Trigonometria

A HEGYESSZÖG FÜGGVÉNYEI. A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG MEGOLDÁSA

SZÖGFÜGGVÉNYEK

1. Valamely α hegyesszög mozgó szárának egy pontja a szög csúcsától 6 cm távolságra van. Mekkora a szög sinusa, ha az adott pontból a szög nyugvó szárára bocsátott merőleges $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 3; 4; 5 cm hosszú? Mit jelentene, ha a merőleges szakasz 6 cm lenne?

2. Valamely α hegyesszög mozgó szárának egy pontja a szög csúcspontjától 5 cm távolságra van. Mekkora a szög cosinusa, ha ezen szakasznak vetülete a nyugvó szárra 4; 3; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ cm hosszú? Mit jelentene, ha a felvett szakasz vetülete a nyugvó szárra 5 cm lenne?

3. Valamely α hegyesszög mozgó szárának egy pontjából a nyugvó szárra bocsátott merőleges k cm; a merőleges talppontjának a szög csúcsától való távolsága pedig l cm. Mekkora a szög tangense és cotangense, ha

a) $k = \frac{1}{2}$;	$l = 6{,}75$;	*e)* $k = 4$;	$l = 3$;
b) $k = 1$;	$l = 5{,}45$;	*f)* $k = 4{,}32$;	$l = 2$;
c) $k = 2$;	$l = 4{,}32$;	*g)* $k = 5{,}45$;	$l = 1$;
d) $k = 3$;	$l = 4$;	*h)* $k = 6{,}75$;	$l = \frac{1}{2}$ cm?

4. Valamely α hegyesszög mozgó szárának egy pontja a szög csúcspontjától 13 cm, a nyugvó szártól pedig 5 cm távolságra van. Mekkora a szög szögfüggvényeinek értéke?

5. Valamely α hegyesszög mozgó szárának egy pontjából a nyugvó szárra bocsátott merőleges 0,7 cm; a merőleges talppontjának a szög csúcsától való távolsága pedig 2,4 cm. Mekkora a szög szögfüggvényeinek értéke?

6. Valamely α hegyesszög nyugvó szárának egy pontja a szög csúcspontjától 10 cm távolságra van. Ezen távolságnak a mozgó szárra való vetülete 8 cm. Mekkora a szög szögfüggvényeinek értéke?

7. Jelölje a és b a derékszögű háromszög befogóit, c pedig az átfogót. Mekkora az α szög szögfüggvényeinek értéke, ha

$a = 8$	40	8	1,2	$\frac{51}{100}$	$21\frac{3}{5}$	$(m-n)$
$b = 15$	9	3,9	3,91	$\frac{253}{400}$	9	$2\cdot\sqrt{mn}$, ahol $m > n > 0$.

8. Mekkora a derékszögű háromszögben az α szög szögfüggvényeinek értéke, ha

$a)$ $a = 2b$; $c)$ $a+b = \frac{5}{4}c$;

$b)$ $a = \frac{2}{3}c$; $d)$ $a-b = \frac{c}{5}$;

ahol a és b a két befogó, c az átfogó?

9. Mekkora a derékszögű háromszögben az α szög szögfüggvényeinek értéke, ha adott az a befogó, valamint az átfogóhoz tartozó m_c magasság?

10. Mekkora a derékszögű háromszögben az α szög szögfüggvényeinek értéke, ha adott az átfogóhoz tartozó m_c magasság által létesített két szelet: x és y?

11. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, melynek sinusa $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$; 0,375; $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$!

12. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, melynek cosinusa

$\frac{4}{5}$; 0,75; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; 0,4; $\frac{\sqrt{3}}{2}$!

13. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, melynek tangense

2; 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$; 0,3; $\sqrt{3}$!

14. Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, melynek cotangense

7; 1; $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{1}{6}$!

15. Szerkesszük meg az α hegyesszöget, ha tudjuk, hogy

$a)$ $\sin\alpha = \frac{8}{15}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$b)$ $\cos\alpha = 0{,}8$; $\frac{1}{2}$;

$c)$ $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}3$; $\sqrt{3}$;

$d)$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{7}{11}$; 1.

Mérjük meg a szögeket szögmérővel!

A SZÖGFÜGGVÉNYTÁBLÁZAT HASZNÁLATA. PÓTSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

16. Mekkora az α szög sinusa, ha

a) $\alpha = 0°; 10°; 15°; 30°; 45°; 60°;$
b) $\alpha = 18°30'; 24°54'; 39°6'; 51°12'; 75°24'; 83°48';$
c) $\alpha = 4{,}2°; 18{,}9°; 21{,}7°; 44{,}4°; 64{,}5°; 82{,}1°;$
d) $\alpha = 12°15'; 28°35'; 33°44'; 77°50'; 89°59';$
e) $\alpha = 25{,}37°; 38{,}43°; 68{,}76°; 74{,}58°; 88{,}88°$?

17. Mekkora az α szög cosinusa, ha

a) $\alpha = 90°; 80°; 75°; 60°; 45°; 30°;$
b) $\alpha = 71°30'; 65°6'; 50°54'; 38°48'; 14°36'; 6°12';$
c) $\alpha = 85{,}8°; 71{,}1°; 68{,}3°; 45{,}6°; 25{,}5°; 7{,}9°;$
d) $\alpha = 77°45'; 61°25'; 56°16'; 12°10'; 0°1';$
e) $\alpha = 64{,}63°; 51{,}57°; 21{,}24°; 15{,}42°; 1{,}12°$?

18. Mekkora az α szög tangense, ha

a) $\alpha = 12°; 24°; 36°; 49°; 63°; 71°;$
b) $\alpha = 2°6'; 11°12'; 33°30'; 47°18'; 55°42'; 76°54';$
c) $\alpha = 6{,}8°; 10{,}5°; 23{,}2°; 46{,}7°; 68{,}9°; 89{,}9°;$
d) $\alpha = 5°11'; 14°27'; 28°28'; 32°55'; 49°43'; 71°33';$
e) $\alpha = 4{,}58°; 35{,}35°; 52{,}25°; 68{,}13°; 75{,}75°; 82{,}01°$?

19. Mekkora az α szög cotangense, ha

a) $\alpha = 78°; 66°; 54°; 41°; 27°; 19°;$
b) $\alpha = 87°54'; 78°48'; 56°30'; 42°42'; 34°18'; 13°6';$
c) $\alpha = 83{,}2°; 79{,}5°; 66{,}8°; 43{,}3°; 21{,}1°; 0{,}1°;$
d) $\alpha = 84°49'; 75°33'; 61°32'; 57°5'; 40°17'; 18°27';$
e) $\alpha = 85{,}42°; 54{,}65°; 37{,}75°; 21{,}87°; 14{,}25°; 7{,}99°$?

20. Keressük ki a megadott szögek valamennyi szögfüggvényértékét:

$17°48'; 64°13'; 25{,}14°; 72{,}68°; 84°45';$
$4{,}04°; 32{,}79°; 44°44'; 54°32'; 65{,}09°.$

21. Keressük ki a táblázatból a következő szögfüggvényekhez tartozó hegyesszögeket:

a) $\sin\alpha = 0{,}0698;\ 0{,}2300;\ 0{,}4939;\ 0{,}7660;\ 0{,}8704;\ 0{,}9992;$
b) $\cos\alpha = 0{,}9903;\ 0{,}8090;\ 0{,}7581;\ 0{,}6921;\ 0{,}5225;\ 0{,}1754;$
c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}2679;\ 0{,}5961;\ 1{,}0000;\ 8{,}386;\ 10{,}02;\ 57{,}29;$
d) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 5{,}145;\ 1{,}804;\ 0{,}9896;\ 0{,}7265;\ 0{,}1944;\ 0{,}0052.$

22. Keressük ki a táblázatból a következő szögfüggvényértékekhez tartozó hegyesszögeket percnyi pontossággal:

a) $\sin\alpha = 0{,}3049;\ 0{,}0828;\ 0{,}9712;\ 0{,}7499;\ 0{,}4284;\ 0{,}9005;$
b) $\cos\alpha = 0{,}9524;\ 0{,}4350;\ 0{,}9053;\ 0{,}2977;\ 0{,}7402;\ 0{,}6523;$
c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}3214;\ 2{,}070;\ 0{,}4692;\ 3{,}207;\ 0{,}4582;\ 0{,}4757;$
d) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3{,}116;\ 0{,}4830;\ 2{,}131;\ 0{,}3118;\ 0{,}9407;\ 0{,}3270.$

23. Keressük ki a táblázatból a következő szögfüggvényértékekhez tartozó hegyesszögeket percnyi pontossággal:

a) $\sin\ \alpha = 0{,}3087;\ 0{,}4247;\ 0{,}9547;\ 0{,}2122;\ 0{,}5802;\ 0{,}8145;$
b) $\cos\ \alpha = 0{,}1083;\ 0{,}5904;\ 0{,}7839;\ 0{,}9109;\ 0{,}7380;\ 0{,}7376;$
c) $\mathrm{tg}\ \alpha = 0{,}7775;\ 0{,}1128;\ 0{,}2350;\ \frac{5}{8};\ 6{,}000;\ 7{,}597;$
d) $\mathrm{ctg}\ \alpha = 0{,}4067;\ \frac{3}{4};\ 2{,}0000;\ 0{,}6000;\ 0{,}7734;\ 1{,}902.$

24. Határozzuk meg azon hegyesszögeket, melyek kielégítik a következő egyenleteket:

a) $\sin\alpha = \cos\alpha;$
b) $\sin(\alpha+12^\circ) = \cos(\alpha+8^\circ);$
c) $\sin(\alpha-30^\circ) = \cos(\alpha+20^\circ);$
d) $\sin 2\alpha = \cos(\alpha-6^\circ);$
e) $\sin 3\alpha = \cos(\alpha+10^\circ);$
f) $\sin 4\alpha = \cos(\alpha-22^\circ);$
g) $\mathrm{tg}\ 4\alpha = \mathrm{ctg}\,\alpha;$
h) $\mathrm{tg}\ (\alpha-24^\circ) = \mathrm{ctg}\,(\alpha+26^\circ);$
i) $\mathrm{ctg}(\alpha-8^\circ) = \mathrm{tg}\ (5\alpha-3^\circ);$
j) $\cos(4\alpha+18^\circ) = \sin(\alpha^2+27^\circ).$

ÖSSZEFÜGGÉSEK UGYANAZON SZÖG SZÖGFÜGGVÉNYEI KÖZÖTT

25. Határozzuk meg a többi szögfüggvény értékét, ha:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ 0{,}25;\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{k}{\sqrt{1+k^2}};$

b) $\cos\alpha = \frac{3}{4};\ \frac{12}{13};\ 0{,}65;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}};\quad 0 \leqq k \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}.$

c) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{9};\ 1;\ 2{,}5;\ \sqrt{3};\ \frac{2k}{1-k^2};\quad 0 \leqq k < 1.$

d) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{5}{3};\ 4;\ 0{,}38;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \sqrt{k^2-1};\ k > 1.$

26. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögeire $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{5}$ és $\sin\alpha\cdot\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}$ érvényes, akkor az a háromszög derékszögű háromszög.

27. Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

a) $\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha;$

b) $\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha};$

c) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$;

d) $\sin\alpha\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

e) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

f) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

g) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

28. Számítsuk ki táblázat használata nélkül a következő kifejezések értékét:

a) $2\sin 30°+3\cos 60°+\operatorname{tg} 45°$;

b) $3\operatorname{tg} 30°+\operatorname{ctg} 45°-2\operatorname{tg} 45°+2\cos 60°$;

c) $(\operatorname{tg} 45°)^2-(\sin 30°)^2-(\cos 60°)^2$;

d) $(\cos 30°)^2-(\sin 45°)^2$;

e) $\dfrac{\sin 60°-\sin 30°}{\sin 60°+\sin 30°}$;

f) $\dfrac{2-\operatorname{tg} 45°}{\sin 45°\cdot\cos 45°}$;

g) $\dfrac{1+\cos 90°}{2-\sin 90°}-\operatorname{tg} 45°$;

h) $(1-\cos 15°)\cdot(1+\sin 75°)+\cos 75°\cdot\cos 15°\cdot\operatorname{ctg} 15°$;

i) $\sin(45°-\alpha)-\cos(30°+\alpha)+\sin^2 30°-\cos(45°+\alpha)+\sin^2 60°+$
$+\sin(60°-\alpha)$;

j) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$;

k) $2(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2-(\sin^8\alpha+\cos^8\alpha)$;

l) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

29. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

b) $2(1+\sin\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)=(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;

c) $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$;

d) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta-1$;

e) $\sqrt{(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)}=\cos\alpha$;

f) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=(1+\sin\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha)$;

g) $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1+\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

h) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}^3\alpha+1}{\operatorname{tg}^3\alpha-1}$;

i) $(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\cos^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

j) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

k) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

l) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$;

m) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta$;

n) $\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha\,(1+\sin\alpha)}+\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG MEGOLDÁSA. NUMERIKUS FELADATOK

30. Jelölje a és b a derékszögű háromszög két befogóját, c az átfogót; α, β, γ rendre a szemben fekvő szögeket ($\gamma = 90°$); m_c az átfogóhoz tartozó magasságot; x az a befogónak, y a b befogónak az átfogóra való vetületét, t a háromszög területét.
A túloldali táblázat a felsorolt adatokból készült 20 háromszögre.
Ha a 9 mennyiség közül 2 adott, a többi kiszámítható. Számítsuk ki a megadott 2 mennyiség alapján a többi alkotórészt, majd hasonlítsuk össze az eredményt a táblázat értékeivel:

a) adott: a és b;
b) adott: a és c;
c) adott: b és c;
d) adott: a és α;
e) adott: a és β;
f) adott: b és α;
g) adott: b és β;
h) adott: c és α;
i) adott: c és β;
j) adott: t és a;
k) adott: t és b;
l) adott: t és c;
m) adott: a és x;
n) adott: b és y;
o) adott: a és m_c;
p) adott: b és m_c;
q) adott: m_c és x;
r) adott: m_c és y;
s) adott: m_c és α;
t) adott: m_c és β;
u) adott: x és c;
v) adott: x és y;
z) adott: t és β.

