Geometriai feladatok gyűjteménye

I.

Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

A könyv megfelel az Oktatási Minisztérium kerettantervének [28/2000 (IX. 21.)] és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2002 (V. 24.)].

A kiadvány 2008. 05. 28-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a KHF/1065-9/2008 számú határozattal.

A tankönyvvé nyilvánítás meghosszabbítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István.

Horvay Katalin és Reiman István munkája.

Az ábrákat
Frigyesi Miklós és $\boxed{\text{Vidéki Gusztáv}}$
rajzolta.

ISBN 978 963-19-4795-3

Előszó

A két kötetes feladatgyűjtemény a matematikát tanító kartársainknak és az iskolák tanulóinak is bőséges választékot bocsát rendelkezésére az iskolai geometriai anyag elmélyítése és begyakorlása céljából. A feladatok többsége az ún. gyakorlófeladatok közé sorolható, bőséggel található azonban közöttük az érdeklődés felkeltésére, esetleg szakköri feldolgozásra alkalmas is. A nehezebbnek bizonyuló feladatok megoldásánál gyakran célszerű az előtte levőket is megnézni.

A feladatok többségéhez gyűjteményünk második részében eredményt, útmutatást, ill. megoldásvázlatot közlünk abból a célból, hogy gyűjteményünk önálló tanulásra is alkalmas legyen. Felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy az itt szereplő megjegyzések az esetek túlnyomó többségében nem tekinthetők teljes megoldásnak, azokat elsősorban útmutatásra, gondolatébresztésre szántuk; általában hiányzik a feladatok elemzése (diszkusszió), a megoldhatósági feltételek vizsgálata stb. Néhány feladat többször is kitűzésre kerül; ennek az az oka, hogy egy-egy feladat különböző megoldási módszerek gyakorlására is alkalmas lehet.

Egyes fejezeteknél – pl. a vektoroknál – túlléptük az általános tantervű osztályok tananyagát, az e feladatok megoldásához szükséges elméleti részt azonban feladatokra felbontva tárgyaljuk. Kezdőknek ajánlatos ezeknél a részeknél egyes feladatcsoportokat a gyűjtemény sorrendjében végigdolgozni.

Az ábrák számozása a feladatok számozásához igazodik.

Síkgeometria

SZAKASZOK, SOKSZÖGEK ÁTLÓI, SZÖGEK, SZÖGPÁROK

1. Szerkesszük meg a szakaszt, ha ismerjük a kétszeresét.
2. Adott két szakasz összege és különbsége. Szerkesszük meg a szakaszokat.
3. Adott egy szakasz kétszeresének és egy másik szakasznak az összege és különbsége. Szerkesszük meg a szakaszokat.
4. m és n adott szakaszok. Szerkesszük meg

   a) a $3m-2n$,
   b) a $4m-3n$

   távolságot.
5. Az A, B, C és F pontok egy egyenesen vannak (C az AB szakasz B-n túli meghosszabbításán van). Az AB hossza a, a BC-é b, F az AC szakasz felezőpontja. Mekkora az AF távolság?
6. Az A, B, C egy egyenes pontjai (ebben a sorrendben), AB szakasz $= 5$ cm, BC szakasz $= 17$ cm. F_1 az AB szakasz, F_2 a BC szakasz felezőpontja. Mekkora az F_1F_2 szakasz?
7. Az AB és CD szakaszok közös része a CB szakasz. Mekkora az AD szakasz, ha $AB = 10$ cm, $CD = 12$ cm, $CB = 4$ cm?
8. A, B és C pontok egy egyenesen vannak. AB hossza 100 m, AC-é 160 m. *a)* Határozzuk meg a két távolság felezőpontjai közötti szakasz hosszát. (Vegyük figyelembe, hogy a két szakasz nemcsak egyféleképpen helyezkedhetik el.)
   b) Oldjuk meg a feladatot általánosan is, ha az $AB = a$, $AC = b$.
9. A 40 m hosszú AB szakaszra az A végpontból $AC = 10{,}2$ m-t, B végpontból $BD = 15{,}8$ m-t mérünk rá. Határozzuk meg a CD szakasz hosszát.
10. Az AB szakasz hossza 90 m. Határozzuk meg az AB szakaszt *a)* 2:3, *b)* 4:5, *c)* 1:4, *d)* 2:7 arányban osztó pont távolságát az A, ill. B végpontoktól.
11. Az AB szakasz hossza a. Határozzuk meg az AB szakaszt $b:c$ arányban osztó pont távolságát az A, ill. B végpontoktól.
12. Az AB szakasz hossza 35 m. Határozzuk meg AB felezőpontja és az AB-t 2:3 arányban osztó pont távolságát.
13. Az AB szakasz hossza 5,6 m. Határozzuk meg AB felezőpontja és AB-t $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}$ arányban osztó pont távolságát.

14. A, B és C pontok (ebben a sorrendben) egy egyenesen sorakoznak. AB hossza a, BC-é b. Határozzuk meg AC felezőpontja és AC-t $c:d$ arányban osztó pontok távolságát.
15. Az AB szakasz 42 cm hosszú. Határozzuk meg a szakaszt A-tól kezdve 2:5 arányban osztó A_1 és 3:4 arányban osztó B_1 pontok távolságát.
16. Az A, B, C, D pontok egy egyenesen vannak. Bizonyítsuk be, hogy az AB, BC, CD, AC és AD irányított szakaszok előjeles hosszára a következő összefüggés érvényes: $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$.
17. Az A, B, C, D pontok egy egyenesen vannak (ilyen sorrendben). Bizonyítsuk be, hogy: $AC^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD$.
18. Adjunk meg négy pontot úgy, hogy közülük egyik három se legyen egy egyenesen. Kössük össze a pontokat az összes lehetséges módon. *a)* Hány egyenest kapunk összesen? *b)* És ha öt pontot veszünk fel? *c)* És ha 212-t? *d)* És ha n-et?
19. Hány átló húzható egy konvex 16 szög egyik csúcsából?
20. Hány háromszögre bontják a konvex 12 szöget az egyik csúcsából kiinduló átlók?
21. Hány oldalú a konvex sokszög, ha egy csúcsából 12 átló húzható?
22. Hány oldalú a konvex sokszög, ha az egy csúcsából kiinduló átlók 18 háromszögre bontják?
23. Egy konvex sokszög oldalainak és egy csúcsából kiinduló átlóinak szerkesztéséhez 17 szakaszra van szükségünk. Hány oldalú a sokszög?
24. Hány oldalú a sokszög, ha 27 átlója van?
25. Egy játszótéren hét fa áll; mindegyik mellett elhelyezkedik egy gyerek, hogy „hol az olló"-t játsszanak.

    a) Hányféleképpen cserélhet helyet egy játékos?
    b) Hány csere lehetséges összesen?

26. Hány oldalú a sokszög, ha hatszor annyi átlója van, mint oldala?
27. Hány oldalú sokszögnek van ugyanannyi átlója, ahány oldala?
28. Szerkesszünk szögeket, amelyeknek mértéke: 45°, 60°, 30°, 22,5°, 15°.
29. Szerkesszünk szögeket, amelyeknek mértéke: 105°, 52,5°, 75°, 67,5°, 135°.
30. Adjunk meg két tetszőleges α és β szöget, és szerkesszük meg az *a)* $\alpha+\beta$, *b)* $\alpha-\beta$, *c)* $\alpha+\frac{\beta}{2}$, *d)* $\frac{\alpha+\beta}{2}$, *e)* $180°-(\alpha+\beta)$, *f)* $180°-\alpha+\beta$ szögeket.
31. Adott két szög összege és különbsége. Szerkesszük meg a szögeket.
32. Adott egy szög kétszeresének és egy másik szögnek az összege és különbsége. Szerkesszük meg a szögeket.
33. Egy közös szárral rendelkező két szög aránya 7:3. A két szög közül az egyik 72°-kal nagyobb a másiknál. Bizonyítsuk be, hogy a két szög együtt egyenesszöget alkot.
34. Két szög különbsége 54°, ugyanezen két szög aránya 5:2. Hány fokosak ezek a szögek?
35. α és β két egymás mellett levő szög. α szög nagysága 108°, β α-nak kétharmada. Bizonyítsuk be, hogy α és β (nem közös) szögszára egy egyenesbe esik.
36. α és β két egymás mellett levő szög. Összegük 216°, továbbá az α szög (β-val nem közös) szárának meghosszabbítása a β szöget felezi. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát.

37. Négy szög együtt egyenesszöget alkot, továbbá mindegyik szög az előzőnél 10°-kal nagyobb. Számítsuk ki a szögek nagyságát.

38. Szerkesszünk egy körben négy sugarat úgy, hogy két-két sugár által bezárt szög sorra az előző kettő által bezárt szög kétszerese legyen. Határozzuk meg a szögek nagyságát.

39. Hány fokos szöget zár be a két óramutató *a)* negyed hétkor, *b)* fél tízkor, *c)* háromnegyed ötkor?

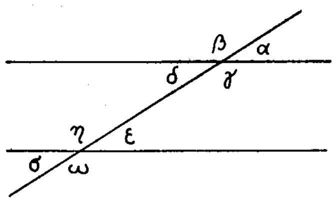
40. Mekkora szöget zár be a két óramutató *a)* 2 óra 20 perckor, *b)* 3 óra 32 perckor, *c)* 4 óra 43 perckor, *d)* 5 óra 8 perc 3 másodperckor, *e)* a óra b perckor, *f)* a óra b perc c másodperckor?

41. Hány fokos szöget zárnak be az óramutatók 0 óra és 12 óra között minden egész órakor?

42. Fejezzük ki fokokkal a következő szögek nagyságát: *a)* 21°36′, *b)* 49°9′, *c)* 51°24′18″, *d)* 17°27′45″.

43. Fejezzük ki fokokban, percekben, másodpercekben a következő szögeket: *a)* 108,5°. *b)* 20,7°, *c)* 18,3°, *d)* 59,7°, *e)* 100,01°.

44. A 44. ábrán az α szög 32°42′. Mekkora a többi jelölt szög? Indokoljuk meg állításainkat.



44

45. Mekkora az a szög, amely a pótszögénél 16°28′-cel nagyobb?

46. Mekkora az a szög, amely a mellékszögének ötödrésze?

47. Melyik az a szög, amely egyenlő a mellékszögével?

48. Lehet-e egy szög a társszögével egyenlő?

49. Mekkora az a szög, amely a mellékszögének *a)* $\frac{2}{3}$-ával, *b)* $\frac{3}{7}$-ével, *c)* $\frac{3}{5}$-ével egyenlő?

50. Mekkora az a szög, amely két mellékszögével együtt *a)* $1\frac{3}{16}$, *b)* $1\frac{5}{9}$ része az egyenesszögnek?

51. Két merőleges szárú szög közül az egyik *a)* háromszorosa, *b)* négyszerese, *c)* ötszöröse a másik szögnek. Mekkora a két szög?

52. Az α és β szögek szárai merőlegesek egymásra. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát, ha *a)* a β szög 11-szerese az α-nak, *b)* a β szög harmadrésze az α-nak, *c)* a β szög $\frac{7}{2}$ része az α-nak.

53. Az α és β szögek szárai párhuzamosak, továbbá tudjuk, hogy α 90°-kal nagyobb β-nál. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát.

54. Két adott szög szárai párhuzamosak. Az egyik *a)* 90°-kal, *b)* 120°-kal, *c)* 75°-kal nagyobb, mint a másik. Mekkorák az adott szögek minden egyes esetben?

55. Két párhuzamos egyenest egy harmadik metsz. A belső szögek közül az egyik a derékszög $1\frac{3}{5}$ része.

Mekkora szögben metszi ennek a szögnek a szögfelezője a másik párhuzamos egyenest?

56. Mutassuk meg, hogy egy szögnek és a mellékszögének szögfelezői merőlegesek egymásra.

57. Bizonyítsuk be, hogy ha két szög egyik szára közös, és a szögek felezői merőlegesek egymásra, akkor a másik két szögszár egy egyenesbe esik.

58. Messünk el két párhuzamos egyenest egy harmadikkal, és szerkesszük meg a metszéspontokban keletkezett szögek felezőit. Mutassuk meg, hogy a kapott négy szögfelező közül bármely kettő vagy párhuzamos egymással, vagy merőleges egymásra.

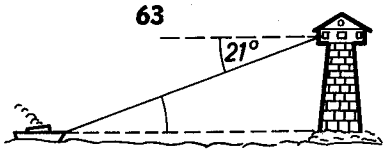
59. α és β két egymás mellett levő szög. A β szög az α-nál 130°-kal nagyobb, és a két szög felezője merőleges egymásra. Határozzuk meg az α és β szögek nagyságát.

60. Bizonyítsuk be, hogy ha két szög egyenlő, és felezőik párhuzamosak, akkor a két szög szárai is páronként párhuzamosak.

61. Bizonyítsuk be, hogy egy szög csúcsában a felezőre állított merőleges felezi a szög mellékszögét.

62. Az ABC háromszög a oldalának végpontjaiból bocsássunk merőlegeseket a háromszög másik két oldalára. A merőlegesek metszésénél keletkezett szögek: *a)* 127°17′, *b)* 142°37′, *c)* 47°6′42″. Számítsuk ki a háromszög A csúcsánál levő szögét.

63



63. Egy világítótoronyból egy érkező hajó 21°-os, ún. depressziós szög alatt látszik (63. ábra). Mekkora szögben látszik a hajóról a világítótorony?

64. Egy hajó északi irányban halad egy pontig, majd itt 67,5°-kal elfordul pozitív irányba. A szélrózsa milyen irányában halad ekkor?

65. Egy repülőgép keleti irányban hagyja el a repülőteret, majd északkeletnek fordul. Ezután egy célpontot elhagyva, az előző irányból 90°-kal dél felé fordul. Milyen világtáj felé halad ekkor?

66. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 39°$, $B\sphericalangle = 98°$. Mekkora szöggel kell elforgatni a B csúcs körül a BC oldalt, hogy az az AC oldallal párhuzamos legyen?

67. Mutassuk meg, hogy ha egy mozdulatlan fénysugár útjába helyezett sík tükröt a fénysugarak síkjára merőleges tengely körül α szöggel elforgatunk, akkor a visszavert fénysugár 2α szöggel fordul el. (Ez a módszer alkalmas arra, hogy a fizikában igen kis elmozdulást kimutathassanak.)

68. Egy ABC derékszögű háromszög C csúcsából bocsássunk merőlegest az AB oldalra. A merőleges AB-vel való metszéspontja legyen T. Bizonyítsuk be, hogy $TCB\sphericalangle = A\sphericalangle$, és $TCA\sphericalangle = B\sphericalangle$. ($C\sphericalangle = 90°$.)

SOKSZÖGEK SZÖGÖSSZEGE, KÜLSŐSZÖG-TÉTEL. EGYENLŐ SZÁRÚ HÁROMSZÖG

69. Mekkora a *a)* 4, *b)* 8, *c)* 13, *d)* 96, *e)* n oldalú konvex sokszög szögeinek összege?

70. Hány oldalú az a sokszög, melyben a szögösszeg 1620°?

71. Mekkora az egyenlő szögű *a)* ötszög, *b)* hatszög, *c)* hétszög, *d)* tízszög, *e)* n-szög egyik szöge?

72. Mutassuk meg, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 60°-os, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

73. Igazoljuk, hogy egy négyszögnek nem lehet minden szöge hegyesszög.

74. Rajzoljunk fel olyan *a)* hatszöget, *b)* nyolcszöget, amelyben bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra.

75. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sokszögben bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor az oldalszám páros.

76. Hogyan változik meg egy sokszög szögeinek összege, ha az oldalak számát néggyel növeljük?

77. Egy sokszög szögösszege s. Hogyan változik a szögösszeg, ha az oldalak számát kétszeresére növeljük?

78. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében tűzzünk ki egy pontot, és kössük össze a sokszög csúcsaival. Hány háromszög keletkezik így, mekkora ezek szögösszege?

79. Mekkora a *a)* háromszög, *b)* négyszög, *c)* ötszög külső szögeinek összege?

80. Ha egy sokszög belső szögeinek összegéhez hozzáadjuk egyik külső szögét, 1846°-ot kapunk. Hány oldalú a sokszög, és mekkora a külső szög?

81. Egy sokszög belső szögeinek összege 18 540°. *a)* Hány oldalú a sokszög? *b)* Mekkora a külső szögek összege?

82. Bizonyítsuk be, hogy konkáv négyszögben is 360° a belső szögek összege.

83. Bizonyítsuk be, hogy minden konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

84. Egy meghatározott körüljárási irányt véve, jelöljük meg egy $ABCD$ konvex négyszög szögeit, és toljuk el azokat az A csúcsba. Mekkora szöget adnak a külső szögek együttesen? Általánosítsuk a feladatot.

85. Tudjuk, hogy egy n oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege 360°. Ennek felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$.

86. Mutassuk meg, hogy egy háromszög külső szögei között legfeljebb egy hegyesszög lehet, de mindig van legalább két tompaszög.

87. Melyik az a legkisebb oldalszámú konvex sokszög, amelynek a külső szögei között már biztosan van hegyesszög?

88. Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alappal szemközti csúcsban szerkesztett külső szögfelező párhuzamos az alappal.

89. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög egyik külső szögének felezője párhuzamos a szemközti oldallal, akkor a háromszög egyenlő szárú.

90. Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszög egyik szárához tartozó magasságnak az alappal bezárt szöge mindig fele az alappal szemközti szögnek.

91. Van-e olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben egy szárhoz tartozó magasságnak az alappal bezárt szöge a csúcsnál levő szög harmadrésze?

92. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög egyik külső szöge az egyik nem szomszédos belső szög kétszerese, akkor a háromszög egyenlő szárú.

93. Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög egyik oldalegyenesén levő két külső szög összege a két nem szomszédos belső szög összegével egyenlő.

94. Hány oldalú a konvex sokszög, ha belső szögeinek összege háromszor akkora, mint a külső szögek összege?

95. Egy háromszög két szögének aránya 5:7. A háromszög harmadik szöge $\frac{1}{18}$ egyenesszöggel nagyobb az elsőnél. Mekkorák a háromszög szögei?

96. Egy háromszög egyik szöge 70°. A másik két szög aránya 5:6. Mekkorák a háromszög szögei?

97. Egy háromszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint *a)* 1:2:3, *b)* 3:4:5, *c)* 3:7:8. Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát.

98. Egy háromszög egyik szöge 42°24′. A másik két szög közül az egyik 27,1°-kal nagyobb a másiknál. Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát.

99. Egy ötszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1:2:3:4:5. Mekkorák az ötszög szögei?

100. Mutassuk meg, hogy egy egyenesre egy külső pontból csak egy merőleges bocsátható.

101. Egy háromszög egyik külső szöge 87°, egyik belső szöge pedig 27°. Mekkorák a háromszög szögei?

102. Van-e olyan háromszög, amelyben az egyik szög kétszer akkora, a másik szög pedig háromszor akkora, mint a harmadik csúcsnál levő külső szög?

103. Egy háromszög két külső szöge 128° és 116°. Mekkorák a háromszög szögei?

104. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 87°. Mekkorák a háromszög szögei?

105. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge *a)* 96°, *b)* 64°. Mekkorák a szögei?

106. Egy háromszög egyik szöge *a)* 32°, *b)* 42,31°, *c)* 50°14′. Határozzuk meg a másik két szög szögfelezője által alkotott szög nagyságát.

107. Mekkora szöget zárnak be a derékszögű háromszögben a hegyesszögek szögfelezői?

108. Igazoljuk, hogy a háromszög két szögének felezője 90°-kal nagyobb szöget zár be a harmadik szög felénél.

109. Mekkora szöget alkotnak egymással a háromszög magasságvonalai, ha

a) $\alpha = 22{,}5°$ és $\beta = 75°$;
b) $\alpha = 30°$ és $\gamma = 45°$;
c) $\beta = 15°$ és $\gamma = 60°$.

Két egyenes szögén a keletkező kétféle szög közül a kisebbiket értjük.

110. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 47°42'$, $B\sphericalangle = 73°10'$. Mekkora szöget zárnak be egymással az A és B csúcsokhoz tartozó *a)* szögfelezők, *b)* magasságvonalak?

111. Mekkora szöget zár be az előző feladatbeli háromszögben az A csúcshoz tartozó szögfelező a szemközti oldallal?

112. Egy négyszögben $A\sphericalangle = 72°$, $B\sphericalangle = 122°$, $C\sphericalangle = 68°$. Mekkora szöget zárnak be az A és C csúcsokhoz tartozó szögfelezők?

113. Mekkora szöget zárnak be az előző feladatban az A és B csúcsokhoz tartozó szögfelezők?

114. Egy egyenlő szárú háromszög alappal szemközti szöge 30°. Mekkora szöget zár be az egyik szárhoz tartozó magasságvonal *a)* az alappal, *b)* a másik szárral?

115. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárához tartozó magasság a másik szárral 13°-kal kisebb szöget alkot, mint az alapon levő szög. Mekkorák a háromszög szögei?

116. A derékszögű háromszög egyik szöge 27°. Mekkora szögekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget?

117. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben a oldal és m_b magasság által bezárt szög egyenlő b oldal és m_a magasság által bezárt szöggel.

118. Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszögben a derékszög szögfelezője és az átfogóhoz tartozó magasság 45°-kal kisebb szöget zár be, mint a háromszög egyik hegyesszöge.

119. Egy háromszög két szöge α és β. Mekkora szöget zárnak be egymással *a)* a szögek felezői *b)* a külső szögek felezői, *c)* a szögek csúcsaihoz tartozó magasságvonalak?

120. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mekkorák a külső szögfelezők által alkotott háromszög szögei?

121. Egy háromszög két szöge 67° és 33°. *a)* Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező? *b)* Oldjuk meg a feladatot általánosan is.

122. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy csúcsához tartozó szögfelező a szemközti oldallal olyan két szöget zár be, amelyeknek különbsége a háromszög másik két szögének különbségével egyenlő.

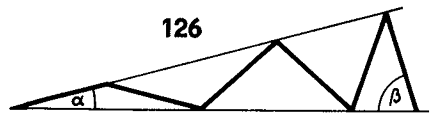
123. Egy egyenlő szárú háromszög csúcsnál levő szögfelezője olyan két háromszögre bontja a háromszöget, amelyeknek a szögei ugyanakkorák, mint az eredeti háromszög szögei. Mekkorák az egyenlő szárú háromszög szögei?

124. Egy egyenlő szárú háromszög alappal szemközti szöge 36°. Bizonyítsuk be, hogy az alapon levő szög szögfelezője a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre bontja.

125. Egy egyenlő szárú háromszög alapszögének felezője a háromszög alapjával egyenlő. Mekkorák a háromszög szögei?

126. A 126. ábrán vastagon húzott szakaszok egyenlők. Mekkora a β, ha $\alpha = 15°$?

126



127. A 126. ábrán hat egyenlő szakaszból áll a vastag törött vonal. *a)* Bizonyítsuk be, hogy ez a törött vonal már nem folytatható tovább az ábrán látható módon. *b)* Hogyan kellene megválasztani az α-t, hogy a törött vonal tíz egyenlő szakaszt is tartalmazzon?

