



OKTATÁSI
HIVATAL

NAT
2020

12

Matematika

tankönyv

MATEMATIKA 12.

Az érthető matematika



OKTATÁSI HIVATAL

A kiadvány 2022. július 18-tól 2027. augusztus 31-ig tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/2304-7/2022. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet alapján készült – 2020. 01. 31. után kiadott Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára szóló matematika tantárgy kerettantervének.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők: dr. Várady Ferenc

Tananyagfejlesztők: Juhász István, Orosz Gyula

Kerettantervi szakértő: dr. Csapodi Csaba

Lektor: dr. Csapodi Csaba, dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön

Szerkesztette: Csajági Sándor

Szakábra: Szalóki Dezső

Illusztráció: Urmai László

Fedélterv: Slezák Ilona terve alapján összeállította Bánáti János

Tipográfia: Bajtai Zoltán

Fotók: ©Shutterstock képügynökség, ©Thinkstock, ©iStock, ©MTI/MTVA, ©CULTiRiS, © CULTiRiS / AKG-Images, © CULTiRiS / INTERFOTO, © CULTiRiS / ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY, © CULTiRiS / Bridgeman Art Library, Hungart © 2023

A tankönyvben felhasználtuk Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit Matematika 12. tankönyv c. művét. Raktári szám: NT-17412

© Oktatási Hivatal, 2023

ISBN 978-963-436-404-7

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.

Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: Brassói Sándor elnök • Raktári szám: OH-MAT12TB

Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos

Műszaki szerkesztő: Orlai Márton, Fazekas Julianna

Grafikai szerkesztő: Kurucz Klára, Mikes Vivien, dr. Valaczka Bence, Mazán Enikő Dóra

Nyomdai előkészítés: Gados László

Terjedelem: 44,81 (A/5) ív • Tömeg: 870 gramm • 1. kiadás, 2023

Gyártás: Könyvtárellátó Nonprofit Kft.

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen

Felelős vezető: György Géza vezérigazgató

A nyomdai megrendelés törzsszáma:



Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001 számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020

2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

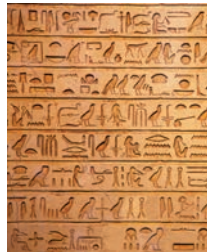
Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TARTALOM

Fontosabb jelölések	6
A tankönyv használatáról	7
I. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK	8
1. Vegyes feladatok	9
2. A matematikai logika alkalmazásai	16
<i>Az ókori filozófusoktól a digitális számítógépekig (Olvasmány)</i>	24
3. Kombinatorikai gyakorlófeladatok	26
4. Vegyes feladatok a gráfok témaköréből	32
<i>Néhány érdekes gráfelméleti probléma (Olvasmány)</i>	39
<i>Hogyan szabadult ki Harry Potter és Hermione a csapdából? (Olvasmány)</i>	43
II. SOROZATOK	44
5–6. A sorozat, számsorozat fogalma	45
7–8. Számtani sorozat	48
9–10. Mértani sorozat	55
11. A mértani sorozat első n elemének az összege	59
12. Példák mértani sorozatra	60
13. Vegyes feladatok	65
14–15. Kamatoskamat-számítás	67
III. TÉRGEOMETRIA	78
16. Térelemek hajlósszöge	79
17. Térelemek távolsága	87
18. Sokszögek területe	93
19. A kör és részeinek területe	101
20. A területszámítás néhány alkalmazása	106
21–22. A felszín és a térfogat; a hasáb és a henger	110
23. A gúla és a kúp	124
24. Hasonló síkidomok területének aránya; hasonló testek térfogatának aránya	130
<i>Gulliver geometriája (Olvasmány)</i>	136
25. A csonkagúla és a csonkakúp	138
<i>A testek csoportosítása (Olvasmány)</i>	143
26–27. A gömb	148
28. Alakzatokba írt alakzatok (Emelt szint)	156
29. Összetett feladatok	160
30. A térgeometria alkalmazásai	167
<i>Magyar származású matematikusok a XVIII–XX. században (Olvasmány)</i>	171
Fogalomtár	173





IV.	RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS	174
	Gondolkodási módszerek	175
1.	Halmazok	175
2–3.	Kombinatorika, gráfok, logika	180
	Számelmélet	188
4.	Számhalmazok, műveletek és tulajdonságai	188
5.	Számelméleti alapfogalmak, oszthatósági szabályok	192
6.	Számelméleti feladatok	195
	Algebra	198
7.	Hatvány, gyök, logaritmus	198
8.	Algebrai kifejezések, azonosságok	202
9.	Algebrai kifejezések értelmezési tartományának, értékészletének vizsgálata	205
10.	Műveletek algebrai kifejezésekkel	208
11.	Egyenletek megoldási módszerei	209
12.	Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek	211
13.	Szöveges feladatok	213
14.	Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek	216
15.	Másodfokú egyenlőtlenségek	219
16.	Szélsőérték-feladatok, nevezetes közepek (Emelt szint)	220
17.	Szöveges feladatok	223
18.	Első- és másodfokú egyenletrendszerek	226
19.	Négyzetgyökös egyenletek	229
20.	Exponenciális egyenletek	231
21.	Logaritmusos egyenletek (Emelt szint)	236
22.	Gyakorlati feladatok	239
	<i>Az írásbeli munka néhány jellemzője: ellenőrzés, válasz, végeredmény, pontos érték az érettségi vizsgán (Olvasmány)</i>	242
	Geometria	244
23.	Geometriai alapfogalmak, pont-halmazok	244
24.	A geometriai transzformációkról	246
25.	Alakzatok egybevágósága	249
26.	Hasonlóság	251
27.	A háromszögekről	254
28.	Tételek, amelyek minden háromszögre érvényesek	257
29.	Négyszög, sokszög	259
30.	Kör és részei. Ívhossz	261
31.	Vektorok	263
	Trigonometria	264
32.	Trigonometriai alapismeretek	264
33.	Forgásszögek szögfüggvényei (Emelt szint)	268

	Koordinátageometria	275
34.	Vektorok a koordináta-rendszerben. A pont koordinátageometriája	275
35.	Az egyenes koordinátageometriája	277
36.	A kör koordinátageometriája	279
	Függvények	281
37.	Alapfogalmak. A lineáris függvény	281
38.	Számhalmazon értelmezett nemlineáris alapfüggvények és grafikonjaik	286
39.	Függvénytranszformációk	291
40.	Függvény abszolút értéke, függvénytranszformációk alkalmazása	298
41.	Gyakorlati feladatok	302
	Statisztika; valószínűségszámítás	306
42–43.	Leíró statisztika, középértékek	306
44.	Valószínűségszámítási alapismeretek	318
45.	Játékok elemzése, várható érték	323
46.	Geometriai valószínűségi mező	330
	<i>Mire jó a matematika? (Olvasmány)</i>	334
V.	KÖZÉPSZINTŰ GYAKORLÓ ÉRETTSÉGI FELADATSOROK	336
	1. feladatsor	336
	2. feladatsor	338
	3. feladatsor	340
	4. feladatsor	342
	5. feladatsor	344
	6. feladatsor	346

FONTOSABB JELÖLÉSEK

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy $d(A, e)$ vagy Ae vagy $\overline{Ae}$

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B ponton átmenő e egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2) \sphericalangle$

A B csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A , másik szárán a C pont található: $ABC \sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C \sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$ vagy $ABC_{\triangle}$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög félkerülete:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

A derékszög jele: $\perp$

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC_{\triangle} \cong A'B'C'_{\triangle}$

Hasonlóság: $\sim$; $ABC_{\triangle} \sim A'B'C'_{\triangle}$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Az A pontba mutató helyvektor: $\underline{a}, \mathbf{a}$ vagy $\overrightarrow{A}$

A v vektor: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$ vagy $\vec{v}$

A v vektor hossza: $|\mathbf{v}|$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}; \{0; 1; 2; \dots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z} \{ \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots \}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza:

$$\mathbf{Z}^+, \mathbf{Z}^- \{1; 2; 3; \dots\}, \{-1; -2; -3; \dots\}$$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin; 5 \in \mathbf{N}, -2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset; A \subseteq \mathbf{R}, \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Nem részhalmaz a halmaznak: $\not\subset; \mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^+$

Halmazok uniója, metszete: $\cup, \cap; A \cup B, A \cap B$

Halmazok különbsége: $\setminus; A \setminus B$

Üres halmaz: $\emptyset, \{\}$

Intervallumok: $[a; b],]a; b[, [a; b[,]a; b]$

$$x \in [a; b], \text{ ha } a \leq x < b$$

Az A halmaz komplementere: $\overline{A}$

Az A halmaz elemszáma: $|A|; |\{0; 1; 2\}| = 3$

Végtelen: $\infty; |\mathbf{N}| = \infty$

Az x szám abszolút értéke: $|x|; |-3,1| = 3,1$

Az f függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$$D_f, R_f$$

Az f függvény hozzárendelési szabálya:

$$f: x \mapsto f(x); f: x \mapsto 2x + 3$$

$$f(x) = y; f(x) = 2x + 3$$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen:

$$f(x_0); f(5), \text{ ha } x_0 = 5$$

Az f függvény inverze: f^{-1}

Az a osztója b -nek, b többszöröse a -nak: $a | b; 2 | 8$

Az a és b legnagyobb közös osztója (LNKO): $(a; b); (4; 6) = 2$

Az a és b legkisebb közös többszöröse (LKKT): $[a; b]; [4; 6] = 12$

n faktoriális: $n!; 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Az X sokaság átlaga: $\overline{X}$

Az X sokaság szórása: σ_X

Az összegzés jele: $\sum; \sum_{i=1}^8 x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_8$

Permutációk: $P_n; P_n = n!; P_4 = 4! = 24$

Ismétléses permutációk: $P_n^{k,l,m}, (k+l+m \leq n);$

$$P_n^{k,l,m} = \frac{n!}{k! \cdot l! \cdot m!}; P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

Variációk: $V_n^k; V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1); V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Ismétléses variációk: $V_n^{k,i}; V_n^{k,i} = n^k; V_5^{3,i} = 5^3 = 125$

Kombinációk: C_n^k vagy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!};$

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}; C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Binomiális együttható: $\binom{n}{k}; \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Állítások tagadása (negációja): $\neg$

Állítások diszjunkciója, konjunkciója: $\vee, \wedge$

Következmény és ekvivalens állítások: $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ vagy $\rightarrow, \leftrightarrow$

Univerzális kvantor (minden ...) $\forall$

Egzisztenciális kvantor (létezik ...) $\exists$

Kizáró vagy művelet: $\oplus$

Következmény: $\models$

A TANKÖNYV HASZNÁLATÁRÓL

A tankönyv elsősorban a *középszintű érettségi vizsga* tananyagát tartalmazza, de megtalálható benne néhány olyan kiegészítés is, amely az *emelt szintű érettségi vizsga* követelményrendszeréhez tartozik.

A tankönyvben a matematikai szemlélet fejlesztése a definíciókhoz és a fogalmakhoz kapcsolódó tananyagelemek kidolgozásával történik. A matematika megértéséhez, sikeres tanulásához feltétlenül hozzátartozik a *bizonyítási készség* kialakítása és fejlesztése. Minden lecke végén összegyűjtöttük a fontosabb új **fogalmakat**. Kiegészítő anyagként ajánljuk az olvasmányok és matematikatörténeti ismertetések, érdekességek elolvasását.

A tankönyvben **Emelt szint**-tel (és apró betűvel), jól elkülönítve jelöltük azokat a kiegészítéseket, amelyek csak az **emelt szintű érettségi vizsgán** kérhetők számon.

A tankönyvben a definíciók és a tételek fejléccel ellátott keretbe kerültek. Abban az esetben, amikor nincs fejléc, fontos gondolatokat emeltünk ki.

A könyvben szereplő *Olvasmányok* általában érdekességeket, az érettségi vizsga anyagán túlmutató kiegészítő anyagrészeket tartalmaznak.

Számos kidolgozott példa található a könyv minden leckéjében, amelyek fokozatosan vezetnek be a tanulókat az elsajátítandó tananyagba. A tananyag gyakorlását, elmélyítését, az otthoni tanulást és az érettségi vizsgára való felkészülést a leckék végén kitűzött feladatok segítik. Ezeket a nehézségi szintjük szerint is csoportosítottuk:

K1 = közép szint, könnyebb;

K2 = közép szint, nehezebb;

E1 = emelt szint, könnyebb;

E2 = emelt szint, nehezebb;

= kiegészítő anyag.

Az érdeklődők vagy gyakorolni vágyók számára a leckék végén még **további feladatokat** is ajánlunk, amelyeket a kiadó *MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény* családjából jelöltünk ki.

A tankönyv végén középszintű gyakorló érettségi feladatsorok találhatók.

A felkészüléshez ajánlott példatárak:

Gerőcs László – Orosz Gyula – Paróczay József – Szászné dr. Simon Judit:

16125/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.

16126/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

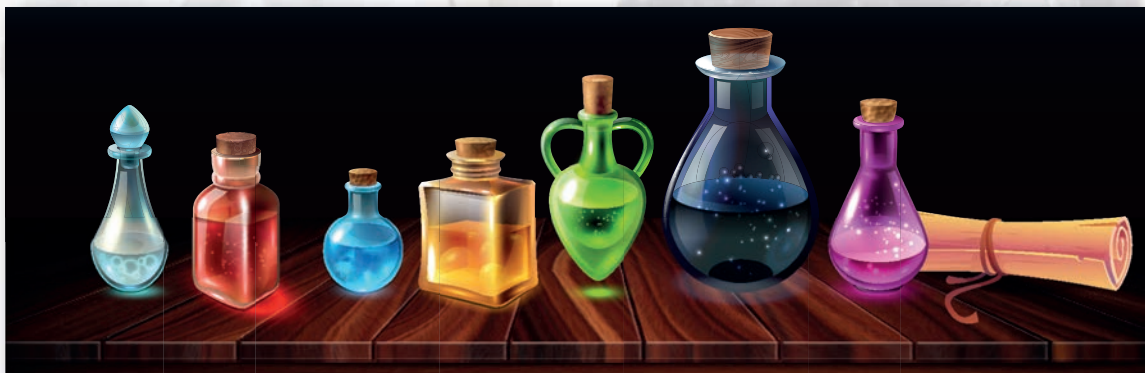
Czapáry Endre – Czapáry Endréné – Csete Lajos – Hegyi Györgyné – Iványiné Harró Ágota –

Morvai Éva – Reiman István:

16127/NAT (+CD-n a megoldások) MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III., Geometriai feladatok gyűjteménye

I. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

Hermione és Harry csapdába estek.



„A helyiségben nem volt más, csak egy asztal, és rajta hét, különböző alakú kis palack, szépen sorba állítva. [...]

Hermione egy papírtekercset fedezett fel az üvegek mellett. Kezébe vette, és olvasni kezdték Harryvel:

*Fordulj meg, s menekülj, vagy lépj be a vészbe;
Két üveg megsegít, azokat vedd kézbe.*

Az egyik visszaküld, a másik előre:

Átkelhetsz a tűzön, ha iszol belőle.

Hétből két üvegben jámbor csalánbor van,

De három méreg is rejtőzik a sorban.

Válassz! Csak úgy vethetsz rabságodnak véget.

Segítséget kapsz, ím, jó tanácsot, négyet.

*Egy: ravasz a méreg, de gondolj csak arra,
Mindkét bor mérget lát, ha elfordul balra.*

Kettő: a két szélső más ízt rejt, meglátod,

De ha továbbmennél, egyik sem barátod.

Három: küllemében mindegyik palack más,

Tudd meg, nem rejt mérget se törpe, se óriás.

Négy: a két második balról s jobbról nézve

Hasonló nedűt rejt – vésd ezt, vándor, észbe.

Hermione megkönnyebbülten felsóhajtott, s Harry csodálkozva látta, hogy a lány mosolyog.

– Csodás! – lelkesedett Hermione. – Ez nem mágia, hanem logika. Egy egyszerű rejtvény! Sok híres varázsló gyenge matekból, és a logikai feladványokhoz hozzá se tudnak szagolni. Ők aztán itt állodognának ítéletnapig!”

(J. K. Rowling: Harry Potter és a Bölcsek Köve, fordította: Tóth Tamás Boldizsár)

A különböző gondolkodási módszereket és következtetési szabályokat nemcsak a matematikában, de a gyakorlati élet több területén is sikeresen alkalmazhatjuk.

1. VEGYES FELADATOK

A 10. osztályban megismerkedtünk néhány egyszerű logikai alkalmazással. Megvizsgáltuk a matematikai állítások tulajdonságait, az állítások megfordítását és tagadását, és elemeztük az egy- és kétváltozós logikai műveleteket. Ebben a leckében vegyes feladatokat válogattunk a tágabb értelemben vett logika témaköréből.

Nagy Károly német-római császár udvarában élt **Alcuin** (735–804), korának híres tudósa. Ő volt a császár környezetében élő ifjú nemesek nevelője, és a lovagi erények tanítása mellett a gondolkodás művelését is fontosnak tartotta. Egyszerű, józan ésszel megoldható problémákat tűzött ki, amelyek szerint „élesítik az ifjak elméjét”. A feladatok közül jó néhány a mai napig friss maradt, s része lett a matematikai folklórnak; másokkal pedig a rejtélyirodalomban találkozhatunk, leginkább a találos kérdések műfajában.

1. példa

Alcuin egy közismert feladata a farkas, a kecske és a káposzta áthajózásáról szól.

Egy révésznek kis csónakján át kell szállítania a folyón egy farkast, egy kecskét és egy kosár káposztát. Sem a farkas és a kecske, sem a kecske és a káposzta nem maradhat együtt őrizetlenül. A csónakban pedig egyszerre csak egyikük – vagy a farkas, vagy a kecske, vagy csak a káposzta – fér el a révész mellett. Mit tegyen a révész?

Megoldás

Az egyszerű algoritmus első lépése adódik: először a kecskét kell átszállítani. (Egyébként a parton maradók valamelyike megenné a másikat.) Ezután viszont úgy tűnik, megakadtunk: akár a káposztát, akár a farkast viszi át a révész, a túlparton összeférhetetlenség alakul ki. A trükk az az észrevétel, hogy a révész visszafelé is szállíthat a csónakján.

A kecske átszállítása után két lehetősége van a révésznek.

I. Átviheti a farkast, visszahozza a kecskét, átviszi a káposztát, majd visszatér a kecskéért.

II. Vagy az előző eset „szimmetrikus párját” hajtja végre: átviszi a káposztát, visszahozza a kecskét, átviszi a farkast, majd visszatér a kecskéért.

Megjegyzés

Az algoritmust szimbólumokkal is leírhatjuk. Ha F , K , k jelöli rendre a farkast, a kecskét és a kosár káposztát, és a $\rightarrow$ és $\leftarrow$ nyilak a csónak két mozgásirányát, akkor a megoldások a következőképpen formalizálhatók:

I. $(K \rightarrow), (\leftarrow), (F \rightarrow), (K \leftarrow), (k \rightarrow), (\leftarrow), (K \rightarrow)$.

II. $(K \rightarrow), (\leftarrow), (k \rightarrow), (K \leftarrow), (F \rightarrow), (\leftarrow), (K \rightarrow)$.

[Itt természetesen $\leftarrow$ az üres járatot jelenti.]



Alcuin

Angol származású egyházi matematikus, korának kiemelkedő tudósa. 775 körül latin nyelven megírt könyvének a címe *Problémák az ifjú elméjének frissítésére*. A feladatok egy része keleti eredetű, már korábban ismert volt. A mű sokáig mintaként szolgált a későbbi tankönyvíróknak.

Egy kicsit nehezebb Alcuin következő feladata.

2. példa

Három féltékeny férj, mindegyik a feleségével, át akar kelni egy folyón, ahol az átkeléshez egyetlen kétszemélyes csónak áll rendelkezésükre. Hogyan keljenek át a túlsó partra, ha a férfiek ragaszkodnak ahhoz, hogy feleségük ne maradjon nélkülük férfi társaságában?

Megoldás



Jelölje A , B és C a férjeket, a , b , c a megfelelő feleségeket; valamint a csónak mozgásának két irányát a $\rightarrow$ és $\leftarrow$ nyilak. Néhány sikertelen próbálkozás után most is nyilvánvalóvá válik, hogy a feladat csak úgy oldható meg, ha a visszaúton alkalmanként két személyt utaztatunk a csónakkal.

Többféle megoldás van, egy lehetséges eljárás a következő: $(A, a \rightarrow)$, $(\leftarrow A)$, $(b, c \rightarrow)$, $(\leftarrow a)$, $(B, C \rightarrow)$, $(\leftarrow B, b)$, $(A, B \rightarrow)$, $(\leftarrow c)$, $(a, b \rightarrow)$, $(\leftarrow C)$, $(C, c \rightarrow)$. Érdemes az algoritmus lépéseit papíron, ceruzával végigkövetni, s ellenőrizni, hogy a két parton valóban teljesülnek a személyekre vonatkozó feltételek.

Két tipikus logikai feladat következik, egy úgynevezett elemi összetartozásos probléma, valamint egy számítógépes játék elemzése.

3. példa

Egy Pécsről Budapestre tartó vonat fülkéjében négy lány ül: Anna, Bea, Cili és Dóri. A négy utas lakhelye – valamilyen sorrendben – Pécs, Budapest, Mohács és Dombóvár.

Az alábbi (1)–(4) kijelentések alapján állapítsuk meg, hogy ki hol lakik!

(1) Dóri már többször járt látogatóban Pécssett.

(2) Bea idősebb a Pécssett lakó lánynál.

(3) Annát a végállomáson várja a barátja, aki betegség miatt maradt otthon közös lakásukban.

(4) Dóri a busójárársra megy haza.

Megoldás

Az egyszerű feladatra többféle megoldás adható. Ezek közös jellemzője, hogy a közölt információk segítségével folyamatosan szűkítjük a lehetőségeket. Az alábbiakban a jól használható táblázatos módszert alkalmazzuk.

Ennek az a lényege, hogy az adatokat és összefüggéseket egy 4×4 -es táblázatba foglaljuk úgy, hogy az összetartozó elempárokat valamilyen jellel, mondjuk egy 1-essel jelöljük. Például megtehetjük, hogy a táblázat soraiban a lányokat, az oszlopokban pedig a városokat soroljuk fel (kezdőbetűikkel); s a táblázat „A” sorába és „Bp” oszlopába írt 1-es jel azt jelenti, hogy az „A” lány a „Bp” városban lakik. Ekkor tehát a táblázatban összesen négy 1-es jel lesz: *minden sorban és minden oszlopban pontosan egy darab*. A maradék mezőket pedig kitölthetjük 0-val, ami arra utal, hogy a megfelelő személy és város között nincs kapcsolat.

Először megállapítjuk, hogy a vasútvonalon az állomások sorrendje Pécs, Dombóvár, Budapest; s erre a vonalra csatlakozik a mohácsi utas. Ezután az (1)–(4) információk segítségével folyamatosan növeljük a kizárások számát.

(1) miatt Dóri, (2) miatt Bea nem lakik Pécsen, (3) miatt Anna budapesti. Ezen információkat jelöltük az 1. táblázatban.

	P	D	Bp	M
A			1	
B	0			
C				
D	0			

1. táblázat

	P	D	Bp	M
A	0	0	1	0
B	0		0	
C			0	
D	0		0	

2. táblázat

	P	D	Bp	M
A	0	0	1	0
B	0		0	
C	1	0	0	0
D	0		0	

3. táblázat

Mivel Anna budapesti, az „A” sor és „Bp” oszlop további celláit nullákkal tölthetjük ki. Így kapjuk a 2. táblázatot. (Anna már nem lakhat máshol, és más nem lakhat Budapesten. Általában is igaz, hogy ha valamelyik sorban vagy oszlopban szerepel 1-es, akkor a további sor- és oszlopmezők nullákkal tölthetők ki.)

Most észrevehetjük, hogy Cili Pécsen lakik, mert a „P” oszlopban kell lennie 1-esnek, és eddig három 0 szerepel. Ebben az esetben az elemi kizárások tehát eldöntő információvá álltak össze. A 3. táblázatban jelöltük az eldöntő információ miatti kizárásokat.

Végül (4) miatt Dóri nem mohácsi, így a befejezés egyértelmű: Dóri dombóvári, Bea mohácsi (4. táblázat).

Az összetartozó lány-város értékpárok tehát (A, Bp), (B, M), (C, P) és (D, D).

	P	D	Bp	M
A	0	0	1	0
B	0	0	0	1
C	1	0	0	0
D	0	1	0	0

4. táblázat

Megjegyzés

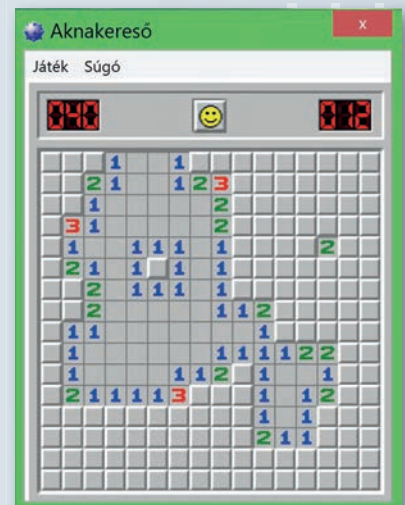
Ennek a régi 8. osztályos felvételi feladatnak csak akkor van egyértelmű megoldása, ha a szövegösszefüggés alapján feltételezzük, hogy Anna is pesti lakos, csakúgy, mint a barátja. Szigorúan véve a (3) állításból ez nem következik.

4. példa

Az ismert számítógépes játék, az *Aknakereső* egyik részállása a következő:

		1	
		1	
		2	
		1	
1	1	1	

Itt az 1 és 2 számok azt mutatják, hogy az adott mezőnek hány olyan szomszédja van, amely aknát (bombát) tartalmaz. (A csúcsbeli szomszédság is számít, tehát a tábla belsejében egy mezőnek nyolc szomszédja van.) A szürke szín pedig már a biztonságos mezőket jelzi, azaz azt, hogy ezeken nincsen akna. A feladat annak meghatározása, hogy a maradék nyolc mező melyike tartalmazhat még bombát.



Megoldás

Matematikai szempontból például a következőképpen formalizálhatjuk a feladatot.

Bevezetjük az ábra szerinti a, b, c, d, e, f, g, h változókat; ezek értéke 1, ha a mezőjükön akna található, egyébként 0.

Mivel az első 1-es mező pontosan egy bombával szomszédos, ezért a vagy b közül pontosan az egyik van bomba, így összegük pontosan 1. Ezért felírhatjuk, hogy (1) $a + b = 1$.

g	h	1	
e	f	1	
c	d	2	
a	b	1	
1	1	1	

Ugyanezt az egyenletet kapjuk a sorban második 1-es miatt is, de a harmadik 1-es új információt ad: (2) $b = 1$. (Hiszen ez a mező 1 aknás cellával szomszédos, és csak a b jöhet szóba.)

A harmadik oszlopban, lentől fölfelé haladva további négy összefüggés írható fel, így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

- (1) $a + b = 1$,
- (2) $b = 1$,
- (3) $b + d = 1$,
- (4) $b + d + f = 2$,
- (5) $d + f + h = 1$,
- (6) $f + h = 1$.

Az egyenletrendszer megoldása a $\{0; 1\}$ halmazon egészen könnyű. (2)-t felhasználva (1)-ből és (3)-ból $a = d = 0$, (4) és (5) különbségéből $h = 0$, végül (6)-ból $f = 1$ adódik. Első közelítésben bombák (B) tehát a b és f mezőkön vannak, az a, d és h mezőkön pedig nincsenek.

g		1	
e	B	1	
c		2	
	B	1	
1	1	1	

Ha további információnk nincs, akkor a c, e és g mezők mindegyike két-két állapotú lehet (vagy tartalmaznak aknát, vagy nem), így a bombák a kezdőállásban összesen $2^3 = 8$ -féleképpen helyezkedhetnek el.

Persze a kezdőállásban lehetnek segítő információk. Ha például a játék végén tartunk, akkor tudjuk, összesen hány aknát kell még megtalálnunk. Ha ez a szám 2 vagy 5, akkor készen vagyunk: a további c, e, g mezők állapota egyértelműen ismert.

A **játék folytatása** során a jobb egérgombbal jelöljük a b és f helyen az aknát (bombát), valamint a bal egérgombbal rákattintottunk az a, d és h mezőkre. Ekkor a gép kiírta, a játékszabálynak megfelelően, hogy a kért mezőkkel hány bomba szomszédos, és a következő ábrát kaptuk:

g	2	1	
e	B	1	
c	2	2	
1	B	1	
1	1	1	

Innen a játék könnyen befejezhető. A két bomba közötti mező – ezt korábban d -vel jelöltük – 2-es jelzésű, tehát két bombával szomszédos. Ezeket a bombákat már meg is találtuk, a mező alatt és fölött, ezért (7) $c + e = 0$, azaz $c = e = 0$. A másik észrevétel, hogy a korábban h -val jelölt mező is két aknával szomszédos, s ezekből csak egy ismert, az alatta levő. Így (8) $e + g = 1$.

A két egyenletből $c = e = 0$, $g = 1$ adódik, készen vagyunk.

B	2	1	
2	B	1	
2	2	2	
1	B	1	
1	1	1	

5. példa

András, Béla és Csaba játék közben betört egy ablakot. Keresték a tettest, ezért mindegyiküket megkérdezték, hogy kinek a lelkén szárad az ablak betörése. A következő (1)–(3) válaszokat kapták:

- (1) András: Béla volt.
- (2) Béla: Csaba törte be az ablakot.
- (3) Csaba: Nem én törtem be az ablakot.

Ki volt a tettes, ha tudjuk, hogy az ártatlanok igazat mondanak? (A bűnös igazat is mondhat, de hazudhat is.)

Megoldások

Ebben az egyszerű példában áttekintjük azokat a megoldási módszereket, amelyeket a hasonló feladatokban alkalmazhatunk. A megoldások leírása előtt az állításokat egyszerűbben fogalmazzuk meg:

- (1) A: B bűnös;
- (2) B: C bűnös;
- (3) C: C nem bűnös.

Első megoldás (hipotézis felállítása, esetszétválasztás)

Ebben a megoldásban két esetet különböztetünk meg, például A állításától függően.

1. eset: Tegyük fel, hogy A igazat mond, azaz szerinte B a bűnös. Ekkor a (2) állítással B hazudik (ez nem mond ellent a feltevésünknek), és a (3) állítás is (C ártatlansága) megerősíti a feltevést. Tehát egy lehetséges megoldás, hogy B törte be az ablakot.

2. eset: Meg kell még vizsgálni azt a lehetőséget, ha A hazudik, azaz ő a bűnös. Ekkor állítása szerint B ártatlan (ez igaz állítás), ezért (2) igaz. Itt ellentmondást kaptunk: B szerint C a bűnös, de két bűnös nem lehet.

Vagyis ez az eset nem lehetséges.

Második megoldás (logikai kapcsolatok elemzése)

Bonyolultabb feladatokat érdemes azzal kezdeni, hogy az állítások között logikai összefüggéseket keresünk. Ezek megtalálása leszűkíti a lehetőségek számát. Kereshetünk ellentmondó vagy egymást kizáró állításokat, továbbá következmény- vagy ekvivalens állításokat.



Néhány kiindulási lehetőség, ahonnan a megoldás már könnyen befejezhető:

- (1) és (2) ellentmondó állítások, nem teljesülhetnek egyszerre. Legalább egyikük hamis – ezért (3) biztosan igaz. (Tehát rögtön adódik, hogy C ártatlan.)
- (2) és (3) egymást kizáró állítások, pontosan egyikük igaz. Ebből ismét az következik, hogy a harmadik állítás, (1), csak igaz lehet. (Tehát B a bűnös.)
- (1)-nek (3) következménye: ha (1) igaz, akkor (3) is. (Sőt azt is megjegyezhetjük, hogy ha (3) nem igaz, akkor (1) sem igaz.)

Itt tulajdonképpen három megoldási lehetőséget mutattunk, ezek igazi haszna (az esetszűkítés) a nehezebb feladatoknál mutatkozik meg.

Harmadik megoldás (összes eset megvizsgálása az igazmondók „eloszlása” alapján)

Négy lehetőség adódik: vagy valamelyik fiú hazudik (3 eset), vagy mindegyik igazat mond. Ezeket az eseteket rendszeresen végigpróbálva kapjuk az egyetlen megoldást. (Persze a próbálkozások száma jelentősen csökkenthető, ha figyelembe vesszük például a második megoldás megszorításait.)

Részletezve:

1. András hazudik: ekkor ő a bűnös, de ennek (2) ellentmond.
2. Béla hazudik: itt nem találunk ellentmondást, ez egy lehetséges megoldás.
3. Csaba hazudik: ez ellentmond (1)-nek.
4. Minden fiú igazat mond: ez az eset nem lehetséges (1) és (2) ellentmondó volta miatt.

Negyedik megoldás (összes eset vizsgálata a bűnös személye alapján)

Három eset lehet, attól függően, hogy ki a bűnös. Ezeket rendszeresen megvizsgálva kapjuk a megoldást.

Megjegyzés

Ne becsljük le az összes eset végigpróbálásán alapuló utolsó két módszert. Egyrészt ez az eljárás *mindig alkalmazható*; másrészt a bonyolultabb feladatokat gyakran csak így lehet befejezni; harmadrészt pedig ez a megoldási módszer könnyen algoritmizálható és számítógépre vihető.

Ötödik megoldás (speciális módszerek)

Néha a feladat sajátosságai alapján is szűkítő észrevételeket tehetünk. Ebben a feladatban ilyen például az (1) $A: B$ bűnös állítás. Mivel csak egy bűnös van (ez a feladat specialitása), így ez vagy B , akire az állítás vonatkozik; vagy A , aki az állítást teszi. Mindkét esetben kiderül C ártatlansága.

Vagy ilyen állítás lehetne például $C: A$ nem bűnös. Az állítás nem lehet hamis (A és C is bűnös lenne), tehát az állítás igaz: A ártatlan, így igazat mond stb.



Rejtvény

Egy ismert magyar szépirodalmi műből való az alábbi részlet. Melyikből?

[...] A második kérője Rózsikának egy nagyvállalkozó volt Brünnből, aki mint üzletember, azt a mellékjogot se tagadta, hogy a Rózsika hozományával egész Közép-Európára kiterjeszti a vállalatát.

Az öregúrnak tetszett a nyílt beszéd, és azt mondta szokott mókázó modorával:

– Igen helyes, nagyon helyes, és szívesen adom a leányomat vállalkozónak, mert magam is az voltam. Hanem talán hallotta is ön, hogy én bizonyos fokig bolond ember vagyok. Sohase tessék ellenkezni. Tudom, hogy mondták önnek, és igazuk volt. Én csakugyan bolond vagyok. De ez nem veszedelmes örökség, ne féljen tőlem. Ez csak egy rögeszme. Én ugyanis egy kérdést szoktam föltenni ahhoz, aki a lányomat ajánlatával megtiszteli. És ettől függ aztán a további. Tudom, hogy ez bolondság, eszeveszettség, de nem tehetek róla.

– Igen, hallottam már ilyesmit.

– Nos, hát mondja meg nekem, hogy ha Pozsonyból Brassóba mindennap két postakocsi közlekednék, Brassóból Pozsonyba pedig ugyanannyi, ha mármost fölteszük, hogy az út tíz napig tart, mennyi kocsival találkozik ön útközben, míg Pozsonyból egy postakocsin ülve Brassóba ér?

A rejtvény megoldása a 24. oldalon található.



Nevek
Alcuin;
Fibonacci.

FELADATOK**1. K2**

Egy napon két vándor közösen nekilátott a falatozásnak, egyiküknek 2, a másiknak 3 cipója volt. Arra jött egy harmadik utazó is, így hármasban fogyasztották el a cipókat. Amikor végeztek, a harmadik utazó fizetségül otthagytott 5 krajcárt. Hogyan tud a két vándor igazságosan megosztani a pénzen, ha mindenki ugyanannyit evett a cipókból?

(Ezt a szép feladatot már a középkori matematikus, *Leonardo Pisano* [ismertebb nevén Fibonacci, 1175?–1250] is kitűzte. Idén még fogunk találkozni a nevével.)

2. K2

Seholsincs szigeten egy szobában összegyűlt 11 lakos. (Ezen a szigeten mindenki vagy igazmondó, vagy hazudós, tehát vagy mindig igazat mond, vagy mindig hazudik.) A lakókat egyével megkérdezték, hány igazmondó van közöttük. A következő válaszokat adták:

a) 5, 3, 9, 4, 3, 6, 5, 3, 2, 5, 7;

b) 1, 5, 8, 3, 7, 4, 1, 0, 6. (Most ketten nem válaszoltak.)

Hány igazmondó lehet a szobában? (A lakók ismerik egymást.)

3. K2

Egy osztályban a matematikát, kémiát, fizikát, biológiát, magyart és németet Kovács, Novák és Varró tanár urak tanítják.

a) Mindegyik tanár pontosan két tantárgyat tanít.

b) A kémia tanár ugyanabban a házban lakik, mint a matematika tanár.

c) Kovács tanár úr a legfiatalabb.

d) A matematika tanár és Varró tanár úr gyakran biliárdoznak.

e) A fizika tanár idősebb a biológia tanárnál, de fiatalabb Novák tanár úrnál.

f) A legidősebb távolabb lakik az iskolától, mint két kollégája.

Melyik tanár melyik tantárgyakat tanítja?

4.

A [3000; 9000[intervallumban hány olyan egész szám van, amelyik

K1 a) osztható 3-mal és 5-tel;

K2 b) osztható 3-mal vagy 5-tel;

E1 c) 3 és 5 közül pontosan az egyik számmal osztható;

E1 d) 3 és 5 közül legfeljebb az egyik számmal osztható;

E1 e) ha osztható 3-mal, akkor osztható 5-tel is?

5. K2

Egy téglatest élei 1-nél nagyobb egész számok, térfogata $V = 72$ egység. Anna megmondja Bélának a felszín számjegyeinek összegét, de Béla nem tudja megmondani, mekkorák az élek. Ezután Anna azt is elárulja, hogy a legrövidebb él függőleges helyzetű.

Vajon mi most már meg tudjuk mondani, hogy mekkorák a test élei?

A következő feladat is – csakúgy, mint az első – kultúrtörténeti érdekességű.

6. E1

(Arany Dániel Matematikaverseny, 1964)

Fogadjuk el igaznak a következő állításokat:

a) Vannak Beatles-frizurás huligánok.

b) Minden huligánnak nyegle a modora.

Döntsük el és indokoljuk meg, hogy következnek-e ebből az alábbiak:

c) Van olyan nyegle modorú huligán, akinek Beatles-frizurája van.

d) Minden nyegle modorú huligánnak Beatles-frizurája van.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1–24.

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 23–27, 36–39, 45–46, 48–49.

Old Shatterhand logikai levezetése

– Azt még megértem, hogy a szeme jobb, mint az enyém, hiszen fiatalabb – mondta Sam Hawkins. – De hogy tudta kitalálni, mit csináltak ezek az indiánok?

– Logikai levezetés útján – feleltem mosolyogva.

– Hát az micsoda?

– Megmagyarázom egy példával. Hawk annyit tesz, mint sólyom. A sólyom mezei egereket eszik. Hawkins – sólyomfajta. Tehát Sam Hawkins mezei egereket eszik.

(Karl May: Winnetou)



2. A MATEMATIKAI LOGIKA ALKALMAZÁSAI

Hogyan alkalmazhatjuk a mindennapi életben a logikát? A következő példában részleteket olvashatunk a Bergengóc Nyomozóképző vizsgájáról. (Emlékeztetőül: a matematikai logikában olyan állításokkal vagy kijelentésekkel foglalkozunk, amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy igazak vagy hamisak.)

A rendőrségen öt embert (A, B, C, D és E) gyanúsítanak egy bűnténnyel, és tudják, hogy közülük pontosan egy vagy két személy követte el a bűntényt. A kihallgatás során feltételezhetjük, hogy az ártatlank mindig igazat mondanak.

Az egyes feladatokban a kihallgatási jegyzőkönyv egy-egy részlete olvasható. A leendő nyomozóknak ez alapján kell eldönteni, hogy az öt személy közül ki a bűnös, és ki az ártatlan. Ha az információk nem elégségesek a döntéshez, akkor feltehetnek személyenként további egy-egy eldöntendő kérdést.

(Természetesen igazi nyomozóként arra kell törekedniük, hogy minél kevesebb kérdéssel oldják meg a bűnügyet.)

1. példa

(1) A szerint B és C ártatlan. (Az állításokat a továbbiakban így jelöljük: A : „ B és C ártatlan.”)

(2) D : „ A igazat mond.”

Tudjuk még, hogy a bűnösök mindig hazudnak, hogy félrevezessék a nyomozókat. Ki lehet a bűnös, és ki az ártatlan?

Megoldás

I. eset: Ha (2) igaz, akkor (1) is, tehát D és A ártatlan. Az (1) állítás tartalma szerint B és C is ártatlan. Mivel tudjuk, hogy a bűnös az öt személy között van, ebben az esetben ez nem lehet más, csak E .

II. eset: Ha (2) hamis, akkor tartalma alapján (1) is hamis, vagyis D és A bűnös.

Mit jelent az, hogy az (1) állítás hamis?

(1) összetett állítás, a logikai „és” kötőszóval kapcsoljuk össze a „ B ártatlan”, valamint a „ C ártatlan” kijelentéseket. A „**logikai és**” művelet igazságtáblázata alapján $X \wedge Y$ akkor hamis, ha legalább az egyik állítás (X vagy Y) hamis; azaz B és C közül legalább az egyikük bűnös.

Ez az eset azonban nem lehetséges, mert már tudjuk, hogy D és A is bűnös, és a bűnösök száma legfeljebb kettő.

Összefoglalva: azt kaptuk, hogy E bűnös, a többiek ártatlanok.

X	Y	$X \wedge Y$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Megjegyzés

A kapott $\neg(X \wedge Y) = (\neg X) \vee (\neg Y)$ összefüggés az egyik korábban tanult De Morgan-azonosság.

2. példa

(1) A : „ B és C ártatlan.”

(2) D : „ A ártatlan.”

Ebben az alfeladatban a bűnösök igazat is mondhatnak, és hazudhatnak is. Hány további kérdés szükséges a bűnös(ök) azonosításához?

Megoldás

Ismét esetszétválasztást végzünk.

I. eset: Ha (2) igaz, akkor A igazat mond, tehát (1) is igaz. Ekkor A , B és C is ártatlan. Sajnos D -ről és E -ről nincs további információnk, így három eset lehetséges: vagy D a bűnös; vagy E ; vagy pedig mindketten bűnösök. Egy eldöntendő kérdésre adott válasz csak két esetet különböztet meg, ezért legalább két további kérdésre van szükség. Ennyi elég is: megkérdezhetjük például A -tól, hogy D bűnös-e, és B -től, hogy E bűnös-e.

Tehát két további kérdés szükséges ebben az esetben.

II. eset: Ha (2) hamis, akkor tartalma alapján D és A bűnös. B , C és E csak ártatlan lehet, és (1) igaz. Ebben az esetben további kérdésre nincs szükség.

Ha a két esetet együtt vizsgáljuk, akkor 4 lehetőség adódik. Vajon tudunk-e két olyan kérdést feltenni, amire a válaszok mind a négy esetet megkülönböztetik?

	A	B	C	D	E
1.	ártatlan	ártatlan	ártatlan	bűnös	bűnös
2.	ártatlan	ártatlan	ártatlan	ártatlan	bűnös
3.	ártatlan	ártatlan	ártatlan	bűnös	ártatlan
4.	bűnös	ártatlan	ártatlan	bűnös	ártatlan

Igen, ez lehetséges. Mivel B és C mindig igazat mond, megkérdezhetjük pl. B -t, hogy E ártatlan-e. Ha igen, akkor a 3. és 4. eset áll fenn, tehát megkérdezzük C -t vagy E -t, hogy A ártatlan-e. Ha viszont B nemmel válaszol (E bűnös), akkor az 1. és 2. eset alapján C -t vagy A -t kérdezzük meg, hogy D ártatlan-e.

3. példa

- (1) A : „ B vagy C ártatlan.”
- (2) D : „Olyan vagyok, mint B .” (Az ártatlanságot tekintve.)
- (3) E : „Én viszont különbözöm C -től.”

Visszatérünk az alaphelyzethez: az ártatlanok igazat mondanak, a bűnösök mindig hazudnak. Ki lehet a bűnös, és ki az ártatlan?

Megoldás

Először elemezzük a (2) állítást!

Ha D igazat mond, akkor ő is és B is ártatlan. Ha viszont (2) hamis, akkor D bűnös (hiszen hazudik), és (2) tagadása lesz igaz. Ekkor is azt kapjuk, hogy B ártatlan.

X	Y	$X \vee Y$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

(2)-ből tehát B ártatlansága adódik. Ebből a „**logikai vagy**” művelet igazságtáblázata alapján az következik, hogy az (1) is igaz állítás, azaz A is ártatlan.

Ha (3) igaz, akkor E ártatlan, és C bűnös. Ha viszont (3) hamis, akkor E bűnös, és (3) tagadása alapján C is az. Vagyis (3)-ból az következik, hogy C mindenképpen bűnös.

Tehát A és B ártatlan, C bűnös. D és E esetében három lehetőség maradt: közülük vagy D bűnös, vagy E , vagy egyikük sem. A helyzet tisztázására két kérdés elegendő, pl. A -tól és B -től megkérdezzük, hogy D , illetve E bűnös-e.

4. példa

- (1) A : „ B bűnös.”
- (2) C : „2 bűnös van közöttünk.”
- (3) D : „Ha A bűnös, akkor E ártatlan.”

Az ártatlanok igazat mondanak, a bűnösök hazudnak. Ki lehet a bűnös, és ki az ártatlan?

Megoldás

Ha (1) igaz, akkor B bűnös (A ártatlan), ha (1) hamis, akkor A bűnös, B ártatlan. Vagyis A és B közül pontosan az egyikük bűnös.

Ha (2) hamis lenne, akkor C bűnös lenne. De ő már a második bűnös (A vagy B után), tehát (2) teljesülne. Ez ellentmondás, tehát (2) igaz, C ártatlan, és D vagy E közül pontosan az egyikük bűnös.

A (3) állítás „**ha ..., akkor ...**” típusú. Az igazságtáblázatból látható, hogy az ilyen összetett állítások csak akkor hamisak, ha az előtagjuk igaz, és az utótagjuk hamis. (Az ilyen állításokat feltételes állításoknak is nevezzük.)

Ha tehát A bűnös, és E bűnös, akkor (3) hamis, azaz D is bűnös lenne, de ez nem lehetséges. Tehát (3) igaz, D ártatlan, ekkor pedig a korábbiak miatt E bűnös.

Meg tudjuk mondani, hogy A és B közül melyikük a bűnös?

Az alábbi táblázatban megvizsgáljuk, hogy a két lehetőség hogyan befolyásolja (3)-at.

X	Y	$X \rightarrow Y$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

A	B	C	D	E	(3)
bűnös	ártatlan	ártatlan	ártatlan	bűnös	hamis
ártatlan	bűnös	ártatlan	ártatlan	bűnös	igaz

Látható, hogy (3) akkor igaz, ha A ártatlan, és B bűnös.

A táblázat második sora adja a megoldást.

A matematikai logika ismerete nagyon fontos az állítások és tételek megértéséhez. Ezen ismeretek nélkül nehezen boldogulunk olyan egyszerű feladatokkal is, hogy például fogalmazzuk meg egy állítás tagadását (ellentettjét, negációját) vagy egy állítás megfordítását.

ÁLLÍTÁSOK TAGADÁSA

5. példa

Fogalmazzuk meg a következő állítások **tagadását**!

A = A suliban mindenki szereti a fagyit.

B = A Földön van olyan ember, akinek tömege nagyobb 500 kg-nál.

C = Iskolánkban minden osztályban van kitűnő tanuló.

D = Iskolánkban van olyan osztály, ahol minden diák tanulja az angol és a német nyelvet is.

Megoldás

Állításainkban *logikai kvantorokat* használtunk, a „**minden**”-t (a logikai jele: $\forall$, fordított nyomtatott A) és a „**létezik**”-et (logikai jele $\exists$, fordított nyomtatott E). A „minden” (bármely, összes) és a „létezik” (van olyan, található) kifejezések a logikai állítások építőkövei, a legtöbb állításban megtalálható valamelyikük.

A logikai kvantorok használatával már Arisztotelész is foglalkozott. Nézzünk egy klasszikus példát, hogyan kezdődhet a következő kijelentő mondat: „... halandó.”

Minden ember halandó. Van olyan ember, aki halandó. Ezer ember halandó.

Az elsőben az *univerzális kvantort* ($\forall$), a másodikban az *egzisztenciális kvantort* ($\exists$), a harmadikban pedig egy *numerikus kvantort* (ezer) használtunk.

Ha egy kijelentés az alaphalmaz minden eleméről állít valamit, akkor az csak akkor igaz, ha kivétel nélkül minden elemre igaz. Ha találunk akár csak egyetlen elemet, amire az állítás hamis (létezik olyan elem, amire nem igaz), akkor a teljes állítás hamis.

Tehát, ha a suliban van legalább egyvalaki, aki utálja a fagyit, akkor az „A” állítás hamis.

$\neg A = \{A \text{ suliban van olyan ember, aki nem szereti a fagyit.}\}$

Az „A” és „ $\neg A$ ” állítások közül pontosan az egyik igaz, a másik hamis kell legyen. Meggondolhatjuk, hogy jelen esetben ez teljesül.

Hasonlóan, ha a Földön minden ember tömege kevesebb, mint 500 kg, vagy éppen 500 kg, akkor a „B” állítás hamis.

$\neg B = \{A \text{ Földön minden ember tömege kisebb vagy egyenlő, mint 500 kg.}\}$

A „C” állítás az iskola minden osztályáról állít valamit. Ha találunk legalább egy osztályt (van olyan), ahol nem igaz az eredeti állítás (van olyan diák, aki kitűnő tanuló), akkor a „C” állítás hamis. A (van olyan diák, aki kitűnő tanuló) állítás tagadása: (minden diákra igaz az, hogy nem kitűnő tanuló) = (senki sem kitűnő tanuló).

$\neg C = \{Az \text{ iskolában van olyan osztály, ahol senki sem kitűnő tanuló.}\}$

A „D” állításban éppen az ellenkező kvantorok szerepelnek.

$\neg D = \{Az \text{ iskolában nincsen olyan osztály, ahol mindenki tanulja az angol és a német nyelvet.}\} = \{Az \text{ iskola minden osztályában van olyan diák, aki nem tanulja az angol és a német nyelvet egyszerre.}\} = \{Az \text{ iskola minden osztályában van olyan diák, aki nem tanulja az angol vagy a német nyelvet.}\}$

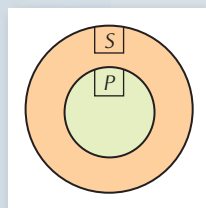
AZ ÁLLÍTÁSOK MEGFORDÍTÁSA

Megfordítani csak az $A \Rightarrow B$ (A -ból következik B ; ha A , akkor B) típusú állításokat lehet. Az is előfordulhat, hogy egy más szerkezetű állítást megfogalmazhatunk $A \Rightarrow B$ alakban is, és ezután már meg tudjuk fordítani.

6. példa

Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását, és vizsgáljuk meg mindkét állítás igazságtartalmát! „Ha egy szám nullára végződik, akkor páros.”

Megoldás



Ha tovább boncolgatjuk az állítást, akkor a következő módon írhatjuk át: „Minden nullára végződő szám páros.”

Halmazok segítségével is megfogalmazhatjuk állításunkat.

Legyen $P = \{\text{nullára végződő pozitív egész számok}\}$, $S = \{\text{pozitív páros számok}\}$.

Tehát az állítás: $\forall x \in P \Rightarrow x \in S$. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $P \subseteq S$.

A nullára végződő pozitív egész számok halmaza részhalmaza a páros számoknak.

Most már megfogalmazhatjuk az állítás megfordítását:

a) $S \subseteq P$.

b) $\forall x \in S \Rightarrow x \in P$.

c) Minden páros szám nullára végződik.

d) Ha egy szám páros, akkor nullára végződik.

Mind a négy állítás az eredeti állítás megfordítása. Ez esetben az eredeti állítás igaz, a megfordítása pedig hamis.

7. példa

Állítás: Minden derékszögű háromszögben az átfogó négyzete megegyezik a befogók négyzetének összegével. (Pitagorasz-tétel)

Megfordítás: Ha egy háromszögben az egyik oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével, akkor a leghosszabb oldallal szemben derékszög van. (Ez a Pitagorasz-tétel megfordítása. Jegyezzük meg, hogy a feltételben nem használhatjuk az „átfogó” és a „befogó” szavakat!)

Nézzük a tételnek egy másik megfogalmazását! (A szokásos jelöléseket használjuk.)

Állítás: Ha egy háromszögben $\gamma = 90^\circ$, akkor $c^2 = a^2 + b^2$.

Megfordítás: Ha egy háromszögben $c^2 = a^2 + b^2$, akkor $\gamma = 90^\circ$.

Ebben az esetben az állítás és a megfordítása is igaz. Ekkor az állítást **megfordíthatónak** mondjuk.

Ha az eredeti állítás és a megfordítása is igaz, akkor a két állítást **ekvivalensnek** tekintjük. Halmazelméleti megfogalmazásban, ha az A halmaz részhalmaza a B -nek, és a B halmaz részhalmaza A -nak, akkor a két halmaz megegyezik.

SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELEK

Gyakran találkozunk „Ha ..., akkor ...” szerkezetű következtetésekkel. Ilyen például a következő F és G állítás:

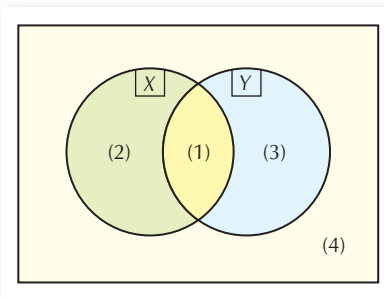
F : „Ha egy természetes szám osztható 3-mal és 4-gyel, akkor osztható 6-tal is.”

G : „Ha egy természetes szám nem osztható 3-mal, akkor a számjegyeinek az összege nem osztható 9-cel sem.”

Legyen A és B tetszőleges állítás. A „ha A , akkor B ” típusú következtetések összetett állítások, hiszen az A és B kijelentéseket a „ha ..., akkor” művelettel kötjük össze. A műveletet jelölhetjük $A \Rightarrow B$ módon. Ekkor az A előtag neve *feltétel* (premissza), a B utótagé pedig *következmény* (konklúzió). Megállapodás alapján az $A \Rightarrow B$ állítás akkor hamis, ha A igaz, és B hamis; minden más esetben az $A \Rightarrow B$ kifejezés igaz.

Szoros a rokonság az $A \Rightarrow B$ feltételes következtetés, valamint a „minden A egyúttal B ” típusú kijelentések között. Legyen X és Y az A , illetve B tulajdonságú objektumok halmaza. Ekkor a kapcsolat halmazalgebrai érvekkel úgy jellemezhető, hogy teljesülése esetén mindkét állítás az $X \subseteq Y$ relációt írja le.

Például az F állításban jelölje X a 3-mal és 4-gyel, Y pedig a 6-tal osztható számok halmazát. Ekkor F alakja: $(n \in X) \Rightarrow (n \in Y)$. Ennek halmazelméleti megfelelője: az ábra szerinti (2)-es tartomány nem tartalmaz elemet, azaz $X \setminus Y = \emptyset$, vagy másképpen $X \subseteq Y$.



De ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a „minden X (tulajdonságú elem) egyúttal Y (tulajdonságú) is” formulát vizsgáljuk. Az F állítás egy lehetséges átfogalmazása tehát: „Minden 3-mal és 4-gyel osztható természetes szám osztható 6-tal is.” G átfogalmazása pedig ez lehet: „Minden 3-mal nem osztható természetes számra teljesül, hogy számjegyeinek az összege nem osztható 9-cel.”

Hogyan szól a „ha A , akkor B ” típusú állítás tagadása? Mivel ez a következtetés tartalmilag megegyezik a „minden A egyúttal B ” kijelentéssel, tagadását a „hagyományos” módon, a kvantor (azaz a

„minden” és „létezik” kifejezés) cseréjével végezhetjük. Az eredmény: „van olyan A , ami nem B ”. F és G tagadása:

$\bar{F}$: „Van olyan 3-mal és 4-gyel osztható természetes szám, ami nem osztható 6-tal.”

$\bar{G}$: „Található olyan 3-mal nem osztható természetes szám, amelyben a számjegyek összege osztható 9-cel.”

Tegyük fel, hogy egy $A \Rightarrow B$ feltételes állítás igaz. Ekkor azt mondjuk, hogy A -nak *szükséges feltétele* B , illetve A *elégséges feltétele* B -nek. (Az elnevezések értelemszerűek: A -nak szükséges következménye B , illetve ha A igaz, akkor ez elegendő feltétel ahhoz, hogy B is teljesüljön.)

Az F állítás $A \Rightarrow B$ szerkezetű, ahol A : „Az n természetes szám osztható 3-mal és 4-gyel.” B : „Az n természetes szám osztható 6-tal.” A -nak tehát szükséges feltétele B , és A elégséges feltétele B -nek.

Az $A \Rightarrow B$ állítás megfordítása egyszerű formális eljárás, amit $B \Rightarrow A$ módon jelölhetünk. Például F megfordítása: „Ha egy természetes szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal és 4-gyel is.”

A G állítás megfordítása: „Ha egy természetes szám számjegyeinek az összege nem osztható 9-cel, akkor a szám nem osztható 3-mal.”

F megfordítása hamis, egy ellenpélda a 6. G megfordítása sem igaz, ellenpélda a 3.

8. példa

Vizsgáljuk meg a következő állítást és a megfordítását! „Ha n osztható 9-cel, akkor n számjegyeinek az összege is osztható 9-cel. (n természetes szám.)”

Megoldás

Jelöljük a mondatbeli két állítást (tulajdonságot) A -val és B -vel, vagyis legyen A : „ n osztható 9-cel.”; és B : „ n számjegyeinek az összege osztható 9-cel.”

A „ha ..., akkor ...” típusú állításnak $A \Rightarrow B$ a szerkezete. Az állítás igaz: A -ból következik B . Így A elégséges feltétele B -nek, ugyanakkor B szükséges következménye A -nak.

A $B \Rightarrow A$ megfordítás: „Ha n számjegyeinek az összege osztható 9-cel, akkor n osztható 9-cel. (természetes szám.)” Ez a kijelentés is igaz.

Tehát ebben az esetben $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ is teljesül.

A matematikában fontos szerepet töltenek be azok a „ha ..., akkor ...” típusú állítások, melyek megfordítása is igaz.

Ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ is igaz, akkor azt mondjuk, hogy A *szükséges és elégséges feltétele* B -nek. Az elnevezést az indokolja, hogy ha $A \Rightarrow B$ teljesül, akkor az A állítás csak akkor lehet igaz, ha B igaz, tehát az A állítás igaz voltának szükséges feltétele a B igaz volta. (A reláció szimmetrikus: ekkor B is szükséges és elégséges feltétele A -nak.) Ekkor A és B ún. *ekvivalens* állítások, s ezt $A \Leftrightarrow B$ módon jelöljük.

Az $A \Leftrightarrow B$ ekvivalens állításokat az „akkor és csak akkor” vagy a „pontosan akkor” kifejezésekkel adjuk meg: A akkor és csak akkor teljesül, amikor B .

Az ekvivalens állítások fontos tulajdonsága, hogy logikai értékük megegyezik: vagy mindkét állítás igaz, vagy mindkettő hamis.

9. példa

Az A_1 - A_2 , B_1 - B_2 , C_1 - C_2 , D_1 - D_2 állítások közül melyek ekvivalensek?

A_1 : „Az n természetes szám osztható 3-mal.”

A_2 : „Az n természetes szám számjegyeinek összege osztható 3-mal.”

B_1 : „Az ABC háromszögben $\angle ACB = 90^\circ$.”

B_2 : „Az ABC háromszög oldalhosszaira $a^2 + b^2 = c^2$ teljesül.”

C_1 : „ n osztja $(a + b)$ -t. (a, b, n természetes számok.)”

C_2 : „ n osztja a -t és b -t. (a, b, n természetes számok.)”

D_1 : „ $a < b$.”

D_2 : „ $a^2 < b^2$.”

Megoldás

$A_1 \Leftrightarrow A_2$, a számjegyek összegére vonatkozó oszthatósági szabály egyszerre szükséges és elégséges feltétel is. Az n természetes szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

$B_1 \Leftrightarrow B_2$, a Pitagorasz-tétel megfordítása is igaz.

$C_2 \Rightarrow C_1$, ez ismert oszthatósági tétel. A tétel megfordítása nem igaz, C_2 elégséges, de nem szükséges feltétele C_1 -nek. Egy ellenpélda: $n = 2$, $a = 3$, $b = 5$.

D_1 -ből nem következik D_2 , ellenpélda $a = -3$ és $b = 2$. És D_2 -ből sem következik D_1 , mint például az $a = 2$ és $b = -3$ választás mutatja. Ezért D_1 és D_2 nem szükséges és nem is elégséges feltételei egymásnak.

Fogalmak

állítás tagadása;
numerikus kvantor;
logikai kvantorok:
minden (tetsző-
leges),
van olyan (léte-
zik);
állítás megfordítása.

FELADATOK

1. K2

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) Bármely A, B, C halmazra $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

b) A háromszög körülírt körének középpontja nem lehet a háromszögön kívül.

c) Van olyan x pozitív szám, amelyre $\sqrt[4]{x} > \sqrt[3]{x}$.

d) Ha $n > 1$ pozitív egész szám, akkor $n^2 - 1$ osztható $(n - 1)$ -gyel.

e) Van olyan prímszám, amely nagyobb, mint 2^{2022} .

2. K2

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Fogalmazzuk meg az állítások tagadását!

a) $(10^{10})^5 \geq (10^5)^{10}$

b) A háromszög magasságvonalai a háromszög belsejében vagy határán metszik egymást.

c) Van olyan háromszög, melynek az oldalhosszaira $a^2 + b^2 < c^2$ teljesül.

d) Bármely valós x szám esetében $2^x < 3^x$.

e) Minden 3-nál nagyobb pozitív egész szám előáll (pozitív) prímszámok összegeként.

3. K2

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi „ha ..., akkor ...” típusú állítások közül?

a) A, B halmazok. Ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A = B$.

b) Ha a (síkbeli) $ABCD$ négyszögnek van három derékszöge, akkor az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

c) Az ABC háromszögben ha $\sin \alpha = \sin \beta$, akkor $\alpha = \beta$.

d) Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a - c < b - d$.

e) Ha 5 objektum között vannak egyformák is, akkor legfeljebb 60-féleképpen rendezhetjük őket sorba.

4. K2

Határozzuk meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! Fogalmazzuk meg az állítások megfordítását! Melyik igaz, és melyik hamis a megfordítások közül?

- a) Ha egy négyszög átlói merőlegesen felezik egymást, akkor a szemközti oldalai párhuzamosak.
- b) Ha három pozitív egész szám összege páros, akkor a szorzatuk is páros.
- c) Ha $a > 7$, akkor $|a| > 7$.
- d) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a szemközti szögei egyenlők.
- e) A koordinátasíkon e és f különböző egyenesek. Ha e és f meredeksége egyenlő, akkor párhuzamosak.

5. E1

Ekvivalensek az alábbi A és B állítások?

- a) $A: 4^5 < 4^x$; $B: 5 < x$.
- b) $A: 5^4 < x^4$; $B: 5 < x$.
- c) $A: |a| = |b|$; $B: a = b$.
- d) A : Az $ABCD$ négyszög paralelogramma. B : Az $ABCD$ négyszögnek van két párhuzamos oldala, és van két egyenlő oldala.
- e) A : a osztható 6-tal, és b osztható 8-cal; B : $a \cdot b$ osztható 48-cal.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 76–95.

A 15. oldalon lévő rejtvény megoldása

A részlet *Mikszáth Kálmán: Különös házasság* c. művéből való. A megoldás is szerepel a regényben:

A brünni vállalkozó egész nap számított, örülten számított, teleírt számokkal vagy tíz ív papírt, a homlokáról csurgott az izzadság, annyit számított, de nem boldogult, mindig más-más eredmény jött ki. Végre egy szakajtó babot kért a szakácsnétól, a babszemekből aztán kirakta az induló postakocsikat a pozsony–brassói vonalon, de csak még jobban belezavarodott az egészbe.

Mikor aztán látta Horváth, hogy semmire sem megy, megszabadította a bizonytalanságtól.

– Hát lássa, önből nem lesz jó vállalkozó, mert ön nem látja tisztán maga előtt a dolgok következményeit már a második fokon sem. A pozsony–brassói úton ott vannak az előző tíz napon elindult szekerek is, meg a mostani tíz napon elindultak. Eszerint a pozsony–brassói úton negyven szekér van. Ami pedig az ön mostani útját illeti, ne haragudjék, de azon csak egy kosár van.

Ilyen eszelős ember volt ez a bizonyos Horváth.

AZ ÓKORI FILOZÓFUSOKTÓL A DIGITÁLIS SZÁMÍTÓGÉPEKIG (Olvasmány)

A matematikai logika alkalmazásaira már a korábbi leckékben is láttunk példákat. Ebben az olvasmányban a matematikán kívüli alkalmazások közül néhány kultúrtörténeti jelentőségűt említünk meg.

Mint említettük a bevezető leckében, a logika mint tudomány legkorábban az ókori görög matematikusok és filozófusok munkáiban jelenik meg. (A „filozófus” a görög időkben eredetileg kutató embert jelentett; filozófus volt tehát a matematikus és a természettudós is.) Az antik gondolkodás egyik csúcspontját **Arisztotelész** (Kr. e. 384–322) munkássága jelentette, aki az

Organon című művében rendszerezte a deduktív következtetéseket, azaz mai értelemben **megalapozta a logikát**. Természetesen az Arisztotelész előtti filozófusok is foglalkoztak egyes logikai kérdésekkel, ilyen volt például **Platón** (Kr. e. 427–347), Arisztotelész mestere. (Arisztotelész fiatal korában két évtizedig Platón Akadémiáján tanult.) Az Arisztotelészt követő időkből pedig nevezzük meg **Eukleidészt** (Kr. e. 300 körül), akinek *Elemek* című könyve a deduktív felépítés módszertani mestermunkája.

A későbbi korok filozófusai körében is gyakorta jellemző volt a természettudományos vagy matematikus „végzettség”. Az alábbiakban felsorolunk néhány nevet a legnagyobbak közül, munkásságuk egy-egy jellemző darabját kiragadva. (Korábbi leckékben már találkoztunk néhányuk nevével.)

René Descartes (1596–1650) *Észérvek* c. írásában axiómák és tételek, bizonyítások segítségével, „geometriai módon elrendezve” mutatta meg a test és a lélek különbözőségét.

Blaise Pascal (1623–1662) Isten létezését valószínűségszámítási elemzéssel vizsgálta.

Benedictus Spinoza (1632–1677) *Etika* c. művét definíciókra és tételekre alapozva építette fel, hasonlóan Eukleidész munkájához.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) híres következtetésére, mely szerint „Isten alakította ki, ezért ez a világ a lehető világok legjobbjika (lex optimi)”, egyfajta optimumszámítási modell elemzésével jutott.

Immanuel Kant (1724–1804) nevét őrzi – egy fiatalkori írása alapján – a Naprendszer és a Tejútrendszer kialakulására vonatkozó Kant–Laplace-elmélet.

Utolsó példánk **Ludwig Wittgenstein** (1889–1951), aki felvázolta a logikailag tökéletes, ideális nyelv koncepcióját, a matematikai logika nyelvvezete alapján.

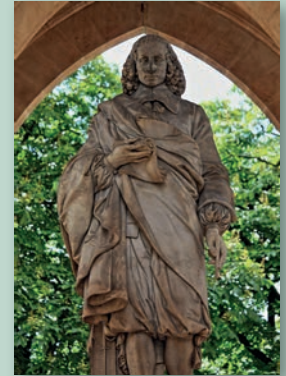
A **matematikai logika algebrai alapjait George Boole** (1815–1864) ír matematikus fektette le. (Az ő nevével jelzik a halmazelméletre és a matematikai logikára érvényes Boole-algebrát.) A XX. század elején a matematikai axiómarendszerek tulajdonságaival kapcsolatban számos logikai jellegű probléma vetődött fel, ezért egyes matematikusok úgy gondolták, hogy a matematikát precízen csak a logikára alapozva lehet felépíteni. Több évtizedes kutatás indult a matematika megalapozására (halmazelmélet, aritmetika, geometria), komoly eredményekkel. **Kurt Gödel** (1906–1978) osztrák matematikus 1931-ben publikálta a híres *nemteljességi tételét*. Ennek a nehéz tételnek „népszerű” (tehát nem szabatos) alakja kb. a következő: ha egy axiómarendszer ellentmondásmentes, és „nem túl egyszerű”, akkor megfogalmazható benne olyan állítás, amely sem nem bizonyítható, sem nem cáfolható az axiómarendszerben. (Egy másik megfogalmazás: bármilyen matematikai rendszerben vannak olyan kijelentések, amelyek igaz vagy hamis volta nem dönthető el matematikai bizonyítással magának a rendszernek a keretei között.)

Gödel negatív eredménye mérföldkőnek bizonyult; filozófiai, ismeretelméleti jelentősége óriási.

A matematika alapjaival kapcsolatos kutatások indították el a matematikai logika új ágának, az **algoritmuselméletnek** a kialakulását. Szintén a XX. századra esett a logika és filozófia egy határterületének, a **formális nyelvek elméletének** a kidolgozása. Az új tudományterületek fejlődése, valamint a XX. század közepére jellemző, robbanásszerű elektrotechnikai haladás lehetővé tette a mai formájú számítógépek megjelenését. De ahhoz, hogy a jelenlegi gépeken dolgozhassunk, még valamire szükség volt.

Az 1930-as évek közepétől jelentek meg olyan közlemények, amelyek a matematikai logika eszközeinek az áramkörök leírásában való felhasználhatóságáról szóltak. A digitális számítógépek felépítésének legkisebb áramkörti egységei kétállapotú rendszerek, például olyan áramkörti elemek, amelyeken vagy folyik át áram, vagy nem. A kétállapotú rendszerekre a matematikai logika műveleti szabályait alkalmazhatjuk: a „van–nincs”, az „igaz–hamis”, az „1–0” párhuzam kézenfekvő. A **logikai függvények** segítségével a legkisebb áramkörti elemekből összetett egységek, ún. logikai kapuk építhetők (például ÉS-, VAGY-, NEM-kapu); a logikai kapuk összekapcsolásával pedig megnyílik a lehetőség a bonyolultabb, nagyobb kapacitású számítógépek építésére.

Így lett napjainkban a matematikai logika leggyakoribb alkalmazása a **digitális számítógépek** területe. A fentiek miatt érthető, hogy a gépi aritmetika a számábrázolásra a 2-es számrendszert használja, és a logikai műveleteket (OR, AND, NOT, XOR) alkalmazza. A gépre írt mesterséges programnyelvek szintaktikája pedig az absztrakt szimbolikus nyelvek egy-egy megvalósításának felel meg.



Blaise Pascal



George Boole

3. KOMBINATORIKAI GYAKORLÓFELADATOK

1. példa

Egy északi ország néhány felsőoktatási intézményében 750 hallgató részvételével felmérést végeztek, melyben a szőke hajszínű és a kék szeműek kapcsolatát vizsgálták. Az eredmények szerint a kék szeműek között kétszer annyi a szőke, mint a nem szőke hallgató; valamint a szőkék között a kék szeműek 105-tel többen vannak, mint azok, akiknek a szeme színe nem kék. Mennyi az egyes típusba tartozó hallgatók száma, ha pontosan 66%-uk nem szőke?



Megoldás

Első megoldás

A megoldás első lépéseként az adatokat táblázatba foglaljuk.

Legyen a kék szemű, nem szőke hallgatók száma x ; ekkor a kék szeműek és szőkék száma $2x$, és azok száma, akik szőkék és nem kék szeműek, $2x - 105$.

Jelölje továbbá a nem szőke és nem kék szeműek számát y . Ekkor összesen

- a kék szeműek száma $3x$;
- a nem kék szeműek száma $2x - 105 + y$;
- a szőkék száma $4x - 105$;
- a nem szőke hajúak száma $x + y$.

	kék szemű	nem kék szemű	összesen
szőke hajú	$2x$	$2x - 105$	$4x - 105$
nem szőke hajú	x	y	$x + y$
összesen	$3x$	$2x - 105 + y$	

Az adatok persze nem függetlenek. Két feltételt írhatunk fel:

- (1) $5x - 105 + y = 750$ (az összlétszám),
- (2) $x + y = 0,66 \cdot 750 = 495$ (a nem szőkék száma).

A második egyenletből $y = 495 - x$, ezt beírva az első egyenletbe

$$4x + 390 = 750,$$

és innen $x = 90$.

Visszahelyettesítve (2)-be, $y = 495 - x = 405$.

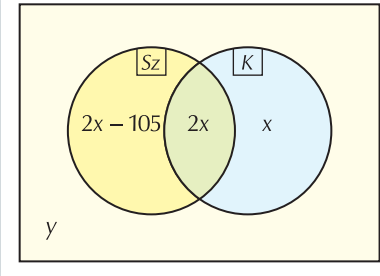
A táblázat most már kitölthető, ez alapján az egyes típusokból rendre 180, 75, 90 és 405 hallgató van.

	kék szemű	nem kék szemű	összesen
szőke hajú	180	75	255
nem szőke hajú	90	405	495
összesen	270	480	750



Második megoldás

Alkalmazhattuk volna a hagyományos Venn-diagrammot is. Ha a szőkék és kék szeműek halmazát Sz, illetve K jelöli (ábra), akkor az egyes részhalmazok elemszáma most is x , $2x$, $2x - 105$ és y . A két feltétel hasonlóan írható fel, mint az előbb, s a megoldás is ugyanúgy fejezhető be.



2. példa

Egy számítógépes kft. zászló alakú emblémákat tervez. Hogy a zászlók esztétikailag milyenek, azt csak akkor állapítja meg a kft. vezetője, ha már látta a zászló konkrét, színesben ábrázolt tervét. A tervezés közben persze különböző feltételeknek kell eleget tenni.

Hány zászlótervet kell megnéznie a vezetőnek, ha az alábbi esetekben az összes lehetséges tervet meg kívánja tekinteni?

a) A háromsávú zászlók színezéséhez hat különböző színt használhatnak fel, de minden színt csak egyszer.

b) Három sávhoz négy színt használhatnak a tervezők, és egy-egy színt többször is felhasználhatnak.

c) Három sávhoz hat színt használhatnak, egy-egy színt többször is, de a szomszédos sávok nem lehetnek azonos színűek.

d) Négy sávhoz hat színt használhatnak, de megkötés, hogy kell ismétlődő színnek lennie.

e) Négy sávhoz hat színt használhatnak, (pontosan) két egyforma színű sávnak kell lennie, de ezek a sávok nem lehetnek egymás mellett.

Megoldás

a) Fentről lefelé haladva, az egyes sávok rendre 6, 5 és 4 színnel színezhetők. Az így kapott zászlók mind különbözők, számuk – a szorzási szabály miatt – $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

b) Minden sáv 4-féle lehet, összesen $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ -féle lehetőség van.

c) Az első sáv 6-féle lehet, a második 5 (nem lehet az előző), a harmadik szintén 5 (nem lehet a középső). Eredmény: $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

d) Összesen $6^4 = 1296$ -féle zászló készíthető, de ezek közül nem jók azok, amelyekben nincs színismétlődés. Ezek száma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$, így $1296 - 360 = 936$ -féle megfelelő zászló van.

e) Tegyük fel, hogy az első és a harmadik sáv azonos színű, ezek 6-féle színnel színezhetők. Ekkor a második sáv színezésére 5, a negyedikre 4 szín maradt. Ilyen zászló tehát $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ -féle van.

A sávok szimmetrikus szerepe miatt hasonló eredményre jutunk, ha az első és a negyedik vagy a második és a negyedik sáv azonos színű. Összesen tehát $120 \cdot 3 = 360$ a zászlók száma.



3. példa

András egy érmét egymás után feldob hatszor. Úgy emlékszik, azt hallotta az iskolában, hogy az eredményeket tekintve bármely fej-írás sorozat egyforma eséllyel következik be. Ezért a hat dobásból – gondolja ő – ugyanakkora eséllyel kap valamilyen sorrendben 3 fej, 3 írást, mint például 2 fej, 4 írást. Igaza van Andrásnak?



Megoldás

Valóban, bármely fej-írás sorozat egyforma eséllyel következik be. Ugyanolyan valószínű az F F F F F F hatos, mint például az F I F I F I vagy az F F I F I I sorozat. Abban azonban téved András, hogy tetszőleges sorrendben a 3 fej, 3 írás és a 2 fej, 4 írás ugyanannyiféleképpen következhet be.

A 3 fej, 3 írás $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ -féleképpen állhat elő (ennyiféleképpen lehet a 6 dobásból a 3 fej helyét kiválasztani, és ekkor az írás dobások helye már adott); a 2 fej, 4 írás viszont csak $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$ -féleképpen. Tehát gyakoribb a 3 fej, 3 írás eredmény.

Megjegyzés

Az 1 fej, 5 írás $\binom{6}{1} = 6$ -féleképpen, a 0 fej, 6 írás pedig $\binom{6}{0} = 1$ -féleképpen állhat elő. A 4 fej, 2 írás megegyezik a 2 fej, 4 írás gyakoriságával, és a többi kimaradt lehetőség is a szimmetrikus párjával megegyező esetben következik be.

4. példa

a) Hányféle lánc készíthető 3 piros és 4 kék üveggolyóból? (Az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg; sem most, sem a b) és c) részben.)

b) Hányféle karkötő készíthető az a) kérdésben összeállított üveggolyókból? (A karkötő forgásszimmetrikus; körbeforgatásával természetesen nem kapunk újabb karkötőt.)

c) Hányféle lánc készíthető 3 piros, 4 kék és 2 zöld üveggolyóból?



Megoldás

a)

Első megoldás

A feladat az előző példa fej-írás sorozatára emlékeztet, s hasonló gondolatmenetet alkalmazunk. Ha a 7 golyóból rögzítjük, hogy melyik 3 golyó piros, akkor a kék golyók helye már adott. A 7 helyből 3-at $\binom{7}{3} = 35$ -féleképpen választhatunk ki (hiszen a helyek kiválasztásának sorrendje közömbös), ennyiféle lánc készíthető a golyókból.

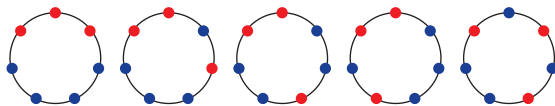
Második megoldás

Az előző megoldás az elemek kombinációját számolta ki, most az ismétléses permutáció alkalmazásával érünk célra.

Ha a golyók különböznenek, akkor $7!$ -féle sorrendjük lenne. A 3 piros golyó azonban egyforma, egymás között cserélgethető, így a sorrendek számát osztanunk kell $3!$ -sal. (Ha a golyókat a, b, c jelöli, akkor e három elem összes sorrendje ugyanazt az egy megoldást adja: $abc \leftrightarrow acb \leftrightarrow bac \leftrightarrow bca \leftrightarrow cab \leftrightarrow cba$.)

A 4 kék golyó miatt $4!$ -sal is osztanunk kell, így az eredmény: $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$.

b) Minden karkötőnek 7 lánc feleltethető meg: például a $pppkkkk \leftrightarrow ppkkkkp \leftrightarrow pkkkkpp \leftrightarrow \dots \leftrightarrow kpppkkk$ láncok ugyanazt a karkötőt adják. A láncok számolásakor a forgásszimmetria miatt minden karkötőt 7-szer számoltunk, így összesen $\frac{35}{7} = 5$ karkötő készíthető. Ezek:



c) Az a) feladat gondolatmeneteit alkalmazzuk.

Az ottani **első megoldás** szerint a 9 helyből kiválasztunk 3-at a piros golyók számára, majd a maradék 6 helyből kettőt a zöldeknek. Az utolsó négy hely már adódik a kék golyóknak. Eredmény:

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} = 1260.$$

Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha például először a kék golyók helyét, majd a zöldekét választjuk ki: $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 1260$.

A **második megoldásban** először feltesszük, hogy a golyók mind különböznek. Ekkor $9!$ -féle sorrendet kapunk. Ezt azonban az egyforma színű golyók miatt osztani kell $2!$ -sal, $3!$ -sal és $4!$ -sal, így összesen $\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$ esetet kapunk.

5. példa

Az A és B halmazokra $|A| = 6$, $|B| = 6$. Hány olyan f függvény van, amelyre

- a) $D_f = A$, $R_f = B$;
- b) $D_f = A$, és f képhalmaza B ;
- c) $D_f = A$, és f kölcsönösen egyértelmű?
(D_f és R_f az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet.)

Megoldás

a) Az f függvény értékkészlete csak akkor lehet B , ha a függvény minden B -beli értéket pontosan egyszer vesz fel. Ekkor A első eleméhez 6, második eleméhez 5, ..., végül az utolsó eleméhez már csak 1-féle elemet rendelhetünk. Eredmény: $6! = 720$.

b) Most minden A -beli elemhez 6-féle B -beli elemet rendelhetünk, ezért a keresett függvények száma $6^6 = 46\,656$.

c) A megoldás ugyanaz, mint az a) feladatban.

6. példa

Kun Erzsébet *A rejtvény* című művében (Gondolat Kiadó, Budapest, 1966) olvashatjuk, hogy az ókori és középkori babonás emberek szentül hitték a misztikus történetekben, a bűvös amulettekben, a varázserővel bíró tárgyakban. Ilyen volt az ábrán látható, az ókori keletről származó *Abracadabra* bűvös háromszöge is. Az emberek hitték abban, hogy a betűháromszög a nyakba akasztva megvéd a betegségtől, a falra festve távol tartja a háztól a gonosz szellemeket, és így tovább.

Egy középkori francia szerzetes kiszámolta, hogy az *Abracadabra* szó 1024-féleképpen olvasható ki az ábrán (természetesen mindig szomszédos betűre lépkedve). A szerzetes a pogány jelkép ellentételezéseként elkészítette saját táblázatát, amelyben – a középső *S* betűből kiindulva és szomszédos betűkre lépkedve – reményei szerint 1024-nél jóval több irányban lehetett kiolvasni a *Sancta ecclesia* ('Szent egyház') feliratot. Igaza volt a szerzetesnek?

A b r a c a d a b r a
A b r a c a d a b r
A b r a c a d a b
A b r a c a d a
A b r a c a d
A b r a c a
A b r a c
A b r a
A b r
A b
A

a i s e l c c c l e s i a
i s e l c c e c c l e s i
s e l c c e a e c c l e s
e l c c e a t a e c c l e
l c c e a t c t a e c c l
c c e a t c n c t a e c c
c e a t c n a n c t a e c
e a t c n a S a n c t a e
c e a t c n a n c t a e c
c c e a t c n c t a e c c
l c c e a t c t a e c c l
e l c c e a t a e c c l e
s e l c c e a e c c l e s
i s e l c c e c c l e s i
a i s e l c c c l e s i a

Megoldás



Az első ábrán a *b* betűkhöz 2 szomszédos *A* betűről vezet az út, így minden *b* betűhöz pontosan 2-féleképpen juthatunk el. Az *r* betűkhöz szintén két *b* betűből juthatunk, így ezek mind-egyikéhez már $2 \cdot 2 = 4$ út vezet. A sort folytathatjuk: a következő *a* betűkre két *r* betűről léphetünk, így az *a* betűkhöz már $4 \cdot 2 = 8$ út vezet. Hasonlóan a *c*-khez 2^4 , az újabb *a*-khoz 2^5 , a *d*-khez 2^6 , az *a*-khoz 2^7 , a *b*-khez 2^8 , az *r*-ekhez 2^9 , végül a záró *a* betűhöz valóban $2^{10} = 1024$ -féle úton juthatunk el.

A második ábra középső *S* betűjéből valamelyik sarok felé haladva összesen 13 lépést kell tennünk. Ha a jobb alsó sarkot választjuk, akkor a 13 lépésből 6-ot jobbra és 7-et lefelé kell megtenni. Ha a 13 lépésből kiválasztjuk azt a 6-ot, amelyiket jobbra tesszük meg, akkor ezzel a teljes utat megadtuk, mert a lefelé lépések már kötöttek. A 13 lépésből 6-ot $\binom{13}{6}$ -féleképpen választhatunk ki úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít; s mivel négy irány van, az összes bejárás száma $\binom{13}{4} \cdot 4 = 6864$.

A szerzetesnek tehát igaza volt.

FELADATOK

1. K2

Egy településen összesen 2160 betöltött munkahely van. A dolgozók 20%-ának a jövedelme az országos átlag alatt van; ez az adat külön-külön a nőkre 22,5% és a férfiakra 18,75%.

a) Hány nő és hány férfi dolgozik a városban?

b) Legyen A a dolgozó férfiak és B az országos átlag vagy afelett kereső személyek halmaza. Készítsünk A -t és B -t tartalmazó halmazábrát, amelyben feltüntetjük az egyes részhalmazok elemszámát!

c) A b) feladat alapján az információkat adjuk meg a megfelelő táblázatban is!

2. K2

Pista azokat a természetes számokat vizsgálja, amelyek nem tartalmaznak 1-es számjegyet. Úgy dönt, a jobb áttekinthetőség kedvéért az összes ilyen számot leírja 2-től 9999-ig, de előtte azért megbecsüli a tevékenység időtartamát. Pihenőket is feltételezve egy-egy szám leírására átlagosan 5 másodpercet számít.

a) Hány óráig tartana a munka?

b) Eközben hány számjegyet írna le Pista?

3. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2005.) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.

a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével!

A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt!

4.

(Érettségi feladat alapján, emelt szint, 2006.) Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-t, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.

K2 a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel?

E1 b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott pontok összege 10?

5. K2

Egy 52 lapos franciákártya-csomagból kezdéskor 5 lapot osztunk. Hány esetben fordulhat elő, hogy a lapok között

a) van a pikk király és a káró 4-es;

b) a legkisebb lap a treff 3-as (azaz minden más lap 3-nál nagyobb értékű);

c) a legkisebb lap valamely 3-as;

d) a legkisebb lap 5-ös, és a legnagyobb lap dáma (azaz minden más lap kisebb, mint a dáma);

e) van pikk, és nincs kőr?

6. E1

Egy angol városban nyolc klub működik. Egy társaságban 11 vendég találkozik, akik mindegyike éppen három különböző klubnak a tagja. Mikor ezt John meghallja, így szól:

„Milyen érdekes! Így biztosan vannak közöttünk öten, akik ugyanannak a klubnak a tagjai!”
Hogyan állapította ezt meg John, ha nem is ismerte a többieket?

7. E1

- a) Egy urnában 3 piros és 4 kék, egyforma méretű golyó van. Kihúzzunk öt golyót egymás után sorban, visszatevés nélkül. Hány esetben fordulhat elő, hogy az ötödik golyó piros? (Az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg egymástól.)
- b) Oldjuk meg a feladatot a következő adatokkal is! Egy urnában 2 piros, 3 kék és 4 sárga golyó van, és azt vizsgáljuk, hogy hány esetben lehet a hatodik golyó piros.

8. K2

Oldjuk meg az előző feladat a) és b) részét, ha visszatevéssel húzzunk! (Ekkor a kihúzott golyó színét minden húzás után lejegyezzük, majd a golyót visszatesszük az urnába.)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 258–342.

4. VEGYES FELADATOK A GRÁFOK TÉMAKÖRÉBŐL

1. példa

Nyolc érme közül hét valódi, ezek tömege 4 dkg, míg az egyik hamis, ennek csak 3 dkg a tömege. Rendelkezésünkre áll egy digitális mérleg, amely kijelzi a rá rakott érmék tömegét. Hogyan tudnánk a lehető legkevesebb méréssel megtalálni a hamis érmét? (Tegyük fel, hogy a digitális mérőeszköz használata nem olcsó mulatság.)



Megoldás

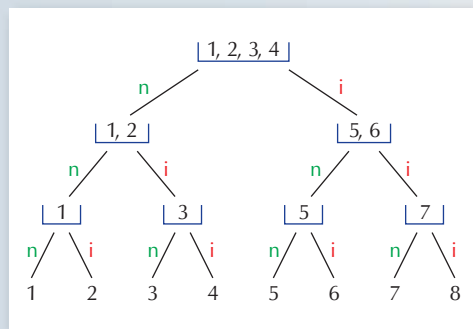
Kezdetben 8 lehetőség van a hamis érmére.

A 8 érmét két egyenlő elemszámú, 4-4 darabból álló részre osztjuk, és az egyik csoport tömegét megmérjük. Ekkor – az eredménytől függően – valamelyik 4-es kupacban lesz a hamis érme. (Ha nem egyenlő arányban osztanánk két részre az érméket, például 3 és 5 darab lenne a két csoportban, akkor „balszerencsés” esetben a nagyobbik halmazba kerülne a hamis érme, s ekkor 5 darabból kellene további mérésekkel megkeresnünk a hamisat.)

A *felezési technikát* folytatva a 4 lehetséges érmét ismét 2-2 elemszámú csoportra osztjuk. Valamelyik csoport megmérése után megtudjuk, melyik 2 érme között van a hamis. (Ha a mérleg $2 \cdot 4 = 8$ dkg-ot mutat, akkor a hamis érmét nem mértük meg; míg ha a mérési eredmény csak 7 dkg, akkor a hamis érme a mérlegre feltett kettő közül valamelyik.) Végül egy további mérés elegendő ahhoz, hogy a két lehetséges érme közül kiválasszuk a hamisat.

Összesen tehát 3 mérésre volt szükség.

Sorszámozzuk be az érméket 1-től 8-ig! Az első mérés lehet például az $\{1; 2; 3; 4\}$ érmék megmérése. Ha ezek tömege $4 \cdot 4 = 16$ dkg, akkor az $\{5; 6; 7; 8\}$ halmazzal folytatjuk a keresést, például $\{5; 6\}$ méréseivel; míg ha $\{1; 2; 3; 4\}$ tömege 16 dkg-nál kisebb, akkor megmérhetjük $\{1; 2\}$ -t, és így tovább. A mérési eredményeket gráffal szemléltethetjük, a gráfok végpontjaiban a hamis érme sorszáma



szerepel. (Itt az „igen” ág azt jelenti, hogy a mért érmék közül mind valódi.)

Ha tehát az első mérésre $4 \cdot 4 = 16$ dkg eredményt kaptunk, akkor az {5; 6; 7; 8} érmékkel folytatjuk a keresést; míg ha az első mérés eredménye 15 dkg lett, akkor az {1; 2; 3; 4} érmékkel. De észrevehetjük, hogy a két folytatás egymástól független, a két mérés akár össze is kombinálható. Vagyis mindkét ágot folytathatjuk az {1; 2; 5; 6} méréssel. A táblázat mutatja, hogy ezt az ötletet a további mérésekre alkalmazva előre rögzített 3 mérés is elegendő.

	1	2	3	4	5	6	7	8
I.					X	X	X	X
II.			X	X			X	X
III.		X		X		X		X

A rögzített méréseket I–III. jelöli, ezek: {1; 2; 3; 4}, {1; 2; 5; 6}, {1; 3; 5; 7}. Minden méréssel tehát az 1–8 számok egy négyelemű részhalmozát mérjük meg. Az egyes méréseknél X jelet tettünk azoknak a számoknak az oszlopába, amelyek nem tartoznak a mért halmazba.

A 8 különböző válaszlehetőségnek megfelelően a 8 oszlop különbözik egymástól. A táblázat alapján könnyen algoritmizálható a hamis érme azonosítása. Ha például a 3 mérés eredménye „igen, nem, igen” (azaz 16, 15, 16 dkg), akkor a 6. oszlop válaszait kaptuk; a keresett érme sorszáma 6.

Megjegyzés

Az azonosításhoz valójában még a táblázatra sincs szükségünk, ha segítségül hívjuk a 2-es számrendszert. A három igen–nem választ megfeleltethetjük egy olyan bináris kódnak, amely három darab 0–1 jelből áll; például úgy, hogy az „igen” válaszhoz rendeljük az 1 számjegyet, a „nem” válaszhoz a 0-t. Ha például a három válasz sorban „igen, nem, igen”, akkor az így kapott I–III. számjegyek rendre 1, 0, 1. A háromjegyű 2-es számrendszerbeli szám értéke 0-tól 7-ig terjedhet, nekünk pedig az 1-től 8-ig terjedő számokra lenne szükségünk. Ezen a problémán úgy segíthetünk, hogy a kapott 2-es számrendszerbeli számhoz még hozzáadunk 1-et. Az „igen, nem, igen” válaszok bináris kódja tehát 101; az így kapott 2-es számrendszerbeli szám értéke $101_2 = 5$. A +1 hozzáadásával megkapjuk a keresett számot: $5 + 1 = 6$.

Minden mérés legfeljebb felezi a lehetséges esetek számát, ezért 3 mérésre biztosan szükség van. (Ha valamelyik mérés nem felezi az esetszámot, akkor balszerencsés esetben a nagyobbik elemszámú esethalmazzal kellene folytatnunk a mérést.) A 2-es számrendszerbeli kódolás is mutatja az esetek felezését, amikor mérésenként a 0 vagy 1 számjegyet kapjuk meg.

2. példa

Tíz különböző tömegű érméből ($A, B, \dots, J$) egy kétkarú mérleg segítségével néhány párt összehasonlítottunk. Az egyes mérések eredményei a következők voltak:

$A > D, A < E, B > C, B < E, B < H, B > A, C > F, C < I, D < E, E < G, F < I.$

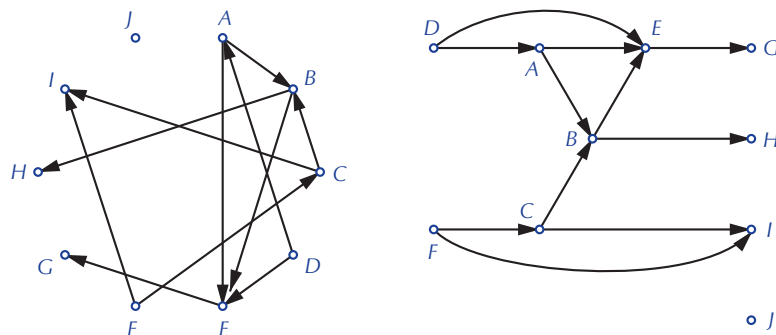
a) Szemléltessük irányított gráffal az eddigi méréseket!

b) Hány további mérés szükséges ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, melyik a legnehezebb, illetve a legkönnyebb érme? Melyik érmét kell összehasonlítani?

c) Ha a legnehezebb érmét keressük, akkor a korábban lezajlott mérések között vannak-e „feleslegességek”?

Megoldás

a) Az irányított gráfban az érméknek pontokat feleltetünk meg, s mutasson a nyíl mindig a nehezebb érme felé. A mérések eredményeit szemléltethetjük például úgy, hogy egy szabályos tízsög megfelelő éleit és átlóit irányítjuk (első ábra). Az összehasonlítások eredményei azonban jobban áttekinthetők a második ábrán. Itt olyan láncokat ábrázoltunk, amelyekben nagyság szerint növekvő sorrendben helyezkednek el az érmék, s a nyilak már nem metszik egymást.



b) A legnehezebb érme pontjába csak bemenő nyíl mutathat, onnan nem indulhat ki nyíl. A G , H és I érmék ilyen tulajdonságúak; valamint még J is lehet a legnehezebb, hiszen ezt az érmét még semelyik másikkal nem hasonlítottuk össze. A legnehezebb érme kiválasztásához három további mérés kell. Például két méréssel összehasonlítjuk G és H , valamint I és J érméket; s a harmadik mérés lesz a két nehezebb érme összehasonlítása.

A legkönnyebb érme lehet D vagy F (a gráfban ezen pontokból csak kimenő nyilak indulnak), illetve J . Közülük a legkönnyebbet két méréssel kiválaszthatjuk. Először például összehasonlítjuk D -t és F -et; majd a könnyebbik érme és J összehasonlítása megadja, melyik a legkönnyebb érme.

c) „Felesleges” egy $X < Y$ mérés, ha a többi mérés eredményéből már következtethetünk X és Y nagyságrendi viszonyára. Például $D < A$ és $A < E$ miatt a $D < E$ mérés felesleges, eredménye előre megjósolható. Egy másik lehetőség a „feleslegességre”, ha a célfeladat szempontjából nem ad új információt a mérés. Például, ha a legnehezebb érmét keressük, az $A < E$ és $B < H$ miatt az $A < B$ mérés ilyen, hiszen sem A , sem B nem lehet a legnehezebb érme. Végül $F < I$ eredménye is következik az $F < C$ és $C < I$ mérésekből.

3. példa

1998 óta a labdarúgó-világbajnokságokon részt vevő 32 csapatot nyolc darab 4-es csoportba sorsolják. Először a csoportokon belül körmerkőzéses rendszerben meghatározzák a csoportból továbbjutó első két helyezettet, majd a 16 továbbjutó csapat kieséses rendszerben dönti el, melyikük a legjobb. Összesen hány mérkőzést játszanak a csapatok, míg kiderül, melyikük a világbajnok?

Megoldás

Egy-egy 4 csapatos csoportban összesen 6 mérkőzésre kerül sor. (A csapatoknak pontokat, a mérkőzéseknek éleket megfelelően a 4 pontú teljes gráf éleinek száma 6.) 8 csoport esetében ez összesen $8 \cdot 6 = 48$ mérkőzést jelent.

A 16 továbbjutó csapat először 8 mérkőzést játszik, majd a legjobb 8 csapat újabb 4 meccset játszik (ekkor kialakul a legjobb 4 mezőnye), ezután következik a 2 elődöntő, végül a döntő. Így az egyenes kiesési ágban $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ mérkőzésre van szükség, összesen pedig $48 + 15 = 63$ mérkőzésre. (Ha játszanak a harmadik helyért is, akkor a bronzmérkőzés miatt 64 a világbajnokság mérkőzéseinek száma.)

Megjegyzés

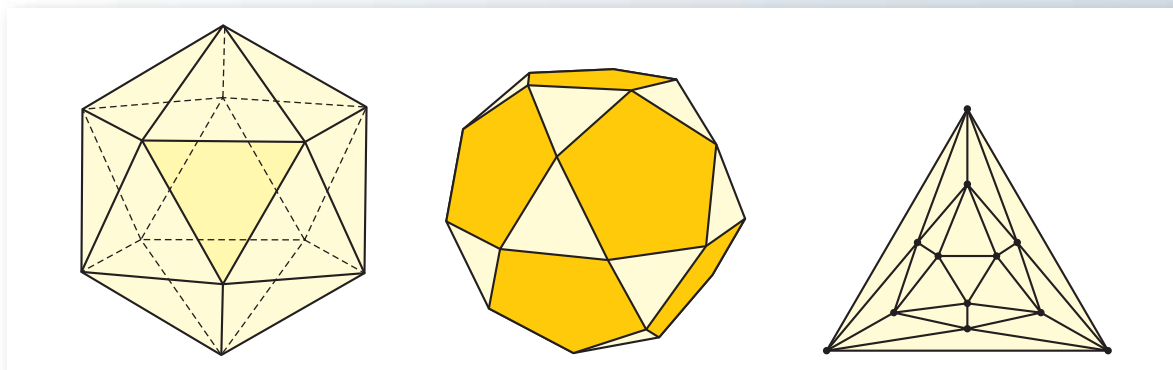
A kieséses rendszerű versenyeken általában is igaz, hogy n számú csapat esetén $n - 1$ mérkőzés szükséges a legjobb együttes meghatározásához. Gondoljunk arra, hogy minden mérkőzésen egy csapat

esik ki, és összesen $n - 1$ csapatnak kell kiesnie. (Függetlenül a sorsolás technikai részleteitől: mely csapatokat emelik ki, kik az esetleges erőnyerők, stb.)

4. példa

Az első ábrán az ikozaéder képe látható. Ennek a szabályos testnek 20 darab egybevágó szabályos háromszöglapja van, és minden csúcsában 5 lap találkozik.

Ha az ikozaéder minden csúcsát lemetsszük a csúcsból kiinduló élek felezőpontjain átmenő síkokkal, akkor az ikozaéder csúcsainál szabályos ötszög alakú lapok keletkeznek, míg a korábbi háromszöglapok továbbra is (kisebb méretű) háromszögek maradnak. Határozzuk meg, hány csúcsa, éle, lapja van az így kapott csonkolt ikozaédernek!



Megoldás

Ha az ikozaéder csúcsait és éleit egy síkra vetítjük, akkor a test síkba rajzolt gráfját kapjuk. (A harmadik ábrán az ikozaéder egyik lapjára vetítettük a többi csúcsot úgy, hogy a gráfban az élek nem metszik egymást.) Először határozzuk meg, hány éle van az ikozaédernek!

Mivel egy háromszöglaphoz 3 él tartozik, így $20 \cdot 3 = 60$ élhez jutunk. De minden élt kétszer számoltunk (hiszen minden él két laphoz tartozik), így az élek száma $60 : 2 = 30$.

A csúcsok számát hasonlóan kaphatjuk meg. A 20 háromszöghöz $20 \cdot 3 = 60$ csúcs tartozik; de minden csúcsot ötször számoltunk (minden csúcsban öt lap találkozik), így a csúcsok száma $60 : 5 = 12$.

(Egy másik összeszámlálási lehetőség: minden élhez 2 csúcs tartozik; a 30 élhez így $30 \cdot 2 = 60$ csúcs; de minden csúcsot ötször számoltunk, mert minden csúcsba öt él fut.)

Az ikozaédernek 20 darab háromszöglapja volt, így a csonkolt ikozaédernek is 20 háromszöglapja van. Az ötszöglapok száma annyi, ahány csúcsa volt az ikozaédernek, azaz 12. A csonkolt ikozaéder lapjainak száma tehát $20 + 12 = 32$.

A csonkolt ikozaédernek annyi csúcsa van, ahány éle volt az eredeti ikozaédernek, mert minden korábbi él felezőpontjában keletkeztek az új csúcsok. A csúcsok száma tehát 30.

(Egy másik lehetőség: a 20 háromszöghöz $20 \cdot 3$, a 12 ötszöghöz pedig $12 \cdot 5$ csúcs tartozik, ez összesen $60 + 60 = 120$ csúcs. De minden csúcsban négy lap találkozik [ábra], így a csúcsokat négyszer számoltuk. Összesen tehát $120 : 4 = 30$ a csúcsok száma.)

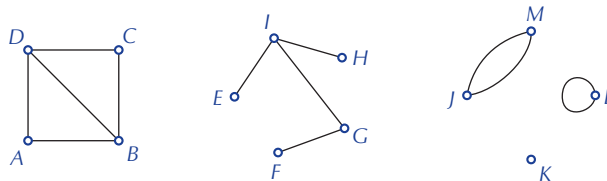
Végül észrevehetjük, hogy a csonkítás után minden él pontosan egy háromszöghöz tartozik. A 20 háromszöget $20 \cdot 3 = 60$ él határolja, az élek száma ezért 60.

Megjegyzés

Mi csak a gráfelmélet alapjaival ismerkedünk meg, és ehhez elegendő az eddig tanult definíciók ismerete. A bonyolultabb, összetett problémák elemzését azonban nagyban megkönnyíti, ha

Emelt szint

további fogalmakat is bevezetünk. Ilyen fogalom például az összefüggőség vagy a komponens definíciója.



Az ábrán látható gráfok közül az első kettő összefüggő, a harmadik nem: három komponensből áll. (Az első két gráf egyszerű, a harmadik nem, mert hurokél és többszörös éleket is tartalmaz.)

Útnak nevezzük a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször. Az A és C pontok között több út is vezet, ezeket a csúcsok felsorolásával megadhatjuk ADC , ABC , $ADBC$, $ABDC$ módon. Egyetlen út vezet E -ből F -be, de J -ből M -be már kettőt, a kétszeres él miatt.

A (gráfelméleti) **kör** olyan út, amelynek kezdő- és végpontja megegyezik; azaz él olyan sorozata, amely a kezdőpontjába tér vissza, és benne minden pont és él csak egyszer szerepel. Az első gráfban három kör is van: $ABCD$, $ABDA$, $BCDB$. A második gráfban nincs kör; a harmadikban ismét kettőt találunk, a hurokél és a kétszeres él miatt.

Végül megemlítjük, hogy **fának** (vagy **fagráfnak**) nevezzük azt az összefüggő gráfot, amely nem tartalmaz kört. (A fa tehát szükségképpen egyszerű gráf.) Az ábrán a második gráf fa.

Az új definíciók felhasználásával egyszerű megállapításokat tehetünk. Néhányat felsorolunk; ezeket most nem bizonyítjuk, de az állításokat érdemes konkrét gráfokon ellenőrizni.

Tétel

Az összefüggő gráf bármely két különböző pontja között van út.

Ha egy gráf két pontja között több út is megadható, akkor a gráfban van kör.

Egy fa bármely két pontját pontosan egy út köti össze.

Ha egy összefüggő gráfban egy kör tetszőleges élét elhagyjuk, akkor a gráf összefüggő marad.

Ha egy fa valamely élét elhagyjuk, akkor a kapott gráf nem lesz összefüggő. (Az él végpontjait nem hagyjuk el.)

Ha egy fa valamely két pontja között nincs él, akkor ezt az élt behúzva a gráfban keletkezik kör.

Néhány összefüggés a fokok és élek számával kapcsolatban:

Fogalmak

út;
kör;
fa, fagráf;
fagráf éleinek
száma.

Tétel

Ha egy gráfban minden pont fokszáma legalább kettő, akkor a gráfban van kör.

Ha egy n pontú gráf éleinek száma n , akkor a gráfban van kör.

Az n pontú fagráfban az élek száma $n - 1$. (Az egyetlen pontból álló gráf is fa.)

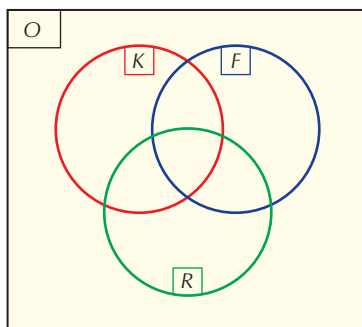
Ha egy fa legalább két pontú, akkor van elsőfokú pontja.

FELADATOK

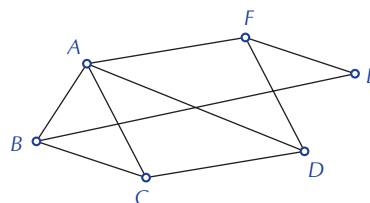
1. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2005.) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.

a) Írja be a megadott halmazábrába a szövegnek megfelelő számokat!



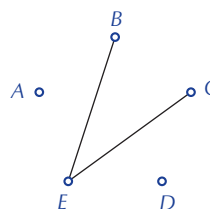
- b) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanuló!
- c) Az iskolák közötti labdarúgó-bajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti az ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban?



2. K2

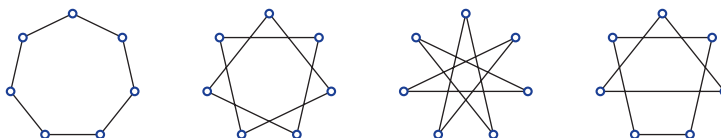
(Érettségi feladat alapján, középszint, 2008.) Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült.

- a) Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton!
- b) Hány megoldás van?



3. E1

Izomorfak-e az alábbi gráfok? (Emlékeztető: Két gráfot izomorfának nevezünk, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy az egyik gráf bármely két pontja között pontosan akkor van él, ha a másik gráf két megfelelő pontját is összeköttöttük.)



4. K2

Döntsük el, melyik igaz, és melyik hamis az alábbi állítások közül!

1. Ha két gráfban a megfelelő csúcsok fokszáma egyenlő, akkor a két gráf izomorf.
2. Ha egy n pontú gráfban az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.
3. Ha egy n pontú egyszerű gráfban az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.
4. Egy 5 csúcsú, egyszerű gráfnak nem lehet 11 éle.
5. Egy 3 pontú gráfot a fokszámai egyértelműen meghatároznak.
6. Egy 3 pontú egyszerű gráfot a fokszámai egyértelműen meghatároznak.
7. Ha az n csúcsú összefüggő gráfnak n -nél kevesebb éle van, akkor a gráfnak van elsőfokú csúcsa.
8. A legalább két pontú gráfban van két azonos fokszámú pont.

E1 9. A legalább két pontú egyszerű gráfban van két azonos fokszámú pont.

E1 10. G kiegészítő gráfjának a kiegészítő gráfja izomorf G -vel.

5. E1

Az irányított gráfokban az egyszerű fokszámok helyett az adott pontba befutó, illetve pontból kifutó élek számáról beszélünk. Mi jellemző a kifutó élek és a befutó élek fokszámainak összegére?

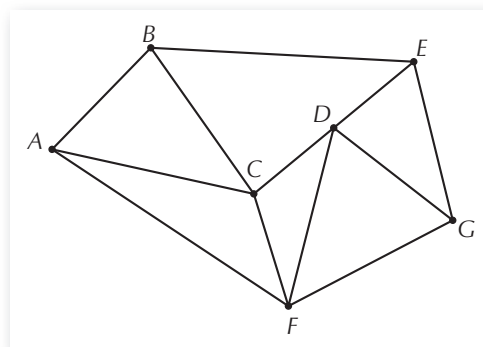
6. E1

Nyolc, páronként különböző tömegű érme közül szeretnénk megkeresni a legkönnyebb és a legnehezebb érmét. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, amellyel bármely két érme tömegét összehasonlíthatjuk. Elegendő-e 10 mérés a két érme megkereséséhez?

7. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2020.)

Az A pontból a G -be kell eljutnunk úgy, hogy az egyes pontok között csak a berajzolt szakaszokon mozoghassunk, és mindig csak olyan pontra léphetünk tovább, amelynek betűjele a magyar ábécében az elhagyni készült pont betűjele után helyezkedik el. (Tehát például C -ről D -re vagy F -re léphetünk, de A -ra vagy B -re nem.) Hányféle különböző útvonalon juthatunk el ilyen módon A -ból G -be?



8. E1

Bergengóciában egy kis létszámú parlamenti frakció tagjai négy bizottság munkájában vesznek részt. A frakció minden tagja két bizottságban dolgozik, és bármely két bizottságnak egy közös tagja van a frakcióból. Hány tagú a frakció?*

9. E2

(Zrínyi Ilona Matematikaverseny, 2010, megyei forduló, 7. osztály) Egy 7×7 -es pontrács mind a 49 pontját kékre vagy pirosra színeztük úgy, hogy a négy sarokban lévő pont piros színű lett. (Egy rácspont sarokban van, ha szélső sorra és szélső oszlopra illeszkedik.) A színezés után a pontok között 14 volt kék színű, ezek közül 7 a pontrács valamelyik szélső sorában vagy szélső oszlopában helyezkedett el. Először egy-egy szakasszal összekötöttük az azonos sorban lévő szomszédos pontokat, majd az azonos oszlopban lévő szomszédos pontokat úgy, hogy az azonos színű pontokat velük egyező színű, a különböző színű pontokat fekete színű szakasszal kötöttük össze. Hány fekete színű szakaszt rajzoltunk, ha a piros színű szakaszok száma 50 lett?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 407–425, 426–463.

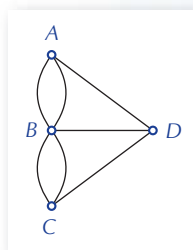
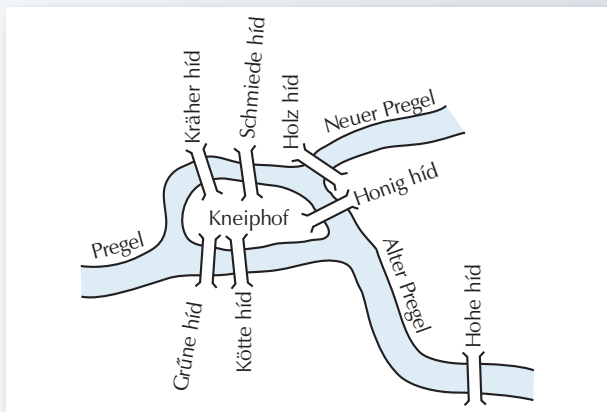
* A Középiskolai Matematikai Lapok C.102. feladata

NÉHÁNY ÉRDEKES GRÁFELMÉLETI PROBLÉMA (Olvasmány)

1. példa

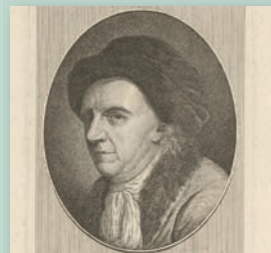
A XVIII. századi Königsberg (ma: Kalinyingrád) városát átszelő Pregel folyón hét híd vezetett át. A hidak összekötötték a négy városrészt, a folyó két partját és a két szigetet.

A város lakói érdekes problémát vetettek fel: lehet-e olyan sétát tenni a városban, amelynek során minden hídon pontosan egyszer kelnek át, majd visszatérnek a kiindulási helyükre?



A kérdést Leonhard Euler svájci matematikus válaszolta meg 1735-ben. A pétervári akadémiához benyújtott dolgozata megvetette a gráfelmélet és a topológia alapjait, sokan ma is ettől az időtől számítják a gráfelmélet keletkezését.

A város akkori térképe négy pontú, hétélű gráffal modellezhető. (A pontok az egyes városrészeknek, az élek pedig a hidaknak felelnek meg.) Ekkor a feladat tisztán gráfelméleti jellegű problémává fogalmazható át: bejárhatók-e az adott gráf élei úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk át, és visszaérkezünk a kiindulási pontba?



Leonhard Euler
(1707–1783)

A svájci születésű matematikust és fizikust szülei eredetileg papnak szánták, de matematikai tehetsége már gyerekkorában feltűnt. Az egyetem elvégzése után, 1727-ben elfogadta a szentpétervári akadémia meghívását, amelynek haláláig tagja maradt. Páratlan energiával, óriási munkakedvvel a matematika szinte minden területén jelentőset alkotott. Társadalmi megbecsülésére jellemző, hogy míg 1741-től 1766-ig a berlini akadémián dolgozott, a pétervári akadémia – mint tiszteletbeli tagjának – továbbra is folyósította a fizetését. 530 könyve és értekezése jelent meg életében.

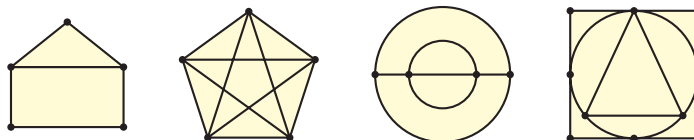
I. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

Euler megmutatta, hogy a kívánt séta lehetetlen. Gondolatmenetének lényege a következő volt:

Ha a gráf bejárása során valamelyik élen át egy közbülső pontba érkezünk, akkor egy másik élen keresztül el is kell hagynunk azt a pontot. Ha a bejárás lehetséges, akkor a ponthoz párosával csatlakoznak az élek, azaz a pont fokszáma – s így a többi pont fokszáma is – páros kell hogy legyen. (Ez igaz a kiindulási pontra is, mert azt elhagyjuk, majd oda vissza is kell térnünk.) A város hídjai tehát nem járhatók be a kívánt módon, mert a gráf mind a négy pontja páratlan fokú.

Megmutatható, hogy a fokszámok párossága az élek bejárásának nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is. (Ha az élek bejárása során a kezdő- és végpont nem egyezik meg, akkor ez a két pont [és pontosan ez a kettő] páratlan fokú.)

Az Euler-féle bejárási tétellel gyakran találkozunk a modern rejtvényirodalomban. Az „Euler-rajzok” műfajából négy közismert rejtvény látható az ábrán. A feladat: egyetlen vonallal, a ceruza felemelése nélkül kell az ábrákat megrajzolni.



2. példa

Egy másik gyakori rejtvénytípus, a labirintus-fejtörők témaköre is gráfelméleti jellegű.

Már az ókorban is építettek labirintusokat, az egyik leghíresebb ezek közül a görög mondákból jól ismert krétai Knósszosz városában volt. A monda szerint Mínosz királynak bikafejű fia született, s ő szégyenében fiát, Minótauroszt egy külön e célra tervezett útvesztő legmélyén rejtette el. (A mondának van valóságalapja: a múlt század elején feltárt, óriási méretű királyi palota alaprajza labirintus-rendszerű volt.)

A labirintusok csomópontjai egy gráf pontjainak, útszakaszai pedig a gráf éleinek tekinthetők, és ekkor a matematikai feladat tulajdonképpen két pont (a bejárat és a labirintus legbelső pontja) közötti, éleken át vezető út megtalálása. Más kérdéseket is feltehetünk: hogyan történhet a teljes labirintus bejárása, hogyan haladjunk az útvesztőben, hogy ne tévedjünk el, stb. A matematikusok a problémák megoldására több módszert is kitárltak, ezek közül néhány közismert. Ilyen például a „jobbkez-szabály”, mely szerint úgy kell az útvesztőben haladni, hogy a jobb kezünket folyamatosan a falon tartjuk. Ha a szabályt kifelé és befelé haladva egyaránt betartjuk, akkor nem tévedhetünk el. (Persze más eljárások is használhatók. A görög mondai hős, Thészeusz egy fonálgombolyagot kapott szerelmétől, Ariadnétól. A legombolyított fonalat visszafelé követve találta meg a labirintus kijáratát, miután megölte a szörny Minótauroszt.)



Végül említsük még meg, hogy maga a labirintus tervezése is komoly matematikai feladat. A mítosz szerint a krétai labirintus tervezője, Daidalosz híres építész és feltaláló volt. (Fiának, Ikarosznak is ő készítette el a repülésre alkalmas szárnyakat.)

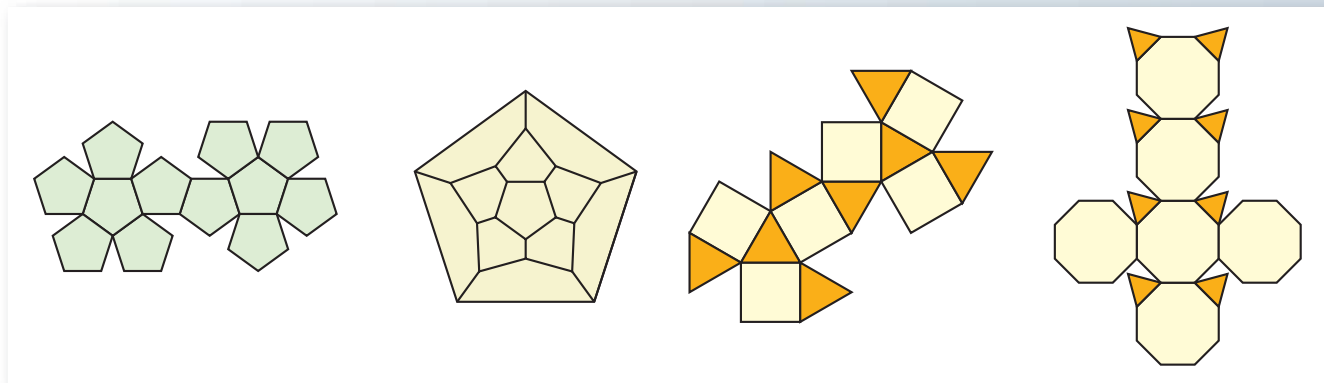
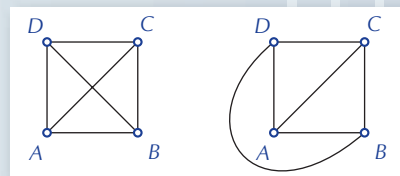
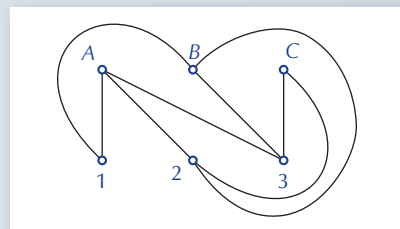
3. példa

Szintén régi rejtvényfeladat a „három ház – három kút” probléma. Kérdés, hogy három háztulajdonos (az ábrán A, B, C) tud-e a három kút mindegyikéhez (az ábrán: 1, 2, 3) úgy ösvényeket építeni, hogy azok ne keresztezzék egymást. Az ábrán látható, hogy az $A1, A2, A3, B1, B2, B3$ és $C2, C3$ utakat sikerült megépíteni, de $C1$ kimaradt.

Bárhogyan is próbálkozunk, belátható, hogy a feladat nem oldható meg. A gráfok nyelvén megfogalmazva a három ház – három kút gráfja *nem rajzolható síkba*. (Egy gráf síkba rajzolható, ha van olyan, vele izomorf gráf, amelynek a csúcsai a sík pontjai, és az élei nem metszik egymást.)

Például a négyszög és két átlója síkba rajzolható, ha az ábra szerinti BD élt „ügyesen” vesszük fel.

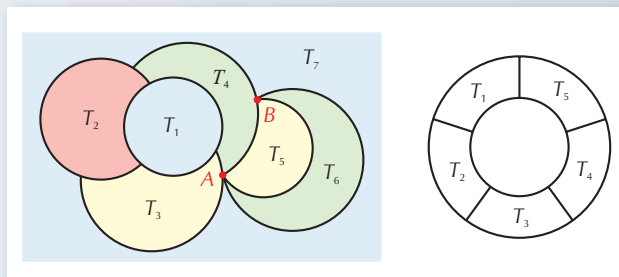
A síkba rajzolható gráfok témakörének sok-sok alkalmazása van. Megmutatható például, hogy a sokszöglapokkal határolt, egyszerűbb testek csúcsaiból és éleiből álló gráfok mindig síkba rajzolhatók. Erre már korábban is láttunk példákat, alább megadjuk néhány test síkba rajzolt gráfját vagy hálózatát.



4. példa

A testek síkba rajzolt gráfjai felfoghatók egy-egy térképnek, ahol az egyes lapok különböző országokat jelölnek (a végtelen külső tartomány lehet például a tenger).

1852-ben egy londoni diák az Anglia megyéit ábrázoló térkép színezése közben úgy találta, hogy a megyék „helyes” színezéséhez általában három szín szükséges, a bonyolultabb esetekben pedig négy szín kell; viszont a négy szín mindig elegendő. A térképeket az áttekinthetőség kedvéért úgy szokás színezni, hogy a közös határszakasszal rendelkező országok különböző színűek legyenek. „Helyes” színezés alatt ezen feltétel mellett még azt is megkívánjuk, hogy a külső tartományt, a „tengert” is beszínezzük; de azt nem követeljük meg, hogy két tartomány különböző színű legyen, ha csak véges sok közös pontjuk van. (Az első ábrán A és B több tartománynak is közös pontja, de ettől még a T_4 és T_6 tartományok lehetnek azonos színűek.)

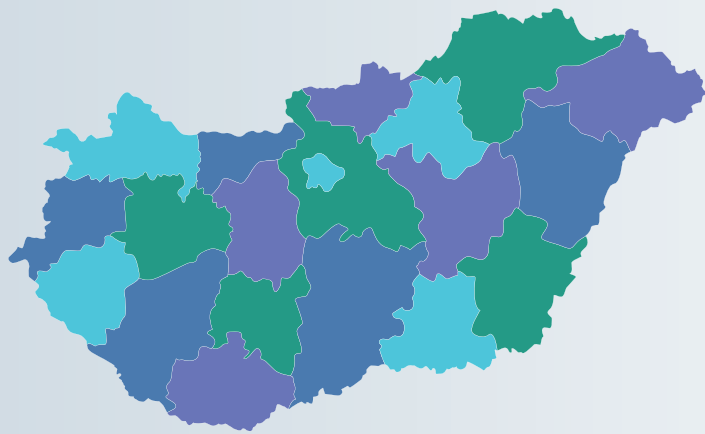


A négyszín-probléma megtetszett a Clifton College igazgatójának, így ennek megoldását 1866 szeptemberében versenyfeladatként kitűzte a diákjainak. Persze komoly formai követelményeket támasztott: a megoldás nem haladhatja meg az 1 oldalt (30 írott sor), valamint 1 oldal terjedelmű ábrát.

A feladat azonban váratlanul nehéznek bizonyult, senki sem tudta megoldani. A fellépő bonyodalmakra egyszerű példa látható a második ábrán. Itt a T_1 , T_2 , T_3 , T_4 és T_5 tartományok mindegyikének csak két szomszédja van, mégsem elegendő két szín az öt tartomány helyes színezéséhez.

A feladat gráfelméleti jellegét hamar felismerték. (Az egyes országok a gráf pontjai, a közös határszakkasszal rendelkező országokat kötjük össze élekkel, és a közös éllel rendelkező pontokat kell különböző színűre színezni. Persze, a geometriai feltételek miatt a gráf nem lehet tetszőleges, síkba rajzolhatónak kell lennie.) Hiába próbálkozott azonban sok neves matematikus is a sejtés bizonyításával, a végleges megoldásra több mint száz évet kellett várni. Appel és Haken matematikusok 1980-ban jelentették be, hogy megoldották a problémát: sikerült bizonyítaniuk, hogy bármely térkép négy színnel helyesen színezhető. A megoldásuk meglehetősen hosszadalmas: 100 gépelt oldal az összefoglalás, 100 oldal a részletezés, 700 oldalnyi segédtelet használnak fel, és 1200 órányi számítógépidőre volt szükségük. A bizonyítás éppen azért volt ilyen hosszú, mert a síkba rajzolható gráfok különböző típusaira kellett ellenőrizni az állítást.

A térképeket általában 4 színnel színezik.



A hálózatok modern elmélete szerint – amelyet elsősorban az internet inspirált – a Földön bárkit bárkivel olyan emberlánc köt össze, melyben rajtuk kívül legfeljebb öt személy van, és a szomszédos személyek ismerik egymást. De vajon ez csak a mi századunkra jellemző? Az alábbiakban Karinthy Frigyes: *Láncszemek* című írásából idézünk.

„A nehezebb feladatot: egy szögecselő munkást a Ford-művek műhelyéből, ezek után magam vállaltam, és négy láncszemmel szerencsésen meg is oldottam. A munkás ismeri műhelyfőnökét, műhelyfőnöke magát Fordot, Ford jóban van a Hearst-lapok vezérigazgatójával, a Hearst-lapok vezérigazgatójával tavaly alaposan összeismertkedett Pásztor Árpád úr, aki nekem nemcsak ismerősöm, de tudtommal kitűnő barátom – csak egy szavamba kerül, hogy sürgönyözzön a vezérigazgatónak, hogy szóljon Fordnak, hogy Ford szóljon a műhelyfőnöknek, hogy az a szögecselő munkás sürgősen szögecseljen nekem össze egy autót, éppen szükségem lenne rá.

Igy folyt a játék, és barátunknak igaza lett – soha nem kellett ötnél több láncszem ahhoz, hogy a Földkerekség bármelyik lakosával, csupa személyes ismeretség révén, összeköttetésbe kerüljön a társaság bármelyik tagja. Mármint felteszem a kérdést – volt-e valaha kora a történelemnek, amikor ez lehetséges lett volna?”

HOGYAN SZABADULT KI HARRY POTTER ÉS HERMIONE A CSAPDÁBÓL? (Olvasmány)

A fejezet kezdő oldalán olvashattunk arról, hogy Hermione és Harry hogyan estek csapdába. Hét palack közül kellett kiválasztaniuk azt a két varázssitalt, amellyel előre-, illetve visszajuthatnak a bezárt helyiségből, s ehhez segítségül egy tekerccsen lévő versikét találtak.

Oldjuk meg a feladatot: melyik a két varázspalack? (A palackok alakja fontos, képük a kezdő oldalon látható.)

Megoldás

Jelölje a palackokat A, B, C, D, E, F, G . Az alapinformációk szerint:

(0) 2 üvegben (semleges) csalánbor van (jelölése: b); 3 üvegben mérge (m); 1-1 üvegben pedig előre-, illetve visszasegítő varázssital ($\rightarrow$; $\leftarrow$).

A négy segítség információi rövidített formában:

(1) $(m, b), (m, b)$ egymás mellettiek (kétszeres szomszédság).

(2) $A \neq G, A \neq \rightarrow, G \neq \rightarrow$.

(3) $C \neq m, F \neq m$.

(4) $B = F$.

A (4) információ szerint B és F egyformák: (0) alapján vagy mindkettőben mérge van, vagy mindkettőben bor. De (3) szerint F -ben nincs mérge, így B -ben és F -ben is bor van.

Továbbá az (1) miatt ekkor A -ban és E -ben mérge van.

A	B	C	D	E	F	G
m	b			m	b	

Maradt egy mérget és a két varázssitalt tartalmazó üveg.

(3) miatt C -ben, (2) miatt pedig G -ben nincs mérge, így csak D lehet az az üveg, amelyben a harmadik mérge van.

Végül (2) alapján G nem az előresegítő varázssital; így ez csak a maradék C lehet, míg G a visszautat segíti.

A megoldás:

Vagyis a C , illetve G palackot választhatják hőseink.

A	B	C	D	E	F	G
m	b	$\rightarrow$	m	m	b	$\leftarrow$

Hogyan oldotta meg Hermione a rejtvényt?

– Itt van a papíron minden információ, amire szükségünk van. Hét üveggel van dolgunk – háromban mérge van, kettőben bor; egy átszűrt a fekete tűzön, egy pedig szabadá teszi az utat visszafelé.

– De honnan tudjuk, melyiket kell meginnunk?

– Várj egy percet.

Hermione többször egymás után elolvasta a rímbe szedett sorokat. Fel és alá járkált a palackok mentén, motyogott magában, és időnként rámutatott egy-egy üvegre. Végül összecsapta a tenyerét.

– Megvan! – kiáltott fel izgatottan. – A legkisebb fiola tartalma juttat át minket a fekete tűzön túlra – ahol a követ találjuk.

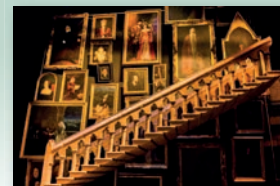
Harry a parányi üvegre nézett.

– Ez csak egyikünknek elég – szólt. – Alig egy korty van benne.

A két barát egymásra pillantott.

– Melyikkel lehet átmenni a bíborszínű tűzön?

Hermione a sor jobb szélén álló, gömbölyded palackra mutatott.



II. SOROZATOK

A sakk feltalálójának megjutalmazásával kapcsolatos sorozat 2000 éves múltra tekint vissza, de az általunk ismert legrégebbi sorozat tárgy feladat minden bizonnyal a Kr. e. 2000. év tájáról származó ún. *Rhind-papiruszon* olvasható. Ezt Ahmesz, a fáraó írnoka másolta egy még régebbi írásról. Az írnokiskolai feladat – mai megfogalmazásban – kb. így szól: „Száz cipőt úgy kell elosztani öt ember között, hogy a második ugyanannyival kapjon többet az elsőnél, mint amennyivel többet kap a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél. Továbbá a két kisebb rész kétszer kevesebb legyen, mint a három nagyobb.”

5–6. A SOROZAT, SZÁMSOROZAT FOGALMA

1. példa

Írjuk fel a pozitív páratlan számokat!

Megoldás

1; 3; 5; ...

Mivel végtelen sok pozitív páratlan szám van, valamennyit felsorolnunk nem sikerül. Meg tudjuk azonban mondani, hogy a századik a 199, az 500-adik a 999, stb. Általánosan felírhatjuk, hogy az n -edik pozitív páratlan számot úgy kapjuk meg (n pozitív egész számot jelöl), hogy a $2n$ számból egyet levonunk.

Ezt röviden a következőképpen fogjuk jelölni:

1; 3; 5; ... $(2n - 1)$; ...

2. példa

Írjuk fel a -2 pozitív egész kitevős hatványait!

Megoldás

-2 ; 4; -8 ; ...; $(-2)^n$; ... (n pozitív egész szám)

Közvetlen behelyettesítéssel itt is ki tudjuk számolni a sorozat akárhányadik elemét.

3. példa

Írjuk fel a prímszámokat!

Megoldás

2; 3; 5; 7; ...

Itt nem írhatunk képletet, pedig 11. osztályból tudjuk, hogy végtelen sok prímszám van, de sajnos a matematika jelenleg nem ismer olyan képletet, amivel – a fentiekhez hasonló módon – kiszámíthatjuk a sorozat elemeit.

Ennél több is igaz: nem is ismerjük az összes prímet, csak nagyon sokat; de a matematikusok rengeteg időt és fáradságot ölnek egy-egy újabb prím megtalálásába.

4. példa

Folytassuk a következő sorozatot: 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...

Megoldás

Jó szeműek észrevehetik, hogy a $\sqrt{2}$ közelítő tizedes tört alakját adjuk meg egyre pontosabban. Itt sem tudunk képletet megadni, amely megadja az elemeket, de elvileg ki lehet számolni bármelyiket.



Függvénynek nevezünk minden olyan hozzárendelést, amely egy nem üres halmaz minden eleméhez egy másik halmaz egy-egy elemét rendeli hozzá.

Ezekben a fenti felsorolásokban is hozzárendelésről, függvényről van szó. Amikor a pozitív páratlan számokat soroljuk, tulajdonképpen az $x \mapsto 2x - 1$ függvény helyettesítési értékeit számítjuk ki az 1, 2, 3, ... helyeken.

A függvény értelmezési tartományába a pozitív egész számok, értékkészletébe a pozitív páratlan számok tartoznak.

A hasonló példákban is a függvények értelmezési tartományába – a kikötések miatt – csak a pozitív egész számok tartoznak bele. A példában szereplő függvények speciális függvények, ún. számsorozatok.

Számsorozatot kapunk, ha minden pozitív egész számhoz egyértelműen egy számot rendelünk. Az így kapott számok a számsorozat **elemei** vagy **tagjai**.

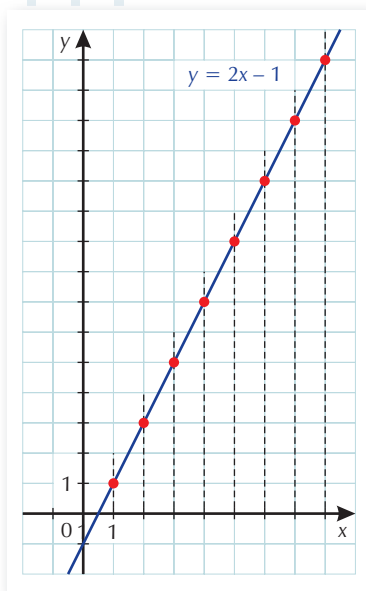
Nyilván lehetetlenség lenne egy számsorozat minden elemét felírni. Ezért célszerű megállapodni a számsorozat jelölésében.

Azt, hogy az első pozitív egész számhoz, az 1-hez az 1-et rendeltük hozzá, a következőképpen jelöljük: $a_1 = 1$. Hasonlóképpen $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$ stb.

Az n -edik pozitív egész számhoz, az n -hez rendelt elemet általánosan a_n -nel jelöljük.

A számsorozatot koordináta-rendszerben is ábrázolhatjuk.

