



OKTATÁSI
HIVATAL

NAT
2020

10
I. kötet

Matematika

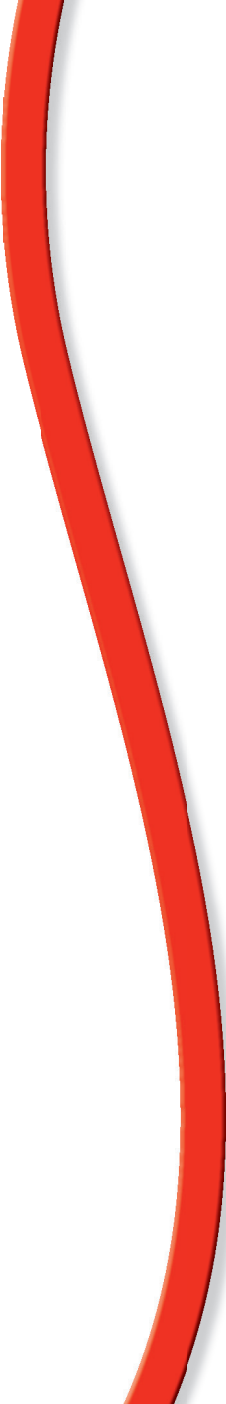
tankönyv

NYOMDAI ELŐKÉSZÍTÉS ALATT



Matematika

ELSŐ KÖTET



10.

Oktatási Hivatal

A kiadvány 2021. 02. 11-től 2026. 08. 31-ig tankönyvi engedélyt kapott a TKV/266-7/2021. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára (Matematika) és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára (Matematika) megnevezésű kerettanterv előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István

Tananyagfejlesztő: Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona

Kerettantervi szakértő: dr. Csapodi Csaba

Szerkesztő: Csajági Sándor

Fedél: Slezák Ilona terve alapján Orosz Adél, Bánáti János

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók:

A könyvben felhasználtuk a Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 9. Első kötet tankönyv című művet. Raktári szám: FI-503011001/1

A nyersanyagként felhasznált tankönyv az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001. számú, „A Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

© Oktatási Hivatal, 2021

ISBN 978-615-6256-34-8

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor mb. elnök
Raktári szám: OH-MAT10TA/I
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Grafikai szerkesztő: Győri Blanka
Nyomdai előkészítés: Gados László
Terjedelem: 16,48 (A/5) ív, tömeg: 356,52 gramm
1. kiadás, 2021

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.
Nyomtatta:
Felelős vezető:
Munkaszám:

ELŐSZÓ – A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

Sok szeretettel köszöntünk az új tanévben!

Ahogy évről évre előrébb lépünk a tanulásban, egyre szélesebb területet ölel fel a matematika, és emellett egyre mélyebb, érdekesebb összefüggésekre derül fény. Ez adja a matematika szépségét és játékoságát. Szeretnénk, ha sok örömöd lenne ezek felfedezésében. De emellett a matematika, a matematikai modellek használata és a matematikai gondolkodás az élet számos területén előfordul. Ez a tankönyv – hasonlóan, mint a tavalyi – szeretne felvillantani sok-sok kapcsolódási pontot és gyakorlati alkalmazást.

Az egyes leckékben a következő típusú részekkel találkozhatasz:

BEVEZETŐ: Sok esetben egyszerű és gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején a BEVEZETŐ-ben.

KIDOLGOZOTT FELADAT: Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET: Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat. Megfogalmazzuk a pontos matematikai fogalmakat (definíciók) és állításokat (tételek) is.

FELADATOK: Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. A feladatokat nehézségük szerint színteztük. Korábbi érettségi feladatok és kompetencia feladatok is színesítik a leckéket.

CSOPORTMUNKÁ: Néhány esetben ezt a munkaformát javasoljuk a feladatok megoldására.

HÁZI FELADAT: 4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁDÁS: Itt matematikai érdekességeket, ötletes és izgalmas feladatokat találsz.

EMELT SZINT: Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írd a tankönyvbe, dolgozz a füzetedbe! (Táblázatok esetén segítségére lehet egy öntapadós jegyzetömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

1. Logika

– IGAZ VAGY HAMIS?

Minden kék oroszlán növényevő. Igaz-e az állítás? Mi a tagadása?

– A KÖTŐSZAVAKON SOK MÚLIK.

Mézet vagy tejet? – Mindkettőt. – válaszolta Micimackó.

2. Egyenletrendszerek

– KÉT ISMERETLEN!

Mégis sokszor egyetlen megoldás van. De az nem egy szám, hanem egy számpár.

– SZÖVEGES FELADATOK

Hány lába és hány feje van egy állat seregletnek?

3. Hatványozás és négyzetgyök

– NEGATÍV SZÁM A KITEVŐBEN

A hatványozással nemcsak a nagyon nagy, hanem a nagyon kicsi számok is felírhatók.

– A GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

A gyökjel alatt, a gyökjel előtt; két gyökjelből egyet...

4. Függvénytranszformációk

– ELTOLJUK A GRAFIKONT

Fel-le, jobbra-balra. Változik a hozzárendelés. Hogyan mozdul a grafikon?

– A MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY GRAFIKONJA

Parabolák minden mennyiségben

5. Másodfokú egyenletek

– LEHET TÖBB MEGOLDÁS!

Segít a megoldó képlet.

– SZÖVEGES FELADATOK

Kertekről, utazásról, vásárlásról, pénzügyekről...

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bence, Tamás és Péter szállodát terveznek. A szálloda 3 emeletes lesz, és egy tó partján fog állni.

Azt számolják, mennyi lehet a legnagyobb napi bevétel. A földszinten lesznek a közösségi helyiségek, egy-egy emeleten pedig 20 kétágyas erkélyes szoba. A tóra néz emeletenként 5 szoba, ezek az első osztályúak, oldalról a tóra néz mindkét oldalon szintén 5-5 szoba, ezek a másodosztályúak. A hátsó front az út felé fordul, itt vannak a harmadosztályú szobák. A másodosztályúak ára 80%-a az első osztályú szobák árának, a harmadosztályúak ára 80%-a a másodosztályú szobák árának.

Foglaljuk táblázatba, mennyi a napi bevétel, ha tele a szálloda?

Megoldás

Telt ház esetén így alakulna a napi bevétel:



Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.	15	A	15A
II.	30	0,8A	$30 \cdot 0,8A = 24A$
III.	15	$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	$15 \cdot 0,64A = 9,6A$

Tehát a legnagyobb (maximális) napi bevétel:

$$15A + 24A + 9,6A = 48,6A \text{ forint lenne.}$$

FELADAT

1. 📡 – Mivel a szállodában nincs lift, a harmadik emeleti szobákat olcsóbban kellene kiadni. – töpreng Péter.
– Legyenek a harmadik emeleti szobák 20%-kal olcsóbbak, mint az alattuk lévők. Ekkor viszont a harmadik emeleti hátsó szobák már negyedosztályúak lennének.

Számold ki, mennyi lenne ezzel az új feltétellel a maximális napi bevétel! Töltsd ki a táblázatot!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
IV.			

A legnagyobb (maximális) napi bevétel az I–IV. osztályú szobák bevételeinek összege.

2. 📡 Tamás szerint az új feltétellel a harmadik emeleti szobákból szerezhető bevétel éppen 80%-a a második emeleti szobák együttes árának. Így a táblázatos módszernél sokkal egyszerűbben meg lehet kapni az előző feladat eredményét.

a) Igaz-e Tamás állítása?

b) Oldd meg Tamás ötletével és a kidolgozott feladat eredményével az előző feladatot!

3. 📡 Péter ezt írta fel az 1. feladathoz:

$$(48,6 : 3) \cdot 2,8 = 45,36.$$

Vajon mire gondolt?

4. 📡 Bencének eszébe jutott, hogy nem kellene ragaszkodni a négyzet alakú alapterülethez. Háttha több bevételt lehetne elérni úgy, hogy növelnék az első

osztályú szobák számát (de emeletenként továbbra is 20 szoba lenne). Hogyan változna a bevétel, ha

a) emeletenként 6 szo-

ba nézne a tóra is és az út felé is, a többi pedig oldalról nézne a tóra;

b) emeletenként 7 szo-

ba nézne a tóra is és az út felé is, a többi pedig oldalról nézne a tóra?



Készítsd el a füzetedben az a) és a b) változathoz tartozó táblázatot, és töltsd ki őket! Számold ki mindkét esetben a teljes bevételt is!

a)

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
IV.		$0,8 \cdot (0,64A)$	
A teljes bevétel:			

b)

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
IV.		$0,8 \cdot (0,64A)$	
A teljes bevétel:			

5

– Ha lenne lift – szól közbe Bence –, akkor esetleg 4 emeleten is el lehetne helyezni a 60 szobát, és így spórolnánk az alapozásnál! Ekkor nem kellene olcsóbban adni az emeleti szobákat, csak az számít, hogy egy szoba a tóra néz, oldalra vagy hátrafelé. Hogyan helyeznéd el 4 emeleten a 60 szobát? Válassz egy konkrét elrendezést, és számold ki ebben az esetben a legnagyobb napi bevételt!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

HÁZI FELADAT

1 a) Bence a 4 emeletes, 60 szobás, liftes szállodát négyzet alapúnak tervezné, az alsó három emeletén 16–16 szobát helyezne el. A 4. emeleten mindegyik szoba a tóra vagy legalábbis oldalról a tóra nézne. Mennyi lenne így a maximális napi bevétel?

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

b) Péter nem tervezne oldalról a tóra néző szobákat, és nem ragaszkodik ahhoz sem, hogy négyzet alapú legyen az épület. Mekkora bevétel érhető el így? Két esetben töltsd ki a táblázatot, és számold ki a legnagyobb napi bevételt!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0,8 \cdot (0,8A) = 0,64A$	
A teljes bevétel:			

2 Készíts tervet egy olyan 3 emeletes szállodához, ahol mindegyik oldalon emeletenként legalább két szoba van, és számold ki, telt ház esetén mennyi a maximális a bevétel!

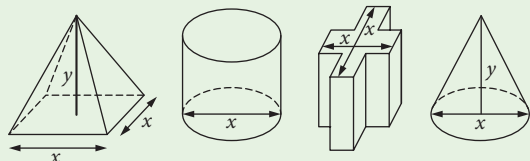
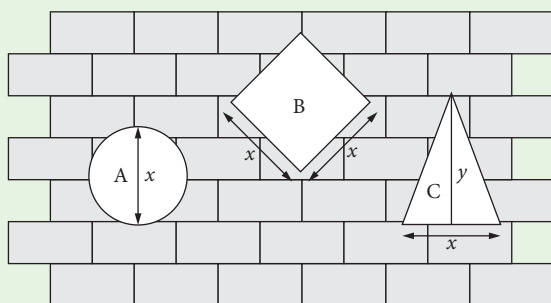
1 IGAZ VAGY HAMIS

FELADAT

1. (Kompetenciamérés, 2009)

Egy számítógépes kincskereső játék utolsó állomása egy kőfal, ahol különböző alakú kőajtók mögött található a kincs.

Az alábbi, betűvel jelzett nyílásokba a számokkal jelölt testek úgy illenek be, mint kulcs a zárba. A megoldáskor ügyelj arra, hogy egy nyílásba több kulcs is jó lehet!



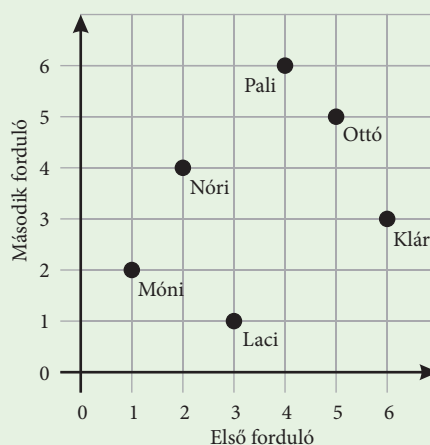
a) Döntsd el, hogy melyik igaz, melyik hamis a következő állítások közül!

- A: Csak a 3-as kulcs illik bele a B jelű nyílásba.
- B: A 4-es kulcs az A és C jelű nyílásba is beleillik.
- C: A 2-es kulcs beleillik a C jelű nyílásba.
- D: Az A jelű nyílásba a 3-as kulcs beleillik.
- E: Az 1-es és a 4-es kulcs beleillik a C jelű nyílásba.

b) Fogalmazd meg az előbbiektől különböző hamis, illetve igaz állításokat!

2. (Kompetenciamérés, 2012)

Egy kétfordulós verseny első hat helyezettjének eredményeit mutatja a következő diagram. A versenyt az nyeri, akinél a helyezések összege a két forduló után a legkisebb. Döntsd el, melyik igaz, melyik hamis az állítások közül!



- A: Nem volt olyan versenyző, aki mindkét fordulóban azonos helyezést ért volna el.
- B: Mindkét fordulót ugyanaz a versenyző nyerte.
- C: Az összesítésben nem volt holtverseny.
- D: Legalább hárman rosszabb helyezést értek el a második fordulóban, mint az elsőben.
- E: A versenyt nem lány nyerte.

ELMÉLET

Ha hallunk vagy olvasunk egy mondatot, akkor sokszor azonnal tudjuk, hogy a tartalma igaz vagy hamis. Más esetekben kisebb-nagyobb töprengés után tudjuk eldönteni, hogy mi vele a helyzet. Vannak olyan mondatok, amelyekről egyáltalán nem mondhatjuk ki azt, hogy a tartalmuk igaz vagy hamis.

1. A logikában azokat a kijelentő mondatokat nevezzük **állításoknak** (más szóval **kijelentéseknek**), amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tartalmuk igaz vagy hamis.

Példák:

Állítás: A sósav képlete HCl.
Svájc fővárosa Zürich.

Nem állítás: Hány óra van?
Budapest szebb város, mint Tokió.

2. Egy állítás vagy **igaz**, vagy **hamis**, harmadik eset nincs.

Az „**igaz**” illetve a „**hamis**” az adott állítás lehetséges **logikai értékei**.

Példák:

A sósav képlete HCl.
Svájc fővárosa Zürich.

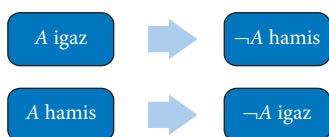
– ez egy igaz állítás
– ez egy hamis állítás

Megjegyzés:

„Két páros szám összege osztható 4-gyel.” Erre a mondatra korábban azt mondtuk, hogy *lehet, de nem biztos*, hiszen például a 2 és a 6 összege osztható 4-gyel, de a 4 és a 6 összege nem osztható 4-gyel. A logikában azonban egy állítás vagy igaz, vagy hamis, harmadik eset nincs. Hogyan értsük ezt?

A köznyelv és a matematikailag precíz nyelv időnként eltér egymástól. A mondatban nincs leírva, de odagondoljuk a „mindig” szót. Matematikai szempontból így értelmezzük ezt az állítást: „Két páros szám összege mindig osztható 4-gyel.” Ez pedig egy hamis állítás.

3. Minden állításnak van **tagadása**, ami egy másik állítás. Az A állítás tagadásának a jele: $\neg A$. (olvasd: „nem A ”) Egy A állítás tagadása akkor igaz, ha A hamis, és akkor hamis, ha A igaz.



Ezt röviden, **igazságtáblázat** segítségével így írjuk:

A	$\neg A$
igaz	hamis
hamis	igaz

Példák:

A sósav képlete HCl. (igaz állítás)

tagadása: A sósav képlete nem HCl. (hamis állítás)

Svájc fővárosa Zürich. (hamis állítás)

tagadása: Svájc fővárosa nem Zürich. (igaz állítás)

KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik állítás lesz az A állítás tagadása, a B vagy a C ?

- a) A : Panniék kutyája fekete.
 B : Panniék kutyája tarka.
 C : Panniék kutyája nem fekete.
- b) A : Többen vagyunk az osztályban, mint 32.
 B : Kevesebben vagyunk az osztályban, mint 32.
 C : Kevesebben vagyunk az osztályban, mint 33.

Megoldás

- a) A „Panniék kutyája fekete.” és a „Panniék kutyája tarka.” két olyan állítás, amely egyszerre sosem teljesül: ha a kutya fekete, akkor az első igaz és a második hamis, ha pedig a kutya tarka, akkor a második igaz és az első hamis. Egyszerre nem teljesülhet mind a kettő.

Azonban egy állítás tagadásának megfogalmazásakor nemcsak arra kell figyelni, hogy egyszerre nem lehet mindkettő igaz. Hanem arra is, hogy nem lehet elképzelni olyan helyzetet, amikor mindkét állítás hamis. Ha a kutya fehér, akkor mindkét állítás hamis. Van olyan helyzet, amikor mindkét állítás hamis, ezért ez a két állítás nem egymás tagadása. Az A állítás tagadása a C állítás.

- b) Tagadása-e az A állításnak a B állítás? Ha az A állítás igaz, azaz többen vagyunk az osztályban, mint 32, akkor a B állítás hamis. Ha a B állítás igaz, azaz kevesebben vagyunk az osztályban, mint 32, akkor az A állítás hamis. Van azonban egy olyan helyzet, amikor az A és a B állítás is hamis: amikor az osztályban éppen 32-en vagyunk!

Az A állítás tagadásának olyan mondatnak kell lennie, amely minden esetben ellentétes logikai értéket vesz fel. Nem lehet egy állítás és a tagadása egyszerre hamis! Az A állítás azt fejezi ki, hogy az osztálylétszám a 33, 34, 35, 36, ... számok valamelyike. A tagadásnak azt kell kifejeznie, hogy az osztálylétszám a 32, 31, 30, ... számok valamelyike. Ezt fejezi ki a C állítás.

Az A állítás tagadása a C állítás.

Tagadása-e egymásnak az A és a B állítás?

Ha A igaz,	akkor B hamis. ✓	} Ez még kevés!
Ha B igaz,	akkor A hamis. ✓	



FELADAT

3 Melyik állítás tagadása az A állításnak? Több megoldás lehet!

- a)** A : Legalább 100 barátom van.
 B : Legfeljebb 100 barátom van.
 C : Legfeljebb 99 barátom van.
 D : A barátaim száma kisebb, mint 100.
 E : A barátaim száma kisebb, vagy egyenlő, mint 100.
- b)** A : Ez a könyv maximum 300 oldalas.
 B : Ez a könyv legfeljebb 299 oldalas.
 C : Ezen könyv oldalainak száma nagyobb vagy egyenlő, mint 300.
 D : Ez a könyv minimum 301 oldalas.
 E : Ez a könyv több, mint 300 oldalas.

4 Fogalmazd meg a következő állítások tagadását többféleképpen!

- A : Legfeljebb 5 napig tart ez a munka.
 B : Több, mint 8 gólt rúgott a csapat.
 C : Több nap, mint kolbász.

5 Megadunk 5 állítást:

- A : A 0-ra végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
 B : A 0-ra vagy 5-re végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
 C : Nem igaz, hogy a 0-ra végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
 D : A 0-ra végződő természetes számok nem oszthatók 5-tel.
 E : Az 5-tel osztható természetes számok nem mind végződnek 0-ra.

- a)** Melyik igaz, melyik hamis?
b) Melyik lehet a B , C , D , E kijelentések közül az A állítás tagadása?

HÁZI FELADAT

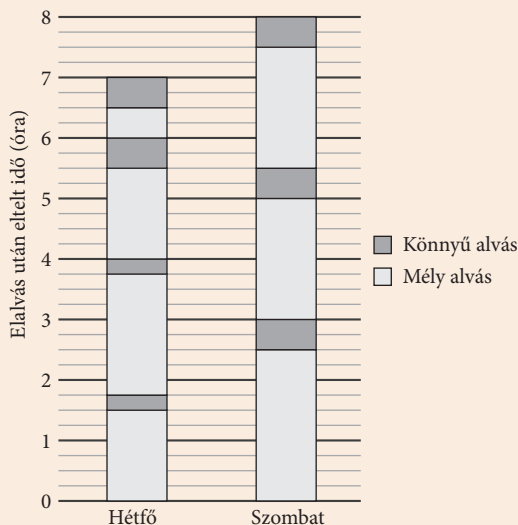
1 Igaz vagy hamis? Nézz utána az interneten, hogy melyik állítás igaz, melyik állítás hamis!

- A : Petőfi Sándor és Babits Mihály ugyanazon a településen született.
 B : A Kaukázus legmagasabb csúcsa, az Elbrusz magasabb, mint a Mont Blanc.
 C : A Lehel kürtjeként tisztelt elefántcsontból készült kürtöt most a gyöngyösi Mátra Múzeumban őrzik.
 D : Ludwig van Beethoven több, mint 10 szimfóniát írt.

2 Fogalmazd meg az órai 2. feladat állításainak tagadását!

3 (Kompetenciamérés, 2019)

Speciális technikával mérhető, hogy ki mennyi időt tölt mély alvással és könnyű alvással, és hogy ezek a szakaszok hogyan váltakoznak az éjszaka folyamán. A következő oszlopdiagramon Miklós alvásának egy hétfői és egy szombati napon mért adatai láthatók.



Dönts el, hogy melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

- A: A vizsgált napokon a mély alvás leghosszabb összefüggő szakasza két és fél óráig tartott.
- B: Hétfőn többször váltakozott a mély és a könnyű alvás szakasz, mint szombaton.
- C: Szombaton az első könnyű alvási szakasz elalvás után 150 perccel kezdődött.
- D: Hétfőn a könnyű alvással töltött összes idő több volt, mint szombaton.
- E: Szombaton az alvással töltött idő nagyobb arányát tette ki a könnyű alvás, mint hétfőn.

RÁADÁS

1 (Kompetenciamérés, 2006)

Gábor egy 9 cm élhosszúságú fehér kocka minden lapját befesti pirosra, majd feldarabolja 27 egybevágó kis kockára. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

- A: 12 olyan kiskocka van, melynek pontosan két lapja piros.
- B: A kis kockák számának harmadánál eggyel kevesebb azon kockák száma, amelyeknek pontosan 3 lapja piros.
- C: A kis kockák pontosan kétkilencedének van pontosan két piros lapja.
- D: Pontosán kétszer annyi kis kockának piros egy vagy két lapja, mint ahánynek három lapja piros.
- E: Azon kiskockák száma, amelyeknek legalább 2 lapjuk piros, osztható 4-gyel vagy 5-tel.
- F: Azon kiskockák száma, amelyeknek legfeljebb 2 lapjuk piros, osztható 3-mal vagy 4-gyel.

piros oldalak száma	kis kockák száma
0	
1	
2	
3	

2 Az aranyműves boltjába behoztak négy arany nyakláncot. A boltos négy segédje, Tóbiás, Kázmér, Móric és Jónás kézbe vették a nyakláncokat, majd ezeket mondták:

Tóbiás: A második a legkönnyebb.

Móric: A második a legnehezebb, a harmadik a legkönnyebb.

Kázmér: A negyedik a legkönnyebb.

Jónás: A második nem a legnehezebb, de nem is a legkönnyebb.

Mérés után kiderült, hogy két segéd állítása igaz, kettő pedig tévedett.

a) Melyik két segéd tévedett?

b) Mit állíthatunk ezek után a nyakláncok súlyáról?

3 (Kompetenciamérés, 2017)

Marci és Imre egy társasjátékkal játszik, amelyben a játékosoknak 1-1 bábuval kell végighaladniuk a 100 mezőből álló útvonalon. Egy szabályos dobókockával dobnak, majd a dobott értéknek megfelelő számú mezőt lépnek előre. A játékot az nyeri, aki először célba ér (vagy lép túl azon). A játék végéhez közeledve Marci bábuja a 95., Imréé a 89. mezőn áll. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

- A: Lehetetlen, hogy Imre bábuja a következő dobás után a 96. mezőn álljon.
- B: Biztos, hogy Marci nyeri meg a játékot.
- C: Lehetséges, hogy több, mint 3-szor dobnak mindketten.
- D: Biztos, hogy legfeljebb 5-ször dobnak mindketten.

2 ÁLLÍTÁS ÉS TAGADÁSA

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Tagadása-e egymásnak a két állítás?

A: Az utcában minden autó piros. és B: Nincs az utcában piros autó.

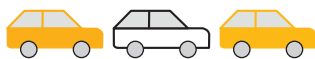
Megoldás

Ha egy állítást tagadunk, akkor nemcsak azt várjuk el, hogy ne teljesüljön egyszerre a két állítás, hanem azt is, hogy ne legyen egyszerre mindkét állítás hamis.

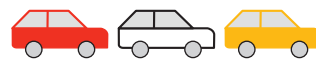
Figyeljük meg az állítások logikai értékét a következő esetekben!



A igaz, B hamis



A hamis, B igaz



A hamis és B is hamis!

Van olyan eset, amikor mindkét állítás hamis, ezért ez a két állítás nem egymás tagadása.

2. Tagadása-e egymásnak a két állítás?

C: Van olyan macska, amelyik fekete. D: Van olyan macska, amelyik nem fekete.

Megoldás

Figyeljük meg az állítások logikai értékét a következő esetekben!



C igaz, D hamis



C hamis, D igaz



C igaz és D is igaz!

Van olyan eset, amikor mindkét állítás igaz, ezért ez a két állítás nem egymás tagadása.

ELMÉLET

A matematikában és a természettudományokban különösen fontosak azok az állítások, amelyek minden, bizonyos tulajdonságban megegyező dologról, fogalomról állítanak valamit. Pl.: „Minden háromszög magasságpontja a háromszög belsejébe esik.” „Minden emlős eleven szülő.” Az ilyen állítások téves voltát egyetlen ellenpélda bizonyítja: ilyenkor nem minden esetben teljesül az állítás, azaz van olyan eset, amikor nem teljesül.

Példa:

Minden emlős eleven szülő.

tagadása: $\begin{cases} \text{Van olyan emlős, amely nem eleven szülő.} \\ \text{Nem minden emlős eleven szülő.} \end{cases}$

A „**van olyan**” (vagy létezik) szavakkal kezdődő állítások tagadását a „**nincs olyan**” szavakkal érdemes kezdeni, és jelentése: „**minden**” esetben *nem teljesül* az eredeti tulajdonság.

Van olyan macska, amelyik fekete.

tagadása: $\begin{cases} \text{Nincs olyan macska, amelyik fekete.} \\ \text{Minden macska nem fekete.} \end{cases}$

Megjegyzések

1. A legtöbb matematikai tétel minden, bizonyos tulajdonságban megegyező fogalomról vagy helyzetről állít valamit. A tétel megfogalmazáskor a „minden” szót sokszor nem tesszük ki.

Példa:

A háromszög belső szögeinek összege 180° .

Jelentése: Minden háromszög belső szögeinek összege 180° .

2. A hétköznapi szóhasználatban a „minden” szó jelentése eltérhet a matematikai jelentéstől. Jelentheti azt, hogy valami általában igaz, az esetek nagyon nagy részében teljesül.

Példa:

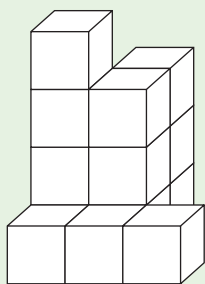
„Minden ember szabadnak és jogokban egyenlőnek születik és marad;” (Emberi és polgári jogok nyilatkozata)

A síugró minden idegzálával a következő ugrásra koncentrált.

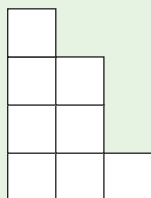
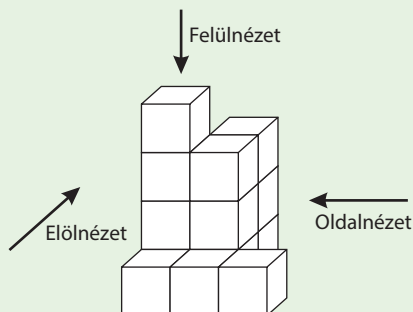
FELADAT

1. (Kompetenciamérés alapján, 2010)

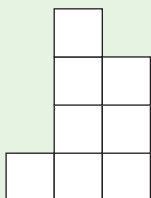
Az ábrán látható alakzatot 13 egyforma méretű kockából építették.



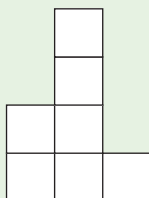
Kati megpróbálta elkészíteni az alakzat előlnézeti, oldalnézeti, és felülnézeti képét.



Előlnézet



Oldalnézet



Felülnézet

Melyik állítás igaz, melyik hamis?

	igaz vagy hamis?
Kati minden rajza hibás.	
Van olyan rajza Katinak, ami hibás.	
Kati minden rajza jó.	

2. Istvánék utcájában parkol néhány autó. István körbenéz és megszólal:

„Az utcában minden autó Opel.”

Melyik állítás tagadása István mondatának? Több megoldás lehet!

A: Nincs az utcában Opel.

B: Az utcában minden autó Skoda.

C: Van olyan autó az utcában, amely nem Opel.

D: Az utcában nem minden autó Opel.

E: Van az utcában Skoda is.

3. Fogalmazd meg a következő állítások tagadását! Állapítsd meg, melyik igaz: az állítás vagy a tagadása!

A: Minden prímszám páratlan.

B: Van olyan négyszög, amely tengelyesen szimmetrikus.

C: Van olyan háromszög, amely középpontosan szimmetrikus.

D: Minden háromszögnek van beírható köre.

4 Kösd össze az állítást a tagadásával! Az egyik állításnak nincs párja, annak fogalmazd meg a tagadását!

A: Van olyan természetes szám, amely nagyobb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

B: Van olyan természetes szám, amely kisebb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

C: Van olyan természetes szám, amely kisebb, mint a számjegyeinek összege.

D: Van olyan természetes szám, amely egyenlő számjegyeinek összegével.

E: Van olyan természetes szám, amely nagyobb, mint a számjegyeinek összege.

P: Minden természetes szám kisebb számjegyeinek összegénél.

Q: Minden természetes szám nagyobb számjegyeinek összegénél.

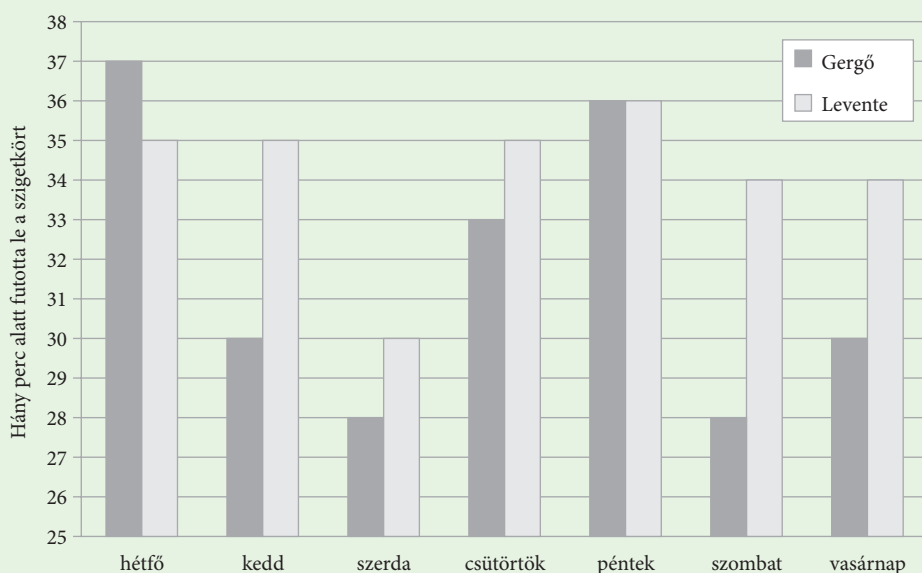
R: Minden természetes szám kisebb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

S: Minden természetes szám nagyobb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

Határozd meg az állítások logikai értékét!

5 (Kompetenciamérés, 2015)

Gergő és Levente a hét minden napján futott egy kört a Margitszigeten. A következő diagram azt ábrázolja, hogy Gergő és Levente hány perc alatt futotta le egy szigetkört a hét egyes napjain.



A diagram adatai alapján dönts el, melyik igaz, melyik hamis a következő állítások közül!

A: Gergő 28 perc alatt futotta le leggyorsabban a szigetkört.

B: Levente többször is azonos idő alatt futotta le a szigetkört.

C: Nem volt olyan nap, hogy mindketten ugyanannyi idő alatt futották volna le a szigetkört.

D: Pénteket kivéve minden nap Levente volt a gyorsabb.

E: Levente minden szerdától különböző napon gyorsabb volt, mint szerdán.

F: Levente átlagosan rövidebb idő alatt futotta le a szigetkört, mint Gergő.

HÁZI FELADAT

1 Fogalmazd meg a következő állítások tagadását!

A: Minden folyó a tengerbe ömlik.

B: Minden út Rómába vezet.

2 Melyik állítás tagadása az A állításnak?

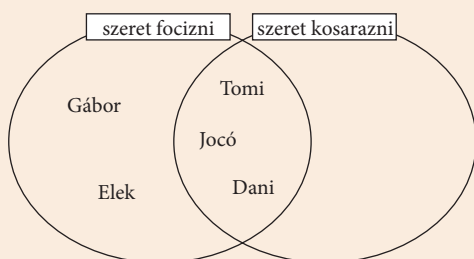
A: Nincs Roxfort Hagrid nélkül.

B: Nincs Roxfort Hagriddal.

C: Van Roxfort Hagrid nélkül.

D: Van Roxfort Hagriddal.

3 A Venn-diagram azt mutatja, hogy egy öttagú baráti társaság tagjai közül ki az, aki szeret focizni, illetve ki az, aki szeret kosarazni.



a) Állapítsd meg, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis!

A: A társaságban mindenki szeret focizni.

B: Van olyan tagja a társaságnak, aki szeret focizni.

C: Van olyan tagja a társaságnak, aki szeret kosarazni.

D: A társaságban mindenki szeret kosarazni.

E: Nincs olyan tagja a társaságnak, aki nem szeret kosarazni.

b) Fogalmazd meg az állítások tagadását!

4 Megadunk 7 állítást.

A: Minden páros szám 2-re végződik.

B: Minden páros szám 0-ra végződik.

C: Nem minden páros szám végződik 2-re.

D: A páros számok 2-re vagy 0-ra végződnek.

E: A 2-re végződő számok páros számok.

F: Van olyan páros szám, amely 2-re végződik.

G: Van olyan páros szám, amely nem 2-re végződik.

a) Melyik igaz, melyik hamis?

b) A fenti kijelentések között van-e két olyan, amely egymás tagadása?

EMELT SZINT

„Minden csokit odaadom.” Hogyan értelmezzük ezt a mondatot, ha egyáltalán nincs csokink? Már a kiskamaszok is tudják, hogy ha nincs csokink, akkor ilyenkor nem kell odaadni semmit, és mondhatom azt, hogy a (nem létező) csokit mind odaadtam.

Példa:

Ez a két állítás egymás tagadása:

A: **Minden** csokit odaadtam. B: **Van olyan** csokim, amit nem adtam oda.

Mi az állítások logikai értéke, ha nem volt egyetlen csokim sem?

A állítás	Állítja, hogy minden (létező) csokit odaadtam.	Ez az állítás igaz.
B állítás	Állítja, hogy létezik olyan csoki, amit nem adtam oda.	Most ilyen csoki nem létezik, ezért ez az állítás hamis.

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Két idősebb férfi, Gyula és Miklós beszélgetnek.
- Emlékszel, Miklós, Kulcsár Győzőre? Ő aztán tudott vívni! – mondja Gyula.
 - Igen, valamikor a 70-es években az iskolatársaimmal izgatottan lestük, szerez-e olimpiai aranyérmet. Úgy emlékszem, jól drukoltunk.
 - Én meg arra emlékszem, hogy mindkét olimpiáról hozott aranyérmet! – idézi fel a 70-es éveket Gyula.
- Ki emlékszik helyesen?

Megoldás

A 70-es években két olimpia volt, 1972-ben Münchenben és 1976-ban Montrealban.



Miklós emléke két részre bontható:

Kulcsár Győző aranyérmet szerzett a müncheni olimpián	Kulcsár Győző aranyérmet szerzett a montreali olimpián
IGAZ, párbajtőrscapattal aranyérmet nyert.	HAMIS, ekkor nem nyert aranyérmet.

Miklós emléke szerint Kulcsár Győző a müncheni olimpián VAGY a montreali olimpián aranyérmet nyert. A két állítás egyike igaz, ezért Miklós jól emlékezett.

Gyula emléke ugyanerre a két részre bontható: Gyula emléke szerint Kulcsár Győző a müncheni olimpián is ÉS a montreali olimpián is aranyérmet nyert. Gyula rosszul emlékezett. Akkor lenne igaza, ha az állítás mindkét része igaz lenne.

2. Igaz-e a következő állítás:

– Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert az úszó-világ bajnokságon vagy az olimpián.
Bence elhatározta, hogy utánanézik ennek a dolognak.



Megoldás

1991-ben úszó-világ bajnokság volt Perth-ben, 1992-ben pedig olimpia Barcelonában.

Az állítás két részre bontható:

Egerszegi Krisztina aranyérmet nyert 1991-ben a világ bajnokságon.

Egerszegi Krisztina aranyérmet nyert 1992-ben az olimpián.

A két rész **VAGY** kötőszóval kapcsolódik egymáshoz. A teljes állítás **IGAZ**, ha a két rész közül *legalább az egyik IGAZ*. Nézzünk utána először a második résznek! Ez a rész **IGAZ**: Egerszegi Krisztina három számban is nyert a barcelonai olimpián.

Nem is kellene ellenőrizni az 1991-es úszó-világ bajnokságot, már tudjuk, hogy a feladat állítása **IGAZ**, akkor is, ha nyert, akkor is, ha nem nyert 1991-ben.

Megjegyzés:

Figyeljük meg a következő két állítást!

Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert a világ bajnokságon vagy az olimpián.

Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert a világ bajnokságon és az olimpián.

Mivel Egerszegi Krisztina nemcsak az olimpián, hanem az 1991-es világ bajnokságon is aranyérmet nyert, (két számban is), ezért mindkét állítás **IGAZ**.

Két-két állítást (kijelentést) meghatározott módon összekapcsolva olyan újabb állításokhoz juthatunk, amelyek logikai értékét az eredeti állítások logikai értéke egyértelműen meghatározza. Az ilyen összekapcsolásokat **logikai műveleteknek** nevezzük.

1. A VAGY-művelet (latinul: *diszjunkció*)

Definíció: Legyen A és B egy-egy állítás (kijelentés). A **vagy** B (jelekkel: $A \vee B$) azt az állítást jelenti, amely *igaz*, ha A és B közül legalább az egyik igaz, és *hamis*, ha mind A , mind B hamis.

Példa:

A : Hajni jelest kapott matematikából.

B : Hajni jelest kapott történelemből.

Ekkor $A \vee B$ azt jelenti, hogy Hajni a matematika és a történelem tárgyak közül legalább az egyikből jelest kapott.

A VAGY-művelet igazságtáblázata:

A	B	$A \vee B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	igaz
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	hamis



2. Az ÉS-művelet (latinul: *konjunkció*)

Definíció: Legyen A és B egy-egy állítás (kijelentés). A **és** B (jelekkel: $A \wedge B$) azt az állítást jelenti, amely *igaz*, ha A is és B is igaz, és minden más esetben *hamis*.

Példa:

A : Hajni jelest kapott matematikából.

B : Hajni jelest kapott történelemből.

Ekkor $A \wedge B$ azt jelenti, hogy Hajni jelest kapott matematikából is és történelemből is.

Az ÉS-művelet igazságtáblázata:

A	B	$A \wedge B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis



A magyar nyelvben általában ÉS-műveletet fejez ki a „de” kötőszó is! ÉS-műveletet jelölnek még a következő szavak: továbbá, illetve, valamint, ugyanakkor.

FELADAT

1. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

- a) 24 osztható 3-mal vagy 4-gyel.
- b) 50 osztható 5-tel és 10-zel.
- c) 36 osztható 6-tal és 8-cal.
- d) 48 osztható 12-vel vagy 15-tel.

2. Adj meg három olyan pozitív egész számot, amely

- a) osztható 18-cal vagy 36-tal;
- b) osztható 18-cal és 36-tal;
- c) osztható 18-cal és nem osztható 36-tal;
- d) osztható 18-cal vagy nem osztható 36-tal!

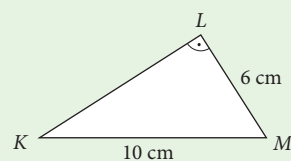
3. Két kijelentést foglalmaztunk meg a rajzon látható KLM háromszögre vonatkozóan.

A: A KLM háromszög egyenlő szárú; B: A KLM háromszög derékszögű.

a) Add meg A, illetve B logikai értékét (igaz vagy hamis)!

b) Fogalmazd meg az $A \vee B$, illetve az $A \wedge B$ kijelentést!

c) Döntsd el, hogy a b)-ben megfogalmazott két kijelentésnek mi a logikai értéke!



4. Kösd össze azokat, amelyek ugyanazt az állítást jelentik! Az egyik mondatnak nincs párja, ezt írd fel logikai jelekkel!

A: Ez az állat gyorsan fut.

B: Ez az állat ragadozó.

C: Ez az állat védett.

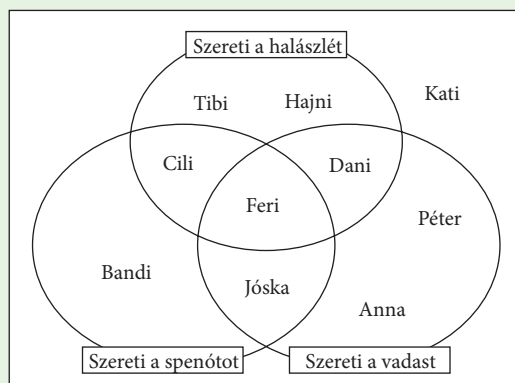
P: Ez az állat ragadozó, de nem védett.	(1) $A \vee \neg C$
Q: Ez az állat nem fut gyorsan, de nem is ragadozó.	(2) $B \wedge \neg C$
R: Ez az állat gyorsan fut vagy nem védett.	(3) $A \wedge B \wedge \neg C$
S: Ez az állat egy védett ragadozó, amely nem fut gyorsan.	(4) $\neg A \wedge \neg B$
T: Ez az állat ragadozó vagy védett.	(5) $C \wedge B \wedge \neg A$
U: Ez az állat egy gyorsan futó ragadozó, de nem védett.	

5. Venn-diagramon ábrázoltuk, hogy 10 gyerek közül ki szereti a halászlét, ki szereti a spenótot, és ki szereti a vadast. Határozd meg, hogy melyikükre teljesülnek a logikai jelekkel felírt állítások!

H: Szereti a halászlét.

S: Szereti a spenótot.

V: Szereti a vadast.



	Állítás	Kikre teljesül?
A	$S \wedge \neg V$	
B	$(S \vee H) \wedge V$	
C	$(S \wedge V) \vee H$	
D	$\neg(H \wedge V)$	
E	$\neg(V \vee S)$	
F	$\neg H \wedge \neg V$	

ELMÉLET

3. Kizáró vagy

Az A és a B kijelentésből képzett „vagy A vagy B” kijelentésre azt mondjuk, hogy a VAGY-VAGY (kizáró vagy) logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. A kizáró vagy jele: $\oplus$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \oplus B$
igaz	igaz	hamis
igaz	hamis	igaz
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	hamis

vagy
egysze-
rűbben:

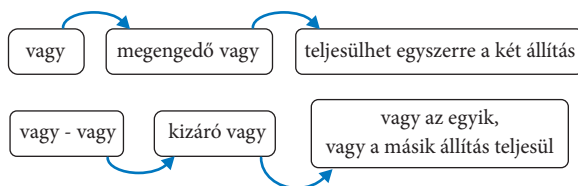
A	B	$A \oplus B$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Az $A \oplus B$ kijelentés tehát pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke különböző.

Példa:

A „Vagy a cipőt veszed meg vagy a kabátot (veszed meg).” összetett kijelentés igaz, ha csak az egyik tárgyat vásárolod meg, hamis, ha mindkettőt vagy egyiket sem.

A hétköznapi nyelvhasználatban a „vagy” szót sokszor „kizáró vagy”-értelemben használjuk. Figyelj arra, hogy a matematikai állításokban:



Példa:

„Ön dönt: iszik vagy vezet.” Ez a mondat matematikai értelemben megengedi az ittas vezetéset. A mondat valódi jelentését ez a matematikai állítás írja le helyesen: „Ön dönt: vagy iszik, vagy vezet.”

HÁZI FELADAT

1. Rajzolj olyan ábrát, amelyre igaz az alábbi állítás!

- Az ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű.
- Az ABCD négyszög rombusz és téglalap.
- Az ABCD négyszög deltoid vagy paralelogramma.
- A megrajzolt sokszög konvex vagy belső szögeinek összege 540° .

2. Rajzolj olyan ábrát, amelyre nem igaz (hamis) az alábbi állítás!

- Az ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű.
- Az ABCD négyszög rombusz és téglalap.
- Az ABCD négyszög deltoid vagy paralelogramma.
- A megrajzolt sokszög konvex vagy belső szögeinek összege 540° .

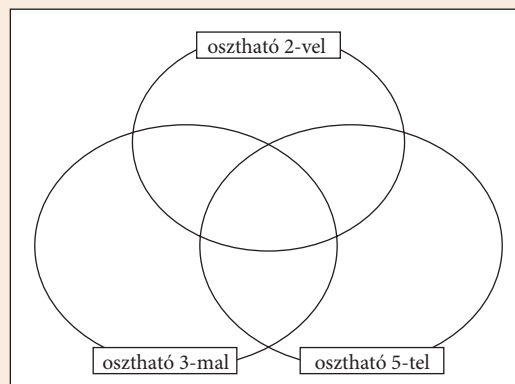
3. Helyezd el a Venn-diagrammban a megadott számokat! Töltsd ki a táblázatot!

6 9 10 12 15 21 32 35 36

A: Ez a szám osztható 2-vel.

B: Ez a szám osztható 3-mal.

C: Ez a szám osztható 5-tel.



Az állítás szavakkal megfogalmazva	Az állítás logikai jelekkel felírva	Melyik számokra teljesül?
Ez a szám osztható 3-mal vagy 5-tel.	$B \vee C$	
Ez a szám osztható 2-vel, de nem osztható 3-mal.		
Ez a szám osztható 2-vel és 3-mal, de nem osztható 5-tel.		
Ez a szám osztható 2-vel vagy nem osztható 5-tel.		

RÁADÁS

A fejlettebb számológépek és a számítógépek ismerik a logikai műveleteket is. Általában a következő névvel lehet ezekre a műveletekre hivatkozni:

Értelme	Gépi neve	A művelet neve
NEM	NOT	tagadás
ÉS	AND	konjunkció
VAGY	OR	diszjunkció
VAGY-VAGY	XOR	kizáró vagy



Ezekkel a műveletekkel informatika órán is találkozhattál már, az Excel táblázat kezelésének tanulásakor. Nézz utána, hogy mit jelent a NAND és NOR művelet és milyen egyéb logikai műveletek találhatók az Excelben!

FELADAT

- 1.** Egy vándor találkozott három furfangos baráttal. Nem igazodott ki a szavaikon. Erre segítségképpen a következőt mondták neki:

Tóni: Ne hallgass Jakabra, mert ő hazudik!

Jakab: Vigyázz Samuval, mert ő nem mond igazat!

Samu: Dehogy! Mind igazat beszélünk!

Ki mond igazat, és ki hazudik a három barát közül?

- 2.** Egy kajakos versenyen 4 résztvevő indult. A verseny után így nyilatkoztak:

Tamás: Én nyertem!

Zsolt: Nem sikerült nyernem, de nem lettem utolsó sem.

Bandi: Jó lett volna, de nem én nyertem.

Sanyi: Sajnos én lettem az utolsó.

Kiderült, hogy hárman igazat mondtak, de egyikük nem. Ki nyerte a versenyt? Ki az, aki nem mondott igazat?

- 3.** Az $ABCD$ négyszögről öt állítás hangzik el.

A: Egyik szöge derékszög.

B: Közepponosan szimmetrikus.

C: Az AC átló felezi a BD átlót.

D: Két-két oldala egyenlő hosszúságú.

E: Átlói felezik egymást.

Az öt állítás közül három igaz, kettő hamis. Milyen négyszögről van szó?

EMELT SZINT

- 4.** Legyen A és B is egy-egy állítás (kijelentés). Másold be az alábbi táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki az üres mezőket a megfelelő logikai értékekkel!

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$
i	i	h				i	i		
i	h					h	i		
h	i								
h	h								

5 🐾 Állítás: Minden kutya szeret minden egeret.

Válaszd ki az alábbi állítások közül az összeset, amelyek tagadása az állításnak!

- A: Van olyan egér, amelyet nem szeret semmilyen kutya.
- B: Van olyan kutya, amely nem szeret semmilyen egeret.
- C: Van olyan kutya, amely nem szeret minden egeret.
- D: Van olyan egér és van olyan kutya, amelyek nem szeretik egymást.
- E: Van olyan egér, amelyhez van olyan kutya, amelyik nem szereti.



6 🐾 Válaszd ki, hogy a felsorolt állítások közül melyek azok, amelyek ugyanazt állítják, mint a megadott közmondás, melyek a tagadásuk, és melyek azok, amelyek jelentése eltér ezektől!

- a)** *Nem mind arany, ami fénylik.*
 - A: Minden arany, ami nem fénylik.
 - B: Van olyan arany, ami nem fénylik.
 - C: Van olyan fénylő dolog, ami nem arany.
 - D: Minden fénylő dolog arany.
 - E: Minden arany fénylik.
- b)** *Nincsen rózsza tövis nélkül.*
 - A: Minden rózsza tövises.
 - B: Van olyan tövis, ami nem rózsán van.
 - C: Van olyan rózsza, ami tövises.
 - D: Van olyan rózsza, ami nem tövises.
 - E: Minden rózsza olyan, hogy nincs rajta tövis.

c) *Minden rosszban van valami jó.*

- A: Minden jóban van valami rossz.
- B: Van olyan rossz, amiben van valami jó.
- C: Van olyan jó, amiben van valami rossz.
- D: Van olyan rossz, amiben minden rossz.
- E: Van olyan rossz, amiben minden jó.
- F: Nincs olyan rossz, amiben minden rossz.

7 🐾 Válaszd ki, hogy a felsorolt állítások közül melyek állítják ugyanazt, mint az idézet! Válaszd ki az idézet tagadásait is! A többi állításnak fogalmazd meg a tagadását!

a) *„Nincs olyan szerelem, aki el nem múlik.” (népdal)*

- A: Minden szerelem elmúlik.
- B: Van olyan szerelem, ami elmúlik.
- C: Van olyan szerelem, ami nem múlik el.
- D: Minden szerelem megmarad.

b) *„Mindenik embernek a lelkében dal van.” (Babits Mihály)*

- A: Nincs olyan ember, akinek a lelkében nincs dal.
- B: Van olyan ember, akinek van a lelkében dal.
- C: Van olyan dal, amelyik minden ember lelkében ott van.
- D: Van olyan ember, akinek a lelkében nincs dal.
- E: Minden ember olyan, hogy a lelkében nincs dal.
- F: Nincs olyan dal, amelyik ne lenne ott valakinek a lelkében.

8 🐾 Igaz vagy hamis?

- A: Minden konkáv trapéz tengelyesen szimmetrikus.
- B: Minden páros prímszám nagyobb, mint 1000.
- C: Minden kétjegyű természetes szám, amelynek a négyzete is kétjegyű, osztható 5-tel.
- D: Minden deltoidnak van beírható köre.
- E: Minden háromszög, melynek három oldala 2 cm, 3 cm, illetve 6 cm hosszú, derékszögű.

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párban! A füzetbe készítsétek el a táblázatot, és töltsétek ki!

- 1.** Mi van a szobában, lány vagy szörny? A tavalyi tanév végén már találkozhattatok egy ilyen jellegű feladattal. Most négy esetben gondoltátok végig, van-e olyan szoba, amelyben biztosan lány van, és vajon melyik az! A táblázatok segítenek a megoldásban.

A gonosz Kvarkus – Kovalens Kapitánnyal folytatott csatája során – foglyul ejtett néhány ártatlan lányt, majd erődjébe zárta őket. Mikor a Kapitány sarokba szorította Kvarkust, ő a következő feladványok elé állította hő-sünet. A torony mindegyik emeletén két ajtó található. Az ajtók mögött vagy egy túsul ejtett lány van, vagy Kvarkus egy félresikerült kísérletének végeredménye.

- a)** Az egyik felirat igaz, a másik hamis.

Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben egy lány, a másikban egy szörny.



Töltsétek ki a táblázatot!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e az „egyik igaz, másik hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Melyik szobát érdemes választani?

- b)** Vagy mindkét felirat igaz, vagy mindkettő hamis. Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben lány, a másikban egy szörny.



Töltsétek ki a táblázatot!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e a „vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Gondoltátok végig egy másik irányból is! Töltsétek ki a következő táblázatot!

Az 1. szoba felirata	A 2. szoba felirata	Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Lehetséges?
igaz	igaz			
hamis	hamis			

Melyik szobát érdemes választani?

- c)** A következő emeleten az ajtók felirata más. Vagy mindkét felirat igaz, vagy mindkettő hamis. Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben lány, a másikban egy szörny.



Töltsétek ki a táblázatokat!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e a „vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Az 1. szoba felirata	A 2. szoba felirata	Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Lehetséges?
igaz	igaz			
hamis	hamis			

Melyik szobát érdemes választani?