31. A táblázat adatainak felhasználásával számítsuk ki a derékszögű háromszög alkotórészeit a következő adatok alapján:

a) adott: $a+b$ és α;
b) adott: $a-b$ és α;
c) adott: $c+b$ és α:
d) adott: $c-b$ és α;
e) adott: $x-y$ és α;
f) adott: t és α;

Alkotórészek	a	b	c	α	β	m_c	x	y	t
Háromszög sorszáma									
1.	12	5	13	67°23′	22°37′	4,62	11,08	1,92	30
2.	3	$3\sqrt{3}$	6	30°	60°	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	1,50	4,50	$4{,}5\cdot\sqrt{3}$
3.	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	2,5	5	60°	30°	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{8}\cdot\sqrt{3}$
4.	1,3	1,3	$1{,}3\cdot\sqrt{2}$	45°	45°	$\frac{1{,}3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1{,}3\sqrt{2}}{2}$	0,92	0,845
5.	0,4	0,3	0,5	53°8′	36°52′	0,24	0,32	0,18	0,06
6.	5,47	2,884	6,184	62,2°	27,8°	2,55	4,84	1,344	7,888
7.	6,72	5,25	8,53	52°	38°	4,137	5,3	3,23	17,64
8.	24	7	25	73°44′	16°16′	6,72	23,04	1,96	84
9.	28	20	34,4	54°30′	35°30′	16,28	22,79	11,61	280
10.	48	55	73	41,1°	48,9°	36,16	31,56	41,44	1320
11.	117	44	125	69°23′	20°37′	41,18	109,51	15,49	2574
12.	91	60	109	56,6°	33,4°	50,09	76	33	2730
13.	527	336	625	57°29′	32°31′	283,3	444,40	180,60	88536
14.	7,5	12,4	14,5	31,17°	58,83°	6,42	3,88	10,62	46,5
15.	11,92	52,47	53,8	12,8°	77,2°	11,62	2,64	51,16	312,72
16.	19,3	16,97	25,7	48,68°	41,32°	12,75	14,5	11,2	163,76
17.	2,39	1,48	2,81	58°16′	31°44′	1,26	2,03	0,78	1,77
18.	12	26,95	29,51	24°	66°	10,96	4,88	24,63	161,70
19.	12	16	20	36°52′	53°8′	9,6	7,2	12,8	96
20.	45	108	117	22°37′	67°23′	41,54	17,31	99,69	2430

g) adott: $a+b$ és c;	*l)* adott: $c-b$ és x;
h) adott: $a-b$ és c;	*m)* adott: $x-y$ és m_c;
i) adott: a és $c+b$;	*n)* adott: c és m_c;
j) adott: a és $c-b$;	*o)* adott: $\frac{a}{b}$ és c;
k) adott: $c+b$ és x;	*p)* adott: $\frac{c}{a}$ és b.

32. Valamely derékszögű háromszög befogóinak aránya 3:4; az átfogóhoz tartozó magasság 24. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

33. Valamely derékszögű háromszög átfogójának és egyik befogójának aránya 7:5. Az illető befogónak az átfogóra való vetülete 32,14 cm. Mekkorák a háromszög szögei és oldalai?

NEM MINDEN ALKOTÓRÉSZ KISZÁMÍTÁSÁT KÍVÁNÓ FELADATOK

34. Valamely derékszögű háromszög kerülete 64 cm. Egyik szöge 40°. Mekkora az átfogója?

35. Valamely derékszögű háromszög kerülete 1815,47 mm. Egyik szöge 15°26′. Mekkorák a befogói?

36. Valamely derékszögű háromszög területét az átfogóhoz tartozó magasság 1:5 arányban osztja. Mekkorák a háromszög szögei?

37. Valamely derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$; $t = 12\ \text{cm}^2$. Mekkorák a befogók? Mekkorák a háromszög szögei?

38. Határozzuk meg a derékszögű háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha

a) $c = 1{,}45$ cm és $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}05$;
b) $a = 24$ cm és $\cos \alpha = 0{,}28$;
c) $b = 117$ cm és $\sin \alpha = 0{,}352$.

39. Valamely derékszögű háromszögben a két befogó összege 6 m-rel nagyobb az átfogónál. Az egyik hegyesszög 73°44′. Mekkorák az oldalak?

40. A derékszögű háromszög egyik befogója számtani közepe a másik befogónak és az átfogónak. Mekkorák a háromszög szögei?

41. Egy derékszögű háromszögbe írt kör sugara 5 cm; egyik hegyesszöge 54°30′. Mekkorák a háromszög oldalai?

42. Mekkorák a derékszögű háromszög oldalai és szögei, ha a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza 12,25 cm és 7,81 cm?

43. Mekkorák a derékszögű háromszög oldalai és szögei, ha adott a 2 befogó összege, valamint a nagyobbik oldalhoz, az a-hoz tartozó súlyvonal: s_a? Legyen:

a) $a+b = 31$ cm és $s_a = 13{,}89$ cm;
b) $a+b = 14$ cm és $s_a = 2\sqrt{13}$ cm.

44. Mekkorák a derékszögű háromszög oldalai és szögei, ha a körülírt kör sugara 12,5 cm, az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal $5\sqrt{13}$ cm?

45. Egy derékszögű háromszögben az egyik befogót a szemközti szög felezője $p = 5{,}5$ cm és $q = 3{,}3$ cm hosszú részekre osztja. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEKKEL KAPCSOLATOS SZÖVEGES FELADATOK

1. A tangens és cotangens szögfüggvények alkalmazása

46. Egy lejtő 31°15'-es szöggel hajlik az alapjához. Ennek hossza 400 m. Milyen magasra visz a lejtő?

47. Egy torony teteje a talpától 50 m távolságból 32°37'-nyi szög alatt látszik. Milyen magas a torony?

48. Milyen magas az a torony, amelynek árnyéka a vízszintes síkon 100 m, ha a Nap sugarai 35°-os szög alatt esnek a földre?

49. Egy folyó partján egy torony áll, amelynek 25 m magasan levő ablakából a folyó szélessége 86°46'-nyi szög alatt látszik. Milyen széles a folyó?

50. Egy folyó szélességének a megállapítása végett a parton $AB = 425$ m hosszú alapvonalat veszünk fel úgy, hogy a folyó szélességét meghatározó AC egyenes az alapvonalra merőleges legyen, ahol C a túlsó part egy jellegzetes pontja. Milyen széles a folyó, ha szélessége B pontból 25°27'-nyi szög alatt látszik?

51. Egy csavar átmérője 50 mm. A csavarmenet emelkedési szöge 4°. Milyen magas egy csavarmenet?

52. Egy csavar átmérője 32,4 mm. Egy menetmagasság 12 mm. Mekkora a csavarmenet emelkedési szöge?

53. Egy csavarmenet emelkedési szöge 3,5°; egy menetmagasság 10 mm. Mekkora a csavar átmérője?

54. Milyen távolságra vagyunk a 12 m magas épülettől, ha 27°14'-nyi szög alatt látjuk, s szemünk az épület talppontjával egy vízszintes síkban fekszik?

55. Mekkora a 36,83 m magas torony árnyéka, ha a nap sugarai a föld felszínére 55°4'-nyi szög alatt esnek?

56. Egy kikötő világítótornyából a tenger szintje fölött 45 m magasságból egy hajó 8°24'-nyi depresszió szög alatt látszik. Milyen távol van a hajó?

57. Milyen magasra emelkedett a helikopter, ha róla az alatta levő ponttól 3 km-nyire nyúló egyenes országút hosszúsága 69°47'-nyi szög alatt látszik?

58. Lejtős feljáró 4 m magasra visz. A vízszintesen milyen távol kezdődjék a feljáró, ha hajlásszöge 4°-os lehet?

59. Egy fa két ház között, összekötő egyenesükön áll. Az egyiktől 25 m távolságra van. Ettől aháztól a fa 44°20'-nyi, a másiktól 29°50'-nyi szög alatt látszik. Milyen messze van egymástól a két ház?

60. Egy folyó szélességének meghatározása végett az egyik parton 56 m hosszú alapvonalat veszünk fel. Az alapvonal két végpontjánál megmérjük a túlsó part egy kiemelkedő pontja felé mutató irány és az alapvonal közti szögeket: 67,1° és 72°38'. Milyen széles a folyó?

61. Egy hegyre két ösvény vezet, melyek azonos szintről, ellentétes oldalról, egymástól 500 m távolságról indulnak. Az ösvények emelkedési szöge 32°22' és 42°14'. Milyen magas a hegy?

62. Egy egyenes útszakasz emelkedése 1000 m-en 50 m. Mennyi az emelkedés szöge?

63. Egy hegyre az út 2,5°-nyi szög alatt vezet. Hány % az emelkedés, azaz mekkora az út azon pontjának az út kezdőpontján áthaladó vízszintes sík fölötti magassága, amelynek talppontja az út kezdőpontjától 100 m-nyi távolságban van?

64. Egy hegyi út emelkedése 4,8%. Mekkora szöggel hajlik az út a vízszintes síkhoz?

65. Mekkora szöggel esnek a Nap sugarai a földre, ha valamely függőleges tárgy árnyéka a vízszintes síkon 3-szor akkora, mint amilyen magas a tárgy?

66. Egységnyi oldalú négyzet átlójának az oldallal bezárt szögét osszuk három egyenlő részre. Mekkora részekre osztják az osztópontokat a csúccsal összekötő egyenesek a négyzet szemközti oldalát?

67. Egységnyi oldalú négyzet egyik oldalát osszuk 3 egyenlő részre. Az osztópontokat kössük össze az egyik szemközti csúccsal. Mekkora részekre osztják a húzott egyenesek az átló és az oldal közötti szöget?

68. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója a kocka lapjaival?

69. A P pontban ható $F_1 = 72$ kp és $F_2 = 65$ kp erők merőlegesek egymásra. Mekkora az eredő erő, és mekkora szöget zár be az F_1 erővel?

70. Szállításnál csúszdát állítanak fel. Legalább mekkora legyen a csúszda hajlásszöge, ha a súrlódási tényező 0,25?

71. Gördítésre lejtőt állítanak fel. Mekkora legyen a lejtő hajlásszöge, ha a vontatóellenállási tényező 0,04?

72. Mekkora szöggel tér el a függőlegestől a kerékpáros, ha sebessége 32,4 km/óra, 12 m sugarú köríven hajt, s az eredő erő testének szimmetriavonalába esik?

73. Határozzuk meg annak az épületnek a magasságát, amely a tőle 150 m távolságban felállított 1,5 m magas teodolittal mérve, 7,8°-os emelkedési szög alatt látszik.

74. Egy 25 m magas épület egy 12 m magas épület tetejéről 14° emelkedési szög alatt látszik. Milyen messze van a két épület egymástól?

75. Mekkora látószög alatt látja az a megfigyelő — akinek szeme 1,60 m magasan van a föld fölött — a 45 m távolságban levő 65 m magas tornyot?

76. Egy 10 m magas torony tetején levő csillag a toronytól 25 m távolságból 1°10′-nyi szög alatt látszik. Milyen magas a csillag?

77. Egy épülettől 25 m távolságból az épület egyik ablakának felső párkánya 40°2′-nyi, az alsó párkánya pedig 38°22′-nyi emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az ablak?

