.
c) $F_1 = 24{,}98$ kp ≈ 25 kp; $F_2 = 45{,}04$ kp ≈ 45 kp.
d) $F_1 = 60{,}9$ kp; $F_2 = 87{,}4$ kp.
e) $F_1 = 17{,}32$ kp; $F_2 = 9{,}96$ kp.
f) $F_1 = 30$ kp; $F_2 = 38{,}85$ kp.

256. A derékszögű háromszögben egy általános és egy derékszögű háromszög keletkezik. A közös oldalt sinustétellel fejezzük ki, majd sinus szögfüggvénnyel a keresett távolságot. Először a szögeket számítjuk ki.

A folyó szélessége: $\dfrac{15 \sin 76°40' \sin 83°26'}{\sin 6°46'} = 123{,}2$ m.



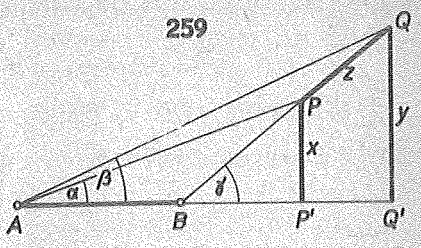
257. Délnyugat $= 45°$; dél–délnyugat $= 22{,}5°$. Az 1 órai út maga a sebesség (257. ábra).

$v = 68{,}34$ km/óra.

258. Az eredeti irány, az eltérés iránya és a víz sodra egy általános háromszöget alkot, amelyből sinustétellel kapjuk a keresett szöget.

$\alpha = 21°41'$.

259. Az 259. ábrán $\alpha = 25°42'$; $\beta = 31°12'$; $\gamma = 41°6'$. Először az ABQ háromszög szögeit kiszámítva, BQ távolságot sinustétellel írjuk fel. A BQQ' háromszögből sinus szögfüggvénnyel kapjuk a távolabbi hegy magasságát. Ugyanezeket a lépéseket végezzük el az ABP és BPP' háromszögekben, így kapjuk a közelebbi hegy magasságát.



$z = BQ - PQ$. — Más menetben is haladhatunk.

$y = 1030$ m; $BQ = 1567$ m; $x = 558$ m; $BP = 849$ m; $z = 718$ m.

260. Az átló által keletkezett két általános háromszögben először a szögeket számítjuk ki. $\alpha = \beta = 70{,}9°$; $\gamma = \delta = 109{,}1°$. a-t, b-t és c-t sinustétellel számítjuk ki.

$a = 21{,}63$ cm; $b = 11{,}91$ cm; $c = 13{,}83$ cm.

261. A trapéz 8 cm-es oldalát elcsúsztatjuk. A keletkezett háromszögből sinustétellel kapjuk b oldalt, valamint $a - c$ értékét.

$b = 10{,}53$ cm; $a - c = 12{,}89$ cm; $c = 7{,}11$ cm.

262. A trapéz 24 cm-es oldalát elcsúsztatjuk a rövidebbik párhuzamos oldal mentén, a másik nem párhuzamos oldal mellé. A keletkezett háromszögből sinustétellel kapjuk a β szöget, valamint $a - e$ értékét. $\beta = 36°44'$; $\gamma = 143°16'$; $\delta = 116{,}2°$; $a - c = 39{,}45$ cm; $c = 8{,}55$ cm.

263. Az átló által kapott két általános háromszögből sinustétellel kapjuk az oldalak hosszát.

$a = 9{,}456$ cm; $b = 10{,}24$ cm; $c = 15{,}45$ cm; $d = 14{,}07$ cm.

264. Szögeket kell kiszámítani a keletkezett oldalsó háromszögben. Sinustétellel a szabályos háromszög oldala $1{,}28 \cdot a$.

265. A négyzet által levágott háromszögekben kiszámítjuk a szögeket, majd az ötszög egyik oldalának darabjaival fejezzük ki a négyzet oldalát.

$$\frac{a}{x} = \frac{\sin 18° + \sin 36°}{\sin 72°};$$

$x = 1{,}06\, a$.

266. Kiszámítjuk a keletkezett két háromszög szögeit, majd sinustétellel AC és BC távolságokat. $AB = AC + CB$.

$AC = 1001$ m; $CB = 442{,}7$ m; $AB = 1444$ m.

267. Kiszámítjuk a két háromszög szögeit. Sinustétellel kifejezzük a CB távolságot, majd ezt helyettesítve, sinustétellel kiszámítjuk a keresett távolságot.

$x = 393$ m.

268. Az elkészített rajzon a keletkezett két háromszög közös oldalát sinustétellel fejezzük ki, majd a derékszögű háromszögből tangens szögfüggvénnyel kiszámítjuk a keresett magasságot. $CC' = 134{,}8$ m.

269. ABC háromszögből kiszámítjuk a γ szöget, majd kifejezzük sinustétellel az AC távolságot, végül sinus szögfüggvénnyel megkapjuk a CC' távolságot az ACC' derékszögű háromszögből.

$\gamma = 36°56'$; $CC' = 206{,}3$ m.

270. Az 270. ábra jelöléseivel: $x = b \operatorname{tg} 12°5' = a \operatorname{tg} 6°55'$.

Az ABC' háromszögben $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 6°55'}{\operatorname{tg} 12°5'}$. Ebből β-t számítjuk ki.
$\beta = 33°29'$; $\gamma = 43°10'$; $x = 57{,}53$ m.

271. Az 271. ábra jelöléseivel: $\alpha = 112°$; $\alpha' = 58°35'$; $\beta = 60°15'$;

CAB háromszögből: $CA = \frac{45 \sin 60°15'}{\sin\gamma}$;

CAP háromszögből: $CP = CA \cdot \sin(180° - \alpha)$ és $PA = CA \cdot \cos(180° - \alpha)$;
ADR háromszögben: $DR = CP$; $AR = CP \cdot \operatorname{ctg}\alpha'$; $PR = PA + AR$;
$t = PR \cdot PC$.
$CP = 268{,}6$ m; $PA = 108{,}5$ m; $AR = 164{,}1$ m; $PR = 272{,}6$ m; $t \approx$
$\approx 73\,230$ m^2 (logaritmussal).

272. A 272. ábra alapján kiszámítjuk a szögeket. APR háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. Ezért $AP = PQ + QR$. A PQB háromszögből PB-t tangens szögfüggvénnyel kapjuk. $AB = AP + PB$.
ABC háromszög ismeretlen oldalai sinustétellel kiszámíthatók.

$AP = 1002$ m; $PB = 713{,}5$ m; $AB = 1715$ m; $AC = 888$ m; $BC =$
$= 1256$ m.

273. A 273. ábrán látható ABO derékszögű háromszögből kiszámítjuk az átfogót és szögfüggvénnyel a β_3 szöget.

$\beta_2 = 180° - (\beta_1 + \beta_3)$; $\alpha_3 = 90° - \beta_3$; $\alpha_2 = 180° - (\alpha_1 + \alpha_3)$; $\gamma = 180° -$
$-(\alpha_2 + \beta_2)$;

ABC háromszögből a keresett távolságokat sinustétellel kapjuk.

$\beta_1 = 70°30'$; $\alpha_1 = 79°55'$; $AB = 3040$ m; $\beta_3 = 36°19'$; $\beta_2 = 73°11'$;
$\alpha = 53°41'$; $\alpha_2 = 46°23'$; $\gamma = 60°25'$; $a = 2531$ m; $b = 3347$ m.

274. Rajzot készítünk. Kiszámítjuk a keletkezett háromszögek szögeit, majd az 1 m befogójú derékszögű háromszög másik befogóját és az átfogót. Ezután a csonka kúp sugarait, végül a magasságot. (Lásd a 274. ábrát.)

$R = 2{,}923$ m; $r = 2{,}33$ m; $m = 2{,}35$ m; $V \approx 51$ m^3.

275. $d = 158{,}2$ m.

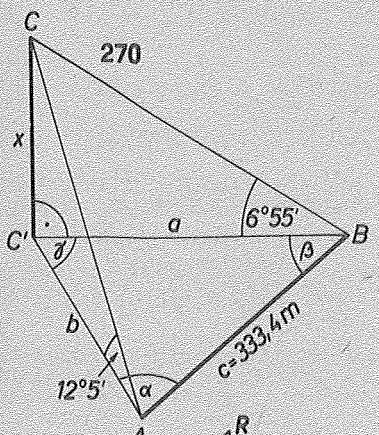
276. Az északi és a délkeleti irány egymással 135°-os szöget zár be.
A két hajó 4 óra múlva 288,4 km-nyire lesz egymástól.

277. Szöget kell kiszámítani cosinustétellel: $\alpha = 36°32'$.

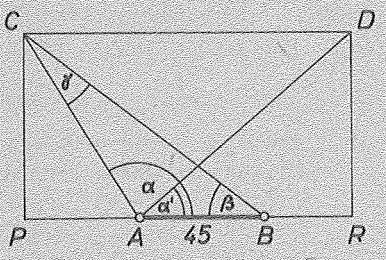
278. Első esetben a 2 mutató 60°-os szöget zár be egymással, 9 órakor 90°-os szöget. A derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét, az általános háromszögben a cosinustételt írjuk fel, s a kétismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk.
A kismutató 8 cm; a nagymutató 15 cm hosszú.

279. A beesési szög és a visszaverődési szög az $OA'A$ és $OB'B$ háromszögekben is szerepel, mint váltószög. E két háromszögből cosinus szögfüggvénnyel kifejezzük OA és OB távolságokat, majd az OAB háromszögben a keresett AB oldalra felírjuk a cosinustételt. — Megy a feladat cosinustétel nélkül is, csak derékszögű háromszögekkel (279. ábra).

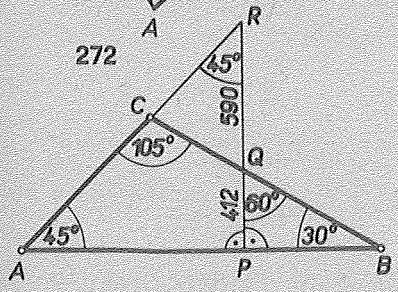
$$OA = \frac{4}{\cos\alpha};\quad OB = \frac{9}{\cos\alpha};\quad x^2 = \frac{16+81}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cdot4\cdot9}{\cos^2\alpha}\cdot\cos 2\alpha;\quad x = 6{,}58\text{ m}.$$



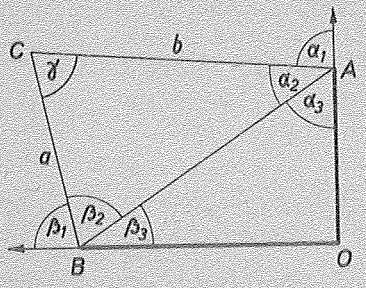
270



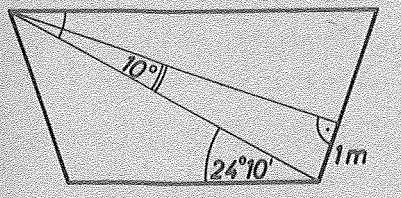
271



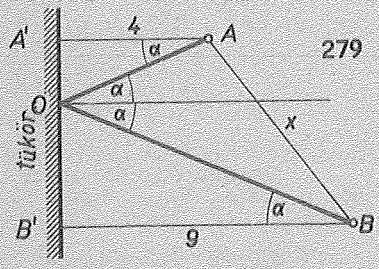
272



273



274



279

280. A külső szög segítségével a belső ismeretlen szögeket kiszámíthatjuk. A keletkezett két háromszög közös oldalát sinustétellel számítjuk ki, majd a másik háromszögben felírjuk a cosinustételt az ismeretlen oldalra, a sinustételt az egyik ismeretlen szögre.

$$\text{A közös oldal} = \frac{28\sin 19{,}5^\circ}{\sin 16^\circ 20'} = 33{,}25\text{ m};\quad x = 19{,}7\text{ m}.$$

A lejtő hajlásszöge 10°10′.

281. A paralelogramma tétel alapján az eredő lesz a paralelogramma átlója, s a keletkezett háromszög másik két oldala a két összetevő. Az átlót cosinustétellel számítjuk ki, a keresett irányszöget sinustétellel.

	$R = 30{,}2$ kp;	$\alpha_2 = 14{,}8°$;
a)	$R = 450$ kp;	$\alpha_2 = 40°$;
b)	$R = 12$ kp;	$\alpha_2 = 36{,}3°$;
c)	$R = 148{,}6$ kp;	$\alpha_1 = 28°25'$;
d)	$R = 70$ kp;	$\alpha_1 = 38°14'$;
e)	$R = 244{,}9$ kp;	$\alpha_1 = 72{,}2°$.

282. $e = 17{,}98$ dm ≈ 18 dm; $f = 36{,}6$ dm.

283. $a = 5{,}33$ dm; $b = 15{,}68$ dm; $\alpha \approx 180° - 72{,}8° \approx 107{,}2°$; $\beta \approx 72{,}8°$.

284. Lehet a számítással a szerkesztő megoldást követni. $a \approx 24$ m; $b \approx 15$ m.

285. Kapunk háromszögeket, melyeknek oldalai az adott oldalak fele, az általuk közbezárt szög az adott szög, illetőleg annak kiegészítő szöge, a harmadik oldal pedig az új paralelogrammának a keresett oldala. Cosinustétellel számolunk, még a szöget is abból a háromszögből, melynek oldalai a kapott új oldalak és az egyik eredetileg adott oldal. Az új paralelogramma oldalai 239,36 m és 310,9 m; szöge $44{,}87° \approx 45°$.

286. Cosinustétellel számítjuk ki a szárak által bezárt szöget. A sugár merőleges a szárakra. Így kapunk egy derékszögű háromszöget, melynek egyik hegyesszöge a kiszámított szög fele.

$$\alpha = 77°22'; \quad r = 8 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 6{,}4 \text{ cm}.$$

287. A súlyvonal által keletkezett egyik háromszögben felírjuk a cosinustételt a 9 cm-es oldalon kezdve. Kifejezzük a súlyvonal és a nagyobbik oldal által bezárt szög cosinusát, majd ennek értékét behelyettesítjük a másik háromszögben az ismeretlen oldalra felírt cosinustételbe.
A harmadik oldal 17,87 cm.

288. A háromszöget paralelogrammává egészítjük ki úgy, hogy az adott oldalak a paralelogramma oldalai, a súlyvonal kétszerese pedig az egyik átlója legyen. Felírjuk a cosinustételt a 100 cm-es oldalra, s kifejezzük belőle a vele szemközti szög cosinusát. A kapott kifejezést helyettesítjük az ismeretlen oldal felére felírt cosinustételbe.
A harmadik oldal 114,8 cm.

289. Legyen az átlók által bezárt szög ε, illetve $180° - \varepsilon$. Felírjuk a cosinustételt a paralelogramma két oldalára, a két egyenletet összeadjuk, s kétszer vesszük.

$$2\,(a^2 + b^2) = e^2 + f^2.$$

290. A háromszög adott oldalaival rajzolt paralelogramma egyik átlója a keresett súlyvonal kétszerese. Másik átlója az ismeretlen oldal. Ezt cosinustétellel számítjuk ki. Felhasználva az előző feladat eredményét, a keresett súlyvonal

$s_c = 46{,}2$ cm.

$c = 105{,}9$ cm.

291. $2(a^2+b^2) = 4s_c^2+f^2$; ebből $f = \sqrt{2(a^2+b^2)-4s^2}$.

Legyen D a b oldal felezőpontja, E pedig a c oldalé. ED akkor a háromszög egyik középvonala $= \frac{a}{2}$. A CDE háromszög oldalai: s_c, $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, amely megszerkeszthető. CD-t megkétszerezve, megkapjuk az A csúcsot. AE-t megkétszerezve, B csúcsot. A szerkeszthetőség feltétele:

$$\frac{a-b}{2} < s_c < \frac{a+b}{2}.$$

292. Lásd a 290. feladat útmutatását. A 289. feladat eredményéből kapjuk az s_c^2 kifejezését. Ha pedig a b és c oldalakkal, illetve az a és c oldalakkal rajzolunk paralelogrammát, akkor kapjuk az s_a^2 és az s_b^2 kifejezéseket. Ezeknek összege adja a bizonyítandó tételt.

293. A rövidebbik párhuzamos mentén eltoljuk a negyedik oldalt. A keletkezett háromszögből a negyedik oldalt cosinus-, a szöget sinustétellel számítjuk ki. A negyedik oldal 55,40 cm; az ismeretlen szög: 75°51′.

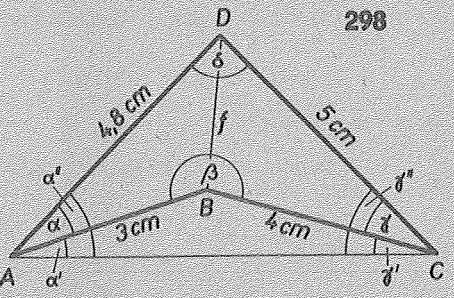
294. A szár 17,09 cm, a rövidebbik párhuzamos oldal 6,4 cm, szögei: 46°22′ és 133°38′.

295. A keresett szögek: 76°41′; 63°12′; 116°48′; 103°19′.

296. Az átló 4,74 cm. Az ismeretlen szögek: $80°30′+35°45′ = 116°15′$; 67,4°; $57,6°+76,9° = 134,5°$.

297. $x = 12{,}86$ cm; $y = 11{,}66$ cm.

298. Az ábra szerint először cosinustétellel kiszámítjuk a négyszög AC átlóját; α' szöget sinustétellel; $\gamma' = 180°-(360°-\beta+\alpha')$. ADC háromszögből cosinustétellel kapjuk a $\delta = 90°$-os szöget, s ezért szögfüggvénnyel számíthatjuk α'' értékét. $\gamma'' = 90°-\alpha''$. $\alpha = \alpha''-\alpha'$ és $\gamma = \gamma''-\gamma'$.



298

$AC = 6{,}92$ cm; $\alpha' = 9°19′$; $\gamma' = 6°57′$; $\alpha'' = 46°10′$; $\gamma'' = 43°50′$; $\alpha = 36°51′$; $\gamma = 36°53′$.

299. A 298. ábra jelölését használva, először a szögeket számítjuk ki. Kiderül, hogy a DBA háromszög egyenlő szárú, így $AB = BD$. A BDC háromszögből szögfüggvénnyel kapjuk a BC oldalt, végül az ABC háromszögből cosinustétellel számítjuk ki a keresett átlót. $BC = 14$ cm; $AC = 32{,}88$ cm.

300. Az egyenlő szög: $\alpha = \gamma = 71°2′$; $\beta = 36°34′+63°19′ = 99°53′$; $\delta = 118°2′$.

301. Lásd az előző feladatot.

$\cos\alpha = 0$; $\alpha = \gamma = 90°$, vagyis az átló két derékszögű háromszögre bontja a négyszöget. Így a szögeket szögfüggvénnyel számítjuk ki.

$\beta = 59°29′+14°15′ = 73°44′$; $\delta = 106°16′$.

A négyszög húrnégyszög.

80·50
2500

302. Az előzőkhöz hasonló egyenletrendszert írunk fel. Felhasználjuk, hogy a szemben fekvő szögek kiegészítő szögek. Az átlót küszöböljük ki, mert csak a szögeket kérdezi a feladat. A szögek sorban: 88,91°; 79,91°; 91,09° és 100,09°.

303. Meghúzzuk a négyszög egyik átlóját.

$e = 6{,}689$ cm; $d = 7{,}03$ cm; $\alpha = 41{,}86°$; $\delta = 165{,}44°$.

304. $a = 32{,}63$ cm; $d = 18{,}54$ cm; $e = 44{,}87$ cm.

305. *I. megoldás:* ABC háromszögből kiszámítjuk a β szöget cosinustétellel, majd az ADB háromszög harmadik szögét, s végül a BD keresett távolságot sinustétellel kapjuk az ABD háromszögből. $\beta = 104°53'$; $BD = 240$ m.

II. megoldás: Lehet az ABC háromszögből a γ szöget számítani s utána az ACD háromszögben a szögeket s végül CD távolságot. $BD = BC + CD$.

$\gamma = 42°8'$; $CD = 87{,}48$ m ≈ 88 m.

306. *I. megoldás:* Legyen AB a keresett távolság, C a figyelő helye. $AC = 18 \cdot 340$ m; $BC = 14 \cdot 340$ m; $CP = 160$ m; $CQ = 160$ m; $PQ = 300$ m. A CPQ és CAB háromszögek közös szögének cosinusát a CPQ háromszögből kifejezzük, s ennek felhasználásával az ABC háromszögből ugyancsak cosinustétellel kiszámítjuk az AB távolságot.

II. megoldás: A CPQ egyenlő szárú háromszögben meghúzzuk a magasságot és $\frac{\gamma}{2}$ értékét sinus szögfüggvénnyel számítjuk ki.

$\gamma = 140°$; $AB \approx 10\,200$ m.

307. Legyen CP távolság 100 m.

I. megoldás: CBP derékszögű háromszögből kiszámítjuk PB távolságot. APC háromszög egyenlő szárú. $AP = CP$. APB háromszögből cosinustétellel kapjuk a keresett távolságot.

II. megoldás: CPB derékszögű háromszögből CB-t, az APC háromszögből AC távolságot számítjuk ki, végül az ABC háromszögből cosinustétellel kapjuk az AB távolságot.

Megjegyzés: A derékszögű háromszög PB befogója fele az átfogónak. Ha a derékszögű háromszöget CP-n keresztül tükrözzük, a kapott egyenlő oldalú háromszögnek a 100 m a magassága. Így $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = 100$;

$a = \frac{200\sqrt{3}}{3}$; $PB = \frac{100\sqrt{3}}{3}$.

$PB = 57{,}74$ m; $AP = 100$ m; $AB = 152{,}75$ m.

308. *I. megoldás:* ABC háromszögből BC távolságot cosinustétellel, ACB szöget sinustétellel számítjuk. Ezután a BCD háromszög BCD szögét számítjuk ki, majd cosinustétellel a keresett BD távolságot. (ACB szög tompaszög!) (308. ábra.)

$BC = 26{,}5$ km; ACB szög $= 118°$; BCD szög $92°$; $BD \approx 37$ km.

II. megoldás: Az ACD háromszögből indulunk el, s a keresett távolságot az ABD háromszögből számítjuk ki.

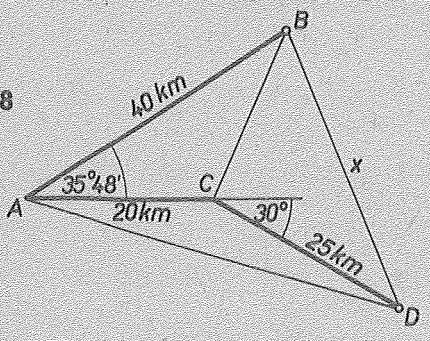
$AD = 43{,}5$ km; CAD szög $= 16{,}7°$; BAD szög $= 52°'5$; $BD = 37$ km.