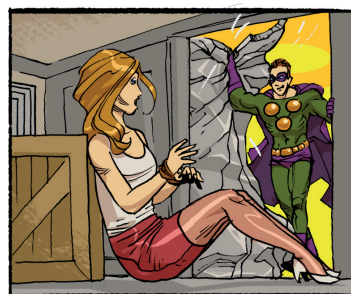
- d) Ha az 1. szobában lány van, akkor a felirat rajta igaz, ha szörny van benne, akkor viszont hamis. Míg a 2. szobában pont fordított a helyzet, ha ott lány van, akkor a felirat hamis, ha szörny van benne, akkor igaz.



Melyik szobát érdemes választani?

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel az 1. szobáról szóló feltételnek?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel a 2. szobáról szóló feltételnek?
Lány	Lány				
Lány	Szörny				
Szörny	Lány				

Miután harcképtelenné tette a gonosz pusztítót, a Kapitány kiszabadította és biztonságba helyezte a lányokat.



2. Egy úszóversenyen négy iskola csapata került döntőbe: az Aranyhegyi, a János-hegyi, a Lakihegyi és a Pál-völgyi. A végeredményről a következőket tudjuk:
- Az egyik szélső pályán úszó versenyző győzött.
 - A fekete sapkás a sárga és a kék sapkás közé került.
 - Csak egy olyan úszó volt, aki ugyanannyiadik helyezést ért el, mint ahányadik pályán úszott, és ez nem a győztes volt.
 - A lakihegyisnek fekete volt a sapkája.
 - A piros sapkás zöld úszónadrágban versenyzett.
 - Az aranyhegyis és a lakihegyis pályája nem volt szomszédos.
 - A sárga sapkás a 3. és 4. helyezett között úszott.
 - A jános-hegyisnek belső pálya jutott.
- a) Melyik iskola úszója lett a győztes?
b) Milyen színű sapkában úszott a 3. helyezett?
c) Kapott-e érmet az aranyhegyis versenyző?

Az alábbi táblázat segíthet a gondolatok rendszerezésében. Másold át a füzetedbe és töltsd ki!

Pálya	1-es pálya	2-es pálya	3-as pálya	4-es pálya
Iskola				
Sapka				
Helyezés				

Megjegyzés: Ez a feladat egy, Einstein nevéhez kapcsolható, logikai feladvány egyszerűsített változata. Állítólag az emberek 98%-a nem tudja helyesen megoldani Einstein feladatát. A Ráadásban bebizonyíthatod, hogy te a kivételes 2%-hoz tartozol!

1. Egy törpe beleesett a tündék csapdájába, de azok nemes lelkek révén felajánlják neki, hogy szabadon bocsájtják, ha elsőre megtalálja a tömlőc kulcsát.



- a) Melyik ládát válassza, ha a tündék azt is elárulják, hogy a három állítás közül csak egy igaz? Töltsd ki a következő táblázatot a füzetedben:

1. láda tartalma	2. láda tartalma	3. láda tartalma	1. láda felirata igaz vagy hamis?	2. láda felirata igaz vagy hamis?	3. láda felirata igaz vagy hamis?	Teljesül-e, hogy „a 3 állítás közül csak egy igaz”?
kulcs	–	–				
–	kulcs	–				
–	–	kulcs				

- b) Hogyan módosul a helyzet, ha a három állítás közül csak egy hamis? Készíts olyan táblázatot, amely segít a megoldásban!

2. Három indián ül a tűz körül: Fehér Tigris, Szürke Egér, Sárga Irigység. Egyszer csak megszólal Fehér Tigris:

– Egyikünk sárga ruhát visel, van közöttünk fehér ruhát és szürke ruhát viselő is, de egyikünk sem olyan színű ruhában van most, mint ami a nevében is szerepel.

– Valóban! – mondta a sárga ruhás.

Milyen színű ruhát viselhet a Szürke Egér?



3. Frédi a vásárbán három eladótól próbál nyakláncot vásárolni. A három eladónál összesen kétféle egységáron lehetne nyakláncot venni, de mindegyik eladónak csak egyfajta egységárú nyakláncja van. Frédi mindhárom eladónak – az időseknek, a középkorúknak és a fiatalnak is – feltesz egy kérdést:

A fiattól ezt kérdezi: „A középkorú eladó drágább nyakláncot árul, mint az idősebb?”

A középkorútól ezt kérdezi: „Az idősebb eladó nyakláncja drágább, mint a fiatalé?”

Az idősebbtől pedig ezt: „Vehetek-e 100 garasért két nyakláncot a vásárbán?”

Mind a három kérdésre ugyanazt a választ (igen, vagy nem) kapta. Vajon sikerült-e Frédinek 100 garasért megvennie a két nyakláncot a vásárbán?

1 A nagybetűkkel jelölt négy állítás közül melyik az, amelyik tagadása az első állításnak?

a) Minden szekrényünk barna vagy kétajtós.

A: Van olyan szekrényünk, amely nem barna.

B: Van olyan szekrényünk, amely nem barna és nem kétajtós.

C: Van olyan szekrényünk, amely nem kétajtós.

D: Van olyan szekrényünk, amely nem barna vagy nem kétajtós.

b) Van olyan biciklink, amely kényelmes és jól felszerelt.

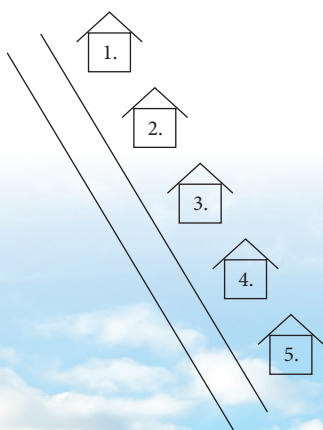
A: Minden biciklink kényelmetlen és nincs jól felszerelve.

B: Nincs olyan biciklink, amely kényelmetlen és jól felszerelt.

C: Minden biciklink kényelmetlen vagy nincs jól felszerelve.

D: Minden biciklink kényelmetlen, sőt nincs jól felszerelve.

2 Egy utcában van öt egymás melletti, más-más színű ház. Mindegyik házban más nemzetiségű férfi lakik. Mind más-más hangszeren játszik, más italt kedvel és más állatot tart.



1. Az angol piros színű házban lakik.
2. A svédnek kutyája van.
3. A dán teát iszik.
4. A zöld ház közvetlenül a fehér mellett balra van.
5. A zöld ház tulajdonosa kávét iszik.
6. Aki zongorázik, annak papagája van.
7. A sárga ház tulajdonosa dobol.
8. A középső ház tulajdonosa tejet iszik.
9. A norvég az első házban lakik.
10. A hegedűn játszó férfi szomszédja macskát tart.
11. A brácsás férfi sört iszik.
12. A lovat tartó férfi a dobos mellett lakik.
13. A német trombitál.
14. A norvég a kék ház mellett lakik.
15. A hegedűn játszó férfi szomszédja vizet iszik.

Ki tart halakat? (Segíthet az alábbi táblázat a gondolkodásban. Másold át a füzetedbe!)

	1. ház	2. ház	3. ház	4. ház	5. ház
Ház színe P, S, F, Z, K					
Lakó nemzetisége A, Né, No, D, S					
Hangszer Z, B, D, H, T					
Ital Tea, K, V, S, Tej					
Állat K, P, M, L, H					



Keressetek ezekhez hasonló feladványokat az interneten és osszátok meg egymással őket!



BEVEZETŐ

Vizsgáljuk meg a következő állítást!

P: Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal is.

Ezt az állítást két részre bonthatjuk. Első része azt állítja egy számról, hogy osztható 6-tal, a második része azt állítja, hogy osztható 3-mal. Ezeket a részeket a „**ha...**, **akkor**” kötőszavak fűzik össze: **ha** osztható 6-tal **akkor** abból következik, hogy osztható 3-mal.

Írjuk fel *P*-t a részek segítségével!

A: Egy szám osztható 6-tal. B: Egy szám osztható 3-mal.

P állítás azt fejezi ki, hogy amikor az első állítás igaz (vagyis a szám osztható 6-tal), akkor a második állítás is teljesül (tehát a szám osztható 3-mal): ha *A*, akkor *B*.

A 6-tal osztható számok valóban oszthatók 3-mal is, ezért a *P* állítás igaz.

Fordítsuk meg *A* és *B* sorrendjét!

A *P* állítás **megfordítása**: Ha *B*, akkor *A*. Szavakkal: ha egy szám osztható 3-mal, akkor osztható 6-tal is.

Ez már **nem mindig** teljesül: van olyan szám, amely osztható 3-mal, de nem osztható 6-tal, például ilyen szám a 9. Mivel tudunk mutatni egy **ellenpéldát**, ezért a „Ha *B*, akkor *A*.” állítás hamis.

FELADAT

1. Töltsd ki a táblázatot! Határozd meg, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis! Ha az állítás hamis, akkor írd ellenpéldát!

- a) A: Egy szám osztható 24-gyel.
B: Egy szám osztható 8-cal.

	szavakkal	igaz vagy hamis?
Ha <i>A</i> , akkor <i>B</i> .	Ha egy szám osztható 24-gyel, akkor osztható 8-cal is.	
Ha <i>B</i> , akkor <i>A</i> .	Ha egy szám osztható 8-cal, akkor osztható 24-gyel is.	

- b) C: Egy négyszög trapéz.
D: Egy négyszög paralelogramma.

	szavakkal	igaz vagy hamis?
Ha <i>C</i> , akkor <i>D</i> .		
Ha <i>D</i> , akkor <i>C</i> .		

- c) A: Egy háromszög egyenlőszárú.
B: Egy háromszög tengelyesen szimmetrikus.

	szavakkal	igaz vagy hamis?
Ha <i>A</i> , akkor <i>B</i> .		
Ha <i>B</i> , akkor <i>A</i> .		

2. Melyik sorrendben igaz a „Ha..., akkor...” következtetés?

- a) A: Ez az állat rovar.
B: Ez az állat bogár.
- b) C: A teherautó tömege nagyobb, mint a babakocsi tömege.
D: A teherautóra nagyobb nehézségi erő hat, mint a babakocsira.
- c) E: Pisti szabálysértést követett el.
F: Pisti áthajtott biciklivel a piroson.

1. „Ha..., akkor” állítás (latinul: implikáció)

Adott két állítás: A és B . Ezeket összekapcsolhatjuk a „ha..., akkor...” kötőszavakkal: „**ha A , akkor B** ”. Így egy új állítást kapunk. Jele: $A \rightarrow B$.

$A \rightarrow B$ („ha A , akkor B ”) állítás igaz, ha A igaz értéke esetén B is igaz.



Az $A \rightarrow B$ igazsága azt jelenti, hogy A -nak **következménye** B , az A állításból következik a B állítás.

Azt, hogy $A \rightarrow B$ hamis, egyetlen **ellenpélda** bizonyítja: egy olyan példa, amikor A igaz, de B hamis.

Az $A \rightarrow B$ állítás igazságát (azaz egy következtetés helyességét) azonban sokszor nehéz bizonyítani.

2. A „ha..., akkor” állítás **megfordítása**

Az $A \rightarrow B$ állítás **megfordítása** a $B \rightarrow A$ állítás. Van olyan eset, amikor $A \rightarrow B$ és $B \rightarrow A$ is igaz, van olyan eset, hogy csak az egyik igaz, és van olyan eset, amikor mindkettő hamis.

3. **Akkor és csak akkor** (latinul: ekvivalencia)

Amikor $A \rightarrow B$ és $B \rightarrow A$ is teljesül, akkor A -nak következménye B és B -nek következménye A . Ekkor A és B logikai értéke megegyezik: vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis. Ezt fejezi ki az „**akkor és csak akkor**” kifejezés. Jele: $A \leftrightarrow B$.



Példa:

A paralelogrammára több ekvivalens meghatározás adható. Ez azt jelenti, hogy egy négyszögre pontosan ugyanakkor teljesülnek a különböző meghatározások: vagy mindegyik igaz, vagy mindegyik hamis.

A: Egy négyszög paralelogramma.

B: Egy négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

C: Egy négyszög szemközti szögei egyenlők.

D: Egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak.

E: Egy négyszög szemközti oldalai egyenlők.

F: Egy négyszög középpontosan szimmetrikus.

G: Egy négyszög szomszédos szögei 180° -ra egészítik ki egymást.

$A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow D$, $D \leftrightarrow E$, $E \leftrightarrow F$, $F \leftrightarrow G$ stb.

Szavakkal például $A \leftrightarrow C$: Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha szemközti szögei egyenlők.

FELADAT

3. Betűkkel jelöltünk négy egyenletet. (x valós szám)

$$A: x + 3 = 0$$

$$B: 5 - x = 0$$

$$C: (x + 3)(5 - x) = 0$$

$$D: (x + 3)^2 + (5 - x)^2 = 0$$

Állapítsd meg a következő állítások logikai értékét!

Ha az állítás hamis, mutass ellenpéldát!

$$A \rightarrow C$$

$$A \rightarrow D$$

$$B \rightarrow C$$

$$B \rightarrow D$$

$$C \rightarrow A$$

$$C \rightarrow D$$

$$D \rightarrow B$$

$$D \rightarrow C$$

4. Milyen logikai műveleti jelet kell írni a pontozott részre, hogy a kijelentés igaz legyen?

a) Az $(x + 3)(5 - x)$ szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha $x + 3 = 0 \dots 5 - x = 0$.

b) Az $(x + 3)^2 + (5 - x)^2$ összeg akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha $x + 3 = 0 \dots 5 - x = 0$.

5. Milyen logikai műveleti jelet kell írni a pontozott részekre, hogy az állítás igaz legyen?

Az ab szorzat értéke akkor és csak akkor pozitív, ha $(a > 0 \dots b > 0) \dots (a < 0 \dots b < 0)$.

HÁZI FELADAT

1. Melyik sorrendben teljesül a „Ha..., akkor...” következtetés?

- a) A: Ez az állat emlős. B: Ez az állat gerinces.
 b) C: Egy futó világrekordot ér el az olimpiai döntőben. D: Egy futó megnyeri az olimpiát.
 c) E: Ez az idézet Petőfitől származik. F: Ez az idézet a János vitéz-ből származik.

2. Fogalmazd meg az állítások megfordítását! Állapítsd meg, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis? Ha hamis, mutass ellenpéldát!

Az állítás	Az állítás igaz vagy hamis?	Az állítás megfordítása szavakban	A megfordítás igaz vagy hamis?
Ha egy tört értéke pozitív, akkor számlálója is és nevezője is pozitív.			
Ha egy kétjegyű egész szám prímszám, akkor páratlan.			
Ha egy szám abszolút értéke nagyobb, mint 1, akkor a szám is nagyobb, mint 1.			

3. Egészítsd ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

- a) Az $(x - 8)(7 - 2x)$ szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha ...
 b) Az $(x - 8)^2 + (7 - 2x)^2$ összeg akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha ...

RÁADÁS

1. Egy kalandor elhatározta, hogy hétfőn, szerdán, pénteken és vasárnap igazat mond, a hét többi napján hazudik. Melyik napon mondhatta,

- a) „Holnap igazat fogok mondani.” c) „Tegnapelőtt igazat mondtam.”
 b) „Holnap hazudni fogok.” d) „Holnapután hazudni fogok.”

2. Aladár, Béla, Cecil és Dezső úszásban versenyeztek egymás között. Eredményeikről, melyek között nem alakult ki holtverseny, ezt mondták:

Aladár: Sem első, sem utolsó nem lettem.

Béla: Nem én lettem az első.

Cecil: Én győztem

Dezső: Utolsó lettem.

Tudjuk azt, hogy a kijelentések közül pontosan egy hamis. Mi a verseny eredményének a sorrendje?

3. Aladár, Béla, Cecil és Dezső a következő kijelentéseket teszi:

Aladár: „Béla a bűnös.”

Béla: „Aladár hazudik.”

Cecil: „Én nem vagyok bűnös.”

Dezső: „Béla füllent.”

- a) Ki a bűnös, ha pontosan egy állítás igaz?
 b) Ki a bűnös, ha pontosan egy állítás hamis?

1. Implikáció

Legyen A és B is egy-egy kijelentés.

A belőlük képzett „Ha A , akkor B .” kijelentésre azt mondjuk, hogy az **implikáció** logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. Az implikáció jele: $\rightarrow$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \rightarrow B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz

Az $A \rightarrow B$ kijelentés tehát pontosan akkor hamis, ha A igaz, B pedig hamis.

Figyeld meg az igazságtáblázatban, hogy az $A \rightarrow B$ implikáció akkor is igaz, ha az A értéke hamis. Ez azt jelenti, hogy hamis állításból, tévedésből kiinduló következtetés során kaphatunk hamis állítást is, de kaphatunk igaz állítást is.

Példa:

Ha ma is élnek dínók, akkor a 3 egy páratlan szám.

Ha ma is élnek dínók, akkor a 3 egy páros szám.

Mivel ma nem élnek dínók, mindkét állítás igaz!

2. Ekvivalencia

Az A és a B kijelentésből képzett „ A akkor és csak akkor, ha B .” kijelentésre azt mondjuk, hogy az **ekvivalencia** logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. Az ekvivalencia jele: $\leftrightarrow$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \leftrightarrow B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

Az $A \leftrightarrow B$ kijelentés tehát pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke egyenlő.

FELADAT

4 ☞ Melyik állítás igaz, melyik hamis? Válaszodat indokold!

A: Ha egy valós szám reciproka egyenlő saját magával, akkor a négyzete is egyenlő saját magával.

B: Ha egy valós szám négyzete egyenlő saját magával, akkor reciproka is egyenlő saját magával.

C: Ha egy valós szám négyzete kisebb, mint maga a szám, akkor a szám kisebb mint 1.

D: Ha egy valós szám kisebb, mint 1, akkor a négyzete kisebb, mint maga a szám.

E: Egy valós szám négyzete akkor és csak akkor kisebb, mint saját maga, ha a szám pozitív, de kisebb, mint 1.

5 ☞ Válaszd ki a felsorolt állítások közül az összeset, amelyik tagadása az A állításnak!

A: Ha vasárnap süt a nap, akkor elmegyünk kirándulni.

B: Ha vasárnap nem süt a nap, akkor nem kirándulunk.

C: Vasárnap süt a nap, de nem kirándulunk.

D: Vasárnap nem süt a nap, de kirándulunk.

E: Vasárnap nem kirándulunk, bár süt a nap.

F: Vasárnap kirándulunk, bár nem süt a nap.

FELADAT

1. A betűvel jelölt négy állítás közül melyik az a kettő, amelyik tagadása az első állításnak?

a) Minden atomóra pontos.

A: Van olyan atomóra, amelyik késik.

B: Minden atomóra pontatlan.

C: Van olyan atomóra, amelyik pontatlan.

D: Nem minden atomóra pontos.

b) Van olyan feladat, amit nem tudok megoldani.

A: Van olyan feladat, amit meg tudok oldani.

B: Nincs olyan feladat, amit meg tudok oldani.

C: Minden feladat olyan, hogy meg tudom oldani.

D: Bármely feladatot meg tudok oldani.

2. Töltsd ki a táblázatot! Fogalmazd meg szavakkal az állításokat, és írd be az állítások logikai értékét!

a)

	szavakkal	igaz vagy hamis?
A	A halfarkas emlős állat.	
B	A halfarkas gerinces állat.	
$A \wedge B$		
$A \vee B$		

b)

	szavakkal	igaz vagy hamis?
A	Az articsóka egy madár.	
B	Az articsóka egy növény.	
$\neg A \wedge \neg B$		
$\neg A \vee \neg B$		

3. Írj az x , illetve az y helyébe olyan számokat, hogy a megfogalmazott kijelentések igazak legyenek!

a) $x + y = 4 \wedge x - y = 2$

b) $x + y = 4 \vee x - y = 2$

c) $(x + y)(x - y) = 0$

d) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$

4. Egészítsd ki a kijelentést úgy, hogy igaz legyen!

Az $\frac{x+2}{x+8}$ tört pontosan akkor nem negatív, ha ...

5. Fogalmazd meg az állítás megfordítását, majd határozd meg a logikai értékeket! Ha a következtetés hamis, akkor írd ellenpéldát!

a)

	szavakkal	igaz vagy hamis?
$A \rightarrow B$	Ha holnap kedd van, akkor tegnap vasárnap volt.	
$B \rightarrow A$		

b)

	szavakkal	igaz vagy hamis?
$A \rightarrow B$	Ha egy háromszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szabályos.	
$B \rightarrow A$		

6. Egy családban öten vannak unokatestvérek, mindannyian lányok: a Tóth családból 3 lány, unokanővérük vezetékneve Patos, unokahúguk vezetékneve pedig Korpáts. Mind az öten szeretnek sportolni, és aktívan űznek egy sportot, de mind különbözőt. Egyikük úszik, másikuk atlétizál, van köztük kosaras, röplabdás, és tollasozó. Állapítsuk meg, kit hogy hívnak, és mit sportol!

a) A röplabdás tegnap együtt fagyizott Eszterrel.

b) Csilla és a kosaras testvérek.

c) A tollasozó lány nemrég Borival és Dórral közösen adott ajándékot Eszternek.

d) Eszter eredetileg tollasozni szeretett volna, de a társaság kosaras tagja azt javasolta neki, hogy válasszon más sportot.

e) Múlt héten a kosaras és az atléta együtt pizzáztak Dórral és a röplabdással.

- f) Csilla fiatalabb, mint unokatestvére, Dóri, és Bori fiatalabb, mint unokatestvére, Eszter.
g) Anna kedvenc sütije ugyanúgy a krémes, mint Borinak.

Vezetéknév	Keresztnév	Mit sportol?

TUDÁSPRÓBA

1. Van olyan település Magyarországon, amelynek van Laurencia nevű lakosa.

Melyik állítás a tagadása a fenti kijelentésnek:

A: Minden magyar településen lakik Laurencia.

B: Van olyan magyar település, amelynek nincs Laurencia nevű lakosa.

C: Nincs olyan magyar település, amelynek van Laurencia nevű lakosa.

2. A $\{2; 4; 6; 8; 10\}$ halmaz elemei közül melyiket helyettesíthetjük az x helyében, hogy igaz legyen a következő állítás:

a) $x + 2 > 7 \wedge 3x < 30$;

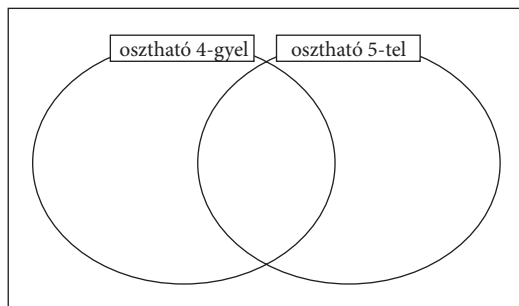
b) $\frac{x-8}{x-5} \leq 0$.

3. Helyezd el a Venn-diagramban a megadott számokat! Töltsd ki a táblázatot!

10 12 15 16 18 20 25 28

A: Ez a szám osztható 4-gyel.

B: Ez a szám osztható 5-tel.



Az állítás szavakkal megfogalmazva	Az állítás logikai jelekkel felírva	Melyik számokra teljesül?
Ez a szám nem osztható 5-tel.	$\neg B$	
Ez a szám osztható 4-gyel vagy 5-tel.		
Ez a szám osztható 4-gyel és 5-tel.		
Ez a szám osztható 4-gyel, de nem osztható 5-tel.		

4. Megadunk két állítást.

A: Minden 5-re végződő pozitív egész szám osztható 5-tel.

B: Minden 5-re végződő pozitív egész szám osztható 3-mal.

Fogalmazd meg a $\neg A$; $\neg B$; $A \vee B$; $A \wedge B$ állításokat és állapítsd meg az igazságértéküket!

5. Fogalmazd meg a következő állítás megfordítását! Mindkét állításnak határozd meg a logikai értékét! Ha valamelyik hamis, akkor adj ellenpéldát!

Ha az $ABCD$ négyszög négyzet, akkor minden szöge egyenlő nagyságú.

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. ☞ Döntsd el, melyik állítás az alábbiak közül!

- a) A kutya nem emlősállat.
- b) Milyen nap van ma?
- c) Arany János írt balladákat.
- d) Minden lány csinos.
- e) A Merkúr a Naphoz legközelebbi bolygó.
- f) Olimpiai sport a tenisz?
- g) A 2 racionális szám.

2. ☞ Állapítsd meg a következő állítások igazságértékét:

- A: Három pozitív szám szorzata pozitív.
- B: Három pozitív szám szorzata nem negatív.
- C: Három egész szám szorzata pozitív.

3. ☞ (Érettségi feladat, 2005)

Döntsd el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak!

Minden érettségi feladat egyszerű.

- A: Minden érettségi feladat bonyolult.
- B: Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.
- C: Sok érettségi feladat bonyolult.
- D: Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű.

4. ☞ (Érettségi feladat, 2013)

Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja: Minden háztartásban van televízió.

Az alábbi négy állítás közül melyik tagadása Tamás állításának?

- A: Semelyik háztartásban nincs televízió.
- B: Van olyan háztartás, ahol van televízió.
- C: Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
- D: Nem minden háztartásban van televízió.

5. ☞ Tekintsd a következő állítást: A városban minden kéményseprő fekete.

Válaszd ki az alábbi állítások közül az összeset, amelyek tagadása az előbbi kijelentésnek!

- A: A városban minden kéményseprő fehér.
- B: A városban nincs fekete kéményseprő.
- C: Van a városban olyan kéményseprő, aki nem fekete.
- D: A városban nem minden kéményseprő fekete.

6. ☞ Egy autószalonról szól a következő állítás: A szalonban van olyan autó, amelyik kék.

Válaszd ki az összes olyan állítást, amelyik tagadása az előbbi kijelentésnek!

- A: A szalonban van olyan autó, amelyik nem kék.
- B: A szalonban minden autó kék.
- C: A szalonban egyik autó sem kék.
- D: Nincs a szalonban kék autó.

7. ☞ Fogalmazd meg a következő állítások tagadását!

- a) Van olyan társasjáték, amelyhez nem kell dobókocka.
- b) Van olyan mackó, amelyik szereti a mézet.
- c) Minden növénynek szüksége van oxigénre.
- d) Minden madár tud repülni.

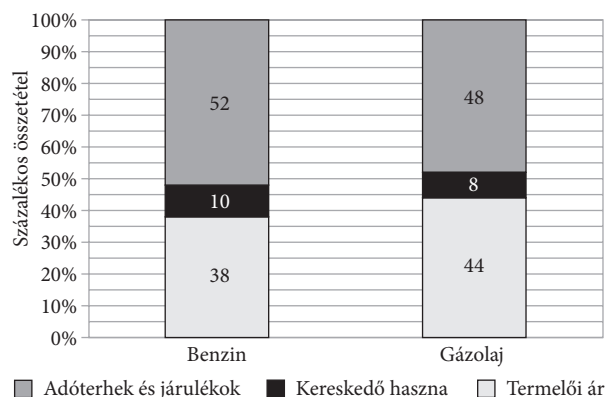
8. ☞ (Kompetenciamérés, 2018)

Zedország két nagyvárosának, Argadnak és Bugarnak a távolsága légvonalban 4000 km. Ciraz város légvonalbeli távolsága Argadtól 1300 km, Bugartól pedig 3700 km. Dénes azt állítja, hogy Ciraz az Argadot Bugarral összekötő egyenes úton van. Igaza van-e Dénesnek?

- A: Igen, biztosan ott van.
- B: Lehet, hogy ott van, de nem biztos.
- C: Nem, biztosan nem ott van.

9. ☞ (Kompetenciamérés, 2019)

A következő ábra egy liter benzin és egy liter gázolaj zedországi árának összetevőit szemlélteti.



Melyik igaz, melyik hamis az állítások közül?

- A: A termelői ár egyik üzemanyag esetében sem haladja meg a teljes ár 40%-át.
- B: Mindkét üzemanyagnál a kereskedő haszna teszi ki a teljes ár legkisebb hányadát.
- C: Ha a benzin ára 385 zed/liter, akkor ebből 200,2 zedet tesznek ki az adóterhek és járulékok.
- D: A kereskedő haszna biztosan több, ha 50 liter gázolajat vesznek tőle, mintha 30 liter benzint.
- E: Ha a gázolaj esetén a kereskedő haszna 24 zed/liter, akkor a gázolja termelői ára több, mint 132 zed/liter.

10 ☞ (Kompetenciamérés, 2011)

A táblázatba két világhírű matematikus születésének és halálának éve látható.

Matematikus	Született	Meghalt
Püthagorasz	Kr. e. 560	Kr. e. 480
Thalész	Kr. e. 624	Kr. e. 548

Elvileg találkozhatott-e egymással Püthagorasz és Thalész? Melyik válasz helyes?

- A: Igen, mert Püthagorasz korábban született, mint Thalész.
- B: Igen, mert Püthagorasz Thalész születése után, de Thalész halála előtt született.
- C: Nem, mert Thalész halálakor már Püthagorasz sem élt.
- D: Nem, mert Thalész Püthagorasz születése után, de Püthagorasz halála előtt született.

- 11** ☞ Gyula így emlékezik: Kulcsár Győző négy olimpián is szerepelt; az egyiken két aranyérmet nyert. Melyik két állítást kapcsolta itt össze egy logikai művelettel Gyula?
- Ez a VAGY-művelet vagy az ÉS-művelet?

- 12** ☞ Egy teljesen hétköznapi mondatban akár több logikai művelet is „megbújhat”. Tekintsük a következő állítást! Gedó György az 1972-es olimpián dobogós helyezést ért el ökölvívásban.
- Egészítsd ki a következő mondatokat ÉS, VAGY logikai műveletekkel és egy zárójellel úgy, hogy jelentése megegyezzen az A állítással!
- Gedó György elindult az 1972. évi olimpián ... ökölvívásban versenyzett ... 1. helyezést ért el ... 2. helyezést ért el ... 3. helyezést ért el.
- (Mivel csak egy súlycsoportban indulhatott versenyzőként, két érmet nem nyerhet olimpián ökölvívásban.)

- 13** ☞ Két állítást fogalmaztunk meg.
- A: 320 osztható 40-nel. B: 320 osztható 50-nel.
- Fogalmazd meg az $A \wedge B$; $A \vee B$ állításokat és állapítsd meg az igazságértéküket!

- 14** ☞ Állapítsd meg az alábbi állítások igazságértékét:
- a) Egy szorzat negatív, ha van negatív szorzótényezője.
 - b) Két különböző valós szám négyzetösszege pozitív.
 - c) Egy konvex ötszögnek négy átlója van.
 - d) A 2 prímszám vagy a 7 páros szám.
 - e) A 2 prímszám és a 8 páros szám.
 - f) A 6 nem páros vagy a 7 nem páros szám.

- 15** ☞ Tagadjuk az alábbi állításokat!
- a) Minden kutya ugat.
 - b) A 7 páratlan szám.
 - c) Van örökzöld növény.
 - d) Minden sokszögnek van átlója.
 - e) Bármely valós szám abszolútértéke pozitív.

- 16** ☞ Az ABCD négyzet AB oldalának felezőpontja legyen E, CD oldalának felezőpontja legyen F.
- Adott két állítás: P: Ez a háromszög derékszögű.
- Q: Ez a háromszög egyenlőszárú.

Tekintsük a következő háromszögeket:

$ABC\triangle$, $EFD\triangle$, $ABF\triangle$, $BFD\triangle$,
 $ECD\triangle$, $CFE\triangle$, $FAC\triangle$.

A felsoroltak közül mely háromszögekre teljesülnek a következő állítások?

- a) $P \wedge Q$
- b) $P \vee Q$
- c) $P \wedge \neg Q$
- d) $\neg P \vee \neg Q$
- e) $\neg(P \vee Q)$
- f) $\neg(\neg P \wedge Q)$

Ha segít, készíts halmazábrát!

- 17** ☞ Állapítsuk meg az alábbi kijelentések igazságértékét, majd fordítsuk meg a kijelentéseket, s határozzuk meg az így kapott kijelentések igazságértékét is!
- a) Ha egy szám páros, akkor osztható négygyel.
 - b) Ha egy négyszög négyzet, akkor átlói merőlegesek egymásra.
 - c) Ha hat valós szám szorzata pozitív, akkor a tényezők között páros darab negatív előjelű szám van.
 - d) Ha egy tört számlálója nagyobb, mint a nevezője, akkor a tört értéke nagyobb, mint egy.

KIDOLGOZOTT FELADAT

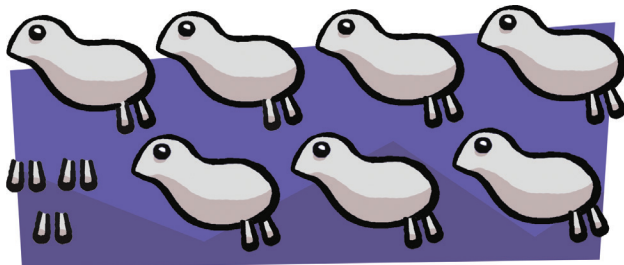
1. Egy sok száz éves, híres feladat nyomán:
Egy udvaron tyúkok és nyulak vannak, összesen
7 fejük és 20 lábuk van. Hány tyúk és hány nyúl van
köztük?



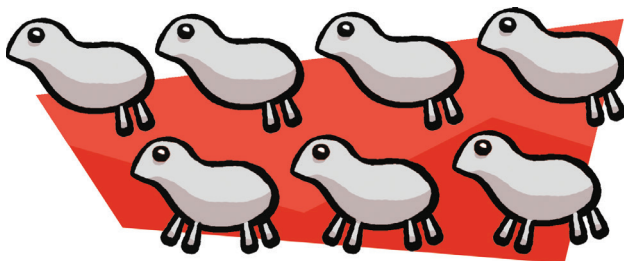
9. osztályban olyan feladatokkal foglalkoztunk, amelyekben egyetlen ismeretlen mennyiség értékét kellett meghatározni egyetlen egyenlet (vagy egyenlőtlenség) segítségével. Mostani példánkban két ismeretlen mennyiség értékét keressük.

Első megoldás (okoskodással)

Rajzoljunk le 7 „testet”, mindegyikhez tegyünk két lábat! Ekkor felhasználtunk 14 lábat, maradt még $20 - 14 = 6$.



A 6 lábat kettesével odarajzoljuk a 3 testhez,



ez a 3 (négylábú) rajz szemlélteti a nyulakat, az a 4 test pedig, amelyiknél csak két láb maradt, szemlélteti a tyúkokat.



Második megoldás (az összes eset vizsgálata táblázattal):

Jelöljük a nyulak számát x -szel, a tyúkok számát y -nal!

A szöveg alapján ezek segítségével felírható, hogy a fejek száma

$$x + y = 7,$$

valamint a lábak száma összesen

$$4x + 2y = 20, \text{ mivel egy nyúlnak 4, és egy tyúknak 2 lába van.}$$

Gyűjtsük táblázatba az ismeretlenek összes lehetséges értékét a szövegnek megfelelően (x és y 7-nél kisebb pozitív egész lehet, mert a feladat szövegéből következik, hogy mind a két állatfajból van legalább egy az udvaron)!

x (nyulak száma)	1	2	3	4	5	6
y (tyúkok száma)	6	5	4	3	2	1
$x + y$ (fejek száma)	7	7	7	7	7	7
$4x + 2y$ (lábak száma)	16	18	20	22	24	26

A táblázatból látható, hogy egyetlen lehetséges megoldás adódik:

$$x = 3 \text{ és } y = 4,$$

tehát az udvaron 3 nyúl és 4 tyúk van.

(Nehézséget jelentene a táblázattal történő megoldás, ha túl sok lehetséges esetet kellene vizsgálni, vagy, ha a megoldást nem csak az egész számok körében keresnénk.)

Harmadik megoldás (grafikus módszerrel)

Jelöljük továbbra is x -szel a nyulak, y -nal a tyúkok számát!

A fejek és lábak számára felírt egyenletek az előbbi megoldásban felírtak szerint:

$$x + y = 7.$$

$$4x + 2y = 20.$$

Fejezzük ki az első egyenletből az y ismeretlent: $y = 7 - x$. Tekintsük azt a függvényt (a valós számok halmazán), melynek hozzárendelési szabálya $x \mapsto 7 - x$, ábrázoljuk a grafikonját! Hasonló módon fejezzük ki a második egyenletből is y -t: $y = 10 - 2x$. Tekintsük azt a függvényt (a valós számok halmazán), melyeknek hozzárendelési szabálya $x \mapsto 10 - 2x$, ábrázoljuk ennek is a grafikonját!

Az ábrán azt a két egyenest látjuk, amelyeknek az egyenlete: $x + y = 7$, vagy másképp $y = 7 - x$ (ez az $x \mapsto 7 - x$ függvény grafikonja);

illetve $2x + y = 10$, vagy másképp $y = 10 - 2x$ (ez az $x \mapsto 10 - 2x$ függvény grafikonja).

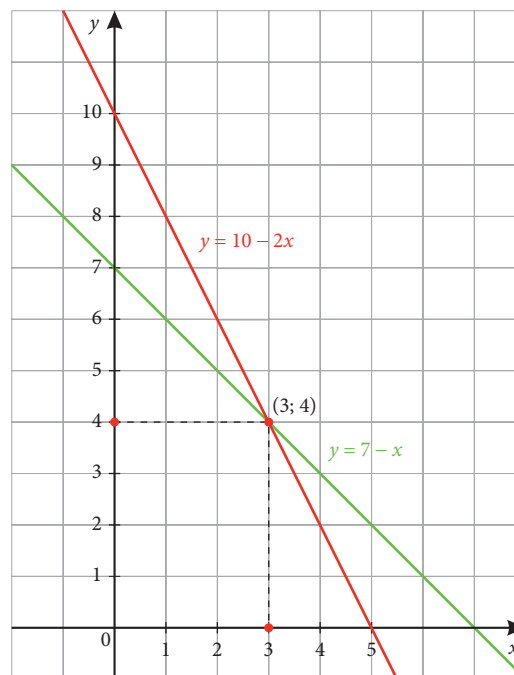
Ez a két egyenes a $(3; 4)$ pontban metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy ha $x = 3$ és $y = 4$, akkor mindkét egyenletből igaz állítást kapunk.

A feladat megoldása tehát: az udvaron 3 nyúl és 4 tyúk van.

Megjegyzés

Eredményünket így is megfogalmazhatjuk:

Az $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása a $(3; 4)$ **rendezett számpár**.



Az egyenletrendszer megoldásához a *függvény-ábrázoló programok* is használhatók.

ELMÉLET

Ha két vagy több egyenlet közös megoldásait keressük, akkor **egyenletrendszerről** beszélünk.

Az egyenletrendszerek lehetséges jelölései:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{matrix} (1) & x + y = 7 \\ (2) & 4x + 2y = 20 \end{matrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{matrix} x + y = 7 \\ \underline{4x + 2y = 20} \end{matrix}$$

vagy akár ezek együttes alkalmazása.

Példánkban két ismeretlen szerepel, mindkettő első hatványon, ezért ezek az egyenletek **elsőfokú (vagy lineáris), kétismeretlenes egyenletrendszert** alkotnak.

Az elsőfokú, kétismeretlenes **egyenletrendszer megoldása** olyan **rendezett számpár**, amely mindkét egyenletet igazgá teszi.

Az egyenletrendszer megoldásának egyik módszere a **grafikus módszer**, melynek lépései:

1. A megoldandó egyenletrendszer egyenleteiből kifejezzük az egyik ismeretlent (általában y -t).
2. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az ezekhez tartozó lineáris függvényeket!
3. Olvassuk le a két grafikon metszéspontjának koordinátáit! A közös pont mindkét grafikonra illeszkedik, ezért koordinátái igazgá teszik az egyenletrendszer mindkét egyenletét. Az egyenletrendszer megoldását tehát a közös pont koordinátái, vagyis egy rendezett valós számpár adja.
4. Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy a grafikonról leolvasott érték valóban valóban megoldása az egyenleteknek!

KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Melyek azok az x, y valós számok, amelyekre $y = 6 - x$ és $y = \frac{3}{2}x + 1$ is igaz?

Megoldás

Egy kétismeretlenes egyenletrendszert kell megoldanunk. Olyan számokat kell találnunk, amelyeket az x és az y helyett az egyenletekbe írva mindkét esetben igaz kijelentést kapunk.

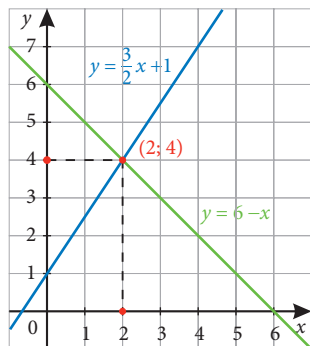
A feladatot grafikus úton oldjuk meg.

Rajzoljuk meg az $y = 6 - x$ és az $y = \frac{3}{2}x + 1$ egyenletű egyeneseket (amelyek a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 6 - x$, illetve az $x \mapsto \frac{3}{2}x + 1$ elsőfokú függvények grafikonjai)!

A két egyenes metszéspontja a (2; 4) pont.

Ha az egyenletekben x helyébe 2-t, az y helyébe pedig 4-et helyettesítünk, akkor mindkét egyenletből egy-egy igaz kijelentést kapunk ($4 = 6 - 2$ igaz, és $4 = \frac{3}{2} \cdot 2 + 1 = 3 + 1$ is igaz).

$$\text{Az } \begin{cases} y = 6 - x \\ y = \frac{3}{2}x + 1 \end{cases} \text{ kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása a (2; 4) rendezett számpár.}$$

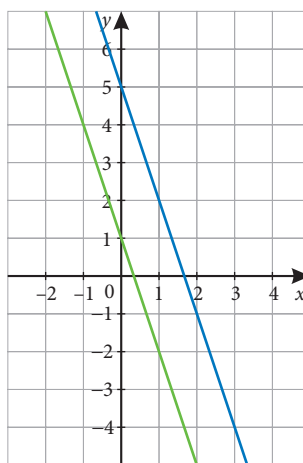


3. Oldd meg grafikus módszerrel az alábbi egyenletrendszereket, ha x és y valós szám lehet!

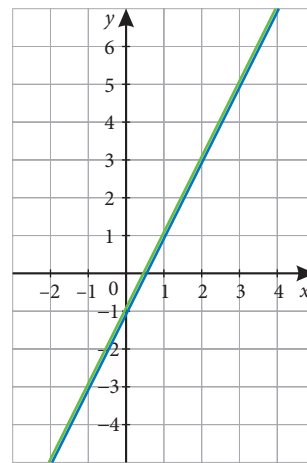
$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

Megoldás

a)



b)



Az a) esetben a két egyenlettel meghatározott függvénygrafikonok párhuzamosak, nincs közös pontjuk. Megállapíthatjuk, hogy nincs olyan pont a koordináta síkon, melynek koordinátái egyidejűleg teljesítenék mindkét egyenletet, tehát az eredeti egyenletrendszernek nincs megoldása.

A b) esetben a két egyenlettel meghatározott két függvénygrafikon egybeesik, vagyis végtelen sok közös pontjuk van. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok olyan pont van a koordináta síkon, melynek koordinátái teljesítik mindkét egyenletet, tehát az eredeti egyenletrendszernek is végtelen sok megoldása van. A végtelen sok megoldás azonban nem lehet bármelyik valós számpár, csakis azok, melyek teljesítik az ismeretlenek közötti, egyenletekben meghatározott kapcsolatot. Ezért a megoldások mindegyike olyan valós számpár, melyre fennáll, hogy a két ismeretlen, x és y értéke között teljesül egy meghatározott összefüggés: $y = 2x - 1$.

Ha figyelmesen megvizsgáljuk az előbbi egyenletrendszerekben lévő egyenleteket, észrevehetjük, hogy

- az a) feladatban az egyenletekben lévő ismeretlenek együtthatói egymás többszörösei (háromszorosa). A bal és jobb oldal különböző mértékű változása ellentmondásra vezet, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.
- a b) feladatban az egyenletekben lévő megfelelő ismeretlenek együtthatói egymás kétszeresei. Mivel a két egyenlet egymásnak többszöröse, ezért az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

ELMÉLET

Az elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldását minden esetben rendezett valós számpárok formájában adhatjuk meg.

Egy elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszernek lehet,

- hogy nincs megoldása, vagyis nincs olyan rendezett valós számpár, mely igazzá teszi mindkét egyenletet;
- egy megoldása, vagyis egy olyan rendezett valós számpár van, mely igazzá teszi mindkét egyenletet;
- végtelen sok megoldása van, vagyis végtelen sok olyan rendezett valós számpár van, amik igazzá teszik mindkét egyenletet.

FELADAT

1. Oldd meg az egyenletrendszereket grafikus módszerrel! (x ; y valós szám)

a) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 2y = x - 4 \end{cases}$

2. Oldd meg a $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ egyenletrendszert grafikus módszerrel, ha

- a) x és y természetes szám b) x és y valós szám!

3. Ágoston minden alkalommal reggel fél 8-kor indul el a lakásuktól 2100 méterre lévő iskolába, s az utat rollerrel 14 perc alatt teszi meg közel egyenletes sebességgel. Egyik reggel apukája észreveszi, hogy Ágoston otthon felejtette a matekfüzetét. Az apuka gyermeke indulása után 6 perccel robogóra pattan, és 450 méter/perc egyenletes sebességgel utána megy. Mennyi ideig ment és hány métert haladt Ágoston az otthoni indulástól számítva, amikor apukája utoléri?

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az egyenletrendszereket grafikus módszerrel!

a) $\begin{cases} y = 2 - x \\ y = 0,5x - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

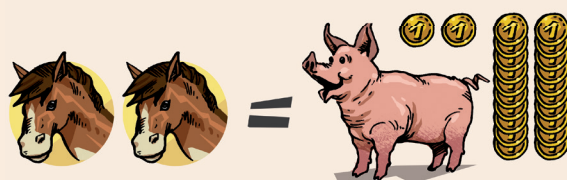
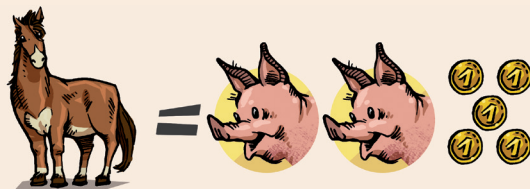
b) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ 2y = 4x - 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

2. Dani a lakásuktól 720 méterre lévő iskolából délután 2 órakor hazaindul a tőle megszokott 60 méter/perc átlagos sebességgel. Ugyanabban a pillanatban a lakásukból az iskola felé indul Dani anyukája 30 méter/perc átlagos sebességgel. Hány percet gyalognak a találkozásig? Milyen távol lesznek otthonuktól a találkozás pillanatában?

3. Egy baráti társaság ünnepi vacsorához a terem berendezését végzi. Ha minden asztalhoz 6 vendéget ültetnek, akkor 2 főnek nem jut hely, ha viszont minden asztal köré 7 széket helyeznek, akkor 1 hely üresen marad.

- a) Hányan vannak a társaságban és hány asztal van a teremben?
- b) Ha lehetőség van 10-nél kevesebb, más méretű asztal elhelyezésére is, akkor hány asztalt állíthatnak be ahhoz, hogy mindenkinek jusson hely és ne maradjon egyetlen asztalnál sem üres szék?

4. A vásárbán 1 csikóért 2 malacot és 5 tallért kell fizetni, két csikóért viszont 1 malacot és 22 tallért. Hány tallérba kerül 1 csikó, és mennyibe 1 malac?



BEVEZETŐ

Egyenletrendszer megoldása esetén a grafikus módszer nehézségei:

- az eljárás megköveteli a grafikonok pontos ábrázolását,
- nem lehet minden esetben pontosan leolvasni a metszéspontok koordinátáit,
- minden esetben ellenőrzést kell végezni a leolvasott értékekkel az egyenletekbe való visszahelyettesítéssel.

Az említett nehézségek egy része elkerülhető az algebrai megoldási módszerek használatával.

KIDOLGOZOTT FELADAT

- 1.** Oldjuk meg az $\begin{cases} 5x + 7y = 19 \\ 2x - 7y = -12 \end{cases}$ egyenletrendszert a valós számok halmazán!

Megoldás

Az első egyenletben $7y$, a másodikban $-7y$ szerepel. Összeadjuk a két egyenlet bal oldalán álló kifejezéseket és a jobb oldalon álló számokat.

Ezek az összegek egyenlők:

$$(5x + 7y) + (2x - 7y) = 19 + (-12).$$

Ezt a lépést úgy szoktuk megfogalmazni, hogy „összeadjuk a két egyenletet”. Ez azt jelenti, hogy összeadjuk az egyenletek jobb oldalán, illetve a bal oldalán álló kifejezéseket is, és mivel egyenlő mennyiségeket adunk össze, az összegek is egyenlők lesznek.

A zárójelek felbontása és az összevonás után azt kapjuk, hogy $7x = 7$, vagyis $x = 1$.

Ezt beírjuk valamelyik egyenletbe, például az elsőbe:

$$5 \cdot 1 + 7y = 19$$

$$7y = 14$$

$$y = 2$$

Tehát az $\begin{cases} 5x + 7y = 19 \\ 2x - 7y = -12 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása az

$(1; 2)$ rendezett számpár.

Ellenőrzés

Ha $x = 1$ és $y = 2$, akkor $5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 5 + 14 = 19$ és $2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = 2 - 14 = -12$.

Az egyenletrendszer megoldása azért volt ilyen egyszerű, mert a két egyenletben az egyik ismeretlen együtthatójának ugyanaz volt az abszolút értéke.

E megoldási módszer neve: az **egyenlő együtthatók módszere**.

- 2.** Oldjuk meg a $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Megoldás

Első (behelyettesítő) módszer

Az első egyenletből (például most az elsőből) kifejezzük valamelyik ismeretlent:

$$3x + 2y = 11$$

$$2y = 11 - 3x$$

$$y = (11 - 3x) : 2 = 5,5 - 1,5x$$

Most a második egyenletbe az y helyére beírjuk az $5,5 - 1,5x$ kifejezést:

$$2x + 3(5,5 - 1,5x) = 9.$$

Így egyismeretlenes egyenletet kapunk, amelyből kiszámítjuk az x -et:

$$2x + 16,5 - 4,5x = 9$$

$$-2,5x = -7,5$$

$$x = 3$$

Ha $x = 3$, akkor $y = 5,5 - 1,5x = 5,5 - 4,5 = 1$.

Ellenőrzés

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 9 + 2 = 11,$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9,$$

tehát eredményünk mindkét egyenletnek megfelel.

Eszerint az adott egyenletrendszer megoldása a $(3; 1)$ rendezett számpár.

Második (összehasonlító) módszer

Mindkét egyenletből kifejezzük valamelyik ismeretlent, például az y -t:

Az első egyenletből: $y = 5,5 - 1,5x$;

a másodikból: $y = 3 - \frac{2}{3}x$.

Ha az y egyenlő az $(5,5 - 1,5x)$ -szel is és a $(3 - \frac{2}{3}x)$ -szel is,

akkor ezek egymással is egyenlők: $5,5 - 1,5x = 3 - \frac{2}{3}x$, ami-

ből azt kapjuk, hogy $x = 3$.

Ha $x = 3$, akkor $y = 5,5 - 1,5x = 1$.

Harmadik módszer (az egyenlő együtthatók módszere)

Alakítsuk át az adott $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ egyenletrendszert

úgy, hogy a megoldása ne változzon meg, de az egyik ismeretlen együtthatói egyenlők vagy egymás ellentettjei legyenek!

Ha egy egyenlet mindkét oldalát egy nemnulla számmal megszorozzuk, akkor az egyenlet megoldása nem változik, így az alábbi átalakítások nem változtatják meg az egyenletrendszer megoldását sem.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 & / \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 9 & / \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x - 4y = -22 \\ 6x + 9y = 27 \end{cases}$$

Ha egy $(x; y)$ rendezett számpár megoldása mindkét egyenletnek, akkor a bal, illetve a jobb oldalak összeadásával kapott új egyenletnek is megoldása lesz.

$$-6x - 4y + 6x + 9y = -22 + 27$$

Ebből az $5y = 5$ egyenletet kapjuk, tehát $y = 1$.

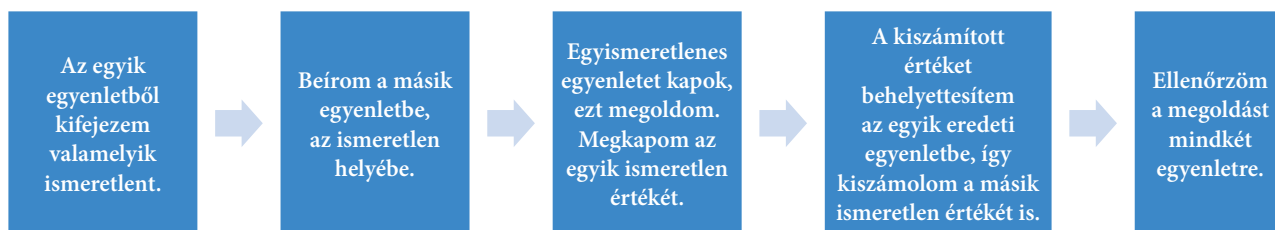
Például az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$3x + 2 \cdot 1 = 11, \text{ vagyis } x = 3.$$

Eredményül most is ugyanazt kaptuk, mint a másik két módszerrel, vagyis a megoldás a $(3; 1)$ rendezett valós számpár.