128. Mutassuk meg, hogy ha az előző feladatban szereplő törött vonal n számú szakaszból áll, akkor α kisebb 90° n-ed részénél.

129. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogóján vegyük fel az E és D pontokat úgy, hogy $BE = BC$ és $AD = AC$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett CDE háromszög egyenlő szárú, és csúcsnál levő szöge 45°.

130. Adott ABC háromszög AC oldalán vegyük fel a D és E pontokat úgy, hogy $AD = AB$ és $CE = CB$ legyen. Határozzuk meg az így létrejött DBE háromszög szögeinek nagyságát.

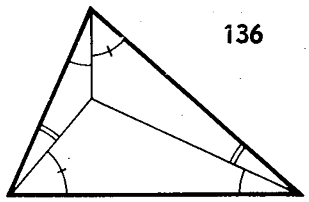
131. Az ABC háromszög A csúcsából kiinduló belső szögfelező messe a BC oldalt egy D pontban, a külső szögfelező pedig ugyanennek az oldalnak a meghosszabbítását egy E pontban. *a)* Milyen összefüggés van az ABC háromszög szögei között, ha $AD = AE$? *b)* Mekkorák a háromszög szögei, ha $C\sphericalangle = 34°$?

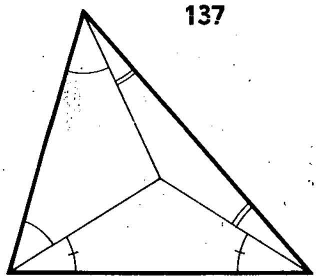
132. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Hosszabbítsuk meg a BA oldalt A-n túl egy D pontig úgy, hogy $BA = AD$ legyen. Igazoljuk, hogy a DBC háromszög derékszögű.

133. Legyen BC az ABC háromszög leghosszabb oldala. Mérjük rá BC-re B-ből kiindulva AB-t és C-ből kiindulva AC-t, a felmért szakaszok végpontja E, ill. F. *a)* Mekkora az $EAF\sphericalangle$, ha a háromszög szögei α, β, γ? *b)* Mutassuk meg, hogy ha a háromszög derékszögű, $EAF\sphericalangle = 45°$.

134. Szerkesszünk az ABC háromszög A csúcsából a C csúcsbeli belső szögfelezővel párhuzamost. Igazoljuk, hogy ez a BC oldal meghosszabbításából az AC oldallal egyenlő szakaszt vág le.

135. Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög BC oldalát a C csúcson túl az AC oldallal egyenlő szakasszal. Kössük össze ennek végpontját az A csúccsal, és mutassuk meg, hogy az összekötő egyenes párhuzamos a $C\sphericalangle$ belső szögfelezőjével.


136


137

136. A 136. ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe berajzolt szakaszok a magasságvonalak egyenesein vannak.

137. A 137. ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők. Számítsuk ki a belső pontnál levő szögeket, ha ismerjük a háromszög szögeit.

138. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszöget az átfogóhoz tartozó súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre bontja.

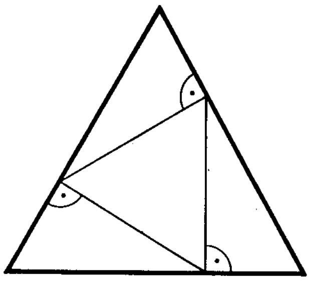
139. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak, akkor a háromszög derékszögű.

140. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik szög 30°-os, akkor az ezzel szemközti befogó fele az átfogónak.

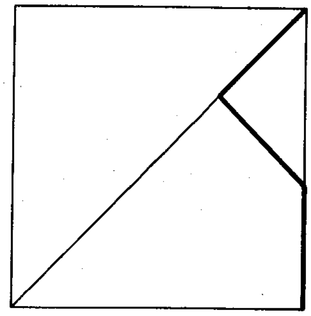
141. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15°-os, akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak.

142. Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszög oldalait három egyenlő részre osztó pontoknak a 142. ábrán látható összekötésekor keletkező megjelölt szögek derékszögek.

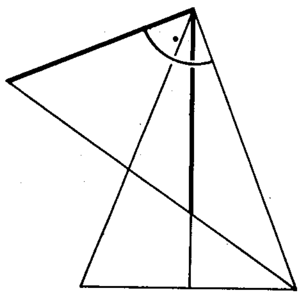
143. Egy négyzet átlóira a csúcsokból mérjük rá sorra a négyzet oldalait. Az így kapott pontokat kössük össze. *a)* Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett négyszög ismét négyzet. *b)* Határozzuk meg az új négyzet oldalának hosszát.



142



145



146

144. Hosszabbítsuk meg egy négyzet átlóit mindkét irányban annyival, amekkora a négyzet oldala; az így kapott végpontok ismét négyzetet alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy e négyzet oldala az eredeti négyzet átlójának és oldalának összegével egyenlő.

145. Mérjük rá egy négyzet egyik átlójára az egyik csúcsból kiindulva a négyzet oldalát: a kapott végpontban emeljünk merőlegest az átlóra. Bizonyítsuk be, hogy a 145. ábrán vastagon jelölt három szakasz egyenlő.

146. Az egyenlő szárú háromszög csúcsában emeljünk merőlegest az egyik szárra. Szerkesszük meg e szár és az alap szögének, majd a csúcsnál levő szögnek a szögfelezőjét is. Igazoljuk, hogy a 146. ábrán vastagon jelölt szakaszok egyenlők.

147. Mutassuk meg, hogy ha az egyenlő szárú háromszög egyik szárának és a hozzá tartozó szögfelező irányának ismeretében meg tudnánk szerkeszteni a háromszöget, akkor tetszőleges szöget is tudnánk harmadolni.

148. Két, egymást kívülről érintő körben szerkesszünk párhuzamos, de ellentétes irányú sugarakat. Igazoljuk, hogy e sugarak végpontjai és a körök érintkezési pontjai egy egyenesen vannak.

149. Az ABC háromszög AB alapját hosszabbítsuk meg A-n túl az AC szakasszal, B-n túl pedig a BC-vel, a kapott új végpontokat kössük össze C-vel. Mekkorák az így keletkezett háromszög szögei, ha az eredetié α, β, γ?

150. Az ABC háromszög A és B csúcsához tartozó belső szögfelezők metszéspontján keresztül szerkesszünk párhuzamost az AB oldallal. Mutassuk meg, hogy ennek a háromszög belsejében levő szakasza egyenlő az AC és BC oldalakból lemetszett kisebb szakaszok összegével.

151. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszögben az átfogó a leghosszabb oldal.

152. Bizonyítsuk be, hogy egy külső pontot egy egyenes pontjaival összekötő szakaszok közül az egyenesre merőleges szakasz a legrövidebb.

153. Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszög befogóinak az átfogóra való vetületei mindig kisebbek a befogóknál.

154. Az ABC derékszögű háromszögben osszuk fel egyenlő részekre a BC befogót, és kössük az osztópontokat össze az A hegyesszögű csúccsal. Vizsgáljuk meg azokat az A-nál keletkezett szögeket, amelyeknek szárai két szomszédos osztóponton mennek át, és mutassuk meg, hogy ezek annál kisebbek, mennél távolabb vannak az AC befogótól.

155. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög kétszerese a másiknak, akkor az átfogó is kétszerese az egyik befogónak.

156. Igazoljuk, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján bárhol felvett pontnak a szemközti csúcstól való távolsága kisebb a száraknál.

157. Igazoljuk, hogy a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal bármely pontjával összekötő szakasz rövidebb a másik két oldal egyikénél.

158. Mutassuk meg, hogy ha két háromszög megegyezik két oldalban, akkor a harmadik oldal abban a háromszögben nagyobb, amelyikben a két oldal nagyobb szöget zár be.

159. Egy konvex négyszög a, b, c, d oldalaira fennáll az $a>b>c>d$ egyenlőtlenség. Igazoljuk, hogy az a és b által alkotott szög kisebb, mint a c és d által alkotott szög.

160. Vegyünk fel az ABC háromszög belsejében egy P pontot, és bizonyítsuk be, hogy az APB szög mindig nagyobb, mint az ACB szög.

161. Milyen irányban bocsássunk a tükör előtt álló A pontszerű fényforrásból fénysugarat a tükörre, hogy a visszavert fénysugár adott B ponton menjen át?

162. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alap bármelyik pontjára nézve a száraktól mért távolságok összege állandó.

163. Igazoljuk, hogy ha bárhol is veszünk fel az egyenlő oldalú háromszög belsejében egy pontot, a három oldaltól mért távolságainak összege mindig ugyanakkora.

164. Létezik-e olyan háromszög, melynek oldalai *a)* 10, 12, 13, *b)* 1, 2, 3, *c)* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, *d)* 1911, 1918, 3826?

165. Egy háromszög egyik oldala 1,8 m, a másik 0,7 m. Mekkora a harmadik oldal, ha tudjuk, hogy mértékszáma egész szám?

166. Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 3 és 6 cm. Mekkora a harmadik oldal?

167. Az egyenlő szárú háromszög egyik szárához húzott súlyvonal a háromszög kerületét 15 cm és 6 cm hosszúságú részekre osztja. Mekkorák a háromszög oldalai?

168. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög a, b, c oldalai közül a a legnagyobb, akkor a $2a$, b, c oldalakból nem lehet háromszögeket szerkeszteni.

169. Igazoljuk, hogy a háromszög bármely oldala kisebb a fél kerületnél.

170. Igazoljuk, hogy a háromszög bármely két belső pontjának távolsága kisebb a legnagyobb háromszögoldalnál.

171. Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög bármely belső pontja és az egy-egy csúcs közti három szakaszból mindig lehet háromszöget szerkeszteni.

172. Igazoljuk, hogy ha P az ABC háromszög belső pontja, akkor $PB+ +PC<AB+AC$.

173. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy belső pontjának a csúcsoktól mért távolságösszege a kerület és a fél kerület közé eső számérték.

174. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik magassága kisebb, mint a vele azonos kezdőpontú oldalak összegének fele.

175. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög magasságvonalainak összege kisebb a háromszög kerületénél.

176. Legyen D az ABC háromszög AC oldalának tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy $AB+BC-AC<2BD$.

177. Mutassuk meg, hogy a háromszög bármelyik oldalához tartozó súlyvonal kisebb a másik két oldal számtani közepénél.

178. Igazoljuk, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege a kerület és a fél kerület közé esik.

179. Igazoljuk, hogy egy háromszög súlyvonalainak összege nagyobb a kerület háromnegyedénél.

180. Az ABC háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezőn jelöljünk ki egy tetszőleges A_1 pontot. Mutassuk meg, hogy az A_1BC háromszög kerülete nagyobb, mint az ABC háromszögé.

181. Igazoljuk, hogy a konvex négyszög szemközti oldalainak összege kisebb, mint az átlók összege.

182. Igazoljuk, hogy a konvex négyszög átlóinak összege kisebb a négyszög kerületénél, de nagyobb a négyszög fél kerületénél.

183. Mutassuk meg, hogy egy négyszögben bármelyik oldal kisebb a másik három összegénél.

184. Egy négyszög oldalai (ebben a sorrendben) 2, 6, 3 és 8 cm-esek. Bizonyítsuk be, hogy egyik átló sem érheti el a 9 cm-t.

185. Mutassuk meg, hogy a konvex négyszög síkjában az átlók metszéspontjában legkisebb a csúcsoktól mért távolságok összege.

186. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontnak egy sokszög csúcsaitól mért távolságösszege nagyobb a sokszög fél kerületénél.

187. Mutassuk meg, bárhogyan is adunk meg a síkon négy pontot (három nem lehet egy egyenesen), mindig ki lehet választani közülük hármat úgy, hogy azok ne legyenek egy hegyesszögű háromszög csúcsai.

188. Adjunk meg a síkon négy olyan pontot, hogy az általuk meghatározott négy háromszög mindegyike tompaszögű legyen.

189. A P és Q pontoknak a sík A és B pontjaitól mért távolságösszege egyenlő. Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz felezőpontjára ez az érték kisebb.

MÉRTANI HELYEK

A következő feladatokban (190 – 214.) egy-egy mértani helyet kell megállapítani. Rövidség kedvéért a feladatok szövegében csak a mértani helyet meghatározó tulajdonságot írjuk ki, a feladat mindig a jelölt tulajdonsággal rendelkező mértani hely megállapítása.

190. Egy egyenestől adott, egyenlő távolságra levő pontok.
191. Egy egyenestől 5 cm-nél kisebb távolságra levő pontok.
192. Egy egyenestől 5 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok.
193. Adott ponttól 5 cm-re és adott egyenestől 3 cm-re levő pontok.
194. Adott ponttól 5 cm-re és adott egyenestől 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok.
195. Adott ponttól 5 cm-nél nagyobb és adott egyenestől 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok.
196. P ponttól 4 cm-re, Q ponttól 6 cm-re levő pontok.
197. P ponttól 4 cm-nél, Q ponttól 6 cm-nél kisebb távolságra levő pontok.
198. P ponttól 4 cm-nél kisebb, Q-tól 6 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok.
199. Két egyenes mindegyikétől 1 cm-re levő pontok.
200. Egy ponttól 5 cm-nél kisebb, de 3 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok.
201. Egy háromszög belsejének pontjai, amelyek P-től adott r távolságra vannak.
202. Adott a síkon három egyenes: a, b, c. Szerkesszük meg azon pontok mértani helyét, amelyek rajta vannak a c egyenesen, és a-tól 3 cm-nél kisebb, b-től 4 cm-nél nagyobb távolságra vannak.
203. $AB = 15$ cm. A-tól 9, B-től 5 cm-re levő pontok.
204. Egy egyenestől d, egy másiktól d' távolságra levő pontok.
205. Egy 5 cm oldalú négyzet minden oldalegyenesétől 2,5 cm-re levő pontok.
206. Egy 5 cm oldalú négyzet minden oldalegyenesétől 2 cm-nél nagyobb távolságra levő pontok.
207. Két egymásra merőleges egyenes mindegyikétől 3 cm-nél kisebb távolságra levő pontok.
208. Mi a mértani helye azon pontoknak, amelyek két párhuzamos egyenes egyikétől kétszer akkora távolságra vannak, mint a másiktól?
209. Az ABC háromszög minden oldalegyenesétől egyenlő távolságra levő pontok.
210. Az ABC háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra levő pontok.
211. Egy négyzet minden oldalegyenesétől egyenlő távolságra levő pontok.
212. Mi a mértani helye azon ABC háromszögek C csúcsainak, amelyeknek A és B csúcsai rögzítettek, és a C csúcshoz tartozó magasságuk ugyanakkora?
213. Mi a mértani helye azon ABC háromszögek C csúcsainak, amelyek A és B pontjai rögzítettek, és az ABC háromszög köré írt kör sugara ugyanakkora?
214. Az ABC háromszög AB és AC oldalegyeneseitől, ill. az A és B csúcsoktól egyenlő távolságra levő pontok.
215. Szerkesszünk pontot, amely két adott pont mindegyikétől 6 cm-re van. Mi a megoldhatóság feltétele, és hány megoldása lehet a feladatnak?

216. Szerkesszünk pontot, amely az A ponttól 5, a B ponttól 3 cm-re van. Adjuk meg az A és B pontokat úgy, hogy a feladatnak csak egy megoldása legyen.

217. Szerkesszünk adott egyenesen pontot, amely egy O ponttól 3 cm-re van. Hogyan kell az O-t felvenni, hogy az feladatnak több megoldása is legyen?

218. Szerkesszünk egyenest, amely adott egyenessel párhuzamos, és egy megadott ponttól 4 cm-re van.

219. Szerkesszünk egyenest, amely adott egyenessel 30°-os szöget zár be, és egy megadott ponttól 4 cm-re van.

220. Szerkesszünk egyenest, amely adott ponton átmegy, és adott egyenessel előre adott szöget zár be. Hogyan kell megadni a szöget, hogy a feladatnak csak egy megoldása legyen?

221. Egy félegyenesre minden pontjában állítsunk merőlegest, és ezekre mérjük fel ugyanazon irányban a merőleges talppontjának a félegyenes kezdőpontjától mért távolságát. Mi az így nyert merőleges szakaszok végpontjainak mértani helye?

222. Egy szög egyik szárán mozog egy pont. Minden helyzetében húzzunk – gondolatban – párhuzamost a másik szárral, és mérjük rá a mozgó pontnak pillanatnyi távolságát a szög csúcsától. Mi az így kapott végpontok mértani helye?

223. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyek két egyközepű körtől egyenlő távolságra vannak?

224. Szerkesszük meg egy tompaszög nyolcadrészét!

225. Felezzünk meg egy homorú szöget!

226. Szerkesszünk az ABC háromszög AB oldalán olyan pontot, amely a B és C pontoktól egyenlő távolságra van. Elemezzük a feladatot!

227. Egy háromszög egyik oldalán szerkesszünk olyan pontot, amely a másik két oldalegyenestől egyenlő távolságra van.

228. Messünk el két párhuzamos egyenest egy harmadikkal, és szerkesszünk pontot, amely mindhárom egyenestől egyenlő távolságra van.

229. Adjunk meg a síkon öt pontot úgy, hogy létezzék mind az öttől egyenlő távolságra levő pont.

230. Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Vegyük fel a síkon az A, B, C, D pontokat úgy, hogy ne legyenek egy körön, továbbá, az A, B és C, D pontpárok ne legyenek párhuzamos egyeneseken. Ekkor az AB felező merőlegese és CD felező merőlegese metszik egymást egy O pontban, de ez az O egyenlő távolságban van az A-tól és B-től – hiszen rajta van AB felező merőlegesén – és ugyanilyen oknál fogva C-től és D-től is, így O egyenlő távolságra van mind a négy ponttól, ezért van olyan O középpontú kör, amely tartalmazza a pontokat, holott ezeket úgy vettük fel, hogy ne legyenek egy körön.

231. Adott két szakasz. Szerkesszünk a szakaszok fölé egyenlő szárú háromszögeket, amelyeknek a csúcsa egybeesik.

232. Egy szög szárai között adott egy pont. Szerkesszünk a ponton át egyenest, amely a szög száraiból egyenlő darabokat metsz le.

233. Adott egyenesen szerkesszünk pontot, amely két ponttól egyenlő távolságra van.

234. Adott egy konvex szög szárai között egy pont. Szerkesszünk a szög belsejében a száraktól egyenlő távolságra pontokat, amelyek az adott ponttól 3 cm-re vannak.

235. Szerkesszük meg az adott a egyenesen azt a pontot, amely egy b egyenestől t távolságra van.

236. Adott egy e egyenes és egy P pont. Szerkesszünk pontot, amely e-től és P-től is a távolságra van.

237. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két csúcsa, egy a harmadik csúcson átmenő egyenes, és ismerjük még a harmadik csúcshoz tartozó magasság hosszát is.

238. Szerkesszünk háromszöget, ha adott alapjának egyenese, az ehhez tartozó magasság, két másik oldalának a hossza, továbbá egy egyenes, amely átmegy az alappal szemközti csúcson.

239. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta fekvő egyik szög és az oldalhoz tartozó magasság.

240. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és az egyikhez tartozó magasság.

241. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta levő egyik szög és az oldalhoz tartozó súlyvonal.

242. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala; a hozzá tartozó súlyvonal és magasság.

243. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik csúcshoz tartozó magasság és szögfelező és még egy szög.

244. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott a magassága.

245. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott egyik csúcsa és a szemközti oldalának egyenese.

246. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott a középpontja (szögfelezőinek metszéspontja) és egyik oldalának egyenese.

247. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapjának két csúcsa és egyik szárának egyenese.

248. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a szemközti szöge.

249. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és az alapon fekvő szög.

250. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a hozzá tartozó magasság.

251. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és az egyik befogó.

252. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és az egyik szárhoz tartozó magasság.

253. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja, továbbá az alapnak az egyik szárhoz tartozó súlyvonallal bezárt szöge.

254. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és az a szög, amelyet az alap egyik végpontjából kiinduló szögfelező az alaphoz tartozó magassággal bezár.

255. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és a hozzá tartozó magasság.

256. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott egyik szára és a hozzá tartozó súlyvonal.

257. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott egyik szára és a szárhoz tartozó magasság talppontja.

258. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az egyik szára és a hozzá tartozó súlyvonalnak a szárral bezárt szöge.

259. Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója.

260. Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott *a)* derékszögű csúcsa és átfogójának egyenese; *b)* egyik hegyesszögű csúcsa és szemközti oldalának egyenese.

261. Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott

a) az átfogójának és egyik befogójának összege,
b) az átfogójának és egyik befogójának különbsége.

262. Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott a kerülete.

263. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott alapjának és szárának összege és az egyik szög.

264. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott alapjának és egyik szárának különbsége és az egyik szöge.

265. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott kerülete és az alapon fekvő szöge.

266. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának az összege, a közbezárt szög és a két oldal egyikéhez tartozó magasság.

267. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának a különbsége, a két oldal által bezárt szög és a két oldal egyikéhez tartozó magasság.

268. Szerkesszünk derékszögű háromszöget a következő adatokból (a és b befogók, c átfogó):

a) $a+b$, c. *b)* $a-b$, c. *c)* $a-b$, α.
d) $a+b+c$, c. *e)* $c-a$, α. *f)* $a+b+c$, α.

269. Szerkesszünk háromszöget a következő adatokból:

a) $b+c$, a, γ. *b)* $b+c$, a, α. *c)* $b+c$, α, β.
d) $b+c$, a, m_b. *e)* $b+c$, m_b, γ.

270. Végezzük el az előző feladat szerkesztéseit, ha $b+c$ helyett $b-c$ adott.

271. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának összege és különbsége, valamint a két oldal által bezárt szög.

272. Egy O csúcsú szög egyik szárán jelöljünk ki egy P pontot, és adjunk meg egy t szakaszt. Szerkesszünk a másik száron olyan Q pontot, amelyre a $PQ+QO = t$ egyenlőség fennáll.

273. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott egyik oldalának és a magasságnak összege.

274. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott szárának és az alaphoz tartozó magasságnak az összege, valamint az alap.

275. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a oldala, a hozzá tartozó magasságnak és a b oldalnak az összege, valamint a γ szög.

276. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alappal szemközti szög és az alaphoz tartozó magasság.

277. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárát az alappal szemközti csúcson túl hosszabbítsuk kétszeresére, az így nyert pontot kössük össze az alap másik csúcsával. Mutassuk meg, hogy ez az összekötő egyenes merőleges az alapra.

278. Egy derékszögű háromszögben az egyik hegyesszög kétszer akkora, mint a másik. Mutassuk meg, hogy akkor az átfogó kétszer akkora, mint az egyik befogó.

279. Egy szög felezőjének egyik pontjából szerkesszünk párhuzamosakat a szögszárakkal. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett párhuzamos sávok egyenlő szélesek.

280. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek egy szög két szárától mért távolságainak különbsége egy adott szakasz hosszával egyenlő?

281. Mi a mértani helye azon pontoknak, amelyeknek egy derékszög két szárától mért távolságösszege adott szakasz hosszával egyenlő?

282. Adott derékszögű háromszögbe írjunk be négyzetet úgy, hogy annak két szomszédos oldala egy-egy befogón legyen rajta.