78. Egy hegycsúcsról nézve, a mellette levő völgyben álló 60 m magas torony teteje 20°30′, talppontja 24°25′ depressziószög alatt látszik. Milyen magasan van a hegycsúcs a völgy fölött?

79. Egy hegy csúcsán áll egy 15 m magas kilátó, amelynek talppontját és csúcsát a mellette levő völgyből 29°10′ és 32°8′-nyi emelkedési szög alatt látjuk. Milyen magasan van a hegy csúcsa a megfigyelő szintjétől számítva?

80. Hegy tetején levő emlékoszlop a völgyből 1°5′-nyi szög alatt látszik, a hegy pedig 18°41′ szög alatt. A hegy 380 m magas. Milyen magas az emlékoszlop?

81. Egy toronyból egy tereppont 4°37′-nyi, a 20 m-rel magasabb ablakból 5°42′-nyi depressziószög alatt látszik. Milyen messze van a tereppont, és milyen magasan vannak az ablakok?

82. A 40 m magas toronyablakból egy léghajó 34°20'-nyi emelkedési szög alatt látszik, a torony melletti tó tükréről visszavert képe pedig 38°42'-nyi depressziószög alatt. Milyen magasan van a léghajó?

83. Valamely folyó partjától 50 m távolságban egy torony áll, amelynek 23 m magasan levő ablakából a folyó szélessége 16°52'-nyi szög alatt látszik. Milyen széles a folyó?

84. Valamely hegy csúcsáról egy folyó két átellenes pontját 42°53' és 19°48'-nyi depressziószög alatt látjuk. A folyó 280 m széles. Milyen magas a hegy, ha a két vizsgált pontot összekötő egyenes átmegy a hegy talppontján?

85. Határozzuk meg egy épület magasságát, ha talppontját megközelíteni nem tudjuk, de a talppont irányában húzott 16 m hosszú szakasz két végpontjából az épület csúcsa 54,5°, illetve 45°-os szög alatt látszik.

86. Két repülőgép pontosan egymás fölött repül 240 km/óra sebességgel állandó magasságban. A magasabban repülő gépen ülő megfigyelő a haladás irányában levő helységet 4,6° depressziószög alatt látja. Ugyanabban a pillanatban a másik gép megfigyelője 3,4° depressziószög alatt látja ugyanazt a helységet. Öt és fél percnyi továbbrepülés után már mindegyik gép megfigyelője maga mögött látja a helységet, pontosan az előbb mért depressziószögek alatt. Milyen magasan haladt a két gép egymás fölött?

87. Egy repülőgép a föld felett 1700 m magasan állandó magasságban repül. A megfigyelő egy a haladás irányában előtte fekvő helységet 7,2° depressziószög alatt látja. 3 perc továbbrepülés után már 47,5° depressziószög alatt látja maga előtt ugyanazt a helységet. Mekkora utat tett meg a gép a 3 perc alatt, és mekkora sebességgel haladt?

88. Egy léghajót A-ból kelet felé 30°; B-ből észak felé 25° emelkedési szög alatt látunk. $AB = 6$ km. Mekkora a léghajó magassága?

89. Valamely nyugati irányban 390 km/óra sebességgel állandó magasságban repülő repülőgépről egy déli irányban fekvő tárgy $\alpha = 34°28'$ depressziószög alatt látszik. 1 perc múlva ugyanerre a mozdulatlan tárgyra a depressziószög $\beta = 23°41'$. Milyen magasan repül a gép?

II. A sinus és cosinus szögfüggvények alkalmazása

90. Milyen magas az a hegy, amelyre egy 2356 m hosszú egyenes út vezet, ha az út a vízszintes síkhoz 10°49'-nyi szög alatt hajlik?

91. Egy 8 m hosszú deszkával emelvényre feljárót készítenek, mely a vízszintessel 10°6'-nyi szöget zár be. Milyen magas az emelvény?

92. Egy lejtős út 3 szakaszból áll. Az első szakasz süllyedő; hossza 300 m, és a vízszintessel 7°-os szöget képez. A második szakasz emelkedő; hossza 136 m, emelkedési szöge 6,3°. A harmadik ismét süllyedő; hossza 1000 m, hajlásszöge 6°. Hány m-rel van magasabban a kiindulópont a végpontnál?

93. Mekkora erővel tarthatjuk egyensúlyban a 6 m hosszú és 3 m magas lejtőn a 350 kp súlyú csillét, ha az erő a lejtővel párhuzamos, és ha a súrlódást nem vesszük figyelembe? Mekkora a lejtő hajlásszöge?

94. Valamely 25,5°-os hajlásszögű lejtőre helyezett test lecsúszását 86,1 kp erővel gátoljuk meg, a súrlódást nem véve figyelembe. Mekkora a lejtőre helyezett test súlya?

95. Egy utcai lámpa két felfüggesztési pontjának távolsága 10 m. A lámpa a távolság felezőpontjában függ, és belógása 15 cm. A lámpa súlya 6 kp. Mekkora erők keletkeznek a huzalokban? Mekkora szöget zár be a huzal a vízszintessel?

96. Egy 25°-os hajlású lejtőre helyezett 1 Mp súlyú testet felfelé tolunk, majd visszaeresztjük. A lejtő hossza 100 m, a súrlódási tényező 0,2.
a) Mekkora erő kell a test feltolásához? Mekkora a végzett munka?
b) Mekkora a fékezőerő a süllyesztésnél? Mekkora a végzett munka?

97. Egy út hossza a térképen 54 mm. (10 000-szeres a kicsinyítés.) Az út hajlásszöge a vízszinteshez 4,5°. Mekkora az út valódi hossza?

98. Mekkora szög alatt hajlik a vízszinteshez egy 1532 m hosszú egyenes út, mely 84 m magas hegyre vezet?

99. Egy oszlop 6,3 m hosszú dróttal van kikötve, s a drót 71°44′-nyi szöggel hajlik a vízszinteshez. Ha 5,5 m-rel távolabb akarjuk kikötni, hány m-rel hosszabb drótra lesz szükségünk?

100. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög 36°52′, a szöget felező egyenes hossza 25 cm. Mekkorák a háromszög befogói?

101. Egy toronyantennához 230 m hosszú egyenes út vezet, melynek emelkedése 21°17′. Az út elejéről az antenna csúcsa 39°51′ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az antenna?

102. Tó felett repülőgép halad 4°8′ emelkedéssel. Az egyik part felett 1500 m magasan, a másik felett 2000 m magasan halad át. Útja a tó felett 1 perc 18 sec ideig tartott. Mekkora sebességgel haladt a gép?

103. Egy hegy P csúcsát a hegy lábánál levő A pontból 60°-os szög alatt lehet látni. Ha az A pontból a vízszintes síkhoz 30° alatt hajló úton 1 km-t haladunk a csúcs felé, olyan B pontba jutunk, melyben PBA szög 135°. Milyen magas a hegy?

104. 80 m hosszú lejtős út felső végén lévő emlékoszlopot 3,7°-os szög alatt látunk az út elejéről. A lejtő hajlásszöge 21°18′. Milyen magas az emlékoszlop?

105. Egy lejtős út alsó végén levő torony magasságát kell meghatározni. Ezért az úton a torony talppontjától felfelé lemérünk 200 m hosszú alaptávolságot. Ennek felső pontjából a torony csúcsát 23°33′ emelkedési szög alatt, talppontját pedig 20,48° depressziószög alatt látjuk. Milyen magas a torony?

106. Egy hegyről egy felhő 17,5° emelkedési szög alatt, képe pedig a hegy lábánál elterülő tóban 24° depressziószög alatt látszik. Milyen magas a hegy, milyen magasan van a felhő a víz színe fölött, ha a hang terjedési sebessége 340 m/sec, és a dörgés a villámlás után 10 sec után hallatszik?

107. A természetjáró egy hegyoldal valamely pontjából a tőle 1657 m távolságban levő hegycsúcsot 23°20′ emelkedési szög s ugyanennek a hegycsúcsnak a tükörképét az alatta elterülő tó tükrében 49°30′ depressziószög alatt látja. Milyen magasan van a természetjáró, s milyen magasan van a hegycsúcs a tenger színe felett, ha a tó tükre 608 m-nyire van a tenger színe felett?

108. Osszunk fel egy derékszöget körzővel és vonalzóval két hegyesszögre: α-ra és β-ra, ha tudjuk, hogy

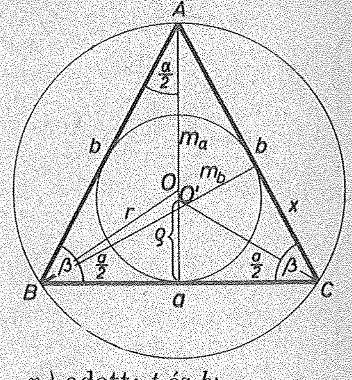
$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGRE VISSZAVEZETHETŐ FELADATOK

109. Jelölje a az egyenlő szárú háromszög alapját, b a szárát, α az alappal szemközti, β az alapon fekvő szöget; m_a az alaphoz, m_b a szárhoz tartozó magasságát; x az alapnak a szárra való vetületét, r a háromszög köré írható kör sugarát, ϱ a beírt kör sugarát, t a háromszög területét. A túloldali táblázat 12 háromszögre vonatkozó adatokat tartalmaz (109. ábra):

Számítsuk ki az alábbi feladatokat a táblázat adatai alapján, majd hasonlítsuk össze az eredményeket a táblázat értékeivel.

Számítsuk ki a többi alkotórészt, ha



109

a) adott: a és b;
b) adott: a és m_a;
c) adott: b és m_a;
d) adott: a és β;
e) adott: b és β;
f) adott: m_a és β;
g) adott: a és m_b;
h) adott: a és x;
i) adott: m_b és x;
j) adott: m_b és b;
k) adott: m_b és β;
l) adott: x és β;
m) adott: t és a;
n) adott: t és b;
o) adott: t és α;
p) adott: a és ϱ.

110. Egy egyenlő szárú háromszögben az alap és a szár különbsége 30,4 m; az alapon fekvő szögek 29,4°-osak. Mekkora a háromszög szára, alapja, területe?

111. Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 78,4 m, a csúcsnál levő szög 61°10′. Mekkorák a háromszög oldalai, valamint a területe?

112. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 300 m, a szár és az alaphoz tartozó magasság különbsége 36 m. Mekkorák a szárak, a szögek, az alaphoz tartozó magasság és a terület?

113. Egy egyenlő szárú háromszögben az alap és a szár összege 11 cm, az alapon fekvő szögek 53°8′ nagyságúak. Mekkorák a háromszög oldalai, csúcsnál fekvő szöge s területe?

114. Egyenlő szárú háromszög alapja 16,4 cm; az alapon fekvő szögek 11°16′-esek. Az alapot mindkét végén a szárral megtoldjuk. Mekkorák az így keletkezett háromszög oldalai?

115. Egy egyenlő szárú háromszög területe 108 dm^2, a csúcsnál levő szöge 36°52′. Mekkora az alapja és a magassága?

116. Egy egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága 25 m; az alapvonal felezőpontjából a szárra húzott merőleges pedig 12 m. Mekkorák a háromszög szögei?

117. Mekkorák valamely egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei, ha az alaphoz tartozó magasság 15 m, a szárhoz tartozó magasság pedig 8 m?

Alkotórészek	a	b	α	β	m_a	m_b	x	r	ϱ	t
Háromszög sorszáma										
1.	6	5	73°44′	53°8′	4	4,8	3,6	3,125	1,5	12
2.	11,326	7	108°	36°	4,115	6,657	9,163	5,95	1,84	23,32
3.	5,385	6,3	50,6°	64,7°	5,7	4,869	2,3	3,485	1,7	15,347
4.	6,8	9,076	44°	68°	8,415	6,3	2,547	4,894	2,293	28,611
5.	88	125	41°14′	69°23′	117	82,37	30,98	66,75	30,46	5148
6.	13,25	22,98	33°30′	73°15′	22	12,68	3,82	12	4,92	145,75
7.	100	161,8	36°	72°	153,88	95,11	30,9	85,06	36,33	7694
8.	144	97	95°50′	42°5′	65	96,5	106,88	72,38	27,69	4680
9.	650	397	109°54′	35°3′	228	373,3	532,09	345,64	102,63	74 100
10.	62,8	103,9	35°12′	72°24′	99,037	59,86	19	54,47	22,98	3109,76
11.	800	401	171,9°	4°3′	28,36	56,56	798	2839	14,15	11 340
12.	10	716,3	0,8°	89,6°	716,3	10	0,07	357,14	4,965	3581,5

SZÖVEGES FELADATOK EGYENLŐ SZÁRÚ HÁROMSZÖGEKRE

118. Egy 2 m hosszú kétágú létra nyílásszöge 40°. Milyen magasságban állunk a létra tetején?

119. Egy 2 m hosszú kétágú létra magassága 1,8 m. Mekkora a létra nyílásszöge?

120. Egy kétágú létra nyílásszöge 65°18'. Milyen hosszú kötéllel kötötték össze a tetejétől a létrán 1 m-nyi távolságból kifeszítve?

