

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2011. május 3.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

**NEMZETI ERŐFORRÁS
MINISZTERIUM**

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
 2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
 3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
 4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
 5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
 6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység**, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
 7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
 8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
 9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
 10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.
-

I.**1.**

Az egyszerűsítés utáni alak: $b+6$	2 pont	<i>A helyes szorzattá alakításért 1 pont jár.</i>
Összesen:	2 pont	

2.

(A képezhető háromjegyű számok száma:) $3!=6$.	1 pont	
Ezek közül 2 páratlan.	1 pont	
Így a keresett valószínűség $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

3.

A kocka térfogata 27-szeresére nő.	2 pont	<i>Ha a hasonló testek térfogatának arányára vonatkozó összefüggésre hivatkozik, 1 pont jár.</i>
Összesen:	2 pont	

4.

A legnagyobb közös osztó: $2 \cdot 5 \cdot 11^3 (=13\ 310)$	1 pont	
A legkisebb közös többszörös: $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^4 \cdot 13$ (= 1 865 263 400)	1 pont	
Összesen:	2 pont	

5.

f értékkészlete: $R_f = [-3; 3]$.	1 pont	<i>Bármilyen módon megadott helyes válasz 1-1 pontot ér.</i>
g értékkészlete: $R_g = [-1; 1]$.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

6.

Az egyenlet gyökei: 7 és $-0,5$.	2 pont	<i>$D>0$ és a Viète-formulák alkalmazása 1-1-1 pont.</i>
A gyökök összege: 6,5. A gyökök szorzata: $-3,5$.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

7.		
$A = \{15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95\}$	1 pont	
$B = \{18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90; 99\}$	1 pont	
$A \cap B = \{45\}$	1 pont	
$A \setminus B = \{15; 25; 35; 55; 65; 75; 85; 95\}$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

8.		
$x = 2$	1 pont	
$y = -5$	1 pont	
Összesen:	2 pont	

9.		
A nagyobb szám betűjele: B ($= \cos 8\pi$).	2 pont	<i>Ha helyesen megadja mindkét értéket, akkor 1 pontot kap.</i>
Összesen:	2 pont	

10.		
Az egyenlet megoldása a 9	1 pont	
és a -5.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

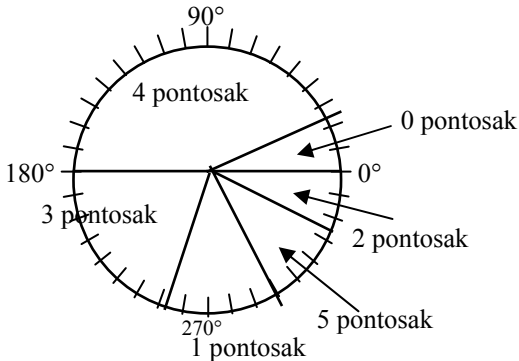
11.		
Az $a_1 = 2$ első tagú, $d = 2$ differenciájú számtani sorozat felismerése.	1 pont	<i>Ha a szabályszerűséget felismeri (pl.: $a_n = 2n$) és helyesen válaszol, akkor is jár a teljes pontszám. Ha a sorozat első tagjának a nullát tekinti, akkor legfeljebb 2 pont adható.</i>
$a_{201} = 2 + 200 \cdot 2 =$	1 pont	
$= 402.$	1 pont	
Összesen:	3 pont	

12.		
A: hamis.	1 pont	
B: igaz.	1 pont	
C: hamis.	1 pont	
Összesen:	3 pont	

II. A**13. a)**

	1. feladat	2. feladat		
pontszámok átlaga	3,57	3,10	3 pont	Minden helyes érték 1 pont.
pontszámok mediánja	3,5	4		
Összesen:			3 pont	

13. b)

Egy tanulóhoz tartozó középponti szög: 12° .	1 pont	
13 tanulóhoz 156° , 6 tanulóhoz 72° , 4 tanulóhoz 48° , 3 tanulóhoz 36° , 2 tanulóhoz 24° tartozik.	1 pont	4 helyes középponti szög esetén is jár az 1 pont.
	2 pont	Ha nincs jelmagyarázat a körcikkek mellett, akkor 1 pont adható.
Összesen:	4 pont	

13. c)

Egy tanuló 3 pontot négyféleképpen érhetne el: $0+3$; $1+2$; $2+1$; $3+0$.	1 pont	Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.
A diagram alapján nem valósulhat meg: $0+3$ és $2+1$.	1 pont	
$1+2$ pontot 1 tanuló kaphatott.	1 pont	
$3+0$ pontot 2 tanuló kaphatott.	1 pont	
Legfeljebb 3 tanuló érhetett el pontosan 3 pontot.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