283. Adott derékszögű háromszögbe írjunk be adott kerületű téglalapot.

284. Adott körbe írjunk be adott kerületű téglalapot.

285. Mutassuk meg, hogy az adott körbe írható téglalapok közül a négyzet kerülete a legnagyobb.

AZ EGYBEVÁGÓSÁG FOGALMA. HÁROMSZÖGEK, SOKSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGA

286. Mutassuk meg, hogy ha a háromszöget szét lehet vágni két egybevágó részre, akkor a háromszög egyenlő szárú.

287. Bizonyítsuk be, hogy két háromszög egybevágó, ha megegyeznek

a) két oldalban és az egyikhez tartozó súlyvonalban;
b) két szögben és az egyikhez tartozó szögfelezőben;
c) két szögben és a harmadikhoz tartozó szögfelezőben;
d) két szögben és a harmadikhoz tartozó magasságban;
e) két szögben és az egyikhez tartozó magasságban;
f) egy oldalban, egy rajta fekvő szögben és az ehhez tartozó szögfelezőben;
g) egy oldalban, egy rajta fekvő szögben és a szög csúcsából kiinduló magasságban.

288. Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő szárú háromszög egybevágó, ha megegyeznek:

a) alapjukban és a vele szemközti szögben;
b) alapjukban és a hozzá tartozó magasságban;
c) alapjukban és a szárakhoz tartozó magasságban;
d) alapjukban és szárukban;
e) alapon fekvő szögükben és az alaphoz tartozó magasságban.

289. Bizonyítsuk be, hogy két derékszögű háromszög egybevágó, ha

a) két-két befogójuk egyenlő;
b) átfogójuk és egyik befogójuk egyenlő;
c) egy befogójuk és az ezzel szemközti szögük egyenlő.

290. Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő szárú derékszögű háromszög egybevágó, ha átfogóik egyenlők.

291. Mutassuk meg, hogy ha két háromszög egybevágó, akkor szükségképpen egyenlők a megfelelő oldalakhoz tartozó *a)* magasságok, *b)* súlyvonalak és *c)* szögfelezők.

292. Mutassuk meg, hogy a következő állítás hamis: két háromszög egybevágó, ha megegyezik egy oldaluk és két szögük.

293. Mutassuk meg, hogy két egyenlő szárú háromszög nem szükségképpen egybevágó, ha egy oldala és két szöge egyenlő.

294. Vizsgáljuk meg a következő állítás helyességét:
Két háromszög egybevágó, ha két oldalban és a közös csúcsból kiinduló magasságban megegyeznek.

295. Mutassuk meg, hogy ha két háromszög megegyezik két oldalban és az egyikkel szemközti szögben, továbbá tudjuk, hogy a másik egyező oldallal szemközti szög mindkettőjükben hegyesszög vagy mindkettőjükben tompaszög, akkor a két háromszög egybevágó.

296. Mutassuk meg, hogy két konvex négyszög egybevágó, ha megegyeznek oldalaikban és egy a megfelelő oldalak által közrefogott átlóban.

297. Igazoljuk, hogy két négyszög egybevágó, ha megegyeznek három oldalukban és az oldalak által bezárt két szögben.

298. Mutassuk meg, hogy két négyszög egybevágóságához általában nem elegendő az, hogy négy megfelelő oldaluk és egy megfelelő szögük megegyezzék.

299. Igazoljuk, hogy két egyenlő oldalú háromszög egybevágó, ha magasságuk egyenlő.

300. Mutassuk meg, hogy az egyenlő szárú háromszögben

a) a szárakhoz tartozó súlyvonalak,
b) a szárakhoz tartozó magasságok,
c) az alapon levő szögek felezői egyenlők.

301. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszögben az egyik csúcshoz tartozó magasságvonal és súlyvonal egybeesik, akkor a háromszög egyenlő szárú.

302. Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben két magasságvonal egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.

303. *a)* Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög valamelyik oldalának felezőpontján párhuzamost húzunk a másik két oldal egyikével, akkor az így kapott egyenes felezi a harmadik oldalt, és a háromszög belsejébe eső szakasza fele annak az oldalnak, amelyikkel párhuzamos.
b) Igazoljuk, hogy ha valamely háromszög két oldalának felezőpontján át egyenest rajzolunk, akkor az párhuzamos a harmadik oldallal, és a felezőpontok közé eső szakasza fele a harmadik oldalnak.

304. Szerkesszük meg az ABC háromszög két súlyvonalát. A súlyvonalak metszéspontja (S) és a csúcsok közötti távolságot felezzük meg. E felezési pontokat jelöljük S_1, S_2-vel, továbbá a háromszög oldalfelező pontjait F_1, F_2-vel. Bizonyítsuk be, hogy az SF_1F_2 háromszög egybevágó az SS_1S_2 háromszöggel.

305. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két súlyvonala a csúcsoktól számítva 2:1 arányban osztja egymást.

306. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben két súlyvonal egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.

307. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben két szögfelező egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.

308. Bizonyítsuk be, ha egy háromszög *a)* mindhárom súlyvonala, *b)* mindhárom magasságvonala, *c)* mindhárom szögfelezője egyenlő, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

309. Igazoljuk, hogy egy szög felezőjére emelt merőleges a szárakból egyenlő szakaszokat metsz ki.

310. Mutassuk meg, hogy két párhuzamos egyenes pontjait összekötő szakaszok felezőpontjai a párhuzamosok középvonalán sorakoznak.

311. Rajzoljunk fel két egyenlő szélességű és párhuzamos helyzetű párhuzamos sávot (szalagot). Messük ezt el egy egyenessel, és bizonyítsuk be, hogy az egyenesnek a két sávon belüli szakaszai egyenlők.

312. Mutassuk meg, hogy a háromszög két oldalfelező pontját összekötő egyenes egyenlő távolságra halad a háromszög mindhárom csúcsától.

313. Mutassuk meg, hogy a háromszög bármely csúcsához tartozó súlyvonal egyenese egyenlő távolságra van a másik két csúcstól.

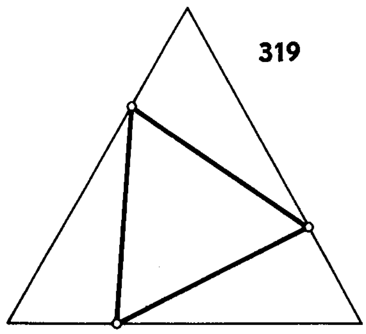
314. Szerkesszünk párhuzamos egyeneseket egy háromszög csúcsain át a szemközti oldalakkal. Mutassuk meg, hogy így négy egybevágó háromszöghöz jutunk.

315. Szerkesszünk egy derékszögű háromszög befogóira kifelé egy-egy négyzetet, és ezeknek egymástól legtávolabbi csúcsaiból bocsássunk egy-egy merőlegest az átfogó meghosszabbítására. Igazoljuk, hogy a merőlegesek talppontjai egyenlő távolságra vannak az átfogó megfelelő végpontjaitól.

316. Az O csúcsú szög egyik szárán jelöljük ki az A, B, másik szárán pedig a C, D pontokat úgy, hogy $OA = OC$ és $OB = OD$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy az AD és BC egyenesek a szög felezőjén metszik egymást.

317. Hogyan tudnánk az előző feladat alapján egy szög felezőjét megszerkeszteni?

318. Egy egyenlő oldalú háromszög minden oldalát hosszabbítsuk meg egyik irányban ugyanazzal a szakasszal úgy, hogy mindegyik csúcsnál csak egy meghosszabbítás kezdődjék. Bizonyítsuk be, hogy az új végpontok alkotta háromszög is egyenlő oldalú.


319

319. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő oldalú háromszög minden oldalát egyenlő módon osztjuk két részre (319. ábra), akkor az osztópontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai.

320. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő oldalú háromszögbe egy másik egyenlő oldalú háromszöget írunk, akkor a háromszög csúcsai az eredeti háromszög mindhárom oldalát egyenlő módon osztják ketté.

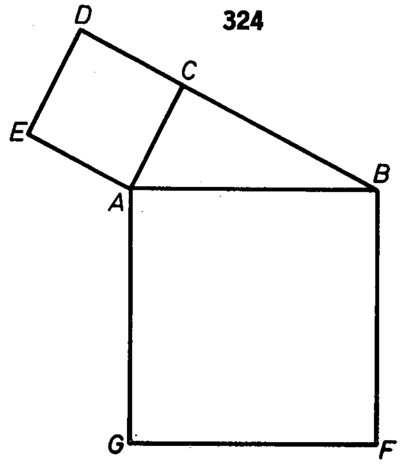
321. Írjunk négyzetbe egyenlő oldalú háromszöget, melynek egyik csúcsa egy négyzetcsúcsba, másik két csúcsa a két nem ide befutó oldalra esik. *a)* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög a négyzetből két egybevágó háromszöget vág le. *b)* Szerkesszük meg a négyzetbe a szabályos háromszöget.

322. Húzzunk két párhuzamos egyenest egy négyzet két átellenes csúcsán át, és emeljünk ezekre merőlegeseket a másik két csúcsból. Igazoljuk, hogy az így szerkesztett négy egyenes négyzetet határol.

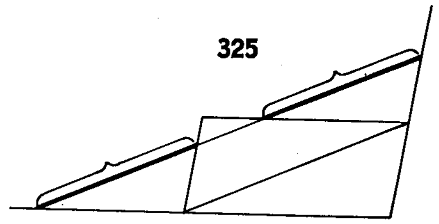
323. Mutassuk meg, hogy egy négyzet két szomszédos csúcsa és a szemközti oldalára állított egyenlő szárú háromszögnek az alappal szemközti csúcsa egyenlő szárú háromszöget határoznak meg.

324. Rajzoljunk négyzetet egy derékszögű háromszög átfogójára és egyik befogójára (324. ábra). Bizonyítsuk be, hogy az ábrán $EB = CG$.

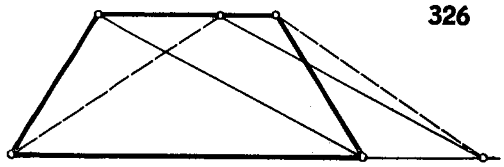
325. A 325. ábrán párhuzamost húztunk egy paralelogramma egyik átlójával. Igazoljuk, hogy a kapoccsal jelölt szakaszok egyenlők.



324



325



326

326. Toljuk el egy egyenlő szárú trapéz egyik átlóját a párhuzamos oldalak mentén (326. ábra). Új helyzetének végpontjait egy-egy trapézcsúccsal kötik össze a szaggatott szakaszok. Bizonyítsuk be, hogy a szaggatott szakaszok egyenlők.

327. Egy kör minden érintőjére – az érintési pontból kiindulva – azonos irányban mérjünk fel egy adott szakaszt. Mi lesz a végpontok mértani helye?

EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

TENGELYES TÜKRÖZÉS

328. Tükrözzünk háromszöget

a) egyik oldalára,
b) szögfelezőjére,
c) magasságvonalára.

329. Tükrözzünk kört egy a középpontját nem tartalmazó adott t egyenesre. Mutassuk meg, hogy a szerkesztés elvégzéséhez nincs szükségünk vonalzóra, csupán körzővel is elvégezhető.

330. Adott a síkon egy háromszög három oldalegyenese: a, b, c. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges pontját, tükrözzük azt az a-ra, majd a tükörképet a b-re és így tovább. Mutassuk meg, hogy ha a tükrözést a következő sorrendben végezzük: a, b, c, c, b, a, akkor visszajutunk az eredeti pontba.

331. Legyenek a, b, c egy közös ponttal rendelkező egyenesek. A sík egy tetszőleges pontját tükrözzük az egyenesekre a következő sorrendben: a, b, c, a, b, c.

332. Végezzük el az előző feladatot abban az esetben, ha a, b, c párhuzamos egyenesek.

333. A sík mely egyenesei egyeznek meg tengelyes tükörképükkel?

334. Mutassuk meg, hogy az egyenes és tükörképe a tengellyel ugyanakkora szöget zár be.

335. Mutassuk meg, hogy egy pontnak és tükörképének a tengely egy tetszőleges pontjától mért távolsága ugyanakkora.

336. Legyen t_1 és t_2 két merőleges egyenes, és menjen át metszéspontjukon az a egyenes. Bizonyítsuk be, hogy ha a-t t_1-re tükrözzük, ugyanazt az egyenest nyerjük, mintha t_2-re tükröztük volna.

337. Mutassuk meg, hogy két egyenlő sugarú körhöz mindig található olyan egyenes, amelyre nézve a két kör tükrös.

338. Hány szimmetriatengelye van

a) az egyenlő szárú háromszögnek?
b) az egyenlő oldalú háromszögnek?

339. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögnek két szimmetriatengelye van, akkor van három is.

340. Nevezzünk meg olyan alakzatot, amelynek végtelen sok szimmetriatengelye van.

341. Adott három egyenes: a, b, c. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely merőleges b-re, és b felezi az e egyenes a és c közötti szakaszát.

342. Adott három egyenes: a, b, c. Szerkesszünk négyzetet, amelynek két szemközti csúcsa az a, ill. c egyeneseken van, másik két csúcspontja pedig b-n.

343. Adott az A és B pont és egy t egyenes. Szerkesszünk a t-n olyan T pontot, hogy a TA és TB szakaszok a T pontban t-re állított merőleges különböző oldalán helyezkedjenek el, és mindkét szakasz ugyanakkora szöget zárjon be t-vel.

344. Egy egyenes országút ugyanazon oldalán helyezkedik el két község. Mindkét községbe bevezetik a villanyt, és a két község számára közvetlenül az országút mellett közös transzformátorállomást létesítenek. Hol kell az állomást elhelyezni, hogy a lehető legrövidebb vezetékre legyen szükség?

345. Mutassuk meg, hogy ha egy fénysugár egy A pontból kiindulva síktükörről való visszaverődés után egy B pontba jut, akkor a megtett út A és B között a lehető legrövidebb.

346. Bizonyítsuk be, hogy ha az egyenlő szárú háromszögben összeadjuk az alap bármely pontjának a két szártól mért távolságát, mindig ugyanazt az értéket kapjuk.

347. Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög bármely pontjának a három oldaltól mért távolságösszege mindig ugyanakkora.

348. Egy háromszög alapján szerkesszünk pontot, amelynek a másik két oldaltól mért távolsága együttvéve akkora, mint egy megadott szakasz.

349. A szabályos háromszög tetszőleges belső pontjából az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai az oldalakat két részre osztják. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott hat szakasz közül három-három egymáshoz nem csatlakozónak összege független a belső pont választásától.

350. Egy hegyesszög szárai között helyezkedik el az A és B pont. Szerkesszük meg az A és B között a legrövidebb utat, ha annak érintenie kell a két szögszárat is.

351. Egy hegyesszög szárai között adott egy pont. Szerkesszük meg a ponttól kiinduló és oda visszatérő legrövidebb utat, amely érinti a szögszárakat.

352. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán tűzzünk ki egy pontot. Írjunk a háromszögbe lehető legkisebb kerületű háromszöget úgy, hogy egyik csúcsa a kitűzött pont legyen.

353. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő beírt háromszög kerülete annál kisebb, minél közelebb van a kitűzött pont a szemközti csúcshoz.

354. Írjunk egy hegyesszögű háromszögbe egy háromszöget úgy, hogy annak kerülete a lehető legkisebb legyen.

355. Téglalap alakú biliárdasztalra két golyót helyezünk el. Milyen irányba kell ellökni az egyik golyót, hogy az mind a négy falat érintve eltalálja a másik golyót?

356. Egy egyenesen szerkesszük meg azt a pontot, amelynek két adott ponttól mért távolságkülönbsége a lehető legnagyobb.

357. Egy téglalap átlóinak metszéspontján át fektessünk egy tetszőleges egyenest, ez a két szemközti oldalt az A, ill. B pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy A-tól az egyik szomszédos oldalig és onnan a B-be vezető legrövidebb út a téglalap átlójával egyenlő.

358. Egy egyenesen megadunk egy P pontot és rajta kívül A-t. Szerkesszünk az egyenesen olyan X pontot, hogy az $AX+XP$ összeg egy adott szakasszal legyen egyenlő.

359. Egy egyenesen megadunk egy P pontot és rajta kívül A-t. Szerkesszünk az egyenesen egy X pontot úgy, hogy az $AX-XP$ különbség egy adott szakasszal legyen egyenlő.

360. Megadunk egy a és b egyenest, az előbbin egy A pontot. Szerkesszünk az a-ra olyan X pontot, amely A-tól és b-től is egyenlő távolságra van.

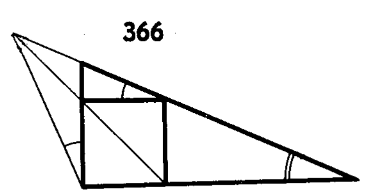
361. Adott az e egyenes és egyik oldalán két pont, A és B. Szerkesszük meg az e egyenesen az X pontot úgy, hogy AX felezze az e egyenes BX-szel alkotott szögét.

362. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengelye, az azon levő csúcs, továbbá a másik két csúcson átmenő egy-egy egyenes.

363. Adott három egyenes. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek az egyik egyenes szögfelezője, a másik kettő pedig egy-egy csúcsán megy át.

364. Adott két, egymást nem metsző kör és közöttük egy egyenes. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa a körökön, egy magassága pedig az adott egyenesen van.

365. Tűzzünk ki két pontot. Egyikük körül forgassunk egy rajta átmenő egyenest, és minden helyzetében tükrözzük rajta át a másik kitűzött pontot. Mi a tükörképek mértani helye?



366

366. A 366. ábrán négyzetet rajzoltunk egy derékszögű háromszögbe, majd meghosszabbítottuk a négyzet egyik átlóját és a háromszög átfogóját, metszéspontjukat pedig összekötöttük a derékszögű csúccsal. Igazoljuk, hogy a jelölt szögek egyenlők.

367. A háromszög egyik oldalán jelöljünk ki egy pontot, és tükrözzük azt végig egymás után a három szögfelezőre. Mutassuk meg, hogy a végeredményül kapott pont az eredetivel egy oldalon van.

368. Megrajzoltuk a háromszög három (egy ponton átmenő) szögfelezőjét, és megadtuk az egyik oldal egy pontját. Szerkesszük meg a háromszöget.

369. Egy háromszögnek két csúcsa és a harmadikból induló szögfelezője van a rajzlapon. Szerkesszük meg a háromszöget.

370. Adott egy kör és a középpontjából kiinduló három félegyenes. Szerkesszünk háromszöget, amelynek az adott félegyenesek szögfelezői, beírt köre pedig az adott kör.

371. Tükrözzük a háromszöget egyik oldalfelező merőlegesére, így egy egyenlő szárú trapézt kapunk. Mutassuk meg, hogy ebből a trapézból egyik átlója olyan háromszöget metsz le, amelynek két oldala az eredeti háromszög két oldalával egyenlő, a két oldal által bezárt szög pedig az eredeti háromszög két szögének a különbsége.

372. Szerkesszünk háromszöget, ha ismert két oldala és az ezekkel szemközti szögek különbsége.

373. Ismeretes egy háromszög alapegyenese, a szemközti csúcsból induló szögfelező egyenese és a másik két oldal hossza. Szerkesszük meg a háromszöget.

374. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott $\beta-\gamma$, m_a, b.

375. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta levő szögek különbsége és a hozzá tartozó magasság.

376. Egy szög egyik szárának tetszés szerinti pontjából szerkesszünk párhuzamost a szögfelezővel. Igazoljuk, hogy ezen egyenes bármely pontjának a szögszáraktól való távolságai ugyanannyival térnek el egymástól.

377. Szerkesszünk négyszöget, ha ismerjük oldalait, és tudjuk, hogy egyik átlója felezi az egyik szöget.

378. Mutassuk meg, hogy egy pontnak három különböző egyenesre vonatkozó tükörképe akkor és csak akkor lehet egy egyenesen, ha a pontból az egyenesre emelt merőlegesek talppontjai is egy egyenesen vannak.

379. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy csúcsának a másik két csúcshoz tartozó négy szögfelezőre vonatkozó tükörképei egy egyenesen vannak.

380. Állítsunk merőlegeseket a háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó szögfelezőkre. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak.

381. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott három oldalfelező merőlegese és az egyik oldal egy pontja.

382. Egy egyenes egyik partján két kör helyezkedik el. Szerkesszünk az egyenesen pontot, amelyből a körökhöz húzott érintők egyenlő szöget zárnak be az egyenessel.

383. Egy szög szárai között adott két pont. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja az egyik szögszáron van, szárai átmennek egy-egy adott ponton, harmadik csúcsa pedig a másik szögszáron helyezkedik el.

384. Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott annak AB és CD oldala, a BC és AD oldalak összege és az A csúcsnak a CD oldaltól mért távolsága; továbbá tudjuk, hogy a C és D csúcsnál fekvő szögek egyenlők.

385. Mutassuk meg, hogy ha egy sokszögnek több szimmetriatengelye van, akkor azok egy ponton mennek át.

386. Osszunk fel egy félkört páratlan számú egyenlő részre. Az osztópontokon át szerkesszünk párhuzamosokat az átmérővel. Húzzuk meg a két középső osztóponthoz tartozó sugarakat, és bizonyítsuk be, hogy a párhuzamosok két sugár közé eső részeinek összege független az osztópontok számától.

387. Egy körön tűzzünk ki két pontot, és egy átmérőt forgassunk a középpont körül úgy, hogy azokat el ne válassza. Az átmérő minden helyzetében szerkesszük meg annak a fénysugárnak az útját, amely az egyik kitűzött pontból indul, és az átmérőtől visszaverődve a másik kitűzött ponthoz ér. Mi lesz az átmérőn levő ütközési pontok mértani helye?

388. Bizonyítsuk be, hogy ha két egybevágó háromszög ellentétes körüljárású, akkor a megfelelő csúcsokat összekötő szakaszok felezési pontjai egy egyenesen vannak.

KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

389. Rajzoljunk fel egy tetszőleges négyszöget, és tükrözzük azt egyik csúcsára.

390. Mutassuk meg, hogy egy szakasz és egy pontra vonatkozó tükörképe vagy párhuzamosak, vagy egy egyenesbe esnek.

391. Adjunk meg két párhuzamos és egyenlő szakaszt. Szerkesszük meg azt a pontot, amelyre tükrözve a szakaszokat, egymásba mennek át.

392. Soroljunk fel középpontosan szimmetrikus alakzatokat.

393. Mutassuk meg, hogy ha a háromszöget egyik oldalának felezőpontjára tükrözzük, paralelogrammát kapunk.

394. Tükrözzünk egy egyenlő oldalú háromszöget középpontjára. Mi lesz az eredeti és a tükrözött háromszög közös része?

395. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög nem lehet középpontosan tükrös alakzat.

396. Mutassuk meg, hogy ha a középpontos tükrözésnél egy egyenes önmagába megy át, akkor a középpont rajta van az egyenesen.

397. Igazoljuk, hogy egy háromszög pontra vonatkozó tükörképét úgy is megszerkeszthetjük, hogy a háromszöget a középpont körül $180°$-kal elfordítjuk.