121. Fonálinga hossza 42,8 cm. Két szélső helyzete között a távolság 21,2 cm. Mekkora szöget zár be két szélső helyzetében?

122. Egy külső pontból egy körhöz húzott érintők hossza 40 cm, a pontnak a kör középpontjától való távolsága 50 cm. Mekkora szöget zár be a két érintő? Mekkora az érintési pontokat összekötő húr hossza?

123. Egy külső pontból egy körhöz húzott érintők hossza 10 cm; az érintők által bezárt szög 30°. Mekkora a kör sugara és az érintési pontokat összekötő húr hossza? Mi az eredmény, ha az érintők által bezárt szög 60°?

124. Egy téglalap egyik 16 cm hosszú oldala az átlóval 65°26'-nyi szöget zár be. Mekkora a téglalap másik oldala, átlója, területe, s mekkora szöget zár be a két átlója?

125. Egy téglalap két átlója 36°54' szöget zár be egymással. Ezzel a szöggel szemközti oldal 12 cm hosszú. Mekkora a téglalap területe? Oldjuk meg ezt a feladatot általánosan.

126. Egy téglalap 26 m hosszú átlója az egyik derékszöget 2:3 arányban osztja. Mekkorák az oldalak?

127. Mekkora szög alatt metszik egymást valamely téglalap átlói, ha oldalai 38 m és 54 m hosszúak?

128. Egy téglalap területe 287,4 dm^2. Az átló és az egyik oldal által bezárt szög 25°38'. Mekkorák a téglalap oldalai?

129. Egy téglalap átlója 45,74 cm. A két átló által bezárt szög 42°28'. Mekkorák a téglalap oldalai?

130. Két párhuzamos fasor egymástól való távolsága 16 m, hosszuk 586 m. Mekkora szög alatt látjuk a két fasor egyik végeinek távolságát, ha a fasornak a másik végén, a középen helyezkedünk el?

131. Egy négyzet alapú egyenlő oldalélű gúla alapéle 7,2 cm; magassága 10 cm. Mekkora az oldaléle, s mekkora az oldalélnek az alaphoz való hajlásszöge?

132. Egy négyzet alapú egyenlő oldalélű gúla alapéle 6 cm; felszíne 132 cm^2. Mekkora az oldaléle, s mekkora az oldalélnek az alaphoz való hajlásszöge?

133. ABC egyenlő szárú háromszöget ($BC = AC = a$), melyben $BCA \sphericalangle = 120°$, forgassunk meg CB oldala körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

134. Egy rombusz átlói 54,4 m és 18,6 m hosszúak. Mekkora az oldala, és mekkorák a szögei?

135. Egy rombusz oldala 7,07 cm hosszú; hegyesszöge 67,4°. Mekkorák az átlói?

136. Egy rombusz oldalának és nagyobbik átlójának összege 78,56 m, a hegyesszöge 29°. Mekkora az oldala?

137. Mekkora a rombusz oldala, ha kisebbik átlója 18,36 cm, ezzel szemközti szöge pedig 56°20'?

138. Ha egy rombusz oldalainak felezőpontját összekötjük, olyan téglalapot kapunk, melynek területe 126 m^2. A rombusz egyik szöge 138°. Mekkora a rombusz oldala?

139. Egy rombusz kerülete 30 cm, területe 54 cm^2. Mekkorák az átlói és a szögei?

140. Egy α hegyesszögű rombuszt forgassunk meg előbb egyik, azután a másik átlója körül. Számítsuk ki a keletkezett testek felszínének és térfogatának arányát!

SZABÁLYOS SOKSZÖGEKRE, KÖRÖKRE, TRAPÉZOKRA, HÁROMSZÖGEKRE, SOKSZÖGEKRE VONATKOZÓ FELADATOK

141. Mekkora a 12 cm sugarú körbe írt szabályos tízszög oldala?

142. Mekkora a 7 cm sugarú körbe írt szabályos hétszög oldala?

143. Mekkora sugarú körbe írhatunk 15 cm oldalú szabályos ötszöget?

144. Mekkora sugarú körbe írhatunk 21 cm oldalú szabályos kilencszöget?

145. Mekkora a 18 cm sugarú körbe írt szabályos tizenháromszög kerülete?

146. Mekkora a 20 cm sugarú körbe írt szabályos tizenegyszög területe?

147. Mekkora a szabályos ötszög területe, ha oldala 6 m?

148. Mekkora a 10 cm sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög területe?

149. Mekkora a szabályos ötszög oldala, ha területe 145 cm^2?

150. Mekkora a szabályos nyolcszög területe, ha oldala 20 cm?

151. Mekkora a szabályos tízszög területe, ha oldala 15 cm?

152. Mekkora a szabályos tizenkétszög területe, ha oldala 7,53 cm?

153. Egy szabályos tizenkétszög területe 140 cm^2. Mekkora az oldala?

154. A párizsi Cirque National alapja olyan szabályos tizenhatszög, melynek területe 753,18 m^2. Mekkorák az oldalai?

155. Egy kör sugara 4 cm. Mekkora a hozzá tartozó szabályos húr- és érintő-nyolcszög oldala, kerülete és területe?

156. Mekkora az r sugarú körbe írható szabályos harmincszög kerülete és területe; a szabályos hatvanszög kerülete és területe?

157. Mekkora az r sugarú kör köré írható szabályos harmincszög kerülete és területe; a szabályos hatvanszög kerülete és területe?

158. Mekkora a szabályos húr- és érintőnegyvenötszög kerülete, ha a kör sugara 1 m? Milyen korlátokat nyerünk a felvett két sokszög kerületének összehasonlításából a π számára?

159. Határozzuk meg általánosságban a szabályos húr- és érintő sokszögek kerületét és területét, ha adott a kör sugara. Milyen korlátokat nyerünk a kerületek összehasonlításából a π számára, illetve a kör kerülete és területe számára?

160. Határozzuk meg π értékét az 1 m sugarú körhöz tartozó 90 oldalú és 120 oldalú szabályos húr- és érintősokszög területeinek összehasonlításával.

161. Egy szabályos ötszög oldala 20 cm. Mekkorák a beírt és a körülírt körök sugarai?

162. Egy szabályos nyolcszögbe rajzolt kör sugara 26 cm; mekkora a nyolcszög oldala és a nyolcszög köré rajzolt kör sugara?

163. Egy szabályos tizenkétszög területe 10 m^2. Mekkorák a beírt és a körülírt körök sugarai?

164. Mekkora a szabályos nyolcszög kerülete és területe, ha két szemközti oldal távolsága 38,28 cm?

165. Egy szabályos ötszög alakú parkrészlet kerülete 62 m. Mekkora a területe, és milyen hosszú a bármelyik csúcspontból a szemközti oldalra bocsátott merőleges távolság?

166. Mekkora a szabályos ötszög kerülete és területe, ha az átlója 8 cm?

167. Mekkora az r sugarú kör köré írt szabályos hatszög és a körbe írt szabályos háromszög területének aránya?

168. Dürer Albert szerint a körbe írt szabályos hétszög oldala közelítőleg egyenlő a beírt szabályos háromszög oldalának a felével. Szerkesszünk ezen az alapon olyan hétszöget, melynek hat oldala egyenlő. Vajon a hetedik oldal kisebb vagy nagyobb lesz? Mennyire pontos Dürer állítása?

169. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos n-szögbe és a köré írható körök által meghatározott körgyűrű területe $\frac{\pi \cdot T}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$, ha T a szabályos sokszög területe!

170. Szabályos tizenkétszög területe 7568,5 cm². Mekkora annak a körgyűrűnek a területe, amelyet a tizenkétszögbe és a köré írt körök zárnak be?

171. Két koncentrikus kör sugara 5,6 cm és 5,409 cm. Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek oldalai az első körben húrok, a másodikban érintők? Mekkora e sokszög oldala és területe?

172. Jelentse r a kör sugarát; h a kör egy húrját, α a húrhoz tartozó középponti szöget; i a húrhoz tartozó ívet; β a középponti szöggel egy íven álló kerületi szöget. Ezek alapján oldjuk meg a következő feladatokat:

a) $r =$ 17 cm;	$\alpha = 56°8'$;	$h = ?$	
b) $r =$ 5 cm;	$\alpha = 73°46'$;	$h = ?$	
c) $r =$ 32,25 cm;	$h =$ 18,75 cm;	$\alpha = ?$	
d) $r =$ 6 m;	$h =$ 9 m;	$i = ?$	$\alpha = ?$
e) $h =$ 7 m;	$\alpha = 122°6'$;	$r = ?$	
f) $h =$ 21 cm;	$\alpha = 24°7'$;	$i = ?$	
g) $i =$ 486,55 cm;	$\alpha = 112°28'$;	$h = ?$	
h) $\beta = 30°$;	$r =$ 3 cm;	$h = ?$	
i) $\beta = 48°35'$;	$h =$ 4,5 m;	$r = ?$	
j) $r =$ 25 cm;	$h =$ 15 cm;	$\beta = ?$	
k) $h =$ 4 m;	$\beta = 36°$;	$r = ?$	
l) $r =$ 7,4 m;	$i =$ 6,64 m;	$h = ?$	

173. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm; az alapon fekvő szögek 70°-osak. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara?

174. Egy háromszög egyik oldala 5 cm, a vele szemközti szög 62°. Mekkora a körülírt kör sugara?

175. Egy kör húrja a sugár $\frac{2}{3}$-a. Mekkora a húrhoz tartozó középponti szög?

176. Hogyan aránylik azon húr a sugárhoz, amelyhez tartozó ív a sugárral egyenlő?

177. Egy gép ütőkarja lengő mozgást végez oda és vissza. Az ütőkar hossza 70 cm, végpontja a két szélső helyzetben 36 cm-re van egymástól. Mekkora utat tesz meg az ütőkar végpontja egy 8 órás műszak alatt, ha percenként 50 ütést végez?

178. Egyenes szíjhajtás esetén milyen hosszú szíj szükséges 56 cm-es és 26 cm-es sugarú tárcsák összekapcsolásához, ha a tárcsák tengelyeinek távolsága 335 cm?

179. Határozzuk meg, keresztezett szíjhajtás esetén milyen hosszú szíjra van szükség, ha a motortárcsa átmérője 52 cm, a szövőgép tárcsájának átmérője 112 cm, a tárcsák tengelyeinek távolsága 335 cm!

180. Két szíjkorong átmérője 40 és 10 cm. Egyenes szíjhajtás esetén mekkora a tapadási felület hossza, ha a nagyobb korongon mért középponti szög 220°? Mekkora a két korong középpontjainak távolsága?

181. Egy 3 cm és egy 8 cm sugarú kör középpontjai 13 cm távolságra vannak egymástól. Mekkora szöget zár be a két kör közös külső érintője, a két belső érintője, valamint egy belső és egy külső érintő?

182. Egy kör két átmérője 36°22′ szög alatt metszi egymást. Ha végpontjaikat összekötjük, az egyik húr 409 cm-rel hosszabb, mint a másik. Mekkora a kör sugara, mekkorák a húrok?

183. Egy vashíd két pillérjének egymástól való távolsága 140 m. Az áthidaló köríves ívhíd nyílásmagassága 37,5 m. Mekkora az ív hossza?

184. Egy közúti híd két pillérjét áthidaló köríves ívhíd nyílásmagassága 25 m. A körív sugara 73 m. Mekkora a két pillér távolsága, s milyen hosszú az áthidaló körív?

185. Egy híd két pillérjének távolsága 74,5 m. E két pillér közötti hídrészt köríves tartószerkezet erősíti. Mekkora sugarú a körív, mekkora a hossza és a legnagyobb magassága, ha a pillértől 5 m-nyire 1,42 m magas?

186. Egy kör sugara 10 cm, az ívhez tartozó szög 54°38′. Mekkora az ívhez tartozó körszelet területe?

187. Egy 10 m sugarú körcikk területe 10 m². Mekkora a körcikkhez tartozó húr?

188. Egy 11 cm sugarú körlemezből 16 cm-es húr mentén levágjuk a kisebbik körszeletet. Az anyag hány %-át használtuk fel?

189. Egy körben a középponttól 5 cm-nyire fekvő húrnak 47°28′-nyi középponti szög felel meg. Mekkora a kérdéses húr, a kör sugara, a húrhoz tartozó körcikk és körszelet területe?