Húzzunk merőlegeseket az x tengelyre a pozitív egész számoknak megfelelő pontokban. Az $y = 2x - 1$ képlettel megadott pontthalmaz grafikonja valamenyny merőlegest metszi. A metszéspontok ordinátái az 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ... a számsorozat elemei. Az $a_n = 2n - 1$ képlettel megadott sorozat egy olyan függvény aminek a grafikonját a piros pontok alkotják.



A számsorozatnak mint függvénynek a grafikonja nem folytonos vonal, hanem úgynevezett diszkrét pontokból áll.

Rögtön leszögezhetjük azt, hogy ahányféleképpen az x tengelyre a pozitív egészeknél állított merőleges egyeneseken 1–1 pontot kijelölhetünk, annyiféle számsorozat adható meg.

Az első két példában az $a_n = 2n - 1$, illetve az $a_n = (-2)^n$ képlettel, úgynevezett **explicit definícióval** adtuk meg a számsorozatokat.

Számsorozatot csak olyan képlettel definiálhatunk, amelynek az értelmezési tartományába minden pozitív egész szám beletartozik.

Definíció

Sorozatnak nevezzük azokat a függvényeket, amelyeknek **értelmezési tartománya** a pozitív egész számok halmaza.

Ha a sorozat **értékkészlete** a **valós számok halmaza**, akkor **számsorozatról** beszélünk.

Megadhatunk pontsorozatot is. Például egy AB szakasz A_1 felezőpontja az első elem, és utána a következő elemet úgy kapjuk meg, hogy az AB szakasz A -hoz közelebbi A_2 negyedelőpontját, majd az A_3 nyolcadolópontját vesszük, és így tovább.

Ha n pozitív egész szám, akkor az $n \mapsto \frac{1}{n}$ függvénnyel definiálhatunk, míg az $n \mapsto \sqrt{49 - n^2}$ függvénnyel nem definiálhatunk számsorozatot, ha kikötjük, hogy az n pozitív egész szám legyen. Ugyanis az első kifejezés értelmezési tartományába minden pozitív természetes szám, a második kifejezés értelmezési tartományába csak a 7-nél nem nagyobb pozitív egész számok tartoznak bele.

Számsorozatot definiál a következő képlet is:

Legyen az $a_1 = a_2 = 1$ és az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ahol $n \geq 3$.

Írjuk fel a számsorozat néhány elemét!

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2,$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3,$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5,$$

és így tovább.

Azt mondjuk, hogy az 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... számsorozatot **rekurzív definícióval adtuk meg**. A számsorozatot az $a_1 = a_2 = 1$ és az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3$) feltételek egyértelműen definiálják. Ez a sorozat a Fibonacci-számok sorozata.

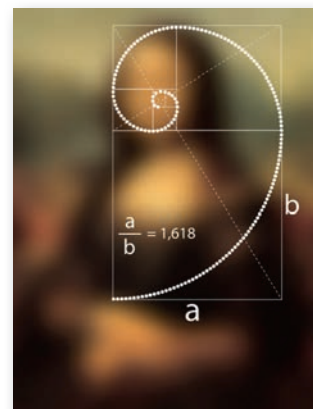
Megjegyzés

A témához kapcsolódóan érdemes elolvasni dr. Rényi Alfréd: *Változatok egy Fibonacci-témára* című cikkét. (Rényi Alfréd: *Napló az információelméletéről*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1976.)

A rekurzív definíciót általában könnyebb felírni, megérteni, hátránya viszont, hogy például a századik elem felírásához ismerni kell az előzőeket, amelyekre a rekurzió hivatkozik. Az is lehet, hogy mind a 99 elemet meg kell határozni a 100-adik kiszámításához. Fontos továbbá, hogy **meg kell adni annyi induló elemet, ahányra a rekurzió hivatkozik**. A Fibonacci-számsorozatnál ez az első két elem.

A rekurzív számsorozatnak a 4, 5, 6, ... természetes számokhoz rendelt elemeit a megelőző elemek egymás után történő fokozatos kiszámításával határozhatjuk meg.

A továbbiakban a **számsorozatot** röviden **sorozatnak** nevezzük, és csak ilyenekkel foglalkozunk, azok közül is csak két speciális sorozattal.



Fogalmak

sorozat;
számsorozat;
elem (sorozaté);
explicit megadás;
rekurzív megadás.

FELADATOK

1. K1 Értelmezhetők-e az alábbi függvények a pozitív egész számok halmazán úgy, hogy számsorozatot kapjunk?

a) $x \mapsto x^2$; b) $x \mapsto \sqrt{x}$; c) $x \mapsto \lg x$; d) $x \mapsto \sqrt{200 - x}$.

2. K1 Írjuk fel az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvénnyel meghatározott számsorozat első 5 elemét!

3. K1 Egy számsorozatban $a_1 = 3$ és $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$). Számítsuk ki a számsorozat 10. elemét!

4. K2 Egy számsorozat első két eleme, a_1 és a_2 adott. A harmadik elemtől kezdve minden elem egyenlő a két előtte álló elem számtani közepével. Fejezzük ki a sorozat harmadik, negyedik és ötödik elemét a_1 és a_2 segítségével!

5. E1 Egy számsorozatban bármely három szomszédos tag összege 2. A sorozat 10. tagja 3, a 200. tag 8. Mi a sorozat 333. tagja?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 854; 856; 858–862; 868.

7–8. SZÁMTANI SOROZAT

SZÁMTANI SOROZAT

1. példa

Egy henger alakú tartórúdra feltekertünk egy hosszú szövetet. Hogyan határozhatjuk meg a szövet hosszát, anélkül hogy letekernénk a rúdról? Nagyon fontos, hogy a sérülékeny, finom szövetet ne tekerjük le, nehogy véletlenül megsérüljön. A rúd 1,5 m hosszú, és a henger keresztmetszetének átmérője 4 cm. A rátekert szövettel együtt az átmérő 30 cm. Megmértük a szövet méreteit: vastagsága 2 mm, a szélessége pedig 140 cm.

Megoldás

A feltekert szövetet egymásra helyezett vékony hengereknek tekintjük. Az első henger kerületét egy 21 mm sugarú kör kerületével közelítjük. A második hengert pedig egy 23 mm sugarú kör kerületével stb. A legnagyobb kör sugara 149 mm lesz. Az összes ilyen kör kerületét összeadva megkapjuk, hogy milyen hosszú a szövet. Ez csak egy közelítő érték lesz, de a gyakorlatban jól használható az eljárás, ha a szövet elég szorosan van feltekerve, és a vastagsága is állandó.

Hogyan tudnánk könnyen kiszámítani a körök kerületének az összegét? Még azt sem tudjuk, hány kör van. A körök kerületének az összege:

$$2 \cdot 21 \cdot \pi + 2 \cdot 23 \cdot \pi + \dots + 2 \cdot 149 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot (21 + 23 + \dots + 149)$$

Hány számot kell összeadni? A $21 = 2 \cdot 11 - 1$, tehát a 11. páratlan szám. 149 pedig $2 \cdot 75 - 1$, tehát a 75. páratlan szám, 11-től 75-ig pontosan 65 db szám van. Tehát 65 számot kell összeadni. Írjuk le az összeget és alá ugyanazt, csak fordított sorrendben.

$$21 + 23 + \dots + 148 + 149 = s$$

$$149 + 147 + \dots + 23 + 21 = s$$

Az egymás alatt lévő számok összege mindig 170. A felső összegben az összeadandók mindig 2-vel nőnek, az alsóban pedig 2-vel csökkennek. A két egyenletet összeadva a $65 \cdot 170 = 2s$ egyenlethez jutunk. Ez alapján $s = 65 \cdot 85 = 5525$.

A szövet hossza $2 \cdot \pi \cdot 5525 \approx 34,715$ m.

Egy másik módszert is alkalmazhatunk. Megmérjük egy négyzetméter szövet tömegét, és megmérjük a nagy tekercs tömegét is. Ha levesszük belőle a tekercs tartójának a tömegét, akkor megkapjuk a szövet nettó tömegét. Ha ezt elosztjuk az egy négyzetméter szövet tömegével, akkor máris ismerjük a szövet területét. Azt is tudjuk, hogy a tekercsen 1,4 m széles tekercs van.

A tekercs össztömege 23,1 kg. A papírtekercs tömege, amire feltekertük a szövetet, 1,5 kg. A szövet egy négyzetméterének tömege pedig 44,75 dkg.

Ezek alapján a szövet nettó tömege $23,1 - 1,5 = 21,51$ kg.

A szövet felülete $21,51 : 0,4475 = 48,07$ m².

A szövet hossza pedig $48,07 : 1,4 = 34,34$ m.

A mérések pontatlansága miatt a két eredmény nem pontosan azonosnak adódott. A tekercs letekerése nélkül megállapíthatjuk, hogy kb. 34,5 m hosszú szövetünk van.

A gyakorlatban nagyon sok esetben csak közvetett módon következtethetünk bizonyos mennyiségekre, ezért kreatívnak kell lennünk.

Számláláskor úgy kapjuk a pozitív természetes számokat, hogy – kiindulva az 1-ből – a megelőző számhoz mindig 1-et adunk hozzá.

Ezt az eljárást általánosíthatjuk. Adjunk meg egy tetszőleges számot, és ebből kiindulva, tetszőleges szám ismételt hozzáadásával képezzünk új számokat.

Például a 2-ből kiindulva a 2-nek ismételt hozzáadásával nyerjük a pozitív páros számok sorozatát, a 2, 4, 6, 8, ..., $2n$, ... számokat.

Az 1-ből kiindulva, ugyancsak 2-nek ismételt hozzáadásával nyerjük a pozitív páratlan számok sorozatát, az

1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ... számokat.

Adott számnak ismételt hozzáadásával képezhetők a következő sorozatok is:

2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, ...

3, 3, 3, 3, 3, ...

8, 5, 2, -1, -4, ...

Az első sorozat első eleme 2. Ebből kiindulva, $\frac{1}{2}$ ismételt hozzáadásával kapjuk a sorozat többi elemét. A második példában 0-nak, a harmadik példában (-3)-nak ismételt hozzáadásával kapjuk 3-ból, illetve 8-ból kiindulva a sorozat többi elemét.

A felírt sorozatokat **számtani sorozatoknak** nevezzük.

A számtani sorozatot – a bemutatott példák alapján – a következőképpen definiálhatjuk:

Definíció

A **számtani sorozat** bármelyik elemét (a 2. elemtől kezdve) a megelőzőből úgy kapjuk, hogy a megelőző elemhez ugyanazt, a sorozatra jellemző számot hozzáadjuk.

Ez azt is jelenti, hogy ha adott számtani sorozatban a második elemtől kezdve bármelyik elemből a megelőző elemet kivonjuk, akkor mindig ugyanazt, az adott sorozatra jellemző számot kapjuk.

A szomszédos elemek fenti különbségét a számtani sorozat **különbségének** vagy **differenciájának** nevezzük, és d -vel jelöljük.

A számtani sorozat definíciója szerint:

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

ahol a_n az n -edik, a_{n-1} az $(n - 1)$ -edik elemet jelenti ($n = 2, 3, \dots$).

Miért nevezzük a sorozatot „számtani”-nak? Az elnevezés megértése céljából tekintsük például a 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ... számtani sorozatot. Itt például a 3. elem a két szomszédos elem számtani közepe:

$$16 = \frac{12 + 20}{2}.$$

$$\text{Hasonlóképpen: } 20 = \frac{16 + 24}{2}; \quad 24 = \frac{20 + 28}{2}.$$

Általánosan is igaz, hogy a **számtani sorozat bármelyik eleme** (a 2. elemtől kezdve) **a szomszédos elemek számtani közepe**. A leírt tulajdonság miatt nevezték el a sorozatot „számtani” sorozatnak.

2. példa

Egy szabadtéri színpad nézőterének 1. sorában 20 személy ülhet. Hány embert ültethetünk le a nézőtér 25. sorába, ha minden sorban a megelőzőnél 4 személlyel többet helyezhetünk el?

Megoldás

Rögtön látható, hogy az egyes sorokban elhelyezhető nézők száma olyan számtani sorozatot alkot, amelynek első eleme $a_1 = 20$, és a különbség $d = 4$. Ki kell számítani a sorozat 25. elemét.

Igen hosszadalmas és kényelmetlen eljárás lenne, ha a rekurzív definíció szerint járnánk el:

$$a_2 = a_1 + 4 = 24,$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 28$$

és így tovább.

Célszerű lenne a számtani sorozat tetszőleges elemét kifejezni a_1 és d segítségével.

A következőképpen járhatunk el. A számtani sorozat képzési szabálya szerint:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Folytatva az elemek képzését megállapíthatjuk, hogy például:

$$a_8 = a_1 + 7d,$$

$$a_{30} = a_1 + 29d.$$

Általánosan a **számtani sorozat n -edik elemét** úgy kapjuk meg, hogy az első elemhez $(n - 1)$ -szer hozzáadjuk a differenciát. Képletben:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

A felírt képlet segítségével a számtani sorozat elemeit megkapjuk, ha az n helyébe rendre az 1, 2, 3, 4, ... természetes számokat helyettesítjük.

Alkalmazzuk a képletet a kitűzött példa megoldására:

$$a_{25} = 20 + 24 \cdot 4 = 116.$$

A nézőtér 25. sorában tehát 116 ember ülhet.

3. példa

Bizonyítsuk be, hogy minden trapézban az egyik alap, a középvonal és a másik alap hossza ebben a sorrendben tekinthető egy számtani sorozat három egymást követő elemének!

Megoldás

Tudjuk azt, hogy a trapéz alapjainak hossza (a és b) és középvonalának hossza (k) között a

$$k = \frac{a+b}{2}$$

összefüggés áll fenn. Ezért a , k és b tekinthető egy számtani sorozat három, egymást követő elemének, mivel a középső a két közrefogó elem számtani közepe.

4. példa

Egy híres történet, amely a szájhagyomány útján átalakult, arról szól, hogy **Gauss** általános iskolai tanára, J. G. Büttner diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt előrukkolt a helyes megoldással, megvil-lantva matematikai éleselméjűségét. Vajon hogyan gondolkodott?*

Megoldás

Gauss észrevette, hogy a sor ellenkező végein lévő számok párokba állításával azonos összegeket kap: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$ stb. A 100 db számot 50 db párba tudjuk állítani, ami összesen $50 \cdot 101 = 5050$ -et eredményez.

A pozitív egészekre számtani sorozatként is tekinthetünk, amelynek első eleme 1, és differenciája is 1. A Büttner tanár úr által feladott feladat ezek alapján úgy is megfogalmazható, hogy határozzuk meg ennek a számtani sorozatnak az első 100 elemének az összegét.

Ha s_{100} -zal jelöljük az összeget (s a latin summa, 'összeg' kezdőbetűje, az index pedig arra utal, hogy hány elemet adunk össze):

$$s_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

A szorzatban szereplő 101 a sorozat első és századik elemének az összege, 50 az összeadandó elemek számának a fele.

Konkrét példánk azt sejteti, hogy talán általánosan is igaz az, hogy a számtani sorozat első n elemének az összege: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, ahol a_1 az első, a_n az n -edik elem.

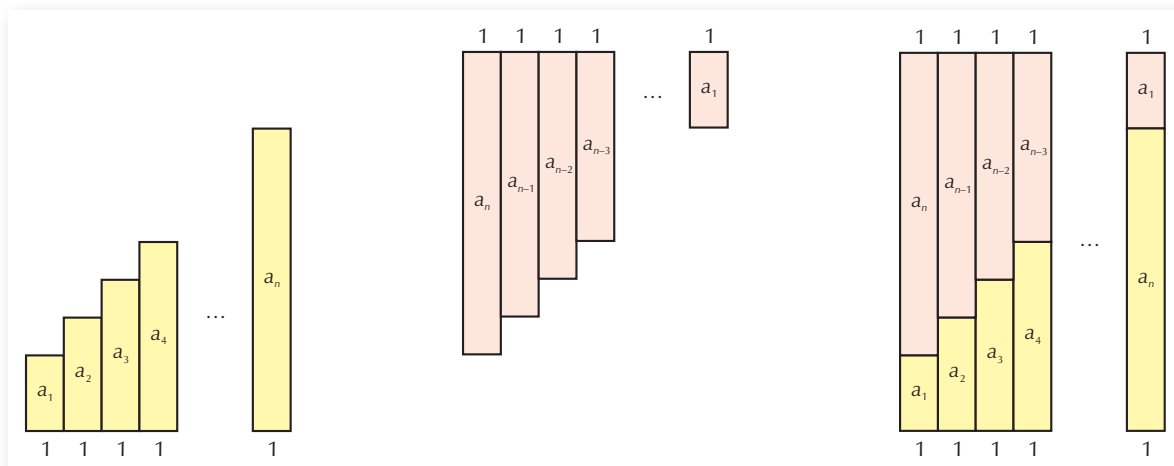
Ezt egyszerűen igazolhatjuk geometriai megfontolással, ha a sorozat elemei pozitív számok. Emel-jünk az egységnyi szakaszok fölé rendre $a_1, a_2, \dots, a_n$ magasságú téglalapokat. Ekkor a *bal oldali ábrán* látható lépcsős idomot kapjuk.

A téglalapok területének mértékszáma rendre $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, tehát a lépcsős idom területe s_n .

Ezután készítsük el azt a lépcsős idomot, amelyben az első téglalap a_n , a második a_{n-1} , az n -edik téglalap a_1 területű (*középső ábra*). Ennek a lépcsős idomnak a területe is s_n .

Kövessük Gauss gondolatmenetét.

A két idomot helyezzük egymásra a *jobb oldali ábrán* látható módon.



* A nevezetes történet egy másik változatával már korábban találkoztunk.

II. SZOROZATOK

A kapott téglalap területe egyrészt $n(a_1 + a_n)$, másrészt a lépcsős idom területének a kétszerese:
 $2s_n = n(a_1 + a_n)$.

$$\text{Tehát } s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Most igazoljuk az összegképletet tetszőleges számtani sorozatra!

Tétel

A számtani sorozat első n tagjának összege: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Bizonyítás

Írjuk fel az első n elem összegét:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n!$$

A sorozat elemeit kifejezhetjük a_1 és d segítségével:

$$(*) s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d].$$

A sorozat elemeit képezhetjük úgy is, hogy kiindulunk az utolsó elemből, a_n -ből, és ebből a d -t ismételtelen kivonjuk.

Az $s_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$ összeg ekkor a következőképpen írható:

$$(**) s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + [a_n - (n-2)d] + [a_n - (n-1)d].$$

Megfigyelhetjük, hogy ha a $(*)$ és a $(**)$ összegét vesszük, akkor a d -t tartalmazó tagok kiesnek:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Mivel az $(a_1 + a_n)$ összeg pontosan n -szer szerepel, azért

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Ha a számtani sorozat n . eleméről tanultakat felhasználjuk, a képletből az

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

alakot kapjuk. Legtöbbször ezzel egyszerűbb számolni.

A számtani sorozatra megismert két összefüggésben a sorozat öt jellemző adatát találtuk (a_1 , d , n , a_n , s_n). Ha ezek közül három adatot ismerünk, a hiányzó két adatot elsőfokú vagy másodfokú egyenlet-rendszerrel mindig meghatározhatjuk.

5. példa

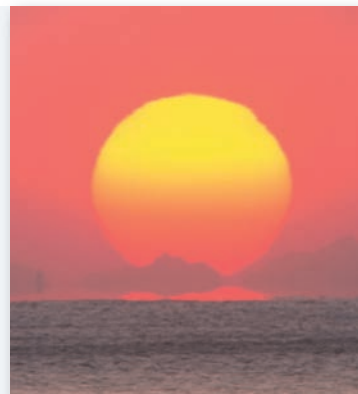
Április 1-jén a nap 5 óra 24 perckor kel, és a hónap folyamán naponta körülbelül 2 perccel korábban van napkelte. Körülbelül hány órakor kel a nap április 25-én?

Megoldás

Meg kell határozni annak a számtani sorozatnak a 25. elemét, amelynek az első eleme 5 óra 24 perc = 324 perc, és a különbsége -2 :

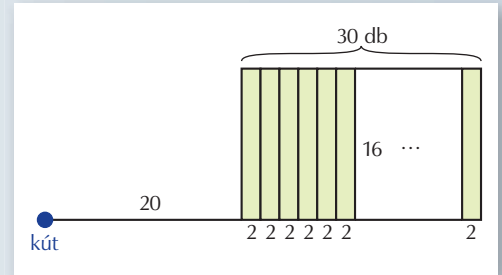
$$a_{25} = 324 + (25 - 1) \cdot (-2) = 324 - 48 = 276.$$

Április 25-én a napkelte 4 óra 36 perckor lesz.



6. példa

Egy konyhakert 30 veteményeságyból áll. Mindegyik veteményeságy 16 m hosszú és 2 m széles (ábra). A kert öntözéséhez szükséges vizet a kertész egy, a konyhakert szélétől 20 m-re fekvő kútból vedrekkel hordja. A veteményeságyakat a kertész úgy öntözi, hogy körülmegy az egyes ágyak közötti utakon, és közben a vizet rálocsolja a veteményeságyra. Egy fordulóval hozott víz egy ágy megöntözésére elegendő. Milyen hosszú utat tesz meg a kertész, amíg az összes veteményeságyat megöntözi? Az út a kútnál kezdődik, és a kútnál végződik. (A veteményeságyak közötti út szélességét elhanyagoljuk.)



Megoldás

Az első veteményeságy megöntözésekor a kertész

$$20 + 16 + 2 + 16 + 2 + 20 = 76 \text{ m}$$

utat tett meg.

A második veteményeságy megöntözésekor 4 m-rel több utat tett meg.

A harmadik veteményeságy megöntözésekor 4 m-rel több utat kell megtennie, mint a második alkalommal, és így tovább.

Az öntözéskor bejárt utak tehát számtani sorozatot alkotnak. Meg kell határoznunk a

76, 80, 84, ...

sorozat első harminc elemének összegét. Jelöléseinket alkalmazva: $a_1 = 76$, $d = 4$, $n = 30$,

$$s_{30} = \frac{30 \cdot (76 + a_{30})}{2}.$$

De

$$a_{30} = 76 + 29 \cdot 4 = 192,$$

tehát

$$s_{30} = \frac{30 \cdot (76 + 192)}{2} = 4020 \text{ m}.$$

A kertész az egész kert megöntözésekor kb. 4 km utat tett meg.



7. példa

Egy vetélkedőn 3750 euró jutalmat osztottak ki. Az első helyezett 600 eurót, minden további helyezett 50 euróval kevesebbet kapott. Hány versenyzőt jutalmaztak meg?

Megoldás

Meg kell határozni azt, hogy a 600-zal kezdődő számtani sorozatban hány elem összege 3750, ha a különbség -50 . Jelöljük n -nel a versenyzők számát.

Az

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(600 + a_n)}{2} = 3750$$

és az

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 600 + (n - 1) \cdot (-50)$$

összefüggések felhasználásával n -re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$n^2 - 25n + 150 = 0.$$

A gyökök:

$$n_1 = 15, n_2 = 10.$$

II. SOROZATOK

A feladatnak $n_2 = 10$ felel meg. **Ellenőrizhetjük**, hogy

$$600 + 550 + 500 + 450 + 400 + 350 + 300 + 250 + 200 + 150 = 3750.$$

Az $n_1 = 15$ nem felelhet meg, hiszen a sorozat 14. elemétől kezdve minden elem negatív ($a_{14} = -50$). Negatív jutalomnak nincs értelme. Ha eltekintünk attól, hogy a feladatban szereplő számok mit jelentenek, akkor könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az adott számtani sorozat első 15 elemének összege is 3750 lenne.

Ugyanis

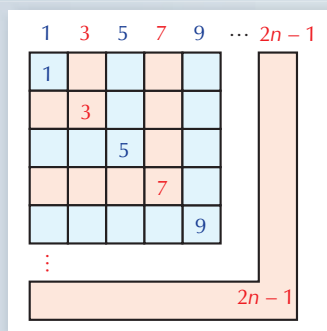
$$\underbrace{600 + 550 + \dots + 150}_{\text{első 10 elem}} + 100 + 50 + 0 - 50 - 100 = 3750,$$

$$\underbrace{600 + 550 + \dots + 150 + 100 + 50 + 0 - 50 - 100}_{\text{első 15 elem}}.$$

8. példa

Pitagorasznek tulajdonítják azt az érdekes megfigyelést, hogy kiindulva az első páratlan (természetes) számból, az 1-ből, az egymás után következő páratlan számok összege mindig négyzetszámot ad.

Megoldás



Próbáljuk ki, igaz-e az állítás az első néhány természetes számra!

$$1 + 3 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2.$$

Azt, hogy ez mindig így van, jól szemlélteti az egységnyi oldalhosszúságú, négyzetekből összerakott, n oldalhosszúságú négyzet területe (ábra). Ezen szemléletesen látszik, hogy az első n páratlan szám összege n^2 .

Igazoljuk az állítást algebrai úton is! A páratlan számok olyan számtani sorozat elemei, amelynek első eleme $a_1 = 1$, a különbsége $d = 2$. Az n -edik elem

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1.$$

Az első n elem összege:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2. \text{ Az állítást beláttuk.}$$

Fogalmak, nevek
 számtani sorozat;
 különbség (differencia);
 számtani sorozat
 n -edik eleme;
 Gauss;
 számtani sorozat
 első n tagjának
 összege.

FELADATOK

1. K1

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a számtani sorozat első 10 elemét, ha adott a sorozat első eleme és a különbsége! Legyen például:

a) $a_1 = 2, d = \frac{1}{2};$

b) $a_1 = 8, d = -2;$

c) $a_1 = -2, d = 0.$

2. K1

Egy számtani sorozat első három elemének összege 12, a harmadik, negyedik, ötödik elem összege 30. Melyik ez a sorozat?

3. K2

Egy számtani sorozat első 10 elemének összege feleakkora, mint a következő 10 elem összege. Az első 15 elem összege 375. Mekkora az első elem és a differencia?

4. K2

Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő elemei. A háromszög területe 600 cm^2 . Mekkora a háromszög oldalai?

5. K2

Hány jegyű szám 10 első 25 pozitív egész kitevőjű hatványának szorzata?

6. K2

Egy számtani sorozat első két elemének négyzetösszege 52, a második és harmadik négyzetösszege 100. Melyik ez a sorozat? Mennyi az első 20 elem összege?

7. K2

Hány oldalú az a sokszög, amelynek a szögei egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek az első tagja 100° , a differenciája pedig 10° ?
(Ne feledkezzünk el az ellenőrzésről!)

8. K2

Oldjuk meg a bevezető részben lévő feladatot!

Ahmesz, a fáraó írnoke másolta egy még régebbi írásról. Az írnokiskolai feladat – mai megfogalmazásban – kb. így szól: „Száz cipót úgy kell elosztani öt ember között, hogy a második ugyanannyival kapjon többet az elsőnél, mint amennyivel többet kap a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél. Továbbá a két kisebb rész kétszer kevesebb legyen, mint a három nagyobb.”

Ki mennyi cipót kapott?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 874, 877, 882, 890–898, 901–913, 916, 923–926.

9–10. MÉRTANI SOROZAT

A számtani sorozatban úgy képeztük a sorozat elemeit, hogy az első elemhez ismételtlen hozzáadtunk egy állandó számot. Ebben a fejezetben más típusú sorozatokkal ismerkedünk meg.

1. példa

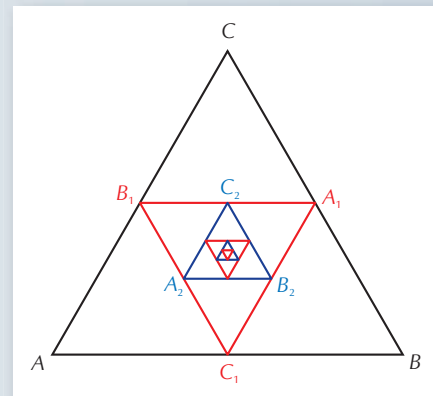
A 4 dm oldalhosszú ABC szabályos háromszög oldalait megfelezzük. A felezéspontok A_1, B_1, C_1 . Az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalait ismét megfelezzük, a felezéspontok A_2, B_2, C_2 . Folytassuk tovább az eljárást (ábra). Számítsuk ki az $ABC, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ háromszögek területét.

Megoldás

Az egymás után adódó $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots$ háromszögek szabályosak, és $A_1B_1 = \frac{AB}{2}, A_2B_2 = \frac{A_1B_1}{2}$ és így tovább. Tehát a háromszögek oldalainak a hosszúsága rendre:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$\text{A területek pedig: } 12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$$



2. példa

Valaki 1 000 000 Ft-ot 3%-os kamatra elhelyez takarékpénztárban. Mennyit ér a betét a kamatokkal együtt 3 év múlva? A kamatot évenként az összeghez csatolják (tőkésítik), azaz kamatos kamattal számolnak a takarékpénztárban.

Megoldás

1 év múlva a takarékpénztár az 1 000 000 Ft-hoz hozzácsatolja a 3%-os kamatot.

1 év múlva a megnövekedett összeg:

$$t_1 = 1\,000\,000 + \frac{1\,000\,000}{100} \cdot 3 = 1\,000\,000 \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 1\,000\,000 \cdot 1,03$$

forint lesz. A második évben már 1 030 000 Ft összeg kamatozik tovább.

2 év múlva az összeg az 1 030 000 Ft 1,03-szorosa lesz:

$$t_2 = 1\,030\,000 \cdot 1,03 = 1\,000\,000 \cdot 1,03^2.$$

Hasonló megfontolással adódik, hogy 3 év múlva az összeg, a betétkönyv értéke:

$$t_3 = 1\,000\,000 \cdot 1,03^3 \approx 1\,092\,725 \text{ forint lesz.}$$

A két példában szereplő számokból kiindulva sorozatokat írhatunk fel:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, 4 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

$$12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots, 12 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

$$1\,000\,000; 1\,000\,000 \cdot 1,03; 1\,000\,000 \cdot 1,03^2; 1\,000\,000 \cdot 1,03^3; \dots; 1\,000\,000 \cdot 1,03^{n-1}; \dots$$

Ezeknél a sorozatoknál azt figyelhetjük meg, hogy az első elemet ismételten szorozni kell egy állandó számmal, hogy megkapjuk a sorozat elemeit.

Például az első és a második sorozat elemeit úgy képezhetjük, hogy a 4-et, illetve a 12-t ismételten szorozzuk $\frac{1}{2}$ -del. A harmadik sorozat elemeit úgy képezhetjük, hogy az 1 000 000-t ismételten szorozzuk 1,03-dal.

Egy állandó számmal történő ismételt szorzással adódnak például a következő sorozatok is:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^{n-1}, \dots$$

$$2, 6, 18, 54, 162, \dots, 2 \cdot 3^{n-1}, \dots$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$$

A felírt sorozatok első elemei rendre 1, 2, 1, 1. Az állandó, amellyel ismételt szorzással előállíthatjuk a sorozat elemeit, rendre $2, 3, -\frac{1}{2}, -1$.

A felírt sorozatokat **mértani sorozatoknak** nevezzük.

Definíció

A **mértani sorozat** bármelyik elemét (a 2. elemtől kezdve) a megelőzőből úgy kapjuk, hogy a megelőző elemet egy, a sorozatra jellemző nem nulla állandó számmal megszorozzuk.

Ez azt is jelenti, hogy ha egy mértani sorozat bármelyik elemét a megelőzővel elosztjuk, mindig ugyanazt a számot kapjuk. (Természetesen ez alól kivétel az első elem, hiszen annak nincs megelőzője.)

A két tulajdonság között van egy kis eltérés, mivel az első tulajdonság megengedné, a második viszont nem például a következő sorozatot:

7; 0; 0; 0; ...

mivel 0-val nem szabad osztani.

Mi ezt a típust a továbbiakban kizárjuk.

A mértani sorozatra jellemző **hányadost** a mértani sorozat **kvóciensének** nevezzük, és q -val jelöljük. (A latin nyelvben a hányados: „quotiens”).

Az előbbi négy mértani sorozat kvóciensei rendre $2, 3, -\frac{1}{2}, -1$.

A **mértani sorozat definíciójából** következik:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \text{ ahonnan}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ ahol } a_1 \text{ és } q \text{ adott,}$$

és a_n az n -edik, a_{n-1} az $(n-1)$ -edik elemet jelenti
($n = 2, 3, \dots$).

Miért nevezzük a sorozatot „mértaninak”? Az elnevezés megértése céljából tekintsük például a

$12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \dots$

mértani sorozatot. Itt például a második elem a két szomszédos elem mértani közepe:

$$6 = \sqrt{12 \cdot 3}.$$

A **pozitív** elemekből álló mértani sorozat bármelyik elemére teljesül (a 2. elemtől kezdve), hogy a szomszédos elemek **mértani közepe**: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

Ez azonban nem lehet általánosan igaz, hiszen mértani sorozatban szerepelhetnek negatív számok, míg a mértani közép mindig nemnegatív. Ezt láthattuk az utolsó két felírt sorozatnál.

Mindig igaz viszont, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, ezért érdemesebb ezt az alakot (vagy a szorzással kapott $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ formát) használni és megjegyezni.

3. példa

Van-e olyan mértani sorozat, amelyben

a) a harmadik elem pozitív, a tizedik nulla;

b) a hetedik és a huszadik tag is negatív;

c) az első tag negatív, és a hetedik pozitív;

d) az első tag pozitív, a huszadik negatív?

Indokoljunk!

Megoldás

a) Mértani sorozatnak nincs nulla eleme, ezért nincs ilyen mértani sorozat.

b) Van. Ha például az első elem negatív, és a kvóciens pozitív, akkor a sorozat minden eleme negatív.

c) Nincs, mivel az első elemet a kvóciens hatodik hatványával kell szorozni, hogy a hetedik elemet kapjuk, de $q^6 > 0$. Ezért az első és a hetedik elem mindig azonos előjelű.

d) Van ilyen sorozat; például ha a sorozat első eleme pozitív, és a kvóciens negatív.

4. példa

Számítsuk ki az 1. példában említett háromszögek közül a 12. háromszög területét!

Megoldás

Ki kell számítani az $a_1 = 12$ -vel kezdődő és a $q = \frac{1}{2}$ hányadossal képzett mértani sorozat 12. elemét. Ha a rekurzív definíció szerint járunk el, akkor

$$a_{12} = a_{11} \cdot \frac{1}{2}, \quad a_{11} = a_{10} \cdot \frac{1}{2}$$

és így tovább, hosszadalmas számítást kellene követni.

Célszerű lenne a számtani sorozathoz hasonlóan a mértani sorozat tetszőleges elemét kifejezni a_1 és q segítségével.

A definíció szerint:

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) \cdot q = a_1 q^2,$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) \cdot q = a_1 q^3.$$

Folytatva az elemek képzését, például a 14. elem:

$$a_{14} = a_1 \cdot q^{13}.$$

Az n -edik elem kiszámítására ezt hasonlóan folytatva

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ adódik, ahol } n = 1, 2, \dots$$

Fogalmak

mértani sorozat;
hányados
(kvóciens);
mértani sorozat
 n -edik eleme.

$$\text{A 12. háromszög területe: } a_{12} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 3 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{3}{512} \text{ dm.}$$

FELADATOK

1. K1

Egy mértani sorozat harmadik eleme 36-tal nagyobb a második elemnél. E két elem szorzata -243 . Mennyi a mértani sorozat első eleme és kvóciense?

2. K1

Egy mértani sorozat második eleme négyszerese a negyediknek. A harmadik és az ötödik szorzata 100. Melyik ez a sorozat?

3. K2

Egy mértani sorozat első és harmadik elemének összege 25, a második és negyedik elem összege 50. Melyik ez a sorozat?

4. K2

Van-e olyan (nem állandó) mértani sorozat, amelynek minden eleme négyzetszám? (Azaz egész szám négyzete.)

5. K2

Van-e olyan (nem állandó) mértani sorozat, amelynek minden eleme irracionális szám?

6. K1

Van-e olyan mértani sorozat, amely számtani sorozat is egyben?

7. K2

Az ABC háromszög oldalhosszai mértani sorozatot alkotnak, $c < b < a$ és $19b - 15c = 6a$. Mennyi lehet a sorozat hányadosa? (Ne feledkezzünk el az ellenőrzésről!)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 934, 938, 941–943, 956–959.

11. A MÉRTANI SOROZAT ELSŐ n ELEMÉNEK AZ ÖSSZEGE

Számítsuk ki az előző lecke 1. példájában említett háromszögek közül az első 10 háromszög kerületének az összegét.

$$\text{Az összeget } s_{10}\text{-zel jelölve: } s_{10} = 12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{128}.$$

Néhány elem összeadása különösebb fáradságot nem igényelne, de itt kényelmetlen számolás várna ránk, ha a szokásos módon járnánk el. Ezért célszerűnek mutatkozik a mértani sorozat első n elemének összegére valamilyen egyszerű képletet keresni.

Tekintsük először azt a mértani sorozatot, amelynek az első eleme 1, és a hányadosa q . A sorozat első n elemének az összegét jelöljük s_n -nel. Ekkor $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}$.

$$\text{Az összeg } q\text{-szorosa } (q \neq 0): s_n \cdot q = q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n.$$

Célszerű a két összeg különbségét kiszámítani, mivel sok azonos tagot találunk. Vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt:

$$s_n q - s_n = q^n - 1, \text{ azaz } s_n(q - 1) = q^n - 1.$$

$$\text{Ebből az } s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ összefüggés adódik, ha } q \neq 1.$$

Ha $q = 1$, akkor mindkét oldalon nulla áll, és nem szabad $(q - 1)$ -gyel osztani.

Ha a mértani sorozat első eleme nem 1, hanem általánosan a_1 , akkor minden elem és így az összeg is a fenti összefüggés a_1 -szerese lesz. Tehát:

A mértani sorozat első n elemének az összege:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ ha } q \neq 1.$$

Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden eleme a_1 , tehát az első n elem összege: $s_n = na_1$.

Az első 10 háromszög kerületének az összege:

$$s_{10} = 12 \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 12 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 12 \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{1024}\right)}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot \frac{1023}{512} = \frac{3069}{128} = 23 \frac{125}{128} \text{ dm.}$$

Megjegyzés

Nem célszerű alkalmazni az összegképletet akkor, ha $q = -1$. (Összegképlettel is kijön az eredmény, csak nélküle egyszerűbben célt érünk.) Ekkor a sorozat elemei:

$$a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots$$

Tehát:

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ a_1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Fogalmak

mértani sorozat első n elemének (tagjainak) összege.

FELADATOK

1. K1 Egy mértani sorozat ötödik eleme -12 , a tizedik eleme 12 . Mennyi az első 20 elem összege?
2. K1 Egy mértani sorozat ötödik eleme -12 , a hetedik eleme -12 . Mennyi lehet az első 20 elem összege?
3. K2 Egy mértani sorozat első három elemének összege 105 , az első és a harmadik elem szorzata 400 . Mennyi az első 7 elem összege?
4. K2 Egy mértani sorozat első eleme $0,1$, az első négy elem összege eggyel nagyobb a sorozat kvóciensénél. Határozzuk meg a sorozat első négy elemét!
5. K2 Hány elemet kell összeadni az elsőtől kezdve az $a_n = 3 \cdot 2^n$ sorozatból, hogy az összeg 1 milliónál nagyobb legyen?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 951–953, 963, 968–970, 975, 996.

Tudod-e?

Fibonacci nevezetes sorozata $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ eredetileg egy nyúltenyésztési probléma megoldása volt. A sorozat elemeivel a természetben is találkozunk: egyes növények leveleinek elhelyezkedése vagy pl. a napraforgómagok spirális elrendeződése hasonló mintát követ. (Ez a sorozat se nem számtani, se nem mértani.) A sorozat szomszédos tagjainak hányadosa egyre jobban megközelíti a híres „aranymetszési” arányt, amely az építészetben, szobrászatban, festészetben vagy akár a zeneművészetben is gyakran alkalmazott szerkesztési módszer. (A matematika és a művészet e híres kapcsolódási pontjáról az interneten bőven találsz további szakanyagot.)

Fibonacci üzleti útjain megismerte a Földközi-tenger és a Kelet matematikáját. Az összegyűjtött és általa kiegészített algebrai és geometriai ismereteket több könyvben kiadta, így jelentősen közreműködött a hindu-arab helyi értékes számírás európai elterjesztésében is.

12. PÉLDÁK MÉRTANI SOROZATRA

A mértani sorozatra talált két összefüggésben a sorozat öt jellemző adata szerepel (a_1, q, n, a_n, s_n) . Ezek közül bizonyos adatok meghatározhatók a többiek ismeretében. Előfordulhat az is, hogy három ismert adatból csak egy ismeretlen adatot kell meghatároznunk, és ilyenkor egyetlen összefüggés is elegendő lehet az ismeretlen kiszámításához.

1. példa

Egy tóban az algák gyorsan szaporodnak. Tegyük fel, hogy mindennap megkétszereződik az általuk befedett terület.

- a) Mához egy hónapra éppen a tó felületének felét fedik be. Mikor fedik be az egész tavat?
- b) Ha a szaporodás egy algából indul ki, és az egész tavat egy hónap alatt lepi be, mennyi időre van szükség a tó teljes befedéséhez, ha kezdetben két alga volt? (Ez a hónap 30 napból áll.)

Megoldás

- a) Nyilván 1 hónap és 1 nap múlva.
 b) Az egyik alga szaporodásából kiindulva ennek utódai a tó felületének felét 29 nap alatt fedik be. Kiindulva két algából a tó teljes felületét az algák 29 nap alatt fedik be.

A kb. 1400 évvel ezelőtt keletkezett sakkjáték eredetéről több mítosz is fennmaradt. Nagyon szép legendát jegyeztek le Perzsiában a XIII. században. Eszerint az uralkodót rendkívül elbűvölte a játék szépsége, ezért maga elé hívatta a játék feltalálóját, hogy személyesen jutalmazza meg találmányáért. A „szerény” bölcs azt kérte, hogy helyezzenek a tábla első négyzetére egy szem búzát, a másodikra két szemet, a harmadikra négyet, a negyedikre nyolcat és így tovább: minden mezőre kétszer annyi búzaszem kerüljön, mint az előzőre. Ha ezzel elkészültek, akkor ezen búzaszemek összege legyen a jutalma. A történet szerint az uralkodó tüstént hozott két zsák búzát, de a kérést nem tudta teljesíteni.

2. példa

Becsüljük meg, hogy mennyire volt szerény a feltaláló kérése!

Megoldás

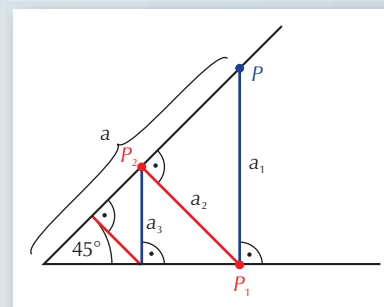
Az egyes négyzetekre kért búzaszemek száma mértani sorozatot alkot, amelyben $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. A sorozat első 64 elemének összege, az ajándék mennyisége:

$s_{64} = 2^{64} - 1$ búzaszem. Ez körülbelül $1,844 \cdot 10^{19}$, azaz kb. 18,5 trillió búzaszem. Ha egy búzaszem súlya 0,03 gramm, akkor 18,4 trillió búzaszem körülbelül $5,5 \cdot 10^{11}$ vagonban helyezhető el, ha 1 vagonra 10 tonna búzát számítunk. Egy vasúti szerelvényre 55 vagon számítva az „ajándékot” 10 milliárd tehervonattal szállíthatnánk el.

A kérést a király valóban nem teljesíthette.

3. példa

A 45° -os szög egyik szárán a csúcstól a távolságban kijelölünk egy P pontot. A P pontból húzzunk merőlegest a másik szárra! A merőleges talppontja legyen P_1 . A P_1 pontból húzzunk merőlegest az előbbi szárra, a talppont legyen P_2 . Tovább folytatva a merőlegesek rajzolását, határozzuk meg az első tíz szakasz hosszának összegét (ábra)!

**Megoldás**

Az első merőleges szakasz hossza: $PP_1 = a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

A második merőleges szakasz hosszát a PP_1P_2 egyenlő szárú derékszögű háromszögből fejezhetjük ki:

$$a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}. \text{ Hasonlóképpen } a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}.$$

Látható, hogy mindegyik szakasz a megelőzőnek $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -szerese. Vagyis a szakaszok hosszai mértani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme: $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, a hányadosa: $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Az első tíz szakasz hosszának összege:

$$s_{10} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{10} - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}, \quad s_{10} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{32} - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}; \quad \text{végül } s_{10} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{31}{32}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Szorozzuk meg a számlálót is és a nevezőt is $\sqrt{2}$ -vel, majd gyöktelenítsük a nevezőt:

$$s_{10} = \frac{a \cdot \frac{31}{32}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{a \cdot \frac{31}{32}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{31}{32} \cdot (\sqrt{2} + 1) a.$$

Az első tíz szakasz hosszának összege tehát: $s_{10} = \frac{31}{32}(\sqrt{2} + 1)a$.

4. példa

Egy mértani sorozat első eleme 2, n -edik eleme 32, és az első n elem összege 22. Írjuk fel a sorozat első négy elemét!

Megoldás

A sorozat elemeit akkor képezhetnénk, ha ismernénk a sorozat hányadosát.

Az a_n képletébe helyettesítve:

$$32 = 2 \cdot q^{n-1}.$$

Mivel az egyenletben két ismeretlen is szerepel, azért helyettesítsünk az s_n képletbe is. Ekkor

$$22 = \frac{2(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (\text{Mivel az első és az } n\text{-edik elem nem egyezik meg, ezért } q \neq 1.)$$

A q^n értékét az első egyenletből kifejezhetjük. Szorozzuk meg az első egyenletet q -val, és egyszerűsítsünk 2-vel! Ekkor

$$q^n = 16q.$$

Helyettesítsünk be a második egyenletben q^n helyébe $(16q)$ -t.

$$22 = \frac{2 \cdot (16q - 1)}{q - 1},$$

$$11 \cdot (q - 1) = 16q - 1.$$

Ebből

$$q = -2,$$

és a

$$(-2)^n = 16 \cdot (-2) \text{ egyenletből}$$

$$n = 5.$$

Tehát a mértani sorozat első négy eleme:

$$2, -4, 8, -16.$$

Ellenőrzés: Az első öt elem 2, -4, 8, -16, 32 és ezek összege valóban 22.

5. példa

Egy mértani sorozat ötödik és hatodik elemének összege is, a hetedik és az ötödik elemének különbsége is 48. Az első elemből kiindulva hány elemet kell összeadni, hogy az összeg 1023 legyen?

Megoldás

A feladat szerint

$$a_5 + a_6 = 48,$$

$$a_7 - a_5 = 48.$$

Egyenletrendszerünkben három ismeretlen szerepel. Elérhetjük azt, hogy csak két ismeretlen szerepeljen. Fejezzük ki az egyenletrendszerben előforduló elemeket a sorozat első elemével és a hányadossal. Ekkor

$$a_1 q^4 + a_1 q^5 = 48,$$

$$a_1 q^6 - a_1 q^4 = 48.$$

Célszerűnek mutatkozik a két egyenlet megfelelő oldalait elosztani egymással. Ekkor ugyanis egyszerűsíthetünk a_1 -gyel ($a_1 \neq 0$).

Ezután

$$\frac{q^4 + q^5}{q^6 - q^4} = 1.$$

Vagy

$$\frac{q^4(q+1)}{q^4(q^2-1)} = 1.$$

De q értéke nem lehet sem 0, sem +1, sem -1. (Ha $q = 0$ vagy 1 lenne, akkor például $a_7 - a_5 = 0$; ha $q = -1$ lenne, akkor $a_5 + a_6 = 0$ adódna.)

Egyszerűsítsük egyenletünk bal oldalát, $q^4(q+1)$ -gyel!

Ekkor

$$\frac{1}{q-1} = 1$$

és innen

$$q = 2.$$

A sorozat első elemét például az első egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$16a_1 + 32a_1 = 48.$$

Ebből

$$a_1 = 1.$$

A sorozat első n elemének összege 1023. Innen

$$\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 1023,$$

$$2^n = 1024,$$

$$n = 10.$$

Tehát a sorozat első 10 elemét kell összeadnunk, hogy az összegük 1023 legyen.

Ellenőrzés:

Valóban a kapott sorozat esetében

$$a_1 = 1, q = 2, n = 10, a_5 + a_6 = 16 + 32 = 48, a_7 - a_5 = 64 - 16 = 48, s_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023.$$

6. példa

Egy új gép ára 42 300 Ft. A gép használat következtében kopik. Mennyi lesz a gép értéke 5 év múlva, ha minden évben az előző évi értéknek a 8%-át leírjuk? Az egyszerűség kedvéért az inflációtól eltekintünk.

Megoldás

Ebben a feladatban értékcsökkenésről van szó. Az új gép értékét jelöljük e_0 -val. Egy év múlva a gép értéke, az e_0 8%-ával, vagyis e_0 -nak $\frac{8}{100}$ részével lesz kevesebb. Tehát 1 év múlva a gép értéke e_0 -nak $\frac{92}{100}$ része lesz:

$$e_1 = e_0 \cdot \frac{92}{100}.$$

A következő évben az e_1 érték $\frac{92}{100}$ részére csökken. Tehát

$$e_2 = e_1 \cdot \frac{92}{100} = e_0 \left(\frac{92}{100} \right)^2.$$

Hasonlóan folytatva a gép értéke 5 év múlva:

$$e_5 = e_0 \left(\frac{92}{100} \right)^5$$

forint lesz. Ide e_0 értékét behelyettesítve:

$$e_5 = 42\,300 \cdot 0,92^5,$$

$$e_5 \approx 27\,880 \text{ Ft.}$$

Tehát a gép értéke 5 év múlva közelítőleg 27 880 Ft lesz.



FELADATOK

1. K1

Egy mértani sorozat harmadik tagja 6, hatodik tagja 96. Határozzuk meg a sorozat kezdő tagját és hányadosát!

2. K1

Mennyibe kerülne egy ló, ha csak a patkószegekért kellene fizetni? Mégpedig az első patkószegért 1 forintot és minden következőért kétszer annyit, mint a megelőzőért. Egy patkóhoz 8 szeg tartozik.

3. K2

Egy mértani sorozat első három tagjának összege 21. A harmadik, negyedik és ötödik tag összege 84. Határozzuk meg a sorozat első elemét és hányadosát!

4. K2

Egy 3 méter hosszú és 0,5 mm vastag vászon 4 cm átmérőjű henger alakú rúdra csavarodik. Hány réteget alkot, amikor teljesen rácsavarodik a rúdra?



5. K2

Egy mértani sorozat első tagja 2. Első néhány tagjának összege 42. Ugyanezen tagok reciprokának összege pedig $\frac{21}{32}$. Melyik ez a sorozat?

6. K2

Egy populáció egyedszámát közelítőleg leíró modell szerint generációnként 4% a szaporodási és 2% a halálozási arány. Hány generáció alatt nő a kezdeti egyedszám a másfélszeresére?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 938, 944, 946, 957, 958, 975, 978, 991.



13. VEGYES FELADATOK

1. példa

Egy számtani sorozat első három elemének összege 15. Ha az elsőhöz 1-et, a másodikhoz 4-et, a harmadikhoz 19-et hozzáadunk, akkor a kapott számok egy mértani sorozat egymás után következő elemei. Határozzuk meg a számtani sorozatot!

Megoldás

Célszerű a számtani sorozatból kiindulni. Jelöljük a számtani sorozat második elemét x -szel, különbségét d -vel. Ekkor a sorozat elemei: $(x - d)$, x , $(x + d)$, összegük 15. Tehát

$$x - d + x + x + d = 15.$$

$$\text{Ebből } x = 5.$$

Megjegyzés

Ha a számtani sorozatnak páratlan sok egymást követő eleme adott, mindig a **középsőt** célszerű ismeretlennek választani, mert akkor a szimmetria miatt a legegyszerűbb egyenletet kapjuk.

A számtani sorozat első három eleme d -vel kifejezve: $(5 - d)$, 5 , $(5 + d)$.

A feladat szerint $(5 - d + 1)$; $(5 + 4)$; $(5 + d + 19)$ egy mértani sorozat egymás után következő elemei. Ez azt jelenti, hogy két-két szomszédos elem hányadosa állandó.

$$\text{Tehát: } \frac{9}{6 - d} = \frac{24 + d}{9} \quad (d \neq 6).$$

[A $d = 6$ nem lehet megoldás, mert akkor a mértani sorozat minden eleme 0 lenne, ami a feladat szerint lehetetlenség. Ezért $(6 - d)$ -vel szabad osztani.]

$$\text{Rendezzük az egyenletet: } d^2 + 18d - 63 = 0.$$

$$\text{Az egyenlet két gyöke: } d_1 = 3 \text{ és } d_2 = -21.$$

Két megoldás van. Ha $d = 3$, akkor a számtani sorozat első három eleme: 2, 5, 8, és a mértani sorozat szomszédos elemei: 3, 9, 27.

Ha $d = -21$, akkor a számtani sorozat első három eleme: 26, 5, -16, és a mértani sorozat szomszédos elemei: 27, 9, 3. A két mértani sorozat első három eleme megegyezik, csak fordított sorrendben, más a kvóciensük.

2. példa

Egy mértani sorozat első három elemének összege 26. Ha az első elemhez 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, egy számtani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Írjuk fel a mértani sorozatot!

Megoldás

Könnyebb itt is a számtani sorozatból kiindulni. Jelöljük a_1, a_2, a_3 -mal a számtani és b_1, b_2, b_3 -mal a mértani sorozat elemeit. A feltételek szerint a számtani sorozat három elemének összege

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + 1 + b_2 + 6 + b_3 + 3 = 36.$$

Tehát a számtani sorozat középső eleme $a_2 = 12$. Az előtte álló elemet írjuk $a_1 = (12 - d)$, az utána állót $a_3 = (12 + d)$ alakban.

Így a mértani sorozat elemei:

$$b_1 = (11 - d); b_2 = 6; b_3 = (9 + d). \text{ Felírva a kvóciens: } q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2}{b_1},$$

$$\frac{9 + d}{6} = \frac{6}{11 - d}.$$

Rendezve és megoldva a másodfokú egyenletet $d_1 = 9$ és $d_2 = -7$ adódik.

Tehát a keresett mértani sorozatok:

2; 6; 18 vagy 18; 6; 2, amelyek valóban megfelelnek a feltételeknek.

Ellenőrzés:

Az első esetben $2 + 1 = 3$, $6 + 6 = 12$, $18 + 3 = 21$, a kapott három szám egy 9 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagja.

A második esetben $18 + 1 = 19$, $6 + 6 = 12$, $2 + 3 = 5$, a kapott számok egy -7 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai.

3. példa

Három szám, amelyek összege 114, lehet egy mértani sorozat első három eleme, de tekinthető egy számtani sorozat első, negyedik és huszonötödik elemének is. Melyik ez a három szám?

Megoldás

Legyen a három szám a, aq és aq^2 , mivel tekinthető egy mértani sorozat három egymás utáni elemének. A feltételek szerint $aq = a + 3d$ és $aq^2 = a + 24d$.

Innen

$$3d = a(q - 1) \text{ és}$$

$$24d = a(q^2 - 1).$$

Ha $q \neq 1$, akkor a második egyenletet az elsővel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{24d}{3d} = \frac{a(q^2 - 1)}{a(q - 1)} = \frac{a(q - 1)(q + 1)}{a(q - 1)}, \text{ ahonnan } q + 1 = 8, \text{ tehát } q = 7.$$

A három szám összege 114, azaz

$$a + aq + aq^2 = 114, \text{ és mivel } q = 7, \text{ így } a = 2. \text{ A keresett számok tehát } 2; 14; 98.$$

Ne feledkezzünk meg azonban a kikötésünkről! Mi a helyzet akkor, ha $q = 1$?

Ekkor a három szám egyenlő, tehát 38; 38; 38.

Mindkét megoldás kielégíti a feladat feltételeit.

FELADATOK

- 1. K1** Egy mértani sorozat első három elemének összege 35. Ha a harmadik számot öttel csökkentjük, egy számtani sorozat első három eleméhez jutunk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!
- 2. K2** Egy számtani sorozat második eleme 7, és e sorozat első, harmadik és nyolcadik eleme egy mértani sorozat egymást követő elemei. Mennyi a mértani sorozat hányadosa?
- 3. K2** Egy mértani sorozat első három elemének szorzata 216. Ha a harmadik számot 3-mal csökkentjük, egy számtani sorozat szomszédos elemeit kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!
- 4. K2** Három pozitív szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Ha a másodikhoz 4-et adunk, akkor számtani sorozat egymás utáni elemeit kapjuk. Végül, ha a harmadikat is megnöveljük 32-vel, akkor újra egy mértani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Mi volt a kiinduló számhármas?
- 5. K2** Négy szám közül az első három egy számtani, az utolsó három egy mértani sorozat három egymást követő eleme. A két szélső szám összege 22, a két középső 20. Melyik ez a négy szám?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 981–985, 991, 993.

14–15. KAMATOSKAMAT-SZÁMÍTÁS

A körülöttünk lévő világ változása során az utolsó 10–20 évben megnőtt az érdeklődés minden a pénzzel kapcsolatos ismeret, számítás iránt. Ez nem is csoda, hiszen a bankok például a hitelek nyújtása esetén fantasztikus kamatcsökkentéssel, betétlekötés esetén pedig fantasztikus kamatemeléssel kápráztatnak el mindenkit. Közben általában nem tulajdonítunk jelentőséget a következő rejtélyes betűkombinációknak: THM vagy EBKM, melyek az összehasonlíthatóságot szolgálják. A THM jelentése **teljes hitel-díjmutató**, amely nagyjából azt mutatja meg, mennyibe kerül valójában a hitel. Ez a szám a hitel kamatánál általában jóval nagyobb szám, hiszen a hitelen kívül megfizetjük az elbírálási költséget, a kezelési költséget, az éves zárási költségeket és esetleg egyéb banki költségeket.

Az EBKM jelentése **egységesített betétikamatláb-mutató**. Az EBKM és a pénzintézet által meghirdetett betéti kamatláb annyiban tér el egymástól, hogy míg az éves banki kamatlábak általában 360 napra vetítve kerülnek megállapításra, s egy évnél rövidebb futamidő esetén a kamat visszaforgatását, tőkésítését nem veszik figyelembe, addig az EBKM egy adott év, azaz 365 nap elteltével mutatja az elhelyezett betét után fizetendő kamatösszeg nagyságát. Elképzelhető azonban az is, hogy a bank nem éves, hanem rövidebb vagy hosszabb időszak kamatlábát közli. Betétlekötés esetén érdemes tehát a bankok kínálatában ezt a mutatót keresni.

Most lássunk néhány példát!

II. SOROZATOK

1. példa

50 000 forintot szeretnénk 7 évre befektetni. Három befektetés közül választhatunk:

- a) minden év végén hozzátesznek a pénzünkhöz egy fix összeget, 7500 forintot, ami az eredeti összeg 15%-a;
 - b) 11%-os kamatos kamatot fizetnek;
 - c) az első évben 17% kamatot kapunk, majd évente 2%-kal csökken a kamat, míg eléri a 7%-ot, és ennyit kamatozik az utolsó évben is.
- Melyik befektetés a legkedvezőbb?

Megoldás

Az első esetben 52 500 Ft a kamat, azaz 102 500 forintunk lett.

A másodiknál az összeg az eredeti $1,11^7 \approx 2,076$ -szorosa lesz, ami 103 808 Ft.

A harmadik esetben a betett összeg $1,17 \cdot 1,15 \cdot 1,13 \cdot 1,11 \cdot 1,09 \cdot 1,07^2 \approx 2,106$ -szorosa lesz, azaz 105 505 Ft, tehát ez a legjobb.

Megjegyzés

Ha az utolsó évben is 2%-kal csökkenne a kamat, akkor már a második eset a legjobb, de ha csak 6%-ra csökken, hajszállal akkor is a harmadik befektetés nyer.

2. példa

Hány év alatt duplázódik meg évi 5%-os kamat mellett

- a) $T_1 = 10\,000$ Ft; b) $T_2 = 2\,500\,000$ Ft; c) $T_3 = 1,5$ milliárd Ft?

Megoldás

Tetszőleges T tőke esetében n év múlva $T_n = T \cdot 1,05^n$ forintunk lesz, és ennek kell az eredeti tőke kétszeresének lennie. Tehát

$$2T = T \cdot 1,05^n.$$

T -vel lehet egyszerűsíteni, tehát a megduplázódáshoz szükséges idő **nem függ a tőke összegétől**, csak a kamatlábtól.

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve: $n \cdot \lg 1,05 = \lg 2$, ahonnan $n \approx 14,2$. Ez azt jelenti, hogy tőkénk a 14. év végén még nem lesz kétszerese az eredetileg betett összegnek, de a 15. év végén több mint kétszerese lesz.

3. példa

Hány év alatt duplázódik meg 2 500 000 Ft évi

- a) 2%-os; b) 5%-os; c) 10%-os; d) 15%-os kamat mellett?

Megoldás

Az egyes kamatlábakhoz tartozó közelítő értékek:

- a) 35 év ($1,02^n = 2$ közelítő megoldása, az előző példa alapján);
b) 14,2 év; c) 7,27 év; d) 4,96 év alatt.



GYŰJTŐJÁRADÉK

Az emberek – lehetőségeik szerint – takarékoskodni szoktak. A család havi jövedelmének egy részét nem költik el a mindennapos szükségletek kielégítésére, hanem későbbi felhasználásra félreteszik. Tehetik ezt egy konkrét cél érdekében (gépkocsi- vagy házvásárlás) vagy a jövőbeli váratlan kiadások fedezésére (temetés, betegség miatti jövedelemkiesés, egy háztartási gép pótlása).

Ilyen esetekben fontos a rendszeresség. Ha tudjuk, hogy havonta például 30 000 Ft-ot tudunk félretenni, akkor máris belekezdhetünk a takarékoskodásba.

4. példa

Ha öt éven keresztül minden hónap elején beteszünk a bankba 30 000 Ft-ot, akkor mennyi pénzünk lesz az ötödik év végén? A bank a havonta lekötött pénzünkre minden hónapban 0,1% kamatot fizet.

Megoldás

A bankban elhelyezett pénzünk minden hónapban kamatozik. Kiszámítjuk külön-külön az összes befizetett részlet értékét az ötödik év végén. Ezeket összeadva kapjuk meg a takarékoskodásunk végén összegyűlt pénzünket.

Az első részlet $5 \cdot 12 = 60$ hónapon keresztül kamatozik. A második részlet csak 59 hónapot és így tovább. Az utolsó részlet csak egyetlen hónapot.

Jelöljük t -vel a havonta befizetett összeget és T -vel a megtakarításunk végén kapott összeget.

A havi kamat $p = 0,1\%$. A havi kamattényező $q = 1 + \frac{p}{100} = 1,001$.

Felhasználjuk a kamatoskamat-számítás alapképletét, ami megadja, hogy mennyit ér a pénzünk n db kamatperiódus eltelte után.

$$t_n = t_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = t_0 q^n,$$

$$T = tq^{60} + tq^{59} + tq^{58} + \dots + tq.$$

Ez egy mértani sorozat első 60 elemének az összege, aminek első eleme $a_1 = tq$, hányadosa pedig q . Az összegképlet alapján:

$$T = tq \frac{q^{60} - 1}{q - 1} \approx 1\,856\,000 \text{ Ft.}$$

Ezzel az összeggel már kezddhetünk valamit.

A feladat eredményét általánosíthatjuk. Ha n -szer helyezzünk el a bankban t Ft-ot minden kamatperiódus elején, akkor az n -edik periódus végén

$$T_n = tq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ Ft lesz a számlánkon.}$$

Itt $q = 1 + \frac{p}{100}$, ahol p a kamatperiódusra eső kamat, q pedig a kamattényező.

A képletet megtaláljátok a függvénytáblázatban is.

5. példa

A 0,1 százalékos havi kamat hány százalékos éves kamatnak felel meg?

Megoldás

A havi kamattényező $q_h = 1,001$. Ebből kiszámíthatjuk az éves kamattényezőt.

$q_e = 1,001^{12} = 1,01207$, ami 1,207%-os éves kamatnak felel meg.

A banki matematikában használatos képletekben mindig a kamattényező szerepel. Ez nagyon hasznos fogalom, hiszen a segítségével egyetlen szorzás elvégzése után megkapjuk, hogy mennyi pénzünk van egy kamatperiódus eltelte után a bankban.

6. példa

Évente 1 millió Ft-ot tudunk megspórolni. Mennyi idő alatt lesz a megtakarításaink értéke 10 millió Ft, ha minden év elején betesszük az 1 milliót a bankba, és ott éves 2% kamatot kapunk?

Megoldás

A gyűjtőjárdék képletét ismerjük. Ebből kiindulva:

$$T_n = tq \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad / \cdot (q - 1)$$

$$T_n(q - 1) = tq(q^n - 1) \quad / : (tq)$$

$$\frac{T_n(q - 1)}{tq} = q^n - 1 \quad / + 1$$

$$\frac{T_n(q - 1)}{tq} + 1 = q^n$$

Ide beírjuk a mi adatainkat. Az egyszerűség kedvéért számolhatunk millió Ft-ban.

$$\frac{10 \cdot (1,02 - 1)}{1 \cdot 1,02} \approx 1,961$$

$$1,961 = 1,02^n \quad / \lg()$$

Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve, majd n -et kifejezve kapjuk

$$n = \frac{\lg 1,961}{\lg 1,02},$$

ahonnan $n \approx 9$.

Ez azt jelenti, hogy a kamatok miatt 9 évig kell takarékoskodni, hogy meglegyen a 10 millió Ft.

ÉVES TÖRLESZTÖRÉSZLET KISZÁMÍTÁSA. ÉVEN BELÜLI TŐKÉSÍTÉS

Féléves tőkésítés esetében a félév végén és az év végén is jóváírjuk a kamatot. Ilyenkor az éves kamat felével számolunk mindkétszer. Havi tőkésítés esetében egy évben 12-szer írjuk jóvá a kamatot, de az

éves kamat $\frac{1}{12}$ -ével számolunk.

7. példa

Melyik befektetés a legelőnyösebb?

- a) A befektetett pénzünk évi 21%-ot kamatozik, és évenként tőkésítenek.
- b) A befektetett pénzünk évi 20%-ot kamatozik, és félévenként tőkésítenek.
- c) A befektetett pénzünk évi 19,5%-ot kamatozik, és havonta tőkésítenek.
- d) A befektetett pénzünk évi 20%-ot kamatozik, és naponta tőkésítenek.

Megoldás

A pénzösszeg nagysága év végén az egyes esetekben:

$$a) 1,21; \quad b) \left(1 + \frac{0,2}{2}\right)^2 = 1,21; \quad c) \left(1 + \frac{0,195}{12}\right)^{12} \approx 1,2134; \quad d) \left(1 + \frac{0,2}{365}\right)^{365} \approx 1,2213.$$

Látható, hogy előnyösebb, ha 19,5%-os kamat mellett havonta tőkésítenek, az évente egyszer tőkésített 21%-os kamatnál. Legelőnyösebb, ha naponta tőkésítenek 20%-os kamat mellett.

Felmerülhet a kérdés, hogy ha, mondjuk, percnként tőkésítenének 20%-os kamat mellett, akkor elérjük-e a 23%-ot. A válasz sajnos az, hogy nem.

8. példa

Egymillió forint összegű jelzálogkölcsönt veszünk fel 20 évre 15%-os kamatra. Mennyi az évi törlesztőrész, ha évente törlesztünk egy év türelmi idővel? Minden törlesztőrészlet egy része a kamattörlesztés, a többi pedig tőketörlesztés. Kezdetben sokkal nagyobb rész megy a kamattörlesztésre. Ábrázoljuk grafikonon a két mennyiség változását az idő függvényében!

Megoldás

Ha semmit nem törlesztenénk, akkor a tartozásunk 20 év múlva $10^6 \cdot 1,15^{20}$ forint lenne.

A visszafizetett összeg már nem kamatozik (azt a bank újra ki tudja adni hitelként). A törlesztések miatt a tartozások összértéke máshogyan számítható, de ugyanennyinek kell lennie.

Az évente fizetendő részlet (x) kiszámítása: $10^6 \cdot 1,15^{20} = x \cdot (1 + 1,15 + \dots + 1,15^{19}) = x \cdot \frac{1,15^{20} - 1}{1,15 - 1} = x \cdot 102,44$, ahonnan $x \approx 159\,761,5$ Ft $\approx 160\,000$ Ft.

Érdemes itt megkérdezni, vajon hányadik évben fogja a tőketörlesztés meghaladni a kamattörlesztést.

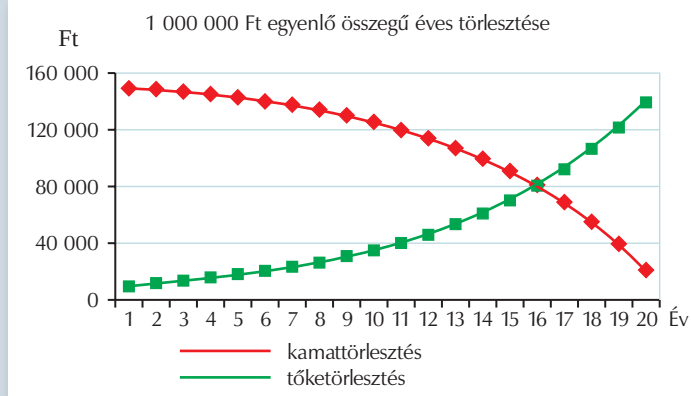
A közel 160 000 forintos törlesztésből először mindig a tartozásunk kamatát számítják fel, és csak a maradék fordítódik a tőke törlesztésére. Ezért a következő évi tőketartozásunk összege csökken.

Persze az elején nagyon kis mértékben, hiszen egymillió forint 15%-os kamata egy évre 150 000 forint, így a tőketörlesztésre kevesebb, mint tízezer forint jut.

Ábrázoljuk a kapott eredményt grafikonon!

év	hitelállomány	kamat	hiteltörlesztés
1	1 000 000,00	150 000,00	9 761,47
2	990 238,53	148 535,78	11 225,69
3	979 012,84	146 851,93	12 909,54
4	966 103,29	144 915,49	14 845,98
5	951 257,32	142 688,60	17 072,87
6	934 184,44	140 127,67	19 633,80
7	914 550,64	137 182,60	22 578,87
8	891 971,77	133 795,77	25 965,71
9	866 006,06	129 900,91	29 860,56
10	836 145,50	125 421,83	34 339,65

év	hitelállomány	kamat	hiteltörlesztés
11	801 805,86	120 270,88	39 490,59
12	762 315,26	114 347,29	45 414,18
13	716 901,08	107 535,16	52 226,31
14	664 674,77	99 701,22	60 060,25
15	604 614,52	90 692,18	69 069,29
16	535 545,23	80 331,78	79 429,69
17	456 115,54	68 417,33	91 344,14
18	364 771,40	54 715,71	105 045,76
19	259 725,64	38 958,85	120 802,62
20	138 923,02	20 838,45	138 923,02



A bankok persze nem két tizedesre számolnak, de itt a feladat szempontjából elég ez a pontosság, maga az elszámlolás nem fillér-, hanem forintalapú.

Kölcsöntörlesztés

Tehát a 16. évben majdnem egyenlő a kamat- és a tőketörlesztés, utoljára ebben az évben volt nagyobb a kamattörlesztés a tőketörlesztésnél.

BANKI KAMAT, INFLÁCIÓ, PÉNZROMLÁS MÉRTÉKE

Mi az infláció?

Egyszerű válasz: Az árak széles körű emelkedése.

Egy piacgazdaságban a termékek és szolgáltatások árai szüntelenül változnak, bizonyosak nőnek, mások csökkennek. Inflációról akkor beszélünk, ha nem csak egy terméknek az ára emelkedik meg, hanem sokféle árué és szolgáltatásé egyidejűleg. Ez azt jelenti, hogy ma kevesebbet vásárolhatunk 100 Ft-ért, mint tegnap. Más szóval az infláció idővel csökkenti a fizetőeszköz értékét.

Hogyan számoljuk ki az inflációt?

Az infláció kiszámításánál figyelembe kell venni, hogy milyen termékekre költjük a pénzünket és azt is, hogy miből mennyit veszünk. Ennek érdekében a statisztikusok összeállítanak egy fogyasztói kosarat, ami az ország lakosságának fogyasztási szokásait jól tükrözi.

A fogyasztói kosár tartalmaz napi fogyasztási cikkeket (élelmiszer, benzin, újság), tartós fogyasztási cikkeket (mosógép, számítógép, ruhanemű) és szolgáltatásokat (fodrász, telefon, biztosítás). Azt is meghatározzák, hogy az egyes elemek milyen százalékban képviselik magukat a kosárban.

A fogyasztói kosár elemei árnövekedésének a súlyozott átlaga adja a fogyasztóiár-indexet vagy az éves átlagos inflációt.

Példa az infláció számítására

Egy egyszerű fogyasztói kosarat alkalmazunk. Itt most a súlyozás úgy történt, hogy meghatároztuk, hogy évente átlagosan mennyit fogyasztanak az emberek az adott termékből. (A példa az Európai Központi Bank hivatalos honlapján jelent meg.)

Bázisévben megvásárolt mennyiség	Ár (bázisév)		Ár (1 év múlva)		Ár (2 év múlva)	
	egységár	összesen	egységár	összesen	egységár	összesen
150 vekni kenyér	1,50 €	225 €	1,30 €	195 €	1,60 €	240 €
100 csésze kávé	2,40 €	240 €	2,40 €	240 €	2,15 €	215 €
12 hajvágás	20,00 €	240 €	22,00 €	264 €	23,00 €	276 €
1 télikabát	145,00 €	145 €	176,0 €	176 €	160,00 €	160 €
A kosár teljes ára	850 €		875 €		891 €	
Árindex	100,0		102,9		104,8	
Inflációs ráta			2,9%		1,8%	

Az inflációs rátát általában az előző év azonos időszakához viszonyítva adják meg.

Beszélhetünk személyes inflációról, amikor az általunk vásárolt termékek árváltozását vesszük figyelembe.

Beszélhetünk a magyar lakosság átlagos fogyasztási szokásain alapuló országos inflációról vagy éppen az euróövezetben lakók átlagos fogyasztási szokásain alapuló euróövezeti inflációról.

Az infláció nem feltétlenül rossz a gazdaság szempontjából. A kiszámíthatóan alacsony infláció (2% körül) kifejezetten jó növekedésösztönző.

Az infláció ellentéte a defláció, ami az árak széles körű csökkenését jelenti.

Befektetések:

A megtakarított pénzt többféle formában is be lehet fektetni. A befektetés célja, hogy a megtakarított pénz megtartsa az értékét.

1. Megtehetjük, hogy otthon tartjuk egy széfben.
2. Betehetjük valamelyik bankba, ahol leköthetjük egy bizonyos időre a nagyobb kamat reményében.
3. Vásárolhatunk értékpapírt (kötvény, kincstárjegy, részvény, befektetési jegy stb.)
4. Felkereshetünk egy alapkezelőt, ahol a befektetni kívánt összeg ismeretében a kockázatmegosztás segítségével stabilabb hozamot érhetünk el.
5. Vásárolhatunk valutát, amellyel az árfolyamváltozás révén érhetünk el nyereséget.
6. Vásárolhatunk ingatlant, melynek forgalmi értéke megváltozhat, amin esetleg nyerhetünk is.

Természetesen még számtalan lehetőségünk van.

Ha a befektetett pénzünk után kapott nominális kamat kisebb, mint az infláció mértéke, akkor a reálkamattól negatív, tehát az általunk befektetett összeg vásárlóértéke csökken. Tehát, ha a bank 2% kamatot ad egyéves lekötésre, és az éves infláció 3%, akkor ez azt jelenti, hogy ami egy éve 100 Ft-ba került, azt most 103 Ft-ért vehetjük meg, de nekünk csak 102 Ft-unk van erre. Amit a bank kifizet, jelen esetben a 2%, az a nominális kamat. Ha a nominális kamatból kivonjuk az inflációt, akkor kapjuk a reálkamatot. Ez mutatja, hogy a pénzünk vásárlóértéke csökkent vagy nőtt.

Ha a befektetett pénzünk után kapott nominális kamat nagyobb, mint az infláció mértéke, akkor a reálkamattól pozitív, tehát az általunk befektetett összeg vásárlóértéke nő.

9. példa

Anna, amíg középiskolába járt, minden héten kapott zsebpénzt a szüleitől. A négy év alatt a második évtől kezdve az infláció rendre 5%, 4%, 4,5%. A zsebpénze az első évben heti 2000 Ft volt, és hogy az inflációt ellensúlyozzák, minden évben megnövelték 100 Ft-tal. Hogyan alakult Anna zsebpénzének a reálértéke a négy év alatt?

Megoldás

Az első évet tekintjük bázisévnek. A második évben öt százalékkal magasabb árakkal kell számolni. Viszont a zsebpénz is 5%-kal nőtt. Tehát a zsebpénz vásárlóereje nem változott.

A harmadik évben az árak átlagosan négy százalékkal nőttek a másodikhoz képest. A zsebpénz pedig $\left(\frac{100}{2100}\right) \cdot 100 \approx 4,76\%$ -kal nőtt. Mivel a zsebpénz nagyobb ütemben nőtt, mint az infláció, a vásárlóereje megnőtt.

Egészen pontosan $\frac{104,76}{104} \approx 1,0073$ -szorosára. Ami azt jelenti, hogy 0,7%-kal több árut tudott vásárolni a pénzéből.

A negyedik évben 4,5% volt az infláció, de a zsebpénz növekedése $\left(\frac{100}{2200}\right) \cdot 100 \approx 4,55\%$, ami még mindig magasabb, igaz, csak nagyon minimális mértékben.

Elmondhatjuk, hogy Anna szülei gondoskodtak arról, hogy lányuk zsebpénzének vásárlóereje ne csökkenjen.

10. példa

Három testvér egy általuk örökölt ingatlan eladásából fejenként 10 millió Ft készpénzhez jutott. Mindhárman úgy gondolták, hogy a pénzt megtartják, és igyekeznek annak befektetése révén reálkamatra szert tenni.

Imre öt éves Magyar Állampapírt vásárolt, fix évi 5%-os kamatozással. A vásárlás évében 2% volt az infláció, és kedvezőnek tűntek a kilátások a következő évekre is.

Tamás szintén állampapírt vásárolt, de ő a prémium változatot vásárolta, ami az éves infláció felett +1%-os kamatot biztosít évente. Tamás a biztonságra törekszik, azt szeretné, hogy mindenképpen minden évben a befektetés reálkamata pozitív legyen.

Szisi pedig úgy döntött, hogy eurót vásárol, és nyit egy devizaszámlát egy banknál, ahol évi 1% kamatot tud realizálni.

Hogyan alakultak a befektetések reálkamatai az ötödik év végén a kezdetekhez képest, ha az éves infláció rendre 2%, 2%, 4%, 6%, 7% volt? Szisi 362 Ft-ért vásárolta az eurót, és az ötödik év végén 385 Ft-ért tudta volna átváltani Ft-ra.

Megoldás

Imrének az ötödik év végén $10 \cdot 1,05^5 = 12,76$ millió forintja van.

A 10 millió Ft-ért megvásárolható termékek ára az infláció következtében öt év után $10 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,06 \cdot 1,07 = 12,27$ millió Ft.

Ez azt jelenti, hogy öt éves viszonylatban a pénzéért megvásárolható termékek mennyisége $\frac{12,76}{12,27} \approx 1,04$ -szeresére nőtt. Ez négy százalékos reálkamat-növekedést jelent.

Tamás számláján öt év múlva $10 \cdot 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,07 \cdot 1,08 = 12,87$ millió Ft van.

Így ő $\frac{12,87}{12,27} \approx 1,049$ -szeresére növelte a megvásárolható termékek mennyiségét.

Ez 4,9%-os növekedést jelent.

Szisi $\frac{10\,000\,000}{362} = 27\,624,1$ eurót kapott a pénzéért.

Ez öt év alatt $27\,624,1 \cdot 1,01^5 \approx 29\,033,4$ euróra növekedett.

Ha ezt ekkor visszaváltotta volna forintba, akkor $29\,033,4 \cdot 385 \approx 11,178$ millió Ft-jának lenne.

Tehát a Szisi által megvásárolható áruk mennyisége $\frac{11,178}{12,27} \approx 0,911$ -ed részére csökkent.

Ez 8,9%-os csökkenés. Ez tűnik messze a legrosszabb eredménynek.

PÉNZÜGYI SZÁMÍTÁSOK II.

11. példa

A Zöld Bubó Konzervipari Kft. által gyártott konzervdobozos kukoricának az előállítási költsége 100 Ft.

Az előállítási költség a kukorica 50 Ft-os és a konzervdoboz 35 Ft-os bekerülési árából és további 15 Ft egyéb költségből tevődik össze.

A kft. gazdasági osztályán a dobozos kukorica következő évi árazásának tervezésekor az alapanyag változását az alábbiak szerint becsülték meg:

40% az esélye, hogy a kukorica ára 15%-ot, és 60% az esélye annak, hogy 35%-ot emelkedik, míg 65% az esélye, hogy a konzervdoboz ára 50%-ot, és 35% az esélye, hogy 40%-ot emelkedik.

- a) Mi a kukoricakonzerv előállításának várható összege, ha az előbb említett két alapanyagon kívül más költségelemek változásával nem kalkulálunk?
- b) Mekkora összegben kell a termék nettó eladási árát meghatározni, hogy az árváltozás legkedvezőtlenebb alakulása esetében is maradjon legalább 10% haszon?

Megoldás

a) A kukorica és a konzervdoboz árának várható értékét a lehetséges új árak súlyozott átlagaként számítjuk ki, ahol a súlyok az egyes árakra eső esélyek lesznek. Tehát a kukorica árának várható értéke

$$50 \cdot (1 + 0,15) \cdot 0,4 + 50 \cdot (1 + 0,35) \cdot 0,6 = 63,5 \text{ Ft.}$$

A konzervdoboz árának várható értéke

$$35 \cdot (1 + 0,5) \cdot 0,65 + 35 \cdot (1 + 0,4) \cdot 0,35 = 51,275 \text{ Ft.}$$

A konzervdobozos kukorica előállításának várható költsége tehát $63,5 + 51,275 + 15 = 129,775$.

b) A kérdés megválaszolásához ki kell számolnunk a legkedvezőtlenebb árakat.

Ez a kukorica esetében $50 \cdot 1,35 = 67,5$ Ft, míg

a konzervdoboz esetében $35 \cdot 1,5 = 52,5$ Ft

A legrosszabb esetben az előállítási költség $67,5 + 52,5 + 15 = 135$ Ft.

Tehát a termék eladási árát a 135 Ft 10%-kal növelt összegén, 148,5 Ft-ban kell meghatározni ahhoz, hogy az elvart, 10%-os nyereséghányad a legrosszabb esetben is meglegyen.

A vállalatok sokszor a legrosszabbra számítanak, és ez alapján alakítják ki az árakat. Ha mégsem ez következik be, legfeljebb némi extra profitra tesznek szert. Ez persze elég veszélyes, mert lehet, hogy a konkurencia alacsonyabban árazza be a termékét, és ezzel a mi forgalmunkat csökkenti. A feladat a) részének megoldásával éppen arra a kérdésre kaptunk választ, hogy meddig vehetjük lejjebb észszerű keretek között, hogy ne szenvedjünk el veszteséget.

12. példa

Ágota 100 000 Ft összegű személyi kölcsönt szeretne felvenni 12 hónapos futamidőre, és az alábbi két ajánlatot kapja:

A hitel: a kölcsön kamata évi 15%, és semmilyen más díj nincs. A kamatot a futamidő felénél és a futamidő végén kell fizetni, a tőke és az éves kamat felét az első félév végéig kell visszafizetni.

B hitel: a kölcsön kamata évi 10%, emellett a folyósítási jutalék 1,5%, a szerződéskötési díj 1%, a kamatot és a tőkét egy összegben, a futamidő végén kell megfizetni.

Melyik ajánlat esetén alacsonyabb a THM (teljes hiteldíjmutató)?

Megoldás

Az A hitel esetében a 6 hónap után fizetendő kamat összege $\frac{100\,000 \cdot 0,15}{2} = 7500$ Ft, míg a

12. hónap után fizetendő kamat $\frac{50\,000 \cdot 0,15}{2} = 3750$ Ft, összesen 11 250 Ft.

A B hitel esetében a fizetendő kamat összege $100\,000 \cdot 0,1 = 10\,000$ Ft. A kamat mellé ki kell fizetni 1500 Ft folyósítási jutalékot és 1000 Ft szerződéskötési díjat. Így összesen 12 500 Ft a teljes költség a hitelen.

Az A hitel esetén a teljes hiteldíjmutató 11,25%, míg a B hitel esetében 12,5% annak ellenére, hogy az A hitel kamata jóval magasabb volt, mint a B hitelé.

13. példa

A Risky Zrt. 6 évre szeretne 6 millió Ft hitelt felvenni. A számlavezető banktól két ajánlatot kaptak. A hitel: A teljes futamidő alatt minden évben azonos tőkeösszeget kell törleszteni, a 8,05%-os kamatláb az első 3 évben nem változik.

B hitel: Évente 1,3 millió forintot kell fizetni, ami tartalmazza a kamat- és a tőketörlesztés összegét is. A 8,05%-os kamatláb az első 3 évben nem változik (ez az ún. egyenlő [vagy fix] törlesztőrészletes konstrukció).

a) Melyik hitel kockázatosabb a kamatlábváltozás lehetőségének szempontjából?

b) Mennyi kamatot kell fizetni az első, és mennyit a második ajánlat esetén, ha a kamatláb a teljes futamidő alatt változatlan?

Megoldás

a) A kamatlábváltozás azt a hitelt érintheti kellemetlenebbül, amelyik esetében a változás időpontjában nagyobb a tőketartozás. A kezdeti tőketartozás maga a hitel összege. Minden törlesztőrészletből le kell vonni az aktuális tőketartozás kamatát, majd a megmaradt résszel csökkentjük a tőketartozást.

Az A hitel esetében a tőketartozás egyszerűen számolható, hiszen a harmadik év végéig $3 \cdot 1 \text{ M Ft}$ tőkét törlesztenek, így a tőketartozás kerekén 3 M Ft.

A B hitel esetében:

Az első évben $1300 - 6000 \cdot 0,0805 = 817$ ezer Ft tőkét törlesztünk.

A második évben $1300 - (6000 - 817) \cdot 0,0805 = 882,77$ ezer Ft tőkét törlesztünk.

A harmadik évben $1300 - (6000 - 817 - 882,77) \cdot 0,0805 = 953,83$ ezer Ft tőkét törlesztünk.

A futamidő első 3 évében összesen $817 + 882,77 + 953,83 = 2\,653,6$ ezer Ft tőkét törlesztünk, így a tőketartozás 3 346,4 ezer Ft.

Ebből következően a kamatlábváltozás tekintetében a B hitel a kockázatosabb.

b) Az A hitel esetében összesen

$6000 \cdot 0,0805 + 5000 \cdot 0,0805 + 4000 \cdot 0,0805 + 3000 \cdot 0,0805 + 2000 \cdot 0,0805 + 1000 \cdot 0,0805 = 21000 \cdot 0,0805 = 1\,690,5$ ezer Ft kamatot kell fizetni.

A B hitel esetében az összesen fizetendő kamat összege $6 \cdot 1300 - 6000 = 1\,800$ ezer Ft.

Az egyenlő tőketörlesztés esetén a futamidő első felében magasabb a törlesztőrészlet, de a konstrukció hamarabb „dolgozza le” a tőketartozást, és ennek az lesz az eredménye, hogy a futamidő végéig összesen kevesebb kamatot kell fizetni, mint az egyenlő törlesztőrészletes konstrukció esetén. Ennek az ára, hogy kezdetben magasabb törlesztőrészlettel kell számolni.

14. példa

Balásznak van egy kis spórolt pénze, és úgy döntött, hogy befekteti. Két lehetőség közül szeretne választani. Az egyik a Sztár Bank évi 2% kamatot ígérő bankbetéte, a másik a DKJ221015 kódjelű diszkontkincstárjegy. A Diszkont Kincstárjegy egy olyan – 3, 6 és 12 hónapos futamidejű, ún. rövid lejáratú – értékpapír, amelynél az Államkincstár a futamidő lejártakor a névértéket fizeti ki, kamatot nem fizet. A 10 000 Ft névértékű Diszkont Kincstárjegyet Balázs 2022. március 31-én venné meg 9920 forintért, lejáratá 2022. október 15. Balázs kiszámolta a Diszkont Kincstárjegy hozamának százalékban kifejezett értékét, azaz azt, hogy mennyi jövedelemhez jutottunk a befektetési időszak végén a befektetett pénzünkhöz képest. Melyik befektetést választotta?

Megoldás

A DKJ vásárlása és lejáratára között eltelt napok száma 198.

Az időszak hozama $\left(\frac{10\,000}{9920} - 1\right) \cdot 100 = 0,8065\%$.

Ebből éves hozamot (éven belül) arányosítással számolunk, azaz ezt az értéket meg kell szorozzuk $\frac{365}{198}$ -al. Az éves hozam $0,8065 \cdot \frac{365}{198} = 1,49\%$ lesz, ezért Balázs a bankbetétet választotta.

Fogalmak

THM (teljes hiteldíj-mutató);

EBKM (egyesített betétikamatláb-mutató);

kamatos kamat;
évközi tőkésítés;
törlesztőrészlet.

FELADATOK

1. K1 Mennyi pénzt kell most félretenni egy újszülött szüleinek ahhoz, hogy 18 év múlva 5 000 000 forintjuk legyen a gyerek egyetemi tanulmányaira, ha a kamat 5%?
2. K1 Egy ország lakossága 15 millió, 100 évvel ezelőtt 9 millió volt. Hány %-os az évi átlagos népszaporulat?
3. K2 Egy erdő élőfakészlete 5000 m^3 . A mindenkori faállomány 3%-kal szaporodik évente. Ritkítják az erdőt, ezért kétevente a meglévő állomány 4%-át kivágják. Hány m^3 fa lesz az erdőben 20 év múlva?
4. K2 Kinek lesz több pénze 8 év múlva:
a) annak, aki 1 millió forintot tesz takarékbba 5%-os kamatra, vagy
b) annak, aki 800 000 forintot tesz be 8%-os kamatra?
5. K2 Nézzetek utána, hogy mi a lényeges különbség az államkötvény és a diszkontkincstárjegy között!
6. K2 Nézzetek utána, milyen feltételek mellett lehet kölcsönhöz jutni az egyes bankoknál! Próbáljátok összehasonlítani az egyes ajánlatokat. Érdemes csoportokat kialakítani, és mindenki másik bank ajánlatát térképezze fel.



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 1107, 1111, 1112, 1115, 1124, 1137.

Idézet

[...] De a matematika nem valami távoli érthetlenség, amelyhez külön ész kéne, ugyanavval az (egy szál) eszünkkel közelítünk a regényhez, mint őhozzá. A matematika is a létezésünkről, annak gazdagságáról ad hírt. Mindig ugyanarról beszélünk, hol Flaubert, hol Bolyai, hol Pilszky, hol Gödel hangját halljuk. Ha fülelünk.

(Esterházy Péter)

III. TÉRGEOMETRIA

Korábbi tanulmányaink során rendszeresen találkoztunk térgeometriai problémákkal. A fontosabb térbeli objektumokat és jellemzőiket már az általános iskolában megismertük, de a középiskolában is alkalmaztunk térbeli vektorokat vagy trigonometriai számításokat. Most rendszerezetten áttekintjük az alapvető térgeometriai ismereteket, valamint a terület- és térfogatszámítási módszereket.

A térgeometriai problémák általában összetettek és nehezen szemléltethetők. Eredményes vizsgálatukhoz szükségünk lesz a korábban elsajátított síkgeometriai összefüggések (egybevágóság, hasonlóság, vektorok, trigonometria) ismeretére.

Székesegyház (Brazíliaváros, Brazília), Oscar Niemeyer (1907–2012) brazil építész alkotása.

16. TÉRELEMEK HAJLÁSSZÖGE

A természet bámulatos objektumokkal tölti ki a teret, amelyben élünk. Az emberi kéz által emelt mesterséges tárgyak, az utak, a közlekedési eszközök, az épületek és egyéb mérnöki létesítmények is mindennapjaink részét képezik. Térbeli művészeti ág például a szobrászat, de a festők, fényképészek vagy akár a filmművészet mesterei is a minket körülvevő teret ábrázolják a saját eszközeikkel.

A tudósok a tér alkotóelemeinek egyre kisebb és kisebb építőköveit fedezik fel, ugyanakkor a Naprendszer, sőt a világegyetem szerkezetét is egyre pontosabban tudják jellemezni. Mi a középiskolában csak a legegyszerűbb térbeli objektumokkal foglalkozunk, de ezek azok a modellek, amelyek a felsőbb matematikai vizsgálatok alapjául szolgálnak.



TÉRELEMEK KÖLCSÖNÖS HELYZETE

A legegyszerűbb **térelemek** a pont, az egyenes és a sík.

Két különböző **pont** egyértelműen meghatároz egy **egyenest**, három nem egy egyenesen lévő pont pedig egy **síkot** a térben.

Ha a három pont egy e egyenesen van, akkor erre az egyenesre végtelen sok sík illeszthető. (Ezeket a síkokat úgy képzelhetjük el, hogy először felveszünk egy S síkot, mely az e egyenesen áthalad; majd az e egyenes körül megforgatva a síkot, S bármelyik elforgatottja megfelelő.)

Egy egyenesre és egy rá nem illeszkedő pontra egyetlen sík illeszkedik.

Korábban láttuk, hogy a síkban két különböző egyenes vagy metszi egymást, vagy párhuzamosak. Térben a helyzet bonyolultabb, könnyen elképzelhetünk két egyenest, amelyek nem párhuzamosak, de közös pontjuk sincs.

Két különböző egyenes helyzete háromféle lehet a térben:

- metszhetik egymást;
- lehetnek párhuzamosak;
- lehetnek kitérők: ekkor nincs közös pontjuk, de nem is párhuzamosak.

Az első két eset „síkgeometriai”, azaz van olyan sík, amely tartalmazza az egyeneseket. A harmadik esetben ilyen síkot nem találunk.

Definíció

Két egyenes kitérő, ha nincsenek egy síkban.

Ha e és f párhuzamos egyenesek, akkor eltolhatjuk őket – önmagukkal párhuzamosan – úgy, hogy képeik egybeessenek. Belátható, hogy ha az e és f kitérő egyeneseket egy közös síkba toljuk el, akkor a képeik metsző egyenesek lesznek, azaz pontosan egy közös pontjuk lesz. (Az eltolás során az egyenesek képe az eredeti egyenessel párhuzamos marad.)

Vajon a párhuzamosság és merőlegesség egyenesekre vonatkozó, síkban megszokott tulajdonságai érvényesek maradnak a térben is?

III. TÉRGEOMETRIA

1. példa

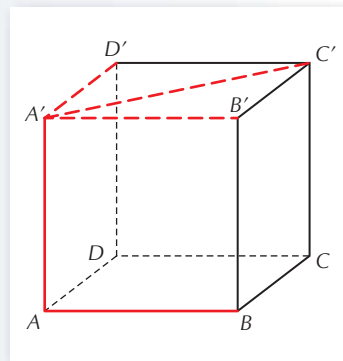
- a) A síkban megszoktuk, hogy ha az e, f, g különböző egyenesekre $e \parallel f$ és $f \parallel g$, akkor $e \parallel g$ is teljesül. Igaz-e a térben is az állítás?
- b) Hasonlóan, ha síkban az e, f, g különböző egyenesekre $e \perp f$ és $g \perp f$, akkor $e \parallel g$ is teljesül. Igaz marad a térben is az állítás?

Megoldás

Az a) pontban megfogalmazott állítás térben is igaz. Indoklásul elegendő arra gondolnunk, hogy az eltolás az egyeneseket velük párhuzamos egyenesekbe transzformálja, és két eltolás egymásutánja is eltolás. (Úgy is fogalmazhatunk, hogy a párhuzamosság tranzitív reláció.)

A b) pontban megfogalmazott állítás a térben nem áll fenn. Tekintsük például az ábra szerinti $ABCD A'B'C'D'$ kockát. Ebben az AA' egyenesre AB és $A'D'$ is merőleges, de AB és $A'D'$ nem párhuzamosak.

(Ha az $A'D'$ egyenest elforgatjuk az AA' tengely körül, akkor az AA' , valamint $A'D'$ képe továbbra is merőleges marad; ellenpéldaként tehát $A'D'$ helyett mondhattuk volna $A'C'$ -t is. Ugyanakkor AB és $A'B'$ párhuzamosak AA' -vel, de ezek az egyenesek speciális helyzetűek, hiszen mind az $ABB'A'$ síkban vannak.)



Egyenes és sík kölcsönös helyzete a térben háromféle lehet:

- az egyenes illeszkedhet a síkra;
- az egyenes egy pontban metszheti a síkot;
- az egyenesnek és a síknak nincs közös pontja, azaz az egyenes és a sík párhuzamosak.

Két különböző sík lehet párhuzamos (ekkor nincs közös pontjuk), vagy metszhetik egymást. A metsző síkoknak pontosan egy közös egyenesük van, ezt nevezzük a két sík **metszésvonalának**.

Vizsgáljuk meg a párhuzamos és merőleges síkok tulajdonságait is!

2. példa

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

- a) Ha az S, T, U különböző síkokra $S \parallel T$ és $T \parallel U$, akkor $S \parallel U$.
- b) Ha az S, T, U különböző síkokra $S \perp T$ és $U \perp T$, akkor $S \parallel U$.

Megoldás

a) Az állítás igaz, ismét hivatkozhatunk arra, hogy az eltolás a síkokat velük párhuzamos síkokba transzformálja. (Háromnál több síkra is kimondhatjuk az állítást.)

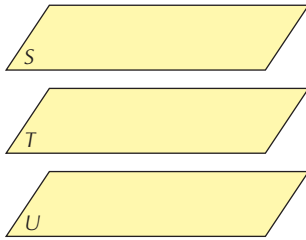
b) Az állítás nem igaz. Az előző ábra jelöléseit használva legyen például a T sík az $ABCD$, az S sík a $BCC'B'$, az U sík pedig az $ABB'A'$ pontok által meghatározott. Ekkor S és U is merőleges T -re, de S és U nem párhuzamosak. (Éppen merőleges helyzetűek: a három sík páronként merőleges egymásra.)

Megjegyzés

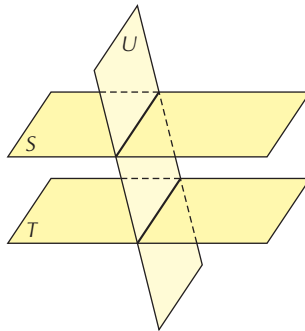
Ha az $U(ABB'A')$ síkot az AA' egyenes körül elforgatjuk, akkor az $U \perp T$ feltétel megmarad, de S és U hajlásszöge megváltozik. [Speciálisan az $U'(ADD'A')$ sík párhuzamos az $S(BCC'B')$ síkkal.]

3. példa

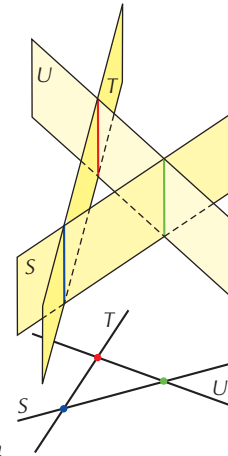
Három sík egymáshoz viszonyítva többféleképpen is elhelyezkedhet a térben.



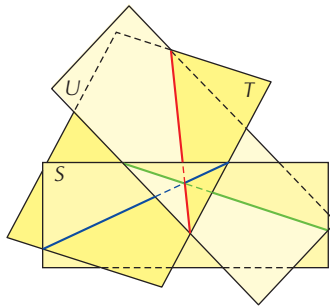
1. ábra



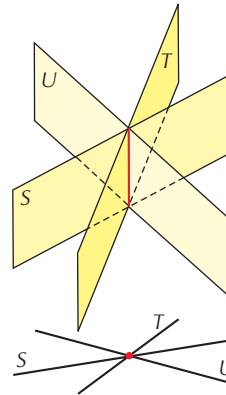
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Egyszerű eset, amikor a három sík párhuzamos (1. ábra).

Ha két különböző párhuzamos síkot metszünk egy harmadikkal (2. ábra), akkor észrevehetjük, hogy a keletkezett metszésvonalak párhuzamosak. (Ez abból következik, hogy egyrészt a két metszésvonal egysíkú (mindkettő az U síkban van), másrészt a metszésvonalaknak nem lehet közös pontjuk, mert S -nek és T -nek nincs közös pontja.)

Vajon igaz a fenti állítás megfordítása? Azaz ha az S és T síkokat úgy metszi el egy U sík, hogy a keletkezett metszésvonalak párhuzamosak, akkor S és T is párhuzamosak?

A 3. ábrán láthatjuk, hogy a megfordítás nem igaz, a három síkból bármely kettő egy-egy párhuzamos metszésvonalban metszi egymást, és semelyik két sík nem párhuzamos. (Észrevehetjük, hogy ha a metszésvonalak irányából tekintünk a síkokra, akkor a vetületi ábrán a képük egy-egy egyenes lesz, a metszésvonalak képe pedig egy-egy pont.)

A 4. ábrán az U sík egy pontban metszi S és T metszésvonalát, a három síknak egy közös pontja van. Ilyen helyzetűek például egy tetraéder csúcsába befutó lapok síkjai.

Az 5. ábra azt a helyzetet mutatja, amikor a három sík metszésvonala közös, azaz végtelen sok közös pontjuk van. (A metszésvonal irányából nézve a vetületi ábra három, egy ponton átmenő egyenes lesz.)

Megjegyzések

1. Az alakzatok közös pontjainak száma alapján tehetünk néhány egyszerű megállapítást, amelyek a feladatmegoldás során fogódzók lehetnek. Például ha egy egyenesnek és egy síknak van két közös pontja, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra; vagy ha két síknak van közös pontja, akkor végtelen sok közös pontjuk van.

2. Egyes szakkönyvekben a párhuzamosságot úgy definiálják, hogy az egyenest, illetve a síkot önmagával párhuzamosnak tekintik ($e \parallel e$, $S \parallel S$). Mi nem ezt a definíciót követjük.

TÉRELEMEK HAJLÁSSZÖGE

Egyenesek és síkok térbeli hajlásszögének a meghatározása nem könnyű feladat, a gyakorlatban maga a mérés végrehajtása is gyakran nehézségekkel jár. Mielőtt pontosítjuk a hajlásszögekkel kapcsolatos fogalmakat, nézzünk egy csapatmunkában is elvégezhető feladatot!

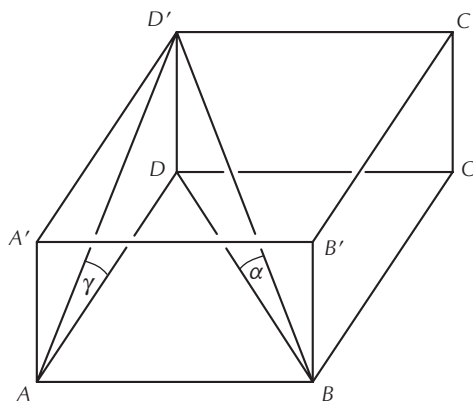
4. példa

(önállóan elvégzendő gyakorlati feladat, projekt munka)

Próbáljátok meghatározni, milyen magas lehet az iskola legnagyobb tanterme, előadóterme vagy színházterme! Téglatest alakú terem esetében milyen hosszú a terem alaplapjának egy átlója? És a testátlója? És mekkora szöget zár be a terem testátlója a talaj vízszintes síkjával?

Megoldás

A mérések elvégzésére néhány ötletet mutatunk.



Ha az ábra szerinti $ABCD A' B' C' D'$ téglatest modellezi a tantermet, akkor a testátló hosszának, illetve a $DBD_1 \angle = \alpha$ hajlásszögének a meghatározása tűnik a legnehezebb feladatnak. Azonban a magasságmérés is problémát jelenthet, ha nincs kellő hosszúságú létránk, a távolságmérések esetében pedig lehetséges, hogy nem férünk hozzá az objektumokhoz.

Ha tudunk kellő pontossággal szöget mérni, akkor a testátló esetében csak az jelenthet nehézséget, ha a D vagy B ponthoz nem tudunk hozzáférni (vagy nem láthatók, pl. a D'), mert például előtte áll egy szekrény. Ekkor megvizsgálhatjuk a másik három testátlót, de ha egyik sem hozzáférhető, akkor más módszert kell keresnünk. Persze a BD' testátló közvetlen mérése is szóba jöhet, pl. egy kifeszített kötéllel, de a saját súlya alatt meghajlik a hosszú kötél, ez is nehezíti a pontos mérést.

Általában is igaz, hogy távolságmérésekkel kiválthatjuk a szögmérést, és fordítva is – a szögmérések és távolságmérések összefüggnek. Ha például a BDD' derékszögű háromszögben két oldal hosszát ismerjük, akkor a megfelelő szögfüggvénnyel már kiszámíthatjuk α -t.

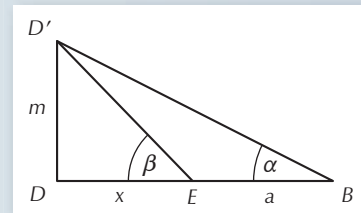
A 10. osztályban a *Magasság- és távolságmérések a szabadban* c. olvasmányban több mérési lehetőséget is felsoroltunk, most néhány további ötletet adunk.

AB és AD méréséből már kiszámítható BD . Ha pedig valamelyik magasság is mérhető, pl. $AA' = DD'$, akkor a BDD' háromszögben kiszámítható BD' és α is. (Természetesen a terem magasságát a fal tetszőleges pontjánál vagy akár a terem belsejében is megmérhetjük, ha elég hosszú a létránk, és egy függőőnt készítünk.)

Ha BD mérése mellett nehézséget jelent a magasságmérés is, akkor egy további lehetőség, hogy a BD szakasz valamely belső E pontjából is megmérjük a $DED' \sphericalangle = \beta$ szöget (lásd ábra). Az ábra jelöléseit alkalmazva ekkor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{x+a}$ és $\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{x}$. Ha az $EB = a$ távolságot megmérjük, akkor a két egyenletből a két ismeretlen (m, x) már meghatározható.

Végezetül egy tipikus mérési eljárást mutatunk be, amikor csak az AB él hosszát kell megmérnünk (tehát nincs szükség AD és BD ismeretére sem). Ennek különböző változatait a gyakorlatban sűrűn használják.

Megmérjük a $DBD' \sphericalangle = \alpha$ és a $DAD' \sphericalangle = \gamma$ szögeket, valamint az AB távolságot. Ekkor felírhatók a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{DB}$ és $\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{DA}$ egyenletek, és a három ismeretlen között a Pitagorasz-tétel ad további kapcsolatot: $DA^2 + AB^2 = DB^2$. A három egyenletből a három ismeretlen már meghatározható.



Láttuk, hogy az egyenesek és síkok egymáshoz viszonyítva többféle helyzetet is felvehetnek a térben. A hajlásszögeik definiálása ezért elég aprólékos munka lesz, hiszen minden lehetséges esetet meg kell vizsgálnunk.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík, valamint párhuzamos egyenes és sík hajlásszögét 0° -nak tekintjük. (Ha az egyenes illeszkedik a síkra, bezárt szögük szintén 0° .)

Két metsző egyenes metszéspontjánál két-két egyenlő nagyságú csúcshszög keletkezik. A két egyenes szögének ezek közül – ha van – a kisebbik szöget tekintjük; tehát két egyenes szöge legfeljebb 90° lehet. Ha mind a négy szög egyenlő, azaz 90° , akkor a két egyenes merőleges.

Két kitérő egyenes hajlásszögét megkaphatjuk, ha az egyeneseket önmagukkal párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy metsszék egymást. Az így kapott metsző egyenesek szöge lesz a kitérő egyenesek hajlásszöge. (A hajlásszög állandó; nem függ attól, hogy mi módon, a tér mely pontjába toljuk el az egyeneseket.)

Definíció

Két kitérő egyenes hajlásszögének nevezzük a tér egy tetszőleges pontján átmenő, az eredeti egyenesekkel párhuzamos egyenesek hajlásszögét.

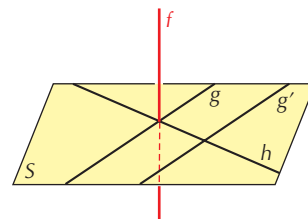
Metsző helyzetű sík és egyenes hajlásszögét több lépésben definiáljuk, attól függően, hogy az egyenes merőleges a síkra, vagy sem.

Definíció

Egy, a síkot metsző egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére.

III. TÉRGEOMETRIA

A gyakorlatban persze nem lehet az összes egyenessel vett merőlegességet ellenőrizni. Ha az f egyenes merőleges az S síkra (az ábrán f merőleges a g , g' , h egyenesekre), akkor elegendő az f és S metszéspontján átmenő egyenesekre teljesülni a merőlegességi feltételnek; sőt az is igazolható, hogy már a metszésponton áthaladó két egyenesre teljesülő merőlegesség is elégséges feltétel. (Ha tehát f merőleges g -re és h -ra, akkor merőleges az S síkra is.) A gyakorlatban általában ezt a tételt használjuk a merőlegesség eldöntéséhez.



Két metsző egyenes egyértelműen meghatározza a rájuk illeszkedő síkot. Ez alapján belátható, hogy az $f \perp S$ feltételhez már az is elegendő, ha f merőleges S két metsző (de egyébként tetszőleges) egyenesére. Ezt a gyakorlatban fontos, a feladatmegoldások során jól használható tételt külön is megfogalmazzuk.

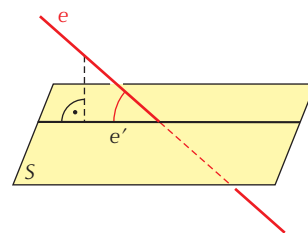
Tétel

A síkra merőleges egyenes tétele: Egy egyenes akkor és csak akkor merőleges a síkra, ha merőleges annak két metsző egyenesére.

Definíció

Ha az e metsző egyenes nem merőleges az S síkra, akkor jelöljük e' -vel az egyenes merőleges vetületét a síkon. **A sík és a metsző (de nem merőleges) egyenes hajlásszögén az egyenesnek és a síkra eső merőleges vetületének hajlásszögét értjük.**

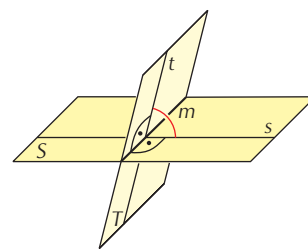
Jelöléssel: $(e; S) \sphericalangle = (e; e') \sphericalangle$.



Ha a metsző egyenes nem merőleges a síkra, akkor merőleges vetülete egyenes; míg ha az egyenes merőleges a síkra, akkor merőleges vetülete egyetlen pont.

Definíció

Végezetül két metsző sík hajlásszögét úgy definiálhatjuk, hogy metszésvonaluk tetszőleges pontjában mindkét síkban merőleges egyenest állítunk a metszésvonalra. **Az így kapott egyenesek szöge a két sík hajlásszöge.**



Az ábrán az S és T síkok metszésvonalára m , a metszésvonalra állított két merőleges s és t ; tehát $(S, T) \sphericalangle = (s, t) \sphericalangle$.

5. példa

Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza $AB = 6$ cm, $AA' = 8$ cm és $AD = 24$ cm. (Az AA' , BB' , CC' , DD' élek merőlegesek az $ABCD$ lapra.) Mekkora szöget zár be

- az AB és a CC' él;
- az $A'B'$ él és a BC' lapátló;
- az AC' testátló és a CD él;
- az AB' lapátló és a BC' lapátló;

- a BC' lapátló és az $ADD'A'$ lap;
- a BC' lapátló és az $ABCD$ lap;
- az AC' testátló és az $ABCD$ sík;
- az AC' testátló és a $BCC'B'$ sík?

Megoldás

- a) A CC' él merőleges az $ABCD$ lapra, azaz annak minden egyenesére, így az AB egyenesre is.
Másképpen: A CC' egyenest eltoljuk a B csúcsba ($CC' \rightarrow BB'$), így a keresett szög $ABB' \sphericalangle = 90^\circ$.

- b) Az $A'B'$ él merőleges a $BCC'B'$ lapra, tehát annak BC' egyenesére is.

Másképpen: Az $A'B'$ egyenest eltoljuk a B csúcsba ($A'B' \rightarrow AB$), így a keresett szög $ABC' \sphericalangle = 90^\circ$.

- c) A CD egyenest eltoljuk az A csúcsba ($CD \rightarrow BA$), így a keresett szög a BAC' háromszög A csúcsnál lévő szöge. AB merőleges BC' -re (mert AB merőleges a $BCC'B'$ síkra), ezért egyszerű síkgeometriai feladatot kaptunk (ábra):

$$\operatorname{tg}(BAC' \sphericalangle) = \frac{BC'}{AB}. \quad BC' \text{ meghatározható a } BCC' \text{ derékszögű háromszögből,}$$

Pitagorasz tételével:

$$BC'^2 = BC^2 + CC'^2 = 24^2 + 8^2 = 640, \text{ ebből } BC' = \sqrt{640} \text{ (cm). Tehát}$$

$$\operatorname{tg}(BAC' \sphericalangle) = \frac{\sqrt{640}}{6}, \text{ s innen } BAC' \sphericalangle \approx 76,7^\circ.$$

- d) BC' -t eltoljuk az A csúcsba ($BC' \rightarrow AD'$), így a $B'AD'$ háromszög A -nál lévő szöge a kérdés (ábra). A három oldal hosszát Pitagorasz tételéből kiszámíthatjuk. $AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (cm); $AD' = BC' = \sqrt{640}$ (cm); végül $B'D' = \sqrt{A'B'^2 + A'D'^2} = \sqrt{6^2 + 24^2} = \sqrt{612}$ (cm).

Ha adott a háromszög három oldala, a koszinusztétellel meghatározhatjuk a szögeit.

$$A \quad B'D'^2 = AB'^2 + AD'^2 - 2 \cdot AB' \cdot AD' \cdot \cos(B'AD' \sphericalangle) \text{ egyenletből}$$

$$\cos(B'AD' \sphericalangle) = \frac{AB'^2 + AD'^2 - B'D'^2}{2 \cdot AB' \cdot AD'} = \frac{100 + 640 - 612}{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{640}} \approx 0,253,$$

$$\text{s innen } B'AD' \sphericalangle \approx 75,3^\circ.$$

- e) Mivel $BCC'B'$ és $ADD'A'$ lapok párhuzamosak, és BC' illeszkedik a $BCC'B'$ lapra, így BC' és $ADD'A'$ is párhuzamos. (Bezárt szögük 0° .)

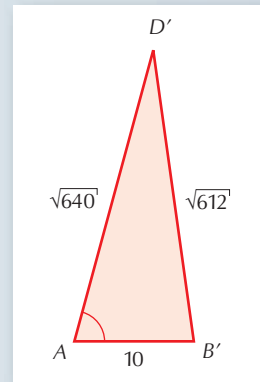
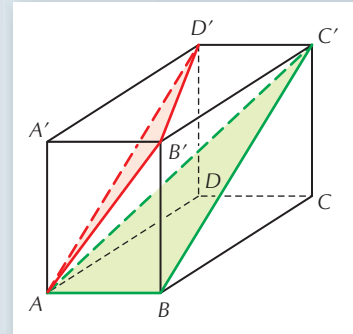
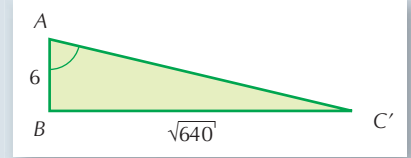
- f) Az egyenes és sík hajlásszögének a definícióját alkalmazzuk. BC' merőleges vetülete az $ABCD$ síkon BC , ezért a keresett szög $C'BC \sphericalangle$.

$$\text{A } C'BC \text{ derékszögű háromszögben } \operatorname{tg}(C'BC \sphericalangle) = \frac{C'C}{BC} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}, \text{ ebből } C'BC \sphericalangle \approx 18,4^\circ.$$

- g) Az AC' testátló vetülete az $ABCD$ síkon AC , az $(AC', AC) \sphericalangle$ pedig az ACC' derékszögű háromszög segítségével határozható meg. Az ABC derékszögű háromszögben

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 24^2} = \sqrt{612} \text{ (cm), } \operatorname{tg}(C'AC \sphericalangle) = \frac{C'C}{AC} = \frac{8}{\sqrt{612}} \approx 0,323, \text{ innen } C'AC \sphericalangle \approx 17,9^\circ.$$

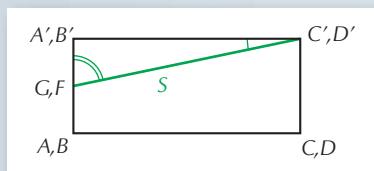
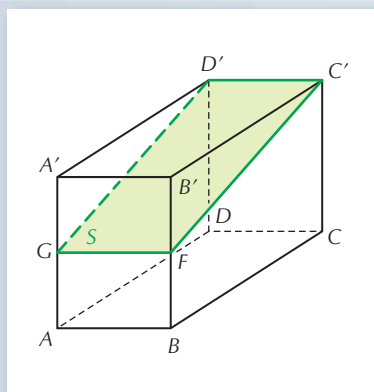
- h) Az AC' testátló és a $BCC'B'$ sík hajlásszöge megegyezik az $AC'B$ szöggel. Ez a c) feladatban kiszámolt BAC' szög pótszöge, azaz $\approx 90^\circ - 76,7^\circ = 13,3^\circ$.



6. példa

Az előző példában szereplő $ABCD A'B'C'D'$ téglatestet elmetsszük egy olyan S síkkal, amelyik áthalad a C' és D' csúcson, valamint a BB' él F felezőpontján. Mekkora szöget zár be az S metsző sík a téglatest lapjaival?

Megoldás



Az S és a $CDD'C'$ síkok metszésvonala $C'D'$. Mivel az $ABB'A'$ lap párhuzamos a $DCC'D'$ lappal, S az $ABB'A'$ síkot $C'D'$ -vel párhuzamos egyenesben metszi. Jelöljük G -vel az AA' él felezőpontját, ekkor S a téglalestet a $GFC'D'$ téglalapban metszi.

Ha a $C'D'$ él irányú oldalnézetből vizsgáljuk a téglalestet, akkor az S sík képe az FC' egyenes, az $ABB'A'$ sík képe a BB' egyenes, valamint az $A'B'C'D'$ sík képe a $B'C'$ egyenes lesz.

Így az S és $A'B'C'D'$ síkok hajlásszöge közvetlenül leolvasható a síkbeli ábráról: mivel a két sík $C'D'$ metszésvonala merőleges az ábra síkjára, $FC'B'$ az egyik keresett szög. (És persze ugyanekkora az $ABCD$ és S síkok hajlásszöge is, mert $ABCD$ és $A'B'C'D'$ párhuzamosak.) $\text{tg}(B'C'F\angle) = \frac{FB'}{B'C'} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$, innen $B'C'F\angle \approx 9,5^\circ$.

Az S és $ABB'A'$ síkok hajlásszöge ennek pótszöge, azaz $\approx 80,5^\circ$. (Ugyanekkora S és $DCC'D'$ szöge is.)

Végül S a $BCC'B'$ (valamint $ADD'A'$) síkra merőleges, hiszen vetülete ezen síkon az FC' egyenes.

Fogalmak

kitérő egyenesek; metszésvonal; egyenesek hajlásszöge; egyenes és sík hajlásszöge; két sík hajlásszöge; síkra merőleges egyenes tétele.

FELADATOK

1.

K1 a) Hány egyenest és hány síkot határozhat meg négy pont a térben?

E1 b) Oldjuk meg a feladatot öt pont esetében is!

2. K1

Hány részre osztja a teret egy téglalest hat lapjának a síkja?

3. K2

- A talajhoz képest milyen magasan van egy toronyház ablaka, ha az ablak alja 80 méter távolságból kb. 14° -os emelkedési szögben látszik?
- A talajhoz képest milyen magasan van egy toronyház ablaka, ha az ablak alja egy adott távolságból kb. 20° -os, míg 20 méterrel közelebből mérve kb. 29° -os emelkedési szögben látszik?
- A toronyház egyik oldalára egy nagy méretű, téglalap alakú plakátot feszítettek ki. Mekkora a plakát magassága, ha 56 méter távolságból a plakát alja 15° -os, a plakát teteje pedig $17,5^\circ$ -os emelkedési szögben látszik?

4. K2

Az $ABCD A'B'C'D'$ téglalestben az AA' , BB' , CC' , DD' élek merőlegesek az $ABCD$ alapra. A téglalest egy csúsból kiinduló éleinek hossza $AB = 10$ cm, $AA' = 8$ cm és $AD = 12$ cm. Mekkora szöget zár be az AC' testátló

- a) a DD' éllel;
- b) a DC' lapátlóval;
- c) a $DCC'D'$ síkkal;
- d) a $D'C$ lapátlóval?

5. K2

Az előző feladatban szereplő $ABCD A'B'C'D'$ téglalestet elmetsszük egy olyan S síkkal, amely áthalad a C és C' csúcson, valamint az $ADD'A'$ lap F középpontján.

- Mekkora szöget zár be az S sík a téglalest lapjaival?
- Mekkora szöget zár be az S sík a téglalest A csúsból kiinduló éleivel?

6. K2

Az $ABCD$ négyzet alapú, E csúcsú egyenes gúla alapélei 10 cm, oldalélei 13 cm hosszúak.

- a) Mekkora szöget zárnak be egymással az oldalélek?
 b) Mekkora szöget zárnak be az oldalélek az $ABCD$ alaplappal?
 c) Mekkora szöget zárnak be az oldallapok az $ABCD$ alaplappal?

7. K1

Igaz vagy hamis a következő két állítás?

- a) Ha az a egyenes merőleges az S síkbeli b és c egyenesekre, akkor merőleges az S síkra is.
 b) Ha az a és b egyenesek párhuzamosak, akkor az S síkra eső vetületeik is párhuzamosak.

8. E1

Az e egyenes és az S sík hajlásszöge α . Mutassuk meg, hogy az S sík bármely f egyenesére e és f szöge nagyobb vagy egyenlő, mint α !

9.

Adjunk meg a tér egy pontjából kiinduló

K1 a) 3;

K2 b) 4;

E1 c) 5

félegyenest úgy, hogy közülük bármelyik kettő ugyanakkora szöget zárjon be!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1586–1608.

17. TÉRELEMEK TÁVOLSÁGA

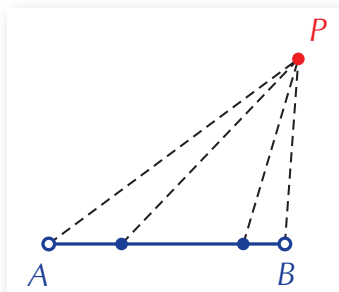
A síkgeometriai tanulmányaink során már találkoztunk a **távolság** fogalmával.

- **Két pont távolsága** alatt az őket összekötő szakasz hosszát értettük;
- **pont és egy rajta át nem haladó egyenes távolsága** a pontból az egyenesre merőlegesen állított szakasz hossza;
- végül **két párhuzamos egyenes távolságát** annak a szakasznak a hosszaként értelmeztük, amelyet az egyik egyenes valamely (tetszőleges) pontjából a másik egyenesre merőlegesen bocsáttunk. (Vagy elegánsan azt is mondhattuk volna, hogy két párhuzamos egyenes távolsága megegyezik az egyikben lévő tetszőleges pont és a másik egyenes távolságával. Ekkor a definíciót visszavezettük pont és egyenes távolságának – már ismert – meghatározására.)

Két tetszőleges ponthalmaz, A és B távolságát úgy értelmeztük, hogy a két halmaz pontjait minden lehetséges módon összeköttöttük, és a kapott szakaszok közül a legrövidebb hosszát tekintettük A és B távolságának. [A távolság jelölése: $d(A; B)$.] Ennek megfelelően mondtuk ki a fenti távolságdefiníciókat is, és ezt az általános meghatározást alkalmazzuk a térben is.

Megjegyzés

Sajnos a távolság fenti definíciója nem mindig használható. Ilyen módon például az ábrán látható AB nyílt szakasz (a végpontok nem tartoznak a szakaszhoz) és a P pont távolsága sem határozható meg. Ekkor AB belső pontjai és a P pontot összekötő szakaszok között nincs legrövidebb. Ilyen ponthalmazok esetében a távolságfogalom általánosítására van szükség, ami magasabb matematikai eszközökkel adható meg.



III. TÉRGEOMETRIA

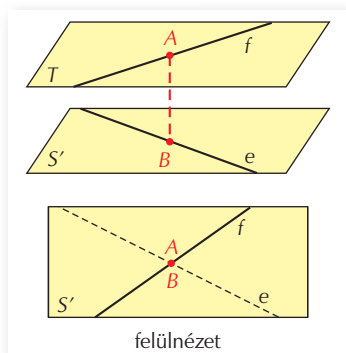
Ha két alakzatnak van közös pontja, akkor távolságuk értelemszerűen 0. A továbbiakban elegendő tehát a közös pont nélküli térelemek távolságát meghatározni.

Definíció

Pont és rajta át nem haladó sík távolságán a pont síkon levő merőleges vetületének és a pontnak a távolságát értjük.

Sík és vele párhuzamos egyenes távolsága megegyezik az egyenes egy (tetszőleges) pontjának és a síknak a távolságával.

Végül **két párhuzamos sík távolságán** az egyik sík (tetszőleges) pontjának és a másik síknak a távolságát értjük.



Ezek a definíciók elég szemléletesek, a korábban két ponthalmazra kimondott távolságdefiníciók következményei. Kissé nehezebb lesz a dolgunk két kitérő egyenes távolságának a meghatározásával. A következőképpen járhatunk el.

Legyen e és f a két kitérő egyenes. Vegyünk fel egy e egyenest tartalmazó S síkot, és ezt forgassuk az e egyenes mint tengely körül. Az S sík elforgatottjai között biztosan lesz egy olyan S' sík, amely párhuzamos az f egyenessel (és mivel e és f kitérő egyenesek, pontosan egy ilyen sík lesz). Vegyünk fel az f egyenest tartalmazó, S' -vel párhuzamos T síkot; ekkor az e és f egyenes a párhuzamos S' és T síkokban levő, egymással nem párhuzamos egyenesekként képzelhetők el.

Az e és f távolságát az S' és T síkok távolságaként definiálhatjuk, de ez a távolság másképp is előállítható. Ha például az S' síkra merőleges vetítést alkalmazunk, akkor az f -nek egyetlen olyan A pontja lesz, amely képe az e egyenesre kerül. (Az ábrán A képét B -vel jelöltük; a vetítés irányából történő „felülnézetből” tehát A és B egybeesik.) Ez az AB szakasz merőleges az S' és T síkokra, tehát merőleges az e és f egyenesekre is. Azaz AB megadja a keresett távolságot: $d(A, B) = d(S', T) = d(e, f)$.

Definíció

Két kitérő egyenes távolságán annak a szakasznak a hosszúságát értjük, amely a két kitérő egyenest metsző és mindkettőre merőleges egyenesen, a két kitérő egyenes között van.

Ezt az egyenest a két kitérő egyenes **normáltranszverzálisának** nevezzük.

A $d(A, B)$ mellett más jelölések is elfogadottak. Például AB jelentheti az A és B távolsága mellett az A és B pontokon átmenő egyenest, az AB szakaszt, vagy ennek hosszát is. (Ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy a szakasz *hosszáról* van szó, alkalmazhatjuk az $\overline{AB}$ alakot is.) A többféle jelölés általában nem okoz gondot, a szövegkörnyezetből azonosítható a konkrét jelentés.

Gyakorlásképpen az előző lecke példájában szereplő téglatestben meghatározunk néhány térelem közötti távolságot. (Felhasználhatjuk a korábban kiszámolt értékeket is.)

1. példa

Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza $AB = 6$ cm, $AA' = 8$ cm és $AD = 24$ cm. (Az AA' , BB' , CC' , DD' élek merőlegesek az $ABCD$ alapra.) Mekkora a távolsága

- | | |
|---|--|
| a) az A és C' pontoknak; | e) a B pontnak és az $AA'C'$ síknak; |
| b) a C' pontnak és az AB élnek; | f) a BB' élnek és az $AA'C'$ síknak; |
| c) a D' pontnak és az AB' lapátlónak; | g) az ADD' és $A'C'C$ síkoknak? |
| d) az AA' és BC' egyeneseknek; | |

Megoldás

- a) Az ACC' derékszögű háromszögben $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$, az ABC derékszögű háromszögben pedig $AC^2 = AB^2 + BC^2$. A két egyenletből $AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2$, s így $AC' = \sqrt{6^2 + 24^2 + 8^2} = 26$ (cm).

Megjegyzés

A kapott $AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2$ alak segítségével általában is meghatározható két térbeli pont távolsága. Az összefüggést néha *térbeli Pitagorasz-tételnek* is nevezik, arra utalva, hogy az egyenletet két Pitagorasz-tétel összekapcsolásával kapjuk.

- b) ABC' derékszögű háromszög ($B\angle = 90^\circ$), mert AB merőleges a $BCC'B'$ síkra. A C' pont és az AB él távolsága tehát megegyezik a BC' szakasz hosszával.

$$BC' = \sqrt{AC'^2 - AB^2} = \sqrt{26^2 - 6^2} = \sqrt{640} \text{ (cm)}.$$

- c) A D' pont és az AB' lapátló távolsága az $AB'D'$ háromszög D' csúcsából húzott $D'E = m$ magasságával egyezik meg. A háromszög oldalait már meghatároztuk az előző leckében: $AB' = 10$ cm, $B'D' = \sqrt{612}$ (cm) és $AD' = \sqrt{640}$ (cm), s szintén itt kiszámoltuk, hogy $B'AD'\angle \approx 75,3^\circ$.

Így az AED' derékszögű háromszögből $\sin(B'AD'\angle) = \frac{m}{AD'}$, s innen

$$m = AD' \cdot \sin(B'AD'\angle) = \sqrt{640} \cdot \sin 75,3^\circ \approx 24,47 \text{ (cm)}.$$

- d) Az AA' és BC' egyenesek egy-egy párhuzamos síkra illeszkednek, az $ADD'A'$ és $BCC'B'$ síkokra. Így a két egyenes távolsága megegyezik a két sík távolságával, azaz $AB = 6$ cm-rel. (Ekkora az AA' és BC' szakaszok távolsága is.)
e) A téglatestet az $AA'C'$ sík az $AA'C'C$ téglalapban metszi. A metsző síkra merőleges az $ABCD$ lap, így ha B -ből merőlegest bocsátunk az $ACC'A'$ metsző síkra, ennek hossza megegyezik az ABC háromszög B -ből húzott BF magasságával.

Az ABC derékszögű háromszögben $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{612}$ (cm). A háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk: $t = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot BF}{2}$,

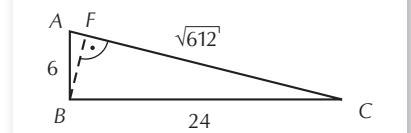
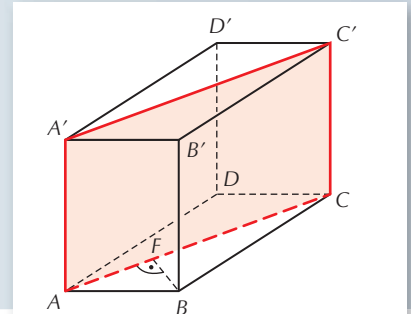
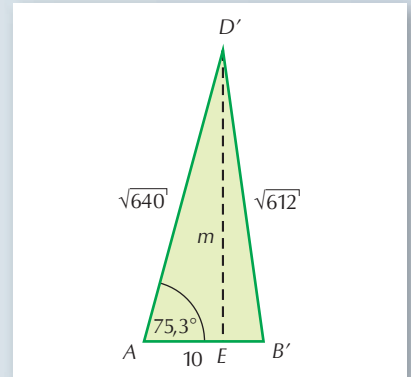
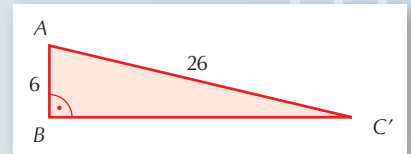
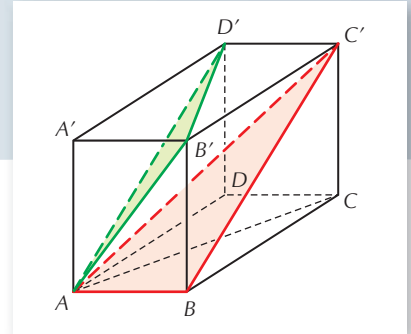
$$\text{innen } BF = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{6 \cdot 24}{\sqrt{612}} \approx 5,82 \text{ (cm)}.$$

- f) A BB' él és az $AA'C'C$ sík párhuzamos (mindkettő merőleges az $ABCD$ lapra), ezért távolságuk megegyezik a B pont és az $AA'C'C$ sík távolságával. Ezt pedig épp most számítottuk ki: $d(AA'C'C, BB') = d(AA'C'C, B) \approx 5,82$ (cm).

Megjegyzés

Az $ABCD$ síkra merőleges irányból (az ábra szerinti felülnézetből) tekintve, az $AA'C'C$ sík képe az AC egyenes, a BB' egyenes képe pedig a B pont. Így a BF szakasz közvetlenül, valódi hosszúságában megadja a BB' egyenes és az $AA'C'C$ sík távolságát.

- g) Az $ADD'A'$ és $A'C'CA$ síkok közös metszésvonala AA' , így a két sík távolsága 0.



2. példa

Panni és Pisti az országút egyik oldalán egy távoli templomtornyot vett észre. Úgy gondolták, a gyakorlatban is alkalmazzák a szögfüggvényekről tanultakat, és megpróbálják meghatározni, körülbelül milyen távol lehetnek a templomtól, és mekkora lehet a templom magassága.

Első lépésként megmérték, hogy a torony az országúthoz képest mekkora szögben látszik. Gondolatban összekötötték saját helyzetüket és a torony alját egy egyenessel, s ennek az egyenesnek az országúttal bezárt szögére közelítőleg 52° -ot kaptak.

Ezután megmérték, hogy a földfelszínhez képest a torony mekkora emelkedési szögben látszik. A gondos mérés eredménye közelítőleg 8° -nak adódott.

Az egyenes úton továbbhaladtak 100 lépést, folyamatosan közelítve a templomhoz, s ekkor újra megmérték az emelkedési szöget. Az új helyzetükből a torony kb. 10° -os emelkedési szögben látszott. Meg lehet-e ezekből az adatokból határozni, hogy milyen magas a torony?

Számítsuk ki azt is, mekkora volt Panni és Pisti távolsága a templomtól az első mérésakor, illetve hogy milyen messze volt a torony az egyenes országúttól!

Megoldás

A feladatot először modellezzük. Jelölje A a torony alját, B a tetejét, az első és a második mérési helyet C , illetve D . A mérési szögeket $\angle BCA = \alpha$, $\angle BDA = \beta$ és $\angle ACD = \gamma$ módon jelölhetjük; valamint legyen a templom magassága $AB = m$, és $CD = a$, $AC = c$, és $AD = b$ (ábra).