398. Tűzzünk ki egy t egyenest és rajta egy O pontot. A sík egy tetszőleges pontját tükrözzük a t-re, a tükörképet az O-ra, majd ismét a t-re és újra az O-ra. Mutassuk meg, hogy így mindig visszajutunk az eredeti pontba.

399. Jelöljük ki a síkon az A és B pontokat. Tükrözzük a sík egy tetszőleges P pontját az A-ra, majd a tükörképet B-re. Mutassuk meg, hogy így ugyanoda jutunk, mint ha pontunkat az AB-vel párhuzamosan az AB szakasz kétszeresével eltoljuk; az eltolás iránya A-ból B felé mutat.

400. Igazoljuk, hogy egy párhuzamos eltolás mindig helyettesíthető két, pontra való tükrözéssel.

401. Mutassuk meg, hogy két tengelyes tükrözés egymásutánja, ha a tengelyek merőlegesek egymásra, helyettesíthető a metszéspontjukra való tükrözéssel.

402. Mutassuk meg, hogy ha két párhuzamos egyenest középvonaluk egy pontjára tükrözünk, akkor azok egymásba mennek át.

403. Tűzzünk ki egy pontot, amely egyenlő távolságban van két párhuzamos egyenestől. Mutassuk meg, hogy a pont felezi minden rajta átmenő egyenesnek a két párhuzamos közötti szakaszát.

404. Húzzunk meg egy egyenest egy paralelogramma átlóinak közös pontján át. Mutassuk meg, hogy ez az egyenes a paralelogrammát két részre bontja, amelyek egymással középpontosan tükrösek.

405. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenes csak úgy lehet két ponttól egyenlő távol, ha vagy párhuzamos a két pontot összekötő egyenessel, vagy átmegy a két pont határolta szakasz felezőpontján.

406. Szerkesszünk egyenest, amely egy háromszög három csúcsától egyenlő távolságban halad.

407. Egy szög szárai között kitűzünk egy pontot. Szerkesszünk ezen át olyan szelőt, amelynek a szárak közé eső szakaszát a pont felezi.

408. Egy szög szárai között kitűzünk egy pontot. Szerkesszünk négyzetet, amelynek két átellenes csúcsa egy-egy szögszáron van, középpontja pedig az adott pont.

409. Adott két egyenes és egy pont. Keressünk az egyeneseken egy-egy pontot, amelyek tükrösek az adott pontra.

410. Egy szög tartományán kívül kitűzött pontból szerkesszünk szelőt, amelynek a közelebbi szárig terjedő darabja egyenlő a szárak közé eső darabjával.

411. Adott egy négyszög és belsejében egy pont. Írjunk a négyszögbe olyan paralelogrammát, amelynek középpontja az adott pont.

412. Rajzoljunk két pár párhuzamost, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk a ponton át olyan szelőt, melynek a két-két párhuzamos közé eső darabjai egyenlők.

413. Adjunk meg két párhuzamost, és tűzzünk ki rajtuk kívül egy pontot. A ponton át szerkesszünk szelőt úgy, hogy két metszéspontjának a kitűzött ponttól mért távolsága együttvéve akkora legyen, mint egy megadott szakasz.

414. Igazoljuk, hogy ha egy kört egy pontjára tükrözünk, a tükörkép érinti az eredeti kört.

415. Mutassuk meg, hogy két egymást metsző egyenlő sugarú kör középpontosan szimmetrikus a közös húr felezőpontjára.

416. Igazoljuk, hogy két egymást metsző egyenlő sugarú kör közös pontjain át húzott párhuzamosok a körökből egyenlő és párhuzamos húrokat metszenek ki.

417. Tükrözzük két egymást metsző kör egyikét az egyik közös pontra, és szerkesszük meg a helyben maradt körnek és a tükörképként kapott körnek a közös húregyenesét. Mutassuk meg, hogy ebből az eredeti két kör egyenlő hosszú húrokat metsz ki.

418. Két egymást metsző kör egyik metszéspontján át szerkesszünk olyan szelőt, amelyből a két kör egyenlő húrokat metsz ki.

419. Adott két kör és egy pont. Szerkesszünk a ponton át szelőt a körökhöz úgy, hogy annak a körök közé eső szakaszát a pont felezze.

420. Szerkesszünk két egyközepű kört metsző egyenest, amelynek a két kör közé eső darabjai egyenlők a kisebbik körbe eső darabjával.

421. Két kör közös pontján át húzzunk a körökhöz szelőt úgy, hogy a körök által kimetszett húrok különbsége egy adott szakasszal legyen egyenlő.

422. Rajzoljunk meg egy kört és egy egyenest, és tűzzünk ki a körön egy pontot. Szerkesszünk a ponton át olyan egyenest, amelynek a pont és az egyenes közötti szakasza egyenlő a körön belüli szakaszával.

423. Adott két kör és két egyenes, továbbá egy pont. Szerkesszünk paralelogrammát, amelynek középpontja az adott pont, szemközti csúcsai pedig a körökön, ill. az egyeneseken vannak.

424. Mutassuk meg, hogy az a kör, amely egy paralelogramma középpontján és az egyik oldalának végpontjain megy át, érinti a középponton és az előbbivel szemközti oldal végpontjain átmenő kört.

425. Tűzzünk ki egy körön két pontot, A-t és B-t. Fussa be az X pont a kört, és szerkesszük meg minden helyzetben azt az Y pontot, amellyel az Y az $AXBY$ paralelogrammában az X-szel szemközti csúcs lesz. Mi az Y pontok mértani helye?

426. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik végpontjától kezdve mérjünk fel az egyik szárra egy távolságot. A másik szárat hosszabbítsuk meg az alapon túl egy ugyanakkora darabbal. Igazoljuk, hogy az így kapott két pontot összekötő szakaszt felezi az alap.

427. Legyen az A és B két tetszőleges pont. Tükrözzük a sík egy P pontját A-ra, majd az eredményt B-re; az így nyert pontot P'-vel jelöljük. Végezzük el a két tükrözést most megfordított sorrendben is, először B-re, azután A-ra tükrözzük, az eredmény legyen P''. Milyen kapcsolatot találunk P, P' és P'' között?

428. Tükrözzük a P pontot egy tetszőleges AB szakasz végpontjaira, majd a tükörképeket egy AB-vel párhuzamos és vele egyenlő CD szakasz végpontjaira. Mutassuk meg, hogy ha AB és CD egyirányú, akkor a kétszeri tükrözés eredménye mindig ugyanaz a pont.

429. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges pontot egymás után egy paralelogramma négy csúcsára tükrözve, visszajutunk az eredeti pontba.

430. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan négyszöget tudunk szerkeszteni, amelynek oldalfelező pontjai egy adott paralelogramma csúcsai.

431. Bizonyítsuk be, hogy a sík egy tetszőleges pontját végigtükrözve sorban egy páros oldalszámú sokszög oldalfelező pontjaira, visszajutunk a kiindulási pontba.

432. Tükrözzünk végig egy tetszőleges P_0 pontot egy ötszög oldalfelező pontjaira, jelöljük a végeredményt P'-vel. Mutassuk meg, hogy az ötszög egyik csúcsa felezi a $P_0 P'$ szakaszt ($P' = P_5$).

433. Szerkesszük meg az ötszöget, ha adottak oldalfelező pontjai.

434. Adottak egy sokszög oldalfelező pontjai. Szerkesszük meg a sokszöget.

435. Tükrözzünk végig egy tetszőleges pontot sorban egy háromszög csúcsaira, majd az eredményül kapott pontot ismét sorban a három csúcsra. Bizonyítsuk be, hogy így mindig visszajutunk az eredeti pontba.

436. Szerkesszünk háromszöget, ha adott

a) két oldal és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal;
b) egy oldalhoz tartozó súlyvonal, az oldallal szemközti szög és egy másik oldal;
c) egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal;
d) egy oldal, a másikhoz tartozó súlyvonal és a harmadikhoz tartozó magasságvonal;
e) három súlyvonal.

437. Szerkesszünk trapézt, ha adott a két párhuzamos oldal összege, továbbá

a) a szárak hossza és a trapéz magassága,
b) az alapon levő két szög és a trapéz magassága,
c) az átlók hossza és egyik szára.

438. Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük két átlóját, az átlók szögét és az egyik alapot.

439. Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük két átlóját, az átlók hajlásszögét és az alapok különbségét.

440. Szerkesszünk négyszöget, ha ismert megadott sorrendben négy oldala és egyik középvonala.

441. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög akkor és csakis akkor trapéz, ha egyik középvonala egyenlő a hozzá nem tartozó oldalak számtani közepével.

FORGATÁS

442. Rajzoljunk egy háromszöget, és forgassuk el 90°-kal egyik csúcsa körül.

443. Egy szög szárai között tűzzünk ki egy pontot, és forgassuk el e körül a szöget 90°-kal.

444. Adjunk meg egy szöget, és forgassunk el egy adott egyenest az adott szöggel, ha a középpont

a) az egyenesen van;
b) nincs az egyenesen.

445. Tűzzünk ki egy pontot és egy egyenest. Forgassuk el adott középpont körül

a) a pontot, hogy rákerüljön az egyenesre;
b) az egyenest, hogy rákerüljön a pontra.

446. Adott pont körül forgassunk el egy egyenest úgy, hogy

a) adott egyenessel párhuzamos legyen;
b) adott egyenesre merőleges legyen.

447. Szerkesszünk meg olyan középpontot, amely körül egy adott A pont egy adott B pontba forgatható.

448. Rajzoljunk fel két egyenlő (de nem párhuzamos) szakaszt. Szerkesszünk pontot, amely körül a két szakasz egymásba forgatható.

449. Rajzoljunk két egybevágó egyenlő oldalú háromszöget (oldalaik ne legyenek párhuzamosak). Szerkesszünk pontot, amely körül a két háromszög egymásba forgatható.

450. Igazoljuk, hogy ha két alakzat egymásba forgatható, akkor bármely két megfelelő pont meghatározta szakasz felező merőlegese átmegy a középponton.

451. Rajzoljunk fel két egybevágó, egyenlő körüljárású ABC és $A'B'C'$ szabályos háromszöget. Mutassuk meg, hogy az AA', BB', CC' felező merőlegesei egy ponton mennek át.

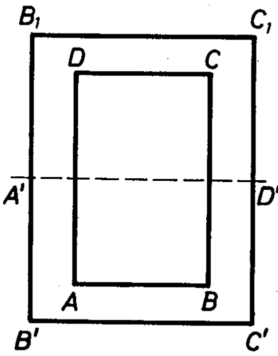
452. Egy egyenest adott pont körül α szöggel elforgatunk. Mekkora szöget zár be az egyenes elforgatottjával?

453. Adott két egybevágó, egyező körüljárású háromszög, amelyeknek megfelelő oldalaik nem párhuzamosak. Szerkesszünk olyan pontot, amely körül a két háromszög egymásba forgatható. Állapítsuk meg a pozitív irányba történő elforgatás szögét anélkül, hogy a forgatás középpontját meghatároznánk.

454. Rajzoljunk fel két egybevágó, egyező körüljárású téglalapot (oldalaik ne legyenek párhuzamosak). Szerkesszünk pontot, amely körül a téglalapok egymásba forgathatók.

455. Összehajtható, téglalap alakú asztalt akarunk készíteni oly módon, hogy az asztallap összehajtva az $ABCD$, derékszöggel elforgatva az $A'B'C'D'$ és szétnyitva a $B_1B'C'C_1$ helyzetet foglalja el. Hová kell elhelyeznünk a forgástengelyül szolgáló csapszeget (455. ábra)?

455



456. Bizonyítsuk be, hogy két egymást metsző tengelyre való tükrözés egymásutánja a metszéspont körüli elforgatással helyettesíthető.

457. Mutassuk meg, hogy minden elforgatás helyettesíthető két tengelyes tükrözéssel.

458. *a)* Bizonyítsuk be, hogy egy adott pontra vonatkozó tükrözés a pont körüli 180°-os elforgatással helyettesíthető.

b) Bizonyítsuk be, hogy adott pont körül 180°-os elforgatás a pontra vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető.

459. Milyen forgások azok, amelyek egy négyzetet önmagába visznek át?

460. Milyen forgások azok, amelyek egy szabályos háromszöget önmagába visznek át?

461. Rajzoljunk meg egy egyenlő oldalú háromszöget, legyenek a csúcsai A, B és C. Húzzunk a C-n át egy egyenest és

a) az A körül forgassuk el úgy, hogy menjen át a B ponton;

b) a háromszög középpontja körül forgassuk el úgy, hogy az egyenes A-n menjen át.

c) Hány fokos elforgatást alkalmaztunk az egyes esetekben?

462. Tűzzünk ki egy egyenest és rajta kívül egy O pontot. Fussa be a P az egyenes összes pontjait, és szerkesszük meg az összes azonos körüljárású POQ egyenlő oldalú háromszögeket. Mi a Q pontok mértani helye?

463. Rajzoljunk meg két párhuzamos egyenest, és közöttük egy pontot. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcsa a kitűzött pont, másik két csúcsa pedig egy-egy párhuzamosra esik.

464. Rajzoljunk három párhuzamos egyenest. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa egy-egy párhuzamosra esik.

465. Egy szög szárai között tűzzünk ki egy pontot, és szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa a szárakon van és

a) egyik csúcsa az adott pont;
b) középpontja az adott pont.

466. Írjunk egy adott háromszögbe szabályos háromszöget úgy, hogy egy csúcsa az egyik oldal adott pontja legyen.

467. Rajzoljunk két egyenest, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget úgy, hogy a derékszögű csúcs a pontban, a hegyesszögű csúcsok pedig egy-egy egyenesen legyenek.

468. Forgassunk el egy kört

a) egyik pontja körül derékszöggel;
b) egy külső pont körül úgy, hogy érintse az eredetit.

469. Rajzoljunk meg egy kört, egy egyenest és egy pontot. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget úgy, hogy egy-egy csúcsa a körön, az egyenesen, ill. a pontban legyen.

470. Adjunk meg három tetszőleges kört (lehetnek egyközepűek is), és szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa a körökön van, méghozzá egyik csúcs adott pontban.

471. Rajzoljunk meg három egyközepű kört. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek három csúcsa egy-egy körön van.

472. Igazoljuk, hogy ha egy négyzet köré paralelogrammát írunk, akkor a négyzet és a paralelogramma középpontja egybeesik.

473. Rajzoljunk egy paralelogrammát, és szerkesszünk négyzetet, amelynek csúcsai a paralelogramma egy-egy oldalán helyezkednek el.

474. Rajzoljunk két párhuzamost, és tűzzünk ki egy pontot rajtuk kívül. Szerkesszünk négyzetet, amelynek egyik csúcsa a kitűzött pont, két átellenes csúcsa pedig egy-egy párhuzamoson van.

475. Bizonyítsuk be, hogy egy négyzet két szemközti oldala közé eső tetszés szerinti szakasz ugyanakkora, mint a rá bárhol emelt merőlegesnek a másik két oldalegyenes közé eső szakasza.

476. Szerkesszünk négyzetet, ha adott mind a négy oldalegyenesének egy-egy pontja.

477. Adjunk meg három pontot. Szerkesszünk

a) négyzetet;
b) egyenlő oldalú háromszöget,

amelynek középpontja az egyik pont, a másik pont pedig egy-egy szomszédos oldalra esik.

478. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szárak által bezárt szög nagysága, a szöghöz tartozó csúcs és két egyenes, amelyeken az alap egy-egy csúcsa fekszik.

479. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő oldalú háromszögbe beírunk egy egyenlő oldalú háromszöget, akkor a két háromszög középpontja egybeesik.

480. Szerkesszünk adott egyenlő oldalú háromszögbe adott nagyságú egyenlő oldalú háromszöget.

481. Forgassunk el egy egyenlő oldalú háromszöget középpontja körül, és jelöljük meg az eredeti és az elforgatott oldalegyenesek metszéspontjait. Bizonyítsuk be, hogy a három metszéspont ismét egyenlő oldalú háromszöget határoz meg.

482. Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög köré írt kör egy pontját a csúcsokkal összekötő három szakasz közül az egyik egyenlő a másik kettő összegével.

483. Adott két egyenes, e_1, e_2 és egy P pont. Szerkesszünk P körül kört úgy, hogy annak e_1-gyel, ill. e_2-vel való egy-egy metszéspontját összekötő szakasz P-ből egy adott α szögben látszódjék.

484. Adott egy kör és két külső pont. Kössük össze a pontokat a kör egy-egy pontjával úgy, hogy az összekötő szakaszok párhuzamosak legyenek, és a köri végpontokhoz tartozó középponti szög egy előre adott szöggel legyen egyenlő.

485. Egy adott pontból két körhöz szerkesszünk egy-egy szelőt úgy, hogy azok a körökből egyenlő húrokat messenek ki, és a két szelő adott szöget zárjon be egymással.

486. Két koncentrikus kör között tűzzünk ki egy P pontot. A P ponton át szerkesszünk szelőt, amelynek a két kör közé eső darabja adott hosszúságú.

487. Szerkesszük meg az ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé az $ACPQ$ és $CBRS$ négyzeteket.

a) Mutassuk meg, hogy a PS szakasz kétszer akkora, mint a háromszög C-hez tartozó súlyvonala.

b) Bizonyítsuk be, hogy a BQ és az AR egyenesek a C-hez tartozó magasságvonalon metszik egymást.

488. Szerkesszünk egy paralelogramma oldalai fölé (kifelé) négyzeteket. Mutassuk meg, hogy a négyzetek középpontjai ismét négyzetet alkotnak.

ELTOLÁS

489. Rajzoljunk egy háromszöget, és adjunk meg egy vektort. Toljuk el a háromszöget az adott vektorral.

490. Rajzoljunk egy tetszőleges négyszöget, és tűzzünk ki egy pontot. Toljuk el a négyszöget úgy, hogy egyik csúcsa az adott pontba kerüljön.

491. Adjunk meg egy kört és egy négyzetet. Toljuk el a négyzetet úgy, hogy középpontja a kör középpontjába kerüljön.

492. Adjunk meg két párhuzamos egyenest és egy háromszöget. Tükrözzük a háromszöget az egyik, majd a tükörképet a másik egyenesre. Mit állapíthatunk meg az eredményről?

493. Igazoljuk, hogy két párhuzamos egyenesre való tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy eltolással.

494. Adott egy szakasz és rajta egy pont. Szerkesszünk a ponton át egy egyenest úgy, hogy a szakasznak az egyenesen levő merőleges vetülete adott hosszúságú legyen.

495. Egy háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy a szemközti oldalnak az egyenesen levő merőleges vetülete adott hosszúságú legyen.

496. Adott két egyenes. Szerkesszünk az egyik egyenesen olyan szakaszt, amelynek a másik egyenesen levő merőleges vetülete adott hosszúságú.

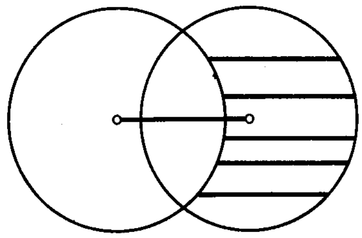
497. Adjunk meg egy egyenest és rajta kívül két pontot. Illesszünk a pontokra párhuzamosokat úgy, hogy azok az egyenesből adott hosszúságú szakaszt messenek ki.

498. Egy szög szárai közé helyezzünk el úgy egy adott hosszúságú szakaszt, hogy az a szögszárakból egyenlő darabokat messen le.

499. Rajzoljunk egy háromszöget és két egyenest. Toljuk el a háromszöget az egyik egyenessel párhuzamosan úgy, hogy kijelölt csúcsa a másik egyenesre kerüljön.

500. Szerkesszünk két egybevágó háromszöget olyan helyzetben, hogy a megfelelő oldalak párhuzamosak legyenek. Szerkesszük meg azt az irányt, amellyel párhuzamosan a két háromszög egybetolható.

501



501. Ábránkon két egyenlő sugarú kört rajzoltunk meg, a vastagon rajzolt szakaszok a két kör centrálisával párhuzamosak (501. ábra). Mutassuk meg, hogy ezek a szakaszok egyenlők is!

502. Adjunk meg egy szöget és egy szakaszt. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy végpontjai a szög szárára kerüljenek.

503. Szerkesszünk paralelogrammát úgy, hogy két szomszédos csúcsa két előre kitűzött pont legyen, másik két csúcsa pedig adott egyenesekre essék.

504. Írjunk egy háromszögbe paralelogrammát úgy; hogy három csúcsa három oldalegyenesen legyen, egyik oldala pedig egy adott egyenes-szakasszal legyen párhuzamos és egyenlő.

505. Adjunk meg egy kört és egy szakaszt. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy a körnek húrja legyen.

506. Szerkesszünk paralelogrammát úgy, hogy két szomszédos csúcsa két adott pont legyen, másik két csúcsa pedig egy adott körön legyen.

507. Adott egy kör és egy szakasz. Szerkesszünk olyan pontot, amelyre tükrözve az adott szakaszt, végpontjai a körre kerülnek.

508. Szerkesszük meg egy kör egyik átmérőjét, és adjunk meg egy irányt. Szerkesszünk a körbe az adott iránnyal párhuzamos húrt úgy, hogy annak az átmérőre eső vetülete adott hosszúságú legyen.

509. Adjunk meg egy szakaszt és két kört. Toljuk el a szakaszt úgy, hogy végpontjai az adott körökre kerüljenek.

510. Tűzzünk ki egy kört és egy egyenest, és adjunk meg egy irányt. Szerkesszünk egyenest, amely az adott iránnyal párhuzamos, és az egyenes és kör közötti szakasza adott hosszúságú.

511. Egy körcikkbe helyezzünk az egyik határoló sugarával párhuzamosan egy megadott hosszúságú szakaszt úgy, hogy egyik végpontja a körívre, másik végpontja a határoló sugárra essék.

512. Mutassuk meg, hogy az egyenlő szárú háromszög alapjának egy pontjából a szárakig húzott és a szárakkal párhuzamos szakaszok összege állandó.

513. Egy háromszög egyik olalán szerkesszünk pontot, amelyből a másik két oldalig húzott és az oldalakkal párhuzamos szakaszok összege egy adott szakasszal egyenlő.

514. Szerkesszünk trapézt négy adott oldalból.

515. Szerkesszünk négyszöget, ha adott két átlója, az átlók szöge és két szemközti szöge.

516. Szerkesszünk négyszöget, ha adottak – előírt sorrendben – oldalai és két szemközti oldalegyenesének szöge.

517. Szerkesszünk négyszöget, ha adottak előírt sorrendben szögei és két szemközti oldala.

518. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög két szemközti oldala egyenlő, akkor a másik két oldalhoz tartozó középvonal párhuzamos az első oldalpár szögét felező egyenessel.

519. Adott ponton át szerkesszünk két párhuzamoshoz olyan szelőt, amelynek a párhuzamosok közé eső szakasza adott hosszúságú.

520. Három párhuzamos egyenest és egy pontot adunk meg. Szerkesszünk a ponton át a párhuzamosokhoz szelőt úgy, hogy a párhuzamosok közé eső darabjainak a különbsége előre adott legyen.

521. Egy szög egyik szárán tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk a pontokon át párhuzamosokat, melyeknek a szögszárak közé eső darabjai összesen egy adott szakasszal egyenlők.

522. Egy háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy a másik két csúcstól mért távolságösszege adott szakasszal legyen egyenlő.