309. Lásd az előző feladatot. AB távolságon 3 órát haladt, tehát $AB = 3 \cdot 3{,}5$ km; hasonlóan $CD = 1{,}5 \cdot 3{,}5$ km és $AC = 1{,}5 \cdot 5$ km.

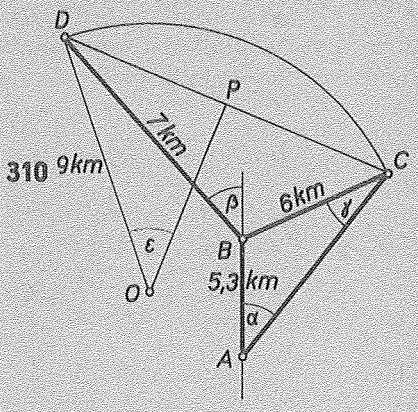
I. megoldás: $BC = 6{,}12$ km; ABC szög $= 100°15'$; BCD szög $= 127°15'$; $BD = 10{,}2$ km.

II. megoldás: $AD = 11{,}7$ km; CAD szög $= 19°19'$; BAD szög $= 54°19'$: $BD = 10{,}2$ km.

308



310



310. Lásd az ábrát.

a) ABC háromszögből kiszámítjuk sinustétellel a γ-szöget;

b) sinustétellel kapjuk az AC távolságot;

c) DBC szög $= \beta + \alpha + \gamma$;

d) DC húrt cosinustétellel kapjuk;

e) DOP háromszögből sinus szögfüggvénnyel kapjuk ε-t;

f) $\widehat{DC} = \dfrac{2r\pi\varepsilon}{180°}$;

g) idő $=$ út : sebesség. Az első és második csapat menetideje közötti különbség megadja a második csapat indulási idejét.

$\gamma = 33°16'$; $AC = 9{,}17$ km; DBC szög $\approx 120°$; $DC = 11{,}27$ km; $2\varepsilon = 77°31'$; $\widehat{DC} = 12{,}17$ km.

Első csapat menetideje: 2,75 óra.

Második csapat menetideje: 2,46 óra.

Az eltérés: $=$ 17 perc.

A második csapat gyalogságnak 4 óra 5 perckor kell indulnia.

311. Megszerkesztjük az ABC háromszöget, kitűzzük a D pontot, majd a C-ből kiinduló m_c talppontját (C_1). A pálya m_c-vel 15°-os szöget zár be úgy, hogy az ACC_1 hegyesszögön belül van.

$EF = ED$ alapján kapjuk az F pontot.

D-ben merőlegest állítunk AB egyenesre, és megfelezzük a DEF szöget.

E két egyenes metszéspontja a kanyar körének középpontja.

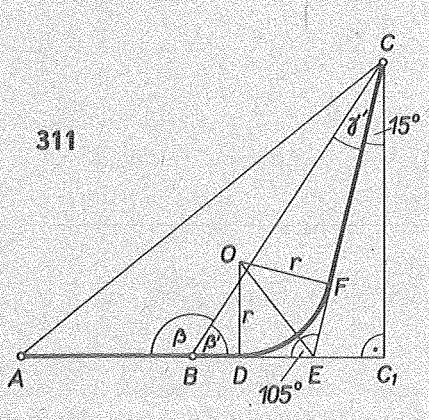
1 km = 1 cm. (Lásd: 311. ábra.)

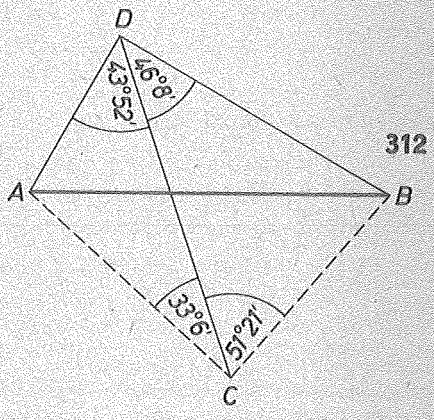
Pályahossz = $AB+BD+\overset{\frown}{DF}+FC$.

1. ABC háromszögből cosinustétellel kiszámítjuk a β szöget.
2. A BCE háromszögből a β' és γ' szögeket, majd sinustétellel a BE és EC oldalakat számítjuk ki.
3. $ED = EF = BE - BD$.
4. Az ODE háromszögből az OD sugarat kapjuk.
5. $\overset{\frown}{DF} = \dfrac{r \cdot \pi \cdot 75°}{180°}$.
6. $FC = EC - EF$.

$BE = 2{,}078$ km; $BC = 8{,}032$ km; $ED = 1{,}078$ km; $r = 1{,}405$ km; $\overset{\frown}{DF} = 1{,}839$ km; $FC = (8{,}032 - 1{,}078)$ km $= 6{,}954$ km.

A pálya hossza: $6+1{,}839+6{,}954 = 14{,}793$ km.





312. *I. megoldás:* ADC háromszögből AD távolságot, DCB háromszögből DB távolságot sinustétellel kapjuk. ADB derékszögű háromszögből AB távolságot Pitagorasz tételével számítjuk ki.

II. megoldás: ADC háromszögből AC távolságot; DCB háromszögből CB távolságot sinustétellel kapjuk. ABC háromszögből AB távolságot cosinustétellel számítjuk ki.

I. $AD = 170$ m; $BD = 236{,}3$ m; $AB = 291$ m.

II. $AC = 213$ m; $BC = 218$ m; $AB = 291$ m.

313. ADC derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítjuk AC oldalt; szögfüggvénnyel a DCA szöget. ABC háromszögből a keresett oldalt cosinustétellel, a keresett CBA szöget sinustétellel kapjuk.

$AC = 650$ m; DCA szög $= 67°23'$; $AB = 1296$ m; CBA szög $= 28{,}4°$.

314. ACB derékszögű háromszögből AC oldalt Pitagorasz-tétellel, ACB szöget szögfüggvénnyel számítjuk ki. ADC háromszögből a keresett távolságot cosinustétellel kapjuk.

$AC = 52$ km; ACB szög $= 67°23'$; $AD = 103{,}6$ km.

315. $BC = 71{,}8$ m; $AB = 69{,}71$ m; BAC szög $\approx 88°$.

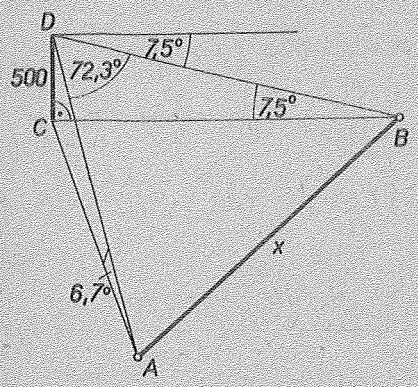
316. Az ábra alapján az ACD derékszögű háromszögből AD távolságot, BCD derékszögű háromszögből BD távolságot szögfüggvénnyel; ABD háromszögből AB távolságot cosinustétellel kapjuk.

$AD = 4285$ m; $BD = 3831$ m; $AB \approx 4{,}8$ km.

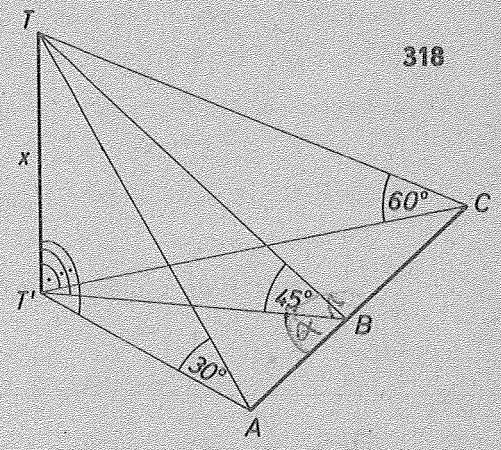
317. Lásd az előző rajzot. Az ACB háromszög AC és BC oldalát az ACD, illetve BCD háromszögekből kifejezzük, majd az ACB háromszögre felírt cosinustétellel kiszámítjuk a CD távolságot.

$x \approx 1077$ m.

316



318



318. Lásd az ábrát. *I. megoldás:* Az ATT', BTT', CTT' derékszögű háromszögek AT', BT' és CT' oldalait kifejezve, felírjuk a cosinustételt az ABT' és BCT' háromszögben az AT', illetve a CT' oldalakra.

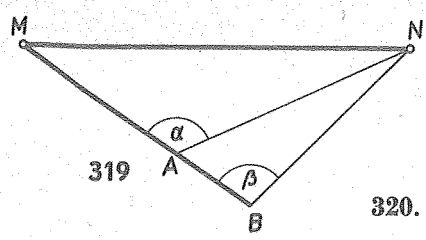
$x = 61{,}22$ m.

II. megoldás: B pontra tükrözzük az $AT'C$ háromszöget, és alkalmazzuk a 289. feladat tételét.

319. Lásd az ábrát. Legyen: MAN szög $= \alpha$; MBN szög $= \beta$; NAB szög $= 180° - \alpha$; $AB = MB - MA$.

I. megoldás: Az ABN háromszögből sinustétellel nyerjük az AN távolságot, az MAN háromszögből cosinustétellel kapjuk az MN távolságot.

$$AN = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}; \quad MN = 65{,}3 \text{ m}.$$



II. megoldás: Kifejezzük az ABN háromszögből a BN távolságot, majd a BMN háromszögből az MN távolságot. $BN = \frac{AB \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$; $MN = 65{,}3$ m.

320. *I. megoldás:* Az AC oldalt az ACD háromszögből, a BC oldalt a BCD háromszögből sinustétellel kapjuk. Az ABC háromszögből cosinustétellel számítjuk ki az AB távolságot.

$AC = 167$ m; $BC = 344{,}7$ m; $AB \approx 267{,}6$ m.

II. megoldás: Az AD oldalt az ACD háromszögből, a BD oldalt a BCD háromszögből kapjuk sinustétellel. Az ABD háromszögből cosinustétellel kapjuk az AB távolságot.

$AD = 380{,}6$ m; $BD \approx 226{,}2$ m; $AB = 267{,}4$ m.

321. Az előző feladat fordított kérdése. CD távolságot 1-nek vesszük, s az előző feladat menetében kiszámítjuk az AB távolságot. Ahányszorosa a valódi AB távolság a kapott eredménynek, annyi a keresett CD távolság.

$AB = 0{,}76$ m; $267{,}4 : 0{,}76 \approx 350$ m.

322. Legyenek az m_a és m_b által levágott szakaszok x és y, akkor

$c^2 = a \cdot (a-x) + b \cdot (b-y)$.

A keletkezett derékszögű háromszögekből

$x = b \cdot \cos\gamma$ és $y = a \cdot \cos\gamma$.

Behelyettesítéssel kapjuk a tételt.

Tompaszögű háromszögben a tompaszöggel szemközti oldal fölé rajzolt négyzet területe egyenlő a másik két oldal fölé rajzolt négyzetet tartalmazó két téglalap területének összegével.

323. $\sin\beta = 0{,}4841$-ből β meghatározható. $1:16 = a:b = \sin\alpha:\sin\beta$-ból α-t kapjuk. Nem egyértelmű a megoldás. $\beta_1 = 28°57'$; $\alpha = 1°44'$; $\gamma_1 = 149°19'$; $a = 24$ cm; $b = 384$ cm; $c_1 = 411$ cm. $\beta_2 = 151°3'$; $\alpha = 1°44'$; $\gamma_2 = 27°13'$; $a = 24$ cm; $b = 384$ cm; $c_2 = 368{,}3$ dm.

324. A kerületből $b+c = 340$. Felírjuk a cosinustételt az a oldalra, s felhasználjuk azt az összefüggést, hogy $b^2+c^2 = (b+c)^2-2bc$. Így megkapjuk bc értékét. A $b+c$ és bc értékéből kiszámítható b és c; β-t sinustétellel kapjuk.

$b = 180$ cm; $c = 160$ cm; $\beta = 43°38'$; $\gamma = 37°49$.

325. $c \approx 65$; $a = 67$; $b = 45$; $\alpha = 72°34'$; $\beta = 39°41'$.

326. Jelöljük az oldalakat: 5, a és $8-a$, majd felírjuk a cosinustételt az 5 cm-es oldalra. A szögeket sinustétellel számítjuk ki.

$a = 5{,}73$ cm; $b = 2{,}27$ cm; $\alpha = 180° - 83{,}1° = 96{,}9°$; $\beta = 23{,}1°$.

327. Jelöljük az oldalakat: 6, a; $a+4$, majd felírjuk a cosinustételt a 6 cm-es oldalra. A szögeket sinustétellel számítjuk ki.

$a = 2{,}18$ cm; $b = 6{,}18$ cm; $\alpha = 20{,}6°$; $\beta = 84{,}3°$.

328. Felírjuk a cosinustételt a 10 cm-es oldalra. $2ab$-t kifejezzük a felírt egyenletből. $2ab \approx 600$ és $a^2+b^2 = 625$ egyenletrendszerből nyerjük az oldalakat.

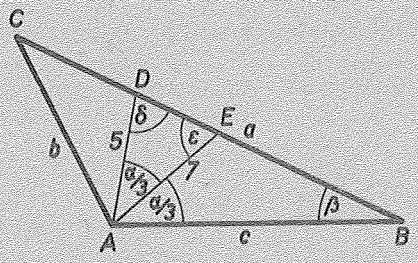
$a = 15$ cm; $b = 20$ cm; $\alpha = 46°32'$; $\beta = 104{,}6°$.

329. Hasonló a 324. feladathoz.

$a = 83{,}92$ cm; $b = 38{,}08$ cm; $\alpha = 88°9'$; $\beta = 26°59'$.

330. Több út lehetséges. (Lásd az ábrát.) Az ADE háromszögből cosinustétellel kiszámítjuk a DE-t, majd sinustétellel az egyik ismeretlen szöget, pl. ε-t. $\delta = 180° - \left(\frac{\alpha}{3} + \varepsilon\right)$. Az ADB háromszögből sinustétellel számítjuk ki a c oldalt. $\beta = \varepsilon - \frac{\alpha}{3}$, $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$. Végül a-t és b-t sinustétellel

330



kapjuk az ABC háromszögből. $DE = 4{,}47$ cm; $\varepsilon = 45°20'$; $\beta = 5°52'$; $\delta = 95{,}2°$; $c = 48{,}78$ cm; $\gamma = 55°44'$; $a = 51{,}9$ cm; $b = 6{,}03$ cm.

331. A súlyvonal meghúzása által keletkezett két háromszögben felírjuk a cosinustételt a, illetve b oldalra. A két egyenletet összeadjuk. Az eredeti háromszögben c oldalra írjuk fel a cosinustételt, majd a kapott két-ismeretlenes másodfokú egyenletrendszert megoldjuk. A szögeket sinustétellel számítjuk ki.

$a = 5{,}99$ dm ≈ 6 dm; $b = 4{,}7$ dm; $\alpha = 86{,}9°$; $\beta = 51°22'$;

332. $a = 20$ cm; $b = 13$ cm; $\alpha = 67°23'$; $\beta = 36°52'$.

333. Az egyik részháromszögben adott két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög.

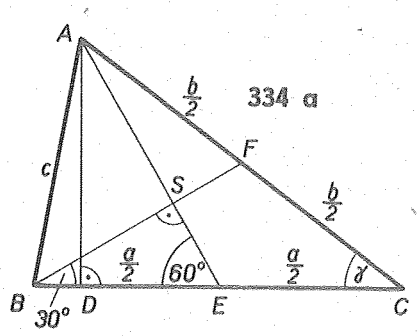
$b = 30$ cm; $a = 18{,}3$ cm; $\gamma = 86°5'$; $\beta = 61{,}5°$.

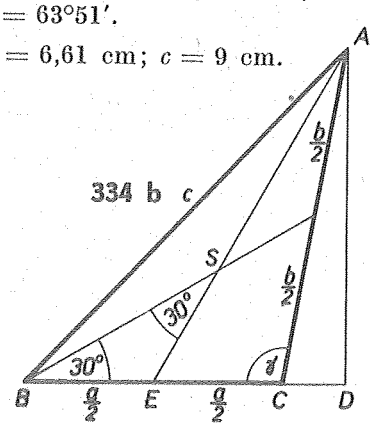
334. Az *a)* ábrán az ADE derékszögű háromszögből kapjuk s_a-t. Ennek harmadrésze SE. BSE szög 90°; így $\frac{a}{2} = 2 \cdot SE$.

Ha $c > b$, akkor a 60°-os szög a BSE háromszög külső szöge, így egyenlő szárú háromszög keletkezik. $\frac{a}{2} = \frac{AE}{3}$ (b) ábra).

I. esetben, ha $c < b$, akkor $s_a = 7{,}5$ cm; $a = 10$ cm; $b = 10{,}89$ cm. $c = 6{,}61$ cm; $\gamma = 36°39'$; $\beta = 79{,}5°$; $\alpha = 63°51'$.

II. esetben: $s_a = 7{,}5$ cm; $a = 5$ cm; $a = 6{,}61$ cm; $c = 9$ cm.





335. A szögfelező által lemetszett szakaszokra felírjuk a belső szögfelezőre tanult tételt; majd a keletkezett kis háromszögekben felírt két cosinustétel egyenletrendszert ad a harmadik oldalra és a szemközti szög felének cosinusára.

$\gamma = 108°37'$; $c = 85{,}72$ cm; $\alpha = 29{,}81°$; $\beta = 41°34'$.

336. A magasság megrajzolásával nyert derékszögű háromszögekből a háromszög szögeit azonnal megkapjuk. Az oldalakat sinustétellel számítjuk.

$\alpha = 54°$; $\beta = 69°27'$; $a = 17{,}46$ cm; $b = 20{,}2$ cm; $\gamma = 56°33'$.

337. Rajzot készítünk. A b oldal vetítésekor derékszögű háromszög keletkezik, amelyből cosinus szögfüggvénnyel megkapjuk b oldalt. A súlyvonal meghúzásával keletkezett háromszögből sinustétellel szöget, majd a c oldalt számítjuk ki. a-t cosinustétellel kapjuk.

$b = 139{,}2$ cm; $x = 10{,}6°$; $c = 148$ cm; $a = 32{,}2$ cm; $\beta = 68{,}2°$; $\gamma = 99{,}4°$.

338. $a = 48+38$. Felírjuk a belső szögfelezőre tanultak alapján: $48:38 = b:c$; azaz $b = 48k$, $c = 38k$, ahol k arányossági tényező. Ezután az a oldalra a cosinustételt állítjuk fel az eredeti háromszögben.

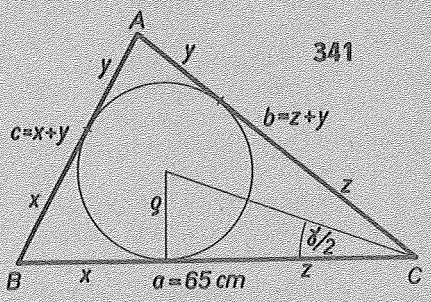
$k = 1{,}975$; $b = 94{,}8$ cm; $c = 75{,}05$ cm; $a = 86$ cm; $\gamma = 48°44'$; $\beta = 71°47'$.

339. $a+b = 54$; $c = 2r \cdot \sin 67°23'$; $c = 30$ cm; $a = 28$ cm; $b = 26$ cm; $\alpha = 59{,}5°$; $\beta \approx 53°7'$.

340. A 15 cm-es oldallal szemközti szöget számítjuk ki cosinustétellel. Megrajzoljuk a vele egy íven álló középponti szöget. A kör sugarát, a körcikk területét, majd az egyenlő szárú háromszög területét a tanult képletekből számítjuk. A két utóbbi terület különbsége a keresett körszelet területe.

$\alpha = 36°52'$; $r = 12{,}5$ cm; $t_{\text{háromszög}} = 75$ cm^2; $t_{\text{körcikk}} = 100{,}5$ cm^2; $t_{\text{körszelet}} = 25{,}5$ cm^2.

341. Lásd az ábrát. Az oldalakat a háromszög csúcsaiból, mint külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok összegét írjuk fel: $x+z=a$; $z+y=b$; $y+x=c$.



A három egyenletet összeadjuk:

$2(x+y+z)=2s$; $x+y+z=s$; $z=s-$

$-(x+y)=s-c$; $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{z}{\varrho}=\frac{s-c}{\varrho}$.

Ebből kapjuk γ-t. $a+b-c=2(s-c)$; $a+b+c=2s$. c oldalra felírjuk a cosinustételt $b=14+c$-t helyettesítve. Megkapjuk c-t, majd b-t. $\gamma=$ $=44{,}6°$; $c=48{,}4$ cm; $b=62{,}4$ cm; $\alpha=70°34'$; $\beta=64°50'$.

342. A körülírt kör sugarából kapjuk az adott szöggel (γ) szemközti oldalt (c). A meghúzott magasságokkal keletkezett derékszögű háromszögekből sinus szögfüggvénnyel fejezzük ki a két magasságot, és behelyettesítjük a kapott értékeket az $m_a+m_b=81{,}5$ egyenlőségbe, c oldalra felírjuk a cosinustételt, s a nyert egyenletrendszert megoldjuk.

$c=43{,}8$ cm; $a=66{,}8$ cm; $b=59{,}73$ cm; $\beta=61°27'$; $\alpha=79°15'$.

343. 342. fordítottja. $\sin\gamma=\frac{48}{60}$. Tovább pedig 324. és 329. szerint.

$\gamma=53°8'$; $a=39{,}75$ cm; $b=20{,}25$ cm; $\alpha=96{,}3°$; $\beta=30°25'$.

344. A 342.-höz hasonlóan megkaphatjuk a szóban forgó két oldal összegét is. Lineáris egyenletrendszert kapunk.

Az oldalak: 330,5 cm; 319,5 cm és 205,8 cm. A szögek: 74°27′ és 68°41′.

345. A középső oldal legyen x, akkor a másik két oldal $\frac{2}{3}x$ és $\frac{3}{2}x$. x-re felírjuk a cosinustételt, megkapjuk az egyik szöget. A kisebbik szöget sinustétellel számítjuk ki.

A szögek: 32,1°; 20°45′; 127°9′.

346. A meghúzott magasság által nyert két derékszögű háromszögből kiszámítjuk Pitagorasz tételével a lemetszett szakaszokat. Ezek összege a harmadik oldal. A szögeket sinustétellel vagy szögfüggvénnyel is kiszámíthatjuk.