A terepet síknak tekintjük; a modell így olyan háromszög alapú gúla, amelynek AB alkotója egyúttal a testmagasság is. A konkrét számadatokat: $\alpha = 8^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 52^\circ$, $a = 100$ lépés.

A CAB derékszögű háromszögből $c = m \cdot \frac{1}{\tan \alpha}$, a DAB derékszögű

háromszögből $b = m \cdot \frac{1}{\tan \beta}$. A CDA háromszög két oldalát tehát egyelőre

m függvényében ismerjük. A CD oldal, valamint γ ismeretében azonban felírhatjuk a koszinusztételt a háromszögben; ebben az egyenletben csak az m lesz az ismeretlen, így meghatározható.

A térgeometriai probléma tehát síkgeometriai feladattá egyszerűsödött. Írjuk fel tehát a koszinusztételt a CDA háromszögben! Ez alapján $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \gamma$, helyettesítés után

$$m^2 \cdot \frac{1}{\tan^2 \beta} = a^2 + m^2 \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha} - 2 \cdot a \cdot m \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \cos \gamma.$$

Az egyenletet redukáljuk:

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{\tan^2 \alpha} - \frac{1}{\tan^2 \beta} \right) - 2 \cdot a \cdot m \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \cos \gamma + a^2 = 0.$$

Az együtthatók elég „csúnya” számok, a továbbiakban közelítő értékekkel dolgozunk.

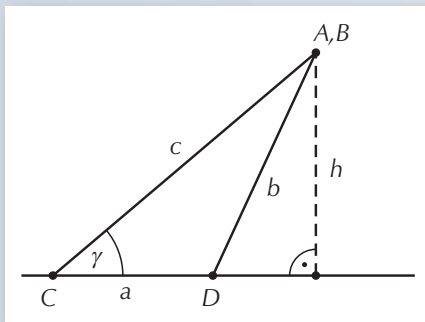
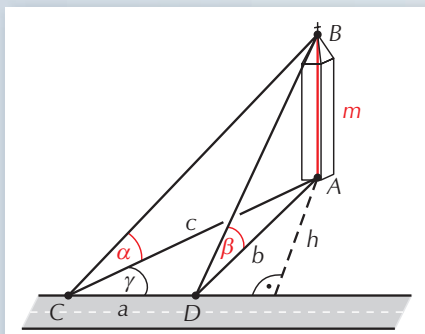
A számadatokat ($\alpha = 8^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 52^\circ$, $a = 100$ lépés) helyettesítjük: $m^2 \cdot 18,47 - 876,13 \cdot m + 10\,000 = 0$.

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = 876,132 - 4 \cdot 18,47 \cdot 10\,000 \approx 28\,803,78, \text{ megoldásai}$$

$$m_1 = \frac{876,13 + 169,72}{36,94} \approx 28,31, \text{ illetve } m_2 = \frac{876,13 - 169,72}{36,94} \approx 19,12.$$

A templomtorny lehetséges magassága tehát közelítőleg 28 vagy 19 lépés.



Mindkét érték reálisnak tűnik, elfogadható. Egy lépés hosszát 75 cm-nek becsülve a nagyobb számérték is 21 m körüli, ami egy hatemeletes ház magassága. Vannak hasonló magasságú templomtornyok.

Kérdés, hogy valamilyen további feltétel nem zárja-e ki az egyik esetet. Például a feladat szövege szerint Panni és Pisti folyamatosan közelít a templomhoz, emiatt $CDA \searrow$ tompaszög.

A c távolságra $c_1 = m_1 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 8^\circ} \approx 201,4$, és $c_2 = m_2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 8^\circ} \approx 136,0$, azaz kb. 201 vagy 136 lépés távolság adódik.

Bár nem kérdezte a feladat, számítsuk ki a b oldal hosszát is a két esetben, és ellenőrizzük, hogy $CDA \searrow > 90^\circ$ teljesül-e!

Az első esetben $b_1 = m_1 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ} \approx 160,6$. A CDA szöget kifejezhetjük a koszinusztételből:
 $\cos CDA \searrow = \frac{100^2 + 160,6^2 - 201,4^2}{2 \cdot 100 \cdot 160} \approx -0,148$, innen $CDA \searrow \approx 98,5^\circ$. Ez tompaszög, tehát megfelelő.

A második esetben $b_2 = m_2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ} \approx 108,4$. Ekkor viszont $\cos CDA \searrow = \frac{100^2 + 108,4^2 - 136^2}{2 \cdot 100 \cdot 108,4} \approx 0,15$, pozitív szám; így $CDA \searrow < 90^\circ$, vagyis ez az eredmény nem felel meg a feltételeknek.

Végül az országút és a templom h távolságát a $h = c_1 \cdot \sin \gamma$ összefüggésből számíthatjuk ki. $c_1 \cdot \sin \gamma \approx 158,7$, a keresett távolság kb. 159 lépés.

Eredmények: A templomtorny magassága 28 lépés, Panni és Pisti kezdeti távolsága a templomtól 201 lépés, és az országút és a templom távolsága 159 lépés.

Fogalmak

távolság
(térelemeké);
normáltranszverzális;
térbeli Pitagorasz-tétel.

FELADATOK

- 1. K2** Legfeljebb hány pontot adhatunk meg a térben úgy, hogy bármely két pont távolsága egységni legyen?
- 2. K2** Az A, B, C pontok nem esnek egy egyenesbe. Hány olyan sík van, amely az adott A, B, C pontok mindegyikétől egyenlő távolságra halad, és nem párhuzamos az ABC síkkal?
- 3. K2** Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatestben az AA', BB', CC', DD' élek merőlegesek az $ABCD$ alapra. A téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza $AB = 10$ cm, $AA' = 8$ cm és $AD = 12$ cm. Jelöljük H -val az AA' él felezőpontját. Mekkora az alábbi pont, egyenes és sík távolságok?
 - a) $d(H, C)$; c) $d(H, BC)$; e) $d(HD', BCC)$;
 - b) $d(H, BC)$; d) $d(HD', ABC)$; f) $d(HD', BC)$.
- 4.** Az előző feladatban szereplő $ABCD A'B'C'D'$ téglatestet elmetsszük egy olyan S síkkal, amelyik áthalad a C és C' csúcson, valamint az $ADD'A'$ lap F középpontján.
 - K2** a) Mekkora a téglatest csúcsainak és az S síknak a távolsága?
 - K2** b) Mekkora a téglatest A csúcsból kiinduló élegyeneseinek és az S síknak a távolsága?
 - K1** c) Mekkora F és a téglatest csúcsainak a távolsága?
 - K1** d) Mekkora F és a téglatest többi lapközéppontjának a távolsága?

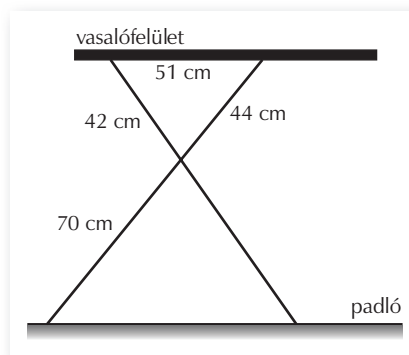
III. TÉRGEOMETRIA

5. K2

(Érettségi feladat alapján, közép-szint, 2011.)

Az ábrán egy vasalódeszka tartószerkezetének méreteit láthatjuk. A vasalódeszka a padlóval párhuzamos. Az egyik tartórúd 114 cm hosszú.

- Hány cm a másik tartórúd hossza?
- Hány cm magasan van a padlóhoz képest a vasalófelület, ha a vasalódeszka 3 cm vastag?



6. E1

Mekkora a 10 cm oldalélű szabályos tetraéder két kitérő élének távolsága? (A szabályos tetraéder minden éle egyenlő hosszú.)

7. K2

Jelöljük H -val és G -vel a 3. feladatban szereplő $ABCD A'B'C'D'$ téglatest AA' , illetve $C'D'$ élének felezőpontját. Mekkora szöget zár be EG

- BB' éllel;
- BC' lapátlóval;
- a $CDD'C'$ síkkal?
- Mekkora a HG egyenes és a C' csúcs távolsága?

8. E1

Adott a térben négy pont, A, B, C, D úgy, hogy semelyik három pont nincs egy egyenesen. Hány olyan sík van, amelytől a négy pont ugyanakkora távolságra van?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1609–1675.

Hogyan oldjunk meg térgeometria-feladatokat? (Néhány jó tanács.)

Az első két lecke példáiból láthatjuk, hogy igen nehéz a térbeli alakzatokról síkbeli ábrát készíteni, vagy nehéz akár csak szemléltetni is a testeket. (Elképzelni őket pedig még nehezebb, szerencsére a térlátás gyakorlással fejleszthető.) Ezért **nagyon fontos a definíciók ismerete**, megértése. Ha például egy bonyolult feladatban külső ponton át olyan egyenest húzunk, amely nem párhuzamos egy adott síkkal, akkor – a definíciók alapján – *tudjuk*, hogy az egyenes metszeni fogja a síkot. És azt is tudjuk, hogy pontosan egy pontban metszi; s ez még akkor is igaz, ha nem „látjuk”, vagy nem tudjuk ábrázolni a metszetüket. Vagy két párhuzamos egyenes távolsága könnyen szemléltethető a közös síkjukban; de ha a térben két kitérő egyenes távolsága a kérdés – itt már inkább a definícióra kell támaszkodnunk.

A térbeli problémákat igyekeznünk kell tehát síkbeli feladatokra visszavezetni, de ez néha csak több lépésben lehetséges. Érdemes ezért a **megfelelő síkmetszeteket külön megrajzolni**, ezzel is hangsúlyozni, hogy a feladat ettől kezdve „csak” síkgeometriai jellegű. És ha valaki nehezebben lát a térben, akkor megteheti – ha szükséges –, hogy minden egyes lépéshez külön-külön síkbeli ábrát rajzol.

A síkgeometriai kiemelésen kívül vannak még más eljárások is (ábrázoló geometriai módszerek, analóg feladatok alkalmazása stb.), de egyik sem pótolja a **síkgeometriai eszközök készség-szintű használatát**. Az eredményes térgeometriai feladatmegoldásokhoz szükség van az elemi geometriai, a vektorgeometriai és a trigonometriai ismeretekre.

18. SOKSZÖGEK TERÜLETE

A felszín- és térfogatszámítási eljárások áttekintése előtt a kerület- és területszámítással kapcsolatos ismereteinket rendszerezzük.

Bármely két tetszőleges A és B ponthoz hozzárendelhetünk egy $d(A; B)$ nemnegatív valós számot, a pontok **távolságát**. A távolság mérőszáma nemnegatív valós szám, és teljesíti az alábbi feltételeket:

1. Ha A és B megegyezik, akkor $d(A; B) = d(A; A) = 0$.
2. $d(A; B) = d(B; A)$.
3. Három pont esetében a közöttük fellépő három távolság közül bármely kettő összege legalább akkora, mint a harmadik távolság. Formulával: $d(A; B) + d(B; C) \geq d(A; C)$, s hasonló igaz a másik két esetben is.

Az első feltételt természetesnek érezzük, csakúgy, mint a másodikat, ami annak a megfogalmazása, hogy a távolság szimmetrikus reláció. A harmadik feltétel a jól ismert háromszög-egyenlőtlenség; itt például a $d(A; B) + d(B; C) = d(A; C)$ egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha A , B , C egy egyenesen van úgy, hogy B az A és C pontok közé esik.

Az egységszakasz rögzítése után az AB szakasz hossza $d(A; B)$ számértéke, így a sokszögek kerülete az őket határoló szakaszok hosszának összege. Sajnos görbe vonalú alakzat kerülete csak bonyolult módszerekkel határozható meg. Ennek során a görbe ívhosszát egyre rövidebb, egyre jobban „simuló” egyenes szakaszok összegével próbáljuk közelíteni, de az ehhez szükséges erősebb matematikai eszközökkel mi nem foglalkozunk.

Megjegyzés

A fenti feltételeknek eleget téve más távolságfogalmat is kidolgozhatunk. Célszerűségi okokból előfordulhat, hogy a távolságokat irányítjuk, azaz negatív értékűek is lehetnek. Ezeket *előjeles távolságnak* nevezzük. Például a derékszögű koordináta-rendszer pontjainak koordinátáit definiálhatjuk előjeles távolságként.

A TERÜLET

A sokszögek területfogalmát hasonló elvek alapján formalizálhatjuk.

Bármely síkbeli A sokszöghöz hozzárendelhetünk egy $t(A)$ pozitív valós számot, a sokszög **területét**. A hozzárendelés tulajdonságai:

1. Egybevágó síkidomok területe egyenlő. [Ha $A \cong B$, akkor $t(A) = t(B)$.]
2. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, akkor ezek területének az összege megegyezik az eredeti sokszög területével.
3. Megállapodunk abban, hogy az egységnyi oldalú négyzet területe legyen 1 területegység.

A tulajdonságokat ismét természetesnek érezzük, csak néhány megjegyzést teszünk velük kapcsolatban.

A felbontást a kapott részsokszögek bármelyikével, tetszőlegesen sokáig folytathatjuk. Ezért (2)-nél több is igaz: ha a sokszöget **véges számú** sokszögre bontjuk, akkor az egyes sokszögek területeinek összege megegyezik az eredeti sokszög területével.

III. TÉRGEOMETRIA

Az állítás fordított irányban is teljesül: ha két (vagy véges sok) sokszöget egyesítünk, az így kapott sokszög területe az eredeti sokszögek területének összegével egyenlő. (Persze vigyázni kell arra, hogy a sokszögek ne fedjék egymást az egyesítéskor.)

Végül megjegyezzük, hogy az S alakzat (pl. egy $ABCD$ négyszög) területére többféle jelölés is elfogadott, például

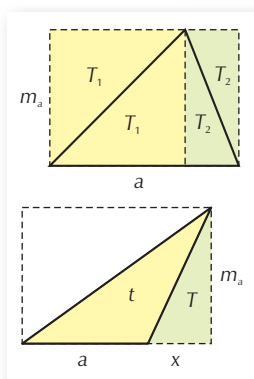
$$t(S) = T(ABCD) = T_{ABCD} \text{ stb.}$$

SOKSZÖGEK TERÜLETE

Az a és b oldalú **téglalap területe** $t = ab$. (Speciálisan az a oldalú négyzet területe $t = a^2$.)

Ha a és b pozitív egész szám, akkor az állítás nyilvánvaló (a téglalapot felbontjuk $a \cdot b$ darab egység-négyzetre). A bizonyítás akkor sem nehéz, ha a és b racionális számok (lásd 1. példa). Ha valamelyik oldal mérőszáma irracionális szám, akkor a bizonyítás bonyolultabb matematikai eszközöket igényelne; ezt az esetet nem bizonyítjuk.

Az a oldalú és az oldalhoz tartozó m_a magasságú **háromszög területe** $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$.



A bizonyítás az ábráról leolvasható.

Ha a háromszög a oldalához tartozó magasságvonala nem halad a háromszögön kívül, akkor a háromszöget befoglalhatjuk egy a és m_a oldalú téglalapba. Az egybevágó részháromszögek miatt $t = T_1 + T_2 = \frac{a \cdot m_a}{2}$. (Itt valamelyik részterület esetleg nulla is lehet.)

Ha az a oldalhoz tartozó magasságvonal a háromszögön kívül halad, akkor

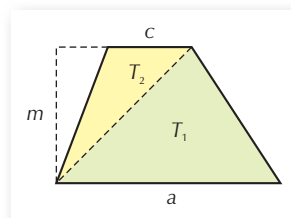
$$t = \frac{(a+x) \cdot m_a}{2} - T = \frac{(a+x) \cdot m_a}{2} - \frac{x \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2} \text{ szintén igaz.}$$

Mivel a gondolatmenetet a háromszög bármelyik oldalára alkalmazhatjuk, a kapott összefüggés mindegyik oldalra igaz. Tehát a háromszög területe $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$.

Ha egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és c , a hozzájuk tartozó magasság hossza pedig m , akkor a **trapéz területe** $t = \frac{(a+c) \cdot m}{2}$.

(Speciálisan a paralelogrammában $a = c$, így a területe $t = a \cdot m$.)

A trapézt – egyik átlójának behúzásával – két részháromszögre bontjuk (ábra). Ezek területösszege $t = T_1 + T_2 = \frac{a \cdot m}{2} + \frac{c \cdot m}{2} = \frac{(a+c) \cdot m}{2}$, tehát az állítás valóban igaz.



Végezetül a merőleges átlójú négyszögek területét vizsgáljuk meg.

Ha a konvex $ABCD$ négyszögben e és f a merőleges átlók hossza, akkor a négyszöget egy e , f oldalú téglalapba foglalhatjuk. Ebben az oldalak és az átlók négy egybevágó háromszögpárt határoznak meg, ezért a négyszög területe a téglalap területének a fele: $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{e \cdot f}{2}$.

A képlet konkáv négyszög esetében is igaz. Az ábrán x -szel jelöltük az e átló meghosszabbítását, és az $ABCD$ konkáv négyszög köré most az $(e + x)$ és f oldalú téglalapot írtuk.

$$T_{ABCD} = T_{ABC} - T_{ADC} = \frac{f(e+x)}{2} - \frac{f \cdot x}{2} = \frac{f \cdot e}{2}.$$

Ha a **merőleges átlójú** négyszög átlóinak hossza e és f , akkor a **négyszög területe** $t = \frac{e \cdot f}{2}$.

Megjegyzés

Ez utóbbi eredmény a négyszögekre ismert trigonometrikus területképlet speciális esete. A 11. osztályban már láttuk, hogy ha egy négyszög átlóinak hossza e és f , az átlók hajlásszöge pedig φ , akkor területe $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}$. Ha pedig $\varphi = 90^\circ$, akkor visszkapjuk a fenti eredményt.

A speciális négyszögekre kapott területképleteket táblázatba foglalhatjuk. (a , b a négyszög oldalainak, m a megfelelő magasságának, e és f az átlóinak hosszát jelenti.)

	négyzet	téglalap	paralelogramma	trapéz	deltoid	rombusz
terület	a^2	$a \cdot b$	$a \cdot m_a$	$\frac{(a+c) \cdot m}{2}$	$\frac{e \cdot f}{2}$	$a \cdot m$ $\frac{e \cdot f}{2}$

A rombusz paralelogramma és deltoid is, így rá két képletet is felírtunk. Persze további területképlet is adhatók, az oldalak, átlók és bezárt szögek segítségével.

A sokszögeket (a konkávokat is) átlóik segítségével mindig felbonthatjuk háromszögekre, így a sokszög területe a részháromszögek területének összegeként állítható elő. A sokszögek területének a megadása tehát általában nem jelent elvi nehézséget. A területek előállításában a háromszögek viszont egyfajta építőkövekként szerepelnek, ezért területükre érdemes minél több összefüggést felírni. Az alábbiakban felsoroljuk a háromszög leggyakrabban használt területképleteit. (Ezekkel korábban már találkozottunk. A Hérón-képlet és a beírt kör sugarával megadott területképlet emelt szintű, míg az utolsó két formula kiegészítő anyag.)

A háromszög területe:

- $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$;
- $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$, a trigonometrikus területképlet;
- $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ez a Hérón-képlet, ahol s a háromszög félkerülete;
- $t = r \cdot s$, ahol r a beírt kör sugarának hossza;

III. TÉRGEOMETRIA

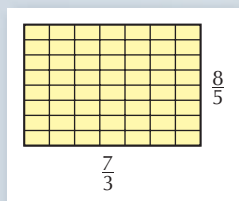
- $t = \frac{abc}{4R}$, ahol R a körülírt kör sugarának hossza;
- $t = r_a \cdot (s - a) = r_b \cdot (s - b) = r_c \cdot (s - c)$, ahol r_a, r_b, r_c jelenti az a, b, c oldalhoz hozzáírt kör sugarának hosszát.

További területképletek is léteznek (erre láttunk példát a 11. osztályban), most csak a legismertebbeket soroltuk fel.

1. példa

A területfogalom 1-3. tulajdonságait felhasználva mutassuk meg, hogy az $a = \frac{8}{5}$, $b = \frac{7}{3}$ egység oldalhosszú téglalap területe $ab = \frac{56}{15}$ területegység.

Megoldás



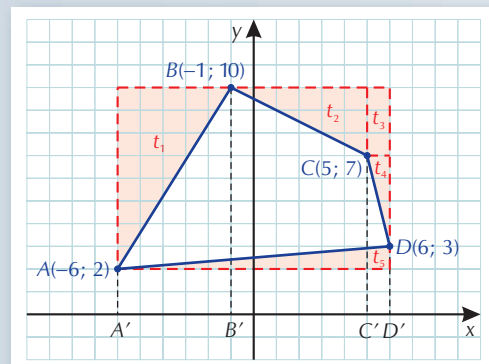
A téglalapot felbontjuk $8 \cdot 7 = 56$ darab egybevágó téglalapra, melyek oldalai $\frac{1}{5}$ és $\frac{1}{3}$ egység hosszúak. (Az a oldalt 8, a b oldalt 7 egyenlő részre osztjuk fel párhuzamos egyenesekkel.) Egy-egy ilyen téglalap területe $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ területegység, mert belőlük $5 \cdot 3 = 15$ darab fed le az egységnégyzetet. Az eredeti téglalap területe így $8 \cdot 7 \cdot \frac{1}{15} = \frac{56}{15}$ valóban.

Egy másik megoldási lehetőség, hogy a -t és b -t közös nevezőre hozva, a téglalapot $\frac{1}{15}$ egység oldalhosszú négyzetekre bontjuk fel. Ezek területe $(\frac{1}{15})^2$ területegység, mert 15^2 darab fed le belőlük az egységnégyzetet; és $8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5$ darab fed le belőlük a téglalapot.

2. példa

A derékszögű koordináta-rendszerben adott egy négyszög négy csúcsa: $A(-6; 2)$, $B(-1; 10)$, $C(5; 7)$ és $D(6; 3)$. Mekkora a négyszög területe?

Megoldás



Első megoldás:

Megtehetnénk, hogy a négyszöget kisebb részekre daraboljuk, de elegánsabb megoldás a következő. A négyszöget befoglaljuk egy $(-6; 2)$, $(-6; 10)$, $(6; 10)$, $(6; 2)$ csúcsú téglalapba, s ennek területéből levonjuk az ábra szerinti t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 (könnyen számolható) területeket. A befoglaló téglalap területe $T = 12 \cdot 8 = 96$ (területegység), az egyes részterületek rendre $t_1 = \frac{5 \cdot 8}{2}$, $t_2 = \frac{6 \cdot 3}{2}$, $t_3 = 1 \cdot 3$, $t_4 = \frac{1 \cdot 4}{2}$, $t_5 = \frac{12 \cdot 1}{2}$. Így

$$T_{ABCD} = T - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 96 - 20 - 9 - 3 - 2 - 6 = 56 \text{ (területegység).}$$

Másképpen (útmutatás):

Az A, B, C, D csúcsok merőleges vetületei az x tengelyen legyenek A', B', C', D' . Ekkor ha az $A'ABB', B'BCC', C'CDD'$ trapézok területeinek összegéből levonjuk az $A'ADD'$ trapéz területét, az eredeti $ABCD$ négyszög területét kapjuk. A trapézok területe egyszerűen számolható, például

$$T_{A'ABB'} = \frac{(A'A + B'B)}{2} \cdot A'B' = \frac{(2 + 10)}{2} \cdot 5 = 30 \text{ (területegység) stb.}$$

3. példa

Az ABC háromszögben a 10 cm hosszú BC oldalon úgy veszünk fel egy P pontot, hogy $PA = 8$ cm és $\angle CPA = 55^\circ$. Mekkora a háromszög területe?

Megoldás**Első megoldás:**

Jelöljük a $\angle CPA$ szöget φ -vel, a BC oldalt a -val, a hozzá tartozó magasságot m -mel, a PA szakasz hosszát pedig h -val (ábra). Az m magasság a megfelelő derékszögű háromszögben megadható: $m = h \cdot \sin \varphi$. A keresett terület tehát

$$t = \frac{a \cdot h \cdot \sin \varphi}{2} \approx 32,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

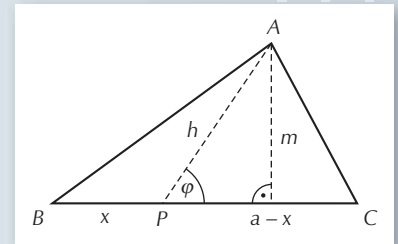
Második megoldás:

Kissé bonyolultabb, de talán többet árul el a következő gondolatmenet. Jelölje x a BP szakasz hosszát, ekkor $PC = a - x$. Az ABC háromszög területét az APB és

$$APC \text{ háromszögek területének összegeként írjuk fel: } t_{APC} = \frac{(a-x) \cdot h \cdot \sin \varphi}{2} \text{ és } t_{APB} = \frac{x \cdot h \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2}.$$

$$\text{Mivel } \sin \varphi = \sin(180^\circ - \varphi) \text{ minden szögre, így } t_{APC} + t_{APB} = \frac{(a-x) \cdot h \cdot \sin \varphi}{2} + \frac{x \cdot h \cdot \sin \varphi}{2} = \frac{a \cdot h \cdot \sin \varphi}{2}$$

adódik.

**Megjegyzés**

Akár a kapott eredményt is nevezhetnénk „területképlet”-nek; főleg akkor, ha a PA szakasz a háromszög valamelyik nevezetes vonala (súlyvonal, szögfelező). Speciális esetként, ha PA a magasság, akkor $\sin \varphi = 1$, és visszakapjuk a $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$ képletet.

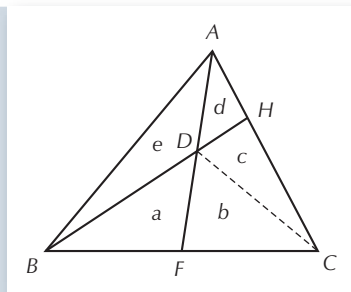
Egyébként a formula a négyszögek $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}$ területképletére emlékeztet (nem véletlenül), ahol φ az e, f átlók által bezárt szög.

4. példa

Az ABC háromszögben F a BC oldal felezőpontja, H pedig az AC oldal A -hoz közelebbi harmadolópontja. Az AF és BH szakaszok négy részre osztják a háromszöget. Mekkora ezen részek területe, ha $T_{ABC} = 60 \text{ cm}^2$?

Megoldás

Az AF és BH szakaszok metszéspontja legyen D , és a DC szakasz behúzásával kapott részháromszögek területét jelöljük az ábra szerint a, b, c, d, e -vel.



Az öt ismeretlen miatt megpróbálunk öt egyenletet felírni (a mértékegység cm^2), ezekhez az ismert tételeket használhatjuk fel:

- az azonos magasságú háromszögekben a területek aránya megegyezik a háromszögek alapjainak arányával; illetve
- az azonos alapú háromszögekben a területek aránya megegyezik a háromszögek alaphoz tartozó magasságainak arányával.

A területre adott feltétel szerint (1) $a + b + c + d + e = 60$.

A BFA és CFA háromszögek területe megegyezik, mert BF és FC alapjuk egyenlő, és a hozzájuk tartozó A csúsból húzott magasságuk közös. (Máris alkalmaztuk a fenti tételt!) Innen (2) $a + e = 30$. (A $b + c + d = 30$ egyenletet nem írjuk fel, mert

nem ad további információt: (1)-ből és (2)-ből következik.)

Ugyanígy $\frac{t_{AHB}}{t_{CHB}} = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{2}$, mert a két háromszögben a B -ből húzott magasság közös. Innen tehát

(3) $d + e = 20$ adódik.

Mivel F a BCD háromszögben is oldalfelező pont, $T_{BFD} = T_{CFD}$, így felírható (4) $a = b$.

Hasonlóan az ADC háromszögben (5) $2d = c$ adódik.

A megoldandó egyenletrendszer tehát a következő:

$$(1) \ a + b + c + d + e = 60,$$

$$(2) \ a + e = 30,$$

$$(3) \ d + e = 20,$$

$$(4) \ a = b \text{ és}$$

$$(5) \ 2d = c.$$

(4) és (5) segítségével kiküszöböljük b -t és c -t, kapjuk:

$$(1)': 2a + 3d + e = 60,$$

$$(2) \ a + e = 30,$$

$$(3) \ d + e = 20.$$

Végül (2)-ből és (3)-ból felhasználhatjuk e -t, s ezt (1)'-be helyettesítve

$$(1)'': 2 \cdot (30 - e) + 3 \cdot (20 - e) + e = 60.$$

Ennek megoldása $e = 15$; rendre visszahelyettesítve pedig négyzetcentiméterben az $(a, b, c, d, e) = (15, 15, 10, 5, 15)$ megoldást kapjuk. A kérdésben szereplő négy rész területe tehát $a = 15 \text{ cm}^2$, $b + c = 25 \text{ cm}^2$, $d = 5 \text{ cm}^2$, $e = 15 \text{ cm}^2$.

Megjegyzések

Érdekes, hogy a kapott eredmény nem függ a háromszög konkrét oldalaitól és szögeitől (csak a területtől, illetve a szakaszok osztásarányától).

Az azonos magasságú háromszögekre vonatkozó fenti tételt *fordított irányban is alkalmazhatjuk*. Mivel $a = e$, és a DFB és DAB háromszögek B -ből húzott magassága közös, ezért szükségképpen $FD = DA$ adódik. Vagyis a területszámítási módszerekkel azt a mellékeredményt is megkaptuk, hogy D az AF szakasz felezőpontja.

Fogalmak

távolság;
előjeles távolság;
terület.

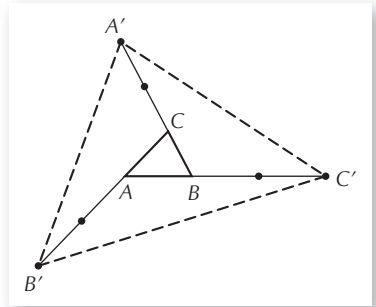
A **kör kerületét** az ókori Kelet népei (Egyiptom, Mezopotámia, Kína, India) különböző pontossággal határozták meg. A görög *Arkhimédész* (Kr. e. 287–212) a kört egyre nagyobb oldalszámú, beírt és körülírt szabályos sokszögekkel közelítette, s a kör k kerületének és d átmérőjének arányára a $3\frac{10}{71} < \frac{k}{d} < 3\frac{1}{7}$ egyenlőtlenségeket kapta. Ma ezt az arányt π -vel jelöljük.

A kör területét – kielégítő pontossággal – szintén a kétoldali közelítés módszerével határozta meg.

FELADATOK

1. K2

Az egységnyi területű ABC háromszög AB , BC és CA oldalegyenesein, azonos körüljárási irányban, rendre felvesszük a C' , A' és B' pontokat úgy, hogy $\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = 3$ teljesüljön (ábra). Mekkora az így kapott $A'B'C'$ háromszög területe?



2. E1

Az ABC háromszög területe 11 cm^2 . A háromszög tetszőleges P belső pontját tükrözzük

- a háromszög oldalaira, kapjuk az A_1 , B_1 és C_1 pontokat;
- a háromszög csúcsaira, kapjuk az A_2 , B_2 és C_2 pontokat;
- a háromszög oldalainak felezőpontjaira, kapjuk az A_3 , B_3 és C_3 pontokat.

Milyen határok között változhat az a) $A_2B_2C_2$ és b) $A_3B_3C_3$ háromszögek területe?

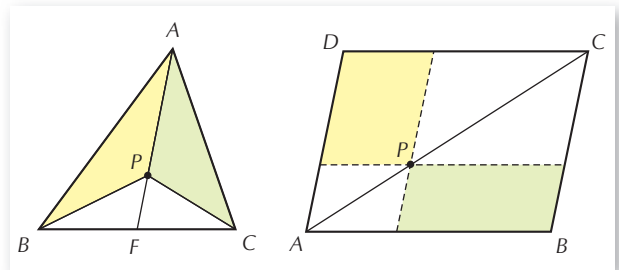
3. E1

Mekkora lehet az előző feladatban kapott $BA_1CB_1AC_1$, illetve $BA_3CB_3AC_3$ hatszögek területe?

4. K2

Mutassuk meg, hogy az egyes ábrákon a kétféle színezett rész területe egyenlő!

P a háromszög AF súlyvonalának, illetve a paralelogramma átlójának tetszőleges pontja. (A második ábrán a paralelogramma oldalával húztunk párhuzamosakat.)

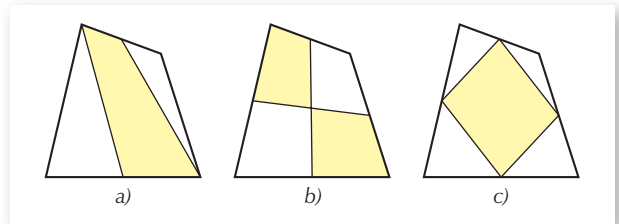


5. K2

Az egyes ábrákon a konvex négyszög oldalfelező pontjait, illetve csúcsait kötöttük össze, különböző módszerekkel. Mutassuk meg, hogy mindhárom esetben a színezett és színezetlen részek területe egyenlő!

6. K2

Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalán felvettük az E és F harmadolópontokat. Az EC és FD szakaszok a paralelogrammát négy részre osztják. Mekkora ezen részek területe, ha $T_{ABCD} = 120 \text{ cm}^2$?

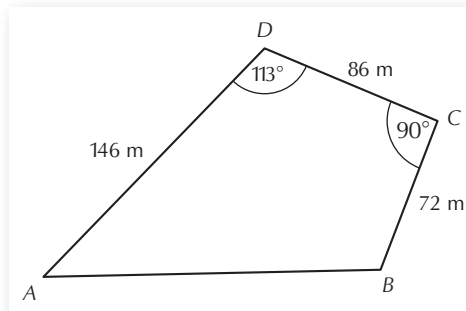


7. K2

Az $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldalának hossza 15 cm és 5 cm , szárjai 6 cm és 8 cm hosszúak. Mekkora a trapéz területe?

8. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2010.) Az alábbi ábrán egy négyszög alakú telekről készített vázlat látható. Hány négyzetméter a telek területe? Válaszát százásokra kerekítve adja meg!

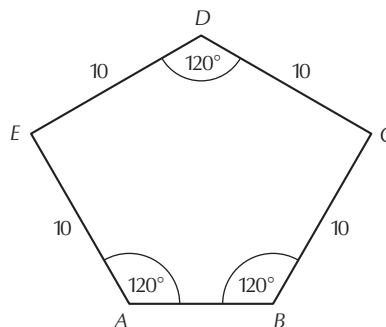
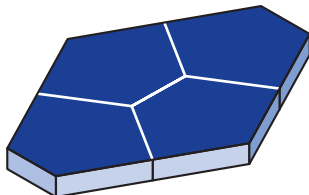


III. TÉRGEOMETRIA

9. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2020.) Egy sétálóutca díszburkolatát ötszög alapú egyenes hasáb alakú kövekkel készítik el. (Az ábrán négy ilyen követ lehet látni a burkolaton megfigyelhető elrendezésben.) A kő alapját képező $ABCDE$ ötszög tengelyesen szimmetrikus (egy, a D csúcson átmenő egyenesre), négy oldala 10 cm hosszú, három szöge 120° -os, az ábrának megfelelően.

- a) Számítással igazolja, hogy az AED és a BCD háromszög derékszögű!
b) Számítsa ki az $ABCDE$ ötszög területét!



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1456–1481, 1484–1494, 1502–1506, 1508–1510.



19. A KÖR ÉS RÉSZEINEK TERÜLETE

Rendszeresen találkozunk különböző rejtvenyűságokban (és általános iskolás feladatsorokban is) az itt látható ábrákhoz hasonlókkal.

Általában az egyes részek kerülete, területe vagy ezek egymáshoz viszonyított nagyságrendi kapcsolata a kérdés. A hasonló feladatok megoldásához gyakran van szükségünk arra, hogy kiszámoljuk a kör egyes részeinek a kerületét és a területét.

Már láttuk, hogy – a sokszögekkel ellentétben – a görbe vonalú alakzatok kerületének meghatározása nehéz probléma. Ez igaz a görbékkel határolt síkidomok területére is. Arkhimédész a már említett módszerével – amikor a kört egyre nagyobb oldalszámú, beírt és körülírt szabályos sokszögekkel közelítette – nagy pontossággal meg tudta határozni a kör területét. Ebben a könyvben komolyabb matematikai eszközök alkalmazására nincs lehetőségünk, így a kör kerületére és területére vonatkozó képleteket nem bizonyítjuk.

9. osztályban már foglalkoztunk a kör részeivel. Megállapítottuk, hogy:

Az r sugarú **kör kerülete** $K = 2r\pi$, **területe** $T = r^2\pi$.

Láttuk, hogy egy körben az ívek hosszának aránya megegyezik a hozzájuk tartozó középponti szögek arányával, ezért az ábra szerinti

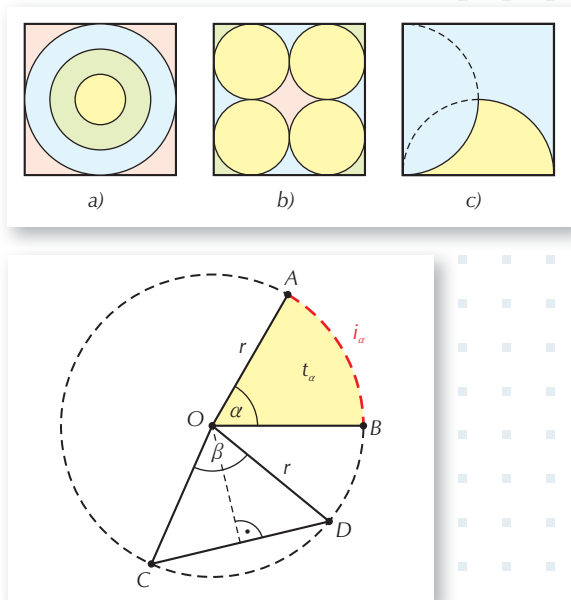
$$\alpha \text{ szögű } AOB \text{ körcikk ívének hossza } i_\alpha = K \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}.$$

$$\text{A körcikk } t_\alpha \text{ területe is arányos a középponti szöggel, így } t_\alpha = T \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}.$$

A körcikk ívhosszát és területét radiánban is megadhatjuk: $i_\alpha = \frac{2r\pi\alpha_r}{2\pi} = r\alpha_r$, illetve $t_\alpha = T \cdot \frac{\alpha_r}{2\pi} = \frac{r^2\pi\alpha_r}{2\pi} = \frac{r^2\alpha_r}{2}$. (Itt α_r azt jelzi, hogy a középponti szöget radiánban adtuk meg.)

Ez utóbbi formulát átalakíthatjuk, felhasználva az ívhosszra levezetett $i_\alpha = r\alpha_r$ összefüggést. Kapjuk, hogy a **körcikk területe** $t_\alpha = \frac{r \cdot i_\alpha}{2}$, amely alakot könnyű megjegyezni, hiszen a háromszögek területképletére hasonlít („alap · magasság / 2”).

Az ábra szerinti β középponti szögű COD körcikk két részből áll: a COD egyenlő szárú háromszögből és a CD húrra illeszkedő körszeletből. A körszelet területe a körcikk és a háromszög területének különbségeként írható fel, ez utóbbit pedig egyszerűen megadhatjuk a trigonometrikus képlettel:



III. TÉRGEOMETRIA

$$t_{\text{COD}} = \frac{r^2 \sin \beta}{2}. \text{ A körszelet területe tehát fokokban, illetve radiánban megadva: } t = \frac{r^2 \pi \beta}{360^\circ} - \frac{r^2 \sin \beta}{2},$$

$$\text{illetve } t = \frac{r^2 \beta_r}{2} - \frac{r^2 \sin \beta_r}{2} = r^2 \cdot \frac{(\beta_r - \sin \beta_r)}{2}.$$

Hasonlóan számíthatjuk ki a kör további részeinek a területét is. Például a körgyűrű területe koncentrikus körök területeinek különbségéből számítható; vagy a két párhuzamos húr által határolt sáv két körszelet területének különbségéből – ezekkel majd a konkrét feladatmegoldások során foglalkozunk.

1. példa

Emelt szint

- a) Mekkora kerületű és területű körcikk tartozik az r sugarú körben a $\beta = 240^\circ$ nagyságú középponti szöghöz?
- b) Mekkora kerületű és területű körcikk tartozik az r sugarú körben az $\alpha = 1$ radián nagyságú középponti szöghöz? Adjuk meg a megfelelő körszelet kerületét és területét is!

Megoldás

- a) A körcikk területe $\frac{r^2 \pi \cdot 240^\circ}{360^\circ} \approx 2,09r^2$, kerülete $2r + i = 2r + \frac{r\pi \cdot 240^\circ}{180^\circ} \approx 6,19r$. (Természetesen a terület nagyobb, mint a félköré, mert $\beta > 180^\circ$.)
- b) Az egység sugarú körben $\alpha = 1$ radián középponti szöghöz $i = 1$ egység hosszúságú ív tartozik. Az r sugarú körben $i = r\alpha = r$. A körcikk területe tehát $\frac{r \cdot i}{2} = \frac{r^2}{2}$, kerülete pedig $i + 2r = 3r$. A körszelet határoló húrja $h = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$ hosszúságú, így kerülete $h + i = 2r \sin 0,5 + r = r(2 \sin 0,5 + 1) \approx 1,96r$.
- Területe $\frac{r^2}{2} - \frac{r^2 \sin 1}{2} = r^2 \cdot \frac{1 - \sin 1}{2} \approx 0,08r^2$.

2. példa

Oldjuk meg a lecke bevezetőjében említett rejtvényeket! Legyen mindhárom feladatban a négyzet oldala egységnyi, s határozzuk meg, hogy mekkorák a különböző színnel jelölt részterületek, illetve hogy hány százalékát fedik le a négyzet területének! (A koncentrikus körök sugarai $r_1 = \frac{1}{6}$, $r_2 = \frac{1}{3}$ és $r_3 = \frac{1}{2}$.)

Megoldás

- a) A belső kör területe $r_1^2 \pi = \frac{\pi}{36}$ (területegység), a körgyűrűk területét pedig általában két kör területének különbségeként számíthatjuk ki. Területegységekben számolva a zöld körgyűrű területe $r_2^2 \pi - r_1^2 \pi = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{12}$, a kéké pedig $r_3^2 \pi - r_2^2 \pi = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{36}$. Végül a négy sarokrész területe együttesen a négyzet és az érintő kör területének különbségével egyenlő: $1^2 - r_3^2 \pi = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4}$, és egy ilyen sarokrész területe ennek negyede: $\frac{4 - \pi}{16}$. A megfelelő százalékokat könnyen kiszámíthatjuk, hiszen a négyzet területe, amihez viszonyítunk, egységnyi. Ezért a három körgyűrű területe rendre $\frac{\pi}{36} \cdot 100 \approx 8,7\%$ -át, $\frac{\pi}{12} \cdot 100 \approx 26,2\%$ -át és $\frac{5\pi}{36} \cdot 100 \approx 43,6\%$ -át, a kimaradó részek együtt

$\frac{4-\pi}{4} \cdot 100 \approx 21,5\%$ -át, külön-külön $\frac{4-\pi}{16} \cdot 100 \approx 5,4\%$ -át adják a négyzet területének. (A közelítő értékek használata miatt a részek összege a kerekítéstől függően nem szükségképpen lesz 100%.)

Megjegyzés

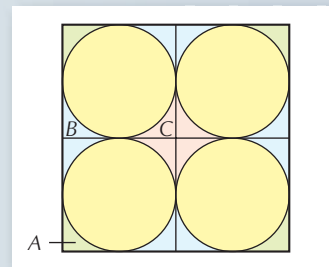
A körgyűrűk területét megkaphatjuk a középkör kerülete és a gyűrű szélességének szorzataként is. (A középkör mindkét határoló körívtől egyenlő távolságban halad.) Például a külső körgyűrű középkörének sugara $\frac{r_2+r_3}{2} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{12}$, szélessége $r_3-r_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, így területe $2 \cdot \frac{5}{12} \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{5\pi}{36}$.

b) Jelöljük A -val a körök és a négyzet két oldala által határolt (zöld színű) terület nagyságát; B -vel annak a (kék színű) területnek a nagyságát, ami két körív és a négyzet egy oldala közé esik; végül C -vel a négy kör által közrezárt (piros színű) terület nagyságát (ábra). Ha egy kör területét T jelöli, akkor a területek összege egységnyi: $4A + 4B + C + 4T = 1$.

A két középvonalat behúzva a négyzetet négy körre és 16 darab A típusú alakzatra bontjuk fel. Elegendő tehát az A területet meghatározni, a többi rész területe ebből kifejezhető.

A körök sugara $r = \frac{1}{4}$, a négy kör területe $4r^2\pi = \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$. Innen $A = \frac{1-\frac{\pi}{4}}{16} = \frac{4-\pi}{64}$,

$B = 2A = \frac{4-\pi}{32}$ és $C = 4A = \frac{4-\pi}{16}$. A körök által fedett rész területe $\frac{\pi}{4} \cdot 100 \approx 78,5\%$; az A területek összesen $4 \cdot \frac{4-\pi}{64} \cdot 100 \approx 5,4\%$, a B területek pedig $4 \cdot \frac{4-\pi}{32} \cdot 100 \approx 10,7\%$ -át fedik le a négyzet területének. $C = 4A$ miatt a C terület aránya is $\approx 5,4\%$.



c) Több – nem lényegesen különböző – gondolatmenet is célhoz vezet, ezekből néhányat megmutatunk.

Első megoldás: Jelöljük a négyzet csúcsait A, B, C, D -vel, a középpontját O -val, az AD oldal felezőpontját F -fel. Kézenfekvő lehetőség az AO „szilvماغ alakú”, két körívvel határolt terület nagyságának a meghatározása.

AFO 90°-os körcikk, területe $t_1 = \frac{(\frac{1}{2})^2\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$. Az AFO derékszögű három-

szög területe $t_2 = \frac{(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{8}$. A két terület különbsége a „szilvماغ” terü-

tének a felét adja, így a „szilvماغ” területe $t_3 = 2(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}) = \frac{\pi-2}{8}$. A kere-

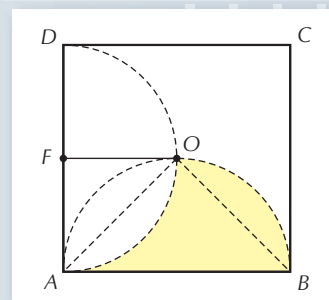
sett színezett terület pedig az AB átmérőjű félkör és a „szilvماغ” területének a különbsége:

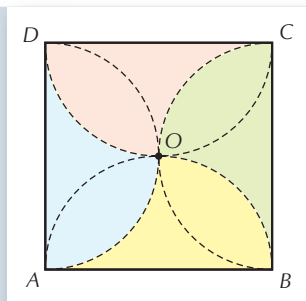
$$T = \frac{(\frac{1}{2})^2\pi}{2} - t_3 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi-2}{8} = \frac{1}{4} \text{ (területegység).}$$

Másképpen is meghatározhatjuk a „szilvماغ” területét. Például az AB, BC, CD, AD oldalakra befelé

megrajzoljuk a félköröket. Ezek területösszege $4 \cdot \frac{(\frac{1}{2})^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, s ez éppen 4 „szilvماغ”-gal több a

négyzet területénél. Így a „szilvماغ” területe $\frac{\frac{\pi}{2}-1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$.





Második megoldás: A BO „fél szilvماغ” alakú terület (tehát, amit a BO szakasz és a BO ív határol) átdarabolható az AO „fél szilvماغ”-ba. Így a színezett terület nagysága megegyezik az AOB derékszögű háromszög területével, ami az $ABCD$ négyzet területének a negyede.

Harmadik megoldás: Legegyszerűbb talán a transzformációs gondolatmenet alkalmazása. Az AOB színezett területet háromszor elforgatjuk O körül 90° -kal. Az eredeti alakzat és a három kép együttesen lefedi (hézagmentesen és átfedés nélkül) az $ABCD$ négyzetet, így az AOB satírozott terület negyede a négyzet területének.

3. példa

Egy középkori gótikus templom építőmestere négyzet alakú keretbe eredetileg két negyedkör alakú ablakelemet tervezett (a negyedkörök középpontja az ablak két alsó csúcsa). Az építető kérésére azonban végül is csak két kör alakú ablakot építettek be. Ezek érintkeznek az eredeti alsó, illetve felső kerettel, valamint a két merevítő negyedkörrel úgy, hogy az egyik ablak mindkét körívet belülről, a másik pedig mindkettőt kívülről érinti. A két ablakfelület együttesen hányad részét fedi le a négyzet alakú keret területének?

Megoldás

Jelöljük az $ABCD$ keret szélességét, azaz a négyzet oldalát a -val, a keresett ablakkörök középpontját O -val és K -val, sugarukat R -rel és r -rel, s az ábra szerinti érintési pontokat E, F, G, H -val. Érintkező körök esetében felhasználhatjuk, hogy

- az érintkezési pontba húzott sugár merőleges az érintőre; valamint
- az érintkező körök középpontjait összekötő egyenes áthalad a körök közös érintési pontján.

Ezen feltételek miatt az ábra szimmetrikus az EH középvonalra, és a B, O, F , valamint B, G, K pontok egy egyenesen vannak.

A BOE derékszögű háromszögben így $BO = a - R$, $BE = \frac{a}{2}$,

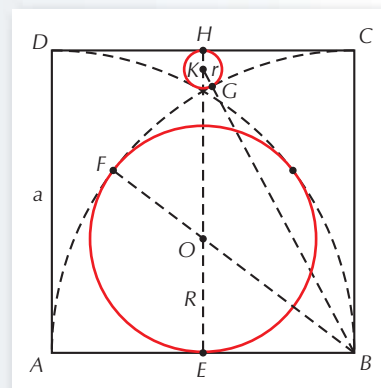
$OE = R$. Pitagorasz tételéből $(a - R)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + R^2$, innen $R = \frac{3}{8}a$ adódik.

A BKE derékszögű háromszögben $BK = a + r$, $BE = \frac{a}{2}$, $KE = a - r$. Pitagorasz tételét ismét felírhatjuk:

$$(a + r)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a - r)^2, \text{ innen } r = \frac{1}{16}a.$$

$$\text{A keresett arány } \frac{R^2\pi + r^2\pi}{a^2} = \frac{\frac{9}{64}a^2\pi + \frac{1}{256}a^2\pi}{a^2} = \frac{37\pi}{256} \approx 0,454.$$

Az ablaküveg a keret területének kb. 0,454 része.



Fogalmak

kör kerülete;
kör területe;
körívk ívének
hossza;
körívk területe;
körszelet területe.

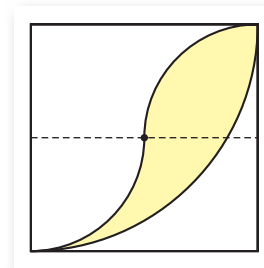
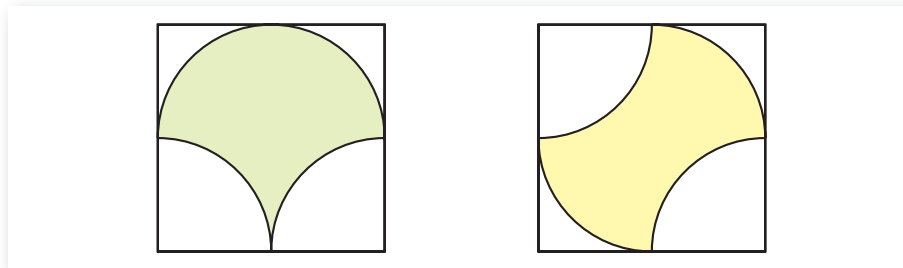
FELADATOK

1. K2

Az ábrán látható, három darab negyedkörívből álló logó egy kereskedelmi cég emblémája. Mekkora az idom kerülete és területe, ha a négyzet oldala 10 cm?

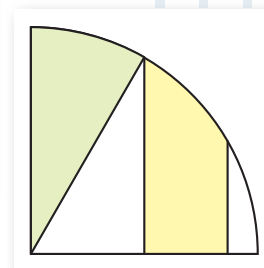
2. K2

Mekkora az ábrákon látható színezett és színezetlen területek aránya? (A két ábrán összesen hat negyedkörív és egy félkörív van.)



3. K2

Negyedkörív harmadolópontjaiból merőlegeseket bocsátottunk az egyik határoló szögszárra. Mutassuk meg, hogy a két színezett terület egyenlő!

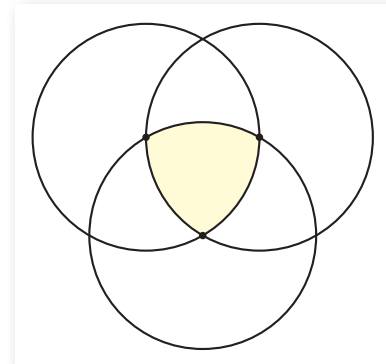


4. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2016.) Egy 19 méter sugarú körben az AC húr 40° -os szöget zár be az AB átmérővel. Az AB és az AC szakaszok a körlapot három részre osztják. Számítsa ki mindhárom rész területét! Válaszait m^2 -ben, egészre kerekítve adja meg!

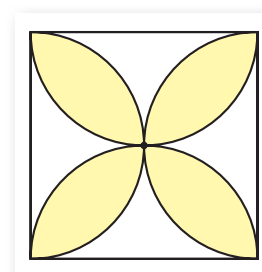
5. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2020.) Az ábrán mindhárom kör sugara 3 cm, és mindegyik kör áthalad a másik két kör középpontján. Számítsa ki a három körlemez közös részének területét!



6. K2

Egy ház építéséhez a négyzet alakú ablakkeretekbe olyan „propellerszerű”, színes üvegből készült díszítőelemeket terveztek, amelyeket négy félkörív határol (ábra). Az ablakkeretek oldala 60 cm. Mekkora felszínű színes ablaküvegre van összesen szükség, ha 12 díszablak lesz az épületben, és a gyártás során 30%-os veszteséggel számolnak?



7. K2

Mekkora az 1 méter sugarú körbe írt szabályos n oldalú sokszög kerülete és területe?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1515–1517, 1521–1527, 1543–1544, 1553–1554, 1559.

Vajon jól számoltak Jack London hősei?

„Autók és hátsólovak a tejegzdaságon túl vagy két kilométernyire vitték a társaságot, ahol egy négyzet alakú sík földrész be volt kerítve. Dick megjegyezte, hogy ez éppen huszonöt hold. [...]

A sík rész közepén egy legalább tizenkét méter magas, egész alacsonyan megerősített acélpózna állott. A pózna tetején lévő doból vékony dróthuzal futott a föld legszéle felé és ott egy kis benzines lokomobil egyik kormánycsapjához kapcsolódott. A lokomobil mellett két szerelő álldogált. Dick intésére megindították a motort és útnak indították. [...]

Az acélpózna csúcsán ülő dob lassan gombolyította fel a dróthuzalt és a gép, amelyet a huzal körben engedett, kör alakú barázdát szántott, vagy nem is kör alakút, hanem befelé törekvő spirális-alakút.

– Nincs ló, nincs hajtó, nincs munkás. Csak a farmer kell, hogy megindítsa a motort és elindítsa az útján. [...]

– Most már mindössze az hiányzik, – mondta Graham – hogy ezt a kört négyszögesíteni lehessen.

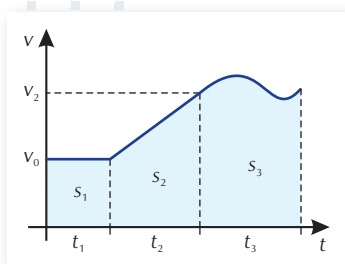
– Úgy van, – helyeselt Gulhuss úr – a négyszögbe helyezett kör levág a földből néhány holdat.

Graham arca egy pillanatig a fejszámolás jeleit árulta el. Aztán kimondta:

– Huszonöt holdanként átlag hét hold a hozzávetőleges veszteség.”

(Jack London: *A Lady, Fiesta* / Saxum, 1996)

20. A TERÜLETSZÁMÍTÁS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA



Területszámítási módszereket már az ókori matematikusok munkáiban is találunk. Nagyobb kiterjedésű, sokszög alakú földterületek – szántóföldek, erdők vagy paragon maradt területek – méretét a gyakorlatban a mai napig úgy határozzák meg, hogy a földeket háromszög alakú részekre osztják, s ezek területösszegét számolják ki. (Régen arányos méretű térképeken dolgoztak, ma esetleg műholdas felvételeket alkalmaznak.)

A fizikai mennyiségekkel való számolás során is gyakran van szükségünk valamilyen görbe alatti terület meghatározására. Például az ábrán egy test sebesség-idő grafikonja látható. Kérdés: mekkora a test által megtett út?

A grafikon alapján a mozgást három részben érdemes vizsgálnunk.

Az első, t_1 ideig tartó szakaszon a test egyenletes v_0 sebességgel halad, megtett útja $s_1 = v_0 t_1$, ami az ábrán éppen a v_0 és t_1 oldalú téglalap területe. A második t_2 ideig tartó szakaszon a test egyenletes a gyorsulással mozogva eléri a v_2 sebességet, a megtett útja $s_2 = v_0 t_2 + \frac{a}{2} \cdot t_2^2$, ami a megfelelő trapéz területe. Végül a harmadik t_3 szakaszon a mozgás gyorsulása nem állandó. Belátható, hogy az s_3 utat – hasonlóan az első két szakaszhoz – most is a görbe alatti terület nagysága adja meg. Ennek meghatározása ez esetben bonyolultabb matematikai feladat.

A területszámítás matematikán belüli alkalmazásait már az előző leckékben is láttuk. Például megállapítottuk a fontos és jól használható tételt: az azonos alapú háromszögek területe arányos a magasságaikkal (illetve az azonos magasságú háromszögek területe arányos a megfelelő magassághoz tartozó oldalaik hosszával). Ez a tétel alkalmas volt arra is, hogy a háromszögek területarányából meghatározzuk az oldalak vagy magasságok hosszának arányát (alap nevű oldala az egyenlő szárú háromszögnek van).

Ez utóbbi tipikus alkalmazási mód arra, amikor az egyenlő területek felírásából valamilyen egyéb objektum (alap, magasság) nagyságára következtethetünk. Néhány további példát felsorolunk, illetve az alábbiakban kidolgozunk.

1. Már többször láttuk, hogy ha az a , b befogójú, c átfogójú derékszögű háromszögben kétféleképpen felírjuk a területet, közvetlenül megkapjuk az átfogóhoz tartozó m_c magasságot. $\frac{ab}{2} = \frac{cm_c}{2}$, innen $m_c = \frac{ab}{c}$.

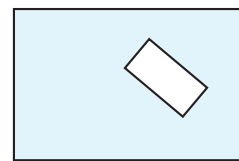
2. Korábban a nevezetes körök sugarai segítségével is megadtunk néhány háromszög-területképletet. Kézenfekvő lehetőség tehát a területből következtetni a körök sugarainak a hosszára.

A területszámítás alkalmazására gyakran van szükség a térgeometriában, akár a felszín-, akár a térfogatszámítás során. (A következő leckékben a témát részletesen tárgyaljuk.) Végül megemlíthetjük még, hogy területszámítási módszerekre nemcsak a geometriában, hanem a matematika egyéb területein is szükség van. Néhány példa (bár a sort most is sokáig folytathatnánk):

- Korábban területek segítségével is igazoltunk vagy szemléltettünk algebrai azonosságokat.
- A statisztikában alkalmazott oszlopdiagramok területe arányos az ábrázolandó mennyiség értékével, s hasonlót állíthatunk a kördiagram körcikkeinek területéről (szögéről) is.
- Egyes valószínűségszámítási feladatokban olyan események szerepelnek, amelyek a hozzájuk rendelt területtel arányos valószínűségűek.

Rejtvény

Egy téglalap alakú kartonpapírból kivágtunk egy kisebb téglalapot (ábra). Hogyan tudnánk a maradék papírlapot egyetlen (egyenes) vágással két egyenlő területű részre darabolni?



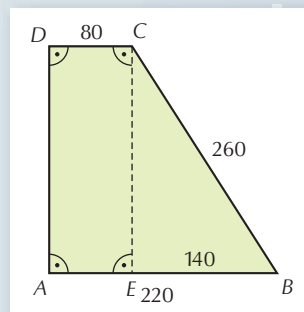
1. példa

Egy legelő alakja jól közelíthető olyan derékszögű trapézzal, amelyben a párhuzamos oldalak hossza 220 méter és 80 méter, a rájuk nem merőleges szár hossza pedig 260 méter. (A merőleges oldal hosszát nem tudjuk megmérni.) Hány hektár területű a legelő?

Megoldás

Jelölje a legelő csúcsait A , B , C , D , legyen AB és CD párhuzamos, $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$. Vegyük fel az AB alpra merőleges CE magasságot (ábra). Az EBC derékszögű háromszögben $CE^2 = 260^2 - 140^2 = 48\,000$, s innen $CE \approx 219$ (m). A legelő területe

$$t = \frac{(AB + CD) \cdot CE}{2} = \frac{(220 + 80) \cdot 219}{2} \approx 32\,850 \text{ (m}^2\text{)} = 3,285 \text{ hektár.}$$



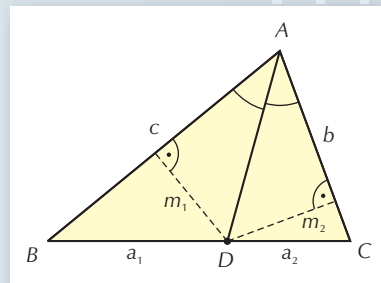
2. példa

Tudjuk, hogy bármely háromszög szögfelezője a szemköztes oldalt a szomszédos oldalhosszak arányában osztja. Adjunk erre a szögfelezőtételre területszámításon alapuló bizonyítást!

Megoldás

Az ABC háromszögben az AD szögfelező a_1 és a_2 hosszúságú szakaszokra osztja a BC oldalt (ábra). A BDA és DCA háromszögek A csúcsból húzott magassága közös, így területük aránya az alapok hosszának arányával egyezik meg:

$\frac{T_{BDA}}{T_{DCA}} = \frac{a_1}{a_2}$. Mivel D az A csúcsból húzott szögfelező pontja, ezért az AB



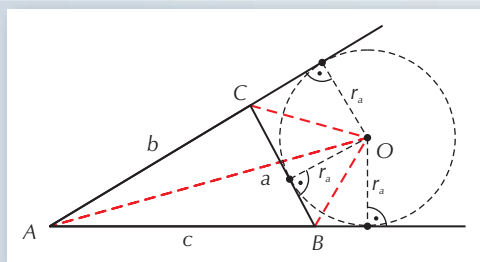
III. TÉRGEOMETRIA

és AC oldalaktól egyenlő távolságra van: $m_1 = m_2$. Így a BDA és DCA háromszögek területe az AB és AC alapok hosszának arányával egyezik meg, hiszen a D csúsból húzott magasságuk egyenlő: $\frac{T_{BDA}}{T_{DCA}} = \frac{c}{b}$. A két egyenlet összevetéséből $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}$ adódik; azaz a területszámítás segítségével újabb bizonyítást adtunk a tételre.

3. példa

Igazoljuk a háromszög $t = r_a(s - a)$ területképletét! (A háromszög BC oldalához írt kör sugarát jelöli r_a , a háromszög félkerületét pedig s .)

Megoldás



Jelölje O a BC oldalhoz írt kör középpontját (ábra). Az ABC háromszög területét úgy állítjuk elő, hogy az ABO és ACO háromszögek területeinek összegéből levonjuk a BCO háromszög területét. $T_{ABO} = \frac{AB \cdot r_a}{2}$ és $T_{ACO} = \frac{AC \cdot r_a}{2}$ (a háromszögeken kívül halad az r_a magasság), illetve $T_{BCO} = \frac{BC \cdot r_a}{2}$. Alkalmazzuk az oldalakra vonatkozó $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ helyettesítést:

$$t = T_{ABO} + T_{ACO} - T_{BCO} = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} = \frac{r_a}{2}(c + b - a) = \frac{r_a}{2}(2s - 2a) = r_a(s - a).$$

Az állítást igazoltuk.

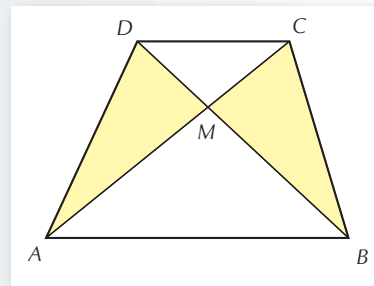
4. példa

Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD , átlóinak metszéspontja M . Bizonyítsuk be, hogy az ADM és BCM háromszögek területe megegyezik!

Megoldás

Mivel AB és CD párhuzamosak, az ABD és ABC háromszögek területe megegyezik. (AB alapjuk közös, és a D -ből, illetve C -ből húzott magasságaik ugyanakkorák.) Ha az egyenlő területekből kivonjuk a közös ABM háromszög területét, a maradék területeknek is meg kell egyezniük.

$T_{ABD} - T_{ABM} = T_{ABC} - T_{ABM}$, azaz $T_{ADM} = T_{BCM}$, s ez éppen a bizonyítandó állítás.



Megjegyzés

Az állítás megfordítása is igaz: ha az AC és BD szakaszok úgy metszik egymást az M pontban, hogy $T_{ADM} = T_{BCM}$, akkor AB és CD párhuzamosak. Ugyanis a $T_{ADM} = T_{BCM}$ egyenlőségből következik $T_{ABD} = T_{ABC}$ (mindkét oldalhoz hozzáadtuk T_{ABM} -et); ebből következik, hogy az azonos AB alaphoz ugyanakkora magasság húzható C -ből és D -ből; innen pedig már adódik AB és CD párhuzamossága.

FELADATOK

1. K2 Oldjuk meg a leckében kitűzött rejtvényt! (Lyukas kartonlap felezése egyetlen vágással.) Hogyan általánosíthatnánk a feladatot? (Segítség: gondoljunk a középpontos szimmetriára!)

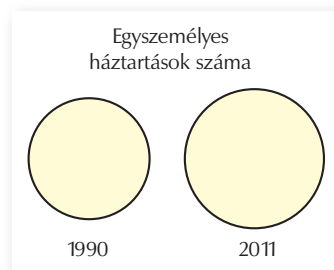
2. K1 A *Számkivetett* (2000, rendezte Robert Zemeckis) című film főhőse (Tom Hanks) repülőgép-szerencsétlenséget szenved. A gép a viharban egy óra alatt kb. 400 mérfölddel letért útjáról, s a túlélő szerint ezért az őt keresők „sosem fogják megtalálni”. Számításai szerint egy ekkora sugarú kör területe mintegy félmillió négyzetmérföld, ami kétszer akkora, mint Texas. Jól számolt?
(Nézz utána az interneten: pontosan hány méter egy angol [szárazföldi] mérföld, és mekkora Texas területe!)



3. K2 Egy háromszög oldalai $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm és $AC = 8$ cm. A háromszögbe olyan félkört rajzolunk, amelynek átmérője a BC oldalra esik, és az AC és AB oldalakat érinti.

- Hogyan szerkeszthetjük meg a félkört?
- Mekkora a félkör sugara?

4. K2 (Érettségi feladat alapján, középszint, 2015.) Az egyszemélyes háztartások száma 1990-ben 946 ezer volt, majd 2011-re ez a szám 1 317 ezerre nőtt. Szeretnénk ezeket az adatokat egy plakáton két olyan körlappal ábrázolni, amelyek területe az adatok nagyságával egyenesen arányos. Az 1990-es év adatát egy 4,5 cm sugarú körlappal jelenítjük meg. Mekkora legyen a 2011-es adatot ábrázoló körlap sugara?



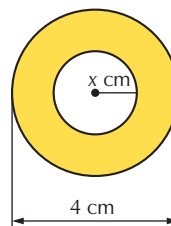
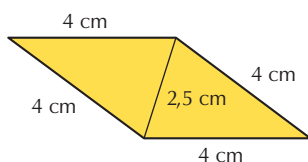
5. K2 (Érettségi feladat alapján, középszint, 2011.) Dani Brigitta rombusz alakú süteményeiből megpróbált minél többet úgy elhelyezni körben egy süteményes tálon, hogy mindegyik süteménynek az egyik hegyesszögű csúcsa a tál középpontjában legyen (a sütemény méretei az ábra szerintiek). Sem élére nem állított, sem egymásra nem rakott süteményeket.

a) Legfeljebb hány sütemény fér el így egy körben?

Andrea linzerkarikatésztá-szaggatót használt a sütemény elkészítéséhez.

A rombusz alakú sütemény és a linzerkarika felülnézetben ugyanakkora területűek.

b) Hány cm a linzerkarika belső körének a sugara?



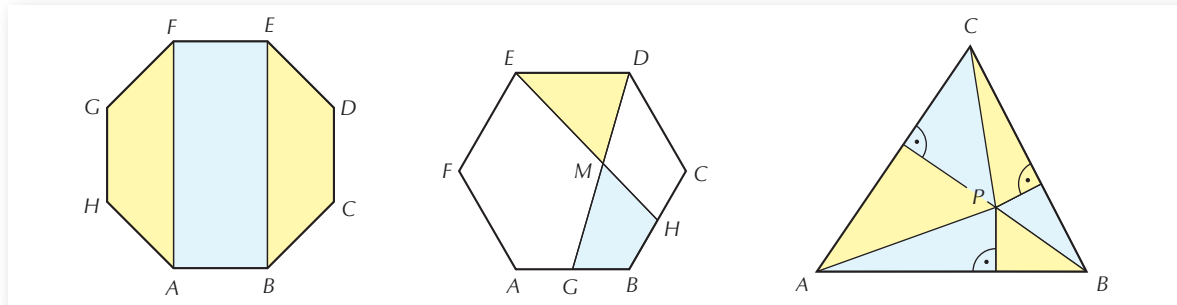
III. TÉRGEOMETRIA

6. E1

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2009.) Egy dobozban 100 darab azonos méretű golyó van: 10 fehér, 35 kék és 55 piros színű. Ábrázolja kördiagramon a 100 golyó színek szerinti eloszlását! Adja meg fokban és radiánban a köríkek középponti szögének nagyságát!

7. E1

Mutassuk meg, hogy az ábrán látható szabályos sokszögekben a kétféle színnel színezett területek egyenlők! (A szabályos hatszögben oldalfelező pontokat kötöttünk össze a csúcsokkal; a szabályos háromszögben pedig tetszőleges belső pontból merőlegeseket bocsátottunk az oldalakra.)



8. E2

Az ABC hegyesszögű háromszög tetszőleges P belső pontjának az a , b , c oldalaktól mért távolságai rendre legyenek d_a , d_b , d_c , a megfelelő magasságok pedig m_a , m_b , m_c . Mekkora lehet a $\frac{d_a}{m_a} + \frac{d_b}{m_b} + \frac{d_c}{m_c}$ összeg?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1482–1483, 1495–1501, 1507, 1511–1514, 1518–1520, 1528–1542, 1545–1552, 1555–1558, 1560–1584.

21–22. A FELSZÍN ÉS A TÉRFOGAT; A HASÁB ÉS A HENGER



Mindennapjaink során gyakran találkozunk felszín- és térfogatszámítási problémákkal. Az élelmiszerboltokban egyes árucikkeket a térfogatuk alapján vásárolunk (tej, tejtermékek, üdítők és szeszes italok); a háztartási boltokban például a vásárolandó festékmennyiséget adott nagyságú felületre számítjuk ki; az adott időszakban fizetendő víz- és gázszámla pedig közelítőleg a fogyasztott mennyiség térfogatával arányos. (Persze ha egy üzemben ki akarják festeni a csarnok falait, a felület nagyságának ismeretében a szükséges festékmennyiséget úgy is meghatározhatják, hogy a festéskor felvitt anyag vastagságát becsülik meg.)

A szakemberek a nagy építkezések során számtalanszor végeznek térfogatszámításokat, gyakran azért, hogy ennek ismeretében tömeget becsülhessenek. (A tömeg a sűrűség és a térfogat szorzataként számítható ki.) Egy-egy útkereszteződési csomópont, híd

vagy vasút építéskor nagyon nagy mennyiségű földet kell megmozgatni. Tudni kell, hogy adott köbméter térfogatú (vagy adott tonnányi) földet mennyi idő alatt lehet elhordani különböző munkagépekkel, vagy hogy egy kijelölt útszakaszhoz mekkora mennyiségű aszfaltot vagy betont kell szállítani.

Az épületek tervezésekor is különböző szempontokat kell figyelembe venni. Például a lakótér térfogatának („légköbméter”) megfelelően kell a fűtést tervezni (ne legyen se sok, se kevés radiátor). Vagy ha előírt összeg költhető egy-egy épületrészre, például a közfalakra, akkor – ismervén a falak össztérfogatát – megállapítható, hogy milyen árfekvésű építőanyag alkalmazására lesz elegendő a költségvetési keret.

A mindennapi életben persze nekünk, átlagpolgároknak ritkán van szükségünk konkrét számolásokra, inkább csak egyszerű becsléseket végezhetünk. A felszínnel és térfogattal kapcsolatos tippelésekkel azonban óvatosan kell bánni: a térbeli arányok megállapítása nem mindig könnyű feladat, a térszemléletünk gyakran cserben hagy minket. Egy érdekesség például, hogy hasonló testek felszíne a hasonlóság arányának a négyzetével, míg térfogatuk a hasonlósági arány köbével arányos. (Vagyis egy kétszer akkora átmérőjű dinnye már kb. nyolcszor nehezebb az előzőnél, ezért nem biztos, hogy el tudjuk cipelni.) A mértékegység-átváltásoknál is vigyáznunk kell a nagy számokkal: egy méter ezer milliméterrel egyenlő, de egy négyzetméter már egymillió négyzetmilliméterrel, egy köbméter pedig már egymilliárd köbmilliméterrel!

Általában azt mondhatjuk, hogy a térgeometriai becsléseket érdemes közelítő matematikai számításokkal ellenőrizni, becslőlni. A térszemlélet csalafintaságaira, meglepő becslési eredményekre a későbbi leckékben is mutatunk példákat.



TESTEK TÉRFOGATA ÉS FELSZÍNE

A testek felszínének, illetve térfogatának jelölésére a hagyományos A , illetve V betűket használjuk. (Ezek a megfelelő *area* ('terület') és *volumen* ('térfogat') latin szavak kezdőbetűi.) Az $ABCDEFGH$ kocka térfogatát tehát $V(ABCDEFGH)$ vagy $V_{ABCDEFGH}$ módon jelölhetjük. A továbbiakban szükségünk lesz a **poliéderek** fogalmára.

Definíció

A sokszöglapokkal határolt testet **poliédernek** nevezzük.

Tanulmányaink során már sokféle poliéderrel találkoztunk. Poliéder például a téglatest, a hasáb és a gúla, vagy a szabályos testek. Nem poliéder például a kúp és a henger, hiszen ezeket nem sokszöglapok, hanem görbült felületek határolják.

A testek térfogatát – a sokszögek területéhez hasonló módon – néhány szemléletes tulajdonság segítségével határozhatjuk meg. Az egyszerűség kedvéért először a poliéderek térfogatával foglalkozunk.

Kultúrtörténet

„Minden ágon egy mérő makk a Bakonyban” – énekli Háy János. Nézz utána az interneten, melyek voltak a fontosabb régi magyar híg és száraz űrmértékek (például mérő, véka, akó, pint, icce, messzely)! Mekkora az értékük mai mértékegységekben kifejezve? Hogyan váltották át őket?

III. TÉRGEOMETRIA

Bármely A poliéderhez hozzárendelhetünk egy $V(A)$ pozitív valós számot, a test **térfogatát**. A hozzárendeléstől elvárjuk a következő tulajdonságok teljesülését:

1. Egybevágó poliéderek térfogata egyenlő. [Ha $A \cong B$, akkor $V(A) = V(B)$.]
2. Ha egy poliédert két poliéderre darabolunk, akkor ezek térfogatának az összege megegyezik az eredeti poliéder térfogatával.
3. Megállapodunk abban, hogy az egységnyi oldalélű kocka térfogata legyen 1 térfogategység.

A területszámításhoz hasonlóan a 2. darabolást ismételten alkalmazhatjuk a részpoliéderekre. Ezért az is igaz, hogy ha a poliédert **véges számú** poliéderre daraboljuk, akkor az egyes poliéderek térfogatának az összege megegyezik az eredeti poliéder térfogatával.

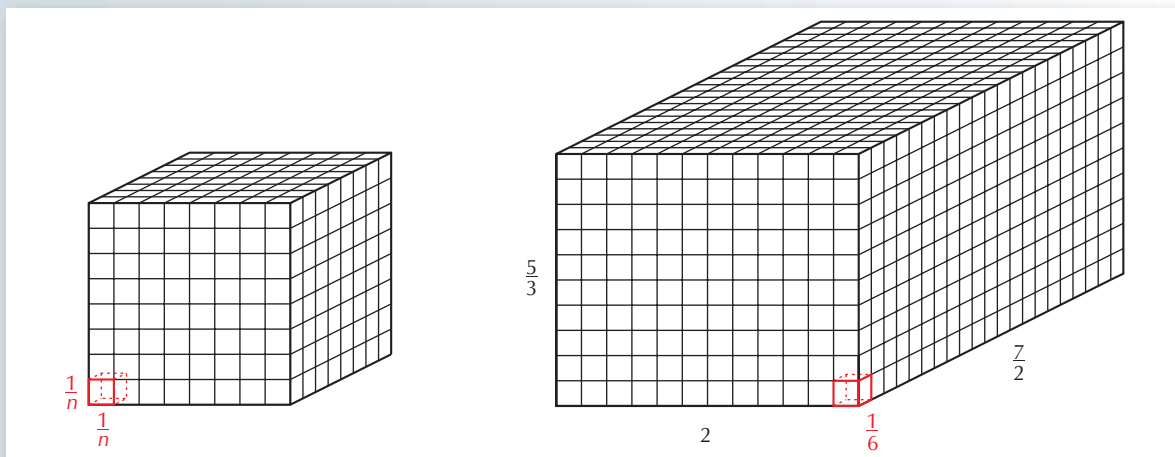
1. példa

A fenti tulajdonságok alkalmazásával határozzuk meg annak a téglatestnek a térfogatát, amelynek egy csúcsból kiinduló élei $a = 2$, $b = \frac{7}{2}$ és $c = \frac{5}{3}$ egység hosszúak!

Mekkora a téglatest felszíne?

Megoldás

Először megmutatjuk, hogy n természetes szám esetén az $\frac{1}{n}$ oldalélű kocka térfogata $V' = \frac{1}{n^3}$, s ehhez az egységkockát $\frac{1}{n}$ élű kisebb kockákra daraboljuk. (A darabolást egy-egy lapsíkkal párhuzamos, egymástól $\frac{1}{n}$ távolságban haladó síkokkal tehetjük meg.) A kis kockákból minden sorban és minden oszlopban n darab van, így egy rétegben $(n \cdot n)$ darab (ábra). S mivel n számú réteg helyezkedik egymáson, ezért a kis kockák darabszáma n^3 .



A kis kockák egybevágók, térfogatuk egyenlő, és térfogatuk összege a nagy kocka egységnyi térfogatát adja. A felírt 1–3. tulajdonságokból tehát valóban adódik a $V' = \frac{1}{n^3}$ összefüggés.

Mivel 2 és 3 legkisebb közös többszöröse 6, a téglatestet érdemes $\frac{1}{6}$ oldalélű kisebb kockákra

darabolnunk. Ekkor az ábra szerint egy-egy sorban $\frac{2}{\frac{1}{6}} = 12$ darab, minden sorban $\frac{7}{\frac{1}{6}} = 21$ darab kis

kocka van, rétegenként tehát $12 \cdot 21 = 252$ darab. A rétegek száma $\frac{5}{\frac{1}{6}} = 10$, a kis kockák száma így

$252 \cdot 10 = 2520$. Egy-egy kis kocka térfogata a fenti eredményből adódóan $\frac{1}{6^3}$, a téglatest térfogata pedig $2520 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{35}{3}$ térfogategység (ami éppen a három élhossz szorzata).

A felszín meghatározása tulajdonképpen területszámítási feladat, nem jelent új elvi nehézséget. A téglatestet határoló felület hat téglalapból áll, ezek közül kettő-kettő egybevágó. Az a és b oldalú téglalap területe $t_1 = a \cdot b$, a b és c oldalú lapok területe $t_2 = b \cdot c$, végül az a és c oldalú lapok területe $t_3 = a \cdot c$. A téglatest felszíne így $A = 2(t_1 + t_2 + t_3) = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3}\right) = \frac{97}{3}$ (területegység).

Általánosítás:

A fenti térfogatszámítási eljárás minden esetben alkalmazható, amikor a téglatest a , b , c oldaléleinek hossza racionális szám. Ekkor mindig találunk olyan n értéket, amelyre a téglatestet feldarabolhatjuk $\frac{1}{n}$ élű kisebb kockákra. A kis kockákból – a megoldásban leírt gondolatmenetet követve – $\frac{a}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{b}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{c}{\frac{1}{n}} = abc \cdot n^3$ darabra van szükség, s mivel egy kis kocka térfogata $\frac{1}{n^3}$, a téglatest térfogatára a

jól ismert $V = abc \cdot n^3 \cdot \frac{1}{n^3} = abc$ képletet kapjuk.

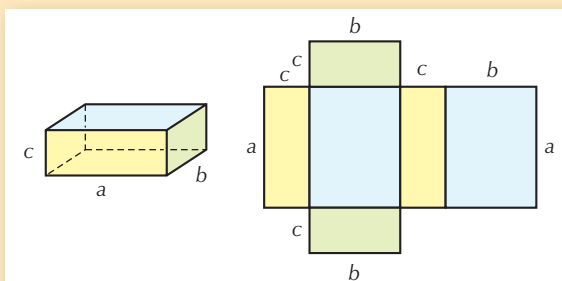
Ha az oldalélek között van olyan, amely hosszának irracionális a mértékszám, akkor a fenti eljárás nem alkalmazható. A téglatest térfogata ekkor bonyolultabb módszerekkel határozható meg. A $V = abc$ összefüggés ekkor is igaz marad, de ebben a könyvben ezt nem bizonyítjuk.

A téglatest felszínére kapott $A = 2(ab + bc + ac)$ összefüggés minden a , b , c esetén teljesül. Tetszőleges poliéder felszíne megegyezik a poliéder lapjai területének összegével, s mivel ezek sokszögek, területük kiszámítása általában sem okoz elvi nehézséget. A számolást megkönnyítheti a szemléltetés: esetleg érdemes a poliéder lapjait a síkba kiteríteni. (A kiterítés során kapott sokszöget nevezzük a poliéder **hálójának** [hálózatának].)

Tétel

Az a , b , c élű téglatest térfogata $V = abc$, felszíne $A = 2(ab + bc + ac)$.

Speciálisan az a oldalélű kocka térfogatára $V = a^3$, felszínére $A = 6a^2$ adódik.



2. példa

Egy téglatest egy csúcsból kiinduló éle, egyik lapátlója és testátlója (ebben a sorrendben): 2 , $\sqrt{29}$ és $\sqrt{78}$ cm hosszúságú. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata?

Megoldás

Jelölje az egy csúcsból kiinduló három él hosszát a , b , c , és legyen pl. $a = 2$ egység. Ha az adott lapátlót az a és b élek fogják közre, akkor a téglatest b oldalélét a lapátlóra felírt Pitagorasz-tétel, míg a c oldalélét a testátlóra felírt térbeli Pitagorasz-tétel segítségével határozhatjuk meg. A két egyenlet:

$$(1) \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{29},$$

$$(2) \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{78}.$$

Az egyenleteket négyzetre emeljük, és alkalmazzuk az $a = 2$ helyettesítést:

$$(1) 4 + b^2 = 29,$$

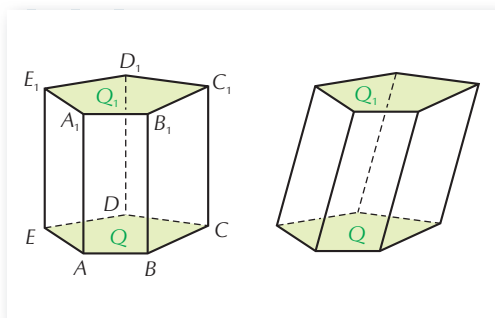
$$(2) 4 + b^2 + c^2 = 78.$$

(1)-ből $b = 5$, ezt (2)-be helyettesítve $c = 7$ adódik. A téglatest élei tehát $a = 2$ cm, $b = 5$ cm és $c = 7$ cm hosszúak. A téglatest felszíne $A = 2(ab + bc + ac) = 118$ cm², térfogata $V = abc = 70$ cm³.

A HASÁB

Húzzunk az S síkban lévő Q sokszög határoló vonalának pontjain keresztül olyan, egymással párhuzamos egyeneseket, amelyek nem párhuzamosak az S síkkal. Az így kapott felületből egy S -sel párhuzamos S_1 sík a Q -val egybevágó Q_1 sokszöget metszi ki. A Q és Q_1 sokszögek, valamint a párhuzamos egyenesek által határolt poliédert nevezzük **hasábnak**.

További elnevezések:



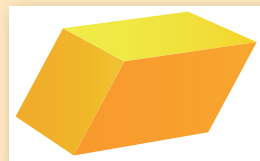
A Q és Q_1 sokszögek a hasáb **alaplappjai**, a többi lapot a hasáb **oldallappjainak** nevezzük. Az alaplapok távolsága a hasáb **magassága**, a párhuzamosoknak az S és S_1 síkok közé eső darabjai az **alkotók**. Ha az alkotók merőlegesek az alaplapokra, akkor **egyenes hasábról**, egyébként **ferde hasábról** beszélünk. A **szabályos hasáb** olyan egyenes hasáb, amelynek alaplappjai szabályos sokszögek; ekkor az alaplapok középpontjait összekötő egyenes a szabályos hasáb **tengelye**.

Az ábrán egy ötszög alapú egyenes és egy ötszög alapú ferde hasáb látható.

Néhány megjegyzés az elnevezésekkel kapcsolatban:

1. Speciális hasáb a kocka és a téglatest: a téglatest téglalap alapú egyenes hasáb, a kocka pedig olyan négyzet alapú egyenes hasáb, amelynek alkotói és alapélei egyenlő hosszúak.

2. A **paralelepipedon** paralelogramma alapú hasáb. (Minden oldallapja paralelogramma, és középpontosan szimmetrikus.)



Paralelepipedon

3. A szabályos hasáb magasságának hosszára **nincs megkötés**, alkotói is tetszőleges hosszúságúak lehetnek.

4. Ha a szabályos hasáb alaplapjai szabályos n -szögek ($n \geq 3$ egész szám), akkor a hasáb tengelye egyúttal (térbeli) forgástengely: a tengely körüli $\frac{360^\circ}{n}$ szögű forgatás a hasábot önmagába viszi.

A szabályos hasábok tehát forgásszimmetrikus testek.

5. A hasábokat eltolással is származtathatjuk. Ha például az ábrán látható Q és Q_1 ötszögek megfelelő csúcsai A, B, C, D, E , illetve A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 , akkor a $\mathbf{v} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \dots = \overrightarrow{EE_1}$ vektorú eltolás a Q ötszöget Q_1 -be viszi, s közben az ötszög pontjai az oldallapokat futják be.

6. Bármely hasábra igaz, hogy az alaplapokkal párhuzamos síkmetszetei az alaplapokkal egybevágó sokszögek.

A HASÁB TÉRFOGATA

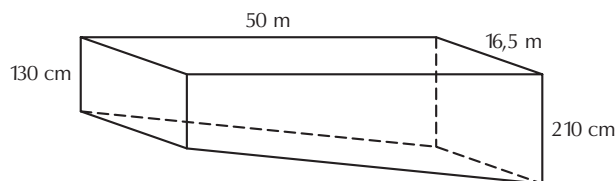
Hasábok térfogatának kiszámítására a gyakorlati életben is gyakran van szükség. Két egyszerű érettségi feladat:

3. példa

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2006.) Egy téglatest alakú akvárium belső méretei (egy csúcsból kiinduló éleinek hossza): 42 cm, 25 cm és 3 dm. Megtelik-e az akvárium, ha beletöltünk 20 liter vizet?

4. példa

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2019.) A strandon lévő egyik úszómedence 50 méter hosszú és 16,5 méter széles, az egyik végén 130 centiméter, a másik végén 210 centiméter mély. A medence egyenletesen mélyül az egyik végétől a másikig. Legfeljebb mennyi víz fér el a medencében? Válaszát tíz köbméterre kerekítve adja meg!

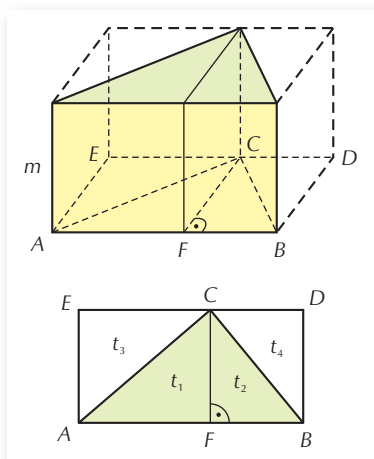


Az úszómedence olyan egyenes hasábnak tekinthető, amelynek alaplapja derékszögű trapéz. Hogyan számíthatjuk ki a térfogatát?

A hasábok térfogatát több lépésben határozhatjuk meg.

1. lépés:

Megmutatjuk, hogy a háromszög alapú egyenes hasáb térfogata $V = T \cdot m$, ahol T az alaplap területe, m a hasáb magassága.



Az ABC háromszöget belefoglaljuk például az $ABDE$ téglalapba (ezt mindig megtehetjük), s így az ábra szerint az ABC háromszög alapú egyenes hasáb is belefoglalható az $ABDE$ alapú egyenes hasádba, ami egy téglatest.

Az ABC háromszög CF magassága segítségével négy háromszögre bontjuk az $ABDE$ téglalapot, amik közül 2-2 egybevágó. Az ábra szerinti területekre teljesül, hogy $t_1 = t_3$ és $t_2 = t_4$. (Így bizonyítottuk korábban, hogy az ABC háromszög területe fele az $ABDE$ téglalap területének.) Az $ABDE$ alaplpra merőleges, CF -en áthaladó sík felvételével négy háromszög alapú egyenes hasábra bontjuk az $ABDE$ alapú hasábot, ezek közül 2-2 egybevágó egymással: a t_2 és t_4 , valamint a t_1 és t_3 alapúak. Az ABC alapú egyenes hasáb a t_1 és t_2 alapú hasábok összeillesztésével keletkezik, térfogata e két hasáb térfogatának összege. De ez a fentiek miatt éppen az $ABDE$ alapú téglatest térfogatának a fele. A téglatest térfogata $T_{ABDE} \cdot m$, az ABC alapú egyenes hasáb térfogata így $\frac{1}{2} T_{ABDE} \cdot m$. És mivel $T_{ABC} = \frac{1}{2} T_{ABDE}$, az ABC alapú egyenes hasáb térfogatára valóban teljesül, hogy $V = T_{ABC} \cdot m$.

2. lépés:

Megmutatjuk, hogy a sokszög alapú egyenes hasáb térfogata $V = T \cdot m$, ahol T az alapl terület, m a hasáb magassága.

Mivel az alapl valamely Q sokszög, ezt mindig felbonthatjuk $H_1, H_2, \dots, H_n$ részháromszögekre; ezáltal pedig a Q sokszög alapú egyenes hasábot felbonthatjuk a $H_1, H_2, \dots, H_n$ háromszög alapú egyenes hasábokra. A sokszög területére teljesül, hogy a háromszögek területeinek összege: $t(Q) = t(H_1) + t(H_2) + \dots + t(H_n)$; a térfogatára pedig, hogy a háromszög alapú egyenes hasábok térfogatának összege: $V(Q) = V(H_1) + V(H_2) + \dots + V(H_n)$. A háromszög alapú egyenes hasábok térfogatai (az 1. lépés alapján)

$$V(H_1) = t(H_1) \cdot m, V(H_2) = t(H_2) \cdot m, \dots, V(H_n) = t(H_n) \cdot m. \text{ Ebből következik, hogy}$$

$$V(Q) = t(H_1) \cdot m + t(H_2) \cdot m + \dots + t(H_n) \cdot m = m(t(H_1) + t(H_2) + \dots + t(H_n)) = m \cdot t(Q) = m \cdot T,$$

s ez éppen a bizonyítandó állítást adja.

(Lehet, hogy a jelölések alkalmazása miatt kissé bonyolultnak tűnik a levezetés, de egyszerű gondolatról van szó: a sokszög alapú egyenes hasáb térfogatát a háromszög alapú egyenes hasábok térfogatainak összegeként kapjuk meg.)

3. lépés (kiegészítő anyag):

Megmutatjuk, hogy a ferde hasáb térfogata is $V = T \cdot m$ alakban adható meg, ahol T az alapl terület, m a hasáb magassága.

Felhasználjuk *Cavalieri* (1598–1647) itáliai matematikus nevezetes eredményét. A **Cavalieri-elv** a következő:

- Ha két test alapterülete egyenlő, továbbá
- az alapljukkal párhuzamos összes síkmetszetük területe páronként megegyezik, akkor a két test térfogata egyenlő.

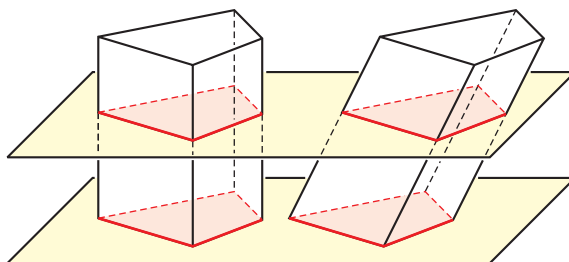
A Cavalieri-elv szemléltetésére képzeljünk el két azonos számú lapból álló kártyacsomagot (ábra). Az egyik csomag hagyományos módon, egyenesen áll, a másik ferdén. Ennek ellenére természetesnek érezzük, hogy „mindkét csomag térfogata ugyanannyi lap”.

A Cavalieri-elvet jól használhatjuk a középiskolában vizsgált testek esetében. Fontos megjegyeznünk



azonban, hogy az elv ebben az alakjában még hiányos; a mélyebb matematikai tárgyalás során pontosításra, kiegészítésre szorul.

A Cavalieri-elv segítségével könnyen igazolhatjuk a ferde hasábra vonatkozó $V = T \cdot m$ térfogatképletet. Tekintsünk egy olyan egyenes hasábot, amelynek alaplappja egybevágó a ferde hasáb alaplappjával, és magassága ugyanakkora (ábra). A két testnek az alaplappal párhuzamos síkmetszetei egybevágó sokszögek, vagyis azonos területűek. A Cavalieri-elv feltételei teljesülnek, így a két test térfogata azonos. Ha az alaplappja területe T , a hasáb magassága m , akkor az egyenes hasáb térfogata $V = T \cdot m$. Ennyi a ferde hasáb térfogata is; ezzel igazoltuk a ferde hasáb térfogatképletét. (A bizonyításhoz a hasábok alaplappjainak egybevágósága helyett elegendő lett volna azok egyenlő területét megkövetelni.)



Francesco Bonaventura Cavalieri (1598–1647)

Az itáliai szerzetes nevét matematikai és csillagászati munkái tették ismertté. Galilei ajánlására lett 1629-ben a bolognai egyetem matematikatanára. A geometriában kidolgozott újszerű módszerével fontos problémákat tudott megoldani. Eljárása sok matematikust ösztönzött további kutatásokra.

Megoldás

A 3. és 4. példa megoldása ez alapján:

3. Az akvárium térfogata $4,2 \cdot 2,5 \cdot 3 = 31,5 \text{ dm}^3$, tehát nem telik meg, ha beleöntünk 20 liter (= 20 dm^3) vizet.

4. Az úszómedence trapéz oldallapjának területe $T = \frac{1,3 + 2,1}{2} \cdot 50 = 85 \text{ m}^2$, térfogata $T \cdot 16,5 = 1402,5 \text{ m}^3$, ami a kért kerekítéssel kb. 1400 m^3 .

A **hasábok felszínét** a határoló lapok területének összegeként kapjuk meg. Az alaplappja tetszőleges n -szög lehet, az oldallapok paralelogrammák. (Ha a hasáb egyenes, akkor az oldallapok téglalapok.) Az oldallapokat együttesen **palástnak** is nevezzük.

Összefoglalva:

A T alapterületű, m magasságú hasáb térfogata $V = T \cdot m$.

A hasáb felszíne $A = 2T + P$, ahol P az oldallapok (a palást) területe.

5. példa

Szabályos háromszög alapú egyenes hasáb minden éle $a = 10 \text{ cm}$ hosszú. Mekkora a hasáb térfogata és felszíne?

Megoldás

Az alaplappja a oldalhosszú szabályos háromszög, melynek területe $T = \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 10^2}{4} \approx 43,30 \text{ cm}^2$. A hasáb oldalélei merőlegesek az alaplappra, így a testmagasság hossza is $m = a = 10 \text{ cm}$.

III. TÉRGEOMETRIA

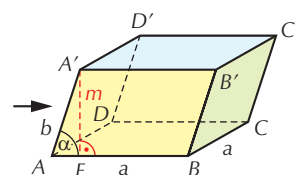
A hasáb térfogata $V = T \cdot m \approx 433,0 \text{ cm}^3$.

A hasáb oldallapjai egyenlő oldalú téglalapok, azaz négyzetek. A hasáb felszíne

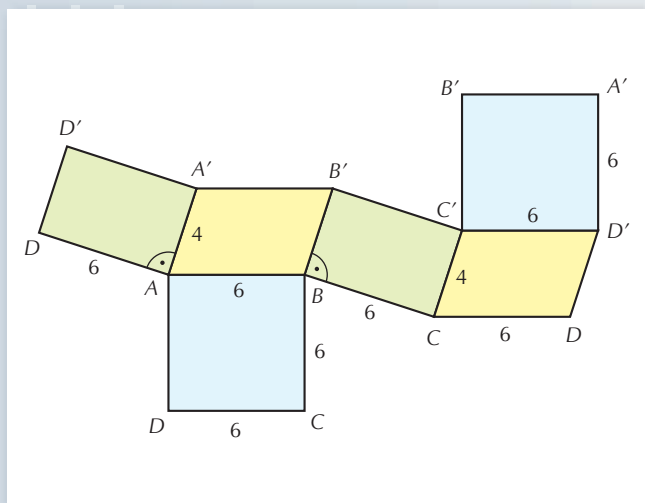
$$A = 2T + P \approx 2 \cdot 43,30 + 3 \cdot 10^2 \approx 386,6 \text{ cm}^2.$$

6. példa

Egy négyzet alapú, $a = 6 \text{ cm}$ alapélű hasábot egyik oldallapjára merőleges irányban deformáljuk („nyírás”). Így olyan négyzet alapú ferde hasáb keletkezik, amelynek $b = 4 \text{ cm}$ hosszú oldalélei $\alpha = 72^\circ$ -os szöget zárnak be az alaplappal. Rajzoljuk meg a test hálóját! Mekkora a test térfogata és felszíne?



Megoldás



Az ábra szerinti $ABCD A'B'C'D'$ hasáb előlnézete az $ABB'A'$ paralelogramma, az $ADD'A'$ és $BCC'B'$ oldallapok a és b oldalú téglalapok. Ez a két oldallap az alaplappal $\alpha = 72^\circ$ -os szöget zár be; míg az $ABB'A'$ és $DCC'D'$ lapok az alaplappal merőlegesek. Ezért az A' csúsból húzott $A'E$ testmagasság egyúttal az $ABB'A'$ paralelogramma magassága is.

A testmagasság hossza az AEA' derékszögű háromszögből határozható meg: $m = b \cdot \sin \alpha$. A hasáb térfogata $V = a^2 \cdot b \cdot \sin \alpha = 6^2 \cdot 4 \cdot \sin 72^\circ \approx 136,95 \text{ cm}^3$. A hasáb felszíne 2-2 négyzetből, téglalabból és paralelogrammából áll, nagysága

$$A = 2T + P = 2a^2 + 2ab + 2am = 2a^2 + 2ab + 2ab \sin \alpha = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 72^\circ \approx 165,65 \text{ cm}^2.$$

A test hálója többféleképpen is megrajzolható, az egyik lehetőség az ábrán látható.

Rejtvény

Az alábbi történet egy szigetre vetődött hajótöröttről szól, aki csatornát ás, hogy vízre bocsáthassa a kenuját. Melyik könyvből való az idézet?

„Nagyon boldog voltam, amikor munkámat befejeztem. Valóban, nagysága felülmúlt bármely más kenut. Sok fáradságba került, az bizonyos, de ha sikerül vízre juttatnom, bármily vad utazást megkockáztathatok vele.

De hiábavalónak bizonyult minden fáradozásom, hogy a vízre bocsássam, noha rengeteget vesződtem. Pedig nem volt messzebb a tengertől, mint jó száz lépés. [...] Ugyanis ezt a kenut sem tudtam megmozdítani, akárcsak a mentőcsónakot. Aztán megmértem a talaj magasságát, és elhatároztam, hogy olyan mély csatornát árok, melybe a víz is beömlhet.

Tehát dolgozni kezdtem. Kiszámítottam, milyen mélyre és milyen szélesre kell ásnom, hová kell szórnom a földet. Rájöttem, hogy nem lévén több, mint két kezem, legalább tizenkét évre lenne szükség, mert a part túlságosan magas, és legalább húszlábnyira kellett volna leásnom.”

(A könyv címe és néhány kapcsolódó kérdés a kitéűzött feladatoknál található.)

A HENGER

A hengerszerű testeket a hasábokhoz hasonlóan származtatjuk, azzal a különbséggel, hogy a Q alaplap görbe vonalú, zárt síkidom.

Húzzunk az S síkban lévő Q görbe vonalú síkidom határvonalának pontjain keresztül az S síkot metsző, egymással párhuzamos egyeneseket. Az így kapott felületből egy S -sel párhuzamos S_1 sík a Q -val egybevágó Q_1 síkidomot metszi ki. A Q és Q_2 síkidomok, valamint a párhuzamos egyenesek által határolt testet nevezzük **hengerek**.

Találkozunk a hasábhoz hasonló elnevezésekkel is:

A Q és Q_1 síkidomok a henger **alaplapjai**, az alaplapokat összekötő görbe felület a henger **palástja**. Az alaplapok távolsága a henger **magassága**, a párhuzamosaknak az S és S_1 síkok közé eső darabjai az **alkotók**. Ha az alkotók merőlegesek az alaplapokra, akkor **egyenes hengerről**, egyébként ferde hengerről beszélünk. **Körhenger** esetében az alaplap kör; egyenes körhenger esetében a körlapok középpontjait összekötő egyenes a henger **tengelye**.



Néhány megjegyzés az elnevezésekkel kapcsolatban:

1. Középiskolában elsősorban (majdnem mindig) az **egyenes körhengerrel**, illetve részalakzataival találkozunk. Gyakori előfordulása miatt az egyenes körhengert – megállapodás alapján – egyszerűen csak **hengerek** nevezzük.

2. A köznyelvben és a matematikai nyelvzetben mást jelent a **henger** szó. A mindennapi életben leginkább az egyenes körhengert nevezzük hengernek; ez is indokolhatja az 1-es pontban jelzett „lazaságot”.

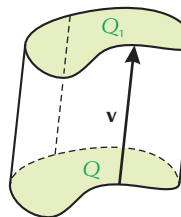
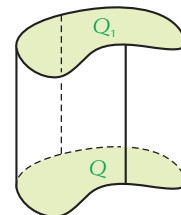
3. Néha használják az **egyenlő oldalú egyenes körhenger** elnevezést; ekkor a henger magassága megegyezik az alapkör átmérőjének a hosszával.

4. Az egyenes körhenger tengelye – csakúgy, mint a hasáb esetében – térbeli forgástengely: a tengely körüli tetszőleges szögű forgatás a hengert önmagába viszi. Az egyenes körhengerek tehát forgásszimmetrikus testek. (Az egyenes körhengert forgáshengernek is nevezzük.)

5. A hengereket is származtathatjuk eltolással. Miközben például a $\mathbf{v}$ vektor a Q alaplapot Q_1 -be viszi, Q határoló vonalának pontjai befutják a henger **palástját**.

6. Bármely hengerre igaz, hogy az alaplapokkal párhuzamos síkmetszetei az alaplapokkal egybevágó síkidomok.

7. A hasábokat és hengereket azonos módon származtatjuk, így közös elnevezésük **hengerszerű testek**.



Hogyan számíthatjuk ki a henger térfogatát? Erre a gyakorlatban is szükségünk lehet. Két egyszerű példa:

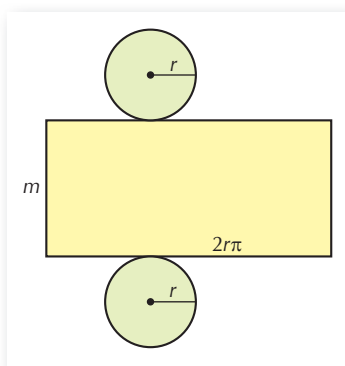
7. példa

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2005.)

- a) Egy henger alakú fazék belsejének magassága 14 cm, belső alapkörének átmérője 20 cm. Meg lehet-e főzni benne egyszerre 5 liter levest?
- b) Egy henger alakú bögre belsejének magassága 12 cm, belső alapkörének átmérője 8 cm. Belefér-e egyszerre $\frac{1}{2}$ liter kakaó?

Tétel

A T alapterületű, m magasságú henger térfogata $V = T \cdot m$, felszíne pedig $A = 2T + P$, ahol P a palást területe. Speciálisan ha az **egyenestörzshenger** alapkörének sugara r , magassága m , akkor **térfogata** $V = r^2\pi \cdot m$, **felszíne** $A = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot m$ [$= 2r\pi(r + m)$].



A térfogatra vonatkozó tételt nem bizonyítjuk, ehhez mélyebb matematikai ismeretekre lenne szükség. (Annyit persze mi is megállapíthatunk, hogy a képlet nem mond ellent a Cavalieri-elvnek: az azonos alapterületű és magasságú hengerek térfogatának meg kell egyeznie.) A tétel ismeretében azt is kimondhatjuk, hogy a $V = T \cdot m$, illetve $A = 2T + P$ képletek általában is igazak a hengerszerű testekre.

Korábbi tanulmányaink során láttuk, hogy ha az egyenestörzshenger palástját egyik alkotója mentén „elvágtuk”, akkor a palást kiteríthető a síkba (ábra). A kiterített palást olyan téglalap, melynek egyik oldala az alapkör $2r\pi$ hosszúságú kerülete, a másik oldala pedig az alkotó hossza, azaz a henger magassága. A téglalap területe $P = 2r\pi \cdot m$, s ebből adódik a fenti felszínképlet.

Megoldás

A 7. példa megoldása ez alapján:

- a) A fazék térfogata $1^2 \cdot \pi \cdot 1,4 \approx 4,4 \text{ dm}^3$, tehát nem fér bele 5 liter leves.
- b) A bögre térfogata $0,4^2 \cdot \pi \cdot 1,2 \approx 0,6 \text{ dm}^3$, így a fél liter kakaó befér.

8. példa

Egyenestörzshenger alapkörének sugara $r = 8$ egység, kiterített palástja pedig olyan téglalap, amelyben az oldalak hosszának aránya 1 : 2. Mekkora a henger térfogata és felszíne?

Megoldás

Ha a henger magasságát m -mel jelöljük, akkor a kiterített palást téglalapjának két oldala m és $2r\pi$ hosszúságú.

1. eset: Ha $m : 2r\pi = 1 : 2$. Ekkor a henger magassága $m = \frac{2r\pi}{2} = r\pi$; térfogata $V = r^2\pi \cdot r\pi \approx 5053,2$ térfogategység; felszíne pedig $A = 2r\pi(r + m) = 2r\pi(r + r\pi) \approx 1665,4$ területategység.

2. eset: Ha $m : 2r\pi = 2 : 1$. Ekkor a henger magassága $m = 4r\pi$; térfogata $V = r^2\pi \cdot 4r\pi \approx 20\,212,9$ térfogategység – az előző érték 4-szerese; felszíne pedig $A = 2r\pi(r + m) = 2r\pi(r + 4r\pi) \approx 5455,4$ területategység.

9. példa

Az $ABCD A' B' C' D'$ téglatestben az AA' , BB' , CC' , DD' élek merőlegesek az $ABCD$ alapra. Ismerjük a téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hosszát: $AB = 5$, $AA' = 14$ és $AD = 8$ egység. A téglatestet elmetsszük egy olyan S síkkal, amely az $ABCD$ alaplappal 24° -os szöget zár be, és az $ABB'A'$ lapot az AB oldallal párhuzamos középvonalában metszi.

- Mekkora térfogatú részekre osztja a metsző sík a téglatestet?
 - Mekkora a keletkezett poliéderek felszíne?
- (A válasz egy tizedesjegy pontosságú legyen.)

Megoldás

Jelölje EF az $ABB'A'$ téglalap AB oldallal párhuzamos középvonalát. Ha S elmettszi a $DCC'D'$ lapot, akkor a két sík GH metszésvonala párhuzamos az EF középvonallal (mert az $ABB'A'$ és $DCC'D'$ síkok párhuzamosak), így $EFGH$ téglalap (ábra).

Az S metsző sík és az alaplap α hajlásszöge – a $BCC'B'$ lap irányú oldalnézetből – a BC és FG egyenesek bezárt szögeként jelenik meg. Húzzunk ezért az F ponton keresztül párhuzamost BC -vel, ez a CC' élt az F' pontban metszi. Az $FF'G$ derékszögű háromszögben ismerünk három adatot (a szögek és FF'), így a háromszög összes többi jellemzőjét meghatározhatjuk.

$F'G = FF' \cdot \operatorname{tg} \alpha = 8 \cdot \operatorname{tg} 24^\circ \approx 3,56$ (egység). ($F'G < F'C'$, G a CC' belső pontja.) Az $ABCDEFGH$ poliéder olyan egyenes hasáb, amelynek alapja a $BCCF$ derékszögű trapéz, magassága pedig AB .

$$a) \text{ A trapéz területe } T_{BCCF} = \frac{BF + CG}{2} \cdot BC = \frac{7 + 10,56}{2} \cdot 8 \approx 70,24 \text{ területegység, a hasáb}$$

térfogata pedig $V_1 = T_{BCCF} \cdot AB = 70,24 \cdot 5 \approx 351,2$ térfogategység. A „felső” poliéder térfogatát megkapjuk, ha a téglatest térfogatából kivonjuk az „alsó” hasáb térfogatát: $V_2 = AB \cdot BC \cdot AA' - V_1 = 5 \cdot 8 \cdot 14 - 351,2 \approx 208,8$ térfogategység.

$$b) \text{ Az } FF'G \text{ derékszögű háromszögből } \cos \alpha = \frac{FF'}{FG}, \text{ innen } FG = \frac{FF'}{\cos \alpha} = \frac{8}{\cos 24^\circ} \approx 8,76 \text{ (egység).}$$

Az $EFGH$ téglalap területe $T_{EFGH} = EF \cdot FG = 5 \cdot 8,76 \approx 43,8$ területegység.

Az „alsó” hasáb felszíne a határoló lapok (négy téglalap és két egybevágó trapéz) területének összege: $A_1 = T_{ABFE} + T_{DCGH} + T_{ABCD} + 2T_{BCCF} + T_{EFGH} = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 10,56 + 5 \cdot 8 + 2 \cdot 70,24 + 43,8 \approx 312,1$ területegység.

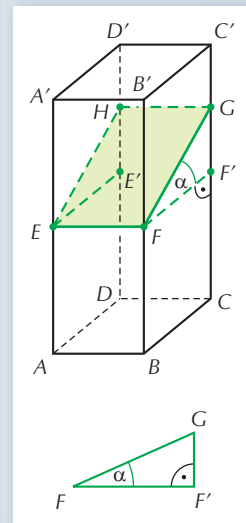
A felső hasáb felszíne hasonlóan számolható:

$$A_2 = T_{EFB'A'} + T_{HGC'D'} + T_{A'B'C'D'} + 2T_{FGC'B'} + T_{EFGH} = 5 \cdot 7 + 5 \cdot (14 - 10,56) + 5 \cdot 8 + 2 \cdot (8 \cdot 14 - 70,24) + 43,8 \approx 219,5 \text{ területegység.}$$

Megjegyzések

Másképpen is járhattunk volna. Például a két részpoliéder együttes felszíne az $EFGH$ téglalap kétszeres területével több, mint a téglatest felszíne.

A feladat 1 tizedesjegy pontosságú eredményt kért, ezért a részsámítások során egy tizedesjegy pontosságú eredményt kaptunk.



Fogalmak

poliéder;
térfogat;
felszín;
hasáb;
henger;
alkotó (hasáb, henger);
háló (hálózat);
alaplapp;
magasság (hasáb, henger);
palást (hasáb, henger);
paralelepipedon;
egyes hasáb, henger;
ferde hasáb, henger;
szabályos hasáb;
tengely (hasáb, henger);
körhenger;
hengersizű testek;
Cavalieri-elv.

FELADATOK

1. K1

Egy kocka A csúcsból kiinduló élei AB , AC és AD . Az AB él hosszát (és a vele párhuzamos éleket) 10%-kal növeljük; az AC irányú élek hosszát 20%-kal növeljük; végül az AD irányú élek hosszát 30%-kal csökkentjük. Így egy téglatestet kapunk. Hogyan (hány százalékkal) változott a kocka

- élei hosszának összege;
- felszíne;
- testátlójának hossza;
- térfogata?

2. K1

Egy téglatest felszíne 2232 m^2 , egy csúcsból kiinduló élei hosszának aránya $2 : 3 : 5$. Határozzuk meg a téglatest éleinek hosszát és a térfogatát!

3.

Ha figyelmesen nézelődünk, a mindennapi életben nagyon könnyen botlunk térgeometriai problémába. Néhány egyszerű gyakorlati feladat a *hasábok térfogata* témakörből:

K1 a) Az 1 literes dobozos tartós tej többféle csomagolásban kapható. Az egyik doboz alakja – házi mérés alapján, jó közelítéssel – olyan téglalap alapú egyenes hasáb, amelynek alapélei $6,5 \text{ cm}$ és $9,5 \text{ cm}$, oldaléle $16,5 \text{ cm}$. Milyen magas a liternyi tej szintje a dobozban?

K1 b) Állapítsuk meg (méréssel vagy becsléssel), hogy mekkora tömegű levegő van egy kiválasztott tanteremben! (A levegő sűrűsége $1,3 \text{ kg/m}^3$.)
(Egy konkrét tanteremre példa: $12,6 \text{ méter}$ és $5,4 \text{ méter}$ hosszú az alaptéglalap két oldala, és a terem magassága $3,8 \text{ méter}$.)

K2 c) Egy társasház lakói a ház oldalfala mellett 1 méter széles és 12 cm magas betonjárdát építenek. Hány köbméter sódert rendeljenek, ha a járda teljes hossza 28 méter lesz, és a betonozás során a sóder térfogata hatodrésszével csökken? (1 m^3 betonhoz $1,2 \text{ m}^3$ sóder kell.)

K2 d) Két merőleges útszakasz találkozásakor az utak szintkülönbségét földdel töltik fel. Az egyik út 3 méterrel magasabban halad a másiknál, ezért úgy döntenek, hogy az alacsonyabban haladó utat 10° -os emelkedővel csatlakoztatják. Hány köbméter földre van szükség ehhez, ha az út szélessége $4,4 \text{ méter}$? Mekkora tömegű földet kell a munkaterületre szállítani, ha – ebben az esetben – a föld átlagos sűrűsége 1700 kg/m^3 ?

4. K1

Egy téglatest alakú, felül nyitott doboz alaplapjának méretei 6 cm , illetve 8 cm , magassága 24 cm . A dobozba 40 cm hosszú, vékony pálcát helyezünk. Legalább milyen hosszú része „lóg ki” a pálcának a dobozból?

5. K2

András műszaki rajzot készít egy rögzített helyzetű pálcáról. A pálca három vetületének hossza (előlről, oldalról és felülről nézve) rendre $6,0 \text{ cm}$, $8,0 \text{ cm}$ és $9,0 \text{ cm}$ hosszúnak látszik. Milyen hosszú valójában a pálca? (A válasz milliméteres pontosságú legyen.)

6. K2

Henger alakú, felül nyitott festékes fémdoboz alapkörének $13,6 \text{ cm}$ az átmérője, és térfogata 3 liter .

- Mekkora a doboz külső palástfelülete? (A doboz vastagságát most és a *b*) feladatban is elhanyagolhatjuk.)
- Használat után a dobozban eredetileg meglévő $2,4 \text{ liter}$ festék szintje 4 cm -rel csökkent. A kezdeti mennyiség hány százalékát használták el ekkor?
- Becsüljük meg, kb. mekkora tömegű lehet az üres festékes doboz, ha átlagosan 1 mm anyagvastagsággal számolhatunk, és a doboz fémanyagának sűrűsége 7800 kg/m^3 !



7.

A henger térfogatával kapcsolatban is bőven találunk gyakorlati feladatot. Néhány példa:

- K1** a) Egy vastag réz anyagú kábel keresztmetszete közelítőleg olyan kör alakú, melynek átmérője 1 cm. Mekkora tömegű 80 méternyi vezeték? (A réz sűrűsége 8920 kg/m^3 .)
- K1** b) A frissen kivágott fa sűrűsége 800 kg/m^3 . A favágó a kivágott, henger alakú, hosszú fatörzset olyan kisebb részekre vágja, amelyeknek a tömege legfeljebb 40 kg. (A gyűjtőhely nagyobb távolságra van, a nehezebb darabokat már nem tudja elég messzire hordani.) Legfeljebb milyen hosszú részekre vághat egy olyan törzset, amely keresztmetszete – jó közelítéssel – 20 cm átmérőjű kör? (Persze a gyakorlott favágó mérés nélkül is pontosan tudja, mekkora darabokat bír el.)
- K2** c) A kerti kútból szivattyúzott vízzel a 100 literes hordót 6 perc alatt lehet megtölteni. Mennyi ideig tartana feltölteni vízzel egy $4 \times 4 \times 1,4$ méteres házi medencét? Mekkora a kút vízhozama? Mekkora a kb. 3 cm^2 keresztmetszetű tömlőn átfolyó víz sebessége?

8. E1

Anna, Béla és Csaba érdekes feladatot találtak az egyik rejtvényűjságban.

„Az *ABCDEFGH* kocka éle 12 cm. (Az *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élek merőlegesek az *ABCD* lapra.) Az *AB* él *P* felezőpontján áll egy pók, míg a *G* csúcsban van egy légy. A pók el akarja kapni a legyet, ezért a kocka felszínén haladva, a lehető legrövidebb úton próbál a légy felé haladni. Milyen irányban induljon el?”

Anna szerint a legrövidebb út a *PB*, majd *BG* csúcsok között vezet.

Béla szerint rövidebb az *F* csúcson áthaladó *PFG* töröttvonal.

Csaba szerint a *BF* él *Q* felezőpontján keresztül kell haladni: legrövidebb a *PQG* útvonal.

Melyiküknek van igaza?

9. E1

Az előző feladathoz hasonló problémát a hengerfelületen is megvizsgálunk. Legyen adott egy egyenes körhenger, alapkörének sugara $r = 10 \text{ cm}$, magassága $m = 50 \text{ cm}$. A henger felületén, az alapkör egy *P* pontjában áll a pók, míg vele átellenes helyzetben, a fedőkör *L* pontjában a légy. (*P* és *L* tehát tükrös helyzetű a henger középpontjára.) Legalább mekkora utat kell megtennie a póknak a henger felületén, míg a légyhez ér? Milyen irányban induljon el? (Segítség: a henger palástját terítsük ki a síkba.)

10. E1

Az asztalon álló egyenes körhengert (alapkörének sugara $r = 10 \text{ cm}$, magassága $m = 50 \text{ cm}$) elmetsszük egy olyan síkkal, amely az asztallappal 40° -os szöget zár be. A maradék „csonka” henger legrövidebb alkotója 7 cm hosszúságú. Mekkora a maradék test térfogata?

11. K2

Egy téglalap két oldala $a = 5$ és $b = 12$ egység hosszúságú. A rövidebb oldala mint tengely körül megforgatjuk a téglalapot.

a) Mekkora az így kapott forgástest felszíne és térfogata?

b) Határozzuk meg annak a testnek a felszínét és a térfogatát, amelyet akkor kapunk, ha a téglalapot a hosszabbik oldala körül forgatjuk meg!

12. K2

A leckében kitűzött rejtvény idézete *Daniel Defoe: Robinson Crusoe* c. regényéből való. Próbáljuk megbecsülni, hogy Robinson helyesen számolt-e! (Valóban évtizedes munka lenne egy embernek a csatorna kétkezi kiásása?)

Becsüljük meg, egy nap átlagosan hány órát dolgozhat (az ásás, földhordás nehéz fizikai munka; napközben egyéb szükségleteiről is gondoskodnia kell, pl. vadászat, házimunkák, ellenőrző körút); egy évben hány napot szánhat átlagosan a munkára (pl. esős évszakban kevesebbet tud dolgozni); mekkora földtömeget tud megmozgatni adott idő alatt; és milyen alakú csatornát érdemes ásni!

Tudod-e?

A rákoskeresztúri Új Köztemető 300-as parcellájában található egy fekete gránit emlékmű. Ennek az alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb, és a magassága pontosan 1956 mm.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1676–1714 (kocka), 1715–1743 (téglatest), 1744–1780 (hasáb), 1971–2025 (henger).

23. A GÚLA ÉS A KÚP

Gárdonyi Géza: *A láthatatlan ember* című műve az ókori Róma idejében, Attila [Atilla] hun király táborában játszódik. A regény egyik részében a főhős Zéta, Csáth főúr rabszolgája mesél egy tábori mulatságról.



„Sétáltunk a fényben, vigalomban. Meg-megállottunk egy-egy mulató csoportnál. Néztük, mint pörgetik a telt képű hun menyecskéket a fiatalok.
– Tyuhaj!

Vagy dalt hallgattunk az itáliai hadjáratról. Egyik dal ma is az eszemben van. Arról szólt, hogy az itáliai síkságon Atilla sátorának kerestek helyet. Valami domb kellett volna, de nincs.

»Hát legyen – mondta a fővezér –, hozzon mindőtök egy süvegnyi földet.«

Aznap estére hegy keletkezett ottan.”

Ez a dombépítés a keleti népek ősi legendája, más művekben is találkozunk hasonló történettel. A legendák alapja megtörtént esemény lehet, de vajon mekkora dombot hordhatnak össze pusztá kézzel a katonák, a hadat kísérők és a szolgák?

Hogy a domb magasságát megbecsülhessük, a hasáb és a henger után további testeket vizsgálunk.

A KÚPSZERŰ TESTEK

A gúlát és a kúpot együttesen **kúpszerű testeknek** nevezzük, mert azonos módon származtathatók. Már korábbi tanulmányaink során is találkoztunk ezekkel a testekkel – csakúgy, mint a hasábbal és a hengerrel –, most összegyűjtjük, pontosítjuk és bővítjük a velük kapcsolatos fogalmakat.

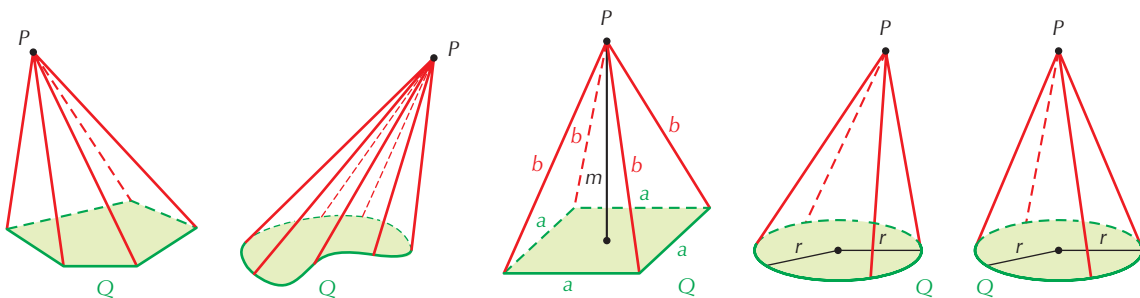
Tekintsünk egy S síkban lévő Q síkidomot és a síkon kívül rögzített P pontot. Ha a Q síkidom határoló vonalának pontjain keresztül a P ponton átmenő egyeneseket húzunk, akkor egy véges térrészt kapunk.

A Q síkidom, valamint a P ponton átmenő egyenesek által határolt testet nevezzük

- **gúlának**, ha Q sokszög;
- **kúpnak**, ha Q görbe vonalú síkidom.

A további elnevezések közül többet a hengerszerű testek esetében is használunk.

A Q síkidom a gúla vagy kúp **alaplaja**, a rögzített P pont a **csúcsa**. Az alaplap síkja és a rögzített pont távolsága a gúla vagy kúp **magassága**. A gúla többi lapját **oldallapoknak** vagy együttesen **palásznak**



nevezzük. Az alaplap élei az **alapélek**, a többi él pedig **oldalél**. A kúp csúcsát az alaplap határoló vonalának pontjaival összekötő szakaszok a kúp **alkotói**, az ezek által meghatározott görbe felület a kúp **palástja**.

Ha a gúla alaplapja szabályos sokszög, és az oldalélei egyenlő hosszúak, akkor a gúla **szabályos**. Ha a kúp alaplapja kör, akkor **körkúpról** beszélünk; és ha az alapkör középpontját a kúp csúcsával összekötő egyenes merőleges az alaplapra, akkor **egyeses körkúpot** kapunk.

Néhány megjegyzés az elnevezésekkel kapcsolatban:

1. Középiskolában a kúpok közül általában az **egyeses körkúppal**, illetve részalakzataival foglalkozunk. Gyakori előfordulása miatt az egyeses körkúpot – kissé pongyola módon – egyszerűen csak **kúpnak** is nevezzük; és a **ferde kúp** elnevezést inkább csak akkor használjuk, ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy a körkúp nem egyeses.

2. A gúla oldallapjai mindig olyan háromszögek, melyek közös csúcsa a rögzített pont.

3. A szabályos gúla oldallapjai egyenlő szárú, egybevágó háromszögek. (Hangsúlyozzuk, hogy a szabályos gúla oldaléleire *nincs megkötés*, tehát tetszőleges hosszúságúak lehetnek.)

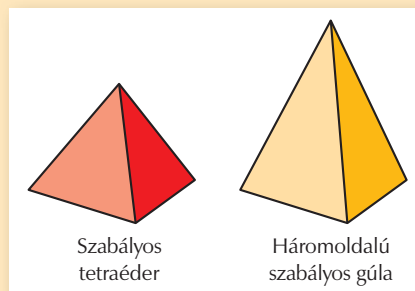
4. Néha találkozhatunk az egyeses gúla elnevezéssel. Nem szerencsés a használata; ha az alaplap szabályos sokszög, akkor használhatjuk a szabályos gúla elnevezést.

5. A háromoldalú gúlát másképpen **tetraédernek** nevezzük.

6. **Szabályos tetraéder** az a háromszög alapú gúla, amelynek lapjai egybevágó szabályos háromszögek. Vigyázat: ez mást jelent, mint a háromoldalú szabályos gúla! A szabályos tetraéder minden éle egyenlő, míg a háromszög alapú szabályos gúla tetszőleges magasságú lehet. (Tehát oldalélei általában nem egyenlők az alapélekkel.)

7. Az egyeses körkúp **tengelye** a kúp csúcsát az alapkör középpontjával összekötő egyenes. Az egyeses kúp alkotói egyenlő hosszúak, tengelymetszete egyenlő szárú háromszög, melynek magasságvonala a tengely. (A **tengelymetszet** a tengelyen áthaladó, az alapsíkra merőleges sík és a kúp metszete.)

8. Az egyeses körkúp tengelye forgástengely: körülötte megforgatva a tengelymetszetet megkapjuk a kúpot. Az egyeses körkúpot ezért **forgáskúpnak** is nevezzük.



A KÚPSZERŰ TESTEK TÉRFOGATA ÉS FELSZÍNE

Tétel

Bármely T alapterületű és m magasságú kúpszerű test térfogata $V = \frac{T \cdot m}{3}$.

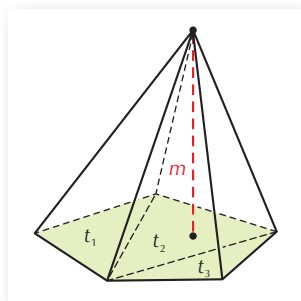
Speciálisan ha a körkúp alapkörének sugara r , akkor térfogata $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}$.

A tételt nem bizonyítjuk részletesen, de vázoljuk a bizonyítás lépéseit.

Megjegyzés

1. Először meg kell mutatni, hogy a háromszög alapú gúlára, azaz a tetraéderre igaz a képlet. Ehhez a tetraédert kiegészítjük vele azonos alapú és magasságú háromszög alapú hasábbá (ehhez két további

tetraéder szükséges); majd a Cavalieri-elv segítségével igazoljuk, hogy a tetraéderek térfogata megegyezik. A hasáb térfogata $T \cdot m$; a tetraéder térfogata ennek harmada, tehát $V = \frac{T \cdot m}{3}$.



2. Ezután igazoljuk, hogy tetszőleges sokszög alapú gúlára is teljesül a térfogatképlet.

Ehhez a gúlát felbontjuk vele azonos m magasságú háromszög alapú részgúákra, amelyek alaplappjainak területe $t_1, t_2, \dots, t_n$. A felbontás miatt $t_1 + t_2 + \dots + t_n = T$ az eredeti gúla alaplappjának területe. (Az ábrán ötszög alapú gúlát látunk, amelyre $n = 3$.) A részgúák térfogatösszege az eredeti gúla térfogatát adja: $V_1 + V_2 + \dots + V_n = V$. A háromszög alapú gúla térfogatát már ismerjük (lásd előző pont), így

$$\frac{t_1 \cdot m}{3} + \frac{t_2 \cdot m}{3} + \dots + \frac{t_n \cdot m}{3} = (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \cdot \frac{m}{3} = \frac{T \cdot m}{3}$$

valóban. (Az alaplappot tetszőlegesen bonthatjuk fel részháromszögekre, a

bizonyításban csak azt használtuk ki, hogy területösszegük T .)

3. Végül azt az esetet bizonyítjuk, amikor az alaplapp görbe vonalú síkidom, azaz a test kúp. Akárcsak a hengerek esetében, itt is közelítő módszereket kell alkalmazni, de ehhez magasabb szintű matematikai eszközök kellenek.

(Az azonos alapterületű és azonos magasságú egyenes és ferde körkúp térfogata megegyezik. Ez a Cavalieri-elvből következik, és a térfogatképlettel is összhangban van.)

A **gúlák felszíne** értelemszerűen a határoló sokszöglapok területének összege. (A gúla palástját háromszögek alkotják; ezek területösszegéhez adódik még az alaplapp területe.)

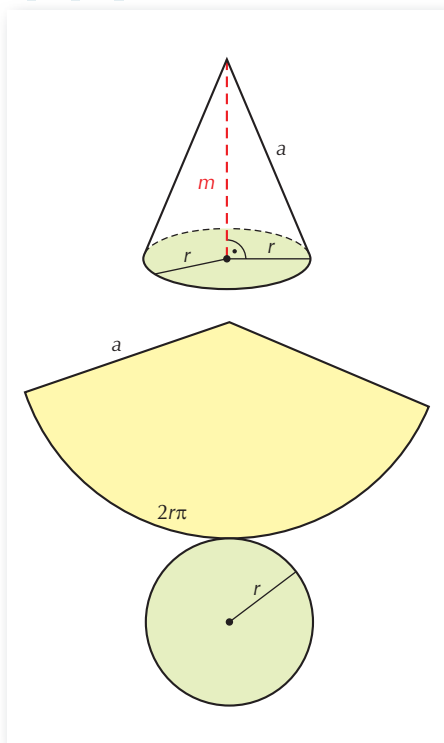
A kúpok közül csak az **egyenes körkúp felszínével** foglalkozunk. Ha a kartonpapírból készített egyenes körkúp palástját egyik alkotója mentén szétvágjuk, akkor a palást kiteríthető a síkba. A síkba kiterített palást körcikket határoz meg, hiszen a kúp minden alkotója azonos hosszúságú. A körcikk ívhossza az alapkör kerülete, a körcikk sugara pedig a kúp alkotója.

Ha r és a a jelöli a forgáskúp alapkörének sugarát, illetve az alkotója hosszát, m pedig a forgáskúp magasságát, akkor a palást $P = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot a}{2} = r \cdot \pi \cdot a$ területű. (Itt felhasználtuk a körcikk tanult területképletét.) Ezzel a keresett felszínt meghatároztuk.

Tétel

A **forgáskúp felszíne** az alaplapp és a palást területének összege:

$$A = T + P = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot a.$$



1. példa

Mekkora az $a = 10$ cm élű szabályos tetraéder felszíne és térfogata?

Megoldás

Az $ABCD$ szabályos tetraéder minden éle azonos hosszúságú, lapjai egybevágó szabályos háromszögek. Egy ilyen háromszög (bármelyik)

magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ hosszú, így területe $t = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. A szabályos tetraéder felszíne $A = 4t = \sqrt{3}a^2 \approx 173,21$ cm².

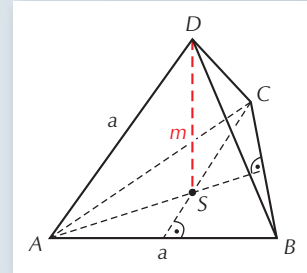
A térfogat kiszámításához szükségünk van a tetraéder testmagasságára. Jelölje az ABC lap súlypontját S , ez egyúttal a magasságvonalak metszéspontja is. AS éppen kétharmada az A csúcsból húzott magasságnak,

így $AS = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Az $SD = m$ testmagasságot az ASD derékszögű

háromszögben felírt Pitagorasz-tétel segítségével határozhatjuk meg:

$$m^2 = a^2 - AS^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2, \text{ tehát } m = \sqrt{\frac{2}{3}}a. \text{ A szabályos tetraéder térfogata}$$

$$V = \frac{t \cdot m}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}a}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \approx 117,85 \text{ cm}^3.$$



A gúla alakú építmények közül a leghíresebbek talán az ókori egyiptomi piramisok, illetve a piramisszerű közép-amerikai építmények; valamint a modern időkben a párizsi Louvre „üvegpiramisa”.

A monumentális egyiptomi piramisok építését számtalan rejtély övezi. Nehéz elképzelni, hogy az akkori idők technikai tudásával hogyan sikerült létrehozni ilyen csodálatos alkotásokat, hogyan oldották meg az évtizedekig tartó munkával kapcsolatos élelmezési, szállítási és szervezési problémákat.

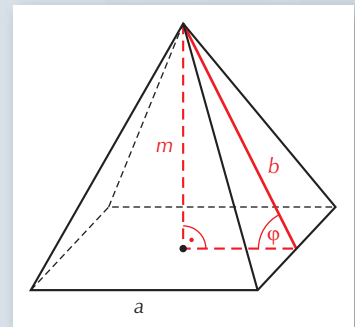
Hérodotosz görög utazó és történetíró Kr. e. 450 körül azt írta, hogy az egyiptomi papok felfedték előtte a piramisok építésének néhány titkát. Azt állították például, hogy a piramisok mérete olyan, hogy magasságuk négyzete megegyezik az oldallapjaik területével.