14. a)		
A vezetési biztonság pontjai egy $t_0 = 90$, $q = 1,06$ hányadosú mértani sorozat tagjai.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.</i>
(Ebben a sorozatban) $t_5 = 90 \cdot 1,06^5$ (pont).	1 pont	
$90 \cdot 1,06^5 \approx 120,44$,	1 pont	
tehát 5 év után a vezetési biztonság 120 pontos.	1 pont	
Összesen:	4 pont	

14. b) első megoldás		
Ha minden évben x %-kal csökken az autó értéke, akkor minden évben az előző évi érték $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ -szorosára változik.	1 pont	
Az 5. év leteltével: $2\,152\,000 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^5 = 900\,000$.	2 pont	
$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^5 = \frac{900}{2152} (\approx 0,4182)$,	1 pont	
$1 - \frac{x}{100} = \sqrt[5]{\frac{0,9}{2,152}} (\approx 0,8400)$,	1 pont	
$x \approx 16$.	2 pont	
Tehát évente 16 %-kal csökken az autó értéke.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

14. b) második megoldás		
Legyen a csökkenési ráta x .	1 pont	
Ekkor $2,152x^5 = 0,9$.	2 pont	
$x^5 = \frac{900}{2152} (\approx 0,4182)$,	1 pont	
amiből $x = \sqrt[5]{\frac{0,9}{2,152}}$,	1 pont	
$x \approx 0,84$,	1 pont	
$1 - 0,84 = 0,16$,	1 pont	
tehát évente 16 %-kal csökken az autó értéke.	1 pont	
Összesen:	8 pont	

15. a)		
Az ABC háromszög egyenlő szárú.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.</i>
Az AB alapon fekvő hegyesszögek tangense $\frac{2}{3}$,	2 pont	
tehát az alapon fekvő szögek nagysága $33,7^\circ$,	1 pont	<i>Ha a helyesen kerekített szögek összege nem 180°, akkor 1 pont adható.</i>
a szárak szöge pedig $112,6^\circ$.	1 pont	
Összesen:	5 pont	

15. b)		
A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek közös pontja, ez a szimmetria miatt az ordinátatengelyen van.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.</i>
Az AC oldal felezőmerőlegese átmegy a $(-1,5;1)$ felezőpontra.	1 pont	
Az AC oldal felezőmerőlegesének egy normálvektora a $\overrightarrow{CA}$,	1 pont	
$\overrightarrow{CA} = (-3;2)$.	1 pont	
Az AC oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $-3x + 2y = 6,5$.	1 pont	<i>A BC oldal felező merőlegesének egyenlete: $3x + 2y = 6,5$.</i>
Ez az y tengelyt a $(0;3,25)$ pontban metszi (ez a körülírt kör középpontja). A kör sugara $3,25$.	1 pont	
A körülírt kör egyenlete: $x^2 + (y - 3,25)^2 = 3,25^2$.	1 pont	<i>A kör egyenlete írható így is: $x^2 + y^2 - 6,5y = 0$.</i>
Összesen:	7 pont	

II. B

16. a)		
Az első esetben a forgástengely a négyzet szemközti oldalainak közös felezőmerőlegese,	1 pont	<i>Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.</i>
a keletkező forgástest forgáshenger: alapkörének sugara 6 cm, magassága 12 cm.	1 pont	
Térfogata: $V_1 = 6^2 \cdot \pi \cdot 12$.	1 pont	
$V_1 = 432\pi \approx 1357 \text{ cm}^3$.	1 pont	<i>Ha a π közelítéséből adódóan 1356 cm^3 a válasza, jár a pont.</i>
Felszíne: $A_1 = 2 \cdot 6^2 \cdot \pi + 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 12$.	1 pont	
$A_1 = 216\pi \approx 679 \text{ cm}^2$.	1 pont	<i>Ha a π közelítéséből adódóan 678 cm^2 a válasza, jár a pont.</i>
Összesen:	6 pont	

16. b)		
A második esetben (mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást) a forgástest egy kettőskúp. A közös köralap átmérője a négyzet átlója, a kúpok magassága a négyzet átlóhosszának fele.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.</i>
A négyzet átlója: $d = 12 \cdot \sqrt{2} \ (\approx 17)$.	1 pont	
Az egyik kúp térfogata: $V_1 = \frac{(6\sqrt{2})^2 \pi \cdot 6\sqrt{2}}{3}$,	1 pont	
azaz $V_1 = 144 \cdot \sqrt{2} \pi \ (\approx 640)$.	1 pont	
A két kúp egybevágó, így a kettőskúp térfogata: $V = 2V_1 \approx 1280 \text{ cm}^3$.	1 pont	<i>Közbülső kerekítések miatt kapott egyéb helyes eredmény (1275-1280-ig) is elfogadható.</i>
A forgáskúp palástja kiterítve körcikk, amelynek az ívhossza $2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi (\approx 17\pi \approx 53,4) \text{ (cm)}$,	1 pont	
sugara 12 cm hosszú.	1 pont	
Így a területe: $T = \frac{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 12}{2} = 72\sqrt{2} \pi \ (\approx 320 \text{ cm}^2)$.	1 pont	
A kettőskúp felszíne: $2T = 144\sqrt{2}\pi (\approx 640 \text{ cm}^2)$.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