Az egyik rész: 9 m; a másik 75 m; az oldal 84 m. A szögek: 28°4′; 77°19′ és 74°37′.

347. A harmadik oldalt cosinustétellel számítjuk ki; a kör sugarát az oldalakkal való összefüggésből: $r=\frac{a}{2\sin\alpha}$.

A harmadik oldal 15,6 cm; $r\approx 13{,}02$ cm.

348. Az érintkező körök középpontjai egy háromszöget alkotnak, melynek oldalai 2−2 kör sugarának összege. Kiszámítjuk a szögeket. Heron képlettel a háromszög területét kapjuk, majd a három körcikk területének összegét levonjuk a háromszög területéből.
A háromszög oldalai: 13 cm; 45 cm; 40 cm; szögei 16°16′; 104°15′; 59°29′. A háromszög területe: 252 cm². A körcikkek területeinek összege: 240,37 cm². A körívek által bezárt terület 11,6 cm².

349. A háromszög oldalai rendre 2−2 kör sugarának összege. $r_1+r_2 = 24$; $r_2+r_3 = 28$; $r_3+r_1 = 22$. A háromismeretlenes egyenletrendszer adja a sugarakat. A háromszög területéből levonjuk a három körcikk területét. A sugarak: 9 cm, 15 cm, 13 cm hosszúak. A háromszög szögei: 55°50′, 74°51′, 49°19′. A háromszög területe: 254,8 cm². A három körcikk területének összege: 232 cm². A maradék terület 22,8 cm².

350. A legnagyobb oldal x^2+x+1, mert x^2-1 csak $|x| > 1$-re pozitív, $x < -1$-re pedig $2x+1$ negatív. $x > 1$-re:

$(x^2+x+1)-(2x+1) = x^2-x = x(x-1) > 0$ és
$(x^2+x+1)-(x-1) = x+2 > 0$.

A legnagyobb oldalra írjuk fel a cosinustételt, s fejezzük ki belőle $\cos\alpha$-t. A számlálót és a nevezőt csoportosítással szorzattá alakítjuk, majd egyszerűsítünk.

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120°.$$

351. Jelöljük a szögeket: $\alpha-\delta$; α; $\alpha+\delta$.

Jelöljük az oldalakat: $\frac{a}{q}$; a; aq.

$q = 1$, azaz a háromszög egyenlő oldalú.

352. Felírjuk a cosinustételt az ABD háromszögben az AD oldalra és az ACD háromszögben az AC oldalra, végül $\cos\beta$-t kiküszöböljük. $AD = \frac{2a}{3} = 2\cdot CD$.

353. Az átlók által kapott négy háromszögben felírjuk a cosinustételt a négy oldalra, és a szemközti oldalak négyzetösszegének értékét egyenlővé tesszük. Legyen ε az átlók által bezárt szög. $\cos\varepsilon = 0$; $\varepsilon = 90°$.

354. $t = 171$ cm²; *a)* 205,2 cm²; *b)* $2{,}804\cdot10^5$ m²; *c)* 431,6 cm².

355. $V = 2790$ cm³.

356. Meghúzzuk a négyszög egyik átlóját és kiszámítjuk a négyszög területét. Ezután felírjuk a cosinustételt az átlóra mindkét háromszögben. A két egyenletet kivonjuk, és az egyenlet egyik oldalára rendezzük az oldalak négyzetét. Végül a négyszeres terület négyzetéhez adjuk a rendezett egyenlet négyzetét; s értéküket helyettesítjük.

$$(4t)^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd(\cos\beta\cdot\cos\delta-\sin\beta\cdot\sin\delta).$$

A terület akkor a legnagyobb, ha
$\cos(\beta+\delta) = -1$; $\beta+\delta = 180°$, azaz a négyszög húrnégyszög.

357. $t = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$. $\alpha = 59°$; $t = 110{,}6$ cm^2.

358. A háromszög harmadik szögét is kiszámítjuk, s az előző feladat területképletébe helyettesítünk.

$a = 26{,}4$ cm; $\beta = 100°$; $\alpha = 38°$; $\gamma = 42°$; $t = 373$ cm^2.

359. A középponti szög 360°. Arányos osztással megállapítjuk a középponti szögeket, s a keletkezett két háromszög területét a $t = \dfrac{ab \sin\gamma}{2}$ képlettel kiszámítjuk, s a két eredményt összeadjuk.

$t = 0{,}866$ m^2.

360. A teljes szöget 1:2:3:4 arányban felosztjuk, így kapunk 4 háromszöget. Ezeknek területét a $t = \dfrac{ab \sin\gamma}{2}$ képlettel kiszámítjuk, s a négy eredményt összeadjuk.

$t = 221{,}6$ cm^2.

361. $t = 178{,}8$ cm^2.

362. $t = 141{,}8$ cm^2.

363. A paralelogrammát két átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja, mert $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$.

Az átlók felezik egymást, így felírhatjuk a négy háromszög területének összegét a $t = \dfrac{ab \sin\gamma}{2}$ képlettel. Így kapjuk meg általánosan a paralelogramma területét, ha adottak átlói. A képletbe helyettesítünk. Legyenek az átlók e és f, az általuk bezárt szög: ε.

$t = 628{,}4$ cm^2.

364. $t = \dfrac{1}{2} ef \sin\varepsilon$.

A paralelogramma területét megkapjuk, ha az átlók szorzatának a felét szorozzuk az átlók által bezárt szög sinusával.

365. Az ABC háromszög területe háromszor akkora, mint az ABS háromszög területe.

$t = 1{,}5 \cdot SA \cdot SB \cdot \sin(ASB \text{ szög}) = 34{,}24$ cm^2.

366. Az APX háromszög területe $= \dfrac{1}{2} \cdot ABC$ háromszög területe.

$AX = 8$ cm. A háromszög nem volt egyértelműen meghatározva, de α kiesett, így bármely α-val x állandó.

367. Legyen PQ a keresett szakasz. Ekkor: $PC + CQ + PQ = AP + PQ + QB + AB$. Ebből PC távolság kifejezhető. PCQ háromszög területe egyenlő ABC háromszög területének a felével.

$\dfrac{PC \cdot QC \cdot \sin\gamma}{2} = \dfrac{AC \cdot BC \cdot \sin\gamma}{4}$. A kapott egyenletrendszerből a két keresett távolság kiszámítható.

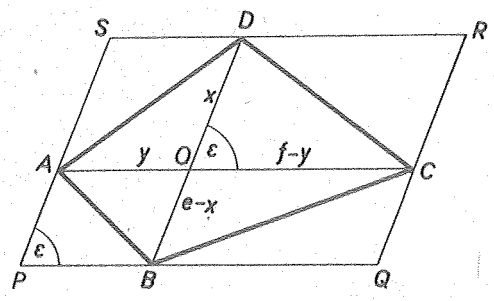
$PC = 5{,}62$ cm; $QC = 10{,}68$ cm.

368. *I. megoldás:* Legyen a két átló e és f. Keletkezik négy háromszög. Ezek területének összege egyenlő a négyszög területével. (Lásd a 368. ábrát.

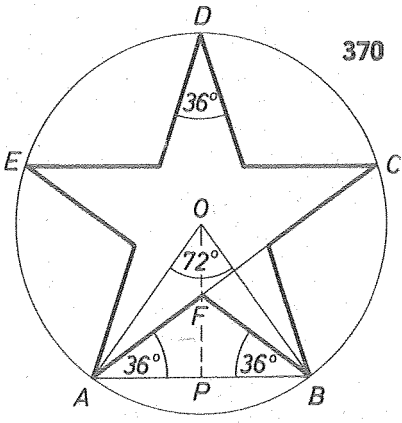
$$t_{\text{négyszög}} = \frac{xy \sin \varepsilon}{2} + \frac{x(f-y) \sin \varepsilon}{2} + \frac{(e-x)\cdot(f-y)\cdot \sin \varepsilon}{2} + \frac{(e-x)y \sin \varepsilon}{2}.$$

Összevonunk, s ekkor: $t = \frac{ef \sin \varepsilon}{2}$.

368



370



II. megoldás: Húzzunk párhuzamosakat a négyszög csúcsain át a megfelelő átlókkal. Az így keletkezett paralelogramma oldalai az átlók, ezek szöge az átlók által bezárt szög: ε. A négyszög területe ennek fele, mert a négyszögben levő négy háromszöggel egybevágó négy háromszög keletkezett, így a paralelogramma területének kétszerese. (Lásd a 368. ábrát.)

$PAB\triangle \cong OAB\triangle$; $QBC\triangle \cong OBC\triangle$; $RDC\triangle \cong ODC\triangle$; $SAD\triangle \cong OAD\triangle$

Ezért

$$t_{\text{négyszög}} = \frac{1}{2} t_{\text{paralelogramma}};$$

$$t_{\text{négyszög}} = \frac{1}{2} ef \sin \varepsilon. \quad t = 1489{,}6 \text{ dm}^2.$$

369. *I. megoldás:* A négyszöget egyik átlójával két háromszögre bontjuk. Az egyik háromszögnek adott két oldala és az általuk bezárt szög, így területe kiszámítható. A harmadik oldalt cosinustétellel kapjuk, s akkor már ismert a másik háromszög minden oldala, így Heron képletével területét kiszámíthatjuk. A két háromszög együttes területe a keresett terület.

$t_1 = 95\,020 \text{ m}^2$; a harmadik oldal: 620,7 m; $t_2 = 129\,300 \text{ m}^2$; $t_{\text{négyszög}} = 22{,}43$ ha.

II. megoldás: Lehet a második háromszög egyik szögét cosinustétellel kiszámítani s akkor a területét.

A szög 71,6°; $t_2 = 129\,300 \text{ m}^2$.

Szabályos ötszöget szerkesztünk, melynek minden második csúcsát kötjük össze (370. ábra). AOB szög $= \frac{360°}{5}$. FAB szög $= \frac{\alpha}{3}$; mert az egy csúcsból húzott átlók a csúcsnál levő szöget három egyenlő részre osztják. A szabályos ötszög csúcsainál levő α szögek 108°-osak. AFB szög $= 180° - \frac{2\alpha}{3}$.

$T_{\text{ötágú csillag}} = 5 \cdot (AOB$ háromszög területe $- AFB$ háromszög területe.)
AOB háromszög területe az adott sugár és a sugarak által bezárt szög segítségével kiszámítható.
AB szakaszt az AOB háromszögből kapjuk. Ekkor ismerünk az AFB háromszögből egy oldalt és a szögeket; területe kiszámítható a 357. feladat képletével.

$T_{AOB} = 4755{,}5$ cm^2; $T_{AFB} = 2510$ cm^2; $T_{\text{ötágú csillag}} = 1{,}12$ m^2.

371. A fűvel bevetett terület egyenlő a kör területének és az ötágú csillag területének a különbségével. A csillag területét az előző feladat útmutatása szerint számítjuk ki.

$T = 50{,}4$ m^2.

372. Felírjuk a szabályos hatszög területét. A kieső hat háromszög területét levonjuk a hatszög területéből, s megkapjuk a tizenkétszög területét. A hatszög területe 900 cm^2; a levágott háromszögek területe 100 cm^2. A maradék terület 800 cm^2.

373. A területképletből kifejezzük az adott oldalak közti szöget. A harmadik oldalt cosinustétellel, a másik szöget sinustétellel számítjuk ki.

$c = 622{,}1$ m; $\alpha = 30°4'$; $\beta = 72°50'$; $\sin\gamma = \frac{2t}{ab}$; $\gamma = 77°3'$.

374. A területképletből kifejezzük az adott szög másik szárán levő oldalt. A harmadik oldalt cosinustétellel, a szögeket sinustétellel számítjuk ki.

$b = 42{,}74$ m; $c = 33{,}48$ m; $\alpha = 53{,}1°$; $\beta = 88{,}1°$.

375. Az egy oldallal kifejezett területképletből (357. feladat) kifejezzük az ismeretlen oldalt. A másik két oldalt sinustétellel számítjuk ki.

$a = 89$ cm; $b = 123$ cm; $c = 116$ cm; $\alpha = 43{,}6°$; $\beta = 72°23'$; $\gamma = 64°1'$.

376. A kerületből levonjuk az adott oldalt, megkapjuk a másik két oldal összegét. Ebből az egyik oldalt kifejezzük, s a kapott értéket Heron képletébe helyettesítjük. A három oldalt ismerve, az egyik szöget cosinus-, a másikat sinustétellel számoljuk ki.

$c^2 - 11c + 30 = 0$; $c = 6$ cm; $b = 5$ cm; $\alpha = 41{,}4°$; $\beta = 55{,}8°$; $\gamma = 82{,}7°$.

377. $b = 13$ cm; $c = 4$ cm.

$\alpha = 112{,}62°$; $\beta = 53{,}13°$; $\gamma = 14{,}25°$.

378. A két terület egyenlőségét felírjuk, s az ismeretlen oldalt logaritmussal kiszámítjuk. $a = 3{,}938$ cm.

379. Legyen $a = 2x$, $b = 3x$, ahol x arányossági tényező. Ezen értéke terület képletébe helyettesítve megkapjuk x; a; b értékeket. A harm oldalt cosinustétellel kapjuk.

$x = 15$ cm; $a = 30$ cm; $b = 45$ cm; $c = 24{,}22$ cm.

380. *I. megoldás:* Legyen $a = 3x$; $b = 4x$; $c = 5x$, ahol x arányossági t nyező. Heron képletéből kiszámítjuk x majd a; b; c értékét. A szögeke cosinus-, illetve sinustétellel kapjuk.

$x = 4$ cm; $a = 12$ cm; $b = 16$ cm; $c = 20$ cm; $\alpha = 36°52'$; $\beta = 53°8'$; $\gamma = 90°$.

II. megoldás: Az arányból látható, hogy a háromszög derékszögű. Így $t = \frac{ab}{2}$, s a szögek egyszerű szögfüggvénnyel kaphatók.

381. Az $a+b = 75$; $ab = \frac{2t}{\sin\gamma} = 1350$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

$a = 45$ cm; $b = 30$ cm; $c = 24{,}22$ cm.

382. Oldjuk meg az $a-b = 2$ és $ab = \frac{32}{\sin 38°}$ egyenletrendszert.

$a = 8{,}28$ cm; $b = 6{,}28$ cm; $c = 5{,}1$ cm.

383. Oldjuk meg az $a^2+b^2 = 881$ és $ab = \frac{380}{\sin 71{,}8°}$ egyenletrendszert.

$a = 25$ dm; $b = 16$ dm; $c = 25{,}12$ dm.

384. *I. megoldás:* A cosinustételből kifejezzük a $\cos\alpha$-t, a területképletből $\sin\alpha$-t. A két eredményt elosztjuk egymással, s az adott értékeket behelyettesítjük. Megkapjuk α-t. $bc = \frac{2t}{\sin\alpha}$-ból bc értékét írjuk fel, s a $b^2+c^2 = 365$ egyenlettel egyenletrendszert alkotunk.

$\alpha = 67°23'$; $b = 13$ cm; $c = 14$ cm.

II. megoldás: $\frac{2t}{a} = m_a$. A 15 cm-es oldal egyik darabjára (x) két Pitagorasz-tétellel vegyes másodfokú egyenletet kapunk.

$m_a = 11{,}2$ cm; $x = 8{,}4$ cm; $c = 14$ cm; $b = 13$ cm.

385. *I. megoldás:* Legyenek a háromszög oldalai: $a-1$; a; $a+1$ hosszúságúak, akkor kerülete egyenlő egy a oldalú szabályos háromszög kerületével. $2s = 3a$. Heron képletével írjuk fel a területet, majd az arányból megkapjuk az a oldalt.

$t_1 = \frac{a}{4}\sqrt{3\cdot(a^2-4)}$; $t_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $t_1 : t_2 = 3 : 5$.

$\frac{\sqrt{a^2-4}}{a} = \frac{3}{5}$; $a = 2{,}5$; $a-1 = 1{,}5$; $a+1 = 3{,}5$.

II. megoldás: Felírjuk a területek arányát, kifejezzük sin γ értékét.

$t_1 = \frac{a(a-1)\sin\gamma}{2}$; $t_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $\sin\gamma = \frac{3a\sqrt{3}}{10(a-1)}$; ezt a kifejezést az $a+1$ oldalra felírt cosinustételbe helyettesítjük.

$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma}$;

$a' = 2{,}5$ stb. $\cos\gamma = \frac{a-4}{2(a-1)} = -\frac{1}{2}$; $\gamma = 120°$.

386. A négyszöget derékszögű háromszöggé egészítjük ki (386. ábra).

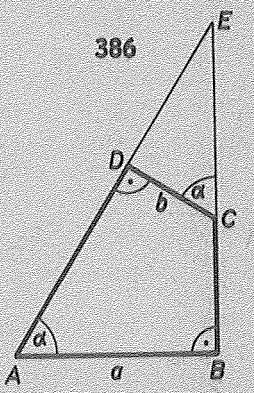
$AD = AE - DE$; $BC = BE - CE$.

A négyszög területe a keletkezett két derékszögű háromszög területének a különbsége.

$AD = \frac{a - b\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $BC = \frac{a\sin\alpha - b}{\cos\alpha}$ $t =$

$= \frac{a^2-b^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

A megoldhatóság feltétele, hogy $\frac{a}{b} > \sin\alpha > \frac{b}{a}$.

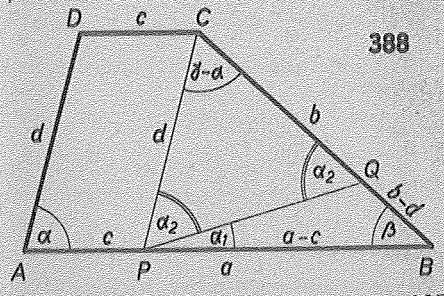


387. A megadott terület arányos felosztása után ki tudjuk számítani a szabályos háromszög oldalát, azaz a trapéz két oldalát. A másik háromszög területéből kapjuk a trapéz harmadik oldalát. A negyedik oldalt cosinustétellel, a szögeket sinustétellel számítjuk ki. A szabályos háromszög területe 2000 m²; az általános háromszög területe 1600 m². A trapéz oldalai:

$a = b = 40\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3}} = 67{,}95$ m.

$c = 54{,}34$ m; $d = 62{,}3$ m; $\alpha = 109°3'$; $\beta = 60°$; $\gamma = 120°$; $\delta = 70°57'$.

388. Elcsúsztatjuk a rövidebbik párhuzamos oldal mentén a rövidebbik szárat (388. ábra). A keletkezett háromszög egyik oldala $a-c$, a vele szemben fekvő szög $\gamma-\alpha$. A d oldalt ráforgatjuk a b oldalra. Kapunk egy egyenlő szárú és egy általános háromszöget. Kiszámítjuk az egyenlő szárú háromszög szögeit, s ennek alapján ismerjük az általános háromszög egyik szögét. A PQB háromszögben adott két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög. Sinustétellel megkap-



juk a szögeket. A PCB háromszögből kiszámítjuk b oldalt, a magasságot, majd a trapéz megadott területéből a két párhuzamos oldal összegét. Egyenletrendszert alkotunk, s megkapjuk a keresett oldalakat.

$\alpha_2 = 60°15'$; $\alpha_1 = 7°7'$; $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 67°22'$; $\beta = 53°9'$;

$b = 15$ m; $m = 12$ m;

$a + c = 34$; $a - c = 14$; $a = 24$ m; $c = 10$ m.

389. Legyen $a = 2x$; $b = 3x$; $c = 2r \sin \gamma = 30 \sin \gamma$. Felírjuk a háromszög területét kétféle módon, így megkapjuk x, a és b értékét. $b = 30 \sin \beta$-ból β értékét; $a = 30 \sin \alpha$-ból α értékét kapjuk.

$$\frac{6x^2 \sin \gamma}{2} = \frac{20 \cdot 30 \cdot \sin \gamma}{2}; \quad x = 10; \quad a = 20 \text{ cm}; \quad b = 30 \text{ cm}.$$

$\beta = 90°$; $\alpha = 41°49'$; $\gamma = 48°11'$; $c = \sqrt{30^2 - 20^2} = 22{,}36$ cm.

390. Felírjuk a területet kétféle módon. Ebből kapjuk bc értékét. a oldalra felírjuk a cosinustételt, és felhasználjuk azt az összefüggést, hogy $b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc$. Kapunk a-ra egy másodfokú egyenletet, majd b-re és c-re egyenletrendszert írunk fel.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{bc \sin 60°}{2}; \quad bc = 2a; \quad a^2 = (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cos \alpha; \quad a^2 + 6a - 25 = 0;$$

$a = 2{,}83$ cm; $b = 3{,}27$ cm; $c = 1{,}73$ cm; $\beta = 32°$; $\gamma = 88°$.

391. Legyen $a = 25x$; $b = 29x$; $c = 36x$. A területet Heron képletével és a beírt kör sugarával írjuk fel. A két eredmény egyenlőségéből kapjuk x, a, b, c értékét. A szögeket a keresetthez hasonló, 25, 29, 36 egységnyi oldalú háromszögből számíthatjuk.

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \varrho s$.

$x = 29$; $a = 725$ cm; $b = 841$ cm; $c = 1044$ cm.

$\alpha = 43{,}6°$; $\beta = 53°8'$; $\gamma = 83°16'$.

392. Lásd a 392. ábrát. Először az A csúcsot BC oldallal párhuzamosan eltoljuk A_1-be úgy, hogy az új háromszög C csúcsnál levő szöge 60°-os legyen. C csúcs maradjon fix. A_1 mozogjon és B is. Legyen P és Q az egyenlő oldalú háromszög két csúcsa, akkor:

$$t_{\text{háromszög}} = \frac{CA_1 \cdot CB \cdot \sin 60°}{2} = \frac{CP \cdot CQ \cdot \sin 60°}{2}.$$

De $CP = CQ$, tehát $CP^2 = CA_1 \cdot CB$.

$CP = \sqrt{CA_1 \cdot CB}$. CP-t mértani középarányossal szerkesztjük.

CA_1-et leforgatjuk C csúcsból CB egyenesére: CA_2. Ezután CA_2 fölé Thalész-kört szerkesztünk. B pontban merőlegest állítunk CB egyenesre, mely a kört B_1-ben metszi. CB_1 a keresett mértani középarányos. Ráforgatjuk CA_1 és CB egyenesekre.