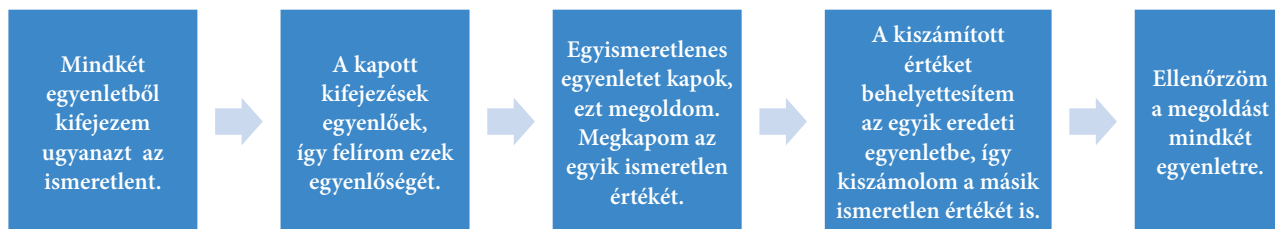
ELMÉLET

Behelyettesítő módszer:



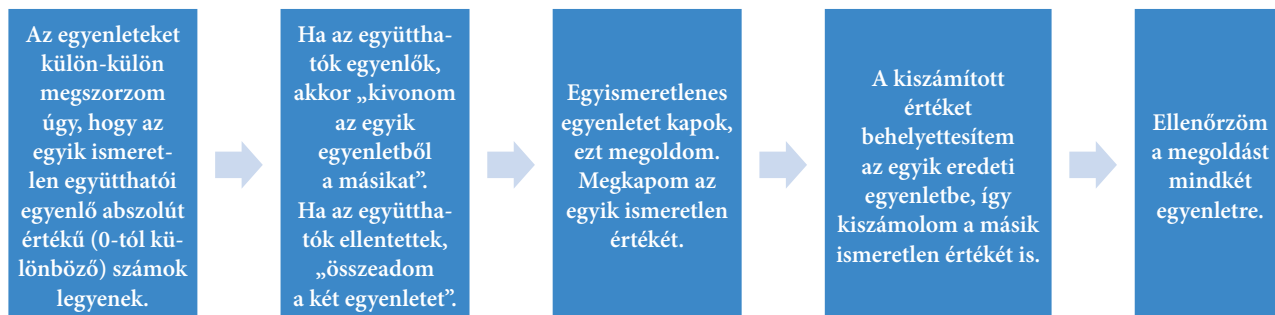
A módszer hátránya, hogy bonyolult (pl. törtes) egyenletekre vezethet a megoldás menete.

Összehasonlító módszer:



A módszer hátránya, hogy bonyolult (pl. törtes) egyenletekre vezethet a megoldás menete.

Egyenlő együtthatók módszere:



A módszer előnye, hogy elkerülhető bonyolult (pl. törtes) egyenletekre való visszavezetés.

Mindhárom algebrai megoldási módszer esetén olyan átalakításokat végzünk az egyes egyenletekkel, amelyek során nem veszítünk el megoldásokat, és hamis megoldásokat sem kapunk. Ilyen átalakítások az egyenletek nullától különböző számmal való szorzása, az egyenletek (az egyenletek többszöröseinek) összeadása vagy kivonása.

Egy elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldását megadhatjuk x és y összetartozó értékeinek felsorolásával, vagy $(x; y)$ rendezett valós számpár formájában.

FELADAT

1. Oldd meg algebrai módszerrel az egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} 7x - 5y = -1 \\ 7x + 5y = -41 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 12x + 35y = -5 \\ 8x - 5y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 9y = 20 \\ 4x - 7y = 37 \end{cases}$$

2. Hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek?

$$\text{a) } \begin{cases} 0,6x - 2y = 8 \\ 3x - 10y = 20 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 0,6x - 2y = 4 \\ 3x - 10y = 20 \end{cases}$$

3. Oldd meg az egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} 3(2x + 5y) - 4(3x + 2y) = -64 \\ 5(y - 3x) + 4(x - 5y) = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x - 1)^2 + 2y = x^2 + 1 \\ (y - 2)^2 + 4x = y^2 + 6 \end{cases}$$

4. Az iskolai rendezvényre készülve a főszervező diák a székeket számolgtatja: „Ez most 20 szék soronként. Ha áthelyeznénk a színpadot, akkor 3 sorral kevesebb lenne ugyan, de soronként 30 szék is elférne, és akkor 50-nel többen tudnának leülni.” Hány szék van most a teremben?

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az egyenletrendszereket algebrai módszerrel!

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 9y = 4 \\ 2y - 9x = 59 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2(5x - 4y) - 3(2x - y) = -8 \\ 4(3y - 2x) + 2(5x - y) = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{3x}{5} - \frac{4y}{3} = 11 \\ \frac{2x}{15} + \frac{y}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

2. Egy kórház egyik új szárnyában összesen 16 kórterem kialakítását tervezik. A kórtermek kétágyasak vagy négyágyasak lehetnek.

- a) Az egyik terv szerint összesen 54 ágyat helyeznének el. Hány szoba lehetne kétágyas?
- b) Egy másik terv legalább 10 kétágyas szoba kialakítását javasolja. Hány ágyat tudnának elhelyezni?
- c) Az építési engedélyben az szerepel, hogy legfeljebb 8 kétágyas szoba alakítható ki. Hány ágyat tudnak elhelyezni?

3. Egy nemzetközi expresszbusz a kedvező forgalmi viszonyok miatt 8 km/h-val nagyobb átlagsebességgel tudott haladni, mint amit a menetrend előír, így 48 perccel a kiírt időpont előtt érkezett meg. Egy másik alkalommal a csúszós utak miatt az előírt átlagsebességnél 12 km/h-val lassabban tudott csak haladni, így 1 óra 36 perccel késett. Mennyi az előírt átlagsebesség? Mekkora utat kell megtennie a busznak a két végállomás között?



FELADAT

1. Oldjuk meg az $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Megoldás

A feladat elején leolvashatjuk, hogy $x \neq 0$, és $y \neq 0$, hiszen 0 nem állhat a nevezőben.

Ha az egyenletek két oldalán álló számokat megszorozzuk x -szel és y -nal, akkor már nem lesz tört egyik egyenletben sem, de elég bonyolult egyenletekhez jutunk. Tehát ez a kiindulás nem segít a megoldásban. Ehelyett gondoljunk az egyenletekre úgy, mintha nem x és y lenne az ismeretlen, hanem $\frac{1}{x}$ és $\frac{1}{y}$.

Vezessünk be új ismeretleneket: jelöljük $\left(\frac{1}{x}\right)$ -et a -val és $\left(\frac{1}{y}\right)$ -t b -vel!

Ezzel a helyettesítéssel a következő egyenleteket kapjuk:

$$a + b = 5$$

$$2a - b = 1$$

Ezt oldjuk meg az eddig tanult módszerek közül valamelyikkel, például az egyenlő együtthatók módszerével. Ha összeadjuk a két egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló számokat, azt kapjuk, hogy: $3a = 6$, és ebből $a = 2$. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve: $b = 3$.

De az eredeti feladat nem a -t és b -t kérdezte, hanem x -et és y -t.

$$a = \frac{1}{x}, \text{ ebből } x = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{y}, \text{ ebből } y = \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ számpár.

Végezd el az ellenőrzést: helyettesítsd be az eredményt az eredeti egyenletekbe!

Ezt a feladatot az új ismeretlenek bevezetésének módszerével oldottuk meg.

2. Oldjuk meg a $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$ háromismeretlenes egyenletrendszert!

Megoldás

Először „kiküszöböljük” az egyik ismeretlent, például a z -t.

Az első egyenletből: $z = 2x + y - 3$. A kapott kifejezést behelyettesítjük a második és a harmadik egyenletbe a z helyébe. Így két olyan egyenletet kapunk, amelyben csak az x és az y szerepel:

$$x - y + 2(2x + y - 3) = -1; \quad 5x + y = 5;$$

$$3x + 2y + (2x + y - 3) = 2; \quad 5x + 3y = 5.$$

Most tehát az $\begin{cases} 5x + y = 5 \\ 5x - 3y = 5 \end{cases}$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

A sorok kivonása után megkapjuk, hogy $y = 0$ és $x = 1$. Most mára z -t is könnyen kiszámíthatjuk:

$$z = 2x + y - 3 = 2 + 0 - 3 = -1.$$

Ellenőrzés

A kapott értékeket mindhárom egyenletbe behelyettesítjük:

$$2x + y - z = 2 + 0 + 1 = 3;$$

$$x - y + 2z = 1 - 0 - 2 = -1;$$

$$3x + 2y + z = 3 + 0 - 1 = 2.$$

A behelyettesítéssel csupa igaz állítást kaptunk, vagyis a feladatot jól oldottuk meg.

Tehát az adott egyenletrendszernek egy megoldása van, az $(1; 0; -1)$ rendezett számhármass.

ELMÉLET

Három- vagy többismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszer esetében általában annyi egyenletre van szükségünk, ahány ismeretlen szerepel az egyenletrendszerben. Gyakran használt algebrai módszer az, hogy az ismeretlenek számát addig csökkentjük, amíg csak egy marad. A kapott egyismeretlenes egyenletet megoldjuk, majd rendre a többi ismeretlent is meghatározzuk.

FELADAT

1. Egy sok száz éves feladat:

Egy öszvér és egy szamár nagy csomagokkal bandukol az úton. „Ha átadnál nekem 100 kg terhet, akkor éppen kétszer annyit cipelnék, mint te” – mondja a szamár. Az öszvér így felel:

„Ha pedig te adnál át nekem 100 kg-ot, akkor az én csomagom háromszor akkora lenne, mint a tiéd.” Mekkora terhet visz a szamár, és mekkorát az öszvér?



- a) Mondjuk, hogy a szamár x kg, az öszvér y kg terhet visz a hátán. Ha az öszvér átadna 100 kg-ot a szamárnak, akkor a szamár $(x + 100)$ kg, az öszvér $(y - 100)$ kg terhet vinne. Írj fel egy egyenletet ezekkel a kifejezésekkel arról, amit a szamár mond!
- b) Írj fel hasonló módon egy egyenletet arról is, amit az öszvér állít!
- c) Oldd meg a két egyenletből álló, két ismeretlenes egyenletrendszert!
- d) Fogalmazd meg a feladat választát!
- e) Ellenőrizd az eredményedet a szöveg alapján!

ELMÉLET

Ha egy problémát (feladatot) egyenlettel vagy egyenletrendszerrel oldunk meg, mindig a tartalomra ügyelve végezzük az ellenőrzést!

FELADAT

2. Általában két különböző babkonzervet szoktunk vásárolni. Rendszerint fél évre elegendő mennyiséget veszünk. Az egyik konzerv darabja 360 forint, a másiké 200 forint. A félévi mennyiségért 6600 Ft-ot szoktunk fizetni. Most akciósan vettük, a drágábbat 25%-kal, az olcsóbbat 20%-kal kevesebért, így összesen 1500 Ft-ot takarítottunk meg. Melyik fajtából mennyit szoktunk venni?

3. Ha az egyik könyvespolcra 20 könyvet áttennénk a másikra, akkor a másodikon 4-szer annyi könyv lenne, mint amennyi az elsőn maradt. Ha azonban a második polcra tennénk át 20 könyvet az elsőre, akkor az elsőn annyi könyv lenne, mint amennyi a másodikon volt eredetileg. Hány könyv van a két polcon?

4. 3 kg krumpli és 2 kg narancs 710 Ft-ba kerül, 2 kg krumpli és 3 kg narancs pedig 790 Ft-ba. Hány forintba kerül a krumpli, illetve a narancs kilója?



5. Egy diáknak könnyű, egymásba helyezhető műanyag székeket kell átvinnie a szomszédos terembe egy iskolai rendezvény nézői számára. Ha minden fordulóban eggyel több széket vinne, mint most, akkor 2-vel kevesebbszer kellene fordulnia. Ha viszont 1-gyel kevesebb széket vinne, mint most, akkor 4-gyel több fordulóban tudná csak elvinni a székeket. Hány széket kell átvinnie, és ez hány fordulóban sikerül?

6. Az automata mosógépek teljesítménye mosás közben nem állandó. Egy bizonyos mosógép esetében a víz melegítésekor 2000 W, egyéb műveleteknél (mosás, szivattyúzás, centrifugálás) pedig átlagosan 400 W az elektromos hálózathoz fedezett teljesítmény. Mennyi ideig melegített vizet ez a mosógép, ha az egyórás mosóprogramjának lefutása során összesen 800 Wh elektromos energiát használt fel?



HÁZI FELADAT

1. Péternek a kávé-nagykereskedésben mindennap ugyanaz volt az egyik feladata: a 3000 Ft-os és 4000 Ft-os kilónkénti árú kávéfajtákból 17,5 kg 3600 Ft-os kilónkénti árú kávékeveréket kellett készítenie. Hány kilogarammot vegyen az egyik, illetve a másik fajtaból?

2. Két négyzet területe között 72 m² különbség van. Az egyik négyzet kerülete 16 m-rel nagyobb a másik négyzet kerületénél. Hány méter a négyzetek oldala?

3. Két szám összege 60, különbsége 5. Melyik ez a két szám?

4. Egy kis bolt vezetője szeretné fellendíteni a forgalmát, ezért árukészletének egy részét akciósan adná el. Ha az eddig literenként 250 Ft-ért árult tartós tejet 20%, a literenként 450 Ft-ért árult tejfölt pedig 75 Ft-os kedvezménnyel árulná, akkor a teljes készlet kiárusítása esetén 9750 Ft-tal lenne kevesebb a két cikkből a bevétele. Ha a tejet literenként 70 Ft-os kedvezménnyel, a tejfölt pedig 10% kedvezménnyel árulná, akkor 10 650 Ft-jába kerülne az akció. Mennyi tejet és mennyi tejfölt akar akciósan értékesíteni a boltvezető?

RÁADÁS

FELADAT

Egy baráti társaság autós kiránduláson vett részt. Odafele és visszafelé ugyanazon az úton mentek. Útközben emelkedők, lejtők és vízszintes útszakaszok is előfordultak. Gyula óvatos vezető: az emelkedőkön átlagosan $60 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$, a lejtős utakon $120 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel haladt. 140 km-nyi vízszintes szakasz is volt, ezen Gyula $80 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel vezetett. Odafele 3 óra 45 perc, visszafelé 4 óra alatt tették meg az utat. Hány km-re volt az úti céljuk?

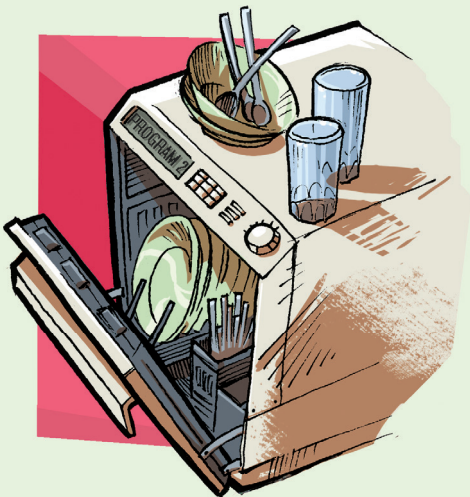
FELADAT

1. Oldd meg az egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{cases} 7x + 4y = -10 \\ 8y - 9x = 210 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{3x-7}{5} + \frac{4y+5}{15} = 4 \\ \frac{3y-7}{5} + \frac{4x+5}{15} = 6 \end{cases}$$

2. Egy mosogatógépen háromféle program van. Az I. program egy mosogatáshoz 10%-kal kevesebb elektromos energiát, viszont 20%-kal több vizet használ fel, mint a II. program. A II. program 25%-kal több elektromos energiát és 30%-kal kevesebb vizet használ, mint a III. program.



Az I. programmal alkalmanként 220 petákba, a II. programmal alkalmanként 200 petákba kerül a mosogatás. Mennyibe kerül egy-egy mosogatás a III. programmal?

3. Egy biobolt tulajdonosa 2200 Ft kilónkénti árú kesudiót és $1400 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ egységárú aszalt gyümölcsöt kevert össze, majd az így kapott keveréket kis csomagokban árulta. Összesen 10 kg-ot adott el 25%-os haszonnal, így 22 000 Ft bevételre tett szert. Mennyi kesudiót és mennyi aszalt gyümölcsöt használt fel?

4. Egy terem berendezéséhez 3 asztalt és 14 darab széket vásárolnak, melyekért eredeti áron 99 000 Ft-ot kellett volna fizetni. Miután a szezonvégi leértékelés során az asztal ára 20%-kal kevesebb lett, a székek eredeti árát pedig egyharmadával csökkentették, így összesen 70 800 Ft-ba került a 17 bútor-darab. Mennyibe került eredetileg egy asztal, illetve egy szék?

5. (Érettségi feladat, 2006)

Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban?

b) Hány platánfát telepítettek?

6. Hány éves János, és hány éves Mihály, ha tudjuk, hogy amikor Mihály annyi idős lesz, mint János most, akkor együtt 35 évesek lesznek; most pedig János háromszor annyi idős, mint Mihály volt akkor, amikor János annyi idős volt, mint Mihály most?

7. Mátyás vitéz lovat és nyeret vásárolt magának és a szolgájának. Az egyik nyeregért 25 ezüstöt, a másikért 120 ezüstöt fizetett. Ráró a drágább nyereggel háromszor annyiba került, mint Pejko az olcsó nyereggel. Pejko és a drágább nyereg ára együtt azonban csak feleannyi volt, mint Ráró az olcsóbb nyereggel. Mennyiért vette Mátyás vitéz Rárót?

HÁZI FELADAT

- 1.** (Érettségi feladat, 2018)
Péter és Pál szendvicset és ásványvizet vásárolt a büfében. Péter két szendvicset és két ásványvizet vett 740 Ft-ért, Pál pedig három szendvicset és egy ásványvizet 890 Ft-ért.
Mennyibe kerül egy szendvics, és mennyibe kerül egy ásványvíz?
- 2.** Egy osztály buszos kirándulást szervez. Ha az osztályból 5 tanuló nem megy el a kirándulásra, akkor fejenként 3500 Ft a busz költség, ha viszont csak 2 ember nem megy el, akkor minden résztvevőnek 3000 Ft-ot kell fizetnie a busz költségeire.
a) Mennyi a busz összköltsége?
b) Mennyi lenne a busz költsége fejenként, ha mindenki elmenne a kirándulásra az osztályból?
- 3.** Két ember valamilyen árut akart vásárolni. Így szólt egyik a másikhoz: „Add nekem a pénzed $\frac{2}{3}$ részét, abból meg az én pénzemből kifizetem az egész árut.” „Add ide te – mondta a másik – a te

pénzed felét, és akkor én fizetem ki az árut.” Az áru 120 ezüstbe került. Mennyi pénzük volt?

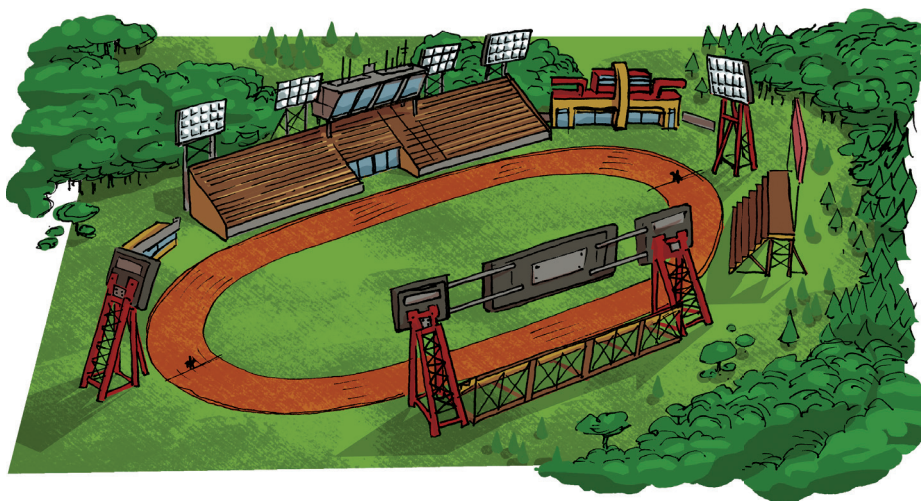
- 4.** Két hordóban összesen 480 liter bor van. Ha az első hordóból átöntünk a másodikba annyit, amennyi a másodikban eredetileg volt, azután a másodikból az elsőbe visszaöntünk annyit, amennyi az elsőben maradt, akkor a két hordóban ugyanannyi bor lesz. Melyik hordóban hány liter bor volt eredetileg?



RÁADÁS

- 1.** Egy 3000 méter területű lovaspálya két szemközi pontjáról indul két lovas, Mari és Pali. A sebességük állandó. Ha egymással szembe lovagolnak, akkor p másodperc múlva találkoznak, ha ugyanabba az irányba indulnak, akkor Mari $15p$ másodperc múlva utoléri Palit. Mekkora a sebességük?

- 2.** Oldd meg a
$$\begin{cases} \frac{3}{x-y} + 5x = 7 \\ \frac{5}{x-y} + x = -3 \end{cases}$$
 egyenletrendszert!



FELADAT

1. Mely racionális számok teszik igazzá az alábbi egyenletrendszert?

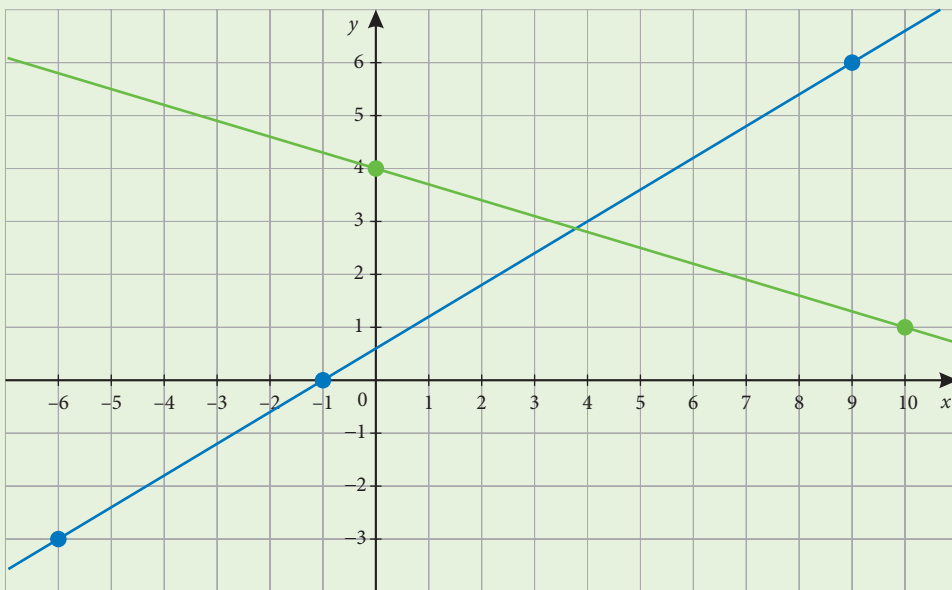
$$\begin{cases} 4x - 5y = -13 \\ 2x + 10y = 31 \end{cases}$$

2. Határozd meg az egyenletrendszer megoldását a valós számpárok halmazán!

$$\begin{cases} 2(x - 3y) - 12 = 4x + y \\ 3x - y + 4 = 3(x - y) \end{cases}$$

3. Egy bolha a koordinátarendszer $(0; -2)$ koordinátájú pontjából indul. Minden ugrása során 1-et halad jobbra és 2-t felfelé (1-et az x tengely mentén pozitív irányba, és 2-t az y tengely mentén pozitív irányba.) Egy másik bolha az összes olyan rácspontba beleugrik, melynek nincs negatív koordinátája és a pont koordinátáinak összege 7. Melyik az a pont, melyet mindkét bolha érint?

4. Írd fel az ábrán látható függvény grafikonjaihoz tartozó hozzárendelési szabályokat, majd algebrai módszerrel határozd meg metszéspontjuk koordinátáit! Az ábrán jelölt pontok rácspontok (koordinátáik egész számok).



5. Egy kisbusz átlagsebessége $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kisebb egy személyautó átlagsebességénél. A kisbusznak 1 órával hosszabb időre van szüksége ahhoz, hogy Kis városból Nagy városba érkezzen, mint a személyautónak. Egy teherautó viszont, melynek sebessége $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kisebb a kisbusz sebességénél, ugyanezen a távon 1,5 órával hosszabb idő alatt megy végig, mint a kisbusz. Határozd meg a két város távolságát, valamint az említett járművek átlagsebességét!
6. Egy 20%-os és egy 30%-os alkohol összekeverésével 22%-os keveréket kapunk. Ha a 20%-os alkoholból 1 literrel kevesebbet használunk az összeöntéskor, akkor a keverék töménysége 25%-os lesz. Hány liter alkohol volt az egyes fajtákból eredetileg?

1. Mely racionális $(x; y)$ számpárok teszik igazzá az alábbi egyenletrendszert?

$$\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3(3x - 1) = y \end{cases}$$

2. A nagymama a piacon vásárol hozzávalókat lecsófőzéshez. A zöldségek kilogrammonkénti árát látva kiszámolta, hogy ha az egyik árustól vásárol, akkor a 1,5 kg paradicsomért és 1 kg paprikáért 850 forintot fog fizetni. Egy másik árus a paradicsomot az előbbi árusnál harmadával kevesebért adja, a paprikát viszont 25%-kal drágábban, de így összesen 50 forinttal kevesebbe kerülnének a hozzávalók. Határozd meg mennyi az ára 1 kg paradicsomnak, illetve 1 kg paprikának az árusoknál!

3. Oldd meg az egyenletrendszert az egész számpárok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y+1}{2} = \frac{3}{4} \\ \frac{x-2}{3} + 2y = 0 \end{cases}$$

4. Két üzem közösen vállalta, hogy 20 nap alatt elkészít 480 darab alkatrészt. 5 napi közös munka után az egyik üzem néhány dolgozójának megbetegedése miatt a termelés az egyik üzemben 28%-kal vissza-

esett, de a másik üzem az újonnan kapott gépekkel 20%-kal meg tudta növelni az eredeti termelés mennyiségét, így határidőre elkészültek a vállalt munkával. Hány darab alkatrész elkészítését tervezték eredetileg az egyes üzemek?

5. Az Alfa, Béta, Gamma zenekarok téglalap alakú, azonos területű óriásplakátjának felragasztásához (a hátlapok teljes felületének beenyvezéséhez) ugyanannyi anyagot használnak fel. Az Alfa zenekar plakátjához képest a Béta zenekar plakátjának szélessége 4 dm-rel nagyobb, magassága 2 dm-rel kisebb, míg – ugyancsak az Alfa zenekarához képest – a Gamma zenekar plakátjának szélessége 4 dm-rel kisebb, magassága 3 dm-rel nagyobb.

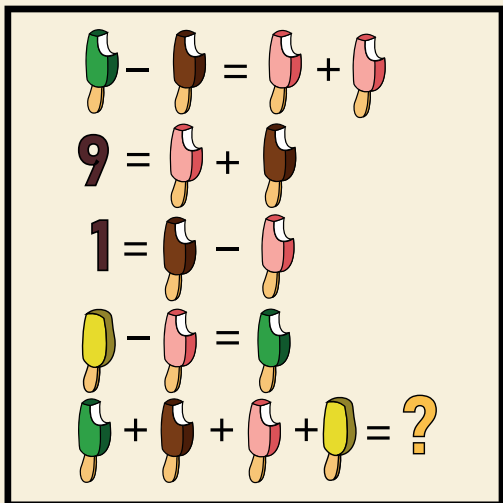
- a) Milyen méretűek az egyes óriásplakátok?
b) Melyik plakátnak legkisebb, melyiknek legnagyobb a kerülete?

6. Két különböző töménységű sósavból készítünk keveréket. Ha az elsőből 8 litert, a másodikból 12 litert használunk fel, akkor 11,4%-os savat kapunk. Ha az elsőből 15 litert, a másodikból 10 litert veszünk, akkor 9,6%-os sav jön létre. Hány százalékos a két összetevő?

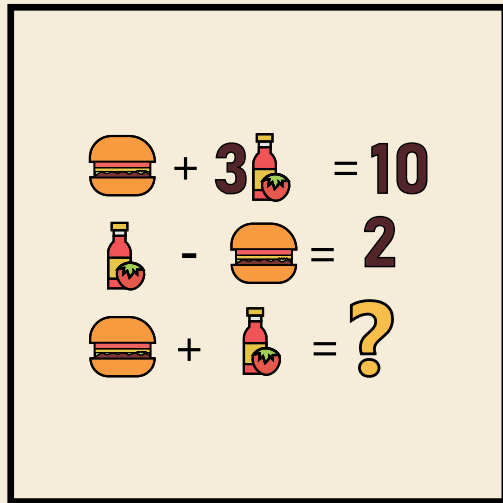
Rejtvény

Az egyenletrendszerek megoldásának megértése után biztosan könnyen boldogulsz a közösségi médiában gyakorta előke-rülő feladványokkal is. Mutasd meg ismerőseidnek, mit tudsz!

a)



b)



TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Oldd meg grafikusan az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 3x - y = -9 \\ 2x + y = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 5y = 10 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x - 3y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ -2x + 10y = 0 \end{cases}$

2. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ -5x - 6y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = -15 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x - 3y = 19 \\ -6x + 5y = -18 \end{cases}$

3. Megoldása-e az alábbi egyenletrendszereknek a $(3; -1)$ számpár? Válaszod számolással indokold!

a) $\begin{cases} 5x + 4y = 11 \\ -2x - 3y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x + 8y = 13 \\ 4x - 3y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 5y = 9 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x + y - 26 = 0 \\ 2x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$

4. Határozd meg az egyenletrendszerek megoldását, ha az x ; y racionális számok!

a) $\begin{cases} 4(2x - y) - 3x + y = 1 + 4x + 5y \\ 6x + 7y + 1 = 6(2x + y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = \frac{5}{6} \\ \frac{x+5}{3} - \frac{2y-3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

5. Határozd meg az egyenletrendszerek megoldását a valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} (x-2)^2 + 2y = x^2 + 2 \\ 3x + y^2 = (y-1)^2 + 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+1)^2 - (x-3)^2 = y \\ (y-2)^2 - (y+3)^2 = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+5)^2 + (y+1)^2 = (x+y)^2 - 2xy + 2 \\ 3x + 10 = y \end{cases}$

6. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} (x-3)(y+1) = xy - 3x + 2y \\ (x+5)(y-1) = (x-2)(y+4) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x(y-2)}{2} - \frac{y(x+1)}{2} = \frac{1}{6} \\ \frac{(x-1)(y-2)}{3} + \frac{y(x+1)}{2} = \frac{5xy}{6} \end{cases}$

7. Egy kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer egyik egyenlete $7x - 2y = 10$.

Adj meg egy másik egyenletet úgy, hogy az egyenletrendszernek a valós számok halmazán

a) ne legyen megoldása;

b) végtelen sok megoldása legyen;

c) egyetlen megoldása legyen, melyben az x értéke 4;

d) egyetlen megoldása legyen, melyben az y értéke -2 !

8. Írd fel az alábbiakban grafikonjukkal jellemzett lineáris függvények hozzárendelési szabályát, majd algebrai módszerrel határozd meg metszéspontjuk koordinátáit!

a) e : az ordináta-tengelyt az $y = 4$ helyen metszi, meredeksége $m = -3$

f : az ordináta-tengelyt az $y = -2$ helyen metszi, meredeksége $m = 5$

b) e : illeszkedik az $A(-4; 1)$ és $B(2; 9)$ koordinátájú pontokra

f : illeszkedik a $P(-1; -2)$ és $Q(5; 0)$ koordinátájú pontokra

c) e : az ordináta-tengelyt az $y = -7$ helyen metszi, meredeksége $m = \frac{2}{5}$

f : illeszkedik a $P(9; 0)$ és $Q(-1; -4)$ koordinátájú pontokra

9. Két polcon könyvek vannak. Ha az alsó polcra 12 darabot áttesszünk a felsőre, akkor ott kétszer annyi könyv lesz, mint az alsón. Ha viszont a felsőről tesszünk át 10 darab könyvet az alsóra, akkor mindkét polcon azonos számú könyv lesz. Hány könyv volt eredetileg az egyes polcokon?

10 ☞ Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor hattal nagyobb számot kapunk, mint az eredeti szám fele. Ha az eredeti számot és a számjegyek felcserélésével kapottat összeadjuk, akkor 132-t kapunk. Határozd meg az eredeti számot!

11 ☞ Egy lakás burkolásához 60 m^2 padlólapra van szükség. Ha ugyanakkora mennyiséget veszünk kék illetve szürke színű lapokból, akkor 360 000 Ft-ba kerül összesen a teljes lakás burkolásához szükséges anyag. Ha viszont 20 m^2 -re elegendő kék padlólapot veszünk és a maradék mennyiséget a szürke színűből, akkor 340 000 Ft-ot kell fizetnünk a megvásárolt burkolólapokért. Határozd meg a kék illetve a szürke padlólapok négyzetméterre vonatkozó egységárát!

12 ☞ Egy baráti társaság tagjai kajaktúrárt szerveznek a Kettős-Körös vízen Szanazugtól indulva Békés városáig. A szinte nyílegyenes 10 km hosszú folyószakaszt a folyón lefelé (folyásirányban) 50 perc alatt teszik meg, míg a visszafelé út megtételéhez a folyón felfelé (folyásiránnyal szemben) 2,5 órára van szükségük.

a) Milyen gyorsan folyik a Kettős-Körös?

b) Ugyanilyen evezési tempó mellett mennyi idő alatt tudják teljesíteni a következő nyári, Balatonra tervezett vízitúrárt, ha az ott kitűzött táv 14 km hosszú?

c) Keresd meg térképen az említett földrajzi helyeket!

13 ☞ Egy 78 m kerületű telek teljes körbekerítéséhez 220 cm magas kerítést készítenek, melyhez 2 m, illetve 1,5 m széles 220 cm magas kerítéselemek állnak rendelkezésre. Ha a 2 m széles elemeket használják fel előbb, akkor a 1,5 m széles daraboknak csak a felére lesz szükség. Ha a 1,5 m széles kerítéselemeket használják fel előbb, akkor 2 m széles daraboknak csak a 70%-ára lesz szükség, hogy a tervezett körbekerítést elvégezzék.

a) Hány darabot használtak fel az egyes esetekben a különféle elemekből?

A fel nem használt, épségben maradt kerítéselemeket eredeti áron visszavásárolja a barkácsbolt.

b) Melyik esetben kap vissza a telek tulajdonosa több pénzt, ha tudjuk, hogy a szélesebb kerítéselemek ára 2500 Ft, a keskenyebb elemeké pedig 2000 Ft?

14 ☞ Ha egy téglalap oldalait 2 egységgel növeljük, akkor területe 68 területegységgel lesz nagyobb. Ha viszont

egyik oldalát 1 egységgel növeljük, a másikat pedig ugyanennyivel csökkentjük, akkor a keletkezett téglalap területe 9 területegységgel lesz kisebb az eredeti téglalap területénél. Mekkora az eredeti téglalap kerülete?

15 ☞ Egy víztározó meghatározott időn belüli kiürítéséhez több egyforma szivattyúra van szükség. Ha 4 szivattyúval kevesebb lenne, akkor a kiürítés 14 órával tovább tartana. Ha viszont 4 szivattyúval több lenne, az ürítést a megszabott időnél 6 órával hamarabb tudnák elvégezni. Hány szivattyú végzi a szivattyúzást, és mennyi idő alatt kell készen lenniük?

16 ☞ Egy léggömbáros nagy és kicsi lufikat árul. A nagy lufi darabja 30%-kal drágább, mint a kicsié. Ha Boldizsár mindkét fajtából ugyanannyit vásárol, akkor 1840 Ft-ot kell fizetnie. Az árus hajlandó engedni az árból, ha mindkét fajtából 2-vel többet vásárol Boldizsár. A nagy lufi árát a kicsi árában adja, és a kicsi árból 30%-ot enged, így összesen 2040 Ft-ba kerülnek a léggömbök. Boldizsárnak tetszik az ajánlat, mert így több barátját is meg tudja lepni. Hány lufit akart venni eredetileg, és mennyi volt a kis és nagy lufi eredeti ára?

17 ☞ Mely valós x ; y ; z értékek adják az alábbi egyenletrendszer megoldását?

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -14 \\ 2x + 3y - z = 11 \\ 4x + 2y + 3z = -10 \end{cases}$$

18 ☞ Oldd meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{4}{x+3} - \frac{1}{y-5} = 1 \\ \frac{3}{x+3} + \frac{2}{y-5} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

19 ☞ Oldd meg algebrai módszerrel az egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{7}{y} = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{3}{y} = \frac{2}{x} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1 \end{cases}$$

20 ☞ Oldd meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 32 \\ 4x + 5y - 3z = -22 \\ x - 6y + 4z = 23 \end{cases}$$

BEVEZETŐ



Eddigi tanulmányaid során már tapasztalhattad, hogy a matematikai kifejezések jelentése, értéke függhet attól, hogy a benne szereplő számokat, betűket milyen sorrendben írjuk egymáshoz képest, illetve, hogy közéjük, föléjük, mögéjük stb. milyen szimbólumokat helyezünk el.

Sain Márton: Nincs királyi út! című matematikatörténeti könyvében olvashatjuk az alábbiakat a III. században élt Alexandriai Diophantos munkásságáról:

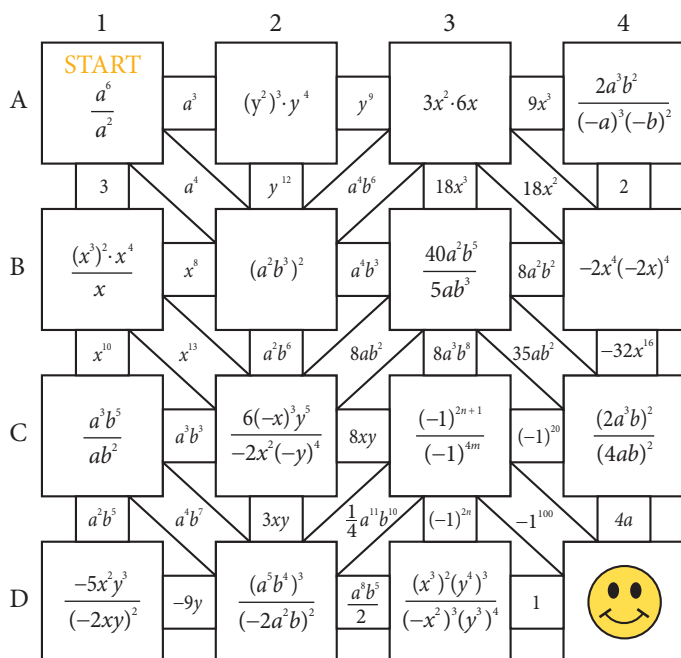
„...Távol áll még a mai algebrai jelölésrendszertől, de már külön jele van az egyenlőségre, a kivonásra, az ismeretlenre, ... hatványokra és azok reciprokaira. Az összeadást egymás mellé írással jelölte. Az algebra fejlődésében három korszakot szokás megkülönböztetni. Azt, amelyben algebrai jeleket még nem használtak, és az összefüggéseket csupán szavakkal írták le, az algebra »retorikus« szakaszának nevezik. A szinkopikus algebra már használt rövidítéseket, szimbólumokat is, de még lényeges szerephez jut a szóbeli közlés. A szimbolikus algebraiban már mindent szimbólumokkal fejezünk ki: ismeretleneket, műveleteket, ítéleteket...”

A matematikában fontos, hogy a szimbólumokat helyesen értelmezzük, és helyesen használjuk.

Megtanultuk például, hogy a 2^5 hatványkifejezés egy szorzás műveletet szimbolizál, melyben a tényezők mindegyikének értéke 2, a tényezők száma pedig 5, azaz $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Ha az előbbi két számot fordított „sorrendben”, 5^2 formában írjuk, akkor jelentése és értéke is megváltozik: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$.

BEVEZETŐ FELADAT



9. osztályban értelmeztük a pozitív egész kitevőjű hatványokat és megtanultuk, bizonyítottuk az ezekre felírható hatványazonosságokat.

Tégy próbát, mennyire emlékszel a tanultakra!

Az egyes négyzetekben kijelölt műveletek helyes végeredménye megmutatja, melyik úton lépj át a következő mezőre. Indulj a START-tól és juss el a ☺-ig! (a kifejezésekben a változókra fennáll, hogy $a; b; x; y \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ és $m; n \in \mathbb{N}^+$)

FELADAT

1. a) Írd fel a 2 egyetlen hatványaként!

$$2^4 \cdot 2^7 \cdot 2^3 \cdot 2 =$$

- b) Írd fel 3 hatványaként!

$$\frac{3^2 \cdot 3 \cdot 3^8}{3^3 \cdot 3^6} =$$

- c) Írd fel 5 hatványaként!

$$\frac{(5^3)^2 \cdot 5^8}{5 \cdot 5^4} =$$

2. Állítsd növekvő rendbe az alábbi számokat!

Számológép nélkül dolgozz!

$$A = (2^3)^4 \quad C = 2^5 \cdot 2^2 \quad E = 2^5 \cdot 5^2$$

$$B = 2^4 \cdot 2^3 \quad D = 2^{3^4} \quad F = 2^5 : 2^2$$

3. Hány nullára végződnek az alábbi hatványok?

Számológép nélkül dolgozz!

$$A = (2^5)^{12} \quad C = 5^5 \cdot 2^{10} \quad E = 27^5 \cdot 5^4$$

$$B = 2^8 \cdot 5^6 \quad D = 25^4 \cdot 12^7 \quad F = 20^{15} : 2^6$$

4. Mit kell a # helyére írni, hogy fennálljon az egyenlőség?

a) $2^8 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^\# \cdot 2^3$ c) $3^6 \cdot 3^4 : 3^5 = 3^\# : 3^3$

b) $5^{13} : 5^4 = 5^\# \cdot 5^7$ d) $4^7 \cdot 2 \cdot 0,5^3 = 8^3 \cdot 2^\#$

5. Hányszorosa az A szám a B számnak?

a) $A = (3^3)^2 \quad B = 3^8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$

b) $A = 2^9 \cdot 0,5^3 \quad B = (4^3)^2 \cdot 0,5^6$

c) $A = 5^5 \cdot 0,2^2 \quad B = (0,2^4)^2 \cdot 25^6$

6. Mely kifejezések egyenlők minden $a; b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ esetén?

$$A = 3a^4 \cdot a^6 \quad F = \left(-\frac{a^3}{b^2}\right)^4 : \frac{a^2}{3b^8}$$

$$B = a^3b^4 \cdot (-3)ab^2 \quad G = \left(\frac{b^5}{a^3}\right)^2 : \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^4$$

$$C = \frac{3}{2}(ab^4)^2 \cdot (-2a^2b) \quad H = \frac{(-3a)^3(-ab)^7}{9a^6(-b)}$$

$$D = \frac{b^6b^3}{0,5b} \quad I = \frac{(2a^3b)^{10}}{512(a^{15}b)^2}$$

$$E = \left(-\frac{a}{b}\right)^2 \quad J = \frac{75(a^2b)^6}{(5ab^3)^2}$$

7. a) Írd le 2-nek, 3-nak és 5-nek az 1000-nél kisebb pozitív egész kitevős hatványait növekvő sorrendben!

- b) Számológép használata nélkül határozd meg a kifejezések pontos értékét! Segítségként használd az a) feladatrészen leírt hatványalakokat a számok szorzattá alakításában!

$$\frac{96 \cdot 45 \cdot 42}{512 \cdot 27 \cdot 21} = \quad \frac{162 \cdot 960}{32 \cdot 55 \cdot 243} =$$

HÁZI FELADAT

1. Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Válaszod indokold!

- a) Egy negatív számnak minden pozitív egész kitevős hatványa negatív.

- b) Van olyan pozitív szám, melynek harmadik hatványa kisebb magánál a számnál.

- c) A -1 -nek van olyan pozitív egész kitevős hatványa, mely kisebb a -1 -nél.

- d) Ha egy szám a 2-nek pozitív egész kitevős hatványa, akkor az a 4-nek is pozitív egész kitevős hatványa.

- e) Ha egy szám a 9-nek pozitív egész kitevős hatványa, akkor a 3-nak páros kitevős hatványa.

- f) A 12-nek bármely 2-nél nagyobb pozitív egész kitevős hatványa osztható 18-cal.

2. Mindkét sorban az egyik kifejezés értéke különbözik a többitől. ($x; y \in \mathbb{R}^+$) Melyik ez a kifejezés?

a) $2^4 \cdot 3^5 \cdot 7$; $2^4 \cdot 3^3 \cdot 6 \cdot 7$; $7 \cdot 36 \cdot 72$; $8 \cdot 28 \cdot 81$

b) $x^2y^3 \cdot x^4y$; $x^6y^2 \cdot xy^2$; $(x^3y^2)^2$; $\frac{x^7y^6}{xy^2}$

3. Az alábbi számok közül melyik a nagyobb? A feladatot számológép használata nélkül oldd meg!

a) $2^{10} \cdot 3^5$ vagy $2^{11} \cdot 3^4$

b) $\frac{2^3 \cdot 3^3}{5^2}$ vagy $\frac{2^2 \cdot 3^4}{5^6}$

4. Nullánál kisebb, nagyobb vagy nullával egyenlő a felsorolt hatványok értéke?

$$A = -5^6 \cdot 5^6 \quad C = (-5^6) \cdot (-5)^6 \quad E = (-5^6)^3 \cdot 5^6$$

$$B = (-5)^6 \cdot 5^6 \quad D = (-5^3)^6 \cdot 5^6 \quad F = (-5)^6 + 5^6$$

BEVEZETŐ

Mennyi a $\frac{2^8}{2^{11}}$ és $\frac{5^8}{5^8}$ törték értéke?

Megoldás

Az egyszerűsítés szabályait felhasználva könnyen válaszolhatunk a kérdésre, de vessük ezt össze azzal, vajon mire vezetne az azonos alapú hatványok osztására vonatkozó azonosság alkalmazása!

Egyszerűsítéssel: $\frac{2^8}{2^{11}} = \frac{1}{2^3}$. Azonosság alkalmazásával: $\frac{2^8}{2^{11}} = 2^{8-11} = 2^{-3}$. Lehetne-e $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$?

Egyszerűsítéssel: $\frac{5^8}{5^8} = 1$. Azonosság alkalmazásával: $\frac{5^8}{5^8} = 5^0$. Lehetne-e $5^0 = 1$?

ELMÉLET

A hatványozás fogalmát kiterjeszthetjük minden egész kitevőre. Ehhez értelmezzük (definiáljuk) a hatvány fogalmát, ha a kitevőben negatív egész szám vagy 0 áll. Az új definíciót úgy érdemes bevezetni, hogy az azonosságok továbbra is érvényben maradjanak. (A kiterjesztésnek azt a módját, mikor figyelünk arra, hogy bizonyos tulajdonságok továbbra is teljesüljenek, **permanencia-elv**nek nevezzük, a latin *permanens* = *flyamatos* szóból.)

Definíció: Ha $a \neq 0$, és n pozitív egész szám, akkor $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Az azonos alapú hatványok hányadosára vonatkozó azonosság miatt $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, vagyis negatív egész kitevőjű hatványt úgy hatványozunk, hogy az alap reciprokát emeljük a kitevő ellentettjére.

Definíció: Ha $a \neq 0$, akkor $a^0 = 1$, vagyis bármely nullától különböző valós szám nulladik hatványa 1.

Például: $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$; $(-3)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4$.

Tétel: (a hatványozás azonosságai $a; b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $m; n \in \mathbf{Z}$ esetén)

Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; ha $a \neq 0$
Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Szorzat hatványa egyenlő a tényezők hatványának szorzatával.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Hányados hatványa egyenlő a számláló hatványának és a nevező hatványának hányadosával.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; ha $b \neq 0$

A 0^0 nem értelmezett.

FELADAT

1. Írd fel az alábbi kifejezéseket pozitív kitevős hatványként!

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}; \left(\frac{1}{20}\right)^{-2}; \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}; \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}; \left(\frac{1}{b}\right)^{-3}; \left(\frac{b}{a}\right)^{-3}$$

2. Hányadik hatványa

a) 2-nek a 256, ill. az $\frac{1}{64}$;

b) $\frac{1}{2}$ -nek a 256, ill. az $\frac{1}{64}$?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Mennyi $0,01^2$, $0,01^3$ és $0,01^4$?

Első módszer

$0,01^2 = 0,01 \cdot 0,01 = 0,0001$ (1 tízezred); $0,01^3 = 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,01 = 0,0001 \cdot 0,01 = 0,000001$ (1 milliomod);
 $0,01^4 = 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,01 = 0,000001 \cdot 0,01 = 0,00000001$ (1 százmilliomod).

Második módszer

$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$, ezért $0,01^2 = (10^{-2})^2 = 10^{-4}$; $0,01^3 = (10^{-2})^3 = 10^{-6}$; $0,01^4 = (10^{-2})^4 = 10^{-8}$.

A második módszer könnyebben áttekinthető, mert csak a 10 hatványaival kell számolnunk.

A két módszert összehasonlítva látjuk: $0,0001 = 10^{-4}$; $0,000001 = 10^{-6}$; $0,00000001 = 10^{-8}$.

FELADAT

3. Írd fel 10 hatványként!

- a) $0,001^5 \cdot 0,1^3$ c) $0,1^{-5} : 0,001^{-3}$
 b) $0,001^3 : 0,1^5$

4. a) Tudjuk, hogy

$$509,8 = 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1}.$$

Írd le az 5065,8-et és a 3,085-et hasonló alakban!

b) Melyik a nagyobb:

$$8 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} \text{ vagy } 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^0 + 10^{-2}?$$

5. Írd fel az eredményt 10 egész kitevőjű hatványként!

- a) $\frac{2^{-8} \cdot 5^{-7}}{2^5 \cdot 5^6}$ c) $\frac{25^{-1} \cdot 8^{-4}}{5^3 \cdot 2^{-7}}$
 b) $(4^{-3})^2 \cdot 25^{-7} \cdot 2^3 \cdot 5^5$ d) $(20^{-3})^{-2} \cdot 5^{-1} \cdot 4^{-2} \cdot 125$

6. Írd fel két egész szám hányadosaként!

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad \left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$$

HÁZI FELADAT

1. Melyik igaz, melyik hamis? Válaszod számolással igazold!

- a) $(5 \cdot 7)^{-3} = 5^{-3} \cdot 7^{-3}$
 b) $(5 + 7)^0 = 5^0 + 7^0$
 c) $(25 : 4)^{-1} = 25^{-1} : 4^{-1}$
 d) $(25 - 4)^{-1} = 25^{-1} - 4^{-1}$

2. Számítsd ki számológép nélkül!

$$\frac{3^{-7} \cdot 7^{-3}}{2^5 \cdot 7^4} : \frac{3^{-9} \cdot 7^{-7}}{2^5}$$

3. Írd fel az eredményt 10 egész kitevőjű hatványként!

- a) $0,001 \cdot 0,00001$ c) $0,0001^{-2}$
 b) $0,001^4$ d) $100^{-3} : 0,01^6$

4. Zsebszámológép használata nélkül írd fel két egész szám hányadosaként!

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \left(\frac{7}{11}\right)^{-3} : \left(\frac{7}{11}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

5. Igaz vagy hamis?

- a) $(-2)^{10} = 4^{-5}$ d) $27^{-9} = (-3)^{27}$
 b) $4^{-8} = 16^{-4}$ e) $(-6)^0 = 6^0$
 c) $8^{-7} = 4^{-14}$ f) $(-2)^{-4} = 0,5^4$

14 GYAKORLÁS

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy golyó sugara $6,31 \cdot 10^{-3}$ m. Tömege $2,84 \cdot 10^{-3}$ kg.

- a) Számold ki a golyó térfogatát! Egy r sugarú gömb térfogata: $V = \frac{4r^3\pi}{3}$.
 b) Számold ki a golyó sűrűségét! Egy m tömegű, V térfogatú test sűrűsége: $\frac{m}{V}$.
 c) Nézz utána az interneten, milyen anyagból készülhetett ez a golyó!

Megoldás

- a) $r = 6,31 \cdot 10^{-3}$ helyettesítésével

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot (6,31 \cdot 10^{-3})^3 \pi}{3} = \frac{4 \cdot 6,31 \cdot 10^{-9} \pi}{3} = 1052,4 \cdot 10^{-9} = 1,0524 \cdot 10^{-6},$$

tehát a gömb térfogata $1,0524 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$.

- b) A sűrűség szokásos jelölése ρ (ró, a görög abc 17. betűje) betűvel történik.

Az $m = 2,84 \cdot 10^{-3}$ helyettesítésével

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2,84 \cdot 10^{-3}}{9,4715 \cdot 10^{-7}} = 0,3 \cdot 10^{-3 - (-7)} = 0,3 \cdot 10^4 = 3000, \text{ így a sűrűsége } 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ adódik.}$$

FELADAT

1. Végezd el a műveleteket!

- a) $(3b)^3 : (3b)^{-3}$
 b) $(12c^3) \cdot (3 \cdot c^{-8})$
 c) $((2x)^5)^2 : ((2x)^5)^{-2}$

2. Egy négyzet oldalainak hossza 2^{-6} mm. 2-nek hányadik hatványa

- a) a négyzet kerülete (mm-ben mérve);
 b) a négyzet területe (mm^2 -ben mérve)?

3. Írd le hatványok segítségével az állításokat, és dönts el, hogy igazak-e!

- a) Az 5 és a 10 szorzatának reciproka egyenlő az 5 és a 10 reciprokának szorzatával.
 b) Az 5 és a 10 összegének reciproka egyenlő az 5 és a 10 reciprokának összegével.
 c) Az 5 és a 10 szorzatának négyzete egyenlő az 5 és a 10 négyzetének szorzatával.
 d) Az 5 és a 10 összegének négyzete egyenlő az 5 és a 10 négyzetének összegével.