523. Egy háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk egyenest úgy, hogy a másik két csúcstól mért távolságainak különbsége egy adott szakasszal legyen egyenlő.

524. Rajzoljuk meg egy kör egyik átmérőjét, és az egyik félköríven tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk a másik félköríven olyan pontot, melyből a kitűzött pontokig húzott egyenesek adott hosszúságú szakaszt metszenek ki a felvett átmérőből.

525. Két egymást metsző kör egyik közös pontján átmenő húregyenesre állítsunk merőlegeseket a középpontból. Mutassuk meg, hogy a merőlegesek talppontjai közötti szakasz fele az egyenes körökön belüli részének.

526. Szerkesszünk két egymást metsző kör egyik metszéspontján át olyan szelőt, amelyből a két kör együttesen adott hosszúságú szakaszt metsz ki.

527. Bizonyítsuk be, hogy két kör közös pontján átmenő szelők közül a centrálissal párhuzamosnak van a körökön belül a legnagyobb része.

528. Szerkesszünk téglalapot, amelynek oldalegyenesei egy-egy ponton mennek át, és egyik oldala adott hosszúságú.

529. Szerkesszünk paralelogrammát, amelynek két szomszédos csúcsa két (különböző sugarú) kör két közös pontja, harmadik csúcsa az egyik, negyedik pedig a másik körön van.

530. Tűzzünk ki egy körön két pontot, A-t és B-t. Fussa be az X pont a kört, és szerkesszük meg minden helyzetben az Y pontot úgy, hogy az az $ABXY$ paralelogrammában a B-vel szemközti csúcs legyen. Mi lesz az Y pontok mértani helye?

531. Helyezzünk el egy háromszögben egy AB szakaszt úgy, hogy végpontjai egy-egy oldalegyenesen legyenek. Fussa be az X pont a harmadik oldalt. Szerkesszük meg X minden helyzetében az Y pontot úgy, hogy az az $ABXY$ paralelogrammában a B-vel szemközti csúcs legyen. Mi lesz az Y pontok mértani helye?

532. Tűzzünk ki egy pontot és egy egyenest. Forgassunk a pont körül egy rajta átmenő kört, és minden helyzetében szerkesszük meg a körnek az egyenessel párhuzamos érintőit. Mi az érintési pontok mértani helye?

533. Mozgassunk egy kört úgy, hogy középpontja egy kört írjon le, és minden helyzetében szerkesszünk hozzá adott irányú érintőket. Mi az érintési pontok mértani helye?

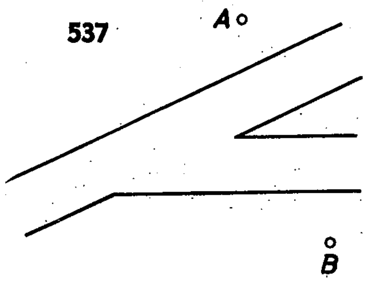
534. Szerkesszünk az ABC háromszög BC oldalával párhuzamosan egyenest, amely AC-t B'-ben, AB-t C'-ben metszi úgy, hogy $AC' = CB'$.

535. Szerkesszünk az ABC háromszög AC oldalán B' és AB oldalán C' pontokat úgy, hogy $AC' = CB'$ legyen, és $B'C'$ egy adott szakasszal legyen egyenlő.

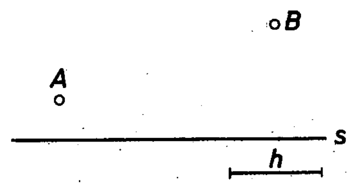
536. Egy párhuzamos szélű úttesten csak az út irányára merőlegesen lehet átkelni, az utat szegélyező járdákon viszont tetszőleges irányban haladhatunk. Szerkesszük meg azt a legrövidebb utat, amelyen az egyik oldali járda egy pontjából a másik oldali járda egy pontjába lehet jutni.

537. Az ábrán látható útelágazásnál az A pontból B-be szeretnénk eljutni, az úttesten azonban csak merőlegesen lehet átkelni. Szerkesszük meg a legrövidebb utat A és B között (537. ábra).

537



538



538. Egy repülőgép azt a feladatot kapja, hogy A-ból kiindulva (538. ábra) repüljön az s útig, majd e fölött 3 km-t repülve, a B pontban szálljon le. Szerkesszük meg a gép útját, ha 3 km-nek az ábrán egy h szakasz felel meg, és a gépnek egyenletes sebességgel a lehető legrövidebb idő alatt kell megtennie útját.

539. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalait eltolva, a súlyvonalakból háromszög alkotható.

540. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalaiból képzett háromszög súlyvonalai az eredeti háromszög oldalainak háromnegyedével egyenlők.

A HÁROMSZÖG NEVEZETES VONALAI. THALÉSZ TÉTELE. A HÁROMSZÖGHÖZ TARTOZÓ KÖRÖK

541. Egy háromszög oldalai *a)* 7, 9, 12 cm; *b)* $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{6}$; *c)* $2m$; $3n$; $\frac{l}{2}$; *d)* $2m+3n$; $2m-3n$; $\frac{3}{2}m$. Mekkorák az oldalfelező pontok alkotta háromszög oldalai?

542. Egy háromszög oldalfelező pontjai olyan háromszög csúcsai, amelynek oldalai *a)* 2 cm, 4 cm, 5 cm; *b)* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$; *c)* $\frac{m}{2}$, $\frac{2n}{3}$, $\frac{m+n}{2}$. Mekkorák az eredeti háromszög oldalai?

543. Egy háromszöget középvonalai négy háromszögre bontanak, ezek kerületeinek összege *a)* 20 cm, *b)* $\frac{15}{2}$ cm, *c)* d cm. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

544. Egy O csúcsú szög szárai közötti P ponton át húzzunk párhuzamost az egyik szárral, ez a másik szárat A pontban metszi. Mérjük fel O-tól erre a szárra az OA szakasz kétszeresét, ennek végpontját kössük össze P-vel. Mutassuk meg, hogy az így kapott egyenesnek a szög szárai közé eső szakaszát P felezi.

545. Előző feladatunk eredménye alapján szerkesszünk egy szög szárai között levő P ponton át olyan egyenest, amelynek a szárak közötti részét P felezi.

546. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 12 cm. Milyen távolságra van az átfogó felezőpontja a másik befogótól?

547. A tetőt tartó szarufák végpontjai 4,8 m-re vannak egymástól. Mekkora a felezőpontjaikat összekötő gerenda?

548. Egy repülőtérről két repülőgép indul el, haladási irányuk különböző. Mindkettő egyenlő sebességgel, egyenes irányban halad. Fél óra alatt 180 km-re távolodnak el egymástól. Mekkora a távolságuk az indulástól számított

a) egy óra múlva,

b) $\frac{5}{4}$ óra múlva,

c) l óra múlva?

549. Mutassuk meg, hogy ha két háromszögnek megegyeznek a középvonalai, akkor a két háromszög egybevágó.

550. Egy háromszög mindhárom csúcsát kössük össze a sík egy tetszőleges P pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az összekötő szakaszok felezőpontjai meghatározta háromszögek mind egybevágók, bárhol vesszük is fel a P pontot.

551. Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának a háromszög bármelyik oldalától mért távolsága feleakkora, mint az ugyanazon oldalhoz tartozó magasságnak a csúcs és a magasságpont közé eső szakasza.

552. Mi a mértani helye egy pontot egy egyenes pontjaival összekötő szakaszok felezőpontjainak?

553. Egy pontot kössünk össze egy egyenes minden pontjával, és az összekötő egyenesekre mérjük rá az egyenesen túl a metszéspont és e pont közötti szakaszt. Mi az így kapott végpontok mértani helye?

554. Egy pontot kössünk össze egy egyenes minden pontjával. Mi a mértani helye az összekötő szakaszok P-hez közelebb eső *a)* harmadolópontjának, *b)* negyedelőpontjának, *c)* 2:3 arányban osztó pontjának, *d)* $m:n$ arányban osztó pontjának?

555. Mi a mértani helye az adott a alapú és m_a magasságú háromszögek súlypontjainak?

556. Egy szakasz két végpontját összekötjük a sík két különböző adott pontjával, és az összekötő szakaszokat megfelezzük. Mutassuk meg, hogy az így kapott négy felezőpont meghatározta szakaszok között van két egyenlő pár.

557. Igazoljuk, hogy egy négyszög két-két szomszédos oldalának felezőpontjait összekötve, párhuzamos és egyenlő hosszú szakaszokat nyerünk.

558. Igazoljuk, hogy a négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai.

559. Igazoljuk, hogy az olyan négyszögben, amelynek egy pár szemközti oldala sem párhuzamos egymással, az átlók felezőpontjai és egy pár szemközti oldal felezőpontjai egy paralelogramma csúcsai.

560. Igazoljuk, hogy olyan négyszögben, amelynek egy pár szemközti oldala sem párhuzamos egymással, a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő egyenesek az átlók felezőpontját összekötő egyenest ugyanabban a pontban metszik.

561. Egy háromszög egyik oldalát rögzítjük, az ezzel szemközti csúcsot pedig egy adott egyenesen mozgatjuk. Mit írnak le ekkor az adott oldallal párhuzamos középvonalak végpontjai?

562. Mutassuk meg, hogy a háromszög oldalfelező pontjai alkotta háromszögben a súlyvonalak egy egyenesbe esnek az eredeti háromszög súlyvonalaival.

563. Mutassuk meg, hogy a háromszög oldalfelező pontjai alkotta háromszög magasságpontja az eredeti háromszög köré írt kör középpontjával esik egybe.

564. Egy háromszög szögei 62° és 43°. Mekkora szögekben látszanak az oldalak *a)* a beírt kör középpontjából, *b)* a magasságpontból?

565. Mutassuk meg, hogy ha A, B, C, D a sík olyan négy pontja, hogy közülük egyik magasságpontja a másik három alkotta háromszögnek, akkor a négy pont bármelyike magasságpont a másik három pont által meghatározott háromszögben.

566. Mutassuk meg, hogy ha a síkon adott két derékszög szárai nem párhuzamosak, akkor egy egyenesre adott pontból merőlegest tudunk szerkeszteni csupán párhuzamosok húzásával.

567. Egy P pontot össze kell kötnünk az a és b egyenesek M metszéspontjával, a metszéspont azonban nem fért rá rajzlapunkra. Igazoljuk, hogy az MP egyenest M nélkül is megszerkeszthetjük a következő módon: a P-ből a-ra állított merőleges b-t A-ban, a b-re állított merőleges a-t B-ben metszi. A P pontból az AB egyenesre emelt merőleges a keresett PM.

568. Megrajzoltuk a háromszög három (egy ponton átmenő) magasságvonal-egyenesét, és megadtuk az egyik oldal egy pontját. Szerkesszük meg a háromszöget.

569. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget *a)* a csúcsnál levő szögből és a szárakhoz tartozó magasságból, *b)* az alapból és a szárakhoz tartozó magasságból.

570. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó magasság.

571. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalon levő egyik szög.

572. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó súlyvonal.

573. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott a köré írt kör sugara és *a)* egyik hegyesszöge, *b)* az átfogóhoz tartozó magasság.

574. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a köré írt kör sugara, továbbá

a) alapja,
b) egyik szára,
c) az alaphoz tartozó magasság,
d) az alappal szemközti szög.

575. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, a köré írt kör sugara és egy másik oldalhoz tartozó magasság.

576. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a másik oldalhoz tartozó súlyvonal és a köré írt kör sugara.

577. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala és a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal.

578. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó magasságvonal és súlyvonal.

579. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és az egyikhez tartozó súlyvonal.

580. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó súlyvonal és a rajta levő egyik szög.

581. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a rajta levő egyik szög és e szög szögfelezője.

582. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, egy másik oldalhoz tartozó magasság és súlyvonal.

583. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az a oldalhoz tartozó magasság és szögfelező, továbbá az a oldallal szemközti szög.

584. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az a oldalhoz tartozó magasságvonal és szögfelező, továbbá a b oldal.

585. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a másikhoz tartozó magasságvonal és a harmadikhoz tartozó szögfelező.

586. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldallal szemközti szög, e szög felezője és egy másik oldalhoz tartozó magasságvonal.

587. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó súlyvonal és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal.

588. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két súlyvonala és a harmadik oldalhoz tartozó magasság.

589. Szerkesszünk háromszöget, ha adott három súlyvonala.

590. Igazoljuk, hogy a paralelogramma bármely csúcsát a szemközti oldalak felezőpontjaival összekötő egyenesek az illető csúccsal szemközti átlót három egyenlő részre osztják.

591. Szerkesszük meg egy adott kör ismeretlen középpontját.

592. Szerkesszük meg egy adott kör ismeretlen középpontját, ha csak egy derékszögű vonalzó áll rendelkezésünkre.

593. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két magasságának a talppontjai egyenlő távolságban vannak a harmadik oldal felezőpontjától.

594. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két magasságának a talppontja és a harmadik oldal egyenese.

595. Adott egy egyenes és rajta kívül két pont. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa az egyenesen, másik két csúcsa pedig az adott pontokban van.

596. Szerkesszünk háromszöget egy oldalból, a hozzá tartozó magasságból és valamelyik másik magasságból.

597. Tűzzünk ki két pontot, és vegyünk fel egy távolságot. Szerkesszünk két párhuzamost, melyek egy-egy kitűzött ponton mennek át, és távolságuk akkora, mint a felvett szakasz.

598. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög átfogója kétszer akkora, mint az átfogóhoz tartozó súlyvonal.

599. Mutassuk meg, hogy a háromszög oldalfelező pontjai és az egyik oldal magassági talppontja egyenlő szárú trapézt határoznak meg.

600. Egy d hosszúságú szakasz két végpontja egy derékszög egy-egy szárán mozog. Mit ír le a szakasz felezőpontja?

601. Rajzoljuk meg valamely kör AB átmérőjét, AC húrját, és a húr meghosszabbítására mérjük fel a $CD = AC$ szakaszt. Igazoljuk, hogy az ABD háromszög egyenlő szárú.

602. Egy körön kívüli P ponthoz szerkesszünk a körön olyan M pontot, amelynek P-től mért távolsága a kör átmérőjével egyenlő. Az M-en átmenő körátmérő másik végpontja N. Bizonyítsuk be, hogy a PN szakasz felezőpontja a körön van.

603. Írjunk kört az egyenlő szárú háromszög egyik szára mint átmérő fölé. Bizonyítsuk be, hogy ez a kör felezi a háromszög alapját.

604. Szerkesszünk kört egy egyenlő oldalú háromszög magassága mint átmérő fölé. Igazoljuk, hogy a másik két oldalának a negyedrésze esik a körön kívül.

605. Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalai mint átmérők fölé szerkesztett körök közös húregyenesei egy közös ponton mennek át.

606. Szerkesszünk Thalész-kört a háromszög magasságpontja és egyik csúcsa által meghatározott szakasz fölé. Hol metszi ez a kör a háromszög két oldalát?

607. Két egymást metsző kör egyik közös pontjából húzzuk meg mindkettőben az átmérőt. Bizonyítsuk be, hogy az átmérők végpontjait összekötő egyenes átmegy a körök másik közös pontján.

608. Szerkesszünk adott szakasz mint átfogó fölé derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója adott ponton megy át.

609. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott átfogójának egyenese és befogóiból egy-egy pont, továbbá az átfogóhoz tartozó magasság.

610. Egy kör belsejében adott két pont. Szerkesszünk a körbe olyan derékszögű háromszöget, amelynek egy-egy befogója az adott pontokon megy át.

611. Egy téglalap négy oldalán adott egy-egy pont, továbbá a téglalap egyik oldalának hossza. Szerkesszük meg a téglalapot.

612. Egy háromszögnek rögzítsük két csúcsát, a harmadik csúcs befutja a sík minden szóba jövő pontját. Mi az így keletkezett háromszögeknél a másik két oldalegyenesen nyert magasságtalppontok mértani helye?

613. Forgassunk egy egyenest egy pontja körül, és minden helyzetében állítsunk rá egy rögzített pontból merőlegest. Mi az így szerkesztett merőlegesek talppontjainak mértani helye?

614. Egy rombusz alakú keret csuklósan összeszerelt pálcákból áll. Az egyik oldalt rögzítjük. Ha a többi oldalt mozgatjuk, mi lesz az átlók metszéspontjának mértani helye?

615. Egy kör valamely húrjának egyik végpontját kössük össze a kör középpontjával. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott sugár Thalész-köre felezi a húrt.

616. Megrajzolunk egy kört, és kijelölünk egy pontot (belül vagy kívül). Mi a kijelölt ponton áthaladó húrok felezőpontjainak mértani helye?

617. Szerkesszünk egy adott körhöz tetszés szerint felvett egyenessel párhuzamos érintőt.

618. Rajzoljunk egy kört és egy négyszöget. Szerkesszünk négyszöget, melynek oldalai az előbbi négyszög oldalaival párhuzamosak, és érintik a kört.

619. Adott körbe szerkesszünk egyenlő hosszúságú (körátmérőnél kisebb) húrokat. Határozzuk meg, mi a húrfelező pontok mértani helye.

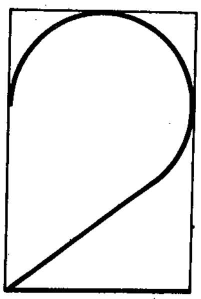
620. Egy megadott körhöz egy rajta kívül kijelölt ponton át szerkesszünk olyan szelőt, amely megadott hosszúságú húrt vág ki belőle.

621. Tűzzünk ki két pontot, és vegyünk fel egy távolságot. Azután úgy szerkesszünk kört az egyik pont köré, hogy a másik pontból a körhöz húzott érintőszakasz a felvett távolsággal legyen egyenlő.

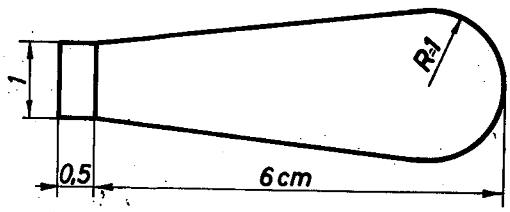
622. Tűzzünk ki két pontot egymástól 3 cm távolságban. Szerkesszünk az egyiken át olyan egyenest, amely a másiktól 2 cm távolságban halad.

623. Adott egy kör, ennek egy húrja és egy pont. Szerkesszünk az adott ponton át olyan szelőt, amelynek a körbe eső szakaszát az adott húr felezi.

624. Szerkesszünk egy előre megrajzolt téglalapba olyan kettes számjegyet, amilyen a 624. ábrán látható.



624



625

625. Készítsük el egy szerszám fogójának keresztmetszetét a 625. ábrán feltüntetett méretek szerint.

626. Rajzoljunk egy körbe egy húrt. Szerkesszünk olyan helyzetben egy adott hosszúságú másik húrt, hogy ezt az első húr felezze.

627. Tűzzünk ki egy pontot egy kör belsejében. Szerkesszünk a körbe négyzetet, amelynek egyik oldala átmegy a kitűzött ponton.

628. Hosszabbítsuk meg egy kör valamelyik átmérőjét. Szerkesszünk ezen a meghosszabbításon olyan pontot, amelyből adott hosszúságú érintőszakasz húzható a körhöz.

629. Rajzoljunk egy kört és egy egyenest. Szerkesszünk az egyenesen egy pontot, amelyből adott hosszúságú érintőszakasz húzható a körhöz.

630. Megrajzolunk egy kört. Mi a mértani helye mindazon pontoknak, melyekből a körhöz húzott érintők 60°-os szöget zárnak be egymással?

631. Rajzoljunk egy kört és egy egyenest. Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből a körhöz húzott érintők 90°-os szöget zárnak be.

632. Mi az olyan adott sugarú körök középpontjainak mértani helye, amelyek egy adott kört annak átellenes pontjaiban metszenek (azaz két félkörre vágnak)?

633. Szerkesszük meg két kör

a) közös külső érintőit,
b) közös belső érintőit.

634. Tűzzünk ki két pontot egymástól 4 cm-nyire. Szerkesszünk egyenest, amely az egyiktől 2 cm, a másiktól 1 cm távolságban halad.

635. Rajzoljunk kört, és tűzzünk ki egy P pontot rajta kívül. A kitűzött pont köré úgy szerkesszünk kört, hogy a két kör közös külső érintőjének a két érintési pont közé eső szakasza adott hosszúságú legyen.

636. Rajzoljunk két kört, és szerkesszünk egyenest, melyből a két kör adott hosszúságú húrokat metsz ki.

637. Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a beírt kör sugara, továbbá

a) alapja,
b) az alappal szemközti szöge,
c) az alaphoz írt kör.

638. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő oldalú háromszögbe írt kör sugara a köré írt kör sugarának fele.

639. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha ismerjük

a) a köré írt kör sugarát,
b) a beírt kör sugarát.

640. Hány olyan pont van, amely három adott egyenestől egyenlő távolságra van?

641. Igazoljuk, hogy a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög magasságvonalai az eredeti háromszög szögfelezői.

642. Egy háromszög oldalai a, b, c. Mekkora szakaszokra osztják az oldalakat a beírt kör érintési pontjai?

643. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy hozzáírt köre a meghosszabbított oldalakat azok metszéspontjától félkerületnyi távolságra érinti.

644. Mekkora szakaszokra osztja a háromszög a oldalát az oldalt érintő hozzáírt kör érintési pontja?

645. Mutassuk meg, hogy a háromszög egy oldalát a beírt és a hozzáírt kör egy-egy csúcstól azonos távolságra érinti.

646. Mutassuk meg, hogy a háromszög a oldalát érintő hozzáírt kör sugara és a kerület az a-val szemközti szöget egyértelműen meghatározza.

647. Helyezzünk el egy adott hosszúságú szakaszt egy szög szárai között úgy, hogy érintsen egy előre megrajzolt kört, amely a szög szárait érinti.

648. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög ugyanazon oldalát érintő beírt és hozzáírt kör az oldalon levő érintéspontjainak távolsága a másik két oldal különbségével egyenlő.

649. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt körének és az egyik oldalt kívülről érintő körének sugara és a másik két oldalának különbsége.

650. A háromszög b oldalát a beírt kör az E_1 pontban, meghosszabbítását az a oldalhoz hozzáírt kör az E_2 pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy

$$E_1E_2 = a.$$

651. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög átfogóját érintő beírt és hozzáírt kör sugarának különbsége akkora, mint az átfogó.

652. Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszögben a beírt kör a befogókat két olyan részre osztja, amelyek közül az egyik a kör sugarával egyenlő.

653. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszögben a beírt kör átmérőjének és az átfogónak összege a befogók összegével egyenlő.

654. Egy 3 cm sugarú kör köré 20 cm-es átfogójú derékszögű háromszöget írunk. Mekkora a háromszög kerülete?

655. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismert a befogók összege és a beírt kör sugara.

656. Egy derékszögű háromszög oldalai a, b, c. *a)* Mekkora a beírt kör sugara? *b)* Mekkora az átfogót kívülről érintő kör sugara?

657. Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszög kerülete az átfogóhoz írt kör átmérőjével egyenlő.

658. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogóhoz írt kör sugara, továbbá az egyik hegyesszög.