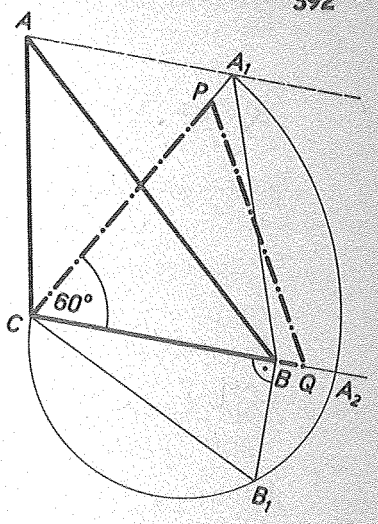
393. 180°-nak megfelel π radián. Következtetéssel állapítjuk meg a felsorolt szögek ívmértékét π-ben kifejezve. Ahányad része 180°-nak a keresett szög, ívmértéke π-nek annyiad része.

Pl. $15° = \frac{180°}{12} = \frac{\pi}{12}$; $108° =$

$= 90°+18° = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$;

$150° = 90°+60° = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ stb.

392



394. $1° = 0{,}0175$;

$n° = n \cdot 0{,}0175$. A perceket a fok tizedes részeire váltjuk.

395. *a)* $\pi = 180°$. Következtetéssel számolunk.

Pl. $\frac{5\pi}{4} = 5 \cdot \frac{180°}{4} = 5 \cdot 45° = 225°$.

b) 1 ívmértékű szög = 57,3°-os szög.

n ívmértékű szög $= n \cdot 57{,}3°$.

396. *a)–h)* A szögeket fokokká számítjuk át, s a kapott eredmények megfelelő szögfüggvényértékét kikeressük a táblázatból.

397. *a)* Tudjuk, hogy $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)}$.

Kifejtjük a tört számlálóját és nevezőjét, majd elosztjuk a számlálót és a nevezőt $\sin\alpha \sin\beta$-val.

b) $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}$. Írjunk $\operatorname{tg}\alpha$ helyett $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$-t, $\operatorname{tg}\beta$ helyett $\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}$-t, s az emeletes törtet hozzuk egyszerűbb alakra.

$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$.

398. Kifejtjük a felírt négy kifejezést, az I. és II. azonosságot, valamint a III. és IV. azonosságot összeadjuk, majd kivonjuk.

$x+y = \alpha$ és $x-y = \beta$ egyenletrendszerből kapjuk x és y kifejezését, melyeket az előzőleg kapott négy azonosságba behelyettesítünk.

$\sin(x+y)+\sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$;
$\sin(x+y)-\sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$;
$\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$;
$\cos(x+y)-\cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$.

De $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, és ezért a négy azonosság:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

399. A $\sin(\alpha\pm\beta)$; $\cos(\alpha\pm\beta)$; $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$ képletei szerint kifejtjük a felírt szögfüggvényeket, és az ismert szögfüggvényértékeket behelyettesítjük.

Pl. *s)* $\operatorname{tg}(\alpha-180°) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}180°}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}180°} = \operatorname{tg}\alpha$, mert $\operatorname{tg}180° = 0$.

a) $\cos\alpha$;
b) $-\sin\alpha$;
c) $-\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$;
d) $\cos\alpha$;
e) $\sin\alpha$;
f) $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;
g) $-\sin\alpha$;
h) $\sin\alpha$;
i) $-\cos\alpha$;
j) $-\cos\alpha$;
k) $\operatorname{tg}\alpha$;
l) $-\operatorname{tg}\alpha$;
m) $-\cos\alpha$;
n) $\sin\alpha$;
o) $-\operatorname{tg}\alpha$;
p) $-\sin\alpha$;
r) $-\cos\alpha$;
s) $\operatorname{tg}\alpha$.

400. Kifejtjük a megadott szögfüggvényeket, az ismert szögfüggvényértékeket behelyettesítjük, összevonunk, diszkutálunk.

a) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$; $\alpha \neq 45°$.

b) $\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; $\alpha \neq -45°$.

c) $\sin\alpha$. *II. megoldás:* Alkalmazzuk a 398. *a)* feladat végeredményét, kapjuk: $2\sin\alpha\cos 60° = \sin\alpha$.

d) $\sqrt{2}\cos\alpha$. *II. megoldás:* Alkalmazzuk a 398. *c)* feladat eredményét, kapjuk: $2\cos 45°\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$.

e) $\sin 60° = \cos 30°$-ot helyettesítve, az összevonás eredménye 1.

II. megoldás: Lehet az eredeti kifejezésben

$\sin(45°-\alpha) = \cos(45°+\alpha)$,
$\sin(60°-\alpha) = \cos(30°+\alpha)$,
$\sin 60° = \cos 30°$ értékeket helyettesíteni, s akkor azonnal megkapjuk az eredményt: 1.

f) 0.

g) 0. *II. megoldás:* $\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\operatorname{ctg} 30° = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} 30°}$,

és $\sin 120° = \sin 60° = \cos 30°$. Így

$$\sin^2 30° + \cos^2 30° + \operatorname{tg} 30° \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} 30°}\right) = 1 - 1 = 0.$$

401. *a)* $15° = 45° - 30°$ vagy $15° = 60° - 45°$ vagy $15° = \dfrac{30°}{2}$,

$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$ stb.

b) $75° = 45° + 30°$ vagy $75° = 60° + 15°$; $\sin 75° = \cos 15°$ stb.
c) $105° = 60° + 45°$ vagy $105° = 90° + 15°$; $\sin 105° = \sin 75°$ stb.
d) $120° = 90° + 30°$ vagy $120° = 60° + 60° = 2 \cdot 60°$; $\sin 120° = \sin 60°$.
e) $135° = 90° + 45°$ vagy $135° = 120° + 15°$; $\sin 135° = \sin 45°$.

Eredmények:

a) $\sin 15° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0{,}2588$;

$\cos 15° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 0{,}9659$;

$\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3} = 0{,}2679$;

$\operatorname{ctg} 15° = 2 + \sqrt{3} = 3{,}7321$;

b) $\sin 75° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \cos 15°$;

$\cos 75° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sin 15°$;

$\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 15°$;

$\operatorname{ctg} 75° = 2 - \sqrt{3} = \operatorname{tg} 15°$;

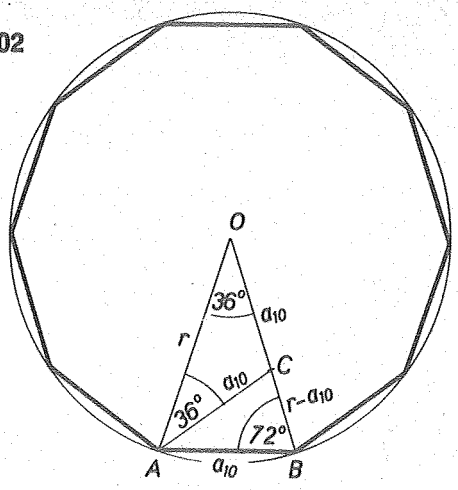
c) $\sin 105° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$;

$\cos 105° = \dfrac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$;

$\operatorname{tg} 105° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -(2 + \sqrt{3})$;

$\operatorname{ctg} 105° = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - 2$;

402



d) $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$,

$\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$,

$\operatorname{ctg} 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

e) $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} 135° = -1$,

$\operatorname{ctg} 135° = -1$.

402. Rajzot készítünk (lásd a 402. ábrát). A szabályos tízszög egy középponti háromszögét rajzoljuk meg. $AB = a_{10}$.
A csúcsból elmetsszük az OB sugarat AB-vel. A keletkezett ABC háromszög hasonló AOB háromszöghöz. Felírjuk a megfelelő oldalak arányát, s így megkapjuk a_{10} értékét.

$r : a_{10} = a_{10} : r - a_{10}$; ebből $a_{10}^2 + r \cdot a_{10} - r^2 = 0$, s így $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.

$$\sin 18° = \cos 72° = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = 0{,}309,$$

$$\cos 18° = \sin 72° = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{a_{10}^2}{4}}}{r} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}95,$$

$$\operatorname{tg} 18° = \operatorname{ctg} 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = 0{,}325,$$

$$\operatorname{ctg} 18° = \operatorname{tg} 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3{,}08.$$

403. AB^2 és AC^2 értékét cosinustétellel számítjuk ki, az előző feladatból helyettesítjük cos 72° értékét.

404. $63° = 45° + 18°$,

$27° = 45° - 18°$ vagy $27° = 90° - 63°$,
$\sin 63° = 0{,}89$,
$\cos 63° = 0{,}45$,
$\operatorname{tg} 63° = 1{,}9$,
$\operatorname{ctg} 63° = 0{,}5$;
$\sin 27° = \cos 63° = 0{,}45$,
$\cos 27° = \sin 63° = 0{,}89$,
$\operatorname{tg} 27° = \operatorname{ctg} 63° = 0{,}5$,
$\operatorname{ctg} 27° = \operatorname{tg} 63° = 1{,}9$.

405. A kétszeres szögek szögfüggvényeire kapott képletekbe helyettesítünk, de előbb az adott szögfüggvényből kiszámítjuk ugyanazon szög többi szögfüggvényértékeit.
Lehet úgy is eljárni, hogy először meghatározzuk $\sin 2\alpha$-t, s majd az ismert összefüggések alapján 2α többi szögfüggvényeit.

a) $\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{4}{3}$,

$\sin 2\alpha = \pm\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \pm\frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \pm\frac{7}{24}$;

b) $\sin\alpha = \pm\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{12}{5}$,

$\sin 2\alpha = \pm\frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \frac{119}{169}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \pm\frac{120}{119}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \pm\frac{119}{120}$;

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{2}$; $\sin\alpha = \pm\frac{2\sqrt{29}}{29}$; $\cos\alpha = \pm\frac{5\sqrt{29}}{29}$,

$\sin 2\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos 2\alpha = \frac{21}{29}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{20}{21}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{21}{20}$;

d) $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$,

$\sin 2\alpha = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \pm 2\sqrt{6}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{12}$.

406. $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha = \frac{1}{3}$. Kiszámítjuk $\sin\alpha$-t, $\operatorname{tg}\alpha$-t, végül $\operatorname{tg} 2\alpha$-t.

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4\cdot\sqrt{2}}{7}$.

407. A félszeres szögek függvényképleteibe helyettesítünk, s elvégezzük a kijelölt műveleteket.

a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{3}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{3}{4}$;

b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{3}$;

c) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{8}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{46}}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{3\sqrt{23}}{23}$;

d) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$; $\alpha = 90°$ és $270°$; $\frac{\alpha}{2} =$
$= 45°$ és $135°$.

408. $36° = 2 \cdot 18°$; $\sin 54° = \cos 36°$ stb. lásd 402. végeredményeit.

$$\sin 36° = \cos 54° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 36° = \sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\operatorname{tg} 36° = \operatorname{ctg} 54° = \sqrt{\frac{25-10\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

$$\operatorname{ctg} 36° = \operatorname{tg} 54° = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}.$$

409. *a)* $15° = \frac{30°}{2}$; *b)* $22{,}5° = \frac{45°}{2}$; *c)* $67{,}5° = \frac{135°}{2}$;

d) $7{,}5° = \frac{15°}{2}$; felhasználjuk a 401. *a)* feladat eredményeit.

a) $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\operatorname{tg} 15° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} =$

$= 2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15° = 2+\sqrt{3}$;

b) $\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22{,}5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\operatorname{tg} 22{,}5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{2}-1$, $\operatorname{ctg} 22{,}5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+1$;

c) $\sin 67{,}5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 67{,}5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\operatorname{tg} 67{,}5° = \sqrt{2}+1$,

$\operatorname{ctg} 67{,}5° = \sqrt{2}-1$;

d) $\sin 7{,}5° = \sqrt{\frac{1-0{,}9659}{2}} = 0{,}131$, $\cos 7{,}5° = 0{,}99$, $\operatorname{tg} 7{,}5 \approx 0{,}13$,

$\operatorname{ctg} 7{,}5 \approx 7{,}5$.

410. Az ismert képleteket behelyettesítjük, a műveleteket elvégezzük, ahol lehet egyszerűsítünk, s felhasználjuk a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ azonosságot; vagy ahol lehet, kiemelünk, vagy alkalmazzuk az $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot.

a) $\cos x$; *b)* 1; *c)* 1; *d)* $\sin x$; *e)* $\frac{\cos x}{2}$; *f)* $\frac{1}{4}$; *g)* 0.

h) Kihasználva a négy szorzat hasonló szerkezetét, csak a számláló első tagját számítjuk ki, a többi szorzásnak az előjeleit vesszük figyelembe, s a számlálóban is, a nevezőben is összevonunk.

$(2+\sin 2x)\cdot(\sin x-\cos x) = 2\,(\sin x+\sin^2 x\cos x-\cos x-\sin x\cos^2 x)$.
A számláló: $2\sin x\,(1-\cos^2 x) = 2\sin^3 x$.
A nevező: $2\cos x\,(\sin^2 x-1) = -2\cos^3 x$

Eredmény: $-\operatorname{tg}^3 x$.

411. A félszögképlet gyökmentes alakját megkapjuk, ha egy egyenlő szárú háromszög alapját egyrészt cosinustétellel, másrészt a fél derékszögű háromszögből kifejezve kiküszöböljük.

$a^2 = 2b^2-2b^2\cos\alpha$ és $a = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$,

$4b^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2b^2-2b^2\cos\alpha \mid :2b^2$,

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$.

a) Kiemelünk. $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$; $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ és $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, mert $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. Eredmény: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

b) $\cos 2x$-et helyettesítjük, $1-\sin^2 x = \cos^2 x$-et írunk.

Kiemelünk, és $\cos x-1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$-t, $\cos x+1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$-t helyettesítünk.

Eredmény: $-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

c) $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ és $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ kifejezéseket helyettesítjük, kiemelünk s egyszerűsítünk. Eredmény: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

d) Lásd az előzőket. Eredmény: $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

412. A $\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x$ azonosságot helyettesítjük, majd zérusra redukálunk.

Kapjuk: *a)* $(\sin x-1)^2 \equiv 0$,
b) $(\cos x-1)^2 \equiv 0$, ami igaz.

413. $(\alpha+\beta+\gamma)$-t úgy tekintjük, mint 2 szög összegét: az első: $\alpha+\beta$; a második a γ. A megfelelő kifejezéseket felírjuk, majd tovább felbontunk, s a szorzásokat elvégezve, logikus sorrendbe írjuk a tagokat.

a) $\sin[(\alpha+\beta)+\gamma] = \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

b) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta$;

c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$.

414. *a) I. megoldás:* 413. *a)* feladat eredményében $\alpha=\beta=\gamma$-t helyettesítve, azonnal megkapjuk a végeredményt. $\cos^2\alpha$ helyett $1-\sin^2\alpha$-t helyettesítve, csak sinus szerepel az eredményben.

II. megoldás: A $\sin(\alpha+\beta)$ képletben $\beta = 2\alpha$-t helyettesítünk.

b) és *c)* azonos az *a)* feladat menetével.

d) — *e)* $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$ képleteiben 2α helyett 4α-t; α helyett 2α-t írunk, végül $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$-t helyettesítünk, vagy $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$-t helyettesítünk, s így kétféle alakban kapjuk a végeredményt.

f) $6\alpha = 3\alpha+3\alpha$; azaz $6\alpha = 2\cdot 3\alpha$,
$\sin 2\alpha$ képletében α helyett 3α-t írunk.

g) $\cos 2\alpha$ képletébe α helyett 3α-t írunk.

h) $\sin 8\alpha = \sin(2\cdot 4\alpha)$, azaz $\sin 2\alpha$ képletével számolunk, α helyett 4α-t írunk.

i) $\cos 8\alpha = \cos(2\cdot 4\alpha)$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ képlettel számolunk.

j) $\sin(\alpha+\beta)$ képletében α helyett 3α-t; β helyett 2α-t írunk, s az előzőleg kapott $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ képleteit helyettesítjük, s a kijelölt műveleteket elvégezzük.

k) $\cos(3\alpha+2\alpha)$ képlettel számolunk.

l) $\sin(2\cdot 5\alpha) = 2\sin 5\alpha\cos 5\alpha$;

m) $\cos(2\cdot 5\alpha) = 2\cos^2 5\alpha - 1$.

Eredmények:

a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

b) $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$; vagy $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$-t helyettesítve: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

c) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

d) I. megoldás: $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 4\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha) = (4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha)\cos\alpha$;

II. megoldás: $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha.(2\cos^2\alpha - 1) = (8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha)\sin\alpha$;

e) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$ vagy
$\cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha$;

f) $\sin 6\alpha = 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\cos\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha) = \cos\alpha(6\sin\alpha - 8\sin^3\alpha)(1-4\sin^2\alpha) = \cos\alpha(6\sin\alpha - 32\sin^3\alpha + 32\sin^5\alpha)$;

g) $\cos 6\alpha = 2\cos^2 3\alpha - 1 = 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1$.
Vagy: $\cos 6\alpha = 1 - 2\sin^2 3\alpha = 1 - 18\sin^2\alpha + 48\sin^4\alpha - 32\sin^6\alpha$;

h) $\sin 8\alpha = 2(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha)\cos\alpha(1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha) = \cos\alpha(8\sin\alpha - 80\sin^3\alpha + 192\sin^5\alpha - 128\sin^7\alpha)$;

i) $\cos 8\alpha = 2\cos^2 4\alpha - 1 = 2(1-8\sin^2\alpha+8\sin^4\alpha)^2-1 =$
$= 1-32\sin^2\alpha+160\sin^4\alpha-256\sin^6\alpha+128\sin^8\alpha$;
j) $\sin 5\alpha = \sin(3\alpha+2\alpha) = 5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$;
k) $\cos 5\alpha = \cos(3\alpha+2\alpha) = \cos\alpha\,(1-12\sin^2\alpha+16\sin^4\alpha)$;
l) $\sin 10\,\alpha = \sin(2\cdot 5\,\alpha) = \cos\alpha\,(10\sin\alpha-160\sin^3\alpha+672\sin^5\alpha-$
$-1024\sin^7\alpha+512\sin^9\alpha)$;
m) $\cos 10\alpha = \cos(2\cdot 5\alpha) = 2\cos^2 5\alpha-1 = 1-50\sin^2\alpha+400\sin^4\alpha-$
$-1120\sin^6\alpha+1280\sin^8\alpha-512\sin^{10}\alpha$.

415. *a) I. megoldás:* $\cos 3\alpha$ és $\sin 2\alpha$ képletét helyettesítjük, kiemelünk, egyszerűsítünk.

II. megoldás: Alkalmazzuk a 398. feladatban $\cos\alpha+\cos\beta$-ra kapott eredményt s egyszerűsítünk.

b) I. és *II. megoldás:* lásd az *a)* feladatot.

c) I. megoldás: $\sin 3\,\alpha$- és $\cos 3\,\alpha$-t helyettesítjük, kiemelünk s egyszerűsítünk.

II. megoldás: $\sin\alpha-\sin\beta$ és $\cos\alpha+\cos\beta$ kifejezését (398. feladat) helyettesítjük s egyszerűsítünk.

d) lásd *c)* feladatot.
e) kiemelünk, $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$-t helyettesítünk s egyszerűsítünk.
f) $\cos 3\alpha$ és $\sin 3\alpha$ kifejezéseket helyettesítjük, kiemelünk s egyszerűsítünk.
g) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 2\alpha$ képleteket helyettesítjük, majd felhasználjuk a a tanult $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ és az $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ összefüggéseket. Beszorzunk s összevonunk.
h) $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ és $\sin 3\alpha$ kifejezéseit helyettesítjük, beszorozunk, s végül a $\cos 30°$ és $\sin 30°$ kifejezéseit helyettesítve, összevonunk.
i) Helyettesítjük a $\sin 3\alpha$, $\sin 5\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 5\alpha$ kifejezéseit (lásd 414. *a), b), j), k)* eredményeit), $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$-t helyettesítünk, kiemelünk, összevonunk, egyszerűsítünk.
j) $\sin 3\alpha$ és $\cos 3\alpha$ eredményeit (lásd 414. *a, b* feladat) helyettesítjük. A kapott négytagú kifejezés $\cos^2 x-\sin^2 x$ köbe.

Eredmények:

a) I. $\dfrac{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha+\cos\alpha}{2\cos^3\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha\,(2\cos^2\alpha-1)}{2\cos\alpha\,(2\cos^2\alpha-1)} = 1$;

II. $\dfrac{2\cos\dfrac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha-\alpha}{2}}{2\cos^3\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = 1$;

b) -1;
c) $\operatorname{tg}\alpha$;
d) $-\operatorname{tg}\alpha$;
e) $\operatorname{tg}\alpha$;
f) $-\operatorname{tg}\alpha$;
g) 0;
h) 0;
i) $\operatorname{tg}\alpha$;
j) $\cos^3 2x$.

416. *a), b), c), d)* A bal oldalt alakítjuk. Alkalmazzuk a 398. feladatban $\sin\alpha+\sin\beta$-ra, illetve $\cos\alpha+\cos\beta$-ra kapott eredményeket. Egyszerűsítünk és a *c), d)* feladatban $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$ -t helyettesítjük.

e) $\cos\alpha = \cos 2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

$\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

Helyettesítünk, összevonunk.

417. *a), b), c), d)* $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, illetve $\sin(\alpha-\beta)$ és $\cos(\alpha-\beta)$ kifejezéseit helyettesítjük. Összevonunk, s kiemelünk.

e) f) $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, illetve $\sin(\alpha-\beta)$ és $\cos(\alpha+\beta)$ kifejezéseit helyettesítjük, majd kétszer egymás után kiemelünk.

g) $\sin(\alpha+\beta)$ és $\sin(\alpha-\beta)$ kifejezéseit helyettesítjük, beszorzunk, s vagy $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta$ és $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$; vagy $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ és $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta$ kifejezéseket helyettesítve, beszorzunk és összevonunk.

h) $\sin(\alpha+\beta)$ és $\cos(\alpha-\beta)$ kifejezéseket helyettesítjük és kiemelünk.

i) $\sin(\alpha-\beta)$ és $\cos(\alpha+\beta)$ kifejezéseket helyettesítjük s kiemelünk.

j) $\cos(\alpha+\beta)$ és $\cos(\alpha-\beta)$ kifejezéseit helyettesítjük, beszorzunk, a $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta$ és $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ azonosságokat helyettesítjük s összevonunk.

k) $a^4-b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2)$, de $a^2+b^2 = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$.

l) lásd a *k)* feladatot, csak $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = -(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha$.

m) A gyök alatt beszorzunk, s $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$-t helyettesítünk, s gyököt vonunk.

n) Négyzetre emelünk, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ és $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$.

o) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1$ és $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sin\alpha$.