4. Adottak az alábbi kifejezések ($a \neq 0$; $b \neq 0$):

$$A = 3a^{-4}b^2 \quad B = a^3b^{-4}.$$

Add meg úgy a műveletek eredményét, hogy ne legyen bennük negatív kitevős hatvány, majd úgy, hogy ne legyen bennük törtkifejezés!

$$A \cdot B; \quad B : A; \quad A^2 : B.$$

5. Számítsd ki számológép nélkül!

- a) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^3$ c) $\left(-\frac{3}{11}\right)^{-2}$
 b) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{-3}$ d) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-3}$

6. Kisállatok és lovak megjelölésére sokszor ültetnek az állat bőre alá mikrochipet. Egy ilyen rizsszem méretű eszközt egy olyan – közelítőleg téglatest – alakú kapszulában helyeznek el, melynek hosszúsága $7 \cdot 10^{-1}$ cm, szélessége $5 \cdot 10^{-1}$ cm, magassága $2,5 \cdot 10^{-1}$ cm.
 Legfeljebb hány ilyen kapszula fér el egy 1 cm^3 térfogatú dobozkában?

HÁZI FELADAT

1. a) Írd fel a 6 egész kitevőjű hatványaként annak a kockának a felszínét (cm^2 -ben) és a térfogatát (cm^3 -ben), amelynek élhossza 6^{-2} cm !

b) Az előbbi részben cm^2 -ben illetve cm^3 -ben kapott mennyiségeket add meg m^2 -ben, illetve m^3 -ben! Használj hatványalakokat!

2. Válaszd ki az igaz kijelentéseket!

- a)** Egy negatív szám nulladik hatványa negatív.
- b)** Van olyan pozitív szám, melynek negatív kitevős hatványa kisebb a számnál.
- c)** Negatív szám negatív kitevős hatványa mindig pozitív.
- d)** Minden nem 0 valós szám reciprokának négyzete megegyezik a szám négyzetének reciprokával.

3. Melyik a nagyobb? Add meg a választ számológép segítségével!

- a)** 2^{-9} vagy 2^{-8}
- b)** $0,5^{-3}$ vagy $0,5^{-4}$
- c)** $(-5)^{-1}$ vagy $(-5)^{-2}$
- d)** $543 \cdot 10^{-1}$ vagy $54,3 \cdot 10^{-2}$

4. Hozd egyszerűbb alakra számológép használata nélkül!

- a)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$
- b)** $\left(\frac{5}{8}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{4}\right)^5 : \left(\frac{5}{2}\right)^{-6}$
- c)** $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

RÁADÁS

1. Melyik felelhet meg egy átlagos felnőtt ember tömegének a következő adatok közül?

- A) $7,5 \cdot 10^5 \text{ g}$
- B) $750 \cdot 10^{-3} \text{ tonna}$
- C) $7\,500\,000 \cdot 10^{-3} \text{ dkg}$
- D) $7,5 \cdot 10^8 \text{ mg}$

2. Egy $40 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ -es téglalap alapú akváriumot 12 cm magasságig feltöltenek vízzel. Amikor egy követ helyeznek az akváriumba, a víz szintje $0,4 \text{ cm}$ -t emelkedik (a víz teljesen ellepi a követ).

Mekkora a kő térfogata?

- A) $0,32 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$
- B) $96\,000 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^3$
- C) $2000 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3$
- D) $9,92 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$

3. Bence megfigyelte a $\left(\frac{4}{5}\right)$ pozitív egész kitevős hatványait.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^1 = 0,8 \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,64 \quad \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,512$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0,4096 \dots$$

Kíváncsi volt, lehet-e az eredmény kisebb, mint $0,1$. Vajon mit tapasztalt?

És mit tapasztalt akkor, amikor a negatív egész kitevős hatványokat vizsgálta?

4. Az általános tömegvonzás az egyik alapvető kölcsönhatás a természetben. Az erre vonatkozó, úgynevezett gravitációs törvényt az akkor 23 éves Isaac Newton fogalmazta meg 1687-ben. A törvényt ma $F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ formában ismerjük és használjuk.

A képletben F jelöli a testek között fellépő erőt, m_1 és m_2 a testek tömegét, r pedig a két test tömegközéppontjának távolságát.

A törvényben szereplő gravitációs állandó értéke $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$.

A Hold–Föld (közepes) távolság $384\,400 \text{ km}$, a Hold tömege $0,07349 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a Föld tömege $5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

a) A képlet felhasználásával, az előbbi adatok ismeretében határozd meg a Hold és Föld között fellépő erőhatás mértékét!

b) A képlet ismeretében fogalmazd meg, milyen arányosság van az erőhatás és

- adott távolságra lévő testek tömege között;
- két adott tömegű test tömegközéppontja távolságának négyzete között!

5. Hány milliméter hosszú a $[10^{-3}; 10^{-1}]$ intervallum, ha a számegegyenesen a $[0; 1]$ intervallum hossza 1 méter ?

KIDOLGOZOTT FELADAT

A *Thiomargarita namibiensis* nevű baktérium igazi óriás, hiszen akár fél milliméter nagyságú is lehet, míg a legkisebb baktériumok (a *Mycoplasma* nemzetségbe tartozó fajok) mindössze $3 \cdot 10^{-4}$ milliméter méretűek. Hányszoros a legnagyobb baktérium mérete a legkisebbének?

Megoldás

A választ a $0,5 : (3 \cdot 10^{-4})$ osztás eredménye adja meg.

Elvégezzük ezt az osztást: $0,5 : 0,0003 = 0,5 \cdot \frac{3}{10000} = 0,5 \cdot \frac{10000}{3} \approx 1666,67$.

Tehát az óriásbaktérium kb. 1700-szor akkora, mint a legkisebb baktériumok.

Ha nem szeretnénk sok tizedesjegyből álló tizedestörtet használni, akkor azt is írhatjuk, hogy

$$0,5 : 0,0003 = \frac{5 \cdot 10^{-1}}{3 \cdot 10^{-4}} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-1-(-4)} = \frac{5}{3} \cdot 10^3 \approx 1,7 \cdot 10^3 = 1700.$$

A számolás során a kis számokat olyan alakban írtuk, amelyben egy 1 és 10 közötti számot a 10 egyik hatványával szoroztuk. Ezt nevezzük a szám normálalakjának. (Hasonló írásmódot használtunk már 9. osztályban a nagy számok esetén.)



ELMÉLET

Számok normálalakja

Kicsi és nagy abszolút értékű számok leírásakor sokszor használjuk a szám normálalakját. Egy 0-tól különböző szám **normálalakja** egy olyan kéttényezős szorzat, amelyben az egyik tényező abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő 1-nél és kisebb 10-nél, a másik tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa:

$a \cdot 10^k$; ahol $1 \leq |a| < 10$ és $k \in \mathbb{Z}$.

Például: $34\,520 = 3,452 \cdot 10^4$; $-122 = -1,22 \cdot 10^2$; $0,000796 = 7,96 \cdot 10^{-4}$; $2,82 = 2,82 \cdot 10^0$.

Normálalakban írt számok esetén a hatványozás azonosságai segítenek a szorzás, osztás, hatványozás műveleteinek elvégzésében. Az összeadás és kivonás esetén azonban vigyázni kell, mert ha a tagokban szereplő hatványokban különböző kitevők vannak, azok összevonásához a tagok átalakítása szükséges.

Például: $(4,5 \cdot 10^3) \cdot (1,2 \cdot 10^{-8}) = 4,5 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8} = 5,4 \cdot 10^{-5}$

$$(2 \cdot 10^{-3})^8 = 2^8 \cdot (10^{-3})^8 = 256 \cdot 10^{-24} = 2,56 \cdot 10^{-22}$$

$$3,6 \cdot 10^4 - 2,3 \cdot 10^2 = 3,6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 - 2,3 \cdot 10^2 = 10^2 \cdot (3,6 \cdot 10^2 - 2,3) =$$

$$= 10^2 \cdot (360 - 2,3) = 357,7 \cdot 10^2 = 3,577 \cdot 10^4$$

$$5,3 \cdot 10^{-3} - 1,28 \cdot 10^{-2} = 10^{-2} \cdot (5,3 \cdot 10^{-1} - 1,28) = 10^{-2} \cdot (0,53 - 1,28) = -0,75 \cdot 10^{-2} = -7,5 \cdot 10^{-3}$$

FELADAT

1. Írd át a számokat normálalakba!

0,0123; 0,0005; -0,00004211; -7,99

2. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $(6,6 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^{-4})$; $(4,5 \cdot 10^{-11}) : (1,5 \cdot 10^8)$

b) $(1,1 \cdot 10^{-2})^2$; $(7 \cdot 10^{-12})^4$

c) $5,42 \cdot 10^{-3} - 3,9 \cdot 10^{-4}$

3 Írd át a számokat normálalakba, és végezd el a számításokat először számológép nélkül! Ellenőrizd az eredményeidet számológéppel!

- a) $250\,000 \cdot 0,000\,08$
- b) $0,000\,001\,25 \cdot 4\,000\,000$
- c) $10\,500\,000 : 350\,000$
- d) $0,000\,000\,105 : 0,000\,0021$

4 1 cm^3 vörösrézben kb. $9 \cdot 10^{22}$ db atom és atomonként 2 darab vezetési elektron van.

Egy elektron töltése $-1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ (C az elektromos töltés mértékegysége; coulomb), egy elektron tömege $9,11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$.

a) Hány C az elektronok össztöltése ebben a vörösréz darabban?

b) Hány kg az elektronok össztömege ebben a vörösréz darabban?

5 Egy négyzet oldalainak hossza $5 \cdot 10^{-3}$ méter.

- a) Váltsd át az oldal hosszúságát milliméterbe!
- b) Számítsd ki a négyzet területét négyzetmilliméterben!
- c) Számítsd ki a négyzet területét négyzetméterben!

6 Egy elektron tömege $9,11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$, egy proton tömege pedig $1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$.

- a) Hányszorosa a proton tömege az elektronénak?
- b) A Nap tömege kb. $2 \cdot 10^{30}\text{ kg}$. Az elektron tömegének 10^{60} -szorosa több vagy kevesebb ennél?

HÁZI FELADAT

1 Végezd el a kijelölt műveleteket!

- a) $(8,8 \cdot 10^{-119}) \cdot (2,5 \cdot 10^{-41})$
- b) $(8,6 \cdot 10^{-86}) : (2,15 \cdot 10^{-99})$
- c) $(3 \cdot 10^{-2})^{-3} : (-1 \cdot 10^{-22})^5$
- d) $3,8 \cdot 10^{-2} - 3,1 \cdot 10^{-3}$

2 Fejezd ki mm-ben!

- a) $2,4 \cdot 10^{-2}$ méter
- b) $2,4 \cdot 10^{-2}$ deciméter
- c) $2,4 \cdot 10^{-2}$ centiméter

3 Egy szénatom tömege $2 \cdot 10^{-23}\text{ g}$. Mennyi az 1 mól ($6 \cdot 10^{23}$ atomot tartalmazó) szén tömege?

4 Mekkora tömege van az 1 mól ($6 \cdot 10^{23}$ molekulát tartalmazó) hidrogéngázban lévő összes elektronnak? (1 mól hidrogéngáz tömege 2 gramm, egy

elektron tömege $9,1 \cdot 10^{-28}$ gramm.) Hány százaléka ez a teljes tömegnek?

5 (Kompetenciamérés, 2004)

Ildikó molekulák tömegét szeretné összehasonlítani. Egy könyvben a következő adatokat találja:

Molekula	Molekulatömeg (kg)
I. molekula	$9,35 \cdot 10^{-28}$
II. molekula	$2,88 \cdot 10^{-26}$
III. molekula	$9,35 \cdot 10^{-22}$
IV. molekula	$9,35 \cdot 10^{-24}$

- a) Melyik molekula tömege a legnagyobb, melyiké a legkisebb?
- b) Hányszorosa a III. molekula tömege a IV. molekula tömegének?
- c) Hányszorosa a II. molekula tömege az I. molekula tömegének?

RÁADÁS

Az m tömegű, v sebességű test mozgási energiáját az $E_m = \frac{1}{2}mv^2$ képlet segítségével határozhatjuk meg.

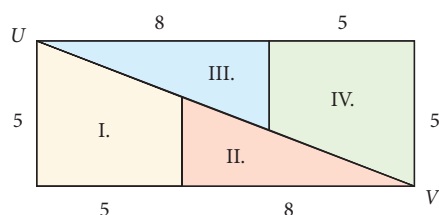
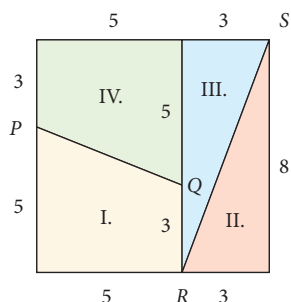
Számold ki a 4. feladatban lévő adatok felhasználásával, hogy mekkora egy elektron mozgási energiája ebben a vörösrézben,

ha az elektron sebessége $0,5 \frac{\text{cm}}{\text{h}} = \frac{1}{7,2 \cdot 10^5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Ellenőrizd a sebesség átváltását $\frac{\text{cm}}{\text{h}}$ -ről $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ra!

BEVEZETŐ

Régről ismert egy hamis bizonyítás arra, hogy $64 = 65$.



A 8 egység oldalú négyzetet az ábra szerint vágjuk négy síkidomra! Ezekből rakjuk ki az alsó ábra szerinti téglalapot! Mivel a két síkidom ugyanazokból a részekből áll, területük egyenlő: $8 \cdot 8 = 5 \cdot 13$, azaz $64 = 65$.

Hol a hiba?

Tényleg hézag nélkül tölti ki a négy síkidom az 5×13 -as téglalapot? Vajon egy egyenesbe esik a téglalapban az I. trapéz szára és a II. háromszög átfogója? Hasonlítsuk össze a téglalap UV átlóját a PQ és RS szakaszok összegével!

Pitagorasz-tétellel: $UV = \sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{194} \approx 13,93$ és $PQ + RS = \sqrt{5^2 + 2^2} + \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{29} + \sqrt{73} \approx 13,93$. Két szám egyenlőségéhez nem elég azonban csak a közelítő értékeiket vizsgálni. Azt tudjuk, hogy mindkét szám pozitív, hasonlítsuk össze a négyzetüket!

$$(\sqrt{29} + \sqrt{73})^2 = 29 + 2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{73} + 73 = 102 + 2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{73}$$

$$(\sqrt{194})^2 = 194 = 102 + 2 \cdot 46$$

Melyik nagyobb: $\sqrt{29} \cdot \sqrt{73}$ vagy 46? Hasonlítsuk össze a négyzetüket!

$$(\sqrt{29} \cdot \sqrt{73})^2 = 29 \cdot 73 = 2117, \text{ de } 46^2 = 2116.$$

Azt kaptuk, hogy $PQ + RS > UV$, vagyis az I. és II. részek (és ugyanígy a III. és IV. részek) összeillesztése után nem háromszöget kapunk, hanem egy konkáv négyszöget! A négy síkidom nem hézagmentesen tölti ki a téglalapot.

ELMÉLET

Ismétlés:

Definíció: Egy nemnegatív valós a szám **négyzetgyöke** az a nemnegatív valós szám, melynek négyzete a , vagyis bármely $a \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $(\sqrt{a})^2 = a$.

Negatív számoknak nem létezik négyzetgyöke, mert nincs olyan valós szám, melynek négyzete negatív lenne.

Például: $\sqrt{64} = 8$, mert $8^2 = 64$; $\sqrt{169} = 13$, mert $13^2 = 169$; $\sqrt{289} = 17$, mert $17^2 = 289$.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Számológép használata nélkül számoljuk ki $\sqrt{8}$ és $\sqrt{2}$ szorzatának valamint hányadosának pontos értékét!

Megoldás:

A $\sqrt{8}$ és $\sqrt{2}$ is irracionális szám, így nehezen tudnánk elvégezni a számolást. A keresett számok meghatározásá-

hoz használjuk a négyzetgyökök definícióját! Kiszámoljuk a keresett szorzat négyzetét:

$$(\sqrt{8} \cdot \sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 8 \cdot 2 = 16.$$

Tudjuk, hogy van olyan pozitív szám, melynek négyzete ugyancsak 16, mivel $4^2 = 16$.

Az előbbiekből következik, hogy $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$, ebből adódik, hogy $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = \sqrt{8 \cdot 2}$.

Járjunk el hasonlóan a hányados esetén.

$$\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{8})^2}{(\sqrt{2})^2} = 4.$$

Van olyan pozitív szám, melynek négyzete ugyancsak 4, mivel $2^2 = 4$.

Az előbbiekből következik, hogy $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$, és ebből adódik, hogy $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{\frac{8}{2}}$.

ELMÉLET

1. A négyzetgyökvonás azonosságai

Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával (ha a tényezők nem negatív számok).

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

ha $a \geq 0; b \geq 0$

Például: $\sqrt{81 \cdot 16} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{16} = 9 \cdot 4 = 36; \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

(de az értelmezés miatt nem áll fenn, hogy $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = \sqrt{16} = 4$)

Tört négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával (ha a számláló nem negatív, a nevező pozitív szám).

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

ha $a \geq 0; b > 0$

Például: $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}; \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{52}{13}} = \sqrt{4} = 2$

Hatvány négyzetgyöke egyenlő a hatványalap négyzetgyökének hatványával (ha a hatványalap nem negatív).

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n,$$

ha $a > 0; n \in \mathbb{Z}$

Például: $\sqrt{16^3} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64; (\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$

A normálalakban megadott szám négyzetgyökét akkor tudjuk az azonosságok segítségével könnyen meghatározni, ha a normálalakban a 10 kitevője páros szám. Ha a kitevő páratlan, akkor alakítsuk a normálalakban megadott számot olyan szorzattá, amelyben a 10 kitevője páros.

Például:

$$\sqrt{9 \cdot 10^6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10^6} = 3 \cdot 10^3, \text{ mert } (3 \cdot 10^3)^2 = 9 \cdot 10^6;$$

$$\sqrt{8,1 \cdot 10^5} = \sqrt{81 \cdot 10^4} = 9 \cdot 10^2, \text{ mert } (9 \cdot 10^2)^2 = 81 \cdot 10^4.$$

2. Gyökvonás egy valós szám négyzetéből

Vizsgáljuk meg a $\sqrt{a^2}$ kifejezést!

a) A négyzetgyökvonás értelmezése miatt teljesülnie kell az $0 \leq a^2$ relációnak.

Tudjuk, hogy bármely valós szám négyzete nemnegatív, ezért a bármilyen valós szám lehet, tehát $a \in \mathbb{R}$.

b) Vizsgáljuk a kifejezést az a lehetséges előjelei szerint egy-egy példán keresztül!

Legyen $a = -3$, ekkor $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$.

Legyen $a = 5$, ekkor $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ha a negatív valós szám, akkor a művelet eredménye az eredeti szám ellentettje, ha a nemnegatív valós szám, akkor a művelet eredménye az eredeti szám értéke, azaz bármely esetben az eredeti szám abszolútértékét kaptuk.

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ ahol } a \in \mathbb{R}.$$

FELADAT

- 1** Számológép használata nélkül dönts el melyik művelet eredménye ad racionális, melyik irracionális számot!

- a) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}$ és $\sqrt{50} : \sqrt{8}$;
 b) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{8}$ és $\sqrt{72} : \sqrt{8}$;
 c) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$ és $\sqrt{72} : \sqrt{50}$?

- 2** Határozd meg az alábbi kifejezések pontos értékét számológép használata nélkül!

- a) $\sqrt{49 \cdot 81}$ d) $\sqrt{25 \cdot 10^8}$
 b) $\sqrt{64 \cdot 0,04}$ e) $\sqrt{\frac{16}{49}}$
 c) $\sqrt{0,00000036}$ f) $\sqrt{\frac{9}{25} \cdot 49}$

- 3** Igazold, hogy

- a) $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$; d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{98}} = \sqrt{\frac{8}{98}} = \frac{2}{7}$;
 b) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = 2$; e) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = 3$.
 c) $\frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$;

- 4** Melyik szám négyzetgyökeként írható fel a szorzat? Hogyan lehet „bevinni a gyökjel alá” a szorzótényezőt?

Figyeld meg: $3 \cdot \sqrt{10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{90}$

- a) $2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{\dots}$ c) $10 \cdot \sqrt{19} = \sqrt{\dots}$
 b) $5 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\dots}$ d) $12 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\dots}$

- 5** Figyeld meg: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$. A példa alapján írd fel szorzatként a következő számokat:

$$\sqrt{12}; \sqrt{20}; \sqrt{300}; \sqrt{45}; \sqrt{25a} \quad (a \geq 0).$$

- 6** Vond össze a tagokat! ($a \geq 0$)

- a) $\sqrt{a} + \sqrt{4a}$ b) $\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$

- 7** Végezd el a négyzetre emelést!

(ismétlésképpen: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

- a) $(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2$ b) $(\sqrt{13} + \sqrt{11})^2$

- 8** Közelítő értékek használata nélkül határozd meg, melyik szám a nagyobb!

- a) $\sqrt{34} + \sqrt{18}$ vagy $\sqrt{102}$
 b) $\sqrt{46} + \sqrt{51}$ vagy $\sqrt{195}$

HÁZI FELADAT

- 1** Egy téglalap egyik oldalának hossza $\sqrt{6}$. Mekkora a másik oldal hossza, ha a téglalap területe

- a) $\sqrt{24}$; c) $\sqrt{0,06}$;
 b) $\sqrt{150}$; d) $\sqrt{6^3}$?

- 2** Számolj gyorsan, számológép nélkül!

- a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$
 b) $\frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} =$
 c) $\left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right)(\sqrt{3} - \sqrt{5}) =$

- 3** Melyik a nagyobb? Ne használj számológépet!

- a) $\sqrt{18}$ vagy $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{7,5}$
 b) $\sqrt{7}$ vagy $\frac{\sqrt{23,8}}{\sqrt{3,4}}$
 c) $\sqrt{32}$ vagy $(\sqrt{2})^5$

- 4** Közelítő értékek használata nélkül dönts el, hogy melyik szám a nagyobb!

- a) $\sqrt{505}$ vagy $\sqrt{194} + \sqrt{73}$
 b) $\sqrt{1325}$ vagy $\sqrt{194} + \sqrt{505}$

Négyzetgyök közelítő értéke

Vajon hogyan határozták meg egy szám négyzetgyökét több száz évvel ezelőtt? Hogyan számolhatjuk ki egy szám négyzetgyökének közelítő értékét tetszőleges pontossággal, ha nem használhatunk számológépet?

Nézzünk néhány lehetőséget a művelet fejben és írásban való elvégzésére.

I. Tényezőkre bontás

A módszer alapja az egyjegyű pozitív egészek négyzetének (1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81) és 10 hatványainak ismerete. Vizsgáljuk meg, hogy az általunk ismert négyzetszámok, illetve 10 páros hatványai közül melyik a legnagyobb, amely osztója a gyökjel alatt lévő számnak és ezek ismeretében bontsuk tényezőkre! Ezt követően alkalmazzuk a szorzat négyzetgyökére vonatkozó azonosságot.

$$a) \sqrt{22\,500} = \sqrt{225 \cdot 100} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 3 \cdot 10 = 150$$

$$b) \sqrt{245} = \sqrt{49 \cdot 5} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = 7 \cdot \sqrt{5}$$

(A $\sqrt{5}$ közelítő értékének meghatározására a későbbiekben térünk ki.)

II. Közelítő érték meghatározása

A módszer alapja a négyzetgyök függvény szigorú monoton tulajdonságának ismerete (vagyis fennáll a nemnegatív valós számokra, hogy nagyobb szám négyzetgyöke nagyobb). Határozzuk meg, hogy a négyzetgyökjel alatt lévő szám melyik két négyzetszám (vagy négyzetszám számlálójú és nevezőjű közösleges törtek) közé esik, majd az ezek között fennálló relációk alapján adjuk meg a gyökös kifejezés közelítő értékét!

a) $\sqrt{5}$ közelítő értékének meghatározása:

$4 < 5 < 9$, ezért a négyzetgyökfüggvény szigorú monotonitása miatt

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}, \text{ vagyis } 2 < \sqrt{5} < 3.$$

Ennek ismeretében az 1. c) feladatrészen kapott $7 \cdot \sqrt{5}$ értékéről megállapíthatjuk, hogy $7 \cdot 2 < 7 \cdot \sqrt{5} < 7 \cdot 3$, vagyis $14 < 7 \cdot \sqrt{5} < 21$.

Ha még ennél is pontosabb közelítő értéket szeretnénk, akkor használjunk a relációkban olyan közösleges törteket, melyek számlálójú és nevezője négyzetszám.

$4 < 5 < \frac{25}{4}$, ezért a négyzetgyökfüggvény szigorú monotonitása miatt

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{\frac{25}{4}}, \text{ vagyis } 2 < \sqrt{5} < \frac{5}{2}.$$

Így a $7 \cdot \sqrt{5}$ jobb közelítéssel, $7 \cdot 2 < 7 \cdot \sqrt{5} < 7 \cdot \frac{5}{2}$, tehát $14 < 7 \cdot \sqrt{5} < 17,5$.

b) $\sqrt{47}$ közelítő értékének meghatározása:

$36 < 47 < 49$, ezért a négyzetgyökfüggvény szigorú monotonitása miatt

$$\sqrt{36} < \sqrt{47} < \sqrt{49}, \text{ vagyis } 6 < \sqrt{47} < 7.$$

Mutasd meg közösleges törtek felhasználásával, hogy $6,5 < \sqrt{47}$!

Különböző algebrai és geometriai feladatok megoldása során ellenőrzésként célszerű becsléseket végezni. A fenti számítási módszereknek hasznát veheted a becslések elvégzésekor.

FELADAT

1. Egy négyzet területe

a) 49 cm^2 ; b) 121 cm^2 ; c) 57 cm^2 ; d) $T \text{ cm}^2$.

Mekkora a négyzet oldala?

2. Egy szám négyzete

a) 49;

c) 57;

b) 121;

d) T (és $T > 0$).

Melyik ez a szám?

3. Határozd meg számológép használata nélkül a következő kifejezések értékét! (Alakítsd át a gyökjel alatt álló kifejezéseket olyan szorzattá, hányadossá, amelyekben a tényezőknek ismered a négyzetgyökét!)

$$\sqrt{3 \cdot 75}; \sqrt{8 \cdot 50}; \sqrt{30 \cdot 6 \cdot 20}; \sqrt{14 \cdot 35 \cdot 10}$$

$$\sqrt{\frac{7 \cdot 18}{14}}; \sqrt{\frac{63 \cdot 8}{14}}; \sqrt{\frac{50 \cdot 300}{6}}$$

4. Határozd meg a kifejezések értékét!

$$\sqrt{5^2};$$

$$\sqrt{(-5)^2};$$

$$\sqrt{11^2};$$

$$\sqrt{(-11)^2};$$

$$\sqrt{a^2}, \text{ ha } a \text{ valós szám.}$$

5. Végezd el a műveleteket! Először számológép használata nélkül add meg a végeredményt, majd ellenőrizd számológéppel, hogy jól számoltál-e!

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$

b) $(\sqrt{7} + 5)(\sqrt{7} - 5)$

c) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2$

d) $(5 - \sqrt{7})^2$

6. Egyszerűsítsd a törtet $\sqrt{2}$ -vel!

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

e) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{0,32}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{0,4}{\sqrt{2}}$

7. Bővítsd a törtet $\sqrt{5}$ -tel, majd egyszerűsíts!

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{12}{\sqrt{5}}$

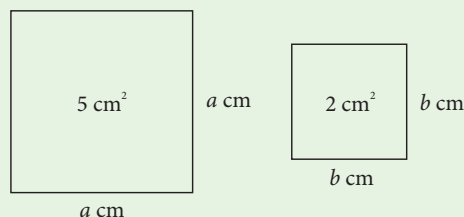
e) $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{20}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

f) $\frac{0,25}{\sqrt{5}}$

8. Az a cm oldalú négyzet területe 5 cm^2 , a b cm oldalú négyzet területe 2 cm^2 .



a) Mekkora a és b ?

b) Mekkora az $a + b$ oldalú négyzet területe?

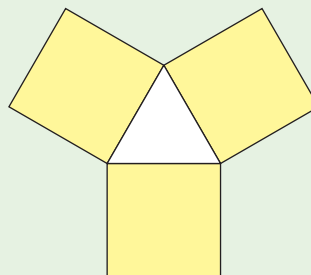
c) Milyen hosszú az $5 + 2 = 7 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ területű négyzet oldala?}$

9. A rajzon lévő fehér szabályos háromszög magassága 6 cm. A háromszög oldalaira kifelé (sárga színű) négyzeteket emeltünk. Hányszor akkora a sárga terület, mint a fehér?

a) Adj becslést!

b) Végezz számításokat számológéppel!

c) Add meg a választ pontos értékek segítségével!



HÁZI FELADAT

- 1** Bővítsd a törtet $\sqrt{3}$ -mal, majd egyszerűsíts! Ahol lehet, hozd egyszerűbb alakra a kifejezést!

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{27}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}; \frac{0,6}{\sqrt{3}}$

- 2** Melyik igaz, melyik hamis? Ha hamis, akkor javítsd úgy az egyenlőségek jobb oldalán lévő számot, hogy igaz legyen!

a) $\frac{8}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{23^3} \cdot \sqrt{23} = 23^2$

c) $(\sqrt{14} - \sqrt{5})^2 = 9$

d) $(\sqrt{5} + \sqrt{14})(\sqrt{14} - \sqrt{5}) = 9$

- 3** Végezd el a műveleteket!

a) $(\sqrt{11} - \sqrt{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})$

b) $(\sqrt{43} - \sqrt{17})(\sqrt{17} + \sqrt{43})$

c) $(\sqrt{138} + \sqrt{14})(\sqrt{14} - \sqrt{138})$

d) $(\sqrt{33} + 6)(6 - \sqrt{33})$

EMELT SZINT

- 1** Vizsgáld meg, hogy az alábbi számok közül melyek racionálisak és melyek irracionálisak!

a) $\sqrt{8}, \sqrt{8} + \sqrt{8}, \sqrt{8} - \sqrt{8},$
 $\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

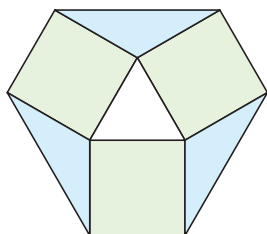
b) $\sqrt{2} + \sqrt{8}, \sqrt{2} - \sqrt{8}, \sqrt{8} - \sqrt{2},$
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

- 2** Egy kocka oldalélei 2 cm hosszúak.

- a) Mekkora annak a szabályos háromszögnek a körülete és a területe, melynek oldalai a kocka lapát-lóival egyenlő hosszúságúak?
- b) Mekkora annak a szabályos háromszögnek a körülete és a területe, melynek oldalai a kocka test-átlóival egyenlő hosszúságúak?

- 3** Az ábrán lévő fehér szabályos háromszög magassága 12 cm. A háromszög oldalaira kifelé zöld négyzeteket rajzoltunk. A négyzetszcúcsok az ábra szerinti újabb (kék színű) háromszögeket hoznak létre.

- a) Hányszor akkora a kék terület, mint a fehér?
- b) Hányszor akkora a zöld terület, mint a kék?



Tört nevezőjének gyöktelenítése

Ha a tört nevezőjében négyzetgyökök (is) szerepel, akkor általában nehezebben kezelhető a tört. Egyes esetekben egyszerű módszerrel „megszabadulhatunk” a nevezőben szereplő négyzetgyökös alaktól. Ehhez csupán bővítenünk kell a törtet egy alkalmas számmal.

Például

Hogyan írható az $\frac{5}{\sqrt{6}}$ tört olyan alakban, amelynek a nevezőjében nincs négyzetgyök?

Bővítsük a törtet $\sqrt{6}$ -tal!

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}. \text{ Mivel } (\sqrt{6})^2 = 6, \text{ ezért } \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}.$$

Hogyan írható a $\frac{6}{3 - \sqrt{2}}$ tört olyan alakban, amelynek a nevezőjében nincs négyzetgyök? A nevezőben két szám különbsége áll. Tudjuk, hogy ha ezt megszorozzuk ugyanennek a két számnak az összegével, akkor a két szám négyzetének a különbségét kapjuk meg. Ezért bővítsük a törtet $(3 + \sqrt{2})$ -vel!

$$\frac{6}{3 - \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{9 - 2}, \text{ tehát } \frac{6}{3 - \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (3 + \sqrt{2})}{7}.$$

- 4** Gyöktelenítsd a tört nevezőjét!

a) $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}; \frac{18}{\sqrt{7} - 3}; \frac{\sqrt{15} + \sqrt{18}}{\sqrt{15} - \sqrt{18}};$

b) $\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, x, y > 0$

FELADAT

1. Írd egyszerűbb alakban a következő szorzatokat!

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$ c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{39}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{27}{4}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{63}} \cdot \sqrt{\frac{7}{20}}$

2. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(\sqrt{2} + 6\sqrt{50} + 4\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$

b) $(\sqrt{63} - \sqrt{700} + 5\sqrt{28}) \cdot \sqrt{7}$

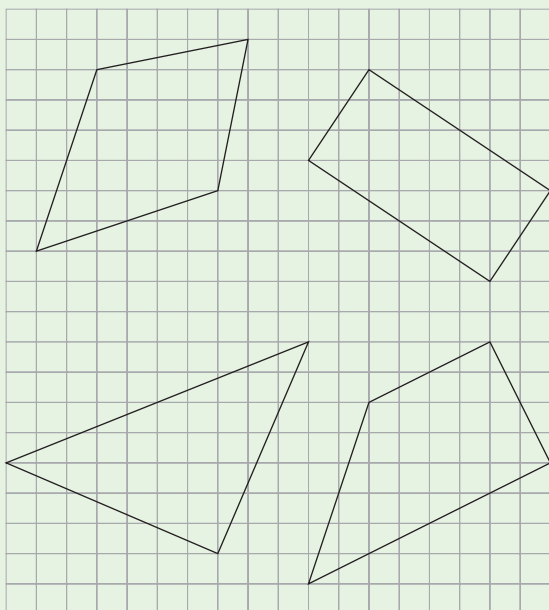
3. Gyökjel alól kihozatal segítségével végezd el a műveleteket!

a) $\sqrt{8} + \sqrt{2} - \sqrt{50}$

b) $5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} + \sqrt{75}$

c) $(7\sqrt{20} - \sqrt{5})(5\sqrt{45} - \sqrt{500})$

4. Az ábrán egy téglalap, egy deltoid, egy derékszögű trapéz és egy egyenlő szárú háromszög látható. (A sokszögek csúcsai rácspontokban vannak.) A négyzetrács egy négyzetének területét 1 egységnek tekintve, számítsd ki a megadott síkidomok területének és kerületének pontos értékét! Ne használj számológépet!



5. Egy rombusz átlói $\sqrt{10}$ cm és $\sqrt{40}$ cm hosszúak.

a) Hányszorosa a hosszabbik átló hossza a rövidebbik átló hosszának?

b) Mekkora a rombusz területe?

c) Mekkora a rombusz kerülete?
(Pontos értékekkel válaszolj!)

6. Egy szabályos háromszög magassága 9 cm hosszú.

a) Milyen hosszúak az oldalai?

b) Mekkora a területe?

c) Készítünk egy nagyobb szabályos háromszöget, melynek a magassága akkora, mint az első háromszög oldala. Mekkora ennek a háromszögnek az oldala és a területe?

7. Lehet-e egy háromszög oldalainak hosszúsága (egységekben megadva) az alábbi három mennyiség? Van-e köztük derékszögű háromszög? A számolás során ne használj közelítő értékeket!

a) $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$

c) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 3



HÁZI FELADAT

- 1.** Bővítsd a törteket $\sqrt{10}$ -zel, majd egyszerűsíts!
 $\frac{40}{\sqrt{10}}; \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}; \frac{4\sqrt{20}}{\sqrt{10}}; \frac{40 - \sqrt{40}}{\sqrt{10}}; \frac{4 - \sqrt{40}}{\sqrt{10}}$
- 2.** Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!
 a) $\sqrt{8} + \sqrt{18}$
 b) $\sqrt{45} + \sqrt{5} - \sqrt{20}$
- 3.** Mekkora a derékszögű háromszög területe, ha az egyik befogójának hossza $\sqrt{28}$ cm, átfogójának hossza $3\sqrt{7}$ cm?

- 4.** Egy szabályos háromszög magassága 4 egység hosszú. A háromszög minden oldala fölé egy félkört rajzolunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög oldala, és a félkörök mind kifelé néznek, nincs közös belső pontjuk a háromszöggel.
 a) Szerkeszd meg az ábrát!
 b) Mekkora a félkörök sugarának hossza? (Adj pontos eredményt!)

RÁADÁS

- 1.** Mennyivel egyenlő a következő kifejezés négyzete?
 $\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
- 2.** Milyen x valós szám esetén van a kifejezésnek négyzetgyöke? Add meg a kifejezés négyzetgyökét a lehető legegyszerűbb alakban!
 a) $x; (x - 3); -x; (3 - x)$ b) $x^2; -x^2; (-x)^2; (x - 3)^2$
- 3.** Gyöktelenítsd a tört nevezőjét! $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10}}$

EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a gyökvonás azonosságait!

Igazoljuk, hogy ha a és b pozitív szám, az n pedig pozitív egész szám, akkor

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b};$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}};$
- $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}!$

A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy ha két pozitív szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők.

1–2. Ha a és b pozitív, akkor négyzetgyökük is pozitív. Tehát

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} > 0 \quad \text{és} \quad \sqrt{a \cdot b} > 0.$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 0 \quad \text{és} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} > 0.$$

Hasonlítsuk össze a vizsgált pozitív számok négyzetét (felhasználva a négyzetgyök definícióját és a hatványozás azonosságait):

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab \quad \text{és} \quad (\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b;$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b} \quad \text{és} \quad \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}.$$

Vagyis az összehasonlított két pozitív szám négyzete egyenlő, ezért maguk a számok is egyenlők.

3. A négyzetgyök hatványozására vonatkozó tétel az 1. tételből azonnal következik (n -szer vesszük szorzótényezőként $\sqrt{a \cdot b}$ -t).

FELADAT

1. Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

a) 6^2 ; 6^3 ; 6^{-2} ; 6^{-3}

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

c) -3^4 ; $(-3)^4$; -3^{-4} ; $(-3)^{-4}$

2. Kösd össze az egyenlőket! Az egyik kifejezésnek nincs párja, azt írd fel más alakban!

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$	$1,5^{-2}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}$	$\left(\frac{9}{16}\right)^2$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$
---------------------------------	------------	---------------------------------	-------------------------------	------------------------------

$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{16}{9}\right)^{-2}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$	$\left(\frac{9}{4}\right)^{-2}$	
------------------------------	----------------------------------	------------------------------	---------------------------------	--

3. Írd fel 5 hatványaként!

a) $5^{-3} \cdot (5^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4$

b) $\frac{(5^2)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-5}}{5^6}$

4. Írd fel 10 hatványaként!

$4^5 \cdot 10^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 25^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^2$

5. Hozd egyszerűbb alakra!

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{8}{9}\right)^{-3} \cdot (2^{-3})^{-2}$

b) $\left(\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}\right)^3 \cdot \left(\left(-\frac{8}{3}\right)^3\right)^2$

6. Vond össze a tagokat, és írd fel szorzat alakban a kifejezést!

$\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{12} + 6\sqrt{3}$

7. Hozd egyszerűbb alakra a törtet!

$\frac{\sqrt{50} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

8. Egy négyzet átlója $\sqrt{10}$ egység hosszú.

a) Mekkora a négyzet kerülete?

b) Egyenlőszárú háromszöget alkotunk, melynek két szára olyan hosszú, mint a négyzet átlója, és alapja olyan hosszú, mint a négyzet oldala. Mekkora ennek az egyenlőszárú háromszögnek az alaphoz tartozó magassága? (Pontos értékekkel számolj!)

9. A Plútó a keringése során legtávolabb $7,3759 \cdot 10^9$ km távolságra van a Naptól.

a) Hány fényév távolságra van ekkor a Naptól? (A fény 1 másodperc alatt 300 000 km távolságot tesz meg. 1 fényévnek azt a távolságot nevezzük, amit a fény 1 év alatt tesz meg.)

b) Hány másodperc alatt ér el a Nap fénye a Plútóra, amikor legtávolabb van tőle?

10. (Kompetenciamérés, 2008) A földrengések erősségét (magnitúdóját) a Richter-skálán mérik. Ezt úgy határozzák meg, hogy a földrengéstől 100 km-es távolságban megnézik a szeizmográf (mérőműszer) mutatójának kilengését. Ha a kilengés pl. 10^4 mikrométer, akkor a földrengés a Richter-skálán 4-es erősségű, ha a kilengés mértéke 10^2 mikrométer, akkor a földrengés 2-es erősségű.

A Richter skálán 8-as erősségű földrengés hányszor akkora kilengést okoz a szeizmográfon, mint a 4-es erősségű földrengés?

Ha jól számolsz, akkor a kapott eredmény alapján majd láthatod, hogy a 8-as erősségű földrengés nem kétszer olyan erős, mint a 4-es erősségű, és így nem kétszer akkora pusztítást eredményez, hanem valóban nagyságrendekkel nagyobb.

TUDÁSPRÓBA I. (KÖNNYEBB)

1. Írd fel egyetlen hatványként!
$$\frac{3^8 \cdot (3^{-2})^5}{3^{-4}}$$
2. Írd fel egyetlen szám gyökeként!
 - a) $6 \cdot \sqrt{10}$
 - b) $0,1 \cdot \sqrt{5}$
 - c) $10 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$
 - d) $10^{-2} \cdot \sqrt{7}$
3. Végezd el a következő műveleteket! Közelítő érték használata nélkül, pontos értéket adj meg!
 - a) $-2 \cdot 10^{-3} + 3,4 \cdot 10^{-2}$
 - b) $\sqrt{50} + \sqrt{8} - 3\sqrt{2}$
4. Egy téglalap oldalhosszúságai $\sqrt{5}$ és $\sqrt{11}$ egység. Pontos értékekkel válaszolj az alábbi kérdésekre!
 - a) Mekkora a téglalap területe?
 - b) Milyen hosszúak a téglalap átlói?
5. Egy szabályos háromszög magassága $4 \cdot \sqrt{3}$ egység hosszú. Pontos értékkel válaszolj a következő kérdésekre!
 - a) Mekkora a háromszög kerülete?
 - b) Mekkora a háromszög területe?
6. A fény 1 másodperc alatt 300 000 km-t tesz meg (vákuumban). 1 fényévnek azt a távolságot nevezzük, amekkora utat a fény 1 év alatt tesz meg.
 - a) Hány km az 1 fényév távolság? Válaszodat normál alakban add meg!
 - b) Hány fényév az 1 km távolság? Válaszodat normál alakban add meg!

TUDÁSPRÓBA II. (NEHEZEBB)

- 1. 📡 a)** Írd fel 7 hatványaként! $\frac{7^{-2} \cdot 49 \cdot 7^8}{7^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^6} =$

b) Írd fel 10 hatványaként! $\frac{2^{11} \cdot 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6}{5^{-3} \cdot 4^6} =$

2. 📡 a) Végezd el az alábbi műveleteket! ($x; y \in \mathbf{R}^+$)
 $A = x^{-6} y^2 \cdot x^4 y$
 $B = (x^{-1} y^3)^{-2} \cdot xy^4$
 $C = \left(\frac{x^{-4} y^{-1}}{xy^{-2}}\right)^3$

b) Határozd meg az a) részben lévő kifejezések helyettesítési értékét, ha $x = -1$; $y = 2$!

3. 📡 Számológép használata nélkül végezd el az alábbi műveleteket, majd add meg az eredményeket normálalakban!

a) $1\,200\,000 \cdot 0,00005 \cdot (0,003)^{-4} =$

b) $(8000)^{-2} : (0,00004)^{-3} =$

c) $2,45 \cdot 10^{-14} - 1,2 \cdot 10^{-16} =$

4. 📡 Gyöktelenítsd a törtek nevezőjét!

$\frac{5}{\sqrt{10}};$ $\frac{6}{2 - \sqrt{3}};$ $\frac{22}{3 - 2\sqrt{5}}$

5. 📡 Adott 3 molekula tömege kg-ban:

I. molekula	$2,88 \cdot 10^{-26}$
II. molekula	$9,35 \cdot 10^{-24}$
III. molekula	$9,35 \cdot 10^{-28}$

a) Melyik molekula tömege a legnagyobb, melyiké a legkisebb?

b) Hányszorosa a II. molekula tömege a III. molekula tömegének?

c) Hányszorosa az I. és II. molekulák tömegének összege a III. molekula tömegének?

6. 📡 Határozd meg az alábbi kifejezés pontos értékét!

$(\sqrt{12} + \sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{27}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{28} + \sqrt{48} - \sqrt{7})$

RÁADÁS

- 1**  Mely valós számok esetén értelmezhetők a következő kifejezések?

a) $(\sqrt{a})^2$

b) $\sqrt{-a^2}$

c) $\sqrt{(-a)^2}$

- 2** Add meg a következő kifejezés pontos értékét!

$$\sqrt{1+2} \cdot \sqrt{1+3} \cdot \sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+\dots} \sqrt{1+96} \cdot \sqrt{1+97} \cdot \sqrt{1+98} \cdot \sqrt{1+99} \cdot 101$$

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Hányadik hatványa

- a) 2-nek a 128? c) 2-nek az $\frac{1}{128}$?
b) $\frac{1}{2}$ -nek a 128? d) $\frac{1}{2}$ -nek az $\frac{1}{128}$?

2. Hányadik hatványa 10-nek:

- a) ezerszer egytized?
b) százszor százszor száz?
c) egyszázadszor egyezred?

3. Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$$0,25^2; \quad 4^{-3}; \quad 3^{-4}; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}; \quad (-2)^{-3}; \quad -2^{-3}$$

4. Végezd el a kijelölt műveleteket $a; b \in \mathbf{R}^+$ értékei mellett!

$$3a^{-4}b^2 \cdot a^3b^{-4}; \quad a^3b^{-4} : \left(-\frac{a}{b}\right)^{-5};$$

$$-3a^{-4}b \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^{-5}; \quad \left(-\frac{a^{-4}}{b^3}\right)^3 : \left(\frac{b^2}{a}\right)^{-4}$$

5. Hányszorosa az A kifejezés értéke a B kifejezés értékének? A megoldást pozitív kitevős hatványokkal add meg!

a) $A = 2^7 \cdot 3^{-3}$ $B = 2^{-4} \cdot 3^4$
b) $A = 3^{-11} \cdot 5^{12}$ $B = 3^{-5} \cdot 5^{-6}$
c) $A = \frac{7^{-2}}{5^2}$ $B = \frac{7^4}{5^{-4}}$
d) $A = \frac{2^{-1} \cdot 3^3}{5^{-3}}$ $B = \frac{2^2 \cdot 3^{-2}}{5^{-5}}$

6. Számológép használata nélkül végezd el a kijelölt műveleteket a megadott számokkal!

$$A = -7^3 \cdot 9^{-8} \quad D = (-7^3)^{-6} \cdot 9^8$$

$$B = (-7)^3 \cdot 9^{-8} \quad E = (-7^6)^{-3} \cdot 9^8$$

$$C = (-7^3) \cdot (-9)^{-8} \quad F = (-7)^6 + 7^6$$

- a) $B - A$ c) $D + E$
b) $B : C$ d) $E \cdot (A + D + C)$

7. Végezd el a műveleteket!

a) $25^2 \cdot (5^{-3})^3 : 125^{-2}$
b) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{9}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{12}{27}\right)^{-4}$
c) $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)^{-5} \cdot \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-6}\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{-7}$

8. Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!

- a) Az 1 bármelyik egész kitevős hatványa 1.
b) Az 0 bármelyik egész kitevős hatványa 0.
c) Egy negatív szám bármely egész kitevős hatványa negatív.
d) Van olyan pozitív szám, melynek minden egész kitevős hatványa kisebb a szám értékénél.
e) A $4^{11} \cdot 5^{24} \cdot 10^{-7}$ szám 15 darab nullára végződik.
f) Egy nullától különböző valós szám reciprokának köbe megegyezik a szám -3 -ik hatványával.

9. Add meg normálalakban az $(a^3b^{-5})^{-2} \cdot a^4b^{-7}$ kifejezés helyettesítési értékét, ha $a = 0,00002$; $b = 50\,000\,000$!

10. Számológép használata nélkül végezd el az alábbi műveleteket, majd add meg az eredményeket normálalakban!

a) $35\,000\,000 \cdot 0,0002 \cdot (0,03)^{-2} =$
b) $(50\,000)^{-4} : (0,00004)^{-1} =$
c) $7,4 \cdot 10^{-20} - 1,6 \cdot 10^{-22} =$

11. Mekkora tömege van 2 és fél mól protonnak? (Egy proton tömege $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, egy mólban $6 \cdot 10^{23}$ db részecske található.)

12. Normálalakban is add meg az eredményeket!

- a) Egy téglalap oldalainak hossza $5 \cdot 10^{-4}$ cm és $4 \cdot 10^{-2}$ cm. Mennyi a területe?
b) Egy kocka éleinek hosszúsága $2 \cdot 10^{-6}$ m. Mekkora a térfogata és a felszíne?

13. a) A Föld 10^{-3} másodperc alatt 3 métert halad a pályáján. Hány kilométert halad 45 perc (egy tanítási óra ideje) alatt?

b) A hélium atom átmérője $5 \cdot 10^{-8}$ mm. Hány héliumatomot kellene szorosan egymás mellé tennünk, hogy 1 méter hosszú „láncot” képezzenek?

- 14** A hidrogén atomban az n főkvantumszámú elektronpályán lévő elektron kötési energiáját az

$$E_n = -\left(\frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon^2 \cdot h^2}\right) \cdot \frac{1}{n^2} \text{ összefüggés adja meg!}$$

Határozd meg a 2 főkvantumszámú elektronpályán lévő elektron kötési energiáját az alábbi fizikai állandók ismeretében:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg az elektron tömege;}$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C az elektron töltése;}$$

$$\varepsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \text{ a vákuumpermittivitása;}$$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js a Planck-állandó.}$$

(A megadott – SI mértékegységben lévő – mennyiségek behelyettesítésével az energia értékét J (joule)-ban kapod meg.)

- 15** Adottak az alábbi kifejezések:

$$A = -2a^{-2}b \quad B = \left(-\frac{b}{a}\right)^{-3} \quad C = -\frac{a^{-4}}{b^2}$$

Végezd el a kijelölt műveleteket $a; b \in \mathbf{R}^+$ feltétel mellett!

Add meg úgy a műveletek eredményét, hogy ne legyen bennük negatív kitevős hatvány, majd úgy, hogy ne legyen bennük törtkifejezés!

$$A^2 \cdot C; \quad A : C^2; \quad C^{-1} \cdot B^{-2}$$

- 16** Négyzetgyökjel alá bevétel segítségével írd egyszerűbb alakba!

$$2\sqrt{8}; \quad \frac{1}{3}\sqrt{15}; \quad 7\sqrt{\frac{2}{7}}; \quad 0,1 \cdot \sqrt{10}$$

- 17** Írd fel egyszerűbb alakban a szorzatokat!

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}; \quad \sqrt{11} \cdot \sqrt{33}; \quad \sqrt{20} \cdot \sqrt{72}$$

- 18** Végezd el a következő műveleteket! Ne használj számológépet!

$$\text{a) } (\sqrt{18} + \sqrt{50} + 9\sqrt{2})\sqrt{2}$$

$$\text{b) } (\sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{3})\sqrt{3}$$

- 19** Végezd el a következő műveleteket! Ne használj számológépet!

$$\text{a) } (\sqrt{7} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})$$

$$\text{b) } (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{3})$$

- 20** Melyik szám nagyobb? Közelítő érték használata nélkül, átalakításokkal oldd meg a feladatokat!

$$\text{a) } 5\sqrt{2} \quad \sqrt{51}$$

$$\text{b) } 4\sqrt{\frac{1}{2}} \quad 7\sqrt{\frac{1}{7}}$$

$$\text{c) } 10\sqrt{\frac{1}{5}} \quad 2\sqrt{5}$$

$$\text{d) } 12\sqrt{\frac{1}{3}} \quad 4\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\text{e) } 55\sqrt{\frac{1}{11}} \quad 12\sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{150}$$

- 21** Gyökjel alól kihozatal valamint gyökjel alá bevétel segítségével végezd el a műveleteket!

$$\text{a) } \sqrt{72} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{98}$$

$$\text{b) } \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{12} - 5\sqrt{27}$$

- 22** (Érettségi feladat, 2015) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

$$\text{a) } \sqrt{(-5)^2} = 5$$

$$\text{b) } \text{Minden } x \in \mathbf{R} \text{ esetén } \sqrt{x^2} = x$$

- 23** (Érettségi feladat, 2009) Mennyi az $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ kifejezés értéke, ha $x = -1$?

- 24** (Érettségi feladat, 2006) Válaszd ki azokat az egyenlőségeket, amelyek nem igazak minden valós számra!

$$\text{a) } \sqrt{(x-2)^4} = (x-2)^2$$

$$\text{b) } \sqrt{(x-2)^2} = x-2$$

$$\text{c) } \sqrt{(x-2)^2} = 2-x$$

- 25** (Érettségi feladat, 2005) Írd fel az $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$ kifejezést (ahol x és y nem 0) úgy, hogy ne szerepeljen benne negatív kitevő!