659. Mekkora annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynél a befogók összege 8,2 cm, az átfogóhoz írt kör sugara 7,6 cm?

660. Írjunk egy háromszögbe kört, és szerkesszünk ehhez három érintőt úgy, hogy azok mindegyike lemessen a háromszögből egy kis háromszöget. Mutassuk meg, hogy a lemetszett háromszögek kerületének összege az eredeti háromszög kerületével egyenlő.

661. Egy háromszöget úgy válasszunk ketté, hogy megrajzoljuk a beírt kör egyik érintési pontját a szemközti csúccsal összekötő szakaszt. Igazoljuk, hogy ezt a szakaszt ugyanott érinti a két részháromszögbe írt kör.

662. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a háromszögbe írt kör sugara, az egyik oldalhoz hozzáírt kör sugara és az oldallal szemközti szög.

663. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a háromszög kerülete, beírt körének sugara és egy szöge.

664. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a háromszög kerülete, egyik oldalához tartozó magassága és az oldallal szemközti szög.

665. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala a beírt kör érintési pontjával és a beírt kör sugara.

666. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt kör sugara, egyik oldala és a másik kettő különbsége.

667. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a beírt kör sugara és két szöge.

668. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldalt kívülről érintő kör sugara és az oldalon fekvő két szög.

669. Adott egy szög és egy pont a szárain kívül. Szerkesszünk a ponton át olyan egyenest, amely a szögből adott kerületű háromszöget metsz le.

670. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, valamint a beírt és az egyik hozzáírt kör sugara.

671. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, az egyik oldalt kívülről érintő kör sugara és az oldalon fekvő egyik szög.

672. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos háromszög hozzáírt köre háromszor akkora, mint a beírt kör.

673. Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszög köré írt kör sugara kétharmada a hozzáírt kör sugarának.

674. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott egyik hozzáírt köre.

675. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának különbsége, továbbá a beírt körnek és a harmadik oldalt kívülről érintő körnek a sugara.

676. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldalának összege, a harmadik oldal és a beírt kör sugara.

NÉGYSZÖGEK

677. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög szemközti szögei egyenlők, akkor a négyszög paralelogramma.

678. Mutassuk meg, hogy ha egy négyszögben bármely két szomszédos szög összege 180°, akkor a négyszög paralelogramma.

679. Mutassuk meg, hogy ha egy paralelogrammának nincs derékszögű csúcsa, akkor szögei között hegyes- és tompaszögek is vannak.

680. Egy paralelogramma egyik szöge 72°. Mekkora a többi szög? Lehet-e ez a paralelogramma rombusz?

681. Mekkorák a paralelogramma szögei, ha egyik szöge 12,8°-kal nagyobb, mint a másik.

682. Mutassuk meg, hogy egy paralelogramma szemközti csúcsaihoz tartozó belső szögfelezők vagy párhuzamosak, vagy egy egyenesbe esnek.

683. Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma belső szögfelezői vagy téglalapot határolnak, vagy egy ponton mennek át.

684. Mutassuk meg, hogy a paralelogramma külső szögfelezői téglalapot zárnak közre.

685. Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma két csúcsához tartozó belső és külső szögfelezők téglalapot határolnak.

686. Egy paralelogramma alakú keret a csúcsai körül csuklósan mozog. Rögzítsük az egyik oldalt. Mit ír le mozgás közben a rögzített csúcsokhoz tartozó szögfelezők metszéspontja?

687. Mit ír le az előző feladatban szereplő paralelogrammában az átlók metszéspontja? Mit ír le abban az esetben, ha a paralelogramma rombusz?

688. Igazoljuk, hogy két paralelogramma egybevágó, ha megegyeznek

a) két oldalban és a közbezárt szögben,
b) két oldalban és egy átlóban,

c) két átlóban és egy oldalban,
d) két átlóban és a közbezárt szögben.

689. Helyes-e a következő állítás: Ha egy négyszögben két oldal párhuzamos, a másik kettő pedig egyenlő, akkor a négyszög paralelogramma?

690. Létezik-e olyan paralelogramma, amelynek egyik átlója az egyik oldallal egyenlő?

691. Létezik-e olyan rombusz, amelynek egyik átlója az egyik oldallal egyenlő?

692. Létezik-e olyan téglalap, amelynek egyik átlója az egyik oldallal egyenlő?

693. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő minden egyenes a paralelogrammát két egybevágó részre osztja.

694. Soroljunk fel *a)* tengelyesen szimmetrikus paralelogrammákat, *b)* középpontosan szimmetrikus paralelogrammákat.

695. Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő egyenes az AB oldalból egy 7 cm-es, a CD oldalból egy 4,5 cm-es darabot metsz le. Mekkora az AB oldal?

696. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszöget egyik oldalának felezőpontjára tükrözünk, paralelogrammát kapunk.

697. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma szemközti oldalainak felezőpontjait összekötő egyenesek – középvonalak – átmennek az átlók metszéspontján.

698. Kössük össze az $ABCD$ paralelogramma B csúcsát az AD, D csúcsát pedig a BC oldal felezőpontjával. Mutassuk meg, hogy az összekötő egyenesek az AC átlót három egyenlő részre osztják.

699. Mutassuk meg, hogy a paralelogramma egyik átlója és az átlón nem levő egyik csúcsot valamelyik szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz harmadolják egymást.

700. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának tetszőleges pontjából húzzunk párhuzamosokat a szárakkal. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett paralelogramma kerülete független a pont választásától.

701. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma egyik külső szögének felezője és az a két oldalegyenese, amely nem megy át a kiválasztott szög csúcsán, egyenlő szárú háromszöget határoz meg. Mekkorák ennek szárai?

702. Az $ABCD$ paralelogramma D csúcsához tartozó magasság felezi az AB oldalt. Mekkora a BD átló, ha $AD = 5$ cm?

703. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma csúcsaiból az átlókra emelt merőlegesek talppontjai egy paralelogramma csúcsai.

704. Szerkesszünk köröket a paralelogramma két szemközti oldala mint átmérő fölé. Mutassuk meg, hogy a köröknek az átlókkal képezett metszéspontjai egy paralelogramma csúcsai.

705. A szög csúcsa nem fér rá rajzpapírunkra, csupán a szárainak egy része. Igazoljuk, hogy ebben az esetben is össze tudunk kötni egy kitűzött pontot a szög csúcsával a következő módon: A kitűzött pontból párhuzamosokat szerkesztünk a szögszárakkal, ezeknek a szögszárakkal képezett metszéspontjait összekötjük. Az összekötő szakasz felezőpontját az adott ponttal összekötő egyenes átmegy a szög csúcsán.

706. A négyszöget átlói négy háromszögre bontják. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögek köré írt köröknek a középpontjai paralelogramma csúcsai.

707. Az ABC háromszög A csúcsához tartozó szögfelezője a szemközti oldalt D-ben metszi. A D-ből AC-vel szerkesztett párhuzamos AB-t E-ben.

az E-ből BC-vel húzott párhuzamos pedig az F pontban metszi AC-t. Mutassuk meg, hogy $AE = CF$.

708. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két szomszédos oldala és

a) a közbezárt szög,
b) az egyikhez tartozó magasság,
c) az egyik átló.

709. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott egyik oldala és

a) egyik szöge és az oldalhoz tartozó magasság,
b) egyik szöge és a másik oldalhoz tartozó magasság,
c) két átlója.

710. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két átlója és

a) az átlók szöge,
b) az egyik magasság.

711. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott

a) egyik oldala és átlója és ezek szöge,
b) egyik oldala és átlója és az oldalhoz tartozó magasság,
c) két magassága és a magasságok szöge,
d) egyik magassága, egy átlója és az átlók szöge.

712. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adottak középvonalai és azok szöge.

713. Adott egy paralelogramma négy oldalfelező pontja. Szerkesszük meg a paralelogrammát.

714. Adott egy paralelogramma két magassága, továbbá minden oldalából egy pont. Szerkesszük meg a paralelogrammát.

715. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két szomszédos oldalának összege vagy különbsége, a közbezárt szög, továbbá

a) az egyik átló,
b) az egyik oldalhoz tartozó magasság.

716. Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a közbezárt súlyvonal.

717. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, egyik végpontjából induló súlyvonala, továbbá

a) a közös csúcsban levő szög,
b) az oldalhoz tartozó magasság,
c) egy másik oldalhoz tartozó magasság.

718. Mi a mértani helye a rögzített alapú és adott magasságú paralelogrammák középpontjainak?

719. Rögzítsük egy paralelogramma egyik oldalát és szomszédos oldalegyenesét, a paralelogramma többi csúcsa pedig vegye fel az összes lehetséges helyzeteket. Mit ír le ekkor a paralelogramma középpontja?

720. Tűzzünk ki két egymást metsző egyenest. Szerkesszünk paralelogrammát, amelynek két oldala az adott egyenesekre esik, és kerülete adott. Mit írnak le az adott egyenesek metszéspontjával szemközti paralelogramma-csúcsok?

721. Egy rombusz egyik szöge 38°. Mekkora szögeket zárnak be az átlók az oldalakkal?

722. A rombusz egyik átlója az oldallal 42°-os szöget zár be. Mekkorák a rombusz szögei?

723. Mekkorák annak a rombusznak a szögei, amelynek tompaszögű csúcsából húzott magassága felezi a szemközti oldalt?

724. Egy rombusz egyik szöge 60°, oldala 12 cm. Mekkora a rövidebb átlója?

725. Mekkorák annak a rombusznak a szögei, amelynek 12 cm a kerülete és magassága 1,5 cm?

726. Bizonyítsuk be, hogy a rombusz bármely csúcsából húzott magasságvonal egyenlő.

727. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma rombusz, ha

a) átlói merőlegesek egymásra,
b) az egyik átló szögfelező.

728. Egy paralelogramma oldalai 3 cm és 9 cm. A hosszabbik oldalon fekvő szögek felezői a szemközti oldalt három részre osztják. Mekkorák ezek a részek?

729. Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma hosszabbik oldala a rövidebbnek kétszerese, akkor az egyik hosszabbik oldal végpontjaihoz tartozó belső szögfelezők a szemközti oldalon metszik egymást.

730. Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma két szomszédos csúcsához tartozó szögfelezők az egyik oldalon metszik egymást, akkor az egyik oldal kétszerese a másiknak.

731. Mutassuk meg, hogy két rombusz egybevágó, ha megegyeznek

a) oldalukban és egy szögben,
b) átlóikban,
c) egy átlóban és az oldalban.

732. Szerkesszünk rombuszt, ha adott

a) oldala és egyik szöge,
b) két átlója,
c) oldala és magassága,
d) egyik szöge és magassága.

733. Tűzzünk ki két pontot és egy egyenest. Szerkesszünk rombuszt, amelynek az egyik pont csúcsa, ezzel szomszédos csúcsa az egyenesen van, középpontja pedig a másik pont.

734. Rajzoljunk három egyenest, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk rombuszt, amelynek középpontja a kitűzött pont, három csúcsa pedig az adott egyeneseken van.

735. Adjunk meg két merőleges egyenest, és tűzzünk ki az egyik egyenes két különböző partján egy-egy pontot. Szerkesszünk rombuszt, amelynek átlói az egyeneseken vannak, egy-egy oldala pedig a kitűzött pontokon megy át.

736. Rajzoljunk két párhuzamos egyenest, és tűzzünk ki közöttük két pontot. Szerkesszünk rombuszt, amelynek két oldala a párhuzamosokon van, másik két oldala pedig az adott pontokon megy át.

737. Bizonyítsuk be, hogy a rombusz átlóinak metszéspontja egyenlő távol van az oldalaktól.

738. Mutassuk meg, hogy a rombusz egy belső pontjának két szomszédos oldalától mért távolságkülönbsége egyenlő a másik két oldaltól mért távolságok különbségével.

739. Igazoljuk, hogy ha egy paralelogramma egyik szöge derékszög, akkor a paralelogramma téglalap.

740. Mutassuk meg, hogy a paralelogramma téglalap, ha átlói egyenlők.

741. Mutassuk meg, hogy egy kör két átmérőjének a végpontjai téglalapot határoznak meg.

742. Igazoljuk, hogy a téglalap átlói által bezárt egyik szög kétszerese az átló és az oldal által alkotott egyik szögnek.

743. A téglalap átlója az egyik oldallal 26°-os szöget alkot. Mekkora szöget zárnak be az átlók?

744. Egy téglalap két átlója 124°-os szögben hajlik egymáshoz. Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?

745. Mutassuk meg, hogy két téglalap egybevágó, ha megegyeznek

a) két nem párhuzamos oldalukban,
b) átlójukban és az átlók szögében,
c) egy oldalban és az átlóban.

746. Van-e a téglalapnak olyan pontja, amely egyenlő távolságra van

a) minden oldaltól,
b) minden csúcstól?

747. Bizonyítsuk be, hogy ha a téglalap átlói 120°-os szöget zárnak be egymással, akkor az egyik oldal fele az átlónak.

748. Mutassuk meg, hogy ha a téglalap átlója az egyik oldal kétszerese, akkor az átlók 120°-os szöget zárnak be egymással.

749. A téglalap egyik oldalának felezőpontját a szemközti oldal csúcsaival összekötő egyenesek merőlegesek egymásra; kerülete 30 cm. Mekkorák az oldalak?

750. Az egyenlő szárú derékszögű háromszögbe írjunk téglalapokat úgy, hogy egyik szögük a háromszög derékszögével essék egybe, ezzel szemközti csúcsa pedig az átfogón legyen. Igazoljuk, hogy az így szerkesztett téglalapok kerületei egyenlők.

751. Igazoljuk, hogy egy rombusz átlóinak metszéspontjából az oldalakra emelt merőlegesek talppontjai téglalap csúcsai.

752. Mekkorák annak a téglalapnak az átlói, amelyet egy paralelogramma belső szögfelezői határolnak?

753. Tűzzünk ki egy pontot, és adjunk meg három egyenest. Szerkesszünk téglalapot, amelynek középpontja az adott pont, három csúcsa pedig az adott egyeneseken van.

754. Szerkesszünk téglalapot, ha adott egyik oldalegyenese, továbbá másik három oldalából egy-egy pont.

755. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapba írt paralelogrammáknak, amelyeknek oldalai az átlókkal párhuzamosak, a kerületük ugyanakkora.

756. Egy téglalap alakú biliárdasztalon az egyik átlóval párhuzamosan indítunk el egy golyót. Mutassuk meg, hogy a golyó az asztal négy oldaláról visszaverődve vissza fog térni kiindulási helyzetébe, és bármely helyzetből indul is ki, az eredeti helyzetbe való visszaérkezésig mindig ugyanakkora utat tesz meg.

757. Mérjünk rá egy rombusz minden oldalára a csúcsokból kiindulva egy egyenlő szakaszt úgy, hogy egy csúcsban csak egy szakasz végződjön.

Bizonyítsuk be, hogy a szakaszvégpontok paralelogramma csúcsai. Milyen esetben lesz a paralelogramma téglalap?

758. Mutassuk meg, hogy ha előző feladatunkban négyzetből indulunk ki, eredményül ismét négyzetet kapunk.

759. Húzzunk párhuzamosokat egy négyzet két szemközti csúcsán át, és állítsunk ezekre merőlegeseket a másik két csúcsból. Igazoljuk, hogy az így nyert négy egyenes négyzetet határol.

760. Egy derékszögű háromszögben szerkesszük meg a derékszög szögfelezőjének és az átfogónak a metszéspontját, és ebből húzzunk párhuzamosokat a befogókkal. Igazoljuk, hogy így négyzetet nyertünk.

761. Egy a oldalú négyzet átlója fölé szerkesszünk ismét négyzetet. Mekkora lesz az új négyzet átlója?

762. Egy négyzet átlója b. Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amelynek átlója az eredeti négyzet oldala?

763. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap szögfelezői (ha nem mennek át egy ponton) négyzetet alkotnak. Mekkora ennek a négyzetnek az átlója, ha a téglalap oldalai a és b $(a>b)$?

764. Szerkesszünk egy téglalap oldalai mint átfogók fölé egyenlő szárú derékszögű háromszögeket. Mutassuk meg, hogy ezek a téglalappal együtt négyzetet alkotnak.

765. Mérjünk fel egyenlő szakaszokat a négyzet oldalaira két szemközti csúcsból kiindulva. Mutassuk meg, hogy a végpontok téglalapot határoznak meg, amelynek a kerülete független a felmért szakaszoktól.

766. Szerkesszünk négyzetet, ha adott átlója.

767. Szerkesszünk négyzetet, ha adott oldalának és átlójának

a) összege,
b) különbsége.

768. Mérjük rá egy négyzet átlóira (befelé) valamennyi csúcsból az oldalait, és mutassuk meg, hogy az így kapott végpontok négyzetet határoznak meg. Mekkora az így keletkezett négyzet oldala?

769. Adott három egyenes. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek egyik átlója az egyik egyenesen van, a másik átló egy-egy végpontja pedig a másik két egyenesen.

770. Egy négyszög átlói 27 cm és 19 cm, átlói 63°42′ alatt metszik egymást. Határozzuk meg annak a négyszögnek oldalait és szögeit, amelynek csúcsai az eredeti négyszög oldalfelező pontjai.

771. Bizonyítsuk be, hogy a rombusz oldalfelező pontjai téglalap csúcsai.

772. Mi a feltétele annak, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai téglalapot határozzanak meg?

773. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög átlói egyenlők, oldalfelező pontjai rombuszt alkotnak.

774. Mutassuk meg, hogy ha egy négyszög átlói egyenlők, és merőlegesek egymásra, akkor oldalfelező pontjai egy négyzet csúcsai.

775. Igazoljuk, hogy ha egy paralelogramma oldalfelező pontjai

a) téglalapot alkotnak, akkor a paralelogramma rombusz,
b) rombuszt alkotnak, akkor a paralelogramma téglalap,
c) négyzetet alkotnak, akkor a paralelogramma négyzet.

776. Bizonyítsuk be, hogy minden négyszög középvonalai felezik egymást.

777. Vágjunk szét egy tetszőleges konvex négyszöget középvonalai mentén.

Mutassuk meg, hogy az így kapott négy négyszögből egy paralelogrammát tudunk összeállítani.

778. Mutassuk meg, hogy egy négyszög középvonalai csakis akkor egyenlők, ha az átlók merőlegesek egymásra.

779. Mutassuk meg, hogy egy négyszög középvonalai csakis akkor merőlegesek egymásra, ha átlói egyenlők.

780. Mutassuk meg, hogy ha egy négyszög átlói egyenlők, és merőlegesek egymásra, akkor a középvonalakra is áll ez.

781. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlóinak felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja a középvonalak metszéspontjával azonos.

782. Tükrözzünk egy négyszöget egyik oldalának felezőpontjára. Mutassuk meg, hogy így egy hatszöget kapunk, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők. Ez a hatszög felbontható egy paralelogrammára, ennek oldala a négyszög egyik oldalával és középvonalának kétszeresével egyenlő, továbbá két egybevágó háromszögre, ennek oldalai: a középvonal kétszerese és a négyszög két oldala.

783. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög középvonala nem nagyobb, mint a középvonalat nem metsző oldalak számtani közepe.

784. Szerkesszünk négyszöget, ha adott három oldala, továbbá

a) a közrefogott oldalon levő szögek,
b) két adott oldal szöge és az ennek csúcsából induló átló,
c) két átló,
d) két szög; az egyiknek mindkét szára, a másiknak pedig csak egyik szára van az adott oldalak között.

785. Szerkesszünk négyszöget, ha adott két szomszédos oldala, továbbá

a) három szöge,
b) az egyik oldalon fekvő két szög és a két oldal közös csúcsából induló átló,
c) a két oldal szöge, ennek egyik szomszédos szöge és az átlók szöge.

786. Szerkesszünk négyszöget, ha adott két szemközti oldala, továbbá

a) az egyiken levő két szög és az egyik átló,
b) az egyiken levő egyik szög, az ezzel szemközti átló és az átlók szöge,
c) három szög.

787. Egy egyenlő szárú trapéz hegyesszögei 45°-osak. Hosszabbik alapja 10 cm, magassága 2 cm. Mekkora a rövidebb alap?

788. Egy trapéz két szemközti szöge 73° és 108°. Mekkora a másik két szög?

789. Egy egyenlő szárú trapéz szárai egyenlők egyik alapjukkal, ezen az alapon levő szögei 120°-osak. Bizonyítsuk be, hogy a hosszabbik alap kétszerese a rövidebbnek.

790. A trapéz alapjai 16 cm és 7 cm. Mekkora a középvonala?

791. A trapéz egyik alapja 10 cm, középvonala 16 cm. Mekkora a másik alap?

792. A trapéz alapjai 12 cm és 9 cm. Az alapokkal szerkesztett párhuzamos trapézen belüli része 10,4 cm. Melyik alaphoz van ez közelebb?

793. Az $ABCD$ trapézban AD a hosszabbik alap. A B csúcsból CD-vel szerkesztett párhuzamos AD-t E-ben metszi. Mekkorák a trapéz alapjai, ha középvonala 13 cm, és $AE = 2$ cm?

794. Egy egyenlő szárú trapéz hegyesszöge 60°, az átlók merőlegesek a szárakra. Mekkorák a trapéz oldalai, ha a szár 5 cm?

795. Mekkorák a szimmetrikus trapéz szögei, ha

a) egyik szöge 39°12′,
b) a szárak meghosszabbításai 42°-os szöget zárnak be egymással?

796. Osszuk négy egyenlő részre egy trapéz szárait, és a megfelelő osztópontokat kössük össze. Mekkorák ezek az összekötő szakaszok, ha a trapéz alapjai 9 cm és 17 cm?

797. Igazoljuk, hogy a trapéz egyik átlója a középvonalat két oly részre osztja, amelyek egy-egy alap felével egyenlők.

798. Mutassuk meg, hogy a trapéz középvonalának a két átló közötti szakasza az alapok különbségének felével egyenlő.

799. Igazoljuk, hogy a trapéz átlóinak felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal, és feleakkora, mint az alapok különbsége.

800. Bizonyítsuk be, hogy a trapéz középvonala felezi az átlókat.

801. Mutassuk meg, hogy ha a trapéz átlói felezik egymást, akkor az alapok egyenlők.

802. Mutassuk meg, hogy a trapéz középvonala csak akkor mehet át az átlók metszéspontján, ha a trapéz paralelogramma.

803. A trapéz rövidebb alapja a. Az átlók a középvonalat három egyenlő részre bontják. Mekkora a másik alap?

804. Bizonyítsuk be, hogy ha egy trapéznál az egyik alap a másiknak kétszerese, akkor az átlók harmadolják a középvonalat.

805. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szakasz egy egyenes egyik oldalán helyezkedik el, akkor felezőpontjának az egyenestől mért távolsága számtani közepe a két végpont egyenestől mért távolságainak.

806. Mutassuk meg, hogy ha egy szakasz két végpontja egy egyenes különböző oldalán helyezkedik el, akkor felezőpontjának az egyenestől mért távolsága a két végpont távolságkülönbségének felével egyenlő.

807. Egy szakasz egyik végpontja egy egyenestől 10 cm-re, felezőpontja 8 cm-re van. Mekkora a másik végpont távolsága? (A szakasz nem metszi az egyenest!)