2. példa

A legnagyobb gízai piramis (a Hufu- vagy Kheopsz-piramis) alakja szabályos négyzet alapú gúla, melynek alapéle ≈ 232 méter, magassága ≈ 147 méter. (A szakirodalomban többféle számérték található, az eredeti méreteket ma már csak becsülni tudjuk.) Teljesül-e erre a piramisra a Hérodotosz által leírt feltétel? Mekkora a piramis oldallapjának a dőlésszöge?

Megoldás

Jelölje a az alapél, m a testmagasság és b az oldallapok alaphoz tartozó magasságának a hosszát (ábra)! Pitagorasz tételéből $b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{116^2 + 147^2} \approx$



≈ 187 (méter). Az oldallapok területe $\frac{a \cdot b}{2} \approx 21\,700 \text{ m}^2$, a magasság négyzete $147^2 \approx 21\,600 \text{ m}^2$.

A papok által ismertetett összefüggés igen jó közelítéssel igaz. (Persze a tökéletes egyezést nem is várhatjuk, hiszen az eredeti méretek akár több méterrel is eltérhetnek a fenti értékektől.)

Az oldallap-alaplap φ hajlásszögére $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{\frac{a}{2}} = \frac{2m}{a} = \frac{294}{232}$, innen $\varphi \approx 51,7^\circ$. Ez jó közelítéssel

megegyezik a gyakorlatban mért értékkel.

3. példa

András A4-es kartonpapírból 28 cm átmérőjű félkört vágott ki, ebből készíti majd el egy egyenes körkúp palástját. Mekkora sugarú alapkört vágjon ki? Mekkora lesz a papírokból összeragasztott kúp nyílásszöge és térfogata?

Megoldás

Ha a kúp három paraméteréből (r : alapkör sugara, a : alkotó, m : magasság) kettő ismert, akkor a harmadik kiszámítható, és meghatározható a kúp felszíne és térfogata is. Jelenlegi adatainkkal az alkotó $a = 14$ cm hosszú, míg az alapkör kerülete megegyezik a palást félkörének ívhosszával. $2r\pi = a\pi$, innen $r = 7$ cm: ekkora az alapkör sugara.

Az elkészült kúp magassága $m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{147}$ (cm), térfogata $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{147}}{3} \approx 622,1 \text{ cm}^3$.

Jelölje α a kúp nyílásszögének a felét, ekkor $\sin \alpha = \frac{r}{a} = 0,5$. Innen $\alpha = 30^\circ$ (α csak hegyesszög lehet), a kúp nyílásszöge tehát $2\alpha = 60^\circ$.

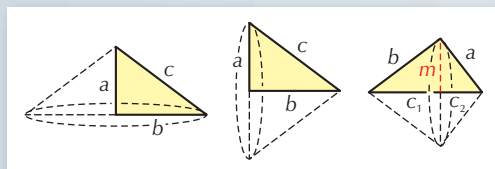
4. példa

Egy derékszögű háromszög két befogója $a = 3$ és $b = 4$ egység hosszú. Megforgatjuk a háromszöget a térben

- a) az a oldal;
- b) a b oldal;
- c) az átfogó

egyenesre mint tengely körül. Mekkora az így kapott forgástestek térfogata?

Megoldás



Mint az ábrán látható, az első két esetben forgáskúpot, a harmadik esetben pedig ún. kettős kúpot kapunk.

a) A keletkezett kúp alapkörének sugara b , magassága a . A kúp térfogata $V_a = \frac{b^2 \pi \cdot a}{3} = 16\pi \approx 50,27$ térfogategység.

b) A keletkezett kúp alapkörének sugara a , magassága b . A kúp térfogata $V_b = \frac{a^2 \pi \cdot b}{3} = 12\pi \approx 37,70$ térfogategység.

c) A derékszögű háromszög átfogója $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ (egység). Az átfogóhoz tartozó magasság m hosszát a terület kétféle felírásából kaphatjuk meg: $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m}{2}$, innen $m = \frac{a \cdot b}{c} = 2,4$ (egység). Ha

az m magasság c_1 és c_2 hosszúságú részekre osztja az átfogót, akkor a kettős kúp térfogata a c_1 és c_2 magasságú kúpok térfogatainak összegeként kapható meg. (A két kúp közös alapkörének m a sugara.)

$$V_c = \frac{m^2 \pi \cdot c_1}{3} + \frac{m^2 \pi \cdot c_2}{3} = \frac{m^2 \pi \cdot (c_1 + c_2)}{3} = \frac{m^2 \pi \cdot c}{3} = 9,6\pi \approx 30,16 \text{ térfogategység.}$$

5. példa

A lecke elején Gárdonyi Géza regényéből idéztünk. Próbáljuk megbecsülni, hogy mekkora lehet a katonák süvegeivel hordott „hegy” magassága!

Megoldás

A hegyet modellezzük egy olyan egyenes körkúppal, amelynek az alkotói az alappal 45° -os szöget zárnak be. (Ha a kúp laposabb, kisebb magasságot kapunk; ha pedig 45° -nál nagyobb a hajlásszög, akkor a föld könnyebben lecsúszik, leszóródik a tetejéről.) A kúp térfogata $V = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3}$, ahol m a kúp magassága, r az alapkör sugara. A 45° -os hajlásszög miatt

$$r = m; \text{ a } \frac{\pi}{3} \approx 1 \text{ becslést alkalmazva } V \approx m^3, \text{ azaz } m \approx \sqrt[3]{V}.$$

Tegyük fel, hogy százezernyi katona fejenként 3 liter földet hordott össze. Ekkor $V = 300\,000 \text{ dm}^3 = 300 \text{ m}^3$, s ebből $m = \sqrt[3]{V} \approx 6,7$ méter adódik.

Nos, vezéri sátorhelynek megfelelő, de „hegynek” azért nem nevezhető a magaslat. Ha maximális becslést alkalmazunk, azaz kétszer akkora térfogatú süvegekkel és négyszer annyi katonával számolunk (egyes történelmi források szerint Attilának volt ennyi embere), akkor a magaslat térfogata 8-szoros, így a magassága – a becslés miatt – $\sqrt[3]{8} = 2$ -szeres. A 13,4 méteres magasság persze már csak hegynek kevés, építménynek nem.

Fogalmak

kúpszerű test;
gúla;
kúp;
alaplap (gúla, kúp);
magasság (gúla, kúp);
alkotó (kúp);
palást (gúla, kúp)
szabályos gúla;
tetraéder, szabályos tetraéder;
körkúp;
egyes, ferde körkúp;
forgáskúp;
tengely (kúp).

Ebből a példából is látszik, hogy mennyire óvatosan kell alkalmazni a térfogati becsléseket.

FELADATOK

1. K2

Hatszög alapú szabályos gúla alapélei $a = 6$ cm, oldalélei $b = 10$ cm hosszúak. Határozzuk meg

- a gúla felszínét és térfogatát;
- az oldalélek és az alaplap bezárt szögét;
- az oldalapok és az alaplap hajlásszögét;
- valamint azt a hat szöget, amit egy oldalél bezár egy-egy alapéllal!

2. K2

Béla egy tömör sárgaréz-ből készült kulcstartót látott a kirakatban, s rögtön megtetszett neki. A kulcstartó alakja szabályos ötszög alapú egyenes gúla, az alapélei 6 milliméteresek, míg az oldalélei 42 mm hosszúak. Béla csak attól tart, hogy túlságosan súlyos lesz a dísz. Mennyi a kulcstartó tömege? (A sárgaréz sűrűsége 8500 kg/m^3 .)

3. K2

Egy forgáskúp három paramétere (r az alapkör sugara, m a magasság és a az alkotó) egész szám, nagyságrendi viszonyuk $r < m < a$, és a szomszédos paraméterek közötti különbség éppen 2 egység. Határozzuk meg a kúp felszínét és térfogatát! (Milyen érdekességet vehetünk észre a felszín és a térfogat számértékét összehasonlítva?)

4. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2005.) Egy vállalkozás reklámajándéka szabályos hatszög alapú egyenes gúla, amit fából készítenek el. A gúla alapélei 4,2 cm hosszúak, magassága 25 mm.

- a) Hány cm^3 faanyag van egy elkészült gúlában?
b) A cég bejaratánál az előbbi tárgy tízszeresére nagyított változatát helyezték el. Hányszor annyi fát tartalmaz ez, mint egy ajándéktárgy?

5. K2

Egy forgáskúp alapkörének sugara $r = 7,2$ cm, alkotója $a = 23,1$ cm hosszú. A kúpot kettévágjuk a csúcán átmenő, az alaplapra merőleges síkkal. Rajzoljuk le az így kapott egyik test hálóját! Mekkora a keletkezett részek felszíne és térfogata? (A válasz mm^2 , illetve mm^3 pontosságú legyen.)

6. E1

Egy háromszög három oldala $a = 5$ cm, $b = 12$ cm és $c = 15$ cm. A háromszöget az a oldala mint tengely körül megforgatjuk. Mekkora az így kapott forgástest felszíne és térfogata?

7. E2

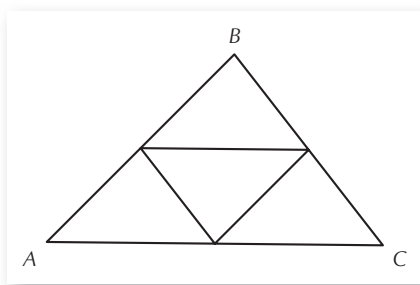
Az ABC háromszög alapú, D csúcsú gúla alapélei $AB = 50$ cm, $BC = 48$ cm és $AC = 14$ cm, oldalélei $DA = DB = DC = 65$ cm hosszúak. Mekkora a gúla térfogata?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1781–1843 (tetraéder), 1844–1893 (gúla), 2026–2081 (kúp).

24. HASONLÓ SÍKIDOMOK TERÜLETÉNEK ARÁNYA; HASONLÓ TESTEK TÉRFOGATÁNAK ARÁNYA

Tegyük fel, hogy egy hasonlósági transzformáció az S sokszöget az S' -be viszi. A 10. osztályban már láttuk, hogy ha a hasonlósági transzformáció aránya λ , akkor S' kerülete $|\lambda|$ -szerese S kerületének: $k' = |\lambda| \cdot k$. (Ennek az az oka, hogy a képalakzat minden oldala $|\lambda|$ -szerese S megfelelő oldalainak.) Nem bizonyítjuk, de a görbe vonalú alakzatokra is igaz az állítás: a képalakzat kerülete $|\lambda|$ -szerese az eredeti alakzat kerületének.



Vajon mit állíthatunk a hasonló síkidomok területének vagy a hasonló testek térfogatának arányáról? Az ábrán láthatjuk, hogy a tétel változatlan formában biztosan nem lesz igaz. Az ABC háromszöget középvonalaival négy egybevágó részháromszögre bontottuk, amik hasonló az eredeti háromszöghöz. A hasonlóság aránya $1 : 2$, de a részháromszögek területe nem fele az ABC háromszög területének, hanem csak negyede.

1. példa

Építsünk 2; 3; 4 egységnégyzetből négyzetet!

Megoldás

A feladatot 2 vagy 3 négyzetből nem lehet megoldani, 4 darab egységnégyzetből egy kétszer kettes négyzet rakható össze. A 2 egység oldalú négyzet területe tehát négyszerese az egységoldalú négyzet területének.

2. példa

Hány kockacukorból lehet egy 2, illetve egy 3 kockacukor élű nagyobb kockát kirakni?

Megoldás

A 2 kockacukor élű kockához 8 darab, a 3 kockacukor élű kockához 27 darab cukor kell.

Előbbi észrevételeink a következő általános tételnek a speciális esetei:

Tétel

Hasonló síkidomok **területének aránya** egyenlő megfelelő szakaszaik négyzetének arányával. Hasonló testek **térfogatának aránya** egyenlő megfelelő szakaszaik köbének arányával.

Bizonyítás

Ezt a tételt csak hasonló háromszögek esetére bizonyítjuk be.

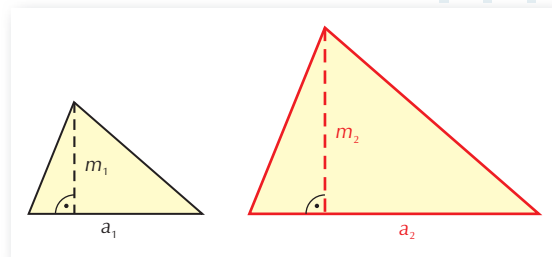
Legyen a két háromszögben a megfelelő szakaszok aránya λ . Ekkor a megfelelő szakaszok négyzetének aránya λ^2 . Jelöljük a két háromszög területét t_1 -gyel és t_2 -vel. Meg kell mutatnunk, hogy $\frac{t_2}{t_1} = \lambda^2$.

Mivel

$$t_1 = \frac{a_1 \cdot m_1}{2} \text{ és}$$

$$t_2 = \frac{a_2 \cdot m_2}{2} = \frac{(\lambda a_1)(\lambda m_1)}{2} = \lambda^2 \frac{a_1 \cdot m_1}{2} = \lambda^2 t_1,$$

tehát valóban $\frac{t_2}{t_1} = \lambda^2$.



Megjegyzés

Könnyű belátni, hogy bármely két hasonló sokszög területére is igaz a tétel. Ha mindkettőt egymásnak megfelelő módon háromszögekre bontjuk, akkor az egyik sokszögben a megfelelő háromszögek részterületeit darabonként kell szorozni λ^2 -tel. Mivel a háromszögek területösszege egyenlő a sokszögek területével, és λ^2 kiemelhető, így a másik sokszög területe is λ^2 -szerese az elsőnek.

Tekintettel arra, hogy λ éppen a **hasonlóság arányával** egyenlő, az előbbi tételt a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Hasonló síkidomok **területének aránya** a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő: $\frac{t_2}{t_1} = \lambda^2$.

Hasonló testek **térfogatának aránya** a hasonlósági arány abszolút értékének köbével egyenlő: $\frac{V_2}{V_1} = \lambda^3$.

3. példa

Milyen (pozitív) arányú hasonlósági transzformáció az, amely a síkidomok területét

a) kétszeresére; b) harmadára; c) $\frac{3}{5}$ -ére változtatja?

Megoldás

Mivel a területek aránya a hasonlóság arányának a négyzete, ezért most:

a) $\lambda^2 = 2$, $|\lambda| = \sqrt{2}$, azaz a hasonlóság aránya $\sqrt{2}$;

b) $\lambda^2 = \frac{1}{3}$, $|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, azaz a hasonlóság aránya $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

c) $\lambda^2 = \frac{3}{5}$, $|\lambda| = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, azaz a hasonlóság aránya $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

4. példa

Adott az ABC háromszög az $AB = 12$ cm, $\alpha = 120^\circ$, $m_c = 8$ cm adataival. Mekkora annak a szakasznak a hossza, amelyik párhuzamos az AB oldallal, és felezi a háromszög területét? Szerkesszük is meg ezt a szakaszt!

Megoldás

Az ábra jelölése szerint a megfelelő párhuzamos egyenes a háromszög AC , illetve BC oldalát a P , Q pontokban metszi, az eredeti háromszöget pedig egy kis háromszögre és egy trapézra bontja. A feltevés szerint

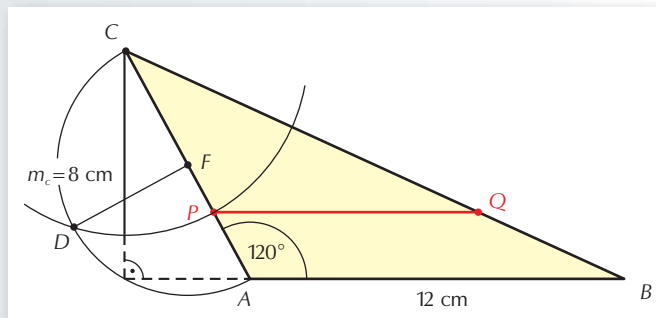
$$t_{PQC} = t_{ABQP}.$$

Ez azt jelenti, hogy a PQC háromszög területe fele az eredeti háromszög területének. A PQC és ABC háromszögek hasonlóságának aránya tehát: $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Ezért } PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{2}.$$

A PQ szakaszt például úgy szerkeszthetjük meg, ha megszerkesztjük a CP szakasz hosszát, ezzel a P pontot. Ezen a ponton át kell párhuzamost húzni az AB oldallal.

$CP = \frac{\sqrt{2}}{2} CA$. A CA szakasz $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -szeresét legkönnyebben úgy szerkeszthetjük meg, hogy az AC oldal felezőmerőlegesére az F felezőpontjából $\frac{1}{2}AC$ hosszúságú szakaszt mérünk föl. Ennek végpontját jelölje D . Az ADC derékszögű háromszög, mert $FA = FD = FC$, tehát a háromszög köré írt kör középpontja F , és egyenlő szárú, mert FD szimmetriatengely. Így Pitagorasz tétele szerint $CD = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$, ezért egy C középpontú, CD sugarú kör kimetszi AC -ből a P pontot.



5. példa

Egy üdítőitalt 2 literes palackokban árusítanak, amelyek magassága 34 cm. A 0,5 literes és az 1 literes palackok milyen magasságúak, ha a háromféle palack „hasonló” egymáshoz?

Megoldás

Legyen a 0,5 literes palack m_1 , az 1 literes pedig m_2 magasságú. Alkalmazhatjuk a hasonló testek térfogatára tanult tételt:



$$\left(\frac{m_1}{34}\right)^3 = \frac{0,5}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $m_1 \approx 21$.

A másik magasság esetében is felírható: $\left(\frac{m_2}{34}\right)^3 = \frac{1}{2}$.

Ebből kapjuk: $m_2 \approx 27$.

A 0,5 literes palack 21 cm, az 1 literes pedig 27 cm magasságú.

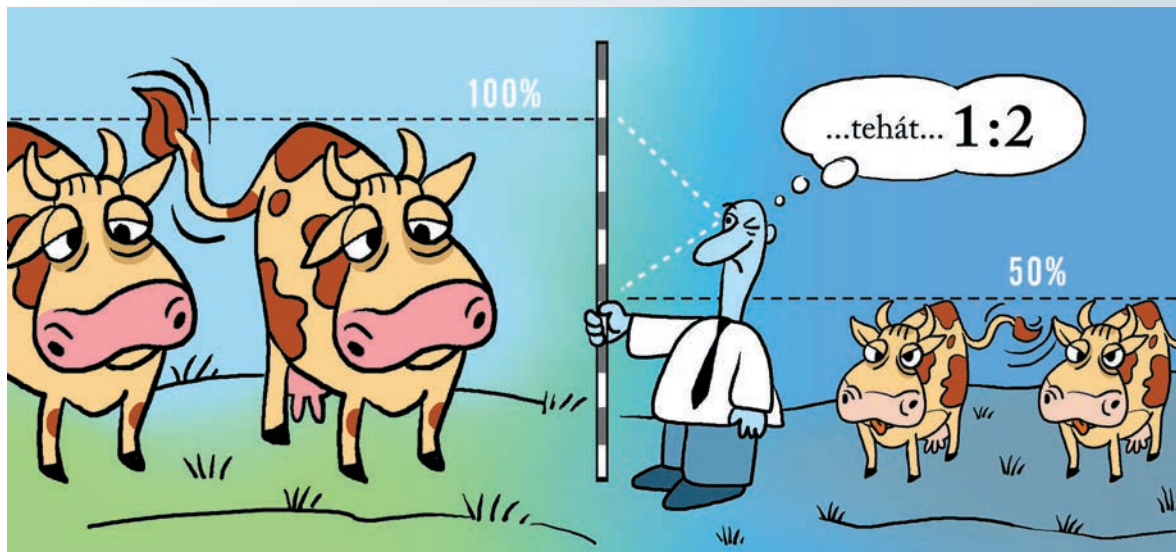
Megjegyzés

A számolásunk során felhasználtuk, hogy a palackok hasonlóak, azonban ezekre inkább csak a „hasonlítani” kifejezés lenne alkalmazható. Gondoljunk arra, hogy ezeknek a palackoknak a kupakja általában egyforma, ezért matematikai értelemben nem lehetnek hasonlóak, mert kisebb palackhoz kisebb kupak kellene a hasonlósághoz. Számolásunk közelítő értékeit azonban ez érdeemben nem befolyásolja.

6. példa

Egy képen valamely terület adott időszakra vonatkozó állatállomány-csökkenésének szemléltetését látjuk. A grafikon készítője jelezni kívánta, hogy az állatállomány a vonatkozó időszakban a felére csökkent, ezért az állatok lineáris méreteinek arányát 2 : 1-nek ábrázolta. Helyesen járt el a szerző?

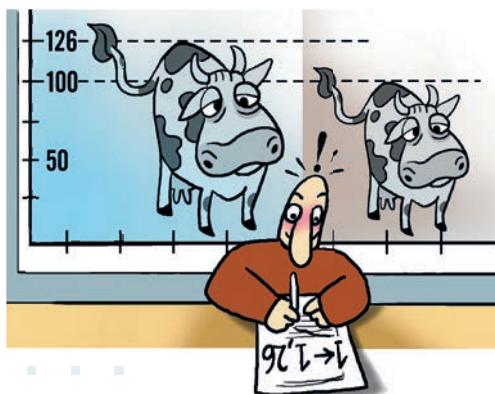
(érvelés, projektfeladat) A lineáris, a területi vagy a térfogati arány legyen 1 : 2? Beszéljétek meg a lehetőségeket, és lehetőleg érvekkel támasszátok alá a véleményeteket! Melyik ábrázolási mód a helyes? Hogyan lehet manipulálni az ábrázolással?



Megoldás

Ezzel az ábrázolással a rajz nem valóságghű. Ha a hasonló testek lineáris méreteinek aránya 1 : 2, akkor térfogatuk aránya $1^3 : 2^3$, azaz 1 : 8. Az állatokat térben elképzelve a nagyobbik térfogata nyolcszorosa a kisebbikének – nem pedig kétszerese. Mi lenne tehát ezt figyelembe véve a helyes arány?

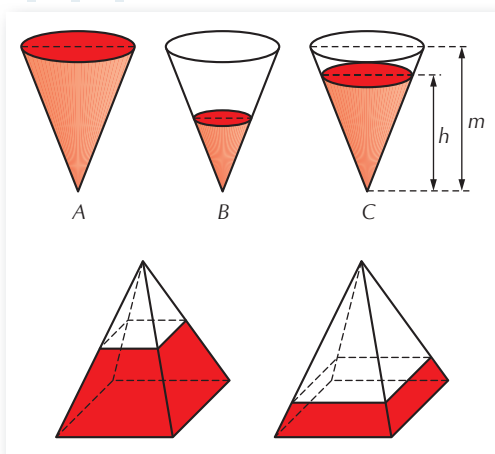
Ha a nagyobbik állat lineáris mérete x -szerese a kisebbnek, akkor térfogata x^3 -szoros. Az $x^3 = 2$ egyenletből $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$, tehát ennyiszer kell nagyobbak lennie az állat képének.



Megjegyzés

Persze a szemléletünk számára ekkor csalóka lenne a két kép összevetése: az 1,26-szor akkora méretű állat nem tűnik 2-szer akkora térfogatúnak. Térbeli testek síkbeli ábrázolásakor mindig fellépnek hasonló problémák, a képek tartalmilag félreérthetők (és így lehetőséget adnak a manipulációra is). Ha nem jelölik számmal is az értékeket, akkor nem tudhatjuk, hogy a képek – a szerző szándéka szerint – lineáris vagy térfogati arányokra vonatkoznak.

Sőt, még az is előfordulhat, hogy a lineáris vagy térfogati arányok helyett a képek területe arányos a hozzájuk tartozó értékkel. (Hasonló a helyzet például az oszlopdiagramokkal is; csak ekkor az oszlopok alapja azonos hosszú, így területük a magasságukkal arányos.) Ha két hasonló síkidom esetében a hasonlóság aránya x , akkor a területeik aránya x^2 ; vagyis a kétszer akkora állat képe (mint terület) 4-szer nagyobb, mint a kisebb állaté.



A következő ábrán két falu vízfogyasztását hasonlítjuk össze. A felfelé táguló poharak (tölcsérek) azt próbálják szemléltetni, hogy az egyik falu fogyasztása kétszerese a másiknak. Melyek a kétszeres térfogatot ábrázoló helyes képek?

Természetesen az A és a C pohár képe a megfelelő. Ha az m magasú pohár félig telt vízzel, akkor a vízszint h magasságára $\left(\frac{m}{h}\right)^3 = 2$, s innen $h = \frac{m}{\sqrt[3]{2}} \approx \frac{m}{1,26} \approx 0,79m$. Vagyis csaknem $\frac{4}{5}$ magasságig telt a pohár, ha félig van – bár szemléletünk nem ezt sugallja. Ilyen ábrát tehát akkor érdemes felvennünk, ha azt kívánjuk hangsúlyozni, hogy a kétszeres fogyasztás nem is olyan sok. Ha pedig fordítva, a kétszeres mennyiség nagyságát szeretnénk kiemelni, akkor például felfelé keskenyedő gúlát választhatunk.

A fentiekből következik, hogy a térfogat felét akkor kapjuk meg, ha kb. a magasság ötödéig telt a gúla. Ha tehát egy áruházban a gúla rakott konzervdobozok magasságának $\frac{4}{5}$ része ledőlt, akkor nincsen „olyan” nagy baj: a dobozok közel fele a helyén maradt.

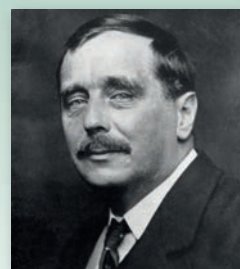
Herbert George Wells angol író *Az őslények szigetén* című novellájában az elbeszélő egy ép Aepyornis-tojást talál. (Az Aepyornis egy mára már kihalt, strucchoz hasonló óriásmadár.) A tojásból kikel az ősmadár egy ivadéka, és a tudományos-fantasztikus elbeszélésben megkezdődnek a kalandok...

A tyúktojás átlagos hossza 5-6 cm. A strucctojás hossza ennek nagyjából 2,5-szerese, az Aepyornis tojásának hossza pedig – a régészeti leletek alapján – a 28 cm-t is elérhette. Tegyük fel, hogy egy család négy tagja fejenként két tyúktojásból rántottát eszik. Tippeljük meg, vajon elegendő-e ennek a családnak egyetlen strucctojásból készült reggeli! És mit tippelünk, hány ember reggelizhetne meg egy Aepyornis tojásából?



A tojások térfogatai, így a tömegeik is, a hosszúságuk köbével arányosak. A tyúktojáshoz viszonyítva a strucctojás esetében ez az arány $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \approx 15$, az Aepyornis esetében pedig közelítőleg $5^3 = 125$.

Tehát egy strucctojás tömege 15 tyúktojásával egyezik meg, így majdnem két család is megreggelizhetne belőle. Az ősmadár tojására az eredmény még meglepőbb: egyetlen tojásából több mint 60 ember reggelizhetne egy kiadósat. (A tömege akár a 8-9 kg-ot is elérhette.)



H. G. Wells
(1866–1946)

A GÚLA ALAPPAL PÁRHUZAMOS SÍKMETSZETEI

Az ábrán egy gúla és annak az alappal párhuzamos síkkal való egyik metszete látható. A metszetsokszög oldalai rendre párhuzamosak az alap megfelelő oldalaival, ugyanis párhuzamos síkok egy harmadik síkot párhuzamos egyenesekben metszenek.

Tekintsük azt az O középpontú hasonlóságot, amelyik az A pontot az A' pontba viszi át. Előbbi megfigyelésünk értelmében például a B pont képe B' , így az alapsokszög képe a síkmetszet.

Ez azt jelenti, hogy:

Ha egy gúlát az alappal párhuzamos síkkal metszünk, akkor az alaphoz hasonló sokszöget kapunk.

A hasonlóság arányát megadhatjuk bármely két megfelelő szakasz arányával, így $\frac{m'}{m}$ -mel is, ahol m' , illetve m a gúla csúcsának a metszősíktól, illetve az alapsíktól való távolsága. Ha a gúla alapterületét t -vel, a metszet területét t' -vel jelöljük, akkor a korábbiak szerint:

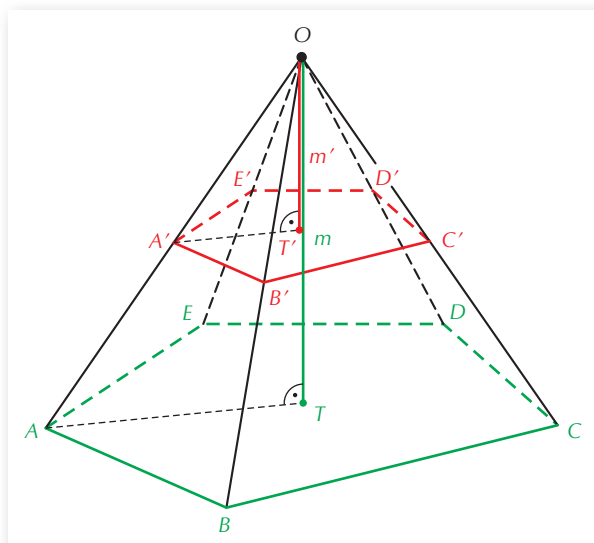
$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{m'}{m}\right)^2 = \frac{m'^2}{m^2}.$$

A gúla alappal párhuzamos metszete területének és az alap területének aránya egyenlő a metszősík és az alapsík csúcstól mért távolságai négyzetének az arányával.

A metszősík a gúlából az eredetihez hasonló kis gúlát metszett le. Ha ennek a térfogatát V' -vel, az eredeti gúla térfogatát V -vel jelöljük, akkor az előbbi fejezet szerint

$$\frac{V'}{V} = \frac{m'^3}{m^3}.$$

Ezek az állítások kúp esetében is érvényesek.



FELADATOK

1. K1

Hogyan változtatja meg a síkidomok területét a

a) $\lambda = 3$; b) $\lambda = \frac{1}{2}$; c) $\lambda = \frac{3}{4}$.

arányú hasonlósági transzformáció?

2. K2

Hogyan változtatja meg a testek térfogatát a

a) $\lambda = -2$; b) $\lambda = 3$; c) $\lambda = \frac{1}{2}$; d) $\lambda = \frac{3}{5}$.

arányú hasonlósági transzformáció?

III. TÉRGEOMETRIA

3. K2

Egy háromszög minden oldalát osszuk 5 egyenlő részre! Az ábrának megfelelő vonalkázott sokszög területe mekkora része az eredetinek?

4. K2

Osszuk fel egy kör területét vele koncentrikus körrel két egyenlő részre!

5. K2

Egy trapéz alapjai 15 cm és 21 cm hosszúak. Hányszorosa a kiegészítő háromszög területe a trapéz területének?

6. K2

Rajzoljuk meg egy háromszög súlyvonalait! Az AB oldal felezőpontjából húzzunk párhuzamost az egyik súlyvonallal a másik súlyvonalgig (ábra)!

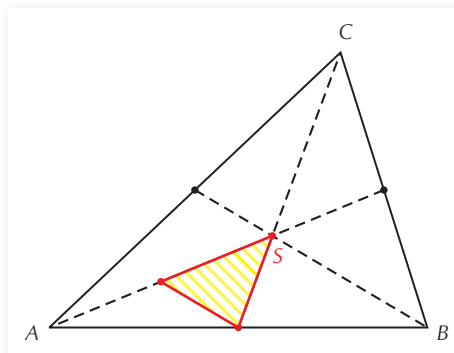
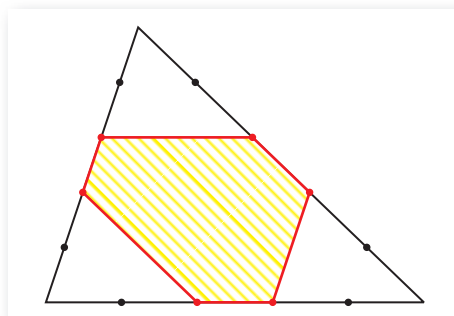
- Mekkora része a vonalkázott háromszög területe az eredetinek?
- Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalából szerkeszthető háromszög!
- A súlyvonalakból szerkesztett háromszög területe mekkora része az eredetinek?

7. K2

Négyszög alapú gúla alapterülete $t = 20 \text{ cm}^2$, térfogata $V = 60 \text{ cm}^3$. A gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal kettévágtuk úgy, hogy keletkezett egy $V' = 10 \text{ cm}^3$ térfogatú darab. Mekkora lehet az alaplap és a metsző sík távolsága?

8. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2021.) A szabványos jégkorong egy olyan vulkanizált gumihenger, amelynek magassága 2,54 cm (1 inch), alapkörének átmérője 7,62 cm (3 inch). Az egyik csapat a pálya bejáratához egy olyan nagy méretű korongot tervezett, amely (matematikai értelemben) hasonló a szabványos jégkoronghoz. A tervben szereplő nagy méretű korong térfogata 1 m^3 . Számítsa ki a nagy méretű korong magasságának és alapköre átmérőjének a hosszát!



GULLIVER GEOMETRIÁJA (Olvasmány)

Jonathan Swift (1667–1745) angol író két híres története az *Utazás Lilliputba* és az *Utazás Brobdingnagba*. Az előbbiben az elbeszélő a törpék országába kerül, az utóbbiban pedig az óriások földjére.

A szerző mind a két elbeszélésében a 12-es váltószámot alkalmazta: a lilliputiak 12-szer kisebbek az embernél, míg az óriások ennyiszor nagyobbak. A méretarányok megváltozása lépten-nyomon furcsa kalandokba sodorja Gullivert, és sok érdekes geometriai problémát vet fel.

Swift nagyon óvatos volt, igyekezett nem belebonyolódni a geometriai arányokba. Bár műveiben lépten-nyomon rákényszerült, hogy számításokat végezzen, ezek nagy részét kifogástalanul oldotta meg. Élvezetes olvasnivaló például, ahogyan leírja Gulliver ebédjét vagy a ruhájának készítését Lilliputban. Miről is van szó?

Az élelmiszer mennyisége a térfogattal arányos, így a főhősnek $12^3 = 1728$ lilliputi adagot kellett egy-egy étkezéskor fogyasztania. A ruházat szövete pedig a test felületével arányos, így $12^2 = 144$ -szer nagyobb felületű anyagra volt szükségük a lilliputi szabóknak. (Persze a ruha vastagságát is növelniük kellett.)

Elképzelhetjük, hogy Gulliver ellátása milyen óriási terhet rótt a lilliputi lakosságra. Ha például Gulliver napi 3 liter vizet fogyaszt, lilliputi mértékkel nézve ez napi $1728 \cdot 3 = 5184$ liter, azaz több mint 5 m^3 víz rendszeres napi szállítását jelenti.

Swift természettudományos tévedései nem is annyira matematikai, mint inkább biológiai jellegűek. Az élő izom viselkedése hasonló a rugalmas száléhoz (nyugodtan elképzelhetünk egy egyszerű rugót is mint modellt). A szálakat sorba kötve a maximálisan felemelhető tömeg, azaz a teherbírás nagysága ugyanakkora marad, csak magasabbra sikerül felemelnünk a testet, mert a megnyúlások összeadódnak. Ha azonban a szálakat párhuzamosan kötjük, az eredeti teherbírás ennek megfelelően többszörösére nő. (A rugóhasonlatnál maradván, a párhuzamosan kötött rugók direkciós ereje összeadódik.) A köznap értelemben vett izomerő tehát az izomzat keresztmetszetével arányos.

Ennek alapján nyilvánvaló, hogy emberóriások nem élhetnek a Földön. Brobdingnag lakói például $12^3 = 1728$ -szor nehezebbek nálunk, de ekkora súlyhoz csak $12^2 = 144$ -szeres izomerővel rendelkeznek. Relatív értelemben tehát 12-szer nehezebb terhet cipelnek, mint mi – és ahogy mi nem bírunk el $12 \cdot 80 = 960 \text{ kg}$ -ot, úgy ők sem képesek erre. Az óriások saját súlyuk alatt összeroskadnának.

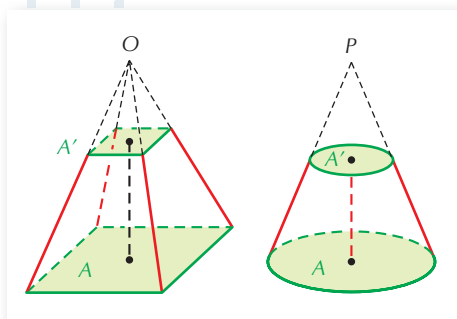
Az emberi test felépítése olyan, hogy saját súlyunkkal azonos nagyságrendű tömeget bírunk el. (Az arány átlagemberek esetében 1,5–2, sportolók esetében felmehet 3-ra is.) Persze vannak élőlények, amelyek lényegesen súlyosabbak, mint az ember. De ezek csontszerkezete nem emberszerű (ilyen például egy elefánt); vagy más közegben mozognak (például a bálna vízi környezete megnöveli a felhajtóerőt). A fentiek ismeretében azt is könnyebb megértenünk, hogy egyes rovarok hogyan bírnak el testsúlyuknál 30–40-szer nehezebb tárgyakat.

A biológia még egyéb érveket is felsorakoztat a lilliputi törpeemberek és emberóriások létezésének lehetetlensége mellett. Ilyen például a szervezet hőháztartási egyensúlya, a mozgékonyság, a csontok szilárdsága vagy akár a táplálék megemésztése, a zsírok emulgeálása a szervezetben.

(A témáról az interneten további érdekességeket olvashatunk.)



25. A CSONKAGÚLA ÉS A CSONKAKÚP



Az előző leckében már vizsgáltuk a gúla A alaplappal párhuzamos A' síkmetszeteit. Megállapítottuk, hogy A és A' hasonlóak, hiszen a gúla O csúcsából megfelelő hasonlósági transzformációval egymásba vihetők. Könnyen belátható, hogy a fenti állítások a kúpszerű testekre is igazak. Ebből már következik, hogy ha egy gúlát vagy kúpot elmetszünk az alaplapjával párhuzamos síkkal, akkor a két keletkezett test közül a „felső” hasonló az eredetihez. (Az az O centrumú hasonlóság, amely A' -t A -ba viszi, egyúttal a felső testet az eredetibe transzformálja.)

Az „alsó” testek elnevezése **csonkakúla**, illetve **csonkakúp**, az A és A' lapokat pedig **alaplappal** és **fedőlappal** nevezzük.

Megjegyzések

Természetesen igyekszünk megőrizni a „teljes” gúlával és kúppal kapcsolatos elnevezéseket. A csonkakúla és a csonkakúp **magassága** az alaplap és a fedőlap síkjainak a távolsága.

A csonkakúla **palástja** az oldallapokból áll, ezek trapézok. A szabályos gúla metszésével keletkezik a **szabályos csonkakúla**.

A csonkakúp **alkotói** értelemszerűen az eredeti teljes kúp alkotóinak a csonkakúp palástjára illeszkedő szakaszai. Az egyenes körkúp metszésével keletkezik az **egyenes csonkakúp**, ami forgástest. A forgástengelyen átmenő síkmetszetek neve tengelymetszet; ezek egyenlő szárú trapézok.



A háztartási boltokban többféle műanyag vödör kapható. Az egyik típus jó közelítéssel csonkakúp alakúnak tekinthető, házi mérésünk alapján méretei mm pontossággal a következők: az alapkör átmérője 20,0 cm, a fedőköré 25,0 cm, az alkotó hossza pedig 25,2 cm. Vajon mennyi víz tölthető a vödörbe?

Az ilyen és ehhez hasonló hétköznapi feladatok megoldásához szükségünk van valamilyen eljárásra, amellyel kiszámíthatjuk a csonkakúla és a csonkakúp felszínét és térfogatát.

A CSONKAGÚLA ÉS A CSONKAKÚP FELSZÍNE

A **csonkakúla felszíne** az alaplap, a fedőlap és az oldallapok (a palást) területének összege. Ezek sokszögek, tehát a jellemzőik ismeretében a felszín meghatározása a sokszögek területének a meghatározására vezethető vissza.

A **csonkakúp felszíne** szintén az alaplap, a fedőlap, valamint a palást területének összege. Egyenes csonkakúp esetében az alaplap és a fedőlap kör, a kiterített palást pedig körgyűrűcikk. Ez utóbbi területét – jellemzői ismeretében – már szintén meghatároztuk korábban.

1. példa

Egy négyzet alapú, szabályos csokkagúla alapélei $a = 15$ cm, fedőlapjának élei $b = 5$ cm, míg az oldalélei $c = 13$ cm hosszúak. Határozzuk meg a csokkagúla felszínét!

Megoldás

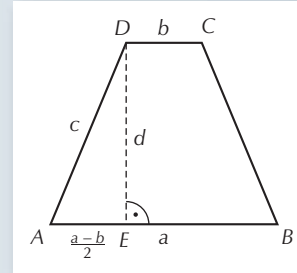
Ha az alaplap, a fedőlap és egy-egy oldallap területe rendre T , t és t' , akkor a felszín $A = T + t + 4t'$, mert a csokkagúla oldallapjai egybevágó húrtrapézok. $T = a^2$, $t = b^2$, hiszen az alaplap és a fedőlap négyzet. Kérdés tehát a húrtrapézok területe.

Ha az ábra szerinti $ABCD$ húrtrapézban behúzzuk a DE magasság-vonalat, akkor $AE = \frac{a-b}{2} = 5$ (cm). $DE = d$ hossza tehát az AED derékszögű háromszögben felírt Pitagorasz-tételből meghatározható.

$$d = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144}, \text{ azaz a trapézok magassága}$$

$$d = 12 \text{ cm. Egy-egy trapéz területe } t' = \frac{a+b}{2} \cdot d = \frac{15+5}{2} \cdot 12 = 120 \text{ (cm}^2\text{). A csokkagúla felszíne}$$

$$A = T + t + 4t' = 225 + 25 + 4 \cdot 120 = 730 \text{ cm}^2.$$



2. példa

Szabályos csokkakúp alapkörének sugara $R = 12$ cm, fedőkörének sugara $r = 4$ cm, alkotóinak hossza $a = 10$ cm. Határozzuk meg a csokkakúp felszínét!

Megoldás

Jelölje az alapkör, a fedőkör és a palást területét rendre T , t és P . Ekkor a felszín $A = T + t + P = R^2\pi + r^2\pi + P$.

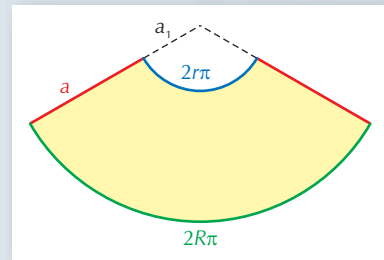
A kiterített palást körgyűrűcikk, melynek ívei $2R\pi$, illetve $2r\pi$ hosszúak. Ennek területét úgy kaphatjuk meg, hogy az ábra szerinti teljes $(a + a_1)$ sugarú körcikk területéből kivonjuk a kiegészítő a_1 sugarú körcikk területét.

A teljes körcikk és a kiegészítő körcikk hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{2R\pi}{2r\pi} = \frac{12}{4} = 3$. A megfelelő sugarak aránya ezzel megegyezik:

$$\lambda = \frac{a + a_1}{a_1}, \text{ s innen } a_1 = \frac{a}{2} = 5 \text{ (cm).}$$

$$\text{A körgyűrűcikk területe } P = R\pi(a + a_1) - r\pi a_1 = 12\pi \cdot 15 - 4\pi \cdot 5 = 160\pi \text{ (cm}^2\text{);}$$

$$\text{a felszín } A = R^2\pi + r^2\pi + P = 144\pi + 16\pi + 160\pi = 320\pi \approx 1005,31 \text{ cm}^2.$$



Megjegyzések

1. A feladatmegoldások során nincs szükség a hosszadalmas levezetésre, a szabályos csokkakúp palástját egy képlettel is felírhatjuk. A $\lambda = \frac{a + a_1}{a_1} = \frac{R}{r}$ összefüggésből $a_1 = \frac{ar}{R-r}$, így $a + a_1 = \frac{aR - ar + ar}{R-r} = \frac{aR}{R-r}$. A palást $P = R\pi(a + a_1) - r\pi a_1 = \frac{R^2\pi \cdot a}{R-r} - \frac{r^2\pi \cdot a}{R-r} = \frac{a \cdot \pi \cdot (R+r)(R-r)}{R-r}$ alakban is írható, és innen **a szabályos csokkakúp palástja** $P = a \cdot \pi \cdot (R+r)$.

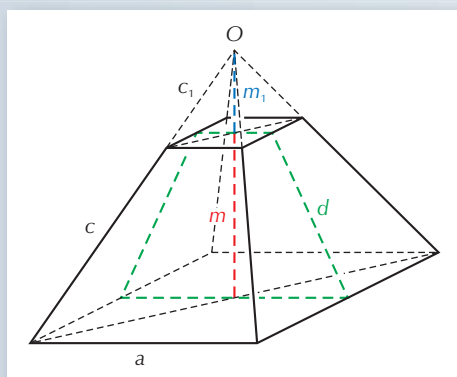
2. Egy lépésben is célt érhetünk, ha emlékszünk arra, hogy a körgyűrű területét megkaphatjuk a középkör kerülete és a gyűrű szélességének szorzataként is. Ez alapján $P = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot a = a \cdot \pi \cdot (R + r)$ közvetlenül adódik.

A CSONKAGÚLA ÉS A CSONKAKÚP TÉRFOGATA

3. példa

Próbáljuk meghatározni az 1. példában szereplő csonkagúla térfogatát!

Megoldás



A csonkagúlát kiegészíthetjük teljes gúlává úgy, hogy a fedőlapjára illesztjük a kiegészítő gúlát (ábra). Természetes gondolat, hogy a csonkagúla térfogatát az így kapott teljes gúla, valamint a kiegészítő gúla térfogatának különbségeként állítjuk elő.

Meghagyjuk az 1. példa jelöléseit, és bevezetjük a csonkagúla magasságára az m , a kiegészítő gúla oldaléleire a c_1 , magasságára az m_1 , valamint csúcsára az O jelöléseket. A kiegészítő gúla és a teljes gúla hasonló, mert az O pontból történő nagyítás a kiegészítő gúlát a teljes gúlába viszi. A hasonlóság aránya $\lambda = \frac{a}{b} = \frac{15}{5} = 3$, így $3m_1 = m + m_1$ és $3c_1 = c + c_1$. Innen $m_1 = \frac{m}{2}$ és $c_1 = \frac{c}{2} = 6,5$ (cm) közvetlenül adódik.

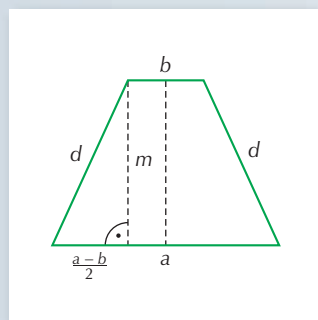
A csonkagúla magasságát kétféleképpen is meghatározhatjuk. Tekintetük az alaplaphoz merőleges síkmetszetet, amelyik a szemközti csúcson halad át: ez a csonkagúlából olyan húrtrapézt metsz ki, amelynek párhuzamos oldalai $\sqrt{2}a$ és $\sqrt{2}b$ hosszúak (a megfelelő négyzetek átlói), szárai hossza pedig c (a csonkagúla oldaléle).

Egy másik lehetőség, ha az alaphoz merőleges metsző sík az alaplaphoz (és fedőlap) középvonalán halad át. Ekkor is húrtrapéz a síkmetszet, ennek párhuzamos oldalai a és b , szárai pedig d hosszúak. (A lapmagasság $d = 12$ cm hosszát az 1. példában meghatároztuk.)

Ez utóbbi tengelymetszetről maradván, az m magasságot Pitagorasz tételével határozzuk meg (ábra):

$$m^2 = d^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 12^2 - 5^2 = 119, \text{ így } m = \sqrt{119} \text{ cm, és a hasonlóság miatt } m_1 = \frac{m}{2} = \frac{\sqrt{119}}{2} \text{ cm hosszú.}$$

$$\begin{aligned} \text{A csonkagúla térfogata a két gúla térfogatának a különbsége:} \\ \frac{a^2 \cdot (m + m_1)}{3} - \frac{b^2 \cdot m_1}{3} = \frac{225 \cdot 3m_1}{3} - \frac{25 \cdot m_1}{3} = \frac{650 \cdot \sqrt{119}}{3 \cdot 2} \approx \\ \approx 1181,78 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$



A CSONKAGÚLA ÉS A CSONKAKÚP TÉRFOGATKÉPLETE

(Kiegészítő anyag) Az előző példában alkalmazott típuseljárás nem volt nehéz, de elég sok részszámítás elvégzését igényelte. Célszerű megpróbálkoznunk az általános eset levezetésével (tehát olyan módszerrel, amelyet tetszőleges csonkagúlára alkalmazhatunk), ekkor ugyanis csak egyszer kell elvégezni a számításokat, míg az eredmény – ami remélhetőleg egy térfogatképlet – minden csonkagúlára alkalmazható lesz.

Legyen tehát a csonkagúla alaplajának T , fedőlapjának t a területe, míg a magassága m . Ha sikerül ezzel a három paraméterrel megadni a csonkagúla térfogatát, akkor a kapott képletet minden csonkagúlára alkalmazhatjuk, hiszen a T , t , m értékekre semmilyen megszorítást nem tettünk.

A 3. példa gondolatmenetét követjük. Jelölje m_1 a kiegészítő gúla magasságát; ekkor a kiegészítő gúla és a teljes gúla hasonlóak. Ha a hasonlóság aránya λ , akkor felírható, hogy

$$(1) \frac{m + m_1}{m_1} = \lambda, \text{ és}$$

$$(2) \frac{T}{t} = \lambda^2.$$

A teljes gúla és a kiegészítő gúla térfogatainak különbsége adja meg a csonkagúla térfogatát:

$V = \frac{T \cdot (m + m_1)}{3} - \frac{t \cdot m_1}{3}$. Tulajdonképpen készen vagyunk, mert (1)-ből m_1 kifejezhető: $m_1 = \frac{m}{\lambda - 1}$, s ezt helyettesítve a térfogatképletben csupa ismert mennyiség szerepel. Érdemes azonban kicsit csinosítani a formulán.

Írjunk $m + m_1$ helyére $\lambda \cdot m_1$ -et, és (2)-ből T helyére $\lambda^2 \cdot t$ -t! Ekkor a

$V = \frac{\lambda^2 \cdot t \cdot \lambda \cdot m_1}{3} - \frac{t \cdot m_1}{3} = \frac{m_1 \cdot t}{3} (\lambda^3 - 1) = \frac{m_1 \cdot t}{3} (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ alakhoz jutunk. (Felhasználtuk az $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ azonosságot.) Ezután m -et visszahelyettesítve

$$V = \frac{m \cdot t}{3(\lambda - 1)} (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = \frac{m \cdot t}{3} (\lambda^2 + \lambda + 1)$$

adódik. Végül (2)-ből kiküszöböljük λ -t: $\lambda = \sqrt{\frac{T}{t}}$, és $\lambda \cdot t = \sqrt{T \cdot t}$. Ezeket helyettesítve végül megkapjuk a csonkagúla térfogatképletének általános alakját: $V = \frac{m}{3} (T + \sqrt{T \cdot t} + t)$.

A kúpszerű testek a gúlákhoz hasonló módon származtathatók. A csonkakúp alap- és fedőlapjai is hasonló alakzatok, és a csonkakúpot is kiegészíthetjük teljes kúppá. Sőt, a kúpok térfogata is $V = \frac{T \cdot m}{3}$ módon adható meg, ezért a csonkagúla térfogatára kapott, fent levezetett képlet a csonkakúp esetében is érvényes.

Középiskolában elsősorban az egyenes körkúpból származtatott csonkakúppal foglalkozunk. Ha ebben az alapkör és a fedőkör sugara R és r , akkor térfogata

$V = \frac{m}{3} (T + \sqrt{T \cdot t} + t) = \frac{m}{3} (R^2 \pi + \sqrt{R^2 \pi \cdot r^2 \pi} + r^2 \pi) = \frac{m}{3} (R^2 \pi + R \cdot r \cdot \pi + r^2 \pi) = \frac{m \cdot \pi}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$ alakban is írható.

Tétel

A csonkagúla és a csonkakúp térfogata $V = \frac{m}{3} (T + \sqrt{T \cdot t} + t)$, ahol T az alaplaj, t a fedőlap területe, m pedig a test magassága. Speciálisan az **egyenes csonkakörkúp térfogata**

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2).$$

III. TÉRGEOMETRIA

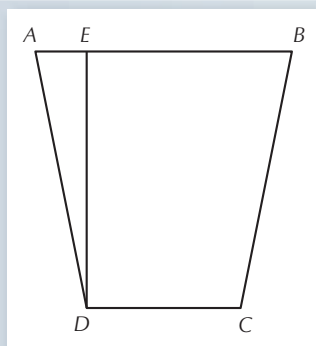
Megjegyzés

A fenti formulák a feladatmegoldásokban jól használhatók. Előfordulhat, hogy a T , t , m paraméterek helyett a csonka testek más jellemzői ismertek. Általában ekkor is úgy járunk el, hogy előbb meghatározzuk a képletben szereplő paramétereket, majd ezek ismeretében alkalmazzuk a térfogatképletet.

4. példa

Számítsuk ki a lecke elején vizsgált háztartási műanyag vödör térfogatát! Vajon befér 10 liter víz a vödörbe?

Megoldás



A csonkakúp alakú vödör alaplapra merőleges síkmetszete az $ABCD$ húrtrapéz, először ennek DE magasságát számítjuk ki (ábra). Az alap- és fedőkör sugara 10 cm, ill. 12,5 cm, így $AE = 2,5$ cm. Az ADE derékszögű háromszögben $AE = \sqrt{25,2^2 - 2,5^2} \approx 25,1$ cm. A vödör térfogata $\frac{25,1 \cdot \pi}{3} (10^2 + 10 \cdot 12,5 + 12,5^2) \approx 10\,021$ cm³. A méréseink alapján tehát (éppen csak) befér 10 liter víz a vödörbe.

(Figyelembe véve a lehetséges mérési pontatlanságokat, a vödört nagy valószínűséggel éppen 10 liter térfogatra tervezték.)

Fogalmak
csonkakúp;
csonkakúp;
alaplapp;
fedőlap.

FELADATOK

1. K2 Mekkora szöget zárnak be az 1. példában szereplő csonkakúp szemköztes oldallapjai egymással, illetve az alaplappal?
2. K2 Mekkora a 2. példában szereplő csonkakúp térfogata?
3. E1 Háromszög alapú szabályos gúla alapéle $a = 6$ egység, magassága $m = 15$ egység hosszú. A gúlát két, az alaplappal párhuzamosan haladó síkkal három egyenlő magasságú résztestre daraboltuk. Mekkora az egyes részek élei, felszíne és térfogata?
4. E1 Egy acélból készült, szabályos ötszög alapú csonkakúlat levélnehezéknek használunk. Mekkora a tömege, ha az alapéle $a = 2,5$ cm, magassága $m = 6,2$ cm hosszú, és az oldaléle $\varphi = 72^\circ 45'$ -es szöget zár be az alaplappal? (Az acél sűrűsége $\rho = 7,2$ g/cm³.)
5. K2 Egy csarnok kupolája csonkakúp alakú, mely alapkörének átmérője 60 méter, a fedőkör átmérője 54 méter hosszú, az oldalfalak pedig 80° -os szögben dőlnek a talajhoz képest. Hány köbméter a kupola térfogata? Hány négyzetméter a kupola oldalfala (a csonkakúp palástja)?
6. Egy 5 dl térfogatú, csonkakúp alakú tejfölpohár alapkörének (belső) átmérője 6 cm, fedőkörének átmérője 9 cm hosszú.
 - K1 a) Mekkora a pohár magassága?
 - K2 b) Mennyi tejföl van a pohárban, amikor az eredeti magasság felénél, illetve harmadánál van a tejföl szintje?

7. K2

(Érettségi feladat, középszint, 2008.) Egy facölöp egyik végét csonkakúp alakúra, másik végét forgáskúp alakúra formálták. (Így egy forgástestet kaptunk.) A középső, forgáshenger alakú rész hossza 60 cm, és átmérője 12 cm. A csonkakúp alakú rész magassága 4 cm, a csonkakúp fedőlapja pedig 8 cm átmérőjű. Az elkészült cölöp teljes hossza 80 cm.

a) Hány m^3 fára volt szükség 5000 darab cölöp gyártásához, ha a gyártáskor a felhasznált alapanyag 18%-a a hulladék? (Válaszát egész m^3 -re kerekítve adja meg!)

Az elkészült cölöpök felületét vékony lakkréteggel vonják be.

b) Hány m^2 felületet kell belakkozni, ha 5000 cölöpöt gyártottak? (Válaszát egész m^2 -re kerekítve adja meg!)

Ajánlott feladatok

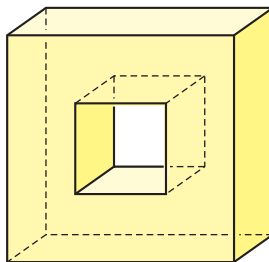
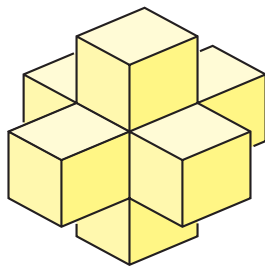
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1894–1903 (csonkagúla), 2082–2115 (csonkakúp).

A TESTEK CSOPORTOSÍTÁSA (Olvasmány)

Már említettük, hogy a minket körülvevő teret a legkülönbözőbb objektumok töltik ki, s ezekkel nap mint nap találkozunk. A bonyolultabb tárgyak gyakran egyszerűbb testekből épülnek fel, illetve – esetleg csak gondolatban – ezekre bonthatók. A mesterséges építmények és a természetes képződmények egyes részei is jó közelítéssel egyszerűbb testekkel modellezhetők. Érdekes tehát a legegyszerűbb „építőköveket” elnevezni, tulajdonságaik alapján csoportosítani. Ekkor már azonosíthatjuk, jellemezhetjük az objektumokat, ha találkozunk velük. Az alábbiakban megpróbáljuk néhány jellemző tulajdonságuk alapján osztályozni a testeket. (Hasonló csoportosítást a síkgeometriában is tettünk, például a csúcsok száma vagy a szimmetriatulajdonságok alapján: a tárgyalt alakzatok a háromszög, sokszög, kör stb. voltak.)

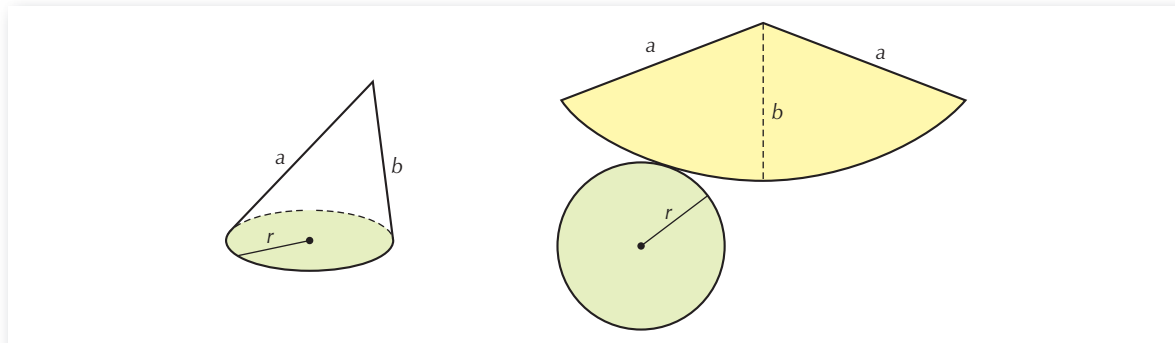
Egy fontos osztályozási szempont, hogy a test **konvex** vagy **konkáv**.

Konkáv alakzat például az ábrán látható térbeli kereszt vagy az „átfúrt” hasáb.



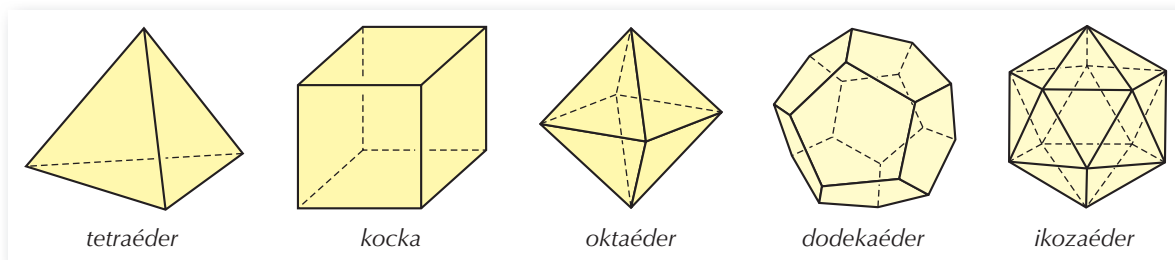
Egy másik szempont lehet a testeket határoló alakzatok valamely tulajdonsága. A **poliédereket** sokszöglapok határolják, míg vannak testek, amelyeket **görbe vonalú síkidomok** is határolnak, míg másokat esetleg **görbült felületek**. A poliéderek felülete **kiteríthető a síkba**, az utóbbiaké nem biztos. (A következő leckében tárgyalt gömb felülete sem teríthető ki a síkba.)

Ha az ábrán látható ferde körkúp palástját a leghosszabb a alkotója mentén elvágjuk, a síkba terített palást számunkra ismeretlen alakzat, középiskolában nem vizsgáljuk.



A térgeometriai leckékben a testeket származtatásuk szerint osztályoztuk. (Ennek előnyei elsősorban a felszín- és térfogatszámítás során mutatkoztak meg.) Részletesen vizsgáltuk a **hengerszerű testeket** (hasáb, henger) és a **kúpszerű testeket** (gúla, kúp).

A poliédereket a csúcsokban találkozó lapok szimmetriatulajdonságai alapján is osztályozhatjuk. Bizonyítható, hogy **öttféle szabályos poliéder** létezik. (Ezek olyan konvex poliéderek, amelyeknek minden lapjuk egybevágó, szabályos sokszög, és minden csúcsukban ugyanannyi lap találkozik.) Az ábrán az ötféle szabályos test látható.



	tetraéder	kocka	oktaéder	dodekaéder	ikozaéder
csúcs	4	8	6	20	12
él	6	12	12	30	30
lap	4	6	8	12	20

A szabályos testeket már az ókori görögök ismerték. A Kr. e. VI. században **Püthagoras** és tanítványai vizsgálták a testek geometriai tulajdonságait, **Eukleidész** *Elemek* c. munkájában Kr. e. 300 körül be is bizonyította, hogy pontosan öt szabályos test létezik, **Hérón** Kr. u. 60 körül pedig kiszámította a szabályos testek térfogatát. De megemlíthetjük **Platón**t (Kr. e. 427–347) is, akinek kozmológiájában a szabályos testek elmélete központi helyet foglalt el. Négy szabályos testnek az őselemeket (föld, levegő, víz, tűz) feleltette meg; végül az ötödik dodekaédert **Arisztotelész** (Kr. e. 384–322) az étérrel azonosította.



Eukleidész

Érdekességgéppen megemlíthetjük még a **félig szabályos testeket**. Ezek a konvex testek kétfélék lehetnek, attól függően, hogy hogyan enyhítünk a szabályos test definícióján.

Egyik lehetőség, hogy a szabályos szöglet mellett csak egybevágó lapokat követelünk meg. (A szabályos szöglet [vagy csúcsalakzat] azt jelenti, hogy egy-egy csúcsban egyforma szögű lapok találkoznak. Vagy másképpen: minden csúcsra teljesül, hogy az oda befutó élek forgatással egymásba vihetők.) Ilyen testet kapunk például, ha két egybevágó n -szög alapú szabályos gúlát az alaplappjukkal egymásra illesztünk úgy, hogy a csúcsok fedésbe kerüljenek.

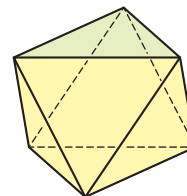
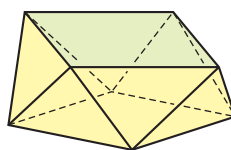
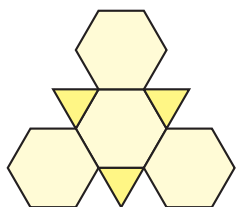
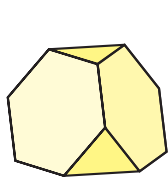
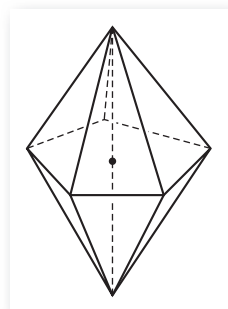
Az ábrán egy szabályos ötszög alapú kettős gúla látható. Könnyen igazolható, hogy az ötszöglapokon lévő csúcsokba futó élek negyedrendűen, míg a másik két csúcsba befutó élek ötödrendűen forgásszimmetrikusak. (A megfelelő csúcsokon átmenő tengelyre vonatkoztatva.)

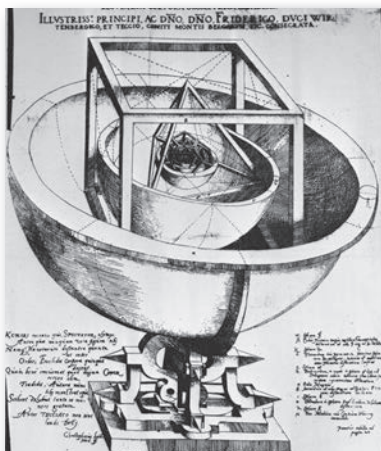
A félig szabályos testek előállításának másik lehetősége, amikor az egybevágó szögletek mellett csak szabályos (de nem szükségképpen egybevágó) lapokat követelünk meg. Ezekkel az ún. arkhimédészi testekkel már tavaly is többször találkoztunk. Ilyenek voltak a szabályos poliéderek különböző csonkításával kapott testek, például a „focilabda-poliéder” vagy a „csonkolt kocka”.

Az alsó ábrán sorban egy csonkított tetraéder és a hálójá, valamint egy négyszög és egy háromszög alapú antiprizma látható. A csonkított tetraéder minden csúcsában egy szabályos háromszög és két szabályos hatszög találkozik, ezt a csúcsokra vonatkozó (3. 6. 6) kódolással jelölhetjük.

A szabályos n -szög alapú hasábot kissé eltorzítva kapjuk az n -szög alapú antiprizmát. A hasáb tengelye körül az egyik alaplapot a középponti szög felével, $\frac{180^\circ}{n}$ nagyságú szöggel elfordítjuk, majd a két alaplapot $2n$ számú egyenlő szárú háromszöggel kapcsoljuk össze. A hasáb magassága mindig megválasztható úgy, hogy az egyenlő szárú háromszögek szabályosak legyenek, s ekkor félig szabályos testeket kapunk.

Észrevehetjük, hogy a szabályos háromszög alapú antiprizma már ismert test: ez az oktaéder.





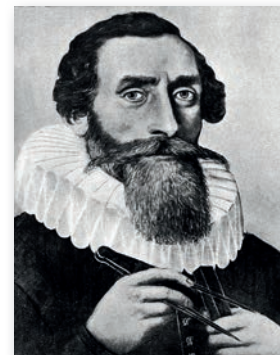
Kepler Naprendszer-modellje

Őseink már évezredekkel ezelőtt találhattak szabályos vagy félig szabályos test alakú kristályokat. Szintén csaknem háromezer évesek azok a régészeti leletek is, melyek szerint a hasonló testeket mágikus és díszítőelemként használták. Tudjuk, hogy a félig szabályos testek tulajdonságait **Arkhimédész** (Kr. e. 287–212) is tárgyalta egy elveszett munkájában, de a testek teljes leírása a nagy német természettudós, Johannes **Kepler** (1571–1630) nevéhez fűződik. Kepler megállapította, hogy az antiprizmákon kívül 13 félig szabályos (arkhimédészi) test van, s ezeket egyfajta periódusos rendszerbe is sorolta.

Kepler misztikus összefüggéseket is leírt az öt szabályos test és az akkor ismert öt Földön kívüli bolygó pályája között. A Naprendszer modelljét a szabályos testekbe és azok köré írható gömbök segítségével szerkesztette meg. [A szabályos és félig szabályos (arkhimédészi) testekről, valamint Platón és Kepler munkásságáról bőseges anyag található az interneten.]



Arkhimédész



Kepler

Fogalmak, nevek

Eukleidész;
Hérón;
Platón;
Arisztotelész;
félig szabályos test;
Arkhimédész;
Kepler.

Az alábbi kitűzött feladatokban szereplő összetett testek egyszerűbb testekből épülnek fel. Az „építőkövek” tulajdonságait (felszín, térfogat) már korábban elemeztük.

FELADATOK

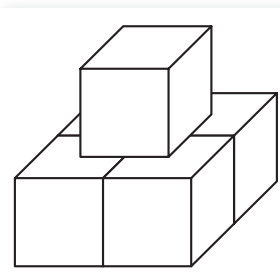
1. K1

A „térbeli keresztet” alkotó egybevágó kockák éle $a = 10$ cm. Határozzuk meg a kereszt felszínét és térfogatát!

2. K1

Öt egybevágó, 1,5 cm élhosszúságú kockából az ábrán látható alakzatot építettük.

Rajzoljuk le, hogyan néz ki oldalról nézve a test! Mekkora a felszíne és a térfogata?



3. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2008.) Egy fa építőjáték-készlet négyféle, különböző méretű téglatestfajtaból áll. A készletben a különböző méretű elemek mindegyikéből 10 db van. Az egyik téglatest, nevezük alapelemnek, egy csúcsából induló élének hossza: 8 cm, 4 cm, 2 cm.

A többi elem méreteit úgy kapjuk, hogy az alapelem valamelyik 4 párhuzamos élének a hosszát megduplázzuk, a többi él hosszát pedig változatlanul hagyjuk.

a) Mekkora az egyes elemek felszíne?

b) Rajolja le az alapelem kiterített hálózataának 1 : 2 arányú kicsinyített képét!

c) Elférhet-e a játékkészlet egy olyan kocka alakú dobozban, amelynek belső éle 16 cm?

4. K2

Egy téglatest egy csúcsból kiinduló élei $a = 9$ cm, $b = 11$ cm, $c = 13$ cm hosszúak. A téglatestet „kifúrjuk” a c élével párhuzamos, $1 \times 1 \times 13$ cm méretű négyzet alapú hasábbal. (A lap közepén fúrunk, azaz az eredeti téglatest és a hasáb tengelye egybeesik.)

a) Mekkora az így kapott lyukas téglafelső felület és a térfogata?

b) A b éllel párhuzamosan is fúrunk egy második lyukat, a 9×13 cm méretű lap közepébe. A lyuk alakja $1 \times 1 \times 11$ cm méretű négyzet alapú hasáb. Mekkora ennek a „kétlyukú” testnek a felület és a térfogata?

E1 c) Hasonló módon kifúrjuk az a éllel párhuzamos, $1 \times 1 \times 9$ cm méretű lyukat is. Mekkora a „háromlyukú” test felület és térfogata?

5. E1

Egy ferde körkúp alapkörének sugara $r = 7$ cm, a leghosszabb alkotója $a = 15$ cm és a leg-rövidebb alkotója $b = 13$ cm. A kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal, 4 cm magasságban kettévágjuk. Mekkora a két keletkezett rész térfogata?

6. E1

Mekkora az x élhosszúságú oktaéder két szemköztes (közös pont nélküli) lapjának a távolsága?

7. K2

Az x élhosszúságú kocka lapjaira kifelé egy-egy szabályos gúlát illesztünk úgy, hogy a gúla alaplapja egybeesik a négyzet lapjával, és a gúla oldaléleinek hossza x .

a) Hány csúcsa, éle, lapja van ennek a testnek?

b) Mekkora a felület és a térfogata?

8. K2

Az előző feladatot annyiban módosítjuk, hogy az x élhosszúságú négyzetlapokra $\frac{x}{2}$ magasságú szabályos gúákat emelünk. (Ekkor persze a lapokra emelt gúla oldalapjai egyenlő szárú, de nem szabályos háromszögek.)

a) Hány csúcsa, éle, lapja van ennek a testnek?

b) Mekkora a felület és a térfogata?

9. K2

Egységkockákból épített alakzat előlnézeti és oldalnézeti vetülete is 2×2 -es méretű négyzet. Mekkora lehet a test térfogata?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 1904–1970 (poliéderek).



Tudod-e?

Manapság már nagyon sok számítógépes geometriai alkalmazás érhető el. Ezekkel kényelmesen, interaktív módon szerkeszthetünk síkgeometriai és térszerkezetek ábráit. A felhasználóbarát programok elvégzik helyettünk az alapvető műveleteket (pl. terület-, terület- vagy térfogatszámítás), élményszerűen szemléltetik a különböző transzformációkat. A hagyományos térbeli modellezőkészletek is nagyon jól fejlesztik a kézügyességet és a térszemléletet, térképészeti (ide sorolhatók a „klasszikus” Babylon-eszközök, a Rubik-kocka vagy a Polydron-készlet is).

26–27. A GÖMB

A gömb sok szempontból különleges test. Végtelen sok forgástengelye és végtelen sok szimmetriasíkja van, ezért tökéletessége már ősidők óta megragadta az emberek képzeletét. Gyakran misztikus tulajdonságokkal ruházták fel, a szépség és a harmónia megtestesülését látták benne, s a gömb alakú (vagy ahhoz hasonló) talizmánoknak, bűvös tárgyaknak mágikus erőt tulajdonítottak.

A gömb érdekes tulajdonsága, hogy az azonos térfogatú testek közül a gömb felszíne a legkisebb, ezért a természetben is találkozunk gömbszerű objektumokkal. Jó közelítéssel gömbnek tekinthetők a bolygók, holdak vagy például a hulló esőcseppek; de gömbhullámok alakjában terjednek az elektromágneses hullámok vagy a levegőben a hanghullámok is. (Tudományos-fantasztikus filmekben is látni néha, hogy a súlytalanság állapotában kiömlő folyadék gömbökbbe rendeződik.)

A köznyelvben a **gömb** szó egyszerre jelenti a **gömbfelületet** és a **gömbtestet** is; általában a szövegkörnyezetből derül ki a pontos jelentés. (Csakúgy, mint ahogy a síkban a **kör** jelenti a **körvonalat** és a **körlemezt** is.)

A gömb definíciójával már találkoztunk.

Definíció

A **gömbfelület** a térben egy adott ponttól megadott távolságra lévő pontok halmaza; a **gömbtest** pedig egy adott ponttól a megadott távolságnál nem nagyobb távolságra lévő pontok halmaza.

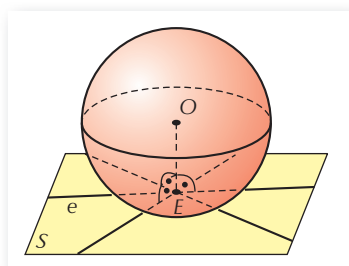
Megjegyzés

A G gömb pontjait megadhatjuk halmazelméleti jelölésekkel is.

Ha az R sugarú gömb középpontja O , akkor a V térben lévő P pont pontosan akkor van rajta a gömb felületén, ha $OP = R$, azaz $G = \{P \in V \mid OP = R\}$; és a B pont pontosan akkor tartozik a gömbtesthez, ha $OB \leq R$, azaz $G = \{B \in V \mid OB \leq R\}$.

A gömbön kívül lévő C pontok halmaza pedig $\{C \in V \mid OC > R\}$.

A GÖMB ÉS SÍKMETSZETEI



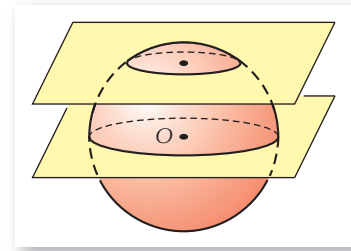
A gömb bármely pontjában egyetlen **érintősík** fektethető. Jelölje O a gömb középpontját, S az érintősíkot, E az érintési pontot. Szimmetriatulajdonságok miatt OE merőleges az S síkra, de így merőleges annak minden egyenesére is. Ebből következik, hogy az E ponton áthaladó, S síkbeli e egyenesek mindegyikének egyetlen közös pontja van a gömbbel (az E pont), és mindegyik e egyenes merőleges az érintési pontba húzott OE sugárra. Az e egyenesek a gömb érintői, érintőegyenesei. (Tehát bármely gömb tetszőleges pontján keresztül egyetlen érintősík és végtelen sok érintőegyenes húzható.)

Bármely metszősík a gömböt egy körben, a gömbfelületet egy körvonalban metszi. A gyakori használat miatt kitüntetett szerepe van annak a síkmetszetnek, amit a középpontra illeszkedő sík metsz ki a gömbből: ennek neve **főkör**.

A főkör sugara megegyezik a gömb sugarával. (És csak a főkör sugara egyenlő a gömb sugarával; ha a síkmetszet nem főkör, akkor sugara kisebb ennél.) A tér bármely O -tól különböző P pontjára illeszthető olyan sík, amelyik a gömböt főkörben metszi, sőt ilyen sík végtelen sok van: minden olyan sík megfelelő,

amelyik tartalmazza az OP egyenest. Viszont csak egyetlen olyan sík van, amely tartalmaz egy adott e érintőt, és a gömböt főkörben metszi.

Ha a gömbtestet két párhuzamos síkkal három részre vágjuk, akkor a két szélső test elnevezése **gömbszelet**, a középső test a **gömböv**. A gömbszeleteket pedig egy-egy körlap és a **gömbsüveg** határolja.



1. példa

A Föld jó közelítéssel $R_F = 6370$ km sugarú gömbnek tekinthető. Ez alapján rögzítették a Föld felszínéhez a szélességi és hosszúsági fokok gömbi koordináta-rendszerét. (Ennek módjára emlékezhünk például a földrajzóráról. Csak ismétlésképpen: a hosszúsági körök vagy másképpen délkörök az Északi- és a Déli-sarkon áthaladó főkörök, a szélességi körök pedig a rájuk merőleges irányú síkmetszetek. A szélességi körök közül egyedül az Egyenlítő a főkör, ezt tekintjük a 0° szélességi körnek, míg a délkörök közül a londoni Greenwichen áthaladó kapta ezt a kezdőértéket. A hosszúsági és szélességi köröket természetes módon (a teljes körnek megfelelően) 360° -ra osztották.)

Budapest helyzete például: északi szélesség $47^\circ 30'$ és keleti hosszúság $19^\circ 05'$.

- Mekkora a $47^\circ 30'$ szélességi és a $19^\circ 05'$ hosszúsági körök kerülete?
- Mekkora a budapesti szélességi körön két olyan szomszédos hosszúsági kör távolsága, amelyek fokokban mérve egész számértékűek?
- Mekkora két szomszédos, fokokban mérve egész számértékű szélességi kör távolsága a Föld felszínén?
- Az angol és a nemzetközi tengeri mérföld hossza megegyezik két olyan szélességi körnek a Föld felszínén mért távolságával, amelyek különbsége $1'$. Kb. hány méter hosszú egy angol tengeri mérföld?

Megoldás

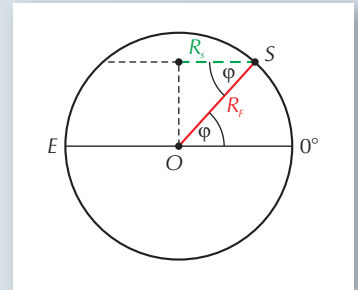
- A hosszúsági kör főkör, így kerülete $k_H = 2 \cdot R_F \cdot \pi \approx 40\,020$ km. (Közelítőleg ennyi az Egyenlítő hossza is, ha a Földet tökéletes gömbnek tekintjük.)

Az ábráról leolvasható a φ szélességi kör szemléletes jelentése. Ekkor az S szélességi kör R_S sugara $R_S = R_F \cdot \cos \varphi$ módon számolható. A Budapesten áthaladó szélességi kör kerülete $k_S = 2 \cdot R_S \cdot \pi = 2 \cdot R_F \cdot \cos \varphi \cdot \pi \approx 8607$ km. (Ha Budapestről pontosan kelet felé indulunk, ekkora távolságot kell megtennünk a Föld felszínén haladva, míg ismét Budapestre érünk.)

- Legegyszerűbben úgy járhatunk el, ha az előbb kiszámolt szélességi kör kerületét 360 részre osztjuk: $\frac{8607}{360} \approx 23,9$ km a keresett távolság.

- Az egész számértékű szomszédos szélességi körök távolsága állandó, a Föld egy hosszúsági körének 360-ad része, kb. $\frac{2 \cdot R_F \cdot \pi}{360} \approx 111,2$ km.

- A c) pontban kiszámolt érték 60-ad részét kell venni. A méterben kapott érték $\frac{2 \cdot R_F \cdot \pi}{360 \cdot 60} \cdot 1000 \approx 1853$ m; ez jó közelítéssel megegyezik a tengeri mérföld „hivatalos”, de országonként kissé eltérő hosszával.



2. példa

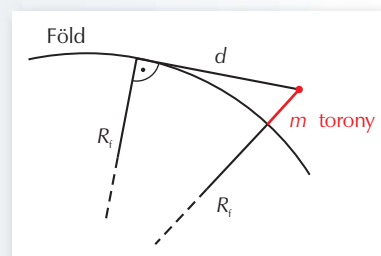
A gúlát tárgyaló korábbi leckében úgy becsültük, hogy Attila hun király emberei a süvegükben kb. 6,7 méter magaslathoz elegendő földet tudtak összehordani.

- Adjuk ehhez hozzá Attila magasságát, s becsüljük meg, hogy kb. mekkora a látótávolság a 8,5 méteres magasságból!
- Mekkora a látótávolság egy ötemeletes ház (kb. 18 méter magas) tetejéről?
- Mekkorára nő a látótávolság, ha egy tengeri világítótorony 25 méteres magasságából nézünk szét? (Persze feltételezzük, hogy a Föld kellően sima, ideális gömb, és a tiszta időben semmilyen pára vagy por nem akadályozza a kilátást.)

Megoldás

Hasonló feladattal már a 11. osztályban is találkoztunk. Ha a torony magasságát m -mel, a látótávolságot d -vel jelöljük, akkor Pitagorasz tételéből $(R_F + m)^2 - R_F^2 = d^2$, innen $d = \sqrt{2 \cdot R_F \cdot m + m^2}$. Az m^2 tagot elhanyagolhatjuk, mert jóval kisebb, mint $2 \cdot R_F \cdot m$. A látótávolság tehát $d \approx \sqrt{2 \cdot R_F \cdot m}$. (A Föld felszínén mért távolság jó közelítéssel megegyezik d -vel.)

- $m = 8,5$ méter, így $d \approx \sqrt{2 \cdot R_F \cdot m} \approx 10,4$ km. (Meglepően sok.)



Megjegyzés

Ha nem hanyagoljuk el az m^2 tagot, akkor pontosabb értékkel számolva a 10,40624812 helyett a 10,40625159 eredményt kapjuk. Csak a hetedik értékes jegyben van eltérés, de ekkora pontosságú becslés nyilván értelmetlen.

A lecke végén egy hasonló feladatot szögfüggvények segítségével is megoldunk.

- $m = 18$ méter, $d \approx \sqrt{2 \cdot R_F \cdot m} \approx 15,1$ km.

- $m = 25$ méter, $d \approx \sqrt{2 \cdot R_F \cdot m} \approx 17,8$ km.

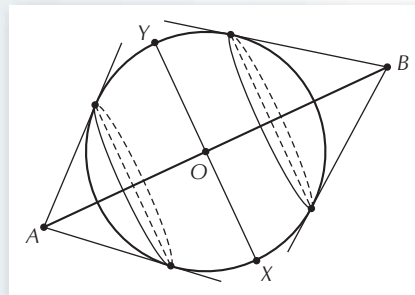
3. példa

- Legalább hány műholdat kell pályára állítani ahhoz, hogy egy bolygó minden pontja látsszon valamelyik műholdról?
- Hány műholdat kell „látnunk” egy adott pillanatban, ha meg akarjuk határozni a helyzetünket a bolygó felszínén? (Egy műholdtól azt az információt kapjuk, hogy mekkora távolságra van tőlünk.)

Megoldás

- Három műhold még nem elég. Jelölje a műholdakat A, B, C , a bolygó középpontját O . Húzzuk meg O -ból az ABC síkra merőleges átmérőt. Könnyen látható, hogy ezen átmérő X és Y végpontjai közül legalább az egyik nem látható a műholdakról. (Ha A, B, C egy egyenesen van, akkor bármelyik rajtuk áthaladó sík megfelelő.)

Szemléletesen azt is mondhatjuk, hogy az „Egyenlítővel párhuzamos síkból az Északi- és a Déli-sark nem látható egyszerre”.



Másképpen: Húzzuk meg O -ból az AOB síkra merőleges átmérőt. (Ha A , O , B egy egyenesen van, akkor bármelyik AB -re merőleges átmérő megfelelő.) Az átmérő X és Y végpontjainak megfigyeléséhez még további két műhold kell.

Négy műhold viszont már elég, ha a bolygó a négy műhold által meghatározott tetraéder belsejében van.

- b) Az A műholdtól adott távolságra lévő pontok halmaza a bolygó felületén egy kört határoz meg. (Ez a kör felfogható egy A csúcsú kúp alapkörének, a kúp alkotói pedig a távolságok, azaz a műholdtól a bolygó felszínéig húzott egyenlő hosszúságú szakaszok.) Két kör a bolygó felszínén még metszheti egymást két pontban, ezért legalább három műhold szükséges a helymeghatározáshoz. Ez elegendő is, ha a műholdak nincsenek egy egyenesen, és a rájuk illeszkedő sík nem megy át a bolygó középpontján. (Ekkor ugyanis nem fordulhat elő, hogy a három körnek két közös pontja van.)

A GÖMB FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA

A gömb térfogatának és felszínének a meghatározása nehéz feladat, a középiskolás eszközeink erre nem is elegendőek. (A térfogat meghatározása erősebb matematikai módszerekkel vagy a Cavalieri-elv segítségével történhet, míg a felszín kiszámításakor az okoz nehézséget, hogy a gömb felszíne nem teríthető ki a síkba.)

A **térfogatszámítási problémák** ősidők óta foglalkoztatták az embereket, s ezen a területen már az ókori tudósok is szép eredményeket értek el. Az egyiptomiak elsősorban a gyakorlati számításokban jeleskedtek, egyik matematikai csúcseredményük a csonkagúla térfogatának a meghatározása volt. (A Kr. e. 2000 körül keletkezett *moszkvai papirusz* tartalmaz hasonló feladatot.) Tudománytörténeti érdekesség, hogy a kúp térfogatát megadó képletet **Démokritosznak** (kb. Kr. e. 460–370) tulajdonítják. Démokritosz neves filozófus volt, az atomelmélet megalkotója, akinek híres volt a matematikai iskolája is.

A **gömb felszínének és térfogatának a meghatározása** az ókor legnagyobb matematikusa, **Arkhimédész** (Kr. e. 287–212) nevéhez fűződik. Bebizonyította, hogy a gömb felszíne megegyezik a köré írt hengerpalást területével, és a térfogata a köré írt henger térfogatának $\frac{2}{3}$ része. Egy másik nevezetes tétele szerint az egyenlő oldalú henger, a bele írható gömb és a hengerbe írható egyenes körkúp térfogatainak aránya $3 : 2 : 1$.

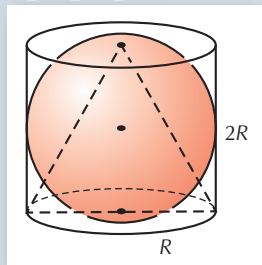
Arkhimédésznek annyira tetszett a gömb, valamint a köré írt henger felszíne és térfogata közötti elegáns összefüggés, hogy azt kívánta, a sírkövére is ezt a két testet véssék. A nagy római államférfi, Marcus Tullius **Cicero** (Kr. e. 106–43) szicíliai tartózkodása alatt felkutatta Arkhimédész elfelejtett sírját, s a felirat alapján sikerült azt azonosítania.



4. példa

Milyen képleteket kapott Arkhimédész – mai jelöléssel írva – a gömb felszínére és térfogatára?

Megoldás



Jelölje R a gömb sugarát, ekkor a köré írt henger, valamint a hengerbe írt kúp alapkörének sugara szintén R , míg magasságuk $2R$. (Ezt a hengert nevezik egyenlő oldalúnak.) A kúp térfogata $V_k = \frac{R^2 \pi}{3} \cdot 2R = \frac{2 \cdot R^3 \pi}{3}$, a hengeré $V_h = R^2 \pi \cdot 2R = 2 \cdot R^3 \pi$, s ez alapján a gömb térfogata $V_g = 2 \cdot V_k = \frac{4 \cdot R^3 \pi}{3}$. A gömb felszíne a köré írt henger palástjának területével egyezik meg: $A_g = 2R\pi \cdot 2R = 4 \cdot R^2 \pi$.

Tétel

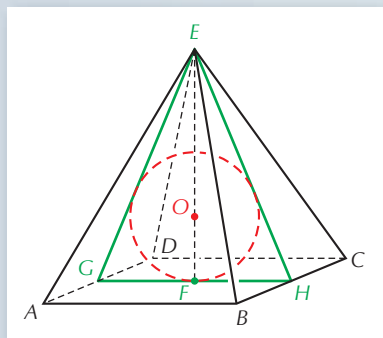
Az R sugarú gömb felszíne $A = 4 \cdot R^2 \pi$, térfogata $V = \frac{4 \cdot R^3 \pi}{3}$.

A képleteket nem bizonyítjuk.

5. példa

Négyzet alapú szabályos gúla alapéle 10 cm, magassága 12 cm. Mekkora a gúla lapjait érintő, illetve a gúla csúcsain áthaladó gömb sugara?

Megoldás



Általában a testek lapjait érintő gömböt beírt gömbnek, míg a csúcsokon áthaladó gömböt a test köré írt gömbjének nevezzük. Jelölje r a gúlába, R pedig a gúla köré írható gömb sugarát, valamint A, B, C, D a négyzet csúcsait, E a gúla csúcsát, F pedig a négyzet középpontját.

A gúla beírt gömbje biztosan létezik. Ugyanis a gúla forgásszimmetrikus az EF tengelyre nézve, tehát olyan gömb, ami a gúla oldallapjait érinti, könnyen felvehető. (A tengely bármely pontja lehet gömbközpont.) Ezután pedig az E pontból addig nagyítjuk vagy kicsinyítjük a gömböt, amíg az a gúla alaplaját is érinteni fogja.

A beírt gömb a gúla oldallapjait az alaphoz tartozó magasságvonalaikban érinti. Vegyük fel ezért azt a gúla tengelyén átmenő, az alaplappra merőleges síkot, amely például párhuzamos az AB és CD élekkel. Ez a sík áthalad az AD oldal G és a BC oldal H felezőpontján, valamint a beírt gömb O középpontján. A sík a beírt gömbből egy főkört metsz ki, azaz a **beírt gömb** sugara megegyezik a GHE háromszög **beírt körének** sugarával.

Így egy síkgeometriai feladatot kapunk. A HFE derékszögű háromszögben $HE = \sqrt{FH^2 + FE^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm. A GHE háromszög beírt körének sugarát pl. az $r = \frac{t}{s}$ képlettel határozhatjuk meg: $r = \frac{GH \cdot FE}{2 \cdot (FH + HE)} = \frac{10 \cdot 12}{2 \cdot (5 + 13)} = \frac{10}{3}$ cm.

(Más lehetőségek: hasonlóság vagy trigonometria alkalmazása.)

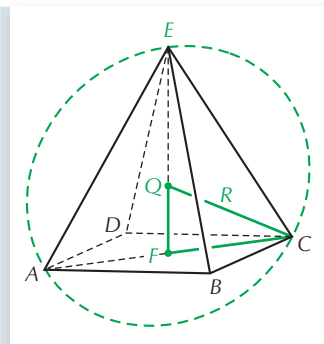
A körülírt gömb is létezik. Szemléletesen például azt mondhatjuk, hogy felvesszünk egy olyan gömböt, amely átmegy az $ABCD$ négyzet csúcsain (ilyen végtelen sok van); majd ennek a gömbnek változtatjuk (csökkentjük vagy növeljük) úgy a sugarát, hogy – miközben az A, B, C, D pontokat továbbra is tartalmazza – áthaladjon az E ponton is.

Vegyük fel az alapra merőleges, az AC átlón áthaladó síkot! Ez a gúlából az ACE háromszöget metszi ki, és tartalmazza az FE tengelyt, azaz a körülírt gömb Q középpontját is. A gömbi síkmetszet ezért főkör, vagyis a gúla **köré írt gömb** sugara megegyezik az ACE háromszög **köré írt körének** sugarával.

A QFC derékszögű háromszögben

$$QC = R, QF = FE - R \text{ és } FC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot AB}{2} = \frac{AB}{\sqrt{2}}, \text{ a négyzet átlójának a fele.}$$

$$\text{Pitagorasz tételéből: } R^2 = (12 - R)^2 + \frac{10^2}{2}, \text{ innen } R = \frac{97}{12} \text{ cm.}$$



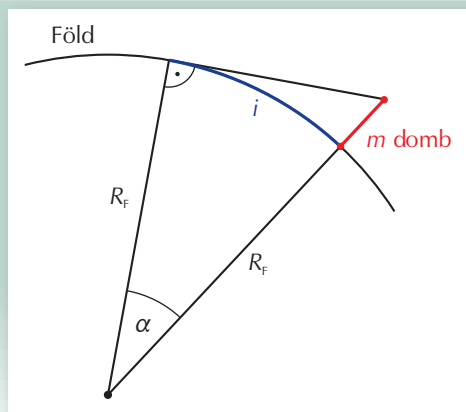
Megjegyzés

A fentiekhez hasonló megfontolásokból következik, hogy minden szabályos gúlának van beírt gömbje, és van körülírt gömbje is. Sőt, minden tetraédernek is létezik beírt gömbje, és létezik körülírt gömbje is.

Matematika az osztálykiránduláson

A fertőbozi Gloriette egy 186 méter magas dombra épült kilátó, gróf Széchenyi Ferenc építtette 1801-ben József nádor tiszteletére. Az útikönyvek szerint tiszta időben akár Pozsonyig elláthatunk a kilátóból.

A kiránduláson sajnos borult idő volt, de az osztály lelkesen elhatározta, hogy megpróbálja kiszámítani a látótávolságot. A tanulók gondolatmenete a következő volt (R_F jelöli a Föld sugarát, m a glorieta tengersiz feletti magasságát, i pedig a Föld felszínén mért távolságot):



A derékszögű háromszögben $\cos \alpha = \frac{R_F}{R_F + m}$, a szám-
adatokkal $\cos \alpha = \frac{6370}{6370,187}$, ebből $\alpha \approx 0,4378^\circ$ adó-
dott. A keresett i ívhossz pedig α -val arányos:

$$i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2R_F\pi, \text{ ebből } i \approx 48,7 \text{ km.}$$

Fertőboz és Pozsony távolsága 64 km, a számolás tehát nem erősítette meg az útikönyv állítását.

Fogalmak

gömbfelület;
gömbtest;
főkör;
gömbszelet;
gömböv;
gömbsüveg.

FELADATOK

1. K2

Az $R = 20$ cm sugarú gömböt elmetsszük a gömb középpontjától 14 cm-re haladó síkkal. Mekkora a gömbből a sík által kimetszett alakzat kerülete és területe?

2. K2

a) Milyen hosszú a Ráktérítő? (Északi szélesség $23,5^\circ$)
b) Mennyi a Ráktérítő és az Egyenlítő pontjainak a Föld forgásából származó kerületi sebessége? (A Föld 1 nap alatt tesz meg egy fordulatot, tehát ezek a pontok 1 nap alatt a Ráktérítő, illetve az Egyenlítő hosszát teszik meg.)

3. K1

Becsüljük meg a 2. példa alapján, hogy kb. mekkora a látótávolság a leckében vizsgált 8,5 méteres, 18 méteres és 25 méteres magasságból, ha a Holdon vagyunk! (A Holdat 1738 km sugarú, sima gömbnek tekinthetjük.)

4. K2

Hatszög alapú szabályos gúla alapéleinek hossza 14, magassága 20 egység. Mekkora a gúlába és a gúla köré írt gömb sugara?

5. K2

Jules Verne: Kétévi vakáció c. regényében a szigeten rekedt hajótörött diákok egy léghajóként használható sárkányt készítenek. Azt remélik, hogy ezzel a vezetőjük, Briant a magasba emelkedhet, és nagyobb távolságban felderítheti a sziget környékét.

„A kötél hosszúságát ezerkétszáz lábnyira állapították meg úgy, hogy a készülék a behajlást ideértve, körülbelül hét- vagy nyolcszáz lábnyira emelkedhessék fel. [...]

Az egész nyolcszögletes sárkány felülete hetven négyzetméternyire rúgott. Szilárd szerkezetével és vízhatlan vásznával könnyen fölemelhetett száz-százhusz fontnyi súlyt. [...]

Ha Briant a felszállást fényes nappal hajtotta volna végre és a szemeit a világosságban úszó láthatáron jártathatja végig, talán megpillantott volna akár más szigeteket, akár szárazföldet is – ha ugyan létezett ilyen negyven vagy ötven angol mérföldnyi területben – mert a látköre ilyen terjedelmű lett volna.”

Ellenőrizzük Verne látótávolság-számítását! (Egy angol láb 30,48 cm, az angol (szárazföldi) mérföld hossza pedig 1609,3 méter.)

6. K2

Képzeld el, hogy a Föld Egyenlítője mentén szorosan kifeszítünk egy acélhuzalt. (A Föld ebben a modellben természetesen $R = 6370$ km sugarú tökéletes gömb.)

a) Ha a drót hosszát megnöveljük 1 méterrel, és újból kör alakúra feszítjük ki, akkor vajon a drót és a Föld felszíne között átsurranhat-e egy kisegér?
b) Mi történik, ha a meghosszabbított acélhuzal hőmérséklete 1°C -kal csökken? Ekkor elfér egy kisegér a drót alatt? [Az acél lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{K}$; az L hosszú drót hossza ΔT (Celsius- vagy Kelvin-fokban mért) hőmérséklet-változás hatására $L_{\Delta T} = L \cdot (1 + \alpha \Delta T)$ lesz.]

7. K2

Egyenes körkúp alapkörének átmérője 12, magassága 8 egység hosszú.

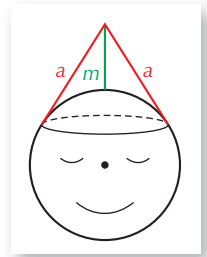
a) Határozzuk meg annak a kúpba írt gömbnek a sugarát, amely érinti a kúp alaplappját és az alkotóit is! (Ez a kúp beírt gömbje.)
b) A kúp köré írt gömb áthalad a kúp csúcsán, valamint az alapkör pontjain. Számítsuk ki a kúp köré írt gömb sugarát!

8. E2

Rézből 1 méter átmérőjű, üreges bűvargömböt készítenek. Milyen vastag lehet a gömbhéj, hogy a bűvargömb üresen ne süllyedjen el a vízben? És milyen vastag lehet a gömbhéj, ha alumíniumból készítik? (A víz, a réz és az alumínium sűrűsége $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_r = 8920 \text{ kg/m}^3$, $\rho_a = 2702 \text{ kg/m}^3$.)

9. K2

Egy bábu $R = 8$ cm sugarú, gömb alakú fejére kúp alakú sapkát tervezünk úgy, hogy a sapka csúcsa $m = 7$ cm-re legyen a fejtetőtől, és az alkotók a gömb érintői legyenek. Mekkora legyen a kúp a alkotója? Mekkora legyen a kiterített palást körcikkének a középponti szöge?



10. K1

A függvénytáblázatban megtalálhatjuk a gömb egyes részeinek felszín- és térfogatképletét. Egy érdekes összefüggés szerint az R sugarú gömb m magasságú gömbövének a felszíne (a határoló körlapok nélkül): $A = 2\pi \cdot R \cdot m$. Mi az érdekes ebben a képletben? (Mitől nem függ a felszín?)

11.

(feladat önálló munkára) Az ábrán egy kb. fél méter magas, jó közelítéssel félgömb alakú hangyaboly látható. Becsüljétek meg, hány homokszemet kellett a hangyáknak összehordani, míg a domb elkészült!



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2116–2161.

28. ALAKZATOKBA ÍRT ALAKZATOK

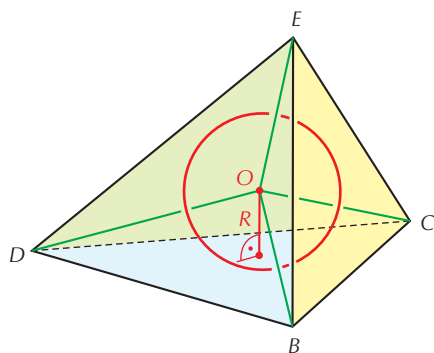
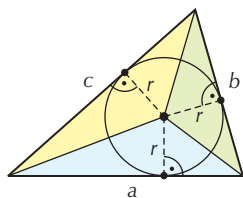
Az előző leckében érintettük a testekbe és testek köré írt gömbök témakörét. Megállapítottuk, hogy a tetraédernek, a szabályos gúlának, valamint az egyenes körkúpoknak mindig van beírt és körülírt gömbjük. Természetesen, valamely testbe és a test köré nemcsak gömböket, hanem egyéb testeket is írhatunk. Például a négyzet alapú szabályos gúlába vagy a forgáskúpba írhatunk velük közös tengelyű négyzetes oszlopot vagy forgáshengert; a félgömbbe írhatunk kockát, vagy a félgömb köré hatszög alapú szabályos gúlát, és így tovább. (A „beírt” és „körülírt” jelzők általában duális fogalmakat takarnak, de a konkrét értelmüket esetleg pontosítani kell. Például a félgömbbe írt kocka alaplappja a félgömb alaplappján, míg a másik négy csúcsa a félgömb gömbi felületén van; a hatszög alapú szabályos gúlába írt félgömb alaplappja pedig a hatszög alaplappjára esik, és a félgömb a hatszög minden oldallapját érinti.)

Mielőtt néhány példát nézünk, érdekes összefüggést vehetünk észre azon poliéderek felszíne és térfogata között, amelyekbe gömb írható.

1. példa

Tekintsünk egy A felszínű és V térfogatú tetraédert, amelybe R sugarú gömb írható. Milyen összefüggés adható meg A , V és R között?

Megoldás



Analóg síkgeometriai feladatot keresünk. Ez a következő, már bizonyított tétel lehet: ha egy háromszög félkerülete s , területe t , és a bele írt kör sugara r , akkor $t = r \cdot s$.

Hogyan is igazoltuk ezt a tételt?

A beírt kör középpontját összeköttöttük az a , b , c oldalú háromszög csúcsaival. Az így kapott részháromszögek területösszege a háromszög területét adja, így $t = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} \right) = r \cdot s$ valóban.

A $BCDE$ tetraédert négy kisebb tetraéderre bontjuk, ha beírt gömbjének O középpontját összekötjük a csúcsaival. A térbeli ábrát nem mindig könnyű elképzelni, illetve szemléltetni, de a $BCDO$, $BCEO$, $CDEO$, $BDEO$ tetraéderek biztosan léteznek (még akkor is, ha „nem látjuk” őket). A résztetraéderek térfogatösszege a teljes térfogatot adja:

$$V = \frac{t_{BCD} \cdot R}{3} + \frac{t_{BCE} \cdot R}{3} + \frac{t_{CDE} \cdot R}{3} + \frac{t_{BDE} \cdot R}{3} = \\ = \frac{R}{3} (t_{BCD} + t_{BCE} + t_{CDE} + t_{BDE}) = \frac{R}{3} \cdot A.$$

(Itt kihasználtuk, hogy a beírt gömb középpontja mindegyik oldallaptól R távolságra van, azaz mindegyik résztetraéder magassága R .) Készen is vagyunk, megkaptuk a keresett összefüggést, ami más alakban írva

$$R = \frac{3 \cdot V}{A}.$$

Megjegyzés

Észrevehetjük, hogy a bizonyításunk minden olyan poliéderre általánosítható, amelyeknek van beírt gömbje. Valóban: a poliéder részgúlákra bontható fel, melyek alaplappjai a poliéder lapjai, csúcsai pedig a beírt gömb középpontja.

A részgúlák térfogatösszege pedig $V = \frac{t_1 \cdot R}{3} + \frac{t_2 \cdot R}{3} + \dots + \frac{t_n \cdot R}{3} = \frac{R}{3}(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \frac{R \cdot A}{3}$. (Itt $t_1, t_2, \dots, t_n$ a poliéder lapjainak területe.) Ha tehát egy A felszínű és V térfogatú poliédernek van beírt gömbje, ennek sugara $R = \frac{3 \cdot V}{A}$.

2. példa

Adott egy $a = 20$ cm alapélű és $m = 24$ cm magasságú négyzet alapú szabályos gúla. Írjunk a gúlába vele azonos tengelyű négyzetes oszlopokat úgy, hogy a négyzetes oszlop alaplapja a gúla alaplapján legyen, fedőlapja csúcsai pedig a gúla éleire essenek!

- Milyen összefüggés írható fel a négyzetes oszlop b alapéle és c oldaléle (magassága) között?
- A gúlába olyan négyzetes oszlopot írunk, melynek c oldaléle a b alapél kétszerese. Határozzuk meg b és c hosszát!
- A gúlába hasonló módon kockát írunk. Mekkora a kocka éle?

Megoldás

A beírt négyzetes oszlop fedőlapja a gúla alaplapjával együtt csonkagúlát határoz meg. Alkalmazzuk az ábra szerinti betűzést; ekkor a gúla E csúcsából történő alkalmas nagyítás a beírt oszlop fedőlapját a gúla alaplapjába viszi.

- Tekintsük az ábra szerinti EAC síkmetszetet! (Ezt érdemes külön síkbeli ábraként is megrajzolni, mint ahogy a szemléltetést megkönnyítheti például a felülnézeti rajz is.)

$AC = \sqrt{2}a$ és $A_2C_2 = \sqrt{2}b$ hosszú, mert a megfelelő négyzetek átlói. Az EA_2C_2 és EAC háromszögek hasonlóak, ezért felírható a következő aránypár:

$$\frac{m-c}{m} = \frac{A_2C_2}{AC} = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}a} = \frac{b}{a}. \text{ Innen megkaptuk a } b \text{ és } c \text{ közötti kapcsolatot:}$$

$a \cdot m - a \cdot c = m \cdot b$. Egy egyenletben két ismeretlen szerepel, tehát különböző b alapélekhez más-más hosszúságú c oldalél tartozik. (Persze a $b < a$, illetve $c < m$ korlátozó feltételek mellett.)

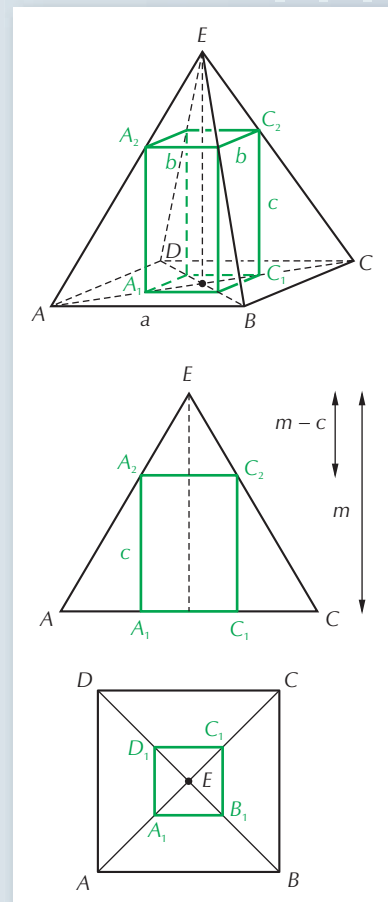
Konkrét számértékekkel: $20 \cdot 24 - 20c = 24b$, azaz $120 = 6b + 5c$.

- Ebben az esetben alkalmazzuk a $c = 2b$ helyettesítést! Innen

$$a \cdot m - a \cdot 2b = m \cdot b, \text{ azaz}$$

$$b = \frac{a \cdot m}{2a + m} = \frac{20 \cdot 24}{40 + 24} = 7,5 \text{ cm és } c = 15 \text{ cm. Vagyis egyetlen, a feltételeknek megfelelő négyzetes oszlop van.}$$

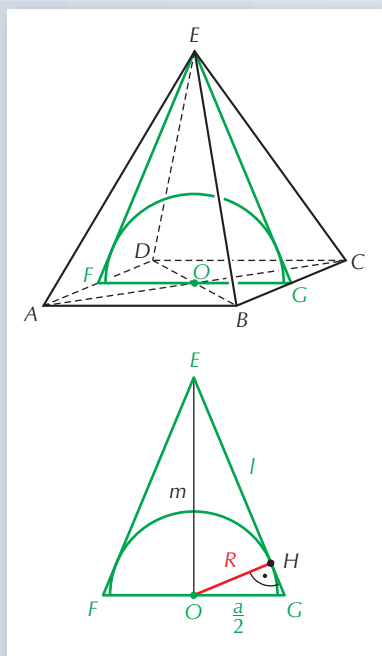
- A kocka olyan négyzetes oszlop, amelynek élei egyenlőek. A $b = c$ helyettesítéssel $a \cdot m - a \cdot b = m \cdot b$, azaz $b = \frac{a \cdot m}{a + m} = \frac{20 \cdot 24}{20 + 24} = \frac{480}{44} \approx 10,91$ cm, és a c oldalél is ilyen hosszú.



3. példa

Írjunk a fenti négyzet alapú szabályos gúlába félgömböt úgy, hogy ennek alaplapja a gúla alaplapjára essen, és a félgömb a gúla minden oldalapját érintse! Mekkora a félgömb sugara?

Megoldás



Első megoldás:

Szimmetriaokok miatt a félgömb O középpontja megegyezik az $ABCD$ négyzet középpontjával, és a félgömb a gúla oldallapjait azok szimmetriatengelyében érinti. Jelölje F és G az AD , illetve BC oldalak felezőpontját, és tekintsük a gúla FGE síkmetszetét.

Ez a sík átmegy az O ponton, ezért a félgömbből egy fél főkört metsz ki, vagyis a félgömb és a gömb R sugara megegyezik. Az így kapott FGE háromszög EF és EG oldalait pedig a félgömb érinti.

Az EG lapmagasság l hossza az EOG derékszögű háromszögben

$$l = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26 \text{ cm.}$$

Ha az EG magasságon H jelöli az érintési pontot, akkor megállapíthatjuk, hogy az EOH és EGO háromszögek hasonlóak, mert szögeik megegyeznek. Innen a meg-

felelő oldalak aránya $\frac{R}{m} = \frac{\frac{a}{2}}{l}$, azaz $R = \frac{m \cdot a}{2 \cdot l} = \frac{24 \cdot 20}{2 \cdot 26} = \frac{120}{13} \approx 9,23 \text{ cm.}$

Egy másik lehetőség R meghatározására a terület kétféle felírásából adódik:

$$\frac{a \cdot m}{2} = 2 \cdot \frac{l \cdot R}{2}.$$

Második megoldás:

Ha összekötjük az O pontot a gúla csúcaival, akkor a gúlát négy egybevágó tetraéderre bontjuk. Ezek alaplappjai a gúla oldallapjai, testmagasságuk pedig R . Az oldallapok területe $T = \frac{a \cdot l}{2}$, tehát a térfogatot kétféleképpen is felírhatjuk: $V = \frac{a^2 \cdot m}{3} = 4 \cdot \frac{T \cdot R}{3}$. Innen

$$R = \frac{a^2 \cdot m}{4 \cdot T} = \frac{2 \cdot a^2 \cdot m}{4 \cdot a \cdot l} = \frac{a \cdot m}{2 \cdot l}.$$

4. példa

Egy forgáskúp alapkörének sugara $R = 10 \text{ cm}$, magassága $M = 24 \text{ cm}$ hosszú. A kúpba vele közös tengelyű forgáshengert írunk úgy, hogy a henger alaplappja a kúp alaplappján van, és a henger fedőköre a kúp minden alkotóját érinti.

- Milyen kapcsolat írható fel a henger alapkörének r sugara és m magassága között?
- Mekkora a beírt henger térfogata, ha a magassága éppen 3-szorosa az alapköre sugarának?
- Mekkora a beírt henger magassága és alapkörének a sugara, ha a palástja $P = 60 \text{ cm}^2$?

Megoldás

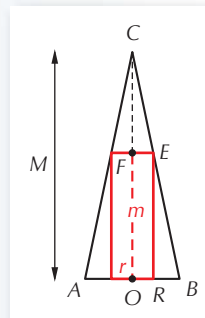
A kúp (tetszőleges) tengelymetszete a hengert olyan téglalapban metszi, melynek oldalai $2r$ és m hosszúak. Alkalmazzuk a síkmetszetre az ábrán látható jelöléseket!

a) Az ábra szerinti CFE és COB háromszögek hasonlóak (szögeik megegyeznek),

így $\frac{EF}{FC} = \frac{BO}{OC}$, azaz $\frac{r}{M-m} = \frac{R}{M}$. Innen felírható az r és m közötti kapcsolat:

$$r \cdot M = R \cdot M - R \cdot m.$$

(Konkrét számadatokkal: $24r = 240 - 10m$, azaz $12r = 120 - 5m$.)



b) Az $m = 3r$ helyettesítéssel $12r = 120 - 5 \cdot 3r$, innen $r = \frac{120}{27} = \frac{40}{9}$ (cm).

A térfogat $V = r^2 \pi \cdot m = r^2 \pi \cdot 3r = 3r^3 \pi \approx 827,42 \text{ cm}^3$.

c) Ha $P = 2r\pi \cdot m = 60$, akkor meg kell oldani az egyenletrendszert:

$$(1) 12r = 120 - 5m,$$

$$(2) 2r\pi \cdot m = 60.$$

$$(1)\text{-ből } m = \frac{120 - 12r}{5}, \text{ ezt (2)-be helyettesítjük: } 2r\pi \cdot \frac{120 - 12r}{5} = 60, \text{ azaz } 2r^2\pi - 20r\pi + 25 = 0.$$

A másodfokú egyenlet két gyöke $r_1 \approx 9,58 \text{ cm}$ és $r_2 \approx 0,42 \text{ cm}$. A megfelelő magasságok az $m = \frac{120 - 12r}{5}$ egyenletből $m_1 \approx 1,01 \text{ cm}$ és $m_2 \approx 23,0 \text{ cm}$. Vagyis egy „lapos” és egy „sovány” beírt henger is megfelelő.

Végezetül megemlíjtük, hogy a testekbe és a testek köré nemcsak térbeli, hanem síkbeli alakzatokat is írhatunk. Ezzel a témával kapcsolatos a 8. kitűzött feladat.

FELADATOK

1. E1

Egy tömör, egyik vége felé keskenyedő vasrúd alakja olyan szabályos hatszög alapú egyenes gúla, melynek alapéle 1 cm, oldaléle pedig 62 cm hosszú. A rúdca a gúlával közös tengelyű, 0,8 cm átmérőjű lyukat fúrnak. Mekkora az így kapott vascső tömege? (A vas sűrűsége 7870 kg/m^3 .)

2. E1

Háromszög alapú szabályos gúla alapéle 11 cm, oldaléle 24 cm. A gúlából azonos tengelyű forgáskúpot csiszolnak. Legalább hány cm^3 (és legalább hány százalék) az anyagvesztés?

3. E1

Írjunk az R sugarú félgömbbe kockát úgy, hogy alaplappja a félgömb alaplappján, a másik négy csúcsa pedig a félgömb gömbi felületén legyen! Mekkora a kocka éle?

4. E1

Adott $R = 12 \text{ cm}$ sugarú félgömb köré forgáskúpot írunk úgy, hogy a kúp magassága kétszerese az alapköre átmérőjének. (A kúp alaplappja a félgömb alaplappján van, és a félgömb a kúp minden alkotóját érinti.) Milyen magas a kúp?

5. E1

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2010.) Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcsér. (Lásd ábra.)

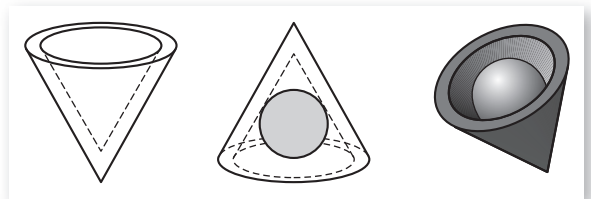
A külső és belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{6}{5}$. A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm,

magassága 2,5 cm hosszú.

a) Hány cm^3 csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg!

Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.

b) Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg!



III. TÉRGEOMETRIA

6. E1

Határozzuk meg az ötszög alapú szabályos gúla beírt és körülírt gömbjének a sugarát, ha alapélei 20 cm és oldalélei 32 cm hosszúak!

7. E1

Egy asztalra 3 darab R sugarú gömböt helyezünk úgy, hogy középpontjaik $2R$ oldalhosszú szabályos háromszög csúcsainak felelnek meg. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely érinti mindegyik gömböt és az asztalt is?

8. E1

Egy 5 m élű kocka belsejében vagy a felületén válasszunk ki három pontot úgy, hogy a belőlük alkotott háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!

(Segítség: mutassuk meg, hogy ha a maximális területű háromszög valamelyik pontja a kocka belsejében lenne, akkor – a másik két pontot rögzítve – elmozgathatnánk a kocka határára, illetve valamelyik kockacsúcsba úgy, hogy a háromszög területe közben növekedne.)



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2173–2257.

29. ÖSSZETETT FELADATOK

Összetett feladatokról több értelemben is beszélhetünk.

1. Az ún. **többlépcsős feladatok** esetében több, esetleg egymásra épülő kérdéssel egy adott problémakört részletesen vizsgálunk. (Az írásbeli érettségi vizsgán jellemzően ilyenek a magasabb sorszámú feladatok.)

2. Elképzelhető, hogy a feladat **nehéz**; gondolatilag, illetve megoldási eszközhasználatát tekintve. Az első esetben a szükséges gondolkodási mélység, a másodikban a technikai alkalmazások sokfélesége okozhat nehézséget.

3. Módszertani szempontból ide sorolhatjuk azokat a feladatokat is, amelyekre **többféle megoldást** adunk.

4. Ide tartoznak a **matematika más területével** kapcsolatos problémák, a **matematikán belüli alkalmazások** is. (A feladatok között kitűztünk néhányat.)

5. És végül a más tudományterületeket is érintő problémák, a **matematikán kívüli alkalmazások** említhetők meg.

(Persze a fenti kategorizálás nem kizáró jellegű. Alkalmazásokat, gyakorlati feladatokat például minden leckében tárgyaltunk.)

1. példa

Az a élű $ABCDEFGH$ kockában az AE , BF , CG , DH élek merőlegesen az $ABCD$ lapra. Mekkora arányú részekre osztja az $U(BDE)$ sík az AG testátlót?

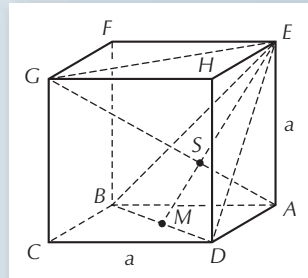
Megoldás

Első megoldás: Az $U(BDE)$ sík a kockát a BDE szabályos háromszögben metszi. A kocka szabályos test, ezért az AB , AD , AE élek az AG testátlóra forgásszimmetrikusan helyezkednek el. (Ugyanez igaz a GC , GF , GH élekre is.) Az AG testátló körüli 120° -os forgatás a BDE háromszöget önmagába viszi, ezért AG és U metszéspontja a BDE háromszög S középpontja, és AG merőleges az U síkra.

Jelölje M az $ABCD$ négyzet középpontját, ez egyúttal a BD szakasz felezőpontja (ábra). ES a BDE háromszög EM súlyvonalának a kétharmada. A háromszög oldala $\sqrt{2}a$, így $ES = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$. AS merőleges a BDE síkra, így merőleges annak minden egyenesére, tehát ES -re is. Az ASE derékszögű háromszögből $AS = \sqrt{AE^2 - ES^2} =$

$= \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3}$. A testátló hossza $AG = \sqrt{3}a$, tehát S az AG átló A -hoz közelebbi harmadolópontja.

Második megoldás: Tekintsük az $ACGE$ síkmetszetet, illetve az AEC derékszögű háromszöget. Ebben ES éppen az AG oldalhoz tartozó magasság, így AS meghatározása elemi síkgeometriai feladat. Például a befogótételből $AS \cdot AG = AE^2$, innen $AS = \frac{AE^2}{AG} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.



Megjegyzés

Ha sikerült szerencsés síkmetszetet választanunk, akkor többféle megoldást adhatunk. Például az előző megoldást folytathattuk volna a terület kétféle felírásával: $\frac{ES \cdot AG}{2} = \frac{AE \cdot EC}{2}$ (innen ES határozható meg). Vagy egy másik lehetőség az $ACGE$ téglalapban EM és AG szakaszok osztásarányának meghatározására, ha az AEC háromszöget emeljük ki. Ebben EM és AG súlyvonalegyenesek, tehát osztásarányuk számítható (a súlyvonalak egymást kölcsönösen harmadolják). Végül egy utolsó megoldás (nyilván még továbbiak is adhatók): az AMS és GES háromszögek hasonlóak, a hasonlóság aránya $1 : 2$, és így tovább.

Harmadik megoldás: Elegáns megoldás adható a korábban tárgyalt térfogati elv segítségével. Az $ABDE$ tetraéder térfogatát kétféleképpen felírhatjuk, kihasználva az AB , AD , AE élek merőlegességét:

$$\frac{T_{BDE} \cdot AS}{3} = \frac{\frac{AB \cdot AD}{2} \cdot AE}{3}. \text{ Innen } \frac{\frac{\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot AS}{3} = \frac{\frac{a \cdot a \cdot a}{2}}{3}, \text{ azaz } AS = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Negyedik megoldás: A BDE háromszög S súlypontjába mutató vektor $\vec{OS} = \frac{\vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE}}{3}$, tetraéderes origó esetében. Ha most az A csúcsot választjuk a koordináta-rendszer kezdőpontjának, akkor $\vec{AS} = \frac{\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}}{3}$. Mivel $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$, így $\vec{AS} = \frac{\vec{AG}}{3}$ valóban.

Megjegyzés

Ez utóbbi megoldás mutatja, hogy kocka helyett téglatestre is igaz az állítás (azaz ennek az AG testátlóját is harmadolja a BDE sík).

2. példa

Mekkora az előző feladatban szereplő kockában a BD és CF kitérő egyenesek távolsága?

Megoldás

Először a CF lapátlót önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy legyen közös pontja BD -vel. Ezt sokféleképpen megtehetjük; ha például a $\overrightarrow{CD}$ vektorral tolunk el, akkor CF átkerül DE -be.

Ezután észrevehetjük, hogy az így kapott $U(BDE)$ sík és a CF él párhuzamosak. (CF és DE párhuzamossága miatt csak úgy lehetne CF -nek és U -nak közös pontja, ha CF minden pontja az U síkhoz tartozna.)

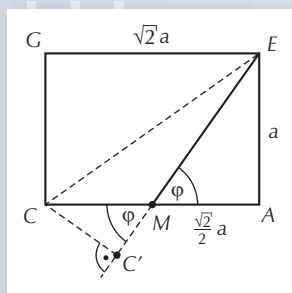
CF és $U(BDE)$ párhuzamossága miatt a feladat többféleképpen is átfogalmazható. Ugyanakkora

1. a BD és CF kitérő egyenesek távolsága;
2. a CF egyenes és az $U(BDE)$ sík távolsága;
3. a C (vagy F) pont és az $U(BDE)$ sík távolsága;
4. a CF egyenes tetszőleges Q pontjának és az $U(BDE)$ síknak a távolsága is.

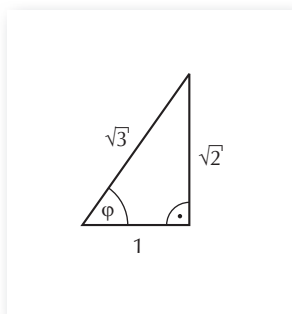
Kényelmi szempontból a 3. átfogalmazással folytatjuk, azaz a C pont és az $U(BDE)$ sík távolságát határozzuk meg. Egyik módszer például a térfogati elv alkalmazása lehet, az 1. feladat 3. megoldásához hasonlóan. Egy másik gyakori módszer, amikor alkalmas síkmetszeten állítjuk elő a keresett távolságot.

Tekintsük a kocka $CAEG$ síkmetszetét. Ezt az $U(BDE)$ sík az EM egyenesben metszi, s mivel BD merőleges EM -re, így a $CAEG$ és $U(BDE)$ síkok is merőlegesek. (A merőlegesség közvetlenül adódik abból is, hogy a $CAEG$ sík a kocka szimmetriasíkja.)

A $CAEG$ síkmetszeten így C és az U sík távolsága közvetlenül előáll, mint a C pont és az ME egyenes távolsága. Az ábrán ezt a keresett távolságot CC' -vel jelöltük, amit egyszerűen meghatározhatunk például a CMC' derékszögű háromszögből. Az M csúcsnál lévő φ csúcsszögek miatt $\operatorname{tg} \varphi = \frac{EA}{AM} = \sqrt{2}$ az MAE háromszögben, innen $\varphi \approx 54,7^\circ$; a CMC' háromszögben pedig $CC' = CM \cdot \sin \varphi \approx 0,577a$.



Megjegyzés



Hegyyesszögek esetében, ha $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$, akkor megmutatható, hogy $\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$

(lásd ábra), így a távolság pontos értéke $CC' = CM \cdot \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Észrevehetjük, hogy ez **éppen a testátló hosszának harmada**. Az eredmény ismeretében már könnyebb megtalálni a magyarázatot:

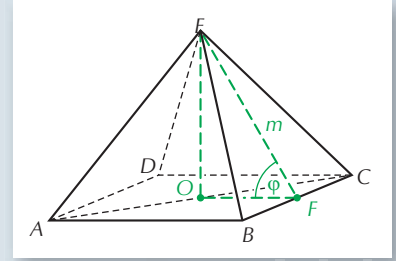
Az 1. példában megmutattuk, hogy az A csúcs és az U sík távolsága egyenlő a testátló harmadával. Mivel az U sík áthalad az AC szakasz M felezőpontján, így A és C U -tól való távolsága megegyezik. Készen vagyunk: C és U távolsága is a testátló hosszának harmadával egyenlő.

3. példa

Az $ABCD$ négyzet alapú gúla alapéle 20 cm hosszú, oldallapjai 60° -os szöget zárnak be az alaplap-pal. Hány cm^2 a gúla palástjának felszíne?

Megoldás

Jelölje E a gúla csúcsát, O a négyzet középpontját, F pedig a BC él felezőpontját (ábra). A BCE oldallap $m = FE$ lapmagasságát az FOE derékszögű háromszögből határozhatjuk meg. Az oldallap és alaplap hajlásszöge éppen $\angle OFE = 60^\circ$, így $\cos 60^\circ = \frac{FO}{FE}$. Innen $FE = \frac{FO}{\cos 60^\circ}$, a gúla palástjának fel-
színe pedig $P = \frac{a \cdot m}{2} \cdot 4 = \frac{a \cdot \frac{a}{2 \cdot \cos 60^\circ}}{2} \cdot 4 = \frac{a^2}{\cos 60^\circ} = 2a^2 = 800 \text{ cm}^2$.



Megjegyzés

Szép kerek értéket kaptunk, mi lehet ennek az oka?

Ha a 60° -os hajlásszög helyett tetszőleges φ paraméterrel dolgozunk, akkor $FE = \frac{FO}{\cos \varphi}$, és a $P = \frac{a^2}{\cos \varphi}$ eredményt kapjuk. A BCO és BCE háromszögek területét összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy BC alapjuk közös, területük aránya tehát az $\frac{FO}{FE}$ aránytól függ, ami éppen $\cos \varphi$ -vel egyenlő. Vagy úgy is fogalmazhatunk, hogy ha a BCE háromszöget merőlegesen vetítjük az $ABCD$ síkra, akkor a háromszög területe $\frac{T_{BOC}}{T_{BEC}} = \cos \varphi$ -szeresére változik. Ugyanez elmondható a másik három oldallapra is (mindegyik φ szöget zár be az alaplappal), így valóban $\frac{T_{ABCD}}{P} = \frac{a^2}{P} = \cos \varphi$ adódik eredményül.

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

Legyen két sík (S és U) hajlásszöge φ (ahol $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$), egy U síkbeli alakzat területe T_U , az alakzat S síkon lévő merőleges vetületének területe T_S . Általában is igaz a következő **tétel: a két terület aránya $\frac{T_S}{T_U} = \cos \varphi$.**

A bizonyítás főbb lépéseit az alábbiakban vázoljuk.

Az állítás teljesül $\varphi = 0^\circ$ és $\varphi = 90^\circ$ esetében, ezért feltehetjük, hogy $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

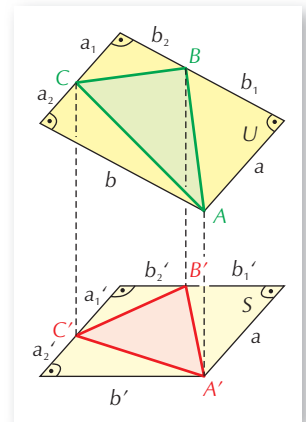
Először megmutatjuk, hogy az állítás igaz háromszögekre. Ehhez az U síkbeli ABC háromszög köré olyan téglalapot írunk, amelynek oldalai párhuzamosak a két sík metszésvonalával, illetve merőlegesek rá. (Ilyen téglalap mindig létezik. Az ábrán az a, a_1, a_2 szakaszok párhuzamosak a metszésvonallal, a b, b_1, b_2 szakaszok pedig rá merőlegesek.) Az ABC háromszög területét megkapjuk, ha a bennfoglalt téglalap területéből levonjuk a kiegészítő derékszögű háromszögek területét. Az ábra esetében

$$T_{ABC} = a \cdot b - \frac{a \cdot b_1}{2} - \frac{a_1 \cdot b_2}{2} - \frac{a_2 \cdot b}{2}.$$

A vetületi $A'B'C'$ háromszög köré írt téglalap az ABC háromszög köré írt téglalapjának a vetülete. A metszésvonallal párhuzamos szakaszok hossza (a, a_1, a_2) a vetítés során ugyanakkora marad, a metszésvonalra merőleges szakaszok hossza viszont $\cos \varphi$ -szeresre változik. Az $A'B'C'$ háromszög területe

$$\begin{aligned} T_{A'B'C'} &= a \cdot b' - \frac{a \cdot b'_1}{2} - \frac{a_1 \cdot b'_2}{2} - \frac{a_2 \cdot b'}{2} = a \cdot b \cdot \cos \varphi - \frac{a \cdot b_1 \cdot \cos \varphi}{2} - \frac{a_1 \cdot b_2 \cdot \cos \varphi}{2} - \frac{a_2 \cdot b \cdot \cos \varphi}{2} = \\ &= \cos \varphi \left(a \cdot b - \frac{a \cdot b_1}{2} - \frac{a_1 \cdot b_2}{2} - \frac{a_2 \cdot b}{2} \right). \end{aligned}$$

Vagyis valóban: a vetületi háromszög területe $\cos \varphi$ -szeresre



III. TÉRGEOMETRIA

változik. (A bizonyítást a konkrét ABC háromszögre alkalmazzuk, de az általános esetben is hasonlóan járunk el.)

Ezután megmutatjuk, hogy a tétel tetszőleges sokszögre igaz. Ez abból következik, hogy a sokszögek részháromszögekre darabolhatók, ezek vetületeinek területe $\cos \varphi$ -szeresre változik, a vetületek összege tehát – ami a vetületi sokszög területét adja – szintén $\cos \varphi$ -szeresre változik.

Végül igazolni kell, hogy a tétel görbe vonalú alakzatok területére is teljesül. Ehhez azonban tanulmányainkon túlmutató matematikai módszerekre lenne szükség, mint például a területszámítás esetében.

4. példa

Az $ABCD$ háromszög alapú gúla D csúcsból húzható magassága $m = 18$ cm hosszú, az ABC háromszögben pedig $AB = 12$ cm, $BC = AC = 6\sqrt{5}$ cm. A gúla AD , BD , CD oldalélei egyenlő hosszúak. Mekkora a gúla térfogata, és mekkorák az oldalélei?

Megoldás

Először kiszámítjuk az ABC egyenlő szárú alapháromszög területét. A C csúcsból kiinduló CF magasság hossza Pitagorasz tételéből $d = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 - 6^2} = 12$ (cm). Az ABC háromszög területe így $t = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$ (cm²), a gúla térfogata pedig

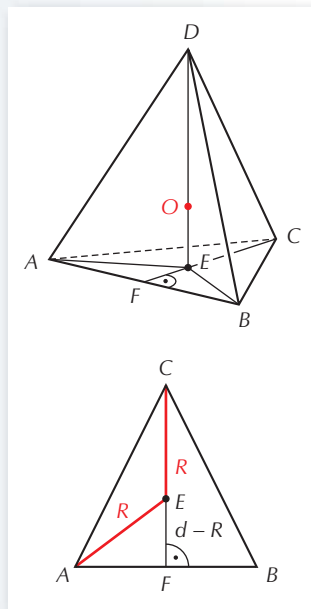
$$V = \frac{t \cdot m}{3} = 432 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ha a gúla D csúcsból húzható testmagasságának talppontját E -vel jelöljük, akkor az AED , BED , CED háromszögek egybevágók, mert meg egyezik két oldaluk hossza és a nagyobbik oldallal szemkölti derékszögük. Ezért $AE = BE = CE$, vagyis E az ABC háromszög köré írt kör középpontja. (Könnyen látható, hogy ABC háromszög hegyesszögű, ezért E a háromszög belső pontja lesz.)

Jelölje az ABC háromszög köré írt kör sugarának hosszát R . Ekkor az AFE derékszögű háromszögben $R^2 = AF^2 + (d - R)^2$, azaz $R^2 = 6^2 + (12 - R)^2$. Innen $R = 7,5$ (cm) adódik.

A gúla AD oldaléle pedig az AED derékszögű háromszög átfogója, így $AD = \sqrt{R^2 + m^2} = 19,5$.

A három oldalél hossza tehát 19,5 cm.



Megjegyzés

A megoldásból kitűnik, hogy ha egy tetszőleges háromszög alapú gúla oldalélei egyenlő hosszúak, akkor a köré írt gömb középpontjának az alapra eső merőleges vetülete az alapháromszög köré írt körének középpontja.

Sőt, az állítás kiterjeszthető az n -szög alapú gúlákra is: ha az n -szög alapú gúla oldalélei egyenlőek, akkor van körülírt gömbje; és a gömb középpontjának az alaplpra eső merőleges vetülete az n -szög köré írt körének középpontja. (Vagyis az alaplap szükségképpen húrsokszög.)