418. *a)* $\sin\alpha$ helyett $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$-t helyettesítünk, s kétszer kiemelünk.

b) $\cos\alpha$ helyett $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$-t helyettesítünk, egyébként lásd *a)* feladatot.

c) d) $\operatorname{tg}^2\alpha$, illetve $\operatorname{ctg}^2\alpha$ helyett $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, illetve $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ kifejezéseket helyettesítjük.
Kiemelünk, a zárójelben közös nevezőre hozunk, s $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, illetve $1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$-t helyettesítünk.

e) $1+\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ és $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ kifejezéseket helyettesítjük.

Kiemelünk, $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$-t helyettesítünk, s a zárójelben alkalmazzuk a $\cos\alpha + \cos\beta$-ra kapott képletet (398. feladat).

f) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; $\cos\alpha$-t kiemeljük, majd $\frac{1}{2} = \cos 60°$-ot helyettesítünk, s a $\cos\alpha + \cos\beta$-ra kapott összefüggést helyettesítjük.

Eredmények:

a) $(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$;
b) $(1+\sin\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha)$;
c) $\operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$;
d) $\operatorname{ctg}^2\alpha \cos^2\alpha$;

e) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\frac{\alpha}{2}\right] = 2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\cos 45° \cdot \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

f) $4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

419. $\cos(\alpha + x)$ kifejezést helyettesítve elvégezzük a kijelölt műveleteket, kiemelünk s összevonunk. Az eredményben x nem szerepel, tehát a felírt kifejezés független x-től. Eredmény: $\sin^2\alpha$.

420. *a) I. megoldás:* A 402. feladatban kapott $\sin 18°$ eredményét, valamint a $\cos 36° = \cos(2 \cdot 18°)$ értékét helyettesítjük, s összevonunk.

II. megoldás: $\cos 36° = \sin 54°$. Alkalmazzuk a 398. feladatban $\sin\alpha - \sin\beta$-ra kapott eredményt, majd az eredményt megszorozzuk $2\cos 18°$-kal, s el is osztjuk vele.

b) I. megoldás: $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$ és $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$, alkalmazzuk az addíciós tételeket.

II. megoldás: Behelyettesítünk a 398. feladatban kapott második képletbe.

c) I. megoldás: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ és $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$ képletekkel számolunk.

II. megoldás: $\operatorname{tg}(60° - 45°)$ és $\operatorname{ctg}(60° - 45°)$ szögfüggvényeket számítjuk ki.

III. megoldás: $\operatorname{tg} 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$ és $\operatorname{ctg} 15° = \frac{\cos 15°}{\sin 15°}$ értékeket összeadjuk, közös nevezőre hozunk, felhasználjuk a tanult négyzetes összefüggést és a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ képletet.

IV. megoldás: Legyen ABC derékszögű háromszögben $\gamma = 90°$; $\beta = 60°$; α szögfelezője 15°-os szöget ad. Felírjuk a szögfelezőre tanult tételt, így kapjuk a szögfelező által keletkezett szakaszokat. A 15°-ot tartalmazó derékszögű háromszögben felírjuk tg 15°-ot és ctg 15°-ot.

d) $\sin 75° = \cos 15°$; $\cos 75° = \sin 15°$; $\operatorname{ctg} 15° = \dfrac{\cos 15°}{\sin 15°}$ egyenlőségeket helyettesítjük, beszorzunk és összevonunk.

e) Rendezzük a kifejezést. és alkalmazzuk a $\cos\alpha - \cos\beta$ szorzattá alakított eredményét (398. feladat). Kiemelünk, majd a $\sin\alpha - \sin\beta$ képletet használjuk fel. Végül a tört számlálóját és nevezőjét is megszorozzuk $2\cos 18°$-kal.

f) $\sin 234° = -\sin 54° = -\cos 36°$; $\sin 18°$ és $\cos 36°$ eredményeit helyettesítjük (402. és 406. feladatok).

g) *I. megoldás:* $\cos 100° = -\cos 80° = -\cos(60°+20°)$;
$\cos 140° = -\cos 40° = -\cos(60°-20°)$.

Kifejtjük a kifejezéseket és összevonunk.

II. megoldás: $-(\cos 80°+\cos 40°)$-ra alkalmazzuk a 398. feladatban kapott $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ képletet s összevonunk.

h) $\cos 40° = -\cos 140°$, azaz $\cos 2\alpha = -\cos 7\alpha$;
$\cos 4\alpha = -\cos 5\alpha$ stb. helyettesítéssel és a *g)* feladat eredményét felhasználva kapjuk az eredményt.

i) Az előző két feladat bal és jobb oldalát kivonjuk, majd $\cos 5\alpha = -\cos 4\alpha$ stb. helyettesítése után kapjuk az eredményt.

j) Szorzunk $\dfrac{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{7}}$-tel, majd felhasználjuk a $2\cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ eredményt; $\sin\dfrac{6\pi}{7} = \sin\dfrac{\pi}{7}$.

k) $\cos\dfrac{2\pi}{7} = -\cos\dfrac{5\pi}{7}$ stb. Kapjuk *j)* feladat negatív eredményét.

l) Lásd *j)* feladatot.

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\left(2\cos\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{3\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}+\ldots+\right.$$

$$\left.+2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\left(\sin\frac{2\pi}{n}-\sin 0+\sin\frac{4\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\right.$$

$$+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}.$$

m) A *j)* és *k)* kivonásával kapjuk az eredményt.

n) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ képletet alkalmazzuk.

$$\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7};\quad\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7},$$

k) eredményét is felhasználjuk.

o) $\operatorname{tg}40^\circ=\operatorname{tg}(60^\circ-20^\circ)$; $\operatorname{tg}80^\circ=\operatorname{tg}(60^\circ+20^\circ)$. Kifejtjük ezeket a szögfüggvényeket, a kifejezéseket összeszorozzuk, $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$ értéket behelyettesítjük, végül felismerjük, hogy

$$\frac{3\operatorname{tg}20^\circ-\operatorname{tg}^3 20^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 20^\circ}=\operatorname{tg}(3\cdot 20^\circ)=\sqrt{3};\quad\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3.$$

p) $\sin 24^\circ=2\sin 12^\circ\cos 12^\circ$. Ugyanezt az összefüggést felírjuk $\sin 48^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\sin 96^\circ$, $\sin 120^\circ$, $\sin 144^\circ$, $\sin 168^\circ$-ra, s a kapott 7 egyenlet bal és jobb oldalát összeszorozzuk s egyszerűsítünk.

Tudni kell, hogy $\sin 96^\circ=\sin 84^\circ$; $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$; $\sin 144^\circ=\sin 36^\circ$ és $\sin 168^\circ=\sin 12^\circ$, ezekkel az összeszorzás után egyszerűbb alakra hozzuk az egyenlőség bal oldalát.

r) $\operatorname{tg}63^\circ=\operatorname{ctg}27^\circ$; $\operatorname{tg}81^\circ=\operatorname{ctg}9^\circ$. Ezen értéket helyettesítve, az egyenlő szögű tagokat vonjuk össze. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ képleteket felhasználva, 2–2 tagot közös nevezőre hozunk, majd az összevont egyszerűbb eredményt újra közös nevezőre hozzuk. $\sin 54^\circ$ értékét helyettesítjük, vagy a 398. feladatban kapott $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ képletet helyettesítjük.

s) *I. megoldás:* $\sin 105^\circ=\sin 75^\circ$.

II. megoldás: Alkalmazzuk a 398. feladatban kapott

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$ képletet.

t) Alkalmazzuk a 398. feladatban kapott $\sin\alpha-\sin\beta$ és $\cos\alpha+\cos\beta$ képleteket.

u) *I. megoldás:* $\sin 50^\circ=\sin(60^\circ-10^\circ)$ és $\sin 70^\circ=\sin(60^\circ+10^\circ)$ kifejtett értékeit behelyettesítjük a kifejezésbe és összevonunk.

II. megoldás: Alkalmazzuk a 398. feladat $\sin\alpha-\sin\beta$ képletét.

v) $\sin\frac{7\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{5\pi}{8}=\sin\frac{3\pi}{8}$. De $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$.

A feladat így alakul: $2\left(\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}\right)$. Alkalmazzuk az $a^4+b^4=$

$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$ azonosságot, valamint a tanult összefüggéseket.

w) *I. megoldás:* $(\cos^2\alpha)^3=(1-\sin^2\alpha)^3$ azonosságot helyettesítjük, majd elvégezzük a köbre emelést és összevonunk.

II. megoldás: A bal oldal két kifejezés köbének összege.

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Az első tényező 0, így az egész szorzat 0.

z) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^4\alpha\cos^2\alpha-3\cos^4\alpha\sin^2\alpha$ és $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ kifejezéseket 2-vel, illetve (-3)-mal beszorozzuk, majd összevonunk.

421. Legyen az egyenlőség bal oldala a és legyen $b=\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\ldots\sin n\cdot\alpha$. Számítsuk ki $2^n\cdot ab$, majd ab értékét.

A feltételből: $\pi=\alpha\cdot(2n+1)$.

$\sin k\cdot\alpha=\sin(\pi-k\alpha)=\sin(2n+1-k)\cdot\alpha$, ahol $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots n$.

Így $\sin 2\alpha=\sin(2n-1)\cdot\alpha\ldots$

$\sin 2n\alpha=\sin\alpha$; $\sin(n+1)\alpha=\sin n\alpha$ stb.

A behelyettesítéssel kapott ab értéket megszorozzuk az előbbi értékével.

$$a^2b^2=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\ldots\sin 2n\alpha;$$

$$a^2b^2=\frac{1}{2^{2n}}\cdot b^2;\quad a=\frac{1}{2^n}.$$

422. $\sin\alpha$-val beszorzunk, és alkalmazzuk a $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\beta-$

$-\cos\alpha$ egyenlőséget.

A k-adik (általános) tag ekkor:

$$\sin(2k-1)\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot[\cos(2k-2)\alpha-\cos 2k\alpha].$$

Az eredmény: $\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2n\alpha)$.

A feltételt helyettesítve: $\frac{1}{2}\cdot(1-\cos\pi)=1$.

423. Teljes indukcióval bizonyítunk, majd

$$2\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{(k+2)\alpha}{2}-\sin\frac{k\alpha}{2}$$

értéket helyettesítjük.

424. $1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=7;$

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=6\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$
$\alpha=45°.$

425. *a)* A $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ és $\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$ kifejezéseket behelyettesítjük az első törtbe, lebontjuk az emeletes törtet, az eredmény ugyanakkora, mint a második tört értéke, csak ellenkező előjelű.

b') Fejtsük ki $\sin(\alpha-\beta)$ értékét, és végezzük el a kijelölt műveleteket. Összevonás után a két utolsó tagból emeljünk ki.

c), d) Helyettesítsük be $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ értékét, és az emeletes törtet bontsuk le.

e) Az előző két kifejezés hányadosa.

f), g) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, illetve $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ azonosságokat helyettesítjük, majd egyszerűsítünk.

h) *I. megoldás:* A jobb oldalt alakítjuk át. $\sin 2\alpha$ kifejezésben a nevező 1, annak helyére $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$-t írunk, majd a számlálót is és a nevezőt is osztjuk $\cos^2\alpha$-val.

II. megoldás: A bal oldalt alakítjuk át. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-t helyettesítünk, s az emeletes törtet lebontjuk.

A második feladatot ugyanígy oldjuk meg, csak az I. módszernél $\sin^2\alpha$-val osztunk, a II. módszernél $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$-t helyettesítjük.

i) *I. megoldás:* A bal oldalt alakítjuk mindkét példánál $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, illetve $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ azonosságokat helyettesítve.

II. megoldás: A jobb oldalt alakítjuk úgy, hogy a $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ nevezőjéül $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$-t írunk, s $\cos^2\alpha$-val, illetve $\sin^2\alpha$-val osztjuk a számlálót és a nevezőt is.

j), k), l) feladatok bal oldalán a tanult addíciós képleteket helyettesítjük s egyszerűsítünk.

m) Az egyenlőség jobb oldalát alakítjuk $\operatorname{tg}2\alpha$, majd $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ helyettesítésével, egyszerűsítünk, majd a nevezőben $2\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha=1+\cos 2\alpha$-t helyettesítünk.

n) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$-t helyettesítünk, s a bal oldalt kiszámítjuk.

o) Kifejtjük $\cos(45°+\alpha)$-t, négyzetre emelünk, beszorzunk és összevonunk.

p), r) Elvégezzük a négyzetre emelést, összevonunk, majd a félszögekre tanult

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2}} \quad \text{és} \quad \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}}$$

képleteket alkalmazzuk.

s) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ és $\sin 2\alpha$ kifejezését helyettesítjük, majd a bal oldalon közös nevezőre hozunk s kiemelünk.

$$1-2\sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

t) I. megoldás: A bal oldalt alakítjuk át úgy, hogy $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ értéket helyettesítjük, s az emeletes törtet lebontjuk. $2\cos^2\alpha = \cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$ lesz a számláló, a nevező $\cos 2\alpha$.

II. megoldás: A jobb oldalt alakítjuk át úgy, hogy $\cos 2\alpha$ értékét helyettesítjük, végül $\cos^2\alpha$-val osztjuk a számlálót is és a nevezőt is.

426. A jobb oldalt alakítjuk. Helyettesítjük a $2\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, illetve a *b)* feladatban $2\cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ egyenlőségeket és elvégezzük a kijelölt műveleteket.

427. *I. megoldás:* A bal oldalt alakítjuk át:

$$\operatorname{tg}^2\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{90°+\alpha}{2}\right) = \left[\sqrt{\frac{1-\cos(90°+\alpha)}{1+\cos(90°+\alpha)}}\right]^2 = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

II. megoldás: A jobb oldalt alakítjuk át:

$$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\sin 90°+\sin\alpha}{\sin 90°-\sin\alpha} = \frac{2\sin\dfrac{90°+\alpha}{2}\cos\dfrac{90°-\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{90°+\alpha}{2}\sin\dfrac{90°-\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\left(45°+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\left(45°+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(45°+\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^2\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right).$$

428. Lásd a 427. feladatot.

429. *I. megoldás:* A bal oldalon $\operatorname{tg}\left(45°-\dfrac{\alpha}{2}\right)$-et kifejtjük, majd $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-t helyettesítünk, s az emeletes törtet lebontjuk. Végül a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk $\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$-lel.

II. megoldás: A $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$-t írjuk fel az egyenlőség bal oldalán.

$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$-t helyettesítünk, majd a gyök alatti tört számlálóját is, és a nevezőjét is megszorozzuk a nevezővel.

III. megoldás: α csúcsa körül egységsugarú kört rajzolunk. Legyen $OA=1$; $AB=\sin\alpha$; $OB=\cos\alpha$. Hosszabbítsuk meg a BA szakaszt A-n túl az egységgel, azaz $AC=1$, akkor az OAC háromszög egyenlő szárú, és így AOC szög $=OCA$ szög $=45°-\frac{\alpha}{2}$. OBC háromszögben felírjuk $\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$-t.

430. Lást az előzőket!

431. *a) I. megoldás:* A bal oldalt alakítjuk át:

$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$. Osztjuk a számlálót és a nevezőt is $\sin\alpha\cos\alpha$-val.

II. megoldás: A jobb oldalt alakítjuk $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ és $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ helyettesítésével.

b) $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ és $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$-t helyettesítünk.

c) A harmadik és negyedik tagból kiemelünk, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ és $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$-t helyettesítünk, összevonunk.

d) Először megvizsgáljuk a nevezőt.

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

A nevező ekkor: $1+\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Ez a tört akkor 0, ha $1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=0$, azaz $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=-1$, ami lehetetlen. Bizonyításnál

eltávolítjuk a törtet, azaz beszorzunk $\left(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$-lel, és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ értékeket helyettesítünk.

Beszorzunk $\cos\frac{\alpha}{2}$-vel, s akkor az egyenlőség bal oldalán az addíciós összefüggést helyettesítjük. Kapjuk: $\cos\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$. Helyes.

432. *a)* A bal oldalt alakítjuk át:

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$ stb. kifejezéseket helyettesítjük, majd a kapott emeletes törtet lebontjuk.

b) *I. megoldás:* A bal oldalt szorzattá alakítjuk $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ alapján, majd $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ stb. kifejezéseket helyettesítjük, közös nevezőre hozunk a zárójelekben.

II. megoldás: A jobb oldalon $\sin(\alpha+\beta)$ és $\sin(\alpha-\beta)$-t addíciós tétellel kifejtünk, beszorzunk, s a nevezővel tagonként osztunk.

c) Az előző feladathoz hasonlóan járunk el.

d), e), f), g) A bal oldalon alkalmazzuk a 398. feladatban kapott eredményeket, és egyszerűsítünk.

h) Kifejtjük $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$-t (lásd 413. feladatot).
Osszuk a kapott eredmény mindkét oldalát $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$-val:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$ stb., majd egyszerűsítünk, ahol lehet.

433. *a)* A 3. és 2. tag összegét a 398. feladat $\cos\alpha+\cos\beta$ képlete alapján szorzattá alakítjuk, majd összevonunk.

b) Fordítva helyettesítünk, azaz a szorzatokat összeggé alakítjuk vissza.

$$\cos\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha+2\pi}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\alpha+2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}\right];$$

$$\cos\frac{\alpha+2\pi}{3}\cos\frac{\alpha+4\pi}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\alpha+6\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}\right];$$

$$\cos\frac{\alpha+4\pi}{3}\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\alpha+4\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right].$$

Összevonjuk a 3 zárójelet.

Az eredmény: $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

c) Az előző feladat alapján a 2. és 3. tag szorzatát összeggé alakítjuk, majd az első tényezővel beszorzunk.

434. *a)* $\sin\alpha+\sin\beta$ kifejezést szorzattá alakítjuk, s a $\sin\gamma = \sin[180°-(\alpha+\beta)] = \sin(\alpha+\beta) = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ azonossággal összeadjuk. Kiemelünk, majd újra szorzattá alakítunk.

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan járunk el. $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$.

c) Az előzőkhöz hasonlóan az első és második tag összegét szorzattá alakítjuk, $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma = -2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$. Összeadjuk az eredményeket, kiemelünk, majd újra szorzattá alakítunk.

d) Az előzőkhöz hasonlóan járunk el.

e) *I. megoldás:* A háromszög c oldalára felírt cosinustételben $a = 2r\sin\alpha$-t, $b = 2r\sin\beta$-t, $c = 2r\sin\gamma$-t helyettesítjük, egyszerűsítünk, átrendezünk.

II. megoldás: $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$,
$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$.

A bal oldal negatív tagját átvisszük a jobb oldalra, a felírt értékeket helyettesítjük, s a kijelölt műveleteket elvégezzük. Az eredmény: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$.

f) Mivel $\alpha+\beta+\gamma = 180°$; $\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma$ kifejtve:

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta = -\cos\gamma$, azaz $\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta$.

Emeljünk négyzetre, és helyettesítsünk $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ és $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta$-t. A kapott eredmény rendezve, adja a bizonyítandó kifejezést.

g) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = 4\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ azonosságot az *a)* feladat menete szerint kapjuk. Helyettesítünk s egyszerűsítünk.

h) A 341. feladatban a háromszögbe írt kör sugarára kaptuk, hogy

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b};\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Összeszorozzuk az egyenlőségek bal és jobb oldalait. $\frac{\varrho(a+b+c)}{2} = t$; azaz $\varrho = \frac{t}{s}$ értéket helyettesítjük.

i) Kifejezzük a háromszög oldalait a körülírt kör sugarával, a három oldalt összeadjuk, és a $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$-ra az *a)* feladatban kapott eredményt helyettesítjük.

j) $t = \frac{ab\sin\gamma}{2}$-be az $a = 2r\sin\alpha$; $b = 2r\sin\beta$ kifejezéseket helyettesítjük.

k) $\varrho = \frac{t}{s}$; a *h)* feladatból $\frac{t}{s} = s \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$; *i)* alapján: $s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

$\varrho = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Egyszerűsítünk.

l) I. megoldás: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ képletből kifejezzük $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$-t, s hozzáadjuk a $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ kifejezést az egyenlet két oldalához, s kiemeljük $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$-t.

II. megoldás: Az egyenlőség bal oldalát alakítjuk. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ stb. helyettesítést végzünk, majd az első két törtet közös nevezőre hozzuk, a számlálót helyettesítjük: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$-val. Ezután a harmadik taggal együtt hozunk közös nevezőre, és $\sin\gamma$-t kiemeljük, $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$-t helyettesítünk, végül $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ stb.-t visszahelyettesítjük.

m) Lásd előző feladat menetét. Csak a helyettesítéskor: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$ és $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}$; $\cos\frac{\gamma}{2}$-t emeljük ki.

n) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{d_1}$ stb. $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$ értékét a *k)* feladatból helyettesítjük.

435. *a)* A sinustételt felírjuk az a és b oldalakra, majd először az egyenlőség mindkét oldalához 1-et adunk, majd újra az eredeti egyenlőségből 1-et levonunk. A két eredmény bal és jobb oldalait elosztjuk, s a 398. feladatban kapott szorzattá alakítást elvégezzük.

b) A sinustételt felírjuk a és b oldalakra, az egyenlet mindkét oldalához 1-et adunk, majd b és c oldalakra írjuk fel a sinustételt, b-t kifejezzük s helyettesítjük egyenlőségünkbe. $(\sin\alpha+\sin\beta)$-t szorzattá alakítjuk. $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ helyettesítést végezzük s egyszerűsítünk.

c) Lásd az előző gondolatmenetet, csak a sinustétel után 1-et levonunk.

436. A szöveg alapján készült rajzból $\sin 2\alpha$-t leolvassuk, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$-t helyettesítünk, az egyenlőség bal és jobb oldala azonossá válik.

437. Az a, b, c oldalú derékszögű háromszög c oldalát kiforgatjuk b oldal meghosszabbítására. Kapunk egy egyenlő szárú háromszöget, melynek az eredeti háromszög α szöge külső szöge. Így a háromszög hegyesszöge $\frac{\alpha}{2}$. A nyert nagy derékszögű háromszögre $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b+c}$ igaz. A többi

szögfüggvényértékek a tanult összefüggésekből adódnak: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c}{a}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{c-b}{2c}}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{c+b}{2c}}$.

438. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ képletben $\cos\alpha=\frac{b}{c}$-t helyettesítünk, és négyzetre emelünk, majd a megadott értékeket behelyettesítjük, így kapjuk $c-b$ értékét, $c+b$ adott, az egyenletrendszert megoldjuk. a-t Pitagorasz-tétellel számítjuk ki. $a=7$ cm; $b=5{,}25$ cm; $c=8{,}75$ cm.