190. Egy külső pontból az r sugarú körhöz húzott érintők által bezárt szög 60°. Mekkora a kör és az érintők közötti terület? Mekkora a kérdéses terület, ha az érintők által bezárt szög 90°?

191. Egy kör sugara 20 m. A kör mekkora része fekszik egy átmérő s a vele párhuzamos húr között, melynek végpontjait 36 m hosszú ív köti össze?

192. Egy körszelet keresztmetszetű alagút magassága 10 m, alapszélessége (a körszelet húrja) 8 m s az alagút hossza 328 m. Hány 15 tonna teherbírású gépkocsit töltött meg az alagútból kitermelt kőzet, ha 1 m³ kőzet tömege 2,4 tonna?

193. Egy 80 cm átmérőjű olajoshordóból elfogyott az olaj egy része. Mennyi olaj maradt a hordóban, ha az oldalnyíláson függőlegesen a hordó aljáig leeresztett fapálca 20 cm-es darabon maradt olajos, és a hordó 2 m hosszú? Hány % olaj fogyott el?

194. Két 30 cm sugarú kört úgy helyezünk egymásra, hogy középpontjaik 48 cm-re legyenek egymástól. Mekkora a közösen fedett terület?

195. Egy 25 cm sugarú kör egyik félkörében két párhuzamos húrt húzunk, melyeknek hossza 28 cm és 48 cm. Mekkora a kör területének köztük levő darabja?

196. Egy derékszögű háromszög átfogója 324 cm, egyik hegyesszöge 36°. Befogói fölé kifelé félköröket rajzolunk. A kapott félkörök területeit az átfogó fölött húzott félkörrel felbontjuk. Bizonyítsuk be, hogy a két hold alakú idom területének összege egyenlő a háromszög területével.

197. Esztergapadon olyan csonka kúpot kell készíteni, amelynek kis átmérője $d = 80$ mm, nagy átmérője $D = 104$ mm, a kúp hossza $l = 105$ mm. Mekkora a félkúpszög?

198. Kúpos esztergályozásnál a nagy átmérő $D = 28$ mm, a csonka kúp hossza $l = 150$ mm, a félkúpszög 2°20′. Mennyivel kisebb a d kis átmérő a nagy átmérőnél?

199. Egy kúpos cséve keresztmetszete egyenlő szárú trapéz alakú. A rövidebbik párhuzamos oldala 10 cm, a szárak 12 cm hosszúak, és 36°52′-nyi szöget zárnak be a hosszabbik párhuzamos oldallal. Mekkora a hosszabbik párhuzamos oldal?

200. Egy egyenlő szárú trapéz két párhuzamos oldala 11 cm és 23 cm; magassága 4 cm. Mekkorák a trapéz szögei?

201. Egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalainak hossza 6 és 8 cm; az alapon fekvő szögek 38°25′-esek. Mekkorák a trapéz szárai?

202. Egy egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalai 7,5 és 14,5 cm hosszúak, szárai 8 cm-esek. Mekkorák a trapéz szögei?

203. Egy egyenlő szárú trapézban az egyik párhuzamos oldal 57 m, a mellette fekvő szög 58°45′; a szárai 33 m hosszúak. Mekkora a másik párhuzamos oldal?

204. Egy vasúti töltés felső szélessége 10 m, az oldalak hajlásszöge a vízszinteshez 37°45′, az alsó szélessége 25 m. Milyen magas a töltés?

205. Egy egyenlő szárú trapéznak két párhuzamos oldala 50 m és 36 m; egyik szöge 61°; mekkora a trapéz területe?

206. Egy egyenlő szárú trapéz területe 252 dm^2; magassága 12 dm; egy szöge 58°20′. Mekkorák a párhuzamos oldalak?

207. Egy egyenlő szárú trapéz nagyobbik párhuzamos oldala 325,4 m; szárai 68,79 m hosszúak. A két szár meghosszabbításával bezárt szög 63°15′. Mekkora a trapéz területe?

208. Egy egyenlő szárú trapéz egyik párhuzamos oldala 48 m, átlója 50 m, magassága 30 m. Mekkorák a szárai, a másik párhuzamos oldala és szögei?

209. Egy egyenlő szárú háromszöget, melynek alapja 12 m és szára 10 m, úgy osztunk az alappal párhuzamos egyenessel két részre, hogy a nyert háromszögnek területe úgy aránylik a kapott trapéz területéhez, mint 9:7. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai és szögei?

210. Egy derékszögű trapéz egyik párhuzamos oldala 24 cm, a vele 125°-os szöget alkotó szára 35 cm. Mekkora a trapéz területe?

211. Egy derékszögű trapéz hosszabbik párhuzamos oldala 20 cm, a rá merőleges szár hossza 5 cm. A másik szár az alaphoz 35°-os szöggel hajlik. Milyen hosszú ez az oldal és a rövidebbik párhuzamos oldal?

212. Egy derékszögű trapéz egyik párhuzamos oldala 15 cm; az erre merőleges szár 20 cm hosszú. A 15 cm-es oldalon levő másik szög 140°-os. Mekkorák a trapéz még ismeretlen oldalai?

213. Egy általános trapéz egyik párhuzamos oldala 38,6 cm, az egyik szár 81,2 cm. A másik párhuzamos oldalon fekvő szögek 48,6° és 45°-osak. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai és területe?

214. Egy általános trapéz egyik párhuzamos oldala 350 m; a rajta fekvő szögek 37,3° és 52,7°-osak. A trapéz magassága 34 m. Mekkora a trapéz területe?

215. Egy általános trapéz egyik párhuzamos oldala 24 cm, a rajta fekvő két szög 70°35′ és 62°. Ha a szárakat nagyságukkal meghosszabbítjuk, háromszöget nyerünk. Mekkora a trapéz területe?

216. Egy általános trapéz nagyobbik párhuzamos oldala 80 dm, területe 500 dm². A trapéz magasságának, a kisebbik párhuzamos oldalnak és az egyik szárnak aránya 4:5:7. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai és szögei?

217. Egy általános trapéz két párhuzamos oldala 48,36 cm és 13,41 cm. A nagyobbikon fekvő két szög 78°23′ és 68°18′. Mekkorák a trapéz nem párhuzamos oldalai?

218. Egy általános trapéz párhuzamos oldalai 30 cm és 12 cm hosszúak. Az egyik szár 14 cm hosszú, és ez az alappal 54,8°-os szöget zár be. Mekkora a trapéz negyedik oldala és területe?

219. Egy általános trapéz párhuzamos oldalai 100 m és 52,8 m; a szárai pedig 71,3 m és 65,4 m hosszúak. Mekkora a trapéz területe, és mekkorák a szögei?

220. Egy általános trapéz területe 464 dm², két szára 20,4 dm és 32,6 dm hosszúak, az első a nagyobb párhuzamos oldallal 72°25′-nyi szöget zár be. Mekkora a trapéz két párhuzamos oldala?

221. Egy négyszög két szemközti szöge derékszög, egy harmadik szöge 140°; az egyik derékszöget közrefogó oldalai 5 és 12 cm hosszúak. Mekkora a négyszög két ismeretlen oldala?

222. Egy négyszög 10 cm hosszú oldalán fekvő egyik szög derékszög, a másik 42°. Az utóbbi melletti oldal 8 cm, a derékszög melletti oldal 3 cm hosszú. Mekkora a negyedik oldal?

223. Egy négyszög három oldala 10, 7 és 5 cm. Ezen oldalak közötti szögek 87,4° és 65,3° nagyságúak. Mekkora a negyedik oldal és a másik két szög?

224. Mekkorák egy $ABCD$ általános négyszög oldalai, ha az A és C csúcspontokat összekötő átlója 18 m hosszú? DAC szög 25°; CAB szög 56°; ACD szög 23°; ACB szög 49°.

225. Jelentse a, b, c egy általános háromszög oldalait; α, β, γ a megfelelő oldalakkal szemközti szögeket; m_a, m_b, m_c a három magasságot; f_α, f_β, f_γ a szögfelezőket. Derékszögű háromszögekre való darabolással határozzuk meg a háromszög ismeretlen oldalait, szögeit a következő adatok alapján:

a) $a = 21$ cm;	$b = 20$ cm;	$c = 13$ cm;
b) $a = 8{,}2$ cm;	$b = 6$ cm;	$\gamma = 63{,}1°$;
c) $a = 25$ cm;	$\beta = 80°$;	$\gamma = 18°30'$;
d) $a = 104$ cm;	$\alpha = 110°$;	$b = 75$ cm;
e) $b = 50$ cm;	$\gamma = 100°$;	$\gamma = 48°$;
f) $a = 26{,}8$ cm;	$m_a = 12$ cm;	$\gamma = 48°$;
g) $a = 10$ cm;	$m_b = 4$ cm;	$f_\beta = 5$ cm;
h) $a = 27$ cm;	$m_b = 16$ cm;	$m_c = 22$ cm;
i) $b = 12$ cm;	$m_a = 9$ cm;	$\alpha = 80°$;
j) $a = 21$ cm;	$m_b = 10$ cm;	$m_a = 17$ cm.

226. Egy egyenlő szárú trapéz átlója 54,68 cm, a szárai 40 cm hosszúak. Az átló és a szár által bezárt szög 65°. Mekkorák a trapéz szögei és két párhuzamos oldala?

227. Egy ötszög 20 cm-es oldalán fekvő szögek derékszögek. Az egyik derékszög melletti oldal 8 cm, a másik melletti 6 cm. Az utóbbi mellett levő oldal 10 cm, s ez a 6 cm-es oldallal 125°-os szöget zár be. Mekkora az ötödik oldal?

228. Legyen az $ABCD$ négyszögben $\beta = \delta = 90°$. Az A csúcsnál levő hegyesszög α. Bizonyítsuk be, hogy:

$$BD = AC \cdot \sin \alpha.$$

229. Két sík S és S^* egymással 45°-os szöget zár be. Metszésvonaluk m egyenes. Az S síkban fekvő e egyenes m-mel szintén 45°-ot alkot. Mekkora szöget zár be az e egyenes az S^* síkkal?

230. Egy általános háromszögben az A csúcsból kiinduló súlyvonal egyenlő hosszú az AB oldallal. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{tg} \beta = 3 \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

A SZÖGFÜGGVÉNYEK ÉRTELMEZÉSI KÖRÉNEK KITERJESZTÉSE

231. Mekkora az α szög, sinusa ha

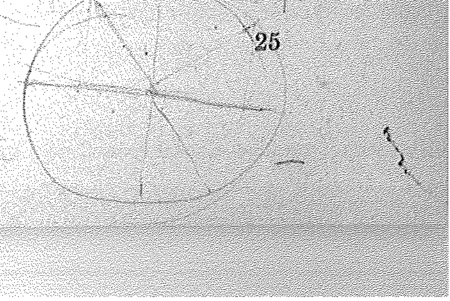
a) $\alpha = 118°;\ 307°;\ 280°;\ 320°;\ 400°;\ 720°;\ 540°;\ -310°;$
b) $\alpha = 157{,}4°;\ 234{,}5°;\ 314{,}3°;\ -255{,}7°;\ 345{,}2°;\ 608{,}1°;\ 1048{,}6°;\ 9999{,}9°;$
c) $\alpha = 123{,}45°;\ 642{,}84°;\ 222{,}22°;\ 357{,}91°;\ 6072{,}13°;\ \boxed{-321{,}45°};\ 722{,}72°;\ 157{,}66°;$
d) $\alpha = 160°24';\ 210°36';\ 340°54';\ -432°18';\ 5555°6';\ 63\,428°12';\ 246°42';\ 321°48';$
e) $\alpha = 150°25';\ 200°16';\ 310°50';\ 450°7';\ 130°19';\ -260°26';\ 1000°11';\ 12\,345°44'.$

232. Mekkora az α szög cosinusa, ha

a) $\alpha = 193°;\ 280°;\ -200°;\ 320°;\ 225°;\ -180°;\ -540°;$
b) $\alpha = 225{,}7°;\ 345{,}2°;\ 722{,}7°;\ -1000{,}6°;\ 763{,}1°;\ 153{,}4°;\ 245{,}5°;\ 444{,}4°;$
c) $\alpha = 234{,}56°;\ 135{,}79°;\ 876{,}54°;\ 341{,}69°;\ 197{,}48°;\ -432{,}19°;\ 3254{,}76°;\ 297{,}81°;$
d) $\alpha = 96°6';\ 117°12';\ 219°18';\ 351°24';\ 489°30';\ 654°36';\ \boxed{7777°42'};\ -184°48';$
e) $\alpha = 130°19';\ 210°20';\ 340°37';\ 350°55';\ 170°40';\ 780°16';\ -150°40';\ -250°33'.$

233. Mekkora az α szög tangense, ha

a) $\alpha = 137°;\ 246°;\ -470°;\ 333°;\ 585°;\ 665°;\ -750°;\ 84\,612°;$
b) $\alpha = 100{,}4°;\ 271{,}3°;\ 388{,}6°;\ 453{,}5°;\ -753{,}1°;\ 540{,}2°;\ 666{,}7°;\ -159{,}9°;$
c) $\alpha = 180{,}26°;\ 269{,}31°;\ 396{,}47°;\ 484{,}65°;\ -111{,}11°;\ 147{,}03°;\ 258{,}14°;\ 771{,}59°;$
d) $\alpha = 122°6';\ 148°42';\ 219°24';\ 351°18';\ 654°12';\ 80\,000°30';\ -663°48';\ \boxed{-195°36'};$
e) $\alpha = 179°45';\ 244°33';\ 396°47';\ 484°15';\ -111°11';\ 147°32';\ 258°14';\ 3715°53'.$



234. Mekkora az α szög cotangense, ha

a) $\alpha = 120°$; $240°$; $780°$; $36\,000°$; $176°$; $225°$; $327°$; $348°$;
b) $\alpha = 93{,}9°$; $147{,}8°$; $256{,}7°$; $368{,}6°$; $479{,}5°$; $580{,}4°$; $-660{,}3°$; $-115{,}2°$;
c) $\alpha = 180{,}37°$; $269{,}42°$; $356{,}58°$; $484{,}76°$; $-222{,}22°$; $154{,}14°$; $253{,}25°$; $284{,}99°$;
d) $\alpha = 95°54'$; $118°18'$; $255°12'$; $359°30'$; $598°30'$; $666°6'$; $1234°48'$; $-199°42'$;
e) $\alpha = 120°21'$; $243°31'$; $379°46'$; $499°57'$; $661°13'$; $784°25'$; $1744°37'$; $100°53'$.