- 26** (Érettségi feladat, 2010) Mely valós számokra értelmezhető az alábbi kifejezés?

$$\sqrt{\frac{1}{2x+7}}$$

- 27** (Fizika érettségi feladat nyomán) Egy $m = 5 \text{ kg}$ tömegű test $L = 1 \text{ m}$ hosszúságú zsinóron, függőleges síkban forog. A forgás v sebessége olyan, hogy amikor a test a körpálya legfelső pontján tartózkodik, a kötélen éppen nem ébred erő. $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$

- a) Mekkora a test pályamenti sebessége a körpálya legfelső pontján, ha fennáll a $v_{\text{fent}} = \sqrt{L \cdot g}$ kapcsolat a megadott mennyiségek között?

- b) Mekkora a test pályamenti sebessége a körpálya legalsó pontján, ha fennáll a $v_{\text{lent}} = \sqrt{v_{\text{fent}}^2 + 4L \cdot g}$?

CSOPORTMUNKA

1. Egy rendezvényen egymáshoz kapcsolható, egyforma kordon-elemekkel kerítenek el egy téglalap alakú részt. 20 kordon elemük van, egyenként 2,3 m szélesek.

- a) Mekkora lehet az elkerített rész területe, ha minden oldalát kerítés-elem határolja? Töltsétek ki a táblázatot! A füzetbe dolgozzatok!

Kerület (m)	46	46	46						
Szélesség (m)	2,3	4,6	6,9						
Hosszúság (m)	20,7								
Terület (m ²)	47,6								

Melyik esetben lesz az elkerített rész területe a legnagyobb?

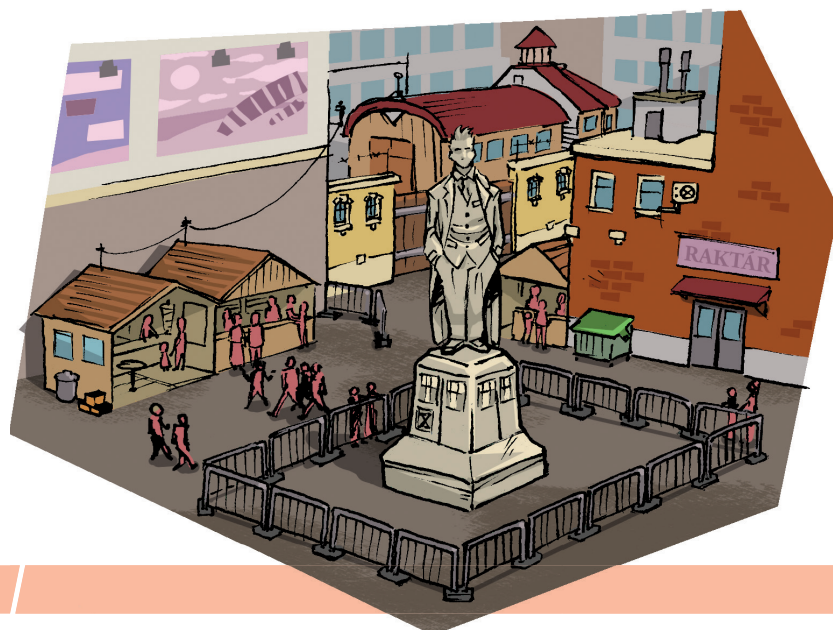
Legyen a szélesség x (m), a terület T (m²). Hogyan számolható ki T , ha ismerjük x -et?

- b) Vegyük hosszúságegységnek egy kerítéselem hosszát, és területegységnek az egy kerítéselem oldalú négyzet területét! Hogyan alakul ekkor a táblázat?

Szélesség	1	2							
Hosszúság	9								
Terület	9								

- c) Mekkora lehet az elkerített rész területe, ha egyik oldalról egy épület fala lesz a téglalap oldala, ahova nem kell kerítés?

Szélesség									
Hosszúság									
Terület									



Melyik esetben lesz az elkerített rész területe a legnagyobb?

Hogyan számolható ki a szélességből a terület?

Hogyan számolható ki a hosszúságból a terület?

- d) Mekkora lehet az elkerített rész területe, ha egy sarokhoz illesztjük: két szomszédos oldala egy-egy fal lesz, ahova nem kell kerítés?

Szélesség										
Hosszúság										
Terület										

Melyik esetben lesz az elkerített rész területe a legnagyobb?

Hogyan számolható ki a szélességből a terület?

Hogyan számolható ki a hosszúságból a terület?

2. A labdarúgó világbajnokság után egy darabig még jó áron lehet adni a szurkolói mezeket, de egy év elmúltával már nincs rá kereslet.

Egy boltvezető ezért úgy dönt, hogy leárazást hirdet. Egy póló ára eddig 4000 Ft volt. De most annyiszor 200 Ft-tal olcsóbban adná, ahány pólót vesz tőle a vásárló. Az alkalmazottjai azonban közbeszólnak:

- Ez így még nem lesz jó, mert ha például 15 pólót vennék, akkor kevesebbet fizetnék, mintha 10 pólót.
- Ez is igaz, de leginkább az a baj ezzel, hogy mindenki ingyen vinné a pólókat.

a) Ellenőrizték, jól számolt-e az első alkalmazott: mennyit fizetnének 15, és mennyit 10 pólóért?

b) Mire gondolhatott a második alkalmazott?

c) Készítsetek matematikai modellt a feladathoz:

- Jelöljétek x -szel a vásárolt pólók számát! Mennyi lesz x függvényében az egységár?
- Mennyit fizetnének x darab póló megvásárlásakor?

– Ábrázoljátok a fizetendő összeget a pólók darabszámának függvényében! Az értelmezési tartomány legyen a 25-nél kisebb pozitív egész számok halmaza.

- d) Hogyan érdemes változtatni az akción? A boltvezető azt szeretné, hogy ha valaki több pólót vesz, akkor kevesebbet fizessen darabjáért, ugyanakkor mindegyikért kapjon legalább 1500 Ft-ot. Készítsetek javaslatot (esetleg többet is) a leárazáshoz! Ábrázoljátok ezt is grafikonon!



HÁZI FELADAT

1. Egy bolt x darab újraírható, akciós árú DVD-lemezt $[(x - 3)^2 + 7] \cdot 100$ forintért árul. Legfeljebb 10 lemezt vásárolhatunk egyszerre, azaz $0 \leq x \leq 10$. (Ha nem vásárolunk, nem fizetünk!)

- a) Mennyit kell fizetnünk 1, 3, illetve 10 akciós lemez megvásárlása esetén?
- b) Hány lemez vásárlása esetén fizetjük a legkevesebbet? Ez a „legjobb vétel”? Érvelj az állításod mellett!

- c) 3 lemez vásárlása esetén az egységár

$$\frac{700}{3} \approx 233 \text{ Ft, míg 10 lemez vásárlása esetén}$$

$$\frac{5600}{10} = 560 \text{ Ft.}$$

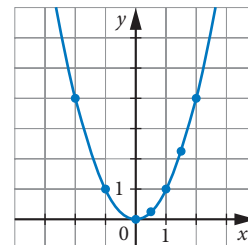
Hány lemez vásárlása esetén lesz a legkisebb a megvásárolt lemezek egységára? Ez a „legjobb vétel”?

- d) Milyen módon lehet sok lemezt megvásárolni a lehető legalacsonyabb egységáron?

BEVEZETŐ

Ábrázoljuk annak a függvénynek a grafikonját, amely minden valós számhoz a négyzetét rendeli! Táblázatba foglaltuk a függvény néhány helyettesítési értékét. Ezek alapján ábrázolhatjuk a grafikon néhány pontját. A pontokra a másodfokú függvény képét, egy parabolát illeszthetünk.

x	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
x^2	4	1	0	0,25	1	2,25	4



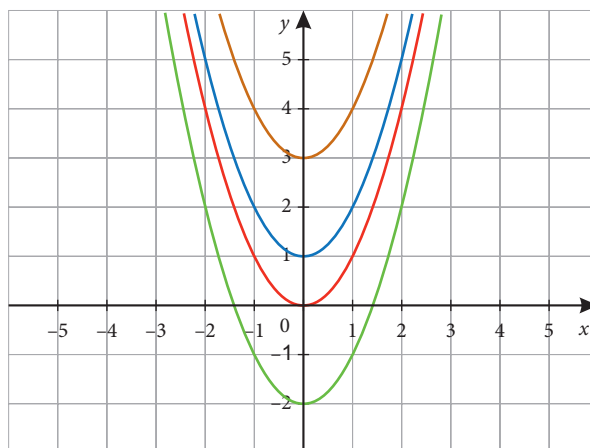
ELMÉLET

1. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvény grafikonja egy **parabola**, melynek szimmetriatengelye az y tengely. A parabolának a szimmetriatengelyen lévő pontját **tengelypontnak** nevezzük. Ennek a parabolának a tengelypontja az origó.

2. Hogyan változik a függvény grafikonja, ha a valós számok halmazán az $x \mapsto x^2$ helyett az $x \mapsto x^2 + 3$ hozzárendelési szabályt alkalmazzuk?

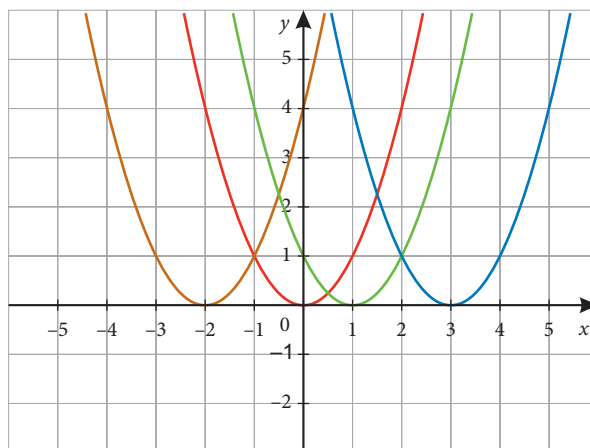
Ekkor minden függvényérték 3-mal nagyobb lesz, mint az első esetben. Grafikonon ez azt jelenti, hogy a parabolát az y tengely mentén felfelé kell tolni 3 egységgel.

$$\begin{array}{llll} x \mapsto x^2 + 3; & x \mapsto x^2 + 1; & x \mapsto x^2; & x \mapsto x^2 - 2 \\ y = x^2 + 3; & y = x^2 + 1; & y = x^2; & y = x^2 - 2 \end{array}$$



3. Hogyan változik a függvény grafikonja, ha az $x \mapsto x^2$ helyett az $x \mapsto (x - 3)^2$ hozzárendelési szabályt alkalmazzuk? Ekkor nem az $x = 0$ helyen veszi fel a függvény a 0-t, hanem a 3-mal nagyobb számnál, az $x = 3$ helyen. Grafikonon ez azt jelenti, hogy a parabolát az x tengely mentén jobbra kell tolni 3 egységgel.

$$\begin{array}{llll} x \mapsto (x + 2)^2; & x \mapsto x^2; & x \mapsto (x - 1)^2; & x \mapsto (x - 3)^2 \\ y = (x + 2)^2; & y = x^2; & y = (x - 1)^2; & y = (x - 3)^2 \end{array}$$



A függvények ábrázolásához a *GeoGebra* vagy a *Graph* programot is használhatod.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázold és jellemezd a következő függvény grafikonját! $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x + 2)^2$

Megoldás

A függvény grafikonját megkapjuk, ha a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az x tengely mentén negatív irányba (balra) toljuk 2 egységgel.

A mozgítás irányát ellenőrizhetjük úgy, hogy megvizsgáljuk a kapott grafikon tengelypontját. Az f függvény valóban az $x = -2$ helyen veszi fel a 0-t, ahogy az a grafikonról is leolvasható, és behelyettesítéssel is ellenőrizhető: $f(-2) = (-2 + 2)^2 = 0$.

A grafikonról leolvashatjuk a függvény legfontosabb jellemzőit.

Értékkészlete a valós számok azon részhalmaza, melynek minden elemét felveszi a függvény. Az értékkészletet az y tengelyen olvashatjuk le: a nemnegatív valós számok halmaza, amit így jelölünk: $\mathbf{R}_0^+$.

Zérushelye az értelmezési tartomány azon x eleme (vagy elemei), ahol a függvényérték 0. Zérushely: $x = -2$.

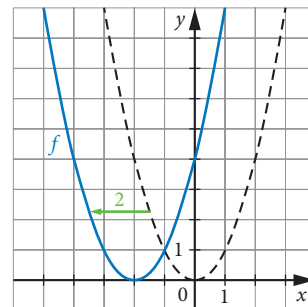
Minimuma a függvény értékkészletének legkisebb eleme. Minimum: $f(x) = 0$.

Minimumhelye az értelmezési tartomány azon eleme (vagy elemei), ahol a függvény felveszi a legkisebb értéket, a minimumot. Minimumhely: $x = -2$.

Maximuma a függvény értékkészletének legnagyobb eleme. f -nek nincs maximuma.

Maximumhelye az értelmezési tartomány azon eleme (vagy elemei), ahol a függvény felveszi a legnagyobb értéket, a maximumot. Mivel f -nek nincs maximuma, ezért maximumhelye nincs.

Növekedési viszonyok, monotonitás: a függvény a $]-\infty; -2]$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $[-2; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő.



FELADAT

1 Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1$

b) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = (x + 1)^2$

	értékkészlet	zérushelyek	minimum	minimumhely	növekedési viszonyok
f					
g					

2 Egy függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját a koordináta-rendszerben eltoltuk.

a) A kapott parabola tengelypontja a $(0; 5)$ pont. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

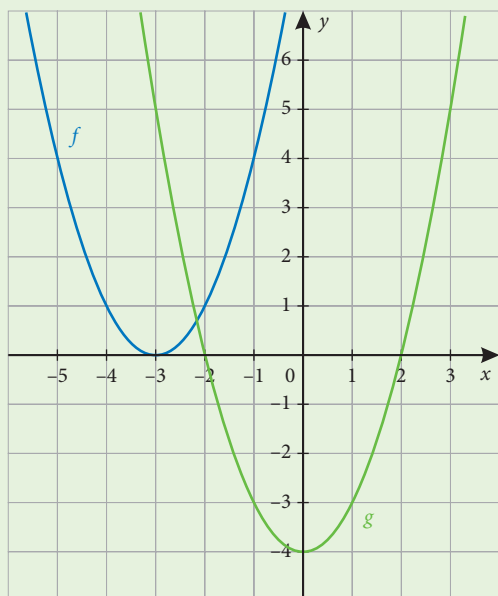
b) A kapott parabola tengelypontja a $(6; 0)$ pont. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

3 Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket! Figyelj az értelmezési tartományra!

a) $f: [0; 4] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x - 3)^2$

b) $g:]-1; 2] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3$

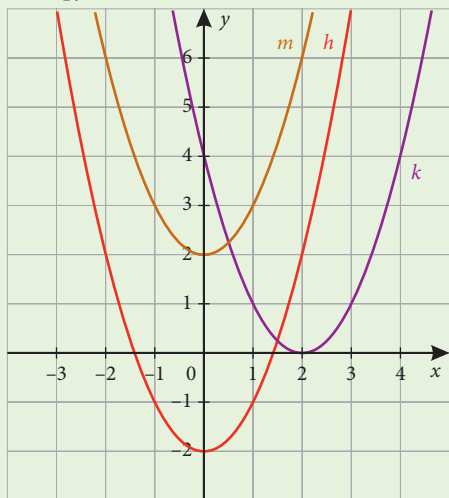
4. a) Az ábra alapján töltsd ki a táblázatot a füzetedben!



Függvény neve	f	g
Hozzárendelési szabálya	$x \mapsto$	$x \mapsto$

b) Határozd meg a függvények minimumát és minimumhelyét!

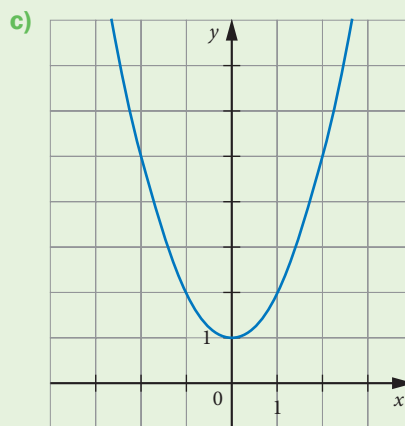
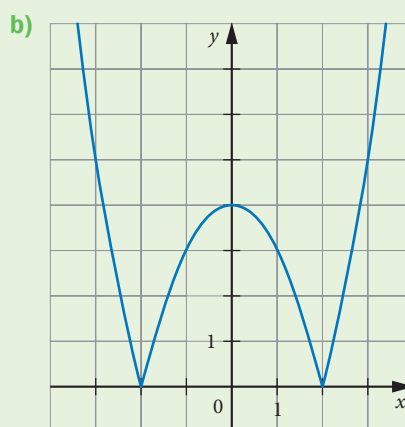
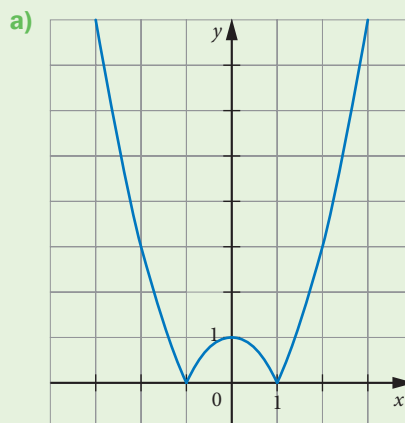
5. a) Az ábra alapján töltsd ki a táblázatot a füzetedben!



Függvény neve	h	k	m
Hozzárendelési szabálya	$x \mapsto$	$x \mapsto$	$x \mapsto$

b) Határozd meg a függvények értékkészletét!

6. Melyik hozzárendelési szabály melyik grafikonhoz tartozik? Néhány hozzárendelési szabályhoz nem tartozik grafikon, azokat készítsd el a füzetedbe!



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2 + 1|;$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = |x^2 - 1|;$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = |x^2 + 4|;$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = |x^2 - 4|;$$

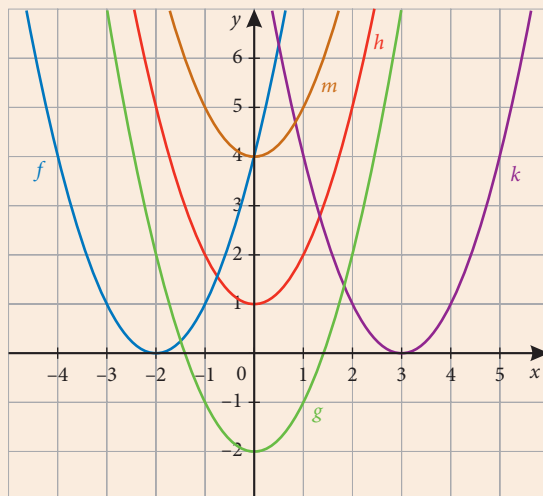
$$m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad m(x) = |x^2 + 3|;$$

$$n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n(x) = |x^2| + 3$$

HÁZI FELADAT

1. Az ábra alapján töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

Függvény neve	Hozzárendelési szabálya
f	$x \mapsto$
g	$x \mapsto$
h	$x \mapsto$
k	$x \mapsto$
m	$x \mapsto$



2. Melyik függvényre teljesül a felsorolt függvénytulajdonság? (Az értelmezési tartomány mindig a valós számok halmaza.)

$$f(x) = x^2 + 1;$$

$$g(x) = (x - 5)^2;$$

$$h(x) = x^2 - 4$$

a) nincs zérushelye

d) minimuma 0

g) értékkészlete $[0; \infty[$

b) zérushelyei: -2 és 2

e) minimumhelye a 0

h) értékkészlete $[1; \infty[$

c) egyetlen zérushelye van

f) értékkészlete $[-4; \infty[$

3. Ábrázold és jellemezd a következő függvényt!

$$f: [-2; 2] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1$$

RÁADÁS

Egy ügyes módszer az $y = x^2$ egyenletű parabola közelítő megrajzolására

A parabola tengelypontja az origó. Újabb pontokat kapunk, ha innen

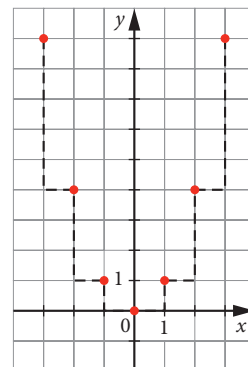
egyet lépünk jobbra és **egyet** felfelé, majd az új pontból

egyet lépünk jobbra és **hármát** felfelé, majd a legújabb pontból

egyet lépünk jobbra és **ötöt** felfelé, és így tovább: a kapott pontból mindig egyet lépünk jobbra és sorban még 7-et, 9-et, 11-et, ... lépünk felfelé.

Ugyancsak a parabola pontjait kapjuk meg, ha nem jobbra, hanem balra lépünk mindig 1-et, felfelé pedig 1-et, 3-at, 5-öt, 7-et, 9-et, 11-et, ...

Vegyük észre, hogy a páratlan számok összege 1-től valameddig négyzetszám.



EMELT SZINT

1. Ábrázold közös koordináta-rendszerben! Olvasd le a grafikonok metszéspontjait! Mit jelentenek a metszéspontok koordinátái?

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2$ és $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = |2x|$

b) $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = x^2 - 2$ és $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, k(x) = \left| \frac{x}{2} \right| + 1$

2. Egy $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényről tudjuk, hogy a hozzárendelési szabálya $x \mapsto x^2 - p$, ahol p egy valós számot jelöl. Tudjuk a függvényről azt is, hogy grafikonja átmegy a $Q(-1, -2, 5)$ ponton.

a) Melyik számot jelöli a p ?

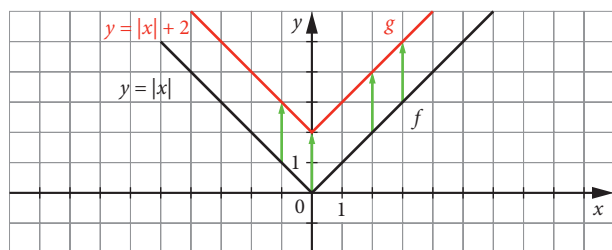
b) Oldd meg a feladatot számítógépes programmal, például a GeoGebra programmal!



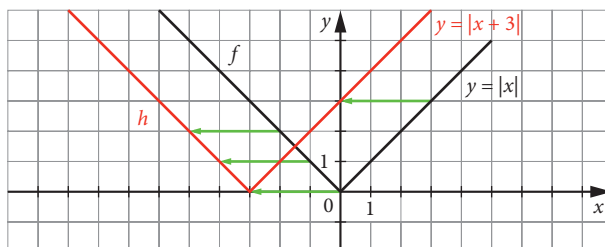
KIDOLGOZOTT FELADAT

Milyen geometriai transzformációval vihető át az f függvény grafikonja a g , illetve a h függvény grafikonjába, ha $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 2$ és $h(x) = |x + 3|$ ($D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$)?

Megoldás



Eltolás az y tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban, 2 egységgel.



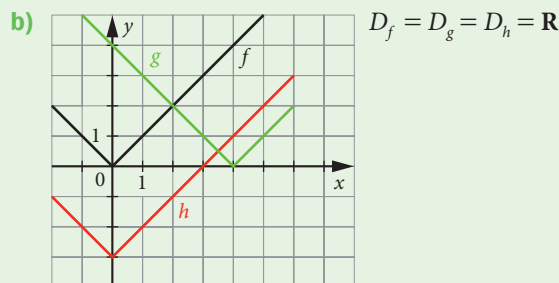
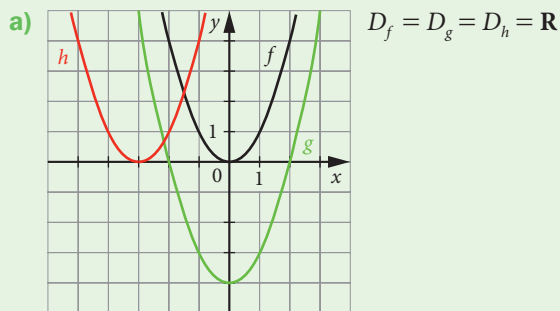
Eltolás az x tengellyel párhuzamosan, negatív irányban, 3 egységgel.



A függvénytranszformációk a *GeoGebra* program segítségével is szemléltethetők.

FELADAT

1. Add meg a grafikonok alapján a függvények hozzárendelési szabályát! Mindegyik esetben add meg azokat a geometriai transzformációkat, amelyekkel az f függvény grafikonja a másik két grafikonba átvihető!



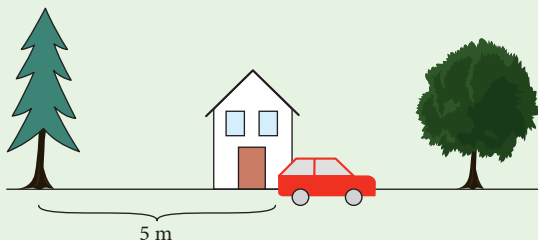
2. Ábrázold a következő függvények grafikonját, majd jellemezd a függvényeket a táblázat szempontjai szerint!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 5)^2$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x| - 5$

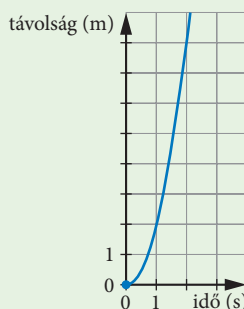
	értékkészlet	zérushely	minimum	minimumhely	növekedési viszonyok (monotonitás)
f					
g					

3. Egy autó áll a házunk előtt. Állandó gyorsulással elindul az ábra szerint jobbra.

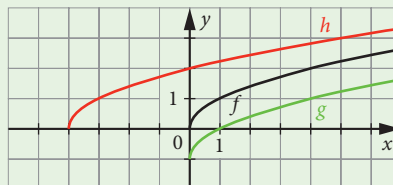


Grafikonon ábrázoltuk, hogyan változik a háztól mért távolsága az idő függvényében.

Ábrázold grafikonon, hogyan alakul az autónak a fenyőfától mért távolsága az idő függvényében!



4. Ábrázoltuk az $f: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját, és a függvény grafikonjának két eltolatását. Add meg az így kapott g és h függvények értelmezési tartományát és hozzárendelési szabályát!



5. Ábrázold, majd jellemezd a következő függvényeket!

a) $\mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - 1,5$

b) $[-1; 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = |x - 2,5|$

HÁZI FELADAT

1. Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények. Milyen geometriai transzformációval vihető át az f függvény grafikonja a g függvény grafikonjába, ha

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| - 4$;

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 4)^2$;

c) $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = x^2$?

Ábrázold a megadott két-két függvényt közös koordináta-rendszerben!

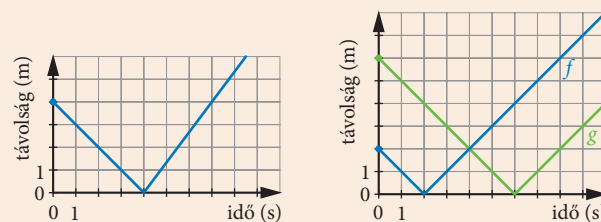
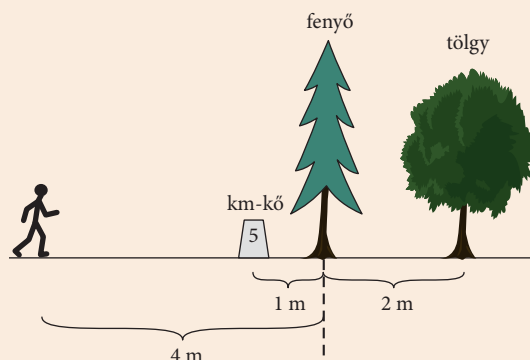


Ellenőrizd a *Graph* vagy *GeoGebra* program segítségével, hogy jók-e a grafikonjaid!

2. Az $y = x^2$ egyenletű parabolát eltoltuk
- az y tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 1 egységgel;
 - az x tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 2 egységgel;
 - az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban 3 egységgel;
 - az y tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban 4 egységgel.

Rajzold meg a transzformációk végrehajtásával keletkező parabolákat, és add meg mindegyik esetben a hozzá tartozó függvényt!

3. Egyenes úton, állandó sebességgel sétál egy gyalogos. Az első grafikonon ábrázoltuk, hogyan változik eközben a fenyőfától mért távolsága.



- Melyik grafikonon ábrázolja helyesen ugyanezen idő alatt a tölgyfától mért távolságát?
- Ábrázold grafikonon, hogyan változik eközben a gyalogosnak a kilométerkőtől mért távolsága!
- Olvasd le a grafikonról a gyalogos sebességét!

BEVEZETŐ

St. Louis városának (Missouri, Egyesült Államok) nevezetessége a Gateway Arch (ejtsd: gétvéj árcs), amely egy hatalmas boltív a város központjában. Sokan úgy tartják, hogy parabolaív alakú. Lehetséges ez?

Csupán egy fénykép áll rendelkezésünkre és nem a tervrajz, ezért pontos válasz természetesen nem várható. Az ív parabolára hasonlít, ezért lehet, hogy – jó közelítéssel – egy másodfokú függvény grafikonja; ezt a sejtésünket próbáljuk ellenőrizni. Ahhoz azonban, hogy függvénygrafikonról beszéljünk, szükséges, hogy az ív egy derékszögű koordináta-rendszerben helyezkedjék el. A koordináta-rendszert saját magunk is berajzolhatjuk, ez látható a következő ábrán.

Az építmény külső ívén kerestünk olyan pontokat, amelyek valamely függőleges rácsvonalra illeszkednek. Néhány ilyen pont:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_{\text{mért}}$	-5	-1,6	-0,4	0	-0,4	-1,6	-5

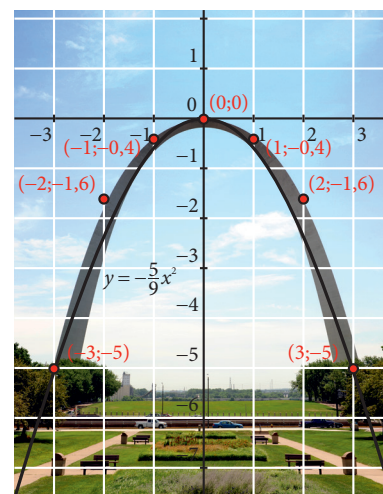
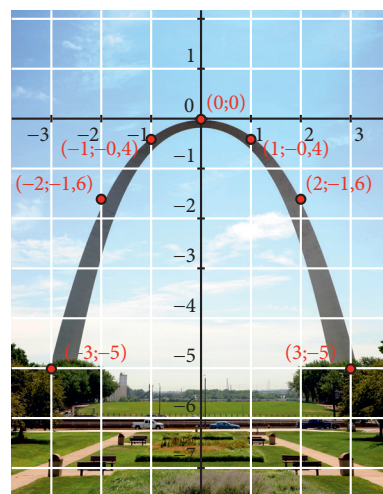
Először célszerű a nagyobb értékeknél keresni az összefüggést, hiszen a kisebb értékeknél a leolvasási hibák sokkal többet számítanak. Tekintsük például a $(3; -5)$ pontot. Ha a függvényünk hozzárendelési szabálya $x \mapsto -x^2$ lenne, akkor a 3-hoz az $y = -9$ függvényérték tartozna. A -5 ennek éppen $\frac{5}{9}$ -szereze, ami azt jelenti, hogy a függvényünk hozzárendelési szabálya csak az $x \mapsto -\frac{5}{9}x^2$ lehet.

Ha erre a függvényre vonatkozóan egy újabb sorral kiegészítve újra elkészítjük a fenti táblázatot, akkor a következőt kapjuk:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_{\text{mért}}$	-5	-1,6	-0,4	0	-0,4	-1,6	-5
$-\frac{5}{9}x^2$	-5	-2,2	-0,6	0	-0,6	-2,2	-5

A -2 -höz tartozó függvényérték $(-2,2)$ a fényképen mértnek (a $-1,6$ -nak) több mint 130%-a, a (-1) -hez tartozó pedig kb. a 150%-a a megfelelő mért értéknek. Láthatjuk, hogy az eltérés meglehetősen nagy. Ekkora eltérés nem adódhat a leolvasás pontatlanságából.

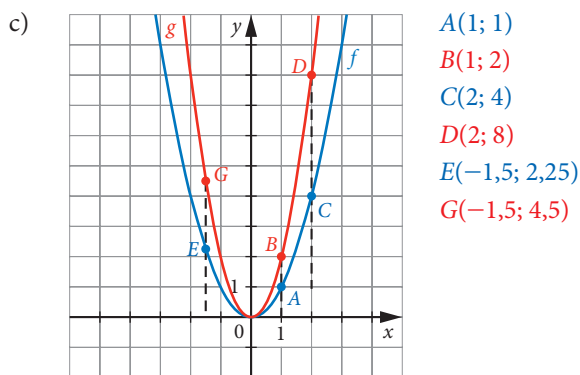
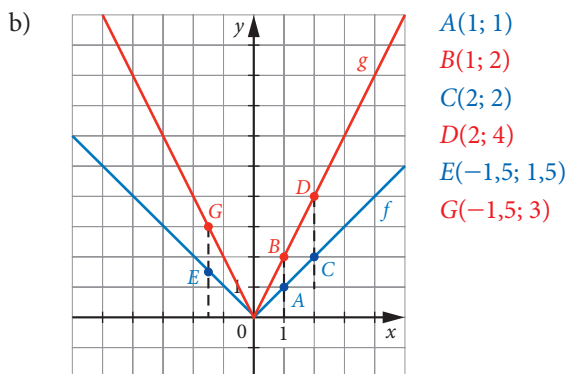
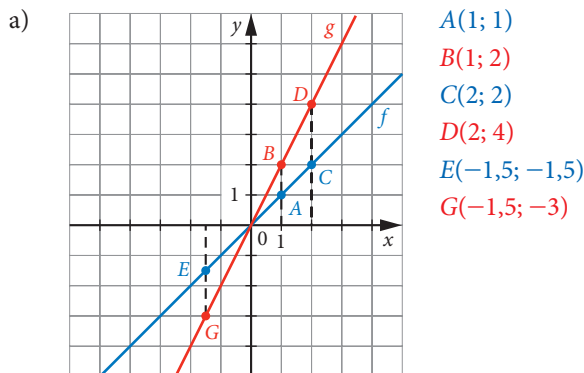
Ezek szerint az $x \mapsto -\frac{5}{9}x^2$ függvény grafikonja mégsem „idomul” az építmény ívéhez. Ez pedig arra enged következtetni, hogy a Gateway Arch külső íve – bár első ránézésre annak tűnhet, és sokan valóban ezt gondolják róla – nem parabola formájú. Hasonlóan megmutatható, hogy a belső ív sem parabolaív.



1. Két-két függvény grafikonját ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben! Az értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

- a) $f(x) = x$ és $g(x) = 2x$
 b) $f(x) = |x|$ és $g(x) = 2|x|$
 c) $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2x^2$

Megoldás



A **kék** grafikonból úgy kapjuk meg a **pirosat**, hogy minden egyes **kék** pont második koordinátáját kétszeresére változtatjuk, miközben az első koordináta változatlan marad.

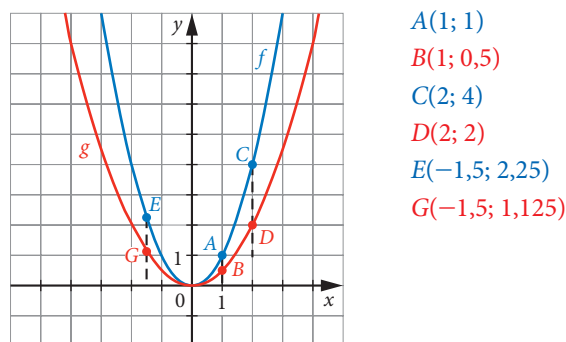
Szemléletesen: a **kék** grafikonokat az x tengelyre merőleges irányban kétszeresükre „megnyújtottuk” („soványabb” grafikonot kaptunk).

Megjegyzés

Ennek a geometriai transzformációnak a neve: *merőleges affinitás*, amelynek tengelye az x tengely.

2. Ábrázoljuk az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 0,5x^2$ függvény grafikonját!

Megoldás



Az $f(x) = x^2$ függvény **kék** grafikonjából úgy kapjuk meg az $g(x) = 0,5x^2$ függvény **piros** grafikonját, hogy minden egyes **kék** pont második koordinátáját felére változtatjuk, miközben az első koordináta változatlan marad. Szemléletesen: a **kék** grafikonat az x tengelyre merőleges irányban a felére „összenyomtuk” („kövérebb” grafikonot kaptunk).

Megjegyzés

Bizonyítható, hogy ha az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját az x tengelyre merőlegesen „megnyújtjuk” vagy „összenyomjuk”, a kapott görbe ismét parabola lesz (a parabola definícióját lásd a Ráadás részben). Tehát a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto cx^2$ ($c \neq 0$) függvény grafikonja parabola. Ennek a parabolának ugyanaz a szimmetriatengelye és a tengelypontja, mint az eredetinek. Ha $c > 0$, akkor a parabola „felfelé nyitott”, ha $c < 0$, akkor pedig „lefelé nyitott”. Megfordítva is igaz: ha egy parabola szimmetriatengelye az y tengely és tengelypontja az origó, akkor a parabola egy $x \mapsto cx^2$ ($c \neq 0$) függvény grafikonja.



Az ábrázolás megoldható a Graph vagy GeoGebra programok segítségével is.

FELADAT

1. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben!

$$f(x) = |x| \quad \text{és} \quad g(x) = \frac{1}{2}|x|$$

2. Ábrázold a következő függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben! Értelmezési tartomány a nemnegatív valós számok halmaza, azaz $\mathbb{R}_0^+$.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{és} \quad g(x) = 2\sqrt{x}$$

3. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben!

a) $f(x) = |x|$ és $g(x) = -|x|$

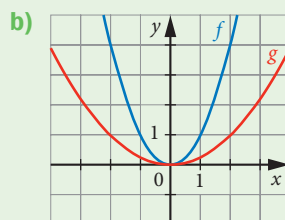
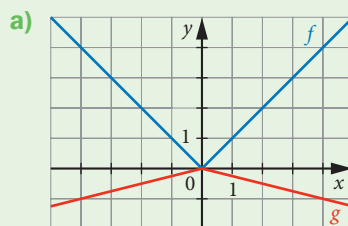
b) $f(x) = x^2$ és $g(x) = -x^2$

4. Ábrázold a következő függvények grafikonját! Figyelj az értelmezési tartományra! Olvasd le a grafikonról a függvények értékkészletét!

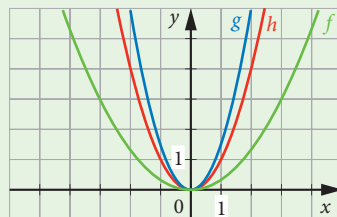
a) $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2|x|$

b) $g: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

5. Ábrázoltuk néhány, a valós számok halmazán értelmezett függvény grafikonját. Add meg a függvények hozzárendelési szabályát! Melyik függvénynek van minimuma, melyiknek van maximuma?



6. a) Melyik függvény hozzárendelési szabálya az $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$ az alábbi ábrán?



- b) Add meg a másik két másodfokú függvény hozzárendelési szabályát is!

HÁZI FELADAT

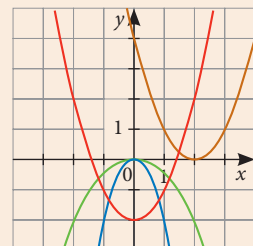
1. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi három függvény grafikonját! (A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.)

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{x^2}{3}, \quad h(x) = -\frac{x^2}{4}$$

2. Közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényeket:

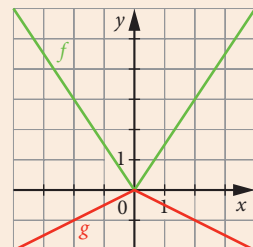
$$f(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = (x - 2)^2, \quad h(x) = -2x^2, \quad k(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

Melyik hozzárendelési szabályhoz melyik grafikon tartozik?



3. Add meg a grafikonokhoz tartozó függvények hozzárendelési szabályát, és jellemezd a függvényeket! Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

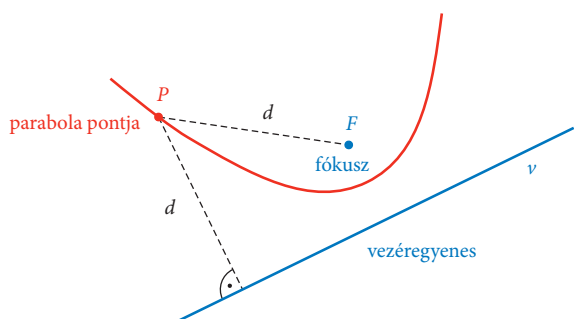
	hozzárendelési szabály	értékkészlet	zérushely	szélsőértéke minimum vagy maximum?	szélsőérték	szélsőérték helye
f						
g						



1. Mi a parabola?

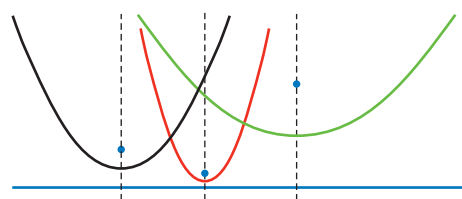
Vegyünk fel a síkban egy egyenest és egy olyan pontot, amely nincs rajta ezen az egyenesen. Nevezzük a pontot fókusznek (F), az egyenest vezéregyenesnek (v).

A sík összes olyan pontjának a halmazát, amely egyenlő távolságra van a fókuszról és a vezéregyenestől, **parabolának** nevezzük.



Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza. Az ábrán P pont és v egyenes távolsága egyenlő a PF szakasz hosszával.

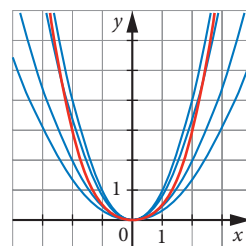
A parabola tengelyesen szimmetrikus ponthalmaz, a szimmetriatengelye átmegy a fókuszon és merőleges a vezéregyenesre. Az, hogy „sovány” vagy „kövér” a parabola, csakis a fókusz és a vezéregyenes távolságától függ. Ha ezt a távolságot növeljük, akkor a parabola „kövérebb” lesz, ha csökkentjük, akkor pedig „soványabb”. (Az ábrán látható három parabolának közös a vezéregyenes, de a fókuszoknak a vezéregyenestől való távolsága különböző. Minél kisebb a távolság, annál „soványabb” a parabola.)



2. A láncgörbe

A Gateway Arch alakját firtató probléma egy amerikai riporter téves megállapításából származik. Amikor az építményt 1968-ban felépítették, az újságíró így kezdte helyszíni riportját: „Ezen a napon a munkások feltették az utolsó követ a St. Louis-i Gateway Arch-ra, s ezzel felépült a világ leghíresebb parabolája.” Ő éppúgy a szemére hagyatkozott, mint Galileo Galilei, aki azt gondolta, hogy a két végénél megtartott, saját súlya alatt függeszkedő lánc szintén parabola alakot vesz fel. Azóta már bebizonyosodott, hogy nem parabola a függeszkedő lánc alakja. Ezt az alakot (éppen emiatt) **láncgörbének** hívjuk, a Keleti pályaudvar tetőzete, vagy a járdát az úttesttől elválasztó oszlopok közötti láncok egy transzformált láncgörbét formáznak.

A mellékelt rajzon pirossal egy **láncgörbét**, kékkel pedig parabolaíveket ábrázoltunk. Látható, hogy a „soványabb” parabolák az origó körül mutatnak jelentős eltérést a láncgörbétől, a „kövérebb” parabolák pedig az origótól távolodva válnak el egyre jobban tőle.



3. Metszi-e egymást az f és g függvények grafikonja? A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy kedves magyar falu neve rakható ki. Melyik ez a település?

(Minden függvény esetén az értelmezési tartomány a valós számok halmaza)

a függvények		metszik egymást a grafikonok?	
f	g	igen	nem
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x $	A	M
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto (x-2)^2$	Y	A
$x \mapsto x^2 + 3$	$x \mapsto -x^2$	T	B
$x \mapsto - x $	$x \mapsto (x-3)^2$	Ó	N
$x \mapsto x^2 - 3$	$x \mapsto - x $	B	D
$x \mapsto x $	$x \mapsto x + 2$	I	L
$x \mapsto x - 1$	$x \mapsto 2 x $	L	O
$x \mapsto (x+2)^2$	$x \mapsto x-2 $	K	T
$x \mapsto -x^2$	$x \mapsto - x $	É	G

KIDOLGOZOTT FELADAT

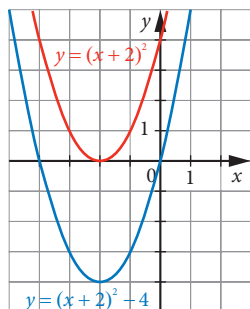
1. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény grafikonját, ha

$$f(x) = (x + 2)^2 \text{ és } g(x) = (x + 2)^2 - 4$$

Megoldás

Könnyen észrevehetjük, hogy $g(x) = f(x) - 4$ bármely valós számot jelöljön is az x .

Ez pedig azt jelenti, hogy az f függvény grafikonját az y tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 4 egységgel eltolva megkapjuk a g függvény grafikonját.



2. Adott az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ függvény. Adjuk meg, hogy mely transzformációk egymás utáni végrehajtásával juthatunk el az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából a megadott függvény grafikonjához, és ábrázoljuk a transzformációkkal kapott grafikonokat!

Megoldás

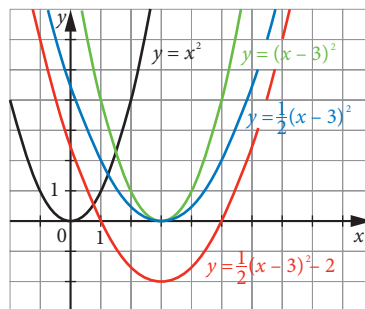
A válasz megadásához elegendő, ha azt az utat követjük, ahogyan egy adott x helyen kiszámítjuk a függvényértéket:

- először „kiszámítjuk” $(x - 3)^2$ értékét,
- majd vesszük ennek a felét: $\frac{1}{2}(x - 3)^2$,
- a kapott „számból” kivonunk 2-t: $\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$.

A megfelelő transzformációk tehát rendre a következők lehetnek:

- eltolás az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban 3 egységgel,
- „összenyomás” felére az x tengelyre merőlegesen,
- eltolás az y tengellyel párhuzamosan, negatív irányban 2 egységgel.

A transzformációkat szemlélteti a mellékelt ábra.



ELMÉLET

Legyen a függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és c egy valós szám ($c \neq 0$).

Hogyan kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából a **függvénytranszformáció** során nyert függvény grafikonját?

$f(x) + c$	Eltoljuk f grafikonját az y tengellyel párhuzamosan c -vel.	„fel-le”
$f(x + c)$	Eltoljuk f grafikonját az x tengellyel párhuzamosan $(-c)$ -vel.	„jobbra – balra”
$-f(x)$	Tükrözzük f grafikonját az x tengelyre. (ez az előzőnek egy speciális esete)	tükrözés az x tengelyre
$c \cdot f(x)$	„Megnyújtjuk” vagy „zsugorítjuk” f grafikonját. Ha c negatív, akkor tükrözzük is az x tengelyre.	„soványabb-kövérébb”
$ f(x) $	Ahol f értéke negatív, azt a görbedarabot tükrözzük az x tengelyre.	

FELADAT

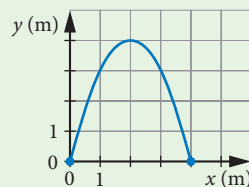
1. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

$$f(x) = (x + 3)^2 - 2 \quad g(x) = |x + 1| + 3$$

2. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját közös koordináta-rendszerben!

a) $f(x) = -(x - 2)^2$ és $g(x) = -(x - 2)^2 + 1$ b) $f(x) = -|x + 2|$ és $g(x) = -|x + 2| + 4$

3. Grafikonon ábráztuk, milyen pályát fut be egy kis pattogó labda két pattanás között (a közegelenállástól eltekintünk). Add meg annak a függvénynek az értelmezési tartományát és hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja megegyezik a labda pályájával!



4. Adj a hozzárendelési szabályban szereplő betűknek olyan értéket, hogy teljesüljenek a függvénytulajdonságok! A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

hozzárendelési szabály	függvény tulajdonságok	$a = ?$	$b = ?$
$x \mapsto (x + a)^2 + b$	minimumhelye: $x = 4$; minimum értéke 3		
$x \mapsto ax^2 + b$	maximum értéke 5		
$x \mapsto x + a + b$	minimumhelye: $x = -6$; minimum értéke 1		
$x \mapsto a x + b $	maximumhelye: $x = 3,5$		
$x \mapsto x + a + b$	értékkészlete $[7; \infty[$		

5. Add meg a füzetedben a hiányzó koordinátatengelyeket és a tengelyeken az egységeket a parabolákhoz!

a) $x \mapsto (x - 2)^2 - 1$



b) $x \mapsto -(x - 2)^2 + 1$



c) $x \mapsto 2x^2 - 3$

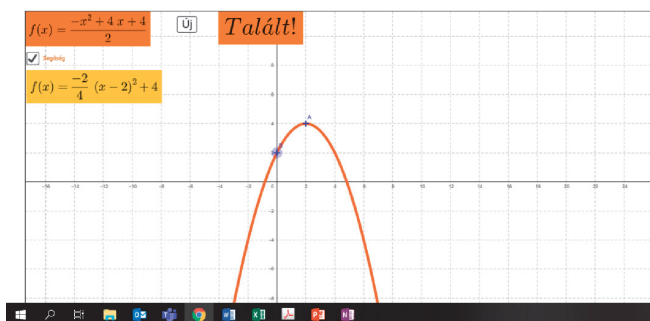


6. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2|x + 3| + 4$ függvény. Add meg, hogy mely transzformációk egymás utáni végrehajtásával juthatunk el az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjából a megadott függvény grafikonjához, és ábrázold a transzformációk során kapott grafikonokat!



A függvények ábrázolásához a *GeoGebra* vagy a *Graph* program is használható.

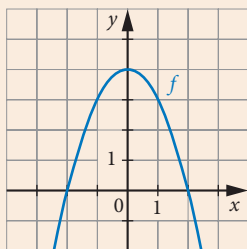
A szabály alapján határozd meg a másodikfüggvény képét!
Az A pont a parabola tengelypontja, a B pont pedig egy tetszőleges pontja.
A helyes függvénykép meghatározása esetében narancsszínűvé válik a függvényed!



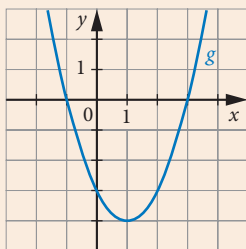
HÁZI FELADAT

1. Add meg a valós számok halmazán értelmezett függvények hozzárendelési szabályát a grafikonjuk alapján!

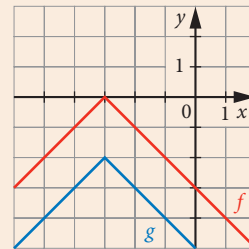
a)



b)



c)



2. Ábrázold a következő függvények grafikonját!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x + 1)^2 + 1,5$

b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = |x - 2| - 3$

3. Csoportosítsd a függvényeket aszerint, hogy melyiknek van minimuma, melyiknek van maximuma! Írd a függvények betűjelét a táblázat megfelelő cellájába!

A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

$f(x) = (x + 3)^2 - 2$

$h(x) = -2(x - 3)^2$

$l(x) = |x + 3| - 8$

$g(x) = -(x + 3)^2$

$k(x) = -|x + 3|$

$m(x) = |x - 3| + 3$

minimuma van		maximuma van	
minimumhelye: $x = 3$	minimumhelye: $x = -3$	maximumhelye: $x = 3$	maximumhelye: $x = -3$

4. Add meg a hozzárendelési szabályban szereplő a , illetve b értékét úgy, hogy teljesüljön a megadott függvénytulajdonság!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x + a)^2 + b$

minimumhelye a 2, minimuma az 1,5

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 + b$

maximuma 3,5

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = |x + a| + b$

minimumhelye a -3 , minimuma a -2

d) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = 3|x| + b$

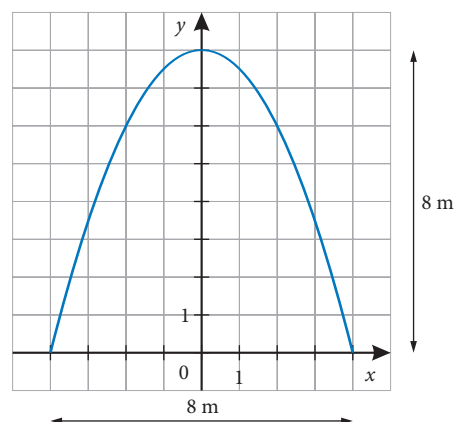
értékkészlete $[2,5; \infty[$

RÁADÁS

1. Hány közös pontja van a következő függvenypárok grafikonjainak? A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy ismert magyar város neve rakható ki. Melyik ez a város? (Minden függvény esetén az értelmezési tartomány a valós számok halmaza)

a függvények		metszéspontok száma			
f	g	0	1	2	3
$x \mapsto 2x^2$	$x \mapsto x - 3 $	K	T	O	Á
$x \mapsto (x + 1)^2 + 3$	$x \mapsto x + 1 - 3$	P	Y	A	R
$x \mapsto (x + 4)^2 - 1$	$x \mapsto x + 4 + 2$	G	E	N	I
$x \mapsto (x - 5)^2 + 1$	$x \mapsto x - 5 + 1$	K	N	I	R
$x \mapsto (x + 2)^2 + 3$	$x \mapsto - x + 2 + 3$	Z	O	B	A
$x \mapsto (x - 2)^2 + 3$	$x \mapsto -2 x + 3$	S	D	Á	Y

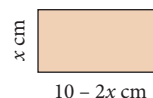
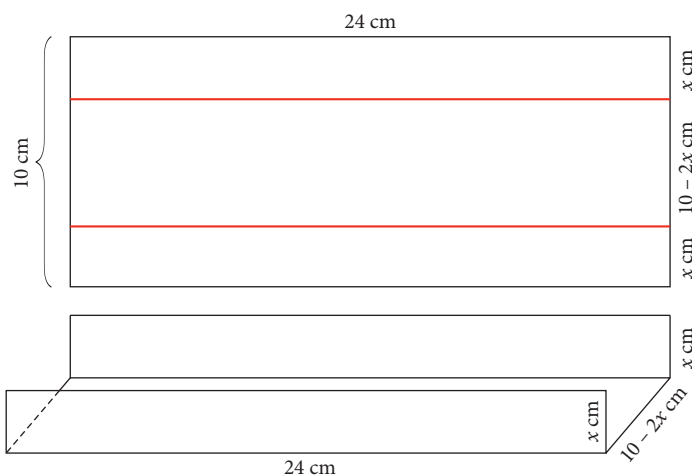
2. Egy kapu alakja lefelé fordított parabola ív.
A kaput egy koordináta-rendszerben ábrázoltuk.
A kapu magassága 8 m, szélessége az aljánál 8 m.
Add meg azt a függvényt, amelynek grafikonja a kapu ívét adja!