808. Egy paralelogramma egy egyenesnek egyik oldalán helyezkedik el. Két szomszédos csúcsa az egyenestől 6 cm-re, ill. 9 cm-re van, középpontja pedig 7 cm-re. Határozzuk meg a másik két csúcsnak az egyenestől mért távolságát.

809. A szimmetrikus trapéz hegyesszöge 45°, magassága m, középvonala k. Mekkorák a trapéz alapjai?

810. Szerkesszünk trapézt, ha adott egyik alapja, az ezen levő szögek, továbbá

a) a trapéz magassága,
b) az egyik szár,
c) az egyik átló.

811. Szerkesszünk trapézt, ha adott két alapja, továbbá

a) az alapon fekvő szögek,
b) egyik szöge és a magasság,
c) egyik szöge és a szöggel szemközti átló,
d) egyik szöge és az azzal közös csúcsból induló átló,
e) a két átló,
f) egyik átlója és a magasság.

812. Szerkesszünk trapézt, ha adott a két átlója, továbbá

a) az átlók szöge és az egyik szár,
b) a magasság és az egyik alap,
c) az átlók szöge és az egyik szög,
d) a magasság és az egyik szög.

813. Szerkesszük meg a trapéz átlóinak szögét, ha adott

a) a két átló és a középvonal,
b) a két átló és a magasság.

814. Szerkesszünk trapézt, ha ismert középvonala, két átlója, továbbá

a) egyik szöge,
b) egyik szára.

815. Bizonyítsuk be, hogy a trapéz szárainak összege nagyobb az alapok különbségénél.

816. Szerkesszünk szimmetrikus trapézt, ha ismert

a) két alapja és szára,
b) egyik alapja, szára és az alapon fekvő szög,
c) két alapja és magassága,
d) egyik alapja, szára, átlója,
e) két alapja és átlója.

817. Szerkesszünk derékszögű trapézt, ha adottak

a) alapjai és magassága,
b) alapjai és a hosszabbik szár,
c) alapjai és hegyesszöge.

818. Mutassuk meg, hogy ha a trapéz rövidebb alapja a szárak összegével egyenlő, akkor a hosszabb alapon levő szögek felezői a rövidebb alapon metszik egymást.

819. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szakaszt merőlegesen egy egyenesre vetítünk, akkor a szakasz felezőpontjának vetülete a vetületnek is felezőpontja.

820. Egy deltoid két szemközti szöge 42° és 126°. Mekkora a másik két szög?

821. Egy deltoidban két szemközti szög 39°-os és 100°-os. Mekkora szögeket zárnak be az átlók az oldalakkal?

822. Szerkesszünk deltoidot, ha ismert

a) két különböző hosszúságú oldala és az ezekkel közös csúcsból induló átló,
b) két átlója és egyik oldala,
c) két átlója és egyik szöge.

823. Soroljuk fel azokat a paralelogrammákat, amelyek deltoidok is egyúttal.

824. Bizonyítsuk be, hogy a deltoid oldalfelező pontjai téglalapot alkotnak.

825. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sokszögben bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor a sokszögnek páros számú oldala van.

826. Szerkesszünk hatszöget, amelynek két szomszédos oldala 2 cm-es, a többi oldalai 1 cm-esek, és bármely két szomszédos oldala merőleges egymásra.

827. Igazoljuk, hogy ha egy hatszög átellenes oldalai párhuzamosak és egyenlők, akkor a szemközti csúcsokat összekötő átlók egy pontban metszik egymást.

828. Szerkesszünk szabályos hatszöget, ha adott

a) oldala,
b) hosszabb átlója,
c) rövidebb átlója.

A KÖR HÚRJAI ÉS ÉRINTŐI, KÖRÖK ÉRINTKEZÉSE

829. Hogyan szerkeszthetjük meg egy középpont nélkül felrajzolt kör középpontját?

830. Bizonyítsuk be, hogy egy körben az egyenlő hosszúságú húrok egyenlő távol vannak a középponttól.

831. Igazoljuk, hogy különböző hosszúságú húrok közül az a rövidebb, amely távolabb van a kör középpontjától.

832. Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja a legnagyobb oldalhoz van legközelebb.

833. Szerkesszük meg a kör egy adott belső pontján át a kör

a) legkisebb húrját,
b) legnagyobb húrját.

834. Igazoljuk, hogy a kör egy belső pontján átmenő legrövidebb és leghosszabb húr merőleges egymásra.

835. Szerkesszünk a kör egy adott pontján át olyan húrt, amelyet a pont felez.

836. Mi a mértani helye egy adott körben elhelyezett egyenlő húrok felezőpontjainak?

837. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyekből egy körhöz egyenlő érintők húzhatók?

838. Két pont egyenlő távol van egy kör középpontjától. Mutassuk meg, hogy ezekből egyenlő érintő húzható a körhöz.

839. Szerkesszünk adott körhöz érintőt, amely adott egyenessel adott szöget zár be.

840. Rajzoljunk meg egy kört, és adjunk meg két egyenest. Szerkesszünk érintőt a körhöz, amely mindkét egyenessel ugyanakkora szöget zár be.

841. A kör egy belső pontján átmenő két merőleges húr a kört négy ívre bontja. Igazoljuk, hogy ezek közül két szemközti ív összege egy félkörrel egyenlő.

842. Szerkesszünk egy körívhez felezőpontjában érintőt a kör középpontjának felhasználása nélkül.

843. Egy körről akkor mondjuk, hogy adott pontból α szögben látszik, ha a pontból a körhöz szerkesztett két érintő α szöget zár be. Bizonyítsuk be, hogy azon pontok mértani helye, amelyekből egy kör α szögben látszik, az adott körrel egyközepű kör.

844. Szerkesszünk adott körhöz olyan pontot, amely egy előre kitűzött egyenesen van, és a kör belőle $45°$-os szögben látszik.

845. Milyen távol van az r sugarú kör középpontjától az olyan pont, amelyből a kör $60°$ alatt látszik.

846. A kör egy belső pontján át szerkesszünk adott hosszúságú húrt.

847. Szerkesszünk egy körbe négyzetet úgy, hogy egyik oldala adott ponton menjen át.

848. Szerkesszünk egy körbe egyenlő oldalú háromszöget úgy, hogy egyik oldala adott ponton menjen át.

849. A kör egy belső pontján át szerkesszünk olyan húrt, amely a körből adott nagyságú körívet metsz le.

850. Húzzunk szelőt adott pontból egy körhöz úgy, hogy az a körből adott hosszúságú húrt messen ki.

851. Szerkesszünk adott körbe egy egyenessel párhuzamos, adott hosszúságú húrt.

852. Írjunk egy körbe téglalapot, amelynek egyik oldala adott hosszúságú.

853. Szerkesszünk egy körbe négyzetet úgy, hogy egyik oldala adott egyenessel legyen párhuzamos.

854. Megoldható-e a következő feladat: Szerkesszünk egy körbe adott oldalakkal téglalapot.

855. Mi a mértani helye azon körök középpontjainak, amelyek egy egyenest adott pontban érintenek?

856. Szerkesszünk adott középpontból adott egyenest érintő kört.

857. Adjunk meg egy egyenest, egy szakaszt és egy pontot. Szerkesszünk a pont körül kört, amely az adott egyenesből a szakasszal egyenlő húrt metsz ki.

858. Mi azon egyenlő sugarú körök középpontjainak mértani helye, amelyek egy egyenesből adott hosszúságú húrt metszenek ki?

859. Mi azon körök középpontjainak mértani helye, amelyek egy szög száraiból egyenlő szakaszokat metszenek ki?

860. Rajzoljunk egy szöget, és adjunk meg két szakaszt. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely egy-egy szögszárból az adott szakaszokkal egyenlő húrt metsz ki.

861. Mi a mértani helye adott ponton átmenő adott sugarú körök középpontjainak?

862. Két egymásra merőleges egyenes egyikén tűzzünk ki két pontot, és szerkesszünk rajtuk átmenő kört, amely a másik egyenest érinti.

863. Jelöljük meg a háromszög minden oldalán a beírt kör érintési pontját, és minden csúcs körül szerkesszünk kört, amely a csúcsból kiinduló oldalakat a megjelölt pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a három kör páronként érinti egymást.

864. Szerkesszünk kört, amely egy háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra van. Végezzük el a szerkesztést a következő esetekben:

a) a csúcspontok a kör belsejében vannak,
b) a csúcspontok a körön kívül vannak.

865. Egy háromszög egyik csúcsa körül szerkesszünk kört, amely a másik két csúcstól egyenlő távolságra halad.

866. Egy kertben kör alakú utat akarunk készíteni, amely a kert négy fájától egyenlő távolságra halad. Készítsük el az út tervrajzát, ha a négy fa helye már meg van jelölve a rajzpapíron.

867. Szerkesszünk adott sugárral kört, amely két adott ponton átmegy.

868. Szerkesszünk kört, amely egy egyenest adott pontban érint, és átmegy egy kitűzött ponton.

869. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely egy szög szárait érinti.

870. Szerkesszünk egy háromszögbe félkört, amely átmérőjével az alaphoz simul, és a másik két oldalt érinti.

871. Szerkesszünk adott sugárral kört, amely egy kitűzött ponton átmegy, és egy kört érint.

872. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely két adott kört érint.

873. Egy kör belsejében rajzoljunk meg egy a kört érintő kört, amelynek sugara az eredeti kör sugarának fele. Szerkesszünk olyan kört, amely mindkettőt érinti, és amelynek sugara előre adott.

874. Egy 1 cm-es és egy 2 cm-es sugarú kör kívülről érinti egymást. Szerkesszünk olyan 3,5 cm sugarú kört, amely mindkettőt érinti.

875. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely átmegy egy kitűzött ponton, és egy adott egyenest érint.

876. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely egy egyenest adott pontban érint.

877. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely egy kitűzött kört és egyenest érint.

878. Rajzoljunk egy kört, és húzzunk a középpontján át egy egyenest. Szerkesszünk a megrajzolttal egyező sugarú kört úgy, hogy az az adott kört és egyenest is érintse.

879. Rajzoljuk meg egy 3 cm sugarú kör egyik átmérőjét, szerkesszünk egy 1 cm sugarú kört, amely ezt az átmérőt és a kört is érinti.

880. Rajzoljuk meg egy kör egyik érintőjét, és szerkesszünk kört, amely az érintőt és az adott kört is érinti, és sugara az adott körének kétszerese.

881. Rajzoljunk egy szöget, és adjunk meg egy szakaszt. Szerkesszünk kört, amely a szög egyik szárát érinti, középpontja a másik száron van, sugara pedig akkora, mint az adott szakasz.

882. Szerkesszünk kört, amely átmegy egy téglalap két szemközti csúcsán, és középpontja a téglalap egyik oldalának egyenesén van.

883. Szerkesszünk egy adott szakasz végpontjain át kört úgy, hogy az egyik végponthoz húzott sugár a szakasszal 60°-os szöget zárjon be.

884. A kör kerületének egy pontjából egy átmérőt és egy sugárral egyenlő húrt szerkesztünk. Mekkora ezek szöge?

885. A kör kerületének egy pontjából két sugárhosszúságú húrt szerkesztünk. Mekkora szöget zárnak ezek be?

886. Egy körben két egyenlő és egymásra merőleges húrt helyezünk el, ezek egymást 8 cm-es és 4 cm-es darabokra vágják fel. Mekkora a húroknak a középponttól mért távolsága?

887. A kör középpontjától 1,5 cm távolságra két 7 cm-es, egymásra merőleges húrt helyezünk el. Mekkorák ezeknek a metszetei?

888. Vetítsük a 4 cm sugarú körvonal tetszőleges pontját két merőleges átmérőre. Mekkora a vetületi pontok egymástól mért távolsága?

889. A kör kerületének egy pontjában két merőleges húrt húzunk. Ezek távolsága a középponttól 4 és 6 cm. Mekkorák a húrok?

890. A kör egy szelőjén szerkesszünk pontot, amelyből két merőleges érintő húzható a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza, ha a kör sugara 3 cm?

891. Egy negyedkör ívének felezőpontjában szerkesszünk érintőt. Mekkora ennek a határoló egyenesek közötti része, ha a kör sugara 6 cm?

892. Egy derékszög mindkét szárát érintő körnél az érintési pontokat összekötő szakasz 3 cm. Mekkora távolságra van a körközéppont a szakasztól?

893. Szerkesszünk kört, amely egy szög szárait érinti, az egyiket adott pontban.

894. Szerkesszünk két párhuzamos egyenest érintő kört, amely az egyik egyenest adott pontban érinti.

895. Szerkesszünk két párhuzamost érintő kört, amely egy adott kört is érint.

896. Szerkesszünk két párhuzamos egyenest érintő kört, amely egy kitűzött ponton megy át.

897. Egy külső P pontból a körhöz húzott érintők A-ban és B-ben érintik a kört. A B-ben húzott sugarat hosszabbítsuk meg önmagával, így C-hez jutunk. Igazoljuk, hogy az AC szakasz P-ből háromszor akkora szög alatt látszik, mint a BC.

898. Mutassuk meg, hogy két egyközepű kört érintő körök középpontjainak mértani helye a két kör középköre (az a kör, amely egyenlő távol van mindkét körtől!).

899. Szerkesszünk kört, amely két egyközepű kört érint, és egy adott ponton átmegy.

900. Szerkesszünk kört, amely két egyközepű kört és egy adott egyenest érint.

901. Szerkesszünk kört, amely átmegy egy adott kör középpontján, érinti azt, és egy kitűzött pontot is tartalmaz.

902. Két kör sugara 4 cm és 1 cm. Határozzuk meg a két kör viszonylagos helyzetét, ha a középpontok távolsága

a) 7 cm; *b)* 5 cm; *c)* 3,5 cm; *d)* 3 cm; *e)* 2,5 cm; *f)* 0 cm.

903. Szerkesszünk adott szög szárait érintő és a szögfelező adott pontján átmenő kört.

904. Egyenlő szárú háromszögbe szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok egymást, az alapot és egy-egy szárat is érintsenek.

905. Szerkesszünk adott körcikkbe érintőkört.

906. Szerkesszünk egy egyenlő odalú háromszög minden csúcsa köré, oldalnyi sugárral kört. A három kör közös része egy egyenlő oldalú ívháromszög. Szerkesszünk ebbe a háromszögbe az oldalíveket érintő kört.

907. Adott körbe szerkesszünk három egyenlő sugarú kört, amelyek egymást is és az adott kört is érintik.

908. Egy 3 cm sugarú körbe szerkesszünk hat egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok mindegyike az adott kört és két beírt kis kört is érintsen. Mekkora lesz a beírt körök sugara?

909. Egy r sugarú kör köré szerkesszünk hat egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok mindegyike az adott kört és két szerkesztett kört is érintsen. Mekkora lesz a szerkesztett körök sugara?

910. Hány egyenlő sugarú kört helyezhetünk el egy ugyanakkora sugarú kör köré úgy, hogy azt és a két szomszédos kört mindegyik kör érintse?

911. Szerkesszünk olyan kört, amely egy egyenlő szárú háromszög szárait és beírt körét érinti.

912. Szerkesszünk adott egyenest érintő kört, amely még egy adott kört adott pontban érint.

913. Szerkesszünk kört, amely két egyenlő sugarú kört érint, az egyiket adott pontban. Végezzük el a szerkesztést a következő esetekben: az érintőkör mindkét kört

a) kívülről,
b) belülről,
c) szétválasztva
érinti.

914. Szerkesszünk kört, amely két tetszőleges kört érint, egyiket adott pontban.

915. Adjunk meg két egymást metsző egyenlő sugarú kört, és a közös részüket határoló egyik íven tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk kört, amely a két kör közös részében helyezkedik el, és mindkét kört érinti, méghozzá egyiket az adott pontban.

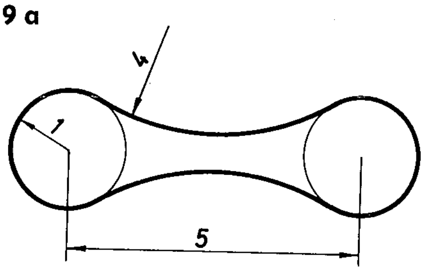
916. Szerkesszünk az előző feladatban adott feltételek mellett olyan érintőkört, amely az egyik kört kívülről érinti.

917. Egy kör belsejében rajzoljunk meg egy kisebb kört, és tűzzünk ki rajta egy pontot. Szerkesszünk kört, amely mindkét kört érinti, mégpedig a belsőt a kitűzött pontban.

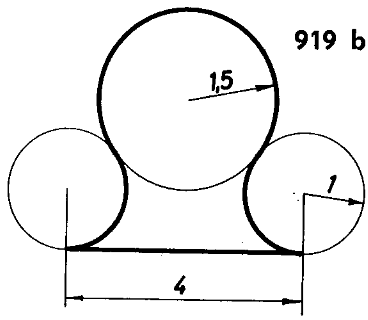
918. Szerkesszünk kört, amely egy kört és egy egyenest érint, az egyenest adott pontban.

919. Készítsük el a következő méretesen adott alakzatok részletes rajzát (a méreteket cm-ben adtuk meg):

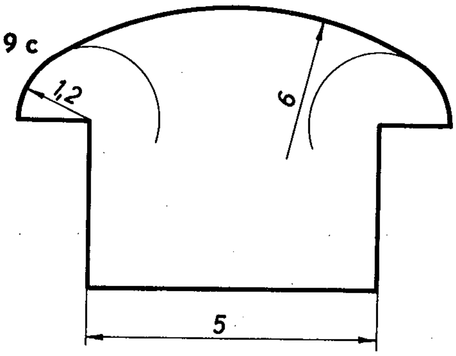
919 a



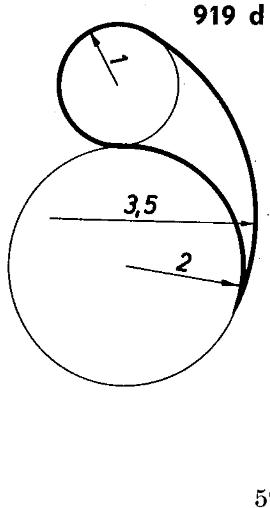
919 b



919 c



919 d



a) piskótaalak (919a ábra),
b) ajtónyitó gomb (919b ábra),
c) szegecs (919c ábra),
d) cseppalak (919d ábra).

920. Két, egymást kívülről érintő körben szerkesszünk párhuzamos, de ellentétes irányú sugarakat. Mutassuk meg, hogy a végpontokat összekötő egyenes átmegy az érintési ponton.

921. Két, egymást belülről érintő körben szerkesszünk párhuzamos és egyező irányú sugarakat. Mutassuk meg, hogy a sugarak végpontjait összekötő egyenes átmegy az érintési ponton.

922. Bizonyítsuk be, hogy két érintkező kör érintési pontbeli közös érintőjének minden pontjából egyenlő érintők húzhatók a két körhöz.

923. Egy egyenesen tűzzünk ki két pontot. Mi a mértani helye az érintkező körök érintési pontjainak, amelyek az egyeneseket az adott pontokban érintik?

924. Két, kívülről érintkező kör egyik külső érintőszakasza mint átmérő fölé szerkesszünk kört, és igazoljuk, hogy az átmegy a körök érintkezési pontján.

925. Két párhuzamos egyenes mindegyikén tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk egyenlő sugarú érintkező köröket, amelyek a párhuzamosokat a kitűzött pontokban érintik.

926. Szerkesszünk egy négyzet átlói meghatározta négy háromszögbe érintő köröket. Mutassuk meg, hogy az átlókon levő érintési pontok ugyancsak egy négyzet csúcsai.

927. Egy egyenesen tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk két érintkező, egyenlő sugarú kört, amelyek az egyenest a kitűzött pontokban érintik.

928. Egy körön tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk két egymást érintő, egyenlő sugarú kört, melyek az eredeti kört a kitűzött pontokban érintik.

929. Szerkesszünk kört, amely egy háromszög minden oldalától 1 cm-re halad.

930. Szerkesszünk kört, amely egy háromszög minden oldalából ugyanakkora adott húrt metsz ki.

931. Két kívülről érintkező kör külső közös érintőinek érintési pontjai egyenlő szárú trapézt határoznak meg. Mutassuk meg, hogy e trapéz szárai egyenlők a szárakhoz tartozó középvonallal.

932. Húzzuk meg egy adott kör egyik átmérőjét, és szerkesszünk olyan kört, amely az adott kört éppen az átmérő két végpontjában metszi, és sugara előre adott.

933. Határozzuk meg azon adott sugarú körök középpontjainak mértani helyét, amelyek egy adott kört az átmérőinek a végpontjaiban metszenek.

934. Két adott pont egyikén át szerkesszünk olyan egyenest, amely a másik ponttól adott távolságra halad.

935. Tűzzünk ki két pontot és egy szakaszt. Szerkesszünk az egyik pont körül kört úgy, hogy a másik pontból a körhöz húzott érintődarab az adott szakasszal legyen egyenlő.

936. Rajzoljunk egy kört, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk a pont körül kört, amely az adott körből egy adott hosszúságú húrt metsz ki.

937. Egy körön belül felvett ponton át szerkesszünk húrt úgy, hogy a húron levő szakaszok különbsége adott szakasszal legyen egyenlő.

938. Szerkesszük meg két kívülről érintkező kör közös érintőit.

939. Tűzzünk ki két pontot egymástól 5 cm-re. Szerkesszünk egyenest, amely az egyiktől 3, a másiktól 2 cm-re halad.

940. Rajzoljunk egy kört, és tűzzünk ki egy pontot rajta kívül. A kitűzött pont köré úgy szerkesszünk kört, hogy a két kör közös külső érintőjének az érintési pontok közé eső szakasza adott hosszúságú legyen.

941. Szerkesszük meg két egyenlő sugarú kör közös belső érintőit.

942. Adjunk meg úgy két kört, hogy közös érintőik száma 0, 1, 2, 3 legyen.

943. Adjunk meg két kört, és szerkesszünk egyenest, amelyből a körök adott hosszúságú húrokat metszenek ki.

944. Az A és B pontok köré szerkesszünk köröket úgy, hogy közös külső érintőjüknek a két érintési pont közé eső szakasza, továbbá a sugarak összege előre adott szakaszokkal legyen egyenlő.

945. Szerkesszünk kört, amely három egyenlő sugarú kört kívülről érint.

946. Az építészetben a következő szerkesztéssel szoktak boltívet szerkeszteni: Az AB szakaszt a C és D pontok három egyenlő részre osztják. C és D körül AB harmadával köröket rajzolnak, ezek az E és F pontokban metszik egymást. Az F-ből $\frac{2}{3}AB$ sugárral szerkesztünk egy kört. Bizonyítsuk be, hogy ez érinti a C és D középpontú köröket.

947. Két érintkező kör egyikében egy átmérő végpontjait kössük össze az érintkezési ponttal. Mutassuk meg, hogy ezek az egyenesek a másik körből egy átmérő végpontjait metszik ki.

948. Adjunk meg két egyközepű kört, és szerkesszünk derékszöget, amelynek egyik szára az egyik kört, másik szára a másik kört érinti. Mi a mértani helye az így szerkesztett derékszögek csúcsainak?