439. $\beta=90°-\alpha$; CD szögfelező a derékszögű háromszöget két háromszögre bontja. Kifejezzük a két háromszög szögeit, majd f_γ és b, illetve a és f_γ oldalakra felírjuk a sinustételt, a két oldalt kifejezzük, és $t=\frac{ab}{2}$ képletbe helyettesítünk.

$$t=\frac{f_\gamma^2\sin^2(45°+\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

A felező talppontjából a befogóra ejtett merőlegesekkel $a=\frac{f}{\sqrt{2}}+\frac{f}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$; $b=\frac{f}{\sqrt{2}}+\frac{f}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\alpha$; $t=\frac{f^2}{4}\left(2+\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)=\frac{f^2}{2}\left(1+\frac{1}{\sin 2\alpha}\right)$.

A terület minimális, ha $\alpha=45°$.

440. Általában: $\frac{a}{b}=\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}=2\cos\beta$; $\gamma=180°-3\beta$.

Ebből $\cos\beta=\frac{a}{2b}<1$, viszont ahhoz, hogy γ pozitív legyen, kell, hogy $180>3\beta$; $\beta<60°$; $\cos\beta<\frac{1}{2}$ legyen. Tehát $\frac{a}{2b}>\frac{1}{2}$, amiből $b<a$.

Összefoglalva: $b<a<2b$. A harmadik oldalt a $c=\frac{a\sin 3\beta}{\sin 2\beta}$ képlet adja.

Eredmények: *a)* $\beta=51°19'$; $\alpha=102°38'$; $\gamma=26°2'$; $c=2{,}25$ cm;

b) $\beta=28°57'$; $\alpha=57°54'$; $\gamma=93°9'$; $c=8{,}25$ cm.

441. *I. megoldás:* Legyen $a=4$ cm; $b=3$ cm; $\gamma=60°$; $\alpha=\alpha$; $\beta=120°-\alpha$. Felírjuk a sinustételt az adott oldalakra, s kifejtjük a $\sin(120°-\alpha)$-t, eltávolítjuk a törtet, majd $\cos\alpha\neq 0$-val osztunk.

II. megoldás: Tangenstétellel is számolhatunk (435. feladat). $\alpha=73{,}9°$; $\beta=46{,}1°$.

442. Legyen $a=5$ cm; $b=10$ cm; $\gamma=2\alpha$; $\beta=180°-3\alpha$. Felírjuk a sinustételt az adott oldalakra. Ebben: $\sin(180°-3\alpha)=\sin 3\alpha=3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^3\alpha$ (lásd 414. *a)* feladatot). $\sin\alpha\neq 0$-val egyszerűsítünk.

$\alpha=30°$; $\beta=90°$; $\gamma=60°$. A háromszög derékszögű.

443. $a = 89{,}13$ cm; $b = 43{,}57$ cm; $c = 92$ cm.

444. $\sin\alpha = \dfrac{a}{2r}$; $\alpha = 44°26'$; $\beta+\gamma = 135°34'$.

$b = \dfrac{5}{3}c$. Tangenstétellel kapjuk $\beta-\gamma$ értékét.

$\beta = 99{,}3°$; $\gamma = 36{,}3°$; $b \approx 10$ cm; $c \approx 6$ cm.

445. $\dfrac{m_b}{m_c} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} = k$; $\dfrac{1-k}{1+k} = \operatorname{ctg}\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2} = \dfrac{k-1}{1+k}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

$\gamma = 75°45'$; $\beta = 36°52'$; $c = 273$ cm; $b = 169$ cm.

446. $a = 10{,}78$ cm; $b = 21{,}56$ cm; $\alpha = 27°31'$; $\beta = 112°29'$.

447. Legyen $\operatorname{tg}\alpha = x$; $\operatorname{tg}\beta = 2x$; $\operatorname{tg}\gamma = 3x$.

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Behelyettesítünk, megkapjuk x, $2x$, $3x$ értékeket. x csak pozitív lehet, különben a háromszög minden szöge tompaszög lenne. $\operatorname{tg}\alpha$-ból kiszámítjuk $\sin\alpha$-t, s felírjuk a három oldal arányát sinustétellel.

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ stb. } \operatorname{tg}\alpha = 1;\ \operatorname{tg}\beta = 2;\ \operatorname{tg}\gamma = 3;$$

$$a:b:c = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}:\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}:\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{2}{\sqrt{5}}:\frac{3}{\sqrt{10}} = \sqrt{5}:\sqrt{8}:\sqrt{9}.$$

448. $\beta = 3\alpha$; $a:b = 1:2 = \sin\alpha:\sin 3\alpha$.

$\sin 3\alpha$ kifejezését helyettesítjük (414. *a)*, egyszerűsítünk, megkapjuk a szögeket.

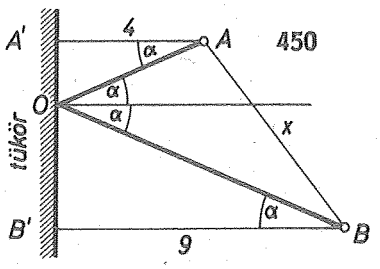
$\alpha = 30°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 60°$. A háromszög derékszögű. $a = 2{,}887$ cm; $b = 5{,}774$ cm.

449. Felírjuk a sinustételt az adott oldalakra. $\sin 3\alpha$ kifejezést helyettesítjük s egyszerűsítünk. Megkapjuk a szögeket, majd sinustétellel az ismeretlen oldalt.

A beírt kör sugarát a $\varrho = (s-a)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ képletből számítjuk ki.

$\alpha = 35°16'$; $\beta = 105°47'$; $\gamma = 38°58'$; $c = 9{,}8$ cm; $\varrho = 2{,}51$ cm.

450. *I. megoldás* (lásd 450. ábra): A 279. feladat megfordítása. Legyen a beesési szög α, akkor a beeső és a visszaverődő sugarak által bezárt szög 2α.



Cosinustétellel számolunk, de előbb kifejezzük az általános háromszög oldalait a derékszögű háromszögekből. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ kifejezést helyettesítjük.

$\alpha = 56{,}1°$.

II. megoldás: A beesési merőlegesek talppontjainak távolsága Pitagorasz-tétellel adódik. (Eltolással.) Ezt a szakaszt a beesési pont a két

derékszögű háromszög hasonlósága alapján 4:9 arányban osztja. Így a szakaszok kifejezhetők, és a beesési szög tangens szögfüggvénnyel kiszámítható.

451. Legyen $\beta+\alpha$ a trapéz hegyesszöge. Az átló és a magasság meghúzásával nyert derékszögű háromszögekből indulunk el, és $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ értékébe helyettesítjük $\operatorname{tg}\beta$ értékét.

$$m = \frac{b \pm \sqrt{b^2-(a^2-b^2)\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

$m_1 = 14{,}25$ cm; $m_2 = 7{,}36$ cm; $t_1 = 299$ cm^2; $t_2 = 155$ cm^2.

452. Ez a feladat a mérnöki gyakorlatban „hátrametszés" néven szerepel, még másképpen, mint Snellius–Pothenot, röviden potenot feladat. — Legyen a B csúcsnál levő ismeretlen szög β és a C csúcsnál levő γ; $\gamma = 360°-(\beta+83°+130°+65°) = 82°-\beta$. Felírjuk a sinustételt mindkét háromszögben, s a közös ismeretlen oldalt kiküszöböljük. $\sin(82°-\beta)$-t felbontjuk, a szögfüggvényeket kikeressük, a lehetséges szorzásokat elvégezzük, összevonunk, végül osztunk $\cos\beta$-val. Megkapjuk a β, γ szögeket, majd az ismeretlen oldalt a sinustételből.

$\beta = 50{,}97°$; $\gamma = 31{,}03°$; $AP = 168{,}25$ km.

453. $\gamma = 180°-\beta$; így $\sin\gamma = \sin(180°-\gamma)$ alapján végtelen sok megoldás van. $ABCP$ húrnégyszög, ABP és ACP körülírt körei egybeesnek. Ez a veszélyességi kör, amikor a felvett három tereppont által meghatározott körön levő pontot nem lehet hátrametszéssel megoldani. Az egyik tereppontot meg kell változtatni.

454. Lásd a 452. feladatot. $AC = 7{,}3$ cm.

455. Legyen $CAB \sphericalangle = \varepsilon$, akkor:

$$\cos\varepsilon = \frac{AB}{AC} \text{ és } \cos(\alpha-\varepsilon) = \frac{AD}{AC}.$$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\varepsilon+\sin\alpha\cdot\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = \frac{AD}{AB},$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{AD-AB\cdot\cos\alpha}{AB\cdot\sin\alpha},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varepsilon}},$$

$$\frac{1}{\cos\varepsilon} = \frac{\sqrt{AB^2+AD^2-2AD\cdot AB\cdot\cos\alpha}}{AB\cdot\sin\alpha},$$

$AC = 20{,}4$ cm.

456. A PC szakasz a derékszöget α és $90°-\alpha$ részekre bontja. A keletkezett derékszögű háromszögben $PC = \cos\alpha$. A másik háromszögben kifejezzük a szögeket, s felírjuk a sinustételt PC-re. $PC = \cos\alpha$-t helyet-

tesítjük, s kifejtjük a $\sin(\alpha-30°)$ szögfüggvényt. Megoldjuk az egyenletet $\operatorname{tg}\alpha$-ra. α értéke után $PC = \cos\alpha$-t számítjuk ki.
$PC = 0{,}54$ m.

457. Kifejezzük a magasságot tangens szögfüggvénnyel a két derékszögű háromszögből, az eredményeket egyenlővé tesszük egymással, és $\operatorname{tg} 2\alpha$ képletét helyettesítjük. Ebből az egyenletből kapjuk a szöget. A magasságot az egyik felírt egyenletből számítjuk ki.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3};\ \alpha = 18{,}43°;\ \beta = 36{,}86°;\ \gamma = 124{,}71°;\ m = 3 \text{ cm}.$$

458. $V = \dfrac{o^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}{3}$.

459. $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^3 \cdot \cos^3\alpha \cdot \operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2};\quad \varrho = \dfrac{a}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2},$

ahol a = alkotó.

460. $V = \dfrac{a^3 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{8}$.

461. $F = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha};$

$V = \dfrac{a^3}{24} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$

462. Egyrészt minden háromszögben $\sin\gamma = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, másrészt a feltevés szerint $\sin\gamma = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

A két eredmény egyenlőségéből következik:

1. $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$, akkor $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90°$; $\alpha+\beta = 180°$, de ez nem háromszög.

2. $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, akkor $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, azaz $\alpha = 90°$.

Vagy $180° - \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, azaz $\beta = 90°$, tehát a háromszög derékszögű.

463. *I. megoldás:* $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$-t helyettesítjük, osztunk $\sin\gamma\sin\beta$-val, majd eltávolítjuk a törtet.

Két eset lehetséges:

a) $2\gamma = 2\beta$; a háromszög egyenlő szárú.

b) $2\gamma = 180° - 2\beta$; $\beta+\gamma = 90°$; a háromszög derékszögű.

II. megoldás: Az I. megoldás szerint indulunk, de nem távolítjuk el a törteket, hanem egyik oldalra visszük a sinus, másik oldalra a cosinus szögfüggvényeket tartalmazó kifejezéseket, s a sinus-, illetve cosinustételből a szögfüggvények helyére az oldalakat helyettesítjük. Pl.

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{c}{b} \text{ és } \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

$(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)=0.$

a) $b^2=c^2$, a háromszög egyenlő szárú.

b) $b^2+c^2=a^2$ Pitagorasz tétele, a háromszög derékszögű.

464. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$-t stb. helyettesítjük az adott egyenlőségben, $\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}$ az eredmény. De a sinustétel alapján $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, így $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\alpha=\beta$.

465. $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ legyen az egyenlőség bal oldala.

A jobb oldalt szorzattá alakítjuk a 398. feladat képletei szerint, majd egyszerűsítünk, 0-ra redukálunk, s vizsgáljuk a kapott szorzat tényezőit.

a) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$; $\alpha=-\beta$, lehetetlen; vagy $\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$; $\alpha+\beta=2\pi$ is lehetetlen.

b) $2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=0$; $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha+\beta=90°$, azaz a háromszög derékszögű.

466. *I. megoldás:* Sinustétel segítségével az egyenlőség bal oldalát, cosinustétellel a jobb oldalt a háromszög oldalaival helyettesítjük.
$a^2=b^2$; a háromszög egyenlő szárú.

II. megoldás: A megadott egyenlőségben eltávolítjuk a törtet, s a szorzatot összeggé alakítjuk, végül $\sin(\beta+\alpha)$ helyett $\sin\gamma$-t írunk. $\sin(\beta-\alpha)=0$; $\beta=\alpha$, a háromszög egyenlő szárú.

467. $\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$-t és $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$-t helyettesítünk, s eltávolítjuk a törteket. A szorzatot összeggé alakítjuk, a másik oldalon a félszögekre tanult összefüggést alkalmazzuk.

$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma.$

$\cos(\alpha-\beta)=1$, azaz $\alpha-\beta=0$; $\alpha=\beta$,

tehát a háromszög egyenlő szárú.

468. $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$-t helyettesítjük, kibontjuk, s beszorzunk $\cos\beta\cos\gamma$-val, majd eltávolítjuk a törtet.

$1 = \sin^2\beta+\cos^2\beta$ értékét helyettesítjük, végül osztunk $\cos^2\beta$-val. -0-ra redukálunk. Kapunk egy másodfokú egyenletet $\operatorname{tg}\beta$-ra, s vizsgáljuk a diszkriminánst.

Az egyenlet: $\operatorname{tg}^2\beta - 8\sin\gamma\cos\gamma\operatorname{tg}\beta + 1 + 8\cos^2\gamma = 0$.

$\cos\gamma = \frac{1}{2}$, $\gamma = 60°$ vagy $\gamma = 120°$.

a) A kétszeres gyök ($D = 0$) $\operatorname{tg}\beta = \frac{8\sin\gamma\cos\gamma}{2} = \sqrt{3}$; $\beta = 60°$. A háromszög egyenlő oldalú.

b) $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$; β is tompaszög lenne, ami lehetetlen.

469. Eltávolítjuk a törtet, s felhasználva az ismert azonosságot: $b^3+c^3 = (b+c)(b^2-bc+c^2)$-et helyettesítve, osztunk $(b+c)$-vel. Az a^2-re kapott eredményt az a oldalra felírt cosinustételbe helyettesítjük. Így kapjuk, hogy $\alpha = 60°$; $\beta+\gamma = 120°$.
A másik adott kifejezést összeggé alakítjuk, megkapjuk $\beta-\gamma$ értékét.

$\cos(\beta-\gamma) = 1$; $\beta = \gamma = 60°$. A háromszög egyenlő oldalú.

470. Írjuk fel az a oldalra a cosinustételt. Fejezzük ki az egyenletből a^2-b^2-et, illetve a^2-c^2-et. Az elsőt szorozzuk b-vel, a másodikat c-vel.
Az adott kifejezésbe helyettesítve, igaz eredményre jutottunk, tehát az állítás helyes volt.

471. $2s = \frac{c}{\sin\gamma}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$, mert $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$, stb.

$\sin\gamma = 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ és $\sin\alpha+\sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$$c = \frac{2s\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

A tört értéke akkor a legkisebb, ha $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1$.

$\alpha = \beta$; γ adott!

472. $t = \frac{bc\sin\alpha}{2}$,

$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$,

$(b-c)^2 = b^2+c^2-2bc$ képletek segítségével bc-t a terület képletében helyettesítjük a megadott alkotórészekkel.

$t = \frac{a^2-d^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

73. $h_1:h_2 = 5:2$. Legyen a két szög: α és $60°-\alpha$. A kapott két egyenlő szárú háromszög magasságait meghúzzuk, s felírjuk a félszögek sinusait, majd ezek arányát, s a $\sin(\alpha-\beta)$ képletet kifejtve, kiszámítjuk a keresett szögeket.

$60°-\alpha = 17°$; $\alpha = 43°$.

474. Megszerkesztjük a keresett kört. Legyen a szög csúcsa O, a kör középpontja C, a középpontból az AB húrra bocsátott merőleges talppontja D, és az érintési pont E.
A kapott két derékszögű háromszögből OE, OC, CD kifejezhetők. COB és COE szögek cosinusának hányadosa megadja a 60°-os szög két részét. Ennek ismeretében kapjuk a kör sugarát. $r = 7\sqrt{3} = 12{,}12$ cm.

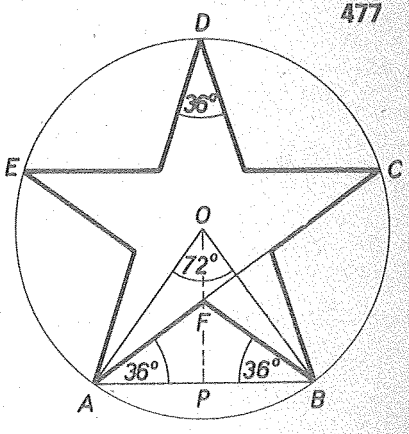
475. Jelöljük α-val a körülírt $2n$ oldalú sokszög középponti szögének a felét, akkor 2α a beírt és körülírt n oldalú sokszögek középponti szögének a fele. Egy középponti háromszögben felírjuk a_n, A_n és A_{2n} kifejezéseket a megfelelő derékszögű háromszögekből. Az adott egyenlőség jobb oldalába behelyettesítve, összevonunk; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ kifejezést vezetjük be, megkapjuk $\dfrac{1}{A_{2n}}$ kifejezését.

476. *I. megoldás:* Legyenek a csúcsok A, B, C, D, E, F, G, az oldalak: a. Az A csúcsból húzott átlók $AF = b$ és $AE = c$. Az átlók az A csúcsnál levő szöget 5 egyenlő részre osztják. Legyen egy ilyen részszög: α, az egész szög 5α.
AFG egyenlő szárú háromszög szögei: α, α, 5α.
AEF háromszög szögei: α, 4α, 2α.
A két háromszögben felírjuk a sinustételt a és b, illetve a és c oldalakra. A két eredményt összeadjuk, s osztunk a-val.

II. megoldás: AFG egyenlő szárú háromszög magassága felezi a b oldalt. $\cos\alpha = \dfrac{b}{2a}$. Felírjuk az AFE és AED háromszögekben a cosinustételt az a oldalra. A két eredményt egyenlővé tesszük, $\cos\alpha$ értékét helyettesítjük, eltávolítjuk a törteket, majd szorzattá alakítunk, és osztunk $abc(b-c)$-vel.

477. Lásd a 477. ábrát. A keresett területet megkapjuk, ha az AOB és AFB háromszögek területeinek különbségét ötször vesszük. Legyen $AB = a$ szakasz felezőpontja P, az AB szakasztól legtávolabb fekvő csúcspont pedig D. PD az adott távolság: d.
Kiszámítjuk a háromszögek szögeit (lásd a 370. feladatot), az alapot és a magasságokat a megadott d távolsággal, felírjuk a keresett területet, végül az addíciós tételek segítségével

477



egyszerűbb alakra hozzuk. $\operatorname{tg} 18° = 0{,}325$ (lásd 402. feladat eredményeit).

$T \approx 0{,}34d^2$.

478. Legyenek az oldalak: a, $a+1$, $a+2$; a megfelelő szögek α, $180°-3\alpha$. Felírjuk a sinustételt a legnagyobb és legkisebb oldalra, abból kifejezzük $\cos\alpha$-t. Ennek értékét behelyettesítjük az a oldalra felírt cosinustételbe.

$a = 4$; $b = 5$; $c = 6$; $\alpha = 41{,}4°$; $\beta = 55{,}8°$; $\gamma = 82{,}8°$.

479. Ha a tétel áll, akkor $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ számtani közepe $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ és $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$-nek.

Felírjuk a számtani közepet, átalakítjuk, s a felírt tételt kapjuk.

$$2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2\operatorname{ctg}\left[\frac{180°-(\alpha+\gamma)}{2}\right] = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)} \text{ stb.}$$

480. Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, ezért $\cos\alpha$-t kell kifejezni. Az ABD és BCD háromszögek közös oldalára felírjuk a cosinustételt, s a két egyenletből kifejezzük $\cos\alpha$-t. $\gamma = 180°-\alpha$; $\cos\gamma = -\cos\alpha$, mert húrnégyszögről van szó. Felírjuk $1+\cos\alpha$ és $1-\cos\alpha$ kifejezéseket, felhasználjuk az $a+b+c+d = 2s$, $-a+b+c+d = 2(s-a)$ stb. kifejezéseket, végül $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ hányadost írjuk fel.

$$1-\cos\alpha = \frac{2bc+2ad-a^2-d^2+b^2+c^2}{2bc+2ad} = \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2ad+2bc} =$$

$$= \frac{2(s-d)\cdot 2(s-a)}{2(ad+bc)}.$$

Hasonlóan: $1+\cos\alpha = \frac{2(s-c)\cdot 2(s-b)}{2(ad+bc)}$.

481. *a)* Az előző feladat szerint felírjuk mindkét háromszögben a közös BD oldalra, azaz az átlóra, a cosinustételt, s megszorozzuk az a és d oldalakat tartalmazó egyenletet bc-vel, a másikat ad-vel, s a két egyenletet összeadjuk. BD^2-et kifejezzük, s a számlálót kétszeres kiemeléssel szorzattá alakítjuk.

$$BD = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}; \text{ hasonlóan: } \quad AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}.$$

b) Két háromszög területének összegét írjuk fel. ABD és CBD háromszögekre $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

$1-\cos\alpha$ és $1+\cos\alpha$ értékeit a 480. feladat végeredményénél megtalálhatjuk.

$t = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$.

c) Kössük össze a körülírt kör középpontját a BD átló végpontjaival, és húzzuk meg a kapott egyenlő szárú háromszög magasságát. A keletkezett egybevágó háromszögek egyik szöge α (a kerületi és a középponti szögek összefüggése alapján),

$$r = \frac{BD}{2\sin\alpha} = \frac{BD}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

BD értékét az *a)* feladatból, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ és $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

értékeket a 480. feladatból helyettesítjük, egyszerűsítünk.

$$r = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}}.$$

482. 481. *b)* eredményébe helyettesítünk. $t = 1130\ \text{cm}^2$.

483. 481. *a)* és *c)* feladatba helyettesítünk.
Az átlók: 18,3 dm és 18,98 dm; a kör sugara 9,5 dm hosszú.

484. 481. példában kaptunk képletet a húrnégyszög átlójára Abból számítjuk ki a negyedik oldalt. A $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ és $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ képleteiből kapjuk a szögeket.