3. Az alábbi f függvénynek két zérushelye van, 0-ban és 5-ben. Mennyi a paraméterek értéke?

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -0,6x^2 + bx + c$$

4. Egy díszdoboz „alsó” részének elkészítéséhez egy 24 cm hosszú, 10 cm széles kartonlapból „vályút” készítünk úgy, hogy a két szélét derékszögben felhajtjuk. Milyen széles részt hajtsunk fel, hogy a vályú keresztmetszetének a területe a lehető legnagyobb legyen?



Megoldás

A keresztmetszet olyan téglalap, amelynek az oldalai x cm és $(10 - 2x)$ cm hosszúak, ezért a területe $x(10 - 2x)$ cm². Az x egy 5-nél kisebb pozitív szám lehet.

Ábrázoljuk az $x \in \mathbf{R}, x \mapsto x(10 - 2x)$ függvényt, vizsgáljuk meg, hol veszi fel a legnagyobb értékét a $]0; 5[$ intervallumon!

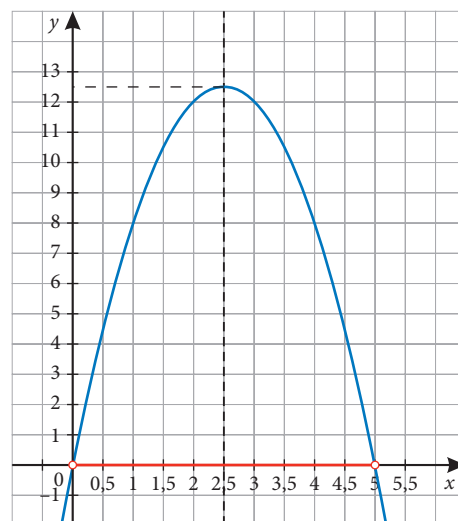
Ez egy **másodfokú függvény** (hiszen a hozzárendelési szabálya $x \mapsto 10x - 2x^2$ alakban is megadható, és ez másodfokú kifejezés). A grafikonja *lefelé nyitott* parabola. Hol metszi a parabola az x tengelyt?

$x(10 - 2x) = 0$, ha $x = 0$, illetve ha $10 - 2x = 0$, vagyis ha $x = 5$.

Azt látjuk, hogy a függvényünk zérushelyei 0 és 5, a parabola tengelye pedig ezek között középen, 2,5-nél metszi az x tengelyt. Éppen ez a szám a tengelypont első koordinátája. Itt a legnagyobb a függvény értéke, vagyis a vályú keresztmetszetének a területe.

Tehát a 10 cm-es oldalból kétfelől egy-egy 2,5 cm-es darabot kell felhajtanunk, hogy a legnagyobb keresztmetszetű vályú keletkezzen.

A téglalap területe pedig $2,5 \cdot 5 = 12,5$ (cm²).



BEVEZETŐ

Bence mérgesen kiáltott fel, miközben éppen a matek házi feladatát készítette: „Ilyen feladatot nem is csináltunk, ezért nem tudom megoldani!” Édesapja megnézte, és látta, hogy az $x \mapsto x^2 + 6x + 9$ függvényt kellett Bencének ábrázolnia a valós számok halmazán. Így szólt a fiához: „Bence, hiszen éppen ilyen feladatokat gyakoroltatok ezen az órán, csak nem pontosan ebben az alakban volt megadva a hozzárendelési szabály!” Bence egy kicsit elcsodálkozott, de rövid idő múlva így kiáltott: „Tényleg! Ez nagyon egyszerű feladat!”

FELADAT

1. ☞ Kösd össze az egyenlőket! Az egyiknek nincs párja, ahhoz írd fel a hiányzó alakot!

$$(x + 10)^2$$

$$(x - 5)^2$$

$$(x - 10)^2$$

$$x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 + 20x + 100$$

$$x^2 - 20x + 100$$

2. ☞ Használd a nevezetes azonosságot, majd ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

$$f(x) = x^2 + 6x + 9$$

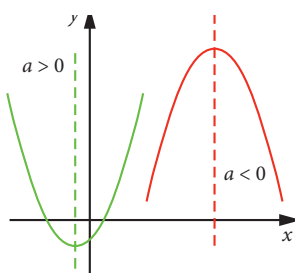
$$g(x) = x^2 - 8x + 16$$

ELMÉLET

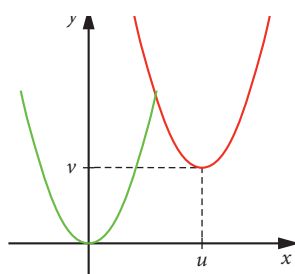
1. Ha a , b és c adott számok és $a \neq 0$, akkor a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvényt **másodfokú függvénynek** nevezzük. A másodfokú tagban szereplő együtthatót (vagyis a -t): **főegyütthatónak** hívjuk.

Például: az $x \mapsto 3x^2 - 2x - 5$ függvény másodfokú, továbbá itt $a = 3$, $b = -2$ és $c = -5$, a főegyüttható 3.

2. Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, melynek tengelye merőleges az x tengelyre. Ez a parabola „felfelé” nyitott, ha főegyütthatója pozitív, azaz $a > 0$, és „lefelé” nyitott, ha főegyütthatója negatív, azaz $a < 0$.



3. Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ hozzárendelési szabály algebrai módszerekkel átalakítható $x \mapsto a(x - u)^2 + v$ alakra. Az itt szereplő u és v éppen a parabola tengelypontjának az első, illetve második koordinátája. E számok azt is megmutatják, mennyivel kell eltolni az $x \mapsto ax^2$ függvény grafikonját a koordinátatengelyek mentén, hogy az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvény grafikonját kapjuk.



$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

függvény grafikonja

függőleges tengelyű parabola

$$a > 0$$

felfelé nyitott

a függvénynek minimuma van

$$a < 0$$

lefelé nyitott

a függvénynek maximuma van

FELADAT

3. Ábrázold az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-3)^2 - 4$ függvény grafikonját!

a) Algebrai átalakítás segítségével add meg ennek a másodfokú függvénynek az általános alakját! ($f(x) = ax^2 + bx + c$)

b) Olvasd le a parabola tengelypontját!

c) Hol veszi fel ez a függvény a minimumát?

4. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját! Van-e zérushelyük? Melyik függvénynek van minimuma, melyiknek van maximuma?

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

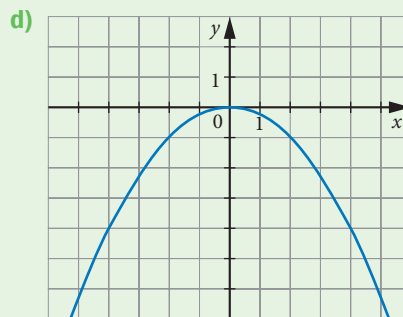
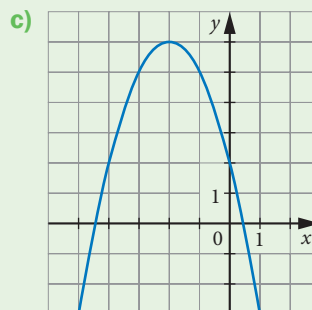
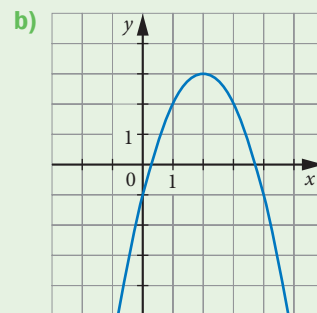
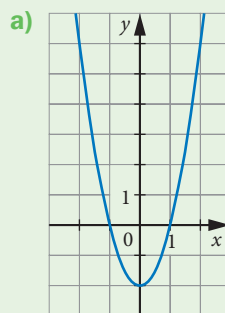
$$h(x) = -x^2 + 4x - 4$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$k(x) = x^2 - 10x + 25$$

5. Egy másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, amely egybevágó az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjával, és amelynek tengelypontja a $(-2; 5)$ pont. Hány ilyen másodfokú függvény van? Írd fel ezek hozzárendelési szabályát!

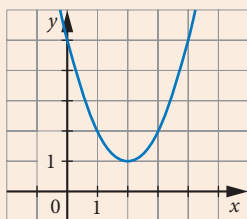
6. Olvasd le a grafikonról a valós számok halmazán értelmezett függvények hozzárendelési szabályát majd rendezd $ax^2 + bx + c$ alakba! Határozd meg a , b és c értékét!



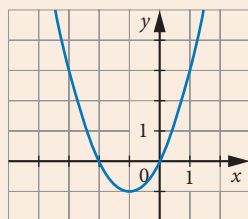
HÁZI FELADAT

1. Ábrázoltuk két függvény grafikonját. Olvasd le a grafikonról a hozzárendelési szabályt, majd a zárójel felbontása után rendezd a kifejezést $ax^2 + bx + c$ alakra, ahol a , b és c valós számok! Add meg a , b és c értékét!

a)



b)



2. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvényeket! Melyiknek van minimuma, melyiknek van maximuma?

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$g(x) = -x^2 + 6x - 9$$

$$h(x) = x^2 + 3x + 2,25$$

3. Adj meg olyan, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvényt, melynek a -4 helyen minimuma van, és a minimum értéke -3 ! Írd fel a függvényt az általános ($x \mapsto ax^2 + bx + c$) alakjával is!



A másodfokú függvények ábrázolásához használható a GeoGebra program is.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) Foglalkozunk először az egyszerűbb, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = 3x^2 - 6x \text{ függvénnyel!}$$

Ez egy másodfokú függvény, grafikonja ezért egy parabola, melynek tengelye merőleges az x tengelyre. Ez a parabola felfelé nyitott, mert az x^2 együtthatója 3, ami pozitív. Határozzuk meg a g függvény zérushelyeit! Ezeket úgy kapjuk meg, ha megoldjuk a $3x^2 - 6x = 0$ egyenletet.

$$3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x) = 3x(x - 2) = 0$$

A szorzat 0, ha legalább az egyik tényezője 0, ezért a g függvény zérushelyei 0 és 2. Ezeket már be is jelölhetjük a koordináta-rendszerben.

A parabola szimmetriatengelye a két zérushely között középen metszi az x tengelyt. Ezt is bejelölhetjük.

Látható, hogy a szimmetriatengelyen lévő pont első koordinátája 1. Ennyi tehát a parabola tengelypontjának első koordinátája. Milyen értéket vesz fel a g függvény az 1 helyen?

$$g(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3.$$

A parabola tengelypontja tehát az $(1; -3)$ pont.

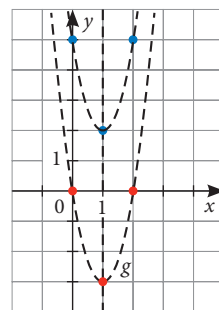
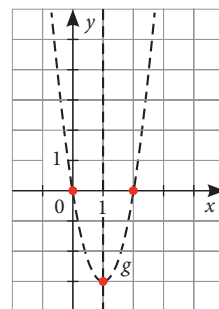
A két zérushely és a tengelypont segítségével elég jó ábrát készíthetünk a g függvényről.

- b) Az f függvény abban különbözik a g függvénytől, hogy értéke minden helyen 5-tel több:

$$f(x) = g(x) + 5.$$

Ezért az f grafikonját megkaphatjuk, ha a g grafikonját az y tengely mentén 5 egységgel feljebb toljuk. Ezt úgy érdemes megtenni, hogy az előbb meghatározott 3 pontot feljebb toljuk, és abból rajzoljuk meg a parabolát.

Az f függvény tengelypontja leolvasható a grafikonról: az $(1, 2)$ pont.



ELMÉLET

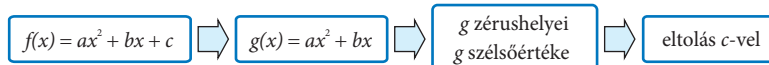
A másodfokú függvény, a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) ábrázolásának egyik útja:

1. Első lépésként az f helyett a konstans tag (c) elhagyásával kapott g függvény grafikonját ábrázoljuk 3 pontjával.

A $g(x) = ax^2 + bx$ függvény képe egy parabola.

- zérushelyeit megkaphatjuk az $ax^2 + bx = 0$ egyenletből. A kifejezést alakítsuk szorzattá! (Az egyik zérushely a 0.)
- a szimmetriatengely az x tengelyre merőleges, és a két zérushely között „középen” (számtani közepénél) metszi a tengelyt.
- a parabola tengelypontjának első koordinátáját a szimmetriatengely jelöli ki. A másik koordinátát megkapjuk, ha behelyettesítünk g -be. (Ellenőrizhetjük, hogy a parabola felfelé nyitott, ha $a > 0$, lefelé nyitott, ha $a < 0$.)

2. Az f függvény grafikonját megkapjuk, ha a g grafikonját (3 pontja segítségével) az y tengely mentén c -vel eltoljuk.



- minimuma van, ha $a > 0$
- maximuma van, ha $a < 0$

FELADAT

1. Szoroztá alakítással oldd meg az egyenleteket!

a) $x^2 - 8x = 0$

c) $2x^2 - 8x = 0$

b) $x^2 + 3,2x = 0$

d) $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$

2. Ábrázold a zérushelyek és a szélsőérték segítségével az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 5x$ másodfokú függvény grafikonját, majd ennek segítségével ugyanabban a koordináta-rendszerben a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 + 5x + 3$ másodfokú függvény grafikonját is! Add meg a g függvény szélsőértékének helyét és értékét!

3. Ábrázold a zérushelyek és a szélsőérték segítségével az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ másodfokú függvény grafikonját a valós számok halmazán, majd ennek segítségével ugyanabban a koordináta-rendszerben a $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$ másodfokú függvény grafikonját is! Add meg a g függvény szélsőértékének helyét és értékét!

4. Határozd meg a függvények ábrázolása nélkül a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 0,1x^2 - 2,2x$ és $g(x) = 0,1x^2 - 2,2x + 5,8$ másodfokú függvények minimumhelyét és a minimum értékét!

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$ másodfokú függvény grafikonját! Első lépésként ábrázold a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 2x^2 - 10x$ függvény grafikonját a zérushelyei és a szélsőértéke segítségével!

2. Ábrázold a $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = 12x - 3x^2 + 7$ függvény grafikonját úgy, hogy először a $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $k(x) = 12x - 3x^2$ függvény grafikonját rajzolod meg a k zérushelyei és szélsőértéke segítségével! Add meg a h függvény maximumát és maximumhelyét!

3. Határozd meg a következő másodfokú függvények zérushelyeit! Minimuma vagy maximuma van a függvényeknek? A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

a) $f(x) = 0,2x^2 - 5x$

b) $g(x) = -0,2x^2 - 0,8x$

c) $h(x) = 7x - 5x^2$

d) $k(x) = 0,4x^2 - 1,6x + 1,6$



Függvényábrázoló programmal ellenőrizheted a megoldásaid helyességét.

RÁADÁS

Spanyolországban, Valencia városában található a híres L'Umbracle nevű télikert, melynek keresztmetszete Gateway Arch boltívéhez hasonlóan egy láncgörbe. A télikert magassága 8 m, szélessége 12 m.

Ha láncgörbe esetén nem is tudjuk, de gondoljuk végig, hogy egy hasonló méretű, parabola keresztmetszet esetén hová telepíthetünk a télikerten belül pálmákat, ha tudjuk, hogy egy pálma 6 méteresre nő meg, és lombkoronája 2 m széles?

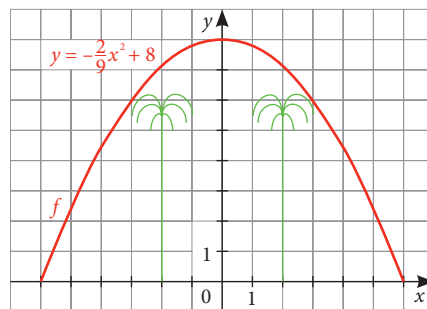
Megoldás

Helyezzünk egy parabolívét az ábra szerint egy olyan koordináta-rendszerbe, amelynek tengelyein 1 méteres egységeket jelöltünk ki úgy, hogy az ív magassága 8, alapja 12 egység legyen!

Ez a parabolaív az $x \mapsto -\frac{2}{9}x^2 + 8$ másodfokú függvény grafikonjára illeszkedik.

A 6 m magas pálma lombkoronájának széle olyan d távolságra lehet a parabola tengelyétől, amelyre

$-\frac{2}{9}d^2 + 8 = 6$, amiből $d^2 = 9$, vagyis a lombkorona széle legfeljebb 3 m-re lehet a parabola tengelyétől, a pámlafa törzse pedig legfeljebb 2 m-re.



FELADAT

1. Határozd meg, hol van zérushelye és szélsőértéke a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeknek!

a) $f(x) = x^2 + 112x$ b) $g(x) = 14x^2 - 168x$

2. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = x^2 - 3x - 2$

b) $f(x) = 2x^2 - 8x$; $g(x) = 2x^2 - 8x + 7$

3. Egy matematikai modell szerint, ha egy terepjáró 1 liter üzemanyaggal x km-t képes megtenni, akkor a terepjáró szén-dioxid-kibocsátása 50 000 km-en, kg-ban mérve: $d(x) = 200x^2 - 5200x + 44\,000$. Ez a matematikai modell akkor érvényes, ha $4,8 \leq x \leq 13,2$.



A matematikai modell alapján elemezd a terepjárók szén-dioxid-kibocsátását!

- a) Hány liter üzemanyagot fogyaszt 100 km-en az a terepjáró, amely 1 liter üzemanyaggal 4,8 km-t képes megtenni? És az, amelyik 13,2 km-t?
- b) A modell szerint hány km-t képes megtenni 1 liter üzemanyaggal az a terepjáró, amelyik a legkevesebb szén-dioxidot bocsátja ki? Hány liter üzemanyagot fogyaszt 100 km-en ez a terepjáró?
- c) Hány kilogramm szén-dioxidot juttat a légkörbe 50 000 km-en a legkevésbé szennyező terepjáró? És az, amelyik a legtöbb szén-dioxidot bocsátja ki?

4. Veszélyes hulladék megsemmisítése

Egy amerikai államban egy tanulmány részeként a veszélyes hulladékok kezelésével is foglalkoztak. A veszélyes hulladéknak a PCP (pentaklórfenol) eltávolítása céljából történő kezelési költsége növekszik az eltávolított PCP mennyiségének növekedésével. Egy **matematikai modell szerint**, ha naponta x kilogramm PCP-t távolítanak el, akkor a költség dollárban kifejezve:

$$k(x) = 2000 + 100x^2.$$



Az állam PCP-kilogrammonként 500 dollárt átválal a költségekből.

Elemezzük a nettó (az állami hozzájárulás következtében kialakuló) költséget a **matematikai modell** alapján, a naponta megsemmisített PCP mennyiségének függvényében!

- a) Ábrázold közös koordináta-rendszerben, hogy x kg PCP megsemmisítése esetén :
- Hogyan alakulnának a költségek, ha nem lenne hozzá állami támogatás?
 - Hogyan alakulnak a költségek az állam támogatásával?

Válassz olyan egységeket a vízszintes és a függőleges tengelyekre, hogy szemléletesek legyenek a grafikonok!

- b) Hány kg PCP megsemmisítése esetén lesz a napi költség a legkisebb? Mekkora ez a legkisebb napi költség?
- c) Mire tudnál még következtetni a költségekre felírt $k(x)$ függvényből?

5. Egy 20 cm hosszú cérnaszállal téglalap alakú síkrészt kerítünk el.

- a) Ha a téglalap egyik oldalának hossza x cm, akkor hány cm hosszú a téglalap másik oldala, és hány cm^2 a téglalap területe?
- b) Ábrázold az oldalhossz és a terület kapcsolatát!
- c) Melyik x -hez tartozik a legnagyobb terület?

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

- a) $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 1,5|$;
 $h(x) = |x + 1,5| - 2,5$;
- b) $f(x) = 2x^2 + 6x$; $g(x) = 2x^2 + 6x - 1$

2. Egy terepjáró átlagos, kilogrammban mért tömege egy matematikai modell szerint a következőképpen függ a terepjáró évjáratától:
- $$m(t) = 1,5t^2 - 45t + 2100,$$
- ahol $5 \leq t \leq 27$, és t az időt jelöli. A $t = 0$ érték azt jelenti, hogy 1970-ben, a $t = 5$ azt, hogy 1975-ben



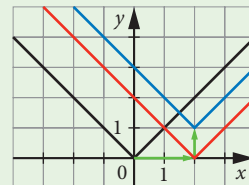
és így tovább, a $t = 27$ azt, hogy 1997-ben gyártották a gépkocsit.

A modell szerint

- a) mekkora volt a terepjárók átlagos tömege 1975-ben, 1980-ban, 1990-ben;
- b) melyik évben csökkent és melyikben növekedett a terepjárók átlagos tömege;
- c) melyik évben volt a legkisebb a terepjárók átlagos tömege, és ez hány kg volt;
- d) mekkora volt a terepjárók átlagos tömege 2000-ben?
3. Egy 20 cm hosszú cérnaszállal téglalap alakú síkrészt kerítünk el úgy, hogy a téglalap egyik oldala egy hosszú hurkapálca egy része, és csak a másik három oldal cérna.
- a) Ha a téglalap egyik oldalának hossza x cm, akkor hány cm hosszú a téglalap másik oldala, és hány cm^2 a téglalap területe? (Két lehetőség is van!)
- b) Ábrázold az oldalhossz és a terület kapcsolatát!
- c) Melyik x -hez tartozik a legnagyobb terület? Hasonlítsd össze a lecke 4. feladatára kapott választ a most adott válasszal! Mit tapasztalsz?

FELADAT

1. Egy függvény grafikonját kétszer egymás után eltoltuk a koordináta-rendszerben. Mely függvények grafikonját kaptuk az egyes lépések után?
A példa alapján töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!

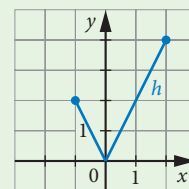
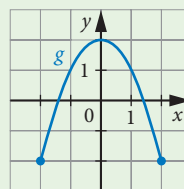
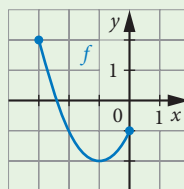


kiindulási függvény	első eltolás		második eltolás	
$x \mapsto x $	jobbra 2-vel	$x \mapsto x - 2 $	felfelé 1-gyel	$x \mapsto x - 2 + 1$
$x \mapsto x^2$	balra 3-mal		felfelé 2-vel	
$x \mapsto x $		$x \mapsto x + 1,5 $		$x \mapsto x + 1,5 - 4$
$x \mapsto x^2$		$x \mapsto (x - 6)^2$		$x \mapsto (x - 6)^2 - 15$
$x \mapsto 2x^2$		$x \mapsto 2x^2 + 11$	lefelé 2-vel	

2. A következő függvények esetében az értelmezési tartomány nem a valós számok halmaza, hanem egy intervallum. Ábrázold a függvények grafikonját, majd határozd meg a függvények értékkészletét!

a) $f:]-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|$ b) $g: [1; 4] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x - 2)^2$ c) $h: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -|x| + 2$

3. A grafikonjuk alapján határozd meg a következő függvények hozzárendelési utasítását, és töltsd ki a táblázatot!



	értelmezési tartomány	hozzárendelési szabály	minimumhely	minimum	maximumhely	maximum
f						
g						
h						

4. Állapítsd meg a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvények zérushelyeit és szélsőértékét!

hozzárendelési szabály	zérushelyek	minimuma vagy maximuma van?	szélsőérték hely	szélsőérték
$x \mapsto x^2 + 8x$				
$x \mapsto 2x^2 - 9x$				
$x \mapsto -x^2 + 3x$				
$x \mapsto -0,02x^2 + 3x$				

5. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját! (értelmezési tartomány a valós számok halmaza)

a) $f(x) = 2x^2 - 6x$ és $g(x) = 2x^2 - 6x + 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ és $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1,5$
b) $f(x) = -x^2 + 4x$ és $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

6. Egy 40 méter magas toronyban függőlegesen felfelé felhajítanak egy kislabdát. A következő függvény a földet érés pillanatáig azt adja meg, hogy t másodperc múlva hány méter magasan van a labda a talajszint fölött:
 $h(t) = -5t^2 + 10t + 40$

- a) Milyen magasan van 1 másodperc, 2 másodperc, 3 másodperc elteltével a labda?
 b) Ábrázold koordináta-rendszerben a labda magasságát az idő függvényében! Alkalmasan válaszd meg a koordináta-rendszer egységeit!
 c) Mikor van legmagasabban a labda?
 d) Mikor ér a labda a talajszintre?

HÁZI FELADAT

1. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = |x - 1,5| + 1$

b) $g(x) = (x - 1)^2 - 4$

c) $h(x) = -x^2 + 3$

2. A táblázatban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Írd a függvényekhez a rájuk jellemző tulajdonság betűjelét!

a: minimuma van

e: maximumhelye az 5

b: maximuma van

f: minimumhelye a -5

c: értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza

g: zérushelye az 5

d: minimumhelye az 5

$x \mapsto x - 5 + 1$	$x \mapsto (x + 5)^2$	$x \mapsto -(x - 5)^2$	$x \mapsto (x - 5)^2 + 2$	$x \mapsto 2x^2 - 5x$

3. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ függvény grafikonját!

4. Ábrázold a következő függvények grafikonját, majd határozd meg a függvények értékkészletét, szélsőérték helyeit és szélsőértékeit!

a) $f: [-3; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 2|$

b) $g: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x - 2)^2 + 2$

TUDÁSPRÓBA

1. Ábrázold a következő függvény grafikonját!

$x \in \mathbb{R} \quad x \mapsto |x + 5| - 2$

2. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját told el az x tengely mentén pozitív irányban három egységgel, majd az y tengely mentén egy egységgel! Melyik függvény grafikonját kaptad a két eltolás után?

Határozd meg a kapott függvény minimumhelyét és minimumát!

3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját!

$D_f = [-1; 3] \quad f(x) = x^2$

$D_g = [-1; 3] \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Határozd meg a függvények értékkészletét!

4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

$f(x) = x^2 - 4x$ és $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Határozd meg a g függvény szélsőértékének helyét és szélsőértékét!

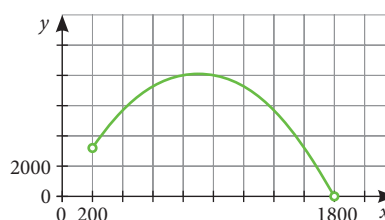
5. Egy gép alkatrészeket gyárt. A gyártás hasznát (forintban) a cég a következő függvénnyel számolja: óránként x db alkatrész gyártásakor ($200 < x < 1800$) a haszon $f(x) = -0,01x^2 + 18x$.

a) Mekkora a haszon, ha 500 terméket gyártanak?

b) Mekkora a haszon, ha 800 terméket gyártanak?

c) Mekkora a haszon, ha 1000 terméket gyártanak?

d) Ábrázoltuk az f függvény grafikonját. Milyen x értéknél lesz a gép üzemeltetése optimális? Mennyi az elérhető legnagyobb haszon?



TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

- 1.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 + 1,5$ $h(x) = (x + 1,5)^2$

b) $f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 - 2,5$ $h(x) = (x - 2,5)^2$

- 2.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = (x - 2,5)^2$ $h(x) = (x + 3,5)^2$

b) $f(x) = |x|$ $g(x) = |x - 1,5|$ $h(x) = |x + 2,5|$

- 3.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját! Az értelmezési tartomány a valós számok legbővebb részhalmaza, amelyen a függvény értelmezhető.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x} + 2$ $h(x) = \sqrt{x + 2}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x} - 4$ $h(x) = \sqrt{x - 4}$

- 4.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ $h(x) = \frac{3}{2}x^2$

b) $f(x) = |x|$ $g(x) = \frac{3}{2}|x|$ $h(x) = \frac{1}{2}|x|$

c) $f(x) = -x^2$ $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ $h(x) = -2x^2$

- 5.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = (x - 2,5)^2$

$h(x) = (x - 2,5)^2 + 1$

b) $f(x) = |x|$ $g(x) = |x - 1,5|$

$h(x) = |x - 1,5| - 2$

- 6.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját! Az értelmezési tartomány a valós számok legbővebb részhalmaza, amelyen a függvények értelmezhetők.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x + 1}$ $h(x) = \sqrt{x + 1} + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x - 2}$ $h(x) = \sqrt{x - 2} - 1$

- 7.** Ábrázold a függvények grafikonját, majd jellemezd a függvényeket!

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x - 3)^2 - 2$

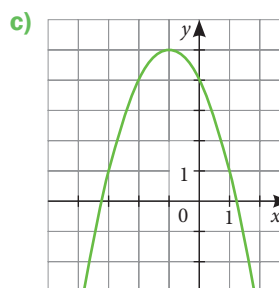
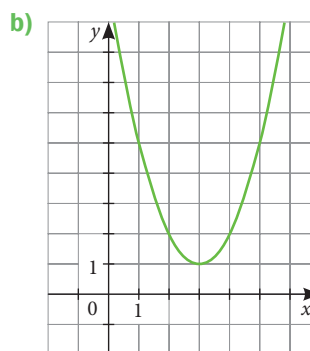
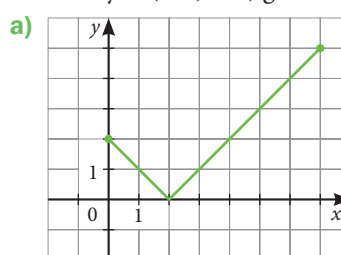
b) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = |x - 3| - 1,5$

- 8.** Ábrázold a függvények grafikonját, majd jellemezd a függvényeket!

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -(x - 3)^2$

b) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = -|x + 3,5|$

- 9.** Add meg az alábbi függvénygrafikonokhoz tartozó hozzárendelési szabályt és a függvények értelmezési tartományát! (A b) és c) grafikonja egy-egy parabola.)



- 10.** Ábrázold a függvények grafikonját, majd jellemezd a függvényeket!

a) $f: [-3; \infty[\rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

b) $g: [1,5; \infty[\rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \sqrt{x - 1,5} - 1$

- 11.** A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto |x|$ függvény grafikonját told el az x tengely mentén $(+3,5)$ -del, az y tengely mentén $(-4,5)$ -del! Melyik függvény grafikonját kaptad a két eltolás után?

Határozd meg az értékkészletét, szélsőértékét, jellemezd a monotonitását!

- 12** ✎ Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját!

$$D_f = [-1; 3] \quad f(x) = |x|$$

$$D_g = [-1; 3] \quad g(x) = \frac{5}{3}|x|$$

Határozd meg a függvények szélsőértékeit, és értékészletét!

- 13** ✎ Ábrázold az alábbi függvények grafikonját, ahol D_f a függvények értelmezési tartományát jelöli!

a) $f(x) = |x + 7| - 1$ $D_f =]-8; 0]$

b) $f(x) = |x| + 5$ $D_f = [0; \infty[$

c) $f(x) = -|x - 4|$ $D_f =]-\infty; \infty[$

d) $f(x) = -|x + 1| + 3$ $D_f =]-2; 4[$

Állapítsd meg a függvények zérushelyeit, majd számolással végezz ellenőrzést!

- 14** ✎ Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = |x|$ $g(x) = 1,5 \cdot |x|$ $h(x) = \frac{|x|}{1,5}$

b) $f(x) = x^2$ $g(x) = 1,5 \cdot x^2$ $h(x) = \frac{x^2}{1,5}$

- 15** ✎ Határozd meg a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvények zérushelyeit!

a) $x \mapsto x^2 - 5x$ c) $x \mapsto -x^2 - 7x$

b) $x \mapsto 2x^2 + 12x$ d) $x \mapsto -2x^2 - 9x$

- 16** ✎ Minimuma vagy maximuma van a következő függvényeknek? Az értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

a) $x \mapsto 3 - x^2 - 9x$ c) $x \mapsto 100 - x^2$

b) $x \mapsto 12x + 1 - 2x^2$ d) $x \mapsto -8 - 4x + 3x^2$

- 17** ✎ Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

$$f(x) = 3x^2 + 9x \quad \text{és} \quad g(x) = 3x^2 + 9x - 2$$

Határozd meg a függvények szélsőértékének helyét és szélsőértékét!

- 18** ✎ Ábrázold az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 - 8x + 7$ függvény grafikonját úgy, hogy először a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 4x^2 - 8x$ függvény grafikonját ábrázolod a zérushelyei és a tengelypontja segítségével!

- 19** ✎ Ábrázold az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 0,6x^2 + 1,8x - 5$ függvény grafikonját úgy, hogy először a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 0,6x^2 + 1,8x$ függvény grafikonját ábrázolod a zérushelyei és a tengelypontja segítségével!

- 20** ✎ Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi, valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = -2x^2 - 8x$ $g(x) = -2x^2 - 8x + 7$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x$ $g(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x - 2$

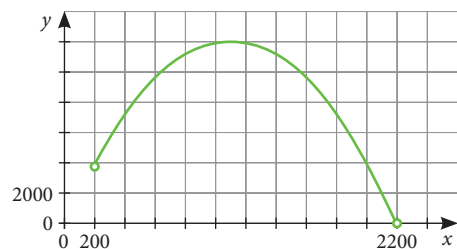
- 21** ✎ Egy gép alkatrészeket gyárt. A gyártás hasznát (forintban) a cég a következő függvénnyel számolja: óránként x db alkatrész gyártásakor ($200 < x < 2200$) a haszon $f(x) = -0,01x^2 + 22x$.

a) Mekkora a haszon, ha 500 terméket gyártanak?

b) Mekkora a haszon, ha 900 terméket gyártanak?

c) Mekkora a haszon, ha 1200 terméket gyártanak?

d) Ábrázoltuk az f függvény grafikonját. Milyen x értéknél lesz a gép üzemeltetése optimális? Mennyi az elérhető haszon legnagyobb értéke?



- 22** ✎ Határozd meg a következő, valós számok halmazán értelmezett függvények szélsőértékét! Melyiknek van maximuma, melyiknek minimuma?

a) $f(x) = (x - 2)^2 + 10$

b) $g(x) = x^2 + 10x + 26$

c) $h(x) = -(x - 1)^2 + 9$

d) $k(x) = -x^2 + 12x + 21$

- 23** ✎ Egy 40 méter magas toronyból lefelé hajítunk egy kislabdát. A kislabda talajszinttől mért magasságát t másodperc múlva a következő függvény adja meg:

$$h(t) = -5t^2 - 10t + 40$$

a) Ábrázold a függvényt!

b) Hány másodperc múlva ér földet a labda?

c) A kislabda magassága minden pillanatban megegyezik egy olyan test magasságával, amelyet egy másik, magasabb toronyból, kezdősebesség nélkül, néhány másodperccel hamarabb elejtettek. Milyen magas lenne ez a másik torony, és hány másodperccel hamarabb kellett volna elejteni a testet?

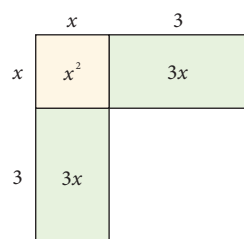
BEVEZETŐ

Az ókorban érdekes ábrákon keresztül oldottak meg másodfokú egyenleteket. Figyeld meg az $x^2 + 6x - 7 = 0$ egyenlet megoldását, egy régi módszer segítségével!

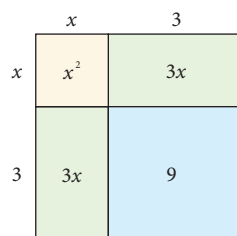
Átrendezve: $x^2 + 6x = 7$

$$x^2 + 3x + 3x = 7.$$

Készítsük el ehhez a következő ábrát:



Az ábra területe tehát $x^2 + 6x$. Egészítsük ki négyzetté:



A négyzet területe $(x+3)^2$. Ugyanakkor ez 9 egységgel nagyobb területű, mint az első ábra. Ezért:

$$(x+3)^2 = 7 + 9 = 16.$$

Ebből: $x+3 = 4$ vagy $x+3 = -4$,

Átrendezve: $x = 1$ vagy $x = -7$.

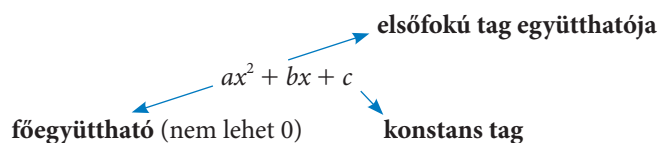
A négyzet oldala nem negatív szám, ezért az ábrán ezek közül csak az első megoldás látható.

ELMÉLET

I. Másodfokú kifejezés, másodfokú egyenlet

Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést, melyben a , b és c valós számok, és $a \neq 0$, **másodfokú kifejezésnek** nevezzük. Másik elnevezése: **másodfokú polinom**.

A másodfokú kifejezésben mindig szerepel a változó (pl. x) második hatványa, ennek együtthatója a **főegyüttható**. Ezen kívül szerepelhet a változó első hatványa egy együtthatóval szorozva, valamint a változót nem tartalmazó úgynevezett **konstans tag**.



A **másodfokú egyenlet** rendezett, úgynevezett kanonikus alakja: $ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a \neq 0$.

II. Teljes négyzet

Kéttagú kifejezés négyzetét nevezetes azonosság segítségével írhatjuk más alakban:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \text{illetve} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Amennyiben egy másodfokú kifejezés felírható egy kéttagú kifejezés négyzeteként, akkor azt mondjuk, hogy teljes négyzetté alakítható.

Például: $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$$x^2 - 2,4x + 1,44 = (x-1,2)^2$$

III. Teljes négyzetté kiegészítés

A **teljes négyzetté kiegészítés** módszerét másodfokú kifejezések esetén használhatjuk a kifejezés átalakítására. Ezzel az eljárással egy másodfokú kifejezést egy teljes négyzet felhasználásával írunk fel.

Például: $x^2 - 8x + 9 = (x - 4)^2 - 7$

Ha a főegyüttható 1 ($a = 1$), akkor lépései a következők:

1. Azonosítsuk, hogy melyik az a teljes négyzet, melyben az egyik tag négyzete, valamint a két tag szorzatának kétszerese megtalálható a másodfokú kifejezésben!

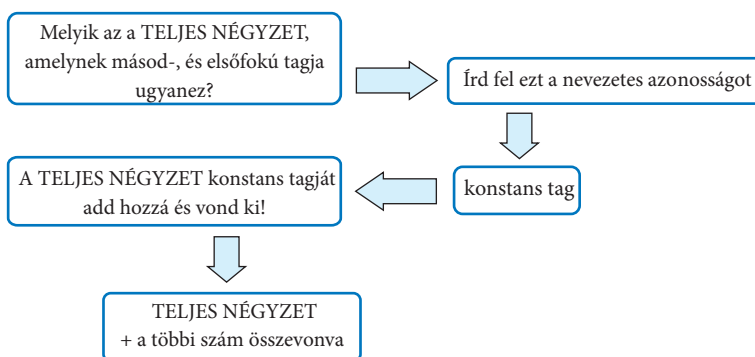
Például: $x^2 - 8x + 9$ esetén azt keressük, hogy $x^2 - 8x$ melyik teljes négyzet két tagjával egyezik meg. $(x - 4)^2$ a keresett teljes négyzet, hiszen $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$.

2. Adjuk hozzá és vonjuk le a teljes négyzet konstans tagját az eredeti kifejezéshez! Így az eredeti kifejezés értéke nem változik meg.

Például: $x^2 - 8x + 9 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 9$

3. A kifejezésben előáll a teljes négyzet, ezt írjuk le, a megmaradt számokat pedig vonjuk össze! (Az eredeti kifejezés értéke most sem változik meg.)

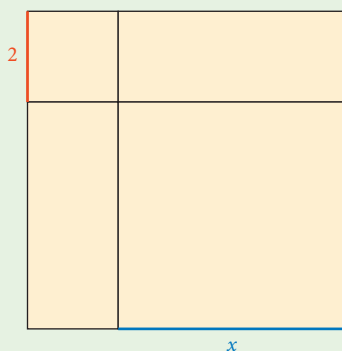
Például: $x^2 - 8x + 9 = \underbrace{(x^2 - 8x + 16)}_{(x - 4)^2} - 16 + 9 = (x - 4)^2 - 7$



FELADAT

1. Írd be a területeket jelző algebrai kifejezéseket az ábra megfelelő helyére, majd írd fel azt a nevezetes azonosságot, amelyet az ábra szemléltet!

x^2 , $2x$, $2x$, 4



2. Végezd el a következő műveleteket!

- a) $(x - 6)^2$ c) $(x - 0,5)^2$
 b) $(x + 11)^2$ d) $(x + 1,5)^2$

3. Írd fel a következő kifejezéseket két tag összegének vagy különbségének négyzeteként!

- a) $x^2 + 18x + 81$ c) $x^2 + 50x + 625$
 b) $x^2 - 100x + 2500$ d) $x^2 - 3x + 2,25$

4. Egészítsd ki a következő kifejezéseket úgy, hogy teljes négyzetet kapj! Írd fel a kifejezéseket két tag összegének vagy különbségének négyzeteként!

- a) $x^2 + 4x + \dots$ c) $x^2 + 5x + \dots$
 b) $x^2 - 8x + \dots$ d) $x^2 - 15x + \dots$

5. Alkalmazzuk a teljes négyzetté kiegészítés módszerét! Töltsd ki a táblázatot!

↓	másodfokú kifejezés	$x^2 + 16x + 54$	$x^2 + 14x + 50$	$x^2 - 4x - 1$
↓	x^2 -es és x -es tagok	$x^2 + 16x$		
↓	melyik teljes négyzet két tagja szerepel benne?	$(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$		
↓	teljes négyzetté kiegészítés	$x^2 + 16x + 54 =$ $= x^2 + 16x + 64 - 64 + 54$		
↓	teljes négyzeten kívüli tagok	$-64 + 54 = -10$		
↓	megoldás	$x^2 + 16x + 54 = (x + 8)^2 - 10$		

6. Teljes négyzetté kiegészítéssel alakítsd át a kifejezéseket!

a) $x^2 + 12x + 40$

b) $x^2 - 10x - 20$

c) $x^2 + 6x + 3,5$

d) $x^2 - 3x + 4,25$

7. Teljes négyzetté kiegészítés módszerével állapítsd meg, milyen eltolásokkal kapjuk meg a következő függvények grafikonját az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ függvény grafikonjából!

a) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 + 4x + 5$

b) $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = x^2 - 6x + 12$

HÁZI FELADAT

1. Egészítsd ki a következő kifejezéseket úgy, hogy teljes négyzetet kapj!

a) $x^2 + 40x + \dots$

c) $x^2 + 9x + \dots$

b) $x^2 - 24x + \dots$

d) $x^2 - 1,6x + \dots$

2. Teljes négyzetté kiegészítéssel alakítsd át a kifejezéseket!

a) $x^2 + 22x + 100$

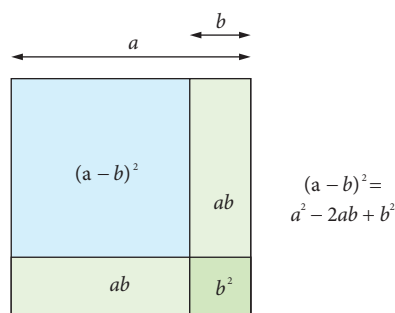
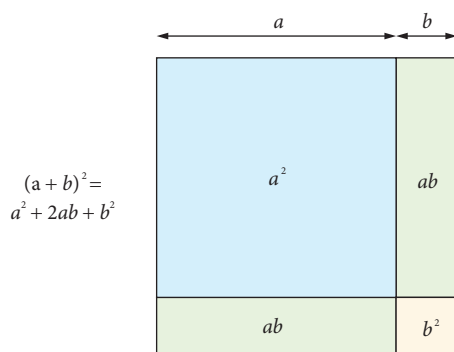
c) $x^2 + 7x - 2,25$

b) $x^2 - 14x + 42$

d) $x^2 - 9x + 20,25$

3. Kösd össze azokat a kifejezéseket, amelyek egyenlők! Néhány kifejezésnek nincs párja, ezekhez írd fel a hiányzó alakot!

a) $(x + 4)^2$	p) $x^2 + 8x + 6$
b) $(x + 4)^2 + 3$	q) $x^2 + 8x$
c) $(x + 4)^2 - 3$	r) $x^2 + 8x + 16$
d) $(x - 4)^2 + 3$	s) $x^2 + 8x + 13$
e) $(x - 4)^2 - 3$	t) $x^2 - 8x + 13$
f) $(x + 4)^2 - 10$	u) $x^2 + 8x + 19$



Teljes négyzetté kiegészítés 1-től különböző főegyüttható esetén

Figyeld meg a következő átalakítást!

$$2(x-3)^2 - 7 = 2(x^2 - 6x + 9) - 7 = (2x^2 - 12x + 18) - 7 = 2x^2 - 12x + 11$$

A zárójel felbontása után kapott mindhárom tagot szoroztuk a főegyütthatóval. Ezért mielőtt azt keresnénk, hogy mely tagok szükségesek a teljes négyzet felírásához, a főegyütthatót ki kell emelni az x -es tagból.

1 Teljes négyzetté kiegészítéssel alakítsd át a kifejezéseket!

a) $3x^2 - 24x + 41$

b) $-x^2 - 9x - 3,25$

Megoldás

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x^2 - 24x + 41 &= \\ &= 3(x^2 - 8x) + 41 = \\ &= 3[(x - 4)^2 - 16] + 41 = \\ &= 3(x - 4)^2 - 48 + 41 = \\ &= 3(x - 4)^2 - 7 \end{aligned}$$

Emeljük ki a főegyütthatót a másod- és elsőfokú tagokból!
Teljes négyzetté kiegészítés az $(x^2 - 8x)$ kifejezésre.
Szorozzunk be tagonként a főegyütthatóval!
Vonjuk össze a megfelelő tagokat!

$$\begin{aligned} \text{b) } -x^2 - 9x - 3,25 &= \\ &= -(x^2 + 9x) - 3,25 = \\ &= -[(x + 4,5)^2 - 20,25] - 3,25 = \\ &= -(x + 4,5)^2 + 20,25 - 3,25 = \\ &= -(x + 4,5)^2 + 17 \end{aligned}$$

Emeljük ki a főegyütthatót a másod- és elsőfokú tagokból!
Teljes négyzetté kiegészítés az $(x^2 + 9x)$ kifejezésre.
Szorozzunk be tagonként a főegyütthatóval!
Vonjuk össze a megfelelő tagokat!

2 Teljes négyzetté kiegészítéssel alakítsd át a kifejezéseket!

a) $2x^2 + 16x + 9$

b) $3x^2 - 18x + 20$

c) $-x^2 + 8x + 1$

d) $-2x^2 + 40x + 105$

3 Teljes négyzetté kiegészítéssel alakítsd át a kifejezéseket!

a) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

b) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 6,5$

4 Ábrázold és jellemezd a következő függvényt!

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$$

5 Határozd meg a főegyüttható értékét, ha a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 - 12x + 4$ függvénynek

a) az $x = 2$ helyen van a minimuma;

b) az $x = -1$ helyen van a maximuma?

c) Vizsgáld meg ezt a feladatot a *GeoGebra* program segítségével!

– Vegyél fel egy csúszkát, nevezd el a -nak! (Az intervallum határait állítsd -10 -re és 10 -re)

– Ábrázold az $y = ax^2 - 30x + 4$ függvényt!

– Változtasd a csúszka segítségével az a értékét, és figyeld meg, hogyan változik a függvény grafikonja!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Oldjuk meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenletet: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Megoldás

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 1$$

$$(x - 3)^2 = 1$$

$$x - 3 = 1 \text{ vagy } x - 3 = -1.$$

$$\text{Ha } x - 3 = 1, \text{ akkor } x = 1 + 3 = 4;$$

$$\text{ha } x - 3 = -1, \text{ akkor } x = -1 + 3 = 2.$$

Tehát ennek az egyenletnek két gyöke van, a 2 és a 4.

2. Adott a következő függvény:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 5x + 5,25.$$

a) Ábrázold a függvény grafikonját!

b) Határozd meg a függvény zérushelyeit!

Megoldás

- a) Ha alkalmazzuk a teljes négyzetté kiegészítés módszerét, akkor a hozzárendelési szabályt olyan alakra tudjuk rendezni, amelyről leolvasható, hogy milyen eltolások viszik az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az f függvény grafikonjába.

Ezt a nevezetes azonosságot tudjuk felhasználni:

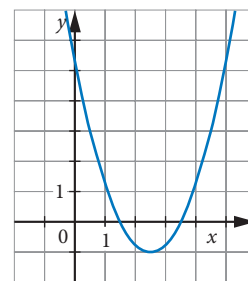
$$(x - 2,5)^2 = x^2 - 5x + 6,25$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 5,25 =$$

$$= x^2 - 5x + 6,25 - 6,25 + 5,25 = (x - 2,5)^2 - 1$$

Az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ függvény grafikonját tehát jobbra (az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányban) kell eltolnunk 2,5 egységgel, majd lefelé (az y tengellyel párhuzamosan, negatív irányban) 1 egységgel.

- b) A grafikonról leolvasható, hogy a függvénynek két zérushelye van. Ezek most nem egész számok. Pontos értékeiket megkapjuk, ha megoldjuk az $x^2 - 5x + 5,25 = 0$ egyenletet.



Az egyenlet megoldásához alkalmazzuk újra a teljes négyzetté kiegészítés módszerét!

$$x^2 - 5x + 5,25 = (x - 2,5)^2 - 1 = 0$$

$$(x - 2,5)^2 = 1$$

Ebből következik, hogy $|x - 2,5| = 1$, tehát $x - 2,5$ értéke 1 vagy -1 .

$$x - 2,5 = 1, \text{ ekkor } x = 3,5;$$

$$x - 2,5 = -1 \text{ ekkor } x = 1,5.$$

A függvénynek két zérushelye van, az 1,5 és a 3,5.

A hozzárendelési szabályba behelyettesítve ellenőrizhetjük, hogy valóban, $f(1,5) = 0$ és $f(3,5) = 0$.

FELADAT

1. Az ábra alapján csoportosítsd a felsorolt tagokat úgy, hogy az x^2 -hez hozzáadva teljes négyzetet alkossanak, majd alkalmazd a megfelelő nevezetes azonosságot!

$$x^2 + \dots + \dots = (x + 4)^2$$

$$x^2 + \dots + \dots =$$

$$x^2 + \dots + \dots =$$

$$+8x$$

$$-8x$$

$$-12x$$

$$+64$$

$$-6x$$

$$+16$$

$$-16x$$

$$-4x$$

$$+16$$

$$9$$

$$+4$$

$$+36$$

$$x^2 + \dots + \dots =$$

$$x^2 + \dots + \dots =$$

$$x^2 + \dots + \dots =$$

- 2** Töltsd ki a táblázat hiányzó celláit! A nevezetes azonosság segítségével írd fel az $ax^2 + bx + c$ alakban megadott kifejezéseket teljes négyzetet tartalmazó alakban, illetve fordítva!

$ax^2 + bx + c$ alak	Teljes négyzetet tartalmazó alak
$x^2 - 18x + 83$	$(x - 9)^2 + 2$
	$(x - 9)^2 - 10$
$x^2 - 18x + 75$	
$x^2 - 18x$	
	$(x + 7)^2 + 1$
$x^2 + 14x + 40$	
$x^2 + 14x + 56$	
$x^2 + 14x$	

$$(x - 9)^2 = x^2 - 18x + 81$$

$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

- 3** Teljes négyzetté kiegészítés módszerével állapítsd meg, milyen eltolásokkal kapjuk meg a következő függvények grafikonját az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából!

a) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^2 - 4x - 1$

b) $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = x^2 + 14x + 39$

- 4** Oldjuk meg a következő egyenleteket! Töltsd ki a táblázatot a második oszlop alapján! Az egyik esetben nincs megoldás. Melyik ez az egyenlet?