949. Kössük össze a háromszög köré írt kör középpontját az egyik csúccsal, és szerkesszünk kört az összekötő szakasz mint átmérő fölé. Bizonyítsuk be, hogy az így szerkesztett kör átmegy két oldal felezőpontján.

KERÜLETI ÉS KÖZÉPPONTI SZÖGEK. HÚR- ÉS ÉRINTŐNÉGYSZÖGEK

950. Milyen határok között változik a körben a kerületi szög nagysága?

951. Hány fokos középponti, ill. kerületi szög tartozik a kör $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, 0,3 részéhez?

952. Igazoljuk, hogy ha egy körben egy középponti szöget háromszorosára növelünk, akkor a hozzá tartozó kerületi szög is háromszorosára nő.

953. Egy kerületi és a hozzá tartozó középponti szög összege 180°. Mekkorák ezek a szögek?

954. Egy középponti szögnek és a hozzá tartozó kerületi szögnek a különbsége 36°42′16″. Mekkorák ezek a szögek?

955. Egy 90°-os középponti szöghöz a körben 10 cm-es húr tartozik. Mekkora távolságra van a kör középpontja a húrtól?

956. Mekkora távolságra van a 4 cm sugarú kör középpontjától a 120°-os ív végpontjait összekötő húr?

957. Egy körszelet határoló íve 64°-os. Mekkora szögben látszik az ív pontjaiból a határoló húr?

958. Egy háromszög két oldala a köré írt körből 126°-os, illetve 68°-os köríveket metsz le. Mekkorák a háromszög szögei?

959. Mekkora szögben látszik a háromszög köré írt kör középpontjából a háromszög α szögével szemközti oldala?

960. A kört egy húrja két ívre vágja. Az egyik ív pontjaiból a húr 128°-os szögben látszik. Mekkora a másik ív pontjaiból a húr látószöge?

961. Egy pontból a körhöz húzott két érintő 67°-os szöget zár be. Mekkora szögben látszik az érintési pontokat összekötő húr a kör pontjaiból?

962. Helyezzünk el egy körben egy sugárhosszúságú húrt. Mekkora szögben látszik ez a kör pontjaiból?

963. Mekkora az a kerületi szög, amelynek száraiból a kör egy-egy sugárnyi szakaszt vág ki?

964. Mekkora az a kerületi szög, amelynek egyik szára a kör sugara, másik a kör átmérője?

965. Bizonyítsuk be, hogy ha egy húr és egy átmérő 30°-os szöget alkot, akkor az átmérő és a húr nem közös végpontját összekötő szakasz a kör sugarával egyenlő.

966. A kör AB húrja és AC átmérője 30°-os szöget zár be. Igazoljuk, hogy a B pontbeli érintő az átmérő meghosszabbításából a kör sugarával egyenlő szakaszt metsz le.

967. Rajzoljuk meg a háromszög egyik csúcsához tartozó belső szögfelezőt, és hosszabbítsuk azt meg a köré írt körig. Mutassuk meg, hogy a szögfelező meghosszabbításának a körrel való metszéspontja egyenlő távol van a másik két csúcstól.

968. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik szögének felezője és a szemközti oldalfelező merőlegese a háromszög köré írt körön metszik egymást.

969. Mutassuk meg, hogy a háromszög bármelyik külső szögének felezője és a szemközti oldal felező merőlegese a háromszög köré írt körön metszik egymást.

970. Igazoljuk, hogy a háromszög két magasságegyenesének meghosszabbításai a harmadik csúcstól egyenlő távolságra metszik a köré írt kört.

971. Hosszabbítsuk meg a háromszög két magasságát a köré írt körig, a metszéspontokat összekötő húrra állítsunk merőlegest a harmadik csúcsból. Bizonyítsuk be, hogy ez a merőleges átmegy a köré írt kör középpontján.

972. Hosszabbítsuk meg a háromszög magasságait a köré írt körig. Mutassuk meg, hogy a három metszéspont alkotta háromszög szögfelezői éppen az eredeti háromszög magasságvonalai lesznek.

973. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeinek felezőit meghosszabbítjuk a háromszög köré írt körig, és a körrel való metszéspontokat összekötjük a háromszög csúcsával, akkor a rajzolt vonalak paralelogrammát zárnak körül.

974. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyik szöge és az ezzel szemközti oldal meghatározzák a köré írt kör sugarát.

975. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyik szöge és a köré írt kör sugara meghatározzák a szöggel szemközti oldalt.

976. Igazoljuk, hogy a hegyesszögű háromszög egyik oldala és a köré írt kör sugara meghatározzák az oldallal szemközti szöget.

977. Bontsunk két háromszögre egy egyenlő szárú háromszöget a szárak metszéspontján átmenő egyenessel. Mutassuk meg, hogy a két háromszög köré írt körök egyenlő sugarúak.

978. Legyenek α, β, γ egy hegyesszögű háromszög szögei. Szerkesszük meg a háromszög csúcsaiban a köré írt kör érintőit. Mekkorák az érintők alkotta háromszög szögei?

979. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt kör érintési pontjai határoznak meg?

980. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszögbe írt kör érintési pontjai alkotta háromszög mindig hegyesszögű.

981. A háromszög szögei α, β, γ. Az α-val szemközti oldalt kívülről érintő körön jelöljük meg az érintési pontokat. Mekkorák az érintési pontok alkotta háromszög szögei?

982. Mutassuk meg, hogy egy háromszöget kívülről érintő körön az érintési pontok mindig tompaszögű háromszöget határoznak meg.

983. Egy háromszög belső pontjából az egyik oldal 108°-os, a másik 116°-os szögben látszik. Mekkora szögben látszik ebből a pontból a harmadik oldal?

984. Írjunk kört egy egyenlő oldalú háromszög köré, és tűzzünk ki a kör kerületén egy pontot. Mekkora szögben látszanak ebből a pontból a háromszög oldalai?

985. Szerkesszük meg azon pontok mértani helyét, amelyekből egy adott szakasz *a)* 45°-os szögben, *b)* 60°-os szögben, *c)* egy előre adott szögben látszik.

986. Tűzzünk ki egy szakaszt, és adjunk meg egy szöget. Szerkesszünk kört, amelyben a szakasszal egyenlő húrhoz a szöggel egyenlő kerületi szög tartozik.

987. Adott körbe szerkesszünk adott egyenessel párhuzamos húrt, amelyhez egy előre adott kerületi szög tartozik.

988. Tűzzünk ki két pontot, és adjunk meg egy egyenest és egy szöget. Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből a két adott pont az adott szögben látszik.

989. Tűzzünk ki két pontot, és adjunk meg egy kört. Szerkesszünk a körön olyan pontot, amelyből a két pont 30°-os szögben látszik.

990. Egy szög egyik szárán tűzzünk ki egy a szakaszt, a másikon egy b szakaszt, és adjunk meg két szöget, α-t és β-t. Szerkesszünk pontot, amelyből a α szögben, b pedig β szögben látszik.

991. Egy négyzet belsejében szerkesszünk pontot, amelyből két szomszédos oldal egyike 90°-os, másika 120°-os szögben látszik.

992. Egy katonai egység, hogy helyzetét a térképen megjelölje, megméri, hogy helyétől két ismert helyzetű gyárkémény (K_1 és K_2) 45°-os szögben, az egyik gyárkémény és egy falu tornya (K_1 és T) 60°-os szögben látszik. Jelöljük meg térképvázlatunkon az egység helyét, ha tudjuk, hogy a térképen f-fel jelölt folyó elválasztja az egységet a bemért kéményektől (992. ábra).

993. Egy katonai járőr az országúton a jelölt irányban halad, és azt jelenti a parancsnokságnak, hogy helyéről két megjelölt tereptárgy (T_1 és T_2)

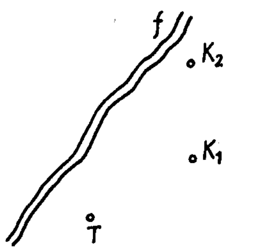
60°-os szögben látszik, és az útra épült hídon még nem keltek át. Jelöljük meg térképvázlatunkon a járőr helyét (993. ábra).

994. A háromszög két szöge: α és β. Mekkora szöget zár be a háromszög oldalaival a körülírt kör harmadik csúcshoz tartozó érintője?

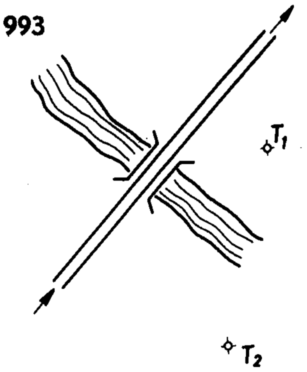
995. Szerkesszük meg a háromszög egy csúcsában a köré írt kör érintőjét anélkül, hogy a kört vagy középpontját megszerkesztenénk.

996. Tűzzünk ki egy szakaszt, és adjunk meg a szakasszal párhuzamosan egy egyenest. Szerkesszük meg az egyenesen azt a pontot, amelyből a szakasz a legnagyobb szögben látszik. Indokoljuk meg a szerkesztést.

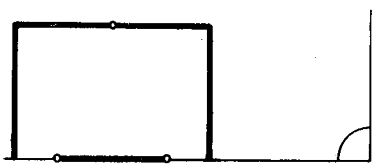
992

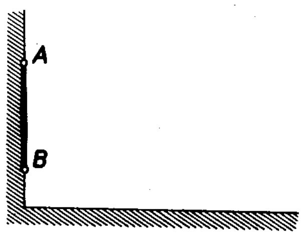


993



998



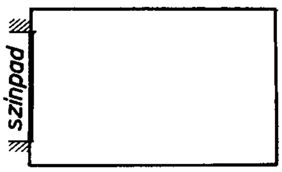


999

997. Tűzzünk ki egy szakaszt, és adjunk meg egy a szakaszra merőleges és a szakaszt nem metsző egyenest. Szerkesszünk az egyenesen pontot, amelyből a szakasz a lehető legnagyobb szögben látszik.

998. Labdarúgásnál a kapura lövő játékosok közül az van kedvezőbb helyzetben, aki „jobb szögből" lő kapura, azaz akinek a helyéről a kapu nagyobb szögben látszik. Mutassuk meg, hogy az ábránkon kicsinyítésben felrajzolt pályán a vastagon kihúzott, ún. tizenhatos vonalon a jelölt pontban levő játékos látja legnagyobb szögben a kaput (998. ábra).

999. A 999. ábrán egy mozi keresztmetszetét rajzoltuk fel. Jelöljük meg a nézőtér földszintjének azt a pontját, amelyből a filmvászon magassága a legnagyobb szögben látszik.



1000

1000. Jelöljük meg az ábrán látható színház nézőterén a legjobb oldalpáholyt, azaz azt, amelyből a színpad a legnagyobb szögben látszik (1000. ábra).

1001. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala: a, az ezzel szemközti szöge: α, továbbá

a) az oldalhoz tartozó magasság (m_a),
b) az oldalhoz tartozó súlyvonal (s_a).

1002. Húzzunk két félegyenest egy kör középpontján át, és adjunk meg egy szakaszt. Szerkesszünk érintőt a körhöz úgy, hogy a félegyenesek közötti része az adott szakasszal legyen egyenlő.

1003. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, az ezzel szemközti szög és

a) a másik két oldal összege,
b) a másik két oldal különbsége.

1004. Szerkesszünk háromszöget, ha ismert egyik szöge, a szöghöz tartozó magasság és súlyvonal.

1005. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két átlója és egyik szöge.

1006. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, egy másik oldalhoz tartozó súlyvonala és az a szög, amelyet a kérdéses súlyvonal a hozzá tartozó oldallal bezár.

1007. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott egy oldala, egy szöge és az átlók szöge.

1008. Szerkesszünk négyszöget, ha ismert két átlója, két szomszédos oldala és a másik két oldal alkotta szög.

1009. Szerkesszünk négyszöget, ha ismert két átlója, az átlók szöge és két szemközti szöge.

1010. Szerkesszünk négyszöget, ha ismert két átlója, az átlók szöge és két szomszédos szöge.

1011. Írjunk adott körbe háromszöget, ha ismert két szöge.

1012. Írjunk adott körbe háromszöget, ha ismert két oldal összege és az egyikkel szemközti szög.

1013. Szerkesszünk háromszöget, ha ismertek szögfelezőinek a köré írt körrel való metszéspontjai.

1014. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az a három pont, amelyben az egy csúcsból kiinduló magasság, szögfelező és súlyvonal a köré írt kört metszik.

1015. Szerkesszünk háromszöget, ha adottak köré írt körének a magasságegyenesekkel alkotott metszéspontjai.

1016. Szerkesszünk a hegyesszögű háromszögben olyan pontot, amelyből minden oldala egyenlő szögben látszik. (A háromszög ún. *izogonális* pontja.)

1017. Hegyesszögű háromszög oldalai fölé szerkesszünk kifelé egyenlő oldalú háromszögeket, és írjunk ezek köré köröket. Mutassuk meg, hogy ez a három kör egy pontban metszi egymást, és ez a pont a háromszög izogonális pontja.

1018. Szerkesszünk a hegyesszögű háromszög oldalai fölé és kifelé egyenlő oldalú háromszögeket, és kössük össze a háromszög minden csúcsát a szemközti oldalra szerkesztett háromszög legtávolabbi csúcsával. Igazoljuk, hogy ezek az egyenesek egy pontban metszik egymást, a háromszög izogonális pontjában.

1019. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszögben az izogonális pont rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a csúcsoktól mért távolságainak az összege a lehető legkisebb.

1020. Két érintkező kör érintkezési pontján át szerkesszünk tetszőleges szelőt. Mutassuk meg, hogy a szelőn levő húrokhoz mindkét körben ugyanakkora középponti szögek tartoznak.

1021. Két érintkező kör közös pontján át szerkesszünk szelőt, és ennek végpontjaiban szerkesszük meg az érintőket. Bizonyítsuk be, hogy az így szerkesztett érintők párhuzamosak.

1022. Két metsző kör egyik metszéspontján át fektessünk tetszőleges egyenest. Mutassuk meg, hogy ennek a körökön belül fekvő darabja a másik metszéspontból mindig ugyanakkora szögben látszik.

1023. Az előző feladat alapján szerkesszünk két metsző kör egyik közös pontján át szelőt, amelynek a két körön belül levő darabja adott szakasszal egyenlő.

1024. Kössük össze két egymást metsző kör egyikének bármelyik pontját a körök metszéspontjaival, és hosszabbítsuk meg ezeket a szakaszokat mindaddig, amíg még egyszer nem metszik a másik kört. Igazoljuk, hogy ezek a második metszéspontpárok ugyanakkora szakaszt határolnak.

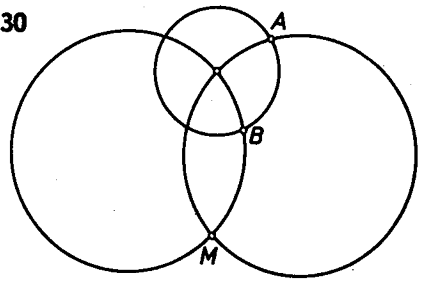
1025. Két kör egyik metszéspontján át szerkesszünk tetszőleges egyenest. A két körrel alkotott újabb metszéspontjaikban szerkesszünk érintőket a körökhöz. Mutassuk meg, hogy a két érintő szöge mindig ugyanakkora, tehát független a kiinduló egyenes felvételétől.

1026. Rajzoljunk két egyenlő sugarú, egymást metsző kört. Egyik metszéspontjukon át forgassunk egyenest, és minden helyzetben jelöljük meg az egyenes körökön belüli szakaszának a felezőpontját. Mi az így kapott felezőpontok mértani helye?

1027. Jelöljük meg egy egyenesnek három pontját. Szerkesszünk két egyenlő sugarú kört, amelynek a középső pont közös pontja és egyikük az egyik, másikuk a másik szélső kitűzött ponton is átmegy. Változtassuk a körök sugarát. Mi lesz az egyenesen kívüli metszéspontok mértani helye?

1028. Rögzítsük a kör két pontját, A-t és B-t. A kör egy tetszőleges X pontját kössük össze A-val, és az összekötő szakasz X-en túli meghosszabbítására mérjük fel XB-t. Mi lesz az így kapott B' végpontok mértani helye, ha X befutja a kört?

1030



1029. Adott egy körön két pont. Forgassunk a középpont körül egy átmérőt, és egyes helyzeteiben kössük össze végpontjait egy-egy kitűzött ponttal. Mi az összekötő vonalak metszéspontjainak mértani helye?

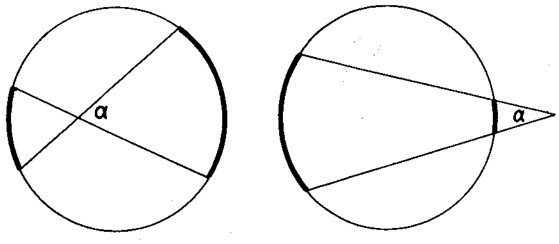
1030. Szerkesszünk kört két egyenlő sugarú kör egyik metszéspontja körül. Igazoljuk, hogy ennek a két körrel való A és B metszéspontja az eredeti körök M metszéspontjával egy egyenesre esik (1030. ábra).

1031. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyik csúcsából húzott szögfelező, a körülírt körhöz ugyanabban a csúcsban húzott érintő és a szemközti oldalegyenes egyenlő szárú háromszöget zár körül.

1032. Húzzuk meg a háromszög egyik csúcsához tartozó szögfelezőjét, és szerkesszünk kört, amelynek ez a szögfelező húrja, és érinti a szöggel szemközti oldalt. Mutassuk meg, hogy az így szerkesztett kör érinti a háromszög köré írt kört.

1033. A vastagon húzott ívekhez tartozó kerületi szögeket ismerjük. Számítsuk ki ezek segítségével az α nagyságát (1033. ábra).

1033

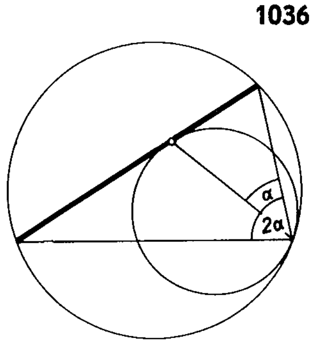


1034. Rajzoljunk két érintkező kört, és az érintési ponton át két szelőt. Bizonyítsuk be, hogy a szelők egy-egy körrel való második metszéspontjait összekötő húrok párhuzamosak.

1035. Szerkesszünk két, egymást belülről érintő kört, és messük el ezeket egy egyenessel. Bizonyítsuk be, hogy az egyenesnek a két kör közötti szakaszai az érintési pontból egyenlő szögekben látszanak.

1036. Szerkesszünk két, egymást belülről érintő kört, és húzzunk érintőt a belső kör egy pontjához. Igazoljuk, hogy az érintőnek a nagyobbik körön belüli szakasza kétszer akkora szögben látszik a két kör közös pontjából, mint az érintési ponttól a nagyobbik körig terjedő része (1036. ábra).

1036



1037. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mekkora szöget zár be a háromszög köré írt körhöz az α csúcsában szerkesztett érintő a szemközti oldallal?

1038. Szerkesszünk négyzetet, ha ismert egyik csúcsa, továbbá a szemközti csúcsba futó oldalakból egy-egy pont.

1039. Egy szög szárai között helyezzünk el adott hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szög csúcsától adott távolságra legyen.

1040. Egy pontból három félegyenes indul ki. Szerkesszünk szelőt, amelyből két-két félegyenes adott hosszúságú darabot metsz ki.

1041. Rajzoljunk egy kört, és tűzzünk ki egy pontot. Szerkesszünk a körben olyan átmérőt, amely a kitűzött pontból adott szögben látszik.

1042. Rajzoljunk egy kört és valahol másutt egy ötszöget. Szerkesszünk a körbe ötszöget, amelynek szögei az adott ötszög szögeivel egyenlők.

1043. Rögzítsük egy háromszög köré írt körét és két csúcsát. Mit ír le a háromszögbe írt kör középpontja, ha a harmadik csúcs befutja a kört?

1044. Rajzoljunk egy szög szárai közé a szárakat érintő kört. Szerkesszünk érintőt a körhöz, amelynek a szárak közé eső darabja adott szakasszal egyenlő.

1045. Szerkesszünk háromszöget, ha ismert egy oldala, az ezzel szemközti szöge és a beírt kör sugara.

1046. Legyen F az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja. Mutassuk meg, hogy F ugyanolyan távol van a háromszögbe írt kör középpontjától, mint az A és B csúcsoktól.

1047. Legyen F az ABC háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja. Mutassuk meg, hogy F ugyanolyan távol van a háromszög AB oldalát kívülről érintő kör középpontjától, mint az A és B csúcsoktól.

1048. Mutassuk meg, hogy a háromszög köré írt kör felezi a háromszögbe írt kör középpontját és bármelyik hozzáírt kör középpontját összekötő szakaszt.

1049. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a köré írt, a beírt, valamint az egyik hozzáírt kör középpontja.

1050. Egy egyenes egyik oldalán tűzzünk ki két pontot. Szerkesszünk háromszöget, amelynek adott hosszúságú alapja az egyenesen van, két másik oldala egy-egy kitűzött ponton megy át, és az alappal szemközti szöge adott nagyságú.

1051. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög akkor és csakis akkor húrnégyszög, ha egyik külső szöge egyenlő a szemközti belső szöggel.

1052. Mutassuk meg, hogy a paralelogrammák közül csak a téglalap lehet húrnégyszög.

1053. Igazoljuk, hogy a trapézok közül csak a szimmetrikus trapéz húrnégyszög.

1054. Mutassuk meg, hogy egy húrnégyszögben nem lehet páratlan számú hegyesszög.

1055. Igazoljuk, hogy minden négyszög szögfelezői húrnégyszöget zárnak közre.

1056. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két csúcsa és a belőlük kiinduló magasságok talppontjai húrnégyszöget alkotnak.

1057. Egy háromszög egyik oldalán levő magasságtalppontból bocsássunk merőlegest a másik két oldalra. Igazoljuk, hogy ezeknek talppontjai és a kiindulásul vett oldal két végpontja egy körön helyezkednek el.

1058. Igazoljuk, hogy a háromszög magasságpontja, egyik csúcsa és a csúcsból induló két oldalon levő magasságtalppontok egy körön vannak.

1059. Mutassuk meg, hogy a talpponti háromszög egyik oldala akkora szöget zár be a háromszög egyik oldalával, mint a háromszög egyik szöge.

1060. Bizonyítsuk be, hogy a talpponti háromszög szögfelezői a háromszög magasságvonalai (külső v. belső szögfelezők).

1061. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott talpponti háromszöge.

1062. Számítsuk ki a talpponti háromszög szögeit, ha az eredetié α, β, γ (hegyesszögek).

1063. Mutassuk meg, hogy a hegyesszögű háromszög egy belső pontjából az oldalakra állított merőleges szakaszok a háromszöget három húrnégyszögre bontják.

1064. Egy kör AB átmérőjének B-n túl levő meghosszabbítására C pontjában állítsunk merőlegest. Ezt a merőlegest D pontban és a kört E pontban metszi egy A-ból húzott másik egyenes. Bizonyítsuk be, hogy $BCDE$ húrnégyszög.