$d = 13{,}84\ \text{m}$; $\alpha = 105{,}4°$; $\beta = 92{,}46°$; $\gamma = 74{,}6°$; $\delta = 87{,}54°$.

485. Meghúzzuk az α szöggel szemközti átlót, majd felírjuk a cosinustételt az átlóra mindkét háromszögben, s a kapott egyenletekből kiszámítjuk a γ szöget.

$a = 9x$; $b = 8x$; $c = 7x$; $d = 6x$.

$T = x^2\cdot\frac{54\sin\alpha+56\sin\gamma}{2}$ képletből számítjuk ki x értékét, s ennek segítségével az oldalakat. A szögeket sinustétellel kapjuk.

$a = 18{,}57\ \text{cm}$; $b = 16{,}5\ \text{cm}$; $c = 14{,}44\ \text{cm}$; $d = 12{,}38\ \text{cm}$; $\gamma = 75{,}37°$; $\beta = 85°50'$; $\delta = 126°12'$.

486. *k)* $\sin(-x) = -\sin x$. Ellenőrzésre.

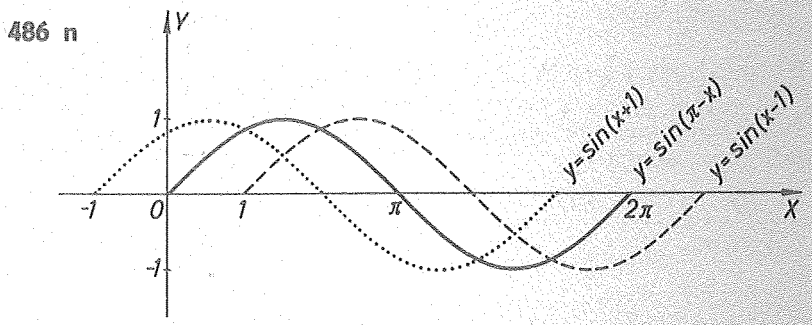
l) $\cos(-x) = \cos x$.

m) $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

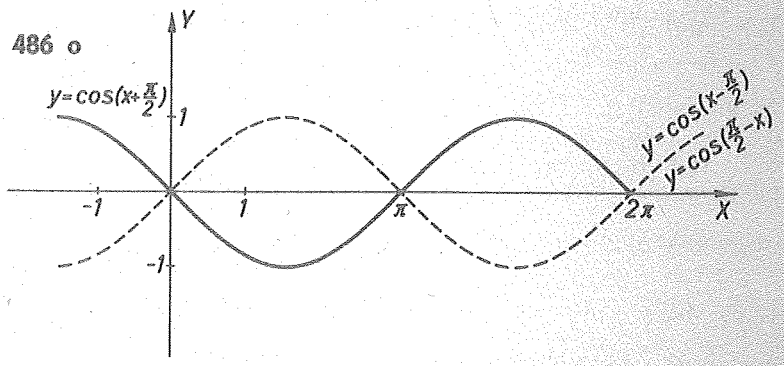
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

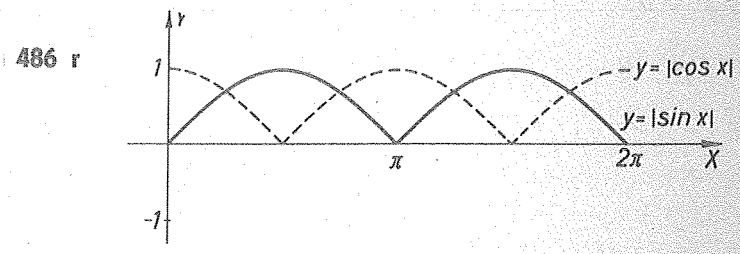
n) $\sin(\pi - x) = \sin x$.



o) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.



r) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.



s), t) Csak pontokat kapunk.

487. Ha egy feladatban tükrözés és eltolás is szerepel, előbb végezzük el a tükrözést.

h) Lehet a feladatot úgy is megoldani, hogy a $z = \sin x$, $y = z^2 = \sin^2 x$ helyettesítést végezzük. Ezután az ábrázolás három koordináta-rendszerben történik. Először az x és z tengelyű koordináta-rendszerben a $z = \sin x$ függvényt, azután a z és y tengelyű koordináta-rendszerben a parabolát ábrázoljuk, végül az x, y koordináta-rend-

szerben az előbbiekből olvassuk le a keresett görbét a $[0;\ 2\pi]$ intervallumban. Pl. mialatt az x 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig nő, a z 0-tól 1-ig nő; y is 0-tól 1-ig nő. Mialatt x $\frac{\pi}{2}$-től π-ig nő; z 1-től 0-ig csökken, y is 1-től 0-ig csökken stb.

i) Lásd az előző feladatot.

488. A feladatok két görbéjének néhány ordinájátát összegezzük. Eredmények: *a)* 0; *b)* $2\sin x$; *c)* $3\cos x$.

489. $\sin\alpha+\sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ és

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságokat használjuk fel.

a) $y = \sqrt{3}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$;

b) $y = 0$; *c)* $y = 0$.

490. *a)* A függvény 2π szerint periodikus. Értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$.

Ellenőrzésül: $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Lásd a 487. *g)* feladatot.

b) I. megoldás: A függvény nincs értelmezve az $x = k\cdot\frac{\pi}{2}$ helyeken.

A függvény a $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumban ∞-től 2-ig csökken; a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban 2-től ∞-ig nő; a $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ intervallumban $(-\infty)$-től (-2)-ig nő; a $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ intervallumban (-2)-től $(-\infty)$-ig csökken.

II. megoldás: $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$.

c) A szögfüggvény 2π szerint periodikus. Értelmezési tartománya $(-\infty\ +\infty)$. A függvény a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban 1-től 2-ig nő; a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumban 2-től $\frac{1}{2}$-ig csökken; a $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ intervallumban $\frac{1}{2}$-től 1-ig nő.

d) A függvény 2π szerint periodikus. Értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$. A függvény a $[0, \pi]$ intervallumban 2-től $\frac{1}{2}$-ig csökken; a $[\pi, 2\pi]$ intervallumban $\frac{1}{2}$-től 2-ig nő.

e) A függvény 2π szerint periodikus. Értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$. A függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban $\sqrt{2}$-től 0-ig csökken; a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumban 0-tól $\sqrt{2}$-ig nő.

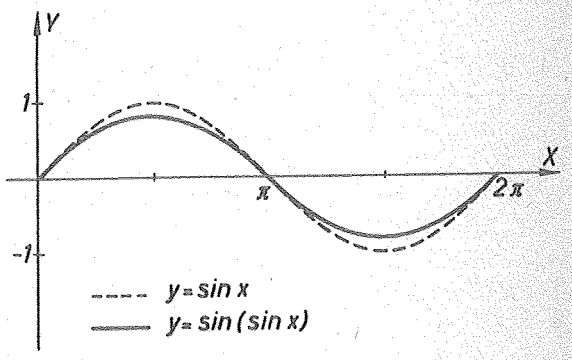
f) A függvény 2π szerint periodikus. Értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$. A függvény a $[0, \pi]$ intervallumban 0-tól $\sqrt{2}$-ig nő; a $[\pi, 2\pi]$ intervallumban $\sqrt{2}$-től 0-ig csökken.

g) $\sin x > 0$, ezért a függvény a $[\pi, 2\pi]$ intervallumban nincs értelmezve. A függvényt csak a $[0, \pi)$ intervallumban vizsgáljuk. $x = 0$, 1; 0,2; 0,3 stb. értékekre értéktáblázatot készítünk. A kapott görbe ismétlődik a $(2k\pi; [2k+1]\pi)$ intervallumban.

h) A függvény értelmezési tartományát a $\lg \sin x \geqq 0$ feltételből kapjuk. Az értelmezési tartomány $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $y = 0$. A görbe az abszcisszatengely különálló pontjaiból áll.

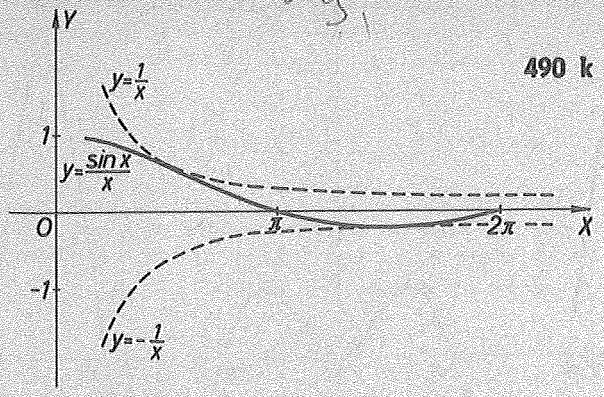
i) Értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$. A függvény 2π szerint periodikus. A függvény a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban 0-tól sin 1-ig nő; a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumban sin 1 $\approx$ 0,84-től 0-ig csökken; a $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumban 0-tól $-0{,}84$-ig csökken; a $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ intervallumban $-0{,}84$-től 0-ig nő.

490 i



j) Lásd az *i)* feladat gondolatmenetét.

k) A függvény $x = 0$ kivételével minden számra értelmezve van. Készítsünk értéktáblázatot a $(0, 2\pi]$ intervallumban 30°-onként. A görbe növekvő x értékek mellett az x tengelyhez közeledik. A görbe az $y = \frac{1}{x}$ és $y = -\frac{1}{x}$ függvények görbéi között helyezkedik el.



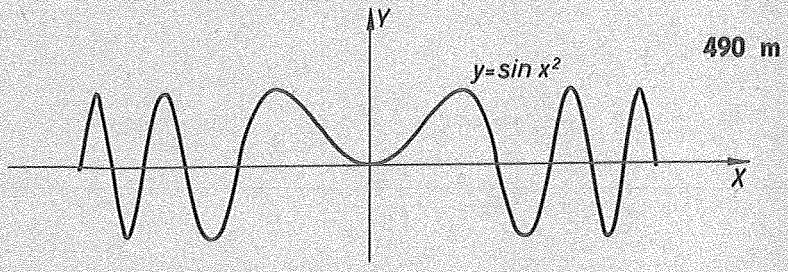
490 k

l) Lásd a *k)* feladat gondolatmenetét.

m) Értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$ intervallum. A függvény a $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ intervallumban 0-tól 1-ig nő; a $\left[\frac{\pi}{2}, \sqrt{\pi}\right]$ intervallumban 1-től 0-ig csökken; a $\left[\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right]$ intervallumban 0-tól -1-ig csökken stb.

$x = \pm\sqrt{k\pi}$ értékek mellett $y = 0$.

A görbe és az abszcisszatengely szomszédos metszéspontjai közötti távolságok sorozata a zérus felé tart.

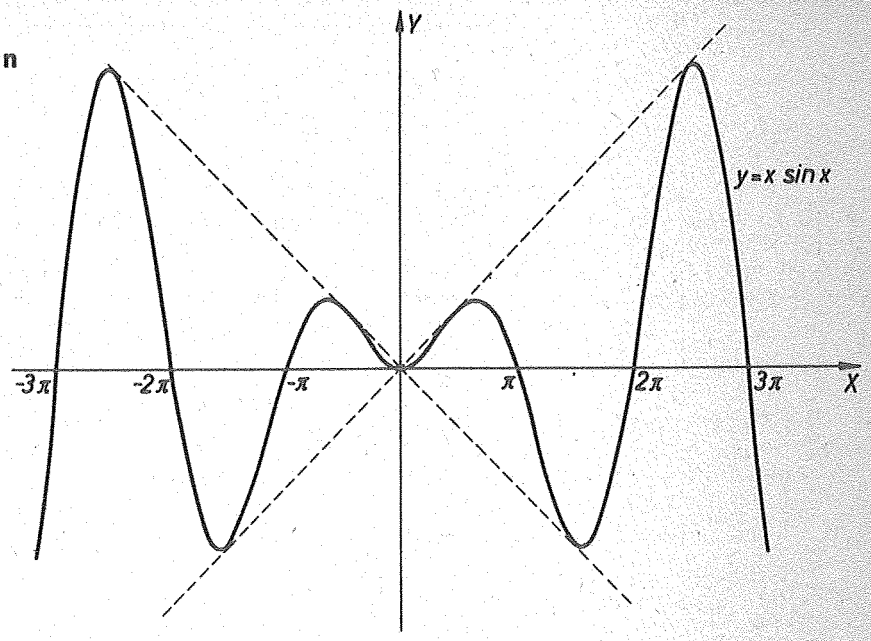


490 m

n) A függvény értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$ intervallum. Ha $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, akkor $\sin x = 1$, az $y = x$ egyenesen levő pontokat kapjuk. Ha $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, akkor $\sin x = -1$, az $y = -x$ egyenesen levó pontokat kapjuk (ábrát lásd a 242. oldalon).

o) Értéktáblázatot készítünk $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, valamint $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π értékeire. A görbe x növekedésével mind nagyobb, illetve mind kisebb értékeket vesz fel. A görbe az $y = x^2$ és $y = -x^2$ függvények görbéi között helyezkedik el.

490 n



p) Lásd az előző feladat értéktáblázatat csak pozitív előjellel.

491. *a)* $y' = (\cos x + \sin x)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\cos x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sin x\right)$;

$x_1 = \frac{3\pi}{4}$; $x_2 = \frac{7\pi}{4}$;

$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; szorzunk $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$-gyel.

$\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x_3 = \frac{7\pi}{12}$; $x_4 = \frac{11\pi}{12}$.

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
y	-1	↗	$\frac{5}{2\sqrt{6}}$	↘	$\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$	↗	$\frac{5}{2\sqrt{6}}$	↘	$\frac{-2\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}$	↗	-1

b) $y' = 12\cos x\,(1+\sin x - 2\sin^2 x)$,

$\cos x = 0;\ x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \frac{3\pi}{2},$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0;\ x_3 = \frac{7\pi}{6};\ x_4 = \frac{11\pi}{6}.$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
y	−3	↗	7	↘	−6,5	↗	−1	↘	−6,5	↗	−3

c) $y' = 2\cos x\,(1 - 2\sin x),$

$\cos x = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2},$

$1 - 2\sin x = 0,\ x_3 = \frac{\pi}{6},\ x_4 = \frac{5\pi}{6}.$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
y	1	↗	1,5	↘	1	↗	1,5	↘	−3	↗	1

492. Rajzot készítünk. Az ABP derékszögű háromszögből $AP = 2r\cos x$. $t = 4r^2 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x;\ t' = 4r^2\cos^2 x \cdot (\cos^2 x - 3\sin^2 x)$.

Az $x = \frac{\pi}{6}$ helyen van maximum. Ekkor PB a beírt szabályos hatszög oldala, AP pedig a beírt szabályos haromszög oldala,

$t = \frac{3r^3 \cdot \sqrt{3}}{4}.$

493. Legyen m a kúp magassága, R alapkörének sugara.

$R = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};\ m = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha,$

$V = \frac{r^3\pi \cdot \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha}{3}.$ De $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

$$V = \frac{2r^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}.$$

A differenciálhányados $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén 0. Ekkor a legkisebb a térfogat.

$m = 4r$; $R = r\sqrt{2}$; $V = \frac{8r^3\pi}{3}$.

494. *a)* $t = r^2 \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x)$;

b) $r^2(\sqrt{3}\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x) = \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Osztunk $r^2 \cdot \cos^2 x$-szel.

$x = \frac{\pi}{3}$.

495. *a)* $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$;

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$;

c) $x_1 = \frac{\pi}{12} + n\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{12} + n\pi$;

d) $x_1 = n\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$;

e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

496. A háromszög szögei: x; $2x$; $180° - 3x$;
$\sin 3x = 2 \sin x$ egyenletet ábrázoljuk.
A $(0; \pi)$ intervallumban $x = 30°$.
A háromszög derékszögű.

497. $1{,}2 \sin x = \sin 2x$.
A $(0\ \pi)$ intervallumban $x = 53{,}6°$.

498. A hegyesszögeket a megfelelő táblázatból írjuk ki, a gyököket az előjelnek megfelelő negyedekből kapjuk.

a)	$x_1 = 221°18' + n \cdot 360°$;	$x_2 = 318°42' + n \cdot 360°$	(ahol n tetszőleges egész szám)
b)	$x_1 = 83°12' + n \cdot 360°$;	$x_2 = 96°48' + n \cdot 360°$;	
c)	$x_1 = 25{,}38° + n \cdot 360°$;	$x_2 = 154{,}62° + n \cdot 360°$;	
d)	$x_1 = 30° + n \cdot 360°$;	$x_2 = 150° + n \cdot 360°$;	
e)	$x_1 = 210° + n \cdot 360°$;	$x_2 = 330° + n \cdot 360°$;	
f)	$x_1 = 225° + n \cdot 360°$;	$x_2 = 315° + n \cdot 360°$;	
g)	$x_1 = 60° + n \cdot 360°$;	$x_2 = 300° + n \cdot 360°$;	
h)	$x_1 = 161°48' + n \cdot 360°$;	$x_2 = 198°12' + n \cdot 360°$;	
i)	$x_1 = 48{,}18° + n \cdot 360°$;	$x_2 = 311{,}82° + n \cdot 360°$;	
j)	$x_1 = 45° + n \cdot 360°$;	$x_2 = 315° + n \cdot 360°$;	

k) $x_1 = 60° + n \cdot 360°$; $x_2 = 120° + n \cdot 360°$;
$x_3 = 240° + n \cdot 360°$; $x_4 = 300° + n \cdot 360°$;
l) $x = 66{,}5° + n \cdot 180°$;
m) $x = 52°6' + n \cdot 180°$;
n) $x = 135° + n \cdot 180°$;
o) $x = 111°418' + n \cdot 180°$.

499. Megkeressük azokat a szögeket, melyeknek azonos szögfüggvényei egyenlők, figyelembe véve az előjeleket is.

Pl. *a)* $5x = x$, másrészt $5x = 180° - x$,
$4x = 0°$, $6x = 180°$,
$x_1 = 0°$, $x_2 = 30°$.

Hasonlóan oldjuk meg a többi egyenletet is.

a) $x_1 = 0°$; $x_2 = 30°$;
b) $x_1 = 0°$; $x_2 = 40°$;
c) $4x + 30° = 180° + x$, másrészt: $4x + 30° = 360° - x$;

$$x_1 = 50° = \frac{5\pi}{18}; \qquad x_2 = 66° = \frac{11\pi}{30};$$

d) $x = 60°$;
e) $x_1 = 0°$; $x_2 = 60°$;
f) $x_1 = 43°$; $x_2 = 86°$;
g) $x_1 = 0°$; $x_2 = 45°$;
h) $x_1 = \frac{13\pi}{36}$; $x_2 = \frac{\pi}{36}$;
i) $x_1 = 40°$; $x_2 = 80°$;
j) $x_1 = 40°$; $x_2 = 85°$;
k) $x_1 = 26°40'$; $x_2 = 56°40'$; $x_3 = 86°40'$;
l) $x = 60°$; $x = 0$ nincs értelmezve.

500. Az egyenletek két oldalát úgy alakítjuk át, hogy csak azonos szögfüggvények szerepeljenek, majd meghatározzuk azokat a szögeket, amelyeknek azonos szögfüggvényei egyenlők.

Pl. *a)* $\frac{1}{2} = \sin 30°$; $\sin(2x + 60°) = \sin 30°$;

$2x + 60° = 30° + n \cdot 360°$;
$x_1 = -15° + n \cdot 180°$;
és $2x + 60° = 180° - 30° + n \cdot 360°$;
ahonnan $x_2 = 45° + n \cdot 180°$;
b) $\sin 3x = \cos(90° - 3x)$ vagy $\cos 5x = \sin(90° - 5x)$;

c) $\operatorname{ctg}(5x - \pi) = \frac{1}{\operatorname{tg}(5x - \pi)}$;

d) $\pi \cdot (2x + 1) = \pi(x + 1) + n \cdot \pi$.

Eredmények:

a) $x_1 = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$; (ahol n tetszőleges egész szám);

b) $x_1 = 11°15' + n \cdot 45°$; $\quad x_2 = -45° + n \cdot 180°$;

c) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$; $\quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$;

d) $x = +n$;

e) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$.

501. *a), b), c), d)* $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, illetve $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ azonosságot helyettesítünk, nullára redukálunk, s szorzattá alakítunk.

Pl.

a) $2 \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\quad 2 \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$; $\quad \sin x \left(2 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$;

e) A szorzat minden egyes tényezője lehet 0.

Eredmények:

a) $x_1 = +n \cdot 180°$; $\quad x_2 = 60° + n \cdot 360°$; $\quad x_3 = 300° + n \cdot 360°$; (ahol n tetszőleges egész szám.)
b) $x_1 = +n \cdot 180°$; $\quad x_2 = 48{,}18° + n \cdot 360°$; $\quad x_3 = 311{,}82° + n \cdot 360°$;
c) $x_1 = +n \cdot 180°$; $\quad x_2 = 53{,}13° + n \cdot 360°$; $\quad x_3 = 306{,}87° + n \cdot 360°$.
d) $x = 34{,}85° + n \cdot 360°$;
e) $\sin x = 0$; $x_1 = +n \cdot 180°$, nem gyök, mert erre a $\operatorname{ctg} x$ függvény nincs értelmezve.
$\cos x = 0$, $\quad x_2 = 90° + n \cdot 180°$, $\quad$ (Egyező gyökök.)
$\operatorname{ctg} x = 0$, $\quad x_3 = 90° + n \cdot 180°$.

Az adott egyenlet megoldása: $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.

502. *a), b), c), d)* $\cos x \neq 0$, mert akkor $x = 90°$ lenne, de $\sin 90° = 1$. Így $\cos x$-szel osztunk.

Pl. *a)* $\sin x = \cos x$, $\operatorname{tg} x = 1$.

e), f), g), h) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$-et, illetve $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$-et helyettesítünk.
f) és *g)* feladatoknál kiemelünk.
i) $1 - \sin x = 2 \cos x$; $\quad 1 - \sin x = 2\sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Eredmények:

a) $x = 45° + n \cdot 180°$; ha n tetszőleges egész szám.
b) $x = 135° + n \cdot 180°$;
c) $x = 53{,}12° + n \cdot 180°$;
d) $x = 63{,}43° + n \cdot 180°$;
e) $x = \pm 30° + n \cdot 180°$;
f) $x_1 = n \cdot \pi$; $\quad x_2 = 270° + 2n \cdot 180°$;
g) $x_1 = 90° + n \cdot 180°$; $\quad x_2 = 2n \cdot \pi$;
h) $x_1 = 63{,}43° + n \cdot 180°$; $\quad x_2 = 116{,}57° + n \cdot 180°$;

i) $x_1 = 90° + n \cdot 180°$; $x_2 = 36{,}87° + n \cdot 360°$; $x_3 = 323{,}13° + n \cdot 360°$.
x_1 és x_2 nem gyökei az eredeti egyenletnek. Az egyenlet egyetlen gyöke $x = 323{,}13° + n \cdot 360°$.

j) $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ helyettesítése után megoldjuk az irracionális egyenletet.