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - 14x + 33 = 0$

c) $x^2 - 10x + 27 = 0$

d) $x^2 + 3x - 10 = 0$

Az egyenlet	$x^2 + 6x + 8 = 0$	$x^2 - 14x + 33 = 0$	$x^2 - 10x + 27 = 0$	$x^2 + 3x - 10 = 0$
Teljes négyzetté kiegészítés	$(x + 3)^2 - 9 + 8 = 0$ $(x + 3)^2 = 1$			
Megoldás	$x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2$ vagy $x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4$			
Az egyenlet gyökei	-2 és -4			
A gyökök összege	-6			
A gyökök szorzata	8			

Megjegyzés: A gyökök összege és szorzata érdekes kapcsolatot mutat a kiindulási egyenletekben szereplő együtthatókkal. Erre majd egy későbbi leckében visszatérünk.

- 5** Oldd meg teljes négyzetté kiegészítéssel a következő egyenleteket!

a) $x^2 + 2x = 15$

b) $x^2 + 3x = 28$

c) $x^2 - 12x + 20 = 0$

d) $x^2 + 10x + 16 = 0$

- 6** Egy társaságban mindenki mindenkivel egyszer kezet fogott. Összesen 55 kézfogás történt. Hányan vannak a társaságban?

HÁZI FELADAT

- 1** Oldd meg a teljes négyzetté kiegészítés módszerével az alábbi egyenleteket!

a) $x^2 + 14x = 15$

b) $x^2 + 9,6x = 10,6$

- 2** Oldd meg az egyenleteket!

a) $x^2 - 9x + 21,25 = 0$

b) $x^2 - 65,61 = 0$

- 3** Milyen eltolásokkal kaphatjuk meg a függvények grafikonját a $k(x) = x^2$ függvény grafikonjából? Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

a) $f(x) = x^2 + 4,6x$

b) $g(x) = x^2 + 9,2x + 21$

c) $h(x) = x^2 - 1,8x + 2,1$

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ b) $ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a \neq 0$.

Megoldás

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Szorozzuk meg az egyenletet 4·3=12-vel!

$$36x^2 + 60x + 12 = 0$$

$$36x^2 + 60x = -12$$

A bal oldal alakításához használjuk fel, hogy

$$(6x + 5)^2 = 36x^2 + 60x + 25$$

Ezt felhasználva:

$$(6x + 5)^2 - 25 = -12$$

$$(6x + 5)^2 = 25 - 12 = 13$$

Ebből $(6x + 5)$ értéke $\sqrt{13}$ vagy $-\sqrt{13}$.

$$6x = -5 + \sqrt{13} \quad \text{vagy} \quad 6x = -5 - \sqrt{13}.$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$$

b) $ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a \neq 0$.

Szorozzuk meg az egyenletet $4a$ -val!

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

A bal oldal alakításához használjuk fel, hogy

$$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

Ezt felhasználva:

$$(2ax + b)^2 - b^2 = -4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Innentől a gondolatmenetünk háromfelé válik:

1. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor nincs valós megoldás.

2. Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor

$$(2ax + b)^2 = 0, \text{ s ebből } 2ax = -b, \quad x = -\frac{b}{2a}$$

3. Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{vagy} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac};$$

$$2ax = -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{vagy} \quad 2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac};$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ELMÉLET

Ha az a , b és a c betű egy-egy adott valós számot jelöl, ahol $a \neq 0$, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek 0, 1 vagy 2 gyöke van a valós számok körében.

– Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az egyenletnek nincs gyöke a valós számok körében.

– Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor az egyenletnek 1 valós gyöke van, a $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ szám. Ezt az egyenlet **kétszeres gyökének** is nevezik.

– Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor az egyenletnek 2 különböző valós gyöke van, a $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ és a $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ szám.

$$\text{Ezt a két gyököt együtt így szoktuk felírni: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ez a **másodfokú egyenlet megoldóképlete**.

Látható, hogy a gyökök száma attól függ, hogy a $(b^2 - 4ac)$ szám *negatív*, 0 vagy *pozitív*.

A $(b^2 - 4ac)$ számot a másodfokú egyenlet **diszkriminánsának** nevezzük és D -vel jelöljük.

(A diszkrimináns latin eredetű szó, eredeti jelentése: megkülönböztető, osztályozó.)

Például

- a $3x^2 + 7x + 5 = 0$ egyenlet esetében $a = 3$, $b = 7$ és $c = 5$, a diszkrimináns $D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 49 - 60 = -11 < 0$, ezért ennek az egyenletnek nincs valós gyöke;
- az $x^2 + 8x + 16 = 0$ egyenlet esetében $a = 1$, $b = 8$ és $c = 16$, a diszkrimináns $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$, ezért ennek az egyenletnek egy (kétszeres) valós gyöke van, mégpedig $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$; (ezt egyszerűbben is megkaphatjuk, mert $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$);
- a $2x^2 + 15x - 3 = 0$ egyenlet esetében $a = 2$, $b = 15$ és $c = -3$, a diszkrimináns $D = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 225 + 24 = 249 > 0$, ezért ennek az egyenletnek két különböző valós gyöke van: $x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{249}}{2 \cdot 2} = \frac{-15 \pm \sqrt{249}}{4}$.
 $x_1 = \frac{-15 + \sqrt{249}}{4} \approx \frac{-15 + 15,78}{4} = 0,195$; $x_2 = \frac{-15 - \sqrt{249}}{4} \approx \frac{-15 - 15,78}{4} = -7,695$.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

FELADAT

- 1.** Számold ki a diszkriminánst! Ha a diszkrimináns pozitív, oldd meg a megoldóképlet segítségével az egyenleteket!

a) $4x^2 + 12x - 27 = 0$; b) $5x^2 + 4x - 9 = 0$.

- 2.** Egy másodfokú egyenlet megoldása során behelyettesítettünk a megoldóképletbe. Az egyenlet $ax^2 + bx + c = 0$ alakú. Add meg azt az egyenletet, amelyet megoldottunk!

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5}}{2 \cdot (-3)}$$

- 3.** Azonosítsd be, hogy melyik számok felelnek meg a megoldóképletben szereplő a , b és c betűknek, majd oldd meg a megoldóképlet segítségével az egyenleteket!

a) $-2x^2 - 3x + 44 = 0$ c) $5x^2 + 11x = 8$

b) $6 - 5x + x^2 = 0$

- 4.** Vizsgáld az

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -0,12x^2 + 80x - 10\,000$ másodfokú függvényt!

- a) Határozd meg a függvény zérushelyeit a megoldóképlet segítségével!
 b) Vázold a függvény grafikonját!
 c) Állapítsd meg, hol van szélsőértéke a függvénynek, és mennyi annak az értéke!

- 5.** Egészítsd ki a $3x^2 + 6x + \dots = 0$ egyenletet úgy, hogy az $\mathbf{R}$ alaphalmazon

- a) 2; b) 1; c) 0
 darab valós gyöke legyen!

HÁZI FELADAT

- 1.** Oldd meg a megoldóképlet segítségével az egyenleteket!

a) $x^2 + 2,5x - 6 = 0$ b) $12x^2 - 8x - 15 = 0$.

- 2.** Oldd meg a megoldóképlet segítségével az egyenleteket! Ha szükséges, rendezd megfelelő alakba őket!

a) $6x^2 - 40 = x$

b) $35 - 36x = -9x^2$

- 3.** Vázold a zérushelyek és a tengelypont segítségével az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -2x^2 + 4x + 10,5$ függvény grafikonját!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Oldjuk meg az egyenleteket!

1. $-0,2x^2 + 4,4x = 17$

Megoldás:

Rendezzük az egyenletet:

$$-0,2x^2 + 4,4x - 17 = 0$$

A számológépnek „mindegy”, de a hibalehetőségek csökkentése érdekében érdemes osztani $(-0,2)$ -del, hogy az x^2 együtthatója pozitív legyen, és egész szám:

$$x^2 - 22x + 85 = 0$$

Megoldóképletből: $x_1 = 17$ és $x_2 = 5$.

2. $6x^2 - 7x = 0$.

Megoldás:

Ezt az egyenletet szorzattá alakítással is megoldhatjuk. Ha azonban a megoldóképletet szeretnénk használni, akkor figyeljünk arra, hogy az együtthatók: $a = 6$; $b = -7$ és $c = 0$.

A megoldások: 0 és $\frac{7}{6}$.

3. $(2x - 5)^2 + (x + 3)^2 = 25$

Megoldás:

Ahhoz, hogy a megoldóképletet használni tudjuk, bontsuk fel a zárójeleket, majd rendezzük az egyenletet:

$$4x^2 - 20x + 25 + x^2 + 6x + 9 = 25$$

$$5x^2 - 14x + 9 = 0$$

A megoldások: 1 és 1,8.

4. $\frac{3x^2 - 11}{2} + \frac{x^2 + 1}{3} = \frac{5x + 3}{6}$

Megoldás:

Szorozzuk az egyenletet 6-tal, majd rendezzük a megfelelő alakra:

$$3(3x^2 - 11) + 2(x^2 + 1) = 5x + 3$$

$$9x^2 - 33 + 2x^2 + 2 = 5x + 3$$

$$11x^2 - 5x - 34 = 0$$

Megoldóképlettel: $x = 2$ vagy $x = \frac{34}{22}$.

ELMÉLET

Hiányos másodfokú egyenletek

Hiányos másodfokú egyenletről beszélünk, ha az egyenletben nincs elsőfokú tag vagy nincs konstans tag. Ilyenkor az $ax^2 + bx + c = 0$ alakban b vagy c értéke 0.

- Ha az elsőfokú tag hiányzik, akkor átrendezéssel kifejezhetjük, hogy x^2 mennyivel egyenlő. Vigyázat! Ha x^2 értéke pozitív, akkor az egyenletnek két megoldása van, az egyik pozitív, a másik negatív.

Például: $9x^2 - 16 = 0$ $9x^2 = 16$ $x^2 = \frac{16}{9}$ $x_1 = \frac{4}{3}$, és $x_2 = -\frac{4}{3}$

- Ha a konstans tag hiányzik, akkor az egyenlet szorzattá alakítással hamar megoldható. Az egyik megoldás a 0.

Például: $9x^2 - 18x = 0$ $x(9x - 18) = 0$ $x_1 = 0$, és $x_2 = \frac{18}{9} = 2$

Hiányos másodfokú egyenlet esetén is alkalmazható a megoldóképlet, ha a diszkrimináns pozitív vagy nulla.

FELADAT

1. 🎧 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $3x^2 + 8x = 0$

b) $-9x^2 + 27 = 0$

2. 🎧 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

a) $7x^2 - 21x + 3 = x^2 + 8x - 6$

b) $12x^2 - 22x - 3 = 2x^2 + 7x + 18$

3. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $(x - 4)^2 + (x + 2)^2 = 29 - x$

b) $(3x - 1)^2 = (2x + 3)^2 - 17$

4. Határozd meg a következő függvények zérushelyeit! Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

a) $x \mapsto \frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - 1$

b) $x \mapsto -\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{5}{6}$

5. $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenleteket a megoldóképlet segítségével oldottunk meg. A képletbe behelyettesítve ezeket kaptuk:

a) $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 2,5}}{2 \cdot 2}$

b) $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6}$

Írd fel a megfelelő másodfokú egyenleteket!

6. Add meg a hiányzó együttható értékét úgy, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen!

a) $7x^2 + 6x + \dots = 0$

c) $2x^2 + \dots x - 9 = 0$

b) $\dots x^2 - 5x - 2 = 0$

7. Összeszoroztunk két egymást követő egész számot. Az eredmény 1332. Melyik ez a két szám? Hány megoldása van a feladatnak?

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazaán!

a) $7x^2 - 12x + 7 = x^2 + 8x + 7$

b) $(x + 5)^2 + (x - 4)^2 = 118 - x$

c) $(3x - 7)^2 = (7x + 3)^2 + 48$

2. Összeszoroztunk egy egész számot egy nála 6-tal kisebb számmal. Az eredmény 391. Melyik ez a két szám? Hány megoldás van?

3. Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenleteket a megoldóképlet segítségével oldottuk meg. A képletbe behelyettesítve ezeket kaptuk:

a) $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3}$

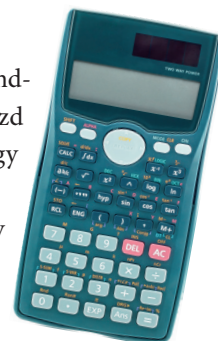
b) $x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{8}$

Írd fel a megfelelő másodfokú egyenleteket!

RÁADÁS

1. Bizonyos számológépek segítségével könnyedén meghatározhatod a másodfokú egyenlet mindkét megoldását. Ezt a funkciót többnyire a **MODE** gomb megnyomásával tudod elérni. Itt válaszd ki az **EQN** (equation = egyenlet) opciót, majd ezen belül a másodfokú egyenletet (**QUAD** vagy $ax^2 + bx + c = 0$)!

Az egyenlet együtthatóit az a, b, c értékek alatt adhatod meg, az **=** gomb megnyomásával. A negatív együtthatók megadásához használd a **(-)** gombot! A mezők között a nyílombok segítségével is mozoghatsz. Az utolsó együttható megadása után az **=** gomb ismételt megnyomásával kapod meg az első és a második megoldást is. Az együtthatók között a fel-le gombokkal is tudsz váltani. Próbáld ki a számológépedet az órán megoldott feladatok végeredményeinek ellenőrzésére!



2. a) Számold ki és figyeld meg a következő egyenletek gyökeit!
 $10x^2 - 29x + 10 = 0$ $6x^2 + 13x + 6 = 0$
- b) Bizonyítsd be, hogy ha egy másodfokú egyenlet általános alakjában $a = c$, akkor az egyenlet valós gyökei (ha vannak), egymás reciprokai!
- c) Mely B és C értékekre lesz az $x^2 + Bx + C = 0$ másodfokú egyenletnek pontosan két valós gyöke, melyek egymás reciprokai?
3. Egy tréfás kedvű kereskedő annyi forintért kínálta az alma kilóját, ahány kiló almát vitt a piacra. Amikor már eladott 30 kilót, akkor új árat írt ki: ez ismét csak annyi forint volt, ahány kiló alma még eladatlan maradt. Ezen az áron eladta az összes megmaradt almáját. Így annyi lett a bevétele, mintha az egész mennyiséget 79 forintos kilónkénti áron adta volna el. Hány kiló almát vitt a piacra a kereskedő?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Két valós szám szorzata 90, különbsége pedig 9. Melyik ez a két szám?

Megoldás

Két szám esetén bevezethetünk két ismeretlent is, de könnyebb a számolás, ha csak egy ismeretlennel dolgozunk. Ismerjük a két szám különbségét, ezért ha a kisebbik szám x , akkor a nagyobbik szám $x + 9$. Tudjuk azt is, hogy x és $x + 9$ szorzata 90, ezt írjuk fel egyenletként:

$$x(x + 9) = 90.$$

Bontsuk fel a zárójelet és rendezzük az egyenletet!

$$x^2 + 9x - 90 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{2} = \frac{-9 \pm 21}{2}. \end{aligned}$$

Ebből $x_1 = 6$ és $x_2 = -15$.

Ha a kisebbik szám 6, akkor a nagyobbik 15. Ha a kisebbik szám -15 , akkor a másik szám: $-15 + 9 = -6$. Két megoldás van tehát: 6 és 15, illetve -6 és -15 .

Ellenőrizzük a megoldásokat: $6 \cdot 15 = 90$ és $15 - 6 = 9$; illetve $(-6) \cdot (-15) = 90$ és $-6 - (-15) = 9$.

2. Hányan vannak abban a társaságban, amelyben ha mindenki mindenkivel egyszer kezet fog, akkor 703 kézfogás történik?

Megoldás

Az emberek számát jelöljük n -nel. Mindenki $n - 1$ emberrel fog kezet (rajta kívül mindenki mással), ez $n(n - 1)$ kézfogás, de ekkor minden kézfogást kétszer számoltunk.

A kézfogások száma tehát $\frac{n(n - 1)}{2}$.

Felírhatjuk az egyenletet:

$$\frac{n(n - 1)}{2} = 703$$

Szorozzuk meg az egyenletet 2-vel, és bontsuk fel a zárójelet!

$$n^2 - n = 1406$$

Átrendezve: $n^2 - n - 1406 = 0$

Ennek két megoldása van, amit a megoldóképlet segítségével kiszámolhatunk: $n_1 = 38$ és $n_2 = -37$. Ezek közül csak a pozitív egész szám lehet a feladat megoldása: tehát $n = 38$ ember van a társaságban.

Ellenőrzés: 38 ember esetén $\frac{38 \cdot 37}{2} = 703$ kézfogás történik.

ELMÉLET

Tanácsok szöveges feladatok megoldásához

1. Sok szöveges feladat olyan, hogy több ismeretlen adat is szerepel a feladatban. Figyeljük meg, milyen összefüggések vannak az ismeretlenek között! Ha ismerjük két ismeretlen összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát vagy arányát, akkor ezek egyetlen ismeretlen segítségével felírhatók.

Például

- | | | |
|-------------------------------|---|---|
| – két mennyiség összege 350 | → | az egyiket jelöljük x -szel, a másik $350 - x$ |
| – két mennyiség különbsége 24 | → | a kisebbiket jelöljük x -szel, a nagyobbik $x + 24$ |
| – két mennyiség szorzata 40 | → | az egyiket jelöljük x -szel, a másik $\frac{40}{x}$ |
| – két mennyiség hányadosa 6 | → | az egyiket jelöljük x -szel, a másik $6x$ |
| – két mennyiség aránya 3 : 4 | → | az egyiket jelöljük $3x$ -szel, a másik $4x$ |

2. A megoldóképlet használatához rendezzük az egyenletet $ax^2 + bx + c = 0$ alakra! (Könnyíti az egyenlet kezelését, ha úgy rendezzük, hogy a főegyüttható pozitív legyen.)
3. Szöveges feladatok megoldásánál fontos, hogy a szövegbe visszahelyettesítve ellenőrizzük a megoldást.

FELADAT

1. Két valós szám összege 40, szorzata 336. Melyik ez a két szám?
2. Egy téglalap egyik oldala 3 cm-rel hosszabb, mint a másik oldala. Területe 108 cm^2 . Milyen hosszúak a téglalap oldalai?
3. Két szám különbsége 12. Ha a kisebbik szám kétszeresével megszorozzuk a nagyobbik számot, akkor az eredmény 266. Melyik ez a két szám?
4. Karesznak három szöveges feladatot kellett megoldania. Mindhárom feladathoz felírt egy egyenletet. Párosítsd a feladatokat és az egyenleteket, majd az egyenletek segítségével oldd meg a feladatokat!

Egy valós szám négyzetének és a nála 4-gyel kisebb szám négyzetének összege 10. Melyik ez a szám?	$x^2 - (4 - x)^2 = 12$
Két valós szám összege 4. Ha a nagyobbik szám négyzetéből kivonjuk a kisebbik szám négyzetét, akkor 12-t kapunk. Hányféle lehet a kisebbik szám?	$x^2 + (23 - x)^2 = 289$
Egy derékszögű háromszög kerülete 40 cm, az átfogója pedig 17 cm. Mekkora a befogói?	$x^2 + (x - 4)^2 = 10$

5. Egy baráti társaságban mindenki mindenkiel kezét fogott, de egyikük nem jegyezte meg, hogy kit köszöntött már, és 4 emberrel duplán fogott kezét. Így összesen 82 kézfogás történt. Hányan vannak a társaságban?
6. (Érettségi feladat, 2019) A szókereső mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot, a következő számítás alapján: egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos. Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Indokold a választ!
7. (Érettségi feladat, 2012) Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

HÁZI FELADAT

1. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazan!
 - a) $0,125x^2 - 3,125x + 18 = 0$
 - b) $16 - 25x^2 = 0$
 - c) $7x - 0,1x^2 = 0$
2. Hogy hívják a Horváth gyerekek édesapját, ha a névnapjáról a következőket tudjuk: a hónap és a nap sorszámának összege 15, szorzata pedig 54?
3. Érettségi találkozón mindenki mindenkinek adott egy fényképet. Összesen 342 fénykép cserélt gazdát. Hányan voltak jelen a találkozón?

EMELT SZINT

1. Egy $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenlet megoldása során behelyettesítettünk a megoldóképletbe. Add meg azt az egyenletet, amelyet megoldottunk!

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2 \cdot \sqrt{21}}{-8}$$
2. Hány megoldása van a valós számok halmazán a következő egyenletnek?

$$(x^2 - 100)(x^2 + 100) = 0$$
3. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!
 - a) $(5x - 2)(3 - 2x) - x^2 = 3x - 1$
 - b) $2x^3 + 7x^2 = 15x$

34 DISZKRIMINÁNS

KIDOLGOZOTT FELADAT

Melyik egyenletnek hány valós gyöke van?

$$5x^2 - 3x + 1 = 0 \quad -7x^2 + x + 4 = 0 \quad 10x^2 - 29x + 10 = 0$$

Megoldás

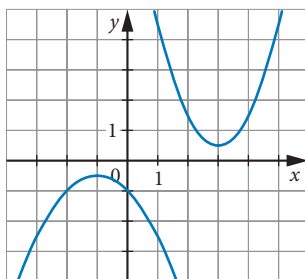
Az egyenlet	a	b	c	Diszkrimináns	Gyökök száma
$5x^2 - 3x + 1 = 0$	5	-3	1	$9 - 20 < 0$	0
$-7x^2 + x + 4 = 0$	-7	1	4	$1 + 112 > 0$	2
$10x^2 - 29x + 10 = 0$	10	-29	10	$841 - 400 > 0$	2

Felhasználtuk, hogy

- a másodfokú egyenlet valós gyökeinek száma a diszkriminánstól függ;
- az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenlet diszkriminánsa: $b^2 - 4ac$.

ELMÉLET

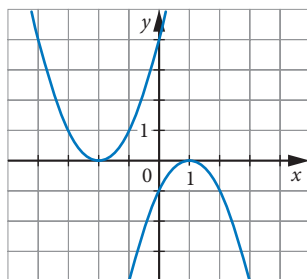
A valós számokon értelmezett másodfokú függvények és a másodfokú egyenletek szoros kapcsolatban állnak egymással.



Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvénynek nincs zérushelye, grafikonjának nincs közös pontja az x tengellyel.



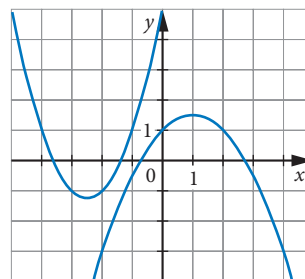
Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása, diszkriminánsa negatív.



Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvénynek egyetlen zérushelye van: x_0 , grafikonja érinti az x tengelyt.



Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van: x_0 , diszkriminánsa nulla.



Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvénynek két zérushelye van: x_1 és x_2 , grafikonja két pontban metszi az x tengelyt.



Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek két különböző megoldása van: x_1 és x_2 , diszkriminánsa pozitív.

FELADAT

1. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halma-zán!

a) $-0,25x^2 - 1,25x + 1,5 = 0$

b) $47x = 42 + 10x^2$

c) $77 + 25x + 2x^2 = 0$

2. Van-e három olyan egymást követő egész szám, amelyek négyzetének összege egyenlő a következő két egész szám négyzetének összegével? Ha van, melyik ez a három egész szám, ha nincs, miért nincs?

3. Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

Az egyenlet	a	b	c	Diszkrimináns	Gyökök száma
$9x^2 - 5x - 1 = 0$					
$-x^2 + x - 4 = 0$					
$x^2 - 3,8x = 0$					
$16x^2 + 9 = 24x$					

4. Egy n csúcsú konvex sokszög minden csúcsából $n - 3$ darab átló húzható, hiszen önmagához és a szomszédos csúcsokhoz nem húzható átló, de

a többi csúcshoz igen. Ez összesen $n \cdot (n - 3)$ db átló, de ekkor minden átlót kétszer számoltunk. Az n csúcsú konvex sokszögben ezért az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Hány csúcsa van annak a konvex sokszögnek, amelyben az átlók száma 819?

5. Az $x^2 + bx - 12 = 0$ egyenletben a b helyére írható-e olyan valós szám, hogy a gyökök száma
a) 0; b) 1; c) 2?

6. Oldd meg az előző feladatot az $x^2 + bx + 12 = 0$ egyenlet esetére vonatkozóan is!

HÁZI FELADAT

1. Egy konvex sokszög átlóinak száma tízszer annyi, mint a négyzet átlóinak száma. Hány oldala van a sokszögnek?

2. Határozd meg a következő egyenletekben a diszkrimináns előjelét!

a) $\frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$

b) $(2-x)^2 - (3-x)^2 = (6-x)^2$

3. Melyik az a három egymást követő egész szám, amelyek közül a középső 1-gyel nagyobb, mint az első és a harmadik szám szorzata?

4. Add meg a hiányzó együttható értékét úgy, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen!

a) $9x^2 + 12x + \dots = 0$

b) $3x^2 + \dots x + 3 = 0$

c) $\dots x^2 + 6x + 18 = 0$

RÁADÁS

1. Bháskara, az egyik leghíresebb hindu tudós a XII. század közepén élt Uddzsáinban. Azt írják róla, hogy megtalálta az $x^2 - 45x = 250$ másodfokú egyenlet pozitív gyökét. Vajon hogyan?

a) Keresd meg az egyenlet mindkét gyökét a megoldóképlettel!

b) Bontsd 2 tényező szorzatára az $(x^2 - 45x)$ -et és a 250-et is, ennek alapján keresd meg a pozitív gyököt!

c) Találd ki, hogyan kaphatnád meg ugyanebből a szorzatalakból az egyenlet negatív gyökét!

2. Bháskara arról is híres, hogy írt a leánya számára egy feladatgyűjteményt, *Lilavati* (elbűvölő) címen. Ebből vettük a következő versikét:

A majmok két víg csapatban
játszadognak egy lugasban.
Nyolcadrészük négyzetét vedd,
s megtudod, hány verekedett.

Amott tizenketten vannak,
hangoskodnak, ugrándoznak.
Mondd meg gyorsan, hány majom van
összesen a két csoportban!

KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy derékszögű háromszög átfogója 58 cm hosszú, a nagyobb befogó 2 cm-rel hosszabb a kisebbiknél. Hány cm a befogók hossza?

Megoldás

Ha a rövidebb befogó hossza x cm, akkor a másik befogó hossza $(x + 2)$ cm. A Pitagorasz-tétel szerint tehát:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 58^2.$$

Elvégezve a kéttagú összeg négyzetre emelését:

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 3364,$$

$$2x^2 + 4x - 3360 = 0.$$

Másodfokú egyenletet kaptunk. Osszuk el mindkét oldalt 2-vel: $x^2 + 2x - 1680 = 0$, majd alkalmazzuk a megoldóképletet!

$$x = 40 \quad \text{vagy} \quad x = -42.$$

A befogó hossza pozitív, ezért csak a 40 lehet megoldása a feladatunknak.

A befogók hossza tehát 40 cm és 42 cm.

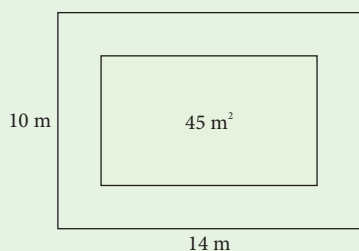
Ellenőrzés: $40^2 + 42^2 = 1600 + 1764 = 3364 = 58^2$. A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt tehát ez valóban egy derékszögű háromszög.

FELADAT

1 Egy derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm-rel hosszabb, mint a másik befogó kétszerese, az átfogó pedig 4 cm-rel hosszabb a kisebbik befogó háromszorosánál. Mekkora az átfogó?

2 (Érettségi feladat, 2014) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm^2 ?

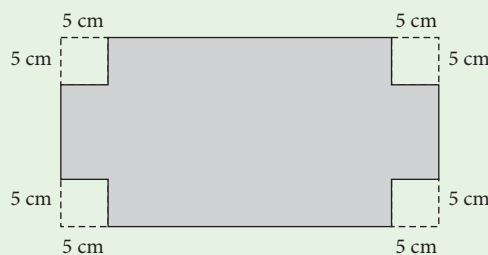
3 Egy $10 \text{ m} \times 14 \text{ m}$ méretű téglalap alakú udvar közepén 45 m^2 területű virágágyást készítenek úgy, hogy körben egyenlő szélességű sétány maradjon. Milyen széles lesz ez a sétány?



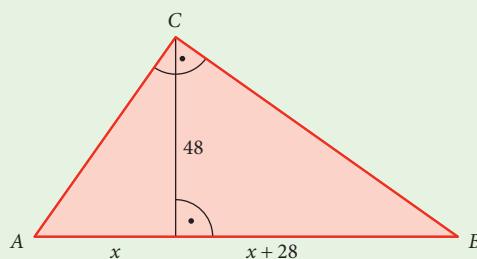
4 Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek

- 65 átlója van,
- 5150 átlója van,
- 15-ször annyi átlója van, mint ahány oldala?

5 Egy téglalap alakú bádoglemezből felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a lemez sarkainál 5 cm oldalú négyzeteket kivágunk, és az így kapott széleket felhajtjuk. Milyen méretű a bádoglemez, ha hosszúsága kétszerese a szélességének, a belőle készített doboz térfogata pedig 1500 cm^3 ?



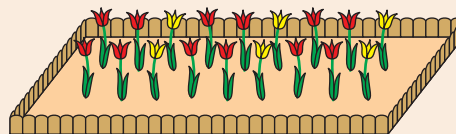
6 Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága 48 mm hosszú, és az átfogót két olyan szakaszra osztja, amelyek hosszának különbsége 28 mm. Mekkora a derékszögű háromszög oldalai?



HÁZI FELADAT

1. Egy téglalap kerülete 80 cm, területe 336 cm^2 . Mekkora a téglalap oldalai?
2. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 55 cm hosszú, az átfogója pedig 23 cm-rel rövidebb a másik befogó kétszeresénél. Mekkora az átfogó és a másik befogó hossza?
3. Egy téglalap egyik oldala 14 cm-rel rövidebb, mint a másik. A téglalap területe 240 cm^2 .
 - a) Mekkora a téglalap kerülete?
 - b) Mekkora a téglalap köré írt kör sugara?

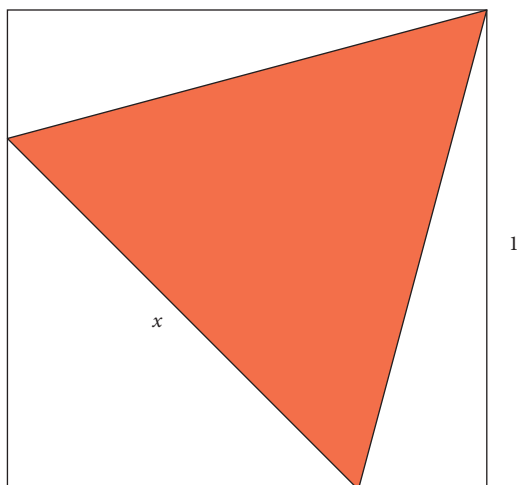
4. Egy téglalap alakú virágágyás területe $4,8 \text{ m}^2$. A virágágyat alacsony szegéllyel kerítjük körbe. A szegély 92 darab 10 cm széles, szorosan egymás mellé illesztett elemből áll.



- a) Milyen hosszúak a virágágy oldalai?
- b) Mekkora a távolság a virágágy két legtávolabbi pontja között?

EMELT SZINT

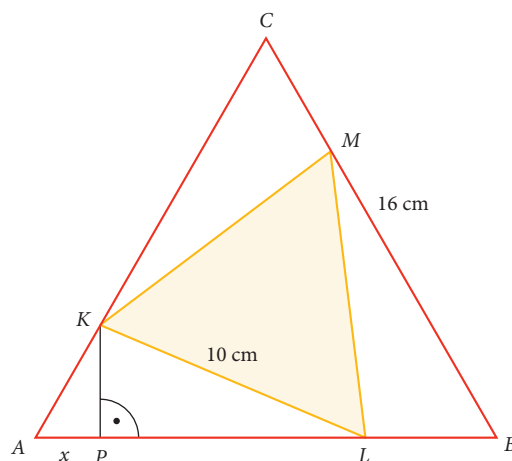
1. Egy 1 dm-es oldalú négyzetbe szabályos háromszöget írunk az ábra szerint. Ezt a háromszöget pirosra színezzük.



- a) Mekkora a piros háromszög oldalai?
 - b) Mekkora a piros háromszög területe?
 - c) Mekkora a négyzet többi részének a területe?
2. (Érettségi feladat, 2013) Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzolunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5 : 7. Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét add meg!

3. (Érettségi feladat, 2007) Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm. A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$. Milyen hosszú a PB szakasz?

4. Egy 16 cm-es oldalú szabályos háromszögbe az ábra szerint olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek az oldalai 10 cm-esek.



- a) Mekkora a levágott kis háromszögek (ALK , BML , CKM) oldalai?
- b) Derékszögűek-e a levágott háromszögek?
- c) Mekkora a nagy háromszög részeinek a területe?

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy számnak és a reciproknak az összege 6,41. Melyik ez a szám?

Megoldás

Legyen a keresett szám az x . Nyilván $x \neq 0$, mert a 0-nak nincsen reciproka.

A szöveg szerint: $x + \frac{1}{x} = 6,41$. Mindkét oldalt x -szel

megszorozva: $x^2 + 1 = 6,41x$, $x^2 - 6,41x + 1 = 0$.

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{6,41 \pm \sqrt{6,41^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{6,41 \pm 6,09}{2}.$$

Ebből

$$x_1 = \frac{6,41 + 6,09}{2} = 6,25, \quad x_2 = \frac{6,41 - 6,09}{2} = 0,16.$$

A keresett szám a $6,25 = \frac{25}{4}$, vagy a $0,16 = \frac{4}{25}$.

Mivel $6,25 + 0,16 = 6,41$, ezért mindkét szám megoldása a feladatnak.

2. Samu és Géza kerékpároznak. A 30 km-es távot Samu 10 perccel rövidebb idő alatt teszi meg, mint Géza. Samu átlagsebessége $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb, mint Gézáé. Mekkora Géza átlagsebessége?

Megoldás

Figyelni kell a mértékegységekre. Ha a sebességet $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban számoljuk, akkor a távolságot km-ben, az időt órában kell megadnunk. Géza átlagsebességét jelöljük x -szel, ekkora Samu átlagsebessége $x + 2$. A 30 km-es távolság megtételéhez szükséges idő Géza esetében $\frac{30}{x}$ óra, Samu esetében $\frac{30}{x+2}$ óra. Ezek különbsége 10 perc, ami $\frac{1}{6}$ óra. Felírható tehát az egyenlet:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+2} = \frac{1}{6}$$

Szorozzuk meg az egyenletet x -szel, $(x+2)$ -vel és 6-tal!

$$30 \cdot (x+2) \cdot 6 - 30 \cdot x \cdot 6 = x \cdot (x+2)$$

Bontsuk fel a zárójeleket!

$$180x + 360 - 180x = x^2 + 2x$$

Rendezzük az egyenletet!

$$x^2 + 2x - 360 = 0$$

Ennek megoldásai: $x_1 = 18$ és $x_2 = -20$. A sebesség értéke pozitív szám, ezért a megoldás $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ellenőrzés: Géza $\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ óra = 1 óra 40 perc alatt, Samu pedig $\frac{30}{20} = 1,5$ óra = 1 óra 30 perc alatt teszi meg a 30 km-t. Samu tehát 10 perccel gyorsabb, mint Géza.

FELADAT

1. Melyik valós számok esetén teljesül, hogy a számnak és a reciproknak összege

a) $\frac{13}{6}$; b) 2; c) $\frac{3}{2}$?

2. Választottunk két szomszédos pozitív páros számot. A reciprokaik összege $\frac{15}{112}$. Melyik ez a két szám?

3. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{2}{x} = x - \frac{7}{2}$ b) $\frac{3}{x} + \frac{9}{2} = x - 1$

4. A köd miatt az országúton csak lassan lehetett haladni. A 120 km-es úton 24 perccel tovább tartott az út, mint $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb átlagsebesség esetén. Mekkora volt így az átlagsebesség?

5. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{5}{x-2} = 2x - 1$ b) $\frac{4}{3-x} = 3 + \frac{x}{2}$

6. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán! Figyelj az értelmezési tartományra!

a) $\frac{1}{x} + \frac{5}{6-x} = 2$ b) $\frac{3}{x} + \frac{5}{x-2} = 6$

HÁZI FELADAT

1 Egy valós számhoz hozzáadtuk a reciprokát. Az eredmény $\frac{25}{12}$. Melyik lehet ez a szám?

2 Gondoltam egy valós számra. Hozzáadtam a nála 2-vel nagyobb szám reciprokát. Az összeg 3,2. Melyik számra gondolhattam?

3 (Érettségi feladat, 2016) Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{2}{x-2} = x-3$$

4 Ha Tibor a szokásos tempójában biciklizik 52 km hosszan, akkor 10 perccel több időre van szüksége, mintha $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val gyorsabban biciklizne ugyan-ezen a távon. Mennyi idő alatt tenné meg Tibor az 52 km-es távot a szokásos tempójában?

EMELT SZINT

1 Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x^3 - 64x = 0$

b) $x^3 - 17x^2 + 66x = 0$

c) $3x^4 + 10x^3 - 8x^2 = 0$

d) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

2 Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán! Figyelj az értelmezési tartományra!

$$\frac{x+2}{x} - \frac{x}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

3 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán! Figyelj az értelmezési tartományra!

a) $\frac{5}{x^2 - 8x + 12} = 1$

b) $\frac{x-26}{x^2 + 7x - 18} = 1$

4 (Érettségi feladat, 2020) Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = 2$$



KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy sportegyesület kézilabdákat vásárol, és 81 400 Ft-ot fizet. Ha egy labda ára 350 Ft-tal kevesebb lenne, akkor ebből a pénzből 2-vel több darabot tudnának megvenni, és még maradna 1000 Ft. Mennyibe kerül egy labda?

Megoldás

Vezessünk be két ismeretlent: jelöljük x -szel, hogy hány labdát vettek, és y -nal, hogy mennyibe kerül egy labda. A szöveg alapján felírható két egyenlet.

$$\begin{cases} xy = 81\,400 \\ (x+2)(y-350) = 80\,400 \end{cases}$$

A második egyenletben bontsuk fel a zárójelet, majd vegyük észre, hogy az xy helyébe az első egyenlet alapján beírható 81 400.

$$xy - 350x + 2y - 700 = 80\,400$$

$$81\,400 - 350x + 2y - 700 = 80\,400$$

$$300 - 350x + 2y = 0$$

Az legelső egyenletből kifejezhetjük az egyik ismeretlent:

$$y = \frac{81\,400}{x}.$$

Ezt helyettesítsük be a legutolsó egyenletbe, majd szorozzuk meg az egyenletet x -szel!

$$300 - 350x + 2 \cdot \frac{81\,400}{x} = 0$$

$$300x - 350x^2 + 162\,800 = 0$$

$$-350x^2 + 300x + 162\,800 = 0$$

Ezt megoldva kapjuk: $x_1 = 22$, valamint x_2 egy negatív szám, ami nem lehet megoldás.

Ellenőrzés: 22 darab labdát vettünk $\frac{81\,400}{22} = 3700$ forintért. Ha a labda ára 350 Ft-tal kevesebb lenne, akkor 24 darab labda ára $24 \cdot 3350 = 80\,400$ Ft lenne.

Megoldás: egy labda ára 3700 Ft.

2. Egy turmixgép eredeti ára 36 000 Ft. A kereskedő új típusokat szeretne behozni, emiatt leértékeli ezt a gépet. De még így sem lesz elég kelendő, ezért újból leértékeli, most 5 százalékponttal nagyobb mértékben, mint először. Így a végső ára 24 480 Ft lesz. Hány százalékos volt az első leértékelés?

Első megoldás

Figyeljük meg, hogyan változik az ár egy konkrét leértékeléskor! Ha például 6%-os a leértékelés, akkor az új ár az eredetinek $100 - 6 = 94\%$ -a, azaz $1 - \frac{6}{100} = 0,94$ -szorososa. Jelöljük p -vel, hogy hány százalékos volt az első leértékelés. Ekkor az első leértékelés után az ára $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ -szorosára változott. A második leértékelés $(p + 5)$ százalékos volt, ezért az ára ekkor $\left(1 - \frac{p+5}{100}\right)$ -szorosára változott. Ez alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$36\,000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p+5}{100}\right) = 24\,480$$

Ez egy másodfokú egyenlet, de a megoldása sok apró buktatót rejt magában. Figyelnünk kell a következőkre:

- Ha egy szorzatot megszorozunk egy számmal, akkor nem szabad a szorzat mindkét tényezőjét megszorozni vele! Ezért ahhoz, hogy mindkét zárójeles kifejezést 100-zal szorozzunk, az egyenlet mindkét oldalát $(100 \cdot 100)$ -zal kell szorozni.
- A törtvonal előtt kivonásjel áll.
- Az egyenletre kaphatunk olyan megoldást, ami nem megoldása a szöveges feladatnak.

Érdemes a következő sorrendet követni:

1. Osszuk el mindkét oldalt 36 000-rel!

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p+5}{100}\right) = \frac{24\,480}{36\,000}$$

2. Bontsuk fel a zárójelet!

$$1 - \frac{p+5}{100} - \frac{p}{100} + \frac{p(p+5)}{10\,000} = \frac{24\,480}{36\,000}$$

3. Szorozzuk meg mindkét oldalt 10 000-rel!

$$10\,000 - (100p + 500) - 100p + p^2 + 5p = \frac{24\,480}{3,6}$$

4. Rendezzük az egyenletet! $p^2 - 195p + 9500 = 6800$
 $p^2 - 195p + 2700 = 0$

5. Alkalmazzuk a megoldóképletet! $p_1 = 180$ és $p_2 = 15$

A 180 nem megoldása a szöveges feladatnak, mert 180%-os leértékelés nem létezik. Az első leértékelés tehát 15%-os.

Ellenőrzés: Az első leértékelés után az ár $36\,000 \cdot 0,85 = 30\,600$ Ft, a második után $30\,600 \cdot 0,8 = 24\,480$ Ft.

Második megoldás

A $p\%$ -os leértékelés $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ -dal való szorzást jelent. Vezessünk be új ismeretlent: jelöljük x -szel a $\frac{p}{100}$ -at. Ekkor az első leértékelés $(1 - x)$ -szel való szorzás. A $(p + 5)\%$ -os csökkenéskor pedig a szorzó

$$1 - \frac{p+5}{100} = 1 - \frac{p}{100} - \frac{5}{100} = 1 - x - 0,05 = 0,95 - x$$

Felírhatjuk tehát a következő egyenletet:

$$36\,000 \cdot (1 - x) \cdot (0,95 - x) = 24\,480$$

Az egyenletet rendezve: $36\,000x^2 - 70\,200x + 9\,720 = 0$

Ennek gyökei $x_1 = 1,8$ és $x_2 = 0,15$. Az első érték 180% -nak, a második érték 15% -nak felel meg, így ugyanazt a megoldást kapjuk, mint az első esetben.

FELADAT

1. Egy gyümölcsárú egyik nap 7500 Ft-ért adott el almát. Másnap 10 forinttal olcsóbban adta az alma kilóját. Így 25 kilóval többet adott el, mint előző nap, az almaeladásból származó bevétele pedig 9000 forint lett. Hány kiló almát adott el az első napon, és mennyi volt ekkor az alma egységára?

2. A Tóth család színházba készül, Hajni meg jegyet venni. Az édesapa a legjobb hely árát vette figyelembe, kiszámolt Hajninak 21 ezer forintot. Közben kiderült, hogy nagypapa és nagymama nem tudnak jönni. A legdrágább jegyek már elfogytak, ezért Hajni 500 forinttal olcsóbbakat vásárolt. Így 12 800 forintot fizetett. Hányan mentek a színházba?

3. Egy ember változó kamatozású értékpapírba fektet be 300 000 Ft-ot. A második évben a kamatláb 2 százalékponttal kisebb, mint az első évben.

- Mekkora összeg lesz a számlán a második év végére, ha az első évben a kamatláb 6% , a második évben 4% ?
- Mekkora volt a kamatláb, ha a második év végére 356 400 Ft lesz a számlán?

4. Egy tv-készülék árát először felemelték $p\%$ -kal ($p > 0$), majd ugyanennyi százalékkal csökkentették az új árát. Melyik kijelentés igaz és melyik hamis?

	állítás	igaz vagy hamis?
A	A tv ára végül ugyanannyi lett, mint volt.	
B	A tv biztosan olcsóbb lett, mint volt.	
C	Lehet, hogy a tv drágább lett, mint volt.	
D	A tv ára $\frac{p^2}{100}\%$ -kal olcsóbb lett, mint volt.	
E	A tv ára ugyanannyi lett, mintha először $p\%$ -os árcsökkentés, majd utána $p\%$ -os áremelés történt volna.	

5. Egy fagerenda 90 kg, egy nála 2 méterrel hosszabb vasgerenda pedig 160 kg. A vasgerenda métere 5 kg-mal nehezebb 1 méternyi fagerendánál. Milyen hosszúak ezek a gerendák?

HÁZI FELADAT

1. Télire krumplit vásárol egy család. 2400 forintért már majdnem meg is vettek egy zsák krumplit, amikor meglátták, hogy a szomszédos pultnál 20 forinttal olcsóbb a krumpli kilója. Így aztán ott vásárolták meg 2400 forintért a télire valót; 4 kg-mal többet, mintha a drágább krumplit vették volna meg. Hány kg krumplit vásároltak?

2. Egy divatjamúlt kabát ára 36 000 Ft, de ezen az áron a múlt hónapban egyetlen darab sem fogyott. Ezért az üzletvezető leértékeli a kabátot, de az új áron sem kelendő. Végül az új árát kétszer akkora

százalékkal csökkenti, mint az előző árcsökkentésnél. Az így kialakított 13 500 forintos áron végre a teljes készletet sikerül eladnia. Hány százalékos volt az első árcsökkentés?

3. (Érettségi feladat, 2017) Egy pár kesztyű árát először p százalékkal csökkentették, majd a csökkentett ár $p + 4,5$ százalékaival tovább mérsékelték. A kétszeri árcsökkenés utána kesztyű $18,6\%$ -kal olcsóbb lett, mint az árcsökkenés előtt volt. Határozd meg a két árcsökkenés százalékos értékét!

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy IC vonat 96 km-en keresztül maximális sebességgel ment, de a következő 68 km-en a pálya rosszabb minősége miatt csak $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val csökkentett sebességgel haladhatott. Mekkora az IC vonat maximális sebessége, ha a 164 km-es távolságot 1,5 óra alatt tette meg?

Megoldás

A vonat maximális sebessége legyen $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a csökkentett sebesség ekkor $(x - 15) \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Foglaljuk táblázatba a mozgás két részét jellemző mennyiségeket!

	első rész	második rész
sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	x	$x - 15$
út (km)	96	68
idő (h)		

Ha a vonat 96 km-t tesz meg $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, akkor az út megtételéhez szükséges idő $\frac{96}{x}$ óra.

Ez alapján tudjuk kitölteni a táblázat utolsó sorát.

	első rész	második rész
sebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	x	$x - 15$
út (km)	96	68
idő (h)	$\frac{96}{x}$	$\frac{68}{x - 15}$

A szöveg szerint $\frac{96}{x} + \frac{68}{x - 15} = 1,5$.

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $x(x - 15)$ -tel:

$$96(x - 15) + 68x = 1,5x(x - 15).$$

A zárójelek felbontása után: $164x - 1440 = 1,5x^2 - 22,5x$.

$$1,5x^2 - 186,5x + 1440 = 0.$$

A megoldóképlet szerint: $x_1 \approx 116$, és $x_2 \approx 8$.

Ez utóbbi nem lehet megoldása a feladatnak, mert a második szakaszon negatív lenne a sebesség, tehát az IC vonat maximális sebessége közelítőleg $116 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

Ellenőrzés

$\frac{96}{116} \approx 0,83$ óra, $\frac{68}{101} \approx 0,67$ óra. A két időtartam összege valóban 1,5 óra.

2. Egy palackozó üzemben a csomagoláshoz új gépet vásárolnak. Az új gép 3 órával rövidebb idő alatt palackoz 10 000 l ásványvizet, mint a régi gép. Ha mindkét gép dolgozik, akkor a munka 6 óra 40 percig tart. Mennyi idő alatt végezze a munkával külön-külön a két gép?

Megoldás

A teljes munkához szükséges idő a régi gép esetében x óra, az új gép esetében $x - 3$ óra.

1 óra alatt a régi gép a munka $\frac{1}{x}$ -ed részét, az új gép a munka $\frac{1}{x - 3}$ -ad részét végzi el. Foglalkoztatba az adatokat!

	régi gép	új gép
teljes munkához szükséges idő (óra)	x	$x - 3$
1 óra alatt egyedül a munka ekkora részét végzi el	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x - 3}$
6 óra 40 perc, azaz $\frac{20}{3}$ óra alatt egyedül ekkora részt végez el	$\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{x}$	$\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{x - 3}$

Mivel $\frac{20}{3}$ óra alatt együtt elvégzik a teljes munkát:

$$\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{x - 3} = 1$$

Szorozzuk meg az egyenletet $3 \cdot x \cdot (x - 3)$ -mal!

$$20x - 60 + 20x = 3x^2 - 9x$$

$$3x^2 - 49x + 60 = 0$$

Az egyenlet megoldásai $x_1 = 15$ és $x_2 = \frac{4}{3}$.

Az utóbbinál a második gép munkaidejére negatív számot kapnánk. A megoldás tehát: a régi gép 15 óra, az új gép 12 óra alatt végezze a munkával.

Ellenőrzés: $\frac{20}{3}$ óra alatt a régi gép a munka $\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{9}$ részét, az új gép $\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{9}$ részét végzi el, ez együtt a teljes munka.

FELADAT

1. 🎧 Nagypapa kertjét fel kell ásni. Miklós egyedül dolgozva 10 órával hamarabb felásza a kertet, mint Bence egyedül. Ha mindketten nekilátnak, akkor 12 óra alatt felássák a kertet. Mennyi idő alatt ásna fel egyedül Bence az egész kertet?
2. 🎧 Egy derékszögű útkeresztezéződésből indul két kerékpáros. Az első észak felé, és másodpercenként 4,5 m-t tesz meg. A második 5 másodperccel később indul kelet felé, és másodpercenként 5,5 m-t tesz meg. Hány másodpercig lesznek – légvonalban – 500 m-nél közelebb egymáshoz?
3. 🎧 (Érettségi feladat nyomán, 2018)
 - a) Egy játékbemutatóra Anna és Balázs 1800 dominót szeretne felállítani. Anna egyedül 6 óra alatt, Balázs pedig 9 óra alatt építené meg a dominóláncot. Ha Anna és Balázs – tartva a saját tempójukat – együtt dolgozna, akkor hány óra alatt végeznének az 1800 dominó felállításával?
 - b) A következő évi játékbemutatón Zsófi és Kornél állítják fel a dominókat. Zsófi egyedül 1 órával hosszabb idő alatt tudja felállítani az összes dominót, mint Kornél. Zsófi nekilát a munkának reggel 8:00-kor. Fél óra múlva bekapcsolódik Kornél, onnantól együtt dolgoznak. Így 12:30-ra végeznek a munkával. Mikorra végzett volna Zsófi, ha Kornél nélkül, egyedül kellett volna felállítania az összes dominót, és munka közben tart kétszer fél óra szünetet?
4. 🎧 A Pallasz Fordítóiroda megbízást kap egy lexikon magyarra fordítására. A fordítást egy ember 60 nap alatt végezné el, de a munkát – egyenlő részekre osztva – többen is végezhetik egyszerre. A fordítók minden nap az aznap lefordított anyagot továbbküldik a lektornak is, akit ugyanannyi napra szerződtek, mint a fordítók. A fordítók és a lektor napidíja egységesen 4000 Ft, ezenkívül a fordítók egyszeri, 40 000 Ft juttatást is kapnak.
 - a) Mennyi költsége lesz a fordítóirodának, ha 1, 2, 5, x fő fordítót és egy lektort alkalmaz?
 - b) A vezérigazgató végül 440 000 Ft kifizetését engedélyezi a fordítóknak és a lektornak. Vajon hány fordítót alkalmazott a fordítóiroda?
5. 🎧 Egy traktor hátsó kerekének a kerülete kétszer akkora, mint az elsőé. Ha az első kerék kerülete 0,5 méterrel nagyobb volna, a hátsó kerék kerülete pedig 0,5 méterrel kisebb, akkor 150 m-es távon az első kerék 15-tel többet fordulna, mint a hátsó. Mekkora az első, illetve a hátsó kerék kerülete?
6. 🎧 Kálmán és barátai a Bodrogon vízitúráznak. 4 km-re távolodnak el a táborhelytől, majd visszatérnek. Mekkora lenne a fiúk átlagsebessége állóvízben, ha a Bodrog sebessége $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ és ha tudjuk, hogy az oda és visszaútjuk összesen 150 percig tartott?

HÁZI FELADAT

1. 🎧 Egy kikötőből egyszerre indul két hajó: az egyik északnak, a másik keletnek. Két óra múlva 58 km-nyire lesznek egymástól. Állapítsd meg mindkét hajó sebességét, ha az egyik óránként 1 km-rel többet tett meg, mint a másik!
2. 🎧 Két automata egyforma csavarokat gyárt. A korszerűbb gép 5 órával rövidebb idő alatt gyártaná le egyedül a 100 000 darabot, mint ha egyedül csak az elavultabb gép üzemelne. Ha mindkét gépet egyszerre üzemeltetik, akkor óránként 9000 csavart készítenek el együtt.
 - a) Mennyi idő alatt gyártaná le a 100 000 darab csavart egyedül az elavultabb gép?
 - b) Mennyi idő alatt készül el a 100 000 csavar, ha a két gép egyszerre üzemel?
3. 🎧 Hétfégi rokonlátogatás alkalmával a 150 km-es távolságot odafelé $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kisebb átlagsebességgel tettük meg, mint hazafelé. Így a hazafelé vezető út fél órával rövidebb ideig tartott, mint az odafelé vezető. Mekkora volt az átlagsebesség odafelé és visszafelé?