FELADATOK

1. E1

Egy téglatest alaplapja az $ABCD$, fedőlapja az $A'B'C'D'$ téglalap; az AA' , BB' , CC' , DD' élek párhuzamosak. A téglatest élének hossza $AB = 8$, $AD = 12$, $AA' = 10$ egység. Rendre felvesszük az AB , $C'D'$, $A'D'$, CC' éleken az E , F , G , H pontokat úgy, hogy $AE = 5$, $C'F = 4$, $A'G = 2$, $CH = 4$ egység legyen. Mekkora az EF és GH szakaszok hajlásszöge?

2. K2

Az ABC háromszög alapú, D csúcsú szabályos gúla alapéleinek hossza 30 cm, az oldallapjai pedig 70° -os szöget zárnak be az alaplappal.

a) Határozzuk meg a gúla felszínét és térfogatát!

b) Mekkora az AB és CD élek hajlásszöge?

c) Mekkora az A csúcs és a BCD sík távolsága?

3. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2018.) Egy gazdaságban géppel kaszálják a füves területet. A megszártott fűvet (szénát) egyforma, henger alakú bálákba tömörítik, majd körbefóliázzák. A hengerek átmérője és magassága is 1,2 méter. A bálázógép 1 m^3 térfogatba körülbelül 160 kg szénát tömörít bele.

Hány kg tömegű egy szénabála? Válaszát 10 kilogrammra kerekítve adja meg!

4. E1

Igaz-e, hogy ha az $ABCD$ szabályos tetraéder A , B , C csúcsát a D csúcsból kiinduló magasságvonal F felezési pontjával összekötjük, akkor három, egymásra páronként merőleges szakaszt kapunk?

(Adjunk többféle megoldást! Kiszámolhatjuk például az FA , FB , FC szakaszok hosszát, majd felírhatjuk a Pitagorasz-tételt; vagy alkalmazhatjuk a vektorok skaláris szorzatát.)

5. K2

(Érettségi feladat, középszint, 2009.) Egy cirkuszi sátor felállítva olyan szabályos hatszög alapú egyenes gúla, amelynek alapéle 12 méter, magassága 16 méter hosszú. A sátor felállításakor 13 rudat használnak. Hat merevítőrúd a hat oldalél teljes hosszában fut. Van még 7 függőlegesen álló tartórúd. Egy az alap középpontjában, a teljes magasságban tartja a sátrat. A talajon álló hat kisebb pedig egy-egy oldalél talajhoz közelebbi harmadolópontjában támaszt.

a) Hány négyzetméter a sátrat alkotó ponyva felülete (a gúla palástja)? (A végeredményt egészre kerekítve adja meg!)

b) Összesen hány méter a 13 rúd hossza?

c) Körbevezetünk egy kifeszített kötelet a hat kisebb támasztórúd felső végpontjain át. Milyen hosszú ez a kötel?

6. K2, E1

(Érettségi feladat, emelt szint, 2011.) Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestettük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockákra vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros. Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata?

7. K2

Mekkora az R sugarú gömb köré írt csonkakúp felszíne és térfogata, ha alapkörének sugara kétszerese a fedőkör sugarának?

8. K2

Mi lehet a hiba az alábbi, 1935-ből származó feladat megoldásában?

Feladat: Egy téglatest egyik csúcsában összefutó három határlap átlói 18 dm, 28 dm és 38 dm hosszúak. Mekkora a testátló?

„Megoldás” (hibás)

Jelölje a téglalap egy csúcsba futó éleinek hosszát a , b , c . Ekkor Pitagorasz tételéből a lapátlók hosszára

$$(1) \ a^2 + b^2 = 18^2,$$

$$(2) \ a^2 + c^2 = 28^2,$$

$$(3) \ b^2 + c^2 = 38^2$$

teljesül.

Az (1) – (3) egyenletek összeadásából $2(a^2 + b^2 + c^2) = 18^2 + 28^2 + 38^2 = 2552$, innen $a^2 + b^2 + c^2 = 1276$. A térbeli Pitagorasz-tétel szerint a testátló hossza $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1276} \approx 35,72$ dm.

9. E1

Egy kocka éleit mint vektorokat tetszőlegesen irányíthatjuk. Legfeljebb hány különböző eredője lehet az így kapott 12 vektor összegének?

10. K2

Móra Ferenc: Tetrakontaoktaéderek című novellájában elmeséli, hogyan kellett gyerekkorában, nagy nehézségek árán, szimmetrikus testeket készíteni papírból.

„Legfölbbe én voltam a malac, mire elkészültem egy-egy testtel. De azért megcsináltam őket, ha nyakig belecsirizsedtem is az igyekezetbe. A hexaéder, az oktaéder, az ikositetraéder, a pentagondodekaéder mind ott merészkedett már a kemencenyakon. Igazság szerint nem ott lett volna a helyük, de szegény anyám így könnyebben fölhívhatta rájuk a szomszédasszony figyelmét. Még most is hallom, ahogy mondja panasznak álorcázott szemérmes kevélységgel:

– Nézze már, Ágneskám, milyen bolondokat csináltak a szegény diákfiammal azok a kórságos profesztorok.

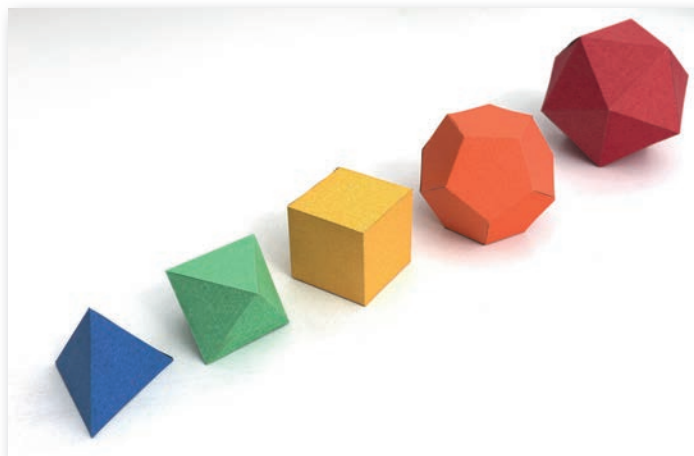
Nagy ész kell ehhez, tudja, meg az a temérdek petróleum, mikor hajnalig is elkínlódik velük.

Hát még mikor a rettenetes tetrakontaoktaéder jött! A negyvennyolclapú, a hetvenélű, a huszonhatsarkú állat. A gémánt kristályalakja!”

Nézz utána, mi is az a tetrakontaoktaéder! (A térbeli kristályszerkezetekkel foglalkozó ásványtanban a test másik elnevezése *hexakiszoktaéder*.) Hány csúcsa, éle, lapja van ennek a testnek? (És persze a rövid novellát is érdemes elolvasni.)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. 2162–2172, 2258–2281.



30. A TÉRGEOMETRIA ALKALMAZÁSAI

Térgeometriai problémákra visszavezethető gyakorlati feladatokkal szinte mindennap találkozunk. A korábbi leckékben rendszeresen elemeztünk hasonló modelleket, s ezen olvasmány végén is kitűzünk néhány gyakorlati, alkalmazás jellegű feladatot.

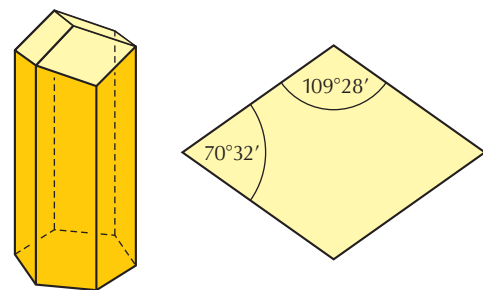
A térgeometriai modellek matematikai vizsgálata más tudományterületeken is megvalósul. Például a térbeli mozgás vizsgálatával foglalkozik a csillagászat vagy az asztronautika; a geológia, az ásványtan egy területe a kristályszerkezetek leírása; a kémiában egyes molekulák térbeli szerkezeteit elemzik, és így tovább. Az alábbi idézet egy szép biológiai példával, a méhek építészétével foglalkozik.

A MÉHEK LÉPSEJTJEI

„Az hiszem, egészen érzéketlen ember lehet, aki képes lelkes csodálat nélkül vizsgálni a lép finom szerkezetét, amely gyönyörűen alkalmazkodott a maga céljához. A matematikusoktól azt halljuk, hogy a méhek gyakorlati megoldást adtak egy igen nehéz problémára: a lép sejtjeit a lehető legkevesebb értékes viasz felhasználásával olyan alakúra készítik, hogy azok ugyanakkor a lehető legnagyobb mennyiségű mézet fogadják be. Azt is megjegyezték már, hogy még egy megfelelő szerszámokkal és mérőeszközökkel felszerelt ügyes mesterember is nehezen tudná elkészíteni a megfelelő alakú viaszsejteket, holott a méhek csapata a sötét kasban is képes erre. Bármilyen ösztönöket tételezzünk is fel náluk, először teljesen felfoghatatlannak tűnik, hogyan dolgozzák ki a szükséges szögeket és lapokat, vagy egyáltalán hogyan érzékelik, hogy helyesen készítették-e el ezeket.”

(Charles Darwin: *A fajok eredete*, 8. fejezet, *Az ösztönről*)

A XVIII. századi természettudósok figyeltek arra, hogy a lépsejtek alakja olyan szabályos hatszög alapú hasáb, amelynek alját a méhek nem az oldallapokra merőleges síkkal fedik le, hanem három egybevágó rombuszlappal. (Ezt úgy képzelhetjük el, mintha egy ceruzát három forgásszimmetrikus vágással meghegyeznénk.) Ráadásul e lapok egymással bezárt szöge jó közelítéssel állandó érték, azaz nem függ a méhek fajtájától, a méhcsaládoktól, a kaptártól. Az észrevétel alapján Réaumur (1683–1757) híres francia természettudós úgy gondolta, hogy a furcsa építkezésnek az az oka, hogy így a méheknek – a lépsejt azonos térfogata mellett – kevesebb méhviaszt kell felhasználniuk a sejtek építéséhez. Darwin híres könyvében arra utal, hogy a matematikusok igazolták ezt a sejtést: a méhek valóban úgy „választják meg” az építendő rombuszok kb. $70,5^\circ$ és $109,5^\circ$ -os szögét, hogy így minimális anyagfelhasználással zárhassanak be adott térfogatot.



ÉPÍTÉSZET

„Amikor a mérnök befejezte szerepét, az épület funkciójának és szerkezetének megállapítását, megkezdheti munkáját az alakító művész. A forma kialakítása az építész tehetségének próbaköve. Ekkor tűnik ki, hogy művésze-e hivatásának, vagy sem. Az építészet nem más, mint az épülettömegeknek tudatos, pontos és nagyszerű játéka a fényben. A forma sem más, mint a fénynek és az árnyéknak művészi, pontos és pompás játéka az épület testén. A mérnök, a tisztán intellektuális ember nem alkalmas formaalakításra – ehhez érző és alakítani tudó művészre van szükség.”

(Le Corbusier [1887–1965] svájci származású francia építész)



Sydney-i Operaház (tervezte Jørn Utzon dán építész)

A sokszínű természet számtalan „térgeometriai remekművet” hozott és hoz létre. Az ókori és középkori monumentális építészeti csodák (például az egyiptomi és közép-amerikai piramisok, a kínai nagy fal, Európa gótikus katedrálisai) megváltoztatták bolygónk arculatát, alakították a kultúrtörténetünket.

Hasonló nagyságrendű a mesterséges táj XX. és XXI. századi átalakítása is. A modern utak, vasutak, hidak; a lakó- és üzleti épületek, a szalagházak és a toronyházak; a sport-, a kulturális- és a vallási létesítmények páratlan sokszínűségükkel az elmélet és a technika hatalmát hirdetik.

A matematika segítségével elképzelhetetlen a modern építészet (anyagszerkezet, terhelésvizsgálat, kivitelezés). A század nagy építészeinek munkáiban megtalálható a forma és a funkció egysége, az esztétikum és a praktikum párhuzama – míg az elmélet oldaláról nézve azt is megállapíthatjuk, hogy az épületek tervezése egy-egy nehéz matematikai probléma megoldásai.



Nagyboldogasszony és Szent Adalbert Főszékes-egyház (esztergomi bazilika)



A Bálna épülete Budapesten

KÉPZŐMŰVÉSZET

„Háromdimenziós terünk az egyetlen realitás, amit ismerünk. A kétdimenziós éppúgy fikció, mint a négydimenziós, mert semmi sem sík, még a legfinomabban csiszolt tükör sem. De ha tartjuk is magunkat ahhoz a megállapításhoz, hogy egy fal vagy egy darab papír sík felület, csodálatraméltó, hogy – magától értetődően – egy ilyen síkon térbeli illúziókat ábrázolunk. Nem abszurd, hogy rajzolunk egy-két vonalat, majd azt mondjuk: ez egy ház?”

(M. C. Escher: *Grafikák és rajzok, IX. Konfliktus a sík és a tér között*)

Természetesen az építészet mellett a képzőművészet különböző ágaiban is alkalmaznak geometriai elemeket az alkotók. A térgeometria szerepe egyértelmű a szobrászatban (vagy a rokon területeken: domborművek, plasztika). A festészet (grafikák, metszetek) művelőinek már nehezebb dolguk van, mint erre a fenti Escher-idézet is utal, hiszen két dimenzióban kell háromdimenziós ábrákat szemléltetniük. Különböző matematikai alapú arányelméletek ismertek a középkorból és az újkorból is (aranymetszés, Vitruvius-tanulmány), de a perspektivikus ábrázolás első törvényeit festők fedezték fel a XV. században. A perspektíva neves kutatói közül említsük meg *Leonardo da Vincit* (1452–1519) és a magyar származású *Albert (Albrecht) Dürert* (1471–1528). (A fővárosi Városliget utcaneve, az Ajtósi Dürer sor, az ő apjának a nevét őrzi.)

A mai időkben a festők „rokonai”, a fotó- és filmművészek is törekednek a térbeli effektusok alkalmazására. Megjelentek a 3D-s filmek, a számítógépes animációk, a komplementer színek és a holográfia alkalmazásai.

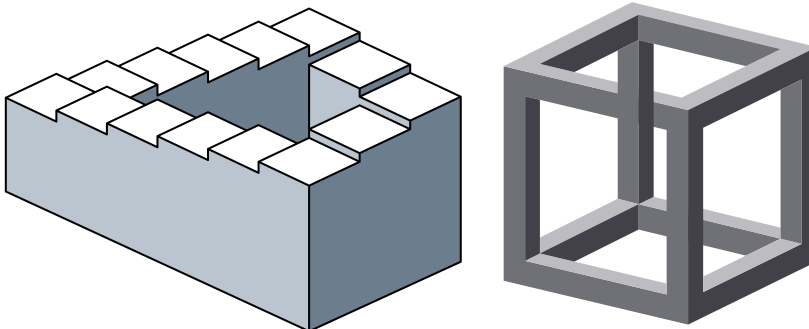
Néhány ábrázolási területnek külön fontosságot ad, hogy háttérükben matematikai érdekességek húzódnak meg. Tipikus példák

- az optikai csalódások (illetve ezek tudatos művészi alkalmazása);
- a szabályos felületfelosztások (mozaikok, periodikus parkettázás vagy nem periodikus síkkitöltések);
- a lehetetlen ábrák, paradox képek;
- és általában a számítógépes grafika (amely például fraktálgeometriát alkalmaz).

Az alábbi képek a fenti témákból adnak válogatást.



*Victor Vasarely (1906–1997)
kültéri alkotása Pécsen*



FELADATOK

1. K1

Az iskolai menzán régen négy gombócot adtak ebédre, most többet, hatot adnak. Igaz, valamivel kisebbek a gombócok: régen 5 cm átmérőjűek voltak, most csak 3,5 cm az átlagos átmérőjük. Vajon jobban járnak most az étkezők?

2. K2

András rajzot készít egy rögzített helyzetű pálcáról. A 24 cm hosszú pálca két vetületének hossza (előlről és felülről nézve) rendre 13 cm és 20,5 cm. Mekkora a pálca oldalnézeti hossza, és mekkora szöveget zár be a pálca a talajjal?

3. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2014.) Egy cirkuszi sátor egy forgáshenger palástjából és egy erre illeszkedő forgáskúp palástjából áll. A henger és a kúp alapkörének a sugara egyaránt 18 méter. A sátor teljes magassága 10 méter, oldalfalának magassága 4 méter. Egy biztonsági előírás alapján az ilyen típusú sátorban a maximális nézőszámot úgy határozzák meg, hogy egy nézőre legalább 6 m^3 légtér jusson. (A teljes légtér nagyságát a sátor üres állapotában kell kiszámítani.) Mekkora a maximális nézőszám ebben a sátorban?

4. K2

(Érettségi feladat alapján, középszint, 2018.) Cili – hogy segítse szervezete regenerálódását – vitamincseppeket szed. Naponta 2×25 csepp az adagja. Körülbelül 20 csepp folyadék térfogata 1 milliliter. A folyadék milliliterenként 100 milligramm hatóanyagot tartalmaz.

a) Hány milligramm hatóanyagot kap naponta Cili cseppek formájában?

A vitaminoldatot olyan üvegben árulják, amely két henger alakú és egy csonkakúp alakú részből áll. A folyadék a csonkakúp alakú rész fedőlapjáig ér. Az üveg belső méreteit az ábra mutatja. A nagyobb henger átmérője 3 cm, magassága 7 cm. A csonkakúp fedőlapjának átmérője 1 cm, alkotója 2 cm hosszú.

b) Hány napig elegendő Cilinek az üvegben lévő vitaminoldat, ha mindig az előírt adagban szedi?

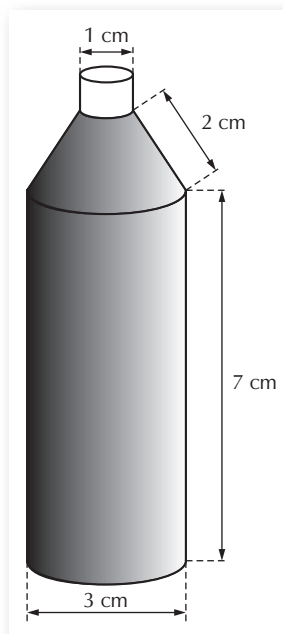
5.

Szemestakarmány tárolására fémből egy tartályt készítenek. (A tartály alakja csúcsával lefelé fordított, felül nyitott, alul pedig nyitható tetraéder.) A tetraéder oldalélei egyenlő hosszúak, alapja pedig olyan derékszögű háromszög, melynek befogói 3 m és 4 m hosszúak.

K2 a) Milyen magas a tartály, ha 10 m^3 -nyi a térfogata?

E1 b) Milyen hosszúak az oldalélek?

E1 c) Kb. mekkora a tartály előállításához szükséges fém mennyisége (térfogata), ha a tartály oldalai 3 mm vastagok?



6. E1

Pezsgőspoharunk csonkakúp alakú, az alapkör sugara 1 cm, a fedőkör sugara 4 cm, a magassága 6 cm (ábra). Milyen magasságig kell tölteni a poharat, ha egy fél pohár italt szeretnénk inni? (KÖMAL, a Középiskolai Matematikai Lapok C. 1079. feladata.)

7. E2

Előregyártott kabinokból lakást építenek az űrben. A lakásról a következőket tudjuk:

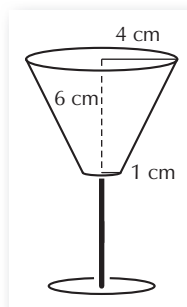
a) Bármely két kabin között legfeljebb egy zsilip van.

b) Bármely kabinból legfeljebb egy zsilip nyílik a lakáson kívüli űrbe.

c) A lakásban összesen 21 zsilip van.

d) A kabinok egybevágó téglalapok.

Legalább hány kabin van a lakásban?



MAGYAR SZÁRMAZÁSÚ MATEMATIKUSOK A XVIII–XX. SZÁZADBAN (Olvasmány)

Az utóbbi három évszázadban a magyar vagy magyar származású matematikusok jelentősen hozzájárultak a matematika fejlődéséhez, kultúrtörténetéhez. Ebben az olvasmányban igyekszünk felsorolni azokat a nemzetközi hírű matematikusainkat – kutatókat, pedagógusokat –, akik a XIX. század végén és a múlt században nemzetközileg is számottevő eredményt értek el munkásságukkal. (Megemlítjük a korábbi évek nagy neveit is.) Sajnos területi okokból még a nevek kapcsán sem törekedhetünk a teljességre, és csak egy-két mondattal jellemezhetjük tudósaink életét, tevékenységét. (Aki a témában részletesebben szeretne elmélyülni, könnyen talál megfelelő szakirodalmat és friss internetes írást.)

Segner János András (1704–1777) volt az első magyar származású, nemzetközileg ismert tudósunk, aki önálló matematikai eredményeket ért el. Iskoláit Pozsonyban, majd Győrött végezte, ezután Jénában szerzett orvostudományi oklevelet, és rövid debreceni működése után különféle német egyetemeken tanított.

Bolyai Farkas (1775–1856) göttingeni diákként életre szóló barátságot kötött *Gauss*-szal, a „matematikusok fejedelmével”. Matematikai eredményeit a marosvásárhelyi református kollégium tanáraként érte el. Legismertebb tétele talán az azonos területű sokszögek egymásba darabolhatóságával kapcsolatos.

Fiának, a rendkívül tehetséges *Bolyai János*nak (1802–1860) a nevével már a 9. osztályban találkoztunk. A *Bolyai–Lobacsevszkij*-féle geometria az ő nevét viseli, annak egyik megalapozója.

A budapesti műegyetem tanárai, *Hunyadi Jenő* (1838–1889) az algebra, míg a sokoldalú *Kőnig Gyula* (1849–1913) a halmazelmélet mellett a matematika szinte minden területén jelentőset alkotott. A Kőnig-féle egyenlőtlenség egy alkalmazása a maga idejében matematikai világszenzáció volt.

A kolozsvári tudományegyetem két tanára közül *Farkas Gyula* (1847–1930) az elméleti mechanika ismert tudósa volt, de fiatalkori matematikai eredményei a lineáris programozás területéről utólag fontosnak bizonyultak. *Vályi Gyula* (1855–1913) a parciális differenciálegyenletek elmélete és a variációszámítás témakörében publikált kiemelkedő tanulmányokat.

A budapesti tudományegyetem professzora, *Beke Manó* (1862–1946) a differenciálegyenletek elméletében ért el eredményeket; de rendkívül jelentős a hazai matematikaoktatás jobbtételére irányuló munkássága is.

A budapesti műegyetem kiemelkedő matematikaprofesszora volt *Kürschák József* (1864–1933), aki elsősorban az absztrakt algebra területén dolgozott. A Műszaki Egyetem Közgazdaságtudományi Karán tanító *Jordán Károly* (1871–1959) nevéhez pedig a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika hazai meghonosítása fűződik. Fontos vizsgálatai kapcsolódnak a matematikai statisztika meteorológiai és szeizmológiai alkalmazásaihoz.

Csaknem egy időben született három világhírű matematikusunk: *Fejér Lipót* (1880–1959) a budapesti, *Riesz Frigyes* (1880–1956) és *Haar Alfréd* (1885–1933) pedig a szegedi tudományegyetemen világszínvonalú tudományos munkát végeztek.

Szőkefalvi-Nagy Gyula (1887–1953) Szegeden, Kőnig Gyula fia, *Kőnig Dénes* (1883–1944) pedig a Budapesti Műszaki Egyetemen ért el jelentős eredményeket. (Ő volt a gráfelmélet világviszonylatban első monográfiájának a szerzője; nevéhez fűződik a gráfelméleti „magyar iskola” megalapozása, amely azóta is nemzetközi hírű.)

A múlt század derekán több tudósunk is külföldre távozott, a világhírt már az idegen országbeli eredményeikért érdemelték ki.

Kármán Tódor (1881–1963) az Egyesült Államok legnagyobb tudományos kitüntetését (National Medal of Science, USA, 1963) hidro- és aerodinamikai munkásságáért kapta, de



Segner János András



A Bolyai testvérek szobra



Beke Manó

vizsgálataival kapcsolatban matematikai jellegű eredményei is vannak. *Dienes Pál* (1882–1952) 1919 után Angliában telepedett le, *Pólya György* (1887–1985) Svájcban, majd az Egyesült Államokban tevékenykedett. Matematikai eredményeik mellett óriási hatásúak voltak a matematika tanulását és oktatását elősegítő könyveik. *Riesz Marcell* (1886–1969) Svédországba került, bátyjával, Riesz Frigyessel és G. A. Hardy angol matematikussal közösen írt cikkei az analízis alapvető munkái. *Lánczos Kornél* (1893–1974) matematikai, főként differenciálgeometriai eredményeinek lényeges következményei voltak a relativitáselméletben.

Már a XX. században született *Neumann János* (1903–1957), talán a legismertebb magyar származású matematikus. Nevével már találkozunk a 11. évfolyamon. A matematika több fejezetében és az alkalmazások területén is káprázatos eredményeket ért el, és benne tisztelhetjük a jelenlegi számítógépkorszak egykori útnak indítóját. *Lakatos Imre* (1922–1974), a matematikai filozófia egyik új irányzatának megalapozója 1956-ban Angliába emigrált, londoni és amerikai egyetemeken volt vendégtanár.



Neumann János

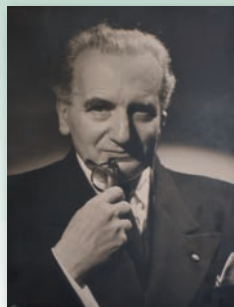
A szegedi egyetem sokoldalú professzorainak, *Kalmár László*nak (1905–1976) és *Szőkefalvi-Nagy Bélának* (1913–1998) talán a matematikai logikát, a kibontakozó számítógép-tudományt, illetve az analízist és a geometriát tekinthetjük a legfőbb érdeklődési körének. Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen pedig 1945 után három nemzetközi híré matematikusunk is tevékenykedett: *Turán Pál* (1910–1976), *Hajós György* (1912–1972) és *Rényi Alfréd* (1921–1970).



Rényi Alfréd

Nagyjaink közül többen eredményesen végeztek **oktató-nevelői és pedagógiai-módszertani** munkát. Említettük Beke Manót; Pólya György heurisztikával foglalkozó könyveit (*A gondolkodás iskolája*, *A problémamegoldás iskolája*) vagy Dienes Pál fiának, *Dienes Zoltánnak* (1916–2014) a könyvét, a *Dienes professzor játékait* az egész világon ismerik. A XX. század második felének legkiválóbb svéd matematikusai Riesz Marcell tanítványai. Fejér Lipót környezetében „matematikai iskola” alakult (Csillag Pál, Egerváry Jenő, Erdős Pál, Fekete Mihály, Kalmár László, Lukács Ferenc, Neumann János, Pólya György, Radó Tibor, Riesz Marcel, Szász Ottó, Szegő Gábor, Szidon Simon, Turán Pál és sokan mások). Kalmár László, *Varga Tamás* (1919–1987) vagy *Péter Rózsa* (1905–1977) rengeteget tett a középiskolai matematikaoktatás javításáért (*Játék a végtelennel*); Hajós György egyetemi geometria-tankönyve pedig még ma is „A Könyv”. Rényi Alfréd matematikát népszerűsítő írásai szépirodalmi szempontból is értékesek; és a 10. osztályban találkoztunk már *Erdős Pál* (1913–1996), az „utazó matematikus” nevével, aki szintén sokat tett a matematika terjesztéséért, népszerűsítéséért.

A magyar származású matematikusok napjainkban is a világ élvonalába tartoznak. A legnagyobb szakmai-tudományos elismerést többen is megkapták közülük: Abel-díjat kapott 2005-ben az Egyesült Államokban élő Lax Péter, 2012-ben Szemerédi Endre, 2021-ben Lovász László (aki 2014-től 2020-ig a Magyar Tudományos Akadémia elnöke volt); Wolf-díjat 1983-ban Erdős Pál, 1987-ben Lax Péter, 1999-ben Lovász László, 2000-ben a magyar-osztrák Bott Raoul. Gödel-díjat nyert matematikusaink: 1993-ban Babai László, 2001-ben Lovász László és Szegedy Mórió, 2005-ben Szegedy Mórió, 2012-ben Tardos Éva.



Kármán Tódor

Pihenő

Kármán Tódor egy időben volt az aacheni egyetem professzora és Pasadenában a Kaliforniai Műszaki Egyetem előadója is. Mint neves repülőmérnök és számos légitársaság tanácsadója, ingyen repülhetett azok járatain. Így rendszeresen ingázott a két város között, és mindkét helyen ugyanarról adott elő. Egyszer Pasadenában észrevette, miközben az aacheni jegyzeteket használta, hogy a hallgatók arckifejezése még a szokásosnál is értetlenebb. Ekkor döbbsen rá, hogy mindeddig németül beszélt! Zavartan fordult a hallgatóságához:

– Figyelmeztetniük kellett volna – miért nem szóltak?

Nagy csend, majd valaki felállt:

– Ne zavartassa magát, professzor úr. Beszélhet angolul, beszélhet németül, ugyanannyit értünk belőle.

FOGALOMTÁR

NEVEK

Alcuin 9
 Arisztotelész 19, 24, 145
 Arkhimédész 145, 151
 Boole 25
 Cavalieri 116
 Cicero 151
 Démokritosz 151
 Descartes 25
 Fibonacci 15, 47, 60
 Gauss 51
 Gödel 25
 Hérón 145
 Kant 25
 Kepler 146
 Leibniz 25
 Pascal 25
 Platón 25
 Spinoza 25
 Wittgenstein 25

FOGALMAK

akkor és csak akkor (logikai művelet) 22
 alaplap (csonkakúp, csonkakúp) 107
 alaplap (gúla, kúp) 125
 alaplap (hasáb, henger) 117, 119
 alkotó (hasáb, henger) 117, 119
 alkotó (kúp) 124
 állítás (kijelentés) 18
 állítás (tétel) tagadása 19

 Cavalieri-elv 116
 csonkakúp, csonkakúp 138

 De Morgan-azonosságok 17
 differencia (különbség) 49

 egyenes és sík hajlásszöge 83
 egyenes hasáb, henger 114, 119
 egyenes, ferde körkúp 125
 egyenesek hajlásszöge 83
 egységesített betétikamatláb-
 mutató (EBKM) 67
 elem (sorozaté) 46

ellentett (állítás) 19
 előjeles távolság 93
 és (logikai művelet) 17
 explicit megadás 46

fedőlap (csonkakúp, csonkakúp) 138
 félig szabályos test 145
 felszín (gömbé) 152
 ferde hasáb 114
 forgáskúp 125
 főkör 148

gömbfelület 148
 gömbövíz 149
 gömbsüveg 149
 gömbszelet 149
 gömbtest 148
 gúla 124

ha ..., akkor ...
 (logikai művelet) 19
 hajlásszög (térelemek) 79
 háló (hálózat) 113
 hányados (kvóciens) 57
 hasáb 110
 henger 110
 hengerszerű testek 119

kamatos kamat 56
 két sík hajlásszöge 84
 kitérő egyenesek 83
 konklúzió (következmény) 21
 kör kerülete, területe 101
 körcikk ívének hossza 101
 körcikk területe 101
 körhenger 119
 körkúp 125
 körszelet területe 102
 következtetési szabályok 8
 kúpszerű test 124
 különbség (differencia) 49
 kvóciens (hányados) 57

létezik (van olyan)
 (logikai kvantor) 19
 logikai kvantorok 19
 logikai műveletek 25

magasság (gúla, kúp) 101
 magasság (hasáb, henger) 125
 mértani sorozat 56
 mértani sorozat n -edik
 eleme 57
 mértani sorozat elemeinek
 (tagjainak) összege 50
 metszészvonal 80
 minden (tetszőleges)
 (logikai kvantor) 19

normáltranszverzális 88
 numerikus kvantor 19

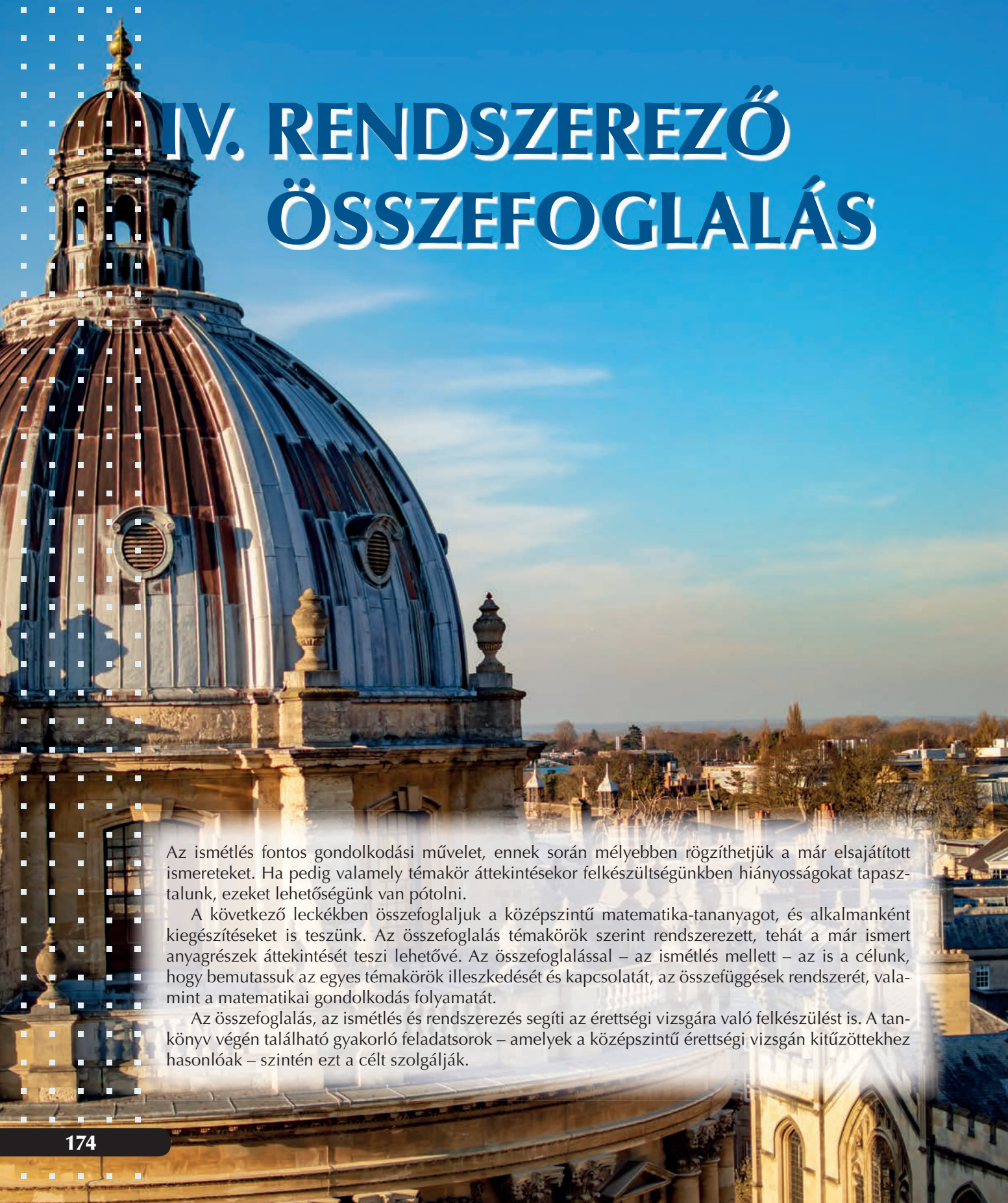
palást (gúla, kúp) 126, 137
 palást (hasáb, henger) 117, 119
 paralelepipedon 114
 poliéder 144
 pontosan akkor
 (logikai művelet) 22
 premissza (előzmény) 21

rekurzív megadás 47

sem ..., sem ...
 (logikai művelet) 25
 síkra merőleges egyenes
 tétele 84
 sorozat 45
 szabályos hasáb, gúla 114, 125
 számsorozat 46
 számtani sorozat 49
 számtani sorozat n -edik
 eleme 50
 számtani sorozat tagjainak
 összege 52

tagadás (állítás, tétel) 19
 távolság (térelemek) 87
 teljes hiteldíjmutató (THM) 67
 tengely (hasáb, henger) 93, 96
 tengely (kúp) 126
 térbeli Pitagorasz-tétel 166
 tétel (állítás) megfordítása 21
 tetraéder 93, 102, 125
 törlesztőrész 76

vagy (logikai művelet) 18



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Az ismétlés fontos gondolkodási művelet, ennek során mélyebben rögzíthetjük a már elsajátított ismereteket. Ha pedig valamely témakör áttekintésekor felkészültségünkben hiányosságokat tapasztalunk, ezeket lehetőségünk van pótolni.

A következő leckékben összefoglaljuk a középszintű matematika-tananyagot, és alkalmanként kiegészítéseket is teszünk. Az összefoglalás témakörök szerint rendszerezett, tehát a már ismert anyagrészek áttekintését teszi lehetővé. Az összefoglalással – az ismétlés mellett – az is a célunk, hogy bemutassuk az egyes témakörök illeszkedését és kapcsolatát, az összefüggések rendszerét, valamint a matematikai gondolkodás folyamatát.

Az összefoglalás, az ismétlés és rendszerezés segíti az érettségi vizsgára való felkészülést is. A tankönyv végén található gyakorló feladatsorok – amelyek a középszintű érettségi vizsgán kitűzöttekhez hasonlóak – szintén ezt a célt szolgálják.

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

Ismétlés

9/I.; 10/I.; 10/VII.;
11/VIII.; 12/I.
(9. osztályos tankönyv,
I. fejezet stb.)

1. HALMAZOK

A **halmaz** fogalma és az **elem** reláció nem definiált alapfogalmak; az azonos tulajdonságú objektumok összességét (H), illetve az ezekbe való tartozást ($\in$) jelöljük $x \in H$ módon. (Fontos, hogy a halmazba tartozás bármilyen objektum esetében elvileg egyértelműen eldönthető legyen.) A halmazokat többféleképpen adhatjuk meg, leggyakrabban utasítással, felsorolással, **Venn-diagram** segítségével vagy algebrai alakban.

Például:

$A = \{a \in \mathbf{N} \mid 5 \leq a < 20\}$ a természetes számok $\{5; 6; 7; \dots; 19\}$, míg $B = \{b \in \mathbf{Z}; |b - 9| < 7\}$ az egész számok $\{3; 4; 5; \dots; 15\}$ részhalmazát jelöli.

Két halmaz egyenlő, ha megegyeznek az elemeik. Ha egy G halmaz minden eleme egyúttal a H halmaznak is eleme, akkor $G \subseteq H$ (azaz G része vagy részhalmaza H -nak), míg $G \subset H$ a valódi részhalmazt jelöli (ekkor $G \neq H$).

Két halmaz egyenlőségét a **részhalmaz** relációval is megfogalmazhatjuk: $G = H$ akkor és csak akkor, ha $G \subseteq H$ és $H \subseteq G$.

A fenti példák esetében $\{4; 5; 6\} \subseteq B$ vagy $\{4; 5; 6\} \subset B$, míg $\{4; 5; 6\} \not\subset A$.

A leggyakrabban használt halmazműveletek az **unió** vagy **egyesítés** (jele: $\cup$), a **metset**- vagy **közös-rész-képzés** ($\cap$), a **különbség** ($\setminus$), valamint az adott alaphalmazon értelmezett **$\overline{H}$ komplement-képzés**.

A fenti példákban:

$A \cup B = \{3; 4; \dots; 19\}$, azaz ebbe a halmazba azok az elemek tartoznak, melyek A -nak vagy B -nek elemei;

$A \cap B = \{5; 6; \dots; 15\}$, azaz ebbe a halmazba azok az elemek tartoznak, melyek A -nak és B -nek is elemei;

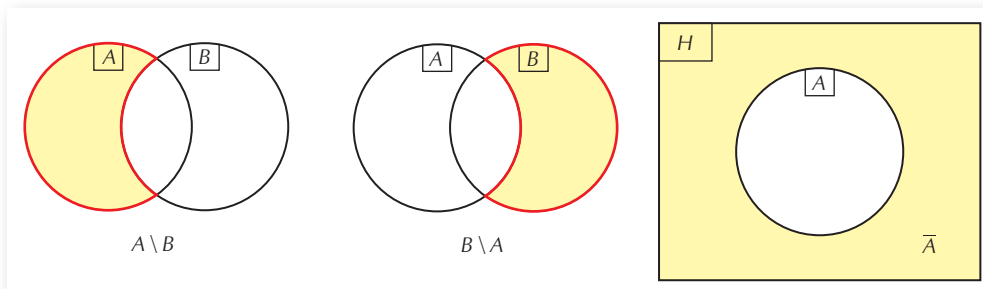
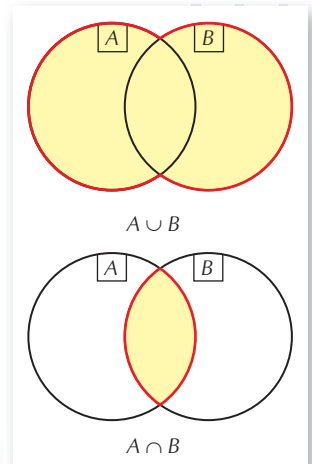
$A \setminus B = \{16; 17; 18; 19\}$, azaz olyan számok tartoznak ebbe a halmazba, amelyek elemei A -nak, de B -nek nem;

$B \setminus A = \{3; 4\}$, azaz ezek a számok elemei B -nek, de A -nak nem.

A természetes számok halmazán $\overline{A} = \{0; 1; 2; 3; 4\} \cup \{20; 21; 22; \dots\}$, de például a $H = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ alaphalmazon $\overline{A}_H = \{1; 2; 3; 4; 20\}$.

A halmazok elemszámát $|H|$ módon jelöljük: $|A| = 15$, $|A \setminus B| = 4$, $|\mathbf{N}| = \infty$.

Fontos **tétel** vonatkozik a részhalmazok számára: az n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van ($n \in \mathbf{N}$).



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Leggyakrabban számhalmazokkal (valós számok, egész számok az algebrában, számelméletben) és ponthalmazokkal (geometria, koordinátageometria) találkozunk, de a halmazok elemei nemcsak számok vagy pontok lehetnek. A gyakran használt intervallumok számhalmazoknak és ponthalmazoknak is tekinthetők. Emlékeztetőül:

Intervallum-alaptípusok ($x \in \mathbb{R}$):

$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ (zárt intervallum);

$x \in]a, b[\Leftrightarrow a < x < b$ (nyílt intervallum);

$x \in [a, b[\Leftrightarrow a \leq x < b$ (félig nyílt vagy félig zárt intervallum).

A halmazokat rendszeresen alkalmazzuk a mindennapi életben (azonos tulajdonságú adatok csoportosítása, osztályba sorolása, szűrése), valamint a matematika szinte minden részterületén. A szám- és ponthalmazok mellett minőségi jellemzők alapján is képezhetünk halmazokat, ilyen adathalmazokkal dolgozik a leíró statisztika is. (Bár ezeket célszerűbb adatsokaságnak nevezni, hiszen a halmazok elemeit csak egyszer soroljuk fel, míg a statisztikai mintákban egy-egy azonos objektum többször is szerepelhet.)

Az alábbiakban a halmazok sokrétű alkalmazására mutatunk példákat.

1. példa

Egy munkahelyen 100 fő megkérdezésével felmérést végeztek a teázási szokásokról. A megkérdezettek között 53 volt a férfi, és 28-an fogyasztottak teát rendszeresen. Észrevették még, hogy a teázó nők éppen harmadannyian voltak, mint a teázó férfiak.

a) Hány teázó nő vett részt a felmérésen?

b) Az adatok alapján töltsük ki a táblázat hiányzó celláit!

	férfiak	nők	összesen
teázók			28
nem teázók			
összesen	53		100

c) Ábrázoljuk a férfiak és teázók halmazát Venn-diagramon! (Az egyes tartományokba az elemszámokat írjuk!)

d) Melyik nagyobb: a teázó nők aránya a nők körében, vagy a teázó férfiak aránya a férfiak körében?

e) Állapítsuk meg, milyen feltétel esetében teljesülne a következő állítás: „Ha egy személy teázik, akkor az férfi.”

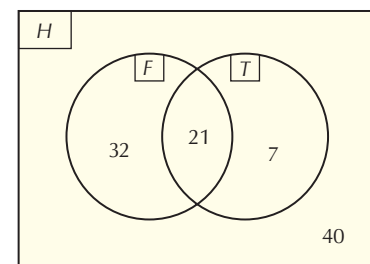
Megoldás

a) Legyen x a teázó nők száma, ekkor a teázó férfiak száma $3x$. Az $x + 3x = 28$ egyenletből $x = 7$.

b) A teázó férfiak száma $3 \cdot 7 = 21$, a nem teázóké $53 - 21 = 32$, s mivel 47 nő van, a nem teázó nők száma $47 - 7 = 40$.

	férfiak	nők	összesen
teázók	21	7	28
nem teázók	32	40	72
összesen	53	47	100

- c) A megkérdezettek alaphalmazát H -val jelölve, az egyes részhalmazok elemszáma a fenti táblázat alapján adható meg. (F a férfiak, T a teázók halmazát jelenti.)
- d) A teázó nők aránya $\frac{7}{47} \approx 14,9\%$, ugyanez az arány a férfiaknál magasabb: $\frac{21}{53} \approx 39,6\%$. (Halmazjelölésekkel a $\frac{|T \setminus F|}{|H \setminus F|}$, illetve $\frac{|T \cap F|}{|F|}$ arányokat számoltuk ki.)
- e) Az állítás szerint aki teázik, az férfi – vagy másképpen: mindenki, aki teát fogyaszt, férfi. Ez halmazalgebrai jelölésekkel a $T \subseteq F$ tartalmazást jelenti. Az állítás igaz lenne, ha nem lennének teázó nők, azaz $T \setminus F = \emptyset$ teljesülne.



2. példa

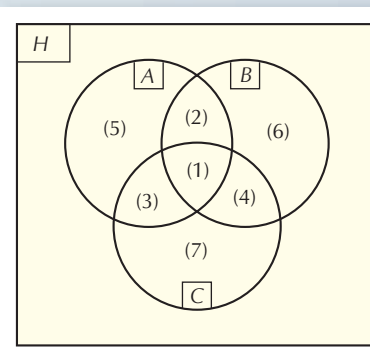
Mutassuk meg, hogy tetszőleges A , B és C halmazok esetében $(A \setminus B) \cap C \neq A \setminus (B \cap C)$!
Milyen feltétel esetében teljesülne az egyenlőség?

Megoldás

A Venn-diagramon jelöljük az egyes tartományokat (1), (2), ..., (7) módon! Ekkor $A \setminus B$ a (3) és (5) részhalmazokat adja meg, a bal oldalon $(A \setminus B) \cap C$ eredménye (3).

A jobb oldalon $B \cap C$ az (1) és (4) részhalmazokból áll, így $A \setminus (B \cap C)$ eredménye a (2), (3) és (5) részhalmazok uniója.

Az egyenlet tehát általában nem igaz. Egyenlőség akkor van, ha (2) és (5) üres halmazok. Halmazalgebrai jelöléssel $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$ és $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$ vagy $A \setminus C = \emptyset$.



3. példa

Legyen $f(x) = x^5 - 16x$ és $g(x) = x^2 - x - 2$. Határozzuk meg az alábbi egyenletek megoldásainak a halmazát:

a) $f(x) = 0$;

b) $g(x) = 0$;

c) $f(x) \cdot g(x) = 0$;

d) $f^2(x) + g^2(x) = 0$;

e) $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$!

Megoldás

a) Észrevehetjük, hogy $f(x)$ kiemeléssel és nevezetes azonosságok segítségével szorzattá alakítható: $x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$. Egy szorzat akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla; így az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek a halmaza $F = \{-2; 0; 2\}$.

b) A másodfokú egyenlet megoldóképletéből $x^2 - x - 2 = 0$, ha $x_1 = -1$ vagy $x_2 = 2$. A $g(x) = 0$ egyenlet megoldásainak a halmaza $G = \{-1; 2\}$.

c) $f(x) \cdot g(x) = 0$, ha $f(x) = 0$ vagy $g(x) = 0$. A megoldások halmaza $F \cup G = \{-2; -1; 0; 2\}$.

d) Mivel mindkét tag nemnegatív, $f^2(x) + g^2(x) = 0$ csak akkor teljesülhet, ha $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$. A megoldások halmaza $F \cap G = \{2\}$.

e) $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ha $f(x) = 0$, de $g(x) \neq 0$. A keresett halmaz $F \setminus G = \{-2; 0\}$.

4. példa

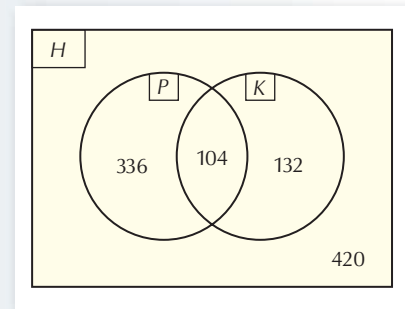
A 32 lapos magyarkártya-csomagból egymás után egyesével, visszatevés nélkül kihúzzunk két lapot (számít a húzás sorrendje). A P halmazba soroljuk azokat a kétlapos húzásokat, amelyek tartalmaznak piros lapot; a K halmazba pedig azokat, amelyek tartalmaznak királyt.

- Határozzuk meg a P és K halmazok elemszámát!
- Hány olyan kétlapos húzás lehetséges, amely tartalmaz pirosat vagy királyt?
- Hány olyan kétlapos húzás lehetséges, amely tartalmaz pirosat és királyt?



Megoldás

- A komplementer összeszámlálás módszerét alkalmazzuk.
Az összes húzás $32 \cdot 31 = 992$ -féle lehet. A piros lapokat nem tartalmazó húzások száma $24 \cdot 23 = 552$, így $|P| = 992 - 552 = 440$.
Ha az összes kétlapos húzás alaphalmazát H -val jelöljük, akkor a $|P| = |H \setminus \bar{P}| = |H| - |\bar{P}|$ összefüggést alkalmazzuk.
A királyt nem tartalmazó húzások száma $28 \cdot 27 = 756$, így $|K| = 992 - 756 = 236$.
- Az összes lehetséges húzásból ki kell hagynunk azokat, amelyek sem pirosat, sem királyt nem tartalmaznak. Ilyen lap 21 van, így ezekből kell 2-t kihúzni: $32 \cdot 31 - 21 \cdot 20 = 572$.
Halmazjelölésekkel: $|P \cup K| = |H| - |\bar{P} \cap \bar{K}|$.
- Alkalmazzuk a szita formulát! Ha az összes lehetséges húzásból kivonjuk azokat, amelyekben nincs piros, majd kivonjuk azokat, amelyekben nincs király, akkor a sem pirosat, sem királyt nem tartalmazó húzásokat kétszer vontuk ki. Helyes eredményt tehát akkor kapunk, ha ezeket a húzásokat egyszer még hozzáadjuk az összeghez. Így $32 \cdot 31 - 24 \cdot 23 - 28 \cdot 27 + 21 \cdot 20 = 104$ a pirosat és királyt tartalmazó húzások száma.
Halmazjelölésekkel: $|P \cap K| = |H| - |\bar{P}| - |\bar{K}| + |\bar{P} \cap \bar{K}|$.
Az eredmények alapján kitölthetjük a P és K halmazok Venn-diagramján az egyes részhalmazok elemszámát is (ábra).



Természetesen másképpen is eljárhatunk. Kevésbé „elegáns” például az a módszer, amikor a lehetőségeket külön részekre bontva vizsgáljuk:

Második megoldás a c)-re:

Esetszétválasztást végzünk első lap alapján.

Ha az első lap

- piros király, akkor a második bármi lehet: 31 lehetőség.
 - piros, de nem király (7 eset), akkor a második lapnak királynak kell lennie (4 eset): $7 \cdot 4 = 28$ lehetőség.
 - király, de nem piros (3 esetben), akkor a második lap piros kell hogy legyen (8 eset): innen adódik $3 \cdot 8 = 24$ lehetőség.
 - nem király és nem piros (21 eset), akkor a második lap a piros király (1 eset): 21 lehetőség.
- Összesen tehát $31 + 28 + 24 + 21 = 104$ a megfelelő húzások száma.

VÉGTELEN HALMAZOK

A végtelen halmazok több szempontból is „furcsán”, a véges környezetben megszokott tapasztalatainktól eltérően viselkednek. Ha végtelen halmazokból véges sok elemet elhagyunk, a maradék halmaz elemszáma ugyanúgy végtelen lesz (azaz nem lesz kevesebb); vagy végtelen halmazok esetében ha $A \subset B$, ebből nem következik, hogy $|A| < |B|$. Ezért végtelen halmazok esetében csak megszorításokkal van értelme arról beszélni, hogy „melyik halmaz elemszáma a nagyobb”; új fogalom bevezetésére van szükség.

A halmazok **számossága** az elemszám fogalmának a kiterjesztése. Véges halmaz számossága megegyezik az elemszámával; míg két végtelen halmaz számossága akkor tekinthető egyenlőnek, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Például a négyzetszámokat tartalmazó $A = \{0; 1; 4; 9; \dots\}$ és a 4-nél nagyobb egész számokat tartalmazó $B = \{5; 6; 7; \dots\}$ halmazok, valamint a természetes számok halmazának megegyezik a számossága. Könnyű megadni a halmazok elemei közötti kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést:

$n \in \mathbf{N} \leftrightarrow n^2 \in A$; valamint $n \in \mathbf{N} \leftrightarrow n + 5 \in B$ mutatja, hogy $\mathbf{N}$ és A , valamint $\mathbf{N}$ és B számossága megegyezik. Ebből pedig már következik, hogy A és B számossága is ugyanaz: $b \in B \leftrightarrow (b - 5)^2 \in A$.

Azokat a halmazokat, amelyek számossága megegyezik a természetes számok halmazának a számosságával, **megszámlálhatóan végtelen** halmazoknak nevezzük. Megmutatható, hogy ilyen az egész számok vagy a racionális számok bármely végtelen elemű részhalmaza. Nem megszámlálhatóan végtelen halmazokra példa az irracionális számok vagy a pozitív valós számok halmaza vagy a $[0; 1]$ intervallum.

Emelt szint

FELADATOK

- 1. K2** Igazak vagy hamisak az alábbi állítások? (Indokoljunk!)
- Van olyan halmaz, aminek 2022 darab részhalmaza van.
 - Van olyan halmaz, aminek van 2022 darab részhalmaza.
 - Minden halmaznak van legalább két részhalmaza (az üres halmaz és önmaga).
 - Egy 8 elemű halmaznak ugyanannyi 3 elemű részhalmaza van, mint ahány 5 elemű.
- 2. K2** Milyen A, B, C halmazokra teljesül a $C \setminus A = \overline{(A \cup B) \setminus C}$ összefüggés?
- 3. K2** Bergengóciában a társasházak 86%-a legalább háromemeletes; 82%-a fehér színű; és 93%-ában legalább 6 lakás van. A bergengóc házak hány százaléka rendelkezik biztosan a három felsorolt tulajdonság mindegyikével?
- 4. K2** Adott a síkon az A és B pont, valamint négy ponthalmaz:
- a H_1 halmazba olyan P síkbeli pontok tartoznak, amelyekre $\angle APB = 90^\circ$;
 - a H_2 halmaz az AB átmérőjű kör pontjaiból áll;
 - a H_3 halmaz elemei olyan P síkbeli pontok, amelyekre $\angle APB$ derékszögű háromszög;
 - végül a H_4 halmaz olyan P síkbeli pontokból áll, amelyekre $AP^2 + PB^2 \leq AB^2$.
- Milyen kapcsolat van – tartalmazás szempontjából – a négy ponthalmaz között?
- 5. K2** Az $\{a; b; c; d; e; f\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelynek
- eleme a és b ;
 - eleme a és b , de nem eleme c ;
 - eleme a vagy b ;
 - eleme a, b vagy c valamelyike?
- 6. K2** Hány elemű lehet a H halmaz, ha 5-tel több háromelemű részhalmaza van, mint kételemű?

7. K2

Adottak az $A = \{5; 7; 9; 11; \dots\}$ és $B = \{22; 28; 34; 40; \dots\}$ végtelen halmazok. Adjunk meg egy kölcsönösen egyértelmű leképezést A és $\mathbf{N}^+$, B és $\mathbf{N}^+$, valamint A és B elemei között!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 166–170, 227–230, 239–243.

2–3. KOMBINATORIKA, GRÁFOK, LOGIKA

KOMBINATORIKA

A sorbarendezési és összeszámlálási feladatok megoldásában nagy segítségünkre volt a kombinatorika **összeadási** és **szorzási szabálya**:

Ha egy A objektumot m -féleképpen, egy másik független B objektumot n -féleképpen választhatunk ki, akkor a „vagy A , vagy B ” kiválasztás $(m + n)$ -féleképpen, míg az (A, B) pár kiválasztása („ A és B ”) $(m \cdot n)$ -féleképpen történhet.

Az összeadási és szorzási szabály segítségével igazolhatók a „klasszikus” összeszámlálási struktúrákra vonatkozó formulák.

Ha n különböző elemet sorba rakunk, akkor az elemek egy permutációját kapjuk. Az elemek összes **permutációjának** a száma $n!$ (n faktoriális). ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

Előfordulhat, hogy az elemek között $k_1, k_2, \dots, k_m$ számú egyforma szerepel, ekkor az elemek **ismétléses permutációjáról** beszélünk ($k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$). Az ismétléses permutációk száma

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

Példák:

Az $\{a; b; c\}$ három elemű halmaz elemeit összesen $3! = 6$ -féleképpen sorolhatjuk fel: $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(c; b; a)$.

Ha 1 fehér, 2 piros és 3 kék, egyforma méretű golyót minden lehetséges módon sorba rendezünk, $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$ -féle sorrendet kapunk.

Ha n különböző elemből k darabot kiválasztunk, és sorba rendezünk, akkor az elemek egy **variációját** kapjuk ($k \leq n$). Az összes variáció száma $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$.

Ha egy-egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor az elemek egy **ismétléses variációjáról** beszélünk. Az összes ismétléses variáció száma n^k .

Példák:

Egy dobozban 5 cédulán rendre egy ajándéktárgy neve szerepel. Hányféleképpen oszthatunk ki három személynek egy-egy ajándékot?

Ha minden cédulát csak egyszer húzhatunk, akkor az ajándékozási lehetőségek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. (Az első személy 5-féle, a második már csak 4-féle, végül a harmadik 3-féle ajándékot kaphat.)

Ha az egyes ajándékokból 2-nél több darab van, akkor a sorsolást visszatevéses húzással végezhetjük. Ekkor minden személy 5-féle ajándékot kaphat, a lehetőségek száma $5^3 = 125$.

Ha n különböző elemből k darabot kiválasztunk úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor az elemek egy **kombinációját** kapjuk ($k \leq n$). Az összes kombináció száma $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, amit $\binom{n}{k}$ módon is jelölhetünk.

Példák: $\binom{32}{5} = 201\,376$ -féleképpen oszthatunk ki a 32 lapos kártyacsomagból 5 lapot egy személynek; vagy ennyi 5 elemű részhalmaza van egy 32 elemű halmaznak.

A legtöbb összeszámlálási feladat valamilyen korlátozást vagy speciális feltételt tartalmaz, az összetett feladatokban többféle struktúra is szerepelhet egyszerre stb.

1. példa

A 0, 2, 2, 2, 3, 4 számjegyekből hatjegyű számokat készítünk.

a) Összesen hány szám készíthető?

b) Hány páros van közöttük?

c) Hány olyan van közöttük, amelyben a 3 és a 4 nem szomszédos számjegyek?

d) Hány olyan van, amelyben a 0 és a 4 szomszédosak?

Megoldás

a) Ha a számjegyek különbözők lennének, akkor $5 \cdot 5!$ -félét készíthetnénk (0 nem lehet az első számjegy). A három egyforma 2-es miatt az összes lehetőség $\frac{5 \cdot 5!}{3!} = 100$.

Másképpen: Ha a 0 elől is lehetne, $\frac{6!}{3!}$ -féle számot kapnánk. Ebből kivonjuk azokat az eseteket, amikor a 0 elől van; ezek száma $\frac{5!}{3!}$. Eredmény: $\frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!} = \frac{6 \cdot 5!}{3!} - \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 5!}{3!}$.

b) Esetszétválasztást végzünk az utolsó számjegy alapján.

Ha az utolsó számjegy 4, akkor a maradék 0, 2, 2, 2, 3 számjegyek összes megengedett sorrendje $\frac{4 \cdot 4!}{3!} = 16$.

Ha az utolsó számjegy 2, akkor a 0, 2, 2, 3, 4 számjegyekből $\frac{4 \cdot 4!}{2!} = 48$ -féle számot készíthetünk.

Ha pedig az utolsó számjegy 0, akkor a 2, 2, 2, 3, 4 számjegyek összes lehetséges sorrendje $\frac{5!}{3!} = 20$.

Eredmény: $16 + 48 + 20 = 84$.

c) Először meghatározzuk azon esetek számát, amikor a 3 és 4 szomszédos. Ekkor a 0, 2, 2, 2, (34) öt objektumot kell minden lehetséges módon sorba rendezni; erre $\frac{4 \cdot 4!}{3!} \cdot 2$ lehetőségünk van. (Az utolsó 2-es tényező azért szerepel, mert a 3 és 4 kétféle sorrendben állhat egymás mellett.) Az összes lehetőség $\frac{5 \cdot 5!}{3!}$, így a 3 és 4 nem szomszédos $\frac{5 \cdot 5!}{3!} - \frac{4 \cdot 4!}{3!} \cdot 2 = 68$ esetben.

d) Ha az első helyen megengedjük a 0-t, akkor a 2, 2, 2, 3, (04) elemek összes permutációjának száma $\frac{5!}{3!} \cdot 2$. Ezekből el kell hagynunk a 04 kezdetűeket; a 2, 2, 2, 3 folytatás $\frac{4!}{3!}$ -féleképpen rendezhető.

Eredmény: $\frac{5!}{3!} \cdot 2 - \frac{4!}{3!} = 36$.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

2. példa



- Öt tanuló között 3 ajándékot sorsolunk ki. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha
- a) az ajándékok egyformák, és minden tanuló legfeljebb egy ajándékot kaphat;
 - b) az ajándékok egyformák, és a tanulók több ajándékot is kaphatnak;
 - c) az ajándékok különbözők, és egy tanuló legfeljebb egy ajándékot kaphat;
 - d) az ajándékok különbözők, és egy tanuló több ajándékot is kaphat?
 - e) Most a háromféle ajándék mindegyikéből pontosan két darabunk van. Ezekből osztunk ki 3-at úgy, hogy egy tanuló 2, egy másik pedig 1 ajándékot kap. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

Megoldás

- a) 3 tanulót kell kiválasztanunk az 5-ből úgy, hogy a sorrendjük nem számít. Ezt $\binom{5}{3} = 10$ -féleképpen tehetjük meg.
- b) Az előző eset mellett lehetséges, hogy mindhárom ajándékot ugyanaz a személy kapja (5 lehetőség), valamint hogy ketten kapnak 2–1 megoszlásban ajándékot. Ez utóbbi $5 \cdot 4 = 20$ -féleképpen valósítható meg. Eredmény: $10 + 5 + 20 = 35$.
- c) Az első ajándékot 5, a másodikat 4, a harmadikat 3 tanuló kaphatja: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ lehetőség.
- d) Mindegyik ajándékot 5-felé oszthatjuk, ezt $5^3 = 125$ -féleképpen tehetjük meg.
- e) Az első tanulót, aki 2 ajándékot kap, 5-féleképpen, a másodikat 4-féleképpen választhatjuk ki, ez összesen $5 \cdot 4 = 20$ lehetőség.
Ha az első tanuló két egyforma ajándékot kap, akkor a második ezektől különbözőt: az (aa, b) kiválasztás $3 \cdot 2 = 6$ -féleképpen lehetséges. Ha pedig az első ajándékai különbözők, akkor ő 3-féle ajándékpárt, társa 3-féle ajándékot kaphat. Innen tehát $3 \cdot 3 = 9$ esetet kapunk.
Összesen $20 \cdot (6 + 9) = 300$ -féle kiosztás lehetséges.

INVARIÁNS MENNYISÉGEK KERESÉSE, SKATULYAELV

A feladatmegoldás során igen hatékonyan alkalmazhatjuk ezeket a módszereket.

3. példa

A koordináta-rendszerben bolyongó hangya az origóból indul, és minden lépésben egy egységnyi halad vízszintes vagy függőleges irányban.

- a) Hányféleképpen juthat el 12 lépésben a (3; 4) pontba?
- b) Hányféleképpen juthat el 7 lépésben a (3; 4) pontba?

Megoldás

a) Minden egyes lépés során pontosan az egyik koordináta változik meg, és pedig csökken vagy nő eggyel. Kezdetben mindkét koordináta páros volt, az első lépés után az egyik koordináta paritása megváltozik. A második lépés után olyan pontba érkezik a hangya, amelynek ismét két egyforma paritású koordinátája van; a harmadik lépés után az egyik paritása ismét megváltozik stb. Azaz páros számú lépés után a koordináták paritása megegyezik, páratlan számú lépés után a paritások különböznek. Ebből következik, hogy 12 lépésben csak olyan pontba érkezhetsz a hangya, amelynek koordinátái azonos paritásúak. A (3; 4) pont nem ilyen; a hangya tehát nem juthat el 12 lépésben ebbe a pontba.

A megoldás során észrevettük, hogy a páros számú lépéshez tartozó koordináták azonos paritásúak. A koordináták azonos paritása ún. **invariáns (megmaradó)** mennyiség volt. A kezdeti és a célállapotban ez a mennyiség különbözött, emiatt nem volt lehetséges az útvonal bejárása.

(Invariáns mennyiségnek választhattuk volna a koordináták összegének a paritását is, ami szintén lépésenként változik.)

b) A hangyának minden lépésben közelednie kell a (3; 4) ponthoz, tehát – valamilyen sorrendben – 3-szor jobbra és 4-szer felfelé kell lépnie. Ezen útvonalak száma $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ (ismétléses permutációval számolva). Kombinációval is számolhatunk: a 7 lépés közül 3-at kell kiválasztani, amikor jobbra lép a hangya, s ez a kiválasztás a teljes útvonalat megadja. Eredmény: $\binom{7}{3} = 35$. (Ugyanezt az eredményt

kapjuk, ha a 7 lépés közül a 4 felfelé lépést választjuk ki: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$.)

4. példa

Igazoljuk, hogy bárhogyan is adunk meg 13 páros számot, lesz közöttük 3 olyan, hogy bármely kettő különbsége 10-zel osztható!

Megoldás

Minden páros szám osztható 2-vel, elegendő tehát az 5-tel való oszthatóságot vizsgálni.

Az egész számok 5-tel osztva 5-féle maradékot adhatnak, így a 13 szám között biztosan lesz három olyan, amelyik 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adja. (Ha minden maradékosztályból csak legfeljebb 2 számunk lenne, akkor legfeljebb $5 \cdot 2 = 10$ számunk lenne.) Ez a három szám megfelelő: mindegyik páros, és bármely kettő különbsége osztható 5-tel, tehát a különbségek 10-zel is oszthatók.

A **skatulyaelv** általános alakját használtuk ($n = 5$, $k = 2$, $m = 3$):

Adott n számú skatulya és $(k \cdot n + m)$ darab tárgy (k , n , m pozitív egészek). Ha a tárgyakat a skatulyákba helyezzük, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe legalább $(k + 1)$ tárgy kerül.

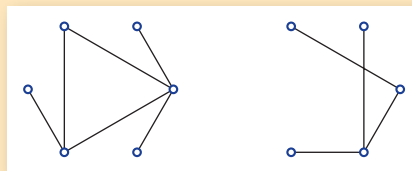
GRÁFOK

Gráfokkal bizonyos objektumokat és a közöttük lévő kapcsolatokat jellemezhetjük. Leggyakrabban grafikus módon (pontokkal és a közöttük húzott vonalakkal) szemléltetjük ezeket a kapcsolatokat, de a gráfokat megadhatjuk táblázattal, az élek felsorolásával stb.

A **pontok (csúcsok)** és az őket összekötő **élek** a gráfok legegyszerűbb alkotóelemei.

A gráfok fontos osztályát alkotják az **egyszerű gráfok**. Az egyszerű gráfban nincs hurokél és többszörös él sem. (A hurokél kezdő és végpontja megegyezik; többszörös élt kapunk, ha két pont között egynél több élt húzunk be.)

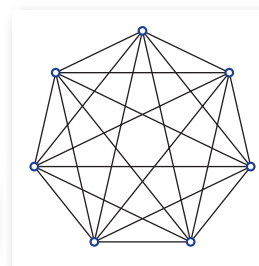
Két gráf **izomorf**, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy az egyik gráf bármely két kiválasztott pontja között pontosan akkor van él, ha a másik gráf két megfelelő pontját is összekötöttük. (Az izomorf gráfokat általában nem tekintjük különbözőeknek.)



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Ismernünk kell **két fontos tételt**, a teljes gráfok éleinek számára vonatkozó összefüggést és a fokszámtételt.

A **teljes gráf** olyan egyszerű gráf, amelyben minden csúcsot minden csúccsal összeköttöttünk.



Az n pontú **teljes gráfban** az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.

A gráf egy-egy pontjának **foka (fokszáma)** a pontból kiinduló élek száma.

Bármely gráfban a **fokszámok összege páros szám**, az élek számának a kétszerese.

Ez utóbbi tétel nemcsak az egyszerű gráfokra igaz.

A feladatmegoldás során többféle gráfmodellt is alkalmazhatunk. Felvehetünk **irányított gráfokat** (ekkor az éleket irányítjuk), **súlyozott gráfokat** (az élekhez számokat rendelünk), vizsgálhatjuk a **síkba rajzolható gráfokat**, és így tovább. Általában a feladat típusa dönti el, hogy mikor melyik modellt célszerű alkalmaznunk.

5. példa

Az alábbi táblázatban az A, B, C, D, E, F csapatok körmérkőzéses versenyének aktuális állását adtuk meg. Mérkőzésenként a nyertes csapat 3, a vesztes 0 pontot kap, míg döntetlen esetén 1-1 pontot kapnak a csapatok. Például a B sor D oszlopában lévő 3-as azt jelenti, hogy B legyőzte D -t.

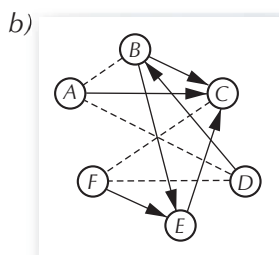
	A	B	C	D	E	F
A	–	1	0	1		
B	1	–	0	3	0	
C	3	3	–		3	1
D	1	0		–		1
E		3	0		–	3
F			1	1	0	–

- Melyik csapatnak hány pontja van, és hány mérkőzést játszottak eddig?
- Ábrázoljuk irányított gráffal az eddigi mérkőzéseket! (Az irányított él a győztes felé mutasson, a döntetlent jelöljük pl. szaggatott éllel.)*
- Melyik csapat nyerheti meg a versenyt, ha az élen nem lehet azonos pontszámmal holtverseny?
- A hátralévő mérkőzések eredményét tekintve hányféleképpen fejeződhet be a verseny?

Megoldás

- a) A pontszámok: A : 2 pont, B : 4 pont, C : 10 pont, D : 2 pont, E : 6 pont, F : 2 pont. Eddig tíz mérkőzést játszottak.

* Így vegyes gráfot kapunk, mert az irányított gráfban minden élnek van irányítása.



- c) C-n kívül még E is nyerhet, ha az utolsó két mérkőzését megnyeri (ekkor 12 pontja lesz), és C utolsó mérkőzésén veszít D ellen.
- d) Összesen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ mérkőzést játszanak a csapatok, eddig 10 találkozó zajlott le. A hátralévő 5 mérkőzés mindegyike 3-féle végződésű lehet (a két csapat valamelyike nyer, illetve döntetlen), tehát $3^5 = 243$ -féle befejezése lehet a versenynek.

6. példa

Igazoljuk, hogy egy 9 pontú, 14 élű gráfban biztosan lesz olyan pont, amelynek legalább 4 a fokszáma!

Megoldás

A fokszámtételt és a skatulyaelvet alkalmazzuk. A 14 élnek 28 élvége van, a pontok fokszámainak összege tehát 28. A skatulyaelv miatt ekkor biztosan lesz egy (legalább) negyedfokú pont; ha ugyanis minden pont legfeljebb harmadfokú lenne, akkor a foksámok összege legfeljebb csak $9 \cdot 3 = 27$ lehetne.

7. példa

- a) Hány 5 pontú, 3 élű egyszerű gráf van?
- b) Hány 12 pontú, jelölt csúcsú egyszerű gráf van?

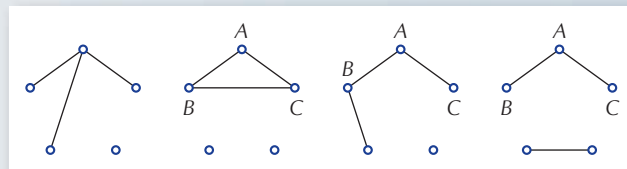
Megoldás

a) Kiindulhatnak az élek egyetlen pontból (ekkor ez harmadfokú), ilyen gráf 1 darab van.

Ha a gráfban nincs harmadfokú pont, akkor tekintsünk egy másodfokú pontot, például A -t (ábra). Ebből két él indul ki, B -be és C -be. A harmadik élt háromféleképpen vehetjük fel: összeköthetjük B -t és C -t; csatlakoztathatunk például B -ből; vagy összeköthetjük a maradék két csúcsot. 3 gráfot kaptunk.

Lehetséges, hogy a gráfban nincs másodfokú pont? Nem; a 3 élnek $3 \cdot 2 = 6$ végpontja van, tehát a skatulyaelv miatt nem lehet mind az öt csúcs foka 2-nél kisebb.

Összesen tehát 4 megfelelő gráf van.



b) A jelölt csúcsú gráfban megkülönböztetjük a csúcsokat (számozással vagy betűzéssel), tehát nem mindegy, hogy egy-egy élt melyik két csúcs között húzunk be.

A 12 pontú teljes gráfnak $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ éle lehet. Ezek mindegyike különböző (mert más-más jelölt csúcsot köt össze), és mindegyiket vagy behúzzuk, vagy nem. A kétféle lehetőség miatt a keresett gráfok száma 2^{66} , beszámítva az üres gráfot is.

Egy kis számolás

Mekkora szám ez a 2^{66} ? A számot logaritmálva megkaphatjuk a nagyságrendjét. $\lg 2^{66} = 66 \cdot \lg 2 \approx 19,87$, tehát $2^{66} \approx 10^{19,87}$, a szám 20-jegyű. Ha mondjuk minden gráfot le szeretnénk rajzolni, és átlagosan 10 másodpercet számunk erre a műveletre (vannak egyszerűbbek és bonyolultabbak is), akkor mennyi ideig tartana a gráfok ábrázolása?

Az eredmény kis közelítéssel $10^{20,87}$ másodperc, amit átszámolhatunk nagyobb egységekre:

$$10^{20,87} \text{ másodperc} \approx \frac{10^{20,87}}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 2,35 \cdot 10^{13} \text{ év.}$$

Kiolvasva több mint húszbillió évig tartana a munkánk.

Egyébként a világegyetem becsült (és számított) életkora kb. 10^{18} sec; azaz a gráfok lerajzolásához több mint száz világegyetem-életkornyi időre lenne szükség.

Ez az egyszerű számolás is mutatja, hogy a matematikában – már egyszerű feladatok esetében is – milyen könnyen botlunk ilyen irdatlan nagy számokba.

MATEMATIKAI LOGIKA

A matematikai logika az állítások és következtetések igazságtartalmát vizsgálja. A korábbi években és idén is elemeztünk állításokat, foglalkoztunk az állítások megfordításával, tagadásával. A vizsgálatokban a **logikai műveletek** segítettek minket. Egyváltozós logikai művelet a tagadás, fontosabb kétváltozós művelet a logikai „és”, a (megengedő) „vagy”, a „ha ..., akkor ...” és az „akkor és csak akkor”. Gyakran használjuk még a „kizáró vagy” és a „sem ..., sem ...” műveleteket is.

A matematikában fontos szerepet játszanak azok a „ha A ..., akkor B ...” típusú állítások, amelyeknek a megfordítása is igaz. (A megfordítás „ha B ..., akkor A ...” alakú.) Ekkor az A -t és a B -t **ekvivalens állításoknak** nevezzük.

8. példa

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Fogalmazzuk meg az e) és az f) feladatbeli állítás megfordítását, és ezekről is döntsük el, hogy igazak vagy hamisak!

- Konvex sokszög belső szögeinek összege mindig 180° többszöröse.
- $x^4 < x^5$ minden pozitív x esetében.
- Van olyan halmaz, amelynek pontosan 8 részhalmaza van.
- A koordinátasíkon van olyan kör, amely átmegy az $A(0; 0)$, $B(1; 1)$ és $C(2; 2)$ pontokon.
- Legyen n pozitív egész szám. Ha $3|n$ és $4|n$, akkor $12|n$.
- Ha $a < b$ és $c < d$, akkor $a - d < b - c$.

Megoldás

- Az állítás igaz; konvex n -szög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Nem igaz, $0 < x < 1$ esetében a relációs jel megfordul. (Például $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} > \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.)
- Igaz, ha a halmaz 3 elemű, például $\{a, b, c\}$.
- Hamis. Az A , B , C pontok egy egyenesre esnek, és egy körnek és egy egyenesnek legfeljebb két közös pontja lehet.
- Az állítás és a megfordítása („Ha $12|n$, akkor $3|n$ és $4|n$.”) is igaz, mert 3 és 4 relatív prímek.

- f) Először az állítást ekvivalens módon átfogalmazzuk: $a - d < b - c \Leftrightarrow a + c < b + d$. A feladat tehát arra kérdez rá, hogy egyenlőtlenségek összeadásakor megmarad-e a relációs jel – erről pedig tudjuk, hogy igaz.

Az állítás megfordítása: Ha $a - d < b - c$, akkor $a < b$ és $c < d$. (Vagy az ezzel ekvivalens „Ha $a + c < b + d$, akkor $a < b$ és $c < d$.”) Ez a megfordítás viszont nem igaz, egy ellenpélda $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ és $d = 5$.

FELADATOK

1.

Az ókori kockajátékokat általában a birka bokacsontjainból készült négy csontkockával játszották. A kb. nyolcas alakú csontocskák a négy hosszabbik oldalukon tudtak megállni, a dobásértékeket rendre 1, 3, 4, 6-tal jelölték. Dobjuk fel a négy kockát!

K1 a) Összesen hányféle kimenetele lehet a négy kocka dobásának?

Hány esetben fordulhat elő, hogy

K1 b) minden kockaérték egyenlő;

K1 c) csupa különböző értéket kapunk;

K1 d) a harmadik kockával páros számot dobunk;

K2 e) a dobott számok között van 1-es;

K2 f) a dobott számok között pontosan három 1-es van;

K1 g) minden dobás 1-es vagy 3-as;

K2 h) a dobott számok között van 1-es vagy 3-as?



2. K2

Fogalmazzunk meg egy olyan feladatot, amelynek eredménye $\binom{8}{3} \cdot \binom{6}{2}!$

3. K2

Adottak az $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ és $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ halmazok.

a) Hány olyan f függvény van, amelynek értelmezési tartománya A , képhalmaza B ?

b) És ezek közül hány függvény kölcsönösen egyértelmű?

c) És hány szigorúan monoton növekvő?

4.

Hány olyan ötöslottó-húzás lehetséges, amelyben

K1 a) a legkisebb szám 50;

K1 b) a húzott számok a 22 és 74 közé esnek (a határokat is beleértve);

K2 c) a nagyság szerint középső szám 33;

K1 d) a legkisebb és a legnagyobb szám különbsége 4;

K2 e) a legkisebb és a legnagyobb szám különbsége 10?

5. K2

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Fogalmazzuk meg a d), e) és f) állítások megfordítását, és ezekről is döntsük el, hogy igazak vagy hamisak!

a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (A , B , C állítások.)

b) Van olyan prímszám, ami osztható 2-vel vagy 3-mal.

c) A merőleges szárú szögek egyenlők.

d) Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.

e) Ha $a < b$, akkor $|a| < |b|$.

f) Ha egy háromszögnek van 90° -os külső szöge, akkor a háromszög derékszögű.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

6. K2

Az $A = 8$ és $D = 32\,768$ számok közé iktassunk be két számot, B -t és C -t úgy, hogy A -nak többszöröse legyen B , B -nek C és C -nek D ! Hány megoldás van?

7. K2

Hét játékos egyfordulós, körmérkőzéses sakkversenyen vesz részt. Hány pontja volt a játékosoknak a mérkőzés végén, ha pontszámaik számtani sorozatot alkottak? (A nyertes 1 pontot kap mérkőzésenként, döntetlen esetében $1/2 - 1/2$ pont jár.)

8.

A koordináta-rendszerben bolyongó hangya az $A(0; 0)$ pontból indul, és a $D(10; 10)$ pontba érkezik. Minden lépésben egy egységnyit halad vízszintes vagy függőleges irányban, és minden lépésben közeledik céljához (összesen tehát 20 lépést tesz meg.)

K1 a) Hányféleképpen juthat el A -ból D -be?

K2 b) Hányféleképpen juthat el A -ból D -be, ha közben a $B(3; 4)$ ponton nem halad át?

E1 c) Hányféleképpen juthat el A -ból D -be, ha közben a $B(3; 4)$ és $C(6; 7)$ pontokon nem halad át?

9. K2

Egy ismerkedési esten minden meghívottnak legalább két ismerőse volt a társaságban. Igaz-e, hogy a gráfmodellben (a pontok felelnek meg a vendégeknek, az élek az ismeretségeknek) van zárt töröttvonal?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 50–178, 346–394.

SZÁMELMÉLET

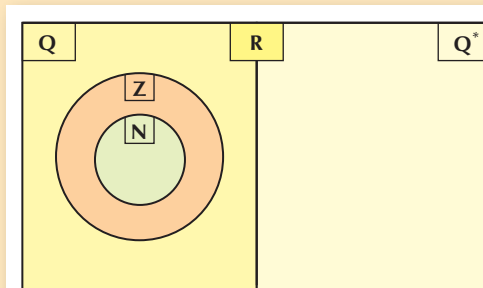
Ismétlés

11/II.

4. SZÁMHALMAZOK, MŰVELETEK ÉS TULAJDONSÁGAIK

Középiskolai tanulmányaink során bevezettünk négy alapvető számhalmazt:

- természetes számok halmazát, jele: $\mathbf{N}$;
 - egész számok halmazát, jele: $\mathbf{Z}$;
 - racionális számok halmazát, jele: $\mathbf{Q}$;
 - valós számok halmazát, jele: $\mathbf{R}$.
- Ezekre teljesül: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.



A számhalmazokon értelmeztünk alapl műveleteket:

- összeadást;
- kivonást;
- szorzást;
- osztást.

Az összeadás és a szorzás nem vezet ki a természetes számok halmazából (a műveleteket elvégezve az eredmény is természetes szám), míg a kivonás elvégezhetősége érdekében bővítettük a számhalmazt az egész számok halmazára. Így a kivonás már értelmezhető (azaz az egész számok halmaza zárt a kivonás műveletére).

Az osztás művelete miatt – amely kivezet az egész számok halmazából – vezettük be a racionális számok halmazát. Ezen a halmazon az alapl műveletek értelmezhetők.

A négyzetgyök, majd az n -edik gyök fogalmának bevezetésével, valamint a π szám és a végtelen, nem szakaszos tizedes törtek megismerésével ismét bővült a tanult számok halmaza, ezúttal az irracionális számok halmazával. Ennek jele: $\mathbf{Q^*}$ (ld. az ábrán). Így jutottunk el a valós számok halmazához.

Megjegyzés

Negatív szám négyzetgyökének értelmezésével a számkör tovább bővíthető, mégpedig a komplex számok halmazának bevezetésével, de ez már túlmutat a középiskolai követelményeken.

Vizsgáltuk a legfontosabb műveleti tulajdonságokat. Ha megfigyeléseinket a számhalmaz minden elemére igazoltuk, akkor állításainkat gyakran betűkkel, változókkal fogalmaztuk meg.

Az összeadás és a szorzás **kommutatív művelet**, mivel
 $a + b = b + a$, és $a \cdot b = b \cdot a$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Az összeadás és a szorzás **asszociatív művelet**, mivel

$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$, és $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

A szorzás az összeadásra és kivonásra nézve **disztributív művelet**, azaz
 $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$; $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Ismerjük a műveletvégzések sorrendjét befolyásoló tényezőket és jeleket, amelyeket az alábbi példán mutatunk be.

1. példa

Tegyük ki zárójeleket a műveletsorba, amelyek megváltoztatják, illetve nem befolyásolják az eredményt: $2 + 2 \cdot 2 - 2 : 2$!

Megoldás

Zárójel használata nélkül:

$$2 + 2 \cdot 2 - 2 : 2 = 5.$$

Nem változik az eredmény például:

$$2 + (2 \cdot 2 - 2 : 2) = 5;$$

$$2 + (2 \cdot 2) - 2 : 2 = 5;$$

$$2 + 2 \cdot 2 - (2 : 2) = 5.$$

Pihenő

A Sierpiński-család új lakóhelyre költözött. Felesége a nem túl gyakorlatias professzorra bízta a tíz bőröndjüket, szinte minden mást magára vállalt. A költözési folyamat azonban megszakadt, mert az induláskor a professzor csak kilenc bőröndöt talált. Pedig többször is megszámlolta őket: 0, 1, 2, ..., 9.

(Wacław Sierpiński (1882–1969) lengyel matematikus)

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Változik az eredmény például:

$$(2 + 2) \cdot 2 - 2 : 2 = 7;$$

$$(2 + 2 \cdot 2 - 2) : 2 = 2;$$

$$2 + 2 \cdot (2 - 2 : 2) = 4.$$

2. példa

Milyen egész számot írhatunk a betűk helyére, hogy a kifejezés értéke is egész szám legyen?

$$\frac{12}{a}; \quad \frac{b}{6}; \quad \sqrt{c}; \quad \sqrt[n]{d} \quad (n \in \mathbf{N}, n \geq 2).$$

Megoldás

$$\frac{12}{a} \in \mathbf{Z}, \text{ ha } a \text{ osztója } 12\text{-nek, } a = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12.$$

$$\frac{b}{6} \in \mathbf{Z}, \text{ ha } b \text{ többszöröse } 6\text{-nak, } b = 0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \dots \quad b = 6k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\sqrt{c} \in \mathbf{Z}, \text{ ha } c \text{ négyzetszám, } c = 0, 1, 4, 9, \dots$$

$$\sqrt[n]{d} \in \mathbf{Z} \quad (n \in \mathbf{N}, n \geq 2), \text{ ha } d \geq 0, \text{ és } n\text{-edik hatvány. Például } d = 0, 1, 2^n, 3^n, \dots$$

3. példa

Végezzük el a műveleteket! Melyik az a legszűkebb számhalmaz (a lecke elején felsoroltak közül), amelynek eleme az eredmény?

$$a) 5 - (-3) \cdot 4 - (20 - 6) : (-2);$$

$$c) 4,2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) : (6 : 0,2).$$

$$b) 2 - \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}};$$

Megoldás

$$a) 5 - (-3) \cdot 4 - (20 - 6) : (-2) = 5 - (-12) - 14 : (-2) = 17 - (-7) = 24 \in \mathbf{N}.$$

Az eredmény a természetes számok halmazának eleme.

$$b) 2 - \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{3}{2} \cdot 2 = 2 - 3 = -1 \in \mathbf{Z}.$$

Az eredmény az egész számok halmazának eleme.

$$c) 4,2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) : (6 : 0,2) = 4,2 - \left(-\frac{1}{15}\right) : 30 = 4,2 - \left(-\frac{1}{450}\right) = \frac{42}{10} + \frac{1}{450} = \frac{1891}{450} = 4\frac{91}{450} = 4,20\bar{2} \in \mathbf{Q}.$$

Az eredmény a racionális számok halmazának eleme.

FELADATOK

1. K1

Végezzük el a műveleteket!

$$a) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}};$$

$$b) 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}.$$

2. K2

Megváltoztatható-e bizonyos számú összeadásjel kivonásjelre úgy, hogy igaz állítást kapjunk?

$$a) 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2009 + 2010 + 2011 = 2011;$$

$$b) 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2009 + 2011 + 2011 + 2012 = 2012.$$

3. K1

Melyik szám nagyobb?

$$\frac{2}{3^{17}} + \frac{4}{3^{18}} - \frac{4}{3^{19}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{3^{16}}?$$

4. K2

Két természetes szám összege 58 608. Az egyik szám végén 0 áll, ha ezt elhagyjuk a szám végéről, akkor a másik számot kapjuk. Melyik ez a két szám?

5. K2

„Gondoltam egy számot, levontam belőle tízet, majd amit kaptam, osztottam tízzel. Az eredményt csökkentettem nyolccal, és a kapott szám tizedéhez hozzáadtam egyet, majd az eredményt megszoroztam öttel, így 1000-et kaptam” – meséli Péter. Melyik számra gondolt Péter?

6. K2

Egy ifjú matematikus találkozik egy csinos lánnyal, és – a saját módszerével – el is kezdi rögtön az udvarlást.

– Melyik a kedvenc egyjegyű számod? – kérdezi.

– A 6-os! – válaszolja a lány.

– Csodálatos a matematikai ízlésed! Szorozd csak meg a 6-osodat 9-cel! Jó, és most szorozd meg a kapott számot 12 345 679-cel is! Mi az eredmény?

Hosszas számolás után a lány meglepetten vette észre, hogy a végeredmény olyan szám, amelyben minden számjegy az ő kedvence.

Mi volt a matematikus trükkje? Hogyan „működik” ez a matematikai bűvészmutatvány?

5. SZÁMELMÉLETI ALAPFOGALMAK, OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

A számelméleti (oszthatósági) összefüggéseket a természetes számok halmazán vizsgáltuk, ezért ha külön nem jelöljük, akkor a feladatokban szereplő betűk a természetes számok halmazának tetszőleges elemét jelentik.

Megjegyzés

A vizsgálatokat kiterjeszthetjük az egész számok halmazára is.

A maradékos osztás:

Bármely a és b pozitív egész számhoz található olyan q és r nemnegatív egész szám, amelyekre $a = bq + r$, ahol $0 \leq r < b$. Az r számot **maradéknak** nevezzük.

Az oszthatóság fogalma:

Tekintsük a maradékos osztáskor azt az esetet, amikor a maradék, vagyis $r = 0$.

Ekkor az a és b egész számhoz található olyan q egész szám, melyekre $b = a \cdot q$.

Ezt rövidebben így jelöljük: $a|b$, és így olvassuk: a osztója b -nek (vagy b többszöröse a -nak).

Az oszthatóság tulajdonságai:

$a|a$. (Az oszthatóság reflexív tulajdonsága.)

$1|a$, és $a|0$ minden a -ra.

Ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a = b$. (Az oszthatóság antiszimmetrikus tulajdonsága.)

Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$. (Az oszthatóság tranzitív tulajdonsága.)

Ha $a|b$ és $a \nmid c$, akkor $a \nmid (b \pm c)$.

Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|(b \pm c)$.

Ha $a|(b + c)$ és $a|b$, akkor $a|c$.

Ha $a|b$, akkor $a|bc$.

Ha $a|b$ és $c|b$, valamint a és b relatív prímek, akkor $a|c$.

Leggyakrabban használt oszthatósági szabályok:

- A tízes számrendszerbeli k egész szám akkor osztható 10^n -nel, 2^n -nel, 5^n -nel, ha utolsó n számjegyből képezett szám osztható 10^n -nel, 2^n -nel, 5^n -nel.
- A tízes számrendszerbeli k egész szám akkor osztható 9-cel, 3-mal, ha k számjegyeinek összege osztható 9-cel, 3-mal.
- A tízes számrendszerbeli k egész szám akkor osztható 11-gyel, ha számjegyeinek váltakozó előjelű összege osztható 11-gyel. (Nem érettségi-tananyag.)

(A megismert oszthatósági szabályok nemcsak annak eldöntésére hasznosak, hogy egy szám osztója-e egy másik számnak. Ha nem teljesül az oszthatósági feltétel, akkor a maradékok is megállapíthatók.)

PRÍMSZÁM, ÖSSZETETT SZÁM

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztója van, **prímszámoknak** nevezzük.

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek legalább három pozitív osztója van, **összetett számoknak** nevezzük.

Két fontos tétel az oszthatósági feladatokhoz:

Nincs legnagyobb prímszám, azaz **végtelen sok prímszám van.**

A számelmélet alaptétele:

Bármely 1-nél nagyobb egész szám a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható prímtényezők szorzataként. (A prímszámok felírását „egytenyezős szorzatnak” tekintjük.)

A prímtényezős felbontás segítségével meghatározható két vagy több szám legkisebb közös többszöröse, illetve legnagyobb közös osztója.

Legkisebb közös többszörös:

Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse az a szám, amely többszöröse az adott számoknak, és minden más közös többszörösnek osztója. Előállítható a következő módon: a számok prímfelbontása után, minden prímtényezőtől az előforduló legnagyobb hatványúakat szorozzuk össze.

(Az eljárás lehetőséget ad akár több szám legkisebb közös többszörösének meghatározására is.)

Legnagyobb közös osztó:

Két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztója az a pozitív egész szám, amely osztója az adott számoknak, és minden más közös osztónak többszöröse. Előállítható a következő módon: a számok prímfelbontása után a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb közös hatványon össze-szorozzuk.

(Az eljárás lehetőséget ad akár több szám legnagyobb közös osztójának meghatározására is.)

Ha két vagy több szám legnagyobb közös osztója 1, akkor a számokat **relatív prímeknek** nevezzük.

1. példa

Igazak-e az alábbi állítások?

- a) Ha $7|(a + b)$, akkor $7|a$ és $7|b$.
- b) Ha $7|(a + b)$, akkor $7|a$ vagy $7|b$.
- c) Ha $7|(a + b)$, akkor $7 \nmid a$ és $7 \nmid b$.
- d) Ha $7|ab$, akkor $7|a$ és $7|b$.
- e) Ha $7|ab$, akkor $7|a$ vagy $7|b$.

Megoldás

- a) Hamis, például $a = 3$ és $b = 4$.
- b) Hamis, például $a = 3$ és $b = 4$.
- c) Hamis, például $a = 7$ és $b = 14$.
- d) Hamis, például $a = 7$ és $b = 3$.
- e) Igaz, mivel a 7 prímszám, így legalább az egyik számnak osztója.

2. példa

Számológép használata nélkül döntsük el, hogy a szám négyzetszám-e!

- a) 88 200; b) 66 566; c) 107 343; d) 57 600.

Rejtvény

A $P(n) = n^2 + n + 41$ polinomra $P(0) = 41$, $P(1) = 43$, $P(2) = 47$, $P(3) = 53$, $P(4) = 61$ rendre prímszámok. Lehetséges-e, hogy a polinom minden természetes számra prímszámmértékű? A rejtvény megoldása a 198. oldalon található.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Megoldás

- a) Prímfelbontással: $88\,200 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Nem négyzetszám, mivel 2 nem páros hatványon szerepel a prímfelbontásban.
- b) Nem négyzetszám, mivel 3-mal osztva 2 a maradék, és a négyzetszámok 3-mal osztva 0-t vagy 1-et adhatnak maradékul.
 $((3k)^2 = 9k^2, 0 \text{ a maradék. } (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1, 1 \text{ a maradék.})$
- c) Nem, mert a négyzetszámok nem végződhetnek 3-ra, csak 0-ra, 1-re, 4-re, 5-re, 6-ra vagy 9-re.
- d) Igen, a prímfelbontás alapján: $57\,600 = (2^4 \cdot 3 \cdot 5)^2$.

3. példa

Mit írhatunk a és b helyére, hogy az alábbi állítás igaz legyen? Hány megoldás van?
 $6 \mid \overline{2ab}$, ahol $\overline{2ab}$ háromjegyű, tízes számrendszerbeli egész számot jelöl.

Megoldás

Első megoldás

$6 \mid \overline{2ab}$, ha $2 \mid \overline{2ab}$ és $3 \mid \overline{2ab}$, mivel 2 és 3 relatív prímek.

Az a és b egyjegyű számok, b páros, ezért véges sok eset megvizsgálásával felírható az összes eset.

b	0	0	0	2	2	2	4	4	4	4	6	6	6	8	8	8
a	1	4	7	2	5	8	0	3	6	9	1	4	7	2	5	8

Tehát 16 megoldás létezik.

Második megoldás

A feltétel teljesül, ha $0 \leq \overline{ab} \leq 99$, b páros, és 3-mal osztva 1 a maradék. Minden 6. szám ilyen tulajdonságú; a legnagyobb közülük a 96. Mivel $96 : 6 = 16$, így 16 megfelelő szám van.

4. példa

Egy kerékpár nagyobbik fogaskerekén 35 fog, a kisebbiken 15 fog van. Hányszor kell a pedált körbeforgatni, hogy mindkét fogaskerék újra a kiindulási helyzetbe kerüljön vissza?



Megoldás

A fogaskereknek akkor kerülnek újra a kiindulási helyzetbe, ha egyszer vagy többször teljesen körbefordulnak, azaz a lánc valahányszor 35, illetve valahányszor 15 fogat halad az első, illetve hátsó fogaskereken. Így olyan számot kell keresnünk, amely többszöröse 35-nek és 15-nek is. $\text{Lkkt}[35, 15] = 105$, ekkor a pedál háromszor fordul körbe. Tehát a pedál körbeforgatására megfelel minden 3-mal osztható szám.

5. példa

Mely pozitív egész számok teszik igazzá az állításokat?

a) $\text{Lkkt}[n; 24] = 72$.

b) $\text{Lnko}(k; 72) = 24$.

Megoldás

a) $24 = 2^3 \cdot 3$ és $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Mivel 72 osztható 3^2 -nal, de 24 nem, így tehát $3^2 | n$.

Így n lehetséges értékei: 9, 18, 36, 72.

b) $24 = 2^3 \cdot 3$ és $72 = 2^3 \cdot 3^2$, tehát $24 | k$.

Így k minden olyan pozitív egész szám lehet, amely nem többszöröse 3^2 -nak, és osztható 24-gyel.

FELADATOK

1. K1

Milyen számjegyet írhatunk a betűk helyére, hogy igaz állítást kapjunk?

a) $6|14652A$;

c) $25|4397C0$;

E1 b) $11|108B036$;

d) $36|63369D$.

2. K2

Melyik az a legkisebb hatjegyű pozitív egész szám, amely 2022-vel osztva 2021-et ad maradékul?

3. K2

Három pozitív egész szám szorzata 5880. Ha az egyik számot 15-tel, a másik számot 21-gyel, a harmadikat pedig 5-tel megszoroznánk, akkor ugyanazt a számot kapnánk. Melyik ez a három szám?

4. K2

Adjuk meg az összes háromjegyű prímszámot, amely számjegyeinek szorzata 10!

5. K2

Mely n egész szám esetében lehet a $\frac{3n+11}{n+2}$ tört értéke is egész szám?

6. K2

Egy kocka különböző csúcsaiba a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat szeretnénk írni úgy, hogy a közös csúcsú éleknek különböző végeihez írt számok összege mindig hárommal osztható legyen. Elérhető-e célunk?

7. K2

Két természetes szám legnagyobb közös osztója 43-mal kisebb, mint a legkisebb közös többszörösük. Mi lehet a két szám?

6. SZÁMELMÉLETI FELADATOK

1. példa

Melyik számnak van több pozitív osztója: a 60-nak vagy a 182-nek?

Megoldás

Az osztók megkereséséhez alkalmazhatjuk az „osztópárok” módszerét.

Ennek lényege: ha $a|b$, akkor $\frac{b}{a} | b$ ($a \neq 0$). Ekkor a és $\frac{b}{a}$ ún. társosztók.

60 osztói: 1 és 60; 2 és 30; 3 és 20; 4 és 15; 5 és 12; 6 és 10, tehát 12 osztója van.

182 osztói: 1 és 182; 2 és 91; 7 és 26; 13 és 14, tehát 8 osztója van.

A 60-nak van több osztója.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

2. példa

Hányféleképpen tudja Peti 80 ólomkatonáját téglalap alakú alakzatba felsorakoztatni, ha azt szeretné, hogy minden sorban és minden oszlopban legyen legalább 2 katona?

Megoldás

Nyilván 80 osztópárjait keressük, ahol mindkét tényező legalább 2.

Az alábbi táblázat szemlélteti a megoldásokat:

Soroként	2	40	4	20	8	10	16	5
Oszloponként	40	2	20	4	10	8	5	16

Más megoldás nincs, mert $80 = 2^4 \cdot 5$, az osztók száma 10. A megoldások száma 8.



3. példa

Milyen k egész szám esetében lesz a $\frac{k^2 + 4 + 5k}{k}$ tört értéke is egész szám?

Megoldás

$$\frac{k^2 + 4 + 5k}{k} = \frac{k^2}{k} + \frac{4}{k} + \frac{5k}{k} = k + 5 + \frac{4}{k}, \text{ ahol } k \neq 0.$$

Az utolsó tagból látható, hogy $k|4$ esetében teljesül a feltétel, így $k = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

4. példa

Igaz-e, hogy ha a pozitív egész számokat összeadjuk 1-től 1000-ig, akkor az összeg osztható 11-gyel?

Megoldás

Párosítsuk a számokat: $1 + 1000; 2 + 999; 3 + 998; \dots; 500 + 501$. Minden párban az összeg 1001, $1001 = 91 \cdot 11$. Mivel az összeg minden tagja osztható 11-gyel, így az összeg is, vagyis az állítás igaz.

5. példa

Létezik-e olyan egész oldalhosszúságú téglalap, amelyre a terület és a kerület mérőszáma megegyezik?

Megoldás

A feltétel szerint keressük az a és b egész számokat, amelyekre $ab = 2(a + b)$. Rendezzük az egyenlőséget:

$$ab = 2a + 2b,$$

$$ab - 2a - 2b = 0,$$

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4,$$

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

A bal oldalon két egész szám szorzata áll, tehát $(a-2)|4$ és $(b-2)|4$, vagyis $a-2=4$ és $b-2=1$, vagy $b-2=4$ és $a-2=1$, vagy $a-2=b-2=2$.

Két ilyen téglalap van. Az egyik oldalai 6 egység és 3 egység hosszúak; míg a másik minden oldala 4 egység (azaz ez egy négyzet).

6. példa

Számbajnok Béla elfelejtette afrikai barátjának hatjegyű telefonszámát. Arra emlékszik, hogy az első számjegy 7, az ötödik 2, és a szám páratlan. Arra is emlékszik, hogy a telefonszám 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Mi lehet a barát telefonszáma?

Megoldás

A felsorolt számok legkisebb közös többszöröse $4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 = 36\,036$. Ennek 20-szorosa már 7-tel kezdődik, ötödik számjegye 2; $36\,036 \cdot 20 = 720\,720$.

Mivel a szám páratlan, és a maradékok megegyeznek mindegyik tényezőre, így a maradék csak 1 lehet. Az elfelejtett telefonszám: 720–721.

A különböző **számrendszerek** közötti konverziót (egyik számrendszerbeli szám átírását a másik számrendszerbe) mindig megtehetjük a tízes számrendszer közbeiktatásával. Például $4055_6 = 4 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^2 + 5 = 899_{10}$; és 899 a 3-as számrendszerben 1020022_3 . (Ellenőrizzük!)

Ugyanezt a közbeiktatást megtehetjük akkor is, ha a tízes számrendszertől különböző számokkal végzünk műveleteket, de ügyesebben is eljárhatunk. Ugyanis a tízes számrendszerbeli számtani alapműveletek algoritmusai más számrendszerekben is „működik”, csak a helyi értékek közötti átvitelre kell figyelni, ez a számrendszer alapszámától függ. Például: az $5_7 + 4_7$ összeg 12_7 alakú, hiszen $9 = 1 \cdot 7 + 2$; vagy $7_8 + 6_8 + 5_8 = 22_8$, mert $18 = 2 \cdot 8 + 2$.

A kivonásnál a helyzet hasonló.

7. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $44055_6 + 5314_6$;

b) $1020022_3 - 201102_3$.

Megoldás

a) A 6-os számrendszerben dolgozunk:

	4	4	0	5	5
+		5	3	1	4
	5	3	4	1	3

$5 + 4 = 9 = 3 + 1 \cdot 6$, azaz 1 az átvitel; $5 + 1 + 1 = 7 = 1 + 1 \cdot 6$, 1 az átvitel, és így tovább.

b) A 3-as számrendszerben dolgozunk:

	1	0	2	0	0	2	2
–		2	0	1	1	0	2
		1	1	1	2	2	0

(Ellenőrzés: $44055_6 + 5314_6 = 6083 + 1198 = 7281 = 53413_6$;
 $1020022_3 - 201102_3 = 899 - 524 = 375 = 111220_3$.)

FELADATOK

1. K2

Teofil a $37 \cdot \overline{ab}$ szorzat helyett a $37 \cdot \overline{ba}$ szorzatot számolta ki, így a szorzat az eredeténél 666-tal kisebb lett. Teofil arra is emlékezett, hogy a rosszul írt tényező egyik számjegye kétszerese a másiknak. Mi lett volna a helyes tényező?

2. K2

Márk egy papírlapot tetszőleges módon felosztott 19 részre, majd az egyik részt 43 részre, ezután a meglevő részek valamelyikét ismét 19 részre, és így változtatva végezte a felosztást. Bizonyos számú felosztás után megszámlolta a kapott részeket, állítása szerint 2013 darabot kapott. Helyesen számolt-e Márk?

3. K1

Igaz-e a következő állítás? „Minden 3-nál nagyobb prímszámnak valamelyik szomszédja osztható 6-tal.”

4. K2

Kifizethető-e 500 Ft pontosan 20 db pénzermével, ha az érmék 50 Ft-os, 20 Ft-os és 5 Ft-os értékűek?

5. K2

Az 1, 3, 4, 5 és még egy tetszőlegesen választható számjegy segítségével írjuk fel azt a legnagyobb ötjegyű számot, amelyik osztható 12-vel!

6. K2

Melyik az a kétjegyű szám, amely 6-szor akkora, mint a nála 7-tel nagyobb szám számjegyeinek összege?

A 193. oldalon található **rejtvény megoldása:**

Mivel $P(n) = n^2 + n + 41 = n(n + 1) + 41$, a polinom értéke biztosan nem prím, ha $n(n + 1)$ osztható 41-gyel. Ilyen értékek például $n = 40, 41, 81, 82$ stb.

Érdekesség viszont (számítógéppel igazolható), hogy $k = 40$ a **legkisebb** természetes szám, amelyre $P(k)$ összetett. Ezt az érdekes „prímszámpolinomot” (amely tehát a 0, 1, 2, ..., 39 helyeken mindig prímszámot vesz fel) *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus találta.

ALGEBRA

Ismétlés

9/III., VII.; 10/II., III.

7. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI EGÉSZ KITEVŐ ESETÉBEN

Az $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ szorzatot, ahol a tényezők száma k , felírhatjuk a^k hatvány alakban. Az a valós szám a hatvány alapja, a k pozitív egész szám a hatvány kitevője.

Ha a k pozitív egész szám, akkor: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ ($a \neq 0$).

Definíció szerint $a^0 = 1$, de a 0^0 hatványt nem értelmezzük.

Bizonyítottunk a hatványozással kapcsolatosan néhány alapvető azonosságot, ezek a következők:

1. Azonos alapú hatványok szorzata:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$$

2. Szorzat hatványozása:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbf{Z}.$$

3. Azonos alapú hatványok hányadosa:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$$

4. Tört (hányados) hatványozása:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbf{Z}.$$

5. Hatvány hatványozása:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbf{Z}.$$

AZ n -EDIK GYÖK ÉS AZONOSSÁGAI

A gyökvonás definíciója:

1. eset: Ha n pozitív páros szám, akkor az a nemnegatív szám n -edik gyökén azt a nemnegatív számot értjük, melynek n -edik hatványa a .

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ ahol } a \geq 0, \sqrt[n]{a} \geq 0, \text{ és } n \text{ pozitív páros szám.}$$

2. eset: Ha $n \geq 3$ pozitív páratlan szám, akkor az a valós szám n -edik gyökén azt a valós számot értjük, melynek n -edik hatványa a .

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ ahol } a \in \mathbf{R}, \text{ és } n > 2, \text{ páratlan szám.}$$

A definíció szerint: $(\sqrt[n]{x})^n = x, x \geq 0, n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Az n -dik gyökökkel való műveletek elvégzéséhez bizonyítottuk és használtuk az alábbi azonosságokat. (Alkalmazásuk nem középszintű tananyag.)

Az n -edik gyök azonosságai

1. Szorzat n -edik gyöke egyenlő a tényezők n -edik gyökének szorzatával.

$$\text{Ha } a \geq 0, b \geq 0 \text{ és } n \in \mathbf{N}, n \geq 2, \text{ akkor } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

2. Tört (hányados) n -edik gyöke egyenlő a számláló és a nevező n -edik gyökének hányadosával.

$$\text{Ha } a \geq 0, b > 0 \text{ és } n \in \mathbf{N}, n \geq 2, \text{ akkor } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

3. Egy pozitív szám n -edik gyökének egész kitevőjű hatványa egyenlő a szám ugyanazon kitevőjű hatványának n -edik gyökével.

$$\text{Ha } a > 0, n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \text{ és } k \in \mathbf{Z}, \text{ akkor } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

4. Az n -edik gyök k -edik gyökét felírhatjuk úgy is, hogy a gyök alatti kifejezés $(n \cdot k)$ -edik gyökét vesszük.

$$\text{Ha } a \geq 0, n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \text{ és } k \in \mathbf{N}, k \geq 2, \text{ akkor } \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}.$$

5. Hatvány alakú kifejezés gyökénél a hatványkitevő és a gyökkitevő egyszerűsíthető, bővíthető.
Ha $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, $m \in \mathbf{Z}$, akkor ${}^{n \cdot k}\sqrt{a^{m \cdot k}} = {}^n\sqrt{a^m}$.

A racionális kitevőjű hatvány definíciója

Egy tetszőleges pozitív x szám $\frac{m}{n}$ -edik hatványa az x szám m -edik hatványából vont n -edik gyök, azaz

$$x^{\frac{m}{n}} = {}^n\sqrt{x^m}, \text{ ahol } x > 0, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n \neq 0, n \neq 1.$$

Racionális kitevőjű hatványokra ugyanazok az azonosságok érvényesek, mint egész kitevő esetében.

A logaritmus definíciója

A b pozitív szám a alapú ($a > 0$, és $a \neq 1$) logaritmusának nevezzük azt a kitevőt, amelyre a -t emelve b -t kapunk.

A kitevő jelölése: $\log_a b$.

Tehát a definíció szerint: $a^{\log_a b} = b$.

Ha a logaritmus alapja 10, akkor rövidebb jelölést használunk: $\log_{10} b$ helyett $\lg b$ -t.

Megjegyzés

A matematikában fontos egy speciális alapú logaritmus használata, ez az e alapú logaritmus, melynek jelölése $\log_e x$ helyett $\ln x$.



Fotó logaritmikusan csökkenő méretű levelekről

A logaritmus azonosságai

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \text{ ha } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0;$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c, \text{ ha } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0;$$

$$\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b, \text{ ha } a > 0, a \neq 1, b > 0, k \in \mathbf{R};$$

$$\log_c b = \frac{\lg b}{\lg c}, \text{ ha } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1.$$

Emelt szint

Emelt szint

Emelt szint

1. példa

Számítsuk ki az alábbi hatványok, gyökök, logaritmusok értékét!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}; & (2 \cdot 2^3 \cdot 2^{-4})^{-1}; & \frac{0,2}{5^{-3}}; & \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot (-8)}{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot (-8)^{-2}}. \\ \text{b) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{18}; & \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4}; & \sqrt[3]{-\frac{64}{27}}; & \sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}}; & \sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{2}. \\ \text{c) } \log_2 \frac{1}{64}; & \lg 0,1; & \log_7 1; & \log_{\frac{1}{5}} 25; & \log_{16} \frac{1}{2}. \end{array}$$

Megoldás

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}; \\ (2 \cdot 2^3 \cdot 2^{-4})^{-1} &= (2^0)^{-1} = 1^{-1} = 1; \\ \frac{0,2}{5^{-3}} &= \frac{\frac{1}{5}}{5^{-3}} = \frac{5^{-1}}{5^{-3}} = 5^2 = 25; \\ \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot (-8)}{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot (-8)^{-2}} &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot (-8)^3}{2} = \frac{\frac{1}{64} \cdot (-512)}{2} = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} &= \sqrt{36} = 6; \\ \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^4} &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}; \\ \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} &= -\frac{4}{3}; \\ \sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}} &= \sqrt[5]{3^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{3}{2}; \\ \sqrt{2} \cdot {}^3\sqrt{2} &= \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5} \approx 1,78. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log_2 \frac{1}{64} &= -6, \text{ mert } 2^{-6} = \frac{1}{64}. \\ \lg 0,1 &= -1, \text{ mert } 10^{-1} = \frac{1}{10}. \\ \log_7 1 &= 0, \text{ mert } 7^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} 25 &= -2, \text{ mert } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25. \\ \log_{16} \frac{1}{2} &= -\frac{1}{4}, \text{ mert } 16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rejtvény

Az 500 darabos, A4-es papírcsomag vastagsága 5 cm. Ha egy A4-es papírlapot elég sokszor sikerülne ismételtén félbehajtani, akkor tetszőleges magasságú papíroszlopot előállíthatnánk. Vajon hányszor kellene félbehajtani egy papírlapot ahhoz, hogy elérjük például a 10 méteres magasságot? És hogy elérjük a Föld–Hold távolságot (386 000 km)?

Megoldás: 17-szer, illetve 42-szer.

2. példa

Döntsük el, melyik állítás hamis, melyik igaz!

$$\text{a) } \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3; \quad \text{b) } \log_2 16 = {}^4\sqrt{16}; \quad \text{c) } 5^4 + 5^{-2} = 5^2; \quad \text{d) } (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + \sqrt{6}.$$

Megoldás

$$\text{a) Igaz, mert } \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\frac{2}{7}}\right)^3 = \left(\frac{7}{2}\right)^3.$$

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

b) Hamis, mert $\log_2 16 = 4$ és $\sqrt[4]{16} = 2$.

c) Hamis, mert $5^4 + 5^{-2} = 625 + 0,04 \neq 25$.

d) Hamis, mert $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6} \neq 5 + \sqrt{6}$.

3. példa

Vigyünk be a tényezőt a gyökjel alá!

$$5 \cdot \sqrt{2}; \quad 2 \cdot \sqrt[3]{3}.$$

Megoldás

$$5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50};$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}.$$

FELADATOK

1. K1

Számológép használata nélkül határozzuk meg a tört legegyszerűbb alakját:

$$\frac{18 \cdot 225 \cdot 20^4 \cdot 18^2}{180^5}!$$

2.

Számítsuk ki az alábbi kifejezések pontos értékét!

K1 a) $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{12};$

K1 c) $\sqrt{\sqrt{41} + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{41} - \sqrt{12}};$

K1 b) $\sqrt{18} + \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{8};$

E1 d) $\left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{5} + 2}\right)^3.$

3. K1

Melyik szám nagyobb?

a) $\sqrt[4]{4}$ vagy $\sqrt[5]{5};$

b) $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{7}}$ vagy $(-2)\sqrt{7}?$

8. ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK, AZONOSSÁGOK

Feladatmegoldások során sokszor van szükségünk algebrai átalakításokra. Ezeket az átalakításokat egyszerűbben oldhatjuk meg, ha algebrai azonosságokat alkalmazunk.

Leggyakrabban használt **azonosságok**; a, b, c tetszőleges valós számot jelölnek:

Emelt szint

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(Felhívjuk a figyelmet arra, hogy nehezebb feladatok megoldásában az összegalakból szükséges a szorzatalakot megtalálni, ez pedig az azonosságok nagyon precíz ismeretét igényli. A felsorolt azonosságok segíthetnek számelméleti feladatok megoldásában is.)

1. példa

Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

$$5z(x+y) + y + x; \quad 7a^2 - 7b^2; \quad 4a^2 + 4a + 1; \quad c(a-b) + d(b-a).$$

Megoldás

$$\begin{aligned} 5z(x+y) + y + x &= 5z(x+y) + (x+y) = (x+y)(5z+1); & 7a^2 - 7b^2 &= 7(a-b)(a+b); \\ 4a^2 + 4a + 1 &= (2a+1)^2; & c(a-b) + d(b-a) &= c(a-b) - d(a-b) = (a-b)(c-d). \end{aligned}$$

2. példa

Végezzük el a műveleteket a változók lehetséges értékei esetében!

$$(\sqrt{12} - \sqrt{3})^2; \quad (\sqrt{3 + \sqrt{2}} - 1)^2; \quad \sqrt{a^2 - b^2} : \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Megoldás

$$\begin{aligned} (\sqrt{12} - \sqrt{3})^2 &= 12 - 2 \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} + 3 = 15 - 2 \cdot \sqrt{36} = 3; \\ (\sqrt{3 + \sqrt{2}} - 1)^2 &= 3 + \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{2}} + 1 = 4 + \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{2}}; \\ \sqrt{a^2 - b^2} : \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} &= \sqrt{(a+b)(a-b)} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{(a+b)(a-b)^2 \cdot \frac{1}{a+b}} = \\ &= \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|, \quad a \neq b, \quad a+b \neq 0. \end{aligned}$$

3. példa

Igaz-e, hogy két szomszédos páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal?

Megoldás

Legyenek a számok: $(4k+1)$ és $(4k+3)$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Ekkor

$$\begin{aligned} (4k+3)^2 - (4k+1)^2 &= 16k^2 + 24k + 9 - 16k^2 - 8k - 1 = 16k + 8 = 8(2k+1). \\ 8(2k+1) &\text{ osztható } 8\text{-cal, mivel } 2k+1 \text{ egész szám, tehát az állítás igaz.} \end{aligned}$$

4. példa

Mely valós számok esetében lesz az $x^3 - x$ kifejezés értéke 0?

Megoldás

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1).$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így x megfelelő értékei: 0, 1; -1.

5. példa

Az a mely valós értékei esetében lesz negatív a $3a^4 - 2a^2 + 1$ kifejezés?

Megoldás

Alakítsuk át a kifejezést: $3a^4 - 2a^2 + 1 = a^4 - 2a^2 + 1 + 2a^4 = (a^2 - 1)^2 + 2a^4$.

Mivel az összeg tagjai páros hatványon szerepelnek, ezért a kifejezés semmilyen valós szám esetén sem negatív.

FELADATOK

1. K1

Végezzük el a műveleteket!

a) $(5 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{18})$;

b) $(\sqrt{18} - \sqrt{2})^2$.

2. K2

Mennyi a következő műveletsor eredménye?

$$\frac{(121\ 212 - 1)^2 - (242\ 424 + 1)(242\ 424 - 1) + 3 \cdot 121\ 212^2}{121\ 211}.$$

3. K2

Igazoljuk, hogy minden k pozitív egész szám esetében a $(2k + 1)^2 + (2k + 2)^2 + (2k + 3)^2$ összeg felírható négy különböző, pozitív egész szám négyzetének összegeként!

4. K2

Igaz-e az alábbi egyenlőség minden a, b, c, d valós számra?

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

5. K1

Mutassuk meg, hogy ha egy 5-re végződő egész számot négyzetre emelünk, akkor négyzetének végződése 25!

6. K2

Figyeljük meg a következő szorzásokat! Általánosítsuk észrevételünket!

$$52 \cdot 58 = 100 \cdot 5 \cdot (5 + 1) + 2 \cdot 8 = 3016;$$

$$23 \cdot 27 = 100 \cdot 2 \cdot (2 + 1) + 3 \cdot 7 = 621;$$

$$61 \cdot 69 = 100 \cdot 6 \cdot (6 + 1) + 1 \cdot 9 = 4209;$$

$$44 \cdot 46 = 100 \cdot 4 \cdot (4 + 1) + 4 \cdot 6 = 2024!$$

7. K2

Számítsuk ki: $\sqrt{7 - \sqrt{48}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}}$!



Az algebra megalkotójának, Muhammad ibn Músza Al-Hvárizminek (780 körül–850 körül) szobra Üzbegisztánban

9. ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYÁNAK, ÉRTÉKKÉSZLETÉNEK VIZSGÁLATA

Az **értelmezési tartomány**, illetve az **értékkészlet** vizsgálata fontos része a függvényvizsgálatnak, egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának. Ennek segítségével nehezebb egyenletek megoldását egyszerűsíthetjük, néhány esetben elkerülhetjük például a többszörös négyzetre emeléseket is. A vizsgálat azonban nem helyettesíti a megoldások ellenőrzését. Az ellenőrzésről részletesebben olvashatunk a 242. oldalon.

1. példa

Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az adott kifejezés értelmezhető!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x}{x^2 - 4x}; & \frac{5}{x^2 + 4x + 4}; & \frac{x - 3}{x^2 + 5x + 6}; \\ \text{b) } \sqrt{5 - 2x}; & \sqrt[3]{x - 3}; & \sqrt{x\left(x - \frac{4}{7}\right)}; \\ \text{c) } \lg(7x - 6); & \log_x 8; & \log_{2-x}(x + 3). \end{array}$$

Megoldás

- a) $\frac{x}{x^2 - 4x} = \frac{x}{x(x - 4)}$, a kifejezés értelmezhető minden valós x -re, ha $x \neq 0$, és $x \neq 4$.
 $\frac{5}{x^2 + 4x + 4} = \frac{5}{(x + 2)^2}$, a kifejezés értelmezhető minden valós x -re, ha $x \neq -2$.
 $\frac{x - 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x - 3}{(x + 2)(x + 3)}$, a kifejezés értelmezhető minden valós x -re, ha $x \neq -2$, és $x \neq -3$.
- b) $\sqrt{5 - 2x}$ értelmezhető, ha $5 - 2x \geq 0$, vagyis ha $\frac{5}{2} \geq x$.
 $\sqrt[3]{x - 3}$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetében értelmezhető.
 $\sqrt{x\left(x - \frac{4}{7}\right)}$ értelmezhető, ha $x\left(x - \frac{4}{7}\right) \geq 0$, azaz ha $x \leq 0$, vagy $x \geq \frac{4}{7}$.
- c) $\lg(7x - 6)$ értelmezhető, ha $7x - 6 > 0$, vagyis ha $x > \frac{6}{7}$.
 $\log_x 8$ értelmezhető, ha $x > 0$, és $x \neq 1$.
 $\log_{2-x}(x + 3)$ értelmezhető, ha $2 - x > 0$, $2 - x \neq 1$, és $x + 3 > 0$. A feltételrendszer teljesül, ha $-3 < x < 2$, és $x \neq 1$.

2. példa

Határozzuk meg a kifejezések értékkészletét, ha az értelmezési tartományuk a valós számok legbővebb részhalmaza!

$$\begin{array}{l} \text{a) } a(x) = (x - 3)^2 - 8; \\ \text{b) } b(x) = \frac{1}{2x + 5}; \\ \text{c) } c(x) = 4 - \sqrt{x + 1}. \end{array}$$

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Megoldás

- a) $a(x) = (x - 3)^2 - 8$ minden valós számon értelmezhető, értékkészlete $a(x) \geq -8$.
- b) $b(x) = \frac{1}{2x+5}$ értelmezett, ha $x \neq -\frac{5}{2}$, értékkészlete $b(x) \neq 0$, mivel az osztás eredménye bármely 0-tól különböző szám lehet.
- c) $c(x) = 4 - \sqrt{x+1}$ értelmezett, ha $x \geq -1$, értékkészlete $c(x) \leq 4$, mert a 4-ből nemnegatív számot kell elvenni.

3. példa

Mutassuk meg, hogy az egyenletnek, egyenlőtlenségnek nincs megoldása az adott halmazon!

a) $\sqrt{x-3} = 2-x$, $x \in \mathbf{Q}$;

b) $x^2 - 6x + 14 \leq 0$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $\frac{1}{2} \cdot 3^x \leq 0$, $x \in \mathbf{R}$.

Megoldás

- a) Az egyenlet értelmezhető, ha $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. A négyzetgyök definíciója alapján $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$. Az egyenlőtlenségnek egyetlen racionális szám sem felel meg.
- b) $x^2 - 6x + 14 = (x - 3)^2 + 5$, azaz az egyenlőtlenség bal oldalának minimuma 5.
- c) Az $\frac{1}{2} \cdot 3^x \leq 0$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása, mert minden valós x esetében $3^x > 0$.

4. példa

Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 2)^2 = 0.$$

Megoldás

Az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán, mivel négyzetes tagok összege csak úgy lehet 0, ha a tagok mindegyike 0. Ez viszont lehetetlen, mert $x^2 + 1 > 0$, és $x^2 + 2 > 0$ minden valós szám esetében.

Az egyenlet bal oldalának értékkészlete az 5 és a nála nagyobb valós számok halmaza.

5. példa

Lehet-e egy konvex sokszög belső szögeinek összege 2490° ?

Megoldás

A belső szögek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$, ahol $n \geq 3$, egész szám.
 $2490^\circ : 180^\circ \notin \mathbf{Z}$, így nincs ilyen sokszög.

6. példa

Szét lehet-e osztani az első 10 pozitív egész számot két csoportba úgy, hogy az egyes csoportokba kerülő számok összege egyenlő legyen?

Megoldás

A számok összege: $\frac{(1+10) \cdot 10}{2} = 55$. Mivel az 55 páratlan szám, nem létezik ilyen szétosztás, mert egész számok összege egész szám, és két egyenlő egész szám összege páros szám.

FELADATOK

1. K1

Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az adott kifejezés értelmezhető!

$$\frac{7}{7-a};$$

$$\frac{7}{b-7};$$

$$\frac{7-c}{7};$$

$$\frac{d-7}{7}.$$

2. K1

Melyik halmaz lehet az $\frac{5x-3}{3-5x}$ kifejezés értelmezési tartománya?

$$A = \mathbf{R};$$

$$B = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{3}{5}\};$$

$$D = \{x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{5}{3}\}.$$

3. K1

Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az adott kifejezés értelmezhető!

a) $\log_2(8-5x);$

E1 b) $\log_{(x-3)} x;$

c) $\sqrt{5x-7};$

d) $\sqrt[3]{6-7x};$

e) $\sqrt{\frac{x+1}{x}}.$

4. K2

Mi lehet a kifejezés legkisebb, legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt, ha x eleme a valós számok halmazának?

a) $(x-101)^2;$

b) $7+(2x+1)^2;$

c) $-(5-x)^2;$

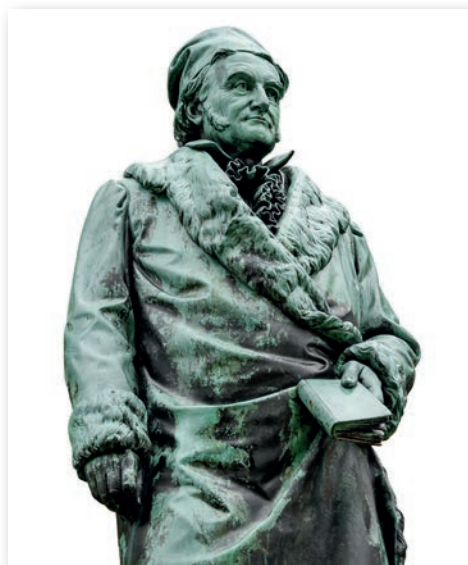
d) $(3x+3)^2+(4x+4)^2.$

5. K2

Mutassuk meg, hogy az alábbi egyenleteknek nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{2x-7} = 3-x;$

b) $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = 1.$



Carl Friedrich Gauss a matematikusok fejedelme (1777–1855). Szerteágazó munkásságának egyik fontos eredménye, hogy pontos képünk van a magasabb fokú egyenletek megoldásairól.

10. MŰVELETEK ALGEBRAI KIFEJEZÉSEKKEL

1. példa

Az a és b valós számokról tudjuk, hogy $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = 2024$. Mennyi $(a - b)$ értéke?

Megoldás

$$2024 = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a + b} = a - b, \text{ ezért } (a - b) = 2024, \text{ ha } a + b \neq 0.$$

2. példa

Adjuk meg x pontos értékét, ha $y = \sqrt{2}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, és $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$!

Megoldás

$$\frac{1}{x} = \frac{z + y}{yz}. \text{ Az egyenlőség reciprokát véve: } x = \frac{yz}{z + y}.$$

$$\text{Behelyettesítve: } x = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. példa

Mely valós számokra teljesül az egyenlet?

$$\sqrt{(x - 4)^2} = x - 4.$$

Megoldás

Mivel bármely szám négyzetéből négyzetgyököt vonunk, akkor az eredeti szám abszolút értékét kapjuk eredményül, ezért $\sqrt{(x - 4)^2} = |x - 4|$, tehát akkor igaz az egyenlőség, ha $|x - 4| = x - 4$. Ekkor $x - 4 \geq 0$, azaz $x \geq 4$.

4. példa

Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével, illetve hatvány alakban az alábbi kifejezéseket!

$$\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}; \quad b^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{b}}.$$

Megoldás

$$\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^3 a^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[5]{a^{\frac{5}{3}}} = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}};$$

$$b^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = b^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{b^5}, \text{ ha } b > 0.$$

Egyszerű rejtvények

I.

(1) 2 óra = 120 perc,

(2) $\frac{1}{2}$ óra = 30 perc.

Összeszorozzuk a két egyenletet:

1 óra = 3600 perc. (?)

Hát ez hogy lehet?

II.

$\frac{1}{4}$ kg = 25 dkg.

Négyzetgyököt vonunk:

$\sqrt{\frac{1}{4} \text{ kg}} = \sqrt{25 \text{ dkg}}$, azaz

$\frac{1}{2}$ kg = 5 dkg. (?)

Hát ez hogy lehet?

(Segítség a 209. oldalon.)

FELADATOK

1. K1

Végezzük el a műveleteket, keressük meg a kifejezések legegyszerűbb alakját!

a) $(x + 3y)^2 - (3y - x)^2$;

b) $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (b + c - a)^2$.

2. K2

Mutassuk meg, hogy minden $a \in \mathbf{R}$ esetében igaz: $2a^4 + 6a + 10 \geq 5a^2 - 1$!

3. K1

Mely valós számokra teljesül:

a) $\sqrt{(x - 5)^2} = x - 5$;

b) $\sqrt{(x - 5)^2} = 5 - x$?

4. E1

Állapítsuk meg a kifejezés értékét, ha $x = 9$!

$5^{1 + \log_{25} x}$.

Segítség az Egyszerű rejtvényekhez

A mértékegységekkel is el kell végeznünk a műveletet. Pl. $\text{óra} \cdot \text{óra} = \text{óra}^2 = (60 \text{ perc})^2 = 3600 \text{ perc}^2$; vagy $\sqrt{1 \text{ kg}} = \sqrt{100 \text{ dkg}} = 10 \cdot \sqrt{\text{dkg}}$.

11. EGYENLETEK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Az egyenletek megoldása során arra törekszünk, hogy az egyenlet alakja minél egyszerűbb legyen, olyan alakú, amelyből a megoldás már „látható”, könnyen megállapítható. Ehhez ekvivalens átalakításokat végezhetünk. Ha az átalakítás nem ekvivalens,

- akkor **hamis gyököt** is kaphatunk, ezért nagyon fontos a megoldások behelyettesítéssel történő ellenőrzése;
- **gyököt is veszíthetünk**, például ismeretlennel történő osztás vagy négyzetgyökvonás esetében.

Leggyakrabban használt módszerek:

- mérlegelv (ekvivalens átalakítások);
- értelmezési tartomány vizsgálata;
- értékkészlet vizsgálata;
- új ismeretlen bevezetése;
- grafikus megoldás.

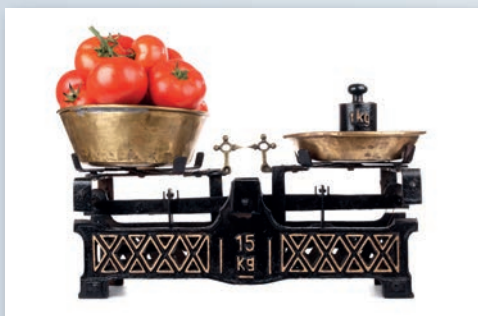
1. példa

Oldjuk meg az egyenletet az egész számok halmazán!

$$\frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1.$$

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Megoldás



Az egyenletet a mérlegelv segítségével oldjuk meg.
Az egyenlet értelmezhető, ha a nevező nem 0, azaz $x \neq 1$, és $x \neq 2$.

Szorozzunk be a közös nevezővel:

$$(3x - 5)(x - 2) - (2x - 5)(x - 1) = (x - 1)(x - 2).$$

Zárójelfelbontás és összevonás után:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 3x + 2,$$

$$x = 3.$$

A kapott gyök eleme az értelmezési tartománynak.

$$\text{Ellenőrzés: } \frac{9-5}{3-1} - \frac{6-5}{3-2} = 2 - 1 = 1 \text{ valóban.}$$

2. példa

Mutassuk meg, hogy az $|2012x - 2011| + 7 = 3$ egyenletnek nincs valós gyöke!

Megoldás

Vizsgáljuk az egyenlet bal és jobb oldalának értékészletét!

A bal oldalon $|2012x - 2011|$ bármely x esetében nemnegatív szám, ezért $|2012x - 2011| + 7 \geq 7$.
Tehát az egyenletet valóban semmilyen szám sem teszi igazzá.

3. példa

Mutassuk meg, hogy egyetlen valós szám esetében sem igaz az egyenlőség!

$$\sqrt{2 - 3x} = \sqrt{7x - 8}.$$

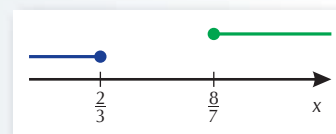
Megoldás

Vizsgáljuk az egyenlet értelmezési tartományát!

A gyök alatti kifejezés akkor értelmezhető, ha

$$2 - 3x \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \geq x, \text{ és } 7x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{8}{7}.$$

Látható, hogy nincs olyan valós szám, amely mindkét feltételnek megfelel.



FELADATOK

1. K1

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

$$a) 5(x - 2) - 3(x - 1) = 6(x - 4) - 4(x + 4); \quad c) \frac{2x-1}{4} + \frac{3}{2} = 8 - \frac{x}{8}.$$

$$b) \frac{1}{2} \cdot (4x + 6) + \frac{1}{3} \cdot (6x - 3) + 12 = 3 \cdot (x - 7) + 2;$$

2. K2

Oldjuk meg grafikusan az egyenletet a valós számok halmazán: $-2(x - 3)^2 + 2 = |x - 3| - 1$!

3.

Mely egész számokra teljesül?

$$\text{K1 } a) |x + 2| = 5;$$

$$\text{K2 } b) |x + 2| = x;$$

$$\text{K2 } c) |x - 2| = x.$$

4. K1

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $5x^2 - 5 = 0$; b) $(x^2 - 1)^2 - x^2 + 1 = 0$; c) $(7x - 5)(5x - 3) = (5x - 3)(2x + 1)$.

5. K1

Miért nincs az $5x - 25y = 107$ egyenletnek megoldása a természetes számok halmazán?