$x = 36°52' + 2n\pi$.

503. *a), b), c), d)* Megoldjuk a másodfokú egyenleteket.
e) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$-et helyettesítve, megoldjuk a nullára redukált másodfokú egyenletet.
f) Beszorzunk, és $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$-et helyettesítve, megoldjuk a gyökös egyenletet.
g) $1 - \sin x \neq 0$, mert így a bal oldal nincs értelmezve. Eltávolítjuk a törtet, beszorzunk, négyzetre emelünk.

$\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x \cos^2 x$;

$1 - \sin 2x = \dfrac{1}{4} \sin^2 2x$. Megoldjuk a másodfokú egyenletet.

h), i) $\cos x = 1 - \sin^2 x$-et helyettesítünk.
Lehet „fázis eltolásos" megoldással is számolni.
Osszunk mindkét oldalon az együtthatók négyzetösszegének gyökével,

pl. *h)* esetén 5-tel; jelöljük: $\dfrac{4}{5} = \cos \varphi$, ekkor $\dfrac{3}{5} = \sin \varphi$; $\varphi = 36{,}88°$.

Az egyenlet pedig:

$\sin(x+\varphi) = \dfrac{2}{5}$; $x + \varphi = 90° \pm 66{,}42° + n \cdot 360°$.

j) Feltételezve, hogy $\sin x \neq 0$, végigszorozzuk az egész egyenletet $\sin x$-szel, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$-et helyettesítünk s összevonunk. Végül szorzattá alakítunk.
k) $\cos x$-szel beszorzunk, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$-et helyettesítjük, kiemelünk.
l) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$-et helyettesítünk.

m) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$-et helyettesítünk, eltávolítjuk a törtet, s $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$-et helyettesítünk.

n) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$-et helyettesítünk, egyébként lásd az *m)* feladatot.

Eredmények:

a) $x_1 = 18° + n \cdot 360°$; $x_2 = 162° + n \cdot 360°$; $x_3 = 234° + n \cdot 360°$; $x_4 = 306° + n \cdot 360°$;
b) $x_1 = 30° + n \cdot 360°$; $x_2 = 150° + n \cdot 360°$;
c) $x_1 = 38{,}67° + n \cdot 360°$; $x_2 = 321{,}33° + n \cdot 360°$;
d) $x_1 = \pm 60° + n \cdot 360°$; $x_2 = \pm 30° + n \cdot 360°$;
e) $x_1 = n \cdot 360°$; $x_2 = 120° + n \cdot 360°$; $x_3 = 240° + n \cdot 360°$;

f) $x_1 = n\cdot 360°$; $x_2 = 77{,}32° + n\cdot 360°$;
g) $x_1 = 27°58' + n\cdot 360°$; $x_2 = 242°2' + n\cdot 360°$;
h) $x_1 = 119{,}56° + n\cdot 360°$; $x_2 = 346{,}7° + n\cdot 360°$;
i) $x = 36°52' + n\cdot 360°$;
j) $x_1 = 90° + n\cdot 180°$; $x_2 = 45° + n\cdot 180°$;

k) $x_1 = n\cdot\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$;

l) $x_1 = 65{,}04° + n\cdot 360°$; $x_2 = 294{,}96° + n\cdot 360°$;
m) $x_1 = 38°10' + n\cdot 360°$; $x_2 = 141°50' + n\cdot 360°$;
n) $x_1 = 30° + n\cdot 360°$; $x_2 = 330° + n\cdot 360°$;

o) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$.

504. *a), b)* $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ és $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$-et helyettesítünk, s megoldjuk a kapott másodfokú egyenletet.

c), d), e) Megoldjuk a másodfokú egyenleteket.

f), g) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$-et helyettesítünk, s $\cos^2 x \neq 0$-val beszorzunk.

h), i), j), k) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$-et helyettesítünk.

l) $\operatorname{tg}^2 x = y$ és $\operatorname{tg}^4 x = y^2$-et helyettesítünk.

m) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{2}$.

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{(\sin 2x)^2}{2}$-t helyettesítünk, kapjuk a $\sin^2 2x - 8\sin 2x + 4 = 0$ másodfokú egyenletet.

n) I. megoldás: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)\cdot(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \sin^4 x - \sin^2 x(1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x)^2 = 3\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = \frac{7}{16}$.

Megoldjuk a negyedfokú egyenletet.

II. megoldás: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^4 x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos^4 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$.

$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{7}{16}$; $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

o) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ és $2x = 2\sin x \cos x$ helyettesítése után elvégezzük a négyzetre emelést, összevonunk.
A $8\sin^4 x - 10\sin^2 x + 3 = 0$ egyenletet oldjuk meg.

Eredmények:

a) $x_1 = 62° + n\cdot 360°$; $x_2 = 118° + n\cdot 360°$;
b) $x_1 = 36{,}9° + n\cdot 360°$; és $x_2 = 143{,}1° + n\cdot 360°$;
c) $x_1 = 10{,}9° + n\cdot 180°$; $x_2 = 100{,}9° + n\cdot 180°$;

d) $x_1 = \frac{\pi}{3} + n\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + n\pi$;

e) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$; $x_2 = 114{,}44° + n \cdot 180°$;

f) $x_1 = 70{,}5° + n \cdot 360°$; $x_2 = 289{,}5° + n \cdot 360°$;
$x_3 = 120° + n \cdot 360°$; $x_4 = 240° + n \cdot 360°$;

g) $x_1 = 60° + n \cdot 360°$; $x_2 = 300° + n \cdot 360°$;
$x_3 = 82{,}82° + n \cdot 360°$; $x_4 = 277{,}18° + n \cdot 360°$;

h) $x_1 = 58{,}3° + n \cdot 180°$; $x_2 = 148{,}28° + n \cdot 180°$;

i) $x_1 = 67{,}5° + n \cdot 180°$; $x_2 = 157{,}5° + n \cdot 180°$;

j) $x_1 = 45° + n \cdot 180°$; $x_2 = -71{,}57° + n \cdot 180°$; $x_3 = 288{,}43° + n \cdot 180°$;

k) $x_1 = 135° + n \cdot 180°$; $x_2 = 153{,}45° + n \cdot 180°$;

l) $x_1 = \pm 45° + n \cdot 180°$; $x_2 = \pm 60° + n \cdot 180°$;

m) $x_1 = 16{,}2° + n \cdot 180°$; $x_2 = 73{,}8° + n \cdot 180°$;

n) $x_1 = 60° + n \cdot 180°$; $x_2 = 120° + n \cdot 180°$;
$x_3 = 30° + n \cdot 180°$; $x_4 = 150° + n \cdot 180°$;

o) $x_1 = \frac{\pi}{4} \cdot (2n+1)$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$;

p) $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $x_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$;

r) $x_1 = \pm 66{,}2° + n\pi$; $x_2 = \pm 23{,}8° + n\pi$.

505. *a), b)* Az addíciós tételek segítségével felbontjuk a $\sin(\alpha-\beta)$, illetve $\cos(\alpha-\beta)$ kifejezéseket, az adott szögek szögfüggvényértékeit behelyettesítjük.

$\sin x \neq 0$-val osztunk.

c) $\sin(\alpha+\beta)$ és $\cos(\alpha-\beta)$ képletei alapján átalakítjuk az egyenletet s összevonunk, végül egyszerűsítünk.

$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°}$-ot helyettesítünk, s $\cos 60°$-kal beszorzunk:

d) $\operatorname{tg}(a+x) = \frac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)}$ és $\operatorname{tg}(a-x) = \frac{\sin(a-x)}{\cos(a-x)}$-et helyettesítve, a számlálót és a nevezőt is 2-vel megszorozva, a szorzatot összeggé alakítjuk. Eltávolítjuk a törteket, összevonunk s egyszerűsítünk.

$$\frac{2\sin(a+x)\sin(a-x)}{2\cos(a+x)\cos(a-x)} = \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} = \frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}.$$

$4\cos 2x \cos 2a = 2\cos 2a$, ahonnan: $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

e) $\cos 2\alpha$ képletét alkalmazzuk, majd $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$-et helyettesítjük.

f) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Kiemelünk.

g) Eltávolítjuk a törtet, $4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x$-et helyettesítünk.

h), i), j) $\sin 2\alpha$ képletét alkalmazzuk, $\cos x$-et, ill. $\sin x$-et kiemeljük.

k) cos 2α képletét alkalmazzuk, a törtet eltávolítjuk, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$-t helyettesítünk. A másodfokú egyenletnek csak az egyik gyöke felel meg.

Eredmények:

a) $x_1 = 19{,}1° + n\cdot 180°$;
b) $x_1 = 19{,}1° + n\cdot 180°$;
c) $x_1 = \frac{7\pi}{12} + n\cdot 2\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + n\cdot 2\pi$;
d) $x = \pm 30° + n\cdot 180°$;
e) $x_1 = 30° + n\cdot 360°$; $x_2 = 150° + n\cdot 360°$; $x_3 = 270° + n\cdot 360°$;
f) $x_1 = n\pi$; $x_2 = 63{,}4° + n\pi$;
g) $x_1 = 15° + n\cdot 180°$; $x_2 = 75° + n\cdot 180°$;
h) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$; $x_3 = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$;
i) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$; $x_2 = 19{,}47° + n\cdot 360°$; $x_3 = 160{,}53° + n\cdot 360°$;
j) $x = n\cdot 180°$;
k) $x_1 = 21{,}48° + n\cdot 360°$; $x_2 = 158{,}52° + n\cdot 360°$.

506. *a)* sin 2α képletét alkalmazzuk, s a kapott negyedfokú egyenletet megoldjuk.
b) Lásd az 503. *h)* feladat „fázis eltolásos" megoldását.
c) cos 2α képletét alkalmazzuk, s $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$-et helyettesítünk.
d) Lásd az előző feladatot.
e) sin 2α képletét alkalmazzuk, egyszerűsítünk, majd osztunk $\cos^2 x$-szel. $\cos x \neq 0$, mert ha ez 0 lenne, akkor $\sin^2 x = 1$ lenne, s akkor az eredeti egyenlet lehetetlen.
f) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ képletet helyettesítjük s összevonunk.
g) sin 2α-t helyettesítünk, majd beszorzunk, összevonunk, s osztunk cos x-szel.
h) *I. megoldás:* sin 2α és cos 2α képleteket alkalmazzuk, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$-et helyettesítjük, s a kapott negyedfokú egyenletet megoldjuk. Az egyenlet: $68\sin^4 x - 52\sin^2 x + 9 = 0$.

II. megoldás: $8\sin^2 x = 4(1-\cos 2x)$, ezt helyettesítjük az egyenletbe, s kapjuk a $\cos 2x + 4\sin 2x = 4$ egyenletet, amelyet fázis eltolásos módszerrel oldunk meg (lásd az 503. *h)* feladatot).
i) Beszorzunk, és szorzattá alakítunk. Lesz: $(2\sin x - 1)(2\cos x - 1) = 0$.

Eredmények:

a) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$; $x_2 = \frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi$; $x_3 = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$; $x_4 = \frac{3\pi}{4} + n\cdot\pi$;
b) $x_1 = 90° + n\cdot 180°$; $x_2 = 135° + n\cdot 180°$;
c) $x = +n\cdot 180°$;

d) $x = \pm 30° + n \cdot 180°$;
e) $x_1 = 135° + n \cdot 180°$ és $x_2 = 53°7' + n \cdot 180°$;
f) $x_1 = 78{,}47° + n \cdot 360°$; $x_2 = 281{,}53° + n \cdot 360°$;
g) $x_1 = 210° + n \cdot 360°$; $x_2 = 330° + n \cdot 360°$; $x_3 = 90° + n \cdot 180° = (2n+1) \cdot 90°$;
h) $x_1 = 45° + n \cdot 360°$; $x_2 = 30{,}96° + n \cdot 360°$;
i) $x_1 = 30° + n \cdot 360°$; $x_2 = 150° + n \cdot 360°$;
$x_3 = 60° + n \cdot 360°$; $x_4 = 300° + n \cdot 360°$.

507. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$-et és $\sin 2x$-et helyettesítjük, majd $\cos x$-szel beszorzunk, nullára redukálunk s kiemelünk.

b) $\sin 2x$ képletét alkalmazzuk, s $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$-et helyettesítünk, nullára redukálunk s kiemelünk.

c) *I. megoldás:* Négyzetre emelünk, s $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $2 \sin x \cos x = \sin 2x$-et helyettesítünk:

$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1{,}44$, $\sin 2x = 0{,}44$.

II. megoldás: $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$-et vagy $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$-et helyettesítünk, s a kapott gyökös egyenletet megoldjuk.

d), e), f) megoldási menete azonos *c)* feladat menetével.

g) $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60° = \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$-ot helyettesítünk, s eltávolítjuk a törtet.

h) Azonos a *g)* feladat megoldási menetével.

Eredmények:

a) $x = n \cdot 60°$;
b) $x_1 = n \cdot \pi$; $x_2 = 45° + n \cdot 90°$;
c) $x_1 \approx 13° + n \cdot 360°$; $x_2 \approx 77° + n \cdot 360°$;
d) $x_1 = n \cdot 360°$; $x_2 = 90° + n \cdot 360°$;
e) $x_1 = 15° + n \cdot 360°$; $x_2 = 75° + n \cdot 360°$;
f) $x_1 = 17{,}12° + n \cdot 360°$; $x_2 = 72{,}9° + n \cdot 360°$;
g) $x_1 = 90° + n \cdot 360°$; $x_2 = 210° + n \cdot 360°$;
h) $x_1 = 105° + n \cdot 360°$; $x_2 = 15° + n \cdot 360°$.

508. *a)* *I. megoldás:* $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$-et és $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$-et helyettesítjük, nullára redukálunk, kiemelünk.

II. megoldás: $\sin 2x = \sin (90° - 3x)$,

$2x = 90° - 3x \pm n \cdot 360°$; vagy $180° - 2x = 90° - 3x + n \cdot 360°$;
$x = 18° + n \cdot 72°$, ahol n tetszőleges egész szám lehet.
$x_1 = 18° + k \cdot 360°$; $x_2 = 90° + k \cdot 360°$;
$x_3 = 162° + k \cdot 360°$; $x_4 = 234° + k \cdot 360°$;
$x_5 = 306° + k \cdot 360°$; $x_6 = 270° + k \cdot 360°$.

b) $\sin 4x = -\sin x = \sin (-x)$,

$4x = -x + n \cdot 360°$; $x_1 = n \cdot 72°$ vagy
$180° - 4x = -x + n \cdot 360°$; $x_2 = 60° + n \cdot 120°$.

c) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$-et helyettesítünk, s $\cos x$-et kiemeljük.

$x_1 = 90° + n \cdot 180°$; $x_2 = 60° + n \cdot 180°$; $x_3 = 120° + n \cdot 180°$.

d) A két sinus különbségére kapott azonosságot alkalmazzuk (398. *b)* feladat).

$x_1 = \pm 20° + n \cdot 120°$; $x_2 = \pm 100° + n \cdot 120°$; $x_3 = n \cdot 180°$.

e) $\sin 2x$ és $\sin 3x$ képletét helyettesítjük, nullára redukálunk s kiemelünk.

$x_1 = n \cdot 180°$; $x_2 = 38{,}66° + n \cdot 360°$; $x_3 = 321{,}34 + n \cdot 360°$.

f) $\sin 3x$ képletét helyettesítjük, 4-gyel szorzunk, s a kapott negyedfokú egyenletet megoldjuk.

$x_1 = \pm 18° + n \cdot 180°$; $x_2 = \pm 54° + n \cdot 180°$.

g) A két sinus összegére kapott azonosságot (398. *a)* feladat) alkalmazzuk.

$x = n \cdot 60°$.

h) A két cosinus összegére kapott azonosságot (398. *c)* feladat) alkalmazzuk.

$x_1 = 22{,}5° + n \cdot 45°$; $x_2 = n \cdot 120°$.

i) *I. megoldás:* $\sin 2x$ és $\sin 3x$ képleteit behelyettesítjük, $\sin x$-et kiemeljük.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; végül $\cos x$-et emeljük ki.

II. megoldás: Szorzattá alakítunk (398. *a)* feladat), majd $\sin 2x$-et kiemeljük.

$x_1 = \pm n \cdot 90°$; $x_2 = n \cdot 120°$.

j) *I. megoldás:* $\cos 2x$ és $\cos 3x$ képleteit behelyettesítjük, $\sin^2 x$ helyett $1 - \cos^2 x$-et írunk, összevonunk, csoportosítással kétszer kiemelünk.

II. megoldás: Szorzattá alakítunk (398. *e)* feladat), majd $\cos 2x$-et kiemeljük.

$x_1 = 45° + n \cdot 90°$; $x_2 = 120° + n \cdot 360°$; $x_3 = 240° + n \cdot 360°$.

k) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$-et és $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$-et helyettesítünk. $\operatorname{tg} x$-et, majd $(3 - \operatorname{tg}^2 x)$-et kiemeljük, s a zárójelben közös nevezőre hozunk.

$x_1 = n \cdot 180°$; $x_2 = \pm 60° + n \cdot 180°$; $x_3 = \pm 35{,}26° + n \cdot 180°$.

l) $\operatorname{tg} 2x$; $\operatorname{tg} 3x$; $\operatorname{tg} 4x$ értékeit helyettesítjük, majd páronként közös nevezőre hozzuk.

$x_1 = n\pi$; $x_2 = \pm 25{,}09° + n\pi$; $x_3 = \pm 36° + n\pi$;
$x_4 = \pm 56{,}48° + n\pi$; $x_5 = \pm 72° + n\pi$.

m) Az egyenlet bal oldalán $\sin x + \sin 3x$-et helyettesítjük az *i)* feladat *II. megoldása* alapján, és $\sin 2x$-et kiemeljük. Az egyenlet jobb oldalán $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$-et helyettesítünk, összevonunk, s $\cos x$-et kiemeljük. Ezután 0-ra redukálunk, és $(2\cos x + 1)$-et emeljük ki.

$x_1 = 90° + n \cdot 180°$; $x_2 = 120° + n \cdot 360°$; $x_3 = 240° + n \cdot 360°$;
$x_4 = 30° + n \cdot 180°$; $x_5 = 150° + n \cdot 180°$.

n) I. megoldás: $\cos x+\cos 3x = 2\cos 2x\cos x$, $\cos 2x+\cos 4x = 2\cos 3x\cos x$ értékeket helyettesítjük, s kiemeljük $2\cos x$-et.

II. megoldás: $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$,
$\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x$,
$\cos 4x = 8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

értékeket helyettesítjük, összevonunk, $2\cos x$-et kiemeljük. A zárójelben levő harmadfokú egyenlet egyik gyöke: -1. Bezout tétele szerint osztjuk a harmadfokú egyenletet $(\cos x+1)$ gyöktényezővel, s a kapott másodfokú egyenletet megoldjuk.

$x_1 = 90°+n\cdot 180°$; $x_2 = 36°+n\cdot 72°$; $x_3 = 180°+n\cdot 360°$.

o) $\cos 2y+\operatorname{tg}^2 y = 2$ egyenletet kell megoldani.

$$x_1 = \frac{y}{5} = 11{,}45°+n\cdot 36°;\quad x_2 = 24{,}55°+n\cdot 36°.$$

p) $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$ helyettesítése után kapjuk:

$$\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4},$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{48}+k\cdot\frac{\pi}{2}.$$

r) Eltávolítjuk a törtet és négyzetre emelünk.

$8\sin^2 x\cdot\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x-1 = 0$ egyenletet kapjuk.

$$x_1 = \frac{\pi}{4}+k\pi;\quad x_2 = \frac{7\pi}{12}+k\pi;\quad x_3 = \frac{11\pi}{12}+k\pi.$$

509. *a)* $4^{2\cos^2 x} = 16^{\cos^2 x} = 16^{1-\sin^2 x} = \dfrac{16}{16^{\sin^2 x}}$,

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3}+n\pi;\quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6}+n\pi.$$

b) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ helyettesítése után

$$(\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6}+n\pi.$$

510. A $4-\cos^2 x+2\cos x-1 = 0$ egyenletből

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4},$$

$$(\cos 2x)_{1,2} = 2\cos^2 x-1 = \frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}.$$

Az egyenlet a két gyökből felírható:

$4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0$;
$x_1=\pm 72°$; $x_2=\pm 144°$;
$2x_1=\pm 144°$; $2x_2=\pm 288°$ $(\pm 72°)$.

Az első egyenlet gyökei rendezve:

$-144°$; $-72°$; $72°$; $144°$.

A második egyenlet gyökei:
$72°$; $-144°$; $144°$; $-72°$.

A gyöknégyes csak a felsorolás sorrendjében különbözik a két egyenletben.

511. *a)* $x=45°-y$-t helyettesítve a második egyenletbe, kapunk egy egyismeretlenes másodfokú egyenletet.

$x_1=26{,}57°$; $y_1=18{,}43°$; $x_2=-71{,}57°$; $y_2=116{,}57°$.

b) $x_1=\frac{\pi}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{6}$; $y_1=\frac{\pi}{6}$; $y_2=\frac{\pi}{2}$;

c) $x_1=\frac{\pi}{3}$; $y_1=0°$; $x_2=0°$; $y_2=\frac{\pi}{3}$.

d) A 417. *g)* feladat azonossága alapján:

$\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)$; ezt és az első egyenletből $x=75°-y$-t helyettesítve:

$\sin(x-y)=\frac{1}{4\sin 75°}$; ebből $x-y=15°$;

$x_1=45°$; $y_1=30°$; $x_2=120°$; $y_2=-45°$.

e) A 417. *g)* feladat alapján:

$\cos^2 y-\cos^2 x=\sin(x+y)\sin(x-y)$; ezt és az első egyenletből $x=90°-y$-t helyettesítve:

$x_1=150°$; $y_1=-60°$; $x_2=210°$; $y_2=-120°$.

f) $x+y$ és $x-y$ értékeit a megadott szögfüggvényértékek alapján a sinustáblázatból kikeressük, s az így kapott egyenletrendszert megoldjuk.

$x=$	23,82°	86,82°	93,18°	156,18°
$y=$	3,18°	66,18°	−66,18°	−3,18°

g) Lásd az előző feladatot.

$x=$	57°	65°	115°	123°
$y=$	−25°	−33°	33°	25°