235. Keressük ki a táblázatból a következő szögfüggvényértékekhez tartozó szögeket:

a) $\sin\alpha = 0{,}7193$; $0{,}9854$; $0{,}9995$; $-0{,}6266$; $-0{,}3057$; $-0{,}2385$;
b) $\cos\alpha = 0{,}0872$; $0{,}3420$; $0{,}4446$; $-0{,}5505$; $-0{,}8829$; $-0{,}1184$;
c) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0717$; $0{,}2549$; $0{,}3561$; $-3{,}487$; $-8{,}386$; $-114{,}6$;
d) $\operatorname{ctg}\alpha = 6{,}243$; $3{,}078$; $1{,}376$; $-1{,}111$; $-1{,}000$; $-0{,}8243$.

236. Keressük ki a táblázatból a következő szögfüggvényértékekhez tartozó szögeket percekre számítva:

a) $\sin\alpha = 0{,}0188$; $0{,}2340$; $0{,}4380$: $-0{,}6285$; $-0{,}8033$; $-0{,}9772$; $\frac{5}{7}$;

b) $\cos\alpha = 0{,}1281$; $0{,}3051$; $0{,}5573$; $-0{,}7013$; $-0{,}9081$; $-0{,}9964$; $\frac{3}{8}$;

c) $\operatorname{tg}\alpha = 57{,}84$; $3{,}5$; $1{,}56$; $-0{,}9882$; $-0{,}7413$; $-0{,}4153$; $-\frac{3}{4}$;

d) $\operatorname{ctg}\alpha = 9{,}281$; $2{,}506$; $1{,}344$; $-0{,}8255$; $-0{,}6888$; $-0{,}0781$; $-\frac{8}{5}$.

237. Keressük ki a következő szögfüggvényértékekhez tartozó szögeket percekre kiszámítva:

a) $\sin\alpha = 0{,}0188$: $0{,}2340$; $0{,}4380$; $-0{,}6285$; $-0{,}8033$; $-0{,}9772$; $\frac{5}{7}$;

b) $\cos\alpha = 0{,}1281$; $0{,}3051$; $0{,}5573$; $-0{,}7013$; $-0{,}9081$; $-0{,}9964$; $-\frac{2}{9}$.

c) $\operatorname{tg}\alpha = 57{,}84$; $3{,}5$; $1{,}56$; $-0{,}9882$; $-0{,}7413$; $-0{,}4153$; $\frac{5}{8}$;

d) $\operatorname{ctg}\alpha = 9{,}281$; $2{,}506$; $1{,}344$; $-0{,}8255$; $-0{,}6888$; $-0{,}0781$; $\frac{8}{5}$.

238. Mennyi $\alpha+\beta$, ha $\sin\alpha = \cos\beta = 0{,}7009$; $0{,}1305$; 0; 1.
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = 1$; $1{,}6$; $2{,}646$; $14{,}3$.
Mit következtetünk a kapott eredményekből?

239. Keressük ki a megadott szögek összes szögfüggvényértékeit, majd keressük ki a kapott értékek logaritmusát. Végül hasonlítsuk össze a kapott eredményeket a szögfüggvények logaritmusainak táblázataiból közvetlenül kiolvasható adattal:

$\alpha = 17°48'$; $64°13'$; $25°8'$; $72°41'$; $80°18'$

240. Keressük ki a megadott szögek összes szögfüggvényértékeinek a logaritmusát közvetlenül a szögfüggvények logaritmusának táblázatából:

$\alpha = 57°;\ 63{,}4°;\ 7°22';\ 30°17';\ 84°18';\ 24°32';\ 54°10'.$

241. Keressük ki a táblázatból azokat a hegyesszögeket, amelyeknél adottak a szögfüggvények logaritmusai:

a) $\lg \sin \alpha =$ 9,1252 − 10
9,9679 − 10
9,4526 − 10
9,8657 − 10
9,6488 − 10
9,9923 − 10
0,5648 − 1
0,5783 − 1
0,8585 − 1
0,5037 − 1
0,4723 − 1
8,3333 − 10
7,5054 − 10
0,3579 − 3
0,5731 − 2

b) $\lg \cos \alpha =$ 9,9695 − 10
9,7196 − 10
9,8776 − 10
9,9472 − 10
9,5064 − 10
9,3332 − 10
0,8043 − 1
0,8795 − 1
0,3988 − 1
0,9619 − 1
0,9298 − 1

8,2468 − 10
7,8642 − 10
0,3456 − 2
0,2967 − 3

c) $\lg \operatorname{tg} \alpha =$ 9,8389 − 10
9,7014 − 10
10,6476 − 10
9,1351 − 10
9,0676 − 10
9,2345 − 10
0,3885 − 1
0,8036 − 1
0,3687
0,2988
0,0113

d) $\lg \operatorname{ctg} \alpha =$ 10,5215 − 10
10,1597 − 10
9,3155 − 10
9,4678 − 10
9,3945 − 10
9,2222 − 10
1,0200
0,8345 − 1
0,5068 − 1
1,1827
10,0000 − 10

242. Határozzuk meg logaritmussal a következő kifejezések értékét:

a) $\dfrac{18 \cdot \sin 36°29'}{\cos 53°31'}$;

b) $\sin 170° \cdot \cos 120°$;

c) $32 \cdot \operatorname{tg} 150°40'$;

d) $-\operatorname{tg} 130°12' \cdot \operatorname{ctg} 320°$;

e) $-7 \cdot \sin 350° \cdot \operatorname{ctg} 210°$;

f) $5 \cdot \cos 190° \cdot \operatorname{ctg} 300°$;

g) $\dfrac{12 \cdot \sin 260°}{\cos 100°}$;

h) $\dfrac{58 \cdot \operatorname{tg} 320°}{\operatorname{ctg} 230°}$;

i) $\dfrac{\sin 310° \cdot \operatorname{tg} 120°}{\cos 200°}$;

j) $\sqrt[3]{\dfrac{\sin 58° \cdot \cos 3°8'}{\operatorname{tg} 66°46' \cdot \operatorname{ctg} 81°10'}}$.

AZ ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖG MEGOLDÁSA SINUS- ÉS COSINUSTÉTELLEL

NUMERIKUS FELADATOK

243. Jelölje a, b és c az általános háromszög oldalait; α, β, γ az oldalakkal szemközti szögeket; m_a, m_b és m_c az a, b és c oldalakhoz tartozó magasságot. a oldal vetülete c-re x; b oldal vetülete c-re y; T a háromszög területe; a γ szög felezője f_γ; a c oldalhoz tartozó súlyvonal s_c; r a körülírt kör sugara; ϱ a beírt kör sugara. Az alábbi táblázat 5 általános háromszögre vonatkozó adatokat tartalmaz. (Lásd a 243. ábrát.)

Adatok	1. háromszög	2. háromszög	3. háromszög	4. háromszög	5. háromszög
a	20	75	260	1 480,–	19,19
b	13	29	169	492,–	10,09
c	21	52	273	1 508,–	13,5
α	67°23′	133°36′	67°23′	77°19′	108°
β	36°52′	16°16′	36°52′	18°55′	30°
γ	75°45′	30°8′	75°45′	83°45′	42°
m_a	12,6	14,56	163,8	489,08	6,75
m_b	19,38	37,66	252,–	1 471,–	12,84
m_c	12,–	21,–	156,–	480,–	9,6
x	16,–	72,–	208,–	1 400,–	16,62
y	5,–	–20,–	65,–	108,–	–3,12
T	126,–	546,–	21 294,–	362 000,–	64,8
f_γ	12,44	40,38	161,7	549,7	12,35
s_c	13,2	50,57	171,6	804,7	13,8
r	10,83	51,79	140,8	758,5	10,09
ϱ	4,67	7,–	60,67	208,–	3,–

Számítsuk ki az alább megadott alkotórészekből, a táblázat háromszögeinek adataiból az ismeretlen alkotórészeket, majd hasonlítsuk össze a kapott eredményeket a táblázat adataival.

a) adott a, b, c;
b) adott a, b, γ;
c) adott a, c, β;
d) adott a, b, α;
e) adott a, α, β;
f) adott b, α, β;
g) adott c, α, β;
h) adott a, b, m_c;
i) adott a, m_c, γ;
j) adott c, m_a, m_b;
k) adott m_a, m_c, α;
l) adott a, x, y;
m) adott a, x, α;
n) adott m_c, x, α;
o) adott a, m_c, y;
p) adott m_a, m_c, y;
r) adott m_c, x, $\alpha-\beta$;
s) adott x, y, T.

A SINUSTÉTEL ALKALMAZÁSA

244. Egy háromszög kerülete 15 cm; szögeinek aránya 3:4:5. Határozzuk meg a háromszög oldalait és szögeit.

245. Egy háromszög kerülete 20 cm; két szöge 41,6° és 69,5°. Mekkorák a háromszög oldalai?

246. Egy háromszögből ismerjük két oldal összegét: 20 cm és az ezekkel az oldalakkal szemben fekvő 42°-os és 86°-os szögeket. Mekkorák a háromszög oldalai?

247. Egy háromszögből ismerjük két oldal különbségét: 6 cm és az ezekkel az oldalakkal szemközti 32,6°-os és 75,8°-os szögeket. Mekkorák a háromszög oldalai?

248. Olyan háromszöget keressünk, melynek két oldala: 5 és 6 cm, a kisebbik oldallal szemközti szöge: 60°40′. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei?

249. Egy háromszög két oldala 5 cm és 6 cm, a kisebbik oldallal szemközti szög 35°. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei? Hány megoldás van?

250. Egy háromszög két oldala 12 cm és 13 cm, a kisebbik oldallal szemközti szög 67°23′. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei?

251. Egy szabályos háromszög oldalai 30 cm hosszúak. Osszuk az egyik szöget két egyenessel három egyenlő részre. Mekkora részekre osztják az egyenesek a szöggel szemközti oldalt?

252. Egy háromszög egyik szöge 64,6°. Ennek a szögnek a felezője 18,54 cm, és a szög csúcsából kiinduló magasság 17,82 cm. Mekkorák a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?

253. Egy háromszögből ismerjük b oldalt, α szöget, és tudjuk, hogy az α szög belső és külső szögfelezői egyenlő hosszúak. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai?
Oldjuk meg a feladatot, ha $b = 10$ cm és $\alpha = 20°$.

254. 100 kp-os erőt bontsunk fel két olyan összetevőre, amelyek 50°-os és 20°-os szöget alkotnak vele!

255. Az előző feladatot oldjuk meg a következő adatokkal:

a) $R = 27{,}16$ kp; $\alpha = 87{,}8°$; $\beta = 34{,}2°$;
b) $R = 40{,}8$ kp; $\alpha = 65°15'$; $\beta = 79°45'$;
c) $R = 58{,}82$ kp; $\alpha = 45°38'$; $\beta = 23°22'$;
d) $R = 120$ kp; $\alpha = 44°15'$; $\beta = 29°5'$;
e) $R = 16$ kp; $\alpha = 34°30'$; $\beta = 80°$;
f) $R = 12$ kp; $\alpha = 130°$; $\beta = 36°19'$.