6. E1

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán! (Alkalmazzuk az értelmezési tartomány és az értékészlet vizsgálatát, illetve a grafikus megoldást!)

a) $\log_5(7 - x) + \sqrt{x - 8} = 3$;

b) $\sqrt{2x - 8} + |x - 3| = 1$;

c) $-2|x| + 2 = \sqrt{x - 1}$.

12. ELSŐFOKÚ EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Gyakoroljuk az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását! Keressük meg, melyik módszer alkalmazása a legcélszerűbb!

1. példa

Oldjuk meg az egyenleteket!

a) $\frac{(x + 3)(x^2 + 4x + 4)}{x + 2} = 1, x \in \mathbb{Z}$;

b) $2^{x-2} + 2^{x+1} - 20 = 2^x, x \in \mathbb{Q}$.

Megoldás

a) Értelmezési tartomány: minden egész szám, de $x \neq -2$.

Nem célszerű a szorzást elvégezni, mert harmadfokú egyenlethez vezet. Vegyük észre:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2, \text{ tehát}$$

$$\frac{(x + 3)(x + 2)^2}{x + 2} = 1,$$

$$(x + 3)(x + 2) = 1.$$

Mivel $x \in \mathbb{Z}$, ez csak úgy teljesülhet, ha mindkét tényező 1 vagy (-1) . Ez lehetetlen, így nincs az egyenletnek megoldása az egész számok halmazán.

b) A hatványozás azonosságai alapján:

$$\frac{2^x}{4} + 2 \cdot 2^x - 20 = 2^x.$$

Az $y = 2^x$ helyettesítéssel elsőfokú egyenlethez jutunk:

$$\frac{y}{4} + 2y - 20 = y,$$

$$5y = 80,$$

$$y = 16.$$

Visszahelyettesítve: $2^x = 16 = 2^4$. Felhasználva, hogy az $f(x) = 2^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton nő: $x = 4$.

A 4 eleme a racionális számok halmazának.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

2. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$$a) 1 - \frac{3x-88}{7} \geq 5x;$$

$$b) \frac{-2020}{\sqrt{3x-7}} \leq 0.$$

Megoldás

$$a) 1 - \frac{3x-88}{7} \geq 5x, \text{ rendezésekkel:}$$

$$7 - 3x + 88 \geq 35x,$$

$$95 \geq 38x,$$

$$2,5 \geq x.$$

Az egyenlőtlenség megoldása eleme az értelmezési tartománynak.

$$b) \frac{-2020}{\sqrt{3x-7}} \leq 0. \text{ A nevező nem lehet } 0, \text{ a gyök alatt nem állhat negatív szám, ezért } 3x-7 > 0, \text{ azaz } x > \frac{7}{3}. \text{ A négyzetgyök definíciója alapján } \sqrt{3x-7} \geq 0. \text{ Mivel a számláló negatív, így az egyenlőtlenség pontosan akkor igaz, ha } x > \frac{7}{3}.$$

FELADATOK

1. K1

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$a) 1 - \frac{2x-5}{6} - \frac{3-x}{4} = 0;$$

$$d) x(x+1) + x(x+2) = (2x-1)(x+3);$$

$$b) \frac{x+4}{3} - \frac{x+4}{4} - \frac{x-1}{2} = 1;$$

$$e) \frac{9-2x}{5x+3} = 0;$$

$$c) x(3x+1) = (1-x)(5-3x);$$

$$f) \frac{x-1}{8x+5} = \frac{1}{2}.$$

2. K1

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok legbővebb részhalmazán!

$$a) 4(6-5x) \geq 5;$$

$$c) (x+3)(x-2) \leq 0;$$

$$b) (-4)(6-5x) \geq 5;$$

$$d) \frac{3x-1}{x+1} \leq 1.$$

3. E1

Van-e gyöke az egyenletnek az egész számok halmazán?

$$\frac{x-5}{x+6} + \frac{x+6}{x-5} - \frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30} = 0.$$

4. K2

Adjuk meg az alábbi egyenlőtlenségek közös megoldáshalmazát!

$$\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-3}{5} + 1; \quad -3(x+2) \leq 0.$$

5. K2

Hány megoldás van a pozitív egész számpárok halmazán?

$$a) 8x - 22y = 9;$$

$$b) 2x + 3y = 42;$$

$$c) 2x + 3y \leq 42.$$

6. K2

Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amelyre az $x \leq 73$ és $|x - 31| < 14$ egyenlőtlenségek közül teljesül

a) legalább az egyik;

b) legfeljebb az egyik;

c) pontosan az egyik?

13. SZÖVEGES FELADATOK

Gyakorlati, életközeli feladatok esetében gyakran logikai következtetésekkel is választ adhatunk a feltett kérdésekre. Összetett feladatokban jól megválasztott jelölésekkel egyenletek, egyenlőtlenségek felírása vezethet eredményre. Minden esetben írjuk le, mi az ismeretlen, és mivel jelöljük (a változók azonosítása), és **írjunk választ** a feltett kérdésre!

1. példa

Ha $130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel közlekedünk, akkor a gépkocsi fogyasztása $8,2 \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$.

Ha $110 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel közlekedünk, akkor a fogyasztás $6,1 \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$.

Hány perccel tart tovább az út az alacsonyabb sebesség esetében Budapest és Fonyód között (kb. 150 km)?

Mennyi üzemanyagot takaríthatunk meg az alacsonyabb sebességgel ezen a távon oda-vissza? Ebből a megtakarításból még hány km-t tehetnénk meg ugyanezzel a sebességgel? (A benzin ára közelítően $710 \frac{\text{Ft}}{\text{liter}}$.)



Megoldás

Következtessünk!

1 óra alatt 130 km, akkor

x óra alatt 150 km.

Egyenes arányosság miatt: $x = \frac{150}{130}$ óra $\approx 1,15$ óra.

Hasonlóan gondolkodva $110 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ esetében $\approx 1,36$ óra. Az út kb. 13 perccel tart tovább.

$130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ esetében $8,2 + 4,1 = 12,3$ (liter) benzinre van szükség, ára: 8733 Ft.

$110 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ esetében 9,15 (liter) benzin ára: 6497 Ft.

A megtakarítás: ≈ 2236 Ft, ezzel $\frac{2236}{6,1 \cdot 710} \cdot 100 \approx 51,6$ km tehető még meg.

2. példa

Egy akció során a sportcipő árát 20%-kal csökkentették, majd az akció lejártával 25%-kal növelték. Péter úgy vélekedik, hogy a nagyobb százaléku emelés után a cipő ára magasabb lesz, mint az árcsökkentés előtt volt. Igaza van-e Péternek?

Megoldás

Jelöljük a sportcipő árát x Ft-tal.

Csökkentéskor a cipőt $x \cdot 0,8$ Ft-ért árulták.

Növeléskor az ára $(x \cdot 0,8) \cdot 1,25$ Ft-ra változott, azonban $(x \cdot 0,8) \cdot 1,25 = x$ miatt ez az eredeti árral egyezik meg. Péternek tehát nincs igaza.

3. példa

Két pozitív egész szám közül az egyik a másik háromszorosánál 357-tel nagyobb. Melyik ez a két szám, ha különbségük 4269?

Megoldás

Jelöljük a kisebbik számot x -szel. Ekkor a nagyobbik szám $3x + 357$.

$$(3x + 357) - x = 4269,$$

$$2x = 3912,$$

$$x = 1956.$$

A keresett két szám: 1956 és 6225.

4. példa

Egy előadásra minden asztalhoz 5 széket tettek a szervezők. Miután megérkeztek a vendégek, kevés volt az ülőhely, így minden asztalhoz még egy széket tettek. Ezek után már csak két érdeklődő leültetését kellett megoldani. Ha még 3 asztalt hoztak volna be, és minden asztalnál 5 szék lett volna, akkor minden ülőhelyet elfoglaltak volna a vendégek. Hány vendégre számítottak eredetileg a szervezők?

Hány vendég érkezett összesen az előadásra?

Megoldás

Legyen az asztalok száma x db, tehát eredetileg $5x$ vendégre terveztek. A tényleges érdeklődők száma $6x + 2$ fő. A másik lehetőség szerint a vendégek száma $5(x + 3)$ fő. Egyenlettel:

$$6x + 2 = 5(x + 3),$$

$$6x + 2 = 5x + 15,$$

$$x = 13.$$

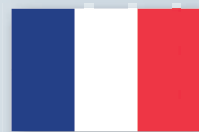
Eredetileg 13 asztal volt a teremben, és legfeljebb 65 főre számítottak. A tényleges érdeklődők száma 80 volt. (Az ellenőrzést a szövegbe való helyettesítéssel végezhetjük el.)

5. példa

A gimnáziumban a szülők kérése alapján 3 idegen nyelvet (angolt, németet, franciát) tanítanak. Minden tanuló legalább két idegen nyelvet tanul. Angolt és franciát a tanulók 30%-a, angolt és németet 40%, míg németet és franciát 50% tanul. A tanulók 10%-a mind a három nyelvet tanulja, így 448-cal tanulnak többen két nyelvet, mint 3-at.

Hányszorosa a pontosan két nyelvet tanulók száma a három nyelvet tanulókénak?

Hány tanuló jár a gimnáziumba?



Megoldás

Legyen a tanulók száma x fő.

Pontosan két nyelvet tanulók száma: $x \cdot 0,3 + x \cdot 0,4 + x \cdot 0,5 - 3 \cdot x \cdot 0,1 = 0,9x$, mert a három nyelvet tanulókat háromszor számoltuk így be.

A feltétel miatt: $0,9x = 0,1x + 448$

$$x = 560$$

9-szer többen tanulnak pontosan két nyelvet, mint hármat. A gimnázium létszáma 560 fő.

FELADATOK

1. K1

Egy játék árát karácsony előtt 20%-kal felemelték, majd az ünnep után 25%-kal csökkentették, így 5220 Ft-ért árulják. Mennyi volt a játék ára eredetileg? Hány százaléka a mostani ár az eredetinek?

2. K1

Egy kiskereskedő felvásárolt 200 kg almát 120 Ft/kg egységáron. Az első nap eladott 52 kg-ot 180 Ft/kg áron, a második nap 40 kg-ot 160 Ft/kg áron, a harmadik nap 68 kg-ot 140 Ft/kg áron. Hány forintért adja el a maradékot – feltéve, hogy mind elfogy – ahhoz, hogy az összes alma eladása után 30%-os nyereséget tudjon elérni?

3. K2

Egy kg banán a szomszédos zöldségesnél 320 Ft, egy kg alma pedig 220 Ft. Ugyanezek a 14 km-re levő piacon 280 Ft/kg, illetve 180 Ft/kg-ba kerülnek. Érdemes-e autóval a piacra menni – csak a költségeket figyelembe véve –, ha 4 kg banánt és 6 kg almát szeretnénk vásárolni? Ha autóval megyünk, akkor 1 km út megtétele 32 Ft-ba kerül.

4. K1

Határozzuk meg azt a háromjegyű számot, amelyről a következőket tudjuk:

- számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő tagjai;
- a szám értéke 53,5-szerese a számjegyei összegének;
- ha kivonjuk belőle az első és utolsó jegy felcserélésével kapott háromjegyű számot, akkor 396 az eredmény.

5. K2

– Ha négyszer annyi pénzem lenne, mint amennyi van, akkor vagyonom annyival lenne több 10 000 Ft-nál, mint amennyi most hiányzik ahhoz, hogy 10 000 Ft-om legyen – mondta Péter. Mekkora Péter vagyona?

6. K2

Ákos 5 tárgyból érettségizett. Átlageredménye 3,4 volt, semelyik tárgyból nem bukott meg, nem volt egynél több kettese, és nem kapott kettőnél több azonos osztályzatot. Milyen jegyeket kapott Ákos az érettségien?

7. K1

A Mikulás az óvodáscsoportban szaloncukrot szeretne osztani a gyerekeknek. Ha minden gyereknek 4-4 szaloncukrot adna, akkor 16 hiányozna. Ezért minden gyereknek 3-3 szaloncukrot ad, így megmarad 8. Hány gyerek van az óvodáscsoportban?

8. K1

Bergengóciában a gazda szolgát fogadott fel, megígérve neki egy évre 100 aranyat és egy lovat szolgálataért. Hét hónap elteltével azonban a szolga elment, távozásakor megkapta jogos bérét: a lovat és még 20 aranyat. Hány aranyat ért a ló?

14. MÁSODFOKÚ ÉS MÁSODFOKÚRA VISSZAVEZETHETŐ EGYENLETEK

Az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ egyenletet másodfokú egyenletnek nevezzük. Az egyenletben szereplő a , b , c valós számok az együtthatók.

Az egyenlet **diszkriminánsa** a $D = b^2 - 4ac$ kifejezés.

Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek két egybeeső gyöke van ($x_1 = x_2$).

Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek két különböző valós gyöke van ($x_1 \neq x_2$).

Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke.

A fenti másodfokú egyenlet **megoldóképlete**: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ha $D \geq 0$, akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

a másodfokú egyenlet **gyöktényezős alakja**: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések (**Viète-formulák**): $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $-4x^2 + 10x - 6 = 0$;

c) $\frac{1}{4}x^2 + x + 4 = 0$;

b) $28x^2 - 28x + 7 = 0$;

d) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{5x-3}{3x+5}$.

Megoldás

a) $-4x^2 + 10x - 6 = 0$.

Együtthatók: $a = -4$, $b = 10$, $c = -6$.

$D = b^2 - 4ac = 4$. Mivel $D > 0$, ezért két különböző gyök van:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{-8} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}.$$

$$b) 28x^2 - 28x + 7 = 0.$$

Együtthatók: $a = 28$, $b = -28$, $c = 7$.

$D = b^2 - 4ac = 784 - 784 = 0$, két egybeeső gyök van:

$$x_{1,2} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}.$$

$$c) \frac{1}{4}x^2 + x + 4 = 0.$$

Együtthatók: $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $c = 4$.

$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$. Mivel $D < 0$, ezért az egyenletnek nincs valós gyöke.

$$d) \frac{2x-5}{x-1} = \frac{5x-3}{3x+5}$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$ és $x \neq -\frac{5}{3}$. Rendezésekkel:

$$(2x-5)(3x+5) = (5x-3)(x-1),$$

$$6x^2 - 5x - 25 = 5x^2 - 8x + 3,$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0,$$

$$x_1 = 4; x_2 = -7.$$

A kapott gyökök elemei az értelmezési tartománynak.

2. példa

Mely pontokban metszi egymást a két függvénygörbe?

$$f(x) = 8x - x^2 - 12, g(x) = 8 - x!$$

Megoldás

Keressük azokat az x valós számokat, amelyekre a két függvény értéke egyenlő, azaz teljesül:

$$8x - x^2 - 12 = 8 - x.$$

$$\text{Rendezve: } x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Dolgozhatunk a megoldóképlettel is, de gyorsabban jutunk eredményhez, ha észrevezzük, hogy szorzattá alakíthatunk: $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$.

Tehát $x_1 = 4$, ekkor behelyettesítve $y_1 = 8 - 4 = 4$; illetve

$$x_2 = 5, y_2 = 8 - 5 = 3.$$

A metszéspontok: $P_1(4; 4)$, $P_2(5; 3)$.

3. példa

Emelt szint

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$a) \sqrt{2x-3} + 2x + 1 = 10;$$

$$b) x^6 - 2x^3 - 8 = 0.$$

Megoldás

a) Írjuk az egyenletet más alakba!

$$\sqrt{2x-3} + 2x - 3 + 4 = 10.$$

Vezessük be a $\sqrt{2x-3} = a$ új ismeretlent. Ekkor az egyenlet

$$a + a^2 + 4 = 10 \text{ alakú lesz.}$$

$$a^2 + a - 6 = 0,$$

ennek gyökei $a_1 = 2$; $a_2 = -3$.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

$\sqrt{2x-3} = 2$ megoldása $x = \frac{7}{2}$, $\sqrt{2x-3} = -3$ nem lehetséges.

Az egyenlet megoldása tehát $x = \frac{7}{2}$. (Ne feledkezzünk el az ellenőrzésről!)

b) $x^6 - 2x^3 - 8 = 0$.

Vegyük észre, hogy (például új ismeretlen bevezetése esetében) másodfokúra visszavezethető az egyenlet.

Legyen: $y = x^3$, ekkor $x^6 = y^2$.

$$y^2 - 2y - 8 = 0, \quad y_1 = 4; \quad y_2 = -2.$$

Visszahelyettesítve:

$$x_1^3 = 4 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{4}; \quad x_2^3 = -2 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{-2}.$$

Mi lehet a hiba?

„Bebizonyítjuk”, hogy minden x szám 0-val egyenlő.

$$\begin{array}{ll} x = y & | \cdot x \\ \Leftrightarrow x^2 = xy & | - y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 & \\ \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = y(x-y) & | : (x-y) \\ \Leftrightarrow x+y = y & | - y \\ \Leftrightarrow x = 0 (?) & \end{array}$$

(Segítség a 235. oldalon.)

4. példa

A k változó milyen értékeinél lesz az

a) $x^2 + kx - 24 = 0$ egyenletnek két különböző gyöke;

b) $x^2 + kx + 15 = 0$ egyenletnek az egyik gyöke: $x_1 = 5$;

c) $x^2 + kx + 30 = 0$ egyenlet gyökeinek összege 13?

Megoldás

a) Akkor van az $x^2 + kx - 24 = 0$ egyenletnek két különböző gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív.

$D = k^2 + 96$ minden k esetében pozitív, így az egyenletnek minden k -ra két különböző gyöke van.

b) Helyettesítsük be az $x = 5$ -öt. Ekkor $25 + 5k + 15 = 0 \Rightarrow k = -8$. Tehát $k = -8$ esetében lesz az egyenlet egyik gyöke 5.

c) Használjuk a Viète-formulákat: Ha $D \geq 0$, akkor $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

$D = k^2 - 120 \geq 0$, ha $|k| \geq \sqrt{120}$. Ekkor $x_1 + x_2 = 13 = -k \Rightarrow k = -13$, ami megfelel a diszkriminánsnál vizsgált feltételnek: $|-13| \geq \sqrt{120}$ valóban.

FELADATOK

1.

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

K1 a) $4x^2 - 17x - 15 = 0$;

E1 d) $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15 = 0$;

K1 b) $(x-3)^2 + (x+4)^2 - (x-5)^2 = 17x + 24$;

E1 e) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$.

E1 c) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$;

2. E1

Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter értékét, hogy a $3x^2 - x + p = 0$ egyenlet egyik gyöke a 2 legyen? Adjuk meg a másik gyökét is az egyenletnek!

3. E1

Milyen számot írhatunk p helyére, hogy a $4x^2 + px - 3 = 0$ egyenlet gyökeinek összege -1 legyen?

4. K2

Egyenértékűek-e az alábbi egyenletek a valós számok halmazán?

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ és $2x - 6 = 0$;

c) $x^4 - 1 = 0$ és $x^2 - 1 = 0$;

b) $\frac{x^2-1}{x-1} = 4$ és $x+1 = 4$;

d) $\frac{x^2-9}{x+3} = -6$ és $x-3 = -6$.

15. MÁSODFOKÚ EGYENLŐTLENSÉGEK

Másodfokú egyenlőtlenségek vizsgálatánál gyakran hivatkozunk a másodfokú függvény tulajdonságaira, elsősorban szélsőértékének típusára és a monotonitására.

Minden $ax^2 + bx + c$ alakú kifejezés ($a \neq 0$) felírható $a(x - p)^2 + q$ alakban. A **teljes négyzetté** alakításból látható, hogy az $f(x) = a(x - p)^2 + q$ függvény a **szélsőértékét** az $x = p$ helyen veszi fel, és értéke q .

Egyenlőtlenség esetében gyakran célszerű először azt vizsgálni, hogy mikor teljesülne az egyenlőség.

1. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 8x + 7 \geq 0$;

b) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$.

Megoldás

- a) Az $x^2 - 8x + 7 = 0$ egyenlőség teljesül, ha $x_1 = 7$, vagy $x_2 = 1$. Az $f(x) = x^2 - 8x + 7$ függvénynek minimuma van, mert a főegyüttható pozitív, ezért az egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha $x \leq 1$, vagy $x \geq 7$.
- b) Mivel a diszkrimináns negatív (-44), ezért az $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ függvény grafikonja nem metszi az x tengelyt. A főegyüttható pozitív, ezért minden x -re $3x^2 - 4x + 5 > 0$, tehát az egyenlőtlenség soha sem áll fenn.

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenség-rendszert a valós számok halmazán!

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0 \quad \text{és} \quad -x^2 - x + 12 > 0$$

Megoldás

Az első egyenlőtlenség bal oldalán egy olyan másodfokú kifejezés áll, amit ha ábrázolunk a koordináta-rendszerben, akkor egy felfelé nyitott parabolát kapunk. Ebben az esetben a két gyök között a függvény negatív értékeket vesz fel (a grafikon az x tengely alatt van).

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5$$

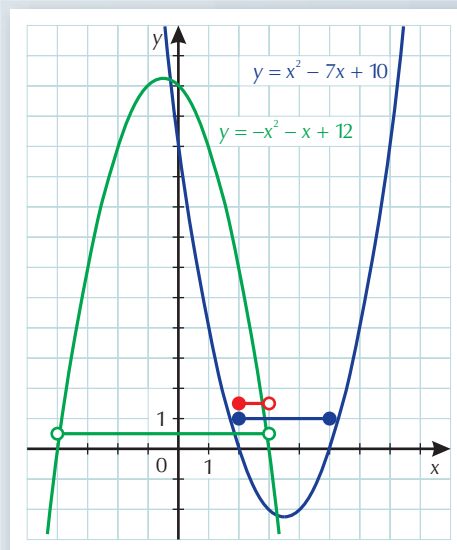
$$x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2; 5]$$

A második egyenlőtlenség bal oldalán lévő kifejezéshez tartozó grafikon egy lefelé nyitott parabola, ezért a két gyök között vesz fel pozitív értékeket.

$$-x^2 - x + 12 = 0, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 3.$$

$$-x^2 - x + 12 > 0 \Leftrightarrow x \in]-4; 3[$$

Mivel a két egyenlőtlenséget az ÉS logikai művelettel kapcsoltuk össze, ezért csak akkor igaz az összetett állítás, ha mind a két részállítás



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

teljesül. Ez azt jelenti, hogy olyan értékeket keresünk, amelyek mind a két egyenlőtlenséget kielégítik, a feladat megoldása így a két megoldáshalmaz metszete lesz.

$$x \in [2; 5] \cap]-4; 3[= [2; 3[\text{ balról zárt, jobbról nyílt intervallumnak.}$$

FELADATOK

1. K1

Ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 4$ függvényt a valós számok halmazán!

a) Határozzuk meg a függvény zérushelyeit!

b) Mely x értékek esetében lesz $f(x) < 0$?

2. K1

Ábrázoljuk a valós számok halmazán az $f(x) = (3 - x)(x + 2)$ függvényt! Határozzuk meg azokat az x értékeket, ahol $f(x) \geq 0$!

3. K1

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 14x + 45 > 0$;

b) $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$;

c) $-5 + 4x - 3x^2 \geq 0$.

4. E1

Ábrázoljuk az alábbi egyenlőtlenségek valós megoldásait a számegyenesen!

a) $\frac{(x-3)(x-5)}{x-2} > 0$;

b) $\frac{x^2 - 6x + 18}{x-4} > 0$;

c) $\frac{x^2 + 5x + 4}{6 + 5x - x^2} \leq 0$.

5. K1

Mely valós számokra értelmezhetők az alábbi kifejezések?

a) $\sqrt{3x^2 - 4x + 5}$;

b) $\lg(x^2 - 6x + 9)$.

Emelt szint

16. SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK, NEVEZETES KÖZEPEK

Szélsőértékkel (minimális, ill. maximális érték keresésével) kapcsolatos feladatok megoldásában gyakran segíthet a másodfokú egyenlőtlenségek vizsgálata vagy a nevezetes középértékek ismerete.

Legyenek a és b pozitív számok. Értelmezzük e számok nevezetes közepét:

Mértani (geometriai) közép: $G = \sqrt{ab}$.

Számtani (aritmetikai) közép (átlag): $A = \frac{a+b}{2}$.

A **számtani** és **mértani közép** közötti összefüggés nagyon hasznos ismeret a szélsőérték-feladatok megoldásában. Eszerint bármely két pozitív számra

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad a, b > 0. \text{ Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha } a = b.$$

Megjegyzés

Feladatmegoldásokban segíthet még két nevezetes közép ismerete.

Idézet

Ha messzebbre láttam, mint mások, csak azért tehettem, mert óriások vállán álltam. (Newton)

Harmonikus közép: $H = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, a > 0 \text{ és } b > 0.$

Négyzetes közép: $N = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, a > 0 \text{ és } b > 0.$

A bevezetett közepek között a következő összefüggés áll fenn:

$H \leq G \leq A \leq N$, azaz $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.

(Megjegyezzük, hogy a közepek több szám esetén is használatosak, és a közöttük levő nagyságviszony akkor is fennáll. Például: $G_k = \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} = A_k$, ahol $a_i > 0$, $k \geq 2$ egész szám, egyenlőség pedig $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ esetén áll fenn.)

Szélsőérték-feladatoknál gyakran használhatjuk a másodfokú függvényeknél tanultakat is, hiszen ezek szélsőértékét könnyen tudjuk vizsgálni.

1. példa

Két pozitív szám összege 52. Hogyan válasszuk meg a számokat, hogy a szorzatuk maximális legyen?

Megoldás

Első megoldás

Mivel összeget ismerünk, és szorzatot becsülünk, így gondolhatunk a közepek használatára. Legyenek a keresett számok: a, b . Tudjuk, hogy

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{52}{2} = 26,$$

$$ab \leq 26^2 = 676.$$

Tehát az ab szorzat legfeljebb 676. A vizsgált közepek között pontosan akkor áll fenn az egyenlőség, ha a tagok egyenlők, így $a = b = 26$ esetében lesz a szorzat maximális.

Második megoldás

Jelöljük a számokat x -szel és $(52 - x)$ -szel. Ekkor szorzatuk:

$$x(52 - x) = -x^2 + 52x = -(x - 26)^2 + 676.$$

Látható, hogy a szorzat maximuma 676, és ezt akkor veszi fel, ha $x = 26$ az egyik szám, a másik pedig $52 - 26 = 26$.

2. példa

Két pozitív szám szorzata 40. Hogyan válasszuk meg a számokat, hogy az összegük a lehető legkisebb legyen? Mennyi ez az összeg?

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Megoldás

Legyenek a számok x és y . Mivel szorzatot ismerünk, becsljük az összeget ismét a közepekkel.

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \text{ a szorzat alapján:}$$

$$\sqrt{40} \leq \frac{x+y}{2},$$

$$2\sqrt{40} \leq x+y.$$

Tehát x és y összegének minimuma $2\sqrt{40} = 4\sqrt{10}$. Ezt akkor veszi fel, ha x és y egyenlők, vagyis $x = y = 2\sqrt{10}$.

3. példa

Legyen $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \frac{5}{x}$. Határozzuk meg a függvény minimumát! Hol veszi fel ezt a minimumot?

Megoldás

Válasszuk a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ egyenlőtlenségben az $a = x$ és $b = \frac{5}{x}$ pozitív számokat.

$$\text{Ekkor } \sqrt{x \cdot \frac{5}{x}} = \sqrt{5} \leq \frac{x + \frac{5}{x}}{2}, \text{ rendezve } 2 \cdot \sqrt{5} \leq x + \frac{5}{x}.$$

Tehát az $f(x)$ függvény minimuma $2\sqrt{5}$. A minimumot akkor veszi fel a függvény, ha a tagok egyenlők, azaz

$$x = \frac{5}{x}, \quad x^2 = 5, \quad x = \sqrt{5}.$$

Figyelembe vettük, hogy a feladatban $x > 0$.

4. példa

A rendelkezésünkre álló 1080 méter hosszú kerítéssel szeretnénk egy téglalap alakú részt körülkeríteni egy nagy legelőn. Hogyan válasszuk meg az oldalak hosszát, ha a legnagyobb területet szeretnénk elérni?

Megoldás

Jelöljük a téglalap oldalait: x méter, y méter. Ekkor a kerülete $1080 = 2(x+y)$, a területe xy . Becsljük a területet ismét a közepekkel:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \text{ és mivel } 1080 = 2(x+y), \quad 540 = x+y.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{540}{2} = 270, \quad xy \leq 72\,900.$$

Az elérhető legnagyobb terület $72\,900 \text{ m}^2$. Ez akkor valósul meg, ha az oldalak 270 m hosszúak.

FELADATOK

1. E1

Számítsuk ki a következő számok számtani és mértani közepét!

a) 2; 8.

b) 10; 90.

c) 5; 15.

2. E1

Két pozitív szám összege 100. Mekkora a számok, ha tudjuk, hogy a szorzatuk maximális?

3. E1

A Nagy Honfoglalók stratégiai játékban a játékosok téglalap alakú telket szerezhettek. 240 m hosszú kötelük van, amivel azt körbekeríthetik. Hogyan válasszák meg a téglalap méreteit, ha a maximális terület elfoglalására töreksenek?



*Honfoglalás,
Munkácsy Mihály festménye (1893)*

4. E1

Egy téglalap alakú, kellően nagy méretű vászon rövidebb oldala 80 cm. Két négyzet alakú darabot szeretnénk levágni belőle úgy, hogy a két négyzet oldalának összege a vászon rövidebb oldalával egyenlő legyen, és a lehető legtöbb anyag megmaradjon. (A legkisebb darabokat kapjuk.)

Hogyan válasszuk meg a négyzet oldalait?

5. E1

Mi az ab szorzat legnagyobb értéke, ha $2a + 5b = 1$?

17. SZÖVEGES FELADATOK

1. példa

Két egymást követő természetes szám szorzata 992. Melyik ez a két szám?

Megoldás

Kétféle módon is elindulhatunk.

1. lehetőség

A természetes számok halmazának tulajdonságait felhasználva próbálgatással is megoldhatjuk a feladatot. Nagyságrendeket becsülve 30 körüli értékeket kell keresnünk. Valóban, a 31 és 32 jó megoldás megtalálható. Más megoldás nincs, mert a nagyobb számok szorzata nagyobb, a kisebb számok szorzata kisebb lesz.

2. lehetőség

Jelöljük x -szel a kisebb számot, ekkor a szövegből felírható egyenlet:

$$x(x + 1) = 992. \text{ Átrendezve és megoldva}$$

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

$$x^2 + x - 992 = 0,$$

$x_1 = 31$, $x_2 = -32$. A természetes számok halmazán az $x_2 = -32$ nem megoldás. Így a keresett két szám a 31 és 32.

2. példa

Az őszi közeledtével egy 20 000 Ft-os kabát árát valahány százalékkal megemelték, majd három hét elteltével ennél kettővel nagyobb százalékkal csökkentették. Így a kabát ára 19 090 Ft lett. Hány százalékkal emelték a kabát árát?

Megoldás

Jelöljük az emelést $x\%$ -kal. Ekkor a kabát új ára $20\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$.

A csökkentés mértéke $(x + 2)\%$. A csökkentés utáni ár

$$20\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{x+2}{100}\right).$$

A szövegből felírható összefüggés:

$$20\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{x+2}{100}\right) = 19\,090, \text{ ahol } x > 0.$$

Zárójelfelbontás és rendezés után kapjuk, hogy

$$2x^2 + 4x - 510 = 0.$$

Az egyenlet gyökei $x_1 = 15$, $x_2 = -17$.

Az $x > 0$ miatt csak az $x_1 = 15$ a megoldás.

A szövegbe történő behelyettesítéssel igazolhatjuk, hogy a megoldás jó.

Válasz: a kabát árát 15%-kal emelték.



3. példa

Egy sífelvonó közelében trapéz alakú parkolót alakítanak ki. A legtöbb autó elhelyezésére kialakított sorban 30-cal több autó fér el, mint a legkevesebb autó parkolására készített sorban. A második sortól kezdve minden sorban ugyanannyival több autó helyezhető el. A sorok száma ugyanannyi, mint a legrövidebb sorban elhelyezett autók száma. Hány sort alakítottak ki, ha összesen 250 autó fér el a parkolóban?

Megoldás

Legyen a sorok száma n . A sorok férőhelyei számtani sorozat egymást követő elemei, ahol az első elem n , az utolsó $n + 30$.

A számtani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$\frac{n + n + 30}{2} \cdot n = 250.$$

Átalakítva a $2n^2 + 30n - 500 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei:

$$n_1 = -25; n_2 = 10.$$

A szöveg feltételeinek az $n = 10$ felel meg.

A parkolóban 10 sort alakítottak ki. (Ne feledkezzünk meg az ellenőrzésről!)



4. példa

Egy termék árát az $a(x) = 500 - x$ függvény adja meg euróban, ahol x a gyártott darabszám. A gyártó legfeljebb 450 darabot tud előállítani.

x darabszám esetén a gyártás költségét a $k(x) = -0,5x^2 + 110x + 73\,600$ függvény írja le.

a) Számítsuk ki a termék árát, valamint az így elért bevételt $x = 150$ db esetén!

b) Írjuk fel x függvényeként a bevételt!

c) Hány darab esetén lesz az elérhető bevétel maximális?

d) Számítsuk ki a gyártás költségét és az elért nyereséget $x = 150$ db előállítás esetén!

e) Milyen darabszám esetén lesz az elérhető nyereség maximális?

Megoldás

a) A termék ára növekvő darabszám mellett csökken. $a(x) = (500 - x)$ (euró).

$x = 150$ esetén 350 euró lesz darabonként.

A bevétel $150 \cdot 350 = 52\,500$ (euró).

b) A bevétel a darabszám függvényeként $b(x) = (500 - x) \cdot x$ (euró).

c) A bevétel maximális, ha $b(x) = (500 - x) \cdot x$ maximális. Ez egy másodfokú függvény, alakítsuk teljes négyzetté.

$$b(x) = (500 - x) \cdot x = -x^2 + 500x = -[(x - 250)^2 - 62\,500] = -(x - 250)^2 + 62\,500.$$

Ez a kifejezés akkor maximális, ha a négyzetes tag 0, azaz $x = 250$. Ekkor lesz a legtöbb a bevétel.

d) A gyártás költségét a $k(x) = -0,5x^2 + 110x + 73\,600$ függvény írja le. $x = 150$ esetén a költség 78 850 euró.

Az elért nyereség a bevételnek és a gyártás költségének a különbsége.

150 db esetén ez $52\,500 - 78\,850 = -26\,350$ (euró), ami azt jelenti, hogy még veszteséges a gyártás.

e) Az elérhető nyereség az x függvényeként $n(x) = b(x) - k(x)$, azaz

$$n(x) = (500 - x) \cdot x - (-0,5x^2 + 110x + 73\,600) = -0,5x^2 + 390x - 73\,600.$$

Teljes négyzetté alakítás után kaphatjuk meg a maximumot.

Az $n(x) = -0,5(x - 390)^2 + 2450$ függvény maximuma 2450, és ezt $x = 390$ esetén veszi fel.

A legnagyobb nyereség 2450 euró, ez 390 db gyártása esetén érhető el.

FELADATOK

1. K1 Két egymást követő páratlan szám szorzata 59 535. Melyik ez a két szám?

2. K2 Egy számrendszer x alapszáma egyjegyű pozitív egész szám. Hányféle értéket vehet fel x , ha tudjuk, hogy $\overline{144}_x$ négyzetszám?

3. K1 Egy baráti társaság összejövetelén a belépő az volt, hogy mindenki készítsen valamilyen ajándékot a többi vendégnek. Hányan voltak a társaságban, ha mindenki teljesítette a kérést, és 210 ajándék került kiosztásra?

4. K1 Egy téglalap alakú kertet, amelynek egyik oldala 10 m-rel hosszabb a másikonál, tujákkal kerítenek körbe. A terület nagysága 1200 m^2 .

Mekkora a kert oldalainak hossza?

Mennyi tuját kell vásárolni, ha egymástól 80 cm távolságra szeretnének tujákat ültetni?



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

5. K1

Egy uniós országban két egymás utáni évben ugyanakkora százalékból emelték a nyugdíjak összegét vagy értékét. Így az 500 eurós nyugdíj a kétszeri emelés után 605 euró lett. Mekkora volt a nyugdíjemelés mértéke?

6. K2

1 000 000 Ft-ot tettünk különböző megtakarítási formákba. Az egyik része a pénznek 30 000 Ft-ot, a másik része 24 000 Ft-ot kamatozott egy év alatt. A második rész kamatlába 1%-kal nagyobb, mint az első. Hány %-os kamatot hoz a pénz egyik, illetve másik része?

7. K2

Egy elektronikai kiscég a nagykereskedőtől vásárolt árut 100 euró haszonnal adta el. A befolyt összegben ismét árut vásárolt, amelyet ugyanakkora százalékos haszonnal adott el, mint az első alkalommal. Ekkor 1210 eurót kapott. Mekkora összegért vásárolt árut először?

18. ELSŐ- ÉS MÁSODFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

Szöveges feladatokban gyakran nem tudunk a feltett kérdésre egy egyenlet segítségével választ adni, a több ismeretlen tényező miatt. Ekkor több egyenlet felírásával, egyenletrendszerrel kereshetjük a megoldást. Egyenletrendszerek megoldása során **behelyettesítéssel**, **új ismeretlen bevezetésével** vagy az **azonos együtthatók módszerével** járhatunk el. Ezekre mutatunk példákat a következő feladatokban. Az ellenőrzés elvégzésekor a kapott gyököket mindegyik egyenletbe be kell helyettesíteni.

1. példa

Oldjuk meg az elsőfokú egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) (1) } 3x - 5y = 35 \\ \text{(2) } 2x + 3y = -2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) (1) } 4y + 9x = -5 \\ \text{(2) } 15x - 12y = -13 \end{array} \right\}$$

Megoldás

a) Fejezzük ki az első egyenletből x -et, majd a kapott kifejezést **helyettesítsük be** a második egyenletbe:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(1) } x = \frac{35 + 5y}{3} \\ \text{(2) } \frac{2(35 + 5y)}{3} + 3y = -2 \end{array} \right\}$$

Rendezésekkel:

$$70 + 10y + 9y = -6,$$

$$19y = -76,$$

$$y = -4.$$

$$\text{Behelyettesítve: } x = \frac{35 + 5 \cdot (-4)}{3} = 5.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 5$; $y = -4$.

Ellenőrzés:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(1) } 3 \cdot 5 - 5 \cdot (-4) = 15 + 20 = 35 \\ \text{(2) } 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) = 10 - 12 = -2 \end{array} \right\}$$



b) Alkalmazzuk az **azonos együtthatók módszerét**. Szorozzuk meg az első egyenletet 15-tel, a másodikat 9-cel, ekkor az x együtthatói egyenlők lesznek:

$$\begin{cases} (1) 60y + 135x = -75 \\ (2) 135x - 108y = -117 \end{cases}$$

Az x együtthatói megegyeznek; ha kivonjuk az első egyenletből a másodikat, akkor csak egy ismeretlenes egyenletet kapunk:

$$(1) - (2): 168y = 42,$$

$$y = \frac{1}{4}.$$

Behelyettesítve az első egyenletbe:

$$(1) 4 \cdot \frac{1}{4} + 9x = -5,$$

$$9x = -6,$$

$$x = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = -\frac{2}{3}; y = \frac{1}{4}$.

A kapott gyökök kielégítik az egyenletrendszert.

2. példa

Oldjuk meg a másodfokú egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} (1) y - x = 5 \\ (2) y^2 - x^2 = 105 \end{cases} & b) \begin{cases} (1) xy + x = -16 \\ (2) xy = -14 \end{cases} \end{array}$$

Megoldás

a) Első megoldás

Fejezzük ki y -t az első egyenletből, majd helyettesítsük a második egyenletbe:

$$(1) y = 5 + x,$$

$$(2) (5 + x)^2 - x^2 = 105,$$

$$(2) 10x + 25 = 105,$$

$$x = 8.$$

Behelyettesítve az első egyenletbe: $(1) y - 8 = 5 \Rightarrow y = 13$.

Második megoldás

Észrevéve a nevezetes azonosságot:

$$(2) (y - x)(y + x) = 105, \text{ összevetve az első egyenlettel:}$$

$$(1) y - x = 5,$$

$$(2) y + x = \frac{105}{5} = 21.$$

Az egyenleteket összeadva: $(1) + (2) 2y = 26 \Rightarrow y = 13; x = 8$.

b) Helyettesítsünk az első egyenletben xy helyére (-14) -et. Ebből egyszerű számolással:

$$x = -2 \Rightarrow y = -\frac{14}{-2} = 7.$$

A kapott gyökök megfelelnek a feltételeknek.

FELADATOK

1. K1

Ábrázoljuk az alábbi egyenlettel megadott ponthalmazokat koordináta-rendszerben, majd határozzuk meg az alakzatok metszéspontjának koordinátáit!

$$a) \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} y = 11 - 2x \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}.$$

2. K1

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

$$a) \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 3(x - 1) = 4y + 1 \\ 5(y - 1) = x + 1 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} \frac{2x + 3}{3y - 2} = 1 \\ x(2y - 5) - 2y(x + 3) = 2x + 1 \end{cases}.$$

3. K1

Egy zöldségkereskedő cég 25 kg málnáért és 30 kg szederért 54 euró kifizetésében állapodott meg. Az átvételkor azonban minőségi kifogás miatt egy kg-mal kevesebb málnáért és egy kg-mal kevesebb szederért fizettek. Ekkor a kifizetett összeg az előzetesen megállapított végösszeg $\frac{26}{27}$ része volt. Mennyibe került a málna és a szeder kg-ja?



4. K2

Ha egy derékszögű háromszög egyik befogóját 2 cm-rel, a másik befogóját 3 cm-rel megnöveljük, az így keletkezett háromszög területe 82%-kal nő. Ha mindkét befogót 2 cm-rel csökkentjük, akkor a keletkezett háromszög területe 13 cm²-rel kisebb lesz. Mekkora a háromszög befogói?

5. K2

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x = -4 - y \end{cases}.$$

6. K1

Egy téglalap alakú koncertteremben 320 szék van. 420 érdeklődőnek adtak el jegyet, így minden sorba 4-gyel több székot tettek, és eggyel több sort alakítottak ki. Hány sor lett a kibővítés után?

7. K2

Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Határozzuk meg y értékét az alábbi egyenletrendszerből!

$$\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0 \\ 2x^2 + 3y - 13 = 0 \end{cases}$$

„Megoldás” (hibás):

(1)-ből $x^2 = 4 - y$, ezt (2)-be helyettesítve $2(4 - y) + 3y - 13 = 0$, innen $y = 5$ adódik.

19. NÉGYZETGYÖKÖS EGYENLETEK

1. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

$$a) \sqrt{2x-3} = 5; \quad b) \sqrt{24-13x} = x\sqrt{2}.$$

Megoldás

- a) **Értelmezési tartomány:** Csak nemnegatív valós számoknak van négyzetgyöke, ezért $2x - 3 \geq 0$, rendezve: $x \geq \frac{3}{2}$.

Négyzetre emeléssel, rendezéssel: $2x - 3 = 25$, $x = 14$.

A kapott gyök eleme az értelmezési tartománynak.

Ellenőrzéssel: $\sqrt{2 \cdot 14 - 3} = \sqrt{25} = 5$.

- b) **Értelmezési tartomány:** $24 - 13x \geq 0$, $x \leq \frac{24}{13}$. A négyzetgyök definíciója alapján $x\sqrt{2} \geq 0$, azaz $x \geq 0$.

Emeljünk négyzetre:

$$24 - 13x = 2x^2,$$

$$2x^2 + 13x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,5 \text{ és } x_2 = -8.$$

A kapott gyökök közül az $x = 1,5$ eleme az értelmezési tartománynak. Az $x_2 = -8$ nem pozitív, így hamis gyök.

Ellenőrizzük, hogy $x = 1,5$ megoldása-e az eredeti egyenletnek!

2. példa

Tekintsük az $f(x) = \sqrt{-2x^2 - 16x + 256}$ függvényt.

- a) Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, ahol a függvény értelmezhető!

- b) Határozzuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 4!

Megoldás

- a) A függvény értelmezhető, ha a gyök alatt nem áll negatív szám:

$$-2x^2 - 16x + 256 \geq 0. \text{ Keressük meg a zérushelyeket:}$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 2048}}{-4} = \frac{16 \pm 48}{-4} \Rightarrow x_1 = -16; x_2 = 8.$$

Mivel a $g(x) = -2x^2 - 16x + 256$ függvénynek maximuma van, így az egyenlőtlenség teljesül, ha $-16 \leq x \leq 8$, $x \in \mathbf{R}$. Ez egyben az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya.

- b) Keressük az értelmezési tartomány azon elemét, amelyre a függvény értéke 4!

$$\sqrt{-2x^2 - 16x + 256} = 4, \text{ rendezésekkel:}$$

$$-2x^2 - 16x + 256 = 16,$$

$$-2x^2 - 16x + 240 = 0,$$

$$D = 256 + 1920 = 2176.$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{2176}}{-4} = \frac{16 \pm 4\sqrt{136}}{-4} \Rightarrow x_1 = -4 - \sqrt{136} \approx -15,66; x_2 = -4 + \sqrt{136} \approx 7,66.$$

A kapott gyökök elemei az értelmezési tartománynak.

3. példa

Oldjuk meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{2x-7} \cdot (x^2 - 3x - 10) < 0.$$

Megoldás

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $x \geq 3,5$.

Egy kéttényezős szorzat csak úgy lehet negatív, ha a tényezők ellentétes előjelűek. Mivel a négyzetgyökök értéke nem lehet negatív, ezért a másodfokú kifejezésnek kell negatívnak lennie.

A feladat ekvivalens a következő egyenlőtlenség-rendszerrel:

$$\sqrt{2x-7} > 0 \quad \text{és} \quad (x^2 - 3x - 10) < 0.$$

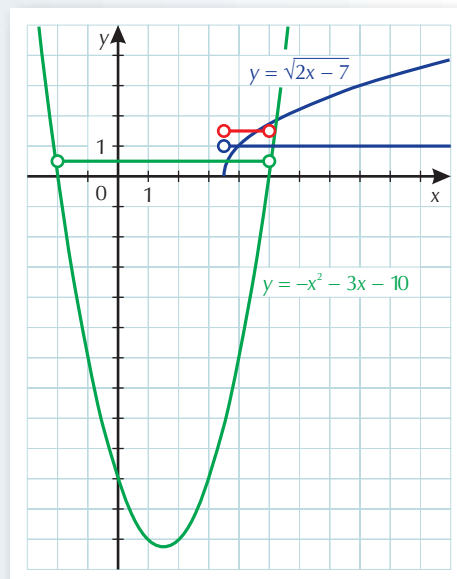
Az első egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x > 3,5$.

A második a zárójeles egyenlőtlenség két gyöke egybeesik a neki megfelelő másodfokú függvény zérushelyével. A másodfokú függvény előjele a két zérushely között lesz negatív, ezért a fenti egyenlőtlenségnek is ugyanazon az intervallumon lesz negatív az előjele.

$(x^2 - 3x - 10) = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, tehát a második egyenlőtlenség külön az $]-2; 5[$ intervallumon teljesül.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása a két intervallum metszete lesz.

$$x \in]3,5; \infty[\cap]-2; 5[=]3,5; 5[.$$



FELADATOK

1. K1

Oldjuk meg grafikus módszerrel a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x} = |x|$;

b) $\sqrt{x+2} = 2-x$;

c) $\sqrt{x-1} = -x^2 + 4x + 1$.

2. K1

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenleteknek a valós számok halmazán nincs megoldása!

a) $1 - |x+2| = \sqrt{x-2} + 3$;

b) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 1$.

3. K2

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{4-x} = 1,5$;

b) $\sqrt{x+5} = -4$;

c) $2\sqrt{7-2x} = 6$;

d) $5 - 2\sqrt{x+2,5} = -1$;

e) $\sqrt{1-2x+x^2} = 2x+5$.

Mi lehet a hiba?

„Bebizonyítjuk”, hogy $3 = 4$.Tudjuk, hogy $9 - 21 = 16 - 28$.

$$9 - 21 + 12 \cdot \frac{1}{4} = 16 - 28 + 12 \cdot \frac{1}{4},$$

$$3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

$$\left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2.$$

$$\text{Gyököt vonunk: } 3 - \frac{7}{2} = 4 - \frac{7}{2},$$

innen $3 = 4$. (?)

(Segítség a 235. oldalon.)

20. EXPONENCIÁLIS EGYENLETEK

Exponenciális egyenletről akkor beszélünk, ha a **hatványkitevőben szerepel az ismeretlen**. (Lehet, hogy a hatvány alapjában is van ismeretlen, ennek megoldása összetettebb feladat.)

Az exponenciális egyenletek megoldása során is arra törekszünk, hogy lépésről lépésre egyszerűbb egyenletekhez jussunk, ahonnan a megoldás már könnyen adódik. A hétköznapi életben exponenciális egyenletek megoldására lehet szükségünk például banki ügyleteknél, kamatszámítás esetén.

Az ilyen típusú egyenletek megoldásához tudnunk kell, hogy az exponenciális függvények kölcsönösen egyértelműek, az egyenlőtlenségek megoldásához pedig ismernünk kell ezek monotonitási tulajdonságait.

Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = a^x$ függvény **szigorúan monoton növekedő**, ha a hatványalap 1-nél nagyobb ($a > 1$), és **szigorúan monoton csökkenő**, ha a hatványalap 1-nél kisebb pozitív szám ($0 < a < 1$).

1. példa

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^x = 243$;

d) $2 \cdot \sqrt{8^{3-7x}} = 16$;

b) $5^{x-2} = \sqrt{125}$;

e) $(7^{2x+1})^2 \cdot 49^{x-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{1-2x} \cdot 343$.

c) $\frac{(\sqrt{2})^x}{64} = \frac{8}{2^{-2}}$;

Megoldás

a) $3^x = 243$.

A legegyszerűbb típusoknál mindkét oldalt azonos alagra hozzuk: $3^x = 3^5$.

A 3^x függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $x = 5$.

A behelyettesítéssel kapjuk, hogy a megoldás helyes.

b) $5^{x-2} = \sqrt{125}$.

Írjuk fel mindkét oldalt 5 hatványaként: $5^{x-2} = 5^{\frac{3}{2}}$.

Az 5^x függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $x - 2 = \frac{3}{2}$, melynek megoldása $x = \frac{7}{2}$.

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe, láthatjuk, hogy a megoldás jó.

c) $\frac{(\sqrt{2})^x}{64} = \frac{8}{2^{-2}}$.

Minden hatványalakban szereplő szám felírható 2 hatványaként:

$$\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^6} = \frac{2^3}{2^{-2}}.$$

Az azonos alapú hatványok osztására vonatkozó azonosságot használva

$$2^{\frac{x}{2}-6} = 2^{3-(-2)}.$$

Az $x \mapsto 2^x$ exponenciális függvény kölcsönösen egyértelműsége miatt

$$\frac{x}{2} - 6 = 5, \text{ amelyből}$$

$$x = 22.$$

d) $2 \cdot \sqrt{8^{3-7x}} = 16$.

Írjuk mindkét oldalt azonos alakra:

$$2 \cdot \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{3-7x} = 2^4.$$

Hatvány hatványozása miatt

$$2 \cdot 2^{\frac{3 \cdot (3-7x)}{2}} = 2^4.$$

A bal oldalon azonos alapú hatványok szorzását az azonosság alkalmazásával átírhatjuk:

$$2^{1+\frac{3 \cdot (3-7x)}{2}} = 2^4, \text{ amelyből } x \mapsto 2^x \text{ exponenciális függvény kölcsönösen egyértelműsége miatt}$$

$$1 + \frac{9-21x}{2} = 4.$$

$$\text{Innen már mérlegelvvel meghatározhatjuk a megoldást: } x = \frac{1}{7}.$$

Számolással ellenőrizhető, hogy a kapott érték gyöke az egyenletnek.

e) $(7^{2x+1})^2 \cdot 49^{x-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{1-2x} \cdot 343$.

Átalakítva az egyenletet a hatványozás azonosságainak felhasználásával

$$7^{4x+2} \cdot 7^{2x-6} = 7^{2x-1} \cdot 7^3,$$

$$7^{6x-4} = 7^{2x+2}.$$

Az $x \mapsto 7^x$ exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, amelyből következik a kitevők egyenlősége.

$$6x - 4 = 2x + 2, \quad x = 1,5.$$

Az $x = 1,5$ igazgá teszi az eredeti egyenletet.

Összetettebbek azok az exponenciális egyenletek, ahol hatványok összege szerepel az egyenlet valamelyik oldalán. Ezekben az esetekben vigyázni kell az összevonásokra. Célszerű új ismeretlent bevezetni, hogy átláthatóbb legyen a műveletvégzés sorrendje. Ilyen típusú egyenleteknél gyakran van szükség a hatványkitevő szétbontására a megfelelő hatványazonosság alkalmazásával.

Emlékeztetőül:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m;$$

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}, \quad a \neq 0 \quad (n, m \text{ valós számok mindkét esetben}).$$

2. példa

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 39;$

b) $25^x - 5^{x+1} + 10 = 3 \cdot 5^x - 5;$

c) $4^{\frac{x+1}{2}} + 2^{3-x} = 17.$

Megoldás

a) Használjuk fel az előbb elsőként felírt azonosságot:

$$3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 9 = 39.$$

Kiemelve 3^x -t:

$$3^x \cdot (1 + 3 + 9) = 39,$$

$$3^x \cdot 13 = 39.$$

A $3^x = 3$ típusú alapegyenletet kapjuk, amelyből

$$x = 1.$$

Behelyettesítéssel igazolhatjuk a megoldás helyességét.

b) A hatványok mindegyike átírható 5^x segítségével:

$$25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2,$$

$$(5^x)^2 - 5^x \cdot 5 + 10 = 3 \cdot 5^x - 5.$$

Vezessünk be új ismeretlent: $y = 5^x$. Így az egyenlet

$$y^2 - 8y + 15 = 0 \text{ alakú lesz.}$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$y_1 = 5; \quad y_2 = 3.$$

Az x értékét megkaphatjuk, ha visszahelyettesítünk.

$$\text{Ha } 5^x = 5 \Rightarrow x = 1.$$

Ha $5^x = 3$, akkor a jobb oldal nem írható fel egyszerűen 5 hatványaként, ezért az ilyen típusú egyenleteknél logaritmus segítségével határozzuk meg x értékét.

$$\lg 5^x = \lg 3 \Rightarrow x \cdot \lg 5 = \lg 3 \Rightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 5} \approx 0,6826.$$

Mindkét megoldás jó, a második gyöknél közelítő értékkel tudunk számolni.

(Alkalmazhatjuk közvetlenül a logaritmus definícióját is: $5^x = 3 \Rightarrow x = \log_5 3$.)

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

c) Az azonosságok felhasználásával átírjuk a bal oldalt:

$$4^{\frac{x+1}{2}} = 2^{\frac{2x+1}{2}} = 2 \cdot (2^x),$$

$$2 \cdot (2^x) + \frac{2^3}{2^x} = 17.$$

Vezessük be az $y = 2^x$ -t, ekkor az egyenlet

$$2 \cdot y + \frac{8}{y} = 17 \text{ alakú lesz.}$$

Átalakítva

$$2 \cdot y^2 + 8 = 17y,$$

$$2 \cdot y^2 - 17y + 8 = 0$$

egyenletet kapjuk, melynek gyökei $y_1 = 8$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

Visszahelyettesítve

$$2^x = 8 \Rightarrow x = 3, \text{ illetve } 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1.$$

Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve meggyőződhetünk a gyökök helyességéről.

3. példa



A PP Bank kedvező ajánlatot kínál a náluk pénzt elhelyezni kívánó ügyfeleknek.

A bank évi 18%-os kamatot ajánl, és félévente tőkésítik a kamatot.

A megnövekedett pénzösszeget az $A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2 \cdot n}$ képlet segítségével számolhatjuk, ahol:

A_n : az n . év végén (időszak végén) esedékes pénzösszeg,

A_0 : a kezdeti pénzösszeg,

p : az éves kamatláb,

n : az évek száma.

a) Mennyi pénzre számíthatunk, ha 4 évre szeretnénk lekötni 1 200 000 Ft-ot?

b) Mennyi idő elteltével lesz 2 000 000 Ft a bankban elhelyezett pénzből?

Megoldás

a) Helyettesítsünk a megadott képletbe.

$$A_4 = 1\,200\,000 \cdot \left(1 + \frac{9}{200}\right)^{2 \cdot 4} = 1\,200\,000 \cdot 1,4221 = 1\,706\,520 \text{ Ft lesz az elhelyezett összeg kamattal megnövelt értéke.}$$

b) Használjuk a megadott képletet. Ekkor az alábbi exponenciális egyenlethez jutunk:

$$2\,000\,000 = 1\,200\,000 \cdot \left(1 + \frac{9}{200}\right)^{2 \cdot n}.$$

Ennek megoldását próbálgatással is meghatározhatjuk, hiszen pozitív egész számokról van szó, és az évek száma 4-nél nagyobb.

Megoldhatjuk azonban a már mutatott logaritmusos eljárással is.

$$2 = 1,2 \cdot \left(1 + \frac{9}{200}\right)^{2 \cdot n}, \text{ azaz } \frac{2}{1,2} = \left(1 + \frac{9}{200}\right)^{2 \cdot n}.$$

Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát.

$$\lg \frac{2}{1,2} = 2n \cdot \lg \left(1 + \frac{9}{200}\right),$$

$$2n = \frac{\lg \frac{2}{1,2}}{\lg 1,045} \approx 11,60,$$

$$n \approx 5,8.$$

6 év elteltével lesz 2 000 000 Ft a bankban.

Segítség a hibás „bizonyításokhoz”

218. oldal: 0-val nem szabad osztani.

231. oldal: alkalmazzuk a $\sqrt{x^2} = |x|$ azonosságot.

FELADATOK

1. K1

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $7^x = 7 \cdot 7^4$;

d) $11^{7+2x} = 1$;

b) $(5^x)^5 = 5^2$;

e) $11^{4-2x} = 0$;

c) $\frac{2^x}{32} = \frac{2}{2^{-3}}$;

f) $\sqrt{3}^{2x+3} = 27$.

2. K1

Van-e az alábbi egyenleteknek megoldása az egész számok halmazán?

a) $2^{x+2} + 2^x = 640$;

b) $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-5} = \left(\frac{7}{2}\right)^{3-x}$.

3. K1

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^{2x^2} \cdot 2^x = 4^{1,5x+2}$;

b) $(\sqrt{3})^{5x^2+9x-2} = 1$.

4. K1

Az erdők természetes szaporulata 1,5%. Ez azt jelenti, hogy egy év alatt a faállomány 1,5%-kal növekszik. Feltételezve, hogy számottevő fakipusztulás nincs, mennyi idő alatt növekedne 50%-kal egy 200 000 köbméteres állomány?

5. K1

Egy 1 000 000 fős város lakossága 0,1%-kal csökken évente. 10 év múlva mennyi lesz a város lakossága százasokra kerekítve?



21. LOGARITMUSOS EGYENLETEK

Logaritmusos egyenletek megoldásánál is szükséges az **értelmezési tartomány vizsgálata**, azaz a kikötés megtétele. Az azonosságok alkalmazása során nem biztos, hogy ekvivalens lépéseket végzünk, ezért az ellenőrzésnek is fontos szerepe van. A megoldás során tudnunk kell a logaritmus definícióját és az azonosságokat. Sokszor használjuk a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelműségét.

$f: \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}, f(x) = \log_a x$ függvény **szigorúan monoton növekvő**, ha $a > 1$; és **szigorúan monoton csökkenő**, ha $0 < a < 1$.

1. példa

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

a) $\log_{32} x = 2$; b) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$; c) $\log_6 (x^2 + 2) = 2$; d) $\log_{\sqrt{2}} x = -2$.

Megoldás

Alkalmazzuk a logaritmus definícióját!

a) $x = 32^2 = 1024$; b) $x = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$; c) $x^2 + 2 = 6^2$,
 $x = \pm\sqrt{34}$; d) $x = \sqrt{2}^{-2} = \frac{1}{2}$.

2. példa

Adjuk meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $\log_5 (x - 2) + \log_5 8 = 2$;
 b) $\log_3 (x^2 - 7x + 9) = 3$;

Megoldás

a) Kikötés megtétele után alkalmazzuk a logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot. (Az azonosságok megtalálhatók a tankönyv 200. oldalán.)

$x - 2 > 0$, amelyből $x > 2$.

$\log_5 ((x - 2) \cdot 8) = 2$,

$\log_5 ((x - 2) \cdot 8) = \log_5 25$.

Az ötös alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért

$(x - 2) \cdot 8 = 25$, amelyből $x = \frac{41}{8}$.

A kapott eredmény a kikötésnek megfelel, és behelyettesítve igazolhatjuk, hogy jó a megoldás.

Rejtvény – trükkös feladatok

Az alábbi exponenciális, logaritmusos feladatok megoldásához speciális módszereket kell alkalmazni. (Az eredmények a 238. oldalon találhatók.)

- $\sqrt{5 - 2x} = \log_{0,4} (x - 3,5)$
- $6 - \log_3 (x + 5) = x$
- $0,3^{x-2} = -|2x + 1|$
- $3^{x-2} = -2x + 9$
- $-|x| + 11 = \log_2 x$
- $2 - \sqrt{x - 3} = \log_6 (12x)$
- $2 + \sqrt{x - 3} = \log_{0,5} \frac{x}{12}$
- $3^{x-1} + \log_2 (x + 1) = 11$
- $3 - 2(x + 1)^2 = 2,7^x + \sqrt{x}$
- $2^{x-1} + \sqrt{x - 4} \leq 8$
- $1 - y^2 = 5^{|4-3x|}$
- $2(x - 1)^2 + 3\sqrt{y + 2} + 3^{|z+1|} = 3$

$$b) x^2 - 7x + 9 = 0, \text{ ha } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$x^2 - 7x + 9 \text{ pozitív, ha } x < \frac{7 - \sqrt{13}}{2}, \text{ vagy ha}$$

$$x > \frac{7 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\log_3(x^2 - 7x + 9) = \log_3 27.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő:

$$x^2 - 7x + 9 = 27,$$

$$x_1 = -2; x_2 = 9.$$

Mindkét megoldás az eredeti egyenletnek is megoldása.

3. példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$$a) 2^x = 100;$$

$$b) \lg(x - 2) + \lg(3x + 1) = 1;$$

$$c) 2 \cdot \log_2(x + 3) - \log_2(x - 1) = 4.$$

Megoldás

$$a) 2^x = 100$$

Mindkét oldalt 10-es alapú logaritmusra emelve:

$$\lg 2^x = \lg 100,$$

amelyből

$$x = \frac{2}{\lg 2} \approx 6,64.$$

$$b) \lg(x - 2) + \lg(3x + 1) = 1$$

Mivel csak a pozitív számoknak van logaritmus, ezért az $x - 2 > 0$ és a $3x + 1 > 0$ egyenlőtlenségeknek teljesülnie kell. Ezért az egyenlet értelmezési tartománya $x > 2$.

A logaritmus azonosságainak és definíciójának felhasználásával elérjük, hogy mindkét oldalon egyetlen kifejezés tízes alapú logaritmus, szerepeljen.

$$\lg(x - 2) \cdot (3x + 1) = \lg 10.$$

A logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, tehát

$$(x - 2) \cdot (3x + 1) = 10,$$

$$3x^2 - 5x - 12 = 0.$$

$$\text{A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján } x_1 = 3, x_2 = -\frac{4}{3}.$$

Az egyenlet értelmezési tartománya miatt x_2 nem megoldás. Az x_1 megoldása az egyenletnek, erről az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

$$c) 2 \cdot \log_2(x + 3) - \log_2(x - 1) = 4$$

Mivel csak a pozitív számoknak van logaritmus, ezért $x + 3 > 0$ és $x - 1 > 0$. Ezért az egyenlet értelmezési tartománya $x > 1$.

A logaritmus azonosságait felhasználva:

$$\log_2 \frac{(x + 3)^2}{x - 1} = \log_2 16.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedése miatt fennáll

$$\frac{(x+3)^2}{x-1} = 16,$$

amelyből $x^2 + 6x + 9 = 16x - 16$,

ahonnan $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Az egyenlőség bal oldala teljes négyzetté alakítható:

$$(x-5)^2 = 0,$$

$$x-5 = 0,$$

$x = 5$, ez megfelel a kikötésünknek.

Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy tényleg az egyenlet megoldását kaptuk meg.

A 236. oldal feladatainak eredményei:

1. Nincs megoldás.
2. $x = 4$.
3. Nincs megoldás.
4. $x = 3$.
5. $x = 8$.
6. $x = 3$.
7. $x = 3$.
8. $x = 3$.
9. $x = 0$.
10. $x = 4$.
11. $(x; y) = \left(\frac{4}{3}; 0\right)$.
12. $(x; y; z) = (1; -2; 0)$.

4. példa

Hány jegyű a jelenleg (2022. június) ismert legnagyobb prímszám, ami $2^{82\,589\,933} - 1$? Ez egy úgynevezett Mersenne-prím, ami azt jelenti, hogy $2^n - 1$ alakú, ahol az n is prímszám. Ilyen például a 31, ami $2^5 - 1$ -gyel egyenlő. A prímszámok keresése a legnagyobb teljesítményű számítógépek segítségével folyamatosan történik.

Megoldás

Minden háromjegyű számra igaz, hogy $10^2 < \overline{abc} \leq 10^3$, és általánosan is igaz, hogy egy n jegyű szám nagyobb, mint 10^{n-1} , és kisebb vagy egyenlő, mint 10^n .

Ha az egyenlőtlenség mindhárom elemének vesszük a tízes alapú logaritmusát, akkor az egyenlőtlenség iránya nem változik, hiszen a 10-es alapú logaritmus x függvény szigorúan monoton növekvő. Tehát, ha meghatározzuk a szám tízes alapú logaritmusát, akkor megtudjuk, hogy hány jegyű.

$\lg(2^{82\,589\,933} - 1) \approx \lg 2^{82\,589\,933} = 82\,589\,933 \cdot \lg 2 \approx 24\,862\,047$ (az eggyel kisebb szám logaritmusában lényegében ugyanennyi).

Tehát 24 862 048 jegyű ez a szám. Ha ezt a számot leírnánk a szokásos betűmérettel, akkor egy 124 km hosszú számot kapnánk.

FELADATOK

1. E1

Határozzuk meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $\log_7 x = 2$; b) $\log_{16} x = \frac{1}{2}$; c) $\lg x = -\frac{1}{3}$; d) $\log_2(x^2 - 4) = 5$.

2. E1

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_7(x-1) + \log_7 6 = 2$;

b) $\log_{11}(x^2 + x + 5) = 1$.

22. GYAKORLATI FELADATOK

Az egyenletek megoldása általában nem öncélúan történik. A műszaki, közgazdasági tudományterületeken vagy a társadalmi folyamatok elemzésekor a vizsgált összefüggések gyakran egyenletek segítségével írhatók fel.

Nézzünk ezekre példát. Lesznek olyan feladatok is, amelyekben a valóságot leíró összefüggést közleltettük, modelleztük, mert így a számolás egyszerűbb. A valódi összefüggéseket tartalmazó egyenleteket gyakran csak számítógépek segítségével lehet megoldani.

1. példa

Egy laboratóriumban egy vírus szaporodását figyelték meg. 20 edényben különböző fényviszonyokkal, de egyébként azonos feltételek mellett vizsgálták a vírusok szaporodását. Kiderült, hogy a fénymennyiségtől független a szaporodási sebességük, és 1 hét alatt háromszorozódnak. A kísérlet 8 hétig tartott.

- Hány vírus volt a tárolóedényekben a kísérlet végén, ha eredetileg minden edényben 1 vírust helyeztek el?
- Írjunk fel összefüggést a vírusok száma és az eltelt idő között, ha t a hetek száma, V_0 jelöli a kezdeti vírusszámot, $V(t)$ a t hét elteltével élő vírusok számát!



Megoldás

a) Írjuk fel, hány vírus volt az egyes eltelt hetek végén!

- | | |
|---------------|---|
| 1. hét végén: | $20 \cdot 3 = 60$ db; |
| 2. hét végén: | $20 \cdot 3 \cdot 3 = 20 \cdot 3^2 = 180$ db; |
| 3. hét végén: | $20 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 20 \cdot 3^3 = 540$ db. |

Hasonlóan adódik, hogy a nyolcadik hét végén: $20 \cdot 3^8 = 131\,220$ db vírus volt.

Látható, hogy a nyolcadik hét végén $20 \cdot 3^8 = 131\,220$ db vírus volt összesen, így egy-egy tárolóban 6561 vírus volt.

b) A keresett összefüggés $V(t) = V_0 \cdot 3^t$, mint látható, az edények számától függetlenül.

2. példa

A Karcsúsító Bank a lekötött betétek után minden év végén $p = 7\%$ kamatot fizet. 2021. január első munkanapján 1 200 000 Ft-ot tettünk be a bankba.

- Mennyi pénzünk lesz 5 év elteltével?
- Hány év elteltével duplázódik meg a betett pénzünk?

Megoldás

Használjuk fel a következő összefüggéseket:

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad (\text{a kamatos kamatozás alaképlete});$$

A_n : az n . év végén (időszak végén) esedékes pénzösszeg;

A_0 : a jelenlegi pénzösszeg;

p : a kamatláb;

n : az évek száma.

$$a) A_5 = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5,$$

$$A_5 = 1\,200\,000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^5 = 1\,683\,062 \text{ Ft.}$$

$$b) 2\,400\,000 = 1\,200\,000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^n,$$

$$\text{ahonnan } 2 = 1,07^n.$$

$$\text{Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve kapjuk: } n = \frac{\lg 2}{\lg 1,07} \approx 10,24.$$

Tehát tíz év kevés ahhoz, hogy megduplázódjon a pénzünk, de 11 év bőven elegendő.

3. példa

A Föld légkörében a nyomást a magasság függvényében közelítő összefüggést a $p(h) = p_0 \cdot 2,7^{-0,2h}$ függvény adja meg, ahol a $p_0 = 10^5$ Pa a tengerszinten mért légnyomás, h -t pedig km-ben mérjük.

a) Mekkora a légnyomás 3600 m magasságban?

b) Hány %-kal csökken a ránk nehezedő légnyomás, ha a tengerszint felett 1150 méter magasban fekvő táborhelyről felmegyünk a Magas-Tátrában lévő Gerlachfalvi-csúcsra (amelynek tengerszint feletti magassága 2655 m)?



Megoldás

a) Váltuk át a megadott magasságot km-be, majd használjuk a képletet:

$$p(3,6) = 10^5 \cdot 2,7^{-0,2 \cdot 3,6} \approx 4,9 \cdot 10^4 \text{ Pa-ra csökkent a nyomás. (Ebben a magasságban feleakkora a nyomás, mint a tengerszinten.)}$$

b) Az előző részben alkalmazott képletet használva számítsuk ki mindkét magasságban a nyomást.

$$1150 \text{ m-en a nyomás: } p(1,15) = p_0 \cdot 2,7^{-0,2 \cdot 1,15} \approx 7,96 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

$$2655 \text{ m-en a nyomás: } p(2,655) = p_0 \cdot 2,7^{-0,2 \cdot 2,655} \approx 5,90 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

A két légnyomás különbsége $2,06 \cdot 10^4$ Pa.

$$\frac{2,06 \cdot 10^4}{7,96 \cdot 10^4} \approx 0,26.$$

26%-kal csökkent a nyomás, amikor felértünk a csúcsra.

4. példa

A radioaktív bomlások során a tudósoknak tudniuk kell, hogy az idő múlásával hány darab elbomlott, illetve el nem bomlott atom van az adott közegben. Ha a 0 időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még

bomlatlan atomok száma $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ lesz. T az adott anyagra jellemző felezési idő.

A polónium-210 felezési ideje 136 nap.

a) 1 év alatt hányad része bomlik el a polóniumatomoknak?

b) Mennyi idő alatt bomlik el a polóniumatomok 40%-a?



Megoldás

a) Az elbomlatlan atomok száma:

$$N(1 \text{ év}) = N_0 \cdot 2^{-\frac{365}{136}} = N_0 \cdot 0,1556. \text{ Tehát } 15,6\% \text{ maradt elbomlatlan.}$$

b) A megismert képletben az el nem bomlott atomok számára vonatkozó összefüggés szerepel, ezért ezzel kell dolgoznunk. A bomlatlan atomok száma ekkor 60%. A feltételek szerint $N(t) = N_0 \cdot 0,6$,

$$\text{ezért } N_0 \cdot 0,6 = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{136}}.$$

$$\text{Oldjuk meg az egyenletet: } 0,6 = 2^{-\frac{t}{136}}.$$

$$\text{Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve, majd } t\text{-t kifejezve kapjuk: } t = -136 \cdot \frac{\lg 0,6}{\lg 2} \approx 100.$$

A polóniumatomok 40%-a körülbelül 100 nap alatt bomlik el.

FELADATOK

1. K1

A bankba tett 500 000 Ft után évi 9%-os kamatot írnak jóvá.

a) Három év után hány Ft-ot ad a bank?

b) Hány év múlva nő 1,5-szeresére a betett összeg?

2. K1

A családi banknál lekötöttünk 1 000 000 Ft-ot éves lekötésre.

Mennyi volt az éves kamat, ha 4 év elteltével ezresekre kerekítve 1 286 000 Ft-ot vehettünk fel a banktól?

3. K1

2011-ben a Föld lakossága kb. 7 milliárd fő. Egyes előrejelzések szerint 2050-ben várható, hogy a lakossága 9 milliárd fő lesz.

Hány százalékos az évi növekedés, ha feltételezzük, hogy a növekedés mértéke egyenletes?

4. K2

Hazánk 2010-ben 9,99 milliós lakossága az előrejelzések szerint 2050-ben már csak 7,6 millió fő lesz. Milyen mértékű a csökkenés %-ban megadott értéke, ha a csökkenést egyenletesnek feltételezzük?

5. K2

A *tórium-234* radioaktív anyag, amelynek felezési ideje 24 nap. (A *T felezési idő* az az időtartam, amely alatt a radioaktív anyag atomjainak a fele bomlik el.) Ha egy adott időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan

atomok száma $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ lesz, ahol T az adott anyagra jellemző felezési idő.

a) 120 nap alatt hányad része bomlik el a tóriumatomoknak?

b) Mennyi idő alatt bomlik el az atomok 75%-a?

AZ ÍRÁSBELI MUNKA NÉHÁNY JELLEMZŐJE: ELLENŐRZÉS, VÁLASZ, VÉGEREDMÉNY, PONTOS ÉRTÉK AZ ÉRETTSÉGI VIZSGÁN (Olvasmány)

Az **ellenőrzés** fogalmát többféleképpen használjuk. A mindennapi munkánk során ez jelentheti a számolási próbát, a hibakeresést, a megerősítő példák alkalmazását, de matematikai értelemben általában ennél többről van szó.

A matematikafeladatok egy részét egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek láncolatának felírásával oldjuk meg. A megoldás záró lépéseként elvileg mindig meg kell győződnünk arról, hogy a feladat kérdésére adott válaszuk megfelelő.

Az $A = 0 \Rightarrow B = 0$ egyenletek **következményátalakítása** során hamis gyökök keletkezhetnek, így az eredményül kapott számokat **ellenőrizni** kell. Ekkor a $B = 0$ megoldásait **visszahelyettesítjük** az eredeti $A = 0$ egyenletbe, s meggyőződünk arról, hogy teljesül-e az egyenlet.

Az $A = 0 \Leftrightarrow B = 0$ **ekvivalens átalakítás** során nem veszítünk gyököt, és nem kapunk hamis gyököket sem. Ekkor a kapott megoldások az eredeti egyenletnek is gyökei. A feladatmegoldást ilyenkor kétféleképpen fejezhetjük be. Alkalmazhatjuk most is a **visszahelyettesítést**, vagy **megállapíthatjuk az ekvivalens átalakítások tényét**.

Az ellenőrzés szűkebb értelmezése a visszahelyettesítést jelenti, de tágabb értelemben ellenőrzésnek nevezzük az ekvivalens átalakításokra való hivatkozást is. Például ezzel összhangban az írásbeli érettségi vizsgán a kikötésért (alaphalmaz meghatározása) és az ekvivalenciára való hivatkozásért járó pontot visszahelyettesítés esetében is megkapja a vizsgázó.

A „tisza” (nem szöveges feladtból származó) egyenletek megoldása esetében a fenti eljárás egyértelmű, de **szöveges feladatok** esetén a helyzet bonyolultabb. Ekkor ugyanis a szöveg „kódolásaként” kapjuk a megoldandó egyenletet, egyenletrendszert, és ez a kódolási lépés általában nem ekvivalens. (Egy feladatot és egy egyenletet ekvivalensnek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk megegyezik.)

A szöveg alapján tehát **felállítunk egy modellt**; az itt felírt **egyenlettel** kezeljük a problémát; majd a kapott eredményt **ellenőrizzük**. De hogyan?

Nyilván nem elegendő a felírt „tisza” egyenlet megoldását ellenőrizni (visszahelyettesítéssel vagy ekvivalenciahivatkozással), hiszen előfordulhat, hogy a kapott eredmény nem értelmes a modellben. (Ekkor a feladat szövege és az egyenlet nem ekvivalensek.) Ezért az ellenőrzést a **szövegbe való visszahelyettesítéssel** tehetjük meg.

A matematika minden témakörében vannak olyan feladatok, ahol **az egyenleteket eszközként alkalmazzuk**, különösebb modellalkotás nélkül (szinusztétel alkalmazása, alakzatok metszéspontjának meghatározása, valószínűségi egyenlet felírása stb.). Az egyenletekkel általában már létező objektumok közötti kapcsolatokat írunk le. A kialakult gyakorlat alapján az érettségi vizsgán ilyenkor nem végzünk ellenőrzést, hiszen az sem szerencsés, ha az ellenőrzés túlreprezentált a feladatmegoldás során.

A modell érvényességének vizsgálatára ekkor is szükség lehet, és ez néha egyáltalán nem könnyű.

Egyenlőtlenségek esetében az eredmény általában egy intervallum, tehát a gyökök halmaza végtelen. Mivel ezek ellenőrzése nem lehetséges, így a megoldás során szükségképpen ekvivalens lépéseket kell tenni. (A következményátalakítások elvi hibásak.) Tehát minden lépésben vizsgálni kell az alaphalmaz változását (ha felvetődik a kikötés lehetősége, akkor az elengedhetetlen), az átalakítások ekvivalens voltát stb. Mivel a megoldási sorok egymás után írása megállapodás alapján következménylepéseket jelent, így az ekvivalens lépéseket külön jelezni kell a megoldás közben, szöveggel vagy jelöléssel.



Egyenletrendszerek esetében az egyenletekből leggyakrabban **egyenletet** állítunk elő. Ez a lépés általában nem ekvivalens, még a legegyszerűbb esetekben sem (egyik változó kifejezése, egyenletet adó lineáris kombinációk alkalmazása stb.). Az egyenletrendszerek ekvivalenciája nehéz témakör, elmélete túlmutat a középiskolás tananyagon; ellenőrzéskor ezért **az összes eredeti egyenletbe vissza kell helyettesítenünk**.

Az érettségi dolgozatok előlapján szerepel a következő mondat: „A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!”

Alapelv, hogy szöveges kérdésre szöveges választ kell adni, de egyébként az utasítás **nem írja elő, hogy egész mondatlall kell válaszolni**. Általában elegendő a megoldás utolsó lépését néhány szóval kiegészíteni. Ekkor persze az ellenőrzés csak a válasz megadása után lehetséges, de ez a kis logikátlan-ság elfogadott.

A feladatok végeredménye lehet **pontos érték** (pl. $\frac{2}{3}$, $1 + \sqrt{2}$), de viszonylag egyszerű alakúnak kell lennie, és nem tartalmazhat túl sok műveleti jelet. Elfogadott a közelítő (kerekített) értékek megadása is, de ellenőrzésként **visszahelyettesíteni csak pontos értéket lehet**. A közelítő értékekkel történő ellenőrzés „kb. egyenlő” eredménye nem fogadható el teljes értékű megoldásnak. Például egy trigonometrikus egyenlet $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (végtelen számú) eredményét elvileg csak ebben az irracionális alakban és csak a periódussal együtt helyettesíthetjük vissza. Mivel hasonló esetekben a visszahelyettesítés nagyon nehézkes, ezért érdemes inkább az ekvivalens átalakításokra hivatkozni. (Szerencsére a túlságosan egyszerű vagy túl bonyolult visszahelyettesítéseket általában nem követelik meg az érettségi vizsgán.)

Az alábbi gyakorlófeladatokban fontos a **modell érvényességének az ellenőrzése**.

Idézet

Javításra idődet ne sajnáld. A javítás is alkotás. Gyöngy, gyémánt, ha csak borsónyi is, értékesebb magánál a koronánál. S ha egy nap csak egy gyémántszemet alkotsz is, egy mondatban vagy csak egy szóban: gyűrűbe illesztettél drágakövet.

(Gárdonyi Géza Titkos naplójából)

FELADATOK

1. K1

a) Három vasúti kocsiban összesen 26 utas van. Tudjuk, hogy a harmadik kocsiban a másodikban lévők kétszeresénél 6-tal vannak kevesebben; valamint azt, hogy ha az első kocsiból átszáll 5 ember a másodikba, akkor a második és harmadik kocsiban ugyanannyian lesznek. Hány utas van a második kocsiban?

b) Ugyanez a feladat, csak most a három vasúti kocsiban összesen 30 utas van.

2. K2

Egy háromszög oldalainak hosszai számtani sorozatot alkotó, különböző, egyjegyű egész számok. Hányféle értéket vehet fel a háromszög kerülete?

3. K2

Az $ABCD$ négyszög oldalhosszai a , a , b , c , ahol az $a < b < c$ oldalak mértani sorozatot alkotnak. Mennyi lehet a mértani sorozat hányadosa, ha $4c + 15a = 16b$?

4. K2

Egy stadion B lelátójának a nézőtere szimmetrikus trapéz alaprajzú, a széksorok a játéktértől távolodva rövidülnek. A leghátsó sorban 237 szék van, és minden megelőző sorban 3-mal kevesebb, mint a mögötte lévőben. A precíz szervezők pontosan megszámolták, hogy a B lelátón 9435 néző fér el. Hány széksor található ezen a területen?

5. K2

Határozzuk meg b értékét az alábbi egyenletrendszerekből!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} |a - 2| = 5 \\ 3a - b = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} |a - 2| = b \\ 2a + b = 0 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} |b - 2| = a \\ 2b + a = 0 \end{cases} \end{array}$$

GEOMETRIA

Ismétlés

9/II., VI.; 10/IV., VI.;
11/III.; 12/III., IV.

23. GEOMETRIAI ALAPFOGALMAK, PONTHALMAZOK

A geometriai összefoglalás megkezdésekor először a felépítésről szólnunk néhány szót.

Felsoroljuk az **alapfogalmakat**, amelyeket nem definiálunk, de azt várjuk, hogy mindenki ugyanazt értse rajtuk. Ilyen alapfogalmak: a pont, az egyenes, a sík és a tér, valamint az illeszkedés fogalma.

Kimondunk rájuk a szemléletünkkel megegyező állításokat, amelyeket elfogadunk bizonyítás nélkül. Ezeket az állításokat **axiómáknak** nevezzük.

Mi az euklideszi axiómarendszert használjuk. Ennek leghíresebb axiómája a párhuzamossági axióma, amely azt mondja ki, hogy egy egyenessel egy adott, rá nem illeszkedő ponton át csak egy párhuzamos egyenes húzható. *Bolyai János* (1802–1860) ennek az axiómának az ellentettjét feltételezve – azaz axiómának tekintve – fedezte fel az ő új világát, a Bolyai-geometriát. Vele egy időben hasonló rendszert épített fel *Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij* (1792–1856) orosz matematikus is.

Az alapfogalmak és az axiómák segítségével **definiálunk új geometriai fogalmakat**, mint például a félegyenes, szakasz, szög, háromszög, sokszög, kör stb. Ezek származtatott fogalmak, de mi röviden csak **fogalmaknak** nevezzük majd őket.

Ezekre az **új fogalmakra** is kimondhatunk **állításokat**, de ezeket már bizonyítani is kell. Ezek a **tételek**. Középiskolában ez a precíz, aprólékos út túl nehéz lenne számunkra, ezért nem definiálunk minden új fogalmat (például szakasz), és nem bizonyítunk minden tételt.

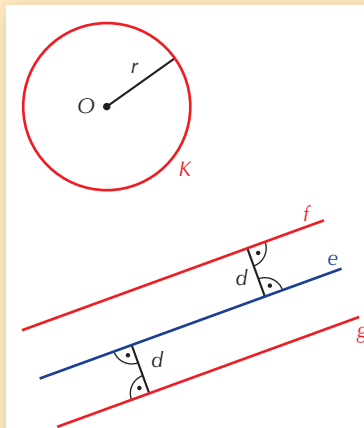
NEVEZETES PONTHALMAZOK A SÍKON

Felsoroljuk a sík fontosabb, nevezetes pontthalmazait.

1. Egy megadott ponttól megadott távolságra levő pontok halmaza a síkon a **kör**.

A körön belüli pontok az adott távolságnál kisebb távolságra (közelebb), a körön kívüli pontok az adott távolságnál nagyobb távolságra (messzebb) vannak a megadott ponttól.

2. Egy megadott egyenestől megadott távolságra levő pontok halmaza a síkon egy, az adott egyenessel **párhuzamos egyenespár**.

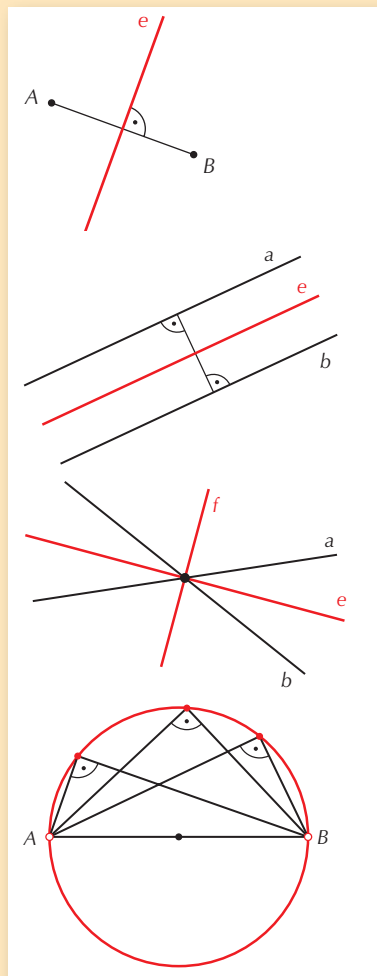


3. Két adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két pont által meghatározott **szakasz felezőmerőlegese**.

4. a) Két adott egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon, ha a két egyenes párhuzamos, akkor a két egyenes **középpárhuzamosa**.

b) Két adott metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két egyenes **két szögfelező egyenese**.

5. Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyekből egy adott AB szakasz derékszög alatt látszik, az AB átmérőjű kör (Thalész-kör), kivéve az A és B pontokat.



Megjegyzés

Az ötödik pontthalmaz általánosítása, ha keressük azoknak a pontoknak a halmazát a síkon, amelyekből egy adott AB szakasz tetszőleges α szög alatt látszik. Ha $0 < \alpha < 90^\circ$, akkor a keresett pontthalmaz két – az AB -re szimmetrikus – félkörnél nagyobb ívhosszú körív, míg ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, akkor a két szimmetrikus körív félkörívnél kisebb ívhosszú.

FELADATOK

1. K1

Adott egy konvex szög és szárjai között egy pont. Szerkesszünk a szög belsejében olyan pontot, amely a két szögszártól egyenlő távolságra van, a megadott ponttól pedig 3 cm-re!

2. K1

Szerkesszünk egyenest, amely egy megadott egyenessel párhuzamos, és egy megadott ponttól 4 cm-re van!

3. K1

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a szárhoz tartozó magassága!

4. K1

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szára és a hozzá tartozó magassága!

5.

Adott egy AB szakasz a síkon.

K1 a) Hol vannak azok a pontok a síkon, amelyek az A végponthoz közelebb vannak, mint B -hez?

K2 b) Hol vannak azok a C pontok a síkon, amelyekre az ABC háromszög hegyesszögű?

24. A GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓKRÓL

A geometriai transzformációk olyan kölcsönösen egyértelmű függvények, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

Tanulmányaink során a tengelyes tükrözést, a középpontos tükrözést, síkban a pont körüli elforgatást és az eltolást részletesen tárgyaltuk. Rövidebben vizsgáltuk a síkra történő tükrözést és a tengely körüli forgatást. Ezeket mint távolságtartó transzformációkat foglaltuk össze.

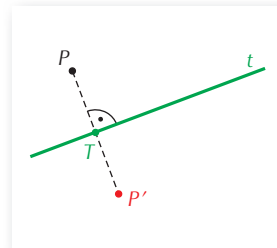
A távolságtartó transzformációkat **egybevágósági transzformációknak** nevezzük.

Egybevágósági transzformációk egymásutánja (szorzata) ismét egybevágósági transzformáció, mert közben két adott pont távolsága nem változhatott meg.

TENGELYES TÜKRÖZÉS



Tengelyes tükrözésnél adott a sík egy t egyenese. A sík P pontjához úgy rendeljük a képét, hogy ha P illeszkedik a t egyenesre, akkor a képe önmaga. Ha P nem illeszkedik a t egyenesre, akkor P képe olyan P' pont, hogy a PP' szakasz felezőmerőlegese a t egyenes legyen.

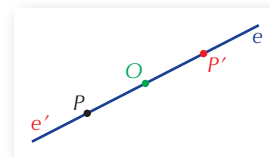


Tulajdonságai:

- E leképezés szimmetrikus: ha $P \rightarrow P'$, akkor $P' \rightarrow P$;
- az egyenes képe egyenes;
- a szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz (azaz távolságtartó);
- két egyenes képének a hajlásszöge egyenlő az egyenesek hajlásszögével (azaz a transzformáció szögtartó);
- egy síkidom és a képe egybevágó;
- egy síkidomnak és a képének a körüljárási iránya ellentétes.

KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

Középpontos tükrözésnél adott egy O középpont. Egy tetszőleges P ponthoz úgy rendeljük a P' képpontot, hogy ha P nem azonos az O -val, akkor a PP' szakasz felezőpontja O . Ha a P azonos az O -val, akkor a képe önmagá.

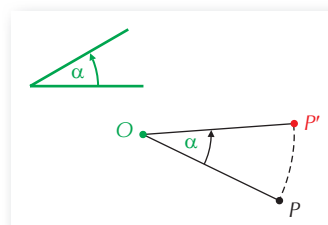


Tulajdonságai:

- E leképezés szimmetrikus: ha $P \rightarrow P'$, akkor $P' \rightarrow P$;
- az egyenes képe vele párhuzamos egyenes;
- az O -n átmenő egyenes képe önmagá;
- a szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz (azaz távolságtartó);
- két egyenes képének a hajlásszöge egyenlő az egyenesek hajlásszögével (azaz a transzformáció szögtartó);
- egy síkidom és a képe egybevágó;
- egy síkidomnak és a képének a körüljárási iránya azonos.

PONT KÖRÜLI ELFORGATÁS

Pont körüli elforgatásnál adott a sík egy fix O pontja, valamint nagyságával és irányával adott egy α szög. Pont körüli elforgatásnál a sík P pontjához úgy rendeljük a P' képpontot, hogy ha P azonos az O -val, akkor képe önmagá; ha nem, akkor a P pont képe az a P' pont, amelyre $OP' = OP$, és a POP' szög nagysága és iránya az adott α szög.

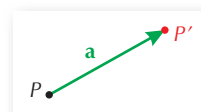


Tulajdonságai:

- Az egyenes képe egyenes;
- a szakasz képe vele egyenlő hosszúságú szakasz (távolságtartó);
- két egyenes képének a hajlásszöge egyenlő az egyenesek hajlásszögével (a transzformáció szögtartó);
- egy síkidom és a képe egybevágó;
- egy síkidomnak és a képének a körüljárási iránya azonos.

ELTOLÁS

Adott egy $\mathbf{a}$ vektor. **Eltolásnak** azt a geometriai transzformációt nevezzük, amelynél bármely P ponthoz a P kezdőpontú $\mathbf{a}$ vektor P' végpontját rendeljük.



Tulajdonságai:

- Az egyenes képe vele párhuzamos egyenes (az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos egyenes képe önmaga);
- a szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz (távolságtartó);
- két egyenes képének a hajlásszöge egyenlő az egyenesek hajlásszögével (a transzformáció szögtartó);
- egy síkidom és a képe egybevágó;
- egy síkidomnak és a képének a körüljárási iránya azonos.

Megjegyzés

Vizsgálhatjuk a térnek önmagára történő távolságtartó leképezéseit is. Ezek közül megemlítettük az identitást (helybenhagyás), a síkra való tükrözést, az egyenes körüli forgatást és az eltolást.

FELADATOK

1. K1

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengely, az azon lévő csúcs, továbbá a másik két csúcsára illeszkedő egy-egy egyenes! Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a két egyenes helyett például egy kör és egy egyzet adott!

2. K1

Egy háromszögnek két csúcsa és a harmadikból induló belső szögfelezője van a rajzlapon. Szerkesszük meg a háromszöget!

3. K1

Tükrözzünk egy szabályos háromszöget a középpontjára! Mi lesz az eredeti és a tükrözött háromszög közös része?

4. K1

Egy szög szárai között adott egy A pont. Szerkesszük meg azt a szabályos ABC háromszöget, melynek B és C csúcsai a szög szárain vannak!

5. K2

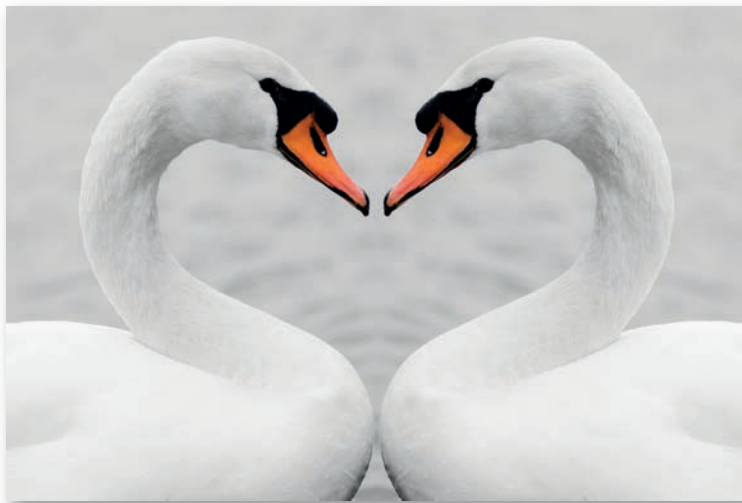
Vegyünk fel két egyenlő hosszúságú szakaszt, amelyek nem párhuzamosak. Szerkesszünk olyan pontot, amely körül az egyik szakaszt elforgatva annak képe a másik lesz!

6. K2

Szerkesszünk trapézt, ha adott a négy oldal hossza!

Idézet

A matematikai tudományok különösen a rendet, a szimmetriát és a határt mutatják meg; és ezek a szépség legkiemelkedőbb formái. (Arisztotelész: *Metafizika*)



25. ALAKZATOK EGYBEVÁGÓSÁGA

Egybevágósági transzformációk segítségével definiáljuk az alakzatok egybevágóságát.

Egybevágónak nevezünk két alakzatot, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely egyiket a másikhoz rendeli.

Az egybevágóság jele: $\cong$.

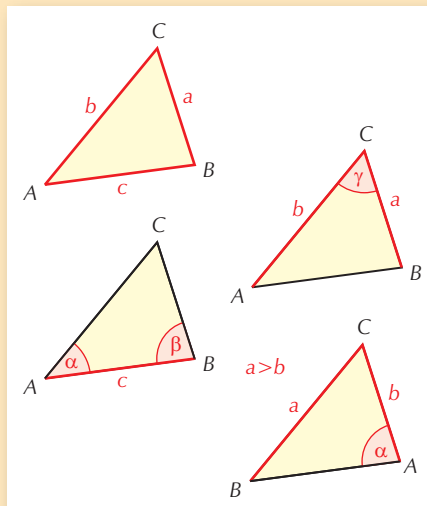
HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGA

Háromszögeket vizsgálva az alapadataikból (oldalaikból és szögeikből) az egybevágóságukat a következő módon állapíthatjuk meg.

A háromszögek egybevágóságának alapesetei:

Két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a következő feltételek valamelyike teljesül:

1. oldalaik hossza páronként egyenlő;
2. két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és az ezek által közrefogott szögek egyenlők;
3. egy-egy oldaluk hossza és a rajta fekvő két szögük egyenlő;
4. két-két oldaluk hossza páronként egyenlő, és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközt levő szögek egyenlők.



SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

Az identitás (helybenhagyás) esetén minden alakzat képe önmaga. (Az alakzat minden pontja fixpont.)

Bizonyos alakzatokkal meghatározott transzformációkat végezve elérhetjük, hogy az alakzat képe akkor is önmaga legyen, ha nem minden pontja fixpont. (Ezeket nevezzük invariáns alakzatoknak.)

Tanulmányaink során a síkban részletesen foglalkoztunk a tengelyes szimmetriával, a középpontos szimmetriával, és a térben megemlítettük a síkszimmetriát.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

TENGELYESEN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

Egy alakzat **tengelyesen szimmetrikus**, ha létezik olyan tengely, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga.

A tengelyesen szimmetrikus **háromszög** egyenlő szárú, szimmetriatengelye az alap felezőmerőlege. Mivel a három csúcs közül egynek a tengelyes tükrképe a háromszög egy másik csúcsa, a harmadik csúcs csak a tengelyen lehet.

Az egyenlő oldalú háromszögnek három szimmetriatengelye van.

Milyen **négyszög** lehet tengelyesen szimmetrikus?

Ha az $ABCD$ négyszög tengelyesen szimmetrikus, és az A csúcsa nincs a szimmetriatengelyen, akkor annak az A' képe az $ABCD$ négyszögnek egy másik csúcsa. Így a tengelyen kívül levő csúcsok száma páros. Emiatt a szimmetrikus négyszögnek vagy 0, vagy 2 csúcsa van a tengelyen.

A tengelyesen szimmetrikus négyszög

a) húrtrapéz vagy

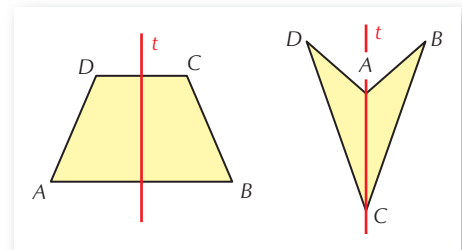
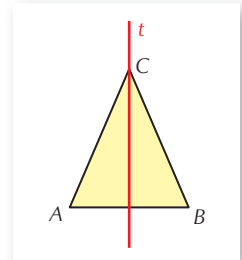
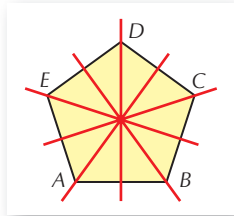
b) deltoid.

Ezek speciális esetei: a)-ból téglalap, b)-ből rombusz, illetve mindkettőből a négyzet.

Egy alakzatnak több szimmetriatengelye is lehet.

Belátható, hogy az **n oldalú szabályos sokszögnek n darab szimmetriatengelye van.**

A **kör** középpontján átmenő bármely egyenes a kör szimmetriatengelye.



KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

Egy alakzatot **középpontosan szimmetrikusnak** nevezünk, ha létezik olyan pont, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat képe önmaga.

Háromszög nem lehet középpontosan szimmetrikus.

Milyen **négyszög** lehet középpontosan szimmetrikus? Egy négyszög akkor és csak akkor középpontosan szimmetrikus, ha az paralelogramma.

Belátható, hogy a **páros oldalszámú szabályos sokszögek** középpontosan szimmetrikusak.

A **kör** (középpontjára) középpontosan szimmetrikus.

FELADATOK

1. K2

Igaz-e, hogy két háromszög egybevágó, ha $AB = A'B'$; $AC = A'C'$, és az A -ból, illetve az A' -ből induló magasságuk is egyenlő? Indokoljunk!

2. K2

Igaz-e, hogy két háromszög egybevágó, ha egy-egy oldaluk és két-két szögük egyenlő?

3. K2

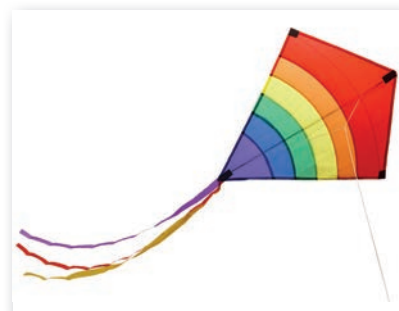
Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Indokoljunk!

- a) Van olyan háromszög, melynek oldalfelező merőlegese és szimmetriatengelye egybeesik.
- b) Nincs olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.
- c) Az egyenlő szárú háromszög magasságai a háromszögön belül vannak.

4. K1

Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Indokoljunk!

- a) Minden deltoidnak van szimmetriatengelye.
- b) Van szimmetriatengellyel rendelkező trapéz.
- c) Minden deltoid felbontható – valamelyik átlójának behúzásával – két egyenlő szárú háromszögre.
- d) Ha egy négyszögnek van három derékszöge, akkor az átlói felezik egymást.



5. K2

Egy szabályos hatszög csúcsai közül hagyjunk el kettőt. Milyen négyszögek keletkezhetnek? Határozzuk meg ezen négyszögek szögeit!

26. HASONLÓSÁG

Az egybevágóság után a középpontos hasonlósággal és a hasonlósági transzformációval foglalkoztunk.

KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG

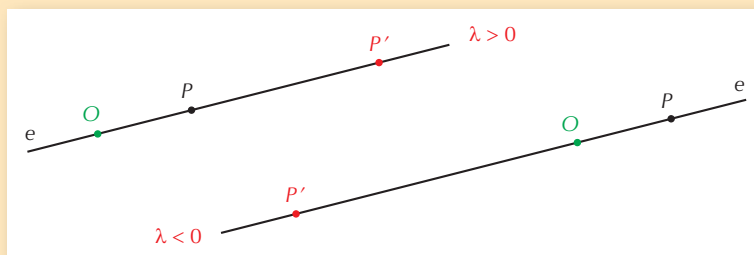
A középpontos hasonlóság definíciója:

Legyen adva egy O pont és egy λ ($\lambda \neq 0$) valós szám. A sík egy tetszőleges P pontjához a következő módon rendeljük a képét:

ha $P = O$, akkor a P pont képe önmaga;

ha $P \neq O$, akkor a P pont képe legyen az OP egyenesnek az a P' pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$, azaz az OP' szakasz hossza $|\lambda|$ -szerese az OP szakasz hosszának.

Ha λ pozitív, akkor a P' pont az OP félegyenesen van, azaz az O ponttól azonos irányban van P és P' ; ha pedig λ negatív, akkor P' és P pontok az O ponttól ellentétes irányban vannak.



Az O pontot középpontnak, a λ -t a középpontos hasonlóság **arányának** nevezzük. A definíció alapján egyértelműen kaphatjuk meg a sík bármely pontjának a képét. Az értelmezési tartomány a sík pontjainak a halmaza, de lehet a tér pontjainak halmaza is.

Tulajdonságai:

- A középpontos hasonlóságnál megadott középpont fixpont.
- Egyenesnek középpontos hasonlósággal kapott képe az eredetivel párhuzamos egyenes. Ha az egyenes illeszkedik a hasonlóság középpontjára, akkor képe önmaga.
- A középpontos hasonlóság szögtartó.
- A középpontos hasonlóság $|\lambda| \neq 1$ esetben nem távolságtartó.

Középpontos hasonlóságnál minden szakasz képének a hossza az eredeti szakasz hosszának $|\lambda|$ -szerese.

A középpontos hasonlóság speciális esetei:

$\lambda = 1$ esetében az identitásról (helybenhagyás) van szó, míg $\lambda = -1$ esetén középpontos tükrözésről.

Hasonlósági transzformációnak az aránytartó transzformációkat nevezzük.

Bármely hasonlósági transzformáció előállítható egy egybevágósági transzformáció és egy középpontos hasonlóság egymás utáni alkalmazásával (szorzataként).

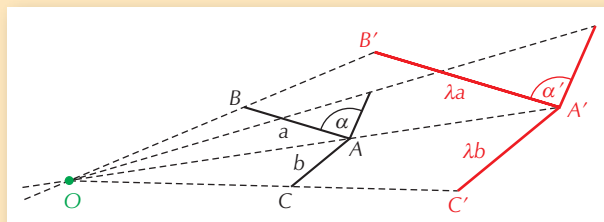
Két alakzatot hasonlónak nevezünk, ha hasonlósági transzformációval egymásba vihetők.

A hasonlóság jele: $\sim$.

A hasonlósági transzformáció tulajdonságai:

- Egyenes képe egyenes.
- A hasonlósági transzformáció szögtartó.
- A hasonlósági transzformáció aránytartó, azaz bármely két szakasz hosszának aránya megegyezik a képek hosszának arányával.

$$\frac{a}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{\lambda a}{\lambda b} = \frac{a}{b}$$

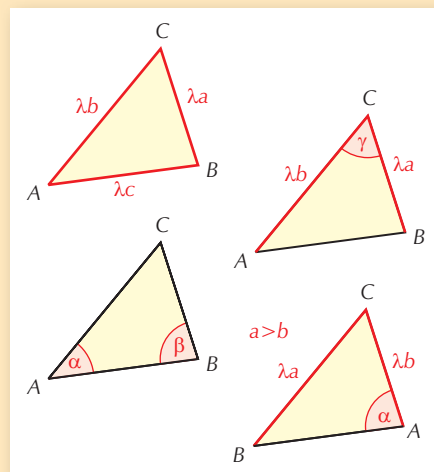


Két hasonló síkidomban a megfelelő szakaszok aránya egyenlő.

A háromszögek hasonlóságának alapesetei:

Két háromszög hasonló, ha

1. megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő,
2. egy-egy szögük s az ezt közrefogó megfelelő oldalaik hosszának aránya egyenlő,
3. két-két szögük páronként egyenlő,
4. két-két megfelelő oldal hosszának aránya és e két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközt levő szögük egyenlő.

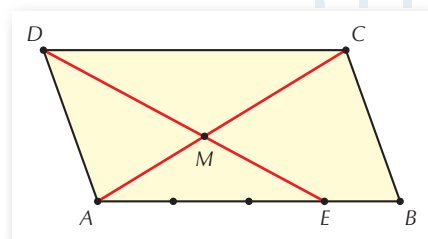


A kritériumokban a háromszögek egybevágóságának alapeseteivel összevetve a szögek egyenlősége megmarad, a szakaszok egyenlősége helyett szakaszhosszak arányának egyenlőségét követeljük meg.

Fontos összefüggés igaz a **hasonló alakzatokra**. Ha hasonló síkidomok esetében a hasonlóság aránya λ , akkor a síkidomok területének aránya $|\lambda|$, területének aránya λ^2 . Ha pedig két test hasonló, és a hasonlóság aránya λ , akkor felszínük aránya λ^2 , térfogatuk aránya $|\lambda|^3$.

FELADATOK

1. K1 Egy háromszög oldalhosszainak az aránya $2 : 4 : 5$. A hozzá hasonló háromszög kerülete 55 cm. Határozzuk meg a hasonló háromszög oldalainak hosszát!
2. K1 Egy háromszög kerülete a hozzá hasonló háromszög kerületének a $\frac{11}{13}$ -a. Két megfelelő oldal hosszának különbsége 1 m. Milyen hosszú ez a két oldal?
3. K2 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szárak szöge és a szárakhoz tartozó súlyvonal hossza!
4. K1 Adott paralelogrammához illesszünk hozzá egy paralelogrammát úgy, hogy a kettő együtt az eredetihez hasonló legyen!
5. K2 Két egymást metsző kör metszéspontján át szerkesszünk szelőt úgy, hogy a nagyobb és a kisebb körbe eső húrok hosszának aránya a) $1 : 1$; b) $3 : 2$ legyen!
6. K2 Egy trapéz párhuzamos oldalai 4 cm és 9 cm hosszúak.
a) Milyen arányban osztják egymást az átlók?
b) Mekkora az átlók metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott, a trapézt kettéosztó szakasz hossza?
7. K2 Két kör sugara $r = 4$ cm és $R = 6$ cm, középpontjaik távolsága 15 cm. Hol helyezkednek el a körök hasonlósági pontjai? Szerkesszük meg a pontokat!
8. K2 Az $ABCD$ paralelogramma területe 60 területegység. Az AB oldalon felvesszük az ábra szerinti E pontot úgy, hogy $AE = 3EB$ teljesüljön.
a) Milyen arányban osztja az AC és DE szakaszokat az M metszéspontjuk?
b) Az AC és DE szakaszok négy részre osztják a paralelogrammát. Mekkora ezen részek területe?



27. A HÁROMSZÖGEKRŐL

Minden háromszögre érvényes, hogy három csúcsa, három oldala és három szöge van.

Fontosabb tételek:

A háromszög három **belső szögének összege** 180° , **külső szögeinek összege** 360° .

A háromszög **külső szöge** egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

A háromszög oldalaira érvényes a **háromszög-egyenlőtlenség**, amely azt mondja ki, hogy a háromszög két oldalhosszának összege mindig nagyobb a harmadik oldal hosszánál.

Ez egyúttal azt jelenti, hogy a háromszög mindegyik oldalhossza nagyobb, mint a másik két oldalhossz különbségének abszolút értéke, de kisebb, mint a másik két oldalhossz összege. Képletben:

$$|a - b| < c < a + b.$$

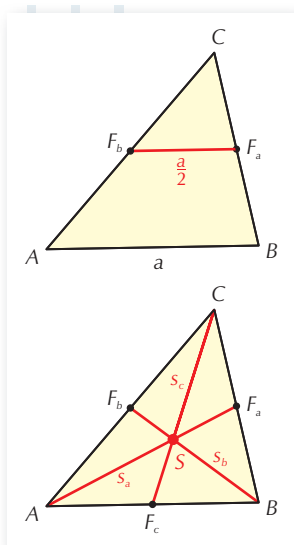
A háromszög oldalai és szögei közti viszonyt fejezi ki a következő tétel.

A háromszögben egyenlő hosszú oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, és viszont; hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van, és nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal található.

Azokat a háromszögeket, amelyekben van két egyenlő hosszú oldal, egyenlő szárú háromszögeknek nevezzük. Ha mindhárom oldal egyenlő hosszúságú, akkor egyenlő oldalú, más néven szabályos háromszögekről beszélünk. A szabályos háromszög minden szöge 60° -os.

Osztályozhatjuk a háromszögeket legnagyobb szögük szerint is. Ekkor tompaszögű, derékszögű és hegyesszögű háromszögekről beszélünk.

A HÁROMSZÖGEK NEVEZETES VONALAI ÉS PONTJAI



Középvonal:

a háromszögben két oldalfelező pontot összekötő szakasz.

A háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldallal, és feleolyan hosszú.

Súlyvonal:

a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával köti össze.

A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át, ez a pont a háromszög súlypontja. A háromszög bármely súlyvonalán a súlypont az oldalhoz közelebb eső harmadolópont.

Oldalfelező merőleges:

az oldalfelező pontban a háromszög oldalára állított merőleges egyenes.

A háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át, ez a pont a háromszög köré írt kör középpontja.

Magasságvonal:

a háromszög csúcsából a szemközti oldal egyenesére állított merőleges egyenes.

A háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át, ez a pont a háromszög magasságpontja.

Szögfelező:

a háromszög két oldalegyenesétől egyenlő távolságra levő pontok halmaza.

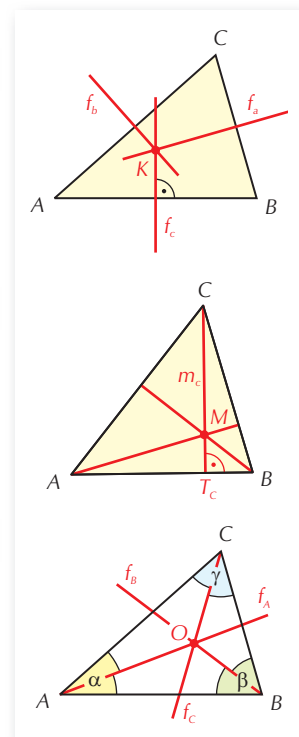
A háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át, ez a pont a háromszögbe írt kör középpontja.

Minden háromszögben bármely belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztja két részre (**szögfelezőtétel**).

Megjegyzések

Hasonló tétel igaz a külső szögfelezőre is.

A matematikai szövegekben a szóhasználat (fogalomhasználat) nem egységes. Például a „súlyvonal” vagy „magasság” jelenthet egyenest és szakaszt, sőt, jelentheti a szakasz hosszát is. A pontos jelentés a szövegkörnyezetből derül ki.



CSAK DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGBEN ÉRVÉNYES TÉTELEK

Két derékszögű háromszög hasonló, ha egy hegyesszögük megegyezik. Az alább felsorolt tételek közül az első kettő emelt szintű tananyag.

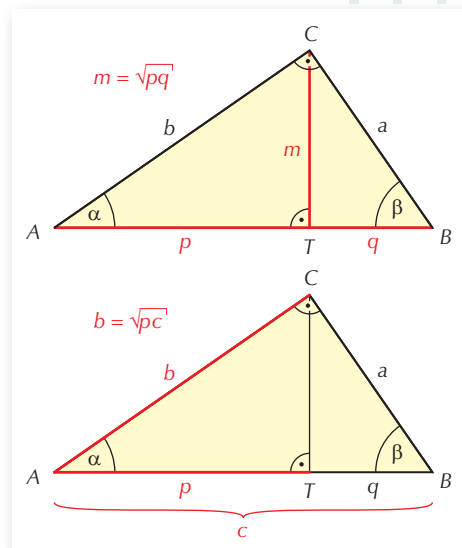
1. Magasságtétel

Minden derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság két olyan részre osztja az átfogót, amelyek hosszának mértani közepe a magasság hossza: $m = \sqrt{pq}$.

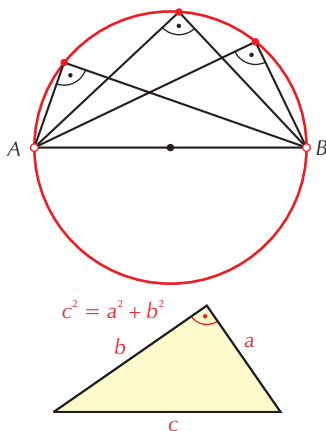
2. Befogótétel

A derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának:

$$b = \sqrt{pc}; \quad a = \sqrt{qc}.$$



Emelt szint



3. Thalész-tétel

Bármely kör AB átmérője a körív pontjaiból derékszögben látszik, kivéve az A és B pontokat.

A Thalész-tétel megfordítása is igaz: derékszögű háromszög körülírt körének középpontja megegyezik az átfogó felezőpontjával.

4. Pitagorasz-tétel

Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

SZÖGFÜGGVÉNYEK DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGBEN

Mivel egy α hegyesszög egyezése esetében a két derékszögű háromszög hasonló, ezért az oldalak aránya csak α -tól függ. Ezeket az arányokat **definiáltuk** a következők szerint:

Az α hegyesszög **szinuszának** nevezzük, és $\sin \alpha$ -val jelöljük az α szöget tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hosszának az arányát. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$.

Az α hegyesszög **koszinuszának** nevezzük, és $\cos \alpha$ -val jelöljük az α szöget tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és az átfogó hosszának az arányát. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.

Az α hegyesszög **tangense** az α szöget tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó hosszának az aránya. Jele $\operatorname{tg} \alpha$. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$.

A $\operatorname{tg} \alpha$ reciprokát **kotangens** α -nak nevezzük, és $\operatorname{ctg} \alpha$ -val jelöljük.

FELADATOK

1. K1

Igaz vagy hamis? (Indokoljunk!) A háromszög körülírt és beírt körének középpontja:

- mindig a háromszög belsejében van.
- van olyan háromszög, amelyben az egyik magasságvonalon van.
- mindig valamelyik szögfelezőre esik.
- nincs olyan háromszög, amelyben valamelyik súlyvonalra esik.
- van olyan háromszög, amelyben valamelyik középvonalra esik.

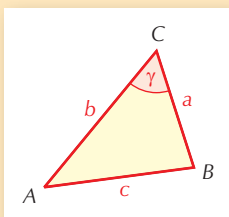
- 2. K1** Mekkora átmérőjű fatörzsből lehet kivágni olyan gerendát, amelynek téglalap alakú keresztmetszete 36 cm hosszú és 22 cm széles?
- 3. K2** Mekkora a derékszögű háromszög befogói, ha átfogójának hossza 4 m, és teljesül, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza mértani közepe a két befogó hosszának?
- 4. K2** Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót harmadolja. A háromszög legkisebb oldala 8 cm hosszú. Mekkora a többi oldal és a háromszög szögei?
- 5. K1** A 40 m magas világítótornyról a hajó $4,5^\circ$ -os depressziószög alatt látszik. Milyen messze van a hajó?
- 6. K2** Mekkora szöget zár be a szabályos négyoldalú gúla oldaléle az alaplap síkjával, ha a gúla magassága 8 cm, és oldaléle 10 cm?
- 7. K2** A hegy tetején van egy 25 m magas kilátótorony. A völgy egy pontjából a torony alja $57^\circ 18'$, teteje $59^\circ 6'$ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magasan van a völgy fölött a hegy csúcsa?
- 8. K2** Egy épülettől 35 m távolságból az épület egyik ablakának teteje $32^\circ 12'$ -nyi, alsó széle $28^\circ 45'$ -nyi emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az ablak?
- 9. K2** Egy földből ferdén kiálló, 4 m hosszú oszlop előlnézeti vetülete 2,5 m, oldalnézeti vetülete 3,7 m hosszú. Mekkora szöget zár be az oszlop a talajjal?

28. TÉTELEK, AMELYEK MINDEN HÁROMSZÖGRE ÉRVÉNYESEK

A derékszögű háromszögekre érvényes, az előző leckében felsorolt tételek közül az első kettőnek nincs általános megfelelője.

A Thalész-tétel általánosítása (**látószögtétel**) azt mondja ki, hogy ha adott a síkon két pont, A és B , akkor azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyekből az AB szakasz α szög alatt látszik, két, AB -re szimmetrikus körív, kivéve az A és B pontokat. Ha α hegyesszög, akkor a két körív félkörnél nagyobb ívhosszú, ha α tompaszög, akkor félkörívnél rövidebb ívekről van szó.

A Pitagorasz-tétel általánosítása a koszinusztétel.

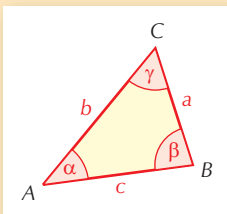


Koszinusztétel

A szokásos jelöléseket használva: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.
(Természetesen az a és a b oldalra is hasonlóan írhatjuk fel a tételt.)

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

A számítások során szintén jól használható a szinusztétel.



Szinusztétel

A szokásos jelöléseket használva: $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

(A tételt szokás $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ alakban is kimondani, ahol R a háromszög köré írt kör sugara.)

A háromszög területét is megadhatjuk szögfüggvény segítségével.

A háromszög **trigonometrikus területképlete**:

a szokásos jelöléseket használva $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$.

Fontos megjegyeznünk, hogy ezeket a tételeket tompaszögű háromszögekben is használhatjuk. [Emlékeztetőül: ha α tompaszög, akkor $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ és $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.]

FELADATOK

1. K2

Egy háromszög két oldala 10 cm és 6 cm hosszú. A harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 4,4 cm. Mekkora a harmadik oldal?

2. K2

Egy háromszög két súlyvonalának hossza 6 cm és 9 cm, az általuk bezárt szög 75° -os. Mekkora a háromszög területe és a háromszög köré írt kör sugara?

3. K2

Egy R sugarú körbe írt ABC háromszögben $AB = 0,5R$ és $AC = \sqrt{3}R$. Mekkora a BC oldal?

4. K2

Egy háromszög két oldala 5 cm és 8 cm hosszú. A háromszög területe 12 cm^2 . Mekkora a harmadik oldal, és mekkorák a háromszög szögei?

5. K2

Egy folyó partján áll egy épület, amelynek két, egymás fölött lévő ablaka 15 m-re van egymástól. Milyen széles a folyó, ha az ablakokból a túlsó partot $13,3^\circ$ -os, illetve $6,6^\circ$ -os depressziószög alatt látjuk?

6. K2

Egy kör alakú úszómedence egy pontjából két egymással $36,6^\circ$ -os szöget bezáró kötelet húztak ki, hogy a különböző edzések ne zavarják egymást. Mekkora a medence sugara, ha a kihúzott kötelek hossza 20 méter és 26 méter?

29. NÉGYSZÖG, SOKSZÖG

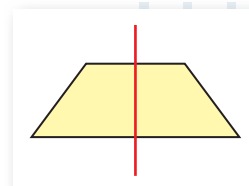
A NÉGYSZÖGEK ÁTTEKINTÉSE

A négyszögeket az oldalaik párhuzamossága szerint is, oldalaik egyenlősége szerint is áttekinthetjük.

I. Azokat a négyszögeket, amelyeknek van két párhuzamos oldaluk, **trapézoknak** nevezzük.

Közülük azok, amelyeknek a párhuzamos oldalakra merőleges szimmetriatengelyük van, húrtrapézok; azok, amelyeknek két-két oldaluk párhuzamos, paralelogrammák.

A paralelogramma definíciójára több, egymással ekvivalens megfogalmazást adhatunk (bármelyik tulajdonságból már következik a többi):



Az a négyszög **paralelogramma**, amelynek

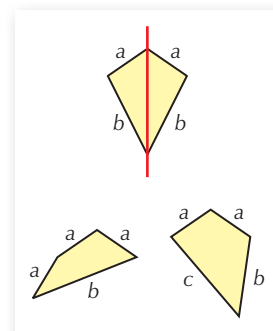
- két-két szemközti oldala párhuzamos;
- két-két szemközti szöge egyenlő nagyságú;
- bármely két szomszédos belső szögének összege 180° ;
- két-két szemközti oldala egyenlő hosszú;
- két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszúságú;
- két átlója felezi egymást;
- van szimmetria-középpontja.

Azok a négyszögek, amelyeknek minden oldala egyenlő hosszú, a **rombuszok**. A rombuszt négyzetnek nevezzük, ha minden szöge is egyenlő (90°).

II. Az a négyszög, amelynek van szimmetriaátlója, a **deltoid**.

Az a négyszög, amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő hosszú, deltoid.

Vannak négyszögek, amelyeknek három oldaluk egyenlő hosszú, másoknak csak két oldaluk egyenlő hosszú, ezeknek a négyszögeknek azonban már nem ezek a tulajdonságok a fő jellemzői, ezekre külön elnevezést nem vezetünk be.



Valamennyi négyszög **belső szögeinek összege** 360° . A konvex sokszög **külső szögeinek összege** 360° .

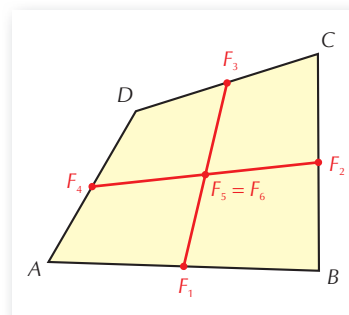
A NÉGYSZÖGEK KÖZÉPVONALAI

Négyszög középvonalainak a szemközti oldalak felezőpontját összekötő szakaszokat nevezzük. Minden négyszögnek két középvonala van.

Bármely négyszög két középvonala kölcsönösen felezi egymást.

A paralelogramma két szemközti oldalának felezőpontját összekötő középvonala párhuzamos a paralelogramma másik két oldalával, és azokkal egyenlő hosszúságú.

A trapéz két szárának felezőpontját összekötő középvonala párhuzamos a trapéz párhuzamos oldalaival, és hossza a párhuzamos oldalak hosszának számtani közepe.



A SOKSZÖGEK ÁTTEKINTÉSE

Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából húzható átlók száma $n - 3$, ezek a sokszöget $n - 2$ háromszögre bontják.

Az n oldalú konvex sokszögbe húzható **átlók száma** $\frac{n(n-3)}{2}$.

Az n oldalú sokszög **belső szögeinek összege** $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

FELADATOK

1. K1

Mit írhatnánk az üresen hagyott helyekre az alábbiak közül, hogy igaz állításokat kapjunk? szükséges és elegendő; szükséges, de nem elegendő; elegendő, de nem szükséges; nem szükséges és nem elegendő.

- Ahhoz, hogy egy négyszög téglalap legyen, _____, hogy átlói egyenlő hosszúak legyenek.
- Ahhoz, hogy egy négyszög téglalap legyen, _____, hogy szögei egyenlők legyenek.
- Ahhoz, hogy egy négyszög paralelogramma legyen, _____, hogy oldalai egyenlő hosszúak legyenek.
- Ahhoz, hogy egy négyszög paralelogramma legyen, _____, hogy szemközti oldalai egyenlő hosszúak legyenek.
- Ahhoz, hogy egy négyszög paralelogramma legyen, _____, hogy átlói egyenlő hosszúak legyenek.

2. K2

- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg!
- Síkbeli konvex négyszög esetében az eredeti négyszög területe hogyan aránylik az a) feladatban kapott paralelogramma területéhez?

3. K2

Mekkorák a szögei annak a szimmetrikus trapéznek, amelynek szárai akkorák, mint a rövidebb párhuzamos oldala, magassága pedig feleakkora, mint a hosszabbik párhuzamos oldala?

4. K2

Egy 17 oldalú sokszöget felbonthatunk-e 14 darab háromszögre?

5. K2

Egy trapéz egyik alapja és egyik szára egyenlő hosszú, a bezárt szögük 120° . A trapéz másik szára egyenlő hosszú az egyik átlóval. Határozzuk meg a trapéz területét!

6. K2

Egy trapéz párhuzamos oldalai 8 cm és 12 cm hosszúak. Mekkora az átlók felezőpontjait összekötő szakasz hossza?

7. K2

Egy szabályos sokszögnek 54 átlója van. Mekkora a sokszög egy szöge?

8. K2

(Érettségi feladat, középszint, 2020.) Egy teáskanna jó közelítéssel csonkakúp alakú. A teáskanna alapkörének átmérője 18 cm, fedőkörének átmérője 8 cm. A kanna oldalán az aljától a tetejéig mért távolság (a csonkakúp alkotója) 14 cm. A kannában magasságának feléig áll a tea.

a) Számítsa ki, hogy hány deciliter tea van a kannában!

Ismert tény, hogy magára hagyva a forró tea előbb-utóbb a környező levegő hőmérsékletére hűl le. Ez a hőmérséklet-csökkenés exponenciális jellegű. Egy kísérlet során egy kanna forró teát egy 23°C -os helyiségben magára hagytak, majd időről időre megmérték a hőmérsékletét. Az eredményeket számítógépbe táplálva a tea T hőmérsékletére ($^\circ\text{C}$ -ban) a következő összefüggést kapták:

$$T_{\text{tea}}(t) = 23 + 56 \cdot 0,96^t, \text{ ahol } t \text{ a mérés kezdete óta eltelt idő percben.}$$

b) A megállapított összefüggés szerint hány $^\circ\text{C}$ lesz a tea hőmérséklete negyedóra elteltével?

c) Számítsa ki, hogy a fenti összefüggés szerint hány perc alatt csökken a tea hőmérséklete 37°C -ra!



30. KÖR ÉS RÉSZEI. ÍVHOSSZ

A **középponti szög** csúcsa a kör középpontja, szárai sugarak.

Az ábra mutatja, hogy két sugárral két szöget határoztunk meg. Mindkét szög szárai között egy-egy körív van. Szokásos szóhasználat, jelölés: i_α ív az α középponti szöghöz tartozik, vagy i_β az i_β íven nyugszik.

A két sugárral és egy körívvel határolt körlaprészt **körcikknek** nevezzük.

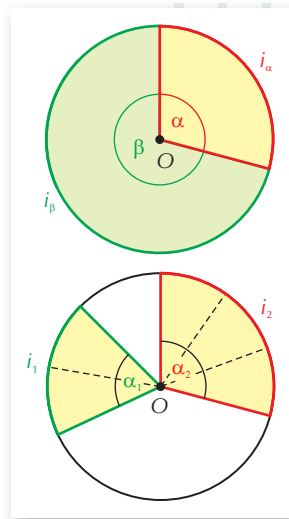
Egy körben a középponti szögek nagyságai és a hozzájuk tartozó **körívek hosszai** egyenesen arányosak.

Egy körben a középponti szögek nagyságai és a hozzájuk tartozó **körcikk területei** egyenesen arányosak.

A tétel alapján α fokos és 360° -os középponti szögekkel írjuk fel az arányokat.

Az α fokos középponti szöghöz tartozó ívhosszat jelöljük i_α -val, a körcikk területét t_α -val.

A 360° -os középponti szöghöz tartozó ívhossz a kör kerülete: $2r\pi$, a körcikk területe a kör területe: $r^2\pi$.



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

A körívek hosszánál: $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{i_\alpha}{2r\pi}$, ebből $i_\alpha = \frac{r\pi}{180^\circ}\alpha$.

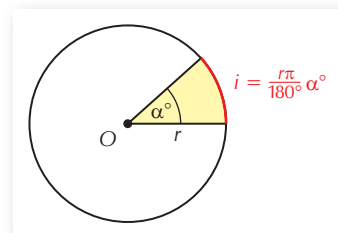
A körcikkek területénél: $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{t_\alpha}{r^2\pi}$, ebből $t_\alpha = \frac{r^2\pi}{360^\circ}\alpha$.

A fenti két arány összehasonlítása is mutatja azt – ami korábbi gondolatmenetünkből következik –, hogy egy körben a körív hosszak és a hozzájuk tartozó körcikkek területe között egyenes arányosság van.

A két összefüggésből $t_\alpha = \frac{i_\alpha r}{2}$.

A középponti szög és a hozzá tartozó körív hossz egyenes aránya lehetővé teszi, hogy a szögek mérését más módon is végezhessük.

Az **ívmérték** (radián) a középponti szög nagyságát azzal jellemzi, hogy megadja a hozzá tartozó körív hosszának és a kör sugarának az arányát.



Emelt szint

Foknak radiánba átszámítása: $\alpha_r = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$;

radiánnak fokba átszámítása: $\alpha = \frac{180^\circ \cdot \alpha_r}{\pi}$.

KÖRT ÉRINTŐ EGYENES

Azt az egyenest nevezzük a kör érintőjének, amely a kör síkjában van, és a körrel pontosan **egy közös pontja** van.

A kört érintő egyenes **merőleges** az érintési ponthoz húzott sugárra.

Egy külső pontból a körhöz húzott két **érintőszakasz egyenlő hosszúságú**.

FELADATOK

1. K1

Egy húr a körvonalat két olyan ívre osztja, amelyek aránya 11 : 7. Mekkora a húrhoz tartozó középponti szög?

2. K1

Az ABC háromszög csúcsai a háromszög köré írt körívet 5 : 6 : 7 arányú részekre bontják. Mekkora a háromszög szögei?

3. K2

Egy körhenger alakú fekvő kazán belső átmérője 150 cm, hossza 500 cm. Mennyi víz van benne, ha a víz magasságának $\frac{4}{5}$ részéig tölti meg?

4. K2

Hány százaléka egy körbe írt szabályos hatszög területe a kör területének?

5. K2

Mekkora területű részekre bontja a 12 cm sugarú kört az a húrja, amelyikhez tartozó középponti szöge 150° ?

6. K2

Két kör sugarának hossza $r = 4$ cm és $R = 6$ cm, középpontjaik távolsága 8 cm. Mekkora a két kör közös részének a területe?

31. VEKTOROK

Ha egy szakasznak irányítást adunk (azaz megmondjuk, hogy melyik legyen a kezdőpontja, és melyik a végpontja), akkor azt **irányított szakasznak** nevezzük. Ha két irányított szakasz ugyanazt az eltolást adja meg, azaz hosszuk és irányuk is megegyezik, akkor azt mondjuk róluk, hogy ugyanazt a **vektort** reprezentálják. A **vektor hosszán** és **irányán** egy tetszőleges reprezentánsának a hosszát, illetve irányát értjük. A vektorokkal való műveleteket mindig a reprezentánsaikkal, azaz irányított szakaszzal végezzük el, de az egyszerűség kedvéért a szóhasználatban a reprezentáns helyett is legtöbbször egyszerűen vektort mondunk.

Két vektor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.
A **vektor hosszát** a vektor abszolút értékének is nevezzük.

Azt a vektort, amelynek abszolút értéke 0, **nullvektornak** nevezzük. A **0** iránya tetszőleges.

Adott az **a** és **b** vektor. Mérjük fel az **a** vektor végpontjába a **b** vektort!

Ekkor az **a + b** **összegvektor** az **a** kezdőpontjából a **b** vektor végpontjába mutat.

A vektorok összegezése kommutatív (felcserélhető) és asszociatív (csoportosítható) művelet.

Az egyenlő hosszú, de ellentétes irányú vektorokat **ellentett vektoroknak** nevezzük.

Az **a** és **b** vektor **különbségének** nevezzük azt a vektort, amit úgy kapunk, hogy az **a** vektorhoz hozzáadjuk a **b** vektor ellentettjét (ld. ábrán).

Ha **a** ≠ **0**, akkor az **a** vektor és a **λ** szám **szorzata** (**λa**) az a vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda| \cdot |a|$ és iránya

$\lambda > 0$ esetében az **a** vektor irányával megegyező;

$\lambda < 0$ esetében az **a** vektor irányával ellentétes;

$\lambda = 0$ esetében **λa** = **0**, iránya tetszőleges.

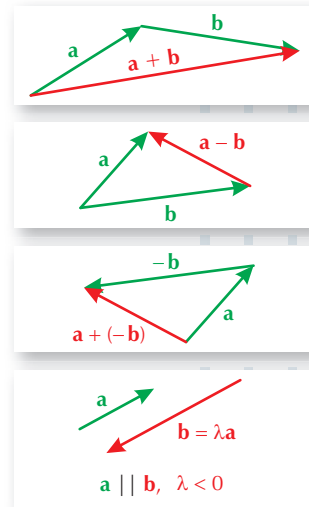
Ha **a** = **0**, akkor **λa** = **0**.

Vektorok számmal (skalárral) történő szorzására fennállnak az alábbi tulajdonságok:

a) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

b) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

c) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.



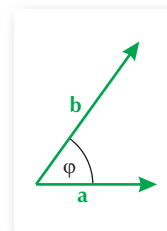
EGYÉRTELMŰ VEKTORFELBONTÁSI TÉTEL

Ha adottak az **a** és **b** nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor bármely, velük egy síkú **v** vektor **egyértelműen felbontható** az adott vektorokkal párhuzamos összetevőkre, azaz egyértelműen felírható **v** = **αa** + **βb** alakban, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, és $\beta \in \mathbb{R}$.

Fontos művelet a vektorok skaláris szorzása.