CSOPORTMUNKA

Alkossatok négyfős csoportokat!

- 1.** Oldjátok meg az 1–4. feladatokat, a 4. feladat eredményét írtok fel a táblára! Az a csoport nyer, amelyik először írja fel a jó eredményt. A verseny addig tart, amíg mindegyik csoport felírja eredményét a táblára. Ez alatt az idő alatt egyik csoport egyszer javíthat.

Jó tanács: érdemes egy kicsit gondolkozni, mielőtt használnátok a megoldóképletet! Egyes esetekben hosszabb számolás nélkül is felelhetek a kérdésekre.

1. feladat

Mik az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, ha ebben az egyenletben az a szám az $x^2 - 7x + 6 = 0$ egyenlet nagyobbik gyöke, a b szám az $(2x - 1)^2 + 12 = (x + 4)^2 - 15$ egyenlet gyöke, a c szám pedig a $(3x + 7)(3x + 5) = 0$ egyenlet gyökeinek az összege?

A két gyököt jelöljétek a K és az L betűvel!

2. feladat

Mennyi az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeinek a szorzata, ha ebben az egyenletben az a szám a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenlet gyökeinek a száma; $b = -1$, a c szám pedig az $x(3x + 4) = 4$ egyenlet kisebbik gyöke?

Az eredményt jelöljétek az M betűvel!

3. feladat

Állapítsátok meg, hogy a következő egyenletek közül melyiknek hány gyöke van!
 $(x + 7)(5 - x) = 8$, $x^2 = 6x$, $4x^2 + x - 3 = 0$,
 $-3x^2 + 2x = 1$, $5 - x^2 = 6x + 14$, $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

A kapott 6 szám összegét jelöljétek N -nel, a 6 szám szorzatát pedig P -vel!

4. feladat

Számítsátok ki, mennyi a $(K + L) \cdot N \cdot (M - P)$ szorzat!

A kapott számot írtok fel a táblára! Zárójelben tüntessétek fel a felírás időpontját!

- 2.** Az első 3 helyezett csapat mutassa be, milyen egyszerű módszereket alkalmazott (például melyik egyenletet nem kellett megoldóképlettel megoldania, melyik esetben nem volt szüksége még a diszkrimináns felírására sem)!

HÁZI FELADAT

- 1.** Egy 720 m^2 területű, téglalap alakú telek bekerítéséhez legkevesebb 108 méter hosszú dróthálóra van szükség.
Mekkora a telek két legtávolabbi pontjának távolsága?

- 2.** Egy kertben gyümölcsfák állnak. Minden gyümölcsfán annyi seregély lakmározik, amennyi a gyümölcsfák száma. A lakmározó seregélyek száma éppen 75-tel nagyobb, mint a gyümölcsfák számának tízszerese. Hány fa áll a kertben?

- 3** A következő egyenletben hiányzik a harmadik együttható: $7x^2 + 4x + \dots = 0$
Adj olyan értéket a hiányzó együtthatónak, hogy az egyenletnek a valós számok halmazán:
- a) ne legyen megoldása;
 - b) 2 megoldása legyen!

- 4** A következő egyenletekben hiányzik egy együttható. Adj olyan értéket a hiányzó együtthatónak, hogy pontosan egy valós gyöke legyen az egyenletnek!
- a) $x^2 - \dots x + 16 = 0$
 - b) $x^2 + 12x + \dots = 0$
 - c) $x^2 - \dots x + 8 = 0$

RÁADÁS

Érettségi feladatok

- 1** A DEF derékszögű háromszög DE befogója 7 cm-rel rövidebb, mint a DF befogó. Az átfogó 2 cm-rel hosszabb, mint a DF befogó. Számítsd ki a DEF háromszög oldalainak hosszát!
- 2** A Nagy család egy bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, két évre kamatos kamatra. Hány százalékos volt az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel?
- 3** Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre. Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben?
- 4** Egy klímakutató a globális éves középhőmérséklet alakulását vizsgálja. Rendelkezésre állnak a Föld évenkénti középhőmérsékleti adatai 1900-tól kezdve. A kutató az adatok alapján az alábbi f függvénnyel modellezi az éves középhőmérséklet alakulását:
 $f(x) = 0,0001x^2 - 0,0063x + 15,2$.
A képletben x az 1900 óta eltelt évek számát, $f(x)$ pedig az adott év középhőmérsékletét jelöli Celsius-fokban ($0 \leq x \leq 119$).
- a) Számítsd ki, hogy a modell szerint 2018-ban hány fokkal volt magasabb az éves középhőmérséklet, mint 1998-ban!
 - b) Melyik évben volt az éves középhőmérséklet $15,42^\circ\text{C}$?

EMELT SZINT

- 5** A „TOJÁS” farmon átlagosan 10 000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalják, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt – ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.
- a) A tyúkok számának 4%-os csökkenése után mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés?
- Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának $p\%$ -kal történő csökkenése $2p\%$ -kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p < 30$ esetén érvényes.
- b) Hány százalékkal csökkentették tavaly a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt?

FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2006) Jelöld meg annak a kifejezésnek a betűjelét, amelyik az $ax^2 + dx + e = 0$ egyenlet diszkriminánsa, ha $a \neq 0$.

A $d^2 - ae$ B $d^2 - 4ae$ C $\sqrt{d^2 - 4ae}$

2. Oldd meg a valós számok halmazán az egyenleteket!

a) $9x^2 - 100 = 0$ b) $2x^2 + 7x = 0$

3. Adott a következő függvény:

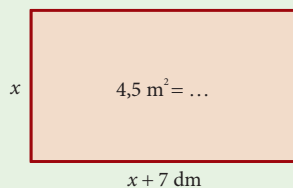
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 12x + 32.$$

- a) Teljes négyzetté kiegészítés segítségével rendezd a hozzárendelési szabályt $(x - u)^2 + v$ alakra!
 b) Melyik eltolások viszik az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ függvény grafikonját az f függvény grafikonjába?
 c) Add meg az f függvény szélsőérték helyét és szélsőértékét! Ez minimum vagy maximum?
 d) Határozd meg f zérushelyeit!

4. (Érettségi feladatok) Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $(2x - 3)^2 = x^2$
 b) $(x + 2)^2 - 90 = 5 \cdot (0,5x - 17)$

5. Egy téglalap egyik oldala 7 dm-rel hosszabb, mint a másik oldala, területe $4,5 \text{ m}^2$. Mekkora a téglalap átlója?



6. Egy téglalap területe $14,7 \text{ cm}^2$. Ha az egyik oldalát 2 cm-rel megnöveljük, a másikat 1 cm-rel csökkentjük, akkor a területe $2,9 \text{ cm}^2$ -tel nagyobb lesz. Mekkora a téglalap oldalai?

7. Tamásnak új motorja van. Egy 75 km-es utat tervezett be a próbaútra. Dezső negyed órával később indult utána, és éppen a célnál érte utol. Dezső átlagsebessége $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb volt, mint Tamásé. Mekkora sebességgel haladtak?

	Tamás	Dezső
megtett út		
sebesség		
utazás időtartama		

8. Anna és Dóra együtt állnak neki egy munkának. 8 óra elteltével vége a munkaidőnek, Anna hazamegy, a munkát azonban még nem fejezték be. Dóra még benn marad, és egy óra alatt befejezi a munkát. Ha csak egyedül kellett volna elvégezni a feladatot, akkor Dórának 2 órával több időre lett volna szüksége, mint Annának. Mennyi időbe telne nekik a feladat külön-külön?

9. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága 24 mm hosszú. Ez a magasság két olyan részre osztja az átfogót, hogy az egyik 20 mm-rel hosszabb, mint a másik. Mekkora a háromszög átfogója?

HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat, 2015) Az $x^2 + bx - 10 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 49. Számítsd ki b értékét!

2. Alkalmazd a teljes négyzetté kiegészítés módszerét, és rendezd a kifejezéseket $(x - u)^2 + v$ alakra!

a) $x^2 - 8x + 18,4$ b) $x^2 + 3,2x + 3,56$

3. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $289 - (x + 7)^2 = 0$

b) $(x - 5)(x - 2) = 10$

4. Egy konvex sokszögnek 4-gyel több oldala és 2,7-szer annyi átlója van, mint egy másiknak. Melyik hány oldalú?

5. Egy DVD-felvevő árát annyi százalékkal csökkentették, ahány ezer forintba eredetileg került. Az új ára 18 240 forint. Hány százalékos lehetett a csökkentés?

TUDÁSPRÓBA

1. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!
- a) $3 - 5x + 9x^2 = 10 - x + 6x^2$
- b) $(2x + 1)^2 = (x + 7)^2 - 51$
2. Egy egyenlőszárú háromszög területe 156 mm^2 . Az alap és a hozzá tartozó magasság összege 58 mm .
- a) Mekkora a háromszög alapja?
- b) Milyen hosszúak a háromszög szarvai?
3. Egy téglalap alakú, halvány színű karton közepére egy $10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ -es, téglalap alakú fényképet ragasztunk. A fénykép körül minden oldalon ugyanolyan széles sáv marad. A karton területe 165 cm^2 . Mekkora a karton oldalai?
4. A Tóth család 6820 Ft -ért vásárolt palántákat. Ha a 30 Ft -tal drágább palántákból vásárolnak, és 2 -vel kevesebbet vettek volna, akkor 6800 Ft -ot fizettek volna. Milyen áron vették a palántákat?
5. Alkalmazd a teljes négyzetté kiegészítés módszerét, és rendezd az $x^2 - 14x + 29$ kifejezést $(x - u)^2 + v$ alakra!
6. Egy valós számhoz hozzáadtuk a nála 1 -gyel kisebb szám reciprokát. Az összeg $3,5$. Melyik lehetett ez a szám?

EMELT SZINT

Paraméteres egyenletek

Paraméteres egyenletről beszélünk, ha az egyenlet valamelyik együtthatóját nem ismerjük. Most olyan paraméteres egyenletekkel foglalkozunk, amikor igaz, hogy nem ismerünk egy együtthatót, de ugyanakkor tudunk néhány információt az egyenlet gyökeiről. Ha például tudjuk, hogy a valós számok halmazán egy másodfokú egyenletnek pontosan egy gyöke van, akkor felírhatjuk, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 . Ebből tudunk következtetni a paraméter lehetséges értékeire.

1. Oldd meg a következő egyenletet a megoldóképlettel!
- $$x^2 + kx - 6k^2 = 0, \text{ ahol } k \text{ egy valós paraméter.}$$

Megoldás

A diszkrimináns: $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6k^2) = 25k^2 = (5k)^2$.

A diszkrimináns k minden értéke esetén nemnegatív, azaz a megadott egyenletnek minden esetben van megoldása. Két esetet különböztetünk meg.

– Ha $k = 0$, akkor az $x^2 + kx - 6k^2 = 0$ egyenlet az $x^2 = 0$ egyenletet adja. Ennek egyetlen megoldása a 0 .

– Ha $k \neq 0$, akkor $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{25k^2}}{2} = \frac{-k \pm 5k}{2}$; $x_1 = \frac{-k + 5k}{2} = 2k$ és $x_2 = \frac{-k - 5k}{2} = -3k$.

Ebben az esetben tehát az egyenlet megoldáshalmaza kételemű: $\{-3k; 2k\}$.

2. A p valós paraméter melyik értéke esetén lesz a következő egyenletnek egyetlen megoldása a valós számok halmazán?
- a) $2x^2 + 8x - p = 0$ b) $3x^2 + px + 12 = 0$ c) $2x^2 + (p + 1)x + 8 = 0$
3. Add meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek egyetlen valós megoldása legyen!
- a) $x^2 - 4m = 0$ b) $x^2 + 2mx + 5m - 4 = 0$

TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. ♪ Végezd el a következő műveleteket!

- a) $(x - 9)^2$ c) $(x - 0,7)^2$
b) $(x + 1,1)^2$ d) $(x + 3,5)^2$

2. ♪ Egészítsd ki a következő kifejezéseket úgy, hogy teljes négyzetet kapj!

- a) $x^2 + 14x + \dots$ c) $x^2 + 3x + \dots$
b) $x^2 - 4x + \dots$ d) $x^2 - 3x + \dots$

3. ♪ A nevezetes azonosság segítségével végezd el a teljes négyzetté kiegészítést!

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$$

- a) $x^2 + 12x + 39$ c) $x^2 + 12x + 6$
b) $x^2 + 12x + 100$ d) $x^2 + 12x - 2$

4. ♪ Teljes négyzetté kiegészítéssel alakítsd át a kifejezéseket!

- a) $x^2 + 16x + 70$ c) $x^2 + 5x + 3,25$
b) $x^2 - 12x - 10$ d) $x^2 - 5x - 1,25$

5. ♪ A teljes négyzetté kiegészítés módszerével állapítsd meg, milyen eltolásokkal kapjuk meg a következő függvények grafikonját az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából! A függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

- a) $f(x) = x^2 + 8x + 13$ b) $g(x) = x^2 - 6x + 14$

6. ♪ Oldd meg teljes négyzetté kiegészítés módszerével az egyenleteket a való számok halmazán!

- a) $x^2 - 22x = -40$ b) $x^2 + 18x = 40$

7. ♪ Oldd meg az egyenleteket a való számok halmazán!

- a) $x^2 + 2x - 99 = 0$
b) $x^2 - 3x - 180 = 0$
c) $x^2 - 6x - 55 = 0$

8. ♪ Oldd meg az egyenleteket a való számok halmazán!

- a) $13x^2 + 2x = 0$
b) $4x^2 - 3x = 0$
c) $0,6x^2 - 57 = 0$
d) $1,7x^2 + 34 = 0$

9. ♪ Oldd meg az egyenleteket a való számok halmazán!

- a) $56x^2 - 13x - 3 = 0$
b) $7x^2 - 12x + 6 = 0$
c) $40x^2 - x - 15 = 0$
d) $30x^2 + 29x + 4 = 0$

10. ♪ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $6x^2 - 4x - 45 = 35 - 3x^2 + 2x$
b) $x^2 + 5,2x - 3,2 = 0,5x^2 + 1,3x - 2,4$

11. ♪ Melyik egyenleteknek negatív a diszkriminánsa?

- a) $x^2 + 4x + 17 = 0$
b) $2x^2 - 5x + 11 = 0$
c) $1,2x^2 + 8x + 3,5 = 0$
d) $0,6x^2 - 5x - 1,4 = 0$

12. ♪ Adj olyan értéket b -nek, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen!

- a) $2x^2 + bx + 18 = 0$
b) $3x^2 - bx + 75 = 0$

13. ♪ Melyik x esetén lesz az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2}$ függvény helyettesítési értéke

- a) 0 b) -4 c) 20 d) 3,5

14. ♪ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $7x - 3x^2 + 18 = 2(4x - x^2) - 24$
b) $3(x^2 - 1) - 5x = 4(7 - 2x) + 2x^2 - 3$

15. ♪ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $14 + \frac{x^2 + x}{2} - 4x = \frac{x - 3}{2} + \frac{x^2 + 2}{4} - 1$
b) $16 - \frac{x^2 - 1}{3} = \frac{15 - x}{2} - \frac{x^2 + 5}{6} + 5$

16. ♪ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $(2x - 1)(x - 3) = (1 - 2x)(x + 6) - 3$
b) $(x + 4)(5 - 2x) - 2 = (4 - x)(2x + 6) + x^2$

17. ♪ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $(x - 1)^2 - 7x = 3 - (x + 2)^2$
b) $4x - (x - 3)^2 - 1 = 3x + (x - 5)^2$

- 18** $\Rightarrow$ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!
 a) $144 - (x - 4)^2 = 2(x + 5)^2 - 45x$
 b) $8 + (2x + 1)^2 = 3(x + 3)^2 - 7x$
- 19** $\Rightarrow$ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!
 a) $(2x - 9)^2 + (x + 2)^2 = 127 - 3x$
 b) $(7x - 1)^2 - 40 = (8x + 3)^2 - 4x$
- 20** $\Rightarrow$ Határozd meg a következő függvény zérushelyeit! Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.
 a) $x \mapsto \frac{x^2}{12} - \frac{x}{3} - 1$
 b) $x \mapsto -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + 6$
- 21** $\Rightarrow$ Egy másodfokú függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabálya:
 $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
 a) Teljes négyzetté kiegészítéssel rendezd a hozzárendelési szabályban szereplő kifejezést $-(x - u)^2 + v$ alakra!
 b) Határozd meg, hogy milyen eltolásokkal kaphatjuk meg az $x \mapsto -x^2$ függvény grafikonjából az f függvény grafikonját!
 c) Határozd meg az f függvény zérushelyeit!
 d) Minimuma vagy maximuma van az f függvénynek? Határozd meg a szélsőérték helyét és a szélsőértéket!
 e) Írd fel az f függvény értékkészletét!
- 22** $\Rightarrow$ Írj olyan valós számot az ismeretlen együttható helyére, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen!
 a) $x^2 + 0,6x + \dots = 0$
 b) $3x^2 + 4,2x + \dots = 0$
- 23** $\Rightarrow$ Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!
 a) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x + 2} = 1$
 b) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x + 4} = 1$
- 24** $\Rightarrow$ Két valós szám négyzetének összege 29. Az egyik szám 7-tel kisebb, mint a másik. Melyik ez a két szám?
- 25** $\Rightarrow$ Egy valós számhoz hozzáadtuk a nála 5-tel kisebb szám reciprokát. Az összeg 2,5. Melyik ez a szám?
- 26** $\Rightarrow$ Egy valós számhoz hozzáadtuk a nála 10-zel nagyobb szám reciprokát. Az összeg $-15,2$. Melyik ez a szám?
- 27** $\Rightarrow$ Egy valós számhoz hozzáadtuk a nála 1-gyel nagyobb szám négyzetét. Az összeg 1805. Melyik lehetett ez a valós szám?
- 28** $\Rightarrow$ Egy konvex sokszög átlóinak száma 90. Hány oldala van?
- 29** $\Rightarrow$ Egy konvex sokszög átlóinak és oldalainak száma együtt 91. Hány oldala és hány átlója van?
- 30** $\Rightarrow$ A következő másodfokú függvényeknek van-e zérushelye? Ha van, add meg a zérushelyeket! (Értelmezési tartomány a valós számok halmaza.)
 a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$
 b) $g(x) = 2x^2 - x - 1$
 c) $h(x) = 2x^2 - 28x + 98$
- 31** $\Rightarrow$ Egy szám 4,8-del kisebb a reciprokánál. Melyik ez a szám?
- 32** $\Rightarrow$ Egy tört nevezője 3-mal kisebb a számlálójánál, és a tört 2,1-del nagyobb a reciprokánál. Melyik ez a tört, ha a számlálója és a nevezője is egész szám?
- 33** $\Rightarrow$ Egy tört nevezője 1-gyel nagyobb a tört számlálójánál. A tört reciproka 0,45-dal nagyobb, mint a tört. Melyik törtől van szó, ha a tört számlálója és nevezője is egész szám?
- 34** $\Rightarrow$ Egy számnak és a reciprokának összege $\frac{13}{6}$. Határozd meg a számokat!
- 35** $\Rightarrow$ Egy családi ház udvara téglalap alakú, 16,8 m széles és 26,4 m hosszú. Az udvar egyik széle mentén egy téglalap alakú díszkertet telepítünk, melyet három oldalról ugyanolyan széles ösvény határol, negyedik oldala a kerítéshez ér, a kert egyik 26,4 m széles oldalánál. Milyen széles az ösvény, ha a díszkert alapterülete $316,1 \text{ m}^2$?



36 Egy deltoid hosszabbik átlója 2,6 cm-rel nagyobb, mint a rövidebbik átlója. Területe $2,535 \text{ cm}^2$. Mekkora az átlók?

37 Egy deltoidnak két derékszöge van. Rövidebb oldalai 1,8 cm-rel kisebbek, mint a hosszabbik oldalak. Hosszabbik átlója 5,7 cm.

a) Mekkora az oldalai?

b) Mekkora a területe?

38 Egy 48 cm hosszú pálcából deltoid alakú papírsárkányt készítünk. A pálcát kettétörjük, merőlegesen összeillesztjük, ezek lesznek a deltoid átlói. A papírsárkány területe $263,5 \text{ cm}^2$. Milyen hosszúak a deltoid átlói?

39 Egy téglalap alakú kert egyik oldala 12 méterrel hosszabb, mint a másik. A területe 864 m^2 . Milyen hosszúak a kert oldalai?

40 Egy téglalap két oldalának különbsége 14 cm. Az átlói 61,6 cm hosszúak.

a) Mekkora az oldalai?

b) Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amelynek területe egyenlő a téglalap területével?

41 Egy konvex deltoid területe 1380 cm^2 , a két átló hosszának összege pedig 109 cm.

a) Mekkora az átlók?

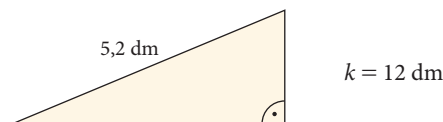
b) Ha a deltoid egyik oldalának hossza 52 cm, akkor mekkora lehet a kerülete?

c) Mekkora a deltoid kerülete, ha az átlói kölcsönösen felezik egymást?

42 Egy munkagép két hátsó kereke 90 cm-rel nagyobb területű, mint az első. 230 méteres úton a hátsó kerekek 36-tal fordulnak kevesebbet, mint az első. Mekkora a kerekek kerülete?



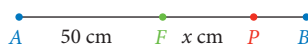
43 Egy derékszögű háromszög átfogója 5,2 dm, kerülete 12 dm. Mekkora a háromszög befogói?



44 Egy $13 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ -es fénykép mögé akkora téglalap alakú fehér lapot ragasztunk, hogy a képet körülvevő fehér sáv területe megegyezzen a kép területével. A sáv szélessége minden oldalon ugyanannyi. Milyen széles a sáv?

45 Egy rombusz kerülete 104 cm, az egyik átlója 28 cm-rel hosszabb, mint a másik. Mekkora a rombusz átlói?

46 A 100 cm hosszú AB szakasz felezőpontja F . Az F ponttól mekkora távolságra vegyük fel az FB szakaszon a P pontot úgy, hogy az $AF : FP = FP : PB$ egyenlőség teljesüljön (azaz az FP szakasz hossza az AF és a PB szakasz hosszának mértani közepe legyen)?



47 December elején kiárúsítás volt egy ruhaüzletben, x százalékkal csökkentették az árakat. December utolsó hetében tovább csökkentettek, megint x százalékkal. Így az eredetileg 5700 Ft-os blúz ára december végén csak 4415 Ft volt. Hány százalékos volt az első árleszállítás?

48 Egy sporteszköz 76 000 Ft-ba került januárban. Júniusban felemelték az árát, majd decemberben, az év végi akció keretében kétszer annyi százalékkal csökkentették az árát, mint amennyivel júniusban megemelték. A decemberi akciós ára 71 820 Ft volt. Hány százalékos volt a júniusi áremelés?

49 Egy vállalkozás növelni szeretné a havonta legyártott alkatrészek számát. Ehhez két korszerűsítés bevezetését tervezi. Egyrészt új gépeket is üzembe állít. Másrészt új számítógépes programot fog alkalmazni, amelynek vezérlésével több alkatrészt tud legyártani minden egyes gépük. A gépek számának százalékos növelése kétszer annyi, mint az új számítógépes program következtében a gépek hatékonyságának százalékos növekedése. Hány százalékkal nő a gépek száma, ha a legyártott alkatrészek száma 25%-kal növekszik?

- 50** ☞ Egy kiránduláshoz a busz bérlete 96 000 forintba kerül. Az utolsó napon kiderül, hogy még egy jelentkező csatlakozik a csoporthoz, ezért a szervezők örömmel küldik az üzenetet, hogy a busz egy főre számított költsége 400 Ft-tal kevesebb lesz a tervezettnél. Hányan mennek kirándulni?
- 51** ☞ Egy rendezvényen a pályázati keretből minden önkéntes segítőnek vesznek a szervezők egy doboz bonbont. 19 320 forintért vásárolnak, mindenkinek ugyanazt a bonbont adják. Ha kettővel több önkéntes lett volna, akkor 80 Ft-tal olcsóbb bonbont kapott volna mindenki, s ugyanannyit költöttek volna. Hány önkéntes segítő volt a rendezvényen?
- 52** ☞ Kétfajta gyümölcsöt vettünk az osztálykirándulásra; körtéből 5 kg-mal többet, mint szilvából. A körte 3200 forintba került, a szilváért 1320 forintot fizettünk. 1 kg szilva 80 forinttal olcsóbb, mint 1 kg körte. Hány kg körtét és hány kg szilvát vásároltunk?
- 53** ☞ Kerékpáros kiránduláson az első 48 km után csökkenteni kellett a csapat sebességét. A következő 32 km-t $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val lassabban tették meg. Így 4 óra 48 perc alatt tették meg a teljes távot. Mekkora sebességgel haladtak az egyes részeken?
- 54** ☞ Egy derékszögű útkeresztesződésből egyszerre indul két jármű, egymásra merőleges irányban. Az egyik jármű sebessége $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb, mint a másik jármű sebessége. 20 perc múlva a két jármű körülbelül 32 km-re lesz egymástól. Mekkora a járművek sebessége?
- 55** ☞ Egy feladat elvégzésére két gépet állítanak munkába. Ha csak a régebbi gép végezné a munkát, akkor 3 nappal több időre lenne szükség, mintha csak az új gép. Hat napig mindkét gép dolgozik a feladaton, majd a régebbi gépet elviszik, és az új gép egyedül dolgozik tovább. Az új gép további négy nap alatt befejezi a munkát. Hány nap alatt végeznének a feladattal külön-külön?
- 56** ☞ Egy motorcsónak sebessége állóvízben $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A motorcsónak egy folyón halad 42 km-t felfelé, majd ott egyből megfordul és visszatér a kiindulási pontra. Az oda-vissza út 3 óra 36 percet vesz igénybe. Mekkora a folyó sebessége?
- 57** ☞ Pisti és Karcsi biciklitúrát tervez. A szokásos átlagsebességünkkel 86 km-t tehetnénk meg. – mondja Pisti. De Karcsi hozzáteszi:
– Ha $0,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -rel nagyobb átlagsebességgel haladnánk, és fél órával többet tekernénk, akkor 10,8 km-rel hosszabb utat is teljesíthetnénk. Mekkora a „szokásos” átlagsebességük?
- 58** ☞ Két hónapos lekötési akciót indít egy pénzintézet. Az elhelyezett betét után az első hónapban fizetett kamatot hozzáírja a betéthez, majd a második hónapban a megnövelt összeg után fizetett kamatot $0,5$ százalékponttal megemeli (ez a szakkifejezés azt jelenti, hogy ha az első hónapban a kamat $p\%$ -os volt, akkor a második hónapban $(p + 0,5)\%$ lesz).
a) Hány százalékos az első havi kamat, ha 200 000 Ft elhelyezett betét esetén két hónap múlva 207 060 forint járna?
b) A kamat után 20% forrásadót kell fizetni. Végül hány százalékkal magasabb a kifizetett összeg, mint az elhelyezett betét?
- 59** ☞ Iskolai kirándulás tervezésekor kiszámították, hogy összesen 98 000 forintot kell az osztály tanulóinak befizetniük. Szeptemberben kiderült, hogy három tanuló nem tud elmenni, így 92 500 forintra változott a befizetendő összeg. Így az eredetileg tervezettnél 200 forinttal többet kellett fejenként befizetniük. Hány tanuló ment végül kirándulni, és hány forintot kellett fejenként befizetniük?
- 60** ☞ (Érettségi feladat alapján, 2015) A webáruház vásárlói között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 forint, az 55 év felettiek 17 543 550 forint értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 forinttal költöttek többet, mint a 28 év alattiak.
a) Számítsd ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és add meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek!
Egyik héten a 28 év alatti vásárlók száma 50-nel volt több, mint az 55 év felettiek száma. Ezen a héten a 28 évnél fiatalabbak összesen 500 850 Ft-ért, az 55 évnél idősebbek összesen 530 400 Ft-ért vásároltak. Az 55 évnél idősebbek átlagosan 2530 Ft-tal költöttek többet.
b) Hány 28 év alatti vásárlója volt a webáruháznak ezen a héten?

NÉHÁNY FELADAT VÉGEREDMÉNYE

Bevezető óra: 1. 45,36 A. 4. a) 45,472 A. b) 45,584 A.

1. lecke: 1. a) igaz: B, E. 2. mind hamis. 3. a) C, D. b) D, E. 4. Pl.: Több, mint 5 napig tart ez a munka. Legfeljebb 8 gólt rúgott a csapat. Kevesebb vagy ugyanannyi nap, mint kolbász. 5. a) igaz: A, B, E. b) A tagadása: C és D.

2. lecke: 1. hamis, igaz, igaz. 2. C, D. 3. Van páros prím-szám. (igaz); Nincs tengelyesen szimmetrikus négyszög. (hamis); Nincs középpontosan szimmetrikus háromszög. (igaz); Van olyan háromszög, amelynek nincs beírható köre. (hamis). 4. A – P, B – Q, C – S, E – R. D tagadása: Minden természetes szám kisebb vagy nagyobb, mint a számjegyeinek összege. 5. igaz: A, B.

3. lecke: 1. igazak: a) b) d). 3. a) A hamis, B igaz. 4. P – 2, Q – 4, R – 1, S – 5, U – 3. T felírása: . 5. A: Bandi, Cili. B: Dani, Feri, Jóska. C: Tibi, Hajni, Cili, Feri, Dani, Jóska. D: mindenki, kivéve Feri és Dani (8 fő). E: Tibi, Hajni, Kati. F: Bandi, Kati.

4. lecke: 1. a) 2. b) 2. c) mindegy. d) 2. 2. a) Pál-völgyi iskola. b) piros. c) igen, bronzérmes.

5. lecke: 1. a) igaz, hamis. b) hamis, igaz. c) igaz, igaz. 2. a) Ha B, akkor A. b) Mindkét irányban: ha C, akkor D, és ha D, akkor C. c) Ha F, akkor E. 3. igaz, hamis, igaz, hamis, hamis, hamis, igaz, igaz. 4. a) VAGY. b) ÉS. 5. ÉS... VAGY...ÉS.

6. lecke: 1. a) C, D. b) C, D. 2. a) hamis, igaz, hamis, igaz. b) hamis, igaz, hamis, igaz. 3. a) $x = 3$ és $y = 1$. b) sok megoldás van. Pl: $x = 5$ és $y = -1$. c) sok megoldás van, pl $x = y = 6$. d) $x = 0$ és $y = 0$. 4. $x \geq -2$ vagy $x < -8$.

5. a) igaz, igaz. b) hamis, igaz. 6. Korpáts Bori röplabdázik, Tóth Anna kosárlabdázik, Tóth Csilla tollaslabdázik, Tóth Eszter atletizál, Patos Dóri úszik.

7. lecke: 1. a) $(-1; 3)$. b) $(2; -1)$. c) nincs megoldás. 2. a) $(-1; 2)$. b) $(-1; 2)$. 3. 9 perc, 1350 m.

8. lecke: 1. a) $(-3; 4)$. b) $(11; 1)$. c) $(0,75; -0,4)$. 2. a) nincs megoldás. b) végtelen sok. 3. a) $(6; -4)$. b) nincs megoldás. 4. 280.

9. lecke: 1. a) $x + 100 = 2(y - 100)$. b) $y + 100 = 3(x - 100)$. c) $(220; 260)$. 2. 10, 15. 3. 40; 60. 4. 110 Ft, 190 Ft. 5. 24; 8. 6. negyed óra.

10. lecke: 1. a) $(10; 15)$. b) $(4; 10)$. 2. 244 peták. 3. 4,5 kg és 5,5 kg. 4. 12 000 Ft és 4500 Ft. 5. a) 36 sorban 50 fenyőt. b) 2028 platánt. 6. 15 és 10. 7. 735 ezüstért.

11. lecke: 1. $(0,5; 3)$. 2. $(1; -2)$. 3. $(3; 4)$. 4. $y = 0,6x + 0,6$;

$y = -0,3x + 4$; $\left(\frac{34}{9}; \frac{43}{15}\right)$. 5. 450 km, 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 75 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. 6. $\frac{4}{3}$ és $\frac{1}{3}$ liter.

12. lecke: 1. a) 2^{15} . b) 3^2 . c) 5^9 . 2. $F < C = B < E < A < D$. 3. A nem végződik 0-ra; B 6 db 0-ra végződik; C 5 db 0-ra végződik; D 8 db 0-ra végződik; E nem végződik 0-ra; F 15 db 0-ra végződik. 4. a) 14. b) 2. c) 8. d) 3. 5. a) 3^5 -szere. b) 1-szerese. c) $\frac{1}{5}$ -szere. 6. $A = J = F$, $B = H$, $D = I$, $E = G$, C-nek nincs párja. 7. a) 2 hatványai: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 3 hatványai: 3; 9; 27; 81; 243; 729; 5 hatványai: 5; 25; 125; 625. b) $\frac{5}{8}; \frac{4}{11}$.

13. lecke: 1. a) 5^3 ; 20^2 ; $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; $\left(\frac{4}{3}\right)^2$; b^3 ; $\left(\frac{a}{b}\right)^3$. b) 5^6 ; $3,7^4$; 3^{-4} . 2. a) 8, illetve -6 a kitevő. b) -8, illetve 6 a kitevő.

3. a) 10^{-18} . b) 10^{-4} . c) 10^{-4} . 4. a) $5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1}$ és $3 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$. b) Az első. $5,308 > 5,21$. 5. a) 10^{-3} . b) nem írható 10 egész kitevős hatványaként. c) 10^{-5} . d) 10^8 . 6. $\frac{27}{8}$; $\frac{729}{1}$; $\frac{63}{8}$; $\frac{216}{15\,625}$.

14. lecke: 1. a) $3^6 b^6$. b) $36c^{-5}$. c) $2^{20} x^{20}$. 2. a) 2^{-4} . b) 2^{-12} . 3. a) $\frac{1}{5 \cdot 10} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}$. b) $\frac{1}{5+10} \neq \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$.

c) $(5 \cdot 10)^2 = 5^2 \cdot 10^2$. d) $(5 + 10)^2 \neq 5^2 + 10^2$.

4. $A \cdot B = \frac{3}{ab^2} = 3a^{-1}b^{-2}$; $B : A = \frac{a^7}{3b^6} = 3^{-1}a^7b^{-6}$;

$A^2 : B = \frac{9b^8}{a^{11}} = 9a^{-11}b^8$. 5. a) $\left(\frac{5}{2}\right)^6$. b) $\left(\frac{4}{3}\right)^6$.

c) $\left(-\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{121}{9}$. d) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$. 6. 11 darab.

15. lecke: 1. $1,23 \cdot 10^{-2}$; $5 \cdot 10^{-4}$; $-4,211 \cdot 10^{-5}$; $-7,99 \cdot 10^0$.

2. a) $3,3 \cdot 10^6$; $3 \cdot 10^{-19}$. b) $1,21 \cdot 10^{-4}$; $2,401 \cdot 10^{-45}$.

c) $5,03 \cdot 10^{-3}$. 3. a) $2 \cdot 10^1 = 20$. b) $5 \cdot 10^0 = 5$. c) $3 \cdot 10^1 = 30$.

d) $5 \cdot 10^{-2}$. 4. a) $-2,88 \cdot 10^4$ C. b) $1,6398 \cdot 10^{-7}$ kg. 5. a) 5 mm.

b) $T = 25 \text{ mm}^2$. c) $T = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$.

6. a) $\frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \approx 1833$. b) $9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{60} = 9,11 \cdot 10^{29}$ (kg).

16. lecke: 1. a) 20 és 2,5. b) 24 és 3. c) 60 és 1,2. 2. a) 63.

b) 1,6. c) 0,0006. d) 50 000. e) $\frac{4}{7}$. f) $\frac{21}{5}$. 4. a) 28. b) 150.

c) 1900. d) 432. 5. $2\sqrt{3}$; $2\sqrt{5}$; $10\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$; $5\sqrt{a}$.

6. a) $3\sqrt{a}$. b) $3\sqrt{2}$. 7. a) $12 + 2\sqrt{35}$. b) $24 + 2\sqrt{143}$.

8. a) $\sqrt{102}$. b) $\sqrt{195}$.

17. lecke: 1. a) 7 cm. b) 11 cm. c) $\sqrt{57}$ cm. d) $\sqrt{T}$ cm.

2. a) 7 és -7. b) 11 és -11. c) $\sqrt{57}$ és $-\sqrt{57}$. d) $\sqrt{T}$ és $-\sqrt{T}$. 3. 15; 20; 60; 70; 3; 6; 50. 4. 5; 5; 11; 11; $|a|$. 5. a) 2.

b) -18. c) $12 + 2 \cdot \sqrt{35}$. d) $32 - 10 \cdot \sqrt{7}$. 6. a) 2. b) 0,4. c) $\sqrt{3}$.

d) $\sqrt{2}$. e) $3 \cdot \sqrt{2}$. f) $0,2 \cdot \sqrt{2}$. 7. a) $\sqrt{5}$. b) $4 \cdot \sqrt{5}$.
c) $2,4 \cdot \sqrt{5}$. d) $\sqrt{2}$. e) 10. f) $0,05 \cdot \sqrt{5}$. 8. a) $a = \sqrt{5}$ cm;
 $b = \sqrt{2}$ cm. b) $7 + 2 \cdot \sqrt{10}$ cm². c) $\sqrt{7}$ cm. 9. b) $\approx 6,93$.
c) $4 \cdot \sqrt{3}$.

18. lecke: 1. a) 25. b) 4,5. c) 78. d) $\frac{1}{6}$. 2. a) 78. b) 21.

3. a) $-2\sqrt{2}$. b) $12\sqrt{3}$. c) 325. 4. területek: 28, 26, 29 és 30;
kerületek: $2\sqrt{26} + 2\sqrt{40}$, $2\sqrt{13} + 2\sqrt{52}$, $2\sqrt{58} + \sqrt{116}$,
 $4\sqrt{20} + \sqrt{40}$. 5. a) kétszerese. b) 10 cm². c) $10\sqrt{2}$ cm.
6. a) $6\sqrt{3}$ cm. b) $27\sqrt{3}$ cm². c) 12 cm, $36\sqrt{3}$ cm².
7. a) lehet, derékszögű. b) nem lehet. c) lehet.

19. lecke: 1. a) $6^{-3} < 6^{-2} < 6^{-1} < 6^0$. b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 < \left(\frac{2}{5}\right)^2 < \left(\frac{2}{5}\right)^1 < \left(\frac{2}{5}\right)^0$. c) $-3^4 < -3^{-4} < (-3)^{-4} < (-3)^4$.

2. párok: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$; $1,5^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(\frac{9}{16}\right)^{-2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2$;
 $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^{-2}$; nincs párja: $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}$ kifejezésnek; másképp:
 $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{4}\right)^2$. 3. a) 5^{-1} . b) 5^{-9} . 4. 10^3 . 5. a) $2^{19} \cdot 3^{-10}$.

b) $\left(\frac{10}{3}\right)^6$. 6. $12\sqrt{3}$. 7. 3. 8. a) $4\sqrt{5}$. b) $\frac{\sqrt{35}}{2}$. 9. a) $7,8 \cdot 10^{-4}$
fényév. b) $2,46 \cdot 10^4$ másodperc. 10. 10 000-szer.

20. lecke: 2. a) 15 000 Ft, 20 000 Ft. b) 20 pólót már ingyen
kellene adni. c) $4000 - 200x$; $x(4000 - 200x)$.

21. lecke: 1. f: $[-1; \infty[$, -1 és 1, -1, 0, szigorúan mo-
noton csökken; szigorúan monoton nő; g: $[0; \infty[$, -1;
0; -1; szigorúan monoton csökken; $[-1; \infty[$ szigorú-
an monoton nő. 2. a) $f(x) = x^2 + 5$. b) $f(x) = (x - 6)^2$.
4. a) $f(x) = (x + 3)^2$, $g(x) = x^2 - 4$. b) 0 és $x = -3$, -4 és
 $x = 0$. 5. a) $h(x) = x^2 - 2$, $k(x) = (x - 2)^2$, $m(x) = x^2 + 2$.
b) $[-2; \infty[$, $[0; \infty[$, $[-2; \infty[$. 6. a) g. b) k. c) f.

22. lecke: 1. a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 4$, $h(x) = (x + 3)^2$;
eltolás az y tengely mentén negatív irányban 4 egységgel,
eltolás az x tengely mentén negatív irányban 3 egységgel.
b) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 4|$, $h(x) = |x| - 3$; elto-
lás az x tengely mentén pozitív irányban 4 egységgel, el-
tolás az y tengely mentén negatív irányban 3 egységgel.
2. $[0; \infty[$, $[5; 0; 5]$; $[-\infty; 5]$ -on szigorúan monoton csökken;
 $[5; \infty[$ -on szigorúan monoton nő. $[-5; \infty[$, -5 és 5 ; $-5; 0$;
 $[-\infty; 0]$ -on szigorúan monoton csökken; $[0; \infty[$ -on szio-
gorúan monoton nő. 3. Az y tengely mentén toljuk a
grafikont „felfelé” 5-tel. 4. g: $\mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x} - 1$;
 $h: [-4; \infty[\rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = \sqrt{x + 4}$.

23. lecke: 4. a) $[-4; 0]$. b) $[-8; 0]$. 5. a) $f(x) = |x|$,
 $g(x) = -\frac{1}{4}|x|$. f-nek minimuma, g-nek maximuma van.

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2$. mindkettőnek minimuma van.

6. a) g. b) $h(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2$.

24. lecke: 3. f: $[0; 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$. 4. $a = -4$;

$b = 3$; bármely negatív szám, $b = 5$; $a = 6$ és $b = 1$; bármely
negatív szám, $-3,5$, bármely negatív szám, $b = 7$. 6. Nyúj-
tás kétszeresére, tükrözés az x tengelyre, eltolás az x tengely
mentén negatív irányban 3-mal, eltolás az y tengely mentén
pozitív irányban 4-gyel.

25. lecke: 1. $(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$; $(x - 5)^2 =$
 $x^2 - 10x + 25$; $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$; $(x + 5)^2 =$
 $x^2 + 10x + 25$. 2. $f(x) = (x + 3)^2$, $g(x) = (x - 4)^2$.

3. a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$. b) (3; -4). c) $x = 3$ helyen.

4. zérushelye van: f, g, h, k, minimuma van: f, g, k, maximuma
van: k. 5. kettő: $f(x) = (x + 2)^2 + 5$, $f(x) = -(x + 2)^2 + 5$.

6. a) $a = 2$, $b = 0$ és $c = -2$. b) $a = -1$, $b = 4$ és $c = -1$.

c) $a = -1$, $b = -4$ és $c = 2$. d) $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ és $c = 0$.

26. lecke: 1. a) $x_1 = 0$ és $x_2 = 8$. b) $x_1 = 0$ és $x_2 = -3,2$.

c) $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$. d) $x_1 = 0$ és $x_2 = -6$. 2. g minimum helye
-2,5, minimuma -3,25. 3. g maximum helye 2, maximum
értéke -2. 4. f minimum helye 11, minimuma -12,1; g mi-
nimum helye 11, minimuma -6,3.

27. lecke: 1. a) 0; -112; -56. b) 0; 12; 6. 3. a) 20,8 l; 7,6
l. b) 13 km; 7,7 l. c) 10 200 kg; 23 648 kg. 4. b) 2,5 kg.

5. a) $10 - x$; $x(10 - x)$. c) 5.

28. lecke: 1. $x \mapsto (x + 3)^2$, $x \mapsto (x + 3)^2 + 2$, balra 1,5-
del, lefelé 4-gyel, jobbra 6-tal, lefelé 15-tel, felfelé 11-gyel,
 $x \mapsto 2x^2 + 9$. 2. a) $[0; 3]$. b) $[0; 4]$. c) $[0; 2]$. 3. $[-3; 0]$,
 $f(x) = (x + 1)^2 - 2$, -1; -2; -2; 2; $[-2; 2]$, $g(x) = -x^2 + 2$,
-2 és 2; -2; 0; 2; $[-1; 2]$, $h(x) = 2|x|$, 0; 0; 2; 4. 4. 0 és -8,
minimum, -4; -16; 0 és $\frac{9}{2}$, minimum, $\frac{9}{4}$, -10,125, 0 és
3, maximum, 1,5; 2,25; 0 és 150, maximum, 75; 112,5. 6. a)
45; 40; 25 (m). b) 1 s múlva. c) 4 s múlva.

29. lecke: 2. a) $x^2 - 12x + 36$. b) $x^2 + 22x + 121$.

c) $x^2 - x + 0,25$. d) $x^2 + 3x + 2,25$. 3. a) $(x + 9)^2$.

b) $(x - 50)^2$. c) $(x + 25)^2$. d) $(x - 1,5)^2$. 4. a) $x^2 + 4x + 4$

b) $x^2 - 8x + 16$. c) $x^2 + 5x + 6,25$. d) $x^2 - 15x + 56,25$.

5. $(x + 7)^2 + 1$, $(x - 2)^2 - 5$. 6. a) $(x + 6)^2 + 4$.

b) $(x - 5)^2 - 45$. c) $(x + 3)^2 - 5,5$. d) $(x - 1,5)^2 + 2$.

7. a) $(x + 2)^2 + 1$, tehát 2-vel eltoljuk balra és 1-gyel fölfelé.

b) $(x - 3)^2 + 3$, tehát 3-mal toljuk jobbra és 3-mal fölfelé.

30. lecke: 1. $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$,

$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$, $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$,

$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

2. $x^2 - 18x + 71$, $(x - 9)^2 - 6$, $(x - 9)^2 - 81$, $x^2 + 14x + 50$,
 $(x + 7)^2 - 9$, $(x + 7)^2 + 7$, $(x + 7)^2 - 49$. 3. a) $(x - 2)^2 - 5$,

tehát 2-vel eltoljuk jobbra és 5-tel lefelé. b) $(x + 7)^2 - 10$,

tehát 7-tel toljuk balra és 10-zel lefelé. 4. Az egyenletek

gyökei: 3 és 11; nincs megoldás; 2 és -5. 5. a) 3 és -5.

b) 4 és -7. c) 2 és 10. d) -2 és -8. 6. 11-en.

31. lecke: 1. a) 1,5 és -4,5. b) 1 és -1,8.

2. $-3x^2 + 7x + 5 = 0$ 3. a) 4 és $-5,5$. b) 2 és 3. c) $\frac{-11 \pm \sqrt{281}}{10}$. 4. a) 166,7 és 500. c) $\approx 333,3$ -nál, értéke $\approx 333,3$. 5. a) 3-nál kisebb szám. b) 3. c) 3-nál nagyobb szám.

32. lecke: 1. a) 0 és $-\frac{8}{3}$. b) $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$. 2. a) 4,5 és $\frac{1}{3}$. b) 3,5 és $-0,6$. 3. a) 3 és $-1,5$. b) 0,6 és 3. 4. a) $-2 \pm \sqrt{10}$. b) nincs zérushelye.

5. a) $2x^2 - 6x + 2,5 = 0$. b) $3x^2 - 8x + 4 = 0$. 6. a) $\frac{9}{7}$. b) $-\frac{25}{8}$. c) nincs megoldás. 7. 36 és 37 vagy -37 és -36 .

33. lecke: 1. 12 és 28. 2. 9 cm és 12 cm. 3. 7 és 19 vagy -19 és -7 . 4. Első – utolsó: 3 vagy 1. Második – első: 3,5 és 0,5. Harmadik – középső: 15 és 8. 5. 13. 6. nincs (másodfokú egyenlet megoldásai nem természetes számok). 7. -6 és 35 vagy 27,5 és 1,5

34. lecke: 1. a) -2 és 1. b) 1,2 és 3,5. c) -7 és -4 . 2. -2 ; -1 ; 0, és 10; 11; 12. 3. a gyökök száma: 2, 0, 2, 1. 4. 42. 5. a) lehetetlen. b) lehetetlen. c) biztos. 6. mindegyik lehetséges.

35. lecke: 1. 25 cm. 2. 1,25 cm és 2,25 cm. 3. 2,5 m. 4. a) 13. b) 103. c) 33. 5. 20 cm, 40 cm. 6. 100 mm, 60 mm, 80 mm.

36. lecke: 1. a) $\frac{3}{2}$ és $\frac{2}{3}$. b) 1 (és 1). c) Nincs ilyen valós számpár. 2. 14 és 16. 3. a) $-\frac{1}{2}$ és 4 (Kikötés: $x \neq 0$). b) $-\frac{1}{2}$ és 6 (Kikötés: $x \neq 0$). 4. 50 km/h. 5. a) $-\frac{1}{2}$ és 3 (Kikötés: $x \neq 2$). b) -5 és 2 (Kikötés: $x \neq 3$). 6. a) 1 és 3 (Kikötés: $x \neq 0$ és $x \neq 6$). b) 3 és $\frac{1}{3}$ (Kikötés: és $x \neq 2$).

37. lecke: 1. 75 kg, 100 Ft. 2. 8-an. 3. a) 330 720 Ft. b) 10% és 8%. 4. hamis: a) és c). 5. 6 m és 8 m.

38. lecke: 1. 30 óra. 2. 73 másodpercig. 3. a) 3,6 óra. b) 18:00-ra. 4. a) 520 000 Ft, 440 000 Ft, 488 000 Ft; $(240 + \frac{240}{x} + 40x)$ ezer Ft. b) Két lehetőség van: 2 vagy 3 fordítót. 5. Két megoldás van: 1,5 m és 3 m; illetve 3,25 m és 6,5 m. 6. 5 km/h.

40. lecke: 1. B. 2. a) $\frac{10}{3}$ és $-\frac{10}{3}$. b) 0 és $-\frac{7}{2}$. 3. a) $f(x) = (x - 6)^2 - 4$. b) 6-tal toljuk jobbra és 4-gyel lefelé. c) Minimum: -4 ; minimumhely: $x = 6$. d) 4 és 8. 4. a) 1 és 3. b) -2 és $\frac{1}{2}$. 5. 30,8 dm. 6. 3,5 cm és 4,2 cm. 7. 50 km/h és 60 km/h. 8. 16 óra és 18 óra. 9. 52 mm.

TÁRGYMUTATÓ

akkor és csak akkor 25	gyökvonás azonosságai 57	negatív egész kitevő 50
állítás 7	ha...akkor művelet 25	négyzetgyök 56
állítás megfordítása 25	hatványozás azonosságai 50	normálalak 54
állítás tagadása 7	kizáró vagy 16	parabola 79
diszkrimináns 100	logikai érték 7	paraméteres egyenlet 119
egyenletrendszer 33	másodfokú egyenlet 94	permanencia-elv 50
egyenlő együtthatók módszere 37	másodfokú függvény 84	teljes négyzetté kiegészítés 95
és-művelet 15	másodfokú kifejezés 94	új ismeretlen bevezetése 39
főegyüttható 84	másodfokú polinom 94	vagy-művelet 15
függvénytranszformációk 80	megoldóképlet 100	

TARTALOM

Előszó – a tankönyv témakörei	3
Ráadás – Bevezető óra	4

LOGIKA

1 Igaz vagy hamis	6
2 Állítás és tagadása	10
3 VAGY-művelet, ÉS-művelet	14
4 Igaz vagy hamis? Foglaljuk táblázatba!	20
5 Állítás és megfordítása	24
6 Gyakorlás, tudáspróba	26
Témazáró feladatgyűjtemény	30

EGYENLETRENDSZEREK

7 Egyenletrendszerek grafikus megoldása	32
8 Egyenletrendszerek megoldása algebrai módszerekkel	36
9 Egyenletrendszerek	40
10 Gyakorlás	42
11 Gyakorlás, tudáspróba	44
Témazáró feladatgyűjtemény	46

HATVÁNYOZÁS ÉS A NÉGYZETGYÖK

12 A hatványozás (ismétlés)	48
13 Egész kitevőjű hatványok	50
14 Gyakorlás	52
15 Számok normálalakja	54
16 A gyökvonás azonosságai	56
17 Négyzetgyökös feladatok	60
18 Gyakorlás	62
19 Gyakorlás, tudáspróba	64
Témazáró feladatgyűjtemény	66

FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK

20 Függvények egy-egy konkrét problémához ...	68
21 Parabolák a koordináta-rendszerben	70
22 „Fel”-„le”, „jobbra”-„balra”	74
23 „Soványabb”, „kövérebb”	76
24 Összetett függvénytranszformációk	80
25 Másodfokú függvények	84
26 Másodfokú függvények grafikonja	86
27 Gyakorlás, alkalmazás	88
28 Gyakorlás, tudáspróba	90
Témazáró feladatgyűjtemény	92

MÁSODFOKÚ EGYENLETEK

29 Teljes négyzetté kiegészítés	94
30 Teljes négyzetté kiegészítés alkalmazása	98
31 A másodfokú egyenlet megoldóképlete	100
32 Alkalmazzuk a megoldóképletet!	102
33 Szöveges feladatok	104
34 Diszkrimináns	106
35 Szöveges feladatok geometriából	108
36 Másodfokú egyenletre visszavezethető feladatok	110
37 Pénzügyekkel kapcsolatos szöveges feladatok	112
38 Szöveges feladatok mozgásról és munkavégzésről	114
39 Csoportverseny	116
40 Gyakorlás, tudáspróba	118
Témazáró feladatgyűjtemény	120
Néhány feladat végeredménye	124
Tárgymutató	127