256. Egy folyó partján van egy épület, amelynek két egymás felett levő ablaka 15 m-re van egymástól. Milyen széles a folyó, ha az ablakból a túlsó partot 13°20', illetve 6°34' depressziószög alatt látjuk?

257. Egy északnak vitorlázó hajóról két világítótorony – amely egymástól 40 km-nyire van – egy nyugatnak irányuló egyenesben látszik. Egyórai vitorlázás után az egyik délnyugati, a másik dél-délnyugati irányban látszik. Mekkora a hajó sebessége?

258. Csónakkal akarunk a folyó túlsó partjára jutni. A cél iránya a folyó partjával 38°-os szöget alkot víz mentén. Hogy a víz sodra ellenére is egyenesen a célhoz jussunk, a cél irányától egy bizonyos szöggel eltérő irányban kell eveznünk. Mekkora ez a szög, ha a csónak sebessége állóvízben 3 m/sec; a víz sodráé 1,8 m/sec?

259. A hegy lába körül elterülő síkság egy A pontjából két egymás mögött levő hegycsúcs egy irányban látszik, mégpedig a közelebbi 25°42', a távolabbi 31°12' emelkedési szög alatt. 520 m-rel közelebbről a hegycsúcsok közös emelkedési szöge 41°6'. Hány m-nyire emelkednek a szóban forgó hegyek a síkság fölé, és mekkora a csúcsok távolsága légvonalban?

260. Egy egyenlő szárú trapézból ismerjük az átló hosszát (21 cm) és azt a két szöget, amelyre az átló a trapéz hegyesszögét osztja: a szár felé 38,5° és az alap felé 32,4°. Számítsuk ki az egyenlő szárú trapéz oldalait és szögeit!

261. Egy általános trapézból ismerjük az alapot (20 cm hosszú), az ezzel szomszédos 8 cm-es szárat, a két oldal által bezárt 54°37'-es szöget, valamint az alapon fekvő másik szöget (38,3°). Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai?

262. Egy általános trapézból ismerjük a hosszabbik párhuzamos oldalt (48 cm hosszú), a két szárat (24 és 36 cm hosszúak), valamint az alap és a 24 cm-es oldal által bezárt szöget, 63,8°. Mekkora a trapéz negyedik oldala, és mekkorák az ismeretlen szögei?

263. Mekkorák azon általános négyszög oldalai, amelynek 18 m hosszú átlója az A csúcsnál levő szöget 56° és 25°, a C csúcsnál levő szöget pedig 49° és 23° részekre osztja? (56° és 49° kerüljön az egyik háromszögbe.)

264. Helyezzünk el egy a oldalú szabályos ötszögbe egy szabályos háromszöget úgy, hogy ennek egyik oldala párhuzamos legyen az ötszög egyik oldalával, és szemközti csúcsa legyen az ötszög csúcsa. Mekkora a szabályos háromszög oldala?

265. Egy a oldalú szabályos ötszögbe helyezzünk el egy négyzetet úgy, hogy ennek két oldala párhuzamos legyen az ötszög egyik oldalával. Mekkora a négyzet oldala?

266. A és B megközelíthetetlen helyek távolságát kell meghatározni. Az AB szakaszon fekvő C ponttól kiinduló 500 m hosszú CD alaptávolságot vesszük fel, lemérjük C-nél és D-nél a következő szögeket: ACD szög $= 76°30'$; ADC szög $= 74°42'$ és CDB szög $= 35°30'$. Mekkora az AB távolság?

267. Egy sziget B pontjának a folyó túlsó partján levő A pontjától való távolságát akarjuk meghatározni. A folyó innenső partján $DC = 400$ m távolságot mérünk fel úgy, hogy D pont AB egyenesbe essék. ADC szög $= 84{,}5°$; BCD szög $= 50°$; BCA szög $= 18°35'$. Mekkora az AB távolság?

268. Egy torony magasságát (CC') kell meghatározni. A torony megközelíthetetlen, ezért a vízszintes síkban felvesszük az $AB = 100$ m hosszú alapvonalat, melynek végpontjaiból lemérjük a $C'AB = 62°12'$; $C'BA = 67°36'$ szögeket, valamint a CAC' emelkedési szöget: $48°15'$. Mekkora a torony magassága? (C' a C csúcs vetülete a vízszintes síkra.)

269. Egy hegy (CC') magasságát kell megmérnünk. A vízszintes síkban felvett alapvonal $AB = 500$ m. Ismerjük a $CAB\sphericalangle = 75°16'$, $CBA\sphericalangle = 67°48'$ és a $CAC'\sphericalangle = 15°32'$ szögeket. C' a C csúcs vetülete a vízszintes síkra. Mekkora a hegy magassága?

270. Valamely torony CC' magassága a C' talpponttal egy szinten fekvő $AB = 333{,}4$ m távolság végpontjaiból $C'AC = 12°5'$, illetőleg $C'BC = 6°55'$-nyi emelkedési szög alatt látszik. Mekkora a torony magassága, ha a BAC' szög $= 103°21'$?

271. Téglalap alakú földdarab felmérése végett a téglalap egyik oldalán két pontot tűzünk ki: A-t és B-t, melyek egymástól 45 m-re vannak. C és D a téglalapnak AB-vel szemközti csúcspontjai. CAB szög $= 112°$; DAB szög $= 58°35'$, CBA szög $= 60°15'$. Mekkora a földdarab területe?

272. A, B és C pontokhoz nem férhetünk hozzá. Távolságuk megmérése végett beállunk AB egyenes P pontjába, és AB-re merőleges irányban Q-ig haladunk 412 m-t úgy, hogy BQC egy egyenesre esik. Ezután tovább 590 m-t haladunk ugyanazon egyenesen R-ig, hogy ACR egy egyenesen legyen. PQB szög $= 60°$; PRA szög $= 45°$. Mekkorák az AB, BC és CA távolságok?

273. Egy várostól észak felé 1800 m-nyire A község van, nyugat felé 2450 m-nyire B község. Milyen távol van A-tól és B-től C hely, ahová A-ból az északi úttól balra $79°55'$, B-ből a nyugati úttól jobbra $70°30'$ szög alatt egyenes út vezet?

274. Egy lefelé szűkülő csonka kúp alakú víztároló medence feneke a napsugarak $24°10'$-es beesési szöge mellett éppen árnyékban van. $10°$-os szögcsökkenés esetén az árnyék az oldalfalon 1 m-nyire emelkedik az alaptól, és ebben a pontban a falat a sugarak merőlegesen érik. Mekkora a medence térfogata?

A COSINUSTÉTEL ALKALMAZÁSA

275. Két egyenes vasúti pálya egymást $37°15'$ szög alatt metszi. A kereszteződéstől a legközelebbi őrházig a távolság az egyik pályán 135 m, a másikon 243 m. Mennyire van egymástól a két őrház?

276. Egy kikötőből egyszerre indul el két hajó, az egyik 42 km/óra, a másik 36 km/óra sebességgel. Az első észak felé halad, a másik kelet–délkeleti irányban. Milyen messze lesznek egymástól 4 óra múlva?

277. Mekkora szög alatt látjuk két magányos fa távolságát olyan pontból, amely az egyik fától 250 m-nyire, a másiktól 220 m-nyire van, ha a két fa távolsága egymástól 150 m?

278. Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjaik 2 órakor 13 cm-nyire, 9 órakor 17 cm-nyire vannak egymástól?

279. Egy síktükörtől egy A pont 4 m-nyire, egy B pont 9 m-nyire van. Ha az A pontból kiinduló sugár $18°12'$ beesési szöggel esik a tükörre, a B ponton át verődik vissza. Mekkora a két pont távolsága?

280. Milyen magas az a torony, amely a lábától egyenletesen lefelé lejtő úton mért 24 m távolságból 35°50′ s innen 28 m-rel távolabbról 19°30′ szög alatt látszik? Mekkora a lejtő hajlásszöge?

281. Két erő: $F_1 = 12$ kp és $F_2 = 20$ kp hat egy anyagi pontra. Az általuk bezárt szög: $\alpha = 40°$.
Határozzuk meg az R eredő erőt és az R és F_2 erők által bezárt szöget!
Oldjuk meg ugyanezt a feladatot a következő adatokkal:

a) $F_1 = 353{,}1$ kp,	$F_2 = 142{,}2$ kp,	$\alpha = 55°$;
b) $F_1 = 30$ kp,	$F_2 = 38{,}82$ kp,	$\alpha = 166°19'$;
c) $F_1 = 60$ kp,	$F_2 = 100$ kp,	$\alpha = 45°$;
d) $F_1 = 80$ kp,	$F_2 = 50$ kp,	$\alpha = 120°$;
e) $F_1 = 250$ kp,	$F_2 = 400$ kp,	$\alpha = 144°20'$.

282. Egy paralelogramma szomszédos oldalai 24 dm és 16 dm hosszúak, az általuk bezárt szög 48°26′. Milyen hosszú a két átló?

283. Egy paralelogramma átlói 18 dm és 15 dm hosszúak, az általuk bezárt szög 36°20′. Mekkorák a paralelogramma oldalai és szögei?

284. Egy paralelogramma két oldalának összege 39 m, az általuk bezárt szög 97°54′ és e szöggel szemben fekvő átló 30 m hosszú. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

285. Egy paralelogramma oldalai 509 cm és 221 cm hosszúak, hegyesszöge 69°31′. Mindegyik oldal felezőpontját a következővel kötjük össze. Számítsuk ki az így keletkezett paralelogramma oldalait és szögeit.

286. Valamely egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szára 8 cm. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a szárakat az alap végpontjaiban érinti?

287. Egy háromszög két oldala 9 cm és 15 cm hosszú. A nagyobbik oldalt felező súlyvonal 12 cm hosszú. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

288. Egy háromszögben ismert két oldal: $a = 80$ cm; $b = 100$ cm, valamint a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal: $s_c = 70$ cm. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

289. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.

290. Egy háromszög két oldala 82 cm és 56 cm; az általuk bezárt szög 98°26′. Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal?

291. Adott egy háromszög két oldala és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalát, és állapítsuk meg a szerkeszthetőség feltételeit.

292. Adott egy háromszög három oldala. Számítsuk ki a háromszög három súlyvonalát az oldalak segítségével, és bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben a súlyvonalak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegének a $\frac{3}{4}$ részével.

293. Egy trapéz két párhuzamos oldala 48,36 cm és 13,41 cm, az egyik szá 57,82 cm hosszú. Ennek a nagyobbik párhuzamossal bezárt szöge 68°18′. Mekkora a negyedik oldal és a trapéz ismeretlen szöge?

294. Egy egyenlő szárú trapéz egyik alapja 30 cm, átlója 22 cm hosszú. Az alap az átlóval 34,2°-os szöget zár be. Mekkorák a trapéz ismeretlen oldalai é szögei?

295. Egy trapéz két párhuzamos oldala 100 cm és 52,8 cm, a szárai 71,3 cm és 65,4 cm hosszúak. Mekkorák a trapéz szögei?

296. Egy konvex általános négyszög oldalai sorban 7 cm, 3 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak. A 6 cm-es és 7 cm-es oldalai által bezárt szög 41°54′. Számítsuk ki a négyszög ismeretlen szögeit!

297. Egy konvex általános négyszög két szomszédos oldala 4 és 5 cm hosszú. Az általuk bezárt szög 140°. A 4 cm-es oldalon fekvő másik szög 100°, az 5 cm-es oldalon fekvő másik szög 80°. Mekkorák a négyszög ismeretlen oldalai?

298. Egy konkáv négyszög oldalai sorban 3 cm, 4 cm, 5 cm, 4,8 cm hosszúak. A 3 cm-es és 4 cm-es oldalak által bezárt szög 196°16′. Számítsuk ki a négyszög ismeretlen szögeit.

299. Egy $ABCD$ konkáv négyszög BD átlója 20 cm hosszú. ABD szög $= 120°$; DBC szög $= 90°$; ADB szög $= 30°$; BDC szög $= 35°$. Mekkora az AC átló?

300. Egy általános négyszög oldalai: $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7{,}5$ cm és $d = 6$ cm hosszú. Az a és b oldalak által bezárt szög egyenlő a c és d oldalak által bezárt szöggel. Mekkorák a négyszög szögei?

301. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal: $a = 33$ cm, $b = 56$ cm, $c = 16$ cm, $d = 63$ cm hosszú. Mekkorák a négyszög szögei, és milyen négyszögről van szó?

302. Egy húrnégyszög oldalai: $a = 38{,}9$ cm, $b = 22$ cm, $c = 43$ cm, $d = 30$ cm hosszú. Mekkorák a húrnégyszög szögei?