Két vektor **skaláris szorzatának** nevezzük azt a számot, amelyet úgy kapunk, hogy a két vektor hosszának szorzatát megszorozzuk a közbe zárt szög koszinuszával.

A skaláris szorzat kommutatív (felcserélhető a két vektor).



Emelt szint

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

A skaláris szorzat nemcsak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla; hanem akkor is, ha egyik vektor sem nullvektor, de a két vektor merőleges egymásra, mivel $\cos 90^\circ = 0$. Mivel a nullvektort tekintetjük bármely vektorra merőlegesnek, ezért összefoglalóan kimondhatjuk, hogy

két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a **skaláris szorzatuk nulla**.

Egy vektor önmagával való skaláris szorzatát a **vektor négyzetének** nevezzük.

FELADATOK

1. K1

Vegyünk fel a füzetbe egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektort! Szerkesszünk hozzá három különböző vektorpárt, amelyek összege az adott $\mathbf{v}$ vektor!

2. K2

Az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja O . Írjuk fel az $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF}$ vektorokat!

3. K1

Egy kocka középpontjából három, közös csúccsal rendelkező lap középpontjába mutató vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Fejezzük ki a csúcsokba mutató vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ segítségével!

4. K2

Adott az $\mathbf{a}(2; 1)$ és a $\mathbf{b}(-3; 2)$ vektor. Állítsuk elő a $\mathbf{v}$ vektort $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos vektorok összegeként, ha a) $\mathbf{v}(12; -1)$; b) $\mathbf{v}\left(-\frac{21}{2}; \frac{7}{2}\right)$; c) $\mathbf{v}(6; -4)$!

5. K2

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges paralelogramma átlói hosszának négyzetösszege egyenlő az oldalak hosszának négyzetösszegével!

6. K1

Milyen vektorokra igaz, hogy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$?

7. K2

Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szögét, ha $\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ és $-\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorok merőlegesek egymásra!

TRIGONOMETRIA

Ismétlés

11/IV., V.

32. TRIGONOMETRIAI ALAPISMERETEK

A derékszögű háromszögek ismételésekor már említettük a szögfüggvényeket: az α hegyesszögű derékszögű háromszögben definiáltuk $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ és $\operatorname{tg} \alpha$ értékeit. Ezek csak a szög nagyságától függenek (azaz nem függenek attól, hogy mekkorák az α hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszög oldalai). A hegyesszögek szögfüggvényeinek ismeretében, ha ismerjük egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögét és valamelyik oldalának hosszát, akkor a másik két oldal hossza kiszámítható.

Derékszögre is kiterjeszthetjük a definíciót: $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$. Ha pedig α tompaszög ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), akkor $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ és $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ a számolási szabály.

Mivel $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, így tompaszögre $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ adódik. A kiterjesztés után is érvényben marad a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ **pitagoraszsi összefüggés**.

A derékszögű háromszögek ismétlésekor láttunk egyszerűbb, szögfüggvényeket alkalmazó feladatokat. Fontos és a számolós feladatokban jól használható összefüggések még a szinusztétel, a koszinusztétel és a trigonometrikus területképlet.

A továbbiakban néhány összetett példát oldunk meg.

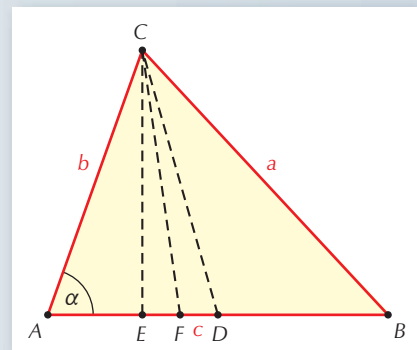
1. példa

Az ABC háromszög alakú speciális asztallap A csúcsánál lévő szöge 70° -os, két oldalának hossza $c = 180$ cm és $b = 150$ cm.

- Mekkora az asztallap a oldala?
- Számítsuk ki az asztallap többi szögét is!
- Mekkora területű az asztallap?
- Az asztallapon egy CD csíkot húzunk úgy, hogy a felületet két egyenlő részre osztjuk. (D az AB oldalon van.) Milyen hosszú a CD szakasz?
- Az asztalt egy kör alakú terítővel leterítjük. Legalább mekkora a kör sugara, ha teljes egészében lefedi az asztalt?
- Most egy olyan kör alakú terítőt helyezünk az asztalra, amely sehol sem lóg le az asztalról. Legfeljebb mekkora a kör sugara?
- Számítsuk ki az ABC háromszög C csúcsból húzható magasságának és szögfelezőjének a hosszát is!

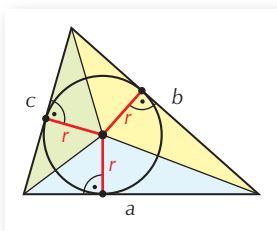
Megoldás

- A koszinusztételt használjuk: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$, az adatokkal (méterben számolva) $a^2 = 1,5^2 + 1,8^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1,8 \cdot \cos 70^\circ$, innen $a \approx 1,91$ m.
- A szinusztételből $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}$, innen $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$. Az adatokkal $\sin \beta = \frac{1,5 \cdot \sin 70^\circ}{1,91} \approx 0,738$, amiből $\beta \approx 47,6^\circ$. ($\beta_2 = 132,4^\circ$ nem lehetséges: $b < a$ miatt $\beta < \alpha$. De a háromszög szögeinek összege is túl nagy lenne β_2 esetében.)
 $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 62,4^\circ$.
- Az ABC háromszög területét többféleképpen kiszámíthatjuk (pl. Hérón-képlet), de egyszerű lehetőség a trigonometrikus területképlet alkalmazása: $t = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} \approx 1,2686$, azaz kb. $1,27$ m².
- CD a háromszög súlyvonala, ami azért felezi a területet, mert az ADC és DBC háromszögek alapja egyenlő ($AD = DB$), a hozzájuk tartozó magasságuk pedig közös. $AD = 0,9$, az ADC háromszögben felírjuk a koszinusztételt: $CD^2 = 1,5^2 + 0,9^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 0,9 \cdot \cos 70^\circ$, innen $CD \approx 1,46$ m.
- Az ABC háromszög köré írt körének a sugara a kérdés. Az általános szinusztételből $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, innen $R \approx 1,02$ m. A terítő sugara legalább ekkora.
- Az ABC háromszög beírt körének a sugara a kérdés. Ha s a háromszög félkerülete, akkor $r = \frac{t}{s}$, innen $r \approx 0,49$ m. A terítő sugara legfeljebb ekkora lehet.
- A CE magasság hosszát kiszámíthatjuk például a terület vagy az AEC derékszögű háromszögben felírt szögfüggvény segítségével is.
 $CE = b \cdot \sin \alpha \approx 1,41$ m.



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Jelölje a szögfelezőt CF . Az AFC háromszögben $ACF \sphericalangle = \frac{\beta}{2} \approx 23,8^\circ$, $AFC \sphericalangle \approx 86,2^\circ$. Felírjuk a szinusztételt: $\frac{CF}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin AFC \sphericalangle}$, innen $CF \approx 1,41$ m.



Megjegyzés

Az f pontban felírt $t = r \cdot s$ területképlet könnyen igazolható.

Ha a háromszög beírt körének középpontját összekötjük a csúcsokkal, akkor az eredeti háromszöget három kisebb háromszögre bontottuk (ábra). A három kis háromszög területének összege az eredeti háromszög területével egyenlő:

$$t = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s.$$

2. példa

Adjuk meg az a oldalú szabályos nyolcszög beírható és körülírható körének a sugarát és a területét!

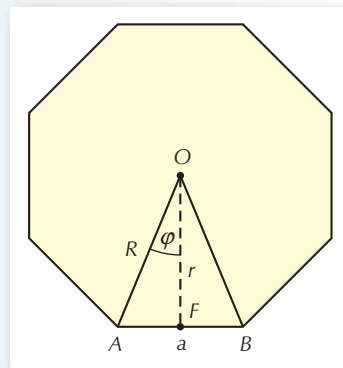
Megoldás

A sokszög egy AB oldala az O középpontból $AOB \sphericalangle = \frac{360^\circ}{8}$ nagyságú középponti szögben látszik. Ha F az AB szakasz felezőpontja, akkor a köré írt kör sugara $R = AO$, a beírt kör sugara $r = OF$, és $AOF \sphericalangle = \varphi = \frac{180^\circ}{8} = 22,5^\circ$. A sugarak és az a oldal közötti kapcsolat:

$$\sin \varphi = \frac{a}{2R}, \text{ innen } R = \frac{a}{2 \cdot \sin 22,5^\circ} \text{ és } \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2r}, \text{ azaz } r = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 22,5^\circ}.$$

A nyolcszög területe az ABO háromszög területének 8-szorosa:

$$t = \frac{a \cdot r}{2} \cdot 8 = \frac{a^2}{4 \cdot \operatorname{tg} 22,5^\circ} \cdot 8.$$



Megjegyzés

Hasonlóan igazolható, hogy az a oldalú szabályos n -szög területe $t = \frac{a^2}{4 \cdot \operatorname{tg} \varphi} \cdot n$, ahol $\varphi = \frac{180^\circ}{n}$.

3. példa

Az $ABCD$ derékszögű trapézban $DAB \sphericalangle = ABC \sphericalangle = 90^\circ$, $AB = 8$, $BC = 2$, $AD = 7$ egység. Szerkesztjük meg az AB szakaszon az E pontot úgy, hogy a DAE és EBC háromszögek hasonlók legyenek! Számítsuk ki az AE szakasz hosszát és a DEC háromszög kerületét!

Megoldás

C-ből párhuzamost húzunk AB -vel, ez az egyenes AD -t G -ben metszi. A DGC derékszögű háromszögből $DC = \sqrt{(7-2)^2 + 8^2} = \sqrt{89}$.

A DAE és EBC háromszögekben jelölje α és β a két hegyesszöget (ezek pótszögek), ekkor $\alpha + \beta = 90^\circ$. Két lehetőség adódik attól függően, hogy a hasonló háromszögekben az E csúcsnál egyenlő vagy különböző nagyságú hegyesszögek vannak.

1. eset: Legyen $\angle AED = \angle BEC = \alpha$ (első ábra).

C -t tükrözzük az AB egyenesre, a tükrképét jelölje C' . Ekkor az E pont DC' és AB metszéspontjaként áll elő (az ábrán E_1 -gyel jelöltük). Ugyanis a tükrözés miatt $\angle BEC' = \alpha$, és így $\angle AED$ és $\angle BEC'$ csúcsszögek.

Az AED és BEC háromszögek hasonlóak (szögeik megegyeznek), így $\frac{AE}{EB} = \frac{7}{2}$, innen $AE = \frac{7}{9} \cdot 8 = \frac{56}{9}$. $DE + EC = DE + EC' = DC'$ a tükrözés miatt.

$DC' = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{145}$, a DEC háromszög kerülete $\sqrt{89} + \sqrt{145} \approx 21,48$ egység.

2. eset: $\angle AED = \alpha$, $\angle BEC = \beta$ (második ábra).

$\alpha + \beta = 90^\circ$, így $\angle DEC = 90^\circ$, azaz E rajta van a CD szakasz Thalész-körén. A Thalész-kör és az AB szakasz 2, 1 vagy 0 pontban metszheti egymást.

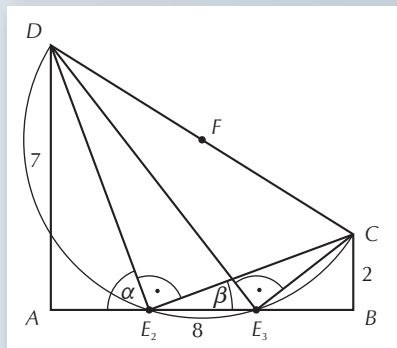
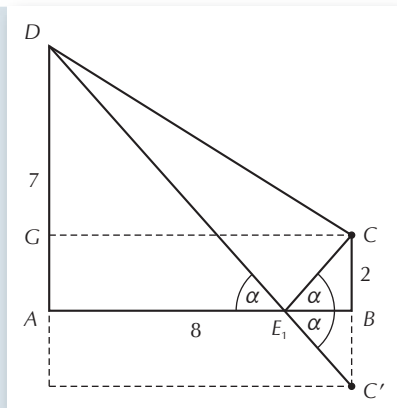
Ha E egy metszéspont, akkor három Pitagorasz-tétel összevonásával számíthatjuk ki a helyzetét: $(DA^2 + AE^2) + (EB^2 + BC^2) = DC^2$. Legyen $AE = x$, ekkor a $7^2 + x^2 + (8 - x)^2 + 2^2 = 89$ egyenlet írható fel. Átrendezve $x^2 - 8x + 14 = 0$, a két gyök $4 \pm \sqrt{2}$. $AE_2 \approx 2,59$, $AE_3 \approx 5,41$ egység.

Az AEC háromszög kerülete az első esetben

$$\sqrt{7^2 + 2,59^2} + \sqrt{5,41^2 + 2^2} + \sqrt{89},$$

ami kb. 22,67 egység; a második esetben

$$\sqrt{7^2 + 5,41^2} + \sqrt{2,59^2 + 2^2} + \sqrt{89} \approx 21,55 \text{ egység.}$$



FELADATOK

1. K2

Egy derékszögű háromszögben $a = 10$ cm az egyik befogó, $c = 26$ cm az átfogó hossza. Számítsuk ki a befogóhoz tartozó magasság, súlyvonal és szögfelező hosszát!

2. K2

Mekkora az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge, ha a háromszög magasságpontja felezi az alaphoz tartozó magasságot?

3. K2

Egy háromszög két oldalának hossza $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, a harmadik oldalhoz tartozó f_c szögfelező hossza 6 cm. Mekkora a háromszög c oldala?

4. K2

A 10 cm sugarú körbe írt egyenlő szárú háromszögben az alappal szemben fekvő szög 80° -os. Számítsuk ki a háromszög területét és területeit!

5. K2

Számítsuk ki a paralelogramma oldalainak hosszát és szögeinek nagyságát, ha tudjuk, hogy egyik szöge 108° -os; a szöggel szemközti átló hossza 15 cm; és ez az átló a paralelogramma hegyesszögét 3 : 5 arányban osztja!

6. K2

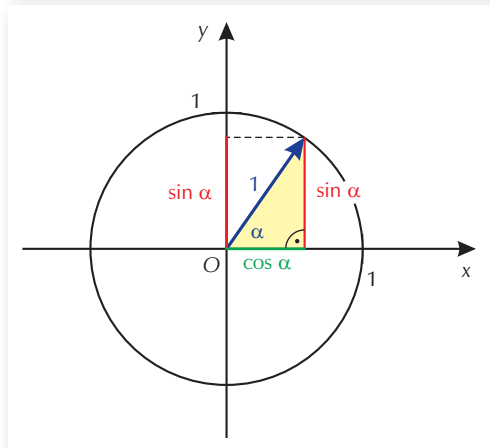
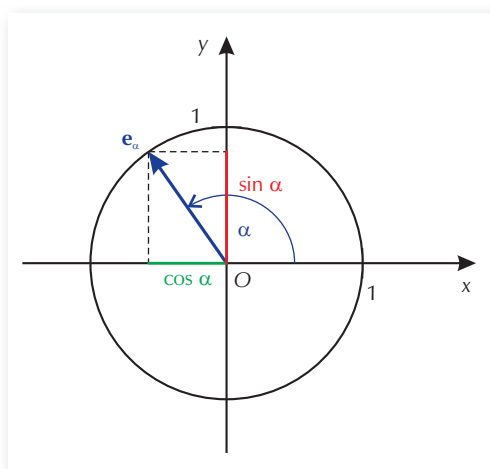
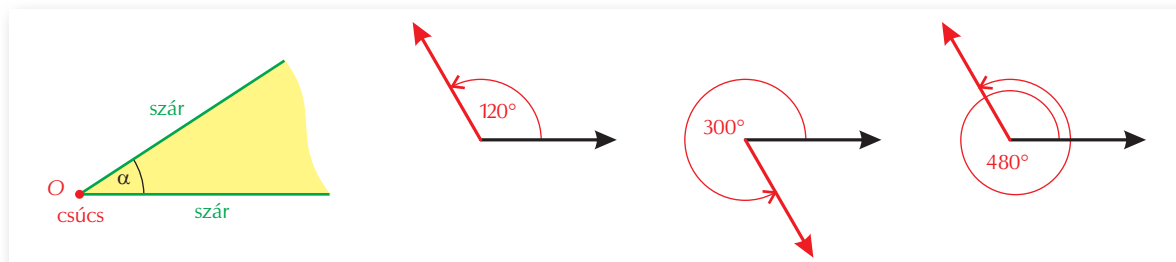
Egy trapéz alakú telek területe 3600 m^2 . A telek egyik átlós útja a telket egy szabályos és egy nem szabályos háromszög alakú részre osztja. A két rész területének aránya a megadott sorrendben 5 : 4. Mekkora a trapéz oldalai és szögei?

Emelt szint

33. FORGÁSSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

Az előző ismétlő leckében a hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióit derékszögre és tompaszögekre is kiterjesztettük. Most tetszőleges **forgásszögre** elvégezzük a kiterjesztést.

Adott a síkon egy félegyenes, ez a forgásszög egyik szára. Ezt a félegyenet a kezdőpontja mint origó körül elforgatjuk egy α irányított szöggel (pozitív irány az óramutató járásával ellentétes irány). A félegyenes által súrolt síkrész a szögtartomány, és az eredeti félegyenes a másik szög szár. A forgásszög nagysága 360° -nál nagyobb is lehet, ilyen esetben a félegyenes többször is súrolhatja ugyanazt a síkrészt.



A definíció kiterjesztését az α szögű egységvektor (az x tengely pozitív felével α irányított szöget bezáró vektor), $\mathbf{e}_\alpha$ segítségével fogalmazzuk meg. A koordináta-rendszerben az $\mathbf{i}$ bázisvektort az origó körül α irányított szöggel elforgatva kapjuk az $\mathbf{e}_\alpha$ egységvektort, ennek végpontja mindig az origó középpontú egységsugarú körön van. Az általunk vizsgált szög egyik szára mindig az x tengely pozitív fele, a másik szára pedig az α szögű egységvektor meghosszabbítása.

Forgásszög szögfüggvényeinek definíciója:

$\sin \alpha$: az x tengely pozitív felével α szöget bezáró egységvektor ($\mathbf{e}_\alpha$) második koordinátája.

$\cos \alpha$: az x tengely pozitív felével α szöget bezáró egységvektor ($\mathbf{e}_\alpha$) első koordinátája.

Összefoglalva: $\mathbf{e}_\alpha = (\cos \alpha; \sin \alpha)$.

Az új definíció a hegyesszögek esetében ugyanazt az eredményt adja, mint a korábbi. Az ábrán látható derékszögű háromszögben az átfogó egységnyi hosszúságú. Így $\frac{\sin \alpha}{1} = \sin \alpha$ és $\frac{\cos \alpha}{1} = \cos \alpha$.

Mivel az $\mathbf{e}_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$ egységvektor hossza 1, így $\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1$, azaz $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. A **pitagoraszsi összefüggés** tehát érvényben marad, továbbá $-1 \leq \sin \alpha, \cos \alpha \leq 1$ minden forgásszögre.

Tetszőleges szög szögfüggvényeit visszavezethetjük a hegyesszögek szögfüggvényeire.

Ha az α szögű egységvektor a második síknegyedbe esik, akkor az egységvektort tükrözzük az y tengelyre.

A tükrözés miatt a kapott vektor $\mathbf{e}_{180^\circ - \alpha}$. Tehát $\mathbf{e}_\alpha$ és $\mathbf{e}_{180^\circ - \alpha}$ második koordinátája megegyezik, $\mathbf{e}_{180^\circ - \alpha}$ első koordinátája pedig (-1) -szerese $\mathbf{e}_\alpha$ első koordinátájának. Innen

$$\text{I. } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

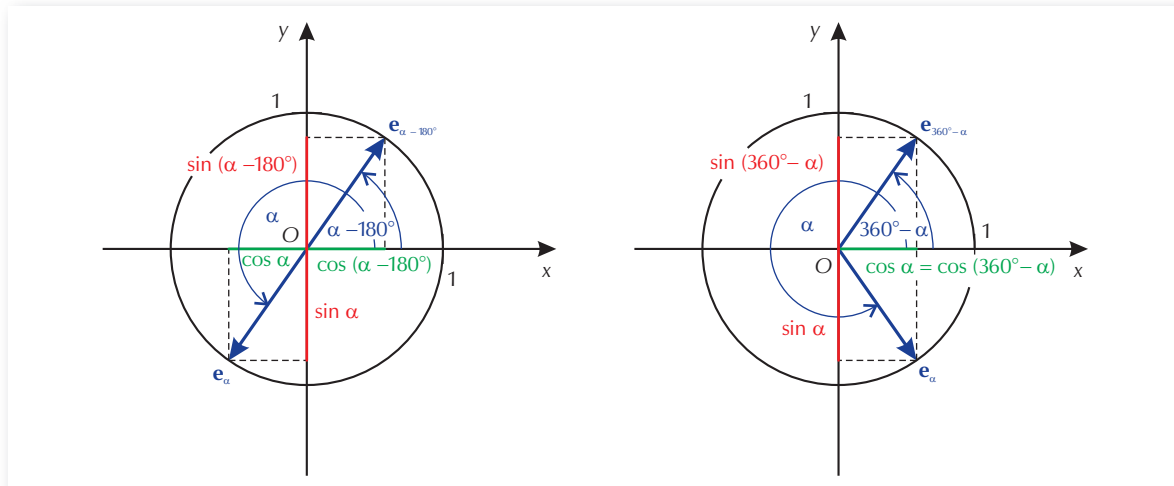
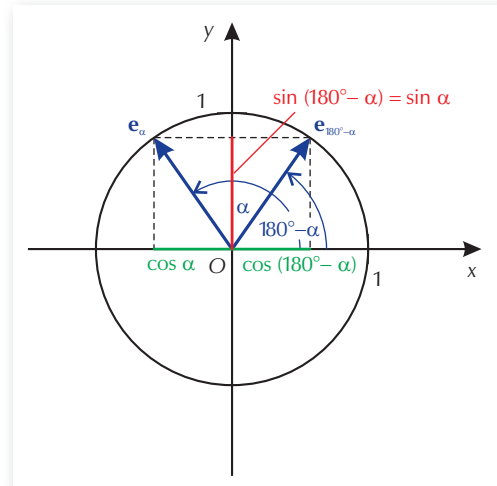
(Ezeket az összefüggéseket állapítottuk meg a derékszögű és tompaszögű kiterjesztés esetében is.)

Hasonlóan határozhatók meg a harmadik és a negyedik síknegyedbe eső egységvektorok esetében is a szögfüggvények.

$$\text{II. } \sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin \alpha, \cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha,$$

$$\text{III. } \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha, \cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

A fenti összefüggések tetszőleges α szögre érvényesek.

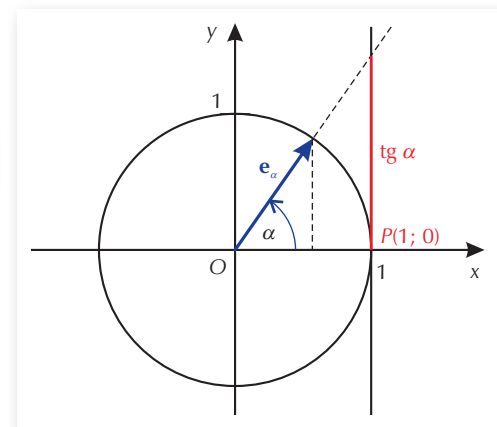


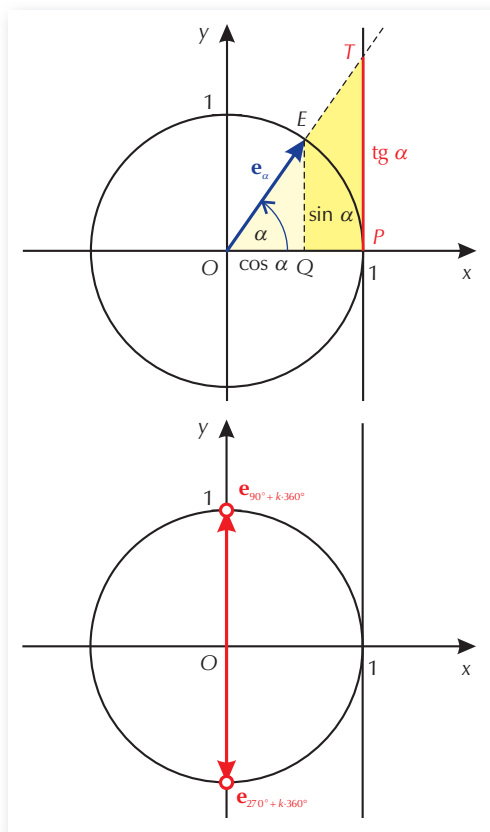
A $\operatorname{tg} \alpha$ ÉS $\operatorname{ctg} \alpha$ ÁLTALÁNOSÍTÁSA

A $\operatorname{tg} \alpha$ definíciója forgásszögekre is megfelel, ha kikötjük, hogy $\cos \alpha \neq 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ ha } \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Hogyan szemléltethetjük $\operatorname{tg} \alpha$ értékét az egység sugarú kör segítségével? Az egységkör $P(1; 0)$ pontjába húzott érintőből az $\mathbf{e}_\alpha$ egységvektor egyenese metszi ki $\operatorname{tg} \alpha$ értékét. (Az érintő pozitív iránya az y tengellyel megegyező.)





Az ábrán az $OEQ_{\Delta} \sim OTP_{\Delta}$, tehát

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{1} = y = \operatorname{tg} \alpha.$$

Az előjeleket vizsgálva láthatjuk, hogy az első és harmadik síknegyedben a $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ ugyanolyan előjelű, tehát a hányadosuk pozitív. A második és negyedik síknegyedben pedig a két érték ellentétes előjelű, tehát a hányadosuk negatív.

Van két olyan egységvektor, amelyek párhuzamosak az $(1; 0)$ pontba húzott érintővel. Ezek természetesen pontosan azoknak a szögeknek felelnek meg, ahol a $\operatorname{tg} \alpha$ nincs értelmezve.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} (\alpha + 360^\circ), \text{ de } \operatorname{tg} (\alpha + 180^\circ) = \frac{\sin (\alpha + 180^\circ)}{\cos (\alpha + 180^\circ)} = \\ &= \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a tangens szögfüggvény értékei nem csak 360° -onként, hanem 180° -onként ismétlődnek.

Minden szöghöz egyértelműen tartozik egy egységvektor, de az **egységvektor nem határozza meg egyértelműen a szöget**:

$$(\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{\alpha + k \cdot 360^\circ}).$$

Ha tehát egy szögnek csak valamelyik szögfüggvényét ismerjük, ez nem határozza meg egyértelműen magát a szöget, sőt legtöbb esetben magát az egységvektort sem.

A szögek nagyságát **radiánban** (ívmérték) is meghatározhatjuk. Ha egy r sugarú kör α középponti szögéhez i hosszúságú ív tartozik, akkor $\alpha_r = \frac{i}{r}$. (α_r jelenti a szög radiánban kifejezett értékét, forgásszög is

lehet.) Ez a hányados nem függ a kör sugarától; egy mértékegység nélküli viszonyszám, ami megmutatja, hogy a körív hányszorosa a sugárnak.

Néhány egyszerű esetben könnyű a fok-radián átváltás. Mivel a teljes szög $i = 2r\pi$, így $360^\circ = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi$ radián. A többi „nevezetes” szöget pedig az egyenes arányosság segítségével válthatjuk át, például $180^\circ = \pi$ radián, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radián, $-270^\circ = -\frac{3\pi}{2}$ radián stb.

A **trigonometrikus függvények** értelmezési tartománya általában a valós számok halmaza (illetve annak egy részhalmaza), így a szögeket radiánban értjük.

A **trigonometrikus egyenletek** megoldását – hacsak nincs külön előírás vagy valamilyen korlátozó feltétel – fokokban és radiánban is megadhatjuk. Az „oldjuk meg a valós számok halmazán” felszólítás radiánban várja a megoldást, míg a geometriafeladatok végeredményét továbbra is inkább fokokban adjuk meg.

Rejtvény

Egy repülőgépen Budapestről (É. sz. $47^\circ 30'$, K. h. $19^\circ 05'$) 555 km-t repültünk északi irányba, majd ugyanennyit nyugatra, ugyanennyit délnek, végül ismét 555 km-t keleti irányban. Hová érkezünk?

(A kiindulási helyünktől nyugati irányban kb. 61 km-re.)

TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
 $\sin \alpha = -0,5$.

Megoldás

A $\sin \alpha = -0,5$ egyenlet azt jelenti, hogy az α szögű egységvektor második koordinátája $(-0,5)$. Két ilyen vektor is van, ezek tükrösek az y tengelyre.

$$\alpha_1 = -30^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\alpha_2 = 210^\circ + n \cdot 360^\circ = (180^\circ - \alpha_1) + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Radiánban: } \alpha_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\alpha_2 = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Megoldás

$$\alpha_1 = 135^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ (ábra).}$$

$$\alpha_2 = -135^\circ + n \cdot 360^\circ = -\alpha_1 + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Radiánban: } \alpha_1 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\alpha_2 = -\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

3. példa

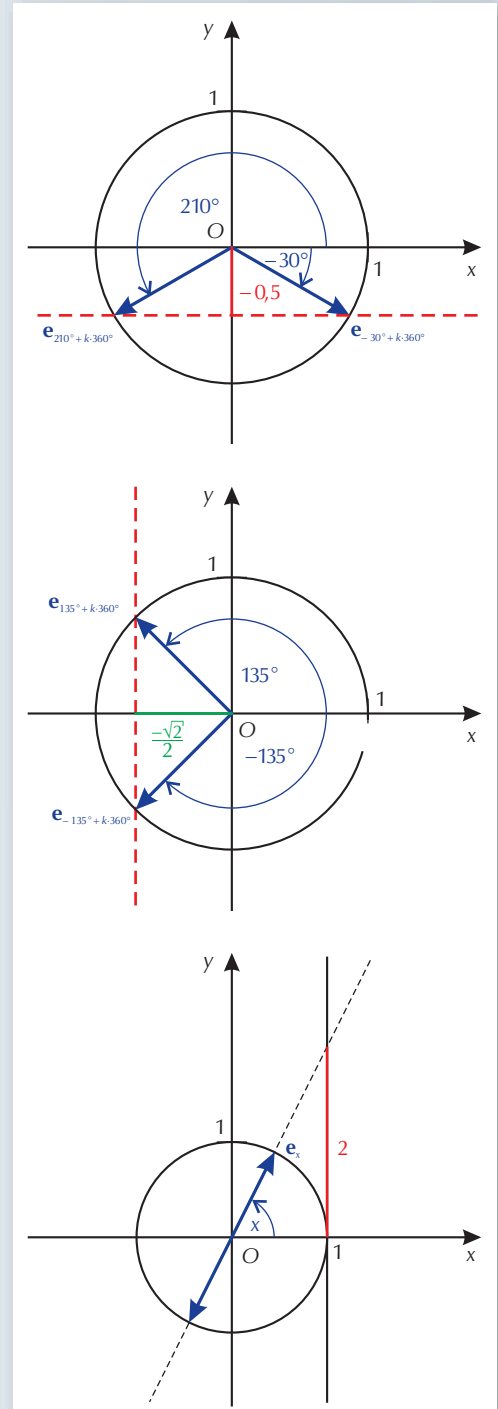
Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
 $\operatorname{tg} x = 2$.

Megoldás

$$x \approx 63,43^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}, \text{ radiánra átvérve}$$

$$x \approx 0,352\pi + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

(Itt a megoldást radiánban kérte a feladat.)



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

$\sin \alpha = \sin \beta$, $\sin \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = \cos \beta$ ÉS $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért most egy ideig fokokban dolgozunk. Ha szükséges, a végén átírhatjuk a végeredményt radiánba. Ha a feladatban eleve fokban adnak meg egy szöget, akkor mi is számolhatunk fokokban, és ebben az alakban adhatjuk meg a választ is.

$\sin \alpha = \sin \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK

4. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!
 $\sin(2\alpha - 30^\circ) = \sin(\alpha + 30^\circ)$.

Megoldás

A $2\alpha - 30^\circ$ és az $\alpha + 30^\circ$ forgásszögű egységvektor második koordinátája egyenlő. Két eset lehet: a két egységvektor vagy egybeesik, vagy egymás tükörképei az y tengelyre. Előbbi esetben szögeik közt $k \cdot 360^\circ$ a különbség, a másodikban szögeik összege $180^\circ + k \cdot 360^\circ$.

$$(2\alpha - 30^\circ) - (\alpha + 30^\circ) = \alpha - 60^\circ = n \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ + n \cdot 360^\circ, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

vagy

$$(2\alpha - 30^\circ) + (\alpha + 30^\circ) = 3\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ + k \cdot 120^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Tehát $\alpha = 60^\circ + k \cdot 120^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$, mert a második megoldás tartalmazza az elsőt.

$\sin \alpha = \cos \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK

Ezt például a $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$ összefüggés alapján visszavezethetjük az előző esetre.

$\cos \alpha = \cos \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK

5. példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletet!
 $\cos(3\alpha - 60^\circ) = \cos(2\alpha + 30^\circ)$.

Megoldás

A $3\alpha - 60^\circ$ és a $2\alpha + 30^\circ$ forgásszögű egységvektor első koordinátája egyenlő. Két eset lehet: a két egységvektor vagy egybeesik, vagy egymás tükörképei az x tengelyre. Előbbi esetben szögeik közt $k \cdot 360^\circ$ a különbség, a másodikban szögeik összege $k \cdot 360^\circ$.

$$(3\alpha - 60^\circ) - (2\alpha + 30^\circ) = \alpha - 90^\circ = k \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbf{Z},$$

vagy

$$(3\alpha - 60^\circ) + (2\alpha + 30^\circ) = 5\alpha - 30^\circ = n \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 6^\circ + n \cdot 72^\circ, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Összefoglalva:

$$\alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{vagy} \quad \alpha = 6^\circ + n \cdot 72^\circ, \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

tg $\alpha = \text{tg } \beta$ ALAKÚ EGYENLETEK

Ekkor az α és β hajlásszögű egységvektor egyenesen egybeesik. Milyen összefüggés van α és β között?

Két eset lehet: a két egységvektor vagy egybeesik, vagy ellentétes irányúak. Az utóbbi esetben a szögek közti különbség $k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\text{tg}(4\alpha - 30^\circ) = \text{tg}(\alpha + 30^\circ)$!

Megoldás

$$(4\alpha - 30^\circ) - (\alpha + 30^\circ) = 3\alpha - 60^\circ = k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\alpha = 20^\circ + k \cdot 60^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Ellenőrizhető, hogy sem $4\alpha - 30^\circ$, sem $\alpha + 30^\circ$ nem lehet $90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.)

MÁSODFOKÚRA VISSZAVEZETHETŐ EGYENLETEK

7. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
 $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0.$

Megoldás

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0,$$

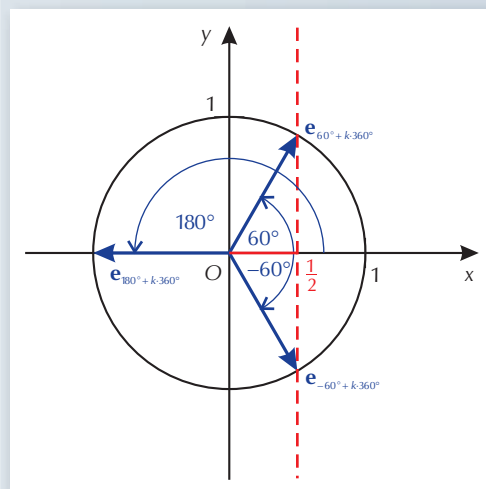
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0. \quad y = \cos x \text{ helyettesítéssel:}$$

$$2y^2 + y - 1 = 0,$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad \cos x = -1.$$

$$\text{Tehát } x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{vagy} \quad x_2 = \pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Ekvivalens átalakításokat végeztünk.)

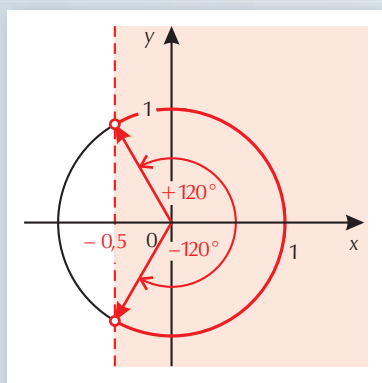


Trigonometrikus egyenlőtlenséget általában úgy oldunk meg, hogy az egyenlőség megoldása után kiválasztjuk a megfelelő intervallumokat.

8. példa

Oldjuk meg a $\cos \alpha > -0,5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás



Meg kell adnunk azokat a szögeket, amelyekhez tartozó egységvektorok első koordinátája nagyobb $-0,5$ -nél.

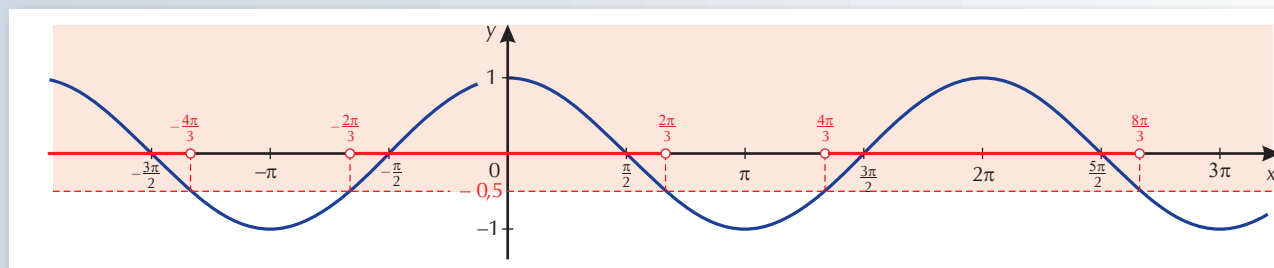
A feltételnek megfelelő vektorok végpontjai a satírozott részben és az egységkörön vannak. Jelöljük ki ezeket a pontokat! A körív két vége nem jó, ezt üres karikával jelöljük. Rajzoljuk be a két végpontba mutató egységvektort is. Az egyik a 120° -os, a másik a 240° -os szöghöz tartozik. Szokásos jelölésük: $\mathbf{e}_{120^\circ}$ és $\mathbf{e}_{240^\circ}$. Természetesen írhatunk a 240° helyett -120° -ot. Ezekhez a szögekhez bármely egész számszor 360° -ot adva szintén megfelelő intervallumokat kapunk.

Ezek alapján a megoldás:

$$-120^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 120^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$-\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Nézzük meg, hogy grafikusan ez mit jelent:



FELADATOK

1. E1

Adjuk meg az összes olyan szöget fokban és radiánban is, amelyre

- a) $\sin x = 0,5773$; c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\cos x = 0,5$; g) $\operatorname{tg} x = 2$;
b) $\sin x = -1$; d) $\cos x = 1$; f) $\cos x = -0,6342$; h) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$!

2. E1

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $\sin(x + 60^\circ) = \sin(90^\circ - 4x)$; c) $\cos x = -\sin x$;
b) $\cos(3x) = \cos x$; d) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(3x - 45^\circ)$.

3. E1

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

- a) $\sin^2 x - \cos x = 1$; c) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0,5$;
b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; **E2** d) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$.

4. E1

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

- a) $\cos x \leq 0$; b) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin^4 x \geq \frac{1}{4}$.

5. E1

Az ABC háromszög területe 20 cm^2 , $AB = 7 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Mekkora a háromszög szögei és a harmadik oldala?

6. E1

Az alábbi függvényeket a valós számokon értelmezzük. Határozzuk meg a függvények legkisebb és legnagyobb értékét!

a) $\frac{1}{5 - 4 \sin^2 x};$

b) $\sqrt{8 - \cos x};$

c) $\sin^4 x - \cos^4 x;$

d) $\cos^2 x + \sin x + 3;$

e) $2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x;$

E2 f) $\sin x \cdot \cos x;$

E2 g) $\sin x + \cos x.$

KOORDINÁTAGEOMETRIA

Ismétlés

11/VI., VII.

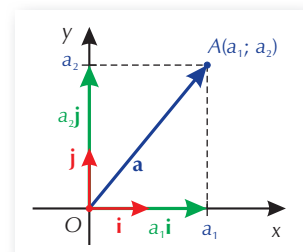
34. VEKTOROK A KOORDINÁTA-RENDSZERBEN. A PONT KOORDINÁTAGEOMETRIÁJA

ALAPÖSSZEFÜGGÉSEK

Olyan összefüggéseket, egyenleteket fogunk használni, amelyeket az alakzat pontjainak a koordinátái igazzá tesznek, de semmilyen más pont koordinátái nem elégítenek ki. Az ilyen összefüggést az **alakzat egyenletének** nevezzük.

Két alakzat (körök, egyenesek stb.) **metéspontjainak** koordinátáit úgy határozzuk meg, hogy a két alakzat egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk.

Vegyük fel az origó kezdőpontból kiindulva az **i** és **j** alapvektorokat. Egy tetszőleges **a** vektor koordinátáit a_1 -gyel és a_2 -vel jelölve $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$.



Korábban bizonyítottuk, hogy **két vektor összegének** koordinátái az összetevő vektorok megfelelő koordinátáinak összegei, és a **vektor számszorosának** koordinátái a megfelelő koordináták számszorosai.

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektor hossza $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

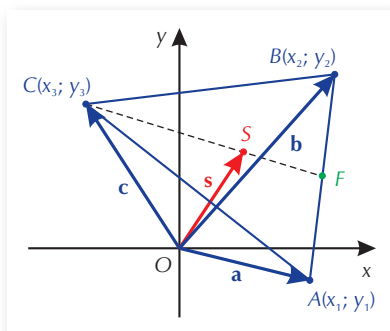
Ha az origóból kiindulva veszünk fel (az **i** és **j** vektorok síkjában) egy az **a** vektort reprezentáló irányított szakaszt, akkor annak végpontja már egyértelműen meghatározott. Az origóból induló vektorokat **helyvektoroknak** nevezzük.

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy a végpontba mutató helyvektor koordinátáiból kivonjuk a kezdőpontba mutató helyvektor koordinátáit.

Bármely vektor koordinátáinak ismeretében úgy írhatjuk fel a rá **merőleges** és vele **egyenlő hosszúságú vektor** koordinátáit, hogy az adott koordinátákat felcseréljük, és az egyikük előjelét megváltoztatjuk.

Az $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ vektor $+90^\circ$ -os elforgatottja $\mathbf{a}_{90^\circ}(-a_2; a_1)$, -90° -os elforgatottja $\mathbf{a}_{-90^\circ}(a_2; -a_1)$.

FELEZŐPONT, SÚLYPONT



Egy szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepével adhatók meg.

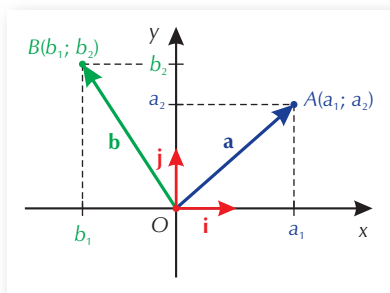
Háromszög súlypontjának koordinátái a csúcspontok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlők.

Megjegyzés

Tetraéder súlypontjának koordinátái is a csúcok megfelelő koordinátáinak számtani közepével adhatók meg.

Emelt szint

SKALÁRIS SZORZAT KOORDINÁTÁKKAL



Legyen $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ két vektor.

Definíció szerint **két vektor skaláris szorzata**:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma$, ahol γ a két vektor által bezárt szög. ($0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$).

A koordinátás felírásból bizonyítható, hogy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Két vektor skaláris szorzatát kiszámíthatjuk úgy is, hogy a vektorok megfelelő koordinátáit össze-szorozzuk, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Mivel egy **vektor négyzete** egyenlő a hosszúságának a négyzetével, ezért a vektor hosszát kiszámíthatjuk úgy is, hogy az önmagával vett skaláris szorzatából négyzetgyököt vonunk.

$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, ha $\mathbf{v}(v_1; v_2)$.

Ebből következik, hogy ha adott két pont, $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$, akkor az AB távolságot kiszámíthatjuk az $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ képlettel.

A skaláris szorzat kétféle kiszámítása módot nyújt **két vektor szögének** a meghatározására is:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

FELADATOK

1. K1

Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái: $(-4; 0)$, $(-\frac{5}{2}; 1)$ és $(-\frac{9}{2}; 2)$. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának koordinátáit!

- 2. K1** Egy négyszög csúcspontjainak koordinátái $(-6; 4)$, $(4; 2)$, $(3; -3)$ és $(-6; 0)$. Igazoljuk, hogy a négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcspontjai!
- 3. K2** Határozzuk meg az $\mathbf{a}(-7; 24)$ vektorral párhuzamos egységvektor koordinátáit!
- 4. K2** Az $\mathbf{a}(7; -24)$ és $\mathbf{b}(x; 14)$ vektorok merőlegesek egymásra. Számítsuk ki, hogy az $\mathbf{a}$ hossza hányad része a $\mathbf{b}$ hosszának!
- 5. K2** Milyen arányban osztja a $P(3; 4)$ pont az AB szakaszt, ahol $A(5; 6)$ és $B(0; 1)$?
- 6. E1** Mekkora a háromszög A csúcsánál lévő szöge, ha a csúcsok koordinátái $A(-2; 1)$, $B(4; -3)$, $C(6; 3)$?
- 7. E1** Az $\mathbf{a}(-12; -5)$ és $\mathbf{b}(1; y)$ vektorok 60° -os szöget zárnak be egymással. Mekkora az y ?
- 8. E1** Írjuk fel egy olyan vektornak a koordinátáit, amely párhuzamos az $\mathbf{a}(-3; 4)$ és $\mathbf{b}(5; -12)$ vektorok által bezárt szög szögfelezőjével!

35. AZ EGYENES KOORDINÁTAGEOMETRIÁJA

Az egyenessel párhuzamos, nem nulla hosszúságú $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ vektort az egyenes **irányvektorának** nevezzük. (Minden egyenesnek végtelen sok irányvektora van.)

Ha az egyenes nem párhuzamos az y tengellyel, azaz $v_1 \neq 0$, akkor az $m = \frac{v_2}{v_1}$ érték az egyenes **meredeksége**, amely az egyenes x tengellyel bezárt szögének tangensét adja meg. Az $m = \operatorname{tg} \alpha$ értéket az egyenes **iránytangensének** vagy **iránytényezőjének** is nevezzük.

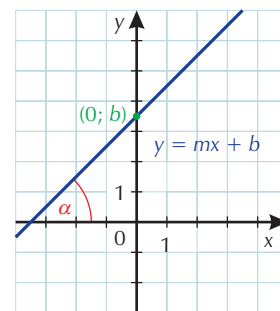
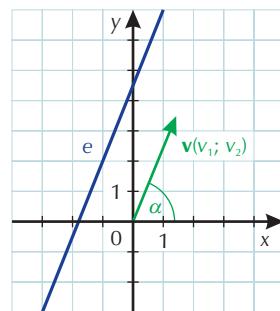
Egy $P(x; y)$ pont pontosan akkor illeszkedik a $P_0(x_0; y_0)$ ponton áthaladó $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenesre, ha $\overrightarrow{P_0P}$ párhuzamos a $\mathbf{v}$ irányvektorral.

Az egyenes egyenlete kétismeretlenes elsőfokú egyenlet. Az $y = mx + b$ egyenlet a $(0; b)$ ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete.

Általánosan: az adott $P(x_0; y_0)$ ponton átmenő, adott m meredekségű **egyenles egyenlete**: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Két ponton átmenő egyenes egyenletét úgy írjuk fel, hogy először meghatározzuk a pontokat összekötő vektort, ez az egyenes (egy) irányvektora. Az irányvektorból meghatározzuk a meredekséget (amennyiben létezik), és a fenti egyenletbe behelyettesítjük valamelyik pont koordinátáit.

Ha az egyenes az y tengellyel párhuzamos, akkor nincs meredeksége, és egyenlete $x = c$ alakú (c állandó).



A PÁRHUZAMOSSÁG ÉS A MERŐLEGESSÉG FELTÉTELE

Két, a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor és csak akkor **párhuzamos** egymással, ha meredekségük egyenlő.

Ha az egyenesek párhuzamosak az x , illetve y tengellyel, akkor egyenletük $y = c$, illetve $x = c$ alakra hozható (c állandó).

Két, a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor és csak akkor **merőleges** egymásra, ha meredekségeik szorzata -1 .

FELADATOK

1. K2

Írjuk fel a háromszög nevezetes vonalainak (oldal, középvonal, magasságvonal, súlyvonal, oldalfelező merőleges) egyenleteit, ha $A(0; 2)$, $B(1; 1)$ és $C(2; -2)$!

2. K2

Mekkora szöget zárnak be a $3x + 9y = 7$ és $x - 2y = 5$ egyenletű egyenesek?

3. K1

Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyek átmennek a $(2; -3)$ ponton, és irányszögük a) 30° ; b) -45° ; c) 90° ; d) 120° !

4. K2

Egy négyzet egyik csúcspontja $A(12; 7)$, egyik átlójának egyenlete $5x + y = 28$. Számítsuk ki az oldal-egyeneseinek egyenletét!

5. K1

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-4; 1)$ ponton, és párhuzamos a $2x + 3y = -4$ egyenletű egyenessel! Írjuk fel az $(5; -4)$ ponton áthaladó és a megadott egyenesre merőleges egyenes egyenletét is!

6. K2

Adott két pont: $A(4; 6)$ és $B(6; -2)$. Keressük meg az ordinátatengelyen a P pontot úgy, hogy az APB töröttvonal hossza a lehető legrövidebb legyen!

7. K2

Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $(-3; 1)$, $(4; 5)$ és $(6; -3)$. Írjuk fel a leghosszabb oldalhoz tartozó súlyvonal egyenletét!

8. K2

Egy háromszög egyik csúcsa az $A(6,5; -2)$ pont, két magasságvonalának egyenlete: $y - x = 4$ és $7x + 2y = 7$. Írjuk fel az oldalegyenesek egyenletét!

9. K2

Egy paralelogramma két szemközti csúcsának koordinátái $A(-4; 2)$, $C(6; 4)$. Egyik átlójának meredeksége $m = -\frac{2}{3}$. A C csúcsból induló egyik magasság egyenesének egyenlete $8x + y = 52$. Határozzuk meg a paralelogramma hiányzó csúcspontjainak koordinátáit!

10. K2

Az $A(0; 5)$ pontból induló, 3 egység sebességgel haladó, pontszerűnek tekinthető test a $-x + y = 5$ egyenletű egyenesen halad. Milyen távolságban lesz az origótól 10 időegység múlva?

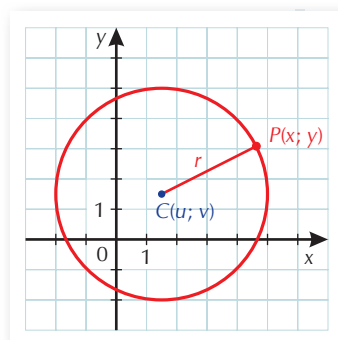
36. A KÖR KOORDINÁTAGEOMETRIÁJA

A $C(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete**

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$

Ha a nullára rendezett kör egyenletébe (mindkét oldalból kivonunk r^2 -et) tetszőleges pont koordinátáit behelyettesítjük, akkor belső pontra negatív, külső pontra pozitív értéket kapunk, csak a kör pontjaira kapunk nullát.

A kétismeretlenes másodfokú egyenlet csak akkor lehet kör egyenlete, ha az x^2 és y^2 együtthatója egyenlő, és nem szerepel benne xy -os tag. Ez a feltétel szükséges, de nem elégséges.



1. példa

Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ egyenletű kör középpontját és sugarát, valamint az x és y tengellyel vett metszéspontjait! Mekkora a kör kerülete és területe?

Megoldás

Teljes négyzetté alakítunk: $(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 = 0$, azaz $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Az egyenletből leolvashatjuk, hogy a kör középpontja $(-4; 3)$, és sugarának hossza 5.

Az x és y tengelymetszeteket az $y = 0$, illetve $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk meg. (Érdekes az eredeti egyenletbe helyettesíteni.) Ha $y = 0$, akkor $x^2 + 8x = 0$, innen $x_1 = 0$ és $x_2 = -8$. A kör az x tengelyt a $(0; 0)$ és $(-8; 0)$ pontokban metszi.

Ha $x = 0$, akkor $y^2 - 6y = 0$, innen $y_1 = 0$ és $y_2 = 6$. A kör az y tengelyt a $(0; 0)$ (ezt már az előbb is megkaptuk) és $(0; 6)$ pontokban metszi.

A kör kerülete $2 \cdot 5 \cdot \pi \approx 31,42$ egység, területe $5^2 \cdot \pi \approx 78,54$ területegység.

EGYENES ÉS KÖR KÖLCSÖNÖS HELYZETE

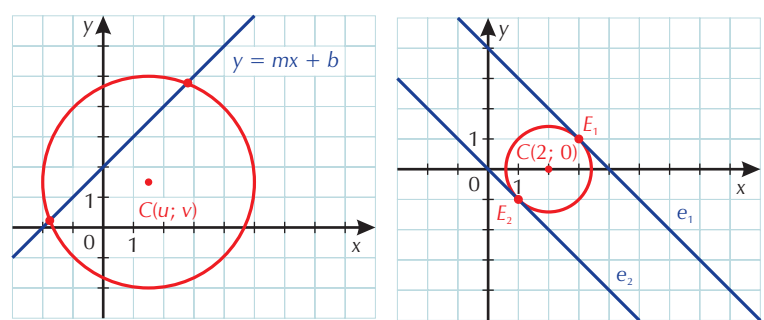
Emelt szint

Egy egyenesnek és egy körnek **0, 1 vagy 2** közös pontja lehet. Ezt (ezeket) úgy határozzuk meg a kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszerből, hogy az egyenes elsőfokú egyenletéből kifejezzük valamelyik változót, és azt behelyettesítjük a kör másodfokú egyenletébe. A valós megoldások száma mutatja meg, hogy hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek.

ÉRINTŐK

Ha egy egyenesnek és egy körnek egy közös pontja van, akkor az egyenes a kör érintője.

Egy **kör adott pontjába húzott érintő egyenletét** úgy írjuk fel, hogy először meghatározzuk a kör középpontja (C) és az érintési pont (E) közötti $\vec{CE}$ vektort. Erre merőleges vektor a keresett érintő



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

irányvektora, mert az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Az irányvektorból számolt meredekség és az érintési pont segítségével fel tudjuk írni a keresett érintő egyenletét.

A kör adott irányú (adott e egyenessel párhuzamos) érintőjét egy példa segítségével mutatjuk be.

2. példa

Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ egyenletű körnek az $x + y = 1526$ egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás

Tekintsük az adott egyenessel párhuzamos összes egyenes egyenletét! Tudjuk, hogy mindegyiknek van olyan egyenlete, amelynek bal oldala $x + y$, és csak a jobb oldali konstansban térnek el egymástól. Keressük az érintő egyenletét $x + y = c$ alakban! Azokat a c értékeket keressük, amelyre a körnek és az egyenesnek egy közös pontja van. Az egyenes egyenletéből y értékét kifejezve és a kör egyenletébe helyettesítve azt kapjuk, hogy $x^2 + (c - x)^2 - 4x + 2 = 0$. Kifejtve $2x^2 - x \cdot (2c + 4) + (2 + c^2) = 0$.

Egy megoldása akkor lehet egy másodfokú egyenletnek, ha a diszkriminánsa nulla, ezért

$$b^2 - 4ac = (2c + 4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2 + c^2) = 0.$$

Rendezve és megoldva

$$-4c^2 + 16c = 0, \text{ innen } c = 0 \text{ vagy } c = 4.$$

A keresett érintők egyenletei tehát

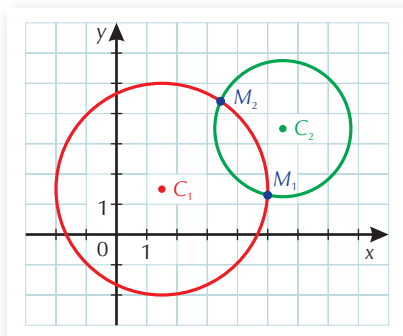
$$e_1: x + y = 0, \text{ és } e_2: x + y = 4.$$

Másképpen: Úgy is eljáráhattunk volna, hogy először az érintési pontokat határozzuk meg.

Ekkor az adott kört $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ alakra hozzuk, leolvassuk a kör középpontjának koordinátáit: $(2; 0)$, és a középponton át a keresett érintőre merőlegest állítunk: $x - y = 2$. Ennek az egyenesnek a körrel való metszéspontjaiban húzunk érintőket az előző pontban ismertetett módon. (Metszéspontok: $E_1(3; 1)$ és $E_2(1; -1)$.)

Emelt szint

KÉT KÖR KÖZÖS PONTJAINAK MEGHATÁROZÁSA



A két kör egyenletét szükség esetén átalakítjuk úgy, hogy a jobb oldalon nulla álljon. Így egy **kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszer** kapunk, amelyben az egyenletek különbsége elsőfokú. Ebből az elsőfokú egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent, és azt az egyik (egyszerűbb) másodfokú egyenletbe helyettesítve számíthatjuk ki a közös pontokat.

Bolyai János (1802–1860) egyik leveléből idézünk:

Olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna elveszni; ha meglátja Édes Apám; megesmeri; most többet nem szólhatok, csak annyit: *hogy semmiből egy új, más világot teremtettem*: mindaz, valamit eddig küldöttem, csak kártyaház a toronyhoz képest.

FELADATOK

- 1. K1** Határozzuk meg a következő egyenletekkel megadott körök középpontjának koordinátáit és sugarát!
- a) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$;
 b) $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 14,5$;
 c) $x^2 + y^2 - 12x - 12y = 25$.
- 2. K2** Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely koncentrikus a $4x^2 + 4y^2 - 28x + 44y - 86 = 0$ egyenletű körrel, és sugara feleakkora!
- 3. K2** Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 19 = 0$ egyenletű kör x és y tengellyel vett metszéspontjait! Mekkora a kör kerülete és területe?
- 4. E1** Milyen hosszú hűrt metsz ki az $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ egyenletű kör az $y = 2x + 1$ egyenesből?
- 5. E1** Az $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$ egyenletű körnek van-e olyan pontja, mely egyenlő távolságra van a $(-3; 2)$ és $(1; 0)$ koordinátájú pontoktól?
- 6. E1** Az $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$ egyenletű körhöz a $P(10; 24)$ pontjában érintőt húzunk. Írjuk fel az érintő egyenletét!
- 7. E1** Az ABC háromszög két csúcsa $A(2; -1)$ és $B(11; 2)$, a C csúcs pedig rajta van a $3x - 4y = 0$ egyenesen és az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körön is. Határozzuk meg C koordinátáit! (Ne feledkezzünk el az ellenőrzésről!)

FÜGGVÉNYEK

Ismétlés

9/V., X.; 10/VII.; 11/III.

37. ALAPFOGALMAK. A LINEÁRIS FÜGGVÉNY

Mint azt már az előző években láttuk, a hozzárendelések, függvények vizsgálata a matematika egyik legfontosabb területe. A függvény mai értelemben is használatos megfogalmazása *Dirichlet*-től származik (1805–1859): „ha az y és x változók olyan viszonyban vannak egymással, hogy x valamely számértékéhez bármilyen törvény (szabály) hozzárendeli y -nak egy számértékét, akkor azt mondjuk, hogy y az x független változó függvénye”.



Az A és B nem üres halmazok között **hozzárendelést** létesítünk, ha meghatározzuk, hogy az A halmaz egyes elemeihez a B halmaz mely elemeit rendeljük hozzá.

Jelölése: $f: A \rightarrow B$, $a \in A$ és $b \in B$ esetében $a \mapsto b$.

A **hozzárendelés egyértelmű**, ha az A halmaz minden eleméhez pontosan egy B halmazbeli elemet rendelünk. Az egyértelmű hozzárendelést **függvénynek** nevezzük.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Egyértelmű hozzárendelés esetében az A alaphalmazt a függvény **értelmezési tartományának** nevezzük. Az f függvény értelmezési tartományát D_f -fel jelöljük.

A **hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű**, ha mindkét irányban egyértelmű.

A függvény **értékkészletét** azok a B halmazbeli elemek alkotják, amelyeket az A halmaz valamelyik eleméhez rendeltük hozzá. Az f függvény értékkészletét R_f -fel jelöljük.

Ha az f függvény értelmezési tartományának eleme az x valós szám, akkor az x helyen felvett függvényérték jelölése $f(x)$.

Az $f: x \mapsto f(x)$ függvény esetében a koordináta-rendszerbeli $(x; f(x))$ pontok halmazát az f **függvény képének, grafikonjának** nevezzük.

Az $f: x \mapsto f(x)$ függvény **zérushelye** az értelmezési tartományának azon a értéke, melyre $f(a) = 0$ teljesül.

1. példa

Az alábbi hozzárendelések közül melyek függvények, melyek kölcsönösen egyértelműek?

- a) Minden valós számhoz rendeljük hozzá az ellentettjét!
- b) Adott t tengely esetében a sík pontjaihoz rendeljük hozzá a tükörképüket!
- c) Minden filmhez rendeljük hozzá a rendezőjét!
- d) Minden pozitív egész számhoz rendeljük hozzá az osztóit!
- e) Minden valós számhoz rendeljük hozzá a négyzetét!
- f) Minden racionális számhoz rendeljük hozzá az egészrészét!
- g) A pöttyös labdákhöz rendeljük hozzá pöttyeiknek számát!
- h) Minden szülőhöz a legidősebb gyermekét rendeljük.
- i) A Föld országaihoz az ország nemzetközi betűjelét rendeljük.

Megoldás

Nem függvény: d), mert egynél több osztója is lehet egy pozitív egész számnak.

A többi hozzárendelés egyértelmű, azaz függvény.

Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelések: a), b), i).

2. példa

Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők!

$$a) a(x) = \frac{5}{x-3}; \quad c) c(x) = \sqrt{4-3x};$$

$$b) b(x) = \frac{2}{7}x^2; \quad d) d(x) = \lg(x^2 - 4).$$

Megoldás

$$a) D_a = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 3\};$$

$$b) D_b = \mathbf{R};$$

$$c) D_c = \left\{x \in \mathbf{R}, x \leq \frac{4}{3}\right\};$$

$$d) D_d = \{-2\text{-nél kisebb vagy } 2\text{-nél nagyobb valós számok}\}.$$

Idézet

Egy látogató azt állította, hogy neki nincs szüksége az igazság keresésére, mert már megtalálta a saját vallásában. A Mester viszont ezt mondta:

– Volt egyszer egy diák, aki sosem lett matematikus, mert vakon hitt a matematikakönyv végén található válaszokban. A helyzet ironiája az, hogy a válaszok helyesek voltak.

(De Mello: *Tantétel*)

3. példa

Határozzuk meg a függvények értékkészletét!

a) $a(x) = x^2$, $D_a = \{\text{egész számok}\}$;

b) $b(x) = \frac{5}{x}$, $D_b = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$;

c) $d(x) = \sqrt{x-5}$, $D_d = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 5\}$.

Megoldás

a) $R_a = \{\text{négyzetszámok}\}$;

b) $R_b = \{b(x) \in \mathbf{R}, b(x) \neq 0\}$;

c) $R_d = \{d(x) \in \mathbf{R}, d(x) \geq 0\}$.

LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK

Az $f: x \mapsto mx + b$ alakú hozzárendeléssel megadott függvényeket **lineáris függvényeknek** nevezzük.

I. Ha $m = 0$, akkor a függvény **nulladfokú, konstans függvény**. Mivel minden x valós számhoz a b értéket rendeli, ezért grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes.

4. példa

Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

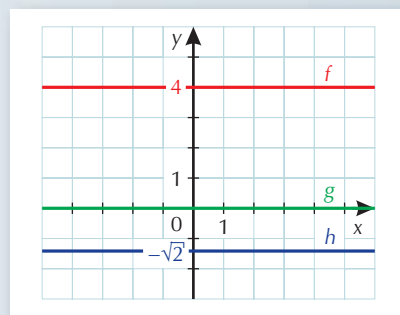
$f: x \mapsto 4$;

$g: x \mapsto 0$;

$h: x \mapsto -\sqrt{2}$.

Megoldás

A konstans függvények képe az x tengellyel párhuzamos egyenes; y tengelymetszetük a konstans érték.



II. Ha $m \neq 0$ és $b = 0$, akkor a függvény az **egyenes arányosságot** leíró függvény. Az egyenes arányosság grafikonja egyenes, mely áthalad az origón, valamint az $(1; m)$ ponton. Az m értékét a grafikon meredekségének nevezzük; teljesül az $m = \operatorname{tg} \alpha$ összefüggés, ahol α a függvény grafikonjának az x tengely pozitív irányával bezárt szögét jelenti.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

5. példa

Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett függvényeket:

$$f: x \mapsto x;$$

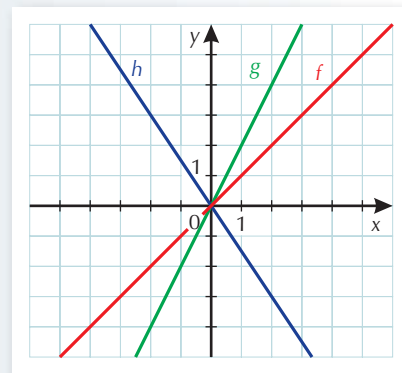
$$g: x \mapsto 2x;$$

$$h: x \mapsto -\frac{3}{2}x.$$

Megoldás

Az f , g és h függvények képe az origón áthaladó egyenes.

A megfelelő meredekségek értéke rendre 1, 2 és $-\frac{3}{2}$.



III. Ha $m \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor az elsőfokú függvény **grafikonja áthalad a $(0; b)$, $(1; m + b)$ pontokon**, meredeksége m .

(Természetesen az egyenes arányosság is elsőfokú függvény.)

6. példa

Ábrázoljuk a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényeket!

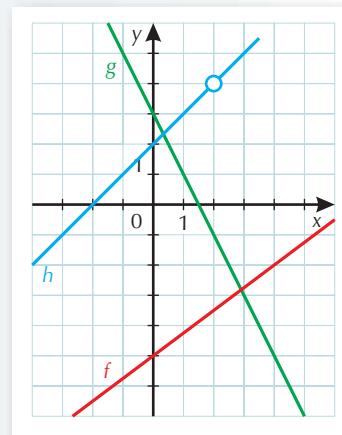
$$f: x \mapsto \frac{3}{4}x - 5; \quad g: x \mapsto -2x + 3; \quad h: x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Megoldás

Az f , g , h függvények képei az ábrán láthatók.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2, \text{ ha } x \neq 2; \text{ a } h \text{ függvény képe tehát}$$

egy „lyukas” egyenes.



FELADATOK

1. K1

Adjunk meg egyértelmű hozzárendelést az alábbi két halmaz elemei között (A-ból B-be történjen a hozzárendelés)!

a) $A = \{\text{A hét napjai.}\};$

$B = \{\text{Az egyjegyű természetes számok halmaza.}\};$

b) $A = \{1; 5; 6\};$

$B = \{2; 4\};$

c) $A = \{\text{Egy adott } S \text{ sík pontjai.}\};$ $B = \{\text{Az adott } S \text{ sík pontjai.}\}.$

2. K1

Az alábbiakban felsorolt hozzárendelések közül melyik függvény, és melyik nem? Válaszunkat indokoljuk!

- a) Minden sokszöghöz hozzárendeljük az átlóinak számát.
- b) Minden nemnegatív számhoz hozzárendeljük a négyzetgyökét.
- c) Minden természetes számhoz hozzárendeljük a prímosztóit.
- d) A kör minden húrjához hozzárendeljük a felezőpontját.
- e) A kör minden belső pontjához hozzárendeljük azt a húr, amelynek a vizsgált pont felezőpontja.

3. K1

Egy zöldség-nagykereskedésben 20 kg narancs ára 14 000 Ft. Adjuk meg azt a függvényt, amely leírja a narancs tömege (m) és ára (Á) közötti összefüggést!

4. K1

Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők!

- a) $f(x) = 2 - 5x$;
- b) $g(x) = (x - 3)^2 - 5$;
- c) $h(x) = \frac{x-3}{x+2}$;
- d) $k(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

5. K1

Adott az $f: (\mathbf{R}^+ \cup \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -\sqrt{x}$ függvény. Határozzuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték -2 ; 0 ; illetve 6 !

6. K1

Adott az $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x-3}{x} + 2$ függvény.

- a) Mely függvényértékek tartoznak a -3 ; 2 ; illetve 5 számokhoz?
- b) Adjuk meg az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez tartozó függvényértékek a 0 ; -1 ; illetve 2 !

7. K1

Ábrázoljuk a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

$$f(x) = 3x - 2; \quad g(x) = -x + 3; \quad h(x) = \frac{5}{2}x - 1; \quad l(x) = -\frac{3}{4}x + 2.$$

8. K1

Döntsük el, hogy az alábbiakban megadott függvények közül melyek lineáris függvények!
a) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a megadott függvények értelmezhetők!

b) Állapítsuk meg a lineáris függvények meredekségét!

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{6-3x}{2}; & c(x) &= \frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}; \\ b(x) &= \frac{(x+2)^2-(x-1)^2}{3}; & d(x) &= \frac{x^2-4}{2x+4}. \end{aligned}$$

9. K2

Ábrázoljuk a következő függvényeket!

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2, & \text{ha } x \geq 2 \\ 2x - 1, & \text{ha } x < 2 \end{cases}; & h(x) &= \begin{cases} -2x + 1, & \text{ha } -3 \leq x < -1 \\ 3, & \text{ha } -1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 1, & \text{ha } 2 < x \leq 3 \end{cases}. \\ g(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4, & \text{ha } x < -2 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, & \text{ha } x \geq -2 \end{cases}; \end{aligned}$$

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

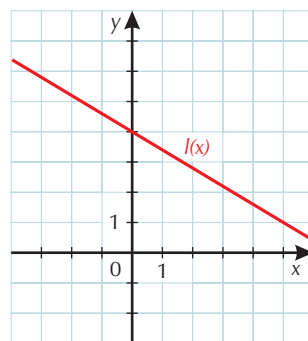
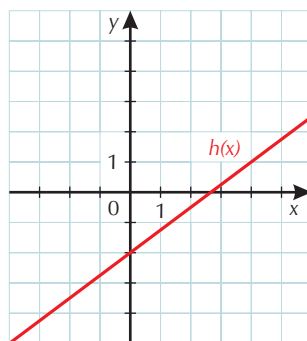
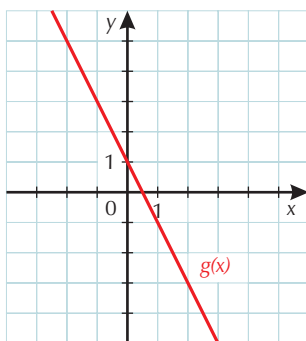
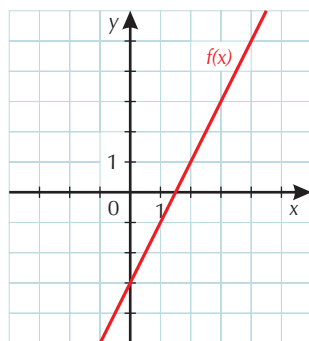
10. K2

Ábrázoljuk a következő, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényeket!

$$f(x) = \frac{3x}{x}; \quad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}; \quad h(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}; \quad i(x) = 2x - 3 + \frac{x}{x}.$$

11. K1

Adjuk meg azokat a függvényeket, amelyeknek a grafikonjai az ábrán láthatók!



38. SZÁMHALMAZON ÉRTELMEZETT NEMLINEÁRIS ALAPFÜGGVÉNYEK ÉS GRAFIKONJAIK

Igen sok **gyakorlati probléma vizsgálatában** segíthetnek a függvények. Ezek a problémák általában összetett, bonyolult megfogalmazások, vizsgálatukhoz az egyszerű függvények ismerete, ezek jellemzése, majd függvénytranszformációk használata szükséges. Az alábbiakban áttekintjük a megismert leg-egyszerűbb függvényeket és tulajdonságait.

Egyéb jelölés híján a függvényeket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezzük.

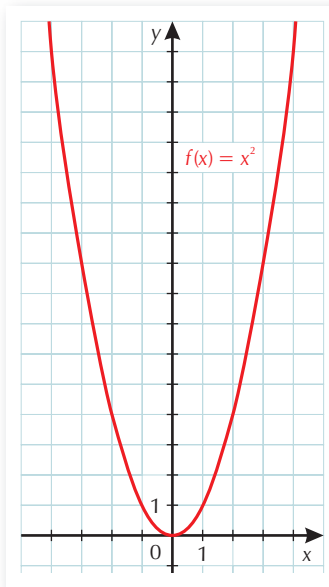
NEMLINEÁRIS ALAPFÜGGVÉNYEK, GRAFIKONJAIK, TULAJDONSÁGAIK

I. a) $f: x \mapsto x^2$

A függvény grafikonja **parabola**.

Legfontosabb tulajdonságai:

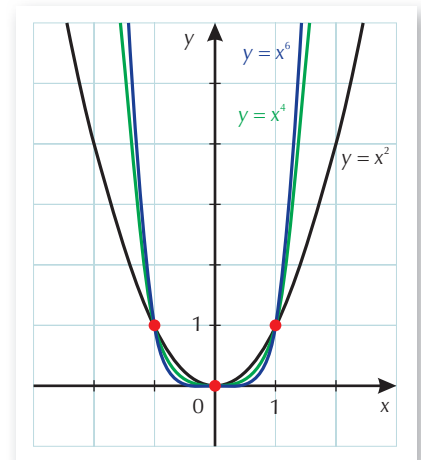
- értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
- értékészlete a nemnegatív valós számok halmaza;
- zérushelye: $x = 0$;
- minimuma 0, ezt az $x = 0$ helyen veszi fel;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x < 0$;
- szigorúan monoton növekvő, ha $x > 0$;
- páros függvény; vagyis az értelmezési tartomány minden x eleme esetében $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, és $f(x) = f(-x)$.



I. b) $f: x \mapsto x^n$, $n \geq 2$ páros szám.

Legfontosabb tulajdonságai:

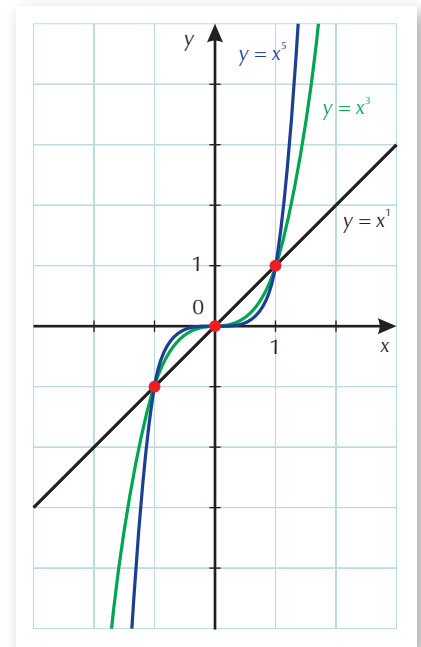
- értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
- értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza;
- zérushelye: $x = 0$;
- minimuma 0, ezt az $x = 0$ helyen veszi fel;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x < 0$;
- szigorúan monoton növekvő, ha $x > 0$;
- páros függvény; vagyis az értelmezési tartomány minden x eleme esetében $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, és $f(x) = f(-x)$.



I. c) $f: x \mapsto x^n$, $n \geq 1$ páratlan szám.

Legfontosabb tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
- értékkészlete az összes szám;
- zérushelye: $x = 0$;
- szigorúan monoton növekvő,
- páratlan függvény; vagyis az értelmezési tartomány minden x eleme esetében $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, és $f(x) = -f(-x)$.

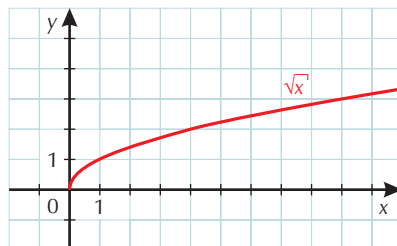


II. $g: x \mapsto \sqrt{x}$

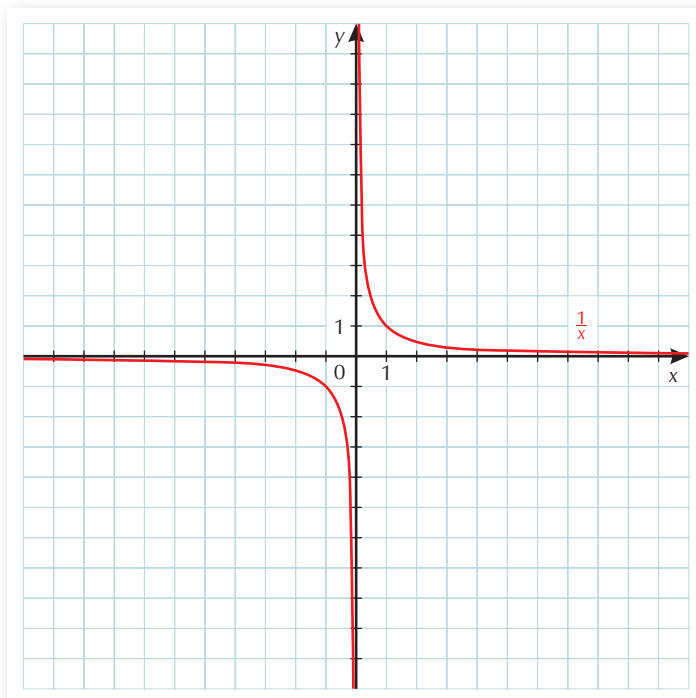
A függvény képe egy **félparabola**.

Legfontosabb tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza;
- értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza;
- zérushelye: $x = 0$;
- minimuma 0, ezt az $x = 0$ helyen veszi fel;
- szigorúan monoton növekvő függvény.



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS



III. $h: x \mapsto \frac{1}{x}$

A függvény grafikonja **hiperbola**, mely két ágból áll.

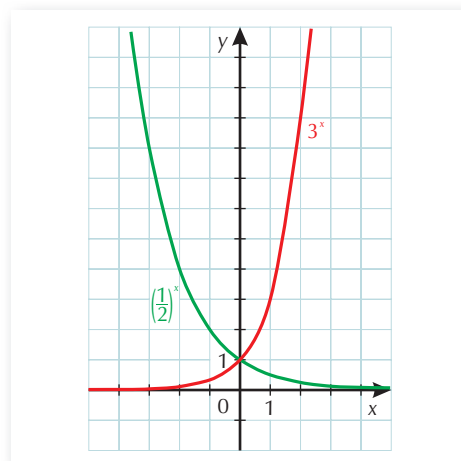
Legfontosabb tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a 0-tól különböző valós számok halmaza;
- értékészlete a 0-tól különböző valós számok halmaza;
- zérushelye: nincs;
- minimuma, maximuma nincs;
- páratlan függvény; vagyis az értelmezési tartomány minden x eleme esetében $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, és $f(x) = -f(-x)$.

IV. $j: x \mapsto a^x$ **exponenciális függvény**, ha $a > 0$, $a \neq 1$.
($a = 1$ esetében konstans függvény.)

Legfontosabb tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
- értékészlete a pozitív valós számok halmaza;
- minimuma, maximuma, zérushelye nincs;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$;
- szigorúan monoton növekvő, ha $a > 1$.

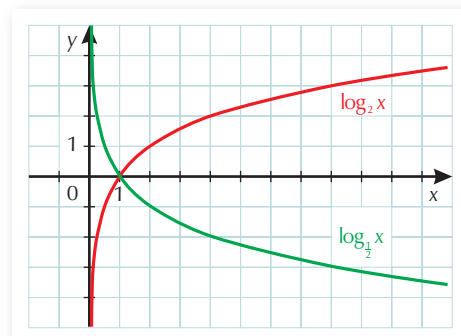


Emelt szint

V. $k: x \mapsto \log_a x$, ha $a > 0$, $a \neq 1$, és $x > 0$.

Legfontosabb tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza;
- értékészlete a valós számok halmaza;
- zérushelye: $x = 1$;
- minimuma, maximuma nincs;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$;
- szigorúan monoton növekvő, ha $a > 1$.

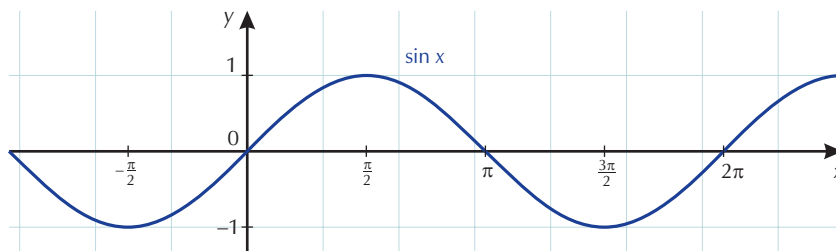


VI. $l: x \mapsto \sin x$

Legfontosabb tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
- értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum;
- zérushelye $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
- minimuma $y = -1$, ezt az $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ helyen veszi fel;
- maximuma $y = 1$, ezt az $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ helyen veszi fel;
- periodikus függvény, periódusa: 2π ;
- páratlan függvény, vagyis az értelmezési tartomány minden x eleme esetében $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, és $l(x) = -l(-x)$.

Emelt szint

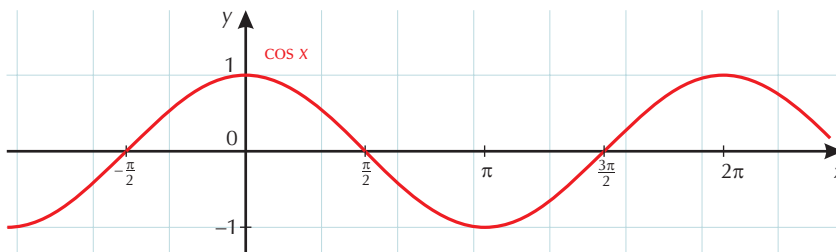


VII. $m: x \mapsto \cos x$

Legfontosabb tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a valós számok halmaza;
- értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum;
- zérushelye $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$;
- maximuma 1, ezt az $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ helyen veszi fel;
- minimuma -1 , ezt az $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ helyen veszi fel;
- periodikus függvény, periódusa: 2π ;
- páros függvény, vagyis az értelmezési tartomány minden x eleme esetében $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, és $m(x) = m(-x)$.

Emelt szint



FELADATOK

1. K1

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket, és határozzuk meg a függvények metszéspontjának első koordinátáját!

a) $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2 - x$;

b) $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2x - 1$;

c) $f(x) = x^2$ és $g(x) = \frac{3}{2}x - 4$.

2. K2

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a megadott függvényeket, majd adjuk meg, hol szigorúan monoton növekvők, és hol szigorúan monoton csökkenők!

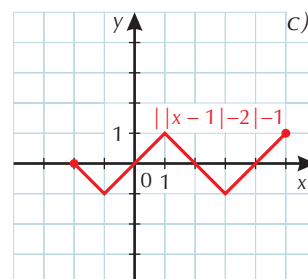
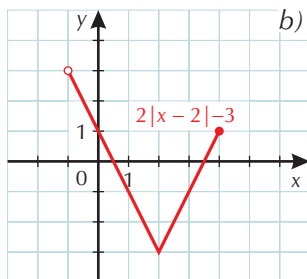
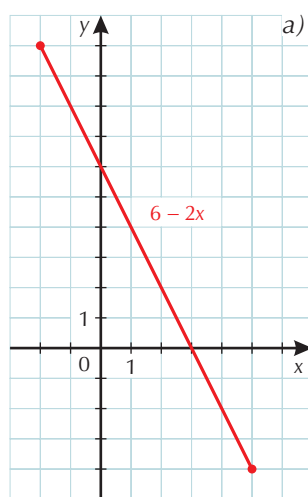
a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{ha } x \leq -1 \\ x^2, & \text{ha } -1 \leq x \leq 2; \\ \frac{x+6}{2}, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -3x - 2, & \text{ha } x \leq -2 \\ x^2, & \text{ha } -2 \leq x \leq 1. \\ \frac{3}{2}x, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

3. K1

Az ábrákon függvények grafikonjai láthatók. Határozzuk meg a függvények

- értelmezési tartományát és értékkészletét;
- zérushelyeit;
- szélsőértékeit!



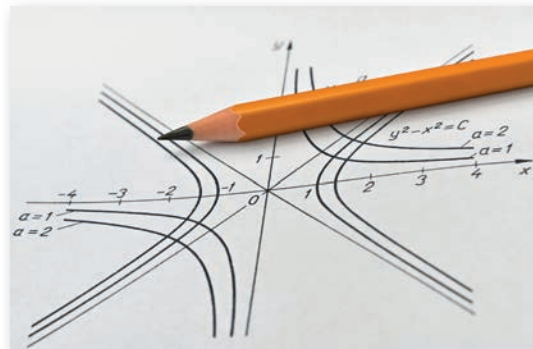
4. K1

Oldjuk meg grafikusán az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok lehető legbővebb részalmazán!

a) $\sqrt{x} = x^2$;

b) $\sqrt{x} - 1 = -3x + 3$;

c) $\frac{1}{2}x \leq \sqrt{x}$.



39. FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK

Képlettel megadott, bonyolultabb függvények vizsgálatában, tulajdonságaik megállapításában, grafikonjaik megkeresésében segítséget nyújt, ha tudjuk, hogy a megfelelő **alapfüggvényből** milyen „lépések” **egymás utáni alkalmazásával** juthatunk el az adott hozzárendelési szabályhoz. Ezekkel a „lépések”-kel az új függvény képét az előző képből valamilyen geometriai transzformációval kaphatjuk meg. A hozzárendelés ilyen típusú változtatását **függvénytranszformációnak** nevezzük. A függvénytranszformációkat osztályozhatjuk, egymás után többször is végrehajthatjuk. Az alábbiakban megadott minden függvény esetén az értelmezési tartománynak a valós számok lehető legbővebb részhalmaza tekintendő.

A FÜGGVÉNYÉRTÉK TRANSZFORMÁLÁSA

I. Legyen adott az $f: x \mapsto f(x)$ alapfüggvény.

A $g: x \mapsto f(x) + c$, $D_g = D_f$, $c \in \mathbf{R}$ függvény az f függvénytől egy állandó konstans érték hozzáadásával különbözik.

Ezért az f függvény grafikonjából a g grafikonja a $\mathbf{v}(0; c)$ vektorú **eltolással** kapható meg.

1. példa

Ábrázoljuk a következő függvenypárokat!

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin x + 3;$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 - 4;$$

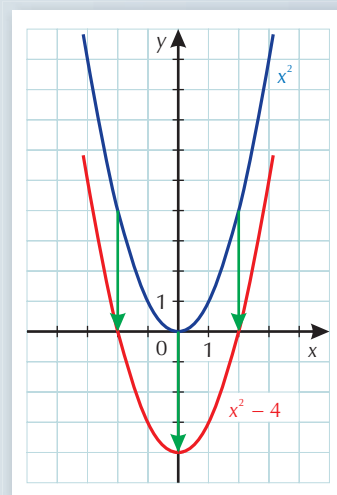
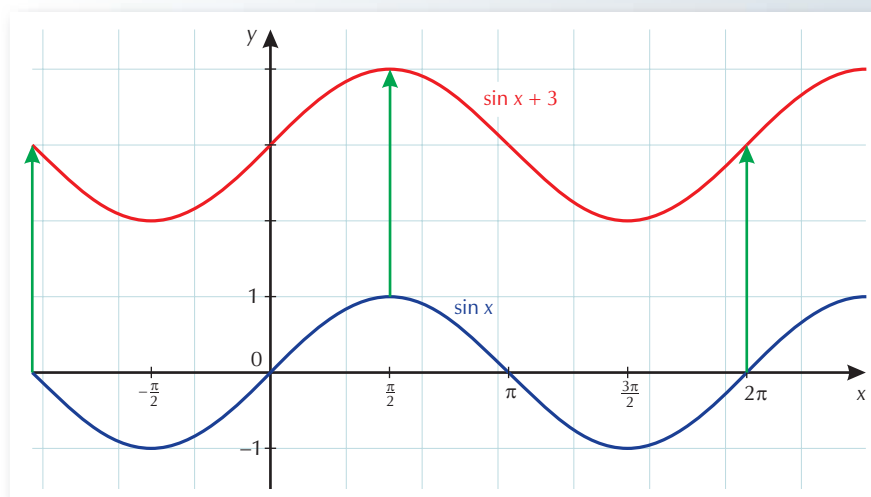
$$f(x) = \lg x, \quad g(x) = \lg x + 5;$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x} - 2.$$

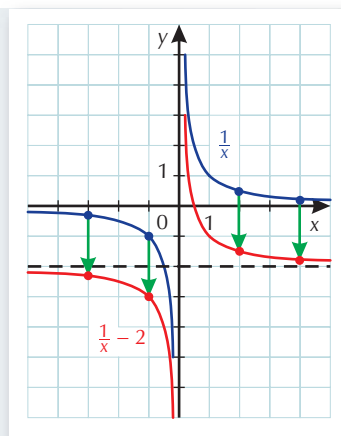
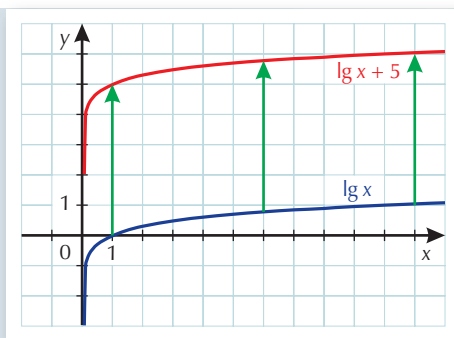
Emelt szint

Emelt szint

Megoldás



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS



II. Legyen adott az $f: x \mapsto f(x)$ alapfüggvény.

A $g: x \mapsto -f(x)$ ($D_g = D_f$) függvény grafikonja az f grafikonjából egy x tengelyre vonatkozó tükrözéssel kapható meg.

2. példa

Ábrázoljuk a következő függvénpárokat!

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = -x^2;$$

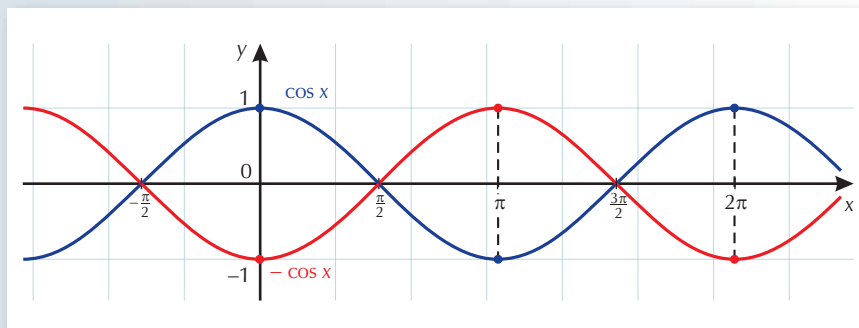
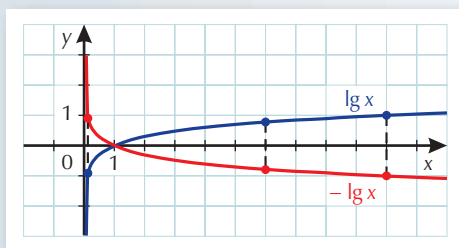
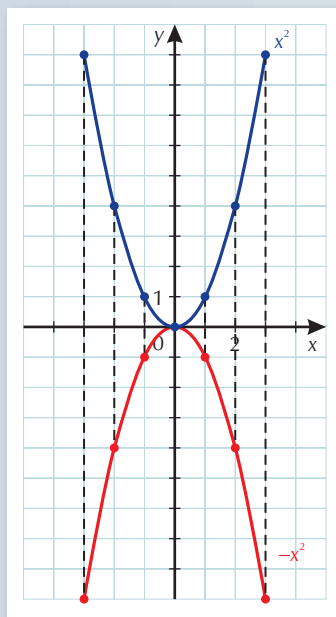
$$f(x) = \lg x, \quad g(x) = -\lg x;$$

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = -\cos x.$$

Emelt szint

Emelt szint

Megoldás



III. Legyen adott az $f: x \mapsto f(x)$ alapfüggvény.

A $g: x \mapsto c \cdot f(x)$, ahol $D_g = D_f$, $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ függvény képe az f képéből **egy y tengely irányában történő c -szeres nyújtással** (zsugorítással) kapható meg. („Hivatalos” elnevezése a **merőleges affinitás**.)

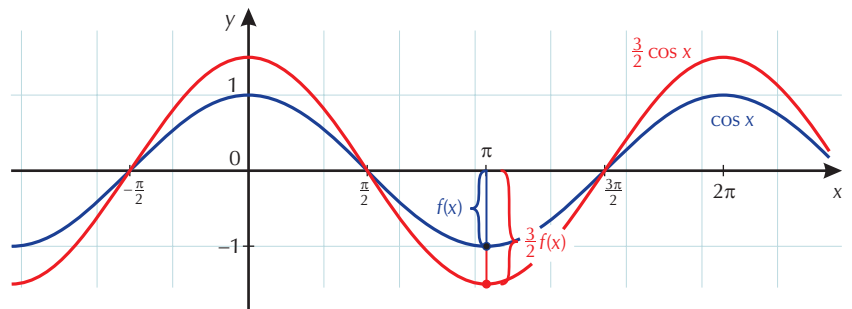
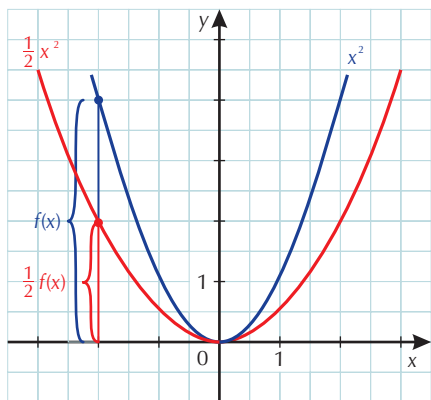
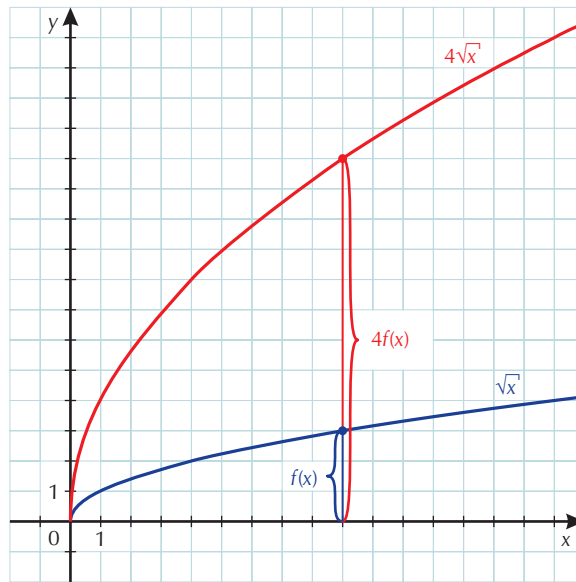
3. példa

Ábrázoljuk a következő függvenypárokat, az értelmezési tartomány legyen minden esetben a valós számok lehető legbővebb részhalmaza!

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}, & g(x) &= 4\sqrt{x}; \\ f(x) &= x^2, & g(x) &= \frac{1}{2}x^2; \\ f(x) &= \cos x, & g(x) &= \frac{3}{2}\cos x. \end{aligned}$$

Emelt szint

Megoldás



A VÁLTOZÓ (x) TRANSZFORMÁLÁSA

I. Legyen adott az $f: x \mapsto f(x)$ alapfüggvény.

A $g: x \mapsto f(x + c)$ függvény képe az f képéből **eltolással** származtatható, az **eltolás vektora** $v(-c; 0)$. (Figyelem! A g függvény értelmezési tartománya nem biztos, hogy megegyezik az f értelmezési tartományával.)

4. példa

Ábrázoljuk a következő függvénpárokat, a függvényeket értelmezzük a valós számok lehető legbővebb részhalmazán! Figyeljük meg, hogyan változik az értelmezési tartomány az egyes esetekben!

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = (x + 4)^2;$$

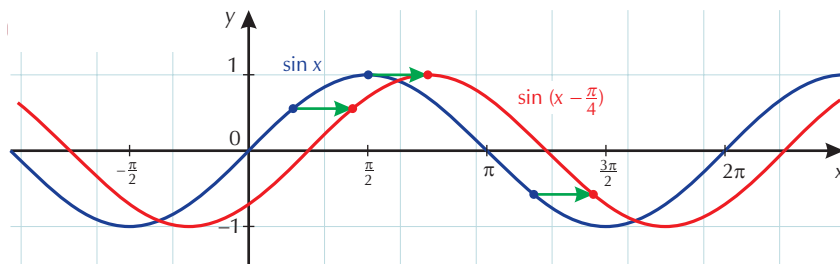
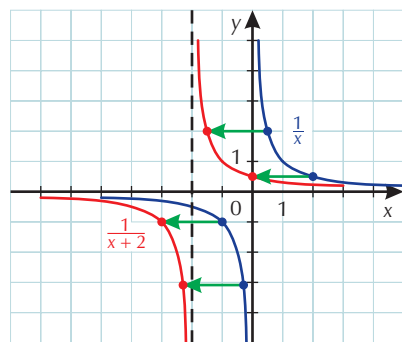
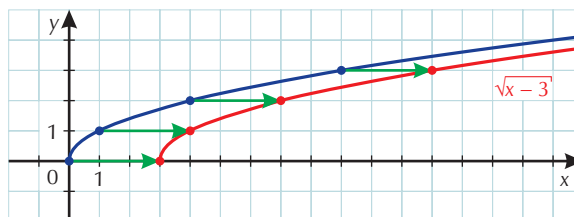
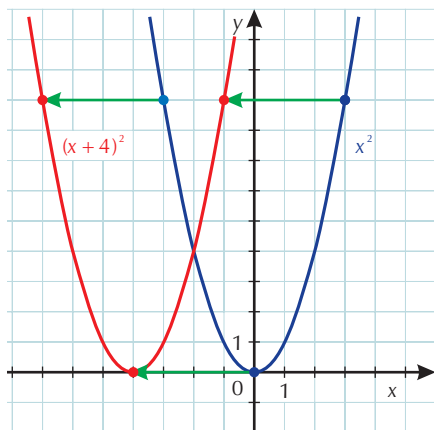
$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x - 3};$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x + 2};$$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Emelt szint

Megoldás



II. Legyen adott az $f: x \mapsto f(x)$ alapfüggvény.

A $g: x \mapsto f(-x)$ függvény képe az f képből az y **tengelyre vonatkozó tükrözéssel** kapható meg.

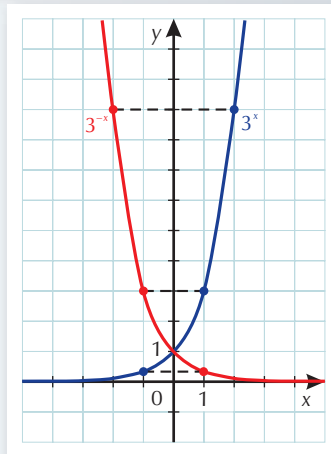
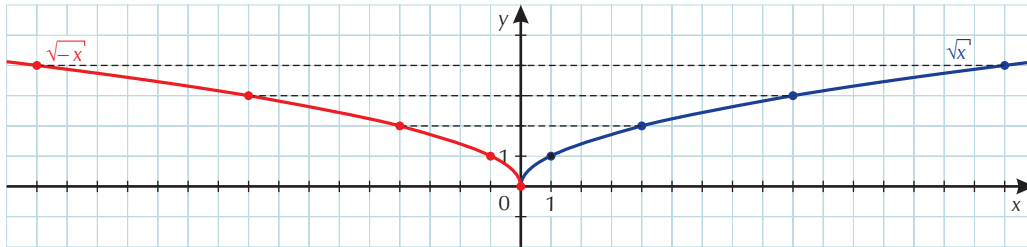
5. példa

Ábrázoljuk a következő függvénpárokat, értelmezzük a függvényeket a valós számok lehető legbővebb részalmazán! Figyeljük meg, hogyan változik az értelmezési tartomány az egyes esetekben!

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x};$$

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = 3^{-x}.$$

Megoldás



III. Legyen adott az $f: x \mapsto f(x)$ alapfüggvény.

A $g: x \mapsto f(c \cdot x)$, ahol $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ függvény képe az f függvény képből az x **tengely irányában**, $\frac{1}{c}$ -szeres **nyújtással** (zsugorítással) kapható meg.

6. példa

Ábrázoljuk a következő függvénpárokat, a függvényeket értelmezzük a valós számok lehető legbővebb részhalmazán! Figyeljük meg, hogyan változik az értelmezési tartomány az egyes esetekben!

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2;$$

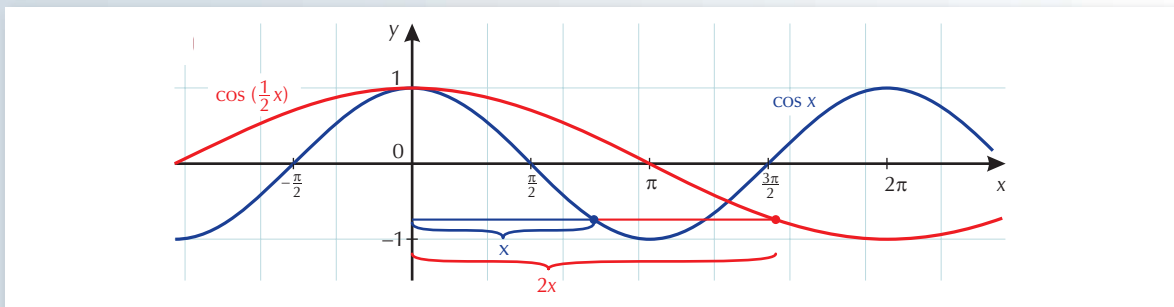
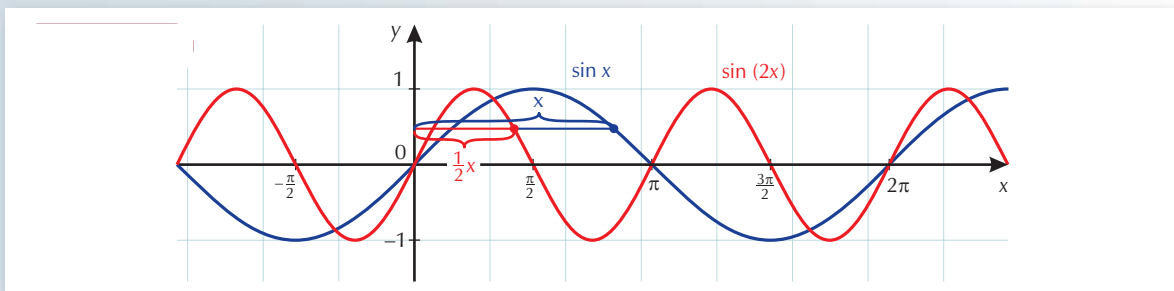
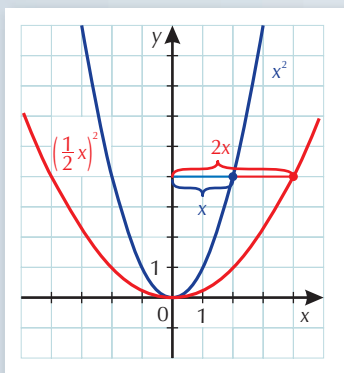
$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin(2x);$$

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Emelt szint

Emelt szint

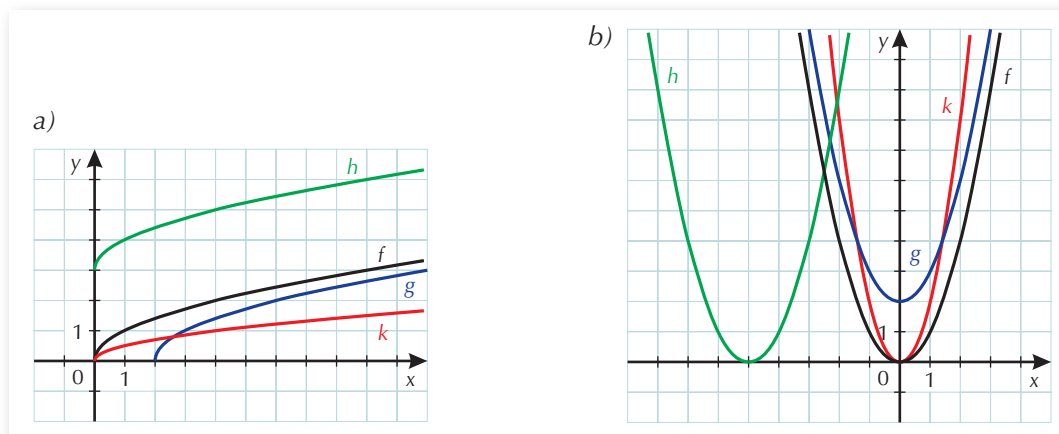
Megoldás



FELADATOK

1. K1

Legyen $f: x \mapsto \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Az a) ábrán a g , h , k függvények grafikonjai láthatók. Határozzuk meg a hozzárendelési szabályait! Ne feledkezzünk meg az értelmezési tartomány megadásáról sem!



2. K1

Legyen $f: x \mapsto x^2$, $x \in \mathbf{R}$. A b) ábrán a g , h , k függvények képei láthatók. Határozzuk meg a hozzárendelési szabályait!

3. K1

Legyen $f: x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in \mathbf{R}$. A c) ábrán a g , h , k függvények képei láthatók. Határozzuk meg a hozzárendelési szabályait!

4. K1

Ábrázoljuk az $f: x \mapsto \lg x$, $x > 0$ függvényt!

a) Tükrözzük az f függvény grafikonját az x tengelyre!

Adjuk meg a tükrökép hozzárendelési szabályát!

b) Tükrözzük az f függvény grafikonját az y tengelyre!

Adjuk meg a tükrökép hozzárendelési szabályát!

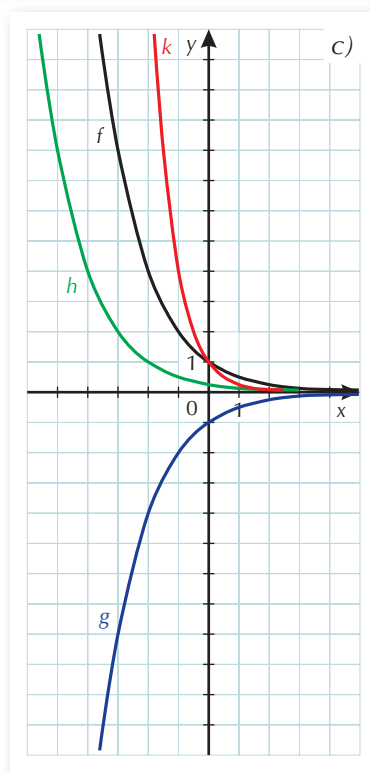
c) Toljuk el az f függvény grafikonját „felfelé” 4 egységgel! Adjuk meg az eltolás hozzárendelési szabályát!

d) Toljuk el az f függvény grafikonját a $\mathbf{v}(3; 0)$ vektorral! Adjuk meg az eltolás hozzárendelési szabályát!

5. E1

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^2 + 2x + 4 = -\sqrt{x+1} + 3$$



40. FÜGGVÉNY ABSZOLÚT ÉRTÉKE, FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK ALKALMAZÁSA

Több függvénytranszformáció egymás utáni alkalmazásával **összetett függvényekhez** jutunk. Ezeket könnyebben jellemezhetjük, grafikonjaikat pontosabban megrajzolhatjuk, ha a megfelelő geometriai transzformációkat alkalmazzuk. Erre mutatunk néhány példát.

Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során is célszerű az ábrázoláskor transzformációkat alkalmazni.

1. példa

Legyen adott az $f: x \mapsto f(x)$ alapfüggvény.

A $g: x \mapsto |f(x)|$, $D_g = D_f$ függvény grafikonját az f függvény grafikonjából úgy kaphatjuk meg, hogy az f függvény grafikonjának x tengely alatti részét tükrözzük az x tengelyre.

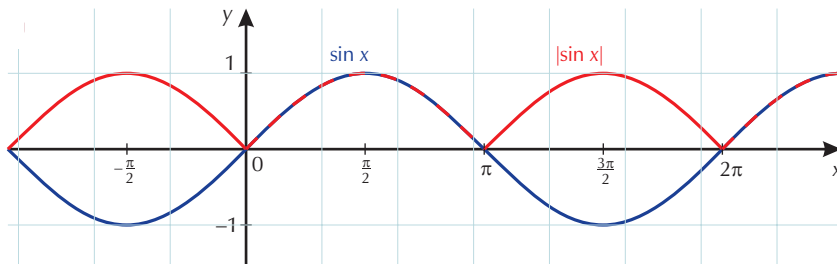
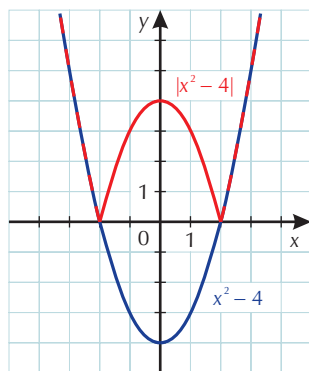
Ábrázoljuk a következő függvénypárokat!

$$f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = |x^2 - 4|;$$

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = |\sin x|.$$

Emelt szint

Megoldás



2. példa

Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f: x \mapsto x^2$ függvényt. Ábrázoljuk, majd a grafikonon rendre hajtunk végre az alábbi utasításokat, végül állapítsuk meg a transzformációk után kapott hozzárendelést!

- Toljuk el f képét a $\mathbf{v}(-3; 0)$ vektorral, legyen ez a g függvény grafikonja!
- Tükrözzük g grafikonját az x tengelyre, legyen ez a h függvény grafikonja!
- Toljuk el h képét a $\mathbf{v}(0; 5)$ vektorral, legyen ez a k függvény grafikonja!

Megoldás

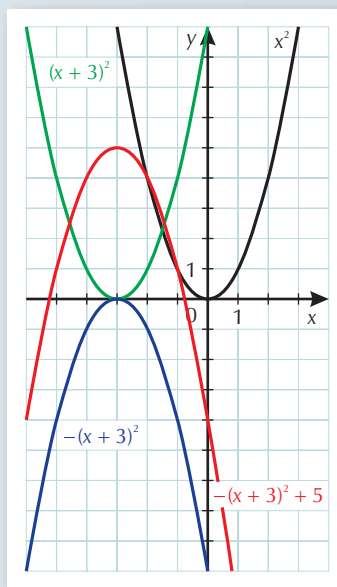
A transzformációk sorozatával a következő függvényeket kaptuk:

$$f(x) = x^2;$$

$$g(x) = (x + 3)^2;$$

$$h(x) = -(x + 3)^2;$$

$$k(x) = -(x + 3)^2 + 5.$$



3. példa

Értelmezzük az f függvényt a $[-5; 0]$ intervallumon. Állapítsuk meg a függvény zérushelyeit! Hol veszi fel a függvény a legkisebb, illetve legnagyobb értékét, melyek ezek az értékek?

$$f: x \mapsto x^2 + 6x + 5.$$

Megoldás

Megállapítható, hogy az f függvény másodfokú függvény, tehát képe parabola, és az x^2 grafikonjából származtatható.

Alakítsuk át a hozzárendelési utasítást teljes négyzet és konstans tag összegére!

$f: x \mapsto x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$, ebből leolvasható a két transzformációs lépés:

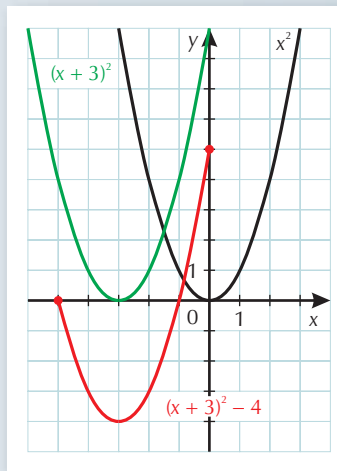
Az x^2 grafikonját toljuk el az x tengely mentén negatív irányba 3 egységgel, majd a kapott grafikont az y tengellyel párhuzamosan negatív irányba 4 egységgel.

Most arra kell még figyelni, hogy az f a $[-5; 0]$ intervallumon értelmezett, vagyis a grafikonnak csak ezen része tartozik a függvényhez. Leolvashatjuk, számolással ellenőrizhetjük a válaszokat.

Zérushelyek: $x_1 = -5$, $x_2 = -1$.

A függvény a legkisebb értéket az $x = -3$ -nál veszi fel, ez a minimum: -4 .

A függvény a legnagyobb értéket az $x = 0$ -nál veszi fel, ez a maximum: 5 .



IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

4. példa

Értelmezzük a függvényeket a $[2; 11]$ intervallumon!

$$f: x \mapsto \sqrt{x-2} + 1, \quad g: x \mapsto \frac{x}{2}.$$

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a függvényeket, majd válaszoljunk a kérdésekre!

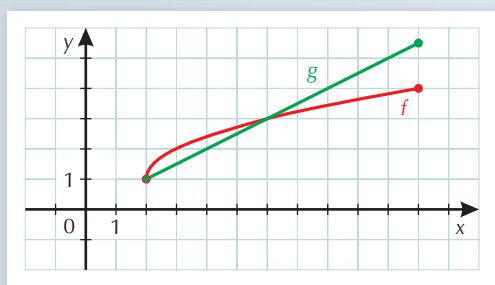
a) Mennyi az f függvény minimuma, maximuma?

b) Mely x értékek esetén igaz: $3 \leq f(x) \leq 4$?

c) Mi a megoldása a $\sqrt{x-2} + 1 = \frac{x}{2}$ egyenletnek?

d) Mikor teljesül: $\frac{x}{2} \leq \sqrt{x-2} + 1$?

Megoldás



A grafikonok alapján válaszolhatunk a kérdésekre.

a) Az f minimuma 1, ezt $x = 2$ esetében veszi fel; a maximuma 4, ezt $x = 11$ -nél veszi fel.

b) $3 \leq f(x) \leq 4$ teljesül, ha $6 \leq x \leq 11$.

(Ezekre a kérdésekre a grafikon nélkül is válaszolhatunk, hiszen f szigorúan monoton növekvő függvény.)

c) Az egyenlet megoldása: $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$. (A gyököket behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.)

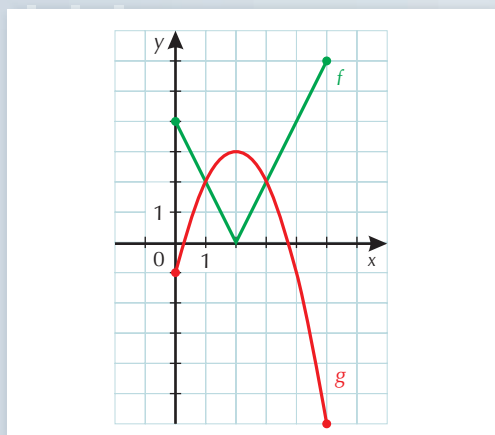
d) $\frac{x}{2} \leq \sqrt{x-2} + 1$ igaz, ha $2 \leq x \leq 6$.

5. példa

Oldjuk meg grafikusan az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$|2x - 4| \geq -(x - 2)^2 + 3, \text{ ha } x \in [0; 5].$$

Megoldás



Ábrázoljuk transzformációk segítségével az $f: x \mapsto |2x - 4|$ és a $g: x \mapsto -(x - 2)^2 + 3$ függvényeket a $[0; 5]$ intervallumon!

Az f függvényt az $x \mapsto 2x - 4$ grafikonjából a negatív értékek x tengelyre történő tükrözésével kaptuk.

A g függvényt az $x \mapsto x^2$ grafikonjából három lépésben kaphatjuk meg:

- $\mathbf{v}(2; 0)$ vektorú eltolással, majd
- x tengelyre vonatkozó tükrözéssel, végül a
- $\mathbf{v}(0; 3)$ vektorú eltolással.

Leolvasható a válasz: $0 \leq x \leq 1$, vagy $3 \leq x \leq 5$.

A megoldást ellenőrizzük számolással!

FELADATOK

1. K1

A jobb oldalon lévő koordináta-rendszerben másodfokú függvényeket ábrázoltunk, és megadtunk néhány hozzárendelési szabályt. Adjuk meg, melyik grafikonhoz melyik hozzárendelési szabály tartozik!

$$f(x) = x^2 - 4;$$

$$g(x) = (x + 3)^2;$$

$$h(x) = (x - 1)^2 - 3;$$

$$l(x) = -(x - 2)^2 + 1.$$

2. K1

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket függvénytranszformációk segítségével, a függvényeket értelmezzük a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$$a) h(x) = 2(x + 1)^2 - 4;$$

$$b) l(x) = |x - 2| - 3;$$

$$c) k(x) = \sqrt{x - 2} + 1.$$

3. K1

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket, a függvényeket értelmezzük a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$$f_1(x) = \sqrt{x}; \quad f_2(x) = \sqrt{-x}; \quad f_3(x) = -\sqrt{x}; \quad f_4(x) = -\sqrt{-x}.$$

4.

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, a függvényeket értelmezzük a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$$\mathbf{K1} \ a) a(x) = x^2 - 6x + 4;$$

$$\mathbf{K2} \ c) c(x) = -x^2 - 5x - 3;$$

$$\mathbf{K2} \ b) b(x) = 2x^2 + 8x + 6;$$

$$\mathbf{K2} \ d) d(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

5. K2

Ábrázoljuk az $f: [2; 5] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ függvényt!

Határozzuk meg a zérushelyeit!

Vannak-e szélsőértékei a függvénynek? Ha igen, hol, és mennyi az értékük?

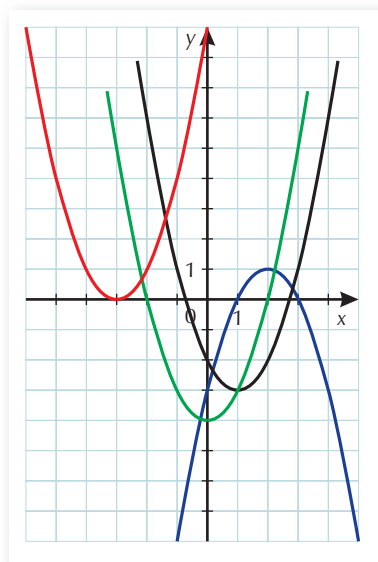
Határozzuk meg, hol szigorúan monoton növekedő, és hol szigorúan monoton csökkenő a függvény!

Mely x értékekre teljesül az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenség?

6. K2

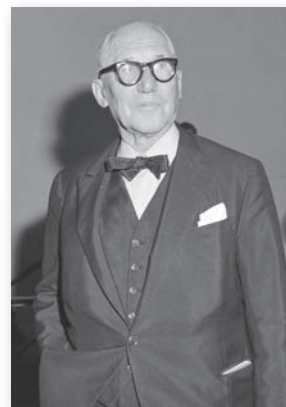
Az origóból induló, 2 egység sebességgel haladó, pontszerűnek tekinthető test az x tengely pozitív irányában halad. Milyen távolságban lesz t idő múlva a

a) (10; 0) ponttól; b) (0; 5) ponttól?



Idézet

Matematika.
Rémületesen hangzik.
Mintha megölné a költészetet.
Pedig a költészet maga.
(Le Corbusier)



Le Corbusier (1887–1965)

41. GYAKORLATI FELADATOK

Végezetül tekintsünk néhány gyakorlati (geometriai) feladatot, ahol a megismert függvények, függvénytranszformációk segítenek a feltett kérdések megválaszolásában.

1. példa

Egy egyenlő szárú háromszög szára 10 egység, a változó alapja a egység ($a < 20$).

a) Adjuk meg a területet a függvényében!

b) Határozzuk meg az alapon levő szög koszinuszát a függvényében!

c) Adjuk meg a területet a függvényében!

Megoldás

a) A terület $K = a + 20$, tehát $k: a \mapsto a + 20$.

b) $\cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{10} = \frac{a}{20}$, tehát $\cos \alpha: a \mapsto \frac{a}{20}$.

c) Az alaphoz tartozó magasságra alkalmazzuk Pitagorasz tételét: $m = \sqrt{100 - \frac{a^2}{4}}$, tehát a terület:

$$t: a \mapsto \frac{a \cdot \sqrt{100 - \frac{a^2}{4}}}{2}.$$

2. példa

Egy téglalap alakú mezőgazdasági területet alakítunk ki, amelynek a kerülete 1200 egység. Adjuk meg a mezőgazdasági telek területét az egyik oldal függvényeként! Ábrázoljuk a függvényt!

Hogyan érhetjük el, hogy a terület a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás

Jelöljük az egyik oldalt x -szel, a másik oldalt y -nal. Ekkor a kerületre:

$$1200 = 2(x + y); \text{ és az egyik oldal:}$$

$$y = 600 - x.$$

A terület $t = xy = x(600 - x)$, $0 < x < 600$, vagyis az x változó másodfokú függvénye.

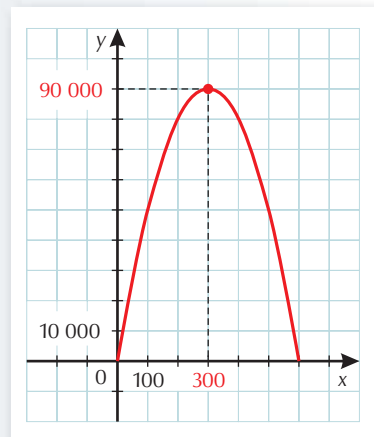
Vizsgáljuk a $t: x \mapsto x(600 - x)$ függvényt.

$$x(600 - x) = -x^2 + 600x = -(x - 300)^2 + 90\,000.$$

Ábrázoljuk a $t: x \mapsto -(x - 300)^2 + 90\,000$ függvényt a $[0; 600]$ intervallumon.

Látható, hogy a függvény maximuma 90 000, és ezt akkor veszi fel, ha $x = 300$.

A terület akkor a lehető legnagyobb, ha az egyik oldal 300 egység; ekkor a másik oldal is 300 egység, tehát a téglalap négyzet. A terület 90 000 területegység.



3. példa

Az amerikai telepesek mindegyike 800 m drótkerítést kapott a préri meghódításakor. Mindenki egy téglalap alakú telket keríthetett körbe magának. Ha egy folyó partjára költöztek, akkor a folyót természetes kerítésnek használhatták. Mekkora a legnagyobb terület, amit elkeríthettek maguknak egy folyó egyenes partszakaszán?

Megoldás

Ha túl hosszú partszakaszt veszünk, akkor a vele szemben lévő oldalra sok drótot kell felhasználnunk, de ha túl kicsi a folyópart, az sem jó!

Meg kell találnunk az ideális arányokat.

Lefordítjuk a problémát a matematika nyelvére. Mivel a kijelölt terület egy téglalap, ennek oldalainak hosszát méterben jelöljük az x és y betűkkel. A folyó melletti oldal hossza legyen y .

A téglalap területe $T = xy$.

Mivel a kerítés 800 m hosszú, ezért

$$2x + y = 800,$$

amelyből $y = 800 - 2x$.

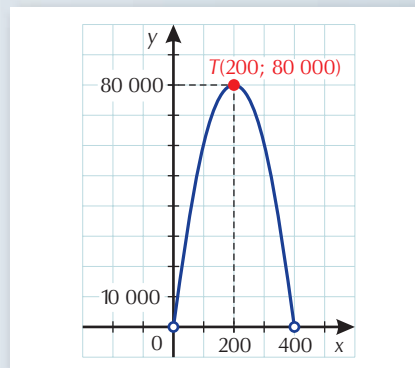
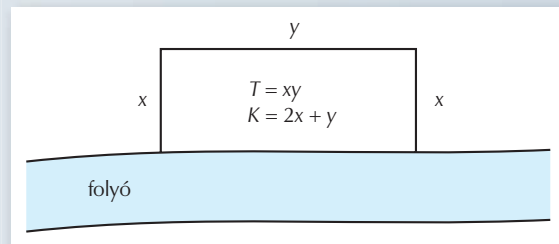
Ezt felhasználva $T = x \cdot (800 - 2x)$.

Ennek a függvénynek a maximumát keressük a $[0; 400]$ intervallumon, hiszen a téglalap oldalainak hossza csak pozitív értékű lehet.

$$\begin{aligned} T &= -2x^2 + 800x = -2[x^2 - 400x] = \\ &= -2[(x - 200)^2 - 40\,000] = -2(x - 200)^2 + 80\,000 \end{aligned}$$

Mivel a lefelé nyíló parabola tengelypontja $T(200; 80\,000)$, ezért a függvény maximuma $80\,000 \text{ m}^2$, és ezt $x = 200 \text{ m}$ esetben veszi fel.

A legnagyobb területű telek egy olyan téglalap lesz, aminek az oldalai 200 m és 400 m hosszúak. Természetesen a 400 m a vízparton van.

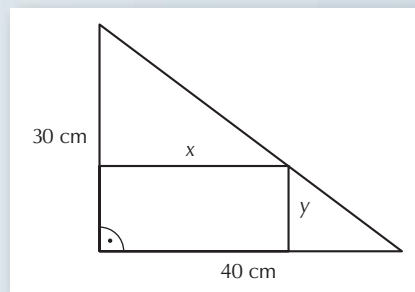


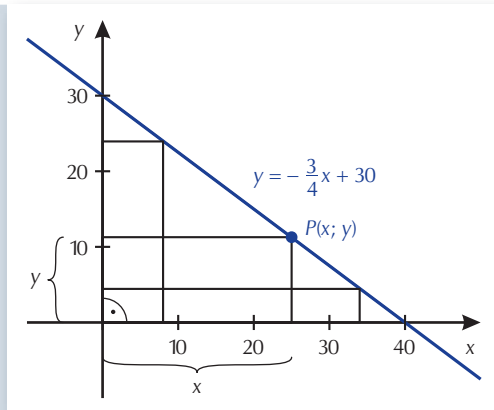
4. példa

Egy derékszögű háromszög alakú fémlemezről a lehető legnagyobb területű téglalapot szeretnénk kivágni, aminek az egyik csúcsa a háromszög derékszögű csúcsával egyezik meg. A lemez befogói 30 cm és 40 cm hosszúak. Hol kell elvágni a lemezt?

Megoldás

Egy lehetőség a probléma kezelésére, hogy az átfogónak azt a pontját keressük, amelyen keresztül a befogókkal párhuzamost húzva a lehető legnagyobb területű téglalapot kapjuk.





A lemezhez rögzítsünk egy koordináta-rendszert, az ábrán látható módon.

A keresett P pont koordinátáit jelöljük x -szel és y -nal. Ekkor a téglalap területe $T = xy$ lesz.

A terület két értéktől is függ. Adjuk meg azt az elsőfokú függvényt, aminek a képe az átfogóra illeszkedő egyenes! Ennek segítségével az y helyébe $f(x)$ -et helyettesíthetünk, és így már csak egy változója lesz a területfüggvénynek.

Az egyenes két tengelypontja: $f(0) = 30$, $f(40) = 0$.

A függvény meredeksége: $m = \frac{-30}{40} = -\frac{3}{4}$.

Ezek után

$f(x) = -\frac{3}{4}x + 30$, ahol $D_f = [0; 40]$.

A grafikon x koordinátájú pontjához tartozó függvényérték

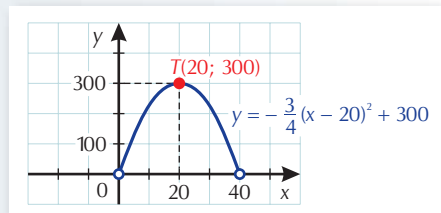
$$y = f(x) = -\frac{3}{4}x + 30.$$

Mivel $T = xy$, így

$$\begin{aligned} T &= x \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 30\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 30x = -\frac{3}{4}[x^2 - 40x] = \\ &= -\frac{3}{4}[(x - 20)^2 - 400] = -\frac{3}{4}(x - 20)^2 + 300. \end{aligned}$$

A lefelé néző parabola tengelypontja a $T(20; 300)$ pont. Tehát a legnagyobb területű téglalapot akkor kapjuk, ha az átfogó felezőpontján keresztül húzunk párhuzamost a befogókkal. A kapott téglalap oldalai a háromszög két középvonala és a befogók egy-egy darabja.

A legnagyobb terület $T = 20 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^2$.

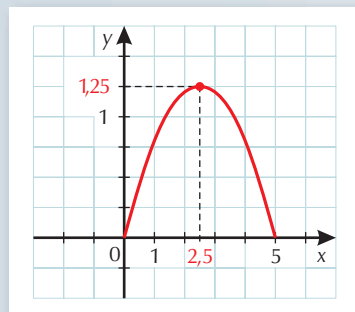


5. példa

Egy lövedék röppályájának a földfelszíntől mért magasságát az $f(x) = x - 0,2x^2$ függvény írja le. Határozzuk meg a lőtávolságot!

Mekkora a lövedék által elért legnagyobb magasság?

Megoldás



Az f függvény másodfokú függvény, tehát a röppálya parabola. Ábrázoljuk a röppályát, ehhez alakítsuk át a hozzárendelési szabályt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 0,2x^2 = -0,2(x^2 - 5) = -0,2[(x - 2,5)^2 - 6,25] = \\ &= -0,2(x - 2,5)^2 + 1,25. \end{aligned}$$

Leolvasható:

A lőtávolság 5 egység.

Az elért legnagyobb magasság 1,25 egység.

6. példa

Egy fapados légitársaság olyan repülőgépeket használ, amelyeknek befogadóképessége legfeljebb 80 fő, de nem indítják el a járatot, ha nincs legalább 40 utas. Egy járatra a jegy 55 euró. A jobb kihasználtság érdekében az egyik munkatársuk azt javasolja, hogy így reklámozzák az utat:

„Ha 60-nál több utas van egy járaton, akkor mindenkinek a jegyéből annyiszor 1 eurót engedünk el, ahánnyal több utas van, mint 60 fő.”

a) Mennyi a bevétele a légitársaságnak egy úton 50, illetve 70 fő esetén, ha

- az eredeti változat szerint közlekedik;
- ha a tervezett változtatás szerint közlekedik?

b) Legyen az utasok száma x . Adjuk meg a bevételt a $40 \leq x \leq 80$ változó függvénye szerint!

c) Észszerű-e a javaslat?



Megoldás

Jelölje a bevételt $b_1(x)$ az első, míg $b_2(x)$ a második esetben.

a) Ekkor $b_1(50) = b_2(50) = 50 \cdot 55 = 2750$ euró, $b_1(70) = 70 \cdot 55 = 3850$ euró,

$$b_2(70) = 70 \cdot 55 - 70 \cdot (70 - 60) = 3150 \text{ euró.}$$

b) A bevétel függvénye a

$$b_1(x) = 55x \text{ és } b_2(x) = 55x - x \cdot (x - 60) = -x^2 + 115x \text{ függvényekből tevődik össze, azaz}$$

$$b(x) = \begin{cases} 55x, & \text{ha } 40 \leq x \leq 60 \\ -x^2 + 115x, & \text{ha } 60 < x \leq 80 \end{cases}$$

c) Vizsgáljuk meg, hogy a második elképzelés szerint mikor hogyan alakulna a bevétel!

$$b_2(x) = -x^2 + 115x = -(x - 57,5)^2 + 3306,25.$$

Jól látható, hogy a bevétel akkor lenne maximális, ha pontosan 57,5 fővel közlekednének. (Ez természetesen elméleti érték, nincs benne a vizsgált intervallumban). Minden más esetben kevesebb lenne, mint 3306,25 euró.

A vizsgált $b(x)$ függvénynek akkor van maximuma, ha $x = 60$, és ez a maximum 3300 euró.

Jobban járnak, ha nem változtatnak a feltételeken, így a javaslat teljesen ésszerűtlen.

FELADATOK

1. K2

Tekintsük a 20 egység átfogójú derékszögű háromszögeket. Hogyan válasszuk meg az átfogóhoz tartozó magasságot, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen?

2. K2

Egy 40 cm-es szakaszt (AB) egy belső P pontjával 2 részre bontunk. AP és BP fölő négyzeteket rajzolunk.

a) Írjuk fel az AP szakasz hosszának függvényében a négyzetek területének összegét!

b) Hogyan válasszuk meg a szakaszok hosszát, hogy a négyzetek területének összege minimális legyen?

3. K2

Egy rendezvényszervező cég születésnapi estet szervez. Legfeljebb 100 fő kiszolgálását vállalják. Ha a résztvevők száma 70 vagy annál kevesebb, akkor 5000 Ft/fő a vendéglátás díja, ha ennél több, akkor annyiszor 50 Ft kedvezményt adnak, ahányan 70 fő fölött vannak.

Adjuk meg a bevételt a résztvevők függvényében!

4. K1

Egy függőlegesen felhajtott kő földtől való távolságát az $s = -5 \cdot t^2 + 12t$ függvény írja le, ahol t az eltelt idő másodpercben mérve.

- Mennyi lesz a földtől mért magasság 2 másodperc múlva?
- Ábrázoljuk az idő függvényében a kő magasságát!
- Mikor lesz a legmagasabban a kő?
- Milyen magasra dobható fel a kő?

5. K2

Egy internetes cégnél 7000 előfizető van. Az előfizetés havi díja 4000 Ft. Az előfizetők számának növekedése érdekében csökkentik a díjakat. A felmérések azt mutatják, hogy a havi díj 200 Ft-tal történő csökkentésének hatására 500 új előfizető jelenik meg a rendszerben.

- Mennyi lesz a bevétel, ha 200 Ft-tal csökkentik az előfizetési díjat?
- Írjuk fel a csökkentés mértékének függvényében a bevételt!
- Milyen esetben lesz a bevételük maximális?

6. K2

A radioaktív anyagok bomlását az $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ összefüggés írja le, ahol T az anyag felezési ideje (az az idő, amennyi alatt a részecskék fele elbomlik), N_0 a kezdeti részecskeszám, N az el nem bomlott részecskék száma, t az eltelt idő.

- Ábrázoljuk N -t az eltelt idő függvényében, ha tudjuk, hogy a radioaktív anyag felezési ideje 2 óra, és a kezdeti részecskeszám $6 \cdot 10^{23}$ db!
- Határozzuk meg, mennyi idő telik el, míg a részecskék 75%-a elbomlik!

STATISZTIKA; VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Ismétlés

9/V.; 10/V.; 11/IX.; 12/IV.

42–43. LEÍRÓ STATISZTIKA, KÖZÉPÉRTÉKEK

A mindennapok során sokszor találkozunk adatokkal, amelyekkel mindenféle cégek, hivatalok és a média bombáz minket. Ahhoz, hogy ezeket könnyen, gyorsan megértsük, tisztában kell lennünk a statisztikai fogalmakkal. Az előző három évben sok tapasztalatot szerezhettünk ebben a tárgykörben. Most átdolgozzuk az eddig tanultakat, és megnézzük, hogyan segíthetnek valószínűségyszámítási ismereteink a statisztika nyújtotta adatok felhasználásában.