16. c)		
A kért százalékok: $\frac{2T}{A_1} \cdot 100 \left(= \frac{144\sqrt{2}\pi}{216\pi} \cdot 100 \right)$,	1 pont	
azaz kb. 94%.	1 pont	
Összesen:	2 pont	

17. a)		
$\lg p_m = 0,8 \cdot \lg 20 + 0,301,$	2 pont	<i>A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez a 3 pont nem jár.</i>
$\lg p_m \approx 1,342.$	1 pont	
$p_m \approx 22 \text{ (Pa).}$	1 pont	
Összesen:	4 pont	

17. b)		
$\lg 50 = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301.$	2 pont	<i>A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez az 5 pont nem jár.</i>
$\lg p_v = \frac{\lg 50 - 0,301}{0,8},$	2 pont	
$\lg p_v \approx 1,747.$	1 pont	
$p_v \approx 56 \text{ (Pa).}$	1 pont	
Összesen:	6 pont	

17. c)		
$p_v = p_m$ felismerése.	2 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a 2 pont.</i>
(Legyen a keresett nyomás $p_v = p_m = p$.) $\lg p = 0,8 \cdot \lg p + 0,301,$	2 pont	<i>Ez a 2 pont nem bontható.</i>
$\lg p = \frac{0,301}{0,2} = 1,505.$	2 pont	
$p \approx 32 \text{ (Pa).}$	1 pont	
Összesen:	7 pont	
<i>Megjegyzés: Ha a vizsgázó felismeri, hogy $0,301 \approx \lg 2$, ezt felhasználva jut el a helyes eredményhez, megoldása teljes értékű.</i>		

18. a) első megoldás		
Az 5 név bármelyike ugyanakkora valószínűséggel kerülhet az első helyre,	3 pont	
tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{5} = 0,2.$	2 pont	
Összesen:	5 pont	

18. a) második megoldás

A keresett p valószínűség a kedvező és az összes esetek számának hányadosa.	1 pont	<i>Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.</i>
Az összes esetek száma $5!$.	1 pont	
András neve 4! esetben állhat az első helyen (kedvező esetek száma).	2 pont	
$p = 0,2$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

18. b)

A húzó neve : <table><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr><tr><td>B</td><td>A</td><td>D</td><td>C</td><td>E</td></tr><tr><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>E</td></tr><tr><td>B</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>E</td></tr><tr><td>C</td><td>A</td><td>D</td><td>B</td><td>E</td></tr><tr><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>E</td></tr><tr><td>C</td><td>D</td><td>B</td><td>A</td><td>E</td></tr><tr><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>E</td></tr><tr><td>D</td><td>C</td><td>A</td><td>B</td><td>E</td></tr><tr><td>D</td><td>C</td><td>B</td><td>A</td><td>E</td></tr></table>			A	B	C	D	E	B	A	D	C	E	B	C	D	A	E	B	D	A	C	E	C	A	D	B	E	C	D	A	B	E	C	D	B	A	E	D	A	B	C	E	D	C	A	B	E	D	C	B	A	E
			A	B	C	D	E																																													
			B	A	D	C	E																																													
			B	C	D	A	E																																													
			B	D	A	C	E																																													
			C	A	D	B	E																																													
			C	D	A	B	E																																													
			C	D	B	A	E																																													
			D	A	B	C	E																																													
			D	C	A	B	E																																													
			D	C	B	A	E																																													
</																																																				

18. c) első megoldás

Azt a két helyet, ahol a fiúk ülhetnek (nem egymás mellett), 6-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Ennek indoklása (pl.: konkrétan leszámolja, vagy $\binom{5}{2} - 4 = 6$).	1 pont	
A két kiválasztott helyen a fiúk 2-féleképpen helyezkedhetnek el.	1 pont	
A lányok minden egyes esetben $3! = 6$ különböző módon ülhetnek le egymáshoz képest.	1 pont	
Összesen tehát $6 \cdot 2 \cdot 6 =$	1 pont	
$= 72$ különböző módon ülhetnek le.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

18. c) második megoldás		
(Komplementer halmazzal számolunk.) Az összes leülési lehetőség $5! = 120$.	1 pont	
Ezek között $2 \cdot 4! = 48$ olyan eset van, amelyben a két fiú egymás mellett ül.	3 pont	
Tehát $120 - 48 = 72$ olyan eset lehetséges, amelyben a két fiú nem ül egymás mellett.	2 pont	
Összesen:	6 pont	