303. Egy általános négyszög három egymás utáni oldala 10 cm, 7 cm és 5 cm hosszú. Az első két oldal közötti szög 87°24′; a második és harmadik oldala közötti szög 65°18′. Mekkora a negyedik oldal és a másik két szög?

304. Egy trapéz 25 cm hosszú átlója a párhuzamos oldalakkal 40°-os szöget, a nem párhuzamos oldalakkal 90°-os és 80°-os szöget zár be. Milyen hosszú a másik átló?

305. Sík mezőn kitűzünk három pontot. $AB = 187{,}5$ m, $AC = 270$ m, $BC = 152$ m. Milyen távol van a BC meghosszabbításán levő C-n túli D pont a B ponttól, ha ADB szög $32{,}2°$?

306. Sík területen két ágyú működését figyeljük. A hang az egyikből 18 sec, a másikból 14 sec alatt ér hozzánk. A hang terjedési sebessége 340 m/sec. Szögmérő műszerünk nincs. Ezért a két ágyú irányában kitűzünk egy-egy póznát tőlünk 160 – 160 m távolságban. A két pózna távolsága 300 m. Milyen messze van a 2 ágyú egymástól?

307. AB távolságot kell meghatároznunk. Ezért kitűzünk egy C pontot, ahonnan a keresett távolságot 60°-os szög alatt látjuk. A szög felezőjén 100 m-t közeledünk a megmérendő távolsághoz. Innen az A pontba mutató irány 120°-os szöget, a B pontba mutató irány derékszöget alkot az általunk megtett úttal. Mekkora az AB távolság?

308. Egy egyenes útból 35°48′ szög alatt balra mellékút ágazik el, 20 km-rel messzebbről egy másik mellékút jobbra ágazik el 30°-os szög alatt. Az elsőn 40 km-t, a másodikon 25 km-t haladva egy-egy községbe érünk. Milyen messze van a két község egymástól?

309. Két járőr haladt egy egyenes műút mentén. 7 órakor az egyik járőr balra eltért a műúttól 35°-os szöget alkotó dűlőútra. A másik járőr 8 óra 30 percig tovább ment az egyenes műúton, ekkor letért jobbra a műúttal 47°30′-nyi szöget alkotó egyenes dűlőútra. Milyen messze lesznek egymástól 10 órakor, ha a műúton 5 km/óra, a dűlőúton csak 3,5 km/óra sebességgel haladtak?

310. Valamely főút A pontjából jobbra $\alpha = 38°23'$ szög alatt elágazik egy út, és egyenesen a C hídfőhöz vezet. A főútnak egy 5,3 km-rel tovább fekvő B pontjából jobbra ágazik egy út, amelyen egyenesen 6 km-t megtéve, ugyancsak a C hídhoz érünk, míg a B pontból 48°21′ szög alatt balra elágazó egyenes úton 7 km-t haladva, eljutunk egy D hídhoz. A két híd alatt ugyanaz a folyó folyik, amelynek medre C és D között egy 9 km sugarú körívet alkot. Az A pontból elindult reggel 3 óra 48 perckor egy szakasz gyalogság a C híd felé 6 km/óra sebességgel, hogy onnan vízi úton folytassa útját 10 km/óra sebességgel a D hídhoz. Hány órakor kell indulnia A-ból annak a csapatnak, amely 5 km/óra sebességgel haladva, B-n át egyszerre érkezik az első csapattal a D hídfőhöz?

311. A terep A, B, C pontját az adott sorrendben vasútvonallal akarjuk összekötni. Az ABC háromszög oldalai: $AB = 5$ km, $BC = 8{,}8$ km, $CA = 12$ km. A pályát egyenesen vezetjük A-ból kiindulva B-n át a B ponton túl 1 km-nyire fekvő D pontig, ahol egy körívből álló kanyar kezdődik. Ez után olyan egyenes pálya vezet C-be, amely a BA iránnyal 105°-os szöget zár be. Mekkora az AC pálya hossza? (Szerkesszük meg a pályatestet 1:100 000 kicsinyítésben.)

312. AB távolság meghatározása végett $CD = 300$ m alaptávolságot vesszük fel úgy, hogy C az AB egyik oldalán, D a másik oldalán legyen. ACD szög $= 33{,}6°$, DCB szög $= 51°21'$, ADC szög $= 43°52'$, CDB szög 46°8′. Mekkora az AB távolság?

313. Alagutat kell építeni A és B pontok között. A domborzati viszonyok megengedik a következő vízszintes távolságok és látószögek lemérését: $AD = 600$ m, $DC = 250$ m, $CB = 1346$ m. ADC szög $= 90°$, DCB szög $= 138°52'$.

a) Milyen hosszú lesz az alagút?

b) Határozzuk meg B pontra nézve a fúrás irányát CBA szög kiszámításával.

314. Egy turistatársaság A helyről észak felé indul el, és 48 km megtétele után B-be érkezik. Innen nyugat felé folytatja útját. 20 km megtétele után C-be érkezik, ahol a menetiránytól balra tér el, és a C-től 107,7 km-re levő D helyre ér. BCD szög $= 138°52.'$ Milyen távol van légvonalban D hely a kiindulás A helyétől?

315. Ferde torony csúcsa hajlásának irányában talpától 20 m-nyire 76° szög alatt, ellenkező irányban 20 m-ről 72° szög alatt látszik. Hány fokkal dől el a torony, és milyen magas?

316. 500 m magas hegy csúcsáról két tengeri kikötő látszólagos távolsága 72°18′; a két kikötő depressziószöge 6°42′ és 7°30′. Milyen messze van a két kikötő egymástól?

317. Egy hegycsúcs ismeretlen magasságának meghatározásához megmérjük D-ből egy $AB = 350$ m hosszú vízszintes útszakasz két végpontjához tartozó 65° és 72°-os depressziószögeket, valamint az AC és BC egyeneseken áthaladó függőleges síkok hajlásszögét: 44,2°. Milyen magasan van a hegycsúcs?

318. Egy hegy magasságának meghatározása végett egy folyó egyenes partján A, B és C pontokat úgy vesszük fel, hogy $AB = 50$ m, $BC = 50$ m. E pontokból a hegy csúcsa rendre 30°, 45°, 60°-os szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?

319. Az M és N tereppontok távolsága közvetlenül nem mérhető meg. Ezért kitűztük az $AM = 54$ m, $BM = 60$ m távolságokat, amelyek egy egyenesbe esnek, továbbá megmérjük az MAN szög $= 130°$ és MBN szög $= 109°$-os szögeket. Mekkora az M és N tereppontok távolsága? (A, B az M ugyanazon oldalán vannak.)

320. Valamely folyó túlsó partján két tereptárgy egymástól való távolságát: AB-t kell meghatároznunk, de a folyón nem kelhetünk át. A folyó innenső partján felvesszük a $CD = 350$ m távolságot. Ezután lemérjük az ACD szög $= 87{,}3°$, BCD szög $= 38°$, ADC szög $= 26°$ és BDC szög $= 69{,}7°$ látószögeket. Mekkora a keresett AB távolság?

321. A CD távolságot nem tudjuk közvetlenül megmérni. Ismerjük azonban az AB egyenesszakasz hosszát: 267,4 m. Megmérjük a következő szögeket: ACD szög $= 87{,}3°$. BCD szög $= 38°$, ADC szög $= 26°$ és BDC szög $= 69{,}7°$. Számítsuk ki az adatokból a keresett távolságot!

322. Rajzoljunk egy hegyesszögű háromszög oldalai fölé kifelé négyzeteket. Területátalakítással igazolható, hogy az a és b oldalú négyzetekből az m_a, illetve m_b meghosszabbítása által a c oldal felé eső levágott két téglalap területének összege egyenlő a c oldal fölé rajzolt négyzet területével. Ezen egyenlőség alapján vezessük le a cosinustételt! Hogyan módosul a probléma tompaszögű háromszögben?

VEGYES FELADATOK SINUS- ÉS COSINUSTÉTELRE

323. Egy általános háromszögben $a:b = 1:16$, $m_c = 11{,}62$ cm, $\sin \beta = 0{,}4841$. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

324. Egy háromszög kerülete 598 cm; $a = 258$ cm; $\alpha = 98°33'$. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

325. Egy általános háromszögben $a^2+b^2 = 6514$; $ab = 3015$; $\gamma = 67°45'$. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

326. Egy háromszög egyik oldala 5 cm; a másik két oldal összege 8 cm, és az 5 cm-es oldallal szemben levő szög 60°. Mekkora a másik két szög? Mekkorák az ismeretlen oldalak?

327. Egy háromszög egyik oldala 6 cm; a másik két oldal különbsége 4 cm, és a 6 cm-es oldallal szemközti szög 75°-os. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

328. Egy háromszög egyik oldala 10 cm hosszú. Az ezzel az oldallal szemközti szög 28°56'. A másik két oldal négyzetének összege 625 cm². Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

329. Egy háromszögben $a+b = 122$ cm; $c = 76$ cm; $\gamma = 64°52'$. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

330. Legyen egy háromszög egyik szöge 118°24'. A szög csúcsából kiinduló 5 és 7 cm hosszú távolságok az adott szöget három egyenlő részre osztják. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

331. Valamely háromszögben $c = 4$ dm; $\gamma = 41°44'$; $s_c = 5$ dm. Mekkorák az ismeretlen oldalak és szögek?

332. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal: $c = 21$ cm; $\gamma = 75°45'$; $s_c = 13{,}2$ cm.

333. Egy általános háromszögben az egyik oldal 34 cm; a hozzá tartozó súly-

vonal 18,2 cm; az egyik rajta fekvő szöge 32°25'. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

334. Egy háromszögben az egyik oldalhoz tartozó magasság 6,5 cm; az ugyanazon oldalhoz tartozó súlyvonal ezen oldallal 60°-os szöget zár be; végül egy másik súlyvonal ugyanezzel az oldallal 30°-os szöget alkot. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

335. Egy háromszög két oldala 45 cm és 60 cm hosszú, a köztük levő szög felezője 30 cm hosszú. Mekkora a háromszög ismeretlen oldala, és mekkorák a háromszög szögei?

336. Egy háromszög egyik oldala 18 cm. A hozzátartozó magasság a szemközti szöget 20°33' és 36°-os szögekre bontja. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

337. Egy háromszögben az egyik szög $\alpha = 12°24'$; egy másik szöggel szemközti oldalhoz tartozó súlyvonal $s_b = 81{,}25$ cm; a b-nek c oldalra való vetülete 136 cm. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

338. Egy háromszögben $\alpha = 59°29'$, az α szögfelezője a szemközti a oldalt 48 cm-es és 38 cm-es részekre osztja. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

339. Egy háromszög köré írt kör sugara 16,25 cm; két oldalának összege 54 cm, ugyanezen két oldal által közbezárt szög 67°23'. Mekkorák a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?

340. Egy háromszög oldalai 15; 20 és 7 cm hosszúak. Mekkora az első oldalhoz tartozó körszelet területe a háromszög köré írt körben?

341. Egy háromszög egyik oldala 65 cm, másik két oldalának különbsége 14 cm, a beírt kör sugara 16,2 cm. Mekkorák az ismeretlen oldalak és a háromszög szögei?

342. Egy háromszög köré írt kör sugara 34 cm, egyik szöge 40°6', az adott szöget közbezáró oldalakhoz tartozó magasságok összege 81,5 cm. Mekkorák a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?

343. Egy háromszög két oldalának összege 60 cm; ugyanazon oldalakhoz tartozó magasságok összege 48 cm, a harmadik oldala 32 cm. Mekkorák az ismeretlen oldalak, valamint a háromszög szögei?

344. Egy háromszög két oldalának különbsége 11 cm; az ugyanezen oldalakhoz tartozó magasságok összege 390 cm; a harmadik oldallal szemközti szög 36°52'. Mekkorák a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?

345. Egy háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa $\frac{3}{2}$. Mekkorák a háromszög szögei?

346. Legyen egy háromszög egyik oldala (a) 41 m, a másik (b) 85 m; a harmadik oldalhoz tartozó magasság az oldalt két olyan részre osztja, hogy az egyik rész a másik rész hatszorosánál 21 m-rel nagyobb. Mekkora a harmadik oldal, és mekkorák a háromszög szögei?

347. Egy körben az egy pontból kiinduló 20 és 26 cm hosszú húrok 36°38'-nyi szöget zárnak be. Mekkora a kör sugara?

348. Három, egymást kívülről érintő kör közé zárt területet kell meghatároznunk, ha a körök sugarai 4 cm, 9 cm és 36 cm hosszúak.

349. Egy háromszög oldalai 24 cm, 22 cm, 28 cm hosszúak. A csúcsok körül egymást érintő köröket rajzolunk, és az így keletkezett körcikkeket kivágjuk. Mekkora terület marad?