LEÍRÓ STATISZTIKA

A leíró statisztika azzal foglalkozik, hogy egy adott elemekből álló **adatsokaságot kiértékeljen**. Ezek az információk legtöbbször persze számokat jelentenek, hiszen ezek a matematikai módszerekkel legkönnyebben kezelhető objektumok, azonban nem kell szigorúan ezekhez ragaszkodnunk. Olyan adatsokaságokat is kiértékelhetünk, melyek nem számokból állnak. Természetesen a kiértékelés mikéntjét tekintve ez utóbbi esetben a lehetőségeink korlátozottabbak.

AZ ADATOK GRAFIKUS ÁBRÁZOLÁSA

Az adatok szemléltetése, kiértékelése gyakran grafikus megjelenítés segítségével történik. A rajzok nagyon sokfélék lehetnek, itt most a gyakrabban használt típusokat mutatjuk be. Az adatok ábrázolásánál legtöbb esetben az adatsokaságban való előfordulási arányt szokták ábrázolni (relatív gyakoriság).

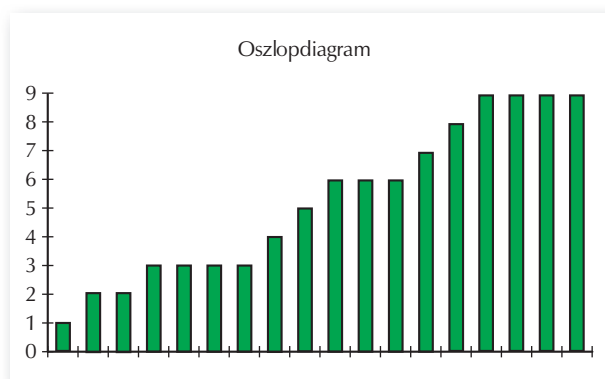
Egy adat **relatív gyakoriságát** úgy kaphatjuk meg, hogy az adat előfordulási számát osztjuk az adatsokaságban levő elemek számával. Ezt a relatív gyakoriságot meg lehet adni százalékos formában is.

Ezen kívül, ha sok adat van, és ezek esetleg mind különbözőek, de minket az adatok nagysága csak bizonyos pontossággal érdekel, akkor szokás az adatokat „adatsávokba”, osztályokba sorolni. (Tehát nem az egyes értékeket vesszük figyelembe, hanem csak bizonyos, pl. 10-es vagy 100-as pontossággal ábrázoljuk őket.) Ekkor az egyes adatsávokban (osztályokban) található elemek számát jelenítjük meg.

OSZLOPDIAGRAM

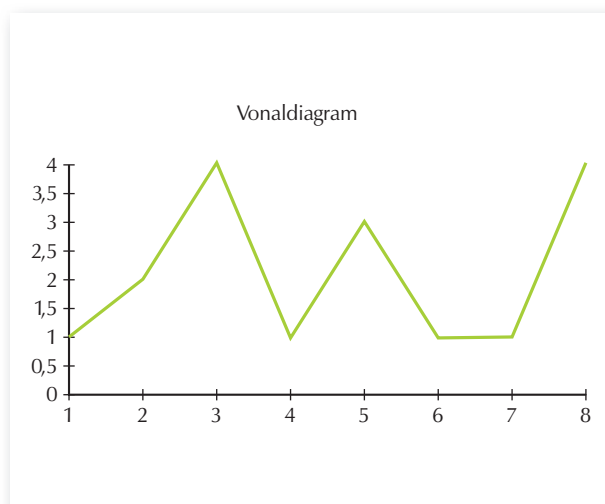
Ebben az ábrázolási módban az adatokat mint kis pálcikákat jelenítjük meg. A pálcikák magassága arányos az adat nagyságával. (A negatív adatokat lefelé rajzolhatjuk.)

Nagyon gyakran előfordul, hogy nem magukat az adatokat ábrázolják az oszlopdiagramon, hanem a gyakoriságukat. Ebben az esetben az oszlopok alatt fel kell tüntetni, hogy melyik adathoz tartozó relatív gyakoriságot mutatják. Esetleg az adatok számát is érdemes megadni, hiszen nem mindegy, hogy ezer vagy százezer adat felhasználásával készült a diagram.



VONALDIAGRAM

A sokszögvonalas ábrázolási mód hasonlít az oszlopdiagramos módszerhez. Koordináta-rendszerben ábrázoljuk az adatsávoknak és a benne levő adatok számának (illetve az adatok nagyságának) megfelelő pontokat, majd ezeket egy töröttvonallal összekötjük. Ennek az ábrázolási módnak az az előnye, hogy kiemeli a változások mértékét, mert az összekötő vonalak meredeksége dominál a rajzban; éppen ezért ezt a diagramot valamely adat változásának szemléltetésére használják leginkább. Hátránya viszont az, hogy a vonalak folytonossága valamiféle folytonosság-érzetet kelt a szemlélőben, tehát azt gondolhatja, hogy a változás folyamatos volt. (Például egy kisebb értékről egy nagyobb értékre folyamatos növekedéssel jutottunk el.) Ez lehet csálóka, hiszen ha pl. minden második évben szerzett adatokat ábrázolunk, akkor a közbenső években az előző adatsor növekedésétől függetlenül lehet relatív csökkenés a korábbi évek eredményéhez képest.



KÖRDIAGRAM

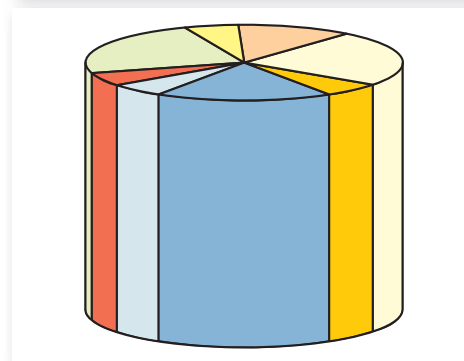
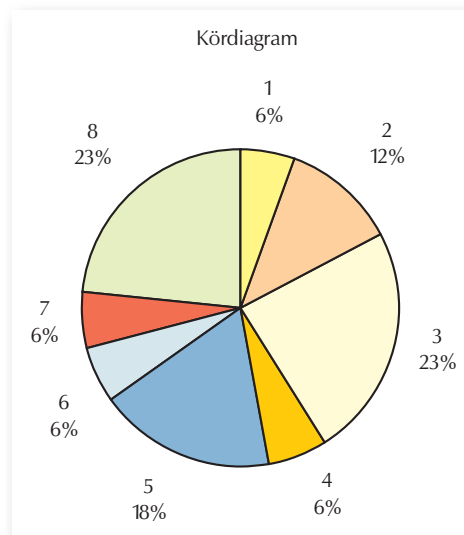
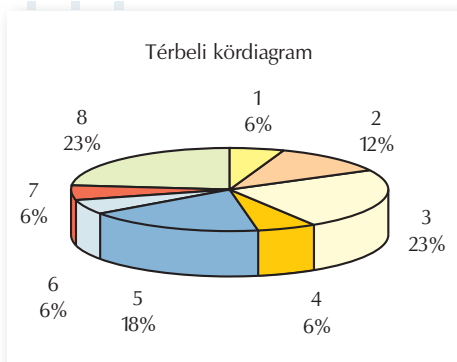
A kördiagramot általában az adatok relatív gyakoriságának ábrázolására használják. A teljes kör jelképezi a 100%-ot, és az egyes adatok relatív gyakoriságát ábrázoló körcikkhez tartozó középponti szög arányos a relatív gyakorisággal.

Ezen a kördiagramon az előző vonaldiagramon szereplő adatok relatív gyakoriságát jelenítettük meg. Az egyes értékek előfordulási gyakoriságát is szokás feltüntetni. A kördiagram előnye, hogy a rész és egész, valamint az egyes részek egymáshoz való viszonya jól látható, viszont ha nem tüntetjük fel a szeletek mellett az előfordulási arányokat, akkor nehéz pontosan megbecsülni az egyes adatok nagyságát.

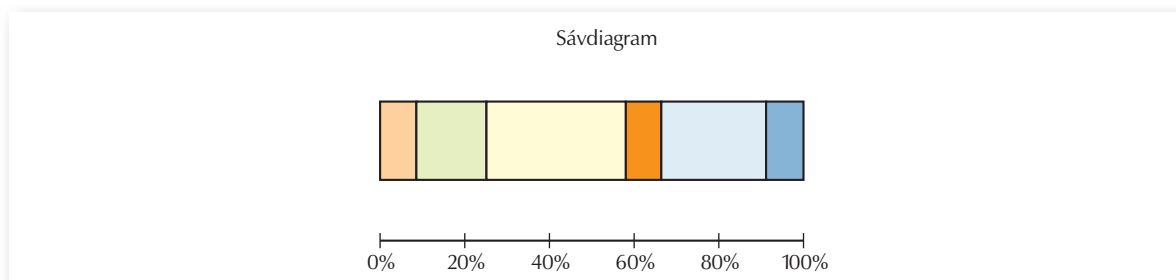
Kördiagramok esetében szoktak térbeli ábrát is készíteni (az ilyen diagramot néha tortadiagramnak nevezik). Ez ugyan látványos, de a perspektíva miatt nagy-

mértékben eltorzíthatja az arányokat, ráadásul szintén a perspektíva miatt manipulációra ad lehetőséget.

A „hengerszerű” tortadiagramon például úgy tűnik, hogy az elől ábrázolt, kékkel jelölt adatok relatív gyakorisága (18%) a legnagyobb – pedig két nála nagyobb, 23%-os adat is szerepel.



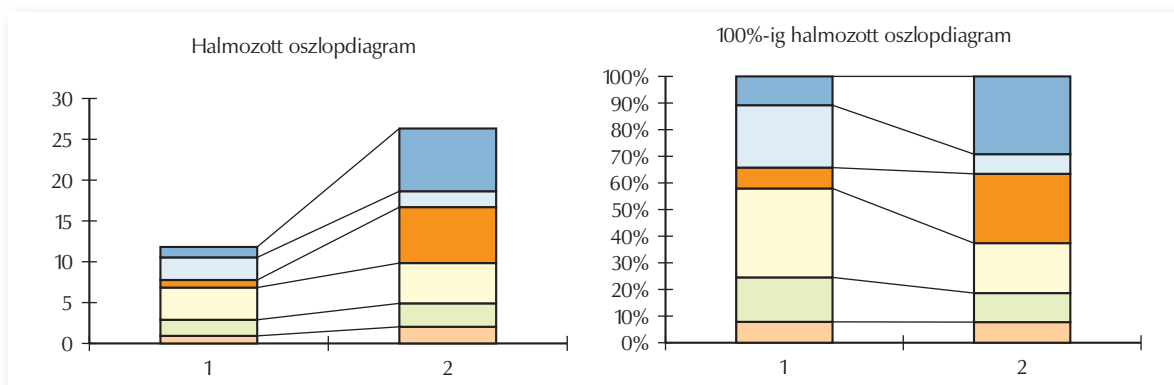
SÁVDIAGRAM



A sávdigramban az adatok relatív gyakoriságát egy sávon ábrázoljuk. A megjelenítésnél az egyes részsávok hosszúsága arányos a megjelenített adat relatív gyakoriságával.

A sávdigram előnye, hogy a rész és egész viszonya jól látható, azonban az egyes részek egymáshoz való viszonya nem igazán szemléletes.

Létezik sávdigram összehasonlító változatban is, amikor az egyes adatok változását egymás mellé helyezett, függőleges helyzetű sávdigramokon (úgynevezett halmazos oszlopdiagramokon) szemléltetik. Ha az oszlopok magassága arányos az összmennyiséggel, akkor a szemléletesség torzul: sem az nem látható jól, hogy az egyes mennyiségek aránya az egészhez képest hogyan változott, sem az, hogy a mennyiségek abszolút nagysága hogyan változott.



Az oszlopok magassága lehet egyenlő (100%-ig halmazott oszlop), ebben az esetben a százalékos arány változása nyomon követhető.

Tavaly részletesen vizsgáltuk a **dobozdiagramot** vagy más, az alakjára utaló találó elnevezéssel **sodrófadiagramot**. Később egy példa segítségével ismételjük át a hozzá kapcsolódó fogalmakat.

MANIPULÁCIÓS LEHETŐSÉGEK AZ ADATOK GRAFIKUS MEGJELENÍTÉSÉVEL

Az adatok grafikus megjelenítéskor az adatsor ábrázolójának nagy lehetősége van manipulatív módszerek kiválasztására: pusztán a megjelenítés során sugallni tud valamit az adatsorról. Az előző években erre bőszegesen láttunk példákat. Szokták mondani: statisztikai adatokkal mindent be lehet bizonyítani, és mindennek az ellenkezőjét is.

A különböző újságokban megjelenő grafikonok elemzése során a mindennapokban rengeteg rossz grafikkal és ezek alapján félreértelmezett következtetéssel lehet találkozni.

A statisztikai adatok megjelenítésének módja nagyon fontos. Ha sok adatot akarunk megjeleníteni, akkor jól kell megválasztanunk a sávhatárokat, hogy az adatok eloszlása jól érzékelhető legyen. A statisztikai jellemzők kiszámításánál az egy sávba eső adatokat a sávközéppel helyettesítjük.

Érdemes tudatosan elemezni a médiában megjelenő hirdetéseket, az utcai figyelemfelhívó tájékoztatókat vagy a plakátokat. Tudsz említeni olyan manipulatív grafikkat, amivel az utóbbi napokban találkoztál?

KÖZÉPÉRTÉKEK

Sok esetben valami számszerű jellemzőt keresünk, amely valahogy jellemzi a sokaságot. Milyen adatok segítségével tehetjük ezt meg?

Jellemezhetjük a **leggyakrabban előforduló elemével**, ezt **módusznak** nevezzük. (Ha több olyan szám van, ami azonos gyakorisággal fordul elő, akkor ezek a móduszok halmazát alkotják. Ebben az esetben a sokaságnak nincs egyértelmű módusza. Ennek megadása valamit elárul a sokaságról, de ha minden elem csak egyszer-kétszer fordul elő benne, akkor a móduszok halmazának megadásával elég kevés és viszonylag rosszul kezelhető információhoz jutunk.)

Bizonyos sokaságokról valamivel többet mond a sokaság **középső értéke** (természetesen ez a meghatározás megkívánja, hogy az adatok rendezhetőek legyenek). Vagyis rendezzük nagyságrendi sorrendbe az adatokat, és válasszuk ki a középső elemet; ha nincs középső elem, mert páros számú adatunk van,

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

akkor a középső két elem számtani közepét vegyük. Az így kapott számot **mediánnak** nevezzük. [Azaz ha az adatsokaság $2k + 1$ elemből áll, akkor a sorba rendezés után a $(k + 1)$ -edik elem a medián, ha pedig $2k$ elemből áll, akkor a medián a sorrendbe állított elemek közül a k -adik és $(k + 1)$ -edik elem összegének fele.] A medián már egyértelműen meghatározott, de még mindig viszonylag kevés információt hordoz a sokaságról, hiszen az elemek sorának elején és végén a mediántól nagyon különböző elemek is állhatnak.

A medián által megadott információt kiegészíti az **alsó és felső kvartilis** értékének megadása. Ezek meghatározása a gyakorlatban különböző módszerekkel történik, az általunk használt definíció a következő:

Ha a nagyság szerint növekvő sorba rendezett sokaság páros elemszámú, akkor középen kettéválasztjuk az adatokat; ha pedig az elemszám páratlan, akkor a középső elemet (a mediánt) elhagyjuk az adatok közül. Az így kapott „alsó” és „felső” rész mediánja az alsó, illetve felső kvartilis. Az alsó kvartilis a negyedelő, a felső kvartilis pedig a háromnegyedelő értéke (vagy alsó negyedelő, felső negyedelő értéke) az adatsokaságnak. Ha az adatokról azt is szeretnénk tudni, hogy mennyire térnek el a középen lévőtől, szokás még az alsó és felső decilist használni, amelyek a sorba rendezett adatok egytizedénél, illetve kilenctizedénél helyezkednek el.

A medián esetében fellép az a probléma, hogy a sokaság többi tagjának csak a sorrendje határozza meg, de a tagok nagyságrendje nem szerepel benne. Ebből a szempontból még több információt kaphatunk a sokaságról akkor, ha minden benne szereplő számot figyelembe veszünk, tehát a **számok összegét osztjuk a darabszámukkal**. Az így kapott értéket nevezzük a **sokaság átlagának** vagy **számtani közepének**. Ez a középérték azonban megint csalóka lehet: ha van egy, a többiekhez képest nagyon nagy vagy nagyon kicsi szám a sokaságban, akkor az adatok jelentős része döntően eltérhet az átlagként kapott adattól.

Látható, hogy a fent meghatározott középértékek más-más jellegű információt adnak a sokaságról, de egyik sem kielégítő önmagában. Nézzünk néhány példát ezek alkalmazására!

1. példa

Egy osztályban felmérjük azt, hogy a gyerekek közül kinek mi a kedvenc itala. Milyen adattal jellemezhetjük a kapott adatsokaságot?

Megoldás

Egyértelmű, hogy ennél a feladatnál csak a módusz jöhet szóba. Ugyanis nem számszerű és nem is rendezhető adatokból álló adatsokaságról van szó, így a medián és az átlag nem létezik. A módusz megadása azt jelenti, hogy az osztályban melyik italt szeretik a legjobban.

Az olyan adatsokaságoknál, melyek kvalitatív (minőséget kifejező) és összehasonlíthatatlan adatokból állnak, a jellemzés csak a módusszal történhet.

2. példa

Egy munkahelyen összeírjuk mindenkinek az iskolai végzettségét. Arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy ez egy magasan kvalifikált emberekből álló hely-e, vagy pedig csupa alacsony iskolai végzettségű ember dolgozik itt. Milyen adattal jellemezhetjük a kapott adatsokaságot?

Megoldás

Nyilvánvaló, hogy mivel nem számszerű adatokról van szó, az átlag nem számítható ki, de az adatok rendezhetőek, tehát a medián, illetve a módusz is meghatározható. A módusz megadása nem mond el semmit, hiszen lehet, hogy legtöbb a nyolc osztályt végzetek száma, de az érettségizettek, diplomások, doktorok együtt már jóval többen vannak. Alkalmasabb a medián ezen adatsokaság jellemzésére, mert itt azt tudjuk megmondani, hogy a dolgozók középvégzettsége mekkora. Ha ez alacsony, akkor itt nem túl sok magas iskolai végzettségű ember van, ha magas, akkor sokan dolgoznak itt pl. diplomával.

3. példa

Felmérjük, hogy egy adott osztályban a tanulók melyik településekről járnak be, ezért mindenkitől bekérjük a lakóhelyük szerinti irányítószámot. Milyen adattal jellemezhetjük a kapott adatsokaságot?

Megoldás

A kapott adatok számok, tehát kiszámítható az átlaguk, azonban eléggé egyértelmű, hogy ez itt semmiféle információt nem ad. Nyilván nincs értelme az olyan típusú kijelentéseknek, hogy „A gyerekek lakóhely szerinti irányítószáma átlagosan 6722,5.” Hasonlóan nem sok információt hordoz a medián megadása, és itt a módusz sem olyan nagyon informatív, bár mégis ez a legalkalmasabb a sokaság jellemzésére.

A KÖZÉPÉRTÉKEK „JÓSÁGÁNAK” MÉRŐSZÁMAI

A fentiekben láthattuk, hogy a leggyakrabban használatos középértékek a **módusz**, a **medián** és az **átlag**. Természetesen az adatsokaságot bármilyen más, egyéb módon definiált középértékkal lehet jellemezni, hiszen nagyon sokféle szempont dominálhat ennek megadásában.

Felmerül viszont az a kérdés, hogy egy adott középérték mennyire jellemzi jól az adatsokaságot, mennyire nagy az egyes elemektől való eltérése. Ennek megadására újabb mérőszámot vagy mérőszámokat kell bevezetnünk.

Először megadhatjuk az **adatsokaság terjedelmét**, azaz a legnagyobb és legkisebb elem különbségét. Ha ez kicsi, akkor gyakorlatilag bármelyik középérték jól jellemzi az adatsokaságot, ha pedig nagy, akkor nem lehet eldönteni, hogy mi mennyi információt szolgáltat. A terjedelem másik nagy problémája, hogy egy-egy adatra nagyon érzékeny. Tehát nagyon nagy lehet, ha van egy kiugró adat a többi között, amely a többihez képest nagyon nagy vagy nagyon kicsi, holott az adatok lényegében egy szám környékén tömörülhetnek. Ezt szokták úgy kiküszöbölni pl. fizikai kísérletek eredményének kiértékelésekor, hogy a legnagyobb és legkisebb adatot kihagyják az értékelésből, azonban ez nem minden esetben tehető meg. (Természetesen ez a módszer a többi középérték esetében is javítja az értékelés jóságát.)

A kiugró adatokat kiküszöböli a **félterjedelem** is, a felső és alsó kvartilis különbsége. Ez a mérőszám azt mutatja meg, hogy az adatok középső fele mekkora skálán helyezkedik el.

Vizsgálhatjuk azt is, hogy átlagosan mekkora eltérései vannak az adatsokaság elemeinek a megadott középértéktől, ezt nevezzük átlagos eltérésnek. Az **átlagos eltérés** képlettel megadva ($\bar{X}$ jelöli az adott középértéket):

$$\frac{(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_n - \bar{X})}{n}$$

Ennek a mérőszámnak azonban van egy óriási hátránya: mivel a megadott középértéknél feltehetően vannak nagyobb és kisebb adatok is az adatsokaságban, az összegben szerepelnek pozitív és negatív

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

tagok is. Ezek viszont összességében eredményezhetnek nagyon kicsi számot, holott ők maguk abszolút értékben lehetnek nagyok. Például könnyen belátható, hogy a fenti kifejezés az átlag esetében mindig 0, függetlenül attól, hogy mik az adatsokaság tagjai.

Ki kell tehát küszöbölni az előjelproblémát az átlagos eltérésből. Erre a legegyszerűbb módszer, ha az eltérések abszolút értékét átlagoljuk, ennek neve átlagos abszolút eltérés.

Átlagos abszolút eltérés az eltérések abszolút értékének az átlaga:

$$\frac{|x_1 - \tilde{X}| + |x_2 - \tilde{X}| + \dots + |x_n - \tilde{X}|}{n}.$$

Ez a kifejezés a medián esetén lesz minimális.

A másik módszer az előjel kiküszöbölésére a négyzetre emelés. Tehát megadhatjuk az átlagos négyzetes eltérést, ami az **eltérések négyzetének átlaga**.

$$\sigma^2(\tilde{X}) = \frac{(x_1 - \tilde{X})^2 + (x_2 - \tilde{X})^2 + \dots + (x_n - \tilde{X})^2}{n}$$

Az **átlagos négyzetes eltérés** akkor lesz minimális, ha $\tilde{X}$ helyébe az átlagot helyettesítjük. Az átlagos négyzetes eltérést a számtani közép felírva empirikus szórásnégyzetnek nevezzük, a négyzetgyökét **empirikus szórásnak**, jelölése σ_n .

Felmerülhet az a kérdés, hogy ezen mérőszámok közül melyiket érdemes használni a gyakorlatban. Jó tudni, hogy az átlagtól az adatok legfeljebb 25%-a térhet el a szórás kétszeresénél jobban, legfeljebb 10–11%-a térhet el a szórás háromszorosánál jobban, és legfeljebb 5–6%-a a szórás négyszeresénél jobban. Általában a szórás négyszeresénél jobban nem térnek el az adatok az átlagtól, de az 5–6%-ot biztosan állíthatjuk bármilyen adatsokaság esetében.



Ez az eredmény konkrét adatsokaságokra vonatkoztatva az úgynevezett empirikus Csebisev-törvény vagy az átlag körüli szórás empirikus törvénye.

P. L. Csebisev (1821–1894) kiváló orosz matematikus.

Csebisev először otthon tanult édesanyjától és unokatestvérétől olvasást, írást, francia nyelvet és számtant. A francia nyelv alapvető szerepet játszott későbbi életében, mivel a matematika nemzetközi nyelve ez volt akkoriban. A matematika sok területével foglalkozott, például bebizonyította, hogy minden természetes szám és kétszerese között létezik prímszám.

4. példa

Egy évfolyam diákjainak magasságát mértük fel. A következő táblázatban láthatjuk az eredményeket. Ábrázoljuk oszlopdiagramon az adatokat! Határozzuk meg az adatok móduszát, mediánját, alsó és felső kvartilisét, terjedelmét és féltérjedelmét is! Számítsuk ki az átlagot, az átlagos abszolút eltérést a mediántól és az átlagtól is! Állapítsuk meg az adatok empirikus szórásnégyzetét, szórását, valamint azt, hogy az adatok hány %-a tér el az átlagtól a szórás kétszeresénél jobban!

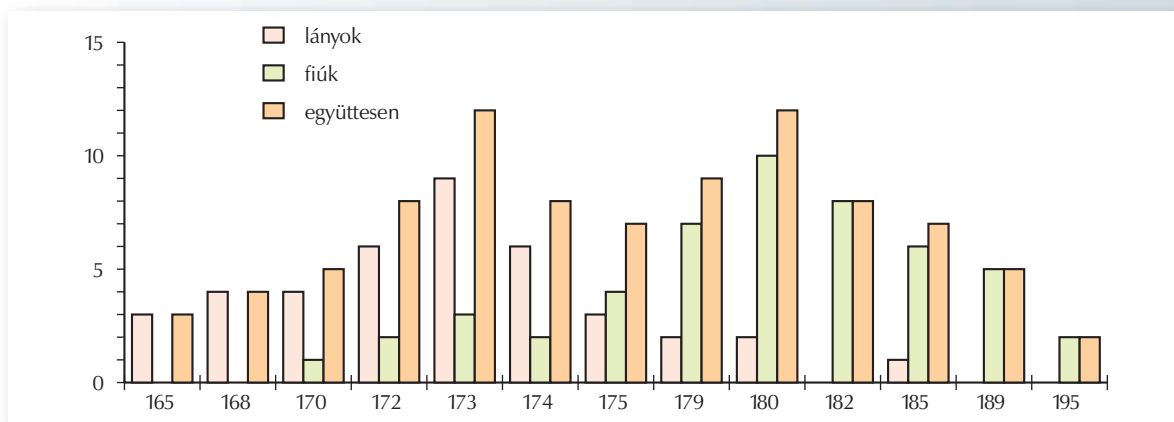
A táblázat utolsó két sorában külön ábrázoltuk a lányok és a fiúk magasságát.

Számítsuk ki külön a fiúk és a lányok magasságának átlagát! Hogyan lehet ezekből az egyesített adatsokaság jellemzőit kiszámítani? Ábrázoljuk ugyanazon a diagramon a két adatsokaságot!

A magasságokat cm-re kerekítve adtuk meg. Az adatokat már nagyság szerint sorba rendeztük, és megállapítottuk az adatfajtaikat. A 90 diák esetében 13-féle magasságértéket találtunk. Az egyes adatfajtaikat x_i -vel, az adatfajtaik gyakoriságát k_i -vel, relatív gyakoriságát pedig n_i -vel jelöltük. Jelen esetben $i = 1, 2, 3, \dots, 13$ lehet.

x_i	165	168	170	172	173	174	175	179	180	182	185	189	195
k_i	3	4	5	8	12	8	7	9	12	8	7	5	2
n_i	$\frac{3}{90}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{5}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{9}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{8}{90}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{5}{90}$	$\frac{2}{90}$
l	3	4	4	6	9	6	3	2	2	0	1	0	0
f	0	0	1	2	3	2	4	7	10	8	6	5	2

Megoldás



Módusz: a leggyakoribb elem. Ebben az esetben két ilyen is van, ezek alkotják a móduszok halmazát, $m = \{173 \text{ cm}, 180 \text{ cm}\}$.

Medián: a középső elem. Ebben az esetben, mivel páros számú adat van, ezért a két középső elem (a 45. és 46.) átlaga. $M = \frac{175 + 175}{2} = 175 \text{ cm}$.

Alsó kvartilis: az alsó negyedelő, jelen esetben a 23. elem, $Q_1 = 173 \text{ cm}$.

Felső kvartilis: a felső negyedelő elem, jelen esetben a 68. elem, $Q_3 = 180 \text{ cm}$.

Terjedelem: a legnagyobb és legkisebb elem különbsége $195 - 165 = 30 \text{ cm}$.

Félterjedelem: a felső és az alsó kvartilis különbsége, azaz $180 - 173 = 7 \text{ cm}$.

$$\text{Átlag: } \bar{x} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{13} x_{13}}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_{13} x_{13}}{n} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_{13} x_{13} =$$

$$= 177,14 \text{ cm, mivel } k_1 + k_2 + \dots + k_{13} = n = 90 \text{ az összes adat darabszáma, és } n_i = \frac{k_i}{n}.$$

A mediántól való átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{k_1 |x_1 - M| + k_2 |x_2 - M| + \dots + k_{13} |x_{13} - M|}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1 |x_1 - M| + k_2 |x_2 - M| + \dots + k_{13} |x_{13} - M|}{n} =$$

$$= n_1 |x_1 - M| + n_2 |x_2 - M| + \dots + n_{13} |x_{13} - M| \approx 5,23 \text{ cm}.$$

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Az átlagtól való átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{k_1|x_1 - \bar{x}| + k_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + k_{13}|x_{13} - \bar{x}|}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1|x_1 - \bar{x}| + k_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + k_{13}|x_{13} - \bar{x}|}{n} =$$

$$= n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + n_{13}|x_{13} - \bar{x}| \approx 5,41 \text{ cm.}$$

Empirikus szórásnégyzet (röviden szórásnégyzet):

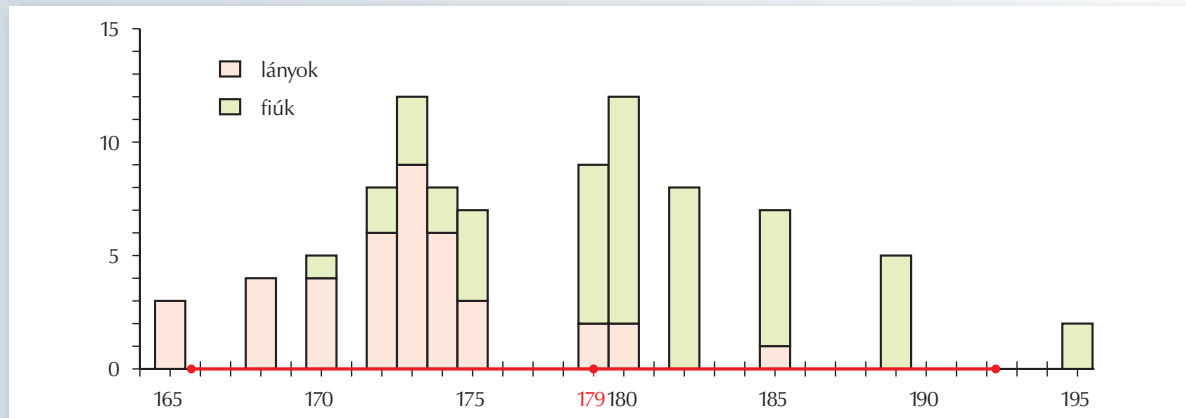
$$\sigma_n^2 = \frac{k_1(x_1 - \bar{x})^2 + k_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + k_{13}(x_{13} - \bar{x})^2}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} = \frac{k_1(x_1 - \bar{x})^2 + k_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + k_{13}(x_{13} - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_{13}(x_{13} - \bar{x})^2 \approx 44,01 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A szórásnégyzet kiszámítható úgy is, hogy az adatok négyzetének szórásából levonjuk az átlag négyzetét.

$$\sigma_n^2 = \frac{k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \dots + k_{13}x_{13}^2}{k_1 + k_2 + \dots + k_{13}} - \bar{x}^2 \approx 44,01 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Empirikus szórás (röviden szórás): $\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2} = 6,63$.



Nézzük az $[\bar{x} - 2\sigma_n; \bar{x} + 2\sigma_n] \approx [179 - 2 \cdot 6,63; 179 + 2 \cdot 6,63] \approx [165,7; 192,3]$ intervallumon kívüli elemek számát. Jelen esetben ez csak a két legnagyobb és a három legkisebb adat, vagyis összesen 5 adat, ami jóval belül van a 25%-on.

Számítsuk ki a fiúk és a lányok esetében külön-külön az átlagot!

$$\bar{x}_l = 172,7 \text{ cm}; \bar{x}_f = 180,7 \text{ cm.}$$

Az egyesített minta átlagát kiszámíthatjuk a két minta súlyozott átlagaként, a súlyok az egyes részekben az adatok darabszámát jelentik.

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_l + \bar{x}_f}{k_l + k_f} = \frac{172,7 + 180,7}{90} = 177,14 \text{ (cm).}$$

5. példa

Készítsük el az előző feladat adatainak jellemzésére a sodrófadiagramot!

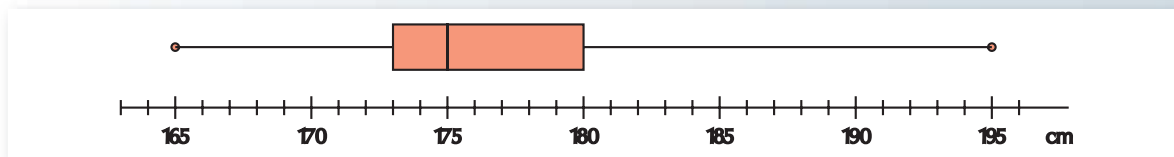
Megoldás

A sodrófadiagram (dobozdiagram) megrajzolásához szükségünk van a mediánra, az alsó és felső kvartilisre, valamint a legkisebb és a legnagyobb elemre. Ezeket fent kiszámoltuk:
a medián 175 cm,
az alsó kvartilis 173 cm,

a felső kvartilis 180 cm;

a legkisebb és a legnagyobb elem 165 cm, illetve 195 cm.

Ezen értékek alapján megrajzolhatjuk a sodrófadiagramot (dobozdiagram):



6. példa

Egy osztályban 16 tanuló írt matematikadolgozatot. Az átlag kerekítve 3,81 lett. Senki nem kapott egyest.

a) Maximum hány ötös lehetett?

b) Lehetséges-e, hogy senki nem kapott ötöst?

c) Tudjuk, hogy 11 négyes volt. Hogyan alakulhatott a többi jegy?

d) Számítsuk ki az előző esetben kapott adathalmazok szórását!

e) Lehetséges-e, hogy a módusz 5 és a medián 4 legyen?

Megoldás

Számítsuk ki a jegyek összegét! A kerekítési szabályok miatt:

$$3,805 \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{16}}{16} < 3,815;$$

$$60,88 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{16} < 61,04.$$

A kapott két szám között csak egy egész szám van, a 61. Tehát a tizenhat szám összege 61.

a) A legtöbb ötös akkor lehetne, ha csak kettesek lennének mellette. Legyen x darab ötös és $(16 - x)$ darab kettes, akkor

$$5x + 2(16 - x) = 61,$$

$$5x + 32 - 2x = 61,$$

$3x = 29$, de sajnos ez nem lehetséges, mert x nem lenne egész szám. Tehát legalább két hármas vagy egy négyes kell legyen, ekkor

$$5x + 2(15 - x) + 4 = 61,$$

$$5x + 34 - 2x = 61,$$

$$3x = 27,$$

$$x = 9.$$

Így a megoldás:

1	2	3	4	5
0	6	0	1	9

b) Lehetséges, hogy senki nem kapott ötöst, ehhez elegendő mutatnunk egy megfelelő adathalmazt. Például a következő megfelel:

1	2	3	4	5
0	0	3	13	0

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 13 = 61.$$

A statisztika humora

1. Statisztikailag bizonyított: a válások 100%-a házassággal kezdődik.
2. „Csak annak a statisztikának hiszek, amelyet magam hamisítottam meg.”
(Mark Twain, Winston Churchill)
3. „Háromféleképpen lehet hazudni: igennel, nemmel és statisztikával.” (Napóleon)

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

c) Tudjuk, hogy 11 darab négyes volt. Ez azt jelenti, hogy a maradék öt jegy vagy kettes vagy hármas vagy ötös. Legyen x darab ötös, y darab hármas és z darab kettes.

$$5x + 3y + 2z = 17, \text{ és tudjuk, hogy}$$

$$x + y + z = 5,$$

$x, y, z \in \mathbf{N}$. Vonjuk ki az első egyenletből a második egyenlet kétszeresét!

$$3x + y = 7.$$

Ha $x = 0$, akkor $y = 7$ lenne, ami nem lehetséges, mert mindhárom ismeretlen csak kisebb vagy egyenlő lehet öttel.

Ha $x = 1$, akkor $y = 4$ és $z = 0$. Ha $x = 2$, akkor $y = 1$ és $z = 2$. Ha $x = 3$ lenne, akkor az y már negatív lenne, ami nem lehetséges.

Összefoglalva:

1	2	3	4	5
0	0	4	11	1
0	2	1	11	2

d) Az első esetben $\sigma^2 \approx \frac{4 \cdot (3 - 3,81)^2 + 11 \cdot (4 - 3,81)^2 + (5 - 3,81)^2}{16} \approx 0,27735, \sigma \approx 0,527$.

A második esetben

$$\sigma^2 \approx \frac{2 \cdot (2 - 3,81)^2 + (3 - 3,81)^2 + 11 \cdot (4 - 3,81)^2 + 2 \cdot (5 - 3,81)^2}{16} \approx 0,65235, \sigma \approx 0,808.$$

e) Ahhoz, hogy a módusz öt legyen, legalább 5 darab ötösnek kell lennie. Ha a medián négy, ez azt jelenti, hogy az adatokat nagyság szerint sorba rakva a 8. és a 9. elem is négyes. Ezek után egy lehetséges megoldás:

1	2	3	4	5
0	3	4	2	7

7. példa

Három osztály év végi összefoglaló matematikadolgozatának eredményeit tartalmazza a következő táblázat. Írjunk három rövid értékelést a módusz, a medián és az átlag segítségével az osztályfőnökök szemszögéből, amelyekben összehasonlítsuk a három osztályt!

Dolgozatjegyek	A osztály	B osztály	C osztály
5-ösök száma	4	2	4
4-esek száma	5	10	5
3-asok száma	7	6	1
2-esek száma	1	3	1
1-esek száma	2	3	6



„Alapigazság, hogy ha nincs módunkban meghatározni, mi az, ami igaz, akkor azt kell követnünk, ami a legvalószínűbb.” (Descartes)

Megoldás

A osztály: „legjobb”, mert az osztályátlag a legmagasabb: 3,42, szemben a B osztály 3,21 és a C osztály 3-as átlagával. B osztály: „legjobb”, mert az osztály jegyeinek módusza a legmagasabb: 4-es, szemben az A osztály 3-as és a C osztály 1-es móduszával. C osztály: „legjobb”, mert az osztály mediánértéke a legmagasabb: 4-es, szemben a B osztály 3,5-ös és az A osztály 3-as mediánjával.

8. példa

Egy ázsiai országban a szavazási hajlandóságot mutatja a szavazóképes lakosság körében a következő táblázat.

	Mindig szavaz	Néha szavaz	Csak egyszer szavazott	Soha nem szavaz
Férfi	43%	32%	22%	3%
Nő	30%	42%	20%	8%

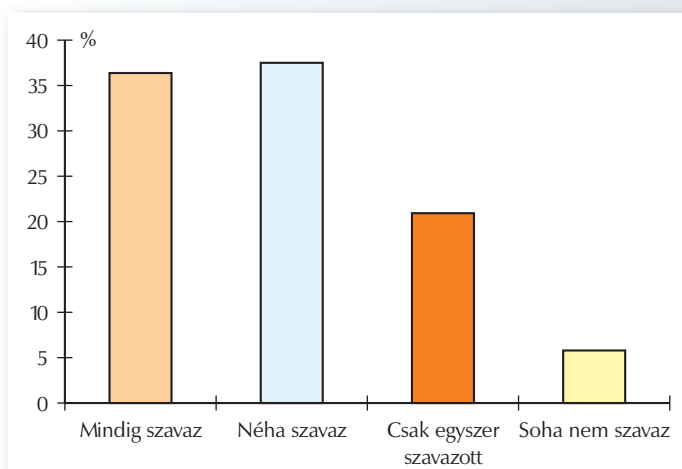
A felnőtt lakosság 52%-a nő. Az összlakosság 32 millió. Ezeknek 25%-a nem szavazhat (feltételezzük, hogy ezek között a nők aránya szintén 52%).

- a) Ábrázoljuk oszlop- és kördiagramon a szavazóképes lakosság nemektől független szavazási hajlandóságát!
- b) Kik vannak többen: a mindig szavazó férfiak vagy a néha szavazó nők?

Megoldás

a)

Mindig szavaz	Néha szavaz	Csak egyszer szavazott	Soha nem szavaz
$43\% \cdot 0,48 + 30\% \cdot 0,52 = 36,24\%$	$32\% \cdot 0,48 + 42\% \cdot 0,52 = 37,2\%$	$22\% \cdot 0,48 + 20\% \cdot 0,52 = 20,96\%$	$3\% \cdot 0,48 + 8\% \cdot 0,52 = 5,6\%$



- b) Mindig szavazó férfiak: $32 \cdot 0,75 \cdot 0,48 \cdot 0,43 \approx 4,95$ millió vagy $48\% \cdot 0,43 \approx 20,64\%$. Néha szavazó nők: $32 \cdot 0,75 \cdot 0,52 \cdot 0,42 \approx 5,24$ millió vagy $52\% \cdot 0,42 \approx 21,84\%$, tehát az utóbbiak vannak többen.

44. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI ALAPISMERETEK

Az elmúlt években megismerkedtünk a valószínűségszámítás alapfogalmaival és alaptételeivel. Először ezeket foglaljuk össze.

Véletlen kísérlet: olyan kísérlet, aminek a kimenetele a véletlentől függ, vagyis olyan sok tényező befolyásolja a végeredményt, amelyek számbavétele szinte lehetetlen, vagy olyan hosszú ideig tartana, hogy az már nem érné meg számunkra.

Elemi esemény: a véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit nevezzük elemi eseményeknek.

Biztos esemény: olyan esemény, ami a kísérlet elvégzésekor mindig bekövetkezik. Jele: H .

Lehetetlen esemény: ami a kísérlet elvégzésekor biztosan nem következik be. Jele: $\emptyset$.

Eseménytér: az összes elemi esemény halmaza.

Esemény: az eseménytér részhalmaza (akár több elemi eseményből is állhat).

Az eseményekkel tudunk műveleteket végezni.

Két esemény összege:

Az $A + B$ esemény akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik.

Két esemény különbsége:

Az $A - B$ esemény akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik, de a B nem.

Két esemény szorzata:

Az AB esemény akkor következik be, ha az A és a B esemény is bekövetkezik.

Komplementer esemény:

Az $\bar{A}$ esemény akkor következik be, ha az A nem következik be.

Az esemény **valószínűségét** $P(A)$ -val jelöltük, és tudjuk, hogy $0 \leq P(A) \leq 1$.

Egymást kizáró eseményekről akkor beszélünk, ha a szorzatuk a lehetetlen esemény, tehát egyszerre nem következhetnek be.

Az egymást kizáró események összegének a valószínűsége a valószínűségek összege.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$, ha $AB = \emptyset$.

Abszolút gyakoriság

Ha n -szer elvégezzük a kísérletet, és megszámoljuk, hogy hányszor következett be az A esemény, akkor megkapjuk az A esemény abszolút gyakoriságát.

Relatív gyakoriság

Ha a kísérletet éppen n -szer végeztük el egymástól függetlenül, akkor kiszámíthatjuk, hogy a kísérletek hányad részében következik be az A esemény, és így megkapjuk az A eseménynek erre a kísérletsorozatra vonatkozó relatív gyakoriságát.

A $P(A)$ valószínűség az a szám, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik a kísérletek számának a növelésekor.

Ez nem jelenti azt, hogy a relatív gyakoriság tart a valószínűséghez a kísérletek számának növelésével.

Klasszikus valószínűségi mező

Ha egy kísérlettel kapcsolatban ismerjük az elemi események számát, és feltételezhetjük, hogy azok bekövetkezésének valószínűsége megegyezik, akkor alkalmazhatjuk a klasszikus modellt. Bármely esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$$

A gyakorlatban felmerülő problémák esetében egyáltalán nem biztos, hogy az elemi események egyformán valószínűek, vagy hogy meg tudjuk számolni őket. Ezekben az esetekben más módon határozzuk meg az egyes események valószínűségét.

Események függetlensége klasszikus valószínűségi mezőben

Legyenek az A és B események a H eseménytérén értelmezve, az elemi események valószínűsége legyen egyenlő. Tudjuk továbbá, hogy a B esemény valószínűsége nem nulla.

$$\text{Ha } P(A) = \frac{|A|}{|H|} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{\frac{|AB|}{|H|}}{\frac{|B|}{|H|}} = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ azaz, ha } P(AB) = P(A) \cdot P(B), \text{ akkor az } A \text{ esemény füg-}$$

getlen a B -től. Vagyis az egész eseménytérén ugyanolyan arányban fordulnak elő az A esemény elemei, mint a B -hez tartozó elemek között.

Visszatevéses mintavétel: Binomiális eloszlás: Ha egy kísérletet n -szer végzünk el, és a megfigyelt A esemény valószínűsége p , akkor annak a valószínűsége, hogy A k -szor következik be:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Játékok elemzése: Ha egy játékban az egy játékra jutó átlagos nyereményünk pozitív vagy nulla, akkor érdemes játszani.

Az átlagos nyereményt az egyes kifizetések és a hozzájuk tartozó valószínűségek szorzatának az előjeles összege adja.

1. példa

A véletlen kísérletünkben feldobunk két darab, különböző színű dobókockát. Tekintsük a következő eseményeket:

$A = \{\text{a dobott számok összege kisebb, mint } 6\};$

$B = \{\text{a dobott számok összege legalább } 5\};$

$C = \{\text{a dobott számok szorzata } 6\};$

$D = \{\text{a dobott számok mindegyike kisebb háromnál}\}.$

Határozzuk meg a következő eseményeket:

$A + B, A + D, B + D, B + C, AB, AC, AD, BC, BD, CD, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}.$

Megoldás

A dobott számpárokat egy rendezett számpárral jellemezhetjük. Az első szám mindig az egyik színű kockával dobott számot, a második tagja pedig a másik színű dobókockával dobott számot jelenti.

$A + B = H, A + D = A, B + D = H \setminus \{(1; 3), (3; 1)\}, B + C = B,$

$AB = \{\text{a dobott számok összege pontosan } 5\}, AC = \{(2; 3), (3; 2)\}, AD = D, BC = C,$

$BD = \emptyset, CD = \emptyset.$

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

$\bar{A}$ = {a dobott számok összege legalább 6}.

$\bar{B}$ = {a dobott számok összege kevesebb, mint 5}.

$\bar{C}$ = {a dobott számok szorzata nem 6}.

$\bar{D}$ = {a dobott számok legalább egyike nagyobb vagy egyenlő, mint 3}.

2. példa

Véletlenszerűen kiválasztunk a háromjegyű számok közül egyet.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám minden számjegye páros?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számjegyek között szerepel legalább egy prím?

Megoldás

$$a) P = \frac{4 \cdot 5 \cdot 5}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{9}.$$

b) Az A esemény jelölje azt, hogy legalább 1 számjegy prím. Ennek az ellentettje, $\bar{A}$ azt jelenti, hogy nincs a számjegyek között prím. A nem prím számjegyek: 0, 1, 4, 6, 8, 9, összesen 6 db.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5 \cdot 6 \cdot 6}{9 \cdot 10 \cdot 10} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

3. példa

Egy vasúti fülkében két ülés van egymással szemben, egyenként öt-öt helyet. A helyet foglaló tíz utas közül négyen menetiránnyal szemben szeretnének ülni, hárman menetiránnyal háttal, a többi háromnak közömbös, hogy hol ül. Ha véletlenszerűen foglalnak helyet a fülkében, mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy mindenki a neki megfelelő helyen ül?

Megoldás

Használhatjuk a klasszikus modellt, az összes eset száma $10!$. A tíz ember bármely sorrendben elfoglalhatja a vagonban lévő tíz helyet.

A kedvező eseteket úgy kapjuk, hogy először leültetjük a négy embert a menetirányban lévő öt hely valamelyikére. Utána a másik hármat a szemben lévő öt hely valamelyikére. Végül a maradék három embert a megmaradt három helyre valamilyen sorrendben.

Kedvező esetek száma:

$$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1).$$

$$P = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)}{10!} = \frac{1}{84}.$$

Tudod-e?

A modern, gyors számítógépek kiválóan alkalmasak a véletlen jelenségek szimulálására. Ma már a legtöbb zsebszámológépen is megtalálhatók az ún. véletlen számokat adó `<Rnd>` vagy `<Ran>` billentyűk.



4. példa

Egy 20 fős matematika-tanulócsoportnak a hét minden napján van egy matematikaórája. A tanár egy húszoldalú, szabályos ikozaéder feldobásával választja ki az aznapi felelőt. A diákok között 12 fiú és 8 lány van.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy senki nem felel kétszer a következő héten?
- b) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő héten csak fiúk felelnek?
- c) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő héten legalább egy lány felel?
- d) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő héten pontosan két lány felel?

Megoldás

Definiáljuk a következő eseményeket:

$A = \{\text{mindenki maximum egyszer felel a jövő héten}\}$

$B = \{\text{csak fiúk felelnek a jövő héten}\}$

$C = \{\text{legalább egy lány felel a jövő héten}\}$

$D = \{\text{pontosan két lány felel a jövő héten}\}$

a) Első megoldás

A klasszikus valószínűségi modellt alkalmazva feltételezhetjük, hogy mind a 20^5 felelési sorrend egyformán valószínű. Ebből kedvező számunkra, ha senki nem felel kétszer, ezek száma $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$.

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{20^5} = 0,5814.$$

Második megoldás

Minden dobás eredménye független a többitől, és mindennap eggyel kevesebb diák felelhet, ha azt akarjuk, hogy senki ne feleljen kétszer.

$$P(A) = \frac{20}{20} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{20} = 0,5814.$$

- b) Annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos napon fiú lesz a felelő, $p = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.
Ez mindennap igaz egymástól függetlenül, tehát

$$P(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 0,07776.$$

- c) A c) alfeladatban megadott esemény az ellentettje a b) alfeladatban megadottnak.

$C = \bar{B}$, ezért $P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$.

$$P(C) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 1 - 0,07776 = 0,92224.$$

- d) Annak a valószínűsége, hogy az első két nap lány felel, a következő három napon pedig fiú:

$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3.$$

A mi szempontunkból nem csak ez az egy jó sorrend van, a két lány az öt nap bármelyikén felelhet,

egészen pontosan $\binom{5}{2}$ lehetőség van.

$$P(D) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0,3456.$$

5. példa

Egy 100 db televízióból álló raktárkészletben 5 db olyan van, aminél apróbb működési problémák tapasztalhatók. Egy kiskereskedő megvásárol 10 db-ot a teljes készletből.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy az általa megvásárolt készülékek mindegyike probléma nélkül működik?
- b) Mennyi a valószínűsége, hogy több mint egy hibásat vásárolt?

Megoldás

- a) Visszatevés nélküli mintavételről van szó. A feladatban feltételezzük, hogy bármely 10 televízió megvásárlása egyformán valószínű. Alkalmazhatjuk a klasszikus modellt.

$$P(\text{mind a 10 jó}) = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 0,584.$$

Tehát jóval több mint 50% a valószínűsége, hogy minden készülék jól fog működni.

- b) Legyen az $A = \{\text{legalább két készülék hibás}\}$. Akkor $\bar{A} = \{0 \text{ vagy } 1 \text{ hibás}\}$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left[\frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{95}{9} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{100}{10}} \right] = 1 - 0,923 = 0,077.$$

Tehát elég kicsi az esélye, hogy több mint egy hibás lesz.

FELADATOK

1. K2

Határozzuk meg az 1. példában szereplő A , B , C , D események valószínűségét!

2. K1

Három dobókockát feldobva mennyi a valószínűsége, hogy legalább két azonos számot dobunk?

3. K2

A kettes és a hármas számjegyek felhasználásával felírunk egy tízjegyű számot, úgy, hogy minden helyi értékre 0,5 valószínűséggel írunk kettest vagy hármast. Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz hárommal?

4. K2

Harmincfős osztályban húsz fiú és tíz lány van. Az osztályt véletlenszerűen két 15 fős részre bontjuk.

- a) Mennyi az esélye, hogy az egyik csoportban több lány lesz, mint fiú?
- b) Mennyi az esélye, hogy az egyik csoportban csupa fiú lesz?

5. K2

Egy 32 lapos magyar kártyából visszatevés nélkül kiveszünk négy lapot egymás után.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első kihúzott lap piros?
- b) Mennyi a valószínűsége, hogy a második kihúzott lap piros?
- c) Mennyi a valószínűsége, hogy a negyedik kihúzott lap piros?

6. K2

Egy dobókockát háromszor feldobunk egymás után. Minden dobás után lejegyezzük a dobott szám négygel való osztási maradékát. Mennyi a valószínűsége, hogy hárommal osztható háromjegyű számot kapunk?

45. JÁTÉKOK ELEMZÉSE, VÁRHATÓ ÉRTÉK

JÁTÉKOK ELEMZÉSE

Nézzünk néhány példát.

1. példa

Egy szabályos dobókockát többször feldobva számítsuk ki a dobott számok átlagát! Hogyan tudnánk elméleti becslést adni az átlagra?

Megoldás

Egy szabályos dobókocka feldobása után mindegyik szám ugyanolyan valószínűséggel jöhet ki. Készítsünk egy táblázatot az eredményeinkről! Tegyük fel, hogy n darab kísérletet végeztünk.

lehetséges eredmények	1	2	3	4	5	6
valószínűség	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
abszolút gyakoriság	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
relatív gyakoriság	$\frac{k_1}{n}$	$\frac{k_2}{n}$	$\frac{k_3}{n}$	$\frac{k_4}{n}$	$\frac{k_5}{n}$	$\frac{k_6}{n}$

A valószínűség definíciója alapján $\frac{k_1}{n} \approx \frac{1}{6}$ és hasonlóan a többi relatív gyakoriság is az $\frac{1}{6}$ körül ingadozik, ha egyre több kísérlet után számítjuk ki a relatív gyakoriságokat. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor már készíthetünk egy elméleti közelítő értéket a várható eredményről.

$$\begin{aligned}\bar{x} = x_{\text{átlag}} &= \frac{1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 3 \cdot k_3 + 4 \cdot k_4 + 5 \cdot k_5 + 6 \cdot k_6}{n} = 1 \cdot \frac{k_1}{n} + 2 \cdot \frac{k_2}{n} + 3 \cdot \frac{k_3}{n} + 4 \cdot \frac{k_4}{n} + 5 \cdot \frac{k_5}{n} + 6 \cdot \frac{k_6}{n} \approx \\ &\approx 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.\end{aligned}$$

2. példa

Mennyiért érdemes megvásárolni a következő pénzszerzési lehetőséget a banktól? (A játékok egy részében a játékos játszik a bank ellenében.)

Feldobunk két darab dobókockát, és annyszor 100 Ft-t kapunk, amennyi a dobott számok szorzata.

A megoldás előtt érdemes tippelni arra, hogy mennyi az a maximális összeg, amit megadnánk a banknak azért, hogy dobhassunk egyet.

Megoldás

A dobás eredménye	Nyeremény	A hozzá tartozó valószínűség
1 · 1	100 Ft	$\frac{1}{36}$
1 · 2, 2 · 1	200 Ft	$\frac{2}{36}$
1 · 3, 3 · 1	300 Ft	$\frac{2}{36}$
1 · 4, 2 · 2, 4 · 1	400 Ft	$\frac{3}{36}$
1 · 5, 5 · 1	500 Ft	$\frac{2}{36}$
1 · 6, 2 · 3, 3 · 2, 6 · 1	600 Ft	$\frac{4}{36}$
2 · 4, 4 · 2	800 Ft	$\frac{2}{36}$
3 · 3	900 Ft	$\frac{1}{36}$
2 · 5, 5 · 2	1000 Ft	$\frac{2}{36}$
2 · 6, 3 · 4, 4 · 3, 6 · 2	1200 Ft	$\frac{4}{36}$
3 · 5, 5 · 3	1500 Ft	$\frac{2}{36}$
4 · 4	1600 Ft	$\frac{1}{36}$
3 · 6, 6 · 3	1800 Ft	$\frac{2}{36}$
4 · 5, 5 · 4	2000 Ft	$\frac{2}{36}$
4 · 6, 6 · 4	2400 Ft	$\frac{2}{36}$
5 · 5	2500 Ft	$\frac{1}{36}$
5 · 6, 6 · 5	3000 Ft	$\frac{2}{36}$
6 · 6	3600 Ft	$\frac{1}{36}$
összesen 36 eset		ezek összege 1

Az előző példa alapján a harmadik oszlopban lévő valószínűségek éppen azt mutatják, hogy 36 játékonként kb. hányszor következnek be az adott események. Ezért az átlagos nyereményt az egyes összegek súlyozott átlagaként számolva éppen a valószínűségek lesznek a súlyok.

$$\bar{x} = \frac{100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 300 \cdot 2 + 400 \cdot 3 + 500 \cdot 2 + 600 \cdot 4 + 800 \cdot 2 + 900 \cdot 1 + 1000 \cdot 2 + 1200 \cdot 4}{36} + \frac{1500 \cdot 2 + 1600 \cdot 1 + 1800 \cdot 2 + 2000 \cdot 2 + 2400 \cdot 2 + 2500 \cdot 1 + 3000 \cdot 2 + 3600 \cdot 1}{36} = 1225.$$

Ha sok játékot lejátszunk, akkor az egy játékra jutó átlagos nyeremény 1225 Ft körül ingadozik. Mi köze van ennek az eredménynek az előző feladathoz?

$$1225 = 100 \cdot 12,25 = 100 \cdot 3,5^2.$$

Ez nem véletlen. Egy darab dobókocka feldobásakor a dobott számok átlaga 3,5 körül ingadozik. Két darab dobókocka feldobásakor a dobott számok szorzata $3,5 \cdot 3,5 = 12,25$ körül ingadozik. A két eredmény szorzatának az átlagát úgy is megkaphatjuk, ha az egyes eredmények átlagát összeszorozzuk. Ez mindig így van, ha a két átlag egymástól független kísérletek eredménye.

Ha 1225 Ft-ot kell fizetni egy dobásért, akkor ez egy igazságos játék. Lesz olyan, hogy a bank áll nyerésre, és lesz olyan is, amikor a játékos. Ez hosszabb távon kiegyenlítődik. Ha ennél kevesebbet kér a bank, akkor hosszabb távon a játékosnak kedvez a játék.

Ha például 1200 Ft-ért dobhatunk egyet, akkor 100 dobás után már előreláthatólag kb. $100 \cdot 25 = 2500$ Ft nyerésben leszünk. Ez nem garantálja, hogy legalább ennyi pénzünk lesz, hiszen lehet, hogy egy hosszabb rossz sorozatban vagyunk benne, és éppen a banknak kedvező, alacsonyabb érték felé mozdult el az átlag.

A befektetések is hasonlóan működnek. Ha nagyobb haszonra szeretnénk szert tenni, akkor nagyobb kockázatot kell vállalni, ami azt jelenti, hogy az is megtörténhet, hogy a tőkénk egy része is elvész.

FELADATOK

1. K1

Két dobókockát feldobva a nyereményünk a dobott számok összegének 100-szorosa forintban. Mennyit fizetnétek maximum egy ilyen dobás lehetőségéért?

2. K2

Két játékos felváltva dob fel egy szabályos dobókockát. Az nyer, aki elsőnek dob olyat, amit már valaki dobott. Az első dobó A , a második pedig B . Ha A nyer, akkor x forintot kap B -től. Ha B nyer, akkor y forintot kap A -tól. Hogyan alakuljanak a nyeremények, hogy igazságos legyen a játék?

VÁRHATÓ ÉRTÉK

Az előző leckében az egy játékra jutó átlagos nyereményekkel foglalkoztunk.

Az egyik játékos szemszögéből figyeltük az eseményeket. Meghatároztuk a nyeremények lehetséges értékeit, az előjeleket is figyelembe véve. Utána pedig a hozzájuk tartozó valószínűségeket. Az egy játékra jutó átlagos várható nyereményt ezek segítségével számítottuk ki. Jelöljük a **lehetséges nyereményeket** x_i -vel és a **hozzájuk tartozó valószínűségeket** p_i -vel.

Az egy játékra jutó átlagos várható nyereményt a matematikában **várható értéknek** nevezzük, és $E(x)$ -szel vagy $M(x)$ -szel jelöljük.

Ha n -féle kimenetel és így n -féle nyeremény lehetséges, akkor

$$E(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

Ez a lehetséges nyeremények **súlyozott átlaga**, a súlyok pedig a **valószínűségek**.

Ezek után beszélhetünk a nyeremény várható értékéről. Ha ez nulla, akkor igazságos a játék. Nemcsak akkor igazságos egy játék, ha mindenkinek ugyanannyi a nyerési esélye, hanem a nyeremények nagyságát is figyelembe kell venni. Ez az, amit a várható érték segítségével megtehetünk.

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

Nem csak a játékok esetében beszélhetünk várható értékről. Ha egy véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei számok, amelyek közül pontosan egy következik be a kísérlet elvégzése során, akkor ezeknek beszélhetünk a várható értékéről.

1. példa

Egy sportlövő a versenyen 0,8 valószínűséggel lő tízest minden lövésekor egymástól függetlenül. Öt lövésenként átlagban hány tízest szokott lőni?

Megoldás

Az 5 lövésből a tízesek számának lehetséges értékei 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5.

Az ezekhez a számokhoz tartozó valószínűségeket jelölje $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$.

Az előző tanévben megismerkedtünk a visszatevéses mintavétel kapcsán a binomiális eloszlással. Ott is azt vizsgáltuk, hogy hányszor következik be egy esemény.

Egészen pontosan:

Ha egy A esemény bekövetkezésének a valószínűsége p , és egymás után elvégezzük n db független kísérletet, akkor annak a valószínűsége, hogy az A esemény k -szor következik be:

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Ebben az esetben $n = 5$, mert öt lövés van, $p = 0,8$, mert 0,8 valószínűséggel lő tízest, és $(1-p) = 0,2$, ez annak a valószínűsége, hogy nem tízest lő.

$$p_0 = 0,8^5, \quad p_1 = \binom{5}{1} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^1, \quad p_2 = \binom{5}{2} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2, \quad p_3 = \binom{5}{3} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3,$$

$$p_4 = \binom{5}{4} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^4, \quad p_5 = 0,2^5.$$

A találatok számának a várható értéke, vagyis hogy átlagban hány tízest lő 5 lövésenként

$$E(x) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5.$$

$$\begin{aligned} E(x) &= 0 \cdot 0,8^5 + 1 \cdot \binom{5}{1} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^1 + 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 + 3 \cdot \binom{5}{3} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 + \\ &+ 4 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^4 + 5 \cdot 0,2^5 = 4. \end{aligned}$$

Bonyolult számításaink végén egy szép egyszerű eredmény született.

$$E(x) = 5 \cdot 0,8 = 4$$

Binomiális eloszlás esetében, ha n db kísérletet végzünk el, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy átlagban ezekből hányszor következik be az A esemény, vagyis mennyi a bekövetkezések számának a várható értéke, akkor

$$E(x) = n \cdot p.$$

Ha például hat db dobókockát dobunk fel, és arra vagyunk kíváncsiak, mennyi a hatból a hatos dobások számának a várható értéke, akkor ez $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ lesz.

Ez összhangban van a valószínűségről alkotott képünkkel. Ha a hatos dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$, akkor eléggé valószínű, hogy hosszú távon hat dobásonként átlagosan 1 hatost dobunk. Ez semmit nem jelent egy konkrét hatos dobássorozatra nézve. Itt mindig sok kísérlet eredményére vonatkozóan állítunk valamit.

2. példa

Egy biológiai dolgozat 10 kérdésből áll. Mindegyik kérdés esetén négy lehetséges válaszból kell kiválasztani a jót. Csak a helyes válaszok betűjelét kell beadni a dolgozat végén. Egy diák a több témakört felölelő teszt első négy kérdésére tudja a helyes választ. A következő hatnál a lehetséges négy válaszból egyet ki tud zárni. Mennyi lesz a találatok számának a várható értéke ilyen felkészültség esetén? Hányas jegyre számíthat, ha 50%-tól kettes, 70%-tól hármas, 80%-tól négyes, 90%-tól pedig ötös a dolgozat?

Megoldás

Első megoldás

Mivel az eredmény csak a találatok számától függ, ezért ennek a várható értéke lesz az, ami megmutatja, hogy mire számíthatunk. Az első négy kérdésre $p = 1$ valószínűséggel tudjuk a választ. A következő hat kérdés esetén pedig $p = \frac{1}{3}$. A lehetséges találatok száma: $x_i = 0, 1, 2, \dots, 10$.

A hozzájuk tartozó valószínűségek: mivel az első négy kérdésre tudja a választ, legalább négy találat lesz. A következő hat kérdés esetén pedig a binomiális eloszlás segítségével határozhatjuk meg a valószínűségeket: $n = 6$ a kísérletek száma, $p = \frac{1}{3}$ a találat valószínűsége, és $(1 - p) = \frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy nem talál.

$$p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0, p_4 = \left(\frac{2}{3}\right)^6, p_5 = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5, \\ p_6 = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4, p_7 = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots, p_{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^6, E(x) = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + \dots + 10 \cdot p_{10} = 6.$$

Második megoldás

Két részre bontjuk a problémát. Az első négy kérdés esetén 4 lesz a várható érték. A következő hat kérdésnél pedig a binomiális eloszlás várható értéke miatt $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$. Az eredeti kérdés ennek a két számnak az összege volt. Tehát $E(x) = 4 + 2 = 6$. Ez 60%-os teljesítmény, tehát kettes érdemjegyre számíthat. Ilyen felkészültséggel nem szabad vizsgázni.

Sok esetben egy véletlen kísérlettel kapcsolatban nem sokat tudunk, csak az általunk vizsgált szám várható értékét. A következő példa ezt mutatja be.

3. példa

Befektetésalapú életbiztosítás

Egy negyvenöt éves családapa szeretné biztonságban tudni a családját. Olyan biztosítást szeretne kötni, amely 5 millió Ft kifizetését garantálja a családja számára esetleges halála vagy tartós munkaképtelensége esetében. Ha ez nem következne be, akkor a nyugdíjba menetelekor megkapná az 5 millió Ft összeget.

A bank ajánlata az volt, hogy havonta fizessen 14 000 Ft-ot, és megkapja a kért szolgáltatást. Feltételezzük, hogy 65 éves korban megy nyugdíjba.

- Ha csak simán, megtakarítási céllal betennénk a bankba ezt a pénzt, akkor mennyi idő alatt gyűlné össze az 5 millió Ft? Feltételezzük, hogy a bank a tartós betétekre évente 1% kamatot ad.
- Mennyire kedvező a bank ajánlata? Mitől kedvező egy ilyen ajánlat? Milyen szempontok alapján lehet ezt eldönteni? Az a) kérdésre adott válasz mennyiben segít a b) kérdés megválaszolásában?
- Vajon miért éri meg a banknak ilyen ajánlatot tenni?

Megoldás

a) Az egyszerűség kedvéért az évente befizetett pénzt kamatoztatjuk.

$$t_0 = 12 \cdot 14\,000 = 168\,000 \text{ Ft-ot fizetünk be évente.}$$

Tegyük fel, hogy n év alatt gyűlik össze az 5 millió, akkor az első évben befizetett összeg ekkorra

$$t_n = 168\,000 \cdot 1,01^{n-1} \text{ Ft-ot fog érni a kamatos kamat } \left(t_n = t_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{p}{100} \right)^n \right) \right) \text{ képlete szerint.}$$

Az első évben befizetett összeg $n - 1$ évet kamatozik. A második évben befizetett összeg egy évvel kevesebbet, és így tovább. Az utolsó évben befizetett összeg már nem kamatozik.

Ezeket az összegeket összeadva kapjuk meg az 5 milliót az

$$5\,000\,000 = t_0 + t_0 \cdot 1,01 + t_0 \cdot 1,01^2 + \dots + t_0 \cdot 1,01^{n-1} = t_0 \cdot \frac{1,01^n - 1}{1,01 - 1} = 168\,000 \cdot \frac{1,01^n - 1}{0,01},$$

a mértani sorozat összegképlete alapján.

$$5\,000\,000 = 168\,000 \cdot \frac{1,01^n - 1}{0,01} \quad /:168\,000$$

$$\frac{625}{21} = \frac{1,01^n - 1}{0,01}, \text{ ahonnan}$$

$$1,2976 \approx 1,01^n.$$

Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve

$$\lg 1,2976 \approx \lg 1,01^n, \text{ amelyből}$$

$$n \approx 26,2.$$

Tehát ha simán betennénk a bankba ezt az összeget, több mint 26 év kellene, hogy meglegyen az 5 millió Ft.

b) Elég kedvezőnek tűnik az ajánlat. Ha az a tragikus esemény következne be, hogy az apa öt éven belül meghal, akkor azonnal megkapják az 5 milliót, vagy ha nyugdíjba megy, akkor is kevesebb mint 26 év múlva megkapják a kért összeget.

Miért éri ez meg a banknak? A bank az ajánlat megtételekor figyelembe veszi az ajánlatkérő várható élettartamát. Ezt a halálozási statisztikák tanulmányozásával, pillanatnyi egészségi állapot, az örökölt betegségek és egyéb életmódbeli szokások figyelembevételével a statisztikai hivatal becslése alapján állapítja meg. Ebben az esetben azt állapította meg a bank, hogy az ajánlatkérő nagy valószínűséggel a teljes 25 évben fizetni fog a banknak. A várható élettartama bőven meghaladja a 65 évet. A balesetek és egyéb nem várt rendkívüli esetek gyakoriságát is figyelembe veszik az egyes esetek megítélésakor.

c) A számításainak akkor van értelme, ha sokan kötnek életbiztosítást, tehát nem törekedhetnek túlzottan nagy haszonra, mert akkor a konkurencia elviszi a lehetséges jelölteket. Ez az életbiztosítási ajánlat sokkal kedvezőbb, mint ha csak beraknánk a megtakarításainkat a bankba. Viszont éppen emiatt lehet, hogy olyanok is élnek ezzel a lehetőséggel, akik a tartós betét helyett másfajta befektetést választanának. Márpedig a banknak a sok ügyfél a legfontosabb.

Miből lesz a banknak a haszna?

A bank úgy számol, hogy a befolyt összeget befekteti egy jobban jövedelmező tevékenységbe, például kölcsönadja más ügyfeleknek jóval nagyobb kamatra.

Ha csak 5%-os haszonnal tudja befektetni a kapott pénzt, akkor

$$T = 168\,000 \cdot \frac{1,01^{25} - 1}{1,05 - 1} = 9\,811\,634 \text{ Ft-ra tehet szert. Ami azt jelenti, hogy majdnem megduplázza a bejövő összeget. Nem okoz gondot kifizetni az 5 milliós összeget a 25. év végén.}$$

Egy banki ajánlat akkor nevezhető jónak, ha az mindkét fél számára kölcsönös előnyökkel jár. Jelen esetben ez megvalósulni látszik. Ilyen ajánlatok esetében a bank és az ügyfelek is jól járnak hosszú távon.

FELADATOK

1. K2 Egy újonnan megvásárolt telefon esetében 0,1 a valószínűsége, hogy a beüzemeléskor valamilyen apró gond van vele. A cégünk flottakedvezményrel 10 db telefont vásárolt.
 - a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két telefonnal lesz valamilyen apró probléma?
 - b) Mennyi a problémás telefonok számának a várható értéke?
2. K2 Egy telefontípusból 100 db van az egyik üzlet polcán. Közöttük 10 olyan van, amelynek üzembe helyezésekor apró hiba léphet fel. Egy cég megvásárol 10 db-ot.
 - a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két telefonnal lesz valamilyen apró probléma?
 - b) Mennyi a problémás telefonok számának a várható értéke?
 - c) Mi a különbség az első és a második feladat között?
3. K2 Egy biológiadolgozat 10 kérdésből áll. Mindegyik kérdés esetében négy lehetséges válaszból kell kiválasztani a jót. Csak a helyes válaszok betűjelét kell beadni a dolgozat végén. Egy diák a több témakört felölelő teszt első négy kérdésére tudja a helyes választ. A következő három esetében a négyből kettőt ki tud zárni. Az utolsó három esetében pedig csak egyet tud kizárni. A maradék lehetőségéből pedig találmra választ egyet. Mennyi lesz a találatainak a várható értéke ilyen felkészültség esetén? Hányas jegyre számíthat, ha 50%-tól kettes, 70%-tól hármas, 80%-tól négyes, 90%-tól pedig ötös a dolgozat?
4. K2 Egy dobókockával addig dobunk, míg olyat nem dobunk, amit már korábban dobtunk. Mennyi a szükséges dobások számának a várható értéke?
5. K2 Befektetési célú életbiztosítást szeretnénk kötni 10 éves időtartamra. Halálunk esetén 10 millió Ft-ot szeretnénk utaltatni a családnak. A 10 év letelte után szeretnénk megkapni a 10 milliós összeget. A bank évente 1%-os kamatot fizet a hosszú távú betétekre. Mekkora havi befizetéssel lennénk elégedettek?



46. GEOMETRIAI VALÓSZÍNŰSÉGI MEZŐ

A gyakorlatban olyan problémák is felmerülnek, amelyek megoldása során a klasszikus megközelítés, azaz a kísérlet kimeneteleit tekintve a kedvező esetek és az összes esetek számának összevetése nem alkalmazható.

Ennek a középiskolában leggyakoribb esete, ha az összes elemi eseményt egy **geometriai alakzaton tudjuk szemléltetni**.

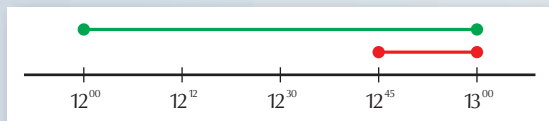
Geometriai valószínűségi modellről akkor beszélünk, ha az eseménytér egy geometriai alakzattal szemléltethető, úgy, hogy egy esemény valószínűsége a neki megfelelő alakzat méretével (hosszúság, terület, térfogat) arányos.

1. példa

Az állatkertben a medve mindennap 12 és 13 óra között teljesen véletlenszerű időpontban kijön a barlangjából, hogy bevigye aznapi ebédjét. Bármennyire is igyekeztünk, csak háromnegyed egyre érkezünk a barlang elé. Mennyi a valószínűsége, hogy látjuk a medvét kijönni?

Megoldás

Elemi eseménynek tekinthetjük azt az időpontot, amikor a medve megjelenik a barlang bejáratánál. A megjelölt egy órában ebből végtelen sok van. Mit értsünk azon, hogy 12 és 13 óra között teljesen véletlenszerűen történik valami? Annak a valószínűsége, hogy az általunk figyelt esemény egy adott időintervallumban következik be, az adott intervallum hosszával egyenesen arányos. Egészen pontosan az adott intervallum és az egész intervallum hosszának a hányadosa.



$$\text{Az adott esetben } p = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

Ha azt vizsgáljuk ezek alapján, hogy mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 12 óra 30 perckor jön ki a medve, akkor egy nulla hosszúságú intervallummal van dolgunk, így

$$p = \frac{0}{60} = 0.$$

Itt egy olyan eseményről van szó, aminek nulla a valószínűsége, és mégis bekövetkezhet. Véges sok elemi esemény esetén ez nem lehetséges.

(Jegyezzük meg: **a lehetetlen és a nulla valószínűségű esemény különbözik.**)

2. példa

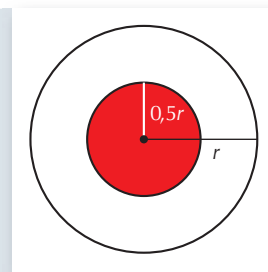
Ha egy körlemez belsejében véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot, mennyi az esélye (valószínűsége) annak, hogy közelebb van a középpontjához, mint a széléhez?

Megoldás

Itt most a megfelelő valószínűség nem az intervallumok hosszának a hányadosa, hanem a megfelelő tartományok területének az aránya lesz. Ha megrajzoljuk azokat a pontokat, amelyek közelebb vannak

a középponthoz, mint a körvonalhoz, akkor egy az eredeti körrel megegyező középpontú, feleakkora sugarú kört kapunk. Ennek a területe negyede az eredeti kör területének, tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.

$$p = \frac{(0,5r)^2 \pi}{r^2 \pi} = (0,5)^2 = \frac{1}{4}.$$



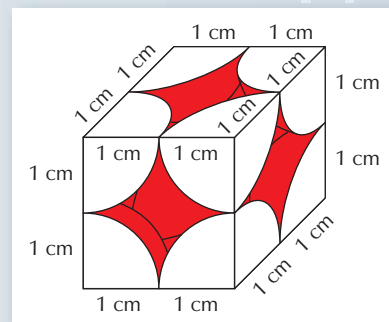
3. példa

Egy 2 cm oldalhosszúságú kocka belsejében véletlenszerűen felvesszünk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy ez a pont több mint 1 cm-re van a kocka minden csúcsától?

Megoldás

Mivel most térbeli ponthalmazok alkotják a kedvező és összes esetet, ezért a valószínűséget ezek térfogatának hányadosaként kaphatjuk meg. Azon pontok, amelyeknek a csúcsoktól mért távolsága kisebb vagy egyenlő, mint 1 cm, 8 db egység sugarú gömbnyolcad határán, illetve ezek belsejében helyezkednek el. A gömbnyolcadokat (melyeknek középpontjai a kocka csúcsai) a kocka szimmetria-középpontjába tolva, egy egész, 1 cm sugarú gömböt kapunk. Ha ennek a gömbnek a térfogatát kivonjuk a kocka térfogatából, akkor kapjuk a kedvező pontok halmazának térfogatát.

$$P = \frac{2^3 - \frac{4}{3} \cdot 1^3 \cdot \pi}{2^3} \approx 0,4764. \text{ Ez azt jelenti, hogy ha a kockában véletlenszerűen választunk egy pontot, akkor az kevesebb mint } \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel lesz távolabb a csúcsoktól, mint 1 cm.}$$

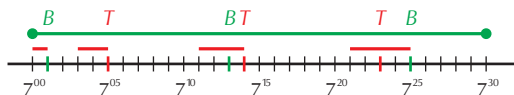


4. példa

Jó Dániel nem túl messze lakik az iskolától. Trolibusszal és villamossal is mehet suliba egyetlen átszállás nélkül. Reggelente 7 óra és fél nyolc között teljesen véletlenszerűen érkezik a megállóba. A buszok 12 percenként követik egymást, a trolik pedig 9 percenként. Az első busz 7 óra 1 perckor, az első troli pedig 7 óra 5 perckor érkezik a ház előtti megállóba. Mennyi a valószínűsége, hogy Daninak több mint két percet kell várakoznia a megállóban?

Megoldás

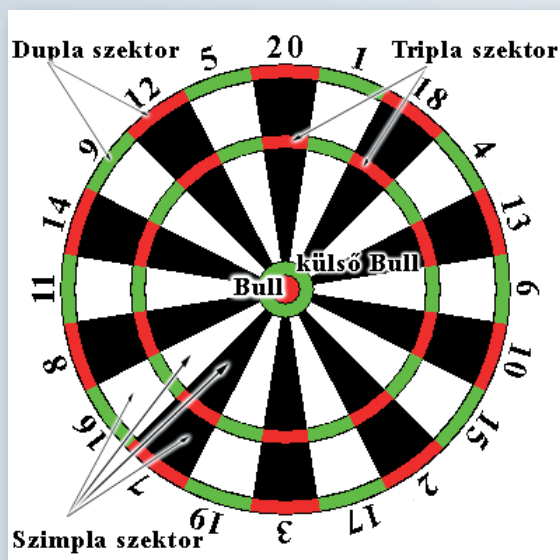
A buszok 7.01, 7.13, 7.25-kor érkeznek. A trolik 7.05, 7.14, 7.23-kor érkeznek.



Az ábrán pirossal jelöltük azokat az intervallumokat, amikor kevesebb mint két percet kell várakozni a megállóban.

7.01–7.03, 7.05–7.11, 7.14–7.21, 7.25–7.30 között érkezve több mint két percet kell várakozni. Ez összesen 20 perc. Tehát $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

5. példa



A darts játék legjobbjai elég nagy százalékban találják el a táblán a nekik megfelelő szektort.

Egy átlagos játékos viszont csak a tábla egy szektorát találja el elég nagy eséllyel, azon belül viszont lényegében egyenletesen oszlanak el a dobások. A táblán 1-től 20-ig vannak a szektorok, mindegyik egyforma méretű. Minden szektoron belül van dupla és tripla pontokat érő terület.

A tábla méretei: a tábla sugara 168,25 mm, a dupla Bull szektor sugara 6,35 mm, a külső Bull széle 15,9 mm-nél van, a tripla szektor 95,25 mm-re kezdődik, és 104,8 mm-re végződik, a dupla szektor 15 875 mm-nél kezdődik.

- Mennyi a valószínűsége a Bull dobásnak (legbelső piros szektor), ha egy játékos a 31,8 mm átmérőjű körbe 0,3 valószínűséggel talál bele, és azon belül egyenletesen oszlanak el a dobások?
- Egy átlagos játékos 0,9 valószínűséggel találja el a megfelelő szektort. Mennyi a valószínűsége a tripla 20-as, azaz 60-as dobásnak?

Megoldás

- A dupla Bull dobásnak két feltétele van:

- Találjuk el a sima Bull mezőt, ennek valószínűsége 0,3.
- A Bull mezőben találunk bele a dupla Bull mezőbe, ennek valószínűségét a dupla Bull mező területének és a Bull mező területének a hányadosaként kaphatjuk meg.

$$p = \frac{6,35^2 \cdot \pi}{15,9^2 \cdot \pi} \approx 0,1898.$$

A két eseménynek egyszerre kell bekövetkeznie: $p = 0,3 \cdot 0,1898 \approx 0,05695$.

- A teljes tábla területe: $168,25^2 \cdot \pi \approx 88\,932,40119 \text{ mm}^2$.

Egyetlen szektor területe ennek pontosan a huszad része:

$$t_{sz} \approx 88\,932,40119 : 20 \approx 4446,6200595 \text{ mm}^2.$$

$$\text{A tripla 20-as területe } t_t = \frac{104,8^2 \cdot \pi - 92,25^2 \cdot \pi}{20} \approx 300,0971039 \text{ mm}^2.$$

A tripla 20-as dobáshoz két dolognak egyszerre kell teljesülnie:

- El kell találnunk a 20-as szektort, ennek a valószínűsége 0,9.
- A szektoron belül a tripla szektorba kell betalálni, ennek a valószínűsége

$$p = \frac{t_t}{t_{sz}} = \frac{300,0971039}{4446,6200595} \approx 0,06749.$$

$$P(\text{tripla 20-as}) \approx 0,9 \cdot 0,06749 \approx 0,06074 \approx \frac{6}{100} = \frac{3}{50}.$$

Ez kicsit nagyobb, mint a tripla Bull valószínűsége, pedig ennek nagyobb a pontértéke.

A megoldás során a kör területképletével számoltunk, de a végén a darts hivatalos szabálykönyvében lévő méreteket használtuk, ami picit eltérhet a számolás eredményétől, mivel a szektorok elválasztására fémdrótokat használnak, aminek szintén van egy kis vastagsága. Ez befolyásolja a pontos területet.

A mezők hivatalos mérete:

• Tábla teljes területe:	88 932,40119 mm ²	• Tripla:	300,0971039 mm ²
• Dupla Bull:	126,6768698 mm ²	• Dupla:	487,9678789 mm ²
• Bull:	667,549169 mm ²	• Szimpla:	3 619,843775 mm ² .

6. példa

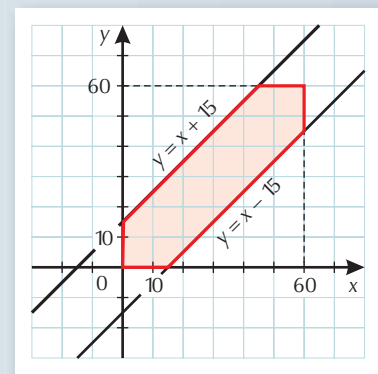
Az egyetemi menzán szoktam ebédelni, ami egy negyedórát vesz igénybe. A barátom szintén ugyanígy van vele. Mindketten teljesen rendszertelenül érkezünk a menzára 1 és 2 óra között. Mennyi a valószínűsége, hogy összefutunk ebéd közben?

Megoldás

Tegyük fel, hogy 1 óra x perckor érkezem, a barátom pedig 1 óra y perckor. Mivel mindketten egy negyedórát tartózkodunk a menzán, ezért akkor találkozunk, ha kettőnk érkezési ideje között kevesebb mint 15 perc telik el. Tehát, ha $|x - y| \leq 15$, ahol $0 \leq x, y \leq 60$. Az ilyen tulajdonságú x, y változóknak egyértelműen megfeleltethetünk egy $P(x; y)$ pontot a koordinátasíkon (természetesen ezen pontok egy 60×60 -as négyzet belső tartományának pontjai). Ezek a pontok alkotják az eseményteret. A keresett valószínűséget itt is a területek hányadosaként kapjuk. Pl.: $P(12; 36)$ azt jelenti, hogy én 1 óra 12 perckor, a barátom pedig 1 óra 36 perckor érkezett a menzára. Ekkor nem találkozunk. Alakítsuk át az $|x - y| \leq 15$ egyenlőtlenséget: $-15 \leq x - y \leq 15$. Innen az $y \leq x + 15$ és $y \geq x - 15$ összefüggéseket kapjuk. A megfelelő koordinátákkal rendelkező pontok halmazát az ábrán piros színnel jelöltük. A kedvező pontok egy hatszöget alkotnak, melynek területe:

$$T_{\text{satírozott hatszög}} = T_{\text{négyzet}} - 2T_{\text{háromszög}} = 60^2 - 2 \cdot \frac{45 \cdot 45}{2} = 1575.$$

$$P = \frac{T_{\text{satírozott}}}{T_{\text{négyzet}}} = \frac{1575}{3600} = 0,4375. \text{ Tehát } 43,75\% \text{ az esélye, hogy találkozunk.}$$



FELADATOK

1. K2 Egy 3 cm oldalhosszúságú négyzet belsejében véletlenszerűen felvesszünk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy ennek a pontnak a négyzet valamelyik átlójától vett távolsága kisebb lesz, mint 1 cm?
2. K2 Egy 2 cm sugarú kör belsejében véletlenszerűen felvesszünk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy az ezen a ponton átmenő legrövidebb húr hossza kisebb, mint 2 cm?
3. K2 Egy 200 km hosszú elektromos távvezeték felügyeletét a Biztos Villany Kft. látja el. A vezeték bármely pontján azonos valószínűséggel fordulhat elő elektromos zárlat. A vezeték mentén három helyen van irodájuk, a kiindulási ponttól 20 km-re, 80 km-re és 150 km-re. Ha az irodáktól kevesebb mint 30 km-re történik probléma, akkor azt a megrendelő által megadott szintidőn belül mindig kijavítják. Ha viszont ennél távolabb van a hiba, akkor kicsúszhatnak a szintidőből, és kötbért kell fizetniük. A kft. vezetése bevállalja ezt a kockázatot. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő hibánál kötbért kell fizetniük?
4. K2 Magyarország területén bárhol egyenletes eloszlásban előfordulhat villámcsapás. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő villámcsapás Budapesten vagy Pest vármegyében történik?

MIRE JÓ A MATEMATIKA? (Olvasmány)



A nagytétényi ásatásokon talált római eredetű csont játékkocka



A szádvári ásatásokon talált középkori eredetű csont játékkocka

Ha a matematika hasznát kérdezzük, a válasz a hagyományos módon kezdődhet.

Már az ókori görögök is tudták, hogy a matematika művelése **fejleszti a gondolkodást**, frissen tartja az elmét. Ez persze igaz más tudományterületekre vagy művészetekre is; de ebből a szempontból a matematikai gondolkodás során alkalmazott műveletek tűnnek a leghatékonyabbnak. (Még a szórakoztató rejtvényirodalomban is a matematikai alapú, egyszerű rejtvények a legnépszerűbbek.)

A matematika **„kiszolgálja” a társtudományokat**. A természettudományok (fizika, kémia, csillagászat, földrajz, biológia), a közgazdaságtan, a mérnöki-technikai, a számítástechnikai vagy az orvosi tudományok alkalmazása manapság elképzelhetetlen megfelelő matematikai alapok és apparátus nélkül. Ide sorolhatjuk a mindennapjainkat behálózó elektronikus-digitális eszközöket is; az informatikai rendszerek matematikai alapokon működnek, programozásukhoz elengedhetetlen az algoritmikus gondolkodás elsajátítása.

A **társadalomtudományok és a művészetek** körében is jelentős a matematika alkalmazása. A történelmi és szociológiai elemzések egy része statisztikai megközelítéseket alkalmaz, csakúgy, mint egyes irodalmi munkák vizsgálata is. A különböző közvélemény-kutatások alapja a valószínűségszámítás, éppen úgy, mint a gazdasági vagy kereskedelmi folyamatok esetében (de ide sorolhatnánk például a meteorológiát is). A perspektíva matematikai elemzése a középkorban megújította a képzőművészetet, manapság pedig a művészet szinte minden területén találkozhatunk geometriai irányzatokkal. Több jeles filozófus egyúttal matematikus gondolkodó is volt.

Aligha kétséges – és ezzel a matematika egyedülálló a tudományágak között –, hogy az egyszerű, elemi **matematika minden területének jelentős gyakorlati haszna van**. A mindennapjainkat átszövik a napi pénzügyi számítások, a geometriai mérések, a valószínűségi becslések és statisztikai átlagok számítása; naponta találkozunk függvényekkel, grafikonokkal. A külső társadalmi-gazdasági-technikai folyamatok pedig fejlesztő hatással voltak a **felsőbb matematikára** is. Néhány egyszerű példa: a kereskedelem fejlődése új objektumokat hozott létre (a logaritmus művelete vagy a gömbi koordináták), a változás, mozgás leírásának igénye hívta életre az analízist, a differenciálszámítást; a (szerencse)játékok elemzéséből fejlődött ki a valószínűségszámítás.

A matematika fejlődését jól példázza a **trigonometria** területe.

A trigonometriai ismeretek alapjai az ókori Mezopotámiában, a csillagászat segédeszközeiként alakultak ki. A trigonometria egyik korai írásos emléke (Kr. u. 150 körül) **Ptolemaiosz** görög csillagász *Almagest* („Nagy gyűjtemény”) című könyvében maradt ránk. Ebben például megtaláljuk a mai szinusztáblázat őst: a könyv 0°-tól 90°-ig, fél fokként tartalmazza az egységsugarú körben a szöghöz tartozó húrok hosszát. Később az arab világban kapott lendületet a trigonometria fejlődése, a nagy arab matematikus, **al-Hvárizmi** (820 körül) táblázatai már tangensértékeket is tartalmaztak.

Évszázadokon keresztül a földmérés, a hosszúság-, szög- és területszámítás nélkülözhetetlen eszköze lett a trigonometria; a tudományos életben pedig a csillagászat és a geodézia a trigonometria alkalmazásával „fölmérte a világot”.

Fizikából a szögfüggvények segítségével leírták az egyenletes körmozgást; innen csak egy lépés volt a periodikus mozgások elemzése (rezgőmozgás, hullámmozgás, hangtan), és el is jutottunk az elektrodinamikához, az elektromos és mágneses jelenségek elméletéhez.

Matematikából is születtek új alkalmazások (komplex függvénytan, differenciálegyenletek). Kiderült, hogy trigonometrikus függvényekkel más függvények is jól közelíthetők, és a szögfüggvény-alkalmazások megjelentek a legmodernebb tudományterületeken: a kvantumfizikában, a relativitáselméletben, a nemeuklideszi geometriák vizsgálatában.

A XX. század egyik nagy matematikusa, Geoffrey Harold **Hardy** (1877–1947) még úgy gondolta, hogy a **felsőbb, „tisztá” matematika** nagy részét kevesen értik, művelése csak a legkiemelkedőbb tudósoknak nyújt élményt. Bár az alkalmazási területe jelentős (relativitáselmélet, kvantummechanika), a felsőbb matematika nagy része – az emberiség mindennapjai szempontjából – teljesen haszontalan.

Hardy tévedett. Halála után néhány évtizeddel például kedvenc területe, a számelmélet rendkívüli gyakorlati szerephez jutott. Kiderült, hogy számelméleti módszerekkel lehet megoldani az adatok kényelmes és megbízható titkosítását. Nem is gondolnánk, hogy a mindennapokban, mikor bejelentkezünk egy számítógépre vagy egy hálózatra, vagy valamilyen nyitókóddal elindítunk egy okostelefont, elektronikusan vásárolunk vagy bankkártyával fizetünk a boltban, akkor bizony matematikai módszerekkel védett (jelenlegi tudásunk szerint feltörhetetlen) titkosítási módszereket alkalmazunk.



G. H. Hardy, angol matematikus

(Forrás: Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*. Tankönyvkiadó, 1974)

Érdekesség

Raymond Queneau francia költő 1961-ben jelentette meg *Százezermilliárd költemény* című kötetét (*Cent Mille Millions de Poèmes*). Ez 10 klasszikus szonettet tartalmazott, ám a kiadóval soronként csíkokra vágatva. Az olvasó így egy-egy szonett 14 sorát a meglévő 10 szonett bármely megfelelő sorszámú sorából maga állíthatja össze; azt a változatot „hajtogathatja” ki a sorcsíkokból, amely neki tetszik. A szerző állítása szerint „ha az ember az év valamennyi napján naponként 24 órán át olvasná ezt a művet, valamennyi lehetséges vers elolvasása csaknem 200 millió évet venne igénybe”.



(A szonett és többnyelvű fordítása megtalálható az interneten.)

Vajon jól okoskodott Queneau? Érdemes ellenőrizni a számításait!

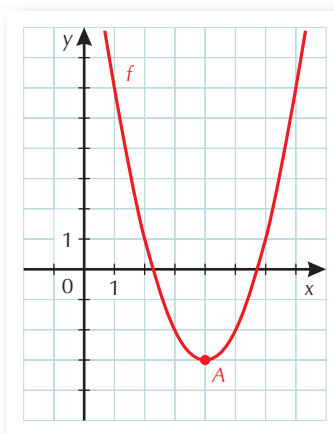
(A szonettek bármely sora 10-féleképpen olvasható, így összesen 10^{14} -féle – „százezermilliárd” – szonett hajtogatható ki. 200 millió év kb. $200 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \approx 1,8 \cdot 10^{12}$ órát tartalmaz, ez alapján óránként mintegy 50 szonett olvasható el. A költő tehát jól számolt.)

V. KÖZÉPSZINTŰ GYAKORLÓ ÉRETTSÉGI FELADATSOROK

1. FELADATSOR

I. RÉSZ: 12 FELADAT, 30 PONT (45 PERC)

- Adjon meg közönséges tört alakban egy olyan racionális számot, amelyik $\frac{17}{18}$ és $\frac{18}{19}$ közé esik! (2 pont)
- A valós számok halmazán értelmezett $g(x) = x^2$ függvény grafikonját az *ábra* szerint eltoltuk úgy, hogy a minimumhelye az $A(4; -3)$ pontba került. Adja meg az így kapott $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



- Milyen hosszú ív tartozik a 12 cm sugarú kör 120° -os középponti szögéhez? (2 pont)
- Az e egyenes átmegy a derékszögű koordináta-rendszer $A(5; 7)$ és $B(9; 3)$ pontjain. Határozza meg az egyenes egyenletét! (3 pont)
- Hány olyan x természetes szám van, amelyre $3x - 119 < 0$? (3 pont)
- $2^{|x|} = 64$. Mi lehet x értéke? (2 pont)
- Mekkora szöget zárnak be a 7 cm és 10 cm oldalhosszúságú téglalap átlói? (2 pont)
- Egy 6 pontú egyszerű gráf csúcsainak fokszámai rendre 1, 2, 2, 3, 3, 5. Hány éle van a gráfnak? (3 pont)
- A valós számok halmazán értelmezzük az $f(x) = 3x - 1$ és $g(x) = -x + 2$ függvényeket. Mennyi $f(5) \cdot g(2)$? (2 pont)

10. Az ABC derékszögű háromszögben $ACB \sphericalangle = 90^\circ$, az átfogó hossza 26 cm, $AC = 10$ cm. Milyen hosszú a B csúcsból húzott magasság? (2 pont)
11. Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Tudjuk, hogy a kék golyók száma 16-tal kevesebb, és – véletlenszerűen húzva – piros golyót háromszor akkora valószínűséggel húzhatunk, mint kéket. Hány golyó van a dobozban? (3 pont)
12. a) Mennyi a 7, 11, 15, ... számtani sorozat 50. tagja? (2 pont)
b) Mennyi az első 50 tag összege? (2 pont)

II. RÉSZ (135 PERC)

A. RÉSZ (3 FELADAT)

(3 · 12 = 36 PONT)

13. Az alábbi táblázatban 1990 és 2002 közötti néhány évben a különböző típusú oktatási intézményeket elvégzett diákok számát tüntettük fel.

Végzettség (ezer fő)	1990	1999	2001	2002
8 évfolyam	172,9	119,1	119,3	118,8
gimnáziumi érettségi	27,3	36,3	38,0	40,2
szakközépiskolai érettségi	40,6	53,3	50,9	50,2
felsőfokú oklevél	24,1	42,3	47,4	50,5

- a) Hány tanuló szerzett középiskolai érettségit az egyes években? (2 pont)
b) Az összes végzettséget szerzett tanulóknak ez hány százaléka volt? (2 pont)
c) Határozza meg az alap- és felsőfokú végzettséget szerzett diákok százalékos arányát is! (2 pont)
d) A középiskolai érettségit kapó diákok körében mekkora a gimnáziumi, illetve szakközépiskolai érettségit szerettek százalékos aránya? (3 pont)
e) Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján? (3 pont)
14. Az ABC derékszögű háromszögben $ACB \sphericalangle = 90^\circ$, az átfogó hossza 20 cm, $AC = 12$ cm.
a) Milyen hosszú az A csúcsból húzott belső szögfelező? (6 pont)
b) Milyen hosszú a C csúcsból húzott belső szögfelező? (6 pont)
15. Adott az $f(x) = \frac{x^3 - 10x^2 + 21x}{4x}$ függvény, ahol $x \in]-1; 0[\cup]0; 9]$.
a) Határozza meg a függvénygörbe tengelymetszeit! (4 pont)
b) Ábrázolja a függvényt a derékszögű koordináta-rendszerben! (4 pont)
c) Határozza meg a függvény értékkészletét! (4 pont)

B. RÉSZ (A 3 FELADATBÓL 2-T KELL MEGOLDANI)

(2 · 17 = 34 PONT)

16. A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $k: x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ egyenletű kör.
a) Határozza meg a kör Q középpontját és sugarának a hosszát! (4 pont)
b) Határozza meg azokat az A és B pontokat, amelyekben a kör az x tengelyt metszi! (3 pont)
c) Mekkora a (kisebbik) QAB körcikk területe? (10 pont)

17. Az 1, 2, ..., 12 egész számok közül véletlenszerűen generáltunk 16-ot. Az adatok nagyság szerint rendezve a következők voltak:

1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, x, 6, 6, 6, y, 8, 9, 9, z.

Mi lehet a hiányzó három x, y, z érték az alábbi esetekben? Hány megoldás van?

a) Az adatsokaság mediánja 5,5.

(3 pont)

b) Az adatsokaság módusza 6.

(5 pont)

c) Az adatsokaság átlaga 5,625.

(7 pont)

(Ez három különböző feladat!)

d) Mi lehet a hiányzó három x, y, z érték, ha a fenti három feltételnek egyszerre kell teljesülnie?

(2 pont)

18. Egy élelmiszerüzletben a konzervdobozokat olyan háromszög alakba szeretnék pakolni az eladók, hogy a gúla legfelső sorában 1, az alatta lévő sorban 2, alatta 3 stb. doboz legyen, minden sorban a felette lévőnél eggyel több. A vezető tart attól, hogy az építmény nem lesz elég stabil, így azt kéri, hogy a legfelső sorban 5 doboz legyen (alatta persze minden sorban eggyel több). Sőt, a biztonság kedvéért két építményt építtet, amelyek kissé egymásnak dönthetők, s így nehezebben borulnak fel.

a) Hány dobozzal kell kezdeni az építést a legalsó sorban, ha összesen 200 darab van? (Nem probléma, ha a felső sorok esetleg nem lesznek teljesek.)

(7 pont)

b) Hány doboz hiányzik a felső sorokból, ha nem teljesek?

(4 pont)

c) Miután eladták a konzervek 40%-át, új építményt készítenek. Ennek legfelső sorában 1, alatta 3, az alatt 5 stb. doboz van (minden sorban 2-vel több, mint a felette levőben.) Ez az építmény hány sorból fog állni? (Csak egy réteget építenek.)

(6 pont)

2. FELADATSOR

I. RÉSZ: 12 FELADAT, 30 PONT (45 PERC)

1. Hány olyan n természetes szám van, amelyre $|n - 123| < 11$?

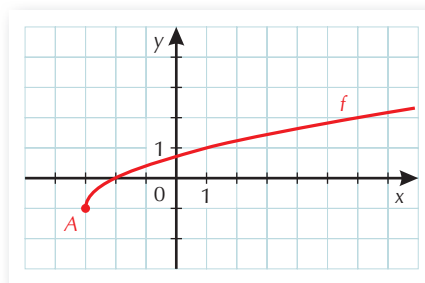
(2 pont)

2. Illesszen be a 8 és 18 közé egy számot úgy, hogy a három szám egy mértani sorozat egymást követő három tagja legyen!

(3 pont)

3. A nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját az ábra szerint eltoltuk úgy, hogy a minimumhelye az $A(-3; -1)$ pontba kerüljön. Adja meg az így kapott $g(x)$ függvény hozzárendelési szabályát!

(2 pont)



4. A derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-5; -1)$, $B(-1; 6)$ és $C(8; 2)$ pontok. Határozza meg a D pontot úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ teljesüljön!

(3 pont)

5. $\log_2 x = \log_3 x$. Mi lehet x értéke?

(2 pont)

6. Mekkora a derékszögű háromszög legkisebb szöge, ha befogóinak hossza 5 és 7 egység? (2 pont)
7. Igaz vagy hamis?
 a) A tompaszögű háromszög magasságvonalai a háromszögön kívül haladnak. (1 pont)
 b) Tompaszögű háromszög köré írt körének a középpontja a háromszögön kívülre esik. (1 pont)
 c) Van olyan háromszög, amelynek a magasságpontja a háromszög valamelyik oldalán van. (1 pont)
8. Határozza meg a 72 és a $4^2 \cdot 5$ számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! (3 pont)
9. Határozza meg az $a: y = x - 2$ és $b: y = 2x + 3$ egyenletű egyenesek metszéspontját! (3 pont)
10. Egy szabályos dobókockát háromszor feldobunk. Hányféleképpen kaphatunk három különböző páros számot?
 (A dobások sorrendjét is vegyük figyelembe!) (2 pont)
11. Az ABC egyenlő szárú háromszögben az AB alap 20 cm, a hozzá tartozó magasság 30 cm hosszú. Mekkora a B csúcshoz tartozó magasság? (3 pont)
12. A valós számok halmazán értelmezzük az $f(x) = -2x + 3$ és $g(x) = x - 4$ függvényeket. Oldja meg az $f(x) \cdot g(x) = 0$ egyenletet! (2 pont)

II. RÉSZ (135 PERC)

A. RÉSZ (3 FELADAT)

(3 · 12 = 36 PONT)

13. Egy 8 pontú egyszerű gráf öt csúcának ismerjük a fokszámát, ezeket felsoroltuk az alábbi táblázatban:

csúcsok	A	B	C	D	E	F	G	H
fokszámok	7	3	7	2	6			

Mik lehetnek az F , G és H csúcsok fokszámai? Hány éle lehet a gráfnak?
 Szemléltesse rajzzal a lehetséges eseteket!

(12 pont)

14. A község vezetősége fel akarja mérni az erdőszélen lévő, két út és a folyó által határolt, parlagon heverő terület nagyságát. Az $ABCD$ négyszög alakú, művelhető terület két oldala megközelítőleg $AB = 440$ méter és $BC = 620$ méter hosszú, az AB és BC oldalak bezárt szöge 110° -os. A másik két oldal hosszát nem lehetett megmérni, de a CD oldal A -ból kb. 70° -os, míg az AC szakasz D -ből közelítőleg 75° -os szögben látszik.

Hány hektár az $ABCD$ négyszög alakú terület nagysága?

(12 pont)

15. Az $\{a_n\}$ számtani sorozat 5. tagja 5, 13. tagja 11. A $\{b_n\}$ számtani sorozat 10. tagja 30, 20. tagja 35.

- a) Mely n értékekre lesz $a_n > 10^6$?
 b) Mely n értékekre lesz $S(a_n) > 10^6$?
 c) Mely n értékekre lesz $a_n > b_n$?
 d) Mely n értékekre lesz $S(a_n) > S(b_n)$?
 (S az első n tag összegét jelenti.)

(3 pont)

(3 pont)

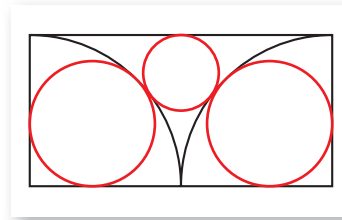
(3 pont)

(3 pont)

B. RÉSZ (A 3 FELADATBÓL 2-T KELL MEGOLDANI)

(2 · 17 = 34 PONT)

16. Egy középkori gótikus katedrális építőmesterei a 2 méter × 1 méteres téglalap alakú ablakkeretekbe két, negyedkör alakú ablakelemet terveztek úgy, hogy az 1 méter sugarú negyedkörök érintkeznek, középpontjaik a téglalap csúcaival esnek egybe. Az építető kérésére további három kör alakú díszítőelemet is be kellett építeniük minden ablakba úgy, hogy ezek érintkezzenek az eredeti ablakkerettel, valamint a negyedkörökkel is. (Az ábrán piros vonal jelöli a három díszítőelemet.)
Mekkora a díszítő körök sugara?



(17 pont)

17. Az egyetemi évfolyamon eddig 16 dolgozatot javított ki a tanár, az eredmények a következők lettek:

osztályzat	1	2	3	4	5
fő	3	3	2	5	3

- a) Mennyi az adatok módusza, mediánja és átlaga? (4 pont)
 b) Számítsa ki az adatok szórását! (3 pont)
 c) 10 újabb dolgozat kijavítása után az új átlag 3,5 lett. Mennyi volt a 10 dolgozat átlaga? (4 pont)
 d) Miután a tanár további dolgozatokat is kijavított, észrevette, hogy az átlag 4,1-nél nagyobb lett. Legalább hány dolgozatot kellett ehhez kijavítania? (6 pont)
18. a) Egy bridsverseny során András és Bea ellenfele Cili és Dezső. A licitálás, majd a játék kezdete után András megtudja, hogy a pikk aduszínből ellenfeleiknél összesen 4 darab van. Mi a valószínűbb: Cilinél és Dezsőnél is 2-2 pikk van, vagy valamelyiküknek 2-nél több? (A kártyacsomagban összesen 52 lap van, ebből 13 pikk; osztáskor Cili és Dezső is 8-8 lapot kapott.) (8 pont)
 b) Véletlenszerűen kihúzzunk az 52 lapos kártyacsomagból 3 lapot **visszatevéssel** (azaz a kihúzott lapot visszatesszük, és a kártyacsomagot megkeverjük). Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy a kihúzott lapok között van pikk, vagy annak, hogy nincs? (5 pont)
 c) Számítsuk ki az előző valószínűségeket, ha **visszatevés nélkül** húzzunk! (4 pont)

3. FELADATSOR

I. RÉSZ: 12 FELADAT, 30 PONT (45 PERC)

1. A 2, 3, 4, 4, 5 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával hány különböző ötjegyű számot képezhetünk? (2 pont)
2. Adott két halmaz: $A = \{\text{kétjegyű, pozitív, 4-gyel osztható számok}\}$; $B = \{10\text{-nél nagyobb, legfeljebb } 27\text{-tel egyenlő pozitív egészek}\}$.
Határozza meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat! (2 pont)
3. Mennyi $\sqrt{2} - 1$ reciproka? Adja meg a helyes válasz betűjelét!
 a) $1 - \sqrt{2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$; c) $\sqrt{2} + 1$; d) Egyik sem. (2 pont)
4. Kokoska O középpontjából Péter Ablonc (A) felé, Pál Béles (B) felé indul el egy-egy egyenes szakasz mentén. Mekkora szöget zár be egymással a két út, ha $\overrightarrow{OA} (8; 5)$ és $\overrightarrow{OB} (-1; 7)$? (3 pont)

5. A 12. C osztály matematikadolgozatának eredményei: jeles 4, jó 11, közepes 8, elégséges 5, elégtelen 2 dolgozat. Mennyi a dolgozatok osztályzatainak módusza, mediánja és átlaga? (3 pont)
6. Ábrázolja a $[-3; 5]$ intervallumon értelmezett $f(x) = |x| + 2$ függvény grafikonját! (2 pont)
7. Felsőbaboska 46 500 lakosának 36%-a kiskorú. A kiskorúak 55%-a lány. Hány kiskorú lány él Felsőbaboskán? (2 pont)
8. Egy derékszögű háromszög két befogója 23 cm és 31 cm hosszú. Mekkora a háromszög szögei egész értékre kerekítve? (3 pont)
9. Mely valós számokra lesz az $x(10 - x)$ szorzat pozitív? (2 pont)
10. Egy dobozban 8 fehér golyó van. Hány zöld golyót kell a dobozba tenni, hogy a golyók számának 60%-a zöld legyen? Írja le a megoldás menetét is! (3 pont)
11. Írja fel az $A(5; 2)$ ponton átmenő, $m = 0,8$ meredekségű egyenes egyenletét! (3 pont)
12. Mekkora az 1 cm sugarú körben a 120° -os középponti szöghöz tartozó kisebbik körszelet területe? Írja le a megoldás menetét is! (3 pont)

II. RÉSZ (135 PERC)

A. RÉSZ (3 FELADAT)

(3 · 12 = 36 PONT)

13. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!
 - a) $\sqrt{45 - x} = x - 3$; (5 pont)
 - b) $3^{1+x+2} = 2^2 + 3^3 + 6 \cdot 4^{-0,5} - 7$. (7 pont)
14. Melyik állítás igaz, és melyik hamis az alábbiak közül?
 - a) Létezik két prímszám, melyek összege 2021. (3 pont)
 - b) Van három olyan prímszám, melyek összege 102. (3 pont)
 - c) Ha három prímszám összege 284, akkor szorzatuk 35 421. (3 pont)
 - d) Ha egy prímszám osztója egy N négyzetszámnak, akkor osztója $\sqrt{N}$ -nek is. (3 pont)
15. Egy 33 fős társaság tagjai közül naponta 22 táncol, és 22 focizik. Mindenki mindennap legalább az egyik foglalkozáson részt vesz. Azok közül, akik ma fociznak, tegnap 15-en táncoltak, és 15-en fociztak, és ugyanez a helyzet azoknál is, akik ma táncolnak. Hányan vannak azok, akik mindkét napon csak táncolnak? (12 pont)

B. RÉSZ (A 3 FELADATBÓL 2-T KELL MEGOLDANI)

(2 · 17 = 34 PONT)

16. Kertünk húrtrapéz alakú, párhuzamos oldalai 24 méter és 18 méter hosszúak. Be szeretnénk keríteni.
 - a) Hány méter hosszú kerítést kell vásárolnunk, ha a kert területe 147 m^2 ? (6 pont)
Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adja meg!
 - b) Mennyivel több kerítésanyagot kell vásárolnunk, ha az átlója mentén ketté is akarjuk választani? (6 pont)
 - c) Igaz-e, hogy a trapéz alakú kert hegyesszöge 60° -nál nagyobb? (5 pont)
17. Egy autóalkatrészeket gyártó cég tengelyeket készít. A tengelyek 5%-a selejtes. A napi termelés 500 darab. A minőség-ellenőrzéshez kiválasztunk 20 darabot visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tengelyek között
 - a) nincs selejtes, (4 pont)
 - b) 6 darab selejtes lesz, (5 pont)
 - c) legfeljebb két selejtes lesz? (Az eredményeket tizedes tört alakban is adja meg!) (8 pont)

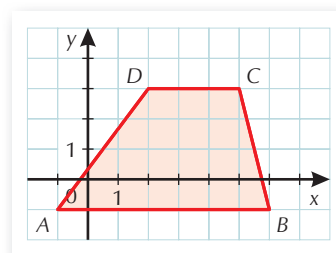
18. a) Egy vitorlázórepülő távrepülést hajt végre. A-ból kiindulva először B pontig halad egyenesen, majd innen C felé fordul, ahol $ABC \sphericalangle = 42^\circ$. C -ből A felé fordul, $BCA \sphericalangle = 68^\circ$. Az egész út hossza 150 km. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok? A válaszokat km-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)
- b) Melyik nagyobb: a 150 km kerületű szabályos háromszög területe vagy a 150 km kerületű, egyenlő szárú, derékszögű háromszög területe? (8 pont)

4. FELADATSOR

I. RÉSZ: 12 FELADAT, 30 PONT (45 PERC)

1. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{2xy}, \text{ ha } xy \neq 0.$$
 (2 pont)
2. Határozza meg a következő számsokaság mediánját és átlagát: 4; 5; 3; 3; 1; 2; 7; 9! (2 pont)
3. Egy 32 fős osztály a közelgő iskolnap rendezvényeinek megszervezésére ötagú bizottságot választ. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a bizottságban minden tag egyenrangú? (2 pont)
4. Hány területegység az $ABCD$ négyszög területe? (2 pont)



5. Ábrázolja a $[-1; 4]$ intervallumon értelmezett $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ függvényt a koordináta-rendszerben! (2 pont)
6. Oldja meg a valós számok halmazán a $4^{x+1} = 128$ egyenletet! (3 pont)
7. Határozza meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazát, melyen a $\sqrt{16-x^2}$ kifejezés értelmezve van! (3 pont)
8. Írja fel a $3x - 5y = 7$ egyenesre merőleges, az $A(4; 7)$ ponton átmenő egyenes egyenletét! (3 pont)
9. Feldobunk két dobókockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 3-mal osztható? Írja le a megoldás menetét is! (4 pont)
10. Egy mértani sorozat 5. tagja 3, 7. tagja 18. Mennyi a sorozat 9. tagja? (2 pont)
11. 13 lónak és néhány libának összesen 74 lába van. Hány fejük van összesen? (3 pont)
12. Egy zsákban 3 pár piros, 2 pár kék és 4 pár fehér zokni van párosítatlanul. Hány darab zoknit kell kivennünk csukott szemmel, hogy biztosan legyen közöttük egy pár fehér zoknink? (2 pont)

II. RÉSZ (135 PERC)

A. RÉSZ (3 FELADAT)

(3 · 12 = 36 PONT)

13. Az 1, 2, 4, 5, 9 számjegyekből ötjegyű számokat állítunk elő, minden számjegyet egyszer felhasználva.
- a) Hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)
 - b) Ezek közül hány osztható 12-vel? (3 pont)
 - c) Mi a valószínűsége annak, hogy egy ötjegyű számot véletlenszerűen kiválasztva nem osztható 12-vel? (3 pont)
 - d) Igazolja, hogy az adott számok egyike sem négyzetszám! (4 pont)
14. Egy földbe ásott tartály henger alakú, alján félgömb végződéssel (a tartály helyzete függőleges). A henger átmérője 12 m, a hengeres rész magassága 8 m. Milyen magasan áll a víz a tartályban az aljától számítva, ha térfogatának kétharmadáig töltik meg? (12 pont)
15. Egy 60 lakásos társasházban 50 m²-es lakás 22 darab, 66 m²-es 11 darab, 70 m²-es 17 darab, 75 m²-es 10 darab van. Számolja ki
- a) a különböző alapterületű lakások relatív gyakoriságát; (3 pont)
 - b) a lakások átlagos alapterületét! (3 pont)
 - c) Mennyi a lakások alapterületének módusza és mediánja? (2 pont)
 - d) Ábrázolja sodrófadiagramon a lakások eloszlását! (4 pont)

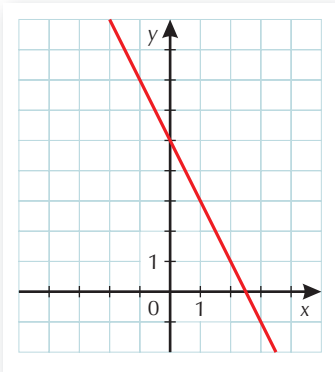
B. RÉSZ (A 3 FELADATBÓL 2-T KELL MEGOLDANI)

(2 · 17 = 34 PONT)

16. a) Egy 80 cm széles vaslemezről felül nyitott téglalap keresztmetszetű vízelvezető árkot készítenek. Mekkora legyenek a téglalap oldalai, hogy a lehető legtöbb vizet vezesse el az árok? (7 pont)
- b) Egy másik, 12 méter hosszú árok keresztmetszetét az $f(x) = |x - 3|$, $0 \leq x \leq 5$ függvény grafikonja adja meg (az egység méter). A $C(3; 0)$ pont az árok alján, az $A(0; 3)$ és $B(5; 2)$ pont az árok felső szélén van. Az árkot földdel temetik be lejtősen úgy, hogy az AB szakasz (lejtő) lesz a belehordott föld tetejének a szintje. Hány m³ földre van szükség ehhez? (10 pont)
17. Egy háromszög három csúcsának koordinátái $A(6; 5)$, $B(4; -7)$, $C(-4; -1)$.
- a) Határozza meg a háromszög súlypontját! (2 pont)
 - b) Írja fel az a oldalhoz tartozó magasságvonal egyenletét! (5 pont)
 - c) Határozza meg a c oldallal párhuzamos középvonal hosszát! (5 pont)
 - d) Határozza meg a háromszög területét két tizedesjegyre kerekítve! (5 pont)
18. Egy fiatalember 2022 decemberében töltötte be 22. évét, ezért elhatározta, hogy 2023. január elsejétől 2063. december 31-ig, várható nyugdíjaztatásának időpontjáig takarékoskodik. Az egyik bank azt javasolta, hogy tegyen be minden év elején 180 000 forintot, és évi 6%-os kamatot kínált.
- a) Mekkora összeget vehet fel 40 év múlva? (6 pont)
- Egy másik bank azt javasolta, hogy minden hónap elején tegyen be 15 000 Ft-ot, és havi $\frac{6}{12}$ % kamatot kínált. (Ez is tehát évi 6%-nak felelne meg, de nem évente, hanem havonta írják hozzá a kamatot a tőkéhez.)
- b) Milyen összeghez juthat ennél a banknál 40 év múlva? (8 pont)
 - c) Melyik ajánlat a kedvezőbb? (3 pont)

5. FELADATSOR

I. RÉSZ: 12 FELADAT, 30 PONT (45 PERC)

1. A boltban 2400 Ft-ért 12 kg kenyeret tudunk venni. Hány kilogramm kenyeret tudunk vásárolni ugyanennyi pénzért, ha a kenyér árát felemelik 20%-kal? (2 pont)
 2. Határozza meg a valós számok legbővebb részhalmazát, melyen a $\sqrt{\frac{1}{5-x}}$ kifejezés értelmezhető! (2 pont)
 3. Egy urnába helyezünk el 6 darab golyót, 1-től 6-ig számozva. Húzzunk ki két golyót egymás után visszatevés nélkül, és a rajta lévő számokat írjuk le a húzás sorrendjében! Mennyi annak a valószínűsége, hogy ilyen módon 8-cal osztható kétjegyű számot kaphatunk? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)
 4. Adott a koordináta-rendszerben az $A(4; -5)$ és a $B(8; -2)$ pont. Határozza meg az AB átmérőjű kör sugarát és középpontját! (2 pont)
 5. Adja meg az ábrán látható lineáris függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)
- 
6. Kisországnak összesen 7 települése van. A fővárost minden településsel összeköti egy út, a fővároson kívül pedig minden településről két másikba lehet közvetlenül eljutni közúton. Rajzoljon le egy olyan gráfot, amely Kisország úthálózatát szemlélteti! (2 pont)
 7. Mely állítások igazak, melyek hamisak az alábbiak közül?
 - a) Páratlan számú páratlan szám összege páratlan. (1 pont)
 - b) Két prímszám összege nem lehet prím. (1 pont)
 - c) Három egymást követő páros szám összege mindig osztható 6-tal. (2 pont)
 - d) Két négyzetszám összege nem lehet négyzetszám. (2 pont)
 8. Mekkora szöget zár be az egységnyi oldalélű kocka egy csúcsából kiinduló két lapátlója? (2 pont)
 9. Egy raktár árukészlete 672 kg-mal csökkent, ez a készlet 12%-a. Hány kg áru volt eredetileg a raktárban? (2 pont)
 10. $A = \{4\text{-gyel osztható kétjegyű pozitív egész számok}\}$
 $B = \{10 \text{ és } 40 \text{ közé eső } 6\text{-tal osztható pozitív egészek}\}$
 Határozza meg az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (2 pont)
 11. A 11 cm sugarú körben mekkora középponti szög tartozik a 4 cm hosszú húrhoz? (2 pont)
 12. Egy családban az apa 540 ezer Ft-os fizetését 10%-kal emelték, az anya pedig részmunkaidőt vállalt, ezért teljes állású 520 ezer Ft-os keresetét 40%-kal csökkentik. Hogyan változott a két szülő összjövedelme? (3 pont)

II. RÉSZ (135 PERC)

A. RÉSZ (3 FELADAT)

(3 · 12 = 36 PONT)

13. Tekintse az $f(x) = \sqrt{x+2}$ és $g(x) = -x + 4$ függvényeket a $[-2; 7]$ intervallumon.
 a) Ábrázolja a megadott függvényeket! Adja meg a transzformációs lépéseket! (5 pont)
 b) Oldja meg grafikus úton az $f(x) \leq g(x)$ egyenlőtlenséget! (4 pont)
 c) Oldja meg a $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{2}$ egyenlőtlenséget! (3 pont)
14. Egy szekrény tervezéséért 25 000 Ft-ot kell kifizetnünk. Az anyagköltség 30 000 Ft, a munkadíj 20 000 Ft az első 50 darab szekrénynél, utána már csak 18 000 Ft, a szállítás pedig 4000 Ft darabonként. Egy szekrényt 55 000 Ft-ért lehet eladni. Hány darab szekrény esetén lesz gazdaságos a gyártás? Mikor éri el a hasznunk a 100 000 Ft-ot? (12 pont)
15. Egy derékszögű háromszög átfogója 15 cm, a hozzá tartozó magassága pedig 6 cm hosszú.
 a) Mekkora a befogói? (6 pont)
 b) A magasság két részre osztja a háromszöget. Milyen távol van egymástól a két kis háromszög köré írható körének a középpontja? (6 pont)

B. RÉSZ (A 3 FELADATBÓL 2-T KELL MEGOLDANI)

(2 · 17 = 34 PONT)

16. a) A horgászversenyen összesen 113 halat fogtak. Az első csapat tagjai átlagban 13 halat, a második csapat tagjai 5, a harmadiké pedig 4 halat fogtak. Összesen 16-an vettek részt a versenyen. Hányan voltak az egyes csapatokban? (10 pont)
 b) A táblázatban az 1 kg és 4 kg közötti tömegű kifogott halak száma látható.

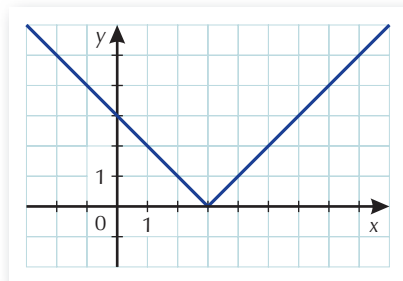
súly (kg)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
darab	23	26	9	10	8	2	2

- Számítsa ki az adatok szórását! (3 pont)
 c) Ábrázolja az adatokat sodrófadiagramon! (4 pont)
17. a) Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, az alaphoz tartozó magassága 30 cm hosszú. A háromszögbe beírtuk a $DEFG$ téglalapot úgy, hogy D és E az AB alapra, F és G pedig a háromszög száraitra került, és a DE oldal éppen fele a DG oldalnak. Mekkora a téglalap oldalai? (10 pont)
 b) Véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot a háromszög belsejéből vagy határáról. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a pont a téglalapnak is pontja? (7 pont)
18. Egy ház tetejének cserepezéséhez vásárolunk tetőcserepet. A tető négyzetes gúla alakú, melynek alapélei 10 métereseek. A tető oldallapjának és alaplapjának hajlásszöge 25° -os.
 a) Hány m^2 területű a tető? (5 pont)
 b) A cserepek 40 cm és 55 cm oldalélű téglalapok. A cserepeket úgy kell felhelyezni, hogy 15%-ban átfedjék egymást (azaz egy cserép 15%-a más cserepek alatt helyezkedik el). Hány darab cserépre van szükség a tetőfedéshez? (12 pont)

6. FELADATSOR

I. RÉSZ: 12 FELADAT, 30 PONT (45 PERC)

- Legalább hányan vettek részt egy kiránduláson, ha biztosan van a személyek között 5 olyan, akik azonos hónapban születtek? (2 pont)
- Hányszorosára nő egy kör területe, ha sugarát 3-szorosára növeljük? (2 pont)
- Adja meg 2024 prímtenyezős felbontását, valamint (pozitív) osztóinak a számát! (3 pont)
- Adja meg az ábrán látható, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



- Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amire értelmezhető a $\sqrt{8-x^2}$ kifejezés! (3 pont)
- Mennyi a $2x^2 - 6x + 3 = 0$ egyenlet gyökeinek a szorzata? (2 pont)
- Hány éle van egy 15 csúcsú teljes gráfnak? (2 pont)
- Egy húrtrapéz két alapja 18 cm és 12 cm, magassága 4 cm hosszú. Mekkora a trapéz 18 cm-es alapon fekvő szögei? (3 pont)
- Adja meg az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét, ha $A(5; 3)$ és $B(1; -1)$! (3 pont)
- Illesszen be az 5 és a 8 közé három számot úgy, hogy azok az adott számokkal együtt egy számtani sorozat egymást követő tagjai legyenek! (2 pont)
- Fanni, Tomi, Dani és Marci együtt mennek egy mérkőzésre. Hányféleképpen ülhetnek egymás mellé, ha Dani és Marci egymás mellett szeretne ülni? (3 pont)
- Adja meg a következő számsorozat átlagát, móduszát és mediánját:
1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7! (3 pont)

II. RÉSZ (135 PERC)

A. RÉSZ (3 FELADAT)

(3 · 12 = 36 PONT)

- A 180 méter magas megfigyelőtoronyban lévő űr gyanús csónakot vesz észre a tengeren, 29° -os depressziószög alatt. Kis idő elteltével 200 m-rel közelebb van a csónak a torony lábához. Mekkora most a depressziószög? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (12 pont)

14. A 2-es és a 3-as számjegyek felhasználásával írjunk fel találmra egy tízjegyű számot! (A csupa azonos számjegyeket tartalmazó számok is megengedettek.)

Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) 3-mal osztható számot kapunk;

(6 pont)

b) 9-cel osztható számot kapunk?

(6 pont)

15. Az $\{a_n\}$ mértani sorozat harmadik tagja 9, hányadosa 1,5. A $\{b_n\}$ mértani sorozat első tagja 2000, de a hányadosa csak 1,3.

a) Mely n értékekre lesz $a_n > 10^6$?

(4 pont)

b) Mely n értékekre lesz $S(a_n) > 10^6$?

(4 pont)

c) Mely n értékekre lesz $a_n > b_n$?

(4 pont)

(S az első n tag összegét jelenti.)

B. RÉSZ (A 3 FELADATBÓL 2-T KELL MEGOLDANI)

(2 · 17 = 34 PONT)

16. a) Egy fából készült ajándéktárgy alakja derékszögű háromszög alapú gúla. Az alap derékszögű háromszögének befogói 6 cm és 8 cm hosszúak, és a gúla mindhárom oldaléle 13 cm hosszú.

Mekkora a tárgy tömege, ha a fa sűrűsége 700 kg/m^3 ?

(11 pont)

b) Egy tetraéder egy csúcsból kiinduló három élének hossza 6 cm, 8 cm és 13 cm. Legfeljebb mennyi lehet a tetraéder térfogata?

(6 pont)

17. Adott az $\mathbf{a}(7; -2)$ és a $\mathbf{b}(-1; 14)$ vektor.

a) Adja meg a két helyvektor végpontját összekötő egyenes egyenletét! Igazolja, hogy a két helyvektor végpontját összekötő szakaszon rajta van a $C(4; 4)$ pont!

(6 pont)

b) Milyen arányban osztja a C pont a helyvektorok végpontját összekötő szakaszt?

(6 pont)

c) Mekkora az $OAB_{\triangle}$ területe, ha A és B az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ helyvektorok végpontjai, O pedig az origó?

(5 pont)

18. Hány olyan háromjegyű szám van, ami nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel?

(17 pont)

FORRÁSJEGYZÉK

8. és 43. oldal: J. K. Rowling: *Harry Potter és a Bölcsek Köve*, Budapest, Animus Kiadó, 2019., Fordította: Tóth Tamás Boldizsár
15. és 24. oldal: Mikszáth Kálmán: *Különös házasság*, Budapest, Osiris Kiadó, 2008.
16. oldal: Karl May: *Winnetou*, Budapest, Móra Kiadó, 1980.
77. oldal: Esterházy Péter: *Ha fülelünk*, Digitális Irodalmi Akadémia (<https://konyvtar.dia.hu/html/muvek/ESTERHAZY/esterhazy00087/esterhazy00144/esterhazy00144.html>, Letöltés ideje: 2022. 10. 07.)
106. oldal: Jack London: *A Lady*, Budapest, Fiesta Saxum Kiadó, 1996.
118. oldal: Daniel Defoe: *Robinson Crusoe*, Budapest, Akkord Kiadó, 2003.
124. oldal: Gárdonyi Géza: *A láthatatlan ember*, Budapest, Móra Könyvkiadó, 2019.
134. oldal: Herbert George Wells: *Az őslények szigetén*, In: a Bűvös bolt és más elbeszélések, Magyar Elektronikus Könyvtár (<https://mek.oszk.hu/00500/00532/html/>, Letöltés ideje: 2022. 10. 07.), Fordította: Görgey Gábor
154. oldal: Jules Verne: *Kétévi vakáció*, Budapest, Holnap Kiadó, 2020.
166. oldal: Móra Ferenc: *Tetrakontaoktaéderek*, Ponticulus Hungaricus IV. évfolyam, 9. szám, 2020. szeptember (<https://www.ponticulus.hu/rovatok/humor/tetrakontra.html>, Letöltés ideje: 2022. 10. 07.)
169. oldal: M. C. Escher: *Grafikák és rajzok, IX. Konfliktus a sík és a tér között*, Budapest, Kulturtrade Kft., 1992.

KÉPJEGYZÉK

Szakábra: Szalóki Dezső

Illusztráció: Urmai László

Fotók:

Borító: ©Shutterstock Képgyűjtemény

9. oldal: Alcuin angol matematikus szobra (Kunsthistorisches Museum, Bécs), Fotó: © Hubertl / Wikimedia Commons / CC BY-SA 4.0

11. oldal: Microsoft Windows aknakereső képernyőképe (OH és jogelődjei)

39. oldal: Merian-Erben: Königsbergi hidak térképe, 1652 (retusált változat), Public domain

39. oldal: Heinrich Pfenninger: Leonhard Euler portréja, Rijksmuseum, Amszterdam, Public domain

134. oldal: Ismeretlen alkotó: Herbert George Wells portréja © CULTiRiS / INTERFOTO / Sammlung Rauch

145. oldal: Ismeretlen alkotó: Eukleidész portréja © CULTiRiS / ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY / SCIENCE PHOTO LIBRARY

146. oldal felső: Kepler Naprendszer-modellje (1596) © CULTiRiS / AKG-Images

146. oldal jobb: Johannes Kepler portréja © CULTiRiS / INTERFOTO / Sammlung Rauch

153. oldal: A fertőbozi Gloriette-kilátó, részlet, fotó: Pellinger Attila

169. oldal: Rigó Tibor fotója: Victor Vasarely (1906–1997) kültéri alkotása Pécsen (2010) ©CULTiRiS / Rigó Tibor

171. oldal: Carl Gottlieb Rasp: Segner János András metszete, Smithsonian Libraries, Public domain

171. oldal: A Bolyai testvérek szobra Marosvásárhelyen, © MTI Fotó: Földi Imre

171. oldal: Ismeretlen alkotó: Beke Manó portréja, Vasárnapi Ujság, Országos Széchényi Könyvtár, OSZK Törzsgyűjtemény

172. oldal: Ismeretlen fotós: Neumann János portréja © (MTI/INT)

172. oldal: Rényi Alfréd portréja © MTI Fotó: Járαι Rudolf

172. oldal: Juan Gyenes: Kármán Tódor arcképe. Kaposvár Megyei Jogú Város Önkormányzatának tulajdona

223. oldal: Munkácsy Mihály: Honfoglalás (1893), Országgyűlés Hivatala, Fotó: Bencze-Kovács György

281. oldal: Ismeretlen alkotó: Peter Gustav Lejeune Dirichlet portréja (1859), Public domain

301. oldal: Joop van Bilsen / Anefo: Le Corbusier fényképe, (1964), Nationaal Archief, Hága, CC0

312. oldal: Nikolayev Yaroslav Sergeyevich: Pafnuty Tchebyshev portréja (1954, State Central Artillery Museum, Szentpétervár, Oroszország) © CULTiRiS / Bridgeman Art Library, Hungart © 2023

332. oldal: Dartstábla grafikája, Wikipédia/Mordie/CC BY-SA 3.0

334. oldal: A nagytétényi ásatásokon talált római eredetű csont játékkocka

334. oldal: A szádvári ásatásokon talált középkori eredetű csont játékkocka

335. oldal: Ismeretlen fotós: Godfrey Harold Hardy portréja (1877-1947), 1927 körül, Public domain

A könyvben található további képek: ©Shutterstock Képgyűjtemény.

©Shutterstock szerkesztői képek:

1., 151. oldal: Sergii Figurnyi, 3., 78. oldal katedrális: Eduardo Frederiksen, 14. oldal: Yevhen Prozhyrko,

16. oldal: Ralf Liebholt, 25. oldal: Millionstock (felső), D. Ribeiro (alsó), 43. oldal: Ingrid Pakats,

79. oldal: Michaela Jilkova, 136. oldal: Mikalai Drazdou, 147. oldal: Ingus Krukliis, 160. oldal: Tupungato,

168. oldal felső: Siegmund Angyal, 168. oldal jobb: eric laudonien, 185. oldal: muzsy,

204. oldal: Vladimir Goncharenko, 235. oldal: View Apart, 329. oldal: siamionau pavel.

iStock: 40., 124., 127., 146., 242. oldal.

Thinkstock: 52., 68., 224. felső, 305. oldal.